
Hugo Steinhaus

**100 neue Aufgaben -
Elementare Mathematik**

Zeichnungen: Gerhard Pippig
1973 Urania Verlag Leipzig Jena Berlin
MSB: Nr. 72
Abschrift und LaTeX-Satz: 2020

<https://mathematika.de>

Vorwort

Das Buch enthält in einer breiten Skala Aufgaben und Probleme aus verschiedenen Gebieten der elementaren Mathematik, Aufgaben zum Kopfzerbrechen für mathematisch noch weniger Gewandte sowie für Geübte. Sie erfordern nicht unbedingt Kenntnisse der höheren Mathematik. Wer sie aber lösen will, muss klar und schöpferisch denken. Diese Fähigkeit wird beim Beschäftigen mit den Aufgaben zwanglos entwickelt bzw. gefördert.

Doch auch derjenige, der nach dem Durchlesen der Aufgabenstellung gleich die Lösung aufschlägt und selbst durchdenkt, wird eine Reihe von "Tricks", aber vor allem Gedankengänge und Methoden der Mathematik kennenlernen. Das Buch zeigt die Elementarmathematik von einer interessanten Seite und versucht zugleich, die Kluft zur höheren Mathematik zu überwinden.

Ein weiteres Ziel des Autors war es, dem Leser die innige Verbindung der Mathematik zur Wirklichkeit aufzuzeigen. Deshalb bemühte er sich, nicht nur formale, sondern auch praktische Probleme zu stellen. So soll die Sammlung dem Leser den Übergang von der schematischen Lösung formaler Aufgaben in die eigentliche Mathematik erleichtern und ihm diese Wissenschaft lebendig und anschaulich vorführen.

Die Absicht des Autors bestand auch keineswegs darin, dem Leser Aufgaben vorzulegen, die in jedem Schulbuch zu finden sind. Es ist ein Vorzug der Sammlung, dass sie meist neue und originelle Aufgaben enthält. Die Lösungen sind elegant, bisweilen unerwartet.

Die "100 neuen Aufgaben" sind somit eine Fortsetzung und Ergänzung der bereits im Urania-Verlag erschienenen "100 Aufgaben" des international anerkannten polnischen Mathematikers, die großen Anklang fanden, stellen aber einen in sich geschlossenen und gleichwertigen Band dar.

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgaben	4
1.1	Von Zahlen, Gleichungen und Ungleichungen	4
1.2	Punkte, Geraden, Polygone, Kreise und Kurven	7
1.3	Geometrie im Raum	12
1.4	Praktisches und Unpraktisches	16
1.5	Schnelligkeit und Überlegung	20
1.6	Die mathematischen Abenteuer des Dr. Abrakadabra	23
2	Lösungen	26
2.1	Von Zahlen, Gleichungen und Ungleichungen	26
2.2	Punkte, Geraden, Polygone, Kreise und Kurven	34
2.3	Geometrie im Raum	57
2.4	Praktisches und Unpraktisches	73
2.5	Schnelligkeit und Überlegung	82
2.6	Die mathematischen Abenteuer des Dr. Abrakadabra	89

1 Aufgaben

1.1 Von Zahlen, Gleichungen und Ungleichungen

1. Eine Abschätzung für $\sqrt{2}$

Es seien p, q ganze Zahlen, $q \neq 0$. Man beweise die Richtigkeit der Ungleichung

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{3q^2}$$

2. Eine Näherung für $\sqrt{3}$

Die Güte der Näherung von $\sqrt{3}$ durch einen Bruch $\frac{p}{q}$ (p, q ganze Zahlen, $q \neq 0$) ist durch die Ungleichung

$$\left| \sqrt{3} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{(2 + \sqrt{3})q^2}$$

beschränkt. Man gebe dafür einen Beweis an.

3. Abschätzung dreier eigenartiger Ausdrücke

a) Man zeige, dass es eine endliche Zahl gibt, die größer als alle Zahlen

$$c_n = \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1}}}}}}_{n \text{ Wurzelzeichen}}$$

ist, wobei n eine beliebige natürliche Zahl sein kann.

b) Man zeige, dass es eine endliche Zahl gibt, die größer als alle Zahlen

$$d_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{n}}}}}$$

ist.

c) Wie kann man den Wert des unendlichen Ausdrucks

$$w = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots}}}$$

auf drei Stellen genau berechnen?

4. Ein Gleichungssystem

Welchen Bedingungen müssen die Zahlen a und b genügen, damit das Gleichungspaar

$$|x| + y = a \quad ; \quad x + |y| = b$$

lösbar wird ?

5. Lineare Unabhängigkeit

Drei Größen u, v, w heißen linear unabhängig, wenn sich keine Zahlen p, q, r finden lassen (ausgenommen $0, 0, 0$), welche die Gleichung $pu + qv + rw = 0$ erfüllen.

Wir stellen uns jetzt einen Würfel vor, dessen Kanten den Koordinatenachsen x, y, z parallel sind und in dem sich ein Massenpunkt M befindet, der sich ohne Einwirkung einer äußeren Kraft ständig bewegt. Der Punkt M , dessen Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ von Null verschieden war, wird an den Würfelwänden entsprechend dem Gesetz "Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel" zurückgeworfen.

Die Komponenten u, v, w der Anfangsgeschwindigkeit sind linear unabhängig. Wir wollen zeigen, dass der sich dauernd bewegende Punkt M niemals mehr in seine Ausgangslage zurückkehren kann.

6. Eine merkwürdige Eigenschaft

$2^4 = 4^2$ ist ein Beispiel für $a^b = b^a$, wobei die ganzen Zahlen a, b den Ungleichungen $0 < a < b$ genügen.

Gibt es weitere Beispiele für solche ganzen Zahlen?

7. Die Potenzaufgabe $a^b = c$

Die positiven Zahlen a, b, c können rational oder irrational sein. Insgesamt ergeben sich die folgenden Möglichkeiten:

- 1) a rational, b rational, c rational,
- 2) a rational, b rational, c irrational,
- 3) a rational, b irrational, c rational,
- 4) a irrational, b rational, c rational,
- 5) a rational, b irrational, c irrational,
- 6) a irrational, b rational, c irrational,
- 7) a irrational, b irrational, c rational,
- 8) a irrational, b irrational, c irrational.

Für jeden dieser acht Fälle gebe man Beispiele an, wobei die gewählten Zahlen a, b, c der Bedingung $a^b = c$ genügen müssen.

8. Eine Gleichung mit zwei Unbekannten

Man bestimme die reellen Wurzeln der Gleichung

$$y^8 + x^4 + 10y^2 + x^2 + 6x^2y^4 = 4xy^6 + 4x^3y^2 + 6xy + 6y - 9$$

9. Eine Ungleichung

Man beweise, dass für $a > b > c > 0$ die Beziehung gilt:

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} > 0$$

10. Noch eine Ungleichung

Es seien n beliebige reelle Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n gegeben, und es sei s ihr arithmetisches Mittel:

$$s = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Man beweise die Ungleichung

$$(a_1 - s)^2 + (a_2 - s)^2 + \dots + (a_n - s)^2 \leq \frac{1}{2} (|a_1 - s| + |a_2 - s| + \dots + |a_n - s|)^2$$

11. Eine Zahlenfolge

Man bestimme eine Folge a_0, a_1, a_2, \dots positiver Zahlen derart, dass $a_0 = 1$ und $a_n - a_{n+1} = a_{n+2}$ für $n = 0, 1, 2, \dots$ ist.

Man zeige, dass es nur eine einzige solche Folge gibt.

12. Zwei Mengen

Wir zerlegen das Intervall $[0, 1]$ in zwei Punktmenge A und B . (Beispielsweise kämen wir die Punkte der Strecke $[0, 1]$ so aufteilen, dass zu A alle Punkte mit rationaler Abszisse und zu B alle Punkte mit irrationaler Abszisse gehören.)

Es sei nun auf $[0, 1]$ eine stetige Funktion $f(x)$ definiert.

Ist es möglich, dass für jedes zu A gehörende x der Funktionswert $f(x)$ in B und für jedes zu B gehörende x der Funktionswert $f(x)$ in A liegt?

1.2 Punkte, Geraden, Polygone, Kreise und Kurven

13. Ein sechsstrahliger Stern

Gegeben sei ein ebenes beschränktes Gebiet. Es lassen sich drei Geraden angeben, so dass jede der Geraden den Flächeninhalt des Gebiets halbiert, alle drei Geraden einen Punkt gemeinsam haben und so einen sechsstrahligen Stern bilden, dessen Strahlen gleiche Winkel einschließen. Man gebe dafür ohne Verwendung von Formeln einen Beweis an.

14. Eine Zerlegung des Dreiecks

Gegeben sei ein Dreieck. Man bestimme innerhalb dieses Dreiecks einen Punkt derart, dass die drei Verbindungsstrecken zwischen diesem Punkt und den Eckpunkten das Dreieck in drei flächengleiche Teile zerlegen.

15. Ein gleichseitiges Dreieck

Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit Seiten, deren Längen kleiner als 1 sind, ist kleiner als der Flächeninhalt eines Dreiecks mit der Seitenlänge 1.

Man gebe dafür einen Beweis an.

16. Zwei Dreiecke

Gegeben sind zwei Dreiecke. Die kürzeste Seite des ersten Dreiecks ist länger als die längste Seite des zweiten Dreiecks. Folgt daraus, dass der Flächeninhalt des ersten Dreiecks größer ist als der des zweiten?

17. Ein Punkt in einem Dreieck

Das Dreieck ABC habe ganzzahlige Seitenlängen: $AB = 63$, $BC = 60$, $CA = 39$.

Man bestimme im Innern des Dreiecks einen Punkt P mit ganzzahligen Abständen PA , PB und PC .

18. Zwei Punkte in einem Dreieck

Zwei Punkte im Innern eines Dreiecks bestimmen offenbar sechs Abstände zu den Seiten des Dreiecks. Ein siebenter Abstand wird durch das gewählte Punktepaar selbst festgelegt. Uns interessiert das Maximum m dieser sieben Abstände.

Wie sind die beiden Punkte zu wählen, um das Maximum zu erhalten ?

19. Umkreis und Inkreis

Für ein gleichseitiges Dreieck ist der Radius des Umkreises gleich dem Durchmesser des Inkreises. Der Flächeninhalt des Umkreises ist folglich viermal so groß wie der des Inkreises.

Man zeige, dass für andere Dreiecke das Verhältnis dieser Flächeninhalte stets größer als vier ist.

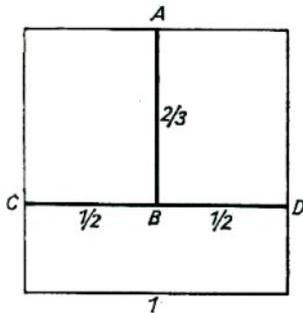
20. Teilung eines Quadrats

Wir zerlegen ein Quadrat mit einer Fläche von 1 km^2 in drei Teile A , B , C . Wie wir die Teilung auch ausführen mögen, es gibt stets mindestens zwei Punkte P und Q eines Teilstückes, deren Abstand PQ größer ist als $1,00778 \text{ km}$.

Wie kann man das beweisen?

21. Dreiteilung eines Quadrats

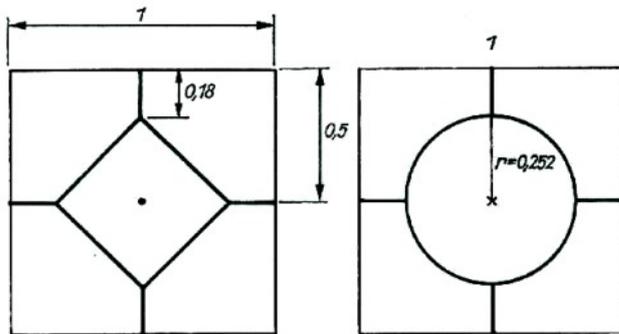
Die Aufgabe, ein Einheitsquadrat mit zwei geradlinigen Schnitten in drei kongruente Rechtecke zu zerlegen, hat eine triviale Lösung. Die Gesamtlänge der Schnitte ist 2.



In der Abbildung ist eine andere Zerlegung des Quadrats in drei Rechtecke dargestellt; die drei Flächeninhalte sind gleich, jedoch sind nur zwei Rechtecke kongruent; die Gesamtlänge der Ränder beträgt angenähert 1,667. Wir lassen jetzt die Bedingung fallen, dass die Teilstücke Rechtecke sind, halten jedoch fest, dass die Flächeninhalte einander gleich und die Ränder geradlinig sind.

Lässt sich unter diesen Umständen die Gesamtlänge der Ränder kleiner als 1,64 machen? Kann die Gesamtlänge weniger als 1,63 betragen, wenn wir zulassen, dass eine Randlinie (oder auch alle) durch einen Kreisbogen ersetzt wird (werden)?

22. Fünfteilung eines Quadrats



Ein Quadrat ist in fünf flächengleiche Teile mit minimaler Gesamtlänge der Ränder zu zerlegen.

Jemand schlägt vier Fünfecke und ein Quadrat vor (linke Abbildung); er meint, seine Lösung erfülle die notwendige Bedingung und ergebe eine minimale Gesamtlänge, denn jeder Rand müsste eine Gerade sein.

Ein anderer verweist in seiner Lösung auf den Satz, dass der Kreis die kürzeste Linie ist, die einen gegebenen Flächeninhalt umschließt (rechte Abbildung). Keiner der beiden berücksichtigt jedoch die notwendige Bedingung, dass die drei Randlinien, wenn sie in einem Punkt zusammentreffen, gleiche Winkel einschließen.

Wie lautet eine bessere Lösung ?

23. Drei Punkte in einem Quadrat

Mehrere Kinder veranstalten ein Wettspiel: Jedes Kind hat ein Stück Pappe vor sich, auf dem ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 dm aufgezeichnet ist. Auf der Pappe sind mit Nadeln drei Punkte zu markieren, wobei das außerhalb des Quadrates liegende Gebiet nicht besteckt werden darf.

Drei Punkte bestimmen drei Strecken, wovon allerdings nur die kürzeste für den Spieler gewertet wird. Mit s_L bezeichnen wir die Strecke, die für das Kind L zählt, mit s_M die für das Kind M gewertete usw.

Wenn $s_L > s_M$ ist, dann gewinnt L einen höheren Preis als M usw. Wie sind die Nadeln am günstigsten anzuordnen ?

24. Zehn Strecken

Zeichnen wir in der Ebene ein beliebiges Viereck und seine Diagonalen, so erhalten wir fünf Punkte und ihre gegenseitigen Abstände.

Die Aufgabe ist nun, die Abstände so zu bestimmen, dass sich zehn verschiedene ganze Zahlen

ergeben.

25. Viereck und Kreis

Der Flächeninhalt eines einem Kreis einbeschriebenen Vierecks ist ein Maximum, wenn das Viereck ein Quadrat ist; alle anderen Vierecke haben einen kleineren Flächeninhalt. Wie lautet der Beweis ?

26. Punkt und Parallelogramm

Keine Seite des Parallelogramms $ABCD$ geht durch den Punkt P . Wie können wir Punkte Q, R, T finden, so dass A, B, C, D die Mittelpunkte der Seiten des Vierecks $PQRT$ sind ?

27. Ein Quadrat und eine Kurve

Man bestimme eine vom Kreis verschiedene, konvexe und glatte geschlossene Kurve, die einem Quadrat einbeschrieben werden kann, dessen Größe sich nicht ändert, wenn wir den Berührungspunkt verschieben.

Anders ausgedrückt: Ein umbeschriebenes Quadrat von unveränderlicher Größe kann um eine Kurve gedreht werden, und alle seine Seiten berühren die Kurve dabei ständig. (Der Kreis besitzt diese Eigenschaft offensichtlich!)

28. Der Umfang einer Ellipse

Die Hauptachse einer Ellipse sei 8 cm und die Nebenachse 6 cm. Es ist zu zeigen, dass der Umfang dieser Ellipse größer als 22 cm ist.

29. Kleinster und größter Kreis

Man beweise, dass es unter allen Kreisen, die ein ebenes Gebiet F überdecken, nur einen kleinsten gibt.

Man gebe ein Beispiel für ein Gebiet an, das mehrere einbeschriebene Kreise überdeckt, von denen jeder als größter einbeschriebener Kreis angesehen werden kann.

30. Gleiche Bögen

Es sei C eine geschlossene, ovale ebene Kurve. Man zeige, dass sich in dem von C eingeschlossenen Gebiet ein Punkt und drei durch diesen Punkt gehende Sehnen angeben lassen, so dass C in sechs Bögen gleicher Länge zerlegt wird.

31. Drei Strahlen in einem Oval

Wir nennen eine konvexe und glatte geschlossene Kurve ein Oval, wenn sich jedes Paar von Normalen, die einen Winkel von 120° einschließen, im Innern der Kurve schneidet.

Gibt es im Innern des Ovals einen Punkt, von dem drei Strahlen ausgehen, die zum Oval normal sind und es in drei Sektoren zu jeweils 120° zerlegen?

32. Eine Kurve in einem Kreis

Eine ebene geschlossene Kurve der Länge $2L$ kann stets in einen Kreis vom Durchmesser L eingelagert werden. Man gebe dafür einen Beweis an.

33. Zwei Punkte

Die Punkte A und B liegen beide innerhalb einer geschlossenen Kurve J . Man zeige, dass sich auf J zwei Punkte C und D bestimmen lassen, so dass die Sehne CD gleich der Strecke AB

und parallel zu ihr ist.

34. Der Schwerpunkt dreier Punkte

Es sei P der Schwerpunkt dreier Punkte A, B, C . (In unserem Fall nehmen wir an, in diesen Punkten seien gleiche Massen konzentriert.)

Die Punkte A_1 bzw. B_1 bzw. C_1 seien die Schwerpunkte der Punkttripel B, C, P bzw. C, A, P bzw. A, B, P . Wir wollen beweisen: Der Schwerpunkt des Punkttripels A_1, B_1, C_1 ist der Punkt P .

35. Schwerpunkt und Inkreismittelpunkt

Gegeben sei ein Dreieck ABC . In seinen Eckpunkten bringen wir drei punktförmige Massen an, die jeweils gleich der Länge der dem betrachteten Punkt gegenüberliegenden Seite sind. Man zeige, dass der Schwerpunkt dieses Massensystems zugleich Mittelpunkt eines dem Dreieck ABC einbeschriebenen Kreises ist.

36. Ein Tomahawk als Winkeldreiteiler

Die Abb. A zeigt uns einen idealisierten Tomahawk: Die kreisförmige Schneide des Tomahawk liegt in der Ebene der Abbildung und berührt den linken Schenkel des Winkels α in P ; der obere Rand des Griffes geht durch den Scheitelpunkt; der rechte Schenkel des Winkels α stützt den Tomahawk in einem Punkt B , der unter dem Mittelpunkt des Kreises liegt; der Abstand dieses Punktes zum Mittelpunkt ist gleich dem Durchmesser des Kreises.

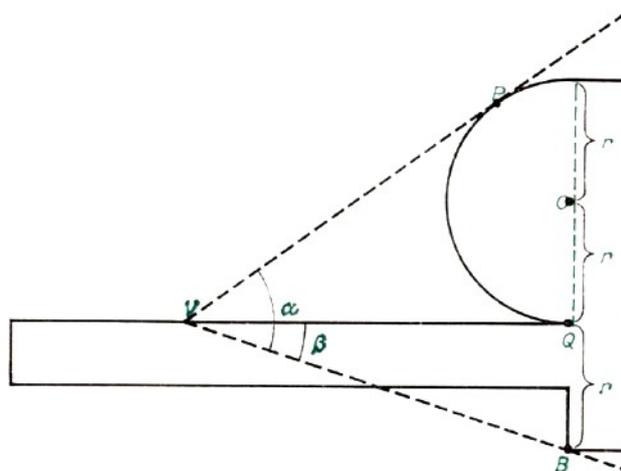


Abbildung A

Wie können wir beweisen, dass der Tomahawk, wenn wir ihn so zwischen die Schenkel des Winkels α legen, einen Winkel $QVB = \beta = \frac{\alpha}{2}$ liefert?

37. Euklid tat es!

Gegeben sind zwei parallele Geraden UU' und LL' und auf ihnen jeweils zwei Strecken AA', BB' bzw. CC', DD' , die alle einander gleich sind.

Wie beweist man die Gleichheit der Parallelogramme $AA'BB'$ und $CC'DD'$?

38. Ein Fensterrahmen

In einer Schule gibt es einen Fensterrahmen, der aus einem regulären sechseckigen äußeren Teil und 12 gleichlangen Leisten im Inneren besteht (Abb. B).

Die Leisten zerlegen das Fenster in 7 Teile: 6 Trapeze und ein reguläres Sechseck. Die Enden der Leisten sind am äußeren Rahmen wie auch untereinander mit Nägeln befestigt. Es gibt 12

solche Verbindungen.

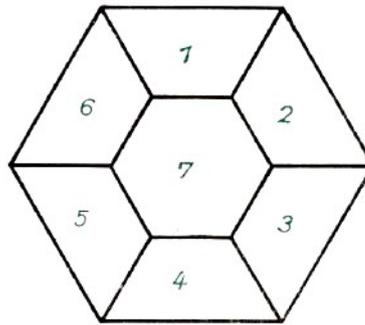


Abbildung B

Die Leisten sind starr, so dass ihre Längen als unveränderlich angesehen werden können.

- Kann der Rahmen in der Ebene des Fensters deformiert werden?
- Ist es möglich, dass eine der Verbindungsstellen des Rahmens die Ebene des Fensters verlässt?

39. Verlegung eines Kabels

Zwei Eisenbahnlinien treffen sich in C ; ihre Verlängerungen I bzw. II über C hinaus können als zwei Geraden angesehen werden. Zu einem zwischen I und II gelegenen Punkt P wurde ein Elektriker geschickt. Ihm war eine Karte mitgegeben worden, auf der die Lage von C , I, II und P eingezeichnet war.

Man hatte ihm aufgetragen, ein gerades Kabel zu legen, das I und II über P verbindet. Die Endpunkte Q_1 und Q_2 des Kabels auf I bzw. II sind dabei so zu wählen, dass sie die folgende Bedingung erfüllen: Länge von $Q_1P =$ doppelte Länge von PQ_2 .

Wie findet man Q_1 und Q_2 auf der Karte?

40. Ein Bergsee

Es gibt Bergseen, die ein Tourist von einem ruhenden Boot aus nicht völlig übersehen kann. Um einen Gesamtüberblick zu gewinnen, muss er umherrudern.

Wenn es jedoch auf dem See einen Punkt gibt, von dem aus die gesamte Wasserfläche sichtbar ist, dann ist das aus allen diesen Punkten bestehende Gebiet konvex. Man gebe dafür einen Beweis.

1.3 Geometrie im Raum

41. Spitzwinklige Dreiecke

Es seien OX , OY , OZ die positiven Halbachsen eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems.

Man zeige, dass jede Ebene, die alle drei Halbeachsen schneidet, den Oktanten $OXYZ$ in einem spitzwinkligen Dreieck schneidet, und dass jedes spitzwinklige Dreieck einen solchen Schnitt darstellt.

42. Ein Fünfeck im Raum

Kann es im Raum ein geschlossenes Fünfeck geben, das rechtwinklig und gleichseitig ist ?

43. Sieben Punkte in einem Würfel

Wie können 7 Punkte in einem Würfel so angeordnet werden, dass ihre gegenseitigen Abstände größer als die Kantenlängen des Würfels sind ?

44. Gleiche Winkel im Raum

Drei von einer Ecke eines Würfels ausgehende Kanten schließen paarweise drei rechte Winkel ein. Im dreidimensionalen Raum lassen sich vier verschiedene, von einem Punkt ausgehende Strahlen bestimmen, die paarweise gleiche Winkel einschließen.

Man berechne diesen Winkel. Lassen sich fünf Strahlen finden, die diese Eigenschaft besitzen?

45. Höhen im Tetraeder

Jedes Tetraeder besitzt vier Höhen. Wie ist ein Tetraeder zu konstruieren, in dem die Höhen einander nicht schneiden?

46. Färbung eines Polyeders

Es ist nicht schwierig, sich ein reguläres Dodekaeder vorzustellen. Es besitzt 12 fünfeckige Seitenflächen, 20 Ecken und 30 Kanten. Verbinden wir den Mittelpunkt einer jeden Seitenfläche des Dodekaeders mit den Mittelpunkten der zu dieser Seite benachbarten Seitenflächen durch Strecken, so erhalten wir ein dem Dodekaeder einbeschriebenes reguläres Ikosaeder. Das Ikosaeder besitzt 20 dreieckige Seitenflächen, 12 Ecken und 30 Kanten.

Um ein Dodekaeder so zu färben, dass benachbarte Seitenflächen durch verschiedene Farben gekennzeichnet sind, reichen vier Farben aus. Mit weniger Farben kann diese Aufgabe nicht gelöst werden. Braucht man für ein Ikosaeder weniger oder mehr Farben?

47. Ein Dekaeder

Gibt es ein Polyeder, das aus zehn fünfeckigen Seitenflächen besteht ?

48. Polyeder

Es gibt ein Dodekaeder, dessen Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind. Darüber hinaus lässt sich ein 56-Flächner mit gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen angeben. Man beschreibe die Formen der beiden Polyeder.

49. Zahlen auf Polyedern

Es gibt ein reguläres Polyeder mit den folgenden Eigenschaften:

Wenn wir auf jede seiner Seitenflächen eine natürliche Zahl schreiben, dann sind die auf

benachbarten Seitenflächen stehenden Zahlen relativ prim, und die Zahlen auf je zwei nicht-benachbarten Seitenflächen besitzen immer einen gemeinsamen Teiler. Um welches Polyeder handelt es sich?

50. Das Sanduhrproblem

Auf ein Blatt Papier zeichnen wir einen Kreis und zwei Strahlen, die einen Winkel von 120° einschließen, wobei der Mittelpunkt C des Kreises Scheitelpunkt dieses Winkels ist.

Den Kreis zerlegen wir in zwei Teile, indem wir das Blatt entlang der Strahlen aufschneiden, und stellen aus dem kleineren Teil einen Kegel her, indem wir ihn entlang der Strahlen zusammenkleben. Mit dem größeren Stück des Kreises verfahren wir ebenso.

Wir haben auf diese Weise aus unserem Papierkreis zwei Kegel erhalten. Um damit zu einer Sanduhr zu gelangen, verbinden wir die beiden Kegel in C , und zwar so, dass die Grundfläche des großen Kegels oberhalb und die Grundfläche des kleinen Kegels unterhalb einer horizontalen Ebene durch C liegt.

Wir betrachten jetzt eine Kugel S mit dem Mittelpunkt in C und einem Radius, der gleich dem Radius des Ausgangskreises ist. Die Sanduhr zerlegt das Innere von S in drei Teile: in den von dem kleinen Kegel ausgeschnittenen Teil, den von dem großen Kegel ausgeschnittenen Teil und den verbleibenden Teil von S .

In welchem Verhältnis stehen die Rauminhalte der drei Teile zueinander?

51. Eine Kugelpackung

Die kompakteste Art, gleichgroße Kugeln im Raum zu packen, ist wohlbekannt. (Vergleiche z.B. die Abb. in H. Steinhaus: "Kaleidoskop der Mathematik".) Bei einer Packung mit gleichgroßen Kugeln entstehen zwei Arten von Löchern: größere und kleinere.

Diese Löcher können mit Kugeln von kleinerem Durchmesser ausgefüllt werden, wobei zwei Größen zu verwenden wären: kleinere Kugeln für die kleineren Löcher und größere Kugeln für die größeren Löcher. Die Durchmesser werden dabei so gewählt, dass die ganze Struktur fest wird.

In wie vielen Punkten berührt jede kleine Kugel eine der Ausgangskugeln, und in wie vielen Punkten berührt jede größere Kugel eine der Ausgangskugeln? Wie groß sind die Radien der kleineren bzw. der größeren Kugeln ?

52. Drei Kappen

Drei Kugelkappen liegen auf einer Kugelfläche S und bedecken sie vollständig. Man zeige, dass nach Entfernen der kleinsten Kappe die übrigen zwei so verschoben werden können, dass sie noch immer die Kugelfläche überdecken.

53. Heureka!

Gegeben sei eine Kugel vom Durchmesser 1. Wir zeichnen auf der Kugeloberfläche einen Kreis, der diese Fläche im Verhältnis $1 : 9$ zerlegt. Wie groß ist der Kreisumfang?

54. Wanderung auf einem Oktanten

Als "Oktant" wird das Dreieck bezeichnet, das durch die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ definiert ist. Es handelt sich dabei offensichtlich um ein sphärisches Dreieck; die Länge jeder Seite ist gleich einem Viertel der Länge des Meridians. Der "Abstand" zweier Punkte P und Q auf dem Oktanten ist die Länge des kürzesten Bogens PQ , der die Punkte P und Q auf der Kugelfläche verbindet.

Es seien A , B , C die Eckpunkte des Oktanten; die Seiten AB , BC , CA sind als derartige

kürzeste Bögen definiert.

Man beweise, dass der Abstand PQ sein Maximum erreicht, wenn $P = A$ ist und Q auf BC liegt, $P = B$ ist und Q auf CA liegt, $P = C$ ist und Q auf AB liegt, oder wenn $Q = A$ ist und P auf BC liegt, $Q = B$ ist und P auf CA liegt, $Q = C$ ist und P auf AB liegt.

Man zeige, dass der Abstand PQ für jedes Paar von Punkten P und Q auf dem Oktanten unter diesem Maximum liegt - ausgenommen für die oben angegebenen Punktepaare.

55. Konvexe Flächen

a.) Wenn jeder horizontale Schnitt einer geschlossenen Fläche konvex ist, dann ist die Fläche selbst konvex.

b) Wenn alle vertikalen Schnitte einer geschlossenen Fläche konvex sind, dann ist die Fläche selbst konvex. Welche der beiden obenstehenden Aussagen ist wahr?

56. Ein Würfel aus 12 Fäden

Zwölf Fäden sind so miteinander verknotet, dass sie die 12 Kanten eines Würfels von 10 cm Seitenlänge bilden. Wir wollen annehmen, eine im Inneren des Würfels befindliche Kugel dehne sich aus, wobei sie ihre Form beibehält. Von einem bestimmten Zeitpunkt an lässt der Käfig ein weiteres Anwachsen der Kugel nicht mehr zu.

Die 12 Fäden liegen dann fest auf der Oberfläche der Kugel auf. Die 8 Knoten können als die Ecken eines Würfels angesehen werden, der der Kugel einbeschrieben ist. Wie groß ist die Kugel?

57. Ein Wanderweg

Wir stellen uns einen Würfel vor, auf dem in der Mitte einer seiner Kanten ein Marienkäfer sitzt. Von hier aus soll der Käfer über die Würfeloberfläche zu dem am weitesten entfernten Ziel wandern. Wir wollen ihm helfen!

58. Eine eigenartige Leiter

Es seien AE und $A'E'$ zwei gleichlange Stäbe. Entlang AE sind in willkürlicher Weise Kerben B, C, D, \dots angebracht; auf $A'E'$ sind die Kerben B', C', D', \dots in gleicher Weise angeordnet. Die beiden Stäbe unterscheiden sich also nicht.

Nun wollen wir beide Stäbe im Raum fixieren; der Leser mag sich etwa zwei Geraden im Raum vorstellen, die weder parallel sind noch sich schneiden. (Man nennt solche Geraden windschief.)

Um aus den beiden Stäben eine Leiter herzustellen, müssen wir sie durch Sprossen AA', BB', \dots, EE' verbinden. Natürlich werden diese Sprossen im allgemeinen verschieden lang sein. Es soll jedoch der Spezialfall $AA' = BB' = \dots = EE'$ nicht ausgeschlossen sein.

Man beweise: Es gibt eine Gerade, die alle Sprossen halbiert. Die Mittelpunkte der Sprossen liegen auf einer Geraden; sie sind kollinear.

59. Ein Quadrat in einem Würfel

Eine würfelförmige Blechschachtel mit 10 cm innerer Kantenlänge liegt geöffnet vor uns. Ihr Deckel liegt daneben. In diese Schachtel soll eine starre quadratische Platte von 10,6 cm Seitenlänge hineingelegt und die Schachtel mit dem Deckel verschlossen werden. Ist das möglich?

60. Kugelförmigkeit von Körpern

Von allen Körpern mit gleichem Volumen besitzt die Kugel die kleinste Oberfläche. Wenn wir eine Kugel mit einem anderen Körper desselben Volumens vergleichen, so zeigt sich, dass die Oberfläche dieses Körpers einen größeren Flächeninhalt besitzt.

Wir können eine Funktion $f(A, V)$ angeben, die vom Flächeninhalt A und dem Volumen V abhängt, und die für jeden von der Kugel verschiedenen Körper einen Wert kleiner als 1 annimmt. Für konvexe Körper stellt dieser Ausdruck ein Maß ihrer "Kugelförmigkeit" dar, und die Funktion f ist in diesem Sinne eine Charakterisierung der Kugelförmigkeit.

Man bestimme die Funktion $f(A, V)$! Sind die ersten beiden Sätze in der Aufgabenstellung äquivalent?

61. Ein Körper mit Kreisprojektionen

Ist es möglich, einen konvexen Körper zu konstruieren, dessen Projektionen auf die xy -Ebene, yz -Ebene und zx -Ebene gleiche Kreisflächen sind, ohne dass der Körper eine Kugel ist?

1.4 Praktisches und Unpraktisches

62. Aufteilung einer dreieckigen Torte

Hans und Peter sollen sich eine dreieckige Torte teilen. Peter stellt folgende Bedingung: Er möchte sich sein Stück längs einer geraden Linie abschneiden. Hans ist einverstanden unter der Voraussetzung, dass er einen Punkt P festlegen darf, durch den Peter seinen Schnitt legen muss.

Da die Torte überall die gleiche Höhe hat und überall gleich gut schmeckt, reduziert sich das Problem auf eine Aufgabe aus der ebenen Geometrie.

Die Fragen lauten: Welchen Punkt P muss Hans bestimmen, um sich gegen Peters Appetit am besten zu schützen? Um wieviel ist Peters Stück größer, wenn Hans den Punkt P richtig gewählt hat und Peter sich das größtmögliche Stück abschneidet?

Wenn Hans die Form der Torte bestimmen könnte, würde er eine Figur vorschlagen, die einen Mittelpunkt besitzt (Kreis, Quadrat, Ellipse usw.) und diesen als den Punkt P wählen. Peter könnte dann bei der Teilung keinen Vorteil erlangen.

Interessanter ist jedoch die Frage, welche Form der Torte - unter Beibehaltung der oben angegebenen Teilungsbedingungen - für Peter am vorteilhaftesten ist und um wieviel größer sein Anteil als der von Hans ist, wenn er diese Form vorschlagen könnte.

63. Eine Uhr mit zwei gleichen Zeigern

Ein Uhrmacher setzte einer Uhr versehentlich zwei gleiche Zeiger ein, so dass Stunden- und Minutenzeiger nicht zu unterscheiden sind.

Wie groß wird der maximale Fehler sein, der dem Besitzer der Uhr unterläuft, wenn er sich nicht um mehr als sechs Stunden irren kann ?

64. Kugeln

Eine feinmechanische Werkstatt hatte 120 Stahlkugeln mit 6,1 mm Durchmesser bestellt. Sie erhielt auch tatsächlich 120 Kugeln, jedoch ergaben genaue Messungen, dass ihre Durchmesser nicht den Präzisionsforderungen entsprechen. Die Messungen führten auf folgendes Ergebnis:

10 Kugeln mit einem Durchmesser von 6,01 mm
6 Kugeln mit einem Durchmesser von 6,02 mm
4 Kugeln mit einem Durchmesser von 6,03 mm
10 Kugeln mit einem Durchmesser von 6,05 mm
19 Kugeln mit einem Durchmesser von 6,07 mm
11 Kugeln mit einem Durchmesser von 6,08 mm
6 Kugeln mit einem Durchmesser von 6,10 mm
6 Kugeln mit einem Durchmesser von 6,11 mm
8 Kugeln mit einem Durchmesser von 6,12 mm
10 Kugeln mit einem Durchmesser von 6,14 mm
17 Kugeln mit einem Durchmesser von 6,16 mm
6 Kugeln mit einem Durchmesser von 6,17 mm
7 Kugeln mit einem Durchmesser von 6,18 mm

Es erklärte sich aber eine andere Werkstatt bereit, die Kugeln zu übernehmen. Sie stellte jedoch die Bedingung, die Kugeln müssten in zwei Gruppen gepackt sein, in einem Paket die größeren und in einem anderen die kleineren. Außerdem sollte auf jedem Paket der mittlere Durchmesser der darin enthaltenen Kugeln angegeben werden.

Die Aufgabe ist nun, den Grenzdurchmesser d zu ermitteln, unterhalb dessen die Kugeln in das Paket A gehören, so dass die Kugeln im Paket B einen Durchmesser größer als d haben, sowie die auf den Paketen anzugebenden Zahlen a und b zu finden. Diese drei Zahlen a, b, d müssen so bestimmt werden, dass die Summe der absoluten Fehler möglichst klein ausfällt. Als absoluten Fehler bezeichnen wir hier den Absolutbetrag der Differenz zwischen tatsächlichem Kugeldurchmesser und dem auf dem betreffenden Paket angegebenen mittleren Durchmesser.

65. Die beste Besetzung

Ein Konfektionsbetrieb wird vergrößert. Es sollen 5 zusätzliche Nähmaschinen besetzt werden, wobei jede Maschine für einen anderen Arbeitsgang vorgesehen ist. Es melden sich 7 Näherinnen. Um die Bewerberinnen so auszuwählen, dass insgesamt die höchste Leistung erzielt wird, werden sie gebeten, nacheinander an jeder Maschine jeweils eine Stunde zu arbeiten. Als Maß für das Leistungsvermögen wird die Differenz (in einer bestimmten Einheit) zwischen dem Wert des Erzeugnisses und dem Wert des verwendeten Materials genommen.

Es ergibt sich folgende Tabelle des Leistungsvermögens:

Nähmaschine	I	II	III	IV	V
Näherin A	4	3	5	8	12
Näherin B	10	4	6	8	8
Näherin C	15	1	12	11	11
Näherin D	11	9	5	8	14
Näherin E	1	10	3	9	12
Näherin F	4	7	11	3	2
Näherin G	5	2	2	10	1

Welche Näherin sollte an welcher Maschine arbeiten ?

66. Drei Raucher

Alex, Willi und Karl leben zusammen und stopfen sich ihre Tabakspfeifen aus einer gemeinsamen Tabakdose.

Für deren Inhalt haben sie 504 Mark zusammengelegt. Wenn Karl nicht rauchte, reichte der Vorrat 72 Tage; stellte Willi das Rauchen ein, dann hätten seine Freunde Tabak für 63 Tage; wenn Alex das Pfeiferauchen ließe, dann leerten seine beiden Gefährten die Dose in 56 Tagen. Wie lange reicht der Vorrat für alle drei, und wie sollten sie die Kosten aufeinander verteilen?

67. Bakterienwachstum

Eine bestimmte Kultur von Bakterien braucht eine Stunde, um sich um 1% zu vergrößern. Wie lange müssen wir warten, bis sich die Kultur verdoppelt hat ?

68. Eisenbahn

Ein elektrischer Zug mit einer Masse von 60 Tonnen und einer Leistung von 600 PS fährt, durch eine konstante Kraft beschleunigt, von einer Station ab.

Wieviel Zeit benötigt er, um den ersten Kilometer zurückzulegen ?

Wie groß ist seine Geschwindigkeit beim Passieren der 1-km-Marke? (Die Reibung werde nicht berücksichtigt.)

69. $14 = 15$

Auf einem Treffen von Teilnehmern einer "Mathematik-Olympiade" gab der polnische Mathematiker Prof. J. Mikusinski eine Zerlegung der ganzen Ebene in Siebenecke an, bei der jeweils

drei Siebenecke an jeder Ecke zusammenstoßen. Davon ausgehend wollen wir zeigen, dass $14 = 15$ ist.

Wir bezeichnen mit P den Winkel von 180° . Die Winkelsumme im Siebeneck ist gleich $5P$; die durchschnittliche Größe eines Winkels im Siebeneck ist also gleich $\frac{5P}{7}$. Da die ganze Ebene mit Siebenecken überdeckt ist, betragen die Winkel in diesem Mosaik durchschnittlich $\frac{5}{7}P$. Nun stoßen aber in jeder Ecke drei solche Winkel aneinander, folglich ist die durchschnittliche Größe eines Winkels an jeder Ecke gleich $\frac{2}{3}P$.

Hieraus folgt, dass die durchschnittliche Größe eines Winkels im Mosaik gleich $\frac{2}{3}P$ ist, da ja jeder Winkel zu einer Ecke gehört. Somit ist $\frac{2}{3}P = \frac{5}{7}P$, $\frac{2}{3} = \frac{5}{7}$, $14 = 15$, was "bewiesen" werden sollte. Man finde den Fehler in dieser Überlegung!

70. Färbung einer Landkarte

Abb. C zeigt acht Länder; es seien 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 die Namen dieser Länder. Wie können wir diese Landkarte mit den vier Farben Rot, Blau, Gelb und Grün farbig gestalten, so dass für jedes Paar benachbarter Länder die Färbungen verschieden sind?

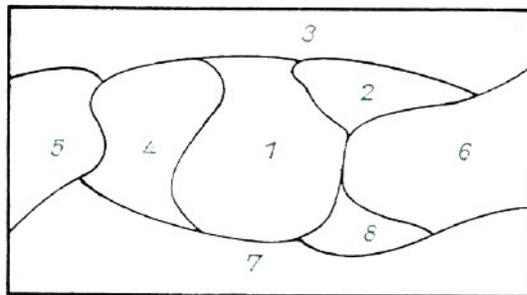


Abbildung C

71. Eine ideale Wippe

Kinder schaukeln gern auf einem Brett, das von einem auf dem Boden liegenden Baumstamm getragen wird. Wenn das linke Ende des Brettes mit dem darauf sitzenden Kind nach oben geht, bewegt sich dessen Partner auf dem rechten Brettende nach unten und umgekehrt. Brett und Baumstamm sind rauh genug, um ein Gleiten auszuschließen; die Bewegung ist eine Rollbewegung.

In den meisten Fällen stellt der Baumstamm einen Kreiszyylinder dar. Ergibt die Bahn des Punktes A bzw. B bei der Wippbewegung eine Gerade? Kann man Geraden erhalten, indem man eine geeignete Unterlage wählt?

72. Sonnenfinsternisse

Warum meinen die meisten Leute, dass totale Sonnenfinsternis seltener sei als totale Mondfinsternis?

(Wir können annehmen, dass sich der Mond stets in der durch die jährliche Umlaufbahn der Erde bestimmten Ebene befindet. Das entspricht annähernd den Tatsachen. Die Sonne liegt ebenfalls in dieser Ebene.)

73. Ein horizontaler Stab

Auf den Zeigefingern unserer ausgestreckten Hände liegt horizontal ein unbiegsamer, langer Stab. Der Stab ist glatt, jedoch ist die Dichte des Materials, aus dem er hergestellt ist, nicht homogen. Es ist möglich, dass der Mittelpunkt des Stabes nicht sein Schwerpunkt ist.

Wir nähern nun unsere Hände einander, wobei wir stets darauf achten, dass der Stab horizontal liegt, bis sich die beiden Handflächen berühren.

Wie ist es zu erklären, dass der Stab nicht herunterfällt?

(Das Experiment gelingt auch dann, wenn man einen Zeigefinger durch einen Nagel in der Wand ersetzt.)

74. Büchse und Schnur

Wir betrachten eine zylindrische Büchse, deren Höhe gleich dem Radius ihrer Grundfläche ist. Die Büchse ist mit einer Schnur umwickelt, die in einem Axialschnitt verläuft, der durch zwei am unteren Rand der Büchse befindliche Kerben geht. Die Schnur ist straff gespannt.

Lässt sich die Schnur abstreifen, ohne dass sie gedehnt oder zerschnitten wird? Befindet sich die Schnur in stabilem oder instabilem Gleichgewicht?

75. Ein Telefonkabel

In einem Gelände werden Erkundungsbohrungen niedergebracht. Zwischen den Bohrtürmen III und V befindet sich ein Berg, so dass von einem Turm der andere nicht zu sehen ist. Die beiden Türme sollen durch eine Telefonleitung verbunden werden.

Ein Vermessungsingenieur erhält den Auftrag, den Ort für den Mast auf dem Berg, von dem aus beide Türme zu sehen sind, so zu bestimmen, dass er auf der Geraden durch die Türme liegt. Er fordert zur Ausführung einen Assistenten und zwei Stöcke an.

Wie kann er damit den Punkt ermitteln?

76. Ohne Rechnung

Mit den Mitteln der Differentialrechnung kann gezeigt werden, dass zur Herstellung von Konservendosen ein Minimum an Weißblech erforderlich ist, wenn ihr Axialschnitt ein Quadrat ist, d.h., wenn der Durchmesser der Grundfläche gleich der Höhe der Konservendose ist.

Unter dieser Voraussetzung können wir ohne jede Rechnung zeigen, dass zylindrische Küchengefäße ein Minimum an Eisenblech erfordern, wenn ihre Höhe gleich der Hälfte des Durchmessers der Grundfläche ist. Wieso ?

77. Die Größe einer Halle

Eine 15 Meter lange Schiene ruht auf zwei hölzernen Rollen, senkrecht zu deren Achsen, die der Wand parallel sind. Die Schiene stößt gegen die Wand, von der die nächste Rolle 5 Meter entfernt liegt.

Nun wird die Schiene gerollt, und zwar so lange, bis diese Rolle das Ende der Schiene erreicht hat. Genau in dem Augenblick stößt das andere Ende der Schiene an die gegenüberliegende Wand.

Wie lang ist die Halle?

78. Eine runde Stadt

Zwei Architekten hatten die Aufgabe, eine Stadt zu entwerfen. Der ältere hatte bereits eine Skizze fertig und zeigte sie seinem jüngeren Kollegen, der damit aber nicht zufrieden war. Die Skizze zeigte ein Quadrat, während der junge Mann sich die zu bauende Stadt als eine Kreisscheibe vorgestellt hatte.

Nach einigen Tagen jedoch hatten die beiden eine Lösung gefunden: Eine Transformation des Quadrats in einen Kreis, und zwar derart, dass jedem Teil des Quadrats ein flächengleicher Teil des Kreises entspricht. Wie ist dies zu erreichen?

1.5 Schnelligkeit und Überlegung

79. Modelleisenbahn

Eine Modelleisenbahn besteht aus einem Zug und einem geschlossenen Schienenkreis, dessen Länge das Fünffache der Zuglänge beträgt. Ein Junge, der mit diesem Zug spielt, stellt entlang des Kreises siebzehn Bauklötzer auf, ohne dabei darauf zu achten, ob diese Häuschen gleichweit voneinander entfernt sind.

Er bemerkt, dass bei jeder beliebigen Anordnung der Bausteine zu einem gewissen Zeitpunkt wenigstens vier von ihnen neben dem Zug stehen. Man gebe dafür eine Erklärung an!

80. Falsche Münzen

Vor uns liegen 27 scheinbar gleiche Münzen. Wir sind jedoch gewarnt werden:

Eine der Münzen ist falsch, sie ist leichter. Uns steht eine Schalenwaage mit zwei gleichen Waagschalen zur Verfügung. Wir sollen die falsche Münze in 3 aufeinanderfolgenden Wägungen herausfinden.

Ist das möglich? Ist die entsprechende Aufgabe für 27 echte und eine leichtere Münze lösbar?

81. Noch einmal falsche Münzen

Wir haben 4 Münzen. Das Gewicht jeder Münze soll 5 g betragen. Wir wissen aber, dass genau eine Münze ein von 5 g verschiedenes Gewicht besitzt. Uns stehen eine gewöhnliche Schalenwaage sowie ein 5-g-Gewicht zur Verfügung.

Wie können wir die falsche Münze mit zwei Wägungen bestimmen und zugleich feststellen, ob sie leichter oder schwerer ist ?

82. Drei Schachspieler

Drei Angehörige eines Schachklubs - Dieter, Erik und Falk - treffen sich jeden Abend in ihrem Klub, ausgenommen an den Wochenenden. Die Rangfolge dieser Schachspieler kann folgendermaßen eingeschätzt werden:

Dieters Spielstärke sinkt auf Grund der Pause am Wochenende. Im ersten Teil der Woche (Mittwoch eingeschlossen) ist sie gleich 12, von Donnerstag an jedoch gleich 17.

Eriks Spielstärke hängt nicht vom Wochentag ab. Er spielt fünf Partien am Tag, wobei seine Spielstärke in den ersten drei Partien gleich 16 ist, diese jedoch wegen der Anstrengungen und der vorgerückten Stunde in den beiden letzten Partien auf 11 fällt.

Falk unterliegt keinen solchen Schwankungen. Seine konstante Spielstärke ist 14.

Die oben angegebenen Zahlen sind folgendermaßen zu verstehen:

Wenn ein Spieler mit der Spielstärke a gegen einen Spieler mit der Spielstärke b spielt, und es ist $a > b$, dann gewinnt der erste Spieler.

Man berechne das durchschnittliche Verhältnis der Siege von Dieter über Erik, von Erik über Falk und von Falk über Dieter, sowie die durchschnittliche Spielstärke eines jeden Spielers.

83. Billard

Die üblichen Billardtische sind rechteckig. Uns interessieren jetzt jedoch solche Billardtische, deren Bande die Form einer glatten und konvexen geschlossenen Kurve K besitzt.

Wir wollen beweisen, dass sich auf K stets drei Punkte X , Y , Z finden lassen, so dass eine entlang XY gestoßene Kugel in Y entlang YZ reflektiert wird, darauf von Z nach X über ZX gelangt und ihren Weg $X - Y - Z - X - Y - Z - \dots$ so lange fortsetzt, bis ihre Energie verbraucht ist.

84. Noch einmal Billard

Wir haben bereits bewiesen, dass es für einen Billardtisch mit einer konvexen Bande ein periodisches Dreieck gibt, (d.h., drei Punkte A, B, C auf dem Rand, so dass $ABCABCABC\dots$ einen möglichen Weg für die Kugel darstellt.

Können wir dieses Ergebnis verallgemeinern? Gibt es periodische Vierecke?

85. Billard ein weiteres Mal

Es sei K der konvexe Rand eines Billardtisches, und es seien A und B zwei Punkte auf dem grünen Tuch. Lässt sich auf K stets ein Punkt C bestimmen, mit dessen Hilfe wir B indirekt treffen können, (d.h. durch eine Kugel, die von A nach C gestoßen wird und von K in C nach B reflektiert wird ?

86. Ein Fußballturnier

Ein Fußballturnier um die Meisterschaft eines Bezirkes ist organisiert worden. Das Ziel des Turniers ist es, den Meister zu ermitteln, alle anderen Platzierungen sind unwesentlich.

Das Organisationskomitee lässt 12 Mannschaften zu, unter der Bedingung, dass die Spiele an den Nachmittagen einer Reihe von Tagen ausgetragen werden. Die Organisatoren sichern Plätze in sechs Städten. Jedes Team darf nicht öfter als einmal am Tage spielen.

Das gewählte Spielsystem geht davon aus, dass ein Sieg von A über B und von B über C für A nicht nur bedeutet, dass diese Mannschaft besser als B ist, sondern auch besser als C .

Dieses Prinzip gilt auch für eine Kette wie $A \rightarrow B, B \rightarrow C, \dots, L \rightarrow M$, wobei deren Länge keine Rolle spielt. Dank dieses Prinzips kann das Organisationskomitee garantieren, dass der Wettbewerb nur vier Tage dauern wird.

Kann das Komitee eine Garantie dafür übernehmen, dass das Turnier höchstens 3 Tage beanspruchen wird? Besteht eine Möglichkeit, den Wettbewerb so zu organisieren, dass während der vier Tage keine Mannschaft mehr als dreimal spielen muss?

87. Ein Motorradrennen

Bei einem Sandbahnrennen gab es ebensoviele Konkurrenten wie Wettfahrten, wobei in jeder Wettfahrt 4 Teilnehmer starteten. Jedes Fahrerpaar fuhr genau einmal.

Ist diese Information zur Ermittlung der Anzahl und Zusammensetzung der Wettfahrten ausreichend?

88. Ein Motorboot

An einer fernen Küste ergab sich folgende Situation: Ein Boot des Küstenschutzes befindet sich auf halbem Wege zwischen einem Schmugglerboot und dem Punkt der Küste, an dem es anlegen will. Der Schmuggler, dessen Boot eine dreimal so hohe Geschwindigkeit wie das Wachboot erreicht, entschließt sich, so zu fahren, dass er unterwegs den Kurs nur einmal um 90° zu ändern braucht.

Welche Fahrtroute muss er wählen, um sein Ziel in möglichst kurzer Zeit zu erreichen, ohne dem Küstenschutz in die Hände zu fallen ?

89. Das Motorboot noch einmal

Ein anderes Mal wird ein Wachboot von dem Schmugglerboot bemerkt, dessen Spitzengeschwindigkeit dreimal so groß ist wie die des Wachbootes. Da das Wachboot seine Lichter gelöscht hat, können die Schmuggler keine andere Information nutzen als die derzeitige Position beider Schiffe sowie das Verhältnis ihrer Geschwindigkeiten.

Wenn das Schmugglerboot eine Begegnung mit dem bewaffneten Wachboot vermeiden will und sich entschließt, sofort zu starten, dann kann es einige Punkte erreichen, ohne auf die möglichen Manöver seines unsichtbaren Gegners achten zu müssen.

Diese Punkte bilden ein gewisses (offenes) Gebiet, und der Rest stellt ein begrenztes Gebiet dar, das von dem Wachboot kontrolliert wird.

Man bestimme das zweite Gebiet!

90. Rencontre

Dieser französische Name wurde dem folgenden Glücksspiel gegeben:

Der Bankhalter (B) nimmt alle 13 Pik-Karten und der Spieler (S) alle 13 Herz-Karten aus einem Bridge-Spiel.

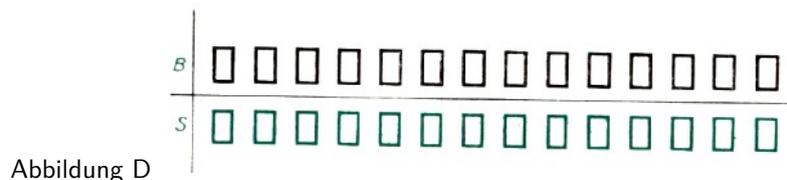


Abbildung D

Beide mischen ihre Karten getrennt und legen sie dann verdeckt in zwei parallelen Reihen (von Bankhalter und Spieler je eine) auf dem Tisch aus (Abb. D).

Der Spieler zahlt einen Groschen Einsatz an den Bankhalter, und darauf decken beide gleichzeitig ihre Karten auf, indem sie diese umdrehen, ohne ihren Platz auf dem Tisch zu verändern. Nun werden die einander gegenüberliegenden Karten verglichen, und B zahlt an S für jedes Paar äquivalenter Karten (z.B. 2 Könige) einen Groschen.

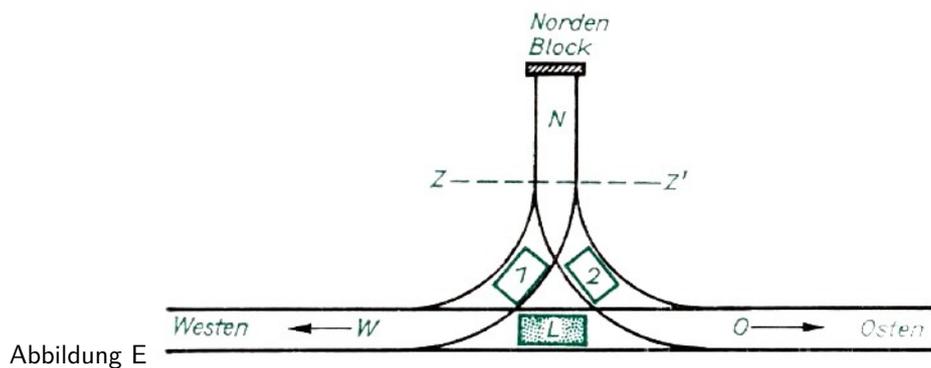
Ist Rencontre ein faires Spiel?

1.6 Die mathematischen Abenteuer des Dr. Abrakadabra

91. Ein Rangierproblem

Dr. Abrakadabra reiste mit dem Brigadier einer Rangierkolonne. Dieser legte ihm folgendes Rangierproblem vor, das er einmal zu bewältigen hatte. Er fertigte davon eine Skizze an (Abb. E). Sie zeigt eine gerade Ost-West-Linie. Die Wagen 1 und 2 stehen auf den kurzen Verbindungsstücken zu dem abgeblockten Rest der stillgelegten Nord-Linie.

Die Lokomotive L hat die Wagen so zu rangieren, dass sie miteinander vertauscht werden: Wagen 1 hat den ursprünglich von Wagen 2 eingenommenen Platz zu besetzen, Wagen 2 den Platz von Wagen 1, und die Lokomotive L hat an ihren Ausgangsplatz zurückzukehren.



Dabei ist unbedingt zu beachten, dass die Lokomotive zu schwer ist, um weiter nördlich als bis zu einer Linie Z - Z' fahren zu können; das gilt jedoch nicht für die Wagen.

Die Lokomotive kann die Wagen natürlich sowohl ziehen als auch schieben.

Dr. Abrakadabra antwortet dem Brigadier mit einer Reihe Skizzen von den Situationen, die auf die Abb. E bei der Lösung des Problems folgen. Wie müssen die Skizzen aussehen ?

92. Eine Münze jenseits der Tischkante

Dr. Abrakadabra demonstrierte einmal, wie man mehrere gleiche Münzen übereinander legen muss, damit die oberste ganz jenseits der Tischkante zu liegen kommt. Man gebe dafür eine Erklärung an!

93. Ein Kuchen für drei

Zwei Brüder, Lutz und Bernd, haben den Weihnachtskuchen bereits in zwei Teile A und B zerlegt. Beide betrachten die Teilung als gerecht. Da erscheint überraschend Dr. Abrakadabra, um am Fest teilzunehmen. Er verbirgt seine Zweifel an der angeblichen Gleichheit $A = B$ nicht und benutzt eine Methode, die jedem $\frac{1}{3}$ des Kuchens sichert und zugleich $A = B$ nicht außer acht lässt. In der Tat erreicht die Methode, ausgehend von der ersten Teilung, eine gerechte Zerlegung in drei gleiche Teile. Worin besteht der Trick?

94. Der verborgene Schatz

Dieses war der erste Fall, in dem Sherlock Holmes von Dr. Abrakadabra unterstützt wurde. Die gesuchte goldene Kassette mit den Diamanten war in einem der vielen alten Brunnen des Dorfes verborgen worden.

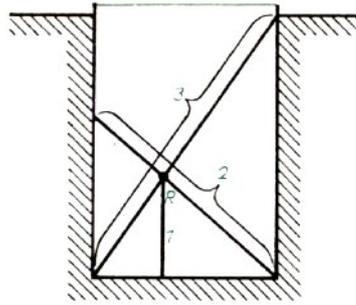


Abbildung F

Watson hatte die Skizze gefunden (Abb. F), die Sherlock Holmes als den Axialschnitt des gesuchten Brunnenes ansah. Offenbar verwendeten die Banditen einen langen Stock, der die obere Kante des Brunnenes mit dem gegenüberliegenden Punkt am Grunde des Brunnenes verbindet.

Die Zahl 3 in der Skizze besagt, dass die Länge der Diagonale drei Yards (1 Yard : 0,9144 in) beträgt. Ein Ring R hält den langen Stock mit dem anderen schräg gestellten Stab zusammen, der zwei Yards lang ist und der von dem Punkt am Grunde des Brunnenes, der zum ersten diametral liegt, zur gegenüberliegenden Wand führt. Die Kasette wurde auf den Grund des Brunnenes mit Hilfe eines in R befestigten Seiles von einem Yard Länge herabgelassen.

Nach längerem Schweigen bemerkte Sherlock Holmes, dass die Banditen sehr genau gewesen seien, was die Maße anbelangt, dass sie ihre Zeichnung aber ohne die notwendige Sorgfalt angefertigt hätten. Was er genau kennen möchte, sei der Durchmesser des Brunnenes ...

"Wenn mir Dr. Abrakadabra den Durchmesser auf ein Inch (1 Inch = 0,0254 m) genau sagen kann, dann haben wir den uns interessierenden Brunnen in einer Stunde gefunden!"

Können wir Sherlock Holmes helfen ?

95. Ein vergesslicher Lehrer

Ein Lehrer befragt seine Schüler, um die wechselseitigen Beziehungen ihrer Lieblingsbeschäftigungen festzustellen. Er lässt die Schachamateure und die Konzertfreunde aufstehen und ihre Hände erheben.

Die erhobene linke Hand deutet an, dass der Schüler lieber ins Konzert geht, und die erhobene rechte Hand besagt, dass er das Schachspiel bevorzugt. Wie der Lehrer feststellte, hoben 30% dieser Jungen beide Hände. Das gleiche Vorgehen, bezogen auf das Schachspiel und Radfahren, ergab, dass 35% der aufgestandenen Jungen beide Hände erhoben hielten.

Im dritten Versuch wurden Konzertbesuch und Radfahren verglichen, und es zeigte sich, dass 40% der Stehenden beide Hände erhoben. Der Lehrer hatte sich in keinem der drei Fälle notiert, wie viele Schüler aufgestanden waren.

Etwas später fiel ihm auf, dass er überhaupt nicht danach gefragt hatte, ob ein Schüler allen drei Hobbys nachginge. Da versicherte ihm Dr. Abrakadabra, dass es unter den Schülern unseres vergesslichen Lehrers solche Jungen gäbe. Wie kam er darauf?

96. Ein magisches Buch

Dr. Abrakadabra besitzt eine Bibliothek, die zum größten Teil aus Büchern besteht, die der Zauberkunst gewidmet sind. Eines dieser Bücher schätzt er besonders, und er hat es nur ein einziges Mal einem seiner Schüler gezeigt.

"Öffne dieses Buch an irgendeiner Stelle und wähle eine beliebige Zahl daraus", befiehlt der Meister.

Der Schüler liest: 4783.

"Nun blättere so viele Seiten weiter, wie Du willst, und nenne mir eine beliebige Zahl."

Der Schüler liest vor: 1955.

"Sage mir jetzt zwei beliebige vierstellige Zahlen."

Der Schüler wählt 2079 und 7081.

"Jetzt lies, beginnend bei unserer ersten Zahl (d.h. bei 4783), nacheinander alle Zahlen vor, bis wir bei unserer letzten Zahl angelangt sind (d.h. bei 1955), und lasse dabei alle zwischen 2079 und 7081 liegenden Zahlen aus."

Der gehorsame Schüler erfüllte diese mühselige Aufgabe; er brachte die Geduld auf, fast 2000 Zahlen vorzulesen, von denen etwa tausend wegzulassen waren. Hierauf befahl ihm der Meister, die Differenzen zwischen den aufeinander folgenden verbliebenen Zahlen zu bestimmen.

Es zeigte sich, dass nur drei Differenzen auftreten, die wieder und wieder vorkamen. Kann der Leser - an einem kleinen Modell vielleicht (Dr. Abrakadabra hat 10000 Zahlen in seinem Buch) - das Geheimnis des magischen Buches erklären ?

97. Geographie gegen Diplomatie

Dr. Abrakadabra diskutierte neulich mit einem Diplomaten über die Aufteilung unseres Globus in fünf Teile. Sein Gesprächspartner schlug vor, 5 Orte auszuwählen, in jedem Teil einen. Sie sollten der Sitz von 5 Bevollmächtigten der UNO sein, die in Notfällen sofort einzuschreiten hätten.

Er machte die Bedingung, dass keine Entfernung zwischen den gewählten Orten 10000 km übersteigen dürfte. Warum konnte Dr. Abrakadabra diesem Vorschlag nicht zustimmen?

98. Ein Jubiläum

Dr. Abrakadabra feierte die Aufnahme des hundertsten Mitgliedslandes in die UNO durch die Übersendung eines Globus an den entsprechenden Vertreter. Auf diesem Globus waren hundert Hauptstädte durch kleine Edelsteine gekennzeichnet.

Ein goldenes Band um den Globus zerlegte ihn in zwei Halbkugeln, auf denen jeweils 50 Hauptstädte lagen. Ist eine derartige Zerlegung bei beliebiger Verteilung von 100 Punkten auf einer Kugel möglich ?

99. Der Obstgarten von Dr. Abrakadabra

Dr. Abrakadabra hatte sich in der Nähe seines Hauses einen Obstgarten angelegt. Stolz erzählte er allen, dass er zehn Reihen Obstbäume mit jeweils drei Bäumen darin besäße.

Seine Freunde konnten bei ihm jedoch nur 9 Bäume zählen. Folgt daraus, dass es Dr. Abrakadabra mit der Wahrheit nicht allzu genau nimmt ?

100. Drei Schiffe in einem Manöver

Dr. Abrakadabra nahm an einem Manöver der Marine teil. Plötzlich erhielten drei Schiffe, unter anderem das, auf dem sich Dr. Abrakadabra befand, vom Admiral den Befehl, sich zu sammeln.

Jeder Kapitän kannte die Positionen A, B, C der beteiligten Schiffe und ihre jeweiligen Geschwindigkeiten; außerdem standen sie untereinander über Funk in Verbindung.

Dr. Abrakadabra wurde gefragt, wie sich die Kapitäne verhalten sollten, um den Befehl auszuführen. Was antwortete er ?

2 Lösungen

2.1 Von Zahlen, Gleichungen und Ungleichungen

1. Der Beweis wird zunächst direkt geführt. Nach Voraussetzung sind p und q ganze Zahlen, $q \neq 0$. Für $\frac{p}{q} \leq 0$ ist die linke Seite der Ungleichung

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{3q^2} \quad (1)$$

mindestens gleich $\sqrt{2}$, also größer als $\frac{1}{3}$. Aus $\frac{1}{3} \geq \frac{1}{3q^2}$ folgt die Ungleichung (1) für diesen Spezialfall. Für $q = 1$ hat man

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| = |\sqrt{2} - p| \geq |\sqrt{2} - 1| > \frac{1}{3} = \frac{1}{3q^2}$$

so dass (1) auch in diesem Falle gilt. Nun seien $p < 0$, $q < 0$. Wir setzen $p' = -p > 0$, $q' = -q > 0$. Zum Beweis von (1) in diesem Falle benutzen wir die Tatsache, dass (1) zu

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p'}{q'} \right| > \frac{1}{3q'^2}$$

für $p' > 0$, $q' > 0$ äquivalent ist. Diese Ungleichung ist zusammen mit (1) für $p > 0$, $q > 0$ zu beweisen. Die obigen Betrachtungen erlauben es, uns auf den Fall $p \geq 1$, $q \geq 2$ zu beschränken. Da $\sqrt{2}$ irrational ist, sind die beiden Ausdrücke $\frac{p}{q} + \sqrt{2}$ und $\frac{p}{q} - \sqrt{2}$ von Null verschieden; folglich ist auch ihr Produkt $\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 2$ ungleich Null, woraus sich die Ungleichung $|2q^2 - p^2| \geq 1$ ergibt. Wir schreiben nun

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| = \frac{\left| 2 - \left(\frac{p}{q}\right)^2 \right|}{\sqrt{2} + \frac{p}{q}} = \frac{2q^2 - p^2}{q^2\sqrt{2} + pq} \geq \frac{1}{q^2\left(\sqrt{2} + \frac{p}{q}\right)} \quad (2)$$

Die Ungleichung (2) gilt für den Fall $p \geq 1$, $q \geq 2$. Um unseren Beweis abzuschließen, müssen wir zeigen, dass das letzte Glied in (2) größer als $\frac{1}{3q^2}$ ist. Dazu beweisen wir die Ungleichung

$$\sqrt{2} + \frac{p}{q} < 3 \quad (3)$$

Die Irrationalität von $\sqrt{2}$ schließt das Gleichheitszeichen in (3) aus. Wir nehmen nun an, dass (3) nicht gilt; dann ist

$$\sqrt{2} + \frac{p}{q} > 3 \quad (3')$$

In diesem Falle ist $\frac{p}{q} > 1,58$ und

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| > 1,58 - \sqrt{2} > 0,16 > \frac{1}{3q^2} \quad \text{für } q \geq 2 \quad (4)$$

Damit sind wir zu der Alternative gelangt: Wenn (3), dann (1), wenn aber (3'), dann (4). Die Bedingung $q \geq 2$ in (4) ist ohne Bedeutung, da (1) für $q = 1$ bereits als gültig gezeigt werden ist. Also gilt (1) ohne Ausnahme.

Dabei verstehen wir unter "Alternative" eine logische Operation: Eine Alternative zweier Aussagen ist genau dann wahr, wenn wenigstens eine Aussage wahr ist; wenn beide Aussagen falsch sind, dann ist auch die Alternative falsch; ihre Wahrheitstafel ist

v	W	F
W	W	W
F	W	F

2. Den Beweis führen wir ähnlich wie bei der Aufgabe 1: Es sei p eine ganze, q eine natürliche Zahl $\neq 0$. Wir haben zu beweisen, dass die Ungleichung

$$\left| \sqrt{3} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{(2 + \sqrt{3})q^2} \quad (1)$$

gilt. Der Ausdruck $3q^2 - p^2$ ist niemals gleich Null; anderenfalls wäre $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, was der Irrationalität von $\sqrt{3}$ widerspricht. Somit haben wir

$$\left| \sqrt{3} - \frac{p}{q} \right| = \frac{|3q^2 - p^2|}{\left| \sqrt{3} + \frac{p}{q} \right| q^2} \geq \frac{1}{\left| \sqrt{3} + \frac{p}{q} \right| q^2} \quad (2)$$

Wir wollen jetzt die drei einzig möglichen Fälle unterscheiden:

$$\frac{p}{q} < 2 \quad ; \quad \frac{p}{q} > 2 \quad ; \quad \frac{p}{q} = 2$$

Für $\frac{p}{q} < 2$ ergibt (2)

$$\left| \sqrt{3} - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{(\sqrt{3} + 2)q^2}$$

Für $\frac{p}{q} > 2$ erhalten wir

$$\left| \sqrt{3} - \frac{p}{q} \right| = \frac{p}{q} - \sqrt{3} > 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

d.h., für jedes q gilt

$$\left| \sqrt{3} - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{(2 + \sqrt{3})q^2}$$

Für $\frac{p}{q} = 2$ ist

$$\left| \sqrt{3} - \frac{p}{q} \right| = 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

und damit für $q = 1, p = 2$

$$\left| \sqrt{3} - \frac{p}{q} \right| = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})q^2}$$

Im ersten und im zweiten Falle gilt die Ungleichung (1) sogar dann, wenn die echte Ungleichheit gefordert wird. Im dritten Fall werden beide Seiten von (1) für $q = 1, p = 2$ einander gleich, für $p \neq 2$ gilt jedoch die echte Ungleichung mit dem Symbol $>$.

3. a.) Der Wurzelausdruck in der Aufgabenstellung ergibt durch Quadrieren unmittelbar die Beziehung $c_{n+1}^2 = 1 + c_n$. Sei $c_n = \sqrt{3}$, dann erhalten wir aus dieser Beziehung $c_{n+1}^2 = 1 + \sqrt{3} < 3$, so dass $c_{n+1} < \sqrt{3}$ ist.

Nun ist aber $c_1 = 1 < \sqrt{3}$, und durch vollständige Induktion erhalten wir für alle n :

Es ist $c_n < \sqrt{3}$. Die Zahl $L = \sqrt{3}$ ist also vom gesuchten Typ.

Die obige Formel, durch die c_n bestimmt ist, führt auf die Ungleichung $c_2 > c_1$; da $c_2^2 = 1 + c_1$ ist und $c_3^2 = 1 + c_2$, folgt:

Es ist $c_3^2 - c_2^2 = c_2 - c_1$, d.h. $c_3 > c_2$.

Wir wenden abermals vollständige Induktion an und erhalten die allgemeine Ungleichung $c_{n+1} > c_n$ für alle n . Wie wir sehen, ist die Folge c_n wachsend und beschränkt, also konvergent.

Es sei x der Grenzwert der Folge c_n ; die Beziehung $c_{n+1}^2 = 1 + c_n$ ergibt $x^2 = 1 + x$, d.h. $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) Aus der Definition von d_n ergibt sich

$$\begin{aligned} d_n^2 &= 1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{n}}}} = 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{4}{16} + \dots}}} \\ &< 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1}}} = 1 + \sqrt{2} \cdot x \end{aligned}$$

Nun ist aber $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (s. obige Lösung). Also finden wir

$$d_n^2 < 1 + \sqrt{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{10}) \approx 1 + 2,29 = 3,29 < 4$$

also $d_n < 2$.

c) Zunächst berechnen wir näherungsweise

$$\sqrt{1 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{9 + \sqrt{10}}}} = 1,7579 < w \quad (1)$$

danach schätzen wir für $n > 2$ den Wert des Ausdrucks ab:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{n + \sqrt{(n+1) + \sqrt{(n+2) + \dots}}} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{\frac{n+1}{n^2} + \sqrt{\frac{n+2}{n^4} + \dots}}} \\ &< \sqrt{n} \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}} \end{aligned} \quad (2)$$

Bezeichnen wir den unendlichen Ausdruck

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

mit x , so können wir $x^2 - 1 = x$ schreiben; folglich ist $x = 1,61803$. Dieses Resultat ergibt mit (2)

$$w = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{n-1 + v}}}$$

für $n = 11$ erhalten wir

$$w = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{10 + v}}}$$

demnach ist $v < \sqrt{n} \cdot 1,61803 = \sqrt{11} \cdot 1,61803 = 5,342024$, woraus

$$w < \sqrt{1 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{9 + \sqrt{15,342024}}}} = 1,7586 \quad (3)$$

folgt.

Die Genauigkeit der verwendeten vierstelligen Tafeln ist 10^{-4} . Dies erlaubt, aus (1) und (3) die Ungleichungen $1,7578 < w < 1,7587$ abzulesen, und das ergibt den Wert von w mit der geforderten Genauigkeit.

Bei der Behandlung dieser Aufgabe wurde die Methode der vollständigen Induktion und der Satz von Weierstraß über die Konvergenz monoton wachsender und beschränkter Folgen benutzt. Daher seien sie kurz angeführt.

Das Prinzip der vollständigen Induktion lautet: Die Aussage "für alle natürlichen Zahlen n gilt $H(n)$ " ist wahr, wenn folgendes gilt:

1. $H(n)$ ist richtig für $n = 0$
2. Aus der Gültigkeit von $H(n)$ für $n = k$ folgt stets die Gültigkeit für $n = k + 1$. Dabei ist k eine beliebige natürliche Zahl.

Der Satz von Weierstraß über das Konvergenzverhalten monotoner Folgen sagt aus. Jede nach $\left\{ \begin{array}{l} \text{oben} \\ \text{unten} \end{array} \right\}$ beschränkte monoton $\left\{ \begin{array}{l} \text{wachsende} \\ \text{fallende} \end{array} \right\}$ Zahlenfolge (a_n) konvergiert gegen ihre $\left\{ \begin{array}{l} \text{obere} \\ \text{untere} \end{array} \right\}$ Grenze. Dabei heißt eine Zahlenfolge (a_n) definitionsgemäß monoton $\left\{ \begin{array}{l} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$ wenn für jedes n gilt $\left\{ \begin{array}{l} a_n \leq a_{n+1} \\ a_n \geq a_{n+1} \end{array} \right\}$.

4. Die Aufgabe wird durch Diskussion in einem kartesischen Koordinatensystem gelöst:
 - I. Im ersten Quadranten des Koordinatensystems ($x \geq 0, y \geq 0$) gewinnt das vorliegende Gleichungspaar die Gestalt

$$x + y = a \quad ; \quad x + y = b$$

Voraussetzung für die Lösbarkeit dieser Gleichungen ist $a = b \geq 0$; dann stellt jedes Paar x und y , das den Bedingungen $x \geq 0, y \geq 0$ und $y = a - x$ genügt, eine Lösung des Problems dar.

- II. Im zweiten Quadranten ($x \leq 0; y \geq 0$) geht das Gleichungspaar über in

$$-x + y = a \quad ; \quad x + y = b$$

Seine Lösbarkeit erfordert die Gültigkeit der Ungleichungen $a + b \geq 0$ und $a \geq b$;

$$x = \frac{b - a}{2} \quad ; \quad y = \frac{a + b}{2}$$

ist die gesuchte Lösung.

- III. Im dritten Quadranten ($x \leq 0, y \leq 0$) heißt das Gleichungspaar

$$-x + y = a \quad ; \quad x - y = b$$

Für die Lösbarkeit ist in diesem Falle $a + b = 0$ eine notwendige Bedingung; jedes Paar x, y , das den Bedingungen $x \leq 0; y \leq 0$ und $y = a + x$ genügt, ist dann eine Lösung des Problems.

- IV. Im vierten Quadranten ($x \geq 0, y \leq 0$) finden wir für das Gleichungspaar

$$x + y = a \quad ; \quad x - y = b$$

Hier sind $a + b \geq 0$ und $a \leq b$ notwendige Bedingungen ; die Lösung ist

$$x = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad y = \frac{a-b}{2}$$

5. Die lineare Unabhängigkeit, die aus der Bewegung des Punktes resultiert, schließt den Fall $u = 0, v = 0, w = 0$ aus. Auf Grund dessen wollen wir $u \neq 0$ voraussetzen.

Die Projektion des Punktes $M(t)$ auf die x -Achse läuft auf der x -Achse hin und her; ihre absolute Geschwindigkeit ist $|u|$. Wenn τ die Zeit bezeichnet, die M zur Rückkehr in seine Ausgangslage $M(0)$ benötigt, dann wird seine Projektion M , auf die zur x -Achse parallele Kante gleichfalls nach der Zeit τ in ihre Ausgangslage $M_x(0)$ gelangt sein.

Die Länge des von der Projektion M_x in der Zeit τ insgesamt durchlaufenen Weges ist $|u|\tau$. Dieser Weg besteht aus einer geraden Anzahl k von Strecken d ; mit d bezeichnen wir die Kantenlänge. Somit ist $|u|\tau = kd$. Analog finden wir $|v|\tau = ld$ und $|w|\tau = md$; diese Beziehungen ergeben sich aus der Annahme, dass M in seine Ausgangslage zurückkehrt, d.h. $M(0) = M(\tau), \tau > 0$.

Die geraden Zahlen l, m können jedoch Null sein, was für die Zahl k wegen $\tau > 0, u \neq 0$ ausgeschlossen ist. Damit wird

$$l|u|\tau - k|v|\tau = lkd - kld = 0$$

und wegen $\tau > 0$ ergibt sich $l|u| - k|v| = 0$. Wir erhalten also

$$l \cdot |u| - k \cdot |v| + 0 \cdot w = 0 \tag{1}$$

Es ist $|u| = +u$ oder $|u| = -u, |v| = +v$ oder $|v| = -v$; die Vorzeichen sind durch die Anfangsgeschwindigkeit eindeutig bestimmt. Auf Grund dessen liefert (1) das Ergebnis $pu + qv + rw = 0$, wobei p, q, r ganze Zahlen sind und $q = k \neq 0$ gilt. Damit ist gezeigt, dass das Tripel u, v, w unter der Annahme, dass der Punkt M in seine Ausgangslage zurückkehrt, nicht linear unabhängig sein kann.

6. Die Gleichung $a^b = b^a$ ist äquivalent zu $b \cdot \ln a = a \cdot \ln b$, wobei \ln den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Wir haben folglich die Gleichung

$$\frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$$

zu untersuchen. Dazu betrachten wir die Funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ für positive x -Werte. Bekanntlich gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \quad ; \quad f(1) = 0 \tag{2}$$

Die Ableitung $f'(x)$ existiert für $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{-\ln x + 1}{x^2} \tag{3}$$

Wie (3) zeigt, ist $f'(x)$ für $x = e$ Null, für $0 < x < e$ positiv und für $e < x < \infty$ negativ. Wählen wir x als Abszisse und y als Ordinate, so können wir $y = f(x)$ als Gleichung einer Kurve ansehen.

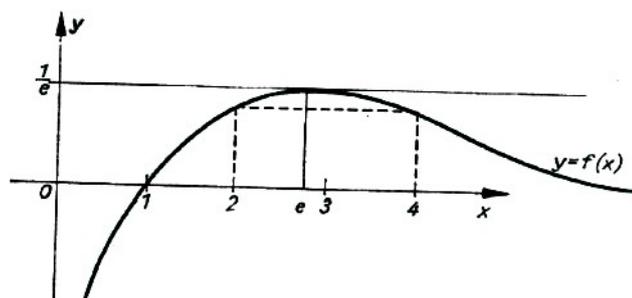


Abb. 1

Für wachsende positive x -Werte nimmt $f(x)$ zu, bis x den Wert e erreicht ; $f(e) = \frac{1}{e}$ stellt das Maximum von $f(x)$ dar, denn es ist $f'(e) = 0$; ferner ist $f' > 0$ für $x < e$, $f' < 0$ für $x > e$.

Hieraus folgt, dass die Gleichung $f(a) = f(b)$ für $a < b$ nur unter der Bedingung $1 < a < e < b$ möglich ist. Abb. 1 zeigt, dass es zu einem gegebenen Wert a genau einen Wert b gibt, der die Gleichung (1) erfüllt.

Da a nur ganzzahlige Werte annehmen sollte und im Intervall $(1, e)$ nur eine ganze Zahl, nämlich 2, liegt, gibt es tatsächlich nur die Lösung $2^4 = 4^2$.

1 7. 1) $1^1 = 1$, 2) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, 3) $2^{\log_2 3} = 3$, 4) $(\sqrt{2})^2 = 2$, 5) $2^{\frac{1}{2} \log_2 3} = \sqrt{3}$, 6) $\sqrt{2}^1 = \sqrt{2}$, 7) $(\sqrt{2})^{2 \log_2 3} = 3$, 8) $(\sqrt{2})^{\log_2 3} = 3$.

(Man beachte $a^{\log_a x} = x$ und die Logarithmengesetze !)

8. Man stelle die Gleichung um:

$$y^8 + x^4 + 10y^2 + x^2 + 6x^2y^4 - 4xy^6 - 4x^3y^2 - 6xy - 6y + 0 = 0$$

Additive Zerlegungen gewisser Terme und anschließend weitere Umstellungen führen auf

$$(y^2 - 6y + 9) + (x^6 - 6xy + 9y^2) + (y^8 - 4xy^6 + 6x^2y^4 - 4x^3y^2 + x^4) = 0$$

Hieraus folgt unter Beachtung des Pascalschen Dreiecke (Binomischer Lehrsatz) die binomiale Darstellung

$$(y - 3)^2 + (3y - x)^2 + (x - y^2)^4 = 0$$

Damit findet man $y = 3$, $x = y^2$ und $x = 3y$. Durch Einsetzen ergibt sich $x = 9$. Somit sind $x = 9$ und $y = 3$ die gesuchten reellen Lösungen dieser Gleichung.

9. Wir bringen die linke Seite der vorliegenden Ungleichung auf einen gemeinsamen Nenner, multiplizieren die im Zähler stehenden Produkte aus und stellen das Ergebnis als Produkt dar.

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} &= \\ &= \frac{(a-b)(a+c)(b+c) + (b-c)(a+b)(c+a) + (c-a)(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{(a-b)(ab+ac+bc+c^2) + (b-c)(ac+a^2+bc+ab) + (c-a)(ab+ac+b^2+bc)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \end{aligned}$$

Nach Ausklammern und Umstellen erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{a^2b - a^2c + ac^2 - bc^2 - ab^2 + cb^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} &= \frac{ab(a-b) + c^2(a-b) - c(a+b(a-b))}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{(a-b)(ab+cb+cc-ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(a-b)((b(a-c) + c(c-a))}{(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} > 0 \end{aligned}$$

Auf Grund der Voraussetzung $a > b > c > 0$ ist der erhaltene Ausdruck stets positiv, wie es gefordert war.

10. Die Reihenfolge der Zahlen a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ist in der vorliegenden Aufgabe unwesentlich; wir können also annehmen, dass diese Zahlen mit dem Index i wachsen: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$.

Wir definieren jetzt die folgenden b -Werte:

$$b_1 = a_1 - s; \quad b_2 = a_2 - s; \quad \dots; \quad b_n = a_n - s \quad (D)$$

Für sie ergibt sich unmittelbar:

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = 0 \quad , \quad b_1 \leq \underline{2} \leq \dots \leq b_n \quad (1)$$

Auf Grund von (1) gibt es eine ganze Zahl k , so dass

$$b_i \leq 0 \quad \text{für} \quad i \leq k \quad ; \quad b_i > 0 \quad \text{für} \quad i > k \quad (2)$$

Aus (1) und (2) erhalten wir

$$-(b_1 + \dots + b_k) = b_{k+1} + \dots + b_n = c_n \quad (3)$$

und somit

$$c = \frac{1}{2}(|b_1| + \dots + |b_n|) \quad (4)$$

Die offensichtlich geltenden Ungleichungen

$$\begin{aligned} |b_1|^2 + |b_2|^2 + \dots + |b_k|^2 &\leq (|b_1| + |b_2| + \dots + |b_k|)^2 = c^2 \\ |b_{k+1}|^2 + |b_{k+2}|^2 + \dots + |b_n|^2 &\leq (|b_{k+1}| + |b_{k+2}| + \dots + |b_n|)^2 = c^2 \end{aligned}$$

ergeben mit (3) und (4)

$$|b_1|^2 + |b_2|^2 + \dots + |b_n|^2 \leq 2c^2 = \frac{1}{2}(|b_1| + |b_2| + \dots + |b_n|)^2 \quad (5)$$

Die Ungleichung (5) zusammen mit der Definition (D) für die b -Werte ergibt die Ungleichung, die zu beweisen war.

11. Die quadratische Gleichung $1 - z = z^2$ hat nur die eine positive Wurzel $z = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Daher genügt diese Lösung z den Gleichungen

$$1 - z = z^2, \quad z - z^2 = z^3, \quad \dots, \quad z^n - z^{n+1} = z^{n+2}, \quad \dots$$

Gibt man den Elementen a_n die Werte z^n ($n = 0, 1, 2, \dots$), so erhält man die gewünschte Folge. Wegen $0 < z < 1$ ist der Grenzwert dieser geometrischen Folge Null.

Es sei nun b_0, b_1, \dots eine andere Folge mit den gewünschten Eigenschaften. Dann ist also $b_0 = 1$ und $b_n - b_{n+1} = b_{n+2}$ für $n = 0, 1, 2, \dots$. Falls diese Folge nicht mit der ersten übereinstimmt, gibt es ein von z^k verschiedenes b_k , also $b_k = z^k + d$, $d \neq 0$.

Es sei k der erste Index, für den das der Fall ist. Wegen $a_0 = 1 = z^0$ ist $k \geq 1$, so dass es ein b_{k-1} mit $b_{k-1} = z^{k-1}$ gibt. Also ist

$$\begin{aligned} b_k &= z^k + d, \\ b_{k+1} &= b_{k-1} - b_k = z^{k-1} - (z^k + d) = z^{k-1} - z^k - d = z^{k+1} + d, \\ b_{k+2} &= b_k - b_{k+1} = z^k + d - (z^{k+1} - d) = z^k - z^{k+1} + 2d = z^{k+2} + 2d, \\ b_{k+3} &= b_{k+1} - b_{k+2} = z^{k+1} - d - (z^{k+2} - 2d) = z^{k+3} - 3d, \\ b_{k+4} &= z^{k+3} + 5d \\ b_{k+5} &= z^{k+4} - 8d \\ &\dots \\ b_{k+p} &= z^{k+p} + (-1)^p C_p d \end{aligned}$$

Weil z^{k+p} für $p \rightarrow \infty$ gegen Null strebt (Nullfolge), bestimmt von einem hinreichend großen p an der Summand $(-1)^p C_p d$ das Vorzeichen von b_{k+p} , da der absolute Betrag von $C_p d$ mindestens gleich d ist.

Die ganzen Koeffizienten $(-1)^p C_p$, sind abwechselnd positiv und negativ, so dass in der Folge $\{b_n\}$ ein negatives Element auftreten muss. Das widerspricht aber obigen Bedingungen.

Die Annahme, die Folgen seien verschieden, führt also zu einem Widerspruch. Daher ist die Folge $\{z^n\}$ die einzige Lösung.

12. Die stetige Funktion $f(x)$ ordnet jedem x aus dem Intervall $[0, 1]$ einen von x verschiedenen Punkt $f(x)$ in diesem Intervall zu.

Daher gilt $f(0) \neq 0$, $f(1) \neq 1$. Wenn $g(x)$ die Differenz $f(x) - x$ bezeichnet, dann ist auch $g(x)$ eine stetige Funktion, und darüber hinaus gilt $g(0) > 0$, $g(1) < 0$.

Nun wissen wir aber, dass nach dem Zwischenwertsatz eine auf dem Intervall $[0, 1]$ stetige Funktion, die in 0 einen positiven und in 1 einen negativen Wert annimmt, für einen gewissen Punkt c aus dem Intervall $[0, 1]$ gleich Null sein muss: $g(c) = 0$.

Dafür können wir jedoch $f(c) = c$ schreiben, was dem ersten Teil unserer Überlegungen widerspricht. Dieser Widerspruch zeigt, dass es keine solche Funktion $f(x)$ gibt, wie sie in der Aufgabenstellung beschrieben werden ist.

2.2 Punkte, Geraden, Polygone, Kreise und Kurven

13. Zu jeder beliebigen Geraden in der Ebene gibt es eine Parallele, die den betrachteten Flächeninhalt R halbiert. Wir können folglich drei Geraden ziehen, von denen jede diese Eigenschaft besitzt.

Ihre Richtungen können dabei so gewählt werden, dass die Winkel zwischen den Geraden AA' und BB' , zwischen BB' und CC' sowie zwischen CC' und AA' einander gleich sind. Jeder Winkel beträgt demnach 120° , und die drei Geraden erzeugen ein gleichseitiges Dreieck XYZ (Abb. 2a).

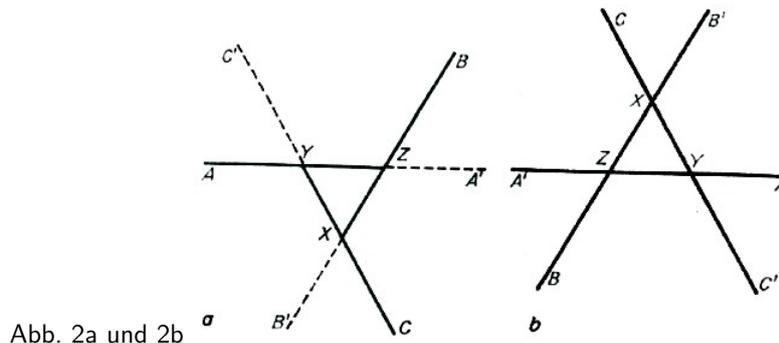


Abb. 2a und 2b

Offenbar ist die ganze Figur (im Falle eines einfach zusammenhängenden Gebietes, das von einer geschlossenen Kurve berandet wird) durch die zuerst gewählte Richtung eindeutig bestimmt. Wir wollen jetzt AA' als Uhrzeiger ansehen und sich drehen lassen. Bei dieser Bewegung muss die Figur ständig die beiden Bedingungen erfüllen, dass erstens R halbiert wird und zweitens die Winkel zwischen AA' und BB' , BB' und CC' , CC' und AA' gleich 120° bleiben. Das kleine Dreieck XYZ wird sich mitdrehen und stets gleichseitig bleiben.

Wir wollen annehmen, dass XYZ dabei nie auf einen einzigen Punkt Q zusammenschrumpft. Nach einer Drehung um 180° geht Abb. 2a in Abb. 2b über. Die Gerade AA' hat sich um 180° gedreht, fällt jedoch wieder mit der Ausgangsgeraden AA' zusammen, weil auch sie R halbiert; dasselbe gilt für BB' und CC' . Daraus folgt die Identität der Abbildungen 2a und 2b.

Die Drehung um 180° hat aber das Dreieck XYZ verändert; im Ergebnis ist die Ecke X , die anfangs unterhalb YZ lag (Abb. 2a), über die Seite XZ gelangt (Abb. 2b). Dieser Widerspruch zur Identität der Abbildungen 2a und 2b leitet sich aus der Annahme ab, dass das Dreieck nie in einen Punkt entartet. Wenn das eintritt, ist es unmöglich, die drei Punkte während der Drehung zu unterscheiden. Wir müssen also zulassen, dass X, Y, Z in einer gewissen Phase der Drehung zusammenfallen. Diese Übereinstimmung $X = Y = Z$ ergibt den Punkt, dessen Existenz nachzuweisen war.

14. Es seien K, L, M die Mittelpunkte der Seiten BC, CA, AB des gegebenen Dreiecks T . Wir haben zu zeigen, dass sich die Geraden AK, BL, CM in einem Punkt S schneiden und dass die so festgelegten Strecken SA, SB, SC die gesuchte Zerlegung des Dreiecks ergeben (Abb. 3).

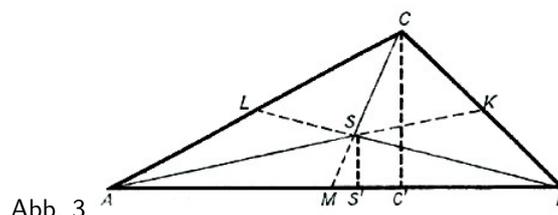


Abb. 3

Wir wollen uns in A, B, C drei gleiche Gewichte vorstellen. Der Punkt Q sei der Schwerpunkt dieses Systems. Um Q zu bestimmen, legen wir die Gewichte von B und C nach K . Da K Schwerpunkt des zuvor aus den Gewichten in B und C gebildeten Systems ist, können wir Q finden, indem wir den Schwerpunkt des neuen Systems feststellen, das aus zwei Masseneinheiten in K und einer Masseneinheit in A besteht. Bekanntlich ist der Schwerpunkt eines solchen Systems ein Punkt, der auf AK liegt und dessen Abstand von A doppelt so groß ist wie der Abstand von K .

Dieser Punkt ist folglich der gesuchte Schwerpunkt Q . Offenbar teilt Q die Strecke BL im Verhältnis 2:1, (d.h., es ist $BQ : QL = 2$, und darüber hinaus gilt auch $CQ : QM = 2$).

Wie man unmittelbar feststellt, ist der Schwerpunkt Q gleich dem Schnittpunkt S von AK, BL, CM . Wir betrachten jetzt die rechtwinkligen ähnlichen Dreiecke $CC'M$ und $SS'M$. Auf Grund von $CS : SM = 2$ ergibt sich $CC' : SS' = 2$ für die Höhen der Dreiecke ABC und ABS .

Somit ist bewiesen, dass der Flächeninhalt von ABS gleich $\frac{1}{3}$ des Flächeninhalts von ABC ist. Dasselbe gilt für ACS und CSB . Damit ist die Gleichheit der Flächeninhalte von ABS, ACS und CSB gezeigt.

15. Es seien a, b, c die Seiten des Dreiecks ABC und T dessen Flächeninhalt. Wir nehmen an, es sei $a \leq b \leq c < 1$ und zeigen, dass $T < \frac{\sqrt{3}}{4}$ ist. Der Fall $a = b = c$ ist einfach zu behandeln:

$$T = c^2 \frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Wenn dies nicht der Fall ist, dann ist der der Seite c gegenüberliegende Winkel größer als 60° (Abb. 4). Wir legen durch C eine zu AB parallele Gerade, welche die im Mittelpunkt von AB errichtete Senkrechte in C' schneiden möge. Das Dreieck ABC' hat bei C' dann gewiss einen Winkel, der größer als 60° ist, und eine unveränderte Grundlinie c ; es gilt jedoch für den Flächeninhalt $T' = T$.

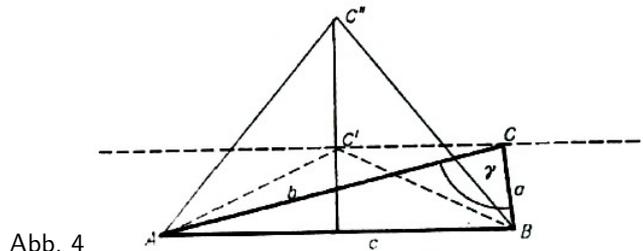


Abb. 4

Folglich liegt auf der Symmetriegeraden ein Punkt C'' , von dem aus die Grundlinie unter einem Winkel von 60° zu sehen ist. Unter diesen Umständen liegt C'' von c weiter entfernt als C' . Das Dreieck ABC'' mit der Grundlinie c und dem Eckpunkt C'' ist gleichseitig, und für seinen Flächeninhalt T'' gilt: $T''T' = T$, d.h. es ist

$$T < c^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

was wir zeigen wollten.

16. Ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie gleich 10 und dessen Höhe gleich 1 ist, hat den Flächeninhalt 5, und alle seine Seiten sind größer als 5. Ein gleichseitiges Dreieck mit Seiten der Länge 4 hat; den Flächeninhalt $4\sqrt{3} = 6,928\dots$; diese Zahl ist größer als 5 (Abb. 5).

Ein Dreieck kann einen beliebig kleinen Flächeninhalt haben bei beliebiger Größe seiner kleinsten Seite!

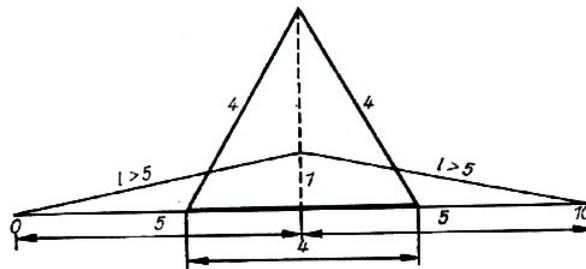


Abb. 5

17. Anstelle des Dreiecks ABC (Abb. 6) betrachten wir das ähnliche Dreieck $A'B'C'$ mit $A'B' = 21$, $B'C' = 20$, $C'A' = 13$. Mit x bezeichnen wir die Länge der Höhe $C'E'$. Offenbar gilt:

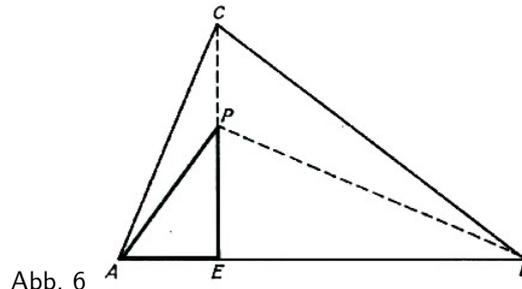


Abb. 6

$$\begin{aligned} \sqrt{13^2 - x^2} + \sqrt{20^2 - x^2} &= 21, \\ 400 - x^2 &= (21 - \sqrt{169 - x^2})^2 \\ 400 - x^2 &= 441 - 42\sqrt{169 - x^2} + 169 - x^2 \\ 42\sqrt{169 - x^2} &= 210 \\ 169 - x^2 &= 5^2 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Es ist $C'E' = 12$. Der Satz des Pythagoras liefert unmittelbar $A'E' = 5$, $E'B' = 16$. Kehren wir zu ABC zurück, so haben wir diese Ergebnisse mit 3, dem Ähnlichkeitskoeffizienten dieser Abbildung, zu multiplizieren und finden $CE = 36$, $AE = 15$, $EB = 48$. Wir versuchen jetzt, den Punkt P auf CE so zu legen, dass ein Dreieck AEP entsteht, das dem klassischen pythagoräischen Dreieck 3, 4, 5 ähnlich ist. Wie man leicht sieht, führt die Wahl von $EP = 20$ auf ein derartiges Dreieck und ergibt $AP = 25$. Wegen $CE - PE = 36 - 20 = 16$ ist $CP = 16$. Die Länge von PB ist gleich 52, denn wir haben $BE = 48$, $EP = 20$. Die Abstände von P zu den Ecken A , B , C betragen somit 25, 52 bzw. 16.

18. Das ist eine Extremwertaufgabe, die konstruktiv zu lösen ist. Es sei AB die längste Seite des gegebenen Dreiecks ABC (Abb. 7).

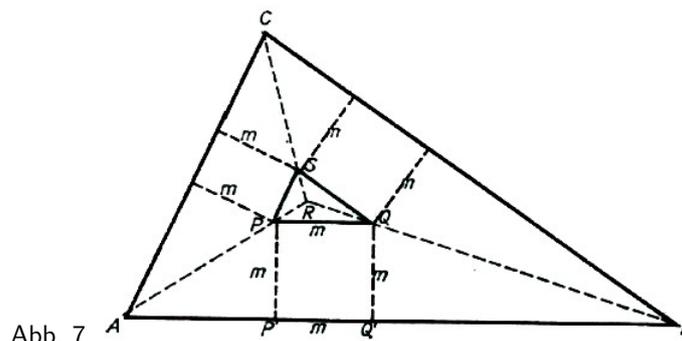


Abb. 7

Wir zerlegen das Dreieck in drei Teile, indem wir die Winkel bei A , B , C halbieren. Die Winkelhalbierenden schneiden sich in R , dem Mittelpunkt des Inkreises. Offenbar gibt es ein Quadrat, das dem Dreieck ABR einbeschrieben ist. Zwei Ecken des Quadrats, P' und Q' , liegen auf AB , während der dritte und der vierte Eckpunkt auf den Winkelhalbierenden AR bzw. BR liegen. Diese beiden Punkte, wir nennen sie P und Q , sind die gesuchten Punkte.

Um das zu zeigen, bezeichnen wir die Länge von PQ mit m und überzeugen uns, dass sowohl der Abstand von P zu AB als auch zu AC gleich m ist. Legen wir durch P eine Parallele zu AC und durch Q eine Parallele zu BC , so erhalten wir den Schnittpunkt S dieser beiden Parallelen sowie ein kleines Dreieck PQS , das dem Dreieck ABC ähnlich ist.

Offenbar ist der Abstand von S zu BC gleich m , woraus folgt, dass der Abstand von P zu BC größer als m ist. Dasselbe gilt für den Punkt Q ; sein Abstand von AC ist größer als m . Folglich sind alle sieben, durch P und Q bestimmten Abstände mindestens gleich m .

Wir haben damit aber auch das beste mögliche Ergebnis gefunden, das durch keine andere Wahl der Punkte P und Q verbessert werden kann. Liegt nämlich P' im Inneren des Trapezes $ABQPA$, dann ist der Abstand von P' zu AB kleiner als m . Dasselbe gilt für das zweite und das dritte Trapez.

Der Punkt P' muss sich also im Dreieck PQS bewegen, wenn vermieden werden soll, dass sein Abstand vom Rand $ABCA$ kleiner wird. Dasselbe gilt für Q' . Damit ergibt sich für beide Punkte nur die Möglichkeit, das Dreieck $PQSP$ zu durchlaufen.

Die Grundlinie PQ dieses Dreiecks ist größer als PS und QS ; folglich würde jede Wahl zweier Punkte in einem Dreieck, die von der in Abb. 7 angegebenen verschieden ist, den Abstand kleiner als m machen.

19. Wir führen zunächst zwei Hilfssätze an:

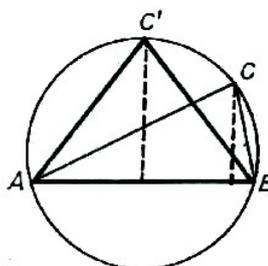


Abb. 8

(1) Bei gegebenem Kreis erreicht der Flächeninhalt des einbeschriebenen Dreiecks dann und nur dann sein Maximum, wenn das Dreieck gleichseitig ist.

(2) Bei gegebenem Kreis hat der Flächeninhalt des umbeschriebenen Dreiecks dann und nur dann ein Minimum, wenn das Dreieck gleichseitig ist.

Zum Beweis von (1) beschreiben wir einem Kreis ein Dreieck ABC ein, so dass $AC > BC$ gilt. Wie man sogleich sieht (Abb. 8), ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC' größer als der des Dreiecks ABC , wenn wir C' auf dem Kreis möglichst weit von AB entfernt wählen. Daraus folgt, dass kein Dreieck mit zwei verschiedenen langen Seiten maximalen Flächeninhalt besitzt. Also hat von allen einbeschriebenen Dreiecken nur das gleichseitige Dreieck diese Eigenschaft.

Zum Beweis von (2) betrachten wir ein Dreieck ABC , in dem $AC > BC$ gilt und das einem Kreis K umbeschrieben ist. Es sei S derjenige Punkt auf K , der am weitesten von C entfernt liegt. Offensichtlich (s. Abb. 9) halbiert CS den Winkel ACB . Die Tangente an K im Punkt S schneidet die Strecken CA und CB in A' bzw. B' , wobei ein neues umbeschriebenes Dreieck $A'B'C'$ entsteht.

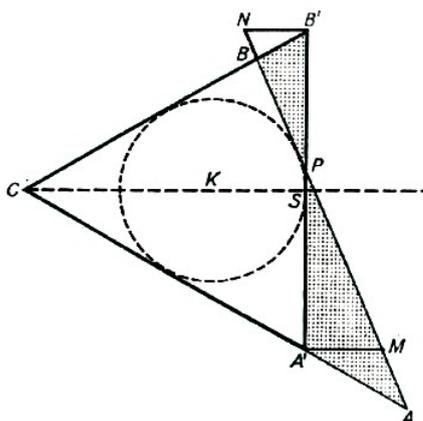


Abb. 9

Wir müssen nun zeigen, dass der Flächeninhalt des neuen Dreiecks kleiner ist als der des Dreiecks ABC . Es sei P der Schnittpunkt von $A'B'$ und AB . Die Dreiecke $A'MP$ und $B'NP$, die man erhält, wenn man durch A' bzw. B' Parallelen zu CS legt, sind ähnlich. Auf Grund von $A'P > B'P$ ist der Flächeninhalt $F(A'MP)$ des Dreiecks $A'MP$ größer als der Flächeninhalt $F(B'NP)$ des Dreiecks $B'NP$. Daraus ergeben sich unmittelbar die Ungleichungen

$$F(AA'P) > F(A'MP) > F(B'NP) > F(BB'P)$$

Demnach ist

$$F(AA'P) > F(BB'P) \quad \text{und} \quad F(ABC) > F(A'B'C')$$

Diese Ungleichungen sagen aus, dass beim Übergang von dem umschriebenen Dreieck ABC zu dem gleichschenkligen umschriebenen Dreieck $A'B'C'$ der Flächeninhalt verkleinert wird. Das zeigt aber:

Bei gegebenem Kreis K besitzt kein umschriebenes Dreieck mit zwei verschiedenen langen Seiten minimalen Flächeninhalt. Folglich ist das gleichseitige Dreieck das einzige Dreieck mit dieser Eigenschaft.

Mit c_1 bezeichnen wir die absolute Konstante, die man bei der Division des Flächeninhalts des Umkreises eines gleichseitigen Dreiecks durch den Flächeninhalt dieses Dreiecks erhält, und mit c_2 die absolute Konstante, die man bei der Division des Flächeninhalts eines gleichseitigen Dreiecks durch den Flächeninhalt seines Inkreises erhält. Laut Aufgabenstellung ist $c_1 c_2 = 4$.

Wir betrachten nun ein beliebiges Dreieck T , wobei gleichseitige Dreiecke ausgeschlossen seien. Es sei K der Umkreis von T , und k sein Inkreis. Mit Satz (1) ist bereits bewiesen, dass $F(K) : F(T) > c_1$ gilt; darüber hinaus haben wir mit Satz (2) gezeigt, dass $F(T) : F(k) > c_2$ ist. Hieraus ergibt sich unmittelbar

$$\frac{F(K)}{F(k)} = \frac{F(K)}{F(T)} \cdot \frac{F(T)}{F(k)} > c_1 c_2 = 4$$

woraus folgt:

$$\frac{F(K)}{F(k)} > 4$$

Damit ist die Behauptung nachgewiesen.

20. Wir zeichnen ein Quadrat S mit der Seite 1. Wenn zwei diagonal gelegene Ecken von S nach der Dreiteilung zu ein und demselben Teilstück gehören, so ist offensichtlich die Behauptung erfüllt; denn die Diagonale von S ist gleich $\sqrt{2}$, und $\sqrt{2}$ ist größer als $\sqrt{\frac{65}{64}} > 1,00778$.

Gehört kein Paar diagonal gelegener Ecken zu einem Teilstück, so sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall: Die Ecken A' und A'' gehören zum Teilstück A , die Ecken B' und B'' gehören zu B (Abb. 10), das dritte Teilstück enthält keine Ecken.

Zweiter Fall: Die Ecken A' und A'' gehören zu A , B' gehört zu B , C' gehört zu C (Abb. 11).

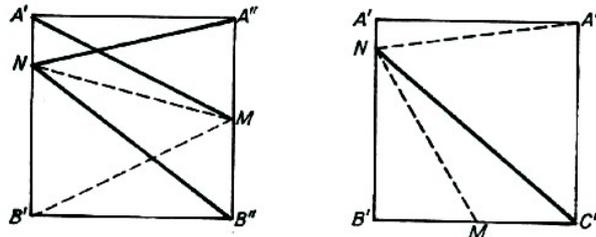


Abb. 10 und 11

Im ersten Fall (Abb. 10) seien die Längen von $A'N$ und $A''M$ gleich $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{1}{2}$. Wenn M in A liegt, wählen wir $P = M$, und für Q nehmen wir die linke obere Ecke; es ist

$$PQ = \sqrt{\frac{5}{4}} > \sqrt{\frac{65}{64}}$$

womit die geforderte Eigenschaft nachgewiesen ist.

Wenn M in B liegt, wählen wir $P = M$, und für Q nehmen wir die linke untere Ecke. Wie oben ergibt sich

$$PQ = \sqrt{\frac{5}{4}} > \sqrt{\frac{65}{64}}$$

Wenn N in A liegt, wählen wir $P = N$, und für Q nehmen wir die rechte obere Ecke; wir erhalten

$$PQ = \sqrt{\frac{17}{16}} > \sqrt{\frac{65}{64}}$$

Wenn N in B liegt, wählen wir $P = N$, und für Q nehmen wir die rechte untere Ecke; dann ist

$$PQ = \sqrt{\frac{25}{16}} > \sqrt{\frac{65}{64}}$$

Wenn weder M noch N in A oder B liegen, dann gehören sie zu C . Setzt man dann $P = M$ und $Q = N$, so ergibt sich

$$PQ = \sqrt{\frac{17}{16}} > \sqrt{\frac{65}{64}}$$

Wir wenden uns jetzt dem zweiten Fall zu (Abb. 11).

Der Punkt M , der Mittelpunkt der Grundlinie von S , kann zu A , zu B oder zu C gehören. Wenn M in A liegt, wählen wir $P = M$, und für Q nehmen wir die linke obere Ecke; dabei ergibt sich $PQ = \sqrt{\frac{5}{4}}$. Wenn M in B liegt, betrachten wir den auf der linken Seite von S liegenden Punkt N , dessen Abstand von A' gleich $\frac{1}{8}$ ist. Wir haben erneut drei Fälle zu unterscheiden:

- (a) N gehört zu A ,
- (b) N gehört zu B ,
- (c) N gehört zu C .

In allen drei Fällen setzen wir $P = N$, und Q können wir so wählen, dass $PQ = \sqrt{\frac{65}{64}}$ ist.

Im Falle (a) nehmen wir für Q die rechte obere Ecke, woraus $PQ = \sqrt{\frac{65}{64}}$ folgt; im Falle (b) nehmen wir $Q = M$, woraus sich $PQ = \sqrt{\frac{65}{64}}$ ergibt; im Falle (c) nehmen wir für Q die rechte untere Ecke und erhalten

$$PQ = \sqrt{\frac{113}{64}} > \sqrt{\frac{65}{64}}$$

Wenn M schließlich in C liegt, nehmen wir auf der rechten Seite von S einen Punkt N , dessen Abstand von A'' gleich $\frac{1}{8}$ ist, und schließen wie in dem Falle, dass M in B liegt. Die schrägen Linien in Abb. 11 werden durch andere ersetzt, die durch den neuen Punkt N gehen.

Wir wiederholen dann die vorhergehende Überlegung, wobei die Rollen von B und C vertauscht sind. Damit ist der Beweis abgeschlossen, da ja

$$\sqrt{\frac{65}{64}} > 1,00778$$

ist.

Auf folgende Frage wollen wir noch eingehen: Kann dieses Ergebnis verbessert werden, indem man $\sqrt{\frac{65}{64}}$ durch eine größere Zahl ersetzt, zum Beispiel 1,01?

Die Antwort darauf ist negativ. Das zeigt etwa die in Abb. 12 skizzierte Teilung des Quadrates mit der Seite 1 in die drei Stücke A, B, C (A, B und C haben übrigens gleichen Flächeninhalt). Die Trapeze B und C sind kongruent, ihre gemeinsame vertikale Seite ist $\frac{11}{24}$ lang. Die Länge der vertikalen Seiten des Fünfecks A sind beide gleich $\frac{1}{8}$.

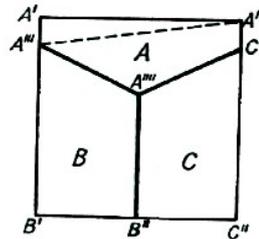


Abb. 12

Die Skizze ist folgendermaßen zu verstehen: Das Innere des Fünfecks gehört zu A , das Innere des linken Trapezes zu B , das Innere des rechten Trapezes zu C ; die Seiten des Fünfecks gehören zu A , mit Ausnahme des Punktes C' . Die Seiten des linken Trapezes, ohne A''' und A'''' gehören zu B , die Seiten $B''C''$ und $C''C'$ zu C , der Punkt B'' jedoch nicht.

Wie man leicht sieht, ist die größte Länge der Diagonalen in den betrachteten Polygonen gleich $\sqrt{\frac{65}{64}}$. Hieraus folgt, dass man kein Paar von zu einem Stück gehörenden Punkten P, Q finden kann derart, dass $PQ > \sqrt{\frac{65}{64}}$ wäre. Für ein einziges Punktepaar ist $PQ = \sqrt{\frac{65}{64}}$; das ist die Diagonale $A''A'''$ im Fünfeck.

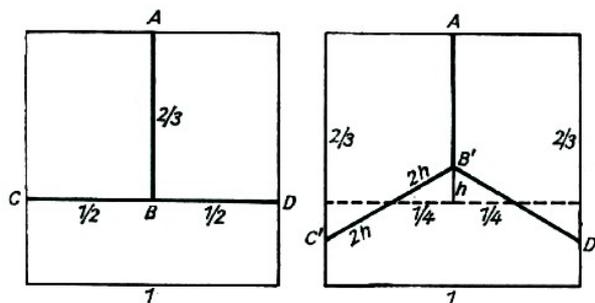


Abb. 13 und 14

21. Erste Frage: Die in Abb. 13 dargestellte Lösung kann so abgeändert werden, wie es Abb. 14 zeigt. Aus

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + h^2 = (4h)^2$$

(Lehrsatz des Pythagoras) ergibt sich $240h^2 = 1$. Die Gesamtlänge $\frac{2}{3} + 15h$ beträgt demnach angenähert 1,636, womit diese Frage positiv beantwortet ist.

Zweite Frage: In Abb. 15 ist die vertikale Symmetrieachse AKL eingezeichnet. Es bezeichne L' die Länge des oberen Teils AK . Vom Punkt K gehen die Kreisbögen KE und KE' aus. Wir legen fest, dass die drei Linien KA , KE und KE' die Ebene um K in drei Sektoren von jeweils 120° unterteilen. Diese Zerlegung wird durch die Gerade KA und die Tangenten an KE und KE' in K realisiert.

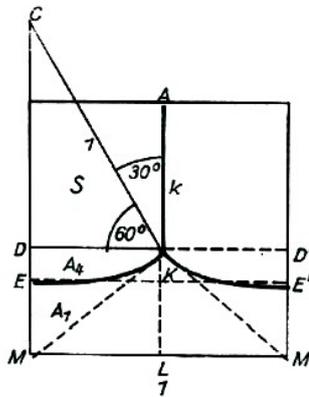


Abb. 15

Verlangen wir darüber hinaus, dass die Bögen KE und KE' die vertikalen Seiten unter einem Winkel von 90° schneiden, dann reichen diese Angaben aus, um die Abb. 15 herzustellen. Zu diesem Zweck führen wir nachstehende Überlegungen durch.

Da EE' Tangente an den Bogen KE ist, muss der Mittelpunkt C des Kreises auf der Verlängerung der linken Seite des Quadrats liegen. Mit $DK = \frac{1}{2}$ und $\angle AKG = 30^\circ$ ergibt sich $KC = 1$. Die Länge k von AK ist so zu wählen, dass folgende Bedingung erfüllt wird: Wenn die Ränder KE , KE' und KA das Quadrat in drei flächengleiche Teile zerlegen, dann ist der Flächeninhalt $A - 1$ von $EKLM$ gleich $\frac{1}{6}$.

Der Flächeninhalt A_2 des Kreissektors S beträgt $\frac{\pi}{12}$, denn es ist $KC = 1$ und $\angle ECK = 30^\circ$; der Flächeninhalt A_3 des Dreiecks KCD ist gleich $\frac{\sqrt{3}}{8}$. Den Flächeninhalt zwischen DK und EK wollen wir mit A_4 bezeichnen; somit ergibt sich:

$$A_4 = \frac{\pi}{12} - \sqrt{\frac{3}{8}}$$

Der Flächeninhalt des Rechtecks $DKLM$ beträgt $\frac{1-k}{2}$; also ist

$$A_1 + A_4 = \frac{1-k}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1-k}{2} = \frac{1}{6} + \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

so dass

$$k = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$$

wird.

Die Gesamtlänge der Ränder ist $k + \frac{\pi}{3}$, denn es gilt: Länge von $EK =$ Länge von $E'K = \frac{\pi}{6}$. Hiermit erhalten wir:

$$\text{Gesamtlänge} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6} = 1,6233$$

Die Antwort auf die zweite Frage ist also ebenfalls positiv.

Bemerkung: Die Zerlegung eines Quadrats in drei flächengleiche Teile, wobei die Gesamtlänge der Ränder minimal ist, stellt ein noch ungelöstes Problem dar. Es ist; jedoch möglich, dass die oben angegebene Lösung bereits als die ideale Zerlegung anzunehmen ist.

Um die in Abb. 14 gezeigte Bedingung für h zu finden, müssen wir beachten, dass Abb. 14 aus Abb. 13 durch Drehung der Strecken BC und BD um ihre Mittelpunkte hervorgegangen ist. Bei diesem Verfahren werden die Längen beider Strecken vergrößert, während die Länge der vertikalen Strecke AB' abnimmt. Die Gesamtlänge vermindert sich, bis h gleich $\frac{1}{8}$ der Strecke $B'C$ wird.

Die Mittel der Differentialrechnung erleichtern eine solche Untersuchung beweglicher Figuren wesentlich.

22. Die Lösung in Abb. 18 stellt einen Mittelteil $ABCD A$ dar, der von vier kongruenten Bögen eines Hilfskreises mit dem Radius r begrenzt wird; der Punkt J bezeichnet den Mittelpunkt des Bogens \widehat{AB} ; der Winkel AJB beträgt 30° . Die Gesamtlänge des Bandes $\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA}$ ist somit gleich $\frac{1}{3}$ des Umfangs des Hilfskreises.

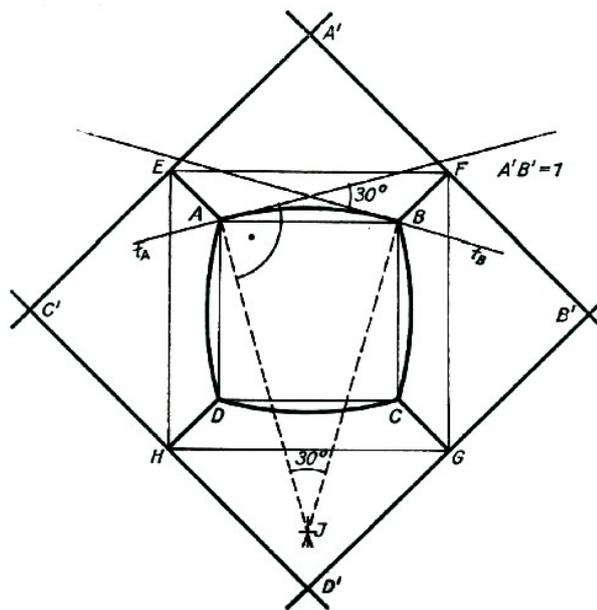


Abb. 18

Die Punkte E, F, G, H stellen die Mittelpunkte der Seiten des Einheitsquadrats dar; die Diagonalen des Quadrats $ABGB$ sind Teile der Geraden EG und FH . Der außerhalb des Mittelstücks liegende Teil ist also in vier Vierecke zerlegt; ihre Kongruenz ist offensichtlich.

Da die Tangente an den Bogen \widehat{AB} im Punkt A mit der Tangente an den Bogen \widehat{AB} im Punkt B in Uhrzeigerrichtung einen Winkel von 30° einschließt - denn der Bogen \widehat{AB} stellt ein Zwölftel des Hilfskreises dar - ändert die Tangente nach der Berührung von B ihre Richtung um 60° ; folglich schließen die Tangenten in Richtung A bzw. C im Punkt B einen Winkel von 120° ein; sie bilden denselben Winkel mit BF .

Wie wir bereits bemerkt haben, ist

$$\widehat{ABCD A} = 2\pi \frac{r}{3} \quad (1)$$

Das Mittelstück besteht aus dem Quadrat $ABCD$ und aus vier Teilen, wie sie der Flächeninhalt zwischen der Sehne AB und dem Bogen \widehat{AB} darstellt. Zieht man den Kreissektor $AJBA$ heran, so sieht man sogleich, dass dieser Flächeninhalt gleich

$$\frac{\pi r^2}{12} - \frac{r^2 \sin 30^\circ}{2} \quad (2)$$

ist, woraus sich für den gesamten Flächeninhalt der vier Teile $r^2 \left(\frac{\pi}{3} - 1\right)$ ergibt. Das Dreieck $APJA$ zeigt, es ist $AB = 2r \cdot \sin 15^\circ$. Wegen

$$2 \cdot \sin 15^\circ = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

erhalten wir

$$AB = r \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right)$$

und schließlich den Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$:

$$J = r^2(2 - \sqrt{3}) \quad (3)$$

Wie wir wissen, ist der Flächeninhalt des Mittelstücks gleich $\frac{1}{5}$; das führt zusammen mit (2) und (3) unmittelbar auf

$$r^2(2 - \sqrt{3}) + r^2 \left(\frac{\pi}{3} - 1\right) = \frac{1}{5}, \quad r^2 = \frac{1}{5 \left(1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right)} \quad (4)$$

und liefert somit den Wert von r . Setzen wir diesen Wert in der rechten Seite von (1) ein, so erhalten wir die Gesamtlänge des Bandes des Mittelstücks.

Den gefundenen Wert von r multiplizieren wir mit $\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$ und erhalten so die Länge der Sehne AB , womit wir unmittelbar auf den Abstand EA gelangen.

Diesen haben wir mit 4 zu multiplizieren und zur Länge des Mittelrandes zu addieren, um die Gesamtlänge L_{III} der Ränder zu finden. Das Ergebnis ist $L_{III} = 2,502\dots$

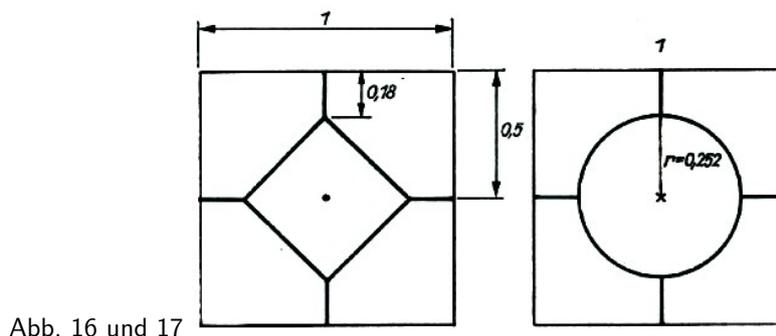


Abb. 16 und 17

Für die Zerlegungen I (Abb. 16) bzw. II (Abb. 17) lassen sich die analogen Werte leicht berechnen: $L_I = 2,524$, $L_{II} = 2,576$.

Die Lösung III ist also die beste; ob es die beste Lösung unter allen möglichen Zerlegungen eines Quadrats in fünf gleiche Teile ist, wollen wir nicht untersuchen. Die Theorie des Verfassers der Zerlegung I, dass die Ränder Geraden sein müssten, wurde durch die Lösung III eindeutig widerlegt, während Lösung II schlechter ist als Lösung I.

23. Wir wollen die Nadeln A, B, C zunächst einmal ins Innere des Quadrats stecken. Jede solche Lösung ist allerdings ungünstig, da das Dreieck ABC durch eine Dehnung mit dem Schwerpunkt des Dreiecks als Zentrum vergrößert werden kann. Und das so lange, bis einer der drei Punkte A, B, C den Rand des Quadrats erreicht! Nehmen wir an, dieser Punkt sei A ; eine Dehnung mit dem Zentrum in A bringt B, C oder beide Punkte auf den Rand, ohne dass dabei einer der Punkte das Quadrat verließ. Wenn nur B den Rand erreicht, dann erhalten wir eine der Darstellungen wie in Abb. 19.

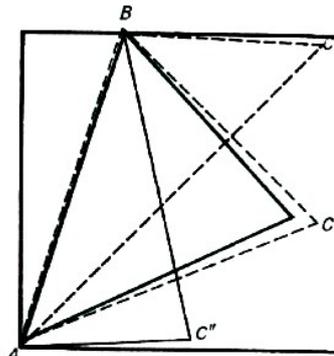


Abb. 19

In jedem Falle können wir durch Verschieben und Drehen das ganze Dreieck um die Diagonale des Quadrats in die Lage nach Abb. 20 bringen. Es sei bemerkt, dass bis jetzt bei keinem Schritt die Strecken AB, BC, CA verkleinert wurden.

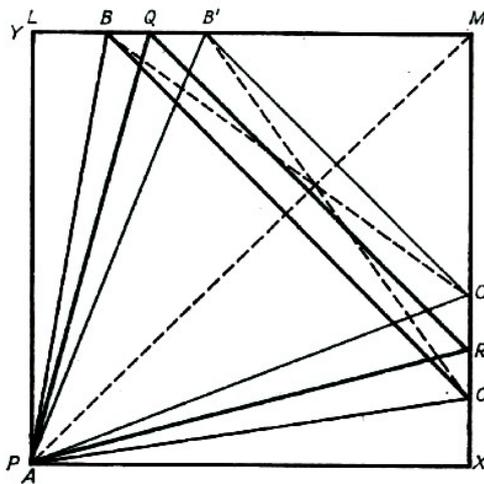


Abb. 20

Ein Sonderfall der Abb. 20 ist in Abb. 21 dargestellt. Er ergibt sich aus Abb. 20, indem wir $\angle CAX = 15^\circ, \angle BAY = 15^\circ$ wählen und P, Q, R für A, B, C schreiben. Die Lösung aus Abb. 21 ist die gesuchte.

Wie wir bereits gezeigt haben, ist die beste Wahl unter den Dreiecken aus der in Abb. 20 dargestellten Klasse zu treffen. Wir müssen jetzt nachweisen, dass das gleichseitige Dreieck PQR mit der Seitenlänge 1,035 E günstiger als jedes nichtgleichseitige Dreieck ist, das dem Einheitsquadrat einbeschrieben ist und zu der in Abb. 20 dargestellten Klasse gehört.

Wir nehmen an, B liege auf LQ , links von Q . Der Abstand AB ist kleiner als PQ . Das ergibt einen Wert unter 1,035. Dieselbe Überlegung gilt für C , wenn wir versuchen, diesen Punkt auf RM unter R zu bringen.

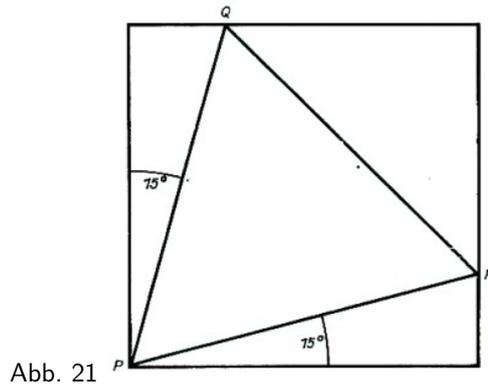


Abb. 21

Es verbleiben demnach nur die Möglichkeiten, den Punkt B rechts von Q zu bestimmen oder C auf RM über B bzw. beide Schritte gleichzeitig. Im Ergebnis erhalten wir einen Abstand $B'C'$, der kleiner als QR ist, d.h., er ist kleiner als 1,035. Das gleichseitige Dreieck PQR stellt demnach die beste Anordnung für die Nadeln dar.

24. Wir gehen von dem pythagoräischen rechtwinkligen Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4, 5 aus. Ein anderes derartiges rechtwinkliges Dreieck ist durch das pythagoräische Tripel 8, 15, 17 gegeben.

Multiplizieren wir (3, 4, 5) mit 15 und (8, 15, 17) mit 4, so erhalten wir zwei Dreiecke (45, 60, 75) und (32, 60, 68). Da 60 in beiden Dreiecken vorkommt, können wir sie Seite an Seite nebeneinanderlegen (Abb. 22).

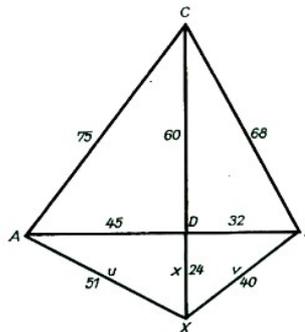


Abb. 22

Dabei entsteht ein neues Dreieck; seine Grundlinie ist $AB = AD + DB = 45 + 32 = 77$, seine Höhe $CD = 60$. Nun müssen wir erreichen, dass die Längen $XA = u$ und $XB = v$ ganzzahlig sind.

Darüber hinaus muss x eine ganze Zahl sein, damit CX ganzzahlig ist.

Die ganzen Zahlen x, y, z müssen offenbar den folgenden Gleichungen genügen:

$$x^2 + 45^2 = u^2 \quad ; \quad x^2 + 32^2 = v^2$$

d.h., es ist

$$u^2 - v^2 = 45^2 - 32^2 = 1001 = 13 \cdot 11 \cdot 7$$

Die letzte Gleichung kann mit einem Produktansatz gelöst werden, indem wir setzen:

$$u + v = 13 \cdot 7 = 91 \quad ; \quad u - v = 11$$

da $u^2 - v^2 = (u + v)(u - v)$ gilt.

Daraus folgt $u = 51$, $v = 40$ und $x^2 = 40^2 - 32^2 = 8^2 \cdot 9$, $x = 24$.

Abb. 22 stellt folglich die gesuchte Lösung dar; wir können anhand der Abbildung überprüfen, dass alle 10 Abstände verschieden sind.

25. Abb. 23 zeigt ein beliebiges, einem Kreis einbeschriebenes Viereck $ABCD$.

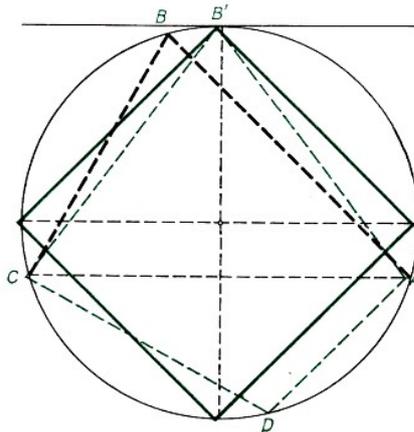


Abb. 23

Wie man sieht, kann man den Flächeninhalt des Dreiecks ABC vergrößern, indem man B in B' verschiebt, wobei B' der Punkt auf dem Bogen ABC ist, in dem die Tangente an den Kreis zu AC parallel ist.

Eine notwendige Bedingung dafür, dass der Flächeninhalt von $ABCD$ ein Maximum wird, ist $AB = BC$. Folglich ist auch $BC = CD$ eine solche Bedingung, sowie $CD = DA$. Die Dreiecke ABC und ADC sind somit kongruent. Daraus folgt, dass die Winkel bei B und bei D einander gleich sind. Ihre Summe beträgt 180° , d.h., jeder Winkel ist 90° . Dasselbe gilt für die Winkel bei A und C . Die Gleichheit der Seiten und Winkel beweist, dass $ABCD$ ein Quadrat ist.

26. Wir ziehen die Gerade PA und bezeichnen mit Q denjenigen Punkt auf dieser Geraden, der durch $PA = AQ$ definiert ist. Danach ziehen wir die Gerade QB und bezeichnen mit R denjenigen Punkt auf dieser Geraden, der durch $QB = BR$ definiert ist.

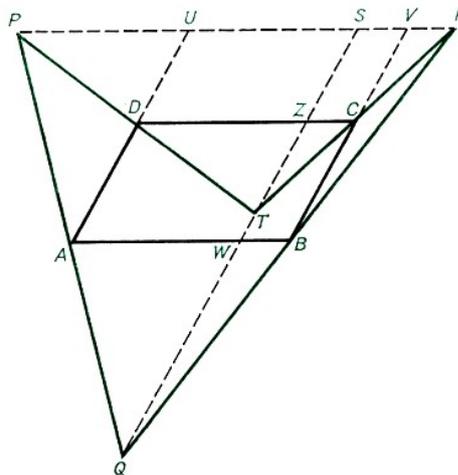


Abb. 24

Durch Q legen wir eine Parallele zu AD ; diese schneidet PR in S . Die Gerade RP schneidet AD in U , die Gerade BC in V ; QS schneidet AB in W , UV in S und DC in Z .

Das Dreieck PQR enthält zwei Dreiecke; das linke Dreieck (Abb. 24) zeigt $PU = US$, das rechte Dreieck ergibt $SV = VR$. Wir erhalten somit $PU = DZ$; für den Schnittpunkt T von PD und QZ folgt, dass $PD = DT$ und $UD = ZT$ ist. $PD = DT$ ergibt $SZ = ZT$, was $VC = ZT$ beweist.

Die Parallelitäten $SZ \parallel VC$ und $SV \parallel ZC$ bedingen die Kongruenz der Dreiecke BVC und CZT ; Parallelität und Kongruenz ergeben $RC = CT$ und die Kollinearität von RCT , d.h., die drei Punkte RCT bilden eine Gerade. Das gesuchte Viereck ist also $PQRTP$.

27. Der Kreis ist eine Kurve konstanter Breite, (d.h., alle Paare paralleler Geraden, die den Kreis berühren, haben denselben Abstand. Es gibt aber noch andere Kurven mit dieser Eigenschaft.

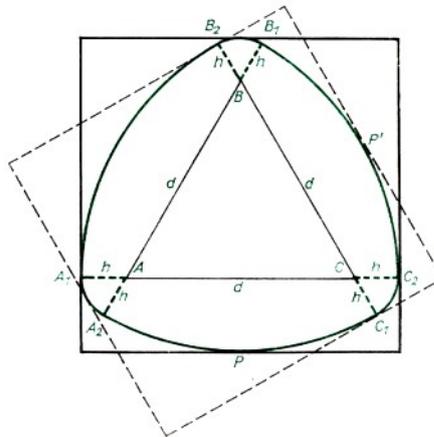


Abb. 25

Beispiel: Wir zeichnen ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge d , und verlängern jede Seite an beiden Enden um h (Abb. 25). Auf diese Weise erhalten wir sechs neue Punkte: $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$. Von der Ecke A zeichnen wir einen Bogen A_1A_2 mit dem Radius h , und einen zweiten Bogen mit dem Radius $d + h$, der B_1 mit C_2 verbindet.

Analog verfahren wir mit B und auch mit C . Wir erhalten sechs Bögen, welche die Seiten des Dreiecks jeweils unter einem rechten Winkel schneiden.

Eine aus derartigen Bögen bestehende Kurve ist glatt und offensichtlich konvex. Wie man unmittelbar sieht, beträgt ihre konstante Breite $d + 2h$ (s. auch H.Steinhaus: "Kaleidoskop der Mathematik").

28. Wir schneiden das Ellipsengebiet entlang der beiden Achsen auf und erhalten dabei vier kongruente Viertel (Abb. 26). Diese Stücke können so zusammengesetzt werden (Abb. 27), dass sie ein konvexe Gebiet mit einer quadratischen Aussparung im Innern bedecken.

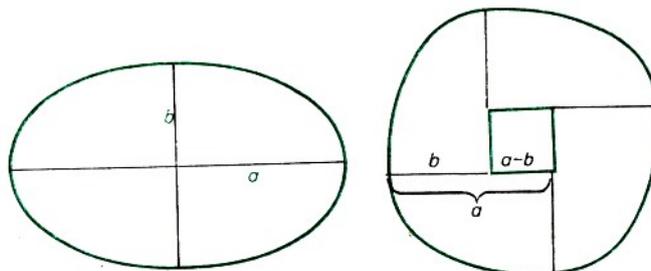


Abb. 26 und 27

Der Flächeninhalt D des gesamten Gebiets, das Quadrat eingeschlossen, ist gleich

$$D = ab\pi + (a - b)^2 \quad \text{mit} \quad a = 4, b = 3 \quad (1)$$

die Formel (1) gilt für alle Ellipsen mit den Achsen $2a$ und $2b$. Offensichtlich ist der Umfang des neuen Gebiets gleich dem Umfang L der Ellipse. Jetzt müssen wir eine Eigenschaft des Kreises heranziehen:

Der Umfang des Kreises ist kleiner als der Umfang jedes nichtkreisförmigen Gebiets, das denselben Flächeninhalt wie der Kreis besitzt. Diese Aussage auf unseren Fall angewandt besagt, dass L den Umfang eines Kreises mit dem Flächeninhalt D übersteigt. Der Umfang eines

solchen Kreises ist $2r\pi$ mit $r^2\pi = D$. Er ist somit gleich $2\pi\sqrt{\frac{D}{\pi}}$, und

$$L > 2\pi\frac{D}{\pi} = 2\pi\sqrt{ab + \frac{(a-b)^2}{\pi}} = 2\sqrt{\pi}\sqrt{12\pi + 1} = 2\sqrt{12\pi^2 + \pi} = 2\sqrt{121,58\dots} > 22$$

29. Wenn es zwei kleinste Kreise gäbe, die F umschrieben sind - d.h. zwei Kreise K_1, K_2 mit gleichem Radius, die beide F überdecken - dann läge das ganze Gebiet F in einer "Linse" S , die beiden Kreisen angehört.

Der größte Durchmesser d einer solchen "Linse" muss aber kleiner als der Durchmesser D der Kreise sein. Es gibt also einen Kreis K_3 mit dem Durchmesser d , der kleiner als K_1 (und als K_2) ist und der S , somit auch F , umschließt; entgegen der Definition des umschriebenen Kreises. Dieser Widerspruch schließt die Möglichkeit von zwei (oder mehr) umschriebenen Kreisen aus (Abb. 28).

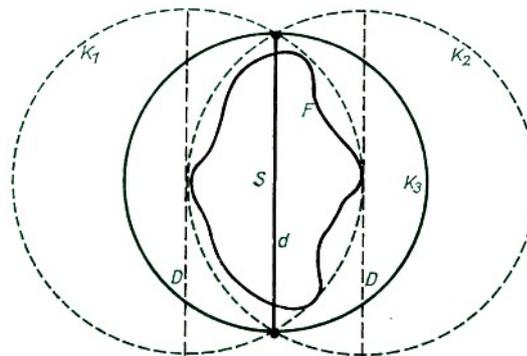


Abb. 28

Für den verbleibenden Teil stellt das in Abb. 29 gezeigte Rechteck ein Beispiel des verlangten Typs dar.

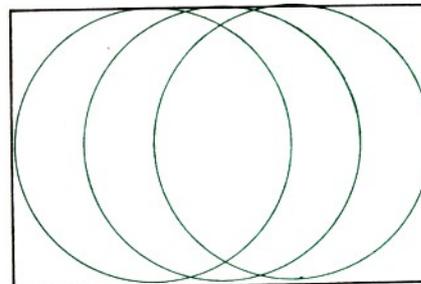


Abb. 29

Allgemein betrachtet ist das der einfachste Fall einer ebenen Überdeckungsaufgabe.

30. Wir gehen von dem Punkt P auf C aus ($P_1 = P$). Die Randlinie C zerlegen wir in sechs Bögen gleicher Länge. Den Punkt P_4 bezeichnen wir mit Q . Nun halten wir C fest und verschieben die ganze Punktmenge auf C im Uhrzeigersinn, wobei wir die Längen der sechs Bögen P_iP_{i+1} unverändert lassen ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $P_7 = P_1$).

Die Sehne PQ dreht sich im Uhrzeigersinn mit, und das gleiche gilt für die Sehnen P_2P_5 und P_3P_6 . Wenn diese drei Sehnen keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben, dann entsteht eine Figur (Abb. 30), in der S nicht auf PQ liegt.

Die Drehung bewegt die gesamte Konstruktion und deformiert sie stetig. Wenn P die Lage erreicht hat, in der sich Q anfangs befand (Abb. 31), dann wird Q an der Stelle sein, die P in der Abb. 30 eingenommen hat. Die Sehne PQ wird folglich in ihre Ausgangslage zurückgekehrt sein (und jede der beiden anderen Sehnen auch). Wir haben also die Figur aus Abb. 31 erhalten.

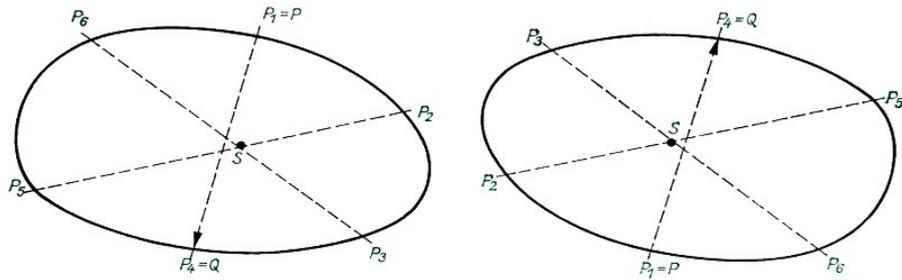


Abb. 30 und 31

Jetzt liegt aber der Punkt S auf der linken Seite der gerichteten Strecke \overrightarrow{PQ} , während S in der Abb. so auf der rechten Seite liegt. Daraus folgt, dass während der Drehung einmal der Punkt S in die Sehne PQ fällt; in diesem Moment erfüllt die Figur die Bedingungen der Aufgabenstellung. Zur Lösung werden die Eigenschaften konvexer Figuren benutzt, die im Satz von Helly ausgesprochen sind.

31. Es sei A ein beliebiger Punkt auf dem Oval O ; wir legen im Punkte A eine Tangente an O , eine weitere in einem anderen Punkt B auf O und eine dritte Tangente durch einen Punkt X auf O , so dass O ein gleichseitiges Dreieck umschrieben wird (Abb. 32).

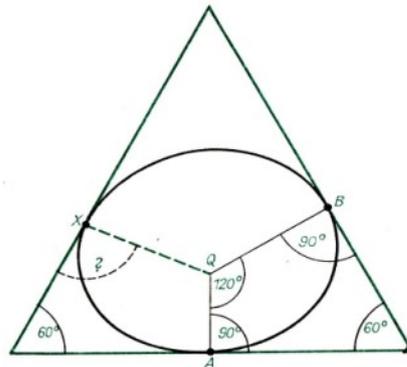


Abb. 32

In der Zeichnung ist die Reihenfolge $ABXA$ entgegen dem Uhrzeigersinn. Die Normalen in A und B schneiden sich in Q ; wir verbinden Q mit X . Wenn A festgelegt ist, dann sind die Strecken QA , QB und QX sowie die Summe $S(A)$ ihrer Längen eine Funktion von A . Diese Funktion $S(A)$ ist nach dem Stetigkeitsaxiom der Elementargeometrie stetig und nimmt denselben Wert wieder an, wenn A das ganze Oval umlaufen hat. Daraus folgt auf Grund eines Satzes der Analysis entweder, dass $S(A)$ konstant ist, oder, dass es zwei Punkte A_1 , A_2 gibt, für die $S(A)$ seine Extrema annimmt: $S(A_1) = \text{Maximum}$, $S(A_2) = \text{Minimum}$.

Wir drehen nunmehr den von den drei Strecken QA , QB und QX gebildeten Stern um einen kleinen Winkel um Q . Man sieht sogleich, dass eine derartige Drehung die Länge von QX dann und nur dann ändert, wenn QX keine Normale ist, wie sie QA und QB darstellen, deren Änderung stets unwesentlich ist.

Das Verhalten von $S(A)$ hängt somit allein von QX ab. Daraus folgt, dass es entweder wenigstens zwei Lösungen des Problems gibt, die durch A_1 und A_2 bestimmt sind, oder dass alle Ausgangspunkte A Lösungen darstellen.

82. Es sei A ein beliebiger Punkt auf der betrachteten Kurve K (Abb. 33). Wenn wir K bei A beginnend im Uhrzeigersinn umlaufen, so gelangen wir auf K zu einem Punkt B , nachdem wir die Hälfte des Umfangs zurückgelegt haben, d.h. einen Weg von der Länge l .

Wir wählen den Mittelpunkt S der Sehne AB als Mittelpunkt eines Kreises vom Radius $\frac{l}{2}$. Wir behaupten:

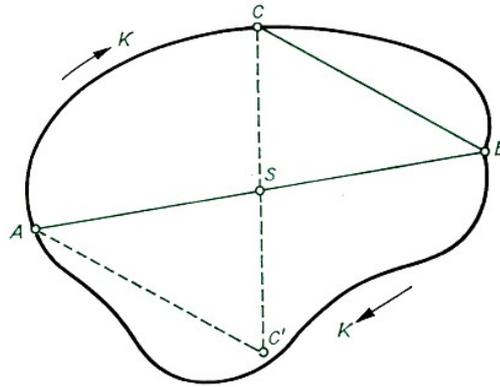


Abb. 33

Dieser Kreis umschließt K . Um das zu zeigen, wählen wir auf dem Bogen \widehat{AB} einen beliebigen Punkt C . Die Behauptung ist bewiesen, wenn wir nachweisen können, dass $CS \leq \frac{l}{2}$ ist. Zu diesem Zweck markieren wir auf der Geraden CS einen Punkt C' derart, dass $SC' = CS$ gilt; dann ist $CB = C'A$ und $CC' = C'A + AC = AC + BC$. Folglich ist

$$2CS \leq AC + CB \leq \widehat{AC} + \widehat{CB} = \widehat{AB} = l$$

Somit ist $SC \leq \frac{l}{2}$, was wir zeigen wollten.

33. In Abb. 34 wird angenommen, dass AB in westöstlicher Richtung verläuft. Wir verschieben die Strecke AB nach Norden, ohne ihre West-Ost-Richtung zu ändern. Es ist möglich, dass bei dieser Bewegung A und B gleichzeitig auf die Kurve J gelangen; in diesem Falle ist das Problem gelöst.

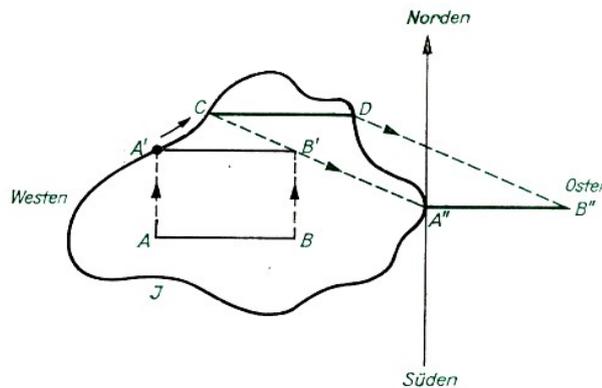


Abb. 34

Im allgemeinen wird jedoch einer der beiden Punkte A und B die Kurve J als erster erreichen. Dieser Fall ist in Abb. 34 dargestellt:

A erreicht A' auf J , während B mit dem im Innern des durch J definierten Gebiets gelegenen Punkt B' zusammenfällt.

Unter diesen Umständen verschieben wir weiter, wobei wir A von A' auf J fortbewegen und die West-Ost-Richtung der Strecke AB beibehalten, bis A die Süd-Nord-Tangente in A'' erreicht; A'' ist der am weitesten östlich gelegene Punkt auf J .

Da B'' östlich von A'' liegt, befindet sich B'' außerhalb von J , der Punkt B' liegt innerhalb von J , B'' außerhalb von J . Der Punkt B passiert also auf dem Wege von B' nach B'' notwendigerweise J ; wir wollen diesen Durchtrittspunkt mit D bezeichnen.

Andererseits hat der Punkt A während seiner Bewegung von A' nach A'' die Kurve J nie verlassen; A befindet sich also zu dem Zeitpunkt, in dem B den Punkt D erreicht, in einem

Punkt C auf J . Die Strecke CD ist die gesuchte Sehne.

34. Zunächst erinnern wir daran, dass der Schwerpunkt dreier beliebiger Punkte zugleich Schwerpunkt des Dreiecks ist, dessen Ecken diese Punkte sind. Wir benutzen diese Eigenschaft und zerlegen das Dreieck ABC in die Dreiecke BCP , CAP und ABP (Abb. 35) und konzentrieren ihre Massen in ihren Schwerpunkten A_1 , B_1 , C_1 .

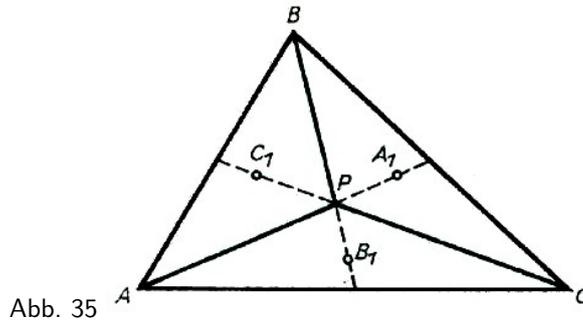


Abb. 35

Diese Massen sind einander gleich, da die Flächeninhalte der Dreiecke BCP , CAP und ABP gleich sind (warum?); daher ist P Schwerpunkt der drei Punkte A_1 , B_1 , C_1 .

35. Der Schwerpunkt D der Massenpunkte A bzw. C mit den Massen BC bzw. AB liegt auf der Seite AC und zerlegt diese Seite in zwei Strecken AD und DC , so dass $AD : DC = AB : BC$ gilt (Abb. 36).

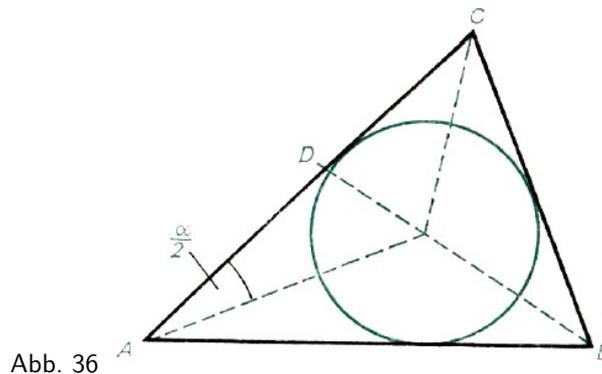


Abb. 36

Daher ist BD die Winkelhalbierende des Winkels bei B , und der Schwerpunkt des aus den Punkten A , B und C bestehenden Systems, der den Schwerpunkt des aus den Punkten B und D gebildeten Systems darstellt, liegt auf dieser Geraden. Aus demselben Grunde liegt er auch auf den Winkelhalbierenden der übrigen Winkel, und somit in deren Schnittpunkt, d.h., im Mittelpunkt des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises.

36. Der Berührungspunkt des linken Schenkels des Winkels α mit dem Kreis sei P , und der Berührungspunkt des linken Schenkels von β mit dem Kreis sei Q .

Wir zeichnen im Kreis die Radien PC und QC ein (Abb. 37). Aus der Symmetrie des Vierecks $VPCQC$ folgt, dass der Winkel CVQ gleich $\frac{\alpha - \beta}{2}$ ist. Andererseits halbiert die Gerade VQ das gleichschenklige Dreieck CVB , woraus sich $\angle C'VQ = \angle QVB = \beta$ ergibt. Es ist somit

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = \beta; \quad \alpha - \beta = 2\beta; \quad \alpha = 3\beta$$

Die Theorie dieser elementaren Methode hat bereits Archimedes (etwa 300 v.u.Z.) in seiner Schrift "Grundsätze" abgeleitet (Problem der Winkeldrittung).

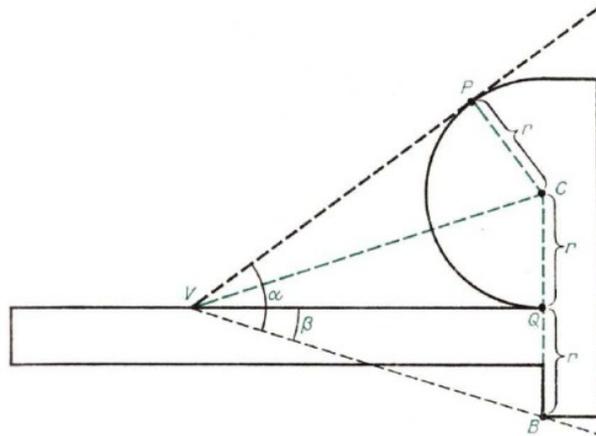


Abb. 37

37. Wir verschieben das Parallelogramm $CC'DD'$ aus Abb. 38 entlang der Parallelen UU' und LL' nach links, bis DD' mit BB' zusammenfällt. In Abb. 39 ist das Ergebnis dieser Operation dargestellt, bei der sich das Parallelogramm nicht verändert hat. Auf Grund von $AA' = CC'$ ist $AA' + A'C = A'C + CC'$, woraus sich $AC = A'C'$ ergibt.

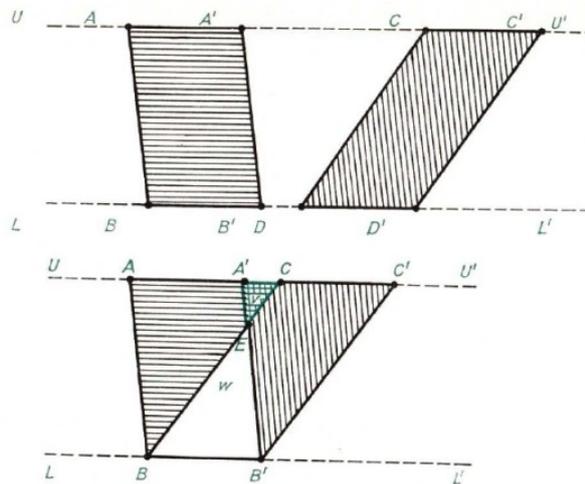


Abb. 38 und 39

Diese Gleichung zusammen mit $AB = A'B'$ und $BC = B'C'$ beweist die Kongruenz der Dreiecke ABC und $A'B'C'$. Wir sind damit zu folgender Gleichung für die Flächeninhalte gelangt:

$$F(ABC) = F(A'B'C') = p.$$

Wir schneiden nun den beiden Dreiecken gemeinsamen Teil heraus. Das kleine ausgeschnittene Dreieck $A'CE$ besitzt den Flächeninhalt v , und die obenstehende Gleichung zeigt, dass der Flächeninhalt von $AA'EB$ bzw. $CEB'C'$ gleich $p - v$ ist, d.h., diese beiden Trapeze sind flächengleich.

Wir vergrößern $AA'EB$ nun um das Dreieck BEB' mit dem Flächeninhalt w . Auf diese Weise erhalten wir das Parallelogramm $AA'BB'$ mit dem Flächeninhalt $p - v + w$. Wenn wir $CEB'C'$ um BEB' vergrößern, erhalten wir $p - v + w$ als Flächeninhalt von $BB'CC'$. Da dieses Parallelogramm zu $CC'DD'$ kongruent ist, sehen wir, dass der Flächeninhalt von $CC'DD'$ ebenfalls gleich $p - v + w$ ist.

38. Beantwortung von a)

Dazu wollen wir zunächst den folgenden Satz beweisen.

Satz: Ein geschlossenes Sechseck mit gegebenen gleichlangen Seiten besitzt extremalen Flächeninhalt, wenn es regulär ist.

Beweis: Zwei benachbarte Seiten eines nichtregulären ebenen Sechsecks bestimmen zwei Winkel, einen Innen- und einen Außenwinkel (Abb. 40).

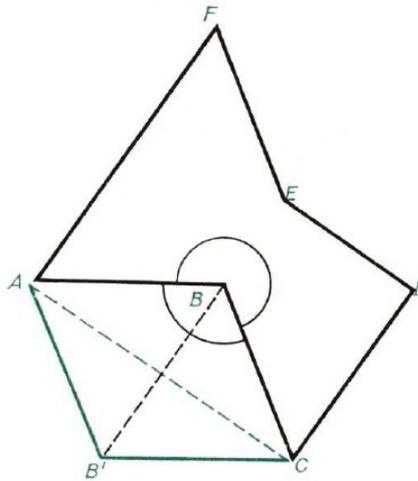


Abb. 40

Wenn der Innenwinkel größer als der Außenwinkel ist, dann bildet ABC ein Dreieck, das außerhalb des durch das Sechseck begrenzten Gebietes liegt. Folglich können wir ABC durch $AB'C$ ersetzen und ein neues Sechseck bestimmen, ohne dabei die Seitenlängen zu verändern. Da der Flächeninhalt des neuen Sechsecks den des alten übersteigt, besaß das alte Sechseck nicht maximalen Flächeninhalt. Wir können uns in unseren Untersuchungen also auf konvexe Sechsecke beschränken.

Ein solches Sechseck kann durch eine Diagonale in zwei Vierecke zerlegt werden. Wir wollen eines davon aufzeichnen:

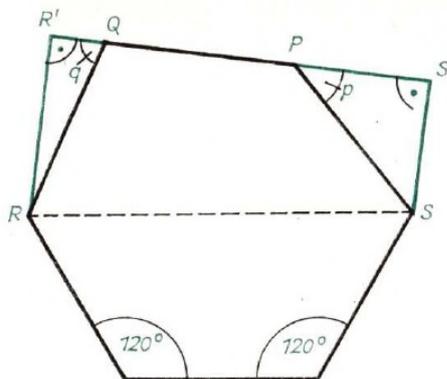


Abb. 41

$PQRSP$ (Abb. 41). Hier ist $SP = PQ = QR = 1$. Um den Flächeninhalt dieses Vierecks zu berechnen, haben wir den Flächeninhalt der rechtwinkligen Dreiecke $SS'P$ und $RR'Q$ vom Flächeninhalt des Trapezes $SS'R'RS$ abzuziehen. Die Differenz D ist

$$D = \frac{1}{2}(1 + \cos p + \cos q)(\sin p + \sin q) - \frac{1}{2}(\sin p \cdot \cos p + \sin q \cdot \cos q)$$

woraus sich

$$D = \frac{1}{2}(\sin p + \sin q + \sin(p + q))$$

ergibt.

Der Flächeninhalt D erreicht sein Maximum, wenn die Winkel p und q die Gleichungen

$$\frac{\partial D(p, q)}{\partial p} = 0 \quad , \quad \frac{\partial D(p, q)}{\partial q} = 0$$

erfüllen. Das führt uns auf die Bedingungen

$$\cos p + \cos(p + q) = 0 \quad , \quad \cos q + \cos(p + q) = 0$$

aus denen unmittelbar $\cos p = \cos q$ folgt. Daher ist entweder $p = q$ oder $p = -q$. Die Bedingung $p = -q$ ergibt jedoch ein Parallelogramm $SPQR'$, das einen kleineren Flächeninhalt als $SPQR$ besitzt. Hieraus folgt:

Es ist $p = q$, also $\cos p + \cos 2p = 0$. Mit Hilfe der Beziehungen $\cos 2p = \cos^2 p - \sin^2 p$ und $\sin^2 p + \cos^2 p = 1$ erhalten wir, wenn wir $\cos p = x$ setzen, die Beziehung

$$x + 2x^2 - 1 = 0$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -1$. Die zweite Lösung ergibt $p = q = 180^\circ$ und ein Viereck, dessen Flächeninhalt gleich Null ist. Dies stellt das Minimum dar.

Die erste Lösung ergibt $p = q = 60^\circ$. Ein derartiges Viereck und sonst kein anderes besitzt also maximalen Flächeninhalt. Es ist zugleich gezeigt, dass das obere Viereck in unserem Sechseck (Abb. 41) einen kleineren Flächeninhalt besitzt als das untere Viereck. Ausgenommen ist dabei der Fall, in dem das obere Viereck zum unteren kongruent ist. Diese Kongruenz führt auf ein reguläres Sechseck, das das gesuchte Ergebnis darstellt.

Der obige Satz beweist:

Wenn ein reguläres Sechseck in seiner Ebene unter Erhaltung der Seitenlängen und Veränderung der Winkel deformiert wird, dann verkleinert sich sein Flächeninhalt. Die Grundlinie eines am Fensterrahmen anliegenden Trapezes besitzt stets die Länge 2, da ihre Enden am Rahmen befestigt sind (s. Abb. 42).

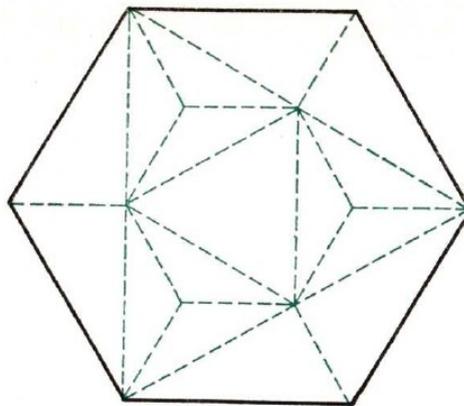


Abb. 42

Wenn sich die Form des Trapezes ändert, kann dieses veränderte Trapez auf der anderen Seite seiner Grundlinie durch ein dazu symmetrisches Trapez ergänzt werden. Dabei entsteht ein deformiertes Sechseck mit Seiten der Länge 1; sein Flächeninhalt ist demzufolge kleiner als der des zentralen Sechsecks.

Der Flächeninhalt des Trapezes verringert sich also bei dieser Deformation. Jede Deformation des Rahmens in seiner Ebene verkleinert also den Flächeninhalt der sieben Polygone.

Das ist jedoch unmöglich, denn der Gesamtflächeninhalt bleibt stets gleich dem Flächeninhalt des Fensters. Dieser Widerspruch ergibt, dass sich der Fensterrahmen in seiner Ebene nicht deformieren lässt.

Beantwortung von b)

Verlassen einige bzw. alle Punkte die Ebene des Fensters, so führt das zu einer Deformation eines Polygons oder aller Polygone des Fensterrahmens. In Abb. 42 sind sieben derartige Polygone gezeigt. Die punktierten Linien in der Abb. 42 sind keine Leisten, sondern fiktive elastische Fäden. Sie zerlegen die 7 Flächen in 16 Dreiecke.

Von den Ausgangspolygone werden einige eben bleiben, andere jedoch werden windschief sein.

Wir berechnen den Flächeninhalt der Polygone beider Arten in der üblichen Weise über die Addition der Flächeninhalte der Dreiecke, die diese Polygone bilden. Dazu bedienen wir uns der punktierten Linien. Wir wollen uns die Dreiecke mit ebenen Membranen bespannt vorstellen. Dann zerfällt das zentrale Sechseck beispielsweise in vier solche Dreiecke. Somit erhalten wir ein Polyeder, das über das Fenster gespannt ist, und da wenigstens eine Nagelstelle außerhalb der Fensterebene liegt, sind einige Dreiecke nicht mehr parallel zur Ebene des Fensterrahmens.

Die Gesamtfläche des deformierten Fensters ist demnach größer als der Flächeninhalt des ebenen Fensters. Das gilt für die wie üblich berechneten Flächeninhalte. Jede solche Fläche kann jedoch durch eine Drehung um eine punktierte Linie in die Ebene des Rahmens gelegt werden. Dadurch wird die Gesamtfläche nicht geändert; wir erhalten also mehr als die Gesamtfläche des Fensters.

Nun behält aber das zentrale Sechseck, wenn es erst deformiert und danach wieder in eine Ebene überführt wird, sechs Seiten der Länge 1. Der Flächeninhalt wird also nicht größer sein als der des Ausgangssechsecks.

Dieselbe Überlegung lässt sich auf jedes Trapez anwenden. Der auf die oben geschilderte Weise berechnete Flächeninhalt kann somit nicht größer sein als der ursprüngliche Flächeninhalt des Fensters.

Das widerspricht unserer früheren Aussage und beweist, kein Punkt des Rahmens kann die Ebene des Fensters verlassen.

39. Der Elektriker hat auf der Karte (Abb. 43) die Gerade CP einzuzichnen und auf dem nach P folgenden Stück einen Punkt M zu bestimmen, der durch folgende Beziehung gegeben ist: Länge von $PM = \text{doppelte Länge von } CP$.

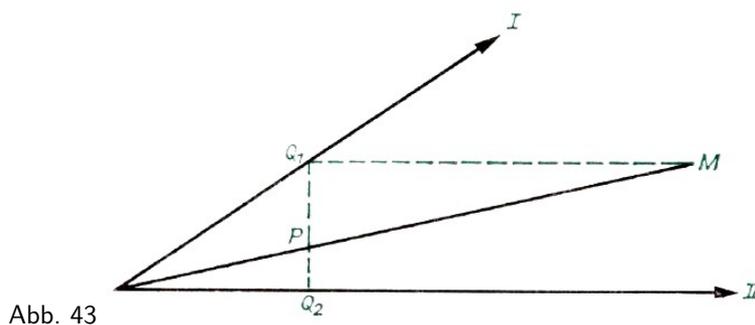


Abb. 43

Wenn das geschehen ist, legt er durch M eine Parallele zu II. Diese schneidet I in einem Punkt. Das ist der gesuchte Punkt Q_1 . Der Schnitt der Geraden Q_1P mit II ergibt Q_2 . Um das zu beweisen, haben wir nur zu beachten, dass die Dreiecke MPQ_1 und CPQ_2 ähnlich sind und dass das Verhältnis der Seiten des ersten Dreiecks zu den entsprechenden Seiten des zweiten Dreiecks gleich 2:1 ist.

40. Es sei A ein Punkt, von dem aus der gesamte See sichtbar ist; einen solchen Punkt wollen wir einen ausgezeichneten Punkt nennen. Es sei B ein weiterer ausgezeichnete Punkt. Der Punkt C liege auf der Strecke AB ; wir wollen zeigen, dass auch C ein ausgezeichnete Punkt

ist. Dazu wählen wir einen beliebigen Punkt D am Ufer und zeichnen das Dreieck ABD (Abb. 44).

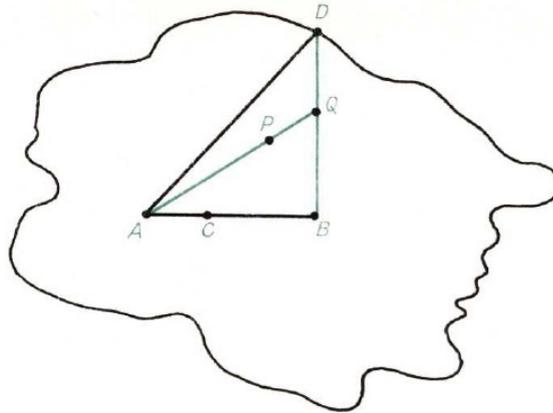


Abb. 44

Das Innere des Dreiecks ABD ist vollkommen mit Wasser bedeckt, denn gäbe es darin einen trockenen Punkt P , so würde dieser den Blick auf einen gewissen Punkt Q auf BD für den Beobachter in A versperren. Dieser Punkt Q stört jedoch nicht die Aussicht BD , d.h., der Punkt Q liegt im Wasser, ist demzufolge von A aus zu sehen. Somit sind ABD und das Innere von ABD mit Wasser bedeckt, und D kann daher von C aus gesehen werden.

Wenn also A und B ausgezeichnete Punkte sind, dann gilt dasselbe für jeden Punkt C auf AB , woraus die Konvexität der gesamten Menge dieser Punkte folgt. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

2.3 Geometrie im Raum

41. Um zu zeigen, dass jeder ebene Schnitt ein spitzwinkliges Dreieck ergibt, bezeichnen wir die drei Punkte, in denen die Ebene die Halbachsen OX , OY , OZ schneidet, mit den Koordinaten $X(x, 0, 0)$, $Y(0, y, 0)$, $Z(0, 0, z)$; es ist $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Wenn a , b , c die Längen der drei Strecken sind, die aus den Quadranten YOZ , ZOX , XOY herausgeschnitten werden (Abb. 45), so gilt

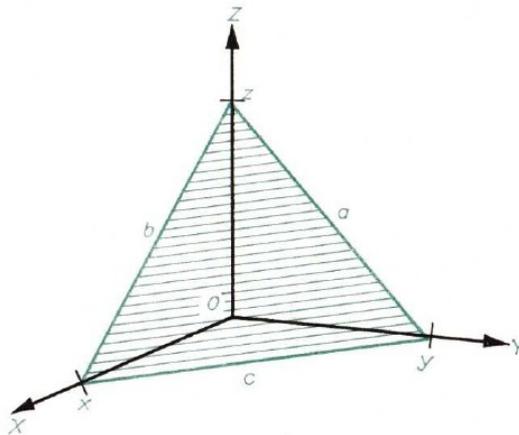


Abb. 45

$$a^2 = y^2 + z^2 \quad ; \quad b^2 = z^2 + x^2 \quad ; \quad c^2 = x^2 + y^2$$

woraus nach Umrechnung die Ungleichungen

$$a^2 + b^2 > c^2 \quad ; \quad b^2 + c^2 > a^2 \quad ; \quad a^2 + c^2 > b^2$$

folgen. Es ist z.B.

$$a^2 + b^2 = 2z^2 + x^2 + y^2 = 2z^2 + c^2 \quad \text{oder} \quad a^2 + b^2 > c^2$$

entsprechendes gilt für $b^2 + c^2$ und $a^2 + c^2$.

Diese Ungleichungen zeigen, dass jeder ebene Schnitt ein spitzwinkliges Dreieck ergibt, denn es gilt nach dem Kosinussatz für ein rechtwinkliges Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$, für ein spitzwinkliges Dreieck $a^2 + b^2 = c^2 + 2ab \cos \gamma$ und weiter für ein stumpfwinkliges Dreieck $a^2 + b^2 = c^2 - 2ab \cos \gamma$.

Wenn andererseits ein spitzwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen a , b , c gegeben ist, dann sind die Ungleichungen (1) erfüllt; folglich können wir drei positive Zahlen \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} bestimmen durch

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}} \quad , \quad \bar{y} = \sqrt{\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}} \quad , \quad \bar{z} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$$

wenn die Überschüsse als $2\bar{x} = 2ab \cos \gamma$ usw. eingeführt werden. Die durch die Punkte $(\bar{x}, 0, 0)$, $(0, \bar{y}, 0)$, $(0, 0, \bar{z})$ gehende Ebene schneidet den Oktanten in dem durch a, b, c definierten Dreieck.

42. Wir wollen versuchen, ein geschlossenes rechtwinkliges Fünfeck mit Seiten der Länge 1 zu zeichnen. Zu diesem Zweck beginnen wir mit einem Einheitsquadrat $OPTSO$ in der Oxy -Ebene, wobei O den Ursprung des rechtwinkligen Koordinatensystems $Oxyz$ darstellt.

Die Koordinaten von P sind also $(1, 0, 0)$, die Koordinaten von T sind $(1, 1, 0)$ und die von S sind $(0, 1, 0)$. Offenbar können wir unser Modell so anordnen, dass zwei seiner benachbarten

Seiten mit ST bzw. TP zusammenfallen.

Der Beweis wird vektoralgebraisch geführt und dabei der hier unumgängliche Schließungssatz benutzt. Daher führen wir, um das Fünfeck zu schließen, die drei Vektoren \vec{PQ} , \vec{QR} und \vec{RS} ein (Abb. 46).

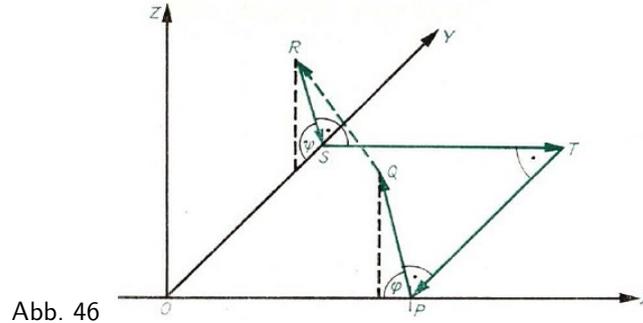


Abb. 46

Da der Winkel QPT gleich 90° ist, muss der Punkt Q zur xOz -Ebene gehören; $\angle RST = 90^\circ$ besagt, dass R in der zOy -Ebene liegt. Die Längen von PQ und RS müssen offenbar gleich 1 sein.

Unsere Aufgabe besteht darin, die Winkel ϕ und ψ so zu wählen, dass gilt:

$$\angle PQR = 90^\circ \quad ; \quad \angle QRS = 90^\circ \quad ; \quad |\vec{QR}| = 1$$

Als Koordinaten von P, Q, R, S ergeben sich nun $(1, 0, 0)$ für P , $(1 - \cos \phi, 0, \sin \phi)$ für Q , $(0, 1 - \cos \psi, \sin \psi)$ für R , $(0, 1, 0)$ für S , und folglich ergibt sich für die Komponenten der Vektoren

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} \quad ; \quad \vec{QR} = \vec{OR} - \vec{OQ} \quad ; \quad \vec{RS} = \vec{OS} - \vec{OR}$$

$$\vec{PQ} = \{-\cos \phi, 0, \sin \phi\}$$

$$\vec{QR} = \{\cos \phi - 1, 1 - \cos \psi, \sin \psi - \sin \phi\} \quad (1)$$

$$\vec{RS} = \{0, \cos \phi, -\sin \phi\}$$

d.h. die expliziten Darstellungen der drei Vektoren \vec{PQ} , \vec{QR} , \vec{RS} . Auf Grund von (1) ergibt sich mit der Bedingung $\angle PQR = 90^\circ$ aus dem Skalarprodukt der Vektoren \vec{PQ} und \vec{QR} , das dann gleich Null ist,

$$\cos^2 \phi + \cos \phi + \sin \phi \sin \psi - \sin^2 \phi = 0$$

wir erhalten somit

$$\cos \phi - 1 + \sin \phi \sin \psi = 0 \quad (2)$$

Auf Grund von (1) ergibt sich in gleicher Weise aus $\angle QRS = 90^\circ$

$$(1 - \cos \psi) \cos \psi - (\sin \psi - \sin \phi) \sin \psi = 0 \quad \text{oder} \quad \cos \psi - 1 + \sin \phi \sin \psi = 0 \quad (3)$$

Die Bedingung $|\vec{QR}| = 1$, d.h. $\sqrt{\vec{QR} \cdot \vec{QR}} = 1$, führt zusammen mit (1) über

$$\sqrt{(\cos \phi - 1)^2 + (1 - \cos \psi)^2 + (\sin \psi - \sin \phi)^2} = 1$$

auf

$$(\cos \phi - 1)^2 + (1 - \cos \psi)^2 + (\sin \psi - \sin \phi)^2 = 1$$

oder

$$1 - 2 \cos \phi + \cos^2 \phi + 1 - 2 \cos \psi + \cos^2 \psi + \sin^2 \phi - 2 \sin \phi \sin \psi + \sin^2 \psi = 1$$

bzw.

$$1 - 2 \cos \phi + \cos^2 \phi + 1 - 2 \cos \psi + \cos^2 \psi + 1 - \cos^2 \phi - 2 \sin \phi \sin \psi + 1 - \cos^2 \psi = 1$$

Folglich ist nach Umstellung

$$\cos \phi + \cos \psi + \sin \phi \sin \psi = \frac{3}{2} \quad (4)$$

Ziehen wir (2) von (4) und (3) von (4) ab, so erhalten wir

$$1 + \cos \psi = \frac{3}{2} \quad ; \quad 1 + \cos \phi = \frac{3}{2} \quad ; \quad \cos \phi = \cos \psi = \frac{1}{2}$$

sowie $\sin \phi \sin \psi = \frac{1}{2}$ (5).

Aus $\cos \phi = \cos \psi = \frac{1}{2}$ folgt $\cos^2 \phi = \frac{1}{4}$ und $|\sin \phi| = |\sin \psi|$; Formel (5) ergibt somit $\sin^2 \phi = \frac{1}{2}$. Das Ergebnis

$$\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \neq 1$$

beweist die Unmöglichkeit des gesuchten Fünfecks.

43. Unsere Zeichnung (Abb. 47) zeigt einen Würfel und seine acht Eckpunkte Q, A, B, C, D, E, F, O . Die Kantenlänge des Würfels sei 1.

Wenn wir sieben Punkte in die Ecken legen (ausgenommen in die Ecke O), dann haben wir die Aufgabe noch nicht gelöst, da ja 9 Abstände gleich 1 sind. Um diese Abstände größer als die Kantenlänge 1 zu machen, legen wir nur einen Punkt in die Ecke Q und sechs Punkte in die Umgebung der Ecken.

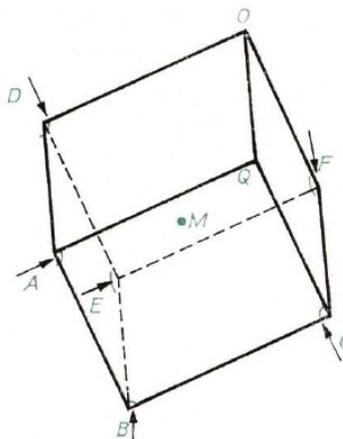


Abb. 47

Den Punkt in der Ecke A bezeichnen wir mit A' , den bei B mit B' usw. Drei Abstände (AA', BB', CC') seien gleich 0,2 und drei Abstände (DD', EE', FF') gleich 0,01.

Um nachzuprüfen, dass alle 21 Abstände größer als 1 sind, reicht es aus, die Abstände $A'B'$ und $A'D'$ zu berechnen; die anderen Abstände sind gleich $A'B'$ bzw. $A'D'$ oder sie sind offensichtlich größer als 1, wobei "offensichtlich" in diesem Falle bedeutet, dass wir uns davon

durch einen Blick auf die Zeichnung überzeugen können, ohne die Verschiebungen messen zu müssen.

Es ist möglich, das Problem mit sieben innerhalb des Würfels liegenden Punkten zu lösen. Zu diesem Zweck genügt es, die sieben Punkte aus der oben angegebenen Lösung in Richtung auf den Mittelpunkt des Würfels um 0,001 zu verschieben.

44. Wenn vier Strahlen P, Q, R, S gegeben sind, dann haben wir 6 Paare, die paarweise gleiche Winkel einschließen (Abb. 48). Eine von dem gemeinsamen Scheitelpunkt O aus abgetragene Einheitsstrecke muss gleiche Projektionen auf den Strahlen OQ, OR, OS besitzen. Wir wollen uns jetzt vorstellen, es bezeichneten entsprechend der archimedischen Methode OP, OQ, OR und OS Einheitskräfte, die am Punkt O in den Richtungen P, Q, R und S angreifen.

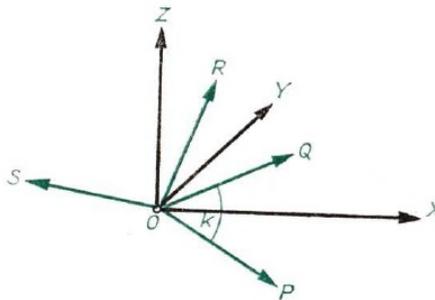


Abb. 48

Durch die Strahlen P und Q können wir eine Ebene legen. Da der Strahl OR mit P und Q denselben Winkel einschließt, steht eine durch OR und durch die Winkelhalbierende des Winkels POQ gelegte Ebene auf der Ebene OPQ senkrecht.

Da die Strahlen OR und OS verschiedene Richtungen besitzen, stellt OPQ ihre Symmetrieebene dar. Analog ergibt sich, dass die Strahlen P und Q bezüglich der Ebene ORS symmetrisch liegen. Die Winkelhalbierenden der Winkel POQ und BOS setzen einander also gegenseitig fort, weshalb wir sie mit OX und $-OX$ bezeichnen wollen.

Die Projektionen der Kräfte OP und OQ auf OX sind gleich, und dasselbe gilt für die Projektionen von OR und OS auf $-OX$.

Die vektoralgebraische Summe der Kräfte $\vec{OP} + \vec{OQ}$ ergibt daher eine Kraft entlang \vec{OX} , und die Summe $\vec{OR} + \vec{OS}$ ergibt eine Kraft entlang $-\vec{OX}$.

Da diese beiden Kräfte dem Betrage nach gleich sind, ist die Vektorsumme $\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR} + \vec{OS}$ gleich Null.

Wir wollen jetzt vektoralgebraisch (Skalarprodukt) die Projektionen der Kräfte $\vec{OQ}, \vec{OR}, \vec{OS}$ auf die Achse OP berechnen. Der Winkel POQ werde mit k bezeichnet. Die Projektion von \vec{OQ} auf die Achse P ist $\cos k$, d.h., die Summe der Projektionen beträgt $3 \cdot \cos k$. Da aber die Summe der vier Kräfte Null ist, muss auch die Summe der Komplemente entlang OP Null sein; wir haben somit

$$1 + 3 \cos k = 0 \quad ; \quad \cos k = -\frac{1}{3} \quad ; \quad k = 109^\circ 28'$$

Wenn es fünf Strahlen mit paarweise gleichen Winkeln gäbe, dann befänden sich darunter vier Strahlen P, Q, R, S , die paarweise Winkel der Größe k einschließen. Die Summe der gleichgroßen Kräfte $\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR} + \vec{OS} + \vec{OT}$ wäre gleich \vec{OT} , und somit von Null verschieden.

Dieselbe Überlegung ergibt sich für die Summe \vec{OP} : Damit haben wir $\vec{OP} = \vec{OT}$, was unmöglich ist, da die Richtungen von \vec{OP} und \vec{OT} einen Winkel von $109^\circ 28'$ einschließen.

Das zeigt, dass sich keine fünf Strahlen angeben lassen, die den in der Aufgabe gestellten Bedingungen entsprechen.

45. Um zu einem Modell eines Tetraeders zu gelangen, zeichnen wir zunächst ein gleichseitiges Dreieck ABC auf ein Blatt (Abb. 49); A, B, C sind Eckpunkte des Tetraeders.

Die vierte Ecke D des Tetraeders liegt oberhalb des Blatts; ihre vertikale Projektion auf das Blatt ist in Abb. 49 dargestellt.

Der Mittelpunkt des Dreiecks ABC ist S , und ST bezeichnet die vertikale Gerade durch S ; die Gerade ASP_1 symbolisiert die vertikale Ebene P_1 durch A und ST . Die Geraden BSP_2 und CSP_3 stellen analoge Ebenen dar.

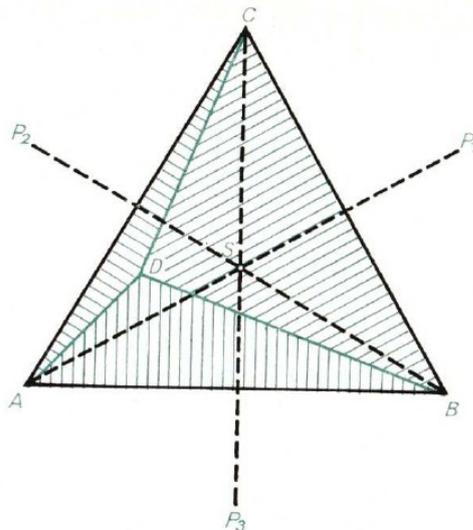


Abb. 49

Offenbar sind die Ebenen P_1, P_2, P_3 Symmetrieebenen für das Dreieck ABC . Weiterhin liegt die von der Ecke A ausgehende, auf der Seitenfläche BCD senkrecht stehende Höhe des Tetraeders $ABCD$ in der Ebene P_1 ; selbstverständlich liegt die von B ausgehende Höhe in P_2 und die von C ausgehende in P_3 . Demnach schneidet die aus der Ecke D gefüllte vertikale Höhe keine der von einer anderen Ecke ausgehenden Höhen. Das ist eine Folge der Wahl von D außerhalb der Symmetrieebenen P_1, P_2, P_3 .

Abschließend haben wir noch zu beweisen, dass sich auch die von A, B, C ausgehenden Höhen nicht schneiden.

Angenommen, die von A ausgehende Höhe schneide die von B ausgehende; der Schnittpunkt würde zu ST gehören, und die Symmetrieebene P_3 des Dreiecks wäre zugleich Symmetrieebene des Tetraeders. Das steht jedoch im Widerspruch zu der Annahme, D liege links von P_3 . Die von A und B ausgehenden Höhen schneiden sich also nicht, und dasselbe gilt für die von B und C ausgehenden Höhen sowie für die von C und A ausgehenden Höhen.

46. Abb. 50 zeigt die Darstellung eines Ikosaeders.

Wir sehen 7 weiße, 7 schwarze und 6 rote Flächen, d.h., 3 Farben sind ausreichend. Der aus 10 Flächen bestehende zentrale Teil lässt klar erkennen, dass zwei Farben nicht genügen.

Angenommen, weiß und schwarz reichten aus. Wir wollen das zentrale Dreieck weiß färben; die drei anschließenden Dreiecke müssen schwarz sein, jedoch hat jedes von ihnen zwei Nachbarn (neben dem zentralen Dreieck), die weiß zu färben wären. Wie wir sehen, bilden die benachbarten Flächen 3 Gruppen von aneinanderliegenden Paaren, so dass die weiße Farbe nicht ausreicht.

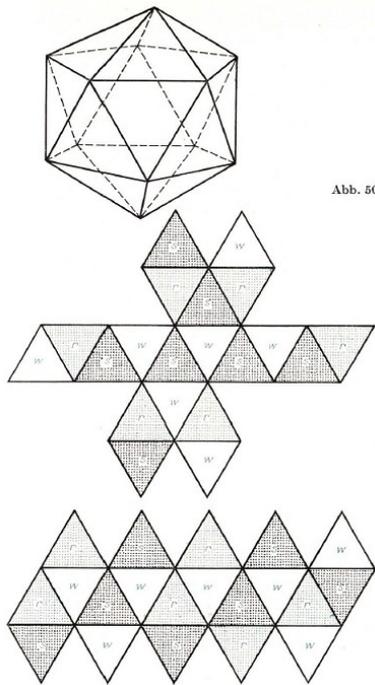


Abb. 50

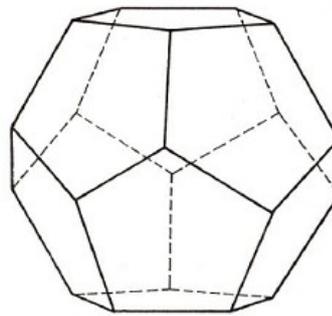
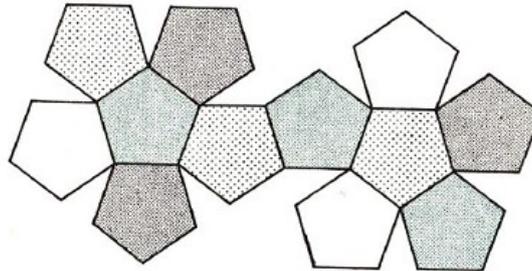


Abb. 51



Eine Fläche des Dodekaeders (Abb. 51) sei weiß; für die benachbarten Flächen stehen uns schwarz, rot und grün zur Verfügung. Für eine der Flächen wählen wir schwarz, die darauf folgende muss rot sein (oder grün). Es ist jedoch unmöglich, eine Kette von fünf Flächen mit 2 Farben zu färben, da 5 ungerade ist.

47. Nein! Nehmen wir an, es sei D ein Polyeder, wie es in der Aufgabenstellung beschrieben ist. Um ein Modell von D anzufertigen, bereiten wir 10 fünfeckige Flächen aus Pappe vor; sie haben $5 \cdot 10 = 50$ Seiten; nach dem Zusammenkleben der Flächen gehen die 50 Seiten in 25 Kanten über.

Der Eulersche Satz "Anzahl der Flächen + Anzahl der Ecken = Anzahl der Kanten + 2" liefert in unserem Fall

$$10 + C = 25 + 2 = 27$$

wobei C die Anzahl der Ecken bezeichnet; wir erhalten somit 17 Ecken.

Wir stellen uns jetzt in jeder Ecke kleine Pfeile \rightarrow angebracht vor, welche die Richtungen entlang der Kanten angeben, wenn wir von der jeweils betrachteten Ecke ausgehen. An jeder Ecke gibt es wenigstens drei Pfeile.

Für die Gesamtzahl der Pfeile ergibt sich damit mindestens $3 \cdot 17 = 51$. Da entlang jeder Kante zwei Pfeile verlaufen, beträgt die Anzahl der Kanten wenigstens $51 : 2$, d.h. wenigstens 26. Das ist aber unmöglich.

Wie wir wissen, besitzt unser Polyeder 25 Kanten. Dieser Zehnflächner existiert also nicht.

48. Beide Polyeder können als Modelle dargestellt werden, die aus regulären Polyedern bestehen. Fünf kongruente reguläre Tetraeder ergeben ein Dodekaeder, wenn man eines von ihnen mit den übrigen vier überdeckt; damit werden 8 der 20 Dreiecke unsichtbar.

Neun kongruente reguläre Oktaeder ergeben einen 56-Flächner, wenn man eines von ihnen voll besetzt; 16 der 72 Flächen verschwinden dabei, und es entsteht das gesuchte Modell.

49. Gegeben sei ein Polyeder; wir wollen alle seine Flächen mit aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen nummerieren und betrachten darauf alle möglichen Paare von Flächen.

Jedes Paar ist entweder benachbart oder nicht benachbart. Alle Paare von nicht benachbarten Flächen wollen wir nummerieren. Wenn eine Fläche zum k -ten Paar der nicht benachbarten Flächen gehört, so schreiben wir darauf die k -te Primzahl p_k .

Verfahren wir nach dieser Regel, so kann es vorkommen, dass gewisse Flächen keine Nummer erhalten.

In diesem Falle schreiben wir die nächste nicht verwendete Primzahl auf die leeren Flächen. Abschließend tragen wir auf jeder Fläche das Produkt aller Primzahlen ein, die nach dem oben beschriebenen Vorgehen auf ihr stehen.

Die Bedingungen der Aufgabe sind nun offensichtlich erfüllt, und zwar sogar ohne die Voraussetzung der Regularität des Polyeders.

Ergebnis: Die Seiten eines jeden Polyeders können so mit natürlichen Zahlen beschrieben werden, wie es in der Aufgabenstellung gefordert ist.

50. Es sei 1 der Radius des Ausgangskreises. Die beiden, einen Winkel von 120° einschließenden Strahlen schneiden einen Bogen der Länge $\frac{2}{3}\pi$ heraus (Abb. 52).

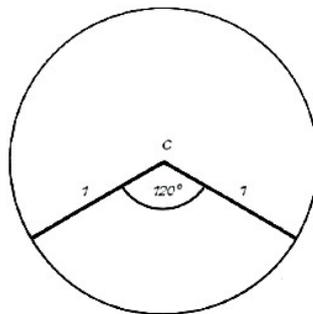


Abb. 52

Die Grundfläche des kleinen Kegels ist somit ein Kreis mit dem Umfang $\frac{2}{3}\pi$ und dem Durchmesser $\frac{2}{3}$. Wir schneiden die Kugel S mit einer durch C und den Durchmesser gehenden Ebene. Der Schnitt des kleinen Kegels stellt ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie $\frac{2}{3}$ und den Seiten $(1, 1)$ dar; die Höhe des Dreiecks ist folglich $2\frac{\sqrt{2}}{3}$ (Abb. 53).

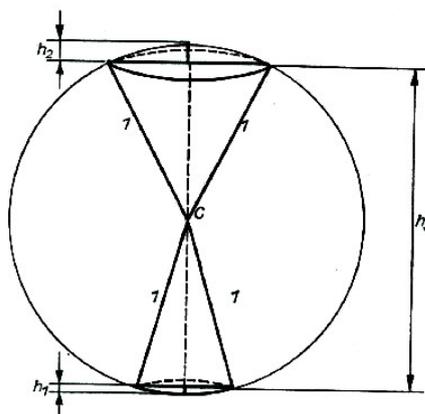


Abb. 53

Die Höhe h_1 der Kugelkappe, die zu dem von dem kleinen Kegel aus S herausgeschnittenen Teil gehört, ist somit gleich $1 - 2\frac{\sqrt{2}}{3}$. Die Grundfläche des großen Kegels wird von einem Kreis mit dem Umfang $\frac{4\pi}{3}$ umrandet; das ergibt $h_2 = 1 - \frac{\sqrt{5}}{3}$, wobei h_2 die Höhe der Kugelkappe bezeichnet, die durch den großen Kegel bestimmt wird.

Ohne den Flächeninhalt des Streifens der Kugeloberfläche zu verändern, der zwischen den

beiden Kappen liegt, können wir annehmen, dass die beiden Grundflächen der Kegel parallel seien. Diese Annahme führt auf das Ergebnis $h_1 + h_2 + h_3 = 2$, wobei h_3 den Abstand der beiden Grundflächen voneinander bezeichnet, d.h. die Höhe der Sanduhr. Wir erhalten somit

$$h_3 = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{5}}{3}$$

Es ist also

$$h_1 : h_2 : h_3 = \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) : \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right) : \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{5}}{3} \approx 0,0572 : 0,2546 : 1,6882$$

Um zu beweisen, dass dieses Ergebnis eine Antwort auf unsere Frage darstellt, müssen wir zeigen, dass $h_1 : h_2 : h_3 = V_1 : V_2 : V_3$ gilt, wobei V_1, V_2, V_3 die Rauminhalte der drei in der Aufgabenstellung definierten Teile bezeichnen.

Ein Satz des Archimedes lehrt nun aber, dass

$$h_1 : h_2 : h_3 = A_1 : A_2 : A_3$$

wobei A_1, A_2, A_3 jeweils die Flächeninhalte der drei Teile der Oberfläche von S bezeichnen, wie sie durch die Sanduhr erzeugt werden.

Um den Beweis abzuschließen, muss man wissen, dass $A_1 : A_2 : A_3 = V_1 : V_2 : V_3$ gilt. Dies ist ebenfalls eine bekannte geometrische Aussage, die von Archimedes gefunden wurde und in seiner Schrift über Kugel und Zylinder hergeleitet ist.

51. Die kompakteste Anordnung der ursprünglichen Kugeln wird erreicht, wenn wir die erste Schicht so legen, wie sie durch die ausgezogenen Kreise in Abb. 54 dargestellt wird, und die zweite Schicht in der durch die gestrichelten Kreise gezeigten Weise.

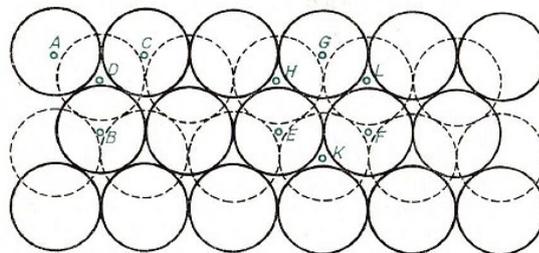


Abb. 54

Die kleineren Löcher werden von vier Ausgangskugeln gebildet, d. h. von Kugeln mit dem Radius 1 (Abb. 54, die Kugeln mit den Mittelpunkten A, B, C, D). Da sich diese Kugeln gegenseitig berühren, stellen ihre Mittelpunkte die Ecken eines regulären Tetraeders $ABCD$ mit der Seitenlänge 2 dar (Abb. 55).

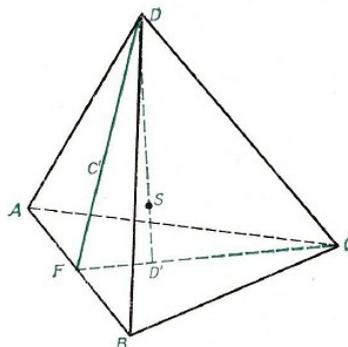


Abb. 55

Bringen wir eine Kugel mit dem größtmöglichen Radius r_1 in eine der kleineren Löcher, so wird diese 4 Ausgangskugeln berühren, und ihr Mittelpunkt wird im Schnittpunkt der vier Höhen des Tetraeders liegen.

Um den Radius r_1 zu bestimmen, betrachten wir den Schnitt des Tetraeders $ABCD$ mit einer Ebene, die durch die beiden Höhen CC' und DD' des Tetraeders geht (Abb. 56). Wir finden:

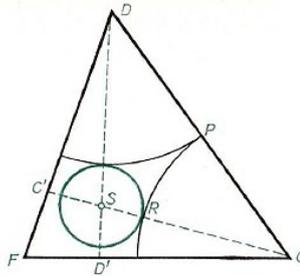


Abb. 56

$$CP = DP = CR = 1 \quad ; \quad CF = DF = \sqrt{3}$$

$$FD' = FC' = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad ; \quad CC' = DD' = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Die Dreiecke CSD' und DFD' sind ähnlich, so dass

$$SC : SD = FD : FD'$$

gilt. Auf Grund der Gleichungen $SD' = DD' - DS = DD' - SC$ erhalten wir also

$$\frac{SC}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - SC} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \quad \text{d.h.} \quad SC = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

und es ist $r_1 = CS - CR, r_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1$.

Die größeren Löcher werden von 6 Ausgangskugeln gebildet, deren Radius gleich 1 ist; in Abb. 54 sind das die Kugeln mit den Mittelpunkten E, F, G, H, K, L . Ihre Mittelpunkte sind die Ecken eines regulären Oktaeders $EFGHKL$ mit der Seitenlänge 2 (Abb. 57).

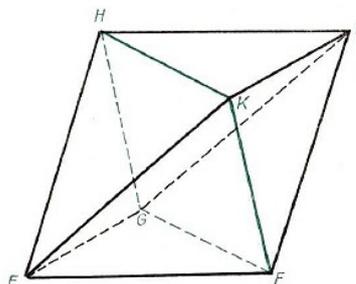


Abb. 57

Eine Kugel mit dem größtmöglichen Radius r_2 , in eine der größeren Löcher gebracht, wird alle 6 Kugeln berühren. Ihr Mittelpunkt liegt im Symmetriezentrum des Oktaeders, z.B. in der Mitte des Quadrats $FCHK$ (Abb. 58), und r_2 ist der Radius des Kreises, der der aus 4 kurzen Bögen der großen Kreise gebildeten Figur einbeschrieben ist.

Es ist dann $KF = FG = GH = 2, HF = 2\sqrt{2}$ und also $r_2 = \sqrt{2} - 1$.

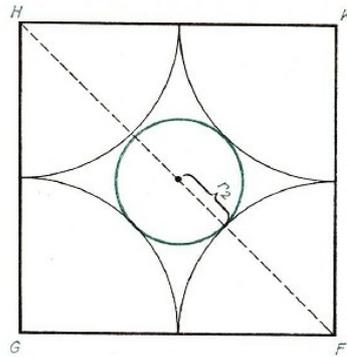


Abb. 58

52. Die sphärischen Durchmesser (der Abstand zweier auf einem Großkreis liegenden Punkte des Grundkreises der Kugelkappe angegeben im Winkelmaß entsprechend dem zugehörigen Zentriwinkel am Mittelpunkt der Kugel, Abb. 59) dreier Kappen C_1, C_2, C_3 auf einer Kugel seien $s_1 \geq s_2 \geq s_3$.

Zur Lösung des Problems wollen wir zeigen:

Wenn die gesamte Kugeloberfläche S nicht durch Verschieben der Kappen C_1 und C_2 bedeckt werden kann, dann kann sie auch nicht von den Kappen C_1, C_2 und C_3 überdeckt werden.

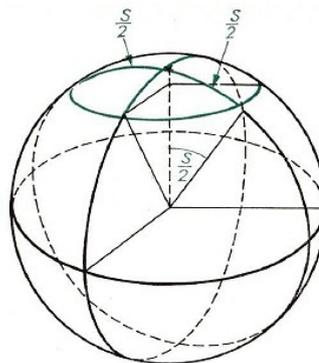


Abb. 59

Zwei Kappen C_1, C_2 bedecken die gesamte Kugeloberfläche S nicht, wenn die Summe ihrer sphärischen Durchmesser kleiner ist als der Winkel 2π , d.h., wenn $s_2 < 2\pi - s_1$ ist. Diese Ungleichung besagt, dass der sphärische Durchmesser der Kappe C_2 kleiner als der entsprechende Durchmesser der zu C_1 komplementären Kappe $S - C_1$ ist, deren Durchmesser gleich $2\pi - s_1$ ist. Wie immer wir also die Kappe C_2 verschieben mögen, sie wird nie das Gebiet $S - C_1$ überdecken.

Nach unserer Voraussetzung besitzt das Gebiet $S - C_1 - C_2$ den sphärischen Durchmesser $2\pi - s_1$ unabhängig von der Lage von C_2 .

Es kann daher nicht mit C_3 überdeckt werden, da der sphärische Durchmesser dieser Kappe kleiner ist (auf Grund von $s_3 \leq s_2 < 2\pi - s_1$). Wenn also eine Kugel nicht mit zwei Kappen überdeckt werden kann, dann lässt sich dieses Ziel auch durch Hinzunahme einer dritten kleineren Kappe C_3 nicht erreichen.

53. Das Zauberwort "Heureka" soll den Leser auf Archimedes hinweisen und auf dessen schönen Satz über den einer Kugel umschriebenen Zylinder:

Jedes Paar von zur Achse des Zylinders senkrechten Ebenen bestimmt zwei zwischen den Ebenen liegende Gebiete - ein Gebiet auf der Kugel und ein Gebiet auf dem Zylinder; ihre Flächeninhalte sind gleich.

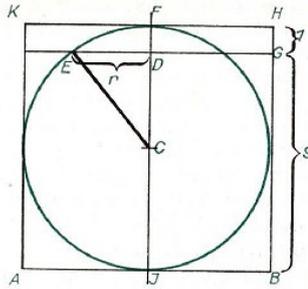


Abb. 60

Die Darstellung in Abb. 60 entsteht beim Schnitt der Kugel und des umbeschriebenen Zylinders mit einer Ebene, die die Achse des Zylinders JF enthält, die einen Durchmesser der Kugel darstellt. Die Geraden AB und FH bezeichnen die Spuren zweier Tangentialebenen an die Kugel in den Punkten J und F ; AB ist die (kreisförmige) Grundfläche des Zylinders, HK seine Deckfläche.

Zu ihnen parallel verläuft eine dritte Ebene; sie schneidet die Ebene $ABHK$ in zwei Teile, HG und BG , deren Größen sich zueinander wie $1 : 9$ verhalten. Hieraus folgt, dass der auf der Kugel durch den Schnitt EDG bestimmte Kreis die Kugeloberfläche im Verhältnis $1 : 9$ zerlegt; D ist der Mittelpunkt des Kreises und DE sein Radius r . Wir haben somit $r^2 = CE^2 - CD^2$. Da CD gleich $CF - GH$ ist, ergibt sich $CD = \frac{4}{10}$, folglich

$$r^2 = \frac{25 - 16}{100} \quad ; \quad r = \frac{3}{10}$$

Der Kreisumfang $2\pi r$ ist also angenähert gleich 1,885.

54. Es sei S der Mittelpunkt der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $S = (0, 0, 0)$. Es sei $P = (x_1, y_1, z_1)$, $Q = (x_2, y_2, z_2)$.

Für den Kosinus des Winkels PSQ gilt dann nach dem Skalarprodukt der Vektoren \vec{OP} und \vec{OQ} mit $|\vec{OP}| = |\vec{OQ}| = 1$

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = \cos(PSQ) \equiv E \quad (1)$$

Das Maximum des Abstandes PQ wird erreicht, wenn der Kosinus des Winkels PSQ ein Minimum ist. Offensichtlich gilt $E \geq 0$, da alle sechs E definierenden Variablen nicht negativ sind. Wenn der Kosinus niemals negativ ist, gilt $\angle(PSQ) < 90^\circ$.

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, dass beide Punkte P und Q im Innern des Oktanten liegen; alle sechs Variablen in (1) sind positiv, d.h. $\angle(PSQ) < 90^\circ$, und PQ ist kleiner als das Maximum. Der Fall, dass einer der Punkte mit A , B oder C zusammenfällt, ist trivial:

Das Maximum wird erreicht, (d.h., der Winkel beträgt 90°).

Der einzige nichttriviale Fall, der noch zu betrachten wäre, ergibt sich, wenn P auf AB zwischen A und B liegt und Q auf BC zwischen B und C . Angenommen es sei Bgleich $(0, 0, 1)$. Wie man sogleich sieht, sind die beiden Werte z_1, z_2 positiv, woraus $E > 0$ folgt; PQ ist in diesem Falle also kleiner als das Maximum.

Damit ist der im letzten Satz der Aufgabenstellung geforderte Beweis vollständig erbracht.

55. Wir betrachten zunächst die Fläche, die bei der Rotation der symmetrischen Kurve aus Abb. 61 um AB entsteht. Die durch diese Rotation erhaltene birnenförmige Fläche stellen wir so, dass die Gerade AB senkrecht steht. Man sieht unmittelbar, dass alle ihre horizontalen Schnitte Kreise sind.

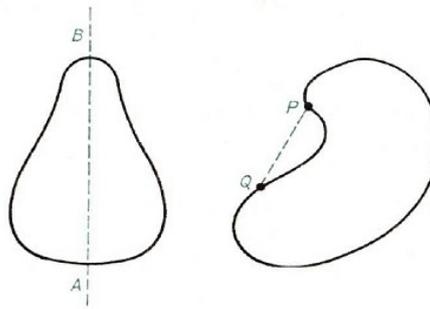


Abb. 61 und 62

Die Fläche ist aber nicht konvex, da bei einer konvexen Fläche alle Schnitte konvex sein müssen, und in diesem Beispiel ist jeder Axialschnitt nicht konvex. Die erste Aussage ist somit falsch. Die zweite Aussage ist wahr. Um das zu beweisen, müssen wir zeigen, dass nicht nur die vertikalen, sondern auch alle anderen Schnitte der gegebenen Fläche konvex sind.

Nehmen wir an, ein nichtvertikaler Schnitt sei nicht konvex. Ein derartiger Schnitt stellt eine ebene geschlossene Kurve dar, auf der zwei Punkte P und Q liegen, deren geradlinige Verbindung außerhalb der Kurve verläuft, d.h. auch außerhalb der Fläche (Abb. 62).

Ein vertikaler Schnitt durch diese Sehne ergibt eine Kurve, welche die Punkte P und Q mit der außerhalb der Kurve liegenden Strecke PQ enthält. Das widerspricht der Voraussetzung des Satzes b).

Dieser Widerspruch resultiert aus der Annahme, es gäbe einen nichtkonvexen nichtvertikalen Schnitt. Folglich müssen wir die Existenz derartiger Schnitte ausschließen; dieses Ergebnis ist zur Aussage des Satzes b) äquivalent.

56. Die acht Knoten liegen in vier Paaren diametraler Punkte auf der Kugel. Es sei N (der Nordpol) und S (der Südpol) ein solches Paar (Abb. 63).

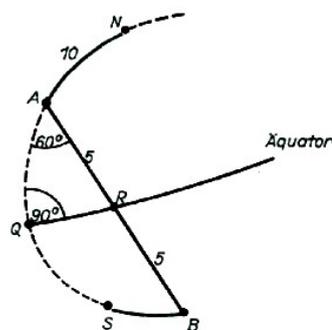


Abb. 63

Die Fäden NA , AB , BS verbinden N mit S . Der Faden NA verläuft entlang eines Meridians, der Faden AB geht unter einem Winkel von 60° links von der Verlängerung AQ ab und kreuzt den Äquator in R . Die nördliche Hälfte der Route ist also gleich $NA + AR = 15$ cm.

Aus der Abb. 63 lassen sich die folgenden Angaben entnehmen:

Länge des Bogens $NA = 10$ m, Winkel $QAR = 60^\circ$,

Länge des Bogens $AR = 5$ cm, Winkel $AQR = 90^\circ$,

Länge des Bogens $QR = \frac{1}{12}$ der Äquatorlänge.

Damit erhalten wir

$$\sin 60^\circ : \sin 90^\circ = \sin QR : \sin AR$$

(Der große Anfangsbuchstabe S weist hier darauf hin, dass sich der Sinus auf die Blickwinkel bezieht, unter denen QR und AR vom Mittelpunkt der Kugel aus zu sehen sind.) Es ergibt

sich also

$$\sin QR = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) : 1 = \frac{1}{2} : \sin AR \quad \rightarrow \quad \sin AR = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Nun hat aber der Bogen AR die Länge 5 cm. Wenn wir seinen Blickwinkel mit x bezeichnen und mit r seinen Abstand vom Mittelpunkt der Kugel, dann können wir schreiben

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad rx = 5 \text{ cm}$$

und erhalten mit $x = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, d.h. der Umkehrfunktion der Sinusfunktion (Bogenfunktion), für r in Zentimetern

$$r = \frac{1}{\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

57. Abb. 64a zeigt den Würfel; die Kantenlänge sei 1 dm. $ABCD$ ist die Deckfläche, $EFGH$ die Grundfläche des Würfels. Der Ausgangspunkt S halbiert die Kante AB .

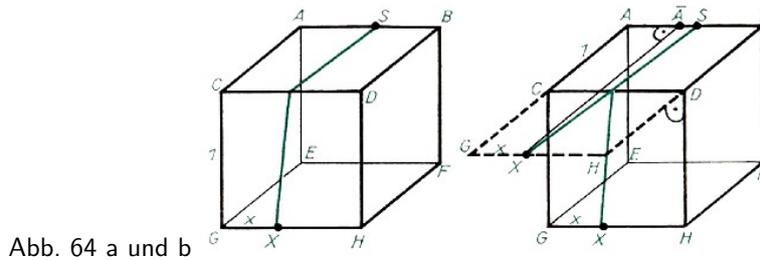


Abb. 64 a und b

Zu jedem Punktepaar P, Q auf dem Würfel gibt es unter allen möglichen Wegen von P nach Q einen kürzesten auf der Oberfläche des Holzwürfels.

Die Länge dieses Weges ist der Abstand PQ .

Diese allgemeine Definition bestimmt für alle möglichen Paare von Punkten P und Q auf dem Würfel den Abstand PQ . Unsere Aufgabe ist es, einen Punkt X zu finden, so dass der Abstand SX ein Maximum ist.

Offenbar haben wir den Punkt X auf der Kante GH zu suchen, die der Kante AB mit dem Mittelpunkt S gegenüberliegt. Den Abstand GX wollen wir mit x bezeichnen.

Um den Abstand SX zu berechnen, drehen wir (Abb. 64b) die Seitenfläche $CDGH$ in die Höhe der Deckfläche $ABCD$ des Würfels; die Länge der Strecke SX lässt sich einfach bestimmen.

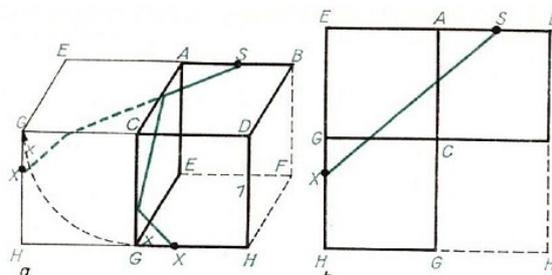


Abb. 65 a und b

Es gibt jedoch noch eine andere Möglichkeit: Der Marienkäfer kann nach links gehen, (d.h., er kann die Kante AC kreuzen und (Abb. 65a) seinen Weg auf der linken Seitenfläche $ACEG$ fortsetzen, um über CG nach X zu gelangen.

Um die Länge dieses Weges zu berechnen, betrachten wir Abb. 65b. Diese Darstellung entsteht im Ergebnis einer Drehung der Seitenfläche $CDGH$ an der Kante CG um 90° und einer nachfolgenden Drehung des entstandenen Rechtecks $AEDH$ um AD um 90° bis auf die Höhe von $ABCD$.

In beiden Fällen wenden wir den Lehrsatz des Pythagoras an, der für das Quadrat von SX in Abb. 64b den Wert $2^2 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$, und in Abb. 65b den Wert $\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (1+x)^2$ ergibt. Wir wollen die beiden Längen von SX als gleich annehmen; folglich ist

$$\frac{1}{4} - x + 4 = 1 + 2x + \frac{9}{4}$$

woraus sich $x = \frac{1}{3}$ ergibt. Wir haben zu beweisen, dass der durch $x = \frac{1}{3}$ definierte Punkt X der von S am weitesten entfernte Punkt ist. Dazu nehmen wir an, X bewege sich in Abb. 64b auf GH gegen G ; die Strecke SX wächst, und es entsteht der Eindruck, als wäre der durch $x = \frac{1}{3}$ definierte Punkt X für S nicht der am weitesten entfernte Punkt.

Das ist aber nicht richtig, denn wenn wir X in Abb. 64b auf G zu bewegen, dann bewegen wir X auch in Abb. 65b gegen G , und die Zeichnung zeigt, dass SX abnimmt. Da wir die Abstände als die kürzesten Wege definiert hatten, verringern wir den Abstand SX , wenn wir x kleiner als $\frac{1}{3}$ machen. Bewegen wir X in Abb. 64b zum Mittelpunkt von GH , dann verkleinern wir SX in Abb. 64b, vergrößern es jedoch in Abb. 65b, (d.h. aber, wir vermindern den Abstand SX wieder).

Aus Abb. 64b kann der Abstand SX für $x = \frac{1}{3}$ unmittelbar abgelesen werden; er ist gleich

$$\sqrt{4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{146}{36}} \approx 2,007$$

58. Wir wählen den Mittelpunkt O von AA' als Ursprung (Abb. 66). Die Lage jedes Punktes P im Raum kann auf Grund einer Punkt-Vektor-Zuordnung durch einen Vektor angegeben werden, dessen Anfang O und dessen Ende P ist. Nehmen wir an:

Der Punkt $P(t)$ startet in A zum Zeitpunkt Null ($t = 0$) und bewegt sich mit der Geschwindigkeit 1 entlang AE . Ferner startet $P'(t)$ zum gleichen Zeitpunkt in A' und bewegt sich mit der Geschwindigkeit 1 entlang $A'E'$.

Der Vektor $\overrightarrow{OP}(t)$ ist gleich der Summe des Vektors \vec{a} , der durch \overrightarrow{OA} dargestellt wird, und eines durch $\overrightarrow{AP}(t)$ bestimmten Vektors $t \cdot \vec{v}$, wobei \vec{v} ein entlang AE gerichteter Einheitsvektor ist.

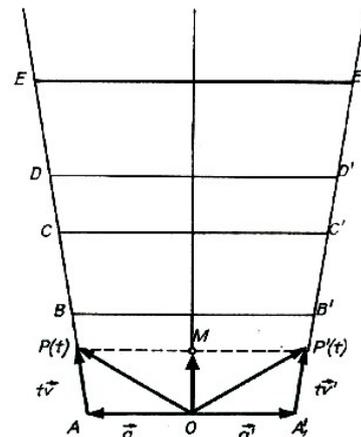


Abb. 66

$\overrightarrow{OP}(t)$ symbolisiert somit den Summenvektor $\vec{a} + t \cdot \vec{v}$. Ebenso stellt $\overrightarrow{OP'}(t)$ den Vektor $\vec{a}' + t \cdot \vec{v}'$ dar; dabei ist \vec{a}' der durch $\overrightarrow{OA'}$ dargestellte Vektor, und \vec{v}' ist der entlang $A'E'$ gerichtete Einheitsvektor.

Ist M der Mittelpunkt von PP' , so wird der Vektor \overrightarrow{OM} durch folgende Überlegung (vgl. Abb.

66) gefunden:

$$\vec{OP} = \vec{a} + t \cdot \vec{v} \quad (1.1)$$

$$\vec{OP'} = \vec{a'} + t \cdot \vec{v'} \quad (1.2)$$

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PM} = \vec{a} + t \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{k} \quad \text{mit} \quad \vec{PM} = t \cdot \vec{k} \quad (2.1)$$

$$\vec{OM} = \vec{OP'} + \vec{P'M} = \vec{a'} + t \cdot \vec{v'} + t \cdot \vec{k'} \quad \text{mit} \quad \vec{P'M} = t \cdot \vec{k'} \quad (2.2)$$

Durch Addition von (2.1) und (2.2) folgt

$$\vec{OM} = \frac{\vec{a} + \vec{a'}}{2} + t \frac{\vec{v} + \vec{v'}}{2} + t \frac{\vec{k} + \vec{k'}}{2}$$

Wegen $\vec{a'} = -\vec{a}$ und $\vec{k'} = -\vec{k}$ und mit v als konstantem Vektor gilt $\vec{OM} = t \cdot \vec{v}$.

Zu Beginn ist $t \cdot \vec{v}$ gleich dem Nullvektor. Wie man sogleich sieht, bewegt sich $M(t)$ mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Bahn, deren Richtung durch \vec{v} gegeben ist; diese Bahnlinie halbiert alle Sprossen.

59. Ja. Wir stellen die Schachtel auf eine Kante, so dass die diese Kante enthaltene vertikale Ebene eine Symmetrieebene der Schachtel darstellt. Die Stellung des Beobachters ist so gewählt, dass diese Ebene die Verbindungsstrecke seiner Pupillen unter einem rechten Winkel halbiert (Abb. 67).

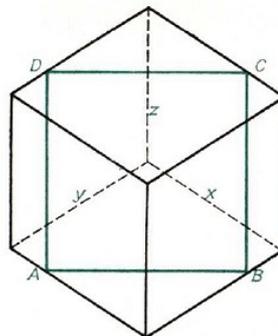


Abb. 67

Er sieht von der am nächsten liegenden Seitenfläche das untere Kantenpaar und von der am weitesten entfernt liegenden das obere Kantenpaar.

Beide Kantenpaare schließen einen Winkel von 90° ein. Vom Scheitelpunkt des unteren Winkels schneidet der Beobachter $75 \text{ mm} = 0,75 \text{ dm}$ auf beiden Kanten des unteren Paares ab, er erhält auf diese Weise auf dem unteren Kantenpaar zwei Punkte A und B .

Ein ähnliches Vorgehen ergibt auf dem oberen Kantenpaar zwei Punkte C und D .

Ohne jede Berechnung sehen wir, dass A, B, C, D Eckpunkte eines Rechtecks sind. Um zu beweisen, dass dieses Rechteck ein Quadrat ist, genügt es zu zeigen, dass $AB = BC$ gilt.

Zum Beweis dieser Gleichheit reicht es aus, wenn wir das obere Kantenpaar der Grundseite als x - bzw. y -Achse sowie die vertikale Kante als z -Achse wählen und mit Hilfe des Lehrsatzes des Pythagoras $(BC)^2$ berechnen.

Als Ergebnis erhalten wir $\frac{9}{8} \text{ dm}^2$. Wiederum mit dem Satz des Pythagoras finden wir $(AB)^2 = \frac{9}{8} \text{ dm}^2$, woraus wir schließen können, dass $ABCD$ ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $\frac{9}{8} \text{ dm}^2$ ist. Als Länge von AB finden wir $10 \text{ cm} + 6 \text{ mm} + \frac{7}{100} \text{ mm}$. Eine Platte von $10,6 \text{ cm}$ Seitenlänge kann folglich in die Schachtel gesteckt werden, ohne dass man sie verbiegen müsste. Danach

kann die Schachtel verschlossen werden.

60. Es gibt viele Lösungen; denn wenn f eine Lösung darstellt, dann sind auch f^2 , $\frac{f+f^2}{2}$ usw. Lösungen. Die einfachste Lösung ist jedoch

$$36\pi \frac{\left(\frac{4}{3}r^3\pi\right)^2}{(4r^2\pi)^3} = 36\pi i \frac{V^2}{A^3}$$

Die beiden Aussagen sind nicht äquivalent: Die erste Aussage schließt die Existenz von Körpern nicht aus, die von der Kugel verschieden sind, jedoch die gleiche Oberfläche und das gleiche Volumen wie die Kugel besitzen. In der zweiten Aussage wird eine solche Möglichkeit ausdrücklich ausgeschlossen.

61. Wir beginnen mit der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$. Auf ihrer Oberfläche liegen die folgenden 8 Punkte mit den Koordinaten $x = \pm\sqrt{3}$, $y = \pm\sqrt{3}$, $z = \pm\sqrt{3}$.

Die 8 Ebenen, die die Kugel in diesen Punkten berühren, bilden ein reguläres Oktaeder, das weder mit dem Äquator $x^2 + y^2 = 9$ noch mit den Meridianen $y^2 + z^2 = 9$, $z^2 + x^2 = 9$ Punkte gemeinsam hat.

Nun wollen wir die 8 Ebenen ein wenig in Richtung auf den Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ der Kugel verschieben, ohne dabei jedoch ihre Orientierungen zu verändern. Die neuen Ebenen können wir als Messer ansehen, die von der Kugel kleine Kappen abschneiden.

Ein derartiges Vorgehen verändert die Kugel: Sie verliert ihre Kugelform. Dessen ungeachtet bleiben die Projektionen des neuen konvexen Körpers auf die Ebenen xy , yz und zx dieselben gleichgroßen Kreisscheiben wie zuvor.

Die Antwort ist also positiv.

Lässt sich das Problem lösen, indem man die Kugel vergrößert, statt sie wie oben zu verkleinern?

2.4 Praktisches und Unpraktisches

62. Zunächst stellen wir folgendes fest: Wählt Hans als Punkt P den Schwerpunkt des Dreiecks (Abb. 68), so liegt Peters vorteilhaftester Schnitt parallel zu einer Dreiecksseite.

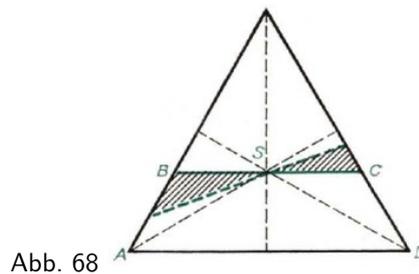


Abb. 68

Um das zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass das doppelt schraffierte Dreieck einen größeren Flächeninhalt hat als das einfach schraffierte (Abb. 68). Der Flächeninhalt des Teilstückes $ABCD$ beträgt $\frac{5}{9}$ des Gesamtflächeninhaltes. Die Stücke stehen also im Verhältnis 5 zu 4.

Wie man leicht sieht, ist die Wahl des Schwerpunktes für Hans am günstigsten; in jeder anderen Lage von P könnte sich Peter ein Stück abschneiden, das nicht nur aus dem Trapez $ABCD$ besteht, sondern zu dem noch ein weiteres Stück hinzukommt (Abb. 69).

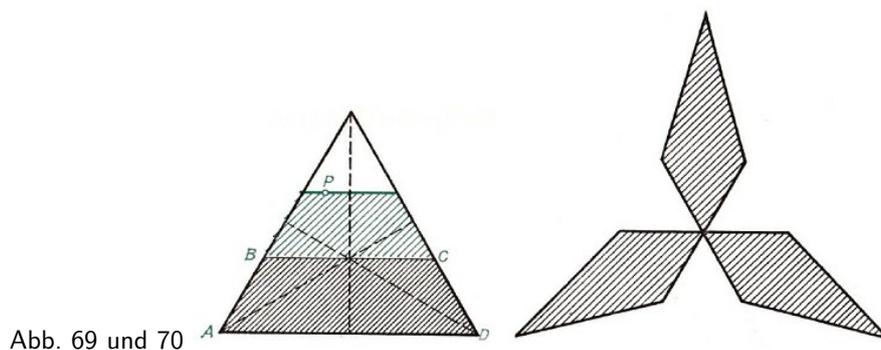


Abb. 69 und 70

Die Beantwortung der anderen Frage überlassen wir dem Leser. Es ist auf jeden Fall leicht einzusehen, dass eine Torte der merkwürdigen Form aus Abb. 70 Peter die Möglichkeit gibt, bei jeder Wahl des Punktes P mindestens $\frac{2}{3}$ der Torte abzuschneiden.

63. Die Zeitangabe auf einer Uhr ist bereits vollständig durch die Stellung des Stundenzeigers auf dem Ziffernblatt bestimmt (Abb. 71). Der Minutenzeiger versieht nur eine Hilfsfunktion; er stellt eine Art Nonius dar, der die Genauigkeit der Ablesung verzweifacht.

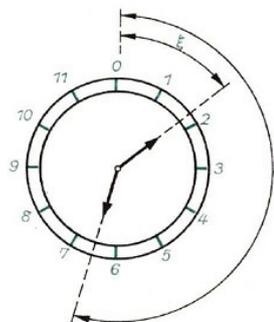


Abb. 71

Bezeichnen wir die der Stellung des kleinen Zeigers entsprechende Zahl mit ξ , die des großen Zeigers mit η , so ergibt sich

$$\eta - 12\{\xi\} = 0 \quad ; \quad 0 \leq \xi \leq 12, \quad 0 \leq \eta < 12$$

wobei $\{\xi\}$ den Überschuss über die größte in ξ enthaltene ganze Zahl $[\xi]$ bezeichnet. Wir verwenden hier die Funktion $f(x) = [x]$, gesprochen meist " $f(x)$ gleich größtes Ganzes von x ". Es gilt für diese Funktion die Ungleichung

$$x - 1 < [x] \leq x$$

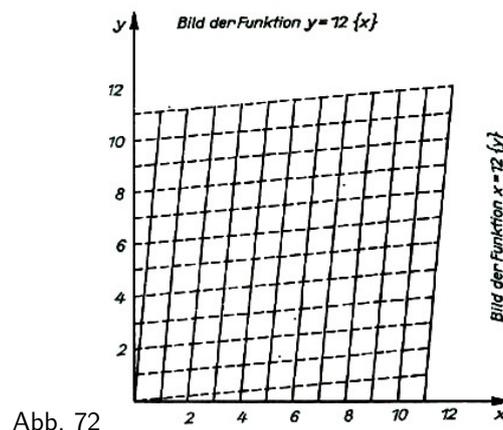
Der Definitionsbereich der Funktion $y = [x]$ ist also die Menge der reellen Zahlen, der Wertevorrat die Menge aller ganzen Zahlen und ihr Bild die sogenannte Treppenkurve mit; Sprungstellen bei allen ganzen x .

Wir nehmen nun an, beide Zeiger hätten dieselbe Länge. Mit x bezeichnen wir die Stellung des einen Zeigers, mit y die des anderen. Es lassen sich drei Fälle unterscheiden:

I. Ist $x - 12\{y\} \neq 0$, dann ist notwendigerweise $y - 12\{x\} = 0$, und die Uhr zeigt die Zeit x an.

II. Ist $y - 12\{x\} \neq 0$, dann ist notwendigerweise $x - 12\{y\} = 0$, und die Uhr zeigt die Zeit y an. $y - 12\{x\} = 0$

III. Ist gleichzeitig $y - 12\{x\} = 0$ und $x - 12\{y\} = 0$, dann können wir von der Uhr mit gleichlangen Zeigern die Zeit nicht ablesen, da jeder Zeiger kleiner Zeiger sein kann, also sowohl die Zeit x als auch die Zeit y möglich ist.



Es gibt 143 solche besonderen Stellungen. Die ihnen entsprechenden Zahlen x und y sind die 143 Schnittpunkte der graphischen Darstellungen der Funktionen (Abb. 72).

$$y = 12\{x\} \quad \text{und} \quad x = 12\{y\}$$

Diese Punkte liegen auf 23 Geraden mit den Gleichungen

$$y = x + \frac{12}{13}k \quad (k = 0, \pm 1, \dots, \pm 11) \quad (1)$$

Es sei jetzt $r = |x - y|$ der Fehler, den man bei einer Verwechslung der beiden Zeiger machen kann; auf Grund der Gleichungen (1) ist

$$r = \frac{12}{13}|k| \quad (k = 0, \pm 1, \dots, \pm 11)$$

Der Aufgabenstellung zufolge können wir Irrtümer von mehr als 6 Stunden ausschließen; wir erhalten also den größten Fehler bei $k = \pm 6$; es ist

$$r = \frac{72}{13} = 5\frac{7}{13}$$

d.h. 5 Stunden 32 Minuten und 18,46 Sekunden. (Zu welcher Tageszeit kann uns dieser Fehler unterlaufen ?) Bei allen unseren Überlegungen haben wir natürlich vorausgesetzt, dass die Zeigerstellung fehlerfrei abgelesen wird.

64. Die $2n$ Zahlen x_1, x_2, \dots, x_{2n} seien der Größe nach geordnet. Liegt x zwischen x_m und x_{m+1} so ist die Summe der absoluten Fehler gleich

$$(x - x_1) + (x - x_2) + \dots + (x - x_m) + (x_{m+1} - x) + \dots + (x_{2n} - x) \quad (1)$$

Die Summe (1) wird am kleinsten, wenn x durch eine zwischen $x - n$ und x_{n+1} liegende Zahl y ersetzt wird:

$$(y - x_1) + (y - x_2) + \dots + (y - x_n) + (x_{m+1} - y) + \dots + (x_{2n} - y) \quad (2)$$

In der Tat, nehmen wir einmal an, es sei $m > n$, also $x > y$; die Differenz zwischen (1) und (2) ist dann

$$\begin{aligned} n(x - y) + [(x - x_{n+1}) + \dots + (x - x_m)] \\ - [(x_{n+1} - y) + \dots + (x_m - y)] + (2n - m)(y - x) > \\ > n(x - y) + 0 - (m - n)(x - y) + (2n - m)(y - x) = 0 \end{aligned}$$

Ebenso kann man folgendes zeigen:

Werden die $4n$ Zahlen x_1, x_2, \dots, x_{4n} , nachdem sie der Größe nach angeordnet worden sind, in zwei Gruppen aufgeteilt

$$x_1, x_2, \dots, x_{2m} \quad \text{und} \quad x_{2m+1}, x_{2m+2}, \dots, x_{4n}$$

und berechnet man die absoluten Fehler einmal zwischen den Zahlen aus der ersten Gruppe und einer zwischen x_m und x_{m+1} liegenden Zahl x' , zum anderen zwischen den Zahlen aus der zweiten Gruppe und einer zwischen x_{2n+m} und x_{2n+m+1} liegenden Zahl x'' , so fällt die Summe dieser Fehler für $m = n$, am kleinsten aus.

Hieraus folgt, dass der Grenzdurchmesser d für die 120 Kugeln 6,09 mm beträgt. Es gibt 60 Kugeln mit einem Durchmesser kleiner als 6,09 mm und ebensoviele Kugeln mit einem Durchmesser größer als 6,09 mm. Die Angaben auf den Paketen lauten also: $a = 6,06$ mm, $b = 6,15$ mm.

65. Die größten Zahlen

in den Spalten	I	II	III	IV	V
sind jeweils	15	10	12	11	14

Ihre Summe ist gleich 62. Die Gesamtproduktivität in Einheiten pro Stunde kann somit 62 nicht übersteigen. Wenn wir den Näherinnen C, E, F, G, D in entsprechender Reihenfolge die Nähmaschinen I, II, III, IV, V zuordnen, erhalten wir als Gesamtproduktivität 60.

Wir wollen jetzt versuchen, die Maschine I einer von C verschiedenen Näherin zuzuordnen:

In Spalte I fällt das Maximum dann von 15 auf 11, was einen Verlust von 4 bedeutet. Die Gesamtsumme der Maxima sinkt daher auf $62 - 4 = 58$, und wie immer wir die Maschinen II, III, IV, V zuordnen, ein besseres Ergebnis als 58 können wir nicht erreichen, wohingegen der erste Versuch bereits das Resultat 60 lieferte.

Wir müssen also bei der Zuordnung von I zu C bleiben.

Diese Entscheidung reduziert das Problem auf die Zuordnung der Maschinen II, III, IV, V zu den Näherinnen A, B, D, E, F, G. Da wir die Reihe C eliminiert haben, erhalten wir in den Spalten II, III, IV, V als entsprechende Maxima 10, 11, 10, 14. Damit haben wir gefunden: Die Zuordnung, bei der die Maschinen I, II, III, IV, V jeweils den Näherinnen C, E, F, G, D zugeteilt werden, ist die beste.

66. Es seien a, b, c die täglichen Tabakkosten (in Mark) für Alex, Willi und Karl. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{504}{a+b} = 72 \quad , \quad \frac{504}{a+c} = 63 \quad , \quad \frac{504}{b+c} = 56 \\ a+b = 7 \quad , \quad a+c = 8 \quad , \quad b+c = 9 \\ 2(a+b+c) = 7+8+9 \\ a+b+c = 12 \\ a = 3 \quad , \quad b = 4 \quad , \quad c = 5 \end{aligned}$$

Alex gibt also jeden Tag 3 Mark, Willi 4 Mark und Karl 5 Mark. Die Gesamtkosten betragen 12 Mark.

Da $504 : 12 = 42$ ist, reicht der Vorrat für 42 Tage.

67. Wir wollen die anfängliche Anzahl der Bakterien mit A bezeichnen. Nach einer Stunde ist die Zahl auf $A \cdot (1 + 0,01)$ gestiegen und nach k Stunden auf $A(1 + 0,01)^k$.

Bis zur Verdopplung der Kultur müssen wir folglich x Stunden warten, wobei x durch die Gleichung

$$A(1 + 0,01)^x = 2A$$

bestimmt ist. Als Lösung dieser Exponentialgleichung finden wir nach Umstellung

$$\begin{aligned} \lg A + \lg(1,01)^x &= \lg A + \lg 2 \\ x \cdot \lg 1,01 &= \lg 2x &= \frac{\lg 2}{\lg 1,01} = \frac{0,3010}{0,0043} = 70 \end{aligned}$$

Bis zur Verdopplung der Kultur haben wir also 70 Stunden zu warten.

68. Es bezeichne T die Zeit, die berechnet werden soll, und V die Endgeschwindigkeit. Ferner bezeichne M die Masse des Zuges in Kilogramm, W die Arbeit der Lokomotive, die notwendig ist, um einen Kilometer zurückzulegen, und E die kinetische Energie des Zuges zum Zeitpunkt T .

Offenbar ist $E = W$. Die Entfernung $S(t)$, gemessen in Metern, ist eine Funktion der Zeit t , gemessen in Sekunden; t läuft von 0 bis T , S von 0 bis 1000.

Da die Kraft der Lokomotive konstant ist - wir wollen die Reibung und den Luftwiderstand vernachlässigen -, bestehen auf Grund von $S(0) = 0$, $v(0) = 0$ die folgenden Beziehungen (vgl. entsprechende Formelsammlungen):

$$\frac{dS}{dt} = v(t) = at \quad \text{also} \quad S(t) = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{und} \quad 1000 \text{ m} = \frac{aT^2}{2}$$

Die von 600 PS in der Zeit T geleistete Arbeit beträgt $600 \cdot 75 \cdot 9,81 \cdot T$ (in Kilogramm-Meter-Sekunden-Einheiten). Zum Zeitpunkt T besitzt der Zug die Geschwindigkeit V und somit die Energie $\frac{MV^2}{2}$. Auf Grund dessen ergibt sich

$$\frac{MV^2}{2} = 600 \cdot 75 \cdot 9,81T \left[\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \quad , \quad V = aT \quad (1)$$

$M = 60000 \text{ kg}$, $aT^2 = 2000 \text{ m}$.

Setzen wir den Wert M in die erste Gleichung von (1) ein, so erhalten wir drei Gleichungen für a , V und T . Nach Division der letzten Gleichung durch die zweite erhalten wir $T \cdot V = 2000 \text{ m}$; setzen wir diesen Wert T in die erste Gleichung von (1) ein, so finden wir

$$60000 \frac{V^3}{2} = 600 \cdot 75 \cdot 9,81 \cdot 2000 \frac{\text{m}^3}{\text{s}^3}$$

$$50V^3 = 2000 \cdot 75 \cdot 9,81 \frac{\text{m}^3}{\text{s}^3}$$

$$V^3 = 3000 \cdot 9,81 \frac{\text{m}^3}{\text{s}^3}$$

$$V = 30,87 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

also $T = 2000 \text{ m} : 30,87 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 64,79 \text{ s}$.

69. Der begangene Fehler besteht darin:

Das arithmetische Mittel der Glieder einer unendlichen Folge ist von der Reihenfolge dieser Glieder abhängig. (So ist zum Beispiel das Mittel der Glieder aus der Folge $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$ gleich $\frac{1}{2}$, und das Mittel der Glieder derselben Folge in der Anordnung $1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \dots$ ist Null.)

Die vermeintliche Gleichung $14 = 15$ rührt eben daher, dass wir die Glieder einer unendlichen Folge, deren Glieder die Winkel der die Ebene überdeckenden Siebenecke sind, in verschiedener Weise angeordnet haben.

70. Wir bezeichnen die vier Farben mit a, b, c, d und färben zuerst das Gebiet 1 (Abb. 73) mit a und 2 mit b . Da 6 ein Nachbar von 1 und 2 ist, erhält dieses Gebiet die Farbe c .

Die Länder 4 und 6 haben keine gemeinsame Grenze; wir können für 4 also auch c wählen. Da 5 und 1 getrennt liegen, können wir 5 mit a färben. Das Gebiet 3 ist ein Nachbar von 1, 2, 4, 5, 6; für dieses Gebiet bleibt uns nur die Farbe d . Zum

Schluss färben wir 7 noch mit b und 8 mit d und haben so unsere Aufgabe gelöst.

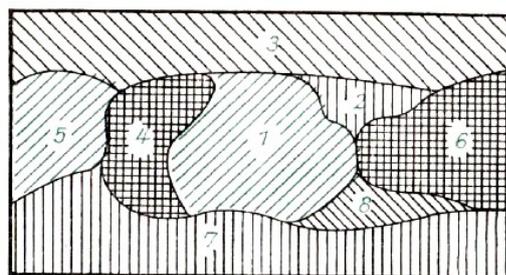


Abb. 73

In der elementaren Topologie wird angenommen, dass vier Farben zur Färbung jeder beliebigen Landkarte ausreichen (Vierfarbenproblem). Es ist bisher keine Landkarte bekannt, die mehr als vier Farben erfordert.

Dies wird durch den bisher unbewiesenen Satz ausgedrückt: Bei jeder Unterteilung der Ebene in nicht überlappende Gebiete ist es stets möglich, den Gebieten je eine der Zahlen 1, 2, 3, 4 zuzuordnen, so dass nicht zwei benachbarte Gebiete dieselbe Zahl erhalten.

Unter "benachbarten" Gebieten versteht man solche, die eine Teilstrecke der Grenzlinie gemeinsam haben. Zwei Gebiete, die nur in einem einzigen Punkt oder in einer endlichen Anzahl von Punkten zusammentreffen (z.B. wie zwei schwarze Felder des Schachbrettes), werden nicht

als benachbart angesehen.

71. Abb. 74 zeigt einen vertikalen Schnitt der Wippe, der durch die Enden A und B des Brettes gelegt ist. Wir werden die Aufgabe mit Mitteln der ebenen Geometrie zu lösen versuchen:

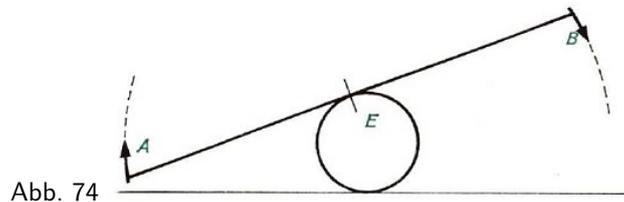


Abb. 74

Eine Strecke AB , die einen konvexen Bogen berührt, ist auf diesem Bogen so abzurollen, dass sich die Punkte A und B auf Geraden bewegen.

Auf Grund der Rollbewegung bewegt sich jedoch der Punkt A in einer zu AB senkrechten Richtung. Wenn er sich entlang einer Geraden bewegt, sind alle Stellungen des Brettes zueinander parallel. Nun ist das Brett aber ständig tangential zum Stamm. Folglich sind alle Tangenten an den Bogen zueinander parallel.

Die einzige Kurve mit parallelen Tangenten ist die Gerade. (In der ebenen Geometrie wird die Gerade als der Sonderfall der gekrümmten Linien mit der Krümmung Null betrachtet.)

Damit stellt der Querschnitt der Stütze eine horizontale Strecke auf dem Boden dar; das Brett liegt auf der Erde! Die ideale Wippe ist nicht möglich.

72. Wie wir wissen, ist für einen Erdbewohner die scheinbare Größe der Mondscheibe nahezu gleich der scheinbaren Größe der Sonnenscheibe. Davon kann man sich überzeugen, wenn man die Sonne während einer Finsternis durch ein geeignetes Filter (Schwarzglas) betrachtet.

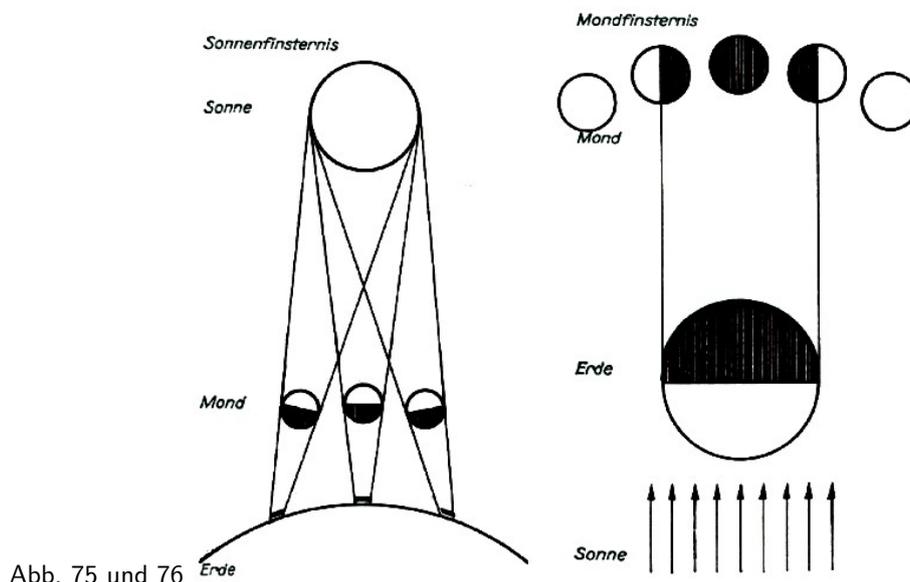


Abb. 75 und 76

Aus diesem Grunde sind die Gegenden auf der Erde, in denen die Sonnenfinsternis zu beobachten ist, klein im Vergleich zu der gesamten Erdoberfläche (Abb. 75), so dass auch nur ein geringer Teil der Erdbevölkerung die totale Sonnenfinsternis wahrnehmen kann.

Eine Mondfinsternis tritt etwa ebenso oft ein wie eine Sonnenfinsternis, jedoch ist die Mondfinsternis ein "als Hilfe mittel verwertbares Phänomen":

Wenn die Erde ihren Schatten auf den Mond wirft, fällt kein Sonnenlicht auf den Mond, und jedermann, der auf der dem Mond zu- gewandten Halbkugel lebt, kann die Verdunklung der

Mondscheibe beobachten; auf diese Art kann fast die Hälfte aller Erdbewohner eine Mondfinsternis gleichzeitig sehen (Abb. 76).

Hierin ist auch der Grund dafür zu suchen, dass die Mondviertel in früheren Kalendersystemen eine so wesentliche Rolle gespielt haben: Auch sie sind als Hilfsmittel verwertbare Erscheinungen.

73. Es bezeichne C den Schwerpunkt des Stabes. Der anfängliche Abstand des Punktes C vom linken Zeigefinger sei p und der vom rechten Zeigefinger sei q .

Das Gewicht W des Stabes ist eine nach unten gerichtete Kraft; die Einwirkung L des linken Zeigefingers auf den Stab ist nach oben gerichtet, und dasselbe gilt für die Einwirkung R des rechten Zeigefingers; halten wir den Stab gerade, so richten wir L und R unbewusst nach dem Hebelsatz so ein, dass

$$L + R = W \quad , \quad L : R = q : p$$

gilt, folglich ist

$$L = \frac{Wq}{p+q} \quad , \quad R = \frac{Wp}{p+q}$$

Diese Wahl von L und R bedeutet nichts anderes als "den Stab horizontal halten".

Zu Beginn liegt C zwischen dem linken und dem rechten Zeigefinger; solange diese Bedingung erfüllt ist, fällt der Stab nicht herunter.

Wir wollen uns jetzt einmal vorstellen, was geschieht, wenn der rechte Finger C erreicht. Ist im gleichen Augenblick auch der linke Finger in C angelangt, dann haben wir das Experiment erfolgreich abgeschlossen. Sollte das nicht der Fall sein, dann bleibt der linke Finger stets im Abstand p von C entfernt, $p \geq p_0 \geq 0$, wobei p_0 den Endabstand bezeichnet. Während der Annäherung des rechten Fingers an den Punkt C gilt bis zum Zeitpunkt t_0 , in dem der rechte Zeigefinger in C angelangt ist,

$$\lim q = 0, \quad \lim p = p_0 > 0, \quad \lim R = W, \quad \lim L = 0$$

Die Beziehungen zeigen, dass der Druck auf den rechten Finger um vieles größer wird als der auf den linken, wenn dieser sich einem Punkt P nähert, der links von C liegt und für den $PC = p$ gilt.

Das widerspricht jedoch dem Reibungsgesetz; die Reibung des Stabes gegen die Finger hängt vom Druck ab, der für den linken Finger gleich L und für den rechten Finger gleich R ist.

Es ist daher unmöglich, dass sich der rechte Finger trotz des großen Druckes in der Umgebung von C diesem Punkt beliebig nähert, während der linke Finger nicht über P hinauskommt, weil dort ein um ein Mehrfaches kleinerer Druck herrscht. Dieser Widerspruch zeigt, dass C das Intervall zwischen den Fingern niemals verlässt.

74. Abb. 77 zeigt die Schnur in ihrer ursprünglichen Lage und nach der Verschiebung. Es werde $\angle DOD' = \angle COC'$ mit x bezeichnet (Abb. 78).

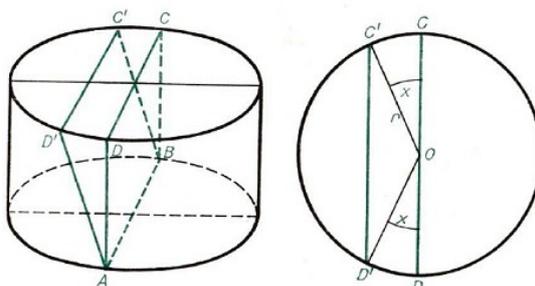


Abb. 77 und 78

Dann ist $D'C' = 2r \cos x$. Der Bogen DD' ist gleich rx , und für die Strecke AD' gilt: $AD' = BC' = r\sqrt{1+x^2}$. Die Länge der Kurve ist folglich gleich

$$ABC'D' = 2r + 2r\sqrt{1+x^2} + 2r \cos x = 2r(1 + \cos x + \sqrt{1+x^2})$$

Andererseits ist in der Anfangslage $ABCD = 6r$.

Wir wollen jetzt die Differenz dieser beiden Längen untersuchen:

$$y(x) = 6r - 2r(1 + \cos x + \sqrt{1+x^2}) = 2r(2 - \cos x - \sqrt{1+x^2}) \quad (1)$$

Wenn wir zeigen können, dass diese Funktion nur positive Werte annimmt, dann haben wir bewiesen, dass sich die Schnur ohne Dehnen oder Zerschneiden abstreifen lässt.

Zunächst wollen wir zeigen, dass die Ableitung der Funktion $y(x)$ in Formel (1) für $0 < x < \frac{\pi}{2}$; positiv ist, d.h.

$$y' = 2r(\sin x - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}) > 0$$

Es sei $x = \tan \alpha$. Mit Hilfe der bekannten trigonometrischen Formeln finden wir

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Da für alle α : $\alpha < \tan \alpha = x$ gilt, ergibt sich für $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, dass $\sin \alpha < \sin x$ ist. Folglich haben wir

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \sin x$$

Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ erhalten wir also die Ungleichung

$$\sin x - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} > 0$$

Die Funktion $y(x)$ wächst also im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ und erreicht ihr Minimum für $x = 0$, ihr Maximum für $x = \frac{\pi}{2}$:

$$y(0) = 0 \quad , \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2r \left(2r - \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}\right) > 0$$

Damit ist gezeigt, dass die Differenz (1) stets positiv ist. Die Schnur kann folglich abgestreift werden. Wenn keine Reibung vorliegt, dann befindet sich also die Schnur in ihrer ursprünglichen Lage in einem instabilen Gleichgewichtszustand.

75. Der erste Stock wird in t mehr oder weniger genau auf die Linie III-V gesetzt. Der Assistent geht mit dem Stock etwa 20 m weiter, und der am Punkt t stehende Vermessungsingenieur blickt nach V und gibt an, wo der Assistent den zweiten Stock hinzusetzen hat, damit er auf der Linie $t - V$ steht.

Nachdem dies in t' erfolgt ist, blickt der Assistent von t' nach III und korrigiert die Position von t , indem er dem bei t stehenden Ingenieur signalisiert, wohin dieser den Stock umzusetzen habe, damit er auf der Linie III- t' steht.

Nach dieser Umsetzung werden die oben beschriebenen Korrekturen mehrmals vorgenommen, und nach einigen Wiederholungen werden beide Stöcke (fast genau) auf der Linie III-V eingefluchtet sein.

Wenn der Leser das oben dargestellte Verfahren ohne Hilfskraft durchführen sollte, wird er wahrscheinlich feststellen, dass die aufeinanderfolgenden Korrekturen Lagen ergeben, die mehr und mehr von der Linie III-V entfernt liegen. Warum ?

76. Küchentöpfe besitzen keine Deckfläche. Wenn wir zwei gleiche Töpfe übereinander setzen, erhalten wir ein geschlossenes zylindrisches Gefäß, das einer Konservendose entspricht. Sind die Töpfe optimal, dann ist auch die Dose optimal, und umgekehrt.

77. Die Rolle legt die Entfernung d zurück, und das Ende der Schiene bewegt sich um $5 + d$, jedoch gleitet die Schiene doppelt so schnell (warum?), so dass wir $2d = 5 + d$ erhalten; hieraus folgt $d = 5$; $2d = 10$.

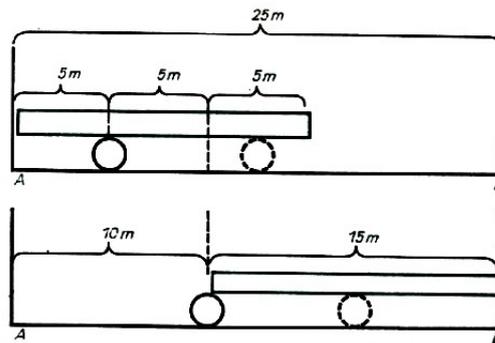


Abb. 79 und 80

Die Schiene hat sich also um 10 m verschoben. Damit ergibt sich, dass die Halle 25 m lang ist. Abb. 79 zeigt die Anfangslage und Abb. 80 die Endlage der Schiene.

73. Die Lösung kann aus den Abb. 81 und 82 abgelesen werden:

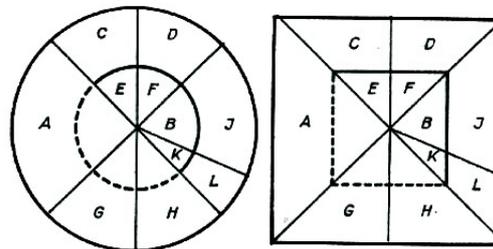


Abb. 81 und 82

Gleiche Buchstaben entsprechen gleichen Flächen. In Abb. 81 sehen wir konzentrische Kreise mit gemeinsamen Strahlen, in Abb. 82 konzentrische Quadrate: Gleichen Kreisbögen entsprechen gleiche Abschnitte der Quadratseiten.

2.5 Schnelligkeit und Überlegung

79. Jeder Baustein steht für $\frac{1}{5}$ der Umlaufzeit neben dem Zug. Wenn die Umlaufzeit T Sekunden beträgt, wird ein solcher Augenblick $\frac{T}{5}$ Sekunden dauern.

Durchfährt der Zug nun den Kreis mit gleichmäßiger Geschwindigkeit, dann ist also die durchschnittliche Anzahl der neben dem Zug liegenden Bausteine gleich $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$, und die gesuchte Erklärung folgt unmittelbar.

80. Wir legen 9 Münzen in die linke Schale (L), 9 Münzen in die rechte Schale (R) und 9 auf den Tisch.

Wenn bei der Wägung Schale L steigt, dann bezeichnen wir das Ergebnis mit L, und steigt die rechte Schale R, so nennen wir das Ergebnis R.

Bleibt die Waage im Gleichgewicht, so wollen wir dieses Ergebnis mit T bezeichnen.

Das Ergebnis L bedeutet, die falsche Münze liegt auf der linken Schale, das Ergebnis R zeigt an, die falsche Münze liegt in der rechten Schale, und das Ergebnis T besagt, die falsche Münze befindet sich unter den 9 auf dem Tisch liegenden Münzen.

Unabhängig vom Ergebnis führen wir eine zweite Wägung durch; wir verwenden dazu nur die 9 Münzen, unter denen sich nach der ersten Wägung die falsche befindet, deren kennzeichnender Buchstabe gleich dem Ausgang der ersten Wägung ist. Der zweite Versuch erfolgt mit $3 + 3 + 3$ Münzen, und sein Ergebnis kann L, R oder T sein. Der dritte Versuch mit $1 + 1 + 1$ Münzen, die sich beim zweiten Versuch ergeben haben, führt offensichtlich auf L, R oder T. Wenn das Ergebnis L ist, dann stellt die auf der linken Schale L liegende Münze die falsche dar.

Ist das Ergebnis R, dann ist die in der rechten Schale liegende Münze die falsche, und im Falle T ist die auf dem Tisch liegende Münze die falsche.

Das ganze, aus drei Wägungen bestehende Verfahren kann mit drei Buchstaben X Y Z symbolisiert werden.

Wir wollen diese Buchstabenfolge ein Wort nennen.

Vor unserem dreifachen Versuch kennen wir das Symbol X Y Z nicht. Wir wissen jedoch, dass der erste Versuch für X einen der Buchstaben L, R oder T ergeben wird.

Der zweite Versuch legt Y fest (also L, R oder T), und der dritte Versuch bestimmt Z.

Insgesamt gibt es also 27 mögliche Ausgänge für dieses Verfahren und 27 Wörter, um alle möglichen Bestimmungswege einzelner Münzen zu symbolisieren. Darüber hinaus gibt es von vornherein 27 Möglichkeiten, da jede der 27 Münzen die falsche sein kann und eine und nur eine als falsch bestimmt werden kann.

Es besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Wörtern, den Wägeverfahren von einzelnen Münzen und der Identität der falschen Münze.

Wenn $27 + 1 = 28$ Münzen vorliegen, dann gäbe es von vornherein eben mehr Möglichkeiten als Wörter für die Darstellung der Ergebnisse von dreifachen Wägungen.

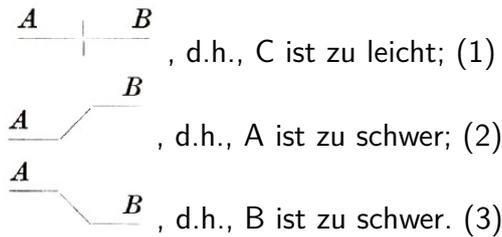
Drei Wägungen reichen somit nicht aus, um die Entdeckung der falschen Münze unter 28 Münzen zu sichern.

81. Wir wollen die Münzen A, B, C, D nennen, S sei das Gewichtsstück.

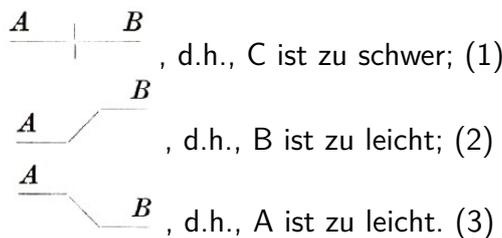
Bei Wägung I legen wir AB in die linke Schale und CS in die rechte. Dabei sind drei Ergebnisse möglich:

$$1) \begin{array}{c} \underline{AB} \quad | \quad \underline{CS} \\ \hline \end{array} \quad 2) \begin{array}{c} \underline{AB} \quad \diagup \quad \underline{CS} \\ \hline \end{array} \quad 3) \begin{array}{c} \underline{AB} \quad \diagdown \quad \underline{CS} \\ \hline \end{array}$$

Ergebnis 1) zeigt, dass D falsch ist; die Wägung II der Münze D und des Gewichtstücks S ergibt also, ob die Münze leichter oder schwerer ist. Das Ergebnis 2) zeigt, dass eine der Münzen A, B, C falsch ist; Wägung II der Münzen A und B ergibt somit drei Möglichkeiten:



Das Ergebnis 3) wird in ähnlicher Weise betrachtet: Wägung II der Münzen A und B kann ergeben



In Abb. 83 ist der gesamte Wägeprozess noch einmal dargestellt.

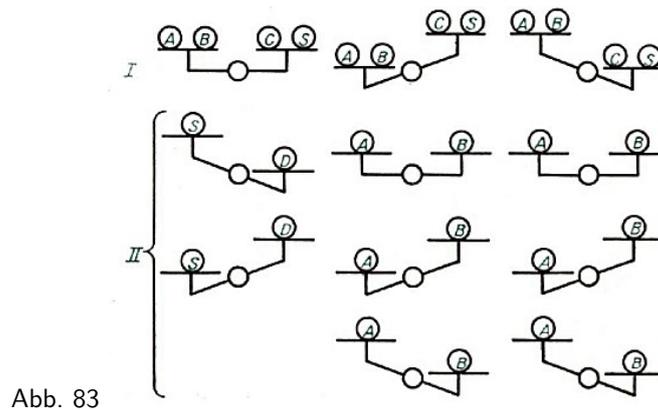


Abb. 83

82. Um die durchschnittliche Anzahl an Siegen von Dieter (D) über Erik (E) zu berechnen, wollen wir zunächst die durchschnittliche Anzahl der Siege von E über D bestimmen.

Dazu reicht die Kenntnis der Wahrscheinlichkeit dafür aus, dass E gegen D spielen wird, wenn ihre jeweiligen Spielstärken 16 bzw. 12 sind. Die Wahrscheinlichkeit ist somit gleich $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$.

Daher schlägt D den Spieler E in $(1 - \frac{9}{25}) 100 = 64\%$ der Spiele.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Erik die Spielstärke 16 besitzt und auf Falk (F) trifft, ist gleich $\frac{3}{5}$.

Die durchschnittliche Anzahl der Siege von E über F beträgt also $\frac{3}{5} \cdot 100 = 60\%$.

Da schließlich die Wahrscheinlichkeit, dass F mit D spielt, wenn die Spielstärke von D gleich 12 ist, ebenfalls $\frac{3}{5}$ beträgt, schlägt F den Spieler D in 60% der Schachkämpfe.

Nun lässt sich die mittlere Spielstärke eines jeden Spielers einfach bestimmen. Die durchschnittliche Spielstärke des Spielers D ist

$$\frac{2 \cdot 17 + 3 \cdot 12}{5} = 14$$

Die durchschnittliche Spielstärke des Spielers E ist

$$\frac{3 \cdot 16 + 2 \cdot 11}{5} = 14$$

und die durchschnittliche Spielstärke des Spielers F beträgt laut Aufgabenstellung ebenfalls 14.

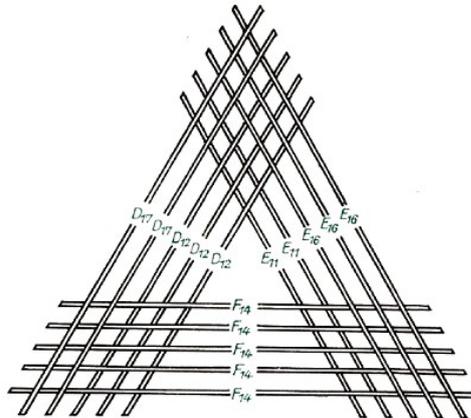


Abb. 84

Abb. 84 liefert eine übersichtliche Darstellung für die durchschnittliche Anzahl der Siege von D über E, von E über F und von F über D. Betrachten wir z.B. die rechte Hälfte der Linie F_{14} . Sie liegt zweimal über E_{11} und dreimal unter E_{16} , da Falk in zwei der fünf Spiele stärker als Erik ist. Dasselbe Prinzip wurde auch auf die übrigen Paarungen angewandt.

83. Wir betrachten alle möglichen, K einbeschriebenen Dreiecke XYZ . Ihr Umfang $XY + YZ + ZX$ verändert sich mit X, Y, Z .

Weiterhin interessieren solche Punkte X, Y, Z auf K , für die der Umfang maximal ist. Es seien A, B, C drei derartige Punkte. Wir wollen zeigen, dass diese Punkte das gesuchte Dreieck ergeben, dessen Existenz zu beweisen ist.

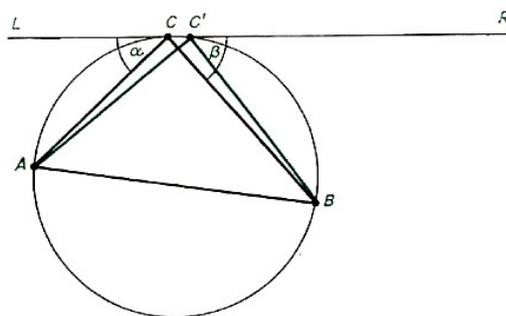


Abb. 85

In Abb. 85 ist das Dreieck ABC dargestellt, dessen Umfang maximal ist, sowie die Tangente LR , die K in C berührt. Wir wollen annehmen, dass der linke Winkel $\alpha = \angle LCA$ kleiner als der rechte Winkel $\beta = \angle RCB$ ist.

Nun stellen wir uns vor, C würde ein wenig in Richtung CR bis zu einem Punkt C' verschoben. Im Ergebnis gelangen wir zu einem neuen Dreieck $AC'B$. Wenn die infinitesimale Verschiebung ds beträgt, wird die Länge von AC um $ds \cdot \cos \alpha$ vergrößert, und wir gelangen zu AC' .

Dagegen nimmt die Länge von BC um $ds \cdot \cos \beta$ ab und ist danach gleich BC' . Auf Grund von $\alpha < \beta$ ist die Zunahme größer als die Abnahme.

Es ist also $AC' + C'B$ größer als $AC + BC$. Der Umfang des Dreiecks $AC'B$ übersteigt den Umfang des Dreiecks ACB .

Dieses Ergebnis ist jedoch damit unvereinbar, dass ABC einen maximalen Umfang besitzt. Der Widerspruch resultiert aus $\alpha < \beta$. Natürlich würde die Annahme $\alpha > \beta$ auf denselben Widerspruch führen.

Es ist somit $\alpha = \beta$. Damit ist bewiesen, dass eine von B nach C gestoßene Kugel ihren Weg längs CA fortsetzt (Reflexionsgesetz).

Da unsere Überlegungen in gleichem Maße auf A und B zutreffen wie auf C , haben wir die Existenz der in der Aufgabenstellung genannten X, Y, Z nachgewiesen.

84. Wir betrachten das orientierte Dreieck $ABCA$ und einen vierten Punkt D auf dem Rand K , der zwischen C und A liegt. Der Umfang von $ABCD$ ist größer als der von $ABCA$ (K ist in dem Sinne konvex, dass auf K weder Ecken noch Strecken liegen).

Folglich kann das Viereck von maximalem Umfang nicht in ein Dreieck entarten. Da die Existenz eines derartigen maximalen Vierecks gesichert ist, können wir bezüglich seiner Ecken dieselben Überlegungen anstellen, wie wir sie auf die Ecken des maximalen Dreiecks angewendet haben.

Dies führt zu dem Ergebnis, dass die durch die Ecken des Vierecks an K gelegten Normalen die Winkel an den betrachteten Ecken halbieren müssen. Gerade das ist aber notwendig, damit das Viereck eine periodisch durchlaufene Bahn für eine Billardkugel darstellt.

Offensichtlich gilt dieses Ergebnis für alle n -Ecke ($n = 3, 4, \dots$). Der Leser beweise es für $n = 2$.

85. Wir wollen zunächst den Spezialfall betrachten, dass K eine Ellipse ist sowie A und B deren Brennpunkte sind.

Für jeden Punkt X auf K besitzt dann die Summe $AX + BX$ denselben Wert, der gleich der Hauptachse von K ist, und die Brennstrahlen AX und BX schließen einen Winkel AXB ein, der von der Normalen an K in X halbiert wird.

Offensichtlich ergeben in diesem Spezialfall alle C auf K eine positive Antwort auf unsere Frage.

Wenn K jedoch keine Ellipse ist oder wenn K zwar eine Ellipse, A und B jedoch nicht ihre Brennpunkte sind, dann ist die Summe $AX + BX$ nicht konstant. Folglich muss auf K ein Punkt $X = C_1$ liegen, für den die Summe ihr Maximum annimmt, sowie ein Punkt C_2 , für den die Summe minimal wird.

Es ist offenbar $C_1 \neq C_2$.

In Aufgabe 83 haben wir bewiesen, dass ein Punkt C , für den die Summe $AC + BC$ maximal ist, die uns interessierende Eigenschaft besitzt. Der früher schon angegebene Beweis gilt auch für einen Punkt C , für den $AC + BC$ minimal wird.

Wir haben somit mehr gezeigt als gefragt war: Es gibt stets mindestens zwei Punkte C auf K , die den Anforderungen der vorliegenden Aufgabe entsprechen.

86. Ohne die in der Aufgabe gestellten Bedingungen zu verletzen, können wir ein Turnier auf vier Plätzen in folgender Weise organisieren:

Erster Tag: vier Paare von Mannschaften, d.h. 8 Mannschaften.

Zweiter Tag: vier siegreiche Mannschaften und vier Mannschaften, die bisher noch nicht gespielt hatten, d.h. 8 Mannschaften.

Dritter Tag: vier siegreiche Mannschaften, d.h. 4 Mannschaften.

Vierter Tag: zwei siegreiche Mannschaften, d.h. 2 Mannschaften.

Der Hauptvorteil dieses Systems liegt nicht allein in der Verringerung der Anzahl der Plätze von 6 auf 4, sondern auch in der möglichen Verkleinerung der Anzahl der Spiele von 4 auf 3,

die von jeder Mannschaft zu absolvieren sind.

Das ist dann der Fall, wenn keine der acht Mannschaften, die am ersten Tage spielen, das Finale erreicht. Eine Verringerung der Anzahl der Spiele auf drei für alle Mannschaften stellt jedoch einen Zufall dar, und wir können darüber vor dem Abend des dritten Tages nichts aussagen.

Wir haben zu zeigen, dass es kein System gibt, das von vornherein jeder Mannschaft garantiert, dass sie höchstens dreimal zu spielen hat; die Anzahl der Plätze ist dabei beliebig.

Am Turnier beteiligen sich 12 Mannschaften. Am ersten Tage werden also höchstens 6 Spiele ausgetragen. Dabei scheiden höchstens 6 Mannschaften aus, so dass die Anzahl der verbleibenden Mannschaften mindestens 6 beträgt, und wenigstens 3 von ihnen am Nachmittag des dritten Tages zu spielen haben.

Angenommen, es handelte sich um 3 Mannschaften. Zwei von ihnen werden am dritten Tage gegeneinander spielen, jedoch muss die siegreiche Mannschaft noch gegen die dritte Mannschaft antreten. Da zwei Spiele an einem Tage für eine Mannschaft verboten sind, findet das Endspiel am vierten Tage statt.

Wir können auch nicht jeder Mannschaft, die bereits dreimal gespielt hat, garantieren, dass sie am vierten Tage frei sein wird. Wir können ihnen diesen Ruhetag nur versprechen, wenn keine der Mannschaften, die am ersten Tage gespielt haben, in die dritte Runde gelangt.

Es kann jedoch nicht verhindert werden, dass die beste Mannschaft in der ersten Runde bereits spielen muss, und diese Mannschaft erreicht die dritte Runde ganz sicher.

Dieser Beweis hat auch Gültigkeit für den Fall, dass mehr als 3 Mannschaften bis in die dritte Runde gelangen.

87. Es bezeichne n die Anzahl der Konkurrenten. Aus der Aufgabenstellung wissen wir, dass n Wettfahrten durchgeführt wurden und dass sich an jeder Wettfahrt 4 Konkurrenten beteiligten; jeder von ihnen startete also viermal.

Es sei C ein bestimmter Fahrer. Er nimmt an 4 Wettfahrten teil. Bei jedem Start trifft er auf drei Rivalen, und dieses Tripel ist jedesmal völlig anders zusammengesetzt. Wenn C gegen alle $n - 1$ Konkurrenten angetreten ist, erhalten wir $n - 1 = 4 \cdot 3 = 12$.

Die Informationen, die der Sportfreund bekam, reichen also aus, um festzustellen, dass es sich um 13 Konkurrenten und 13 Wettfahrten gehandelt hat. Sie geben jedoch keinen Aufschluss darüber, welche Quadrupel zusammen gestartet sind und welche nicht:

Sind beispielsweise die Fahrer I, 2, 3, 4 zu einer gemeinsamen Wettfahrt aufgerufen werden?

Nachstehend geben wir zwei verschiedene Lösungen an, die den in der Aufgabe gestellten Bedingungen entsprechen:

	A					B			
Fahrt	Fahrer				Fahrt	Fahrer			
I	1	2	3	4	I	1	2	5	8
II	1	5	6	7	II	1	4	7	10
III	1	8	9	10	III	1	3	6	9
IV	1	11	12	13	IV	1	11	12	13
V	2	5	10	12	V	2	3	10	12
VI	2	6	8	13	VI	2	4	6	13
VII	2	7	9	11	VII	2	7	9	11
VIII	3	5	9	13	VIII	3	5	7	13
IX	3	6	10	11	IX	5	6	10	11

A				B					
Fahrt	Fahrer			Fahrt	Fahrer				
X	3	7	8	12	X	4	5	9	12
XI	4	5	8	11	XI	3	4	8	11
XII	4	6	9	12	XII	6	7	8	12
XIII	4	7	10	13	XIII	8	9	10	13

Ein Vergleich von A mit B zeigt, dass an der Fahrt I in A (s. die obenstehende Tabelle) die Fahrer 1, 2, 3, 4 teilnehmen, während in B eine derartige Fahrt gar nicht existiert.

88. Anfangs befindet sich das Schmugglerboot im Punkt M und das Küstenschutzboot in S . Der Schmuggler will in W anlegen (Abb. 86). S ist der Mittelpunkt der Strecke MW .

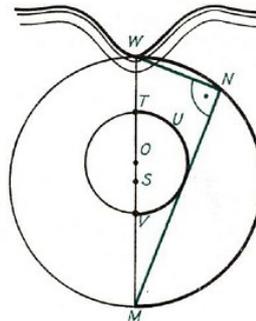


Abb. 86

Aus der Aufgabenstellung folgt, dass das Schmugglerboot entlang den beiden Schenkeln des rechten Winkels MNW fahren muss, der dem Kreis vom Durchmesser MW eingeschrieben ist.

Da diese Fahrtstrecke so kurz wie möglich sein soll, muss der Winkel WMN ebenfalls so klein wie möglich sein. Außerdem soll der Schmuggler dem Wachboot bestimmt entkommen; deshalb darf seine Fahrtroute den Kreis TUV nicht schneiden, der geometrischer Ort aller der Punkte P ist, in denen der Schmuggler und das Wachboot aufeinander treffen könnten, wenn sie jeweils von M und von S mit Höchstgeschwindigkeit losfahren.

Der Mittelpunkt dieses Kreises ist der Punkt O , dessen Lage auf der Strecke MW gegeben ist durch

$$MT = 3ST, \quad MV = 3SV, \quad OT = OV$$

Wir bilden ein Gleichungssystem mit den Strecken MV , SV , SO , OT , TW als Unbekannten. Es ergibt sich in Abhängigkeit vom Durchmesser MW

$$MO = \frac{9MW}{16}$$

und der Radius des inneren Kreises zu $\frac{3MW}{16}$.

Wenn die Strecke MN den Kreis TUV berühren würde, dann wäre die Länge der Fahrtstrecke des Schmugglerbootes gleich

$$\frac{2\sqrt{2} + 1}{3} MW$$

Wenn MN mit dem Kreis TUV keinen Punkt gemeinsam hat, dann ist die Fahrtstrecke länger als

$$\frac{2\sqrt{2} + 1}{3} MW$$

Nun wäre noch zu prüfen, ob das Wachboot den Schmuggler nicht mehr auf der Strecke NW einholen kann, wenn MN nahe genug an dem Kreis TUV vorbeigeht. Den Beweis dafür überlassen wir dem Leser.

Damit haben wir den Kurs, den der Schmuggler steuern muss, vollständig bestimmt.

89. Es sei L das Schmugglerboot und S das Wachboot.

Der Kreis des Apollonius, der Ort aller Punkte X , die die Beziehung $LX = 3XS$ erfüllen, bestimmt zwei Tangenten von L an diesen Kreis; es seien P, P' die entsprechenden Berührungspunkte.

Wir betrachten jetzt alle Geraden durch S ; der Radius SP schneidet LP unter einem Winkel k . Nun gehen wir von L nach P entlang einer Geraden, danach von P entlang einer logarithmischen Spirale, die alle durch S gehenden Geraden unter demselben Winkel k schneidet, bis wir die LS -Achse erreicht haben.

Diese Kurve stellt die äußerste obere Fahrtlinie dar.

Der Punkt P' gibt die untere äußerste Fahrtstrecke an. Beide Routen schneiden sich auf der Verlängerung von LS . Das von dem kleineren Bogen des Kreises PP' und den beiden Bögen der logarithmischen Spirale begrenzte Gebiet wird vom Wachboot kontrolliert.

90. Angenommen, die erste Karte in der S -Reihe ist ein König. Der Spieler S weiß natürlich, dass ihm dieser Herz-König dann und nur dann einen Groschen einbringt, wenn die erste Karte in der B -Reihe ebenfalls ein König ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste Karte in der B -Reihe der Pik-König ist, beträgt $\frac{1}{13}$, denn es ist für jede der B -Karten gleichermaßen wahrscheinlich, von B an die erste Stelle gemischt zu werden.

Die mit dem ersten Paar Herz-Pik verbundene Höhe des Einsatzes von B beträgt also $\frac{1}{13}$ eines Groschens. Dasselbe gilt nun auch für das nächste Paar, und folglich für alle weiteren. Die Einsatzhöhe des Bankhalters, die dem vom Spieler erwarteten Gesamtgewinn entspricht, ist also 13 mal $\frac{1}{13}$ Groschen = 1 Groschen.

Da der Einsatz des Spielers ebenfalls einen Groschen beträgt, geht S mit B ein faires Spiel ein.

2.6 Die mathematischen Abenteuer des Dr. Abrakadabra

91. Dr. Abrakadabra fertigt sechs Zeichnungen an (a, b, c, d, e, f in Abb. 88), denen die aufeinanderfolgenden Stellungen von L, 1 und 2 zu entnehmen sind.

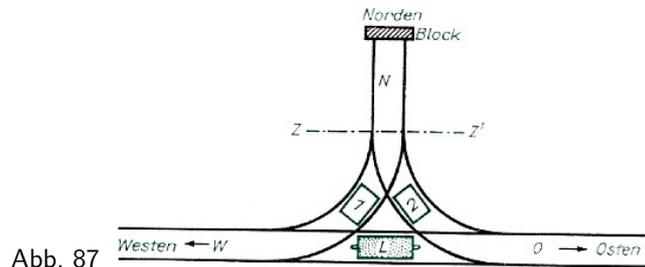


Abb. 87

Um von der ursprünglichen Situation (Abb. 87) nach (a) zu gelangen, muss L nach Westen fahren, den Wagen 1 zurückstoßen, nach W zurückkehren, darauf nach O fahren, den Wagen 2 abstoßen und stehenbleiben.

Alle nachfolgenden Schritte bis hin zu (f) sind offensichtlich. Zum Schluss der Rangierarbeiten hat L zu 2 zu fahren und diesen Wagen an seinen endgültigen Platz zu bringen; danach kehrt L auf die OW-Linie und eventuell in seine Ausgangsposition zurück.

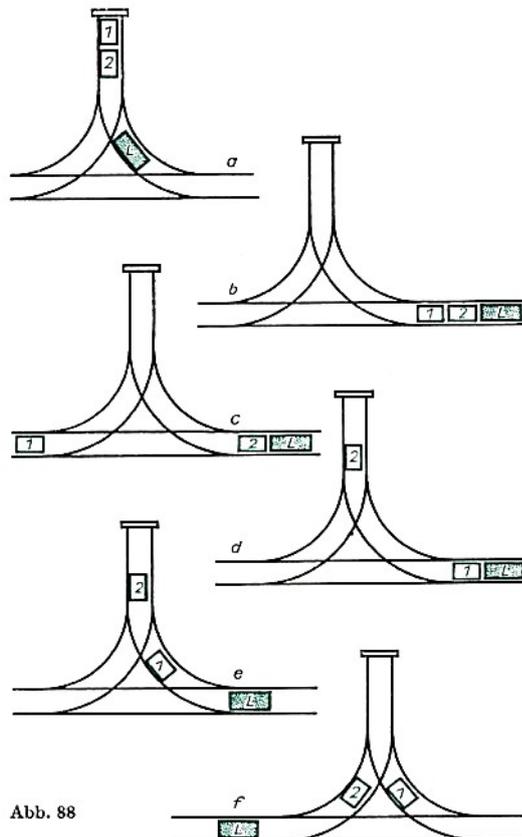


Abb. 88

92. In Abb. 89 ist ein Schnitt des Stapels mit einer vertikalen, zum Tisch normalen Ebene dargestellt; die Münzen sind so angeordnet, dass diese Ebene durch die Mittelpunkte der Münzen geht. Wir wollen die oberste Münze mit 1 bezeichnen, die unter ihr liegende mit 2 usw. Die n -te Münze liegt unmittelbar auf dem Tisch.

Die Querschnitte der Münzen sind Rechtecke. Ihre langen Seiten besitzen alle dieselbe Länge $2r$. Das Gewicht einer Münze sei Q ; w_k ist der Betrag, um den die k -te Münze über die $(k + 1)$ -te Münze hinausragt.

Danach wird der Gast eingeladen, zwei der sechs Teile zu wählen - einen Teil von A und einen Teil von B. Damit besitzt jedermann zwei der sechs Teile.

Wir haben zu beweisen, dass bei diesem Vorgehen auf jeden der drei wenigstens $\frac{1}{3}$ des Wertes des Kuchens nach ihrer eigenen Meinung entfällt.

Für Lutz stellt A eine Hälfte des Kuchens dar; er hat A in drei Teile zerlegt, von denen er sagt, sie seien äquivalent; wie immer der Gast wählen mag, Lutz bekommt nach seiner eigenen Einschätzung $\frac{1}{3}$ des Kuchens.

Dieselbe Überlegung gilt für Bernd. Der Gast schätzt den Wert von A mit a und den Wert von B mit b . Nach seiner Meinung hat der ganze Kuchen also den Wert $a + b$. Es bleibt ihm überlassen, das wertvollste Stück von A zu wählen; macht er das, so bekommt er mindestens $\frac{a}{3}$ offenbar kann er auch $\frac{b}{3}$ erlangen. Der Gast kann demnach seiner eigenen Einschätzung zufolge eine Wahl im Werte von mindestens $\frac{a+b}{3}$ treffen, also von mindestens einem Drittel des von ihm geschätzten Wertes des Kuchens.

94. Es ist die Länge $z = p + q$ zu berechnen. Offenbar (Abb. 90) gilt:

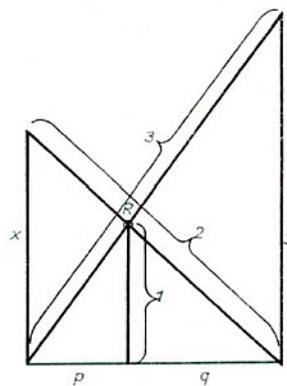


Abb. 90

$$\begin{aligned}
 z^2 + x^2 &= 4 & ; & & z^2 + y^2 &= 9 & ; & & y^2 - x^2 &= 5 & (1) \\
 \frac{z}{p} &= \frac{p}{1} & ; & & \frac{z}{x} &= \frac{q}{1} & ; & & z \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) &= p + q = z & ; & & \frac{1}{y} + \frac{1}{x} &= 1
 \end{aligned}$$

und auf Grund der dritten und siebenten Gleichung aus (1) erhalten wir

$$x = 1 + \frac{x}{\sqrt{5 + x^2}}$$

Vergleichen wir in Abb. 90 mittels eines Lineals x und 1, so erhalten wir für x den Näherungswert $x_0 = 1,6$; der nächste Schritt besteht in der Berechnung von

$$x_1 = 1 + \frac{x_0}{\sqrt{5 + x_0^2}} = 1,58$$

die zweite Näherung

$$x_2 = 1 + \frac{x_1}{\sqrt{5 + x_1^2}} = 1,577$$

ist für Dr. Abrakadabra bereits ausreichend.

Unter Verwendung der ersten Gleichung von (1) erhält er $z = \sqrt{4 - x^2}$; mit Hilfe des Näherungswertes 1,577 für x ergibt sich für z die Näherung $\sqrt{4 - 1,577^2} = 1,232$.

Dieses Ergebnis ist für Sherlock Holmes exakt genug.

95. Es sei s die Anzahl der Schüler, die wenigstens einem der genannten Hobbys nachgehen. Mit x bezeichnen wir die Anzahl der Jungen, die nur Konzerte besuchen, mit y die Anzahl der Schüler, die nur Schach spielen, und mit z die Anzahl derjenigen, die nur radfahren.

Beim ersten Mal stehen alle bis auf diejenigen auf, deren einziges Hobby das Radfahren ist; die Anzahl der letzteren ist gleich z ; es stehen folglich $s - z$ auf, und unter ihnen befinden sich $\frac{30}{100}(s - z)$ Schach- und Konzertliebhaber.

Bei der zweiten Frage sind $s - x$ Schüler aufgestanden, und unter ihnen gab es $\frac{35}{100}(s - x)$, die beide Hände erhoben hielten. Bei der dritten Aufforderung erhoben sich $s - y$ Schüler, unter denen sich $\frac{40}{100}(s - y)$ befanden, die beide Hände emporhielten.

Wir wollen nun annehmen, dass sich unter den s Schülern mit wenigstens einem Hobby niemand befindet, der allen drei Beschäftigungen nachgeht. Addieren wir die Anzahl der Schüler mit einer oder mit zwei Liebhabereien getrennt, so erhalten wir s ; andererseits finden wir

$$\frac{30}{100}(s - z) + \frac{35}{100}(s - x) + \frac{40}{100}(s - y) + x + y + z = 0,65x + 0,6y + 0,7z + 1,05s > s$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass unsere Annahme falsch war. Dr. Abrakadabra hatte also recht: Unter den Schülern unseres vergesslichen Lehrers befindet sich mindestens einer, der allen drei Hobbys zugleich nachgeht.

96. Das magische Buch von Dr. Abrakadabra stellt ein Ergebnis des folgenden Verfahrens dar:

Wir wollen 10000 Zahlenpaare $(n, nz - [nz])$ betrachten, wobei z die "goldene" Zahl $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ bezeichnet und $n = 1, 2, \dots, 10000$.

Mit $[x]$ bezeichnen wir die größte ganze Zahl, die x nicht übersteigt.

Wir ordnen die Paare so an, dass die Terme $nz - [nz]$ eine wachsende Folge bilden, und schreiben die Terme n in der Reihenfolge auf, die sich aus der obigen Anordnung der Glieder $nz - [nz]$ ergibt. Dieses Verfahren liefert eine Folge, die von Dr. Abrakadabra die "Tafel der Eisernen Zahlen" genannt wird.

Wir wollen eine "Eiserne Tafel" konstruieren, die aus 40 Zahlen besteht. Wir beschränken sie auf $n = 1, 2, \dots, 40$. $\sqrt{5}$ ist angenähert gleich 2,236; $z = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,618$. Für die 40 aufeinanderfolgenden Werte von n erhalten wir also die nachstehenden Werte von $nz - [nz]$:

n	$nz - [nz]$								
1	0,618	2	0,236	3	0,854	4	0,472	5	0,090
6	0,708	7	0,326	8	0,944	9	0,562	10	0,180
11	0,798	12	0,416	13	0,034	14	0,652	15	0,270
16	0,888	17	0,506	18	0,124	19	0,742	20	0,360
21	0,978	22	0,596	23	0,214	24	0,832	25	0,450
26	0,068	27	0,686	28	0,304	29	0,922	30	0,540
31	0,158	32	0,776	33	0,394	34	0,012	35	0,630
36	0,248	37	0,866	38	0,484	39	0,102	40	0,720

Die kleinste Zahl ist in der Tafel 0,012, so dass die "Tafel der Eisernen Zahlen" mit $n = 34$ beginnt; ihr folgen die Zahlen 13, 26, 5, ...

Die aus 40 Zahlen bestehende "Tafel der Eisernen Zahlen" besitzt also die folgende Gestalt:

34, 13, 26, 5, 39, 18, 31, 10, 23, 2, 36, 15, 28, 7, 20, 33, 12, 25, 4, 38, 17, 30, 9, 22, 1, 35, 14, 27, 6, 40, 19, 32, 11, 24, 3, 37, 29, 8, 21.

Eine Tafel, die beliebig viele Zahlen enthält, konstruieren wir in ähnlicher Weise. Alle "Eisernen Tafeln" (die aus mehr als 20 Gliedern bestehen) besitzen, unabhängig von der in ihnen enthaltenen Anzahl von Zahlen, die folgende Eigenschaft:

Zwischen aufeinanderfolgenden Zahlen in einer "Tafel von Eisernen Zahlen" gibt es nur drei mögliche Differenzen. Schreiben wir also in der eben konstruierten Tafel die Differenzen zwischen aufeinanderfolgenden Zahlen nieder!

+21, +13, -21, +34, +21, +13, -21, +13, -21, +34, -21, +13, -21, +13, +13, -21, +13, -21, +34, +21, +13, -21, +13, +21, +34, +21, +13, -21, +34, -21, +13, -21, +13, -21, +34, -21, +13, -21, +13.

Wir haben tatsächlich drei und nur drei Differenzen. Die oben angegebene Eigenschaft gilt sogar dann, wenn wir aus einer "Tafel Eiserner Zahlen" alle Zahlen weglassen, die kleiner als irgendeine gegebene Zahl sind, oder auch nach Weglassen aller Zahlen, die kleiner als eine gewisse Zahl und größer als eine andere sind.

Wenn wir in unserem Falle beispielsweise alle Zahlen weglassen, die kleiner als 10 sind, dann erhalten wir die folgende Tafel:

34, 13, 26, 39, 18, 31, 23, 36, 15, 28, 20, 33, 12, 25, 38, 17, 30, 22, 35, 14, 27, 40, 19, 32, 11, 24, 37, 16, 29, 21.

Die Anzahl der Differenzen zwischen aufeinanderfolgenden Zahlen in der obenstehenden Folge ist ebenfalls drei, wovon wir uns leicht überzeugen können, wenn wir alle diese Differenzen aufschreiben:

-21, +13, +13, -21, +13, -21, +13, -8, +13, -21, +13, +13, +21, +13, -8, +13, -21, +13, +13, +21, +13, -21, +13, +13, -21, +13, -8.

Die Differenzen sind: -21, -8, +13.

Unser Theorem beruht auf der obigen Eigenschaft.

Um dem Leser einen gewissen mathematischen Hintergrund für das oben beschriebene Phänomen zu geben, wollen wir annehmen, wir hätten einen Kreis C vom Umfang 1 und sprängen, ausgehend vom Punkt O auf C , von O nach P_1 , von P_1 nach P_2 , wobei die Bögen OP_1 , P_1P_2 , P_2P_3 alle gleichgroß seien. Darüber hinaus wollen wir annehmen, dass wir das 1000mal (oder vielleicht 3872mal) getan haben.

Wir haben damit auf C die Punkte O , P_1 , P_2 , ..., P_{1001} . Wir erhalten 1001 kleine Bögen, die in kurze, mittlere und lange Bögen eingeteilt werden können. Man überzeugt sich leicht, dass alle Bögen in einer Klasse gleichlang sind (!).

97. Lemma: Stellen wir uns auf der nördlichen Halbkugel ein Gebiet vor. Jeder Punkt besitze die geographische Länge L , $0 \leq L \leq 90^\circ$, und das Gebiet enthalte alle derartigen Punkte.

Ein solches Gebiet kann nicht zwei Punkte C, D enthalten, deren Abstand CD mehr als 1000 km beträgt. Den Beweis dieses Lemmas überlassen wir dem Leser.

Wir fertigen uns jetzt ein Modell der Erdkugel an, wobei wir 1 für 10000 km setzen. Wie haben wir auf diesem Modell fünf Punkte A, B, C, D, E zu wählen, damit deren Abstände untereinander alle größer als 1 sind?

Das ist unmöglich! Hier ist der Beweis dafür.

Es sei A der Nordpol (Abb. 91). Die oben formulierte Bedingung lässt für B, C, D, E nur die südliche Halbkugel übrig, wobei der Äquator auch ausgeschlossen ist. Durch die Festlegung

von B verringern wir die Möglichkeiten von C, D, E entsprechend auf weniger als ein Viertel der Oberfläche des Modells; dieser freie Teil P stellt einen "Mond" dar: Seine Ecken sind zwei diametral gelegene Punkte auf dem Äquator, die beiden Winkel sind gleich und kleiner als 90° .

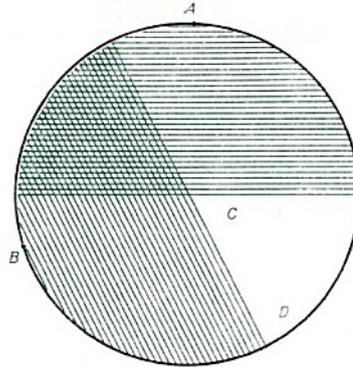


Abb. 91

Es gibt einen Meridian, der P halbiert; den in dem Mond gelegenen Bogen dieses Meridians wollen wir mit M bezeichnen. M ist kürzer als 1, wodurch die Möglichkeit ausgeschlossen wird, dass zwei der Punkte C, D, E auf M liegen. Es sind also nur noch zwei Möglichkeiten geblieben:

- a) keiner der Punkte C, D, E liegt auf M ,
- b) C liegt auf M .

In beiden Fällen erhalten wir zwei Punkte, die in einem der beiden sphärischen Dreiecke mit der gemeinsamen Grundlinie M liegen. Wir wollen dieses Dreieck T nennen, und es seien C und D die beiden in T liegenden Punkte. Da M kürzer als 1 ist, ergibt sich ein Widerspruch zu dem Lemma. Dies zeigt die Undurchführbarkeit des vom Diplomaten vertretenen Planes.

98. Wenn wir hier von Kreisen sprechen, dann meinen wir immer Kreise, die beim Schnitt des Globus mit Ebenen entstehen, die durch den Erdmittelpunkt gelegt sind.

Eine Gerade sei stets eine Gerade durch den Erdmittelpunkt. Sie bestimmt auf dem Globus zwei Punkte, die wir Antipoden nennen. In gewissen Fällen können wir sie als ein Paar von Polen und die Menge der durch die Pole gelegten Kreise als Meridiane ansehen. Eine die Pole verbindende Gerade stellt die Achse eines solchen Systems von Meridianen dar.

Zur Lösung unseres Problems klassifizieren wir alle Kreise:

Wir nennen einen Kreis gut, wenn er frei von Edelsteinen ist, wenn er einen Edelstein trifft oder wenn er zwei antipodale Edelsteine durchläuft. Alle anderen Kreise nennen wir schlecht. Die Anzahl der schlechten Kreise ist endlich, und zwar höchstens gleich $\binom{100}{2}$.

Hieraus folgt, dass es unendlich viele gute Kreise gibt.

Wir wählen einen davon. Er schneidet eine endliche Anzahl von schlechten Kreisen, so dass es möglich ist, einen edelsteinfreien Durchmesser des guten Kreises zu finden, der eine ausschließlich gute Meridiane erzeugende Achse darstellt. Die Pole dieser Achse wollen wir N und S nennen.

Das oben beschriebene System können wir als die Meridiane der Erdkugel ansehen, die mit 100 Edelsteinen geschmückt ist. Wir können annehmen, die Achse NS sei vertikal, und der Globus werde horizontal von einer Lichtquelle angestrahlt; die linke Hälfte des Globus ist beleuchtet, die rechte Hälfte liegt im Dunkeln.

Wenn sich auf der linken Halbkugel 50 Edelsteine befinden, dann haben wir nichts mehr zu beweisen; wenn sich dagegen die Anzahl der auf der linken Hemisphäre sichtbaren Edelsteine von 50 unterscheidet, dann müssen wir den Globus so lange drehen, bis 50 Edelsteine auf der linken Seite erscheinen.

Dass diese Situation tatsächlich eintritt, folgt aus der Konstruktion des Systems. Sie schließt ein, dass die Drehung des Modells die Anzahl der sichtbaren Edelsteine nur in Sprüngen von ± 1 verändert; nach einer vollständigen Drehung um 180° wird die Anzahl der auf der linken Seite sichtbaren Edelsteine gleich der ursprünglichen Anzahl auf der rechten Seite.

99. Die Bäume seien in den neun, in Abb. 92 mit Buchstaben bezeichneten Punkten aufgestellt. Zunächst ziehen wir zwei parallele Geraden.

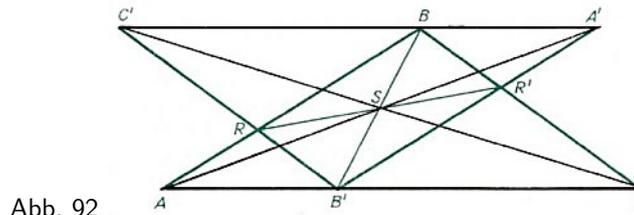


Abb. 92

Auf der unteren der beiden Geraden wählen wir zwei Punkte A und C , auf der oberen Geraden einen dritten Punkt B und zeichnen das Dreieck ABC . Auf der unteren Geraden wählen wir jetzt einen Punkt B' , der zwischen A und C liegt, und ziehen die Geraden $B'C'$ sowie $B'A'$ parallel zu BC bzw. BA .

Auf diese Weise erhalten wir das zu ABC kongruente Dreieck $A'B'C'$ und ein Parallelogramm $BRB'R'$. Als Schnittpunkt der Diagonalen dieses Parallelogramms liegt der Punkt S auf RR' und BB' .

Wir müssen zeigen, dass die Geraden AA' , BB' und CC' ebenfalls durch S laufen. Da $A'BAB'$ ein Parallelogramm ist, halbiert die Diagonale AA' des Parallelogramms seine zweite Diagonale BB' .

AA' geht folglich durch den Mittelpunkt des Parallelogramms $BRB'R'$, d.h. durch D . Analog beweisen wir, dass CC' durch S läuft. Wir sind somit auf 10 Reihen (soviele Geraden gibt es in Abb. 92) und drei Obstbäume in jeder Reihe gelangt.

Aus dieser Anordnung können wir eine weitere ableiten, in der keine Reihe mit einer anderen parallel ist. Zu diesem Zweck zeichnen wir die Darstellung aus Abb. 92 auf Transparentpapier und bringen sie zwischen eine Lichtquelle und eine weiße Wand.

Wenn das Zeichenpapier nicht zur Wand parallel ist, dann kann die Zeichnung so gehalten werden, dass keine der vier Geraden durch B zur Wand parallel ist. An der Wand nehmen wir dann eine Konfiguration wahr, in der es keine parallelen Geraden gibt.

Offenbar erfüllt ein derartiger Obstgarten ebenfalls die Forderungen von Dr. Abrakadabra. (warum?).

Wer diese Skizze als die Darstellung eines Obstgartens nach Dr. Abrakadabra interpretieren wollte, hätte große Schwierigkeiten (warum?).

100. Es seien A, B, C die Positionen der drei Schiffe zu dem Zeitpunkt, in dem sie der Befehl erreicht. Es bezeichne P einen beliebigen Punkt auf den Seiten oder im Inneren des Dreiecks ABC ; die maximalen Geschwindigkeiten in Knoten seien a, b bzw. c und AP, BP, CP die Abstände in Seemeilen. Folglich sind

$$\frac{AP}{a} \quad ; \quad \frac{BP}{b} \quad ; \quad \frac{CP}{c} \quad (1)$$

die notwendigen (und hinreichenden) Zeiten in Stunden, die die Schiffe brauchen, um P zu erreichen. Es sei $F(P)$ das Maximum der drei Brüche (1).

Zur Lösung der Aufgabe müssen wir P so wählen, dass $F(P)$ minimal wird. Der Leser mag geneigt sein, einen Punkt als Sammelpunkt zu suchen, der von den drei Schiffen gleichzeitig erreicht werden kann. Es gibt jedoch einfache Beispiele, die zeigen, dass ein solches Vorgehen nicht die kürzeste garantiert.

Können Sie ein derartiges Beispiel angeben?

Literaturhinweise

- Alexandroff, P. S.: Einführung in die Gruppentheorie. 7. Aufl., Berlin 1971, MSB Nr. 1
- Boltjanski, W. G.; I. Z. Gochberg: Sätze und Probleme der kombinatorischen Geometrie. Berlin 1972, MSB Nr. 61
- Dubnow, I. S.: Fehler in geometrischen Beweisen. 3. Aufl., Berlin 1967, MSB Nr. 17
- Dynkin, E. B.; W. A. Uspenski: Mathematische Unterhaltungen I - Mehrfarbenprobleme. 4. Aufl., Berlin 1968, MSB Nr. 18
- Gelfond, A. O. : Die Auflösung der Gleichungen in ganzen Zahlen. 4. Aufl., Berlin 1968, MSB Nr. 22
- Gnedenko, B. W.; A. J. Chintschin: Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. 8. Aufl., Berlin 1971, MSB Nr. 10
- Hameister, E.: Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene. 3. Aufl., Leipzig 1971, MSB Nr. 4
- Hilbert, D.; S. Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie. Berlin 1932
- Jaglom, I. M.; W. G. Boltjanski: Konvexe Figuren. Berlin 1956, MSB Nr. 32
- Korowkin, P. P.: Ungleichungen. 6. Aufl., Berlin 1970, MSB Nr. 9
- Mangoldt, H. v.; K. Knopp: Einführung in die höhere Mathematik. Bd. I, 14. Aufl., Leipzig 1970
- Natanson, I. P.: Einfachste Maxima- und Minimaufgaben. 4. Aufl., Berlin 1966, MSB Nr. 15
- Rademacher, H.; O. Toeplitz: Von Zahlen und Figuren. 1. Aufl., Berlin 1930
- Roman, T.: Reguläre und halbreuläre Polyeder. Berlin 1968, MSB Nr. 45
- Sedlacek, V.: Keine Angst vor Mathematik. 3. Aufl., Leipzig 1972, MSB Nr. 67
- Sominski, J. S.: Die Methode der vollständigen Induktion. 10 Aufl., Berlin 1971, MSB Nr. 8
- Steinhaus, H. : Kaleidoskop der Mathematik. Berlin 1959
- Steinhaus, H.: 100 Aufgaben- Elementare Mathematik. Leipzig/Jena/Berlin 1968, MSB Nr. 27.