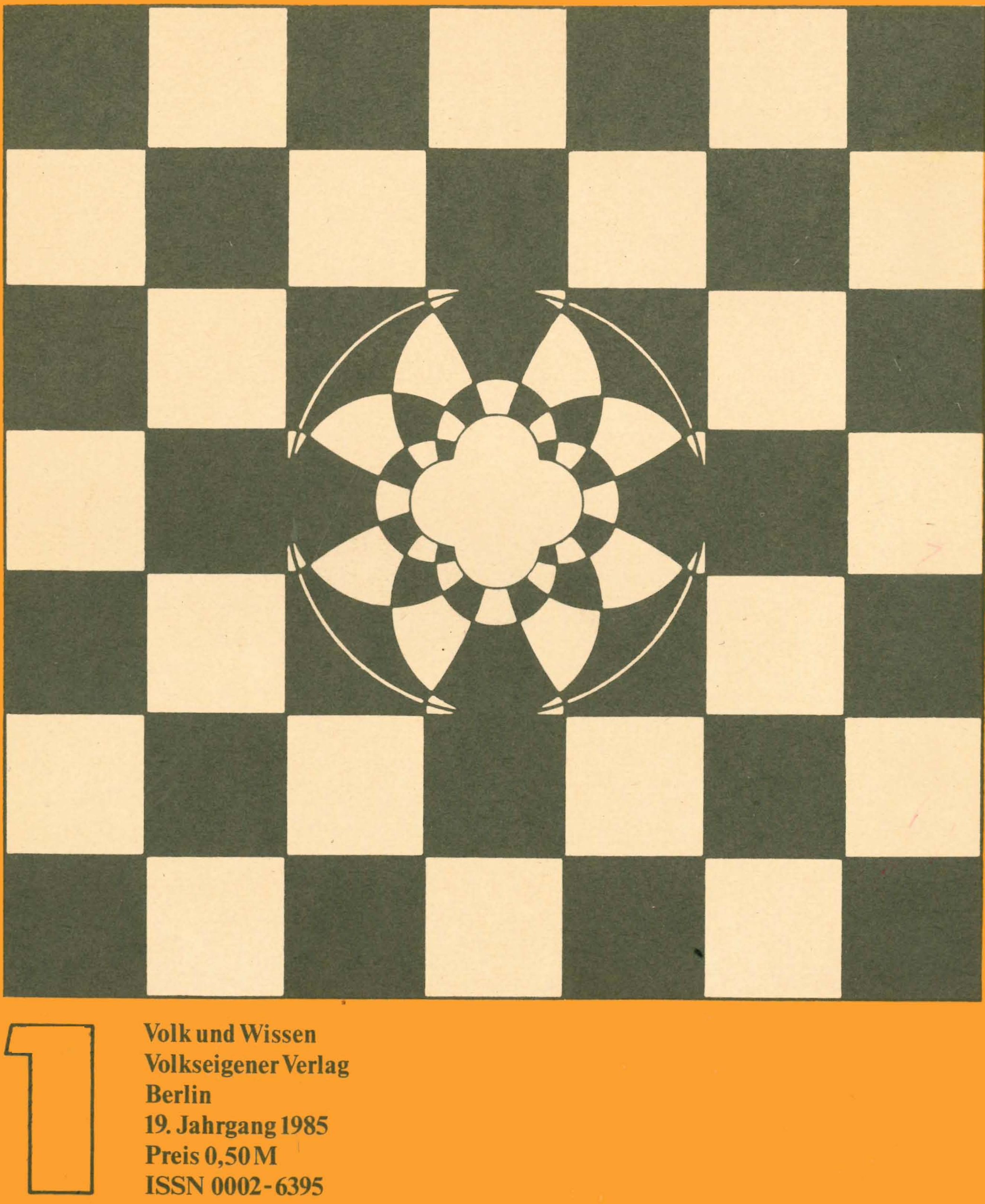
Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
19. Jahrgang 1985
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

[1]) bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet.

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213
Anschrift der Redaktion:
7027 Leipzig, PSF 14
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Eigenfoto Ch. Posthoff (S. 2); B. Schümichen, TU Dresden (S. 3); Vignetten aus *Quant*, Moskau (S. 3); Eigenfotos L. Püffeld (S. 5); H. Parchau (2×), aus NBI (S. 11); L. Schneider, aus Eulenspiegel (S. 11); L. Schneider, Berlin (S. 20); Rolf F. Müller (S. 12)
Typographische Gestaltung: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelblatt: Nach einer Vorlage *Pictorial Mathematics Serie B, Yeshiva University New York*, gestaltet von W. Fahr, Berlin

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 22. Oktober 1984
Auslieferungstermin: 11. Februar 1985

Die Lösung kombinatorischer Probleme mit Hilfe von Computerprogrammen

Die ständig zunehmende Verbreitung von Computern in allen Gebieten von Wissenschaft und Technik, in allen Zweigen der Volkswirtschaft hat außerordentlich bedeutsame Auswirkungen auf die Gestaltung von Arbeitsplätzen und -weisen, auf die zur Verfügung stehenden Mittel und Methoden zur Lösung von Problemen des jeweiligen Wissenschaftsgebietes. Besonders enge Beziehungen bestehen dabei zwischen Informatik und Methoden der Mathematik. Zum Teil entstehen völlig neue Teilgebiete innerhalb der Mathematik, zum Teil verschieben sich die zu lösenden Teilaufgaben, da u. a. die Arbeitsgeschwindigkeit der Computer ein wesentlicher Faktor wird. Diesen Problemkreis wollen wir hier an einem klassischen Beispiel erläutern und dabei einige Überlegungen zur algorithmischen Lösung von Problemen und deren Formulierung durch Programmiersprachen anstellen.

Folgende Aufgabe sei gestellt:
Auf einem Schachbrett sind 8 Damen so zu postieren, daß keine Dame eine andere bedroht.
Wie viele derartige Positionen existieren?

Dabei wird natürlich vorausgesetzt, daß sich die Damen horizontal, vertikal und diagonal bewegen können. Eine Dame gilt dann als bedroht, wenn sie sich in der Zugrichtung einer anderen Dame befindet.

Dieses Problem wurde in vergangenen Jahrhunderten viel untersucht (u. a. auch von Gauß) – man fand 92 Lösungen, zum Teil mit sehr feinsinnigen Überlegungen zur Geometrie des Schachbrettes, zu möglichen Symmetrien, Spiegelungen, Drehungen usw.

Wie stellt sich nun diese Aufgabe unter Berücksichtigung der Verwendung eines Computers dar?

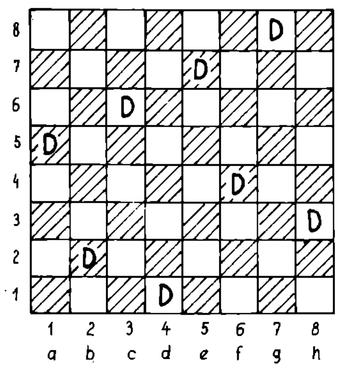
Es genügt eine kurze Überlegung, um feststellen zu können, daß in jeder Horizontalen (jeder *Reihe*) und in jeder Vertikalen (jeder *Linie*) *genau* eine Dame stehen muß. Gäbe es eine Reihe oder Linie ohne Dame, so müßten in einer anderen zwei Damen stehen, die sich aber dann gegenseitig bedrohen würden.

Bild 1 zeigt eine im Sinne der Aufgabe gültige und eine ungültige Aufstellung.

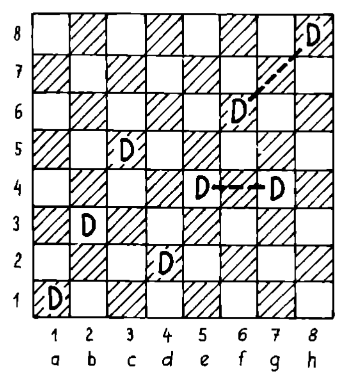
Zur Beschreibung der Verteilung der 8 Damen auf dem Brett numerieren wir die acht Linien von 1 bis 8 und definieren einen Vektor POSITION, dessen Komponenten den acht Linien zugeordnet sind; die

Bild 1
Zwei mögliche Positionen auf dem Brett

a) korrekte Position



b) falsche Position



Werte der Komponenten bezeichnen das Standfeld auf der zugehörigen Linie. Die Positionen von Bild 1 werden durch die beiden Vektoren
[5, 2, 6, 1, 7, 4, 8, 3] bzw. [1, 3, 5, 2, 4, 6, 4, 8] beschrieben.

Ein erstes, für derartige kombinatorische Probleme sehr typisches Lösungsverfahren ist die *vollständige Durchmusterung* aller möglichen Positionen. Dieses Verfahren besteht aus zwei wesentlichen Schritten:
a) sukzessive Erzeugung *aller möglichen* Positionen;
b) Überprüfung aller Positionen und Aussonderung der geeigneten.

Für den Schritt a) ist wichtig, daß keine Position vergessen und möglichst keine doppelt erzeugt wird. Um dies zu erreichen, verwendet man die *lexikographische Anordnung* der Positionen.

Dieses Prinzip, dem tatsächlich die Anordnung der Stichworte in einem Lexikon folgt, machen wir uns an der Aufzählung aller dreibuchstabigen Wörter aus den Buchstaben a, b, c klar:

aaa	aab	aac
aba	abb	abc
aca	acb	acc
baa	bab	bac
bba	bbb	bbc
bca	bcb	bcc
caa	cab	cac
cba	cbb	cbc
cca	ccb	ccc

Es ist a < b < c (< bezeichne die *Vorgängerrelation* im Alphabet), und man setzt alle Komponenten auf den kleinsten Wert (aaa). Anschließend durchläuft die letzte Komponente in der vorgeschriebenen Reihenfolge alle möglichen Werte (aaa, aab, aac). Ist man mit einer Komponente am Ende angelangt, wird die vorhergehende um ein Element erhöht, und alle weiteren werden wieder auf den Anfang zurückgesetzt (aba). Dies wird solange wiederholt, bis sämtliche Komponenten den höchstmöglichen Wert angenommen haben (ccc).

Überträgt man diese Methode auf die möglichen Aufstellungen der acht Damen, so erhält man folgende Vektoren:

11111111
11111112
⋮
11111118
11111121
⋮
11111188
11111211
⋮
18888888
21111111
⋮
88888888

Dabei geschieht diese Aufzählung „ohne Sinn und Verstand"; es wird „nur" gewährleistet, daß keine Position fehlt und keine doppelt vorkommt. Als Anzahl möglicher Positionen erhält man somit

$$n = 8^8 = 2^{24} = 16\,777\,216.$$

Die Prüfung der Korrektheit führen wir in drei Etappen durch. Zwei (oder mehr) Damen in einer Reihe sind dann vorhanden, wenn in einem Positionsvektor eine Zahl mehrfach vorkommt. Etwas schwieriger gestaltet sich die Prüfung, ob sich zwei Damen auf der gleichen Diagonale befinden. Hierzu betrachten wir Bild 2.

Im ersten Diagramm enthält jedes Feld die Summe, im zweiten die Differenz von Horizontale und Vertikale. Absteigende Diagonalen werden also durch konstante Summen, aufsteigende durch konstante Differenzen charakterisiert.

In der obigen Beschreibung einer Position durch Vektoren muß man also für eine bestimmte Dame Summe bzw. Differenz von Komponentennummer und Komponentenwert bilden und prüfen, ob sich diese Werte, die die auf- und die absteigende Diagonale charakterisieren, für weitere Komponenten wiederholen.

Bild 2
Summe und Differenz von Zeilen- und Spaltennummer

a) Summe

9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9

b) Differenz

7	6	5	4	3	2	1	0
6	5	4	3	2	1	0	-1
5	4	3	2	1	0	-1	-2
4	3	2	1	0	-1	-2	-3
3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7

Betrachten wir noch ein zweites Lösungsverfahren, das sich ergibt, wenn man nicht „gar zu viele unnötige“ Positionen prüfen will, sondern „konstruktiv möglichst gute“ Positionen zu erzeugen versucht. Für nicht zu große Problemkomplexität ist die vollständige Durchmusterung zwar völlig legitim, bei ansteigender Komplexität gerät man aber auch schnell an die Grenzen der Leistungsfähigkeit der Computer, auch bei sehr hohen Arbeitsgeschwindigkeiten.
Die Idee zur Konstruktion von Lösungen besteht in folgender Vorgehensweise:
In jeder Vertikalen (von links nach rechts) wird das *niedrigste zulässige* Feld als Damenposition ausgewählt. Kommt man auf diese Weise bis zur 8. Komponente, so ist eine *korrekte* Position gefunden. Gelangt man in eine Sackgasse (gibt es in der nächsten Vertikalen keine Setzungsmöglichkeit mehr), so nimmt man die letzte Setzung zurück, verwendet dort die nächsthöhere Möglichkeit und „probiert sein Glück“ aufs neue. Diese Methoden werden als *Backtrack-Verfahren* bezeichnet. Sie bilden in der Informatik eine gut untersuchte, weitverbreitete Lösungsmethodik. Betrachten wir dazu den Beginn des Lösungsweges.

1. POSITION [1] = 1;
2. POSITION [2] = 3;
3. POSITION [3] = 5;
4. POSITION [4] = 2;
5. POSITION [5] = 4.

An dieser Stelle versucht man vergeblich, eine Dame auf der 6. Linie unterzubringen, alle Felder sind bedroht.
Deshalb wird die letzte Setzung zurückgenommen und das nächste freie Feld auf der 5. Linie probiert. Da auch dies nicht zum Erfolg führt, geht man *zurück* zur 4. Linie, Feld 2 – mit dieser Setzung war nämlich die 6. Linie bereits blockiert.
Das nächste freie Feld auf der 4. Linie ist 7:

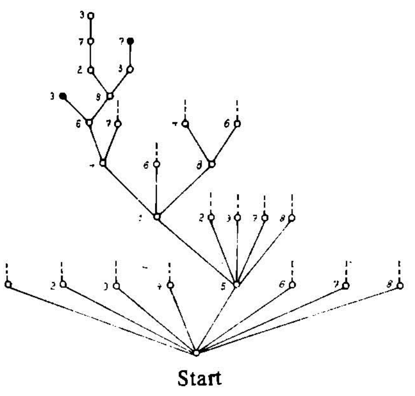
4. POSITION [4] = 7;
5. POSITION [5] = 2;
6. POSITION [6] = 4;
7. POSITION [7] = 6.

Es ist fast geschafft, aber auf der 8. Linie ist nunmehr kein freies Feld mehr vorhanden; also geht es wieder zurück.
Die erste im Sinne der Aufgabenstellung korrekte Position erhält man mit

1. POSITION [1] = 1;
2. POSITION [2] = 5;
3. POSITION [3] = 8;
4. POSITION [4] = 6;
5. POSITION [5] = 3;
6. POSITION [6] = 7;
7. POSITION [7] = 2;
8. POSITION [8] = 4.

Damit hat man eine Lösung gefunden und strebt die nächste ebenfalls durch Backtracking an.
Diese Methode wird häufig bei der Programmierung von Spielen zur Konstruktion von Varianten (Spiel- oder Variantenbaum), bei Suchprozessen (Suchbaum) u. a. verwendet. Betrachtet man nämlich die Konstruktion einer gewünschten Position als Spiel und schreibt als Spielregeln vor, daß die Linien von 1 bis 8 nacheinander durchlaufen werden, so hat man für den 1. Zug die Felder 1, 2, ..., 8 zur Verfügung.
Hat man etwa den 1. Zug POSITION [1] = 5 ausgeführt, so sind für den 2. Zug die Felder 1, 2, 3, 7, 8 möglich usw.
Bild 3 zeigt einen Ausschnitt aus dem zu dieser Aufgabe gehörenden Spielbaum.

Bild 3
Variantenbaum des Dameproblems



Durch ● sind Situationen markiert, in denen keine regelgerechte Fortsetzung mehr möglich ist. Der Sinn des Backtracking besteht nun einfach darin, daß man von einem solchen Punkt aus rückwärts geht und einen neuen möglichen Weg sucht. Dabei wird nur soweit zurückgegangen, wie es unbedingt erforderlich ist. So führt beispielsweise die Folge 5-1-4-6-3 zu keinem Erfolg – man geht zurück und wählt 5-1-4-6-8 ... usw.
Probiert man dieses Verfahren einmal „mit Hand“ durch, so stellt man fest, daß der Aufwand, einen erfolgreichen Weg zu finden, immer noch beträchtlich ist, aber doch bedeutend geringer als bei vollständiger Durchmusterung. Der Vorteil, daß hierbei alle Lösungen erfaßt werden, bleibt aber erhalten.
Die Tabelle zeigt die Anzahl der Lösungen für $n = 1, \ldots, 9$.

Tabelle: Die Anzahl der Lösungen für das n-Damen-Problem

	Anzahl der Positionen	Anzahl der Lösungen	
$n = 1$	1	1	100%
$n = 2$	4	0	0%
$n = 3$	27	0	0%
$n = 4$	256	2	0,781%
$n = 5$	3 125	10	0,320%
$n = 6$	46 656	4	0,008 57%
$n = 7$	826 973	40	0,004 84%
$n = 8$	16 777 216	92	0,000 54%
$n = 9$	387 420 489	352	0,000 09%

Ch. Posthoff

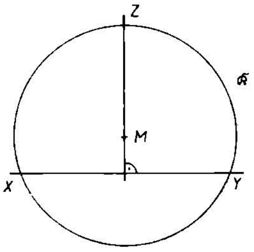
Kurzbiographie

Jahrgang 1943 – Abitur 1961 – NVA 1961 bis 1963 – Mathematikstudium an der Karl-Marx-Universität Leipzig 1963 bis 1968 – seit 1968 in Karl-Marx-Stadt tätig – 1968 bis 1972 in der Industrie tätig (Anwendungen der Mathematik auf betriebliche Probleme) – 1969 bis 1973 außerplanmäßige Aspirantur am Biophysikalischen Institut der KMU Leipzig, 1975 Dissertation A (Anwendung mathematischer Methoden in der kommunikativen Psychotherapie) – seit 1972 als Assistent bzw. Oberassistent an der TH Karl-Marx-Stadt tätig (Arbeitsgebiet: Mathematische Methoden innerhalb des Gebietes *Entwurf digitaler Systeme*) – 1979 Dissertation B (Behandlung dynamischer Erscheinungen in binären Systemen) – 1980 Berufung zum Dozenten an die Sektion Informationstechnik – 1983 Berufung: Lehrstuhl Computerwissenschaften an der Sektion Informatik (Arbeitsgebiete: *Rechnerarchitektur* und *Künstliche Intelligenz*).

Eine Aufgabe von em. o. Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. Helmut Heinrich

Technische Universität Dresden

▲2520▲ Das Symbol $XY \pitchfork \mathfrak{K} \to Z$ bedeute die folgende Konstruktion:

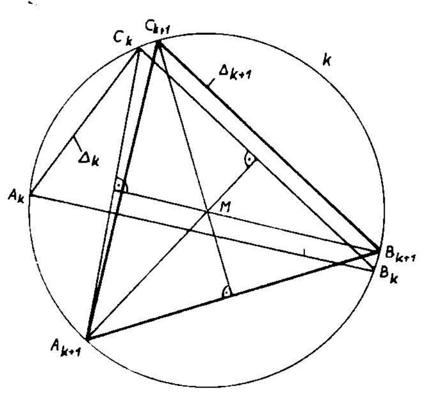


Auf der Sehne XY eines Kreises $\mathfrak{K}$ $(r; M)$ wird die Mittelsenkrechte errichtet (Bild 1) und in dem Punkt Z mit $\mathfrak{K}$ geschnitten, für den

$$\sphericalangle XZY \leqq \frac{\pi}{2}\ (90^\circ) \qquad (1)$$

ist. (Für den Fall, daß XY Durchmesser von $\mathfrak{K}$ ist, stehen zwei Schnittpunkte gleichberechtigt zur Wahl. Es gilt dann in (1) das Gleichheitszeichen.)

Es sei nun $A_0B_0C_0$ ein beliebiges, dem Kreis $\mathfrak{K}$ einbeschriebenes Dreieck. Von ihm aus werde eine Folge von dem Kreis $\mathfrak{K}$ einbeschriebenen Dreiecken $A_nB_nC_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ erzeugt, indem die folgende dreigliedrige Konstruktionsvorschrift durchgeführt wird (Bild 2):



$$\left.\begin{array}{l} 1.\ B_kC_k \pitchfork \mathfrak{K} \to A_{k+1} \\ 2.\ A_{k+1}C_k \pitchfork \mathfrak{K} \longrightarrow B_{k+1} \\ 3.\ B_{k+1}A_{k+1} \pitchfork \mathfrak{K} \longrightarrow C_{k+1} \end{array}\right\} k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Es ist zu zeigen:

I. Die Dreiecke $A_nB_nC_n$ konvergieren für $n \to \infty$ gegen ein dem Kreis $\mathfrak{K}$ einbeschriebenes gleichseitiges Dreieck $A^*B^*C^*$.

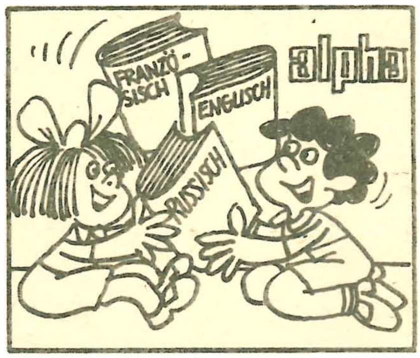
II. Für die Flächeninhalte $\Delta_n = \Delta(A_nB_nC_n)$ und $\Delta^* = \Delta(A^*B^*C^*)$ gilt

$$\Delta_0 \leqq \Delta_1 \leqq \Delta_2 \leqq \Delta_3 \leqq \ldots \leqq \Delta_n \leqq \ldots \leqq \Delta^*$$

$$\Delta^* = \lim_{n\to\infty} \Delta_n = \frac{r^2}{4}\sqrt{3}$$

$$(= \max \Delta(ABC); A, B, C, \in \mathfrak{K})$$

Geboren am 5. 9. 1904 in Gottesberg (ehem. Schlesien). Schulbesuch von 1910 bis 1923 in Striegau, Posen und Schweidnitz (humanistisches Gymnasium) – Reifeprüfung im März 1923 – 1923 bis 1928 Studium an der Technischen Hochschule Breslau – Juli 1928: Dipl.-Ing. der Fachrichtung Mathematik – 1928 bis 1929 aushilfsweise als Lehrer für Mathematik und Physik an der Oberrealschule in Glogau beschäftigt – 1929 wissenschaftliche Staatsprüfung für das Lehramt an höheren Schulen (Studienreferendar) – 1931 pädagogische Staatsprüfung für das Lehramt an höheren Schulen (Studienassessor) – Als Studienassessor zeitbedingt ohne Stellung, aber unentgeltlich (!) als Lehrkraft (insbesondere für Physik) an einer höheren Schule in Liegnitz eingesetzt – In dieser Situation Bewerbung bei der *Staatlichen Chinesischen Tungchi-Universität* in Wusung bei Shanghai, im Februar 1933 Berufung dorthin – Im Juli 1933 vor der Ausreise nach China Promotion zum Dr.-Ing. an der Technischen Hochschule Breslau (Thema: *Über die Pfeilstellung eines Tragflügels*) – 1933 bis 1936 Professor für *Mathematik und Darstellende Geometrie* an der *Tungchi-Universität* in Wusung – 1936 Rückkehr an die Technische Hochschule Breslau, daselbst im Juni 1937 Habilitation und ab 1938 bis 1945 Dozent für *reine und angewandte Mathematik* – 1946 bis 1954 als Spezialist in der Sowjetunion – Seit der Rückkehr in die DDR Professor für *Angewandte Mathematik* an der Technischen Hochschule bzw. Universität Dresden – 1956 bis 1968 als Direktor des Instituts für *Angewandte Mathematik* – 1968 bis 1970 (Emeritierung) als Direktor der Sektion Mathematik und Professor für *Numerische Mathematik* – Seit 1964 Mitglied der *Deutschen Akademie der Naturforscher Leopoldina* zu Halle – 1971 Ehrenpromotion an der Technischen Hochschule zu Wien – 1961 Auszeichnung mit dem Vaterländischen Verdienstorden in Bronze – 1959 bis 1974 Herausgeber der *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* (ZAMM) als Nachfolger von R. v. Mises, E. Trefftz und F. A. Willers – *Arbeitsgebiete:* Angewandte Analysis (für Mathematiker, Physiker und Ingenieure), Praktische Analysis (numerische und graphische Methoden), Matrizentheorie.



▲1▲ Construct a square in a given triangle so that the base of the square is along the base of the triangle and the other two vertices of the square are on the other two sides of the triangle.

▲2▲ With a faucet turned on and the drain closed, one can fill a tub with water in 9 minutes; with the faucet turned off and the drain open, it takes 12 minutes to drain the tub full of water. How many minutes does it take to fill the empty tub with water if the drain is open and the faucet is turned on?

▲3▲ Pour construire la Tour Eiffel, on a utilisé environ 885 m³ de fer; la masse volumique du fer est 7,8 t/m³. Quelle masse de fer a-t-on utilisée pour cette construction?

▲4▲ Une baignoire est remplie par son robinet en 10 minutes et vieée par sa bonde en $\frac{1}{4}$ d'heure. On ouvre le robinet et on oublie de fermer la bonde; au bout de combien de temps la baignoire sera-t-elle pleine?

▲5▲ Сломаем пополам спичку. Одну половинку переломим еще раз. Один из получившихся кусочков снова попытаемся переломить пополам. Почему с каждым разом ломать спичку становится все труднее?

▲6▲ Найдите все пятизначные числа, равные кубу числа, образованного двумя их последними цифрами.

Daten unserer Schulgeschichte

Vom schweren Anfang

Alle Kinder und Jugendlichen unserer Republik besuchen vom 6. bis 16. Lebensjahr die zehnklassige allgemeinbildende polytechnische Oberschule. Sie erhalten dort, unabhängig von der sozialen Stellung der Eltern, von Weltanschauung und Religion, eine gleich hohe, fundierte wissenschaftliche Allgemeinbildung. Hochqualifizierte Pädagogen arbeiten an der Erfüllung des anspruchsvollen Erziehungszieles: die allseitige und harmonische Entwicklung jedes Schülers, seine Befähigung zu bewußtem Handeln für die Gesellschaft. Und nichts empfinden die Kinder und Jugendlichen, ihre Eltern und ihre Lehrer selbstverständlicher als gerade dieses, das doch erstmalig in der Geschichte unseres Volkes ist. Und es bliebe für sie ohne besonderen Wert, ließen wir den Prozeß des Werdens dieser „Selbstverständlichkeiten“ der Vergangenheit anheimfallen.

Fort mit den Trümmern...

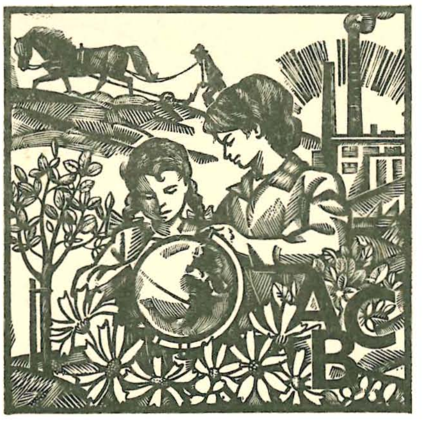
Der erste Schritt auf diesem Weg war die antifaschistisch-demokratische Schulreform. Ihre Hauptaufgabe bestand darin, die Jugend vom Druck der imperialistischen Ideologie zu befreien und im demokratischen Sinne umzuerziehen. In keinem der 1945 eine sozialistische Entwicklung nehmenden Länder Europas hatte der Faschismus einen solchen Einbruch unter der Bevölkerung erzielt wie in Deutschland und hier ganz besonders unter der Jugend. Die Faschisten gebrauchten die Schule als spezifisches Werkzeug zur Verhetzung der Jugend, und die Lehrerschaft hatte teilweise sogar fanatisch mitgeholfen, die Jugend für die barbarische Kriegführung reif zu machen.
Mehr als 70 Prozent aller Lehrer waren Mitglied der NSDAP.
Schwer wogen auch die materiellen Schäden, die der Faschismus im Schulwesen hinterließ. Im Bombenhagel anglo-amerikanischer Flugzeugangriffe auf deutsche Städte wurden zum Beispiel in Berlin von den 649 Schulgebäuden 149 zerstört, 42 sehr schwer und 85 mittelschwer beschädigt. Das waren 42,5 Prozent aller Gebäude, die demzufolge für den Schulbetrieb ausfielen. Ähnlich sah es in Leipzig aus oder in ländlichen Gegenden, die Frontgebiete gewesen waren. Der Faschismus hinterließ ein schweres Erbe.
Aber der Sieg der Sowjetunion und ihrer Verbündeten bedeutete nicht nur Zerschlagung des faschistischen Staates. Er hatte den deutschen staatsmonopolistischen Kapitalismus in seinen Grundfesten erschüttert und seine Regulierungsmechanismen zusammenbrechen lassen. Damit bot sich dem deutschen Volk die historische Chance, den Faschismus radikal unwiderruflich zu überwinden. Diese Chance wurde in der sowjetischen Besatzungszone von den Kommunisten und den revolutionären Kräften der Sozialdemokratie genutzt. Dabei gingen sie von der richtigen Erkenntnis aus, daß es nicht möglich war, die Macht- und Eigentumsverhältnisse dauerhaft zu verändern und ein Wiedererstarken des Faschismus für immer zu verhindern, ohne den Einfluß der imperialistischen Bourgeoisie auch auf das Schulwesen ein für allemal zu brechen, den Schulunterricht von allen reaktionären Theorien zu befreien, alle Bildungssperren zu beseitigen, Kirche und Schule voneinander zu trennen, das Bildungsniveau der Werktätigen wesentlich anzuheben und sie zum selbständigen schöpferischen Handeln zu befähigen.

...und was Neues hingebaut

In diesem Sinne gab der *Aufruf der KPD an das deutsche Volk vom 11. Juni 1945* die Orientierung und traf der *Befehl Nr. 40 der Sowjetischen Militäradministration vom 25. August 1945* verpflichtende Festlegungen für die *Wiederaufnahme des Unterrichts an den Schulen am 1. Oktober 1945.*
Der Befehl ordnete an, neue Lehrpläne aufzustellen, alle faschistischen Lehrbücher und Unterrichtsmittel zu vernichten, neue Lehrbücher zum Druck vorzubereiten und nur solche Lehrer wieder im Schuldienst einzustellen, die nicht faschistisch engagiert und zu demokratischer Erziehungsarbeit fähig waren. Zugleich verbot der Befehl Nr. 40 alle allgemeinbildenden und fachlichen Privatschulen.
Gemeinsam mit den sowjetischen Bildungsoffizieren führten die neu geschaffenen Schulverwaltungen und die fortschrittlichen Lehrer einen hartnäckigen Kampf um die Lösung dieser Aufgaben. Es wurden provisorische Lehrpläne erarbeitet, die notgedrungen sehr allgemein bleiben mußten. Sie enthielten aber Minimalbedingungen für einen Unterricht auf antifaschistisch-demokratischer Grundlage. Ähnliches galt für die in kurzer Zeit erarbeiteten Lehrbücher. Für den Geschichtsunterricht war eine provisorische Lösung nicht möglich. Die bisher im Unterricht betriebene Geschichtsfälschung erwies sich von so prinzipieller Natur, daß eine neue Gesamtkonzeption für den Geschichtsunterricht erforderlich war. Bis zur Fertigstellung der neuen Konzeption am Ende des Schuljahres 1945/46 wurde darum an den Schulen kein Geschichtsunterricht erteilt. Mit der Einführung einer modernen Fremdsprache (in der Regel Russisch), des Faches Physik und eines Mathematikunterrichts statt des volkstümlichen Rechnens erhielt die Volksschule ein deutlich höheres Niveau.
Die faschistische Schulpolitik und der Krieg hatten die Lehrerschaft dezimiert. Nach der fristlosen Entlassung der mehr als 20 000 faschistisch gebundenen Lehrer fehlten für einen normalen Schulbetrieb 40 000 Lehrer. Diese Lücke wurde durch eine außergewöhnliche Maßnahme geschlossen – die Gewinnung von *Neulehrern*. Im ersten Nachkriegsschuljahr arbeiteten etwa 15 000 Neulehrer an den Schulen. Sie kamen aus den Reihen der Arbeiter, Bauern und anderer Werktätiger und waren in ihrer Mehrzahl jünger als 30 Jahre. Viele von ihnen besaßen nur Volksschulbildung. Sie waren die ersten Vertreter einer neuen Lehrergeneration. Mit Begeisterung und hohem persönlichem Einsatz leisteten sie innerhalb und außerhalb der Schule umfängliche und wertvolle Erziehungs- und gesellschaftliche Arbeit. Den Unterricht bereiteten sie oft in später Nacht vor. Ihre Ausbildung war noch unzulänglich. Mitunter waren sie ihren Kindern nur einen Tag im Unterrichtsstoff voraus. Aber ihr Unterricht unterschied sich durch seinen neuen Inhalt, seine Frische und Lebendigkeit, durch ein vertrauensvolles, kameradschaftliches Verhältnis zu den Schülern positiv und grundsätzlich von dem bis dahin typischen Unterricht in deutschen Schulen. Ab Januar 1946 wurden dann weitere 25 000 Werktätige in *Acht-Monate-Lehrgängen* zu Lehrern ausgebildet.
Die vor und während des ersten Nachkriegsschuljahres durchgeführten Maßnahmen, von denen nur einige hier genannt wurden, dienten der Überwindung der Ideologie des Faschismus, der Brechung der Bildungsprivilegien und der Durchsetzung der Hegemonie der Arbeiterklasse im Schulwesen. Damit leitete bereits der Beginn der antifaschistisch-demokratischen Schulreform eine Veränderung des Klassencharakters der Schule ein.

Rosel Keetmann, aus DLZ

Illustration: Rudolph Grapentin



alpha stellt vor:

Dipl.-Ing.
Lutz Püffeld

RAW Halberstadt

Liebe Leser!

Seit nunmehr 18 Jahren beteilige ich mich regelmäßig am *alpha*-Wettbewerb. Manch einer der Leser fragt sich nun, wie ich mit der Zeitschrift *alpha* und damit dem Wettbewerb konfrontiert wurde, ob mir das Knobeln und Rechnen zum Finden von Lösungen Spaß macht oder wie ich am besten zur Lösung einer Aufgabe gelange. Diese und andere Fragen möchte ich im folgenden beantworten.

Als ich in die 5. Klasse ging, kam mein Vater eines Tages mit einer neuen Zeitschrift nach Hause, die den geheimnisvollen Namen *alpha* trug. Natürlich wollte ich wissen, was sich dahinter verbarg, und so blätterte ich diese Zeitschrift durch. Dabei stellte ich fest, daß es sich um eine mathematische Schülerzeitschrift handelt, die Wissenswertes und Informatives vermittelt, die unter der Überschrift *In freien Stunden – alpha-heiter* lustige Knobelaufgaben enthält, und die auch die Leser zur Beteiligung am Lösen von Mathematikaufgaben aufruft. Da ich natürlich wissen wollte, ob es mir gelingt, einige Aufgaben des *alpha*-Wettbewerbs zu lösen, begann ich sofort, mir diese Aufgaben genauer durchzulesen. Ich stellte fest, daß ich einige Aufgaben ohne größere Schwierigkeiten lösen konnte, daß es aber auch welche gab, über die ich länger nachdenken mußte oder die ich überhaupt nicht lösen konnte. Als dann nach einiger Zeit die Antwortkarten bei mir im Briefkasten lagen, freute ich mich darüber. Es gab aber auch Aufgaben, auf deren von mir eingesandte Lösung ich nur eine rote Karte bekam. Dies entmutigte mich aber nicht, sondern im Gegenteil bemühte ich mich beim nächsten Wettbewerb, auch Aufgaben höherer Klassenstufen zu lösen. Bei diesen Aufgaben hat es sich als zweckmäßig erwiesen, wenn ich mich mehrere Tage damit beschäftigt habe. Nicht selten legte ich angefangene Aufgaben wieder weg, um sie nach ein paar

Tagen erneut vorzuholen. So kam ich Schritt für Schritt weiter, bis ich endlich die Lösung gefunden hatte. In der Oberstufe habe ich auch in einem außerschulischen Mathematikzirkel mitgearbeitet. Oft wurden dort mit Hilfe unseres Mathelehrers schwerere *alpha*-Aufgaben gelöst.

Die regelmäßige Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb hat sich natürlich auch positiv für mich ausgewirkt. So konnte ich bis zum Abitur mehrere erste bis dritte Plätze bei der Kreisolympiade *Junger Mathematiker der DDR* erringen.

Auch später während meines Elektrotechnikstudiums an der Technischen Hochschule *Otto von Guericke* in Magdeburg benötigte ich gute und fundierte mathematische Kenntnisse. Fast alle elektrotechnischen Probleme lassen sich durch mathematische Gleichungen beschreiben und dann auch durch spezielle Verfahren lösen. So ist es z. B. möglich, den zeitlichen Stromverlauf eines elektrischen Schwingkreises mit Hilfe der Laplace-Transformation (Transformation in den Bildbereich) zu errechnen, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ eine konstante EMK angelegt wird.

Heute bin ich Mitarbeiter in einer Konstruktionsabteilung für Elektrotechnik. Obwohl dort nicht mehr die Mathematik, so wie ich sie in der Schule und beim Studium angewendet habe, im Vordergrund steht, ist es trotzdem notwendig, für die Konstruktion von Schaltplänen Stromstärken, Widerstände oder Leitungsquerschnitte über Formeln auszurechnen. Auch jetzt werde ich mich weiterhin am *alpha*-Wettbewerb beteiligen.

Nun ist es aber nicht so, daß ich mich in meiner Freizeit nur mit Mathematik beschäftige. Ich spiele aktiv in der 1. Mannschaft von *Lok Halberstadt* Tennis und nehme dort auch am Wettkampfgeschehen teil. Einen großen Teil meiner Freizeit widme ich natürlich auch meiner Familie.

Abschließend möchte ich euch eine anspruchsvolle Aufgabe vorstellen, deren Lösung ich mit Hilfe der Funktionsanalyse für zwei voneinander unabhängigen Veränderlichen gefunden habe.

Es ist zu beweisen, daß für alle reellen Zahlen x, y folgende Ungleichung eine wahre Aussage wird!

$$x^2 + y^2 + 1 \geqq x + y + xy \qquad (1)$$

Nach Subtraktion von $2xy$ und Umstellung ergibt sich:

$$x^2 - 2xy + y^2 + 1 \geqq x + y - xy$$
$$(x-y)^2 + 1 \geqq x + y - xy$$
$$(x-y)^2 \geqq x + y - xy - 1 \qquad (2)$$

Es ist möglich, durch Probieren festzustellen, daß die Ungleichung (2) für alle reellen Zahlen x, y erfüllt ist. Das wäre jedoch kein Beweis, und man bekäme dafür bestimmt nur eine rote Karte.

Deshalb ist es notwendig, die Ungleichung wie folgt umzustellen:

$$0 \leqq x^2 + y^2 - x - y - xy + 1. \qquad (3)$$

Faßt man diese Ungleichung als Funktion auf, läßt sich schreiben

$$z = f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y - xy + 1. \qquad (4)$$

$z = f(x,y)$ stellt hierbei die Gleichung einer Fläche dar.

In der weiteren Funktionsanalyse untersuche ich die Funktion $f(x,y)$ auf Extremwerte und berechne diese.

Zunächst bilde ich die partiellen Ableitungen nach x und y.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 2x - 1 - y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = z_y = 2y - 1 - x$$

$$\frac{\partial z_x}{\partial x} = z_{xx} = 2 \qquad \frac{\partial z_y}{\partial y} = z_{yy} = 2$$

$$\frac{\partial z_x}{\partial y} = z_{xy} = -1 \qquad \frac{\partial z_y}{\partial x} = z_{yx} = -1$$

Notwendige Bedingung:

$$z_x \doteq 0$$
$$z_y \doteq 0\,.$$

Nach dem Nullsetzen von z_x und z_y erhält man ein Gleichungssystem mit den beiden Unbekannten x und y. Als Lösung ergeben sich ein oder mehrere Wertepaare x, y, die Koordinaten von extremwertverdächtigen Punkten der gegebenen Funktion (Fläche) sind.

$$2x - 1 - y = 0$$
$$\underline{2y - 1 - x = 0}$$
$$y = 2x - 1$$
$$4x - 2 - 1 - x = 0$$
$$x = 1$$
$$y = 1$$

Hinreichende Bedingung:

Es muß die Determinante $D(x,y)$ bestimmt werden, um zu entscheiden, ob eine Extremstelle vorhanden ist oder nicht, und ob es sich dabei um ein Maximum oder Minimum handelt.

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}$$
$$D(x,y) = z_{xx} \cdot z_{yy} - z_{yx} \cdot z_{xy}$$
$$D(x,y) = 2 \cdot 2 - 1$$
$$D(x,y) = 3\,.$$

Da $D(x,y) > 0$ folgt, daß eine Extremstelle existiert. Aus $z_{xx} = z_{yy} = 2 > 0$ folgt, daß diese Extremstelle ein Minimum darstellt. Zum Schluß muß noch der zugehörige Funktionswert z berechnet werden.

$$z_{\min} = 1^2 + 1^2 - 1 - 1 - 1 \cdot 1 + 1$$
$$z_{\min} = 0\,.$$

Die gegebene Funktion besitzt also ein Minimum im Punkt $P(1,1,0)$.

Da $z_{\min} = 0$ ist, ist somit bewiesen, daß die Ungleichung (3) für alle reellen Wertepaare x, y erfüllt ist. Das Minimum wird bei $x = y = 1$ erreicht, d. h., es gilt das Gleichheitszeichen in der Ungleichung (1).

Ich hoffe, daß mein gewähltes Beispiel dazu beiträgt, daß ihr beim Lösen eurer Aufgaben vom schematischen Probieren nach Möglichkeit abseht, sondern daß ihr vielmehr eure Kenntnisse dahingehend anwendet, Lösungen durch Gesetzmäßigkeiten und Rechenverfahren zu finden.

L. Püffeld

Das Pascalsche Dreieck

Wir wollen ein Blatt Papier zur Hand nehmen und darauf eine quadratische Tabelle mit 100 Kästchen (zehn Zeilen und zehn Spalten) so groß zeichnen, daß in jedes Kästchen eine höchstens dreistellige Zahl eingetragen werden kann.

Fertig?

Ja! – Dann wollen wir mit dem Ausfüllen anfangen.

In die Kästchen der ersten Spalte schreiben wir jedesmal eine „1". In die noch offenen Kästchen der ersten Zeile werden Nullen geschrieben. Welche Zahlen in die übrigen Kästchen zu schreiben sind, ergibt sich aus der folgenden einfachen Regel: In jedes Kästchen wird die Summe derjenigen beiden Zahlen eingetragen, die in der vorherigen Zeile direkt darüber und links daneben stehen. Das Bild 1 soll das nochmals verdeutlichen. So ergibt sich für die zweite Zeile in der zweiten Spalte eine 1 (denn $1 + 0 = 1$), und in der dritten Zeile steht in derselben Spalte eine 2 ($1 + 1 = 2$) und so weiter.

Zu eurer Kontrolle schreiben wir hier die vierte

1 3 3 1 0 0 0 0 0 0

und die neunte Zeile der fertigen Tabelle auf:

1 8 28 56 70 56 28 8 1 0.

Schaut euch jetzt die fertige Tabelle aufmerksam an!

Die Kästchen, in denen keine Nullen stehen, bilden ein Dreieck, bei dem zwei Seiten nur aus Einsen bestehen (die senkrechte und die schräge), während die waagerechte Seite so aussieht:

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1.

(Man kann die Konstruktion der Tabelle selbstverständlich auch weiter fortsetzen oder auch eher beenden, so daß mehr oder weniger als zehn Zeilen ausgefüllt werden!)

Das entstandene Zahlendreieck nennt man zum Gedenken an den bedeutenden französischen Gelehrten *Blaise Pascal* (1623 bis 1662), der es zuerst genauer studiert hat, das *Pascalsche Dreieck*. Wozu ist diese Spielerei aber nun eigentlich gut?

Wir zählen Teilmengen

Wir betrachten die aus vier verschiedenen Bällen gebildete Menge M_4. Ihre Elemente seien also etwa ein Tennis-, ein Volley-, ein Fuß- und schließlich noch ein Basketball (Bild 2).

Jetzt suchen wir alle ihre Teilmengen einschließlich der leeren Menge $\emptyset$ und der ganzen Menge M_4, sortieren sie nach der Anzahl ihrer Elemente (Bild 3) und schreiben auf, wie viele Mengen jeder Sorte es gibt!

Richtig! Wir finden die Zahlen

1 4 6 4 1.

Kommt euch diese Zeile aber nicht irgendwie bekannt vor?

Aber ja, wir haben die fünfte Zeile des *Pascalschen Dreiecks* gefunden. Und das ist kein Zufall!

Wenn wir die Menge M_3 nehmen, die aus drei Bällen gebildet ist, dann finden wir auf dem eben beschriebenen Wege die Zahlen

1 3 3 1

für die Anzahl der 0-, 1-, 2- oder 3elementigen Teilmengen, und das ist die vierte Zeile des Pascalschen Dreiecks!

Und das gilt ganz allgemein:

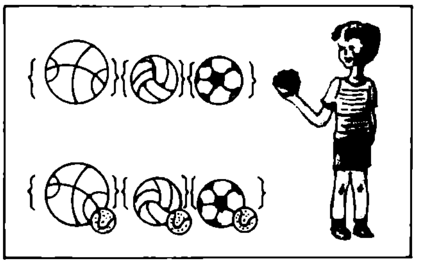
Nimmt man eine aus genau n Elementen bestehende Menge M_n und schreibt die Anzahl ihrer Teilmengen auf, die jeweils kein, ein, zwei, drei, ..., $(n-1)$ bzw. n Elemente enthalten, dann erhält man gerade die $(n+1)$-te Zeile des Pascalschen Dreiecks.

Wir überprüfen diese Behauptung zunächst noch an den Fällen $n = 0$, $n = 1$ und $n = 2$ und finden sie immer bestätigt (Bild 4).

Um die Behauptung aber ganz allgemein beweisen zu können, müssen wir vor allem zeigen, *daß jede Zeile aus der vorherigen nach derselben Regel berechnet werden kann, wie sie bei der Bildung des Pascalschen Dreiecks benutzt wird.* Davon können wir uns aber überzeugen!

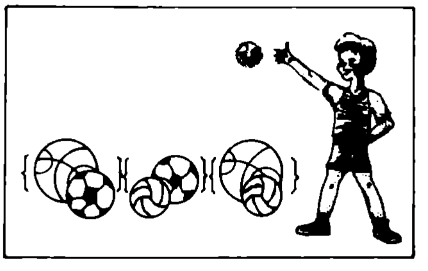
Wenn wir beispielsweise die Zahl der 2elementigen Teilmengen von M_4 feststellen wollen, dann stecken wir für einen Moment den Tennisball in die Tasche und erhalten die Menge M_3. Sie enthält bereits drei Teilmengen mit je zwei Elementen (Bild 5):

Bild 5



Wollen wir die übrigen zweielementigen Teilmengen von M_4 bekommen, dann brauchen wir offensichtlich den Tennisball aus der Tasche nur in eine der einelementigen Teilmengen von M_3 zu legen (Bild 6):

Bild 6



Wir finden somit genau $3 + 3 = 6$ solche Mengen, genau wie es die Bildungsregel des *Pascalschen Dreiecks* verlangt. Es ist recht einleuchtend, daß dieser Vorgang zur Bestimmung der Zahl aller k-elementigen Teilmengen einer Menge M_n aus n Elementen völlig analog durchgeführt werden kann, wenn $k \leqq n$ ist.

Bild 1

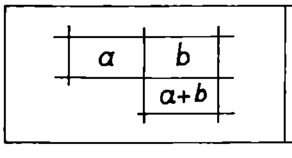


Bild 2

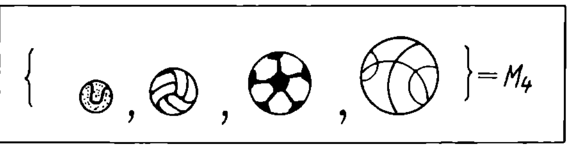


Bild 3

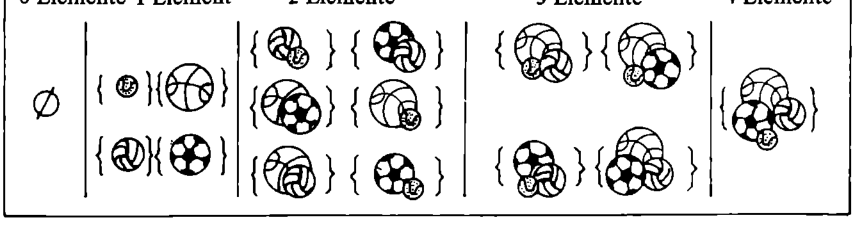
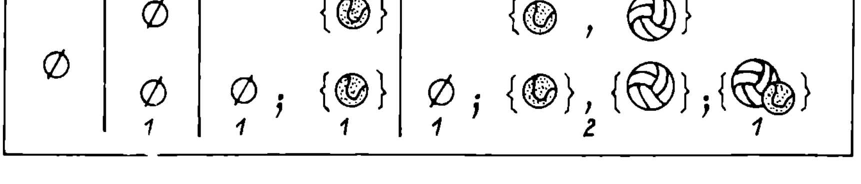


Bild 4



Die Anzahl der 5elementigen Teilmengen einer Menge aus acht Elementen brauchen wir demnach nicht mühsam abzuzählen, sondern finden sie sofort in der neunten Zeile an fünfter Stelle: 70. Das ist aber nicht die einzige Anwendung des *Pascalschen Dreiecks*.

Der Binomische Satz

Die Potenzen eines Binoms – nehmen wir zunächst einmal $(1+x)$ – können wir durch Ausmultiplizieren und Ordnen nach Potenzen von x noch relativ leicht als Summe schreiben:

$(1+x)^2 = 1 + 2x + 1x^2$,
$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + 1x^3$,
$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + 1x^4$.

Wollen wir auch $(1+x)^5$ oder etwa gar $(1+x)^8$ so ausrechnen, so wird uns das sicher ziemlich beschwerlich werden. Gibt es denn keinen leichteren Weg?
Und wieder hilft uns unser Dreieck!
Die Koeffizienten vor den Potenzen von x

1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

stimmen genau mit der 3. bis 5. Zeile des *Pascalschen Dreiecks* überein.
Um zu beweisen, daß diese Beobachtung auch hier kein Zufall, sondern eine allgemeingültige Regel ist, haben wir uns wieder zu überlegen, daß beidemal dasselbe Bildungsgesetz vorliegt.
Betrachten wir beispielsweise

$(1+x)^5 = (1+x)(1+x)^4$
$= (1+x)(1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + 1x^4)$,

so sehen wir, daß sich etwa der Koeffizient von x^3 als Summe der Koeffizienten von x^2 und x^3 in der vorhergehenden Potenz ergibt: wie im *Pascalschen Dreieck* erhalten wir $10 = 6 + 4$.
Und der Sachverhalt gilt in der Tat allgemein.
Die Folge der Koeffizienten der 0-ten, ersten, zweiten, ..., n-ten Potenz von x in der n-ten Potenz des Binoms (1 + x) stimmt mit der (n + 1)-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks überein.
Wieder hilft uns das Dreieck Zeit sparen. Ganz ohne Rechnung schreiben wir jetzt beispielsweise auf:

$$(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + 1b^9.$$

Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks

Lassen wir die Nullen weg, so können wir unserer Tabelle eine symmetrische Form geben (Bild 7):
Zwei Eigenschaften der Tabelle wollen wir herausstreichen.

(1) *Jede Zeile ist bezüglich ihrer Mitte symmetrisch besetzt.*
(2) *Die Summe der Zahlen in der (n + 1)-ten Zeile ist doppelt so groß wie die der vorherigen Zeile und folglich gleich 2^n.*

Es ist nicht schwierig, diese Eigenschaften zu beweisen, denn sie sind eine unmittelbare Folgerung aus der Bildungsvorschrift.

Bild 7

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

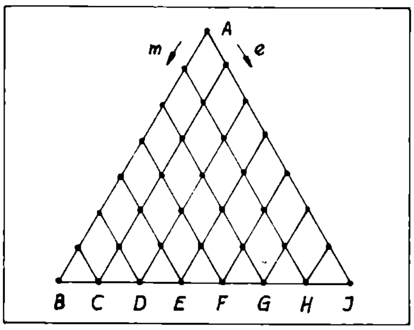
Beide können aber auch noch auf je zwei anderen Wegen bewiesen werden, nämlich unter Verwendung der Anzahl von Teilmengen oder unter Ausnutzung des Binomischen Satzes.

Aufgaben

▲1▲ Führt die Beweise selbständig durch!

▲2▲ Vom Punkte A an der Ecke eines Straßennetzes wandert eine Gruppe von 2^7 Leuten los, und zwar so, daß an A und an jeder Abzweigung jeweils die Hälfte der ankommenden Gruppe die Richtung $\vec{m}$, die andere die Richtung l einschlägt. Wie viele Leute kommen schließlich in den einzelnen Punkten $B, C, D, \ldots, H, I$ am Ende des Netzes (Bild 8) an?

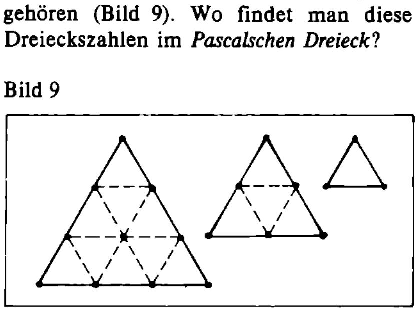
Bild 8



▲3▲ Wie viele a) zweiziffrige und b) dreiziffrige Zahlen gibt es, wenn die Ziffern der Größe nach fallend geordnet stehen sollen?

▲4▲ Als *Dreieckszahl* bezeichnet man die Anzahl der Gitterpunkte, die zu einem Teildreieck eines regulären Dreiecksgitters gehören (Bild 9). Wo findet man diese Dreieckszahlen im *Pascalschen Dreieck*?

Bild 9



▲5▲ Multipliziere aus:
a) $(a-b)^6$; b) $(x-2y)^5$.

A. Bendukidse,

Anmerkungen des Übersetzers: (1) Wenn ihr noch mehr über das Pascalsche Dreieck wissen wollt, so empfehle ich die Lektüre des Büchleins:

L. Lovász, K. L. Vesztergombi, J. Pelikán, Kombinatorik, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1. Auflage 1977 (Math. Schülerbücherei Nr. 90)

(2) Die in diesem Artikel vorgelegten „Beweise“ von Aussagen der Form: „Für alle natürlichen Zahlen n gilt: ...“ sind eigentlich alle unvollständig. Echte Beweise werden daraus erst, wenn wir die Methode der vollständigen Induktion anwenden. Hier wird immer nur der entscheidende Schluß erläutert. Über mathematische Beweise und die genannte Methode speziell solltet ihr euch in dem Buch: R. Thiele, *Mathematische Beweise*, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 2. Auflage 1981 genauer informieren.

aus Quant, Moskau,
übersetzt von Dr. R. Hofmann, Leipzig

Welchen Ursprung haben die Namen der Monate?

Die ersten acht Monate wurden vorwiegend nach römischen Göttern oder historischen Persönlichkeiten benannt. Das ist heute nicht weiter verwunderlich, da der heute gültige *Julianische Kalender* von dem römischen Feldherrn und Staatsmann Julius Cäsar (100 v.u.Z. bis 44 v.u.Z.) eingeführt wurde. Ihm zu Ehren erhielt gleich der Juli seinen Namen. Auch dem römischen Kaiser Augustus, der einen nach dem Tode Cäsars gemachten Fehler in der Zeitrechnung korrigierte, wurde diese Ehre zuteil – der achte Monat heißt August. Der Monat, der das Jahr eröffnet, wurde nach Janus, dem Gott der Tür, des Ein- und Ausgangs, Januar benannt. Von den Namen des Kriegsgottes Mars, der Göttin Maia und der obersten Göttin Juno, der Schützerin des Staates, leiten sich März, Mai und Juni ab.
Die restlichen Namen hängen mit dem *„vor“julianischen Kalender* zusammen, bei dem das Jahr am 1. März begann. Demzufolge waren September, Oktober, November und Dezember der siebente bis zehnte Monat im Jahr – die lateinischen Zahlen *septem, octo, novem* und *decem* (7, 8, 9 und 10) verstecken sich in ihren Namen. Im letzten Monat hatte man sich innerlich und äußerlich zu reinigen. So wurde das altrömische Reinigungs- und Sühnefest Februa zum Monatsnamen Februar.

Aus: technikus

Eine Rechteckzerlegung – arithmetisch, geometrisch und rechentechnisch betrachtet

1. Aufgabe

Man zerlege ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b, $b \geqq a$ durch drei geradlinige Schnitte so in vier Teile, daß diese zu einem Quadrat zusammengelegt werden können, das natürlich den gleichen Flächeninhalt wie das gegebene Rechteck hat.

2. Hinweise für die Lösung

Beliebig *schmale* Rechtecke kann man nicht in der geforderten Art zerlegen. So kann man z. B. ein Rechteck mit den Seitenlängen $b = 100$ und $a = 1$ sicher nicht so in vier Teile schneiden, daß alle diese in ein Quadrat der Seite 10 hineinpassen.
Man wird sich also auf *kleinere* Seitenverhältnisse beschränken müssen. Wir wollen aber außerdem Zerlegungen, bei denen das Seitenverhältnis eine Konstante sein muß, als uninteressant betrachten. So verhält es sich z. B. mit der Zerlegung, die in Bild 1 und 2 angedeutet ist. (Nach ND vom 23./24. 7. 83, Knobelseite.)

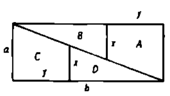
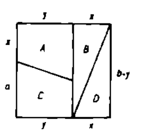
Bild 1


Bild 2


Man erkennt sofort anhand von Bild 2:
$a + x = \sqrt{ab}$, $x + y = \sqrt{ab}$, $b - y = \sqrt{ab}$,
also besteht zwischen a und b der Zusammenhang

$$b - a = (b - y) + (x + y) - (a + x) = \sqrt{ab}$$

oder $\quad b^2 - 3ab + a^2 = 0$

oder $\quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 3\left(\frac{b}{a}\right) + 1 = 0 .$

Die beiden Wurzeln sind:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \quad \text{und}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{1}{\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})} .$$

Die zweite Wurzel liefert geometrisch nichts Neues, die Rollen von a und b sind nur vertauscht. Setzt man $b > a$ voraus, so ist also diese Zerlegung nur für das Seitenverhältnis

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \text{ gültig.}$$

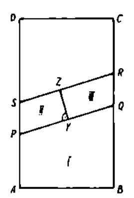
Wir suchen dagegen eine Rechteckzerlegung, bei der das Seitenverhältnis $\frac{b}{a}$ in einem Intervall liegen darf:

$$1 \leqq \frac{b}{a} \leqq G .$$

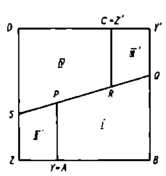
Über die Grenze G muß eine Aussage getroffen werden. Bei der vorgeschlagenen Lösung ist $G = 3 + 2\sqrt{2}$, ob es andere Zerlegungen, insbesondere mit einem größeren G gibt, ist mir nicht bekannt. Es sei zugelassen, daß beim Zusammenlegen der Teilstücke diese gespiegelt werden dürfen.

3. Lösung

Ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen a und b, $\frac{b}{a} \geqq 1$ soll wie folgt in vier Teiltrapeze I bis IV zerlegt werden (Bild 3):

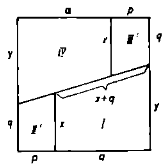
Bild 3


Durch zwei geradlinige und parallele Schnitte PQ und RS soll ein Parallelogramm $PQRS$ aus der Mitte des Rechtecks herausgeschnitten werden. Dabei sollen zwei kongruente Teiltrapeze abfallen: $ABQP$ und $CDSR$. Das Parallelogramm $PQRS$ wird weiter durch einen Schnitt YZ halbiert, der senkrecht zu PQ und RS verläuft, so daß zwei weitere Teiltrapeze entstehen: $PYZS$ und $RZYQ$, die kongruent sein sollen.
Nun soll untersucht werden, welche Bedingungen man an die Schnitte knüpfen muß, damit die vier Teiltrapeze zu einem Quadrat zusammengelegt werden können (Bild 4):

Bild 4


(II′ und III′ sind Spiegelbilder von II und III aus Bild 3, die Fußpunkte Y und Z des dritten Schnittes treten in Bild 4 doppelt auf: Z und Z', Y und Y'.)

Bezeichnungen: $\overline{AB} = \overline{CD} = a$
$\overline{YZ} = \overline{Y'Z'} = p$
$\overline{AP} = \overline{CR} = x$
$\overline{BQ} = \overline{DS} = y$
$\overline{SZ} = \overline{QY'} = q$ (Bild 5)

Bild 5


Die Unbekannten p, q, x, y müssen folgende Bedingungen erfüllen:

(1) $a + p = \sqrt{ab}$ (1. Längenbedingung)
(2) $y + q = \sqrt{ab}$ (2. Längenbedingung)
(3) $\frac{x - q}{p} = \frac{y - x}{a}$ (Geradenbedingung)
(4) $(y - x)^2 + a^2 = (x + q)^2$
(Rechteckbedingung, da der *Pythagoras* die Rechtwinkligkeit voraussetzt.) (Inhaltsformeln für Rechteck und Trapez werden nicht benutzt.)

Aus (1) folgt: $p = \sqrt{ab} - a$.
Aus (2) folgt: $q = \sqrt{ab} - y$.
p, q eingesetzt in (3):

$$\frac{x + y - \sqrt{ab}}{\sqrt{ab} - a} = \frac{y - x}{a}$$

oder $\quad x + \left(2\sqrt{\frac{a}{b}} - 1\right) y = a$

q eingesetzt in (4) liefert:

$$(y - x)^2 + a^2 = \left(x - y + \sqrt{ab}\right)^2$$
$$= (x - y)^2 + 2(x - y)\sqrt{ab} + ab$$

oder $\quad -x + y = \frac{1}{2}\sqrt{ab} - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{b}} .$

Damit ist für x und y ein lineares Gleichungssystem gefunden:

$$x + \left(2\sqrt{\frac{a}{b}} - 1\right) y = a$$
$$-x + y = \frac{1}{2}\sqrt{ab} - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{b}} .$$

Dieses System ist eindeutig lösbar.
Man findet:

$$x = \frac{b - a}{4} + \frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}$$
$$y = \frac{b - a}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{ab} .$$

Beachten wollen wir noch, daß die Variable q als Streckenlänge nicht negativ sein kann. Daher liefert $q = 0$ eine Grenzbedingung:

$$q = \sqrt{ab} - y$$
$$= \sqrt{ab} - \frac{b - a}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{ab} = 0$$
$$\sqrt{ab} = \frac{b - a}{2}$$

oder $\quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 6\left(\frac{b}{a}\right) + 1 = 0 .$

Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen

$$\frac{b}{a} = 3 + 2\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} = 3 - 2\sqrt{2} ,$$

die reziprok zueinander sind. Die zweite Wurzel ist für uns uninteressant, weil wir $\frac{b}{a} \geqq 1$ vorausgesetzt hatten. Sie liefert nebenbei bemerkt auch keinen neuen geometrischen Sachverhalt, denn ist

$\frac{b}{a} = 3 - 2\sqrt{2}$, so ist $\frac{a}{b} = 3 + 2\sqrt{2}$.
Die erste Wurzel liefert also den Wert für das maximale Seitenverhältnis unserer Konstruktion

$$\left(\frac{b}{a}\right)_{\max} = 3 + 2\sqrt{2}\text{. Es ist}$$

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}\,.$$

Beim Rechteck mit den Seiten 1 und $3 + 2\sqrt{2}$ zerfällt das aus der Mitte herausgeschnittene Parallelogramm bei der Halbierung in zwei rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke (Bild 6 und 7):

Bild 6

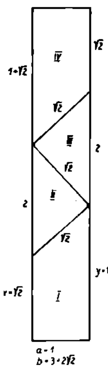
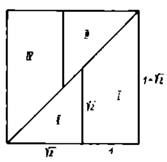


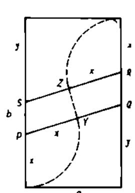
Bild 7



4. Bemerkungen zur praktischen Ausführung

(1) Sind a und b als Zahlen gegeben, so kontrolliert man zunächst die Bedingung $1 \leqq \frac{b}{a} \leqq 3 + 2\sqrt{2}$. Liegt das Seitenverhältnis in diesem Intervall, ist die Aufgabe nach dem oben beschriebenen Verfahren lösbar. Man zeichnet das Rechteck, berechnet die Größen x und y und trägt sie nach Bild 8 ab.

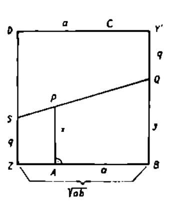
Bild 8



Damit sind die beiden Parallelschnitte PQ und RS festgelegt. Darauf wird die Strecke x noch einmal auf PQ und RS nach Bild 8 abgetragen, dadurch sind die Punkte Y und Z festgelegt. Die Strecke $\overline{YZ}$ ist der dritte gesuchte Schnitt.

(2) Sind a und b als Strecken gegeben, so können die Schnitte auch klassisch, also rein geometrisch mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, ohne Numerik. Man konstruiert zum Rechteck mit den Seiten a und b zunächst das gleich große Quadrat mit der Seite $\sqrt{ab}$. (*Hinweis:* Benutze Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck.) Auf zwei gegenüberliegenden Seiten trägt man entgegengesetzt a ab. (Bild 9)

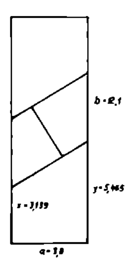
Bild 9



Man erhält die Punkte A und C. Auf den anderen beiden Seiten des Quadrates konstruiert man q nach der Vorschrift $q = \frac{1}{2}\sqrt{ab} - \frac{b-a}{4}$. Dazu wird a auf der Strecke b abgetragen und zweimal halbiert. Das Ergebnis wird auf der halben Quadratseite abgetragen. So findet man die Punkte S und Q. Sie werden durch eine Gerade verbunden (Bild 9). Ein Lot in A schneidet die Gerade SQ in P. Damit sind $x = \overline{PA}$ und $y = \overline{BQ}$ konstruiert.
Nach den Hinweisen in Bemerkung (1) können nun die drei Schnitte im Rechteck eingetragen werden.

(3) Bei dieser Aufgabe tritt, so elementar sie auch ist, eine bemerkenswerte Berührung von Geometrie und Arithmetik in Erscheinung: Das Problem ist geometrischer Natur (gesucht sind Schnitte in einem Rechteck), und die Lösung überblickt man auch am besten an Hand einer Zeichnung. Nun ist diese Aufgabe rein zeichnerisch lösbar mit Zirkel und Lineal, aber die Zeichengenauigkeit genügt nicht immer den Genauigkeitsansprüchen der Praxis. Deshalb möchte man bei ähnlich gelagerten Aufgaben auf die numerischen Zwischenresultate mit weit höherer als Zeichengenauigkeit nicht gerne verzichten. Beide Anforderungen der Praxis, also Geometrie und Arithmetik – Anschaulichkeit und Genauigkeit – können heute durch die Rechentechnik vollständig automatisch behandelt werden. Unsere Rechenautomaten können über Bildschirm oder Zeichengeräte mit Hilfe der *Software* und *Digitalgrafik* Zeichnungen erarbeiten. Es ist selbstverständlich, daß in diesen Zeichnungen numerische Resultate einfließen können, wie es bei dieser Aufgabe naheliegt. Ist die Aufgabe einmal programmiert, so braucht man nur die Zahlwerte für a und b einzugeben, und der Rechenautomat liefert die Schnittfigur im Rechteck oder die Mitteilung, daß das Seitenverhältnis zu groß ist (Bild 10).

Bild 10



Vergessen sollte man aber nicht, daß vor einer Automatisierung erst eine Lösungsidee erarbeitet werden muß und ein Formelapparat mit eventuellen Grenzbedingungen für die Programmierung bereitzustellen ist. Daher sind Geometrie- und Arithmetikkenntnisse beim Einsatz moderner Rechentechnik nicht überflüssig, sondern Voraussetzung.

(4) Was läßt sich nun über das allgemeine Rechteck mit den Seitenlängen a_0 und b_0 sagen, dessen Seitenverhältnis nicht der abgeleiteten Grenzbedingung $1 \leqq \frac{b_0}{a_0} \leqq 3 + 2\sqrt{2}$ unterworfen ist? ($b_0 > a_0$).
Durch eine Folge von Halbierungen von b_0 und entsprechenden Verdopplungen von a_0 kann man sich eine Folge von inhaltsgleichen Rechtecken erzeugt denken. Der Prozeß wird so lange fortgeführt, wie für die neuen Seiten a' und b' gilt: $b' \geqq a'$. Es sei nach n Schritten $b' = 2^{-n}b_0$ und $a' = 2^n a_0$ mit $b' \geqq a'$, aber $\frac{b'}{2} < 2a'$. Also ist $b' < 4a'$ oder $1 \leqq \frac{b'}{a'} < 4 < 3 + 2\sqrt{2}$. Mit diesem Halbierungs-Verdopplungsprozeß kommen wir in den zulässigen Bereich für das Seitenverhältnis. Für das letzte Rechteck unserer Folge kann nun die beschriebene Zerlegung durchgeführt werden. (Bild 11 und 12) Wir können also sagen: Jedes Rechteck mit den Seiten a, b kann durch eine endliche Zahl von geradlinigen Schnitten so zerlegt werden, daß die Teile zu einem Quadrat mit dem Flächeninhalt $a \cdot b$ zusammengelegt werden können. Damit ist aber nicht gesagt, daß es eine feste endliche Schnittzahl für alle Rechtecke gibt. Sie existiert sicher nicht.

Bild 11

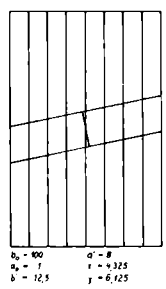
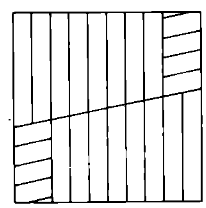


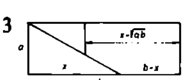
Bild 12



W. Dörband

Nachbemerkung: In *alpha* 1/84 wird auf den Seiten 15 und 20 *(Mit Schere und Köpfchen)* nach *The Mathematics Calendar,* 83, Carleton University, Ottawa/Kanada sogar eine Zerlegung mit nur zwei Schnitten mitgeteilt. Sie gilt nicht nur für den angegebenen Spezialfall des 2-mal-5-Rechtecks, sondern für alle Rechtecke mit einem Seitenverhältnis $1 \leqq \frac{b}{a} \leqq 4$.

Bild 13



Skizze nicht maßstäblich! ($b \geqq a$)
Wie man aus der Skizze ablesen kann, müssen die Ungleichungen $\sqrt{ab} \leqq 2a$ und $b - \sqrt{ab} \leqq \sqrt{ab}$ erfüllt sein. Beide führen auf die Bedingung $\frac{b}{a} \leqq 4$.

Schätz doch mal!

Die Aufforderung „Schätz doch mal!“ bzw. die Frage „Was schätzt du?“ hat man schon oft gehört. Im Fernsehen der DDR gibt es sogar eine Sendereihe „Schätzen Sie mal!“ In dieser Unterhaltungssendung wird den Mitspielern wiederholt der Auftrag erteilt, Stückzahlen, Alter, Geschwindigkeiten, Entfernungen usw. näherungsweise *ohne* Verwendung von *Meßinstrumenten* anzugeben. Oft weichen die Antworten sehr stark vom eigentlichen Wert ab. Ja, zuweilen hat man den Eindruck, daß ein Mitspieler gar nicht geschätzt, sondern geraten hat.
Das ist wohl immer dann der Fall, wenn der Befragte keine *Vergleichsgrößen* kennt bzw. über den Sachverhalt nicht hinreichend gut informiert ist.
Will man etwa die Frage beantworten: „Wie groß war schätzungsweise der Elektroenergieverbrauch 1983 in der DDR?“, so wäre es z. B. nützlich zu wissen, wieviel Elektroenergie an einem Tag in unserem Lande verbraucht wird oder wieviel Elektroenergie ein Bezirk oder eine Großstadt ungefähr an einem Tag bzw. in einer Woche benötigt. Man braucht also irgendeine Orientierung, um die Frage durch Schätzen und nicht durch bloßes Raten zu beantworten.
Im Unterschied zum Raten wollen wir also unter Schätzen *das Bestimmen von Näherungswerten für Größen ohne Verwendung von Meßinstrumenten durch Vergleich mit bekannten Größen* verstehen. Während bei „Schätzen Sie mal!“ das Schätzen nur ein Spiel ist und vor allem den Mitspielern und Zuschauern Spaß machen soll, spielen das Schätzen und die Qualität des Schätzergebnisses im täglichen Leben oft eine große Rolle. So können z. B. beim Lösen von Sachaufgaben gute Schätzungen helfen, Fehler zu erkennen. Schlechte Schätzungen von Geschwindigkeiten oder Entfernungen sind im Straßenverkehr häufig Ursachen von Unfällen. Ein zu grobes Schätzen von Entfernungen im Gebirge hat schon bei mancher Wandergruppe zu einer unfreiwilligen Nachtwanderung geführt.
Das Schätzen von Entfernungen hat für das Orientieren im Gelände und auch für das Schätzen von Flächen- und Rauminhalten, das auf das Schätzen von Streckenlängen zurückgeführt werden kann, große Bedeutung. Aus diesem Grunde wollen wir uns diesem Aspekt des Schätzens besonders zuwenden und einige Vergleichsgrößen kennenlernen.
Beim Schätzen von Entfernungen im Gelände ist es sinnvoll, bekannte *Grundentfernungen* (z. B. Abstand zwischen Telefonmasten) zu suchen, um dann zu überlegen, wie oft diese in die zu schätzende Entfernung *hineingehen*.
Hier seien einige im Gelände feststehende Entfernungen angegeben:
Abstand zwischen Telefonmasten:
meist 50 m
Abstand zwischen Hochspannungsmasten:
150 m bis 180 m
Abstand zwischen Warnbaken
bei Eisenbahnübergängen: 80 m
Für das Schätzen von Höhen ist es nützlich, einige Grundhöhen zu kennen.
Höhe eines Stockwerkes im Neubau:
etwa 2,80 m
Höhe eines Telefonmastes:
6 m bis 8 m
Höhe einiger Bäume
Roßkastanie: etwa 30 m
Stieleiche: etwa 50 m
Fichte: etwa 60 m
Entfernungen lassen sich auch nach charakteristischen Umrissen schätzen. Dazu muß man wissen, wie weit Gegenstände entfernt sind, die man bei normalen Sichtverhältnissen mit bloßem Auge gerade noch erkennen kann.
Beispiele:
Kirchen
im Abstand bis 15 000 m
Fabrikschornsteine
im Abstand bis 5 000 m
hohe, einzeln stehende Bäume
im Abstand bis 2 000 m
Umriß eines Menschen
im Abstand bis 850 m
Gliedmaßen eines Menschen
im Abstand bis 300 m
Augen des Menschen
im Abstand bis 50 m

Die Angaben sind natürlich Durchschnittswerte. Sie hängen von der Größe der konkreten Objekte ab. In Abhängigkeit von Gelände und Witterung können sich Schätzfehler einstellen.
So lehrt die Erfahrung, daß bei guten Sichtverhältnissen bzw. für den Fall, daß die Sonne im Rücken des Schätzers steht, im allgemeinen zu kurz geschätzt wird. Zu weit wird dagegen bei schlechten Sichtverhältnissen (Regen, Nebel) geschätzt.
Dies trifft auch zu für das Schätzen in der Dämmerung und gegen die Sonne. Das Kennen dieser Schätzfehler ist für alle Verkehrsteilnehmer sehr wichtig, um Unfälle zu vermeiden. Das Schätzen von Entfernungen nach charakteristischen Umrissen von Objekten kann natürlich auch zur Bestimmung von Grundentfernungen im Gelände genutzt werden. Das Schätzen von Entfernungen mit Hilfe der Augen versagt in der Dunkelheit oder wenn die Sicht durch Bäume oder Sträucher versperrt ist. Bei Nachtwanderungen oder Geländespielen im Wald kann man Entfernungen nach der Hörbarkeit von Geräuschen schätzen. Auch dazu braucht man Vergleichsgrößen.
Hörbar sind z. B. (falls keine starken Nebengeräusche vorhanden sind)

Huptöne von Fahrzeugen	bis 2 000 m
Geräusche von Motoren	bis 1 000 m
Knackende Zweige	bis 200 m
Schritte	bis 30 m

Um sich in seiner allernächsten Umgebung zu orientieren, kann man als Vergleichsmaße seine Körpermaße heranziehen, wie etwa

die Breite des Daumens	... cm
die Länge des Unterarms	... cm
die Körperlänge	... m
die Schrittlänge	... m

▲1▲ Nun schätzt selbst einmal
a) den Durchmesser eines 5-Mark-Stücks,
b) den Durchmesser eines 1-Pfennig-Stücks,
c) den Flächeninhalt eines 10-Mark-Scheins,
d) das Volumen einer Streichholzschachtel,
e) die Breite eines Fußballtores,
f) die Leermasse eines PKW Trabant 601 (Limousine)!

Wer schätzt am besten?
Diese Frage ist leicht zu beantworten, wenn z. B. mehrere Personen eine gleiche Entfernung schätzen.
Klaus und Ines, die denselben Schulweg haben, schätzen eines Tages die Länge dieses Weges.
Ines schätzt 1,2 km. Klaus meint, es seien nur 800 m.
Er begründet seine Schätzung wie folgt: Bei Wanderungen legt man in einer Stunde etwa 5 km zurück. Wir brauchen für den Schulweg 10 Minuten, d. h., den 6. Teil einer Stunde. Der tägliche Weg zur Schule müßte also ungefähr $\frac{5}{6}$ km (rund 800 m) betragen. Am Nachmittag fährt Klaus die geschätzte Strecke mehrmals mit seinem Fahrrad ab und stellt mit Hilfe seines Kilometerzählers fest, daß der Schulweg 0,9 km lang ist. Nun ist klar, wer von beiden am besten geschätzt hat, nämlich Klaus, denn sein Schätzwert weicht am wenigsten vom Wert 0,9 km ab.
Übrigens nennt man die Differenz zwischen geschätztem Wert a und genauem Wert x auch *absoluten Fehler*. Er kann positiv, negativ, aber auch Null sein. (An Stelle des genauen Wertes einer Größe wird häufig ein Meßwert benutzt. Meßwerte sind wie Schätzwerte Näherungswerte.)

▲2▲ Fülle folgende Tabelle aus, und gib den besten Schätzer an! (Zu schätzen war das Volumen einer Streichholzschachtel (30,5 cm³).)

Schätzer	geschätzter Wert in cm³	absoluter Fehler in cm³
Rolf	40	9,5
Anja		−10,5
Mario	25	−5,5
Grit		4,5

Den kleinsten absoluten Fehler hat Anja gemacht, denn es gilt $-10{,}5 < -5{,}5 < 4{,}5 < 9{,}5$. Das beste Schätzergebnis erzielte allerdings Grit, denn bei der Beurteilung der Güte einer Schätzung geht es nicht darum, wer den kleinsten absoluten Fehler gemacht hat, sondern es interessiert die geringste Abweichung vom tatsächlichen Wert. Es geht also um den Betrag des absoluten Fehlers ($|4{,}5| < |-5{,}5| < |9{,}5| < |-10{,}5|$).

Schwieriger wird es, wenn man von mehreren Personen, die z. B. verschiedene Längen zu schätzen hatten, den besten Schätzer ermitteln will.

Beispiel:
Zu schätzen waren
a) die Breite einer (dreiteiligen) Wandtafel (3,95 m),
b) der Durchmesser eines 5-Mark-Stücks (29 mm),
c) die Länge des Bleistifts von Felix (18,5 cm).

Frank schätzt die Breite der Wandtafel. Er behauptet, sie wäre etwa 4 m breit. Er begründet seine Schätzung wie folgt:
Wenn ich meine Arme seitlich ausstrecke, so beträgt die Entfernung von der einen Hand zur anderen etwa 150 cm. Die Breite der Tafel ist mehr als das Doppelte dieser Strecke. Also gibt er als Schätzwert 4 m an.
Michael soll den Durchmesser eines 5-Mark-Stücks schätzen. Er kennt die Breite seines Daumens (1,5 cm). Ein 5-Mark-Stück hat etwa den Durchmesser zweier Daumenbreiten. Also gibt er als Schätzwert 3 cm an.
Felix vergleicht die Länge seines Bleistifts mit seiner Handspanne (etwa 16 cm) und gibt für die Bleistiftlänge 20 cm an. Wer von den drei Jungen hat am besten geschätzt?
Würde man die Beträge der absoluten Fehler zu Rate ziehen, ergäbe sich folgende Reihenfolge:

	absoluter Fehler
1. Platz (bester Schätzer): Michael	1 mm
2. Platz: Felix	1,5 cm
3. Platz (schlechtester Schätzer): Frank	5 cm

Ein solches Vorgehen ist sicher ungerecht, wie auch folgendes Beispiel zeigt. Hätte Michael für den Durchmesser eines 5-Mark-Stücks 6 cm angegeben, d. h. etwa das Doppelte des tatsächlichen Wertes, so wäre der Betrag des absoluten Fehlers noch immer kleiner als der von Franks Schätzung gewesen, obwohl Frank sich nur um rund $\frac{1}{80}$ bezüglich des tatsächlichen Wertes verschätzt hat.
Die Qualität einer Schätzung ist also nicht nur von der Abweichung des Schätzwertes vom tatsächlichen Wert, sondern vom tatsächlichen Wert selbst mit abhängig. Der Betrag des Verhältnisses des absoluten Fehlers zum tatsächlichen Wert $\left(\left|\frac{a-x}{x}\right|\right)$ ist ein Maß für die Güte der Schätzung. Je kleiner der Betrag dieses Verhältnisses ist, um so besser ist die Qualität der Schätzung. Man bezeichnet die Zahl $\left|\frac{a-x}{x}\right|$ als *relativen Fehler* eines Schätzwertes a in bezug auf den genauen Wert x einer Größe oder Zahl.

▲3▲ a) Ermittle den relativen Fehler bei den Schätzungen von Frank, Michael und Felix! Wer von ihnen hat am besten geschätzt?
b) Wie groß ist jeweils die prozentuale Abweichung des Schätzwertes vom gemessenen Wert?

▲4▲ Vervollständige folgende Tabelle!

tatsächlicher Wert x	Schätzwert a
227	200
425	
	300

absoluter Fehler $a - x$	relativer Fehler $\left|\frac{a-x}{x}\right|$
	0,20
−17	

L. Flade

Finder

Vertreib deine Zeit nicht
mit Lernen von Fakten,
wenn du nicht eines gelernt hast:
das Finden.
Wo vor dir alle
die Antwort nicht fanden,
muß sie noch da sein.
Finde Methoden,
zu denken –
die Fakten
weiß die Maschine!

Heinz Kahlau

Schon gewußt?

Aus: Technika Molodjoski

● Der größte Mann der Welt ist Mohamed Alam Tschanna (1954 geboren) aus Pakistan. Er mißt 2,50 Meter.

● Das größte Wohnhaus befindet sich in Chikago. Es ist 196,70 Meter hoch und besitzt 70 Etagen.

● Das kleinste Pferd lebt in Argentinien. Es ist etwas größer als ein Huhn und wiegt weniger als 36 Kilogramm.

● Der größte Eisberg wurde in Grönland fotografiert.
Seine Höhe betrug 168 Meter.

● Das längste Alphabet hat 72 Buchstaben und stammt aus Kampuchea.

● Die größte heute lebende Frau soll die Chinesin San Tschang Lin (1964 geboren) sein. 1980 maß sie bereits 2,40 Meter; das Mädchen aber wächst weiter...

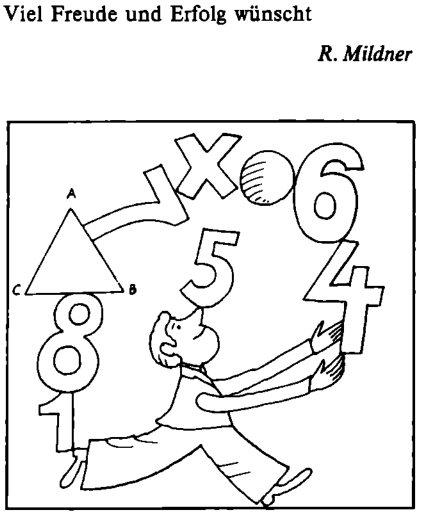
Ein Besuch in der Knobelwerkstatt

Teil 1: Vielerlei Knobelei

Liebe Freunde!
Mit den nachfolgenden Ausführungen beginnen wir eine mehrteilige *alpha*-Beitragsserie, in der wir euch Anregungen und Hinweise für den *Eigenbau* von heiteren mathematischen Denksportaufgaben, mathematischen Rätseln, Spielen, Zaubereien, Scherzaufgaben und Logeleien, kurz, von mathematischen Knobelaufgaben geben wollen. Obwohl wir uns hierbei nur auf die *heitere Seite* der Mathematik konzentrieren, so gelten die Darlegungen natürlich sinngemäß auch für den *Eigenbau* von Mathematikaufgaben überhaupt.
Sicher löst auch ihr in eurer Freizeit gern Knobelaufgaben, und die *alpha* sowie eine Reihe hübscher Knobel-Bücher bieten euch hierfür viel interessantes Aufgabenmaterial. Doch reizt euch nicht auch der Gedanke, selbst einmal *Schöpfer* von neuen Knobelaufgaben zu sein? Ein Versuch lohnt sich bestimmt, und ihr könnt ja eure selbsterdachten Knobelaufgaben nach Absprache mit eurem Mathematiklehrer bzw. Zirkelleiter sogar bei Knobelnachmittagen, im Mathematikzirkel, an einer Wandzeitung oder auch im Mathematikunterricht selbst euren Mitschülern stellen und auf diese Weise mithelfen, das mathematische Klima an eurer Schule zu bereichern.
Mathematische Knobelaufgaben sind für den Erwerb, die Vertiefung und Festigung mathematischen Wissens und für die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten nicht etwa weniger wertvoll als andere *ernsthafte* Mathematikaufgaben. So wie alle Problemaufgaben besitzen auch die Knobelaufgaben eine ausgeprägte schöpferische Komponente, die besonders bei der Problemerkennung und im Auffinden von Lösungswegen zum Ausdruck kommt, und sie tragen in hohem Maße bei zur Schulung und Entwicklung solch wichtiger Eigenschaften wie logisches Denkvermögen, Abstraktionsvermögen, Beobachtungs- und Auffassungsgabe, Scharf- und Spürsinn, Findigkeit, Geduld, Ausdauer und Hartnäckigkeit; außerdem schärfen sie den mathematischen Blick für die Umwelt. Vor allem aber können Knobelaufgaben viele Menschen zur Beschäftigung mit der Mathematik anregen, da ihre meist heitere Problemstellung oft aus sich selbst heraus beim Betrachter Aufmerksamkeit erzwingt, da sie vielfach auch durch Raten oder Probieren oder einfach mittels gesunden Menschenverstands lösbar sind (obwohl diese Aufgaben größtenteils einen tiefen mathematischen Hintergrund haben), da sie meist einen nur geringen Rechenaufwand erfordern und oft ganz verblüffende Lösungen besitzen (Aha-Effekt), eben, weil sie auf vergnügliche Weise bilden und unterhalten.
Natürlich handelt es sich auch beim *Eigenbau* von Knobelaufgaben um eine schöpferische Tätigkeit, und für das *Wie?* einer solchen können auch wir keine allgemeingültigen Rezepte vergeben. Ideen muß man schon haben, und Anregungen für neue mathematische Aufgaben bieten unsere Umwelt, die Mathematik selbst wie auch andere Fachdisziplinen in reicher Fülle. Doch zeigt die Erfahrung, daß Ideen allein noch nicht genügen, sondern daß man diese dann auch in gute Aufgaben umsetzen können muß, wozu auch eine Portion *Handwerk* vonnöten ist. Gemeint ist hiermit ein gezieltes methodisches Vorgehen bei der Ideenfindung und -verarbeitung. Und gerade hierzu wollen wir Erfahrungen vermitteln. Insofern ist also der Titel unserer Beitragsserie *Ein Besuch in der Knobelwerkstatt* natürlich nur im übertragenen Sinne zu verstehen, denn schließlich bauen wir ja die Aufgaben nicht in einer echten *Bastler-Werkstatt* mit Schraubstock, Hammer, Zange, Nägeln o. ä. zusammen. Für den *Eigenbau* von mathematischen Aufgaben genügen uns meistens schon ein Zettel und ein Bleistift und eventuell noch *Werkzeuge* wie Lineal, Zeichendreieck, Zirkel oder – dem modernen Stand der Mikroelektronik entsprechend – ein Taschenrechner.

Wir stellen nun zunächst einmal einige typische *Klassen* von mathematischen Knobelaufgaben vor, wobei die Beispielaufgaben und alle weiteren Aufgaben der Beitragsserie, die wir jeweils zu einer gesonderten *Knobel-Wandzeitung* zusammenstellen, ausschließlich aus der *Werkstatt* des Autors stammen, und ein Teil davon bereits entweder in den Wochenend-Beilagen der *Leipziger Volkszeitung* oder auf den Knobelseiten von *Neues Deutschland* abgedruckt worden ist:
Interessante Knobelaufgaben lassen sich zur Arithmetik, insbesondere zur Arithmetik natürlicher Zahlen, gestalten und dies in erstaunlicher Vielfalt und Variabilität. Hierher gehören Aufgaben zur Darstellung und zu den Eigenschaften von Zahlen, Aufgaben zu den Grundrechenarten (s. Aufg. 1), Kryptogramme (s. Aufg. 2) und auch magische Quadrate oder allgemeine magische Figuren (s. Aufg. 3).
Natürlich spielen die Zahlen auch bei vielen anderen Aufgabentypen eine grundlegende Rolle wie in der Mathematik überhaupt. So etwa bei Aufgaben, die sich mit Hilfe von Gleichungen bzw. Gleichungssystemen lösen lassen (s. Aufg. 4).
Ein breites Spektrum liefern Aufgaben zur Kombinatorik (s. Aufg. 5), die bekanntlich Anordnungs- und Auswahlprobleme behandelt. Graphentheoretischer Natur sind Knobelaufgaben wie das Zeichnen einer Figur in einem Zuge (s. Aufg. 6), bestimmte Wegeprobleme und auch Labyrinthprobleme (s. Aufg. 7).
Ein weites Feld für interessante Knobelaufgaben bietet natürlich die Geometrie. Hier sind etwa Flächenvergleiche (s. Aufg. 8), geometrische Teilungsprobleme (s. Aufg. 9), Legespiele ähnlich dem *Tangram* (s. Aufg. 10) und Schiebespiele ebenso zu nennen wie die große Klasse der Hölzchenspiele (s. Aufg. 11).
Groß ist auch die Vielfalt der logisch-kombinatorischen Aufgaben, die in den unterschiedlichsten Bereichen angesiedelt sein können, so etwa logische Vergleichsaufgaben (s. Aufg. 12), geometrische Logeleien (s. Aufg. 13), Aufgaben zum Erkennen der Bildungsgesetze von Zahlen- bzw. Figurenfolgen (s. Aufg. 14), Wägeprobleme (s. Aufg. 15), Überfahrtprobleme und andere Logeleien.
Viele interessante Knobelaufgaben kann man auch den bekannten Brett- bzw. Unterhaltungsspielen (Würfeln, Domino, Schach u. a.) entlehnen, etwa die Rösselsprung-Aufgaben (s. Aufg. 16).
Natürlich ist mit der obigen kurzen Aufzählung die breite Palette interessanter Knobelaufgaben noch lange nicht erschöpft, und auch eurer Phantasie sind beim Erfinden neuartiger Knobelaufgaben keinerlei Grenzen gesetzt.
In unserem nächsten Beitrag werden wir demonstrieren, wie ihr durch aufmerksames Beobachten eurer Umwelt Ideen für mathematische Knobelaufgaben finden könnt. Bis dahin solltet ihr aber erst einmal versuchen, alle 16 Beispielaufgaben unserer nachfolgenden *Knobel-Wandzeitung* (1) zu lösen!
Viel Freude und Erfolg wünscht

R. Mildner



Knobel-Wandzeitung (1)

Vergangenes Jahr

▲1▲ Setzt in die Kästchen Operationszeichen (+, −, ·, :) so ein, daß wahre Gleichungen entstehen! Beachtet: Punkt- geht vor Strichrechnung!

$$1 \square 9 \square 8 \square 4 = 19$$

$$1 \square 9 \square 8 \square 4 = 8$$

$$1 \square 9 \square 8 \square 4 = 4$$

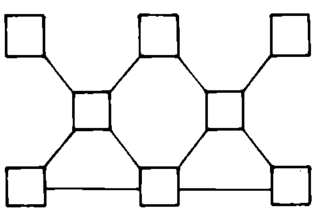
Sternchenklar

▲2▲ Vervollständigt die Multiplikationsaufgabe, indem ihr die Sternchen durch Ziffern ersetzt!

```
456 · *7*
---------
     **48
    ****
   ***6
---------
   ******
```

Magische Figur

▲3▲ Setzt die natürlichen Zahlen von 1 bis 8 so in die Felder ein, daß die Zahlensumme auf jeder geraden Linie 14 beträgt!



Wie alt?

▲4▲ Das Ehepaar Müller hat 3 Kinder: Jens, Kati und Sven. Herr und Frau Müller sind gleichaltrig, Sven ist 3 Jahre älter als Kati, und Jens ist 3 Jahre älter als Sven. Jens ist so alt wie Kati und Sven zusammen. In drei Jahren wäre der Vater dreimal so alt wie Jens. Wie alt ist jedes Familienmitglied?

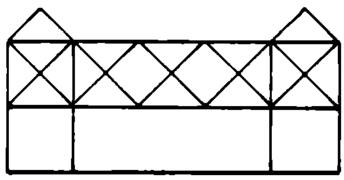
Mal so, mal so

▲5▲ Wie oft könnt ihr das Wort DEZIMALBRUCH von links oben nach rechts unten auf verschiedene Weise lesen?

D	E	Z	I	M	A	L	B
E	Z	I	M	A	L	B	R
Z	I	M	A	L	B	R	U
I	M	A	L	B	R	U	C
M	A	L	B	R	U	C	H

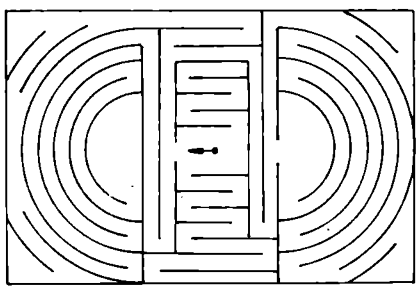
In einem Zuge

▲6▲ Zeichnet die abgebildete Figur in einem Zuge nach, wobei aber jede Linie nur genau einmal gezogen werden darf!



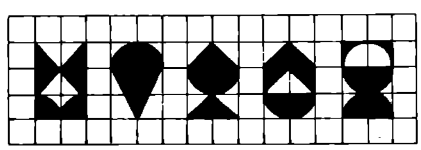
Im Labyrinth

▲7▲ Auf welchem Weg gelangt die Maus ins Freie?



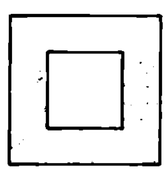
Flächenvergleich

▲8▲ Welches der fünf schwarzen zusammenhängenden Flächenstücke hat den größten Flächeninhalt?



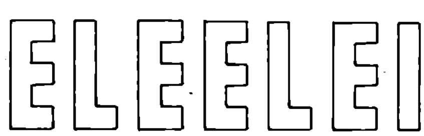
Zerlegung gesucht

▲9▲ Zerlegt den abgebildeten Quadratring a) durch 2 Geraden in vier, b) durch 3 Geraden in sechs, c) durch 4 Geraden in acht und d) durch 6 Geraden in zwölf kongruente Teilstücke!



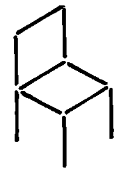
Legespiel

▲10▲ Legt die Ziffern der Zahl 1 373 373 lückenlos zu einem Quadrat zusammen!



Stuhl-Akrobatik

▲11▲ Legt 2 Hölzchen so um, daß a) der Stuhl um 90 Grad gedreht wird und b) der Stuhl auf die Lehne gestellt wird!

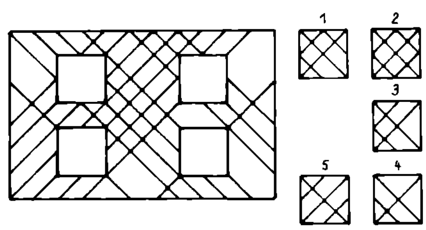


Rollerrennen

▲12▲ Bei einem Kinderfest wird ein Rollerrennen veranstaltet. Dabei belegen Ben, Dieter, Eva und Katrin die ersten vier Plätze. Ben belegt einen besseren Platz als Eva. Dieter war schlechter plaziert als Katrin, er schnitt aber besser ab als Ben. In welcher Reihenfolge waren die vier Kinder ins Ziel gekommen?

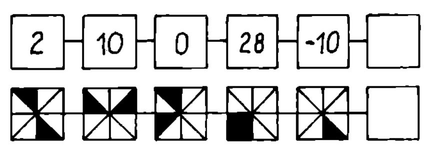
Gut eingepaßt

▲13▲ Vier der fünf abgebildeten Quadrate passen logischerweise in die vier Aussparungen der Figur. Welches Quadrat paßt nicht hinein?



Fortsetzung gesucht

▲14▲ Findet eine logische Fortsetzung der angegebenen Zahlen- bzw. Figurenfolge!

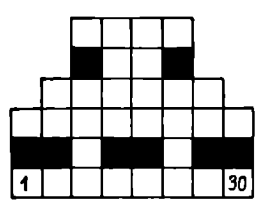


Gewußt wie?

▲15▲ Einem Päckchen von 75 g Tee sollen 55 g entnommen werden. Man hat aber lediglich eine Balkenwaage (ohne Wägestücke), ein Gewürzpäckchen von 25 g und ein Puddingpäckchen von 40 g zur Verfügung. Wie kann man die Aufgabe lösen?

Rösselsprung

▲16▲ Zieht den Springer, der wie beim gewöhnlichen Schach zu setzen ist, innerhalb der abgebildeten Figur vom Feld 1 nach dem Feld 30 derart, daß er zwischendurch jedes andere weiße Feld genau einmal betritt! Die schwarzen Felder dürfen dabei übersprungen, aber nicht betreten werden.



Eine empirische Bestätigung der heliozentrischen Theorie von Copernicus und Kepler

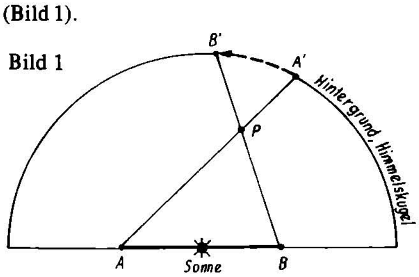
Teil 2

Zum 200. Geburtstag des Astronomen und Mathematikers Friedrich Wilhelm Bessel

Die Parallaxe der Fixsterne

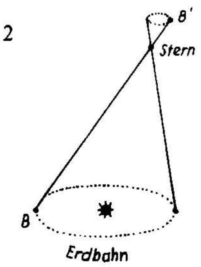
Die Erde bewegt sich auf einer Ellipse um die in einem Brennpunkt sich befindende Sonne. Diese Ellipse ist annähernd ein Kreis mit einem Radius von rund 150 Millionen km. Diesen mittleren Abstand Erde – Sonne nennt man *Astronomische Einheit* (Bezeichnung: AE), 1 AE = 149,597 870 · 10^9 m.
Es bezeichne B den Punkt, in dem die Erde der Sonne am nächsten steht (*Perihel*, Abstand von der Sonne 147,1 Millionen km) und A den sonnenfernsten Punkt (*Aphel*, Abstand von der Sonne 152,1 Millionen km). Man denke sich die Verbindungsgerade beider Punkte gezeichnet (*Apsidenlinie*, große Achse der Ellipse). Wird nun ein Stern P in A bzw. B beobachtet, so wird er auf der Himmelskugel in den verschiedenen Punkten A' bzw. B' erscheinen (Bild 1).

Bild 1



Würde sich ein Beobachter auf der Geraden von A nach B bewegen, so hätte es den Anschein, als bewege sich P in einer der Bewegung des Beobachters entgegengesetzten Richtung (von A' nach B') über den Hintergrund (also in bezug auf weiter entfernte Sternbilder).
Da nun ein Beobachter B auf der Erde mit der Erde im Laufe eines Jahres eine elliptische Bahn um die Sonne beschreibt, beschreibt auch der Punkt B', in dem der Stern P in B beobachtet wird, auf der Himmelskugel eine Ellipse. Der Stern beschreibt relativ zu den weiter entfernten Sternen scheinbar eine winzige Ellipse, die ein getreues Abbild der Erdbahn um die Sonne ist, wie sie einem Beobachter auf dem Stern erscheinen würde (Bild 2).

Bild 2



Die Gestalt dieser scheinbaren Bahn hängt von dem Winkel φ zwischen der Verbindungsgeraden Sonne – Stern und der Erdbahnebene (Ekliptik) ab.
Da sich die Lage des Sterns in bezug auf die Sonne im Prinzip nicht ändert (wir sehen von Eigenbewegungen ab), ist dieser Winkel für ein und denselben Stern konstant.
Sehen wir die Umlaufbahn der Erde um die Sonne (im folgenden stets) als Kreisbahn an, so ist das Abbild der Erdkreisbahn offenbar genau dann auch ein Kreis, wenn $\varphi = 90°$ ist. Ist $\varphi = 0°$ (der Stern befindet sich auf der Erdbahnebene), so ist das Abbild der Erdkreisbahn eine Gerade (der scheinbare Sternort pendelt darauf hin und her). In allen anderen Fällen ($0° < \varphi < 90°$) beschreibt der Stern P als Abbild der Erdkreisbahn am Himmel eine kleine Ellipse. Die Richtung der scheinbaren Bewegung auf der Ellipse ist der Bewegung der Erde entgegengesetzt.
Im Verlaufe eines Jahres wird die Verbindungsgerade Erde – Stern je nach dem Ort E der Erde eine andere Richtung aufweisen und mit der Geraden Sonne – Stern einen anderen Winkel σ einschließen. Ein Beobachter auf E (genauer: „geozentrischer Beobachter" – im Erdmittelpunkt) sehe (vgl. Bild 3) den Stern unter dem Winkel α (in bezug auf die Erdbahnebene). Dann gilt wegen $\varphi + \sigma + (180° - \alpha) = 180°$

$$\sigma = \alpha - \varphi.$$

Bezeichnet a den Radius der Erdbahn (a = 1 AE, mittlerer Abstand Erde – Sonne) und d die Distanz Stern (P) – Sonne (S), so gilt nach dem Sinussatz

$$\frac{a}{d} = \frac{\sin\sigma}{\sin(180 - \alpha)} = \frac{\sin\sigma}{\sin\alpha}, \text{ d. h.}$$

$$\sin\sigma = \frac{a}{d}\sin\alpha .$$

σ verändert sich in Abhängigkeit von α.
Der Winkel σ wird am größten (σ_{max}), wenn die Verbindungsgerade (ES) Erde – Sonne senkrecht auf der Geraden (SP) Sonne – Stern steht, d. h. $\alpha = 90°$ ist (Bild 4). Dieser Winkel σ_{max} (die Astronomen bezeichnen den Winkel meistens mit π) wird als Parallaxe des Sterns bezeichnet. Es ist der Winkel, unter welchem der Radius der Erdkreisbahn bei senkrechter Aufsicht vom Stern aus erscheint.

Bild 4

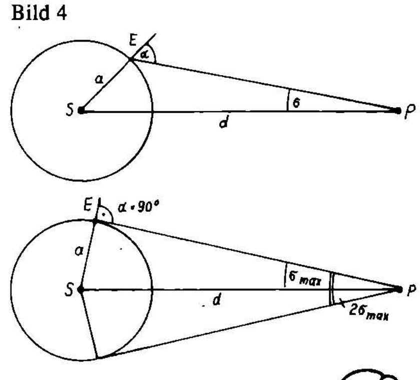
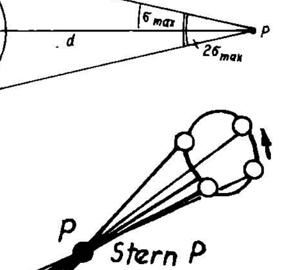
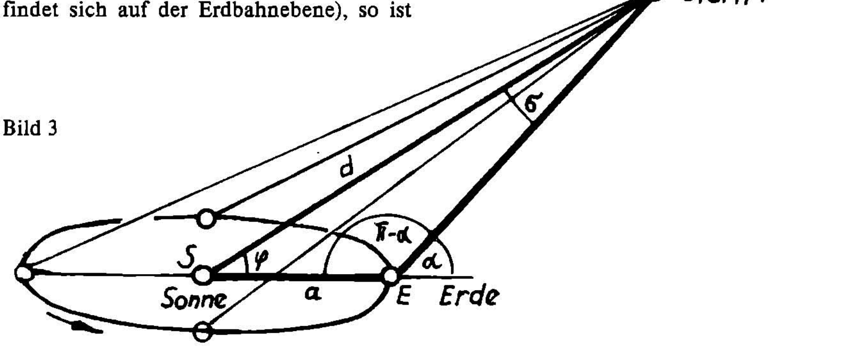


Bild 3

Im Laufe eines Jahres ändert sich der scheinbare Ort des Sterns um den Winkel $2\sigma_{max}$.
Ist $a = \overline{ES}$, $d = \overline{SP}$, so gilt

$$\sin \sigma_{max} = \frac{a}{d} = \frac{1}{d} a .$$

Drückt man nun die Längen durch die Astronomische Einheit aus, so gilt $a = 1\,\mathrm{AE}$ und damit

$$\sin \sigma_{max} = \frac{1}{d} \mathrm{AE}, \text{ also}$$

$$d = \frac{1}{\sin \sigma_{max}} \mathrm{AE} .$$

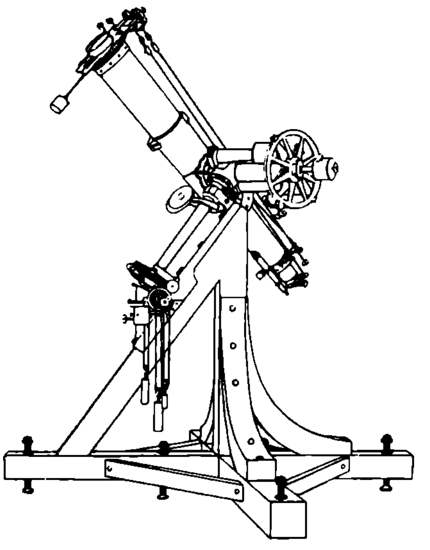
Als Längeneinheit wurde in der Astronomie in diesem Zusammenhang das Parsec (aus Parallaxe und Sekunde, Zeichen: pc) eingeführt. 1 pc ist jene Entfernung, von der aus die Astronomische Einheit (1 AE) unter einem Winkel von 1″ erscheint. Es gilt $1\,\mathrm{pc} = 30{,}856\,776 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$.
Der Stern Proxima Centauri (im südlichsten Teil des Sternbildes Centaurus, am südlichen Sternhimmel in der Milchstraße gelegener Fixstern) hat eine Entfernung von 1,31 pc (entsprechend der Parallaxe von 0,765″), das sind 4,3 Lichtjahre. Er ist der Fixstern mit der geringsten Entfernung von der Erde bzw. mit der größten Parallaxe. Der hellste Fixstern des Himmels ist der Sirius (im Sternbild Großer Hund gelegen). Seine Entfernung beträgt 2,7 pc, das sind 8,8 Lichtjahre. Der Polarstern ist etwa 120 pc (oder 400 Lichtjahre) entfernt. Da durch direkte Beobachtung Parallaxen kleiner als $\frac{1}{100}$ Sekunde nicht meßbar sind, zeigen Sterne, die weiter als etwa 100 pc entfernt sind, keine merkliche Parallaxe.
Auf die astronomischen Methoden zur Messung von Parallaxen kann hier nicht eingegangen werden.

Von Copernicus bis Bessel

Zur Zeit des Nicolaus Copernicus konnten die Gelehrten keine Parallaxe eines Fixsternes feststellen. War aber die Copernicanische Hypothese von der sich um die Sonne bewegenden Erde richtig, so mußte es Fixsternparallaxen geben.
Für Copernicus war das Fehlen des parallaktischen Winkels ein Hinweis darauf, daß die Entfernung der Sterne so groß wäre, daß auch von der Erdbahn eine Parallaxe nicht bemerkt werden kann.
Bis ins 19. Jahrhundert gab es zahlreiche Versuche der Astronomen, die Fixsternparallaxen nachzuweisen. Für die Anhänger der heliozentrischen Hypothese des Copernicus (wie Kepler, Galilei) wäre die Messung von Parallaxen ein Beweis für ihre Richtigkeit, für die Gegner der Copernicanischen Hypothese (wie Brahe) wäre das Mißlingen einer Parallaxenmessung ein Argument gegen ihre Richtigkeit. Über den „Kampf“ um die Messung von Fixsternparallaxen von Copernicus bis Bessel kann hier nicht ausführlich berichtet werden. Es sei auf das Buch „Kosmische Weiten – Geschichte der Entfernungsmessung im Weltall“ von D. B. Herrmann (Leipzig: Verlag J. A. Barth) verwiesen.
Auf dem langen Weg der Versuche, Fixsternparallaxen nachzuweisen, wurden häufig voreilig Erfolge gemeldet, die sich jedoch schnell als scheinbar erwiesen, weil die Ortsabweichungen auf andere Ursachen zurückgeführt werden konnten.
Um den Nachweis von Fixsternparallaxen bemühten sich Naturforscher und Astronomen wie Tycho Brahe, Johannes Kepler, Galileo Galilei, Robert Hooke, Giovanni Cassini, John Flamsteed, Ole Römer. James Bradleys Beobachtungen (zwischen 1725 und 1728) führten zur Entdeckung der sog. Aberration (eine ungewollte Bestätigung einer Erdbewegung!).
Bradleys Beobachtungen ließen „keinen Zweifel“ darüber, daß die Parallaxen einiger „Sterne der ersten Größe eine Kleinheit besitzen, welche sie unter die Größen versetzt, über deren wirkliches Vorhandensein auch die genauesten Meridianinstrumente der jetzigen Zeit [1838] nur mit großer Schwierigkeit eine sichere Entscheidung herbeiführen können“. Dies schrieb Bessel in seinem im 16. Band der „Astronomischen Nachrichten“ (1838) gegebenen Bericht über seine Bestimmung der Parallaxe und der Entfernung eines Sterns (aus dieser Arbeit wird im folgenden mehrmals zitiert).
Wilhelm Herschel hatte die Idee, „die Beantwortung der schwierigen Frage nach der jährlichen Parallaxe der Fixsterne, welche sich nur ihrer Kleinheit wegen der Bestimmung entzogen hatte, durch die Doppelsterne zu suchen“. Es sollte nicht die Parallaxe eines Sterns direkt, sondern die Parallaxendifferenz zweier optischer (also scheinbarer) Doppelsterne von sehr verschiedener Leuchtkraft bestimmt werden. „Unter der *Voraussetzung*, daß die Entfernungen der beiden einen Doppelstern zusammensetzenden Sterne von unserem Sonnensystem ein beträchtlich von der Gleichheit verschiedenes Verhältnis haben, muß die jährliche Parallaxe periodische Einflüsse auf die scheinbare Entfernung des einen von dem andern erhalten, welche Herschel aus Beobachtungen, zu verschiedenen Zeiten des Jahres angestellt, hervorgehen zu sehen hoffte.“ Herschel entdeckte zahlreiche Doppelsterne, doch die meisten entsprechen nicht seiner Voraussetzung.
Überdies waren die Meßinstrumente zu Herschels Zeit noch zu mangelhaft, als daß Parallaxen hätten gemessen werden können. „Ich glaube nicht“, schrieb Bessel, „daß durch alle die angeführten Versuche, die Parallaxe der Fixsterne zu entdecken, etwas anderes gewonnen ist als die Überzeugung, daß sie *sehr kleine*, sich den gewöhnlichen Beobachtungsarten entziehende Größen sind.“ Eine Voraussetzung zur Messung dieser kleinen Winkel war also eine gezielte Weiterentwicklung der Meßgenauigkeit astronomischer Instrumente.

Es ist dem Physiker Joseph von Fraunhofer vorbehalten gewesen, „das mikrometrische Messen der Kraft selbst sehr starker Fernrohre angemessen zu machen“, betonte Bessel. In den 30er Jahren des 19. Jahrhunderts gab es zwei Apparate, die dieses leisteten: das große Fernrohr (Fraunhofer-Refraktor) der Sternwarte in Dorpat (heute: Tartu) und das große Fraunhofer-Heliometer der Sternwarte in Königsberg (heute: Kaliningrad).

Bild 5



In Dorpat versuchte Wilhelm Struve ab 1835 am scheinbaren Doppelstern Wega (α Lyrae) mit „Begleiter“ (der die Herschelschen Voraussetzungen erfüllte) eine Parallaxe zu finden. (Die Wega im Sternbild Lyra – einer der Sterne des Sommerdreiecks – gehört zu den hellsten Sternen des Himmels.)
Ende 1829 hatte die Königsberger Sternwarte, deren Direktor F. W. Bessel war, das neue Heliometer aus der Münchener Werkstatt von Fraunhofer erhalten (Bild 5). Die Beobachtungsgenauigkeit dieses Instruments erzeugte in Bessel die Hoffnung, daß es damit gelingen würde, „statt der Überzeugung von der Kleinheit der jährlichen Parallaxe der Fixsterne, in günstigen Fällen ihre Bestimmung zu erhalten“. Schon 1815/16 hatte Bessel versucht, am „durch die stärkste eigene Bewegung ausgezeichneten Doppelstern 61 Cygni“ die jährliche Parallaxe nachzuweisen. Vom Herbst 1834 an beobachtete Bessel diesen Stern 61 Cygni im Sternbild „Schwan“ (Kreuz des Nordens, Cygnus) erneut (Bild 6). Er wählte ihn „nicht allein wegen der größeren Aussicht auf eine merkliche Parallaxe, die er, wegen seiner großen eigenen Bewegung, darzubieten schien, sondern auch weil er ein *Doppelstern* ist, den man mit vorzüglicher Genauigkeit beobachten kann, indem man das Bild, welches die eine Hälfte des Heliometerobjektives von dem zu vergleichenden Stern macht, in die Mitte der beiden Sterne des von der andern Hälfte abgebildeten Doppelsterns legt; auch empfahl er sich durch seinen Ort am Himmel, der zu allen Jahreszeiten, einen Monat ausgenommen, *bei Nacht* in eine hinreichende Höhe über dem Horizont gelangt; endlich durch die zahlreichen kleinen Sterne, die ihn umgeben, unter

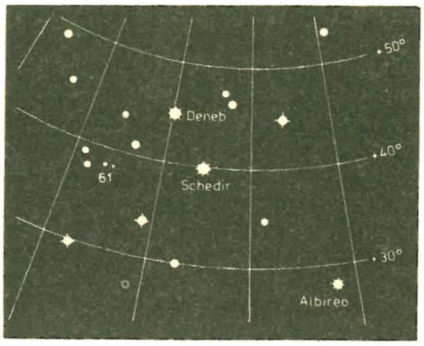


Bild 6

welchen man Vergleichungssterne nach Belieben auswählen konnte". 1835/36 mußte Bessel seine Beobachtungen unterbrechen. Vom 16. August 1837 bis zum 2. Oktober 1838 verbrachte Bessel dann nahezu 100 Nächte mit der Beobachtung. Darüber hinaus mußte er zahlreiche Berechnungen machen. Doch dann gab es keinen Zweifel mehr an der Merklichkeit der Parallaxe des Sternes „61 Cygni". Im 16. Band der „Astronomischen Nachrichten" vom Dezember 1838 publizierte Bessel eine Abhandlung darüber, die später auch von ausländischen astronomischen Fachzeitschriften übernommen wurde.

Bessel hatte erkannt: Der Stern „61 Cygni" besitzt eine jährliche Parallaxe von 0,3136". Hieraus berechnete er seine Entfernung zu 657 700 AE und die Zeit, welche das Licht braucht, um diese Entfernung zu durchlaufen, zu 10,28 Jahren.

Mit diesem Erfolg gab Bessel sich nicht zufrieden. Er wollte durch Weiterführung bzw. Wiederholung der Beobachtungen den gemessenen und berechneten Parallaxenwert bestätigen bzw. absichern. Vom 12. November 1838 bis 23. März 1840 richtete Bessel erneut seinen Blick in das Sternbild Schwan. Die rechnerische Auswertung der Messungen sowohl dieser als auch der ersten Meßreihe ergab nun die Parallaxe von 0,3438" ± 0,0141". „Diese längere Fortsetzung der Beobachtungen hat [also] eine Vergrößerung der jährlichen Parallaxe von 0,0347" herbeigeführt. [Dieser] Bestimmung entspricht die Entfernung = 592 200 mittleren Entfernungen der Erde von der Sonne, welche das Licht in 9½ Jahren durchläuft."

Nur kurze Zeit nach Bessels erstmaliger Bestimmung einer Fixsternparallaxe (und damit der ersten Bestimmung der Entfernung eines Fixsterns) konnte Wilhelm Struve auf der Dorpater Sternwarte den Parallaxennachweis für die Wega und Thomas Henderson auf der Kapsternwarte in Südafrika den Parallaxennachweis für den sehr hellen Stern α Centauri bekanntgeben.

Das jahrhundertelange Suchen nach dieser astronomischen Bestätigung der heliozentrischen Hypothese hatte endlich Erfolg. Fast 300 Jahre wurde die astronomische Wissenschaft durch diese Suche stimuliert (Verbesserung der Meßkunst, der Beobachtungsgeräte usw.) und durch weitgreifende Erkenntnisse bereichert (Entdeckung der Aberration, Entdeckung der Doppelsterne u. a.). In diesem Sinne konnte Bessel die *Lösung* des Problems der Fixsternparallaxe für „fast unbedeutender vergleichsweise mit den weitgreifenden Kenntnissen, welche das *Suchen* derselben der Wissenschaft hinzugesetzt hat", halten.

Bessels erfolgreiche Parallaxenbestimmung zeugt von der hohen Vollendung der durch Bessel begründeten neueren astronomischen Meßkunst (seinem Bestreben, überall die größte Genauigkeit zu erreichen) und von der außerordentlichen Genauigkeit der durch das Fraunhofersche Institut hergestellten Instrumente.

Mit diesem Ereignis, dem (noch im 19. Jahrhundert) die ersten astrophysikalischen Versuche zur Erforschung der Sternenwelt folgten, begann das bis in die Gegenwart reichende Zeitalter der Stellarastronomie (jener Teilgebiete der Astronomie, die sich mit den Sternen beschäftigen) als einer exakten Wissenschaft.

Der Astronom, Geodät und Mathematiker Friedrich Wilhelm Bessel gilt auch heute noch als unerreichter Meister der astronomischen Meß- und Beobachtungskunst.

Eine ausführliche Bessel-Biographie von J. Hamel erscheint in der Reihe „Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner" im Leipziger Teubner-Verlag. *H. Pieper*

Drei harte Nüsse

Aufgaben

▲1▲ Für eine Funktion f gelte $f(x+h) = f(x) + h$ und $f(0) = 2$. Berechne $f(3)$!

▲2▲ Bestimme den größten Wert, den $\sin - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ annehmen kann!

▲3▲ Eine Person hat 30 000 Kr. gespart. Der jährliche Zinssatz beträgt 11,6 %. Nach wieviel Jahren hat er 100 000 Kr.?

Aus dem Problemheft 1984 der norwegischen Zeitschrift *Tidskift för Matematik, Fysik och Kemi*; Aufgaben ausgewählt und bearbeitet von *Dr. W. Moldenhauer, PH Erfurt*

Lösungen

▲1▲ Aus $x = 0$ folgt $f(h) = f(0) + h$, $= 2 + h$ und damit $(h = 3)$ $f(3) = 2 + 3 = 5$.

▲2▲ Es ist $\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$= \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}.$$

Der größte Wert ist damit $\sqrt{2}$. Er wird für $x = \frac{3\pi}{4}$ angenommen.

▲3▲ Es gilt $30\,000 \cdot 1{,}116^n = 100\,000$ (siehe z. B. Kleine Enzyklopädie Mathematik), also $n \lg 1{,}116 = 1 - \lg 3$, $n \approx 10{,}97$. Nach 11 Jahren hat er den genannten Betrag erspart.

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Spezialistenferienlager Mathematik

Der *Kreisklub Junger Mathematiker* Senftenberg führte 1984 bereits zum dritten Mal ein zehntägiges Spezialistenferienlager zu Beginn der Sommerferien durch. Diesmal fand das Lager in Ortrand statt. Vormittags standen 3 bis 4 Stunden Mathematiktraining auf dem Programm. Nachmittags konnten sich die etwa 40 Schüler der 5. bis 9. Klassen vielfältig betätigen. Es wurden ein Schwimmfest, ein Sportfest, ein Kinobesuch, Betriebsbesichtigungen, eine Buchlesung und ein Museumsbesuch organisiert.

Eine Tagesfahrt führte die *Jungen Mathematiker* nach Dresden. Höhepunkte waren für alle die Lagerolympiade, bestehend aus zwei Klausuren und die Spielereien um das Jahr 1985, von denen wir zwei vorstellen möchten.

▲1▲ Die Zahlen von 385 bis 409 sind in ein magisches Quadrat fünfter Ordnung einzutragen, so daß sich in jeder Zeile, in jeder Spalte und in beiden Diagonalen die gleiche Summe ergibt!
Wie lautet diese Summe?

▲2▲ Stellt die Zahlen 0 ... 150 unter alleiniger Verwendung der Ziffern 1, 9, 8, 5 (in dieser Reihenfolge) und aller möglichen Rechenzeichen dar!
Viel Spaß beim Knobeln!

R. Drendel

Wer besonders elegante Lösungen gefunden hat, oder wer Zahlen über 150 auf diese Weise elegant gelöst hat, sende seine Beispiele an: R. Drendel, 7846 Senftenberg, Bergbaustr. 8, Kennwort: 1985!

alpha-Wettbewerb 1983/84

Preisträger

Birger Strauch, Anklam; Veneta Türke, Auerbach; Beatrice List, Altenburg; Claudia Raßbach, Bad Liebenstein; Mario Winter, Sven Völker, Marcus Markardt, Ute Partsch, René Wohlfahrt, Michael Henning, alle Bad Salzungen; Bernd Trappe, Robert Krüger, Jeannette Schmiedel, Wilko Wohlauf, Peter Zülsdorff, alle Berlin; Alice Kraneis, Bernburg; Angela Herrmann, Jens Baumann, beide Bernsbach; Matthias Jurke, Silvio Löffler, Thomas Reißner, alle Cottbus; Wolfgang Jäckel, Demitz-Thumitz; Thomas Kaufhold, Dingelstädt; Ramona Kaiser, Dörfel; Ulrich Hartung, Hans Wirth, Birgit Jeske, Hans-Harald Neschke, alle Dresden; Martin Welk, Eisenach; Olaf Krause, Eisenhüttenstadt; Dirk Lange, Elsterwerda; Irena Thiele, Gniest; Christoph Kothe, Birgit Sommer, Matthias Grau, alle Görlitz; Michaela Große, Gohrau; Michael Hanke, Gräfenhainichen; Katrin Dierschke, Thilo Kuessner, beide Greifswald; Sven Rudolph, Großröhrsdorf; Bernd Rieche, Halle; Thomas Gerlach, Haynrode; Birgit Bremer, Heiligenstadt; Klub Jg. Math. der P.-Schreier-OS, Hennigsdorf; Ivette Roscher, Hermannsdorf; Stefan Heiber, Heyda; Glenn Hofmann, Hohenstein-E.; Henry Wiesjahn, Holzendorf; Christine Priplata, Jena; Klaus Erdmann, Joachimsthal; Nico Schmidt, Jüdenberg; Antje Fischer, Kleinmachnow; Günter Doppler, Josef Pernersdorfer, Josef Blauensteiner, alle Krems (Österreich); Henrik und Jana Hodam, Kaltennordheim; Christian Dorschner, Karl-Marx-Stadt; Jaqueline Eichhorn, Lauscha; Andreas Englisch, Roland Hildebrand, beide Leipzig; Giselher Schütze, Magdeburg; Andreas Hübler, Mittelbach; Christian Eisele, Mölkau; Steffen Scharnowski, Möser; Steffen Ewert, Jens Burmann, Rüdiger Grewe, alle Neuhaus; Michael Herrmann, Oberlichtenau; Carola Sachs, Parchim; Felix Kraenz, Picher; Wolfgang Schneider, Radeberg; Falk Klätte, Dirk Gemeinhardt, beide Riesa; Ute Möller, Annett Kistner, Karen Meyer, Daniela Wulff, Doris Bräuer, Barbara Menzel, alle Rostock; Jens Krüger, Remo Karius, beide Rotta; Marcus Spindler, Sangerhausen; Ronald Bojarski, Saßnitz; Christian Mudra, Schmalkalden; Tobias Franke, Schrebitz; Reiner Möwald, Sömmerda; Ilka Fibry, Sondershausen; Daniel Potts, Stavenhagen; Thomas Heublein, Steinach; Thomas Reumschüssel, Steinbach-Hallenberg; Uta Dietze, Christiane Ellenbeck, beide Stendal; Una Brock, Stralsund; Claudia Schwartz, Suhl; Anja Tippe, Teterow; Veronika Fischer, Annett Wiesner, beide Töplitz; Mario Gimpel, Michael Pforr, Simone Schwarz, alle Unterbreizbach; Frederik Schiller, Voigtsgrün; Sven Langer, Weißwasser; Ralf Klötzer, Wilkau-Haßlau; David Reuter, Frank Schräpel, Gereon Begau, Kirsti Linke, alle Worbis; Katrin Kadow, Wusterhusen; Markus Lehmann, Zittau

Vorbildliche Leistungen

Uta Schmidt, Altenburg; Stefan Ulbrich, Bad Liebenstein; Gerit Glock, Bad Salzungen; Petra Döring, Matthias Röder, Anja Pruchnewski, alle Berlin; Karsten Hille, Bernau; Ingrid Voigt, Böhlen; Christina Werner, Bötzow; Dirk Feuerherdt, Brandenburg; Martin Leitel, Cottbus; Anke Mehner, Dörfel; Jens Meyer, Dresden; Yvonne Arnhold, Elsterwerda; Maik Denner, Empfertshausen; Jörg Simon, Engelsdorf; Axel Pätzold, Flecken Zechlin; Holger Hänchen, Forst; Ramona Dietrich, Gräfenhainichen; Yvette Vogelsberger, Greifswald; Angelika Dengel, Groitzsch; Britta Struwe, Halberstadt; Schulclub der EOS W. Pieck, Heiligenstadt; Rafael Göpfert, Hermannsdorf; Hagen Reimann, Horka; Marco Ringel, Jänickendorf; Tobias Walke, Peter Wendt, beide Karl-Marx-Stadt; Torsten Schütze, Klettenberg; Markus Bauer, Krems (Österreich); Gert Wollny, Leipzig; Sven Pfeffer, Magdeburg; Karina Kramp, Menz; Swen Funk, Mülsen; Roland Schmugler, Rosa Flint, Martina Schulz, alle Neuhaus; Jens Sbresny, Oberschönau; Falk Müller, Oelsnitz; Carola Walter, Ottendorf; Uwe Anke, Pappendorf; Michael Taeschner, Parchim; Gunter Döge, Riesa; Holger Franke, Roskow; Ulf Gebhardt, Mirek Riedewald, Karin Stüpmann, alle Rostock; Matthias Fuhrland, Schmalkalden; Stefan Erb, Schwallungen; Daniel Küstner, Schöneiche; Axel Bichler, Sondershausen; Sven Janssen, Sabine Kaiser, Chris Janssen, alle Tornau; Daniela Scholich, Ueckermünde; Ellen Stephan, Unterbreizbach; Edith und Hartmut Boettcher, Weimar; Silvio Ladusch, Weißwasser; Andrea Maas, Wilhelmsburg; Christiane Lehmert, Marko Reuter, Frank Raabe, Marko Bock, alle Worbis; Ines Hauke, Zehdenick; Sascha Hempel, Zella-Mehlis; Ilka Gehrke, Unterbreizbach; AG Math. d. Fr.-Schmenkel-OS Roskow

Abzeichen in Gold

Für siebzehnjährige Teilnahme
Lutz Püffeld, Hennigsdorf

Für sechzehnjährige Teilnahme
Guido Blosfeld, Halle; Bernd Hanke, Löbau

Für fünfzehnjährige Teilnahme
Ullrich Riedel, Flöha

Für vierzehnjährige Teilnahme
Arno Feuerherdt, Brandenburg; Rainer Seifert, Dessau; Ursula Märker, Greifswald; Thomas Jakob, Gera; Norbert Littig, Kleinröhrsdorf; Uwe Bormann, Magdeburg; Frank Aßmus, Oranienburg; Bernhard Tschada, Weimar

Für dreizehnjährige Teilnahme
Andreas Fittke, Berlin; Bengt Nölting, Greifswald; Wolfgang Seeber, Jena; Rolf Kuhn, Leipzig; Lothar Gruber, Linz (Österreich); Gerald Werner, Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Katrin Richter, Wittenberg; Kurt Oertel, Zschornewitz

Für zwölfjährige Teilnahme
Andreas Gude, Berlin; Frank Regensburger, Dresden; Andrea Ziegenbein, Eichicht; Eberhard Georgy, Erfurt; Wolfhart Umlauft, Freital; Steffen Langbein, Lichte; Rainer Bauer, Mittweida; Wilfried Röhnert, Radebeul; Thomas Apel, Reichenbach; Torsten Löwe, Schleiz; Heinz-Olaf Müller, Schmalkalden; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Ralf Becker, Wolmirstedt

Für elfjährige Teilnahme
Henry und Dieter Koch, Arnstadt; Jens Purand, Cottbus; Annett Körner, Dresden; Daina Semper, Eisleben; Bernd Dübe, Forst; Silvio Klose, Gera; Matthias Weser, Großenhain; Hubert Steinmetz, Grüningen; Rüdiger Düsing, Halle; Ruth Jacobs, Halle-Neustadt; Rolf Kamieth, Kakerbeck; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Martina Wolf, Magdeburg; Udo Kretzschmann, Markneukirchen; Jörg Pöhland, Klingenthal; Sigrid Planke, Premnitz; Roland Bracholdt, Riesa; Jana Walter, Röbel; Ina und Uwe Ebert, Ruppendorf; Siegrid Kretschmann, Schlagsdorf; Torsten Jeschke, Schwarzheide; Bernd Hartwig, Thaldorf; Frank Erdmann, Zeitz

Für zehnjährige Teilnahme
Guntram Türke, Auerbach; Claudia Ziehm, Eike Harmel, beide Berlin; Maik Weide, Callenberg; Harry Höfer, Dorndorf; Jörn Wittig, Andreas Winkler, Karl-Heinz Jünger, Carolin Engel, Ingolf Körner, alle Dresden; Thomas Mittelbach, Erfurt; Jörg Butter, Freiberg; Angela Illing, Gersdorf; Michael Katzer, Greußen; Heike Klitz, Grimmen; Volker Reck, Heiligenstadt; Mathias Grundmann, René Schüppel, beide Hoyerswerda; Horst Fliegner, Jarmen; Thomas Mader, Jens Pönisch, Andreas Hengst, Conchita Röske, alle Karl-Marx-Stadt; Steffen Rieth, Klostermansfeld; Per Witte, Königs Wusterhausen; Gudrun Hebestreit, Mühlhausen; Stefan Göckeritz, Neuenkirchen; Sigrun Massanek, Neusornzig; Karsten Woike, Neustadt; Birgit Uhlmann, Oberlungwitz; Anett Schulzensohn, Oberseifersdorf; Jens-Peter Planke, Premnitz; Claudia Trochold, Reichenbach; Klaus-Detlef Gehrke, Rostock; Roland Goldenbogen, Stralsund; Heidrun Tiedt, Teterow; Hans und Michael Creutzburg, Thal; Gudrun Thäter, Weimar; Olaf Seidel, Weißwasser; Eva-Maria Heubner, Wolfen; Birgit Schultheiß, Wüstenbrand; Dirk-Thomas Orban, Erfurt; Uwe Maaz, Arnstadt

Für neunjährige Teilnahme
Frank Baumgart, Aschersleben; Karsten Schlutter, Babelsberg; Marc Schewe, Berlin; Axel Schüler, Birkenhügel; Tilman Völzke, Böhlen; Stefanie Begau, Breitenworbis; Uta Boldt, Burg Stargard; Guido Mehne, Calbe; Royald Lenk, Cottbus; Petra Sarodnik, Dallgow; Jörg Hempelt, Stefan Edelmann, Ulf Riechen, alle Dresden; Siegfried Obst, Reinhard Weißnicht, beide Eberswalde; Matthias und Susanne Schreiber, Elsterwerda; Matthias Bauer, Genthin; Wilfried Schleinitz, Greifswald; Veit-Thomas Meyen, Grimmen; Dieter Seifert, Hagenow; Günter Schielinsky, Halle-Neustadt; Heinz Wickner, Hermannsdorf; Ralf Häntsch, Köthen; Roger Fischl, Lehmitz; Jörg Drechsel, Leinefelde; Lutz Hübschmann, Lößnitz; Uwe Würker, Mülsen; Hans-Dieter Büchler, Neustadt; Ralph Gruber, Plauen; Tim Planke, Premnitz; Manfred und Ina Hille, Riesa; Gunnar Jeschke, Schwarzheide; Thomas Merten, Stralsund; Klaus Pfeiffer, Taubach; Birgit Schmidt, Weißwasser; Rolf Heubner, Wolfen; Steffen Klimpel, Wolgast; Karl Oertel, Zeitz; Kerstin Hoffmann, Zittau; Uta Escher, Zwickau; Torsten Eidner, Zeulenroda; Karsten Milek, Hohen-Neuendorf.

Für achtjährige Teilnahme
Michael Elte, Ahlum; Jens Fache, Altenburg; Silke Rechner, Baruth; Andreas Jock, Blankenfelde; Thomas Streich, Marlis Schröder, beide Brandenburg; Ralph Voigtländer, Calbe; Uwe Schütze, Camin; Roland Damm, Cottbus; Andreas Mann, Cunersdorf; Frank Sarodnik, Dallgow; Ulrich Schuster, Demitz-Thumitz; Georg Kirchner, Dermbach; Stefan Franze, Brigitte Rotter, Heike Lauter, Lutz Lauter, Titus Ziegler, Catherin Engel, alle Dresden; Uwe Wollert, Edderitz; Achmed und Britta Schulz, Greifswald; Bettina Weser, Großenhain; Kirsten Schlegel, Grünhain; Michael Schulze, Halberstadt; Dany Lindenberg, Frank Siebert, beide Halle; Holger Hartmann, Hartmannsdorf; Hagen Fritsch, Hosena; Claus Janke, Ilmenau; Andreas Niepel, Ricarda Damm, beide Karl-Marx-Stadt; Heiko Schinke, Leuna; Karl-Heinz Gora, Lohsa; Anke Misch, Magdeburg; Sabine Oestreich, Oschersleben; Gudrun Zirnstein, Pirna; Iljana Planke, Premnitz; Frank Berndt, Radeburg; Ines Gülden, Roitzsch; Jürgen Schmalisch, Reuden; Gitta Schöne, Rostock; Kurt Schulze, Schernberg; Ronald Bojarski, Saßnitz; Sylke Lüder, Schönborn; Frank Pampel, Schneeberg; Jens Hoffmann, Sebnitz; Mario Jäpel, Spremberg; Birgit Lorenz, Waren; Hartmut Boettcher, Weimar; Dietmar Polster, Zeithain; Christina Voß, Zepernick; Ruth Backhaus, Leinefelde

Die Träger des **Abzeichens in Gold** für sieben-, sechs-, fünf- und vierjährige Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb veröffentlichen wir im Heft 2/85.

In freien Stunden · alpha-heiter

Kryptarithmetik

● Angeregt durch die Wettbewerbsaufgaben aus *alpha* 6/83 probierte Andreas Englisch aus Leipzig, ob die Aufgabe (Bild links) eindeutig lösbar ist. Er fand gemeinsam mit seinem Vater einen Lösungsweg.

$$\begin{array}{r} S\,E\,C\,H\,S \\ +\;S\,E\,C\,H\,S \\ \hline Z\,W\,O\,E\,L\,F \end{array} \qquad \begin{array}{r} S\,I\,E \\ -\;E\,R \\ \hline E\,S \end{array} \qquad \begin{array}{r} D\,O\,R\,F \\ +\,S\,T\,A\,D\,T \\ \hline K\,R\,E\,I\,S \end{array}$$

● Birgit Sommer (Kl. 6) aus Görlitz schlägt dem *alpha*-Leser vor, folgende Subtraktionsaufgabe zu lösen (Bild Mitte) und

● Andreas Suchanow (Kl. 6) aus Neubrandenburg schlägt folgende Aufgabe vor (Bild rechts).

Wortspiele

J	A	H	R
Z	A	H	L

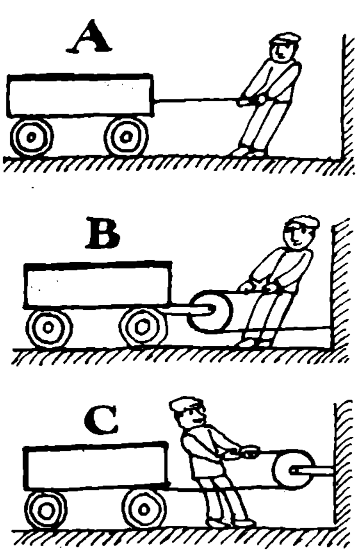
G	R	A	D
G	R	O	S

H	A	L	B
W	E	R	T

Fachlehrer D. Knape, Jessen

Hau ruck

Wer bewegt den Wagen mit dem geringsten Kraftaufwand?



Aus: Pionierleiter, Berlin

Alpha-Logeleien

● Er: „Welches Datum haben wir eigentlich heute?“ – Sie: „Weiß ich auch nicht, aber schau doch mal in der Zeitung nach!“ –
Er: „Zwecklos, die ist doch von gestern.“

● „Hör mal“, sagt Monika zu Marie-Luise, „warum antwortest du auf jede Frage mit einer Gegenfrage?“ – „Tu ich das wirklich?“

● „Vati, heute mußten wir in der Schule den gemeinsamen Nenner suchen.“ – „Was, den haben sie immer noch nicht gefunden? Den mußten wir doch auch schon suchen!“

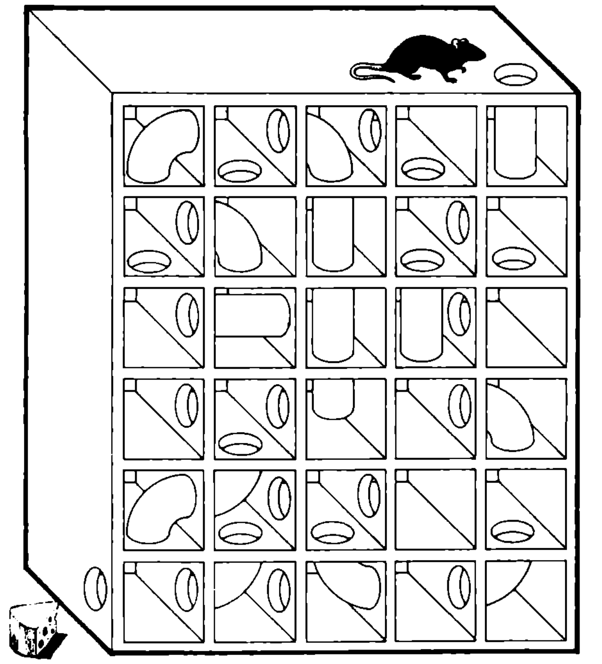
● „Haben wir uns nicht schon einmal zur Kreisolympiade getroffen?“ – „Nein, ich bin noch nie zur Kreisolympiade gewesen.“ – „Ich auch nicht, da werden es wohl zwei andere gewesen sein!“

● 2g liegen auf der rd. – L4a spielt Kla4. – 8tung, das sn ist fertig. – R riß dn Zl nt2. – Man ist nie 1am, wenn man eine Run3se m8.

Labyrinth

Welchen Weg muß die Maus nehmen, um zum Käse zu gelangen?

Aus: Füles, Budapest



Tierisches

● Die Seite eines einjährigen Tieres kostet 12 Cent je kg weniger als die Seite eines Lammes. Die Seiten beider Tiere wiegen zusammen 24 kg. Das Lamm kostet \$ 16,35 und das einjährige Tier \$ 59,85.
Wieviel wiegt jede Seite?

● Ein Kaninchen wiegt mit Kiste 4 kg, eine Ente mit Kiste 5 kg. Ente und Kaninchen wiegen zusammen 3 kg.
Welche Masse hat die Kiste?

Aus: The Australian Mathematics Teacher

Autonummern-Mathematik

Auf dem Heimweg von der Schule studieren Peter und Klaus die Kennzeichenschilder auf der Straße parkender Autos.
Peter zeigt auf ein Nummernschild 28-57 und sagt: „Sieh mal, Klaus, die Summe der beiden zweiziffrigen Zahlen 28 und 57 ist gleich der aus den beiden Innenziffern 8 und 5 gebildeten zweistelligen Zahl 85. Wieviel derartige Möglichkeiten bei vierziffrigen Autonummern wird es wohl geben, und wieviel Prozent von allen Autonummern werden sie ausmachen?"
Am nächsten Tage bringt Klaus Lösungsweg und Lösung in die Schule mit. Kommst du auch darauf?

Dr. W. Lorenz, Leipzig

Bruchrechnung

$$\frac{\text{SCH}}{8} \quad \frac{\text{H}}{\text{O}} \quad \frac{\text{K}}{\pi} \quad \frac{\text{WIL}}{\text{HELM}}$$

Dipl.-Ing. M. Wilde, Leipzig

Mathematiker gesucht

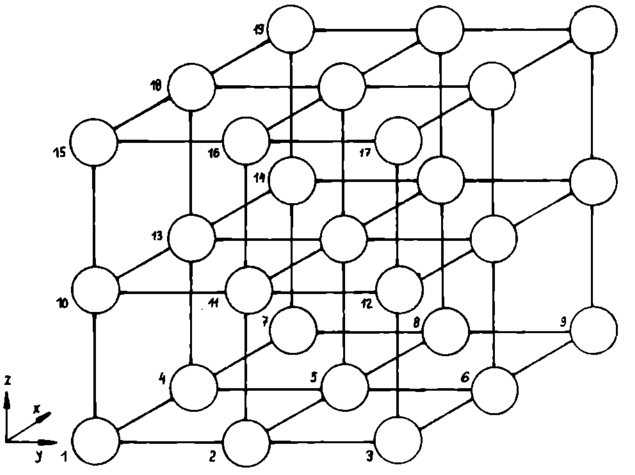
In dem folgenden Brief sind die Nachnamen von 20 bedeutenden Mathematikern aus der Vergangenheit versteckt (als aneinandergereihte Buchstabenfolgen, wobei Satzzeichen, Zwischenräume und die Groß-Klein-Schreibung unberücksichtigt bleiben sollen). Findet diese Namen heraus!

Liebe Eltern!
Im Ferienlager gefällt es mir sehr gut. Ich bewohne mit Alice Vatter, Eva Belger und Marie Mannheim ein Viermannzelt. Auch Adam Arden, Simon Gerlach, Alfred Holm, Petra Schmidtgen und Regina Möbius aus meiner Klasse sind hier. Unser Lagerleiter ist Herr May; er ist sehr groß, und wir nennen ihn den „Riesen". Auch Anke Liebers, so heißt unsere Pionierleiterin, ist nicht gerade klein. Beide sind sehr nett und immer guter Laune.
Gestern habe ich bei einem Ausflug nach Parchim Edes Schwester Dana getroffen. Sie ging aus sich heraus und erzählte mir einiges: Ede ist inzwischen Major; Dana will nächstes Jahr heiraten. Ihr Freund heißt Helmut Stein; er studiert in Halle. Hier im Lager ist jeder Tag wie neu. Lernen kann man auf Schritt und Tritt. Ich habe eine neue Freundin. Sie heißt Ines Ristok. Es ist immer sehr interessant, sich mit ihr zu unterhalten. Liebe Mutti, bitte sag Alois Bescheid, daß ich ihm gleich nach meiner Rückkehr die geliehenen Bücher zurückgebe.
Herzliche Grüße, Eure Viola!

Dr. R. Mildner, Karl-Marx-Universität Leipzig

Kreuzzahlrätsel – dreidimensional

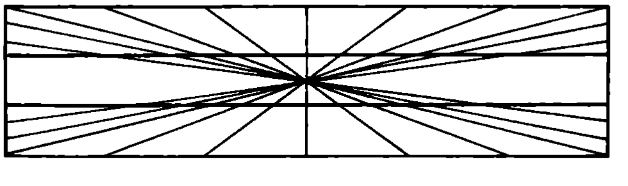
In jeden Kreis ist eine Ziffer einzutragen, so daß sich in den Richtungen (Koordinaten) x, y und z die unten definierten dreistelligen Zahlen ergeben.
Richtung x:



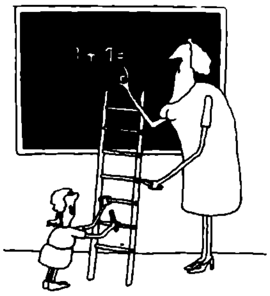
x1) eine Quadratzahl; 2) die Quersumme dieser Zahl ist eine Quadratzahl; 3) zugleich Quadratzahl und Kubikzahl; 10) die Quersumme dieser Zahl ist gleich der Quersumme von y14); 11) Zahl aus gleichen Ziffern; 12) ist die Quersumme von z9); 15) Spiegelzahl von z6); 16) die Zahl aus den beiden ersten Ziffern ist das Doppelte der letzten Zahl; 17) eine Primzahl.
Richtung y:
y1) eine Primzahl; 4) diese Zahl ist das Querprodukt von z1); 7) eine Primzahl; 10) die Fakultät der Quersumme von x16); 13) eine Quadratzahl; 14) diese Zahl ist das Querprodukt von x3); 15) eine Primzahl; 18) Nachfolger von x16); 19) eine Primzahl.
Richtung z:
z1) liest man diese Quadratzahl rückwärts, bleibt sie dieselbe; 2) eine Primzahl; 3) von vorwärts und rückwärts gelesen die gleiche Zahl; 4) eine Primzahl; 5) Spiegelzahl von z8); 6) eine Kubikzahl; 7) eine Kubikzahl; 8) eine Quadratzahl; 9) eine Quadratzahl.

Ing. H. Decker, Köln

Optische Täuschung



Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Höhere Mathematik
Lothar Schneider

Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1985

Mathematik

Ma 5 ■ 2522 Zwei befreundete Touristen kaufen Ansichtskarten von unserer Hauptstadt Berlin. Jeder von ihnen gibt dafür den gleichen Betrag aus. Der erste kauft Ansichtskarten zu 25 Pf, der zweite zu 35 Pf das Stück, der zweite aber 2 Ansichtskarten weniger als der erste. Wieviel Ansichtskarten hat jeder dieser beiden Touristen gekauft?

Ma 5 ■ 2523 Es ist die kleinste natürliche Zahl zu ermitteln, die bei Division durch 12 den Rest 2, bei Division durch 16 den Rest 6 läßt.

Schülerin Sandra Fabian, Liederstädt

Ma 5 ■ 2524 In einem Ferienlager werden 170 Kinder der unteren Klassen betreut. Von ihnen können 70 Kinder radfahren und 125 Kinder schwimmen. Sowohl radfahren als auch schwimmen können genau 45 dieser Kinder. Ermittle die Anzahl derjenigen Kinder, die weder radfahren noch schwimmen können!

Schüler Tilo Taupitz, Weinböhla

Ma 5 ■ 2525 In dem Kryptogramm

$$\begin{array}{r} \text{DREI} \\ +\text{EINS} \\ \hline \text{VIER} \end{array}$$

sollen die Buchstaben durch Grundziffern ersetzt werden. Für gleiche Buchstaben sollen gleiche, für verschiedene Buchstaben sollen verschiedene Grundziffern eingesetzt werden. Begründe, daß es keine Lösung dieser Aufgabe für die geforderten Bedingungen geben kann!

Ma 5 ■ 2526 Jeder der 13 Spieler einer Mannschaft A spielt gegen jeden Spieler einer Mannschaft B genau einen Satz Tischtennis. Es werden 117 Spiele ausgetragen.
a) Wie viele Spieler gehören zur Mannschaft B?
b) Wie lange dauert das Turnier, wenn gleichzeitig an 8 Platten gespielt wird und einschließlich kurzer Pausen für ein Spiel 15 Minuten angesetzt werden?
c) Wie viele Sätze Tischtennis wären nur auszutragen, wenn Mannschaft A mit 5 Spielern weniger, Mannschaft B mit 3 Spielern weniger antreten würde?
d) Ist es die gleiche Anzahl von Sätzen, wenn Mannschaft A mit 3 Spielern weniger, Mannschaft B mit 5 Spielern weniger antreten würde?

Ma 5 ■ 2527 Ersetze in dem Schema

$$\begin{array}{r} 52 \cdot {*}{*} \\ \hline {*}{*} \\ {*}{*} \\ \hline {*}{*}{*} \end{array}$$

die Sternchen so durch Grundziffern, daß man eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe erhält!

Schülerin Annett Hildebrandt, Görcke

Ma 6 ■ 2528 Von den $\overline{xy}$ Schülern einer Schulklasse waren $\overline{yx}$ Schüler infolge einer Grippewelle erkrankt. Wie viele Schüler gehören dieser Klasse an, und wie viele Schüler waren erkrankt, wenn $\overline{xy}$ und $\overline{yx}$ Primzahlen in dekadischer Schreibweise sind, $x \neq y$ ist, und dieser Klasse weniger als 36 Schüler angehören?

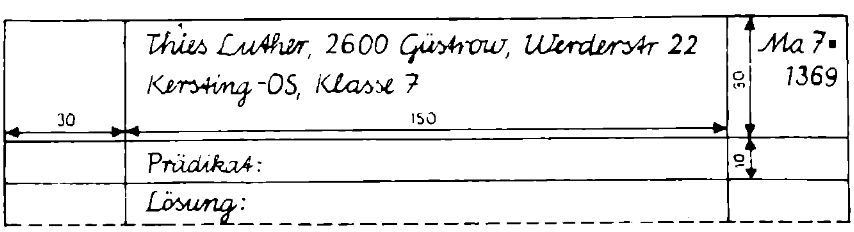
Schüler Hugo Engelsrecht, Gymnasium Krems, Österreich

Ma 6 ■ 2529 Für einen Besuch des Berliner Kulturparks entnahm Klaus seiner Sparbüchse den fünften Teil seiner Ersparnisse. Von dem mitgenommenen Gelde gab Klaus $\frac{3}{4}$ aus. Es blieben 1,50 M übrig, die er wieder in die Sparbüchse steckte. Wieviel Mark gab Klaus auf dem Berliner Kulturpark aus? Wieviel Mark sind danach wieder in der Sparbüchse?

Fachlehrer für Mathematik Claußnitzer, 26. POS Berlin-Marzahn

Ma 6 ■ 2530 Gib alle Teiler der Zahl 567 an! Wie lautet der Dividend, wenn der Divisor 567 und der Quotient $\frac{4}{3}$ betragen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha
7027 Leipzig,
Postfach 14

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1984/85 läuft von Heft 5/1984 bis Heft 2/1985. Zwischen dem 1. und 10. September 1985 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/84 bis 2/85 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/85 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/84 bis 2/85) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1984/85 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

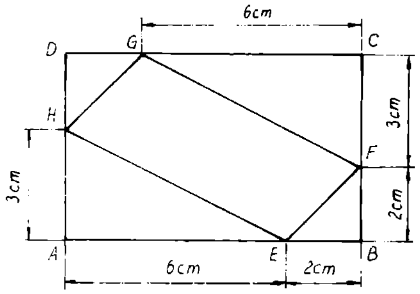
Redaktion *alpha*

Ma 6 ■ 2531 Kay sagt zu Ute: „Wenn du mir einen von deinen Äpfeln geben würdest, so hätte ich dreimal soviel Äpfel wie du." Darauf antwortet Ute: „Gib mir lieber einen von deinen Äpfeln; dann hätten wir beide gleich viel Äpfel." Wieviel Äpfel hatte jeder von ihnen? Begründe, daß es nur eine Möglichkeit gibt!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2532 Von einem Rechteck $ABCD$ sollen vier Dreiecke $\triangle AEH$, $\triangle EBF$, $\triangle FCG$ und $\triangle GDH$ abgeschnitten werden. Welchen Flächeninhalt besitzt das übrigbleibende Viereck $EFGH$?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma 7 ■ 2533 Die Weglänge von Erfurt bis Suhl beträgt 50 km. Anton fährt morgens um 8 Uhr mit dem Fahrrad von Erfurt nach Suhl mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $14\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Bruno reitet am gleichen Tag und zum gleichen Zeitpunkt hoch zu Roß von Suhl nach Erfurt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von $11\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Um welche Uhrzeit treffen beide aufeinander? Wie weit ist der Treffpunkt von Erfurt entfernt?

Schüler A. Steinmetz, Göllingen

Ma 7 ■ 2534 Es ist zu untersuchen, ob der Quotient $\frac{378 \cdot 436 - 56}{378 + 436 \cdot 377}$ gleich 1 oder kleiner bzw. größer als 1 ist.
Die Antwort ist zu begründen! Die Produkte in Zähler und Nenner sollen nicht ausgerechnet werden!

Schülerin Dorit Granzow, Neustadt/D.

Ma 7 ■ 2535 Es sei n eine natürliche Zahl. Das Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger von n betrage 483. Um welche natürliche Zahl n handelt es sich?

Ma 7 ■ 2536 Ein Kleintierhalter verfügt über einen Kaninchenstall mit vier Boxen, in denen insgesamt 30 Kaninchen untergebracht sind. In der vierten Box befinden sich mehr Kaninchen als in der dritten, in der dritten mehr als in der zweiten, in der zweiten mehr als in der ersten. In keiner Box befinden sich mehr als 10 Kaninchen. Der Unterschied in der Anzahl der Kaninchen zwischen der vierten und dritten, der dritten und zweiten, der zweiten und ersten Box ist stets gleich. Wieviel Kaninchen befinden sich in jeder der vier Boxen?

Ma 8 ■ 2537 Gegeben sei eine beliebige zweistellige natürliche Zahl z. Ihre Quersumme sei mit $q(z)$ bezeichnet. Es ist zu beweisen, daß die Differenz $z - q(z)$ stets neunmal so groß ist wie die Zahl, die durch die erste Ziffer von z dargestellt wird.

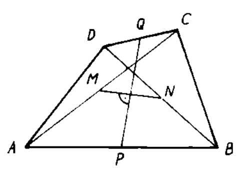
Schüler Ralf Kühnel, Wilhelm-Pieck-Stadt Guben

Ma 8 ■ 2538 Drei Angler hatten zusammen 30 Fische gefangen, die nun in einem Gefäß lagen. Bei der Aufteilung der Fische gab es Streit.
Als jeder der drei Angler A, B, C sagen sollte, wie viele Fische er geangelt hatte, nannte C eine um 1 größere Anzahl. A meinte daraufhin, daß er ebenso viele Fische geangelt habe wie C. Wie viele Fische hatte jeder der drei geangelt, wenn B genau einen Fisch mehr als das Doppelte der vom Angler C tatsächlich gefangenen Fische geangelt hatte?

Schüler Olaf Gleim, Timkenberg

Ma 8 ■ 2539 In ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck ist ein Rechteck derart einzubeschreiben, daß zwei Seiten auf je einer Kathete und ein Eckpunkt auf der Hypotenuse liegen. Die Fläche des Rechtecks soll halb so groß wie die Dreiecksfläche sein. Die Konstruktion ist zu beschreiben und zu begründen! *Oberlehrer Werner Melka, Neubrandenburg*

Ma 8 ■ 2540 Das Bild stellt ein Viereck $ABCD$ mit den kongruenten Seiten $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ dar. Die Mittelpunkte P und Q der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sowie die Mittelpunkte M und N der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ wurden miteinander verbunden. Es ist nachzuweisen, daß die Verbindungsstrekken $\overline{PQ}$ und $\overline{MN}$ aufeinander senkrecht stehen.



Ma 9 ■ 2541 Gesucht sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, für die gilt: Die Summe aus dem Quadrat der kleinsten Zahl und dem Quadrat der Hälfte der mittleren Zahl ist gleich dem Quadrat der größten Zahl.

Schüler Jörg Steinbach, Zwickau

Ma 9 ■ 2542 Es sind alle reellen Zahlen a, b, c mit $c \neq 0$ zu ermitteln, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

(1) $a + b + c = 6$

(2) $\frac{ab}{c} = 6$

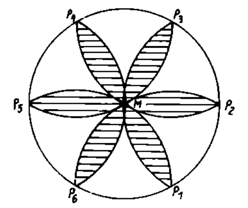
(3) $a^2 - b - c = 6$

Schüler Gunnar Jeschke, Schwarzheide

Ma 9 ■ 2543 Die Terme der Gleichung $(\overline{abc})^a = \overline{bc(a-1)bc}$ stellen Zahlen in dekadischer Darstellung dar. Welche Ziffern sind für a, b und c einzusetzen, damit diese Gleichung erfüllt wird? *Sch.*

Ma 9 ■ 2544 Das Bild zeigt einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und einem Radius der Länge $r = 3$ cm. Wieviel Prozent der Kreisfläche wird von der schraffiert dargestellten Fläche der Rosette eingenommen?

Schüler Matthias Eger, Hohleborn



Ma 10/12 ■ 2545 Es ist zu beweisen, daß der Term

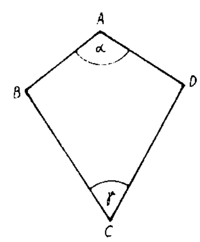
$$(13^x - 5^x)\,(13^x + 5^x)$$

für alle natürlichen Zahlen x durch $(5^2 - 13)^2$ teilbar ist!

Ints Indriksons, Riga, UdSSR

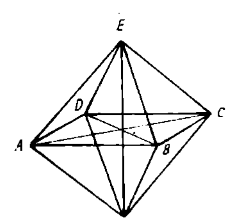
Ma 10/12 ■ 2546 In einem rechtwinkligen Dreieck sei c die Länge der Hypotenuse, a und b seien die Längen der Katheten. Es ist nachzuweisen, daß stets $(a + b + c)^2 > 8ab$ gilt. *Sch.*

Ma 10/12 ■ 2547 Im abgebildeten Drachenviereck seien $\alpha = 108°$ und $\gamma > 36°$. Es ist ein regelmäßiges Fünfeck derart zu konstruieren, daß auf jeder Seite des Drachenvierecks ein Eckpunkt des Fünfecks liegt und der fünfte Eckpunkt mit A zusammenfällt. *Schüler Frank Steudel, Berlin*



Ma 10/12 ■ 2548 Das Bild stellt ein Schrägbild eines regelmäßigen Oktaeders dar. (Kantenmodell) Welchen Winkel schließen die Flächen der Dreiecke BCE und BCF ein?

Technologe Klaus-Detlef Gehrke, Rostock



Physik

Ph 6 ■ 171 Ein Stück Bleirohr mit einer Masse von 282,5 g wird in ein Überlaufgefäß eingetaucht.
Wieviel cm^3 Wasser fließen aus?

Ph 7 ■ 172 Eine Balkenwaage wiegt ungenau. Auf der einen Seite beträgt das Gewicht eines Gegenstandes 144 N, auf der anderen dagegen 169 N.
Wie groß ist das wahre Gewicht des Gegenstandes?

Ph 8 ■ 173 In einigen Ländern (u. a. in Großbritannien und den USA) wird zur Temperaturmessung nicht die Einheit Grad Celsius (°C), sondern Grad Fahrenheit (°F) verwendet. Dabei entsprechen 0 °C dem Wert von +32 °F und +100 °C dem Wert von +212 °F.
a) Wieviel °C sind es, wenn das Thermometer +41 °F bzw. −49 °F anzeigt? Gib die Umrechnung mit Hilfe von Variablen an!
b) Wieviel °F sind es, wenn das Thermometer +20 °C bzw. −15 °C anzeigt? Gib die Umrechnung mit Hilfe von Variablen an!
c) Bei wieviel Grad sind die Maßzahlen von Celsius und Fahrenheit gleich?

Ph 9 ■ 174 Der PKW Škoda 105 L hat eine Gesamtmasse von 1285 kg und eine Spitzenleistung von 38 kW.
In welcher Zeit kann er beim Anfahren eine Geschwindigkeit von 80 km/h erreichen?

Ph 10/12 ■ 175 Bei der Briefwaage wird das Auslenken eines Gewichtes auf einem Kreisbogen für das Wägen benutzt. Die Hebel stehen hierbei winklig zueinander. Der Arm, an dessen Ende ein Gewicht von 500 N montiert sei, wurde bei einer Länge von 10 cm um 20° ausgelenkt. Der Lastarm von 2,5 cm soll hierbei gerade eine waagerechte Stellung einnehmen.
Welches Gewicht hat der aufgelegte Brief? Die Hebel selbst seien masselos.

Dipl.-Ing. H. Miethig, Dresden

Chemie

Ch 7 ■ 137 Zur Erhöhung der Bodenfruchtbarkeit werden in der Landwirtschaft hochwertige Phosphordüngemittel eingesetzt. Wieviel Prozent P_2O_5 sind in folgenden Düngemitteln enthalten?

1. Superphosphat
   $Ca(H_2PO_4)_2 + 2CaSO_4$
2. Thomasmehl
   $Ca_3P_2O_8(3CaO) \cdot P_2O_5$
3. 80%iges Magnesiumphosphat
   $Mg_3(PO_4)_2$
4. Nitrophoska
   $3{,}5NH_4NO_3 + 1{,}5CaHPO_4$
   $+ 0{,}25NH_4H_2PO_4 + 0{,}25(NH_4)_2HPO_4$

Ch 8 ■ 138 Beim Versetzen von Aluminiumpaste mit Kalkwasser und Wasser entsteht Gasbeton, welcher wie folgt zusammengesetzt ist:

$$3CaO \cdot Al_2O_3 \cdot 6H_2O.$$

Als weiteres Reaktionsprodukt bildet sich Wasserstoff.
a) Wieviel Kubikmeter Gas werden bei dieser Reaktion ausgetrieben, wenn man 1,25 kg Aluminiumpaste mit einem Aluminiumgehalt von 95 % zur Reaktion bringt?
b) Wieviel Kilogramm der restlichen Ausgangsstoffe werden benötigt?

Ch 9 ■ 139 Ein großer Teil des in der metallurgischen Industrie erzeugten Stahles wird zu Rohren verarbeitet. Aus einer Tonne Stahl kann ein Rohr folgender Abmessung hergestellt werden:
Länge: 600 m
Innendurchmesser: 30 mm
Wandstärke: 4 mm
Wieviel Kilometer Rohr der gleichen Abmessung können aus einer Tonne Polyvinylchlorid-hart $\left(\varrho = 1{,}38\ \frac{g}{cm^3}\right)$ hergestellt werden?

Ch 10/12 ■ 140 Es soll eine 23,2%ige Aluminiumsulfat-Lösung hergestellt werden. Zur Verfügung stehen Aluminium und Schwefelsäure. Wievielprozentig muß die Schwefelsäure sein?

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

In Heft 5/83 stellten wir folgende Aufgabe:

Ma 7 ■ 2363 Ein Rechteck habe die Seitenlängen a und b. Der Flächeninhalt eines Quadrates, das den gleichen Umfang wie das Rechteck hat, ist durch die Längen a und b auszudrücken.

OStR Th. Scholl, Berlin

In Heft 1/84 veröffentlichten wir einen Lösungsvorschlag. Er lautete: Das Quadrat habe die Seitenlänge c, dann gilt:

$$4c = 2 \cdot (a + b),\quad c = \frac{a+b}{2}$$

und somit

$$A_Q = c^2 = \frac{1}{4}(a+b)^2.$$

279 Mädchen und 265 Jungen sandten Lösungen ein. 85 von ihnen erhielten eine rote Karte mit dem Prädikat: *falsch gelöst.* 7 Arbeitsgemeinschaften sandten Lösungen als *Kollektiv* ein. 6 Einsender gaben eine falsche Aufgabennummer an und wurden aus den 17 weiteren Stößen herausgefischt, konnten also erst nach Auswertung der insgesamt zu Heft 5/83 eingegangenen 25000 Lösungen bearbeitet werden. Mußte das sein?
Bei der Korrektur stieß der Chefredakteur *alpha* – er korrigiert die Lösungen der Klassenstufen 5 bis 7 – auf die unterschiedlichsten Endergebnisse. Hier sind 33 von ihnen ausgewählt und zu einem *Formelsalat* zusammengestellt. 9 entsprechen nicht der von der Aufgabengruppe veröffentlichten Gleichung $A_Q = \frac{1}{4}(a+b)^2$. Welche? Viel Spaß beim Knobeln wünschen

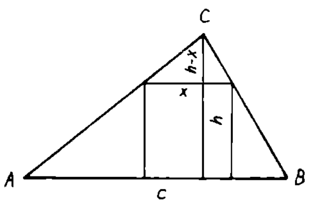
J. Lehmann/Th. Scholl

(1) $[0{,}5(a+b)]^2$
(2) $4 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)$
(3) $\frac{a^2+b^2}{4} + \frac{ab}{2}$
(4) $\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]^2$
(5) $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$
(6) $\left(\frac{2a+b}{4}\right)^2$
(7) $\left(\frac{b+a}{2}\right)^2$
(8) $\frac{(a+b)^2}{2^2}$
(9) $\frac{2(a+b)}{4}$
(10) $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2}$
(11) $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab + \frac{1}{4}b^2$
(12) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
(13) $[2(a+b):4]^2$
(14) $\frac{(a+b)\cdot(a+b)}{4}$
(15) $\frac{a^2}{2} + \frac{a \cdot b}{2}$
(16) $\frac{a^2}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4}$
(17) $\left(\frac{a^2+b^2+2ab}{4}\right)$
(18) $((a+b):2)^2$
(19) $\frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{a \cdot b}{2}$
(20) $0{,}25 \cdot (a+b)^2$
(21) $\frac{a+a+b+b}{4} \cdot \frac{a+a+b+b}{4}$
(22) $\left(\frac{2a+2b}{4}\right) \cdot \left(\frac{2a+2b}{4}\right)$
(23) $\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)^2$
(24) $[(a+b):2] \cdot [(a+b):2]$
(25) $\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)$
(26) $((2a+2b):4)^2$
(27) $\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)^2$
(28) $\frac{a^2+2ab+b^2}{4}$
(29) $\frac{(a+b^2)}{4}$
(30) $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}b^2$
(31) $\left(\frac{a}{2} - b\right)^2$
(32) $\frac{1}{4}(a^2 + 2ab + b^2)$
(33) $\left(\frac{2(a+b)}{4}\right)^2$

Lösungen

Lösungen zu: Sprachecke

▲1▲ Konstruiere ein Quadrat in ein gegebenes Dreieck, so daß die Grundseite des Quadrates auf der Grundseite des Dreiecks liegt und die zwei anderen Eckpunkte des Quadrates sich auf den beiden anderen Seiten des Dreiecks befinden!



Lösung: Man zeichne in das $\triangle ABC$ die Höhe h. Dann gilt die Proportion $x : c = (h - x) : h$, und x ist konstruierbar.

▲2▲ Mit einem aufgedrehten Auslaufventil und einem geschlossenen Abfluß kann man eine Badewanne in 9 Minuten mit Wasser füllen. Mit geschlossenem Auslaufventil und geöffnetem Abfluß werden 12 Minuten benötigt, um die mit Wasser gefüllte Badewanne zu leeren.
Wieviel Minuten dauert es, die leere Badewanne mit Wasser zu füllen, wenn der Abfluß geöffnet und das Auslaufventil aufgedreht ist?

Lösung: Die Zeit zum Füllen der Badewanne sei x min; dann gilt die Gleichung

$$\frac{x}{9} - \frac{x}{12} = 1,$$
$$12x - 9x = 108,$$
$$x = 36\,.$$

Die Badewanne ist in 36 min gefüllt.

▲3▲ Zum Bau des Eiffelturms wurden ungefähr 885 m³ Eisen verwendet; die Dichte des Eisens beträgt 7,8 t/m³. Welche Masse Eisen wurde für diese Konstruktion benötigt?

Lösung: $m = V \cdot \varrho$

$$m = \frac{885\ \text{m}^3 \cdot 7{,}8\ \text{t}}{\text{m}^3}$$
$$m = 6\,903\ \text{t}.$$

Für den Bau wurden 6903 t Eisen benötigt.

▲4▲ Eine Badewanne wird durch ihren Wasserhahn in 10 Minuten gefüllt und durch ihren Abfluß in $\frac{1}{4}$ Stunde geleert. Man öffnet den Wasserhahn und vergißt, den Abfluß zu schließen. Nach welcher Zeit ist die Badewanne gefüllt?

Lösung: Die Anzahl der Minuten sei x, dann gilt die Gleichung

$$\frac{x}{10} - \frac{x}{15} = 1,$$
$$\frac{5x}{150} = 1,$$
$$x = 30.$$

Die Badewanne ist nach 30 Minuten gefüllt.

▲5▲ Wir zerbrechen ein Streichholz in der Mitte. Eine der Hälften zerbrechen wir noch einmal. Eines der erhaltenen Stücke versuchen wir nochmals zu halbieren. Warum wird das Zerbrechen des Hölzchens jedesmal schwieriger?

Lösung: Jedesmal wird der Hebelarm halbiert, und man muß die doppelte Kraft aufbringen.

▲6▲ Bestimme alle fünfstelligen Zahlen, die gleich der 3. Potenz der aus ihren letzten beiden Ziffern gebildeten Zahlen sind!

Lösung: 13 824 und 15 625.
Laut Aufgabe ist $z = 10\,000a + 1\,000b + 100c + 10d + e = (10d + e)^3$. Dies kann man umformen zu $100(100a + 10b + c) = (10d + e + 1)(10d + e)(10d + e - 1)$.
Auf der rechten Seite steht ein Produkt aus drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen. Von diesen kann nur eine durch 5 teilbar sein, die dann sofort auch durch 25 teilbar sein muß.
1. Fall: $10d + e + 1 = 25 \ldots z = 13\,824$
2. Fall: $10d + e \quad = 25 \ldots z = 15\,625$
3. Fall: $10d + e - 1 = 25 \ldots 4$ teilt nicht 27, 26, 25, aber 4 teilt 100.
Ist der durch 25 teilbare Faktor größer als 25 (d. h. 50 oder 75), so ist das Produkt nicht kleiner als $50 \cdot 49 \cdot 48 = 117\,600$, also mindestens sechsstellig.

Lösungen zu:
Das Pascalsche Dreieck

▲1▲ Wegen des Zusammenhanges mit den Binomialkoeffizienten stellt $(1 + 1)^n = 2^n$ gerade die Summe der Zahlen in der $(n + 1)$-ten Zeile des *Pascalschen Dreiecks* dar.

▲2▲ Die gesuchten Zahlen findet man in der achten Zeile des Dreiecks.

▲3▲ a) 45. Die gesuchte Anzahl stimmt gerade mit der Anzahl von 2elementigen Mengen der Menge $\{1, 2, 3, \ldots, 9, 0\}$ überein.
b) 120 – die Zahl der 3elementigen Teilmengen derselben Menge.

▲4▲ Die gesuchten Dreieckszahlen stehen gerade in derjenigen Schrägreihe des *Pascalschen Dreiecks*, die mit 1, 3, 6, 10, ... beginnt.

▲5▲ a) $a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$
b) $x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$
(Das Wechseln der Rechenzeichen ergibt sich leicht aus der Betrachtung $(a - b)^6 = (a + [-b])^6$)

Lösungen zu: Schätz doch mal!

▲1▲
a) 29 mm c) 64 cm² e) 7,32 m
b) 17 mm d) 30,5 cm³ f) 615 kg

▲2▲

Schätzer	geschätzter Wert in cm³	absoluter Fehler in cm³
Rolf	40	9,5
Anja	20	−10,5
Mario	25	− 5,5
Grit	35	4,5

▲3▲
a) 1. Platz (bester Schätzer) Frank
(relativer Fehler: 0,01)
2. Platz Michael
(relativer Fehler: 0,03)
3. Platz Felix
(relativer Fehler: 0,08)
b) Frank: 1%; Michael: 3%; Felix: 8%

▲4▲

tatsächlicher Wert x	Schätzwert a
227	200
425	340
	510
317	300

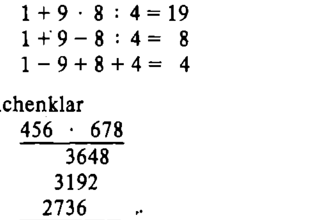
absoluter Fehler $a - x$	relativer Fehler $\left\lvert\frac{a-x}{x}\right\rvert$
−27	0,12
−85	0,20
85	
−17	0,05

Lösungen zu:
Knobel-Wandzeitung (1)

Vergangenes Jahr
▲1▲ $1 + 9 \cdot 8 : 4 = 19$
$1 + 9 - 8 : 4 = 8$
$1 - 9 + 8 + 4 = 4$

Sternchenklar
▲2▲ 456 · 678
3648
3192
2736
309168

Magische Figur
▲3▲



Wie alt?
▲4▲ Aus dem Text ergibt sich folgendes Gleichungssystem (V, M, J, K bzw. S bezeichnen das Alter des Vaters, der Mutter, von Jens, Kati bzw. Sven):

$$V = M \quad (1)$$
$$S = K + 3 \quad (2)$$
$$J = S + 3 \quad (3)$$
$$J = S + K \quad (4)$$
$$V + 3 = 3(J + 3) \quad (5)$$

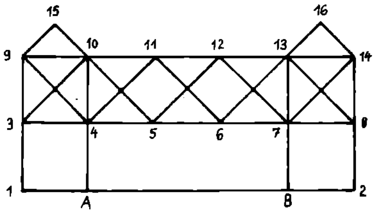
Aus (3) und (4) ergibt sich $K = 3$. Aus (2) folgt $S = 6$. Weiter folgen aus (3) oder (4) $J = 9$, aus (5) $V = 33$ und aus (1) $M = 33$ (Altersangaben in Jahren).

Mal so, mal so

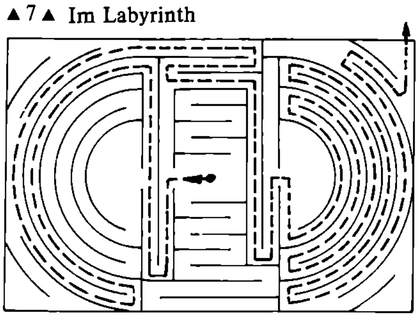
▲5▲ Für das Wort DEZIMALBRUCH gibt es 330 verschiedene Lesemöglichkeiten (Anzahl der Permutationen mit Wiederholung von 11 Elementen – 7 Abschnitte nach links und 4 Abschnitte nach unten – mit der Klassenbildung (7, 4); $330 = 11!/7!4!$).

In einem Zuge

▲6▲ Man muß bei A (bzw. B) beginnen und bei B (bzw. A) enden; z.B. A-B-7-4-A-1-3-4-9-10-15-9-3-10-4-11-6-13-10-5-12-7-8-13-14-16-13-7-14-8-2-B.



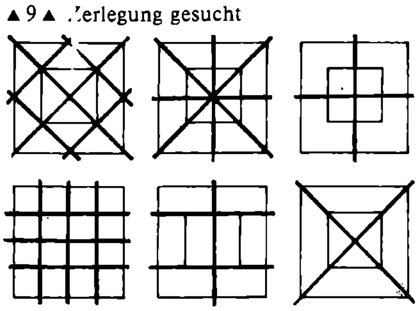
▲7▲ Im Labyrinth



Flächenvergleich

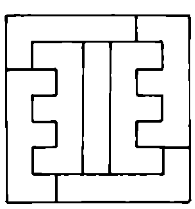
▲8▲ Alle 5 Flächenstücke haben den gleichen Flächeninhalt, der sich aus dem Flächeninhalt eines Halbkreises (Durchmesser entspricht zwei Kästchenseiten) und dem Flächeninhalt von 2 Quadratkästchen zusammensetzt.

▲9▲ Zerlegung gesucht



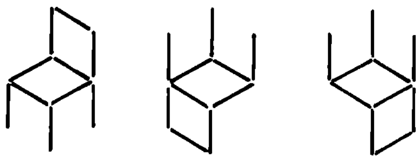
Legespiel

▲10▲



Stuhl-Akrobatik

▲11▲



Rollerrennen

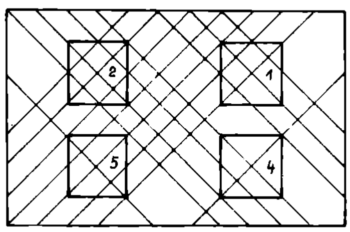
▲12▲

	1.	2.	3.	4.
a	B	E	K	D
b	B	K	E	D
c	B	K	D	E
d	K	B	E	D
e	K	B	D	E
f	K	D	B	E

Die ersten beiden Aussagen lassen die angegebenen sechs Möglichkeiten zu (B = Ben, D = Dieter, E = Eva, K = Katrin). Die dritte Aussage, daß Dieter besser abschnitt als Ben, sondert hieraus eindeutig die Möglichkeit f aus: 1. Platz: Katrin, 2. Platz: Dieter, 3. Platz: Ben, 4. Platz: Eva.

Gut eingepaßt

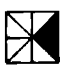
▲13▲ Das Bild zeigt die vervollständigte Figur. Das Quadrat Nr. 3 paßt nicht hinein.



Fortsetzung gesucht

▲14▲ Bildungsgesetz der *Zahlenfolge*: $a_n = 3n + (-1)^n n^2$; $a_6 = 54$. Bildungsgesetz der *Figurenfolge*: Das obere schwarze Dreieck springt jeweils ins nächste Dreieck, das untere schwarze Dreieck jeweils ins übernächste Dreieck (in mathematisch positiver Richtung).

6. Glied:



Gewußt wie?

▲15▲ Eine Möglichkeit wäre folgende: Durch eine erste Wägung entnimmt man mit Hilfe des Puddingpäckchens 40 g Tee. Dann legt man das Gewürzpäckchen auf die eine und das Puddingpäckchen auf die andere Waagschale und entnimmt durch Zuschütten von Tee zur Schale mit dem Gewürzpäckchen die noch fehlenden 15 g Tee.

Rösselsprung

▲16▲

		12	17	10	15		
			14	19			
	13	18	11	16	9	20	
25	2	23	4	27	6	29	8
		26			21		
1	24	3	22	5	28	7	30

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Kryptarithmetik

Bild links:

$Z = 1 \quad W = F + 1 \quad S \geqq 5 \quad E \geqq 5$

Fall 1) $S = 5 \rightarrow W = 1 = Z$
(= Widerspruch!)
Fall 2) $S = 6 \rightarrow F = 2, \quad W = 3$
Fall 2.1) $E = 5 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow C = 2 = F$
Wd!
Fall 2.2) $E = 7 \rightarrow C = 8 \rightarrow 0 = 5 \rightarrow H = 9 = L$ Wd!
Fall 2.3) $E = 8 \rightarrow 0 = 7 \rightarrow C = 9 \rightarrow H = 4 \rightarrow L = 9 = C$ Wd!
Fall 2.4) $E = 9 \rightarrow 0 = 8 \rightarrow C = 4 \rightarrow H = 7 \rightarrow L = 5$
Fall 3) $S = 7 \rightarrow F = 4, \quad W = 5$
Fall 3.1) $E = 6$
Fall 3.1.1) $0 = 2 \rightarrow C = 3 \rightarrow H = 0 \rightarrow L = 1 = Z$ Wd!
Fall 3.1.2) $0 = 3 \rightarrow C = 8 \rightarrow H = 0$
oder $H = 2 \rightarrow L = 1 = Z$
oder $L = 4 = F$ Wd!
Fall 3.2) $E = 8 \rightarrow 0 = 6 \rightarrow C = 4 = F$ Wd!
Fall 3.3) $E = 9 \rightarrow 0 = 8 \rightarrow C = 4 = F$ Wd!
Fall 4) $S = 8 \rightarrow F = 6, \quad W = 7$
Fall 4.1) $E = 5 \rightarrow 0 = 1 = Z$ Wd!
Fall 4.2) $E = 9 \rightarrow 0 = 8 = S$ Wd!
Fall 5) $S = 9 \rightarrow F = 8, \quad W = 9 = S$ Wd!

Es gibt also genau eine Lösung
$69\,476 + 69\,476 = 138\,952$.

Bild Mitte:

$126 - 65 = 61$; $147 - 76 = 71$;
$168 - 87 = 81$; $105 - 54 = 51$.

Bild rechts: z.B. $6\,508 + 13\,963 = 20\,471$.

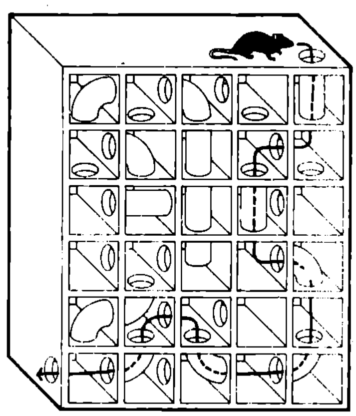
Wortspiele

Jahr, Lahr, Lahn, Zahn, Zahl; Grad, Gras, Gros; halb, Halt, hart, Wart, Wert.

Hau ruck

Der Arbeiter auf der Skizze b bewegt den Wagen mit dem geringsten Kraftaufwand, weil er eine lose Rolle verwendet.

Labyrinth



Tierisches

● Eine Seite Lammfleisch kostet x \$ je kg und wiegt y kg. Eine Seite des einjährigen Tieres kostet $(x - 0{,}12)$ \$ je kg und wiegt $(24 - y)$ kg. Dann gilt das Gleichungssystem

$$x \cdot y = 16{,}35$$
$$(x - 0{,}12)(24 - y) = 59{,}85.$$
$$24x - xy - 0{,}12 \cdot 24 + 0{,}12y = 59{,}85$$
$$24x - 16{,}35 - 2{,}88 + 0{,}12y = 59{,}85$$
$$24x + 0{,}12y = 79{,}08$$

$$\frac{24 \cdot 16{,}35}{y} + 0{,}12y \qquad = 79{,}08$$

$$x = \frac{16{,}35}{y}$$

$$24 \cdot 16{,}35 + 0{,}12y^2 = 79{,}08y$$

$$y^2 - 659y + 3\,270 = 0$$

$$y_{1;2} = \frac{659}{2} \pm \sqrt{\frac{659^2}{4} - \frac{3270 \cdot 4}{4}}$$

$y_1 = 5$

$y_2 = 654$ (entfällt)

Eine Seite Lammfleisch wiegt 5 kg und eine Seite des einjährigen Tieres 19 kg.

● Die Masse der Kiste sei x kg. dann gilt die Gleichung

$$3 + 2x = 4 + 5,$$
$$x = 3.$$

Die Masse der Kiste beträgt 3 kg.

Autonummern-Mathematik

Bezeichnet man die vier Ziffern der Autonummer mit w, x, y und z, so gilt

$$(10w + x) + (10y + z) = 10x + y.$$

Nach Umstellung erhält man

$$10w + z = 9x - 9y$$
$$\frac{10w + z}{9} = x - y.$$

Die Summe $10w + z$ muß durch 9 teilbar sein, und dieser Quotient entspricht der Differenz der beiden Innenziffern.

Für den Zähler kommen also nur die Zahlen 9, 18, 27, ..., 81 in Frage. Die beiden Außenziffern können also nur 0.-.9; 1.-.8; 2.-.7; ...; 8.-.1 lauten.

Zu 1.-.8 (18) gehört die Differenz (18 : 9 =) 2. Dadurch ergeben sich die Möglichkeiten der Differenzbildung 2-0; 4-2; 5-3; ...; 9-7.

Die Autonummern lauten dann 12-08; 13-18; 14-28; ...; 19-78 (vgl. 19 + 78 = 97; die aus den beiden Innenziffern gebildete Zahl lautet auch 97).

Folgende Autonummern haben also die in der Aufgabenstellung geschilderte Eigenschaft:

01-09; 02-19; 03-29; 04-39; 05-49; 06-59; 07-69; 08-79; 09-89; 12-08; 13-18; 14-28; 15-38; 16-48; 17-58; 18-68; 19-78; 23-07; 24-17; 25-27; 26-37; 27-47; 28-57; 29-67; 34-06; 35-16; 36-26; 37-36; 38-46; 39-56; 45-05; 46-15; 47-25; 48-35; 49-45; 56-04; 57-14; 58-24; 59-34; 67-03; 68-13; 69-23; 78-02; 79-12; 89-01. Die Anzahl beläuft sich auf $n = \frac{9}{2}(1 + 9) = 45$. Die Häufigkeit beträgt bei 10 000 aus vier Ziffern bestehenden möglichen Autonummern 0,45 %.

Bruchrechnung

Schachtel, Hotel, Kapitel, Wilhelm Tell.

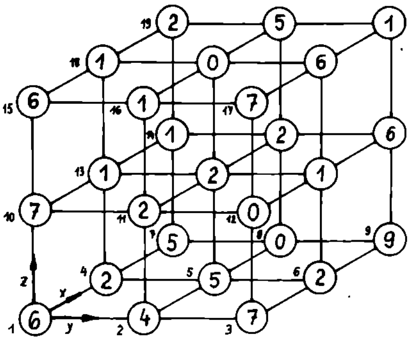
Mathematiker gesucht

Die versteckten Mathematiker waren:

Lie, Sophus (1842 bis 1899); Ceva, Giovanne (1647 bis 1734); Abel, Niels Henrik (1802 bis 1829); Riemann, Bernhard (1826 bis 1866); Hadamard, Jacques Salomon (1865 bis 1963); Monge, Gaspard (1746 bis 1818); Fredholm, Ivar Erik (1866 bis 1927); Schmidt, Erhard (1876 bis 1959); Möbius, August Ferdinand (1790 bis 1868); Mayer, Adolph (1839 bis 1908); Ries, Adam (1492 bis 1559); Hankel, Hermann (1839 bis 1873); Klein, Felix (1849 bis 1925); Archimedes von Syrakus (etwa 287 bis 212 v. u. Z.); Gauss, Carl Friedrich (1777 bis 1855); Jordan, Camille (1838 bis 1922); Steiner, Jakob (1796 bis 1863); Euler, Leonhard (1707 bis 1783); Stokes, George Gabriel (1819 bis 1903); Galois, Evariste (1811 bis 1832).

Kreuzzahlrätsel

Ein möglicher Lösungsweg: x3), z9), x12), z6), x15), z1), y19) mit y18) und x16), y15), x17), x16), y4), x1), z7), y14), x11), y13), z8), x2).



Lösungen zum alpha-Wettbewerb

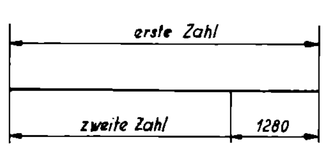
Heft 5/84

Ma 5 ■ 2464 Angenommen, die Schüler hätten am zweiten Tag genausoviel Kilometer zurückgelegt wie am ersten Tag, dann hätten sie an allen drei Tagen insgesamt 65 km + 10 km = 75 km geschafft. Dann würde gelten $5 \cdot x = 75$, also $x = 15$. Das heißt, am ersten Tag legten sie $2 \cdot 15$ km = 30 km, am zweiten Tag legten sie 30 km − 10 km = 20 km, am dritten Tag legten sie 30 km : 2 = 15 km zurück.

Ma 5 ■ 2465 Vom Ergebnis 15 ausgehend wenden wir die Umkehroperationen auf die zuvor ausgeführten Rechenoperationen an. 15 + 20 = 35; 35 : 5 = 7. Somit ist 7 die gedachte Zahl.

Ma 5 ■ 2466 3 m Kunstfaserstoff sind um $3 \cdot 30$ M = 90 M billiger als 3 m Wollstoff. Hätte man nur Wollstoff gekauft, so würde der Preis 470 M + 90 M = 560 M betragen. Deshalb kosten 1 m Wollstoff 560 M : 7 = 80 M und somit 1 m Kunstfaserstoff 80 M − 30 M = 50 M.

Ma 5 ■ 2467 Wenn die Differenz zweier Zahlen 1 280 beträgt, so ist die erste Zahl um 1 280 größer als die zweite. Wenn wir also von der Summe dieser beiden Zahlen 1 280 subtrahieren, erhalten wir das Zweifache der zweiten Zahl. Die zweite Zahl ist somit (4 120 − 1 280) : 2 = 2 840 : 2 = 1 420. Somit gilt für die erste Zahl 1 420 + 1 280 = 2 700.



Ma 5 ■ 2468 6 m = 600 cm; 600 cm − 60 cm = 540 cm; 540 cm : 2 = 270 cm; 270 cm + 60 cm = 330 cm. Der eine Teil muß 2,7 m, der andere 3,3 m lang gewählt werden.

Ma 5 ■ 2469 Es waren 8 : 2 = 4 Waggons mit einer Ladung von je 12 t vorhanden. Deshalb waren $5 \cdot 4 = 20$ Waggons mit einer Ladung von je 10 t vorhanden. $4 \cdot 12$ t + $20 \cdot 10$ t = 48 t + 200 t = 248 t. Insgesamt wurden 248 t Getreide verladen.

Ma 6 ■ 2470 Der zweite Winkel habe die Größe α. Die beiden anderen Winkel haben dann die Größe $\alpha + 4°$ und $\alpha + 14°$. Nun gilt $3 \cdot \alpha + 18° = 180°$, $3 \cdot \alpha = 162°$, $\alpha = 54°$. Die Winkel des Dreiecks haben die Größe 54°, 58° und 68°.

Ma 6 ■ 2471 Es sei x die eine, also $(165 - x)$ die andere Zahl.

Dann gilt $\frac{4}{6} \cdot x = \frac{4}{5} \cdot (165 - x)$,

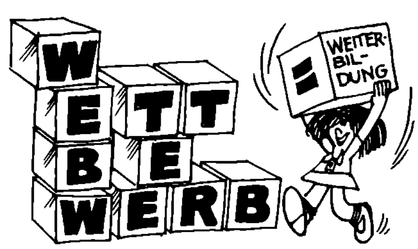
$\frac{1}{6} \cdot x = \frac{1}{5} \cdot (165 - x)$, $\frac{1}{6} \cdot x = 33 - \frac{1}{5} \cdot x$,

$\frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x = 33$, $\frac{11}{30}x = 33$, $x = 90$. Es handelt sich um die Zahlen 90 und 75.

Ma 6 ■ 2472 $72\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Um am Personenzug vorbeizufahren, muß der D-Zug eine Strecke zurücklegen, die seiner Länge und der Länge des Personenzuges gleicht. Es sei x die Länge des Personenzuges; dann gilt $x + 80\,\text{m} = 10\,\text{s} \cdot 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, also $x = 120$ m. Der Personenzug ist 120 m lang.

Ma 6 ■ 2473 In jeder Stunde legt der Autobus 10 km mehr zurück als der LKW. Als der Autobus in Banská Bystrica eintraf, hatte der LKW noch 1 h und 45 min, also 1,75 h zu fahren und legte in dieser Zeit $1{,}75\,\text{h} \cdot 30\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 52{,}5$ km zurück. Als der Autobus in Banská Bystrica ankam, war der LKW vom Ziel noch 52,5 km entfernt. Dieser Abstand entsteht zwischen beiden Fahrzeugen nach 52,5 : 10 = 5,25 h. Der Autobus fuhr also 5,25 h. In dieser Zeit legte er eine Strecke von $5{,}25 \cdot 40$ km = 210 km zurück. Das ist die Entfernung zwischen diesen beiden Orten.

Ma 6 ■ 2474 Es sei x die kleinste Zahl; dann ist $x + 3$ die nächstfolgende und $x + 6$ die größte Zahl. Nun gilt $x + (x + 3) + (x + 6) = 63$, $3x + 9 = 63$, $3x = 54$, $x = 18$. Es handelt sich um die Zahlen 18, 21 und 24.



Fortsetzung der Wettbewerbs-Lösungen siehe Heft 2/85!

Das Loch im Nichts und andere Dinge, die es gar nicht gibt

Spezielle Abbildungen (Projektionen) bilden räumliche Gebilde (z. B. Körper) auf eine Ebene ab. Dabei entstehen mehr oder weniger anschauliche Bilder der räumlichen Originale. Auf Grund unserer Erfahrungen können wir aus dem ebenen Bild Rückschlüsse auf das Original ziehen, z. B. können wir uns abgebildete Körper *vorstellen*.

Auf diese Weise wird zwar jedem Körper ein ebenes Bild zugeordnet, jedoch ist nicht jede ebene Figur Bild eines Körpers bei irgendeiner Abbildung. Zeichnet man jedoch geschickt entsprechende ebene Figuren, so ist der Betrachter versucht, sie räumlich zu interpretieren, d. h., in ihnen einen Körper o. ä. zu erkennen. Daß man dabei leicht aufs Glatteis geführt werden kann, zeigen die Bilder auf dieser Seite. Sie stellen alle *unmögliche Körper* dar. Im Detail, z. B. an einer Ecke, stimmt noch alles, aber im Ganzen ergeben sich dann Widersprüche.

Diese interessante psychologische Erscheinung regte zahlreiche Künstler an, unmögliche Körper zu erfinden. Die bekanntesten Künstler sind der Holländer *M. C. Escher*, der Schwede *Oscar Reutersvard* und der Schweizer *Sandro Del-Prete*.

In unserer Republik beschäftigt sich der Dresdner *Reinhard Breitenfeld* mit diesem Problemkreis. Anläßlich eines Wettbewerbs im Oktober 1983 wurde er in Budapest mit einem Preis ausgezeichnet. Wir stellen einige seiner Arbeiten vor.

Einige biographische Angaben: geb. 1924 in Ottmachau (ehem. Oberschlesien), Grundschule 1930 bis 1934, Abitur 1942, 1946 bis 1949 als Arbeiter beim Wiederaufbau tätig, 1950 bis 1953 Techn. Zeichner, Teilkonstrukteur, 1954 bis 1957 Techniker und Konstrukteur, 1952 bis 1957 Fachschulabendstudium (Ingenieur), seit 1957 Konstrukteur, Forschungsingenieur in der Akademie der Wissenschaften der DDR, Zentralinstitut für Kernforschung in Rossendorf, seit 1982 Konstruktionen „Unmögliche Figuren".

Die Bilder 1 bis 3 zeigen das Entstehen eines unmöglichen Körpers: Im Bild 1 ist ein gerades quadratisches Prisma dargestellt.

Wir wissen, daß solche Körper existieren. Es ist möglich, daß solch ein Körper, z. B. aus Holz, vor dem Zeichner auf dem Tisch stand. Aber wir werden gleich sehen, daß man nicht allem trauen kann, was man sieht. Zunächst ergänzen wir Bild 1 durch zwei weitere Zeichnungen (Bild 2). Auch hier gelten die zu Bild 1 getroffenen Feststellungen. Zu Bild 3 führt nur ein kleiner Schritt: Man schiebt die drei Einzelstücke zusammen. Vor uns liegt jetzt ein ***Dreieck mit drei rechten Winkeln,*** ein Ding, das es nicht gibt.

Auch einen Körper, wie er in Bild 4 dargestellt zu sein scheint, gibt es nicht. Die mechanische Verbindung der drei Teile – z. B. ein Nagel – soll die Figur noch anschaulicher machen.

Die Bilder 5 bis 10 sind nach dem gleichen Prinzip aufgebaut. Interessant ist das *Loch im Nichts* (Bild 11). Die Figur ist in drei Teilen zu betrachten: Oben der unmögliche *Bügel,* in der Mitte *nichts* (da man oben durch den Bügel, genau wie bei dem Unterteil, hindurchschauen kann) und in dem *Nichts* ein *Loch*, durch das man ebenfalls den *Hintergrund* sieht. *C.-P. Helmholz*

R. Breitenfeld

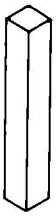
Bild 1


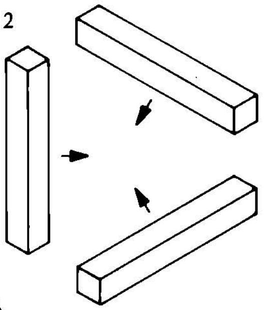
Bild 2


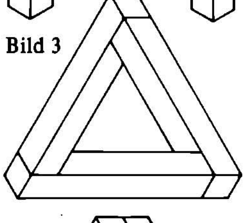
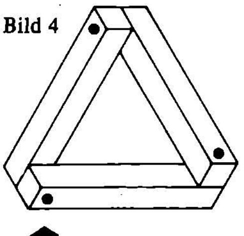
Bild 3


Bild 4


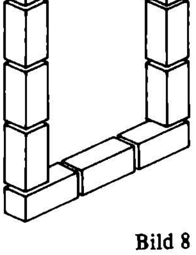


Bild 6

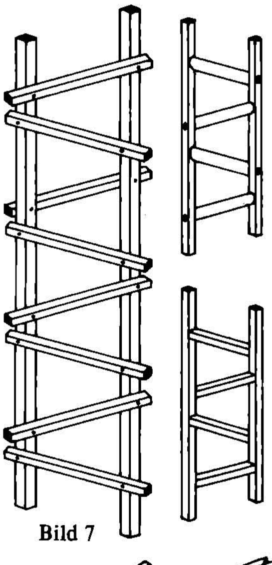


Bild 7

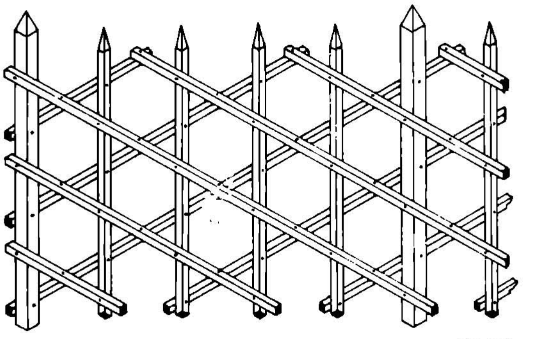


Bild 9

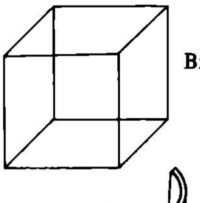


Bild 10

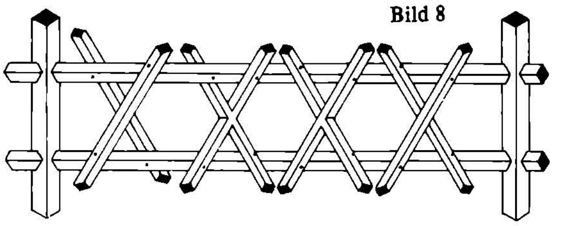


Bild 8

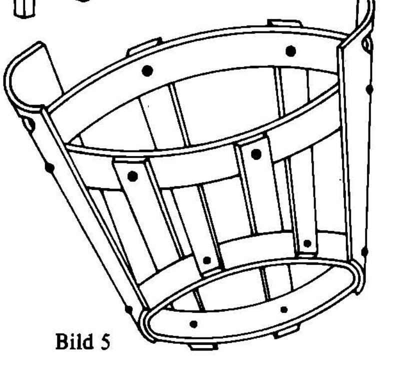


Bild 5

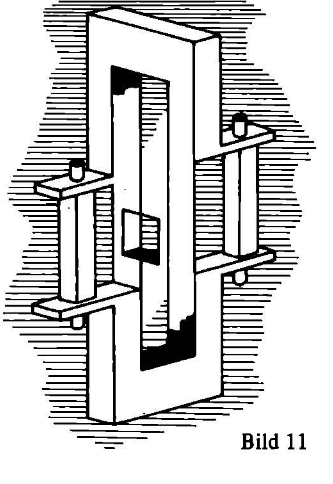
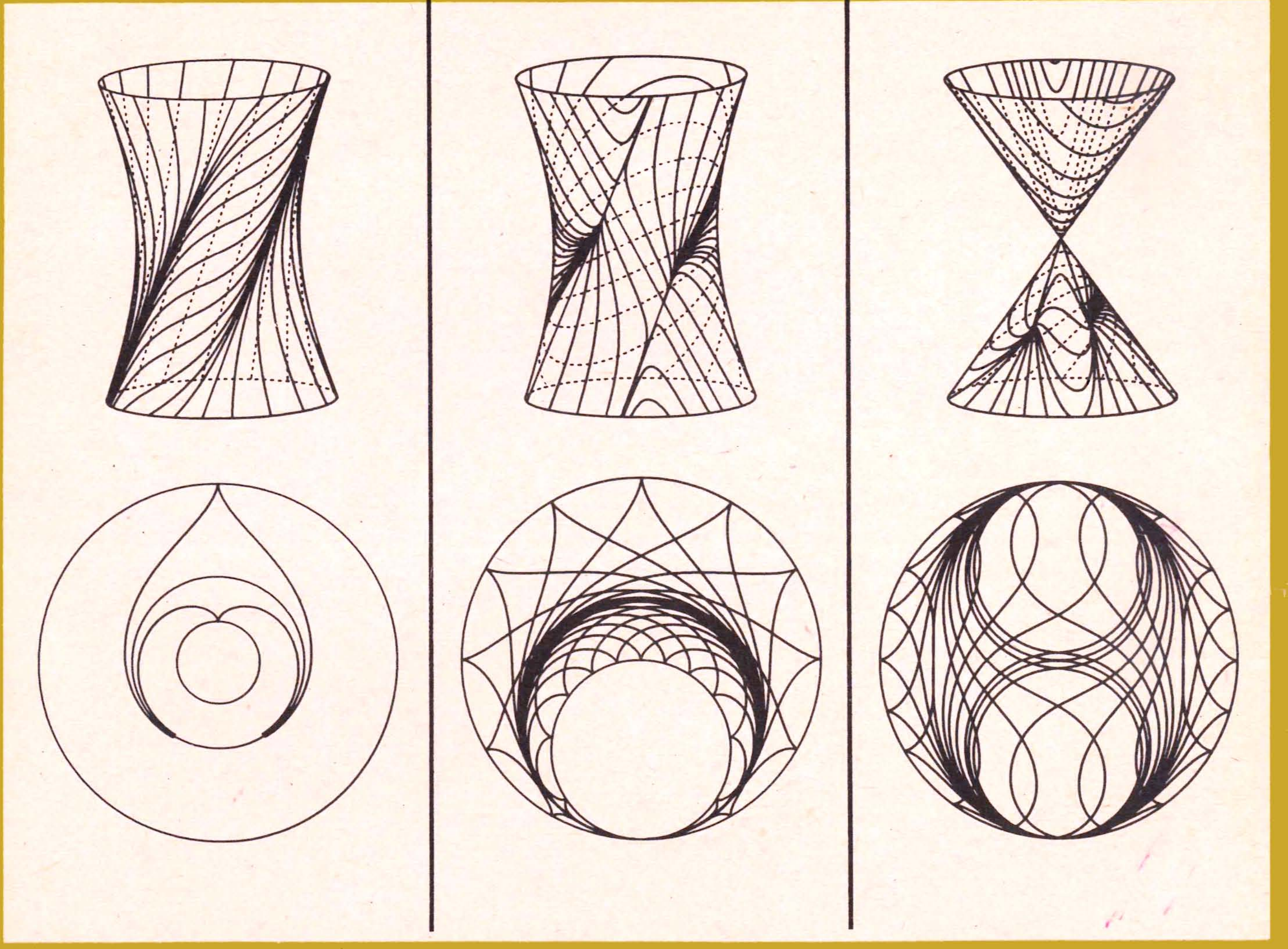


Bild 11

ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 19 (1985) 1 · Seiten 1 bis 24

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



2

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
19. Jahrgang 1985
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213
Anschrift der Redaktion:
7027 Leipzig, PSF 14
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Eigenfoto E. Schröder, Dresden (S. 28); Vignette R. Grapendin, Berlin (S. 31); W. Schmidt, Greifswald (S. 32); ADN/ZB (S. 33); M. Ffolkes, aus Magazin (S. 48)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr nach einer Vorlage aus: *Elemente der Mathematik*, Birkhäuser-Verlag Basel, Autor: U. Pinkall, Freiburg i. Br.

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 19. Dezember 1984
Auslieferungstermin: 20. April 1985

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

[1]) bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Ohne Zirkel geht es auch

In Heft 4 (1980) wurde in einem Beitrag mit dem gleichen Titel die Konstruktion der Tangenten an eine Kreislinie c von einem außerhalb c liegenden Punkt Q unter alleiniger Verwendung von Bleistift und Lineal gezeigt und begründet. Wie Bild 1 nochmals vor Augen führt, ist nicht einmal die Vorgabe des Kreismittelpunktes für diese Tangentenkonstruktion erforderlich. Man legt durch Q zwei die Kreislinie c getrennt reell schneidende sonst beliebige Geraden a und b. Die so erhaltenen Schnittpunkte 1, 2, 3, 4 werden durch Verbinden untereinander zu einem vollständigen Vierseit ergänzt. Dies liefert die Schnittpunkte U und V. Die Verbindungsgerade $q = g(U, V)$ ist die Polare des Punktes Q bezüglich der Kreislinie c. q schneidet c in den Punkten T_1 und T_2. Dies sind die Berührungspunkte der Tangenten t_1 bzw. t_2 aus Q an c. Die Zuordnung von Pol Q und Polare q bezüglich der Kreislinie ist umkehrbar eindeutig. Liegt Q außerhalb c, schneidet a die Kreislinie c getrennt reell. Ist $Q \in c$, dann ist die zugehörige Polare q Tangente an c in Q. Liegt Q im Inneren von c, so hat q mit c keinen Punkt gemeinsam. Der Sonderfall, daß Q Mittelpunkt von c ist, werde hier nicht erörtert.

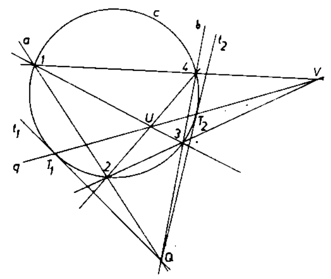


Bild 1

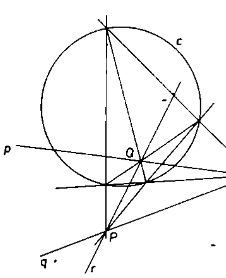


Bild 2

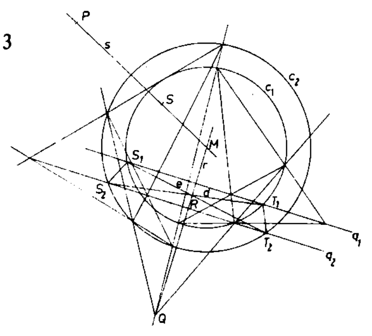
Bild 2 zeigt nochmals zusammenfassend, wie zu einem außerhalb c liegenden Punkt P die Polare p bezüglich c und für einen innerhalb von c liegenden Punkt Q die außerhalb c liegende Polare q konstruierbar ist.

Hier stellen wir uns die Aufgabe, mit Bleistift und Lineal lösbare Grundaufgaben zu behandeln, wenn außer der Kreislinie c noch deren Mittelpunkt M gegeben ist. Einleitend dazu knüpfen wir an die in Heft 4 (1980) gestellte Aufgabe. Sie lautet:

Gegeben sind zwei konzentrische Kreislinien c_1 und c_2. Man konstruiere den gemeinsamen Mittelpunkt M dieser Kreislinien unter alleiniger Verwendung von Lineal und Zeichenstift.

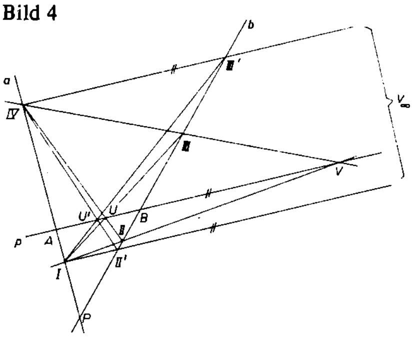
Wir gehen von der Vorstellung aus, daß die beiden Kreislinien mittels einer Ringschablone gezeichnet vorliegen. Nun verwenden wir die Eigenschaft, daß jede durch die Mitte M einer Kreislinie c gehende Gerade auch Symmetrieachse von c ist. Denkt man sich in Abbildung 1 den durch Q gehenden Kreisdurchmesser eingezeichnet, so muß dieser auf Grund seiner Eigenschaft, Symmetrieachse von c zu sein, den von den Tangenten t_1 und t_2 aufgespannten Winkel halbieren. Folglich liegen auch T_1 und T_2 symmetrisch zum Kreisdurchmesser durch Q. Daher steht die Verbindungsgerade $q = g(T_1T_2)$ senkrecht auf dem Kreisdurchmesser durch Q. Diese Überlegung liefert uns den Einstieg für die konstruktive Bestimmung von M in vorliegender Aufgabe. Nimmt man einen Punkt Q außerhalb c_1 und c_2 an und konstruiert die Polaren q_1 bezüglich c_1 und q_2 bezüglich c_2 gemäß Abbildung 2, so müssen q_1 und q_2 zueinander parallel sein, denn beide stehen senkrecht auf dem (noch nicht gefundenen) Durchmesser $r = g(QM)$ (vgl. Bild 3).

Bild 3



Ein zweiter Punkt R des Durchmessers r ist leicht zu finden. q_1 schneidet c_1 in den Punkten S_1 und T_1, die symmetrisch bezüglich r liegen. q_2 schneidet c_2 in den Punkten S_2 und T_2, die symmetrisch bezüglich r liegen. Folglich ist das durch Verbinden der Punkte S_1-T_1-T_2-S_2-S_1 in der genannten Reihenfolge erzeugte Trapez ein gleichseitiges. Damit müssen sich die Diagonalen dieses Trapezes $d = g(S_1T_2)$ und $e = g(S_2T_1)$ in einem Punkt R schneiden, der auf dem gesuchten Durchmesser r liegt. Die Verbindungsgerade $r = g(QR)$ stellt eine Symmetriegerade für c_1 und c_2 dar. – Eine völlig analoge Konstruktion für einen zweiten außerhalb c_1 und c_2 liegenden Punkt P führt auf die Polaren p_1 bezüglich c_1 und p_2 bezüglich c_2. Damit steht wieder ein gleichseitiges Trapez zur Verfügung. Der Schnittpunkt S der Diagonalen dieses Trapezes ist ein Punkt der durch P gehenden Symmetriegeraden s von c_1 und c_2. Folglich liegt im Schnittpunkt von r mit $s = g(SP)$ der den Kreislinien c_1 und c_2 gemeinsame Mittelpunkt M. In Abbildung 3 wurde nur die Konstruktion von r lückenlos vorgeführt, um nicht das Bild von Konstruktionslinien zu überlasten. Die Vorgabe zweier konzentrischer Kreislinien ist für konstruktive Belange offenbar äquivalent mit der Vorgabe einer Kreislinie einschließlich ihres Mittelpunktes M. Den Ausführungen der Grundkonstruktionen bei vorgegebener Kreislinie c samt Mittelpunkt M unter alleiniger Verwendung des Lineals werde eine ergänzende Betrachtung zum Doppelverhältnis am vollständigen Vierseit vorangestellt (vgl. Bild 4).

Bild 4



Werden die Grundpunkte mit A, B und die Folgepunkte mit U, V bezeichnet, so gilt für das Doppelverhältnis dieser vier auf der Geraden p liegenden Punkte laut Definition:

$$DV(AB \cdot UV) = \frac{\overline{AU}}{\overline{AV}} : \frac{\overline{BU}}{\overline{BV}} \qquad (1)$$

Der Geraden p ist eine Orientierung aufgeprägt. Folglich gehen die Strecken $\overline{AU}$, $\overline{AV}$, $\overline{BU}$, $\overline{BV}$ als vorzeichenbehaftete Größen in die Formel (1) ein. In Abbildung 4 werden die Grundpunkte von den Folgepunkten getrennt. Die vier Punkte befinden sich nach Teil 1, Heft 4 (1980), in harmonischer Lage. Folglich gilt in dieser Figur

$$DV(AB \cdot UV) = -1 \qquad (2)$$

In einem ebenen Bewegungsablauf stellen wir uns vor, daß sich der Punkt V auf der fest angenommenen Geraden p stetig nach rechts verschiebt. Die von P ausgehenden Geraden a und b sowie die auf a liegenden Punkte I und IV ändern ihre Lage hierbei nicht. Je weiter sich der Punkt V nach rechts verschiebt, desto mehr nähert sich das Viereck I-II-III-IV der Gestalt eines Trapezes. Am Wert des Doppelverhältnisses $DV(AB \cdot UV)$ ändert sich bei diesem Vorgang nichts. Wir fragen, welcher Ausdruck sich für das Doppelverhältnis ergibt, wenn der Punkt V über alle Schranken nach rechts herausrückt und damit die Gegenseiten (I-II) und (III-IV) des Vierecks auf je einer Geraden parallel zu p liegen. Symbolisch beschreiben wir den auf p im Unendlichen liegenden Punkt mit V_∞ und den Vorgang des Herausrückens von V ins Unendliche mit $\lim\limits_{V \to V_\infty}$.

Zur Beantwortung dieser Frage gehen wir von (1) aus und nehmen eine identische

Umformung des Doppelbruches vor. Offenbar gilt

$$DV(AB \cdot UV) = \frac{\overline{AU}}{\overline{AV}} : \frac{\overline{BU}}{\overline{BV}} = \frac{\overline{AU}}{\overline{AV}} \cdot \frac{\overline{BV}}{\overline{BU}}$$
$$= \frac{\overline{AU} \cdot \overline{BV}}{(\overline{AB} + \overline{BV})\,\overline{BU}} = \frac{\overline{AU}}{\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{BV}} + 1\right)\overline{BU}} \qquad (3)$$

Wegen $\lim\limits_{V \to V_\infty} \frac{\overline{AB}}{\overline{BV}} = 0$ (der Nenner des Bruches wächst über alle Grenzen!) ergibt sich aus (3) mit (2)

$$\lim_{V \to V_\infty} DV(AB \cdot UV) = \frac{\overline{AU}}{\overline{BU}} = -1 \qquad (4)$$

Aus (4) folgt für den Grenzfall des Trapezes $\overline{AU} = -\overline{BU}$ und $|\overline{AU}| = |\overline{BU}|$; d.h. U ist der Halbierungspunkt der auf der Seitenparallelen liegenden Strecke $\overline{AB}$.

Diese Feststellung hilft uns beim Einstieg in eine Reihe von Grundkonstruktionen, die bei Vorgabe einer Kreislinie samt Mittelpunkt allein mit dem Lineal ausführbar sind.

Wenden wir uns nun den konkreten Aufgabenstellungen zu.

1. Vorgabe der Kreislinie c samt dem Mittelpunkt M und einer c nicht reell schneidenden Geraden g.
Konstruktion des Poles G von g bezüglich c sowie des bezüglich c inversen Punktes G^* von G.

2. Vorgabe von c samt M, einer Geraden g und eines Punktes $P \notin g$.
Konstruktion der zu g parallelen Geraden h durch P.

3. Vorgabe von c samt M und einer auf der Geraden g liegenden Strecke $\overline{AB}$.
Konstruktion des Halbierungspunktes C von $\overline{AB}$.

4. Vorgabe von c samt M und einer auf der Geraden g liegenden Strecke $\overline{AB}$.
Konstruktion des Punktes C auf g derart, daß B Halbierungspunkt der Strecke $\overline{AC}$ ist.

5. Vorgabe von c samt M, einer Geraden g und eines Punktes P.
Konstruktion des Lotes l von P auf g.

6. Vorgabe von c samt M und zweier sich im Punkt Z schneidender Geraden a und b.
Konstruktion der Winkelhalbierenden u und v zu den von a und b aufgespannten Winkeln.

7. Vorgabe von c samt M, einer auf der Geraden h liegenden Strecke $\overline{AB}$, einer Geraden g und eines Punktes $D \in g$.
Konstruktion der Punkte $A'', B'' \in g$ derart, daß $\overline{A''D} = \overline{DB''} = \overline{AB}$ gilt.

8. Vorgabe von c samt M und eines Durchmessers d.
Konstruktion des Lotes e von d in M.

9. Vorgabe von c samt M, einer zweiten Kreislinie k durch deren Mittelpunkt N und einen Punkt $A \in k$ sowie einer Geraden g.
Konstruktion der Schnittpunkte von g mit k.

10. Vorgabe von c samt M, einer zweiten Kreislinie k durch deren Mittelpunkt N und einen Punkt $A \in k$ sowie einer dritten Kreislinie l durch deren Mittelpunkt O und einen Punkt $B \in l$.
Konstruktion der Schnittpunkte von k und l.

Zur Beschreibung der ausschließlich mit dem Lineal durchzuführenden Konstruktionen werde eine abkürzende Symbolik vereinbart. Es bedeuten:

$(AB) = g$; g ist die durch Verbinden der Punkte A und B erzeugte Gerade.
$a \times b = P$; P ist der im Schnittpunkt der Geraden a und b liegende Punkt.
$(AB) \times (CD) = P$; P ist der Schnittpunkt der durch Verbinden von A und B bzw. C und D erzeugten Geraden.
$a \parallel b$; die Geraden a und b liegen zueinander parallel.
$a \perp b$; die Geraden a und b stehen aufeinander senkrecht.

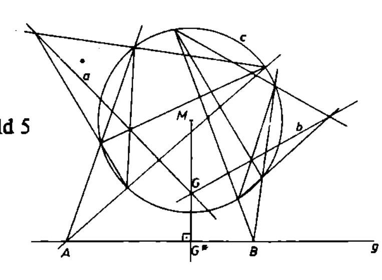
In runde Klammern gesetzte Punktepaare symbolisieren das Verbinden dieser Punkte mit dem Lineal. Zwei mit x verknüpfte Symbole für Geraden beschreiben die Erzeugung eines Punktes durch den Schnitt zweier Geraden.

Bei Rückverweisung auf eine bereits behandelte Grundaufgabe wird die Nummer der Aufgabe in eckige Klammern gesetzt.

Bei den folgenden Beschreibungen geht es um die prinzipielle Ausführbarkeit der Konstruktion unter Beschränkung auf das Lineal. Es geht nicht um die Übersichtlichkeit der Konstruktion und der Belastbarkeit des Zeichenblattes mit Konstruktionslinien. Auch Fragen der Zeichenungenauigkeiten infolge „schleifender Schnitte" und „wackliger Verbindungen" sind hier nicht Gegenstand der Erörterung.

Lösung zu 1.
Da die Polaren der Punkte einer Geraden g bezüglich der Kreislinie c sämtlich durch den Pol G von g gehen, genügt es, von zwei Punkten $A, B \in g$ die Polaren a bzw. b bezüglich c aufzusuchen. Ihr Schnittpunkt $S = a \times b$ ist daher identisch mit dem Pol G von g in bezug auf c. Die Verbindungsgerade (GM) ist das Lot von M auf g, denn die Polare g eines Punktes G bezüglich c steht senkrecht auf dem durch G gehenden Kreisdurchmesser. Der Schnittpunkt $G^* = (MG) \times g$ liegt invers zu G. Diese – auch analytisch faßbare – quadratische Punktverwandtschaft heißt Kreisinversion. Zur Lösung von Aufgabe (10) werden wir diese Punkttransformation benötigen (vgl. Bild 5).

Bild 5



Lösung zu 2.
Bestimmung des Poles G von g nach [1]. $(MG) \times g = G^*$. Bestimmung der Polaren g^* von G^* nach Abbildung 2. g^* schneidet c in den Punkten S und T. $(PT) \times g = V$, $(PT) \times (MG) = Z$, $(ZS) \times g = U$; $(UP) \times (MG) = W$, $(VW) \times (ZS) = Q$. Die Punkte P und Q sind nach Konstruktion symmetrisch bezüglich (MG). Folglich liegt (PQ) senkrecht zu (GM) und damit parallel zu g (vgl. Bild 6).

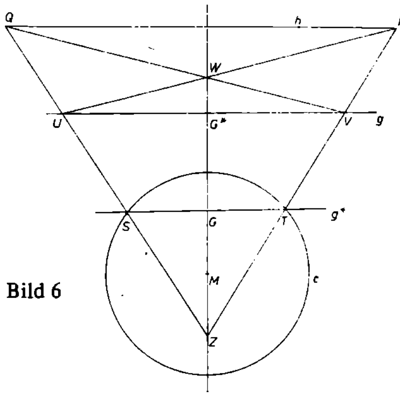


Bild 6

Lösung zu 3.
Bestimmung des Poles G von g nach [1]. $(MG) \times g = G^*$. Bestimmung der Polaren g^* von G^* bezüglich c. g^* schneidet c in den Punkten S und T. G ist Halbierungspunkt der Strecke $\overline{ST}$. Ferner ist $g^* \parallel g$. $(AS) \times (BT) = Z$. $(ZG) \times g = C$. Wegen $g^* \parallel g$ ist C Halbierungspunkt von $\overline{AB}$ (vgl. Bild 7).

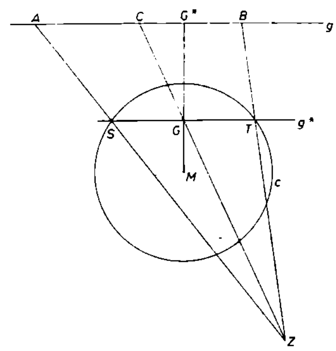
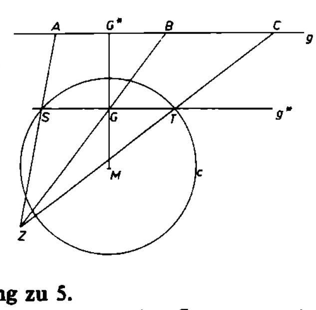


Bild 7

Lösung zu 4.
Bestimmung des Poles G von g nach [1]. $(MG) \times g = G^*$. Bestimmung der Polaren g^* von G^* bezüglich c. g^* schneidet c in den Punkten S und T. $(AS) \times (BG) = Z$. $(ZT) \times g = C$. Wegen $g \parallel g^*$ erfüllt C die gestellte Forderung bezüglich A und B (vgl. Bild 8).

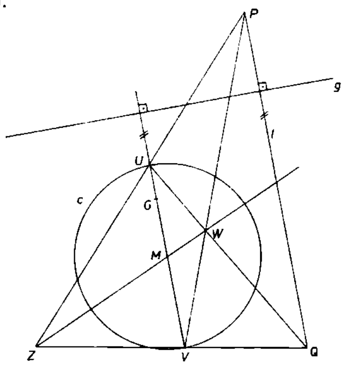
Bild 8



Lösung zu 5.
Bestimmung des Poles G von g nach [1]. (MG) schneidet c in den Punkten U und V. Ferner gilt $(MG) \perp g$. Annahme eines Punktes Z auf (UP). $(ZM) \times (VP) = W$. $(UW) \times (ZV) = Q$. Nach den vorangestell-

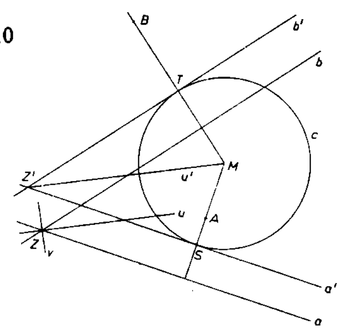
ten Untersuchungen stellt das Vierseit $(UVQP)$ ein Trapez dar mit $(UV) \parallel (QP)$, denn M ist Halbierungspunkt von $\overline{UV}$, W ist Schnittpunkt der Diagonalen des Vierseits $(UVQP)$, und die Verbindungsgeraden (UP), (VQ) und (WM) schneiden sich in einem Punkt Z. Wegen $(UV) \perp g$, $(UV) \parallel (PQ)$ ist (PQ) Lot l von P auf g (vgl. Bild 9).

Bild 9



Lösung zu 6.
Bestimmung der Pole A von a und B von b bezüglich c nach [1]. $(MA) \times c = S$, $(MB) \times c = T$ (Auswahl der Schnittpunkte S und T beliebig). Parallele a' zu a durch S und b' zu b durch T nach [2]. $a' \times b' = Z'$. $(Z'M) = u'$. Nach Konstruktion ist u' Winkelhalbierende zu einem der von a' und b' aufgespannten Winkel. Parallele zu u' durch Z nach [2] liefert die gesuchte Winkelhalbierende u. Das Lot von u in Z nach [5] führt auf die zweite Winkelhalbierende v (vgl. Bild 10).

Bild 10



Lösung zu 7.
Bestimmung der Pole G von g und H von h bezüglich c nach [1]. $(MG) \times c = S$, $(MH) \times c = T$ (Auswahl der Punkte wieder beliebig). Parallelen g' zu g durch S und h' zu h durch T nach [2]. $g' \times h' = Z'$, $(Z'M) = w$. Lote von A auf w und von B auf w nach [5]. Die Lote schneiden g' in A' bzw. B'. Einzeichnen der Verbindungsgeraden $(A'D)$ und $(B'D)$. Konstruktion der Parallelen a zu $(B'D)$ durch A' und b zu $(A'D)$ durch B' nach [2]. $a \times g = A''$, $b \times g = B''$. Nach Konstruktion gilt $\overline{A''D} = \overline{DB''} = \overline{AB}$ (vgl. Abb. 11).

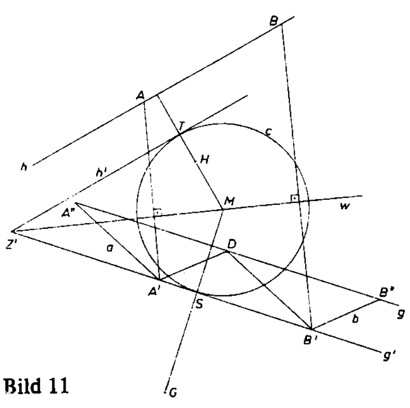
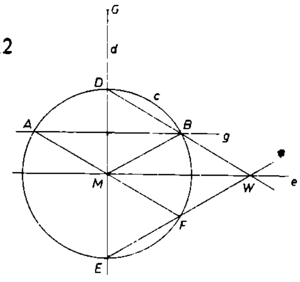


Bild 11

Lösung zu 8.
Annahme von G auf d außerhalb c. Konstruktion der Polaren g von G bezüglich c nach Abb. 2. c schneidet g in A und B und d in den Punkten D und E. (AM) schneidet c in F. $(DB) \times (EF) = W$.
Wegen B, $F \in c$ und $(BF) \parallel (DE)$ ist das Viereck $MFWB$ ein Drachenviereck, in dem $(BF) \perp (MW)$ gilt. Daher ist $(MW) = e$ das Lot von d in M (vgl. Bild 12).

Bild 12



Lösung zu 9.
Die Lösung sei dem Leser überlassen. Man überlege sich bei jedem Schritt, welche der unter Punkt 1 bis 8 gebotenen Grundkonstruktionen zum Einsatz gelangen. Die Lösung des Autors einschließlich Bild 13 veröffentlichen wir in Heft 3/85.

Lösung zu 10.
Da die Kreislinien k und l selbst mit unseren Mitteln nicht gezeichnet werden können, muß diese Aufgabenstellung durch geeignete Transformationen in eine für uns ausführbare Konstruktion umgesetzt werden. Mit Translationen und zentrischen Streckungen allein kommt man hierbei nicht aus. Man muß die in [1] konstruktiv behandelte Kreisinversion zum Einsatz bringen. Eine Gerade allgemeiner Lage geht bei der Inversion an c in eine Kreislinie durch den Mittelpunkt M von c über. Schneidet die Gerade den Kreis c, so geht auch der Bildkreis g^* von g durch diese Schnittpunkte. Die Punkte des Kreises c sind Fixpunkte der Abbildung. Eine Gerade d durch den Mittelpunkt M von c geht daher in sich über, denn die Punkte M und die Schnittpunkte von d mit c sind auch Punkte von d^*. Zwei sich in $P \neq M$ schneidende Geraden g und h gehen in zwei sich in M und den Bildpunkt P^* von P schneidende Kreislinien g^* und h^* über.

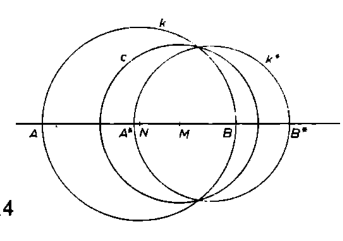
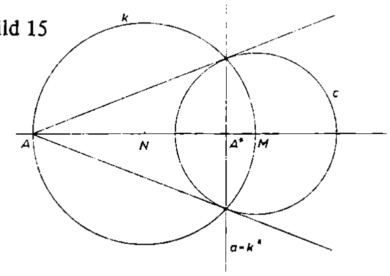


Bild 14

Ein Kreis wird in einen Kreis transformiert, sofern er nicht durch den Mittelpunkt M von c geht. Schneidet der Kreis k den Kreis c reell, so geht auch k^* durch diese Schnittpunkte (vgl Bild 14).
Geht der Kreis k durch den Mittelpunkt M des Inversionskreises c, so ist das Bild k^* von k eine Gerade. Diese ist identisch mit der Polaren des auf k liegenden Gegenpunktes A von M (vgl. Bild 15). Liegt A außerhalb von c, ist k^* die Verbindungsgerade der Schnittpunkte von c und k.

Bild 15



Konstruktiv besteht folgende Möglichkeit, die Schnittpunkte der Kreislinien k und l allein mit dem Lineal zu ermitteln:
Ausführung der durch das Punktepaar $A \rightarrow M = A'$ bestimmten Translation. Entsprechend erhält man N' aus N, O' aus O und B' aus B. Strecke $\overline{NA} = \overline{N'A'}$ auf $(N'A')$ über N' hinaus abtragen. Dies gibt den Gegenpunkt D von A' auf k'.
Verbinden von O' mit M. Abtragen der Strecke $\overline{OB} = \overline{O'B'}$ von O' nach beiden Seiten auf $(O'M)$. Es ergeben sich die Punkte R' und S' als Endpunkte des durch M gehenden Durchmessers von l'.
Inversion von k' und l' an c. Gemäß Bild 15 ergibt sich für k'' eine Gerade, nämlich die Polare d von D bezüglich c und für l'' entsprechend Bild 14 ein Kreis. Sein durch M gehender Durchmesser ist festgelegt durch die Bildpunkte R'' und S'' von R' bzw. S'.

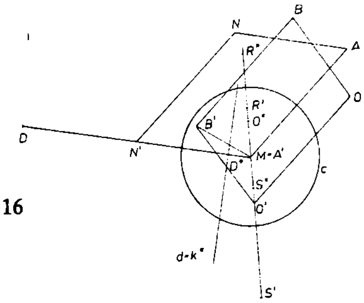


Bild 16

Damit ist die Aufgabe 10 auf die Aufgabe 9 zurückgeführt, bei welcher ein Kreis mit einer Geraden zum Schnitt zu bringen ist. Durch eine Translation ist O'' (Halbierungspunkt der Strecke $R''S''$) nach M zu überführen. Anschließend ist l''' durch zentrische Streckung (Stauchung) mit c zur Deckung zu bringen. $k'' = d$ ist den gleichen Transformationen zu unterwerfen.
Die Schnittpunkte der Geraden k'''' mit der Kreislinie c sind in das ursprüngliche Bild zurückzuführen. Man erhält sie, ohne daß die Kreislinien k und l gezeichnet vorliegen.

Mit Hilfe der hier – unter Beschränkung auf das Lineal – vorgeführten Grundkonstruktionen lassen sich alle mit Zirkel und Lineal lösbaren Dreiecksaufgaben konstruktiv lösen.
Konstruktionen, die mit dem Lineal allein ausführbar sind, werden lineare Konstruktionen oder Konstruktionen ersten Grades genannt. Hingegen heißen Konstruktionen, die nur unter dem Einsatz von Zirkel und Lineal ausführbar sind, Konstruktionen zweiten Grades. Es läßt sich allgemein zeigen, daß alle Konstruktionen zweiten Grades mit dem Lineal allein ausführbar sind, wenn in der Zeichenebene eine feste Kreislinie mit ihrem Mittelpunkt vorgegeben ist. Solche Konstruktionen nennt man nach ihren Entdeckern Jean-Victor Poncelet (1788 bis 1867) und Jakob Steiner (1796 bis 1863) *Poncelet-Steinersche Konstruktionen*. *E. Schröder*

Dozent Dr. sc. nat. Eberhard Schröder, geb. 1920 in Leipzig als Lehrerssohn, Schulabschluß 1939 mit Abitur. Nach Tätigkeit als Lehrer und in der Industriepraxis Mathematikstudium an der damaligen TH Dresden von 1952 bis 1957. Assistent am Institut für Geometrie, Promotion A 1962, Hochschuldozent 1970, Promotion B 1977, seit 1962 vorwiegend in der Mathematikausbildung von künftigen Diplomingenieuren an der TU Dresden tätig.
Publizistische Wirksamkeit:
Lehrbuch „Darstellende Geometrie" für Lehrer (1974); Monographie „Dürer – Kunst und Geometrie" (1980); Monographie „Mathematik im Reich der Töne" (1982); Mitarbeit an „Kleine Enzyklopädie Mathematik" (1979). Außer einer Reihe wissenschaftlicher Publikationen in Fachzeitschriften erschienen von Dr. Schröder seit 1967 mehr als 25 Aufsätze in der Schülerzeitschrift *alpha* mit vorwiegend geometrischem Inhalt. Durch geschickte Themenwahl und anschauliche Behandlung mathematischer Probleme verstand er es, die Schüler zur außerschulischen Beschäftigung mit Mathematik anzuregen. Bei Mathematikolympiaden war er als Koordinator und Mitglied der Jury eingesetzt. Zur Zeit arbeitet Dr. Schröder an der Transkription des ältesten vollständig überlieferten deutschsprachigen Rechenbuches aus dem Jahre 1483. – Mit der Freude an mathematischen und mathematikhistorischen Fragestellungen verknüpft sich bei Dr. Schröder die Fähigkeit, die angeschnittene Problematik leicht verständlich darzustellen und für die pädagogische Arbeit zu erschließen.

Keine Scheu vor Stöchiometrieaufgaben!

Schülern wie Erwachsenen bereitet die Lösung von Sachaufgaben aus dem chemischen Teilgebiet Stöchiometrie oft Schwierigkeiten. Am Lösungsweg von zwei Aufgaben soll gezeigt werden, daß bei Berücksichtigung des modernen Molkonzepts[1]) größenrichtige Überlegungen zum gewünschten Ziel führen. Zunächst werden die für beide Aufgaben benötigten Größen und ihre Einheiten mit Namen und Symbol vorgestellt sowie Beziehungen dieser Größen zu anderen Größen (a). Es folgen dann mathematische Ansätze, die Grundlage für die Lösung dieser Aufgaben sind (b).

a)

Größe[2])		Einheit[2])		Beziehungen zu anderen Größen
Name	Symbol	Name	Symbol	
Stoffmenge	n	Mol	mol	$n = \frac{m}{M}$, $n = c \cdot v$
Molare Masse (Molmasse)	M	Kilogramm je Mol	$kg \cdot mol^{-1}$	$M = \frac{m}{n}$
Stoffmengenkonzentration (Molarität)	c	Mol je Kubikmeter (Mol je Liter)	$mol \cdot m^{-3}$ ($mol \cdot l^{-1}$)	$c = \frac{n}{v}$, $c = \frac{w \cdot \varrho_L}{M}$ ϱ_L Dichte der Lösung
Dichte (griech. Buchstabe „Rho" ϱ)	ϱ	Kilogramm je Kubikmeter	$kg \cdot m^{-3}$ ($g \cdot cm^{-3}$)	$\varrho = \frac{m}{v}$
Stöchiometriezahl (griech. Buchstabe „Ny" ν)	ν	Stöchiometriezahlen sind die stöchiometrischen Faktoren innerhalb von Reaktionsgleichungen bzw. Atomzahlen innerhalb von Substanzformeln. Sie geben keine Stoffmengen an, sind aber der Stoffmenge jeweils proportional (Einheit-Name: Eins, Einheit-Symbol: 1).		
Masseanteil (-gehalt, -bruch, Masseprozent)	w	Der Masseanteil w_B des Stoffes B in einer Mischung ist der Quotient aus der Masse des Stoffes B und der Summe der Massen aller Komponenten der Mischung (Einheit-Name: Eins oder Prozent, Einheit-Symbol: 1 oder %, Beziehung zu anderen Größen: $w_B = \frac{m_B}{\sum m_i}$). Masseanteil · 100 = Masseprozent.		

b) – Das Verhältnis der Stöchiometriezahlen läßt sich als Verhältnis von Stoffmengen auffassen. Zum Beispiel gilt für ein ternäres System der Stoffe A, B und C:

$$\nu_A : \nu_B : \nu_C = n_A : n_B : n_C.$$

– Wird eine Lösung verdünnt, so wird ihr lediglich Lösungsmittel zugesetzt. Hierbei bleibt die Stoffmenge n bzw. die Masse m an Gelöstem konstant. Daher gilt (Index 1 bedeutet vor dem Verdünnen, Index 2 nach dem Verdünnen): $n_1 = n_2$ bzw. $m_1 = m_2$.

– Ist die Zusammensetzung der Lösung L durch den Massenanteil w an Gelöstem gekennzeichnet, gilt:

$$w_1 \cdot m_{L,1} = w_2 \cdot m_{L,2}.$$

Entwickelt aus:

$$m_1 = m_2 \text{ und } w_1 = \frac{m_1}{m_{L,1}} \text{ sowie } w_2 = \frac{m_2}{m_{L,2}},$$

wobei m Masse des Gelösten bedeutet und m_L Masse der Lösung.

– Ist die Zusammensetzung der Lösung L durch die Stoffmengenkonzentration c an Gelöstem gekennzeichnet, gilt:

$$c_1 \cdot v_1 = c_2 \cdot v_2.$$

Entwickelt aus: $n_1 = n_2$ und $c_1 = \frac{n_1}{v_1}$ sowie $c_2 = \frac{n_2}{v_2}$.

Die beiden stöchiometrischen Beispiele, die jetzt in Teilschritten durchgerechnet werden, befassen sich inhaltlich mit *einfachen chemischen Reaktionen* und *Verdünnen von Lösungen*.

Aufgabe

▲1▲ Es sollen 20 t Ammoniumnitrat (Düngemittel, Sprengstoff) hergestellt werden. Berechnen Sie, wieviel Kilogramm Ammoniak und Sauerstoff hierzu verbraucht werden, wenn von folgender Reaktionsgleichung ausgegangen wird

$$2\,NH_3 + 2\,O_2 \longrightarrow NH_4NO_3 + H_2O.$$

Gegeben: 20 t Endprodukt NH_4NO_3
Gesucht: Massen der Ausgangsprodukte Ammoniak und Sauerstoff
Lösungsweg: Zuerst wird ein Stoffmengen-Stöchiometriezahlen-Verhältnis der gegebenen und gesuchten Stoffe entsprechend der Reaktionsgleichung aufgestellt. Dann wird eine Beziehung zwischen der gesuchten Größe mit der entsprechenden Stoffmengengröße (aus dem Stoffmengen-Stöchiometriezahlen-Verhältnis) formuliert. Diese beiden Größengleichungen kombiniert und nach der gesuchten Größe aufgelöst, ergeben die Endgleichung für die Ausrechnung.
Berechnung der benötigten Masse an Ammoniak:

1. Teilschritt: Aufstellen eines Stoffmengen-Stöchiometriezahlen-Verhältnisses (siehe Zusammenstellung b))

$$\frac{n_{NH_3}}{n_{NH_4NO_3}} = \frac{\nu NH_3}{\nu NH_4NO_3} = \frac{2}{1},$$

daraus folgt

$$n_{NH_3} = 2n_{NH_4NO_3} \qquad (1)$$

2. Teilschritt: Herstellen einer Beziehung zwischen gesuchter Größe m_{NH_3} und der ihr entsprechenden Stoffmengengröße n_{NH_3} (siehe Zusammenstellung a)):

$$m_{NH_3} = n_{NH_3} \cdot M_{NH_3} \qquad (2)$$

3. Teilschritt: Kombinieren der beiden Teilgleichungen (1) und (2) zu einer Gleichung, die nach der gesuchten Größe m_{NH_3} aufzulösen ist:

$$m_{NH_3} = 2n_{NH_4NO_3} \cdot M_{NH_3} \qquad (3)$$

4. Teilschritt: Die in Gleichung (3) nichtgegebene Stoffmengengröße $n_{NH_4NO_3}$ läßt sich berechnen nach Einführung des Quotienten

$\frac{m_{NH_4NO_3}}{M_{NH_4NO_3}}$ (siehe Zusammenstellung a)),

da der Zahlenwert für $m_{NH_4NO_3}$ im Aufgabentext gegeben ist. Aus Gleichung (3) wird dann

$$m_{NH_3} = 2m_{NH_4NO_3} \cdot \frac{M_{NH_3}}{M_{NH_4NO_3}} \qquad (4)$$

5. Teilschritt: Einsetzen der Zahlenwerte und Einheiten für jedes Größensymbol. Hierbei darauf achten, daß nur sich entsprechende Einheiten verwendet werden (in dieser Aufgabe Umrechnung der Einheit *Tonne* in *Kilogramm*). Rechnerische Lösung der Größengleichung (4):

$$m_{NH_3} = 2 \cdot 20\,000 \cdot \frac{0{,}017}{0{,}080} \cdot \mathrm{kg} \frac{\mathrm{kg\ mol^{-1}}}{\mathrm{kg\ mol^{-1}}}$$

$m_{NH_3} = 8\,500$ kg NH_3

Analog erfolgt die Berechnung der benötigten Masse an Sauerstoff:

$$m_{O_2} = 2n_{NH_4NO_3} \cdot M_{O_2} \quad \Big\| \quad n_{NH_4NO_3} = \frac{m_{NH_4NO_3}}{M_{NH_4NO_3}}$$

$$m_{O_2} = 2m_{NH_4NO_3} \cdot \frac{M_{O_2}}{M_{NH_4NO_3}}$$

$$m_{O_2} = 2 \cdot 20\,000 \cdot \frac{0{,}032}{0{,}080} \cdot \mathrm{kg} \frac{\mathrm{kg\ mol^{-1}}}{\mathrm{kg\ mol^{-1}}}$$

$m_{O_2} = 16\,000$ kg Sauerstoff.

Ergebnis: Für die Herstellung von 20 t Ammoniumnitrat werden 8 500 kg Ammoniak und 16 000 kg Sauerstoff verbraucht.

Aufgabe

▲2▲ Es werden 10 l Salzsäure der Stoffmengenkonzentration $1\ \mathrm{mol \cdot l^{-1}}$ benötigt. Wieviel $\mathrm{cm^3}$ Salzsäure ($w_{HCl} = 36\,\%$, $\varrho_{HCl} = 1{,}184\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$) sind hierzu abzumessen und dann mit Wasser auf 10 l aufzufüllen?
Gegeben: $v_2 = 10$ l, $c_2 = 1\ \mathrm{mol \cdot l^{-1}}$, $w_1 = 36\,\%$, $\varrho_1 = 1{,}184\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$
Gesucht: v_1
Lösungsweg: Bei dieser Aufgabe muß von der grundlegenden Überlegung ausgegangen werden, daß bei der Verdünnung einer Lösung die Stoffmenge bzw. die Masse an Gelöstem konstant bleibt. Entsprechend der Forderung im Aufgabentext nach Herstellung einer Lösung bestimmter Stoffmengenkonzentration kann von dem mathematischen Ansatz $c_1 \cdot v_1 = c_2 \cdot v_2$ ausgegangen werden. Diese Größengleichung wird nach der gesuchten Größe aufgelöst. Befindet sich in der Größengleichung eine nichtgegebene Größe, so muß eine Beziehung gesucht werden, die diese Größe mit weiteren im Aufgabentext enthaltenen Größen verbindet. Eine derartige Beziehung erlaubt, die nichtgegebene Größe in der Größengleichung zu substituieren. Eine Lösung der Gleichung ist jetzt möglich.

1. Teilschritt: Formulierung des mathematischen Ansatzes

$$c_1 \cdot v_1 = c_2 \cdot v_2$$

und Auflösung der Gleichung nach der gesuchten Größe v_1:

$$v_1 = \frac{c_2 \cdot v_2}{c_1} \qquad (1)$$

2. Teilschritt: Für die Substitution der nichtgegebenen Größe c_1 wird die Beziehung $c_1 = \frac{w_1 \cdot \varrho_1}{M_1}$ (2)
genützt, die sie mit den im Aufgabentext gegebenen Größen w_1 und ϱ_1 verbindet.

3. Teilschritt: Einführung des Quotienten der Gleichung (2) in die Gleichung (1). Es ergibt sich

$$v_1 = \frac{c_2 \cdot v_2 \cdot M_1}{w_1 \cdot \varrho_1} \qquad (3)$$

4. Teilschritt: Einsetzen der Zahlenwerte und Einheiten für jedes Größensymbol. Im Hinblick auf die Forderung nur sich entsprechende Einheiten zu benutzen, ist für die Dichte ϱ_1 die Einheit $\mathrm{kg \cdot l^{-1}}$ zu wählen. Rechnerische Lösung der Größengleichung (3)

$$v_1 = \frac{1 \cdot 10 \cdot 0{,}036\,5}{0{,}36 \cdot 1{,}184} \cdot \frac{\mathrm{mol \cdot l \cdot kg \cdot l}}{\mathrm{l \cdot 1 \cdot mol \cdot kg}}$$

$v_1 = 0{,}856\,3$ l

$v_1 = 856{,}3\ \mathrm{cm^3}$

Ergebnis: Um 10 l Salzsäure mit der Stoffmengenkonzentration $1\ \mathrm{mol \cdot l^{-1}}$ herzustellen, müssen $856{,}3\ \mathrm{cm^3}$ 36%ige Salzsäure ($\varrho_{HCl} = 1{,}184\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$) mit Wasser auf dieses Volumen aufgefüllt werden.
Die Durchrechnung der beiden Beispiele dürfte gezeigt haben, daß es bei der Vielfalt der stöchiometrischen Aufgaben schwierig ist, einen alle Möglichkeiten berücksichtigenden und in alle Einzelheiten gehenden Lösungsalgorithmus aufzustellen. Einige allgemeine Hinweise seien jedoch zum Schluß zusammengefaßt:

1. Wenn erforderlich, chemische Gleichung bzw. Formel aufstellen.
2. Gegebene und gesuchte Größen der Stoffe ermitteln.
3. Von der gesuchten Größe die Definitionsgleichung ermitteln.
4. Für nicht gegebene Größen, die zur Berechnung erforderlich sind, Gleichungen suchen, in denen diese Größen mit gegebenen Größen verbunden sind.
5. Gleichungen nach 3. und 4. zu einer Gleichung kombinieren, die nach der gesuchten Größe aufzulösen ist.
6. Für jedes Größensymbol Zahlenwert und Einheit einsetzen.
Hierbei darauf achten, daß sich die Einheiten entsprechen.
7. Die gesuchte Größe berechnen.

V. Winzer

[1]) G. Röbisch „Elementare Stöchiometrie größenrichtig und SI-gerecht" „Anorganikum"
Beide Titel: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1983

Eine Aufgabe mitgeteilt von Prof. Dr. Adolf P. Juschkewitsch

Institut für Geschichte der Wissenschaften der UdSSR

▲2459▲ Aus einem Münchner Rechenbuch aus der Mitte des 15. Jh., herausgegeben von Kurt Vogel, München, 1954:
Ein Bauer starb und hinterließ seinen 3 Söhnen 9 Fässer mit einem Inhalt von 1 bis 9 Urnen Wein (altes Regensburger Maß) mit dem Wunsch, den Wein sowie die Fässer derart aufzuteilen, daß jeder gleich viel Fässer und gleich viel Wein erhält.
Wieviel Möglichkeiten (verschiedene) gibt es, um den Wunsch zu erfüllen?
Hinweis: Benutze die *magischen* Quadrate mit 9 Feldern!

Kurzbiografie von Prof. Dr. A. P. Juschkewitsch
Geboren 1906 in Odessa – 1929 Studium der Mathematik an der Moskauer Universität beendet – 1940 Dr. der Mathematik – ab 1940 ordtl. Prof. an der Technischen Hochschule *Nikolai Baumann* – ab 1941 Leiter des Lehrstuhls dieser TH – ab 1945 Mitarbeiter am Institut für Geschichte der Wissenschaften an der Akademie der Wissenschaften der UdSSR – seit 1958 Mitglied der *Leopoldina*, Halle – seit 1960 Mitglied der Internationalen Akademie der Geschichte der Wissenschaften, Paris – 1983 Preis der Akademie der Wissenschaften Frankreichs.

Daten unserer Schulgeschichte

Gleiches Recht auf Bildung für alle Kinder des Volkes

Die katastrophale Lage des deutschen Schulwesens nach der Zerschlagung des Faschismus resultierte aus dem jahrzehntelangen Mißbrauch der Schule als Mittel der Verherrlichung von Militarismus, Chauvinismus und Antikommunismus. „Wo sollen bei dieser Jugend nach solchen Erlebnissen neue Ideale herkommen?"
Diese Frage stellte Otto Grotewohl auf dem 1. Parlament der FDJ am 8. Juni 1946. Seine Antwort war trotz allem optimistisch. „Die andere Welt steht noch vor euch. Ihr müßt sie erst selbst schaffen, selbst gestalten und ihr selbst einen richtigen Inhalt geben." Es war außerordentlich wichtig, neben der Schaffung neuer Produktions- und Eigentumsverhältnissen vor allem neue Menschen im Geiste der Demokratie, der Völkerfreundschaft und des Friedens heranzubilden.

Kampf um die Schulreform

Auf dieser Grundlage wurde, als eine Maßnahme der antifaschistisch-demokratischen Schulreform, die Ausarbeitung des Gesetzes zur Demokratisierung der deutschen Schule in Angriff genommen.
Am 29. September 1945 fand die erste Sitzung der Kommission statt, die bis zum Februar 1946 eine Denkschrift über eine *antifaschistisch-demokratische Einheitsschule* verfassen sollte. Der von der Zentralverwaltung vorgelegte Entwurf wurde durch Vertreter aller Provinzen und Länder beraten, geändert, ergänzt und als gemeinsamer Gesetzentwurf den Blockparteien zur Stellungnahme vorgelegt. Bei der endgültigen Fassung hatte man auch Gedanken fortschrittlicher bürgerlicher Pädagogen beachtet.
Außerdem gingen seit 1945 Vorschläge und Anregungen interessierter Bürger ein. Vor allem die Hinweise von Mitgliedern der KPD und SPD, des FDGB und anderer fortschrittlicher Kräfte, die eine Grundschule anstrebten, die sich über die gesamte Zeit des obligatorisch allgemeinbildenden Unterrichts erstrecken sollte, fanden Beachtung. Mit reaktionären und revisionistischen Ansichten, die zum Beispiel den Bildungsdualismus und Bildungsprivilegien beibehalten wollten, setzte man sich konsequent auseinander.
Mitte Mai war die Arbeit am Gesetzentwurf abgeschlossen, und nach Zustimmung der SMAD (Sowjetische Militäradministration Deutschlands) wurde das Gesetz, das zum erstenmal in der Geschichte des deutschen Schulwesens gleiches Recht auf Bildung für alle garantierte, am 22. Mai in der Provinz Sachsen, am 23. Mai im Land Mecklenburg, am 31. Mai in der Provinz Mark Brandenburg und im Land Sachsen und am 2. Juni 1946 im Land Thüringen angenommen. Zehn Tage später, am 12. Juni 1946, trat das Gesetz in Kraft und war damit im Gebiet der Sowjetischen Besatzungszone gültig. Aus diesem Anlaß werden heute am 12. Juni in der DDR alle Lehrer und Erzieher gewürdigt.
Die antifaschistisch-demokratische Schulreform stellt in unserer Geschichte ein Stück härtesten Klassenkampfes dar. In Berlin behinderten die westlichen Besatzungsmächte, unterstützt von reaktionären und revisionistischen Kräften, die antifaschistisch-demokratische Schulreform, und erst 1948 konnte ein ähnliches Gesetz verabschiedet werden. Doch sie verhinderten nicht, daß mit der Inkraftsetzung des Gesetzes in der Sowjetischen Besatzungszone endgültig mit allen reaktionären Gedanken und Ideen gebrochen wurde und daß die Schule nun die Jugendlichen zu selbständig denkenden und bewußt handelnden Menschen erzog, die für das freundschaftliche Zusammenleben mit allen Völkern eintraten.

Bild 1
Zustand der Schulgebäude im Herbst 1945
Brandenburg

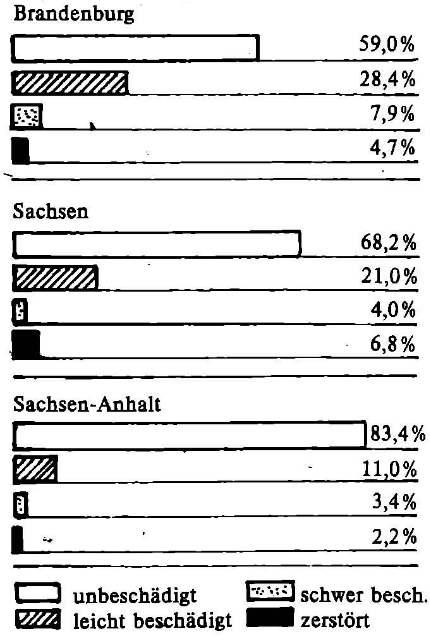
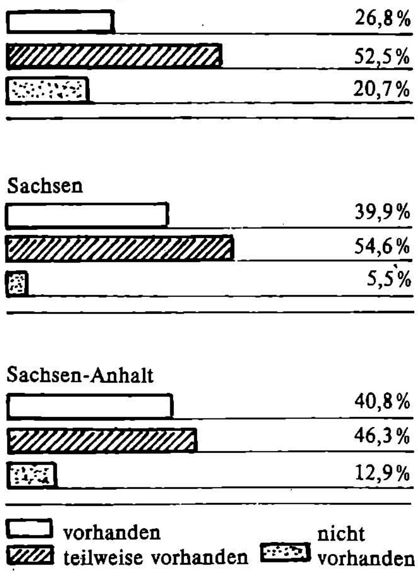


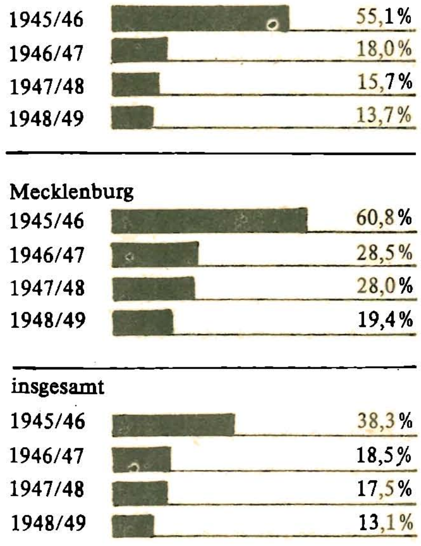
Bild 2
Ausrüstung der Schulen mit Inventar im Herbst 1945
Brandenburg



Die neue Schule

Jedem Kind wurde von nun an zugesichert, daß es unabhängig von Besitz, Glauben oder Abstammung nur entsprechend seinen Fähigkeiten ausgebildet wurde (§ 1). Der § 2 sicherte die Weltlichkeit der Schule und propagierte die demokratische Einheitsschule. Ihr Aufbau und ihre Gliederung wurden im § 3 fixiert: In der nichtobligatorischen Vorstufe (Kindergarten) wurden die Kinder bis zur Schulreife geführt. Die obligatorische Grundstufe (Grundschule) umfaßte acht Klassen, in denen die

Bild 3
Die Liquidierung der einklassigen Landschulen
Brandenburg



Die Prozentzahl gibt den Anteil der einklassigen Schulen an der Gesamtzahl der Grundschulen an.

Fächer Deutsch, Geschichte, Heimatkunde, Geographie, Biologie, Physik, Chemie, Mathematik, Kunst- und Werkunterricht, Musik, Leibesübungen und ab Klasse 5 Fremdsprachenunterricht erteilt wurden. Außerdem hatten alle Schüler ab Klasse 7 die Möglichkeit, zusätzliche Kurse für eine zweite Fremdsprache und naturwissenschaftliche Disziplinen zu belegen.
Um die Unterschiede in der Ausbildung zwischen Land- und Stadtschulen beseitigen zu können, wurden für Landkinder nichtvollstufige Schulen ausgebaut und Internatsschulen sowie Schulheime eingerichtet. Nach Absolvierung der Grundschule hatten die Jugendlichen die Möglichkeit, sich systematisch in der Oberstufe weiterzubilden. Dafür gab es Berufs-, Fach- und Oberschulen, die nach dem Erwerb des Abiturs die Aufnahme eines Studiums ermöglicht.
Der § 4 enthielt die Forderung nach Wissenschaftlichkeit und Systematik des Unterrichts. Durch die im § 5 zugesicherte Schulgeldfreiheit sowie Gewährung von Stipendien und Beihilfen ermöglichte das Gesetz auch Kindern minderbemittelter Eltern den Hochschulbesuch. Auch der § 6 verdeutlichte den demokratischen Charakter des Schulgesetzes. Alle Parteien und Organisationen wurden zur Unterstützung herangezogen. Außerdem wurden Elternausschüsse gebildet, die den Schulleitungen beratend zur Seite stehen sollten. Schließlich ordnete der § 7 die Neuregelung der Lehrerausbildung an.
Es war Wirklichkeit geworden! Die Jugend hatte wieder ein Ideal: „Ein neues Ideal einer neuen Zeit, ein Ideal, das so viel Kraft entwickelt...“ Sie war für die schweren Aufgaben ihres täglichen Lebens gewappnet und konnte nun „... so vorwärts stürmen, wie es die Jugend nun einmal tun muß.“
Heute wissen wir, daß die antifaschistisch-demokratische Schulreform auf dem Boden der DDR die bis dahin bedeutendste revolutionäre Umgestaltung in der deutschen Schulgeschichte war. Mit ihr wurde die innere Umformung einer ganzen Generation in Angriff genommen und garantiert, daß in unseren Schulen die Erziehung zum Frieden und zur Völkerverständigung oberstes Prinzip war und ist.

Claudia Friedrich

JUNI

10 Dienstag

11 Mittwoch

12 Donnerstag Tag des Lehrers

13 Freitag

Am 12. Juni 1946 wurde das Gesetz zur Demokratisierung der deutschen Schule auf dem gesamten Gebiet der späteren DDR wirksam

Ausgewählte Aufgaben aus Rechenbuch (Teil 1)

Volk und Wissen Verlagsgesellschaft M. B. H. Berlin/Leipzig · 1945

▲1▲ Ein Kaufmann konnte eine Ware, die ihn 143 RM gekostet hatte, mit 213 RM verkaufen; wie groß war sein Verdienst?

▲2▲ Eine Straße von 740 Meter (m) Länge soll gepflastert werden; es wird zugleich an fünf Stellen begonnen, und die fünf Gruppen bringen an einem Tag fertig 47, 35, 51, 46, 53 m, am nächsten Tag ist die Gesamtleistung 37 m größer. Wieviel m sind dann noch zu pflastern?

▲3▲ Ein Mann raucht an einem Tag 4 Zigarren. Wieviel sind das: a) in einer Woche; b) in einem Jahr; c) während 30 Jahren?

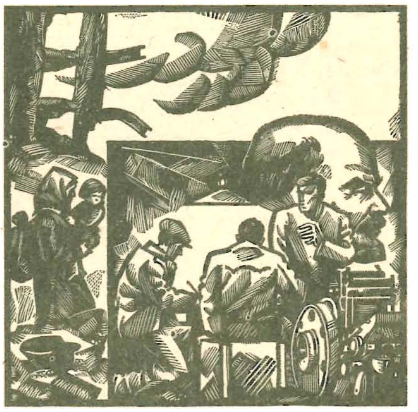
▲4▲ Eine Firma beschäftigt 7 Angestellte, einer erhielt im Monat 90 RM, zwei 140 RM, einer 150 RM, zwei 180 RM und der letzte, der Geschäftsleiter, 425 RM. Wieviel Gehalt hatte die Firma im Monat zu bezahlen?

▲5▲ Eine 1. Klasse hat 48 Schüler; der 12. Teil ist vom Turnen befreit, wieviel sind das?

▲6▲ Wieviel verdient ein Arbeiter an einem Tag, wenn er an jedem Sonnabend 42 RM ausgezahlt bekommt?

▲7▲ Ein Landmann braucht, um ein Feld mit Roggen zu besäen, 159 kg. Er erntet 2 253 kg; wievielfältig war die Ernte?

▲8▲ Auf einem Grundstück sind durch das Haus 78 qm bebaut, der Hof ist 1 a 13 qm groß, der Garten hat 4 a 81 qm. Wie groß ist das ganze Grundstück?



▲9▲ Ein Kaufmann versendet drei Kisten mit Waren. Die gesamte Ware wog 2 dz, die gepackten Kisten wogen einzeln 1,43 dz und 1,28 dz und 84 kg. Wieviel betrug zusammen in den drei Fällen die Verpackung (Tara)?

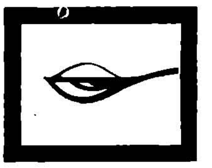
▲10▲ Für 1 km Fahrt in einem Personen- oder Eilzug bezahlt man in der dritten Klasse 4 Rpf, in der zweiten 5,8 Rpf und in der ersten 8,7 Rpf. Welches sind die Fahrpreise in den verschiedenen drei Klassen für die Linien: Berlin – Magdeburg 142 km; Berlin – Brandenburg 62 km?

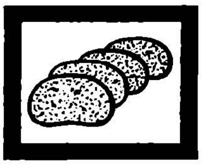
▲11▲ In einem Wintermonat brennen in einem Dorfortshaus am Abend und in der Nacht 8 Lampen, und zwar $6\frac{1}{4}$ Std. lang. Wieviel Petroleum haben im Monat alle zusammen verbraucht, und wieviel kostet das Petroleum? (Eine Lampe verbraucht in 10 Std. $\frac{1}{2}$ l Petroleum; 1 l kostet 29 Rpf.)

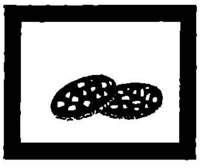
Aus der Bibliothek
von Neulehrer *J. Lehmann*,
jetzt Chefredakteur
der Schülerzeitschrift *alpha*

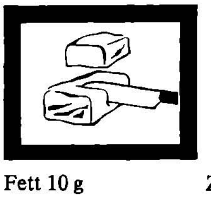
Tägliche Lebensmittelration für Kinder unter 15 Jahren in der sowjetischen Besatzungszone (Ende Dezember 1945)

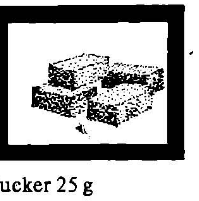

Kartoffeln 300 g


Nährmittel 10 g


Brot 200 g


Fleisch 15 g


Fett 10 g


Zucker 25 g

Chancen für Denkfaule?

Taschenrechner $\frac{\text{und}}{\text{oder}}$ Mathematik

„Eine Zwei in Mathe ist mir automatisch sicher, denn wir bekommen ja bald den Taschenrechner SR 1, der kann für mich rechnen", hörte ich unlängst im Bus einen Jungen prahlen. Dessen Freund konterte jedoch sehr selbstbewußt: „Mein Mathelehrer wird sich noch wundern. Mein Vater hat sich aus Moskau einen programmierbaren Taschenrechner Электроника Б 3-34 mitgebracht. Da wird es nun Einsen hageln, ohne daß ich mich sehr anstrengen muß."

Nun, ein Taschenrechner ist zweifellos ein sehr nützliches Hilfsmittel für die verschiedensten Zwecke und kann dem Benutzer die Rechenarbeit sehr erleichtern. Blind vertrauen sollte man einem Taschenrechner aber nicht! Eingabefehler (Drücken einer falschen Ziffern- oder Operationstaste) können z. B. vorkommen, ihr erkennt sie häufig durch eine Überschlagsrechnung. Deshalb steht auch ganz zu Anfang in der Bedienungsanleitung des neuen Schulrechners SR 1: „Man muß seinen Taschenrechner, seine Vorzüge und Grenzen genau kennen. Nicht alle Taschenrechner arbeiten völlig gleich. Es ist zweckmäßig, die Bedienungsanleitung genau zu lesen, die Beispiele nachzurechnen und ähnliche Aufgaben selbständig zu lösen. Wie jeder andere Taschenrechner führt auch der Schulrechner SR 1 nur die Befehle aus, die man ihm eingibt – und zwar in einer spezifischen, durch seine Konstruktion festgelegten Art und Weise. *Vertippen* von Zahlen, Operationsbefehlen oder Funktionstasten bzw. Nichtbeachten der eingebauten Automatiken führt zu falschen Resultaten. Deshalb sind Kontrollen sehr wichtig." Um Programme für programmierbare Rechner schreiben zu können, muß man die zu lösenden Aufgaben gut durchdenken und analysieren, dazu sind gute Mathematikkenntnisse unbedingt notwendig. Auf einige Tücken beim Umgang mit Taschenrechnern wollen wir hier hinweisen.

1. Rechengenauigkeit

Wir betrachten zuerst einige einfache Rechnungen, die wir mit dem Taschenrechner „konkret 600" (Bild 1) und dem Schulrechner SR 1 (Bild 2) vom VEB Mikroelektronik Mühlhausen durchführten. Die exakten Ergebnisse dieser Aufgaben erhält man durch schriftliches Ausrechnen oder aus mathematischen Grundbeziehungen. Ihr könnt diese und ähnliche Aufgaben auch mit Hilfe anderer Rechnertypen lösen und die erhaltenen Resultate mit unseren Ergebnissen vergleichen.

Die Aufgabe H ist mit dem „konkret 600" eigentlich nicht lösbar. Es wurde statt dessen $10 \cdot 10^{\lg 1234568}$ berechnet. Die Argumente bei den Aufgaben I und J sollen als Winkelmaß mit normaler Gradeinteilung verstanden werden, der SR 1 ist dazu auf DEG einzustellen.

Bild 1

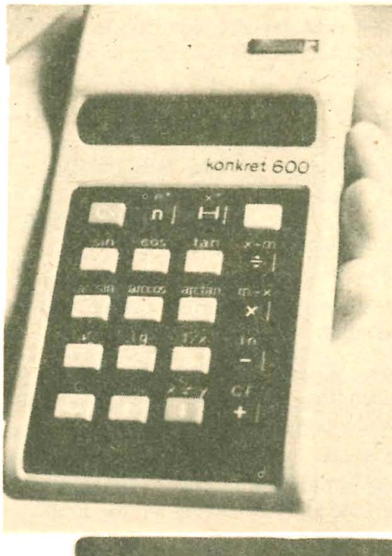
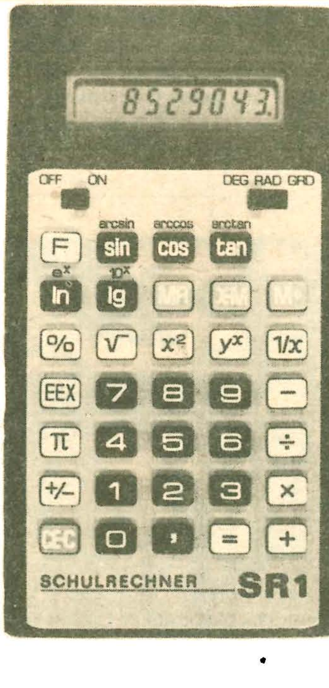


Bild 2



Das folgende Beispiel K, mit dem SR 1 gerechnet, zeigt euch, daß die Genauigkeit des Resultates auch davon abhängen kann, wie ihr die Rechnung organisiert. Offenbar ist

$$\left((98\,765\,432)^{\frac{1}{16}}\right)^{16} = 98\,765\,432 = \left(\left(\left(\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{98\,765\,432}}}}\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2.$$

Die linksstehende Aufgabe realisieren wir durch die Tastenfolge

$\boxed{1}\ \boxed{:}\ \boxed{1}\ \boxed{6}\ \boxed{=}\ \boxed{x\text{-}M}\ \boxed{9}\ \boxed{8}\ \boxed{7}\ \boxed{6}\ \boxed{5}\ \boxed{4}$

$\boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{y^x}\ \boxed{MR}\ \boxed{=}\ \boxed{y^x}\ \boxed{1}\ \boxed{6}\ \boxed{=}$

und erhalten das Ergebnis 98 763 700.

In dem rechtsstehenden Lösungsweg ist die Tastenfolge

$\boxed{9}\ \boxed{8}\ \boxed{7}\ \boxed{6}\ \boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\sqrt{\ }}$

$\boxed{x^2}\ \boxed{x^2}\ \boxed{x^2}$

einzugeben, als Ergebnis wird 98 765 428 angezeigt.

In jedem Rechner sind nur endlich viele Dezimalzahlen (und intern nur endlich viele Dualzahlen) darstellbar, die Anzahl dieser Zahlen hängt vom jeweiligen Rechnermodell ab. Dezimalzahlen können in der Regel sowohl mit Dezimalkomma (häufig verwendet man dafür einen Dezimalpunkt) in der Festkommaschreibweise als auch in der Exponentialschreibweise (Gleitkommadarstellung) im Rechner dargestellt werden. Beim „konkret 600" sind eine 7stellige Mantisse mit Komma, ein zweistelliger Exponent und Vorzeichenstellen für Mantisse und Exponent vorgesehen. Der Schulrechner SR 1 kann Dezimalzahlen mit 8 Ziffern und Vorzeichen darstellen. In der Exponentialschreibweise werden eine 5stellige Mantisse, ein 2stelliger Exponent und Vorzeichen für Mantisse und Exponent angezeigt. So bedeutet die Anzeige $-2.0462 - 12$ die Dezimalzahl $-2{,}0462 \cdot 10^{-12}$ und 1.8 01 die Zahl $1{,}8 \cdot 10^1$ (= 18), die Eingabe kann durch die Tastenfolgen

$\boxed{2}\ \boxed{,}\ \boxed{0}\ \boxed{4}\ \boxed{6}\ \boxed{2}\ \boxed{+/-}\ \boxed{EEX}\ \boxed{+/-}\ \boxed{1}\ \boxed{2}$

bzw.

$\boxed{1}\ \boxed{,}\ \boxed{8}\ \boxed{EEX}\ \boxed{1}$

erfolgen. Es muß an dieser Stelle vermerkt werden, daß in der Exponentialdarstellung die Mantisse zwar nur mit 5 Stellen angezeigt wird, für die weitere Rechnung stehen aber mehr Stellen im SR 1 zur Verfügung. Ihr erkennt das etwa, wenn ihr im Beispiel D das Resultat durch 10 dividiert, dann wird als Ergebnis 24 000 656 mit 8 gültigen Stellen ausgegeben.

Die endlich vielen *Maschinenzahlen* sind in der Menge der reellen Zahlen mit unterschiedlichen Abständen verteilt. Es kann nun passieren, daß bereits das Resultat solch einfacher Operationen wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division

	Aufgabe	Ergebnisanzeige konkret 600	Ergebnis-anzeige SR 1	exaktes Ergebnis
A	29^4	707280	707281.	707281
B	71^5	$1.804228 \cdot 10^9$	$1.8042 \cdot 10^9$	1804228351
C	$2000001 \cdot 99$	$1.980001 \cdot 10^8$	$1.9800 \cdot 10^8$	198000099
D	$3000082 \cdot 80$	$2.400065 \cdot 10^8$	$2.4000 \cdot 10^8$	240006560
E	$10 + 10^{-7}$	10.	10.	10.0000001
F	$\sqrt{1234567^2}$	1234566	1234567.	1234567
G	$e^{\ln 466}$	465.9999	465.99998	466
H	$10^{\lg 12345678}$	12345680	12345675.	12345678
I	arc sin (sin 80)	80.00001	80.000002	80
J	arc tan (tan 1)	$9.999459 \cdot 10^{-1}$	1.	1

Tabelle 1

keine Maschinenzahl ist, obwohl beide an der Operation beteiligten Größen Maschinenzahlen sind (vergleiche Beispiele B, C, D). In solchen Fällen zeigt der Taschenrechner einen Wert an, der näherungsweise mit dem exakten Ergebnis übereinstimmt, oder er zeigt eine Überschreitung des für ihn erlaubten Zahlenbereiches an. Näherungswerte werden in den Rechnern meist nach den euch bekannten Regeln für das Runden von Zahlen gebildet, es kann aber auch vorkommen, daß bei der Anzeige einfach Ziffern abgeschnitten werden und unberücksichtigt bleiben. Unser Beispiel D zeigt, daß der „konkret 600“ und der SR 1 bei der Anzeige nicht runden. Das Beispiel E veranlaßt euch sicher nachzudenken, was bei Addition und Subtraktion von Zahlen unterschiedlicher Größenordnung passieren kann.

Anstelle der Operationen $+, -, \cdot, :$ werden im Rechner Ersatzoperationen $\oplus, \ominus, \odot, \oslash$ ausgeführt. Für diese Operationen gelten Assoziativ- und Distributivgesetze nicht, und es können wie bei Aufgabe E Fälle auftreten, bei denen etwa $x \oplus y = x$ ist, obwohl y von Null verschieden ist. Überlegt euch dazu weitere Beispiele!

Andere Fehler treten bei der Benutzung von Taschenrechnern auf, die mit Tasten für Funktionen wie sin, cos, tan, arcsin, arccos, arctan, e^x, x^y, lg oder ln ausgestattet sind. Die Werte dieser Funktionen werden im Rechner mit Hilfe von Näherungsformeln berechnet. In der Bedienungsanleitung des SR1 ist deshalb auch auf die Genauigkeit der Funktionswerte hingewiesen. Die größten Fehler sind zu erwarten, wenn die Funktion y^x aufgerufen wird.

(Vergleiche Beispiele G, H, I, J, K.)

2. Die harmonische Reihe

Im ersten Teil habt ihr gesehen, daß man schon bei recht einfachen Aufgaben mit einem Taschenrechner Fehler begehen kann. Für den praktischen Gebrauch sind die auftretenden Ungenauigkeiten nicht problematisch, sofern nur eine geringe Zahl von Berechnungen durchgeführt wird. Jedoch wollen wir jetzt an einem Beispiel demonstrieren, daß man zu unsinnigen Aussagen gelangen kann, wenn man den Taschenrechner formal benutzt und das mathematische Problem nicht vorher gründlich durchdenkt.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Summe der Kehrwerte aller natürlichen Zahlen zu ermitteln. Die Mathematiker sprechen dann von einer sogenannten *unendlichen Reihe*, in unserer Aufgabe ist es die *harmonische Reihe*. Ihr könnt euch das Wesen der harmonischen Reihe etwa so klar machen: Betrachtet die Zahlen

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1 + \frac{1}{2},\ a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \ldots,$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}, \ldots !$$

Es ist $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$.

L. Euler (1707 bis 1783) soll z. B. $a_{1000} = 7{,}48\ldots$, $a_{1000000} = 14{,}39\ldots$ berechnet haben.

Wir fragen nun, ob die Zahlen a_n für *sehr große* natürliche Zahlen n auch *sehr groß* sind, oder ob es eine Zahl b gibt, so daß immer $a_n \leqq b$ gilt. Durch eine geschickte Zusammenfassung gewisser Summanden kann man zeigen, daß das erste der Fall ist. Die Mathematiker nennen eine derartige unendliche Reihe *divergent*.

Es ist nämlich $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Daher lassen sich immer aufeinanderfolgende Reihenglieder so zusammenfassen, daß ihre Summe größer als $\frac{1}{2}$ ist. So erhalten wir

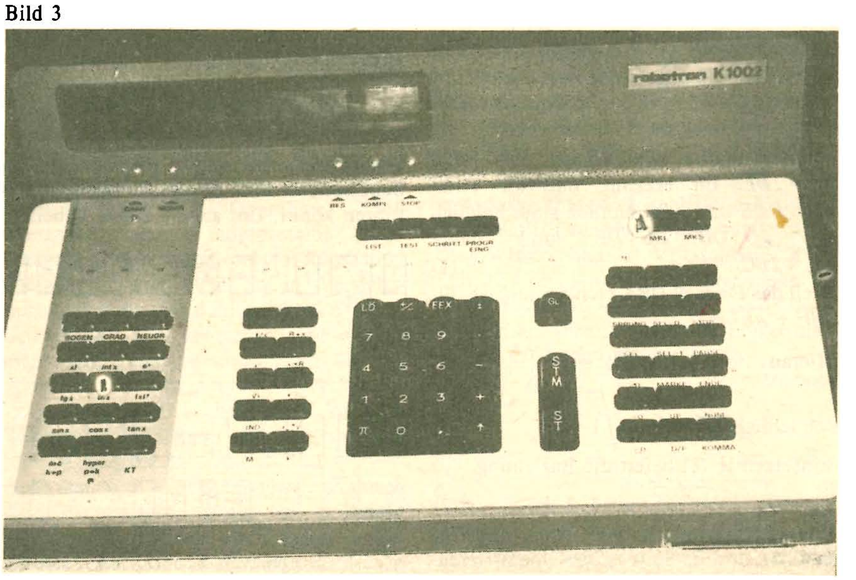
$$\begin{aligned} a_{2^k} = 1 &+ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots \\ &+ \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) + \ldots . \end{aligned}$$

Also ist $a_{2^k} > k \cdot \frac{1}{2}$ für jede natürliche Zahl k. Folglich gibt es beliebig große Zahlen a_n.

Berechnet man die Zahlen a_n auf einem Taschenrechner, so verändern sie sich von einem gewissen Index n ab nicht mehr. Wir haben diese Zahlen mit einem Computer KRS 4200 und mit dem Tischrechner K 1002 (siehe Bild 3) ermittelt. Die Rechenanlage KRS 4200 liefert uns nach 43 Minuten für b den Wert 14,0174. Mit Hilfe des Tischrechners K 1002 ergab sich $b \leqq 26$. Hierzu mußten wir uns aber schon eines Tricks bedienen, denn der Tischrechner hätte sonst mehr als 100 Jahre benötigt, um dieses Resultat gemäß der Vorschrift $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1}$ zu erhalten.

Das Experimentieren mit dem Rechner könnte uns also zu dem Trugschluß verleiten, daß die harmonische Reihe einen endlichen Wert ($\leqq 26$) besitzt.

Bild 3



Aufgabe:
Begründe das Auftreten dieser Erscheinung! Stelle dir einen Rechner vor, der nur Zahlen mit zweistelliger Mantisse und zweistelligem Exponenten darstellen und verarbeiten kann! Wie sehen bei diesem fiktiven Rechner die Zahlen a_n' aus?

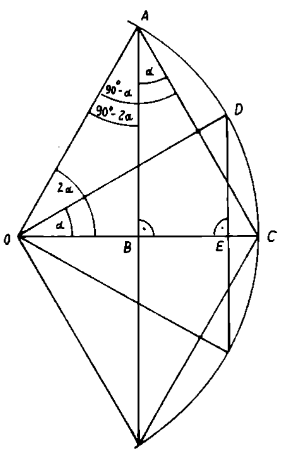
3. Berechnung der Zahl 2π

Wir zeigen euch nun, daß auch das Umgekehrte eintreten kann:
Bei einem Verfahren zur Berechnung der Zahl 2π liefert der Rechner als Ergebnis entweder Null oder keinen endlichen Wert.
Dazu betrachten wir folgendes Problem. Der Umfang U eines Kreises vom Radius 1 ist bekanntlich $U = 2\pi$. Der Umfang soll näherungsweise durch den Umfang einbeschriebener regelmäßiger n-Ecke ermittelt werden. Ist n sehr groß, so kann man auf diesem Wege eine sehr gute Näherung für die Zahl 2π erwarten. Übrigens ist diese Methode zur Ermittlung des Umfangs eines Kreises vom Radius 1 sehr alt. Archimedes (287 bis 212 v. u. Z.) schätzte für $n = 96$ ab:

$$6\frac{20}{71} < 2\pi < 6\frac{20}{70},$$

d. h. $6.28169 < 2\pi < 6.28572$.
Wir wollen mit dem Rechner die Umfänge von n-Ecken, bei denen $n = 2^m$ (allgemeiner $n = k \cdot 2^m$ mit natürlichen Zahlen k und m) ist, berechnen. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Seitenlängen s_n und s_{2n} des einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks und des $2n$-Ecks?

Bild 4



In Bild 4 ist $s_n = 2\overline{AB}$, $s_{2n} = \overline{AC}$ und $s_{2n} = 2\overline{DE}$. Ihr erkennt, daß die Dreiecke ODE und ABC ähnlich sind. Folglich ist $\overline{AC} : \overline{OD} = \overline{BC} : \overline{DE}$ und daher

$$s_{2n}^2 = 2\overline{BC}. \qquad (1)$$

Weil das Dreieck OBA rechtwinklig ist, gilt $\overline{OB}^2 + \overline{AB}^2 = 1^2$.

Hieraus folgt $(1 - \overline{BC})^2 = 1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2$ und

schließlich $\overline{BC} = 1 - \sqrt{1 - \frac{s_n^2}{4}}$.

Einsetzen in (1) liefert die Beziehung

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}\,;\; n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (2)$$

Der jeweils ermittelte Wert für s_n wird hier benutzt, um die Seite s_{2n} des interessierenden regelmäßigen $2n$-Ecks zu berechnen. Ihr erhaltet also einen Zahlenwert für s_{2n}, indem ihr das Ergebnis der vorangegangenen Rechnung in die rechte Seite der Formel (2) einsetzt. Man nennt (2) eine *Rekursionsformel*. Nach dieser Formel könnt ihr gut mit einem Rechner die Seitenlängen s_n und gemäß $U_n = n \cdot s_n$ auch die Umfänge von regelmäßigen n-Ecken, die dem Einheitskreis einbeschrieben sind und für die $n = k \cdot 2^m$ ist, ermitteln. Wir fanden (die besten Näherungen sind jeweils unterstrichen):

Ecken	Umfang			
	KRS 4200	konkret 600	K 1002	SR 1
4	5.65685	5.656854	5.656854249	5.6568542
8	6.12293	6.122935	6.122934918	6.1229349
16	6.24289	6.242891	6.242890305	6.2428904
32	6.27308	6.273101	6.273096982	6.2730979
64	6.28055	6.280679	6.280662315	6.2806634
128	<u>6.28242</u>	6.282700	6.282554528	6.2825576
256	6.28490	<u>6.283222</u>	6.283027667	6.2830661
512	6.28490	6.285307	6.283146471	<u>6.2832226</u>
2 048	6.32456	6.312359	<u>6.283189236</u>	6.2857254
8 192	8.00000	6.853918	6.283215937	6.3454959
16 384	0	7.327145	6.283429547	6.5536
262 144	0	82.89719	6.313263539	26.2144
1 048 576	0	331.5887	8.122234770	104.8576

Tabelle 2

Beim KRS 4200 tritt der in Beispiel E angedeutete Effekt auf. Die Zahlen s_n^2 werden so klein, daß im Rechner der Radikand der inneren Wurzel von Formel (2) den Wert 4 annimmt, womit für das 16 384eck die Seitenlänge 0 folgt. Bei den anderen Rechnern sind die beim Wurzelziehen auftretenden Fehler größer. Bei ihnen nehmen die Seitenlängen für große n einen konstanten Wert an. Damit erhält man beliebig große Zahlenwerte für den Umfang der einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecke.
Ihr könnt nun auch versuchen, die Zahl 2π *von oben* anzunähern. Berechnet dazu die Umfänge regelmäßiger n-Ecke, welche dem Einheitskreis umbeschrieben sind! Beweist, daß zwischen den Seiten σ_n und σ_{2n} des entsprechenden n-Ecks bzw. $2n$-Ecks die Beziehung

$$\sigma_{2n} = \frac{2}{\sigma_n}\left(\sqrt{4 + \sigma_n^2} - 2\right) \qquad (3)$$

besteht!
Wir wollen noch zeigen, wie ihr mit dem Schulrechner SR 1 die Rechnungen durchführen könnt. Um andere als in Tabelle 2 angegebene Zahlenwerte zu erhalten, betrachten wir regelmäßige $3 \cdot 2^m$-Ecke ($m \in N$), welche den Einheitskreis als Inkreis bzw. Umkreis besitzen. Überlegt euch, daß die Seite des dem Einheitskreis eingeschriebenen Dreiecks $s_3 = \sqrt{3}$ und die des umbeschriebenen Dreiecks $\sigma_3 = 2\sqrt{3}$ ist! Wir benutzen den Speicher des SR 1 und können so vorgehen:
A) Berechnung eines Näherungswertes nach Formel (2); Tastenfolge (s. Bild 5).
Den Speicher benutzen wir, um den Wert $2 - \sqrt{4 - s_n^2}$, also s_{2n}^2, aufzubewahren, denn dieser Wert wird ja gemäß Formel (2) wieder benötigt, um s_{4n} zu ermitteln, usw. Will man den Umfang des jeweiligen regelmäßigen n-Ecks bestimmen, ist das zugehörige n in den Rechner einzugeben, wenn man im Ablaufplan (Tastenfolge) an die Stelle $\underbrace{\square \ldots \square}_{\text{Eingabe } n}$ gelangt. Das Ergebnis der Multiplikation ist nach dem Drücken der Taste $\boxed{=}$ zu notieren. Dann ist die Rechnung an der Stelle fortzusetzen, die euch der Pfeil angibt, d. h. bei $\boxed{+/-}$. Jetzt könnt ihr ganz automatisch die aufgeschriebenen Befehle ausführen. Ihr müßt dazu die entsprechenden Tasten des SR 1 betätigen, bei einem programmierbaren Rechner würde die Befehlsfolge vom Rechner selbständig abgearbeitet werden, ohne daß von *außen* Eingriffe zu erfolgen haben. Allerdings muß einem programmierbaren Rechner die auszuführende Befehlsfolge vorher irgendwie mitgeteilt werden (man spricht von der Programmeingabe).
Fortsetzung auf S. 40

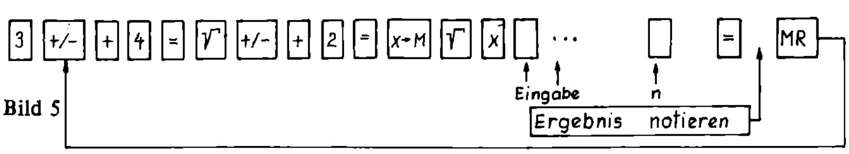


Bild 5

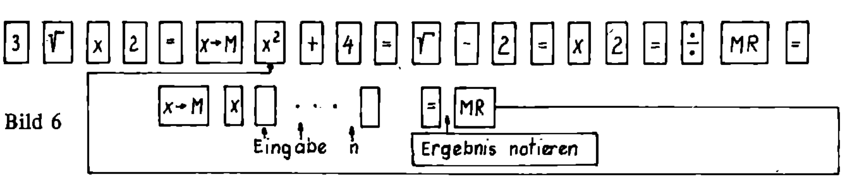


Bild 6

Ein Besuch in der Knobel-Werkstatt

Unsere Umwelt als Ideenlieferant

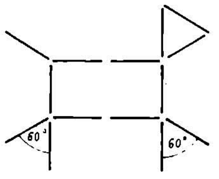
Liebe Freunde!
In Heft 1/85 haben wir euch mit dem Anliegen unserer Beitragsserie, dem *Eigenbau* von mathematischen Knobelaufgaben, vertraut gemacht und einige typische Klassen von Knobelaufgaben vorgestellt.
Heute wollen wir nun die naheliegendste *Methode zur Ideenfindung* für mathematische Problemaufgaben demonstrieren, nämlich das *Beobachten der Umwelt aus mathematischer Sicht*.
Schaut euch einmal aufmerksam in eurer Wohnung, eurer Schule, eurem Wohnort, im Ferienlager, im Urlaubsort, bei Sport und Spiel, in der Natur oder in anderen Bereichen eurer Umwelt um, und ihr werdet merken, in welch reicher Fülle unsere Umwelt Ideen für mathematische Problemaufgaben, insbesondere auch für Knobelaufgaben verschenkt! Und wie könnte es auch anders sein, denn letztlich ist ja das Gebäude der Mathematik, obwohl es heute mehr denn je durch rein innermathematische Abstraktion wächst, eine Widerspiegelung von Verhältnissen der objektiven Realität. Das *Ablesen* von mathematischen Problemen aus der Umwelt erfordert natürlich einen geschulten *mathematischen Blick*, und so wollen wir es einmal am Beispiel von Beobachtungen in der Stadt Leipzig, die mit etwa 570000 Einwohnern die zweitgrößte Stadt in unserer Republik ist, demonstrieren. Ähnliche Ideen werdet ihr sicher auch in eurem Wohnort oder in anderen Umweltbereichen finden können.
Die Stadt Leipzig, deren Gründung im Jahre 1165 erfolgte, und die in ihrem Stadtwappen einen Löwen (Idee für Aufgabe 1) führt, ist eine bedeutende Industriestadt mit wichtigen Betrieben vor allem des Schwermaschinen- und Anlagenbaus sowie der Elektrotechnik/Elektronik. 1980 haben sich hier mehr als zwanzig Kombinate und Betriebe zur Kooperationsgemeinschaft *Anwendung der Robotertechnik* im Maschinenbau vereint. Die moderne Robotertechnik liefert uns die Idee für Aufgabe 2. Doch Leipzig ist darüber hinaus nicht nur eine Stadt der Wissenschaft, des Buches, der Kongresse, der Museen, der Musik und des Sports, vor allem ist Leipzig Messestadt, eine Stadt des weltoffenen Handels. Das Doppel-M als Symbol für *Muster-Messe* (Idee für Aufgabe 3) ist nicht nur an den Eingängen zum Gelände der Technischen Messe zu sehen, sondern auch an den zahlreichen Messehäusern der Innenstadt.
Obwohl die Stadt Leipzig eine Fläche von etwa 145 km^2 einnimmt und vor allem durch das Neubaugebiet Leipzig-Grünau von Tag zu Tag wächst, so ist der eigentliche Stadtkern (die Innenstadt) nur 0,455 km^2 groß. Das Areal des Stadtkerns befindet sich innerhalb der ehemaligen Stadtmauern und ist heute vom sogenannten *Ring* umgeben (Idee für Aufgabe 4). Der Straßenverkehr auf dem Ring, besonders zur Messezeit, ist faszinierend, und die schnittigen Autos liefern uns die Idee für Aufgabe 5.
Am nördlichen Abschnitt des Rings befindet sich der Leipziger Hauptbahnhof, der größte Kopfbahnhof Europas. Charakteristisch für den Bahnhofsvorplatz (Platz der Republik) sind neben den Interhotels *Stadt Leipzig* und *Astoria* sowie dem 95,5 m hohen Turm-Wohnhochhaus (1972 fertiggestellt) die 4spurigen Gleisanlagen für den Straßenbahnverkehr. Halten hier mehrere Straßenbahnen gleichzeitig, so ist das Umsteigen in eine andere Bahn schon manchmal ein Problem (Idee für Aufgabe 6). Bemerkt sei, daß hier entgegen sonst üblichen Regelungen das Überqueren der Straßenbahngleise notwendig und erlaubt ist.
In Leipzig befindet sich auch der älteste erhaltene deutsche Personenbahnhof, der Bayerische Bahnhof, dessen Mittelportikus (Idee für Aufgabe 7) aus der Frühzeit des Eisenbahnverkehrs stammt.
Einer der schönsten Plätze von Leipzig ist der am Ostrand des Stadtkerns gelegene etwa 40000 m^2 große *Karl-Marx-Platz*. Er ist umgeben von imposanten Gebäuden, von denen die meisten großartige Zeugen unserer sozialistischen Baukunst sind: dem 142,5 m hohen Universitätshochhaus (1973 übergeben) und dem Hauptgebäude der Karl-Marx-Universität (1971 übergeben), dem Kroch-Hochhaus und dem Franz-Mehring-Haus, dem Opernhaus (1960 übergeben), dem Hauptpostamt (1964 übergeben), dem Interhotel *Am Ring* (1965 übergeben), dem 60 m hohen Versicherungshochhaus und dem prächtigen *Neuen Gewandhaus* (1981 übergeben). Diese faszinierenden Gebäude sowie auch das im Südosten der Stadt gelegene, von 1898 bis 1913 erbaute, 91 m hohe monumentale Völkerschlachtdenkmal liefern uns die Idee zu Aufgabe 8.
Geht man vom Karl-Marx-Platz aus durch die Grimmaische Straße in Richtung Markt, so kommt man am Eingang des berühmten *Auerbachs Keller* vorbei, der in einer der zahlreichen Passagen, die als überdachte Ladenstraßen typisch für Leipzig sind, liegt. Dieses Passagensystem liefert uns die Idee für Aufgabe 9.
An der Ostseite des Leipziger Marktes, dem zentralen Punkt der Innenstadt, befindet sich das sehr reizvolle *Alte Rathaus*, das eine mathematische Besonderheit aufzuweisen hat: Der Turm teilt die Vorderfront des Rathauses im Verhältnis des Goldenen Schnittes, d.h., das Verhältnis von Gesamtlänge und längerem Teilabschnitt ist gleich dem Verhältnis von längerem und kürzerem Teilabschnitt (Idee für Aufgabe 10).
Der Rathausturm selbst besteht aus einem Unterteil mit quadratischem und einem Oberteil mit achteckigem Querschnitt (Idee für Aufgabe 11). Auch die Rathausuhr ist sehenswert (Idee für Aufgabe 12).
Geht man vom Markt aus in Richtung Thomaskirche, die als Wirkungsstätte Johann Sebastian Bachs und des Thomanerchors weltberühmt ist, so gelangt man wieder auf den Ring. Hier, am Dittrichring 21, befindet sich das Haus der Deutsch-Sowjetischen Freundschaft. Es trägt durch vielfältige interessante Veranstaltungen mit dazu bei, die Freundschaft zwischen unseren Völkern weiter zu vertiefen und das Land Lenins noch besser kennenzulernen. Die Aufgabe 13 möge auch diesem Ziele dienen. Geht man in nördlicher Richtung weiter, über den Friedrich-Engels-Platz und durch die Dr.-Kurt-Fischer-Straße, so gelangt man zur Leipziger Kongreßhalle (Idee für Aufgabe 14), neben der sich der Eingang zum Leipziger Zoo befindet, der besonders durch seine Löwenzucht berühmt wurde. Und auch in einem Zoologischen Garten läßt sich manch mathematisches Problem entdecken (Idee für Aufgabe 15). An das Zoogelände schließt sich das Rosental an, ein beliebtes Naherholungsgebiet für die Leipziger. Auch hier kann man bei einem Spaziergang Ideen für Knobelaufgaben finden (siehe Aufgabe 16 und Aufgabe 17).
Wir wollen unsere kleine Stadtbesichtigung beenden, obwohl wir viele Sehenswürdigkeiten von Leipzig nicht erwähnen konnten und auch viele sofort ins Auge fallende *ernsthafte* mathematische Probleme außer Acht gelassen haben (etwa Flächen- und Volumenberechnungen an Gebäuden, Höhenbestimmungen mittels Trigonometrie, Geschwindigkeitsprobleme im Straßenverkehr u. a.). Erwähnt sei noch, daß die *Leipziger Volkszeitung*, kurz LVZ (Idee für Aufgabe 18), durch zahlreiche Aktivitäten wesentlich zur Verbreitung mathematischen Wissens beiträgt. Und schließlich ist auch der Redaktionssitz unserer *alpha* in Leipzig (Idee für Aufgabe 19).
Sicher könnt ihr nun auch alle Fragen der Aufgabe 20 beantworten.

R. Mildner

Knobel-Wandzeitung

▲ 1 ▲ Der Leipziger Löwe

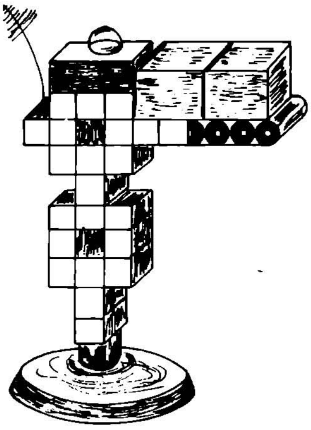
Bild 1



Legt in der Löwen-Figur 6 Hölzchen so um, daß 6 gleichseitige Dreiecke entstehen!

▲ 2 ▲ Transport-Roboter Robbi

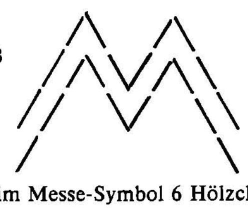
Bild 2



Unser frei erfundener Roboter *Robbi* wird einsatzbereit, wenn in seine leeren Speicherkästchen die natürlichen Zahlen von 2 bis 23 derart eingespeichert werden, daß die Zahlensumme in jeder waagerechten und senkrechten Kästchenreihe 35 beträgt. Stellt die Einsatzbereitschaft des Roboters her!

▲ 3 ▲ Muster-Messe

Bild 3

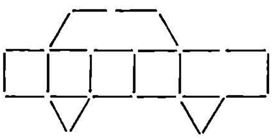


Legt im Messe-Symbol 6 Hölzchen so um, daß 5 kongruente gleichseitige Dreiecke und 4 kongruente Parallelogramme entstehen!

▲ 4 ▲ Leipziger Promenaden-Ring
Zeichnet ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem für den Bereich $-5 \leqq x \leqq 15$ und $-14 \leqq y \leqq 12$! Zeichnet sodann um den Punkt $M_1(3,-3)$ den Kreis K_1, auf dem der Punkt $P_1(0,-10)$ liegt; um $M_2(10,2)$ den Kreis K_2, auf dem $P_2(10,0)$ liegt; um $M_3(4,6)$ den Kreis K_3, auf dem $P_3(8,2)$ liegt; um $M_4(1,1)$ den Kreis K_4, auf dem $P_4(0,2)$ liegt; um $M_5(-1,-1)$ den Kreis K_5, auf dem $P_5(0,0)$ liegt und um $M_6(6,-6)$ den Kreis K_6, auf dem $P_6(0,-2)$ liegt! Verbindet nun mit einem Farbstift – jeweils entlang des kürzeren der beiden Peripherieabschnitte – P_1 mit P_2 auf K_1, P_2 mit P_3 auf K_2, P_3 mit P_4 auf K_3, P_4 mit P_5 auf K_4, P_5 mit P_6 auf K_5 und P_6 mit P_1 auf K_6! Der entstehende geschlossene Weg gibt nun (in etwa) die Gestalt des Leipziger Rings wieder, der den Stadtkern umschließt.

▲ 5 ▲ Auto-Geometrie

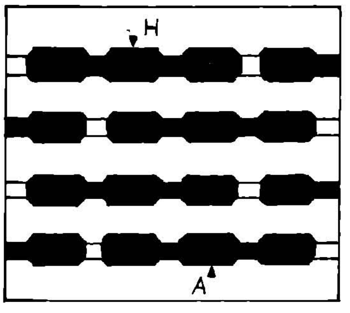
Bild 4



Die Auto-Figur sei aus gleich langen Hölzchen gelegt:
a) Wie viele Dreiecke, Vierecke, Fünfecke bzw. Sechsecke enthält die Figur?
b) Wie groß ist der Flächeninhalt der Auto-Figur (1 LE = 1 Hölzchenlänge)?
c) Legt in der Figur 11 Hölzchen so um, daß 12 kongruente Dreiecke entstehen!

▲ 6 ▲ Problem am Hauptbahnhof

Bild 5



Die Gleisanlagen sind voller Straßenbahnen, und man will vom Punkt A zum Punkt H gelangen. Welche und wie viele verschiedene Wege von A nach H sind (innerhalb des Bildes) möglich? Welcher Weg ist der kürzeste, welcher der längste, und welche Wege sind gleich lang?

▲ 7 ▲ Der Bayerische Bahnhof

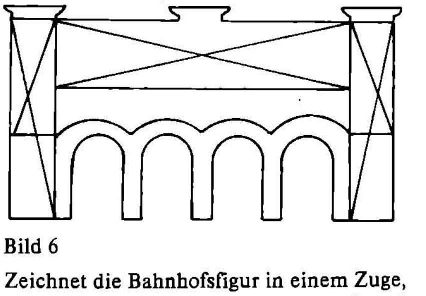


Bild 6

Zeichnet die Bahnhofsfigur in einem Zuge, aber so, daß jede Linie nur genau einmal gezogen wird!

▲ 8 ▲ Leipziger Silhouetten
Zerschneidet ein rechteckiges Stück Karton, das doppelt so lang wie breit ist, in der oben angegebenen Weise, und legt dann jeweils aus den 7 Teilen die abgebildeten Leipziger Gebäude-Silhouetten zusammen!

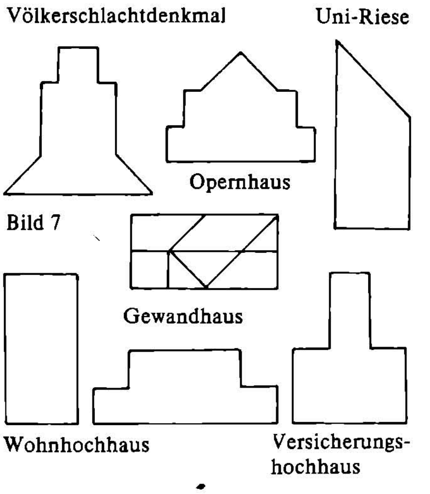


Bild 7

▲ 9 ▲ Leipziger Passagen

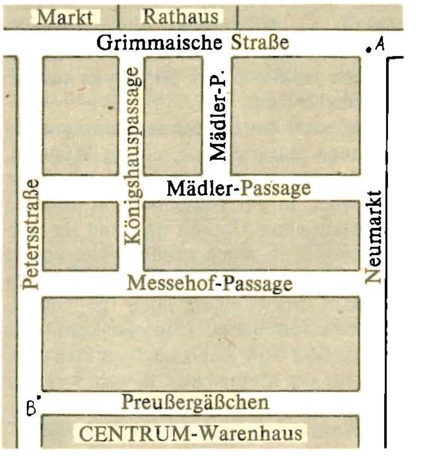
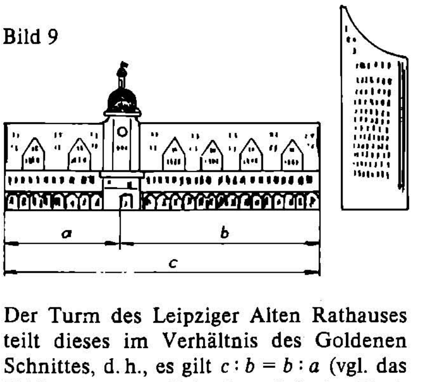


Bild 8

Astrid, die sich im Punkt A befindet, hat sich mit ihrer Freundin Brigitte, die am Punkt B wartet, zu einem gemeinsamen Besuch des *Centrum-Warenhauses* verabredet. Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann Astrid zu ihrer wartenden Freundin Brigitte gelangen, ohne dabei Umwege zu machen?

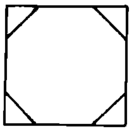
▲ 10 ▲ Der Goldene Schnitt

Bild 9



Der Turm des Leipziger Alten Rathauses teilt dieses im Verhältnis des Goldenen Schnittes, d. h., es gilt $c : b = b : a$ (vgl. das Bild). In welcher Höhe liegt diejenige Horizontalebene, die das 142,5 m hohe Universitätshochhaus im Verhältnis des Goldenen Schnittes teilt, wobei der längere Teilabschnitt der untere Abschnitt des Hochhauses sei?

▲ 11 ▲ **Der Rathausturm**

Bild 10 

Das Bild zeigt den Rathausturm (ohne das kupferne Helmdach) in der Draufsicht. Wieviel Prozent der Quadratfläche beansprucht das einbeschriebene regelmäßige Achteck?

▲ 12 ▲ **Die Rathausuhr**

Peter befand sich zwischen acht und neun Uhr auf dem Leipziger Markt und sah auf die Rathausuhr. Der große Zeiger war 7 Minutenteilstriche hinter dem kleinen Zeiger. Wie spät war es zu diesem Zeitpunkt?

▲ 13 ▲ **In Freundesland**

Es gelten die folgenden Aussagen:
(1) Der längste Strom in Europa ist die Wolga mit einer Länge von 3 531 km.
(2) Der Amur ist 16 km länger als die Lena.
(3) Der Jenissei ist 324 km kürzer als der Amur.
(4) Der Ural(fluß) ist 227 km länger als der Dnepr.
(5) Die Lena ist 456 km kürzer als die doppelte Länge des Ural.
(6) Die Wolga ist 1 330 km länger als der Dnepr.
(7) Die Summe der Längen von Amur, Wolga, Dnepr und Dnestr beträgt 11 500 km.
Wie lang ist jeder der genannten sieben Flüsse?

▲ 14 ▲ **Kongreßhalle in Zahlen**

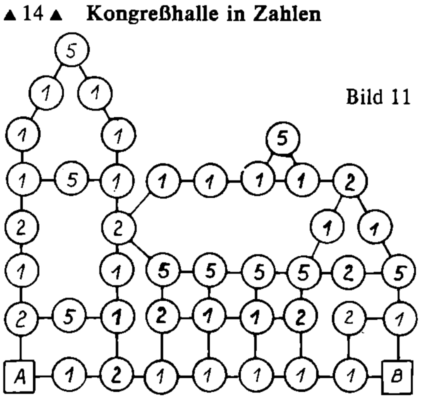


Bild 11

Die Kongreßhalle am Leipziger Zoo faßt (etwa) 4 000 Gäste. Findet nun mindestens vier verschiedene Wege von A nach B, bei denen das Produkt der dabei überquerten Zahlen jeweils 4 000 beträgt!

▲ 15 ▲ **Zoo-Logisches**

Am Eingang zum *Neuen Vogelhaus* des Leipziger Zoo bestaunen Viola und ihre Eltern drei farbenprächtige Kakadus, nämlich einen Rosenkakadu, einen Molukkenkakadu und einen Inka-Kakadu. Aus der Unterhaltung ihrer Eltern entnimmt Viola folgende Aussagen: 1. Das linke Tier ist ein Rosenkakadu, 2. Das mittlere Tier ist kein Rosenkakadu, 3. Das rechte Tier ist kein Molukkenkakadu. Viola, die öfter als ihre Eltern in den Zoo geht und die Papageien genau kennt, merkt, daß nur eine Aussage ihrer Eltern wahr ist und die beiden anderen falsch sind. Stolz nennt sie jedes Tier beim richtigen Namen. Wißt ihr auch, wie der linke, der mittlere bzw. der rechte Kakadu heißt?

▲ 16 ▲ **Ein Spaziergang**

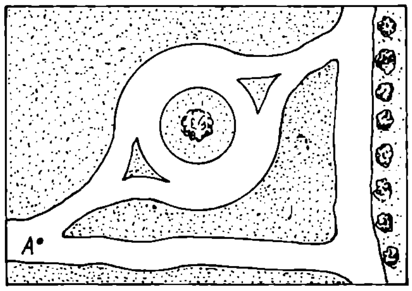


Bild 12

Im Leipziger Rosental befindet sich das abgebildete Wegesystem, welches einmal – ausgehend vom Punkt A und wieder dort endend – so durchwandert werden soll, daß man zwischendurch jedes Wegstück des Systems genau zweimal durchläuft. Welche Wanderroute könnte man dazu auswählen?

▲ 17 ▲ **Auf dem Spielplatz**

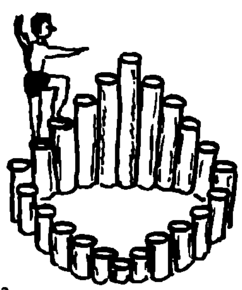


Bild 13

Wieviel Meter Stammholz wurden zum Bau der abgebildeten Kletteranlage benötigt, wenn angenommen wird, daß jeder Stamm 15 cm kürzer als sein längerer Nachbarstamm ist, daß die Länge des sichtbaren Teils des längsten Stammes 1,85 m beträgt und daß jeder Stamm 65 cm tief im Erdboden verankert ist? Von Schnittverlusten sei abgesehen.

▲ 18 ▲ **Mit der LVZ**

$$\boxed{L + V + Z = L \cdot V \cdot Z}$$

Bild 14

Ersetzt die Buchstaben L, V und Z so durch verschiedene einstellige natürliche Zahlen, daß eine wahre Gleichung entsteht!

▲ 19 ▲ **Fragen zur Stadt Leipzig**

1. In welchem Jahr begeht die Stadt Leipzig ihre 825-Jahr-Feier?

2. Wieviel Prozent des gesamten Stadtgebietes nimmt der Leipziger Stadtkern ein?

3. Am Leipziger Hauptbahnhof werden an 26 Bahnsteigen und 5 Außenbahnsteigen täglich (etwa) 265 ankommende und (etwa) ebenso viele abfahrende Fernzüge abgefertigt. Zur Messezeit kommen am Tag noch (etwa) 55 ankommende oder abfahrende Sonderzüge hinzu. Wie viele Zugankünfte und Zugabfahrten finden insgesamt (etwa) während einer 7tägigen Messe auf dem Leipziger Hauptbahnhof statt?

4. Um wieviel Meter ist das Universitätshochhaus (Uni-Riese) höher als
a) das Wohnhochhaus am Hauptbahnhof,
b) das Völkerschlachtdenkmal,
c) das Versicherungs-Hochhaus am Karl-Marx-Platz?

5. Die Orgel im *Großen Saal* des Leipziger *Gewandhauses* hat 6 650 Orgelpfeifen, von denen die größte 9,5 m und die kleinste 8 mm mißt. Nimmt man die Länge der kleinsten Orgelpfeife als Längeneinheit, ließe sich dann die Länge der größten Orgelpfeife durch eine ganzzahlige Anzahl von Längeneinheiten ausdrücken?

6. Wie viele Jahre betrug die Bauzeit für das Leipziger Völkerschlachtdenkmal?

7. Für den Bau des Leipziger Völkerschlachtdenkmals waren 12 500 m³ Beuchaer Granitporphyr zu brechen und in 26 500 Blöcke unterschiedlicher Größe zu hauen. Wie groß wäre das durchschnittliche Volumen eines solchen Granitblockes?

8. Im Jahre 1983 verzeichnete der Leipziger Zoo 1 246 500 Besucher, darunter 1 316 Dauerkarteninhaber. Wieviel Prozent der Besucher waren Inhaber einer Dauerkarte?

9. Der Tierbestand des Leipziger Zoo betrug am 31. 12. 1983:
133 Arten Säugetiere (Affen, Raubtiere, Huftiere u. a.) mit 1 036 Individuen, 213 Arten Vögel mit 627 Individuen, 93 Arten Kriechtiere mit 213 Individuen, 15 Arten Lurche mit 45 Individuen, 248 Arten Fische mit (etwa) 3 000 Individuen und 22 Arten Wirbellose mit (etwa) 500 Individuen. Wie viele Tierarten mit wie vielen Individuen waren das insgesamt?

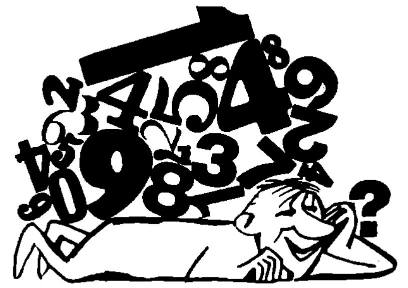
▲ 20 ▲ **alpha-Arithmetik**

$$\begin{array}{ll}
(1) & a + l + p - h - a = a \\
(2) & a + l \cdot p - h - a = l \\
(3) & a \cdot l \cdot p - h + a = p \\
(4) & a + l \cdot p - h + a = h \\
(5) & a - l. - p + h + a = a
\end{array}$$

Bild 15

Ermittelt alle nichttrivialen Lösungen des vorgelegten Gleichungssystems!

alpha-Wettbewerb
Wer löst mit?



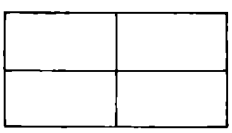
Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1985

Mathematik

Alle Aufgaben der Klassenstufen 5 bis 7 wurden von *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*, zusammengestellt.

Ma 5 ■ 2550 Die Summe zweier natürlicher Zahlen a und b beträgt 8. Multipliziert man den Vorgänger von a mit dem Nachfolger von b, so erhält man
a) 0, b) 12, c) 16.
Gib für jede Aufgabe alle Lösungen an!

Ma 5 ■ 2551 Ein Paket wurde verschnürt. Von allen sechs Seiten des Paketes sieht die Verschnürung so aus, wie es das Bild zeigt. Die längere Seite des Paketes ist 40 cm, die kürzere 25 cm lang. Das Paket ist 25 cm hoch. Wieviel Zentimeter Schnur wurde gebraucht, wenn für die Knoten auch noch 10 cm Schnur benötigt wurden?



Ma 5 ■ 2552 Ulf hat einen Holzwürfel mit der Kantenlänge 20 cm. Parallel zu einer Seitenfläche wird der Würfel zersägt. Der erste Teilkörper hat nun ein Volumen von 5 600 cm³.
a) Gib die kürzere Kantenlänge des zweiten Teilkörpers an!
b) Welche Oberfläche hat der erste Teilkörper?

Ma 5 ■ 2553 Im *alpha*-Wetbewerb 1980/81 wurden insgesamt rund 93 000 Lösungen eingesandt und begutachtet. Die meisten Einsendungen waren zu den Aufgaben aus Heft 5; dort waren es 7 000 mehr als zu den Aufgaben aus Heft 2. Bei Heft 1 waren es 2 000 mehr als bei Heft 6, und bei Heft 2 waren 4 000 weniger als bei Heft 6. Wie viele Einsendungen zu den Aufgaben jedes dieser vier Hefte gab es jeweils?

Ma 5 ■ 2554 Anke, Bernd, Christian und Dirk sind Schüler ein und derselben Klasse. Jeder von diesen vier Schülern ist entweder 10 Jahre oder 11 Jahre alt. Auf einem Pioniernachmittag sollen Gäste das Alter jedes dieser vier Schüler auf einen Tipzettel schreiben. Gib alle Möglichkeiten an, die getippt werden könnten! Fertige dazu eine Tabelle an!

Ma 5 ■ 2555 Aus den neun Grundziffern 1 bis 9 sollen drei dreistellige ungerade Zahlen so gebildet werden, daß die Summe aus diesen drei Zahlen möglichst groß wird.
a) Gib ein Beispiel für diese drei Zahlen an!
b) Wie lautet die Summe?
c) Gib alle Möglichkeiten für den größten dieser drei Summanden an!

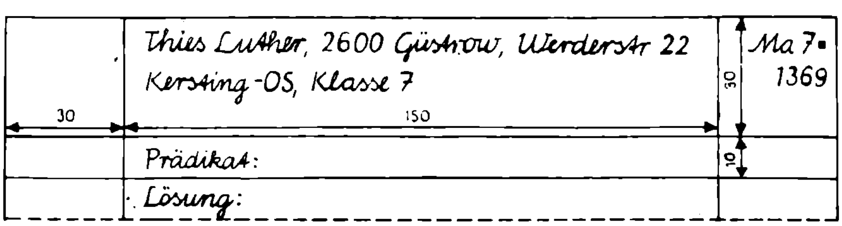
Ma 6 ■ 2556 Untersuche, für welche Grundziffern a, b, c sich aus dem Kryptogramm

$$\begin{array}{r} 1\,9\,8\,1 \\ +\,a\,b\,a\,b \\ +\,1\,9\,8\,2 \\ +\,\underline{a\,a\,c\,c} \\ \underline{\underline{8\,8\,8\,8}} \end{array}$$

eine richtig gelöste Additionsaufgabe ergibt!

Ma 6 ■ 2557 Frank hat ein Aquarium. Es ist innen 0,9 m lang und 30 cm breit. Alle 14 Tage erneuert er einen Teil des Aquariumwassers. Wie viele 6-Liter-Kannen voll Wasser hat er dem Aquarium entnommen, wenn der Wasserspiegel um 2 dm gesunken ist?

Ma 6 ■ 2558 Von drei Holzkisten A, B und C weiß man, daß Kiste B doppelt und Kiste C dreimal so schwer ist wie Kiste A. Legt man in Kiste B noch 15 kg und in Kiste C halb so viel Altpapier, dann sind beide Kisten gleich schwer. Wieviel Kilogramm Altpapier muß man nun in Kiste A legen, damit diese auch so schwer wie die beiden anderen wird?



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha
7027 Leipzig,
Postfach 14

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1984/85 läuft von Heft 5/1984 bis Heft 2/1985. Zwischen dem 1. und 10. September 1985 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/84 bis 2/85 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/85 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/84 bis 2/85) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1984/85 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ma 6 ■ 2559 Jens baut aus Baukastenwürfeln eine quadratische Umzäunung. Betrachtet er eine Außenseite dieses Zaunes, so liegen sechs Würfel nebeneinander in einer Reihe. Mache dir eine Skizze!
a) Aus wieviel Würfeln besteht dieser Zaun?
b) Wieviel Würfelflächen sind insgesamt sichtbar?
c) Aus wieviel Würfeln würde solch ein Zaun bestehen,, wenn 156 Würfelflächen zu sehen wären?

Ma 6 ■ 2560 Aus den neun Grundziffern 1 bis 9 sollen drei dreistellige gerade Zahlen so gebildet werden, daß ihre Summe möglichst groß wird.
a) Wie lautet die Summe? Gib dazu ein Beispiel an!
b) Wie lauten die drei Zahlen, wenn jede durch 3, aber nicht durch 7 teilbar sein soll? Weise nach, daß nur eine Lösung existiert!

Ma 7 ■ 2561 Ein oben offener Pappkarton faßt ein Volumen von $144\,dm^3$. Die eine Grundkante ist doppelt so lang wie die andere. Der Karton ist 2 dm hoch.
a) Berechne die Länge der beiden Grundkanten!
b) Zeichne das Netz (die Oberfläche) dieses Kartons!
c) Berechne seine Oberfläche!

Ma 7 ■ 2562 Von fünf Körpern A, B, C, D, E weiß man, daß sie zusammen 44 kg ergeben. Die Körper A, B, C sind mit den Körpern D und E im Gleichgewicht. A, B, C, E ergeben zusammen 36 kg; A und B sind mit C und E im Gleichgewicht. Ferner sind A und D zusammen im Gleichgewicht mit E. Welche Masse hat jeder der fünf Körper?

Ma 7 ■ 2563 Vermindert man die Summe der Größen zweier Außenwinkel eines Dreiecks um 180°, so erhält man die Winkelgröße desjenigen Innenwinkels, der nicht Nebenwinkel dieser Außenwinkel ist. Führe den Nachweis für die Wahrheit dieser Aussage!

Ma 7 ■ 2564 Gesucht ist eine vierstellige natürliche Zahl z. Faßt man ihre Grundziffern als Zahlen auf, so soll gelten:
a) Sowohl die Summe aus den ersten beiden als auch die aus den letzten beiden Zahlen beträgt 10.
b) Die dritte Zahl ist viermal so groß wie die vierte.
c) Die zweite Zahl ist gleich der Summe aus der ersten und dritten Zahl.

Ma 8 ■ 2565 Von drei Lehrern einer Schule mit den Familiennamen Schröter, Voigt und Müller, die jeweils genau zwei der Fächer Biologie, Chemie, Geschichte, Englisch, Russisch bzw. Deutsch unterrichten, sei folgendes bekannt:
(1) Herr Voigt ist mit dem Geschichtslehrer verwandt.
(2) Herr Schröter, der Deutschlehrer und der Russischlehrer fahren oft mit dem Auto in die Schule.
(3) Herr Schröter ist kein Geschichtslehrer.
(4) In der Freizeit spielen Herr Müller, der Chemielehrer und der Biologielehrer Fußball.
(5) Herr Schröter und der Chemielehrer haben einen Garten.
(6) Herr Voigt hilft dem Deutschlehrer beim Hausbau.
Welche Fächer unterrichtet jeder dieser drei Lehrer?
Schülerin P. Hahn, Nordhausen

Ma 8 ■ 2566 Stellt man in einer dreistelligen natürlichen Zahl mit der Quersumme 9 die dritte Grundziffer an den Anfang, so nimmt die Zahl um 135 zu. Wie heißt die Zahl? *Sch.*

Ma 8 ■ 2567 Es ist zu beweisen, daß die Maßzahl der Diagonalenlänge c in einem Quadrat mit der Seitenlänge b stets dann eine natürliche Zahl ist, wenn b die Diagonalenlänge eines Quadrates mit der Seitenlänge a und die Maßzahl von a eine natürliche Zahl ist! *Schwartz, Ilmenau*

Ma 8 ■ 2568 Gegeben sei ein Kreis k, dessen Durchmesser 18 cm lang ist. Parallel zu einem Durchmesser sei eine Sehne im Abstand von 3 cm gezeichnet. Es ist die Länge s dieser Sehne zu berechnen.
Schüler M. Hanke, Gräfenhainichen

Ma 9 ■ 2569 Für welche natürliche Zahl n ergibt die Summe $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ aus den ersten von Null verschiedenen n natürlichen Zahlen eine dreistellige natürliche Zahl mit gleichen Ziffern? *Sch.*

Ma 9 ■ 2570 Folgender Satz ist zu beweisen:
Multipliziert man das Quadrat der Summe der reziproken Werte zweier positiver reeller Zahlen mit deren Produkt, so erhält man eine Zahl, welche niemals kleiner als 4 ist. *Student A. Fittke, Berlin*

Ma 9 ■ 2571 Ein Schwimmbecken hat vier Wasserzuführungen verschiedener Leistungen. Die erste Zuführung füllt das Becken allein in genau einem Tag, die zweite würde allein 2 Tage, die dritte allein 3 Tage und die vierte allein 6 Tage benötigen, um das Becken zu füllen. In welcher Zeit würde das Becken gefüllt, wenn alle Zuführungen gleichzeitig laufen?
Schüler K. Pickert, Plauen

Ma 9 ■ 2572 In einem regelmäßigen Sechseck $ABCDEF$ sind A, C, E miteinander verbunden. Es ist zu beweisen, daß jede Höhe des Dreiecks ACE zu zwei Sechseckseiten parallel ist.
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 10/12 ■ 2573 Man denke sich drei von Null und untereinander verschiedene Grundziffern und bilde daraus alle möglichen dreistelligen natürlichen Zahlen. Es ist zu beweisen, daß die Summe aller dieser Zahlen stets durch 74 teilbar ist.
J. Grundmann, z. Z. NVA

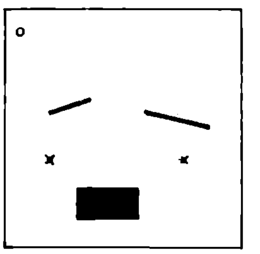
Ma 10/12 ■ 2574 ABC sei ein beliebiges Dreieck. Die Maßzahlen der Seitenlängen a, b, c seien in der angegebenen Reihenfolge die einzigen Glieder einer geometrischen Zahlenfolge mit dem Quotienten $q = \frac{4}{3}$. Wie groß ist der größte Winkel in diesem Dreieck? *Ch. Bittner, Mühlhausen*

Ma 10/12 ■ 2575 Zeichnen Sie ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = 6$ cm, $b = 4$ cm und $c = 5$ cm. Legen Sie auf $\overline{AC}$ einen inneren Punkt D so fest, daß $\overline{AD}$ die Länge $e = 1$ cm hat. Durch den Punkt D ist eine Gerade g zu zeichnen, die die Seite $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt E so schneidet, daß die Gerade g die Fläche des Dreiecks ABC halbiert. Welche Länge muß $\overline{BE}$ besitzen? *Sch.*

Ma 10/12 ■ 2576 Einem Kreis mit einem Radius der Länge 3,5 cm werde ein regelmäßiges Zehneck einbeschrieben.
a) Welche Länge hat die Seite des Zehnecks?
b) Um wieviel Prozent ist die Länge des Zehneckumfangs kleiner als die des Kreisumfangs?
c) Um wieviel Prozent ist der Flächeninhalt des Zehnecks kleiner als der des Kreises? *Schülerin P. Hahn, Nordhausen*

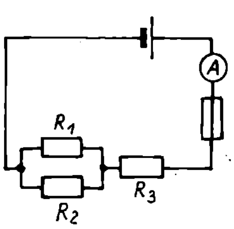
Physik

Ph 6 ■ 176 Das Bild stellt im Grundriß zwei punktförmige Lichtquellen dar. Male alle Schattengebiete mit Bleistift aus! Alle Lichtgebiete bleiben weiß, die Halbschatten zeichnet man am besten grau und die Kernschatten schwarz.

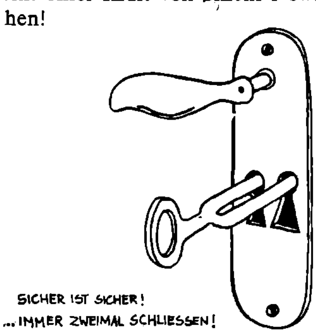


Ph 7 ■ 177 Otto von Guericke benutzte für seinen Versuch mit den Magdeburger Halbkugeln zwei Halbkugeln mit je 57,5 cm Durchmesser. Berechne die gesamte Druckkraft, mit der diese bei normalem Luftdruck von 1013 mbar zusammengepreßt werden!

Ph 8 ■ 178 Drei elektrische Geräte sind nach dem folgenden Schaltbild zusammengeschaltet.
Es liegt eine Spannung von 50 V an, und die Geräte haben folgende Daten: $R_1 = 60\,\Omega$, $R_2 = 40\,\Omega$, $R_3 = 150\,\Omega$. Das Amperemeter hat einen Widerstand von $1\,\Omega$. Reicht zur Absicherung eine 250-mA-Sicherung, oder ist eine von 300 mA nötig? *K. Seliger, Greiz*



Ph 9 ■ 179 Die Schwerpunkte zweier Körper mit gleicher Masse seien 1 Meter voneinander entfernt. Berechnen Sie die Masse der beiden Körper, wenn sie sich mit einer Kraft von einem Newton anziehen!



Ph 10/12 ■ 180 Auf einem Sportplatz trainiert ein Hammerwerfer und erreicht bei einem Wurf eine Wurfweite von 57,83 Meter. Im Augenblick des Abwurfs hatte der Bahnkreis des Wurfhammers einen Durchmesser von 4 Metern, und die Umlauffrequenz des Hammers auf der Kreisbahn betrug $f = 1{,}9$ Umläufe pro Sekunde. Wie groß war der Abwurfwinkel? Der Luftwiderstand ist nicht zu berücksichtigen. *Ing. A. Körner, Leipzig*

Chemie

Ch 7 ■ 141 Für die Herstellung von 67 kg Kupfer(II)-oxid, welches einen Reinheitsgrad von 97 % besitzen soll, verwendet man 195,6 kg Silberoxid und 62,3 kg Kupfer. Berechne
a) mengenmäßig, b) prozentmäßig
den Unterschied zwischen den eingesetzten Mengen an Ausgangsstoffen gegenüber den stöchiometrischen Mengen!

Ch 8 ■ 142 Ein zylindrischer Tank, welcher einen Durchmesser von 1,5 m und eine Länge von 5,5 m besitzt, soll mit 46,3 %iger Schwefelsäure ($\varrho = 1{,}360\,\mathrm{g \cdot ml^{-1}}$) gefüllt werden. Diese Säure ist durch Mischen einer 89,2 %igen ($\varrho = 1{,}810\,\mathrm{g \cdot ml^{-1}}$) Schwefelsäure mit einer 38 %igen ($\varrho = 1{,}285\,\mathrm{g \cdot ml^{-1}}$) Schwefelsäure herzustellen. Wieviel Tonnen der stärkeren und der schwächeren Säure müssen zu diesem Zweck ausgewogen werden?

Ch 9 ■ 143 In einem Behälter mit einem Fassungsvermögen von 100 m³ wird Abwasser zur Reinigung aufbewahrt. Der Säuregehalt des Abwassers entspricht einer 5 %igen Schwefelsäure ($\varrho_{H_2SO_4} = 1\,031{,}7\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$).
a) Wieviel Tonnen Magnesia müssen in dem Behälter verrührt werden, um das Abwasser zu reinigen?
b) Wieviel Tonnen Salz müssen aus dem Behälter abgesaugt werden?

Ch 10/12 ■ 144 1,3 t Schwefelkohlenstoff sollen vollständig zu Tetrachlormethan umgesetzt werden. Die Reaktion verläuft stufenweise.
1. Stufe: Schwefelkohlenstoff + Dischwefeldichlorid → Tetrachlormethan + Schwefel.
(Dabei werden nur 58 % Schwefelkohlenstoff umgesetzt.)
2. Stufe: Schwefelkohlenstoff + Chlor → Tetrachlormethan + Dischwefeldichlorid.
Zu berechnen ist
a) die Gesamtmasse des entstehenden Tetrachlormethans in Tonnen,
b) die Masse des in der 1. Stufe nicht umgesetzten Schwefelkohlenstoffs in Tonnen,
c) die Menge Chlor in Tonnen, die benötigt wird, um den in der 1. Stufe nicht umgesetzten Schwefelkohlenstoff zu chlorieren.

Fortsetzung von S. 34

B) Berechnung nach Formel (3);
Tastenfolge (s. Bild 6)
Wir erhielten damit als untere bzw. obere Schranken für den Umfang des Einheitskreises

n	untere Schranke	obere Schranke
6	6.	6.928 203 2
12	6.211 657 2	6.430 780 5
24	6.265 257 3	6.319 319
48	6.278 700 9	6.292 169 2
96	6.282 068 6	6.285 415 4
192	6.282 919 5	6.283 709
384	6.283 183 5	6.283 127 4
12 288	6.385 032 1	6.084 502 2
49 152	6.951 142 5	0

Tabelle 3

Ihr bemerkt, daß für $n \geqq 384$ etwas nicht stimmen kann, weil die untere Schranke größer als die obere Schranke ist. Nehmen wir nämlich an, daß wir exakt gerechnet haben, müßte z. B. $6.283\,18 < 2\pi < 6.283\,13$ sein, schließlich gar $6.95 < 2\pi < 0$, was ganz offensichtlich falsch ist. Übrigens ist die Seitenlänge des umbeschriebenen 98 304ecks nach der Rekursionsformel (3) nicht berechenbar, da hierzu eine Division durch 0 auszuführen wäre. Der SR 1 gibt uns dies durch den Buchstaben E (error) auf seiner Anzeigevorrichtung an.

Wir hoffen, daß ihr noch viel Freude mit eurem Taschenrechner und an der Mathematik haben werdet. Wir empfehlen euch als Literatur:

1. Kreul, Was kann mein elektronischer Taschenrechner? Leipzig, 1981
2. Kreul, Programmierbare Taschenrechner, Leipzig 1980
3. Schumny, Taschenrechner Handbuch, Teubner-Verlag, 1978
4. Hirschfeld, Computer für die Westentasche, alpha 6, 1981

W. Schmidt/L. Wenzel

Hundert Jahre Nullmeridian und Greenwich-Zeit

Die Beschreibung von Punkten der Erdoberfläche durch geographische Koordinaten (Länge und Breite) geht schon auf die Antike zurück. Während jedoch die Bestimmung der geographischen Breite eines Ortes durch Beobachtung der Mittagshöhe der Sonne keine besonderen Schwierigkeiten bereitet, ist die Bestimmung der geographischen Länge prinzipiell schwieriger, da infolge der Erdumdrehung alle auf einem Breitenkreis liegenden Punkte der Erde in gewissem Sinne gleichberechtigt sind. So weist die Karte der sich um das Mittelmeer gruppierenden damals bekannten Welt des griechischen Geographen, Astronomen und Mathematikers *Klaudios Ptolemaios* (um 80 bis um 160) zwar relativ genaue Breitenwerte auf, jedoch eine erhebliche Vergrößerung der Längendifferenzen gegenüber der Wirklichkeit. (Das so ins Mittelalter falsch überlieferte Weltbild täuschte dem Kolumbus und seinen Zeitgenossen eine viel zu geringe Entfernung vor Europa in Richtung Westen nach China und Indien vor, ermutigte somit wesentlich zur Fahrt des Kolumbus und bestärkte ihn in seinem Glauben, Teile von Indien entdeckt zu haben.)
Mit zunehmender Hochseeschiffahrt wurde das Problem der Längenbestimmung immer wichtiger. Eine erste Methode bestand darin, bestimmte astronomische Ereignisse, z. B. die Position des Mondes relativ zu benachbarten Sternen, deren Eintreten für einen bestimmten Ort der Erde (im folgenden als *Eichort* bezeichnet) im voraus bekannt war, am Ort unbekannter Länge zu beobachten und aus der Zeitdifferenz auf die Längendifferenz zum Eichort zu schließen. (Eine Stunde Zeitdifferenz entspricht 15° Längendifferenz.) Man kann heute einschätzen, daß dieser Anwendungsbereich der Astronomie ihr nächst der unwissenschaftlichen Astrologie über mehr als 1 000 Jahre hin als stärkstes Motiv gedient hat. (Dies bezieht sich auf die *mathematische* oder *Positions*astronomie, die sich nur mit den Bewegungsabläufen auf der gedachten *Himmelskugel*, aber nicht mit der physikalischen Beschaffenheit der Himmelskörper, ihren tatsächlichen Entfernungen usw. beschäftigt.)

Zur Förderung der britischen Seefahrt wurde 1675 das *Königliche Observatorium* in Greenwich nahe London gegründet, dessen erstes Gebäude der bedeutende Architekt und Mathematiker *Christopher Wren* (1632 bis 1723) entwarf. Nach dem ersten Direktor dieses Observatoriums, *John Flamsteed* (1646 bis 1719), wird dieses Gebäude als *Flamsteed House* (Flamsteed-Haus) bezeichnet.

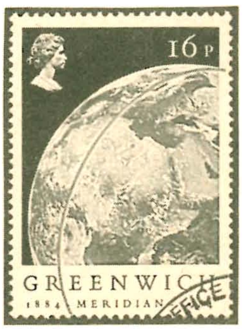
Eine britische Briefmarke (Bild), die 1975 zum 300. Jahrestag der Eröffnung erschien, zeigt dieses traditionsreiche Gebäude mit dem charakteristischen achteckigen Turm, dessen hohe Fenster möglichst ungehinderte astronomische Beobachtung ermöglichen sollten. Das Observatorium von Greenwich spielte als wissenschaftliches Zentrum für Fragen der Positionsastronomie, der Längenbestimmung auf See und der damit zusammenhängenden Zeitmessung über Jahrhunderte eine bedeutende Rolle. Es diente allen britischen Schiffen als Eichort im oben beschriebenen Sinn. Ein entscheidender Fortschritt in der eigentlichen Kernfrage der exakten und zugleich praktikablen Längenbestimmung konnte jedoch zunächst nicht erzielt werden. Noch 1752 waren nur von rund 150 Orten der Erde die geographischen Längen relativ zum Greenwich-Meridian einigermaßen genau bekannt. Dabei ist zu berücksichtigen, daß astronomische Messungen auf schwankenden Schiffen und bei häufig ungünstigen Wetterverhältnissen nur mit geringer Genauigkeit und oft gar nicht ausführbar waren.

Der berühmte britische Entdecker *James Cook* (1728 bis 1779) bemerkte anläßlich seiner ersten Reise, daß kleine Inseln gar nicht erst in die Karten eingetragen werden sollten, da sie auf Grund der ungenauen Positionsangaben meist nicht wiedergefunden werden konnten. Es kam jedoch infolge der ungenügend entwickelten kartographischen und navigatorischen Methoden auch zu spektakulären Mißerfolgen und Schiffskatastrophen der britischen Seekriegsflotte. Daher setzte das britische Parlament 1714 den für damalige Zeiten ungeheuren Preis von 20000 Pfund Sterling für Fortschritte in der Längenbestimmung aus, die eine praktische Genauigkeit von mindestens 0,5 Grad garantieren würden. Daraufhin erfaßte weite Teile der britischen Bevölkerung ein regelrechtes *Längenfieber*. Wie zeitgenössische Literatur und Graphik eindrucksvoll dokumentieren, wurde sogar unter Gefängnisinsassen, Geistlichen, Schulkindern und Glücksrittern aller Art über diese Frage eifrigst nachgedacht und diskutiert. Teile des Preises wurden später an den deutschen Astronomen *Tobias Mayer* (1723 bis 1763) für seine sehr präzisen Tafeln der Mondbewegung, an *Leonhard Euler* (1707 bis 1783) für seine Theorie der Mondbewegung und an den britischen Uhrmacher *John Harrison* (1693 bis 1796) vergeben, der ab 1735 durch wesentliche konstruktive Verbesserungen an den mechanischen Uhren eine solche Ganggenauigkeit erreichte, daß seine *Chronometer* (Time Keeper) erstmals das *Mitnehmen der Ortszeit des Eichortes* auf längeren Schiffsreisen und damit einen von astronomischen Beobachtungen unabhängigen Vergleich mit der jeweiligen Ortszeit ermöglichten. Eines seiner Chronometer soll in 161 Tagen nur um 5 s von der wahren Greenwich-Zeit abgewichen sein. James Cook, der noch auf seiner ersten Reise auf die *Mondmethode* geschworen hatte, nahm auf seiner zweiten Reise 1772 bis 1775 im Auftrag der britischen Regierung erstmals vier Chronometer mit, um sie im praktischen Gebrauch zu erproben, und erzielte damit hervorragende Ergebnisse. (Nach der Erfindung der drahtlosen Telegraphie bzw. des Funks wurde es möglich, jederzeit an jedem Ort den Vergleich mit der Greenwich-Zeit durchzuführen. Damit blieb die Methode der Zeitdifferenzen bis zur Einführung der Satellitennavigation Sieger im Kampf um höchste Genauigkeit, und auch heute hat sie ihre praktische Bedeutung noch nicht ganz verloren.)

Es ist nun weiter zu bemerken, daß bis in die zweite Hälfte des 19. Jh. jeder Ort seine eigene Ortszeit hatte. Mit der Entwicklung eines großräumigen Verkehrswesens, insbesondere der Eisenbahnen, wurde diese Situation immer unerträglicher. Es wurden viele uns heute kurios und umständlich erscheinende Techniken entwickelt, Beziehungen zwischen verschiedenen lokalen Zeitrechnungen herzustellen bzw. eine Landeszeit durch optische und andere Signale möglichst schnell und genau zu übertragen. Um 1870 tauchte erstmals in den USA der Vorschlag auf, die Erde in Zeitzonen von je 15 Grad des Erdumfanges einzuteilen und in jeder dieser Zonen eine einheitliche Zeit festzulegen, so daß sich die Zeiten verschiedener Zonen nur um volle Stunden voneinander unterscheiden. Wo aber sollte man eine solche international einheitliche Zeit- und Längenmessung beginnen? Dies war unter den damaligen politischen Verhältnissen vor allem eine Prestigefrage für die Großmächte. Im Oktober 1884 trat in Washington eine *Internationale Konferenz zur Fixierung eines einheitlichen Nullmeridians* zusammen, an der Vertreter aus 25 Ländern (bezeichnenderweise meist Diplomaten, aber nur wenige wissenschaftlich-technische Spezialisten) teilnahmen. Zu diesem Zeitpunkt gab es

Der weiße Kreidestreifen im Park von Greenwich
(im Hintergrund das alte Königliche Observatorium) markiert den Nullmeridian

Nullmeridiane u. a. durch Greenwich, Paris, Pulkowo bei Petersburg, Neapel, Cadiz, Stockholm, Lissabon, Kopenhagen, Rio de Janeiro. Insbesondere die Franzosen, die sich mit den großen Gradmessungsexpeditionen des 18. Jh. und dem 1795 gegründeten Pariser *Längenbüro* große Verdienste um die Erforschung der geometrischen Gestalt der Erde und ihre Vermessung erworben hatten, kämpften in Washington erbittert um ihren ebenfalls traditionsreichen *Pariser Meridian*, der 1672 von dem berühmten Astronomen *G. D. Cassini* (1625 bis 1712) fixiert worden war. Daß schließlich doch der Nullmeridian von Greenwich von allen Teilnehmern akzeptiert wurde, bewirkte die Statistik: Es konnte nachgewiesen werden, daß zu diesem Zeitpunkt 65% aller Schiffe, die die Weltmeere befuhren, Seekarten auf der Basis des Greenwich-Meridians benutzten.



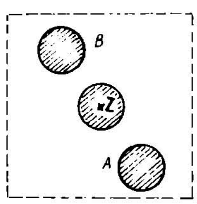
Zum 100. Jahrestag dieser internationalen Vereinbarung gab die britische Post 1984 vier Sondermarken heraus, die den Verlauf *unseres* Nullmeridians über die Erdkugel, quer durch Frankreich und Großbritannien, durch das Gelände des alten Observatoriums von Greenwich und schließlich durch die Mittellinie des dort befindlichen Zenitteleskops zur Bestimmung des Mittagsdurchgangs der Sonne zeigen. (Zwei davon zeigen wir im Bild.) Es bleibt zu erwähnen, daß die astronomischen Aufgaben des Observatoriums von Greenwich heute zum größten Teil in einem modernen, an einem günstigeren Ort gelegenen Institut durchgeführt werden, während ein Teil des alten *Flamsteed House* heute das nationale britische Meeresmuseum beherbergt, in dem viele wichtige Sachzeugen der hier skizzierten Entwicklung, u. a. die von Cook mitgeführten Chronometer, aufbewahrt werden.

P. Schreiber

Zentralsymmetrie

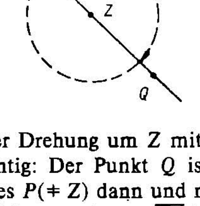
Zwei Jungen E und J sitzen an einem kleinen Tisch mit quadratischer Tischplatte und warten auf ihre Bestellung. Auf dem Tisch liegt ein großer Stapel mit kreisförmigen Untersetzern *(Bierdeckel)*, so daß alle diese Untersetzer ausreichen würden, um mehr als die ganze Tischfläche zu bedecken. Um sich die Wartezeit zu verkürzen, spielen die Jungen E und J das folgende Spiel: Abwechselnd legt jeder einen Untersetzer auf den Tisch, ohne daß dieser einen anderen überdeckt. Wer zuerst keinen Platz mehr auf dem Tisch findet, hat das Spiel verloren. E legt den ersten Untersetzer auf den Mittelpunkt Z des Tisches. Danach legt J einen Untersetzer A. Als nun E einen Untersetzer B so legt, daß er dem Bild 1 von A bei der Drehung um den Punkt Z mit 180° entspricht, gibt J nach kurzem Überlegen das Spiel als verloren auf.

Bild 1



Der Junge E hat die Zentralsymmetrie des Quadrats für eine Gewinnstrategie genutzt. Er kann immer bei einem Zug von J einen dazu bezüglich Z zentralsymmetrisch liegenden Platz zum Legen eines Untersetzers finden. Der Junge J steht schließlich einmal vor der Situation, keinen Platz mehr zu finden, um den nächsten Untersetzer auf die Tischplatte zu legen.
Der *springende Punkt* bei diesem Spiel war also der Punkt Z. Man nennt eine ebene Figur *F symmetrisch bezüglich des Punktes* Z und Z ein *Symmetriezentrum der Figur F*, wenn bei der Drehung der Ebene um Z mit 180° die Figur auf sich abgebildet wird.

Bild 2



Bei der Drehung um Z mit 180° ist leicht einsichtig: Der Punkt Q ist das Bild des Punktes $P(\neq Z)$ dann und nur dann, wenn Z der Mittelpunkt von $\overline{PQ}$ ist (Bild 2). Deshalb ist die Bezeichnung *Spiegelung* an Z für diese Abbildung durchaus treffend.
Man prüfe einmal selbst die Figur F in dem Bild 3 auf eine derartige Symmetrie. Außer Quadraten, Rechtecken und Kreisen, bei denen eine Zentralsymmetrie offensichtlich vorliegt, gibt es eine Fülle weiterer zentralsymmetrischer Figuren.
Ein Dreieck ABC dagegen kann *nicht zentralsymmetrisch* sein. Denn wäre eine Ecke Symmetriezentrum, etwa A, so wäre A Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$. Und gäbe es ein von den Ecken verschiedenes Symmetriezentrum, so müßte die Anzahl der Ecken gerade sein, da Ecken in Ecken übergehen müssen. In jedem Falle ergibt sich also ein Widerspruch!

Aufgabe 1

Ein regelmäßiges n-Eck ($n \geqq 3$) ist zentralsymmetrisch dann und nur dann, wenn n gerade ist. (Das Symmetriezentrum ist dann der Mittelpunkt des Umkreises des n-Ecks.)
Wir wenden uns nun der Frage zu, welche Vierecke zentralsymmetrisch sind. Nach dem Ergebnis der Aufgabe 1 gilt dies wenigstens für das Quadrat; auch für ein Rechteck ist dies leicht einsichtig.

Aufgabe 2

Ein nicht überschlagenes[1] *Viereck ABCD ist zentralsymmetrisch genau dann, wenn es ein Parallelogramm ist.*
Im Heft 4/1984 der *alpha* haben wir die Axialsymmetrie betrachtet. Damit ergibt sich die naheliegende Frage, ob die eine Art der Symmetrie die andere zur Folge haben könnte.
Die Frage läßt sich leicht beantworten. Unsere eingangs betrachtete (zentralsymmetrische) Figur (Bild 3) sowie ein (axialsymmetrisches) regelmäßiges Dreieck (vgl. Aufg. 1) zeigen, daß ein solcher Schluß in keiner von beiden Richtungen gilt. Bemerkenswert in diesem Zusammenhang ist aber die folgende Eigenschaft 1.

Bild 3

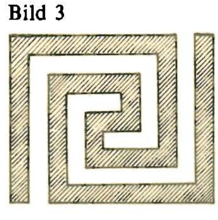
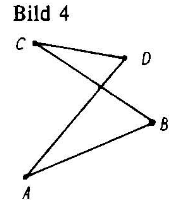


Bild 4

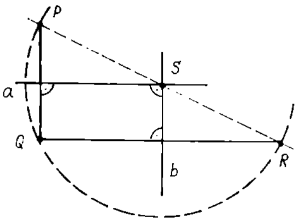


Eigenschaft 1

Besitzt eine Figur F zwei Symmetrieachsen a und b, die senkrecht zueinander sind, dann ist ihr Schnittpunkt S ein Symmetriezentrum von F.
Zum *Beweis* betrachten wir einen beliebigen Punkt P, der nicht auf den Geraden a und b liegt (Bild 5). Es sei Q das Bild von P bei der Spiegelung an der Geraden a und R das Bild von Q bei der Spiegelung an b. Dann ist a die Mittelsenkrechte von $\overline{PQ}$ und b die Mittelsenkrechte von $\overline{QR}$.

Wegen $a \perp b$ ist $\measuredangle PQR$ ein rechter Winkel. Da in jedem rechtwinkligen Dreieck der Mittelpunkt des Umkreises (dann auch Thaleskreis genannt) mit dem Mittelpunkt der Hypothenuse zusammenfällt, muß S (als Schnittpunkt von a und b und damit Mittelpunkt des Umkreises) der Mittelpunkt von $\overline{PR}$ sein. Der Punkt P hat also bei der Nacheinanderausführung der Geradenspiegelungen an a und b das gleiche Bild wie bei der Punktspiegelung an S. Dies gilt – wie man leicht erkennt – auch für die übrigen Lagen von P (d.h., wenn P auf a oder b liegt).

Bild 5



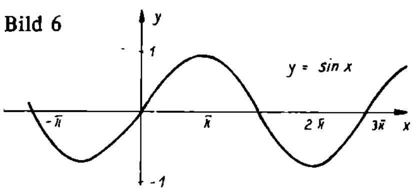
Nach Voraussetzung wird die Figur F bei jeder der Spiegelungen an a bzw. b, also auch bei der Nacheinanderausführung der Spiegelungen an a und b auf sich abgebildet. Diese Nacheinanderausführung ist aber, wie sich zeigte, gleich der Spiegelung an S. Also ist S ein Symmetriezentrum von F, was zu zeigen war.
Hinsichtlich der Vierecke ist bekannt (vgl. *alpha* Heft 3/1984), daß für ein Rhombus bzw. für ein Rechteck charakteristisch ist, daß die beiden Diagonalen zueinander senkrechte Symmetrieachsen bzw. die Mittelsenkrechten zweier aufeinanderfolgender Seiten zueinander senkrechte Symmetrieachsen des Vierecks sind. Damit ergibt sich folgende Übersicht über zentralsymmetrische Vierecke:

Die folgenden Überlegungen sind etwas schwieriger. Man darf sie auch überspringen, sollte aber die Aufgaben 3, 4 und 5 als Abschluß des Artikels noch lösen.

Aufgabe 3

Man bestimme die Symmetriezentren des Graphen der Sinusfunktion (Bild 6)! Übrigens liegen in dieser Figur die Symmetriezentren nicht auf den Symmetrieachsen.

Bild 6



Während eine Figur F mehrere, aber endlich viele Symmetrieachsen haben kann (siehe regelmäßiges n-Eck), ist dies bezüglich der Anzahl der Symmetriezentren anders:

Eigenschaft 2

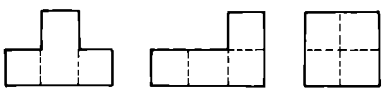
Hat eine Figur F (wenigstens) zwei Symmetriezentren, dann besitzt sie unendlich viele.

Sind nämlich Z_1 und Z_2 zwei Symmetriezentren der Figur F, dann wird F sowohl bei der Spiegelung an Z_1 als auch an Z_2 auf sich abgebildet. Es sei Z_3 das Bild von Z_1 bei der Spiegelung an Z_2. Nun geht die bzgl. Z_1 symmetrische Figur F bei der Spiegelung an Z_2 in eine Figur F' über, die zum Bild Z_3 von Z_1 symmetrisch sein muß. Wegen $F = F'$ ist also die Figur F bzgl. eines weiteren Punktes Z_3 symmetrisch. Auf diese Weise kann man mit Z_2 und Z_3 ein weiteres Zentrum Z_4 finden usw. (Man veranschauliche sich diesen Sachverhalt anhand der Figur in Bild 6!) Der Nachweis, daß diese so gefundene Zentren alle voneinander verschieden sind, macht einige Mühe, kann aber mit der Methode der vollständigen Induktion erbracht werden.

Aufgabe 4

Das Bild 7 zeigt drei Figuren, die jeweils aus 4 Einheitsquadraten zusammengesetzt sind. Von diesen Figuren stehen jeweils 8 zur Verfügung. Man soll nun mit einem Teil dieser Figuren ein 8×8-Felder-Schachbrett so überdekken, daß eine zentralsymmetrische Parkettierung entsteht.

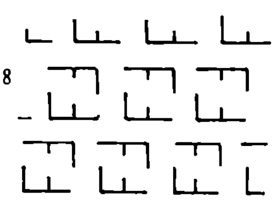
Bild 7



Aufgabe 5

Das Bild 8 zeigt ein Tapeten- (oder Wand-)-Muster. Man bestimme seine Symmetriezentren. (Es enthält übrigens keine Symmetrieachsen!)

Bild 8

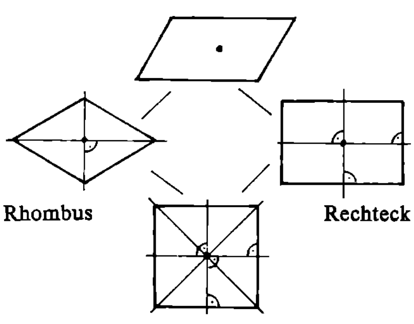


E. Quaisser/H.-J. Sprengel

[1]) Ein Viereck heißt *überschlagen*, wenn sich zwei seiner gegenüberliegenden Seiten schneiden (siehe Bild 4).

Übersicht

Parallelogramm



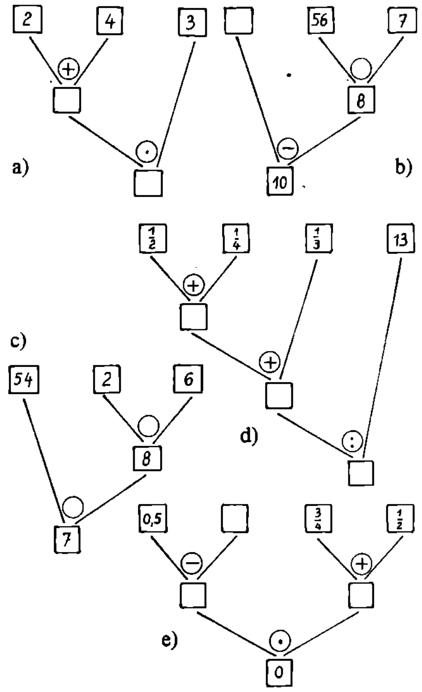
Rhombus

Rechteck

Quadrat

Rechenbäume

▲1▲ Fülle die Leerstellen aus! Gib jeweils den zu berechnenden Term an!



▲2▲ Stelle für folgende Terme einen Rechenbaum auf! Berechne jeweils den Wert des Terms!

a) $2 + 3 \cdot 4$; b) $43 - 9 : \left(\frac{1}{4}\right)$ *L. Flade*

Verleihung der Ehrenplakette der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der DDR · 1984

In Anerkennung hervorragender wissenschaftlich-pädagogischer Leistungen, die sich durch einen hohen Grad theoretischer Verallgemeinerung und Praxiswirksamkeit auszeichnen, und für besondere Verdienste bei der Entwicklung der marxistisch-leninistischen Pädagogik wurde die *Ehrenplakette* auf einem Festakt an 13 Kollektive bzw. Einzelpersonen verliehen.
Im September dieses Jahres wird der Schultaschenrechner in Klasse 7 eingeführt. Das Forschungskollektiv zur Leitung der Untersuchungen für die Einführung elektronischer Taschenrechner in die allgemeinbildende Schule erhielt die Ehrenplakette. Ihm gehören an: Prof. Dr. sc. paed. *Werner Walsch* als Leiter, Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg, Dr. paed. *Dieter Amberg*, Institut für berufliche Entwicklung, Berlin, Ingenieurökonom *Rolf Bergt*, VEB Mikroelektronik Mühlhausen, Dr. paed. *Lothar Flade*, Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg, *Waldemar Herrmann*, Joliot-Curie-OS Merseburg, Oberlehrer *Kurt Paul*, Ernst-Schneller-Oberschule (EOS) Meißen.

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

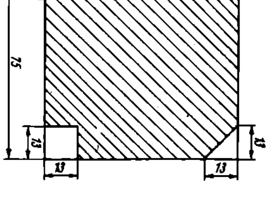
Aufgaben der Kreisolympiade

Olympiadeklasse 5

240521 Harald will an der Wandzeitung über die rege Freizeitbeschäftigung der Pioniere Marion, Petra und Ruth berichten.
Ihm ist bekannt:
(1) Jedes der drei Mädchen betreibt genau eine der Sportarten Schwimmen, Tischtennis, Volleyball. Jede dieser drei Sportarten wird von einem der drei Mädchen betrieben.
(2) Marion liest in ihrer Freizeit außerdem gern Abenteuerbücher, die Volleyballspielerin aber nicht.
(3) Die Volleyballspielerin beschäftigt sich dagegen gern mit Mathematik, sie hat bei der letzten Mathematik-Olympiade mehr Aufgaben richtig gelöst als Petra.
(4) In der Russisch-Olympiade hat Marion besser abgeschnitten als die Tischtennisspielerin.
Beweise, daß die Verteilung der drei Sportarten auf die drei Mädchen durch die Angaben (1), (2), (3), (4) eindeutig bestimmt ist! Welches Mädchen betreibt welche Sportart?

240522 In einem metallverarbeitenden VEB werden verschiedene Einzelteile produziert. Dazu werden vier Maschinen eingesetzt; mit jeder Maschine wird eine Sorte dieser Einzelteile hergestellt.
Die Ergebnisse einer Schicht waren folgende:
Es wurden insgesamt 4320 Teile hergestellt, und zwar auf der ersten Maschine ein Drittel der 4320 Teile, auf der zweiten Maschine ein Fünftel der 4320 Teile. Auf der dritten Maschine wurden ebenso viele Teile hergestellt wie auf der vierten Maschine.
Berechne für jede der vier Maschinen die Stückzahl der auf dieser Maschine hergestellten Teile!

240523 Die abgebildete schraffierte Fläche entsteht aus einem Quadrat, indem man von ihm zwei Dreiecke und zwei Quadrate abschneidet.
Berechne aus den in Millimeter angegebenen Längen den in Quadratzentimeter gemessenen Flächeninhalt der schraffierten Fläche!



240524 Peter berichtet: „Ich habe eine natürliche Zahl aufgeschrieben. Eine zweite natürliche Zahl habe ich aus der ersten durch Anhängen einer Ziffer 0 gebildet. Die Summe der beiden Zahlen beträgt 3058."
Beweise, daß man aus diesen Angaben eindeutig ermitteln kann, welche Zahl Peter als erste Zahl aufgeschrieben hat! Gib diese Zahl an!

Olympiadeklasse 6

240621 Drei Geschwisterpaare, jeweils ein Mädchen und ein Junge, sitzen bei der Geburtstagsfeier von Jörg, dem einen der drei Jungen, im Kreis um einen Tisch. Es ist folgendes bekannt:
(1) Keines der sechs Kinder hat seinen Bruder oder seine Schwester als Tischnachbar.
(2) Steffen sitzt dem ältesten der drei Jungen gegenüber.
(3) Rechts von Agnes sitzt Ines, links von Agnes sitzt Michael.
(4) Kerstin ist nicht Steffens Schwester.
Beweise, daß man aus diesen Angaben sowohl die zusammengehörenden Geschwisterpaare als auch die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann, und gib beides an!

240622 Die sechs Flächen eines Quaders mit den Kantenlängen $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm werden rot angestrichen. Danach wird der Quader in genau 60 Würfel von 1 cm Kantenlänge zersägt.
Wie viele der so entstehenden Würfel haben 0, 1, 2, 3, 4, 5 bzw. 6 rot angestrichene Flächen? (Eine Begründung wird nicht verlangt.)

240623 Drei Motorradfahrer Rainer, Jürgen und Frank fahren zur gleichen Zeit in Karl-Marx-Stadt an der gleichen Stelle ab; sie fahren auf der gleichen Straße in Richtung Leipzig.
Rainer legt mit seiner Maschine in je 10 Minuten eine Weglänge von 9 Kilometern zurück, Jürgen fährt in je 10 Minuten 8 Kilometer, Frank nur 6 Kilometer.
Wie groß sind nach einer Stunde die Weglängen zwischen Rainer und Jürgen, zwischen Rainer und Frank und zwischen Jürgen und Frank, wenn bis zu diesem Zeitpunkt jeder Fahrer seine Geschwindigkeit beibehalten hat?

240624 Rita experimentiert mit einer Balkenwaage. (Mit einer solchen Waage kann man feststellen, ob der Inhalt einer Waagschale soviel wiegt wie der Inhalt der anderen Waagschale oder welcher dieser beiden Inhalte mehr wiegt als der andere.)
Rita hat 17 Kugeln, 6 Würfel und 1 Pyramide. Sie stellt fest:
(1) Jede Kugel wiegt soviel wie jede der anderen Kugeln.
(2) Jeder Würfel wiegt soviel wie jeder der anderen Würfel.
(3) Die Pyramide und 5 Würfel wiegen zusammen soviel wie 14 Kugeln.
(4) Ein Würfel und 8 Kugeln wiegen zusammen soviel wie die Pyramide.
Rolf fragt Rita, nachdem sie diese Feststellungen erhalten hat:
„Wie viele Kugeln wiegen soviel wie die Pyramide?"
Beweise, daß man Rolfs Frage bereits eindeutig mit Hilfe der Feststellungen (1), (2), (3), (4) beantworten kann, ohne daß ein nochmaliges Wägen nötig ist! Wie lautet die Antwort?

Olympiadeklasse 7

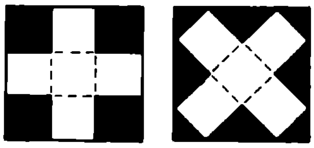
240721 Drei Ehepaare sitzen zum Rommespiel im Kreis um einen Tisch. Die Vornamen der Männer sind Anton, Bernd und Christian, die Vornamen der Frauen sind Ulrike, Vera und Waltraud. Ferner ist bekannt:
(1) Keiner der sechs Teilnehmer sitzt seinem Ehepartner gegenüber.
(2) Vera sitzt zwischen zwei Männern.
(3) Anton sitzt neben seiner Frau.
(4) Rechts von Ulrikes Mann sitzt Waltraud, links von ihm sitzt Christian.
Beweise, daß man aus diesen Angaben sowohl von jedem Teilnehmer den Ehepartner als auch die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann, und gib beides an!

240722 Ein Garten von rechteckiger Gestalt ist genau 13 m länger als breit. Um ihn vollständig zu umzäunen, benötigt man genau 92 m Zaun.
a) Berechne den Flächeninhalt des Gartens!
b) Der Garten soll vollständig in Beete und Wege aufgeteilt werden, wobei folgende Bedingungen zu erfüllen sind:
Jedes Beet hat die Gestalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 3 m und 1 m.
Zwischen je zwei benachbarten Beeten und zwischen dem Zaun und den Beeten ist überall ein 25 cm breiter Weg angelegt.
Untersuche, ob es eine Aufteilung des Gartens gibt, bei der diese Bedingungen erfüllt sind! Wenn das der Fall ist, so ermittle für eine solche Aufteilung die Anzahl der Beete!

240723 Von einem Parallelogramm $ABCD$ wird vorausgesetzt, daß der Schnittpunkt E der beiden Winkelhalbierenden

von $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle CBA$ auf der Seite CD liegt.
Beweise, daß unter dieser Voraussetzung E stets der Mittelpunkt der Seite CD ist!

240724 Aus einem quadratischen Stück Blech der Seitenlänge a soll ein oben offener würfelförmiger Kasten hergestellt werden. Für das Netz zum Herstellen eines solchen Kastens werden die beiden Varianten in dem Bild zur Diskussion gestellt. Beide Netze sind so angeordnet, daß die Diagonalen des gegebenen Quadrates jeweils Symmetrieachsen des Netzes sind.



Ermittle in Abhängigkeit von a die Größe des Abfalls (im Bild schwarz) bei beiden Varianten! Wenn bei einer Variante ein kleinerer Abfall entsteht, so gib diese Variante an!

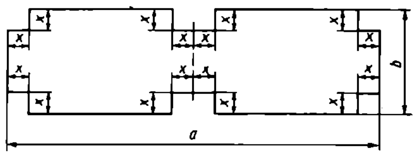
Olympiadeklasse 8

240821 Klaus berichtet über alle Tage seines Aufenthaltes im Ferienlager:
(1) An jedem Vormittag war das Wetter entweder durchgehend sonnig oder durchgehend regnerisch.
(2) An jedem Nachmittag war das Wetter entweder durchgehend sonnig oder durchgehend regnerisch.
(3) An genau sieben Tagen kam regnerisches Wetter vor.
(4) Wenn es nachmittags regnete, war es vormittags sonnig.
(5) An genau fünf Nachmittagen war es sonnig.
(6) An genau sechs Vormittagen war es sonnig.
Stelle fest, ob sich aus diesen Angaben die Anzahl der Tage, die Klaus im Ferienlager war, eindeutig ermitteln läßt! Ist dies der Fall, so gibt diese Anzahl an! Gib ferner eine (nach den Angaben) mögliche Verteilung sonniger und regnerischer Vor- und Nachmittage an!

240822 Es sei ABC ein Dreieck; die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ betrage 30°.
Beweise, daß unter dieser Voraussetzung die Länge der Seite BC gleich dem Umkreisradius r des Dreiecks ABC ist!

240823 Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen x, die die Ungleichung
$$\frac{11}{15} < \frac{7}{x} < \frac{15}{11}$$
erfüllen!

240824 Eine Blechtafel hat die im Bild ersichtliche Gestalt, wobei a, b und x gegebene Längen sind. Die Tafel soll längs der gestrichelten Linie in zwei Teile zerlegt werden, und aus jedem Teil soll dann ein oben offener quaderförmiger Kasten der Höhe x hergestellt werden.
1. Berechne das Volumen eines solchen Kastens, wenn $a = 360$ mm, $b = 120$ mm, $x = 25$ mm gegeben sind!
2. Ermittle das Volumen eines solchen Kastens, dargestellt in Abhängigkeit von Variablen a, b und x, die (wegen ihrer Bedeutung als Längen) nur positive Werte annehmen können!



3. Es seien beliebige positive Werte a und b fest vorgegeben. Ermittle in Abhängigkeit von diesen a, b alle diejenigen Werte für die Variable x, mit denen es möglich wird, Kästen der genannten Art herzustellen!

Olympiadeklasse 9

240921 Eine Schule hat 510 Schüler. Beim Anfertigen einer Schülerliste stellt jemand die Frage, ob auf derartigen Listen von 510 Personen mehrmals das gleiche Datum (Tag- und Monatsangabe, ohne Berücksichtigung der Jahresangabe) als Geburtstag auftreten wird.
Anke behauptet: „Auf jeder Liste, die sich durch Zusanmmenstellung von 510 Personen bilden läßt, befinden sich zwei Personen, die das gleiche Datum als Geburtstag haben."
Bertold behauptet: „Auf jeder Liste, die sich durch Zusammenstellung von 510 Personen bilden läßt, befinden sich drei Personen, die das gleiche Datum als Geburtstag haben."
Untersuchen Sie sowohl für Ankes als auch für Bertolds Behauptung, ob sie wahr oder falsch ist!

240922 Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x mit $x \neq 5$, für die
$$\frac{x}{5-x} < 4$$
gilt.

240923 Es sei $ABCD$ ein Quadrat. Für zwei verschiedene Punkte E und F, die in irgendeiner Reihenfolge auf der Seite BC zwischen B und C liegen, gelte
$$\overline{BE} = \overline{FC}$$
und $\overline{BE} : \overline{EF} = 41:11.$
Die Gerade durch A und E sei g, die Gerade duch D und F sei h, der Schnittpunkt von g und h sei S.
Untersuchen Sie, ob bei einer Lage von Punkten A, B, C, D, E, F, S, die diese Voraussetzungen erfüllt, das Dreieck EFS gleichseitig ist!

240924 Beweisen Sie: Sind a und b beliebige ganze Zahlen, wobei nur $b \neq 0$ vorausgesetzt wird, so ist die Zahl
$$z = a^5 + 3a^4b - 5a^3b^2 - 15a^2b^3 + 4ab^4 + 12b^5$$
das Produkt aus fünf ganzen Zahlen, von denen keine zwei einander gleich sind!

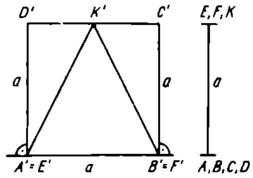
Olympiadeklasse 10

241021 Ermitteln Sie alle diejenigen Quadrupel (a, b, c, d) von reellen Zahlen a, b, c, d, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3), (4) erfüllen!
$$a^2 + bc = 0, \quad (1)$$
$$ab + bd = 0, \quad (2)$$
$$ac + cd = 0, \quad (3)$$
$$bc + d^2 = 0. \quad (4)$$

241022 Von einem Dreieck ABC wird vorausgesetzt, daß es nicht stumpfwinklig ist und daß für die zu AB senkrechte Höhe CD die Gleichung
$$\overline{CD} \cdot \overline{AC} = \overline{AD} \cdot \overline{BC}$$
gilt.
Beweisen Sie, daß durch diese Voraussetzungen die Größe γ des Innenwinkels $\sphericalangle ACB$ eindeutig bestimmt ist! Ermitteln Sie diese Winkelgröße γ!

241023 Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen z, für die folgendes gilt:
Streicht man aus der Zifferndarstellung von z die letzte Ziffer, so entsteht die Zifferndarstellung einer Zahl, die ein Teiler von z ist.

241024 Das Bild stellt den Grundriß eines Körpers in senkrechter Eintafelprojektion sowie den dazugehörigen Höhenmaßstab dar. Dabei ist K' der Mittelpunkt von $C'D'$.

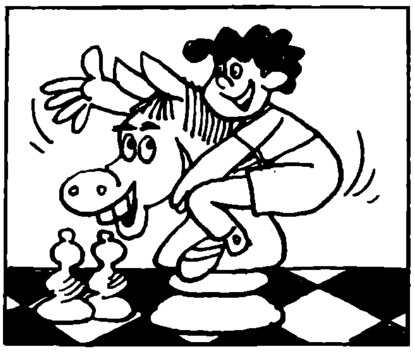


Zeigen Sie, daß es mindestens zwei ebenflächig begrenzte Körper mit unterschiedlichem Volumen gibt, die diesen Grundriß, diesen Höhenmaßstab und genau die hierdurch festgelegten Punkte A, B, C, D, E, F, K als Eckpunkte haben!
Als Lösung genügt die Aufzählung von (mindestens zwei) Körpern der verlangten Art durch folgende Angaben: Jeweils eine Darstellung des Körpers in schräger Parallelprojektion, eine Aufzählung seiner sämtlichen Seitenflächen (in der Schreibweise, daß $UV \ldots Z$ dasjenige ebene Vieleck bezeichnet, das genau die Ecken $U, V, \ldots Z$ hat, die bei einer Umlaufung in dieser Reihenfolge erreicht werden) und eine Berechnung des Volumens des Körpers in Abhängigkeit von der gegebenen Länge a.

Olympiadeklassen 11/12

241221 Es sei (a_n) diejenige Zahlenfolge, für die $a_1 = 2$
und $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 1}{a_n + 1}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ gilt.
a) Berechnen Sie a_2 und a_3, und beweisen Sie, daß $a_n > 1$ für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt!
b) Beweisen Sie, daß die Folge (a_n) streng monoton fallend ist!

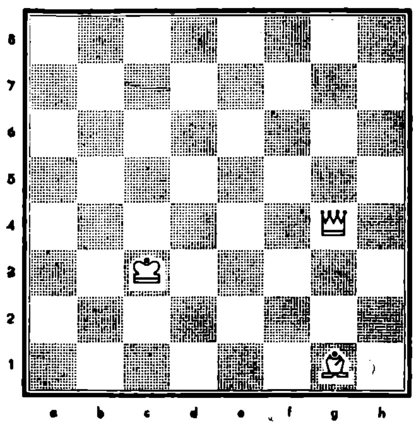
241222 Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x;y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen!
$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 6 = 9xy, \quad (1)$$
$$(x+y)^2 = 36. \quad (2)$$
(Fortsetzung: S. 48)



Lösungen

Problemkomponist und Knobelmeister

Samuel (Sam) *Loyd* (30. 1. 1841 bis 10. 4. 1911) zählt zu den berühmtesten aller Schachproblemkomponisten. Seine Schachaufgaben sind an Originalität, Phantasiereichtum und (Loydschem) Witz unübertroffen und haben bis heute nichts von ihrem eigentümlichen Reiz eingebüßt. Loyd beschäftigte sich aber nicht nur mit Schachproblemen, sondern er war auch ein eifriger Erfinder von mathematischen Denkspielen, Rätseln und Gesellschaftsspielen. Davon konnte man sich schon im *alpha*-Heft 3/1983 überzeugen, als das Fünfzehnerspiel vorgestellt wurde, welches er erfand.
Unsere heutige Schachaufgabe stammt von ihm.



Zu dem abgebildeten Diagramm sind drei Fragen zu beantworten:
1. Auf welchem Feld muß der schwarze König gestellt werden, auf dem er patt ist?
2. Auf welchem Feld muß der schwarze König gestellt werden, auf dem er matt ist?
3. Auf welchem Feld muß der schwarze König gestellt werden, auf dem er in einem Zuge mattgesetzt werden kann? *H. Rüdiger*

▲1▲ Трудно поверить, что оранжевый резиновый „крендель", охватывающий железное кольцо обеими своими „ушками" (рисунок слева сверху), можно так деформировать, не разрезая и не склеивая, что он будет охватывать кольцо лишь одним ушком (как показано сверху справа). Но это действительно можно сделать, если разрешается „крендель" сжимать, раздувать и растягивать. Как? Если не сообразите сами, посмотрите раздел „Ответы, указания, решения"..
Естественно возникает желание отцепить от кольца и второе ушко – ведь они равноправны! Однако отцепить оба ушка нельзя.
А теперь подумайте, можно ли распутать крендель с одним ушком, зацепленным за другое (рисунок внизу).

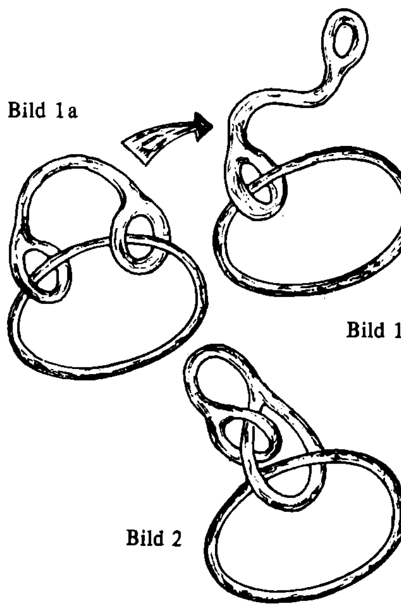


Bild 1a

Bild 1b

Bild 2

А. П.

▲2▲ Determine all of the roots of the quartic equation
$$x^4-4x=1.$$

▲3▲ Un marchand a mélangé trois qualités de café de la façon suivante:
11 kg à 14 F le kg, 10 kg à 19,05 F le kg et 4 kg à 17 F le kg.
A combien revient le kilogramme de mélange?

Lösungen zu: Für Könner
Heft 6/84, S. 137

● Aus (2) erhält man durch Radizieren
$$x+y=\sqrt{2}(x-y),$$
$$y=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\cdot x=(\sqrt{2}-1)^2x. \qquad (3)$$
In (1) eingesetzt, ergibt sich
$$\sqrt{x}-(\sqrt{2}-1)\sqrt{x}=x+x(\sqrt{2}-1),$$
$$\sqrt{x}\cdot(2-\sqrt{2})=x\cdot\sqrt{2},$$
$$x(2-\sqrt{2})^2=2x^2 \qquad x\neq 0$$
$$(2-\sqrt{2})^2=2x,$$
$$x=\frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}=3-2\sqrt{2}. \qquad (4)$$
Schließlich wird noch (4) in (3) eingesetzt.
$$y=(\sqrt{2}-1)^2(3-2\sqrt{2})$$
$$y=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)(3-2\sqrt{2})$$
$$y=(3-2\sqrt{2})^2$$
$$y=17-12\sqrt{2}.$$

■ Es gilt
$$21+\sqrt{80}=21+4\sqrt{5},$$
$$=20+4\sqrt{5}+1,$$
$$=(\sqrt{20}+1)^2=(2\sqrt{5}+1)^2.$$
Dann ist
$$\sqrt{21+\sqrt{80}}=(2\sqrt{5}+1).$$
Weiterhin ist dann der Zähler
$$\sqrt{7-(2\sqrt{5}+1)}$$
$$=\sqrt{7-2\sqrt{5}-1}$$
$$=\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}=\sqrt{5}-1.$$
Für den Nenner gilt
$$\sqrt{4-\sqrt{12}}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$$
und $\sqrt{7+\sqrt{48}}=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$
$$=\sqrt{3+4\sqrt{3}+4}=\sqrt{3}+2.$$
Also ist $1+(\sqrt{3}+2)-(\sqrt{3}-1)=4$
und schließlich
$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$
(Die Aufgaben entstammen einem brasilianischen Schülerwettbewerb, Kl. 10 bis 12.)

Lösungen zu: Spezialistenferienlager Mathematik
Heft 1/85

▲1▲ $\sum_{i=385}^{409} n=385+386+\ldots+409$
$=\frac{25}{2}(385+409)=9925;\ 9925:5=1985.$

Die Summe lautet jeweils 1985.

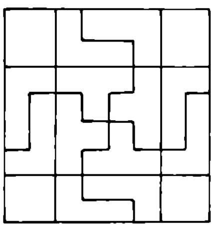
387	400	393	406	399
409	392	405	398	386
301	409	397	385	403
408	396	389	402	390
395	388	401	394	407

▲2▲ Aus einer Fülle von Material wählten wir aus

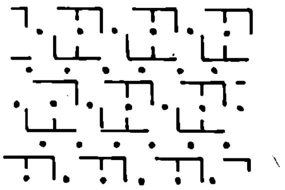
$$0 = (1 - 9 + 8)\cdot 5$$
$$1 = 1 + \sqrt{9} - 8 + 5$$
$$2 = 1 + (9 - 8)^5$$
$$3 = 1^9 \cdot 8 - 5$$
$$4 = 1 - \sqrt[\sqrt{9}]{8} + 5$$
$$5 = 1 - 9 + 8 + 5$$
$$10 = (1 + 9 - 8)\cdot 5$$
$$20 = 1 + \sqrt{9}\cdot 8 - 5$$
$$116 = -1 + 9\cdot(8 + 5)$$
$$150 = (1 + 9) : 8 \cdot 5\,!$$

Lösungen zu: Zentralsymmetrie

Aufgabe 4: Eine mögliche Lösung:



Aufgabe 5: Bei dem vorgegebenen Wandmuster liegen (bei unbegrenzter Ausdehnung) die Symmetriezentren so, wie im Bild angegeben:

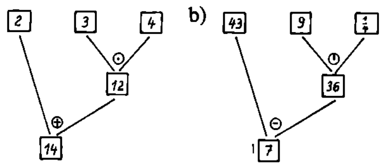


Lösungen zu: Rechenbäume

▲1▲ a) $(2 + 4)\cdot 3$; b) $18 - 56 : 7$;
c) $54 : (2 + 6)$; d) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) : 13$;
e) $(0{,}5 - 0{,}5)\cdot\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)$

▲2▲

a) b)

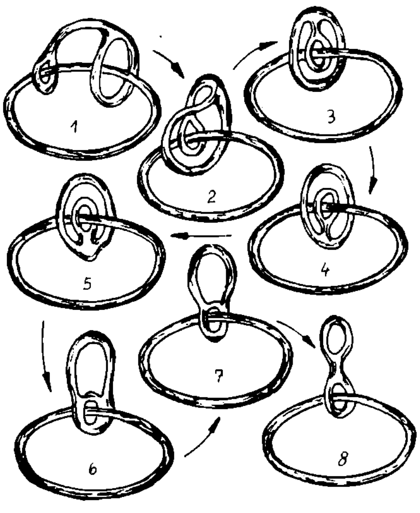


Lösungen zu:
Problemkomponist und Knobelmeister

1. Auf dem Feld h1.
2. Auf dem Feld e3.
3. Auf dem Feld a8, und es erfolgt 1. Dc8 matt.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Es ist nur schwer vorstellbar, daß man die *Gummibrezel,* die den Eisenring mit ihren beiden *Henkeln* umschlingt (Bild 1a) so deformieren kann (ohne sie zu



zerschneiden oder aber zusammenzukleben), daß sie den Ring nur noch mit einem Henkel umfaßt (Bild 1b). Aber dies ist tatsächlich möglich, wenn es nur erlaubt ist, die Brezel beliebig stark zusammenzudrücken oder zu dehnen. Wie? Wenn ihr es nicht selbst schafft, so seht zu den Lösungen.
Natürlich entsteht der Wunsch, auch den zweiten Henkel vom Ring zu lösen, denn beide sind doch eigentlich gleichberechtigt. Aber das ist unmöglich!
Überprüft jetzt, ob es möglich ist, eine Brezel zu entwirren, bei der ein Henkel in den anderen eingehakt ist (Bild 2)!

Lösung: Einen Henkel kann man so vom Ring ablösen, wie im Bild gezeigt wird. Auch die zweite Brezel läßt sich in die Form 8 bringen. (aus *Quant* 12/81)

▲2▲ Bestimme alle Wurzeln der Gleichung vierten Grades $x^4 - 4x = 1$!
Lösung: Man formt die Gleichung $x^4 - 4x = 1$ um in $x^4 = 4x + 1$ und ergänzt auf beiden Seiten $(+2x^2 + 1)$. Dann ist

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 4x + 1 + 2x^2 + 1,$$
$$(x^2 + 1)^2 = 2(x + 1)^2,$$
$$x^2 + 1 = \pm\sqrt{2}\,(x + 1).$$

Das ergibt die beiden quadratischen Gleichungen

$x^2 - \sqrt{2}\,x + 1 - \sqrt{2} = 0$
und $x^2 + \sqrt{2}\,x + 1 + \sqrt{2} = 0$
mit den Lösungen

$$x_{1;2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2(2\sqrt{2} - 1)}$$

und

$$x_{3;4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-2(2\sqrt{2} + 1)}\,.$$

▲3▲ **Ein Händler hat drei Sorten Kaffee auf folgende Weise gemischt: 11 kg zu 14 F das kg, 10 kg zu 19,05 F das kg und 4 kg zu 17 F das kg. Wieviel kostet ein Kilogramm der Mischung?**
Lösung: Der Gesamtpreis der Mischung beträgt
$11\cdot 14\,\text{F} + 10\cdot 19{,}05\,\text{F} + 4\cdot 17\,\text{F} = 412{,}5\,\text{F}$.
Dann kostet 1 kg dieser Mischung
$412{,}5\,\text{F} : (11 + 10 + 4) = 412{,}5\,\text{F} : 25 = 16{,}5\,\text{F}$

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter
Kryptarithmetik, IV. Umschlagseite

1. z. B. $2179 + 2179 = 4358$
2. z. B. $3132 + 3732 = 6864$
3. z. B. $42870 + 42837 = 85707$
4. z. B. $7228 - 3614 = 3614$
5. $531 : 9 = 59$
6. $28^3 = 21952$; $\sqrt{50625} = 225$; $222\cdot 222 = 49284$; $(43)^3 = 79507$; $4 + 3 = 7$
7. $66\cdot 111 = 7326$
8. $5 + 2 = 7$; $7 - 5 = 2$; $6 + 1 = 7$; $1 + 5 = 6$
9.

$$\begin{array}{rcrcr} 99 & + & 1 & = & 100 \\ - & & + & & - \\ 98 & - & 89 & = & 9 \\ \hline 1 & + & 90 & = & 91 \end{array}$$

10.

$$\begin{array}{rcrcr} 12 & : & 4 & = & 3 \\ - & & \cdot & & + \\ 2 & + & 1 & = & 3 \\ \hline 10 & - & 4 & = & 6 \end{array}$$

11. z. B. $172 + 60 + 34 + 513 + 35 = 814$
12.

$$\begin{array}{r} 721 \\ +212 \\ \hline 933 \end{array}$$

13.

$$\begin{array}{rcrcr} 3 & \cdot & 3 & = & 9 \\ + & & \cdot & & - \\ 4 & \cdot & 2 & = & 8 \\ \hline 7 & - & 6 & = & 1 \end{array}$$

14. $28\cdot 7 = 196$; $28 : 4 = 7$; $7 + 7 = 14$; $196 : 14 = 14$
15. $14\cdot 6 : 7 = 12$; $8\cdot 9 : 12 = 6$; $(11 + 5) : 4 = 4$; $(14 + 8) : 11 = 2$; $(6 + 9) : 5 = 3$; $7 + 12 - 4 = 15$
16. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$
17. z. B. $286 + 923 = 1209$
18. z. B. $4521 + 4521 + 4521 = 13563$
19. $71568 + 71568 + 71568 = 214704$
20. $16850 + 20640 = 37490$
21. $82193 + 8364 = 90557$
22. z. B. $37291 + 89250 = 126541$
23. $111\cdot 111 = 12321$
24. z. B. $7425 + 3486 = 10911$
25. $58015 + 65412 = 123427$
26. $19845 + 628 = 20473$

Lösungen zu: alpha-Wettbewerb
Heft 5/84, Fortsetzung

Ma 7 ■ 2475 Angenommen, es sind x Konserven Gänsefleisch, also $(50 - x)$ Konserven Schweinefleisch; dann gilt
$5x + 3(50 - x) = 210$,
$5x + 150 - 3x = 210$, $2x = 60$, $x = 30$.
Es sind 30 Gänsefleisch- und 20 Schweinefleischkonserven.

Ma 7 ■ 2476 Es sei x die Anzahl der Schüler; dann gilt
$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3 = x$,
$14x + 7x + 4x + 84 = 28x$, also $x = 28$.
In der Schule des Pythagoras waren 28 Schüler.

Ma 7 ■ 2477 $200\,\text{t}\cdot\frac{80}{100} = 160\,\text{t}$;
$300\,\text{t}\cdot\frac{90}{100} = 270\,\text{t}$.
Die Erzeugung bester Qualität im ersten Halbjahr ist in Prozenten ausgedrückt
$P = \frac{100\cdot(160 + 270)}{200 + 300}\,\% = 86\,\%$.
Der Anteil von Erzeugnissen bester Qualität im ersten Halbjahr betrug 86%.

Ma 7 ■ 2478 Angenommen, der Student war zum Zeitpunkt der Befragung x Jahre alt; dann gilt
$2\cdot(x-4)=x+10$,
$2x-8=x+10,\ x=18$.
Zum Zeitpunkt der Befragung war der Fachschulstudent 18 Jahre alt.

Ma 8 ■ 2479 Angenommen, die Fabrik beschäftigte x Männer, also $(1440-x)$ Frauen. Prämiert wurden $\frac{x}{100}\cdot 18\frac{3}{4}=\frac{75x}{400}$ Männer und $\frac{1440-x}{100}\cdot 22\frac{1}{2}=\frac{45(1440-x)}{200}$ Frauen sowie 20% aller Werktätigen; das sind $\frac{1440}{100}\cdot 20=288$ Personen.
Nun gilt
$\frac{75x}{100}+\frac{45(1440-x)}{200}=288$, also $x=960$.
In dieser Fabrik waren 960 Männer und 480 Frauen beschäftigt.

Ma 8 ■ 2480 Es sei x die Höhe der Knickstelle des Baumes; dann gilt
$x+(x-4{,}3)=14{,}5,\ 2x=18{,}8$,
also $x=9{,}4$.
Der Baum wurde in einer Höhe von 9,4 m geknickt.

Ma 8 ■ 2481 Bei einer achtstündigen Arbeitszeit werden in einer Stunde $\frac{x}{8}$ der Erzeugnisse und bei gleicher Arbeitsproduktivität werden in sieben Stunden $\frac{7}{8}\cdot x$ Erzeugnisse hergestellt. Darum gilt

$$p=\frac{100\cdot\frac{7}{8}\cdot x}{x}\%=87{,}5\,\%.$$

Die Produktion würde um 12,5% absinken.
Ferner gilt

$$p=\frac{100\cdot\frac{x}{7}}{\frac{x}{8}}\%=114{,}3\,\%.$$

Die Arbeitsproduktivität müßte um 14,3% ansteigen, damit die Produktion nicht absinkt.

Ma 8 ■ 2482 Möge bis zum Zusammentreffen der Zeiger der Stundenzeiger x Minutenteilstriche des Ziffernblattes weitergerückt sein; dann rückt der Minutenzeiger in der gleichen Zeit $(45+x)$ Minutenteilstriche weiter. Da der Stundenzeiger in der gleichen Zeit $\frac{1}{12}$ der Bahn des Minutenzeigers zurücklegt, gilt:

$$x=\frac{45+x}{12},\ \text{also } x=4\frac{1}{11}.$$

Der Minutenzeiger erreicht den Stundenzeiger in $49\frac{1}{11}$ min.

Ma 9 ■ 2483 Es sei x die Anzahl der 40-W- und y die der 75-W-Glühlampen; dann gilt
$40x+75y=2500$ und $x+y=45$,
also $y=45-y$.
Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned}40x+75\cdot(45-x)&=2500,\\ 8x+15\cdot(45-x)&=500,\\ 8x+675-15x&=500,\end{aligned}$$

$7x=175$, also $x=25$ und somit $y=20$.
Für die Beleuchtung des Arbeitsplatzes sind 25 Glühlampen mit 40 Watt und 20 Glühlampen mit 75 Watt Leistung erforderlich.

Ma 9 ■ 2484 Ein konvexes n-Eck besitzt $\frac{1}{2}n(n-3)$ Diagonalen.
Nun gilt
$\frac{1}{2}n(n-3)-13=\frac{1}{2}(n-2)(n-5)$,
$n(n-3)-26=(n-2)(n-5)$,
$n^2-3n-26=n^2-5n-2n+10$,
$4n=36$, also $n=9$.
Ein konvexes 9eck hat 13 Diagonalen mehr als ein 7eck.

Ma 9 ■ 2485 Der kleinere Würfel habe die Kantenlänge x, der größere somit $x+22$ cm. Nun gilt

$$\begin{aligned}6\cdot(x+22)^2-6x^2&=19272,\\ (x+22)^2-x^2&=3212,\\ x^2+44x+484-x^2&=3212,\\ 44x&=2728,\ \text{also } x=62.\end{aligned}$$

Die Würfel haben die Kantenlängen 62 cm und 84 cm.

Ma 9 ■ 2486 Angenommen, vor Beginn der ersten Fahrt befanden sich x Liter Kraftstoff im Tank. Während der ersten Fahrt wurden $\frac{x\cdot 20}{100}=\frac{x}{5}$ Liter verbraucht.
Im Tank verblieb ein Rest von $\frac{4x}{5}$ Liter.
Während der zweiten Fahrt wurden $\frac{10\cdot 4x}{100\cdot 5}=\frac{2x}{25}$ verbraucht. Nun gilt
$x-\frac{x}{5}-\frac{2x}{25}=9,\ 25x-5x-2x=225$,
$18x=225$, also $x=12{,}5$.
Vor Beginn der ersten Fahrt befanden sich 12,5 Liter Kraftstoff im Tank.

Ma 10/12 ■ 2487 Die Maßzahlen der Längen der Katheten seien x und $x+2$; nach dem Satz des Pythagoras gilt dann

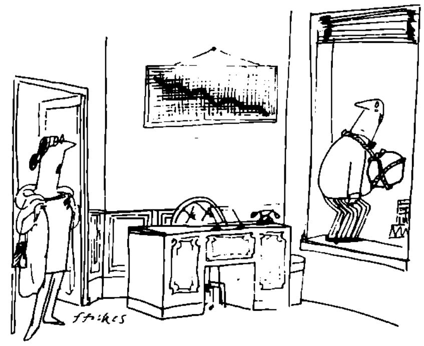
$$\begin{aligned}&x^2+(x+2)^2>10^2,\\ &x^2+x^2+4x+4-100>0,\\ &2x^2+4x-96>0,\\ &x^2+2x-48>0,\\ &(x+8)(x-6)>0,\end{aligned}$$

Fallunterscheidung:
a) $x+8>0$ und $x-6>0$ ergibt $x>-8$ und $x>6$, also $x>6$.
b) $x+8<0$ und $x-6<0$ ergibt $x<-8$ und $x<6$; entfällt, da es kein Dreieck ergibt.
Die Katheten müssen länger als 6 cm bzw. 8 cm sein.

Ma 10/12 ■ 2488 Es sei $z=100a+10b+c$. Dann gilt $a^2+b^2+c^2=45$ und $a+b+c=11$. Ferner gilt
$100a+10b+c-198=100c+10b+a$,
$99a-99c=198,\ a-c=2$, also $c=a-2$.
Durch Einsetzen erhalten wir
$a+b+(a-2)=11$,
$2a+b=13$ und somit $b=13-2a$.
Daraus folgt weiter
$a^2+(13-2a)^2+(a-2)^2=45$,
$a^2+169-52a+4a^2+a^2-4a+4-45=0$,
$6a^2-56a+128=0$,
$a^2-\frac{28}{3}\cdot a+\frac{64}{3}=0,\ a_1=\frac{16}{3}$ (entfällt, da nicht ganzzahlig), $a_2=4$.
Daraus folgt $b=13-8=5$ und $c=4-2=2$. Die gesuchte Zahl ist 452.

Ma 10/12 ■ 2489 Ein konvexes n-Eck besitzt $\frac{1}{2}n(n-3)$ Diagonalen.
Es gilt die Ungleichung
$\frac{1}{2}(n-3)\cdot n\geqq 2n$, und wegen $n\neq 0$ gilt
$\frac{1}{2}(n-3)\geqq 2,\ n-3\geqq 4,\ n\geqq 7$.
Die gesuchten n-Ecke haben mindestens 7 Seiten.

Ma 10/12 ■ 2490 Angenommen, der ursprüngliche Preis betrug x Mark. Nach der Steigerung um 10% betrug der Warenpreis $\left(x+\frac{10x}{100}\right)$ M. Nach der Senkung um 10% betrug der Warenpreis nunmehr $\left(\frac{11x}{10}-\frac{11x}{10}\cdot\frac{10}{100}\right)\mathrm{M}=\frac{99x}{100}\mathrm{M}$.
Das entspricht 99% des ursprünglichen Preises. Der Warenpreis sank um 1% des ursprünglichen Wertes.



„Aber Herr Professor, es müßte doch noch eine andere Möglichkeit geben, die Gesetze des freien Falls zu studieren."

Fortsetzung von S. 45:

241223 Man prüfe, ob es eine natürliche Zahl n und ganze Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ gibt, so daß für

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

sowohl $p(7)=1985$ als auch $p(3)=1984$ gilt!

241224 a) Beweisen Sie, daß in jedem rechtwinkligen Dreieck für die Seitenlängen a, b, c und die Höhenlängen h_a, h_b, h_c die Ungleichung

$$3\cdot(a^2+b^2+c^2)\geqq 4\cdot(h_a^2+h_b^2+h_c^2) \qquad (1)$$

gilt!
b) Untersuchen Sie, ob (1) auch in jedem spitzwinkligen Dreieck gilt!
Gibt es a) rechtwinklige, b) spitzwinklige Dreiecke, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt?

Die Lösungen zu den Aufgaben der Olympiadeklassen 5 bis 10 veröffentlichen wir im Heft 3/85, d. Red.

alpha-Wettbewerb 1983/84

Abzeichen in Gold

Für siebenjährige Teilnahme

Frank Schönherr, Anklam; Eckhard Heinrich, Aschersleben; Heike Eckardt, Bad Liebenstein; Beate Weber, Bernburg; Holger Neye, Susanne Krüger, Kerstin Kantiem, Andris Möller, Berit Kleinbauer, alle Berlin; Peter Rößler, Bischofswerda; Uta Bolz, Andreas Heinze, beide Cottbus; Falk-Uwe Koppelt, Crostau; Wolfgang Tenor, Dessau; Ines Lauter, Heiko Ringel, Gerald Eichler, Pedro Thiele, Kerstin Urban, alle Dresden; Una Heinicke, Eisenberg; Stefan Nitzsche, Elsterwerda; Lars Mönch, Erfurt; Jens Wackermann, Falkenberg; Jan-Martin Hertzsch, Geringswalde; Ingolf Hintzsche, Gräfenhainichen; Ulrike Brandenburg, Greifswald; Sonnfried Lätsch, Görlitz; Birgit Seifert, Hagenow; Annett Eichner, Halle-Neustadt; Heidrun Schmidt, Hoyerswerda; Andreas Paukert, Karbow; Norbert Neumann, Kleinmachnow; Andreas Helbig, Langenleuba-N.; Frank Herzog, Langenwolschendorf; Uta und Sabine Mersiowsky, Langewiesen; Solveig Woitek, Leinefelde; Ralf Laue, Petra Polster, beide Leipzig; Holger Schinke, Leuna; Jens Grundmann, Limbach-O.; Jörg Ladendorf, Lübtheen; Norbert Fuchs, Meiningen; Hagen Haberland, Mesekenhagen; Sven Saar, Mühlhausen; Uwe Knispel, Neuburxdorf; Ralf Heidenreich, Roßleben; Carmen Meikies, Schlagsdorf; Frank Zöllner, Sondershausen; Andreas Prpic, Sonneberg; Erhard Zilinske, Stralsund; Ralf Gössinger, Unterbreizbach; Irene Michallik, Waren; Stefan und Margret Boettcher, Thomas Weiß, Dirk Lehmann, alle Weimar; Annett Seidel, Agnes Jorzick, beide Wismar; Erika Schreiber, Kerstin Barthelmes, beide Zella-Mehlis; Mathias Goltzsche, Zschopau; Steffen Hoffmann, Potsdam; Uwe Prochnow, Halle

Für sechsjährige Teilnahme

Anka Sommer, Augsdorf; Stefan und Beate Müller, Steffen Padelt, Jens Prochno, Reinhard Wegener, Steffen Meißner, Norbert Dorn, Cornelia Wolf, alle Berlin; Jörg Leine, Berlstedt; Heidrun Boldt, Burg Stargard; Christian Sitz, Calau; Manfred Roßius, Jens Leberwurst, Andreas Stenzel, alle Cottbus; Ramona Blank, Clingen; Uwe Martin, Crossen; Jörn Fache, Culitzsch; Bert Kühne, Dahme; Christiane Nolte, Dingelstädt; Jens Fuchs, Dahme; Rolf Dach, Oliver Geupel, Michael Nitsche, Annegret Wustmann, Stefan Matausch, Helmut und Carsten Schreiber, Silke Riechen, Thomas Hübner, Matthias Winkler, alle Dresden; Steffen Patzschke, Droyßig; Bert Minske, Eberswalde; Elke Sühnholz, Erfurt; Thomas Nicklisch, Falkenberg; Annett Helbig, Frankfurt/O.; Henry Mäder, Frohburg; Ingolf Thurm, Gößnitz; Karsten Sonnemann, Grabow; Thomas Rauschenbach, Grochwitz; Jutta und Uta Schumann, Havelberg; Carsten Leibnitz, Hohenstein-E.; Peter Hermann, Hoyerswerda; Claudia Docter, Ilsenburg; Sebastian Horbach, Carla Umlauf, beide Karl-Marx-Stadt; Friedhelm Reichert, Heiko Witte, beide Königs Wusterhausen; Gert Künzelmann, Krina; Steffen Heyde, Latdorf; Petra Gollewsky, Matthias Hübner, Bernd Fucke, alle Leipzig; Glen Stachowski, Löbau; Ekkehard Ludwig, Lühmannsdorf; Michael Seidel, Leuna; Anja Voß, Neustadt; Thomas Engelhardt, Niedersachswerfen; Tibor Leitz, Parchim; Hellmut Schenk, Pirna; Katja Uhlemann Prausitz; Klaus-Peter Lindner, Rackwitz; Irma Goßmann, Rheinsberg; Sven Hader, Schlotheim; Winfried Ullrich, Babette Müller, beide Schmalkalden; Ronald Kaiser, Schleid; Ralf Stentzel, Schwarzenberg; Delia Wolfert, Söllichau; Susanne Krieger, Sömmerda; Matthias Herrmann, Schwerin; Heidi Böttger, Sondershausen; Bernd Urbanek, Spremberg; Helmut Sauerbrei, Suhl; Armin Singer, Teichwolframsdorf; Silvia Reinwarth, Teltow; Evelin Schott, Thalheim; Wolfram Fischer, Torgau; Lars Brückner, Vacha; Uta Michallik, Waren; Claudia Tiersch, Weimar; Horst Rißmann, Wesenberg; Klaus Michel, Wismar; Ralph Bock, Wolfen; Anja Häfner, Achim Gratz, beide Steinbach-Hallenberg; Mike Drößler, Marion Nemczak, Kerstin Kowaczek, alle Zschornewitz; Annette Schubert, Schalkau; Mike Selig, Staupitz

Für fünfjährige Teilnahme

Beatrice List, Wolfgang Beukert, Ralf Beukert, alle Altenburg; Annegret Schädlich, Auerbach; Geertje Maeß, Bad Doberan; Ines Tappe, Mathias Tittel, R.-Birk Schulze, Clemens Thielecke, Thorsten Brandt, Yvonne Selke, alle Berlin; Eberhard Balzer, Bernburg; Frank-Jürgen Schwerin, Grit Giering, beide Blumberg; Peter Sitz, Calau; Michael Enig, Crimmitschau; Andreas Donaubauer, Dahlen; Sebastian und Markus Vockrodt, Dingelstädt; Michael Rühling, Bernd Miethig, beide Dresden; Mario Thiel, Eilsleben; Matthias Voigt, Eisenach; Olaf Krause, Eisenhüttenstadt; Martina Helms, Erfurt; Rainer Fabianski, Falkensee; Peter und Ulrich Wenschuh, Falkenstein; Ulf Winkler, Frankenberg; Frank und Udo Schulte, Freienbessingen; Thomas Brahmann, Freital; Ute Frank, Forst; Holger Groß, Gnoien; Andreas Funk, Volker Pohlers, beide Greifswald; Karsten Seliger, Greiz; Ragna Siol, Maike Thiele, beide Grimma; Jörg Blaurock, Guben; Beate Thomas, Andrea Fiedler, beide Halle; Christina Schmerling, Beate Kaczmarek, Antje Hüttig, alle Halle-Neustadt; Ralf Schlenker, Horst; Heidi Konarski, Hohenbuckow; Silke Umbreit, Ilmenau; Ines Wagenknecht, Ivenack; Henrik Hodam, Kaltennordheim; Annette Maier, Volker Liebert, Gert Reifarth, Michael Tix, Michael und Jürgen Hoppe, Grit Lohse, alle Karl-Marx-Stadt, Ute Studzinski, Kietz; Susan Hoffmann, Klingenthal; Silke Winzek, Annette und Simone Kauert, Kathleen Hentrich, alle Langenweddingen; Karola Funke, Harald Röhrig, beide Leinefelde; Uwe Werner, Michael Weber, beide Leipzig; Frank Schönbach, André Gaertner, beide Lössau; Frank-Thorsten Bölter, Mühlhausen; Janett Eckart, Naundorf; Andreas Suchanow, Neubrandenburg; Kathrin Massanek, Neusornzig; Antje Flechsig, Obercrinitz; Michael Herrmann, Oberlichtenau; Henning Hetzer, Oettersdorf; Kai Leitz, Michael Taeschner, beide Parchim; Steffen Scheithauer, Parey; Jeanette Stahnke, Pasewalk; Antje Reichel, Pirna; Dorit Grülke, Pritzwalk; Andreas Jöstel, Radebeul; Nils Grotrian, Ribnitz; Lutz Marschner, Riesa; Beate Walter, Röbel; Kerstin Gülden, Roitzsch; Michael Gräber, Elke Haferkorn, Anne und Heiner Ruser, alle Rostock; Astrid Grulke, Schernberg; Ronny Henschke, Schierke; Achim Kröber, Schönbach; Jörn Brückner, Schwarzenberg; Roland Drendl, Senftenberg; Ute Hornawsky, Silbach; Jochen Wetzel, Sömmerda; Bert Liebmann, Sondershausen; Christina Schmidt, Katja Huhn, Kerstin Reumschüssel, Antje Recknagel, Hosea Heckert, Peter Motz, alle Steinbach-Hallenberg; Wolfram Meyerhöfer, Strasburg; Uta Linz, Suhl; Gerald Schumann, Teichwolframsdorf; Wolfgang Vogel, Thalheim; Lothar Matzker, Torno; Andreas Heidtmann, Waren; Holger Nobach, Warnemünde; Uwe Pillat, Waschow; Monika Rössler, Volker Lehmann, Uta Langer, Johannes Thäter, alle Weimar; Alexander Benz, Heike Eggert, beide Weißwasser; Andrea Maas, Wilhelmsburg; Bert Winkler, Wilkau-Haßlau; Mario Kuhn, Wintzingerode; Karin Junk, Wismar; Steffen Pietz, Wittenberg; Marian Hackenberger, Zedlitz; Pier Bierbach, Antje Schneider, beide Zeitz; Ute Barthelmes, Angelika Weyh, beide Zella-Mehlis; Uwe Schulz, Zittau

Für vierjährige Teilnahme

Kathrin Christ, Ammern; Uwe Döbler, Arnstadt; Thomas Heilfort, Bad Gottleuba; Ines Sobanski, Bad Liebenstein; Marcus Markardt, Bad Salzungen; Jürg Kasper, Bautzen; Tom Pfeifer, Ulrich Krüger, Stefan Bading, Stefan Rödel, Sarah Plietzsch, Lutz Döhler, alle Berlin; Steffen und Christian Gering, Beuditz; Ralf Gröper, Biesenrode; Karsten Kühne, Blankenfelde; Matthias Hentze, Bleicherode; Antje Hähnel, Blumberg; Annett Sperling, Bräunrode; Matthias Koch, Dirk Rohde, Antje Lück, alle Brieselang; Manuela Herrmann, Thomas Jurke, beide Cottbus; Steffen Eisenblätter, Delitzsch; Wolfgang Jäckel, Demitz-Thumitz; Petra Vollbrecht, Dessau; Michaela Ernst, Döbeln; AG Mathematik der POS K. Niederkirchner, Domersleben; Annett Germann, Dörfel; Jens Haufe, Klaus-Horst Milde, Jochen Pohl, Ullrich Hartung, alle Dresden; Jörn Quedenau, Eberswalde; Jörg Simon, Engelsdorf; Ulrike Rößner, Erfurt; Lutz Küch, Erlau; Kai Mettke, Frankfurt/O.; Jörg Schneider, Freiberg; Ingmar Hellhoff, Friedersdorf; Anke Zimmermann, Geithain; Marko Schmidt, Gelmeroda; Kristina Böttger, Görlitz; Berit Schönrock, Goddin; Andrea Rueß, Goldberg; Volker Bölter, Jana Czichowski, Marie-Luise Funk, alle Greifswald; Kai Streubel, Grimma; Katja Scholz, Marit Strauch, beide Gröden; Sven Rudolph, Großröhrsdorf; Antje Ohlhoff, Anja Grafe, beide Halberstadt; Sylke Gonschorek, Harzgerode; Anja Botzon, Havelberg; Birgit Bremer, Heiligenstadt; Heike Scholz, Herrmannsdorf; Ines Menzel, Hohndorf; Stefan Lippmann, Susanne Fischer, Annett Herbst, alle Ilsenburg; Britta Fliegner, Jarmen; Kathrin Kreusel, Kändler, Gerd Reifarth, Jörg Lanckau, Katrin Holzhaus, Heiko Frank, alle Karl-Marx-Stadt; Frank Müller, Klaffenbach; Torsten Schütze, Klettenberg; Heike Deumeland, Langenweddingen; Udo Woitek, Solveig Willenberg, Sören Leukefeld, Kerstin Wullig, alle Leinefelde; Petra Heiliger, Leuna; Silke Perthel, Udo Wagner, Jörg Zimmermann, Stefan Schmidt, Sandra Ernst, Katrin Görsch, alle Lössau; Jens Neumann, Luckau; Thomas Kitzmann, Reimo Zimmermann, beide Möhlau; Christian Eisele, Mölkau; Steffen Scharnowski, Möser; Dirk Franke, Mülsen; Thomas Drobek, Neubrandenburg; Steffen Ewert, Martina Schulz, beide Neuhaus; Ralf Pönisch, Niederwiesa; Margit John, Ndr.-Siefersdorf; Ingolf Wappler, Olbernhau; Berit Bogs, Ottendorf-O.; Karsten Kattner, Pasewalk; Ingo Schubert, Pfaffroda; Martina Schenck, Pitschen-Pickel; Joachim Rothe, Pretzschendorf; Thomas Handke, Pulsnitz; Stefan Jung, Dagmar und Birgit Lenz, alle Reichenbach: Ines Barthel, Remse; Silke Bindig, Grit Marschner, Karen Jobst, alle Riesa; Grit Sündram, Ronneburg; Stephan Dittmann, Martin Wolff, beide Rostock; Rainer Werner, Ruppertsgrün; Sven Ungelenk, Saalfeld; Thomas Habel, Schönewalde; Andreas Otto, Seifersdorf; Kirsti und Olaf Knabe, Steffen Jakob, alle Sondershausen; Kerstin Emmrich, Spremberg; Christiane Holland-Letz, Gesine Pfeffer, Alexander Mönch, alle Steinbach-Hallenberg; Olaf Otto, Stolpe; Heike Zilinske, Stralsund; Claudia Schwartz, Suhl; Tanja Reinwarth, Teltow; Peter Schmedemann, Templin; Torsten Marx, Ueckermünde; Ina Gössinger, Andrea Mieth, Sabine Fuß, Heidi Egle, Silvia Müller, Anke Siegmund, alle Unterbreizbach; Christiane Schröter, Karin Glock, Thomas Weber, alle Vacha; Tom Boyks, Vietlübbe; Heike Bauer, Vitzenburg; Andrea Stolzenburg; Edith Boettcher, Weimar; Frank Goth, Waltersdorf; Rainer Schmidt, Wismar; Bertram Freihube, Jörg Stolle, beide Wittenberg; Heintje Grosch, Wolferstedt; Kristin Neumann, Zella-Mehlis; Bert Stallbaum, Zschölkau; Annett Hellwig, Antje Sebastian, beide Zschornewitz

20 JUNGE + LEUTE = MATHE

21 MATHE + MEIN = HOBBY

17 ICH + BIN = LIEB

18 HAUS + HAUS + HAUS = STADT

19 TEMPO + TEMPO + TEMPO + TEMPO = HEKTIK

22 KLEIN + VIETA = NEWTON

23 RRR · RRR = RADAR

24 FILM + KINO = SPASS

1
```
  VIER
 +VIER
 -----
 ACHT
```

2
```
  HUHN
 +HAHN
 -----
  EIER
```

3
```
  KATER
 +KATZE
 ------
  TIERE
```

4
```
  PAAR
 -EINS
 -----
  EINS
```

5
```
*3* : 9 = 5*
**
--
 **
 *1
 --
  0
```

6 $(AX)^3 = ALPHA$

$\sqrt{ALPHA} = HHA$

$PPP \cdot PPP = ALPHA$

$\left| \begin{array}{l} (XY)^Y = ALPHA \\ X+Y = A \end{array} \right|$

7
```
6* · ***
--------
**
 **
  **
--------
***6
```

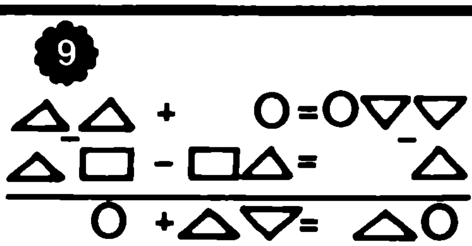
8

$a+b=c$ $d+5=e$

$c-5=b$ $c>6$

$e+d=c$ $c<8$

9

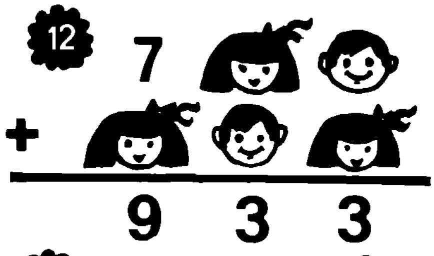


10

```
ab : c = d
–    ·   +
b  + a = d
----------
ae – c = f
```

11
```
    I C H
+     D U
+     E R
+   S I E
+     E S
---------
    W I R
```

12



13
```
A · A = B
+   ·   –
C · D = E
---------
F – G = H
```

14

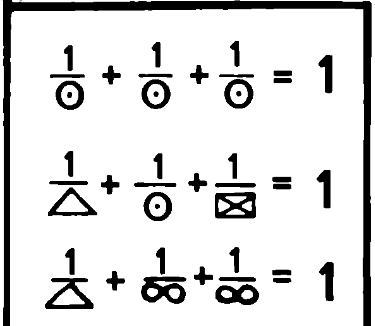
```
ab  ·  c = def
:            :
g           dg
=            =
c  +  c  =  dg
```

15

14	x		:		12
+	A	+		+	
	x		:		6
:		:		–	
	+		:		4
2		3		15	

4	5	6	7	8	9	11	12

16



25 ALPHA + MATHE = HEITER

26 MATHE + IST = SCHÖN

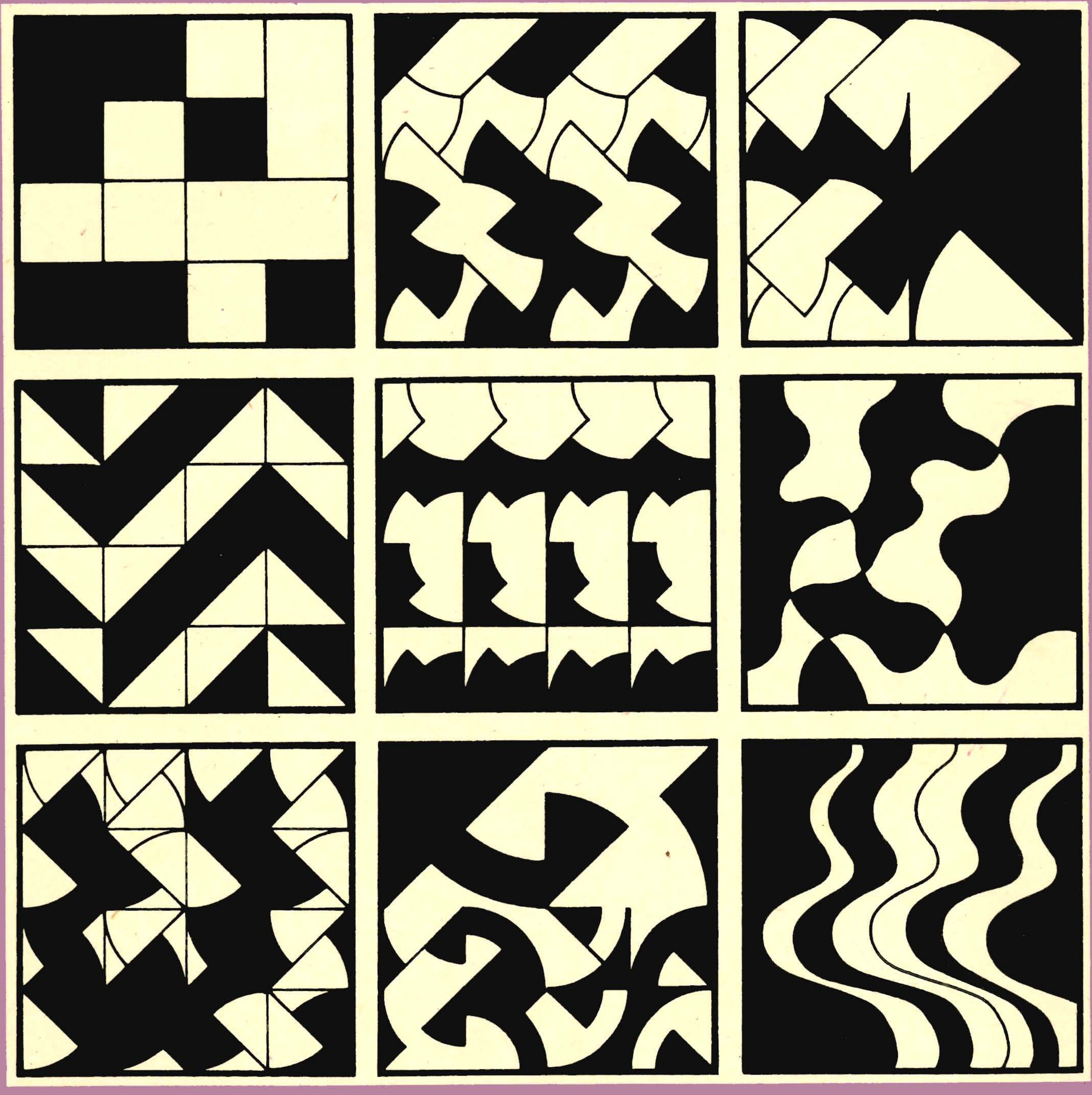
ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 19 (1985) 2 · Seiten 25 bis 48

3

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
19. Jahrgang 1985
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Mathematische Schülerzeitschrift



Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213
Anschrift der Redaktion:
7027 Leipzig, PSF 14
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Eigenfoto J. Perelman (S. 51); Galina Mamina, Moskau (S. 55); H. Teske, Leipzig (S. 58, 59); Fotoabtlg. Inst. f. Biophysik, Leipzig (S. 63); B. Stankowitsch, *Jesch* Beograd (S. 67); Fotos Bezirkskabinett f. AUT, Cottbus (III. U.-Seite)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelbild: Reproduktion aus dem ungar. Kinderbuch: Lantos Ferenc, *Épitsunk egyutt!*, gestaltet von W. Fahr, Berlin

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 25. Februar 1985
Auslieferungstermin: 12. Juni 1985

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

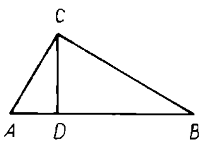
Inhalt

[1]) bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben geeignet ab der angegebenen Klassenstufe

Pythagoras – Müssen es immer Quadrate sein?

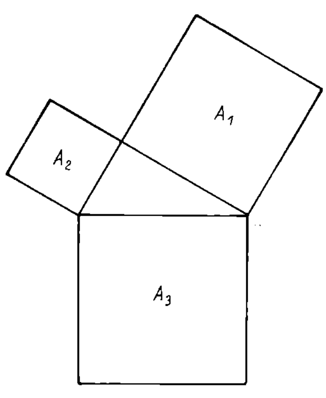
Der Fußpunkt der Höhe auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ABC sei D. Die Dreiecke ABC, ADC und BDC sind einander ähnlich (Bild 1), und wegen der Verhältnisgleichheit entsprechender Seiten in solchen Dreiecken gilt
$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$ und $\overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BD}$
(Kathetensatz).

Bild 1



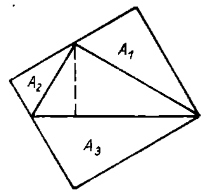
Durch Addition der beiden Gleichungen erhält man den bekannten Satz des Pythagoras
$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}\,(\overline{AD} + \overline{BD})$
$\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$,
oder mit anderen Bezeichnungen
$a^2 + b^2 = c^2$.
Der Satz besagt, daß die Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks zusammen ebenso groß sind wie der Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse (Bild 2). Aus dem Mathematikunterricht wissen wir, daß auch die Umkehrung dieses Satzes gilt. Wenn also zwischen den Seiten eines Dreiecks die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ besteht, dann ist das Dreieck rechtwinklig, und c ist Hypotenuse.

Bild 2



Aber auch für die Flächeninhalte der Dreiecke im Bild 1 gilt die im Satz des Pythagoras ausgesprochene Beziehung zwischen den Flächeninhalten der Quadrate über den Katheten und der Hypotenuse (Bild 3).
Man klappe einfach die Dreiecke nach innen. Das Dreieck ABC ist ja aus den beiden anderen Dreiecken zusammengesetzt.

Bild 3



Bezeichnen wir einmal die Flächeninhalte der Figuren über den Katheten mit A_1 und mit A_2 und den der Figur über der Hypotenuse mit A_3, so gilt auch hier die Beziehung $A_1 + A_2 = A_3$.
Gilt diese Beziehung für jegliche Figuren, die wir über Katheten und Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks zeichnen, oder ist sie an bestimmte Bedingungen gebunden?
Gewiß wird man den Figuren bestimmte Bedingungen auferlegen müssen, denn bei willkürlich konstruierten Figuren dürfte für ihre Flächeninhalte kaum die Gleichung $A_1 + A_2 = A_3$ erfüllt sein (Bild 4).

Bild 4

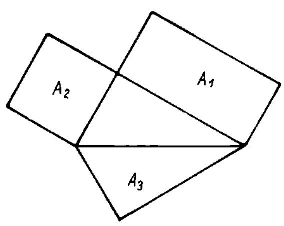
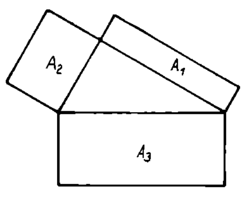


Bild 5



Andererseits wird man es immer so einrichten können, daß für ein Tripel von Figuren diese Beziehung erfüllt ist (Bild 5).
Die Figuren seien Rechtecke mit den Flächeninhalten
$A_1 = by$; $A_2 = ax$; $A_3 = cz$.
Dann ist die Beziehung erfüllt, wenn man z so wählt, daß gilt

$$z = \frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Betrachten wir die Bilder 2 und 3 näher, so erkennen wir, daß die über Katheten und Hypotenuse konstruierten Figuren immer einander ähnlich waren. Bei den rechtwinkligen Dreiecken ergab sich das aufgrund ihrer Entstehung; Quadrate dagegen sind stets einander ähnlich. Es liegt die Vermutung nahe, daß immer dann, wenn die Figuren über Katheten und Hypotenuse ähnliche Figuren sind, für ihre Flächeninhalte die Beziehung $A_1 + A_2 = A_3$ gilt.
Wir wollen unsere Vermutung an weiteren einfachen Beispielen überprüfen. Gleichseitige Dreiecke (Bild 6) und auch Halbkreise (Bild 7) sind untereinander immer ähnlich.

Bild 6

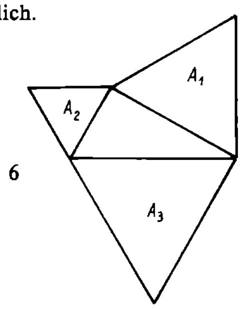
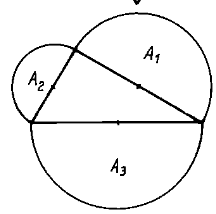


Bild 7

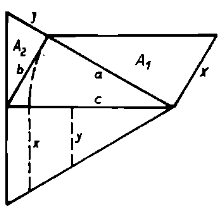


Die Rechnung bestätigt unsere Vermutung für diese Fälle.

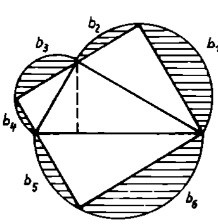
$$A_1 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \qquad A_1 = \frac{\pi}{8}a^2$$
$$A_2 = \frac{b^2}{4}\sqrt{3} \qquad A_2 = \frac{\pi}{8}b^2$$
$$A_3 = \frac{c^2}{4}\sqrt{3} \qquad A_3 = \frac{\pi}{8}c^2$$

Mit $a^2 + b^2 = c^2$ ergibt sich dann
$A_1 + A_2 = A_3$.
Wir wollen unsere Vermutung bestätigen. Wenn die Figuren ähnlich sind, dann verhalten sich ihre Flächeninhalte wie die Quadrate entsprechender Strecken. Das wissen wir aus dem Mathematikunterricht. Also gilt
$A_1 : A_2 : A_3 = a^2 : b^2 : c^2$,
denn die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks waren für die Figuren einander entsprechende Strecken. Aus dieser fortlaufenden Proportion bilden wir die beiden Verhältnisgleichungen
$A_1 : A_3 = a^2 : c^2$ und $A_2 : A_3 = b^2 : c^2$
und hieraus
$A_1 = \frac{a^2}{c^2} A_3$ und $A_2 = \frac{b^2}{c^2} A_3$.
Dann ist $A_1 + A_2 = \frac{A_3}{c^2}(a^2 + b^2)$.
Da im rechtwinkligen Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, erhalten wir hieraus
$A_1 + A_2 = A_3$.
Also haben wir gefunden:
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist und die Figuren über den Katheten und der Hypotenuse sind ähnlich, dann gilt für ihre Flächeninhalte $A_1 + A_2 = A_3$.
Oder in Kurzform:
V_1: Das Dreieck ist rechtwinklig, d.h. $a^2 + b^2 = c^2$.
V_2: Die Figuren sind ähnlich, d.h. $A_1 : A_2 : A_3 = a^2 : b^2 : c^2$.
B: $A_1 + A_2 = A_3$

Von diesem Satz kann man auch eine wahre Umkehrung bilden:
Wenn für die Flächeninhalte der Figuren über den Seiten eines Dreiecks gilt $A_1 + A_2 = A_3$ und diese Figuren einander ähnlich sind, dann gilt für die Seiten des Dreiecks $a^2 + b^2 = c^2$, und das Dreieck ist rechtwinklig.
V_1: $A_1 + A_2 = A_3$
V_2: Die Figuren sind ähnlich.
B: $a^2 + b^2 = c^2$
Zum Beweis bilden wir aus V_1 die Gleichung
$\frac{A_1}{A_3} + \frac{A_2}{A_3} = 1$, aus V_2 hingegen folgt
$\frac{A_1}{A_3} = \frac{a^2}{c^2}$ und $\frac{A_2}{A_3} = \frac{b^2}{c^2}$.
Hieraus erhält man $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$
und schließlich $a^2 + b^2 = c^2$.
Wie könnte man nun solche Tripel von ähnlichen Figuren konstruieren? Im Falle der Quadrate, Halbkreise und gleichseitigen Dreiecke war das ja sehr einfach.
Die Figuren sollen zum Beispiel rechtwinklige Dreiecke sein, und der Flächeninhalt des Dreiecks über der Hypotenuse soll $A_3 = \frac{1}{2} cz$ sein.
Wie im Bild 8 angedeutet, ermitteln wir dann die fehlenden Katheten der beiden anderen Dreiecke.

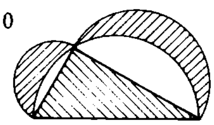
Bild 8


Aus $x : a = z : c$ folgt $x = \frac{az}{c}$,
und aus $y : b = z : c$ folgt $y = \frac{bz}{c}$.
Dieses Tripel von Dreiecken erfüllt unsere Bedingung, und es gilt demnach auch die Beziehung zwischen den Flächeninhalten. Überzeugt euch durch eine Rechnung!
Es sind aber auch interessante Kombinationen von Figurentripeln möglich, wie sie uns das Bild 9 zeigt. In ihm sind die Bilder 3 und 7 kombiniert worden.

Bild 9


Für die Flächeninhalte der Dreiecke gelte $A_3 = A_1 + A_2$,
für die Flächeninhalte der Halbkreise $B_3 = B_1 + B_2$.
Dann ist $B_3 - A_3 = (B_1 - A_1) + (B_2 - A_2)$.
Somit gilt auch für die Flächeninhalte b_i der sechs entstehenden Kreissegmente die Beziehung
$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = b_5 + b_6$.

Berühmt sind die sogenannten „Möndchen des Hippokrates". Sie entstehen, wenn man den Halbkreis über der Hypotenuse in die Halbkreise über den Katheten hineinzeichnet (Bild 10). Ihren gemeinsamen Flächeninhalt können wir leicht bestimmen.

Bild 10


Es ist $A_M = A_1 + A_2 + A_{Dr} - A_3$
A_M, A_{Dr} sind die Flächeninhalte der Möndchen bzw. des Dreiecks.
Wegen $A_1 + A_2 = A_3$ ist also $A_M = A_{Dr}$.
Hippokrates zeigte mit diesem Beispiel, daß auch nicht geradlinig begrenzte Figuren quadrierbar sind.

Auch Kreissektoren und Kreissegmente sind ähnlich, wenn sie durch zentrische Streckung auseinander hervorgehen, d.h., wenn sie gleiche Öffnungswinkel haben. Die Bilder 11a, b und 12a, b zeigen die jeweils gleichen Flächeninhalte. Wer gern rechnet, mag die Beziehung zwischen ihnen bestätigen.

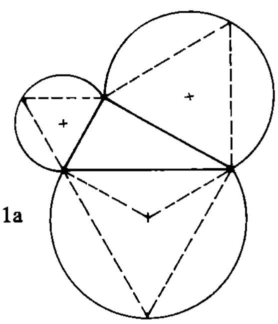
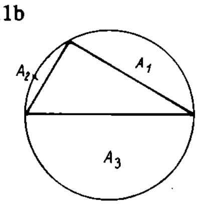


Bild 11a

Bild 11b


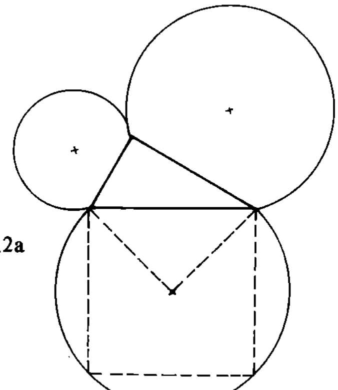
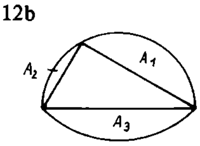


Bild 12a

Bild 12b


Eine Aufgabe von Prof. Florentin Smarandache

Lycée Sidi El Hassan Lyoussi, Sefrou, Marokko

▲2577▲ Lösen Sie die Gleichung
$x^3 - 3y = 2$
im Bereich der natürlichen Zahlen!

In den Bildern 13 bis 16 wird am Beispiel des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks nochmals der Zusammenhang zwischen den Flächeninhalten von Möndchen und dem des Dreiecks veranschaulicht.

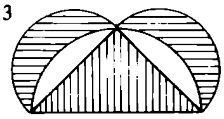
Bild 13


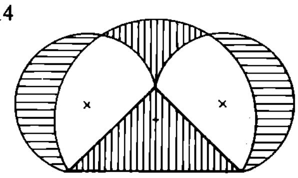
Bild 14


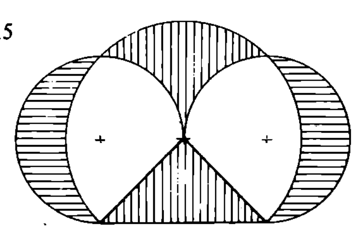
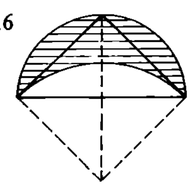
Bild 15


Bild 16


Wer zeigt, daß auch der Flächeninhalt des Möndchens im Bild 16 gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks ist?

Anmerkung: Hippokrates von Chios war ein griechischer Mathematiker und lebte um 440 v.u.Z.

W. Jungk

Wissenschaftlerporträt Jakow Perelman

Bis zum letzten Atemzug arbeitete er und starb im schwersten Blockade-Monat am 16. März 1942 in Leningrad

Jakow Perelman im Jahre 1935

Die Wissenschaft kommt so schnell voran, daß ihre Bücher nicht Schritt halten. Erstaunlich, daß es trotzdem populärwissenschaftliche Bücher gibt, die sich ungewöhnlich lange behaupten. Eines davon, das ständige Wiederauflagen erlebte, ist das bekannte Buch von *Michael Faraday* „Die Geschichte der Kerze".

Es wurde vor 150 Jahren geschrieben. Seit mehr als 100 Jahren erfreut sich das Buch von *Kliment Timirjasew* „Das Leben der Pflanzen" ungebrochener Beliebtheit, obwohl heute jeder Schüler über Pflanzen vieles weiß, was der Autor dieses Buches nicht wußte.

Zu diesen von der Zeit nicht totzukriegenden populären Ausgaben kann man auch die Bücher von *Jakow Perelman* zählen.

Jakow Perelman wurde 1882 in einer Familie geboren, der sowohl die Wissenschaft als auch die Literatur recht fremd waren. Sein Vater war Buchhalter, die Mutter Lehrerin. Und obwohl Physik und Mathematik dann zu den Hauptthemen seiner Bücher gehörten, hatte er anfangs nur wenig damit zu tun. Nach der Realschule besuchte Perelman die Forsthochschule in Petersburg und beendete sie als Diplomforstwirt. Er beschäftigte sich jedoch weder mit der Untersuchung noch der Aufforstung von Wäldern. Perelmans Bekannte waren von seiner Fähigkeit, physikalische und mathematische Fehler sofort festzustellen, beinahe blitzartig physikalische Erscheinungen analysieren zu können, beeindruckt.

Schon als Student begann Perelman in Zeitschriften Aufgaben und Rätsel sowie Mitteilungen über wichtige wissenschaftliche Entdeckungen zu veröffentlichen. Anfangs war das nur ein Nebenverdienst für einen bedürftigen Studenten. Perelman merkte aber bald, daß diese Arbeit seine wahre Berufung ist. Er wurde zum Literaten, zu einem ganz besonderen.

Der Erfolg des ersten Buches „Unterhaltsame Physik" war überwältigend. Der Titel des Buches war nicht zufällig gewählt. Perelman war davon überzeugt, daß populärwissenschaftlich nicht heißt, die Anfangsgründe durchzukauen, sondern unterhaltsam dem Leser den wissenschaftlichen Gehalt nahezubringen. Er schuf eine ganze Buchreihe: Anregend legte er Arithmetik, Algebra, Geometrie, Mechanik und Astronomie dar.

Diese Bücher haben noch eine seltene und schöne Besonderheit, sie wurden in enger Zusammenarbeit zwischen dem Autor und Leser geschaffen. Seine Bücher blieben die einzigen, in denen die Privatadresse des Autors angegeben ist. Post kam von Schülern und Akademiemitgliedern, Seeleuten und Arbeitern, Buchhaltern und Pädagogen. Die einen stellten Fragen oder baten um Rat, andere teilten schwer erklärbare Tatsachen mit, stritten... Und noch eine Besonderheit zeichnete diesen Autor aus: er beantwortete alle Briefe selbst.

Zu seinen Briefpartnern gehörten der große Denker und „Vater" der Raumfahrt, *Konstantin Ziolkowski*, genauso wie der künftige Chefkonstrukteur von Raumschiffen, *Sergej Koroljow*. Die Bücher Perelmans brachten *Konstantin Feoktistow* und *Boris Jegorow*, die beiden sowjetischen Kosmonauten, der eine Wissenschaftler, der andere Arzt, zum Raumflug. Es ist natürlich nicht möglich zu ermitteln, wie viele junge Leser der Bücher Perelmans Physiker, Mathematiker, Ingenieure, Konstrukteure geworden sind. Die letzte große Tat *Jakow Perelmans* wurde das von ihm gegründete *Haus der unterhaltsamen Wissenschaft* in Leningrad. Im früheren Palast der Grafen Scheremetjew bauten jeden Tag Hunderte von Kindern ungewöhnliche Maschinen, Modelle phantastischer Flugapparate, erdachten und lösten Denksportaufgaben und gaben auch kleine Heftchen heraus, die die Phantasie ihrer jungen Leser weckten und die Logik entwickelten.

Der Krieg, die Blockade von Leningrad bedeutete das Ende für diese wunderbare Einrichtung. Der Krieg brachte auch *Jakow Perelman* den Tod. Wie alle Leningrader ertrug er standhaft den Hunger. Bis zum letzten Atemzug arbeitete er und starb im schwersten Blockade-Monat, am 16. März 1942.

Seine Bücher aber leben weiter. Sie strahlen Klarheit und Frische des Gedankens aus, Humor, Erfindertum dieses bemerkenswerten Autors.

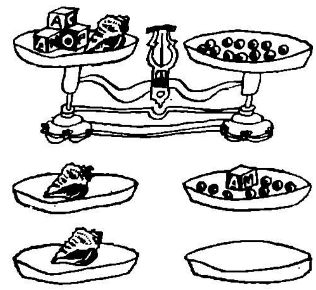
Mehr als 400mal wurden die Bücher Perelmans in der UdSSR verlegt. Immer neue Generationen von Kindern lesen sie ebenso begeistert wie ihre Väter, Großväter und Urgroßväter... Schon lange tragen sie nicht mehr die Privatadresse des Autors. Bis heute aber erhalten die Verlage Zuschriften, die an *Jakow Perelman* gerichtet sind.

Aufgaben aus Büchern von Jakow Perelman

Muschel und Glasperlen

Das Bild zeigt euch, daß drei Spielzeugwürfel und eine Muschel ebenso schwer sind wie 12 Perlen und daß weiterhin eine Muschel so schwer ist wie ein Würfel und acht Perlen.

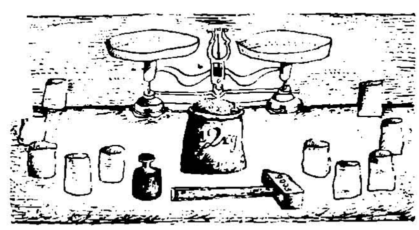
Wieviel Perlen muß man auf die freie Wägeschale legen, um sie mit der Muschel in der anderen Schale auszuwägen?



Mit Wägestück und Hammer

Es sind 2 kg Streuzucker in 200-Gramm-Tüten abzuwägen.

Doch sind nur ein 500-Gramm-Wägestück und ein Hammer, der 900 g wiegt, vorhanden.



Wie macht man es, alle 10 Tüten zu 200 g unter Verwendung dieses Wägestücks und des Hammers abzuwägen?

Von Ensk nach Ixograd

Stromabwärts schafft ein Dampfer 20 km/h, gegen die Strömung nur 15 km/h. Um von der Anlegestelle der Stadt Ensk zur Anlegestelle in Ixograd zu gelangen, braucht er 5 Stunden weniger als für den Rückweg.

Wie groß ist die Entfernung zwischen diesen Städten?

Antworten

1 Muschel ≙ 9 Perlen;
2 000 g − (4 × 400) g = 400 g,
400 g − 200 g = 200 g;
Die Entfernung von Ensk nach Ixograd beträgt 300 km.

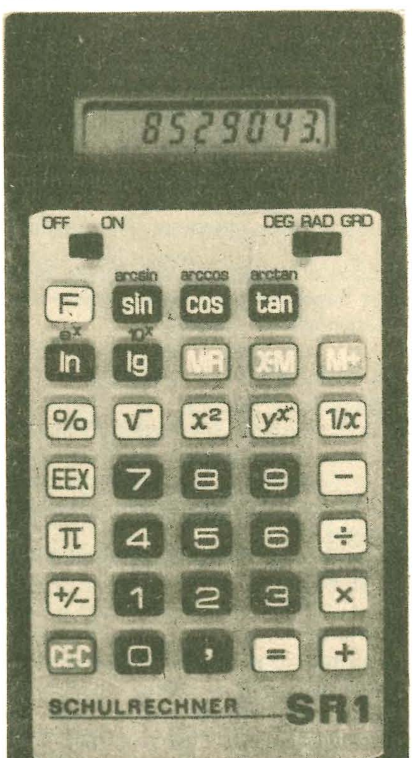
Helfer in der Tasche

2316 : 52,8271 = ? Ein Druck auf die Taste: 43,841 135. Mit elektronischer Eile bekamen wir ein Resultat, das mit Papier und Bleistift ein paar Minuten gekostet hätte – von möglichen Rechenfehlern ganz zu schweigen.

Es ist also möglich geworden, auch geistige Leistungen des Menschen einem Automaten zu übertragen, und die Mikroelektronik macht bisher Ungeahntes möglich. Das ist eine der Voraussetzungen dafür, bei der Erfüllung unserer Pläne die Arbeitsproduktivität ohne Mehrbelastung des Menschen erheblich zu steigern. Das kommt uns allen zugute.

Doch wie funktioniert denn nun dieses Wunderwerk in der Westentasche, das mit kleinen, relativ schwachen Batterien über ein Jahr arbeitsbereit ist? Wir wollen bei unseren Betrachtungen hier davon absehen, daß es ganz verschiedene Typen von Taschenrechnern gibt – mit verschiedenen Anzeigen (Leuchtdioden, Flüssigkeitskristallen) – mit verschiedenen Rechenvorgängen (z. B. mit der Umgekehrten polnischen Notation) – mit verschiedener Leistungsfähigkeit: einfache, wissenschaftliche oder programmierbare Rechner. Denn ihnen allen sind einige einfache Gesetzmäßigkeiten gemeinsam, die wir im folgenden betrachten wollen.

Bild 1



Im Grunde genommen machen wir uns das Zahlenrechnen besonders schwer, weil wir uns auf eine Zahlendarstellung zur Basis 10 (entsprechend der Zahl unserer Finger) geeinigt haben. Konsequenterweise mußten wir deshalb in den ersten Schuljahren die Grundbeziehungen der Addition und das kleine Einmaleins auswendig lernen; kompliziertere Rechnungen waren darauf zurückzuführen, wobei es ohne Fehler nicht abging. Wie wir in dem Beitrag „Wie rechnet der Computer?“ (*technikus* 2/1983) sahen, hat der gewissermaßen nur zwei Finger, d. h., nur zwei verschiedene Ziffern, nämlich 0 ≙ Strom aus, 1 ≙ Strom ein.

Die binäre Zahlendarstellung heißt z. B. für 9: 9 ≙ 1001.

Genau genommen verwendet der Taschenrechner sogar einen *BCD*-Code, auf den wir aber hier nicht eingehen können. Damit tritt bereits die erste Aufgabe auf: Die eingetippte Zahl muß in eine Binärzahl umkodiert werden. Aber es geht noch weiter:

Zum Rechnen brauchen wir

- das Gedächtnis, um uns die an der Rechnung beteiligten Zahlen (Operanden) und Zwischenergebnisse zu merken;
- Papier und Bleistift für Teil- und Endergebnisse.

Der Rechner hat hierfür Register, die sich die jeweils anfallenden Binärzahlen bis zum nächsten Rechenschritt merken können; wir haben ein Akkumulatorregister – kurz Akkumulator. Viele Rechner haben noch einen einfachen Speicher (M wie memory, englisch = Gedächtnis), um Zwischenergebnisse längere Zeit aufzubewahren.

Für die Anzeige sind die Binärziffern dann wieder in Ziffern zur Basis 10 umzuwandeln, und zur Ziffernanzeige hat sich eine 7-Segmentanzeige bewährt (Bild 1).

Nun zum Rechnen selbst: Die vier Grundrechenarten (+, −, ×, :) lassen sich auf die Addition zurückführen, und bei Binärziffern ist die Addition einfach. Wir wollen den Vorgang an einem einfachen Beispiel studieren.

Beispiel: 1983 + 201 = 2184

1. Schritt: 1983 eintasten – Anzeigeregister

2. Schritt: Operationstaste + – Weiche für die weitere Rechnung gestellt

3. Schritt: 201 eintasten – Zahl 1983 ins Operandenregister, 201 ins Anzeigenregister

4. Schritt: = eintasten – Beide Ziffern werden stellenweise in das Addierwerk eingeschoben, das Ergebnis kommt in den Akkumulator und von dort zur Anzeige (vgl. Bild 2).

Bei dieser einfachen Addition können unter Beachtung der Ziffernbewegung, der Teilsummen- und Übertragsbildung 200 bis 400 Operationen nötig werden! Damit alles wohlgeordnet nach Rechenschritten

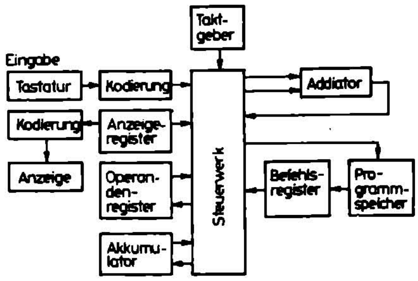


Bild 2

erfolgen kann, ist ein Taktgeber nötig, der in regelmäßigen Zeitabständen durch je einen Impuls die nächste Operation startet. Diese Zeitabstände sind je nach der verwendeten elektronischen Technologie verschieden; sie betragen etwa 4 µs ($= 4 \cdot 10^{-6}$ s); dann würde die Addition etwa 400 · 4 µs = 1,6 ms erfordern.

Komplizierte Rechenoperationen, wie z. B. $\sqrt{x}$ müssen mittels eines Rechenprogrammes abgearbeitet werden (vgl. Beitrag „Wie rechnet der Computer“ – technikus 2/83). Für diese Rechenprogramme braucht der Rechner einen Programmspeicher (ROM); die Rechenzeit wird dabei etwa 10mal so groß. Bei einigen Funktionen, wie z. B. sin *x*, beträgt die Rechenzeit fast eine Sekunde.

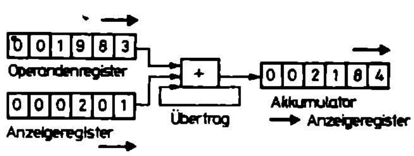


Bild 3

Bild 3 zeigt den Aufbau des Taschenrechners als Blockschaltbild, bei dem das Steuerwerk (Mikroprozessor) als zentrale Einheit auffällt. Je nach der getippten Operationstaste stellt er für die Rechnung die richtige Weiche. In dem geöffneten Taschenrechner – aber bitte nicht experimentieren! – fällt die Tastatur mit ihrem Netz von Kontaktstreifen und die Anzeigevorrichtung auf; alles übrige ist in einem sehr stark integrierten Schaltkreis untergebracht. Sein Inneres besteht aus einem etwa 5 × 5 mm² großen Halbleiter-Chip mit etwa 10 000 Transistoren und den zugehörigen Widerständen und Kondensatoren. Bei diesem mikroskopisch kleinen Wunderwerk kommt es auf größte Präzision und Material-Reinheit (vergleiche technikus 8/83, „Kontrollierte Dreckeffekte“) an. Hinzu kommt als Taktgeber eine kleine Quarzuhr, die bei manchen Rechnern eine sehr zuverlässige Zeitangabe mit Datum und Stoppuhr ermöglicht. Damit ist dieses Wunderwerk, das kaum elektrische Energie verbraucht, in der Lage, uns anstrengende Leistungen des Denkapparates abzunehmen und uns dabei an Schnelligkeit und Zuverlässigkeit beträchtlich zu übertreffen. In diesem Beitrag wollen wir die Arbeitsweise des elektronischen Taschenrechners

zeigen, die in vielem an den freiprogrammierbaren Mikrorechner erinnert. Um die Fähigkeiten des Rechners richtig zu nutzen, sollte man die Gebrauchsanweisung gut studieren; dann ist oft der einfache Rechner (sofern er, wie unser SR 1, einen zusätzlichen Speicher M besitzt) durchaus nicht den komfortableren und entsprechend teureren Rechnern unterlegen.
Und wer es nicht glaubt, kann sich durch einen Versuch davon überzeugen: ein wenig kann unser Taschenrechner auch schreiben. Wer die 38317 eingibt und den Rechner um 180° dreht, kann lesen, was er seinem Mathehelfer entgegenbringen sollte. 7353 müßte er evtl. auf sich beziehen, wenn er nicht kontrolliert hat. Die 3504 sollte man nie verlieren, das Gedächtnis möglichst nicht wie ein 8315 sein, über ein 807 in Mathe freuen wir uns immer.
Es liegt an uns, den Rechner gut zu nutzen – aber ihm auch nicht blindlings zu vertrauen, die Bequemlichkeit der Einstellung verleitet oft zur Sorglosigkeit. Man sollte sich stets die Frage stellen: Kann das angezeigte Ergebnis stimmen? Das ist oft mit einer einfachen Überschlagsrechnung nachzuprüfen.
Neben der Erhöhung der Sicherheit betreiben wir zugleich ein geistiges Training, das uns auch zu neuen, schöpferischen Leistungen befähigt. Schöpferisch Neues zu schaffen, wie es auch für den Aufbau unserer Gesellschaftsordnung erforderlich ist, bleibt Angelegenheit des Menschen.

K. Göldner, aus: technikus 1/84

Lösungen

Es bedeuten:

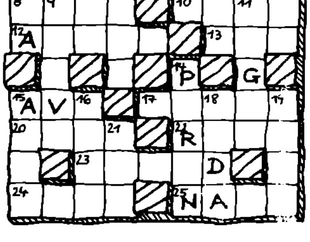
38317 ≙ LIEBE	8315 ≙ SIEB
7353 ≙ ESEL	807 ≙ LOB
3504 ≙ hOSE	

Heiteres zum Taschenrechner

1. Für den Bau eines Kremls (Burgstadt) wurden 46 207 Pud eines Baumaterials sowie 169 Pud eines anderen Materials geliefert. Was für Materialien sind es? Die Antwort gibt der Taschenrechner.
(1 Pud = 16 kg)

Dipl.-Ing. L. Kryshanowski, Leningrad

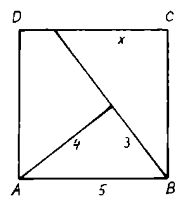
2. Löse unter Verwendung des Taschenrechners das folgende Rätsel!
Bis auf ein paar bereits in der Figur angegebenen Buchstaben ergeben sich alle anderen, indem du die Aufgaben löst und dann den Taschenrechner jeweils um 180° drehst.



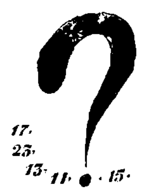
▲1▲ Un bassin circulaire est entouré d'une grille placée à 50 cm du bord; la longueur de cette grille est 22 m.
Quel est le diamètre du bassin?

▲2▲ Use each of the nine digits, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 exactly once to form prime numbers whose sum is as small as possible.

▲3▲ In a square of base 5 position a 3-4-5 triangle as shown below. Determine the distance x.

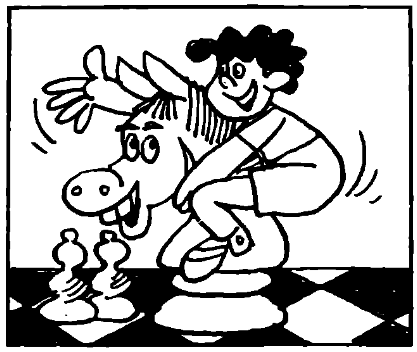


▲4▲ Какое число нужно поставить вместо знака «?» в последовательности 17, 23, 13, 11, ?, 15?



Waagerecht: 1. $85^2 + 90$, 4. $17 \cdot 3 \cdot (10^2 + 1)$, 7. $(11 \cdot 17)^2 + 87 \cdot 4$, 8. $3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19$, 10. $61^2 - 2^3$, 12. $95 \cdot 19 + 3 \cdot 4$, 13. $16 \cdot 52 - 5^2$, 15. $15^2 : 75$, 17. $23 \cdot (23 \cdot 60 - 1)$, 20. $75^2 - 29 \cdot 3$, 22. $3 \cdot 3 \cdot 17$, 23. $40^2 + 3 \cdot 5 \cdot 7$, 24. $43 \cdot 19 \cdot 9$, 25. $(19^2 + 5^2 - 1^2) : 11$.
Senkrecht: 1. $(10^2 + 1^2) \cdot (3^2 - 2^2)$, 2. $42^2 + 3^2$, 3. $(13 \cdot 9 + 2) \cdot (9^2 \cdot 4 - 2) - 1$, 4. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, 5. $17^2 \cdot 5^2 - 9^2 - 9$, 6. $3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 - 1$, 9. $52 \cdot 61 - 2$, 11. $(50 \cdot 17 + 1) \cdot 6 + 1$, 14. $6^2 - 5^2$, 15. $7^3 + 5 \cdot 9$, 16. $11 \cdot 17 \cdot 19$, 18. $18^2 - 17^2 + 2$, 19. $3 \cdot 31 \cdot 41$, 21. $25^2 + 9^2 - 1^2$.

Aus: Rätselspaß mit π, Magazin, Berlin



Schnelles Bauernmatt

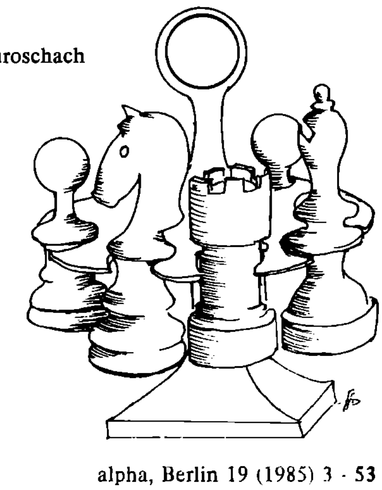
In Serienzugproblemen führt eine Partei (Weiß oder Schwarz) alle ihre Züge nacheinander aus. Die andere Partei zieht danach entweder einmal (Serienzughilfsmatt bzw. Serienzughilfspatt), oder sie ist matt bzw. patt.
Eine Aufgabe des finnischen Problemkomponisten *E. Bonsdorff* aus *Uusi Suomi* 1960 lautet wie folgt:
Wie groß ist die Anzahl der kürzesten, ausschließlich mit Bauernzügen durchgeführten und mit Matt endenden Serienzugpartien? Weiß und Schwarz befinden sich in der Partieanfangsstellung – es zieht nur Weiß!
Eine der möglichen Lösungen sei gegeben:
1. e4, 2. e5, 3. g4, 4. g5, 5. g6, 6. e6, 7. e:f7 matt.

H. Rüdiger

Der Falschspieler

Zeichnungen: Franz Fricke

Büroschach



Überall Zuordnungen

In den Sommerferien hat Anja in der Flaschenannahme der Kaufhalle *Zum guten Einkauf* gearbeitet. In der Annahmestelle konnte man Bier- und Brauseflaschen (Flaschenpfand 0,30 M), Milchflaschen (Flaschenpfand 0,20 M) und Kondensmilchflaschen (Flaschenpfand 0,05 M) abgeben.

„Um die Kunden möglichst wenig warten zu lassen, kommt es u. a. darauf an, an der Kasse flink zu arbeiten", erzählt Anja ihrem jüngeren Bruder Uwe. „Um das zu erreichen, habe ich mir am ersten Tag gleich drei Tabellen angefertigt. Durch die Tabellen *ordnete* ich jeweils der Anzahl der Flaschen einer Sorte den Geldbetrag *zu*, den ich auszahlen mußte." Für Brause- und Bierflaschen zeigte sie Uwe folgende Tabelle (Tabelle 1):

Tabelle 1

Anzahl der Flaschen	Flaschenpfand in M
1	0,30
2	0,60
3	0,90
4	1,20
5	1,50
6	1,80
7	2,10
8	2,40
9	2,70
10	3,00

„Bei mir hättest du aber trotz deiner Tabelle rechnen müssen", meint Uwe, „denn ich gehe immer erst zur Annahmestelle, wenn es sich lohnt, z. B. kannst du den Betrag für 14 Bierflaschen deiner Tabelle nicht entnehmen. Du müßtest also 14 · 0,30 rechnen." „Denkste!" meint Anja. „Ich tippe erst den Betrag für 10 Flaschen und dann den für 4 Flaschen in die Kasse. Beide Male kann ich meine Zuordnungstabelle nutzen."

▲ 1 ▲ Begründe das Vorgehen von Anja!

„Die Idee mit der Tabelle war ganz schön pfiffig." Anja wehrt ab. „Das war doch nicht meine Idee. Solche Zuordnungstabellen findet man sehr oft, um sich die Arbeit zu erleichtern. Schon *Adam Ries* hat vor über 400 Jahren solche Zuordnungstabellen angefertigt. Damals änderte sich mit den steigenden oder fallenden Kornpreisen nicht der Preis des Brotes, sondern sein Gewicht. Um die Bevölkerung vor Übervorteilung zu schützen und den Bäckern die Berechnung des Brotgewichtes zu erleichtern, entwarf *Adam Ries* im Auftrag der Stadt Annaberg 1533 ein Tabellenwerk, aus dem man sofort ablesen konnte, wieviel Brote man aus einem Scheffel Mehl in Abhängigkeit vom Getreidepreis backen durfte. Das war auch eine Zuordnungstabelle." Sie könnte so wie in Tabelle 2 ausgesehen haben.

Tabelle 2

Preis eines Scheffels Korn in Groschen	Anzahl der Brote auf einen Scheffel[1]
	.
	.
.	.
20	40
21	42
22	44
23	46
.	.
.	.
.	.

[1] altes deutsches Hohlmaß für Schüttgüter (besonders Getreide) unterschiedlicher Beträge zwischen 23 und 233 l; z. B. in Sachsen 104 l.

„Ist die Quadrattafel ebenfalls eine Zuordnungstabelle?" fragt Uwe. Anja bestätigt das. „Aber bei dieser Tabelle kann man doch nicht das Quadrat von 14 dadurch ermitteln, daß man zum Quadrat von 10 das Quadrat von 4 addiert", wirft Uwe ein. „Das stimmt. Aber das Quadrat von 14 kann man ermitteln, indem man 14 als Produkt 2 · 7 schreibt und dann rechnet: $2^2 = 4$, $7^2 = 49$, $4 \cdot 49 = 196$. Es ist nämlich $2^2 \cdot 7^2$ dasselbe wie 14^2."

▲ 2 ▲ Gilt immer $a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2$ $(a, b \in N)$?

„Es gibt auch Zuordnungen, bei denen gar keine Zahlen auftreten", erklärt Anja. „Zum Beispiel gibt es an der Schule einen Aushang, aus dem hervorgeht, wer die einzelnen Arbeitsgemeinschaften leitet." Anja zeichnet zur Illustration folgende Tabelle:

Tabelle 3

AG Sport	Frau Feurig
AG Foto	Herr Auge
AG Schach	Herr Schwarz
AG Modellbau	Herr Bahn
AG Schießen	Herr Treffkorn
AG Biologie	Frau Specht

Anschließend gibt Anja noch ein weiteres Beispiel. Sie fertigt eine Tabelle an, aus der hervorgehen soll, welche der Zeitschriften *Junge Welt*, *alpha* und *Jugend und Technik* von welchen Schülern ihrer Klasse abonniert sind.

Tabelle 4

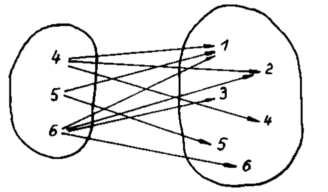
Zeitschriften	Abonnenten
Junge Welt	Anja, Martin Irene, Dirk, Sven, Michael, Klaus
alpha	Anja, Sven
Jugend und Technik	Ute, Dirk

„Siehst du den Unterschied zwischen beiden Zuordnungen?" fragt Anja. „Bei der Zuordnung ‚AG... leitet ...' ist jeder Arbeitsgemeinschaft *genau ein* Leiter zugeordnet. In der anderen Tabelle, die die Zuordnung ‚... wird abonniert von ...' widerspiegelt, stehen bei jeder der Zeitschriften mehrere Schülernamen. „Das stimmt!" bestätigt Anja Uwes Antwort. „Man kann also z. B. *nicht* von *dem* Schüler sprechen, der in Anjas Klasse die *alpha* abonniert hat, aber von *dem* Leiter der AG Foto", fährt Anja fort.

Sie erläutert Uwe auch, daß man solche Zuordnungen, wie sie durch die Tabellen 1, 2 und 3 dargestellt werden, *eindeutige Zuordnungen* nennt. Die Zuordnung, die durch die Tabelle 4 dargestellt wird, ist dagegen *nicht eindeutig*.

Anja erklärt weiter, daß man zuweilen auch Pfeilbilder verwendet, um Zuordnungen anzugeben. Sie zeichnet zwei solche Darstellungen auf (vgl. Bild 1).

Bild 1



Der Pfeil bedeutet die Zuordnung *wird geteilt von*.

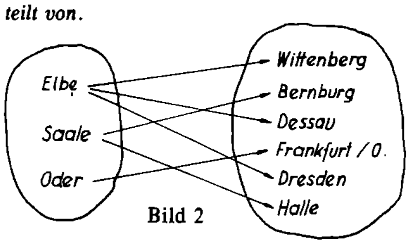


Bild 2

Der Pfeil bedeutet *fließt durch*.

▲ 3 ▲ M sei die Menge der Schriftsteller Arkadi Gaidar, Alex Wedding, Max Zimmering.

N sei die Menge der Bücher *Ede und Unku*, *Timur und sein Trupp*, *Die Feuertaufe*, *Buttje Pieter und sein Held*.

Stelle die Zuordnung *schrieb das Buch* in einem Pfeildiagramm dar!

O sei die Menge der Städte Moskau, Budapest, Bukarest, Havanna. P sei die Menge der Länder Sowjetunion, Kuba, Ungarn, Rumänien.

Stelle die Zuordnung *ist Hauptstadt von* in einem Pfeildiagramm dar!

Woran erkennt man im Pfeilbild, ob eine Zuordnung eindeutig ist?

„Stimmt es, daß man Zuordnungen auch in einem Koordinatensystem darstellen kann?" fragt Uwe seine große Schwester.

„Ja, das geht auch!“ Anja gibt dazu gleich folgendes Beispiel:
Im Physikunterricht sei für eine Schraubenfeder die Verlängerung bei verschiedenen Kräften gemessen und hierfür eine Zuordnungstafel aufgestellt worden.

Kraft F in N	50	100	150	200	250
Längenänderung s in cm	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5

Diese Zuordnung ist eindeutig.
Nach der Durchführung des Versuchs sollten die jeweiligen Zahlenpaare in einem Koordinatensystem dargestellt werden.

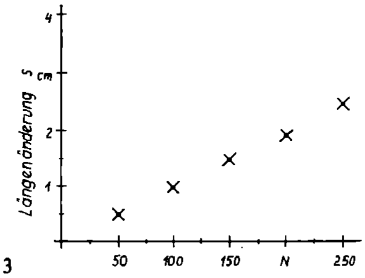


Bild 3

Es entstand folgendes Bild 3:
Das Bild 4 zeigt die Zuordnung x *wird geteilt von* y für $x = 4, 5, 6$.

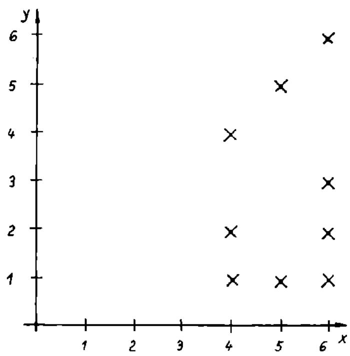


Bild 4

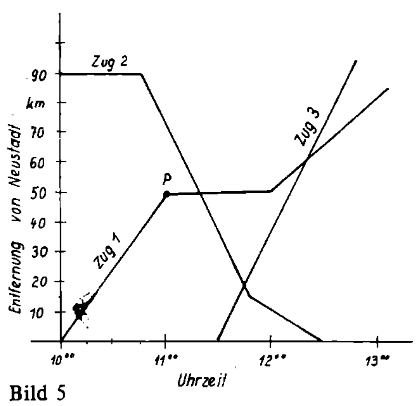


Bild 5

Das Bild 5 stellt einen stark vereinfachten graphischen Fahrplan dar. In ihm werden die Uhrzeit und die Entfernung vom Bahnhof Neustadt auf der Strecke Neustadt – A-Dorf festgehalten. Der eingezeichnete Punkt P bedeutet, daß der Zug 1 sich um 11.00 Uhr genau 50 km von Neustadt entfernt befindet.
Die hier dargestellten Zuordnungen für die einzelnen Züge sind eindeutig. Jeder Uhrzeit ist genau eine Entfernung des jeweiligen Zuges vom Bahnhof Neustadt zugeordnet. (Übrigens gilt für den Zug 3 auch das Umgekehrte: Jeder Entfernung vom Bahnhof Neustadt ist genau eine Uhrzeit zugeordnet. Solche Zuordnungen nennt man in der Mathematik eineindeutige bzw. umkehrbar eindeutige Zuordnungen.)

▲4▲ Betrachte Bild 4 und beantworte folgende Fragen!
a) Um wieviel Uhr durchfährt Zug 1 die 40-km-Marke?
b) Wie lange hält Zug 1 an der 50-km-Marke?
c) Um wieviel Uhr überholt Zug 3 den Zug 1?
d) An welcher Entfernungsmarke kreuzen sich die Züge 2 und 3?

Ihren Vortrag schließt Anja mit der Bemerkung, daß man *eindeutige Zuordnungen* auch *Funktionen* nennt und Darstellungen von Funktionen im Koordinatensystem als *graphische Darstellung* einer Funktion bzw. *Graph* einer Funktion bezeichnet. „Nun hoffe ich nur, daß du gut aufgepaßt hast, denn dann kannst du folgende Aufgaben schnell lösen.“ Uwe brummte der Kopf. Beim Lösen der Aufgaben merkte er jedoch, daß er vieles verstanden hat. Versucht selbst einmal, folgende Aufgaben zu lösen!

▲5▲ Welche der Zuordnungen sind eindeutig?
a) Geldübermittlungssendungen bei der *Deutschen Post*

Postanweisungen	Mark
bis 10 M	0,20
über 10 bis 25 M	0,30
über 25 bis 100 M	0,40
über 100 bis 250 M	0,60
über 250 bis 500 M	0,80
über 500 bis 750 M	1,00
über 750 bis 1000 M (Höchstbetrag)	1,20

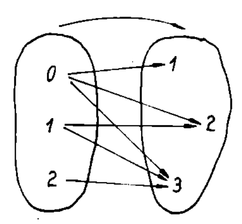


Bild 6a

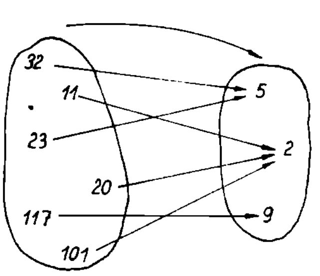


Bild 6b

b) ist kleiner als
c) hat die Quersumme.

▲6▲ Welche der folgenden Zeichnungen sind Darstellungen eindeutiger Zuordnungen $x \rightsquigarrow y$, also Graphen von Funktionen?

Bild 7a

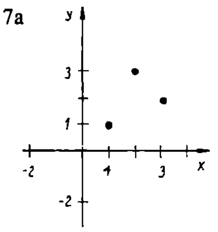


Bild 7b

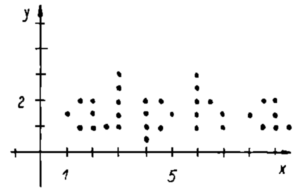
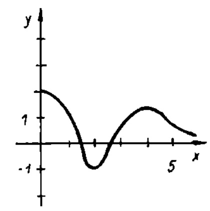


Bild 7c

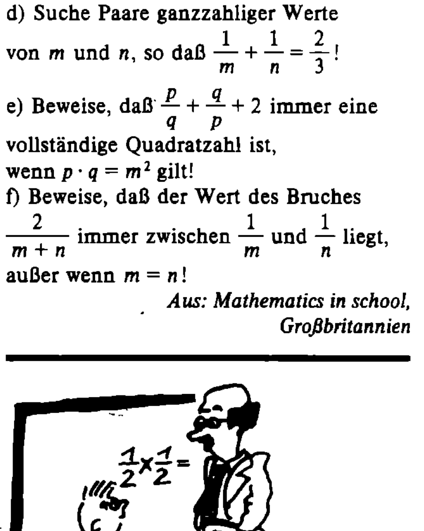


L. Flade

Spaß mit Brüchen

a) Welcher gemeine Bruch hat den doppelten Wert, wenn man im Zähler und Nenner jeweils 2 addiert?
b) Bei welchen gemeinen Brüchen wird der Wert verdoppelt, wenn man im Zähler und Nenner jeweils 3 addiert?
c) Bei welchen gemeinen Brüchen wird der Wert verdreifacht, wenn man im Zähler und Nenner jeweils 3 addiert?
d) Suche Paare ganzzahliger Werte von m und n, so daß $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{3}$!
e) Beweise, daß $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} + 2$ immer eine vollständige Quadratzahl ist, wenn $p \cdot q = m^2$ gilt!
f) Beweise, daß der Wert des Bruches $\frac{2}{m+n}$ immer zwischen $\frac{1}{m}$ und $\frac{1}{n}$ liegt, außer wenn $m = n$!

Aus: Mathematics in school, Großbritannien



Schüler:
„Fragen Sie mich etwas Leichteres, zum Beispiel, wie man die Entfernung zum Alpha Centauri berechnet.“

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade (9./10. Februar 1985)

Olympiadeklasse 7

240731 Bei der Friedensfahrt ergab sich auf einer Etappe folgende Rennsituation: Genau 14 Fahrer, darunter jedoch kein DDR-Fahrer, waren hinter das Hauptfeld zurückgefallen. Genau 90% der nicht zurückgefallenen Fahrer bildeten das Hauptfeld; darin fuhren einige, aber nicht alle DDR-Fahrer. Die Fahrer vor dem Hauptfeld bildeten eine Spitzengruppe; sie umfaßte genau ein Zwölftel aller Fahrer der Etappe. In der Spitzengruppe war die tschechoslowakische Mannschaft als einzige am schwächsten vertreten, die sowjetische Mannschaft als einzige am stärksten. Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln läßt, welche Mannschaften insgesamt in der Spitzengruppe fuhren und mit wieviel Fahrern sie dort vertreten waren! Wenn dies zutrifft, gib diese Anzahlen an!

240732 a) Es sei M die Menge aller derjenigen Zahlen x, die die folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) haben:

(1) x ist eine sechsstellige natürliche Zahl.

(2) x hat die Quersumme 29.

(3) x ist durch 11 teilbar.

Ermittle das größte Element der Menge M!

b) Es sei M' die Menge aller derjenigen Zahlen x, die außer den Eigenschaften (1), (2), (3) auch noch die folgende Eigenschaft (4) haben:

(4) Keine zwei Ziffern von x sind einander gleich.

Ermittle das größte Element der Menge M'!

240733 Konstruiere zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke ABC, die folgende Bedingungen erfüllen: Die Seite AB hat die Länge $c = 5$ cm, die auf der Geraden durch A und C senkrechte Höhe des Dreiecks ABC hat die Länge $h_b = 4{,}5$ cm, der Winkel $\sphericalangle ABC$ hat die Größe $\beta = 35°$. Gefordert wird eine Zeichnung (Konstruktion der beiden Dreiecke) und eine Konstruktionsbeschreibung hierzu. (Eine Begründung wird nicht verlangt.)

240734 Beweise folgenden Satz!
Wenn in einem Dreieck a und b die Längen zweier Seiten sowie h_a und h_b die Längen der zugehörigen Höhen sind, dann gilt

$$a : b = h_b : h_a.$$

240735 In dem Schema 43□1□5□ ist jede der Leerstellen □ so mit einer Ziffer auszufüllen, daß die entstehende siebenstellige Zahl durch 75 teilbar ist.
Gib an, wieviel siebenstellige Zahlen es insgesamt gibt, die auf diese Weise entstehen können!

240736 Ein Viereck $ABCD$ habe folgende Eigenschaften:

(1) $AB \parallel DC$ und $AD \nparallel BC$,

(2) $\overline{AD} = \overline{BC} = 3 \cdot \overline{DC} = a$, wobei a eine gegebene Länge ist,

(3) $\sphericalangle BAD = 60°$.

Ermittle den Umfang u dieses Vierecks in Abhängigkeit von a!

Olympiadeklasse 8

240831 Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen, deren sechste Potenz in ihrer dekadischen Ziffermdarstellung genau je einmal die Ziffern 2, 4, 5, genau je zweimal die Ziffern 8, 9 und keine weitere Ziffer enthält!

240832 Um die Haltbarkeit eines Motorradreifentyps zu ermitteln, wurden zwei Reifen getestet. Dabei wurde festgestellt, daß der Reifen auf dem Hinterrad nach 15 000 gefahrenen Kilometern und der Reifen auf dem Vorderrad nach 25 000 gefahrenen Kilometern nicht mehr die erforderliche Profiltiefe hatte und damit abgenutzt war.

a) Es soll nun erreicht werden, daß zwei solche Reifen gleichzeitig abgenutzt sind, indem man sie nach einer bestimmten Anzahl gefahrener Kilometer gegeneinander austauscht.
Ermittle diese Kilometerzahl!

b) Nach wieviel Kilometern sind unter den Voraussetzungen der Teilaufgabe a) beide Reifen abgenutzt?

Es werde angenommen, daß sowohl auf dem Vorderrad als auch auf dem Hinterrad die Abnutzung jeweils proportional zur Fahrstrecke ist.

240833 Konstruiere ein nicht überschlagenes Viereck $ABCD$, das die folgenden Bedingungen (I) bis (V) erfüllt!

(I) Die Seite AB hat die Länge $a = 7{,}0$ cm.

(II) C liegt auf der Mittelsenkrechten p der Strecke AB.

(III) D liegt auf der Mittelsenkrechten q der Strecke AC.

(IV) A liegt auf der Mittelsenkrechten r der Strecke BD.

(V) Die Geraden p und q schneiden sich in einem Punkt S, der auf der Strecke AB liegt.

Beschreibe deine Konstruktion! Beweise, daß jedes Viereck, das die geforderten Eigenschaften hat, nach deiner Beschreibung konstruiert werden kann! Beweise, daß jedes Viereck, das nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die geforderten Eigenschaften hat!

Hinweis: Ein Viereck $ABCD$ heißt genau dann „nicht überschlagen“, wenn die Strecken AB und CD sich nicht schneiden und die Strecken AD und BC sich nicht schneiden.

240834 Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. In diesem Dreieck sei CS die Seitenhalbierende von AB, CW die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$ und CH die Höhe auf AB.
Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets $\sphericalangle SCW = \sphericalangle WCH$ gilt!

240835 Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB; deren Länge sei 3 cm, der Umfang des Dreiecks betrage 13 cm. Eine Parallele zu AB schneide die Strecke AC in einem Punkt D zwischen A und C sowie die Strecke BC in einem Punkt E. Der Umfang des Vierecks $ABED$ betrage 7,4 cm.
Beweise, daß durch diese Voraussetzungen die Länge der Strecke AD eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Länge!

240836 Zwei Motorradfahrer unternehmen eine Fahrt, auf der beide die gleiche Entfernung zurücklegen. Sie starten gleichzeitig und kommen gleichzeitig am Ziel an. Dabei benötigt A doppelt so viel Zeit zum Fahren wie B zum Rasten. B dagegen fuhr dreimal so lange, wie A rastete.
Welcher der beiden Fahrer hatte die längere Rastzeit?

Olympiadeklasse 9

240931 Beweisen Sie, daß es keine vierstellige Quadratzahl z mit den folgenden Eigenschaften (1) und (2) gibt!

(1) Die erste und die dritte Ziffer von z sind einander gleich.

(2) Die zweite und die vierte Ziffer von z sind einander gleich.

240932 In einem rechtwinkligen Koordinatensystem seien der Kreis k um den Ursprung mit dem Radius $\sqrt{2}$ und die Gerade g mit der Gleichung $y = -x + 10$ gezeichnet.
Ermitteln Sie Gleichungen für die beiden zu g parallelen Tangenten an k!

240933 Es sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge a. Der Mittelpunkt der Kante AB sei M, der Mittelpunkt der Kante CD sei N.

a) Beweisen Sie, daß die Gerade durch M und N sowohl auf der Geraden g durch A und B als auch auf der Geraden h durch C und D senkrecht steht!

b) Ermitteln Sie den Abstand $\overline{MN}$ zwischen M und N!

c) Beweisen Sie, daß für jeden Punkt X auf g und jeden Punkt Y auf h der Abstand $\overline{XY}$ zwischen X und Y die Ungleichung $\overline{XY} \geqq \overline{MN}$ erfüllt!

240934 Bei einer Diskussion in der mathematischen Arbeitsgemeinschaft berichtet Norbert, er habe eine Quadratzahl $n^2 > 1$ als Summe von n natürlichen Zahlen dargestellt, von denen keine zwei einander gleich waren., Anke meint: „Es gibt sogar unendlich viele Quadratzahlen $n^2 > 1$, die jeweils als Summe von n natürlichen Zahlen darstellbar sind, unter denen sich keine zwei gleichen befinden." Bernd fragt: „Gibt es auch Quadratzahlen $n^2 > 1$, die sich als Summe von $2n$ natürlichen Zahlen darstellen lassen, unter denen es keine zwei gleichen gibt?"
a) Beweisen Sie Ankes Aussage!
b) Beantworten Sie Bernds Frage!

240935 Beweisen Sie, daß für die Kathetenlängen a, b und die Hypotenusenlänge c jedes rechtwinkligen Dreiecks die Ungleichung $a^5 + b^5 < c^5$ gilt!

240936 Es sei AB eine Strecke und P ein Punkt auf der Verlängerung von BA über A hinaus. Von P werden an alle diejenigen Kreise, die AB als Sehne haben, die Tangenten gelegt.
Beweisen Sie, daß es dann einen Kreis um P gibt, auf dem die Berührungspunkte aller dieser Tangenten liegen!

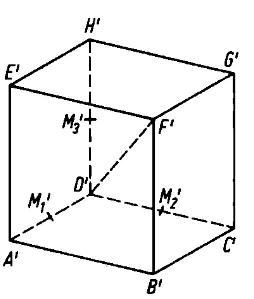
Olympiadeklasse 10

241031 In einer Diskussion über die Anzahl von Kurvenschnittpunkten behauptet Anne, ausgehend vom Beispiel der Kurven mit den Gleichungen $y = \cos x$ und $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$: „Die Kurve c mit der Gleichung $y = \cos x$ hat mit jeder quadratischen Parabel genau zwei Schnittpunkte." Bernd behauptet dagegen: „Es gibt auch eine quadratische Parabel, die mit der Kurve c genau 10 Schnittpunkte hat."
Untersuchen Sie sowohl für Anne als auch für Bernds Behauptung, ob sie wahr oder falsch ist!

241032 Beweisen Sie, daß für alle reellen Zahlen x, die größer als 1 sind, die folgenden Ungleichungen (1) gelten!

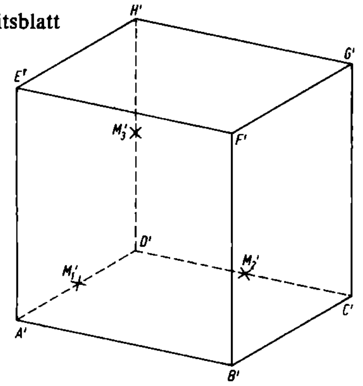
$$2\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x}} < 2\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right) \qquad (1)$$

241033 Das Bild und das Arbeitsblatt zeigen das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines



Würfels $ABCDEFGH$ in schräger Parallelprojektion sowie die Bilder M_1', M_2', M_3' der Mittelpunkt M_1, M_2, M_3 der Würfelkanten DA, DC bzw. DH.
Ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche $M_1M_2M_3$ sei, habe als Seitenkanten Strecken M_1N_1, M_2N_2 und M_3N_3, die parallel zu DF verlaufen. Die Deckfläche $N_1N_2N_3$ des Prismas liege so weit außerhalb des Würfels, daß das Prisma in seinem Innern den Punkt F enthält.
Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Bilder der Schnittlinien, die die Oberfläche des Prismas mit der Oberfläche des Würfels hat! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion, und beweisen Sie, daß eine nach Ihrer Beschreibung durchgeführte Konstruktion die Bilder aller genannten Schnittlinien ergibt!

Arbeitsblatt



241034 Jemand sucht natürliche Zahlen, die sich als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lassen. Er findet z. B., daß sowohl jede der Zahlen 89 und 90 als auch ihr Produkt 8010 diese Eigenschaft hat.
a) Bestätigen Sie, daß sich jede der Zahlen 89, 90 und 8010 als Summe von jeweils zwei Quadratzahlen darstellen läßt!
b) Beweisen Sie den folgenden allgemeinen Satz!
Wenn s und t jeweils eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft ist, sich als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen zu lassen, dann hat auch stets die Zahl $s \cdot t$ diese Eigenschaft.

241035 a) Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck ABC, verlängern Sie AC über C hinaus bis zu demjenigen Punkt C', für den $\overline{AC'} = 3 \cdot \overline{AC}$ ist, und konstruieren Sie auf BC' denjenigen Punkt Y, für den $\overline{BY} = 2 \cdot \overline{C'Y}$ gilt! Der Schnittpunkt von AY mit BC sei X.
b) Beweisen Sie, daß die in a) verlangte Konstruktion für jedes Dreieck ABC auf denselben Wert des Verhältnisses $\overline{BX} : \overline{CX}$ führt!
Ermitteln Sie diesen Wert!

241036 Man ermittle für jede Funktion f, die die folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) hat, die Funktionswerte $f(0)$, $f(-1)$ und $f\left(\frac{3}{7}\right)$.

(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen definiert.
(2) Es gilt $f(1) = 2$.
(3) Für alle reellen Zahlen a und b gilt $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$.

Olympiadeklassen 11/12

241231 Man ermittle die ersten sechs Glieder $a_1, a_2, \ldots, a_6$ von allen denjenigen Folgen (a_n) reeller Zahlen, die die nachstehenden Eigenschaften (1) bis (5) haben:

(1) Es gilt $a_1 = -\frac{5}{2}$.
(2) Es gilt $a_5 = 3$.
(3) a_1, a_2, a_3, a_4 sind (in dieser Anordnung) Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge.
(4) a_4, a_5, a_6 sind (in dieser Anordnung) Glieder einer geometrischen Zahlenfolge.
(5) Die Summe der ersten sechs Glieder der Folge (a_n) beträgt $\frac{13}{2}$.

241232 Man beweise: Wenn die Seitenlängen eines Dreiecks ABC nicht kleiner als $\sqrt{3}$ und nicht größer als 2 sind, dann gilt:
a) ABC ist ein spitzwinkliges Dreieck.
b) Die Längen der Höhen des Dreiecks ABC sind nicht kleiner als $\sqrt{2}$.

Von den nachstehenden Aufgaben 241233A und 241233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

241233A Man ermittle alle Funktionen f mit den folgenden Eigenschaften:

(1) f ist für alle rationalen Zahlen definiert.
(2) Es gilt $f(1) = 1$.
(3) Für alle rationalen Zahlen x und y gilt $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$.

241233B Man ermittle zu jeder geraden natürlichen Zahl $n \geqq 2$ alle reellen Lösungen x der Gleichung

$$x(x+1)(x+2) \cdot \ldots \cdot (x+n-1) = (x+n)(x+n+1)(x+n+2) \cdot \ldots \cdot (x+2n-1).$$

241234 Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen z mit $1 \leqq z \leqq 5$, die die Bedingung erfüllen, daß die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{3}x + z$ und die Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2$ mindestens einen Schnittpunkt mit ganzzahliger Abszisse haben.
Zu jeder Zahl z, die diese Bedingung erfüllt, gebe man – für die betreffende Gerade und die Parabel – die Koordinaten aller Schnittpunkte mit ganzzahliger Abszisse an.

241235 Man ermittle alle diejenigen Tripel (a, b, c) positiver natürlicher Zahlen, für die
$a^b + b^c = abc$
gilt.

241236 Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die

$$99^n + 101^n > \frac{51}{25} \cdot 100^n \qquad (1)$$

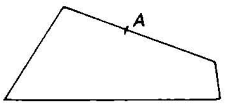
gilt.

Mathe-Quiz

alpha stellt zu dem auf der III. Umschlagseite dieses Heftes geschildertem Mathe-Quiz einige Aufgaben vor:

▲1▲ Auf einer Wiese weiden Kühe, Schafe und Gänse. Es gibt mehr Schafe als Gänse. Die Schafe und die Gänse haben zusammen 100 Köpfe und Beine. Ihre Anzahl ist dreimal so groß wie die der Kühe. Wieviel Kühe weiden auf der Wiese?

▲2▲ Das gegebene Viereck ist so in ein flächengleiches Dreieck umzuwandeln, daß eine Ecke im Punkt A liegt!



▲3▲ Ein Band von 25 m Länge und 0,1 mm Dicke wird fest auf ein Papprohr aufgerollt. Man erhält eine Rolle mit einem Durchmesser von 1 dm.
Wie groß ist der Durchmesser des Rohres?

▲4▲ Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 cm und 25 cm. Es ist so in drei Teile zu zerschneiden, daß man aus diesen Teilen ein Quadrat zusammensetzen kann.

▲5▲ Bei einem mathematischen Turnier wurden 30 Fragen gestellt. Für jede richtige Antwort wurden 7 Punkte vergeben, bei jeder falschen Antwort wurden 12 Punkte abgezogen.
Wieviel richtige Antworten hatte ein Teilnehmer gegeben, wenn er am Ende 77 Punkte erhielt?

▲6▲ Auf der Hypotenuse AB des Dreiecks ABC werden zwei Punkte K und M so festgelegt, daß $\overline{AK} = \overline{AC}$ und $\overline{BM} = \overline{BC}$.
Beweise, daß $\sphericalangle MCK = 45°$!

▲7▲ Beweise: Wenn keine der natürlichen Zahlen $n-1$, n, $n+1$ durch 5 teilbar ist, dann läßt sich n^2+1 durch 5 ohne Rest teilen.

▲8▲ Zerschneide ein Rechteck mit den Seitenlängen 16 cm und 9 cm so in zwei Teile, daß man daraus ein Quadrat zusammensetzen kann.

▲9▲ Ein Schüler hat ein Buch in drei Tagen durchgelesen. Am ersten Tag las er 0,2 des ganzen Buches und 16 Seiten dazu. Am zweiten Tag las er 0,75 der restlichen Seiten und die letzten 30 Seiten.
Wieviel Seiten hat das Buch?

▲10▲ Beweise den Satz: Wenn zwei natürliche Zahlen bei der Division durch eine dritte Zahl denselben Divisionsrest ergeben, dann läßt sich die Differenz dieser Zahlen ohne Rest durch die dritte Zahl teilen.

▲11▲ Zeichne den Graph der Funktionen
$y = \frac{|x|}{x}$, $y = |x| - x$.

„Poisson gab augenblicklich die Lösung“ Umfüllaufgabe

Am 16. Dezember 1850 trug der französische Physiker und Astronom François Arago in einer Sitzung der Pariser Akademie der Wissenschaften die Biographie seines Landsmannes Siméon-Denis Poisson (1781 bis 1840) vor. Er berichtete auch über die Jugendjahre Poissons:
„Eines Tages versammelte sich die Familie, um den Beruf zu wählen, den man ihn ergreifen lassen wollte. Man dachte anfänglich daran, ihn Notar werden zu lassen, legte diesen Plan aber einstimmig beiseite, weil er zu große geistige Anstrengung erfordere. ... Die Chirurgie erhielt den Vorzug vor dem Notariat, und Poisson begab sich zu einem Onkel ..., welcher in Fontainebleau (Stadt südöstlich von Paris) diese Kunst ausübte. ... Auf einer seiner Reisen nach Fontainebleau erzählte ihm sein Freund Vanneau von mehreren Aufgaben, welche er auf der (dortigen) Zentralschule hatte vorlegen hören, zum Beispiel die folgende:

▲1▲ *Es hat jemand ein Gefäß voll Wein, welches zwölf Maß hält. Er will die Hälfte davon, also sechs Maß verschenken, hat aber, um diese sechs Maß abzumessen, nur zwei Gefäße, das eine zu acht, das andere zu fünf Maß. Wie hat er zu verfahren, um in das Gefäß, welches acht Maß hält, sechs Maß zu schütten?*
Poisson gab augenblicklich die Lösung dieser Frage, und noch anderer, welche man ihm vorlegte. Er hatte seinen wahrhaften Beruf gefunden.“
Mit 17 Jahren bestand Poisson glänzend die Prüfung zur Aufnahme in die Pariser Polytechnische Schule. Später sollte er an dieser 1794 gegründeten Schule, die sich mehr und mehr zum wissenschaftlichen Lehrzentrum Europas entwickelte, seine Wirkungsstätte als hervorragender Mathematiker finden.

▲2▲ Das älteste Beispiel für eine Umfüllaufgabe stammt aus den „Annales Stadenses“ (13. Jh.): *Der Inhalt zweier mit Wein gefüllter Krüge von 5 und 3 Maß soll halbiert werden, wobei noch ein leerer Krug von 8 Maß zur Verfügung steht.*

H. Pieper

Johannes von Gmunden

Johannes von Gmunden wurde um 1384 in Gmunden (Traunsee) geboren und starb am 23. 2. 1442. In jenem Frühstadium der europäischen Universitäten, als diese fast völlig der Kirche unterstellt, von Geistlichen betrieben und auf die Ausbildung von Theologen gerichtet waren (die freilich auch in juristischen, medizinischen und anderen für die Kirche nützlichen Kenntnissen unterwiesen wurden), war *Johannes von Gmunden* einer der ersten Magister, die sich auf mathematische Lehrveranstaltungen spezialisierten. Er lehrte ab 1412 an der 1365 gegründeten Wiener Universität Arithmetik, Kalenderrechnung, Optik, Astronomie und deren mathematische Hilfsmittel. Ein von ihm verfaßtes Werk *Tractatus de minutiis physicis* beschäftigte sich mit der Arithmetik auf der Grundlage sexagesimal (d. h. in einem Positionssystem mit der Basis 60) dargestellter Zahlen, wie sie heute noch in der Winkelmessung und zum Teil in der Zeitunterteilung verwendet werden. Johannes von Gmunden kritisierte die Unzulänglichkeit der um 1260 auf Befehl Alfons X. von Kastilien berechneten astronomischen Tabellen, der sogenannten alfonsinischen Tafeln. Deren Neubearbeitung wurde dann von seinem Schüler *Georg Peurbach* (1423 bis 1461) und dessen Schüler, dem berühmten Mathematiker *Regiomontanus* (1436 bis 1476), durchgeführt.

So erfüllte *J. von Gmunden* eine der wesentlichsten Bedingungen, die heute an die erfolgreiche Tätigkeit eines Wissenschaftlers gestellt werden: Er verstand es, erfolgreiche Schüler heranzubilden, die die von ihm gewiesene Richtung weiterführten. (Ein Bild von *Johannes von Gmunden* ist nicht überliefert. Zum als Markenmotiv gewählten Astrolabium vgl. *alpha* 1983, Heft 3.)

P. Schreiber

Silbenrätsel, Klasse 8 (Seite 10):
1. Funktion, 2. Umkehrung, 3. Nullstelle, 4. Kathete, 5. Tangente, 6. Isobare, 7. Operation, 8. Nebenwinkel, 9. Seitenhalbierende, 10. Wertetabelle, 11. Exponent, 12. Rauminhalt, 13. Thales, 14. Elle. Lösungswort: *Funktionswerte*.

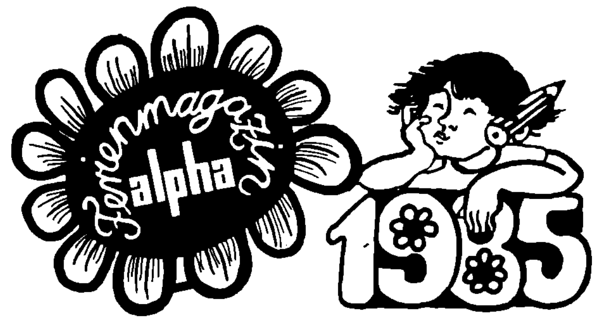
Silbenrätsel, Klasse 9 (Seite 11):
1. Grundriß, 2. Lösung, 3. Euklid, 4. irrational, 5. Cavalieri, 6. Hyperbel, 7. Umkehrfunktion, 8. Normalform, 9. Giga, 10. Speicher, 11. Scheitelpunkt, 12. Ypsilon, 13. Symmetrie, 14. Tangente, 15. Exponentialgleichung, 16. Menge. Lösungswort: *Gleichungssystem*.

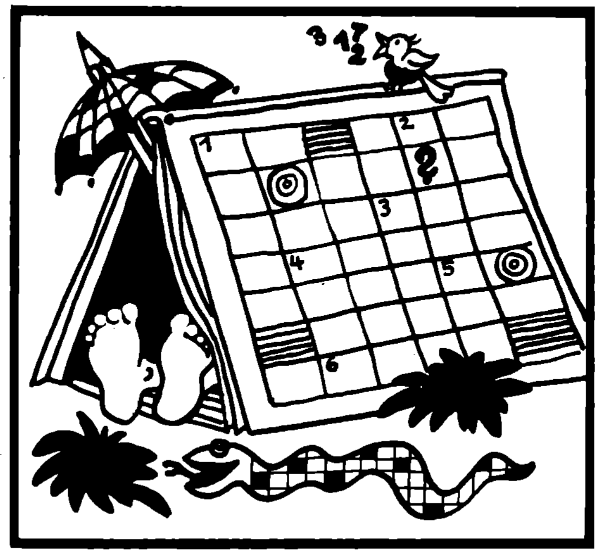
Rätselstern, Klasse 9 (Seite 12):
1. Parabel, 2. negativ, 3. Einheit, 4. Viertel, 5. relativ, 6. digital, 7. Basis, 8. Binom, 9. Monat, 10. Basel, 11. Sehne, 12. Eniac, 13. Potenz, 14. Knoten, 15. Beweis, 16. Ziffer, 17. Nenner, 18. Vektor.

Silbenrätsel, Klasse 10 (Seite 14):
1. windschief, 2. Intervall, 3. Nonius, 4. Kosinus, 5. Eintafelprojektion, 6. Logarithmus, 7. Funktionswerte, 8. ungerade, 9. Numerus, 10. Kathete, 11. Trigonometrie, 12. Ikosaeder, 13. orthogonal, 14. Nullstelle. Lösungswort: Winkelfunktion.

Diese neun Fachrätsel stammen aus der Feder von Diplomlehrer *Lutz Clausnitzer*, OS Obercunnersdorf. Sie wurden an der dortigen Oberschule im Unterricht und in der außerunterrichtlichen Tätigkeit eingesetzt.

16





Silbenrätsel ab Klasse 10

de – der – e – ein – fel – funk – ga – ge – go – go – i – jek – in – ka – ko – ko – le – lo – me – me – mus – nal – ni – no – no – nu – null – nus – on – ons – or – pro – ra – rith – rus – sa – schief – si – stel – ta – te – te – ter – the – tho – ti – ti – tri – trie – un – us – vall – wer – wind

1. Lagebeziehungen zweier Geraden im Raum,
2. Strecke auf der Zahlengeraden,
3. Hilfsskale, z. B. eines Meßschiebers,
4. Winkelfunktion,
5. zeichnerische Darstellung auf einer Projektionstafel,
6. diejenige gesuchte Zahl c, mit der eine gegebene Zahl a potenziert werden muß, um eine ebenfalls geg. Zahl b darzustellen,
7. Elemente des Wertebereichs einer Funktion,
8. Eigenschaft aller nicht ohne Rest durch 2 teilbaren natürlichen Zahlen,
9. Bezeichnung der Zahl b (siehe 6.),
10. Seite im rechtwinkligen Dreieck,
11. Dreiecksberechnung als mathematische Disziplin,
12. regelmäßiger Polyeder (Zwanzigflächner),
13. senkrecht,
14. die Abszisse der Punkte, in denen eine Kurve die Abszissenachse schneidet.

Die Anfangsbuchstaben der 14 Begriffe verkörpern in gegebener Reihenfolge Funktionen eines bestimmten Typs.

14

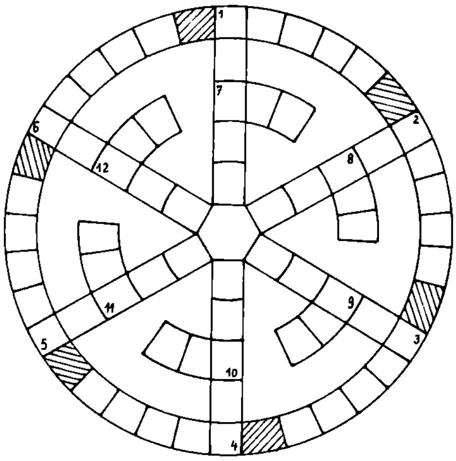
Im Uhrzeigersinn:
1. Einheit der Masse,
2. $\frac{1}{1000}$ Vorsatz für Einheiten,
3. Teil eines Dreiecks,
4. bei Edelsteinen noch übliche Masseeinheit,
5. Teil eines jeden Meßgerätes,
6. Zahlwort (g. g. T. v. 42 u. 78),
7. griechischer Buchstabe,
8. Verneinung,
9. Meßgerät der Zeit,
10. Zahlwort (kleinste zweistellige Primzahl),
11. griechischer Buchstabe,
12. kurze Sprechweise für ein Gleichheitszeichen.

Radial (gemeinsamer Endbuchstabe):
1. geometrisches Grundelement,
2. Einheit der Zeit,
3. Einheit der Zeit,
4. durch gleichen Abstand von einem Punkt M gekennzeichnete Punktmenge der Ebene (Mehrzahl),
5. Position einer Grundziffer in einer Dezimalzahl,
6. Veranschaulichung eines geometrischen Sachverhalts.

3

Kreisrätsel

ab Klasse 6



Lösungen

Kreisrätsel Klasse 6 (Seite 2):
Im Uhrzeigersinn: 1. Gramm, 2. Milli, 3. Seite, 4. Karat, 5. Skale, 6. sechs, 7. rho, 8. nie, 9. Uhr, 10. elf, 11. eta, 12. ist.
Radial: 1. Gerade, 2. Minute, 3. Stunde, 4. Kreise, 5. Stelle, 6. Skizze.

Silbenrätsel, Klasse 6 (Seite 4):
1. proportional, 2. Außenwinkel, 3. Rhombus, 4. Arithmetik, 5. Lichtjahr, 6. Liter, 7. Einheit, 8. Lineal, 9. Ordinate, 10. Gamma, 11. Rechteck, 12. Abbildung, 13. Multiplikation, 14. Million. Lösungswort: *Parallelogramm.*

Silbenrätsel, Klasse 7 (Seite 5):
1. Geometrie, 2. Lösung, 3. Element, 4. Inkreis, 5. Computer, 6. Hexaeder, 7. Umklappung, 8. Nenner, 9 Gleichung, 10. Sekante, 11. Läufer, 12. Erweitern, 13. Höhe, 14. Rißachse, 15. Exponent. Lösungswort: *Gleichungslehre.*

Kreisrätsel, Klasse 7 (Seite 6):
Im Uhrzeigersinn: 1. Zunge, 2. Waage, 3. Alpha, 4. Sehne, 5. Meter, 6. Menge, 7. Rad, 8. rot, 9. Hub, 10. mal, 11. Tag, 12. Dyn. Radial: 1. Zirkel, 2. Wurzel, 3. Achtel, 4. Symbol, 5. Mittel, 6. Modell.

Doppelkreuze, Klasse 8 (Seite 8):
1. Deka, 2. Null, 3. Punkt, 4. Radius, 5. Gerade, 6. Kreis, 7. Ries, 8. Tera, 9. Kegel, 10. Gesetz, 11. Stunde, 12. Kugel, 13. Bild, 14. Mega, 15. Meile, 16. Lineal, 17. falsch, 18. Glied.

Silbenrätsel

ab Klasse 6

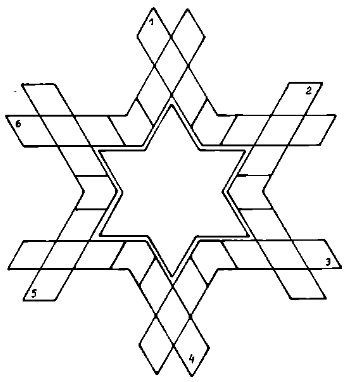
a – ab – al – au – bil – bus – di – dung – eck – ein – gam – heit – jahr – ka – kel – li – li – li – licht – ma – me – mil – mul – na – nal – ne – o – on – on – or – pli – por – pro – recht – rhom – rith – ßen – te – ter – ti – ti – ti – tik – win

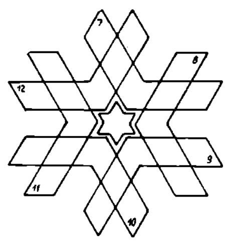
1. verhältnisgleich,
2. Nebenwinkel des Innenwinkels eines Dreiecks,
3. Viereck, dessen Seiten gleich lang sind,
4. Teilgebiet der Mathematik,
5. in der Astronomie verwendete Längeneinheit,
6. Volumeneinheit,
7. Bestandteil einer physikalischen Größe,
8. Hilfsgerät zum Zeichnen,
9. Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems,
10. griech. Buchstabe,
11. Viereck, dessen Innenwinkel rechte Winkel sind,
12. Zuordnung,
13. Grundrechenoperation,
14. Zahlwort (10^6).

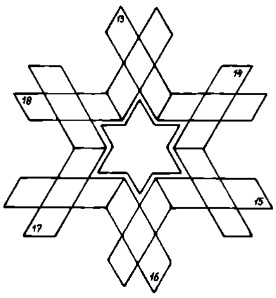
Die Anfangsbuchstaben der 14 Begriffe liefern in gegebener Reihenfolge die Bezeichnung einer Figur.

1. graphische Darstellung einer quadratischen Funktion,
2. Eigenschaft von Zahlen $x < 0$,
3. Bestandteil einer physikalischen Größe,
4. Teil eines Ganzen,
5. soviel wie „verhältnismäßig“,
6. mit Hilfe von Ziffern dargestellt,
7. Seite eines gleichschenkligen Dreiecks,
8. zweigliedriger Term,
9. Einheit der Zeit,
10. Geburtsort des Mathematikers *Leonhard Euler* (1707 bis 1783),
11. Strecke, deren Randpunkte auf der Peripherie eines Kreises liegen,
12. erster programmgesteuerter elektronischer Rechner (USA 1946),
13. Term mit einem Exponenten,
14. veraltete, nur in der Seefahrt zulässige Geschwindigkeitseinheit,
15. Beleg für die Allgemeingültigkeit einer Aussage,
16. Zahlzeichen,
17. Teil eines Bruches,
18. gerichtete physikalische Größe.

Rätselstern ab Klasse 9







12

Silbenrätsel ab Klasse 7

ach – chung – com – der – e – e – er – ex – fer – ge – glei – he – he – hö – in – kan – klap – kreis – läu – le – lö – me – ment – nen – nent – ner – o – po – pu – pung – riß – se – se – sung – te – ter – tern – trie – um – wei – xa

1. Teilgebiet der Mathematik,
2. Element der Lösungsmenge einer Gleichung oder Ungleichung,
3. in einer Menge vertretenes Objekt,
4. alle Seiten eines Dreiecks berührender Kreis,
5. engl. Bezeichnung für elektronische Rechner,
6. Würfel,
7. Methode zur Bestimmung der wahren Länge einer in senkrechter Ein- oder Zweitafelprojektion gegebenen Strecke,
8. Teil eines Bruches,
9. zwei durch Gleichheitszeichen verbundene Terme,
10. eine Gerade, die einen Kreis schneidet,
11. Teil des Rechenstabes,
12. Multiplikation von Zähler und Nenner mit derselben Zahl,
13. Lot vom Eckpunkt eines Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite,
14. durch Grund- und Aufrißebene erzeugte Schnittgerade,
15. Hochzahl.

Die Anfangsbuchstaben der 15 Begriffe ergeben in vorgelegter Reihenfolge ein Teilgebiet der Mathematik.

5

Silbenrätsel ab Klasse 8

ba – bel – ben – bie – de – el – ex – funk – gen – hal – halt – i – in – ka – keh – kel – le – le – le – les – ne – nent – null – o – on – on – pe – po – ra – raum – re – ren – rung – sei – so – stel – ta – tan – te – te – te – ten – tha – the – ti – ti – um – wer – win

1. eindeutige Abbildung,
2. durch Vertauschen von Voraussetzung und Behauptung eines Satzes entstehende Aussage,
3. Element des Definitionsbereiches, dem der Funktionswert Null zugeordnet wird,
4. Seite eines rechtwinkligen Dreiecks,
5. einen Kreis berührende Gerade,
6. Orte gleichen Luftdruckes verbindende Linie,
7. Verfahren, Rechenart,
8. Supplementwinkel,
9. Gerade durch den Eckpunkt eines Dreiecks und den Mittelpunkt der Gegenseite,
10. Darstellungsform für Funktionen,
11. Teil einer Potenz,
12. Volumen,
13. griechischer Philosoph und Mathematiker (um 624 bis 547 v. u. Z.),
14. alte deutsche Längeneinheit.

Die Anfangsbuchstaben der 14 Begriffe ergeben der Reihe nach gelesen die Elemente der Menge des Wertevorrates.

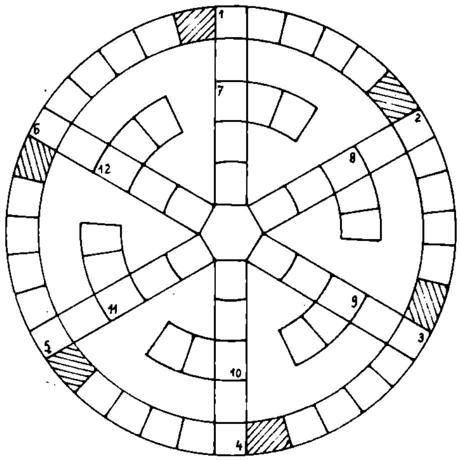
10

Im Uhrzeigersinn:
1. Teil des Rechenstabes,
2. Meßgerät für die Masse eines Körpers,
3. griechischer Buchstabe,
4. Strecke, deren Randpunkte auf der Peripherie eines Kreises liegen,
5. Einheit der Länge,
6. Zusammenfassung von Objekten mit gemeinsamer Eigenschaft,
7. Teil eines Wagens,
8. eine Farbe,
9. Kolbenweg (zum Beispiel bei Pumpen oder Verbrennungsmotoren),
10. kurze Sprechweise für das Operationszeichen der Multiplikation,
11. Einheit der Zeit,
12. veraltete Krafteinheit.

Radial (gemeinsamer Endbuchstabe):
1. Zeichengerät,
2. Operationszeichen für das Radizieren,
3. Teil eines Ganzen,
4. Zeichen (z. B. für eine Variable oder ein chem. Element,
5. Durchschnittswert,
6. maßstabgerechtes Abbild eines Körpers.

7

Kreisrätsel ab Klasse 7



6

Silbenrätsel ab Klasse 9

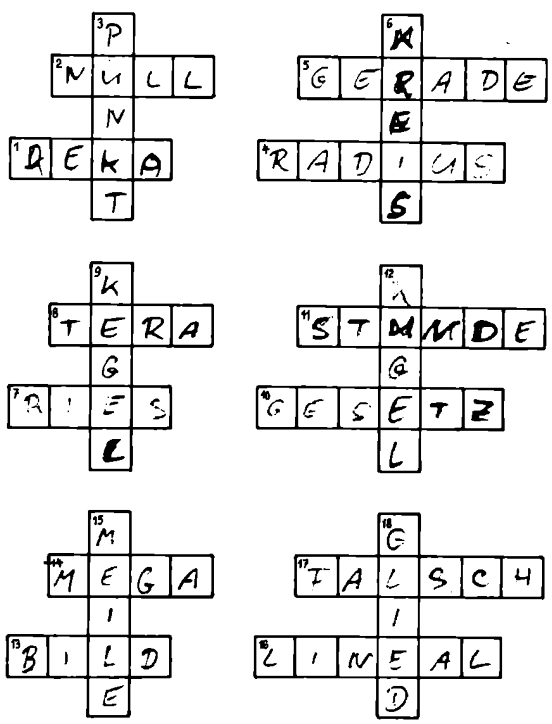
al – bel – ca – cher – chung – e – eu – ex – form – funk – ga – ge – gen – gi – glei – grund – hy – ir – kehr – klid – li – lon – lö – mal – me – men – nal – nen – nor – o – on – per – po – punkt – ra – ri – riß – schei – si – spei – sung – sym – tan – te – tel – ti – ti – ti – trie – um – va – yp

1. senkrechte Parallelprojektion auf eine waagerechte Projektionstafel,
2. jede Zahl, die eine Gleichung erfüllt,
3. griechischer Mathematiker (um 300 v. u. Z., faßte math. Wissen seiner Zeit im Werk *Elemente* zusammen), 4. nicht rational,
5. italienischer Mathematiker (gest. 1647), 6. Graph von Potenzfunktionen mit negativen Exponenten,
7. durch Vertauschen des Wertebereiches mit dem Definitionsbereich einer Funktion entstehende Abbildung, 8. Gestalt einer quadratischen Gleichung, 9. 10^9 (Vorsatz für Einheiten),
10. Einrichtung elektronischer Rechner zum Aufbewahren von Zahlen oder Befehlen,
11. markanter Punkt einer Parabel, 12. vorletzter Buchstabe des Alphabets, 13. Eigenschaft mancher Figuren und der Graphen mancher Potenzfunktionen, 14. Gerade, die eine Kurve berührt,
15. Bestimmungsgleichung, in der die Variable Exponent ist, 16. Zusammenfassung von Objekten.

Die Anfangsbuchstaben der 16 Begriffe bezeichnen in gegebener Reihenfolge einen für viele Sachaufgaben geeigneten Lösungsansatz.

11

Doppelkreuze ab Klasse 8



8

1. 10^1 (Vorsatz für Einheiten),
2. Zahlwort (diese Zahl darf niemals Divisor sein),
3. geometrisches Grundelement,
4. halber Durchmesser eines Kreises,
5. geometrisches Grundelement,
6. ebene Figur,
7. dt. Rechenmeister (um 1492 bis 1559),
8. 10^{12} (Vorsatz für Einheiten),
9. Körper,
10. allgemeingültige Aussage,
11. Zeiteinheit,
12. Körper,
13. einem Original zugeordnetes Objekt,
14. 10^6 (Vorsatz für Einheiten),
15. veraltete, nur noch in der Seefahrt erlaubte Längeneinheit,
16. Zeichengerät,
17. Wahrheitswert einer Aussage,
18. Teil einer Folge.

9

Dr. T. Rother
Jahrgang 1946

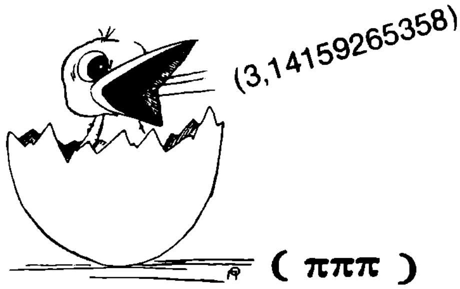
Im Jahr 1946 wurde ich als letztes von fünf Kindern in einem kleinen Dorf bei Leipzig geboren. Auch wenn ich meinem Elternhaus sehr, sehr viel verdanke – mit Mathematik hatten sie beruflich (meine Mutter war Krankenschwester, mein Vater Pfarrer) nichts zu tun und wohl auch sonst wenig im Sinn. Sicher war es in dieser Zeit sehr schwierig, die Brotration so unter sieben Menschen zu verteilen, daß zumindest alle hinterher weniger Hunger hatten. Aber das war wohl am wenigsten ein mathematisches Problem.
Ich selbst kann mich an diese schweren Jahre nicht mehr erinnern. Als dann meine Eltern 1950 in das Erzgebirge verzogen, gab es wieder genug zu essen.
Mit fünf Jahren wurde ich sehr schwer krank und war es noch, als die mit mir gleichaltrigen Kinder in die Schule kamen. So fand für mich der Schulanfang im Krankenhaus und ohne Zuckertüte statt. Lesen, Schreiben und Rechnen habe ich so im Bett erlernt. Erst kurz vor Ende des ersten Schuljahres durfte ich normal die Schule besuchen und wieder meinen Lieblingsbeschäftigungen nachgehen: Das waren damals das Fußballspielen und das Basteln mit allem, was mir in die Finger kam. Während mir der Fußball außer Spaß nur eine gute Sportzensur gebracht hat, sehe ich heute in meiner *Bastelleidenschaft* von damals einen wesentlichen Impuls für meine persönliche Entwicklung. Die Beschäftigung mit mechanischem bzw. elektrischem Spielzeug ist ja wohl nichts anderes als spielerisch angewandte Physik, und in jedem physikalischen Problem steckt oft ein mathematisches. Es war damit für mich noch bis zur 11. Klasse der Erweiterten Oberschule *unerschütterliche* Absicht, Physiker oder Mathematiker zu werden.
Im Jahre 1959 kam ich mit meinen Eltern in die Messestadt und bin seitdem *Leipziger*. Hier nahm ich in der achten Klasse auch erstmals an der Kreisolympiade *Junger Mathematiker* teil, allerdings ohne durchschlagenden Erfolg. Aber ein Freund und Klassenkamerad von mir belegte fast regelmäßig vordere Plätze, was mich möglicherweise *gewurmt*, auf jeden Fall aber auch in meinem Ehrgeiz angestachelt hat. So habe ich dann mit teilweise verbissenem Eifer versucht, zu Hause Olympiadeaufgaben zu lösen. Diesbezüglich entwickelte sich außerdem innerhalb von fünf befreundeten Klassenkameraden (wir nannten uns bescheiden *Boßschaft*) ein Wettbewerb, und es war bei uns geradezu Mode, in Mathe *vorn* zu sein. Auch wenn sich unser Ehrgeiz auf dieses Fach beschränkte (sicher auch ein Ergebnis des ausgezeichneten Unterrichts unseres Mathematik- und Physiklehrers), so hat uns dieser Wettbewerb sicher gefördert und angespornt.
Wesentlich beeinflußt durch meinen älteren Bruder, der bereits Arzt geworden war, habe ich mich entgegen meinen früheren Absichten in der 11. Klasse für das Medizinstudium entschieden. Damit glaubte ich endgültig, daß die Mathematik für mich nur noch Hobby-Wert haben würde. Vielleicht hat das mit zu der nötigen Unbefangenheit beim Herangehen an ein mathematisches Problem geführt (es gab ja für mich keinerlei Erfolgszwang mehr), mit der ich in der 12. Klasse erst- und *altershalber* letztmalig relativ erfolgreich an der Mathematikolympiade teilnahm. Ich weiß noch, daß ich bei der Bezirksolympiade bereits eine Stunde vor dem Abgabetermin *am Ende mit meinem Latein* war und darum Kaffeetrinken gegangen bin. Ich war überzeugt, daß weitere Bemühungen sowieso fruchtlos seien. Irgendwelche Hoffnungen auf einen vorderen Platz hatte ich natürlich erst recht nicht. Zu meiner Freude und Überraschung wurde ich zweiter in meiner Klassenstufe, was gleichbedeutend war mit einer Fahrkarte nach Berlin zur DDR-Olympiade. Auch wenn dort keine Lorbeeren für mich zu holen waren, denke ich noch sehr gern an die Tage am Werbellinsee zurück. Außerdem war es in meinen Augen ein ganz würdiger Abschluß meiner Karriere als *Junger* Hobby-*Mathematiker*.
Ich studierte dann von 1966 bis 1972 Medizin an der Karl-Marx-Universität und absolvierte bis 1977 meine Facharztausbildung an einer großen Betriebspoliklinik.
Ich hatte jedoch zu früh der Mathematik ade gesagt. Schon die Arbeit an meiner Dissertation zum *Dr. med.* brachte mich zu ihr zurück. Ich promovierte über ein Thema zur *computergestützten Diagnose* und mußte mich intensiv mit Fragen der Formalen Logik, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Rechentechnik beschäftigen. Ich bin überzeugt, daß ich diese Probleme ohne *Olympiade-Training* nie auch nur einigermaßen bewältigt hätte. Angeregt durch diese Arbeit am Institut für Biophysik der Universität Leipzig habe ich nach Abschluß meiner Facharztausbildung eine Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent an dieser Einrichtung begonnen. Selbstverständlich habe ich an diesem Institut in erster Linie medizinische Probleme zu bearbeiten, aber natürlich immer im Zusammenhang mit der speziellen wissenschaftlichen Zielstellung dieses Instituts. Das bedeutet aber stets Berührung mit der Mathematik, so daß spätestens hier meine frühere Begeisterung für diese Wissenschaft sich unmittelbar vorteilhaft auf meine Tätigkeit auswirkt – wie ich glaube, ganz sicher auch ein Erfolg der Olympiadebewegung und besonders derer, die sie ins Leben gerufen haben.

Seminaraufgabe: Ein Teilchen mit der Dichte $\varrho_T = 1{,}2\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ bewegt sich im Wasser in einer Zentrifuge mit der Geschwindigkeit v nach außen.
Welche Dichte ϱ_T müßte ein geometrisch identisches Teilchen haben, damit es unter sonst gleichen Bedingungen mit der gleichen Geschwindigkeit v nach innen wandert?
Die Formel für die Teilchengeschwindigkeit v lautet:

$$v = \frac{8\pi^2 \cdot n^2 \cdot R \cdot r^2}{9\eta}\,(\varrho_T - \varrho_{H_2O}).$$

Dr. Rother mit Medizinstudenten beim biophysikalischen Praktikum

In freien Stunden · alpha-heiter



Aus: Sputnik, Moskau

Zahlenquadrat

Setze in die leeren Felder natürliche Zahlen so ein, daß wahre Aussagen entstehen!

Kathrein Scholz, Groitzsch (Kl. 7)

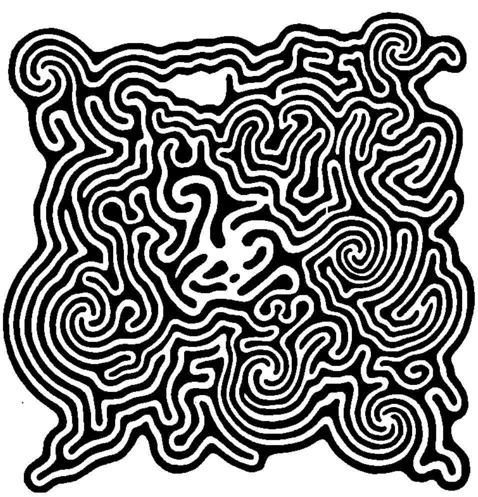
Beachte: Es ist in der angegebenen Reihenfolge zu rechnen und nicht nach der Regel: Punktrechnung vor Strichrechnung.

8	:		+		= 7
−		+		:	
	−	6	·		= 5
·		:		·	
	−		+	4	=
=		=		=	

Labyrinth

Finde ohne Umwege einen Ausweg aus dem Labyrinth! Starte im mittleren weißen Feld, umschiffe die Inseln, und versuche, in das weiße Feld oben zu kommen!

Magazin, Berlin



Rationalisiertes Lineal

Ein Stab von 20 cm Länge soll zur Messung der Längen von 1 mm bis 200 mm benutzt werden.
Es ist eine möglichst geringe Anzahl von Teilstrichen festzustellen, die die Messung der Längen von 1 mm bis 200 mm in *einer* Ablesung ermöglichen.

Dr. W. Lorenz, Leipzig

Eine interessante Beziehung

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1 \text{ und } \left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}=\frac{4}{9}+\frac{1}{3}=\frac{4+3}{9}=\frac{7}{9}.$$

Aber auch $\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}=\frac{1}{9}+\frac{2}{3}=\frac{1+6}{9}=\frac{7}{9}$.

Die Summe ist die gleiche, wenn man den ersten Term quadriert und den zweiten addiert und wenn man den zweiten Term quadriert und den ersten addiert.
Hier ist ein weiteres Beispiel für den Fall, wo $0{,}12 + 0{,}88 = 1$. Dann ist

$0{,}12^2 + 0{,}88 = 0{,}0144 + 0{,}88 = 0{,}8944$

bzw. $0{,}88^2 + 0{,}12 = 0{,}7744 + 0{,}12 = 0{,}8944$.

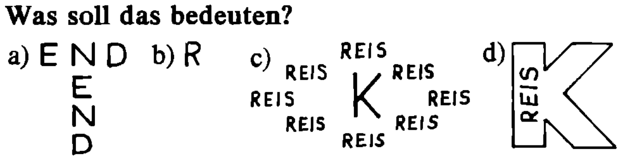
Die beiden Summen sind wiederum gleich.
Versuche, ähnliche Beziehungen mit anderen Zahlen herzustellen! Erhältst du stets die gleichen Summen? Kannst du dies begründen?

Zahlenpaare und Zahlentripel gesucht

- Zu ermitteln sind alle Zahlenpaare (a, b) natürlicher Zahlen a, b, die die Gleichung $ab + a + b + 1 = 1985$ erfüllen!
- Zu ermitteln sind alle Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen a, b, c, die die Gleichung $abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 = 1985$ erfüllen!

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Was soll das bedeuten?



Oberlehrer H. Pätzold, Waren/Müritz

Gleichungen gesucht

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{AB} & \times & \mathrm{BC} & = & \mathrm{DEF} \\
+ & & + & & : \\
\mathrm{GCC} & : & \mathrm{BC} & = & \mathrm{E} \\
\hline
\mathrm{GDE} & - & \mathrm{CF} & = & \mathrm{GBF}
\end{array}$$

Ing. A. Körner, Leipzig

Aus der Kreislehre

In einen gegebenen Kreis (Mittelpunkt M_0, Radius R) sind sechs Kreise gleicher Größe so einzuzeichnen, daß sie den gegebenen Kreis von innen und einander paarweise berühren. Man ermittle den Radius r dieser 6 Kreise!

Dr. G. Hesse, Radebeul

Aus der Praxis

● Beim Picknick konnte man 14 Fahrräder zählen. Die kleinen Kinder kamen auf Dreirädern und die größeren Kinder auf Zweirädern. Fred stellte fest, daß die Anzahl der Räder 38 betrug.
Wieviel kleine Kinder kamen auf Dreirädern?

● „Guten Tag! Wie spät ist es?"
„Ganz einfach! Addiere ein Viertel der Zeit von Mittag bis jetzt zur Hälfte der Zeit von jetzt bis Mittag!"

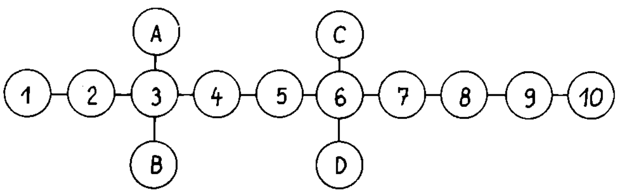
● Ein Glas Pfirsiche kostet 2,45 M. Der Inhalt kostet 1,85 M mehr als das Konservenglas. Wieviel kosten die Pfirsiche?

Aus: The Australian Mathematics Teacher

Schiebespiel

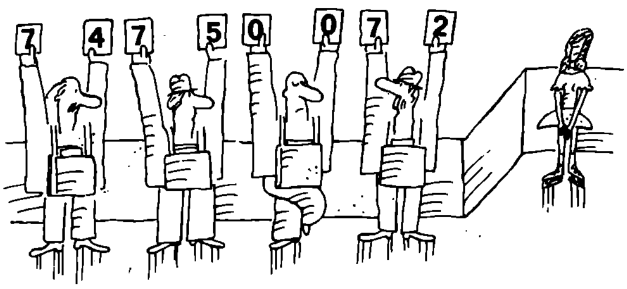
Auf die Felder 1 bis 10 sind neun Steine, mit 1 bis 9 numeriert, in beliebiger Ordnung zu setzen. Es bleibt ein Feld leer. Die Steine sollen durch Verschieben in die geordnete Folge von 1 bis 9 gebracht werden. Die Felder A, B, C, D können vorübergehend benutzt werden.

Oberlehrer O. Chromy, Coswig



„Er will unbedingt Architekt werden!"

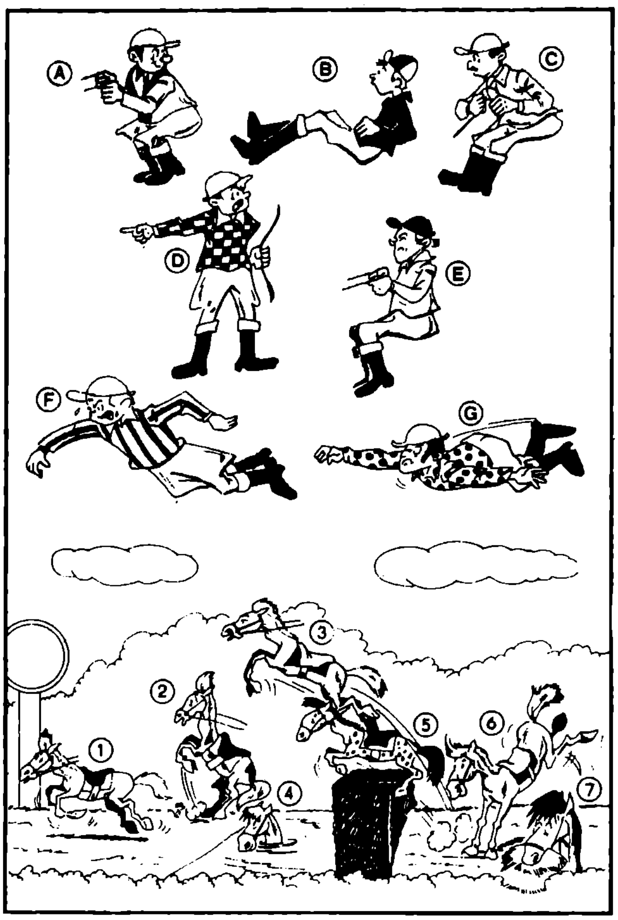
W. Moese, aus Wochenpost



Lothar Otto, aus: Eulenspiegel

Gute Beobachtungsgabe gefragt

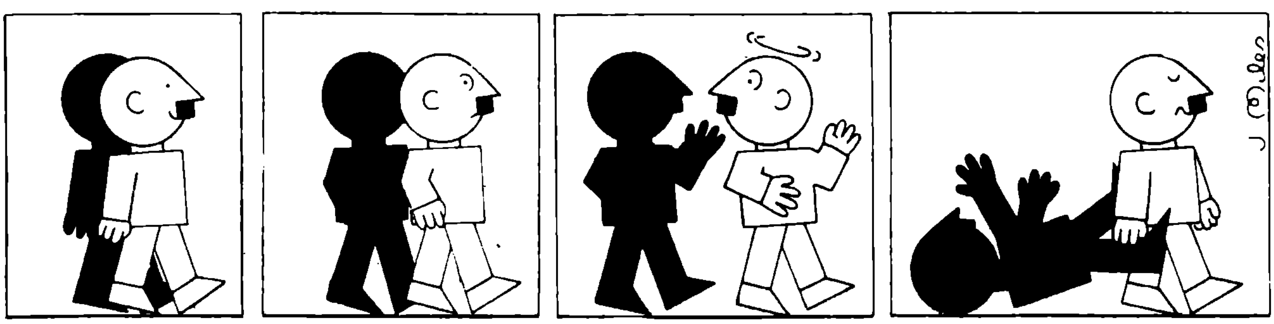
Ordne die Reiter den Rennpferden zu!



Aus: Füles, Budapest

Ohne Worte

Aus: Füles, Budapest



XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu Aufgaben der Kreisolympiade

Olympiadeklasse 5

240521 Aus (2) und (3) folgt, daß die Volleyballspielerin weder Marion noch Petra ist. Nach (1) ist also Ruth die Volleyballspielerin und somit die Tischtennisspielerin nicht Ruth. Nach (4) ist sie auch nicht Marion. Also ist Petra die Tischtennisspielerin. Nochmals wegen (1) verbleibt daher für Marion die Sportart Schwimmen. Damit ist bewiesen, daß die Verteilung der Sportarten durch (1), (2), (3), (4) eindeutig bestimmt ist.

240522 Wegen $4320:3=1440$ wurden auf der ersten Maschine 1440 Teile hergestellt. Auf der zweiten Maschine wurden 864 Teile produziert; denn es ist $4320:5=864$. Wegen
$4320-1440-864=2016$ und
$2016:2=1008$ wurden auf der dritten und auf der vierten Maschine je 1008 Teile angefertigt.

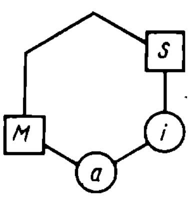
240523 Wegen $75^2=5625$ beträgt der Flächeninhalt des ursprünglichen Quadrates $5625\,\text{mm}^2$.
Die beiden abgeschnittenen Dreiecke lassen sich zu einem Quadrat zusammensetzen, das die gleiche Seitenlänge wie die beiden abgeschnittenen Quadrate hat. Wegen $13^2=169$ beträgt der Flächeninhalt eines solchen Quadrates $169\,\text{mm}^2$.
Wegen $5625-3\cdot 169=5625-507=5118$ beträgt der Flächeninhalt der schraffierten Fläche daher $5118\,\text{mm}^2$, das sind $51{,}18\,\text{cm}^2$.

240524 Wenn die gesuchte Zahl x lautet, so ist $10\cdot x$ die durch Anhängen der Ziffer 0 gebildete Zahl. Die Summe beträgt folglich $11\cdot x$; nach Peters Angabe gilt also $11\cdot x=3058$. Wegen $3058:11=278$ folgt hieraus $x=278$.
Damit ist bewiesen, daß man aus Peters Angaben die von ihm als erste aufgeschriebene Zahl eindeutig ermitteln kann. Sie lautet 278.

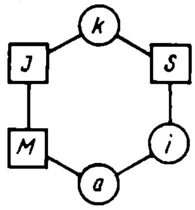
Olympiadeklasse 6

240621 Wegen (3) sitzen Michael (M), Agnes (a) und Ines (i) in der Reihenfolge nebeneinander, die in Bild a) gezeigt wird. Wegen (2) sitzt Steffen (S) einem Jungen, also weder Ines noch Agnes, gegenüber; damit verbleibt für ihn nach Bild a) nur der Platz rechts neben Ines. Für Jörg (J) und Kerstin (k) sind nur die in Bild a) noch freigelassenen Plätze möglich. Da sie einander benachbart sind, ist Kerstin nach (1) nicht Jörgs Schwester.
Da sie nach (4) auch nicht Steffens Schwester ist, muß
Kerstin Michaels Schwester (*)
sein und sitzt wegen (1) nicht neben ihm. Wie Bild a) zeigt, ergibt sich damit die Sitzordnung in Bild b).

a)



b)



Weiter folgt aus Bild (a oder b): Ines ist wegen (1) nicht Steffens Schwester und nach (*) nicht Michaels Schwester. Also ist
Ines Jörgs Schwester, (**)
und als drittes zusammengehöriges Geschwisterpaar verbleiben
Agnes und Steffen. (***)
Damit ist bewiesen, daß man die zusammengehörenden Geschwisterpaare und die Sitzordnung eindeutig aus den Angaben ermitteln kann. Sie lauten wie in (*), (**), (***) bzw. Bild b) angegeben.

240622 Anzahl der Würfel mit 0 rot angestrichenen Flächen: 6
Anzahl der Würfel mit 1 rot angestrichenen Fläche: 22
Anzahl der Würfel mit 2 rot angestrichenen Flächen: 24
Anzahl der Würfel mit 3 rot angestrichenen Flächen: 8
Anzahl der Würfel mit 4 rot angestrichenen Flächen: 0
Anzahl der Würfel mit 5 rot angestrichenen Flächen: 0
Anzahl der Würfel mit 6 rot angestrichenen Flächen: 0.

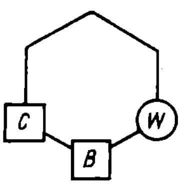
240623 Da eine Stunde das Sechsfache von 10 Minuten ist, legt jeder Fahrer in einer Stunde das Sechsfache der von ihm in 10 Minuten gefahrenen Weglänge zurück. Daraus folgt:
Rainer fährt wegen $6\cdot 9=54$ in einer Stunde 54 km,
Jürgen fährt wegen $6\cdot 8=48$ in einer Stunde 48 km,
Frank fährt wegen $6\cdot 6=36$ in einer Stunde 36 km.
Somit betragen nach einer Stunde wegen $54-48=6$ bzw. $54-36=18$ bzw. $48-36=12$ die Wegelängen zwischen Rainer und Jürgen 6 km, zwischen Rainer und Frank 18 km, zwischen Jürgen und Frank 12 km.

240624 Ist k, w bzw. p das Gewicht einer Kugel, eines Würfels bzw. der Pyramide, so folgt aus (1) und (2), daß jede Kugel das Gewicht k und jeder Würfel das Gewicht w hat. Aus (3) und (4) folgt ferner
$$p+5w=14k \tag{5}$$
und
$$w+8k=p. \tag{6}$$
Wegen (6) besagt (5)
$$w+8k+5w=14k,$$
also $6w=6k$
und folglich $w=k$.
Hiernach ergibt sich aus (6)
$$9k=p.$$
Damit ist bewiesen, daß man Rolfs Frage eindeutig mit Hilfe der Feststellungen (1), (2), (3), (4) beantworten kann. Die Antwort lautet: 9 Kugeln wiegen soviel wie die Pyramide.

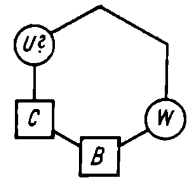
Olympiadeklasse 7

240721 Nach (4) ist Ulrikes Mann nicht Christian. Aus (4) folgt auch, daß Ulrikes Mann nicht neben seiner Frau sitzt; er ist wegen (3) also auch nicht Anton. Daher gilt:
Ulrikes Mann ist Bernd, (*)
und man erhält Bild a). Hiernach kann Ulrike wegen (1) nur entweder links von Christian oder rechts von Waltraud sitzen. Säße sie links von Christian (Bild b), so blieben für Vera nur solche Plätze übrig, die jeweils einer Frau benachbart wären, im Widerspruch gegen (2). Also sitzt Ulrike rechts von Waltraud (Bild c). Nach (2) müssen dann die Plätze von Anton und Vera so angeordnet sein, wie in Bild d) angegeben.

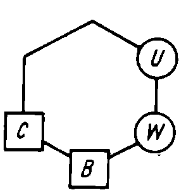
a)



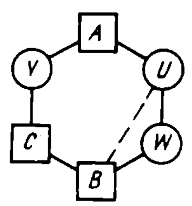
b)



c)



d)



Wegen (*) ist Antons Frau nicht Ulrike; daher folgt aus Bild d) und (3):
Antons Frau ist Vera, (**)
und es verbleibt als drittes Ehepaar:
Christians Frau ist Waltraud. (***)
Damit ist bewiesen, daß man die Ehepartner und die Sitzordnung eindeutig ermitteln kann. Sie lauten wie in (*), (**), (***) bzw. Bild d) angegeben.

240722 a) Sind a und b die in Metern angegebene Länge bzw. Breite des Gartens, so gilt

$$a = 13 + b \qquad (1)$$

sowie, weil der halbe Umfang $92\,\text{m} : 2 = 46\,\text{m}$ beträgt,

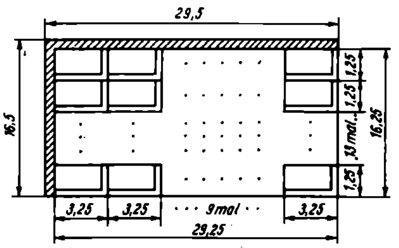
$$a + b = 46. \qquad (2)$$

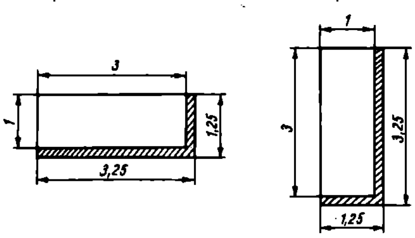
Setzt man a aus (1) in (2) ein, so folgt $13 + 2b = 46$, $2b = 33$, $b = 16{,}5$ und damit aus (1)

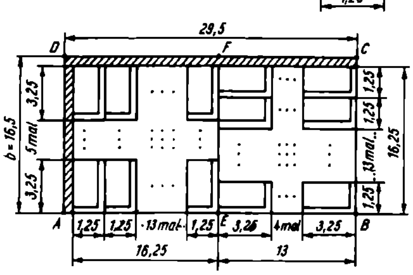
$$a = 29{,}5.$$

Der Flächeninhalt des Gartens beträgt folglich $16{,}5\,\text{m} \cdot 29{,}5\,\text{m} = 486{,}75\,\text{m}^2$.

b) Legt man zunächst längs zweier benachbarter Seiten des Gartens einen Weg von 25 cm Breite an (in Bild a) schraffiert), so verbleibt ein Rechteck von 29,25 m Länge und 16,25 m Breite. Wenn man dieses Rechteck in Teilrechtecke mit den Seitenlängen 3,25 m und 1,25 m aufteilen kann (Bild b), so erhält man eine Anordnung von Beeten, die den geforderten Bedingungen genügt. Eine Möglichkeit hierzu zeigt Bild a), wie sich wegen $29{,}25 : 3{,}25 = 9$ und $16{,}25 : 1{,}25 = 13$ bestätigen läßt. Bei dieser Aufteilung ist die Anzahl der Beete $9 \cdot 13 = 117$.







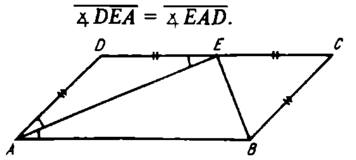
240723 Da im Parallelogramm $ABCD$ die gegenüberliegenden Seiten AB und CD zueinander parallel sind und da E auf CD liegt, gilt nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen

$$\overline{\sphericalangle BAE} = \overline{\sphericalangle DEA}.$$

Da AE nach Voraussetzung den Winkel $\sphericalangle BAD$ halbiert, gilt

$$\overline{\sphericalangle BAE} = \overline{\sphericalangle EAD}. \text{ Daher folgt}$$

$$\overline{\sphericalangle DEA} = \overline{\sphericalangle EAD}.$$



Nach Umkehrung des Satzes über die Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken folgt hieraus

$$\overline{AD} = \overline{ED}.$$

Analog erhält man $\overline{BC} = \overline{EC}$.

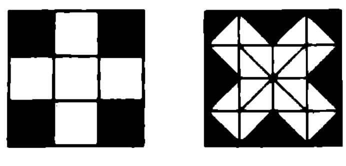
Da nach Voraussetzung AD und BC gegenüberliegende Seiten eines Parallelogrammes sind, gilt $\overline{AD} = \overline{BC}$. Also ist $\overline{ED} = \overline{EC}$.

Da E nach Voraussetzung auch auf der Seite CD liegt, ist damit E als Mittelpunkt von CD nachgewiesen.

240724 *Variante 1:*

Die Quadratfläche kann in genau 9 kongruente Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{a}{3}$ aufgeteilt werden (Bild a); davon sind 4 Quadrate Abfall, die restlichen 5 bilden das Netz zum Herstellen des Kastens. Folglich beträgt hier der Abfall $\frac{4}{9}a^2$.

Variante 1 Variante 2



Variante 2:

Die Quadratfläche kann in genau 32 kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit der Schenkellänge $\frac{a}{4}$ aufgeteilt werden (z. B. wie in Bild b); davon sind 12 Dreiecke Abfall, die restlichen 20 bilden das Netz zum Herstellen des Kastens. Wegen $\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ beträgt demnach hier der Abfall $\frac{3}{8}a^2$.

Vergleich: Wegen $4 \cdot 8 > 3 \cdot 9$ gilt $\frac{4}{9} > \frac{3}{8}$.

Folglich ist der Abfall bei Variante 2 kleiner als bei Variante 1.

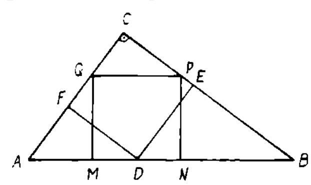
Die Lösungen zu den Aufgaben der Klassenstufen 8 bis 10 werden in Heft 4/85 veröffentlicht.

Zum Titelblatt

In dem ungarischen Kinderbuch von *Ferenc Lántos* „Gestalten wir gemeinsam!" werden auf 24 Seiten zahlreiche Schwarzweiß-Zeichnungen dargeboten. Man kann diese Zeichnungen, mit jeweils gleichen Mustern versehen, bunt ausfüllen. Nicht nur für Kinder, sondern auch für Erwachsene ist das ein aufregendes Spiel mit der Fläche und ihrer Gestaltung. Man kann sogar mit nur einer Farbe eine jeweils konstruierte Zeichnung auf zahlreiche verschiedene Weisen ausfüllen und so immer neue Möglichkeiten und immer neue Formen schaffen. Auf der *alpha*-Titelseite dieses Heftes haben wir die IV. Umschlagseite dieses besonders das räumliche Vorstellungsvermögen fördernden Buchs wiedergegeben.

Wir lösen gemeinsam ein geometrisches Problem

Die nachstehende Zeichnung stellt ein rechtwinkliges Dreieck ABC dar, dem (wie aus der Zeichnung ersichtlich) zwei Quadrate $MNPQ$ und $DECF$ einbeschrieben wurden. Es sei A_1 der Flächeninhalt des Quadrates $DECF$ und A_2 der Flächeninhalt des Quadrates $MNPQ$. Wir wollen nun untersuchen, welche der drei Beziehungen $A_1 < A_2$, $A_1 = A_2$ oder $A_1 > A_2$ stets für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck zutrifft.



Es habe $\overline{BC}$ die Seitenlänge a, $\overline{AC}$ die Seitenlänge b, $\overline{AB}$ die Seitenlänge c, $\overline{CE} = \overline{DE}$ die Seitenlänge x, also $\overline{EB}$ die Seitenlänge $a - x$. Wegen $DE \parallel AC$ gilt $\sphericalangle BDE \cong \sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle BED \cong \sphericalangle BCA$. Daraus folgt $\triangle DBE \sim \triangle ABC$. Somit gilt auch $\overline{DE} : \overline{EB} = \overline{AC} : \overline{BC}$ bzw. $x : (a - x) = b : a$,

$$\text{also} \quad x = \frac{ab}{a + b}. \qquad (1)$$

Es habe $\overline{NP} = \overline{QP}$ die Seitenlänge y, $\overline{BP}$ die Länge z, also $\overline{CP}$ die Länge $a - z$. Wegen $\triangle ABC \sim \triangle QPC \sim \triangle BPN$ gilt $\overline{CP} : \overline{QP} = \overline{CB} : \overline{AB}$ bzw. $(a - z) : y = a : c$, also $z = \frac{a(c - y)}{c}$. Ferner gilt $\overline{NP} : \overline{BP} = \overline{AC} : \overline{AB}$ bzw. $y : z = b : c$,

$$\text{also} \quad z = \frac{cy}{b}. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) erhalten wir durch Gleichsetzen $\frac{cy}{b} = \frac{a(c - y)}{c}$, $y = \frac{abc}{ab + c^2}$.

Nun gilt $A_1 = x^2$ und $A_2 = y^2$ und somit $A_1 > A_2$ genau dann, wenn $x^2 > y^2$ bzw. $x > y$ oder $x - y > 0$.

Aus $x - y = \frac{ab}{a + b} - \frac{abc}{ab + c^2}$ erhalten wir durch schrittweises äquivalentes Umformen

$$x - y = \frac{ab(ab + c^2) - abc(a + b)}{(a + b)(ab + c^2)} = \frac{ab(ab + c^2 - ac - bc)}{(a + b)(ab + c^2)},$$

$$x - y = \frac{ab(c - a)(c - b)}{(a + b)(ab + c^2)} > 0, \text{ denn}$$

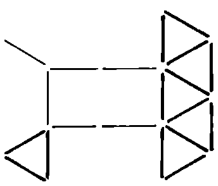
$c - a > 0$ und $c - b > 0$.

In einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck gilt deshalb für die Flächeninhalte A_1 und A_2 der dem Dreieck einbeschriebenen Quadrate $A_1 > A_2$. *Th. Scholl*

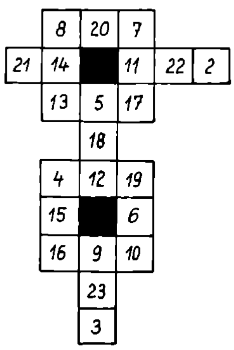
Lösungen

Lösungen zu: Knobel-Wandzeitung
Heft 2/85

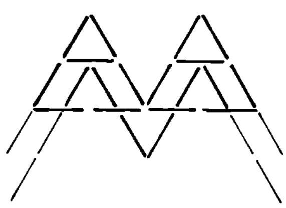
▲ 1 ▲ Der Leipziger Löwe



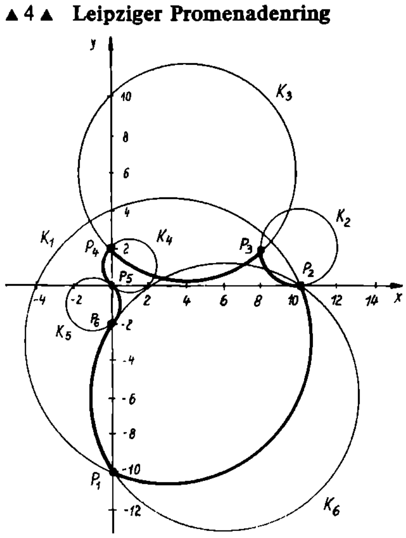
▲ 2 ▲ Transport-Roboter Robbi
Das Bild zeigt eine mögliche Eintragung.



▲ 3 ▲ Muster-Messe



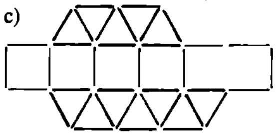
▲ 4 ▲ Leipziger Promenadenring



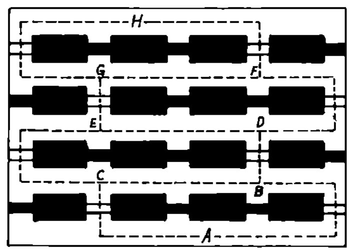
▲ 5 ▲ Auto-Geometrie
a) Die Figur enthält 2 Dreiecke, 16 Vierecke (4 Quadrate, 11 Rechtecke und 1 Trapez), 1 Fünfeck und 6 Sechsecke (1 konvexes und 5 konkave).
b) Der Flächeninhalt A der Auto-Figur beträgt:

$$A = \left(6 + \sqrt{3} + \frac{3}{4}\sqrt{3}\right) \text{LE}^2 \approx 9{,}03\text{LE}^2.$$

c)

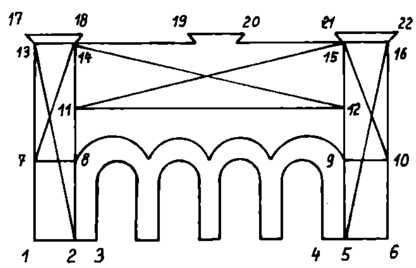


▲ 6 ▲ Problem am Hauptbahnhof

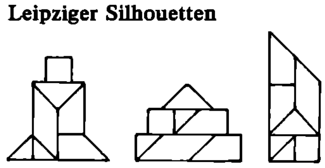


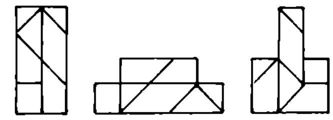
Man kann auf 16 Wegen von A nach H gelangen. (In jedem Falle sind 4 Gleisüberschreitungen nötig, die bei den in Klammern beigefügten Wegelängen nicht berücksichtigt sind. 1 LE ≈ 1 Wagenlänge):
1. A–C–E–G–H (6 LE), 2. A–C–E–G–F–H (7 LE), 3. A–C–E–D–F–G–H (12 LE), 4. A–C–E–D–F–H (9 LE), 5. A–C–B–D–E–G–H (8 LE), 6. A–C–B–D–E–G–F–H (9 LE), 7. A–C–B–D–F–G–H (10 LE), 8. A–C–B–D–F–H (7 LE), 9. A–B–C–E–G–H (9 LE), 10. A–B–C–E–G–F–H (10 LE), 11. A–B–C–E–D–F–G–H (15 LE), 12. A–B–C–E–D–F–H (12 LE), 13. A–B–D–E–G–H (7 LE), 14. A–B–D–E–G–F–H (8 LE), 15. A–B–D–F–G–H (9 LE), 16. A–B–D–F–H (6 LE).
Die Wege 1 und 16 sind gleich lang und die kürzesten, am längsten ist Weg 11. Gleich lang sind die Wege 2, 8 und 13 (7 LE), 5 und 14 (8 LE), 4, 6, 9 und 15 (9 LE), 7 und 10 (10 LE) sowie 3 und 12 (12 LE).

▲ 7 ▲ Der Bayerische Bahnhof
Eine Möglichkeit wäre:
2–3–4–5–9–8–2–13–14–7–8–11–14–12–11–15–12–9–10–15–16–5–6–10–16–22–21–20–19–18–17–13–7–1–2.

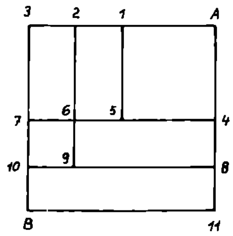


▲ 8 ▲ Leipziger Silhouetten





▲ 9 ▲ Leipziger Passagen
Astrid kann auf 9 Wegen zu Brigitte gelangen:
1. A–1–2–3–7–10–B, 2. A–1–2–6–7–10–B,
3. A–1–2–6–9–10–B, 4. A–1–5–6–7–10–B,
5. A–1–5–6–9–10–B, 6. A–4–5–6–7–10–B,
7. A–4–5–6–9–10–B, 8. A–4–8–9–10–B,
9. A–4–8–11–B.



▲ 10 ▲ Der Goldene Schnitt
Sei a die Höhe des oberen und b die des unteren Teilabschnittes des Uni-Riesen bei der Teilung der Gesamthöhe $H = 142{,}5$ m. Dann muß gelten:

$$H : b = b : a \quad (1)$$

und $\quad a + b = H. \quad (2)$

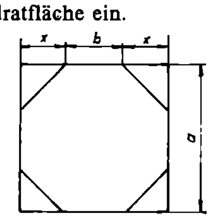
Setzt man aus (2) $a = H - b$ in (1) ein, so erhält man die quadratische Gleichung $b^2 + Hb - H^2 = 0$ mit der Lösung $b = \frac{H}{2}(\sqrt{5} - 1)$. (Der negative Lösungswert entfällt.) Mit $H = 142{,}5$ m ergeben sich $b \approx 88{,}07$ m und $a \approx 54{,}43$ m. Der Teilungspunkt liegt also in einer Höhe von $b \approx 88{,}07$ m, und es gilt in der Tat
$142{,}5\text{ m} : 88{,}07\text{ m} \approx 88{,}07\text{ m} : 54{,}43\text{ m} \approx 1{,}618$.

▲ 11 ▲ Der Rathausturm
Seien A_1 der Flächeninhalt des Quadrats und A_2 derjenige des regelmäßigen Achtecks, dann gelten mit den Bezeichnungen des Bildes: $A_1 = a^2$ und wegen $b + 2x = a$,

$$b^2 = 2x^2,\ x = a\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right):$$

$$A_2 = a^2 - 4 \cdot \frac{x^2}{2} = 2a^2(\sqrt{2} - 1).$$

Also gilt $A_2/A_1 = 2(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}828$. Die Achteckfläche nimmt folglich 82,8 % der Quadratfläche ein.



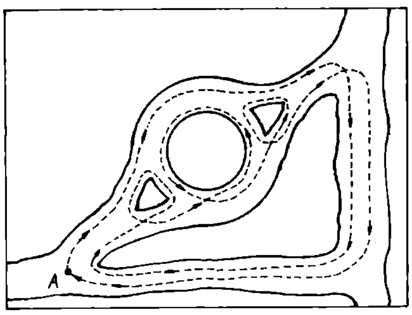
▲ 12 ▲ Die Rathausuhr
Um 8.00 Uhr befindet sich der große Zeiger 40 Minutenteilstriche hinter dem kleinen Zeiger. Demnach wurden durch den großen Zeiger bis zum gesuchten Zeitpunkt 40 – 7 = 33 Minutenteilstriche aufgeholt. Jede Minute aber holt der große

Zeiger gegenüber dem kleinen Zeiger $1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$ Teilstriche auf. Für das Aufholen von 33 Teilstrichen benötigt der große Zeiger folglich
$33:\frac{11}{12}=33\cdot\frac{12}{11}=36$ Minuten. Also war es zum gesuchten Zeitpunkt genau 8.36 Uhr.

▲ 13 ▲ Kongreßhalle in Zahlen
Es ist $4000=2^5\cdot 5^3$. Folglich ist jeder Weg, der 5 Zweien und 3 Fünfen (und beliebig viele Einsen) enthält, ein gesuchter, z. B.
1. A–1–2–1–1–2–5–2–1–1–1–1–2–5–2–5–1–B, 2. A–1–2–1–5–2–1–2–1–5–1–2–5–2–1–1–1–1–1–B, 3. A–2–1–2–1–5–1–2–1–1–1–5–1–2–1–5–1–2–1–B, 4. A–2–1–2–1–1–1–5–1–1–1–2–1–1–1–5–1–2–1–5–2–1–1–B.

▲ 14 ▲ Zoo-Logisches
Fallunterscheidungen: Die Aussagen 1 bzw. 2 können nicht als wahr angenommen werden, da sich in beiden Fällen ein Widerspruch zu den jeweiligen beiden anderen negierten Aussagen ergibt. Ist die Aussage 3 wahr, dann wären die Aussagen 1 und 2 falsch, und es ergibt sich die Lösung:
Links: Molukkenkakadu,
Mitte: Rosenkakadu,
Rechts: Inka-Kakadu.

▲ 15 ▲ Ein Spaziergang
Das Bild zeigt eine mögliche Wanderroute.



▲ 16 ▲ Auf dem Spielplatz
Wegen der Symmetrie der Anlage ergibt sich für die Länge L der 22 sichtbaren Stämme:
$L=(1{,}85+2(1{,}7+1{,}55+1{,}4$
$+1{,}25+1{,}1+0{,}95+0{,}8+0{,}65$
$+0{,}5+0{,}35)+0{,}2)\,\mathrm{m}=22{,}55\,\mathrm{m}$.
Da jeder Stamm 0,65 m tief im Erdboden verankert ist, kommen noch
$22\cdot 0{,}65\,\mathrm{m}=14{,}3\,\mathrm{m}$ hinzu. Also wurden zum Bau der Anlage 36,85 m Stammholz benötigt.

▲ 17 ▲ Mit der LVZ
Durch Fallunterscheidung erhält man 6 mögliche Lösungstripel, die sich als Permutationen (wegen der Gültigkeit des Kommutativgesetzes für Addition und Multiplikation) eines einzigen Tripels ergeben:

L	1	1	2	2	3	3
V	2	3	1	3	1	2
Z	3	2	3	1	2	1

▲ 18 ▲ alpha-Arithmetik
Aus (2) und (4) folgt $h=l+2a$, und aus (1) oder (5) $h=l+p-a$, woraus $p=3a$ folgt. Nun ergeben sich aus (2) $l=\frac{2a}{3a-2}$ und aus (3) $l=\frac{4a}{3a^2-1}$, woraus sich die kubische Gleichung $6a^3-12a^2+6a=0$ ergibt, welche die Lösungen $a_1=0$ (entfällt), $a_2=a_3=1$ hat. Also ist $a=1$, womit $l=2$, $p=3$ und $h=4$ folgen.

▲ 19 ▲ Fragen zur Stadt Leipzig
1. Im Jahre 1990. 2. $\frac{0{,}455\,\mathrm{km}^2}{145\,\mathrm{km}^2}\approx 0{,}003$: Der Stadtkern nimmt 0,3 % des Stadtgebietes ein. 3. $(265+265+55)\cdot 7=4095$ Zugankünfte oder -abfahrten. 4. a) 47 m, b) 51,5 m, c) 82,5 m. 5. Nein, denn 9,5 m $=9500\,\mathrm{mm}=1187{,}5\cdot 8\,\mathrm{mm}=1187{,}5$ LE. 6. 16 Jahre (von 1898 bis 1913). 7. Durchschnittliches Volumen eines Granitblocks: $\frac{12\,500\,\mathrm{m}^3}{26\,500}=0{,}471\,698\,1\,\mathrm{m}^3$
$=471{,}6981\,\mathrm{dm}^3=471\,698{,}1\,\mathrm{cm}^3$. 8. 1983 waren etwa 0,1 % der Zoobesucher Inhaber einer Dauerkarte. 9. Der Tierbestand des Leipziger Zoo betrug am 31. 12. 1983: 724 Arten mit 5421 Individuen.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. Juschkewitsch
Heft 2/85

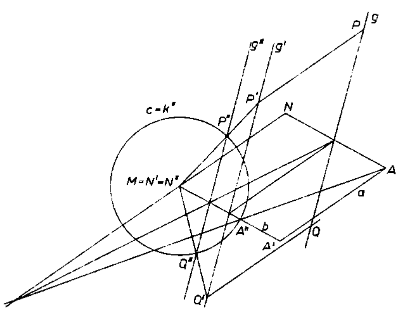
▲ 2459 ▲

	A	B	C
A	8	1	6
B	3	5	7
C	4	9	2

Es gibt 12 Möglichkeiten.

Lösung zu Aufgabe 9
Ohne Zirkel geht es auch
Heft 2/84

Da der Kreis k selbst nicht gezeichnet werden kann, muß die Aufgabenstellung durch geeignete Transformation in eine solche Lage übergeführt werden, daß sich der transformierte Kreis k'' mit der vorgegebenen Kreislinie c deckt. Die Gerade g muß den entsprechenden Transformationen mit unterworfen werden. Die so erhaltenen Schnittpunkte von c mit g'' sind wieder in die ursprüngliche Vorgabe zurückzuführen. Konstruktiv ist wie folgt vorzugehen:



Verbindungsgerade (NM) zeichnen. Parallele zu (NM) durch A nach [2] ergibt die Gerade a. Parallele zu (AN) durch M ergibt die Gerade b. Setze $a\cdot b=A'$ und $M=N'$. Die Translation, welche (AN) in $(A'N')$ überführt, wende man auf g an. Dabei geht g in g' über.
Ausführung einer zentrischen Streckung bzw. Stauchung mit M als Zentrum, welche A' in $A''\in c$ überführt. Anwendung der gleichen zentrischen Transformation auf $g'\to g''$. g'' schneidet $c=k''$ entsprechend vorliegender Annahme in den Punkten P'' und Q''.
Mittels zugeordneter Umkehrtransformationen geht P'' in $P'\in g'$ und Q'' in $Q'\in g'$ und anschließend P' in $P\in g$ und Q' in $Q\in g$ über. P und Q sind die Schnittpunkte von g mit dem durch Mittelpunkt M und Kurvenpunkt A gegebenen Kreis k (vgl. Bild 13).
Bild 13

Lösungen zu: Sprachecke

▲ 1 ▲ Ein rundes Bassin wird von einem Gitter umgeben, das 50 cm vom Rand entfernt angebracht ist; die Länge dieses Gitters beträgt 22 m. Wie groß ist der Durchmesser des Bassins?
Lösung: Der Radius des äußeren Kreises ist $r=u:2\pi=22\,\mathrm{m}:6{,}28\approx 3{,}5\,\mathrm{m}$. Dann ist der Radius des Bassins
$3{,}5\,\mathrm{m}-0{,}5\,\mathrm{m}=3\,\mathrm{m}$ und der Durchmesser $3\,\mathrm{m}\cdot 2=6\,\mathrm{m}$.

▲ 2 ▲ Benutze jede der 9 Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 genau einmal, um Primzahlen zu bilden, deren Summe so klein wie möglich ist!
Lösung: Beachte, daß 4, 6 und 8 nur an der Zehnerstelle stehen können! Deshalb ist eine der 3 möglichen Lösungen:
$2+3+41+5+67+89=207$.

▲ 3 ▲ Zeichne in ein Quadrat mit der Seite 5 ein Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5 wie im Bild ein!
Bestimme die Entfernung x!
Lösung: **Da $\triangle ABF\sim\triangle BCE$, gilt**
$x:5=3:4$ und $x=\frac{15}{4}$.

▲ 4 ▲ Welche Zahl ist anstelle des Fragezeichens in der Folge 17, 23, 13, 11, ?, 15 einzusetzen?
Lösung: Ab der 2. Zahl ist jede gleich der Summe aus der doppelten Anzahl der Zehner und der dreifachen Anzahl der Einer der vorhergehenden Zahl ($23=2\cdot 1+3\cdot 2$, $13=2\cdot 2+3\cdot 3$ usw.). Anstelle des Fragezeichens ist demnach 5 einzusetzen: $5=2\cdot 1+3\cdot 1$. Es ist allerdings zu bemerken, daß es auch andere Bildungsgesetze für die vorgegebene Folge gibt. Dann ist das Fragezeichen jeweils anders zu ersetzen.

Lösung zu: Schnelles Bauernmatt

Weiß zieht seinen e- und seinen g-Bauern auf die 6. Reihe und anschließend folgt 7. e:f7 matt oder 7. g:f7 matt. Es gibt 40 verschiedene Zugfolgen, die der gestellten Anforderung entsprechen.
Man kann hierfür auch eine Formel entwickeln. Sie lautet:

$$\frac{6!\ \text{(Anzahl der Züge)}}{3!\ \text{(Anzahl der Züge des e-Bauern)}\cdot 3!\ \text{(g-Bauer)}\cdot 2\ \text{(7. e:f7 oder g:f7 matt)}}=40$$

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Smarandache

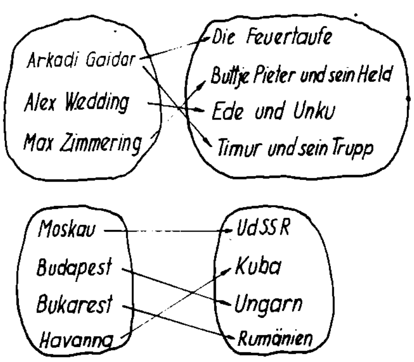
▲2577▲ Man formt um zu $x^3 - 2 = 3y$. Dann ist $x^3 - 2$ durch 3 teilbar, d. h. $x^3 = 3n + 2$ $(n \in N)$.
Es sei
$x = 3k + r, r = 0, 1, 2$ $(k \in N)$.
$x = 3k \rightarrow x^3 = (3k)^3$
$= 3n \neq 3n + 2$
$x = 3k + 1 \rightarrow x^3 = (3k + 1)^3$
$= 3n + 1 \neq 3n + 2$
$x = 3k + 2 \rightarrow x^3 = (3k + 2)^3 = 3n + 2$
Daraus folgt
$x = 3k + 2$ $(k \in N)$ und
$$y = \frac{x^3 - 2}{3} = \frac{(3k + 2)^3 - 2}{3}$$
$$= 9k^3 + 18k^2 + 12k + 2.$$
Die Lösung der Gleichung ist
$x = 3k + 2$,
$y = 9k^3 + 18k^2 + 12k + 2$ $(k \in N)$.

Lösungen zu: Überall Zuordnungen

▲1▲ Wegen des Distributivgesetzes gilt:
$(a + b) \cdot 0{,}30 = a \cdot 0{,}30 + b \cdot 0{,}30$

▲2▲ $a^2 \cdot b^2 = a \cdot a \cdot b \cdot b$
wegen der Definition der Potenz.
$a \cdot a \cdot b \cdot b = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$
wegen des Kommutativ- und Assoziativgesetzes der Multiplikation.
$(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^2$
wegen der Definition der Potenz.
Also gilt stets $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$.

▲3▲



Geht von jedem Element der ersten Menge genau ein Pfeil aus, so ist die Zuordnung eindeutig. Das ist bei der Zuordnung *ist Hauptstadt von* der Fall.
Gehen von mindestens einem Element der ersten Menge zwei oder mehr Zuordnungspfeile aus, so ist die Zuordnung nicht eindeutig. Das ist bei der Zuordnung *schrieb das Buch* der Fall.

▲4▲ a) 10.45 b) 60 Minuten
c) 12.15 d) 20 km

▲5▲ a) eindeutige Zuordnung;
b) nicht eindeutige Zuordnung;
c) eindeutige Zuordnung.

▲6▲ a) Graph einer Funktion;
b) kein Graph einer Funktion;
c) Graph einer Funktion.

Lösungen zu: In freien Stunden · alpha-heiter

Zahlenquadrat

8	:	4	+	5	= 7
−		+		:	
7	−	6	·	5	= 5
·		:		·	
5	−	2	+	4	= 7
= 5		= 5		= 4	

Labyrinth
Die Lösung sei dem Leser überlassen.

Rationalisiertes Lineal
Auf dem Lineal sind die Teilstriche für 0; 2; 4; 6; 9; 11; 16; 19; 20 cm anzugeben, ferner die mm-Striche 0,1 bis 0,9; 15,1 bis 15,9; 18,1 bis 18,9; 19,1 bis 19,9. Die Anzahl der Teilstriche beträgt 9 + 36 = 45.
Eine andere fast gleich gute Lösung lautet: Angabe der Teilstriche für 0; 1; 2; 3; 5; 7; 10; 13; 16; 20 cm, ferner der Teilstriche für 0,1 bis 3,9 mm. Die Anzahl der Teilstriche beträgt 10 + 36 = 46.

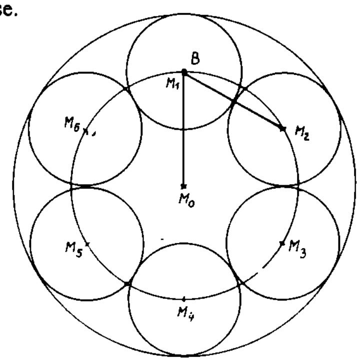
Eine interessante Beziehung
Wenn die Summe zweier ungleicher Zahlen 1 beträgt, dann gilt:
$$(1 - a)^2 + a = a^2 + (1 - a).$$

Zahlenpaare und Zahlentripel gesucht
● Durch äquivalentes Umformen der gegebenen Gleichung erhält man schrittweise
$ab + a + b + 1 = 1985$
$a(b + 1) + (b + 1) = 1985$
(1) $(a + 1)(b + 1) = 1 \cdot 1985$
bzw.
(2) $(a + 1)(b + 1) = 5 \cdot 397$
Gleichung (1) wird durch die Zahlenpaare (0, 1984); (1984, 0), Gleichung (2) durch die Zahlenpaare (4, 396); (396, 4) erfüllt.
● Durch äquivalentes Umformen der gegebenen Gleichung erhält man schrittweise
$abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1$
$= 1985$
$ab(c + 1) + a(c + 1) + b(c + 1) + (c + 1)$
$= 1985$
$a(b + 1)(c + 1) + (b + 1)(c + 1) = 1985$
$(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 1 \cdot 5 \cdot 397$
Diese Gleichung wird durch folgende Zahlentripel (a, b, c) erfüllt:
(0, 4, 396); (4, 0, 396); (396, 0, 4);
(0, 396, 4); (4, 396, 0); (396, 4, 0).
Wegen der Gültigkeit des Kommutativgesetzes der Multiplikation genügt die Probe für das Zahlentripel (0, 4, 396):
$0 + 0 + 0 + 4 \cdot 396 + 0 + 4 + 396 + 1$
$= 1985$
$1584 + 4 + 396 + 1 = 1985$
$1985 = 1985$

Was soll das bedeuten?
a) T aus END– tausend; b) ein r – Einer; c) um k Reis – Umkreis; d) in k Reis – Inkreis

Gleichung gesucht
$$\begin{array}{ccccc} 32 & \times & 24 & = & 768 \\ + & & + & & : \\ 144 & : & 24 & = & 6 \\ \hline 176 & - & 48 & = & 128 \end{array}$$

Aus der Kreislehre
Die mit Radius r geschlagenen 6 Kreise haben die Mittelpunkte $M_1, M_2, \ldots, M_6$. Sie sind Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks. Da die Verbindungsgerade der Mittelpunkte von zwei sich berührenden Kreisen durch den Berührungspunkt geht, ist die Seitenlänge des Sechsecks gleich $2r$. Da das Bestimmungsdreieck $M_0M_1M_2$ gleichseitig ist, folgt $M_0M_1 = 2r$. Die Berührung der beiden Kreise um M_0 und M_1 im Punkte B gibt $M_0M_1 = R - r$. Somit besteht die Gleichung $R - r = 2r$, also $r = \frac{R}{3}$.
Damit ergibt sich die Konstruktion der 6 dem gegebenen Kreis einbeschriebenen Kreise.



Man schlägt um M_0 mit Radius $\frac{2}{3}R$ den Kreis und bestimmt auf seinem Umfang mit Hilfe des Stechzirkels im gegenseitigen Abstand $\frac{2}{3}R$ die 6 Punkte $M_1, M_2, \ldots, M_6$, um die man mit Radius $\frac{1}{3}R$ die gesuchten 6 Kreise schlägt.

Aus der Praxis
● Die Anzahl der Dreiräder sei x Stück, die der Zweiräder y Stück. Dann gilt das Gleichungssystem
$x + y = 14$ $\qquad x = 14 - y$
$3x + 2y = 38$ $\qquad x = 14 - 4 = 10$
$3(14 - y) + 2y = 38$
$y = 4$
Es kamen 10 kleine Kinder auf Dreirädern.
■ Es sei x die Uhrzeit bzw. die Anzahl der Stunden von Mitternacht an gerechnet. Dann gilt
$$\frac{x + 12}{4} + \frac{12 - x}{2} = x,$$
$$x + 12 + 24 - 2x = 4x,$$
$$x = 7\frac{1}{5}.$$
Es ist 7 Uhr und 12 Minuten.
▲ Der Preis für den Inhalt eines Glases Pfirsiche sei x M, für das Glas selbst y M. Das ergibt das Gleichungssystem
$x + y = 2{,}45$
$x = y + 1{,}85$
$y + y + 1{,}85 = 2{,}45$ $\qquad x = 0{,}3 + 1{,}85$
$y = 0{,}3$ $\qquad x = 2{,}15$
Die Pfirsiche kosten 2,15 M.

Schiebespiel
Die Lösung sei dem Leser überlassen.

Gute Beobachtungsgabe gefragt
A–1; B–2; C–5; D–7; E–3; F–4; G–6.

Lösungen zu:
Physik-Wettbewerb
Heft 5/84

Ph 6 ■ 161 Die Läufer treffen sich in x Tagen. Also legt der erste Läufer in x Tagen $28 \cdot x$ km, der zweite $24 \cdot x$ km zurück. Da die Entfernung $\overline{AB} = 260$ km beträgt, erhalten wir folgende Gleichung:

$$28x + 24x = 260,$$
$$x = 5.$$

Die Läufer treffen sich in 5 Tagen.

Ph 7 ■ 162 Die Größe der Resultierenden ist wegen der Parallelität durch die Summe der Komponenten gegeben:

$$F_1 + F_2 = 100N + 150N = 250N$$

und ist ihnen parallel gerichtet. Mit P bezeichnen wir den gesuchten Angriffspunkt. $\overline{AP} = x$ cm, $\overline{PB} = (80 - x)$ cm, wenn A und B die Punkte bezeichnen, in denen die Kräfte F_1 und F_2 wirken.
Nach dem Momentensatz gilt:

$$F_1 x - F_2(80 - x) = 0,$$
$$100x - 150(80 - x) = 0,$$
$$x = 48.$$

Der Angriffspunkt der Resultierenden ist 48 cm vom Punkt A entfernt.

Ph 8 ■ 163 Den Radius des Querschnitts der Zugstange bezeichnen wir mit r, dann wird der Inhalt des Querschnitts πr^2. Für die Belastung gilt:

$$12\,000 \cdot \pi r^2 = 150\,800,$$
$$r^2 = \frac{1\,508}{120\pi}.$$

Als Lösung der rein quadratischen Gleichung erhalten wir $r_1 = 2$, $r_2 = -2$ (nicht brauchbar). Der Durchmesser der Zugstange ist dann 4 cm.

Ph 9 ■ 164 Den Querschnitt des Buchenholzes kennzeichnen wir mit A cm² und den des Fichtenholzes mit A_1 cm². Zwischen beiden besteht nachstehende Gleichung:

$$A + \frac{1}{5}A = A_1 \quad \left(\frac{1}{5}A \mathrel{\widehat{=}} 20\,\% \text{ von } A\right).$$

Zwischen den Belastungen besteht folgende Beziehung:

$$A_1 \cdot 850 = A \cdot 1\,000 + 2\,000.$$

Als Lösung des Systems $\frac{6}{5}A = A_1$

$$850\,A_1 - 1\,000\,A = 2\,000$$

erhalten wir $A = 100$ cm²; die ursprüngliche Belastung ist also 100000 N. Der Querschnitt des Buchenholzes betrug 100 cm², und die ursprüngliche Belastung war 100 kN.

Ph 10/12 ■ 165 Beide Pumpen leeren den Tankwagen in 3,75 h. Mit der zweiten Pumpe würde der Tankwagen in x h und mit der ersten in $(x - 4)$ h geleert. In 1 h erfolgt mit der ersten Pumpe $\frac{1}{x-4}$ der Leerung, mit der zweiten Pumpe $\frac{1}{x}$ und mit beiden Pumpen $\frac{1}{3{,}75}$ der Leerung. Wir erhalten somit die Gleichung

$$\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x} = \frac{1}{3{,}75}$$

und nach der Umformung

$$x^2 - 11{,}5x + 15 = 0.$$

$$x_1 = 10, \qquad x_2 = \frac{3}{2} \text{ (wird nicht gerecht).}$$

Mit der ersten Pumpe wird der Tankwagen in 6 h und mit der zweiten in 10 h geleert.

Lösungen zu:
alpha-Wettbewerb
Heft 6/84

Ma 5 ■ 2493 $35 : 5 = 7$; im Jahre 1984 ist Susanne 7 Jahre alt, sie wurde also im Jahre 1977 geboren. $35 - 5 = 30$; $30 : 5 = 6$; im Jahre 1979 war Stefan 6 Jahre alt, er wurde also im Jahre 1973 geboren. $1977 - 5 = 1972$; Mathias wurde im Jahre 1972 geboren.

Ma 5 ■ 2494 Das Taschengeld von Katrin könnte 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82 oder 91 Pf betragen. Weil das Taschengeld durch $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ teilbar ist, kann es nur 64 Pf betragen; denn alle anderen möglichen Beträge sind nicht durch 8 teilbar. $64 : 2 = 32$, $32 : 2 = 16$, $16 : 2 = 8$. Katrin behält von ihrem Taschengeld 8 Pf übrig.

Ma 5 ■ 2495 Wir rechnen $24 - 11 + 8 + 4 = 25$; $25 - 5 = 20$; $20 - 13 = 7$. Bei der zweiten Station stiegen 7 Jungen aus.

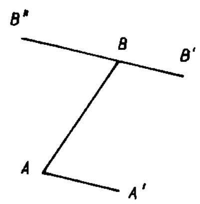
Ma 5 ■ 2496

A	B	C
g	g, r	r, w, w
g	g, w	r, w, w
g	r, r	g, w, w
g	r, w	g, r, w
g	w, w	g, r, r

Aus der Tabelle geht folgendes hervor: Für den Fall, daß in Schachtel A eine grüne Kugel liegt, gibt es fünf verschiedene Möglichkeiten für die Farbverteilungen. Da in Schachtel A aber auch eine weiße bzw. eine rote Kugel liegen könnte, gibt es insgesamt $5 \cdot 3 = 15$ verschiedene Möglichkeiten für die vorgesehene Verteilung der Kugeln.

Ma 5 ■ 2497 $31 - 7 = 24$; es gehören 24 Schüler dieser Klasse wenigstens einer AG an. $24 - 5 = 19$; $19 - (2 + 4) = 13$. Es gehören 13 Schüler noch anderen Arbeitsgemeinschaften an.

Ma 5 ■ 2498 Die Punkte B, B' und B'' liegen auf einer Geraden.

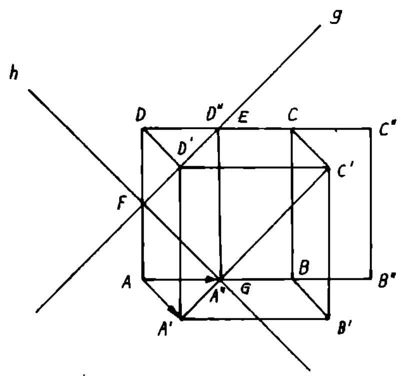


Ma 6 ■ 2499 a) Wegen $9 + 9 = 18$ und $18 < 20$ ist die Zahl nicht zwei-, sondern dreistellig; sie lautet 299, ihre Quersumme beträgt 20.
b) Damit die Zahl möglichst klein ist, muß die erste Grundziffer 1 sein. Da die Zahl durch 5 teilbar ist, muß die dritte Grundziffer 0 oder 5 sein. Es entfällt 0, da sich in diesem Fall die erste Grundziffer um 5 erhöht. Es existiert genau eine solche Zahl; sie lautet 195 und hat die Quersumme 15.

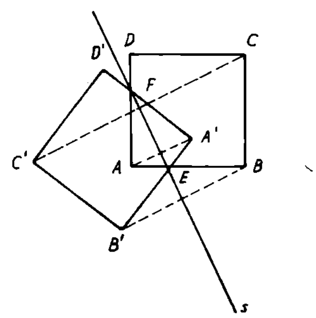
Ma 6 ■ 2500 Die zweite Grundziffer ist ein Vielfaches von 3 und gleich oder größer als 4. Die zweite Grundziffer könnte somit 6 oder 9 sein. Es entfällt 9, da die vierte Grundziffer dann 10 wäre, was nicht möglich ist. Entsprechend den geforderten Eigenschaften gibt es zwei solche Zahlen; sie lauten 26270 und 26271.

Ma 6 ■ 2501 Das Aquarium sei x dm breit, also $3 \cdot x$ dm lang. Für das Volumen des ausgeschöpften Wassers gilt somit $3 \cdot x \cdot x \cdot 1 = 9 \cdot 3$, also $x = 3$, denn 10 cm = 1 dm. Das Aquarium ist 9 dm lang und 3 dm breit bzw. 90 cm lang und 30 cm breit.

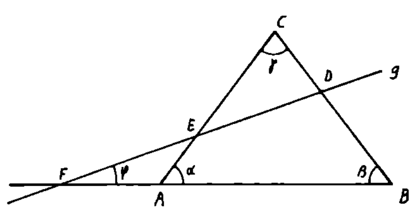
Ma 6 ■ 2502 Die Verschiebung parallel zur Geraden h könnte so erfolgen, daß entweder D' auf g oder B' auf g liegt; die Verschiebung parallel zur Geraden g könnte so erfolgen, daß entweder A'' auf h oder C'' auf h liegt. Somit gibt es vier Möglichkeiten zur Ausführung der Konstruktion. Zu b) gehören die Pfeile $\overrightarrow{AR}$ und $\overrightarrow{A'A''}$. Zum gleichen Ergebnis führt der Pfeil $\overrightarrow{AA''}$.



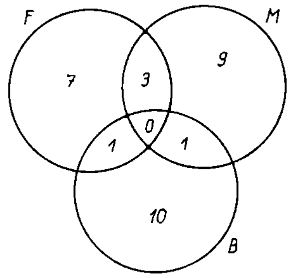
MA 6 ■ 2503



Ma 7 ■ 2504 Aus $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ und $\varphi < \alpha$ (Außenwinkelsatz) folgt $\varphi + \beta + \gamma < 180°$.



Ma 7 ■ 2505 $11 + 13 + 12 = 36$; $36 - 3 - 1 - 1 = 31$; $11 - 3 - 1 = 7$; $13 - 3 - 1 = 9$; $12 - 1 - 1 = 10$. Es handelt sich um insgesamt 31 Schüler. Es sind $7 + 9 + 10 = 26$ Schüler nur in einem Zirkel tätig.



Ma 7 ■ 2506 Winkel $\sphericalangle EBD$ hat die Größe $\beta = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 50° - 70° = 60°$. Winkel $\sphericalangle BAD$ hat die Größe 25°, Winkel $\sphericalangle BCE$ die Größe 35°. Deshalb hat Winkel $\sphericalangle BEF$ die Größe $180° - 35° - 60° = 85°$ und Winkel $\sphericalangle BDF$ die Größe $180° - 60° - 25° = 95°$. Somit hat Winkel $\sphericalangle EFD$ die Größe $360° - 85° - 95° - 60° = 120°$.

Ma 7 ■ 2507

A	B	C
b, r	b, b, r	r, w, w, w
b, r	b, b, w	r, r, w, w
b, r	b, r, r	b, w, w, w
b, r	b, w, w	b, r, r, w
b, r	r, r, w	b, b, w, w
b, r	r, w, w	b, b, r, w
b, r	b, r, w	b, r, w, w

Für den Fall, daß im Kasten A je eine blaue und eine rote Kugel liegen, gibt es 7 Möglichkeiten, wie aus der Tabelle hervorgeht. Nun könnten im Kasten A aber auch eine blaue und eine weiße oder eine rote und eine weiße Kugel liegen. Deshalb gibt es insgesamt $3 \cdot 7 = 21$ verschiedene Möglichkeiten für die Verteilung der Kugeln entsprechend der Vorschrift auf die drei Kästen.

Ma 8 ■ 2508 Da Mathias das Buch am 7. Tag noch liest, gilt für die Anzahl t der Tage, nach denen er das Buch ausgelesen hat, $t \geqq 7$. Wegen $7 \cdot 20 = 140$ und $140 < 342$ liest Mathias täglich mehr als 20 Seiten des Buches. Wegen $342 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 19$ ist unter den einschränkenden Bedingungen nur die Lösung $342 = 9 \cdot 38$ möglich. Mathias hat das Buch in 9 Tagen bei täglich 38 Seiten durchgelesen. Folglich wird er die letzte Seite des Buches am Donnerstag lesen.

Ma 8 ■ 2509 a) Für den Umfang des Quadrates gilt $u = 4 \cdot a = 4 \cdot 4{,}5$ cm $= 18$ cm. Der halbe Umfang des Rechtecks beträgt somit 9 cm. Da eine Rechteckseite 4,5 cm + 0,5 cm = 5 cm lang ist, hat die andere Rechteckseite die Länge 4 cm. Nun gilt $4{,}5^2 - 4 \cdot 5 = 0{,}25$. Der Flächeninhalt des Quadrates ist um 0,25 cm² größer als der des Rechtecks.

b) Das Quadrat habe die Seitenlänge x, das Rechteck die Seitenlängen a und b; aus $4x = 2a + 2b$ folgt $x = \frac{1}{2} \cdot (a + b)$.

Ma 8 ■ 2510 $30 - 5 = 25$; wenigstens eines der Fächer Mathematik, Russisch, Deutsch war das Lieblingsfach von 25 Schülern. Nun gilt $x + y + 12 = 25$ und $x + 6 = y + 7$, also $x = 7$ und $y = 6$. 10 Schüler nannten Mathematik, 13 Schüler Russisch und 13 Schüler Deutsch als ihr Lieblingsfach.

Ma 8 ■ 2511 Das Viereck $ABCD$ ist ein Sehnenviereck.

(1) Die Winkel $\sphericalangle DAC$ und $\sphericalangle DBC$ sind Peripheriewinkel über demselben Kreisbogen; somit gilt $\sphericalangle DAC \cong \sphericalangle DBC$.

(2) Die Winkel $\sphericalangle ADB$ und $\sphericalangle ACB$ haben beide als Peripheriewinkel über dem Durchmesser die Größe 90°; somit gilt $\sphericalangle ADB \cong \sphericalangle ACB$.

(3) Nach dem Außenwinkelsatz hat Winkel $\sphericalangle AEB$ die Größe $90° + \varphi$.

(4) Der Winkel $\sphericalangle BAC$ habe die Größe δ; dann hat der Winkel $\sphericalangle ABC$ die Größe $90° - \delta$, der Winkel $\sphericalangle DAB$ die Größe $\varphi + \delta$. Nun gilt $90° - \delta + \varphi + \delta = 90° + \varphi$; folglich gilt für die Summe der Größen der Winkel $\sphericalangle DAB$ und $\sphericalangle ABD$ $90° + \varphi$.

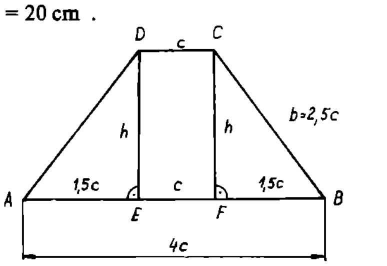
Ma 9 ■ 2512 Beispiel: Gegeben seien die Zahlen 8 und 9; dann gilt $7 \cdot 9 + 7 = 8 \cdot 10 - 10$, denn $70 = 70$.
Für die natürlichen Zahlen n und $n + 1$ gilt
$(n - 1) \cdot (n + 1) + (n - 1)$
$= n \cdot (n + 2) - (n + 2)$, denn
$n^2 - 1 + n - 1 = (n + 2) \cdot (n - 1)$,
$n^2 + n - 2 = n^2 + n - 2$
stellt eine Identität dar.

Ma 9 ■ 2513 Aus $ab(c - d) = 1984$ und $(a - 1) \cdot b \cdot (c + 1) = 1983$ folgt durch Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung
$ab(c - d) - b(a - 1)(c + 1) = 1$,
$b \cdot [a(c - d) - (a - 1)(c + 1)] = 1$,
also $b = 1$ und
$a(c - d) - (a - 1)(c + 1) = 1$,
also $d = \frac{c - a}{a}$.
Nun gilt $(a - 1) \cdot b \cdot (c + 1)$
$= 1 \cdot 3 \cdot 661$ und wegen $b = 1$
somit $(a - 1) \cdot (c + 1) = 3 \cdot 661$.
Die möglichen Belegungen sind aus der Tabelle ersichtlich:

a	b	c	d
2	1	1982	990
4	1	660	164
662	1	2	negativ
1984	1	0	negativ

Somit existieren genau zwei solcher Quadrupel; sie lauten (2, 1, 1982, 990) und (4, 1, 660, 164).

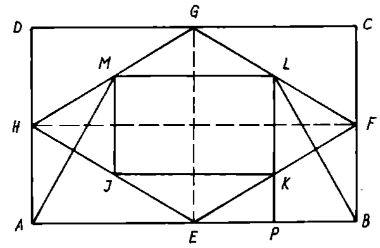
Ma 9 ■ 2514 Aus $2b = 5c$ folgt $b = 2{,}5 \cdot c$; nach dem Satz des Pythagoras gilt $h^2 = (2{,}5 \cdot c)^2 - (1{,}5 \cdot c)^2 = 4c^2$, also $h = 2c$. Ferner gilt $\frac{(4c + c) \cdot 2c}{2} = 20$ cm², also $c = 2$ cm. Daraus folgt $u = 2 \cdot 5c = 2 \cdot 10$ cm $= 20$ cm.



Ma 9 ■ 2515 Aus $\overline{ML} : \overline{HF} = 1 : 2$ (Strahlensatz) folgt $\overline{ML} = \frac{1}{2} \cdot \overline{HF}$; folglich ist $\overline{ML}$ 10 cm lang. Analog dazu ist $\overline{KL}$ 8 cm lang, und $\overline{KP}$ ist 4 cm lang, also $\overline{LP}$ 12 cm lang. Wegen $\overline{BL}^2 = 12^2 + 5^2 = 169$ ist $\overline{BL}$ 13 cm lang.

a) $A = \frac{20 + 10}{2} \cdot 12$ cm² $= 180$ cm²

b) $u = (20 + 10 + 2 \cdot 13)$ cm $= 56$ cm.



Ma 10/12 ■ 2516

a) $\sqrt{102} = \sqrt{100 + 2} \approx 10 + \frac{2}{20} = 10{,}1$;

$\sqrt{10{,}2} = \sqrt{9 + 1{,}2} \approx 3 + \frac{1{,}2}{6} = 3{,}2$;

$\sqrt{35{,}6} = \sqrt{36 - 0{,}4} \approx 6 - \frac{0{,}4}{12} = 5{,}97$.

b) Wir quadrieren die beiden Terme und erhalten

$a^2 + b$ und $\left(a + \frac{b}{2a}\right)^2 = a^2 + b + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$,

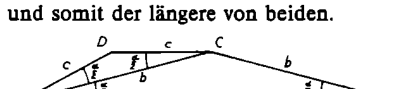
also $a^2 + b < a^2 + b + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$,

das heißt, der Näherungswert ist größer als der wahre Wert.

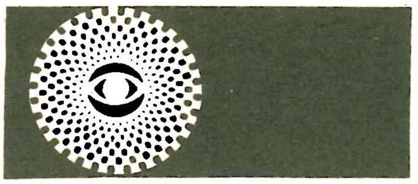
Ma 10/12 ■ 2517 Durch äquivalente Umformungen erhalten wir schrittweise
$\sqrt[x]{x + 77} = x - 1$, $x + 77$
$= (x - 1)^x$, $(x - 1)^x - (x - 1) = 78$,
$(x - 1) \cdot [(x - 1)^{x-1} - 1]$
$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13$.
Nur $x = 4$ erfüllt diese Gleichung. Somit existiert genau eine Lösung.
Probe: $3 \cdot (3^3 - 1) = 78, 3 \cdot 26 = 78$.

Ma 10/12 ■ 2518 Der Winkel $\sphericalangle DAB$ habe die Größe α; nach Voraussetzung haben dann die Winkel $\sphericalangle DAC$ und $\sphericalangle CAB$ jeweils die Größe $\frac{1}{2} \cdot \alpha$. Wegen $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle DCA$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) hat Winkel $\sphericalangle DCA$ die Größe $\frac{1}{2} \cdot \alpha$. Wegen $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ ist das Dreieck ABC gleichschenklig, also hat Winkel $\sphericalangle CBA$ ebenfalls die Größe $\frac{1}{2} \cdot \alpha$.
Somit gilt $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, also
$\overline{CD} : \overline{AC} = \overline{BC} : \overline{AB}$ bzw. $c : b = b : a$,
$b^2 = a \cdot c$, $b = \sqrt{a \cdot c}$.

Ma 10/12 ■ 2519 Es sei x die Maßzahl der Länge von $\overline{AD}$, y die Maßzahl der Länge von $\overline{BD}$, z die Maßzahl der Länge von $\overline{BC}$; dann gilt $(8{,}4 - x)^2 = x^2 + 4{,}2^2$, also $x = 3{,}15$, ferner $x \cdot y = 4{,}2^2$, also $y = 5{,}6$ und $z^2 = 4{,}2^2 + 5{,}6^2$, also $z = 7$. Der Weg von C über A nach D ist also 8,4 km, der von C über B nach D aber 12,6 km lang und somit der längere von beiden.



Die Lösungen zum Physikwettbewerb veröffentlichen wir in Heft 4/85.



ARBEITS-GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Ein mathematisches Ferienlager in der Volksrepublik Polen

Vom 2. 8. bis 16. 8. 84 beteiligte sich eine Schülerdelegation des Bezirkes Cottbus von 11 Schülern der Klassenstufen 7 und 8 am Sommerlager des Klubs *Pythagoras* der Wojewodschaft Zielona Gora.

Das Kindererholungsheim *Wroniawy* bot durch seine großzügigen Räumlichkeiten und die weiträumige Parkanlage eine breite Palette für die mathematische und Freizeitgestaltung.

Unsere Schüler lebten sich schnell im Lager ein. Bei den zahlreichen gemeinsamen Veranstaltungen und Wettbewerben wurden anfängliche Hemmungen und Sprachschwierigkeiten schnell überwunden.

Die polnischen Schüler waren alle erstmalig in einem derartigen Lager. Für viele Kinder war es der erste Kontakt mit Problemen der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik.

Dieser Tatsache Rechnung tragend, war die inhaltliche Konzeption des Lagers vor allem darauf gerichtet, die Schüler in spielerischer Form an mathematische Aufgaben und Denkweisen heranzuführen.

Die Betreuung der Schüler erfolgte durch Studenten der Pädagogischen Hochschule Zielona Gora. Entsprechend dem Anliegen des Lagers waren das Studenten der Fachrichtungen Mathematik, Sport, Musik und Kunsterziehung, die gleichzeitig ein Praktikum absolvierten.

Die etwa 80 Kinder wurden in sieben Gruppen zu je 10 bis 12 Kindern eingeteilt, die untereinander während der gesamten Lagerzeit auf mathematischem und sportlichem Gebiet im Wettstreit standen. Der tägliche Appell und eine hervorragend gestaltete Wandzeitung gaben ständig Auskunft über den Stand der Kollektiv- und Einzelleistungen.

Folgende Formen der mathematischen Beschäftigung wurden praktiziert: Konsultationen – Stoffvermittlung motiviert durch Olympiadeaufgaben, Klausuren zur Bestenermittlung, Klausuren als Mannschaftswettbewerb zur Ermittlung der besten Gruppe, *Mathematisches Quiz* – ein publikumswirksamer mathematischer Wettbewerb, mathematische Vorträge (Jeder Schüler bereitete im Selbststudium einen Kurzvortrag über die Lösung einer Aufgabe, die Führung eines Beweises oder eine Darlegung zur mathematischen Theorie vor. Die Themen der Vorträge wurden an der Wandzeitung ausgehängt.), mathematischer Geländelauf (sieben Stationen waren anzulaufen, an denen jeweils eine sportliche Übung, Aufgaben zur *Ersten Hilfe*, Zeltbau oder ähnliches durchzuführen waren, aber auch jedesmal eine mathematische Aufgabe in der Gruppe gelöst werden mußte). Aus Zeitgründen konnte nicht durchgeführt werden: Wettspiel mit Scherzaufgaben, *internationaler Mannschaftswettbewerb* (je ein deutscher und polnischer Schüler lösen als Mannschaft gemeinsam eine Anzahl von Aufgaben, die in beiden Sprachen vorliegen).

Mehrere Exkursionen mit dem Bus, ein Singewettstreit, ein Lagerfeuer, ein Sportfest in fünf Disziplinen und Turniere im Fußball, Federball, Schach und Parteienball garantierten neben mathematischen Veranstaltungen für jeden Schüler viele Erlebnisse und gute Erholung.

Abschließend soll das *Mathematische Quiz* näher vorgestellt werden.

Zur Spielvorbereitung: Es werden zwei Mannschaften A und B gebildet (je 4 bis 6 Schüler). Eine Jury (3 bis 5 Schüler oder Pädagogen) bewertet die öffentlich an der Tafel gelösten Aufgaben mit 0 bis 5 Punkten. Beide Mannschaften erhalten 1 bis 2 Stunden vor Beginn des Wettbewerbes etwa 20 Aufgaben, die sie in dieser knappen Vorbereitungszeit bearbeiten.

Die Aufgaben müssen so ausgewählt sein, daß sie kurz und übersichtlich lösbar sind und keinen großen Schreibaufwand erfordern. Die kurze Vorbereitungszeit verlangt von den Mannschaften ein kollektives und konzentriertes Arbeiten.

Ein Verkürzen oder Weglassen der Vorbereitungszeit (bei leistungsstarken Schülern) verschärft die Wettbewerbsbedingungen.

Jede Mannschaft erhält Ziffernkarten zum Zusammenstellen der Zahlen 1 bis 20 (Aufgabennummern) sowie je eine rote und eine grüne Karte.

Die Jurymitglieder haben jeweils Karten mit den Zahlen 0 bis 5.

Spielregeln: Mannschaft A beginnt und stellt Mannschaft B eine Aufgabe (Nr. 1 bis 20). Mannschaft B hat zwei Möglichkeiten: Sie nimmt die Aufgabe an (grüne Karte) oder lehnt die Aufgabe ab (rote Karte). Im ersten Fall löst ein Schüler der Mannschaft B (die anderen können dabei helfen) die Aufgabe an der Tafel und bekommt die Lösung und deren Erläuterung von der Jury mit 0 bis 5 Punkten bewertet (Punktsumme aller Jurymitglieder).

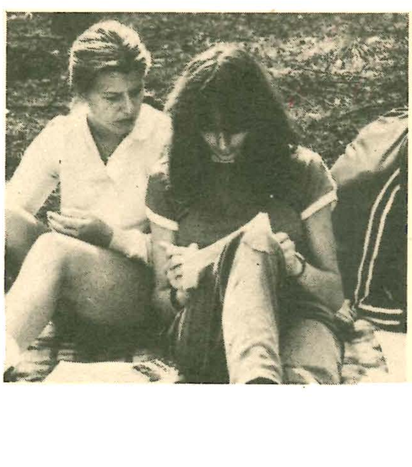
Lehnt aber Mannschaft B die Aufgabe ab, muß Mannschaft A die von ihr selbst gestellte Aufgabe lösen, und Mannschaft B erhält −3 Punkte. Gelingt ihr das, wird die Lösung an der Tafel ebenfalls mit 0 bis 5 Punkten bewertet. Ist Mannschaft A aber nicht in der Lage, ihre eigene Aufgabe zu lösen, erhält sie 5 Minuspunkte.

Dann stellt Mannschaft B der Mannschaft A eine Aufgabe usw. Sieger ist die Mannschaft mit den meisten Punkten.

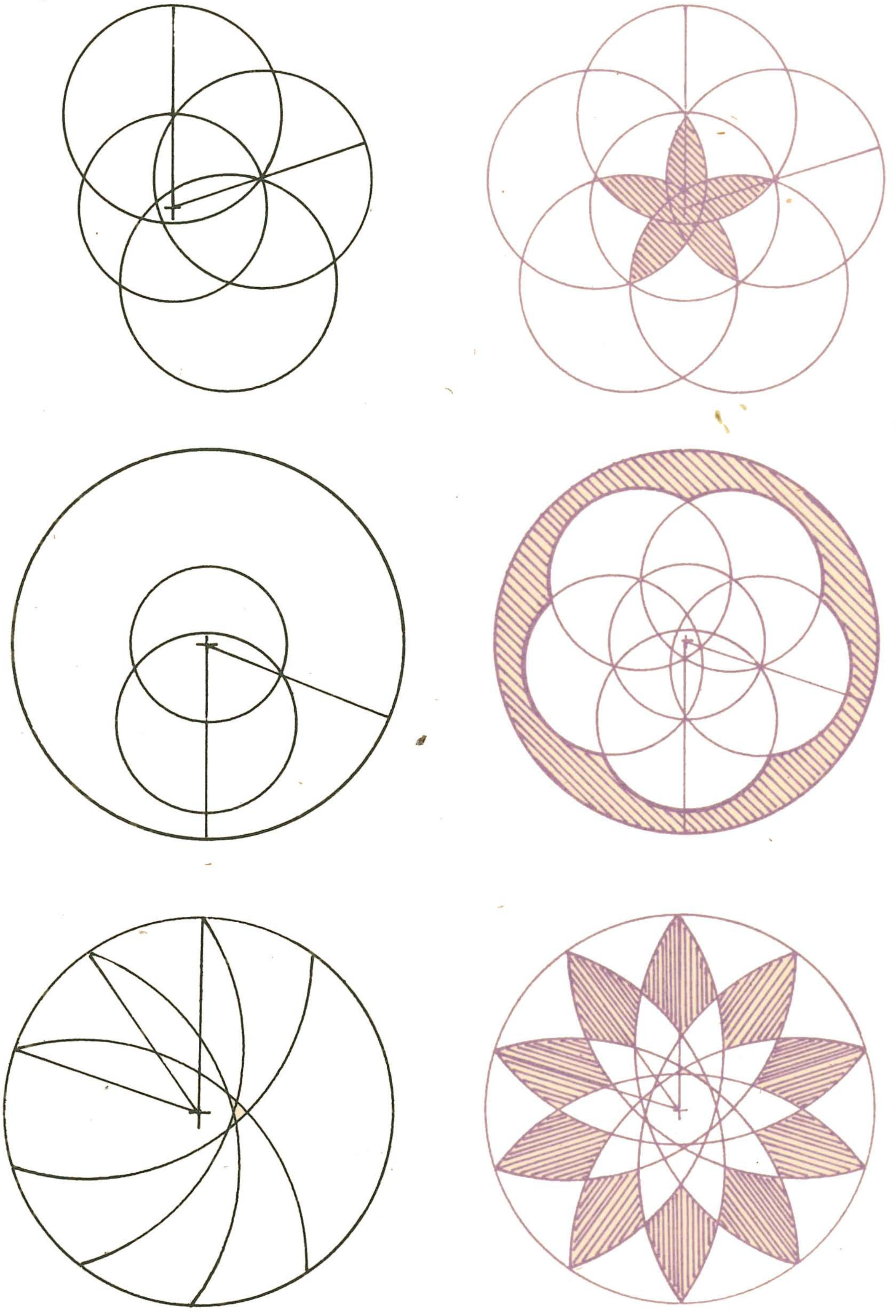
Unsere Cottbuser Delegation reiste mit vielen Eindrücken und Anregungen zurück. Vor allem die spielerischen Formen der mathematischen Beschäftigung sind in Schulwettbewerben (Ermittlung des Schulmeisters), aber auch in Spezialistenlagern der Kreisklubs anwendbar.

Eine Auswahl der Aufgaben stellen wir auf Seite 58 vor.

B. Weiße



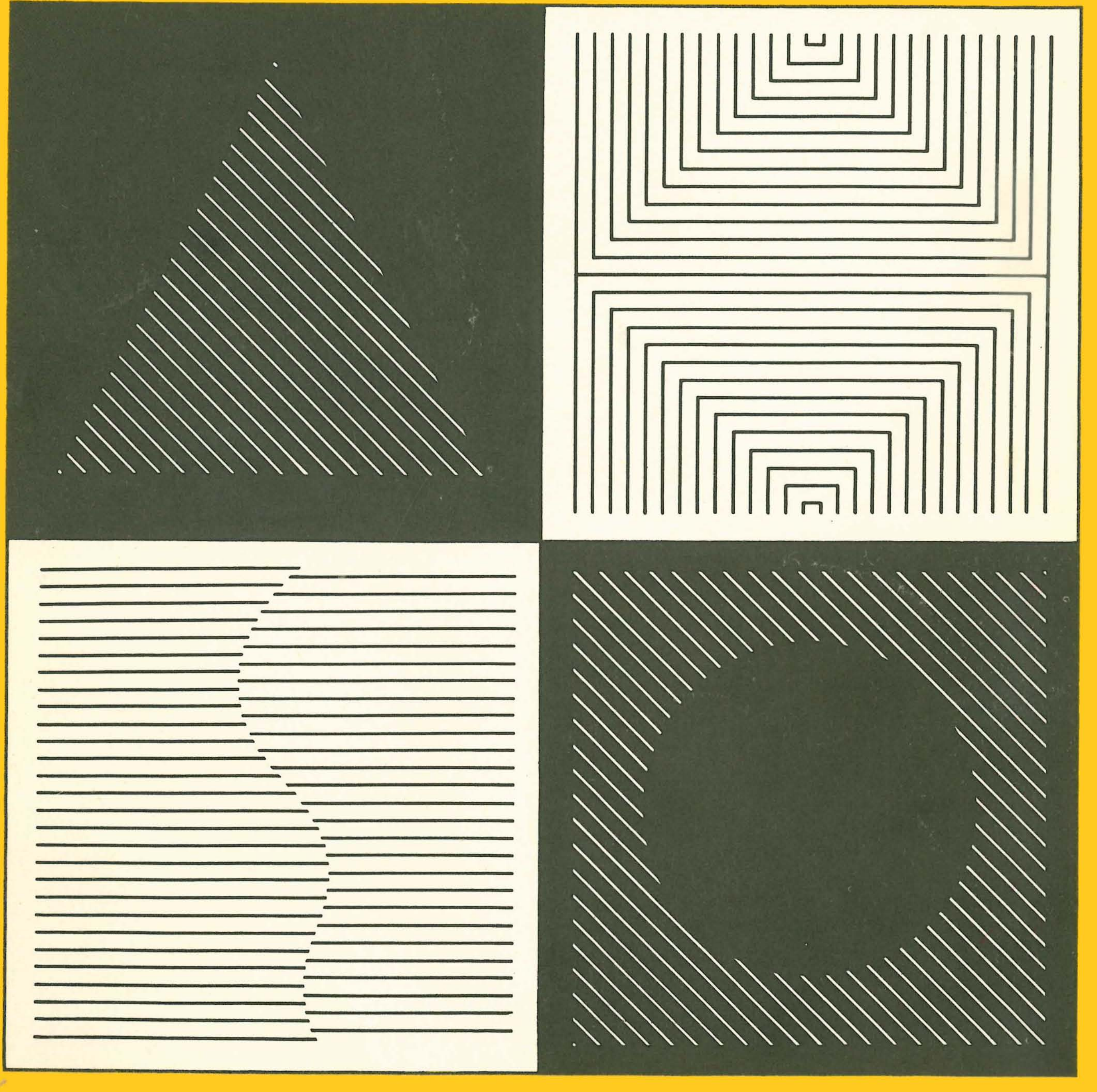
Mach's mal nach!



ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 19 (1985) 3 · Seiten 49 bis 72

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



4

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
19. Jahrgang 1985
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213
Anschrift der Redaktion:
7027 Leipzig, PSF 14
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: G. Stelzer, Bildstelle der Universität Greifswald (S. 78); Eigenfoto J. W. Schmidt (S. 85); Bildstelle Päd. Kreiskab. Greifswald (S. 86); Franz Fricke, Wochenpost Berlin (S. 77)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage aus *Elemente der Mathematik*, Zürich

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 23. April 1985
Auslieferungstermin: 15. August 1985

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

[1] bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Lineare Gleichungssysteme

Bei der Behandlung sehr vieler Aufgaben aus Mathematik, Physik, Chemie oder Technik und Ökonomie wird man letztendlich auf Systeme linearer Gleichungen geführt. In diesem Artikel soll das allgemeine Lösungsverfahren von Gauß auf der Grundlage elementarer Vorbetrachtungen behandelt werden. Außerdem werden wir zahlreiche einfache Aufgaben untersuchen, bei denen lineare Gleichungssysteme zu lösen sind.

Elimination von Unbekannten

Man versteht die Methode am besten anhand eines Beispiels.
Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 7x + 5y &= 1. \end{aligned}$$

Um es zu lösen, eliminieren wir die Unbekannte x unter Verwendung der ersten Gleichung aus der zweiten. Dazu multiplizieren wir jede der Gleichungen mit einer solchen Zahl, daß die Koeffizienten von x in den beiden neu entstehenden Gleichungen gleich werden. Multiplizieren wir die erste mit 7 und die zweite mit 2, dann bekommen wir das zum gegebenen System äquivalente Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 14x + 21y &= 35 \\ 14x + 10y &= 2. \end{aligned}$$

Jetzt übernehmen wir die erste Gleichung ungeändert und ersetzen die zweite durch die Differenz der ersten und zweiten. Auch dies ist eine äquivalente Umformung, und deshalb stimmt die Lösungsmenge des gegebenen Systems überein mit der Lösungsmenge des Systems:

$$\begin{aligned} 14x + 21y &= 35 \\ 11y &= 33. \end{aligned}$$

Dividieren wir schließlich noch die zweite Gleichung durch 11, so erhalten wir wieder ein zum vorangegangenen äquivalentes System

$$\begin{aligned} 14x + 21y &= 35 \\ y &= 3, \end{aligned}$$

dessen einzige Lösung $x = -2$ und $y = 3$ wir durch Einsetzen von $y = 3$ in die erste Gleichung sofort erhalten können. Das Gleichungssystem hat also als einzige Lösung das Paar $(-2; 3)$.

Aufgaben

▲1▲ Löse mit dieser Methode die beiden folgenden Gleichungssysteme

a) $2x + 3y = 4$
$3x - 2y = 5,$

b) $\frac{3}{4}x - \frac{5}{6}y = 1$
$\frac{5}{6}x - \frac{3}{4}y = 2!$

▲2▲ Zwei Fahrzeuge bewegen sich auf einer Straße mit den konstanten Geschwindigkeiten $u = -12$ km/h und $v = 12$ m/s. Zu Beginn befindet sich das erste Fahrzeug in einer Entfernung von 3 km, das zweite in einer Entfernung von -500 m von einer Straßenkreuzung. Wann und wo treffen sie sich?

Substitution von Unbekannten

Eine der wichtigsten allgemeinen Methoden der Algebra ist die Ersetzung von Unbekannten durch andere. Damit kann man häufig allgemeinere Aufgaben mit einfachen Methoden lösen.
Wollen wir beispielsweise das folgende nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} &= 5 \\ \frac{7}{x} + \frac{5}{y} &= 1 \end{aligned}$$

lösen, dann ersetzen (substituieren) wir $u := \frac{1}{x}$ und $v := \frac{1}{y}$ und erhalten für diese neuen Unbekannten ein *lineares* Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2u + 3v &= 5 \\ 7u + 5v &= 1. \end{aligned}$$

Seine Lösung war $(-2; 3)$, also erhalten wir $\frac{1}{x} = -2$ und $\frac{1}{y} = 3$ und folglich $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ als Lösung der Aufgabe.

Aufgabe

▲3▲ Löse die folgenden Systeme!

a) $\frac{1}{2x + 3y - 5} + \frac{7}{5x - 8y + 12} = 1$
$\frac{4}{2x + 3y - 5} - \frac{4}{5x - 8y + 12} = 1,$

b) $x^2 + xy = 5$
$3x^2 + 5xy = 23,$

c) $\frac{xy}{3x + 2y} = \frac{1}{5}, \ \frac{xy}{5x + 7y} = 1!$

Die geometrische Deutung einer linearen Gleichung

Wollen wir die Gleichung $y = mx + n$ derjenigen Geraden ermitteln, die durch die beiden Punkte $P(1, 2)$ und $Q(3, 1)$ geht, so brauchen wir nur die jeweiligen Koordinaten für x und y einzusetzen und erhalten ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Unbekannten m und n:

$$\begin{aligned} 2 &= m + n \\ 1 &= 3m + n. \end{aligned}$$

Lösen wir das System, so erhalten wir

$$m = -\frac{1}{2} \text{ und } n = \frac{5}{2};$$

die gesuchte Gerade hat also die Gleichung

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Es kann aber auch passieren, daß das entstehende lineare Gleichungssystem *keine* Lösung besitzt!
Sind als Punkte beispielsweise $P(1, 2)$ und $Q(1, 3)$ gegeben, dann erhalten wir mit

$$\begin{aligned} 2 &= m + n \\ 3 &= m + n \end{aligned}$$

ein System, welches sicher unlösbar ist, weil aus der Gültigkeit der beiden Gleichheiten für zwei reelle Zahlen m und n ja $2 = 3$ folgen würde!
Auf den ersten Blick sieht das wie ein Widerspruch zu der euch allen bekannten Tatsache aus, daß durch zwei verschiedene, beliebig gegebene Punkte P und Q *immer* eine Gerade eindeutig bestimmt ist. Der Widerspruch löst sich dadurch, daß die Gleichung der Geraden durch die oben gegebenen Punkte *nicht* von der Gestalt $y = my + n$ ist, sondern $x = 1$ lautet.
Wir überlegen uns, daß eine Gerade in der Ebene genau dann *nicht* durch eine Gleichung $y = mx + n$ beschrieben wird, wenn sie zur y-Achse parallel verläuft. In diesem Ausnahmefall hat sie immer die Gleichung $x = k (k \in R)$.
Aus diesen Überlegungen folgt aber nun sofort, daß *jede* Gerade in der Ebene durch eine Gleichung der Form

$$ax + by + c = 0, \ (a, b, c \in R, \ a \text{ und } b \text{ nicht beide null})$$

dargestellt werden kann. Im allgemeinen Fall ist dabei

$$m = -\frac{a}{b} \text{ und } n = -\frac{c}{b},$$

während für Parallelen zur y-Achse $b = 0$ und $k = -\frac{c}{a}$ wird.
Jetzt schauen wir uns das System

$$\begin{aligned} x + \sqrt{2}\,y &= \sqrt{3} \\ \sqrt{2}\,x + 2y &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

an. Jede der beiden Gleichungen stellt in der (x, y)-Ebene eine bestimmte Gerade dar. Lösungspunkte (x, y) des Systems sind also gerade die Punkte, die *auf beiden* Geraden liegen.
Wenden wir die Methode der Elimination hier an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\,x + 2y &= \sqrt{6} \\ \sqrt{2}\,x + 2y &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

und schließlich:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\,x + 2y &= \sqrt{6} \\ 0 &= 0! \end{aligned}$$

Das bedeutet aber, daß beide Geraden zusammenfallen und es unendlich viele Lösungspunkte gibt!
Unter Beachtung der geometrischen Deutung für Gleichungssysteme von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten finden wir

so, daß es genau drei Fälle für die Lösbarkeit gibt:
– das System besitzt genau eine Lösung (die beiden Geraden schneiden sich in genau einem Punkt!),
– das System besitzt unendlich viele Lösungen (die Geraden fallen zusammen!),
– das System hat gar keine Lösung (die Geraden sind parallel!).
Ganz analog liegen die Verhältnisse bei n Gleichungen mit n Unbekannten. In der Regel hat ein solches System genau eine Lösung. Ist aber eine der Gleichungen eine *Linearkombination* der übrigen oder widerspricht eine Gleichung einer solchen Linearkombination, dann haben wir unendlich viele oder überhaupt keine Lösungen!

Aufgaben

▲4▲ Gib die Gleichung der Geraden an, die durch die Punkte
a) $P(1,5)$ und $Q(2,3)$,
b) $P(6,1)$ und $Q(6,5)$ geht!

▲5▲ Für welche Zahlen m und c gilt: Die Geraden $y - mx = 2$ und $2y - 6x = c$
a) fallen zusammen,
b) schneiden sich nicht?

▲6▲ Für welches a hat das System

$$\begin{aligned} 2x + (9a^2 - 2)y &= 3a \\ x + \qquad\quad y &= 1 \end{aligned}$$

keine Lösung?

▲7▲ Beweise, daß ein System

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \\ (a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 &\in R) \end{aligned}$$

dann und nur dann genau eine Lösung besitzt, wenn die Zahl $a_1b_2 - a_2b_1$ ungleich null ist! (Diese Zahl heißt *Determinante* des Systems.)

Fehler durch Runden

Bei der Lösung von Aufgaben mit Hilfe von elektronischen Rechenmaschinen (EDVA oder auch ETR) können eigenartige Situationen entstehen. Eine klassische Illustration dafür ist das schon betrachtete System

$$\begin{aligned} x + \sqrt{2}\,y &= \sqrt{3} \\ \sqrt{2}\,x + \;\; 2y &= \sqrt{6}\,. \end{aligned} \qquad (1)$$

Wie wir gesehen hatten, besitzt es unendlich viele Lösungen. Löst man es aber maschinell (z.B. mit einem elektronischen Taschenrechner), dann ergibt sich *immer genau eine* Lösung. Das kommt daher, daß eine solche Maschine mit irrationalen Zahlen wie $\sqrt{2}$ nicht rechnen kann, sondern dafür stets Näherungswerte in Form von endlichen Dezimal-(oder Dual-)brüchen einsetzt.
Denken wir uns etwa eine Maschine, die anstelle von $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ oder $\sqrt{6}$ lediglich die Näherungswerte mit einer Stelle nach dem Komma, also 1,4; 1,7; oder 2,4, verwenden kann, so ergibt sich das System

$$\begin{aligned} x + 1{,}4y &= 1{,}7 \\ 1{,}4x + 2\;\; y &= 2{,}4\,. \end{aligned} \qquad (2)$$

Die leicht zu errechnende *einzige* Lösung hiervon ist $x = 1$ und $y = 0{,}5$!
Denken wir uns eine andere Maschine, die vier Stellen nach dem Komma verwenden kann, so lautet das von ihr anstelle von (1) gerechnete System

$$\begin{aligned} x + 1{,}4142y &= 1{,}7320 \\ 1{,}4142x + 2y \quad &= 2{,}4494\,, \end{aligned} \qquad (3)$$

das ebenfalls *genau eine*, aber von der vorigen *sehr* verschiedene Lösung $x = 0{,}3178$, $y = 1$ hat.
Jetzt werden wir uns davon überzeugen, daß jedes Gleichungssystem, das aus (1) bei Ersetzung von $\sqrt{2}$ durch eine ganz beliebige positive Zahl a mit $a^2 \neq 2$ entsteht, stets genau eine Lösung besitzt.
Ein solches System lautet dann

$$\begin{aligned} x + ay &= \sqrt{3} \\ ax + 2y &= \sqrt{6}\,. \end{aligned} \qquad (4)$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit a und subtrahieren die zweite Gleichung, dann bekommen wir das zu (4) äquivalente System

$$\begin{aligned} x + ay \quad &= \sqrt{3} \\ (a^2 - 2)y &= a\sqrt{3} - \sqrt{6}\,. \end{aligned}$$

Wegen $a^2 \neq 2$ erhalten wir daraus eindeutig
$y(a\sqrt{3} - \sqrt{6})/(a^2 - 2)$ und
durch Einsetzen in die erste Gleichung
$x = \sqrt{3} - a(a\sqrt{3} - \sqrt{6})/(a^2 - 2)$.
Damit haben wir die jeweils eindeutig bestimmte Lösung von (4) berechnet, und unsere Behauptung ist bewiesen.
Nun wissen wir aber aus der Schule, daß $\sqrt{2}$ als irrationale Zahl nicht als endlicher Dezimalbruch dargestellt werden kann. Deshalb löst auch die beste EDVA immer ein System (4) statt des verlangten Systems (1), womit nun der eingangs geschilderte Effekt seine Erklärung gefunden hat!
Das eben betrachtete Beispiel lenkt unsere Aufmerksamkeit außerdem auf die Erscheinung, daß sich die Lösung eines einfachen linearen Gleichungssystems schon sehr stark verändern kann, wenn die eigentlich gegebenen Koeffizienten durch Runden verändert werden. Wir haben das beim Übergang von (3) zu (2) ganz deutlich vor uns. Bei Systemen mit noch mehr Unbekannten kann dieser Effekt noch viel stärker ausfallen.
Die Abschätzung der auftretenden Fehler und die Erstellung von Lösungsverfahren, die eine möglichst geringe Fortpflanzung von Eingabefehlern garantieren, sind wichtige und gar nicht einfache Aufgaben. Der berühmte Mathematiker *C. F. Gauß* hat sie zu Beginn des 19. Jahrhunderts als einer der ersten systematisch untersucht, ausreichende Fortschritte sind aber erst in den letzten Jahrzehnten gemacht worden.
Zur Erinnerung an die wesentlichen Beiträge von Gauß zu diesen Fragen trägt eine einfache und universelle Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme seinen Namen.

Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Die fortgesetzte Elimination von Unbekannten ist die bequemste Methode für die Lösung linearer Gleichungssysteme auf elektronischen Rechenanlagen. Wir demonstrieren das Vorgehen am Beispiel eines Systems von drei Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2\,. \end{aligned}$$

Im ersten Schritt eliminieren wir die Unbekannte x_1 unter Beibehaltung der ersten Gleichung aus den beiden folgenden. Wir erhalten so das zum gegebenen äquivalenten System

$$\begin{aligned} x_1 + \;\; x_2 + 2x_3 &= -1 \\ -\,3x_2 - 2x_3 &= -2 \\ -\,3x_2 - 4x_3 &= \;\;\, 2\,. \end{aligned}$$

Der zweite Schritt besteht darin, daß unter Verwendung der neuen zweiten Gleichung die Unbekannte x_2 aus der dritten eliminiert wird:

$$\begin{aligned} x_1 + \;\; x_2 + 2x_3 &= -1 \\ -\,3x_2 - 2x_3 &= -2 \\ 2x_3 &= -4\,. \end{aligned}$$

Jetzt können wir aus der letzten Gleichung $x_3 = -2$ ablesen. Setzen wir das in die zweite Gleichung ein, so bekommen wir

$$-3x_2 + 4 = -2\,,$$

das heißt $x_2 = 2$.
Nun ergibt sich aus der ersten Gleichung durch Einsetzen der schon errechneten Werte

$$x_1 + 2 - 4 = -1\,, \text{ d.h. } x_1 = 1.$$

Das System besitzt also die einzige Lösung $(1; 2; -2)$.
Ganz analog kann jedes beliebige lineare Gleichungssystem behandelt werden. Die allgemeine Beschreibung des Verfahrens von Gauß lautet demnach:

Man eliminiere unter Verwendung der schließlich unverändert übernommenen ersten Gleichung die Unbekannte x_1 aus allen folgenden.
Mit der neuen 2. Gleichung eliminiere man x_2 aus allen folgenden und behalte sie selbst bei.
Auf analoge Weise verfahre man so lange weiter, bis alle Gleichungen aufgebraucht sind.
Im Ergebnis erhalten wir ein *gestaffeltes* System, dessen Lösung wir von unten her schrittweise berechnen.
Wir sehen, daß wir damit einen Algorithmus besitzen, der *fast* automatisch ablaufen, also einer Maschine zur Abarbeitung übertragen werden kann. Wir müssen nur noch bedenken, daß es zu seiner Abarbeitung nötig ist, daß im k-ten Schritt die *neue* k-te Gleichung die Unbekannte x_k überhaupt noch enthält, denn nur dann können wir diese aus den folgenden eliminieren. Sollte das einmal nicht der Fall sein, dann müssen wir die Gleichungen (oder die Unbekannten!) neu numerieren (vertauschen). Natürlich kann es auch passieren, daß im k-ten Schritt alle noch verbleibenden Gleichungen *alle* noch nicht eliminierten Unbekannten nicht mehr enthalten. Stehen in diesen Gleichungen dann auch auf *allen* ihren rechten Seiten Nullen, dann erhalten wir unendlich viele Lösungen, weil dann $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ ganz beliebig sein können. Steht aber auch nur in einer von ihnen rechts nicht die Null, dann

ist das System widersprüchlich, und der Algorithmus zeigt uns seine Unlösbarkeit an.
Alle diese Fälle müssen in einem Programm für eine Rechenanlage von vornherein eingeplant werden, so daß die Maschine stets bis zum Ende rechnen kann.
Wir wollen nun noch darauf hinweisen, daß eine Maschine zum Rechnen natürlich überhaupt nicht die Gleichungen, sondern nur das Schema ihrer Koeffizienten (man nennt das die *Matrix des Gleichungssystems*) benötigt. So wird das oben behandelte System vollständig durch seine Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

repräsentiert, und das Gaußsche Eliminationsverfahren hat kurz geschrieben den folgenden Verlauf:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

Auch wenn man größere Gleichungssysteme *von Hand* rechnet, ist die Verwendung dieser Matrixschreibweise sehr zu empfehlen, weil die größere Übersichtlichkeit Fehler vermeiden hilft.

Aufgabe

▲ 8 ▲ Löst das folgende System:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 6x_5 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 8x_5 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 5\,! \end{aligned}$$

W. L. Guterman, aus Quant, Moskau übersetzt und bearbeitet von R. Hofmann, Leipzig

Aufgaben

Im folgenden geben wir eine Auswahl von Aufgaben wieder.

▲ 9 ▲ Ein Mathematiker machte eine Wanderung. Zunächst ging er auf ebener Straße, dann eine Strecke bergauf, bis er wieder umkehrte und auf gleichem Wege zurückkehrte. Er wußte, daß er insgesamt 5 Std. unterwegs war und seine Geschwindigkeit auf ebener Straße 4 km/h, bergan 3 km/h und bergab 6 km/h betragen hatte. Nach Hause zurückgekehrt, setzte er sich an den Tisch und berechnete die Entfernung von seiner Wohnung bis zum Umkehrpunkt, indem er ein Gleichungssystem aufstellte, in dem diese Entfernung als Unbekannte x und die Länge der Gefällestrecke als y vorkommt. Finde x!

▲ 10 ▲ Um einen Tisch saßen vier Zwerge. Vor jedem stand ein Becher Milch. Ein Zwerg goß $\frac{1}{4}$ seiner Milch in den Becher seines rechten Nachbarn, dieser tat danach dasselbe mit seinem rechten Nachbarn und dieser dann ebenfalls. Schließlich goß auch der vierte Zwerg ein Viertel seines Becherinhaltes in den Becher seines rechten Nachbarn, und damit war der Kreis geschlossen. Zusammen befanden sich zwei Liter Milch in den Bechern. Wieviel war zu Beginn in jedem von ihnen, wenn
a) alle Zwerge zum Schluß gleich viel in ihren Bechern hatten,
b) jeder Zwerg zum Schluß soviel Milch trinken konnte, wie er am Anfang hatte.

▲ 11 ▲ Bestimme Zahlen a, b und c so, daß die Wertetafel

x	0	1	2
y	1	2	2

zur Funktion $y = ax^2 + bx + c$ gehört!

▲ 12 ▲ Berechne Zahlen a, b und c, so daß die Funktion

$$y = a + b(x-1) + c(x-1)(x-2)$$

die folgende Wertetabelle enthält:

x	0	1	2
y	1	2	2

!

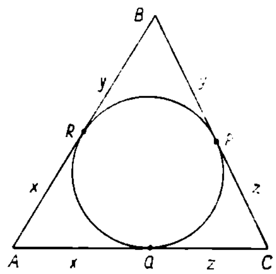
▲ 13 ▲ Es sollen vier Zahlen a, b, c und d bestimmt werden, so daß die Gleichung

$$(x-1)^2(ax+b) + (x^2+x-1)(cx+d) = 1$$

für alle reellen Zahlen x erfüllt ist.

▲ 14 ▲ Im Dreieck ABC (Bild 1) berühre der Inkreis die Seiten in den Punkten P, Q und R. Berechne $\overline{AQ} = \overline{AR} = x$, $\overline{BR} = \overline{BP} = y$ und $\overline{CP} = \overline{CQ} = z$, wenn $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ und $\overline{AB} = c$ gegeben sind!

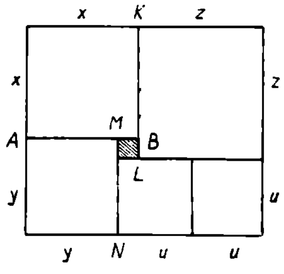
Bild 1



▲ 15 ▲ Auf der Basis AB eines gleichschenkligen Dreiecks ABC werde ein Punkt E gewählt. In die Dreiecke ACE und ECB seien die Inkreise gezeichnet, welche die Strecke EC in den Punkten K und H berühren. Berechne die Länge der Strecke KH, wenn $\overline{AE} = a$ und $\overline{EB} = b$ gegeben sind!

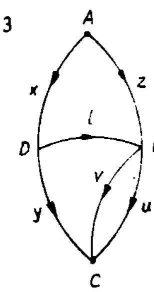
▲ 16 ▲ (23. Ukrainische Mathematikolympiade 1983 / Kl. 8)
Ein Rechteck wird entsprechend Bild 2 in Quadrate zerlegt. Es ist bekannt, daß die Seitenlänge des schraffierten Quadrates gleich eins ist. Berechne die unbekannten Seitenlängen der übrigen Quadrate!

Bild 2



▲ 17 ▲ Die Aufgabe handelt von elektrischen Netzen, die aus Leiterstücken von einheitlichem Widerstand zusammengesetzt sein sollen. Jedes Netz ist mit der Spannungsquelle in genau zwei Punkten (den Polen) verbunden. Die Teilströme in den einzelnen Zweigen genügen dann den sogenannten *Kirchhoffschen Regeln*, die für Netze dieser Art so formuliert werden können:
(a) Die Summe der in einen Knoten eintretenden Ströme ist gleich der der austretenden Ströme (die Pole zählen dabei als Knoten *nicht* mit!).
(b) In jedem geschlossenen Kreis des Netzes ist die Summe der im Uhrzeigersinn fließenden Ströme gleich der gegen den Uhrzeiger gerichteten.
(In Regel (b) sind im allgemeinen die *Spannungsabfälle* zu summieren, wegen des vorausgesetzten einheitlichen Widerstandes im Netz können wir auch hier die Ströme nehmen.)

Bild 3



In Bild 3 ist ein Netz mit den Polen A und B und den Knoten B und D dargestellt. Berechne sämtliche Ströme im Netz, wenn der Strom längs der *Kante BD* gleich 1 angenommen wird! (Die Pfeile bezeichnen für den Ansatz angenommene Stromrichtungen.)

▲ 18 ▲ 13. Allunionsolympiade, Kl. 8 und 10:
Löse das System!

(1) $$\frac{x - y\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = a$$

(2) $$\frac{y - x\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = b$$

▲ 19 ▲ Zwei Leute spielen folgendes Spiel:
Im Gleichungssystem

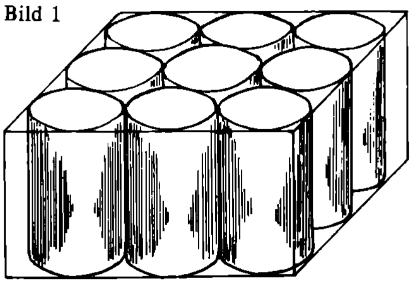
$$\begin{aligned} {*}x + {*}y &= * \\ {*}x + {*}y &= * \end{aligned}$$

setzen beide abwechselnd je eine beliebige reelle Zahl für eines der Sternchen ein. Der erste Spieler möchte, daß das System am Ende eine Lösung besitzt, während der zweite ein unlösbares System anstrebt.
Wer gewinnt bei regulär verlaufendem Spiel? Und wer gewinnt, wenn die Zielstellungen gerade vertauscht werden?

Punkt-anordnungen in einem Quadrat

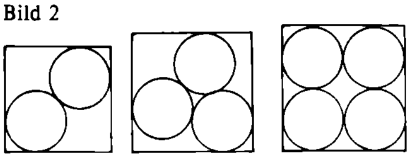
In einem Betrieb sollen kongruente zylinderförmige Werkstücke mit vorgegebenem Durchmesser d in Kisten mit quadratischer Grundfläche einschichtig verpackt werden. Es sind zu diesem Zwecke Kisten herzustellen, in denen man $n = 2, 3, 4, \ldots$ dieser Zylinder unterbringen kann, wobei die Grundflächen der Zylinder auf den Böden der Kisten stehen sollen (siehe Bild 1). Es ist die Forderung vernünftig, daß die Grundfläche der Kiste bei gegebenem n möglichst klein wird. Daraus leitet sich das folgende mathematische Problem ab.

Bild 1



Es werden diejenigen kleinsten Quadrate gesucht, in denen $n = 2, 3, 4, \ldots$ Kreise vom Durchmesser d Platz haben, ohne sich gegenseitig zu überlagern.
Wir bezeichnen mit Q_n' das kleinste Quadrat, in welches wir n Kreise mit dem Durchmesser d einlagern können, die Seitenlänge mit x_n'.
Im Bild 2 sind solche Quadrate für $n = 2$, 3, 4 dargestellt:

Bild 2



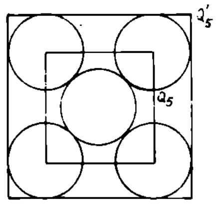
Aufgabe 1

Berechne die Seitenlängen der Quadrate Q_2', Q_3' und Q_4'! Bilde anschließend die Quotienten

$$d_n = \frac{n \cdot \frac{1}{4} d^2}{Q_n'}, \quad n = 2, 3, 4!$$

Für $n \geqq 6$ bereitet die Suche nach den kleinsten Quadraten Q_n' mitunter Mühe bzw. ist bisher für gewisse n nicht erfolgreich gewesen.
Es ist in solchen Fällen eine Arbeitsmethode der Mathematiker, aus der gegebenen Aufgabenstellung auf ein analoges Problem zu schließen, um zunächst die Lösung dieses Problems anzustreben. Falls die Lösung gelingt, werden dann Rückschlüsse auf die Ausgangsfrage angestrebt. Dieser Weg soll jetzt am Beispiel beschritten werden.
Dazu zeichnen wir zu dem Quadrat Q_n' ein Quadrat Q_n, das in Q_n' enthalten ist und dessen Seiten im Abstand $\frac{1}{2} d$ parallel zu den entsprechenden Seiten von Q_n' sind.
Die Seitenlänge ist $x_n = x_n' - d$.
Im Bild 3 ist diese Situation für $n = 5$ dargestellt. Wir erkennen, daß die Mittelpunkte der in Q_n' eingelagerten Kreise in Q_n enthalten sind.

Bild 3



Betrachten wir nun allgemein ein Quadrat Q, in dem n Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ verteilt sind, wobei keine zwei Punkte P_i, P_j $(i \neq j)$ zusammenfallen sollen. Dann gibt es zwischen diesen n Punkten genau

$\frac{n(n-1)}{2}$ Abstände P_iP_j, $i < j$,
$i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Aufgabe 2

Beweise diese Formel!
Den kleinsten dieser Abstände bezeichnen wir als Minimalabstand dieser Punktverteilung in dem Quadrat Q.
Den Begriff Minimalabstand können wir auf unser gestelltes Problem anwenden. Es entsteht der folgende Zusammenhang: Wenn Q_n' das kleinste Quadrat ist, in das n Kreise $K_1, K_2, \ldots, K_n$ vom Durchmesser d eingelagert werden können, dann ist das oben beschriebene Quadrat Q_n, das die Kreismittelpunkte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ enthält, das kleinste Quadrat, in dem n Punkte mit dem Mindestabstand d verteilt werden können und umgedreht.

Aufgabe 3

Beweise diese Aussage!
Damit steht also die Aufgabe, das kleinste Quadrat Q_n zu bestimmen, das n Punkte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ mit dem Mindestabstand d enthält.
Damit wir für verschiedene n in demselben Quadrat arbeiten können, betrachten wir zu der eben gestellten Aufgabe die äquivalente Aufgabe.
In einem Quadrat Q der Seitenlänge 1 bestimme man eine solche Verteilung von n Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$, so daß der Mindestabstand a_n^* dieser Verteilung nicht kleiner ist als der größte Wert der Mindestabstände bei allen anderen Verteilungen der n Punkte in Q.

Aufgabe 4

Man mache sich diesen Sachverhalt an Bildern mit $n = 3$ klar.
Eine Verteilung mit dem Mindestabstand a_n^* nennen wir auch *beste Verteilung von n Punkten in dem Quadrat Q*.
Für $n = 2, 3, \ldots, 9$ wurden die besten Punktverteilungen von *J. Schaer* und *A. Meir* (USA) gefunden. Für $n = 16$ und $n = 25$ stammt die Lösung von *G. Wengerodt* (Erfurt). Bild 4 zeigt die besten Verteilungen für diese n.

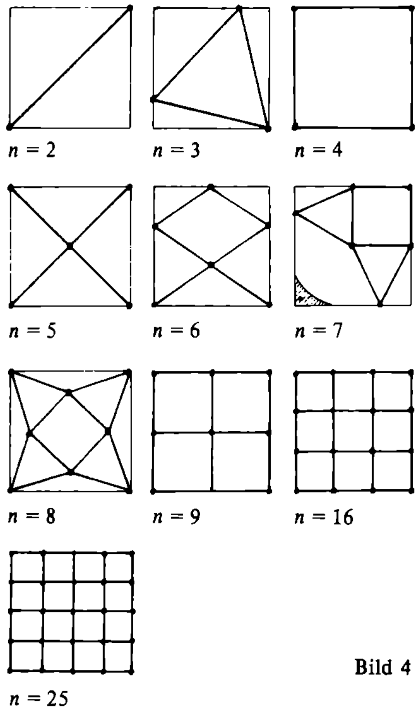


Bild 4

Bemerkenswert ist, daß für $n = 7$ ein Punkt in der schraffierten Fläche beweglich ist, obwohl eine beste Verteilung vorliegt.
Für die Beweise der besten Verteilungen von n Punkten in einem Quadrat nutzt man die Kontraposition des folgenden Satzes, der in der Literatur als *Basissatz* bezeichnet wird.
Ist $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ eine beste Verteilung von n Punkten in einem Quadrat, so liegt auf jeder Quadratseite mindestens ein Punkt von $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$.
Aus diesem Satz folgt sofort die beste Verteilung von $n = 2$ Punkten in dem Quadrat Q.

Aufgabe 5

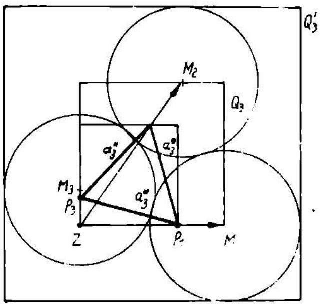
Beweise, daß $a_2^* = \sqrt{2}$ ist!
Für $n = 3$ und $n = 4$ sollen die Beweise in einem späteren Artikel vorgestellt werden.
Wir haben gesehen, daß bisher nur für sehr wenige Zahlen n die besten Verteilungen gefunden wurden.
Natürlich gibt es für viele andere n Vermutungen für beste Verteilungen dieser n Punkte in einem Quadrat Q.
Es steht also ganz allgemein die Aufgabe, möglichst gute Verteilungen von n Punk-

ten in einem Quadrat der Seitenlänge 1 zu suchen. Eine Orientierung gibt die folgende Tabelle, in der solche Vermutungen zusammengetragen sind.

n	a_n	a_n^*
2		$\sqrt{2}$
3		$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
4		1
5		$\sqrt{2}/2$
6		$\sqrt{13}/6$
7		$2(2-\sqrt{3})$
8		$(\sqrt{6}-\sqrt{2})/2$
9		1/2
10	5/12	
11	0,398...	
12	$\sqrt{34}/15$	
13	0,36603...	
14	$2(4-\sqrt{3})/13$	
15	$4/(8+\sqrt{6}+\sqrt{2})$	
16		1/3
17	0,3045...	
18	$\sqrt{13}/12$	
19	0,290	
20	$3/8-\sqrt{2}/16$	
21	0,2704...	
22	$2-\sqrt{3}$	
23	$(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$	
24	$1/(2+\sqrt{3/2}+1/\sqrt{2})$	
25		1/4

Wenn es nun für ein gegebenes n gelingt, die beste Verteilung von n Punkten in einem Quadrat Q der Seitenlänge 1 zu finden, so haben wir mit der folgenden Überlegung auch das Ausgangsproblem gelöst. Das zum Quadrat mit der Seitenlänge 1 gesuchte ähnliche Quadrat Q mit der Seitenlänge x_n erhält man durch zentrische Streckung mit dem Streckfaktor $t = \frac{d}{a_n^*}$ und dem Zentrum in einem Eckpunkt (Bild 5 zeigt den Sachverhalt für $n = 3$).

Bild 5



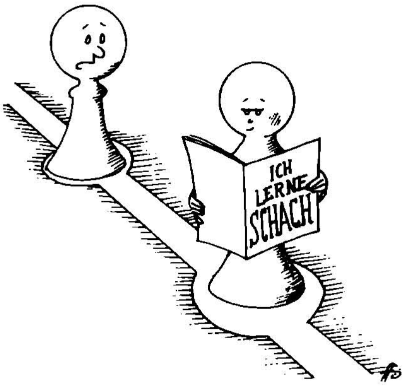
Die gesuchte minimale Grundfläche der quadratischen Kiste hat dann die Seitenlänge $x_n' = x_n + d$, und das anfangs gestellte Problem ist über diesen *Umweg* gelöst.
Die in Aufgabe 1 für $n = 2, 3, 4$ bestimmten Werte d_n geben Dichten der Kreisanordnungen in den Quadraten Q_n' an und sind damit Zahlenwerte für die Güte der Platzausnutzung in den Kisten. Für größer werdendes n streben die Werte d_n gegen $\frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0{,}9068\ldots$.
Auf diesen Sachverhalt werden wir in einem späteren Beitrag zurückkommen.

Den Abschluß dieses Beitrages bildet eine Aufgabe, zu deren Lösung man die geschilderte Methode verwenden kann.

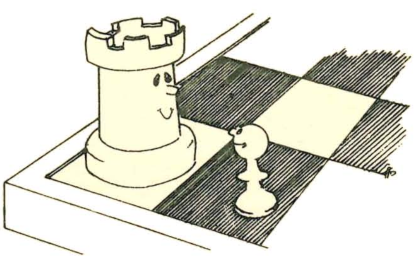
Aufgabe 6

Kann man in einem Quadrat der Seitenlänge 7 cm eine Verteilung von 26 Punkten mit dem Mindestabstand 2 cm finden?

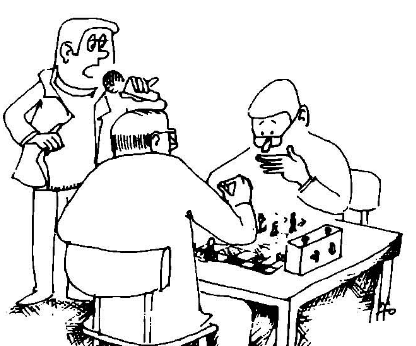
K. Kirchner/M. Schmitz



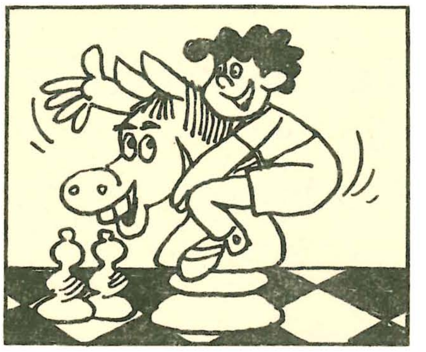
Gib es doch zu, du willst nicht mehr *Mensch ärgere dich nicht* spielen.



Darf ich mal 'raufkommen?

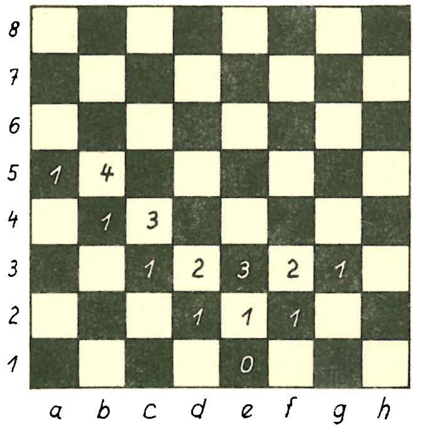


... und jetzt bekommt der Läufer die rote Karte, und Weiß hat nur noch vier Mann auf dem Feld.



Die vielen Wege des Königs

Die Frage, in wieviel Zügen und auf wieviel verschiedenen Wegen ein König von einem bestimmten Feld des Schachbretts auf ein anderes gelangen kann, ist recht interessant. Als Beispiel diene der einfache Fall, daß der König auf kürzestem Wege von e1 nach e8 wandert. Es ist leicht zu sehen, daß die Mindestanzahl der Züge 7 beträgt. Wie groß ist aber die Anzahl der möglichen Wege des Königs, in 7 Zügen von e1 nach e8 zu gelangen?



Mittels einer einfachen Methode kann man die Anzahl der Wege wie folgt auszählen:
Die Felder d2, e2 und f2 bekommen eine 1, denn sie sind von e1 in 1 Zug nur auf 1 Weg zu erreichen. Das Feld c3 erhält ebenfalls eine 1, denn es besitzt nur 1 Zugangsfeld (d2), das selber nur eine 1 trägt. Hingegen gehören zu dem Feld d3 2 Zugangsfelder d2 und e2. Es ist auf zwei Wegen erreichbar und bekommt daher eine 2. Entsprechend erhält das Feld e3 eine 3, und in dieser Weise teilt man allen entfernteren Feldern eine Zahl zu, die jeweils aus der Summe der Zahlen der Zugangsfelder besteht. In dem Diagramm sind schon einige Werte eingetragen.
Nach der vorgegebenen Methode ist der Wert des Feldes e8 zu ermitteln! Dieser Wert gibt die Anzahl der möglichen Wege des Königs, in 7 Zügen von e1 nach e8 zu gelangen, an.

H. Rüdiger

Taschenrechner für den Unterricht

Der VIII. Pädagogische Kongreß erteilte den Auftrag, die Notwendigkeit und Zweckmäßigkeit der Einführung elektronischer Taschenrechner in den Unterricht der allgemeinbildenden Oberschule wissenschaftlich zu untersuchen. Diese Untersuchungen sowie umfangreiche Schulerprobungen erbrachten, daß ein pädagogisch durchdachtes und richtiges methodisches Nutzen von Taschenrechnern als Rechenhilfsmittel im Unterricht bedeutende Potenzen in sich birgt, den Lern- und Aneignungsprozeß im Mathematikunterricht und in den naturwissenschaftlichen und polytechnischen Fächern effektiver zu gestalten. Das schließt die Möglichkeit ein, den Unterricht lebensverbundener zu gestalten und die Schüler auf allgemeinbildende Anforderungen vorzubereiten, die die wissenschaftlich-technische Entwicklung an alle Berufstätigen stellt.

Es hat sich allerdings erwiesen, daß die Nutzung von Taschenrechnern im Unterricht an eine Reihe von Voraussetzungen hinsichtlich des Niveaus der erreichten Fertigkeiten und Fähigkeiten im Rechnen aller Schüler gebunden ist. Dazu gehört in erster Linie, daß sie richtige Zahlenvorstellungen in den einzelnen Zahlenbereichen erworben haben und über sichere Fertigkeiten im mündlichen und schriftlichen Rechnen mit natürlichen und gebrochenen Zahlen verfügen. Dieser Prozeß ist – wie die Erfahrungen zeigen – am Ende der 6. Klasse auf einem für den Einsatz des Taschenrechners erforderlichen Niveau vollzogen.

Unter diesem Blickwinkel und unter Berücksichtigung der qualitativen Anforderungen, die ab Klasse 7 an die mathematische Bildung und Erziehung der Schüler gestellt sind, ist entschieden worden, beginnend mit dem Schuljahr 1985/86 in Klasse 7, an Stelle des Rechenstabs als qualitativ neues Rechenhilfsmittel den elektronischen Schulrechner SR 1 einzuführen. Diese Entscheidung geht einher mit der gleichzeitigen Einführung eines neuen Lehrplans, eines neuen Lehrbuches und neuer methodischer Hilfen für den Mathematikunterricht der Klasse 7. Die ab 2. September 1985 beginnende Arbeit mit neuen Unterrichtsmaterialien einschließlich des Nutzens elektronischer Taschenrechner in dieser Klassenstufe stellt einen bedeutenden Schritt der Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts dar.

Im Hinblick auf den elektronischen Taschenrechner werden die Schüler der Klasse 7 lernen, ihn schrittweise immer umfassender und sicherer zur Bewältigung numerischer Anforderungen und zunehmend auch als Wertespeicher zu verwenden. Dabei wird es darauf ankommen, die Möglichkeiten der schnellen und sicheren Ermittlung von Ergebnissen bei numerischen Anforderungen dafür zu nutzen, intensiver an der Herausbildung soliden Wissens über mathematische Begriffe und Zusammenhänge zu arbeiten. Dabei sind die Schüler zu der Erkenntnis zu führen, daß eine richtige Nutzung des Taschenrechners nur auf der Grundlage sicherer mathematischer Kenntnisse möglich ist.

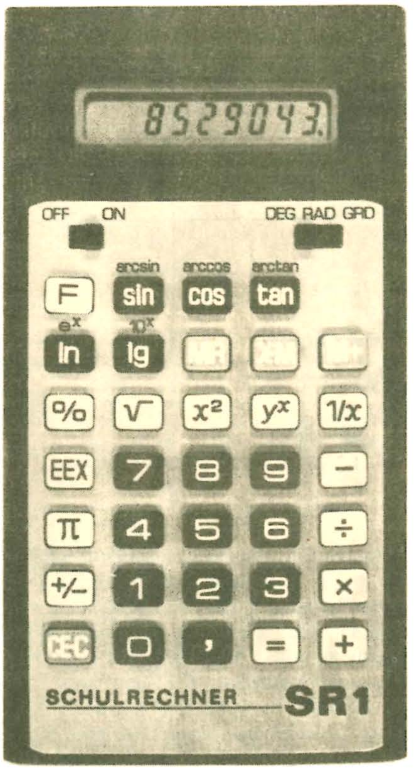
Im Mathematikunterricht wird es auch weiter Phasen geben, wo das hilfsmittelfreie Rechnen im Vordergrund steht. Das ist um so wichtiger, weil durch die Nutzung des Taschenrechners Anforderungen an das Kopfrechnen, das Abschätzen, das Überschlagsrechnen, das Rechnen mit Näherungswerten, das Entwickeln von Größenvorstellungen, die Ausprägung von Fertigkeiten und Gewohnheiten zur Kontrolle von Ergebnissen und das Arbeiten mit sinnvoller Genauigkeit bei Resultatsangaben wachsen. So gesehen erfordert gerade die Anwendung des Taschenrechners eine höhere Qualität der mathematischen Allgemeinbildung insgesamt, die mit den neuen Lehrplänen angestrebt wird.

Der mit der Einführung von elektronischen Taschenrechnern zu erreichende Effekt erfordert, daß jeder Schüler ab Klasse 7 über einen Taschenrechner im Unterricht und für Hausarbeiten verfügt. Durch die mikroelektronische Industrie unserer Republik wird dazu der Schultaschenrechner SR 1 produziert. Er besitzt neben den notwendigen Rechenarten, Funktionen und Speichern zwei langlebige Knopfzellen zur Energieversorgung (etwa 2 000 Stunden) und eine automatische Abschaltung der Stromversorgung nach sechs Minuten. Die dazugehörige Bedienungsanleitung ist speziell für die Belange der Schule ausgearbeitet worden. Es werden andere im Besitz der Schüler befindliche Taschenrechner, mit Ausnahme programmierbarer Taschenrechner, für die Verwendung im Unterricht zugelassen.

Der Verkauf der Schultaschenrechner im Einzelhandel begann für die Schüler der zukünftigen Klasse 7 im Mai 1985, um allen Elternhäusern die Möglichkeit zu geben, den Kauf bereits vor Ferienbeginn zu tätigen. Gegen Vorlage eines in der Schule ausgegebenen Bestellscheines kann der Schulrechner zu einem Preis von 123 Mark in Fachverkaufsstellen für Rundfunk und Fernsehen käuflich erworben werden. Eine verstärkte Umhüllung sichert den Schulrechner gegen Beschädigung beim Transport in den Schultaschen. Für die Fälle, daß der Kauf des eigenen Schulrechners nicht erfolgen kann oder der eigene Schulrechner durch Reparatur längere Zeit ausfällt, kann der Direktor der Schule in Absprache mit dem Fachlehrer Ausleihexemplare ausgeben. Zu diesem Zweck werden die Schulen mit einer bestimmten Anzahl zentral finanzierter Ausleihexemplare ausgestattet.

Die Reparatur der Rechner erfolgt in speziell dafür benannten Dienstleistungseinrichtungen, wobei gesichert ist, daß in jedem Kreis zumindest eine Annahmestelle für Reparaturen vorhanden ist. Der Zeitraum zwischen Abgabe eines reparaturbedürftigen Rechners in der Annahmestelle und Ausgabe des reparierten Rechners soll im allgemeinen 14 Tage nicht überschreiten.

Dr. Peter Gerstenberger,
Ministerium für Volksbildung



Mein Taschenrechner „SR 1", Teil 1

Der Schulrechner SR 1 ist ein sehr leistungsfähiger Taschenrechner aus der Produktion des VEB Mikroelektronik *Wilhelm Pieck* Mühlhausen.

Als *Hauptbestandteile* des SR 1 erkennt man von außen

- das Gehäuse mit einem Tastenfeld,
- die Anzeige,
- den Ein- und Ausschalter und
- den Umschalter für Winkelmaße (DEG, RAD, GRD).

(Schalterstellung

DEG – der Winkel ist in Grad einzugeben. Ein rechter Winkel hat 90°.

RAD – der Winkel ist in Bogenmaß einzugeben. Einem rechten Winkel entspricht ein Bogenmaß von $\frac{\pi}{2}$.

GRD – der Winkel ist in Neugrad (bzw. Gon) einzugeben. Ein rechter Winkel hat 100 Neugrad (100^g)).

Auf dem Tastenfeld befinden sich eine Reihe von Tasten, die der Eingabe von Zahlen dienen, auch *Eingabetasten* genannt. Zu ihnen gehören die Ziffertasten $\boxed{0}$; $\boxed{1}$; $\boxed{2}$; ... $\boxed{9}$, die Taste für das Komma $\boxed{,}$ (ein Komma erscheint in der Anzeige als Punkt), die Vorzeichenwechseltaste $\boxed{+/-}$, mit der man negative Zahlen eingeben kann (z. B. gibt man $-1{,}2$ durch Drücken folgender Tasten ein: $\boxed{1}$ $\boxed{,}$ $\boxed{2}$ $\boxed{+/-}$), die Taste für die Konstante π $\boxed{\pi}$ und die Taste für die Exponenteneingabe $\boxed{\text{EEX}}$.

Mit der Taste $\boxed{\text{EEX}}$ kann man Zahlen in Darstellungen wie $12 \cdot 10^4$ (also mit abgetrennten Zehnerpotenzen) in den Rechner eingeben:

Tastenfolge	Anzeige
	0.
$\boxed{1}$	1.
$\boxed{2}$	12.
$\boxed{\text{EEX}}$	12. 00
$\boxed{4}$	12. 04

Will man an Stelle von $12 \cdot 10^4$ die Zahl $12 \cdot 10^5$ eingeben, so kann man nach obiger Eingabe wie folgt verfahren:

Tastenfolge	Anzeige
	12. 04
$\boxed{0}$	12. 40
$\boxed{5}$	12. 05

▲1▲ Welche Zahl wird mit folgender Tastenfolge in den SR 1 eingegeben?

a) $\boxed{2}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{\text{EEX}}$ $\boxed{6}$
b) $\boxed{2}$ $\boxed{\text{EEX}}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{3}$
c) $\boxed{14}$ $\boxed{\text{EEX}}$ $\boxed{12}$ $\boxed{+/-}$
d) $\boxed{1{,}2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{EEX}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$

Die Tasten $\boxed{+}$, $\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$, $\boxed{y^x}$ nennt man *Operationstasten*. Operationen werden jeweils mit der *Ergebnistaste* $\boxed{=}$ abgeschlossen.

Aufgabe	Rechenablaufplan	Ergebnis
$2+3$	$\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$	5
$2 \cdot 1{,}7$	$\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{1{,}7}$ $\boxed{=}$	3,4
2^3	$\boxed{2}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$	8

Der SR 1 verfügt über eine Löschtaste $\boxed{\text{CE}-\text{C}}$. Nach einmaliger Betätigung der Taste $\boxed{\text{CE}-\text{C}}$ wird der zuletzt eingegebene Operand gelöscht. Wird die Löschtaste zweimal gedrückt, so löscht man die gesamte Eingabe.

▲2▲ Erkunde, welchen Term der SR 1 mit den angegebenen Rechenablaufplänen berechnet!

a) $\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$
b) $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$
c) $\boxed{6}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$
d) $\boxed{6}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$
e) $\boxed{6}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$
f) $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$
g) $\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{3}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{4}$ $\boxed{=}$
h) $\boxed{4}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{0{,}5}$ $\boxed{=}$
i) $\boxed{9}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{0{,}5}$ $\boxed{=}$
k) $\boxed{16}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{0{,}5}$ $\boxed{=}$

Nachdem wir die Aufgabe 2b) gelöst haben, wissen wir, daß bei Betätigung mehrerer Operationstasten hintereinander der SR 1 nur die zuletzt gewählte Operation ausführt. Daß der SR 1 eine *eingebaute* Vorrangautomatik hat, merkten wir beim Lösen der Aufgaben 2f) und 2g). Der SR 1 beachtet also die Regel „Punktrechnung geht vor Strichrechnung".

▲3▲ Gib für folgende Terme einen Rechenablaufplan an!

a) $\frac{z}{b \cdot c}$ b) $a \cdot b - c : d$ c) $a - b \cdot c$

▲4▲ Betätige die Tasten des SR 1 in angegebener Reihenfolge, und fülle die Leerstellen aus!

Schritt	Tastenfolge	Anzeige
		0.
1.	$\boxed{4}$	4.
2.	$\boxed{+}$	4.
3.	$\boxed{5}$	5.
4.	$\boxed{=}$	9.
5.	$\boxed{2}$	2.
6.	$\boxed{=}$	...
7.	$\boxed{3}$	...
8.	$\boxed{=}$	...
9.	$\boxed{1{,}5}$	...
10.	$\boxed{=}$	...

Wie man beim Ausfüllen der Leerstellen merkt, wird jeweils zu den in Schritt 5, 7, 9 eingegebenen Zahlen die Zahl 5 (zweiter Operand der Ausgangsaufgabe) addiert. Der SR 1 verfügt also über eine *Konstantenautomatik* bezüglich der Addition.

▲5▲ Erkunde, ob der SR 1 auch bezüglich der anderen Grundrechenoperationen ($\boxed{-}$, $\boxed{\times}$, $\boxed{\div}$) über Konstantenautomatik verfügt!

▲6▲ Fülle die Leerstellen aus!

a) $\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{3}$ $\underset{6}{\boxed{=}}$ $\boxed{5}$ $\underset{15}{\boxed{=}}$ $\boxed{2{,}71}$ $\underset{\dots}{\boxed{=}}$

b) $\boxed{2}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{3}$ $\underset{8}{\boxed{=}}$ $\boxed{3}$ $\underset{\dots}{\boxed{=}}$ $\boxed{4}$ $\underset{\dots}{\boxed{=}}$ $\boxed{16}$ $\underset{\dots}{\boxed{=}}$

c) $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{4}$ $\underset{\dots}{\boxed{=}}$ $\boxed{4}$ $\underset{\dots}{\boxed{=}}$ $\boxed{5}$ $\underset{\dots}{\boxed{=}}$ $\boxed{17{,}71}$ $\underset{\dots}{\boxed{=}}$

Das Betätigen einer der Funktionstasten, z. B. $\boxed{x^2}$ (bzw. $\boxed{\sqrt{x}}$ $\boxed{1/x}$) bewirkt, daß die in der Anzeige befindliche Zahl a durch a^2 $\left(\text{bzw. } \sqrt{a}\,;\, \frac{1}{a}\right)$ ersetzt wird und der Taschenrechner dann mit a^2 $\left(\text{bzw. } \sqrt{a}\,;\, \frac{1}{a}\right)$ weiterrechnet. Will man den Wert des Terms $3^2 + 4^2$ mit dem SR 1 ermitteln, so muß man vor der Betätigung der Wurzeltaste die Taste $\boxed{=}$ drücken, damit die Summe der Quadrate, in unserem Falle 25, in der Anzeige erscheint. Ein entsprechender Rechenablaufplan sieht wie folgt aus:

$\boxed{3}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{4}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$

▲7▲ Stelle zur Berechnung folgender Terme einen Rechenablaufplan auf! Kontrolliere deinen Plan mit Hilfe einfacher Zahlen!

a) $(a+b)^2$
b) $\sqrt{a + \frac{1}{b}}$
c) $\frac{1}{\sqrt{2a - b}}$
d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
e) $\sqrt{a + b \cdot c^5}$

▲8▲ Stelle einen Rechenablaufplan zur Berechnung von u auf!

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

▲9▲ Welcher Term kann mit nachstehendem Rechenablaufplan berechnet werden?

a) a $\boxed{+}$ b $\boxed{\times}$ c $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$
b) a $\boxed{+}$ b $\boxed{\times}$ c $\boxed{=}$
c) a $\boxed{\times}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ b $\boxed{=}$
d) a $\boxed{\times}$ b $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$
e) a $\boxed{+}$ $\boxed{1/x}$ b $\boxed{=}$
f) a $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ b $\boxed{=}$

Mit dem Rechenablaufplan 9c) wird nicht der Term $a \cdot \sqrt{b}$, sondern der Wert des Terms $a \cdot b$ ermittelt.

Nach Abarbeitung der Tastenfolge a $\boxed{\times}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ erscheint in der Anzeige der Wert $\sqrt{a}$. Dieser Wert wird jedoch durch die Eingabe von b gelöscht und durch b ersetzt, so daß nach der Betätigung der Taste $\boxed{=}$ der Wert von $a \cdot b$ in der Anzeige sichtbar wird. Für alle Funktionstasten wird beim SR 1 mit dem Rechenablaufplan a $\boxed{\text{Operationstaste}}$ $\boxed{\text{Funktionstaste}}$ b $\boxed{=}$ derselbe Term berechnet wie mit folgendem Rechenablaufplan:

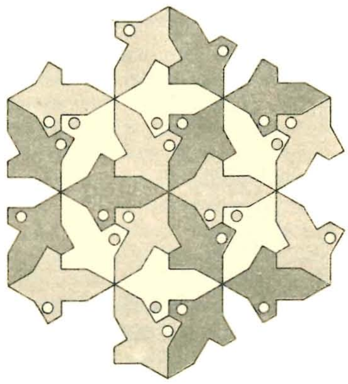
a $\boxed{\text{Operationstaste}}$ b $\boxed{=}$.

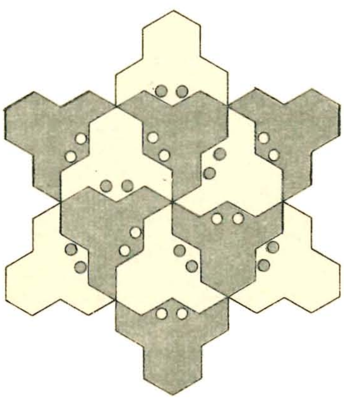
L. Flade

Fortsetzung folgt in Heft 5/85.

Drehsymmetrie

Die beiden Bilder (siehe unten) wird man als symmetrische Figuren empfinden.





Sie lassen sich jedoch nicht in die Symmetriearten einordnen, mit denen wir uns bereits beschäftigt haben.

So wurden im Heft 4/1984 (S. 80 bis 81) die *Axialsymmetrie* und im Heft 2/1985 (S. 42 bis 43) die *Zentralsymmetrie* näher betrachtet:

Eine Figur F heißt *symmetrisch bezüglich der Geraden a (axialsymmetrisch)* bzw. *symmetrisch bezüglich des Punktes Z (zentralsymmetrisch)*, wenn bei der Spiegelung an der Geraden a bzw. bei der Spiegelung am Punkt Z (d. h. Drehung um Z mit 180°) die Figur F in sich übergeht.

Bei der Betrachtung der Titelfigur erkennt man, daß sie weder axial- noch zentralsymmetrisch ist; aber sie geht durch eine Drehung mit 120° um einen Punkt in sich über. (Den geeigneten Drehpunkt erkennt man schon *gefühlsmäßig*.)

Man nennt nun eine Figur F *drehsymmetrisch bezüglich des Punktes M*, wenn es eine (nichtidentische) Drehung ϱ um M gibt, die die Figur F auf sich abbildet. Den Drehwinkel können (und wollen) wir dabei immer zwischen 0° und 360° sowie im gleichen Drehsinn wählen.

Wir betrachten dazu zwei bekannte Figuren, einen Kreis (Bild 1) und ein (einfaches) regelmäßiges Sechseck (Bild 2). (Ein n-Eck heißt *einfach*, wenn sich keine zwei seiner Seiten überschneiden.) Hier gibt es jeweils Drehungen, die die Figur zur Deckung bringen.

Bild 1

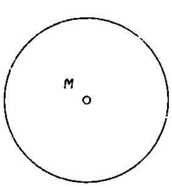
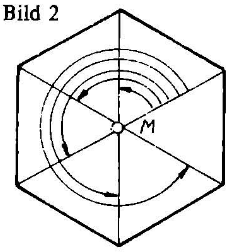


Bild 2



Während dies beim Kreis *jede* Drehung um den Mittelpunkt M leistet, kommen beim Sechseck nur fünf Drehungen um seinen Mittelpunkt M in Frage, nämlich (im gleichen Drehsinn gemessen) mit 60°, 120°, 180°, 240° und 300°, wenn man von der identischen Abbildung absieht, die als spezielle Drehung um M mit 0° aufgefaßt wird.

▲1▲ *Es sei $A_1A_2 \ldots A_n$ ein (einfaches) regelmäßiges n-Eck ($n = 3$) und M der Mittelpunkt seines Umkreises. Man bestimme alle Drehungen um M, die diese Figur auf sich abbilden!*

Lösung: Den Winkel, den zwei aufeinanderfolgende Ecken mit M bilden, etwa $\sphericalangle A_1MA_2$, hat die Größe $\frac{360°}{n}$. Die Drehung ϱ um M mit $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$ bildet nun offensichtlich die Figur auf sich ab. Da bei jeder der gesuchten Drehungen um M Ecken auf Ecken zu liegen kommen müssen, ist ihr Drehwinkel φ ein Vielfaches von $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$, genauer $\varphi = m \cdot \left(\frac{360}{n}\right)^\circ$ mit $0 \leqq m < n$, m ganzzahlig. Es gibt also genau n Drehungen um M, die die Figur zur Deckung bringen, wobei wir die identische (mit dem Drehwinkel $\varphi = 0°$) hier und später mit dazuzählen.

Wenn wir bedenken, daß die *Nacheinanderausführung $\varrho_1 \cdot \varrho_2$ zweier Drehungen ϱ_1 und ϱ_2 um M, die die Figur F zur Deckung bringen, wieder eine Drehung um M mit dieser Eigenschaft* ist, so kommen wir zu einer anderen Betrachtung unserer Aufgabe.

Die m-fache Nacheinanderausführung der Drehung ϱ um M mit $\left(\frac{360}{n}\right)^\circ$ führt die Ecke A_1 in die Ecke A_{m+1} $(1 < m < n)$ über; die n-fache Nacheinanderausführung von ϱ ist schließlich die identische Drehung, bei der A_1 wieder auf sich abgebildet wird.

Die gesuchten Drehungen sind also

$$\varrho \cdot \varrho \cdot \varrho, \ldots, \underbrace{\varrho \cdot \varrho \ldots \varrho}_{n\text{-mal}}$$

oder kurz in Potenzschreibweise ϱ^m mit $1 \leqq m \leqq n$.

Man erklärt: Eine *Figur F hat bezüglich des Punktes M eine Drehsymmetrie vom Grad n*, wenn es genau n Drehungen um M gibt (einschließlich der identischen), die die Figur F auf sich abbilden. Dabei ist nur $n \geqq 2$ von Interesse.

So hat also die Titelfigur eine Drehsymmetrie vom Grad 3, und ein regelmäßiges n-Eck hat bezüglich seines Mittelpunktes eine Drehsymmetrie vom Grad n. Dagegen hat die Drehsymmetrie des Kreises bezüglich seines Mittelpunktes *keinen* endlichen Grad.

▲2▲ *Man betrachte das Vorderrad des Fahrrades in Draufsicht. Welchen Grad hat die Drehsymmetrie dieses Bildes bezüglich des Punktes, der Bild der Radachse ist?*

▲3▲ a) Für eine systematische Gliederung der Samenpflanzen ist die Anzahl und Stellung der Blütenteile ein wichtiges Hilfsmittel, die man als Grundriß schematisch in einem sogenannten *Blütendiagramm* angibt. *Welchen Grad der Drehsymmetrie besitzt das Blütendiagramm der Tulpe (oder anderer bekannter Blumen)?*

b) *Man zerschneide einen Apfel senkrecht zur Achse Blüte – Stiel. Welchen Grad der Drehsymmetrie zeigt die Schnittfläche?*

Vielfältige Beispiele für Figuren mit Drehsymmetrie bieten Natur, Kunst und Technik; besonders eindrucksvoll sind die Rosetten an alten Bauwerken. Das Bild 3 zeigt ein drehsymmetrisches Kirchenfenster; im Stadtwappen von Erfurt (Bild 4) befindet sich eine drehsymmetrische Figur; das Laue-Diagramm in Bild 5 (ein Röntgenstrahlbeugungsgitter eines Kristalls) besitzt eine Drehsymmetrie vom Grad 6.

Bild 3

Bild 4

Bild 5

Zentral- und *Drehsymmetrie* stehen in einem engen *Zusammenhang*: Besitzt eine Figur F bezüglich des Punktes M eine Drehsymmetrie vom Grad n, so ist F genau dann zentralsymmetrisch bezüglich M, wenn n gerade ist.

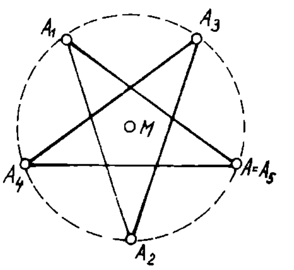
▲4▲ *Es sei ϱ eine Drehung um M mit $\frac{k}{n}$ 360° und $1 \leqq k < \frac{n}{2}$; k, n ganzz.; ferner sei $A \neq M$ ein beliebiger Punkt. Wir bezeichnen mit A_m das Bild von A bei der m-fachen Nacheinanderausführung von ϱ* (speziell sei

A_1 das Bild von A bei der Drehung ϱ) *und verbinden A mit* A_1, A_1 *mit* A_2 usw. *durch eine Strecke. Welche Streckenzüge entstehen auf diese Weise?*

Lösung: Für $m = n$ (> 1) ist die m-fache Nacheinanderausführung von ϱ wegen $m\left(\frac{k}{n}\,360°\right) = k \cdot 360°$ die identische Drehung, also $A_n = A$, d. h., der Streckenzug $\overline{AA_1A_2 \ldots A_n}$ schließt sich spätestens mit dem Punkt A_n.

Sind k, n teilerfremd, so ist $\overline{A_1A_2 \ldots A_n}$ ein regelmäßiges n-Eck. Dies ist offenbar *einfach*, wenn $k = 1$ gilt. Für $k > 1$ *überschneiden* sich die Seiten; ein solches Vieleck heißt ein *regelmäßiges Sterneck*. So erhält man für $n = 5$ und $k = 2$ das *regelmäßige Sternfünfeck* (Bild 6). (Es gibt genau zwei Arten regelmäßiger Sternsiebenecke; warum?)

Bild 6



Sind k, n nicht teilerfremd, also der größte gemeinsame Teiler von k und n eine Zahl $t > 1$, dann ist bereits $A_{n/t} = A$, d.h., es entsteht ein regelmäßiges $\left(\frac{n}{t}\right)$-Eck.

Nun kann man eine anspruchsvolle Aufgabe lösen:

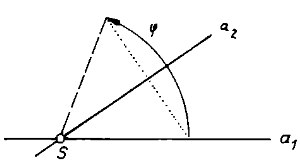
▲5▲ *Die Nacheinanderausführungen einer Drehung um M mit* $t \cdot 180°$ ($0 < t < 1$, reell) *erzeugen mit einem Punkt* $A = M$ *ein regelmäßiges Vieleck genau dann, wenn t eine rationale Zahl ist.*

Einen bemerkenswerten *Zusammenhang* gibt es *zwischen Axial- und Drehsymmetrie:*

▲6▲ *Hat eine Figur F zwei sich schneidende Geraden* a_1 *und* a_2 *als Symmetrieachsen, so ist sie bezüglich des Schnittpunktes S von* a_1 *und* a_2 *drehsymmetrisch.*

Beweis: Die Nacheinanderausführung der Spiegelungen σ_1 und σ_2 an den Geraden a_1 und a_2 ist eine Drehung um den Schnittpunkt S von a_1, a_2; der Drehwinkel ϱ läßt sich leicht konstruktiv angeben (Bild 7).

Bild 7



Da σ_1 und σ_2 die Figur jeweils auf sich abbilden, gilt dies dann auch für ϱ.

▲7▲ Gib Figuren an (insbesondere aus dem Mathematikunterricht), in denen die Voraussetzungen von ▲6▲ gelten!

Von Interesse ist, ob eine Figur *bezüglich verschiedener Punkte drehsymmetrisch* sein kann und welche Zusammenhänge dabei bestehen.

Die Ebene kann man offensichtlich einfach und lückenlos mit kongruenten Quadraten überdecken (Bild 8). Diese Figur ist drehsymmetrisch bezüglich der Quadratmitten (Grad 4), der Quadratecken (Grad 4) und der Quadratseitenmitten (Grad 2). Entsprechende Grade der Drehsymmetrie treten auch in dem Wandmuster auf, das Bild 9 zeigt.

Bild 8

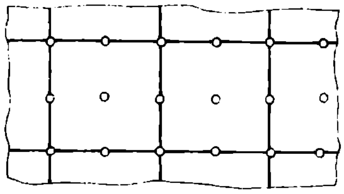
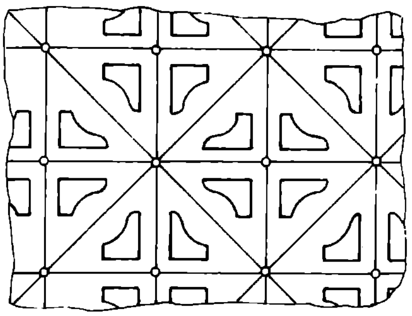
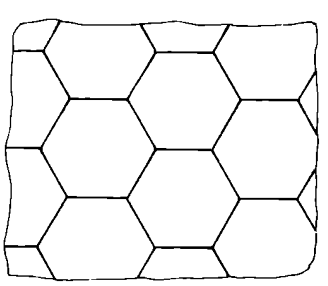


Bild 9



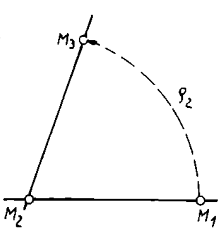
▲8▲ *Eine Parkettierung der Ebene ist auch*
a) *mit kongruenten gleichseitigen Dreiecken*
b) *mit kongruenten regelmäßigen Sechsecken („Honigwabenmuster“,* Bild 10) *möglich. Man untersuche jeweils die möglichen Drehsymmetrien!*

Bild 10



▲9▲ *Hat eine Figur F eine Drehsymmetrie von Grad* d_1 *bez.* M_1 *und eine Drehsymmetrie vom Grad* d_2 *bez.* M_2 *und gilt* $d_1 < d_2$, *dann ist F drehsymmetrisch bezüglich eines weiteren Punktes* M_3, *der nicht auf der Verbindungsgeraden von* M_1 *und* M_2 *liegt und bei dem der Grad der Drehsymmetrie* $d_3 = d_1$ *ist.*

Bild 11



Beweis: Nach Voraussetzung gibt es eine Drehung ϱ_1 um M_1 und eine Drehung ϱ_2 um M_2, die die Figur F jeweils zur Dekkung bringen. Bei der Drehung ϱ_2 geht wegen $d_2 > d_1$, also $d_2 > 2$, der Punkt M_1 in einen Punkt M_3 über, der nicht auf der Verbindungsgeraden von M_1, M_2 liegt (Bild 11). Die Figur F geht dabei in eine Figur F' über, die offenbar bezüglich M_3 eine Drehsymmetrie vom Grad d_1 besitzt. Nun ist aber F' gleich F, da F nach Voraussetzung bei der Drehung ϱ_2 in sich übergeht. Damit gilt die Behauptung.

Beispiele für den Sachverhalt in ▲9▲ bieten das Bild sowie die Figuren in ▲8▲a) und b).

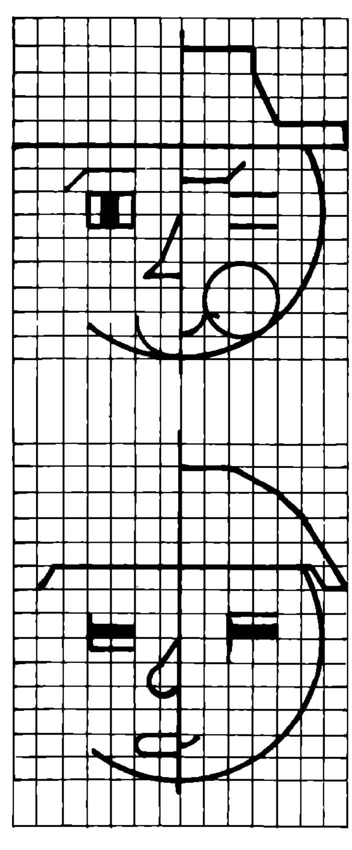
Besonders bemerkenswert ist hier noch, daß unter den Voraussetzungen in ▲9▲ für die Grade der Drehsymmetrien der Figur F nur folgende Kombinationen möglich sind:
a) alle 3; b) nur 2 und 4;
c) nur 2, 3 und 6.

Dies folgt aus der *kristallographischen Beschränkung*, auf die wir hier nicht näher eingehen können.

▲10▲ *Betrachte zu Hause (oder in der Schule) die Tapetenmuster hinsichtlich möglicher Drehsymmetrien und diesbezüglicher Grade!*

▲11▲ *Zeichne ein Muster, bei dem mehrere Drehsymmetrien auftreten, aber alle vom Grad 3 sind!*

E. Quaisser/H.-J. Sprengel



Vervollständige die folgenden Figuren so, daß axialsymmetrische Figuren entstehen, wobei s die Spiegelachse ist!

Heidrun Tittel, Gotha (Kl. 5)

Ein Besuch in der Knobelwerkstatt

Teil 3: Ernste Probleme heiter betrachtet

Liebe Freunde! Nachdem wir in Teil 2 unserer Beitragsserie die Ideenfindung für heitere mathematische Problemaufgaben (Knobelaufgaben) aus der Umwelt am Beispiel von Beobachtungen in der *Messestadt Leipzig* demonstriert haben, wollen wir in diesem Beitrag die *Mathematik* selbst zu Rate ziehen und sie *als Ideenlieferant für Knobelaufgaben* nutzen.
Damit hatten wir ja bereits begonnen, als wir nämlich in Teil 1 einige typische Klassen von mathematischen Knobelaufgaben vorgestellt haben und hierbei die Einteilung nach mathematischen Teildisziplinen (Arithmetik, Gleichungslehre, Kombinatorik, Graphentheorie, Geometrie, Logik u. a.) vorgenommen hatten. Prinzipiell kann man zu jeder mathematischen Teildisziplin Knobelaufgaben gestalten, und sei ihr Inhalt von noch so streng wissenschaftlicher Natur. Der französische Mathematiker *Blaise Pascal* (1623 bis 1662), der euch sicher durch das *Pascalsche Dreieck* bekannt ist, und der zusammen mit *Pierre de Fermat* (1601 bis 1665) als Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt, hat einmal gesagt: „Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, daß man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet ein wenig unterhaltsamer zu gestalten."
Eingedenk dieses Ausspruches wollen wir nun demonstrieren, wie man den mathematischen Objekten, Sätzen und Formeln die unterhaltsame Seite abgewinnen kann, indem wir sie in heiteren Problemaufgaben darstellen bzw. zu Knobelaufgaben umformulieren, so daß sich ihr ernsthaftes Wesen in unterhaltsamer Weise offenbart. Wir wollen das an einigen Beispielen aus der Arithmetik und der Geometrie verdeutlichen.
Zunächst drei Beispiele aus der *Arithmetik*, des Teilgebietes der Mathematik, das die Zahlenarten und ihre Rechengesetze behandelt, wobei die niedere Arithmetik die vier Grundrechenarten und die Potenzrechnung mit ihren Umkehrungen (Wurzelziehen und Logarithmieren) und die höhere Arithmetik die Theorie der Folgen und Reihen, die Zahlentheorie und auch die Kombinatorik umfaßt.

Beispiel 1

Grundobjekte der Mathematik, insbesondere der Arithmetik, sind die *Zahlen*. Ihr kennt bereits eine Reihe von Zahlenarten, wie z. B. natürliche Zahlen (gerade Zahlen, ungerade Zahlen, Primzahlen, Quadratzahlen, vollkommene Zahlen o. ä.), ganze, gebrochene, rationale, irrationale und reelle Zahlen und eventuell auch schon komplexe Zahlen. In Form der *Knobelaufgaben 1 und 2* könnte man sich etwa in unterhaltsamer Weise mit den Zahlen und deren Darstellung beschäftigen.

Beispiel 2

Ihr wißt sicher, daß man eine Zahlenfolge der Form $a_1 = a$, $a_2 = aq$, $a_3 = aq^2$, $a_4 = aq^3$, ..., $a_n = aq^{n-1}$, ... eine *geometrische Folge* mit dem Anfangsglied $a \neq 0$ und dem Quotienten q nennt, und daß man die Summe s_n der ersten n Glieder solch einer Folge mit $q \neq 1$ nach der Formel

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

berechnen kann. Von hier nehmen wir die Ideen für die *Knobelaufgaben 3 und 4*, welche die Gesetzmäßigkeiten geometrischer Folgen in unterhaltsamer Weise offenbaren.

Beispiel 3

Bekanntlich besagt der Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie, daß sich jede natürliche Zahl $n > 1$ bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig in ein Produkt von Primzahlpotenzen $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ zerlegen läßt, wobei $p_1, p_2, \ldots, p_k$ paarweise verschiedene Primzahlen und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ natürliche und von 0 verschiedene Zahlen sind. Beispielsweise gilt: $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ und $1984 = 2^6 \cdot 31$. Knobelaufgaben, die man zu diesem *Satz von der Primfaktorzerlegung* bauen könnte, wären etwa Wegeprobleme mit Zahlen *(Aufgabe 5)*, magische Figuren mit gleichen Produkten *(Aufgabe 6)*, geometrische Teilungsprobleme – mit Zahlen kombiniert *(Aufgabe 7)*, Aufgaben, welche auf die Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers bzw. kleinsten gemeinsamen Vielfachen zweier oder mehrerer natürlicher Zahlen führen *(Aufgabe 8)*, sowie weitere Denksportaufgaben, die auf der Primfaktorzerlegung basieren; vgl. dazu etwa *alpha*-heiter, Heft 6/84, *Zum Jahreswechsel* a) und c).

Nun noch zwei Beispiele zur Ideenfindung für Knobelaufgaben aus der *Geometrie*, speziell aus der *Planimetrie* (griech. Flächenmessung), also der Geometrie der höchstens zweidimensionalen Gebilde:

Beispiel 4

Grundobjekte der Planimetrie sind u. a. Punkte, Geraden, Strecken, Vielecke, insbesondere Dreiecke und Vierecke (etwa Quadrate, Rechtecke, Trapeze, Parallelogramme), Kreise und die Kegelschnitte (Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln). Hieraus kann man sehr viele Ideen für unterhaltsame Knobelaufgaben schöpfen, z. B. Teilungsprobleme ohne zusätzliche Elemente *(Aufgabe 9)*, Teilungsprobleme mit zusätzlichen Elementen *(Aufgabe 10)*, Legespiele *(Aufgabe 11)*, Hölzchenspiele *(Aufgaben 12 und 13)* und viele andere.

Beispiel 5

Wie der Name *Planimetrie* schon sagt, behandelt sie insbesondere auch die *Berechnung der Flächeninhalte ebener Figuren*. So lauten die Formeln für die Berechnung der Flächeninhalte eines Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot gh$, eines Trapezes: $A = \frac{a + c}{2} \cdot h = m \cdot h$, eines Parallelogramms: $A = gh$ und eines Drachenvierecks: $A = \frac{1}{2} \cdot ef$. Die Bedeutung der verwendeten Symbole ist euch sicher klar. Es haben also z. B. alle diejenigen Trapeze den gleichen Flächeninhalt, bei denen das Produkt mh (m: Mittellinie, h: Höhe) den gleichen Wert besitzt. Das gibt die Idee für die *Knobelaufgabe 14*. Analoge Knobelaufgaben könnte man auch zu den anderen drei Formeln gestalten. Abschließend sei mit der *Aufgabe 15* noch eine Knobelaufgabe angegeben, bei der es um den Vergleich der Oberflächen von aus gleichen Quadern (hier Streichholzschachteln) zusammengesetzten Körpern geht.

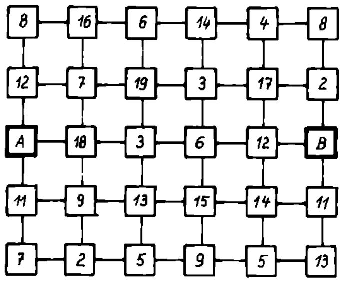
Übung zum „Eigenbau" von Knobelaufgaben

Löst die Aufgaben 1 bis 15 der Knobel-Wandzeitung (3), und versucht dann, zu jeder dieser Aufgaben eine *ähnliche* Knobelaufgabe selbst zu gestalten! Beispielsweise könntet ihr bei Aufgabe 1 Wege mit anderen Zahlenarten einbauen, bei Aufgabe 3 eine andere geometrische Folge wählen und dazu eine andere Geschichte erdichten, bei den Aufgaben 5 bis 8 zur Primfaktorzerlegung andere Zahlen (mit anderen Primfaktorzerlegungen) wählen und diese in andere Wege, Figuren usw. einbauen oder aber zu Aufgabe 14 analoge Aufgaben mit Dreiecken, Parallelogrammen bzw. Drachenvierecken gestalten. Jedoch, wir wollen eurer Phantasie nicht vorgreifen.
Wir wünschen euch beim *Eigenbau* von Knobelaufgaben viel Spaß!

R. Mildner

Knobel-Wandzeitung

▲ 1 ▲ Charakteristische Wege
Findet mindestens 4 verschiedene Wege zwischen A und B, von denen ein jeder nur natürliche Zahlen mit einer bestimmten Eigenschaft verbindet!

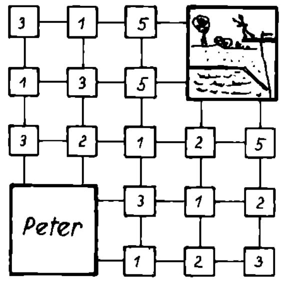


▲ 2 ▲ Erstaunliches
Denkt euch irgendeine zweistellige natürliche Zahl aus, und schreibt diese dreimal hintereinander, so daß eine sechsstellige Zahl entsteht! Dividiert diese sechsstellige Zahl jetzt durch 3, das Ergebnis dann durch 7, dieses Ergebnis wiederum durch 13 und letzteres Ergebnis schließlich durch 37! Welche Zahl erhaltet ihr nach Ausführung dieser 4 Divisionsschritte?
Begründet das Ergebnis!

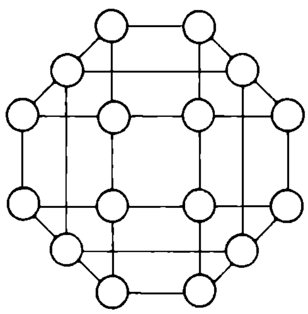
▲ 3 ▲ In der Bäckerei
Ein Bäcker hat eines Morgens noch eine gewisse Anzahl Brötchen, und im Laden sind 4 Kunden. Scherzhaft sagt der Bäcker: „Wenn jeder von Ihnen ein Drittel der jeweils noch vorhandenen Brötchen nimmt, so habe ich gerade noch 16 Brötchen übrig.“
Wie viele Brötchen hatte der Bäcker noch, und wie viele Brötchen hätte jeder der 4 Kunden nach seinem Vorschlag nehmen müssen?

▲ 4 ▲ Seemannsgarn?
In einer Hafenkneipe erzählt ein alter Seemann folgende Geschichte: „Vor vielen Jahren gingen wir einmal an einer romantischen Südseeinsel vor Anker. Als wir die Insel betraten, wurden wir von 21 wunderschönen Mädchen empfangen. Jede von ihnen trug einen goldenen Teller mit köstlichen Apfelsinen. Das erste Mädchen hatte auf seinem Teller 1 Apfelsine, das zweite 2 Apfelsinen, und jedes weitere Mädchen hatte auf seinem Teller doppelt soviel Apfelsinen wie das vorhergehende Mädchen. Dankend nahmen wir die Apfelsinen entgegen und verspeisten sie sogleich mit großem Appetit. Am nächsten Morgen lichteten wir den Anker und nahmen Kurs nach Norden.“ Was meint ihr, handelt es sich bei dieser Geschichte um Seemannsgarn?

▲ 5 ▲ Badefreuden
Peter möchte ins Freibad, doch ist das nur auf dem Wege möglich, bei dem das Produkt der dabei überquerten Zahlen 1000 beträgt. Außerdem darf er jedes Zahlenfeld nur höchstens einmal überqueren. Welchen Weg muß er nehmen?



▲ 6 ▲ Primzahl-Magie
Tragt in die Felder der Figur nur Primzahlen derart ein, daß das Produkt der 4 Zahlen in den Eckpunkten der 6 Quadrate sowie der aus drei Quadraten bestehenden Rechtecke und in jedem der 4 Dreiecke jeweils 210 beträgt!



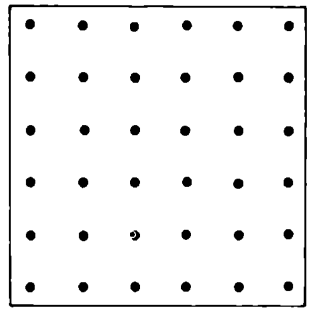
▲ 7 ▲ Gerechte Teilung
Zerlegt das abgebildete Rechteck derart in deckungsgleiche Vielecke, daß das Produkt der sich in jedem Vieleck befindlichen Zahlen 525 beträgt!

5	3	5	5	7	3
7	3	5	7	5	5
7	3	5	7	5	5
5	3	5	5	7	3

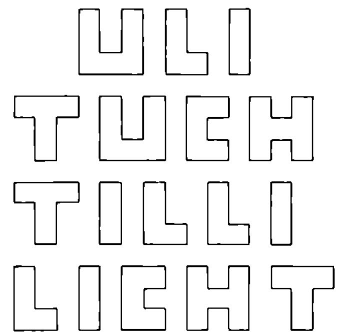
▲ 8 ▲ Frage an Aquarianer
Wieviel Liter darf ein Schöpfgefäß höchstens fassen, damit man mit ihm sowohl ein 6-Liter-Aquarium als auch ein 20-Liter-Aquarium bis zum Rand mit Wasser füllen kann (wobei das Schöpfgefäß stets voll gefüllt und dann restlos ausgegossen werden muß)?

▲ 9 ▲ Rechteck-Zerlegung
Zeichnet ein beliebiges Rechteck, und zerlegt es sodann in 24 deckungsgleiche rechtwinklige Dreiecke, und zwar a) durch 11 Geraden, b) durch 12 Geraden, c) durch 13 Geraden und d) durch 14 Geraden!

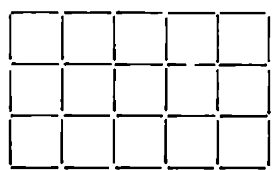
▲ 10 ▲ Von jedem etwas
Zerlegt das abgebildete Quadrat durch 5 Geraden so in 9 Teile, daß die Anzahl der Punkte in den einzelnen Teilen jeden (ganzzahligen) Wert von 0 bis 8 annimmt!



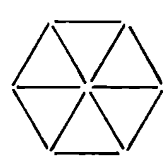
▲ 11 ▲ Nur Geduld!
Legt alle abgebildeten Buchstaben zu einer lückenlosen Quadratfläche zusammen!



▲ 12 ▲ Verschwundene Quadrate
a) Wie viele Quadrate (kleinere und auch größere) enthält die Hölzchen-Figur?
b) Entfernt aus dieser Figur 9 Hölzchen so, daß die Restfigur kein einziges Quadrat mehr enthält!



▲ 13 ▲ Sechseck-Spielereien
Entfernt aus der Figur jeweils 3 Hölzchen, so daß a) 3 gleichseitige Dreiecke, b) 3 Rhomben, c) 4 gleichseitige Dreiecke, d) 1 gleichseitiges Dreieck und 2 Rhomben und e) 2 gleichseitige Dreiecke und 1 Trapez aufgelegt sind! Überlegt euch, wie viele Möglichkeiten der Abänderung es in jedem Falle gibt!



Fortsetzung auf Seite 93

Studium in der Sowjetunion

Ein edler Mensch kann einem engen Kreis nicht seine Bildung danken. Vaterland und Welt muß auf ihn wirken…

Goethe, Tasso

In jedem Jahr begibt sich Ende Juli eine größere Zahl von Abiturienten auf eine weite und lange Reise. Nachdem sie einen Monat in einem Sprachlager verbracht haben, treten sie am ersten September ein Studium an einer sowjetischen Hochschule an. Weitere Schulabgänger fahren zur selben Zeit in andere sozialistische Länder. Die meisten verbringen fünf Jahre im Ausland, manche vier, andere auch fünfeinhalb oder sechs Jahre. Natürlich fahren sie regelmäßig in den Winter- und Sommerferien nach Hause, trotzdem wird vielen die längere Trennung von Eltern, Freundin oder Verlobtem nicht leichtfallen. Der Entschluß zu einem Auslandsstudium will gut überlegt sein. Als Auslandsabsolvent – und ehemaliger Leser der *alpha* – möchte ich einige Erfahrungen weitergeben.

Die Vorbereitung

Die Bewerbung zum Studium im Ausland erfolgt zu Beginn der 10. Klasse. Im Februar findet an der ABF Halle, dem ***Institut zur Vorbereitung auf ein Auslandsstudium***, ein Aufnahmegespräch statt. Wer im folgenden Frühjahr den Bescheid erhält, daß er zum Studium angenommen wurde, wird im September feierlich immatrikuliert, um während der 11. und 12. Klasse einen Vorbereitungskurs in Halle zu absolvieren. Hier wird nach modifizierten Lehrplänen unterrichtet. Manche Fächer entfallen, dafür wird für die sprachliche und fachspezifische Ausbildung mehr Zeit verwendet.
Es gibt auch die Möglichkeit, von einer Spezialschule direkt ins Ausland zu fahren. Ich persönlich würde die erste Variante vorziehen, da der Aufenthalt an der ABF nicht nur sprachlich und fachlich etwas gibt, sondern auch zum Leben im Kollektiv zwingt. Die Fähigkeit dazu ist im Ausland besonders wichtig.

Das Studium

Studienrichtungen gibt es viele. Das Angebot reicht von Mathematik und Physik über Biologie, Medizin, Bauwesen, Mechanisierung der Landwirtschaft bis zur Orientalistik und Diplomatie. Einiges kann man überhaupt nur in der UdSSR studieren. Zahlreich sind auch die möglichen Studienorte und Hochschulen. Der Studienablauf ist dem an unseren Hochschulen ähnlich. Umfangreich und auf hohem Niveau sind die gesellschaftswissenschaftlichen Fächer vertreten. Auch Russisch wird unterrichtet, die nötigen Kenntnisse im Englischen muß man sich während oder nach dem Studium selbst aneignen. Natürlich erlernt man die russische Sprache ebenfalls nicht passiv und automatisch, sondern nur durch häufiges Nachschlagen im Wörterbuch – zumindest in der Anfangsphase. Es sei aber betont, daß man vor der fremden Sprache nicht die geringste Scheu zu haben braucht. An ihr ist noch kein Student gescheitert.
Über die Anforderungen im Studium läßt sich pauschal wenig sagen, da sie von Fachrichtung und Hochschule abhängen. Besondere Leistungen werden z. B. an der *Lomonossow-Universität* verlangt.
Man fährt aber nicht in erster Linie ins Ausland, weil dort vielleicht das Studium *besser* wäre als bei uns. Wichtig ist, daß es etwas *anders* ist, daß man dort an manche Probleme anders herangeht. So können die Auslandsabsolventen in gewissen Fällen neue Aspekte für die Wissenschaft in unserem Lande mitbringen. Sehr wichtig sind persönliche Kontakte zu sowjetischen Spezialisten, die vor allem nach einer Aspirantur besonders eng sein werden.

Das Leben im Ausland

Die Anzahl der an den verschiedensten Universitäten studierenden DDR-Studenten ist sehr unterschiedlich. Sie schwankt zwischen einigen zehn in Städten wie Donezk und über tausend in Moskau. Das politische und kulturelle Leben in der FDJ-Organisation ist außerordentlich gut entwickelt. In Moskau hat man natürlich ein breiteres Angebot an deutschsprachigen Veranstaltungen. Doch je weniger man DDR-Studenten um sich hat, um so besser werden im Durchschnitt die Kontakte zu sowjetischen Kommilitonen sein – ein ganz wichtiges Moment des Auslandsstudiums. Ich bedaure es deshalb nicht, in einer in dieser Hinsicht *kleinen* Stadt studiert zu haben. Mit 1,3 Millionen Einwohnern ist Charkow allerdings eine der größten Städte der UdSSR.
Die Konfrontation mit einer fremden Kultur erweitert unbedingt den persönlichen Erfahrungskreis. Sie läßt die eigene Kultur einmal aus anderer Sicht sehen und zwingt zum Nachdenken über die wahren Werte im Leben. In diesem Sinne läßt sich von den sowjetischen Menschen viel lernen.
Besonders beeindruckt hat mich, wie oft in persönlichen Unterhaltungen über Krieg und Frieden gesprochen wird – in der Familie, unter Studenten oder bei zufälligen Bekanntschaften im Zug. Der erste Wunsch für das *Neue Jahr* ist bei allen, daß es ein friedliches wird. Wer fünf Jahre bei ihnen gelebt hat, kann auf die Frage:
„Хотят ли русские войны?“
ohne Zögern antworten.
Zu sehen gibt es natürlich auch einiges. Ich kenne Absolventen, die sämtliche Sowjetrepubliken bereisten. Ein Erlebnis ist auf alle Fälle die Teilnahme an einer sogenannten Baubrigade sowjetischer Studenten in den Sommerferien, auch für den, der nicht das Glück hatte, mit ihr nach Sibirien zu fahren.
Hier konnten nur ganz grobe Vorstellungen vom Studium in der UdSSR vermittelt werden. Wer mit dem Gedanken spielt, sich dafür zu bewerben, sollte sich nach Möglichkeit mit einem Absolventen unterhalten. Rund 16 000 sind es in der ganzen Republik (seit 1955). Ich denke, daß fast alle von ihnen auf die entscheidende Frage, ob sie wieder ins Ausland fahren würden, mit *Ja* antworten würden.

Für die *alpha*-Leser wählte ich zehn Aufgaben aus, die zu Aufnahmeprüfungen an Hochschulen der UdSSR für sowjetische Schulabgänger der 10. Klasse gestellt wurden. Auslandsstudenten werden delegiert und brauchen keine Prüfungen abzulegen. In Heft 5/85 veröffentlichen wir die übersetzten Aufgabentexte und die Lösungen. Viel Erfolg beim Lösen der Aufgaben!

Aufgaben

▲1▲ Доказать, что при любом натуральном n выражение
$$A_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$$
делится на 133.

▲2▲ Доказать, что произведение трёх последовательных натуральных чисел, среднее из которых есть квадрат натурального числа, делится на 60.

▲3▲ Построить график функции
$$y = \sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-2x+1}$$

▲4▲ Доказать тождество
$$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

▲5▲ Решить уравнение
$$3^x + 4^x = 5^x$$

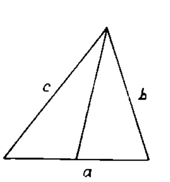
▲6▲ Решить уравнение
$$(x^2+x+1)(x^2+x+2) - 12 = 0$$

▲7▲ Решить уравнение
$$\sqrt{2x^2+5x+2} + \sqrt{2x^2+5x-9} = 1$$

▲8▲ Доказать, что
$$2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) = -1$$

▲9▲ Решить уравнение
$$\cos x \cos 2x = \cos 3x$$

▲10▲ По основанию a, боковым сторонам b и c треугольника определить отрезки, на которые биссектриса внутреннего угла при вершине делит основание.



W. R. Dick

Rational oder irrational?

Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. W. Schmidt

Sektion Mathematik,
Wissenschaftsbereich Numerik
Technische Universität Dresden

Wenn man im Bereich der *rationalen Zahlen* addiert, subtrahiert, multipliziert oder dividiert (Division durch 0 natürlich ausgeschlossen), dann erhält man als Ergebnis stets wieder eine *rationale* Zahl.
Führt man diese Rechenoperationen in der Menge der *irrationalen* Zahlen aus, dann ist das Ergebnis *nicht* immer eine irrationale Zahl.

Beispiele:

(1) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$;
das Produkt der beiden irrationalen Zahlen $\sqrt{3}$ und $\sqrt{2}$ ist eine *irrationale* Zahl $(\sqrt{6})$.

(2) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$;
das Produkt der beiden irrationalen Zahlen $\sqrt{3}$ und $\sqrt{12}$ ist eine *rationale* Zahl.

Die Beispiele (1) und (2) lassen erkennen, daß im Falle der *Multiplikation irrationaler Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen* relativ leicht entscheidbar ist, ob das Produkt rational oder irrational ist:
Wenn a, b natürliche Zahlen und $\sqrt{a}$ sowie $\sqrt{b}$ irrational sind, dann ist $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ genau dann rational, wenn $a \cdot b$ eine Quadratzahl ist.
Wir stellen uns nun die Frage, wie es mit der *Summe* irrationaler Quadratwurzeln aus natürlichen Zahlen ist.

Dazu betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel:

(3) $$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 3} = \sqrt{5 + 2 \cdot \sqrt{6}}$$

Das Ergebnis ist eine *irrationale* Zahl, denn:
Da $\sqrt{6}$ irrational ist, ist es auch $2 \cdot \sqrt{6}$ und damit auch $5 + 2 \cdot \sqrt{6}$. (Produkt oder Summe aus einer rationalen und einer irrationalen Zahl können nicht rational sein, weil sonst die irrationale Zahl als Quotient bzw. Differenz rationaler Zahlen darstellbar wäre – im Widerspruch zur anfangs erwähnten Tatsache, daß man beim Rechnen mit rationalen Zahlen nur rationale Zahlen als Ergebnisse erhält.)
Die Wurzel aus $5 + 2 \cdot \sqrt{6}$ muß dann ebenfalls irrational sein, weil die irrationale Zahl $5 + 2 \cdot \sqrt{6}$ nicht das Quadrat einer rationalen Zahl sein kann.

Die *allgemeine* Frage lautet nunmehr:
In welchen Fällen ist $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ rational, in welchen irrational, wenn a, b natürliche Zahlen und $\sqrt{a}$ sowie $\sqrt{b}$ irrational sind?

Es stellt sich heraus, daß $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ unter den angegebenen Voraussetzungen *stets irrational* ist!
Beweis:
In Analogie zum Beispiel (3) kann man $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ in der Form
$\sqrt{a + b + 2 \cdot \sqrt{ab}}$ darstellen.

Nun lassen sich zwei Fälle unterscheiden:

1. $\sqrt{ab}$ ist irrational.
Dann ist auch $a + b + 2 \cdot \sqrt{ab}$ irrational und $\sqrt{a + b + 2 \cdot \sqrt{ab}}$ ebenfalls. (Die Begründung dafür ist bereits im Beispiel (3) gegeben worden.)

2. $\sqrt{ab}$ ist rational.
Dann muß $a \cdot b$ eine *Quadratzahl* sein, also alle in der Primfaktorzerlegung vorkommenden Primzahlen in *gerader Anzahl* enthalten. Da a und b *keine* Quadratzahlen sind (sonst wären $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ ja *rationale* Zahlen), muß es für a und b folgende Produktdarstellungen geben:

$$a = k^2 \cdot P_1 \cdot P_2 \ldots P_n \text{ und}$$
$$b = l^2 \cdot P_1 \cdot P_2 \ldots P_n.$$

Dabei sind k^2 und l^2 von 0 verschiedene Quadratzahlen, die nicht weiter zerlegt zu werden brauchen.
P_1 bis P_n sind Primfaktoren, die in *beiden* Produktdarstellungen noch je einmal vorkommen. (Mindestens einen solchen Primfaktor muß es geben, sonst wären a und b Quadratzahlen.)

Setzen wir $P_1 \cdot P_2 \ldots P_n = P$, so gilt:

$$\begin{aligned} & a + b + 2 \cdot \sqrt{ab} \\ &= k^2 \cdot P + l^2 \cdot P + 2 \cdot \sqrt{k^2 \cdot l^2 \cdot P^2} \\ &= k^2 \cdot P + l^2 \cdot P + 2kl \cdot P \\ &= P \cdot (k^2 + 2kl + l^2) \\ &= P \cdot (k + l)^2 \end{aligned}$$

Damit ist $a + b + 2 \cdot \sqrt{ab}$ als Produkt der Quadratzahl $(k + l)^2$ mit den *je einmal* vorkommenden Primfaktoren $P_1, \ldots, P_n$ dargestellt, ist selbst also keine Quadratzahl. Die Wurzel daraus ist somit *irrational*.

W. Walsch

▲2578▲ Es ist eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür anzugeben, daß das Ungleichungssystem

$$2x_{i-1} + x_i \leqq 3a_i,$$
$$x_{i-1} + 2x_i \geqq 3a_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

mindestens eine Lösung $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ besitzt.

Kurzbiographie

Geboren am 4. 8. 1931 in Neukloster – Schulbesuch in Bützow, Neukloster und Güstrow, 1951 Abitur an der *John-Brinckman*-Oberschule Güstrow – 1951 bis 1955 Mathematikstudium an den Universitäten Rostock und Greifswald, insbesondere bei den Professoren *R. Kochendörffer*, *W. Rinow* und *F. v. Krbek* – danach Dozent an der Fachschule für Landwirtschaft in Greifswald-Eldena – 1956 Beginn der Tätigkeit an der Technischen Hochschule bzw. Universität Dresden als Assistent bei den Professoren *F. A. Willers* und *H. Heinrich*, 1959 Promotion, 1964 Habilitation, 1965 Ernennung zum Dozenten für *Mathematik* und 1967 Berufung zum Professor für *Numerische Mathematik* – Mitglied der Herausgebergremien zu den Zeitschriften *Computing*, *Numerische Mathematik* und ZAMM, 1973 bis 1984 gemeinsam mit *F. Kuhnert* Herausgabe der *Beiträge zur Numerischen Mathematik*, etwa 80 wissenschaftliche Publikationen.

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Der Klub Junger Mathematiker der Stadt Greifswald

Am 1. Januar 1968 wurde der *Klub Junger Mathematiker* am Haus der Jungen Pioniere *Martin Andersen Nexö* in Greifswald gegründet. In seinen Zirkeln, die die Klassen 4 bis 12 umfassen, arbeiten zur Zeit 110 Schüler mit. Höhepunkte der Zirkelarbeit bilden die Olympiaden, Leistungsvergleiche mit den Klubs benachbarter Kreise und die Ferienlager im Sommer.

Nachstehend einige Daten aus der Entwicklung des Klubs:

1961 Im Oktober wird ein zentraler Zirkel für Schüler der 8. Klasse eingerichtet, der zweimal monatlich in der EOS zusammentritt.

1962 Ein weiterer zentraler Zirkel für Klasse 6 und 7 wird in der damaligen Saarlandschule aufgestellt, ein dritter für Schüler der EOS.
Bei der Bezirksolympiade für die Klasse 10 und 12 der Erweiterten Oberschulen belegen Eckehard Gardebrecht (12) und Peter Siemer (10) jeweils den 1. Platz.

1963 Für die Klassen 5 bis 12 wird je ein Zirkel eingerichtet.

1964 *Christoph Bandt* (9) und *Wolfgang Strübing* (10) erreichen bei der Bezirksolympiade die volle Punktzahl 40!
Das 1. Ferienlager wird für Klasse 5 in Eldena im *Haus am Bodden* durchgeführt.

1967 *Christoph Bandt* erhält bei der IX. Internationalen Mathematikolympiade in Cetinje (Jugoslawien) einen 1. Preis.

1968 Gründung des *Klubs Junger Mathematiker. Christoph Bandt* erreicht bei der X. IMO in Moskau einen 1. Preis.

1971 *Andreas Stern* (9) erreicht bei der Bezirksolympiade 40 Punkte.

1972 Die Greifswalder Mannschaft belegt erstmalig Platz 1 bei der Bezirksolympiade.

1974 1. Greifswalder Stadtolympiade der 4. Klassen.
Thomas Fiedler (10) erzielt 40 Punkte bei der Bezirksolympiade.

1978 *Katharina Herrmann* (8) erreicht bei der Bezirksolympiade 40 Punkte.

1979 Die 20. Kreisolympiade wird durchgeführt.
Das 15. Ferienlager für die Klasse 6 bis 8 findet in Brüel statt.

1981 *Karin Schmidt* (7) erzielt bei der Bezirksolympiade 40 Punkte.

1982 Bei der Bezirksolympiade geht der Wanderpokal für die erfolgreichste Mannschaft in den Besitz des Stadtclubs über.

1984 *Uta Freiberg* und *Peter Abel* (7) erreichen bei der Bezirksolympiade 40 Punkte. Die 25. Olympiade (2. Stufe der XXIV. DDR-Olympiade) wird durchgeführt. Das 20. Sommerferienlager findet in Brüel statt.

Hinter diesen knappen Sätzen verbergen sich angespannte Arbeit bei den Olympiaden, interessante Zirkelnachmittage und aufgelockerte Stunden in den Ferienlagern. Alle mathematisch interessierten Schüler sind zur Mitarbeit im *Klub Junger Mathematiker* aufgerufen. Die bei den Olympiaden Ausgezeichneten werden von der Klubleitung berufen. Aber auch diejenigen, die nicht vordere Plätze belegt haben, können in den Zirkeln mitarbeiten! Die Teilnehmer treffen sich einmal wöchentlich.
Nicht jeder kann Preisträger werden, aber alle können mathematische Denk- und Arbeitsweisen im späteren Beruf anwenden!

Aufgaben der 1. Greifswalder Mathematikolympiade am 26. 3. 1961

a) *Schriftlicher Teil*

▲1▲ Der Kraftstoffverbrauch bei einer Fahrt mit dem Motorroller *Berlin* über 235 km betrug 8 l.
Wie hoch ist der Verbrauch für 100 km?

▲2▲ Nachdem 2 Traktoren die Frühjahrsbestellung auf einem 6,8 ha großen Feld in $2\frac{1}{2}$ Tagen durchgeführt haben, sollen sie die gleiche Arbeit auf einem 3,8 ha großen Ackerstück in $1\frac{1}{2}$ Tagen erledigen, ist das zu schaffen?

▲3▲ Zwei gemischte Zahlen sollen so ausgewählt werden, daß ihr Produkt 100 ergibt! (Eine Lösung genügt!)

▲4▲ Zeichne einen Winkel von 60°, und trage auf seinen Schenkeln die Strecken $\overline{ST} = \overline{SU} = 5$ cm ab! (S ist der Scheitel des Winkels!)
a) Konstruiere den Kreis, der die Schenkel in T und U berührt!
b) Ist diese Konstruktion auch möglich, wenn sich die Größe des Winkels ändert? (Begründung!)
c) Läßt sich der Kreis beim Winkel von 60° auch dann noch konstruieren, wenn $\overline{ST} = 7$ cm und $\overline{SU} = 5$ cm ist? (Begründung!)

b) *Mündlicher Teil*
(Auswahl aus 38 Aufgaben)

1. Ein Nagel wiegt $2\frac{1}{2}$ g. Die LPG kauft 10 kg.
2. Ein Traktorist pflügt 2 ha, ein anderer in der gleichen Zeit 15 800 qm. Wer schafft mehr?
3. Eine Strecke von 60 m Länge soll im Maßstab 1 : 100 gezeichnet werden. Paßt sie ins Heft?
4. Wie groß ist die Summe aller Augen auf einem Würfel?
5. In welchen Dreiecken halbiert die Höhe die Grundseite?
6. Der Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks ist 42°. Wie groß sind die anderen Dreieckswinkel?
7. In einem Eimer befinden sich 5 l Wasser. Man gießt 500 cm^3 dazu. Wieviel Wasser ist jetzt im Eimer?

Bilder von der 25. Kreisolympiade: Auszeichnung und Eröffnung

8. Ein Schüler berechnet die Diagonale eines Quadrats von 4 m Seitenlänge zu 8 m. Was sagst du dazu?

9. Eine LPG will eine rechteckige Koppel von 150 m Länge und 80 m Breite mit einem Elektrozaun abstecken. Wieviel Draht wird benötigt? (Welche Fläche wird eingezäunt?)

10. Die Seite eines 6 m langen Quadrats wird verdoppelt. Wie verändert sich der Flächeninhalt?

11. Welcher Bruch ist größer:

$$\frac{5}{12} \text{ oder } \frac{10}{17}?$$

12. Jemand hat 100 DM gespart. Wie oft kann er 8,50 DM abheben?

13. Eine Ziege ist an einem 4 m langen Strick angepflockt. Welche Fläche kann sie abgrasen? (rund)

14. Welche Zahl ist größer: (-18) oder (-10)?

15. Die Bahn eines Sputniks hat einen Durchmesser von rund 14 000 km. Welche Strecke legt er bei einer Erdumkreisung rund zurück?

16. Eine Klasse von 20 Schülern sammelte 150 kg Schrott, eine von 30 Schülern 200 kg. Welche Klasse war fleißiger? (Begründung!)

17. 1 Zoll sind 2,54 cm. Wieviel Zoll sind 30 cm? (rund)

18. Ein Würfel hat 2 m Kantenlänge. Wie verändert sich sein Volumen, wenn die Kantenlänge verdoppelt wird?

19. Wieviel Augen kann man mit 3 Spielwürfeln mindestens und höchstens werfen?

20. In einer Klasse von 32 Schülern sind 3mal so viele Mädchen wie Jungen. Wie viele Mädchen und Jungen hat die Klasse?

21. Fritz verlor beim Würfeln die Hälfte seiner Nüsse und noch eine halbe Nuß (aber ohne eine Nuß zu zerschlagen). Nun hatte er noch 12 Nüsse.

22. Eine Turmuhr schlägt 2 Uhr in 3 Sekunden. Wie lange braucht sie, um 4 Uhr zu schlagen?

23. Welche Möglichkeiten gibt es, mit 3 Würfeln 5 Augen zu würfeln?

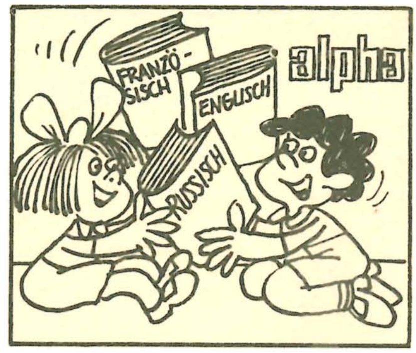
24. Bei der gestrigen Jagd schossen Herr M ein Drittel, Herr K ein Viertel aller Hasen, während die übrigen Teilnehmer die Hälfte der Hasen schossen. Was sagst du dazu?

28. Zu einem Klassenausflug erschienen nur 36 Schüler. Es waren a) 4 mehr, b) 4 weniger als $\frac{4}{5}$ der Klasse.

33. Schreibe die Zahl 11 Tausend 11 Hundert 11! (im Kopf)

34. Wie groß ist der Unterschied zwischen 3 Komma 9 und 3 Komma 10? (im Kopf)

38. Im Gesetz über den Siebenjahrplan heißt es, daß durch die Hochsee- und Küstenfischerei 1965 215 000 t Fisch gefangen werden sollen. Wieviel kg sind das?



Wie Euklids Elemente nach China kamen

Als im Jahre 1583 die ersten europäischen Missionare in China eintrafen, befand sich unter ihnen der Jesuitenpater *Matteo Ricci* (1552 bis 1610), der am Jesuitenkollegium in Rom eine für damalige Verhältnisse hervorragende mathematische Ausbildung bei dem bedeutenden Mathematiker *Christoph Clavius* (1537 bis 1612) erhalten hatte. Ricci gelang es durch diese guten mathematischen und astronomischen Kenntnisse, die Aufmerksamkeit chinesischer Gelehrter auf sich zu ziehen und ihre Hochachtung zu erringen. So erhielt er Zutritt zum kaiserlichen Hof, und unter diesem mächtigen Schutz konnten die Jesuiten dann endlich die angestrebte Missionstätigkeit entfalten. Ricci schrieb in chinesischer Sprache Bücher über praktische Arithmetik, sphärische Geometrie,

den Gebrauch des Astrolabiums u. a. und zeichnete die erste in Europa bekannt gewordene Karte Chinas. Nach einer Teilausgabe 1595 gab er 1603 bis 1607 gemeinsam mit chinesischen Mathematikern die erste vollständige chinesische Übersetzung der *Elemente des Euklid* (um 300 v. u. Z. in Alexandria) heraus. Die vordergründige Absicht war es, die Chinesen mit der Überlegenheit abendländischer Wissenschaft zu beeindrucken. So kann man feststellen, daß das berühmteste mathematische Buch aller Zeiten neben vielen anderen Zwecken auch schon politischen Zielen gedient hat..

P. Schreiber

▲1▲ Ask your friend to jot down his or her age in full years. Then get your friend to carry out the following operations:
1) Multiply the number by 5.
2) Add 25 to the result.
3) Multiply the sum by 2.
4) Add the number of the day of the week on which he or she was born. (Use Monday as day one.)
5) Subtract 50 from the sum.

When the friend gives you the final outcome, you can tell immediately how old he or she is and on what day of the week he or she was born.
How can you tell and why does it work?

▲2▲ Quel est le rayon du plus grand cercle que l'on peut tracer sur un échiquier et qui ne passe que sur les cases blanches? Prenons comme unité le côté d'une case.

▲3▲ J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons à nous deux 63 ans. Quel est mon âge? Quel est le vôtre?

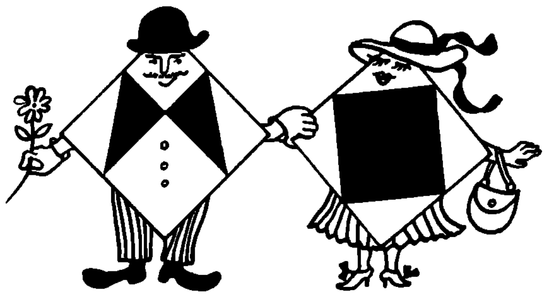
▲4▲ Арбуз разделили тремя разрезами ножа на 7 частей, а когда его съели, то на столе оказалось 8 корок. Второй арбуз разделили четырьмя разрезами ножа на 10 частей. Когда съели

его, то на столе от него осталось 12 корок. Третий арбуз разделили четырьмя разрезами ножа на 15 частей. Как разрезали арбузы и сколько корок осталось от последнего?

In freien Stunden · alpha-heiter

Aus: Sluota, Vilnius, Hillar Metz

Ein pythagoreisches Pärchen

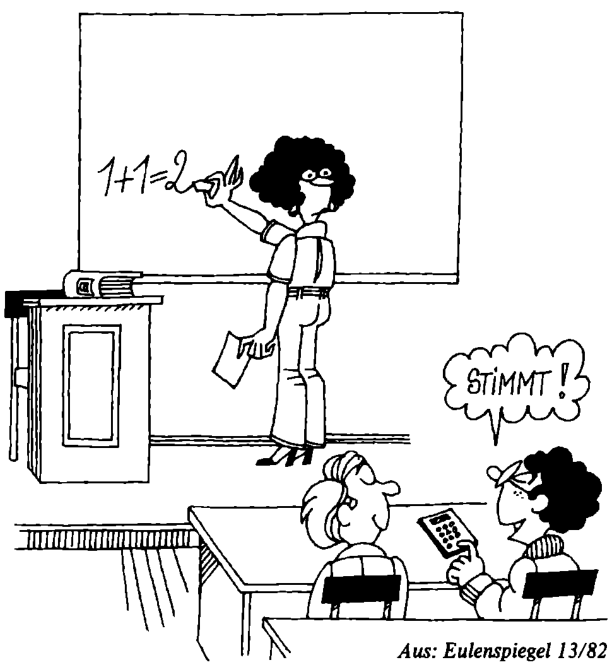


Dr. P. Schreiber, Greifswald

Ein Wägeproblem

Drei Jungen mit Vornamen Peter, Martin und Wenzel überprüften ihr Gewicht auf einer Dezimalwaage. Es stellten sich aber jeweils zwei dieser Jungen zugleich auf die Waage. Für Peter und Martin zeigte die Waage 83 kg, für Peter und Wenzel 85 kg, für Martin und Wenzel 88 kg an.
Wieviel wiegt jeder dieser drei Jungen?

Eine Schulolympiadeaufgabe (Kl. 7) aus der Math. Schülerzeitschrift rozhledy, Prag



Aus: Eulenspiegel 13/82

Ein interessantes Berührungsproblem

Kann man auf einem Tisch acht gleichartige Münzen so anordnen, daß sie sich in 14 Punkten berühren?

plus-minus, math. Schülerzeitschrift, Bialystok

Island-Story

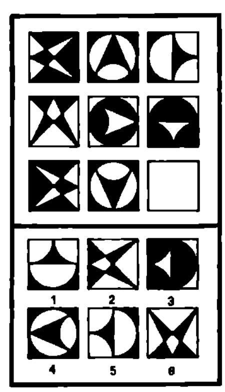
Ein Professor auf Reisen bemerkte, daß der Platz in dem kleinen Verschlag, wo er übernachten mußte, für ihn nicht ausreichte. Deshalb überlegte er: „Ich muß mich quer legen." Er maß den Raum aus, der 1,65 m lang und 88 cm breit war. Nachdem er einen Moment überlegt hatte, sagte er zu sich selbst: „Das reicht; wenn ich mich quer lege, habe ich noch 7 cm mehr Platz, als ich brauche."
Wie groß war der Professor?

Aus einem isländischen Mathematikbuch

Folgerichtige Ergänzung

Das leere Quadrat in der letzten Spalte ist durch eines der Muster 1 bis 6 so zu ersetzen, daß die letzte Spalte in der gleichen Weise folgerichtig fortgesetzt erscheint wie die beiden Spalten davor.

Aus einer bulgarischen Jugendzeitschrift



Wie alt bin ich?

Im Jahre 1981 ist mein Alter gleich der Summe der Ziffern des Jahres, in dem ich geboren bin. Wie alt bin ich?

Aus dem Arany-Dániel-Wettbewerb, Anfänger bis 15 Jahre, Ungarische VR

Knobelei mit dem Taschenrechner

Suche symmetrische Summen!
Man versteht darunter:

Nimm eine mehrstellige Zahl, z. B.	87
addiere ihre Umkehrung	+ 78
	165
addiere ihre Umkehrung	+ 561
	726
addiere ihre Umkehrung	+ 627
	1353
addiere ihre Umkehrung	+ 3531
	4884

Jetzt ist eine symmetrische Zahl entstanden. Nur wenige Ausgangszahlen ergeben innerhalb der Taschenrechnerkapazität keine symmetrische Summe. Probiert's mal!

Aus: Gilde/Altrichter: Spaß mit dem Taschenrechner, Fachbuchverlag, Leipzig

Kryptarithmetik

a) Setze die Ziffern 1 bis 9 so in die Kästchen ein, daß alle neun Ziffern verwendet werden und die vorliegenden Gleichungen erfüllt sind!

Quant, math. Schülerzeitschrift, Moskau

$$\square \times \square = \square + \square =$$
$$= \square - \square = \square : \square\square$$

b) Welche Zahl entspricht der Gleichung
$(r + o + m + a)^4 = roma$?

Mathematicko-fizika-list, jugoslawische Schülerzeitschrift, Beograd

c) Bestimme alle Ziffern x, für die $x^x + x = \overline{x0}$ gilt!

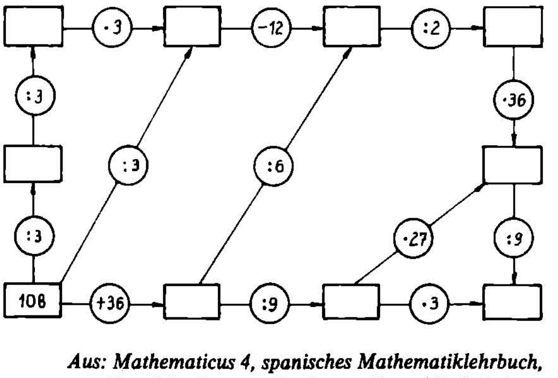
Gazeta Matematika, rumänische Schülerzeitschrift, Bukarest

d) Bestimme alle natürlichen Zahlen a, b, c, für die $ab = 144$, $bc = 240$, $ac = 60$ gilt!

Hisab, äthiopische Schülerzeitschrift, Addis Abeba

Kombiniere!

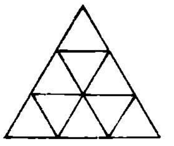
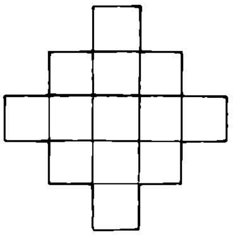
Führe die angegebenen Rechenoperationen aus!



Aus: Mathematicus 4, spanisches Mathematiklehrbuch, vorgestellt auf der Internat. Buchausstellung (IBA), Leipzig

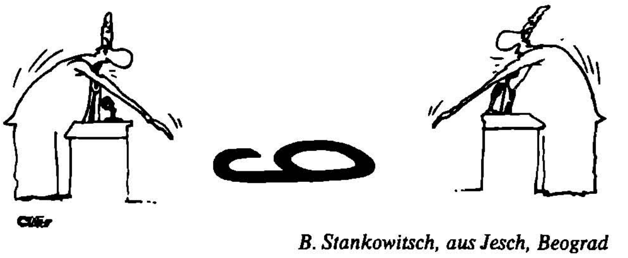
Überprüfe deine Beobachtungsgabe!

a) Wieviel Dreiecke findest du in diesem Mosaik (Bild links)?

b) Das Mosaik in Bild rechts besteht aus Quadraten dreier verschiedener Größenordnungen. Wieviel Quadrate sind es insgesamt?

Aus: J. A. Alenkow: Mathematische Schatztruhe, Kiew



B. Stankowitsch, aus Jesch, Beograd

Nur zum Spaß

Larry gab Mike $\frac{1}{2}$ seiner Murmeln. Mike gab Tom $\frac{1}{2}$ der Murmeln, die Larry ihm gab. Tom gab Sam $\frac{1}{2}$ der Murmeln, die Mike ihm gab. Welchen Bruchteil von Larrys Murmeln hatte Sam?

Mathematical Pie, englische Schülerzeitschrift, London

Dallos, aus Ludos Matyi, Budapest

XXV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Schulolympiade

Abgabe beim Mathematiklehrer: Ende September 1985

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen werden im Oktober 1985 veröffentlicht.

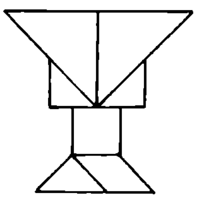
Hinweis: Unter den Aufgaben der 1. Stufe befinden sich auch solche (in der Regel ist es die 4. Aufgabe), die aus mehreren Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad bestehen. Dabei ist Teil a) meist recht einfach zu lösen und gibt in der Regel Hilfe für die Lösung der anderen Teilaufgaben. Die Lösung der letzten Teilaufgabe stellt bewußt hohe Anforderungen. Diese Teilaufgabe ist vorwiegend für die leistungsstärkeren Schüler gedacht. Es wird empfohlen, über diese anspruchsvollen Aufgaben in Klassen und Arbeitsgemeinschaften zu diskutieren.

Anmerkung: $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

250511 Die Teilflächen der dargestellten Figur lassen sich

a) zu einer Quadratfläche und
b) zu einer Rechteckfläche, die keine Quadratfläche ist, zusammensetzen.



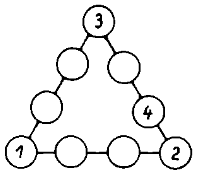
Gib je eine Möglichkeit dafür an!

220512 Bei einem Gruppenfest im Pionierlager verabreden 17 Kinder folgendes Spiel:
Es wird im Kreis herum immer wieder von 1 bis 7 gezählt, wobei sich jedes siebente Kind aus dem Kreis entfernen soll und dann auch beim weiteren Zählen nicht mehr berücksichtigt wird. Wer zuletzt übrigbleibt hat verloren und muß einen Pfand geben. Frank Pfiffig darf vorschlagen, bei welchem Kind mit dem Abzählen begonnen werden soll.
Er will seinen Freund Norbert Nörgel ärgern und beginnt mit dem Abzählen so, daß dieser verliert.
Wie kann er das erreichen?

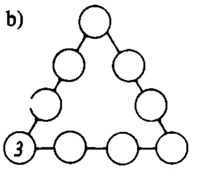
250513 Drei Kunden in einem Eisenwarengeschäft kauften Schrauben. Jede Schraube kostete 7 Pfennig. Der zweite Kunde kaufte vier Schrauben mehr als der erste Kunde. Der dritte Kunde kaufte doppelt so viele Schrauben wie der zweite Kunde. Die drei Kunden bezahlten dafür insgesamt 5 Mark und 32 Pfennig.
Wieviel bezahlte der dritte Kunde?

250514 In jedem der Bilder a, b, c sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 in die Kreise eingetragen werden. Jede dieser Zahlen soll (jeweils bei einer solchen Eintragung) genau einmal vorkommen. Für einige Kreise ist die einzutragende Zahl bereits vorgeschrieben. Ferner soll für jede Eintragung folgendes gelten: Addiert man auf je einer Dreiecksseite die vier Zahlen, so ergibt sich bei jeder der drei Seiten dieselbe Summe.

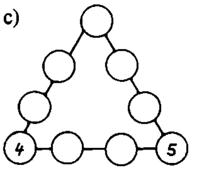
Bild a)



b)



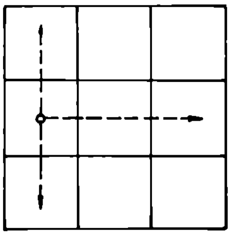
c)



a) Finde eine Eintragung in Bild a, bei der sich für jede der drei Seiten die Summe 17 ergibt!
b) Finde möglichst viele Eintragungen in Bild b, bei denen sich für jede der drei Seiten die Summe 21 ergibt!
c) Finde möglichst viele Eintragungen in Bild c, bei denen sich für jede der drei Seiten derselbe Wert der Summe ergibt! Gib zu jeder dieser Eintragungen diesen Wert an!

Olympiadeklasse 6

250611 Auf einem (3×3)-Felderbrett sollen drei Spielsteine so aufgestellt werden, daß sie sich gegenseitig nicht bedrohen. Dabei soll ein Spielstein genau diejenigen Felder bedrohen, die in der gleichen waagerechten oder in der gleichen senkrechten Reihe wie er liegen.
a) Zeichne alle möglichen Stellungen der geforderten Art für drei solcher Spielsteine!
b) Wie viele verschiedenartige Stellungen gibt es, wenn je zwei Stellungen genau dann als verschiedenartig gelten, wenn die eine nicht aus der anderen durch Drehung um das Mittelfeld hervorgehen kann?



250612

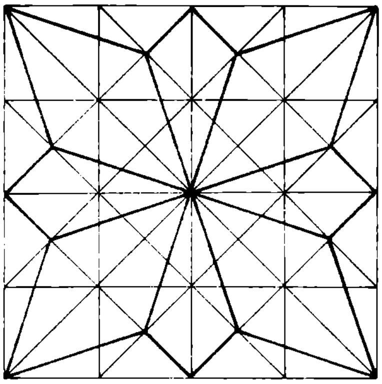
```
     m a t h e
 +     o l y m
 +         p i
 +       a d e
 -------------
   k l a s s e
```

In dem abgebildeten Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern stehen und die Aufgabe richtig gerechnet ist.
Ferner wird folgendes gefordert:
(1) Es gilt $o = m$ und $p = t$ und $y = a$, während sonst für verschiedene Buchstaben stets verschiedene Ziffern einzusetzen sind.
(2) a ist zwei Drittel von m.
(3) e ist zwei Drittel von a.
(4) Die Summe von a und s ist gleich m.
(5) d ist kleiner als h.
a) Zeige, daß es genau eine Eintragung gibt, die alle diese Forderungen erfüllt, und gib diese Eintragung an!
b) Wieviel solche Eintragungen gibt es, wenn man auf Forderung (5) verzichtet?

250613 Dirk und Jörg trafen sich in der Erfassungsstelle für Sekundärrohstoffe. Jörg hat sein Altpapier in mehrere Päckchen zu je 5 kg gebündelt und außerdem noch 3 kg loses Papier. Dirk liefert 32 kg Papier ab.
Als beide ihr Sammelergebnis vergleichen, stellen sie auch fest, daß sie zusammen mehr als 50 kg Altpapier gesammelt hatten.
Wie viele Bündel zu je 5 kg kann Jörg abgeliefert haben, wenn wir außerdem noch wissen, daß Dirk mehr Altpapier als Jörg hatte? Gib alle Möglichkeiten an!

250614 In dem Bild ist – auf einem (mit dünnen Linien gezeichneten) Hintergrund von Quadraten und ihren Diagonalen – mit dicken Linien ein Ornament gezeichnet.

Überprüfe mit durchsichtigem Papier (oder Folie), ob das Ornament axialsymmetrisch ist! Überprüfe ferner, ob es Drehungen gibt, bei denen das Ornament sich selbst als Bild hat!



Ist beides der Fall, so nenne

a) die Anzahl aller Symmetrieachsen des Ornaments,

b) alle diejenigen Drehungen, bei denen das Ornament sich selbst als Bild hat!

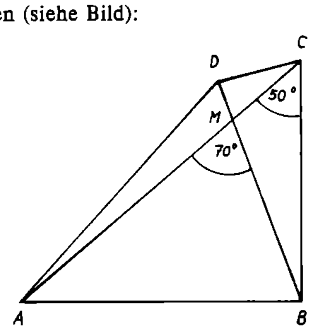
Zu Aufgabe a) zeichne auch das Ornament und alle seine Symmetrieachsen!

Olympiadeklasse 7

250711 In einer Tüte befindet sich 1 kg Zucker. Mit Hilfe einer Balkenwaage mit zwei Waagschalen (jede ausreichend groß für 1 kg losen Zucker) und genau einem 50-g-Wägestück sollen 300 g Zucker abgewogen werden.
Zeige, daß das mit nur drei Wägungen möglich ist!

250712 Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen, die folgenden Bedingungen genügen:
(1) Die Differenz der beiden Ziffern beträgt 5.
(2) Vertauscht man Zehnerziffer und Einerziffer miteinander, so entsteht eine zweistellige Zahl, deren Doppeltes um 4 größer ist als die ursprüngliche Zahl.

250713 Die Schüler Gerd und Uwe diskutieren über folgende Forderungen, die an ein konvexes Viereck $ABCD$ gestellt werden (siehe Bild):



Es soll $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD}$ gelten, und wenn M der Schnittpunkt der beiden Diagonalen AC und BD ist, so soll der Winkel $\sphericalangle BMA$ die Größe 70° und der Winkel $\sphericalangle BCM$ die Größe 50° haben. Gerd behauptet, daß durch diese Forderungen die Größe des Winkels $\sphericalangle DAM$ eindeutig bestimmt ist. Uwe vertritt die Meinung, daß es konvexe Vierecke gibt, die diese Forderungen erfüllen, aber unterschiedliche Größen des Winkels $\sphericalangle DAM$ aufweisen.
Wer hat recht?

250714 Von einem Rechteck ist bekannt:
(1) Die beiden längeren Seiten des Rechtecks sind jeweils 5 cm länger als die kürzeren.
(2) Wenn man jede Seite des Rechtecks um 10 cm verlängert, wird der Flächeninhalt des Rechtecks um 430 cm² größer.
Ermittle die Seitenlängen des ursprünglichen Rechtecks!

Olympiadeklasse 8

250811 a) Es sei b diejenige Zahl, die man erhält, wenn man die Zahl um 50% vergrößert.
Um wieviel Prozent muß diese Zahl b verkleinert werden, um wieder die Zahl 30 zu erhalten?
b) Überprüfe, ob die für die Zahl 30 gefundene Aussage bei gleicher Aufgabenstellung auch für jede beliebige positive Zahl a zutrifft.

250812 In einer Arbeitsgemeinschaft Mathematik stellen sich die Schüler gegenseitige Aufgaben.
Rainer stellt folgendes Kryptogramm zur Diskussion:

***27 · **
*****5
*****
****95

Für jedes Zeichen * soll eine Ziffer so eingesetzt werden, daß eine richtig gerechnete Aufgabe entsteht. Die eingesetzten Ziffern dürfen einander gleich oder voneinander verschieden sein. Günter ist der Meinung, daß es zu dieser Aufgabe keine Lösung gibt.
Hat er damit recht?
Begründe deine Antwort!

250813 Beweise folgenden Satz:
Die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind, ist stets durch 3 teilbar.
Ein Quader habe die Kantenlängen a, $2a$ und $\frac{a}{2}$, wobei a vorgegeben ist. Von diesem Quader werde ein gerades Prisma abgetrennt. Die Höhe dieses Prismas habe die Länge $\frac{a}{2}$, seine Grundfläche sei ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Schenkellänge a. Der Restkörper sei ein Prisma mit trapezförmiger Grundfläche.
a) Zeichne den Restkörper in Kavalierperspektive und wähle dafür $a = 6$ cm!
b) Ermittle das Volumen des Restkörpers in Abhängigkeit von a!
c) Gib das Verhältnis der Volumina des Restkörpers und des Quaders an!

Olympiadeklasse 9

250911 Aus den Ziffern 1, 9, 8, 5 seien alle möglichen vierstelligen Zahlen gebildet, wobei jede der Ziffern in jeder dieser Zahlen genau einmal vorkommen soll.
Ermitteln Sie die Anzahl aller derartigen Zahlen, die a) durch 2, b) durch 3, c) durch 4, d) durch 5, e) durch 6 teilbar sind, und geben Sie diese Zahlen jeweils an!

250912 Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare (a, b) einstelliger natürlicher Zahlen a und b, für die

$$a < \overline{a, b} < b \text{ gilt!}$$

Dabei gilt die 0 als einstellige Zahl, und mit $\overline{a, b}$ sei diejenige Dezimalzahl bezeichnet, die die Ziffer a vor dem Komma und die Ziffer b nach dem Komma hat.

250913 Man beweise: Für jede natürliche Zahl n mit $n \geqq 6$ ist es möglich, eine Quadratfläche in n (nicht notwendig kongruente) Teilquadratflächen zu zerlegen.

250914 Drei Kreise mit dem gegebenen Radius r mögen so in einer Ebene liegen, daß jeder die beiden anderen berührt. An je zwei dieser drei Kreise werde diejenige gemeinsame Tangente gelegt, die keinen Punkt mit dem dritten Kreis gemeinsam hat. Mit diesen drei Tangenten hat man ein gleichseitiges Dreieck konstruiert.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von r!
Hinweis: Für Zahlenwerte, die bei der Flächeninhaltsangabe auftreten, ist eine Verwendung von Näherungswerten zugelassen (aber nicht gefordert); dann jedoch mit einer Angabe – und Begründung –, auf wie viele Dezimalstellen der Näherungswert genau ist.

Olympiadeklasse 10

251011 a) Beweisen Sie unter Verwendung des Tafelwerkes, daß

$$\sqrt{5} + \sqrt{8} < \sqrt{6} + \sqrt{7} \text{ gilt!}$$

b) Beweisen Sie die Gültigkeit dieser Ungleichung ohne Verwendung von Näherungswerten für die Wurzeln!

251012 Drei Mathematiklehrer, die am selben Tag Geburtstag hatten und von denen jeder zu diesem Zeitpunkt jünger als 50 Jahre, aber älter als 20 Jahre war, trafen sich beim gemeinsamen Geburtstagsfest. Jeder von ihnen hatte zwei Kinder; erstaunlicherweise hatten auch alle diese sechs Kinder am selben Tag Geburtstag. Während eines Gespräches sagte der ältere von ihnen: „Ich bin heute $5\frac{1}{2}$mal so alt wie mein Sohn und 11mal so alt wie meine Tochter geworden. Wenn meine Tochter so alt sein wird, wie mein Sohn jetzt ist, dann werde ich 6mal so alt sein wie sie und 4mal so alt wie mein Sohn."
Nach kurzem Überlegen stellte der zweite Mathematiklehrer fest, daß diese Angaben auch für ihn und sein älteres und jüngstes Kind zutreffen.

Jetzt rechnete auch der jüngste von ihnen nach und sagte: „Es ist doch merkwürdig, die gleichen Aussagen gelten auch für mich und meine beiden Kinder, obgleich wir drei Lehrer doch verschieden alt sind."
Stellen Sie fest, ob es für die drei Lehrer und ihre Kinder Altersangaben gibt, bei denen alle diese Aussagen zutreffen und ob durch die Aussagen die Altersangaben eindeutig bestimmt sind! Wenn das zutrifft, geben Sie das Alter der drei Lehrer und ihrer Kinder an!

251013 Der Querschnitt eines Kanals habe die Form eines gleichschenkligen Trapezes. Seine parallelen Seiten seien waagerecht, die längere oben, die kürzere unten (*Sohle* des Grabens). Die schrägen Seitenwände seien gegen die lotrechte Richtung um 30° geneigt. Wegen der geforderten Durchflußmenge soll der Querschnitt einen vorgegebenen Flächeninhalt F besitzen. Außerdem ist die Länge a der kürzeren der parallelen Seiten des Querschnitts (Sohle des Grabens) vorgegeben.
Ermitteln Sie die Tiefe t des Kanals in Abhängigkeit von a und F! Diese Aufgabe wurde zunächst unter Verwendung trigonometrischer Verfahren bearbeitet. Am nächsten Tage trug Jörg eine Lösung ohne Verwendung der Trigonometrie vor.
Man gebe eine derartige Lösung an.

251014 Stellen Sie die Zahl 1985
a) im 2adischen Positionssystem (Dualsystem)
b) im 3adischen Positionssystem dar!
c) Woran erkennt man bei den Darstellungen in diesen Positionssystemen, daß die Zahl ungerade ist?

Anmerkung: Unter der Darstellung einer Zahl im m-adischen Positionssystem versteht man diejenige, die die Basis m und die Ziffern 0, 1, ..., $m-1$ benutzt; vgl. Lehrbuch Klasse 9, Seiten 81 bis 83.

Olympiadeklassen 11/12

251211 Man ermittle alle diejenigen Paare $(x;y)$ reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen.

$$x^2 + y = 1. \qquad (1)$$
$$x + y^2 = 1. \qquad (2)$$

251212 Einem Kreis k mit dem Radius $r = 1985$ mm sei ein gleichseitiges Dreieck ABC einbeschrieben. Ferner schneide eine durch C verlaufende Gerade s die Gerade g durch A und B in einem Punkt G und den Kreis k in einem weiteren von C verschiedenen Punkt K.
Man beweise, daß bei jeder Wahl der Geraden s unter den genannten Voraussetzungen das Produkt $\overline{CG} \cdot \overline{CK}$ denselben Wert hat und berechne diesen Wert.

Fortsetzung auf Seite 93 (Mitte unten)

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der Kreisolympiade

Klassenstufe 8 bis 10

Olympiadeklasse 8

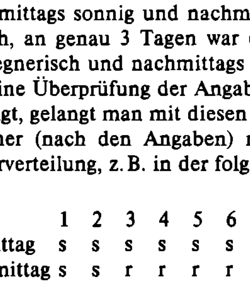
240821 Es sei x die Anzahl der Tage, an denen es vormittags und nachmittags sonnig war, y die Anzahl der Tage, an denen es vormittags sonnig und nachmittags regnerisch war, z die Anzahl der Tage, an denen es vormittags regnerisch und nachmittags sonnig war.
Da es nach (4) keinen Tag gab, an dem es vormittags und nachmittags regnerisch war, folgt aus (1) und (2), daß jeder Tag genau eine der drei bei x, y und z genannten Wetterverteilungen aufwies. Die gesuchte Anzahl der Tage, die Klaus im Ferienlager war, ist somit $x + y + z$. Aus (3), (5) bzw. (6) folgt

$$\begin{aligned} y + z &= 7, \\ x \quad + z &= 5 \\ \text{bzw.}\quad x + y \quad &= 6. \end{aligned}$$

Addiert man diese drei Gleichungen, so ergibt sich $2 \cdot (x + y + z) = 18$, also $x + y + z = 9$. Die gesuchte Anzahl läßt sich also eindeutig ermitteln, sie beträgt 9.
Weiter folgt $x = 9 - 7 = 2$, $y = 9 - 5 = 4$, $z = 9 - 6 = 3$ und damit für die Wetterverteilung:
An genau 2 Tagen war es vormittags und nachmittags sonnig, an genau 4 Tagen war es vormittags sonnig und nachmittags regnerisch, an genau 3 Tagen war es vormittags regnerisch und nachmittags sonnig.
Wie eine Überprüfung der Angaben (1) bis (6) zeigt, gelangt man mit diesen Anzahlen zu einer (nach den Angaben) möglichen Wetterverteilung, z. B. in der folgenden Tabelle:

Tag	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Vormittag	s	s	s	s	s	s	r	r	r
Nachmittag	s	s	r	r	r	r	s	s	s

240822 Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC sei M, der Umkreisradius sei r. Im Umkreis ist $\sphericalangle BAC$ Peripheriewinkel



über der Sehne BC und $\sphericalangle BMC$ der zugehörige Zentriwinkel. Daher hat $\sphericalangle BMC$ nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz die Größe $2 \cdot 30° = 60°$; nach dem Innenwinkelsatz, angewandt auf $\triangle BMC$, gilt also

$$\overline{\sphericalangle BMC} + \overline{\sphericalangle MCB} = 120°. \qquad (1)$$

Ferner ist wegen $\overline{CM} = \overline{BM} = r$ das Dreieck BCM gleichschenklig mit

$$\overline{\sphericalangle MBC} = \overline{\sphericalangle MCB}. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt $\overline{\sphericalangle MBC} = \overline{\sphericalangle MCB} = 60°$, also ist $\triangle BCM$ sogar gleichseitig, womit $\overline{BC} = r$ bewiesen ist.

240823 Die geforderte Ungleichung ist nur für positive Zahlen möglich, und für diese ist sie äquivalent mit
$\frac{15}{11} > \frac{x}{7} > \frac{11}{15}$, dies mit $\frac{105}{11} > x > \frac{77}{15}$,
und dies wird wegen
$\frac{105}{11} = 9\frac{6}{11}$, $\frac{77}{15} = 5\frac{2}{15}$ genau von den natürlichen Zahlen $x = 6, 7, 8, 9$ erfüllt.

240824 1. Jeder der beiden Teile hat eine Gestalt, die aus einem Rechteck der Seitenlängen $\frac{a}{2} = 180$ mm, $b = 120$ mm entsteht, indem an allen vier Ecken Quadrate der Seitenlänge $x = 25$ mm herausgeschnitten sind. Ein daraus hergestellter oben offener quaderförmiger Kasten der Höhe $x = 25$ mm hat als Grundfläche ein Rechteck der Seitenlängen $\frac{a}{2} - 2x = 130$ mm, $b - 2x = 70$ mm.
Daher ist sein Volumen

$$\begin{aligned} V &= 130\,\text{mm} \cdot 70\,\text{mm} \cdot 25\,\text{mm} \\ &= 227\,500\,\text{mm}^3. \end{aligned}$$

2. Mit gleicher Begründung wie in 1. ergibt sich

$$V = \left(\frac{a}{2} - 2x\right) \cdot (b - 2x) \cdot x.$$

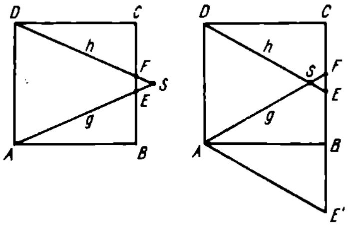
3. Als Längenangabe muß x positiv sein. Ferner wird ein Herstellen der genannten Kästen genau dann möglich, wenn auch $\frac{a}{2} - 2x$ und $b - 2x$ als Längenangaben (nämlich für Kantenlängen eines Kastens) positiv sind, d. h. genau dann, wenn außer der Ungleichung $x > 0$ auch die Ungleichungen
$\frac{a}{2} - 2x > 0$ und $b - 2x > 0$ gelten.
Diese sind äquivalent mit $2x < \frac{a}{2}$ und $2x < b$ und diese mit $x < \frac{a}{4}$ und $x < \frac{b}{2}$.
Die gesuchten Werte sind also alle diejenigen positiven Werte x, die kleiner sind als die kleinere der beiden Längenangaben $\frac{a}{4}$, $\frac{b}{2}$.

Olympiadeklasse 9

240921 Ankes Behauptung ist wahr. Dies kann folgendermaßen bewiesen werden: Gäbe es eine Liste, in der 510 Personen stehen, von denen keine zwei das gleiche Datum als Geburtstag haben, so gäbe es mindestens 510 verschiedene Daten, d. h. mindestens 510 verschiedene Tage im Jahr. Da das nicht zutrifft, gibt es keine solche Liste, w. z. b. w.
Bertolds Behauptung ist falsch. Beispielsweise kann man eine Liste von 510 Personen so zusammenstellen, daß jeder der ersten 255 Tage des Jahres das Geburtsdatum von genau 2 dieser Personen ist. Auf einer solchen Liste befinden sich dann keine drei Personen mit gleichem Geburtstag, w. z. b. w.

240922 a) Für jedes reelle $x < 5$ ist das Bestehen der Ungleichung $\frac{x}{5-x} < 4$ äquivalent (wie das Multiplizieren mit der positiven Zahl $5 - x$ bzw. für die umgekehrte Schlußweise das Dividieren durch diese Zahl zeigt) mit $x < 20 - 4x$, dies mit $5x < 20$ und dies mit $x < 4$.
b) Für jedes reelle $x > 5$ ist das Bestehen der Ungleichung $\frac{x}{5-x} < 4$ äquivalent (wie das Multiplizieren mit der negativen Zahl $5 - x$ bzw. für die umgekehrte Schlußweise das Dividieren durch diese Zahl zeigt) mit $x > 20 - 4x$, dies mit $x > 4$, was aber bereits für alle Zahlen $x > 5$ gilt, d. h. für diese mit der ursprünglichen Bedingung $x > 5$ äquivalent ist. Da für jedes reelle $x \neq 5$ entweder $x < 5$ oder $x > 5$ gilt, ist mit a) und b) bewiesen: Die gesuchten Zahlen sind genau diejenigen reellen Zahlen x, für die $x < 4$ oder $x > 5$ gilt.

240923 Aus $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\sphericalangle ABE = \sphericalangle DCF$ und $\overline{BE} = \overline{FC}$ folgt $\triangle ABE \cong \triangle DCF$, also $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CDF$. Daher ist $\triangle ADS$ gleichschenklig mit $\sphericalangle DAS = \sphericalangle ADS$.
Wegen $\sphericalangle FES = \sphericalangle DAS$ und $\sphericalangle EFS = \sphericalangle ADS$ (entweder Stufenwinkel oder Wechselwinkel) ist folglich auch $\triangle EFS$ gleichschenklig mit $\sphericalangle FES = \sphericalangle EFS$.
a) Liegen die Punkte B, E, F, C in dieser Reihenfolge auf BC, so gilt $\overline{AS} > \overline{AE}$. Da ferner AE im rechtwinkligen Dreieck ABE als Hypotenuse die längste Seite ist, gilt erst recht $\overline{AS} > \overline{AB} = \overline{AD}$. Somit ist das Dreieck ADS nicht gleichseitig; es gilt $60° \neq \sphericalangle ASD = \sphericalangle ESF$; also ist auch das Dreieck EFS nicht gleichseitig.



b) Liegen die Punkte B, F, E, C in dieser Reihenfolge auf BC, so gilt: Wäre $\triangle EFS$ gleichseitig, also $\sphericalangle FES (= \sphericalangle BEA) = 60°$, so wäre für den Bildpunkt E' von E bei Spiegelung an AB (der wegen $EB \perp AB$ auf der Verlängerung von EB liegt) $\triangle AEE'$ gleichseitig. Daher wäre $\overline{AE} = \overline{E'E} = 2 \cdot \overline{BE}$. Zerlegt man BE in 41 gleich lange Teilstrekken, von denen nach Voraussetzung 11 auf FE, also 30 auf BF kommen, so hätte $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{BF} + \overline{FC} = \overline{BF} + \overline{BE}$ die Länge von $30 + 41 = 71$ Teilstrecken. Nach dem Satz des Pythagoras müßte dann $\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AE}^2$, also $71^2 + 41^2 = (2 \cdot 41)^2$ gelten.
Es ist aber $71^2 + 41^2 = 5041 + 1681 = 6722$ und $(2 \cdot 41)^2 = 82^2 = 6724$.
Dieser Widerspruch beweist, daß $\triangle EFS$ nicht gleichseitig sein kann.

240924 Es gilt
$$z = (a-b)\cdot(a+b)\cdot(a-2b)\cdot(a+2b)\cdot(a+3b), \qquad (1)$$
was man durch Ausmultiplizieren bestätigen kann.
Von den in (1) auftretenden Faktoren sind keine zwei einander gleich; denn aus $a + nb = a + n'b$ (n, n' zwei verschiedene der Zahlen -1, 1, -2, 2, 3) folgte $(n - n')\cdot b = 0$ und daraus wegen $n \neq n'$, also $n - n' \neq 0$ weiter $b = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Olympiadeklasse 10

241021 (I) Wenn reelle Zahlen a, b, c, d das Gleichungssystem erfüllen, so folgt: Ist $b = 0$, so folgt aus (1) und (4), daß $a = 0$ und $d = 0$ gilt. Ist $b \neq 0$, so folgt aus (1), daß $c = -\frac{a^2}{b}$ gilt, und aus (2) folgt $a + d = 0$, also $d = -a$.
Daher können nur die folgenden Quadrupel das Gleichungssystem (1), (2), (3), (4) erfüllen:
(A) Alle Quadrupel $(0, 0, c, 0)$ mit beliebigem reellen c,
(B) alle Quadrupel $\left(a, b, -\frac{a^2}{b}, -a\right)$ mit beliebigem reellem a und beliebigem reellem $b \neq 0$.
(II) Für jedes in (A) genannte Quadrupel gilt
$0^2 + 0 \cdot c = 0$, $0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$,
$0 \cdot c + c \cdot 0 = 0$, $0 \cdot c + 0^2 = 0$,
d. h., es sind alle vier Gleichungen (1), (2), (3), (4) erfüllt.
Für jedes in (B) genannte Quadrupel gilt
$$a^2 + b\cdot\left(-\frac{a^2}{b}\right) = 0,$$
$$a \cdot b + b\cdot(-a) = 0,$$
$$a\cdot\left(-\frac{a^2}{b}\right) + \left(-\frac{a^2}{b}\right)\cdot(-a) = 0,$$
$$b\cdot\left(-\frac{a^2}{b}\right) + (-a)^2 = 0.$$
Mit (I) und (II) ist bewiesen: Das Gleichungssystem (1), (2), (3), (4) wird genau von allen in (A) und (B) genannten Quadrupeln erfüllt.
Auf die Lösungen der Aufgaben 2, 3 und 4, Kl. 10 sowie zu den Olympiadeklassen 11/12 wird aus Platzgründen verzichtet.

Aufgaben der Schulolympiade

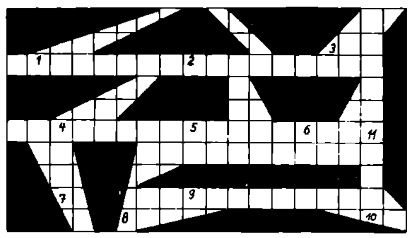
Fortsetzung von Seite 90

251213 Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die folgende Eigenschaften haben:
(1) n läßt bei der Division durch 3 den Rest 1,
(2) n^2 läßt bei der Division durch 11 den Rest 1,
(3) es gilt: $100 < n < 200$.

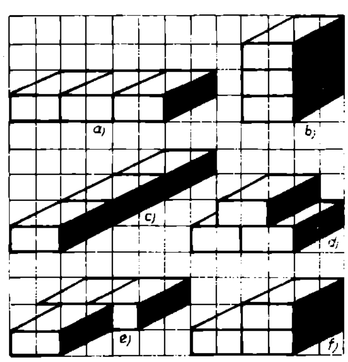
251214 Zwei Personen A und B spielen das folgende Spiel:
Zu Beginn geben sie sich (z. B. durch ein Zufallsverfahren) eine natürliche Zahl K ($K \geqq 17$) vor. Sodann wählt A aus der Menge $M = \{2, 4, 8, 16\}$ eine Zahl aus; sie sei mit a_1 bezeichnet. Daraus multipliziert B die Zahl a_1 mit einer Zahl der Menge M und erhält die Zahl b_1. Danach multipliziert A die Zahl b_1 erneut mit einer Zahl der Menge M und erhält die Zahl a_2. Anschließend setzen B und A diesen Prozeß abwechselnd fort, bis einer der Spieler ein Produkt erreicht hat, das größer als die vorher festgelegte Zahl K ist. Gewonnen hat derjenige Spieler, der als erster ein Produkt erreicht, das größer als K ist.
a) Wie muß Spieler A spielen, um mit Sicherheit zu gewinnen, wenn $K = 100$ vorgegeben ist?
b) Welcher der beiden Spieler kann den Gewinn stets erzwingen, und welche Gewinnstrategie muß er anwenden, wenn $K = 1\,000\,000$ vorgegeben ist?
c) Wie kann man bei beliebig vorgegebenem K entscheiden, welcher der beiden Spieler den Gewinn erzwingen kann, und wie muß dieser Spieler vorgehen?

Fortsetzung von Seite 83

▲ 14 ▲ Am Trapez
Welches der abgebildeten Trapeze hat den größten Flächeninhalt?



▲ 15 ▲ Mit Streichholzschachteln
Legt aus Streichholzschachteln die abgebildeten Körper zusammen, und ordnet diese 6 Körper nach der Größe ihrer Oberflächen, ohne diese auszumessen oder zu berechnen!



Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 6/84 (Fortsetzung)

Ph 6 ■ 166 Die Gleichung $s = v \cdot t$ löst man nach t auf, also $t = \frac{s}{v}$.
Dann gilt
$$t = \frac{5\,\text{km} \cdot h}{3 \cdot 8\,\text{km}} + \frac{5\,\text{km} \cdot h}{3 \cdot 10\,\text{km}} + \frac{5\,\text{km} \cdot h}{3 \cdot 12\,\text{km}},$$
$$t = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}\right) h = 0{,}514\ h.$$
$0{,}514 \cdot 60\ \text{min} = 30{,}84\ \text{min}$
$0{,}84 \quad \cdot 60\ \text{s} \approx 50\ \text{s}$
Der Sportler legt die gesamte Strecke in etwa 30 Minuten und 50 Sekunden zurück.

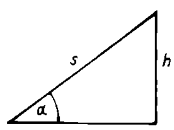
Ph 7 ■ 167 Geg.: Rest 64 l; 3mal $p = 20\,\%$ von den verbliebenen Resten
Ges.: Ursprünglicher Benzinvorrat x l
Nach der ersten Fahrt waren es
$$x - \frac{xp}{100} = x\left(1 - \frac{p}{100}\right) \text{ Liter,}$$
nach der zweiten Fahrt $x\left(1 - \frac{p}{100}\right)$
$$- x\left(1 - \frac{p}{100}\right)\frac{p}{100} = x\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 \text{ Liter,}$$
nach der dritten Fahrt $x\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2$
$$- x\left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 \frac{p}{100} = x\left(1 - \frac{p}{100}\right)^3 \text{ Liter}$$
bzw. 64 Liter.
Also gilt die Gleichung
$$x\left(1 - \frac{p}{100}\right)^3 = 64,$$
$$x = \frac{64}{\left(1 - \frac{p}{100}\right)^3},$$
$$x = \frac{64}{(1 - 0{,}2)^3},$$
$$x = 125.$$
Der Benzinvorrat betrug ursprünglich 125 Liter.

Ph 8 ■ 168
Geg.: $m_1 = 28\,\text{l} \mathrel{\hat{=}} 28\,\text{kg}$ Ges.: m_2
$\vartheta_1 = 10\,°\text{C}$
$\vartheta_2 = 100\,°\text{C}$
$\vartheta_m = 30\,°\text{C}$
Da beim Wärmeaustausch die aufgenommene gleich der abgegebenen Wärmemenge ist, gilt
$W_{\text{auf}} = c \cdot m_1(\vartheta_m - \vartheta_1)$,
$W_{\text{ab}} = c \cdot m_2(\vartheta_2 - \vartheta_m)$, $(c \neq 0)$
$$m_2 = \frac{m_1(\vartheta_m - \vartheta_1)}{\vartheta_2 - \vartheta_m},$$
$$m_2 = \frac{28\,\text{kg}(30 - 10)\,\text{K}}{(100 - 30)\,\text{K}}$$
$m_2 = 8$ kg.

Es müssen noch 8 kg bzw. 8 Liter Wasser dazugegeben werden.

Ph 9 ■ 169
Geg.: Zugkraft $F_1 = 35\,\text{kp} \cdot 0{,}95^n$
$= 35 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}95^n\,N$
Last $m = 150$ kg
Ges.: Anzahl der Rollen n
Nach der Gleichung für das Gleichgewicht am Flaschenzug gilt $F_1 = \frac{F_2}{n}$ bzw. nach den Bedingungen der Aufgabe
$$n \geqq \frac{F_2}{F_1} \text{ mit } F_2 = m \cdot g = 150 \cdot 9{,}81\,N,$$
$$n \geqq \frac{150 \cdot 9{,}81\,N}{35 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}95^n\,N} = \frac{150}{35 \cdot 0{,}95^n}.$$
Diese Ungleichung wird erfüllt für $n \geqq 6$; denn
$$6 > \frac{150}{35 \cdot 0{,}95^6} \approx 5{,}8 \text{ und}$$
$$5 < \frac{150}{35 \cdot 0{,}95^5} \approx 5{,}5.$$
Der Flaschenzug muß mindestens 6 Rollen haben.

Ph 10/12 ■ 170
Geg.: Zeit $t_1 = 26$ s (stehend)
$t_2 = 19$ s (steigend)
Höhe $h = 5{,}40$ m
Steigungswinkel $\alpha = 30°$
Ges.: a) Geschwindigkeit v_1 (stehend)
b) Geschwindigkeit v_2 (steigend)
Zuerst ist die Länge s der Fahrtreppe zu ermitteln. Es gilt (siehe Bild)
$$\sin\alpha = \frac{h}{s}, \quad s = \frac{h}{\sin\alpha}.$$



a) Die Geschwindigkeit v_1 ist dann nach $v_1 = \frac{s}{t_1}$ und mit $s = \frac{h}{\sin\alpha}$
$$v_1 = \frac{h}{t_1 \cdot \sin\alpha},$$
$$v_1 = \frac{5{,}40\,\text{m}}{26\,\text{s} \cdot \sin 30°}$$
$$v_1 = 0{,}415\,\text{m/s}.$$
Die Geschwindigkeit beträgt stehend 0,415 m/s.
b) Die Geschwindigkeit v_2 ist dann entsprechend $v_2 = \frac{s}{t_2} = \frac{h}{t_2 \cdot \sin\alpha}$,
$$v_2 = \frac{5{,}40\,\text{m}}{19\,\text{s} \cdot 0{,}5} = 0{,}568\,\text{m/s}.$$
Die Geschwindigkeit beträgt steigend 0,568 m/s.

Lösung zu: Spaß mit Brüchen
Heft 3/85, Seite 55

Es seien x und y ganze Zahlen, dann ist $\frac{x}{y}$ ein gemeiner Bruch.

a) Es gilt $\frac{x + 2}{y + 2} = \frac{2x}{y}$.
Dann ist $2xy + 4x = xy + 2y$
bzw. $xy + 4x - 2y = 0$
oder $(x - 2)(y + 4) = -8$
mit den ganzzahligen Lösungspaaren $(-1; 8)$; $(-2; 4)$; $(-4; 2)$ usw.
Davon erfüllen nur $(x - 2) = -1$ und $y + 4 = 8$ die Bedingungen der Aufgabe, und $x = 1$; $y = 4$. Der Bruch ist $\frac{1}{4}$.
b) Entsprechend a) gilt $\frac{x + 3}{y + 3} = \frac{2x}{y}$,
$$xy + 6x - 3y = 0,$$
$$(x - 3)(y + 6) = -18.$$
Mögliche Lösungen sind $(-1; 18)$, $(-2; 9)$, $(-3; 6)$ usw.
Davon erfüllen
$x_1 - 3 = -1$ und $y_1 + 6 = 18$ bzw.
$x_2 - 3 = -2$ und $y_2 + 6 = 9$
die Bedingungen der Aufgabe und
$x_1 = 2$; $y_1 = 12$ bzw. $x_2 = 1$; $y_2 = 3$.
Die Brüche lauten $\frac{2}{12}$ und $\frac{1}{3}$.
c) Entsprechend a) gilt $\frac{x + 3}{y + 3} = \frac{3x}{y}$,
$$2xy + 9x - 3y = 0,$$
$$(2x - 3)(2y + 9) = -27.$$
Das führt zu dem Bruch $\frac{1}{9}$.
d) Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner erhält man
$$3n + 3m = 2mn,\ 3(n + m) = 2mn.$$
O. B. d. A. ist dann m durch 3 teilbar. Nur $m = 3$ und $m = 6$ führt zu den geforderten Lösungen.
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ und } \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$
e) $$\frac{p}{q} + \frac{q}{p} + 2 = \frac{p^2 + q^2 + 2pq}{p \cdot q} = \frac{(p + q)^2}{m^2}$$
f) Es sei $m < n$, dann ist $m + n < 2n$, und demzufolge gilt
$$\frac{2}{m + n} > \frac{1}{n}.$$
Ferner ist $m + n > 2m$ und demzufolge
$$\frac{2}{m + n} < \frac{1}{m}.$$

Lösung zu: Umfüllaufgabe, Heft 3/85
Es bezeichne A das 12-Maß-Gefäß, B das 8-Maß-Gefäß und C das 5-Maß-Gefäß. Das schrittweise Umfüllen kann wie in den folgenden Tabellen angegeben erfolgen:

A	12	4	4	9	9	1	1	6
B	0	8	3	3	0	8	6	6
C	0	0	5	0	3	3	5	0

A	12	7	7	2	2	10	10	5	5	0
B	0	0	5	5	8	0	2	2	7	7
C	0	5	0	5	2	2	0	5	0	5

A	0	8	8	3	3	11	11	6	6
B	8	0	4	4	8	0	1	1	6
C	4	4	0	5	1	1	0	5	0

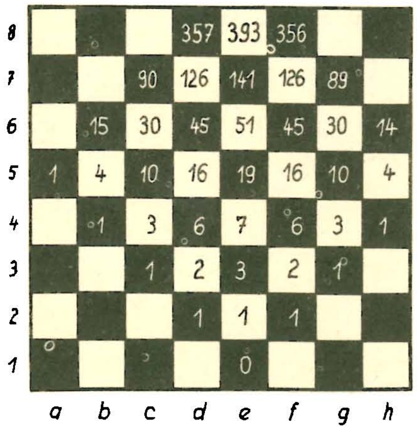
Jetzt bezeichne K den 8-Maß-Krug, L den 5-Maß-Krug und M den 3-Maß-Krug.

K	0	3	3	6	6	1	1	4
L	5	5	2	2	0	5	4	4
M	3	0	3	0	2	2	3	0

K	0	5	5	2	2	7	7	4	4
L	5	0	3	3	5	0	1	1	4
M	3	3	0	3	1	1	0	3	0

Lösungen zu:
Die vielen Wege des Königs

Der König hat 393 verschiedene Möglichkeiten, in 7 Zügen von dem Feld e1 nach dem Feld e8 zu gelangen.



Lösungen zu:
Mein Taschenrechner SR 1

▲1▲
a) $-2 \cdot 10^6$; b) $2 \cdot 10^{-3}$; c) $14 \cdot 10^{-12}$; d) $1{,}2 \cdot 10^3 = 1200$

Das Betätigen der $\boxed{\times}$-Taste vor der Taste $\boxed{\text{EEX}}$ ist nicht erforderlich, führt aber auch nicht zu einer falschen Eingabe.

▲2▲
a) $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$; b) $2 \cdot 4 = 8$;
c) $\frac{6 \cdot 2}{3} = 4$; d) $\frac{6}{3} \cdot 2 = 4$;
e) $\frac{6}{3 \cdot 2} = 1$; f) $2 + 3 \cdot 4 = 14$;
g) $2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18$; h) $\sqrt[2]{4} = 2$;
i) $\sqrt[2]{9} = 3$; k) $\sqrt[2]{16} = 4$

▲3▲
a) $z \boxed{\div} b \boxed{\div} c \boxed{=}$
b) $a \boxed{\times} b \boxed{-} c \boxed{\div} d \boxed{=}$
c) $a \boxed{-} b \boxed{\times} c \boxed{=}$

▲4▲

Schritt	Tastenbetätigung	Anzeige
6.	$\boxed{=}$	7.
7.	$\boxed{3}$	3.
8.	$\boxed{=}$	8.
9.	$\boxed{1{,}5}$	1.5
10.	$\boxed{=}$	6.5

▲5▲
Die Konstantenautomatik tritt bei allen Grundrechenoperationen auf.

▲6▲
a) 8, 13. b) 27; 64; 4096.
c) 14; 16; 17; 29, 71
Da der SR 1 über Vorrangautomatik verfügt, wird durch diese Schaltung bei mehreren Operationen verschiedener Stufe eine andere Arbeitsweise der Konstantenautomatik hervorgerufen. So wird in unserem Beispiel nicht der zuletzt eingegebene Operand als Konstante multipliziert, sondern zu jeder Eingabe wird 12 ($3 \cdot 4$) addiert.

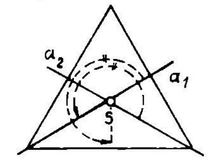
▲7▲
a) $a \boxed{+} b \boxed{=} \boxed{x^2}$
b) $a \boxed{+} b \boxed{1/x} \boxed{=} \boxed{\sqrt{\ }}$
c) $2 \boxed{\times} a \boxed{-} b \boxed{=} \boxed{\sqrt{\ }} \boxed{1/x}$
d) $a \boxed{1/x} \boxed{+} b \boxed{1/x} \boxed{=}$
e) $a \boxed{+} b \boxed{\times} c \boxed{y^x} 5 \boxed{=} \boxed{\sqrt{\ }}$

▲8▲ $a \boxed{1/x} \boxed{+} b \boxed{1/x} \boxed{=} \boxed{1/x}$

▲9▲ a) $a + b\sqrt{c}$ d) $a \cdot \sqrt{b}$
b) $a + b \cdot c$ e) $a + b$
c) $a \cdot b$ f) $\frac{1}{a} + b$

Lösungen zu: Drehsymmetrie

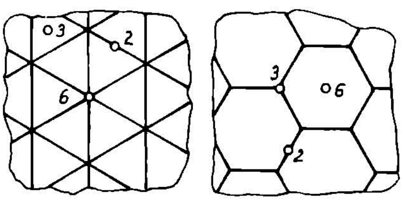
▲2▲ Das Vorderrad eines 28er Tourenrades hat 36 Speichen. Auf Grund der Art der Speichenverspannung kann eine Speiche erst mit der nächsten 4. durch Drehung zur Deckung gebracht werden. Der Grad der Drehsymmetrie ist also $\frac{36}{4} = 9$.



▲3▲ a) 3; b) 5.

▲7▲ Einfache Beispiele sind der Kreis, das Quadrat und das gleichseitige Dreieck.

▲8▲ a) b)



▲11▲ Bei aufmerksamer Betrachtung des Titelbildes erkennt man, daß sich die Lagerung der Teilfiguren zu einer Parkettierung der Ebene fortsetzen läßt. Diese Figur besitzt Drehsymmetrien bezüglich nichtkolinearer Punkte, aber alle vom Grad 3.

Lösungen zu: Sprachecke

▲1▲ Bitte deinen Freund, sein Alter in vollen Jahren aufzuschreiben und dann folgende Rechenoperationen durchzuführen:
1) Multipliziere die Zahl mit 5!
2) Addiere zu dem Ergebnis 25!
3) Multipliziere die Summe mit 2!
4) Addiere die Zahl des Wochentages, an dem er geboren wurde. (Montag ist der erste Tag.)
5) Subtrahiere von der Summe 50!

Wenn dir dein Freund das Endergebnis nennt, kannst du sofort sagen, wie alt er ist und an welchem Wochentag er geboren wurde. Wie ist das möglich?

Lösung: Das Alter A des Freundes in vollen Jahren sei $10x + y$ und der Wochentag z. Dann gilt die Gleichung
$A = [(10x + y) \cdot 5 + 25] \cdot 2 + z - 50$,
$A = 100x + 10y + z$.
Demzufolge ergibt sich aus der Hunderter- und Zehnerstelle das Alter des Freundes, und die Einerstelle zeigt den Wochentag an.

▲2▲ Welches ist der Radius des größten Kreises, den man auf einem Schachbrett ziehen kann und der nur auf den weißen Feldern verläuft?
Als Einheit nehmen wir die Seite eines Feldes.

Lösung: Man muß drei Fälle unterscheiden.
Fall 1: Der einfachste Fall ist der Kreis, der vollständig innerhalb eines weißen Feldes verläuft. Sein Radius ist gleich oder kleiner als $\frac{1}{2}$, also $r \leq \frac{1}{2}$.
Fall 2: (s. Bild 1). Der Kreis verläuft durch die Endpunkte der Seite eines weißen Feldes, dann geht er durch vier weiße Felder. Sein Radius ist gleich der halben Hypotenuse des Quadrates $ABCD$, also $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bild 1

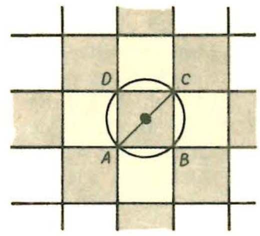
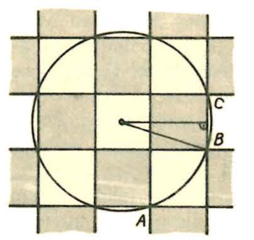


Bild 2



Fall 3: (s. Bild 2). Der Kreis verläuft durch die Endpunkte der Diagonalen eines weißen Feldes, dann geht er durch acht weiße Felder. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$. Den Radius r erhält man aus

$$r^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{ bzw. } r = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Der größte Kreis, der nur durch die weißen Felder verläuft, hat den Radius $r = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

▲3▲ Ich habe zweimal das Alter, das Sie hatten, als ich das Alter hatte, das Sie haben. Wenn Sie das Alter haben werden, das ich habe, dann werden wir zusammen 63 Jahre alt sein. Welches ist mein Alter? Welches ist Ihres?

Lösung: Es seien mein Alter x Jahre, Ihr Alter y Jahre und d die Differenz $x - y$ Jahre, die während aller Jahre konstant bleibt. Als ich das Alter hatte, das Sie haben, also y Jahre, dann hatten Sie $y - d = y - (x - y) = 2y - x$ Jahre. Und da ich zweimal dieses Alter habe, heißt das $x = 2(2y - x)$ bzw. $3x = 4y$. Wenn Sie das Alter haben werden, das ich habe, also x Jahre, wird mein Alter $x + d = x + (x - y) = 2x - y$ Jahre sein. Wir beide werden zusammen $x + (2x - y)$

$= 3x - y = 63$ Jahre alt sein. Das ergibt das Gleichungssystem

$$3x = 4y$$
$$3x - y = 63$$

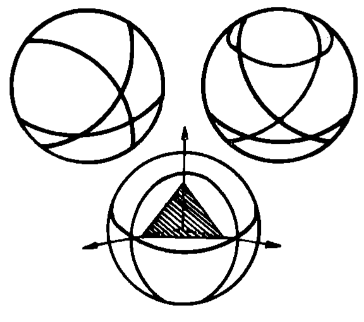
mit den Lösungen $x = 28$ und $y = 21$. Ich bin 28 Jahre alt, und Sie sind 21 Jahre alt. Die Tabelle zeigt noch einmal den Sachverhalt.

	Heute	Als ich das Alter hatte, das Sie haben
Mein Alter	28	21
Ihr Alter	21	14

	Wenn Sie das Alter haben werden, das ich habe
Mein Alter	35
Ihr Alter	28

▲4▲ Eine Melone wurde mit drei Messerschnitten in 7 Teile zerlegt. Diese wurden aufgegessen, und auf dem Tisch blieben 8 Schalen zurück. Eine zweite Melone wurde mit 4 Messerschnitten in 10 Teile zerlegt. Als sie aufgegessen waren, blieben auf dem Tisch von ihr 12 Schalen zurück. Eine dritte Melone wurde mit vier Schnitten in 15 Teile zerlegt. Wie wurden die Melonen zerschnitten, und wieviel Schalen blieben von der letzten liegen?

Lösung: Das Bild zeigt, welche Schnitte geführt wurden. Bei der ersten Melone hat das Mittelstück zwei Schalen, bei der zweiten Melone haben zwei Teile je zwei Schalen. Die dritte Melone wurde zunächst in drei paarweise senkrechten Ebenen, die durch ihren Mittelpunkt verlaufen, geschnitten. Es entstanden 8 Teile. Dann wurde als vierter ein schräger Schnitt geführt, der alle diese Teile, außer das hintere, zweiteilt. Man erhielt 15 Stücke, von denen eines keine Schale hat. Von dieser Melone blieben 14 Schalen übrig. Es sind auch andere Schnittvarianten möglich.



Lösungen zum alpha-Wettbewerb 1/85

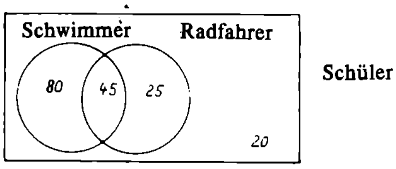
Ma 5 ■ 2522 Wir fertigen eine Tabelle an. Es seien n bzw. m die Anzahl der von den beiden Touristen gekauften Ansichtskarten und p und q die dafür zu zahlenden Geldbeträge in Pfennigen.

n	m	p	q
3	1	75	35
4	2	100	70
5	3	125	105
6	4	150	140
7	5	175	175
8	6	200	210

Nur für $n = 7$ und $m = 5$ gilt $p = q$. Der erste Tourist kaufte 7 Ansichtskarten zu 25 Pf, der zweite 5 zu 35 Pf das Stück, und es gilt $7 \cdot 25$ Pf $= 5 \cdot 35$ Pf $= 175$ Pf.

Ma 5 ■ 2523 Die Folge derjenigen natürlichen Zahlen, die bei Division durch 12 den Rest 2 lassen, lautet 2, 14, 26, 38, ...; die Folge derjenigen natürlichen Zahlen, die bei Division durch 16 den Rest 6 lassen, lautet 6, 22, 38, 54, ...
Die kleinste natürliche Zahl, die beide Bedingungen zugleich erfüllt, lautet 38.

Ma 5 ■ 2524 Aus $70 + 125 = 195$ und $195 - 45 = 150$ und $170 - 150 = 20$ folgt, daß 20 Schüler weder radfahren noch schwimmen können.



Ma 5 ■ 2525 Wegen $E + N = E$ gilt $N = 0$ oder $N = 9$. Wegen $R + I = I$ gilt $R = 0$ oder $R = 9$.
Wenn $N = 0$, so auch $R = 0$, was wegen $N \neq R$ nicht möglich ist. Wenn $N = 9$, so auch $R = 9$, was wegen $N \neq R$ nicht möglich ist.
Somit existiert keine Lösung der Aufgabe für die geforderten Bedingungen.

Ma 5 ■ 2526 a) $117 : 13 = 9$. Zur Mannschaft B gehören 9 Spieler.
b) Wegen $117 = 8 \cdot 14 + 5$ müssen $15 \cdot 15$ min $= 225$ min $= 3$ h 45 min Spielzeit für das Turnier angesetzt werden.
c) $(13 - 5) \cdot (9 - 3) = 8 \cdot 6 = 48$. Es wären nur 48 Sätze Tischtennis auszutragen.
d) $(13 - 3) \cdot (9 - 5) = 10 \cdot 4 = 40$. In diesem Falle wäre die Anzahl der Sätze 40, also kleiner.

Ma 5 ■ 2527 Wegen $2 \cdot 52 = 104$ und $104 > 99$ und da die Teilprodukte nur zweistellig sind, existiert genau eine Lösung, nämlich $52 \cdot 11 = 572$.

Ma 6 ■ 2528 Die zweistelligen Primzahlen $\overline{xy}$, die kleiner als 36 sind und mit verschiedenen Grundziffern dargestellt werden, lauten 13, 17, 19, 23, 29 und 31. Von diesen Zahlen erfüllt nur die Zahl 31 die gestellten Bedingungen, und es gilt $31 - 13 = 18$. Dieser Klasse gehören 31 Schüler an; es waren 13 Schüler erkrankt.

Ma 6 ■ 2529 Aus $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ und $4 \cdot 1{,}50\,\text{M} = 6\,\text{M}$ folgt, daß Klaus seiner Sparbüchse 6 M entnahm. Davon gab er $\frac{3}{4} \cdot 6\,\text{M} = 4{,}50\,\text{M}$ aus. Danach enthielt die Sparbüchse $(5 \cdot 6 - 6 + 1{,}50)\,\text{M} = 25{,}50\,\text{M}$.

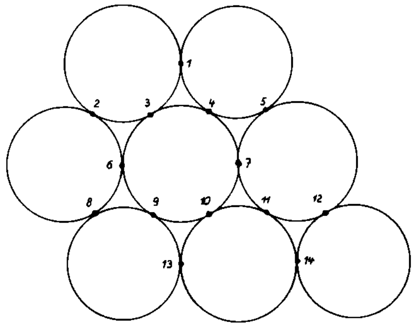
Ma 6 ■ 2530 Wegen $567 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ hat die Zahl 567 die Teiler 1, 3, 7, 9, 21, 27, 63, 81, 189, 567; sie besitzt also genau zehn Teiler.

Aus $x : 567 = \frac{4}{3}$ folgt $x = 756$.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Ein Wägeproblem
Martin wiegt 43 kg, Peter 40 kg, Wenzel 45 kg.

Interessantes Berührungsproblem



Island-Story
$l = \sqrt{(1{,}65\,\text{m})^2 + (0{,}88\,\text{m})^2} - 0{,}07\,\text{m}$
$= 1{,}87\,\text{m} - 0{,}07\,\text{m} = 1{,}80\,\text{m}$.
Der Professor ist 1,80 m groß.

Folgerichtige Ergänzung
Das Muster 5 ist zu wählen. Jedes folgende Muster der Spalten 1 und 2 ist das um 90° im Uhrzeigersinn gedrehte Negativ des vorangehenden in der Spalte.

Kryptarithmetik
a) $56 : 8 = 9 - 2 = 3 + 4 = 1 \times 7$;
b) roma $\mathrel{\widehat{=}} 2401$;
c) ist $x \geqq 4$, so gilt $x^x + x \geqq 4^4 = 260$; d.h. $x^x + x$ ist mindestens dreistellig. Für $x = 1$, 2 besteht die Gleichung offenbar nicht. Für $x = 3$ ist $3^3 + 3 = 30$, d.h., $x = 3$ ist die einzige Lösung.
d) Wir multiplizieren die drei Gleichungen miteinander und erhalten:
$(abc)^2 = (2^5 3^2 5)^2$, also $abc = 2^5 3^2 5$.
Dividieren wir diese Gleichung nacheinander durch die gegebenen Faktoren, so erhalten wir $c = 10$, $b = 24$, $a = 6$.

Kombiniere! Die Zahl 48.

Überprüfe deine Beobachtungsgabe!
a) 13 Dreiecke; b) 18 Quadrate

Wie alt bin ich?
Das gesuchte Alter sei $\overline{xy} = 10x + y$. Wir untersuchen nur den Fall $\overline{xy} \leqq 81$. Die restlichen (biologisch noch möglichen) Fälle kann der Leser analog ausschließen.
Für $y \leqq 1$ ist
$10x + y = 1 + 9 + (8 - x) + (1 - y)$,
also $11x + 2y = 19$. Es folgt $x = 1$, $y = 4$. Dieses Paar ist wegen $y \leqq 1$ keine Lösung.
Für $y > 1$ ist
$10x + y = 1 + 9 + (7 - x) + (11 - y)$,
also $11x + 2y = 28$. Es folgt $x = 2$, $y = 3$. Tatsächlich ist 23 die Lösung, da $23 = 1 + 9 + 5 + 8$ ist.

Nur zum Spaß
Larry $\frac{1}{1}$, Mike $\frac{1}{2}$, Tom $\frac{1}{4}$, Sam $\frac{1}{8}$. Sam hatte ein Achtel von Larrys Murmeln.

Lösungen zur IV. U.-Seite:
Lustige Knobelei
1. Platz: Serjosha; 2. Pl.: Nadja; 3. Pl.: Kolja; 4. Pl.: Wanja; 5. Pl.: Kolja.

40

1945
1985

Zwei historische Dokumente

Aufgaben aus dem Rechenbuch Volk und Wissen Verlagsgesellschaft m. b. H. Berlin/Leipzig · Teil II · 1945

Auswahl von praxisbezogenen Aufgaben (Kl. 7)

▲1▲ Ein Landmann hatte 25 dz 90 kg Roggen von 1 ha Ackerland geerntet; die Aussaat hatte $\frac{2}{37}$ der Ernte betragen. Wieviel war das?

▲2▲ Ein Eimer mit Marmelade wog (brutto) $4\frac{1}{4}$ kg, der Eimer allein (tara) $\frac{1}{2}$ kg. Wieviel wog die Marmelade (netto)?

▲3▲ Eine Hausfrau hat noch Milch zu bezahlen, und zwar einmal $2\frac{3}{4}$ l, dann $1\frac{1}{2}$ l und zweimal $2\frac{1}{4}$ l; wieviel macht alles zusammen, wenn 1 l 35 Rpf kostet?

▲4▲ Ein Edelsteinhändler rechnet neben g auch nach Karat $\left(=\frac{1}{5}\text{ g}\right)$. Wieviel Karat sind 1 g, $1\frac{3}{5}$ g, $2\frac{2}{5}$ g, $7\frac{3}{4}$ g, $3\frac{1}{5}$ g?

▲5▲ 1 Quadratrute hat rund 14 m². Verwandle 1 a in Quadratruten!

▲6▲ Ein junges Mädchen hat ein Kissen, welches $49\frac{1}{2}$ cm breit und $43\frac{1}{4}$ cm hoch ist, mit Perlen bestickt. Auf 1 cm lassen sich von den Perlen $9\frac{1}{2}$ nebeneinander und 8 übereinander legen. Wieviel Perlen hat das junge Mädchen verbraucht:
a) auf 1 cm²; b) auf 1 dm²; c) für das ganze Kissen?

▲7▲ Die Dampfmaschine einer Fabrikanlage braucht täglich $1\frac{3}{8}$ dz Steinkohle. Wieviel sind das an den 6 Werktagen einer Woche?

▲8▲ Eine Lokomotive verbraucht in 4 Std. 21 dz Steinkohlen; wieviel dz verbraucht sie dann in 2 Std. 20 Minuten $\left(=2\frac{1}{3}\text{ Std.}\right)$, in $1\frac{1}{2}$ Std.?

▲9▲ 8 Mann mähen in 1 Tg. 5 ha Sommergetreide; wieviel ha bringen in derselben Zeit 20 Mann fertig?

▲10▲ a) Eine Petroleumlampe verbrennt in 5 Std. für rund 14 Pf Petroleum, wieviel verbrennt sie in 1 (in 9) Std.?
b) Eine Gasglühlichtlampe brennt heller als eine Petroleumlampe und braucht in 5 Std. für nur 9 Rpf Gas. Rechne die entsprechenden Aufgaben für Gas wie unter a)!

▲11▲ Im Lichtbildtheater sieht man in $\frac{1}{2}$ Minute etwa 500 Bilder. Wieviel Bilder sind das in $2\frac{3}{4}$ Min.? Wieviel einzelne Bilder hat ein Film, der $8\frac{2}{3}$ Min. (6 Min. 39 Sek.) dauert?

▲12▲ Durch Verwendung einer Kochkiste (zweimal so hoch und breit wie der Topf) kommt eine Hausfrau nur auf $\frac{3}{4}$ des sonst eintretenden Gasverbrauches. Wieviel RM könnten demnach durch die Verwendung der Kochkiste in 1 000 000 Haushaltungen jährlich gespart werden, wenn die durchschnittliche Monatsrechnung mit 10 RM angesetzt wird?

▲13▲ Ein Gastwirt hat $2\frac{1}{4}$ kg Rindfleisch holen lassen und 540 Rpf bezahlt. Welchen Teil von 540 Rpf muß er berechnen, wenn er den Preis von 1 kg wissen will. Erkläre die folgende Ausrechnung:

1 kg Fleisch kostet x Rpf

$2\frac{1}{4}$ kg Fleisch kosten 540 Rpf

$$1\text{ kg Fleisch kostet } x=\frac{540}{2\frac{1}{4}}\text{ Rpf}$$

$$=540\cdot\frac{4}{9}\text{ Rpf}=240\text{ Rpf}.$$

Ergebnis: 1 kg Fleisch kostet 2,40 RM.

▲14▲ Eine deutsche Meile beträgt $7\frac{1}{2}$ km, wieviel km sind 4, 9, 18 Meilen?

Aus der Bibliothek
von Neulehrer J. Lehmann,
jetzt Chefredakteur
der Schülerzeitschrift alpha

Schriftliche Abschlußprüfung, Klasse 8, Fach Mathematik, 1949

Im Juni 1949 erhielten alle Schüler, welche die 8klassige Grundschule verließen, folgende Aufgaben gestellt:

Gruppe I (Aufgaben 1–4)

1. 736,248 kg + 69 kg + 750 g + 7 438 g + 5 1,48 dz + 876,564 kg = ? kg.
2. Ziehe 187,25 von 332 ab, und nimm das Ergebnis mit 7,08 mal!
3. a) $3{,}2\cdot 3\frac{1}{8}$; b) $1\frac{3}{5}:0{,}16$.
4. 78,416 : 2,9.

Gruppe II (Aufgaben 5–7)

5. Im Jahre 1947 wurden in der Ostzone 26 Mill. t Briketts erzeugt. Im Jahre 1950 soll die Briketterzeugung 32 Mill. t betragen. Berechne die geplante Steigerung der Produktion in t und in Prozenten!

6. In unserer Zone wurden durch den Krieg 1 131 Brücken zerstört. Im Jahre 1947 waren bereits 84 % wieder instand gesetzt. Wieviel Brücken waren wieder benutzbar?

7. In einem Bitterfelder Braunkohlentagebau wurde durch Anregung von Aktivisten eine Verbesserung der täglichen Arbeitsleistung erzielt. Von den über der Braunkohle lagernden Erdschichten wurden 11 260 t mehr abgeräumt als bisher. Das bedeutete eine Steigerung der Arbeitsleistung um 62,5 %. Berechne die frühere Tagesleistung und die neue Gesamtleistung!

Gruppe III (Aufgaben 8–10)

8. Vergrößert man eine Zahl um 8 und multipliziert die Summe mit 4, so erhält man 52. Errechne die Zahl, indem du eine Gleichung aufstellst!

9. Eine Flüssigkeit soll aus einem zylinderförmigen Gefäß mit dem Durchmesser 20 cm, das sie nur 3 cm hoch füllt, in ein kleineres zylindrisches Gefäß umgegossen werden, dessen Durchmesser nur halb so lang ist. Wie hoch füllt sie das zweite Gefäß?

10. $25(3x+10)-13(8+9x)$
$=(87-12x)-8(7x-9)$.

Bewertungsmaßstab, empfohlen von der Landesregierung Brandenburg

sehr gut (1): Alle Aufgaben richtig rechnerisch gelöst.
gut (2): Alle Aufgaben der Gruppen I und II richtig gelöst.
Ausgleichsmöglichkeit: waren in Gruppe I und II Aufgaben falsch, so konnten sie durch die schweren richtigen der Gruppe III ersetzt werden.
genügend (3): Alle Aufgaben der Gruppe I und eine Aufgabe der Gruppe II, oder 3 Aufgaben der Gruppe I und 2 Aufgaben der Gruppe II usw. gelöst. Eine Ausgleichsmöglichkeit besteht ebenso mit Aufgaben der Gruppe III.
mangelhaft (4): Wer nur die Aufgaben der Gruppe I gelöst hat.
ungenügend (5): Wer nur eine Aufgabe der Gruppe I gelöst hat.

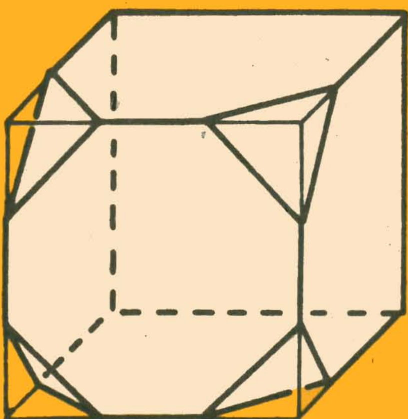
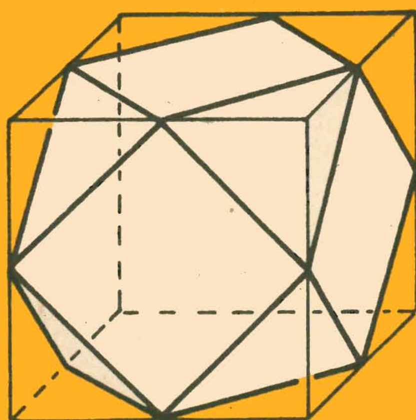
Ergebnisse der Mädchenklasse 8 der Steinschule Luckenwalde
(damals waren Jungen und Mädchen in getrennten Klassen):

Note	Zahl	Prozent
1	6	16,2
2	20	54,1
3	9	24,3
4	1	2,7
5	1	2,7
	37	100

StR O. Schulze, Luckenwalde
als Klassenlehrer dieser Mädchenschule, 1949

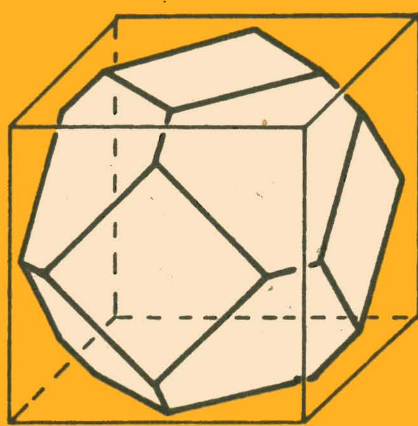
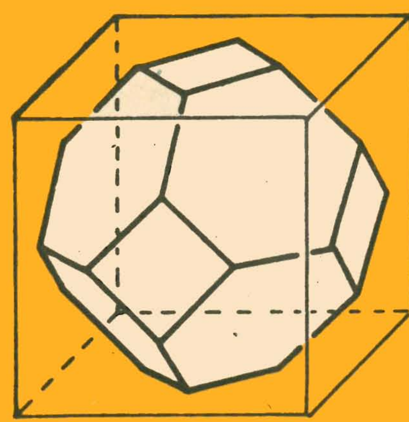
ISSN 002-6395 · alpha · Berlin · 19 (1985) 4 · Seiten 73 bis 96

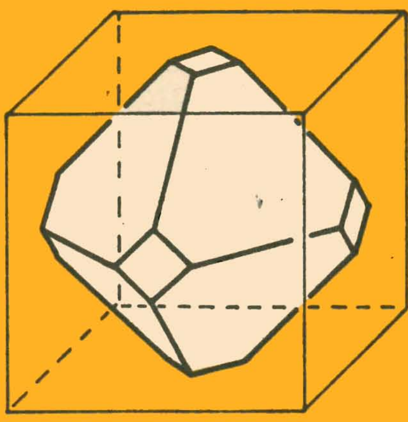
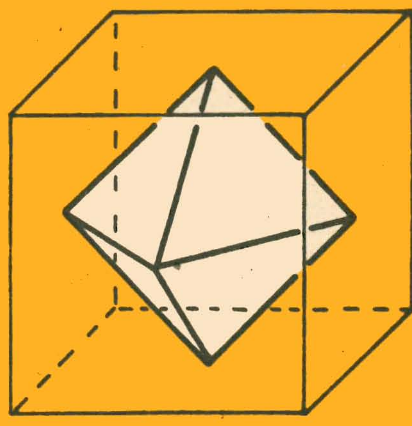
alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

5

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
19. Jahrgang 1985
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213
Anschrift der Redaktion:
7027 Leipzig, PSF 14
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: K. Kupiec, VR Polen (S. 99); Bildstelle Universität Vilnius/W. Schmidt, Greifswald (S. 100/101); Pythagoras, Niederlande (S. 106); Schüler Rukka Kosonen, aus Funktio, Finnland (S. 111)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig
Titelbild: Bilder aus Elemente, Schweiz, gestaltet von W. Fahr, Berlin

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 25. Februar 1985
Auslieferungstermin: 15. Oktober 1985

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben geeignet ab der angegebenen Klassenstufe

Zum Verhältnis von Kunst und Wissenschaft am Beispiel der Ornamente und der Mathematik

Teil 1

1. Wissenschaft und Kunst als Grundbedingung und Grundbedürfnis im menschlichen Leben
Die Symmetrie als ästhetisches Moment

Heutzutage ist das Leben in der zivilisierten Menschheit ohne Wissenschaft überhaupt nicht mehr denkbar. Auf Schritt und Tritt begegnet man dem Einfluß der Wissenschaft. Jeder von uns kann sich mühelos davon überzeugen. Schaltet man beispielsweise das Licht ein, schon hat man teil an wissenschaftlichen Erkenntnissen in Form ihrer technischen Umsetzungen. Ohne Rückgriff auf die Elektrizität könnte man nicht das Licht von Lampen leuchten lassen, keine elektrisch angetriebenen Züge fahren lassen, keine Kühlhallen betreiben usw. Begibt man sich an seine häusliche morgendliche Toilette, sogleich stehen einem wissenschaftlich gezeugte Heinzelmännchen zur Verfügung.
Die Seife, Zahnpasta, ... alles basiert auf wissenschaftlichem Tun von vielen Menschen. Unser ganzes Tagesgeschehen wird durch und durch von Früchten der Wissenschaft beherrscht. Das war nicht immer so und ist auch nicht überall auf der Erde so. Beispielsweise leben die Urwaldindianer in Brasilien oder die Ureinwohner Neuseelands bisweilen noch in ursprünglichen Naturzuständen, die nur ganz leichte Spuren der Wissenschaft tragen. Dort bestimmt das Elementargeschehen den Ablauf. Dort nimmt dann auch die Kunst einen viel größeren Raum im Leben ein als vergleichsweise bei uns. Natürlich ist insgesamt gesehen unser Kulturniveau viel höher, aber der direkte Anteil der Kunst ist relativ gesehen viel geringer. Bei den Naturvölkern spielt zunächst der Körperschmuck die herausragende Rolle. Beredtes Beispiel dafür gibt eine Begebenheit ab, welche *Charles Darwin* 1833 während seiner Weltumsegelung mit der *Beagle* widerfuhr, als er einem frierenden Feuerländer eine bunte Decke schenkte, damit der darin Schutz vor der Kälte finde, der Beschenkte aber diese Decke in Streifen zerriß und sich mit den Streifen aus lauter Schmuckinteresse behängte. Von Stufe zu Stufe kommt bei dem Menschen dann nach dem Körperschmuck der Geräte- einschließlich Waffenschmuck und der Schmuck an den Bauten dazu. So ist sicher eines der Grundbedürfnisse des Menschen, sich, seine Werkzeuge und seine Wohnstätten zu schmücken und zu verzieren. Die Hervorbringung von Verzierungen und Schmuckformen ist nach und nach immer mehr in das Fahrwasser der Wissenschaft geraten. Eine tragende mathematische Komponente stellt im Gebiet der Schmuckformen die Idee der *Symmetrie* dar.
Die Natur bedient sich oftmals eines symmetrischen Aufbaus, so daß der Mensch zwangsläufig auf die Idee der Symmetrie geführt wird und symmetrische Formen als ästhetisch wohltuend, als harmonisch empfindet. Jeder kann leicht bei sich selbst bestätigen, daß symmetrische Regelmäßigkeit viel stärker unser Interesse auf sich zieht als das Fehlen von Symmetrie. Dazu betrachte man etwa einen weitgehend unsymmetrischen Tintenklecks und den durch Falten des Papiers symmetrischen Klecks.

Bild 1

Welch ein Reiz geht von dem sogenannten Kaleidoskop als Kinderspielzeug aus? Durch Drehen und Schütteln kann man sich eine Vielzahl symmetrischer Bilder erschaffen. Eine Wunderwelt der Symmetrie tut sich dem Betrachter des Kaleidoskops auf.

2. Beispiele für Symmetrie in der unbelebten Natur

Wir verweisen zunächst auf einige natürlich vorkommende Symmetrien, die der Einfachheit halber als *Flächensymmetrien* gedeutet werden mögen.

Bild 2

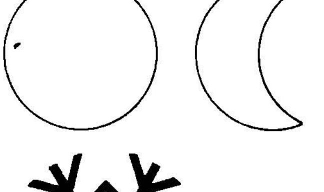
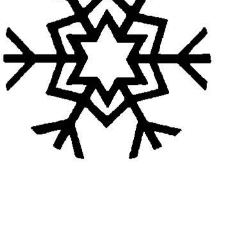


Bild 3



Aufgabe 1

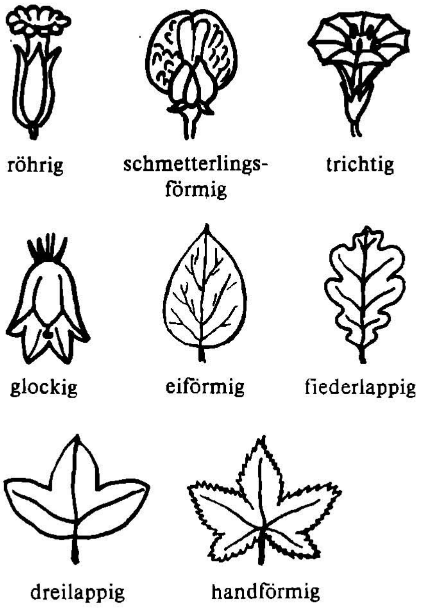
Entdecke weitere symmetrische Formen in der unbelebten Natur!

3. Beispiele für Symmetrie im Bereich der Lebewesen

(gedeutet als Flächensymmetrie)

Im *Reich der Pflanzen* tauchen bei Blüten und Blättern oft Symmetrien auf.

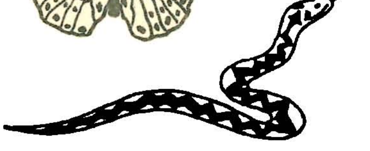
Bild 4



Im Tierreich begegnet man mühelos Symmetrien.

Bild 5

Bild 6



Aufgabe 2

Entdecke weitere symmetrische Formen in der belebten Natur!

4. Beispiele für vom Menschen geschaffene Symmetrien

Viele Bauwerke und Statuen, Muster auf Textilien, Teppichen, Stickereien, Häkeleien, Tapeten usw. bezaubern uns gerade wegen ihrer vielseitigen Symmetrien. Manchmal ist als besonderer Reiz in die symmetrischen Grundformen eine *Symmetriebrechung* eingefügt. (Das kommt ja auch in den natürlichen Symmetrieformen vor. Wir werden den künstlerischen und wissenschaftlichen Wert der Symmetriebrechung hier nicht weiter verfolgen, weil wir uns erst einmal die ungestörte Symmetrie möglichst weit erschließen wollen.)
Bauten der Gotik weisen in hohem Maße Symmetrien auf, sowohl insgesamt als

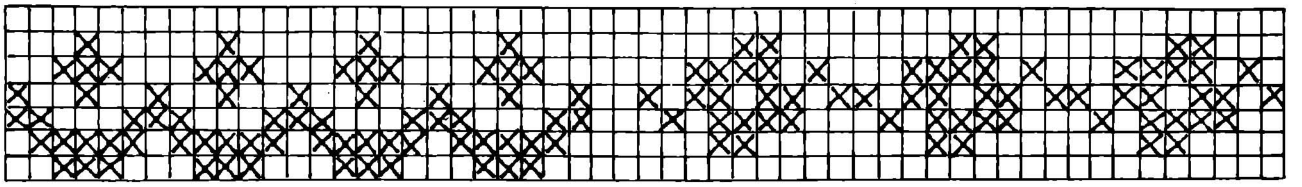


Bild 7

Bild 8a

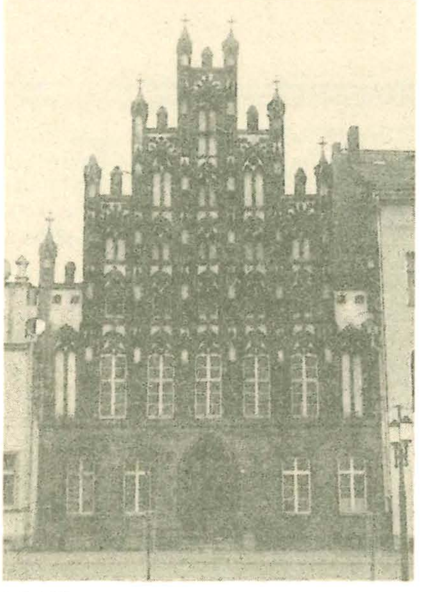


Bild 8b

auch in Einzelheiten, wie bei Fenstern, Türen, Gewölben usw. Oft wird die Möglichkeit der Symmetrien noch durch Benutzung verschiedener Farben, so besonders bei Textilien und auch Glasfenstern gesteigert. Die islamischen und maurischen Baumeister haben auch bei ihren Gebäuden geradezu in Farbgebung geschwelgt.

Aufgabe 3

Entdecke weitere vom Menschen hervorgebrachte Symmetrien. Welche Wirkfelder symmetrischen Schaffens findest du noch? (Vasen, Möbel, Fußböden, ...; konkrete Beispiele dafür?)

5. Zum Einfluß der Kunst bei der Erschließung ebener Symmetrien

Künstlerischer Einfallsreichtum und wissenschaftliche Denkkraft haben die Welt der Symmetrie immer mehr durchforstet, aber erst im 19. Jahrhundert sind die mathematisch strengen Beweise für eine vollständige mathematische Übersicht über die Symmetrietypen der ebenen Gebilde erbracht worden. In das mathematische Allgemeingut sind diese Erkenntnisse durch Wiederentdeckung gar erst 1924 eingegangen. Regelmäßige ebene Vier-, Acht- und Sechzehn-Ecke finden sich in der altägyptischen Kultur. Entsprechende Wanddekorationen haben ein Alter von mehr als 4000 Jahren. Das regelmäßige Fünfeck erscheint später bei den Babyloniern. Seine Konstruktion mit Zirkel und Lineal wurde erst von den Griechen geleistet. Bis zu Gauß' Zeiten war man der Ansicht, daß ein regelmäßiges n-Eck, n Primzahl >5, nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Der 18jährige Jüngling Gauß bewies die Möglichkeit der Konstruktion des 17ecks und ermittelte sogar, welche regelmäßigen n-Ecke konstruierbar sind. Entwicklungsgeschichtlich gesehen war die Kunst der Wissenschaft in der Behandlung der beschränkten symmetrischen Figuren also eindeutig voraus. Die systematische wissenschaftliche Bearbeitung erschloß hingegen den Künstlern vollständig den symmetrischen Formenreichtum der beschränkten Figuren. *Leonardo da Vinci* (1452 bis 1519) und *Albrecht Dürer* (1471 bis 1528) sind Künstler von hohem mathematischen Rang, die für die wissenschaftlich konstruktive Durchdringung der Malerei eintraten. Aus Dürers Lehrbuch *Underweysung der Messung mit dem Zirckel und richtscheyt in Linien, Ebenen und gantzen Corporen* zeigen wir einige Beispiele zur Konstruktion symmetrischer Schmuckformen.

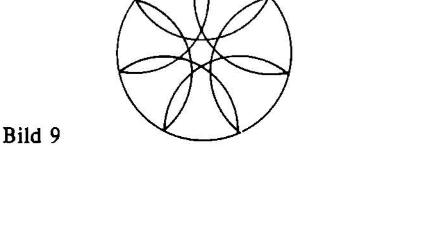
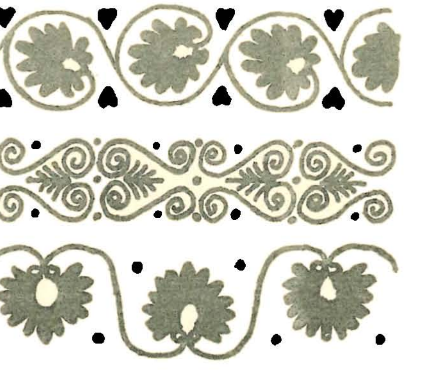


Bild 9

Was die sich ins Unendliche erstreckenden symmetrischen Figuren, die ganze Ebene ausfüllende Muster angeht, so klaffte ein noch weitaus größerer Unterschied zwischen frühzeitlicher künstlerischer Bearbeitung und späterer wissenschaftlich ordnender Durchdringung. Altägyptische und altchinesische künstlerische flächendekkende Dekorationen müssen über den ästhetischen Eindruck, den sie vermitteln, hinaus als hervorragende empirische mathematische Leistungen in der Aufdeckung der möglichen Symmetrietypen angesehen werden. Die arabische und islamische Ornamentik führt die ägyptische Kunst zur bestechenden Höhe. Den Gipfelpunkt auf diesem Feld bringt wohl die maurische Baukunst und Raumgestaltung. In der *Alhambra Moschee* bei Granada (erbaut um 1400) haben die Mauren von ihrer Schöpferkraft und Erfindungskunst bei der Konstruktion von flächendeckenden Mustern Glanzleistungen vollbracht.
Ihnen ist die größte Fülle der die ganze Ebene bedeckenden Symmetrietypen (= zweidimensionale Symmetrietypen) gelungen. Damit haben sie in impliziter Form ein Stück höherer Mathematik im künstlerischen Gewande auf beeindruckendem Niveau erarbeitet. Der davon ausgegangene Einfluß lebt bis in unsere Tage fort, was nicht zuletzt die Begriffe Arabeske und Maureske für gewisse ornamentale Schmuckformen belegen. Mathematisch weniger anspruchsvoll ist die Ermittlung aller eindimensionalen Symmetrietypen in der Ebene, d. h. der Symmetrietypen, die einen ebenen Streifen ausfüllen können. Diese Aufgabe haben griechische Künstler des Altertums in Gestalt von Bandornamenten auf Wandfriesen und Vasendekorationen bewältigt.



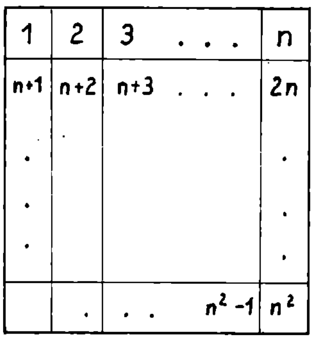
U. Feiste/J. Flachsmeyer

Fortsetzung in Heft 6/85.

Überraschendes über benachbarte Zahlen in einem Zahlenquadrat

In ein Quadrat, das aus $n \cdot n$ Feldern besteht, seien „der Reihe nach" (d. h. im linken oberen Feld beginnend und im rechten unteren Feld endend – siehe Bild 1) die Zahlen 1, 2, 3, ..., n^2-1, n^2 geschrieben worden:

Bild 1
$n \geqq 2$



Unter zwei benachbarten Zahlen wollen wir nun zwei Zahlen verstehen, die in zwei Feldern stehen, die eine Kante gemeinsam haben:

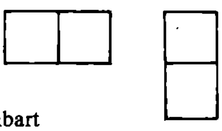


Bild 2
benachbart

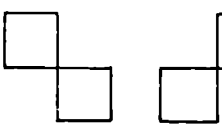


Bild 3
nicht benachbart

Die Differenz zwischen zwei horizontal benachbarten Zahlen beträgt in unserem Quadrat 1, die Differenz zwischen zwei vertikal benachbarten Zahlen ist n, d. h., die „mittlere Differenz" zwischen zwei benachbarten Zahlen beträgt $\frac{n+1}{2}$, sie ist also erheblich kleiner als n. Deshalb läge eigentlich die Vermutung nahe, man könnte die n^2 Zahlen so umordnen, daß die maximale Differenz zwischen zwei benachbarten Zahlen kleiner als n wird. (Der experimentierfreudige Leser kann einmal versuchen, für $n = 2, 3, 4$ diese Vermutung zu beweisen oder zu widerlegen.) Wie man jedoch (mit einigem Erstaunen) feststellt, ist eine solche Umordnung nicht möglich! Es gilt vielmehr der folgende Satz:

Schreibt man in die Felder eines $n \cdot n$-Quadrates n^2 voneinander verschiedene ganze Zahlen, so gibt es stets zwei benachbarte Zahlen, deren Differenz nicht kleiner als n ist.

Beweis: Die ganzen Zahlen bezeichnen wir mit $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2}$, wobei $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n^2}$ ist. Da es sich um ganze Zahlen handelt, gilt $a_{k+1} \geqq a_k + 1$ bzw. $a_{k+l} \geqq a_k + l$.
Die Felder, in denen diese Zahlen stehen, werden entsprechend mit $A_1, A_2, \ldots, A_{n^2}$ bezeichnet.
Nun schraffieren wir die Felder $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ der Reihe nach, und zwar solange, bis in einer Spalte oder Zeile genau $(n-1)$ schraffierte Felder sind (vgl. Bild 4):

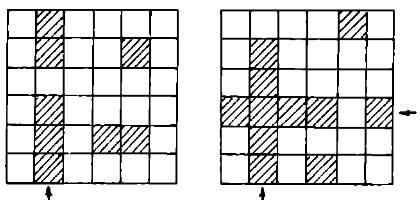
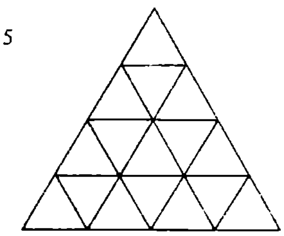


Bild 4

O. B. d. A. mögen sich diese $(n-1)$ schraffierten Felder in der i-ten Zeile befinden. Ferner möge das j-te Feld dieser Zeile das einzige weißgebliebene sein.
Die Spalten $1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots n$ enthalten jetzt mindestens ein schraffiertes Feld (nämlich das, das in der i-ten Zeile liegt), jedoch höchstens $n-1$. Das heißt, diese Spalten enthalten mindestens ein schraffiertes und mindestens ein weißes Feld. Das wiederum bedeutet: Sie enthalten mindestens ein weißes Feld, das Nachbar eines schraffierten Feldes ist. Diese Aussage gilt jedoch auch für die j-te Spalte, denn das weiße Feld, das in der j-ten Spalte und der i-ten Zeile liegt, besitzt mindestens ein schraffiertes Nachbarfeld (in der i-ten Zeile).
Also gilt: In jeder Spalte existiert ein weißes Feld, das Nachbar eines schraffierten Feldes ist. D. h.: Es gibt mindestens n verschiedene weiße Felder, die zu einem schraffierten benachbart sind.
Wenn die Schraffur beim Feld A_m abbrach, so gilt für die Indizes x dieser n weißen Felder $A_x : x \geqq m+1$. Das heißt: Es gibt ein schraffiertes Feld A_y $(y \leqq m)$ und mindestens ein dazu benachbartes weißes Feld A_x, für das $x \geqq m+n$ ist. Für die dort eingetragenen Zahlen a_x und a_y gilt:
$a_x - a_y \geqq a_{m+n} - a_m \geqq a_m + n - a_m = n$,
w. z. b. w.
Frage: Warum wäre es ungünstig gewesen, im obigen Beweis die Felder $A_1, A_2, \ldots, A_m$ solange zu schraffieren, bis in einer Spalte oder Zeile n schraffierte Felder sind?

Mit Hilfe unseres Satzes können wir schnell eine entsprechende Aussage über Zahlen in Rechtecken gewinnen:
Schreibt man in die Felder eines $a \cdot b$-Rechtecks $(a \leqq b)$ ab verschiedene ganze Zahlen, so gibt es zwei benachbarte Zahlen, deren Differenz nicht kleiner als a ist.
Aufgabe: Beweist diese Aussage und zeigt, daß man in ihr a nicht durch eine größere Zahl ersetzen kann, d. h., daß sich die Aussage nicht verschärfen läßt!
Nun wäre es sicher interessant, analoge Aussagen für Zahlen in Würfeln oder in bestimmten Anordnungen gleichseitiger Dreiecke (siehe Bild 5) zu untersuchen, jedoch sind wir dabei bis jetzt noch nicht zu

Bild 5



brauchbaren Ergebnissen gekommen. Wir wünschen dem interessierten Leser viel Erfolg bei der Lösung dieser Probleme!

R. Lehmann/H.-J. Schmidt

Auf Fehlersuche

Matthias hat in diesem Brief zwölf Flüchtigkeitsfehler gemacht. Wenn ihr die fehlenden bzw. richtigen Buchstaben der Reihenfolge nach in das Lösungsschema eintragt, erhaltet ihr die Bezeichnung für ein Gerät, mit dem künftig Schüler von der 7. Klasse an im Unterricht arbeiten werden.

Lieber Andreas!
Heute war bei uns Leistungskontrolle. Zuerst erhielt ich den Auftrag, ein Quadratmeer in eine kleinere Einheit umzuwandeln. Dann sollte ich den Lehrsitz über die Winkelsumme im Dreieck beweinen und mit Hilfe des Kreisdurstmessers mehrere Rachenoperationen ausführen. Schließlich hatte ich die schwierige Aufgabe, die Durchschittsgröße meiner Klasse zu berechnen. Mit dem neuen Faselschreiber nahm ich zunächst alle Aufgaben in Geometrie- und Rechenhaft. Später sollte ich noch die Symmetrieasse auf Spielkarten finden. Plötzlich wurde die Kontrolle unterbrochen. Der Schulzahlarzt stand in der Tür. Das war eine „dringliche medizinische Hilfe". Unsere Lehrerin konnte nur noch die Hausaufgabe erteilen: Division mit Rast. Morgen beschäftigen wir uns mit dem Drachenvieheck. Tiere mag ich gern, und Mathe macht Spaß. Nur mit der Rechtschreibung habe ich noch einige Probleme.

Viele Grüße
Dein Freund Matthias.

aus: NBI/NUK-Autor: Mathematikfachlehrer H. Bauer, Genthin

Mathematik in Vilnius

Es ist euch sicher nicht unbekannt, daß sowjetische Mathematiker in vielen mathematischen Disziplinen das Weltniveau mitbestimmen. Dazu tragen auch die Mathematiker der kleineren Sowjetrepubliken nicht unmaßgeblich bei. Eine der ältesten Hochschulen der UdSSR befindet sich in Vilnius, der Hauptstadt der Litauischen Sozialistischen Sowjetrepublik (LSSR). Aus Anlaß der 400-Jahr-Feier der Universität wurde 1979 von der sowjetischen Post eine Sonderbriefmarke zu 4 Kopeken herausgegeben, auf welcher alte Universitätsgebäude und Bauten des im Entstehen begriffenen neuen Universitätsviertels dargestellt sind. Die Briefmarkenfreunde unter euch dürfen nicht erstaunt sein, daß bereits 1970 eine Sondermarke zu 4 Kopeken (siehe Bild 1) zum 400jährigen Bestehen der Universitätsbibliothek erschienen ist: Bereits 1570 eröffnete man in Vilnius ein Kollegium, das 1579 durch eine Privilegakte des Königs zur Universität erhoben wurde.

Bild 1

1968 unterzeichneten die Universitäten Vilnius und Greifswald einen Freundschaftsvertrag. Seitdem arbeitet in jedem Sommer eine Gruppe Greifswalder Mathematikstudenten im Rechenzentrum der Universität Vilnius, und litauische Studenten beschäftigen sich in Greifswald mit mathematischen Problemen. In Vilnius studieren an der Mathematischen Fakultät ungefähr 600 Mathematikstudenten. Weiter gibt es ein leistungsstarkes Institut für Mathematik und Kybernetik der Akademie der LSSR. Seit 1961 erscheint vierteljährlich das Journal *Литовский математический сборник*, in dem mathematische Arbeiten (vorwiegend in russischer Sprache) gedruckt werden, eine englische Übersetzung dieser Zeitschrift wird in den USA verlegt. In jedem Jahr berichten die litauischen Mathematiker auf einem Unionskongreß über ihre Forschungsergebnisse.

Der 25. Kongreß fand am 14./15. Juni 1984 in der Stadt Šiauliai statt (hier befindet sich eine Pädagogische Hochschule). Dieser Jubiläumskongreß stand im Zeichen des 100. Geburtstages von Zigmas Žemaitis.

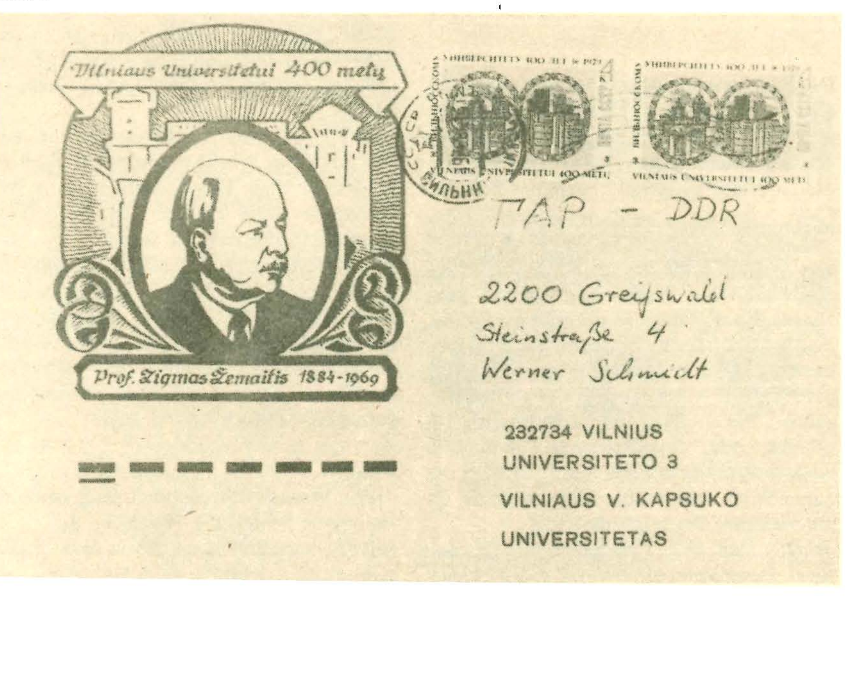
Zigmas Žemaitis wurde am 8. 11. 1884 im Dorf Daktarai geboren. Er studierte in Odessa Mathematik. 1919 wurde er Lehrer an der Universität Vilnius. Als polnische Truppen Vilnius besetzten, ging er nach Kaunas. Dort war er 1920 als Direktor der Handelsschule tätig. In der bürgerlichen Republik Litauen wurde 1921 die Universität Kaunas gegründet, und Žemaitis wirkte hier von Anfang an als Professor für Mathematik. Seit 1930 leitete er die Abteilung für Geometrie. Er veröffentlichte Arbeiten u. a. über Funktionentheorie und Potentialtheorie. 1939 kam Vilnius wieder zu Litauen, 1940 wurde in Litauen die Sowjetmacht errichtet, viele Institute der Universität verlegte man nach Vilnius. Žemaitis arbeitete nun hier als Prorektor. 1943 mußte die Universität auf Befehl der faschistischen Besatzungstruppen den Lehrbetrieb einstellen. Nach der Befreiung vom Faschismus berief die sowjetische Regierung den progressiven Wissenschaftler sofort auf den Lehrstuhl für Analysis. Unter seiner Leitung begannen sich Forschungsgruppen für Geometrie und für mathematische Analysis zu entwickeln. Von 1946 bis 1948 stand Prof. Žemaitis als Rektor der Universität Vilnius vor. Er war ein sehr fähiger Wissenschaftsorganisator, seine Verdienste um die Entwicklung mathematischer Schulen wurden hoch gewürdigt. In den letzten Lebensjahren, er starb 1964, wandte er sich der Geschichte der Mathematik zu. Die Universität Vilnius hat 1979 einen Sonderbriefumschlag mit dem Bildnis von Z. Žemaitis herausgegeben, siehe Bild 2.

Ein Wissenschaftler hat in den letzten 30 Jahren maßgeblich die Mathematik in der LSSR geprägt: Akademiemitglied Prof. Dr. Jonas Kubilius.

Folgende Legende berichtet, wie er zur Mathematik gefunden haben soll. In einer Zeitung war über das *Fermatsche Problem* (siehe *alpha* 3, 1984) berichtet worden. Wegen des Gleichklangs mit dem Namen seines Geburtsdorfes Fermos fühlte sich Jonas Kubilius von diesem Problem angezogen, und er glaubte sogar, eine Lösung gefunden zu haben. Aber leider stellte sich heraus, daß die Aufgabe in der Zeitung unkorrekt formuliert war. Die Mathematik und insbesondere die Zahlentheorie ließen ihn nun nicht mehr los. Er studierte diese Wissenschaft in Vilnius, arbeitete einige Jahre als Lehrer und wurde von 1948 bis 1951 zur Aspirantur nach Leningrad delegiert. Man kann Prof. Kubilius den Begründer eines neuen Zweiges der Mathematik nennen, in welchen Erkenntnisse aus Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie einfließen. Prof. Kubilius begründete eine leistungsstarke Mathematikerschule in der LSSR. Seit 1958 ist er Rektor der Staatlichen *V.-Kapsukas*-Universität Vilnius. Prof. Kubilius war es auch, der 1952 die Durchführung von Mathematikolympiaden in Sowjetlitauen durchsetzte. Damals gab es noch keine Olympiaden für die ganze UdSSR! Mathematikolympiaden werden in den Schulen, auf der zweiten Stufe in den Rayons durchgeführt.

Für die Klassenstufen 8, 9, 10 findet die Mathematikolympiade im Republikmaß-

Bild 2



stab statt (in Zukunft für Klassenstufe 9, 10, 11). Die besten Olympioniken vertreten die LSSR bei der Allunions-Olympiade. Viele erfolgreiche Teilnehmer von Mathematikolympiaden sind inzwischen anerkannte Wissenschaftler. Für die Olympiadebewegung in der LSSR fühlt sich gegenwärtig ein jüngerer Hochschullehrer verantwortlich:
Prof. Palauskas nahm 1960 bis 1962 selbst an der Mathematikolympiade mit Erfolg teil, er studierte Mathematik und ist heute ein erfolgreicher Experte auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie. Mit viel Freude und Aufmerksamkeit fördert er Talente. Der Autor dieses Beitrags ist Prof. Palauskas für wertvolle Informationen und für die nachfolgenden Aufgaben der Mathematikolympiade 1984 (Republikstufe) zu Dank verpflichtet.

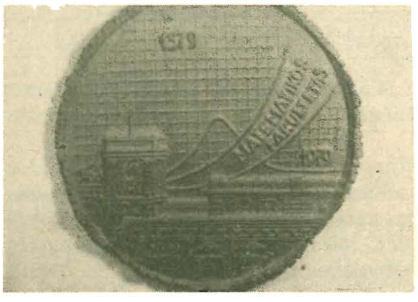


Bild 3
Keramikplakette der Mathematischen Fakultät der Universität Vilnius

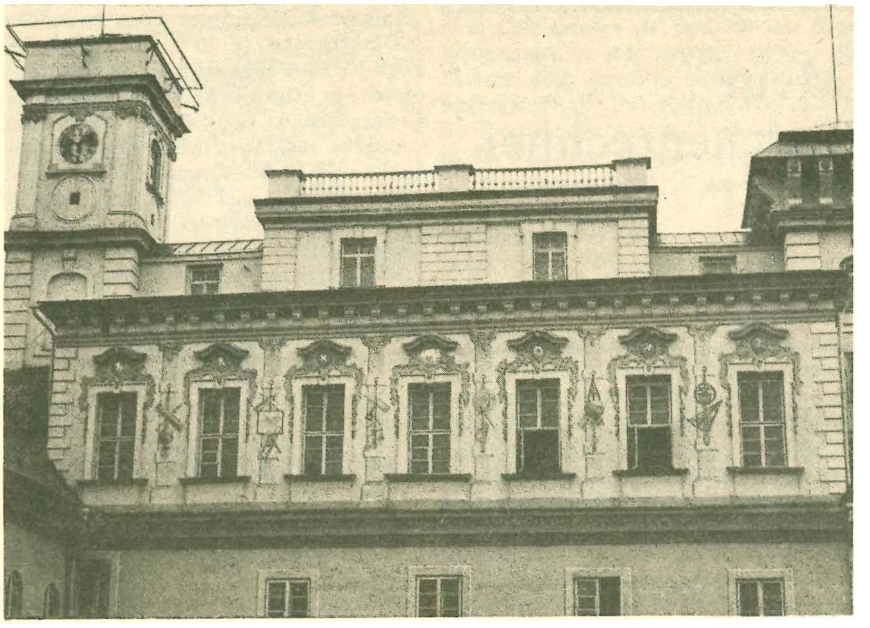


Bild 4
Darstellung astronomischer und mathematischer Instrumente an der Fassade des Hauptgebäudes der Universität Vilnius

Aufgaben

Klasse 8

▲ 1 ▲ Löse das Gleichungssystem!

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{z}$$
$$\frac{y}{z}=\frac{z}{t}\,,$$
$$\frac{x}{t}=8$$
$$x+y+z+t=15$$

▲ 2 ▲ Für welche natürlichen Zahlen n ist

$$2^{11n}-2^{6n}+2^{n}-2^{5}$$

ohne Rest durch 1984 teilbar?

▲ 3 ▲ Die Durchschnittszensur der Jungen der 8. Klasse sei besser als die der Jungen der 9. Klasse. Die Mädchen der 8. Klasse haben ebenfalls eine bessere Durchschnittszensur als die der 9. Klasse. Kann dann die Durchschnittszensur von allen Schülern der 8. Klasse schlechter sein als die der Schüler der 9. Klasse?

▲ 4 ▲ Stelle die Zahl 1000 als Summe natürlicher Zahlen dar, deren Produkt möglichst groß ist!

Klasse 9

▲ 1 Zeige, daß die 100stellige Zahl 11...1 (gebildet von 100 Ziffern 1) durch 41 teilbar ist!

▲ 2 ▲ Löse das Gleichungssystem!

$$xy+x+y=80$$
$$yz+y+z=80$$
$$zx+z+x=80$$

▲ 3 ▲ Gegeben sei eine Menge M von endlich vielen reellen Zahlen, die alle nicht größer als 100 sind. M besitze folgende Eigenschaft: Bei einer beliebigen Zerlegung von M in zwei Teilmengen sei die Summe der Zahlen wenigstens einer Teilmenge nicht größer als 100. Zeige, daß die Summe aller Zahlen der Menge M die Zahl 300 nicht übertrifft!

▲ 4 ▲ In den Eckpunkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eines regelmäßigen n-Ecks seien natürliche Zahlen ($\geqq 2$) notiert. Steht in A_2 eine gerade Zahl, so subtrahiere von der in A_1 stehenden Zahl eine 1, steht dagegen in A_2 eine ungerade Zahl, so addiere 1 zu der in A_1 notierten Zahl. Danach verkleinern oder vergrößern wir die in A_2 stehende Zahl um 1 in Abhängigkeit davon, ob in A_3 eine gerade oder eine ungerade Zahl steht usw. Schließlich verkleinern oder vergrößern wir die in A_n stehende Zahl um 1, je nachdem ob in A_1 eine gerade oder eine ungerade Zahl steht. Danach beginnen wir wieder mit A_1 in der beschriebenen Weise. Beweise, daß alle auftretenden Zahlen stets positiv bleiben, wie oft wir diesen Zyklus auch durchlaufen!

Klasse 10

▲ 1 ▲ In einem rechtwinkligen Dreieck teile die Winkelhalbierende des rechten Winkels die Hypotenuse c im Verhältnis 1 : 3. In welchem Verhältnis teilt dann die Höhe auf c die Hypotenuse?

▲ 2 ▲ Man beweise: Wenn die Zahlen x, y, z die Gleichungen

$$\sin x+\sin y+\sin z=0$$
$$\cos x+\cos y+\cos z=0$$

erfüllen, so sind x, y, z auch eine Lösung der Gleichungen

$$\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z=0$$
$$\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z=0\,.$$

▲ 3 ▲ Die Folge (a_n) werde nach der Regel
$a_1=1$, $a_2=5$, $a_{n+1}=a_n a_{n-1}+1$ für $n\geqq 2$
gebildet. Zeige, daß a_{1000} nicht durch 3 teilbar ist!

Aufgabe ▲ 4 ▲ für die Klasse 10 stimmt mit der Aufgabe ▲ 2 ▲ von Klasse 9 überein. Außerdem wurde allen Olympiadeteilnehmern die folgende Aufgabe gestellt:
Die Bodenfläche einer Schachtel sei ein Quadrat der Seitenlänge 3 cm. Auf dem Boden der Sachachtel liege ein Würfel mit der Kantenlänge 1 cm. Zeige, daß man auf den Boden der Schachtel noch
a) einen gleich großen Würfel,
b) zwei gleich große Würfel,
c) drei gleich große Würfel
stellen kann, ohne dabei den zuerst in der Schachtel liegenden Würfel zu verrücken!

W. Schmidt

Bild 5
Prof. Dr. Kubilius,
Rektor der Universität Vilnius (links)
im Gespräch mit Prof. Dr. Griepentrog,
Sektionsdirektor der Sektion Mathematik
der Universität Greifswald

Mein Taschenrechner „SR 1“

Teil 2

Der Schulrechner SR 1 hat wie viele andere Taschenrechner eine *Sieben-Segment-Anzeige*, d. h., jede Ziffer wird als Kombination von 7 möglichen Leuchtbalken dargestellt. Dreht man den Taschenrechner um 180° und betrachtet nun die Anzeige, so können einige Ziffern, wie z. B. 5, 7, 3 als Buchstaben gelesen werden. Gibt man die Ziffern 3 – 8 – 3 – 1 – 7 in die Anzeige, so „entsteht“ das Wort LIEBE. Ihr könnt selbst schnell weitere Wörter eingeben, z. B. EIS, EI, ELLE usw.

Die Anzeige des SR 1 ermöglicht eine maximale Anzeige von acht Ziffern, einem Vorzeichen, einem Komma und einer Anzeige über die Belegung des Speichers (M).

Beispiel:

$\underline{\text{M}}$8. 765 4321

Mit Hilfe der Taste $\boxed{\text{EEX}}$ besteht nun noch die Möglichkeit, Zahlen als Produkte mit Zehnerpotenzen einzugeben.

Beispiel:

$$\underbrace{123}_{\text{Mantisse}} \cdot \underbrace{10^4}_{\text{Potenz}} \quad \swarrow \text{Exponent} \quad \nwarrow \text{Basis}$$

Dabei kann der Exponent der Zehnerpotenz maximal zweistellig und auch negativ sein. Für die Mantisse stehen in der Anzeige 5 Stellen zur Verfügung.

Die Anzeige 54 321. 12
bedeutet $54\,321 \cdot 10^{12}$

Die Anzeige 54 321. – 12
bedeutet $54\,321 \cdot 10^{-12}$ bzw. $\frac{54\,321}{10^{12}}$.

▲ 9 ▲ Welches ist die größte Zahl, die man in den SR 1 eingeben kann?

Diese größte Zahl, die man in den SR 1 eingeben kann, wird von ihm nicht „verarbeitet“. Betätigt man nämlich nach Eingabe dieser Zahl irgendeine Operations-, Funktions- oder Speichertaste, so zeigt der SR 1 „Überlauf“ „E 0.“ an. Ein Weiterrechnen ist nun erst nach Betätigung der Taste $\boxed{\text{CE} - \text{C}}$ möglich. Die größte ganze Zahl, mit der der Schulrechner arbeitet, ist die Zahl $9 \cdot 10^{99}$.

▲ 10 ▲ Berechne mit dem SR 1 (falls möglich)!

a) $9 \cdot 10^{99} : 2$
b) $9 \cdot 10^{99} - 3$
c) $9 \cdot 10^{99} \cdot 2$
d) $2 : 4 \cdot 10^{99}$
e) $9 \cdot 10^{99} : 0$

Beim Lösen der Aufgabe 10 kommt man an Grenzen des SR 1. So gibt er für die Aufgabe $9 \cdot 10^{99} - 3$ nur einen gerundeten Näherungswert $(9 \cdot 10^{99})$ an. Die Aufgaben 10c) und 10d) kann der SR 1 gar nicht lösen. Er zeigt Überlauf an. Dieselbe Anzeige, nämlich „E 0“, erhält man bei der Aufgabe 10e). Hier bedeutet die Anzeige aber nicht Überlauf, sondern, daß die Aufgabe überhaupt nicht lösbar ist, da die Division durch 0 nicht erklärt ist.

Auch das Gesetz $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$ $(a, b, c \in Q)$ [1]) ist im Taschenrechner nicht immer gültig.

Beispiel:

$$(2 : 5 \cdot 10^{99}) \cdot 4 \cdot 10^{90}$$
$$= (2 \cdot 4 \cdot 10^{90}) : 5 \cdot 10^{99}$$

Diese Gleichheit kann man mit dem SR 1 nicht zeigen:

$\boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{5}\ \boxed{\text{EEX}}\ \boxed{99}\ \boxed{\times}\ \boxed{4}$
$\boxed{\text{EEX}}\ \boxed{90}\ \boxed{=}$
↓
E 0.

$\boxed{2}\ \boxed{\times}\ \boxed{4}\ \boxed{\text{EEX}}\ \boxed{90}\ \boxed{\div}\ \boxed{5}$
$\boxed{\text{EEX}}\ \boxed{99}\ \boxed{=}$
↓
1.6 – 09

[1]) Q ist das Symbol für die Menge rationaler Zahlen.

▲ 11 ▲ Berechne mit dem SR 1!

a) 0,3 : 40 000
b) 0,03 : 40 000
c) 2 : 3
d) 2 : 123

Eine Besonderheit des SR 1 wird beim Lösen der Aufgabe 11) sichtbar. Unser Schulrechner gibt mitunter *Ergebnisse* von Rechnungen als Produkte mit Zehnerpotenzen an. Ein Vorteil dieser Anzeige liegt darin, daß oft linke Nullen einer rationalen Zahl a $(|a| < 1)$ die Anzeige nicht belasten. Damit erhöht sich u. U. die Genauigkeit der Anzeige. Während z. B. der SR 1 bei der Aufgabe 11b) 7.5 – 07 anzeigt, erscheint bei gleicher Aufgabe in der Anzeige des Taschenrechners MR 410 nur der Näherungswert 0.0000007.

Hier gleich noch ein Beispiel:

Es soll der Wert des Terms $\frac{0{,}07503}{61\,000} \cdot 72$ berechnet werden.

Wir wählen folgenden Rechenablaufplan:

$\boxed{0{,}07503}\ \boxed{\div}\ \boxed{61\,000}\ \boxed{\times}\ \boxed{72}\ \boxed{=}$

Mit dem SR 1 erhalten wir das genaue Ergebnis $8{,}856 \cdot 10^{-5}$. Verwendet man den Taschenrechner MR 410, so erhält man lediglich den Näherungswert 0,0000864.

▲ 12 ▲ Berechne mit dem SR 1!

a) 20 : 99	e) 40 : 99
b) 21 : 99	f) 50 : 99
c) 30 : 99	g) 60 : 99
d) 34 : 99	h) 70 : 99

Überlege, unter welchen Bedingungen der SR 1 trotz Vorhandenseins einer linken Null keine Zehnerpotenzschreibweise verwendet!

Treten beim SR 1 Resultate von Rechnungen auf, die mehr als 8 Stellen haben, so gibt der Taschenrechner oft nur einen Näherungswert für das Ergebnis an!

▲ 13 ▲ Berechne mit dem SR 1!

Gib jeweils an, ob das mit dem Rechner ermittelte Ergebnis ein Näherungswert ist!

a) 27 371 · 97	c) 654 321 · 987
b) 543 210 · 0,03	d) 10 : 99

Auch bei der *Eingabe* von Zahlen muß man u. U. Näherungswerte verwenden, da der Rechner sonst überfordert ist. Das ist z. B. beim Lösen folgender Aufgabe mit Hilfe des SR 1 erforderlich. 9 876 543,29 : 13,7. An Stelle des 1. Operanden wird man die Zahl 9 876 543,3 in den Taschenrechner eingeben. Das Ergebnis ist natürlich unter diesen Bedingungen nur ein Näherungswert.

Linke Nullen können bei der Eingabe unter Nutzung der Taste $\boxed{\text{EEX}}$ „abgefangen“ werden.

So kann die Aufgabe 0,0000007654 : 0,165 mit dem SR 1 wie folgt gelöst werden:

$\boxed{7{,}654}\ \boxed{\text{EEX}}\ \boxed{7}\ \boxed{+/-}\ \boxed{\div}$
$\boxed{0{,}165}\ \boxed{=}$

▲ 14 ▲ Berechne mit dem SR 1 folgenden Term!

$$(4 : 7) \cdot 7 - 4$$

Würde man bei der Lösung dieser Aufgabe auf den Taschenrechner verzichten – und das wäre sinnvoll –, käme man zum Resultat 0. Mit dem SR 1 wählen wir folgenden Ablaufplan:

$\boxed{4}\ \boxed{\div}\ \boxed{7}\ \boxed{\times}\ \boxed{7}\ \boxed{-}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$
↓
-1.10^{-8}

Der Taschenrechner liefert als Ergebnis nicht Null, sondern $-1 \cdot 10^{-8}$. Ein von Null verschiedenes Ergebnis war eigentlich zu erwarten, da der SR 1 als Resultat der Division 4 : 7 nur einen Näherungswert zur Verfügung hat. Erstaunlich ist aber die Tatsache, daß der SR 1 bei Abarbeitung nachstehenden Ablaufplanes 4. anzeigt.

$\boxed{4}\ \boxed{\div}\ \boxed{7}\ \boxed{\times}\ \boxed{7}\ \boxed{=}$ [1])
↓
4.

Erst die Subtraktion 4. – 4 liefert den Wert $-1.\ 10^{-8}$. Die Ursache für diesen Effekt liegt darin, daß der SR 1 *mit einer Stelle mehr* arbeitet, als er anzeigt. Der Rechner rundet auf die 8. Stelle. Diese neunte Stelle kann man dem Rechner mit einem kleinen Trick entlocken. Lösen wir z. B. mit dem SR 1 die Aufgabe 40 : 7, so zeigt der Rechner das Ergebnis 5. 7 142 857. Subtrahiert man von dieser Anzeige 5 und multipliziert das Ergebnis mit 10, so erhält man erneut eine achtstellige Anzeige (7. 1 428 571). Die 9. Stelle bei der Division 40 : 7 ist also 1.

[1]) Andere Taschenrechner, z. B. der MR 410, liefern hier den Wert 3.9999995.

▲ 15 ▲ a) Untersuche, ob der SR 1 vielleicht sogar mit 10 Stellen arbeitet!
b) Ermittle die 8. Stelle von π nach dem Komma, die der SR 1 gespeichert hat!

▲ 16 ▲ Gib zwei Zahlen zwischen 0 und 1 an, die der SR 1 nicht anzeigen kann!

Der Taschenrechner arbeitet mit sogenann-

ten *Rechnerzahlen.* Zwischen zwei beliebigen Rechnerzahlen gibt es jeweils unendlich viele reelle Zahlen, die der Taschenrechner weder verarbeitet noch anzeigt. Der beschränkte, lückenhafte Zahlbereich von Taschenrechnern kann mitunter unangenehme Folgen haben, wie wir schon an einigen Beispielen gesehen haben.
Hier ein weiteres Beispiel:
Bei der Nutzung des Taschenrechners SR 1 gilt nicht stets

$$\underbrace{a + a + a \ldots + a}_{n \text{ Summanden}} = n \cdot a \qquad (a \in Q;\ n \in N,\ n > 1)$$

So erhält man für die Summe

$$\underbrace{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{2}{3}}_{12 \text{ Summanden}}$$

bei Nutzung des SR 1 den Wert 7. 9999999.

$\boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{+}\ \ldots$
$\boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

Ermittelt man mit dem SR 1 den Wert von $12 \cdot \frac{2}{3}$, so erhält man 8.

$\left(\boxed{12}\ \boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\right)$.

Auch die Gleichung $\left(\sqrt[b]{a}\right)^b = a\,(a > 0;\ b \in N)$ gilt beim Arbeiten mit dem SR 1 nicht immer:

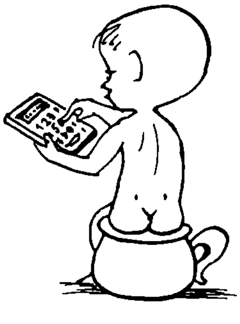
$\left(\sqrt[8]{3}\right)^8$

$\boxed{3}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{\sqrt{\ }} \longrightarrow \boxed{x^2}\ \boxed{x^2}\ \boxed{x^2}$

1.1472027   2.9999997

Besonders aufpassen muß man bei Benutzung von Zahlen, die sich in ihrer Größenordnung wesentlich voneinander unterscheiden (vgl. Aufg. 10b). Soll z. B. die Summe 98 763 210 + 0,012345 mit dem SR 1 ermittelt werden, so erhält man das Ergebnis 98 763 210. Im Kopf hätte man sehr schnell das genaue Resultat 98 763 210,012345 ermitteln können.
Wie wir an vielen Beispielen gesehen haben, ist der Taschenrechner ein sehr nützliches Hilfsmittel, allerdings sollte man sich bei seiner Nutzung stets auch seines eigenen mathematischen Sachverstandes bedienen. Eine kritische Haltung zum ermittelten Ergebnis und zum gewählten Rechenablaufplan sind wichtig, um erfolgreich mit einem Taschenrechner zu arbeiten.

L. Flade



Eine Tangentenkonstruktion ohne Zirkel aus dem Jahre 1640

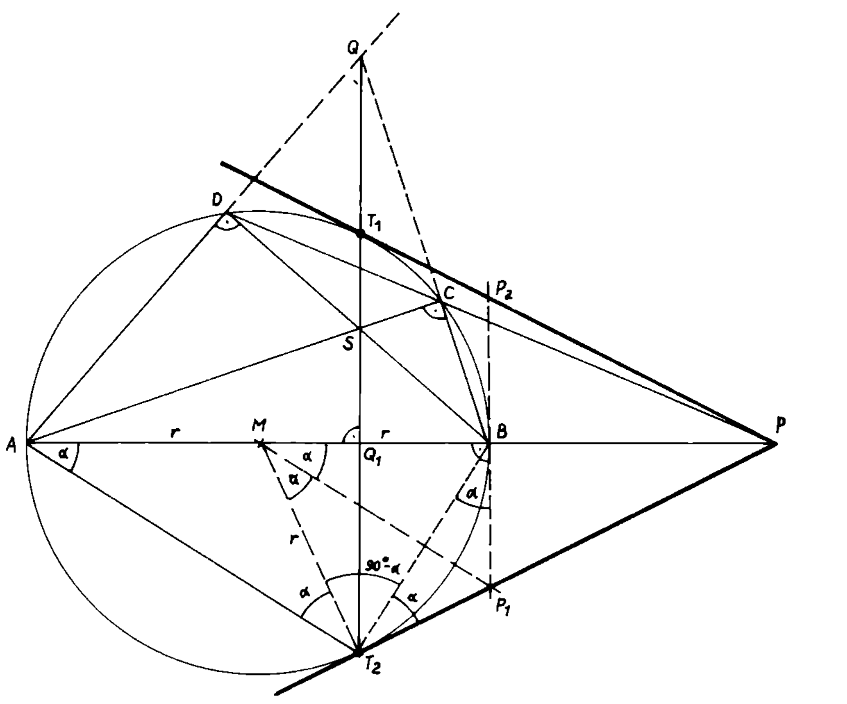
Die Aufgabe, von einem Punkt P außerhalb eines Kreises in M die beiden Tangenten zu konstruieren, soll *ohne Zirkel* gelöst werden.

Lösung: Man zeichne von P aus zwei Sekanten, deren eine durch den Mittelpunkt gehen muß. Die vier Schnittpunkte mit dem Kreis bilden ein Sehnenviereck $ABCD$ über dem Halbkreis mit S als Schnittpunkt der beiden Diagonalen. Nun muß man die beiden Viereckseiten AD und BC verlängern, die sich in Q schneiden. Q wird mit S verbunden und liefert bereits die Tangentenpunkte T_1 und T_2, ist also nach modernem Sprachgebrauch schon die Polare für P. Der Beweis, daß T_1 und T_2 die Berührungspunkte sind, läßt sich etwa folgendermaßen führen:

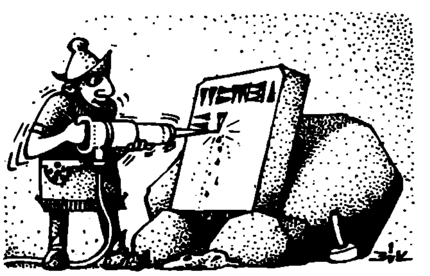
1. Die Diagonalen AC und BD mit dem Schnittpunkt S sind zugleich Höhen im Dreieck ABQ, damit ist auch die Verbindungsgerade QS eine Höhe senkrecht auf der Zentrale AP. Aus der Symmetrie folgt so $PT_1 = PT_2$ als 1. Tangenteneigenschaft
2. Das Dreieck BMT_2 ist gleichschenklig mit dem Winkel 2α bei M. Durch die Senkrechte in B und die Winkelhalbierende in M werden zwei neue Dreiecke geliefert, die kongruent sind (s, w, s). Also Dreieck MBP_1 und MP_1T_2 haben in B und in T_2 rechte Winkel. Damit ist die 2. Tangenteneigenschaft gezeigt, denn MT_2 muß ja wie auch MT_1 Berührungsradius sein.

Diese Polarenkonstruktion wird irrtümlich dem *Gregorius von St. Vincentius* zugeschrieben, der sie aber nicht für die Tangentenkonstruktion benutzte (1647). Sie ist aber schon bei *Woldeck Weland* (1614 bis 1641) in einer kleinen Schrift mit dem Titel *Strena mathematica sive elegantiorium problematum triga* 1640 zu finden, die lange vergessen ist. Diese seine erste und zugleich letzte Arbeit hat er auf Anregung seines Lehrers *Joachim Jungius* (1587 bis 1657) geschrieben, der als Mathematikprofessor auch Jahre an der Universität in Rostock lehrte und dort Bedeutendes geleistet hat. Der Titel dieser vor 345 Jahren gedruckten Schrift lautet etwa: *Ein mathematisches Geschenk oder besonders ausgewählten Probleme am Dreieck,* völlig zu recht, wenn man diese schöne Tangentenkonstruktion betrachtet. Sein früher Tod mit 27 Jahren mitten im 30jährigen Krieg ist ein weiteres Beispiel aus der Mathematikgeschichte, wie wir sie wiederholt finden, z. B. bei *Galois* und *Abel,* um nur zwei große Mathematiker zu nennen.

J. Buhrow



Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

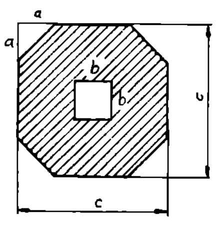


Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1986

Mathematik

Ma 5 ■ 2580 Dieter sammelt Briefmarken aus Freundesland. Er sagt: „Ich habe bereits 320 Briefmarken aus Ungarn und Polen zusammengenommen; es sind 40 Marken mehr aus Polen als aus Ungarn. Aus der ČSSR habe ich doppelt soviel Marken wie aus Ungarn. Aus der UdSSR habe ich 10 Marken mehr als die doppelte Anzahl der Marken aus der ČSSR.“ Wie viele Briefmarken aus Freundesland besitzt Dieter? *K. Wagner, Plauen*

Ma 5 ■ 2581 Berechne den Flächeninhalt der schraffiert dargestellten Fläche der abgebildeten Figur! ($a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $c = 15$ cm) *K. Wagner, Plauen*



Ma 5 ■ 2582 Vier Schüler, und zwar Peter, Rüdiger, Michael und Volkmar, bilden einen Timurtrupp. Jeder von ihnen hilft genau einer der Rentnerinnen, deren Familienname Anders, Beier, Dahlke bzw. Fuhrmann lautet. Es ist folgendes bekannt:
(1) Peter hilft weder Frau Anders noch Frau Beier.
(2) Volkmar hilft Frau Dahlke.
(3) Frau Beier wird nicht von Michael betreut.
Welcher Schüler betreut welche Rentnerin? *Schüler D. Lutterberg, Holungen*

Ma 5 ■ 2583 Eine Strecke $\overline{AD}$ von 168 cm Länge wurde in drei Teilstrecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ so zerlegt, daß die Strecke $\overline{BC}$ dreimal so lang und die Strecke $\overline{CD}$ viermal so lang ist wie die Strecke $\overline{AB}$. Wie lang sind die drei Teilstrecken? *Schüler M. Danzer, Dresden*

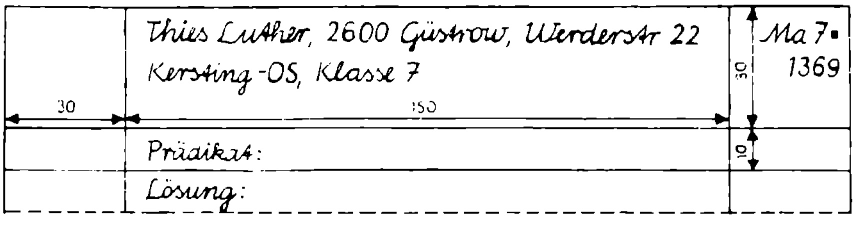
Ma 5 ■ 2584 Frau A kaufte beim Bäcker doppelt so viele, Frau B dreimal so viele Brötchen wie Frau C. Zusammen kauften diese drei Frauen 30 Brötchen. Wie viele Brötchen kaufte jede von ihnen? *Schülerin D. Schiller, Döbeln*

Ma 5 ■ 2585 Eine Mutter ist gegenwärtig so alt wie ihre drei Töchter zusammen, aber jünger als 40 Jahre. Vor acht Jahren war sie neunmal so alt wie die jüngste und viermal so alt wie die älteste Tochter. Wie alt ist jede der drei Töchter (in ganzen Zahlen) gegenwärtig? *Sch.*

Ma 6 ■ 2586 Frau L. schenkte sich eine Tasse Kaffee ein, trank den sechsten Teil davon aus und goß die gleiche Menge Milch nach. Von dieser Kaffee-Milch-Mischung trank sie den dritten Teil und goß wieder die gleiche Menge Milch nach. Nun trank sie die Hälfte der Mischung, goß die gleiche Menge Milch nach und trank die gefüllte Tasse völlig aus. Hat Frau L. mehr Kaffee als Milch oder weniger Kaffee als Milch getrunken?
Die Antwort ist zu begründen! *Schüler K. Pickert, Plauen*

Ma 6 ■ 2587 Robert, Elvira und Peter wollen ihrer Mutter zum Geburtstag ein Geschenk kaufen, das 51 M kostet. Elvira steuert fünfmal soviel Geld wie Robert, Peter aber nur halb soviel Geld wie Elvira dazu bei. Wieviel Mark gibt jedes der drei Geschwister für das Geschenk aus? *Schüler R. Menzel, Dresden*

Ma 6 ■ 2588 An eine Kaufhalle wurden insgesamt 290 kg Äpfel, Tomaten, Birnen und Pfirsiche geliefert, und zwar doppelt soviel Kilogramm Birnen wie Äpfel, 10 kg Tomaten mehr als Birnen, 20 kg Pfirsiche weniger als Äpfel. Wieviel Kilogramm jeder Sorte wurden an diese Kaufhalle geliefert? *Schülerin S. Schubert, Machern*



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha
7027 Leipzig,
Postfach 14

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1985/86 läuft von Heft 5/1985 bis Heft 2/1986. Zwischen dem 1. und 10. September 1986 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/85 bis 2/86 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/86 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/85 bis 2/86) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1985/86 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Ma 6 ■ 2589 Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, für die folgendes gilt:
(1) Vertauscht man die Grundziffern der ersten Zahl, so erhält man eine weitere zweistellige Zahl.
(2) Subtrahiert man die kleinere der beiden Zahlen von der größeren, so ist die Differenz gleich der Quersumme jeder dieser Zahlen. *Schülerin V. Türke, Auerbach*

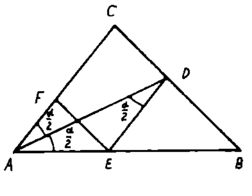
Ma 6 ■ 2590 Zwei Personen schälten zusammen 400 Kartoffeln. Eine dieser beiden Personen schälte 3 Stück, die andere 2 Stück je Minute. Die zweite Person arbeitete 25 Minuten länger als die erste. Wie viele Minuten arbeitete jeder dieser beiden Personen? *Schüler A. Burian, Neundorf*

Ma 7 ■ 2591 Anja wurde von Claudia gefragt, welche Zahlen sie im Tele-Lotto getippt habe; Anja antwortete: „Die dritte getippte Zahl ist gleich dem Dreifachen der ersten Zahl. Die zweite Zahl ist um 2 kleiner als die dritte; die vierte Zahl ist um 9 größer als die zweite. Die fünfte Zahl ist eine Primzahl zwischen 20 und 30. Die Summe aller fünf getippten Zahlen beträgt 84.“ Welche Zahlen hat Anja getippt?
Schülerin K. Asche, Leimbach

Ma 7 ■ 2592 Welche gebrochene Zahl mit dem Nenner 17 ist größer als $\frac{1}{4}$, aber kleiner als $\frac{1}{3}$? *Schülerin A. Strauß, Stendal*

Ma 7 ■ 2593 An einem Obststand wurden im Verlauf einer Woche insgesamt 850 kg Obst gekauft, und zwar doppelt soviel Kilogramm Pflaumen wie Kirschen, 180 kg Birnen und 240 kg Äpfel mehr als Pflaumen, aber 20 kg Bananen weniger als Pflaumen. Wieviel Kilogramm von jeder Obstsorte wurde gekauft?
Schüler R. Schmugler, Neuhaus

Ma 7 ■ 2594 In dem abgebildeten Dreieck ABC schneidet die Halbierungslinie des Winkels BAC die Gerade BC in D. Die Parallele zu AC durch D schneidet AB in E. Die Parallele zu BC durch E schneidet AC in F. Weise nach, daß $\overline{AE} = \overline{CF}$ gilt!



Ma 8 ■ 2595 Herr Weise wird von Frau Klug gefragt, welches Alter seine drei Kinder haben. Herr Weise antwortet: „Keines meiner Kinder ist älter als 13 Jahre. Multipliziert man die Zahlen miteinander, die jeweils das Lebensalter der Kinder in vollen Jahren angeben, so erhält man 112.“ Nach kurzer Überlegung sagt Frau Klug: „Wenn ich weiß, ob unter diesen Kindern Zwillinge sind, kann ich ihr Alter ermitteln.“
Weshalb braucht Frau Klug zur Lösung des Problems einen Hinweis, ob unter den Kindern des Herrn Weise Zwillinge sind?
Dr. H.-G. Friedemann, IfL Auerbach

Ma 8 ■ 2596 Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ und $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. Ferner gilt: $\overline{AB}$ ist doppelt so lang wie $\overline{CD}$, und die Länge von $\overline{DC}$ beträgt $\frac{2}{3}$ der Höhe h des Trapezes. Es ist nun ein Halbkreis über dem Durchmesser $\overline{DC}$ so zu zeichnen, daß er im Innern des Trapezes liegt. Der prozentuale Anteil der Halbkreisfläche an der Trapezfläche ist zu berechnen.

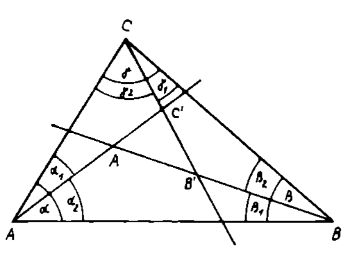
Ma 8 ■ 2597 Ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = 10$ cm, $b = 12$ cm und $c = 13$ cm sei konstruiert. Es ist die Fläche dieses Dreiecks in 16 paarweise kongruente Dreiecksflächen zu zerlegen. Wie groß ist der Umfang eines der Teildreiecke? Die Zerlegung ist zu begründen!
OL O. Chromy, Coswig

Ma 8 ■ 2598 Auf einer horizontal verlaufenden Straße befindet sich ein 40 m hoher Beobachtungsstand. 600 m von diesem entfernt wird die Sicht durch ein 12 m hohes Haus versperrt. Wie lang ist der Teil der Straße, der vom Beobachtungsstand aus nicht eingesehen werden kann? Wir wollen davon ausgehen, daß im Straßenverlauf keine Kurve ist. *OL O. Chromy, Coswig*

Ma 9 ■ 2599 Es sind alle geordneten Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen anzugeben, die das folgende Ungleichungssystem erfüllen:
(1) $x^y + y^x < 31$
(2) $x^{\frac{1}{y}} + y^{\frac{1}{x}} < 3\,.$

Ma 9 ■ 2600 Zu einer Familie gehören sechs Personen (Vater, Mutter, zwei Söhne und zwei Töchter). Multipliziert man die Zahlen miteinander, die jeweils das Alter der weiblichen Familienmitglieder in vollen Jahren angeben, so erhält man 5291. Für die männlichen Familienmitglieder ist das entsprechende Produkt 3913. Unter den Kindern dieser Familie ist ein Zwillingspaar. Sind die Zwillinge von gleichem Geschlecht?
Dr. H.-G. Friedemann, IfL Auerbach

Ma 9 ■ 2601 Im abgebildeten Dreieck ABC ist jeder der Innenwinkel so geteilt worden, daß gilt $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1$.



Es ist zu beweisen, daß das dadurch entstandene Dreieck $A'B'C'$ zum Dreieck ABC ähnlich ist.
D. Küpper, Wirtzfeld; Belgien

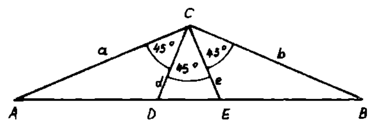
Ma 9 ■ 2602 Einem Quadrat mit der Seitenlänge a ist ein Kreis und diesem wiederum ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben. Der Flächeninhalt dieses gleichseitigen Dreiecks ist durch die Länge a *auszudrücken.*
Schüler P. Schmedemann, Templin

Ma 10/12 ■ 2603 Welches Relationszeichen ist zwischen die Terme T_1 und T_2 zu setzen, damit eine wahre Aussage entsteht?
$T_1 = (5^5\cdot 4^4\cdot 3^3\cdot 2^2)^{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$;
$T_2 = 5^{4^{3^2}}$ *Schüler B. Schubert, Rostock*

Ma 10/12 ■ 2604 Zu einer Familie gehören Vater, Mutter, zwei Töchter und zwei Söhne. Addiert man die Zahlen, die jeweils das Alter der männlichen Familienmitglieder in vollen Jahren angeben, so erhält man 61. Diese Zahl erhält man auch, wenn man mit den Altersangaben der weiblichen Familienmitglieder entsprechend verfährt. Die Mutter ist jünger als 40 Jahre. Die Anzahl der Lebensjahre ist für jedes Familienmitglied eine Primzahl. Wie alt ist das älteste Kind der Familie, wenn bekannt ist, daß es in der Familie Drillinge gibt?
Dr. H.-G. Friedemann, IfL Auerbach

Ma 10/12 ■ 2605 Es sind alle reellen Zahlen $x\left(x \neq \frac{\pi}{2}\cdot k;\ k \in G\right)$ zu bestimmen, für die gilt
$\sin x\cdot\cos x = \tan x\cdot\cot x$!
Schüler I. Warnke, Oranienburg

Ma 10/12 ■ 2607 In einem Dreieck ABC seien die Punkte D und E so auf $\overline{AB}$ festgelegt, daß die Winkel $\sphericalangle ACD$, $\sphericalangle DCE$ und $\sphericalangle ECB$ paarweise kongruent sind und die Größe jedes dieser Winkel 45° beträgt. Die Längen der Strecken $\overline{AC}$, $\overline{DC}$, $\overline{EC}$ und $\overline{BC}$ seien mit a, d, e und b bezeichnet. Es ist zu beweisen, daß stets gilt:
$$\frac{b+d}{a} = \frac{b-d}{e}!$$

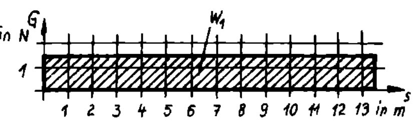


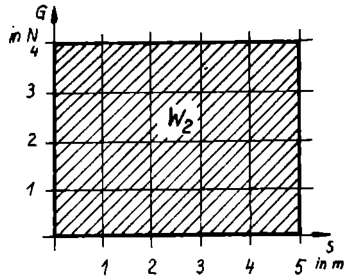
Skizze (nicht maßstäblich!)
Schüler J.-P. Redlich, Wittenberge

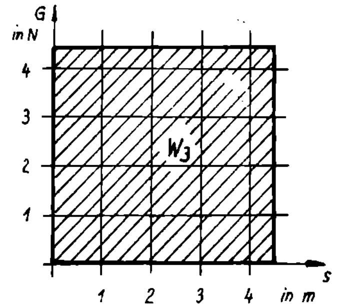
Physik

Ph 6 ■ 182 Ein Stück Eisenblech von der Größe 2,5 m mal 1,5 m soll, um es vor Rost zu schützen, auf beiden Seiten mit einer 0,09 mm starken Lackschicht überzogen werden.
Wieviel cm³ Lack werden gebraucht?

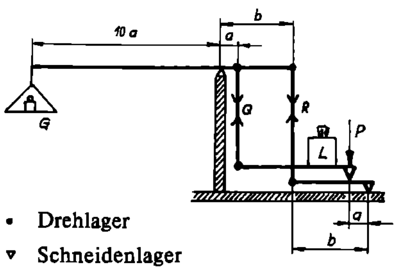
Ph 7 ■ 183 Bestimme die in den drei Arbeitsdiagrammen dargestellte Hubarbeit, und ordne sie der Größe nach!







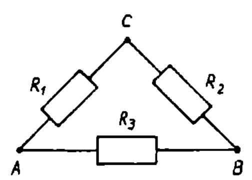
Ph 8 ■ 184 Relativ einfach ist es, eine Dezimalwaage (Gewicht : Last = 1 : 10) zu entwickeln, wenn die Last auf einen bestimmten Punkt wirken würde. Beim Abwägen darf dieser Auflagepunkt jedoch keinen Einfluß haben. Für die gegebene Anordnung ist der Beweis zu erbringen, daß bei unterschiedlicher Lastlage stets eine genaue Gewichtsbestimmung erfolgt.



- Drehlager
- ▾ Schneidenlager
- Ⲓ Stangenkraft

Dipl.-Ing. H. Miethig, Dresden

Ph 9 ■ 185 Drei Ohmsche Widerstände, die sich im Größenverhältnis $R_1 : R_2 : R_3 = 1 : 2 : 5$ befinden, werden zu einem Dreieck mit den Eckpunkten *A*, *B* und *C* zusammengeschaltet. Wird an die Punkte *A* und *B* (siehe Bild) eine Spannung von



210 V angeschlossen, so beträgt die von der Schaltung aufgenommene Leistung 294 W. Man bestimme die Größen der Widerstände R_1, R_2 und R_3.

H. Schreiber, Dresden

Ph 10/12 ■ 186 Der Montgolfier-Ballon hatte ein Volumen von 2200 m³, eine Masse von 785 kg und konnte zwei Personen von insgesamt 150 kg befördern.

a) Auf welche Dichte mußte die erwärmte Luft gebracht werden, damit der Ballon zum Schweben kam?

b) Wie groß wäre die Tragkraft des Ballons gewesen, wenn man ihn mit Wasserstoff gefüllt hätte? Wieviel Personen zu 75 kg könnten getragen werden?

(Dichte der Luft $\varrho_L = 1{,}3\ \mathrm{kg/m^3}$, Dichte des Wasserstoffs $\varrho_W = 0{,}09\ \mathrm{kg/m^3}$)

Chemie

Ch 7 ■ 145 12 g Kochsalz werden in Wasser gelöst und die Lösung auf 350 ml aufgefüllt. 40 ml dieser Lösung werden entnommen und zur Analyse verwendet. Wieviel Gramm Kochsalz sind in den entnommenen 40 ml Lösung enthalten?

Ch 8 ■ 146 Mit Hilfe genormter Siebe werden 150 g Asche nach der Korngröße getrennt. Die Siebanalyse brachte folgende Werte:

Sieb-Nr. (Maschenweite des Siebes in mm)						
1,0	0,75	0,5	0,25	0,1	0,075	Sieb feines
Auswaage in Gramm						
2,6	16,8	18,1	45,7	51,2	5,6	10,0

Wieviel Prozent der einzelnen Korngrößen enthält die Asche?

Ch 9 ■ 147 Welche Konzentration muß die Schwefelsäure besitzen, damit bei der Reaktion mit Magnetsium eine 32,2%ige Magnesiumsulfat-Lösung entsteht?

Ch 10/12 ■ 148 Zur Titration von 0,02 dm³ Natronlauge verbraucht man 15,3 ml Salzsäure. Die Normalität der Säure beträgt 1,0; der Normalitätsfaktor 1,005.

a) Wieviel Gramm Natriumhydroxid sind in den 0,02 dm³ Natronlauge enthalten?

b) Wieviel Mol Natriumhydroxid enthält die Natronlauge im Liter?

c) Wieviel Prozent Natriumhydroxid enthält die Natronlauge, wenn zur Titration 20,6 g Natronlauge statt 0,02 dm³ eingesetzt wurden und die gleiche Menge Salzsäure verbraucht wurde?

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

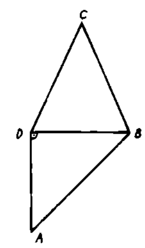
Eine Aufgabe – verschiedene Varianten mit steigendem Schwierigkeitsgrad

Wir stellen unseren Lesern Aufgaben ähnlichen Inhalts für Schüler der Klassen 5 bis 10 vor. Diese Aufgaben wurden von Klassenstufe zu Klassenstufe variiert und im Schwierigkeitsgrad erhöht. Wir empfehlen allen interessierten Lesern, mit der Lösung der Aufgabe für Klasse 5 zu beginnen und bei Erfolg von Klassenstufe zu Klassenstufe voranzuschreiten, soweit es zu schaffen ist.

Startposition

Von einem konvexen Viereck *ABCD* sei folgendes bekannt:

(1) Die Seite $\overline{AB}$ ist 8 cm lang;
(2) es gilt $\overline{AD} = \overline{BD}$;
(3) es gilt $\overline{BC} = \overline{CD}$;
(4) der Winkel *ADB* hat die Größe 90°.



Aufgaben

Klasse 5 · Welche Länge hat der Umfang des Dreiecks *BCD*, wenn der Umfang des Vierecks *ABCD* 18 cm beträgt?

Klasse 6 · Welchen Flächeninhalt besitzt das Viereck *ABCD*, wenn der Winkel *BCD* die Größe 90° hat?

Klasse 7 · Welche Größe haben die Innenwinkel des Vierecks *ABCD*, wenn es ein Sehnenviereck ist?

Klasse 8 · Welche Längen haben die Seiten des Vierecks *ABCD*, wenn der Winkel *BCD* die Größe 90° besitzt?

Klasse 9 · Es sei *h* die Höhe zur Seite *BD* des gleichschenkligen Dreiecks *BCD*. Drücken Sie den Flächeninhalt des Vierecks *ABCD* als Funktion von *h* aus!

Klasse 10 · Wie lang sind die Seiten des Vierecks *ABCD*, wenn der Winkel *ABC* die Größe 72° hat?

V. Pöschel/Th. Scholl

Eine Aufgabe von Prof. Dr. B. K. Mlodzievsky

Prof. Mlodzievsky veröffentlichte im Jahre 1910 in einer math.-methodischen Zeitschrift die folgende Aufgabe:

▲2579▲ Man beweise drei Behauptungen:

1. Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit zwei gegebenen Seiten wird maximal, wenn der Winkel zwischen diesen beiden Seiten 90° beträgt.
2. Der Flächeninhalt eines Vieleckes, in dem alle Seiten außer einer gegeben sind, wird maximal, wenn kein Innenwinkel größer als 180° ist und wenn sich ein Kreis umschreiben läßt, dessen Durchmesser die letzte Seite ist.
3. Von allen Vierecken mit gegebenen Seiten hat jenes den größten Flächeninhalt, dessen Eckpunkte auf einem Kreis liegen.

(Abschließend weist der Autor darauf hin, daß man die letzte Behauptung auf alle Vielecke mit einer beliebigen Seitenzahl erweitern kann.)

Aus dem Leben Mlodzievskys

B. K. Mlodzievsky wurde 1858 in Moskau als Sohn eines Professors der Medizin und seiner Frau, der Tochter eines tschechischen Musikers geboren. Bereits nach einem Lebensjahrzehnt verlor er seinen Vater. Die Witwe mit ihren beiden Kindern wurde von deren Bruder, einem bekannten Maler und Mitglied der Moskauer Kunstakademie, unterstützt. Boleslaw besuchte ein Moskauer Gymnasium. Dort begeisterten ihn besonders Mathematik und Literatur. Mit Leichtigkeit erlernte er Griechisch und Latein sowie zwei „lebende" Sprachen: Deutsch und Französisch. Mit 18 Jahren schloß er das Gymnasium mit der Goldmedaille ab.

Im Polytechnischen Museum Moskaus hörte er zufällig einen Vortrag des talentierten Pädagogen, des Mathematikprofessors W. J. Zinger (1836 bis 1907). Sowohl der Vortragsgegenstand, die Geometrie, als auch die elegante Darlegungsweise begeisterten M. so, daß er beschloß, sich der Mathematik, insbesondere der Geometrie, für sein ganzes Leben zu verschreiben. 1876 trat er in die Abteilung Mathematik der Moskauer Universität ein. Vier Jahre später wurde die von ihm eingereichte Arbeit über „Klassifikation der ebenen Kurven 3. Ordnung" mit *sehr gut* bewertet. Zinger schlug vor, den begabten jungen Mathematiker „auf den Professorentitel" vorzubereiten. Während dieser Zeit unterrichtete er, sehr zu seinem Vorteil, an mittleren Bildungseinrichtungen. Im Jahre 1882 heiratete er seine ehemalige Schülerin Elena Laptewa. Seine Magister-Dissertation, seine Doktorarbeit, schaffte er so gut, daß er von der Universität nach Paris und Göttingen zur Weiterbildung delegiert wurde. Nach seiner Rückkehr (1892) wurde er zum Professor ernannt.

Im letzten Jahrzehnt arbeitete er mit Prof. Dr. Jegorow und Prof. K. A. Andrejew eng zusammen. Alle drei Experten auf dem Gebiet der Geometrie schufen eine Reihe fundamentaler Arbeiten, entwickelten eine neue Lehrmethode in der Mathematikausbildung. Zu Beginn des 20. Jh. wurde von M. als erstem in Moskau und in ganz Rußland an der Universität ein Lehrgang zur Mengenlehre und der Theorie der Funktionen eingerichtet.

M. war immer fröhlich, beweglich, besonders gutherzig und verständnisvoll, war ein ausgezeichneter Lektor. Besonders rechnerische Fähigkeiten, Feinheit der Methodenverwendung, Klarheit und Einfachheit der Darlegungen, sparsame treffliche Gesten – all das führte dazu, daß seine Vorlesungen stets überfüllt waren. Für befähigte und arme Studenten bemühte er sich um Stipendien oder versuchte Nachhilfeunterricht zu organisieren.

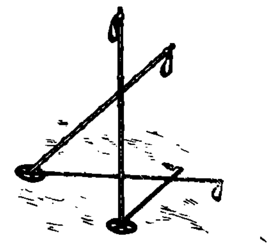
Wie die meisten intellektuellen Familien, hielten auch die Mlodzievskys zu Beginn des 20. Jh. ihren *Empfangstag* am Mittwoch. Das gastfreundliche Ehepaar wurde gern von den führenden Professoren der Moskauer Universität besucht, darunter die Mechaniker Shukowsky und Tschaplygin, die Physiker Umow, Lebedjew und Zinger (der Sohn des Lehrers des Hausherrn), der Biologe Timirjazjew, Historiker Kljutschewsky und viele andere. Hier im gemütlichen Gästezimmer führte man viele Gespräche über das Tagesgeschehen, über die wachsende Neugier der Studenten, man tadelte die Strenge, die durch die Behörden eingeführt worden war. Oft wiederholte der Hausherr, daß es einen Titel gibt, der über dem Gelehrten steht, und das ist *der Mensch*. Manchmal bereitete er auch den Gästen Vergnügen durch sein virtuoses Spiel auf dem Klavier.

Die Existenz der Moskauer Universität zu Beginn des 20. Jh. war gekennzeichnet durch einen ständigen Kampf: Die Universität strebte die Verwirklichung des ihr einst gegebenen Rechts auf Autonomie an, aber die Behörden bekämpften sie als Hort der Freiheitsgedanken. Dieser Kampf verstärkte sich besonders im Frühjahr des Jahres 1911, als in nur 40 Tagen Tausende von Studenten von der Universität gewiesen wurden. Als Zeichen des Protestes verweigerten zahlreiche Wissenschaftler ihren Dienst. Auch Prof. Mlodzievsky verließ die Universität und kehrte 1917 zurück.

M. schrieb zahlreiche Beiträge, war besonders bemüht um die Aus- und Weiterbildung der Mathematiklehrer, war tätig als Sekretär, Vizepräsident und im letzten Jahr sogar als Präsident der Mathematischen Gesellschaft Rußlands. Er starb im Jahre 1920.

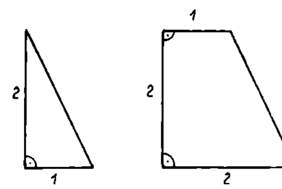
A. Halameisär, Moskau

▲1▲ При помощи теней определите, соприкасаются ли эти лыжные палки.



▲2▲ Geometrical Puzzles for Beginners: Figure 1 shows a right-angled triangle, whose base is one unit, and its height two units, and a right-angled trapezium with two perpendicular sides, each of 2 units, and a short side of 1 unit. Cut out shapes like these from a piece of cardboard, and show that they can be fitted together to form

(a) a square
(b) a triangle
(c) a parallelogram
(d) a quadrilateral with two right-angled corners.



By turning over the triangle, you can make
(e) an isosceles trapezium.

▲3▲ Trois lignes d'autobus ont pour point de départ la gare Montparnasse à Paris. Les autobus de la première ligne sont de retour au bout de 1 h 36 min et restent 4 min à l'arrêt.

Les autobus de la deuxième ligne sont de retour au bout de 1 h 48 min et restent 12 min à l'arrêt; ceux de la troisième ligne sont de retour au bout de 2 h 10 min et restent 20 min à l'arrêt.

Trois autobus, un pour chaque ligne, partent ensemble de la gare Montparnasse à 8 h.

a) A quelle heure ces trois autobus repartiront-ils ensemble pour la première fois de la gare Montparnasse?
b) Combien de trajets chaque autobus aura-t-il alors accomplis?

Ein Besuch in der Knobelwerkstatt

Teil 4: Mathematische Wortspielereien

Nachdem wir uns in den Teilen 2 und 3 dieser Beitragsserie mit der Ideenfindung aus der Umwelt sowie der Mathematik beschäftigt haben, wollen wir nun andere Fachdisziplinen in punkto Eigenbau von Knobelaufgaben zu Rate ziehen. Natürlich würden uns da zuerst Physik, Chemie oder eine andere Naturwissenschaft einfallen, da diese Wissenszweige bereits einen hohen Mathematisierungsgrad besitzen. Auch unsere *alpha* trägt dem Rechnung, denn im *alpha-Wettbewerb* gehören Aufgaben aus Physik und Chemie zum ständigen Repertoire.

Wir wollen aber keine der Naturwissenschaften, sondern einmal die Fachdisziplin *Germanistik*, insbesondere unsere *deutsche Muttersprache, als Ideenlieferant* nutzen und Knobelaufgaben mit Buchstaben, Worten bzw. Sätzen gestalten. Einige Beispiele dazu:

Beispiel 1: Palindrome

Palindrome sind Worte oder Wortreihen, die vor- und rückwärts gelesen dasselbe oder ein anderes sinnvolles Ganzes ergeben. Palindrome der erst- bzw. zweitgenannten Art wollen wir durch die Zusätze *symmetrisch* und *asymmetrisch* unterscheiden. Beispiele für symmetrische Palindrome sind UHU, ELLE, MONOM, TANNAT, TRABART oder der bekannte Satz: EIN NEGER MIT GAZELLE ZAGT IM REGEN NIE. Ihr könnt euch selbst leicht einige Gesetzmäßigkeiten des Aufbaus symmetrischer Palindrome überlegen, etwa über die Lage des Symmetriezentrums bei Palindromen mit gerader bzw. ungerader Buchstaben-Anzahl. Beispiele für asymmetrische Palindrome sind RHO (OHR), LAGE (EGAL), REGAL (LAGER), NENNER (RENNEN) oder der Satz: REGALE LAGERT IM EISNEBEL (LEBEN SIE MIT REGALELAGER). Symmetrische Palindrome in Satzform lassen sich zum großen Teil aus asymmetrischen Palindromen aufbauen, wie z.B. in unserem folgenden, nicht unbedingt sehr sinnvollen Satz: SIE LEBEN MIT RABENHOSEN, HOLEN HONIG, GIN, OHNE LOHNES, OHNE BART IM NEBELEIS. Es wird euch sicher Spaß bereiten, solche palindromische Sätze oder auch Rätsel mit Palindromen zusammenzubauen. Ein Beispiel liefert *Aufgabe 1* unserer Knobel-Wandzeitung (vgl. auch *alpha*, 3/83, S. 67 und 5/83, S. 113).

Beispiel 2: Kombinatorische Worträtsel

Die Kombinatorik behandelt Probleme, die bei der Anordnung (Permutationen) und Auswahl (Variationen und Kombinationen) von Elementen einer endlichen Menge von Zahlen, Buchstaben, Gegenständen o. ä. entstehen. Sicher sind euch diese Begriffe wie auch die entsprechenden Anzahlformeln bekannt (z. B. ist die Anzahl P_n der Permutationen von n verschiedenen Elementen $P_n = n!$). Legt man hierbei Buchstaben-Mengen (also Worte oder Sätze) zugrunde, so kann man vielerlei unterhaltsame Worträtsel gestalten. Einige Beispiele:

2.1. Permutationsrätsel (oder **Schüttelrätsel**):

Durch Permutation der Buchstaben eines (möglichst schon sinnvollen) Wortes soll ein bestimmter Begriff (Vorname, Tier, Stadt, Land, o. ä.) erzeugt werden (*siehe Aufgabe 2* – vgl. auch *alpha* 1/84, S. 14). Hierbei ist also aus den möglichen Permutationen der Wortbuchstaben die geeignete auszuwählen. Beim Bau solcher Aufgaben geht man natürlich in der umgekehrten Reihenfolge vor und *schüttelt* den Zielbegriff durch.

2.2. Leserätsel:

Es soll die Anzahl der Lesemöglichkeiten eines bestimmten Wortes innerhalb einer vorgegebenen Buchstaben-Matrix ermittelt werden. Dies führt bei einem systematischen Aufbau der Matrix (gleiche Buchstaben sind nebendiagonal eingetragen) auf die Ermittlung der Anzahl von Permutationen mit Wiederholung (siehe Aufgabe 3 – vgl. auch alpha 1/85, Knobel-Wandzeitung, Aufgabe 5).

2.3. Metamorphoserätsel:

Ein vorgegebener Begriff soll durch Streichung bzw. Hinzufügung eines (oder mehrerer) Buchstaben über eine Folge von Zwischenbegriffen in einen zweiten vorgegebenen Begriff *verwandelt* werden. Dabei kann man Permutation der Buchstaben zulassen (vgl. *alpha* 1/83, S. 17) oder auch nicht (*siehe Aufgabe 4*). Bei der Erzeugung des Nachfolgebegriffs durch Streichung z. B. eines Buchstabens handelt es sich also um die Bildung einer geeigneten Variation bzw. Kombination von n Elementen zur Klasse $(n - 1)$, je nachdem, ob Permutation erlaubt ist oder nicht. Metamorphoserätsel sind auch solche, bei denen man von einem zum anderen Begriff durch Ersatz eines (oder mehrerer) Buchstaben bei konstanter Buchstabenanzahl gelangt (*siehe Aufgabe 5*).

Beispiel 3: Buchstaben- und Wortgeometrie

Hübsche Knobelaufgaben kann man auch gestalten, indem man Buchstaben bzw. Worte mit geometrischen Problemen in Verbindung bringt. Zu nennen wären hier geometrische Lexika (*siehe Aufgabe 6*), Teilungsprobleme (*siehe Aufgabe 7*) und Flächenbestimmungen (vgl. *alpha* 4/84, S. 84) von buchstabenförmigen Vielecken, Legespiele mit Buchstaben (vgl. *alpha* 4/85, Knobelwandzeitung, *Aufgabe 11*), Aufgaben mit Hölzchen-Buchstaben (*siehe Aufgabe 8*) oder verbundene Buchstaben (*siehe Aufgabe 9*).

Beispiel 4: Kryptographie-Rätsel

Der Begriff *Kryptographie* kommt aus dem Griechischen und bedeutet soviel wie *Geheimschrift* oder *verschlüsselter Text*. In den meisten Fällen beruht der Kode eines solchen auf einer eineindeutigen Abbildung aus einer Objektmenge in eine andere (Zahlen – Zahlen, Buchstaben – Zahlen, Buchstaben – Buchstaben, Buchstaben – Punkte und Striche, Zahlen – Maschinenwörter o. ä.), und die Dekodierung besteht im Auffinden dieser Abbildung. Letztlich beruht die moderne elektronische Datenverarbeitung auf diesem Prinzip, denn eine Datenverarbeitungsanlage versteht nur eine in ganz bestimmter Weise verschlüsselte *Sprache*. Beispiele für Knobelaufgaben aus diesem Bereich sind:

4.1. Arithmetische Kryptogramme:

Das sind Rechenaufgaben mit Symbolen (Buchstaben, Sternchen o. ä.), für die Grundziffern so zu ermitteln sind, daß die enthaltenen Rechenoperationen richtig ausgeführt werden (*siehe Aufgabe 10*).

4.2. Nichtarithmetische Kryptogramme:

Das sind Kryptogramme ohne Rechenoperationen. Buchstaben oder andere Symbole sind also so durch Grundziffern zu ersetzen, daß bestimmte einschränkende Bedingungen erfüllt werden (*siehe Aufgabe 11*).

4.3. Verstecke-Rätsel:

In einem vorgegebenen Text oder in einer Buchstaben-Matrix sind nach einem bestimmten Prinzip Begriffe (Vornamen, Tiernamen, Städtenamen o. ä.) *versteckt*, die es aufzufinden gilt (*siehe Aufgabe 12*).

Einige weitere Beispiele für mathematische Wortknobeleien seien noch genannt, etwa Wortkarusselle (*siehe Aufgabe 13*), Schablonenaufgaben, magische Wortquadrate (*siehe Aufgabe 14*), magische Figuren in Buchstabenform Gleichungssysteme mit bestimmten Buchstaben als Variable (*siehe Aufgabe 15*) und viele andere.

Zusatzaufgabe:

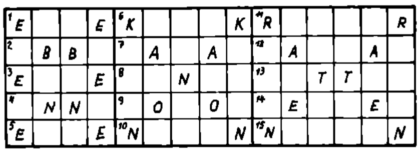
Die folgende Wortreihe stellt die verschlüsselte Form eines Wunschsatzes dar. Der Kode besteht in einer eineindeutigen Abbildung des Alphabets auf sich. Findet diesen Kode, und entschlüsselt den Satz: XIS XUEPTDJEP EUDJ WIEM ESGOMH IP FES TDJUME UPF WIEM TQATT CEIN LPOCEMP!

R. Mildner

Knobel-Wandzeitung

Bumerang

▲1▲ Tragt in die Zeilen der Figur (unterschiedliche) symmetrische Palindrome ein!



Schüttel-Tiere

▲2▲ Durch Permutation der Buchstaben folgender Begriffe sollt ihr Tiernamen finden: LECH, SAUM, GRETI, MAKEL, PIRAT, RADEL, REGIE, ROTTE, SELMA, SCHROT, TELEFAN, SCHLAGEN, WEBSCHAL, LEBESCHATZ, LICHTGALAN.

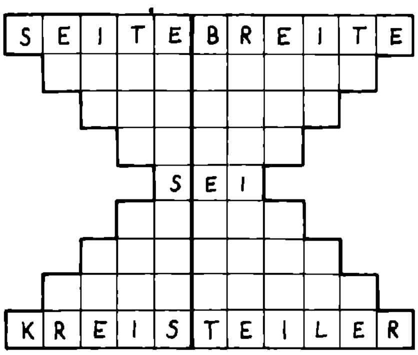
Lesevielfalt

▲3▲ Wieviel Lesemöglichkeiten – von links nach rechts oder von oben nach unten von Buchstabe zu Buchstabe fortschreitend – gibt es in dem Bild für jeden der Begriffe ALPHA, EUKLID, HOCHZAHL und MATRIZEN?

M	A	T	R	I	Z	E	N	M	A	T
H	O	C	H	A	L	P	H	A	T	R
O	C	H	Z	L	P	H	A	T	R	I
C	H	Z	A	E	U	K	L	R	I	Z
H	Z	A	H	U	K	L	I	I	Z	E
Z	A	H	L	K	L	I	D	Z	E	N

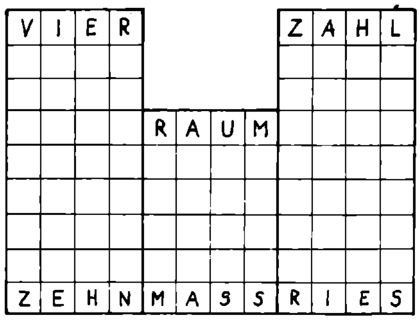
Mehr oder weniger

▲4▲ Durch Streichung bzw. Hinzufügung je eines Buchstabens (und ohne die Buchstaben zu permutieren) sollt ihr über geeignete Zwischenbegriffe die SEITE in einen KREIS und die BREITE in einen TEILER verwandeln!



Aus VIER mach ZEHN!

▲5▲ Über eine Folge von Zwischenbegriffen, wobei sich benachbarte Begriffe durch genau einen Buchstaben unterscheiden sollen, sollt ihr VIER in ZEHN, RAUM in MASS und ZAHL in RIES verwandeln!



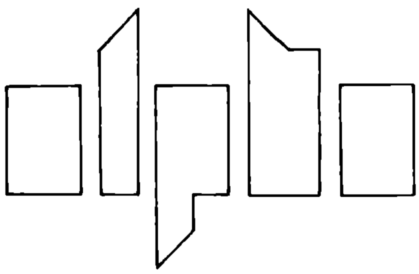
Mathematiker-Lexikon

▲6▲ Das abgebildete Rechteck ist so in acht kongruente Teile zu zerlegen, daß sich aus den sich in jedem solchen Teil befindlichen Buchstaben der Name eines bedeutenden Mathematikers bilden läßt! Wie heißen die acht Mathematiker?

M	E	T	R	A	D	G	L	I	O	S	T
F	E	U	K	L	I	A	C	N	A	R	O
O	M	B	I	S	Ö	C	P	S	A	L	C
N	P	L	A	T	U	A	C	Y	H	U	A

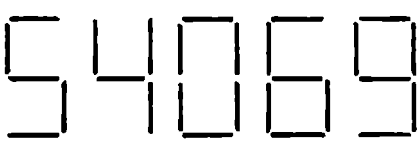
alpha-Spaß

▲7▲ Zerlegt die *alpha* in insgesamt 21 deckungsgleiche Vielecke!



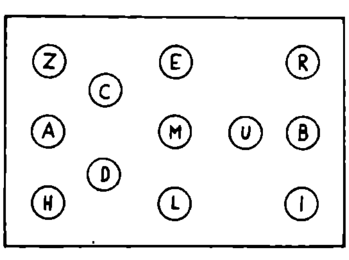
Name gesucht

▲8▲ Durch Umlegen von 3 Hölzchen soll aus der Zahl 54069 der Name eines bedeutenden deutschen Mathematikers entstehen! Findet diesen Namen!



Der Reihe nach

▲9▲ Verbindet die abgebildeten Buchstaben in der Reihenfolge des Wortes DEZIMALBRUCH durch einen Linienzug miteinander, aber so, daß sich keine Linien schneiden!



Dreierlei

▲10▲ Ersetzt die Buchstaben so durch Grundziffern, daß die Additionsaufgaben richtig gelöst werden! Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, unterschiedliche Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen (in jeder der drei Aufgaben unabhängig voneinander).

DREI	DREI	DREI
+ DREI	+ DREI	+ DREI
IMMER	VIEL	SECHS

Im 20. Jahrhundert

▲11▲ Durch das punktierte Wort SEEMEILE sei ein Datum (Tag, Monat, Jahr) dargestellt, wobei gleiche Buchstaben für die gleiche Grundziffer und unterschiedliche Buchstaben für verschiedene Grundziffern stehen. Welche und wie viele Daten des 20. Jahrhunderts können dann auf die obige Weise dargestellt werden?

SE.EM.EILE

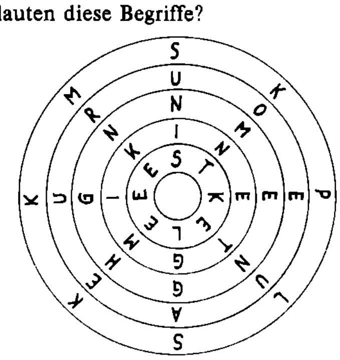
Mathematische Lyrik

▲12▲ In Parchim Edes Schwester
wohnt.
Sie liebt den kleinen Klaus.
Doch Anke Label hatt' ihn satt
und zog aus seinem Haus.

In diesem Verslein sind die Nachnamen von sechs bedeutenden Mathematikern versteckt. Wer findet sie?

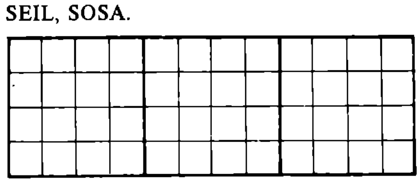
Wort-Karussell

▲13▲ Durch Drehung der konzentrischen Kreisringe sollen sich acht radial angeordnete mathematische Begriffe ergeben. Wie lauten diese Begriffe?



Magische Wortquadrate

▲14▲ Ordnet die folgenden 12 Begriffe so in die drei Quadrate ein, daß jeder Begriff in einem solchen Quadrat sowohl waagerecht als auch senkrecht eingetragen ist: ARME, EBER, ERLE, ESEL, ESER, GERA, OBER, RALF, REIM, ROSE, SEIL, SOSA.



ELFer-Probe

▲15▲ Ermittelt alle Lösungstripel (E, L, F) des vorgelegten Gleichungssystems!

$$2E = E(E+1)$$
$$2(E+L) = L(L+1)$$
$$2(E+L+F) = F(F+1)$$

Rund um den Quader

▲1▲ Welche Körper des Bildes 1 sind Quader?

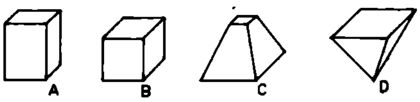
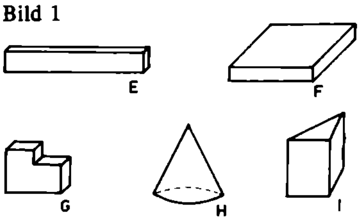


Bild 1



▲2▲ Mit welcher bzw. welchen der folgenden Formeln kann man das Volumen der einzelnen Körper aus Bild 1 ermitteln?

a) $V = a^3$ b) $V = a \cdot b \cdot c$

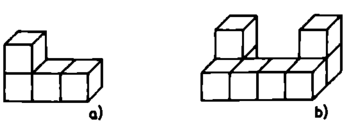
c) $V = A_G \cdot h$ d) $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$

e) $V = a^2 \cdot h$

▲3▲ a) Haben Würfel mit gleichem Volumen stets einen gleichen Oberflächeninhalt?
b) Haben Quader mit gleichem Volumen stets einen gleichen Oberflächeninhalt?

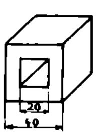
▲4▲ Wieviel *Würfelbausteine* müßte man jeweils hinzufügen (Bild 2), um einen Würfel mit kleinstem Volumen zu erhalten? (Die vorgegebene Anordnung der Würfelbausteine darf nicht verändert werden!)

Bild 2



▲5▲ Ein Werkstück habe die Form eines Würfels mit Quadratdurchbruch (Bild 3). Berechne Volumen und Oberflächeninhalt des Werkstücks!

Bild 3



▲6▲ Wieviel Flächenstücke hat jeder der abgebildeten Körper (Bild 4)?

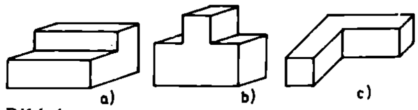
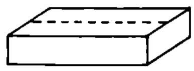


Bild 4

▲7▲ a) In dem dargestellten Quader (Bild 5) ist eine Mittellinie eingezeichnet. Zeichne alle fehlenden Mittellinien ein!

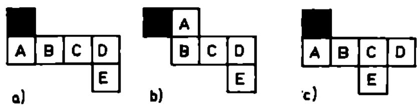
Bild 5



b) In wieviel Körper kann man einen Quader zerlegen, wenn man ihn längs seiner Mittellinien zerschneidet?

▲8▲ Das Bild 6 zeigt Netze von Würfeln. Wenn die schwarze Fläche die Grundfläche sein soll, welche der Flächen A, B, C, D, E ist dann jeweils die Deckfläche?

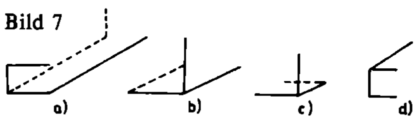
Bild 6



▲9▲ Ein Quader ist 4 cm lang und 2 cm breit. Die Kanten sind zusammen 48 cm lang. Wie hoch ist der Quader?

▲10▲ Die Bilder von Quadern in schräger Parallelprojektion sind unvollständig gezeichnet. Vervollständige die Zeichnungen (Bild 7)!

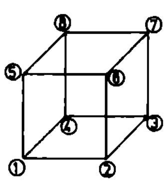
Bild 7



▲11▲ Ein Würfel habe ein Volumen von 8 mm³. Welches Volumen hat ein Würfel mit doppelter Kantenlänge?

▲12▲ Bild 8 zeigt ein Kantenmodell eines Würfels. An der Ecke (1) sitzt eine Raupe, die sich im Verlaufe eines Tages zur Ecke (7) bewegt. Welche Wege sind möglich, wenn keine Strecke, aber auch keine Ecke zweimal *durchkrochen* wird?

Bild 8



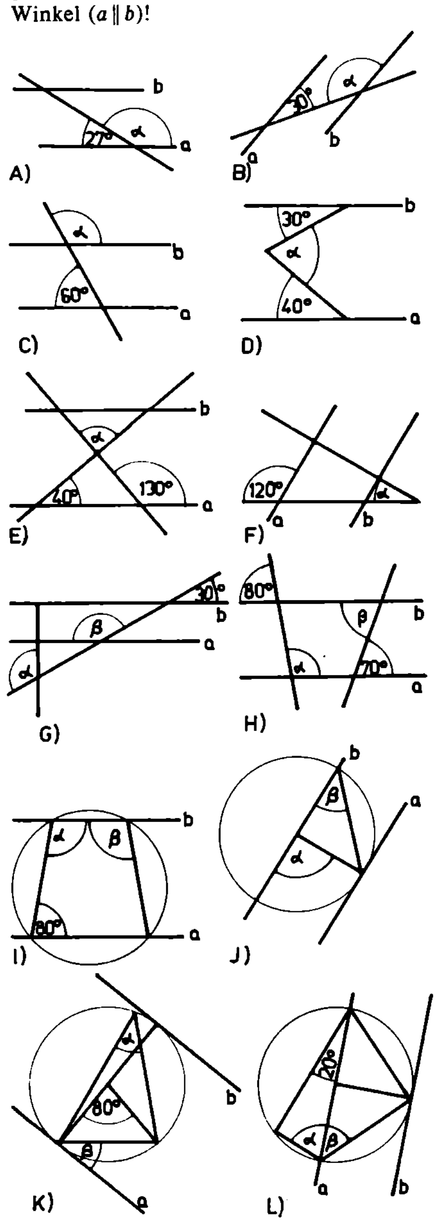
▲13▲ Ein Quader mit der Höhe 3 cm habe ein Volumen von 30 cm³.
Wie verändert sich sein Volumen, wenn man seine Höhe verdoppelt?

▲14▲ Aus 13 Bleiwürfeln mit der Kantenlänge 1 cm, drei Bleiwürfeln mit der Kantenlänge 2 cm und einem Würfel mit der Kantenlänge 3 cm soll ein einziger Bleiwürfel hergestellt werden. Wie lang ist die Kante dieses Würfels? (Schmelzverluste sind zu vernachlässigen!)

L. Flade/H. Knopf

Übung macht den Meister

▲1▲ Ermittle jeweils die Größen der mit griechischen Buchstaben bezeichneten Winkel ($a \parallel b$)!



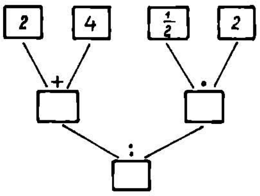
▲2▲ Zu jeder der Aufgaben sind mehrere Ergebnisse angegeben. Jedoch ist nur ein Ergebnis die richtige Lösung. Unterstreiche jeweils das richtige Resultat!

a) 1,368 : 0,72 (1,9; 19; 0,19)
b) 638,304 : 8,72 (7,32; 73,2; 732)
c) 0,02268 : 1,2 (0,0189; 1,89; 0,00189)
d) $0,\overline{3} : 0,6$ $\left(0,5; \frac{5}{9}; 5,5\right)$

▲3▲ Vervollständige!

Maßstab	Entfernung auf der Karte	Entfernung in der Natur
a) 1 : 50 000	3 cm	
b) 1 : 25 000		3 km
c)	2 cm	10 km

▲4▲ Vervollständige!
Gib den zu berechnenden Term an!

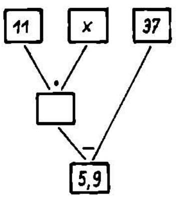


▲5▲ Welche Aufgaben sind falsch gelöst?
a) $0:77=0$ c) $0:0=1$
b) $0:\ 0=0$ d) $5:0=0$

▲6▲ Ermittle x!
a) $2^x=8$, b) $10^x=1000$, c) $x^3=343$,
d) $x^{1000}=1$

▲7▲ Setze um zwei Glieder fort!
a) 0; 1; 3; 6; 10; 15; ...
b) 5; 3,5; 2,75; 2,375; ...
c) 0,5; 3; 8; 18; 38; ...

▲8▲ Schreibe als Gleichung auf und löse diese!



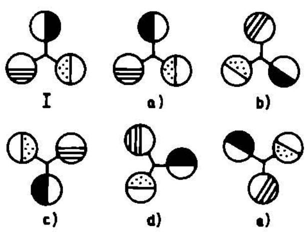
▲9▲ Drücke die Zahlen 1 bis 10 ausschließlich mit der Ziffer 2 und den vier Grundrechenoperationen aus!
Die Ziffer 2 soll jeweils genau fünfmal verwendet werden!

▲10▲ Setze für jeweils gleiche Buchstaben gleiche und für verschiedene Buchstaben unterschiedliche Zahlen ein!

```
   R O S E
+T U L P E
----------
 B L U M E
```

▲11▲ Welche der mit a bis e bezeichneten Darstellungen können durch Drehung aus der Figur *I* entstanden sein?
(Die Drehachse liegt dabei im Mittelpunkt der Figur!)

L. Flade/H. Knopf



Matemáticus

▲1▲ Vervollständige die magischen Quadrate!

a)

13,55	1,30	10,05
4,80	8,30	11,80

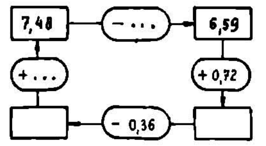
b)

264,35		249,53
227,30	242,12	256,94
	271,76	

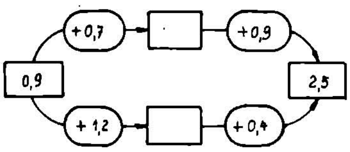
▲2▲ Vervollständige diese Multiplikationen!

```
a) 312·3□        b) 12□4·□3
   ------           --------
    □12              □67□
   □□□               □□68
   ----             -----
   □□□2             □□□□□
```

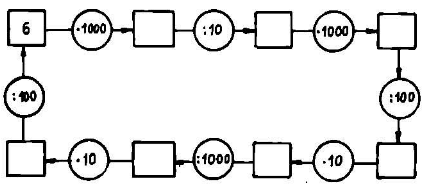
▲3▲ a) Ergänze die in den Rechtecken und Kreisen fehlenden Ziffern!



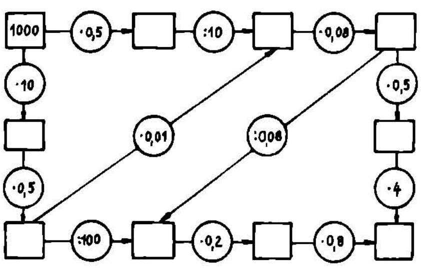
b) Ergänze die in den Rechtecken fehlenden Ziffern!



▲4▲ Vervollständige!



▲5▲ Ergänze die in den Quadraten fehlenden Ziffern!



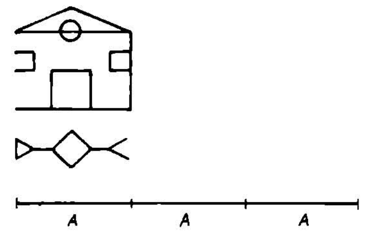
▲6▲ Vervollständige die Summen durch gleiche Summanden!
a)... + ... = 12,76
b)... + ... = 6,944

▲7▲ Kreuze die Menge an, die dir am richtigsten erscheint!

Gewicht eines 10jährigen Kindes	Höhe eines Hauses	Fassungsvermögen eines Kruges
100 kg	3 dm	3 hl
30 kg	12 m	4 dl
8 kg	3 km	1,5 l
300 g	60 cm	6 ml

▲8▲ Für drei Kaffee und vier Bonbons wurden 123 Peseten bezahlt. Die drei Kaffee kosteten 75 Peseten. Wieviel kostet ein Kaffee und wieviel ein Bonbon?

▲9▲ Konstruiere einen Fries, indem du die Fläche *A* dreimal aneinandersetzt!

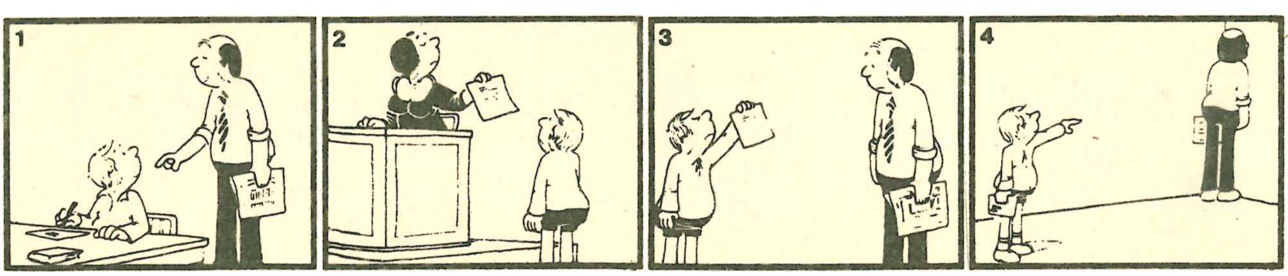


Auswahl unterhaltsamer Aufgaben aus dem spanischen Mathematiklehrbuch *Matemáticus* 4, ausgestellt auf der Internationalen Buchausstellung (IBA), Leipzig, 1984

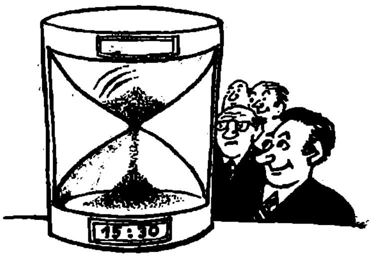
Knobeln und raten

▲ An einem Fluß möchte eine Familie mit einem Ruderboot übersetzen. Der Vater wiegt 80 kg, die Mutter 65 kg, der Sohn 55 kg und die Tochter 40 kg. Das Boot kann aber maximal nur 100 kg Last befördern. Was muß die Familie tun, um trotzdem mit diesem Boot über den Fluß zu kommen?

▲ Herr Anders, Herr Braun und Herr Chor haben ihren Kleingarten in derselben Gartenanlage. Einer von ihnen ist von Beruf Tischler, einer Klempner und einer Architekt. Herr Braun wohnt in derselben Straße wie der Tischler, Herr Chor half dem Klempner beim Bau der Laube. Herr Braun und der Klempner sind nicht miteinander verwandt.
Wer hat nun welchen Beruf?



In freien Stunden · alpha-heiter



Tesfayes Kinder

Fassil: Tenastillin, Tesfaye, wie geht es den Kindern?
Tesfaye: Oh, es geht ihnen gut. Wie du weißt, habe ich jetzt drei.
Fassil: Wie alt sind sie?
Tesfaye: Das Produkt ihrer Lebensjahre ist jetzt 36. Und die Summe ihrer Lebensjahre gleicht dem Alter deines Sohnes, Tamene.
Fassil: (nach einer Pause) Diese Information ist nicht ausreichend.
Tesfaye: O nein, sie ist es nicht. Gut, das älteste ist ein Mädchen.
Fassil: Jetzt weiß ich es!
Wie alt sind Tesfayes Kinder?

aus: Hissab, äthiopische math. Schülerzeitschrift

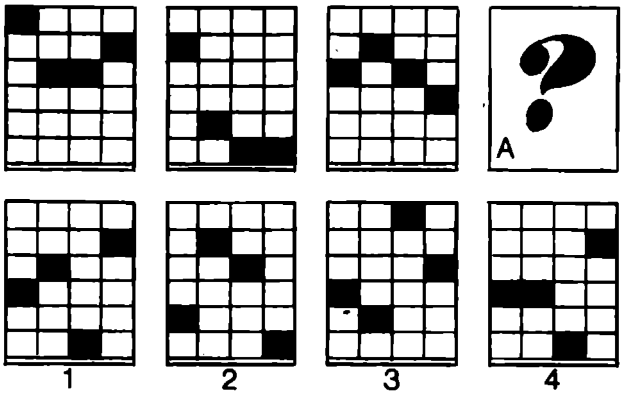
Hallo, Taxi!

John hat sich für £ 3 ein Taxi gemietet, um zum Bahnhof zu fahren. Sein Freund Harold, der genau auf der Hälfte des Weges von Johns Haus zum Bahnhof wohnt, wird von John mitgenommen. Welchen Betrag soll Harold an John zahlen?

aus: Math. Pie, London

Mitgemacht, nachgedacht!

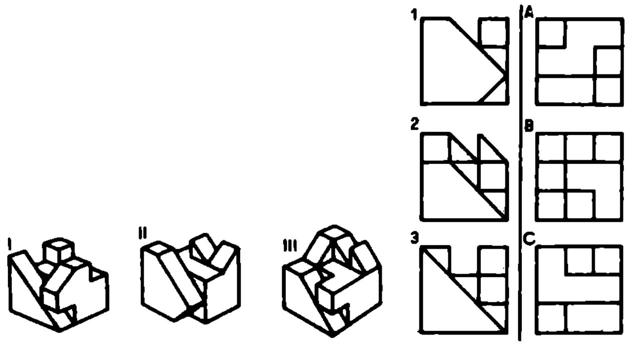
Welche der Figuren 1 bis 4 gehört logischerweise an Stelle des Fragezeichens?



aus: Füles, Budapest

Grund-, Auf- und Kreuzriß

Je drei der dargestellten Risse gehören zusammen. Welche?



Auf Jagd nach der Beute

Im Nationalpark von Tansania filmte ein Kamerateam die Beutejagd eines Gepards. Mit Zeitlupe stellten die Filmemacher fest, daß die flüchtende Antilope der Raubkatze 60 Sprünge voraus war, bevor jene der Beute nachzusetzen begann. Der Gepard machte dann zwei Sätze auf jedesmal drei der Antilope. Der Gepard legte mit drei Sätzen eine ebenso große Strecke zurück wie die Antilope mit sieben.

Wie viele Sätze machten Gepard und Antilope, bis die Raubkatze ihre Beute schlug?

aus: ND v. 22./23. 2. 85, Berlin

Kryptarithmetik

Setze in der folgenden Additionsaufgabe für die verschiedenen Buchstaben verschiedene Ziffern ein, so daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht!

$$\begin{array}{r} a\,b\,c \\ +\,d\,e\,f \\ \hline g\,h\,i \end{array}$$

aus: elementa, norwegische math. Schülerzeitschrift

Welche Zahlen müssen eingesetzt werden?

a)

▲ − ✕ = 2	● − ▼ = 5	● + ■ = 8
■ + ▼ = 3	T + ■ = 6	✕ + ● = 9
● − ■ = 4	✕ + T = 7	T + ● = 10

b)

● + ○ + ▲ − □ = 6
▽ − ▲ + □ − ○ = 5
□ + ○ − ● + ▲ = 4
○ + △ + □ − ▽ = 3

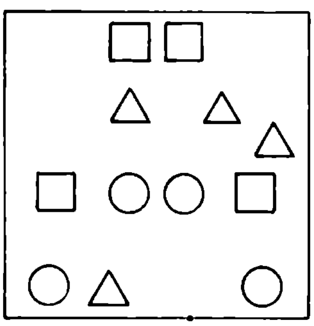
aus: Mathe-LVZ, Leipzig

Spiel und Spaß

Laßt einen Freund mit zwei Würfeln trudeln und sagt ihm, daß ihr die geworfene Augenzahl beider Würfel ohne hinzusehen erraten werdet! Ihr fordert ihn auf: „Multipliziere die kleinere Augenzahl mit 2, addiere dann 5, multipliziere das Ergebnis mit 5, und zähle nun die größere geworfene Augenzahl dazu!“ Das Resultat laßt ihr euch nennen. Nehmen wir an, es sei 71. Ihr subtrahiert davon 25 und erhaltet 46: 4 Zehner und 6 Einer. Euer Freund hat also eine 4 und eine 6 gewürfelt. Gerechnet wurde wie folgt:
$4 \cdot 2 = 8$; $8 + 5 = 13$; $13 \cdot 5 = 65$; $65 + 6 = 71$; $71 - 25 = 46$.
So könnt ihr jeden Wurf erraten, auch, wenn beide Würfel die gleiche Augenzahl zeigen.

Gleichmäßige Verteilung

In wieviel kongruente Teile muß man das vorliegende Quadrat einteilen, damit in jedem der Teile je ein kleines Quadrat, ein kleines Dreieck und ein kleiner Kreis enthalten sind?



VK Extra oder Normal?

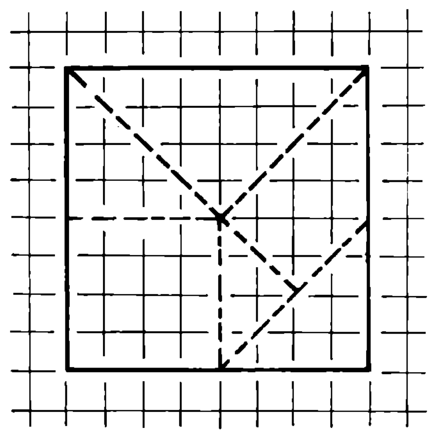
Herr Schulze möchte für seinen Wagen statt wie bisher Vergaserkraftstoff Normal den um 10 % teureren VK Extra verwenden. Dafür beschließt er, in Zukunft 10 % weniger an Kilometern zu fahren. Wie wirkt sich dieser Entschluß auf seinen Geldbeutel aus?

aus: Pythagoras, Niederlande

Legespiel

Das große Quadrat ist entlang der gestrichelten Linien in 6 Teile zu zerschneiden. Setze die Teile zu einem

Parallelogramm,
Trapez,
Sechseck,
rechtwinkligen Dreieck,
schmalen Rechteck und
dicken Rechteck zusammen!



aus: Mathematics in school, englische math. Schülerzeitschrift

Vierziffrige Zahl mit gleichen Grundziffern gesucht!

Findet drei aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen, deren Summe der Quadrate eine vierziffrige Zahl mit gleichen Grundziffern ergibt!

Von einem mongolischen IMO-Teilnehmer, 1984, an alpha überreicht

aus: Freie Welt, Tesler, Moskau

XXIV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Erfurt, 3. bis 6. Juni 1985

Olympiadeklasse 10

241041 Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen, für die $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1985}$ gilt!

241042 Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Auf den Seiten BC, CA, AB seien D, E bzw. F diejenigen Punkte, für die $\overline{BD}=2\cdot\overline{CD}$, $\overline{CE}=2\cdot\overline{AE}$, $\overline{AF}=2\cdot\overline{BF}$ gilt. Weiter sei jeweils U bzw. V bzw. W der Schnittpunkt von AD mit BE bzw. von BE mit CF bzw. von CF mit AD.
Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen der Flächeninhalt des Dreiecks UVW stets gleich einem Siebentel des Flächeninhalts des Dreiecks ABC ist!

Von den nachstehenden Aufgaben 241043A und 241043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

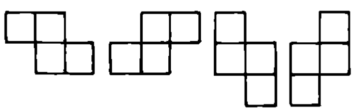
241043A a) Man beweise, daß für jede reelle Zahl p mit $1\leqq p\leqq 2$ eine Funktion f mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) existiert:
(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen definiert.
(2) Für alle reellen Zahlen x mit $2\leqq x<4$ gilt $f(x)=p$.
(3) Für alle reellen Zahlen x gilt
$$f(x+2)=\frac{f(x)}{5\cdot f(x)-1}.$$
b) Man ermittle für jede reelle Zahl p mit $1\leqq p\leqq 2$ und jede Funktion f, die die Eigenschaften (1), (2), (3) hat, den Funktionswert $f(1985)$ in Abhängigkeit von p.

241043B Es sei P die Oberfläche einer beliebigen Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Man beweise: Wenn der Durchschnitt von P mit einer Ebene E ein (nicht entartetes) Parallelogramm ist, dann ist er ein Quadrat.
(Hinweis: Ein Parallelogramm heißt genau dann „nicht entartet“, wenn keine drei seiner Eckpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen.)

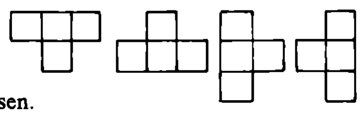
241044 Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(a;b)$ natürlicher Zahlen, für die $a!+b!=(a+b)!$ gilt!
(Hinweis: Für jede natürliche Zahl $n\geqq 1$ ist $n!$ definiert als das Produkt aus allen denjenigen natürlichen Zahlen k, für die $1\leqq k\leqq n$ gilt; ferner ist $0!=1$ definiert.)

241045 Es sei
$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{999\,998}}+\frac{1}{\sqrt{999\,999}}+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}.$$
Weisen Sie nach, daß dann $1998<T<1999$ gilt!

241046 a) Es ist zu entscheiden, ob es möglich ist, die Felder des 8×8-Schachbrettes derart mit den Zahlen 1, 2, ..., 64 zu numerieren, daß für jede Teilfigur des Schachbrettes, die von der folgenden Form ist,



die Summe der vier Zahlen in den Teilfiguren durch vier teilbar ist.
b) Dieselbe Aufgabe ist für

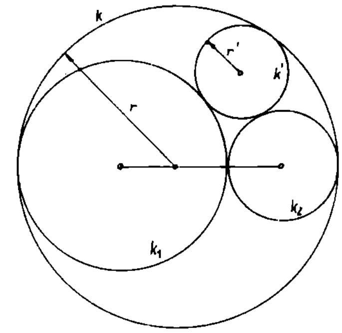


zu lösen.

Olympiadeklassen 11/12

241241 a) Man beweise, daß durch
$$f(x)=\frac{(x^2-x)(x^2-x+5)+6}{(x^2-x)(x^2-x+6)+9}$$
eine Funktion f für alle reellen Zahlen x definiert wird.
b) Man ermittle den Wertebereich dieser Funktion.

241242 Über vier Kreise k, k_1, k_2, k' wird folgendes vorausgesetzt (s. Bild): Die Kreise k_1 und k_2 berühren einander von außen; die Mittelpunkte von k_1, k_2 und k liegen auf einer gemeinsamen Geraden; die Kreise k_1 und k_2 berühren den Kreis k von innen; der Kreis k' berührt die Kreise k_1 und k_2 von außen und den Kreis k von innen.



Man beweise: Unter diesen Voraussetzungen gilt für die Radien r, r' von k bzw. k' stets $r'\leqq\frac{r}{3}$.

241243 Man ermittle alle diejenigen Funktionen f, die für alle reellen Zahlen x mit $x\neq 0$ definiert sind und den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Für alle reellen Zahlen x mit $x\neq 0$ gilt
$f\left(\frac{1}{x}\right)=x\cdot f(x)$.
(2) Für alle reellen Zahlen x und y mit $x\neq 0$, $y\neq 0$ und $x+y\neq 0$ gilt
$f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{y}\right)=1+f\left(\frac{1}{x+y}\right)$.
(3) Es gilt $f(1)=2$.

241244 Es seien a, b und c positive reelle Zahlen mit
$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}.$$
Man beweise, daß das Gleichungssystem
$$\sqrt{y-a}+\sqrt{z-a}=1 \qquad (1)$$
$$\sqrt{z-b}+\sqrt{x-b}=1 \qquad (2)$$
$$\sqrt{x-c}+\sqrt{y-c}=1 \qquad (3)$$
genau eine Lösung (x,y,z) hat, wobei x, y, z reelle Zahlen sind.

241245 Es ist zu beweisen:
Wenn die Längen der Kanten eines Tetraeders $ABCD$ nicht kleiner als $\sqrt{3}$ und nicht größer als 2 sind, dann sind die Innenwinkel zwischen je zwei Seitenflächen des Tetraeders $ABCD$ nicht größer als 90°.

Von den nachstehenden Aufgaben 241246A und 241246B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

241246A Man untersuche, ob es 40 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gibt, die sämtlich kleiner als 10^9 und nicht Primzahlen sind.

241246B Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen k, für welche die durch
$$x_1=1,$$
$$x_{n+1}=\sqrt{k(x_n^2+x_n)}\quad (n=1,2,3,\ldots)$$
definierte Zahlenfolge (x_n) konvergent ist. Zu jeder solchen Zahl k ermittle man den Grenzwert der Zahlenfolge (x_n).

Die XXIV. OJM der DDR fand in der Pädagogischen Hochschule (3. Juni bis 6. Juni) statt.
Einen ersten Preis in Klasse 10:
Alexander Kley, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin (Kl. 10); Ronald Schurath, IV. OS Forst, Bez. Cottbus (Kl. 9); Holger Maaß, W.-Seelenbinder-OS, Bad Lausick, Bez. Leipzig (Kl. 10); Gunter Döge, Spezialschule *Friedrich Engels*, Riesa, Bez. Dresden; Frank Göring, OS *Erich Weinert*, Bad Berka, Bez. Erfurt (Kl. 8).
Einen ersten Preis in Klasse 11/12:
Stefan Günther, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin (Kl. 10); Jörg Jahnel, Spezialschule *Carl Zeiss*, Jena, Bez. Gera (Kl. 10); Ralf Stiebe, TH *Otto von Guericke*, Magdeburg (Kl. 11); Uwe Müller, EOS J. W. v. Goethe, Brandenburg, Bez. Potsdam (Kl. 12); Georg Hein, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin.
Einen 2. Preis erhielten 19 Schüler, einen 3. Preis 33 Schüler und eine Anerkennungsurkunde 24 Schüler. An der OJM nahmen 277 Schüler, davon 29 Mädchen, teil.

Lösungen

Lösungen zu:
Mein Taschenrechner „SR 1"

9) $99\,999 \cdot 10^{99}$
10a) $4{,}5 \cdot 10^{99}$
b) $9 \cdot 10^{99}$
c) Rechner zeigt Überfüllung an!
d) Rechner zeigt Überfüllung an!
e) Rechner zeigt Überfüllung an!
11a) 0,0000075
b) $7{,}5 \cdot 10^{-7} = 0{,}00000075$
c) $6{,}6666 \cdot 10^{-1} = 0{,}66666$
d) $1{,}6260 \cdot 10^{-2} = 0{,}016260$

12a)	Anzeige des SR 1	0.2020202
b)		2.1212 – 01
c)		0.3030303
d)		3.4343 – 01
e)		0.4040404
f)		5.0505 – 01
g)		6.0606 – 01
h)		7.0707 – 01

Der SR 1 verwendet trotz Vorhandenseins einer linken Null keine Zehnerpotenzschreibweise, wenn an der 8. Stelle nach dem Komma eine Null und an der 9. Stelle nach dem Komma eine 0, 1, 2, 3 oder 4 auftritt.

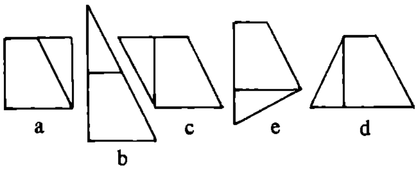
13a)	2 654 987	(genauer Wert)
b)	16 296,3	(genauer Wert)
c)	$6{,}4581 \cdot 10^{8}$	(Näherungswert)
d)	0,1010101	(Näherungswert)

15a) Der SR 1 arbeitet nur mit 9 Stellen.
b) Der SR 1 arbeitet mit dem Näherungswert 3,14159265 für π.
16) Zum Beispiel 0.12345678912
0.9876543212

Lösungen zur: Sprachecke

▲1▲ Stelle anhand des Schattens fest, ob sich die Skistöcke berühren!
Lösung: Sie berühren sich nicht. Die Gerade durch den Schnittpunkt der beiden Schatten, die parallel zu den Verbindungsgeraden zwischen den oberen Enden der Skistöcke und deren Schatten verläuft, geht nicht durch den Punkt, wo ein Stock den anderen verdeckt.

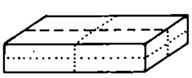
▲2▲ Geometrische Puzzles für Anfänger: Figur 1 zeigt ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Grundseite 1 Einheit und dessen Höhe 2 Einheiten lang sind, und ein rechtwinkliges Trapez mit zwei zueinander senkrecht stehenden Seiten, die je 2 Einheiten lang sind und einer kurzen Seite, die 1 Einheit lang ist. Schneide diese beiden Figuren aus einem Stück Karton aus, und zeige, daß diese zu folgenden Flächen zusammengelegt werden können: a) ein Quadrat, b) ein Dreieck, c) ein Parallelogramm, d) ein Viereck mit zwei rechten Winkeln!
Durch Drehung des Dreiecks kann e) ein gleichschenkliges Trapez zusammengesetzt werden.
Lösung:



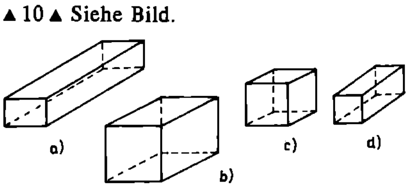
▲3▲ Drei Autobuslinien haben als Abfahrtsplatz den Bahnhof Montparnasse in Paris. Die Autobusse der ersten Linie sind nach 1 h 36 min zurück und haben 4 min Pause.
Die Autobusse der zweiten Linie sind nach 1 h 48 min zurück und haben 12 min Pause; die der dritten Linie sind nach 2 h 10 min zurück und haben 20 min Pause.
Drei Autobusse, einer auf jeder Linie, fahren gemeinsam um 8 h am Bahnhof Montparnasse ab.
a) Wann fahren die drei Autobusse das erste Mal wieder gemeinsam vom Bahnhof Montparnasse ab?
b) Wieviel Fahrten hat dann jeder Autobus durchgeführt?
Lösung: a) Der erste Bus braucht bis zur nächsten Abfahrt vom Bahnhof Montparnasse $96 + 4 = 100$ min, der zweite $108 + 12 = 120$ min und der dritte $130 + 20 = 150$ min. Die nächste gemeinsame Abfahrt ergibt sich dann als kleinstes gemeinsames Vielfaches von 100, 120 und 150, also nach 600 min. Die Autobusse fahren um 18 Uhr wieder gemeinsam vom Bahnhof ab.
b) Dann hat der erste Bus $600 : 100 = 6$ Fahrten, der zweite Bus $600 : 120 = 5$ Fahrten und der dritte Bus $600 : 150 = 4$ Fahrten durchgeführt.

Lösungen zu: Rund um den Quader

▲1▲ A, B, E, F
▲2▲ $V = a^3$; B; $V = a \cdot b \cdot c$; A, B, E, F; $V = A_G \cdot h$; A, B, E, F, G, I; $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$; D, H; $V = a^2 \cdot h$; B, F.
▲3▲ a) ja; b) nein.
▲4▲ a) 23; b) 56.
▲5▲ $V = 48\,000\ \text{mm}^3$;
$A_0 = 12\,000\ \text{mm}^2$
▲6▲ a) 8; b) 10; c) 8.
▲7▲ a) siehe Bild; b) 8.



▲8▲ a) E; b) C; c) E.
▲9▲ 6 cm.
▲10▲ Siehe Bild.



▲11▲ $64\ \text{mm}^3$.
▲12▲ 1 – 2 – 3 – 7
1 – 2 – 3 – 4 – 8 – 7
1 – 2 – 3 – 4 – 8 – 5 – 6 – 7
1 – 2 – 6 – 7
1 – 2 – 6 – 5 – 8 – 7
1 – 2 – 6 – 5 – 8 – 4 – 3 – 7
1 – 4 – 3 – 7
1 – 4 – 3 – 2 – 6 – 7
1 – 4 – 3 – 2 – 6 – 5 – 8 – 7
1 – 4 – 8 – 7
1 – 4 – 8 – 5 – 6 – 7
1 – 4 – 8 – 5 – 6 – 2 – 3 – 7
1 – 5 – 6 – 7
1 – 5 – 6 – 2 – 3 – 7
1 – 5 – 6 – 2 – 3 – 4 – 8 – 7
1 – 5 – 8 – 7
1 – 5 – 8 – 4 – 3 – 7
1 – 5 – 8 – 4 – 3 – 2 – 6 – 7
▲13▲ Es verdoppelt sich!
▲14▲ 4 cm.

Lösungen zu:
Übung macht den Meister

▲1▲
a) $\alpha = 153°$ g) $\alpha = 120°$; $\beta = 150°$
b) $\alpha = 150°$ h) $\alpha = 100°$; $\beta = 70°$
c) $\alpha = 120°$ i) $\alpha = 100°$; $\beta = 100°$
d) $\alpha = 70°$ j) $\alpha = 90°$; $\beta = 45°$
e) $\alpha = 90°$ k) $\alpha = 40°$; $\beta = 40°$
f) $\alpha = 30°$ l) $\alpha = 70°$; $\beta = 45°$

▲2▲. a) 1,9; b) 73,2; c) 0,0189; d) $\frac{5}{9}$
▲3▲ a) 1,5 km; b) 12 cm; c) 1 : 50 000
▲4▲ $(2 + 4) : \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right)$
▲5▲ b, c, d.
▲6▲ a) $x = 3$; b) $x = 3$; c) $x = 7$;
d) $x = 1$.
▲7▲ a) 21; 28; b) 2,1875; 2,09375;
c) 78; 158.
▲8▲ $11 \cdot x - 37 = 5{,}9$; $x = 3{,}9$.
▲9▲ Beispiel:
$1 = 2 - 2 : 2 + 2 - 2$
$2 = 2 + 2 + 2 - 2 - 2$
$3 = 2 + 2 : 2 + 2 - 2$
$4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 - 2$
$5 = 2 + 2 + 2 - 2 : 2$
$6 = 2 + 2 + 2 + 2 - 2$
$7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 : 2$
$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 - 2$
$9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 : 2$
$10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$
▲10▲
$$\begin{array}{r} 8\,240 \\ +\ 63\,150 \\ \hline 71\,390 \end{array}$$
▲11 b; e.

Lösungen zu: Matemáticus

▲1▲ a) 6,55; 15,3; 3,05
b) $264{,}35 + 212{,}48 + 249{,}53 = 726{,}36$
$234{,}71 + 271{,}76 + 219{,}89 = 726{,}36$
▲2▲ a)
$$\begin{array}{r} 312 \cdot 31 \\ \hline 312 \\ 936 \\ \hline 9672 \end{array}$$
b)
$$\begin{array}{r} 1224 \cdot 73 \\ \hline 3672 \\ 8568 \\ \hline 89352 \end{array}$$
▲3▲ a)

7,48	–0,89	6,59
+ 0,53		+ 0,72
6,95	–0,36	7,31

b) 1,6 bzw. 2,1.
▲4▲ 8.
▲5▲ 6 – 6000 – 600 – 600 000 – 6000 – 60 000 – 60 – 600 – 6

▲6▲ a) 6,38 + 6,38 = 12,76
b) 3,472 + 3,472 = 6,944

▲7▲ 30 kg; 12 m; 1,5 l.

▲8▲ 3 Kaffee kosten 75 Peseten, dann kostet 1 Kaffee 75 : 3 = 25 Peseten. Die vier Bonbons kosten 123 − 75 = 48 Peseten. Ein Bonbon kostet dann 48 : 4 = 12 Peseten.

▲9▲ Die Lösung sei dem Leser selbst überlassen.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Tesfayes Kinder

Es gibt 8 Möglichkeiten für das Produkt von 36.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	
1	1	1	1	1	2	2	3	
1	2	3	4	6	2	3	3	
36	18	12	9	6	9	6	4	
38	21	16	14	13	13	11	10	Summen

Da Fassil das Alter seines Sohnes kennt und noch überlegt, kann nur die zweimal erscheinende Summe 13 in Frage kommen. Da aber von einem ältesten Kind die Rede ist, gibt es nur die Lösung, daß Tesfayes Kinder 2mal 2 Jahre und einmal 9 Jahre alt sind.

Hallo Taxi!

Wenn Harold eine Strecke der Länge s mitfährt, dann fährt John eine Strecke der Länge $2s$. Für $3s$ werden £ 3 bezahlt, also muß Harold £ 1 zahlen.

Mitgemacht, nachgedacht!

An Stelle des Fragezeichens gehört logischerweise Figur 4.

Grund-, Auf- und Kreuzriß

Es gehören zusammen: I, 3, A; II, 1, C; III, 2, B.

Auf Jagd nach Beute

Wir bezeichnen mit t ein Zeitintervall, in dem die Antilope drei und der Gepard zwei Sätze machen. Daraus ergibt sich für die Zahl der Sprünge (gerechnet von dem Punkt, an dem der Gepard die Verfolgung begann) $60 + 3t$ bzw. $2t$. Um zu den zurückgelegten Strecken zu gelangen, dividieren wir die Zahl der Antilopensprünge durch 7, die des Geparden durch 3. Beim Zusammentreffen gilt $(60 + 3t) : 7 = 2t : 3$. Wir erhalten $t = 36$. In 36 Zeitintervallen machte die Antilope 108 und der Gepard 72 Sprünge.

Kryptarithmetik

Lösungsbeispiele:

a) ohne Verwendung der Null:

$$\begin{array}{r} 618 \\ +\underline{354} \\ 972 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 439 \\ +\underline{128} \\ 567 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 293 \\ +\underline{571} \\ 864 \end{array}$$

b) unter Verwendung der Null:

$$\begin{array}{r} 563 \\ +\underline{408} \\ 971 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 753 \\ +\underline{109} \\ 862 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 618 \\ +\underline{307} \\ 925 \end{array}$$

c) aus 513 folgt auch 567 oder 417

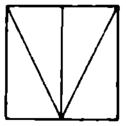
$$\begin{array}{r} +\underline{467} \\ 980 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\underline{413} \\ 980 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\underline{563} \\ 980 \end{array}$$

Welche Zahlen müssen eingesetzt werden?

a) $5 - 3 = 2;\ 2 + 1 = 3;\ 6 - 2 = 4$
$6 - 1 = 5;\ 4 + 2 = 6;\ 3 + 4 = 7$
$6 + 2 = 8;\ 3 + 6 = 9;\ 4 + 6 = 10$

b) $5 + 3 + 2 - 4 = 6$
$6 - 2 + 4 - 3 = 5$
$4 + 3 - 5 + 2 = 4$
$3 + 2 + 4 - 6 = 3$

Gleichmäßige Verteilung



VK Extra oder Normal?

Die Fahrkosten betragen vorher $y\,\text{km} \cdot x\,\text{M/km} = xy\,\text{M}$ und nachher

$$\frac{90}{100} \cdot y\,\text{km} \cdot \frac{110}{100} \cdot x\,\text{M/km} = 0{,}99xy\,\text{M}.$$

$xy - 0{,}99xy = 0{,}01xy$

Herr Schulze spart 1 % an Ausgaben ein.

Legespiel

Die Lösung sei dem Leser überlassen.

Vierziffrige Zahl mit gleichen Grundziffern gesucht!

$41^2 + 43^2 + 45^2 = 5555.$

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. W. Schmidt
Heft 4/85

▲2578▲ Das Ungleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn

(*) $a_1 = a_2 = a_3 = a_4,\ 3(a_3 - a_2) \leqq 2(a_4 - a_1)$

gilt.

Beweis:

Notwendigkeit: Es sei eine Lösung vorhanden. Dann folgt

$x_{i-1} \leqq a_i,\quad x_i \geqq a_i\ (i = 1, 2, 3, 4),$

und somit

$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4.$

Weiterhin erhält man

$x_2 \leqq 3a_2 - 2x_1 \leqq 3a_2 - 2a_1$

und

$$a_4 \geqq x_3 \geqq \frac{1}{2}(3a_3 - x_2)$$
$$\geqq \frac{1}{2}(3a_3 - 3a_2 + 2a_1).$$

Hinlänglichkeit: Es gelte (*). Dann lassen sich Lösungen des Ungleichungssystems konkret angeben, wenn man zwei Fälle unterscheidet.

Fall 1: Es gelte $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4$ und $a_3 - 3a_2 \leqq -2a_1$ (Verschärfung von (*)). Dann ist, wie man geradlinig bestätigt,

$$x_0 = \frac{3}{2}a_1 - \frac{3}{4}a_2 + \frac{1}{4}a_3$$
$$x_1 = \frac{3}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_3$$
$$x_2 = a_3$$
$$x_3 = a_3$$
$$x_4 = -2a_3 + 3a_4$$

eine Lösung.

Fall 2: Es gelte $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4$ und $-a_3 + 3a_2 \leqq 2a_1,\ 3(a_3 - a_2) \leqq 2(a_4 - a_1)$. In diesem Fall überprüft man schrittweise, daß

$$x_0 = a_1 \qquad x_1 = a_1$$
$$x_2 = -2a_1 + 3a_2$$
$$x_3 = a_1 - \frac{3}{2}a_2 + \frac{3}{2}a_3$$
$$x_4 = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{4}a_2 - \frac{3}{4}a_3 + \frac{3}{2}a_4$$

eine Lösung ist.

Lösungen zu: Knobel-Wandzeitung
Heft 4/85

Charakteristische Wege:

1. Weg, der „gerade Zahlen" verbindet: A−12−8−16−6−14−4−8−2−B,
2. Weg, der „ungerade Zahlen" verbindet: A−11−9−13−15−9−5−13−11−B,
3. Weg, der „Primzahlen" verbindet: A−11−7−2−5−13−3−19−3−17−2−B,
4. Weg, der „durch 3 teilbare Zahlen" verbindet: A−18−3−6−12−B.

Erstaunliches:

Durch das dreimalige Hintereinanderschreiben der gedachten zweistelligen Zahl entsteht eine sechsstellige Zahl, die gleich dem Produkt der gedachten Zahl mit der Zahl $10101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$ ist. (Denkt man sich z. B. die Zahl 51, so entsteht $515151 = 51 \cdot 10^4 + 51 \cdot 10^2 + 51$ $= 51(10^4 + 10^2 + 1) = 51 \cdot 10101$ $= 51 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$.) Dividiert man dieses Produkt nun nacheinander durch 3, 7, 13 und 37, so erhält man als Ergebnis die gedachte zweistellige Zahl zurück.

In der Bäckerei

Sind beim 1. Kunden noch $a_1 = x$ Brötchen vorhanden, so sind beim 2. Kunden, da der 1. Kunde $x/3$ Brötchen hätte nehmen müssen, noch $a_2 = \frac{2}{3}x$, beim 3. Kunden noch $a_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 x$, beim 4. Kunden noch $a_4 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 x$ und am Schluß noch $a_5 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 x = 16$ Brötchen vorhanden. Daraus folgt $x = 3^4 = 81$. Der Bäcker hatte also anfangs noch 81 Brötchen. Der 1. Kunde hätte folglich $b_1 = \frac{1}{3} \cdot 81 = 27$ Brötchen, der 2. Kunde $b_2 = \frac{1}{3}(81 - 27) = 18$ Brötchen, der 3. Kunde $b_3 = \frac{1}{3}(81 - 27 - 18)$ $= 12$ Brötchen und der 4. Kunde b_4 $= \frac{1}{3}(81 - 27 - 18 - 12) = 8$ Brötchen nehmen müssen. (Es gilt auch: $b_1 = 27$, $b_2 = \frac{2}{3} \cdot 27 = 18$, $b_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 27 = 12$, $b_4 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 27 = 8$, d. h., es handelt sich bei den a_n und b_n um geometrische Folgen mit dem Quotienten $q = \frac{2}{3}$ und den Anfangsgliedern $a_1 = 81$ bzw. $b_1 = 27$.)

Seemannsgarn?

Wenn auch manches an der Geschichte stimmen mag, so hat der alte Seemann jedoch mit der Menge der von den 21 Mädchen dargereichten Apfelsinen unrealistisch stark übertrieben. Die 21 Mädchen hätten nämlich die folgenden Anzahlen von Apfelsinen (diese bilden eine geometrische Folge mit dem Anfangsglied $a_1 = 1$ und dem Quotienten $q = 2$) auf ihrem Teller haben müssen: 1, 2, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$, $2^{11} = 2048$, $2^{12} = 4096$, $2^{13} = 8192$, $2^{14} = 16384$, $2^{15} = 32768$, $2^{16} = 65536$, $2^{17} = 131072$, $2^{18} = 262144$, $2^{19} = 524288$, und das 21. Mädchen: $2^{20} = 1048576$. Abgesehen davon, daß so viele Apfelsinen nicht auf einen Teller passen, so hätte z. B. das 21. Mädchen, wenn man pro Apfelsine nur 100 g rechnet, eine Masse von $1048576 \cdot 100$ g, also rund 105 Tonnen bewältigen müssen. Außerdem wäre die Gesamtanzahl der von den 21 Mädchen überreichten Apfelsinen

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{20} = 1 \cdot \frac{2^{21} - 1}{2 - 1} = 2^{21} - 1 = 2097151,$$

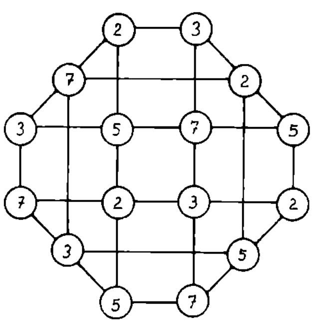
und eine solche Menge ist wohl kaum von den Seeleuten eines Schiffes auf einmal zu verspeisen. Also doch Seemannsgarn!

Badefreuden

Es ist $1000 = 2^3 \cdot 5^3$.
Es ergibt sich eindeutig der Weg:
Peter–1–2–1–2–5–2–1–5–5–Bad.

Primzahl-Magie

Es ist $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ die Primfaktorzerlegung von 210. Folglich sind nur die 4 Primzahlen 2, 3, 5 und 7 zur Eintragung zu verwenden. Die Abbildung zeigt eine mögliche Eintragung:



Gerechte Teilung

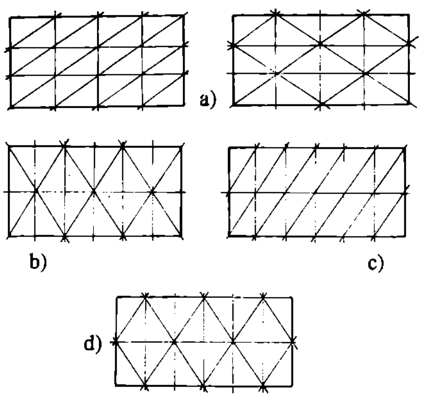
Es ist $525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$. Da die Figur nur die Zahlen 3, 5 und 7 enthält, so müssen sich in jedem Teil die Zahlen 3, 5, 5 und 7 befinden. Es entstehen folglich $24 : 4 = 6$ kongruente Vielecke (konkave Sechsecke):

5	3	5	5	7	3
7	3	5	7	5	5
7	3	5	7	5	5
5	3	5	5	7	3

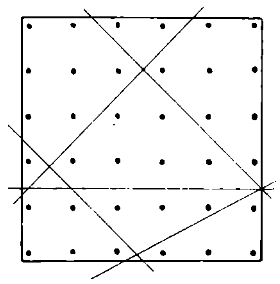
Frage an Aquarianer

Die Maßzahl des Volumens des Schöpfgefäßes muß sowohl Teiler von 6 als auch von 20 und außerdem größtmöglich sein, d. h., sie muß der größte gemeinsame Teiler von 6 und 20 sein. Es ist $6 = 2 \cdot 3$, $20 = 2^2 \cdot 5$ und g.g.T$(6, 20) = 2$. Das Schöpfgefäß darf höchstens 2 Liter fassen.

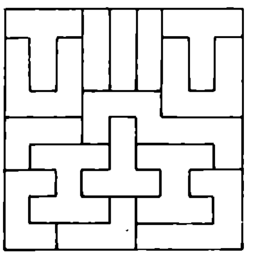
Rechteckzerlegung



Von jedem etwas

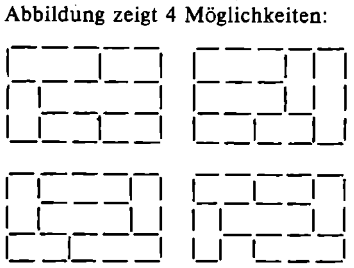


Nur Geduld



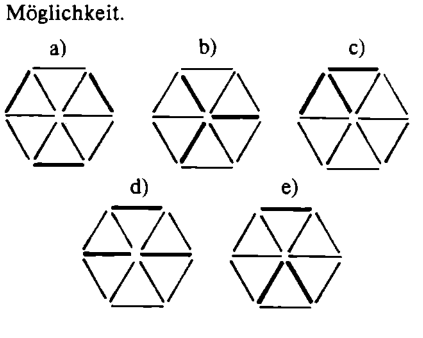
Verschwundene Quadrate

a) Die Figur enthält 26 Quadrate (15 Quadrate aus je 4, 8 Quadrate aus je 8 und 3 Quadrate aus je 12 Hölzchen).
b) Die Abbildung zeigt 4 Möglichkeiten:



Sechseckspielereien

In den Fällen a) und b) gibt es je 2 und in den Fällen c), d) und e) je 6 Abänderungsmöglichkeiten. Die Abbildung zeigt je eine Möglichkeit.



Am Trapez

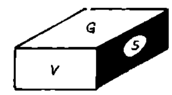
Trapez 9 hat den größten Flächeninhalt (= 9 Kästchenflächen). Alle anderen Trapeze haben den gleichen Flächeninhalt von 8 Kästchenflächen, da bei ihnen $m \cdot h = 8$ (m: Mittellinie, h: Höhe) gilt.

Mit Streichholzschachteln

Mit den Bezeichnungen der Abbildung gilt offenbar

$$G > S > V. \qquad (1).$$

Seien nun A, B, C, D, E bzw. F die Oberflächen der Körper a), b), c), d), e) bzw. f), dann gilt: $A = 6G + 2S + 6V$, $B = 2G + 6S + 6V$, $C = 6G + 6S + 2V$, $D = 4G + 4S + 6V$, $E = 6G + 4S + 4V$ bzw. $F = 4G + 4S + 6V$. Mit Hilfe von (1) kann man die Oberflächen gegeneinander abschätzen, und man erhält:
$C > E > A > D = F > B$.



Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 1/85, Fortsetzung

Ma 6 ■ 2532 $\overline{AB}$ hat die Länge 6 cm + 2 cm = 8 cm; $\overline{BC}$ hat die Länge 2 cm + 3 cm = 5 cm. Wegen $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $\overline{BC} = \overline{AD}$ haben $\overline{DG}$ und $\overline{DH}$ die Länge 2 cm. Für den Flächeninhalt A_V des Vierecks $EFGH$ gilt deshalb

$$A_V = \left(8 \cdot 5 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6\right) \text{cm}^2 = 18 \text{ cm}^2.$$

Ma 7 ■ 2533 Wegen $t = \frac{s}{v}$ und $t_1 = t_2$ und $s_2 = 50 - s_1$ gilt $\frac{s_1}{14} = \frac{50 - s_1}{11}$, $11s_1 = 700 - 14s_1$, $25s_1 = 700$, $s_1 = 28$ und somit $t_1 = \frac{28}{14} = 2$.

Nach 2 Stunden, also um 10 Uhr, treffen beide aufeinander. Der Treffpunkt ist 28 km von Erfurt entfernt.

Ma 7 ■ 2534 Aus $\frac{378 \cdot 436 - 56}{378 + 436 \cdot 377}$

$$= \frac{378 \cdot 436 - 56}{377 \cdot 436 + 378} = \frac{377 \cdot 436 + 436 - 56}{377 \cdot 436 + 378} = \frac{377 \cdot 436 + 380}{377 \cdot 436 + 378} \text{ folgt,}$$

daß der Zähler des Quotienten um 2 größer ist als der Nenner. Folglich ist der Quotient größer als 1.

Ma 7 ■ 2535 Nach Voraussetzung gilt
$(n - 1)(n + 1) = 483 = 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 23$,
$(n - 1)(n + 1) = 21 \cdot 23$, also $n = 22$.

Ma 7 ■ 2536 Angenommen in der ersten Box befinden sich n Kaninchen und in der zweiten Box befinden sich d Kaninchen mehr als in der ersten; dann gilt

$$n + (n + d) + (n + 2d) + (n + 3d) = 30,$$
$$4n + 6d = 30,$$
$$2n + 3d = 15,$$
$$3d = 15 - 2n,$$
$$d = 5 - \frac{2n}{3}.$$

Für $n = 3$ gilt $d = 3$, und wir erhalten

$3 + 6 + 9 + 12 = 30$; diese Lösung entfällt, da sich in der vierten Box 12 Kaninchen, also mehr als 10 Kaninchen, befinden würden.
Für $n = 6$ gilt $d = 1$, und wir erhalten $6 + 7 + 8 + 9 = 30$. Es befinden sich in der ersten Box 6, in der zweiten 7, in der dritten 8, in der vierten 9 Kaninchen.
Für $n = 9$ gilt $d = -1$; diese Möglichkeit entfällt, da d negativ ist.

Ma 8 ■ 2537 Die in der Aufgabe aufgestellte Behauptung läßt sich durch die folgende Gleichung ausdrücken:

$$10a + b - (a + b) = 9a.$$

Die mehrfache äquivalente Umformung ergibt

$$10a + b - a - b = 9a,$$
$$9a = 9a,$$
$$a = a.$$

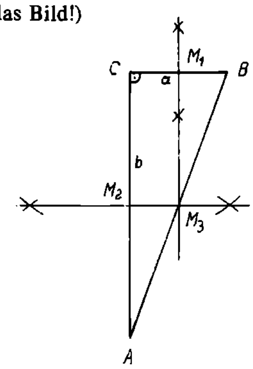
Da die letzte Aussageform allgemeingültig ist und nur äquivalent umgeformt wurde, folgt die Wahrheit der Behauptung, w.z.b.w.

Ma 8 ■ 2538 Nach der Aufgabenstellung gelten die folgenden Gleichungen:
(1) $A + B + C = 30$,
(2) $C + 1 = A$ und
(3) $2C + 1 = B$.
(Wir wollen die Variablen A, B, C für die jeweilige Anzahl von Fischen setzen, die die entsprechenden Angler gefangen haben!) Durch Einsetzen von (2) und (3) in (1) erhalten wir
(4) $C + 1 + 2C + 1 + C = 30$
bzw. $C = 7$.
Nun ergeben sich $A = 8$ und $B = 15$.
Der Angler A angelte 8 Fische, B angelte 15 Fische und C angelte 7 Fische.

Ma 8 ■ 2539 Man errichtet auf den Katheten die Mittelsenkrechten. Diese schneiden sich im Mittelpunkt der Hypotenuse. Da die Mittelsenkrechten der Katheten zur jeweils anderen Kathete parallel sind, gehen sie nach einem bekannten Satz beide durch die Mitte der Hypotenuse.
Das Rechteck $M_1CM_2M_3$ erfüllt alle geforderten Bedingungen.

$$A_{ABC} = \frac{ab}{2};\ A_{M_1CM_2M_3} = \frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2} = \frac{ab}{4}.$$

(vgl. das Bild!)



(Verbindet man M_1 mit M_2, so wird ABC in vier paarweise kongruente Dreiecke zerlegt. Der Leser führe den Beweis selbständig!)

Ma 8 ■ 2540 Wir verbinden M und N mit P und Q. Es gilt der Satz: *Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten verläuft parallel zur dritten Dreiecksseite und ist halb so lang wie diese.*
Daraus folgt: $\overline{MQ} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AD} = \frac{1}{2}\cdot\overline{BC}$,

$$\overline{NP} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AD} = \frac{1}{2}\cdot\overline{BC},\ \overline{NQ} = \frac{1}{2}\cdot\overline{BC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AD},\ \overline{MP} = \frac{1}{2}\cdot\overline{BC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AD},$$

also $\overline{MP} = \overline{NP} = \overline{MQ} = \overline{NQ}$.
Das Viereck $PNQM$ ist somit ein Rhombus. Im Rhombus stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht. Folglich gilt $\overline{PQ} \perp \overline{MN}$.

Ma 9 ■ 2541 Angenommen, die kleinste der drei Zahlen sei x.
Dann gilt die folgende Beziehung:

$$x^2 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = (x+2)^2.$$

Die äquivalente Umformung ergibt

$$x^2 + \frac{x^2 + 2x + 1}{4} = x^2 + 4x + 4,$$
$$\frac{x^2}{4} - \frac{7}{2}x - \frac{15}{4} = 0,$$
$$x^2 - 14x - 15 = 0,$$
$$(x+1)(x-15) = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 15$. Im Sinne der Aufgabenstellung gilt nur $x = 15$. Die drei gesuchten Zahlen heißen 15, 16 und 17, und es gilt $15^2 + 8^2 = 17^2$.

Ma 9 ■ 2542 Aus (2) folgt $a \neq 0$ und $b \neq 0$, da sonst $\frac{ab}{c} = 0$ wäre. Wir addieren die Gleichungen (1) und (3) und erhalten
(4) $a^2 + a = 12$
mit den Lösungen $a_1 = 3$ und $a_2 = -4$.
Nun setzen wir zunächst $a_1 = 3$ in (1) ein und erhalten
(1′) $b_1 + c_1 = 3$.
Dann setzen wir $a_1 = 3$ in (2) ein und erhalten
(2′) $\frac{3b_1}{c_1} = 6$.
Aus (2′) folgt $b_1 = 2c_1$. Das setzen wir in (1′) ein und erhalten $3c_1 = 3$ bzw. $c_1 = 1$. Das setzen wir in (2′) ein und erhalten $b_1 = 2$. Aus $a_2 = -4$ folgt analog $b_2 = 30$ und $c_2 = -20$.
Es gibt genau zwei Lösungstripel, nämlich $(3; 2; 1)$ und $(-4; 30; -20)$.

Ma 9 ■ 2543 Wegen $300^3 = 27\,000\,000 > 99\,999$ gilt $a < 3$. Wegen $199^1 < 200 < 10\,000$ gilt $a \neq 1$, also $a = 2$. Wir erhalten zunächst $(\overline{2bc})^2 = \overline{bc1bc}$. Setzen wir $\overline{bc} = x$ erhalten wir $(200 + x)^2 = 1001x + 100$,
$x^2 - 601x + 39\,900 = 0$,
$x_1 = 525 > 99$ (entfällt),
$x_2 = 76$.
Daraus folgt $b = 7$ und $c = 6$.
Probe: $276^2 = 76\,176$.

Ma 9 ■ 2544 Es sei A_1 der Flächeninhalt des Kreissektors P_1P_2M, A_2 der des gleichseitigen Dreiecks MP_1P_2 und A_3 der des Kreissegments mit $\overline{P_1P_2}$ als Sehne. Dann gilt $A_3 = A_1 - A_2$. Wegen $\alpha = 60°$ gilt

$$A_3 = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{1}{4}r^2\sqrt{3}$$
$$= \left(\frac{1}{6}\pi\cdot 9 - \frac{9}{4}\sqrt{3}\right)\text{cm}^2 \approx 0{,}82\ \text{cm}^2.$$

Für den Flächeninhalt der Rosette gilt deshalb $A_R = 12\cdot A_3 = 9{,}78\ \text{cm}^2$. Daraus folgt $A_R : A_K = \frac{9{,}78}{9\cdot\pi} \approx 35\,\%$. Der Flächeninhalt der Rosette beträgt rund 35 % des Flächeninhalts des Kreises.

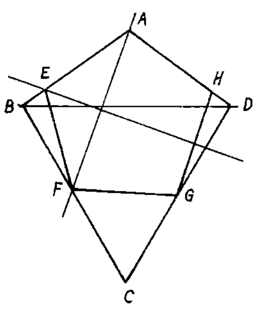
Ma 10/12 ■ 2545 Wir formen um und erhalten

$$(13^x - 5^x)(13^x + 5^x) = 13^{2x} - 5^{2x}$$
$$= (13^2 - 5^2)^x$$
$$= 144^x$$
$$= (5^2 - 13)^{2x}.$$

Es ist $(5^2 - 13)^2 = 144$, und wie gezeigt wurde, ist im Term $(13^x - 5^x)(13^x + 5^x)$ der Faktor 144 erhalten, w.z.b.w.

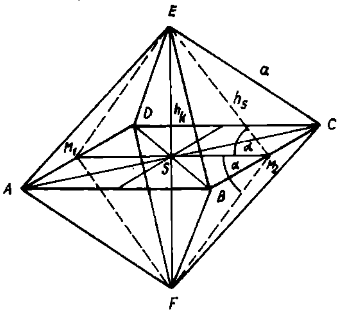
Ma 10/12 ■ 2546 Aus $(a + b + c)^2$ folgt durch äquivalentes Umformen schrittweise
$[(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2c(a + b) + c^2$,
$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ und wegen $a^2 + b^2 = c^2$
$(a + b + c)^2 = 2ab + 2ac + 2bc + 2c^2$,
$(a + b + c)^2 = 2a(b + c) + 2c(b + c)$
$= 2(a + c)(b + c)$.
Wegen $a < c$ und $b < c$ gilt
$2a < a + c$ und $2b < b + c$, also
$4ab < (a + c)(b + c)$ bzw.
$8ab < 2(a + c)(b + c)$. Daraus folgt
$(a + b + c)^2 = 2(a + c)(b + c) > 8ab$.

Ma 10/12 ■ 2547 Jeder Innenwinkel eines regelmäßigen Fünfecks beträgt 108°. Im gleichschenkligen Dreieck BDA hat demzufolge der Winkel $\sphericalangle ABD$ die Größe 36°. Derselbe Winkel tritt im regelmäßigen Fünfeck zwischen einer Seite und einer Diagonalen auf. Wir tragen nun an die Seite $\overline{AB}$ des Drachenvierecks in A einen Winkel von 36° im positiven Drehsinn an. Der Schnittpunkt F des freien Schenkels dieses Winkels mit der Seite $\overline{BC}$ ist ein Eckpunkt des Fünfecks. Die Mittelsenkrechte auf $\overline{AF}$ schneidet die Seite $\overline{AB}$ in E, einem weiteren Eckpunkt des Fünfecks. $\overline{AE}$ ist Fünfeckseite. Nun lassen sich die fehlenden Punkte leicht finden. $AEFGH$ ist das gesuchte Fünfeck.



Ma 10/12 ■ 2548
Ein regelmäßiges Oktaeder besteht aus 8 paarweise kongruenten gleichseitigen Dreiecken. Die abgebildete Schnittfigur ist ein Rhombus. Der Schnitt geht durch zwei gegenüberliegende Ecken und durch die Mittelpunkte zweier paralleler Kanten. Der Winkel, unter dem sich die Seitenflächen BCE und CBF schneiden, habe die Größe 2α. Im rechtwinkligen Dreieck CM_2E gilt

Skizze (nicht maßstäblich!)
(Kantenmodell)



a: Länge einer Kante
h_s: Länge der Höhe einer Seitenfläche
h_k: Länge der Höhe der Pyramide $ABCDE$
α: Größe des Winkels $\sphericalangle SM_2E$

$h_s^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ bzw. $h_s = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Im rechtwinkligen Dreieck SM_2E gilt

$h_k^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ bzw. $h_k = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Weiter gilt im rechtwinkligen Dreieck SM_2E:

$$\tan\alpha = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{\frac{a}{2}}; \; 1\emptyset tan\,\alpha = \sqrt{2}.$$

Daraus folgt $\alpha = 54{,}74°$, also $2\alpha = 109{,}47°$. Zwei Seitenflächen eines regelmäßigen Oktaeders schneiden sich unter einem Winkel von etwa 109,5°.

Ph 6 ■ 171

Geg.: Dichte von Blei $\varrho = 11{,}3\,\text{g/cm}^3$
Masse des Bleis $m = 282{,}5\,\text{g}$
Ges.: Volumen des ausfließenden Wassers

Das Volumen der ausfließenden Wassermenge ist gleich dem Volumen des Bleirohres, und man rechnet mit der Gleichung $m = \varrho \cdot V$.

Es ist also $m = \varrho \cdot V$

und $V = \frac{m}{\varrho}$,

$$V = \frac{282{,}5\,\text{g}\cdot\text{cm}^3}{11{,}3\,\text{g}},$$

$V = 25\,\text{cm}^3$.

Es fließen 25 cm³ Wasser aus.

Ph 7 ■ 172

Geg.: $F_1 = 144\,N$ Ges.: F
$F_2 = 169\,N$

Sind die Längen der Hebelarme l_1 und l_2, dann gilt

$l_1 \cdot F = F_1 \cdot l_2$

und $l_2 \cdot F = F_2 \cdot l_1$.

Multipliziert man die Seiten der beiden Gleichungen miteinander, erhält man

$$l_1F \cdot l_2F = F_1 \cdot l_2 \cdot F_2 \cdot l_1,$$
$$F^2 = F_1 \cdot F_2,$$
$$F = \sqrt{F_1 \cdot F_2},$$
$$F = \sqrt{144 \cdot 169}\,N,$$
$$F = 156\,N.$$

Das wahre Gewicht des Gegenstandes beträgt 156 N.

Ph 8 ■ 173

a) Wie aus der Aufgabe ersichtlich, gilt

212 °F − 32 °F ≙ 180 °F

und 180 °F ≙ 100 °C,

also $$1\,°\text{F} = \frac{100}{180}\,°\text{C} = \frac{5}{9}\,°\text{C}.$$

Dann gilt

$$+41\,°\text{F} = \frac{5}{9}(41-32)\,°\text{C} = 5\,°\text{C}$$

bzw. $$-49\,°\text{F} = \frac{5}{9}[(-49)-32]\,°\text{C} = -45\,°\text{C}$$

oder mit Variablen

$$n\,°\text{F} = \frac{5}{9}(n-32)\,°\text{C}.$$

b) Jetzt sind

100 °C ≙ 180 °F

bzw. $$1\,°\text{C} \mathrel{\hat=} \frac{180}{100}\,°\text{F} = \frac{9}{5}\,°\text{F}.$$

Dann gilt

$$+20\,°\text{C} = \left(\frac{9}{5}\cdot 20 + 32\right)°\text{F} = 68\,°\text{F}$$

bzw. $$-15\,°\text{C} = \left[\frac{9}{5}(-15) + 32\right]°\text{F} = 5\,°\text{F}$$

oder mit Variablen

$$m\,°\text{C} = \left(\frac{9}{5}\cdot m + 32\right)°\text{F}.$$

c) Es sei n die Maßzahl, dann gilt

$$\frac{9}{5}n + 32 = \frac{5}{9}(n-32),$$
$$81n + 1440 = 25n - 800,$$
$$n = -40.$$

Bei −40 gilt also −40 °C = −40 °F.

Ph 9 ■ 174

Geg.: $m = 1285\,\text{kg}$ Ges.: t
$P = 38\,\text{kW} = 38\,000\,\text{W}$
$v = 80\,\text{km/h} = \frac{80}{3{,}6}\,\text{m/s}$

Die Zeit ergibt sich aus der Gleichung für die Leistung $P = F \cdot v$ mit $F = ma$ und $a = v/t$; denn die Kraft bleibt konstant, während die Geschwindigkeit ständig zunimmt.

Dann ist $P = Fv$,

$$P = \frac{m \cdot v^2}{t}.$$

Also ist $A = \frac{m \cdot v^2}{P}$,

$$A = \frac{1285\,\text{kg}\cdot 80^2\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^3}{38\,000\,\text{kg}\cdot 3{,}6^2\cdot\text{s}^2\cdot\text{m}^2},$$

$A = 16{,}7\,\text{s} \approx 17\,\text{s}$.

Der Pkw erreicht nach rd. 17 Sekunden eine Geschwindigkeit von 80 km/h.

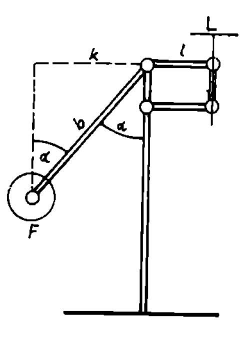
Ph 10/12 ■ 175

Geg.: Lastarm $l = 2{,}5\,\text{cm}$ Ges.: Last L
Kraftarm $b = 10\,\text{cm}$
Kraft $F = 500\,\text{mN}$
Auslenkung $\alpha = 20°$

Für den zweiseitigen Hebel gilt

$L \cdot l = F \cdot k$

bzw. $L = \frac{F \cdot k}{l}$.



Mit $\sin\alpha = k/b$ bzw. $k = b \cdot \sin\alpha$ ist schließlich

$$L = \frac{F \cdot b \cdot \sin\alpha}{l},$$
$$L = \frac{500\,mN \cdot 10\,\text{cm}\cdot\sin 20°}{2{,}5\,\text{cm}},$$
$$L = 684\,mN.$$

Der Brief hat ein Gewicht von 684 mN.

Ch 7 ■ 137

1. 506 g Superphosphat ≙ 142 g P_2O_5
100 g Superphosphat ≙ m

$$m = \frac{100\,\text{g}\cdot 142\,\text{g}}{506\,\text{g}} = 28{,}1\,\text{g}$$

2. 620 g Thomasmehl ≙ 284 g P_2O_5
100 g Thomasmehl ≙ m

$$m = \frac{100\,\text{g}\cdot 284\,\text{g}}{620\,\text{g}} = 45{,}8\,\text{g}$$

3. 262 g Magnesiumphosphat ≙ 142 g P_2O_5
100 g Magnesiumphosphat ≙ m

$$m = \frac{100\,\text{g}\cdot 142\,\text{g}}{262\,\text{g}} = 54{,}2\,\text{g}$$

54,2 g ≙ 100%
m ≙ 80%
$m = 43{,}4\,\text{g}$

4. 545,8 g Nitrophoska ≙ 142 g P_2O_5
100 g Nitrophoska ≙ m

$$m = \frac{100\,\text{g}\cdot 142\,\text{g}}{545{,}8\,\text{g}} = 26{,}0\,\text{g}$$

Düngemittel	%-Gehalt an P_2O_5
1. Superphosphat	28,1
2. Thomasmehl	45,8
3. 80%iges Magnesiumphosphat	43,4
4. Nitrophoska	26,0

Ch 8 ■ 138

a) 1187,5 g m_l m_2

$$2\,\text{AL} + 3\text{Ca(OH)}_2 + 6\text{H}_2\text{O} \rightarrow 3\text{CaO}\cdot\text{Al}_2\text{O}_3 \times 6\text{H}_2\text{O} + 3\text{H}_2$$

54 g 222 g 108 g 67,2 l

$$V = \frac{1187{,}5\,\text{g}\cdot 67{,}2\,\text{l}}{54\,\text{g}} = 1{,}5\,\text{m}^3$$

1,5 m³ Wasserstoff werden bei dieser Reaktion ausgetrieben.

b) $$m_1 = \frac{1187{,}5\,\text{g}\cdot 222\,\text{g}}{54\,\text{g}} = 4{,}9\,\text{kg}$$

$$m_2 = \frac{1187{,}5\,\text{g}\cdot 108\,\text{g}}{54\,\text{g}} = 2{,}4\,\text{kg}$$

Für die Reaktion werden 4,9 kg Kalziumhydroxid und 2,4 kg Wasser benötigt.

Ch 9 ■ 139 Volumen-Stahlrohr

$$V = \frac{\pi}{4}\,h\,(d_1^2 - d_2^2)$$

$$V = \frac{\pi}{4}\cdot 600\,\text{m}\,[(0{,}038\,\text{m})^2 - (0{,}030\,\text{m})^2]$$

$$V = \frac{\pi}{4}\cdot 600\,\text{m}\cdot 0{,}0005\,\text{m}^2 = 0{,}236\,\text{m}^3$$

Volumen PVC-Rohr

$$V = \frac{m}{\varrho}$$

$$V = \frac{1\,\text{t}\,\text{cm}^3}{1{,}38\,\text{g}} = 0{,}725\,\text{m}^3$$

0,236 m³ Stahlrohr ≙ 600 m
0,725 m³ PVC-Rohr ≙ x

$$x = \frac{0{,}725\,\text{m}^3\cdot 600\,\text{m}}{0{,}236\,\text{m}^3} = 1{,}8\,\text{km}$$

1,8 km PVC-Rohr lassen sich aus einer Tonne PVC-hart herstellen.

Ch 10/12 ■ 140

$$\begin{array}{llll} x & y & z & \\ 2Al + & 3H_2SO_4 \rightarrow & Al_2(SO_4)_3 + & 3H_2\uparrow \\ 54\,g & 294\,g & 342\,g & \end{array}$$

$$z = 23{,}2\,\% = \frac{342x}{54} \qquad \text{(I)}$$

$$w = 76{,}8\,\% = \frac{76{,}8 \cdot z}{23{,}2} \qquad \text{(II)}$$

Einsetzen von (I) in (II)

$$w = \frac{342x \cdot 76{,}8}{54 \cdot 23{,}2}$$

$$w + y = 100\,\%$$

$$y = c\,\%$$

$$c = \frac{100\,\% \cdot y}{w + y} \qquad \text{(III)}$$

$$y = \frac{294x}{54} \qquad \text{(IV)}$$

Einsetzen von (IV) in (III)

$$c = \frac{294x \cdot 100\,\%}{54\,(w + y)}$$

$$c = \frac{294x \cdot 100\,\%}{\frac{76{,}8 \cdot 342x}{23{,}2} + 294x} = 20{,}6\,\%$$

Die Schwefelsäure muß 20,6%ig sein, damit eine Aluminiumsulfat-Lösung der angegebenen Konzentration entsteht.

Lösungen zu:
Eine Aufgabe – verschiedene Varianten mit steigendem Schwierigkeitsgrad
Heft 5/85

Klasse 5
Der Streckenzug $\overline{BCDA}$ hat die Länge 18 cm − 8 cm = 10 cm. Wegen $\overline{AD} = \overline{BD}$ hat das Dreieck BCD einen Umfang von 10 cm Länge.

Klasse 6
Verbinden wir den Mittelpunkt E der Seite $\overline{AB}$ mit D, dann entstehen drei kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, deren Katheten 4 cm lang sind. Das Viereck $ABCD$ hat deshalb einen Flächeninhalt von $3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\,\text{cm}^2 = 24\,\text{cm}^2$.

Klasse 7
Da das Viereck $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, hat der Winkel BCD die Größe $180° - 45° = 135°$. Wegen $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CDB$ hat jeder dieser beiden Winkel die Größe
$\frac{1}{2} \cdot (180° - 135°) = 22{,}5°$.
Deshalb hat Winkel ABC die Größe $45° + 22{,}5° = 67{,}5°$ und Winkel ADC die Größe $90° + 22{,}5° = 112{,}5°$.

Klasse 8
Es sei x die Länge von $\overline{AD}$; wegen $\overline{AD} = \overline{BD}$ hat $\overline{BD}$ auch die Länge x. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $x^2 + x^2 = 2x^2$, $2x^2 = 64$, $x^2 = 32$, also $x = 4 \cdot \sqrt{2} \approx 5{,}66$.
Die Seite $\overline{AD}$ ist rund 5,66 cm lang. Es sei y die Länge von $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$; dann gilt
$y^2 + y^2 = x^2$, $y^2 + y^2 = 32$, $2y^2 = 32$,
$y^2 = 16$, also $y = 4$.
Die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ sind 4 cm lang.

Klasse 9
Die Seite $\overline{AD}$ hat die Länge $4 \cdot \sqrt{2}$ cm (vergleiche Lösung für Klasse 8). Wegen $\overline{BD} = \overline{AD}$ hat auch $\overline{BD}$ die Länge $4 \cdot \sqrt{2}$ cm.
Für den Flächeninhalt A_V des Vierecks $ABCD$ gilt somit

$$A = f(h) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \cdot h + \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot \sqrt{2})^2,$$

also

$$A = f(h) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot h + 16 = 2 \cdot (\sqrt{2} + 4) \cdot h.$$

Klasse 10
Der Winkel ABC hat die Größe 72°, der Winkel ABD die Größe 45°; folglich hat der Winkel DBC die Größe 27°, der Winkel BCD die Größe $180° - 2 \cdot 27° = 126°$. Nun hat $\overline{AD}$ die Länge $4 \cdot \sqrt{2}$ cm (vergleiche Lösung für Klasse 8); deshalb gilt

$\overline{BC} : (4 \cdot \sqrt{2}) = \sin 27° : \sin 126°$, also

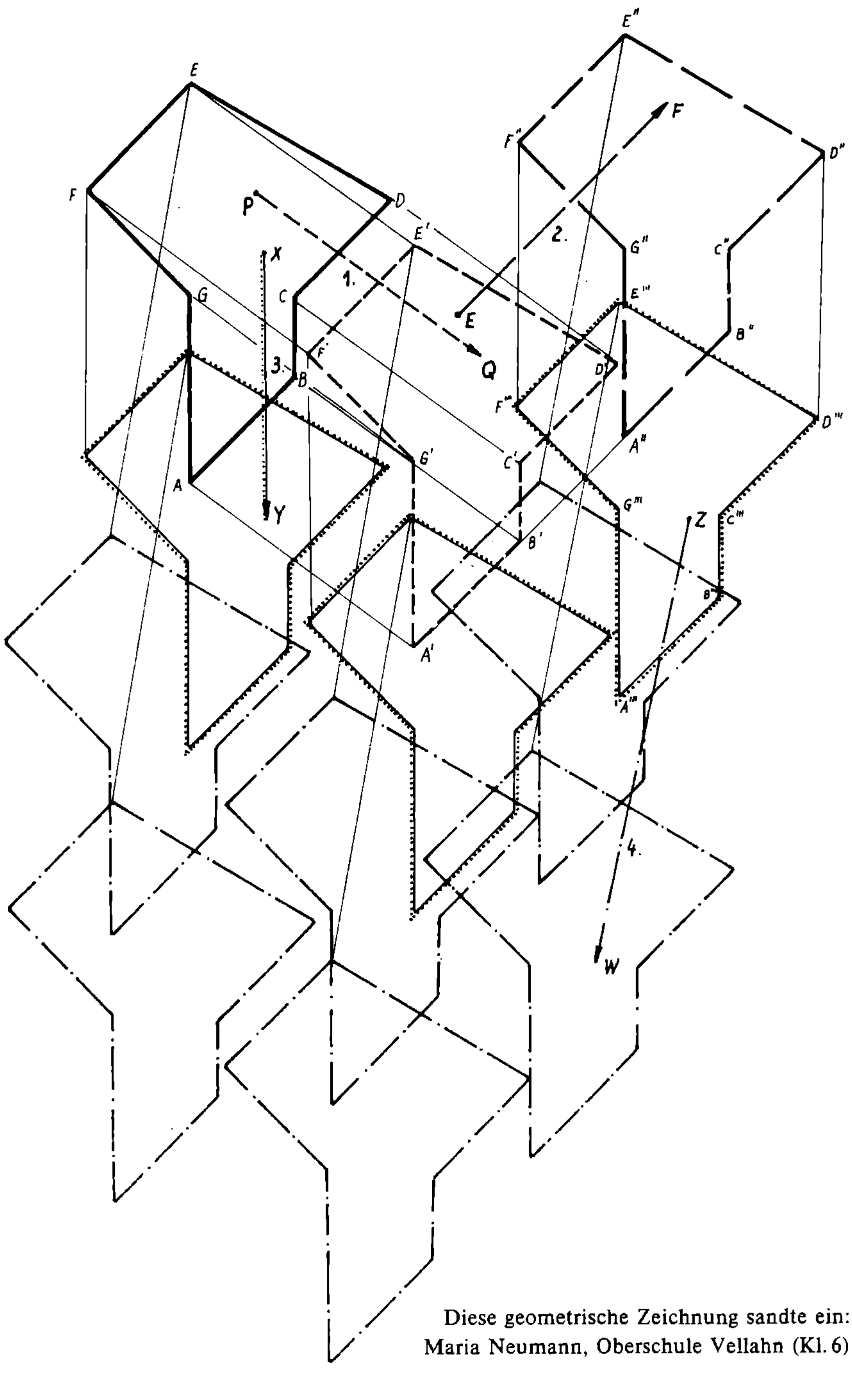
$$\overline{BC} = \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 27°}{\sin 126°} = \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 27°}{\sin 54°}$$

$$= \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 27°}{2 \cdot \sin 27° \cdot \cos 27°},$$

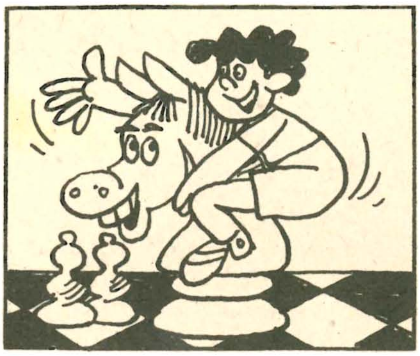
$$\overline{BC} = \overline{CD} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\cos 27°} \approx 3{,}17.$$

Die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ sind rund 3,17 cm lang.

Lösung zu: Auf Fehlersuche
Quadratmeer (t), Lehrsitz (a), beweinen (s), Kreisdurstmesser (ch), Rachenoperationen (e), Durchschittsgröße (n), Faselschreiber (r), Rechenhaft (e), Symmetrieasse (ch), Schulzahlarzt (n), Rast (e), Drachenvieheck (r) – Taschenrechner.



Diese geometrische Zeichnung sandte ein:
Maria Neumann, Oberschule Vellahn (Kl. 6)



Schachwettbewerb
Begeisterte Zustimmung

„Euren Schachwettbewerb finde ich ganz prima" (A. Hackenberger, Zedlitz). – „Sehr schön fand ich wieder den Schachwettbewerb 1984. Als AG-Leiter in unserer POS war das auch das richtige Mittel für meine Schüler" (K.-D. Stegmann, Erfurt). – „Durch den Schachwettbewerb fand ich seit langer Zeit das erste Mal wieder zum Schachbrett. Für diese Anregung möchte ich *alpha* danken." (G. Glockmann, Jena) – „Die Lösung der acht Schachaufgaben hat mir viel Spaß gemacht. Der *alpha*-Schachwettbewerb ist eine gute Idee." (St. Karsch, Dresden)

So und ähnlich äußerten viele Teilnehmer ihre begeisterte Zustimmung zu dem Schachwettbewerb in *alpha*. Auch die Meinungen und Einschätzungen der Leser zu den Aufgaben wurden mit Interesse gelesen und ausgewertet. Wir danken allen 898 Einsendern herzlich für ihre Teilnahme.

Neben den jüngsten Teilnehmern, die acht Jahre alt waren, konnten wir als älteste Teilnehmer Elisabeth Möller (Bad Kösen/79 Jahre), Fritz Rauhe (Wendgräben/80 Jahre) und Erwin Huth (Schulpforte/81 Jahre) begrüßen. Lobend erwähnen möchten wir auch jene Einsender, die den Mut hatten, auch die Lösung für nur einige Aufgaben einzusenden.

Lösungen

▲1▲

1. Th6	g:h6	2. g7 matt	(1 P.).
1. …	L beliebig	2. T:h7 matt	(1 P.).

▲2▲

1. Df8+	T:f8	2. Se7 matt	(1 P.).
1. …	K:f8	2. Th8 matt	(1 P.).

▲3▲

1. Te1	K:e1	2. Dd2 matt	(1 P.).
1. …	Lg2	2. Dh4 matt	(1 P.).
1. …	L beliebig	2. Dg1 matt	(1 P.).

Diese Aufgabe war von *Sam Loyd*, „Musical World" 1859. Viele Löser gaben hier als Lösung 1. Dh4+ Kg2 2. Tg4 matt an, wenn jedoch Schwarz 1. … Kg1 spielt, ist durch 2. Tg4 kein Matt möglich, weil 2. … Lg2 erfolgt!

▲4▲

1. Tg8+	K:g8	2. S:f6++	Kh8 (f8)
3. Tg8 matt	(2 P.).		
1. …	Kh7	2. S:f6+	T:f6
3. T3g7 matt	(2 P.).		

▲5▲

1. Dh7+	K:h7	2. T:g7+	Kh8
3. TH7+	Kg8	4. Tbg7 matt	(4 P.).

▲6▲

1. Da2+	Kh8	2. Sf7+	Kg8
3. Sh6++	Kh8	4. Dg8+	T:g8
5. Sf7 matt	(5 P.).		

▲7▲

1. Sf5	L:h8	2. Sg7	L:g7
3. L:g7 matt	(3 P.).		
1. …	L beliebig		
2. Lg7(+)	L:g7/L beliebig		
3. Th1/L:L matt	(3 P.).		

Diese Aufgabe von *André Chéron* aus dem Jahre 1930 wurde vielfach als die schönste Aufgabe von den Teilnehmern angesehen. Der Versuch mittels 1. Tg8 ein Matt in 3 Zügen zu erreichen, scheitert an 1. … Ld4.

▲8▲

1. Ka7	droht	2. Tb8 matt.
1. …	L:b4	2. c4 matt (2 P.).
1. …	T:b4	2. Sc3 matt (2 P.).
1. …	a:b4	2. Tc5 matt (2 P.).

Bei dieser preisgekrönten Aufgabe des Niederländers *Cor Goldschmeding* gab es die meisten Fehllösungen. Die Versuche 1. Le1? a:b4!, 1. c3? T:b4!, 1. Tc4? L:b4! können jeweils durch Schwarz pariert werden.

---

286 Teilnehmer erreichten die volle Punktzahl. Auch Günter Oeser aus Zwickau. Er verfaßte die Lösung der Aufgaben zusätzlich in Versen:

Bei Nummer 1 da war's noch leicht,
da hat der Turm nach h6 gereicht.
Bei Nummer 2 wurde es so gemacht,
ein Damenopfer klärte alles auf f acht.
Bei Nummer 3 war es mir klar,
daß der Läufer völlig sinnlos war.
Der Turm wurde auf e1 gesetzt,
die Dame stellte matt zuletzt.
Bei Nummer 4 hatte ein Springer sehr viel Macht,
der erste Zug war Turm auf g acht.
Besonders wichtig war's, die Dame richtig zu führen,
daß bekam man bei Nummer 5 zu spüren.
Der König staunte gar nicht schlecht,
das Schach auf h7 war ihm nicht recht.
Das Problem Nummer 6 war nicht leicht zu erkennen,
als erster Zug war Dame a2 zu nennen.
Doch den Gnadenstoß gab, es ist nicht übertrieben,
der Springer, mit dem letzten Zug auf f sieben.
Bei Nummer 7 kam ich in's Schwitzen,
ich wollte den Turm immer wieder beschützen.
Doch dann kam die Erleuchtung, es wurde mir klar,
daß hier ein Zugzwang im Spiele war.
Mit Springer f5 ging dann alles glatt,
der Läufer stellte auf g7 matt.
Bei Nummer 8 wurde der König auf a7 postiert,
davon haben Springer, Turm und Bauer profitiert.
Ich saß manche Stunde, bei Tag und bei Nacht,
es hat mir sehr viel Freude gemacht.
Die Schachprobleme zu lösen, das wollte ich packen,
es waren ganz schöne Nüsse zu knacken.
Macht weiter so, liebe alpha-Redaktion,
ich warte auf Wettbewerb „85" schon!

Unter den Teilnehmern, die alle Aufgaben richtig gelöst hatten, wurden folgende Gewinner ermittelt:
Torsten Kratz (Bad Berka),
Heike Hellmich (Gera-Lusan),
Katja Mikolajek (Dohmen)
und Mirko Kühne (Ortrand).

Des weiteren wurden unter allen Einsendern, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst hatten, Bücher verlost:
Sabine Strohschneider (Stendal), Arnd Bärsch (Radebeul), Steffen Scharnowski (Möser), Ulrike Quaas (Kahla), Kristina Böttger (Görlitz) und Elke Schulz (Potsdam).
Allen Gewinnern unseren herzlichen Glückwunsch!

„Auch wenn nicht alles stimmen sollte, hat mir das Lösen der Aufgaben viel Spaß gemacht" (K. Fritsch, Johanngeorgenstadt). Eine lobenswerte Einstellung zu einem Wettbewerb, der eine „Anregung zur Beschäftigung mit diesem schönen und interessanten Spiel liefert" (R. Wojatschke, Berlin). Für T. Kitschke (Halle) war es „ein Stündchen Abwechslung während des Studiums" oder wie es A. Hunstock (Quedlinburg) ausdrückte: „So habe ich einen Fernsehabend eingespart und nützlich verbracht."

„Insgesamt – das ist mein persönlicher Eindruck – ein feines Schacherlebnis für jedermann (sofern tieferes Interesse am königlichen Spiel vorhanden) und ein Stück Werbung dafür, daß man sich weiterhin auf das Abenteuer der 64 Felder einläßt." (F. Hoffmann, Weißenfels)

„Ich würde mich freuen, wenn Sie auch im Jahre 1985 wieder einen Schachwettbewerb starten, und ich würde dann wieder sehr gern daran teilnehmen." (K. Pohlheim, Leipzig) „Ich hoffe, daß dieser Schachwettbewerb auch in diesem Jahr wieder ausgetragen wird." (J. Wagner, Raschau)

Angesichts der zahlreichen Wünsche nach der Fortsetzung des *alpha*-Wettbewerbs wird eine neue Schachknobelei vorbereitet. Sie erscheint in Heft 6/1985, und wir laden alle *alpha*-Leser schon jetzt recht herzlich zur Teilnahme ein!

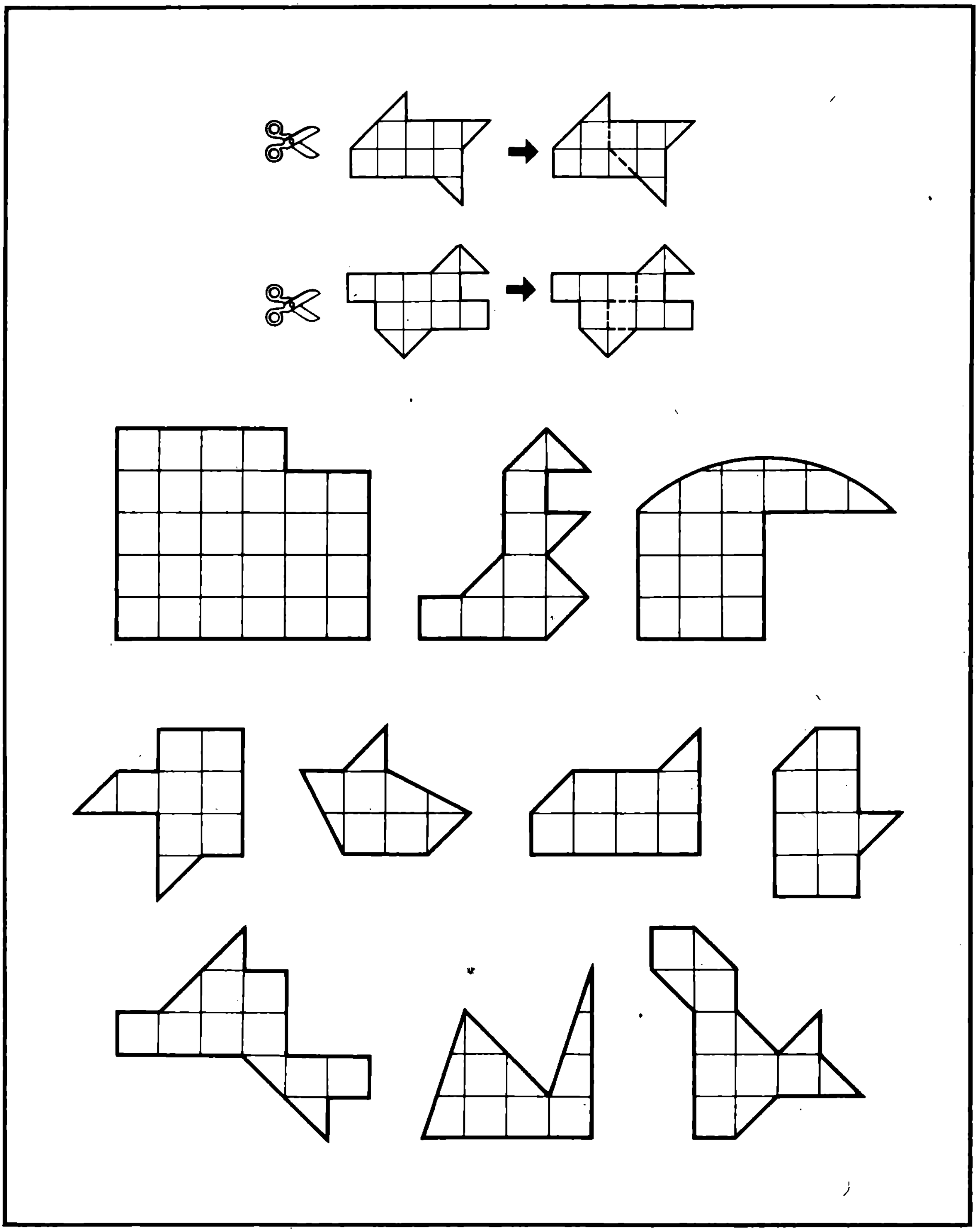
J. Lehmann/H. Rüdiger

Uwe Pitz, Crivitz (32 J.)

Nachgedacht und mitgemacht

Schneide die Figuren in jeweils zwei kongruente Teile!

aus: Pythagoras, Groningen (Niederlande)



ISSN 002-6395 · alpha · Berlin 19 (1985) 5 · Seiten 97 bis 120

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
19. Jahrgang 1985
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

6

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
1086 Berlin, Krausenstr. 50, PSF 1213
Anschrift der Redaktion:
7027 Leipzig, PSF 14
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Aus einer Bildmappe des Verlages Bild und Heimat Reichenbach/V. (S. 138); Angelika Drauschke, Neustrelitz (S. 132); Christian Gehler, Fürstenwalde (S. 127); Krokodil, Moskau, N. Belewschew (S. 135)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 23. August 1985
Auslieferungstermin: 10. Dezember 1985

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

[1]) bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Gitterpunktpolygone – Flächenberechnung einmal anders

Eine merkwürdige Flächenformel

In diesem Beitrag wollen wir den Flächeninhalt von Gitterpunktpolygonen berechnen. Das sind ebene Figuren, die von einem geschlossenen Streckenzug begrenzt sind, wobei die Ecken Gitterpunkte eines vorgegebenen regelmäßigen Rasters (z. B. klein- oder langkariertes Rechenpapier) sind und die Seiten sich gegenseitig höchstens in den Eckpunkten schneiden (Bild 1). Soll der Flächeninhalt einer solchen Figur bestimmt werden, so würde wohl jeder damit beginnen, sie in Drei- und Rechtecke zu zerlegen, deren Inhalte berechnen und anschließend diese Zahlen addieren. Eine andere, verblüffende Methode ist folgende: Wir zählen die Gitterpunkte im Inneren der Figur (für Bild 1: $i = 21$) und die auf dem Rand ($r = 16$), dann bilden wir $i + \frac{1}{2}r - 1 = 28$, welches die Maßzahl des Flächeninhaltes der Figur von Bild 1 ist.

Bild 1

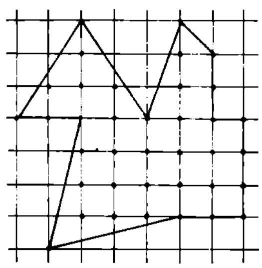
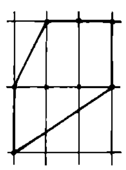


Bild 2



Die Flächeneinheit ist dabei der Inhalt eines kleinsten Gitterpunktquadrates. Die gleiche Beobachtung macht man bei der Figur aus Bild 2
$\left(i = 2, r = 6, i + \frac{1}{2}r - 1 = 4 = A\right)$,
wenn man berücksichtigt, daß die Flächeneinheit jetzt durch ein kleinstes Gitterpunktrechteck bestimmt wird. Zufall oder Gesetzmäßigkeit? Wir werden im weiteren zeigen, daß für den Flächeninhalt eines Gitterpunktpolygons stets gilt:

$$A = i + \frac{1}{2}r - 1.$$

(Dieser Zusammenhang wurde erstmals 1899 von *G. Pick* erkannt und bewiesen.)

Gitterpunktrechtecke

Zunächst untersuchen wir Vierecke, deren Eckpunkte Gitterpunkte sind und deren Seiten parallel zu den Geraden des Gitters verlaufen. Die Bezeichnung Gitterpunktrechteck für solche Figuren ist natürlich nur dann sachgemäß, wenn die nichtparallelen Gitterlinien rechtwinklig zueinander verlaufen.

Wir wollen dies vorläufig annehmen. Alle Aussagen gelten aber ebenso auch für andere Gitter (vgl. Aufgabe 1).

Hat ein Gitterpunktrechteck Seiten der Längen a und b (jeweils in Einheiten der Seitenlänge eines kleinsten Gitterpunktrechtecks), so liegen $r = 2(a + b)$ Gitterpunkte auf dem Rand und $i = (a - 1)(b - 1)$ im Innern der Figur (vgl. Bild 3.a mit $a = 6$, $b = 5$).

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} i &= ab - a - b + 1 \\ &= ab - (a + b) + 1 \\ &= ab - \frac{1}{2}r + 1 \end{aligned}$$

bzw. $ab = i + \frac{1}{2}r - 1$.

Nun ist $A = ab$ aber genau der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks, somit gilt unsere Formel $A = i + \frac{1}{2}r - 1$ also für jedes Gitterpunktrechteck.

Bild 3a

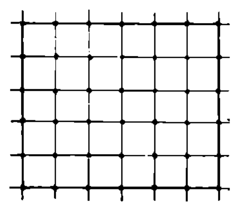
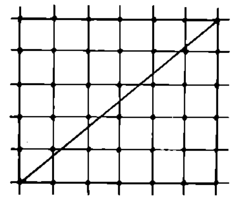


Bild 3b



Auch für Gitterpunktdreiecke mit zwei parallel zum Gitter liegenden Seiten gilt die Formel. Solche Dreiecke kann man sich entstanden denken aus der Halbierung eines Gitterpunktrechtecks entlang einer seiner Diagonalen (Bild 3.b). Besitzen die auf dem Gitter liegenden Seiten die Längen a und b, so schließen wir für das Dreieck folgendermaßen:

$$r = (a + b) + 1 + r_d.$$

Dabei ist r_d die Anzahl der auf der dritten Seite (Diagonale des zugehörigen Gitterpunktrechtecks) liegenden Gitterpunkte, die nicht Eckpunkte des Dreiecks sind. Wie das Beispiel aus Bild 3.2 zeigt, kann gelten: $r_d = 0$. Für eine weitere Aussage über r_d betrachten wir das zugeordnete Gitterpunktrechteck mit Seitenlängen a und b. Es enthält $(a - 1)(b - 1)$ Gitterpunkte im Inneren.

Zählen wir diese als Punkte der beiden Teildreiecke, die durch Halbierung entlang einer Diagonalen entstehen, so erhalten wir für diese Zahl $(2i + r_d)$. Dabei ist noch zu überlegen, daß die beiden Teildreiecke gleichviel innere Punkte enthalten; dies ist aber richtig, da sie durch Geradenspiegelungen an Gittergeraden und Verschiebungen um ganzzahlige Vielfache der Längeneinheit miteinander zur Deckung gebracht werden können.

Aus der Gleichheit der beiden Ausdrücke für die Anzahl der inneren Gitterpunkte folgt:

$$r_d = (a - 1)(b - 1) - 2i.$$

Setzen wir dies weiter oben ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} r &= a + b + 1 + ab - a - b \\ &\quad + 1 - 2i \end{aligned}$$

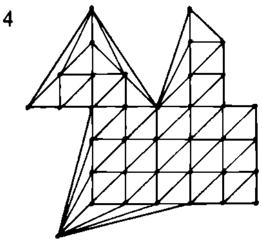
bzw. $\frac{1}{2}ab = i + \frac{1}{2}r - 1$,

was wegen $A = \frac{1}{2}ab$ die Richtigkeit der Formel auch für die betrachteten Gitterpunktdreiecke zeigt.

Zerlegung in Elementardreiecke

Um die Gültigkeit der Formel für allgemeine Gitterpunktpolygone zeigen zu können, denken wir uns eine solche Figur in eine endliche Anzahl von Teildreiecken zerlegt, die selbst wieder Gitterpunktdreiecke sind. Sollte es unter diesen Dreiecke geben, die im Inneren noch Gitterpunkte enthalten, so zerlegen wir sie weiter, bis nur noch Gitterpunktdreiecke ohne Gitterpunkte im Inneren vorliegen. Das gleiche geschieht mit Teildreiecken, die außer den drei Eckpunkten noch weitere Gitterpunkte auf ihren Seiten enthalten. Damit erhalten wir unsere Ausgangsfigur zerlegt in eine endliche Anzahl von Gitterpunktdreiecken, die nur in ihren Ecken Gitterpunkte aufweisen. Gitterpunktdreiecke mit dieser Eigenschaft nennen wir

Bild 4



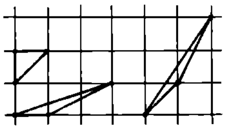
Elementardreiecke. Bild 4 zeigt eine mögliche Unterteilung des Gitterpunktpolygons aus Bild 1 in Elementardreiecke.

Wir zeigen nun, daß unsere Flächenformel für jedes Elementardreieck gilt, d. h., daß jedes solche Gitterpunktdreieck den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ hat

$\left(i = 0,\ r = 3 : i + \frac{1}{2}r - 1 = \frac{1}{2}\right)$.

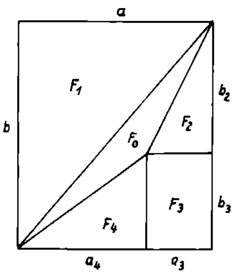
Für einige Spezialfälle kann man dies sofort nachprüfen, es können aber auch sehr allgemeine Lagen auftreten (Bild 5).

Bild 5



Die Kenntnis von der Richtigkeit der Formel für Gitterpunktrechtecke und deren Halbierungsdreiecke wird uns beim Beweis eine große Hilfe sein. Betrachten wir die längste Seite eines Elementardreiecks als Diagonale eines Gitterpunktrechteckes, so kommt das Elementardreieck ganz im Inneren dieses Gitterpunktrechtecks zu liegen. Ist etwa F_0 ein Elementardreieck (Bild 6), so erhalten wir ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b und in ihm Teilfiguren (sämtlich Gitterpunktdreiecke und -rechtecke) F_1, F_2, F_3, F_4 $(b = b_2 + b_3,$ $a = a_3 + a_4$ – Numerierung entsprechend der angrenzenden Flächen).

Bild 6



Offenbar gilt: $A_0 = A - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$, wobei für alle Flächeninhalte auf der rechten Seite der Gleichung die Flächenformel anwendbar ist. Wir zählen nun für diese Flächen die Gitterpunkte auf den Seiten bzw. im Inneren:

F_1: $r_1 = a + b + 1$, im Inneren: i_1
F_2: $r_2 = a_3 + b_2 + 1$, im Inneren: i_2
F_3: $r_3 = 2(a_3 + b_3)$, im Inneren: i_3
F_4: $r_4 = a_4 + b_3 + 1$, im Inneren: i_4
F: $r = a + b + b_2 + b_3 + a_3 + a_4$
$i = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + a_3 + b_3 - 1$

(Man beachte, daß $i_0 = 0$ ist und Punkte auf der gemeinsamen Seite von F_2 und F_3 bzw. von F_3 und F_4 zu inneren Punkten von F werden.)

Also gilt:

$$\begin{aligned}
&A_1 + A_2 + A_3 + A_4\\
&\quad = i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + \frac{1}{2}[a + b\\
&\qquad + 1 + a_3 + b_2 + 1 + 2(a_3 + b_3)\\
&\qquad + a_4 + b_3 + 1] - 4\\
&\quad = (i - a_3 - b_3 + 1) + \frac{1}{2}(r + 3)\\
&\qquad + a_3 + b_3 - 4\\
&\quad = i + \frac{1}{2}r - 3 + \frac{3}{2}\\
&\quad = i + \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

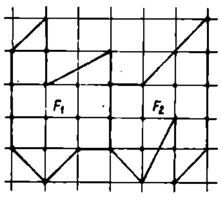
und somit:

$$\begin{aligned}
A_0 &= A - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4)\\
&= i + \frac{1}{2}r - 1 - \left(i + \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}\right)\\
&= \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Zusammenfügen aus Teilfiguren

Uns stehen nun Teilfiguren zur Verfügung, für die die Flächenformel gilt und aus denen sich jedes Gitterpunktpolygon zusammensetzen läßt. Speziell für Elementardreiecke hatten wir im vorhergehenden Abschnitt ein Verfahren angegeben, um eine entsprechende Zerlegung zu finden. Betrachten wir nun zwei Gitterpunktpolygone F_1 und F_2, für die unsere Flächenformel gilt (also am Anfang etwa Elementardreiecke) und die gemeinsame Punkte auf einer Seite haben (Bild 7). Zusammen ergeben sie dann das Gitterpunktpolygon F mit Flächeninhalt $A = A_1 + A_2$. Gilt für die Berechnung von A ebenfalls unsere Flächenformel?

Bild 7



Ja, denn es ist:

$$A_1 = i_1 + \frac{1}{2}r_1 - 1$$
$$A_2 = i_2 + \frac{1}{2}r_2 - 1$$

mit $r_k = r'_k + \bar{r} + 2$ $(k = 1; 2)$, wobei r'_k die Anzahl der Gitterpunkte auf den Seiten von F_k ist, die nicht gleichzeitig zur zweiten Teilfläche gehören. $(\bar{r} + 2)$ Gitterpunkte gehören gleichzeitig zu F_1 und F_2, davon werden $\bar{r}$ beim Zusammenlegen zu inneren Punkten von F.

Es gilt also weiter:

$r = r'_1 + r'_2 + 2$, $i = i_1 + i_2 + \bar{r}$.

Somit ist:

$$\begin{aligned}
i &= i_1 + i_2 + \frac{1}{2}[(r_1 - r'_1 - 2)\\
&\quad + (r_2 - r'_2 - 2)]\\
&= i_1 + i_2 + \frac{1}{2}(r_1 + r_2) - 2\\
&\quad - \frac{1}{2}r + 1,
\end{aligned}$$

$$i + \frac{1}{2}r - 1 = \left(i_1 + \frac{1}{2}r_1 - 1\right) + \left(i_2 + \frac{1}{2}r_2 - 1\right),$$

also:

$$A = A_1 + A_2 = \left(i_1 + \frac{1}{2}r_1 - 1\right) + \left(i_2 + \frac{1}{2}r_2 - 1\right) = i + \frac{1}{2}r - 1.$$

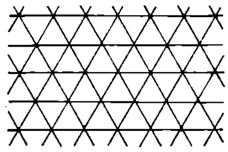
Da wir nun jedes Gitterpunktpolygon schrittweise aus Teilfiguren zusammensetzen können, für die jeweils die Flächenformel gilt, zeigt uns dieser Schluß, daß die Flächenformel auch für die Gesamtfläche gültig ist.

Andere regelmäßige Gitter

In einem Beitrag von *R. Klette* im Heft 6/1983 der *alpha* ist gezeigt worden, daß neben einem Gitter, das aus Quadraten aufgebaut ist (orthogonales Gitter), nur noch zwei weitere regelmäßige Gitter existieren: das trigonale und das hexagonale (aus regelmäßigen Drei- bzw. Sechsecken). Wie sieht die Flächenformel für Gitterpunktpolygone auf diesen Gittern aus?

In einem trigonalen Gitter können wir ohne Mühe je zwei kleinste Teildreiecke so zusammenfassen, daß ein Gitter entsteht, dessen kleinste Teilfiguren Rhomben sind (Bild 8). Für dieses Gitter gilt die schon bewiesene Flächenformel (vgl. Aufgabe 1). Da ein kleinster Teilrhombus den doppelten Flächeninhalt eines Ausgangsteildreiecks besitzt, folgt also für das trigonale Gitter: $A = 2\left(i + \frac{1}{2}r - 1\right)$.

Bild 8



Für Gitterpunktpolygone auf dem hexagonalen Gitter kann es keine Flächenformel geben, die nur mit inneren und Randpunkten dieses Gitters arbeitet. Dazu betrachten wir ein kleinstes Teilsechseck in diesem Gitter und die Gitterpunktdreiecke ABC und ABC' (Bild 9a, b). Beide besitzen die gleiche Anzahl von inneren und Randpunkten, der Flächeninhalt von ABC' ist jedoch doppelt so groß wie der von ABC. Gibt es einen Ausweg?

Bild 9a

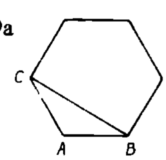


Bild 9b

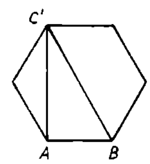
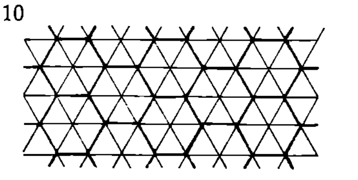


Bild 10



Naheliegend ist die Zerlegung jedes Teilsechsecks des Gitters in Dreiecke (Bild 10). Dabei entsteht ein trigonales Gitter, in dem wir die eben gezeigte Flächenformel verwenden können. Jeder Gitterpunkt des hexagonalen Gitters ist auch Gitterpunkt im trigonalen Gitter – aber es entstehen noch weitere Gitterpunkte im Symmetriezentrum der Sechsecke, die wir berücksichtigen müssen! Seien für ein Gitterpunktpolygon i_0 und r_0 die Anzahl dieser zusätzlichen Punkte im Inneren bzw. auf dem

Rand der Figur, so erhalten wir, da ein kleinstes Teilsechseck aus sechs Teildreiecken aufgebaut ist:

$$A = \frac{1}{6}\left[2\left((i+i_0) + \frac{1}{2}(r+r_0) - 1\right)\right]$$
$$= \frac{1}{3}(i+i_0) + \frac{1}{6}(r+r_0) - \frac{1}{3}.$$

Für die Gitterpunktdreiecke aus Bild 9 folgen hieraus mit $i = i_0 = 0$, $r = 3$ und $r_0 = 0$ (in *a*) bzw. $r_0 = 1$ (in *b*) die richtigen Ergebnisse: $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{3}$.

Aufgaben

▲1▲ Man überlege sich, warum die Formel für orthogonale Gitter auch für Gitterpunktpolygone auf einem Gitter, deren kleinste Teilfigur ein Rhombus ist, gilt. Als Flächeneinheit verwendet man dann die Fläche eines solchen Teilrhombus.

▲2▲ Zeige für orthogonale Gitter: Für ein Gitterpunktpolygon F_1, welches ein „Loch" F_2 von der Gestalt eines weiteren Gitterpunktpolygons enthält, berechnet sich der Flächeninhalt A_1 nach:

$$A_1 = i_1 + \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$$

(i_1 – Anzahl der inneren Punkte von F_1; r_1, r_2 – Anzahl der Punkte auf dem äußeren bzw. inneren Rand von F_1, $r_2 \geqq 3$.)

▲3▲ Die Betrachtung über die Flächenberechnung auf orthogonalen Gittern lassen sich nicht analog auf die Volumenberechnung von dreidimensionalen Gitterpunktpolyedern übertragen. Man verdeutliche sich dies mit Hilfe einer Pyramide mit Ecken in $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und Spitze in $(1,1,1)$ bzw. $(1,1,k)$ mit $k > 1$, $k \in N$.

R. Werner

Buchtip
für unsere jüngsten Leser

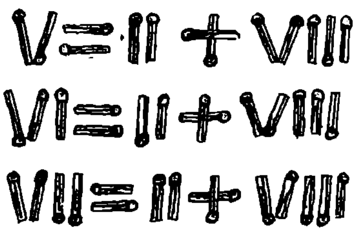
Lehmann, Johannes
3 plus 8 und mitgemacht
Berlin: Volk und Wissen 1985. 80 S., etwa 120 Abb., 2,60 M
(Mathematische Schülerbücherei Nr. 121)
Bestell-Nr. 707 857 7

Dieser Band ist eine Fortsetzung des erfolgreichen Titels *2 mal 2 plus Spaß dabei*. Er enthält viele interessante Aufgaben, Rechenspiele und Knobeleien, die geeignet sind, Schüler der Unterstufenklassen zur Beschäftigung mit der Mathematik in der Freizeit anzuregen. Dabei gibt es auch viele Aufgaben, die der Festigung des im obligatorischen Unterricht erworbenen Wissens dienen. Die kapitelweise zusammengestellten Lösungen aller Aufgaben ermöglichen eine schnelle Kontrolle. Durch den ständigen Wechsel von Aufgaben und lustig gestalteten mehrfarbigen Bildern werden Kinder der genannten Altersstufen besonders angesprochen.

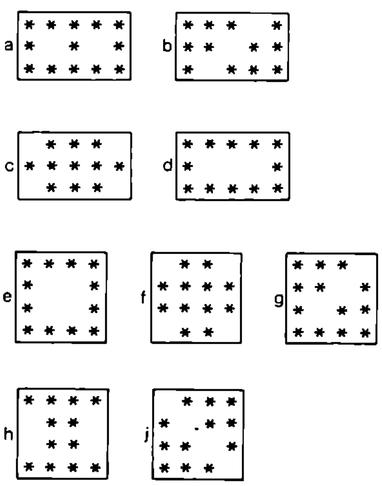
aus: Mathe i. d. Schule, Berlin

▲1▲ Какое число нужно поставить вместо знака „?" в последовательности: 7, 17, 37, 77, ?, 317, …?

▲2▲ Переставьте в каждом ряду по одной спичке так (см. рисунок), чтобы везде оказалось верное равенство.



▲3▲ Symmetrical Patterns:
What numbers are represented by these symmetrical patterns?



How many lines of symmetry (if any) has each pattern? Which patterns have rotational symmetry?

▲4▲ Un journal comporte 36 pages et tire à 600 000 exemplaires par jour. Chaque page est un rectangle dont les dimensions sont 50 cm et 33 cm. Autour de chaque page existe une marge non imprimée de largeur égale à 2 cm.

a) Quelle est l'aire de la surface imprimée?
b) Quelle est l'aire du papier nécessaire au tirage quotidien du journal?

Mit dem Taschenrechner

Aus Zahlen werden Worte

Wenn man die Ziffernanzeige eines elektronischen Taschenrechners auf den Kopf stellt, können fast alle Ziffern als Buchstaben gelesen werden. Es entspricht:

1 = I	2 = Z	3 = E
4 = h	5 = S	7 = L
8 = B	9 = G	0 = O

Man kann nun Aufgaben formulieren, bei denen als Ergebnis eine Zahl erscheint, die, auf den Kopf gestellt, ein sinnvolles Wort ergibt, zum Beispiel
9283 · 4 = 37 132 = ZEILE. Aus diesen Möglichkeiten lassen sich Spiele mit dem Rechner ableiten.
Für ein Spiel, an dem ein Spielleiter und zwei Mitspieler beteiligt sind, können folgende Regeln aufgestellt werden:
Der Spielleiter gibt eine Aufgabe vor.

000000 : 53 = BEIL

Welche sechsstellige Ausgangszahl muß durch 53 dividiert werden, damit als Ergebnis das Wort BEIL abzulesen ist? Beide Mitspieler suchen mit Hilfe eines Rechners die geforderte Zahl. Wer als erster fertig ist, ruft: *Stopp*. Es wird geprüft, ob der Spieler die Ausgangszahl ermittelt hat.
Bei einem richtigen Ergebnis erhält er einen Punkt gutgeschrieben. Hat er falsch gerechnet, erhält sein Gegenspieler den Punkt. (Im Beispiel ist 378 314 die richtige Lösung.) Die Art der Bewertung veranlaßt die Mitspieler einerseits zu zügiger Berechnung, hindert aber auch vor zu schneller und oberflächlicher Arbeitsweise, da bei Flüchtigkeitsfehlern der Punkt an den Gegner verlorengeht, auch wenn der noch kein Ergebnis oder ein falsches Ergebnis hatte. Gespielt wird eine vorher vereinbarte Anzahl von Aufgaben; gewonnen hat der Spieler mit den meisten Punkten. Hier noch einige Vorschläge für Aufgaben:

100 000 – 00000 = ZIEGE
(Lösung: 60 688)

$(00)^2$ + 113 = EILE
(Lösung: 60)

0000 · 45 = SEGEL
(Lösung: 1643)

Dr. H. aus ND v. 30./31. 3. 85

Zum Verhältnis von Kunst und Wissenschaft am Beispiel der Ornamente und der Mathematik

Teil 2

Wie unterscheidet der Mathematiker Symmetrien an ebenen Figuren?

Symmetriebildungen

Es ist klar, daß für die individuelle konkrete künstlerische Gestaltung von ebenen symmetrischen Gebilden eine unerschöpfliche Skala von Möglichkeiten bereitsteht. Unterschiedliche Einzeldarstellungen können aber dennoch die gleiche Symmetriestruktur aufweisen. So haben beispielsweise alle in Bild 11 angegebenen Zirkelornamente für Folkloremotive die gleichen Symmetrien wie ein regelmäßiges Sechseck.

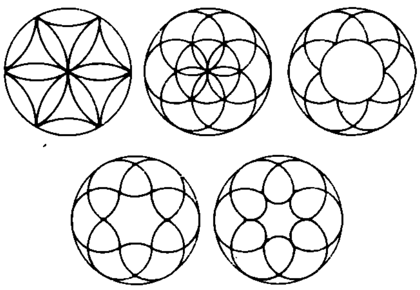


Bild 11
Zirkelsterne und Zirkelrosetten mit Sechseck-Symmetrie

Für beschränkte ebene Figuren erkennt man zwei unterschiedliche Grundtypen von Symmetrie:

1. Die Figur weist nur Drehsymmetrie auf.
2. Die Figur weist neben Drehsymmetrien auch Spiegelsymmetrien auf.

Musterbeispiele für rein drehsymmetrische Figuren gibt das *Wirbelrad* her. Die *Blattrosette* ist darüber hinaus noch spiegelsymmetrisch.

Für jeden dieser beiden Grundtypen kann man durch Auswahl der Anzahl der regelmäßig angeordneten Speichen beim Wirbelrad bzw. der Lanzett-Blätter bei der Blattrosette noch die Symmetriefülle beeinflussen.

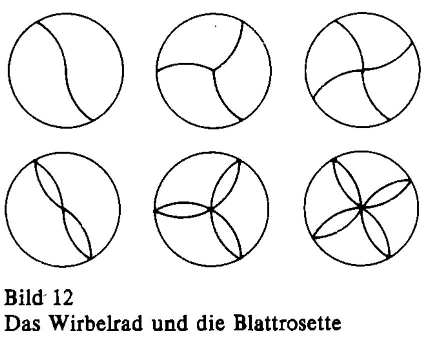


Bild 12
Das Wirbelrad und die Blattrosette

Wieviel Drehsymmetrien bzw. Spiegelsymmetrien sind für jedes dieser Beispiele möglich? Die Drehungen müssen sicherlich um den Kreismittelpunkt erfolgen, die Spiegelungen an Geraden durch den Kreismittelpunkt. (Die Geraden, an denen gespiegelt wird, heißen die Spiegelachsen.) Die Anzahl der Spiegelsymmetrien ist eindeutig bestimmt. Bei den Wirbelrädern ist sie 0, bei den Blattrosetten 2, 3 und 4. Hingegen ist die Anzahl der Drehungen erst eindeutig bestimmt, wenn man sich auf Drehwinkel beschränkt, die zwischen 0° und 360° liegen und man die Drehrichtung vorschreibt. Üblicherweise versteht man unter der mathematisch positiven Drehrichtung die Drehrichtung im Gegensinn zur Uhrzeigerdrehrichtung. (Diese Auswahl hängt mit den Koordinatensystemen zusammen.) Weil bei der Volldrehung die ursprüngliche Lage wieder hergestellt ist, sieht man die Nulldrehung und die Volldrehung als gleich an. Durch beide wird ja jeder Punkt der Ebene in sich übergeführt. Beide bestimmen also dieselbe Abbildung – die sogenannte *identische Abbildung* der Ebene. Abbildungsmäßig sind sie gleich und ihr Unterschied hinsichtlich der auszuführenden Handlungen spielt für die Symmetriebetrachtungen keine Rolle. Mit dieser Zählung haben dann die Wirbelräder und die Blattrosetten 2, 3 und 4 Drehungen. Der magerste Symmetriefall wird in Bild 13 gezeigt.

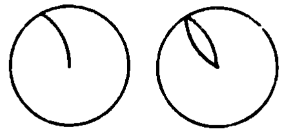


Bild 13
Figuren mit nur einer Drehung:
Das rechte Exemplar weist außerdem noch eine Spiegelung auf

Außer durch Drehungen oder Spiegelungen könnte eine ebene Figur noch durch Verschiebungen (= Translationen) mit sich zur Deckung gebracht werden. Translationssymmetrien kommen beispielsweise bei den beiderseitig ins Unendliche fortgesetzten Wandfriesen von Bild 10 vor. An dem unteren Wandfries erkennt man noch gut eine weitere Art von Symmetrieabbildung. Das ist eine sogenannte *Gleit- oder Schubspiegelung*. Das ist eine Zusammensetzung von einer Translation (Verschiebung) mit einer Spiegelung an einer Achse in Verschiebungsrichtung. Diese Achse heißt die Gleitspiegelachse. Eine Gleitspiegelung ist völlig bestimmt durch ihre Gleitspiegelachse und den Translationsanteil, der wiederum durch den Richtungssinn und die Länge festgelegt ist.

Gibt es noch weitere Arten von ebenen Symmetrieabbildungen? Im Lehrbuch der 6. Klasse sind die Bewegungen der Ebene (= Kongruenzabbildungen der Ebene) behandelt. Wir haben den dortigen drei Arten noch eine hinzugefügt – die *Gleitspiegelung*. Nun kann man beweisen, daß es mehr nicht gibt.

In der Ebene gibt es nur die folgenden Arten von verschiedenen Bewegungen (= Kongruenzabbildungen = Symmetrieabbildungen).

1. Verschiebungen; 2. Drehungen;
3. Spiegelungen; 4. Gleitspiegelungen.

Zu jeder dieser Art gehören zur konkreten Festlegung gewisse Bestimmungsstücke. So sind dies bei den Verschiebungen die Verschiebungsrichtung, der Richtungssinn und der Verschiebungsbetrag. Bei den Drehungen sind es der Drehpunkt, der Drehsinn und der Drehwinkel. Die Spiegelungen haben die einfachste Bestimmung – nämlich durch ihre Spiegelachse.

Symmetriegruppen Ornamentegruppen

Aus zwei Symmetrieabbildungen einer gegebenen ebenen Figur F kann durch Zusammensetzung der Abbildungen, indem man sie also hintereinander ausführt, eine neue Symmetrieabbildung von F gewonnen werden. Der einfachste Typ der möglichen Symmetrieabbildungen war, was deren Bestimmungsstücke angeht, die Spiegelung. Wieweit kommt man mit den Zusammensetzungen von Spiegelungen? Aus zwei Spiegelungen an den verschiedenen Geraden g und h entsteht durch deren Zusammensetzung – oder deren *Produkt*, wie man auch sagt – entweder eine Verschiebung oder aber eine Drehung. Die Verschiebung ergibt sich genau in dem Falle, wenn die Spiegelachsen parallel sind.

Eine Drehung entsteht genau dann, wenn sich die beiden Spiegelachsen schneiden. Der Schnittpunkt der Achsen ist zugleich der Drehpunkt. Man sieht hierbei noch, daß im Unterschied zum Produkt von Zahlen, wo die Reihenfolge der Faktoren keinen Einfluß auf das Ergebnis hat, beim Produkt von Symmetrieabbildungen die Reihenfolge sehr wohl ausschlaggebend sein kann für das Resultat.

Eine Gleitspiegelung kann immer als Produkt von drei Spiegelungen dargestellt werden. Eine Spiegelung erfolgt dabei an der Gleitspiegelachse, die beiden anderen an zwei Geraden, die zur Gleitspiegelachse senkrecht stehen. Vom mathematischen Standpunkt ist die Symmetrie einer ebenen Figur erfaßt durch die Gesamtheit der Symmetrieabbildungen dieser Figur. Mit den der Figur F zugehörigen Symmetrieabbildungen kann man rechnen – Produkte bilden. Dieses Rechensystem der Symmetrieabbildungen einer Figur F nennt der Mathematiker die *Symmetriegruppe* der Figur F.

Wir betrachten beispielsweise ein Rechteck F, das kein Quadrat ist. Die Symmetriegruppe von F besteht aus vier Elementen:

1. *Drehungen:* Drehung D um Rechteckmittelpunkt mit Drehwinkel 180° und Nulldrehung – die identische Abbildung – 1.
2. *Spiegelungen:* S_1 Spiegelung – an einer Mittellinie, Spiegelung S_2 an der dazu senkrechten Mittellinie.

Die Produkttafel für die Gruppe sieht wie folgt aus:

	1	D	S_1	S_2
1	1 1	1 D	1 S_1	1 S_2
D	D 1	$D\,D$	$D\,S_1$	$D\,S_2$
S_1	S_1 1	$S_1\,D$	S_1S_1	S_1S_2
S_2	S_2 1	S_2D	S_2S_1	S_2S_2

was schließlich folgendes ergibt

	1	D	S_1	S_2
1	1	D	S_1	S_2
D	D	1	S_2	S_1
S_1	S_1	S_2	1	D
S_2	S_2	S_1	D	1

Zur Symmetriegruppe einer beliebigen Figur gehört stets die Identität 1. Sie hat bezüglich der Produktbildung die gleiche Eigenschaft wie die Zahl 1 bei der Produktbildung von Zahlen; das Produkt aus einer Symmetrieabbildung A der Figur mit 1 ist A, d. h. $1A = A1 = A$. Aus diesem Grund wurde auch die Bezeichnung 1 gewählt. Dieses Gruppenelement heißt auch das *Einselement* der Gruppe.

Zu jedem Element A der Gruppe gibt es außerdem ein sogenanntes *inverses Element* $\hat{A}$ von A. Es ist dadurch gekennzeichnet, daß es die entgegengesetzte Wirkung auf die Figur F ausübt wie A, daß es A in der Bewegungswirkung aufhebt,
d. h. es gilt $A\hat{A} = \hat{A}A = 1$.

Eine jede Spiegelung S an einer Geraden ist zu sich selbst invers. Ebenso ist eine 180°-Drehung zu sich selbst invers. Keine Drehung mit einem Drehwinkel φ, $0 < \varphi < 360°$ und $\varphi \neq 180°$, ist zu sich selbst invers. Das inverse Element zu einer Drehung ist die Drehung mit dem gleichen Drehpunkt und dem Drehwinkel $360° - \varphi$.

Das mathematische Problem im Zusammenhang mit den Ornamenten (ornamentum, lat. = Schmuck, Verzierung) besteht nun in der Auffindung der möglichen Symmetriegruppen in der Ebene. Der einfachste Typ sind die endlichen Symmetriegruppen. Diese heißen *Rosettengruppen*, weil zu jeder ebenen Figur mit endlicher Symmetriegruppe eine Rosette mit der gleichen Gruppe gefunden werden kann. Zur Kennzeichnung dieser Gruppen wollen wir folgende Piktogramme benutzen.

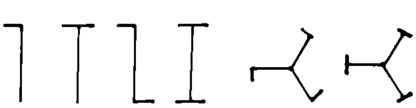


Bild 14
Piktogramme für die ersten endlichen Drehgruppen und die ersten endlichen gemischten Symmetriegruppen

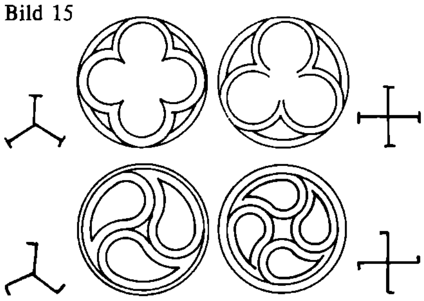
Aufgabe 4

Welche Symmetrieabbildungen besitzt ein Quadrat? Gebt die Produkttafel für die Symmetriegruppe an! Durch welches Piktogramm wird diese Gruppe beschrieben?

Aufgabe 5

In *alpha* 5/82 sind auf der Rückseite Rosetten abgebildet. Davon geben wir hier die ersten beiden jeden Typs und ihre Piktogramme in Bild 15 an.

Bild 15



Bestimmt die Rosettengruppen!

Jetzt wollen wir uns den unendlichen Symmetriegruppen in der Ebene zuwenden. Ein *Friesornament* (= *Streifenornament*) entsteht durch eine Wiederholung einer beschränkten ebenen Figur längs einer ausgewählten Richtung (gegeben durch eine Gerade). Die Symmetriegruppe enthält dann also gewisse Translationen nach rechts und links längs dieser Geraden. Es gibt eine Minimaltranslation. Diese wird in ihrem Verschiebungsbetrag ($\neq 0$) in der Gruppe durch keine eigentliche Verschiebung unterschritten. Alle Verschiebungen sind ganze Vielfache dieser minimalen Translation der Symmetriegruppe.

Die zu Friesornamenten gehörigen Symmetriegruppen heißen *Friesgruppen*. Das mathematische Hauptresultat über die Friesgruppen besagt, daß es gerade genau sieben verschiedene Typen gibt.

In Bild 16 haben wir Buchstabenfriese zu diesen sieben Typen angegeben. Der Typ 1 ist der einfachste. Eine unsymmetrische Figur (ein Buchstabe P) – oder anders gesagt: eine beschränkte Figur mit der denkbar kleinsten Symmetriegruppe (die also nur aus einem Element besteht) – wurde nach links und rechts ins Unendliche durch wiederholte Anreihung fortgesetzt. Die Friesgruppe besteht nur aus den ganzen Vielfachen einer Minimaltranslation, die etwa die Buchstaben in einem Schritt nach rechts verschiebt. Der Typ 2 enthält außer den ganzen Vielfachen der Minimaltranslation noch eine Spiegelung an der Längsachse und die Zusammensetzungen dieser Spiegelung mit den Translationen, das sind also Gleitspiegelungen. So kann man auch die anderen Typen aufschlüsseln.

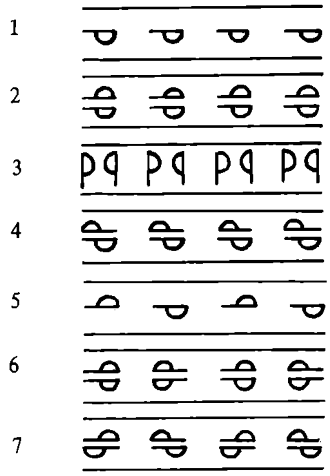


Bild 16

Ein *Wandmusterornament* entsteht, wenn man mit einer ebenen beschränkten Figur durch wiederholte Anreihung die ganze Ebene ausfüllt. Die zugehörigen Symmetriegruppen heißen *Wandmustergruppen*. Das mathematische Hauptresultat lautet hier, daß es gerade genau 17 verschiedene Gruppentypen gibt.

Wir haben in den Bildern 17, 18 und 19 drei flächendeckende Wandmuster nach dem holländischen Maler und Grafiker *M. C. Escher* angegeben. Das Muster in Bild 17 hat nur Translationen. Diese kann man aus zwei minimalen Translationen geeigneter Richtungen durch ganzzahlige Vielfache zusammensetzen. Zur vollständigen Beschreibung aller Translationen der Wandmuster bedient man sich zweckmä-

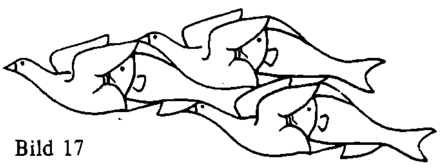


Bild 17

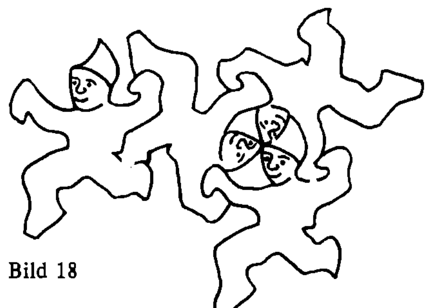


Bild 18

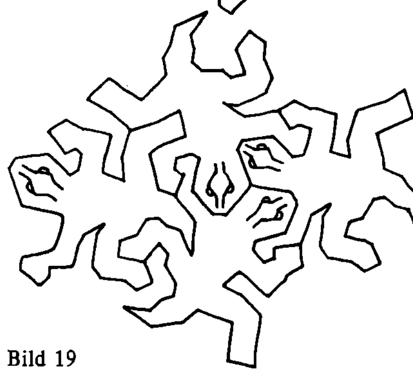


Bild 19

ßig eines zugehörigen Translationsgitters. Das ist ein Parallelogrammgitter, welches als die beiden bestimmenden Parallelogrammseiten minimale Translationen hat, die alle anderen Translationen aufspannen.

Aufgabe 6

Bestimmt alle möglichen Symmetrien dieser Beispiele! Es sind also Translationsgitter, die Drehpunkte und die Ordnungen der zugehörigen Drehungen, die Spiegelachsen, die Gleitspiegelachsen und die minimalen Gleitbeträge anzugeben.

Trotz der seinerzeit hochstehenden griechischen Mathematik war damals die Aussage über die Anzahl der Friesgruppen und Wandmustergruppen nicht bekannt. Jedoch weisen die griechischen Bandornamente an Bauten und besonders die Vasenornamente künstlerische Belege für alle sieben mathematisch unterschiedlichen Typen auf. Nach *W. Lietzmann* findet man sogar schon in der europäischen Steinzeit Beispiele für alle sieben Friessymmetrietypen auf Urnen, Schilden, Spangen usw. Das schwierige Problem der Ermittlung aller möglichen Symmetrietypen von Wandmustern ist im Altertum von den Künstlern nicht bewältigt worden und von Mathematikern überhaupt nicht angegriffen worden. Dekorationsbeispiele für alle 17 Wandmustersymmetrietypen finden sich wie schon erwähnt bei den Mauren. Es verbleibt hier noch eine reizvolle mathematisch-historische Fragestellung, welche der 17 Wandmustertypen bei den alten Ägyptern und Chinesen nicht entdeckt wurden. Können für das Fehlen gewisser Typen dafür Kompliziertheitsgründe geltend gemacht werden? Der bekannte Schweizer Gruppentheoretiker *Andreas Speiser* schreibt in einem seiner Bücher: „Leider sind die ägyptischen und arabischen Ornamente bisher nie nach ihrem geometrischen Gehalt untersucht worden, und so bleibt eines der schönsten Kapitel der Geschichte der Mathematik noch zu schreiben."

Die Autoren dieses Artikels arbeiten an einem Buch

Mathematik und ornamentale Kunstformen,

welches für die Mathematische Schülerbücherei (MSB) vorgesehen ist. Darin werden ausführlich diese und noch weitere Fragen erwogen. Für uns wäre eine Äußerung der Leser dieses Artikels, insbesondere eine Behandlung der Aufgaben, sehr hilfreich. Wir könnten dann sicher besser auf die Schwierigkeiten der Leser eingehen. Vielleicht werden wir sogar auf Ornamentbeispiele aufmerksam, die unsere Sammlung wirkungsvoll bereichern. Für die Mitarbeit setzen wir einige Preise in Form von Büchern bzw. Kunstdruckkarten aus.

Aufgabe 7

Sucht in eurer Umgebung nach vorhandenen Rosettenornamenten, Streifenornamenten und Wandornamenten.

Zeichnet diese nach Möglichkeit. Versucht eine Auflistung ihrer Symmetrien!

U. Feiste/J. Flachsmeyer

Schriftliche Abschlußprüfung Fach Mathematik

Klassenstufe 10 – Schuljahr 1984/85

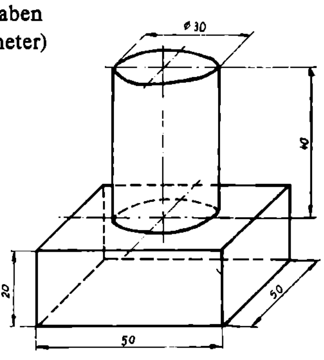
Pflichtaufgaben

1. Im Jahre 1975 wurden aus dem Staatshaushalt der DDR für das Bildungswesen (einschließlich Hoch- und Fachschulen) 8,3 Mrd. Mark ausgegeben.
a) 1980 waren die Ausgaben um 18 % höher als 1975.
Berechnen Sie die Ausgaben für 1980!
b) 1983 betrugen die Ausgaben 11,1 Mrd. Mark. Auf Wieviel Prozent stiegen sie gegenüber 1975?
c) Stellen Sie die Ausgaben für 1975, 1980 und 1983 in einem Diagramm dar! (Beschriftung!)

2. Gegeben ist das Gleichungssystem
(I) $y = -2x + 7$
(II) $3y - 6 = 9x$ $\quad (x, y \in P)$.
a) Lösen Sie dieses Gleichungssystem rechnerisch!
b) Betrachten Sie jede Gleichung des Systems als Gleichung einer linearen Funktion!
– Stellen Sie die beiden Funktionen in ein und demselben Koordinatensystem dar!
– Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Graphen an!

3. Von einem Dreieck ABC sind gegeben:
$\overline{AB} = c = 8{,}9$ cm.
$\overline{AC} = b = 6{,}7$ cm.
$\overline{BC} = c = 9{,}7$ cm.
a) Konstruieren Sie dieses Dreieck!
Messen Sie die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC = \alpha$, und geben Sie diesen Meßwert an!
b) Berechnen Sie die Größe des Winkels α!

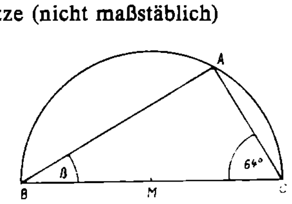
4. Die Skizze zeigt ein Werkstück aus Stahl $\left(\varrho = 7{,}8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$, das aus einem quaderförmigen und einem zylinderförmigen Teil besteht.
Skizze (nicht maßstäblich)
(Maßangaben in Millimeter)



a) Berechnen Sie die Masse des Werkstücks!
b) Stellen Sie das Werkstück in senkrechter Zweitafelprojektion im Maßstab 1:1 dar!
(Benennung der Eckpunkte ist nicht erforderlich.)

5. a) Geben Sie unter Verwendung der Variablen n ($n \in N$) drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen an, deren kleinste ungerade ist!
b) Beweisen Sie, daß folgende Aussage wahr ist:
„Wenn die kleinste von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ungerade ist, so ist deren Summe durch 6 teilbar."
c) Zeigen Sie, daß die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen nicht immer durch 6 teilbar ist!

6. a) Berechnen Sie:
$42a^2b : (-7a) \quad (a \neq 0)$!
b) Stellen Sie die Formel $A_0 = 4\pi r^2$ nach r um ($r > 0$)!
c) Ermitteln Sie x in der Gleichung $3^x = 81$!
d) Lösen Sie die Ungleichung
$5x - 3 < 6 \quad (x \in p)$!
(Probe wird nicht verlangt.)
Geben Sie alle natürlichen Zahlen an, die diese Ungleichung erfüllen!
e) Ein Dreieck ABC ist einem Halbkreis einbeschrieben (siehe Skizze!). Geben Sie die Größe des Winkels β an!
Skizze (nicht maßstäblich)

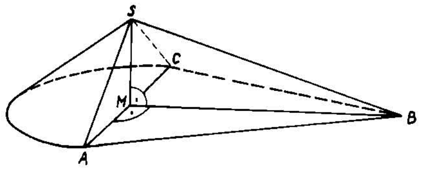


Wahlaufgaben

Von den folgenden Aufgaben 7.1., 7.2. und 7.3. brauchen Sie nur eine zu lösen!

7.1. Die Abraumhalde der Schachtanlage *Bernhard Koenen* im Mansfelder Bergbaurevier hat angenähert die Form eines Körpers, der aus einem halben geraden Kreiskegel und einer Pyramide zusammengesetzt ist (siehe Skizze!).
Bekannt sind:
$\overline{AC} = d = 310$ m,
$\overline{MS} = h = 115$ m,
$\overline{BS} = l = 380$ m.

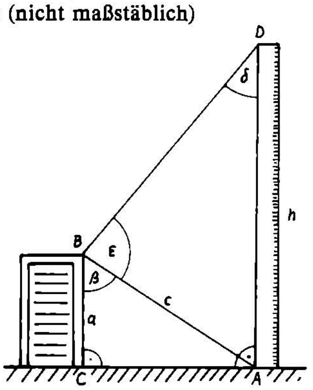
Skizze (nicht maßstäblich)



a) Berechnen Sie das Volumen des halben Kreiskegels!
b) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{BM}$!
c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide!
d) In wieviel Jahren ist diese Halde entstanden, wenn auf ihr jährlich etwa 300 000 m^3 Abraum abgelagert wurden?

7.2. Beim Bau eines Schornsteins wird zur Ermittlung der jeweils erreichten Höhe von B aus der Winkel $\sphericalangle ABD = \varepsilon$ gemessen (siehe Skizze!).

Skizze (nicht maßstäblich)



Bekannt sind ferner:

$\overline{BC} = \alpha = 78{,}2$ m,

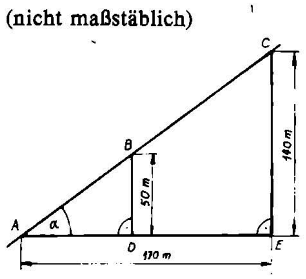
$\sphericalangle CBA = \beta = 57{,}6°$.

a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AB} = c$!
b) An einem bestimmten Tag mißt man $\varepsilon = 84{,}3°$.

Berechnen Sie die zu diesem Zeitpunkt erreichte Schornsteinhöhe $\overline{AD} = h$!

7.3. Ein Hubschrauber fliegt mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geradlinigen Bahn von A nach C (siehe Skizze!).

Skizze (nicht maßstäblich)



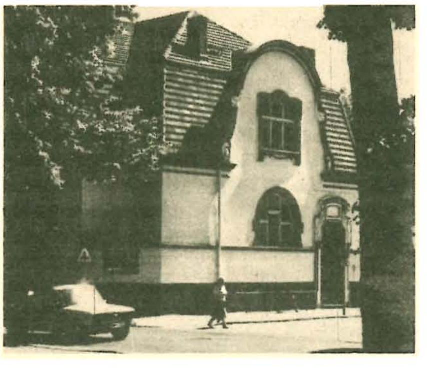
a) Berechnen Sie den Anstiegswinkel α dieser Flugbahn!
b) Von A nach B benötigt der Hubschrauber 7,5 s.

Wie lange braucht er von A nach C?
c) Berechnen Sie die Fluggeschwindigkeit des Hubschraubers auf der Strecke $\overline{AC}$!

Geben Sie diese Geschwindigkeit in Kilometer je Stunde $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ an!

Station trägt den Namen alpha

Im April 1985 erhielt die Station Junger Techniker und Naturforscher Fürstenwalde/Spree den Namen *alpha* – im Rahmen von zwei Festtagen, die anläßlich der Tage der Stationen Junger Techniker und des Jahrestages des ersten bemannten Weltraumfluges mit J. A. Gagarin (1961) veranstaltet wurden. Die Ehrenurkunde wurde in einer Feierstunde vom Chefredakteur der *alpha* überreicht.



Diese Station kann auf eine 33jährige erfolgreiche Arbeit mit der Jugend für die Jugend zurückblicken. Zur Zeit arbeiten in ihr vier Pädagogen mit Hochschulabschluß und drei technische Kräfte gemeinsam mit 20 Arbeitsgemeinschaftsleitern aus dem gesellschaftlichen Umfeld, aus Betrieben, Schulen, der NVA und anderen Institutionen. Sie führen insgesamt 31 Arbeitsgemeinschaften, Kreisklubs und Interessengruppen, darunter die neu gebildeten Arbeitsgemeinschaften Mikroelektronik und Computertechnik, aber auch Flug- und Eisenbahnmodellbau, Militärtechnik, Bautechnik, Drechseln, Botanik, Aquaristik und die besonders für das Finden und Fördern von technisch begabten Kindern in der Unterstufe gebildeten Arbeitsgemeinschaften: Technische Knobeleien, Basteleien-Konstruieren. Dazu kommen neun Kreisklub-AG's Mathematik, in denen die besten *Jungen Mathematiker* des Kreises wetteifern. Eine neue Qualität bei der Förderung von interessierten und talentierten Pionieren und FDJ-Mitgliedern ab Klasse 7 konnte in der Arbeit der drei Arbeitsgemeinschaften Mikroelektronik und in den vier Arbeitsgemeinschaften Computertechnik erreicht werden.

Red. alpha

Buchtips

Roland Fiedler

Streifzüge durch die Mathematik

224 Seiten, zahlreiche Abb., Pappband
Bestell-Nr.: 631 726 5 Preis: 6,80 M
(Für Leser von 11 Jahren an)
Der Kinderbuchverlag Berlin

Wer Spaß am Knobeln und Denken hat, dem bietet dieses Buch ein reiches Betätigungsfeld. Mathematikaufgaben, von jahrtausendealten bis zu gegenwärtigen harren ihrer Lösung. Sie ergeben sich bei Streifzügen durch die Mathematikgeschichte. Der Leser erfährt dabei von historischen Problemen der Mathematik, und er kann Lösungswege verfolgen, die berühmte Mathematiker beschritten haben.

Friedrich Kaden

Kleine Geschichte der Mathematik

144 Seiten, zahlr. Abb.,
Pappband mit Folie
Bestell-Nr.: 631 854 0 Preis: etwa 12,00 M
(Für Leser von 11 Jahren an)
Der Kinderbuchverlag Berlin

Das Buch erzählt Geschichten aus der Geschichte der Mathematik. Es gibt so einen Überblick über die Entwicklung dieser Wissenschaft, die vor vielen Jahrtausenden mit den Bedürfnissen der Menschen entstand. Heute gibt es kaum noch einen Bereich des Lebens, den sie nicht erobert hat.

A. G. Konforowitsch

Guten Tag, Herr Archimedes

Etwa 168 Seiten mit 94 Abb., Broschur
Bestell-Nr.: 547 006 5 Preis: etwa 12,00 M
VEB Fachbuchverlag Leipzig

In dieser Broschüre sind bemerkenswerte und unterhaltsame mathematische Aufgaben zusammengefaßt. Beginnend mit der Mathematik Ägyptens und Babylons über das klassische Griechenland, Indien, China, den islamischen Raum, das mittelalterliche Europa, die Renaissance, das 17., 18. und 19. Jahrhundert bis zur Gegenwart erstreckt sich die Auswahl der Aufgaben. Jedem Zeitabschnitt ist eine historische Einführung vorangestellt. Den einzelnen Aufgaben sind zumeist historische Persönlichkeiten zuzuordnen.

W. Krysicki

Keine Angst vor *x* und *y* Quadratische Gleichungen und Gleichungssysteme

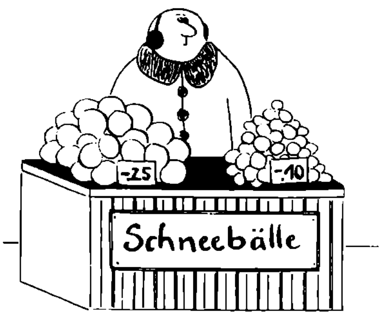
120 Seiten mit 19 Abb. MSB Nr. 119
Bestell-Nr.: 666 186 7 Preis: 6,50 M
BSB B. G. Teubner, Leipzig

B. Klotzek u. a.

kombinieren · parkettieren · färben

192 Seiten mit 200 Abb. MSB Nr. 122
Bestell-Nr.: 571 353 0 Preis: 13,00 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Der nächste Winter kommt bestimmt.
Aus: DLZ, Egon Neumann

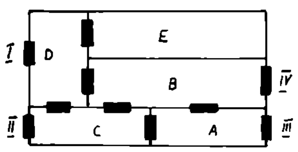
Letzter Einsendetermin: 8. März 1986

Mathematik

Ma 5 ■ 2608 Einer Arbeitsgemeinschaft gehörten anfangs 21 Schüler an, und zwar sowohl Jungen als auch Mädchen. Nachdem 3 Mädchen hinzu kamen, waren es doppelt soviel Mädchen wie Jungen. Wieviel Jungen bzw. Mädchen gehörten anfangs dieser AG an?
Schüler D. Michaelis, Grevesmühlen

Ma 5 ■ 2609 Der Nachfolger vom Doppelten eines Produktes von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen lautet 1985. Wie lauten die beiden Zahlen?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2610 Das Bild zeigt fünf Räume A, B, C, D, E. Es gibt vier Eingangstüren I, II, III, IV. Zähle alle Wege auf, wie man von draußen aus zum Raum E gelangen kann! Auf keinem Weg soll dabei ein Raum mehr als einmal betreten werden. (Beispiel: *CBDE*)
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma 5 ■ 2611 Ein Viereck hat einen Umfang, dessen Länge 60 cm beträgt. Die Maßzahlen der vier Seitenlängen sind aufeinanderfolgende gerade Zahlen. Wie lang sind die Seiten des Vierecks?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

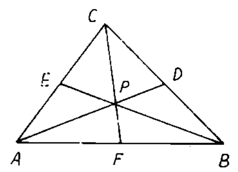
Ma 5 ■ 2612 Vom Rastplatz A fuhren ein Moped und ein Trabant gleichzeitig in gleicher Richtung ab. Das Moped fuhr je Stunde rund 60 km, der Trabant rund 80 km. Nach 90 Minuten trifft der Mopedfahrer in B, der Trabantfahrer auf dem Rastplatz C ein. Dort macht der Trabantfahrer 25 Minuten Pause und fährt dann weiter. Wird der Mopedfahrer, der keine Pause in B einlegt, den Trabantfahrer noch auf dem Rastplatz C treffen?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ■ 2613 Welche natürlichen Zahlen x, y und z erfüllen die drei Gleichungen
$x \cdot y = 10$,
$x \cdot z = 14$ und
$x \cdot y \cdot z = 70$
gleichzeitig?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■ 2614 Gesucht werden alle vierstelligen natürlichen Zahlen, die durch 36, 48 und 54 teilbar sind und kleiner als 4000 sind. *K. Wagner, Plauen*

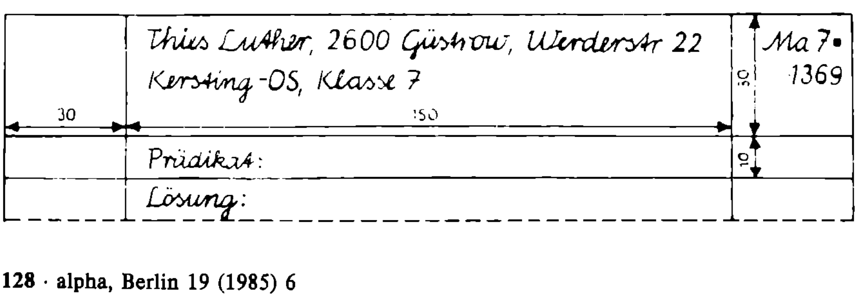
Ma 6 ■ 2615 Gesucht werden alle vierstelligen natürlichen Zahlen, die an zweiter und dritter Stelle die Ziffer 2 haben und durch 24 teilbar sind. *K. Wagner, Plauen*

Ma 6 ■ 2616 Das Bild stellt ein Dreieck ABC dar. Die Seitenhalbierenden $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$ schneiden sich im Punkte P. Das Dreieck ABC habe einen Flächeninhalt von $18\,\text{cm}^2$. Welchen Flächeninhalt hat in diesem Falle das Viereck $AFPE$?
Schüler A. Meckel, Friesen



Ma 6 ■ 2617 Dorit ist 5 Jahre älter als ihre Schwester Annett. Dorits Mutter ist viermal so alt wie Annett. Dorits Vater ist so alt wie Annett und ihre Mutter zusammen. Addiert man die Lebensalter aller vier Familienmitglieder, so ergibt das 93 Jahre. Wie alt ist jedes Familienmitglied? *Schülerin D. Schiller, Döbeln*

Ma 6 ■ 2618 Das Bild stellt ein Dreieck ABC dar, dessen Innenwinkel $\sphericalangle BAC$ die Größe $\alpha = 60°$ und $\sphericalangle ABC$ die Größe $\beta = 50°$ haben. Die Winkelhalbierende des



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an
Redaktion alpha
7027 Leipzig,
Postfach 14

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“.

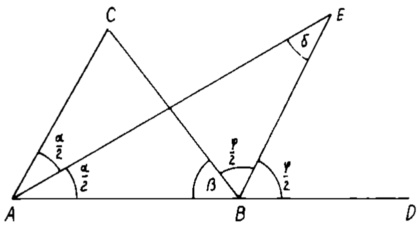
Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1985/86 läuft von Heft 5/1985 bis Heft 2/1986. Zwischen dem 1. und 10. September 1986 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/85 bis 2/86 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/86 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/85 bis 2/86) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1985/86 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Innenwinkels $\sphericalangle BAC$ schneidet die Winkelhalbierende des Außenwinkels $\sphericalangle CBD$ im Punkte E. Es ist die Größe δ des Winkels $\sphericalangle AEB$ zu ermitteln!

Schüler R. Scheel, Berlin



Ma 7 ■ 2619 Welche gebrochene Zahl mit dem Nenner 17 ist größer als $\frac{1}{4}$, aber kleiner als $\frac{1}{3}$? *Schülerin A. Strauß, Stendal*

Ma 7 ■ 2620 Kurt will von Paul wissen, wie alt er und sein jüngerer Bruder Ralf seien. Darauf sagt Paul: „Rechne es dir selber aus! Mein Vater ist 35 Jahre alt. Meine Mutter ist 20 Jahre älter als ich. Zusammen sind wir vier 89 Jahre alt. Mein Lebensalter ist durch 5, das meines Bruders durch 4 teilbar." *Schüler M. Fleischer*

Ma 7 ■ 2621 Hugo öffnet seine Sparbüchse und zählt seine Ersparnisse. Er stellt fest, daß die Sparbüchse nur 10-Pf- und 20-Pf-Münzen enthält, und zwar zusammen 109 Stück mit dem Gesamtbetrag von 13,30 M. Wie viele Münzen jeder Sorte sind es?

Schüler G. Grießbach, Hohenstein-E.

Ma 7 ■ 2622 Herr Schulz, der im 20. Jahrhundert geboren wurde, erreicht im Jahr 1984 an seinem Geburtstag ein Lebensalter in Jahren, das der vierfachen Quersumme der Zahl seines Geburtsjahres entspricht. In welchem Jahr wurde Herr Schulz geboren? *Diplomlandwirt H. Boettcher, Weimar*

Ma 8 ■ 2623 Eine Gaststätte erhielt eine Lieferung von Tischen und Stühlen zum Gesamtpreis von 4190 M. Wie viele Tische bzw. Stühle wurden geliefert, wenn jeder Tisch 113 M und jeder Stuhl 51 M kostet?

Schülerin S. Schubert, Machern

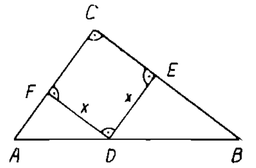
Ma 8 ■ 2624 Die Mitglieder einer Familie sind zusammen 111 Jahre alt. Mutter und Sohn sind zusammen 1 Jahr älter als Vater und Tochter zusammen. Der Vater ist viermal so alt wie seine Tochter. Vor einem Jahr war die Mutter viermal so alt wie ihre Tochter. Wie alt sind die einzelnen Familienmitglieder?

Schüler J. Steinbach, Zwickau

Ma 8 ■ 2625 Es ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC zu konstruieren, dessen Länge c der Hypotenuse $\overline{AB}$ und dessen Differenz $d = a - b$ der Längen a und b der Katheten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ gegeben sind. Die Konstruktion ist zu beschreiben und zu begründen!

Dr. E. Umlauft, Hümpfertshausen

Ma 8 ■ 2626 Das Bild stellt ein rechtwinkliges Dreieck ABC dar, dessen Katheten die Längen $a = 4$ cm und $b = 3$ cm haben, und dem ein Quadrat $DECF$ (wie aus dem Bild ersichtlich) einbeschrieben wurde. Wieviel Prozent vom Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt der Flächeninhalt des Quadrates $DECF$? *Sch.*



Ma 9 ■ 2627 Kurz vor der Ladenschließung kauften in einem Gemüseladen drei Kundinnen Pampelmusen. Die erste Kundin verlangte von den noch vorhandenen Pampelmusen die Hälfte und eine halbe Pampelmuse. Die zweite Kundin verlangte danach von den restlichen Pampelmusen ebenfalls die Hälfte und eine halbe Pampelmuse. Auch die dritte Kundin verlangte von den nun noch verbliebenen Pampelmusen die Hälfte und eine halbe Pampelmuse. Es blieb genau eine Pampelmuse übrig, die nicht verkauft wurde.
Wie viele Pampelmusen kaufte jede der drei Kundinnen?

Schüler M. Henkel, Ichtershausen

Ma 9 ■ 2628 Anton, Bruno und Christian wollen für ihre Mutter zu deren Geburtstag einen Strauß Chrysanthemen kaufen. Anton hat weniger als 4 M, Christian mehr als 5 M bei sich. Ein- und Fünf-Pfennig-Münzen sind nicht darunter. Anton und Bruno können von ihrem Geld zusammen genau 5 Chrysanthemen kaufen, Bruno und Christian zusammen genau 6, Anton und Christian zusammen genau 7 Stück bekommen.
a) Welches ist der Preis für eine Chrysantheme?
b) Wie viele Chrysanthemen wurden der Mutter zu ihrem Geburtstag von den drei Brüdern zusammen überreicht? *Sch.*

Ma 9 ■ 2629 Gegeben sei die Menge
$M = \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$.
Es sei $a \in N$ ein *Teiler in M* von einer Zahl $n \in N$ genau dann, wenn $b \in N$ existiert und $a \cdot b = n$ gilt.
(1) Bestimmen Sie die ersten fünf *Primzahlen in M*, d. h., diejenigen Elemente der Menge M, die genau zwei verschiedene *Teiler in M* besitzen!
(2) Bestimmen Sie die größte vierstellige *Primzahl in M*, in der zweimal die Grundziffer Null auftritt!
(3) Wie viele *Primzahlen in M* gibt es, die genau aus den Grundziffern 0, 1, 2, 3 bestehen? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 9 ■ 2630 Vertauscht man in einer zweistelligen natürlichen Zahl z mit der Quersumme 9 die Ziffern, so entsteht die Zahl z'. Addiert man die Quadrate von z und z' und dividiert diese Summe durch das Dreifache der ursprünglichen Zahl z, so erhält man 73. Es gelte $z < z'$. Wie heißt das Zahlenpaar $(z; z')$?

Schülerin E.-M. Uhlig, Leipzig

Ma 10/12 ■ 2631 Eine Lehrerin befragte die 26 Schüler ihrer Klasse. Auf die Frage, wer in der AG Foto tätig sei, meldeten sich 10 Schüler. Auf die Frage, wer der AG Basteln angehöre, meldeten sich 8 Schüler. Auf die Frage, wer in der AG Technik mitmache, meldeten sich 7 Schüler. Genau 6 Schüler meldeten sich bei diesen drei Fragen gar nicht. Auf dem Heimweg meint Uta: „Genau drei Schüler sind in allen drei Arbeitsgemeinschaften." Heidi hingegen meint: „Genau zwei Schüler sind in genau zwei Arbeitsgemeinschaften." Jörg aber meint: „Genau 14 Schüler nehmen nur an einer einzigen Arbeitsgemeinschaft teil." Man zeige, daß alle drei Meinungen falsch sind!

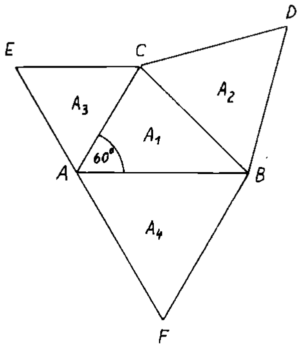
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 10/12 ■ 2632 Es sind alle Funktionen $f(x) = x^2 + px + q$, $p \in P$ und $q \in P$ zu bestimmen, für die gilt $f(p) = f(q) = 0$!

Schüler I. Warnke, Oranienburg

Ma 10/12 ■ 2633 Das Bild stellt ein Dreieck ABC dar, dessen Innenwinkel $\sphericalangle CAB$ die Größe $\alpha = 60°$ hat. Über jeder Dreiecksseite wurde ein gleichseitiges Dreieck konstruiert. Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 in dieser Reihenfolge die Flächeninhalte der Dreiecke ABC, CBD, ACE, AFB. Weisen Sie nach, daß $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$ gilt!

Sch.



Ma 10/12 ■ 2634 Ist es möglich, daß ein Dreieck, dessen Seitenlängen sämtlich kleiner als 1 cm sind, einen größeren Flächeninhalt hat als ein Dreieck, bei dem jede Seite länger als 1 m ist?

aus einer sowjetischen Zeitschrift ausgewählt von J. Pönisch, Karl-Marx-Stadt

Physik

Ph 6 ■ 187 Ein Eisenträger ($\varrho = 0{,}75$ g/cm^3) ist genau so viele Meter lang, wie seine Masse in Kilogramm beträgt. Berechne seinen Querschnitt in cm^2!

Ph 7 ■ 188 Eine Schraubenfeder wird um 12 cm ausgedehnt. Dazu ist eine Arbeit von 90 Nm aufzuwenden. Wie groß ist die Endkraft, wenn die anfängliche Kraft 500 N beträgt?

Ph 8 ■ 189 Bei Dampflokomotiven ist die zulässige Höchstgeschwindigkeit u. a. von der mittleren Kolbengeschwindigkeit der Dampfmaschine abhängig. Die mittlere

Kolbengeschwindigkeit c_m wird berechnet aus

$$c_m = \frac{2 \cdot s \cdot n}{60}\ [\mathrm{m/s}]. \qquad (1)$$

Hierin sind
s = Kolbenhub in Metern
n = Drehzahl in 1/min der Treibräder.
Nach den Vorschriften der Deutschen Reichsbahn soll c_m nicht größer als 8 bis 9 m/s sein.
a) Welche zulässige Höchstgeschwindigkeiten (km/h) ergeben sich damit, wenn der Durchmesser der Treibräder
1. D = 2000 mm (z. B. Baureihe 01),
2. D = 2300 mm (z. B. Lok 18 201)
und der Kolbenhub jeweils s = 660 mm betragen?
b) Wie groß war die mittlere Kolbengeschwindigkeit bei der Lok 05 002, die im Mai 1936 eine Höchstgeschwindigkeit von v = 200,4 km/h erreichte? Der Kolbenhub betrug s = 660 mm.

Ing. A. Körner, Leipzig

Ph 9 ■ 190 Auf einer Baustelle wird ein Trog mit Hilfe einer Winde in 4 Sekunden um 9,6 m gehoben. Er führt dabei eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus.
a) Welche Masse hat der Trog, wenn die zugelassene Zugkraft (am Haken der Winde) von 1320 N um 15 % unterschritten wird?
b) Ist es vertretbar, die Beschleunigung bei gleichbleibender Masse zu verdoppeln, wenn aus Sicherheitsgründen die ausgeschriebene Zugkraft nur mit 90 % erreicht werden darf? *St. Patzschke, Droyßig*

Ph 10/12 ■ 191 Der Planet Venus befindet sich in einer Entfernung von $1{,}0821 \cdot 10^8$ km von der Sonne (große Halbachse der Bahnellipse) und Pluto $5{,}910 \cdot 10^9$ km. Die Umlaufzeit des Pluto beträgt 248,4 Jahre. Berechnen Sie die Umlaufzeit der Venus in Tagen!

„Wasserdicht möchte die Ausrüstung schon sein."

Chemie

Historische Aufgaben
(aus einem Rechenbuch von 1906)

Ch 6 ■ 149 Ein Essighändler will seinen zu starken Essig mit Wasser verdünnen. Unvermischt würde er den Hektoliter zu 18,75 M verkaufen. Wieviel Wasser muß er zu 24 hl zusetzen, um das Liter zu 15 Pf verkaufen zu können?

Ch 8 ■ 150 Ein Mühlstein von Basalt von 1,25 m Durchmesser und 0,26 m Dicke ist 814 kg schwer. Wie schwer ist ein Mühlstein von Quarz von 1,12 m Durchmesser und 0,54 m Dicke, wenn zwei gleichgroße Stücke von Basalt und Quarz sich dem Gewichte nach wie 13 : 15 verhalten?

Ch 9 ■ 151 Um in einem Bergwerke Bleierz aus einer Tiefe von 175 m zu fördern, sind 21 Pferde nötig, von denen jedes in 4 Sekunden 115 kg 3 m in die Höhe zu ziehen imstande ist. In einem anderen Bergwerke, dessen rohe Ausbeute sich zu der des ersteren wie 16 : 9 verhält, soll Erz aus einer Tiefe von 135 m in die Höhe geschafft werden. Wieviel Pferde sind hierzu nötig, wenn jedes in 15 Sekunden 103,5 kg 10 m hochzuziehen imstande ist?

Ch 10/12 ■ 152 Aus einem mit 360 l Weingeist gefüllten Fasse nehme ich eine bestimmte Menge heraus und ersetze das Fehlende durch Wasser. Von der gehörig vermischten Flüssigkeit nehme ich zum zweiten Male ebensoviel Liter heraus wie zum ersten Male, und noch 84 l dazu, und fülle das Faß wieder mit Wasser. Nach der zweiten Mischung enthält die Flüssigkeit ebensoviel Wasser wie Weingeist. Wieviel Liter wurden zum ersten Mal herausgenommen?

alpha-Porträt:
Niels Neumann, Jena, 14 Jahre, Klasse 8

Aus einem Brief an die Redaktion *alpha*: Ich besuche eine Schule mit erweitertem Russischunterricht. Meine Lieblingsfächer neben Mathematik sind auch Physik, Englisch und Sport. Seit Oktober 1982 besuche ich einmal jede Woche den Spitzenzirkel für Mathematik in Jena. Außerdem gehe ich noch in die AG Schach und Gerätetechnik. Zu Hause verbringe ich einen Teil meiner Freizeit mit Mathematik. Einen 1. Preis sowie den Sonderpreis des Stadtschulrates erhielt ich bei der Kreisolympiade, Klasse 5 (1983). Auch in Klasse 6 erreichte ich 1984 die volle Punktzahl. Bei der Bezirksolympiade (Kl. 7) konnte ich einen 2. Preis erringen.

Aus meinen Aufzeichnungen der 6. Klasse stelle ich euch, liebe *alpha*-Leser, einige Aufgaben vor:

▲1▲
Eine Aufgabe zum Knobeln und Basteln
Bestimme von einem Körper die Anzahl der Raumdiagonalen, von dem nur bekannt ist, daß er ein Polyeder ist und daß an jeder Ecke die gleiche Anzahl regelmäßiger Sechsecke und die gleiche Anzahl regelmäßiger Fünfecke (als Seitenflächen) zusammenstoßen!
Hinweis: Man versuche zunächst, aus den wenigen Angaben nähere Aussagen über die Gestalt eines solchen Körpers zu gewinnen. Es ist dann nicht so kompliziert, ihn zu basteln. (Lösung siehe S. 140)

▲2▲ Zeige, daß es nicht möglich ist, mit einem Springer über alle Felder eines 4×4-Felder-Quadrates so zu springen, daß jedes Feld genau einmal passiert wird! Dabei ist das Ausgangsfeld beliebig.

▲3▲ Zeige, daß es keine dreistellige Zahl z gibt, die gleich dem Neunfachen ihrer Quersumme ist!

▲4▲ Konstruiere ein Trapez $ABCD$ aus den Stücken a = 7 cm, b = 3 cm, c = 4,5 cm und d = 2,5 cm!

▲5▲ Jörg war in der Kaufhalle einkaufen. Für ein Drittel des Geldes kaufte er Milch (in Flaschen), für die Hälfte des Geldes Brause, für ein Zwanzigstel Brötchen und für den Rest von 3,50 M Butter und Käse. Wieviel Geld hat Jörg ausgegeben?

▲6▲ Die vier Schüler Bernd, Torsten, Rainer und Michael trugen untereinander ein kleines Schachturnier aus. Jeder spielte gegen jeden genau einmal. Es ließen sich nun folgende Aussagen machen:
(1) Torsten hatte genau zweimal gewonnen, gegen Michael war er aber Verlierer.
(2) Bernd spielte nie unentschieden.
(3) Rainer siegte nur einmal.
(4) Michael erreichte genau einmal ein Unentschieden. Gegen Bernd gewann er.
Ermittle daraus, wer in diesem Turnier den ersten, zweiten, dritten und vierten Platz belegte. Ist eine Angabe überflüssig?

Am Ende der 6. Klasse legte ich mir ein kleines mathematisches Tagebuch an. Daraus eine Aufgabe, die der Leser mit zahlentheoretischen Kongruenzen lösen kann:
▲7▲ Welchen Rest läßt die Zahl $z = 29^{117} - 29$ beim Teilen durch 36?

XXVI. Internationale Mathematikolympiade

Helsinki, Juli 1985

Von 4578 erreichbaren Punkten wurden erreicht für

Aufgabe 1	861 Punkte
Aufgabe 2	767 Punkte
Aufgabe 3	164 Punkte
Aufgabe 4	504 Punkte
Aufgabe 5	381 Punkte
Aufgabe 6	423 Punkte
Summe	3100 Punkte

Die XXVII. IMO findet in der VR Polen statt.

Aufgaben

1. Tag

▲1▲ Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck und k ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Seite $[A,B]$ liegt und der die anderen drei Seiten $ABCD$ berührt. Ferner sei $ABCD$ ein Sehnenviereck.
Man beweise: $\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AB}$!

(Großbritannien)

▲2▲ Es sei n eine natürliche Zahl und es sei k eine ganze, zu n teilerfremde Zahl mit $0 < k < n$. Ferner sei
$M = \{1, 2, \ldots, n-1\}$.
Jede Zahl aus der Menge M sei mit genau einer der Farben Blau oder Weiß gefärbt. Dabei sei vorausgesetzt:
a) Für alle $i \in M$ haben i und $n-i$ stets die gleiche Farbe, und
b) für alle $i \in M$, $i \neq k$, haben i und $|k-i|$ stets die gleiche Farbe.
Man zeige, daß dann alle Elemente aus M die gleiche Farbe haben.

(Australien)

▲3▲ Für jedes Polynom P mit
$P(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j x^j$ und ganzzahlige Koeffizienten bezeichne $w(P)$ die Anzahl derjenigen Koeffizienten von P, die ungerade Zahlen sind. Außerdem sei für
$i = 0, 1, 2, \ldots$
$$Q_i(x) = (1+x)^i.$$
Man beweise: Für jede endliche Folge $\langle i_1, i_2, \ldots, i_n\rangle$ ganzer Zahlen mit
$$0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_n$$
gilt die Ungleichung
$$w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \ldots + Q_{i_n}) > w(Q_{i_1}).$$

(Niederlande)

Reine Arbeitszeit: 4,5 Stunden

2. Tag

▲4▲ Es sei M eine Menge aus 1985 verschiedenen positiven ganzen Zahlen. Keine dieser Zahlen hat einen Primteiler größer als 26.
Man beweise: In M gibt es vier paarweise verschiedene Elemente, für die ihr Produkt die vierte Potenz einer ganzen Zahl ist.

(Mongolische Volksrepublik)

▲5▲ Es sei ABC ein Dreieck und k_1 ein Kreis durch die Punkte A und C, der die Strecken $[A,B]$ bzw. $[B,C]$ ein weiteres Mal in den voneinander verschiedenen Punkten K bzw. N schneidet. Der Mittelpunkt von k_1 sei mit 0 bezeichnet. Ferner sei k_2 der Umkreis des Dreiecks KBN. Der Umkreis des Dreiecks ABC schneide k_2 in genau zwei verschiedenen Punkten B und M.
Man beweise: $\sphericalangle OMB = 90°$.

(Sowjetunion)

▲6▲ Für jede reelle Zahl x_1 sei die Folge $\langle x_1, x_2, \ldots\rangle$ durch
$$x_{n+1} = x_n \cdot \left(x_n + \frac{1}{n}\right)$$
für alle $n > 1$ definiert.
Man beweise: Es gibt einen und nur einen Anfangswert x_1, für den die Bedingung
$$0 < x_n < x_{n+1} < 1$$
für alle $n > 1$ erfüllt ist.

(Schweden)

Reine Arbeitszeit: 4,5 Stunden
Bei jeder Aufgabe konnten 7 Punkte erreicht werden.

Ergebnisse der IMO

Österreich (77 Punkte) – Australien (117) – Belgien (60) – VR Bulgarien (165) – Brasilien (83) – Kanada (105) – Volksrepublik China (27) (2)[1] – Kolumbien (54) – ČSSR (105) – Republik Kuba (74) – Zypern (27) – DDR (136) – Bundesrepublik Deutschland (139) – Algerien (36) – Finnland (25) – Frankreich (125) – Großbritannien (121) – Griechenland (69) – Ungarische VR (168) – Israel (81) – Irland (28) (1)[1] – Island (13) (2)[1] – Italien (20) – Kuweit (7) (5)[1] – Marokko (60) – Mongolische VR (62) – Niederlande (72) – Norwegen (35) – VR Polen (101) – SR Rumänien (201) – Schweden (65) – Spanien (25) – UdSSR (140) – Tunesien (46) – Türkei (54) – USA (180) – Vietnam (144) – Jugoslawien (68) –

(2)[1]) bedeutet, daß nur zwei Schüler dieses Landes an der IMO teilnahmen.

Von den 109 Teilnehmern aus 38 Ländern erhielten 14 einen 1. Preis (42 P. bis 34 P.), 35 einen 2. Preis (32 P. bis 22 P.) und 51 einen 3. Preis (21 P. bis 15 P.). Die Schüler Geza Kos (Ungarische VR) und Daniel Tatoru (SR Rumänien) erhielten die volle Punktzahl (42 P.).
Um den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben zu charakterisieren, seien die erreichten Gesamtpunktzahlen genannt:

Die Mannschaft der DDR nach der Siegerehrung (im Hintergrund Alexander II. und der Dom von Helsinki):
Volker Brundisch, Ingo Warncke, Georg Hein, Jörg Jahnel (obere Reihe v. l. n. r.);
Angelika Brauschke und Ulrich Meister.
Unsere Mannschaft erhielt drei 2. und drei 3. Preise und erreichte damit den 8. Platz unter 38 Teilnehmerländern.
Die IMO fand in der Stadt Joutsa, mitten in der Welt der finnischen Seen statt, die Auszeichnung an der Universität Helsinki.
Unser Foto: Senatsplatz mit Domkirche, erbaut zwischen 1778 und 1840 im Empire-Stil.

Ein Besuch in der Knobelwerkstatt

Teil 5: Zum Jahreswechsel 1985/86

Liebe Freunde!

Nachdem wir uns in den vergangenen Teilen dieser Serie mit der Ideenfindung für mathematische Knobelaufgaben aus der Umwelt, der Mathematik und der deutschen Sprache beschäftigt haben, wollen wir heute den *Eigenbau* solcher Aufgaben unter dem Blickwinkel eines bestimmten gesellschaftlichen, schulischen oder anderen Ereignisses bzw. Höhepunktes demonstrieren.

Es ist an manchen Schulen unserer Republik schon ein guter Brauch, im Rahmen des Mathematikunterrichtes, von Schülerzirkeln oder Mathematiklagern mathematische Wandzeitungen zu gestalten, die beispielsweise dem Tag der Republik, dem Pionier- oder FDJ-Geburtstag, dem Tag der NVA, dem Lehrertag oder dem Ehrentag anderer Berufsgruppen, dem Leben und Wirken hervorragender Mathematiker, den Mathematik-Olympiaden, dem Schulsportfest oder einem anderen sportlichen Ereignis, einem Jubiläum der Schule oder aber dem jeweiligen Jahreswechsel gewidmet sind. Will man zu solch einem Anlaß mathematische Aufgaben gestalten, so findet man folgende Ausgangssituation vor: Der inhaltliche Rahmen der Aufgaben ist durch das jeweils zu würdigende Ereignis festgelegt, und seitens des mathematischen Modells können die Aufgaben in den unterschiedlichsten Teilgebieten der Mathematik angesiedelt sein. Man muß sich also vor Beginn der Gestaltung einer solchen thematischen Mathematik-Wandzeitung mit den das Ereignis charakterisierenden Fakten, Schwerpunkten, Bedingungen und Tendenzen vertraut machen und davon ausgehend solche mathematische Aufgaben *bauen*, welche die Adressaten dieser Aufgaben auf mathematisch-unterhaltsame Weise tiefer mit dem Ereignis vertraut machen oder sie bewegen, sich stärker mit dem Ereignis auseinanderzusetzen. Es wird sich also hierbei zum großen Teil um sog. *eingekleidete Aufgaben* (Textaufgaben), speziell um *sachbezogen-eingekleidete Aufgaben* (Sachaufgaben) handeln. Der *Eigenbau* solcher Mathematikaufgaben ist sicher etwas aufwendig und nicht ganz leicht, aber dafür sehr reizvoll und mathematisch fordernd.

Wir wollen dieses sachbezogene Vorgehen beim *Eigenbau* von Knobelaufgaben in zwei Beiträgen demonstrieren: Der heutige Beitrag ist aus gegebenem Anlaß dem Ereignis *Jahreswechsel 1985/1986* gewidmet, und der letzte Beitrag dieser Serie (*alpha*, Heft 2/1987) wird das sportliche Großereignis VIII. *Turn- und Sportfest der DDR*, das im Sommer 1987 in Leipzig stattfinden wird, zum Inhalt haben.

Für unser heutiges Anliegen haben wir also nur die Jahreszahlen 1985 und 1986 zur Verfügung, und diese sollen nun zu allen möglichen Aufgabentypen *verarbeitet* werden. Eine interessante Spielerei!

Für die Gestaltung guter Aufgaben zu den Grundrechenarten oder zur Teilbarkeit natürlicher Zahlen ist die Primfaktorzerlegung der jeweiligen Jahreszahlen und deren Ziffernfolge oft entscheidend. Die Primfaktorzerlegung von $1984 = 2^6 \cdot 31$ ist offenbar *günstiger* als diejenige von $1985 = 5 \cdot 397$ oder $1986 = 2 \cdot 3 \cdot 331$. Auch ist die Ziffernfolge von 1984 wegen $8:4=2$ oder $9 \cdot 8 : 4 = 18$ *günstiger* als bei 1985 (hier ist keine Grundziffer durch die nachfolgende teilbar) und bei 1986 (hier gilt wenigstens $9 \cdot 8 : 6 = 12$). Dieser Fakt hat für Knobelaufgaben, wie *Aufgabe 1*, zwar keinerlei Nachteile, aber z. B. werden dadurch bei *Aufgabe 2* die Eintragungsmöglichkeiten für Rechenzeichen (ohne Klammernbenutzung) eingeschränkt, bei *Aufgabe 3* (oder der Aufgabe *Silvesterlauf* in *alpha* 6/84, Seite 139) die Unterschiede der einzutragenden Zahlen sehr groß und bei *Aufgabe 4* die Zerlegung in mehr als 3 (natürliche) derartige Summanden verhindert. Trotzdem hat das insgesamt für unser Anliegen nur geringe Auswirkungen.

Bleiben wir noch bei der Arithmetik, so können wir außer den bereits durch die Aufgaben 1 bis 4 demonstrierten Aufgaben zu den rationalen Rechenoperationen, magischen Figuren (mit Produkten) und Summenzerlegungen beispielsweise noch Kryptogramme (*s. Aufgabe 5*), Aufgaben zur Zahlendarstellung in bestimmten Positionssystemen (*s. Aufgabe 6*) bzw. mit römischen Ziffern (*s. Aufgabe 7*), arithmetische Aufgaben in Form von rechentechnischen Flußdiagrammen, Aufgaben zur Teilbarkeit (vgl. etwa *alpha* 6/84, Seite 138, Aufg. b)) und andere Aufgaben gestalten.

Man kann auch, und das ist nicht schwer, lineare Gleichungen (*s. Aufgabe 8*), quadratische Gleichungen, lineare Gleichungssysteme oder andere Aufgaben (*s. Aufgabe 9*) konstruieren, bei denen die jeweiligen Jahreszahlen als Lösungen auftreten. Zu diesem Zweck kann man folgendermaßen verfahren: Will man eine lineare Gleichung beispielsweise mit der Lösung $x = 1985/1986$ haben, so geht man von dieser einfachsten Gleichung $x = 1985/1986$ aus und *verkompliziert* diese rückwärts durch äquivalente Umformschritte. Will man eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ beispielsweise mit den Lösungen $x_1 = 1985$ und $x_2 = 1986$ haben, so braucht man nur die Koeffizienten p und q nach dem Vietaschen Wurzelsatz ($x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$) oder mit Hilfe der Linearfaktorzerlegung $(x - 1985)(x - 1986) = 0$ zu bestimmen (wobei natürlich bei vierstelligen Jahreszahlen die Koeffizienten sehr groß werden). Will man ein lineares Gleichungssystem beispielsweise mit der eindeutigen Lösung $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, $x_3 = 8$ und $x_4 = 6$ haben, so braucht man nur – von diesem Lösungsvektor $(1, 9, 8, 6)$ ausgehend – ein Gleichungssystem in gestaffelter Form (z. B. $x_4 = 6$, $4x_3 - 3x_4 = 14$, $x_2 - x_3 + x_4 = 7$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24$) aufzuschreiben und dieses gestaffelte System dann durch Linearkombination dieser 4 Gleichungen zu *verkomplizieren*. Hierbei muß man allerdings auf die Erhaltung der Eindeutigkeit der Lösung achten. Die eben gegebenen Hinweise gelten selbstverständlich auch zum Aufbau von Gleichungen bzw. Gleichungssystemen mit irgendwelchen anderszahligen Lösungen. Man kann die Jahreszahlen aber auch in geometrische Aufgaben einbauen, indem man etwa die Grundziffern flächenhaft gestaltet (*s. Aufgabe 10*) oder die Jahreszahlen bei Teilungsproblemen verwendet (*s. Aufgabe 11*) bzw. in Form von Legefiguren darstellen läßt (*s. Aufgabe 12*). Ebenso kann man die Jahreszahlen in logisch-kombinatorische Aufgaben (*s. Aufgabe 13 und Aufgabe 14*) einbauen, Rösselsprungaufgaben daraus machen (*s. Aufgabe 15*) und vieles andere mehr.

Sicher habt ihr auch noch andere Ideen dafür, was man alles aus den Jahreszahlen 1985 und 1986 machen kann. Zum Schluß wollen wir euch noch zwei Zusatzaufgaben stellen:

Zusatzaufgabe 1:
Bei welcher der demnächst folgenden Jahreszahlen besteht die Primfaktorzerlegung nur aus einer Primzahlpotenz?

Zusatzaufgabe 2:
Ermittelt alle Paare (x, y) nichtnegativer ganzer Zahlen x und y, die der Gleichung $x^2 + y^2 = 1985^2$ genügen!

Wir wünschen euch viel Spaß beim Knobeln und im neuen Jahr Gesundheit und viel Erfolg in der schulischen Arbeit!

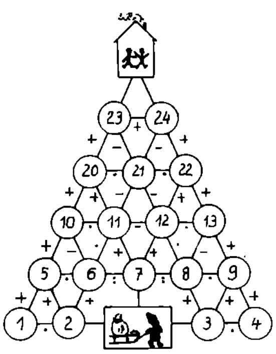
R. Mildner

Wo man tatkräftig ans Werk
geht
und Trägheit nicht aufkommt,
wo Klugheit und Mut
zusammen gehen,
da waltet sicher volles Glück.

Indisches Sprichwort

Knobel-Wandzeitung

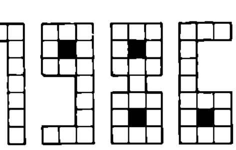
▲1▲ Lieber guter Weihnachtsmann
Der Weihnachtsmann hat ein großes Problem: Er kann nämlich nur auf demjenigen Wege zu den Kindern gelangen, bei dem das Endergebnis der entlang dieses Weges nacheinander auszuführenden Rechenoperationen 1985 beträgt. Außerdem darf er jedes Zahlenfeld nur höchstens einmal überqueren.
Helft dem Weihnachtsmann, und zeigt ihm den Weg zu den Kindern!



▲2▲ Rechenspaß zum Jahreswechsel
Setzt zwischen die Grundziffern der beiden Jahreszahlen Zeichen für rationale Rechenoperationen so ein, daß eine wahre Gleichung entsteht! Klammern dürfen nicht benutzt werden. Wer findet mindestens 7 verschiedene derartige Gleichungen?

1 9 8 5 = 1 9 8 6

▲3▲ Im neuen Jahr
Tragt in die Kästchen der Figur natürliche Zahlen derart ein, daß das Produkt der Zahlen in jeder waagerechten und senkrechten Kästchenreihe 1986 beträgt! Zur Eintragung dürfen aber nur folgende Zahlen verwendet werden: 20mal die „1“, 6mal die „2“, 8mal die „3“, 1mal die „6“, 5mal die „331“, 6mal die „662“, 6mal die „993“ und 1mal die „1986“.



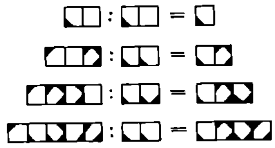
▲4▲ Zerlegte Jahreszahl
Zerlegt die Zahl 1986 in eine dreigliedrige Summe, bei der ein Summand doppelt so groß und ein zweiter Summand dreimal so groß wie der dritte Summand sind!

▲5▲ Kryptarithmetik
Löst die drei abgebildeten Kryptogramme!

a)
```
1985 · ****
-----------
     ***1*
    ***8*
   *7***
  **8*
-----------
  *******
```

c)
```
  RIND
+ RING
------
  TIER
```

b)



▲6▲ Positionssysteme
Die auf der linken Seite der Gleichungen stehenden Zahlen, die in dem uns bekannten Dezimalsystem (Basiszahl $g = 10$) dargestellt seien, sollt ihr in anderen Stellenwert- oder Positionssystemen mit den Basiszahlen $g = 2$, $g = 3$, $g = 4$, $g = 5$ bzw. $g = 6$ darstellen, indem ihr jeweils Grundziffern von 0 bis $g - 1$ so in die Kästchen eintragt, daß Gleichheit besteht. Die in den Kästchen horizontal nebeneinander stehenden Grundziffern ergeben dann die Darstellung der links vom Gleichheitszeichen stehenden Zahl in dem jeweiligen Positionssystem.

$$19 = \square\,2^4 + \square\,2^3 + \square\,2^2 + \square\,2^1 + \square\,2^0$$
$$198 = \square\,3^4 + \square\,3^3 + \square\,3^2 + \square\,3^1 + \square\,3^0$$
$$1985 = \square\,5^4 + \square\,5^3 + \square\,5^2 + \square\,5^1 + \square\,5^0$$
$$1986 = \square\,6^4 + \square\,6^3 + \square\,6^2 + \square\,6^1 + \square\,6^0$$
$$986 = \square\,4^4 + \square\,4^3 + \square\,4^2 + \square\,4^1 + \square\,4^0$$
$$86 = \square\,3^4 + \square\,3^3 + \square\,3^2 + \square\,3^1 + \square\,3^0$$

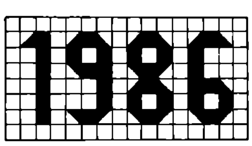
▲7▲ Mit römischen Ziffern
Die abgebildete Hölzchen-Gleichung ist offenbar falsch. Legt nun 3 Hölzchen so um, daß eine wahre Gleichung entsteht!

M-CM-CXXX+V=MCMLXXXVIII

▲8▲ Zahl gesucht
Gesucht ist eine bestimmte (gebrochene) Zahl. Multipliziert man diese Zahl mit 331, subtrahiert man hiervon 5, dividiert man diese Differenz durch 5 und multipliziert man diesen Quotienten mit 6, so erhält man 391. Wie lautet diese Zahl?

▲9▲ Eine harte Nuß
Ermittelt alle vierstelligen natürlichen Zahlen mit folgenden vier Eigenschaften:
1. Die Quersumme beträgt 24, 2. die alternierende Quersumme beträgt -6, 3. das Querprodukt beträgt 432, 4. die Differenz aus dem Produkt der beiden letzten Grundziffern und dem Produkt der beiden ersten Grundziffern beträgt 39.

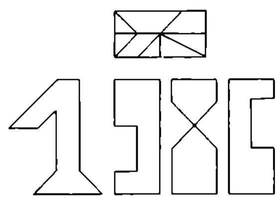
▲10▲ Jahreszahl in Prozenten
Wieviel Prozent der abgebildeten Rechteckfläche beansprucht die Jahreszahl 1986?



▲11▲ Gerechte Teilung
Zerlegt die abgebildete Quadratfläche derart in 4 kongruente Flächenstücke, daß jedes dieser Flächenstücke alle Grundziffern der Jahreszahl 1986 enthält!

1							1
1						9	
	8			9			
9			6				
				1	9	8	
8							
	8		6			6	
6							

▲12▲ Legespiel
Zerschneidet ein rechteckiges Stück Karton, das doppelt so lang wie breit ist, in der abgebildeten Weise (oben) und legt sodann mit diesen acht Teilen eine jede Grundziffer der Jahreszahl 1986 (unten) zusammen!

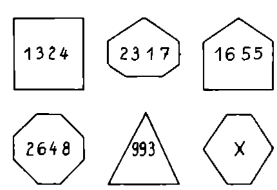


▲13▲ Umordnung
Ordnet die sich im linken Quadrat befindlichen Ziffern so um, daß sich in jeder Zeile, Spalte und Diagonale 4 verschiedene Ziffern befinden!

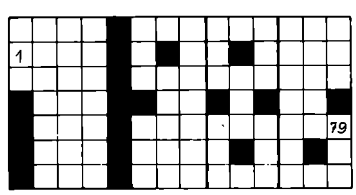
1	9	8	6
1	9	8	6
1	9	8	6
1	9	8	6

→

▲14▲ Das geheimnisvolle x
Wie muß logischerweise die Zahl x lauten?



▲15▲ Kniffliger Rösselsprung
Zieht den Springer, der wie beim Schachspiel zu setzen ist, vom Feld 1 nach dem Feld 79 derart, daß er zwischendurch jedes andere weiße Feld genau einmal betritt! Dabei dürfen die schwarzen Felder zwar übersprungen, aber nicht betreten werden.



Aufgaben aus der polnischen mathematischen Schülerzeitschrift plus-minus

In der polnischen Zeitschrift *plus-minus*, die für Schüler der Klassen 5 bis 8 bestimmt ist und ungefähr unserer *alpha* entspricht, erscheinen regelmäßig *Knobelaufgaben*. In der Volksrepublik Polen erhält jeder Schüler einen Preis, der dreimal als erster die vollständige Lösung einer Aufgabe anbieten kann.
Hier sind 12 Aufgaben für Schüler der Klassenstufe 5:

▲1▲ Fünf Jungen schließen eine Wette ab, wer im Laufe einer Stunde die meisten Ostereier findet. Nach einer Stunde Mühe stellen sie fest, daß jeder eine andere Anzahl gefunden hat, der erste hat fünf, der letzte eins.
Stelle die Reihenfolge der Jungen fest, wenn bekannt ist, daß Krzysztof mehr als zwei gefunden hat. Piotr liegt unmittelbar vor Marek, der nicht der zweite ist. Roman ist schlechter als Slawek, der jedoch Piotr unterlag.

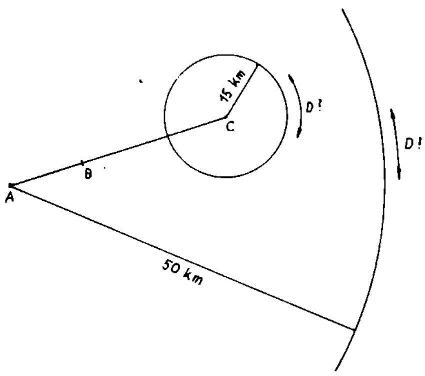
▲2▲ Wir zählen mit den Fingern an einer Hand:
Daumen 1, Zeigefinger 2, Mittelfinger 3, Ringfinger 4, kleiner Finger 5 und nun rückwärts weiter:
Ringfinger 6, Mittelfinger 7, Zeigefinger 8, Daumen 9; Zeigefinger 10, usw.
Welcher Finger gibt die Zahl 1980 an?

▲3▲ Großvater hat einen Sohn, einen Enkel und einen Urenkel. Die Summe der Lebensjahre des Großvaters und des Urenkels ist genau so groß wie die Summe der Lebensjahre des Sohnes und des Enkels. Vertauscht man die Ziffern des Alters des Großvaters, so erhält man das Alter des Sohnes. Das Alter des Enkels und des Urenkels unterscheidet sich nur durch die Reihenfolge der Ziffern. Wie alt ist jeder?

▲4▲ Kann man auf einem Tisch acht gleichartige Münzen so anordnen, daß sie sich in 14 Punkten berühren?

▲5▲ Auf welche Ziffer endet
$11^{1980} - 7^{1980}$?

▲6▲ Wir wissen von vier Städten A, B, C, D:
von A nach B sind es 10 km,
von C nach D 15 km,
von B nach C 20 km,
von A nach C 30 km und
von A nach D 50 km.
(Entfernungen für gerade Straßen)
Berechne die Entfernung von B nach D!



▲7▲ Gib die kleinste natürliche Zahl an, deren Quersumme 100 ist und die
a) durch 4 teilbar ist,
b) durch 5 teilbar ist,
c) durch 9 teilbar ist.

▲8▲ Addiert man zu 37 die 1, so erhält man eine durch 2 teilbare Zahl:
$$37 + 1 = 2 \cdot 19.$$
Addiert man zu 37 die 2, so erhält man eine durch 3 teilbare Zahl:
$$37 + 2 = 3 \cdot 13.$$
Addiert man zu 37 die 3, so erhält man eine durch 4 teilbare Zahl:
$$37 + 3 = 4 \cdot 10.$$
Die Zahl 37 ist nicht die kleinste Zahl mit diesen Eigenschaften. Bestimme die kleinste natürliche Zahl mit diesen Eigenschaften!

▲9▲ Schreibe die folgenden Zahlen als Produkte mit zwei gleichen Faktoren:

121
12321
1234321
123454321
12345654321
1234567654321!

▲10▲ Bestimme die natürlichen Zahlen x und y, wenn man für $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, $x : y$ die Zahlen 48; 26; 22; 12 erhält (Reihenfolge der Ergebnisse ist hier beliebig gewählt).

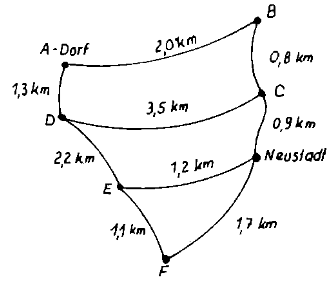
▲11▲ Gegeben sei das Produkt
$(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot \ldots$
$\cdot (x-98) \cdot (x-99) \cdot (x-100)$
a) Berechne das Produkt, wenn du für $x = 13$ einsetzt.
b) Bestimme alle natürlichen Zahlen für x, für die gilt
$(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot \ldots \cdot (x-98)$
$\cdot (x-99) \cdot (x-100) = 0$
Hinweis: Das Produkt in Aufgabe a) und b) ist abgekürzt aufgeschrieben, es besteht aus 100 Faktoren, nur die ersten drei und die letzten drei sind aufgeschrieben. Zum Beispiel heißt der 25. Faktor $(x - 25)$.

▲12▲ Gegeben sind vier Quadrate:
eins mit der Seitenlänge 5 cm,
das zweite mit der Seitenlänge 6 cm,
das dritte mit der Seitenlänge 10 cm und
das vierte mit der Seitenlänge 1 cm.
Ist es möglich, zwei der drei angegebenen Quadrate derart zu einem neuen Quadrat zusammenzufügen, daß die Seitenlänge des neuen Quadrates eine natürliche Zahl ist?

Ausgewählt und aus dem Polnischen übertragen von K. Meier, PH Köthen

Knobeln und kombinieren

▲1▲ Von A-Dorf kann man auf verschiedenen Wegen nach Neustadt gelangen.



Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es, von A-Dorf nach Neustadt zu gelangen, wenn keine Wegstrecke doppelt gegangen werden darf?
Gib jeweils die Länge des Weges an!

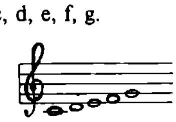
▲2▲ Susanne hat 4 Röcke und 3 Blusen.
a) Auf wieviel verschiedene Arten kann sie sich damit kleiden?
b) Zu Weihnachten bekommt sie einen weiteren Rock.
Wieviel Kombinationen sind nun möglich?

▲3▲ Frank hat auf ein Fahrrad gespart. Im Fahrradgeschäft gibt es drei verschiedene Typen (Klapprad, Sportrad, Tourenrad) in je vier verschiedenen Farben (Grün, Rot, Blau, Silbergrau).
Unter wieviel Möglichkeiten kann Frank wählen?

▲4▲ Michael fertigt für die Solitombola Lose mit allen zweistelligen Zahlen. Er legt fest, daß ein Hauptgewinn vorliegt, wenn die Zehnerziffer 2; 5 oder 8 und die Einerziffer 0; 5 oder 7 ist.
Wieviel Hauptgewinne sind es?

▲5▲ Für den F-Laut gibt es verschiedene Schriftzeichen F, V, Ph. Für den x-Laut gibt es die Schriftzeichen x, ks, chs, gs, cks, cs.
Auf wieviel verschiedene Arten kann man das Wort *Felix* falsch schreiben?

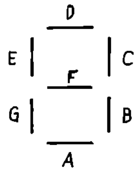
▲6▲ Hartmut lernt Klavier spielen. Nach den ersten Stunden spielt er schon kleine Stücke im 5-Ton-Raum mit den Tönen c, d, e, f, g.



Wieviel Möglichkeiten gibt es, diese 5 Töne (ohne Wiederholung) in verschiedener Reihenfolge zu spielen?

▲7▲ In den Zahlen 575, 775 kommen nur die Ziffern 5 und 7 vor. Wieviel solcher dreistelligen Zahlen gibt es?

▲8▲ Taschenrechner geben die Ziffern 0 bis 9 mit Hilfe einer sogenannten *Siebensegmentanzeige* an.
Sieben gerade Teilstücke (Segmente) sind in folgender Form angeordnet:



a) Welche Segmente sind für die Ziffer 4 eingeschaltet?
b) Welche Segmente müßte man einschalten, um den Buchstaben *S* darzustellen?
c) Wieviel verschiedene Zeichen mit und ohne Bedeutung können mit Hilfe der 7 Segmente dargestellt werden?

▲9▲ Für einen 100-m-Lauf werden die Bahnen 1 bis 4 unter 4 Läufern ausgelost. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es?

▲10▲ Wieviel zusammengesetzte Wörter kann man aus einem der Wörter *Mathematik*, *Biologie*, *Musik* und einem der Wörter *Buch*, *Heft*, *Stunde*, *Arbeit* bilden, wenn letztere als Grundwörter verwendet werden?

▲11▲ Katrin, Michael, Claudia, Hartmut, Hannes und Anja begrüßen sich am 1. Schultag mit Handschlag. Wie oft gibt man sich insgesamt die Hand?

▲12▲ Auf wieviel verschiedene Arten läßt sich in der jeweiligen Abbildung das Wort ALPHA (bzw. das Wort HEITER) lesen?

```
    A
   L L
  P P P
 H H H H
A A A A A
```

```
     H
    E E
   I I I
  T T T T
 E E E E E
R R R R R R
```

▲13▲ Frank, Michael und Lars wollen mit Sabine, Claudia, Ute, Grit Tischtennis spielen. Jeder Junge soll gegen jedes Mädchen einmal spielen.
Wie viele Spiele müssen sie durchführen?

▲14▲ Klaus will seinem Freund in Leipzig einen Eilbrief (Porto: 0,70 M) schicken. Folgende Briefmarken stehen ihm in genügender Anzahl zur Verfügung:
Wieviel verschiedene Frankierungen sind möglich?

5 10 20 30

40 50 70

L. Flade/H. Knopf

Wolf, Ziege und Kohlköpfe

Die älteste mathematische Aufgabensammlung in lateinischer Sprache ist Anfang des 9. Jahrhunderts am fränkischen Hof entstanden. Keine der überlieferten Handschriften, die vor allem im 10./11. Jahrhundert mehr oder weniger sorgfältig von Kopisten angefertigt worden sind, nennt einen Autor. Doch durch die Untersuchungen des Mathematikhistorikers *M. Folkerts* gewinnt die Vermutung, daß der angelsächsische Mönch *Alkuin* (735 bis 804) Verfasser dieser Sammlung sei, wieder an Wahrscheinlichkeit.

Alkuin war 781 als Gesandter an den Hof Karls des Großen (Karl I., seit 768 König der Franken) gekommen. Er machte St. Martin in Tours zu einer der führenden Bildungsstätten des Fränkischen Reiches und amtierte als Leiter der Hofschule in Aachen. Er setzte sich dafür ein, das Wissen des Altertums zu pflegen und weiterzutragen. Die Klöster und Bischofsitze im Frankenreich sollten nach seinen Plänen Schulen erhalten. In den Elementarschulen sollten Lesen und Schreiben, einfaches Rechnen sowie Religion und Psalmengesang, in den höheren Schulen die Sieben freien Künste gelehrt werden. Zu diesen gehörten die *Unterstufe*, Trivium genannt, mit Grammatik (der lateinischen Sprache), Rhetorik (Redeübungen auf dem Gebiet des Rechtswesens) und Dialektik (Denklehre, Erörterung wissenschaftlicher Fragen) und die *Oberstufe*, Quadrivium genannt, mit Arithmetik, Geometrie (zugleich mit Erdkunde und Naturgeschichte), Musik (Theorie und Pflege des Kirchengesangs) und Astronomie.

Die dem *Alkuin* zugeschriebene Aufgabensammlung enthält 56 Aufgaben. Unmittelbar auf die jeweilige Aufgabe folgt die Lösung.

Die Probleme stehen überwiegend in der römischen Tradition, daneben sind griechisch-byzantinische und arabische Einflüsse anzunehmen. Einige Aufgaben treten erstmals in dieser Aufgabensammlung auf. Dazu gehören die Aufgaben 17 bis 20, die *Transportprobleme* behandeln: Bestimmte Lebewesen sind über einen Fluß zu setzen.

Die Aufgabe 18 ist besonders populär geworden:
Ein Mann mußte einen Wolf, eine Ziege und ein Bündel Kohl über einen Fluß hinüberbringen und konnte kein anderes Boot finden, außer ein solches, das nur den Mann und mit ihm entweder den Wolf oder die Ziege oder die Kohlköpfe zu tragen vermochte. Natürlich wollte er alles unverletzt hinüberbringen. Es durften also weder der Wolf mit der Ziege noch die Ziege mit den Kohlköpfen allein gelassen werden. Wer es kann, der möge zeigen, auf welche Weise der Mann alles unverletzt hat hinüberbringen können.

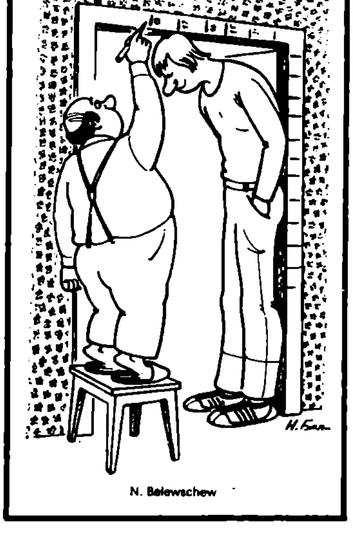
In der Aufgabe 19 wollen ein Mann, eine Frau und zwei Kinder über den Fluß (der Kahn trägt aber entweder nur den Mann oder die Frau oder die beiden Kinder); in der Aufgabe 20 handelt es sich um zwei Igel mit ihren Jungen; in der Aufgabe 17 sind drei Männer mit ihren Frauen über den Fluß zu setzen (keine der Frauen soll sich ohne ihren Bruder mit anderen Männern auf demselben Ufer befinden).

Mehrere der mittelalterlichen Aufgabensammlungen sind von der des *Alkuin* beeinflußt worden. In unterschiedlichen Varianten befinden sich die Transportaufgaben, später z. B. auch bei *Chuquet*, *Tartaglia* und *Bachet*.

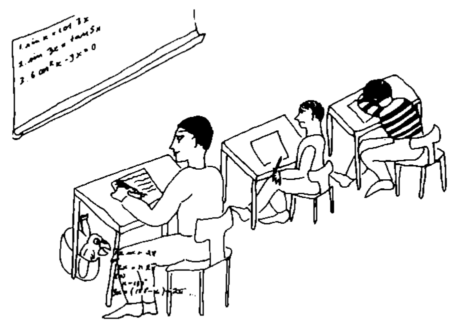
H. Pieper

Scherzfrage Alcuins an Kaiser Karl den Großen (768 bis 814)

Alcuin bat den Kaiser, als sie nach der Jagd zusammensaßen, doch zu verraten, nach wieviel Sprüngen sein Jagdhund einen in der Entfernung von 150 Fuß voraushoppelnden Hasen einholt, wenn der Hase bei jedem Sprung 7 Fuß zurücklegt, der Jagdhund jedoch schneller ist und 9 Fuß weit springt.



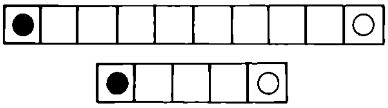
In freien Stunden · alpha-heiter



Das Groschenspiel

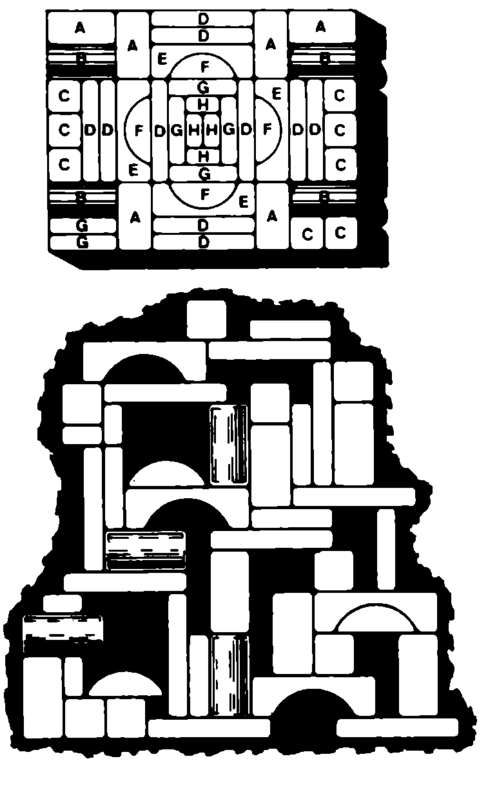
Im Handumdrehen hast du zwei Bahnen mit je 10 bzw. 5 Feldern aufgezeichnet. Die linken Enden beider Bahnen besetzt du, die rechten Enden der Gegner mit je einer Münze. Ihr zieht beide abwechselnd nach Belieben eine eurer Münzen so viele Felder vorwärts oder rückwärts, wie du bzw. dein Gegner es für günstig hältst. Züge sind nur bis zur gegnerischen Münze erlaubt, gesprungen werden darf nicht. Versuche, deinen Gegner in die Ecke zu treiben! *Varianten:* Ändert die Bahnlängen und die Anzahl der Bahnen! Das gesamte Schachbrett, jedoch auch Teile, liefern reizvolle Spielpläne.

Aus: Urania, Berlin



Spiel mit dem Baukasten

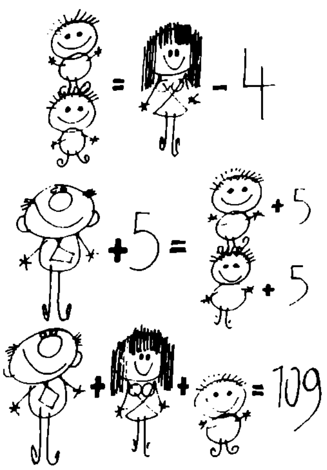
Marie-Luise hat sich ein Märchenschloß aus den Steinen ihres Baukastens gebaut. Einen Stein hat sie nicht verwendet. Welchen? *Aus: Füles, Budapest*



Wie alt sind Vater, Mutter und der Sohn?

Ein junger Mann, nach seinem und dem Alter seiner Eltern befragt, antwortet scherzhaft in folgender Weise: Meine Mutter war vor vier Jahren doppelt so alt, wie ich jetzt bin. Mein Vater wird in fünf Jahren doppelt so alt sein, wie ich dann sein werde. Addiert man zu meinem Alter das Alter meines Vaters und das meiner Mutter, so ergeben sich 109 Jahre.

Aus: ND, Berlin



Wortspiele

Z	A	H	L
M	E	E	R

K	U	G	E	L
R	E	G	A	L

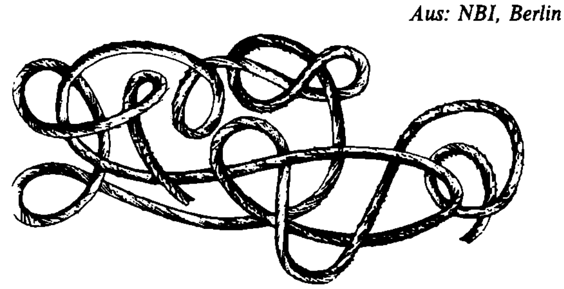
M	A	T	H	E
L	O	T	T	O

Schüler A. Suchanow, Neubrandenburg

Verheddert

Wie viele Knoten hat diese Schnur?

Aus: NBI, Berlin



Knacknüsse

Zum Jahreswechsel werden Nüsse unter Kinder verteilt. Das erste Kind bekommt eine Nuß und $\frac{1}{10}$ des Restes, das zweite Kind bekommt zwei Nüsse und $\frac{1}{10}$ des neuen Restes usw. Am Ende hat jedes Kind gleich viele Nüsse. Es sind max. 200 Nüsse vorhanden. Wie viele Kinder sind anwesend und wieviel Nüsse bekommt jedes von ihnen?

Schüler U. Schwekendieck, Crimmitschau

Silvesterlauf

Gib Name, Haarfarbe, Körpergröße und Plazierung jedes der drei Medaillengewinner eines Silvesterlaufes an, wenn gilt:

(1) Die Namen der drei Erstplazierten sind Axel, Bernd und Christian.
(2) Die Haarfarben der Medaillengewinner sind blond, brünett und schwarz.
(3) Die Körpergrößen der Medaillengewinner sind 162 cm, 164 cm und 165 cm.
(4) Wenn Axel schwarzes Haar hat, so ist Christian nicht der Sieger.
(5) Der Sieger ist blond und größer als Bernd.
(6) Der Drittplazierte hat schwarzes Haar.
(7) Axel ist kleiner als Bernd.

Mathematikfachlehrer W. Träger, Döbeln

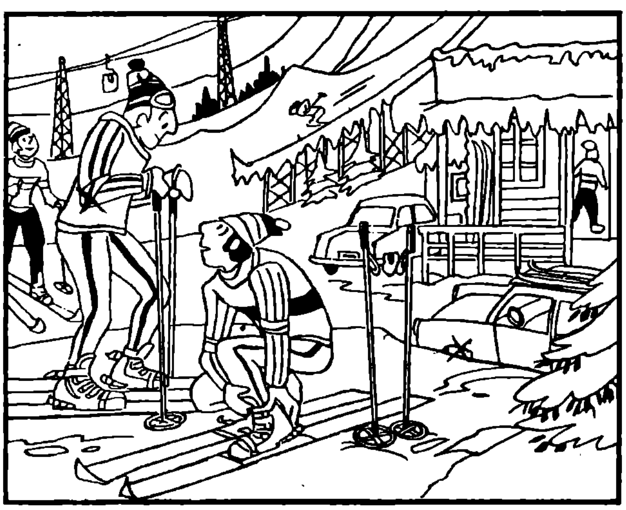
Verschlüsselter Wunsch für 1986

Die folgende Wortreihe stellt die verschlüsselte Form eines Wunschsatzes dar. Der Kode besteht in einer eineindeutigen Abbildung des Alphabets auf sich. Findet diesen Kode und entschlüsselt den Satz: XIS XUEPTDJEP EUDJ WIEM ESGOMH IP FES TDJUME UPF WIEM TQATT CEIN LPOCEMP!

Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

Auf der Ski-Piste

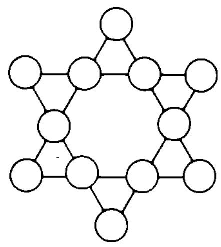
Vergleiche die beiden Bilder miteinander! Bei genauer Betrachtung ergeben sich mindestens 15 Unterschiede.



Der Zauberstern

Verteile die Zahlen 1, 2, 3, ..., 11, 12 so auf den Stern, daß in jeder Geraden die Summe 26 beträgt. Die Summe der (sechs) Zahlen an der Spitze soll dabei einerseits 30 und andererseits 26 betragen.

Aus einer sowjetischen Tageszeitung



Zum Jahreswechsel

$1985 = 1 + 2 + 34 \cdot 56 + 78 + 9 \cdot 0$

$1 + 9 - 8 + 5 = \sqrt{1 \cdot 9 + 8 \cdot 5} = 1 + 9 + 8 + 5 - (1 + 9) \cdot 8 : 5$

$1 \cdot (9 - 8) \cdot 5 = \sqrt{1 \cdot 9 + 8 \cdot 5 + (1 - 9) \cdot (8 - 5)}$

$1 = 1 \cdot \sqrt{9} : (8 - 5)$ $\quad$ $1 = (-1 + \sqrt{9}) : (8 - 6)$

$9 = 1 \cdot \sqrt{9} \cdot (8 - 5)$ $\quad$ $9 = (1 + \sqrt{9})! : 8 + 6$

$8 = (-1 + \sqrt{9})! + (8 - 5)!$ $\quad$ $8 = 1 + 9 - 8 + 6$

$5 = 1 - 9 + 8 + 5$ $\quad$ $6 = 1 \cdot (9 - 8) \cdot 6$

$7 = 1 + 9 - 8 + 5 = 1 \cdot 9 - 8 + 6 = -1 + 9 - 8 + 7 = 7$

$13 = 1 + 9 + 8 - 5 = -1^9 + 8 + 6 = -1^9 + 8 + 6 = 13$

Bestimme alle Paare natürlicher Zahlen x und y, welche die folgende Gleichung erfüllen!

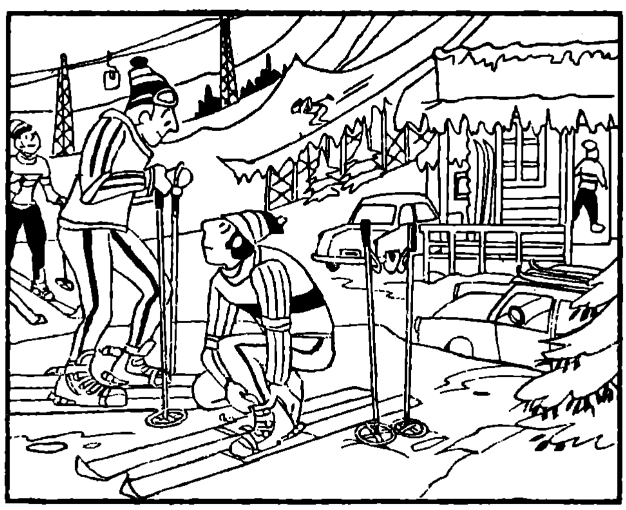
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{1985}$$

Setze an Stelle der Sternchen in $1 * 9 * 8 * 6$ so Grundziffern, daß die so erhaltene siebenstellige Zahl aus lauter verschiedenen besteht und durch $1 + 9 + 8 + 6$ teilbar ist!

Gib alle Möglichkeiten an!

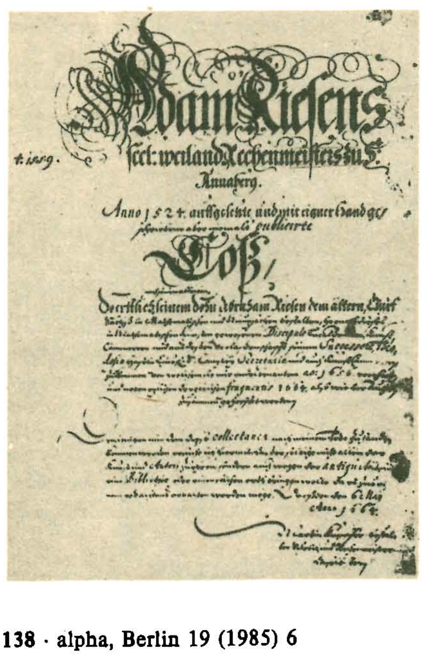
Mit diesen Zauberzahlen grüßen alle alpha-Leser: H. Förg, Schwaz (Österreich); H. Gossler, Köln; A. Körner, Leipzig; Mathias Müller, Erfurt; F. Rahm, Schönebeck; Heike Simmank, Niesky· Thomas Thurn, Lodersleben; „Pythagoras“, Groningen (Niederlande).

Aus der finnischen math. Schülerzeitschrift *Funktio*, gezeichnet von Rukka Kosonen, Hameen Unna



Einige Aufgaben aus der Coß von Adam Ries

Adam Ries (1492 bis 1559) schrieb die *Coß*, ein Lehrbuch der Algebra, in den Jahren 1523 bis 1524 in Annaberg.
Man bezeichnete damals die Algebra oder die Lehre von den Gleichungen mit dem Ausdruck *Coß*, aus dem italienischen *regola de la cosa*. Das italienische Wort *cosa* (aus dem Lateinischen *causa*, Ursache) bezeichnete ursprünglich das *Ding*, die *Sache*, später im 14. und 15. Jahrhundert eine zu berechnende Größe sowie die Lösung einer Gleichung. Daher wurde auch die Algebra mit *Coß* bezeichnet, die Algebraiker nannte man *Cossisten*. Die Coß von Adam Ries ist im Druck nicht erschienen, da damals das Bedürfnis nach einem Lehrbuch der Algebra in deutscher Sprache nicht so groß war wie das Bedürfnis nach Rechenbüchern. Dagegen gehörten die Rechenbücher von Adam Ries zu den am weitesten verbreiteten Lehrbüchern des 16. und 17. Jahrhunderts. So erschienen von dem 1518 bis 1522 geschriebenen Buch „Rechnung auff der Linihen und Federn …" von 1522 bis 1656 insgesamt 108 Auflagen.
Erst *Bruno Berlet* konnte 1860 im Programmheft der Annaberger Progymnasial- und Realanstalt einen Auszug aus der ersten Coß-Fassung veröffentlichen und diesen 1892, zum 400. Geburtstag von Adam Ries, nochmals als Sonderdruck herausgeben.[1])
Die Handschrift der *Coß* von 1524 wird in dem 1984 eingerichteten Adam-Ries-Museum zu Annaberg-Buchholz aufbewahrt.



Sie enthält die *Rechenkunst* (das Rechnen mit der Feder wie in den Rechenbüchern von Ries), die *Coß* (Algebra) und 318 Aufgaben, die überwiegend mit Hilfe linearer Gleichungen zu lösen sind. In dem theoretischen Teil werden die Regeln für das Lösen von Gleichungen, auch von quadratischen Gleichungen, angegeben. Adam Ries benutzt bereits das Zeichen ξ[2]) (aus dem später wahrscheinlich das „x" entstanden ist) für die zu berechnende Zahl bzw. für die Wurzel einer Gleichung. Zahlen, insbesondere natürliche Zahlen werden mit dem Zeichen „Ø" versehen, z. B. bedeutet bei Ries 2 Ø die natürliche Zahl 2. Auch für Quadrate, Kuben usw. von Zahlen führt Ries besondere Zeichen ein.
Von den 318 Aufgaben der *Coß* werden bei *Berlet* 144 Aufgaben abgedruckt.

1. Drei Aufgaben aus der Coß, die mit Hilfe einer linearen Gleichung mit einer Variablen zu lösen sind

Aufgabe 1 (Nr. 5)

Wir geben zunächst diese Aufgabe im Originaltext von Ries wieder:
Item mach mir auß 10 Zwey teyl also, so ich eynenn teyl vom andern hinwegk nim Das 2 vorlasenn ader vberpleiben werdenn.

Lösung von Ries	*In moderner Fassung*
Setz Die ein Zal sey 1 ξ,	x
so muß nothalbenn Die grossere Zahl seyn	
1 ξ + 2 Ø,	$x + 2$
addir Zusammenn komen	
2 ξ + 2 Ø gleich 10 Ø.	$2x + 2 = 10$
Nim hinwegk vff peydenn	-2
teylenn 2 Ø bleiben	
2 ξ gleich 8 Ø.	$2x = 8$
Machs so komen 4 Die kleiner Zal,	$x = 4$
muß nothalbenn Die ander	
6 sein.	$x + 2 = 6$

In moderner Fassung lautet diese Aufgabe: Die Zahl 10 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß die Differenz dieser Summanden gleich 2 ist.

[1]) *Berlet, Bruno:* Adam Riese, sein Leben und seine Art zu rechnen. Die Coß von Adam Riese. Leipzig, Frankfurt a./M. 1892. Vergleiche auch Deubner, Fritz: … nach Adam Ries. Leben und Wirken des großen Rechenmeisters. Leipzig/Jena: Urania-Verlag 1959.

[2]) Aus satztechnischen Gründen wird dieses Zeichen mit „ξ" wiedergegeben.

Lösung: Es sei x der kleinere Summand. Dann ist $x + 2$ der größere Summand, und es gilt
$x + x + 2 = 10$, also $2x = 8$, $x = 4$ und $x + 2 = 6$.
Der kleinere Summand ist also gleich 4 und der größere Summand gleich 6.
Man sieht, daß Ries der modernen Lösung dieser Aufgabe recht nahe kommt, nur mit dem Unterschied, daß er das Gleichheitszeichen noch nicht benutzt und daher den Sachverhalt sprachlich darstellen muß.
Aufgaben dieser Art, die zu einem ganzzahligen Ergebnis führen, können bereits Schüler der 4. Klasse durch inhaltliche Überlegungen lösen.
In dem vorliegenden Falle kann die Aufgabe mit der folgenden *Tabelle* gelöst werden:

kleinerer Summand x	größerer Summand $x + 2$	Summe
1	3	4
2	4	6
3	5	8
4	6	10
>4	>6	>10

Nur für $x = 4$ und $x + 2 = 6$ wird die verlangte Summe 10 erreicht.

Aufgabe 2 (Nr. 23)

Ein Vater hat 4 Söhne. Er vermacht dem ersten $\frac{1}{4}$, dem zweiten $\frac{1}{5}$, dem dritten $\frac{1}{6}$ seines Vermögens und dem vierten 92 fl.
Wie groß war das Vermögen des Vaters?
(fl. (Gulden) ist eine alte Goldmünze; die Abkürzung ist aus dem französischen *florin* zu erklären.
Hier und bei den folgenden Aufgaben ist der Aufgabentext sprachlich und orthographisch modernisiert worden.)
Lösung: Das Vermögen des Vaters betrage x fl. Dann gilt

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} + 92 = x,$$
$$15x + 12x + 10x + 5520 = 60x,$$
$$23x = 5520,$$
$$x = 240.$$

Das Vermögen des Vaters betrug also 240 fl.
Adam Ries gibt die folgende Lösung an:

Setz des Geldes sei gewesen 1 ξ	x
nim hinwegk	
$\frac{1}{4}\,\xi$ $\frac{1}{5}\,\xi$ und $\frac{1}{6}\,\xi$	$\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} = \frac{37}{60}x$
pleiben $\frac{23}{60}$ gleich 92 Ø	$\frac{23}{60}x = 92$
Machs, so komen 240 die Zall.	$x = 240.$

Aufgabe 3 (Nr. 118)

Drei Windmühlen mahlen gleichzeitig. So der Wind geht, werden in 8 Stunden auf der ersten 20 Scheffel, auf der zweiten 17 Scheffel, auf der dritten 15 Scheffel gemahlen.
In wieviel Stunden werden 24 Scheffel von den drei Windmühlen gemahlen? (Scheffel ist ein altes deutsches Hohlmaß für Getreide mit unterschiedlichem Rauminhalt, 23 l bis 223 l.)

Lösung: In x Stunden werden gemahlen (jeweils in Scheffeln) auf der 1. Windmühle $\frac{20}{8}x$, auf der 2. Windmühle $\frac{17}{8}x$, auf der 3. Windmühle $\frac{15}{8}x$. Daher gilt

$$\frac{20}{8}x + \frac{17}{8}x + \frac{15}{8}x = 24,$$
$$20x + 17x + 15x = 24 \cdot 8,$$
$$52x = 24 \cdot 8,$$
$$x = \frac{24 \cdot 8}{52} = \frac{48}{13} = 3\frac{9}{13}.$$

Also werden 24 Scheffel von den drei Windmühlen in $3\frac{9}{13}$ Stunden gemahlen.

2. Eine Optimierungsaufgabe

Aufgabe 4 (Nr. 119)

Ein Münzmeister hat 100 mk. gekorntes Silber, wobei 1 mk. 7 Lot Feinsilber enthält. Ferner hat er 50 mk. gekorntes Silber, wobei 1 mk. 12 Lot Feinsilber enthält. Wieviel mk. gekorntes Silber, bei dem 1 mk. 10 Lot Feinsilber enthält, kann er daraus höchstens herstellen, wenn er keinen Zusatz nimmt, also weder weitere Mengen an Silber noch an anderen Legierungsmetallen verwenden soll? [mk. (Mark) ist hier eine alte Gewichtseinheit (233,8 g).
Lot ist ebenfalls eine alte Gewichtseinheit: 1 Lot $= \frac{1}{16}$ mk. Gekörntes Silber ist eine Silberlegierung; der Gehalt an Feinsilber wird dabei in Lot je 1 mk. angegeben.]
Lösung: Verwendet der Münzmeister von der 1. Sorte (7lötiges Silber) x mk. und von der 2. Sorte (12lötiges Silber) y mk., um 10lötiges Silber herzustellen, so gilt

$$7x + 12y = 10(x + y). \qquad (1)$$

Dabei ist $x \leqq 100$ und $y \leqq 50$.
Aus (1) folgt $7x + 12y = 10x + 10y$, also $2y = 3x$, $x = \frac{2}{3}y$.
Wegen $y \leqq 50$ gilt $x = \frac{2}{3}y \leqq \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$, also $x + y \leqq 50 + 33\frac{1}{3} = 83\frac{1}{3}$.
Der Münzmeister kann also aus den beiden Sorten höchstens $83\frac{1}{3}$ mk. 10lötiges Silber herstellen, wenn er keinen Zusatz nehmen soll.
Die Lösung von Ries ist etwas umständlicher; er benutzt aber ebenfalls die Variable ξ.
In seiner Lösung kritisiert Ries den Wardein (Münzprüfer) Hans Conrad und den Wardein Scheurlein aus Nürnberg, die sich „vil Rechens vermessen und das geringste exempel der ξ nichtt hat machen mugenn", also mit der Variablen nicht arbeiten und daher diese Aufgabe nicht lösen konnten.
In der Originalfassung der Aufgabe von Ries wird das Edelmetall nicht angegeben; es konnte auch Gold gewesen sein.

3. Eine Aufgabe aus der Coß, die auf ein lineares Gleichungssystem mit 3 Variablen führt

Aufgabe 5 (Nr. 122)

Drei Personen A, B und C kaufen ein Pferd für 12 fl. Keiner kann es allein bezahlen.
Nun spricht A zu B und C: „Wenn mir jeder von euch ½ seines Geldes gibt, so kann ich das Pferd bezahlen."
Darauf spricht B zu A und C: „Wenn mir jeder von euch ⅓ seines Geldes gibt, so kann ich das Pferd bezahlen."
Schließlich spricht C zu A und B: „Wenn mir jeder von euch ¼ seines Geldes gibt, so kann ich das Pferd bezahlen."
Nun frage ich, wieviel Geld jeder gehabt hat.
Lösung: A möge a fl., B möge b fl. und C möge c fl. gehabt haben.
Dann gilt

$$a + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = 12, \text{ also } 2a + b + c = 24, \quad (1)$$
$$b + \frac{c}{3} + \frac{a}{3} = 12, \text{ also } a + 3b + c = 36, \quad (2)$$
$$c + \frac{a}{4} + \frac{b}{4} = 12, \text{ also } a + b + 4c = 48, \quad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt $\quad -2b + 3c = 12. \quad (4)$
Aus (2) folgt $\quad 2a + 6b + 2c = 72,$
also wegen (1) $\quad 5b + c = 48, \quad (5)$
$\quad 15b + 3c = 144,$
also wegen (4) $17b = 132$, $b = \frac{132}{17} = 7\frac{13}{17}$.
Hieraus folgt wegen (5)

$$c = 48 - 5b = 9\frac{3}{17}$$

und wegen (2)

$$a = 36 - 3b - c = 3\frac{9}{17}.$$

Es hatten also A $3\frac{9}{17}$ fl., B $7\frac{13}{17}$ fl. und C $9\frac{3}{17}$ fl.
Adam Ries gibt auch (in der analogen Aufgabe Nr. 47) ein Lösungsverfahren für derartige Aufgaben an, das zwar in Worten dargestellt wird, im Prinzip aber dem obigen Lösungsverfahren entspricht.
Er bemerkt ferner, daß der Münzprüfer Hans Conrad einem schwarzen Mönch des Prediger-Ordens, namens Aquinas, für die Lösung dieser Aufgabe einen Gulden gegeben habe, von dem auch der erfahrene Mathematicus Andreas Alexander gelernt habe. Er sagt dazu: „Hab dir es besser herausgestrichen. Magst sein Exemplar sehen oder seine Operacion."
Die Lösung von Ries mit Hilfe der Variablen ξ bedeutete damals einen beachtlichen Fortschritt gegenüber den Verfahren der zeitgenössischen Rechenmeister.

4. Adam Ries und die Anwendung der *regula falsi*

In seiner *Coß* wendet Adam Ries die *regula falsi*, die damals von den Rechenmeistern zur Lösung linearer Probleme häufig benutzt wurde, nicht mehr an, da er mit Hilfe der Variablen ξ zu einem besseren Lösungsverfahren gelangte. In der *Practica* des großen Rechenbuches von 1550 findet sich aber noch die folgende Aufgabe:
„Gott grüß euch Gesellen all 30." Antwortet einer: „Wenn unser sind noch so viel und halb so viel, so wären unser 30."
Die Frage ist, wie viel ihr gewesen.
Lösung: Aus $x + x + \frac{x}{2} = 30$ folgt $4x + x = 60$, $5x = 60$, also $x = 12$. Es waren also 12 Gesellen.
Adam Ries löst diese Aufgabe wie folgt:
Nimm eine Zahl, die durch 2 teilbar ist, z. B. 16; dann ist $16 + 16 + 16/2 = 40$, also 10 zu viel. Nimm 14; dann ist $14 + 14 + 14/2 = 35$, also 5 zu viel.
Nun nimmt er einen linearen Verlauf an (was nicht bewiesen wird) und erhält durch Extrapolation die Anzahl der Gesellen:

$$\frac{14 \cdot 10 - 16 \cdot 5}{5} = \frac{60}{5} = 12.$$

Schüler der 4. Klasse können diese Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle lösen, wobei aber nicht extrapoliert wird, sondern die Tabelle fortgesetzt wird, bis der richtige Wert erscheint:

x	$x + x + \frac{x}{2}$
16	40
14	35
12	30
<12	<30

Nur im Falle $x = 12$ ist $x + x + \frac{x}{2} = 30$.
Also waren es 12 Gesellen. *R. Lüders*

Eine interessante, anspruchsvolle Aufgabe

Herrn Nationalpreisträger
Prof. Dr. Herbert Beckert gewidmet

▲2607▲ Es sei ein konvexes Sechseck $P_1P_2P_3P_1'P_2'P_3'$ mit Durchmesser d gegeben. Die Diagonalen P_1P_1' und P_3P_3' schneiden sich in S und bilden den Winkel $\psi = P_1SP_3$. Dann gilt für den Flächeninhalt F des Sechsecks

$$F \leqq d^2 \sin\frac{\psi}{2}.$$

Für $0 < \psi \leqq \frac{\pi}{3}$ ist diese Abschätzung scharf, und zwar wird das Gleichheitszeichen für den Grenzfall des Drachenvierecks mit $P_1' = P_2' = P_3' = S$ und $SP_1 = SP_2 = SP_3 = d$ angenommen.
Dies ist zu beweisen.
(Aus einem Beitrag über *Starke Konvexität beim Standortproblem – Autor:* Prof. Dr. Joachim Focke, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig)
Das ZK der SED gratulierte Prof. Dr. H. Beckert im Oktober 1985 zum 65. Geburtstag. Zitiert (ADN/LVZ):
...Große Anerkennung finden Ihre Arbeiten zur Verbindung von Mathematik und Mechanik sowie Physik auf hohem theoretischen Niveau und Ihr erfolgreiches Wirken zur Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses...

Lösungen

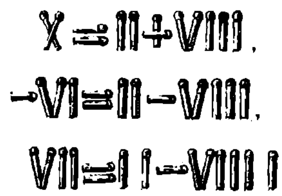
Lösungen zur: Sprachecke

▲1▲ *Aufgabe:* Welche Zahl ist in der Folge 7, 17, 37, 77, ?, 317, ... anstelle des Fragezeichens einzusetzen?

Lösung: Man gelangt in der Folge von einer Zahl zur nächsten, indem man zum Doppelten der Zahl 3 addiert. Folglich ist 157 einzusetzen.

▲2▲ *Aufgabe:* Legt in jeder Reihe ein Streichholz so um, daß überall eine wahre Gleichung entsteht!

Lösung:



$(7 = |1 - 8|)$

▲3▲ *Aufgabe:* Symmetrische Muster: Welche Zahlen werden durch diese symmetrischen Muster dargestellt? Wie viele Symmetrieachsen (wenn vorhanden) hat jedes Muster? Welche Muster sind radialsymmetrisch?

Lösung: Radialsymmetrisch sind alle Muster außer *g*.

	a	*b*	*c*	*d*
Zahlen	13	12	11	12
Symmetrieachsen	2	0	2	2

	e	*f*	*g*	*h*	*j*
Zahlen	12	12	13	12	12
Symmetrieachsen	4	4	1	4	2

▲4▲ *Aufgabe:* Eine Zeitung umfaßt 36 Seiten und hat eine tägliche Auflage von 600 000 Exemplaren. Jede Seite ist ein Rechteck, dessen Ausmaße 50 cm und 33 cm betragen. Um jede Seite gibt es einen unbedruckten Rand von 2 cm Breite.
a) Wie groß ist die bedruckte Fläche?
b) Wie groß ist die Fläche des Papiers, das für die tägliche Auflage der Zeitung notwendig ist?

Lösung: a) Die bedruckte Fläche beträgt
$0{,}46\,\text{m} \cdot 0{,}29\,\text{m} \cdot 36 \cdot 600\,000 = 2\,881\,440\,\text{m}^2$.

b) Die benötigte Fläche des Papiers beträgt
$0{,}5\,\text{m} \cdot 0{,}33\,\text{m} \cdot 36 \cdot 600\,000 = 3\,564\,000\,\text{m}^2$.

Lösung zu: Eine Aufgabe zum Knobeln und Basteln

von *Niels Neumann*, nach Kürzungen durch die Redaktion:
In jeder Ecke des Polyeders muß die Summe der Größe der Innenwinkel der Seitenflächen, die hier zusammenstoßen, kleiner als 360° sein. Da die Größe der Innenwinkel beim regelmäßigen Sechseck 180° und beim regelmäßigen Fünfeck 108° beträgt, müssen in jeder Ecke entweder (a) genau zwei Sechsecke und ein Fünfeck oder (b) genau ein Sechseck und zwei Fünfecke zusammenstoßen. Wir betrachten die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks. Würde in vier Ecken die Eigenschaft (b) bestehen, so müßte für die fünfte Ecke die Eigenschaft (a) eintreten. Also können nur in jeder Ecke zwei regelmäßige Sechsecke und ein regelmäßiges Fünfeck zusammenstoßen.
Für die folgenden Rechnungen sei E die Anzahl der Ecken des Körpers, K die Anzahl der Kanten, s die Anzahl der Sechsecke und f die Anzahl der Fünfecke. Die Anzahl der Seitenflächen ist also $F = s + f$.
Jede Ecke wird von drei Kanten gebildet; und dabei wird jede Kante zweimal genutzt. Also gilt:

$$3E = 2K. \qquad (1)$$

Jedes Fünfeck wird von fünf Sechsecken umgeben; ein Sechseck grenzt aber nur an drei Fünfecke. Deshalb ist:

$$5f = 3s. \qquad (2)$$

Jede Kante des Körpers ist Seite für genau zwei der Seitenflächen; und deshalb gilt:

$$5f + 6s = 2K. \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) erhalten wir

$$2K = 3s + 6s = 9s. \qquad (4)$$

Aus (1) ergibt sich dann

$$3E = 9s$$

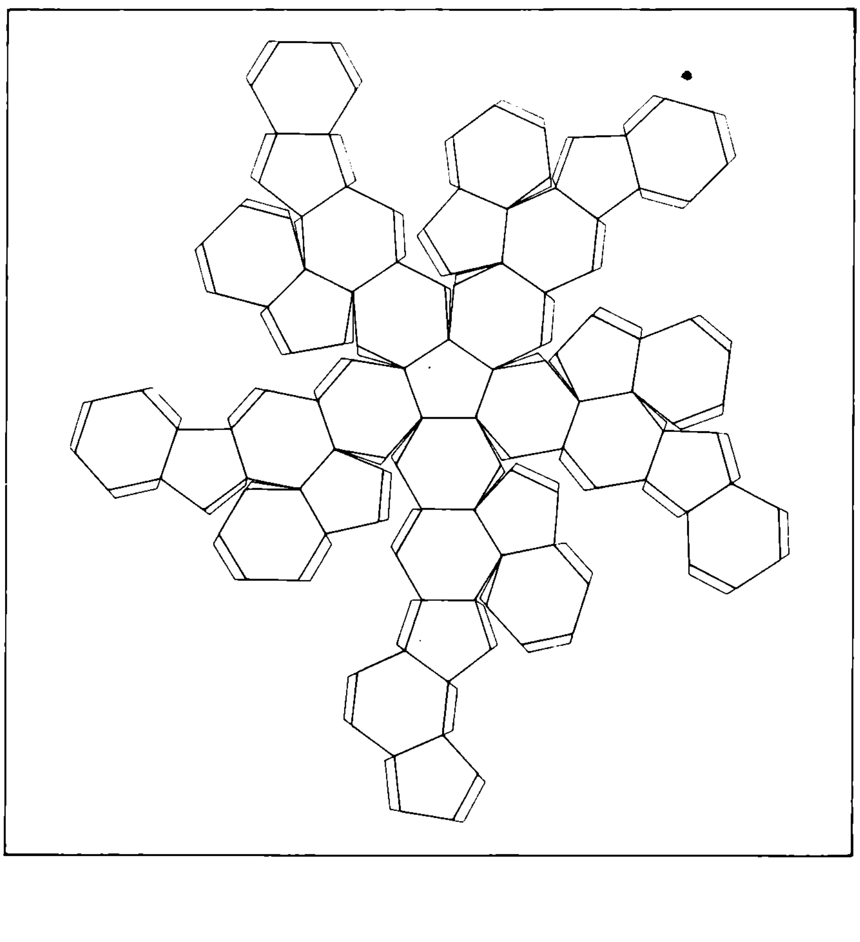
und damit

$$E = 3s \qquad (5)$$

Nach dem *Eulerschen Polyedersatz* ist $E + F - K = 2$ und damit $10E + (10s + 10f) - 10K = 20$. Wegen (2), (4) und (5) folgt daraus

$$10(3s) + 10s + 6s - 5 \cdot 9s = 20$$

und $s = 20$.
Aus $5f = 3s = 3 \cdot 20$ ergibt sich $f = 12$.
Weiterhin ist $E = 3s = 3 \cdot 20 = 60$.
Das Polyeder besteht also aus 12 Fünfecken und 20 Sechsecken, und es hat 60 Ecken. Daß es einen solchen Körper überhaupt gibt, kann man nun durch Basteln nachweisen. (Das Bild zeigt ein Körpernetz, das ich entworfen habe.)
Von jeder Ecke des Körpers gehen 11 Verbindungsstrecken zu anderen Ecken aus, die keine Raumdiagonalen sind; dies sind drei Kanten des Körpers, $2 \cdot 3 = 6$ Flächendiagonalen von zwei Sechsecken und zwei Flächendiagonalen eines Fünfecks. Folglich gibt es von jeder Ecke aus genau $60 - 11 - 1 = 48$ Ecken, zu denen die Verbindungsstrecke eine Raumdiagonale ist. Dabei wird jede Raumdiagonale genau zweimal erfaßt; also hat der Körper genau $\frac{60 \cdot 48}{2} = 1440$ Raumdiagonalen.
Anmerkung der Redaktion: Nimmt man beim Fernsehfußball die fünf- und sechseckigen Oberflächenteile als ebene Flächen



an, so erhält man gerade einen Körper der obigen Art. Zu unserem Körper kommt man auch auf folgende Weise: Einem (Pentagon-)Dodekaeder werden die 20 Ecken durch jeweils einen ebenen Schnitt so abgetrennt, daß ein Drittel der von einer Ecke ausgehenden Kante verlorengeht. (Diese Schnitte sind regelmäßige Fünfecke, und von den Seitenflächen des Dodekaeders bleiben dabei regelmäßige Sechsecke übrig.) *E. Quaisser*

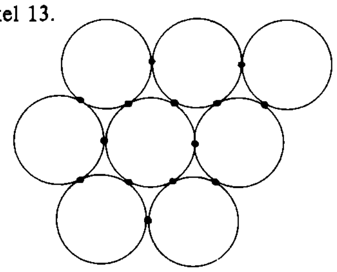
Ergebnisse bzw. Lösungshinweise zu: Aufgaben aus der polnischen math. Schülerzeitschrift plus-minus

▲1▲ Krzysztof 5, Piotr 4, Marek 3, Slawek 2, Roman 1.

▲2▲ Der Ringfinger.

▲3▲ Großvater 97, Sohn 79, Enkel 31, Urenkel 13.

▲4▲



▲5▲ Multipliziert man 11 beliebig oft mit sich selbst, erhält man immer eine Zahl mit der Einerziffer 1, denn $1 \cdot 1 = 1$. Wir bestimmen die letzte Ziffer der Potenzen von 7:

$7^2 = 7 \cdot 7 = 4\underline{9}$ $\quad 7^5 = \ldots.1 \cdot 7 = \ldots.\underline{7}$

$7^3 = 49 \cdot 7 = 54\underline{3}$ $\quad 7^6 = \ldots 7 \cdot 7 = \ldots.\underline{9}$

$7^4 = 543 \cdot 7 = \ldots.\underline{1}$, denn $3 \cdot 7 = 2\underline{1}$

und stellen unsere Untersuchung in einer Tabelle zusammen:

(n Exponent, z Einerziffer)

n	2	3	4	5	6	7	8
z	9	3	1	7	9	3	1

1980 ist durch 4 teilbar für $n = 1980$, endet 7^n (siehe Tabelle) auf 1. Die Differenz der beiden Potenzen endet deshalb auf 0.

▲6▲ Wegen $\overline{AB} + \overline{BC} = 30\,\text{km} = \overline{AC}$ liegen A, B, C auf einer Geraden. D kann nicht auf dieser Geraden liegen, denn dann wäre $\overline{CD} \neq 15\,\text{km}$. D liegt einerseits auf einem Kreis um A mit $\overline{AD} = 50\,\text{km}$ und andererseits auf einem Kreis um C mit $\overline{CD} = 15\,\text{km}$. Beide Kreise haben keinen gemeinsamen Punkt, die Aufgabe ist deshalb nicht lösbar.

▲7▲ a) 399 999 999 988
b) 599 999 999 995
c) n.l.

▲8▲ Die Zahl 13 hat auch diese Eigenschaften:
$13 + 1 = \underline{2} \cdot 7$; $13 + 2 = \underline{3} \cdot 5$;
$13 + 3 = \underline{4} \cdot 4$

▲9▲ $11 \cdot 11$; $111 \cdot 111$; $1111 \cdot 1111$; $11\,111 \cdot 11\,111$; $111\,111 \cdot 111\,111$; $1\,111\,111 \cdot 1\,111\,111$; $11\,111\,111 \cdot 11\,111\,111$.

▲10▲ $x = 24$; $y = 2$.

▲11▲ a) 0; b) Jede natürliche Zahl von 1 bis 100 ist Lösung.

▲12▲ Die Aufgabe ist nicht lösbar.

Lösungen zu: Knobeln und Kombinieren

▲1▲ A B C N
A D C N
A D E N
A D E F N
A B C D E N
A B C D E F N

3,7 km; 5,7 km; 4,7 km; 6,3 km; 9,7 km; 11,3 km.

▲2▲ a) 12, b) 15.
▲3▲ 12 ▲4▲ 9
▲5▲ 17 ▲6▲ 120
▲7▲ 8 ▲8▲ a) E, F, C, B
b) D, E, F, B, A c) 127
▲9▲ 24 ▲10▲ 12 ▲11▲ 15
▲12▲ a) 16, b) 32 ▲13▲ 12
▲14▲ 43

Lösung zu: Wolf, Ziege und Kohlköpfe

Der Mann brachte zuerst die Ziege an das andere Ufer. Darauf holte er den Wolf und brachte anschließend die Ziege wieder zurück. Am Ausgangsufer angekommen, nahm er die Kohlköpfe in den Kahn und ließ die Ziege dort. Die Kohlköpfe brachte er zum Wolf an das andere Ufer. Abschließend holte er die Ziege.

Lösungen zu: In freien Stunden · alpha-heiter

Das Groschenspiel

Die Versuchung, einen deiner Groschen im ersten Zug dem Gegner vor die Nase zu setzen, führt zu einer glatten Niederlage, denn der Gegner kontert dann auf der anderen Bahn auf die gleiche Weise, und du mußt Schritt für Schritt zurück in deine Niederlage. Dieser (theoretische) Reinfall zeigt, daß es günstig wäre, in beiden Reihen gleiche Abstände zu haben. Dein Gegner würde diese Abstände mit jedem Zug verändern, aber du hättest im nächsten Zug stets die Möglichkeit des Ausgleichens, also stets einen Antwortzug, mithin auch den letzten Zug. Ein gleicher Abstand läßt sich im ersten Zug erreichen, wenn du 5 Felder vorrückst. Marschiert dein Gegner n Felder vor, so rückst du auf der anderen Bahn n Felder vor; ist dein Gegner am Rückmarsch (k Felder), so gehe auf der gleichen Bahn k Felder nach vorn.

Spiel mit dem Baukasten

Ein Baustein der Serie F wurde nicht verwendet.

Wie alt sind Vater, Mutter und der Sohn?

V ist das Alter des Vaters, M das Alter der Mutter und S das Alter des Sohnes.

$$M - 4 = 2S$$
$$V + 5 = 2(S + 5)$$
$$M + V + S = 109.$$

Durch Lösen dieses Gleichungssystems erhält man $V = 45$, $M = 44$ und $S = 20$. Der Vater ist also 45 Jahre, die Mutter 44 Jahre und der Sohn 20 Jahre alt.

Wortspiele

Zahl – Mahl – Mehl – mehr – Meer;
Kugel, Kegel, Regel, Regal;
Mathe, Matte, Motte, Lotte, Lotto.

Verheddert

Die Schnur enthält einen Knoten.

Knacknüsse

Es müssen jeweils Zahlen der 9er Malfolge sein:

$81 - 1 = 80$; $80 : 10 = 8$; $80 - 8 = 72$;
$72 - 2 = 70$ $\quad 8 + 1 = 9$
$9 - 9 = 0$ $\quad 7 + 2 = 9$
$0 + 9 = 9$

Es sind 9 Kinder; 81 Nüsse werden verteilt, jeder bekam 9 Stück.

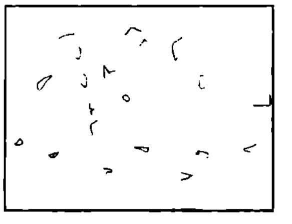
Silvesterlauf

Aus 1, 5 und 7 folgt: *Christian ist blond, 165 cm groß und Goldmedaillengewinner, Bernd ist 164 cm groß und Axel ist 162 cm groß*. Aus 2 und 4 und aus *Christian ist Sieger und blond* folgt:
Axel ist brünett. Aus 1 und 6 sowie aus *Christian ist Sieger und blond* und *Axel ist brünett* folgt: *Bernd ist schwarz und Bronzemedaillengewinner* und *Axel ist Silbermedaillengewinner*.

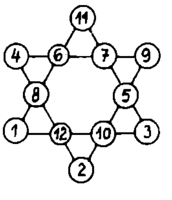
Verschlüsselter Wunsch für 1986

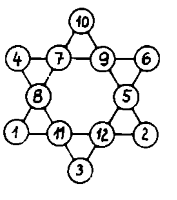
Kodierung: Unser Alphabet wird auf sich abgebildet nach der Vorschrift: Vokale bleiben fest und Konsonanten werden durch den im Alphabet nachfolgenden Konsonanten ersetzt (durch B).
Dekodierung: Vokale bleiben fest und Konsonanten werden durch den im Alphabet vorangehenden Konsonanten ersetzt.
Folglich lautet der Satz: WIR WUENSCHEN EUCH VIEL ERFOLG IN DER SCHULE UND VIEL SPASS BEIM KNOBELN!

Auf der Ski-Piste



Der Zauberstern





Zum Jahreswechsel

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \quad (1)$$

setze: $\quad x = am \quad (2)$

es folgt:

$$\frac{1}{am} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \quad (3)$$

hieraus: $\quad y = a\frac{m}{m-1} \quad (4)$

setze nunmehr:

$y = bc \quad (5)$

und: $\quad b = m - 1 \quad (6)$

bzw.: $\quad m = b + 1 \quad (7)$

folgt: $y = \frac{am}{b}$ (8)

mit (2) und (8) erhalten wir:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{am} + \frac{b}{am} = \frac{b+1}{am} \qquad (9)$$

(kontrolliere, daß mit (7) wieder (1) folgt). Zerlege nun die gegebene Konstante: $1985 = 5 \cdot 397$!

a) Setze: $b = 5$ dann folgt mit (7): $m = 6$ mit (4) folgt:

$y = 1985 \cdot \frac{6}{5} = 2382$ mit (2) folgt:

$x = 1985 \cdot 6 = 11\,910$;

b) setze: $b = 397$ dann folgt mit (7): $m = 398$

mit (4) folgt: $y = 1985 \cdot \frac{398}{397} = 1990$

mit (2) folgt: $x = 1985 \cdot 398 = 790\,030$;

c) setze: $b = 1$ (einfachste Variante, die aber dazu gehört) dann folgt mit (7): $m = 2$

mit (4) folgt: $y = 1985 \cdot 2 = 3970$

mit (2) folgt: $x = 1985 \cdot 2 = 3970$!

Die Lösung heißt also:

	$x =$	$y =$
1.	11910	2382
2.	790030	1990
3.	3970	3970

Die Zahl muß durch $24 = 3 \cdot 8$ teilbar sein. Um durch 8 teilbar zu sein, werden die letzten drei Stellen untersucht. Teilbar durch 8 sind 816, 856 und 896, wobei die erste und letzte Möglichkeit wegen Ziffernwiederholung ausscheiden. Auf die durch 3 teilbare Ziffernsumme fehlen 4, 7 oder 10, daher können folgende Ziffern eingesetzt werden: 0-4, 4-0, 0-7, 7-0, 3-4, 4-3, 3-7, 7-3.

Lösungen zu: Knobel-Wandzeitung
Heft 5/85

Bumerang

▲1▲ Man hätte beispielsweise folgende symmetrische Palindrome eintragen können: 1. ELLE, 2. EBBE, 3. EGGE, 4. ANNA, 5. ESSE, 6. KAJAK, 7. RADAR, 8. MONOM, 9. ROTOR, 10. NEBEN, 11. RENNER, 12. TANNAT, 13. RETTER, 14. NEFFEN, 15. NENNEN.

Schüttel-Tiere

▲2▲ LECH-ELCH, SAUM-MAUS, GRETI-TIGER, MAKEL-KAMEL, PIRAT-TAPIR, RADEL-ADLER, REGIE-GEIER, ROTTE-OTTER, SELMA-AMSEL, SCHROT-STORCH, TELEFAN-ELEFANT, SCHLAGEN-SCHLANGE, WEBSCHAL-SCHWALBE, LEBE-SCHATZ-BACHSTELZE, LICHT-GALAN-NACHTIGALL.

Lesevielfalt

▲3▲ Ist ein Wort nebendiagonal in einer Matrix mit m Zeilen und n Spalten angeordnet, so gilt für die Anzahl L der Lesemöglichkeiten:

$$L = \frac{(m+n-2)!}{(m-1)!\,(n-1)!}.$$

Für die einzelnen Begriffe ergeben sich:

ALPHA: $L = \frac{4!}{1!3!} + 1 = 4 + 1 = 5$,

HOCHZAHL: $L = \frac{7!}{4!3!} = 35$,

EUKLID: $L = \frac{5!}{2!3!} = 10$,

MATRIZEN: $L = \frac{7!}{5!2!} + 1 = 21 + 1 = 22$.

Mehr oder weniger

▲4▲ Möglich wäre: SEITE-SEIT-SEI-SI (Silizium)-S-ES-EIS-REIS-KREIS, BREITE-BREIT-BREI-BEI-EI-EIL-EILE-TEILE-TEILER.

Aus VIER mach ZEHN

▲5▲ VIER-TIER-TEER-MEER-MEHR-WEHR-WEHE-ZEHE-ZEHN, RAUM-RAUB-LAUB-LAUS-MAUS-MASS, ZAHL-ZAHN-BAHN-BANN-BAND-RAND-RIND-RIED-RIES.

Mathematiker-Lexikon

▲6▲

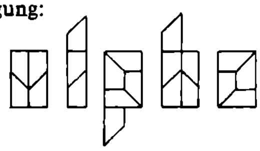
EUKLID CANTOR
FERMAT GALOIS

M	E	T	R	A	D	G	L	I	O	S	T
F	E	U	K	L	I	A	C	N	A	R	O
O	M	B	I	S	Ö	C	P	S	A	L	C
N	P	L	A	T	U	A	C	Y	H	U	A

PLATON MÖBIUS CAUCHY PASCAL

alpha-Spaß

▲7▲ Das Bild zeigt eine mögliche Zerlegung:

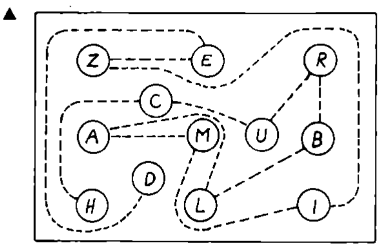


Name gesucht

▲8▲

Der Reihe nach

▲9▲



Dreierlei

▲10▲ a) Dieses Kryptogramm ist eindeutig lösbar:
$7201 + 7201 = 14\,402$.

b) Dieses Kryptogramm ist mehrdeutig lösbar, z.B. $1397 + 1397 = 2794$, $3102 + 3102 = 6204$, $3204 + 3204 = 6408$, $3295 + 3295 = 6590$, $4295 + 4295 = 8590$.

c) Dieses Kryptogramm ist nicht lösbar, denn es muß S gleich 1 sein, folglich $2I = 1$ oder $2I = 11$, was der Ganzzahligkeit von I widerspricht.

Im 20. Jahrhundert

▲11▲ Es muß $E = 1$ und $I = 9$ sein. Man erhält: $S1.1M.19L1$. S, M und L sind also noch in sinnvoller Weise durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Für $S = 0$ sind nur sechs Daten möglich: 01.12.1931 (1941, 1951, 1961, 1971, 1981).

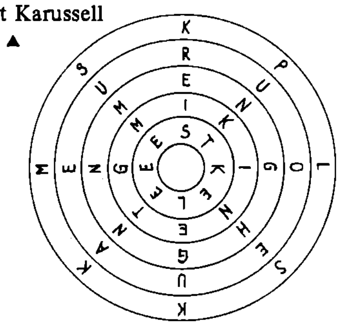
Für $S = 2$ sind auch nur sechs Daten möglich: 21.10.1931 (1941, 1951, 1961, 1971, 1981). Für $S = 3$ sind 12 Daten möglich: 31.10.1921 (1941, 1951, 1961, 1971, 1981) oder 31.12.1901 (1941, 1951, 1961, 1971, 1981). Insgesamt sind also 24 Daten des 20. Jahrhunderts durch SE.EM.EILE verschlüsselbar.

Mathematische Lyrik

▲12▲ In der Reihenfolge des Textes sind versteckt: Archimedes (von Syrakus: etwa 287 bis 212 v.u.Z.), Lie (Sophus: 1842 bis 1899), Klein (Felix: 1849 bis 1925), Hankel (Hermann: 1839 bis 1873), Abel (Niels Henrik: 1802 bis 1829), Gauss (Carl Friedrich: 1777 bis 1855).

Wort Karussell

▲13▲



Zahlenfenster

▲14▲ Bezeichnen wir den Buchstaben in der i-ten Zeile und k-ten Spalte der Buchstabenmatrix mit a_{ik}, so kann man mit der Schablone folgende acht Zahlennamen lesen:

EINS $= a_{22}a_{23}a_{33}a_{34}$, ZWEI $= a_{11}a_{12}a_{22}a_{23}$,
DREI $= a_{31}a_{32}a_{22}a_{23}$, VIER $= a_{13}a_{23}a_{22}a_{32}$,
FÜNF $= a_{45}a_{55}a_{54}a_{64}$, ACHT $= a_{24}a_{25}a_{35}a_{36}$,
NEUN $= a_{33}a_{43}a_{44}a_{54}$,
ZEHN $= a_{42}a_{43}a_{53}a_{54}$.

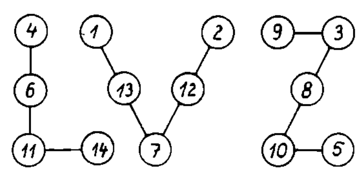
Magische Wortquadrate

▲15▲

R	O	S	E	G	E	R	A	E	S	E	R
O	B	E	R	E	B	E	R	S	O	S	A
S	E	I	L	R	E	I	M	E	S	E	L
E	R	L	E	A	R	M	E	R	A	L	F

Spaß mit der LVZ (Leipziger Volkszeitung)

▲16▲



ELFer-Probe

▲17▲ Aus der ersten Gleichung ergeben sich E = 0 oder E = 1. Aus der zweiten Gleichung ergeben sich für E = 0: L = 0 oder L = 1, und für E = 1: L = −1 oder L = 2. Aus der dritten Gleichung ergeben sich nun für E = 0, L = 0: F = 0 oder F = 1, für E = 0, L = 1: F = −1 oder F = 2, für E = 1, L = −1: F = 0 oder F = 1, für E = 1, L = 2: F = −2 oder F = 3. Jedes der acht Tripel (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, −1), (0, 1, 2), (1, −1, 0), (1, −1, 1), (1, 2, −2) und (1, 2, 3) ist eine Lösung des Gleichungssystems, wovon man sich durch Einsetzen leicht überzeugt.

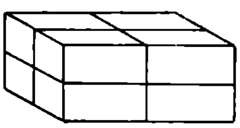
Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 2/1985

Ma 5 ■ 2550 Der Vorgänger einer natürlichen Zahl n ist $n-1$, der Nachfolger $n+1$. Wir stellen eine Tabelle auf:

a	b	$a-1$	$b+1$	$(a-1)\cdot(b+1)$
0	8	–	9	–
1	7	0	8	0
2	6	1	7	7
3	5	2	6	12
4	4	3	5	15
5	3	4	4	16
6	2	5	3	15
7	1	6	2	12
8	0	7	1	7

a) $a=1$, $b=7$
b) $a=3$, $b=5$ oder $a=7$, $b=1$
c) $a=5$, $b=3$.

Ma 5 ■ 2551 Auf dem Bild sind drei Seiten des Paketes sichtbar; dafür werden $4\cdot 25\text{ cm} + 2\cdot 40\text{ cm} = 180\text{ cm}$ Schnur benötigt. Insgesamt werden also $2\cdot 180\text{ cm} + 10\text{ cm} = 370\text{ cm}$ Schnur benötigt.



Ma 5 ■ 2552 Ulfs Würfel hat ein Volumen von $20\cdot 20\cdot 20\text{ cm}^3 = 8000\text{ cm}^3$. Der zweite Teilkörper hat ein Volumen von $8000\text{ cm}^3 - 5600\text{ cm}^3 = 2400\text{ cm}^3$. Wegen $2400:400=6$ ist die kürzere Kante des zweiten Teilkörpers 6 cm lang. Die kürzere Kante des ersten Teilkörpers ist deshalb $20\text{ cm} - 6\text{ cm} = 14\text{ cm}$ lang. Die Oberfläche des ersten Teilkörpers beträgt deshalb $2\cdot 400\text{ cm}^2 + 4\cdot 14\cdot 20\text{ cm}^2 = 1920\text{ cm}^2$.

Ma 5 ■ 2553

Heft	Anzahl der Einsendungen
1	$x+2000$
2	$x-4000$
5	$x+3000$
6	x
Insg.	$4x+1000$

Aus $4x + 1000 = 93\,000$ folgt schrittweise $4x = 92\,000$, $x = 23\,000$. Zu den Heften 1, 2, 5, 6 gab es in dieser Reihenfolge 25 000, 19 000, 26 000, 23 000 Einsendungen im alpha-Wettbewerb.

Ma 5 ■ 2554 Die nachfolgende Tabelle, die das mögliche Alter der vier Schüler enthält, zeigt, daß es 16 verschiedene Tippmöglichkeiten gibt.

A	B	C	D	A	B	C	D
10	10	10	10	11	10	10	11
10	10	10	11	11	10	11	10
10	10	11	10	11	11	10	10
10	11	10	10	10	11	11	11
11	10	10	10	11	10	11	11
10	10	11	11	11	11	10	11
10	11	10	11	11	11	11	10
10	11	11	10	11	11	11	11

Ma 5 ■ 2555 a) $963 + 825 + 741$
b) 2529
c) 921, 923, 925, 941, 943, 945, 961, 963, 965

Ma 5 ■ 2556 Es könnte $a = 1$, 2 oder 3 sein. Aus $a = 3$ folgt für $b = 0$ und $c = 3$ dann $1981 + 3030 + 1982 + 3300 = 10\,293 > 8888$. Damit entfällt $a = 3$. Aus $a = 1$ folgt für $b = 9$ und $c = 9$ dann $1981 + 1919 + 1982 + 1199 = 7081 < 8888$. Damit entfällt $a = 1$. Somit gilt $a = 2$. Aus $b = 0$ folgt $c = 5$ wegen $1 + b + 2 + c = 8$. Dann müßte aber $1981 + 2020 + 1982 + 2255 = 8238$ gelten, was nicht möglich ist. Aus $c = 0$ folgt analog dazu $b = 5$, was wegen $1982 + 2525 + 1982 + 2200 = 8688$ ebenfalls nicht möglich ist. Systematisch so fortfahrend, erkennen wir, daß genau eine Lösung existiert, nämlich $b = 6$ und $c = 9$. Es gilt somit $1981 + 2626 + 1982 + 2299 = 8888$.

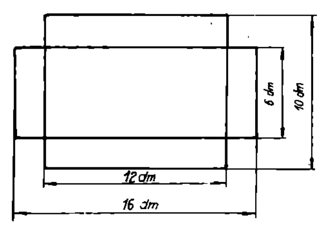
Ma 6 ■ 2557 Das Volumen des ausgeschöpften Wassers beträgt $V = 9\cdot 3\cdot 2\text{ dm}^3 = 54\text{ dm}^3$. 1 Liter Wasser ist soviel wie 1 dm^3 Wasser. $54:6 = 9$. Dem Aquarium wurden 9 Kannen Wasser entnommen.

Ma 6 ■ 2558 Die Kisten A, B, C seien x kg, $2x$ kg, $3x$ kg schwer. Aus $3x + 7{,}5 = 2x + 15$ folgt $x = 7{,}5$. Die Kisten B und C sind somit $2\cdot 7{,}5\text{ kg} + 15\text{ kg} = 30\text{ kg}$ schwer. Wegen $30 - 7{,}5 = 22{,}5$ müssen in Kiste A noch 22,5 kg Altpapier gelegt werden.

Ma 6 ■ 2559 a) Der Zaun besteht aus $2\cdot 6 + 2\cdot 4 = 20$ Würfeln.
b) Von jedem Würfel sind genau drei Flächen sichtbar. Insgesamt sind also $3\cdot 20 = 60$ Würfelflächen sichtbar.
c) Ein solcher Zaun würde aus $156:3 = 52$ Würfeln bestehen.

Ma 6 ■ 2560 a) $912 + 834 + 756 = 2502$
b) Von allen möglichen Beispielen sind nur die Summanden der drei folgenden Beispiele sämtlich durch 6 teilbar.
$912 + 834 + 756 = 936 + 852 + 714 = 954 + 816 + 732 = 2502$.
Nur im Falle $954 + 816 + 732$ ist keiner der drei Summanden durch 7 teilbar.

Ma 7 ■ 2561 a) Aus $a\cdot b\cdot c = 144\text{ dm}^3$ und $b = 2a$ und $c = 2\text{ dm}$ folgt $a\cdot 2a\cdot 2 = 144\text{ dm}^2$, also $a = 6\text{ dm}$ und $b = 12\text{ dm}$.
b)



c) $0 = 16\cdot 10\text{ dm}^2 - 4\cdot 2\cdot 2\text{ dm}^2 = 144\text{ dm}^2$.

Ma 7 ■ 2562 Es seien a, b, c, d, e die Massen der Körper A, B, C, D, E; dann gilt

$$a + b + c + d + e = 44, \quad (1)$$
$$a + b + c = d + e, \quad (2)$$
$$a + b + c + e = 36, \quad (3)$$
$$a + b = c + e, \quad (4)$$
$$a + d = e. \quad (5)$$

Aus (1) und (3) folgt $d = 8$. Aus (2) und (1) folgt $2\cdot(d + e) = 44$, also $d + e = 22$, und wegen $d = 8$ somit $e = 14$. Aus (5) folgt $a + 8 = 14$, also $a = 6$. Aus (2) folgt $6 + b + c = 8 + 14$, also $b + c = 16$. Aus (4) folgt $6 + b = c + 14$, also $b = c + 8$.
Daraus folgt weiter $c + 8 + c = 16$, $2c = 8$, also $c = 4$ und somit $b = 12$. Die Körper A, B, C, D bzw. E haben eine Masse von 6 kg, 12 kg, 4 kg, 8 kg bzw. 14 kg.

Ma 7 ■ 2563 Es seien α, β, γ die Größen der Innenwinkel des Dreiecks, und es seien α', β' die Größen derjenigen Außenwinkel, die α bzw. β zu 180° ergänzen. Dann gilt $\alpha' = \beta + \gamma$, $\beta' = \alpha + \gamma$, $\alpha' + \beta' = \alpha + \beta + \gamma + \gamma$, $\alpha' + \beta' = 180° + \gamma$, also $\alpha' + \beta' - 180° = \gamma$.

Ma 7 ■ 2564 Es sei $z = \overline{abcd}$ die gesuchte vierstellige natürliche Zahl mit $1 \leqq a \leqq 9$, $0 \leqq b,\ c,\ d \leqq 9$. Wegen $c = 4\cdot d$ und $c + d = 10$ gilt $4d + d = 10$, $5d = 10$, also $d = 2$ und somit $c = 8$. Wegen $b = a + c$, also $b > c$ gilt $b = 9$ und somit $a = 1$.
Die gesuchte Zahl lautet 1982.

Ma 8 ■ 2565 Aus (1) folgt: Herr Voigt ist kein Geschichtslehrer.
Aus (2) folgt: Herr Schröter ist kein Russisch- und kein Deutschlehrer.
Aus (3) folgt: Herr Schröter ist kein Geschichtslehrer. Herr Müller ist Geschichtslehrer.
Aus (4) folgt: Herr Müller ist kein Chemie- und kein Biologielehrer.
Aus (5) folgt: Herr Schröter ist kein Chemielehrer. Herr Voigt ist Chemielehrer.
Aus (6) folgt: Herr Voigt ist kein Deutschlehrer. Herr Müller ist Deutschlehrer. Herr Voigt ist Russischlehrer, und Herr Schröter ist Biologie- und Englischlehrer.

Lehrer	Russisch	Biologie	Chemie
Schröter	nein	ja	nein
Voigt	ja	nein	ja
Müller	nein	nein	nein

Lehrer	Geschichte	Englisch	Deutsch
Schröter	nein	ja	nein
Voigt	nein	nein	nein
Müller	ja	nein	ja

Ma 8 ■ 2566 Es sei $100a + 10b + c$ mit $1 \leqq a \leqq 9$, $0 \leqq b \leqq 9$, $0 \leqq c \leqq 9$ eine dreistellige natürliche Zahl mit den Grundziffern a, b, c; dann gilt nach Aufgabenstellung

$$100a + 10b + c + 135 = 100c + 10a + b,$$
$$90a + 9b + 135 = 99c$$
$$10a + b + 15 = 11c$$

und wegen $a + b + c = 9$

$$10a + (9 - a - c) + 15 = 11c,$$
$$9a + 24 = 12c,$$
$$4c = 8 + 3a,$$

also $c = 2 + \frac{3a}{4}$.

Für $a = 4$ gilt $c = 5$ und $b = 0$.
Für $a = 8$ gilt $c = 8$, was wegen $a + b + c = 9$ nicht möglich ist. Es existiert genau eine solche Zahl; sie lautet 405, und es gilt $405 + 135 = 540$.

Die Veröffentlichung der restlichen Lösungen Mathematik des Wettbewerbs 2/85 erfolgt in alpha 1/86. Auf die Lösungen zu Ph/Ch muß aus Platzgründen verzichtet werden.

alpha-Wettbewerb

Kollektive Beteiligung am alpha-Wettbewerb 1984/85

Pablo-Neruda-OS, Ahlbeck; Fr.-Engels-OS, OS E. Mäder, Haus d. Jungen Pioniere, alle Altenburg; E.-Schneller-OS, Alt-Sühkow; Haus d. Jungen Pioniere, Altentreptow; W.-Pieck-Schule, Anklam; W.-Seelenbinder-OS, Arneburg; OS Asbach; Haus d. Jungen Pioniere Th. Müntzer, Bad Blankenburg; H.-Duncker-OS, Bad Kleinen; H.-Beimler-OS, Bad Köstritz; R.-Schwarz-OS, Bad Liebenstein; OS Fr. Engels, Bad Liebenwerda; Stat. Jg. Techn. u. Naturf., A.-Saefkow-OS (IV), O.-Grotewohl-OS, M.-Poser-OS, EOS E. Thälmann, alle Bad Salzungen; R.-Siewert-OS, Bad Suderode; H.-Heine-OS, Barchfeld; Zentrale OS H. Beimler, Bärenklau; OS Fr. Mehring, 26. OS L. Renn, 25. OS, Kreispionierhaus, K.-Tucholsky-OS., 2. OS E. Baron, alle Berlin; OS Berlingerode; OS J. R. Becher, Bernburg; H.-Ament-OS, Bernsbach; G.-Scholl-OS, Bernsdorf; E.-Köcher-OS, Bernstadt; OS Bernterode; OS Beuren; OS C. Zetkin, Bischofferode; OS Blankenhagen; OS Fr. Schiller, Bleicherode; G.-Ewert-OS, Blumenthal; OS Boddin; A.-Bebel-OS, Boizenburg; Dinter-OS, Borna; OS Brandshagen; H.-Beimler-OS, Braunsdorf; OS B. Brecht, Brehme; OS Breitenworbis; OS H. Beimler, OS W. Seelenbinder, beide Breitungen; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Brotterode; M.-Poser-OS, Bürgel; W.-Pieck-OS, Burow; W.-Estel-OS, Buttlar; Station Jg. Naturf. u. Techn. Prof. Dr. G. Hertz, Calbe; 1. OS, Coswig; Station Jg. Naturf. u. Techn. Cottbus; OS H. Wiedner, Dahlen; OS B. Kühn, Dambeck; Fr.-Reuter-OS, Demmin; M.-Gorki-OS, Dermbach; OS Dersekow; OS K. Kollwitz, OS Makarenko, beide Dingelstädt; OS K. Niederkirchner, Domersleben; OS A. Matrossow, Dorndorf; O.-Grotewohl-OS, Dreitzsch; Pionierpalast, 106. OS, 120. OS W. Koenen, alle Dresden; OS Dürröhrsdorf; 2. OS W. Pieck, Ebersdorf; OS Fr. Engels, Effelder; W.-Pieck-OS, Eichhof; OS F. Heckert, Eisleben; OS H. Grundig, Ellrich; 1. OS R. Arndt, Elsterwerda; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; OS 56, Erfurt; W.-I.-Lenin-OS, Erkner; Haus d. Jungen Pioniere, Falkensee; G. Dimitroff-OS, Falkenstein; Th.-Müntzer-OS. Fambach; W.-Pieck-OS, Fehrbellin; 5. OS G. Dimitroff, Finsterwalde; B.-Brecht-OS, Floh; OS E. Weinert, Flessau; Spezialschule C. F. Gauß, 15. OS K. Marx, beide Frankfurt/O.; E.-Thälmann-OS, Glückauf-OS, AG Naturw. der BBS Edelstahlwerk, alle Freital; OS Friedeburg; OS I, Friedland; Station alpha, Fürstenwalde; R.-Arnstadt-OS, Geisa; J.-Gagarin-OS, Geithain; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; Kalinin-OS, Geschwenda; K.-Neuhof-OS, Glienicke; K.-Kräpler-OS, Gnoien; 5. OS J. Gagarin, 7. OS, beide Görlitz; W.-Husemann-OS, Goldberg; Kreisklub Jg. Math. Gräfenhainichen; E.-Thälmann-OS, Greifswald; OS H. Beimler, OS J. Gagarin, beide Greußen; A.-Frank-OS, Grimma; A.-Walther-OS, Gröditz; OS C. Zetkin, Groitzsch; OS W. Seelenbinder, Gröditz; OS A. Kuntz, Großbodungen; A.-Becker-OS, Großenstein; OS Großschönau; OS K. Gottwald, Großbrückerswalde; Juri-Gagarin-OS, Grünhain; Th.-Müntzer-OS, Gumpelstadt; Station Jg. Naturf. u. Techn. Halberstadt; OS f. Körperbehinderte, OS S. M. Kirow, beide Halle; W.-Koenen-OS, Station Jg. Techn. u. Naturf., beide Halle-Neustadt; OS Hammerbrücke; OS Haynrode; OS Hedersleben; Schule d. DSF, Heiligengrabe; P.-Schreier-OS, Hennigsdorf; OS Th. Müntzer, Hermannsdorf; M.-Gorki-OS, Hillersleben; Goethe-OS, Hohenleipisch; O.-Schlag-OS, Hohenmölsen; OS Horka; 21. OS, Hoyerswerda; E.-Egert-OS, Hundeshagen; Goethe-OS, Ilsenburg; G.-Dimitroff-OS, Immelborn; G.-Ewald-OS, Ivenack; OS A. Becker, Jatznick; E.-Weinert-OS, Jocketa; OS Kaltennordheim; OS A. Becker, Kamsdorf; C.-Zetkin-OS, Kandelin; H.-Beimler-OS, Karbow; A.-Becker-OS, W.-Komarow-OS, E.-Schneller-OS, P.-Tschaikowski-OS, E.-Thälmann-OS, Pionierhaus J. Gagarin, EOS K. Marx, H.-Menzel-OS, F.-Wolf-OS, alle Karl-Marx-Stadt; OS C. Zetkin, Kaulsdorf; OS Th. Rybarczyk, Kemberg; Th.-Neubauer-OS, Kieselbach; OS Kirchworbis; Kreisklub Math., E.-Spezial-OS G. Thiele, beide Kleinmachnow; OS Th. Müntzer, Kleinow; OS Th. Müntzer, Klettenberg; OS E. Thälmann, Klosterfelde; W.-Seelenbinder-OS, Könitz; OS E. Thälmann, Köthen; OS Küllstedt; OS C. Zetkin, Laage; alpha-Club R. Breitscheid, Latdorf; Goetheschule, Lauscha; OS E. Weinert, Legefeld; R.-Teichmüller-OS, Leimbach; Dr.-S.-Allende-OS, K.-Liebknecht-OS, R.-Luxemburg-OS, EOS K. Marx, alle Leinefelde; O.-Schön-OS, Haus d. Jungen Pioniere A. Saefkow, beide Leipzig; M.-Poser-OS. Lengfeld; G.-Dimitroff-OS, Lenzen; E.-Thälmann-OS, Leutenberg; OS Leutersdorf; W.-Pieck-OS, Lichte; O.-Grotewohl-OS, EOS Prof. Dr. M. Schneider, beide Lichtenstein; Pestalozzi-OS, Löbau; OS W. Wallstab, Löderburg; W.-Seelenbinder-OS, Lössau; Goethe-OS, Haus d. Jungen Pioniere Th. Körner, beide Ludwigslust; Station Jg. Naturf. u. Techn. Lübz; K.-Bürgel-OS, Lützow; J.-Gagarin-OS, Meiningen; OS J. Gagarin, Merkers; OS Mittelstille; E.-Steinfurth-OS, Mittenwalde; OS H. Danz, Möser; OS W. Pieck, Mühlberg; Kinderheim Munzig; OS Nachterstedt; OS J. Fučik, Naundorf; OS W. Bykowski, Neetzow; R.-Hallmeyer-OS, Neundorf; F.-Schiller-OS, H.-Beimler-Schule, beide Neustadt; Dr.-Th.-Neubauer-Schule, Niederorschel; W.-Pieck-OS, Niederwiesa; Haus d. Jungen Pioniere H. Matern, OS J. Gagarin, beide Nordhausen; Pestalozzi-OS, Nossen; OS Obhausen; W.-Seelenbinder-OS, Oechsen; Pestalozzischule, E.-Vogel-OS, beide Oschatz; EOS K. Marx, Oschersleben; OS O. Grotewohl, Pappenheim; Haus d. Jungen Pioniere P. Göring, Parchim; OS Dr. Th. Neubauer, Pfaffschwenda; OS Plauen, Spezialistenlager Math. Plauen-Land; Makarenko-OS, Plessa; OS E. Schneller, Polleben; OS 16, Potsdam-B.; OS Pritzerbe; Station Jg. Naturf. u. Techn., Goetheschule II, beide Pritzwalk; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; OS Pestalozzi, Radebeul; W.-I.-Lenin-OS, Radewege; OS Raßnitz; Fr.-Engels-OS, Geschw.-Scholl-OS, beide Rathenow; OS K. Kollwitz, Rehna; E.-Weinert-OS, Reichenbach; J.-Gagarin-OS, OS U. Steinhauer, Fr.-Engels-OS, alle Ribnitz; Spezialschule Fr. Engels, Riesa; OS H. Rau, Rheinsberg; J.-Curie-OS, Röbel; J.-Curie-OS, Ronneburg; Ziolkowski-OS, Roßdorf; Fr.-Schmenkel-OS, Roskow, 34. OS M. Reichpietsch, 66. OS O. Buchwitz, Haus d. Jungen Pioniere, alle Rostock; W.-Pieck-OS, Rotta; K.-Niederkirchner-OS, Saal; E.-Weinert-OS, Saalfeld; W.-Pieck-OS, Station Jg. Naturf. u. Techn., beide Sangerhausen; T.-Bunke-OS, Sanitz; OS H. Matern, Schernberg; OS Schlagsdorf; W.-Pieck-OS, Schlottwitz; OS M. Gorki, Schkölen; OS H. Danz, OS K. Marx, OS J. G. Seume, alle Schmalkalden; OS Schleiz; Haus d. Jungen Pioniere, Schönebeck; EOS Schollene; OS Kuba, Schorssow; OS Schneidlingen; OS F. Engels, Schwallungen; U.-May-OS, Sebnitz; OS F. Reuter, Siedenbollentin; OS A. Wölk, Senftenberg; F.-Fröbel-OS, Schweina; OS Sohland; J.-R.-Becher-OS, OS Glückauf, OS W. Pieck, alle Sondershausen; K.-Marx-OS, OS A. Becker, beide Spremberg; OS K. Liebknecht, Stadtlengsfeld; Pionierhaus E. Grube, Staßfurt; OS J. Fučik, Steinbach; OS E. Thälmann, Steinbach-Hallenberg; R.-Luxemburg-OS, Steinsdorf; A.-Becker-OS, Stralendorf; O.-Felfe-OS, Straßgräbchen; 12. OS Dr. R. Sorge, Suhl; H.-Riecke-Schule, Tangerhütte; H.-Beimler-OS, Tantow; OS E. Schneller, Taubenheim; OS G. Eisler, K.-Niederkirchner-OS, beide Teterow; K.-Liebknecht-OS, Teuchern; F.-Mehring-OS, Tiefenort; A.-Einstein-OS, Torgelow; E.-Schneller-OS, Töplitz; E.-Thälmann-OS, OS W. Pieck, beide Trusetal; A.-Nitz-OS, Ehm-Welk-OS, Goetheschule, alle Ueckermünde; H.-Beimler-OS, Unterbreizbach; E.-Schneller-OS, Umshausen; J.-G.-Seume-OS, Vacha; OS Vitzenburg; A.-Bebel-OS, Vogelsang; R.-Luxemburg-OS, Waldau; Goetheschule, Kreisklub Jg. Math., beide Waren; H.-Beimler-OS, Wefensleben; OS L. Fürnberg, Wegeleben; H.-Matern-OS, Weida; OS Weißenborn-L.; Neustadtschule I, Weißenfels; POS V, Kreisklub Jg. Math., beide Weißwasser; OS Wernshausen; OS O. Grotewohl, Westerengel; J.-Harder-OS, Wesenberg; C.-Zetkin-OS, Wiehe; OS R. Luxemburg, Werbelow; Haus d. Jungen Pioniere, Wismar; Station Jg. Naturf. u. Techn. Wittstock; OS H. Matern, Wippersdorf; Station Jg. Naturf. u. Techn. Wittenberg; OS A. Trützschler, Wölfis; OS H. Beimler, Station Jg. Naturf. u. Techn., beide Wolfen; OS Wolkenburg; OS H. Werner, OS W. I. Lenin, beide Worbis; OS Th. Müntzer, Wulfen; G.-Walter-OS, OS S. Allende, beide Wustrow; Station Jg. Naturf. u. Techn. Zembschen; F.-Schiller-OS, Zeulenroda; Th.-Müntzer-OS, Ziesar; Goetheschule, Zossen.

Leserpost

Leider gibt es bei uns keinen Mathematikzirkel. Da freue ich mich über jede Knobelaufgabe, die ich lösen kann, denn *Übung macht den Meister*. ... Ihr könnt außer Mathe, Physik und Chemie auch elektronische Beiträge bringen. ... Auch daß ihr Bücher vorstellt, finde ich große Klasse!

Andreas Gutsch, Kahla

... Ich heiße Daniela Scholid, gehe in die 8. Klasse. Mein Hobby ist Mathe. Ich löse gern Geometrieaufgaben, aber am liebsten denke ich mir welche aus. Die *alpha*-Aufgaben löse ich nun schon das vierte Jahr. Bei schwierigen Problemen helfen mir der AG-Leiter des Kreisklubs und mein Mathe-Lehrer. *Daniela Scholid, Ueckermünde*

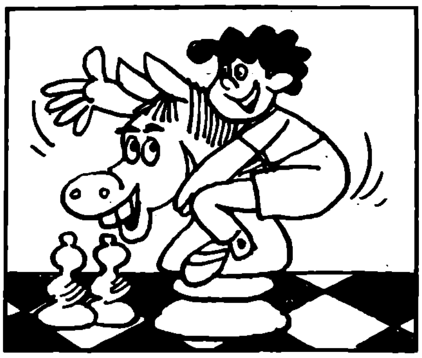
Ich möchte mich bei Ihnen bedanken. Diese schöne Zeitschrift, auf die ich immer mit Ungeduld warte, gehört in meine Freizeit, die ich mir ohne die *alpha* nicht denken kann. Mathematik und Physik machen mir großen Spaß. Wir haben den Unterricht mit der *alpha* interessanter gestaltet. Ich möchte mich bei allen Mitarbeitern bedanken. *Romy Vogel, Weida (14 Jahre)*

... Auch Dank Eurer Hilfe. Mittels des Wettbewerbs gelang es mir, meine Leistungen so zu steigern, daß ich an die EOS *Immanuel Kant* delegiert wurde. Ich hoffe, daß ich noch weitere Jahre fähig bin, Eure Knobelknülleraufgaben zu lösen. Euer Stammleser, das 6. Jahr im Wettbewerb erfolgreich! *Torsten Brand, Berlin*

Seit zwei Jahren nehme ich am *alpha*-Wettbewerb teil. Die Antwortkarten zeigten mir, daß es gut klappt. Mein Berufswunsch ist, einmal Lehrerin zu werden. Ich sammle jetzt schon die Hefte fleißig. *Petra Döring, Berlin-Biesdorf-Süd*

... An dieser Stelle sei mir erlaubt, einen Wunsch zu äußern: Mit der Entwicklung der Computertechnik ist man heute schon recht weit. So ist es sogar schon möglich, chemische Formeln verschlüsselt dem Computer einzugeben. Es würde bestimmt auch andere *alpha*-Leser interessieren, wie so eine Eingabe erfolgt. ...

Veit-Thomas Meyen, Grimma (10jähriger Teilnehmer am alpha-Wettbewerb)



alpha-Schachwettbewerb 1985

Zum dritten Mal fordert *alpha* alle Schachfreunde zur Teilnahme an einem Lösungswettbewerb auf!

Es können wiederum acht Schachaufgaben von unterschiedlicher Schwierigkeit gelöst werden. Die jeweilige Punktzahl, die in etwa den Schwierigkeitsgrad wiedergibt, ist bei den Aufgaben mit angegeben. In allen acht Aufgaben beginnt Weiß und setzt trotz bester Gegenwehr von Schwarz in der geforderten Zügezahl matt.

Unter allen Teilnehmern, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst haben, werden Bücher verlost.

Die Teilnehmer, die die volle Punktzahl zu den Aufgaben Nr. 1 bis Nr. 7 erreichen, erhalten eine Urkunde und nehmen an einer weiteren Verlosung von Büchern teil. Für Teilnehmer bis zum Alter von 14 Jahren reicht schon die volle Punktzahl zu den Aufgaben Nr. 1 bis Nr. 4 aus, um in diese Verlosung zu kommen.

Die achte Aufgabe (Nr. Z) ist eine Zusatzaufgabe, die nicht unmittelbar zum Wettbewerb gehört. Sie ist für leistungsstärkere Schachspieler gedacht. Diese Aufgabe bleibt zwar ohne Punktbewertung, jedoch ersetzt sie jede andere Aufgabe im Punktwert. Unter den Teilnehmern, die alle Aufgaben einschließlich der Zusatzaufgabe richtig gelöst haben, werden zwei Bücher verlost.

Teilnahmeberechtigt sind alle *alpha*-Leser. Als vollständig gilt die Lösung, wenn die wesentlichen Abspiele bis zum Matt angegeben sind.

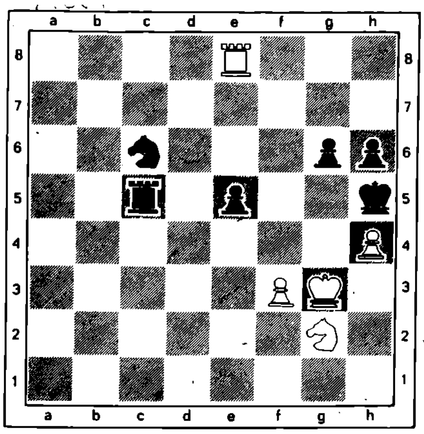
Meinungen, Anregungen, Kritiken zu den Aufgaben und zum Wettbewerb sind erwünscht, aber nicht Bedingung.

Die Einsendung der Lösungen (jeweilige Aufgaben-Nummer angeben) ist bitte bis zum 1. März 1986 unter Angabe von Name, Vorname, Adresse und Alter zu richten an

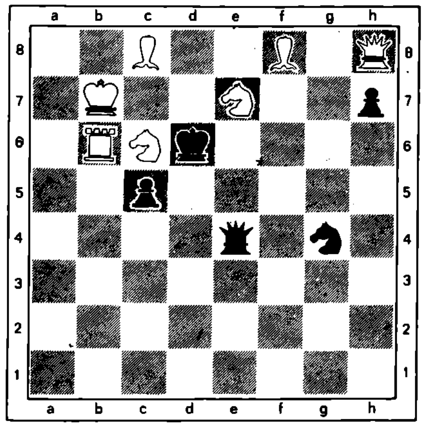
Redaktion *alpha*
7027 Leipzig
PSF 14

Die Lösungen sowie die Gewinner werden in *alpha* 4/1986 veröffentlicht.

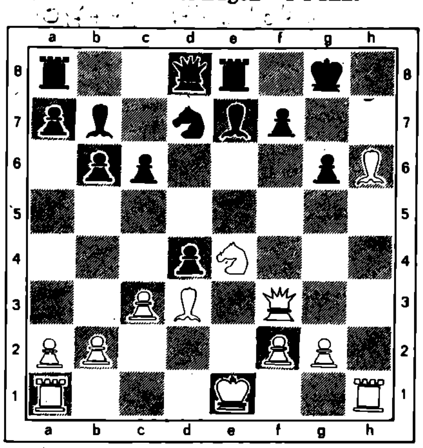
J. Lehmann/H. Rüdiger



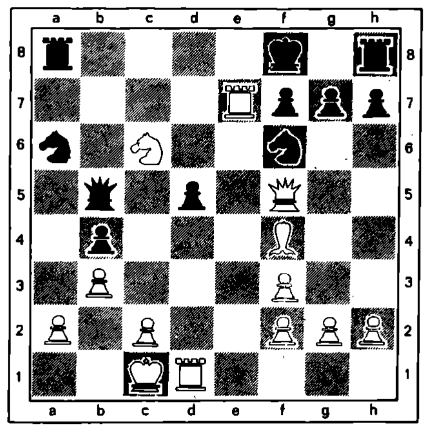
Nr. 1 Matt in zwei Zügen 1 Punkt



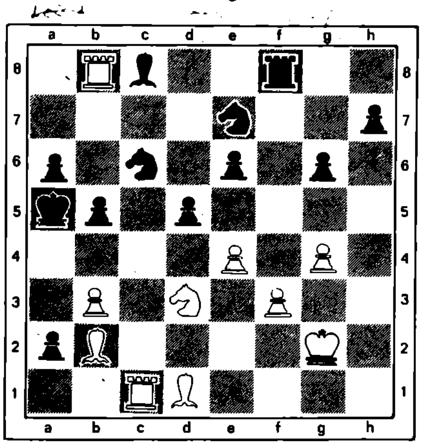
Nr. 5 Matt in zwei Zügen 5 Punkte



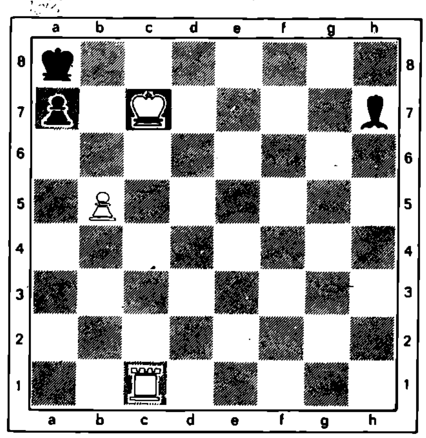
Nr. 2 Matt in zwei Zügen 2 Punkte



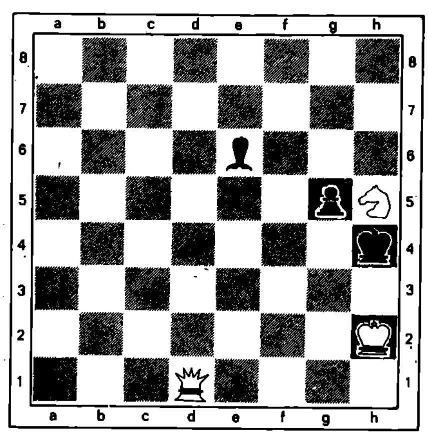
Nr. 6 Matt in vier Zügen 6 Punkte



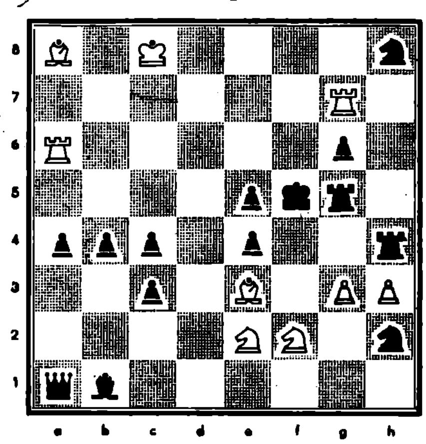
Nr. 3 Matt in zwei Zügen 3 Punkte



Nr. 7 Matt in drei Zügen 6 Punkte



Nr. 4 Matt in zwei Zügen 4 Punkte



Nr. Z Matt in drei Zügen

Magische Quadrate mit Jahreszahlen

Eine lebendige Leserdiskussion

Auf dem Titelblatt der *alpha* 6/1984 wurde ein *Magisches Quadrat* 10. Ordnung mit der Jahreszahl 1984 abgebildet.

15	89	81	83	82	17	18	90	14	16
36	39	31	38	32	67	63	70	64	65
06	09	01	98	02	97	93	10	94	95
26	79	80	78	72	27	73	21	24	25
66	69	61	68	62	37	33	40	34	35
45	42	50	43	49	54	58	51	57	56
75	22	30	28	29	74	23	71	77	76
96	92	91	03	99	04	08	100	07	05
55	52	60	53	59	44	48	41	47	46
85	12	20	13	19	84	88	11	87	86

Bild 1

Der Empfehlung, sich mit weiteren Jahreszahlen in *Magischen Quadraten* zu beschäftigen, folgte eine unerwartet große Anzahl unserer Leser. Alle Einsender brachten mindestens die Jahreszahlen *1985* und *1986*, wobei es keine zwei gleichgearteten Quadrate gab. Da wir nur einige Arbeiten veröffentlichen können, möchten wir an dieser Stelle allen Einsendern recht herzlich danken. Allgemein wurde bestätigt, daß ihnen das Knobeln viel Spaß gemacht hat.

Ausgangspunkt unserer Idee war, wie schon in *alpha* 6/1984 erwähnt, Dürers *Melancholie* (Bild 2, Detail) mit dem *Magischen Quadrat* 4. Ordnung und der Jahreszahl 1514.

Bild 2

Zu Bild 3a, b: Merkt man sich [illegible] sierte A als Streckenzug für die Zahlen 1 bis 8, so lassen sich bei zentraler Drehung des A um 180° wegen der Symmetrieeigenschaft des Quadrates danach auch die Zahlen 9 bis 16 eintragen.

16	03	02	13
05	10	11	08
09	06	07	12
04	15	14	01

Bild 3a

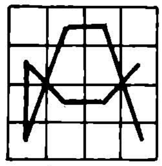


Bild 3b

Unser *schnellster Einsender* (und auch jüngster) war Wieland Koban, Dresden, Kl. 5; Roland Jancke, Berlin, Kl. 8 und Michael Rühling, Dresden, Kl. 10 begründeten ihre Lösungswege für 1985, ..., 1988 klar und übersichtlich. Hartmut Boettcher, Weimar, 48 Jahre, Dipl.-Landwirt, brachte 6 Jahreszahlen zu Papier. Olaf Krause, Eisenhüttenstadt, Kl. 10, arbeitete schon auf das Jahr 2000 hin, indem er dazu die Zahlenfolge 00, ..., 99 benutzte ($\overline{K}_{10} = 495$).[1] Rainer Bauer, Mittweida, 21 Jahre, Student, entwickelte ein *Magisches Quadrat* 20. Ordnung mit *1985*. Thomas Mittelstadt, Freiberg, Kl. 6, sandte *Magische Quadrate* mit *1985*, ..., *1995* (!). Dabei ist bemerkenswert, daß ihm *1985* – als einzigem Einsender – bereits mit 3 Zweiertauschen gelang (Bild 4a). Rolf Kamieth, Kakerbeck, 23 Jahre, Student, erreichte *1986* bereits mit 2 Dreiertauschen in der 1. und 10. Zeile (Bild 4b).

Bild 4a

(Zeile 1) 83 82 16 18 90 14 17
...
76 22 30 28 (Zeile 7) 71 77 75
...
84 12 20 13 19 85 (Zeile 10) ..

Bild 4b

16 89 81 83 82 15 18 90 14 17
(Zeile 1)
...
84 12 20 13 19 86 88 11 87 85

Siegfried Linßner, Leipzig, 32 Jahre, Elektromonteur, konstruierte ein *Magisches Quadrat* 8. Ordnung ($K_8 = 260$) mit $^{19}_{85}$ in den 4 zentralen Mittelfeldern. Ein wahres Meisterstück stellt aber Bild 5 dar. Unter geschickter Ausnutzung der Einer- und Zehnerziffern gelang es ihm, sechsmal die Jahreszahl 1986 unterzubringen.

Tibor Bakos, Budapest, 76 Jahre,[2] benutzte als Ausgang ein *Magisches Quadrat* von *L. Weisner* (1959). Die Zahlen 0 bis 99 sind so angeordnet, daß das Quadrat auch dann magisch bleibt, wenn man alle Zahlen in ihren Zehner- und Einerziffern vertauscht. (Spiegelung aller Zahlen $\overline{XY}$ an der Nebendiagonalen als $\overline{YX}$. T. Bakos änderte dieses Quadrat, indem er – gegenüber dem Weisnerschen Quadrat – beide

Bild 5

15	55	21	37	65	73	69	10	79	81
91	46	49	33	67	80	22	24	64	29
85	47	77	56	84	27	05	40	16	68
63	45	34	75	58	59	78	26	31	36
02	88	100	20	1	9	50	97	94	44
04	95	14	96	8	6	25	72	92	93
12	60	71	52	51	35	99	66	48	11
90	18	74	43	98	41	32	53	17	39
82	38	62	23	54	89	42	30	57	28
61	13	03	70	19	86	83	87	07	76

Bild 6

64	75	97	48	32	29	56	13	81	00
49	34	25	90	51	72	83	07	66	18
12	96	59	87	05	63	28	44	70	31
03	10	71	26	47	54	99	82	38	65
58	89	04	73	60	11	45	36	27	92
91	67	42	39	88	06	74	50	15	23
20	41	16	55	93	37	62	78	09	84
86	08	33	61	24	40	17	95	52	79
35	22	80	14	76	98	01	69	43	57
77	53	68	02	19	85	30	21	94	46

Diagonalen magisch machte und es durch die *1985* erweiterte. Sie erscheint auch gespiegelt an der linken Seite noch einmal sowie bei den 4 Mittelfeldern der Nebendiagonalen (Bild 6). (Durch Tausch der Einerziffern 5 mit 7 und 4 mit 6 wäre *1987* zu erreichen.)

80	92	90	12	82	16	15	14	13	91
26	01	99	08	94	27	73	34	68	75
25	96	06	97	03	70	32	71	29	76
24	98	04	95	05	72	30	69	31	77
18	07	93	02	100	33	67	28	74	83
84	35	65	42	60	43	57	50	52	17
81	62	40	63	37	54	48	55	45	20
78	64	38	61	39	56	46	53	47	23
79	41	59	36	66	49	51	44	58	22
10	09	11	89	19	85	86	87	88	21

Mit Bild 7 entwickelte T. Bakos ein *Magisches Quadrat* besonderer Art. Im Innern ergeben sich nämlich zusätzlich vier Quadrate 4. Ordnung, die auch magisch sind ($K_4 = 2(100 + 1) = 202$). Dieses *Magische Quadrat* ist für 1985 bis 1989 verwendbar, was durch einen einzigen Zweieraustausch in der 1. und 10. Zeile erreichbar ist, z. B. 16 mit 15 und 85 mit 86. *H.-J. Kerber*

[1] *Die magische Konstante für Magische Quadrate* n-ter Ordnung lautet

$K_n = \frac{n}{2}(n^2 + 1)$ bei Zahlen von 1 bis n,

$\overline{K}_n = \frac{n}{2}(n^2 - 1)$ bei Zahlen von 0 bis $n - 1$.

[2] Bekannt aus *Mathematisches Mosaik*, Math. Schülerbücherei Nr. 102, Kapitel: *Magische Quadrate*.