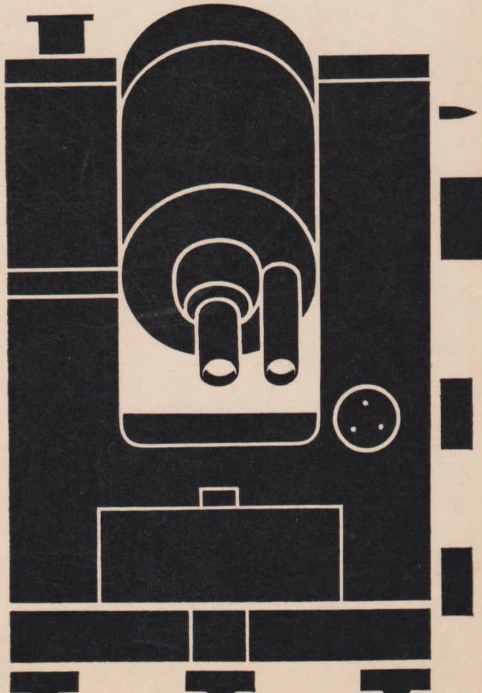
M. M. LIMAN

Praktische Aufgaben aus der GEOMETRIE



M. M. Liman

Praktische Aufgaben aus der Geometrie

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

1964

Die praktischen Aufgaben zur Geometrie sind äußerst mannigfaltig, sowohl in ihrer Thematik als auch in der Formulierung des mathematischen Problems. Hieraus ergibt sich auch eine Vielfältigkeit von Lösungsmethoden. Außerdem vergrößert sich die Anzahl der in Frage kommenden Lösungsmethoden bei der Behandlung neuer Lehrplanthemen und auch infolge der allgemeinen Entwicklung der Schüler. Auf diese Weise erhalten die Schüler die Möglichkeit, ihre Initiative beim Auffinden neuer Wege zur Lösung der Aufgaben zu entwickeln. (Besonders bei Wiederholungen.)

Zum Beispiel sei bei gegebener Abwicklung (Abb. 168) gefordert, den Inhalt der Oberfläche und den Rauminhalt eines geraden Prismas zu bestimmen. Diese Aufgabe kann man mit der ganzen Klasse gemeinsam lösen, indem man einen Schüler zur Tafel ruft. Es ist aber besser, wenn jeder Schüler die Abwicklung des Prismas (mit der Angabe des Maßstabes) erhält und selbständig auf die Aufgabenstellung antwortet. In diesem Falle wird die Initiative des Schülers nicht unterdrückt. Er kann nach seinem Ermessen handeln und z. B. den Flächeninhalt des ebenen Vielecks nach einer bekannten Formel berechnen oder die Figur in eine Reihe einfacherer Teilfiguren zerlegen.

Die Hauptsache ist, daß der Schüler nicht passiver Zuhörer und Beobachter ist, sondern selbst aktiv handelt: zeichnet, mißt, rechnet, vergleicht, überprüft.

Analog kann man auch in dem Falle verfahren, wenn die umgekehrte Aufgabe zu lösen ist: Nach dem gegebenen Modell ist die Abwicklung des Prismas aufzuzeichnen. Jeder Schüler erhält ein Modell des geometrischen Körpers sowie die erforderlichen Meß- und Zeichengeräte und löst selbständig die Frage der Wahl des Maßstabes, der Anordnung der Zeichnung, der Reihenfolge der Messungen und der Konstruktionen u. dgl. m. Eine solche Form der Beschäftigung ist eine Art Experiment im Mathematikunterricht.

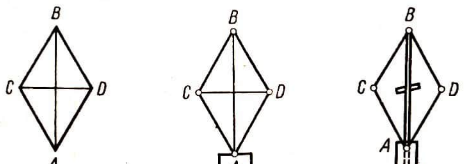
Häufig finden im Mathematikunterricht Illustrationen einzelner mathematischer Sätze durch Beispiele, die aus der Produktion stammen, ihre Anwendung. Derartige Beispiele sind letztlich erforderlich, doch sie lehren die Schüler nicht, die Mathematik auf das sie umgebende Leben anzuwenden. Zum Beispiel kann man den Schülern einen Kurbelmechanismus zeigen und ihnen erklären, nach welchem Prinzip er funktioniert, welche Sätze, Formeln, Ungleichungen man hier verwendet. Alles das nehmen die Schüler auf, aber es bleibt ihnen unklar, wie der Mechanismus hergestellt wurde, warum sich der Konstrukteur gerade nach diesen Formeln richtete und nicht nach irgendwelchen anderen. Deshalb besitzen solche Aufgaben großen Wert, die fordern, eine Konstruktion der einen oder andern Vorrichtung auf der Grundlage bestimmter theoretischer Sätze auszuarbeiten und sie selbständig zu fertigen. Bei der Herstellung eines Modells wird die Verbindung der Mathematik mit anderen Schulfächern verwirklicht (Physik, Chemie, Zeichnen, Maschinenkunde), weil es erforderlich ist, ganze Komplexe verschiedener Operationen auszuführen: Herstellung von Skizzen und Zeichnungen, Zusammenstellung und Bearbeitung von Materialien, Verbinden und Anpassen der Einzelteile, Streichen des Modells, Erproben des Gerätes und Erwerb einiger Fertigkeiten in seiner Handhabung.

Es ist nicht entscheidend, ob die ersten vom Schüler gefundenen Lösungsvarianten unvollkommen sind, die Hauptsache ist, daß das Denken des Schülers in der vorbestimmten Richtung abläuft. Hierbei muß sich der Schüler notwendigerweise nicht nur mit der praktischen Anwendung von Grundlagen, sondern auch mit der Vertiefung seiner theoretischen Kenntnisse in der Mathematik und anderen Disziplinen befassen.

Einzelne Geräte kann man sogar in der Klasse, besser noch innerhalb von Arbeitsgemeinschaften herstellen, z. B. „Es ist ein Wagenheber zu konstruieren, wobei die Kenntnis von Eigenschaften der Diagonalen eines Rhombus zu Hilfe genommen wird.“

Lösung: Bekanntlich stehen die Diagonalen eines Rhombus aufeinander senkrecht. Wenn die eine Diagonale ($\overline{CD}$) horizontal gelegen ist, wird folglich die andere ($\overline{AB}$) immer die vertikale Lage einnehmen. Sind die Seiten des Rhombus gelenkig miteinander verbunden, so werden sich bei Veränderung der Winkel des Rhombus auch die Längen seiner Diagonalen ändern, wobei einer Verlängerung der Diagonalen $\overline{CD}$ eine Verkürzung der Diagonalen $\overline{AB}$ folgt und umgekehrt. Auf diese Weise kann man erreichen, daß sich der Punkt B bald nach unten, bald nach oben bewegt; dazu genügt es, den Punkt A starr zu befestigen, die gelenkige Verbindung der Rhombusseiten jedoch beizubehalten.

In dieser Art ist auch der Hebemechanismus dargestellt. Jetzt kommen wir zur Vervollkommnung der Konstruktion des Wagenhebers. Wir stellen zuerst fest, daß der Rhombus $ABCD$ keine stabile Figur ist, weil er mit dem Untergestell nur in einem Punkt A verbunden ist, und dort auch



gelenkig. Wir fertigen das Untergestell aus einem Rohr (Zylinder) und schieben das eine Ende einer Stange hinein. Das andere Ende befestigen wir im Punkt B. Jetzt wird die Diagonale $\overline{AB}$ immer eine senkrechte Lage einnehmen, natürlich wenn das Gestell senkrecht steht.

Wollen wir die Länge der Diagonalen $\overline{AB}$ verändern, so ist es das gleiche, als könnten wir den Punkt B sowohl nach oben als auch nach unten bewegen. Das kann man erreichen, wenn man in das untere Ende der Stange ein Gewinde schneidet und auch im Untergestell mit einem entspechenden Gewinde vorsieht. Das Ein- und Ausschrauben kann man mit Hilfe eines Hebels durchführen. Man kann auch ein Modell des Hebers vorschlagen, bei dem nicht die Länge der Diagonalen $\overline{AB}$, sondern die der Diagonalen $\overline{CD}$ verstellt wird.

Ähnliche Besprechungen kann man auch bei der Lösung anderer Aufgaben vornehmen, z. B. bei folgender: „Zur Teilung des Kreises in gleiche Teile ist ein Gerät herzustellen, das auf den Eigenschaften der Peripheriewinkel beruht.“ (Aufgabe 220) Das Buch enthält viele Vermessungsaufgaben im Gelände. Die Mehrzahl von ihnen kann man mit Erfolg im Klassenraum durchführen; bequem ist auch die Darstellung des Geländes im Heft. Die Verwendung des Klassenraumes (Sandkasten oder Modell des Geländes) ermöglicht es, praktische Aufgaben dieser Art in jeder Jahreszeit zu lösen.

Für viele Aufgaben werden verschiedene Lösungsverfahren vorgeschlagen, was zweifellos das Verständnis und die Auffassungsgabe der Schüler entwickelt. Weiter dienen sie zum Aufsuchen eigener Verfahren bei der Konstruktion geometrischer Figuren oder beim Beweis von Sätzen.

In bezug auf die Beweisaufgaben ist zu bemerken, daß in der Aufgabensammlung nur solche enthalten sind, die sich in natürlicher Weise aus praktischen Forderungen ergeben.

Bei der Lösung der Aufgaben und der Ausführung verschiedener Berechnungen ist es oft nötig, den (logarithmischen) Rechenstab zu verwenden, obwohl besondere Hinweise dazu nicht gegeben werden.

Zum Schluß kann gesagt werden, daß das gesammelte Material schon einige Jahre in den Schulen des Gebietes von Krasnodarsk Verwendung findet.

1. Geometrische Aufgaben im Arithmetikunterricht

1. Es ist das Volumen eines Kastens zu bestimmen, der die Abmessungen 40 cm $\times$ 25 cm $\times$ 20 cm hat.

2. Beim Ausheben eines Grabens mit einer Breite von 2 m und einer Tiefe von 2 m wurden 200 m^3 Boden entfernt. Es ist die Länge des Grabens zu bestimmen.

3. Die Höhe eines Zimmers beträgt 3,00 m, der Fußboden hat die Abmessungen 4,00 m $\times$ 5,00 m. Es ist das Volumen des Zimmers zu berechnen.

4. Unter ein Schutzdach von 20 m Länge und 8 m Breite wurden Weizenkörner zum Trocknen geschüttet. Es ist die Masse des Korns zu berechnen, wenn die Schicht 20 cm dick war und 1 m^3 Körner 760 kg wiegt.

5. Es sind die Flächen der Figuren aus den Abbildungen 1a und 1b zu berechnen.

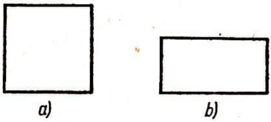


Abb. 1

6. Es sind mit Hilfe des Winkelmessers Winkel von 20°, 37°, 130° zu zeichnen.

7. Es sollen mit Hilfe eines Winkelmessers die Winkel jeder Figur in den Abbildungen 1 und 3 gemessen werden.

8. Ein Haus hat eine Länge von 8 m und die gleiche Breite. Das Haus ist mit einem Zaun umgeben, der von einer Wand den Abstand 5,7 m hat und von jeder der übrigen Wände 15,2 m. Es ist die Länge des Zaunes zu bestimmen.

9. Es ist die Fußbodenfläche des Klassenzimmers zu bestimmen.

10. Es ist der Flächeninhalt der in Abbildung 2 gezeichneten Rahmen zu berechnen.

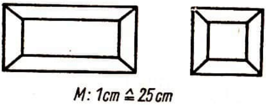


Abb. 2

11. Wieviel Bretter von 4 m Länge und 20 cm Breite sind zum Dielen eines Fußbodens mit den Abmessungen 4,0 m × 5,2 m erforderlich?

12. Ein asphaltierter Fußweg umgibt ein Gebäude. Das Gebäude ist 10 m lang und 6 m breit. Welche Fläche wurde asphaltiert, wenn der Weg 1 m breit ist (der Weg liegt unmittelbar am Gebäude)?

13. Es ist die Länge der Leiste zu bestimmen, die zur Herstellung jedes Rahmens verbraucht wurde (Abb. 2).

14. Es ist die Länge der Scheuerleisten im Klassenzimmer (mit einer Genauigkeit von 1 dm) zu bestimmen.

15. Ein Schulhof hat eine Länge von 120 m und eine Breite von 80 m. Im Hof sollen im Abstand von 1 m vom Gebäude Zierbäume gepflanzt werden. Wieviel Bäume sind erforderlich, wenn sie im Abstand von 2 m voneinander entfernt gesetzt werden?

16. Aus einem Draht von 86 cm Länge wird ein quadratischer Rahmen gefertigt. Es ist die Seite des Quadrats zu bestimmen.

17. Ein Kasten ohne Deckel hat die Abmessungen 60 cm × 40 cm × 60 cm und ist innen mit verzinktem Eisen ausgekleidet. Es ist zu bestimmen, wieviel Eisen für das Verkleiden verbraucht wurde.

18. Wieviel Bretter mit einer Länge von 150 cm und einer Breite von 25 cm sind erforderlich, um einen Kohlenkasten von 100 cm Länge, 50 cm Breite und 75 cm Höhe zu bauen?

19. Es ist der Flächeninhalt der aufgezeichneten Figuren (Abb. 3) zu finden, indem die zweite in ein Rechteck und ein Dreieck und die dritte in zwei Dreiecke zerlegt wird.

20. Für einen Koffer, der die Abmessungen 60 cm × 35 cm × 18 cm hat, soll ein Überzug genäht werden. Wieviel Quadratmeter Stoff sind dafür erforderlich?

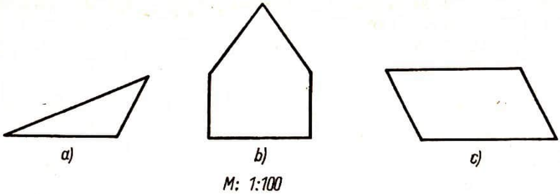


Abb. 3

21. Eine Platte von 180 cm Länge, 120 cm Breite und 4 cm Dicke wurde zweimal auf allen Seiten mit Ölfarbe gestrichen. Wieviel Farbe wurde verbraucht, wenn für einmaliges Streichen von einem Quadratmeter 200 g Farbe benötigt werden?

22. Aus vier Stücken Zeltleinwand (Abb. 3b) soll ein Zelt genäht werden. Wieviel Quadratmeter Zeltleinwand wurde für das Zelt verbraucht?

23. Ein Zimmer mit einer Länge von 6 m, einer Breite von 4 m und einer Höhe von 2,8 m hat drei Fenster mit den Abmessungen 0,8 m $\times$ 1,4 m und zwei Türen mit den Abmessungen 1 m $\times$ 2 m. Was muß man für das Weißen des Zimmers bezahlen, wenn das Weißen von einem Quadratmeter 0,75 DM kostet?

24. Es ist die Länge des aufgezeichneten Kreisumfangs (Abb. 4) zu bestimmen.

25. Es ist der Umfang der in Abbildung 5 dargestellten Figur zu messen.

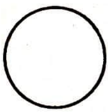


Abb. 4

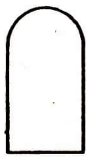


Abb. 5

26. Wie lang ist ein Streifen Eisen zu nehmen, damit aus ihm ein Reifen mit dem Durchmesser 60 cm gefertigt werden kann? (Für die Überlappung rechne man 10 cm.)

27. Man hat ein Stück Bandeisen von 336 cm Länge. Welchen Radius hat der Kreis, den man daraus fertigen kann? (Für die Überlappung rechne man 10 cm.)

28. Wieviel Windungen eines aufgerollten Drahtes sind erforderlich, um diesen zwischen zwei Pfosten straff zu spannen, deren Abstand 30 m beträgt? (Der Durchmesser jeder Drahtwindung beträgt 0,6 m.)

29. Strecken der Länge 52,0 m, 44,6 m, 69 m sind im Maßstab 1 : 1000 aufzuzeichnen.

30. Es ist der Plan des Klassenzimmers aufzunehmen.

31. Es ist eine maßstabgerechte Zeichnung des Schulhofs mit sämtlichen Gebäuden anzufertigen.

32. Es ist der Inhalt der Fläche zu berechnen, die auf einer maßstabgerechten Zeichnung (Maßstab 1 : 50) als Rechteck mit der Länge 48 cm und der Breite 34 cm erscheint.

33. Es ist der Inhalt der Fläche zu berechnen, deren Flächeninhalt auf der maßstabgerechten Zeichnung (Maßstab 1 : 1000) gleich 200 cm² ist.

34. Mit Hilfe der beigefügten maßstabgerechten Zeichnung (Abb. 6) ist der Flächeninhalt des dargestellten Teils zu berechnen. Es soll aus zwei Dreiecken zusammengesetzt werden.

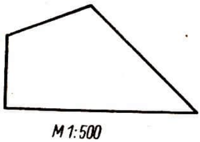


Abb. 6

2. Grundbegriffe

35. Es ist die Länge des eigenen Schrittes zu bestimmen und eine Tabelle aufzustellen, mit deren Hilfe eine bestimmte Schritteanzahl in Meter umgerechnet werden kann und umgekehrt.

36. Es ist eine Gerade im Gelände zu markieren.

37. Es ist im Gelände der Punkt zu bestimmen, in dem zwei gegebene Geraden einander schneiden.

38. Es ist im Gelände eine Gerade zu markieren, die zu einer gegebenen Geraden senkrecht verläuft.

39. Es ist (im Gelände) das Lot von einem gegebenen Punkt auf eine vorgegebene Gerade mit (mit Hilfe eines Winkelmaßes) zu fällen.

40. Es ist eine Strecke in (angenähert) 5 gleiche Teile zu teilen.

41. Es ist ein Bogen in fünf (angenähert) gleiche Teile zu teilen.

Hinweis: Die Aufgaben 40 und 41 kann man mit Hilfe einer geeigneten Zirkelöffnung lösen.

42. Wie prüft man die Genauigkeit eines Lineals?

43. Wie prüft man nach, ob eine gegebene Oberfläche (zum Beispiel die Oberfläche der Tischplatte) eine Ebene ist?

44. Dem Beobachter wurden zwei Orientierungspunkte gezeigt. Wie bestimmt man von einem festen Standpunkt aus den Winkel, unter dem die beiden Punkte erscheinen?

Antwort: Man zieht zwei Strahlen vom Standpunkt des Beobachters zu den gegebenen Orientierungspunkten. Der gesuchte Winkel ist der Winkel zwischen diesen Strahlen.

45. Um welchen Winkel dreht sich die Erde in 5 Stunden um ihre Achse? Um welchen Winkel dreht sich in der gleichen Zeit der Stundenzeiger einer Uhr?

Antwort: 75°; 150°.

46. Wie bestimmt man an einem sonnigen Tag die ungefähre Uhrzeit mit Hilfe eines Kompasses?

47. Das vordere Rad eines Leiterwagens hat 10 Speichen, das hintere hat 11 Speichen. Es ist der Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Speichen jedes Rades zu bestimmen.

48. Es ist die Länge des Bogens des Erdmeridians auszurechnen, der 1 Grad, 1 Minute, 1 Sekunde einschließt.

Lösung: 1° entspricht $\frac{40\,000}{360}$ km oder 111,1 km.

$1'$ entspricht $\frac{111{,}1}{60}$ km oder 1,852 km.

$1''$ entspricht $\frac{1852}{60}$ m oder 31 m.

49. In der Praxis kann man einen rechten Winkel durch mehrmaliges Falten eines Blattes Papier von beliebiger Form erhalten. Es ist zu erklären, wieso man hierbei rechte Winkel erhält.

Antwort: Es sind rechte Winkel, weil jeder von ihnen seinem Nebenwinkel gleich ist.

50. Wie prüft man die Genauigkeit eines Zeichendreiecks?

51. Was für Winkel und was für Winkelpaare entstehen dort, wo zwei Straßen, zwei Wege einander schneiden?

52. Wie bestimmt man die Größe der Winkel, die an der Kreuzung zweier Wege auftreten?

53. Ein Winkel (spitz oder stumpf) ist in drei gleiche Teile zu teilen.

Hinweis: Die Teilung des Winkels wird näherungsweise entweder mit Hilfe des Winkelmessers oder mit Hilfe des Zirkels durchgeführt.

54. In der Abbildung 7 ist ein Abgrenzungsgitter dargestellt (Teil eines hydraulischen Bohrers). Es ist eine Zeichnung dieses Teils in natürlicher Größe anzufertigen (die Abmessungen sind in Millimetern gegeben).

55. Fertigen Sie die Zeichnung eines Schlosserwinkeleisens nach den gegebenen Abmessungen an (Abb. 8)!

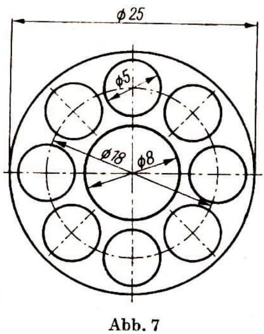


Abb. 7

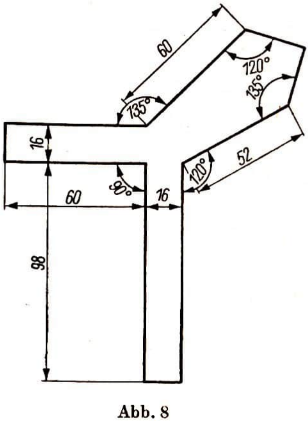


Abb. 8

3. Parallelität

56. Warum müssen die Eisenbahnschienen (auf geraden Strecken) parallel sein?

57. Zwei Maste wurden lotrecht aufgestellt. Sind sie genau parallel?

Antwort: Nein, denn die Schwerkraft ist zum Erdmittelpunkt gerichtet.

58. Durch einen Punkt A ist mit Hilfe eines Lineals und eines Dreiecks die Gerade zu ziehen, die parallel zu einer gegebenen ist.

59. Durch einen Punkt A ist mit Hilfe eines Winkelmessers und eines Lineals eine Gerade zu ziehen, die parallel zu einer gegebenen ist.

Hinweis: Es ist ein beliebiges Merkmal der Parallelität zweier Geraden zu benutzen.

60. Im Gelände ist eine Gerade zu markieren, die parallel zu einer gegebenen verläuft.

61. Auf jeder Seite eines Bahnkörpers liegt ein Geländestreifen von 15 m Breite, der zum Gelände der Reichsbahn gehört. Wie kann man mit Fluchtstäben diesen Geländestreifen kennzeichnen, wenn man ein Winkelmeßgerät und ein Meßband besitzt?

62. Zu einem Anlegeplatz führen zwei Wege. Es ist der Winkel zu bestimmen, den sie miteinander einschließen. Wie macht man das?

Lösung: Besitzt man eine Karte, so kann man den Winkel finden, indem man beide Wege auf der Karte bis zu ihrem Schnittpunkt verlängert. Ohne Karte (oder wenn der Schnittpunkt der Wege außerhalb der Karte liegt) kann man den Winkel durch Verlängern einer Linie finden, die parallel zur Richtung des einen Weges verläuft und den anderen Weg schneidet.

63. Aus einem Winkelmesser kann man ein einfaches Gerät zur Messung von Winkeln in senkrecht stehenden Ebenen herstellen. Im Punkt O befestigt man ein Lot; das Gerät benutzt man so, wie es in der Abbildung 9 gezeigt ist. Es ist zu erklären, weshalb durch den Faden die Gradzahl des Winkels α angezeigt wird.

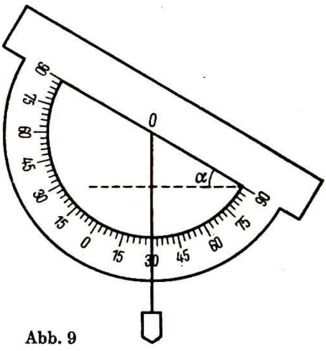


Abb. 9

64. Die Abbildung 10 zeigt, wie man den Spanwinkel eines Drehmeißels mit Hilfe eines speziellen Winkelmessers messen kann. (Der Zeiger dieses Winkelmessers nimmt bei der Messung immer eine lotrechte Stellung ein. Das Teil, in diesem Falle der Drehstahl, liegt auf einer waagerechten Platte.) Welche wichtige Eigenschaften bestimmter Winkel wird hier benutzt?

Antwort: Die Eigenschaft, daß Winkel mit paarweise zueinander senkrechten Schenkeln gleich sind.

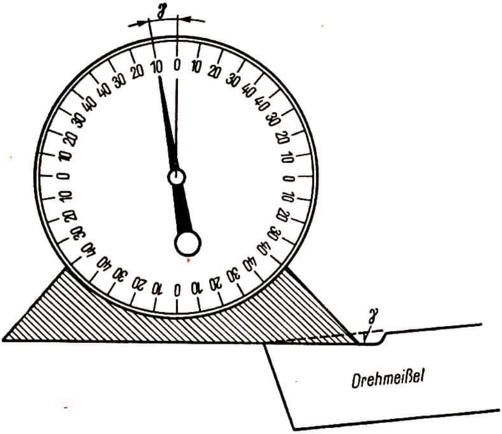


Abb. 10

65. Mit dem gleichen Winkelmeßgerät (siehe Aufgabe 64) kann man auch den Freiwinkel des Drehmeißels messen (Abb. 11). Welche wichtige Eigenschaft bestimmter Winkel wird hier benutzt?

Antwort: Die Eigenschaft, daß Winkel mit paarweise zueinander parallelen Schenkeln gleich sind.

66. An Hand der Abbildung 12 soll der Aufbau eines Winkelmessers mit drehbarer Schablone erklärt werden. Die Abbildung zeigt, wie man den Einstellwinkel[1] mißt. Welcher Winkel wird am Gerät angezeigt?

Antwort: Hier wird die Eigenschaft benutzt, daß Winkel mit paarweise zueinander senkrechten Schenkeln gleich sind. Der gesuchte Winkel ist mit φ bezeichnet. (Abb. 13)

[1]) So nennt man den Winkel zwischen der Richtung des Vorschubs und der Schneidekante.

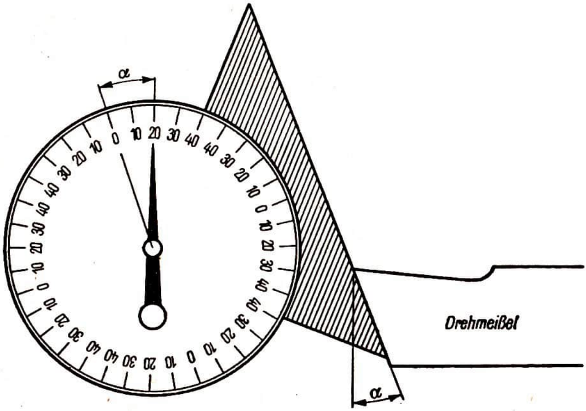


Abb. 11

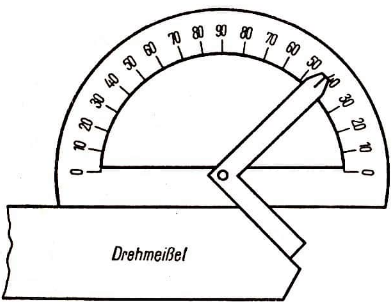


Abb. 12

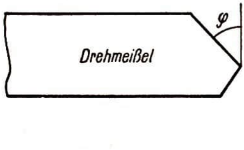


Abb. 13

67. Um die Hälfte eines gegebenen Winkels ABC zu finden, trägt man auf dem einen Schenkel des Winkels eine beliebige Strecke $\overline{BE}$ ab und auf der Verlängerung des anderen Schenkels die Strecke $\overline{BD} = \overline{BE}$. Dann zieht man die Gerade DE (Abb. 14). Weshalb ist der Winkel BDE gleich der Hälfte des gegebenen?

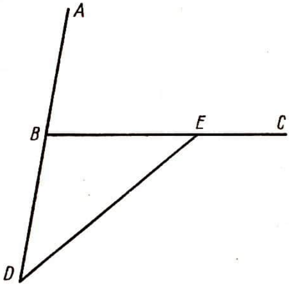


Abb. 14

68. Unter Benutzung der Angaben der vorigen Aufgabe ist ein Verfahren zu nennen, mit dessen Hilfe man den Winkel finden kann, der doppelt so groß ist wie ein vorgegebener spitzer Winkel.

69. Um von einem Punkt A ein Lot zu einer gegebenen Geraden zu fällen, legt man ein rechtwinkliges Zeichendreieck mit der Hypotenuse an die Gerade und legt an eine der Katheten ein Lineal (Abb. 15a). Dann legt man die andere Kathete an das Lineal, wobei dieses nicht bewegt werden darf, und zeichnet mit Hilfe der Hypothenuse die gesuchte Gerade (Abb. 15b). Weshalb ist die konstruierte Gerade lotrecht zur gegebenen?

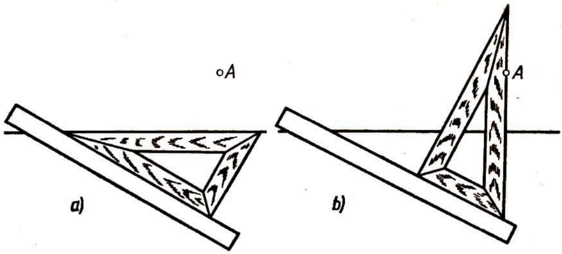


Abb. 15

70. Es sind im Gelände Vierecke beliebiger Abmessungen mit den folgenden Winkeln: 1) 68°; 126,5°; 90°; 75,5°; 2) 60°; 75°; 55°; 70° zu markieren.

71. Im Gelände ist von einem beliebigen Punkt A aus das Lot auf eine gegebene Gerade MN zu fällen, wobei nur eine Schnur von ausreichender Länge zur Verfügung steht.

Lösung: Die Mitte der Schnur legen wir in den Punkt A (Abb. 16) und die Enden B und C auf die Gerade MN. Mit Hilfe der Schnur finden wir die Mitte O des Abschnitts $\overline{BC}$. Die Gerade AO ist also das gesuchte Lot.

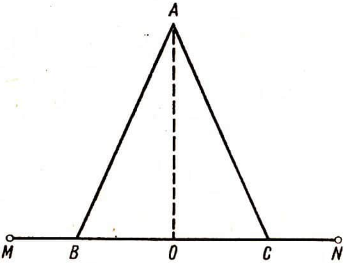


Abb. 16

72. Auf einer Geraden MN ist in einem gegebenen Punkte O mit Hilfe einer Schnur die Senkrechte zu errichten.

Lösung: Vom Punkt O aus tragen wir auf der Geraden MN gleiche Strecken $\overline{OB} = \overline{OC}$ ab. In den Punkten B und C schlagen wir Pflöcke ein und befestigen daran die Enden des Seils (Abb. 16). Nachdem wir die Mitte der Schnur markiert haben (A), suchen wir den Punkt, in dem beide Hälften der Leine gleich gespannt sind. Die Strecke $\overline{AO}$ ist dann die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks ABC, deshalb gilt $\overline{AO} \perp \overline{MN}$.

73. Die Aufgabe 72 kann man auch auf folgende Weise lösen: Ein Schnurende wird im gegebenen Punkt O befestigt und das andere in irgendeinem beliebigen Punkt B der Geraden MN (Abb. 17). Vorher mar-

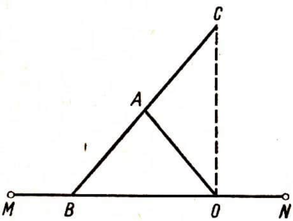


Abb. 17

kiert man die Schnurmitte (A) und spannt sie aus. Dann verlängert man die Strecke $\overline{BA}$ über A hinaus und trägt auf ihr $\overline{AC} = \overline{AB}$ ab. Weshalb ist die Gerade OC das gesuchte Lot?

74. Zwei Punkte A und B liegen auf gegenüberliegenden Ufern eines Sees. Um die Entfernung zwischen ihnen zu bestimmen, konstruiert man ein gleichschenkliges Dreieck derart, daß die Strecke $\overline{AB}$ zu einem Schenkel dieses Dreiecks wird. Bestimme die Entfernung $\overline{AB}$ zeichnerisch!

Lösung: Wir ziehen eine Gerade AD und finden auf ihr einen Punkt C, von dem aus man die Punkte A und B sehen kann, so daß $\sphericalangle ACB = (180° - \sphericalangle BAC) : 2$ gilt. Dann ist $\overline{AB} = \overline{AC}$ (Abb. 18). Wählt man aber $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BAC$, ist die Konstruktion undurchführbar, wenn der Winkel BAC ein rechter oder stumpfer Winkel ist.

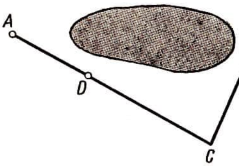


Abb. 18

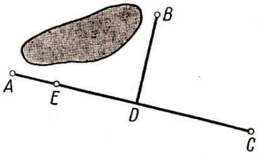


Abb. 19

75. Die Länge $\overline{AB}$ eines Sees kann man wie folgt bestimmen: Man zieht die Gerade AE und findet auf ihr einen Punkt D, für den $\overline{AD} \perp \overline{BD}$ gilt; dann trägt man $\overline{DC} = \overline{AD}$ ab (Abb. 19). Dann mißt man die Entfernung $\overline{BC}$, die gleich der Breite des Sees ist. Weshalb ist dieses Verfahren richtig? Ist eine derartige Konstruktion immer möglich?

76. Um im Gelände einen Winkel zu halbieren, trägt man auf seinen Schenkeln, beginnend am Scheitelpunkt, gleiche Strecken ab und verbindet die Endpunkte durch eine Strecke (Abb. 20). Die Strecke $\overline{OC}$, die den Scheitelpunkt O mit der Mitte der Strecke $\overline{AB}$ verbindet, halbiert den Winkel bei O. Die Richtigkeit dieser Konstruktion ist zu beweisen.

77. Zwischen zwei Punkten A und B liege ein unpassierbares Moor. Bei der Messung der Entfernung $\overline{AB}$ verfährt man wie folgt: Man zieht eine Gerade BD, mißt den Winkel ABD und sucht auf den Geraden BD einen Punkt C, für den $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABD$ gilt (Abb. 21). Wie findet man nun die Länge $\overline{AB}$?

Antwort: Man messe $\overline{AC}$, weil $\overline{AB} = \overline{AC}$ gilt.

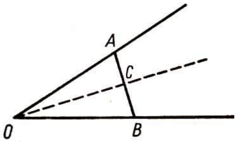


Abb. 20

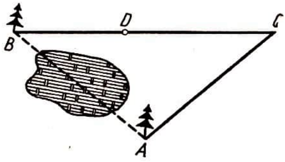


Abb. 21

78. Es ist die Höhe eines Gegenstandes mit Hilfe eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks zu bestimmen.

79. In einem Endpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ ist, ohne die Strecke zu verlängern, eine Senkrechte zu errichten.

Lösung: Man wählt die Punkte A und B als Kreismittelpunkte, schlägt je einen Kreisbogen mit einem beliebigen Radius R $\left(R > \frac{\overline{AB}}{2}\right)$ und erhält einen Schnittpunkt M (Abb. 22). Auf der Geraden BM trägt man von M aus $\overline{MN} = \overline{BM}$ ab. Die Gerade AN steht senkrecht auf der Geraden AB.

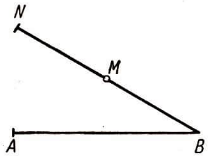


Abb. 22

80. In einer Anlage ist die Hälfte eines Beetes sichtbar. Wie kann man die andere Hälfte, die symmetrisch zur ersten gelegen ist, markieren, wenn man einen Winkelmesser und ein Meßband zur Verfügung hat?

81. Es soll im Gelände die Entfernung $\overline{AB}$ gemessen werden (die Punkte A und B seien durch ein Hindernis getrennt). Man bestimme diese Entfernung mit Hilfe des Verfahrens der Axialsymmetrie.

Die Lösung folgt aus der Abbildung 23. Eine einfachere Lösung erhalten wir, wenn die Gerade MN durch einen der gegebenen Punkte (A oder B) geht.

82. Es ist die Entfernung zwischen zwei nicht erreichbaren Punkten A und B mit Hilfe des Verfahrens der Axialsymmetrie zu bestimmen.

Lösung: Wir ziehen eine Gerade CD und finden auf ihr die Fußpunkte der Lote, die von den Punkten A und B aus gefällt wurden (Abb. 24). Auf der Geraden CD greifen wir zwei beliebige Punkte M und N heraus (man kann auch einen Punkt nehmen), messen die Winkel AMC und BND und tragen auf der anderen Seite der Geraden $\sphericalangle CMK = \sphericalangle AMC$ und $\sphericalangle DNE = \sphericalangle BND$ an. Die Strecken $\overline{KE}$ und $\overline{AB}$ sind gleich, weil sie symmetrisch zur Achse CD liegen. Schließlich kann $\overline{KE}$ gemessen werden.

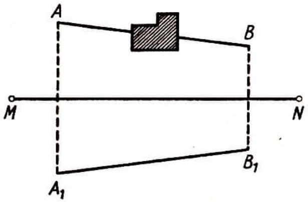


Abb. 23

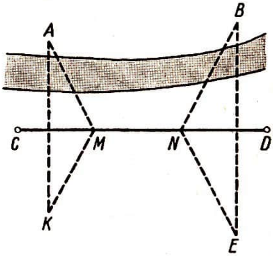


Abb. 24

83. Ein Blumenbeet habe die Form eines gleichschenkligen Dreiecks. Zwei Seiten seien 2 m und 4 m lang. Es ist die dritte Seite dieses Dreiecks zu bestimmen.

84. Man löse die vorige Aufgabe, wenn die Seiten des Dreiecks 2 m und 3 m lang sind.

85. Es ist die Entfernung zwischen zwei Punkten im Gelände zu ermitteln, ohne sie direkt zu messen.

Hinweis: Es ist eines der Kongruenzkriterien zu verwenden.

86. Vom Punkt A soll zur Insel B eine Telefonleitung gelegt werden. Wie kann man die erforderliche Länge des Telefonkabels ermitteln, ohne den Fluß zu überqueren? Welches Kriterium für die Kongruenz von Dreiecken kann man hier benutzen? (Es wird angenommen, daß der Boden des Flusses eben ist.)

Lösung: Wir zeichnen die Gerade AC (Abb. 25). Wir tragen darauf $\overline{A_1C} = \overline{AC}$ ab. Durch den Punkt A_1 ziehen wir die Gerade A_1B_1 so, daß $\sphericalangle CA_1B_1 = \sphericalangle CAB$ ist. Dann gilt $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C$, weil die Dreiecke ABC und A_1B_1C in einer Seite und zwei anliegenden Winkeln übereinstimmen. Die gesuchte Länge des Kabels ist folglich gleich der Länge $\overline{A_1B_1}$.

87. Man bestimme die Entfernung von zwei Punkten im Gelände, von denen einer unzugänglich ist.

Hinweis: Siehe Lösung von Aufgabe 86.

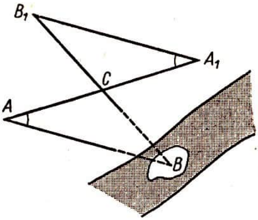


Abb. 25

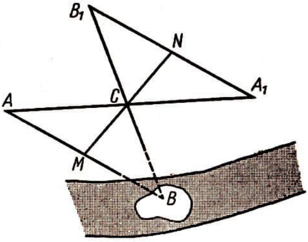


Abb. 26

88. Die Aufgabe 86 ist zu lösen, ohne Winkel zu messen und zu konstruieren; es seien nur Längenmessungen möglich.

Lösung: Wir ziehen die Gerade AC und tragen auf ihr $\overline{A_1C} = \overline{AC}$ ab (Abb. 26). Wir wählen auf der Strecke $\overline{AB}$ den Punkt M und ziehen durch ihn und Punkt C eine Gerade. Auf dieser Geraden tragen wir $\overline{CN} = \overline{CM}$ ab. Den Punkt B_1 finden wir als Schnittpunkt der Geraden A_1N und BC. Man sieht leicht, daß $\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$ gilt.

89. Man bestimme die Entfernung $\overline{AB}$ zwischen den Punkten A und B. Zwischen A und B liege ein Hindernis (z. B. ein Sumpf). Welchen Kongruenzsatz kann man hier anwenden?

Lösung: Wir wählen den Punkt C und markieren die Geraden AC und BC. Dann tragen wir auf der Geraden BC die Strecke $\overline{B_1C} = \overline{BC}$ ab und tragen bei B_1 $\sphericalangle CB_1A_1 = \sphericalangle ABC$ an (Abb. 27). Dann gilt $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$.

90. Liegt zwischen den Punkten A und B ein Hindernis, so kann man die Entfernung $\overline{AB}$ auch auf folgende Weise finden (Abb. 27). Man bezeichnet einen Punkt C, von dem aus die Punkte A und B zu sehen

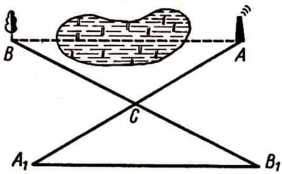


Abb. 27

sind, und markiert die Geraden AC und BC. Dann trägt man $\overline{CA_1} = \overline{CA}$ und $\overline{CB_1} = \overline{CB}$ auf den Geraden ab. Die Strecke $\overline{A_1B_1}$ ist gleich der gesuchten Strecke $\overline{AB}$. Das ist zu beweisen.

91. Von den Punkten A und M aus, deren Entfernung bekannt ist, sollen in den Wald Schneisen geschlagen werden, die die Richtungen AB und MN haben (Abb. 28). Es ist die Länge jeder Schneise bis zum Schnittpunkt zu bestimmen. Welcher Kongruenzsatz kann hier angewendet werden?

Hinweis: Man konstruiert das Dreieck mit der Seite $\overline{AM}$ und den anliegenden Winkeln BAM und AMN in einem bestimmten Maßstab und mißt dann die Seiten aus, die diesen Winkeln gegenüberliegen.

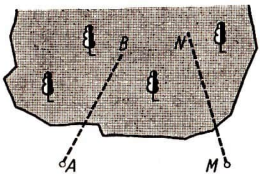


Abb. 28

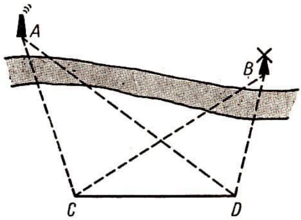


Abb. 29

92. Um die Entfernung zwischen zwei unzugänglichen Punkten A und B zu bestimmen, sieht man im Gelände die Gerade CD und mißt $\sphericalangle ACD$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle BDC$ und $\sphericalangle ADC$ (Abb. 29). Anschließend konstruiert man im Heft eine entsprechende maßstabsgerechte Figur mit der gemeinsamen Seite $\overline{CD}$ und je zwei anliegenden Winkeln und mißt auf dieser Zeichnung die Entfernung $\overline{AB}$. Nach diesem Verfahren ist in der Praxis die Entfernung zwischen zwei unzugänglichen Punkten zu bestimmen.

93. Es sei gefordert, die Entfernung $\overline{AB}$ zu bestimmen, wobei es schwierig ist, bis zum Punkt A zu gelangen. In B errichtet man eine zu $\overline{AB}$ senkrechte Gerade. Auf ihr wählt man einen Punkt D, dann trägt man $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BDA$ an (Abb. 30). Wie groß ist die Entfernung $\overline{AB}$?

94. Zur Halbierung einer Strecke wendet man folgendes Verfahren an: In den Endpunkten A und B der Strecke errichtet man Senkrechten auf ihnen und trägt gleiche Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ in entgegengesetzten Richtungen ab (Abb. 31). Die Punkte C und D verbindet man durch eine Gerade, die die Strecke $\overline{AB}$ halbiert. Auf welcher Grundlage erfolgt diese Konstruktion?

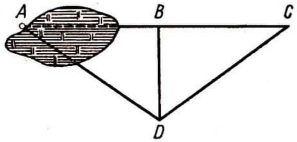


Abb. 30

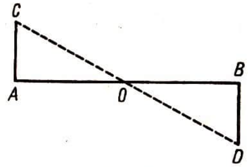


Abb. 31

95. Es ist die Höhe eines Fabrikschornsteins, eines Schulgebäudes, eines Glockenturmes zu bestimmen.

96. Wenn man die Höhe eines Baumes bestimmen will, kann man wie folgt verfahren: Man steht in einem beliebigen Abstand $\overline{AB}$ vom Baum entfernt und mißt den Winkel ABD (Abb. 32). Auf dem Erdboden trägt man an die Strecke $\overline{AB}$ $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD$ an und errichtet im Punkt A die Senkrechte auf $\overline{AB}$. Wie hoch ist der Baum?

97. Es ist die Größe eines Winkels im Gelände nur mit Hilfe eines Bandmaßes und eines Winkelmessers, wie er zum Zeichnen verwendet wird, zu bestimmen.

Lösung: Auf den Schenkeln des Winkels wählen wir zwei Punkte D und M (Abb. 33). In einem bestimmten Maßstab konstruieren wir das Dreieck BDM und messen mit Hilfe eines Winkelmessers den Winkel bei B.

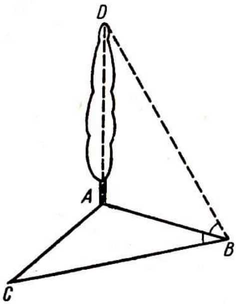


Abb. 32

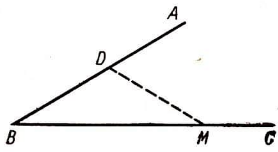


Abb. 33

98. Die Aufgabe 97 ist mit Hilfe eines Winkelkreuzes und einem Meßband zu lösen.

Lösung: Von einem Punkt, der auf einem Schenkel des Winkels gewählt wird, fällen wir das Lot auf den anderen Schenkel. Wir erhalten ein rechtwinkliges Dreieck (Abb. 34). Wir konstruieren nun ein rechtwinkliges Dreieck, das dem im Gelände ähnlich ist. Schließlich messen wir den Winkel bei B mit dem Winkelmesser. Ist der Winkel bei B stumpf, so führt man diese Konstruktion für seinen Nebenwinkel durch.

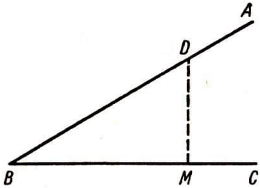


Abb. 34

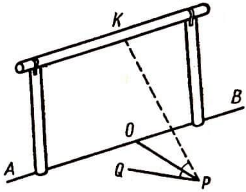


Abb. 35

99. Eine Pioniergruppe wurde beauftragt, eine Leiter für ein Trapez auf dem Sportplatz herzustellen. Die einzige Forderung war, daß der Fußpunkt der Leiter von der Grundlinie des Trapezes den Abstand 3,6 m ($\overline{OP} = 3{,}6$ m) hatte. Die anderen Abmessungen wurden nicht gegeben. Der Gruppenleiter zeichnete den Winkel OPQ mit $\sphericalangle OPQ = \sphericalangle OPK$ (Abb. 35) so, daß der Schenkel PQ die Gerade AB schneidet, und erklärte, daß er die Länge der Leiter bereits kenne. Die Gruppe begann mit der Erfüllung der Aufgabe. Welche Länge hat die Leiter?

100. Welche Länge muß eine Leiter haben, damit man mit ihr auf eine 5 m hohe Mauer steigen kann, wenn ihr Fußpunkt von der Mauer 1,8 m Abstand haben soll?

Ergebnis: 5,3 m. (Die Aufgabe wird grafisch über die Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks gelöst.)

101. Mit Hilfe eines Winkelpeilers ist die Höhe eines Gegenstandes zu bestimmen, dessen Fußpunkt man erreichen kann.

Lösung: Mit Hilfe eines Winkelpeilers messen wir den Winkel $ADE = \alpha$ (Abb. 36) und mit Hilfe eines Meßbandes messen wir den Abstand $\overline{BC}$. Wir konstruieren im Heft das Dreieck ADE mit der Kathete $\overline{DE}$ und dem Winkel α. Wir messen die Länge der Kathete $\overline{AE}$. Zu ihr fügen wir die Strecke $\overline{DC}$ hinzu.

102. Mit Hilfe eines Winkelpeilers ist die Höhe eines Gegenstandes zu bestimmen, dessen Fußpunkt man nicht erreichen kann.

Lösung: Mit Hilfe eines Winkelpeilers messen wir die Winkel α und β (Abb. 37). Weiter bestimmen wir die Entfernung $\overline{MN}$ und konstruieren in einem bestimmten Maßstab das Dreieck ACD mit der Seite $\overline{DC}$ und zwei anliegenden Winkeln. Vom Punkt A aus fällen wir das Lot auf die Verlängerung der Seite $\overline{DC}$ und finden damit die Länge des Lotes AE. Die Höhe des Gegenstandes ist $\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{BE}$.

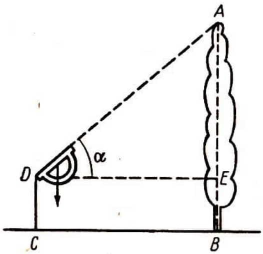


Abb. 36

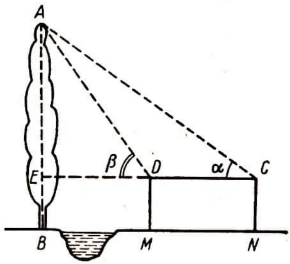


Abb. 37

103. Zur Bestimmung der Höhe eines Gegenstandes, dessen Fußpunkt unzugänglich ist, wählt man im Gelände zwei Punkte C und D, so daß von ihnen aus die Spitze des Gegenstandes A unter den Winkeln von $30°$ bzw. $15°$ zu sehen ist (Abb. 38). Man zeige, daß $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{CD}$ gilt.

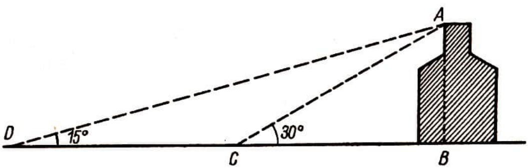


Abb. 38

104. Im Gelände kann man die Gerade AB nicht über den Punkt A hinaus verlängern. Es soll im Punkt A eine Senkrechte zu AB errichtet werden.

Hinweis: Die Aufgabe kann man mit Hilfe eines Winkelkreuzes lösen, indem man die Geraden $BC \perp AB$, $CD \perp BC$, $AD \perp DC$ zeichnet (Abb. 39).

105. Die Aufgabe 104 kann auch auf folgende Weise gelöst werden: Über der Strecke $\overline{AB}$ konstruiert man das gleichseitige Dreieck ABC (Abb. 40). Man ermittelt den Halbierungspunkt D der Strecke $\overline{BC}$. Man zeichnet $DE \perp AC$ und trägt $\overline{EF} = \overline{DE}$ ab. Man zeige, daß AF das gesuchte Lot ist.

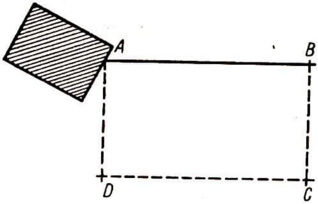


Abb. 39

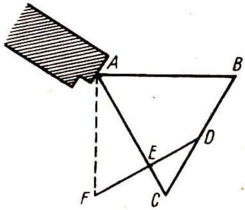


Abb. 40

106. Die Aufgabe 104 kann man auch noch wie folgt lösen (Abb. 41): Über der Strecke $\overline{AB}$ konstruiert man das gleichseitige Dreieck ABC. Auf der Verlängerung der Seite $\overline{BC}$ trägt man $\overline{CM} = \overline{BC}$ ab. Beweise, daß $AM \perp AB$ gilt!

107. Muß das Dreieck ABC (siehe Aufgabe 106) unbedingt gleichseitig sein?

Antwort: Es genügt, wenn die Bedingung $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{CM}$ erfüllt ist.

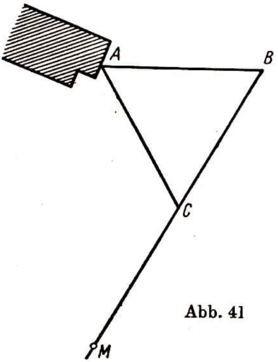


Abb. 41

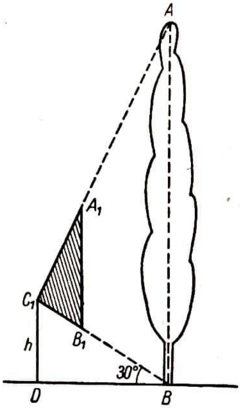


Abb. 42

108. **Wie bestimmt man die Höhe eines Gegenstandes, wenn man ein rechtwinkliges Dreieck mit einem Winkel von 30° besitzt?**

Lösung: Wir stellen das rechtwinklige Dreieck $A_1B_1C_1$ ($\sphericalangle B_1A_1C_1 = 30°$) so auf, daß die Hypotenuse $\overline{A_1B_1}$ senkrecht steht. Dann entfernen wir uns um die Entfernung $\overline{BD}$ so weit vom Baum, daß die Verlängerung der Kathete $\overline{C_1A_1}$ durch die Spitze A des Baumes und die Verlängerung der Kathete $\overline{C_1B_1}$ durch den Fußpunkt des Baumes geht (Abb. 42). Wir messen h, die Höhe des Punktes C_1 über dem Boden. Es gilt $\overline{AB} = 4\,h$, weil $\overline{AB} = 2\,\overline{C_1B}$ und $\overline{C_1B} = 2\,h$ ist. Diese Methode ist nur dann brauchbar, wenn der Gegenstand $\overline{AB}$ eine verhältnismäßig geringe Höhe hat (kleiner als 7 m).

109. **Man bestimme die Höhe eines Hügels und zeichne sein Profil nach folgenden Werten:**

Nr. des Fluchtstabes	Anstieg (in m)	Abstand der Stäbe (in m)
1 bis 2	1,5	1,6
2 bis 3	0,9	1,6
3 bis 4	1,2	1,8
4 bis 5	0,6	1,4
5 bis 6	0,4	1,0

Hinweis: Die Abbildung 43 zeigt das Profil. Die Höhe des Hügels beträgt 1,5 m + 0,9 m + 1,2 m + 0,6 m + 0,4 m = 4,6 m.

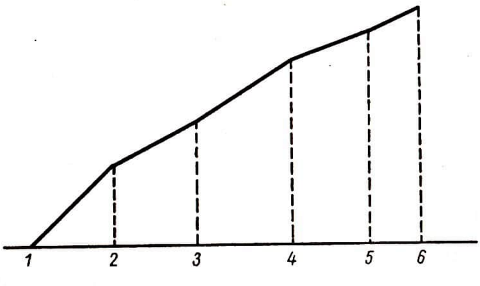


Abb. 43

110. **Man bestimme die Tiefe einer Schlucht.**

Lösung: Die Aufgabe wird analog zur vorherigen gelöst, nur muß man an Stelle des Anstiegs das Gefälle kennen. Zubehör: Zwei Meßlatten, je 2 m lang mit Zentimeterteilung, eine Leiste, 1,5 bis 2 m lang und eine Wasserwaage.

111. Wie kann man im Gelände mit Hilfe einer Schnur Winkel von 30°, 45°, 60°, 75°, 90° festlegen?

112. Bei der Halbierung eines Winkels bedient man sich manchmal folgenden Verfahrens: Auf den Schenkeln des Winkels AOB trägt man vom Scheitelpunkt aus gleiche Strecken ab: $\overline{OM} = \overline{OP}$, $\overline{MN} = \overline{PQ}$ (Abb. 44). Zieht man dann die Geraden MQ und NP, so findet man ihren Schnittpunkt O_1 und verbindet ihn mit dem Scheitelpunkt O. Die Gerade OO_1 ist die Winkelhalbierende. Die Richtigkeit dieses Verfahrens ist zu beweisen.

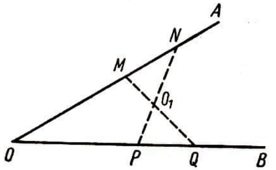


Abb. 44

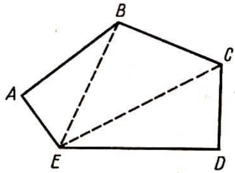


Abb. 45

113. Es soll eine maßstabsgerechte Zeichnung eines Grundstücks mit Hilfe des Verfahrens der Zerlegung in Dreiecke angefertigt werden.

Lösung: Wir teilen das Grundstück in Dreiecke ein (Abb. 45), messen die Seiten dieser Dreiecke und konstruieren die Dreiecke im gewählten Maßstab aus ihren drei Seiten.

114. Es soll der Lageplan eines Grundstücks angefertigt werden. Man mißt alle Seiten und alle inneren Winkel.

115. Man nehme den Lageplan eines vieleckigen Grundstücks mit einem Bandmaß auf.

Lösung: Die Längen der Seiten messen wir mit dem Bandmaß, und die Winkel bestimmen wir über die Konstruktion von Dreiecken aus drei Seiten (Abb. 46).

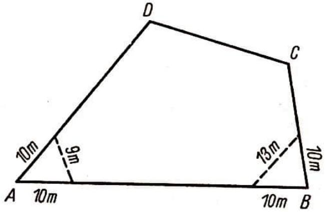


Abb. 46

116. Ein Dorf liege seitlich von einer Eisenbahnlinie. Wo muß der Bahnhof gebaut werden, damit die Entfernung vom Zentrum des Dorfes bis zum Bahnhof am kürzesten wird?

117. Drei Leitern sind so an die Wand eines Gebäudes gestellt, daß sich ihre oberen Enden in gleicher Höhe befinden. Man bestimme, ohne eine Messung durchzuführen, welche Leiter am längsten ist.

Antwort: Am längsten ist die Leiter, deren unteres Ende am weitesten von der Wand absteht. In diesem Falle ist die Projektion der Leiter am längsten.

118. Im Gelände ist der Winkel ABC, dessen Scheitelpunkt durch ein Hindernis versperrt ist, zu halbieren.

Lösung: Wir ziehen die Geraden DO und EO parallel zu den Schenkeln des Winkels (Abb. 47) und in gleicher Entfernung von diesen. Analog ziehen wir die Geraden D_1O_1 und E_1O_1. Weil die Punkte O und O_1 gleich weit von den Schenkeln des Winkels entfernt sind, ist OO_1 die gesuchte Halbierende.

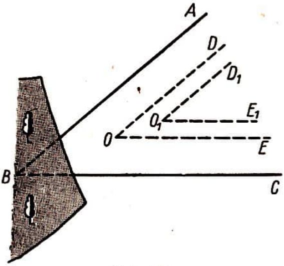


Abb. 47

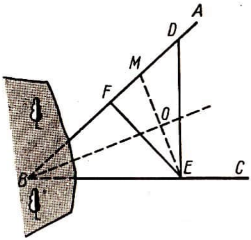


Abb. 48

119. Bei der Lösung der Aufgabe 118 kann man auch wie folgt verfahren: Man zieht $DE \perp BC$, $EF \perp AB$. Dann zeichnet man die Halbierende des Winkels DEF ein, dessen Scheitel E erreichbar ist (Abb. 48). Im Punkte O, der Mitte von $\overline{EM}$, errichtet man das Lot zu $\overline{EM}$. Dieses Lot ist die gesuchte Halbierende. Es ist zu beweisen, daß diese Konstruktion richtig ist.

Lösung: Das Dreieck BME ist gleichschenklig, weil $\sphericalangle BME = \sphericalangle BEM$ gilt (jeder von ihnen ist um den Winkel DEM kleiner als ein rechter). Zeichnet man in das Dreieck BME die Mittellinie BO ein, dann ist diese gleichzeitig die Höhe, die auf der Seite $\overline{ME}$ errichtet ist und die Halbierende des Winkels ABC. Weil man aber vom Punkt O aus auf die Gerade ME nur ein einziges Lot fällen kann, ist es offensichtlich, daß dieses Lot mit BO zusammenfällt und die gesuchte Halbierende des Winkels ABC ist.

120. Der Winkel ABC, dessen Scheitelpunkt nicht erreichbar ist, wird auf folgende Weise halbiert (Abb. 49). Von einem beliebigen Punkt D aus zieht man $DE \parallel BC$. Dann zeichnet man die Halbierende DF des Winkels BDE ein. In der Mitte der Strecke $\overline{DF}$ errichtet man die Senkrechte zu ihr. Es ist zu zeigen, daß diese Senkrechte die Halbierende des gegebenen Winkels ABC ist.

Lösung: $\sphericalangle BFD = \sphericalangle FDE = \sphericalangle BDF$. Folglich ist das Dreieck BDF gleichschenklig, und deshalb ist die Mittellinie der Seite $\overline{DF}$ gleichzeitig Höhe und Winkelhalbierende (siehe Lösung der vorigen Aufgabe).

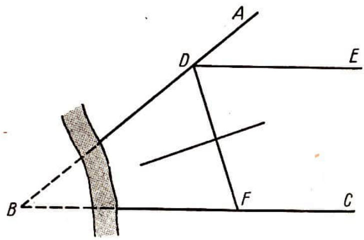


Abb. 49

121. Durch eine Ortschaft A ist ein gerader Weg so zu führen, daß die Punkte B und C in gleicher Entfernung von diesem Weg liegen.

Lösung: 1) Liegen die Punkte A, B, C auf einer Geraden, so muß der Weg durch sie hindurch geführt werden (Abb. 50a). 2) Liegen die Punkte A, B, C nicht auf einer Geraden, so führt man den Weg entweder durch die Mitte der Strecke $\overline{BC}$ (Abb. 50b) oder parallel zur Richtung BC (Abb. 50c). Unter den Varianten wählt man die aus, die dem geforderten Zweck am besten entspricht.

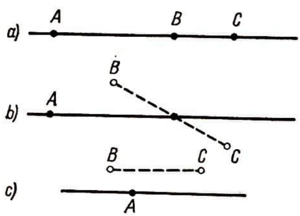


Abb. 50

122. An einer Eisenbahnlinie soll ein Bahnhof so gebaut werden, daß er von zwei besiedelten Punkten gleich weit entfernt ist. In welchem Fall ist es unmöglich, diesen Bahnhof zu bauen?

Lösung: Wir bezeichnen die Zentren der besiedelten Punkte mit A und B. Auf der Mitte der Strecke $\overline{AB}$ errichten wir eine Senkrechte und ermitteln den Schnittpunkt der Senkrechten mit der Eisenbahnlinie. Die Aufgabe besitzt keine Lösung, wenn die Punkte A und B auf einem Lot zur Eisenbahnlinie und in verschiedener Entfernung von ihr liegen.

123. Auf einem Hof soll zur Beleuchtung von drei Objekten eine Lampe aufgestellt werden, die alle drei Objekte gleich stark beleuchtet. Wo muß die Lampe angebracht werden?

Lösung: Wir bezeichnen die Objekte mit A, B und C. Der gesuchte Standort ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$.

124. In welche Richtung muß ein Lichtstrahl aus einer Lichtquelle A gerichtet werden, um auf den Punkt B zu fallen, nachdem er von einem ebenen Spiegel reflektiert worden ist?

Lösung: Wir suchen den Punkt A_1, der symmetrisch zum Punkt A in bezug auf die Spiegelebene liegt (Abb. 51). Zeichnen wir die Gerade A_1B, so finden wir den scheinbaren Durchstoßpunkt C des Strahls durch die Spiegelebene. Die Richtung AC ist die gesuchte Richtung des Strahls.

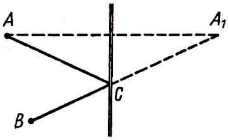


Abb. 51

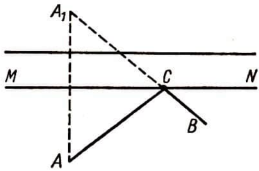


Abb. 52

125. Zur Versorgung zweier Ortschaften A und B mit Wasser soll am Ufer eines Kanals ein Wasserturm gebaut werden. Der Bauplatz des Turmes ist so zu wählen, daß die Gesamtlänge der Rohrleitungen vom Wasserturm zu beiden Ortschaften am kleinsten wird.

Lösung: Wir suchen den Punkt A_1, der bezüglich des Ufers MN symmetrisch zum Punkt A gelegen ist (Abb. 52). Wir zeichnen die Gerade A_1B ein. Ihr Schnittpunkt mit der Geraden MN sei C. Der Turm muß im Punkt C errichtet werden.

5. Vierecke

126. Es ist der Grundriß eines Schulhofs aufzuzeichnen.

127. Im Gelände sei eine Seite und das Symmetriezentrum eines Parallelogramms gekennzeichnet. Es sind die übrigen Seiten des Parallelogramms unter Verwendung von Absteckpfählen und einem Meßband zu markieren.

128. Zwei zugängliche Punkte A und B seien durch ein Hindernis getrennt. Unter Benutzung eines Satzes über Parallelogramme ist ihre Entfernung zu bestimmen.

Lösung 1: Wir markieren die Strecke $\overline{AD}$ (Abb. 53) und dann die Strecke $\overline{BC}$ parallel zu $\overline{AD}$ und von gleicher Länge. Offensichtlich gilt $\overline{DC} = \overline{AB}$.

Lösung 2: Wir markieren die Gerade AO und tragen auf ihr $\overline{OA_1} = \overline{AO}$ ab (Abb. 54). Dann messen wir die Strecke $\overline{BO}$, verlängern sie und tragen $\overline{OB_1} = \overline{BO}$ ab. Es gilt dann $\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$.

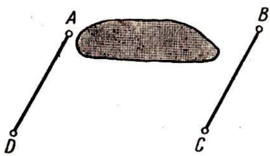


Abb. 53

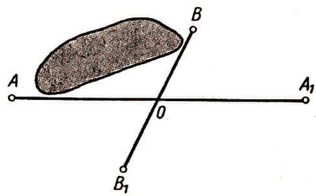


Abb. 54

129. Es soll die Entfernung zwischen zwei unzugänglichen Punkten A und B unter Benutzung eines Satzes über Parallelogramme bestimmt werden.

Lösung: Im Punkt C stellen wir einen Absteckpfahl auf und markieren die Gerade CD, für die gilt $CD \perp AC$ (Abb. 55). Wir finden den Punkt E als

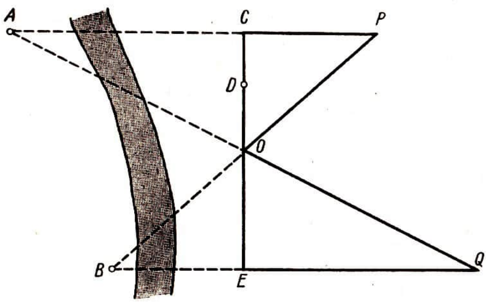


Abb. 55

Fußpunkt des Lotes, das vom Punkt B auf CD gefällt wird. Die Strecke $\overline{CE}$ halbieren wir (Punkt O) und zeichnen die Geraden AO und BO bis zu ihren Schnittpunkten mit den Geraden BE und AC. Im Viereck $BAPQ$ sind zwei gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang ($\overline{AP} \parallel \overline{BQ}$, $\overline{AC} + \overline{CP} = \overline{EQ} + \overline{BE}$), folglich ist dieses Viereck ein Parallelogramm und es gilt $\overline{AB} = \overline{PQ}$. Die Entfernung $\overline{PQ}$ messen wir direkt.

130. Es ist die Entfernung zwischen zwei unzugänglichen Punkten A und B unter Benutzung des folgenden Satzes über Parallelogramme zu bestimmen: „Halbieren die Diagonalen eines Vierecks einander, so ist das Viereck ein Parallelogramm.“

Lösung: Wir zeichnen die Grundlinie $\overline{CD}$ (Abb. 56) und halbieren sie (Punkt O). Aus je einer Seite und jeweils zwei anliegenden Winkeln, die wir durch Messung bestimmen, konstruieren wir die Dreiecke: $\Delta A_1OD \cong \Delta AOC$ und $\Delta B_1OC \cong \Delta BOD$. Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt, daß $\overline{AO} = \overline{A_1O}$, $\overline{BO} = \overline{B_1O}$ ist, d. h., die Strecken $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$ (Diagonalen) halbieren einander im Punkt O. Folglich ist die Figur ABA_1B_1 ein Parallelogramm, deshalb gilt $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$. Die Länge $\overline{A_1B_1}$ wird gemessen.

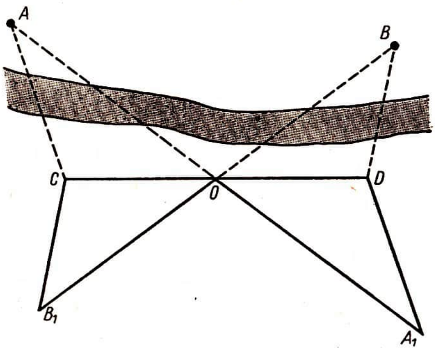


Abb. 56

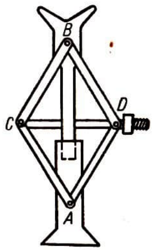


Abb. 57

131. Die Abbildung 57 zeigt die Prinzipskizze eines Wagenhebers. Bei Verkürzung der Strecke $\overline{CD}$ bewegt sich der Punkt B nach oben. Es ist zu erklären, weshalb der Stempel AB immer senkrecht zum Boden verläuft, wenn der Wagenheber auf ebenem festen Boden steht.

132. Es ist ein Instrument herzustellen, mit dessen Hilfe die Symmetrieachse von quaderförmigen oder zylindrischen Hohlkörpern bestimmt werden kann. Das Prinzip dieses Geräts soll auf einem Satz über die Eigenschaften der Diagonalen eines Rhombus beruhen.

Hinweis: Die Abbildung 58 zeigt schrittweise, wie das Gerät seine endgültige Gestalt annimmt.

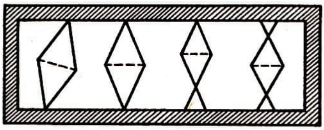


Abb. 58

133. Die Punkte A und B sollen durch eine Straße verbunden werden, die rechtwinklig über einen Fluß geführt werden soll, da auf diese Weise die Brücke am kürzesten wird (Abb. 59). Wie muß diese Straße geführt werden, damit der Weg von A nach B am kürzesten wird?

Lösung: Wir zeichnen die Gerade AA_1, für die gilt: $AA_1 \perp MN$, wobei $\overline{AA_1}$ gleich der Flußbreite $\overline{CD}$ ist (Abb. 60). Dann zeichnen wir die Gerade A_1B und erhalten als Schnittpunkt mit dem Ufer MN den Punkt C, den Bauplatz der Brücke über den Fluß.

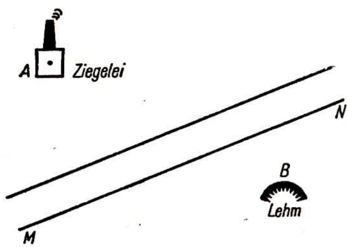


Abb. 59

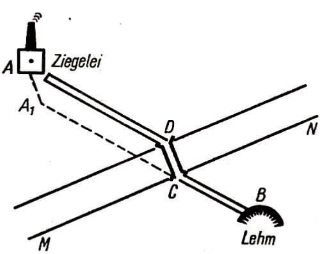


Abb. 60

134. Für ein Transparent nagelt man einen Rahmen in Form eines Rechtecks zusammen (Abb. 61). Wie sollte eine weitere Latte befestigt werden, damit der Rahmen starr wird?

135. Beim Markieren einer Geraden im Gelände gelangt man bis an ein Gebäude. Wie markiert man diese Gerade hinter dem Gebäude, wenn man ein Winkelkreuz und ein Meßband besitzt?

Lösung: Mit Hilfe des Winkelkreuzes markiert man die Geraden BC, DC und DE, für die gilt: $BC \perp AB$, $DC \perp BC$ und $DE \perp DC$, wobei $\overline{DE} = \overline{BC}$ ist (Abb. 62). Dann markiert man die Gerade KE mit $KE \perp DE$. $\overline{KE}$ liegt dann auf der Geraden durch AB.

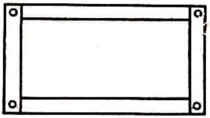


Abb. 61

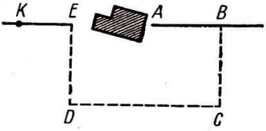


Abb. 62

136. Um zu überprüfen, ob ein aus Karton geschnittenes Rechteck wirklich ein Rechteck ist, überzeugt sich der Buchbinder durch Vergleich der Diagonalen. Genügt eine derartige Überprüfung? Was könnte man noch messen, wenn man weder Seiten noch Winkel mißt?

137. Es ist die Entfernung zwischen zwei Punkten A und B festzustellen, wenn zwischen ihnen ein Hindernis liegt, aber jeder der Punkte erreichbar ist. Ferner soll man von dem einen aus den anderen sehen können. (Es ist im Gelände eine Konstruktion so auszuführen, daß die Strecke $\overline{AB}$ zur Seite eines Rechtecks wird.)

138. Unter Benutzung eines Winkelkreuzes ist eine maßstäbliche Zeichnung eines Teiches oder einer anderen beliebigen geschlossenen Fläche (Wald, Siedlung) anzufertigen.

Lösung: Wir markieren um den Teich herum ein Rechteck (Abb. 63). An bemerkenswerten Punkten des Ufers schlagen wir Pflöcke ein und fällen von diesen Punkten aus die Lote auf die Seiten des Rechtecks. Die Fußpunkte der Lote markieren wir mit Pflöcken. Dann messen wir die Längen aller Lote und die Entfernungen der Fußpunkte dieser Lote von den Scheiteln der Winkel des Rechtecks. (Dieses Verfahren führt zu einem annähernd richtigen Bild.)

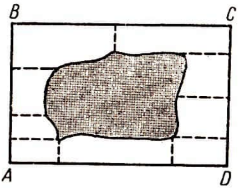


Abb. 63

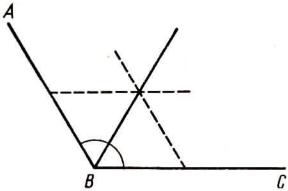


Abb. 64

139. Mit Hilfe eines Lineals mit parallelen Kanten ist die Winkelhalbierende eines gegebenen Winkels zu finden.

Die Abbildung 64 zeigt die Lösung.

140. Ein gegebener Winkel ABC ist mit Hilfe eines Lineals mit parallelen Kanten zu verdoppeln.

Lösung: Eine Kante eines geeigneten Lineals legen wir an den Schenkel BC an (Abb. 65), und mit Hilfe der anderen Kante ziehen wir eine Gerade, die den Schenkel AB im Punkt K schneidet. Wir legen das Lineal so an, daß die eine Kante durch den Punkt B und die andere durch den Punkt K geht, und zeichnen den Strahl BD. Der Winkel CBD ist doppelt so groß wie der gegebene.

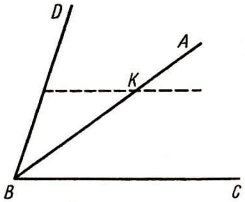


Abb. 65

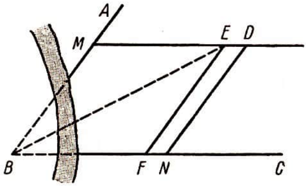


Abb. 66

141. Der Winkel ABC, dessen Scheitel unzugänglich ist, wird auf folgende Weise halbiert (Abb. 66): Von den Punkten M und N aus, die auf den Schenkeln des Winkels gewählt werden, zieht man die Geraden $MD \parallel BC$ und $ND \parallel AB$. Sodann trägt man auf der Geraden MD die Strecke $\overline{EM} = \overline{DN}$ ab und zieht die Gerade $EF \parallel AB$. Schließlich halbiert man den Winkel MEF. Es ist zu zeigen, daß die Halbierende des Winkels MEF gleichzeitig auch die Halbierende des Winkels ABC ist.

Lösung: Die Figur $BMEF$ ist ein Rhombus, dessen Diagonalen Halbierende einander gegenüberliegender Winkel sind.

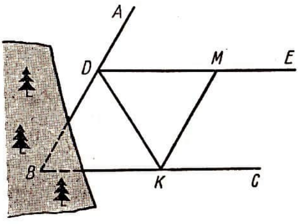


Abb. 67

142. Um die Halbierende des Winkels ABC, dessen Scheitel durch ein Hindernis verstellt ist, zu finden, verfährt man wie folgt (Abb. 67): Durch einen beliebigen Punkt D des Schenkels AB zieht man die Gerade DE mit $DE \parallel BC$, dann halbiert man den Winkel BDE, und durch den Schnittpunkt (K) dieser Halbierenden mit dem Schenkel BC zieht man die Gerade KM mit $KM \parallel AB$. Man zeige, daß die Halbierende des Winkels DMK mit der Halbierenden des gegebenen Winkels ABC zusammenfällt.

143. Unter Zuhilfenahme eines Lineals mit parallelen Kanten ist die Senkrechte zu einer Geraden in einem auf ihr gegebenen Punkt zu errichten. Die Abbildung 68 zeigt die Lösung. Die Zahlen weisen auf die Reihenfolge hin, in der die Geraden gezogen werden. (Die Linien werden an beiden Kanten des Lineals gezogen.)

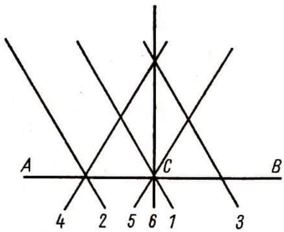


Abb. 68

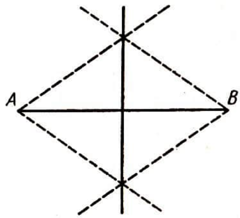


Abb. 69

144. Mit Hilfe eines Lineals mit parallelen Kanten ist eine gegebene Strecke, die länger ist als das Lineal breit ist, zu halbieren.

Hinweis: Siehe Abbildung 69.

145. Durch einen Punkt A ist mit Hilfe eines Lineals mit parallelen Kanten eine Gerade zu ziehen, die parallel zu einer gegebenen Geraden MN verläuft,

Hinweis: Siehe Abbildung 70.

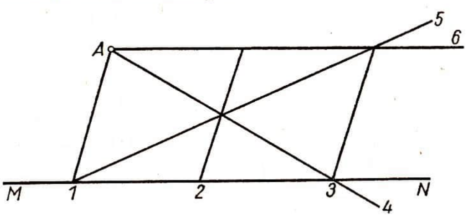


Abb. 70

146. Von einem Punkt A aus ist das Lot auf eine gegebene Gerade MN mit Hilfe eines Lineals mit parallelen Kanten zu fällen.

Hinweis: Man kann zuerst durch den Punkt A eine Gerade AD ziehen, die parallel zu MN verläuft (Aufgabe 145), und dann die Senkrechte zur Geraden AD im Punkt A errichten (Aufgabe 143).

147. Ein Schüler, der überprüfen wollte, ob ein Quadrat richtig ausgeschnitten war, überzeugte sich davon, daß alle seine Seiten gleich lang waren. Genügt diese Überprüfung? Was muß noch gemessen werden, wenn man nicht die Winkel mißt?

148. Eine Schülerin, die überprüfen wollte, ob eine Serviette die Form eines Quadrats hatte, überzeugte sich davon, daß beim Zusammenfalten entlang der Diagonalen die Ränder beider Hälften der Serviette zusammenfielen. Ist diese Überprüfung ausreichend? Wäre sie ausreichend, wenn die Ränder bei beiden Diagonalen zusammenfielen?

149. Unter Zuhilfenahme eines Zeichendreiecks und eines Lineals ist eine Strecke in 3, 5, 6, 7 gleiche Teile zu teilen.

150. Die Abbildung 71 zeigt ein Hilfsmittel zur Teilung einer Strecke in gleiche Teile. Welche theoretische Erkenntnis wird hier angewendet?

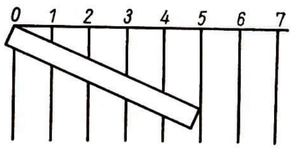


Abb. 71

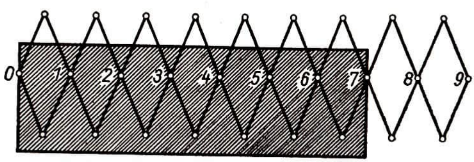


Abb. 72

151. Beim Anreißen von Werkstücken verwendet man ein Gerät (Gelenkmechanismus), mit dessen Hilfe man eine gerade Strecke in gleiche Teile teilen kann (Abb. 72). Um z. B. die Strecke $\overline{AB}$ in 7 gleiche Teile zu teilen, legt man die Punkte 0 und 7 auf die Endpunkte der Strecke und mit einem Körner markiert man die dazwischenliegenden Teilungspunkte 1, 2, 3, 4, 5, 6. Es ist das Wirkungsprinzip dieses Geräts zu erklären. Es ist ein derartiges Gerät aus Leisten herzustellen.

152. Im Gelände ist durch einen Punkt, der nahe an einer Landstraße liegt, eine Gerade zu markieren, die parallel zur Landstraße verläuft. Dabei ist ein Satz über die Mittellinie eines Dreiecks anzuwenden.

153. Es ist die Entfernung zwischen zwei Punkten A und B, von denen jeder erreichbar, aber einer vom anderen aus nicht zu sehen ist, zu bestimmen. Es ist ein Satz über die Mittellinie eines Dreiecks zu benutzen.

Lösung: Wir ziehen zwei einander schneidende Geraden AC und BC (Abb. 73). Dann messen wir die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ und halbieren sie. Wir erhalten die Punkte D und E. Wir messen $\overline{DE}$, für die Strecke $\overline{AB}$ gilt dann $\overline{AB} = 2\,\overline{DE}$.

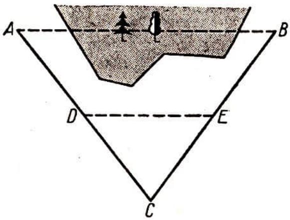


Abb. 73

154. Wie verfährt man bei der Lösung der Aufgabe 153, wenn man die Mittellinie des Deiecks nicht ziehen kann?

155. Es ist die Entfernung bis zu einem unzugänglichen Punkt unter Verwendung eines Satzes über die Mittellinie eines Dreiecks zu bestimmen.

Lösung: Man greift den Punkt C heraus und findet die Mitte D der Seite $\overline{BC}$ (Abb. 74). Man zeichnet die Gerade DE mit $DE \parallel AB$, dann gilt $\overline{AB} = 2\,\overline{DE}$.

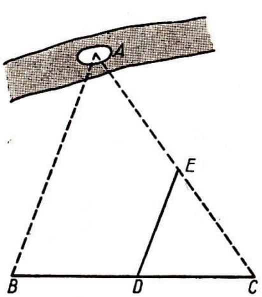


Abb. 74

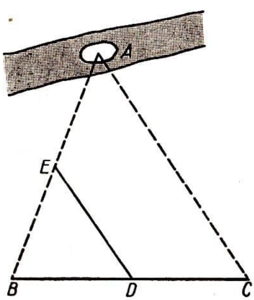


Abb. 75

Eine zweite Lösung erhält man, wenn man die Gerade DE mit $DE \parallel AC$ zeichnet, dann gilt $\overline{AB} = 2\,\overline{BE}$ (Abb. 75).

156. Unter Verwendung eines Satzes über die Mittellinie eines Dreiecks ist die Entfernung zwischen zwei unzugänglichen Punkten A und B zu bestimmen.

Lösung 1: Wir zeichnen eine Grundlinie $\overline{CD}$ und die Geraden BC und AD (Abb. 76). Wir bestimmen den Punkt M, die Mitte von $\overline{CD}$, und ziehen durch ihn die Geraden $MN \parallel BD$ und $MP \parallel AD$. Offensichtlich sind die Schnittpunkte P und N die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$, folglich ist PN die Mittellinie des Dreiecks ABC und es gilt $\overline{AB} = 2\,\overline{PN}$.

Lösung 2: Durch einen im Gelände gewählten Punkt O markieren wir die Gerade CD. Von den Punkten A und B aus fällen wir die Lote auf die Gerade CD. Für diese Lote gilt also $AM \perp CD$ und $BN \perp CD$ (Abb. 77). In den Mittelpunkten der Strecken $\overline{OM}$ und $\overline{ON}$ errichten wir Senkrechte und erhalten die Schnittpunkte P und Q, die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AO}$ und $\overline{BO}$. Weil PQ eine Mittellinie des Dreiecks AOB ist, gilt $\overline{AB} = 2\,\overline{PQ}$.

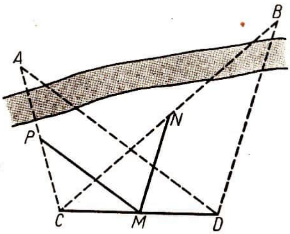


Abb. 76

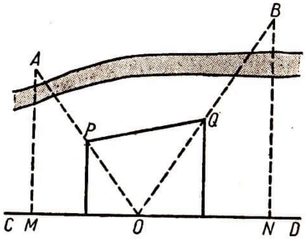


Abb. 77

157. Es sind verschiedene Verfahren zur Konstruktion einer Geraden im Gelände zu untersuchen, die zu einer gegebenen anderen Geraden parallel verläuft und durch einen vorgegebenen Punkt geht.

Lösung 1: Mit Hilfe eines Winkelkreuzes fällen wir das Lot von einem gegebenen Punkt A aus auf die Gerade MN und ziehen durch A eine Gerade AC mit $AC \perp AB$, dann gilt $AC \parallel MN$ (Abb. 78).

Lösung 2: Wir fällen von A und einem beliebigen Punkt S die Lote auf die Gerade MN. Wir erhalten die Punkte B und D. Von B bzw. D aus tragen wir in Richtung auf A und S die Strecke $\overline{AB}$ ab. Auf der Geraden DS erhalten wir den Punkt C. Es gilt $AC \parallel MN$.

Lösung 3: Wir ziehen durch A eine Gerade AB, die MN in B schneidet. In A tragen wir an die Gerade AB den Winkel NBA so an, daß beide Winkel auf einer Seite von AB liegen. Der Schenkel dieses angetragenen Winkels, der nicht auf der Geraden AB liegt, liegt auf der Parallelen zu MN.

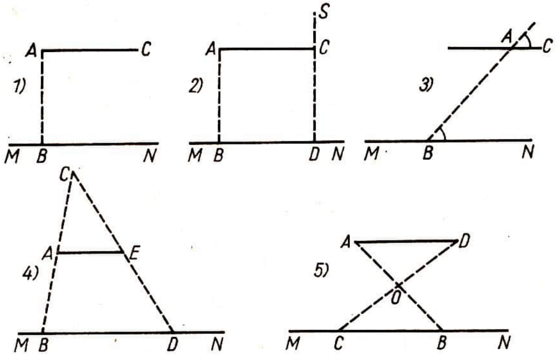


Abb. 78

Lösung 4: Wir ziehen durch den Punkt A eine Gerade, die MN in B schneidet und tragen auf ihr $\overline{AC} = \overline{AB}$ ab. Durch den Punkt C ziehen wir eine Gerade, die MN in D schneidet. Wir halbieren die Strecke $\overline{CD}$ und finden den Punkt E. Dann gilt $AE \parallel MN$.

Lösung 5: Wir ziehen durch den Punkt A eine Gerade, die MN in B schneidet, und durch den Mittelpunkt O der Strecke $\overline{AB}$ ziehen wir eine andere Gerade, auf der wir $\overline{OD} = \overline{OC}$ abtragen. Dann gilt $AD \parallel MN$.

158. Man bestimme den Schwerpunkt einer dreieckigen Platte von überall gleichbleibender Dicke.

Hinweis: Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden der dreieckigen Platte.

159. Es ist der Schwerpunkt einer rechteckigen Platte von gleichbleibender Dicke zu bestimmen.

160. Damit man sich in einem senkrechtstehenden Spiegel der ganzen Größe nach sehen kann, genügt ein Spiegel, dessen Länge gleich der halben Körpergröße ist. Das ist zu beweisen. (Der Spiegel darf dann aber erst oberhalb der halben Größe beginnen.)

161. Vier Schweineställe bilden die Eckpunkte eines konvexen Vierecks. Wo muß die Futterküche gebaut werden, damit die Summe der Entfernungen zu allen Schweineställen am geringsten wird?

Antwort: Im Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks.

162. Es ist der Lageplan eines Grundstücks mit einer Diagonalen nach dem Koordinatenverfahren aufzunehmen.

Hinweis: Um den Plan des Grundstücks $ABCDE$ aufzunehmen, muß man die Diagonale $\overline{AD}$ markieren (Abb. 79) und mit Hilfe eines Winkelkreuzes auf sie die Lote von den Eckpunkten B, C, E fällen. Dann mißt man die Längen der Lote und die Entfernungen $\overline{AE_1}$, $\overline{AB_1}$, $\overline{AC_1}$, $\overline{AD}$.

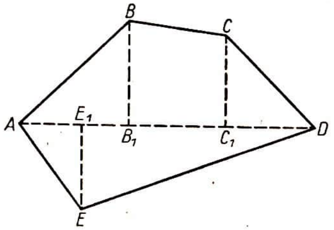


Abb. 79

6. Flächeninhalt eines Vielecks; Volumen eines Prismas

163. Es sind die Flächeninhalte der in der Abbildung 80 dargestellten Figuren zu berechnen.

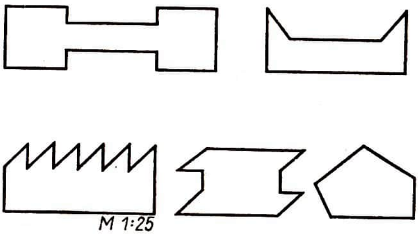


Abb. 80

164. Ein Zimmer habe eine Länge von 5,2 m und eine Breite von 4,1 m. Wieviel Bretter sind zum Dielen des Fußbodens erforderlich, wenn ein Brett 3 m lang und 25 cm breit ist?

165. In einem Saal, der 15,2 m lang und 8,6 m breit ist, soll Parkett aus rechteckigen Tafeln von 30 cm × 5 cm gelegt werden. Wieviel dieser Tafeln benötigt man für das Parkett?

166. Es liegt der Grundriß eines Ackers vor (Abb. 81). Man bestimme die Größe seines Flächeninhalts.

167. Unter Zuhilfenahme einer Kartenschutzhülle mit Liniennetz ist der Flächeninhalt des Gartens einer LPG zu bestimmen, dessen Grundriß vorliegt (Abb. 82).

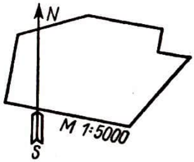


Abb. 81

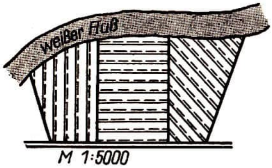


Abb. 82

Abb. 83

168. Mit Hilfe des Wägeverfahrens ist der Flächeninhalt der Figur zu bestimmen, die in Abbildung 83 dargestellt ist.

Lösung: Die Figur wird auf ein Blatt festen Papiers gezeichnet und ausgeschnitten. Aus dem gleichen Papier werden Quadrate mit bestimmten Abmessungen ausgeschnitten. Die Masse beider Figuren wird verglichen, und da man den Flächeninhalt des Quadrats kennt, kann man den Flächeninhalt der gegebenen Figur bestimmen.

169. Ein Feld von dreieckiger Form ist durch eine Gerade in zwei gleichgroße Teile zu teilen. Diese Gerade soll durch eine der Ecken des Dreiecks gehen.

170. Den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC kann man mit Hilfe eines Lineals, dessen Breite kleiner ist als die kleinste Seite des Dreiecks, z. B. so bestimmen: Man legt das Dreieck so unter das Lineal, wie es die Abbildung 84 zeigt und zieht durch den Punkt B eine Gerade BD mit $BD \parallel AC$. Auf welche Weise kann man den gesuchten Flächeninhalt berechnen, wenn man die Breite des Lineals a und die Länge der Strecke $\overline{AD} = b$ kennt?

Lösung: Die Dreiecke ABC und ADC sind flächengleich: sie besitzen ein und dieselbe Grundseite $\overline{AC}$ und die gleiche zugeordnete Höhe. Der Flächeninhalt des Dreiecks ADC ist gleich $\frac{a \cdot b}{2}$.

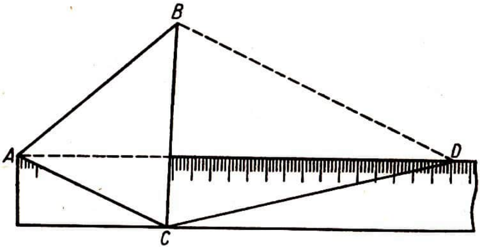


Abb. 84

171. Es ist auf ein Lineal eine Teilung derart aufzutragen, daß die Lage des Punktes D unmittelbar die Größe der Dreiecksfläche angibt (siehe Aufgabe 170).

Hinweis: Die Teilung des Lineals muß den gemessenen Flächeneinheiten entsprechen.

172. Kann man mit dem gleichen Verfahren (Aufgabe 170) die Flächeninhalte von Rechtecken, Parallelogrammen, Trapezen, beliebigen Vierecken bestimmen? Auf welche Weise ist das möglich?

173. Ein Fluß ist 10 m breit. Die Tiefenmessungen, die im Abstand von je einem Meter zur Bestimmung des Flußquerschnitts gemacht wurden, lieferten folgende Ergebnisse:

Nr. der Messung	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tiefe in cm	35	80	170	190	250	210	140	50	20

Es ist eine Zeichnung des Flußquerschnitts anzufertigen und seine Fläche zu bestimmen. (Man benutze eine Kartenschutzhülle mit einem Liniennetz.)

174. Es sind die Flächeninhalte der schraffierten Figuren in Abbildung 85 zu berechnen.

175. Der Satz des PYTHAGORAS ist experimentell durch Wägen von quadratförmigen Platten aus Holz oder Karton zu überprüfen, die flächengleich sind solchen Quadraten, die über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks errichtet wurden.

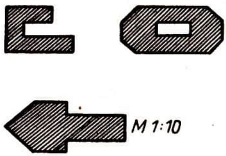


Abb. 85

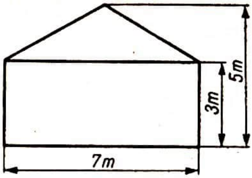


Abb. 86

176. Eine Scheune mit einem Satteldach ist 12 m lang, die übrigen Maße sind in der Abbildung 86 angegeben. Man bestimme die Dachfläche.

177. Ein Blechstück hat die Form eines gleichschenkligen Trapezes, dessen Grundseiten 820 mm und 1310 mm und dessen Schenkel 540 mm lang sind. Es ist der Flächeninhalt des Bleches zu berechnen.

178. Gegeben ist ein Prisma. Man zeichne seine Abwicklung.

179. Aus Papier ist ein gerades vierseitiges Prisma (Quader) zusammenzukleben, dessen Mantelfläche die Abbildung 87 angibt.

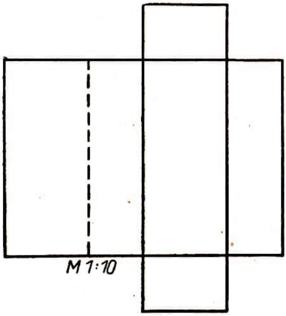


Abb. 87

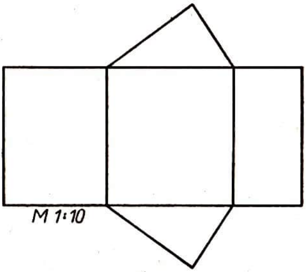


Abb. 88

180. Nach der in Abbildung 88 gegebenen Abwicklung ist ein gerades dreiseitiges Prisma in natürlicher Größe anzufertigen.

181. Aus den gegebenen Abwicklungen (Abb. 87 und 88) ist der Inhalt der Oberfläche jedes Prismas zu ermitteln.

182. Wie berechnet man die Dachpappenmenge, die für ein Satteldach benötigt wird?

183. Aus den gegebenen Abwicklungen (Abb. 87 und 88) ist der Rauminhalt jedes Prismas zu berechnen.

184. Es ist der Rauminhalt der eigenen Wohnung zu bestimmen. Wieviel Kubikmeter Luft entfallen auf jeden Menschen?

185. Wieviel Schüler kann man in einer Klasse unterbringen, die die Abmessungen $8\ \mathrm{m} \times 7\ \mathrm{m} \times 4\ \mathrm{m}$ hat, wenn jeder Schüler einen Bedarf von $8\ \mathrm{m}^3$ Luft hat?

186. Ein Kasten aus Eichenholz hat die Innenmaße $1{,}2\ \mathrm{m} \times 0{,}6\ \mathrm{m} \times 0{,}4\ \mathrm{m}$. Die Wanddicke beträgt 12,5 mm. Es ist die Masse des Kastens zu bestimmen. (Die Dichte des Eichenholzes beträgt $0{,}9\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$.)

187. Es ist der Rauminhalt einer Scheune mit Pultdach zu bestimmen, wenn l die Länge der Scheune, a ihre Breite, H ihre größte Höhe, h ihre kleinste Höhe ist. Man berechne das Volumen für $l = 16\ \mathrm{m}$, $a = 6\ \mathrm{m}$, $H = 5\ \mathrm{m}$, $h = 3\ \mathrm{m}$.

188. Man bestimme die Masse von vier laufenden Metern ungleichschenkligen Winkelstahls, dessen Querschnittsabmessungen (in mm) die Abbildung 89 angibt ($\varrho = 7{,}8\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$).

189. Eine Rohrmatte habe die Abmessungen $2{,}7\ \mathrm{m} \times 1{,}0\ \mathrm{m} \times 0{,}1\ \mathrm{m}$. Wieviel Kubikmeter Rohr und wieviel Kilogramm Draht benötigt man zur Herstellung von 500 Matten, wenn sich das Rohr unter der mechanischen Presse auf $\frac{1}{10}$ seines Volumens vermindert und wenn für einen Quadratmeter Matte ein Kilogramm Draht erforderlich ist?

190. Die Abbildung 90 zeigt den Querschnitt eines ausgekleideten Silograbens. (Die Abmessungen sind in Zentimetern gegeben.) Der Graben ist 20 m lang. Wieviel Gräben benötigt man zur Einlagerung von 6000 t Maiskolben? ($1\ \mathrm{m}^3$ Maiskolben wiegt 0,8 t.)

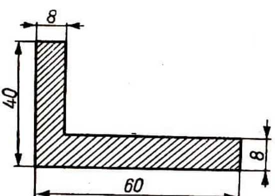


Abb. 89

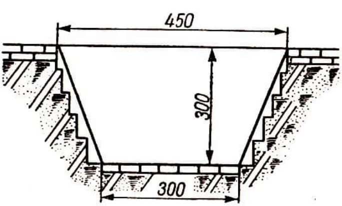


Abb. 90

7. Kreis

191. Wie viele Fluchtstäbe muß man im Gelände aufstellen, damit ein Kreis eindeutig bestimmt wird?

192. Beim Anlegen eines Blumenbeetes muß auf dem Erdboden ein Kreis mit Hilfe einer Leine gezogen werden, die an einem Pfahl befestigt ist. Wie muß man dabei verfahren: das Seil fest am Pfahl befestigen oder um den Pfahl eine Schlinge legen?

193. Zur Versorgung der Bewohner dreier Häuser mit Wasser muß ein Hydrant errichtet werden. Der Bauplatz des Hydranten ist so auszuwählen, daß die Entfernung zwischen ihm und jedem der drei Häuser gleich ist.

194. Es ist ein Mittelpunktsucher für Körper mit zylindrischen Bohrungen herzustellen, der auf der Tatsache beruht, daß die Mittelsenkrechten der Sehnen zugleich Durchmesser sind.

Hinweis: Zwei Typen dieser Mittelpunktsucher zeigt die Abbildung 91 ($\overline{AO} = \overline{OB}$, $AB \perp OD$).

195. Es ist der Mittelpunkt eines Kreises, der ganz gegeben ist, oder von dem nur ein Kreisbogen bekannt ist, mit Hilfe eines der Mittelpunktsucher zu finden, die in der Abbildung 91 gezeigt werden.

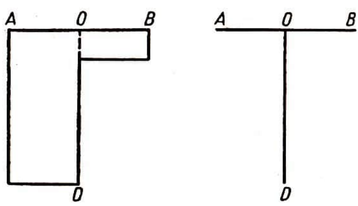


Abb. 91

196. Kann man einen Mittelpunktsucher herstellen, der es ermöglicht, den Mittelpunkt eines Werkstücks mit kreisförmiger Begrenzung mit nur einer Einstellung zu bestimmen?

Antwort: Man kann es, denn es genügt, den Mittelpunktsucher doppelt auszuführen (Abb. 92).

197. Zwei geradlinige Wegstücke, die in verschiedenen Richtungen verlaufen, sind durch ein kreisbogenförmiges Wegstück zu verbinden.

(Als Krümmungsradius sind 10 m zu nehmen.) Führen Sie eine maßstabsgerechte Konstruktion dieses Wegstücks durch!

Die Lösung zeigt die Abbildung 93.

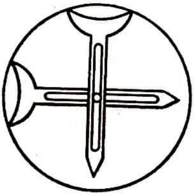


Abb. 92

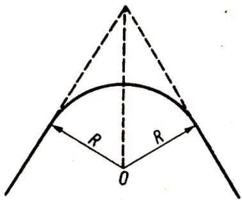


Abb. 93

198. Wie kann man den Krümmungsradius eines kreisförmigen Wegstücks praktisch bestimmen?

Lösung: Den Krümmungsradius kann man mit Hilfe verschiedener Verfahren finden: 1. Durch Aufsuchen des Mittelpunkts des Kreises, auf dessen Peripherie der Krümmungsbogen liegt; 2. durch Aufsuchen der Punkte, in denen das geradlinige Wegstück in das gekrümmte übergeht, und durch Konstruktion zweier Senkrechten zu den Tangenten in diesen Punkten (Abb. 93); 3. grafisch durch Messung der Sehne und der Höhe des Segments oder durch Konstruktion des Bogens durch drei Punkte u. ä.

199. Beim Zeichnen einer Geraden parallel zu einer gegebenen Geraden MN durch den Punkt D, der nicht auf der Geraden MN liegt, kann man wie folgt verfahren: Auf der Geraden MN wählt man einen Punkt O, und mit dem Radius $\overline{OD}$ schlägt man einen Halbkreis um O; dann schlägt man den Kreis mit dem Radius $\overline{AD}$ um den Punkt B (Abb. 94). Man zeige, daß $DC \parallel MN$ gilt.

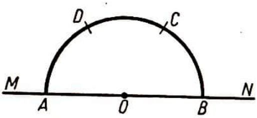


Abb. 94

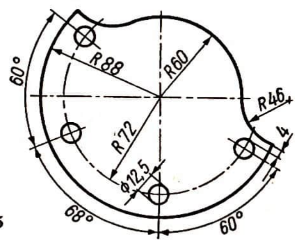


Abb. 95

200. Die Abbildung 95 zeigt den Flansch eines Kugellagergehäuses im Grundriß. (Die Abmessungen sind in Millimetern gegeben.) Nach dem Muster dieses Flansches soll ein Modell in natürlicher Größe gezeichnet werden.

201. Mit Hilfe der Abbildung 96 ist der Anriß eines Flansches anzufertigen. (Die Abmessungen sind in Millimetern gegeben.)

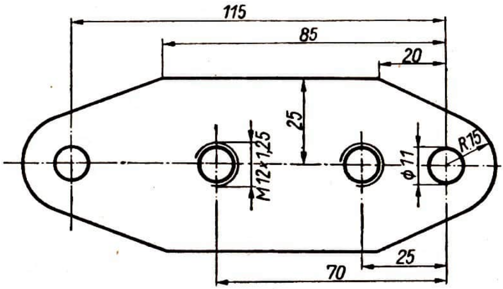


Abb. 96

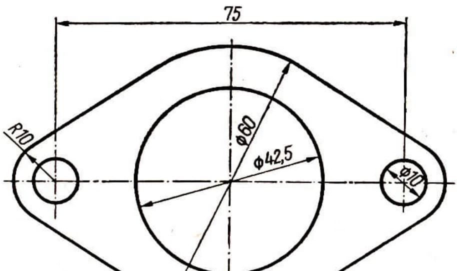


Abb. 97

202. Mach den Abmessungen, die in der Abbildung 97 gegeben sind, ist der Anriß einer Asbest-Kupfer-Dichtung anzufertigen.

203. Worauf beruht die Konstruktion des Mittelpunktsuchers, der in der Abbildung 98 dargestellt ist?

204. Den in der Abbildung 98 dargestellten Mittelpunktsucher kann man vervollkommnen, wenn man ein zusätzliches Stück $\overline{MN}$ so einfügt, daß $\overline{BM} = \overline{DN}$ gilt (Abb. 99). Es ist nachzuweisen, daß der Mittelpunkt der Strecke $\overline{MN}$ der Mittelpunkt des Kreises ist.

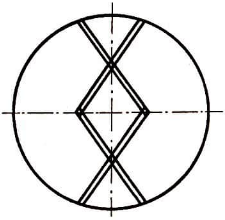


Abb. 98

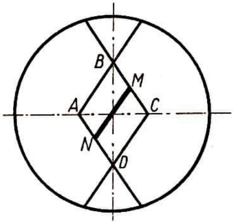


Abb. 99

205. Mit Hilfe eines Anreißwinkels und eines Lineals ist in einem Punkt A eines Kreises die Tangente an diesen Kreis zu legen.

Lösung: Wir verbinden den Kreismittelpunkt mit dem Punkt A durch eine Gerade, dann errichten wir die Senkrechte zu dieser Geraden im Punkt A (siehe Lösung zur Aufgabe 67).

206. Mit Hilfe eines Lineals und eines Anreißwinkels ist eine Tangente an einen Kreis zu legen, die parallel zu einer gegebenen Sekante liegt.

Lösung: Zuerst bestimmen wir den Berührungspunkt, indem wir das Lot vom Kreismittelpunkt auf die gegebene Sekante fällen (Aufgabe 69). Auf diese Weise wird die Aufgabe auf eine bereits gelöste (205) zurückgeführt.

207. Durch einen auf einem Kreisbogen gewählten Punkt A ist die Tangente an den Bogen zu legen. Der Mittelpunkt des Bogens sei unzugänglich.

Lösung: Wir schlagen vom Punkt A aus gleiche Bogen $\overset{\frown}{AB}$ und $\overset{\frown}{AC}$ und erhalten die Punkte B und C. Nun ziehen wir durch den Punkt A eine Gerade, die parallel zur Sekante BC ist (Abb. 100).

208. Im Gelände seien zwei Fluchtstäbe aufgestellt, die einen Kreisdurchmesser begrenzen. Mit Hilfe eines Winkelkreuzes sind noch weitere Absteckpfähle auf dem Kreisbogen aufzustellen.

Lösung: Es seien die Stäbe in den Punkten A und B aufgestellt (Abb. 101). Wir ziehen eine beliebige Gerade AC und finden, wenn wir uns auf ihr mit einem Winkelkreuz bewegen, einen Punkt D derart, daß $BD \perp AC$ gilt. Der Punkt D gehört zum Kreis. Analog finden wir beliebig viele weitere Punkte.

209. Ein Kreis sei durch drei Punkte gegeben. Wie kann man weitere Punkte des Kreises ohne Zirkel einzeichnen, wenn man nur ein Zeichendreieck benutzt?

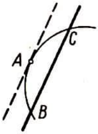


Abb. 100

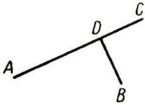


Abb. 101

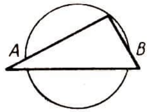


Abb. 102

210. Kann man ein Zeichendreieck auch als Mittelpunktsucher für Kreise benutzen? Auf welche Weise?

Lösung: Der Abbildung 102 entnimmt man, daß $\overline{AB}$ der Durchmesser des Kreises ist. Wir zeichnen noch einen weiteren Durchmesser ein. Der Schnittpunkt beider Durchmesser ist der Mittelpunkt des Kreises.

211. Es ist zeichnerisch der Durchmesser einer kreisförmigen Scheibe zu bestimmen, von der ein Teil des Randes bekannt ist.

212. Im Gelände sei ein Kreis mit drei Fluchtstäben markiert. Mit Hilfe von Winkelkreuz und Fluchtstäben sind ein weiterer beliebiger Punkt des gleichen Kreises sowie sein Mittelpunkt zu kennzeichnen.

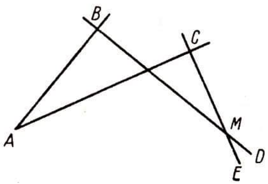


Abb. 103

Lösung: Es seien die Pfähle in den Punkten A, B, C aufgestellt (Abb. 103). Mit Hilfe des Winkelkreuzes markieren wir die Gerade BD mit $BD \perp AB$ und die Gerade CE mit $CE \perp AC$, dann ist $\overline{AM}$ der Durchmesser. Führen wir eine analoge Konstruktion für die Punkte B, C, M durch, erhalten wir noch einen Durchmesser. Der Schnittpunkt zweier Durchmesser ist der Mittelpunkt des Kreises. Für die Konstruktion weiterer Kreispunkte ist die Aufgabe 208 heranzuziehen.

213. Im Gelände soll der Winkel zwischen zwei Richtungen mit Hilfe eines Winkelpeilers gemessen werden.

214. Unter welchem Blickwinkel ist ein Telegrafenmast zu sehen, der 8 m hoch ist und sich in einer Entfernung von 230 m vom Beobachter befindet?

Näherungslösung: $\frac{360° \cdot 8}{2\pi \cdot 230} \approx 2°$.

215. Welche Höhe hat ein Holzturm, von dem aus die umgebenden Wälder beobachtet werden, damit Waldbrände frühzeitig erkannt werden, wenn er in einer Entfernung von 800 m unter einem Winkel von 2° zu sehen ist?

216. Sonne und Mond sind von der Erde aus unter einem Winkel von 31′ zu sehen. Es sind die Durchmesser von Sonne und Mond zu bestimmen, wenn die Entfernung von der Erde zur Sonne rund 150000000 km und die von der Erde zum Mond rund 384000 km beträgt.

217. Ein Mensch von 1,70 m Körpergröße ist unter einem Winkel von 20′ zu sehen. Wie weit ist der Beobachter von ihm entfernt?

218. Der Winkel zwischen zwei Geraden im Gelände wurde mit einem Winkelmesser gemessen, wie es die Abbildung 104 zeigt. Was muß man bei diesem Verfahren der Winkelmessung beachten?

Hinweis: Entsprechen dem Bogen $\overset{\frown}{AC}$ z. B. 46°, so ist $\sphericalangle ABC = 23°$.

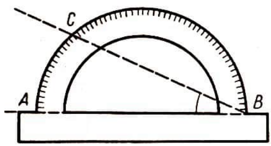


Abb. 104

219. Ein Facharbeiter möchte ein Gerät zur Teilung eines Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Teile herstellen. Wie kann er diese Aufgabe lösen?

Lösung: Es ist ein Kreis mit beliebigem Radius $\overline{OA}$ zu nehmen und in 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17 usw. gleiche Teile zu teilen, wobei man im Punkt A beginnt (Abb. 105). Beim Auftragen der Teilungspunkte braucht man nicht den ganzen Kreis zu benutzen, sondern nur einen Teil desselben (Sektor OAB). Wird jetzt gefordert, irgendeinen Kreis zu teilen, z. B. in 7 gleiche Teile, legt man den Mittelpunkt des Gerätes auf den Mittelpunkt des Kreises und zieht zwei Radien, die durch den Punkt A und durch die Teilung mit der Markierung 7 gehen. Der Bogen $\overset{\frown}{CD}$ ist der siebente Teil des Kreises. Andere Teilungspunkte findet man mit Hilfe eines Zirkels.

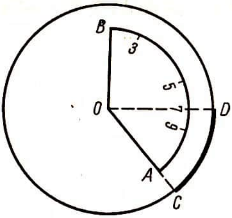


Abb. 105

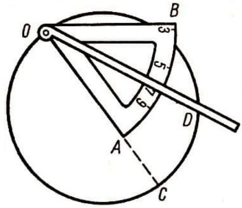


Abb. 106

220. Zur Teilung eines Kreises in gleiche Teile ist ein Instrument herzustellen, dessen Prinzip auf den Eigenschaften von Peripheriewinkeln beruht.

Lösung: Weil ein Peripheriewinkel gleich dem halben Zentriwinkel über dem gleichen Bogen ist, kann man den halben Winkel des Sektors OAB (Abb. 105) nehmen. Wir versehen den Sektor mit einem Lineal, das sich um eine Achse dreht. In der Abbildung 106 ist der Aufbau des Geräts und die Art seiner Anwendung zu erkennen.

Anmerkung: Gewöhnlich halbiert man den Winkel des Sektors OAB noch einmal und trägt dann den halben Bogen $\overset{\frown}{CD}$ von C aus einmal nach links und einmal nach rechts ab.

221. Die Gerade AB sei eine feste Straße, auf der ein Hebekran ortsfest aufgestellt werden soll, der eine Last vom Punkt M zum Punkt N transportieren kann. An welcher Stelle ist der Kran aufzustellen?

222. Es sind drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, gegeben. Es soll der durch sie bestimmte Bogen gezeichnet werden, wenn der Mittelpunkt des Kreises, auf dessen Peripherie der Bogen liegt, unzugänglich ist.

Lösung: Es seien A, B, C drei Punkte des Bogens (Abb. 107). Wir zeichnen die Halbierende des Winkels ACB und die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten gehört zum Bogen. Analog finden wir noch weitere Punkte und verbinden sie durch eine gekrümmte Freihandlinie.

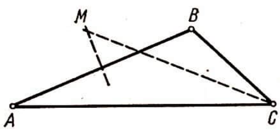


Abb. 107

223. Aus einem Draht von 52 cm Länge und einer Dicke von 0,5 cm wurde ein Ring hergestellt. Man bestimme den Radius des Ringes.

Antwort: Der mittlere Radius des Ringes beträgt 8,3 cm.

224. Das Treibrad einer Lokomotive hat einen Durchmesser von 1,5 m. Wieviel Umdrehungen in der Minute macht es bei einer Geschwindigkeit des Zuges von 50 $km \cdot h^{-1}$?

225. Der Durchmesser des Treibrades einer Lokomotive beträgt 1,5 m. Das Rad macht 180 Umdrehungen in der Minute. Man bestimme die Geschwindigkeit der Lokomotive.

226. Ein Band sei als straffe, ebene Spirale aufgewickelt. Es soll die Länge des Bandes bestimmt werden, ohne es abzuwickeln. (Es sind alle Windungen gleich dem Umfang des Kreises mit mittlerem Durchmesser anzunehmen.)

227. Manchmal setzt man bei der Berechnung des Kreisumfangs und der Kreisfläche π mit 3 an und vergrößert das Ergebnis um 5%. Wie groß ist π dann?

Antwort: 3,15.

228. Man mißt den Umfang eines Stammes mit Hilfe eines Bindfadens. Wie findet man die Länge des Durchmessers dieses Baumes?

229. Um einen Eimer aus einem Brunnen zu ziehen, dreht man die Kurbel einer Winde $6\frac{1}{2}$mal. Es ist die annähernde Tiefe des Brunnens zu bestimmen, wenn der Durchmesser der Welle, auf die das Seil gewickelt wird, 30 cm beträgt.

230. Aus einer Kreisscheibe ist ein Quadrat mit größten Abmessungen auszuschneiden. Wieviel Prozent Abfall erhält man?

231. Aus einem Quadrat ist eine Kreisscheibe mit möglichst großem Durchmesser auszuschneiden. Wieviel Prozent Abfall erhält man?
Man vergleiche die Ergebnisse von Aufgabe 230 und 231.

232. Die Länge eines Bogens, dem ein Winkel von 50° entspricht, ist gleich dem Umfang eines Kreises von 1 m Durchmesser. Es ist der Radius des Bogens zu bestimmen.

233. Man bestimme den Umfang eines aufgezeichneten Kreises und stelle ihn als gerade Strecke dar.

234. Man bestimme die Länge eines Drahtes von 3 mm Durchmesser, der zur Herstellung einer zylindrischen Feder von 20 Windungen und einem Innendurchmesser von 25 mm erforderlich ist,

235. Es ist die Länge eines Drahtes zu bestimmen, der zur Fertigung einer zylindrischen Feder von 30 Windungen erforderlich ist, wenn der Innendurchmesser der Feder 30 mm und der Außendurchmesser 40 mm beträgt.

236. Es ist die Länge eines Treibriemens auszurechnen, wenn die Durchmesser der Scheiben je 250 mm betragen und die Entfernung zwischen den Mittelpunkten der Scheiben gleich 1000 mm ist.

237. Die Durchmesser D großer zylinderischer Teile kann man beim Bearbeitungsprozeß auf der Drehmaschine bestimmen (Abb. 108). Dazu läßt man eine Rolle (oder Scheibe) mit dem Durchmesser d die Oberfläche des Werkstücks berühren. Wenn man n, die Drehzahl der Spindel, und m, die Drehzahl der Rolle, kennt, kann man eine Formel zur Bestimmung des Durchmessers D herleiten. Wie heißt diese Formel?

Lösung: Wir setzen die Wege, die von den Punkten, die auf der einen und der anderen zylindrischen Oberfläche liegen, zurückgelegt werden, gleich: $\pi Dn = \pi dm$. Daraus folgt $D = \frac{m}{n} d$.

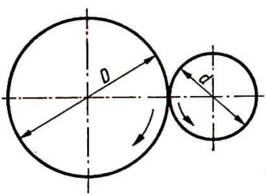


Abb. 108

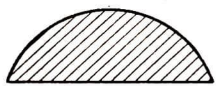


Abb. 109

238. Man berechne den Flächeninhalt einer Kreisfläche, deren Mittelpunkt nicht gekennzeichnet ist.

239. Es ist der Flächeninhalt eines Kreissegments (Abb. 109) zu berechnen.

Hinweis: Den Flächeninhalt des Segments kann man als Differenz der Flächeninhalte eines Sektors und eines Dreiecks betrachten.

240. Die Feldmesser in Rußland rechneten vor Peter I. mit einem Kreisflächeninhalt, der gleich ist dem Flächeninhalt eines Quadrats, das den gleichen Umfang hatte wie der Kreis. Um wieviel Prozent weicht das erhaltene Resultat vom wirklichen ab?

241. Auf der Grundlage der Angaben, die aus der Abbildung 110 entnommen werden können, ist die Länge des Treibriemens zu bestimmen. Dabei kann man die Näherungsformel $l = 2a + \frac{\pi}{2}(D + d)$ benutzen, in der a die Entfernung zwischen den Scheibenmittelpunkten, D und d die Durchmesser der Scheiben sind. Für den Durchhang und für das Zusammennähen sind 2,5% der errechneten Länge hinzuzufügen.

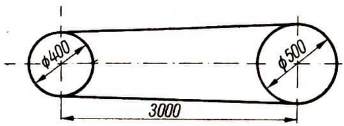


Abb. 110

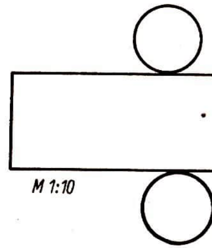


Abb. 111

242. Die Abbildung 111 zeigt die Abwicklung eines Zylinders. Es ist der Inhalt dieser Oberfläche unter Beachtung des Zeichenmaßstabs zu bestimmen.

243. Es ist die Abwicklung eines zylindrischen Eimers zu zeichnen, der eine Höhe von 30 cm und einen Durchmesser von 20 cm besitzt.

244. Mit Hilfe der gegebenen Abwicklung (Abb. 111) ist aus Papier ein Zylinder zusammenzukleben. Kleberänder sind in der Zeichnung nicht dargestellt, sie sind nach Belieben zu wählen.

245. Mit Hilfe der gegebenen Abwicklung (Abb. 111) ist das Volumen des Zylinders zu berechnen.

246. Die Abwicklung der Mantelfläche eines Zylinders bildet ein Quadrat. Man bestimme das Verhältnis der Höhe des Zylinders zum Durchmesser seiner Grundfläche.

247. Man stelle ein oben geöffnetes zylindrisches Gefäß her, bei dem der Durchmesser der Grundfläche 4mal so groß wie die Höhe ist. Man vergleiche für diesen Fall die Bodenfläche und die Mantelfläche.

248. Wieviel Eisenblech benötigt man zur Herstellung eines Abflußrohres von 14 cm Durchmesser und 250 cm Länge? (Für die Falze sind 10% hinzuzufügen.)

249. Wieviel Liter Wasser faßt ein zylindrischer Tank, wenn er 64 cm hoch ist und einen Bodendurchmesser von 33 cm besitzt?

250. Es ist das Volumen eines Trinkwasserbehälters zu bestimmen.

251. Ein zylindrischer Tank befindet sich in horizontaler Lage und ist mit Benzin gefüllt. Man bestimme die Benzinmenge, wenn der Tank einen Durchmesser von 200 cm und eine Länge von 360 cm besitzt.

252. Ein Stahlrohr ist 420 cm lang. Man bestimme die Masse des Rohres bei einem Innendurchmesser von 55,6 cm und einem Außendurchmesser von 58,0 cm. (Die Dichte von Stahl beträgt 7,8 $g \cdot cm^{-3}$.)

253. Ein Stahlring hat eine Dicke (Höhe) von 3 mm. Der äußere bzw. innere Durchmesser D bzw. D_1 beträgt 60 mm und 25 mm. Man bestimme die Masse des Ringes.

254. Man hat eine Rolle Kupferdraht mit einer Masse von 4,8 kg. Es ist die Länge des aufgerollten Drahtes zu bestimmen, wenn er einen Durchmesser von 2,0 mm hat. (Kupfer hat die Dichte 8,9 $g \cdot cm^{-3}$.)

8. Proportionale Strecken; ähnliche Figuren

255. Eine Entfernung von 100 m ist in einer maßstäblichen Zeichnung als Strecke von 20 cm dargestellt. Es ist der Maßstab zu ermitteln.

256. Die Entfernung zwischen zwei Punkten auf einer maßstäblichen Zeichnung, deren Maßstab 1:500 ist, beträgt 12 cm. Es ist die tatsächliche Entfernung zwischen diesen Punkten zu bestimmen.

257. Man betrachte einen Winkel von 10° durch eine Lupe, die 5fach vergrößert. Welche Größe hat dann der Winkel?

258. In welchem Maßstab wurde der erste künstliche Erdtrabant gezeichnet (Abb. 112), wenn der Sputnik einen Durchmesser von 58 cm hatte?

259. Es ist das Prinzip eines Nonius (Abb. 113) zu erklären, wenn der Anlegemaßstab in Zentimeter eingeteilt ist und die Einheit der Noniusteilung 0,9 cm beträgt.

260. Es ist die Anzeige des Meßgerätes in Abbildung 114 abzulesen, wenn der Abstand der Teilstriche auf der Skale des Grundmaßstabs 1 mm und der Abstand der Teilstriche auf der Skale des Nonius 0,9 mm beträgt.

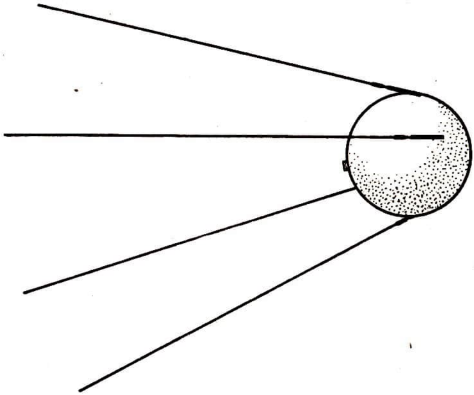


Abb. 112

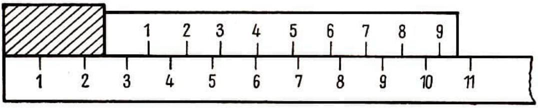


Abb. 113

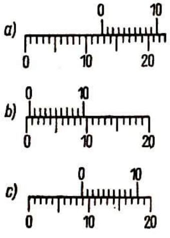


Abb. 114

261. Wie ist ein Nonius mit der Meßgenauigkeit von 0,05 mm aufgebaut?

262. Welche Meßgenauigkeit besitzt der Nonius, wenn die Einheit der Teilung des Grundmaßstabs 0,5 mm beträgt und die Noniusskale bei einer Länge von 12 mm in 25 Teile geteilt ist?

Antwort: 0,02 mm.

263. Es ist mit Hilfe eines Transversalmaßstabes ein Dreieck mit den Seiten 5,32 cm, 2,78 cm und 4,27 cm zu konstruieren.

264. Eine Lochstanze, die zum Durchschlagen von Öffnungen für Nieten bestimmt ist, ist mit einer Aufnahmeplatte mit Öffnungen für Passerstifte versehen (Abb. 115). Es ist das Aufbauprinzip der Aufnahmeplatte zu erklären. Es sind Passerstifte in einer Entfernung (von der linken Kante) von 6 mm, 11 mm, 14 mm, 18 mm, 10 mm einzusetzen.

265. Die Durchmesser kleiner Öffnungen kann man mit Hilfe eines Meßkeils messen (Keile, konische Nadeln u. ä.). Welche Teilung muß auf der Strecke $\overline{BC}$ angebracht werden, wenn das Verhältnis der Kathetenlängen $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ bekannt ist (Abb. 116)? Es ist ein Meßkeil zu fertigen, bei dem das Verhältnis der Katheten 1:50 beträgt.

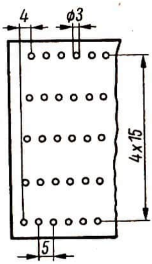


Abb. 115

Abb. 116

266. Mit Hilfe eines Proportionalzirkels sind die Strecken zu finden, die a) gleich 0,4mal; b) 1,6mal größer sind als eine vorgegebene Strecke. Wie macht man das?

267. Mit Hilfe eines Proportionalzirkels ist ein Dreieck zu konstruieren, das einem gegebenen ähnlich ist, aber einen Umfang besitzt, der den dritten Teil beträgt.

268. Die Zeichnung eines Teils, die im Maßstab 1:1 angefertigt wurde, ist mit Hilfe eines Proportionalsmaßstabs verkleinert in das Heft zu übertragen.

Lösung: Wir wollen z. B. die Zeichnung im Maßstab 1 : 2 ausführen. Wir zeichnen das rechtwinklige Dreieck ABC mit einem Kathetenverhältnis $\overline{BC} : \overline{AC} = 1 : 2$ (Abb. 117). Soll jetzt die Strecke $\overline{AM}$ auf die Hälfte verkleinert werden, so genügt es, im Punkt M die Senkrechte auf $\overline{AC}$ zu errichten. Offensichtlich gilt $\overline{MN} : \overline{AM} = 1 : 2$. Der Proportionalmaßstab läßt sich bequem auf Millimeterpapier übertragen.

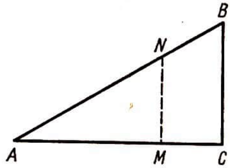


Abb. 117

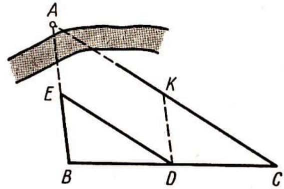


Abb. 118

269. Es ist die Entfernung zu einem unzulänglichen Punkt über die Konstruktion einander ähnlicher Dreiecke zu bestimmen.

Lösung: Um die Entfernung $\overline{AB}$ bestimmen zu können (Abb. 118), wählen wir auf der Strecke $\overline{BC}$ einen beliebigen Punkt D, Durch den Punkt D ziehen wir die Gerade DE mit $DE \parallel AC$, dann gilt $\overline{AB} = \dfrac{\overline{BC} \cdot \overline{BE}}{\overline{BD}}$.

Wenn wir dagegen die Gerade DK mit $DK \parallel AB$ einzeichnen, gilt $\overline{AB} = \dfrac{\overline{BC} \cdot \overline{DK}}{\overline{DC}}$.

270. Wie findet man auf einer Karte, die man bereits im Gelände orientiert hat, den eigenen Standpunkt?

Lösung: Wir ziehen eine Gerade durch einen Gegenstand, der sich im Gelände befindet und auf der Karte eingezeichnet ist, und den Punkt auf der Karte, der diesem Gegenstand entspricht. Auf die gleiche Weise legen wir eine weitere Gerade (Abb. 119). Der Schnittpunkt dieser Geraden ist der gesuchte Standpunkt.

271. Welche Messungen muß man im Gelände durchführen, wenn man den Plan eines Grundstücks von dreieckiger Form aufnehmen will?

Hinweis: Man benutze eine Eigenschaft ähnlicher Dreiecke.

272. Vom Punkt B zum Schnittpunkt zweier Straßen AC und AD soll ein schmalspuriger Weg geführt werden. Wie kann man im Gelände die Trasse des Weges einzeichnen, wenn der Punkt A von einem Wald umgeben ist?

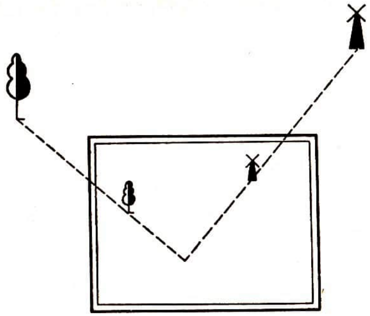


Abb. 119

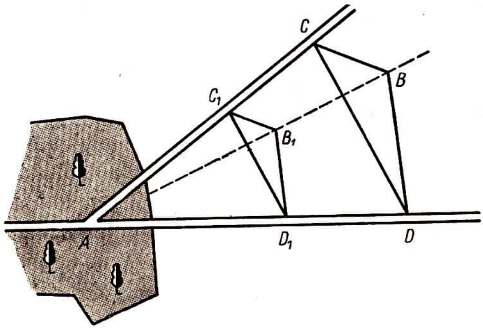


Abb. 120

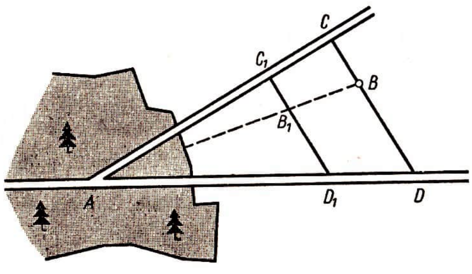


Abb. 121

Lösung 1: Durch den Punkt B ziehen wir zwei Geraden BC und BD (Abb. 120). Die Punkte C und D verbinden wir durch eine Gerade. Von einem beliebigen Punkt C_1 aus, der auf einem Schenkel des Winkels bei A gewählt wird, ziehen wir die Gerade C_1B_1 mit $C_1B_1 \parallel CB$ und die Gerade C_1D_1 mit $C_1D_1 \parallel CD$, und durch den Punkt D_1 ziehen wir eine weitere Gerade D_1B_1. Es gilt $D_1B_1 \parallel DB$, weil die Dreiecke $B_1C_1D_1$ und BCD ähnlich sind und sich in Ähnlichkeitslage befinden. Nun muß nur noch die gesuchte Gerade BB_1 eingezeichnet werden. Beweis: Die Dreiecke BCD und $B_1C_1D_1$ sind ähnlich und befinden sich in Ähnlichkeitslage, der Punkt A ist ihr Ähnlichkeitszentrum.

Lösung 2: Durch den Punkt B (Abb. 121) ziehen wir eine Gerade, die die Schenkel des Winkels in C und D schneidet. Durch einen beliebigen Punkt C_1 auf dem einen Schenkel des Winkels bei A ziehen wir eine Gerade C_1D_1 parallel zu CD. Wir erhalten auf AD den Punkt D_1. Wir teilen die Strecke $\overline{C_1D_1}$ im Verhältnis $\overline{CB} : \overline{BD}$, d. h. $\overline{C_1B_1} : \overline{B_1D_1} = \overline{CB} : \overline{BD}$. Durch die Punkte B und B_1 ziehen wir die gesuchte Gerade.

273. Zwei Touristengruppen A und C beabsichtigen, sich an der Straße MN zu treffen. Gruppe A läuft in Richtung AB (Abb. 122). In welche Richtung muß sich die Gruppe C bewegen, damit sie die Gruppe A am Schnittpunkt der Geraden AB und MN trifft?

Lösung: Wir zeichnen die Gerade AC bis zu ihrem Schnittpunkt mit MN im Punkt K (Abb. 123). Dann zeichnen wir die Gerade BR mit $BR \parallel AK$. Auf der Geraden BR finden wir einen Punkt D derart, daß $\overline{BD} : \overline{DR} = \overline{AC} : \overline{CK}$ gilt. Die Richtung CD ist die gesuchte Marschrichtung der Gruppe C.

274. Wie kann man die Breite einer Schlucht bestimmen, wenn man ein gleichschenkliges Zeichendreieck bei sich hat?

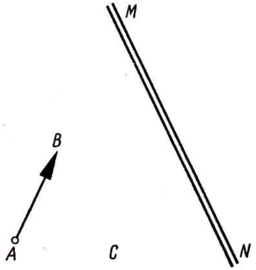


Abb. 122

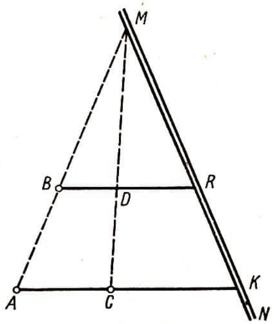


Abb. 123

275. **Es ist die Höhe eines Gegenstandes nach dem Schatten zu bestimmen, obwohl man zu dem Fußpunkt des Gegenstandes nicht gelangen kann.**

Lösung: Wir schlagen einen Pfahl $\overline{A_1B_1}$ in den Boden und vermerken die Lage der Schatten des Gegenstandes AB und des Pfahls (Abb. 124). Nach einer gewissen Zeit markieren wir erneut die Lage der Schatten des Pfahls und des Gegenstandes. Wir messen die Strecken $\overline{A_1B_1}$, $\overline{CD}$ und $\overline{C_1D_1}$ und finden die Höhe $\overline{AB}$ aus der Proportion $\overline{AB} : \overline{A_1B_1} = \overline{CD} : \overline{C_1D_1}$.

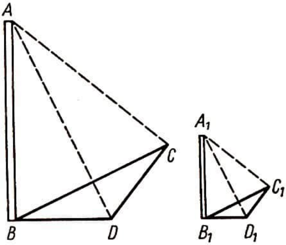


Abb. 124

276. **Es soll ein Speicher an der Eisenbahnlinie CD unter der Voraussetzung gebaut werden, daß die Gesamtlänge der Wege von den Staatsgütern A und B zum Speicher am kürzesten ist. Als Bauplatz des Speichers wähle man den Punkt E, der die Strecke $\overline{CD}$ in solche Teile teilt, die den Längen der Lote $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ direkt proportional sind (Abb. 125). Wie ist die Wahl des Punktes E zu begründen?**

Lösung: Die rechtwinkligen Dreiecke ACE und BDE sind einander ähnlich. Folglich gilt $\sphericalangle CEA = \sphericalangle BED$, und deshalb liegen die Abschnitte $\overline{AE}$ und $\overline{BE}$ auf einer Geraden.

277. **Kann man mit der gleichen Methode den Bauplatz für einen Speicher auswählen, wenn die Gehöfte der Staatsgüter A und B auf einer Seite der Eisenbahnlinie liegen?**

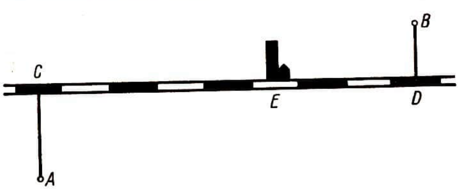


Abb. 125

278. Zur Bestimmung der Breite eines Sees wählt man drei Punkte A, C, D, die auf einer Geraden liegen, und zieht durch den Punkt C eine Gerade CE so, daß gilt $\sphericalangle DCE = \sphericalangle BAD$ (Abb. 126). Wie findet man die Breite des Sees?

279. Die vorige Aufgabe ist ohne Winkelkonstruktionen zu lösen, d. h., es sollen nur Strecken abgesteckt werden.

Lösung: Wir wählen den Punkt D (Abb. 126) und tragen auf den Geraden AD und BD die Strecken $\overline{CD} = \frac{1}{k} \cdot \overline{AD}$ und $\overline{DE} = \frac{1}{k} \cdot \overline{BD}$ ab. Dann gilt $\overline{AB} = k \cdot \overline{CE}$.

280. Bei der Lösung der vorigen Aufgabe gestattete man folgenden „Fehler": Auf der Geraden $\overline{AD}$ trägt man $\overline{CD} = \frac{1}{k} \cdot \overline{BD}$ und auf der Geraden $\overline{BD}$ trägt man $\overline{DE} = \frac{1}{k} \cdot \overline{AD}$ ab, wobei man plötzlich feststellt, daß die Geraden AB und CE nicht parallel zueinander verlaufen. Kann man nun behaupten, daß $\overline{AB} = k \cdot \overline{CE}$ gilt?

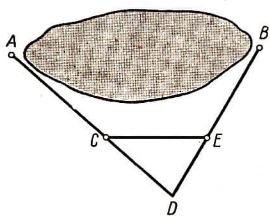


Abb. 126

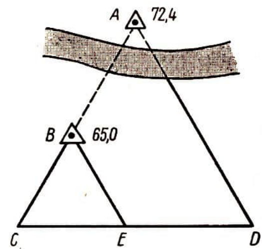


Abb. 127

281. Um die Entfernung zwischen zwei Punkten A und B, von denen einer unzugänglich ist, zu bestimmen (Abb. 127), wählt man einen Punkt C auf der Geraden AB und einen beliebigen Punkt D. Dann zeichnet man die Gerade BE mit $BE \parallel AD$. Wie bestimmt man die Entfernung $\overline{AB}$?

282. Als einfachsten Entfernungsmesser kann man ein Lineal mit Millimeterteilung benutzen. Das Lineal halten wir lotrecht in der nach vorn ausgestreckten Hand und stellen fest, wieviel Teilstriche des Lineals den Gegenstand, dessen Entfernung wir bestimmen wollen, überdecken. Auf welche Weise kann man die Entfernung bis zu dem Gegenstand berechnen, wenn man die Entfernung vom Auge bis zum Entfernungsmesser und die Höhe des Gegenstandes kennt?

283. Der einfachste Höhenmesser besteht aus zwei Leisten $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, die unter einem rechten Winkel aneinander befestigt sind, wobei $\overline{AC} = 2\,\overline{CD}$ und $\overline{BC} = \overline{AC}$ gilt (Abb. 128). Die Abbildung zeigt, wie man mit dem Gerät arbeitet. Man zeige, daß $\overline{MN} = \overline{PR}$ und folglich die Höhe des Gegenstandes gleich PR, vermehrt um die Höhe des Geräts über dem Boden ist.

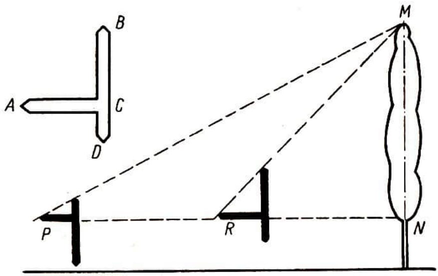
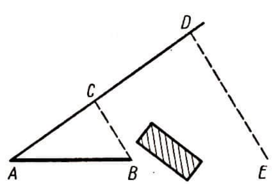


Abb. 128

284. Wie kann man die Aufgabe 283 einfacher lösen, wenn man den Fußpunkt des Gegenstandes erreichen kann?

285. Man markiert im Gelände eine Gerade, die auf einen Strohschober führt. Um die Fortsetzung der Geraden zu finden, führt man eine Hilfskonstruktion aus (Abb. 129). Und zwar markiert man die Geraden AD, BC und DE mit $DE \parallel BC$. Wie findet man nun die Fortsetzung der Geraden AB?



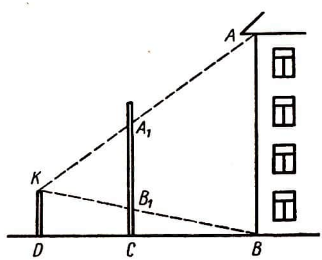


Abb. 129 Abb. 130

286. Die Höhe $\overline{AB}$ eines Hauses, dessen Entfernung man messen kann, wird mit Hilfe zweier Fluchtstäbe bestimmt (Abb. 130). Welche Messungen werden dabei durchgeführt? Wie groß ist die Höhe $\overline{AB}$ des Hauses?

287. Für die Arbeit mit dem Pantografen (Storchschnabel) bestimme man den Ähnlichkeitskoeffizienten k so, daß eine gegebene Figur in eine ihr ähnliche verwandelt werden kann, die nur den halben Flächeninhalt hat.

288. Es ist ein Dreieck zu konstruieren, das dem gegebenen ähnlich ist, aber den doppelten Flächeninhalt hat.

Hinweis: Als Ähnlichkeitskoeffizient ist $\sqrt{2}$ zu nehmen.

289. Von einem Grundstück mit einem Flächeninhalt von 38 a wurde eine maßstäbliche Zeichnung angefertigt (Abb. 131), man vergaß aber, den Maßstab anzugeben. In welchem Maßstab wurde die Zeichnung angefertigt?

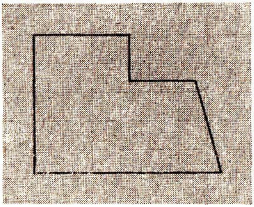


Abb. 131

290. Durch einen Punkt A soll ein Weg derart gelegt werden, daß sich die Punkte B und C in gleichem Abstand vom Weg und andererseits so nahe wie möglich am Weg befinden. Die einen behaupten, daß die Punkte B und C auf einer Seite des Weges liegen müssen (Abb. 132a), die anderen, daß sie auf verschiedenen Seiten liegen müssen (Abb. 132b). Wer von ihnen hat recht? Die Schlußfolgerung ist zu begründen.

Lösung: $\Delta\, APO \sim \Delta\, BNO$ (Abb. 132 c). Aus der Ähnlichkeit folgt $\overline{AP} : \overline{BN} = \overline{AO} : \overline{BO}$. Wenn $\overline{AO} < \overline{BO}$ gilt, gilt folglich auch $\overline{AP} < \overline{BN}$, und der Weg verläuft parallel zu BC. Wenn $\overline{AO} > \overline{BO}$ gilt, dann gilt $\overline{AP} > \overline{BN}$, und der Weg verläuft zwischen den Punkten B und C. Wenn $\overline{AO} = \overline{BO}$ ist, dann ist es gleich, wie der Weg verläuft. Spezialfall: Die Punkte A und O fallen zusammen, der Weg geht durch alle drei Punkte.

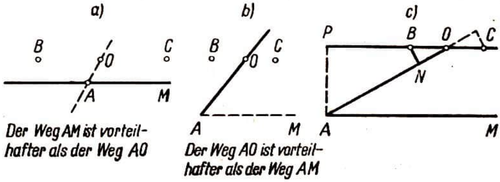


Abb. 132

291. Durch einen Wald (Abb. 133) soll eine Schneise in der Richtung AB geschlagen werden. Wie findet man vom Waldrand aus die Richtung, in die man die Schneise führen muß?

Lösung: Wir wählen einen Punkt C (Abb. 133). Auf der Geraden AC tragen wir die Strecke $\overline{CD} = \frac{1}{k}\overline{AC}$ ab. Analog finden wir einen Punkt E derart daß $\overline{CE} = \frac{1}{k}\overline{BC}$ ist. Dann gilt $DE \parallel AB$. Wir stellen auf DE zwei beliebige Fluchtstäbe M und N auf und tragen von ihnen aus die Strecken $\overline{CA_1} = k \cdot \overline{CM}$ und $\overline{CB_1} = k \cdot \overline{CN}$ ab. Offensichtlich liegen die Punkte A_1 und B_1 auf der Geraden AB. Jetzt kann man die Schneise nach zwei Seiten schlagen: in die Richtung AA_1 und in die Richtung BB_1.

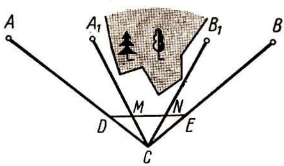


Abb. 133

292. Es ist eine Meßtischaufnahme nach dem Polarverfahren herzustellen.

Lösung: Wir stellen den Meßtisch in einem solchen Punkt O auf, von dem aus alle Ecken des aufzunehmenden Grundstücks zu sehen sind (Abb. 134). Auf dem Papier zeichnen wir die Richtungen OA, OB, OC, OD ein. Wir messen die Entfernungen vom Punkt O zu allen Ecken des Vielecks und tragen diese Entfernungen in bestimmtem Maßstab ein. Dann tragen wir die Nord-Süd-Richtung ein.

293. Es ist eine Meßtischaufnahme eines viereckigen Grundstücks von einer Begrenzungslinie nach dem Schnittverfahren durchzuführen,

Lösung: Wir messen die Basis, z. B. $\overline{AB}$ (Abb. 135). Den Meßtisch stellen wir im Punkt A auf und tragen auf dem Papier die Richtungen AB, AC, AD ein. Dann begeben wir uns mit dem Meßtisch in den Punkt B und stellen ihn so auf, daß die Richtung AE wieder mit der Richtung der Basis $\overline{AB}$ zusammenfällt. Nun zeichnen wir die Richtungen BD und BC ein.

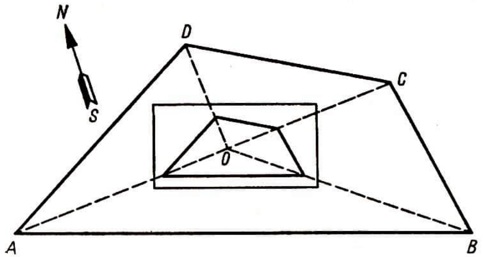


Abb. 134

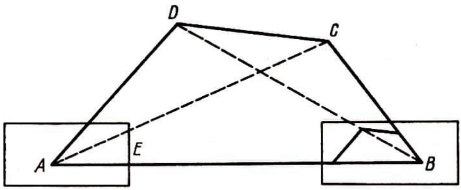


Abb. 135

294. Bei der Bestimmung einer Entfernung $\overline{AB}$ (der Punkt A ist unzugänglich) zieht man die Geraden BC und BD mit $BC \perp AB$ und $BD \perp AC$ (Abb. 136). Wie berechnet man $\overline{AB}$?

Lösung: Die rechtwinkligen Dreiecke ABC und BCD sind ähnlich, deshalb ist $\overline{AB} = \dfrac{\overline{BC} \cdot \overline{BD}}{\overline{DC}}$. Die Längen $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ und $\overline{DC}$ messen wir direkt.

295. Um die Entfernung $\overline{AB}$ zu bestimmen (der Punkt A ist unzugänglich), zieht man die Geraden BC und CD mit $BC \perp AB$ und $CD \perp AC$ (Abb. 137). Wie findet man die Entfernung $\overline{AB}$?

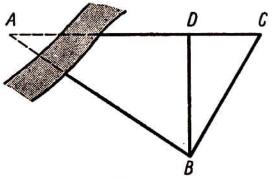


Abb. 136

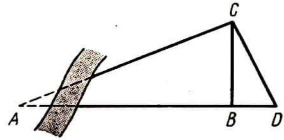


Abb. 137

Lösung: 1) $\Delta\, ABC \sim \Delta\, BCD$. Daraus folgt, daß $\overline{AB} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{DB}}$ gilt.

2) $\Delta\, ACD \sim \Delta\, BCD$, deshalb gilt $(\overline{AB} + \overline{BD}) : \overline{CD} = \overline{CD} : \overline{BD}$.

Hieraus folgt: $\overline{AB} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{BD}} - \overline{BD}$.

In beiden Fällen sind die erforderlichen Strecken für die Messung zugänglich. Die zweite Lösung benutzen wir dann, wenn auf dem Weg BC ein Hindernis liegt.

296. Zwischen den Punkten A und B liege ein Hindernis. Um die Entfernung $\overline{AB}$ zu bestimmen, zieht man die Gerade BC, wobei man dem Hindernis ausweicht, und vom Punkt A aus fällt man das Lot auf die Gerade BC (Abb. 138). Wie findet man die Länge von $\overline{AB}$?

297. Kann man zur Lösung der Aufgabe 296 auch die Senkrechte zu $\overline{AB}$ im Punkt A errichten? Wie groß wird dann die gesuchte Entfernung?

298. Es ist die Entfernung zwischen den beiden unzugänglichen Punkten A und B im Gelände über eine Konstruktion ähnlicher Dreiecke zu bestimmen.

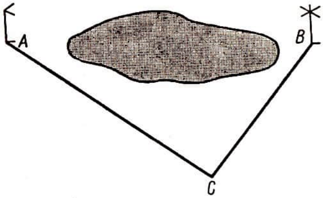


Abb. 138

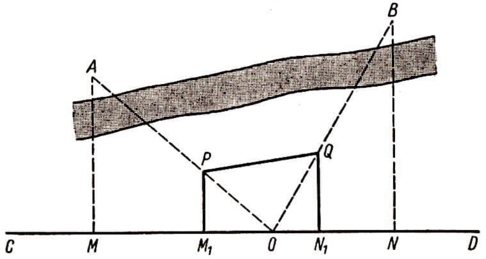


Abb. 139

Lösung: Wir markieren die Gerade CD und fällen auf sie die Lote von den Punkten A und B (Abb. 139). Wir wählen auf der Geraden CD einen beliebigen Punkt O, messen die Abstände $\overline{OM}$ und $\overline{ON}$ und tragen $\overline{OM_1} = \frac{1}{n}\overline{OM}$ und $\overline{ON_1} = \frac{1}{n}\overline{ON}$ ab. Dann markieren wir die Geraden M_1P und N_1Q mit $M_1P \perp CD$ und $N_1Q \perp CD$. Nun gilt $\Delta\, OAB \sim \Delta\, OPQ$, woraus $\overline{AB} = n \cdot \overline{PQ}$ folgt. Die Zahl n muß so gewählt werden, daß die Entfernung $\overline{PQ}$ für die Messung zugänglich ist.

299. Man bestimmt die Entfernung zwischen zwei unzugänglichen Punkten A und B wie folgt (Abb. 140): Man zieht die Gerade AO mit $AO \perp BO$. Im Punkt K konstruiert man den Winkel OKC mit $\sphericalangle\, OKC = \sphericalangle OKA$. Dann zieht man die Gerade CD mit $CD \perp BC$. Es ist zu zeigen, daß $\overline{AB} = \dfrac{\overline{OC} \cdot \overline{DC}}{\overline{CD}}$ gilt.

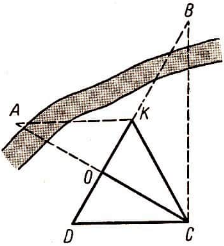


Abb. 140

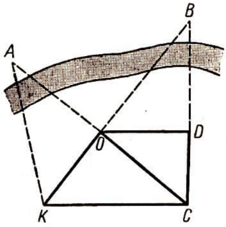


Abb. 141

300. Löst man die vorangegangene Aufgabe, so kann man an Stelle der Konstruktion $CD \perp BC$ auch $OD \perp BC$ einzeichnen (Abb. 141). Wie berechnet man dann die Entfernung $\overline{AB}$?

Lösung: Die rechtwinkligen Dreiecke OBC und ODC sind einander ähnlich, deshalb gilt $\overline{BC} : \overline{OC} = \overline{OC} : \overline{CD}$. Weil aber $\overline{AB} = \overline{BC}$ ist, gilt $\overline{AB} = \dfrac{\overline{OC}^2}{\overline{CD}}$.

301. Nach Abbildung 142 ist die Größe der Anschnittlänge l bei der Arbeit eines zylindrischen Fräsers zu bestimmen, wenn t die Spantiefe und D der Durchmesser des Fräsers ist.

Lösung: $l^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2} - t\right)^2 = D\,t - t^2$. Daraus folgt $l = \sqrt{t\,(D - t)}$.

302. Ein Holzbalken mit rechteckigem Querschnitt hat die größte Tragfähigkeit, wenn die Lote, die von den Ecken des rechteckförmigen Querschnitts auf die Diagonale gefällt werden, diese in drei gleiche Teile teilen (Abb. 143). Welche Abmessungen hat der größtmögliche Querschnitt eines Balkens, den man aus einem Stamm mit einem kleinsten Durchmesser von 35 cm heraussägen kann.

Antwort: Die Seiten des Rechtecks im Querschnitt sind 28,6 cm und 20,2 cm.

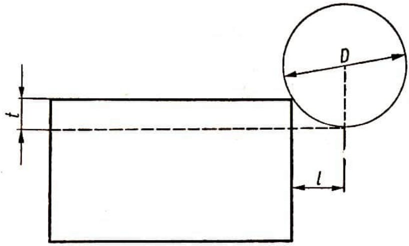


Abb. 142

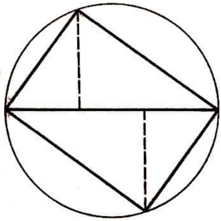


Abb. 133

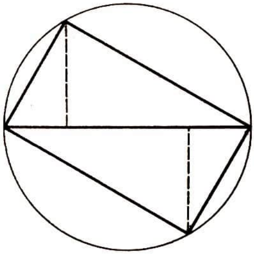


Abb. 144

303. Damit ein aus einem gegebenen Stamm geschnittener Balken die geringste Durchbiegung erfährt, ist es erforderlich, daß sich die Seiten des rechteckigen Querschnitts wie $1 : \sqrt{3}$ verhalten. Es ist ein grafisches Verfahren anzugeben, mit dessen Hilfe man diesen Querschnitt erhält.

Hinweis: Siehe Abbildung 144.

9. Trigonometrische Funktionen von spitzen Winkeln

304. Es ist die Höhe des Schulgebäudes mit Hilfe eines Winkelpeilers zu bestimmen.

305. Mit Hilfe eines Winkelpeilers ist die Entfernung zu einem Gegenstand zu bestimmen, dessen Höhe bekannt ist.

306. Man bestimme die Höhe eines Eisenbahndammes, wenn der Böschungswinkel φ und die Strecke $\overline{AB}$ bekannt sind (Abb. 145). Man berechne die Höhe für $\varphi = 33{,}5°$, $\overline{AB} = 3{,}8$ m.

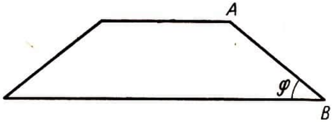


Abb. 145

307. Um die Entfernung $\overline{AB}$ zu ermitteln, wählt man einen solchen Punkt C, von dem aus die Strecke $\overline{AB}$ unter einem rechten Winkel zu sehen ist, dann mißt man $\overline{BC}$ und den Winkel ABC (Abb. 146). Wie berechnet man die Länge von $\overline{AB}$?

308. Ein Weg hat auf einer Strecke von 1000 m einen Anstiegswinkel von 2°. Man bestimme die (relative) Höhe des Endpunktes dieser Strecke gegenüber der des Anfangspunktes.

309. Man nehme den Lageplan eines Grundstücks mit Hilfe eines Winkelpeilers auf.

310. Um die Entfernung von einem Punkt B zu einem unzugänglichen Punkt A zu bestimmen, zieht man die Gerade BC mit $BC \perp AB$ und mißt die Länge $\overline{BC} = a$ und den Winkel $ACB = \beta$ (Abb. 147). Wie groß ist die Strecke $\overline{AB}$?

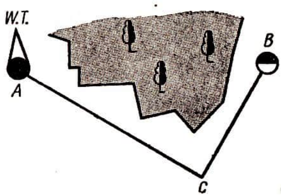


Abb. 146

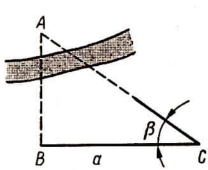


Abb. 147

311. Es ist der Neigungswinkel eines Dachs zu bestimmen (s. Abb. 86, S. 45).

Lösung: $\tan \alpha = \dfrac{2}{3{,}5} = 0{,}57$. Folglich ist $\alpha = 30°$.

312. Ein Faß mit dem Gewicht 100 kp will man auf einer schiefen Ebene mit einer Kraft von 35 kp nach oben rollen. Unter welchem Winkel muß die Ebene folglich gegen die Horizontale geneigt sein?

313. Von einem gegebenen Punkt aus ist der Dachfirst eines Hauses an der Giebelseite unter einem Winkel von 18,0° gegen den Horizont zu sehen, der eines anderen Hauses unter einem Winkel von 14,5°. Welches Haus ist höher, wenn die Entfernung zum ersten 37,5 m und zum zweiten 60,0 m beträgt? Um welche Strecke überragt das eine Haus das andere?

314. Um die Entfernung zwischen zwei unzugänglichen Punkten A und B zu bestimmen, zieht man eine Gerade MN und markiert auf ihr mit Hilfe eines Winkelmessers die Fußpunkte C und D der Lote, die von den Punkten A und B aus auf die Gerade MN gefällt wurden (Abb. 148). Dann mißt man die Strecke $\overline{CD}$ und die Winkel BCD und ADC. Es ist die Länge von $\overline{AB}$ zu berechnen.

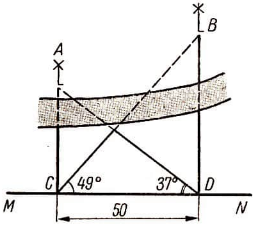


Abb. 148

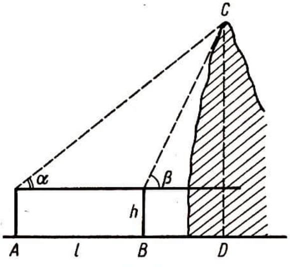


Abb. 149

315. Zur Bestimmung der Höhe eines Berges mißt man die Winkel α und β und die Entfernung $\overline{AB} = l$ (Abb. 149). Wie hoch ist der Berg?

Antwort: $\overline{CD} = \dfrac{l}{\cot \alpha - \cot \beta} + h.$

316. Unter Benutzung der in der Abbildung 149 gegebenen Werte ist die Länge der Strecke $\overline{BD}$ zu bestimmen.

Antwort: $\overline{BD} = \dfrac{l \cdot \tan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha}.$

317. Welche Messungen müssen durchgeführt werden, damit man aus einem Fenster des zweiten Stockwerks die Breite einer Straße oder eines Flusses bestimmen kann?

318. Es ist die Entfernung zu einem unzugänglichen Punkt zu bestimmen, wenn man Fluchtstäbe, ein Meßband und einen Winkelpeiler zur Verfügung hat.

319. Bei der Bestimmung der Höhe eines nicht erreichbaren Turmes $\overline{AB}$ zieht man in seiner Standebene eine Grundlinie $\overline{CD} = 50$ m, wobei $CD \perp BD$ gilt (Abb. 150). Man mißt die Winkel $\sphericalangle ACB = 26°30'$, $\sphericalangle BCD = 42°20'$. Wie hoch ist der Turm?

320. Nach der Abbildung 151 ist die Querschnittfläche des abgebildeten Teils zu bestimmen.

321. Nach der Abbildung 152 ist der Neigungswinkel der Backen gegen die Schultern eines Schwalbenschwanz-Zapfens zu bestimmen.

322. Man bestimme den Spitzenwinkel α der Zähne einer Handsäge (Abb. 153), wenn die Zahnhöhe $h = 4$ mm und der Zahnabstand $t = 5$ mm beträgt.

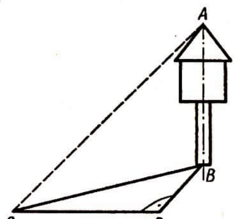


Abb. 150

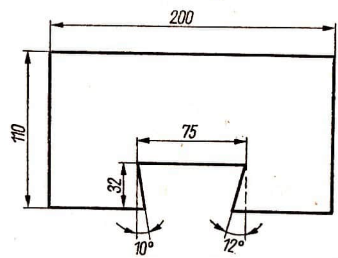


Abb. 151

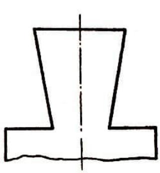


Abb. 152

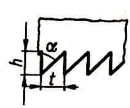


Abb. 153

323. Die Abbildung 154 zeigt ein kegelförmiges Werkstück. Es sind das Kegelverhältnis[1]) k und der Neigungswinkel α zu bestimmen, wenn der größte Durchmesser D, der kleinste Durchmesser d und die Länge des Kegelstumpfes l bekannt sind. In den erhaltenen Formeln sind D, d und l durch andere bekannte Größen auszudrücken.

Antwort: $k = \frac{D - d}{l}$; $\tan\alpha = \frac{D - d}{2\,l}$ oder $\tan\alpha = \frac{k}{2}$; $D = 2\,l\,\tan\alpha + d$ oder $D = k\,l + d$; $l = \frac{D - d}{l}$ oder $l = \frac{D - d}{2\tan\alpha}$; $d = D - k\,l$ oder $d = D - 2\,l\tan\alpha$.

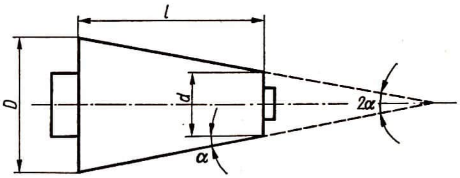


Abb. 154

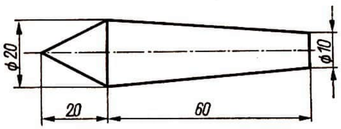


Abb. 155

324. Für beide Teile des in Abbildung 155 dargestellten Einzelteils ist das Kegelverhältnis k und der Kegelwinkel $2\,\alpha$ zu bestimmen.

325. Die folgende Tabelle zeigt einige Werte des Kegelverhältnisses für zu kuppelnde Teile. Die Tabelle ist zu vervollständigen.

Kegelverhältnis	Kegelwinkel $2\,\alpha$	Neigungswinkel α
1:200	0°17′13″	0°8′37″
1:100		
1:50		
	2°51′51″	
1:1,866		
		22°30′
	75°	

[1]) Kegelverhältnis heißt das Verhältnis der Durchmesserdifferenz zur Länge l des Kegels.

326. Den Kegelwinkel 2α mißt man mit Hilfe eines Sinuslineals (Abb. 156). Wie groß ist dieser Winkel, wenn man unter eine der Rollen einen Stapel Platten der Höhe b unterlegte und die Entfernung zwischen den Rollenachsen l ist?

Antwort: $\sin 2\alpha = b : l$.

327. Es ist die Entfernung zwischen zwei unzugänglichen Punkten A und B zu bestimmen, wenn bekannt ist, daß $\sphericalangle AOB = 90°$, $AC \perp CD$, $BD \perp CD$, $\sphericalangle AOC = \alpha$, $\overline{OC} = a$, $\overline{OD} = b$ ist (Abb. 157).

Antwort: $\overline{AB}^2 = \left(\frac{a}{\cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sin\alpha}\right)^2$.

328. Die Aufgabe 314 ist in allgemeiner Form zu lösen (Abb. 148), wenn $\overline{CD} = a$, $\sphericalangle BCD = \alpha$, $\sphericalangle ADC = \beta$ gilt.

Antwort: $\overline{AB} = a\sqrt{1 + (\tan\alpha - \tan\beta)^2}$.

329. Zur Messung einer unzugänglichen Strecke $\overline{AB}$ im Gelände werden Konstruktionen durchgeführt, die die Abbildung 158 zeigt, wobei $AC \perp BC$, $AD \perp BD$, $\sphericalangle AOC = \alpha$, $\overline{OC} = m$, $\overline{OD} = n$ gilt. Es ist $\overline{AB}$ zu bestimmen.

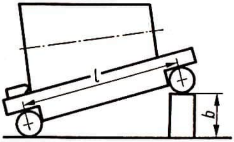


Abb. 156

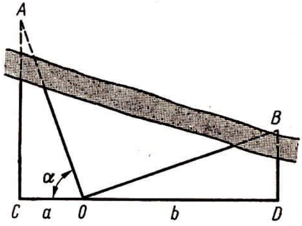


Abb. 157

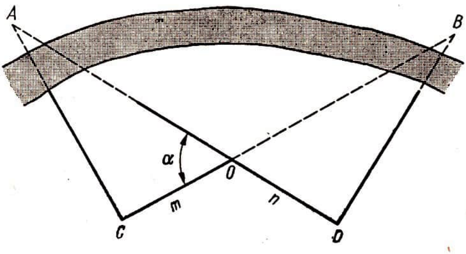


Abb. 158

330. Die nachstehende Tabelle ist zu vervollständigen

Sehnenlänge bei der Teilung des Einheitskreises

Anzahl der Kreisteilungen	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Sehnenlänge	2,000	1,7321	1,4142								

Hinweis: Zuerst muß die Größe der entsprechenden Mittelpunktswinkel ausgerechnet werden, dann wird eine Wertetabelle trigonometrischer Funktionen benutzt.

10. Einbeschriebene und umbeschriebene Vielecke

331. Man hat ein Stück Sperrholz von dreieckiger Form mit den Seiten 50 cm, 30 cm und 40 cm. Aus diesem Dreieck ist der größtmögliche Kreis auszuschneiden. Man bestimme den Abfall in Prozenten. (Die Aufgabe ist grafisch zu lösen.)

332. Aus einem Stück Karton von viereckiger Form ist ein Kreis mit dem größtmöglichen Durchmesser auszuschneiden (Abb. 159).

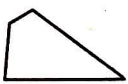


Abb. 159

Abb. 160

333. Ein Trapez sei Teil einer Kreisfläche (Abb. 160). Seine Eckpunkte sollen auf der Kreislinie liegen. Man bestimme den Radius des Kreises, wenn die Abbildung im Maßstab 1:5 angefertigt worden ist. (Die Aufgabe ist grafisch zu lösen.)

334. Welche Vielecke können gleichzeitig in einen Kreis einbeschrieben sein und einen anderen Kreis umbeschreiben?

335. Wieviel Kreise mit einem Durchmesser von 10 cm kann man höchstens aus einem Rechteck herausschneiden, das die Abmessungen 42 cm $\times$ 16 cm besitzt? (Grafische Lösung.)

336. Aus einer hölzernen Bohle, die einen rechteckigen Querschnitt mit den Seiten 12 cm und 14 cm besitzt, soll eine kreisrunde Stange mit größtmöglichem Querschnitt hergestellt werden. Die Querschnittfläche der Stange ist zu bestimmen.

337. Unter Benutzung eines Lineals ist das Lot von einem Punkt A auf einen Durchmesser eines gegebenen Kreises zu fällen. (Es sind verschiedene Lagen des Punktes in bezug auf den Kreis zu betrachten.)

Lösung: In Abbildung 161 sind die Lösungen für vier verschiedene Lagen des Punktes A in bezug auf den Kreis angegeben.

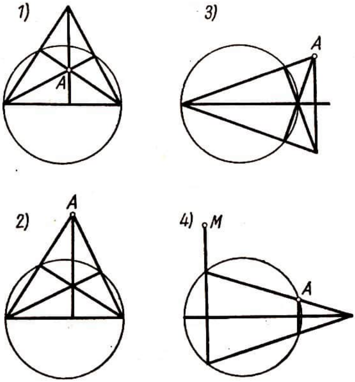


Abb. 161

338. Im Gelände ist mit Hilfe eines Winkelkreuzes eine Gerade zu ziehen, die durch einen gegebenen erreichbaren Punkt M und durch einen unzugänglichen Schnittpunkt zweier Geraden a und b geht.

Lösung: Fällt man vom Punkt M aus die Lote auf die Geraden a und b (Abb. 162), so erhält man die Punkte C und D. Die gesuchte Gerade ist das vom Punkt M auf die Gerade CD gefällte Lot.

339. Durch einen gegebenen Punkt A ist eine zu einer Geraden MN parallele Gerade zu legen, wenn die Punkte der Geraden MN unzugänglich sind.

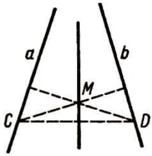


Abb. 162

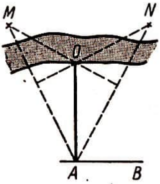


Abb. 163

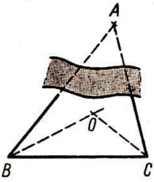


Abb. 164

Lösung: Wir ermitteln den Punkt O, den Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks AMN (Abb. 163). Dann gilt $AO \perp MN$. Nun muß noch durch den Punkt A eine Gerade AB mit $AB \perp AO$ gezogen werden. Offensichtlich ist dann $AB \parallel MN$.

340. Im Gelände ist die Halbierende des Winkels bei A zu markieren, dessen Scheitel sichtbar, aber nicht erreichbar ist.

Lösung: Auf den Schenkeln des Winkels wählen wir die Punkte B und C (Abb. 164). Dann markieren wir im Dreieck ABC die Halbierenden der Winkel bei B und C und finden ihren Schnittpunkt O. Die Gerade AO halbiert den Winkel bei A.

341. Aus einem Stamm soll ein Balken geschnitten werden, der als Querschnitt ein Quadrat mit der Seitenlänge 18 cm besitzt. Welchen kleinsten Durchmesser muß der Stamm haben?

342. Aus einem Stamm soll ein Balken geschnitten werden, der einen quadratischen Querschnitt mit einem Flächeninhalt von 320 cm² hat. Welchen kleinsten Durchmesser muß der Stamm haben?

343. Aus einem zylinderförmigen Materialstück soll ein Teil geschliffen werden, das als Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck mit einem Flächeninhalt von 3 cm² hat. Welchen Durchmesser muß der Zylinder haben?

344. In einen gegebenen Kreis ist ein regelmäßiges Siebeneck (oder Zehneck) einzubeschreiben, wobei ein Gerät zur Teilung des Kreises in gleiche Teile zu benutzen ist (siehe Aufgabe 220).

345. Ein Kreis hat einen Durchmesser von 50 cm. Dieser Kreis ist in 9 gleiche Teile zu teilen, wobei vorher die Länge der entsprechenden Sehne zu berechnen ist (siehe Aufgabe 330).

Hinweis: Die mit Hilfe der Tabelle gefundene Sehne muß mit dem Radius des gegebenen Kreises multipliziert werden.

346. Mit Hilfe der Tabelle (siehe Aufgabe 330) ist die Kantenlänge eines regelmäßigen Achtecks zu berechnen, das in einen Kreis mit dem Radius 10 cm einbeschrieben ist.

347. Eine Welle soll zum Teil mit einem quatratischen Querschnitt mit der Seitenlänge a versehen werden. Um die Welle zunächst drehen zu können, muß der Dreher die kleinste Abmessung des Drehteils kennen. Es ist eine bequeme Formel zur Bestimmung des Durchmessers D der Welle zu finden, und es ist ein Diagramm zu entwickeln, das den Zusammenhang zwischen D und a wiedergibt (Abb. 165).

Lösung: $D = \sqrt{2}\,a$, woraus $D = 1{,}414\,a$ folgt. Wenn z. B. $a = 22$ mm ist, dann ist $D = 1{,}414 \cdot 22 \approx 31{,}1$ mm.

348. Es ist eine entsprechende Formel anzugeben, wenn ein Teil der Welle den Querschnitt eines regelmäßigen Sechskants hat.

Lösung: $D = 1{,}155\,a$, wobei a der Abstand von zwei einander gegenüberliegenden (paralellen) Kanten ist.

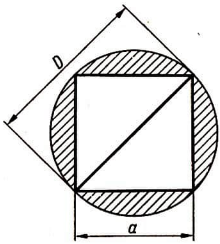


Abb. 165

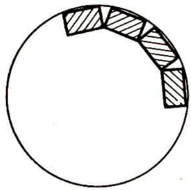


Abb. 166

349. Der Mantel eines Brunnens, der einen Durchmesser von 136 cm besitzt und 380 cm tief ist, soll mit Ziegeln des Formats 25 cm $\times$ 12 cm $\times$ 6,5 cm verkleidet werden. Wieviel Ziegel sind dafür erforderlich (Abb. 166)?

Lösung: Mit Hilfe einer Tabelle finden wir den Umfang des Kreises, dessen Durchmesser um die doppelte Breite eines Ziegels kleiner als der des Brunnens ist. Wir erhalten $\pi D = 352$ cm. Teilen wir den Umfang des Kreises durch die Länge der Ziegel, erhalten wir $352 : 24 \approx 14$. Deshalb werden auf den Umfang des Kreises in einer Schicht 14 Ziegel gelegt. Solche Schichten gibt es $380 : 6{,}5 \approx 59$. Folglich sind $14 \cdot 59 = 826$ Ziegel erforderlich.

350. Welche regelmäßigen Vielecke mit gleichen Abmessungen kann man zum Auslegen eines Parkettfußbodens verwenden?

351. Es ist der Flächeninhalt des Kopfes eines Sechskantbolzens zu bestimmen, wenn der Abstand zwischen parallelen Kanten 22 mm beträgt.

352. Die Seite einer quadratischen keramischen Platte ist 10 cm lang. Wieviel dieser Platten sind erforderlich, um den Fußboden in einem Raum mit den Abmessungen 6,3 m $\times$ 5,2 m auszulegen?

353. Wieviel Platten in Form regelmäßiger Sechsecke mit einer Kantenlänge von 86 mm sind erforderlich, um einen Fußboden mit den Maßen $2{,}5 \times 3{,}8$ m auszulegen?

354. Die Abbildung 167 gibt die Abmessungen eines sechseckigen Holzstücks (in Zentimetern) wieder. Wieviele dieser Steine sind zum Auslegen des Fußbodens in einem Raum mit den Abmessungen $3\,\text{m} \times 4\,\text{m}$ erforderlich?

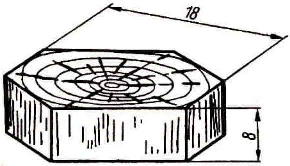


Abb. 167

355. Ein Parkett besteht aus Quadraten und regelmäßigen Achtecken. Die Seiten beider Vielecke sind gleich. Es ist das Parkett in einer Zeichnung darstellen.

356. Es ist die Abwicklung eines regelmäßigen achtseitigen Prismas zu zeichnen, wenn eine Seite seiner Grundfläche 5 cm lang und das Prisma 16 cm hoch ist.

357. Aus der gegebenen Abwicklung (Abb. 168) sind der Inhalt der Oberfläche und der Rauminhalt des Prismas zu bestimmen.

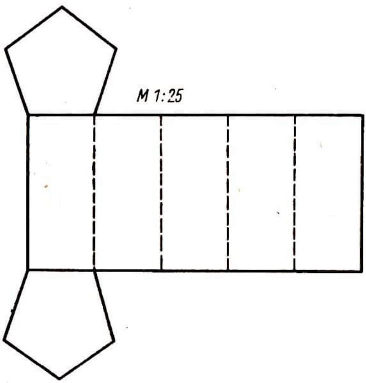


Abb. 168

358. Es ist die Abwicklung einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide herzustellen, wenn eine Seite der Grundfläche 10 dm und eine Seitenkante 12 dm lang ist.

359. Von dem gegebenen Modell eines regelmäßigen Prismas ist die Abwicklung zu zeichnen.

360. Entsprechend den Abmessungen einer gegebenen regelmäßigen Pyramide ist ihre Abwicklung auf starkes Papier zu zeichnen und aus dieser Abwicklung eine Pyramide zusammenzukleben.

361. Es ist der Rauminhalt des sechseckigen Holzstücks aus Abbildung 167 zu bestimmen.

362. Eine Sechskantmutter aus Stahl mit einer Kante von 11 mm ist 10 mm stark. Der Durchmesser der Öffnung beträgt 11 mm. Wie groß ist die Masse von 2000 derartigen Muttern? (Die Dichte von Stahl beträgt 7,8 $g \cdot cm^{-3}$.)

11. Stereometrie (Zusammenfassung)

363. Wie kann man den Neigungswinkel eines Daches messen?

364. Mit Hilfe einer Schmiege ist die Größe der Winkel zwischen zwei Kanten eines Prismas oder einer Pyramide zu bestimmen.

365. Es ist der Neigungswinkel der Tischplatte einer Schulbank gegen die Fußbodenebene mit Hilfe eines Winkelmessers und eines Lotes zu bestimmen.

366. Eine Sperrholzplatte soll parallel zur Fußbodenebene in einer Höhe von 2 m aufgehängt werden. Wie macht man das?

367. Aus der gegebenen Abwicklung (Abb. 169) ist der Inhalt der Oberfläche und der Rauminhalt der regelmäßigen Pyramide zu berechnen.

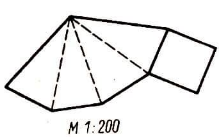


Abb. 169

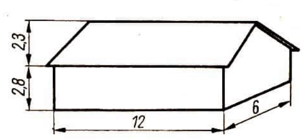


Abb. 170

368. Welche Messungen müssen vorgenommen werden, um die erforderliche Menge an Dachmaterial für ein Haus mit Walmdach berechnen zu können, wenn der Neigungswinkel aller Flächen gleich ist?

369. Man bestimme den Rauminhalt einer Scheune, deren Abmessungen die Abbildung 170 in Metern angibt.

370. Es ist der Rauminhalt des Zeltes zu bestimmen, das in Aufgabe 22 beschrieben wurde.

371. Wie bestimmt man die Masse eines Sandhaufens, der die Form eines Kegels hat?

372. Mit Hilfe der Abbildung 171 ist die Masse des dargestellten Messingteils zu bestimmen. (Messing hat die Dichte 8,6 $g \cdot cm^{-3}$.)

373. Es ist der Rauminhalt des in Abbildung 172 dargestellten Teils zu bestimmen.

374. Mit Hilfe der Abbildung 173 ist die Abwicklung der Mantelfläche des dargestellten Kegels anzufertigen.

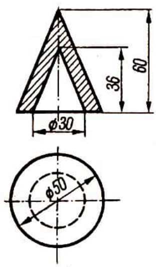


Abb. 171

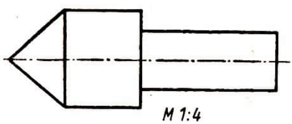


Abb. 172

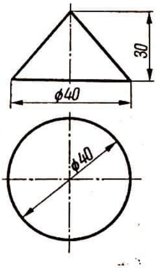


Abb. 173

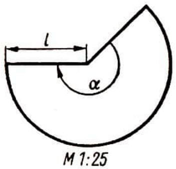


Abb. 174

375. Aus der Abwicklung der Mantelfläche eines Kegels (Abb. 174) sind seine Höhe, der Radius seines Grundkreises und der Öffnungswinkel des Kegels zu bestimmen.

Lösung: Wir messen die Länge der Seitenlinien l und den Winkel α und erhalten den Umfang des Grundkreises des Kegels $2\,\pi\,R = \frac{2\,\pi\,l\,\alpha^\circ}{360^\circ}$, woraus $R = \frac{\alpha^\circ\,l}{360^\circ}$ folgt. Den Winkel φ an der Spitze des Kegels finden wir aus der Beziehung $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{R}{l}$. Für die Höhe gilt $H = \sqrt{l^2 - R^2}$ oder $H = l\cos\frac{\varphi}{2}$.

376. Ein Blech wird als Trichter zusammengerollt (siehe Abb. 174). Es sind der Rauminhalt und der Inhalt der Mantelfläche des Trichters zu bestimmen.

Hinweis: Es sind die Ergebnisse zu benutzen, die bei der Lösung der vorangegangenen Aufgabe erhalten wurden.

377. Die Abbildung 175 gibt die Abmessungen eines Stahlniets mit Halbrundkopf an. Welche Masse haben 800 Nieten? (Die Dichte von Stahl beträgt 7,8 $g \cdot cm^{-3}$.)

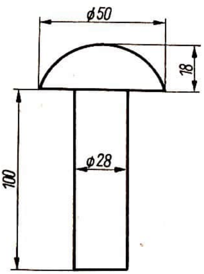
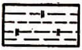


Abb. 175

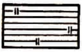
378. An Stelle eines zylindrischen Tanks (Länge 360 cm, Durchmesser 200 cm) stellt man ein kugelförmiges Gefäß mit gleichem Volumen her. Wieviel Prozent Metall werden eingespart?

Verwendete topografische Zeichen

Mischwald



Unpassierbarer Sumpf



Passierbarer Sumpf

Lehmgrube

Wasserturm

Fabrik

Schornstein

Tanklager

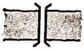
Windmühle aus Stein

Windmühle aus Holz

Windmotor

Wegweiser

Trigonometrischer Punkt



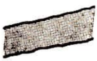
Brücke

Nadelwald

Laubwald

Äcker

See



Fluß

Inhaltsverzeichnis