mathe 73

LVZ

LEIPZIGER VOLKSZEITUNG

Organ der Bezirksleitung Leipzig der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands

SONDERAUSGABE
DEZEMBER 1973
PREIS 0,40 M

Mathematik Olympiade

In dieser Ausgabe:
172 Aufgaben mit ausführlicher Lösung - umfassende Olympiade-Informationen

Liebe Mädchen und Jungen!

Mit der jetzigen, der 12. Ausgabe der „Mathe-LVZ“ wenden wir uns einer besonderen Form der Förderung der Mathematikexperten zu: den Mathematikolympiaden.

Aber gleich den sportlichen Olympiaden kann die Spitze der Könner nur aus einem breiten Reservoir guter Mathematiker hervorgehen. Deshalb gilt es, all unseren Schülern mit den vielfältigsten Formen und Mitteln ein gutes mathematisches Grundwissen zu vermitteln, ihren Denkprozeß zu schulen.

Die „Leipziger Volkszeitung trägt seit nunmehr über 10 Jahren durch ihre „Mathe-LVZ“ dazu bei, Interesse für das Schwerpunktfach zu wecken, Bedürfnisse zu wecken sowie Begabungen und Talente zu fördern. Viel Kleinarbeit hat die vorliegende „Mathe-LVZ“, die zwölfte in ununterbrochener Reihenfolge, gekostet, aber auch zahlreiche schöne Erinnerungen an eine langfristige kontinuierliche außerunterrichtliche Arbeit geweckt. Damit ist die Gesamtauflage aller Hefte auf über eine Million gestiegen. Hervorragenden Anteil hat der Verdiente Lehrer des Volkes Johannes Lehmann an dem Inhalt und der gesamten Gestaltung aller bisher erschienenen Ausgaben; er suchte ständig nach neuen Wegen, sie unseren Schülern interessant und liebenswert zu machen.

Johannes Lehmann war auch dabei, als im Juni 1960 in der Messestadt Leipzig die 1. Mathe-Olympiade stattfand. Seitdem ist diese Form des mathematischen Wettstreites eine schöne Tradition geworden. Und sie hat wesentlich dazu beigetragen, daß die DDR auch bei den internationalen Mathematik-Olympiaden immer besser vorangekommen ist.

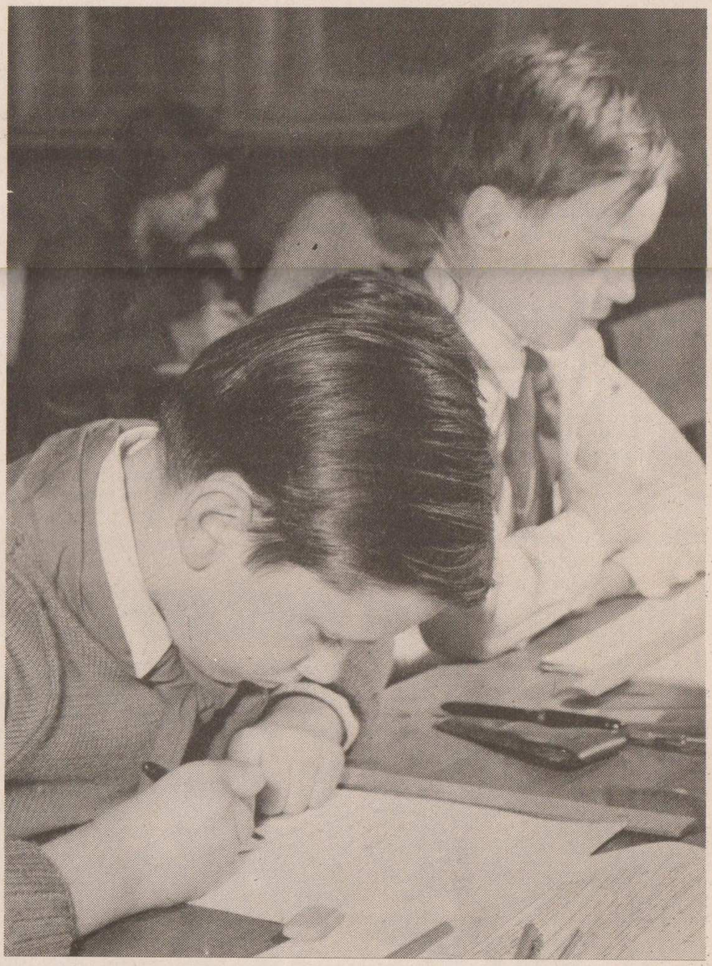
Die im neuen farbenfreudigen Gewand vorliegende 12. „Mathe-LVZ“ bietet Olympiade-Aufgaben und deren ausführliche Lösungen. Sie sind so ausgewählt, daß sie auch für den Unterricht jeder Klassenstufe einsetzbar sind und das Interesse am Knobeln über mathematische Probleme wecken.

Die neue „Mathe-LVZ“ stellt ehemalige Olympia-Teilnehmer vor und berichtet von ihrer Entwicklung sie enthält Statistiken über von der DDR errungene Medaillen und Plätze bei den internationalen Olympiaden und läßt hinter die Kulissen eines solchen Wettbewerbes mit seinen vielfachen Auswertungs-, Korrektur- und Überwachungsarbeiten blicken. Und nicht zuletzt gibt sie mit ihrem Preisausschreiben die Möglichkeit, mathematische Probleme zu lösen.

Mit dieser Ausgabe wollen wir unseren Gästen, die im Juli 1974 zur XVI. Internationalen Mathematikolympiade in unsere Republik nach Erfurt kommen, zeigen, daß die 1960 begonnene außerunterrichtliche Arbeit in unserer Republik gut vorangekommen ist und wir ein ernstes Wort bei der Vergabe der Medaillen und Titel mitsprechen wollen.

Unsere „Mathe-LVZ“ überreichen wir ihnen als Ausdruck unserer Liebe zur Mathematik. Allen Schülern unserer Republik geben wir sie anläßlich des 25. Jahrestages der Pionierorganisation „Ernst Thälmann“ in die Hand mit den besten Wünschen für weitere gute Erfolge auf mathematischem Gebiet!

Redaktion und Verlag der
LEIPZIGER VOLKSZEITUNG



Schüler der Klassenstufe 6 bei der Arbeit

Der XVI. Internationalen Mathematikolypiade entgegen

Im Juli 1974 ist die Deutsche Demokratische Republik Gastgeber der XVI. Internationalen Mathematikolympiade. Die LEIPZIGERER VOLKSZEITUNG grüßt alle Teilnehmer, überreicht ihnen diese Zeitung als Geschenk und wünscht viel Erfolg!

Preisausschreiben·mit Preisausschreiben·

KLASSE 1

1 Vor dem Zirkuszelt stehen Schüler einer ersten Klasse. Die Kinder haben sich zu zweien aufgestellt. Die Lehrerin gibt immer 2 Eintrittskarten aus. An die Mädchen verteilt sie viermal 2 Karten und an die Jungen fünfmal 2 Karten. Fragen:
a) Wieviel Mädchen wollen in den Zirkus?
b) Wieviel Jungen stehen vor dem Zirkus?
c) Wieviel Kinder erhalten von der Lehrerin eine Eintrittskarte?

2 Ich denke mir eine Zahl a und addiere 12. Das Ergebnis ist um 1 kleiner als 16. Frage:
Welche Zahl mußt du für a einsetzen?

3 Im Tafelkasten liegt weiße und blaue Kreide. Zusammen sind es 6 Stück. Es sind doppelt soviel Stück weiße Kreide wie blaue Kreide. Nimm 6 Stäbchen und probiere, wieviel Stück von jeder Sorte im Kasten liegen!

4 Suche immer zwei Zahlen, deren Summe gleich 11 ist! Schreibe die Zahlen in die leeren Kästchen!
Schreibe jede Zahl nur einmal!

$\square + \square = 11$

$\square + \square = 11$

$\square + \square = 11$

$\square + \square = 11$

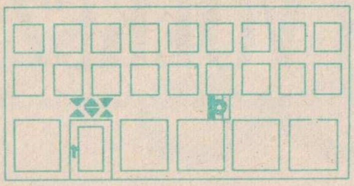
5 Der Schulgarten erhält einen neuen Drahtzaun. Von einem Pfahl zum anderen ist immer 1 Meter Abstand. 8 Meter Zaun sind bereits fertiggestellt.
Wieviel Pfähle wurden bisher gebraucht?

6 Wer kann es?
Von den folgenden 5 Zahlen sollen 2 Zahlen gestrichen werden. Die Summe der restlichen Zahlen soll 10 ergeben.
Die Zahlen heißen: 1, 2, 2, 5, 7.
Probiere und rechne!

7 Addiere a zur Zahl 7! Die Summe soll kleiner als 10 sein. Wie groß kann a sein?

8 Zwei Vögel sitzen auf einer Stange 8 m voneinander entfernt. Jetzt hüpft der eine Vogel 1 Meter auf den anderen zu. Der andere Vogel hüpft dann 2 Meter auf den ersten zu. Wie weit sind die beiden Vögel jetzt voneinander getrennt?

9 Nenne mindestens drei geometrische Figuren, die du kennst!



10 Zum Streichen des Gartenzaunes kaufte Vater 2 Dosen mit weißer Farbe. Er kaufte 2 Dosen mit grüner Farbe mehr als Dosen mit weißer Farbe.
Wieviel Dosen Farbe kaufte Vater zusammen?

11 Die Pioniere der 1. Klasse treiben Sport. Es kommen 15 Mädchen und 9 Jungen.
Wieviel Mädchen mehr als Jungen kamen zum Sport?

12 Junge Pioniere möchten einer Patenbrigade eine Freude bereiten. 8 Pioniere fertigen ein Album an, und 9 Pioniere bekleben es mit schönen Bildern.
Wieviel Pioniere sind an dem Geschenk beteiligt?

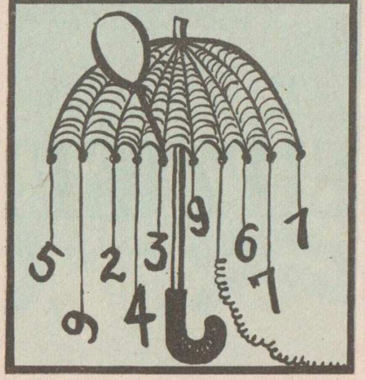
13 Zeichne ein Quadrat, ein Dreieck und einen Kreis! Schneide diese aus und klebe sie aufeinander, so daß ungefähr die abgebildete Figur entsteht!

14 Vierzehn Pioniere waren im Puppentheater und fuhren mit dem Bus nach Hause. Zuerst stiegen 5 Pioniere aus und dann noch 4. Wieviel Pioniere waren noch im Bus?

15 Peter und Uwe bauen gemeinsam ein Haus. Peter hat noch 9 Steine. Uwe hat noch 7 Bausteine.
Mit wieviel Bausteinen können Peter und Uwe weiterbauen?

16 Von x subtrahiere 7! Das Ergebnis ist 8. Schreibe die Gleichung!
Wie heißt die Zahl x?

KLASSE 2



1 „Wieviel Geld hast du gespart?“ fragt Brigitte ihren Bruder. Er antwortet: „In meinem Sparbuch sind drei 10-Pfennig-marken und eine Marke zu 50 Pfennig.“
Wieviel Geld hat Brigittes Bruder gespart, und wieviel Pfennige fehlten ihm noch an einer Mark?

2 Zeichne eine Strecke von 4 cm Länge, darunter eine zweite, die 3 cm länger ist. Und zeichne noch eine dritte Strecke hinzu, die 5mal so lang ist wie die erste.
Wie lang sind die zweite und die dritte Strecke?

3 Eine LPG holt Saatkartoffeln ab. Auf dem ersten Wagen stehen bereits 35 volle Säcke. Auf der Rampe sind noch neun volle Säcke bereitgestellt. Es sollen zwei Wagen mit je 40 Säcken Saatkartoffeln beladen werden.
Wieviel Säcke müssen noch gefüllt werden?

4 Ursel räumt ihren Schreibtisch auf. Sie findet dabei Hefte vom vergangenen Schuljahr. Auf einer Seite sind nicht mehr alle Ziffern und Rechenzeichen deutlich erkennbar. Sie versucht herauszubekommen, wie die Aufgaben damals hießen.

2 ✱ + ✱ 0 = 5 4

7 · ✱ = 1 4

5 Multipliziere eine Zahl a mit 6! Subtrahierst du vom Ergebnis 4, so erhälst du 20.
Welche Zahl mußt du für a einsetzen?

6 Trage die Zahlen von 1 bis 7 so in die leeren Felder ein, daß die Summe der Zahlen auf jeder Geraden 15 ergibt!

7 Bestimme alle Zahlen x, für die gilt:

$\boxed{25 < x \cdot 8 < 42}$

8 Subtrahiere von 17 dreimal dieselbe Zahl, so daß du 8 erhälst! Wie heißt diese Zahl?

9 Pioniere einer 2. Klasse bringen Kaninchen und Hühner zur Ausstellung. Im Käfig sind fünf Köpfe und vierzehn Beine zu sehen.
Wieviel Kaninchen und wieviel Hühner sind es?

10 Ein Haus hat drei Stockwerke. Von einem Stockwerk zum anderen führen stets zwei Treppenabschnitte mit je acht Stufen. Wieviel Stufen muß man vom Erdgeschoß bis zum dritten Stockwerk steigen?

11 Verwende die Zahlen 8, 2 und 4 zweimal in der angegebenen Reihenfolge, so daß zwei verschiedene Gleichungen entstehen! (Mußt du addieren, subtrahieren, multiplizieren oder dividieren?)
Wie heißen die Gleichungen?

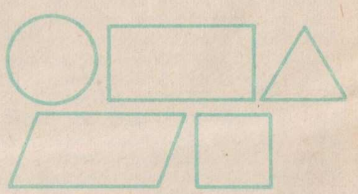
12 Zeichne mit Bleistift, Zirkel und Lineal
a) ein Verkehrszeichen von quadratischer Form,
b) zwei Verkehrszeichen von dreieckiger Form,
c) zwei kreisförmige Verkehrszeichen!

13 Die Schüler einer 2. Klasse nähen sich ihre Werkschürzen selbst. Für zehn Schüler kaufte die Lehrerin 6 Meter Stoff. In der Klasse sind aber 30 Schüler.
a) Wieviel Meter Stoff werden für alle 30 Schüler gebraucht?
b) Wieviel Meter Stoff muß die Lehrerin noch kaufen?

14 Das Produkt zweier Zahlen wurde um 2 vergrößert, und man erhielt 17. Beide Zahlen sind kleiner als 10.
Wie heißen die beiden Zahlen?

15 Das neue Wohnhaus am Stadtrand hat ein Erdgeschoß und weitere 5 Stockwerke. In jedem Stockwerk gibt es 8 Wohnräume. Außerdem gibt es im Haus einen Klubraum, 6 Kellerräume und eine Waschküche.
Wieviel Räume hat das Wohnhaus?

16 a) Schreibe die Namen der abgebildeten Figuren auf!



b) Bei welchen Figuren verlaufen die gegenüberliegenden Seiten parallel zueinander?

Statistik --- Statistik

Bilanz unserer Erfolge bei den Internationalen Mathematik-Olympiaden

(von Schülern der DDR errungene Medaillen)

JAHR	GASTGEBERLAND	IMO	1. PREIS	2. PREIS	3. PREIS
1959	SR RUMÄNIEN	I	—	—	—
1960	SR RUMÄNIEN	II	—	—	—
1961	UNGARISCHE VR	III	—	—	1
1962	CSSR	IV	—	1	—
1963	VR POLEN	V	—	—	3
1964	UdSSR	VI	—	1	2
1965	DDR	VII	—	2	3
1966	VR BULGARIEN	VIII	3	3	—
1967	SFR JUGOSLAWIEN	IX	3	3	1
1968	UdSSR	X	5	3	—
1969	SR RUMÄNIEN	XI	—	4	4
1970	UNGARISCHE VR	XII	1	2	4
1971	CSSR	XIII	1	1	4
1972	VR POLEN	XIV	1	3	4
1973	UdSSR	XV	—	3	4
1974	DDR	XVI			

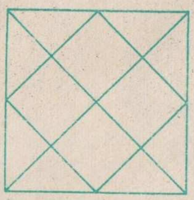
Preisträger der XV. IMO

	Punkte	1. Preis	2. Preis	3. Preis
Sowjetunion	254	3	2	3
Ungarische VR	215	1	2	5
DDR	188	—	3	4
VR Polen	174	—	2	4
Großbritannien	164	1	—	5
Frankreich	153	—	3	1
CSSR	149	—	1	4
Österreich	144	—	—	6
SFR Jugoslawien	137	—	—	5
SR Rumänien	131	—	1	3
Schweden	99	—	1	1
Niederlande	96	—	—	2
VR Bulgarien	96	—	—	1
Finnland	86	—	—	2
Mongolische VR	64	—	—	1
Cuba	42	—	—	1
	2192	5	15	48

Aus der Republik Cuba nahmen nur 5 Schüler teil.
Insgesamt wurden von der Jury 2192 Punkte vergeben, das sind 43,8 % der erreichbaren Gesamtpunktzahl (Zum Vergleich: XIII. IMO 28 %, XIV. IMO 47 %)
1. Preis: 40-35 Punkte, 2. Preis: 34-27 Punkte, 3. Preis: 26-17 Punkte.

KLASSE 3

1 Wieviel Quadrate findest du in dieser Zeichnung? Und wieviel Dreiecke sind es?



2 Von Rostock fuhren gleichzeitig zwei Autos nach Berlin: Ein „Trabant“ und ein „Wartburg“. Der „Trabant“ fuhr in jeder Stunde 60 km, der „Wartburg“ 80 km.
a) Wieviel km fuhr der „Trabant“ in drei Stunden?
b) Wieviel km fuhr der „Wartburg“ in drei Stunden?
c) Wieviel km ist der „Wartburg“ nach drei Stunden dem „Trabant“ voraus?

3 Suche die fehlenden Zahlen! Es muß stets dieselbe Zahl herauskommen, wenn du die Zahlen entweder waagerecht oder senkrecht oder von einer Ecke schräg zur gegenüberliegenden zusammenzählst.

80	180	40
	100	
160		

4 Stelle dir einen Turm vor, der aus würfelförmigen Bausteinen errichtet ist! Er steht auf dem Tisch. 25 Quadrate sind von allen Seiten und von oben zu sehen. Überlege, aus wieviel Würfeln der Turm besteht!

5 Drei Pioniere sammeln zusammen 139 kg Schrott. Der erste Pionier brachte 56 kg zur Abgabestelle, der zweite doppelt soviel.
Wieviel Kilogramm Schrott hat der dritte Pionier gesammelt?

6 Der Zugschaffner kontrolliert die Fahrkarten der Reisenden. Im ersten Wagen sitzen 68 Reisende, im zweiten sind es 105 und im dritten 89. Auf der folgenden Station steigen in den ersten Wagen 13 Reisende ein, aus dem zweiten Wagen steigen 27 Personen aus und in den dritten Wagen steigen 24 dazu.
a) Wieviel Reisende befinden sich jetzt nach Abfahrt des Zuges von dieser Station in den einzelnen Wagen?
b) Wieviel zugestiegene Reisende müssen ihre Fahrkarten noch vorzeigen?

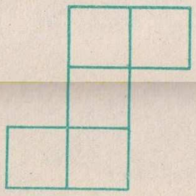
7 Juri Gagarin startete als erster Mensch am 12. April 1961 in den Weltraum. Am 6. August des gleichen Jahres begab sich German Titow als zweiter Mensch auf seinen Flug ins Weltall.
Wieviel Tage lagen zwischen diesen beiden Raumflügen?

8 Errechne im untenstehenden Quadrat für jede Zeile und für jede Spalte die Summe 480!
Setze die errechneten Zahlen in die freien Felder!

120	220	
		130
160		

9 Ich denke mir eine Zahl und addiere 490. Von der Summe subtrahiere ich 725 und erhalte 75.
Wie heißt die gedachte Zahl?

10 Aufgepaßt! Peter hat das untenstehende Netz eines Würfels gezeichnet: Er will daraus einen Würfel falten.
a) Ist das möglich?
b) Begründe deine Antwort!



11 Karin und Gert wollen die Breite des Klassenzimmers abschreiten. Es ist 3,60 m breit. Karin macht stets 40 cm lange Schritte. Gert macht stets 60 cm lange Schritte.
Wieviel Schritte benötigt jedes der beiden Kinder?

12 Zeichne ein Rechteck und ein Quadrat! Schreibe auf, worin sich diese beiden Vierecke voneinander unterscheiden!

13 Eine Hausgemeinschaft will einen gemeinsamen Ausflug mit dem Omnibus machen. Die Plätze in diesem Omnibus reichen für 35 Personen nicht aus. 19 Erwachsene und 14 Kinder steigen in den Bus. Er ist nicht voll besetzt.
Wie viele Plätze hat der Bus?

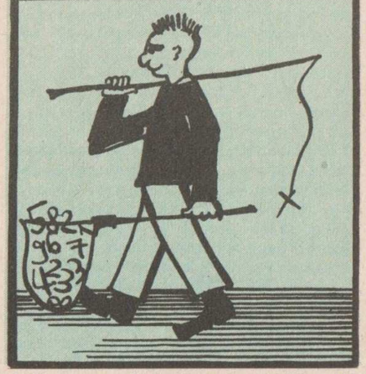
14 Für welche Zahlen x gilt

$$49 > 8 \cdot x > 31$$

15 Zeichne ein Rechteck und halbiere seine Fläche!
Welche verschiedenen Figuren können dabei entstehen?

16 In den drei Schulen einer Stadt gibt es zusammen 63 Pioniergruppen. Aus jeder Gruppe können 4 Pioniere zum Pioniertreffen fahren. Sie werden von 6 gleich großen Omnibussen abgeholt.
Wieviel Pioniere sitzen in jedem Bus?

KLASSE 4



1 Uwe sagt: „Mein Vater ist 42 Jahre alt. Mein Vater ist zwei Jahre älter als meine Mutter. Meine Mutter ist doppelt so alt wie mein Bruder und ich zusammen alt sind. Ich bin zwei Jahre jünger als mein Bruder.“
Wie alt sind Uwe, sein Bruder und seine Mutter?

2 Zeichne ein Rechteck, das 7 cm lang und 5 cm breit ist. Unterteile die Länge so, daß ein Quadrat und ein Rechteck entstehen. Das Quadrat zerlege in 4 kleine Quadrate.
Wie lang sind die Seiten eines kleinen Quadrates?

3 Findest du heraus, wie die Zahlen heißen müssen? Bei dieser Aufgabe fehlen einige Ziffern.

```
  3 * 8
+ 2 3 *
-------
  * 0 2
```

4 Bilde aus $8 < 56$ Gleichungen, indem du ausgleichst
a) durch Addition,
b) durch Subtraktion,
c) durch Multiplikation,
d) durch Division!

5 Uwe bekam ein Buch geschenkt. Es ist 72 Seiten stark. Er las an 2 Tagen den 4. Teil des Buches. An jedem der 2 Tage las er gleich viel.
Wieviel Seiten las er an einem Tag?

6 Aus 4 kg Weizenmehl werden 10 kleine Weißbrote gebacken.
a) Wieviel kleine Weißbrote können aus 40 dt Mehl hergestellt werden?
b) Und wieviel große Weißbrote, die doppelt so schwer sind wie die kleinen, können daraus gebacken werden?

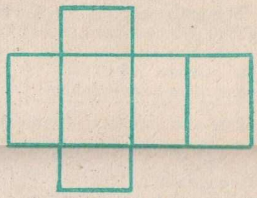
7 Du kannst aus folgenden Zahlen verschiedene Additionsaufgaben mit dem Ergebnis 1000 aufstellen. Dabei können nicht immer alle angegebenen Zahlen verwendet werden.
250, 160, 180, 120, 130, 210, 110, 140, 360.
Beispiel: $250 + 360 + 180 + 210 = 1000$
Stelle zwei weitere Aufgaben aus diesen Zahlen zusammen!

8 Suche die Zahlen, die folgende Ungleichungen erfüllen:
$270 < x < 274$, $14 > y > 11$!
Berechne alle möglichen Produkte! Wie groß ist die Summe dieser Produkte?

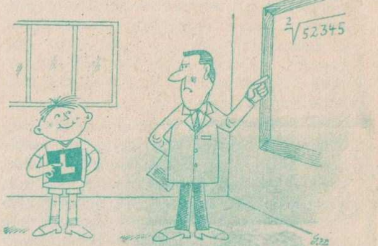
9 Ein Rechteck ist 4 cm 8 mm breit und doppelt so lang.
Berechne die Summen aller Seitenlängen des Rechtecks!

10 Berechne alle möglichen Produkte aus den Zahlen a und b, wenn gilt:
$501 < a < 505$ und $28 > b > 25$!
Wie groß ist die Summe aller dieser Produkte?

11 Kerstin zeichnet das Netz eines Körpers.
a) Wie heißt der Körper, den Kerstin daraus falten kann?
b) Gib die Maße dieses Körpers an!



12 Berechne die Produkte $8 \cdot 93$ und $9 \cdot 82$!
Bestimme die Zahlen, die zwischen den beiden Produkten liegen! Addiere diese Zahlen!



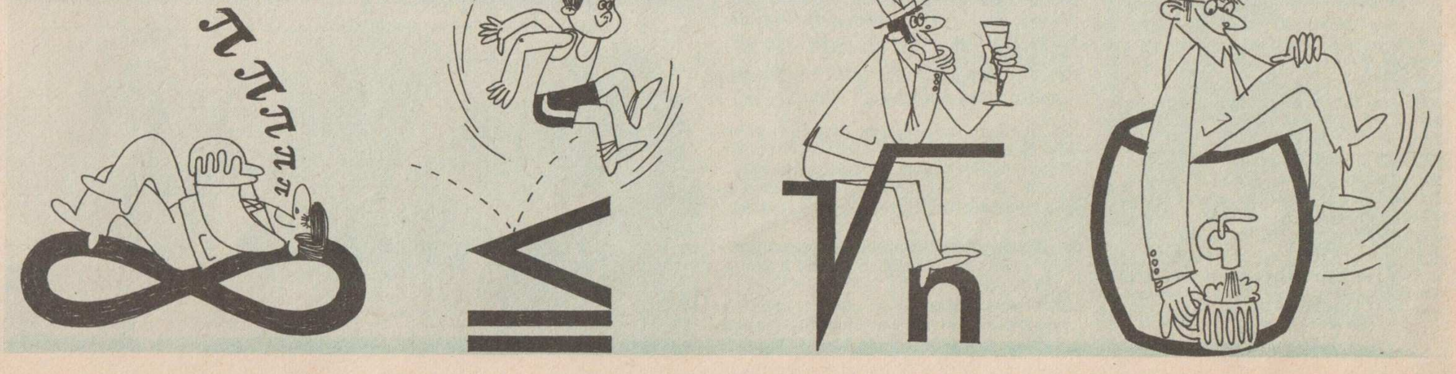
13 Verknüpfe die Zahlen 230, 740, 400, 170, 60 durch Addition und Subtraktion so miteinander, daß das Ergebnis gleich Null ist!

14 Der Flächeninhalt eines neuen Spielplatzes ist quadratisch und beträgt 1600 m².
Wie lang ist eine Seite des Spielplatzes? Wieviel Meter Zaun sind für drei Seiten notwendig?

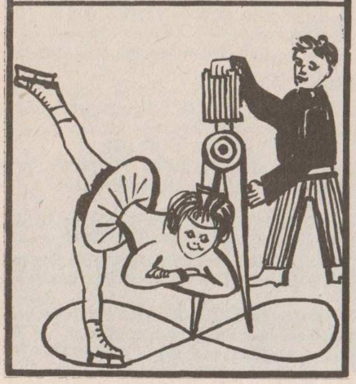
15 Für welche gerade natürliche Zahl x gilt $64 - 8 \cdot x > 32$?

16 Für eine Fahrt zwischen dem Betonwerk und der Baustelle benötigt ein LKW 38 min. Das Entladen dauert 16 min.
Um welche Zeit beginnt der LKW seine zweite Fahrt im Betonwerk, wenn die erste um 7.16 Uhr begonnen wurde und das Beladen im Betonwerk 13 min dauert?

„Sitzmöbel“



KLASSE 5



1 a) Wieviel zweistellige natürliche Zahlen gibt es, bei denen die Differenz aus ihren Ziffern gleich 5 ist?
b) Wieviel dieser Zahlen sind achtmal so groß wie ihre zugehörige Quersumme, d.h. wie die Summe ihrer beiden Ziffern?

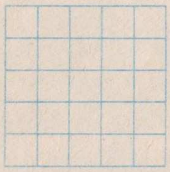
2 Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 968. Ein Summand endet mit einer Null. Streicht man diese Null, so erhält man die andere Zahl.
Bestimme diese beiden Zahlen!

3 Ermittle alle natürlichen Zahlen z, für die die nachfolgenden Bedingungen gleichzeitig gelten:
a) z ist ungerade;
b) z ist durch 3, 5 und 7 teilbar;
c) $500 < z < 1000$!

4 Heinz fragt Gerd: „Wieviel Jahre bist du alt?“ Gerd antwortet: „Meine Schwester ist viermal so alt wie mein Bruder. Ich bin mehr als doppelt, aber weniger als viermal so alt wie meine Schwester. Zusammen sind wir drei Geschwister 17 Jahre alt.“
Berechne, wieviel Jahre Gerd alt ist!
(Alle Altersangaben sollen in vollen Jahren erfolgen.)

5 An einem Tisch sitzen sieben Schüler. Einer hört auf den Vornamen Fred, einer heißt Willi, vier heißen Lutz und einer heißt Christian. Weiter wissen wir nur, daß unter ihnen zwei Brüder mit dem Familiennamen Scheibner, einer mit dem Zunamen Franke und vier Schüler mit dem Namen Schulz sind.
a) Von wem können wir mit Sicherheit Vor- und Zunamen angeben?
b) Warum muß er so heißen?

6 Gib eine Möglichkeit an, die Ziffern 1; 2; 3; 4 und 5 so in das gegebene quadratische Netz einzutragen, daß in jeder Zeile, jeder Spalte und in jeder der beiden Hauptdiagonalen jede der 5 Ziffern genau einmal vorkommt!



Anmerkung: Es genügt ein Beispiel. Begründungen werden nicht verlangt.

7 Bei der abgebildeten Multiplikationsaufgabe sind einige Ziffern unleserlich. Sie sollen ergänzt werden.
Beschreibe, wie du die fehlenden Ziffern gefunden hast!

$$\begin{array}{r} 4{*}{*} \cdot {*}2{*} \\ \hline {*}3{*}{*} \\ {*}12 \\ {*}{*}4{*} \\ \hline {*}{*}{*}{*}{*}8 \end{array}$$

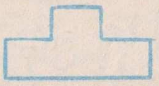
8 Nach der Eichordnung sind im Bereich von 1 g bis 1 kg nur Wägestücke in den Größen von
1 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 50 g, 100 g, 200 g, 500 g und 1 kg zugelassen. Mit einer Waage soll man alle Massebeträge zwischen 1 g und 2 kg in Abstufungen von 1 g ermitteln können. Dabei sollen die Wägestücke nur auf einer Seite aufgestellt werden. Wieviel Wägestücke der oben angegebenen Sorten werden dann benötigt, wenn ihre Gesamtzahl möglichst gering sein soll?

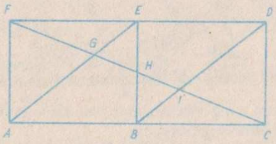
9 Gegeben seien ein Rechteck von 120 mm Länge und 60 mm Breite und ein zweites von 150 mm Länge und 60 mm Breite.
a) Zerlege die beiden Rechtecke so, daß beim Zusammenfügen aller Teile zwei gleichgroße Quadrate entstehen!
b) Ist es möglich, jedes Rechteck nur in zwei Teile zu zerlegen und dennoch zwei gleichgroße Quadrate zusammenfügen zu können?
Fertige zu a) und b) je eine Zeichnung an!

10 Nach der Kreisolympiade *Junger Mathematiker* wurde ein Pionier gefragt, wieviel Punkte er bekommen habe. Scherzhaft sagte er: „Wenn man zu der Zahl meiner Punkte 10 hinzufügt und die Summe verdoppelt, so fehlen mir noch 10 Punkte an 100.“
a) Wieviel Punkte erzielte der Thälmann-Pionier?
b) Wie hast du das Ergebnis gefunden?

11 Bei einem Manöver unserer NVA legte ein Fahrzeug in 9 Teilstrecken eine Gesamtstrecke von 1780 km zurück. Die erste Teilstrecke betrug 220 km. Die restlichen acht Teilstrecken waren untereinander gleich lang.
Berechne die Länge einer jeden dieser restlichen acht Teilstrecken!

12 Wer kann die Figur mit einem Scherenschnitt so zerschneiden, daß die Teile zu einem Quadrat zusammengelegt werden können?
Wer findet dazu zwei völlig verschiedene Möglichkeiten?
(Es ist gut, wenn man sich eine entsprechende Figur aus Papier ausschneidet und es damit versucht.)



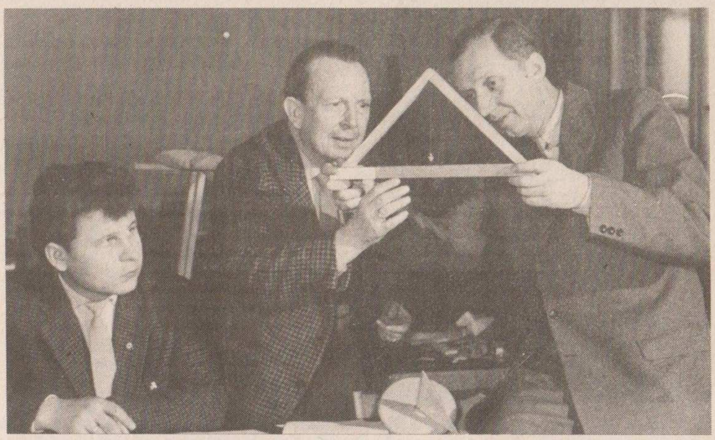


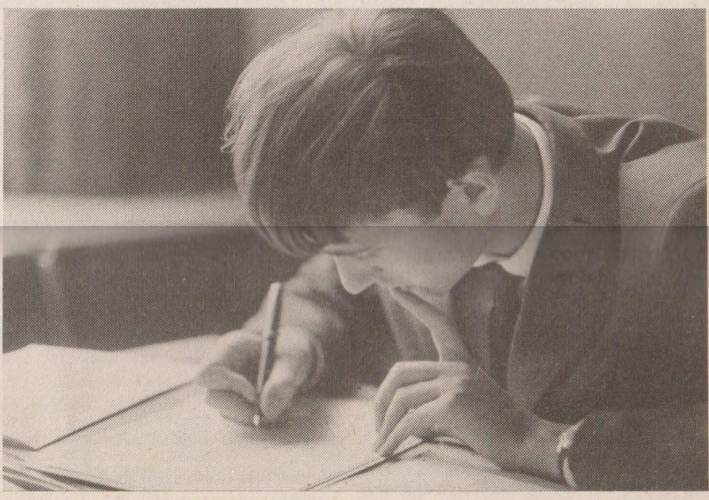
13 Wieviel Dreiecke erkennst du in der obigen Figur?
Stelle eine Übersicht dieser Dreiecke auf, z. B.:
ΔABE; ΔACF!

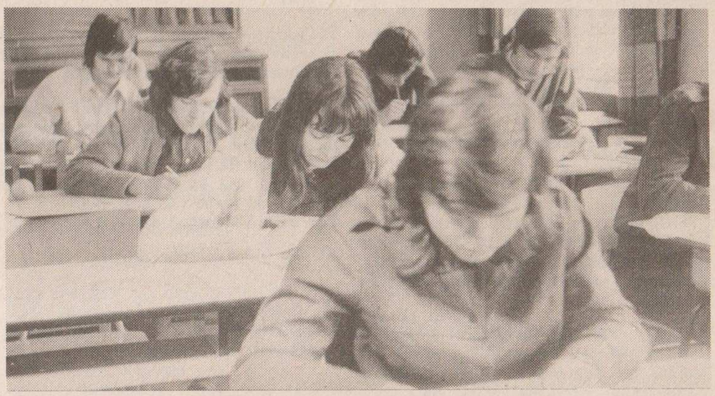
14 Der Schulgarten einer Stadtschule hat einen Flächeninhalt von 0,15 ha. Der Garten wird in 9 Parzellen aufgeteilt, die einen Flächeninhalt von je 150 m² bzw. 200 m² besitzen.
Wieviel Parzellen von jeder der beiden Größen befinden sich im Garten?

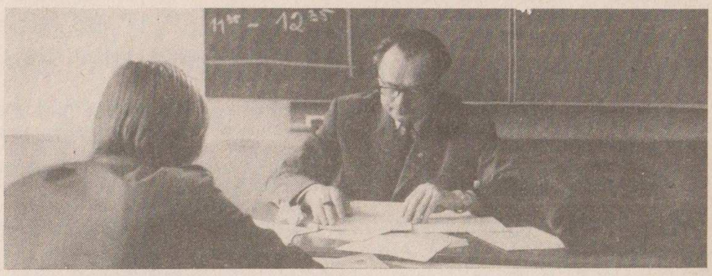
15 In einem volkseigenen Betrieb wurden bis Ende Juni von einem bestimmten Maschinenteil täglich 12 Stück hergestellt. Durch den sozialistischen Wettbewerb gelang es, täglich 2 Stück mehr zu produzieren.
a) Wieviel Maschinenteile dieser Art wurden nunmehr monatlich — 26 Arbeitstage — angefertigt?
b) Wieviel solche Teile können dadurch bis zum Jahresende über den Plan hinaus produziert werden?

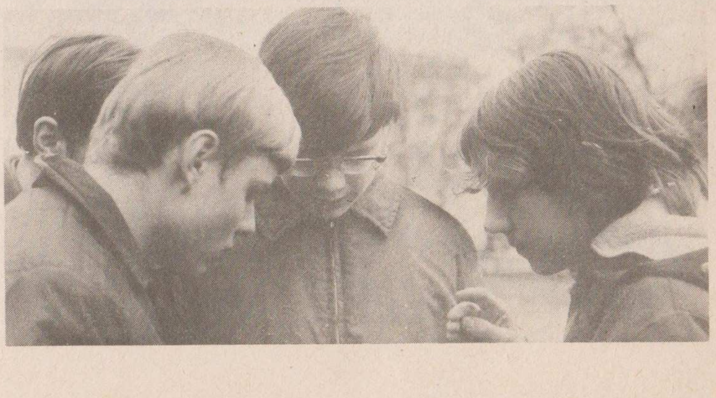
Mathe-Olympia-Impressionen











Wir fragten –

Olympioniken antworteten

Frage:

Wenn eine Aufgabe recht schwierig ist, wie verhältst Du Dich?

Gerd Weißenborn, Berlin

Wenn ich Zeit habe, versuche ich, sie zu lösen, indem ich sie mit anderen, ähnlich gelagerten Problemen vergleiche und versuche, Analogien (Ähnlichkeiten) in der Lösung zu finden. Wenn ich keine Zeit habe, lege ich die Aufgabe vorerst beiseite.

Oswald Knoth, Halle

Ich bin nicht der Typ, der stundenlang an einer Aufgabe sitzt. Kann ich ein Problem nicht im Moment lösen, lege ich es erst einmal weg und versuche, bei Mitschülern oder in Büchern Rat zu holen. Meist ist es aber so, daß ich mir nach einigen Stunden Grübelei lieber gleich die Lösung anschaue, diese aber aber dann sehr gründlich durcharbeite.

Hans-Joachim Hauschild, Erfurt

Ich beschäftige mich oft sehr lange mit einer schwierigen Aufgabe und versuche immer neue Mittel und Wege zu finden. Ich lese auch in Büchern oder Zeitschriften nach, in denen ähnliche Aufgaben oder Themen behandelt werden, um mir Anregungen zu holen.

Matthias Bär, Freital

Ich lege die schwere Aufgabe zuerst wieder beiseite und löse die leichteren. Wenn ich diese bewältigt habe, sind dann die schwereren dran.

Sabine Schlorff, Neustrelitz

Ich versuche zunächst, ähnliche Aufgaben zu finden, deren Lösungen schon bekannt sind. Es ist schon oft vorgekommen, daß mir im Bett oder auf dem Schulweg plötzlich eine Idee kam, die dann oft zur Lösung führte. Dann bemühe ich mich, diese so schnell wie möglich auszuprobieren. Das ist dann immer spannend wie ein Krimi. Mathe-Lehrer, Mathe-Klubleiter und Mitschüler habe ich auch um Tips gebeten.

Karin Kühn, Frankfurt/O.

Ich versuche zunächst, verschiedene Ansätze aufzustellen und auszuprobieren; komme ich mit keinem zum Ziel, so lege ich die Aufgabe für ein bis zwei Tage beiseite und beschäftige mich dann wieder mit ihr. Manchmal hole ich mir aus der Bibliothek Bücher, in denen ähnliche Probleme abgehandelt wurden und versuche, damit eine ähnliche Lösung zu finden. Oftmals hilft auch eine Diskussion über die Aufgabe unter Jungen Mathematikern.

Brigitte Brandt, Suhl

Wenn ich nach längerem Suchen keine Lösung finde, versuche ich, mich durch eine andere Beschäftigung abzulenken. Später fange ich dann noch einmal ganz von vorne an. Leider habe ich nicht die Ausdauer, stundenlang über einer Aufgabe sitzen bleiben zu können.

Bernd Süssmilch, Schwerin

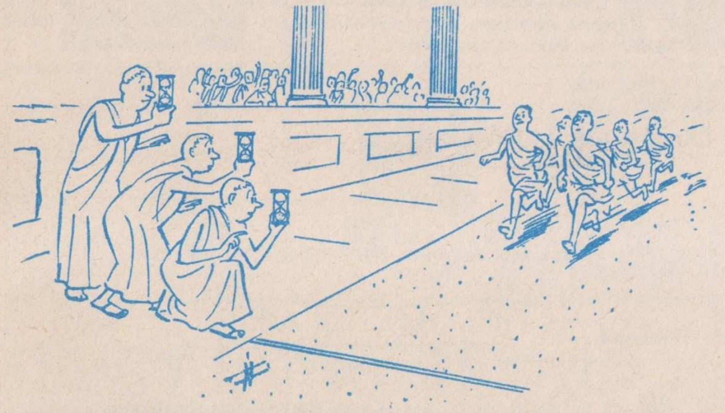
Ich suche das Gespräch mit anderen, um Erfahrungen zu sammeln; gegebenenfalls lasse ich mir den Lösungsweg zeigen.

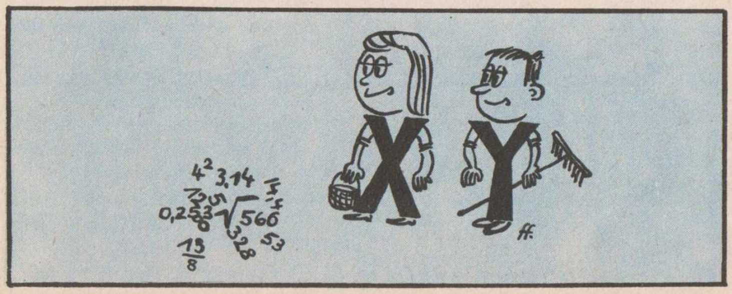
Ulf Brüstel, Altenburg

Natürlich versuche ich, diese Aufgabe unter allen Umständen zu lösen. Wenn es nach stundenlangem Überlegen nicht gelingt, wird Literatur gewälzt. Hilft das auch nicht, berate ich mich mit meinem Vater oder Mitgliedern des Mathematikzirkels.

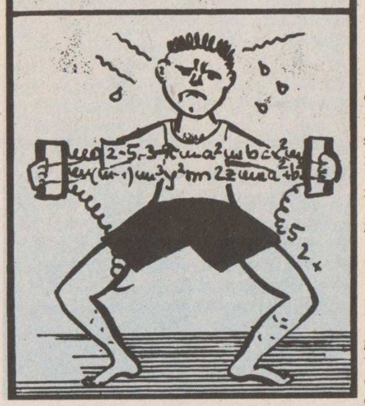
Manfred Pokrandt, Cottbus

Ich versuche, sie zu lösen. Ich schlage in Aufzeichnungen nach – wenn das auch viel Zeit kostet – und gehe allen möglichen Lösungswegen nach. Finde ich trotz allem keinen Lösungsweg, so finde ich Hilfe beim Kreisklub.





KLASSE 6



1 Gegeben seien drei beliebige, aber aufeinanderfolgende zweistellige natürliche Zahlen.
a) Zeige, daß unabhängig von der Wahl dieser Zahlen niemals alle drei Zahlen zugleich Primzahlen sein können!
b) Nenne alle Primfaktoren, die unabhängig von der Wahl dieser Zahlen in mindestens einer von ihnen enthalten sein müssen!

2 Gesucht ist die Menge aller natürlichen Zahlen a, die folgenden Bedingungen genügen:
(1) $100 < a < 1201$,
(2) a ist sowohl durch 3 als auch durch 4 als auch durch 5 teilbar,
(3) a ist nicht durch 8, nicht durch 9 und nicht durch 25 teilbar,
(4) a läßt bei der Division durch 11 einen Rest, der durch 2 teilbar ist.

3 Vertauscht man bei einer zweistelligen Zahl den Einer mit dem Zehner, so erhält man eine neue Zahl, die $4\frac{1}{2}$ mal so groß wie die ursprüngliche Zahl ist.
a) Wie lautet die Zahl?
b) Wie hast du sie gefunden?
Zeige, daß es nur eine solche Zahl gibt!

4 Ruth, Marion und Petra verbringen einen Teil ihrer Ferien in einem Pionierlager. Jede von ihnen betreibt genau eine der Sportarten Tischtennis, Volleyball und Schwimmen.
Außerdem ist bekannt:
(1) Marion leiht sich von der Volleyballspielerin gern gute Bücher.
(2) Die Volleyballspielerin und Petra haben nicht gleichviele Preise bei der Mathematikolympiade errungen.
(3) Marion geht in eine höhere Klasse als die Tischtennisspielerin. Welche Sportart treibt jedes der drei Mädchen?

5 Paul erzählt: „Mein Bruder Emil ist 3 Jahre älter als ich, meine Schwester Lotte ist 4 Jahre älter als Emil, und mein Vater ist dreimal so alt wie Lotte. Meine Mutter ist 5 Jahre jünger als mein Vater und ist gestern 40 Jahre alt geworden." Wie alt ist Paul? Die Antwort ist zu begründen!

6 Nach einem Scheibenschießen verglichen Elke, Regina, Gerd und Joachim ihre Schußleistungen. Es ergab sich folgendes:
(1) Joachim erzielte mehr Ringe als Gerd.
(2) Elke und Regina erreichten gemeinsam dieselbe Ringzahl wie Joachim und Gerd zusammen.
(3) Elke und Joachim erzielten zusammen weniger Ringe als Regina und Gerd.
Ermittle auf Grund dieser Angaben die Reihenfolge der Schützen nach fallender Ringzahl!

7 Jedes der beiden Vorderräder eines Wagens hat einen Umfang von 210 cm, jedes der beiden Hinterräder einen Umfang von 330 cm.
Ermittle die kürzeste Strecke (in m), die der Wagen auf einer ebenen geraden Straße durchfahren haben muß, damit jedes seiner Räder genau eine ganze Anzahl von Umdrehungen durchgeführt hat!

8 Auf wieviel verschiedene Weisen kann man in der folgenden Tabelle die Wörter „Junge Welt" lesen, ohne dabei Zeilen oder Spalten zu überspringen?

J	U	N	G	E	W
U	N	G	E	W	E
N	G	E	W	E	L
G	E	W	E	L	T

9 In einem Wettbewerb der Mathematischen Schülerzeitschrift „alpha" sollten den vier dort vorgegebenen geometrischen Figuren die richtigen Namen zugeordnet werden. In genau $\frac{3}{25}$ der eingesandten Lösungen wurden allen vier vorgegebenen Figuren die richtigen Namen zugeordnet. Bei genau doppelt soviel Lösungen wurden je zwei Figuren die richtigen und je zwei Figuren die falschen Namen zugeordnet. Die Anzahl der Lösungen mit genau drei falschen Zuordnungen war genau viermal so groß wie die Zahl der richtigen Lösungen. Genau 240 der eingesandten Lösungen enthielten keine richtige Zuordnung. Weitere Einsendungen lagen nicht vor.
Ermittle die Anzahl aller zu diesem Wettbewerb eingesandten Lösungen!

10 In einem Betrieb sollen 1600 Pakete, die je 1,6 dm lang, 7 cm breit und 45 mm hoch sind (Außenmaße) zum Versand gebracht werden. Arbeiter wollen sie in Kisten von 64 cm Länge, 0,28 m Breite und 1,8 dm Höhe (Innenmaße) einschichten.
Welches ist die kleinste Anzahl von Kisten, die ausreicht, um alle diese Pakete gleichzeitig zu versenden?

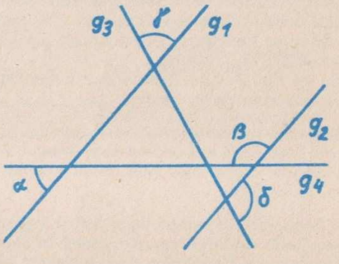
11 In 2 Minuten greifen und befördern 3 Bagger 108 m³ Erde. Ein Erdarbeiter kann an einem achtstündigen Arbeitstag 5 m³ Erde ausheben.
Verschaffe dir eine Vorstellung von der Leistungsfähigkeit eines solchen Baggers, indem du ausrechnest, wieviel Erdarbeiter erforderlich wären, um einen Bagger zu ersetzen!

12 Über der Seite $\overline{CD}$ eines Quadrates ABCD mit $AB = 4$ cm ist ein gleichseitiges Dreieck ΔDCE so zu konstruieren, daß das Quadrat und das Dreieck die Seite $\overline{CD}$ gemeinsam haben. Der Punkt E des Dreiecks ΔDCE sei dabei außerhalb des Quadrates ABCD gelegen.
Verbinde E mit A und mit B!
Berechne die Größe des Winkels $\sphericalangle$ AEB!

13 Die Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 schneiden einander in der aus der Abb. ersichtlichen Weise. Von den Größen α, β, γ und δ der dadurch entstehenden Winkel sei

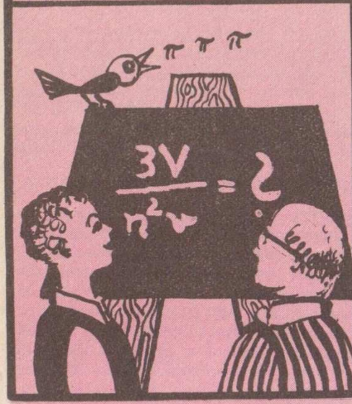
$$\alpha = 50^\circ, \beta = 130^\circ, \gamma = 70^\circ.$$

Ermittle die Größe des Winkels δ!



14 Drei Fluggäste aus der DDR fliegen mit einer TU von Prag nach Kairo. Ihre Namen sind Baumann, Eichler und Hahn. Einer von ihnen ist Elektriker, einer Monteur und einer Ingenieur. Aus ihrer Unterhaltung entnehmen wir folgendes:
a) Zwei Fluggäste, und zwar Herr Baumann und der Ingenieur, sollen in Bombay eine von der DDR gelieferte Anlage aufbauen helfen.
b) Zwei Fluggäste, und zwar Herr Hahn und der Elektriker kommen aus Berlin, während der dritte aus Dresden kommt.
c) Herr Eichler ist jünger als der Monteur.
d) Herr Hahn ist älter als der Ingenieur.
Wie heißt der Ingenieur? Wie heißt der Elektriker? Wie heißt der Monteur? Die Lösung ist zu begründen!

KLASSE 7



1 In einer alten Aufgabensammlung steht folgende Aufgabe: Ein Jagdhund verfolgt einen Fuchs, der ihm 54 Fuchsschritte voraus ist. Die Länge von 2 Hundeschritten ist genau gleich der Länge von 3 Fuchsschritten. Der Hund braucht zu 4 Schritten genau so lange Zeit wie der Fuchs zu 5 Schritten.

Mit wieviel Schritten holt der Hund den Fuchs ein, wenn beide gleichzeitig in einundderselben Richtung starten?

2 Jede natürliche Zahl heißt *vollkommene Zahl*, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist. Die Zahl 12 hat z. B. die echten Teiler 1, 2, 3, 4, 6 und ist — wie man sieht — keine vollkommenen Zahl. Welche vollkommenen Zahlen gibt es unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 30?

3 Hans, Jürgen, Paul und Wolfgang haben bei einem 100-Meter-Lauf die ersten vier Plätze belegt. Auf die Frage, wer den ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Platz belegte, erhalten wir folgende Antworten:

1. Paul erster, Jürgen zweiter;
2. Paul zweiter, Wolfgang dritter;
3. Hans zweiter, Wolfgang vierter.

In den drei Antworten war jeweils eine Angabe wahr und eine Angabe falsch. Wer belegte den ersten, zweiten, dritten und vierten Platz?

4 Ein Kultursaal wird bei der Erneuerung mit 21 Wandleuchten ausgestattet; für jede von ihnen sind 4 Glühlampen vorgesehen. Die zunächst vorhandenen Glühlampen werden wahllos eingeschraubt. Danach stellt man fest, daß einige Wandleuchten mit allen 4 Glühlampen versehen sind, während doppelt so viele Wandleuchten nur eine einzige Glühlampe enthalten. Ein Teil der Wandleuchten hat genau 3 Glühlampen, während bei halb so vielen Wandleuchten noch sämtliche Glühlampen fehlen. In den restlichen Leuchten befinden sich jeweils genau 2 Glühlampen.
Es ist die genaue Anzahl der fehlenden Glühlampen zu ermitteln!

5 Jemand schreibt alle natürlichen Zahlen von 1 bis 5555 auf, jede genau einmal. Berechne die Anzahl aller dabei geschriebenen Ziffern 9!

6 Schneide ein rechteckiges Stück Papier aus, teile es durch gerade Linien in acht kongruente Rechtecke und schreibe jeweils auf Vorder- und Rückseite einer jeden Rechteckfläche denselben Buchstaben, wie es in der Abbildung angedeutet wird.
Falte das Stück Papier so, daß die Buchstaben in der Reihenfolge WOLFGANG übereinanderliegen!

O	N	G	A
W	G	F	L

Als Lösung gilt das entsprechend gefaltete Papier oder eine Beschreibung des Vorgehens.

7 Bei einer Subtraktionsaufgabe betrage der Subtrahend $\frac{2}{5}$ des (von Null verschiedenen) Minuenden.
a) Wieviel Prozent des Minuenden beträgt die Differenz?
b) Wieviel Prozent des Minuenden beträgt die Summe aus Minuend und Subtrahend?

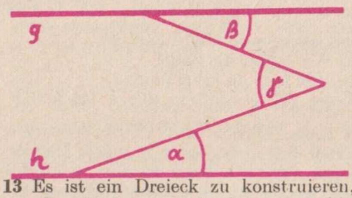
8 Wie kann man ohne Ausführung der angegebenen Rechenoperationen feststellen, ob die Zahl
$$\frac{378 \cdot 436 - 56}{378 + 436 \cdot 377}$$
größer oder kleiner als 1 ist?

9 Ein Güterzug legte in der ersten Stunde $35\frac{3}{4}$ km und in den nachfolgenden $2\frac{1}{2}$ Stunden weitere 92,7 km zurück. Für die Rückfahrt auf derselben Strecke benötigte er 3 Stunden und 12 Minuten. Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit für die ganze Fahrt!
Runde auf eine Dezimale!

10 In einem zylindrischen Gefäß (gerader Kreiszylinder mit waagerechter Bodenfläche) befindet sich Wasser. Der Wasserspiegel steht bei $\frac{3}{4}$ der inneren Höhe des Gefäßes. Nachdem genau $2\frac{1}{2}$ Liter Wasser aus diesem Gefäß ausgegossen wurden, steht der Wasserspiegel bei $\frac{2}{5}$ der inneren Gefäßhöhe.
Welches Fassungsvermögen hat das Gefäß?

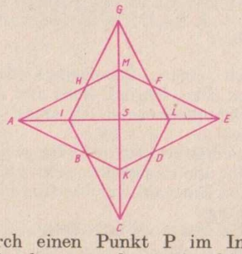
11 In einen Flachstahlstab von 2,5 m Länge sollen 15 Löcher in gleichem Abstand mit dem Durchmesser d = 20 mm gebohrt werden. In welchem Abstand muß angekörnt werden, wenn an beiden Enden der Abstand zum Lochrand das 2,5fache des Lochdurchmessers betragen soll?

12 Gegeben sei die in der Abbildung dargestellte Figur ($g \parallel h$). Die Winkel α und β seien bekannt.
Wie groß ist der Winkel γ?
Beweise deine Behauptung!

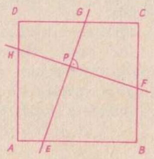


13 Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Summe s der Seiten a und b, der Winkel γ und die Höhe h_a gegeben sind.
$s = 7$ cm, $h_a = 4$ cm, $\gamma = 100°$.

14 Die in der Abbildung dargestellte Sternfigur wird durch zwei kongruente Rhomben mit ihren Diagonalen gebildet. Die Diagonallängen sollen im Verhältnis 2:1 stehen, so daß die Strecken AE und CG durch die Punkte I, S, L bzw. M, S, K in je vier gleiche Abschnitte geteilt werden.
Vergleiche den Flächeninhalt des Achtecks ABCDEFGH mit dem des Achtecks IBKDLFMH!



15 Durch einen Punkt P im Inneren eines Quadrates werden zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden so gelegt, daß jede Gerade zwei gegenüberliegende Seiten des Quadrates schneidet (vgl. die Abb.).
Beweise, daß die beiden Strecken EG und HF gleich lang sind!



So kam es zur Gründung der Internationalen Mathematikolympiaden

Zwischen 1883 und 1889 erschien in Jassy (SR Rumänien) die Zeitschrift **Wissenschaftliche Erholung.** Sie enthielt auch eine Rubrik: **Mathematikaufgaben** und bildete damit eine gute Anregung zur Weiterbildung für Schüler.

Am 15. September 1895 erschien in Bukarest das erste Heft der monatlichen **Gazeta matematica.** Sie wird seitdem ohne Unterbrechung herausgegeben, um eine bessere mathematische Vorbereitung der Schüler auf das Leben, insbesondere das Studium zu verwirklichen.

Um die Schüler der oberen Klassen noch mehr anzuregen, die **Gazeta matematica** zu studieren, wurde 1902 ein Wettbewerb eröffnet, der die Leser, welche gute und zahlreiche Lösungen zu den publizierten Aufgaben einsandten, erfaßte.

Seit 1905 sind schriftliche und mündliche Klausuren hinzugefügt worden — unter besonderer Thematik für jede der 4 bis 5 oberen Klassenstufen der Lyzeen (d. s. 14- bis 19jährige Mädchen und Jungen).

Die ersten 37 Wettbewerbe (bis 1949) der **Gazeta** bestanden aus einer einzigen Stufe. Sie hatten ein großes Echo. Die prämierten Schüler und ihre Lehrer genießen ein großes Ansehen. Die meisten unserer Akademiker (Mathematiker, Physiker, Ingenieure u. a.) waren aktive Mitarbeiter der **Gazeta**. Sie hatten während ihrer Schulzeit Auszeichnungen im Rahmen der Wettbewerbe erhalten.

Seit 1950 wurde unter der Schirmherrschaft der **Gesellschaft für Mathematik der SR Rumänien** und des **Ministeriums für Bildungswesen** ein Mathematikwettbewerb in mehreren Stufen organisiert. Der 61. Wettbewerb fand im Februar, März und Mai 1973 statt. Viele Zehntausend Schüler nahmen an der 1. Stufe teil. Diese Wettbewerbe erfreuen sich einer stetig steigenden Beliebtheit. Sie werden auch für Schüler der Fachschulen, technischen und pädagogischen Schulen veranstaltet und nicht nur für Mathematik, sondern auch für Physik (seit 1955) und Chemie (seit 19764).

Zu Ehren des 15. Jahrestages der Befreiung unserer Heimat vom faschistischen Joch hat unsere Gesellschaft für Mathmematik mit Unterstützung des Ministeriums für Bildungswesen zur

I. Internationalen Mathematikolympiade

eingeladen. Diesem Ruf folgten viele Länder.

Die Ziele der ersten IMO sind im allgemeinen auch für die folgenden gültig geblieben:

- die tüchtigsten und am besten vorbereiteten Schüler auszuzeichnen, aber auch das mathematische Studium im großen Maße anzuregen,
- Fühlungnahme und Freundschaft zu schließen mit jungen Menschen, die ähnliche wissenschaftliche Vorzüge haben,
- einen Meinungsaustausch zwischen Wissenschaftlern und Lehrern über die unterrichtliche und die außerunterrichtliche Arbeit im Fach Mathematik unter den teilnehmenden Länderdelegationen zu pflegen,
- die Schönheiten des Landes und die Leistungen des gastgebenden Volkes kennenzulernen.

Jetzt, da die XVI. IMO vorbereitet wird, kann man leicht feststellen, daß die Ziele der I. IMO richtig gestellt waren, weiter entwickelt wurden und daß dieser freundschaftliche Wettbewerb — obgleich ohne Zuschauer und Beifall zollende Anhänger — gute Einflüsse auf das mathematische Klima der Teilnehmerländer haben wird.

Prof. Tiberiu Roman, Bucaresti

Diplom der I. IMO

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE ŞI FIZICE DIN R.P.R.

DIPLOMA DE MERIT

PREMIUL II

Se acordă elev BERGTHALER CRISTIAN
din clasa XI a scolii Scoala medie "Gh.Gheorghiu-Dej"
din Petrosani evidentiat
la olimpiada internatională de matematică 1959.

Presedinte,
Acad. GR. C. MOISIL

Bucureşti 29 Iulie 1959.

Wir waren bei der I. IMO dabei

Teilnehmer der I. IMO schreiben an die LVZ

Es war für uns schon ein aufregendes Ereignis, als wir erfuhren, daß wir für die IMO vorgesehen waren. Das mündliche Abitur stand bevor und sollte gleichzeitig der Prüfstein für die Teilnahme werden.

Mitten aus den Reisevorbereitungen riß uns ein Blitztelegramm:

stop — ABREISE VORVERLEGT — stop

In der Hauptstadt der DDR trafen die acht Teilnehmer aus Dresden, Magedeburg, Berlin und Limbach-Oberfrohna erstmalig mit dem Delegationsleiter, Herrn Nitz, (Magdeburg) zusammen. Auf der langen Bahnfahrt durch die ČSSR, Ungarn und Rumänien gab es schon viel Interessantes zu sehen, und voll Erwartung kamen wir in Stalino (heute Kronstadt), unserem Wettbewerbsort, an. Insgesamt waren es 56 Teilnehmer aus sieben Ländern. Von sechs teilnehmenden Mädchen kamen drei aus der DDR.

Vor den Klausuren herrschte Nervosität. Werden wir es schaffen? Was für Aufgaben werden es sein? Daß es für uns schwer werden würde, wußten wir, denn die genannten Aufgabengebiete waren uns vom Unterricht her zum Teil unbekannt. So saßen wir nun mit klopfenden Herzen am ersten Klausurtag in dem großen, dunklen Raum und konnten vor Spannung kaum der mehrsprachigen Eröffnung folgen. Nach dem Austeilen der Aufgabenzettel standen bestimmt große Fragezeichen auf unseren Gesichtern. Viel Unbekanntes! Nach bestem Wissen versuchte nun jeder von uns, die Aufgabe zu meistern. Am zweiten Tag ging es uns nicht besser. Doch alle konnten sich bei der gemeinsamen Fahrt nach Bukarest erholen und vor allen Dingen Erfahrungen austauschen.

Kunstschätze, wie das Schloß von Sinaia, Industriezentren wie das von Ploesti, waren Ziele unserer Exkursion. In Bukarest fand dann der offizielle Abschluß der IMO mit einem Festessen statt. Um viele Erfahrungen reicher flogen wir wieder nach Berlin zurück.

Elke Baars

Nach dem Abi — Aufnahme des Pädagogikstudiums an der Humboldt-Universität zu Berlin, Fachrichtung: Kunsterziehung/Geschichte. Meine Wunschkombination war Mathematik/Kunsterziehung, die gab es aber nicht

1963/64 Aufnahme der Lehrtätigkeit in Strausberg

Nach Unterbrechung — Geburt eines Sohnes — Wiederaufnahme der Tätigkeit über Kindergarten — Hort — Unterricht.

Seit dem Schuljahr 1968/69 bin ich wieder als Lehrerin tätig an der 7. OS in Berlin-Lichtenberg. Da mich die Mathematik nie so ganz losließ, unterrichte ich auch in diesem Fach.

E. Baars

Frank Zilger

1959 Abitur mit „sehr gut"

1959/61 Dienst in der Volksarmee

1961/63 Studium an der Technischen Universität Dresden, Sektion Regelungstechnik

1963 Abschluß als Diplom-Ingenieur

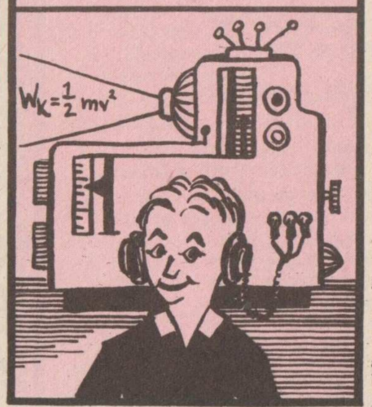
zur Zeit Abteilungsleiter Export im VEB Kombinat Robotron für EDVA Export.

F. Zilger

Bernd Käßner

Nach dem Chemiestudium an der TU Dresden diplomierte ich auf dem Gebiet der Spektroskopie. Ich war anschließend zwei Jahre wissenschaftlicher Mitarbeiter an einem metallurgischen Forschungsinstitut und nahm 1967 eine Aspirantur an der Hochschule für Architektur und Bauwesen in Weimar auf. Dort promovierte ich mit einer Arbeit über physikochemische Zementuntersuchungen. Jetzt bin ich als Oberassistent im Lehrgebiet Baustoffe der Ingenieurhochschule Cottbus in Lehre und Forschung tätig. Die Ergebnisse meiner wissenschaftlichen Arbeiten habe ich in zahlreichen Artikeln und Vorträgen im In- und Ausland publiziert. Ich kann sagen, daß mir meine mathematische Oberschul- und Hochschulausbildung viel bei der Lösung chemischer- und physikalischer Probleme während meiner wissenschaftlichen Tätigkeit geholfen hat. Aus diesem Grund begrüße ich es sehr, daß heute mehr als früher das mathematische Interesse bei unseren Schülern durch nationale und internationale Wettbewerbe geweckt und gefördert wird.

KLASSE 8



1 Welches ist die kleinste achtstellige natürliche Zahl, die aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und durch 36 teilbar ist?
Begründe, daß es die kleinste derartige Zahl ist!

2 Ermittle die Anzahl aller Zahlen zwischen 10000 und 99999, die, wie z.B. 35453, vorwärts gelesen, die gleiche Ziffernfolge wie rückwärts gelesen ergeben.

3 Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:
a) Die Differenz ihrer Ziffern beträgt drei.
b) Vertauscht man ihre Ziffern, so ist die neue Zahl um neun kleiner als das Doppelte ihrer ursprünglichen Zahl.

4 Setze in ein „magisches Quadrat" mit 9 Feldern die Zahlen von 3 bis 11 so ein, daß die Summe jeder Reihe, jeder Spalte und jeder Diagonalen 21 beträgt! Beginne mit dem Mittelfeld! Begründe deine Anordnung der Zahlen!

6	11	4
5	7	9
10	3	8

5 In einer Aula stehen 300 Stühle in mehreren gleichlangen Reihen hintereinander. Nimmt man für den Mittelgang aus jeder Querreihe 3 Stühle heraus und bildet aus diesen Stühlen 5 neue Querreihen (mit Mittelgang), so bleibt die Anzahl der Sitzplätze gleich.
Wieviel Stühle standen ursprünglich in jeder Querreihe?
Begründe deine Behauptung!

6 In der Messe eines Schiffes unserer Fischereiflotte sitzen die Mitglieder der Besatzung und sprechen über ihr Alter: Der Steuermann sagt: „Ich bin doppelt so alt wie der jüngste Matrose und 6 Jahre älter als der Maschinist." Der 1. Matrose sagt: „Ich bin 4 Jahre älter als der 2. Matrose und ebenso viele Jahre älter als der jüngste Matrose, wie ich jünger bin als der Maschinist." Der 2. Matrose sagt: „Gestern habe ich meinen 20. Geburtstag gefeiert." Die Besatzung besteht aus 6 Mitgliedern, das Durchschnittsalter beträgt genau 28 Jahre.
Wie alt ist der Kapitän?

7 Rolf war doppelt so alt wie Inge, als er so alt war, wie sie jetzt ist. Jetzt sind beide zusammen 45 Jahre alt.
Wie alt ist jeder?

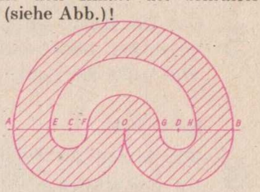
8 Klaus hat 7 Kugeln: 4 rote, 2 weiße und eine schwarze. Er soll sie in zwei Kästen A und B legen; in A drei, in B vier. Gib sämtliche möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen der Kugeln auf die zwei Kästen an!
(Die Reihenfolge, in der die Kugeln in den Kästen liegen, soll dabei nicht berücksichtigt werden.)

9 Peter ist im Ferienlager. Er will für seine Gruppe Brause zu 21 Pf je Flasche einkaufen und nimmt dazu leere Flaschen mit. Für das eingelöste Pfandgeld (30 Pf je Flasche) möchte er möglichst viele Flaschen Brause kaufen. Für jede Flasche müssen erneut 30 Pf Pfand hinterlegt werden. Es stellt sich heraus, daß er 6 Flaschen weniger erhält, als er abgegeben hat. Außerdem bekommt er noch Geld zurück.
Wieviel leere Flaschen hatte Peter mitgenommen? (Es gibt nur eine Lösung.)

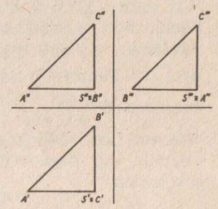
10 Ein mit konstanter Geschwindigkeit v_1 fahrender Lastkraftwagen wird 1 h 25 min nach Fahrbeginn von einem ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit v_2 fahrenden Personenkraftwagen eingeholt, der 30 min später vom gleichen Ort abfuhr, aber eine um $25\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ größere Geschwindigkeit als der LKW hatte.
a) Berechne v_1 und v_2!
b) Welche Länge s hat die von den beiden Fahrzeugen bis zum Überholungspunkt durchfahrene Wegstrecke?

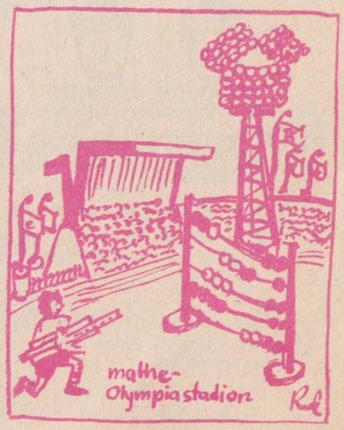
11 Gegeben seien 3000 g einer 7,2prozentigen Lösung von Kochsalz in Wasser (d.h. in je 100 g der Lösung sind genau 7,2 g Kochsalz enthalten). Durch Sieden dieser Lösung verdampft so viel Wasser, daß genau 2400 g der eingedampften Lösung verbleiben.
Wieviel prozentig ist die so erhaltene Lösung?

12 Auf einer Geraden seien die Punkte A, E, C, F, O, G, D, H, B in dieser Reihenfolge so gelegen, daß gilt:
$\overline{AB} = 6$ cm;
$\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FO} = \overline{OG} = \overline{GH} = \overline{HB} = 1$ cm;
$\overline{EC} = \overline{CF} = \overline{GD} = \overline{DH} = 0{,}5$ cm.
Über den Strecken $\overline{AB}$, $\overline{EH}$ und $\overline{FG}$ seien Halbkreise in die eine Halbebene und über den Strecken $\overline{AO}$, $\overline{OB}$, $\overline{EF}$ und $\overline{GH}$ Halbkreise in die andere Halbebene bezüglich der Geraden durch A und B gezeichnet.
Berechne den Inhalt der schraffierten Fläche (siehe Abb.)!



13 a) Gib einen Körper an, der den abgebildeten Grund-, Auf- und Kreuzriß besitzt (siehe Abb.)! (Sämtliche Risse sind rechtwinklig — gleichschenklige Dreiecke.)
b) Zeichne ein Netz dieses Körpers und stelle ein Körpermodell her!





Klassenstufe 1

UdSSR

1 Tatjana trug 6 Gläser in den Keller. Ihr großer Bruder trug doppelt so viel

Wieviel Gläser trugen beide zusammen in den Keller?

DDR

2 Knut und Marie-Luise streiten sich. Knut sagt: „Im Zirkus sah ich 2 Löwen und doppelt so viel Pferde, außerdem 4 Katzen und halb so viel Hunde". Marie-Luise dagegen sagt: „Ich habe 4 Pferde und halb so viel Löwen, 2 Hunde und doppelt so viel Katzen gesehen."
Wer hat recht? Gib die Zahl der Tiere an!

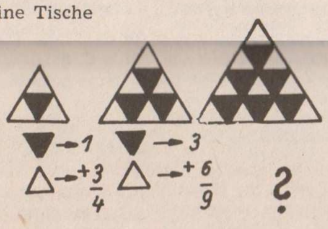
Klassenstufe 2

Volksrepublik Polen

3 Im Kindergarten kamen 28 Kinder zum Frühstück zusammen. Am großen Tisch saßen 8 Kinder. Die übrigen Kinder setzten sich an kleinere Tische, je 4 Kinder an einen Tisch.
Wieviel kleine Tische waren es?

Kanada

4 Ohne Worte



Klassenstufe 3

Dänemark

5 Das Dreifache einer Zahl, vermehrt um 5, ergibt 20.
Wie heißt die Zahl?

Schweden

6 Wie lauten die Zahlen in den Kästchen?

24 : □ = 8
28 : □ = 7
36 : □ = 4
30 : □ = 6

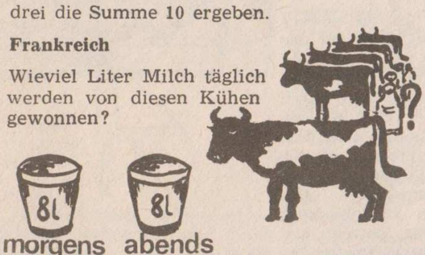
Klassenstufe 4

VR Bulgarien

7 Wir geben euch 9 Ziffern. Sechs von diesen sind zu streichen, so daß die restlichen drei die Summe 10 ergeben.

Frankreich

8 Wieviel Liter Milch täglich werden von diesen Kühen gewonnen?



morgens abends

Klassenstufe 5

SR Rumänien

9 Ein vollständiger Kreis hat 360 °.
Welchen Bruchteil des Kreises stellt ein Bogen mit einem Winkel von 144 ° dar?

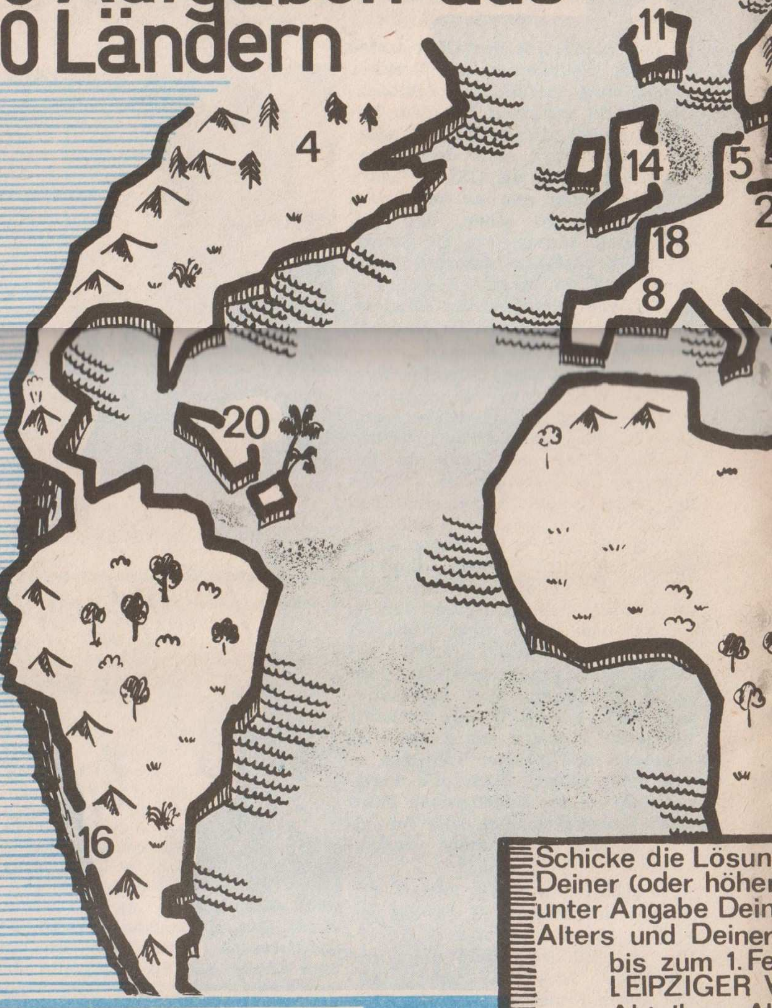
ČSSR

10 Die Differenz zwischen der Länge und der Breite eines rechteckigen Fotos beträgt 25 mm.
Berechne den Umfang des Fotos, wenn seine Länge 70 mm mißt!

PREISAUSS

MATHE INTERNATIONAL

20 Aufgaben aus 20 Ländern



Klassenstufe 6

Island

11 Das nächste Glied der Zahlenfolge 2, 4, 8, 16 ist in gleicher Weise wie im Beispiel dargestellt als Summe zu schreiben!

2 = 1 + 1
4 = 1 + 2 + 1
8 = 1 + 3 + 3 + 1
16 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1
-- = - - - - - - - - - - - -

Tansania

12 Eine rechteckige Rasenfläche, die 80 m lang und 32 m breit ist, wird von einem gepflasterten Gehweg umgeben, der überall 2 m breit ist.
Berechne den Flächeninhalt der gepflasterten Fläche!

Schicke die Lösun
Deiner (oder höher
unter Angabe Dein
Alters und Deiner
bis zum 1. Fe
LEIPZIGER V
Abteilung A
701 Leipzig
Kennwort: M
Das Los wird wie
ermitteln. Viel

Preisträger
Mathe LVZ

Detlev Flicke, 7281 Moc
Angelika Stendel, 1431 C
Annegret Kirsten, 422
Neubrandenburg; Betti
ditz bei Leipzig; Ralf
(Krs. Ludwigslust); Ca
stein; Uwe Stierauch,
drea Neidhardt, 724 Gr
9701 Brum (Krs. Auerb
Bojarski/Roland Schleu
golf Reinsch, 7401 Göh
Mathematik, Georg-Sc
Jörg Grohskurth, 4732
lektiv der OS Greifswa

SCHREIBEN

aufgepaßt ..
nachgedacht ..
mitgemacht

en der Aufgaben
r Klassenstufen)
sNamens, Deines
Adresse
ruar 1974 an die
OLKSZEITUNG
atz
PSF 660
che-LVZ
r die Preisträger
reude und Erfolg
Eure LVZ

der
972

ehna (Krs. Eilenburg);
mbeck (Krs. Gransee);
una; Astrid Scholz, 20
Wießner, 7144 Schkeu-
eierholz, 2801 Wustrow
en Ullmann, 685 Loben-
422 Hennigsdorf; An-
ma; Heinz Ackermann,
h), Student 18 J.; Jörg
ager, 2355 Saßnitz; In-
(Krs. Altenburg); AG
mann-EOS, 754 Calau;
d Frankenhausen; Kol-
-Eldena

Klassenstufe 7

SFR Jugoslawien

13 Setze zwischen den gegebenen Zahlen des Quadrates Rechenzeichen, so daß sich die angegebenen Summen in der rechten Spalte bzw. in der unteren Reihe ergeben.

8		7		10	=	46
4		3		4	=	16
6		8		4	=	8
=		=		=		=
26		12		10	=	48

Großbritannien

14 Ein Eimer ist zur Hälfte mit Farbe gefüllt und wiegt 5 kp. Wenn er nur noch zu einem Drittel mit Farbe gefüllt ist, wiegt er 4 kp.

Wie schwer ist der volle Eimer?

Klassenstufe 8

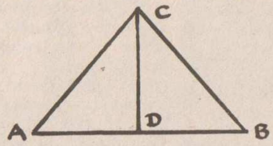
Arabische Republik Ägypten

Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC, mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ und $\overline{CD}$ als Winkelhalbierende des Winkels an der Spitze. Man beweise:

a) daß $\overline{CD}$ das Dreieck in zwei kongruente, rechtwinklige Dreiecke zerlegt;

b) daß $\overline{CD}$ zugleich Höhe und Seitenhalbierende des Dreiecks ist;

15 c) daß die Fläche des Dreiecks ADC die Hälfte der Dreieckfläche ABC beträgt!



Chile Freunde der Unidad-Popular übergaben uns diese Aufgabe

Eine Flasche Limonade kostet Eskudos 2,10. Für eine leere Flasche werden Eskudos 3,- Einsatz verlangt.

16 Wieviel leere Flaschen muß Pablo ins Geschäft mitnehmen, wenn er, ohne zu zahlen, 10 Flaschen Limonade erhalten möchte?

Klassenstufe 9

Demokratische Republik Vietnam

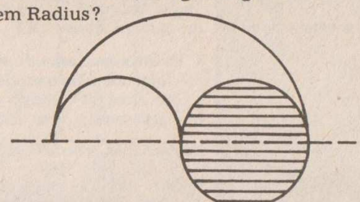
17 Auf einigen Bäumen sitzen mehrere Vögel. Hätte sich auf jedem dieser Bäume genau ein Vogel niedergelassen, so hätte einer dieser Vögel keinen Baum zum Ausruhen gefunden. Einer hingegen wäre unbesetzt geblieben, wenn sich auf jeden der übrigen genau zwei Vögel gesetzt hätten.

Um wieviel Vögel und um wieviel Bäume handelt es sich?

Niederlande

In welchem Verhältnis steht die Fläche des schraffiert gezeichneten Kreises zur Fläche der sichelförmigen Figur bei beliebigem Radius?

18



Klassenstufe 10/12

Ungarische VR

19 Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften: Ihre Quersumme beträgt 10. Vertauscht man die Ziffern dieser Zahl, so erhält man eine Zahl, die um 1 kleiner ist als das Zweifache der ursprünglichen Zahl.

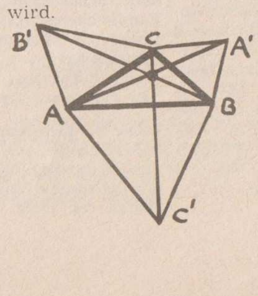
Republik Cuba

Über den Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC seien nach außen drei gleichseitige Dreiecke ABC', BCA', CAB' konstruiert.

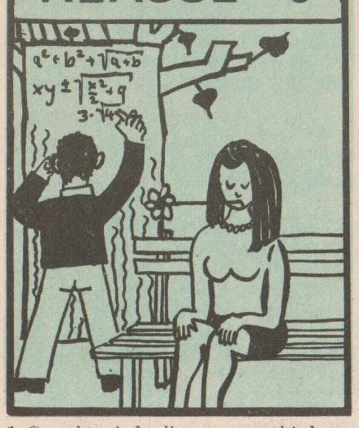
Man beweise, daß dann stets gilt:

a) $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$

20 b) Die Geraden $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ schneiden sich in genau einem Punkt, und jede dieser Geraden halbiert den Winkel, der von den beiden anderen Geraden gebildet wird.



KLASSE 9



1 Gesucht sind alle aus verschiedenen Ziffern bestehenden dreistelligen natürlichen Zahlen, bei denen die Summe aller aus je zwei ihrer Ziffern zu bildenden zweistelligen Zahlen gleich dem Doppelten der Zahl ist.

2 Es ist x eine (im Dezimalsystem) sechsstellige Zahl, die mit der Ziffer 5 endet. Setzt man diese Ziffer von der sechsten an die erste Stelle, also vor die unverändert gebliebenen fünf übrigen Ziffern, so erhält man eine sechsstellige Zahl, die viermal so groß ist wie x.
Wie lautet die Zahl im Dezimalsystem?

3 a) Wie müssen 1023 Kugeln auf 10 Säckchen verteilt werden, damit man jede Anzahl von 1 bis 1023 Kugeln zusammenstellen kann, ohne ein Säckchen zu öffnen?
b) Wieviel Säckchen werden mindestens benötigt, damit man jede Anzahl von 1 bis 3000 Kugeln zusammenstellen kann?

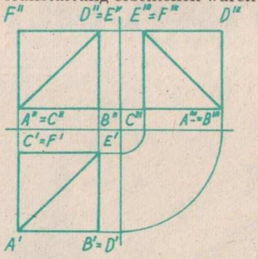
4 Bei einem Spiel verstecken drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihren Handtaschen je einen Gegenstand und zwar einen Ball, einen Bleistift und eine Schere. Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat. Auf seine Fragen erhält er folgende Antworten, von denen verabredungsgemäß nur eine wahr, die beiden anderen aber falsch sind:
1. Anna hat den Ball.
2. Brigitte hat den Ball nicht.
3. Claudia hat die Schere nicht.
Wer hat den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere?

5 Auf der Siegerehrung einer Kreisolympiade wurde folgendes mitgeteilt:
Genau ein Neuntel aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade errangen einen Preis.
Genau ein Zehntel aller Teilnehmer der Kreisolympiade sind Mitglieder des Kreisklubs *Junger Mathematiker*.
Von den Preisträgern stammen genau 75 Prozent aus dem Kreisklub. Genau 6 derjenigen Schüler, die an der Kreisolympiade teilnahmen und Mitglieder des Kreisklubs sind, erhielten keinen Preis.
Ermitteln Sie die Anzahl aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade!

6 In einer Abteilung eines Werkes soll ein neues zeitsparendes Arbeitsverfahren eingeführt werden. Wenn 4 Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten, erhöht sich die Produktion um 20 Prozent. Wenn 60 Prozent der Arbeiter der Abteilung dieses Verfahren anwenden, kann die Produktion auf das Zweieinhalbfache gesteigert werden.
a) Wieviel Arbeiter hat die Abteilung?
b) Auf wieviel Prozent würde sich die Produktion erhöhen, wenn alle Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten würden? (Alle Arbeiter der Abteilung führen die gleiche Tätigkeit aus.)

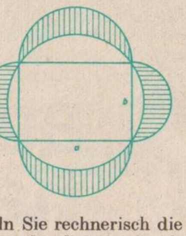
7 Auf die Frage nach seinem Alter sagte Herr X: „Die Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre beträgt genau ein Drittel dieser Anzahl. Das Quadrat der Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre ist genau dreimal so groß wie die Anzahl meiner Lebensjahre." Können die Angaben von Herrn X zutreffen?
Wenn ja, wie alt ist Herr X (Angabe in vollen Lebensjahren)?

8 Eine FDJ-Versammlung wurde so stark besucht, daß genau 75 Prozent der FDJler Platz fanden. Daher wurde beschlossen, eine zweite Versammlung in einem anderen Raum zu veranstalten. Es gingen 150 der Jugendfreunde dorthin. Die übrigen blieben im ersten Raum. Dadurch wurden in diesem genau 5 Plätze frei.
Ermitteln Sie die Anzahl aller Jugendfreunde, die zu der ursprünglich angesetzten Veranstaltung erschienen waren!

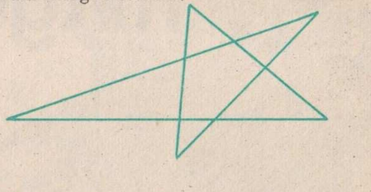


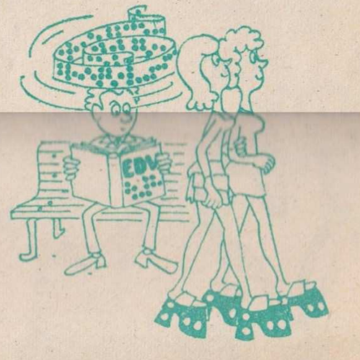
9 In der Abb. ist ein konvexer, durch ebene Flächen begrenzter Körper im Grund-, Auf- und Seitenriß dargestellt. (Ein durch ebene Flächen begrenzter Körper K heißt konvex, wenn für jede seiner Begrenzungsflächen $\mathfrak{F}$ gilt: Ist ε die Ebene, in der $\mathfrak{F}$ liegt, so befindet sich K ganz in einem der beiden Halbräume, in die der Raum durch ε zerlegt wird.) Die Umrisse des dargestellten Körpers sind im Grund-, Auf- und Seitenriß Quadrate mit der Seitenlänge a.
Bauen oder beschreiben Sie einen solchen Körper und berechnen Sie sein Volumen!

10 Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b. Über jeder Seite werde außerhalb des Rechtecks ein Halbkreis gezeichnet. Ferner konstruiere man den Umkreis des Rechtecks (siehe Abb.). Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der vier schraffierten sichelförmigen Flächen!



11 Ermitteln Sie rechnerisch die Summe der Winkel an den Spitzen des skizzierten fünfzackigen Sternes!





KLASSE 10

1 In der Aufgabe

$$\begin{array}{r} \text{V A T E R} \\ +\ \text{M U T T E R} \\ \hline \text{E L T E R N} \end{array}$$

sind für die Buchstaben Ziffern einzusetzen. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.
Geben Sie sämtliche Lösungen an und weisen Sie nach, daß es keine weiteren geben kann!

2 Ein Zug fährt mit geringer Geschwindigkeit über eine 171 m lange Brücke in 27 s (gerechnet vom Auffahren der Lokomotive auf die Brücke bis zum Verschwinden des letzten Wagens von der Brücke). An einem Fußgänger, der dem Zug mit einer Geschwindigkeit von $1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ entgegengeht, fährt der Zug in 9 s vorüber.
a) Welche Geschwindigkeit hat der Zug (in $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$)?
b) Wie lang ist der Zug?

3 Ermitteln Sie ohne Verwendung der Logarithmentafel den Quotienten

$$\frac{[\lg 3790]}{[\lg 0{,}0379]}\,!$$

Dabei bedeutet [x] die größte ganze Zahl, die x nicht übertrifft.

4 Es ist eine dreistellige Zahl zu finden, die folgende Eigenschaften hat:
a) Die Zahl ist durch 9 und 11 teilbar.
b) Vertauscht man die erste und die letzte Ziffer, so erhält man $\frac{2}{9}$ der ursprünglichen Zahl.
Wieviel Lösungen gibt es?

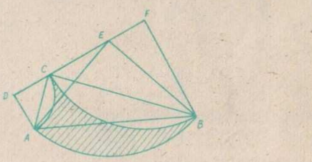
5 Beim Fußball-Toto ist auf dem Tipschein mit 12 Spielen anzukreuzen, für welche Mannschaft mit einem Sieg gerechnet oder ob das Spiel unentschieden beendet wird.
Bei einem Spiel gibt es drei Möglichkeiten: Sieg der Mannschaft A, Sieg der Mannschaft B oder unentschieden.
Wieviel Tipscheine müßte jemand ausfüllen, der auf jeden Fall einen Schein mit 12 richtigen Voraussagen haben möchte?
Der Lösungsweg ist zu begründen.

6 Vier Personen haben die Vornamen Arnold, Bernhard, Conrad und Dietrich. Auch die Familiennamen dieser Personen lauten Arnold, Bernhard, Conrad und Dietrich.
Ferner wissen wir folgendes:
a) Keine der vier Personen hat den gleichen Vor- und Zunamen.
b) Conrad hat nicht den Familiennamen Arnold.
c) Der Zuname von Bernhard stimmt mit dem Vornamen der Person überein, deren Familienname mit dem Vornamen der Person übereinstimmt, die den Zunamen Dietrich hat.
Welchen Vor- und Zunamen hat jede der vier Personen?

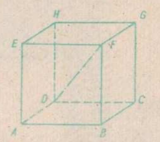
7 Die 30 Preisträger eines Schülerwettbewerbs sollen mit neu herausgegebenen Fachbüchern prämiiert werden. Es stehen 3 verschiedene Sorten von Büchern im Werte von 30 M, 24 M bzw. 18 M zur Verfügung. Von jeder Sorte soll mindestens ein Buch gekauft werden.
Welche Möglichkeiten der Zusammenstellung gibt es, wenn für die Prämiierung insgesamt 600 M zur Verfügung stehen, die restlos ausgegeben werden sollen?

8 Zwei Schüler A und B spielen miteinander folgendes Spiel. Von einem Haufen mit genau 150 Streichhölzern müssen beide jeweils nacheinander Streichhölzer entnehmen und zwar jeweils mindestens 1 Streichholz, aber höchstens 10 Streichhölzer, wobei A beginnt. Sieger ist derjenige der das letzte Streichholz fortnehmen kann.
Entscheiden Sie, wer von beiden seinen Sieg erzwingen kann, und geben Sie an, auf welche Weise er mit Sicherheit zum Ziel gelangt!

9 Vergleichen Sie die Flächeninhalte der schraffierten Fläche und des rechtwinkligen Dreiecks ABC!
(Die Dreiecke ΔACD, ΔABE und ΔCBF sind rechtwinklig-gleichschenklig; D, E und F sind die Mittelpunkte der Kreise.)



10 Gegeben sei die Kantenlänge a eines Würfels ABCDEFGH.
Ermitteln Sie die Abstände der Eckpunkte A, B, C, G, H, E von der Diagonalen DF!



KLASSE 11/12

1 Gegeben seien drei reelle Zahlen a, b und c. Zu der Funktion

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

soll eine Funktion

$$y = x^3 + mx + n \qquad (2)$$

ermittelt werden, so daß der Graph von (2) in einem rechtwinkligen, kartesischen Koordinatensystem durch eine Verschiebung des Graphen von (1) parallel zur x-Achse entsteht.
Man zeige, daß dies immer möglich ist, und daß die Funktion (2) eindeutig bestimmt ist. Die dabei auftretenden Zahlen m und n sind anzugeben.

2 Man beweise, daß für keine natürliche Zahl n die Zahl $6n + 2$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

3 Man untersuche, ob unter allen Paaren (a, b) positiver reeller Zahlen solche existieren, für die

$$f(a, b) = \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

einen kleinsten Wert annimmt. Wenn ja, dann ist dieser kleinste Wert anzugeben.

4 a) Man ermittle alle geordneten Tripel (x, y, z) reeller Zahlen, die die Gleichung

$$x^3z + x^2y + xz + y = x^5 + x^3$$

erfüllen.
b) Man gebe unter den in (a) gesuchten Tripeln alle diejenigen an, in denen von den drei Zahlen x, y, z genau eine positiv, genau eine negativ und genau eine gleich Null ist.

5 Wieviel verschiedene dreistellige Zahlen lassen sich mit den Ziffern
a) 1, 2
b) 1, 2, 3
c) 1, 2, 3, 4
bilden, wobei die Ziffern auch mehrfach benutzt werden dürfen?
Versuchen Sie, eine Gesetzmäßigkeit zu finden!
d) Welche Lösung erhält man für vierstellige Zahlen?
e) Was läßt sich für vierstellige Zahlen vermuten, wenn man n Ziffern zur Verfügung hat? Versuchen Sie diese Vermutung zu beweisen!

6 Einem Würfel von der Kantenlänge a werden ein Tetraeder und ein Oktaeder einbeschrieben.
a) Wie verhalten sich die Volumina der 3 Körper zueinander?
b) Dem Tetraeder wird noch eine Kugel einbeschrieben.
Begründen Sie, daß diese Kugel gleichzeitig das Oktaeder berührt, und drücken Sie das Volumen dieser Kugel als Funktion von a aus!

7 Zwei Hirten verkaufen eine Anzahl von Tieren, von denen jedes genausoviel Groschen einbringt, wie die Anzahl der Tiere beträgt. Den Erlös verteilen sie folgendermaßen: Der erste Hirt erhält 10 Groschen, der zweite 10 Groschen dann wieder der erste 10 Groschen, der zweite 10 Groschen usw. Nachdem der erste zum letzten Mal 10 Groschen erhalten hat, verbleibt ein Rest, der kleiner als 10 Groschen ist. Von diesem Rest kaufen sie ein Messer.
Wieviel kostet das Messer?

8 Es ist

$$\frac{26}{65} = \frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}$$

Man darf also bei diesem Bruch die Ziffern 6 „kürzen". Für welche Brüche mit zweistelligen Zählern und Nennern ist ein solches „Kürzen" irgendeiner Ziffer des Zählers gegen eine gleiche Ziffer des Nenners gestattet, ohne daß sich die dargestellte rationale Zahl ändert?

9 An einem Tanzabend hat jeder der anwesenden Herren mit mindestens einer der anwesenden Damen getanzt und jede der anwesenden Damen mit mindestens einem der anwesenden Herren. Kein Herr hat mit jeder der anwesenden Damen und keine Damen mit jedem der anwesenden Herren getanzt.
Es ist zu beweisen, daß es unter den Anwesenden wei solche Damen und zwei solche Herren gegeben hat, daß an dem Abend jede der beiden Damen mit genau einem der beiden Herren und jeder der beiden Herren genau mit einer der beiden Damen getanzt hat. (Es wird vorausgesetzt, daß der Tanzabend nicht ohne Damen und Herren stattgefunden hat, d.h. die Menge, die aus allen anwesenden Damen und Herren besteht, ist nicht leer).

10 Kann ein von einem regelmäßigen Tetraeder begrenzter Körper bei parallelem und senkrecht auf die Bildebene auftreffendem Licht auf dieser einen quadratförmigen Schatten werfen?

Mit Augenzwinkern ist nichts

Wenn die Olympioniken rechnen wie die Teufel, dann hat sie noch Zeit. Sie gehört nämlich zum Stab der Korrektoren, die sich nach den vierstündigen Klausuren mit doppeltem Zeitaufwand (manchmal war es schon nach 22 Uhr geworden) über die Aufgaben hermachen. Sie — die Korrektorin Hilde Eschrich aus Suhl — ist eigentlich Lehrerin, Oberstudienrätin ganz genau. 13 Jahre unterrichtete sie an der EOS in Suhl Mathematik, jetzt arbeitet sie als stellvertretende Direktorin des Bezirkskabinetts für Weiterbildung der Lehrer und Erzieher. Mit der Mathematikolympiade ist sie seit zehn Jahren eng verbunden, sie feierte in diesem Jahr ihr zehnjähriges Korrektorenjubiläum.

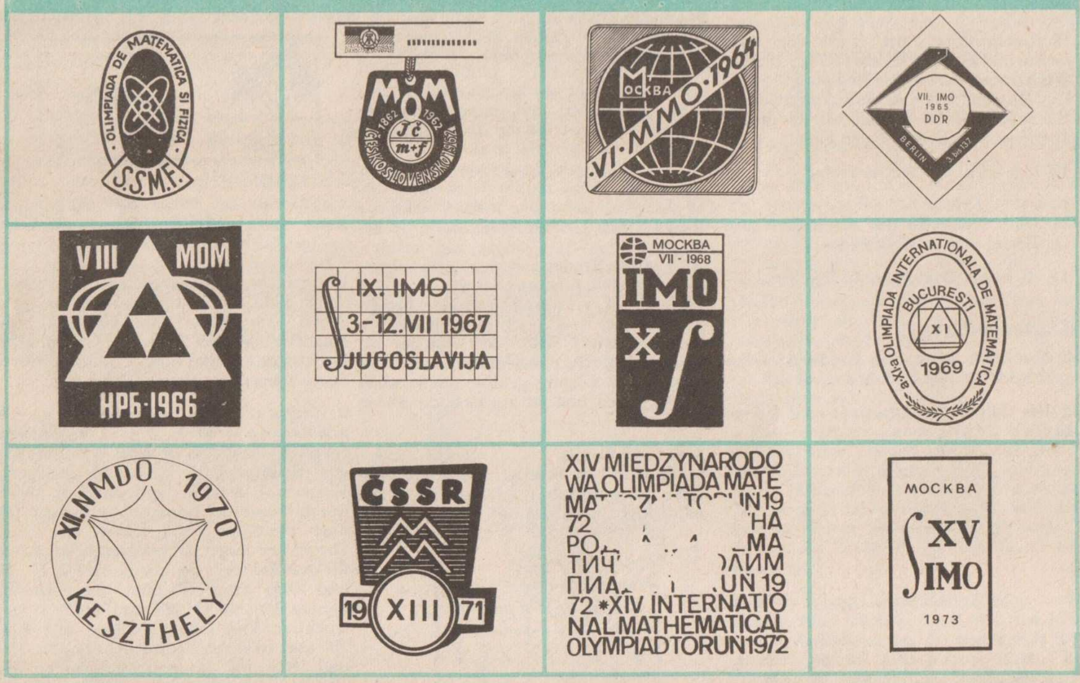
Hilde Eschrich korrigierte auch bei der nun schon wieder zurückliegenden DDR-Mathematikolympiade Aufgaben der Klassenstufe 12. An jedem der beiden aktiven Tage ging eine der drei gestellten Aufgaben von zig Teilnehmern durch ihren Kopf, durch ihre Hände. Mit Augenzwinkern ist hier nichts, es wird das bewertet, was dasteht, aber trotzdem muß sich auch ein Korrektor in den Gedankengang des Schülers hineinversetzen können, um vielleicht doch noch diesen oder jenen Punkt herauszuholen. Um den Lösungsweg eines Schülers nachzuempfinden, löst auch der Korrektor jede Aufgabe selbst. Hilde Eschrich macht das gleich, wenn die Schüler in den Klausurräumen verschwunden sind. Besser gesagt, sie kann es erst dann tun, denn korrekterweise dürfen die Korrektoren die Aufgaben erst dann sehen. Darüber hinaus gibt es natürlich einen Lösungsvorschlag der Erfinder der Olympiadeaufgaben und für alle Korrektoren gültige Punktbewertungen. Aber mit Punkten ist es ja bekanntlich immer so eine Sache. Oft wird in den Korrektorengruppen um Einzelheiten diskutiert, und wenn keine Einigkeit erzielt wird, muß der Koordinator herbeigerufen werden.

Am ersten Tag dieser DDR-Olympiade hatte Hilde Eschrich für die Korrektur die Geometrie-Aufgabe erwischt. Ja, erwischt, denn dieses Gebiet der Mathematik ist ihr selbst nicht so lieb. Es läßt sich schwer korrigieren, meist wird enorm viel Text geschrieben, und man muß mächtig aufpassen, daß man immer alles so versteht, wie der Schüler es meint.

Das Gespräch führte
Jutta Müller-Treuwerth, JW

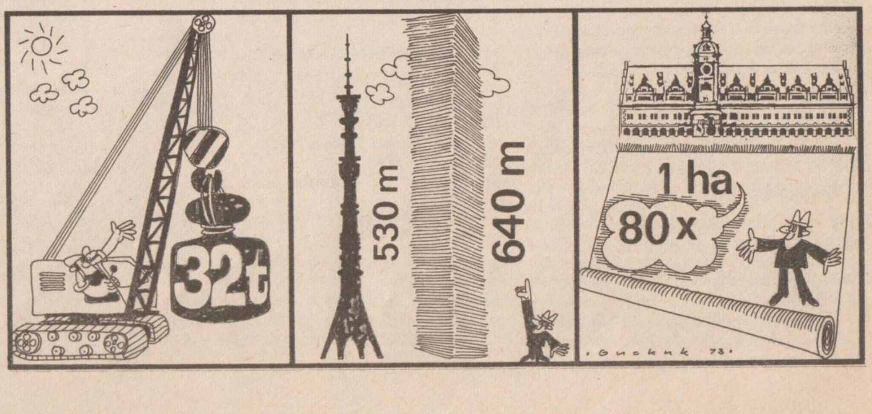
Mit diesem Beitrag danken wir all den fleißigen Helfern, welche vom Inhalt wie von der Organisation her, der Sache der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik unermüdlich helfen

Abzeichen der Freundschaft



12 JAHRE MATHE-LVZ

- 1962 ·· Mit Zirkel und Rechenstab
- 1963 ·· Mathe · international
- 1964 ·· Mathe · Olympiaden
- 1965 ·· Mathe · heiter
- 1966 ·· Mathe · Rechenvorteile
- 1967 ·· Mathe · unterhaltsam
- 1968 ·· Mathe und Sport
- 1969 ·· Mathe · Astronautik und Aeronautik
- 1970 ·· Mathe und Bauwesen
- 1971 ·· Mathe und Verkehrserziehung
- 1972 ·· Mathe und Fachunterricht
- 1973 ·· Mathe · Olympiaden



LÖSUNGEN ...

Klassenstufe 1

1 a) 8 Mädchen, b) 10 Jungen, c) 18 Kinder.

2 $a = 3$

3 Im Tafelkasten liegen 4 Stück weiße Kreide und 2 Stück blaue Kreide.

4 $\left.\begin{array}{r} 9 + 2 = 11 \\ 8 + 3 = 11 \\ 7 + 4 = 11 \\ 6 + 5 = 11 \end{array}\right\}$ oder kommutative Lösungen

5 Es wurden 9 Pfähle gebraucht.

6 $1 + 2 + 7 = 10$

7 $a = 0, 1, 2$

8 Die Vögel sind jetzt 5 Meter voneinander entfernt.

9 Rechteck, Kreis, Quadrat, Dreieck

10 $2 + 4 = 6$

11 $15 - 9 = 6$

12 $8 + 9 = 17$

13 Beim Quadrat gelten Abweichungen der Maße von 2 mm noch als richtig. Dreieck und Kreis können beliebig groß sein, sollten aber dem angegebenen Verhältnis entsprechen.

14 $14 - 5 - 4 = 5$

15 $9 + 7 = 16$

16 $x - 7 = 8$; $x = 15$

(Aus Platzgründen wurde bei einigen Aufgaben auf den Schlußsatz verzichtet.)

Klassenstufe 2

1 Brigittes Bruder hat 80 Pfennig gespart; es fehlen ihm noch 20 Pfennig an 1 M.

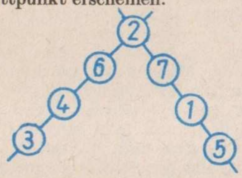
2 2. Strecke: $4 + 3 = 7$; 7 cm
3. Strecke: $5 \cdot 4 = 20$; 20 cm

3 Es müssen noch 36 Säcke gefüllt werden.

4 $24 + 30 = 54$; $7 \cdot 2 = 14$

5 $a = 4$

6 Die Verteilung der Zahlen gilt nur als Beispiel. In jedem Fall muß die 2 im Schnittpunkt erscheinen.



7 $25 < x \cdot 8 < 42$; $25 < 4 \cdot 8 < 42$; $25 < 5 \cdot 8 < 42$

8 Die Zahl heißt 3.

9 Es sind zwei Kaninchen und drei Hühner.

10 Bis zum dritten Stockwerk muß man 48 Stufen steigen.

11 Die Gleichungen heißen: $8 : 2 = 4$ $8 = 2 \cdot 4$

12 (Die Schüler sollen auf Papier mit quadratischen Kästchen zeichnen. Exaktheit der äußeren Begrenzungslinien ist ausschlaggebend.)

13 a) Für alle Schüler werden 18 Meter Stoff gebraucht.
b) Die Lehrerin muß noch 12 Meter Stoff kaufen.

14 Die Zahlen heißen 5 und 3.

15 $8 \cdot 5 + 1 + 6 + 1 = 48$
Das Wohnhaus hat 48 Räume.

16 a) Quadrat, Dreieck, Kreis, Rechteck, Parallelogramm.
b) Bei Quadrat, Rechteck und Parallelogramm verlaufen die gegenüberliegenden Seiten parallel.

Klassenstufe 3

1 Es sind 6 Quadrate und 20 Dreiecke.

2 a) Der „Trabant" fuhr 180 km in 3 Stunden.
b) Der „Wartburg" ist dem „Trabant" nach 3 Stunden um 60 km voraus.
c) Der „Wartburg" fuhr 240 km in 3 Stunden.

3

80	180	40
60	100	140
160	20	120

4 Der Turm besteht aus 6 Würfeln.

5 $36 + 36 = 72$; 72 kg Schrott
$139 - 72 - 36 = 31$; 31 kg Schrott

6 a) Im ersten Wagen befinden sich 81 Reisende, im zweiten 78 und im dritten 113 Reisende.
b) 37 Reisende müssen noch ihre Fahrkarten vorzeigen.

7

13. April bis 30. April	=	18 Tage
Mai	=	31 Tage
Juni	=	30 Tage
Juli	=	31 Tage
bis 5. August	=	5 Tage
		115 Tage

Zwischen den beiden Flügen lagen 115 Tage

8

120	220	140
200	150	130
160	110	210

9 Die gedachte Zahl heißt 310.

10 a) Nein.
b) Ein Würfel hat sechs Begrenzungsflächen. (Dieses Netz hat nur fünf Quadrate, o.ä.)

11 Karin macht 9 Schritte; Gert macht 6 Schritte.

12 Konstruktion mit Hilfe von zwei rechtwinkligen Zeichendreiecken; rechter Winkel und Parallelverschiebung.
Ein Quadrat hat vier gleichlange Seiten. Bei einem Rechteck sind nur die gegenüberliegenden Seiten gleich lang.

13 Der Omnibus hat 34 Plätze.

14 $x = 4, 5, 6$

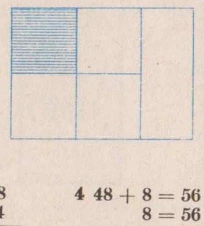
15 Zwei Rechtecke (im Sonderfall zwei Quadrate) oder zwei Dreiecke.

16 In jedem Bus sitzen 42 Pioniere.

Klassenstufe 4

1 Uwe ist 9 Jahre, sein Bruder 11 Jahre und seine Mutter 40 Jahre alt.

2 Die Seiten des Quadrats sind 2,5 cm lang.



3 $\begin{array}{r} 368 \\ +234 \\ \hline 602 \end{array}$

4 $48 + 8 = 56$
$8 = 56 - 48$
$7 \cdot 8 = 56$
$8 = 56 : 7$

5 Uwe las an einem Tag neun Seiten des Buches.

6 $40\ \text{dt} = 4000\ \text{kg}$ $4000 : 4 = 1000$
$1000 \cdot 10 = 10000$
a) 10000 kleine Weißbrote.
$10000 : 2 = 5000$
b) 5000 große Weißbrote.

7 $130 + 360 + 210 + 180 + 120 = 1000$
$360 + 110 + 120 + 250 + 160 = 1000$

8 20400

9 28 cm 8 mm

10 $501 < a < 505$ $28 > b > 25$
$501 < 502 < 505$ $28 > 27 > 25$
$501 < 503 < 505$ $18 > 26 > 25$
$501 < 504 < 505$

Klassenstufe 5

11 a) Es ist ein Quader.
b) Länge: 4,8 cm, Breite: 3,6 cm, Höhe: 2,4 cm.

12 Die Produkte heißen 744 und 738. Die Zahlen heißen 739, 740, 741, 742 und 743. Die Summe heißt 3705.

13 Zur Familie gehören 6 Kinder.

14 Eine Seite ist 40 m lang. Für 3 Seiten sind 120 m Zaun notwendig.

15 $x = 2$

16 Der LKW beginnt seine zweite Fahrt um 9.01 Uhr.

Klassenstufe 5

1 a) Es gibt neun dieser Zahlen, nämlich 16, 27, 38, 49, 50, 61, 72, 83, 94.
b) Der zusätzlichen Bedingung genügt nur die Zahl 72.

2 Die letzte Ziffer der kleineren Zahl muß 8 sein. Dann ist 8 aber auch die mittlere Ziffer der größeren Zahl. Aus der angegebenen Summe erkennt man nun leicht, daß die beiden Summanden 88 und 880 lauten müssen.

3 Die Zahlen 3; 5 und 7 sind paarweise teilerfremd. Daher ist wegen $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ eine Zahl genau dann sowohl durch 3 als auch durch 5 als auch durch 7 teilbar, wenn sie ein ganzzahliges Vielfaches von 105 ist. Nun gilt

$$\begin{array}{ll} 4 \cdot 105 = 420 & 5 \cdot 105 = 525 \\ 6 \cdot 105 = 630 & 7 \cdot 105 = 735 \\ 8 \cdot 105 = 840 & 9 \cdot 105 = 945 \\ 10 \cdot 105 = 1050. & \end{array}$$

Die Bedingungen b) und c) werden daher von den Zahlen 525, 630, 735, 840, 945 und nur von diesen erfüllt; denn jedes Vielfache von 105 mit einer kleineren ganzen Zahl als 5 ist kleiner als 500 und jedes Vielfache von 105 mit einer größeren ganzen Zahl als 9 ist größer als 1000. Von diesen Zahlen erfüllen 525, 735 und 945 und nur diese auch die Bedingung a). Die gesuchten Zahlen sind daher 525, 735 und 945 und nur diese.

4 Da Gerd mehr als doppelt so alt ist wie seine Schwester und seine Schwester viermal so alt ist wie ihr Bruder, so muß Gerd mehr als achtmal so alt sein wie sein Bruder. Wäre sein Bruder zwei oder mehr Jahre alt, dann müßte Gerd mehr als 16 Jahre alt sein. Das widerspräche der Angabe, daß die Summe der Jahre 17 beträgt.
Also ist der Bruder 1 Jahr alt, die Schwester demnach 4 Jahre, und wegen $17 - 1 - 4 = 12$ muß Gerd 12 Jahre alt sein. Wegen $4 \cdot 4 > 12$ ist auch die Bedingung erfüllt, daß Gerd weniger als viermal so alt ist wie seine Schwester. Die angegebene Lösung genügt damit allen Bedingungen und ist zugleich die einzig mögliche.

5 a) Lutz Schulz
b) Es gibt vier Schüler, deren Vorname Lutz, aber nur drei Schüler, deren Zuname nicht Schulz lautet.

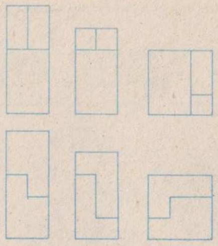
6

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2

Das ist eine Lösungsmöglichkeit.

7 $\begin{array}{r} 456 \cdot 328 \\ \hline 1368 \\ 912 \\ 3648 \\ \hline 149568 \end{array}$

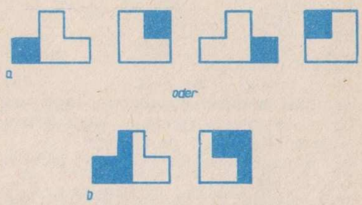
8 Man benötigt die folgenden Wägestücke: 1 g, 2 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 20 g, 50 g, 100 g, 200 g, 200 g, 500 g, und 1 kg.



10 a) Der Pionier erzielte 35 Punkte.
b) z. B.: „Die doppelte Summe war $100 - 10$, also 90, mithin betrug die Summe 45..."

11 Wegen $1780 - 220 = 1560$ betrug die Summe der Längen der 8 gleichlangen Teilstrecken 1560 km. Mithin war wegen $1560 : 8 = 195$ jede von ihnen 195 km lang.

12

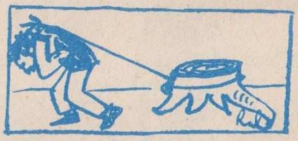


13 Es gibt folgende 16 Dreiecke:

ABE	BCD	CDI	DFI	EGH
ACF	BCI	CDF		EFG
ACG	BCH			EFH
AEF	BIH			
AGF	BDE			

14 Im Garten befinden sich 6 Parzellen zu je 150 m^2 und 3 Parzellen zu je 200 m^2.

15 a) 364 Stück b) 312 Stück



Klassenstufe 6

1 a) Da in der Folge der natürlichen Zahlen jede zweite Zahl gerade ist, muß bei drei Zahlen wenigstens eine Zahl durch 2 teilbar sein.
b) Da außerdem in der gleichen Folge jede dritte Zahl durch 3 teilbar ist, ist stets genau eine solche Zahl bei drei aufeinanderfolgenden Zahlen zu finden. Mithin kommen 2 und 3 als Primfaktoren in mindestens einer dieser Zahlen vor.

2 Wegen (2) ist a durch 60 teilbar. Es gilt daher $a = 60 \cdot b$, b ganz, und wegen (1) folgt $100 < 60b < 1201$. Somit muß b der Bedingung $1 < b < 21$ genügen. Wegen (3) kann b nicht durch 2, nicht durch 3 und nicht durch 5 und wegen (4) auch nicht durch 11 teilbar sein. Auf Grund der obigen Überlegungen kommen für den Faktor b nur die Zahlen 7, 13, 17 und 19 in Frage. Es sind also noch die Zahlen 420, 780, 1020 und 1140 zu betrachten. Von ihnen genügen nur 420, 780 und 1020 der Bedingung (4). 420, 780 und 1020 sind die gesuchten Zahlen. Es gibt keine weiteren natürlichen Zahlen, die (1) bis (4) gleichzeitig erfüllen.

3 18, da $81 = 4\frac{1}{2} \cdot 18$

4 (4) Wegen der Aussagen (1) und (2) ist die Volleyballspielerin weder Marion noch Petra. Ruth ist also die Volleyballspielerin.
(5) Da die Tischtennisspielerin wegen (3) nicht Marion und wegen (4) nicht Ruth sein kann, ist Petra die Tischtennisspielerin.
(6) Aus (4) und (5) ergibt sich: Marion ist die Schwimmerin.

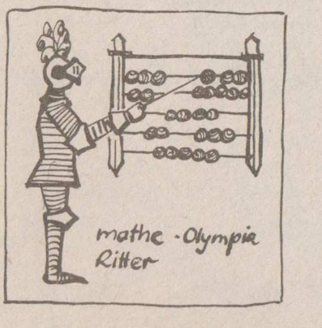
5 Paul ist 8 Jahre alt, da seine Mutter 40 Jahre, sein Vater $40 + 5$ Jahre, also 45 Jahre, Lotte $45 : 3$ Jahre, also 15 Jahre, Emil $15 - 4$ Jahre, also 11 Jahre alt sind.

6 Bezeichnet man die Ringzahl der Schützen mit den Anfangsbuchstaben der entsprechenden Vornamen, so erhält man aus den Angaben der Aufgabe,
(1) $J > G$ (2) $E + R = J + G$
(3) $E + J < R + G$.
Aus (2) und (3) ergibt sich durch Addition $2E + J + R < 2G + J + R$, also $E < G$. Hieraus und aus (2) folgt
$R - J = G - E > 0$ also $J < R$.
Daher gilt $R > J > G > E$. Die gesuchte Reihenfolge: Regina, Joachim, Gerd, Elke.

7 Um die Bedingungen der Aufgabe zu erfüllen, muß der Wagen eine Strecke zurücklegen, deren Länge ein gemeinsames Vielfaches, und zwar das kleinste gemeinsame Vielfache, von 210 cm und 330 cm ist. Daher ermitteln wir das k.g.V. von 210 und 330:
$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$
k.g.V.: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$.
Die kürzeste Strecke, die vom Wagen zurückgelegt werden muß, bis jedes Rad genau eine ganze Anzahl von Umdrehungen durchgeführt hat, ist daher
2310 cm = 23,10 m lang.
Probe: $2310 : 210 = 11$; $2310 : 330 = 7$
Die Vorderräder machen dabei genau 11, die Hinterräder genau 7 Umdrehungen.

8 Man kann die Wörter „Junge Welt" ohne Überspringen genau 56mal lesen. Von jedem Buchstaben, der nicht in der letzten Zeile oder in der letzten Spalte steht, kann man entweder zum rechts daneben stehenden Buchstaben (Schritt a) oder zum darunter stehenden Buchstaben (Schritt b) weitergehen. Jeder Möglichkeit das Wort „Junge Welt" in der angegebenen Weise zu lesen, ist also eine Folge von Schritten zugeordnet. Die Aufgabe besteht nun in der Berechnung der Anzahl der verschiedenen Anordnungen von 5 Buchstaben a und 3 Buchstaben b. Diese ist
$$\frac{(5+3)!}{5! \cdot 3!} = 56.$$

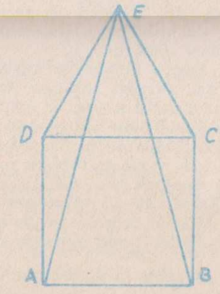
9 Genau $\frac{3}{25}$ der eingesandten Lösungen waren laut Aufgabe richtig. Das Doppelte von $\frac{3}{25}$ ist $\frac{6}{25}$. Genau $\frac{6}{25}$ der Lösungen enthielten mithin je genau zwei richtige Zuordnungen. Das Vierfache von $\frac{3}{25}$ ist $\frac{12}{25}$. Genau $\frac{12}{25}$ der Lösungen enthielten also je genau drei falsche Zuordnungen. Wegen $1 - \frac{3}{25} - \frac{6}{25} - \frac{12}{25} = \frac{4}{25}$ sind die 240 eingesandten Lösungen mit keiner richtigen Zuordnung daher genau $\frac{4}{25}$ aller eingesandten Lösungen. Also stellt der vierte Teil von $\frac{4}{25}$, d.h. $\frac{1}{25}$ aller Lösungen genau 60 Lösungen dar, und dies ist nur möglich, wenn die Anzahl aller Lösungen das 25fache von 60, d.h. 1500 beträgt. Tatsächlich erfüllt diese Anzahl alle Bedingungen der Aufgabe; denn $\frac{1}{25}$ von 1500 Lösungen sind 60 Lösungen, $\frac{3}{25}$ betragen also 180 Lösungen; doppelt bzw. viermal so viel sind dann 360 bzw. 720 Lösungen; und wegen
$180 + 360 + 720 + 240 = 1500$ wird aus den so laut Aufgabenstellung gebildeten einzelnen Anzahlen die angegebene Gesamtzahl der Lösungen zusammengesetzt.



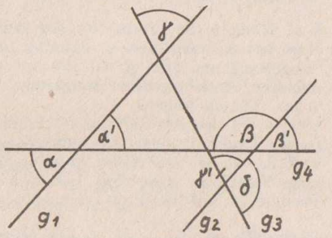
10 Wir können in jede der Kisten 64 Pakete einpacken, wenn wir die Pakete so hineinlegen, daß ihre längsten Kanten parallel der längsten Kistenkante und ihre zweitlängsten Kanten parallel der zweitlängsten Kistenkante liegen. In diesem Fall erhalten wir 4 übereinanderliegende Schichten von je 16 Paketen. Mit 25 so gepackten Kisten kommen wir aus; denn die Anzahl der in ihnen liegenden Pakete beträgt $25 \cdot 64 = 1600$. Die Summe der Volumina der Innenräume aller 25 Kisten beträgt genausoviel wie die Summe der Volumina der Pakete. Da weniger als 25 Kisten ein kleineres Volumen als das hier ermittelte haben, ist 25 die kleinste Anzahl von Kisten, die ausreicht, um 1600 Pakete der in der Aufgabe angegebenen Größe gleichzeitig zu versenden.

11 Es wären 1728 Erdarbeiter erforderlich.

12 Im Dreieck $\triangle AED$ gilt (siehe Abb.) $\overline{AD} = \overline{DE}$ (nach Konstruktion)
(1) Daraus folgt $\sphericalangle DAE \cong \sphericalangle AED$ (als Basiswinkel). Ferner ist:
(2) $\sphericalangle \overline{EDA} = \sphericalangle \overline{EDC} + \sphericalangle \overline{CDA}$
$= 60° + 90° = 150°$.
Aus (1), (2) und
$\sphericalangle \overline{AED} + \sphericalangle \overline{EDA} + \sphericalangle \overline{DAE} = 180°$
(nach Winkelsummensatz) folgt
$\sphericalangle \overline{AED} = 15°$.
Entsprechend ist $\sphericalangle \overline{BEC} = 15°$, also
$\sphericalangle \overline{AEB} = \sphericalangle \overline{DEC} - \sphericalangle \overline{AED} - \sphericalangle \overline{BEC}$
$= 30°$.



13 Es gilt mit den in der Abb. gewählten Bezeichnungen $\alpha = \alpha'$ (als Scheitelwinkelpaar), $\beta + \beta' = 180°$ (als Nebenwinkelpaar), mithin $\beta' = 180° - \beta$; $\beta' = 180° - 130°$; $\beta' = 50°$; also $\beta' = \alpha$.
Daraus folgt: $g_1 \| g_2$. Nun ist ferner: $\gamma = \gamma'$ (als Stufenwinkelpaar an geschnittenen Parallelen) und $\gamma' + \delta = 180°$ (als Nebenwinkelpaar), also $\delta = 180° - \gamma'$, $\delta = 180° - 70° = 110°$.



14 Der Ingenieur heißt Eichler, der Elektriker heißt Baumann und der Monteur heißt Hahn.
Begründung: Aus b und d folgt, daß Herr Hahn weder Elektriker noch Ingenieur ist. Er ist also Monteur ... usw.

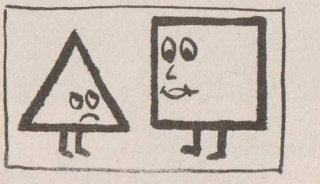
Klassenstufe 7

1 Die 54 Fuchsschritte holt der Hund mit 216 Hundeschritten auf.

2 Man schreibt die echten Teiler der natürlichen Zahlen von 2 bis 30 für jede dieser Zahlen auf und bildet jeweils die Summe. Dabei findet man, daß
$6 = 1 + 2 + 3$ und
$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ gilt.

3 Die Antworten 2. und 3. lassen nur die beiden folgenden Möglichkeiten zu:
(a) Hans zweiter und Wolfgang dritter;
(b) Paul zweiter und Wolfgang vierter.
(b) steht im Widerspruch zu 1. (a) und 1. ergibt sich folgende Platzbelegung: Paul erster, Hans zweiter, Wolfgang dritter, Jürgen vierter.

4 Man denke sich aus den Wandleuchten mit je 4 Glühlampen je 2 herausgeschraubt. Das ergibt genau so viel Glühlampen, wie es Leuchten mit je 1 Glühlampe gibt. Man könnte daher in jede dieser Leuchten je eine Glühlampe einschrauben. Ebenso denke man sich aus den Leuchten mit 3 Glühlampen je 1 Glühlampe herausgeschraubt.
Das sind genau doppelt so viele Glühlampen, wie es Leuchten ohne Glühlampen gibt. Man könnte daher in jede dieser Leuchten je 2 Glühlampen einschrauben. Dann hätte man insgesamt genau 21 Leuchten mit genau je 2 Glühlampen. Man benötigt also noch genau 42 Glühlampen, um alle Leuchten voll auszustatten.



5 Die Anzahl der Ziffern 9 beträgt
an der Tausenderstelle 0,
an der Hunderterstelle (von 1 bis 999, von 1000 bis 1999, von 2000 bis 2999, von 3000 bis 3999, von 4000 bis 4999 je 100 mal die Ziffer 9) $5 \cdot 100 = 500$,
an der Zehnerstelle (in jedem Hunderterbereich 10mal, in 55 Hunderterbereichen also) $10 \cdot 55 = 550$,
an der Einerstelle (in jedem Zehnerbereich eine Ziffer 9, in 555 Zehnerbereichen also) $1 \cdot 555 = 555$.
Insgesamt wird die Ziffer 9 dabei 1605mal aufgeschrieben.

6 In der 3. und 4. Spalte liegt im Uhrzeigersinn die verlangte Buchstabenfolge LFGA vor. Damit L und F sowie A und G jeweils übereinander liegen, beginnt man, in dem man

A	unter	G
L		F

faltet. Um zu erreichen, daß G und F aufeinander liegen, faltet man O N G (wobei A mitgeführt wird) auf W G F (worunter L liegt). Nun liegen O W daneben N G sowie daneben A G F L jeweils in dieser Reihenfolge untereinander. Die letztgenannten vier Buchstaben legt man um auf N, (worunter G liegt) um L P G A N G zu erhalten. Schließlich faltet man G (wobei G mitgeführt wird) auf L (worunter F G A N G liegt) und erhält dadurch W O L F G A N G.

7 a) Bezeichnet man den Minuenden mit m ($m \neq 0$), dann ist der Subtrahend $\frac{2}{5}$ m.
Die Differenz ist $m - \frac{2}{5} m = \frac{3}{5} m$.
Wegen $\frac{3}{5} m = \frac{60}{100} m$ beträgt die Differenz 60% des Minuenden.
b) Die Summe aus Minuend und Subtrahend ist $m + \frac{2}{5} m = \frac{7}{5} m$. Wegen $\frac{7}{5} m = \frac{140}{100} m$ beträgt diese Summe 140% des Minuenden.

8 Die Zahl ist gleich
$$\frac{377 \cdot 436 + 436 - 56}{377 \cdot 436 + 378} = \frac{377 \cdot 436 + 380}{377 \cdot 436 + 378}$$
Da der Zähler größer als der Nenner ist, ist die Zahl größer als 1.

9 Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt rund $38{,}3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

10 Das Volumen (in Litern gemessen) ist der inneren Höhe des Gefäßes direkt proportional. $\frac{3}{4}$ des Volumens verringern sich auf $\frac{2}{5}$ des Volumens dadurch, daß $2\frac{1}{2}$ Liter ausgegossen werden.
Wegen $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{7}{20}$ folgt daraus: $\frac{7}{20}$ des Volumens sind gleich $2\frac{1}{2}$ Liter. Das Gefäß hat demnach ein Fassungsvermögen von $\frac{20}{7} \cdot 2\frac{1}{2}$ Liter $= \frac{50}{7}$ Liter.

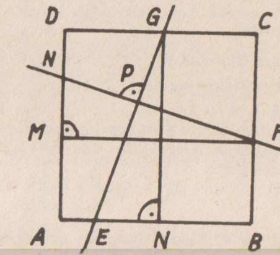
11 $250 \text{ cm} - (2 \text{ cm} \cdot 2{,}5 + 1 \text{ cm}) \cdot 2 = 238 \text{ cm}$; $238 \text{ cm} : 14 = 17 \text{ cm}$

12 Man zieht durch den Scheitelpunkt des Winkels γ die Parallele zu g und h. Es ist $\gamma = \alpha + \beta$.
(Wechselwinkel an Parallelen)

13 a) $\triangle ABD$ aus s, $\frac{\gamma}{2}$ und h_a konstruieren ($\triangle ACD$ ist gleichschenklig)
b) $\frac{\gamma}{2}$ in A an AD antragen, führt auf C.

14 Die Dreiecke $\triangle SMF$ und $\triangle MGF$ sind flächengleich (gleich lange Grundlinie und gleich lange Höhen). Das gilt auch für die Dreiecke $\triangle SLF$ und $\triangle LEF$, für $\triangle SLD$ und $\triangle LED$ usw. Daraus folgt daß der Flächeninhalt des Achtecks ABCDEFGH doppelt so groß ist wie der des Achtecks IBKDLFMH.

15 Wir legen durch F die Parallele zu $\overline{AB}$ und durch 0 die Parallele zu $\overline{BC}$. Es entstehen die Schnittpunkte M und N (vgl.



die Abb.). Dann gilt $\overline{NG} = \overline{MF}$;
$\sphericalangle MFH \cong \sphericalangle NGE$ wegen $\overline{MF} \perp \overline{NG}$, $\overline{HF} \perp \overline{EG}$. Daraus folgt die Kongruenz der Dreiecke $\triangle ENG$ und $\triangle HMF$. Also gilt: $\overline{EG} \cong \overline{HF}$.

Klassenstufe 8

1 Da $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ ist, die Zahl aber durch 9 teilbar sein muß, muß ihre Quersumme 36 betragen, denn
$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 44$.
Um die kleinste derartige Zahl zu erhalten, nimmt man als erste Ziffern 1023. Dann verbleiben für die letzten vier Stellen noch 6, 7, 8, 9 und es gilt
$6 + 7 + 8 + 9 = 30$. Die kleinste vierstellige Zahl aus dieser Ziffern, die durch 8 teilbar ist, ist aber 7896.
Also heißt die gesuchte Zahl 10237896.

2 Die gesuchte Anzahl ist gleich der Anzahl aller dreistelligen Zahlen, da sich aus jeder dreistelligen Zahl genau eine derartige Zahl ergibt, wenn man die ersten beiden Ziffern der Zahl in umgekehrter Reihenfolge hinter die Zahl schreibt, und man umgekehrt jede derartige fünfstellige Zahl aus einer dreistelligen erhält. Da es 900 dreistellige Zahlen gibt, beträgt die gesuchte Anzahl 900.

3 a) Da die Zahl zweistellig sein soll, muß sie größer sein als 9. Daraus folgt, daß ihr um 9 vermindertes Doppeltes größer sein muß als sie selbst. Wegen der 2. Bedingung besagt dies, daß bei Umstellung der Ziffern aus der Zahl eine größere Zahl entstehen soll. Daher muß ihre erste Ziffer kleiner sein als ihre zweite.
b) Ferner soll das um 9 verminderte Doppelte wieder zweistellig, also höchstens 99 sein. Daraus ergibt sich, daß die Zahl höchstens 54 betragen kann. Wegen der 1. Bedingung verbleiben hiernach noch genau die folgenden Möglichkeiten: 14, 25, 36 und 47. Von diesen erfüllt nur die Zahl 36 alle Bedingungen der Aufgabe.

4 Mehrere Lösungen sind möglich. Im Mittelfeld muß stets 7 stehen, da die Mittelfeldzahl mit allen Zahlen summiert wird und sonst die 11 oder die 3 nicht verwendet werden können
$(11 + 7 = 18$ bzw. $3 + 4 = 7)$.
Die Zahlen 11 und 3 dürfen nur zweimal in einer Summe auftreten, da
$11 + 7 + 3 = 11 + 6 + 4 = 21$
und andere Kombinationen nicht möglich sind. Sie können daher nicht an den Ecken stehen. (Beispiel siehe Abb.)

6	11	4
5	7	9
10	3	8

5 Es gab ursprünglich 20 Querreihen mit je 15 Stühlen. Jetzt sind es 25 Querreihen zu 12 Stühlen. Nur für den angeführten Fall sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

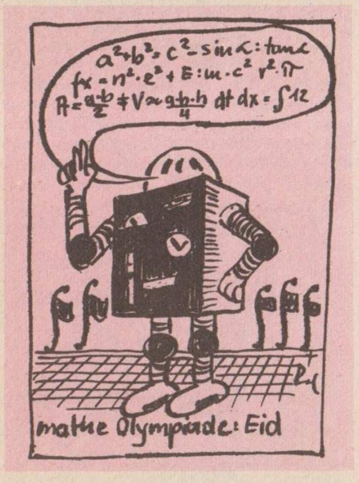
6	Alter	
Steuermann	$2x$	36
Maschinist	$2x - 6$	30
1. Matrose	$\frac{2x - 6 + x}{2}$	24
2. Matrose	$\frac{2x - 6 + x}{2} - 4$	20
Jüngster Matrose	x	18

Aus der Gleichung erhält man
$2x - 6 + x - 8 = 40, \qquad x = 18.$
Es ergeben sich die in der letzten Spalte eingetragenen Alter. Für das Alter des Kapitäns gilt:
$36 + 30 + 24 + 20 + 18 + z = 28 \cdot 6,$
$z = 40.$

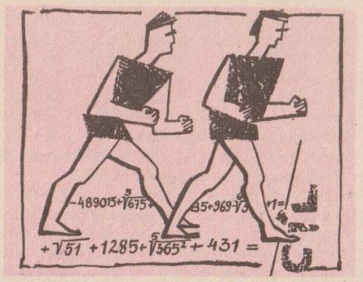
7 Rolf ist 27 Jahre, Inge 18 Jahre alt. Inge sei früher x Jahre alt gewesen. Dann war Rolf damals 2x Jahre alt. Heute ist also Inge 2x Jahre und Rolf somit 3x Jahre alt. Beide zusammen sind heute 5x Jahre alt. Daraus erhält man $x = 9$ usw.

8 Es genügt, alle möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen der Kugeln auf einen der Kästen (z. B. A) zu betrachten, da dadurch die Verteilung der restlichen Kugeln auf den Kasten B eindeutig bestimmt ist. Der Kasten A kann höchstens 1 schwarze, höchstens 2 weiße und höchstens 3 rote Kugeln enthalten. Alle möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen gibt daher das folgende Schema an:

	A	B	
1.	r r r	r s w w	
2.	r r s	r r w w	
3.	r r w	r r s w	Dabei bedeuten:
4.	r s w	r r r w	r — rote Kugel
5.	r w w	r r r s	s — schwarze Kugel
6.	s w w	r r r r	w — weiße Kugel



9 Peter muß den Inhalt der gekauften Flaschen von dem Erlös der 6 nicht zurückerhaltenen Flaschen bezahlen. Wegen $180 : 21 = 8\frac{12}{21}$ kann er höchstens 8 Flaschen gekauft haben.
1. Lösung: Peter hatte 14 Flaschen mit und erhält 12 Pf zurück.
2. Lösung: Peter hatte 13 Flaschen mit und erhält 33 Pf zurück.
Hätte Peter 12 Flaschen mitgehabt, so hätte er 7 Flaschen kaufen können, also $(n - 5)$ statt nur $(n - 6)$, was der Aufgabe widerspricht.

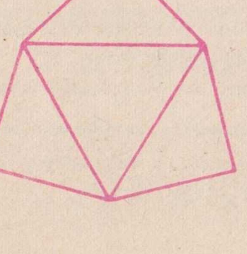


10 In der Zeit $t_1 = 85$ min legt der LKW die gleiche Strecke zurück, für die der PKW die Zeit $t_2 = 55$ min brauchte. Bezeichnet man die Geschwindigkeit des LKW mit $v_1 = x\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, dann beträgt die des PKW $v_2 = (x + 25)\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Wegen $s = t_1 \cdot v_1 = t_2 \cdot v_2$ gilt dann:
$x \cdot \frac{85}{60} = (x + 25) \cdot \frac{55}{60}$.
Daraus erhält man
$$x = \frac{5 \cdot 55}{6}\,6 = 45\frac{5}{6}.$$
a) Die Geschwindigkeit des LKW betrug $45\frac{5}{6}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, die des PKW $70\frac{5}{6}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
b) Wegen $\frac{5 \cdot 55}{6} \cdot \frac{85}{60} = 64\frac{67}{72} \approx 64{,}9$ beträgt die durchfahrene Wegstrecke
$$s = 64\frac{67}{72}\,\text{km} \approx 64{,}9\,\text{km}.$$
Umgekehrt werden durch diese Werte in der Tat alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. In 85 min durchfährt der LKW mit seiner Geschwindigkeit $45\frac{5}{6}$ km die Strecke $\frac{85}{60} \cdot \frac{275}{6}\,\text{km} = \frac{5 \cdot 55 \cdot 85}{6 \cdot 60}\,\text{km} = s$; die Geschwindigkeit $70\frac{5}{6}\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ des PKW ist um $25\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ größer als die des LKW, und mit ihr durchfährt er in
$(85 - 30)$ min $= 55$ min die Strecke
$\frac{55}{60} \cdot \frac{425}{6}\,\text{km} = \frac{5 \cdot 55 \cdot 85}{6 \cdot 60}\,\text{km} = s.$

11 In je 100 g der Lösung sind genau 7,2 g Kochsalz enthalten. Folglich beträgt die Kochsalzmenge in 3000 g Lösung
$30 \cdot 7{,}2\,\text{g} = 216\,\text{g}$.
Da beim Verdampfen die Kochsalzmenge konstant bleibt, sind auch in der neuen Lösung von 2400 g genau 216 g Kochsalz enthalten. Mithin enthält die neue Lösung in je 100 g eine Kochsalzmenge von genau
$216\,\text{g} : 24 = 9\,\text{g}$,
d. h. die Lösung ist 9prozentig.

12 Der gesuchte Flächeninhalt A ist gleich der Summe der Inhalte der Halbkreisflächen über $\overline{AB}$, $\overline{FG}$, $\overline{AO}$ und $\overline{OB}$ vermindert um die Summe der Inhalte der Halbkreisflächen über $\overline{EH}$, $\overline{EF}$ und $\overline{GH}$. Wegen $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{FG} = 2$ cm, $\overline{AO} = \overline{OB} = 3$ cm, $\overline{EH} = 4$ cm, $\overline{EF} = \overline{GH} = 1$ cm gilt daher:
$A = \frac{\pi}{8}\,(36 + 4 + 9 + 9 - 16$
$- 1 - 1)\,\text{cm}^2 = 5\,\pi\text{cm}^2.$
Der Inhalt der schraffierten Fläche beträgt $5\,\pi\,\text{cm}^2$, das sind angenähert $15{,}71\,\text{cm}^2$.

13 a) Ein von einem Tetraeder begrenzter Körper, bei dem drei Seitenflächen untereinander kongruente, rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke sind, besitzt einen derartigen Grund-, Auf- und Kreuzriß.



Klassenstufe 9

1 Die gesuchte dreistellige Zahl sei xyz bzw. $100x + 10y + z$ (mit x, y und z ganzzahlig, $0 \leqq x, y, z \leqq 9$ und x ungleich 0). Aus je 2 Ziffern lassen sich 6 zweistellige Zahlen bilden, und zwar
$10x + y,\ 10x + z,\ 10y + x,\ 10y + z,$
$10z + x,\ 10z + y.$
Also gilt:
$22x + 22y + 22z = 200x + 20y + 2z,$
oder $89x - y - 10z = 0$, bzw.
$y = 89x - 10z.$
Diese diophantische Gleichung hat in dem angegebenen Definitionsbereich als einzige Lösung $x = 1, y = 9, z = 8.$
Die gesuchte Zahl ist also 198.

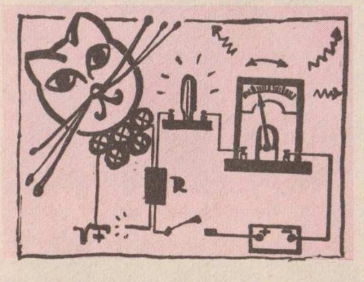
2 Die gesuchte Zahl sei x. Die fünfstellige Zahl, die man erhält, wenn man bei der gesuchten Zahl die Endziffer 5 streicht, sei a.
Dann gilt:
$x = 10a + 5$ und
$5 \cdot 10^5 + a = 4\,(10a + 5)$
$39a = 499980 \qquad a = 12820$
$x = 128205$
Die gesuchte Zahl heißt 128205.

3 a) Die Säckchen enthalten 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, und 512 Kugeln.
b) Man braucht 2 Säckchen mehr, da mit 11 Säckchen höchstens alle Anzahlen von 1 bis 2047 zusammengestellt werden können, also noch ein weiteres Säckchen nötig ist.

4 1. Fall: Angenommen, die Aussage 1 sei wahr. Dann sind die Aussagen 2 und 3 falsch. Also hätte Brigitte den Ball. Das steht aber im Widerspruch zu der Aussage 1, da nicht zwei Schülerinnen den Ball haben können.
2. Fall: Angenommen, die Aussage 2 sei wahr, d. h. Brigitte hat den Ball nicht. Dann sind die Aussagen 1 und 3 falsch. Also hat Claudia die Schere. Anna hat den Ball nicht. Also müßte Claudia den Ball haben, was zu einem Widerspruch führt
3. Fall: Angenommen, die Aussage 3 sei wahr. Dann sind die Aussagen 1 und 2 falsch. Also hat Brigitte den Ball, Claudia hat den Bleistift und Anna die Schere.

5 Die gesuchte Teilnehmerzahl sei a. Dann beträgt die Zahl der Preisträger $\frac{a}{9}$. Daher ist die Zahl der Preisträger, die dem Kreisklub angehören $\frac{3}{4} \cdot \frac{a}{9} = \frac{a}{12}$. Ferner beträgt die Zahl der Teilnehmer, die Mitglieder des Kreisklubs sind $\frac{a}{10}$. Da genau 6 teilnehmende Klubmitglieder ohne Preis bleiben, folgt $\frac{a}{10} - \frac{a}{12} = 6$ und hieraus $a = 360$.

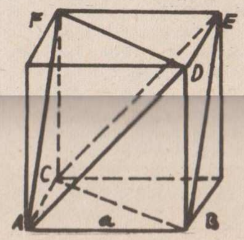
6 a) Wenn p die Produktion der Abteilung ist, so erreichen 4 Arbeiter eine Steigerung um 0,20 p. 60 Prozent der Arbeiter erreichen eine Steigerung um 1,5 p. Daraus folgen:
60 % ≙ 30 Arbeiter 100 % ≙ 50 Arbeiter.
In der Abteilung sind 50 Arbeiter tätig.
b) Falls alle Arbeiter dieser Abteilung das neue Verfahren anwenden, läßt sich die Produktion auf 350 Prozent steigern.



7 (1) Wenn die Angaben von Herrn X zutreffen, so ist das Quadrat der erwähnten Quersumme genau dreimal so groß wie die Anzahl der Lebensjahre und diese wiederum genau dreimal so groß wie die erwähnte Quersumme. Daher ist das Quadrat dieser Quersumme genau neunmal so groß wie die Quersumme selbst.
Daraus folgt, daß die Quersumme 9, und somit das Alter von Herrn X 27 Jahre beträgt.
(2) Wenn Herr X 27 Jahre alt ist, so ist die Quersumme der Anzahl seiner Lebensjahre 9, also ein Drittel dieser Anzahl. Ferner ist dann das Quadrat 81 der Quersumme genau dreimal so groß wie die Anzahl der Lebensjahre des Herrn X. Daher treffen die Angaben von Herrn X dann zu.
Aus (2) folgt, daß die Angaben von Herrn X zutreffen können. Hieraus und aus (1) folgt, daß Herr X 27 Jahre alt ist.

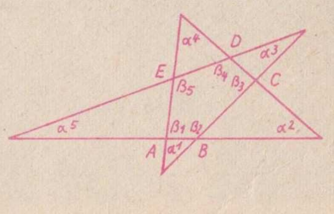
8 Da 150 FDJler den Raum verließen und dadurch 5 Plätze frei wurden, hatten vorher genau 145 Jugendfreunde keinen Platz gefunden.
Aus 145 ≙ 25 % folgt 580 ≙ 100 %.
Daher waren zu der ursprünglich angesetzten Versammlung genau 580 Jugendfreunde erschienen. Umgekehrt folgt, daß in der Tat die Zahl 580 die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

9 Ein solcher Körper entsteht z. B. aus einem Würfel mit der Kantenlänge a, in dem zwei Tetraeder mit ebenen Schnitten durch die Punkte A, D, F bzw. B, C, E abgetrennt werden. Für das Volumen V_P eines jeden dieser Tetraeder gilt $V_P = \frac{1}{6}\,a^3$.
Das Volumen V des so entstandenen Körpers ist dann
$V = a^3 - 2 \cdot \frac{1}{6}\,a^3 = \frac{2}{3}\,a^3.$



10 (1) Der Flächeninhalt der vier Halbkreisflächen über den Rechteckseiten beträgt
$A_1 = \pi\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right).$
(2) Der Flächeninhalt des Umkreises, dessen Radius gleich der halben Diagonale des Rechtecks ist, beträgt
$A_2 = \pi\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right).$
(3) Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt $A_3 = a \cdot b.$
Der gesuchte Flächeninhalt A ist dann:
$A = A_1 + A_3 - A_2$
$= \pi\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) + a \cdot b - \pi\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right)$
$= ab.$
Die Summe der Flächeninhalte der sichelförmigen Flächen ist gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks, also $A = ab$.

11 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$
seien die Gradmaße der Winkel an den Spitzen,
$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$
seien die Gradmaße der Winkel des inneren konvexen Fünfecks ABCDE. Dann gilt
$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 = 540°,$
da die Summe der Innenwinkel jedes nicht überschlagenen n-Ecks
$2\,(n - 2) \cdot 90°$ beträgt. Ferner gilt
$= 180° - (180° - \beta_1) - (180° - \beta_2),$
$\alpha_1 = \beta_1 + \beta_2 - 180°$
$\alpha_2 = \beta_2 + \beta_3 - 180°$
$\alpha_3 = \beta_3 + \beta_4 - 180°$
$\alpha_4 = \beta_4 + \beta_5 - 180°$
$\alpha_5 = \beta_5 + \beta_1 - 180°$
(Nach dem Satz über die Summe der Innenwinkelgrößen im Dreieck und dem Nebenwinkelsatz.)
Daraus folgt
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$
$= 2 \cdot 540° - 5 \cdot 180° = 180°.$
Die gesuchte Winkelsumme beträgt 180°.



Klassenstufe 10

1 Man setzt für N der Reihe nach 0, 2, 4, 6 und 8 ein. Dann gibt es für R stets zwei Möglichkeiten wobei entweder $R \leqq 5$ oder $R > 5$ gilt. Für $N = 2$ und $N = 6$ wird $R \leqq 5$ ungerade und $R > 5$ gerade. Das führt zu Widersprüchen, da im ersten Falle R (wegen $E + E = R$ bzw. $E + E = R + 10$) gerade, im zweiten Falle (wegen $E + E + 1 = R$ bzw. $E + E + 1 = R + 10$) ungerade sein müßte. Man braucht also nur noch die übrigen Fälle zu untersuchen.

1. Es sei $N = 0$. Dann folgt daraus $R = 0$ (Widerspruch) oder $R = 5$ und weiter $E = 2$ oder $E = 7$.

Aus $E = 2$ folgt $M = 1$ und $T = 1$ (Widerspruch) oder $T = 6$ und daraus $A = 9$. Mithin bleiben für U, V, L nur 3, 4, 7 und 8. Wegen $U + V + 1 = L + 10$ erhält man die beiden Lösungen

$U = 4, \quad V = 8, \quad L = 3$

$U = 8, \quad V = 4, \quad L = 3.$

Aus $E = 7$ folgt $M = 6$ und $T = 3$ oder $T = 8$.

Aus $T = 3$ folgt aber $A = 0$ (Widerspruch). Aus $T = 8$ folgt $A = 9$.

Für U, V, L bleiben mithin 1, 2, 3 und 4. Das ergibt wegen $U + V + 1 = L + 10$ keine Lösungen.

II. und III. Die Fälle $N = 4$ und $N = 8$ werden analog untersucht, wobei zu beachten ist, daß zu jeder Zahl N zwei verschiedene Zahlen R zu jeder Zahl R ebenso zwei verschiedene Zahlen E und zu jeder Zahl E ebenfalls zwei verschiedene Zahlen T möglich sind, deren Differenz jeweils 5 beträgt.

Für $N = 4$ treten bereits bei allen vier für E möglichen Zahlen Widersprüche auf, während man aus den übrigen Fällen noch die folgenden 6 Lösungen ermittelt:

N	8	8	8	8	8	8
R	4	4	4	4	9	9
E	2	2	7	7	4	4
M	1	1	6	6	3	3
T	6	6	3	3	2	2
A	9	9	0	0	0	0
U	5	7	2	9	5	6
V	7	5	9	2	6	5
L	3	3	1	1	1	1

Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft.

2 Es ist $v_z = \frac{1-9}{9}\, m \cdot s^{-1}$ und

$v_z = \frac{171+1}{27}\, m \cdot s^{-1}$.

Daraus: $\quad l = 99\ m$

$v_z = 10\ m \cdot s^{-1} = 36\ km \cdot h^{-1}$.

3 Wegen $10^3 < 3790 < 10^4$ ist $3 < \lg\ 3790 < 4$, also $[\lg\ 3790] = 3$. Wegen $10^{-2} < 0{,}0379 < 10^{-}$ ist $-2 < \lg\ 0{,}0379 < -1$, also $[\lg\ 0{,}0379] = -2$. Daher beträgt der gesuchte Quotient $\frac{3}{-2} = -1{,}5$.

4 Da die gesuchte Zahl durch 99 teilbar ist und die letzte Ziffer nicht größer als die erste Ziffer sein kann, kommen nur die Zahlen 594, 693, 792 und 891 in Frage.

Berechnet man $\frac{2}{9}$ dieser Zahlen, so erhält man die Zahlen 132, 154, 176 und 198.

Nur die letzte Zahl entspricht der gestellten Bedingung. 891 ist also die einzige Zahl, die die geforderten Eigenschaften hat.

5 Bei einem Spiel gäbe es drei Möglichkeiten, bei 2 Spielen könnte jeder der 3 Möglichkeiten des ersten Spieles mit jeder der drei Möglichkeiten des zweiten Spieles kombiniert werden. Man hätte also 3^2 Möglichkeiten. Entsprechend erhält man für 12 Spiele 3^{12} Möglichkeiten, den Tipschein auszufüllen! Infolgedessen braucht man 531441 Tipscheine.

6 Die vier Personen werden mit den Anfangsbuchstaben ihrer Vor- und Zunamen bezeichnet. Für unbekannte Namen sei X, Y und Z gesetzt. Dann gibt es wegen c) folgende Personen: BX, XY, YD, DZ. Wegen a) gilt $X \neq B$, $Y \neq D$. Da jeder Name genau je einmal als Vor- bzw. Zuname auftritt und mithin $Y \neq B$, $X \neq D$ gilt, ist wegen b) nur $X = A$, $Y = C$, $Z = B$ möglich. Die vier Personen heißen: Arnold Conrad, Bernhard Arnold, Conrad Dietrich und Dietrich Bernhard.

7 Es werden von der ersten Sorte a, von der zweiten b und von der dritten c Stück gekauft. Dann gilt:

$a + b + c = 30$ und

$30a + 24b + 18c = 600$.

Man erhält:

$c = 30 - a - b$, $b = 10 - 2a$

und damit für a: $1 \leqq a \leqq 4$.

Durch Einsetzen der Zahlen 1, 2, 3, 4 für a erhält man folgende Zahlentripel

a	1	2	3	4
b	8	6	4	2
c	21	22	23	24

Das sind die vier Möglichkeiten.

8 Der Sieg kann in einem Spiel genau dann erzwungen werden, wenn es eine Spielweise (Strategie) gibt, die unter allen Umständen zum Siege führt. Das ist bei dem vorliegenden Spiel der Fall. Gelingt es nämlich einem der Spieler, etwa A, so viele Hölzchen zu entnehmen, daß der Gegenspieler B eine durch 11 teilbare Anzahl Streichhölzer vorfindet, dann kann A die von B entnommene Anzahl (1 bis 10 Hölzchen) jeweils zu 11 ergänzen, indem er seinerseits eine entsprechende Anzahl entnimmt, was nach den Spielregeln immer möglich ist. Auf diese Weise findet B stets, wenn er am Zuge ist, eine durch 11 teilbare Anzahl, nach einiger Zeit schließlich 11 Hölzchen vor, von denen er mindestens 1 Hölzchen nehmen muß, aber höchstens 10 Hölzchen nehmen darf. Daher bleibt zuletzt für A ein Rest von 1 bis 10 Hölzchen, den er in jedem Falle vollständig fortnehmen kann. Im vorliegenden Fall (Spielbeginn mit 150 Hölzchen) ergibt sich daraus: A kann stets den Sieg erzwingen, nämlich indem er beim 1. Mal durch Wegnahme von genau 7 Hölzchen die durch 11 teilbare Anzahl 143 herstellt und dann die genannte Strategie erhält. B (kann den Sieg dann also nicht erzwingen) kann es genau dann, wenn A wenigstens einmal nicht die genannte Strategie einhält.

9 $a^2 + b^2 = c^2; \quad 2r_1^{\,2} = c^2;$
$2r_2^{\,2} = b^2; \quad 2r_3^{\,2} = a^2$

Dreiecksfläche: $F_\triangle = \frac{ab}{2}$

„Sichelfläche":

$$F_S = \frac{ab}{2} + \frac{\pi r_1^{\,2}}{4} - \frac{r_1^{\,2}}{2} - \frac{\pi r_2^{\,2}}{4} + \frac{r_2^{\,2}}{2} - \frac{\pi r_3^{\,2}}{4} + \frac{r_3^{\,2}}{2}$$

$$F_S = \frac{ab}{2} + (r_1^{\,2} - r_2^{\,2} - r_3^{\,2})\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$F_S = \frac{ab}{2} + \underbrace{\left(\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)}_{=0}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$F_S = \frac{ab}{2}$ und daraus folgt: $F_\triangle = F_S$

10 Die gesuchten Abstände sind sämtlich einander gleich, nämlich gleich der Länge der in einem Dreieck mit den Seiten von der Länge a, $a \cdot \sqrt{2}$, $a \cdot \sqrt{3}$ auf der letztgenannten Seite errichteten Höhe. Wir betrachten ein solches Dreieck etwa ΔADF. Es ist bei A rechtwinklig, da AD auf der Ebene ε_{ABEF} senkrecht steht. Die gesuchte Länge der Höhe $\overline{AP}$ ist daher, wie aus $\Delta ADP \sim \Delta DFA$ folgt,

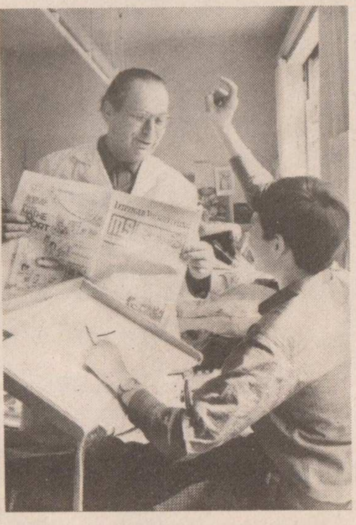
$$h = \frac{a \cdot a \cdot \sqrt{2}}{a \cdot \sqrt{3}} = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{6}.$$

Klassenstufe 11/12

Aus Platzgründen mußte auf die Veröffentlichung der Lösungen zu Kl. 11/12 verzichtet werden. Interessierte Leser erhalten sie (gegen Freiumschlag) bei:

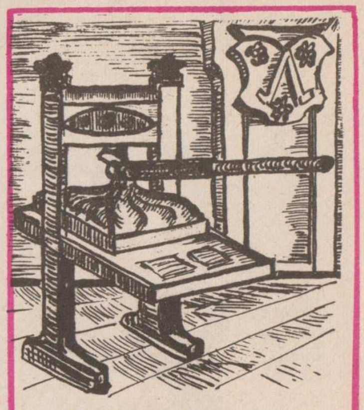
Redaktion *alpha*, 7027 Leipzig, PSF 14.

Mathe Olympioniken zwischen den Klausuren



Aus schaffensreicher Arbeit wurde Mathematikfachlehrer W. Unze durch eine heimtückische Krankheit am 29. 9. 73 aus unserer Mitte gerissen. Wir verlieren in ihm einen gewissenhaften, pflichtbewußten Pädagogen, der an allen 12 Mathe-LVZ mit Herz und unermüdlichem Fleiß mitarbeitete und damit einen aktiven Beitrag für die außerunterrichtliche Arbeit unserer Jugend leistete.

Unser Foto: W. Unze im Unterricht



An dieser Mathe-LVZ arbeiteten mit: Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes, 29. OS Leipzig, Chefredakteur der mathematischen Schülerzeitschrift „alpha" (Idee und Gestaltung), Mathematikfachlehrer i. R. W. Unze, Leipzig, Studienrat Th. Scholl, Ministerium für Volksbildung, Berlin. Die Aufgaben und Lösungen dieser 12. Mathe-LVZ wurden aus dem 51. Lesebogen „Junge Mathematiker" – ABC Mathematikolympiaden (Dokumentation) – Herausgeber: Rat des SB Südost, Leipzig, und aus der Aufgabenkartei der Red. „alpha" – Dokumentation der Aufgaben der Olympiade Junger Mathematiker der DDR – zusammengestellt.

Das Autorenkollektiv dankt den LVZ-Mitarbeitern den Setzern des VEB Broschurendruck, Leipzig, der Druckerei Fortschritt, Erfurt, für die technische Realisierung des Projekts.

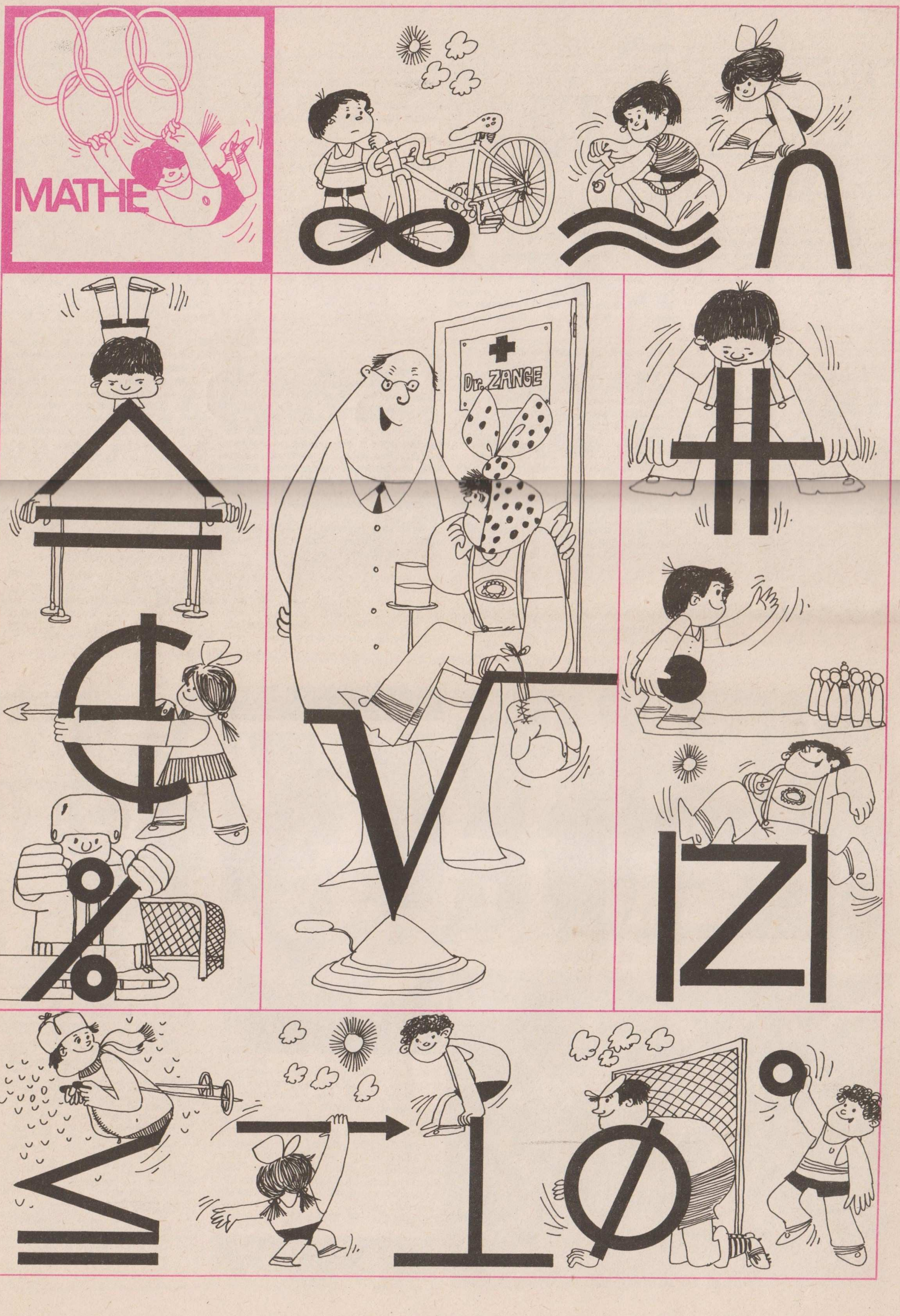
Technische Zeichnungen: G. Gruß, 29. OS Leipzig.

Typographische Gestaltung: B. Radestock / J. Lehmann

Fotos: J. Lehmann, Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 607 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Druck: Druckerei Fortschritt, Erfurt


MATHE
Dr. ZANGE