mathe 74

LEIPZIGER VOLKSZEITUNG

Organ der Bezirksleitung Leipzig der Sozialistischen Einheitspartei Deutschlands

SONDERAUSGABE
DEZEMBER 1974
PREIS 0,40 M

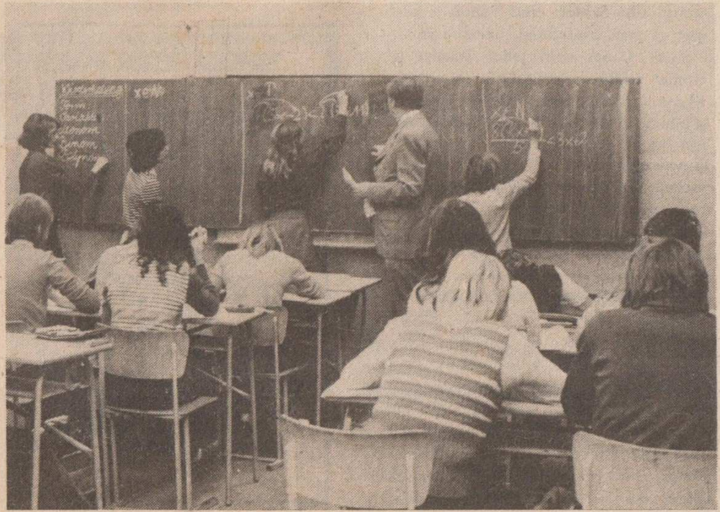
mathe-modern

Im neuerbauten Hauptgebäude der Karl-Marx-Universität Leipzig können sich die zukünftigen Mathematiklehrer in modernen Räumen, mit modernen Unterrichtsmitteln, mit den modernsten Erkenntnissen der Wissenschaft vertraut machen. Foto: Radestock

Liebe Mädchen und Jungen!

Wieder geben wir Euch in Fortsetzung einer schönen Tradition zum Geburtstag der Pionierorganisation „Ernst Thälmann" eine mathematische Sonderausgabe der LVZ in die Hand. „Mathematik modern" ist der Titel der 13. Ausgabe. Den Erfordernissen der täglichen Praxis entsprechend, hat sich die mathematische Wissenschaft in den letzten 25 Jahren rasch entwickelt und in Wechselwirkung dazu beigetragen, der Praxis neue Impulse zu geben. An diesem dialektischen Prozeß ist die Jugend nicht unbeteiligt. Heute lautet die Forderung: moderne Unterrichtsführung für alle Schüler auf der einen sowie der speziellen Förderung interessierter und talentierter Schüler auf der anderen Seite. Das ist ein wesentlicher Teil der Vorbereitung unserer Mädchen und Jungen durch unsere sozialistische Schule auf ihre künftigen Berufe entsprechend den gesellschaftlichen Erfordernissen. Und deshalb auch bewegt die Pädagogen in allen sozialistischen Ländern immer stärker die Frage nach den wirksamsten Lehrmethoden für die Wissensvermittlung, um alle Schüler so zu rüsten, daß sie den Forderungen der wissenschaftlich-technischen Revolution gerecht werden können. Die Arbeit von morgen wird eine Arbeit der Entdeckungen, der Erfindungen, eine Arbeit der ununterbrochenen Erneuerung dessen sein, was gestern war. Darauf müssen die Schüler von der ersten Schulklasse an vorbereitet werden. Deshalb gilt es, solche Lehrmethoden zu finden, die helfen, die Denkfähigkeit der Kinder besser zu entwickeln, Lehrmethoden die darüberhinaus das Lernen zur Freude machen. Unsere vorliegende „Mathe-LVZ" kann deshalb auch als „Diskussionsbeitrag" zu diesem Thema gewertet werden.

Eure
LEIPZIGER VOLKSZEITUNG



Umfangreiche Mittel werden jährlich für den Neubau und die Rekonstruktion von Schulen aus unserem Staatshaushalt zur Verfügung gestellt. Rund 1 Mio. Mark wurden z. B. für die 29. Oberschule Leipzig aufgewendet und ermöglichen in modernen Fachkabinetten modernen Unterricht. Foto: Krebs

In Arbeitsgemeinschaften, Zirkeln, Klubs, Spezialistenlagern Junger Mathematiker und bei den Mathe-Olympiaden hat jeder Schüler unter Anleitung erfahrener Lehrer und Wissenschaftler die Möglichkeit, das im Unterricht erworbene Wissen und Können zu erweitern und zu vertiefen. Foto: Ortner

Preisausschreiben · mit Preisausschreiben ·

EINE MENGE ÜBER MENGEN

Als vor etwa hundert Jahren der Hallenser Mathematiker Georg *Cantor* die Mengenlehre entwickelte, wurde deren Bedeutung kaum erkannt. Heute ist sie jedoch ein Fundament der gesamten Mathematik. Als Schüler merkt man das zwar nicht immer, weil zum Beispiel das Wort „Menge" im Mathematikunterricht gar nicht so oft vorkommt, aber viele Begriffsbildungen und Verfahrensweisen, die man als Schüler kennenlernt, haben ihren Ursprung in der Mengenlehre. Wir wollen uns deshalb einmal etwas genauer mit Mengen befassen und „eine Menge über Mengen" erfahren.

Da stehen wir schon vor der ersten Schwierigkeit: Wie ist die Überschrift eigentlich zu verstehen? In ihr kommt zweimal das Wort „Menge" vor, aber offenbar mit unterschiedlichen Bedeutungen! Den ersten Teil der Überschrift könnten wir auch durch das Wort „Vieles" ersetzen: „Vieles über Mengen", wenn man „viel" meint, zum Beispiel:

a) Im Stadion waren eine Menge Zuschauer.
b) Peter hat eine Menge Geduld.
c) Der Verunglückte hatte eine Menge Alkohol getrunken.
d) Auf der Feier zum Pioniergeburtstag gab es eine Menge Spaß.

In der *Mathematik* bedeutet das Wort „Menge" aber nicht einfach „viel". Man versteht darunter vielmehr eine *Zusammenfassung einzelner, unterscheidbarer Dinge.* Diese Dinge heißen dann die *Elemente* der betreffenden Menge.

Im obigen Beispiel a) kann das Wort „Menge" in diesem mathematischen Sinne verstanden werden. Die Elemente dieser Menge sind dann die einzelnen Zuschauer. In den Beispielen b), c) und d) kann das Wort „Menge" dagegen *nicht* im mathematischen Sinne aufgefaßt werden. Geduld oder Spaß zum Beispiel bestehen nicht aus einzelnen Elementen.

Was kann man denn nun alles für Mengen bilden? Das ist sehr vielfältig, wie man an den folgenden Beispielen erkennen kann:

M_1: Die Menge aller Staatsbürger der DDR.
M_2: Die Menge aller Angehörigen der Pionierorganisation „Ernst Thälmann".
M_3: Die Menge aller Flüsse, die in die Ostsee münden.
M_4: Die Menge aller Brüche, deren Zähler 5 und deren Nenner eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist.
M_5: Die Menge aller natürlichen Zahlen, die die Ungleichung $3 \cdot x + 5 < 7$ erfüllen.
M_6: Die Menge aller Menschen, die auf dem Mond zu Hause sind.

(Damit wir über die aufgezählten Mengen einfach und kurz sprechen können, haben wir sie mit M_1, M_2, M_3 usw. bezeichnet.)

Unter den aufgezählten Mengen gibt es einige, die sehr viele Elemente enthalten, zum Beispiel M_1, M_2 und M_4. Zur Menge M_4 gehören sogar *unendlich viele* Elemente. Dagegen besitzt die Menge M_3 nicht so viele Elemente, und zur Menge M_5 gehört überhaupt nur ein einziges Element, nämlich die Zahl Null. Die Menge M_6 schließlich ist ein ganz besonderer Fall – sie enthält überhaupt kein Element, denn es gibt keinen Menschen, der auf dem Mond zu Hause ist. Man sagt, M_6 ist *leer,* und schreibt $M_6 = \emptyset$, das heißt, M_6 ist gleich der leeren Menge.

Wir sehen also an den Beispielen ganz deutlich, daß der mathematische Begriff „Menge" nicht einfach „viel" bedeutet.

Wenn eine Menge nur wenige Elemente besitzt, kann man sie sehr einfach angeben, indem man die Elemente alle aufzählt. Will man zum Beispiel die Menge aller natürlichen Zahlen angeben, die keine Vielfachen von 3 sind und die zwischen 10 und 20 liegen, so kann man schreiben:

$M_7 = \{11, 13, 14, 16, 17, 19\}$.

Entsprechen wäre $M_5 = \{0\}$.

Diese Methode wird natürlich immer umständlicher, je mehr Elemente eine Menge besitzt. Nehmen wir als Beispiel etwa die Menge aller Telefonanschlüsse des Bezirkes Leipzig. Um sie anzugeben, benötigt die Post ein ziemlich dickes Buch.

Gehören zu einer Menge *unendlich viele* Elemente, dann kann man sie überhaupt nicht mehr alle aufzählen, auch wenn man ein noch so dickes Buch benutzen würde. Dieser Fall liegt bei M_4 vor.

Man schreibt dann zuweilen:

$$M_4 = \left\{\frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{5}, \frac{5}{6}, \ldots\right\}$$

Durch die Punkte innerhalb der Klammer soll angedeutet werden, daß auch alle weiteren Brüche mit dem Zähler 5 zu M_4 gehören.

Wir haben also zwei Möglichkeiten kennengelernt, um eine Menge anzugeben:

a) Man legt die Menge fest, indem eine oder mehrere *Eigenschaften* genannt werden, die alle Elemente der Menge (aber auch nur diese!) besitzen sollen.
(Bei der Menge M_2 war das zum Beispiel die Eigenschaft, der Pionierorganisation „Ernst Thälmann" anzugehören.)
b) Man legt die Menge fest, indem man alle ihre Elemente angibt. (Das ist natürlich nur bei endlichen Mengen möglich.)

Wenn man eine Menge durch das Angeben einer Eigenschaft festlegt, geht man immer von irgend einem nicht leeren *Grundbereich* aus, in dem diese Eigenschaft einen Sinn hat. Bei M_1 beispielsweise könnte die Gesamtheit aller auf der Erde lebenden Menschen dieser Grundbereich sein. Durch die Eigenschaft „Staatsbürger der DDR" wird dann eine bestimmte Menge von Menschen gekennzeichnet. In demselben Grundbereich kann man noch viele andere Eigenschaften angeben, zum Beispiel: im Jahr 1930 geboren zu sein, am 2. November Geburtstag zu haben, mindestens 1,70 m groß zu sein, in Rostock zu wohnen, ein Staatsoberhaupt zu sein, usw. Jeder solchen Eigenschaft entspricht dann eine ganz bestimmte Menge – nämlich die Menge der Menschen, die diese Eigenschaft besitzen.

Die meisten Mengen, die wir bisher als Beispiele angeführt haben, sind ziemlich uninteressant – sowohl vom Standpunkt der Mathematik aus betrachtet als auch sonst. Für die Mathematik werden Mengen meistens erst dann bedeutsam, wenn sie nicht einfach regellose, zufällige Anhäufungen von Elementen darstellen, sondern wenn zwischen den Mengen oder zwischen den Elementen innerhalb einer Menge bestimmte *Beziehungen* bestehen.

Ein solcher Fall liegt zum Beispiel bei den Mengen M_1 und M_2 vor: jedes Element von M_2 gehört auch zu M_1 (jeder Angehörige der Pionierorganisation „Ernst Thälmann" ist gleichzeitig ein Staatsbürger der DDR). Man sagt, *M_2 ist eine Teilmenge von M_1,* und schreibt dafür $M_2 \subseteq M_1$.

Bilden wir noch eine Menge, die wir M_8 nennen wollen:

M_8: Die Menge aller Menschen, die die Leipziger Herbstmesse 1974 besucht haben.

Ist M_8 eine Teilmenge von M_1? Sicher nicht, denn neben vielen DDR-Bürgern besuchte auch eine Vielzahl von Ausländern die Messe. M_1 und M_8 haben zwar gemeinsame Elemente, aber es gilt *nicht* $M_8 \subseteq M_1$.

Mit der Redeweise „... ist eine Teilmenge von ..." wird eine Beziehung zwischen zwei Mengen ausgedrückt. Aber auch innerhalb einer Menge gibt es oft vielfältige Beziehungen. Beispielsweise ist es häufig so, daß die Mengen, mit denen wir zu tun haben, in irgend einer Weise „geordnet" sind oder „geordnet" werden. (Was wir hierbei mit „ordnen" meinen, stimmt allerdings nicht immer mit dem überein, was man in der Mathematik unter „ordnen" versteht. Wir werden darauf noch zu sprechen kommen.

Sehen wir uns einige Beispiele an:

Die Menge der in einer Familie vorhandenen Kleidungsstücke wird in der Regel in einer gewissen Ordnung aufbewahrt. Das kann so aussehen, daß in einem Schrank alle Anzüge hängen, in einem anderen alle Kleider, in einem besonderen Fach liegen alle Handschuhe, usw. Es ist aber auch möglich, daß jedem Familienmitglied ein gesonderter Schrank zugewiesen ist, in dem alle Kleidungsstücke dieses Betreffenden aufbewahrt werden. In beiden Fällen liegt in der Menge aller Kleidungsstücke eine Einteilung vor, bei der jedes Element genau einmal erfaßt wird. Das ist im Prinzip genauso wie in der Menge aller Schüler einer Schule – auch da gibt es eine Einteilung, nämlich in *Schulklassen.* Dabei wird jeder Schüler genau einmal erfaßt – er gehört in genau eine Klasse – und es wird natürlich keine Klasse gebildet, in die *kein* Schüler gehört, die also *leer* wäre.

Einteilungen dieser Art sind in vielen Bereichen des Lebens außerordentlich wichtig und notwendig, weil man sich sonst oft gar nicht zurechtfinden würde. Man stelle sich nur einmal eine Kaufhalle vor, in der die Waren *nicht* in dieser Weise geordnet aufgestellt sind. Das gäbe beim Einkauf eine schlimme Sucherei!

Aber auch in der Mathematik kommen solche Einteilungen von Mengen oft vor. Man hat ihnen deshalb einen besonderen Namen gegeben und nennt sie *Klasseneinteilungen.* So wird bekanntlich im Mathematikunterricht der Schuljahre 5 bzw. 6 die Menge aller Brüche in Klassen eingeteilt, indem man jeweils solche Brüche zusammenfaßt, die durch Kürzen oder Erweitern auseinander hervorgehen. Man bekommt dabei zum Beispiel folgende Klassen:

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \ldots\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \ldots\right\}$$

$$\left\{\frac{5}{6}, \frac{10}{12}, \frac{15}{18}, \ldots\right\}, \left\{\frac{7}{4}, \frac{14}{8}, \frac{21}{12}, \frac{28}{16} \ldots\right\}$$

usw.

Diese *Klassen* nennt man dann *gebrochene Zahlen* und man erklärt, wie mit ihnen gerechnet werden kann. Dabei zeigt sich, daß man für das Rechnen immer nur *ein Element* (einen *Vertreter)* aus jeder Klasse benötigt. Man addiert zum Beispiel die ersten beiden Klassen, indem man aus ihnen etwa die Elemente $\frac{3}{6}$ und $\frac{2}{6}$ ausgewählt, ihre Summe bildet $(\frac{5}{6})$ und dann die dritte Klasse als Resultat ansieht (weil $(\frac{5}{6})$ in dieser Klasse liegt).

Eine andere Klasseneinteilung entsteht, wenn man beispielsweise die Menge aller natürlichen Zahlen in folgende sechs Klassen gegliedert:

$K_0 = \{0, 6, 12, 18, 24, \ldots\}$;
$K_2 = \{2, 8, 14, 20, 26, \ldots\}$;
$K_4 = \{4, 10, 16, 22, 28, \ldots\}$;

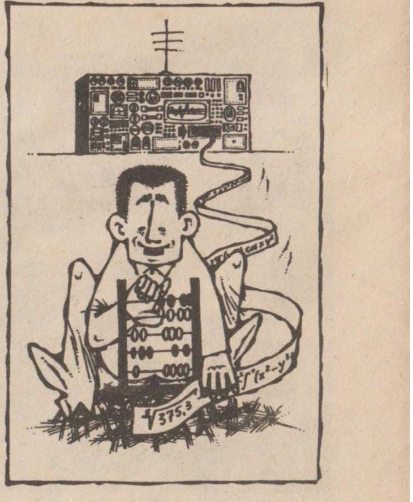
$K_1 = \{1, 7, 13, 19, \ldots\}$;
$K_3 = \{3, 9, 15, 21, \ldots\}$;
$K_5 = \{5, 11, 17, 23, \ldots\}$.

In K_0 liegen also alle natürlichen Zahlen, die durch 6 teilbar sind, in K_1 alle, die bei Division durch 6 den Rest 1 lassen, in K_2 alle, die bei Division durch 6 den Rest 2 lassen, usw.

Auch mit diesen Klassen kann man rechnen. Man wählt dazu wieder beliebige Vertreter aus und findet beispielsweise:

$K_1 + K_3 = K_4$, denn $1 + 3 = 4$ und 4 ist ein Element aus K_4;
$K_3 + K_4 = K_1$, denn $3 + 4 = 7$ und 7 ist ein Element aus K_1;
$K_5 \cdot K_2 = K_4$, denn $5 \cdot 2 = 10$ und 10 liegt in der Klasse K_4.

Ebenso gilt
$K_1 + K_5 = K_0$, $K_0 \cdot K_3 = K_0$, $K_1 \cdot K_2 = K_2$, $K_2 \cdot K_3 = K_0$, wie man leicht nachrechnen kann. (Der Einfachheit wegen wählt man aus den Klassen jeweils die kleinste darin enthaltene natürliche Zahl aus. Man könnte aber auch *andere* Vertreter benutzen!)



„Ich rechne lieber noch mal nach!"

{a, b, c}	[a, 1]	⊂	∪	∩	∅	<	>
Menge aus a,b,c	geordnetes Paar	Teilmenge	vereinigt	geschnitten	leere Menge	kleiner als	größer als

Eine Einteilung in *Klassen* ist eine wichtige, aber nicht die einzige Möglichkeit, wie man in einer Menge „Ordnung" schaffen kann. Sehr häufig werden Mengen auch so „geordnet", wie man dieses Wort in der Mathematik versteht. Das bedeutet: wählt man aus der betreffenden Menge zwei verschiedene Elemente a und b aus, dann gilt entweder „a kommt vor b" oder „b kommt vor a". Ein Beispiel einer solchen Ordnung findet man in jedem Klassenbuch. Dort sind die Namen aller Jungen der Klasse (natürlich auch die aller Mädchen) in einer ganz bestimmten *Reihenfolge* eingetragen; dabei legt der Lehrer diese Reihenfolge gewöhnlich nicht nach Gutdünken fest (was natürlich möglich wäre), sondern er richtet sich „nach dem Alphabet", wie man sagt. Jedenfalls liegt für je zwei verschiedene Jungen der Klasse genau fest, wessen Name im Klassenbuch *vor* dem des anderen steht. Eine ganz *andere* Reihenfolge kann sich ergeben, wenn dieselben Schüler im Sportunterricht der Größe nach antreten. Und wieder anders kann es aussehen, wenn die Schüler etwa nach ihrem Gewicht geordnet werden. Jede Menge, die aus mehr als nur einem Element besteht, kann auf verschiedene Arten geordnet werden. Dabei wächst die Anzahl der Ordnungsmöglichkeiten sehr rasch, wenn die Anzahl der Elemente in der Menge zunimmt. Zum Beispiel können die drei Buchstaben A, B und C auf *sechs* verschiedene Arten geordnet werden, nämlich:
ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.
In der Mathematik werden viele Mengen in dem eben besprochenen Sinne geordnet. Das bekannteste Beispiel ist die Menge der natürlichen Zahlen. Schon in Klasse 1 lernt jeder Schüler:
$3 < 7$, $0 < 4$, $5 < 17$ usw.
Durch die Beziehung „ist kleiner als" wird die Menge dernatürlichen Zahlen *geordnet.*

Eine entsprechende Ordnung wird auch für die gebrochenen Zahlen festgelegt. Es gilt zum Beispiel:

$$\frac{3}{7} < \frac{5}{7}, \quad \frac{11}{14} < \frac{15}{8}, \quad \frac{13}{3} < \frac{29}{5}.$$

Durch diese übliche Ordnung wird in der Menge der gebrochenen Zahlen allerdings ***keine Reihenfolge*** festgelegt! Im Falle der Jungen einer Klasse oder auch bei den natürlichen Zahlen ist durch die Ordnung auch eine *Reihenfolge* der Elemente festgelegt worden. Man kann in diesen Fällen sagen: dies ist das *erste* Element, jenes das *nächste* usw. Bei den natürlichen Zahlen ist uns diese Reihenfolge sehr vertraut: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . Bei den *gebrochenen* Zahlen ist das anders. Wir können zu *keiner* gebrochenen Zahl eine „nächste" angeben, wenn wir sie in üblicher Weise nach ihrer Größe ordnen. Es ist zwar zum Beispiel $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$, aber es ist nicht so, daß $\frac{4}{5}$ „die nächste gebrochene Zahl nach $\frac{3}{5}$" wäre, denn die Zahl $\frac{7}{10}$ liegt noch *zwischen* $\frac{3}{5}$ und $\frac{4}{5}$. Aber auch $\frac{7}{10}$ kommt nicht unmittelbar nach $\frac{3}{5}$, denn zwischen diesen beiden Zahlen liegt zum Beispiel die Zahl $\frac{13}{20}$, und so geht es immer fort – zwischen zwei verschiedenen gebrochenen Zahlen liegen immer noch weitere. Kann man das nicht ändern? Durchaus, aber dazu muß man die gebrochenen Zahlen ganz anders ordnen – nicht mehr „nach der Größe"! Es würde hier allerdings etwas zu weit führen, diese andere Ordnung genau anzugeben.
Zwischen der üblichen Ordnung in Zahlenmengen und den Rechenoperationen bestehen wichtige Zusammenhänge. Es gilt zum Beispiel folgendes *Monotoniegesetz* für natürliche Zahlen:
Wenn $a < b$ und $c \neq 0$ ist, dann ist auch $a \cdot c < b \cdot c$.
Diese Gesetzmäßigkeit benutzen wir, wenn wir etwa überlegen: $77 \cdot 5$ ist sicher kleiner als 400, denn $400 = 80 \cdot 5$ und 77 ist ja kleiner als 80.
Vielleicht kommt das angegebene Monotoniegesetz vielen selbstverständlich vor? Das ist es aber durchaus nicht! Betrachten wir dazu einmal die Menge der weiter vorn gebildeten Klassen K_0, K_1, K_2, K_3, K_4, K_5. Durch die Reihenfolge, in der diese Klassen hier angegeben sind, wird eine *Ordnung* in der Menge der Klassen festgelegt. Es gilt also:

$$K_0 < K_1 < K_2 \ldots < K_5$$

Dabei spielt die Klasse K_0 beim Rechnen mit den Klassen dieselbe Rolle wie die natürliche Zahl Null beim Rechnen mit natürlichen Zahlen. Es gilt nämlich für jede beliebige Klasse K:

$$K + K_0 = K \quad \text{und} \quad K \cdot K_0 = K_0,$$

ebenso wie für jede natürliche Zahl n gilt $n + 0 = n$ und $n \cdot 0 = 0$.

Würde das oben angeführte Monotoniegesetz auch für die Klassen K_0 bis K_5 gelten, dann müßte beispielsweise

$K_3 \cdot K_5 < K_4 \cdot K_5$ sein, da

$K_3 < K_4$ ist.

Aber $K_3 \cdot K_5 = K_3$
(denn $3 \cdot 5 = 15$ und 15 liegt in der Klasse K_3)
und $K_4 \cdot K_5 = K_2$
(denn $4 \cdot 5 = 20$ und 20 liegt in der Klasse K_2)
also gilt nicht $K_3 \cdot K_5 < K_4 \cdot K_5$.
sondern $K_4 \cdot K_5 < K_3 \cdot K_5$!

Vielleicht gilt das Monotoniegesetz aber nur deshalb hier nicht, weil wir die Klassen ungeschickt geordnet haben? Man könnte versuchen, eine „bessere" Ordnung zu finden. Aber Vorsicht! Es gibt 720 verschiedene Möglichkeiten, die Klassen K_0 bis K_5 zu ordnen!
Wir wollen diese Frage jetzt nicht weiter untersuchen; es sei lediglich mitgeteilt, daß auch bei anderer Ordnung der Klassen das Monotoniegesetz nicht gilt.
Nicht immer ist in einer Menge eine so *vollständige* Ordnung festgelegt, wie wir sie bei den letzten Beispielen kennengelernt haben. Es gibt auch Fälle, bei denen nur für *gewisse* Elementepaare a, b eine „Rangfolge" festgelegt ist. In einer Kampfgruppenhundertschaft gibt es beispielsweise mehrere *Züge*, die wiederum in *Gruppen* eingeteilt sind. Jede Gruppe und jeder Zug besitzt einen eigenen Kommandeur, und die Hundertschaft selbst natürlich auch. Dadurch ist in der Menge aller Angehörigen dieser Hundertschaft eine Befehlsordnung festgelegt: bestimmte Kämpfer sind *Vorgesetzte* von anderen Kämpfern. Jeder Zugführer ist Vorgesetzter für die Gruppenführung seines Zuges, aber auch für alle anderen Angehörigen des Zuges. Dagegen ist kein Zugführer Vorgesetzter von Angehörigen *anderer* Züge, und diese sind natürlich auch keine Vorgesetzten von ihm. Man spricht in derartigen Fällen von einer *Halbordnung.* In der Mathematik kommt so etwas recht häufig vor. Beispielsweise wird in der Menge der natürlichen Zahlen durch die Beziehung „ist Teiler von" eine Halbordnung festgelegt: *gewisse* Elementepaare können mit Hilfe dieser Beziehung geordnet werden – beispielsweise gilt „3 kommt vor 9", weil 3 ein Teiler von 9 ist, ebenso gilt „5 kommt vor 20" (denn 5 ist ein Teiler von 20), aber viele andere Zahlen lassen sich *nicht* miteinander vergleichen – beispielsweise gilt weder „4 kommt vor 7" noch „7 kommt vor 4", denn 4 ist kein Teiler von 7, aber 7 ist auch kein Teiler von 4.
Ein anderes Beispiel für eine Halbordnung stellt die Beziehung „ist Teilmenge von" dar. Dabei gehen wir von einem Grundbereich aus – etwa der Gesamtheit aller natürlichen Zahlen – und bilden beliebige Mengen in diesem Grundbereich.
Die Menge aller dieser Mengen ist durch die Beziehung „ist Teilmenge von" *halbgeordnet.*

Übrigens ist es auch möglich, in einer solchen Menge von Mengen *Operationen* einzuführen:
Die *Vereinigung* von M_1 und M_2
$M_1 \cup M_2$ ist die Menge aller Elemente, die zu M_1 *oder* zu M_2 gehören.
Der *Durchschnitt* von M_1 und M_2
$M_1 \cap M_2$ ist die Menge aller Elemente, die *sowohl* zu M_1 *als auch* zu M_2 gehören.
Die *Differenz* von M_1 und M_2
$M_1 \setminus M_2$ ist die Menge aller Elemente von M_1, die *nicht* zu M_2 gehören.
Die *Komplementärmengenbildung*
$\overline{M}$ ist die Menge aller Elemente des Grundbereichs, die *nicht* zu M gehören.

Für diese Operationen gelten verschiedene Gesetze, zum Beispiel:
(1) $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ (Kommutativgesetz)
Das Gleichheitszeichen bedeutet, daß $M_1 \cup M_2$ und $M_2 \cup M_1$ genau dieselben Elemente enthalten.
(2) $(M_1 \cup M_2) \cap M_3 = (M_1 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_3)$ (Distributivgesetz)
(3) $M_1 \cap M_2 = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$
Einige dieser Gesetze erinnern an das Rechnen mit *Zahlen,* zum Beispiel gilt ja bekanntlich
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$
Vertauscht man hier die Rechenzeichen, so entsteht die Gleichung
$$(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c).$$
Diese Gleichung ist *nicht* allgemeingültig! Für $a = 2$, $b = 3$ und $c = 5$ entsteht die *falsche* Aussage $2 \cdot 3 + 5 = (2 + 5) \cdot (3 + 5)$.
Vertauscht man jedoch die Operationszeichen in dem Gesetz (2), so entsteht eine *wahre* Aussage, nämlich:

$$(4)\ (M_1 \cap M_2) \cup M_3 = (M_1 \cup M_3) \cap (M_2 \cup M_3).$$

Man kann sich das mit Hilfe von Mengendiagrammen plausibel machen.

Zum Gesetz (2):
Ob man zuerst M_1 mit M_2 vereinigt und dann den Durchschnitt dieser Menge mit M_3 bildet (linke Seite der Gleichung), oder ob man erst die Durchschnitte von M_1 und M_3 sowie von M_2 und M_3 bildet und diese dann vereinigt (rechte Seite der Gleichung) – stets erhält man die in Bild 1 schraffiert gezeichnete Menge.

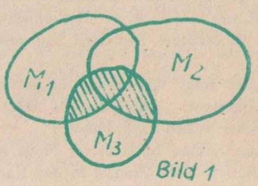
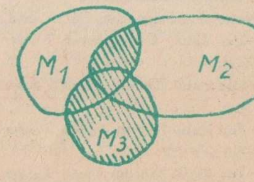
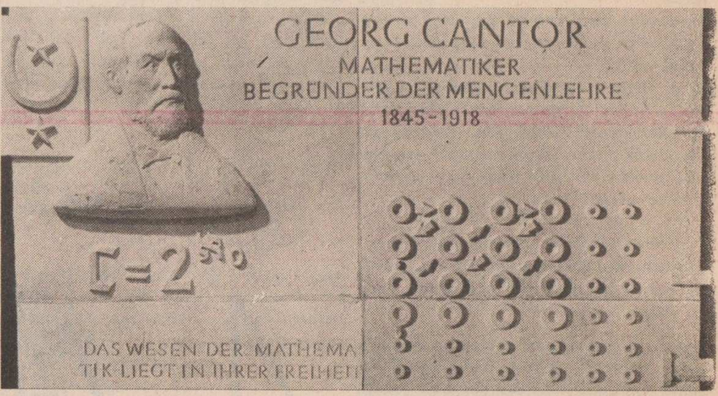


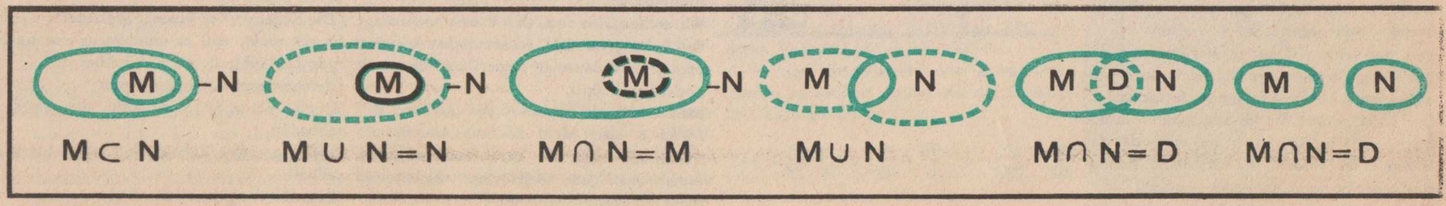
Bild 1

Zum Gesetz (4):
In beiden Fällen des Vorgehens (der linken bzw. der rechten Seite der Gleichung folgend) erhält man die im Bild 2 schraffiert dargestellte Menge.
Mit diesem Ausblick auf das Operieren mit Mengen wollen wir unseren Ausflug in die Mengenlehre abschließen.





Zu Ehren G. Cantors wurde 1973 in Halle-Neustadt eine Gedenktafel eingeweiht.



KLEINES 1x1 DER LOGIK

Um einem anderen Menschen, sei es den Freund oder der Freundin, den Eltern oder Geschwistern etwas mitzuteilen, benutzen wir die Sprache. Auch in der Mathematik bedient man sich der Sprache, wenn man mathematische Sachverhalte wiedergeben will. Leider ist die Umgangssprache mit ihren Mehrdeutigkeiten und Bedeutungsschattierungen nicht in jedem Fall ein gutes Werkzeug für exakte und klare Formulierungen, wie wir sie in der Mathematik brauchen. Betrachten wir dazu folgende Beispiele:

a) Ingrid fragt ihre Freundin Sabine am Kaffeetisch: „Möchtest du Milch *oder* Zucker in den Kaffe haben?"
   Kann Sabine nach dieser Frage *sowohl* Milch *als auch* Zucker in den Kaffee bekommen?
   Natürlich, denn Ingrid fragte ja nicht, ob Sabine *entweder* Milch *oder* Zucker in den Kaffee haben möchte.
b) Der Hauptgewinn in einem Preisausschreiben der Zeitung „Junge Welt" ist eine dreitägige Reise nach Prag *oder* nach Warschau. Ist damit gesagt, daß der Gewinner des Preisausschreibens *sowohl* eine dreitägige Reise nach Prag als auch eine dreitägige Reise nach Warschau erhalten kann?
   Sicher nicht. Die Ankündigung ist wohl so zu verstehen, daß der Gewinner des Preisausschreibens von der „Jungen Welt" eine kostenlose Reise in nur eine der beiden Städte erhält.
c) Welche der folgenden Sätze sind wahr?
   1. Die Zahl 42 ist durch 7 *oder* 3 teilbar.
   2. Die Zahl 728 ist durch 7 *oder* 3 teilbar.
   3. Die Zahl 108 ist durch 7 *oder* 3 teilbar.
   4. Die Zahl 715 ist durch 7 *oder* 3 teilbar.

Die Beantwortung der Frage c) ist gar nicht so einfach. Faßt man das „oder" im Sinne von Beispiel a) auf, so ist der Satz c1 wahr, denn 42 ist *sowohl* durch 7 *als auch* durch 3 teilbar.
Würde das Wort „oder" allerdings so verstanden wie in Beispiel b), so ist der Satz c1 falsch.
Eine solche mehrdeutige Auslegung des Wortes „oder" ist für den Sprachgebrauch in der Mathematik ungeeignet. Aus diesem Grunde ist man in der Mathematik gezwungen, gewisse Präzisierungen der Umgangssprache vorzunehmen.

Zwei Bedeutungen des Wortes „oder"
Um uns die Bedeutung des Wortes „oder" klarzumachen, sehen wir uns noch einmal die obigen Beispiele an.

In der Frage von Ingrid „Möchtest du Milch *oder* Zucker?" ist das Wort „oder" im Sinne von *„das eine oder das andere oder beides"* zu verstehen.
In der Aussage „Der Hauptgewinn ist eine dreitägige Reise nach Prag *oder* Warschau" wird das Wort „oder" im Sinne von *„entweder – oder* gebraucht.
Um nun eine eindeutige Verwendung des Wortes „oder" in der Mathematik zu gewährleisten, hat man folgendes festgelegt:
Das Wort *„oder"* ist im allgemeinen in der Mathematik im Sinne von *„das eine oder das andere oder beides"* zu verstehen. Ansonsten schreibt man „entweder – oder".
Häufig benutzt man das Wort „oder", um Aussagen miteinander zu verknüpfen. Betrachten wir dazu das Beispiel c1. Hier werden mit Hilfe des Wortes „oder" folgende Aussagen miteinander verbunden:
(A) Die Zahl 42 ist durch 7 teilbar.
(B) Die Zahl 42 ist durch 3 teilbar.
Will man entscheiden, ob die aus den beiden Sätzen A, B entstandene Aussage „A oder B" wahr oder falsch ist, so muß man zunächst entscheiden, ob jede der Einzelaussagen A, B wahr oder falsch ist.
Führen wir diese Untersuchung an allen vier Sätzen des Beispiels c) mit Hilfe einer Tabelle durch:

a	a ist durch 7 teilbar	a ist durch 3 teilbar.
42	wahr	wahr
728	wahr	falsch
108	falsch	wahr
715	falsch	falsch

Überlegt nun selbst einmal, welche der zusammengesetzten Aussagen falsch sind!
Festlegung:
Eine mit Hilfe von „oder" zusammengesetzte Aussage *„A oder B"* (auch *Alternative* genannt) ist falsch, wenn beide Teilaussagen A, B falsch sind. In allen anderen Fällen ist die Aussage „A oder B" wahr.
Für „entweder – oder" ergibt sich:
Eine mit Hilfe von „entweder – oder" zusammengesetzte Aussage *„Entweder A oder B"* (auch *Disjunktion* genannt) ist wahr, wenn genau eine Teilaussage wahr ist. Ansonsten ist sie falsch.
(Löse nun die Aufgaben 2/1, 3/1, 5/2, 5/3!)

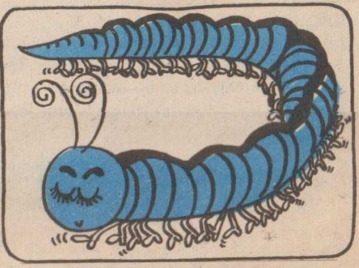
Das kleine Wörtchen „und"
Mit dem Wort *„und"* ist es möglich, zwei Teilaussagen A, B zu einer neuen Aussage „A und B" zusammenzufügen. Eine solche Aussagenverbindung nennt man *Konjunktion.*
Eine Konjunktion ist wahr, wenn alle Teilaussagen, aus denen sie entstanden ist, auch wahr sind. Ist nur eine Teilaussage wahr oder gar keine, so ist die mit „und" aus diesen Teilaussagen gebildete Aussage falsch.

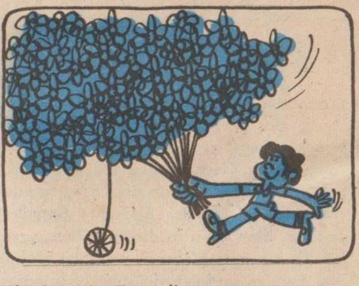
So ist beispielsweise der Satz
„Birgit und Roland sind Thälmann-Pioniere"
falsch, wenn einer der beiden oder beide nicht in die Organisation der Thälmann-Pioniere aufgenommen sind.
An die Stelle von „und" können auch die Wendungen *„sowohl – als auch"*, *„trotzdem"*, *„aber auch"* treten, ohne daß sich der Wahrheitswert der Aussage ändert, z. B. sind die drei folgenden Sätze wahre Aussagen:
– Die Zahl 2 ist eine Primzahl *und* gerade.
– Die Zahl 2 ist *sowohl* eine Primzahl *als auch* eine gerade Zahl.
– Die Zahl 2 ist eine Primzahl, *aber auch* eine gerade Zahl.
(Löse die Aufgaben 3/3, 4/1, 5/3, 6/2, 8/1, 8/3!)

Schwierigkeiten des „Neinsagens"
Alljährlich führen die Pioniere der Hanns-Eisler-Schule in Halle ein Solidaritätskonzert durch. Auch in diesem Jahr fand eine solche Veranstaltung statt. Elke, die Freundschaftsratsvorsitzende der Schule, fragte nach dem Konzert die Pionierleiterin: „Hat die Solidaritätsveranstaltung in diesem Jahr mehr Spenden als im vergangenen Jahr erbracht?" „Nein", war die Anwort. „Also war es weniger als das letzte Mal", sagte traurig Elke. „Das stimmt allerdings auch nicht", entgegnete die Pionierleiterin.
Aus der Tatsache, daß der Erlös des Konzerts nicht höher war als im vergangenen Jahr, kann man noch nicht unbedingt schließen, daß weniger Geld gesammelt wurde.
Will man bei der Verneinung einer Aussage ganz sichergehen, so ist es nützlich, zunächst die Redeweise *„Es ist nicht so, daß"* zu benutzen. Erst danach sollte man andere sprachliche Varianten verwenden.
Beispiel:
– Petra ist größer als Michael.
Verneinung:
Es gilt nicht, daß Petra größer als Michael ist.
Gleichwertige Formulierungen:
Petra ist *nicht* größer als Michael.
Petra ist *kleiner* als Michael *oder* beide sind *gleich groß*. Michael ist *nicht* kleiner als Petra.
Feststellung:
Eine wahre Aussage wird durch eine Verneinung falsch.
Eine falsche Aussage wird durch eine Verneinung wahr.
Wenden wir uns nun Verneinungen von Aussagen zu, die aus Teilaussagen entstanden sind, z. B. Aussagen der Form „A und B", „A oder B". Versucht einmal die Verneinung des folgenden Satzes anzugeben!
Hans ist Gruppenratsvorsitzender *und* Mitglied des Klubs der internationalen Freundschaft.

Um die Aufgabe zu lösen, benutzen wir, wie vereinbart, die Redeweise „Es gilt nicht, daß".
Also erhalten wir:
Es gilt nicht, daß Hans Gruppenratsvorsitzender und Mitglied des Klubs der internationalen Freundschaft ist.
Das bedeutet aber, Hans ist *nicht* Gruppenratsvorsitzender *oder nicht* Mitglied des Klubs der internationalen Freundschaft *oder beides nicht.* Diesen Sachverhalt können wir kürzer wie folgt ausdrücken.
Hans ist *nicht* Gruppenratsvorsitzender *oder nicht* Mitglied des Klubs der internationalen Freundschaft.
Wir stellen also fest, daß man eine Aussage der Form „A und B" verneinen kann, indem man jede Teilaussage negiert und diese mit „oder" verknüpft.
Man erhält als *Negation* von *„A und B"*: *Nicht A oder nicht B.* Eine Aussage der Form „A oder B" kann man negieren, indem man jede Teilaussage negiert und diese mit „und" verbindet.

Als Negation von „A und B" erhält man: Nicht A und nicht B.
Hierzu ein Beispiel:
Petra ist Mitglied der AG „Mathematik" oder der AG „Sport".
Verneinung: Es gilt nicht, daß Petra Mitglied der AG „Mathematik" oder der AG „Sport" ist.
Gleichwertige Formulierungen:
Petra ist *nicht* Mitglied der AG „Mathematik" *und nicht* Mitglied der AG „Sport".
Petra ist *weder* Mitglied der AG „Mathematik" *noch* Mitglied der AG „Sport".
(Löse die Aufgaben 4/4, 5/1, 6/1, 6/3, 7/2, 7/3, 8/2!)
Betrachten wir noch die Verneinung von All- bzw. Existentialaussagen:
Allaussagen bringen zum Ausdruck, daß *alle* Elemente einer bestimmten Menge ein gewisses Merkmal besitzen, z. B.
Alle Thälmannpioniere der DDR dürfen ein rotes Halstuch tragen.
+ Alle Schüler in Leipzig lesen regelmäßig die LVZ.
Die erste Aussage ist wahr, die zweite wird wohl falsch sein, denn es ist kaum anzunehmen, daß *alle* Schüler in Leipzig die LVZ regelmäßig lesen.
Verneinen wir die falsche Aussage (+), so erhalten wir die wahre Aussage:
Es gilt nicht, daß alle Schüler in Leipzig regelmäßig die LVZ lesen.

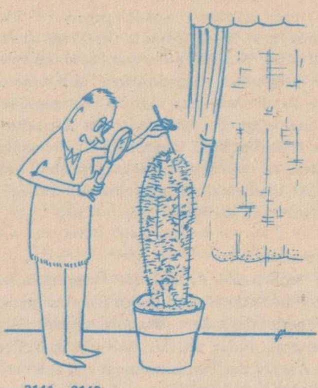




Gleichwertige Formulierungen:
Nicht alle Schüler in Leipzig lesen regelmäßig die LVZ.
Es gibt Schüler in Leipzig, die *nicht* regelmäßig die LVZ lesen.
Falsch wäre allerdings, wenn jemand meint, die Negation der Aussage (+) lautete: „Alle Schüler in Leipzig lesen nicht regelmäßig die LVZ", denn das würde ja bedeuten, daß kein Schüler in Leipzig regelmäßig die LVZ liest, und das ist sicher nicht richtig.
Existentialaussagen bringen zum Ausdruck, daß mindestens ein Element einer bestimmten Menge ein gewisses Merkmal besitzt.
Beispiel:
Es gibt natürliche Zahlen, die einen Vorgänger haben.
Es gibt mindestens eine ungerade Zahl, die durch 2 teilbar ist.
Die erste Aussage ist wahr, die zweite falsch, denn es gibt keine einzige ungerade Zahl, die durch 2 teilbar ist.
Die Negation der Aussage (+) lautet:
Es gilt nicht, daß es mindestens eine ungerade Zahl gibt, die durch 2 teilbar ist.
Gleichwertige Formulierungen:
Es gibt keine *ungerade Zahl, die durch 2 teilbar ist.*
Alle ungeraden Zahlen sind *nicht* durch 2 teilbar.
(Löse die Aufgaben 4/2, 4/3!)

Die wichtigen Redeweisungen „wenn-, so“ und „genau dann, wenn“

Neben den Wörtern „und“, „oder“, „entweder – oder“ benutzt man in der Mathematik häufig die Wendungen „wenn-, so“, aber auch „genau dann, wenn“, um zwei Teilaussagen miteinander zu verknüpfen.
Betrachten wir dazu folgende Aussage der Pionierleiterin der Klasse 7:
(o) Wenn es am Mittwoch regnet, so werden wir in der Pionierstunde unsere Bastelarbeiten fortsetzen.
Unter welchen Bedingungen wäre nun diese Aussage falsch?
Überlegen wir zunächst, welche Möglichkeiten auftreten können.


..2141..2142

Dazu fertigen wir uns wieder eine Tabelle an:

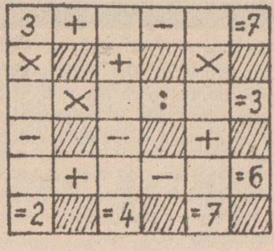
	Wetter am Mittwoch	Tätigkeit in der Pionierstd.	Wenn es am Mittwoch regnet, so werden wir in der Pionierstd. unsere Bastelarb. fortsetzen.
1	Es regnet	Es wurde gebastelt.	
2	Es regnet	Es wurde nicht gebastelt.	falsch
3	Es regnet nicht	Es wurde gebastelt	
4	Es regnet nicht	Es wurde nicht gebastelt.	

Die Aussage „Wenn es am Mittwoch regnet, so werden wir in der Pionierstunde unsere Bastelarbeiten fortsetzen“ war lediglich dann falsch, wenn es regnet, aber in der Pionierstunde nicht gebastelt wurde, d. h. im Fall 2. Für alle anderen Fälle ist die Aussage wahr.
Ist die Aussage der Form „Wenn A, so B“ wahr, so ist nicht selbstverständlich auch die *Umkehrung* dieser Aussage, nämlich „Wenn B, so A“ wahr, wie folgendes Beispiel zeigt:
Wenn ein Dreieck gleichseitig ist, so ist es spitzwinklig. (Wahre Aussage)
Wenn ein Dreieck spitzwinklig ist, so ist es gleichseitig.) (Falsche Aussage)
Die Umkehrung eines wahren Satzes der Form „Wenn A, so B“ kann falsch sein, sie kann aber auch wahr sein. Deshalb muß man stets sehr genau überlegen, ob die Umkehrung eines Satzes wahr ist oder nicht.
(Löse die Aufgaben 2/2, 3/2, 5/4, 7/1, 10/1!)
Ist die *Umkehrung* eines wahren Satzes *wahr*, so kann man beide Aussagen (Satz und Umkehrung) in *einem* Satz formulieren, indem man die Redeweise *„genau dann, wenn“* bzw. *„dann und nur dann, wenn“* verwendet.
Beispiel:
Satz:
Wenn die Quersumme einer Zahl durch 3 teilbar ist, so ist auch die Zahl selbst durch 3 teilbar. (Wahre Aussage)
Umkehrung:
Wenn eine Zahl durch 3 teilbar ist, dann ist auch ihre Quersumme durch 3 teilbar. (Wahre Aussage)
„genau dann, wenn“-Formulierung:
Eine Zahl ist *genau dann* durch 3 teilbar, *wenn* ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. (Wahre Aussage)
Die Redeweise „genau dann, wenn“ ist die Zusammenfassung eines Satzes mit seiner Umkehrung. Um nun zu entscheiden, ob ein Satz der Form „A genau dann, wenn B“ wahr oder falsch ist, überlegt man zunächst, ob die beiden Teilaussagen „Wenn A, so B“ bzw. „Wenn B, so A“, aus denen der Satz entstanden ist, wahr oder falsch sind. Sind die Teilaussagen „Wenn A, so B“, „Wenn B, so A“ wahr, so ist auch die Aussage „A genau dann, wenn B“ wahr. In allen anderen Fällen ist die „genau dann, wenn“-Aussage falsch.

(Löse die Aufgabe 9/2!)
Wie wir gesehen habe, kommt auch kleinen Wörtern eine große Bedeutung zu. Geben wir auf solche Wendungen wie „wenn-, so“, „genau dann, wenn“, „und“, „oder“, „entweder – oder“, „nicht“, „alle“ usw. acht, werden wir uns klarer ausdrücken, werden wir uns sicherer fühlen und weniger Fehler machen.
Bei der Lösung nachstehender Aufgaben wünschen wir Euch viel Erfolg!
Achtet bei deren Lösung besonders auf die kleinen Wörter mit der großen Wirkung!

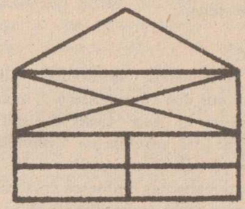
KNOBEL KNOBEL
Knifflig ?? Knifflig

1.)



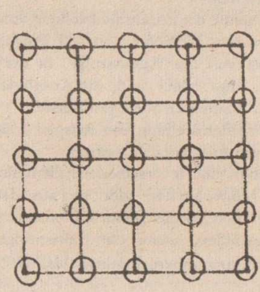
1 Setze in die leeren Felder Zahlen so ein, daß richtig gelöste Aufgaben entstehen!

2.)



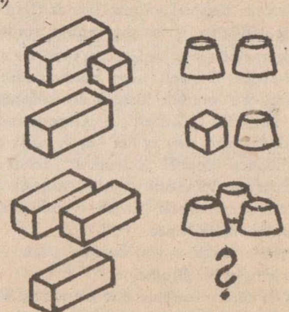
2 Wieviele Dreiecke und wieviele Rechtecke erkennst du?

3.)



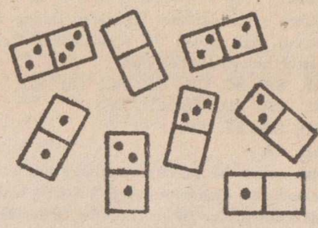
3 a) Nimm von den 25 Steinen 10 so weg, daß in jeder Reihe, Spalte und Diagonale jeweils drei Steine übrig bleiben!
b) Nimm von den 25 Steinen 5 so weg, daß in jeder Reihe, Spalte und Diagonale jeweils vier übrig bleiben!

4.)



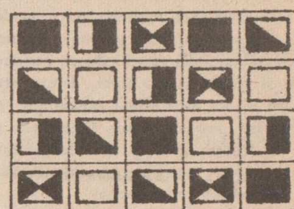
4 Wieviele Würfel müssen auf der rechten Seite liegen, damit sie mit dem Block (links unten) Gleichgewicht halten?

5.)



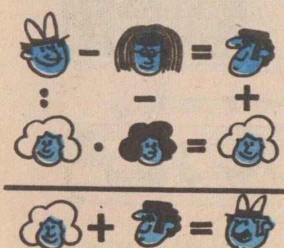
5 Ordnet die 8 Dominosteine so zu einem Quadrat (siehe Abb.), daß in jeder Reihe und in jeder Spalte je 5 Punkte zu zählen sind!

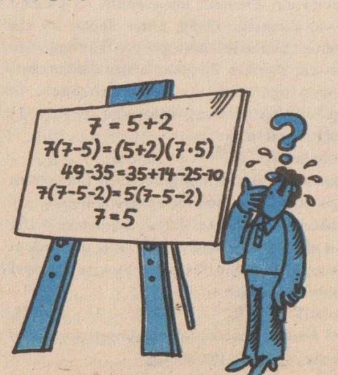
6.)

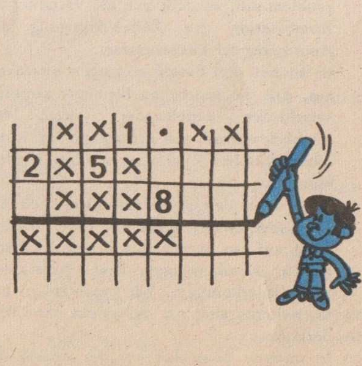


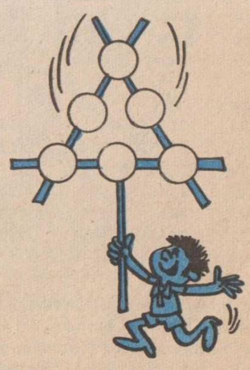
6 Teilt das vorliegende Muster in vier formgleiche Teile, so daß jedes Teil fünf kleine Rechtecke verschiedener Musterung enthält!

Leicht verhexte Zahlen









KOMBINATORIK
RICHTIG ANORDNEN – RICHTIG AUSWÄHLEN

Wir wollen unsere jungen Leser mit der „Kombinatorik", einem Teilgebiet der Mathematik, bekanntmachen. Um eine Vorstellung darüber zu erhalten, mit welchen Fragestellungen sich die Kombinatorik beschäftigt, werden wir zunächst drei einfache Beispiele an den Anfang unserer Ausführungen stellen.

Beispiel 1:
Wieviel verschiedene dreistellige Ziffern lassen sich aus den Grundziffern 1, 2 und 3 bilden, wenn in jeder dieser dreistelligen Ziffern jede der angeführten Grundziffern genau einmal vorkommen soll?

Durch systematisches Probieren erhalten wir die folgenden sechs dreistelligen Ziffern:

123, 213, 312,
132, 231, 321.

Die Leser werden erkennen, daß wir es hier mit einem *Anordnungsproblem* zu tun haben. Es ist die Anzahl aller möglichen Anordnungen von drei verschiedenen Grundziffern zu bestimmen. Man nennt eine derartige Anordnung eine *Permutation.*

In unserem Beispiel sollten Grundziffern in unterschiedlicher Weise angeordnet werden. Im allgemeinen sind es Gegenstände der uns umgebenden Umwelt oder mathematische Objekte. Wir werden deshalb im folgenden die Begriffe „Ziffer", „Gegenstand", „Objekt" durch den in der Mathematik gebräuchlichen Begriff „Element" ersetzen. Verschiedene Elemente werden von uns im weiteren symbolisch durch verschiedene Buchstaben bezeichnet.

Die Problemstellung von Beispiel 1 läßt sich nun wie folgt verallgemeinern:

Gegeben sind n verschiedene Elemente. Wieviel Möglichkeiten der Anordnung, wieviel Permutationen dieser Elemente, gibt es?

Das Aufsuchen aller Permutationen aus z. B. vier Elementen a, b, c, d wird durch die lexikographische Anordnung sehr erleichtert. Dazu wird von einer natürlichen Anordnung ausgegangen, die vorliegt z. B. bei Zahlen der Größe nach oder bei Buchstaben nach dem Alphabet. Permutationen werden dann als lexikographisch geordnet bezeichnet, wenn von zwei verschiedenen Permutationen diejenige zuerst steht, deren erstes Element in der natürlichen Anordnung vorangeht. Bei gleichen ersten Elementen erfolgt die Unterscheidung nach den zweiten Elementen, bei außerdem gleichen zweiten nach den dritten und so weiter.

Beispiel:

abcd,	bacd,	cabd,	dabc,
abdc,	badc,	cadb,	dacb,
acbd,	bcad,	cbad,	dbac,
acdb,	bcda,	cbda,	dbca,
adbc,	bdac,	cdab,	dcab,
adcb,	bdca,	cdba,	dcba,

Beispiel:

1234,	2134,	3124,	4123,
1243,	2143,	3142,	4132,
1324,	2314,	3214,	4213,
1342,	2341,	3241,	4231,
1423,	2413,	3412,	4312,
1432,	2431,	3421,	4321.

Beispiel 2:
Der Sieger eines Wettbewerbs darf sich aus fünf verschiedenen Büchern, die als Prämien zur Verfügung gestellt wurden, genau zwei Bücher auswählen. Wieviel Auswahlmöglichkeiten gibt es in diesem Falle?

Wir lösen diese Aufgabe wieder durch systematisches Probieren. Die fünf gegebenen Elemente (Bücher) seien mit a, b, c, d, e bezeichnet; dann gibt es insgesamt zehn Möglichkeiten zur Auswahl von jeweils zwei Büchern:

a, b; b, c; c, d; d, e;
a, c; b, d; c, e;
a, d; b, e;
a, e.

Wir machen noch darauf aufmerksam, daß die Reihenfolge, in der jeweils zwei Bücher ausgewählt wurden, belanglos ist, das heißt, die beiden Auswahlmöglichkeiten (a,b) und (b,a) brauchen wir nicht voneinander zu unterscheiden.

Man nennt die Zusammenstellung von n verschiedenen Elementen zu je k Stück, unabhängig von der Reihenfolge, in der die k Stück angeordnet sind, die *Kombinationen* von n Elementen zur k-ten Klasse.

Die Problemstellung von Beispiel 2 läßt sich nun wie folgt verallgemeinern:

Gegeben sind n verschiedene Elemente. Wieviel Möglichkeiten gibt es, aus diesen n Elementen jeweils genau k Elemente ($k \leq n$) auszuwählen, wenn die Reihenfolge ihrer Anordnung unberücksichtigt bleibt?

Beispiel 3:
Wieviel verschiedene Fahrkarten sind von der Deutschen Reichsbahn für eine Eisenbahnlinie mit fünf Stationen bereitzustellen Diese Aufgabe ähnelt der des Beispiels 2. Die fünf Stationen seien mit A, B, C, D, E bezeichnet. In diesem Falle sind aber die Fahrkarten für eine Reise von „A nach B" und von „B nach A" verschieden voneinander.

Durch systematisches Probieren finden wir heraus, daß genau 20 verschiedene Fahrkarten bereitzustellen sind:

AB, BA; BC, CB; CE, EC; DE, ED;
AC, CA; BD, DB; CD, DC;
AD, DA; BE, EB;
AE, EA.

Man nennt die Zusammenstellung von n verschiedenen Elementen zu je k Stück, wobei die Reihenfolge zu beachten ist, in der die k Stück angeordnet sind, die *Variationen* von n Elementen zur k-ten Klasse.

Die Problemstellung von Beispiel 3 läßt sich nun wie folgt verallgemeinern:

Gegeben sind n verschiedene Elemente. Wieviel Möglichkeiten gibt es, aus diesen n Elementen jeweils genau k Elemente ($k \leq n$) auszuwählen, wenn die Reihenfolge ihrer Anordnung zu berücksichtigen ist?

Zusammenfassend können wir feststellen: Gibt uns die Permutation ein Anordnungsproblem, die Kombination ein Auswahlproblem auf, so stellt sich die Variation als Kombination mit Berücksichtigung der Anordnung der Elemente dar.

In unseren drei Beispielen gingen wir davon aus, daß die gegebenen Elemente sämtlich verschieden voneinander waren. Wir sprechen deshalb von Permutationen, Kombinationen bzw. Variationen ohne Wiederholung.

Tritt unter den gegebenen Elementen das eine oder andere mehrfach (oder wiederholt) auf, so sprechen wir von Permutationen, Kombinationen bzw. Variationen mit Wiederholungen. Wir beschränken uns im weiteren aber nur auf solche ohne Wiederholung.

In unseren Beispielen war die Anzahl der gegebenen Elemente außerdem jeweils recht klein. Wir konnten deshalb die Lösungen durch systematisches Probieren ermitteln. Bei einer größeren Anzahl gegebener Elemente (z. B. n = 20) würde der Leser sicher bald den Versuch aufgeben, zum Beispiel alle möglichen Anordnungen aufzuschreiben. Auch läuft man Gefahr, die eine oder andere mögliche Anordnung zu übersehen. Wir wollen deshalb versuchen, Gesetzmäßigkeiten zu erkennen, die es gestatten, mit Hilfe mathematischer Formeln ähnliche Aufgaben zu lösen.

Permutationen:
Wir wollen die Anzahl der Permutationen mit P bezeichnen und geben die Anzahl der zu permutierenden (anzuordnenden) Elemente als Index an. So bedeutet z. B. P_{10} die Anzahl der Permutationen von zehn verschiedenen Elementen.

Für genau ein Element a gibt es offenbar nur eine einzige Permutation a. Also ist $P_1 = 1$. Nimmt man ein zweites Element b hinzu, so kann man es entweder vor a oder hinter a setzen: ba, ab. Es gibt also $1 \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 2$ Permutationen, das heißt, es gilt $P_2 = 1 \cdot 2$. Tritt ein drittes Element c hinzu, so kann man in den beiden Permutationen ab und ba das Element c jeweils entweder vor das erste, vor das zweite oder hinter das zweite Element setzen:

cab, acb, abc,
cba, bca, bac.

Auf diese Weise entstehen insgesamt $2 \cdot 3 = 6$ Permutationen, und es gilt $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Aus der Bildung von P_1, P_2 und P_3 vermuten wir, daß die von uns gesuchte Beziehung

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

lautet.

Auf den Beweis für die Richtigkeit unserer Vermutung müssen wir hier verzichten.

Nun ist es noch zweckmäßig, für das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ ein kürzeres Symbol einzuführen. Wir schreiben $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$, gelesen „n Fakultät". Es gilt also beispielsweise

$1! = 1,$
$2! = 1 \cdot 2 = 2,$
$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$

Man erhält also: $P_n = n!$

Variationen:
Wir wollen die Anzahl der Variationen mit V bezeichnen und geben die Anzahl n der vorhandenen Elemente als Index, die Anzahl k der jeweils auszuwählenden Elemente in einer hochgestellten Klammer an.

Mit $V_n^{(k)}$ bezeichnen wir somit die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung von n verschiedenen Elementen zur k-ten Klasse.

Wir gehen schrittweise vor und beginnen zunächst mit $V_n^{(1)}$. Aus n verschiedenen Elementen kann man offensichtlich auf n verschiedene Weise jeweils ein Element auswählen, nämlich

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Deshalb gilt: $V_n^{(1)} = n$.

Haben wir aus den gegebenen Elementen bereits ein Element ausgewählt, so bleiben (n–1) Elemente übrig, unter denen wir ein zweites Element herausgreifen können. Um also ein zweites Element auszuwählen, verbleiben uns noch (n–1) Möglichkeiten. Es ergeben sich demnach insgesamt $n \cdot (n-1)$ Möglichkeiten.

Deshalb gilt: $V_n^{(2)} = n \cdot (n-1)$.

Haben wir aus den gegebenen n Elementen zwei Elemente bereits ausgewählt, so verbleiben noch $(n-2)$ Elemente. Die $n(n-1)$ Paare lassen sich nun mit jedem der verbleibenden Elemente zu einem Tripel zusammenstellen.

Deshalb gilt: $V_n^{(3)} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$.

Auf Grund unserer Überlegungen vermuten wir für $V_n^{(k)}$ die Beziehung

$$V_n^{(k)} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Auf den Beweis der Gültigkeit dieser Formel müssen wir in diesem Rahmen verzichten.

Mit Hilfe der bereits erwähnten „Fakultäten" läßt sich diese Formel wie folgt vereinfachen:

$$V_n^{(k)} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

$$V_n^{(k)} = (n-k+1) \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n$$

$$V_n^{(k)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-k)(n-k+1) \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-k)}$$

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Beispiel:

$$V_5^{(3)} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 60$$

Kombinantionen:
Wir wollen die Anzahl der Kombinationen mit C bezeichnen und geben die Anzahl n der vorhandenen Elemente als Index, die Anzahl k der jeweils auszuwählenden Elemente in einer hochgestellten Klammer an. Mit $C_n^{(k)}$ bezeichnen wir somit die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung von n verschiedenen Elementen zur k-ten Klasse. Permutiert man die k Elemente in einer Kombination k-ter Klasse, so entstehen aus dieser Kombination k-ter Klasse k! Variationen k-ter Klasse. Da insgesamt $C_n^{(k)}$ Kombinationen ohne Wiederholung von n Elementen zur k-ten Klasse exisistieren, entstehen durch Permutation der k Elemente $C_n^{(k)}$ k! Variationen ohne Wiederholung zur k-ten Klasse. Es gilt also die Beziehung

$$V_n^{(k)} = C_n^{(k)} \cdot k!$$

Hieraus folgt

$$C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Nun wollen wir noch für den Quotienten $\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ ein kürzeres Symbol einführen:

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-k) \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-k) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$$

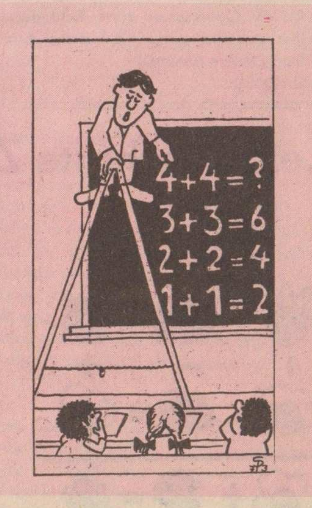
$$= \frac{(n-k+1)(n-k+2) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} = \binom{n}{k}$$

gelesen „n über k".

Somit erhalten wir $C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$

Beispiele: $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10,$

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$$



„Ich sehe, das ist schon wieder zu hoch für euch!"

Unsere Ergebnisse wollen wir abschließend in einer Tabelle zusammenstellen:

Begriff	Problem	Formel für die Anzahl
Permutation	Anordnung	$P_n = n!$
Kombination	Auswahl	$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$
Variation	Auswahl und Anordnung	$V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$

In den folgenden Aufgaben wollen wir unsere erworbenen Kenntnisse anwenden und festigen.

Aufgabe:
Wieviel verschiedene zweistellige Ziffern lassen sich aus den Grundziffern 1, 2, 3 bilden, falls in den zweistelligen Ziffern keine der gegebenen Grundziffern doppelt auftreten soll?

Lösung:
Da die Ziffern 12 und 21 voneinander verschieden sind, muß die Anordnung bei der Auswahl zusätzlich beachtet werden. Es sind also alle Variationen von drei Elementen zur 2. Klasse zu bilden.

$V_3^{(2)} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$

Es lassen sich sechs verschiedene zweistellige Ziffern bilden.

Aufgabe:
Wieviel Diagonalen besitzt ein konvexes Zehneck?

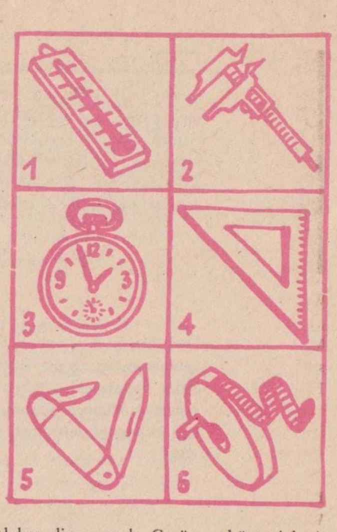
Lösung:
Da z. B. die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{CA}$ nicht voneinander unterschieden werden, sind in diesem Falle alle Kombinationen von 10 Elementen zur zweiten Klasse zu bilden.

$C_{10}^{(2)} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45.$

Nun ist noch die Anzahl der Seiten zu subtrahieren. Ein konvexes Zehneck besitzt somit $45 - 10 = 35$ Diagonalen.

Aufgabe:
Fünf Kinder fahren mit der Rolltreppe, jedes Kind auf einer Stufe. Wieviel Möglichkeiten gibt es für diese Kinder, sich hintereinander aufzustellen?

Lösung
$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$



Welches dieser sechs Geräte gehört nicht in diese Gruppe?

Das Taschenmesser.

Für interessierte Leser verweisen wir auf geeignete Fachliteratur.
Die nachfolgend aufgeführten Bücher erläutern Euch ausführlicher die mathematischen Probleme.

BÜCHER MIT MATHE

Christian Heermann
„Das Einmaleins genügt nicht mehr!"
Mathematik im Alltag
Der Kinderbuchverlag Berlin 3,00 M

Manfred Rehm
„Zahl, Menge, Gleichung"
Der Kinderbuchverlag Berlin 5,80 M

Marianne Berge
„Außerunterrichtliche Leistungsvergleiche in der Unterstufe
Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin 6,50 M

N. J. Wilenkin
„Unterhaltsame Mengenlehre"
BSG B. G. Teubner
Verlagsgesellschaft 6,50 M

O. Zich/A. Kolmann
„Unterhaltsame Logik"
BSG B. G. Teubner
Verlagsgesellschaft 4,40 M

T. Varga
„Mathematische Logik für Anfänger"
Band I Aussagenlogik 6,40 M
Band II Prädikatenlogik 9,00 M
Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

Dieter Haupt
„Mengenlehre leicht verständlich"
Fachbuchverlag Leipzig 4,80 M

Autorenkollektiv
„Mathematische Logik – Mengenlehre – Zahlenbereiche"
Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin 7,50 M

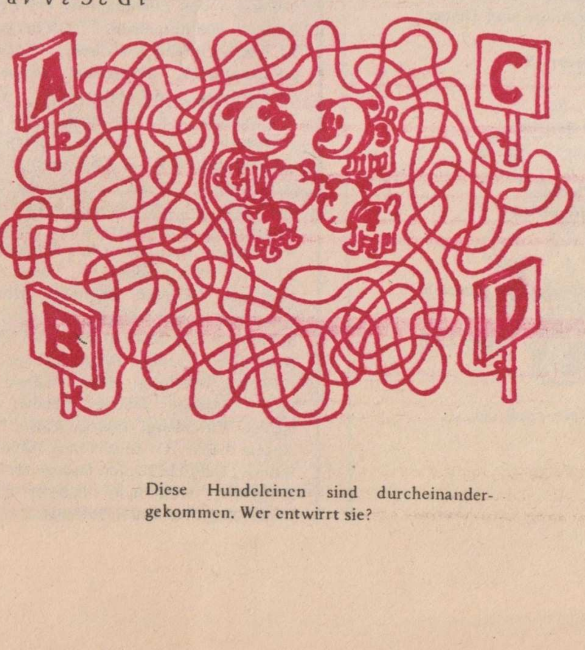
Lilly Görke
„Mengen, Relationen, Funktionen"
Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin 11,80 M

P. P. Korowkin
„Ungleichungen"
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 2,45 M

G. Kleinfeld
„Ungleichungen"
– Übungen für junge Mathematiker –
BSG B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 5,50 M

Hans Jäckel
„Mathematik heute"
Urania-Verlag Leipzig 5,80 M

1 D, 2 C, 3 A, 4 B



Diese Hundeleinen sind durcheinandergekommen. Wer entwirrt sie?

Klasse 1:

In der DDR gibt es 15 geologische und viermal soviel botanische Schutzgebiete. Die Anzahl der zoologischen Schutzgebiete ist um 16 größer als die Anzahl der botanischen Schutzgebiete. Wieviel zoologische Schutzgebiete gibt es in der DDR?

Der Bezirk Rostock hat vier Naturschutzgebiete mehr als der Bezirk Suhl. Beide Bezirke zusammen haben 100 Naturschutzgebiete. Wieviel Naturschutzgebiete befinden sich in jedem dieser beiden Bezirke der DDR?

Klasse 2:

Viele Schüler sind als junge Ornithologen tätig. Durch das Anbringen künstlicher Nistgeräte und systematische Fütterung während der Wintermonate nahm im Kreis Spremberg der Vogelbestand wesentlich zu. Axel, Bernd und Dieter haben zusammen 27 Nistgeräte in ihrer engeren Heimat angebracht. Auf Axel entfallen 8 Nistgeräte. Bernd hat um die Hälfte mehr Nistgeräte als Axel aufgestellt. Wieviel Nistgeräte hat Dieter angebracht?

Zur Aufforstung der Braunkohlen-Abraumhalden werden von Schulklassen alljährlich junge Bäumchen und Sträucher angepflanzt. So tragen die Schüler dazu bei, im Bezirk Cottbus eine Natur-Kultur-Landschaft zu schaffen und Erholung im Senftenberger Braunkohlengebiet zu ermöglichen. Die Schüler der Klasse 2a einer Schule des Bezirks Cottbus pflanzten 20 Sträucher und dreimal so viel junge Bäumchen an. Die Schüler der Klasse 2b dieser Schule pflanzten 5 Sträucher weniger an als die Schüler der Klasse 2a, aber sie pflanzten fünfmal so viel junge Bäumchen wie Sträucher an. Wieviel junge Bäumchen und wieviel Sträucher wurden von den Schülern dieser beiden Klassen zusammen angepflanzt?

Klasse 3:

Wenn Schüler Altpapier sammeln und zur Erfassungsstelle bringen, so tragen sie dazu bei, unsere kostbaren Wälder zu schonen. Eine Tonne Altpapier entspricht einer Kiefer im Alter von 80 bis 90 Jahren. Es wären pro Jahr etwa 50 Kilotonnen Altpapier erforderlich, um 125 000 Schichtfestmeter Holz weniger einzuschlagen. Diese Menge entspricht einem Waldbestand von 500 Hektar. Wieviel Tonnen Altpapier müssen aufgebracht werden, um einen Waldbestand in der Größe eines Fußballfeldes von 50 m Breite und 100 m Länge vor dem Einschlag zu bewahren?

Der Leipziger VEB Stadtreinigung führte an manchen Wochenenden Sondereinsätze durch. An einem Sonnabend waren 50 Spezialfahrzeuge eingesetzt. Am darauffolgenden Sonntag waren ein Spezialfahrzeug mehr als die Hälfte der Fahrzeuge vom Sonnabend unterwegs. An beiden Tagen wurden insgesamt 4 028 m^3 Abfälle geräumt. Wieviel Kubikmeter Abfälle wurden von jedem Fahrzeug abtransportiert?

Klasse 4:

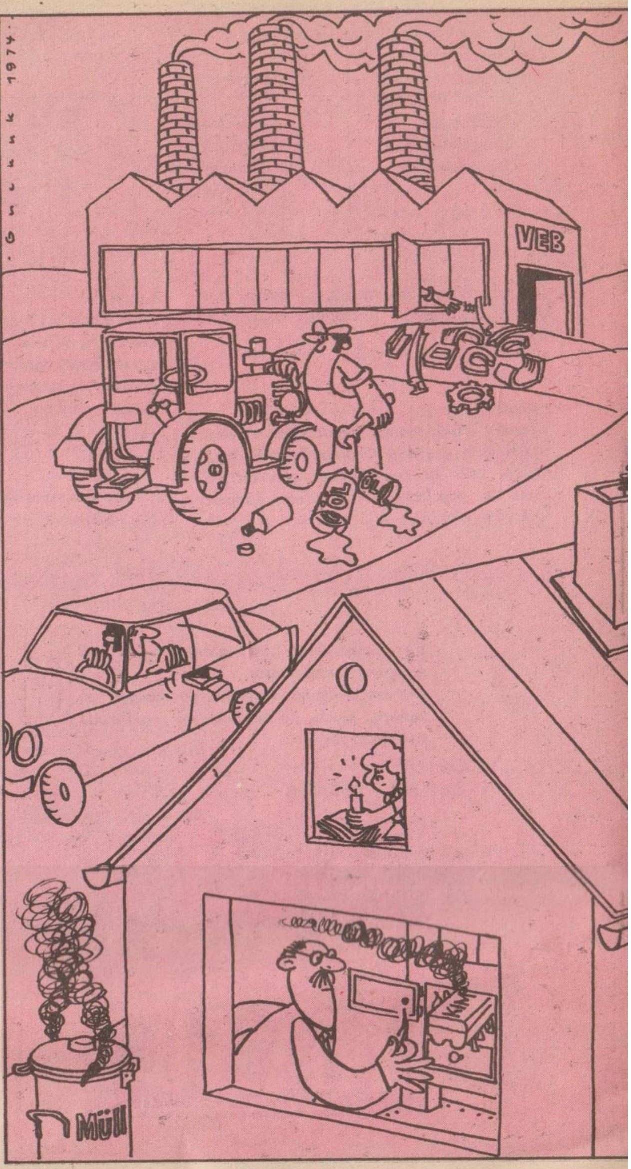
Die Menge industrieller Abprodukte wächst ständig. So fallen z. B. beim Abbau der Kohlevorkommen beträchtliche Massen an Abraum an. Während im Jahre 1960 zur Förderung von 100 t Kohle 285 m^3 Abraum bewältigt werden mußten, waren es im Jahre 1970 bereits 72 m^3 mehr. Wieviel Kubikmeter Abraum mußten im Jahre 1970 bei einer Förderung von 260 Millionen Tonnen Rohbraunkohle bewegt werden?

Etwa 40 000 Seevogelpaare nisten jährlich in den Seevogelschutzgebieten der DDR. Es sind etwa 26 000 Lachmöwenpaare, halb so viele Sturmmöwenpaare, rund 750 Paare Silbermöwen und seit einigen Jahren auch Paare von Schwarzkopfmöwen. Wieviel Paare Schwarzmöwen gehören zum Bestand unserer Umwelt?

Klasse 5:

Die Papiermacher des VEB Zellstoff- und Papierkombinat konnten das Gewicht von einem Quadratmeter Zellstoffpapier, aus dem Papiersäcke gefertigt werden, von 73,8 g auf 72 g senken, ohne die Qualität des Papieres zu mindern. Die Jahresproduktion der vier Meter breiten Papierbahn reicht mit ihrer Länge von 132 000 km fast viermal um den Äquator.
Wieviel Tonnen Rohstoff konnten durch diese Verbesserung im Jahr eingespart werden, um unsere Wälder vor unnötigem Holzeinschlag zu bewahren?

Zu den geschützten, vom Aussterben bedrohten Tieren unserer Heimat gehört der Elbe-Biber. In den Bezirken Halle und Magdeburg sind zwölf Biber-Lebensräume Naturschutzgebiete. Der Bestand beträgt etwa 350 bis 400 Tiere. Sie sind bedroht durch Abwasserbelastung, die zu Vergiftungen führt. Entsprechende Schutzmaßnahmen wurden eingeleitet.
Wieviel Elbe-Biber leben im Durchschnitt in jedem der eingerichteten Naturschutzgebiete?



Preisaus

Wettbewerbsbedingungen:

Schicke die Lösungen der Aufgaben Deiner (oder höherer Klassenstufen) unter Angabe Deines Namens, Deines Alters und Deiner Adresse

bis zum 1. Februar 1975

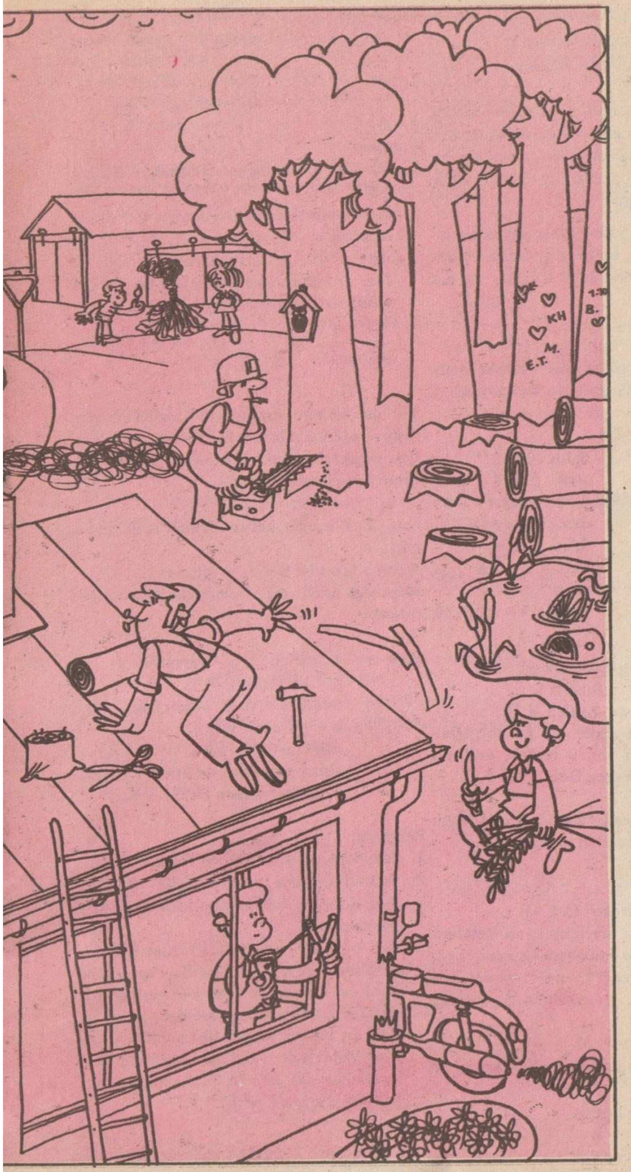
Leipziger Volkszeitung
Abt. Absatz
701 Leipzig
Postschließfach 660
Kennwort: Mathe-LVZ

Das Los wird wieder die Preisträger ermitteln.
Viel Freude und Erfolg!

Eure LVZ

Preisträger der XII. Mathe-LVZ 1973

Zu unserem Preisausschreiben „Mathematik-Olympiaden-international" gingen 5118 Lösungen ein. Wir wählten die Preisträger aus und überreichten im März 1974 Urkunden und Buchprämien: OS Leuthen, Kl. 7; OS Ehrenhain; OS Bernsdorf I, Kl. 4 R; OS Willi Wallstab, Löderburg; OS Langebrück, Fachzirkel Mathematik; OS Goldberg, AG Mathematik, Kl. 5/6; W.-Pieck-OS, Wolfen-Nord, AG Mathe; OS Marnitz; OS Hohen Neuendorf; OS Schlagsdorf, Kl. 2; OS Clingen; OS „Geschwister Scholl", Sondershausen, AG Mathe, Kl. 5/6; alpha-Club der OS Bergwitz/Rotta; OS Lichtenhain; OS Stolpen, AG Mathe; Karl-Marx-OS, Schmalkalden, Kl. 6 b; OS Klausdorf — Lutz Fabian, Niemegk; Henriett Blüthner, Altenburg; Klaus und Holger Gelhaar, Badlingen; Wiete Schirmer, Karl-Marx-Stadt; Ines Kröger, Neukloster; Claudia Dähn, Lübben; Petra Haberlag, Ilsenburg; Heike Hübner, Grimmen; Christine Schubert, Halle; Bärbel Neßler, Wittenberg; Günther Klose, Leipzig; Angela Seidler, Cottbus; Frank Samulowitz, Wismar; Gabriele Töpfer, Gauernitz; Monika Langguth, Hinternah; Sabine Zimmer, Berlin; Birgit Helmrich, Stadtroda.



schreiben

Klasse 6:

Mit der Ausweitung der Energieproduktion hat sich der Anfall an Kraftwerksaschen vergrößert. In zunehmendem Maße werden sie als Sekundärrohstoffe genutzt. So werden von den etwa 12 Mio. Tonnen, die jährlich anfallen, rund 1,5 Mio. Tonnen einer Nutzung zugeführt. Sie werden vorrangig im Bergbau zum Stollenversatz oder in der Bauindustrie eingesetzt. Der wievielte Teil der jährlich anfallenden Kraftwerksaschen wird gegenwärtig noch nicht als Sekundärrohstoff genutzt?

Erhebliche Mengen Abprodukte werden in die Atmosphäre abgeleitet. So wird zum Beispiel die Umwelt unserer Republik jährlich mit etwa 15 Mio. t Flugasche aus industriellen und häuslichen Schornsteinen, mit 160 kt (Kilotonnen) Staub aus den metallurgischen Betrieben und mit 2 1/2 mal soviel Kilotonnen Zementstaub belastet. Wieviel Tonnen Abprodukte sind das etwa pro Tag, die unsere Atmosphäre verunreinigen?

Klasse 7:

Jährlich werden in der DDR über 400 000 t Altpapier, darunter 125 000 t aus Haushaltungen, erfaßt und damit rund 2 Mio. Festmeter Holz eingespart. Trotzdem bleiben große Reserven noch ungenutzt. In den Haushaltungen werden jährlich schätzungsweise noch 150 000 t Papier verbrannt oder in den Müll geworfen. Wieviel Tonnen Festmeter Holz würden bei der Erfassung dieses vernichteten Altpapiers eingespart werden?

Der Verbrauch an Süßwasser wächst im Weltmaßstab von Jahr zu Jahr. Deshalb ist geboten, sparsam mit dem Trinkwasser umzugehen. 97 Prozent der Weltwasserreserven sind Salzwasser in Ozeanen. Von den Süßwasserreserven sind 95 Prozent im Eis der Polargebiete „konserviert". Wieviel Prozent der Weltwasserreserven stehen in Form von Süßwasser zur Verfügung?

Klasse 8:

Im Jahre 1971 wurden etwa 260 Mio. t Rohbraunkohle gefördert, deren Schwefelgehalt bei 1,5 Prozent liegt. Wieviel Tonnen Schwefel werden in Form von Schwefeldioxid in die Atmosphäre emittiert, wenn 85 Prozent der geförderten Kohle verbrannt und 85 Prozent des in der Kohle enthaltenen Schwefels mit den Rauchgasen emittiert werden und damit eine erhebliche Umweltbelastung verursacht wird?

Die Biospäre ist die Hülle der Erde, in der das Leben existiert und die zugleich von ihm hervorgebracht ist. Die Masse der lebenden Substanz in der Biospäre beträgt etwa 10^{20} Gramm. Davon entfallen auf die pflanzlichen Organismen 99,990 bis 99,999 Prozent. Wieviel Milliarden Tonnen Masse der lebenden Substanz der Biosphäre entfällt auf die tierischen Organismen?

Klasse 9:

Im Jahre 1972 unterzeichneten die UdSSR und die DDR ein Protokoll zur weiteren Entwicklung der Zusammenarbeit auf dem Gebiet des Umweltschutzes. Auf der Grundlage dieses Programms arbeiten wissenschaftliche Forschungseinrichtungen der RGW-Staaten an Themen, die den Schutz der Umwelt zum Gegenstand haben. Von den Forschungseinrichtungen der RGW-Staaten und von den ständigen Fachkommissionen des Rates werden insgesamt 164 Themen bearbeitet. Die Anzahl der von den Fachkommissionen des Rates bearbeiteten Themen ist um 4 kleiner als die halbe Anzahl der von den Forschungseinrichtungen der RGW-Staaten bearbeiteten Themen. Wieviel Themen werden von jeder dieser beiden Gruppen bearbeitet?

Im Jahre 1973 wurden von der Leipziger Müllabfuhr 732 000 m^3 Schutt geräumt. Wir denken uns den abgefahrenen Schutt in Form eines gleichseitigen Kegels aufgeschüttet. Welche Höhe besitzt dieser Schuttberg?

Klasse 10:

Die Hälfte der 654 Naturschutzgebiete (NSG) der DDR befinden sich in sechs Bezirken unserer Republik. Die Bezirke Erfurt und Dresden haben gleichviel NSG. In den Bezirken Karl-Marx-Stadt, Rostock und Schwerin befinden sich zusammen 129 NSG. Der Bezirk Halle verfügt über 21 NSG mehr als der Bezirk Erfurt. Im Bezirk Karl-Marx-Stadt befinden sich 4 NSG weniger als im Bezirk Rostock, aber 19 NSG mehr als im Bezirk Schwerin.
Wieviel Naturschutzgebiete befinden sich in jedem dieser Bezirke unserer Republik?

Luftverunreinigungen haben nicht nur Auswirkungen auf den Menschen, sondern sie beeinträchtigen auch die Ergebnisse in der Land- und Forstwirtschaft. Der Bau höherer Schornsteine trägt zur schadloseren Abführung der Rauchgase bei. Im Nordosten Berlins befindet sich ein Schornstein für ein in Bau befindliches Heizkraftwerk. Ein Beobachter mit einer Augenhöhe von 170 cm erblickt die Spitze dieses Schornsteins unter dem Erhebungswinkel q = 73,45e. Dabei sei angenommen, daß sich Beobachter und Schornstein in einer horizontalen Ebene befinden. Es ist die Höhe des Schornsteines zu berechnen.

Wußtest Du schon?

- Auf das Konto der USA entfallen fast 50 Prozent der gesamten Verunreinigungen der Erde durch Industrieabfälle. Jährlich entledigen sich die Industriebetriebe der USA 165 Millionen Tonnen festen Mülls und blasen 172 Millionen Tonnen Rauch und Ruß in die Luft (aus „Time" vom 2. 2. 70) . . .
- In Prag wird der anfallende Müll sortiert, d. h., insbesondere Metalle und andere Bestandteile von ökonomischen Wert abgeschieden. 80 Prozent des Mülls werden verbrannt, jährlich sind das 100 000 Tonnen. Die gewonnene Dampfleistung beträgt 350 t/Std.
- Ein hundertjähriger Baum produziert an einem Tag Sauerstoff für 10 erwachsene Menschen.
- In Böhlen (Bez. Leipzig) wurde an Stelle einer Druckgasanlage, die die Abwässer stark verschmutzte, eine Mischgasanlage mit einer Reinigungsanlage im Wert von 100 Millionen Mark errichtet. Diese Anlage vermindert die Abwasserlast und senkt den Wasserbedarf auf ein Minimum.

„Ich hupe nie, sie riecht mich!"

UN-GLEICHUNGEN

1. Einige Bemerkungen zur Bedeutung der Ungleichungen, insbesondere für das numerische Rechnen

In vielen Gebieten der Mathematik spielen außer den Gleichungen auch die Ungleichungen und Ungleichungssysteme eine wichtige Rolle. Zahlreiche Aufgaben und Probleme kann man nur lösen, wenn man das Operieren mit Ungleichungen beherrscht und wenn man die für Ungleichungen gültigen Gesetze und Regeln richtig anwendet.

Schon ein so einfacher Sachverhalt wie die Aussage
„Die Bezirkshauptstadt Leipzig hatte am 31. Dezember 1972 rund 600 000 Einwohner."
läßt sich exakt nur mit Hilfe von Ungleichungen erklären; denn gemeint ist mit dieser Aussage, daß die Einwohnerzahl von Leipzig $x = 577\,459$ auf Vielfache von 100 000 gerundet worden ist, d. h., daß

$$550\,000 \leqq x \leqq 650\,000$$

gilt. Wir hätten aber auch sagen können:
„Die Einwohnerzahl von Leipzig betrug rund 580 000."
Das ist gleichbedeutend mit den Ungleichungen

$$575\,000 \leqq x \leqq 585\,000.$$

Bei Anwendungsaufgaben ist es häufig wichtig zu wissen, zwischen welchen Schranken ein Ergebnis liegt, wenn die Ausgangszahlen nur gerundete Zahlen sind. Es soll z. B. das Volumen eines Würfels berechnet werden, dessen Kantenlänge rund 64 mm beträgt. Die Antwort „Das Volumen dieses Würfels beträgt 262 144 mm³" ist nicht richtig; denn es wurde nicht beachtet, daß die Kantenlänge nur *rund* 64 mm beträgt und mit einem Fehler, dessen Betrag höchstens gleich 0,5 mm ist, behaftet ist. Eine Untersuchung des Sachverhaltes mit Hilfe von Ungleichungen führt auch hier zum Ziel.

Bezeichnet man nämlich die Maßzahl der Kantenlänge (in mm) mit x, so gilt

$$63{,}5 \leqq x \leqq 64{,}5,$$

also $63{,}5^3 \leqq x^3 \leqq 64{,}5^3$,
d. h., $256\,047{,}875 \leqq x^3 \leqq 268\,336{,}125$.

Das Volumen des Würfels liegt also zwischen 256 000 mm³ und 269 000 mm³; daher lautet die richtige Antwort:
„Das Volumen des Würfels beträgt ungefähr 260 000 mm³."

Bei einfachen Berechnungen, z. B. bei Multiplikationsaufgaben, führt man häufig eine sogenannte *„Überschlagungsrechnung"* (auch „Überschlag" genannt) durch, indem man die gegebenen Zahlen stark rundet und die gerundeten Zahlen im Kopf miteinander multipliziert. Z. B. erhält man bei der Multiplikation

$$x = 7 \cdot 6\,843 = 47901$$

den Überschlag

$$x \approx 7 \cdot 7\,000 = 49\,000$$

und stellt fest, daß die Zahl 49 000 ein (grober) Näherungswert für das genaue Ergebnis 47 901 ist.

Wenn man aber wissen will, um welchen Betrag das Ergebnis des Überschlags von dem genauen Ergebnis höchstens abweicht, so muß man wieder mit Ungleichungen operieren. Für den Betrag des Fehlers gilt in dem vorliegenden Fall

$$\varepsilon \leqq 7 \cdot 500 = 3\,500,$$

weil infolge der Rundung der zweite Faktor mit einem Fehler von höchstens 500 behaftet ist.

In vielen Fällen ist es notwendig, das Ergebnis einer Rechnung *abzuschätzen*, d. h., durch einfache Berechnungen festzustellen, zwischen welchen Schranken das genaue Ergebnis liegt. In dem obigen Beispiel erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$7 \cdot 6\,000 < x < 7 \cdot 7\,000,$$

also $42\,000 < x < 49\,000$,
d. h., das genaue Ergebnis $x = 47\,901$ liegt zwischen den Zahlen 42 000 und 49 000.

Derartige Abschätzungen spielen bei praktischen Rechnungen, aber auch in der Analysis eine große Rolle, weil man viele Erkenntnisse, viele Sätze und Schlußfolgerungen nur mit Hilfe solcher Abschätzungen, die auch die Grundlage der Fehlerrechnung bilden, gewinnen kann.

Wie wichtig eine kritische Abschätzung des Fehlers ist, der beim Runden von Zahlen entstehen kann, zeigt das folgende Beispiel einer Division. Man will einen Näherungswert für den Quotienten

$$x = 1\,249{,}2 : 0{,}144$$

ermitteln und rechnet, indem man den Divisor auf 0,1 rundet,

$$x \approx 1\,249{,}2 : 0{,}1 = 12\,492.$$

Dieser Wert weicht aber von dem genauen Ergebnis $x = 8\,675$ erheblich ab, weil bei der Division durch das Runden ein großer Fehler entstehen kann, wenn der Divisor verhältnismäßig klein ist. Das wird durch eine Abschätzung mit Hilfe von Ungleichungen klar:

$$1\,249{,}2 : 0{,}2 < x < 1\,249{,}2 : 0{,}1,$$

also $6\,246 < x < 12\,492$,
d. h., die obere Schranke des Ergebnisses ist hier zweimal so groß wie die untere Schranke.

Schon diese einfachen Beispiele aus der elementaren Arithmetik zeigen, welche Bedeutung das Operieren mit Ungleichungen bei numerischen Rechnungen hat. Aber auch in vielen anderen Gebieten der Mathematik – und zwar sowohl in der Elementarmathematik als auch in der höheren Mathematik, in der Algebra, der Analysis, der angewandten Mathematik – benötigt man das Operieren mit Ungleichungen, die häufig recht kompliziert sind, zur Herleitung wichtiger Sätze und zur Abschätzung numerischer Resultate. Viele Gebiete der angewandten Mathematik, wie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, die Operationsforschung und speziell die Linearoptimierung, die in der Technik und Ökonomie in den letzten Jahren eine wachsende Bedeutung erlangt hat, arbeiten mit Ungleichungen und Systemen von Ungleichungen.

Wir wollen nun im folgenden die wichtigsten Sätze, die für das Arbeiten mit Ungleichungen benötigt werden, herleiten und dabei auch genau definieren, was wir unter der Relation „ist kleiner als" ($<$) und unter der Relation „ist größer als" ($>$) verstehen. Dazu werden wir jeweils einfache Beispiele geben und auch zeigen, wie man einfache Ungleichungen lösen kann. Die Definitionen und Sätze werden wir stets so formulieren, daß sie für den *Bereich der reellen Zahlen* gültig sind, wie das die Praxis meistens fordert. Wenn also nichts anderes erwähnt ist, verstehen wir unter einer Zahl stets eine reelle Zahl.

2. Die Kleiner-als-Relation und die Größer-als-Relation im Bereich der reellen Zahlen

Def. 1. Es seien a und b zwei reelle Zahlen. Wir definieren: Es gilt $a < b$, in Worten „a ist kleiner als b", genau dann, wenn es eine positive reelle Zahl x gibt, so daß $a + x = b$. Ferner definieren wir:

Es gilt $a > b$, in Worten „a ist größer als b", genau dann, wenn $b < a$ gilt, also wenn es eine positive reelle Zahl x gibt, so daß $b + x = a$.

Beispiele:

1. Es gilt $3 < 5$ weil es eine positive reelle Zahl, nämlich 2, gibt, so daß $3 + 2 = 5$.
   Kurz formuliert:
   $3 < 5$; denn $3 + 2 = 5$.
2. Es gilt $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$; denn $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, weil $\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$.
3. Es gilt $-100 < -99$; denn $-100 + 1 = -99$.
4. Es gilt $-\frac{1}{10} < \frac{1}{5}$; denn $-\frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$.
5. Es gilt $\frac{3}{10} > \frac{5}{20}$; denn $\frac{5}{20} < \frac{3}{10}$ weil $\frac{5}{20} + \frac{1}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.
6. Es gilt $\pi > 3{,}14$; denn $3{,}14 < \pi$, weil $3{,}14 + 0{,}00159\ldots = 3{,}14159\ldots$
7. Für alle positiven Zahlen x gilt $x > 0$; denn aus $0 + x = x$ folgt $0 < x$.
   Für alle negativen Zahlen x gilt $x < 0$; denn in diesem Falle ist die entgegengesetzte Zahl $\bar{x}$ von x positiv, und aus $x + \bar{x} = 0$ folgt wegen Def. 1 $x < 0$.

Satz 1. Für zwei reelle Zahlen a und b gilt genau einer der folgenden drei Fälle:
1. $a = b$;
2. $a < b$;
3. $a > b$, also $b < a$ (wegen Def. 1).

Wir sagen auch, für die Kleiner-als-Relation gilt die *Trichotomie* (aus dem Griechischen, wörtlich „Dreiteilung"), weil genau drei Fälle möglich sind, die einander gegenseitig ausschließen.

Beweis. Sind a und b zwei reelle Zahlen, so ist
entweder $x = a - b$ positiv,
also $b + x = a$,
d. h., $b < a$ (Fall 3);
oder $x = a - b$ negativ,
also $-x = b - a$ positiv,
daher gilt $a + (-x) = b$,
d. h., $a < b$ (Fall 2);
oder $x = a - b = 0$, also $a = b$ (Fall 1).

Beispiele:

1. $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{4}{5}$ Es gilt $a < b$ (Fall 2) denn $\frac{2}{3} + \frac{2}{15} = \frac{4}{5}$
2. $a = -\frac{2}{3}$, $b = -\frac{4}{5}$ Es gilt $a > b$ (Fall 3); denn $b < a$, weil $-\frac{4}{5} + \frac{2}{15} = -\frac{2}{3}$.
3. $a = \frac{4}{5}$, $b = 0{,}8$ Es gilt $a = b$ (Fall 1); denn $\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0{,}8$.
4. Ist x eine reelle Zahl, so gilt wegen Satz 1 entweder $x = 0$ oder $x < 0$ oder $x > 0$. Eine reelle Zahl ist also entweder gleich Null oder negativ oder positiv.

Wegen Satz 1 können wir zwei reelle Zahlen a und b miteinander *vergleichen*, d. h., feststellen, ob a kleiner als b oder a größer als b oder $a = b$ ist. So haben wir in dem obigen Beispiel 1 die Zahlen $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ miteinander verglichen und festgestellt, daß $\frac{2}{3}$ kleiner als $\frac{4}{5}$ ist. Der Satz 1 führt ferner zu der folgenden Definition:

Def. 2. Wir definieren:

Es gilt $a \leqq b$, in Worten „a ist kleiner oder gleich b" genau dann, wenn $a < b$ oder $a = b$ (Fall 2 oder Fall 1).

Es gilt $a \geqq b$, in Worten „a ist größer oder gleich b genau dann, wenn $a > b$ oder $a = b$ (Fall 3 oder Fall 1).

Es gilt $a \neq b$, in Worten „a ist ungleich b" genau dann, wenn $a < b$ oder $a > b$ (Fall 2 oder Fall 3), also *nicht* $a = b$ gilt.

Beispiele:

1. Für alle dreistelligen natürlichen Zahlen x gilt $x \geqq 100$; denn es gilt $x = 100$ od. $x > 100$.
2. für alle reellen Zahlen x gilt $x^2 \geqq 0$; ist nämlich $x > 0$, so ist auch $x^2 > 0$; ist aber $x < 0$, so ist ebenfalls $x^2 < 0$, da das Produkt zweier negativer Zahlen positiv ist; ist $x = 0$, so gilt $x^2 = 0$.
3. Es gilt $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$, denn $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ und *nicht* $\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

Für die weitere Arbeit mit Ungleichungen, insbesondere auch mit den sog. „fortlaufenden Ungleichungen" benötigen wir den folgenden wichtigen Satz:

Satz 2. Für alle reellen Zahlen a, b und c gilt:
Wenn $a < b$ und $b < c$, so gilt $a < c$.
Man sagt auch, die Kleiner-als Relation ist *transitiv*.

Beweis. Aus $a < b$, d. h. wegen Def. 1
$a + x = b$ mit $x > 0$,
und $b < c$, d. h. wegen Def. 1
$b + y = c$ mit $y > 0$,
folgt $(a + x) + y = c$,
also $a + (x + y) = c$ mit $x + y > 0$,
d. h. aber wegen Def. 1 $a < c$.

Beispiele:

1. Aus $37 < 40$ und $40 < 46$ folgt $37 < 46$.
2. Aus $-5 < 0$ und $0 < 7$ folgt $-5 < 7$; jede negative Zahl ist also kleiner als jede positive Zahl.
3. Aus $6 < 10$ und $10 < 13$ folgt $6 < 13$. Allgemein gilt: Jede einstellige natürliche Zahl ist kleiner als jede zweistellige natürliche Zahl; jede zweistellige natürliche Zahl ist kleiner als jede dreistellige natürliche Zahl; jede n-stellige natürliche Zahl ist kleiner als jede (n + k)-stellige natürliche Zahl (falls $k > 0$).

Aus dem Satz 2 ergeben sich die folgenden *Schlußfolgerungen:*

1. Für alle reellen Zahlen a, b und c gilt: Wenn $a > b$ und $b > c$, so gilt $a > c$, d. h., auch die Größer-als-Relation ist transitiv.
2. Für alle reellen Zahlen $a_1, a_2 \ldots, a_n$ gilt: Wenn $a_1 < a_2$ und $a_2 < a_3$ und ... und $a_{n-1} < a_n$, so $a_1 < a_n$, d. h., die Transitivität trifft auch dann zu, wenn es sich um mehr als zwei Kleiner-als-Relationen (bzw. Größer-als-Relationen) handelt.
3. Die Transitivität gilt auch dann, wenn eine oder beide Relationen Gleichheitsrelationen sind.

Für alle reellen Zahlen a, b, c gilt nämlich:
Wenn $a \leqq b$ und $b \leqq c$, so $a \leqq c$;
wenn $a \geqq b$ und $b \geqq c$, so $a \geqq c$;
wenn $a \leqq b$ und $b < c$, so $a < c$;
wenn $a < b$ und $b \leqq c$, so $a < c$.

Für das Rechnen mit Ungleichungen wollen wir noch eine vereinfachte Schreibweise einführen, zu der wir wegen der Transitivität (Satz 2) berechtigt sind.

Def. 3. Es gilt $a < b < c$, in Worten „a ist kleiner als b ist kleiner als c", genau dann, wenn $a < b$ *und* $b < c$ gilt.
Es gilt $a > b > c$, in Worten „a ist größer als b ist größer als c", genau dann, wenn $a > b$ *und* $b > c$.
Allgemein: Es gilt $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{n-1} < a_n$ genau dann, wenn $a_1 < a_2$ *und* $a_2 < a_3$ *und* ... *und* $a_{n-1} < a_n$ gilt. Entsprechend gilt das auch für die Größer-als-Relation.
Ungleichungen von diesem Typ nennt man auch „fortlaufende Ungleichungen".

Beispiele:

1. $11 < 16 < 19$; denn $11 < 16$ *und* $16 < 19$, ferner gilt wegen Satz 2 auch $11 < 19$.

2. $\frac{1}{5} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$; denn $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$ und $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} < 1$.

3. $0 > -\frac{1}{1000} > -\frac{1}{100} > -\frac{1}{10} > -1$; denn $0 > -\frac{1}{1000}$ und $-\frac{1}{1000} > -\frac{1}{100}$ usw.

Wie die obigen Beispiele zeigen, können wir wegen Satz 1 und Satz 2 jede endliche Menge und auch, wie wir hier nicht beweisen wollen, jede unendliche Menge von (paarweise voneinander verschiedenen) reellen Zahlen so *ordnen*, daß z. B. $a < b < c < d < \ldots$ gilt. Dann gilt wegen Satz 2 auch $a < c$, $a < d$, $b < d$ usw., d. h., in einer solchen fortlaufenden Ungleichung ist von zwei Zahlen stets die linksstehende kleiner als die rechtsstehende.

Wir nennen daher die Kleiner-als-Relation eine „*Ordnungsrelation*", und zwar speziell eine „*irreflexive Ordnungsrelation*". Denn diese Relation ist irreflexiv, weil niemals $a < a$ gilt; aus Satz 1 folgt nämlich, daß wegen $a = a$ (Fall 1) nicht außerdem noch $a < a$ (Fall 2) gelten kann.

In der Regel ordnet man eine endliche Menge von reellen Zahlen mit Hilfe der Kleiner-als-Relation und beginnt daher mit der kleinsten Zahl dieser Menge. Eine endliche Menge von reellen Zahlen kann man aber auch nach der Größer-als-Relation ordnen und mit der größten Zahl beginnen, z. B. $a > b > c > d$.

Beispiele:

1. Es sind die folgenden Zahlen zu ordnen: 823, 471, 67, 725, 99. Man erhält: $67 < 99 < 471 < 725 < 823$.
2. Es sind die folgenden Zahlen zu ordnen: 0, 1, –1, 10, – 10, 100, – 100, 1000, – 1000. Man erhält
   $-1000 < -100 < -10 < -1 < 0$
   $0 < 1 < 10 < 100 < 1000.$
3. Es sind die folgenden Zahlen zu ordnen: $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{10}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, -\frac{1}{100}$. Man erhält:
   $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} < -\frac{1}{10} < -\frac{1}{100} < 0 < \frac{1}{100} < \frac{1}{10} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

Man kann die Ordnung der reellen Zahlen veranschaulichen, indem man jeder reellen Zahl a einen Punkt P_a auf einer Geraden, der sogenannten *Zahlengeraden*, zuordnet. Dabei wird auf dieser Geraden zunächst ein Punkt P_0 festgelegt, und man ordnet der reellen Zahl 0 den Punkt P_0 zu. Ferner ordnet man jeder positiven reellen Zahl a einen Punkt P_a zu, der rechts von P_0 liegt und von ihm den Abstand a hat. Jeder negativen reellen Zahl –a ordnet man einen Punkt P_{-a} zu, der links von P_0 liegt und von ihm den Abstand a hat. Diese Zuordnung ist eineindeutig; denn jeder reellen Zahl a entspricht genau ein Punkt P_a auf der Zahlengeraden und jedem Punkt P_a auf der Zahlengeraden entspricht genau eine reelle Zahl a.

Dann gilt für zwei reelle Zahlen a und b

$a = b$ genau dann, wenn die Punkte P_a und P_b zusammenfallen;

$a < b$ genau dann, wenn der Punkt P_a links von dem Punkt P_b liegt;

$a > b$ genau dann, wenn der Punkt P_a rechts von dem Punkt P_b liegt.

Es gilt $a < b$, weil P_a links von P_b liegt.

3. Weitere Sätze über Ungleichungen

Zur Untersuchung von Ungleichungen im Bereich der reellen Zahlen benötigen wir noch einige weitere Sätze, die wir jetzt beweisen wollen.

Satz 3. (Monotoniegesetz der Addition)
Für alle reellen Zahlen gilt
1. $a < b$ genau dann, wenn $a + c < b + c$;
2. $a > b$ genau dann, wenn $a + c > b + c$;
3. $a \leqq b$ genau dann, wenn $a + c \leqq b + c$;
4. $a \geqq b$ genau dann, wenn $a + c \geqq b + c$.

Mit anderen Worten: Wenn man auf beiden Seiten einer wahren Ungleichung die gleiche reelle Zahl addiert, so entsteht wieder eine wahre Ungleichung.

Beweis.
1. Aus $a < b$, d. h., $a + x = b$ mit $x > 0$ folgt $(a + x) + c = b + c$, also $(a + c) + x = b + c$, und hieraus wegen $x > 0$ und Def. 1 $a + c < b + c$.
   Daher folgt andererseits aus $a + c < b + c$ durch Addition der reellen Zahl –c auf beiden Seiten der Ungleichung $a + c - c < b + c - c$, also $a < c$.
2. Aus $a > b$ folgt $b < a$, also $b + c < a + c$ und daher $a + c > b + c$.
   Andererseits folgt auch aus $a + c > b + c$ durch Addition von –c auf beiden Seiten $a > b$.
3. Wegen 1. gilt $a < b$ genau dann, wenn $a + c < b + c$,
   ferner gilt $a = b$ genau dann, wenn $a + c = b + c$,
   also gilt $a \leqq b$ genau dann, wenn $a + c \leqq b + c$.
4. Analog beweist man den 4. Teil des obigen Satzes.

Beispiele:
1. Aus $7 < 9$ folgt $7 + 50 < 9 + 50$, also $57 < 59$.
2. Aus $3 < 7$ folgt $3 - 100 < 7 - 100$, also $-97 < -93$.
3. Für alle reellen Zahlen x gilt wegen $x^2 \geqq 0$, $x^2 + 1 \geqq 1$.

Ferner erhalten wir als Schlußfolgerung aus Satz 3 noch den folgenden

Satz 4. Für alle reellen Zahlen a, b, c, d gilt:
Wenn $a < b$ und $c < d$, so $a + c < b + d$;
wenn $a > b$ und $c > d$, so $a + c > b + d$.

Beweis.
Aus $a < b$ folgt wegen Satz 3
$a + c < b + c$,
aus $c < d$ folgt wegen Satz 3
$b + c < b + d$
und hieraus wegen Satz 2 (Transitivität)
$a + c < b + d$.
Entsprechend beweist man den zweiten Teil dieses Satzes.

Beispiele:
1. Aus $2 < 3$ und $9 < 11$ folgt $2 + 9 < 3 + 11$, also $11 < 14$.
2. Aus $-5 < -3$ und $-7 < -2$ folgt $-12 < -5$.
3. Für alle reellen Zahlen a und b gilt wegen $a^2 \geqq 0$ und $b^2 \geqq 0$ $a^2 + b^2 \geqq 0$.

Satz 5. (Monotoniegesetz der Multiplikation)

Für alle reellen Zahlen a, b und für alle von Null verschiedenen reellen Zahlen k gilt:

Aus $a < b$ folgt $\begin{cases} ak < bk, \text{ falls k positiv,} \\ ak > bk, \text{ falls k negativ.} \end{cases}$

Aus $a < b$ folgt $\begin{cases} ak > k, \text{ falls k positiv,} \\ ak < bk, \text{ falls k negativ.} \end{cases}$

Mit anderen Worten: Wenn man beide Seiten einer wahren Ungleichung mit der positiven Zahl k multipliziert, so entsteht wieder eine wahre Ungleichung. Wenn man aber beide Seiten mit der negativen Zahl k multipliziert, so ist das Relationszeichen umzukehren.

Beweis. Aus $a < b$, d. h., $a + x = b$ mit $x > 0$ folgt $(a + x)\, k = bk$, also $ak + xk = bk$.
Ist nun $k > 0$, so auch $xk > 0$, also wegen Def. 1 $ak < bk$.
Ist aber $k < 0$, so auch $xk < 0$, also wegen Def. 1 $ak > bk$.
Analog beweist man den zweiten Teil des Satzes.

Bemerkungen:
1. Während eine Gleichung erhalten bleibt, wenn man auf beiden Seiten mit einer beliebigen (positiven oder negativen) reellen Zahl k multipliziert, ist das bei Ungleichungen nur dann der Fall, wenn diese Zahl *positiv* ist. Beachtet man das nicht, so kann ein Trugschluß entstehen. Multipliziert man z. B. beide Seiten der für alle reellen Zahlen n gültigen Ungleichung $2n - 1 < 2n$ mit der Zahl –1, so erhält man $-2n + 1 < -2n$, also $1 < 0$. Das ist aber *falsch*, weil mit der negativen Zahl –1 multipliziert und nicht beachtet wurde, daß in diesem Falle das Relationszeichen umzukehren ist.
2. Das Monotoniegesetz der Multiplikation gilt auch für die $\leqq$ – Relation:
   Aus $a \leqq b$ folgt $\begin{cases} ak \leqq bk, \text{ falls k positiv,} \\ ak \geqq bk, \text{ falls k negativ.} \end{cases}$
   Aus $a \geqq b$ folgt $\begin{cases} ak \geqq bk, \text{ falls k positiv,} \\ ak \leqq bk, \text{ falls k negativ.} \end{cases}$
3. Ist $k = 0$, so enthält man aus der *Ungleichung* $a < b$ durch Multiplikation mit k auf beiden Seiten wegen $ak = 0$ und $bk = 0$ die *Gleichung* $ak = bk$.

Beispiele:
1. Aus $3 < 5$ folgt $3 \cdot 100 < 5 \cdot 100$, also $300 < 500$.
2. Aus $3 < 5$ folgt $3 \cdot (-100) > 5 \cdot (-100)$, also $-300 > -500$.
3. Aus $7 < 11$ folgt, $7 \cdot \frac{1}{3} < 11 \cdot \frac{1}{3}$ also $\frac{7}{3} < \frac{11}{3}$.
4. Allgemein folgt aus $a < b$ falls k positiv ist, durch Multiplikation mit der ebenfalls positiven Zahl $\frac{1}{k}$
   $a \cdot \frac{1}{k} < b \cdot \frac{1}{k}$ also $\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$.
   Wenn man also beide Seiten einer wahren Ungleichung durch die positive reelle Zahl k dividiert, so entsteht wieder eine wahre Ungleichung.
5. Aus $4x < 20$ folgt, $\frac{4x}{4} < \frac{20}{4}$ also $x < 5$.
   Aus $-4x < 20$ folgt, $\frac{-4x}{-4} > \frac{20}{-4}$ also $x > -5$.

Aus dem Satz 5 ergibt sich noch die folgende wichtige Schlußfolgerung:

Satz 6.
Für alle positiven reellen Zahlen a, b, c, d gilt:
Aus $a < b$ und $c < d$ folgt $ac < bd$.
Aus $a > b$ und $c > d$ folgt $ac > bd$.
Aus $a \leqq b$ und $c \leqq d$ folgt $ac \leqq bd$.
Aus $a \geqq b$ und $c \geqq d$ folgt $ac \geqq bd$.

Beweis. Aus $a < b$ folgt wegen $c > 0$
$ac < bc$,
aus $c < d$ folgt wegen $b > 0$
$bc < bd$,
also wegen Satz 3
$ac < bd$.
Die weiteren Teile dieses Satzes werden analog bewiesen.

Schlußfolgerungen:
1. Wegen Satz 6 gilt für alle positiven reellen Zahlen a und b:
   Aus $a < b$ folgt $a^2 < b^2$ und weiter $a^3 < b^3$, $a^4 < b^4$ usw.
   Setzt man nämlich $c = a$, $d = b$, so erhält man wegen Satz 6 $ac < bd$, also $aa < bb$, d. h., $a^2 < b^2$. Ferner folgt $a^3 < b^3$ usw.
   Aus $a > b$ folgt, wie sich analog beweisen läßt, $a^2 > b^2$;
   aus $a = b$ folgt $a^2 = b^2$ usw.
2. Für alle positiven reellen Zahlen a und b gilt ferner:
   Aus $a < b$ folgt $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ und weiter $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ usw.
   Denn wäre $\sqrt{a} \geqq \sqrt{b}$, so wäre wegen Satz 6 $\sqrt{a}\,\sqrt{a} \geqq \sqrt{b}\,\sqrt{b}$, also $a \geqq b$, der Voraussetzung widerspricht.

4. Die Lösung von einfachen Ungleichungen mit einer Variablen

Mit Hilfe des Monotoniegesetzes der Addition (Satz 3) und des Monotoniegesetzes der Multiplikation (Satz 5) können wir jetzt einfache Ungleichungen mit einer Variablen x lösen, d. h., die Menge L aller reellen Zahlen x ermitteln, für die die gegebene Ungleichung erfüllt ist. Wir nennen diese Menge L die *Lösungsmenge* der Ungleichung. Dabei wollen wir, wenn nichts anderes bemerkt ist, stets annehmen, daß die in der Ungleichung auftretenden Zahlen und auch die Lösungen reelle Zahlen sind. Wir beschränken uns dabei auf lineare Ungleichungen, d. h. auf solche Ungleichungen, in denen (gegebenenfalls nach einer geeigneten Umformung) die Variable x nur in der ersten Potenz auftritt.

Wir erläutern das Lösungsverfahren an zwei einfachen Beispielen:

1. Es ist die Lösungsmenge der Ungleichung
   $5x + 7 < 22$ (1)
   zu ermitteln.
   Wegen Satz 3 ist die Ungleichung (1) genau dann erfüllt, wenn
   $5x + 7 - 7 < 22 - 7$,
   also $5x < 15$ gilt. (2)
   Wegen Satz 5 ist die Ungleichung (2) genau dann erfüllt, wenn
   $\frac{5x}{5} < \frac{15}{5}$
   also $x < 3$.
   Daher besteht die Lösungsmenge L der Ungleichung (1) aus allen reellen Zahlen x, für die $x < 3$ gilt.
   Wir schreiben $L = \{x \in P;\ x < 3\}$ und wollen mit dieser Schreibweise ausdrücken, daß die Menge L aus allen Zahlen x besteht, die dem Bereich P der reellen Zahlen angehören und kleiner als 3 sind.
2. Es ist die Lösungsmenge der Ungleichung
   $(x + 1)^2 + (x + 2)^2 > (x + 3)^2 + (x + 4)^2$
   zu ermitteln.
   Wegen Satz 3 und 5 ist diese Ungleichung genau dann erfüllt, wenn
   $x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 >$
   $> x^2 + 6x + 9 + x^2 + 8x + 16,$
   $6x + 5 > 14x + 25,$
   $-8x > 20,$
   $x < -\frac{20}{8}$
   $x < -\frac{5}{2},$
   Wir erhalten also die Lösungsmenge
   $L = \{x \in P;\ x < -\frac{5}{2}\}.$

„Beeil dich! Und nimm auf der Straße gefälligst deine Gedanken zusammen!"

AUFGABEN

EINE MENGE ÜBER MENGEN

1. Bilde die Menge aller Primzahlen zwischen 10 und 30! Nenne sie P!

2. Bilde die Menge aller ungeraden Zahlen zwischen 10 und 30! Nenne sie U!

3. Bilde die Menge aller nicht durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen! Nenne sie Z!

4. Bilde die Menge aller durch 5 teilbaren natürlichen Zahlen! Nenne sie F!

5. Zwischen welchen der Mengen P, U, Z und F besteht die Beziehung „$\subseteq$"?

6. Löse folgende Rechenaufgaben mit den Klassen $K_0, K_1, \ldots, K_5$:
a) $K_3 + K_2$; b) $K_5 + K_4$;
c) $K_2 \cdot K_4$; d) $K_3 \cdot K_3$;
e) $K_4 \cdot K_4$.

7. Gib alle Möglichkeiten an, die Ziffern 2, 7 und 3 zu ordnen!

8. Wie viele Möglichkeiten gibt es, in einer Menge von vier Personen (Arndt, Bernd, Carsten, Detlev) eine Reihenfolge festzulegen?

9. Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, 3\}$. Schreibe alle möglichen Teilmengen von M auf! Beachte dabei, daß sowohl die leere Menge als auch M selbst als Teilmengen von M anzusehen sind!

10. Gegeben seien die Mengen
$N_1 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $N_2 = \{0, 4, 8\}$,
$N_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N_4 = \{1, 3, 5\}$.
Bilde a) $N_1 \cup N_2$, b) $N_1 \cap N_2$, c) $N_2 \cup N_3$,
d) $N_2 \cup N_4$, e) $N_2 \cap N_3$, f) $N_2 \cap N_4$,
g) $N_1 \cup \emptyset$, h) $N_3 \cap \emptyset$, i) $N_2 \cup N_2$,
j) $N_4 \cap N_4$, k) $N_1 \setminus N_2$, l) $N_1 \setminus N_4$,
m) $N_4 \setminus N_3$.

11. Gegeben sei der Grundbereich $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ und in ihm die Mengen

$$M_1 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\},$$
$$M_2 = \{1, 3, 5, 7, 9\},$$
$$M_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$
$$M_4 = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Bilde bezüglich des Grundbereichs G die Mengen
a) $\overline{M}_1$, b) $\overline{M}_2$, c) $\overline{M}_3$, d) $\overline{M_3 \cap M_4}$,
e) $\overline{M}_3 \cup \overline{M}_4$, f) $(M_2 \cup M_3) \cap M_4$,
g) $(M_2 \cap M_3) \cup M_4$.

Hau ab!

111121111

12. Von den 32 Schülern einer Klasse haben sich 16 für die Interessengemeinschaft Basteln, 12 für die Interessengemeinschaft Volkstanz sowie 5 für beide genannten Interessengemeinschaften gemeldet.
Wieviel Schüler dieser Klasse beteiligen sich an keiner dieser beiden Interessengemeinschaften?

13. Für einen Zeichenwettbewerb gibt eine Schulklasse insgesamt 37 Zeichnungen ab. Vier Schüler geben je 3 Zeichnungen, doppelt so viele Schüler je 2 und weitere Schüler je 1 Zeichnung ab.
a) Wieviel Schüler geben mindestens eine Zeichnung ab?
b) Wieviel Schüler geben genau eine Zeichnung ab?
c) Wieviel Schüler geben mindestens zwei Zeichnungen ab?

14. Von den 34 Schülern einer Klasse können 14 radfahren, 25 schwimmen und 9 Schüler beides.
Wieviel Schüler dieser Klasse können weder radfahren noch schwimmen?

15. Marie-Luise wird von ihren Mitschülern gefragt, wieviel Blumen sie zum Geburtstag erhalten habe. Ihre Antwort kleidet sie in Form einer Aufgabe: „Ich erhielt rote und gelbe Rosen sowie rote Nelken. Zusammen zählte ich 16 rote Blüten, 11 Rosen und 7 rote Rosen."
Wieviel Blumen erhielt Marie-Luise insgesamt?

16. Hans hat bei einer Wanderung durch den herbstlichen Wald Kastanien, Eicheln und Bucheckern gesammelt. Zuhause zählt er zunächst 16 Eicheln. Dann zählt er zusammen 26 Kastanien und Eicheln bzw. 33 Bucheckern und Kastanien.
Wie viele der genannten Waldfrüchte hat er insgesamt gefunden?

KLEINES 1x1 DER LOGIK

2.1.
Welche der folgenden Sätze sind falsch?
a) Die Zahl 29 hat einen Nachfolger.
b) Die Zahl 2 hat einen Vorgänger.
c) Die Zahl Null hat einen Vorgänger.
d) Es gibt eine kleinste natürliche Zahl.
e) Die Zahl 17 ist größer als 7 und die Zahl 23 ist kleiner als 19.

2.2.
Welcher der beiden Sätze ist wahr?
Wenn irgendein Punkt innerhalb des Dreiecks liegt, so liegt er auch innerhalb des Kreises. (Siehe Abb. 1!)
Wenn irgendein Punkt innerhalb des Kreises liegt, so liegt er auch innerhalb des Dreiecks. (Siehe Abb. 1!)

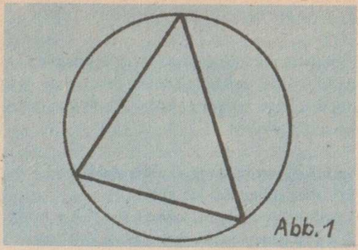


Abb. 1

3.1.
Jeder der folgenden Sätze enthält zwei Aussagen.
Schreibe sie heraus!
Durch welches Wort oder durch welche Wörter sind in jedem Satz die beiden Aussagen miteinander verbunden?
a) Die Zahl 333 ist eine dreistellige Zahl und die Zahl 222 ist eine zweistellige Zahl.
b) Die Zahl 30 ist durch 10 und durch 2 teilbar.
c) Wenn 900 durch 100 teilbar ist, so ist 900 durch 10 teilbar.
– Welche der angegebenen Aussagen sind falsch?

3.2.
Welcher der folgenden Sätze ist wahr?
a) Wenn $a < 7$ ist, so ist $a + 3 < 20$.
b) Für jede Zahl a, die kleiner als 5 ist, gilt $4 + a < 7$.
c) Wenn $a < 6$ ist, so ist $a + 4 < 8$.

3.3.
Bilde und löse eine Subtraktionsaufgabe der Form $a - b = c$ mit $a > 2$ und $a < 4$ und mit $b = 4$!

4.1.
Untersuche, ob die folgenden Aussagen wahr sind!
a) $461 \cdot 7^2 = 3217$ und $414 : 6 = 54$
b) Die Zahl 19 erfüllt sowohl die Ungleichung $17 < x < 27$ als auch die Ungleichung $18 \leq x < 29$.
c) Die Zahl 714 ist eine gerade Zahl und außerdem durch 7 teilbar.

4.2.
Welche der folgenden Sätze sind falsch?
a) Für alle natürlichen Zahlen a gilt $a \cdot 0 < a$.
b) Für alle natürlichen Zahlen a gilt $a \cdot a > 1$.
c) Für alle natürlichen Zahlen a gilt $a - 0 = a$.
d) Für alle natürlichen Zahlen a gilt $a - 9 > 9$.
e) Es gibt eine natürliche Zahl a, für die gilt $a^2 = a$.
f) Es gibt eine natürliche Zahl a, für die gilt $a^2 = 2^a$.
g) Es gibt eine natürliche Zahl a, für die gilt $a : 3 > a$.
h) Es gibt eine natürliche Zahl a, für die gilt $a - 0 = a$.

4.3.
Gegeben sind die Zahlen 11, 201, 501.
Überlege dir Gemeinsamkeiten dieser Zahlen und bilde einen wahren Satz, der mit den Wörtern beginnt ...
Für alle angegebenen Zahlen gilt ...!

4.4.
Petra, Ute und Renate belegen bei den Meisterschaften im 100 m-Lauf die ersten drei Plätze.
Die Siegerin und Renate trainieren in einer Trainingsgruppe
Die Gewinnerin der Bronzemedaille geht mit Ute in einer Klasse. Renate belegte nicht den 3. Platz.
Welchen Platz belegte jedes Mädchen?

5.1.
Verneine folgende Sätze!
a) a ist größer als 7.
b) Das Produkt $17 \cdot 11$ ist eine gerade Zahl.
c) Alle natürlichen Zahlen haben einen Vorgänger.
d) $2^4 + 2^2 = 2^5$

5.2.
Untersucht einmal, welche der folgenden Zahlen die Bedingung erfüllen,
a) zweistellig und größer als 3^4 zu sein;
b) zweistellig oder größer als 3^4 zu sein;
c) entweder zweistellig oder größer als 3^4 zu sein?
Gegebene Zahlen: 9, 81, 96, 107

5.3.
a) Gib alle natürlichen Zahlen an, die sowohl die Ungleichung $1004 < x < 1003$ als auch die Ungleichung $1006 < x < 1010$ erfüllen!
b) Gib alle natürlichen Zahlen an, die die Ungleichung $10 < x < 2^4$ oder die Ungleichung $3^2 < x < 13$ erfüllen!
c) Gib alle natürlichen Zahlen an, die entweder die Ungleichung $10 < x < 2^4$ oder die Ungleichung $3^2 < x < 13$ erfüllen!

5.4.
Welcher der beiden Sätze ist wahr?
a) Wenn $a < 9$ ist, so ist $2 \cdot a < 30$.
b) Wenn $2 \cdot a < 30$ ist, so ist $a < 9$.

6.1.
Verneine von den folgenden Sätzen alle falschen Aussagen!
a) Alle durch 17 teilbaren Zahlen sind ungerade.
b) Jede natürliche Zahl, die die Ungleichung $3 < x < 2^4$ erfüllt, erfüllt auch die Ungleichung $3^2 < x < 72$.
c) Es gibt Dreiecke, die drei spitze Winkel haben.
d) Es gibt eine natürliche Zahl, die die Gleichung $13 - a = 4^2$ erfüllt.

6.2.
Zeichne eine Figur, die folgender Bedingung genügt:
a) Die Figur soll ein Quadrat und gleichzeitig ein Parallelogramm sein.
b) Die Figur soll ein Rechteck, aber kein Trapez sein.
c) Die Figur soll kein Drachenviereck, aber ein Rhombus sein.

6.3.
Alfred, Bernd und Christian fahren zusammen ins Ferienlager. Jeder von ihnen kommt aus einer anderen Stadt (Dessau, Halle, Wittenberg). Ihrer Unterhaltung entnehmen wir folgende Tatsachen:
1. Alfred und der Hallenser spielen gern Fußball.
2. Bernd und der Dessauer lösen gern Mathematikaufgaben.
3. Der Dessauer und Christian kennen sich nicht.
4. Bernd ist mit dem Wittenberger gut befreundet.
Aus welcher Stadt kommt jeder der drei Jungen?

7.1.
Bilde die Umkehrung folgender Sätze, und stelle fest, ob die Umkehrungen wahre Aussagen sind!
a) Wenn $x < -1$ ist, so ist $|x| > 1$.
b) Wenn das Viereck ABCD ein Drachenviereck ist, dann stehen seine Diagonalen aufeinander senkrecht.
c) Wenn zwei Figuren zueinander kongruent sind, so sind sie flächengleich.
d) Wenn ein Dreieck ABC gleichseitig ist, so sind seine Innenwinkel gleich groß.

7.2.
Vor mir liegen vier Figuren (ein spitzwinkliges, ein stumpfwinkliges, ein rechtwinkliges Dreieck und außerdem ein Quadrat). Jede Figur hat eine der Nummern 1, 2, 3, 4. Auf die Frage, welche Figur zu der entsprechenden Nummer gehört, erhalten wir folgende Antworten:

1a) Das rechtwinklige Dreieck hat die Nummer 1.
b) Das Quadrat hat die Nummer 2.
2a) Das rechtwinklige Dreieck hat die Nummer 2.
b) Das spitzwinklige Dreieck hat die Nummer 3.
3a) Das stumpfwinklige Dreieck hat die Nummer 2.
b) Das spitzwinklige Dreieck hat die Nummer 4.

Von jedem Aussagenpaar ist nur eine Aussage wahr. Welche Nummer gehört zu welcher Figur?

7.3.
Welche der folgenden Sätze sind Verneinungen der falschen Aussage „Alle nichtnegativen Zahlen haben im Bereich der rationalen Zahlen eine Quadratwurzel"?
a) Alle nichtnegativen Zahlen haben im Bereich der rationalen Zahlen keine Quadratwurzel.
b) Es gibt nichtnegative Zahlen, die im Bereich der rationalen Zahlen keine Quadratwurzel besitzen.
c) Es gilt nicht, daß alle nichtnegativen Zahlen im Bereich der rationalen Zahlen eine Quadratwurzel besitzen.
d) Nicht alle nichtnegativen Zahlen haben im Bereich der rationalen Zahlen eine Quadratwurzel.

8.1.
Die Aussage der Form „A oder B" ist falsch. Welchen Wahrheitswert (wahr oder falsch) hat die aus den Teilaussagen A bzw. B gebildete Aussage „A und B" bzw. die Aussage „Entweder A oder B"?

8.2.
Gib zu folgenden Aussagen je eine gleichwertige Formulierung an, in der die einzelnen Teilaussagen nicht negiert sind.
a) Die Zahl $\frac{76}{49}$ ist keine natürliche Zahl und nicht irrational.
b) Das Dreieck ABC ist nicht gleichschenklig oder nicht rechtwinklig.

8.3.
Betrachtet in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Geraden
g_1, g_2, g_3 mit den sie darstellenden Gleichungen:
$g_1 : y = 1$
$g_2 : y = -x + 4$
$g_3 : y = x$

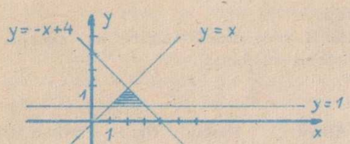


Abb. 2

Durch die Geraden wird ein Dreieck bestimmt (siehe Abb. 2). Wodurch sind die inneren Punkte dieses Dreiecks charakterisiert?
Auswahlantworten:
– Es sind alle Punkte, für deren Koordinaten (x, y) gilt:
a) $y > 1$ und $y < -x + 4$ und $y > x$;
b) $y > 1$ und $y < -x + 4$ und $y < x$;
c) $y > 1$ oder $y < -x + 4$ oder $y < x$.
Welche der vorgegebenen Antworten ist richtig?
(Lösungshilfe: Im Falle der Geraden mit der Gleichung $y = x$ entspricht z. B. der Ungleichung $y > x$ die in der Abb. 3 schraffierte Halbebene. Mit Hilfe von drei solchen Halbebenen müßt ihr nun die Gesamtheit der inneren Punkte des Dreiecks und nur die charakterisieren.)

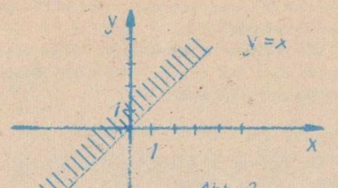


Abb. 3

KOMBINATORIK
RICHTIG ANORDNEN – RICHTIG AUSWÄHLEN

1. Gegeben seien zwölf Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{12}$, die in der gleichen Ebene liegen und von denen niemals drei auf derselben Geraden liegen sollen. Wieviel Verbindungsgeraden zwischen den zwölf Punkten gibt es?

2. Wieviel Diagonalen enthält ein konvexes Neuneck?

3. In einer Werkhalle werden mit Hilfe einer Leuchtanlage, die aus fünf verschiedenen Farbabschnitten besteht, bestimmte Personen gerufen, da wegen des Lärms eine Rufanlage zwecklos wäre. Wieviel verschiedene Personen können mit Hilfe der Leuchtanlage gerufen werden?

4. Beim Skatspiel erhält ein Spieler zehn Karten von insgesamt 32 verschiedenen Spielkarten. Wieviel mögliche verschiedene Spiele kann er erhalten?

5. Auf einer Kugel sind fünf verschiedene Punkte gegeben, von denen nicht vier in einer Ebene liegen. Je drei von ihnen bestimmen bekanntlich eine Ebene. Wieviel verschiedene Ebenen werden durch diese fünf Punkte bestimmt?

6. Auf den Tipscheinen der Berliner Bärenlotterie sind von den Zahlen von 1 bis 99 fünf verschiedene anzukreuzen. Wieviel Mark kostet ein sicherer Tip (5 Richtige), wenn für einen eingereichten Tipschein 0,50 M zu zahlen sind?

7. Welche Zeit braucht man ungefähr, wenn man beim VEB Zahlenlotto mit Gewißheit im ersten Rang gewinnen will und in der Minute vier Tipscheine ausfüllt? (Von den Zahlen 1 bis 90 sind fünf anzukreuzen.) Der Monat ist mit 30 Tagen zu rechnen.

8. Von 50 verschiedenen legierungsfähigen Metallen sollen jeweils vier Metalle legiert werden. Die Größe des prozentualen Anteils der einzelnen Metalle bei der Legierung soll unberücksichtigt bleiben. Wieviel mögliche Legierungen können hergestellt werden?

9. Wie groß ist die Anzahl der möglichen Spiele beim Skatspiel? Jeder der drei Mitspieler erhält 10 von 32 verschiedenen Karten; 2 Karten bilden den Skat.

10. Wieviel verschiedene Würfe lassen sich mit drei Würfeln machen, wenn zwei Würfe als verschieden gelten, sofern wenigstens einer der drei Würfel bei einem Wurf eine andere Augenzahl zeigt als bei einem anderen Wurf?

11. In zwei Urnen liegen fünf verschiedenfarbige Kugeln. Die Farben der Kugeln in beiden Urnen sind die gleichen. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es für das Ziehen je einer Kugel aus jeder Urne?

12. Eine 28 Schüler starke Klasse erhält den Auftrag, drei Schüler zur Mitarbeit an einer Schulwandzeitung zu benennen. Wieviel Möglichkeiten gibt es für diese Klasse?

13. Wieviel dreistellige Ziffern lassen sich aus den fünf Grundziffern 2, 3, 4, 5, 6 bilden, wenn in einer dreistelligen Ziffer jede Grundziffer genau einmal vorkommen soll?

14. Die Anzahl der Permutationen von (n–2) Elementen verhält sich zur Anzahl der Permutationen von n Elementen wie 1 : 90. Es ist die Anzahl n der Elemente zu ermitteln.

15. Die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur dritten Klasse beträgt den fünften Teil der Anzahl der Kombinationen von (n + 2) Elementen zur vierten Klasse. Es ist die Anzahl n der Elemente zu ermitteln.

16. Eine Brigade von 12 Personen erhält 3 Theaterkarten und zwar je einen Platz im Parkett, im Rang und in der Loge. Wieviel Möglichkeiten der Verteilung gibt es?

17. Gegeben sind fünf Elemente a, e, g, l, r, die permutiert werden sollen. An welcher Stelle stehen die Permutationen „lager" und „regal" bei einer lexikographischen Anordnung der Permutationen?

18. Jemand will drei Schallplatten käuflich erwerben. Die Verkäuferin kann zur Zeit 30 verschiedene Schallplatten anbieten. Wieviel Einkaufsmöglichkeiten hat dieser Kunde?

19. Auf einer Geraden g befinden sich n voneinander verschiedene Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Wieviel verschiedene Strecken liegen auf dieser Geraden?

20. Eine FDJ-Gruppe von 27 Mitgliedern erhält den Auftrag, zu einer Demonstration vier Fahnenträger zu benennen. Wieviel Zusammenstellungen sind dafür möglich?

UN-GLEICHUNGEN

Im folgenden werden 15 Aufgaben gestellt, bei denen vor allem die Operationen mit Ungleichungen auf praktische Probleme angewandt werden. Die Aufgaben 1, 2 sind ab 5. Klasse, die Aufgaben 3, 4 ab 6. Klasse, die Aufgaben 5, 6 ab 7. Klasse, die Aufgaben 7, 8 ab 8. Klasse, die Aufgaben 9 bis 12 ab 9. Klasse

Anschließend werden die Lösungen dieser Aufgaben kurz angegeben, wobei nicht alle Zwischenschritte ausführlich dargestellt werden.

1. Ein Quader habe die Kantenlängen 10 cm, 8 cm und 5 cm, die jeweils mit einem Fehler von höchstens 0,5 cm behaftet sind. Zwischen welchen Werten liegt der Rauminhalt dieses Quaders?
(vgl. das Beispiel 1, S. 11)
2. Zwischen welchen Werten liegt der Oberflächeninhalt des in Aufgabe 1 gegebenen Quaders?
3. Es ist diejenige natürliche Zahl zu ermitteln, deren 8 faches größer als 200 und deren 38 faches kleiner als 1000 ist.
4. Es sind die folgenden vier gebrochenen Zahlen zu ordnen, wobei mit der kleinsten Zahl zu beginnen ist:

$a = 2$, $b \frac{9}{10} + \frac{10}{9}$, $c = \frac{99}{100} + \frac{100}{99}$, $d = \frac{999}{1000} + \frac{1000}{999}$

5. Die polnische Leichtathletin Irena Szewinska stellte im Juni 1974 in Warschau mit 49,9 s einen neuen Weltrekord im 400 m-Lauf auf. Zwischen welchen Werten liegt ihre mittlere Geschwindigkeit (in $km \cdot h^{-1}$) für diese Strecke, wenn die Zeit mit einem Fehler von höchstens 0,05 s und die Strecke mit einem Fehler von höchstens 0,01 m gemessen wurde?
(vgl. das Beispiel 3, S. 12.)
6. In einem Betrieb werden Ventilatoren hergestellt, deren Produktionskosten sich auf 19,20 M je Stück belaufen. Durch die Montage einer neuen Maschine, deren Anschaffungswert 13 500 M beträgt, können die Produktionskosten auf 13,15 M je Stück gesenkt werden, wobei aber die anteiligen Kosten für die neue Maschine noch nicht berücksichtigt worden sind. Wieviel Ventilatoren müssen jährlich mindestens produziert werden, damit die Kosten je Stück weniger als 80 Prozent der ursprünglichen Kosten von 19,20 M betragen, wobei aber nunmehr die Kosten für die neue Maschine, die in drei Jahren abgeschrieben werden soll, anteilig zu berücksichtigen sind.
7. Das Produkt von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist gleich 110 355 024. Wie lauten diese Zahlen?
Anleitung zur Lösung: Aus der Gleichung $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 110\,355\,024$ erhält man Ungleichungen für x^4 bzw. $(x + 3)^4$ und daraus auch für x bzw. x + 3.
8. Man beweise, daß für alle positiven reellen Zahlen x

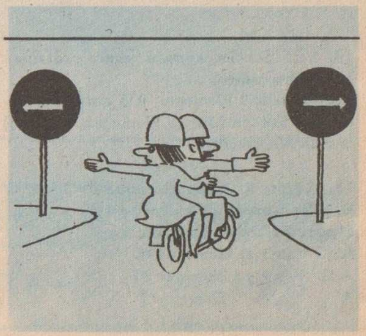
$$x + \frac{1}{x} \geqq 2$$

gilt, d. h., daß die Summe aus einer positiven reellen Zahl und ihrem reziproken Wert stets größer oder gleich 2 ist.
Wann gilt das Gleichheitszeichen?
Anleitung zur Lösung: Zum Beweis kann der Satz 7 benutzt werden.
9. Man beweise, daß für alle reellen Zahlen a, b, c, d die folgende Ungleichung erfüllt ist:
$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geqq (ac + bd)^2$.
10. Es sei x eine reelle Zahl mit $0 < x < 1$.
a) Man beweise, daß dann in der Näherungsformel $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$

für den Fehler $\delta = \left(1 + \frac{x}{3}\right) - \sqrt[3]{1+x}$

die Abschätzung $0 < \delta < \frac{x^2}{8}$ gilt.

b) Man berechne mit Hilfe dieser Näherungsformel die Höhe eines Sparguthabens, das bei $3\frac{1}{4}$ Prozent Verzinsung in einem Jahr auf 100,– M anwächst, und schätze den Fehler ab.
11. Im internationalen Postverkehr sind für Briefsendungen und Päckchen „in rechteckiger Form" (Form eines Quaders) die folgenden Höchst- und Mindestmaße vorgeschrieben:
Höchstmaße: Länge, Breite und Höhe zusammen 90 cm, jedoch in keiner Ausdehnung mehr als 60 cm.
Mindestmaße: Länge 14 cm, Breite 9 cm.
Wie groß ist das Höchstvolumen, das eine solche Postsendung haben darf?
Anleitung zur Lösung: Zur Abschätzung kann der Satz 8 benutzt werden.



LÖSUNGEN

EINE MENGE ÜBER MENGEN

(1) $P = \{11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

(2) $U = \{11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}$

(3) $Z = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$

(4) $F = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, \dots\}$

(5) $P \subseteq U$; $P \subseteq Z$; $U \subseteq Z$.

(6) a) K_5; b) K_3; c) K_2; d) K_3;

e) K_4.

(7) 237, 273, 327, 372, 723, 732.

(8) 24 Möglichkeiten

(9) $T_1 = \emptyset$, $T_2 = \{1\}$, $T_3 = \{2\}$
$T_4 = \{3\}$, $T_5 = \{1, 2\}$,
$T_6 = \{1, 3\}$, $T_7 = \{2, 3\}$, $T_8 = \{1, 2, 3\}$.

(10) a) $N_1 \cup N_2 = N_1$, b) $N_1 \cap N_2 = N_2$,
c) $N_2 \cup N_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
d) $N_2 \cup N_4 = \{0, 1, 3, 5, 8\}$,
e) $N_2 \cap N_3 = \{4\}$,
f) $N_2 \cap N_4 = \emptyset$
g) $N_1 \cup \emptyset = N_1$, h) $N_3 \cap \emptyset = \emptyset$,
i) $N_2 \cup N_2 = N_2$,
j) $N_4 \cap N_4 = N_4$, k) $N_1 \setminus N_2 = \{2, 6, 10\}$,
l) $N_1 \setminus N_4 = N_1$,
m) $N_4 \setminus N_3 = \emptyset$.

(11) a) $\overline{M}_1 = M_2$, b) $\overline{M}_2 = M_1$,
c) $\overline{M}_3 = \{7, 8, 9, 10\}$,
d) $M_3 \cap M_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$
e) $M_3 \cup M_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$
f) $(M_2 \cup M_3) \cap M_4 = \{5, 6, 7, 9\}$,
g) $(M_2 \cap M_3) \cup M_4 = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

12. $B \cup V$ enthält 11 + 5 + 7 = 23 Elemente,

$B \subset K$ und $V \subset K$

$K \setminus (B \cup V$ enthält 9 Elemente.

Nur Schüler dieser Klassen beteiligen sich an keiner dieser beiden Interessengemeinschaften.

13. 21 Schüler geben mindestens eine, 9 Schüler genau eine und 12 Schüler mindestens 2 Zeichnungen ab.

14. Vier Schüler können weder radfahren noch schwimmen.
$R \cap S$ enthält 9 Elemente, $R \setminus S$ enthält 5 Elemente, $S \setminus R$ enthält 16 Elemente, $K \setminus (R \cup S)$ enthält 4 Elemente.

15. A (rote Rosen) x Elemente x = 7
B (gelbe Rosen) y Elemente y = 4
C (rote Nelken) z Elemente z = 9
$A \cup C \rightarrow (x + z)$ Elemente 16
$A \cup B \rightarrow (x + y)$ Elemente 11
$A \rightarrow x$ Elemente 7

Marie-Luise erhielt 20 Blumen.

16. $K \cup E$ enthält 26 Elemente, E enthält 16 Elemente, $K \cup B$ enthält 33 Elemente. Folgt: K enthält 16 Elemente, B enthält 23 Elemente.
Hans hat insgesamt 49 der gesamten Feldfrüchte gefunden.

17. 24 Schüler lesen wenigstens eine der gesamten Zeitschriften, 9 genau zwei, 14 mindestens zwei, 19 höchstens zwei.

KLEINES 1x1 DER LOGIK

a) Die Aussage ist wahr, denn 30 ist der Nachfolger von 29.
b) Die Aussage ist wahr, denn 1 ist der Vorgänger von 2.
c) Die Aussage ist falsch, denn 0 hat *keinen* Vorgänger.
d) Die Aussage ist wahr. Die kleinste natürliche Zahl ist die Null.
e) Die Aussage ist falsch. Zwar ist die Zahl 17 größer als 7, aber die Zahl 23 ist *nicht* kleiner als 19. Somit ist die Gesamtaussage falsch.

2.2.
Der *erste Satz* ist *wahr*, denn jeder Punkt, der innerhalb des gezeichneten Dreiecks liegt, befindet sich auch innerhalb des Kreises. Der *zweite Satz* ist *falsch*, denn es gibt Punkte, die innerhalb des Kreises, aber *nicht* innerhalb des Dreiecks liegen.

3.1.
a) Teilaussage 1: Die Zahl 333 ist eine dreistellige Zahl. (Wahre Aussage)
Teilaussage 2: Die Zahl 222 ist eine zweistellige Zahl. (Falsche Aussage)
Bindewort: und
b) Teilaussage 1: Die Zahl 30 ist durch 10 teilbar. (Wahre Aussage)
Teilaussage 2: Die Zahl 30 ist durch 2 teilbar. (Wahre Aussage)
Bindewort: und
c) Teilaussage 1: 900 ist durch 100 teilbar. (Wahre Aussage)
Teilaussage 2: 900 ist durch 10 teilbar. (Wahre Aussage)
Die Wörter „wenn –, so" verbinden die beiden Aussagen.
Nur die Aussage a) ist falsch.

3.2.
a) Der Satz ist *wahr*, denn wenn man für a die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 einsetzt, ist sowohl die Ungleichung $a < 7$ als auch die Ungleichung $a + 3 < 20$ jeweils eine wahre Aussage, d. h., alle Zahlen, die die Ungleichung $a < 7$ in eine wahre Aussage überführen, überführen auch die Ungleichung $a + 3 < 20$ in eine wahre Aussage.
b) Der Satz ist *falsch*. (Beispiel: a = 4)
c) Der Satz ist *falsch*. (Beispiel: a = 5)

3.3.
Aus den vorgegebenen Bedingungen erhält man folgende Subtraktionsaufgabe: 3–4.
Die Aufgabe 3–4 ist im Bereich der natürlichen Zahlen *nicht lösbar*.

4.1.
a) Die Aussage ist *falsch*, denn beide Teilaussagen sind falsch.
b) Die Aussage ist *wahr*, denn setzt man die Zahl 19 anstelle von x in die Ungleichungen ein, so erhält man:
$17 < 19 < 27$ (wahre Aussage) und $18 < 19 < 29$ (wahre Aussage).
c) Die Aussage ist *wahr*, denn 714 ist eine gerade Zahl und es gilt 714:7=102. (Beide Teilaussagen sind wahr.)

4.2.
a) Die Aussage ist *falsch*, denn für a = 0 gilt *nicht* $a \cdot 0 = a$
b) Die Aussage ist *falsch*, denn für a = 1 (oder a = 0) gilt *nicht* $a \cdot a > 1$
c) Die Aussage ist *wahr*.
d) Die Aussage ist *falsch*, denn für a = 10 gilt nicht $a - 9 > 9$.
e) Die Aussage ist *wahr*. (Beispiel: a = 1)
f) Die Aussage ist *wahr*. (Beispiel: a = 2)
g) Die Aussage ist *falsch*, denn es gibt keine natürliche Zahl a mit $a : 3 > a$. (Es gibt allerdings eine Zahl a, für die gilt: $a : 3 = a$, nämlich die Zahl Null.)
h) Die Aussage ist *wahr*. (Siehe Aufg. c!)
Anmerkung: Die Redeweise „Es gibt eine ..." wird in der Mathematik im Sinne von „Es gibt mindestens eine ..." verstanden.

4.3.
Mögliche richtige Antworten:
– Für alle angegebenen Zahlen gilt, daß sie ungerade Zahlen sind.
– Für alle angegebenen Zahlen gilt, daß sie *größer als 10* sind.
– Für alle angegebenen Zahlen gilt, daß sie *kleiner als 600* sind.

4.4.
Zur Lösung dieser Aufgabe sei folgendes Schema empfohlen:

Petra	1. Platz	2. Platz	3. Platz
Ute	1. Platz	2. Platz	3. Platz
Renate	1. Platz	2. Platz	3. Platz

Aus dem ersten Satz entnehmen wir, daß Renate nicht den ersten Platz belegte, da sie mit der Siegerin zusammen trainiert. Es ergibt sich:

Petra	1. Platz	2. Platz	3. Platz
Ute	1. Platz	2. Platz	3. Platz
Renate	–	2. Platz	3. Platz

Aus dem zweiten Satz geht hervor, daß Ute nicht den 3. Platz belegt hat. Es ergibt sich:

Petra	1. Platz	2. Platz	3. Platz
Ute	1. Platz	2. Platz	–
Renate	–	2. Platz	3. Platz

Vermerken wir noch die Aussage des dritten Satzes in unserer Tabelle:

Petra	1. Platz	2. Platz	3. Platz
Ute	1. Platz	2. Platz	–
Renate	–	2. Platz	–

Nun findet sicher jeder selbst die Lösung der Aufgabe: Bei den Meisterschaften im 100m-Lauf belegte Ute den ersten Platz, Renate den zweiten Platz und Petra den dritten Platz.

5.1.
a) *Es gilt nicht*, daß a größer als 7 ist.
Gleichwertige Formulierungen:
a ist *nicht* größer als 7.
a ist entweder kleiner als 7 oder gleich 7.
Falsch wäre die Antwort: a ist kleiner als 7.
b) Das Produkt $17 \cdot 11$ ist *keine* gerade Zahl.
c) *Nicht* alle natürlichen Zahlen haben einen Vorgänger.
Falsch wäre die Antwort: Alle natürlichen Zahlen haben keinen Vorgänger.
d) $2^4 + 2^2 \neq 2^5$

5.2.
a) Nur die Zahl 96 erfüllt die Bedingung, zweistellig und größer als 3^4 zu sein.
b) Die Zahlen 81, 96, 107 erfüllen die Bedingung, zweistellig oder größer als 3^4 zu sein.
c) Die Zahlen 81, 107 erfüllen die Bedingung, entweder zweistellig oder größer als 3^4 zu sein.

5.3.
a) Nur die Zahlen 1007, 1008 erfüllen sowohl die Ungleichung $1004 < x < 1009$ als auch die Ungleichung $1006 < x < 1010$.
b) Die Zahlen 10, 11, 12, 13, 14, 15 erfüllen die Ungleichung $10 < x < 2^4$ *oder* die Ungleichung $3^2 < x < 13$ *oder beide* Ungleichungen.
c) Die Zahlen 10, 13, 14, 15 erfüllen entweder die Ungleichung $10 < x < 2^4$ oder die Ungleichung $3^2 < x < 13$.

5.4.
a) Der Satz ist wahr.
b) Der Satz ist falsch. (Beispiel: a = 14 – Die Zahl 14 erfüllt die Ungleichung $2a < 30$, aber *nicht* die Ungleichung $a < 9$.)

6.1.
a) Alle durch 17 teilbaren Zahlen sind ungerade.
Falsche Aussage, denn 34 ist eine gerade Zahl und trotzdem durch 17 teilbar.
Mögliche Verneinungen:
– Nicht alle durch 17 teilbaren Zahlen sind ungerade.
– Es gibt durch 17 teilbare Zahlen, die gerade sind.
b) Die Aussage ist *falsch*, denn die Zahl 4 erfüllt die Ungleichung $3 < x < 2^4$, aber nicht die Ungleichung $3^2 < x < 72$.
Mögliche Verneinung:
– Nicht jede natürliche Zahl, die die Ungleichung $3 < x < 2^4$ erfüllt, erfüllt auch die Ungleichung $3^2 < x < 72$.
c) Die Aussage ist *wahr*.
d) Die Aussage ist *falsch*.
Mögliche Verneinung:
– Es gibt keine natürliche Zahl, die die Gleichung $13 - a = 4^2$ erfüllt.

6.2.
a) Jedes Quadrat erfüllt die Bedingung, denn jedes Quadrat ist ein Parallelogramm.
b) Da jedes Rechteck ein Trapez ist, kann man *kein* Rechteck zeichnen, das kein Trapez ist.
c) Da jeder Rhombus ein Drachenviereck ist, kann man *keine* Figur mit der angegebenen Eigenschaft zeichnen.

6.3.
Zur Lösung dieser Aufgabe sei folgendes Schema empfohlen:

Alfred	Dessau	Halle	Wittenberg
Bernd	Dessau	Halle	Wittenberg
Christian	Dessau	Halle	Wittenberg

Aus dem Satz 1 entnehmen wir, daß Alfred nicht Hallenser ist, also wird diese Möglichkeit in der Tabelle gestrichen.

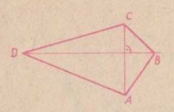
Bernd kommt also aus Halle, d. h. aber, Christian kommt nicht aus Halle, demnach kommt Christian aus Wittenberg und Alfred aus Dessau.

Aus dem Satz 2 entnehmen wir, daß Bernd nicht aus Dessau ist.
Der Satz 3 besagt, daß Christian nicht aus Dessau ist.
Aus dem 4. Satz kann man folgern, daß Bernd nicht aus Wittenberg ist.

7.1.

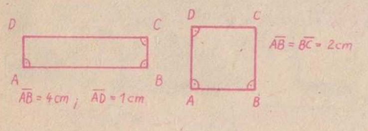
a) Umkehrung:

Wenn $|x|>1$, so ist $x<-1$. (Falsche Aussage; Beispiel: $x = 2$)



b) Umkehrung:

Wenn in einem Viereck ABCD die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, dann ist das Viereck ABCD ein Drachenviereck. (Falsche Aussage; siehe Abb. 1!)



c) Umkehrung:

Wenn zwei Figuren flächengleich sind, so sind sie zueinander kongruent. (Falsche Aussage; siehe Abb. 2!)

d) Umkehrung:

Wenn die Innenwinkel eines Dreiecks ABC gleich groß sind, so ist das Dreieck ABC gleichseitig. (Wahre Aussage)

7.2.

Das rechtwinklige Dreieck hat die Nummer 1, das stumpfwinklige die Nummer 2, das spitzwinklige Dreieck die Nummer 3 und das Quadrat die Nummer 4.

7.3.

Die Sätze b, c, d sind mögliche Verneinungen zu dem angegebenen Satz.

8.1.

Die Aussage der Form „A oder B" ist nur dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsche Aussagen sind. Da also A, B falsche Aussagen sind, sind auch „A und B", „Entweder A oder B" falsche Aussagen.

8.2.

a) *Es gilt nicht,* daß die Zahl $\frac{16}{49}$ eine natürliche Zahl oder eine irrationale Zahl ist.

b) *Es gilt nicht,* daß das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.

8.3.

Nur die Antwort b) ist richtig.

KOMBINATORIK
RICHTIG ANORDNEN – RICHTIG AUSWÄHLEN

1, Da es sich bei den Verbindungsgeraden z. B. P_2P_3 und P_3P_2 um ein und dieselbe Gerade handelt, liegt hier eine Kombination vor. $C_{12}^{(2)} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2}$ zwischen den zwölf Punkten gibt es 66 Verbindungsgeraden; es sind dies die Seiten und die Diagonalen eines Zwölfecks.

2. $C_9^{(2)} = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$ zwischen den neun Punkten lassen sich 36 Verbindungsgeraden ziehen, darunter befinden sich die neun Seiten des Neunecks.
Ein Neuneck hat somit 36 – 9 = 27 Diagonalen.

3.
$$C_5^{(1)} + C_5^{(2)} + C_5^{(3)} + C_5^{(4)} + C_5^{(5)}$$
$$= \frac{5}{1} + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$
$$= 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$$

Mit Hilfe der Leuchtanlage können 31 verschiedene Personen gerufen werden.

4.
$$C_{32}^{(10)} = \frac{32!}{(32-10)! \cdot 10!} = \frac{32!}{22! \cdot 10!}$$
$$= \frac{23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = 64512240$$

5. $C_5^{(3)} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$

6. $C_{99}^{(5)} = 71523144$;
71 523 144 : 2 = 35 761 572.
Um mit Sicherheit fünf Richtige zu haben, müssen 35 761 572 M aufgewendet werden.

7. $C_{90}^{(5)} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43949268$
43 949 268 : 4 = 10 987 317 (Minuten)
≈ 20 (Jahre)

8. $C_{50}^{(4)} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 230\,300$

9. Für den ersten Spieler gibt es $C_{32}^{(10)}$ Mög[lichkeiten,] für den zweiten Spieler verbleiben nur noch $C_{22}^{(10)}$ und für den dritten Spieler $C_{12}^{(10)}$ verschied[ene] Möglichkeit[en].
Daraus folgt
$$C_{32}^{(10)} \cdot C_{22}^{(10)} \cdot C_{12}^{(10)} =$$
$$2\,753\,294\,408\,504\,640.$$
(Anzahl der möglichen Spiele)

10.
$$C_6^{(1)} \cdot C_6^{(1)} \cdot C_6^{(1)} = \frac{6}{1} \cdot \frac{6}{1} \cdot \frac{6}{1} = 216$$

11. $C_5^{(1)} \cdot C_5^{(1)} = \frac{5}{1} \cdot \frac{5}{1} = 25$

12. $C_{28}^{(3)} = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 3276$

13. $V_5^{(3)} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

14. $P_{n-2} : P_n = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{9}$ $\quad n = 10$

15. $\binom{n}{3} \cdot 5 = \frac{(n+2)}{4}$;
$$\frac{n(n-1)(n-2) \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$20(n-2) = (n+2)(n+1);$$
$$n^2 - 17n + 42 = 0$$
$$n_1 = 14 \quad n_2 = 3$$

16. $V_{12}^{(3)} = 1320$

17. Anzahl der Permutationen aus den Elementen a, e, g,

die mit a beginnen:	4! =	24
die mit e beginnen:	4! =	24
die mit g beginnen:	4! =	24
laegr		
laerg		3
lager		
		75

Die Permutaiton „lager" steht an 75. Stelle: die Permutaiton „regal" steht an 105. Stelle

18. $C_{30}^{(3)} = 4060$

19. $C_n^{(2)} = \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$

20. $C_{27}^{(4)} = 17550$

UN-GLEICHUNGEN

1. Für die Maßzahl V = abc des Volumens (in cm^3) gilt wegen
$9{,}5 \leqq a \leqq 10{,}5$, $7{,}5 \leqq b \leqq 8{,}5$, $4{,}5 \leqq c \leqq 5{,}5$
$9{,}5 \cdot 7{,}5 \cdot 4{,}5 \leqq V \leqq 10{,}5 \cdot 8{,}5 \cdot 5{,}5$
$320{,}625 \leqq V \leqq 490{,}875$.
Das Volumen liegt also zwischen 320 cm^3 und 491 cm^3; es kann daher nur mit etwa 400 cm^3 angegeben werden, da die Fehler der Kantenlängen sich sehr stark auswirken.

2. Wegen $A_o = 2(ab + ac + bc)$ gilt
$2(9{,}5 \cdot 7{,}5 + 9{,}5 \cdot 4{,}5 + 7{,}5 \cdot 4{,}5)$
$\leqq A_o \leqq 2(10{,}5 \cdot 8{,}5 + 10{,}5 \cdot 5{,}5 + 8{,}5 \cdot 5{,}5)$
$295{,}50 \leqq A_o \leqq 387{,}50$.
Der Oberflächeninhalt liegt also zwischen 295 cm^2 und 388 cm^2, er beträgt etwa 300 cm^2.

3. Aus $8x > 200$, d. h., $x > 25$, und $38x < 1000$, d. h. $x < \frac{1000}{38} < 27$, folgt $25 < x < 27$, also $x = 26$

$$a = 2,\ b = \frac{81+100}{90} = \frac{181}{90} = 2 + \frac{1}{90}$$
$$c = \frac{19801}{9900} = 2 + \frac{1}{9900},\ d = \frac{1998001}{999000} = 2 + \frac{1}{999000}$$

Wegen $\frac{1}{90} > \frac{1}{9900} > \frac{1}{999000}$
folgt hieraus $b > c > d$, also $a < d < c < b$.

5. Aus $399{,}99 \leqq a \leqq 400{,}01$
und $49{,}85 \leqq t \leqq 49{,}95$
erhält man für die Maßzahl der Geschwindigkeit $v = \frac{a}{t}$ (in $km.h^{-1}$)
$$\frac{399{,}99 \cdot 3{,}6}{49{,}95} \leqq v \leqq \frac{400{,}01 \cdot 3{,}6}{49{,}85}$$
$$28{,}82 < v \leqq 28{,}89$$
also
Die Geschwindigkeit liegt daher zwischen 28,82 $km.h^{-1}$ und 28,89 $km.h^{-1}$; sie kann daher mit etwa 28,8 $km.h^{-1}$ angegeben werden.

6. Ist z die Stückzahl der jährlich zu produzierenden Ventilatoren, so sollen die Kosten je Stück weniger als $\frac{19{,}20 \cdot 80}{100}$ M = 15,36 M betragen, wobei die jährliche Abschreibung der neuen Maschine in Höhe von $\frac{13500}{3}$ M = 4500 M zu berücksichtigen ist. Es gilt daher die Ungleichung
$$13{,}15\,z + 4500 < 15{,}36\,z$$
$$2{,}21 > 4500$$
$$z > \frac{4500}{2{,}21} = 2036\,\frac{44}{221}.$$

Es müssen also mindestens 2037 Stück jährlich hergestellt werden.

7. Man erhält $x^4 < 111\,000\,000$, also $x < 103$, und $(x+3)^4 > 100\,000\,000$, also $x+3 > 100$, $x > 97$. Es gilt also $97 < x < 103$. Nun ist keine der Zahlen x, x+1, x+2, x+3 durch 5 teilbar, da ihr Produkt nicht durch 5 teilbar ist. Daher gilt x = 101. Die Zahlen sind also 101, 102, 103, 104.

8. Wegen Satz 7 gilt
Dabei gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $x = \frac{1}{x}$, also $x^2 = 1$, also, da x eine positive reelle Zahl ist, x = 1 ist.

9 Für alle reellen Zahlen a, b, c, d gilt
$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$
$$= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$
$$= (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2)$$
$$+ (b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2)$$
$$= (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2.$$
Wegen $(bc - ad)^2 \geqq 0$ folgt weiter
$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geqq (ac + bd)^2$, w.z.b.w.

10. a) Es gilt $\delta = \frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{1-(1-x^2)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$
Wegen $x > 0$ folgt einerseits $\delta > 0$ und andererseits $\frac{1}{1+x} < 1$, also $\delta < x^2$.

b) Aus $x + x\frac{3{,}25}{100} = 100$ folgt...

Das Sparguthaben zu beginn des Jahres beträgt also rd. 96,75 M.
Dabei gilt für den Fehler $\delta < 0{,}0325^2 < 0{,}0011$, d. h., $100\delta < 0{,}11$, der Fehler ist also kleiner als 0,11 M.
Tatsächlich ergibt die genaue Rechnung
$\frac{100}{1{,}0325} = 96{,}8523\ldots$
die Differenz gegenüber dem Näherungswert ist also kleiner als 0,11 M.

11:
ergibt sich also ein Höchstvolumen von 27 000 cm^3.

Lösungen zu

Leicht verhexte Zahlen

1. 9 – 5 = 4
: – +
3 · 1 = 3
3 + 4 = 7

4. 12
9 7
8 11 10

2. vorletzte Zeile:
$\left.\begin{matrix} 7 \cdot 0 = 0 \\ 5 \cdot 0 = 0 \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} 0 = 0 \\ 7 \neq 5 \end{matrix}$

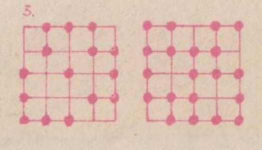
3. 28 + 09 + 18 + 45 = 100
5898 + 4102 = 10 000

Lösungen zu „Knobel Kniffling":

1. Waagerecht: 3 + 6 – 2 = 7;
2 · 3 : 2 = 3;
4 + 5 – 3 = 6
senkrecht: 3 · 2 – 4 = 2;
6 + 3 – 5 = 4;
2 · 2 + 3 = 7

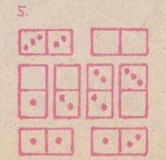
2. Es sind 9 Dreiecke und 11 Rechtecke.

3.

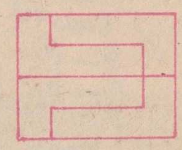


4. Drei Würfel wiegen soviel wie ein Block.

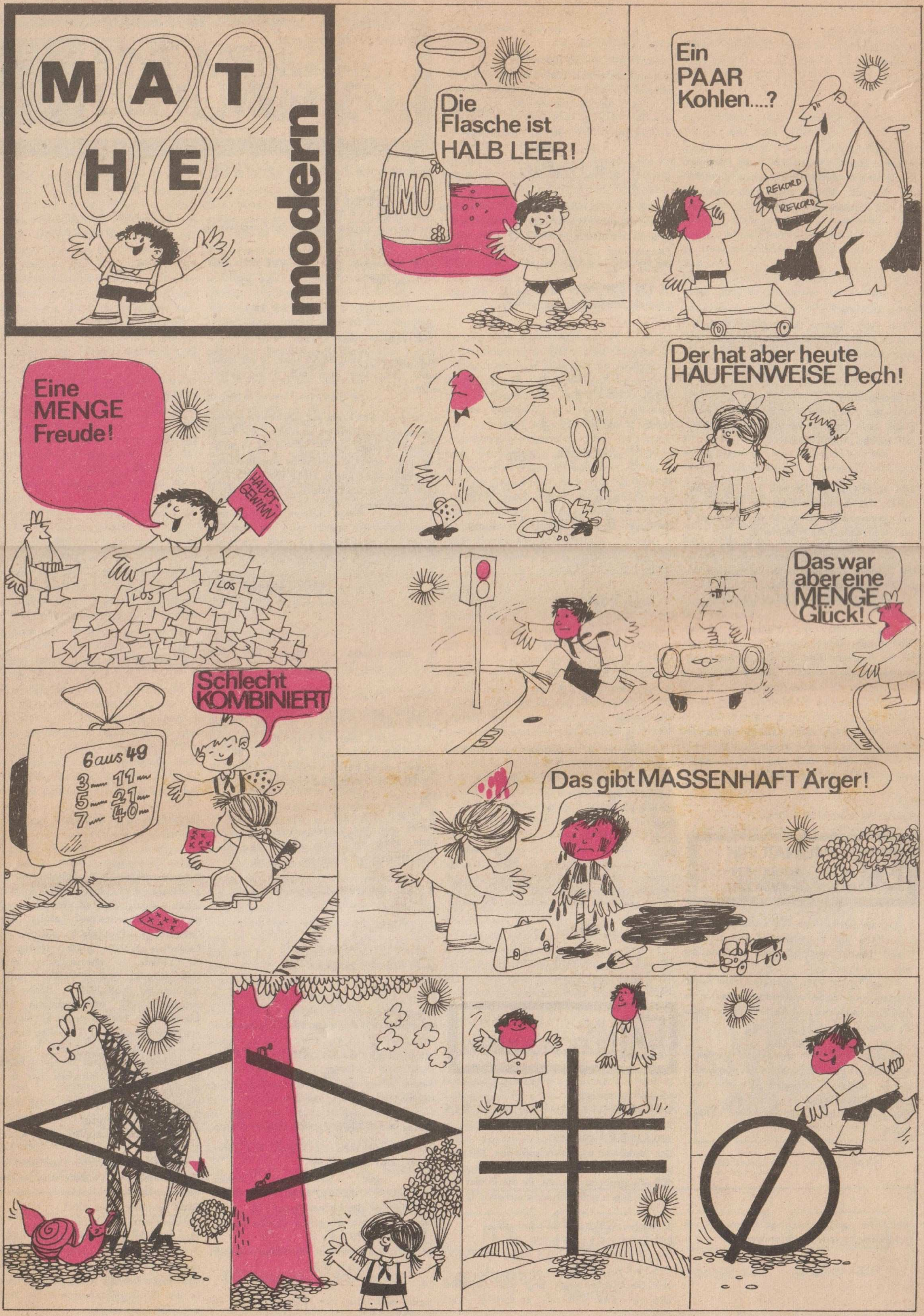
5.



6.



An dieser Mathe-LVZ arbeiteten mit:
Studienrat J. Lehmann, VLdV, 29. Oberschule Leipzig, Chefredakteur der mathematischen Schülerzeitschrift „alpha" (Idee und Gestaltung); Prof. Dr. W. Walsch, Martin-Luther-Universität Halle (Mengenlehre); Dr. L. Flade, Martin-Luther-Universität Halle (Logik); Studienrat Th. Scholl, Ministerium für Volksbildung Berlin (Kombinatorik); NPT Oberstudienrat Dr. Rolf Lüders, IfL Berlin-Köpenick (Ungleichungen); Lehmann/Scholl (Umweltschutz).
Das Autorenkollektiv dankt der Druckerei Fortschritt Erfurt und Tastomat Eggersdorf für die konkrete Mitarbeit bei der technischen Herstellung.
Technische Zeichnungen: OL G. Gruß, 29. Oberschule Leipzig
Typografische Gestaltung: B. Radestock/ J. Lehmann
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 607 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.
Satz: Tastomat Eggersdorf
Druck: Fortschritt Erfurt
Das Kollektiv der Mathe-LVZ wurde am 7. 3. 1972 in Anerkennung besonderer Verdienste mit der Medaille „Für besondere Leistungen bei der sozialistischen Erziehung in der Pionierorganisation ‚Ernst Thälmann' in Gold" ausgezeichnet.


MATHE
modern
Die Flasche ist HALB LEER!
Ein PAAR Kohlen....?
REKORD
REKORD
Eine MENGE Freude!
HAUPT-GEWINN
LOS
LOS
Der hat aber heute HAUFENWEISE Pech!
Das war aber eine MENGE Glück!
Schlecht KOMBINIERT
6 aus 49
3 11
5 21
7 40
Das gibt MASSENHAFT Ärger!