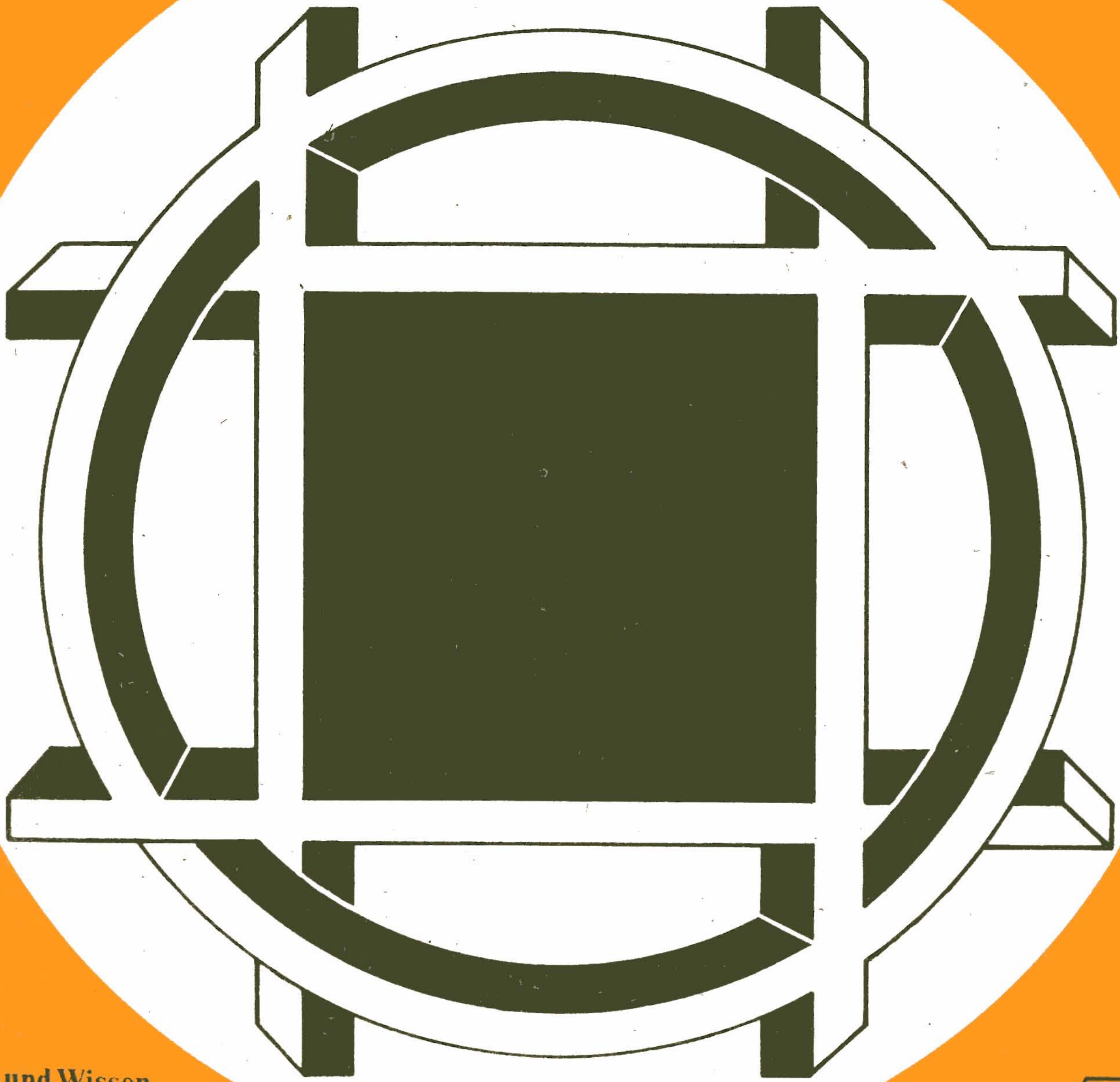
Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
24. Jahrgang 1990
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

1

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Prof. Dr. W. Walsch (S. 1); Prof. Dr. H. Heckendorf (S. 6); Prof. Dr. Flachsmeyer (S. 17)
Vignetten: L. Otto, Leipzig (Titelvignetten)
Techn. Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, nach einer Vorlage von R. Ruprecht, Coswig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit,* III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 11. Oktober 1989
Auslieferungstermin: 9. Februar 1990

alpha

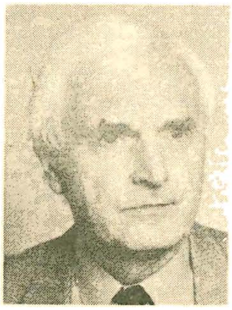
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Alphons weist die Schüler der 5. bis 7. Klasse auf speziell für sie geeignete Beiträge hin.

alpha gratuliert –
Prof. Dr.
W. Walsch

Wir gratulieren zum 60. Geburtstag und danken Prof. Dr. Walsch herzlich für seine aktive Mitarbeit im Redaktionskollegium von Beginn an.
Wir freuen uns auf die weitere Zusammenarbeit.



In den Heften 1 bis 4/67 des 1. Jahrganges der „alpha“ bot Prof. Walsch den Lesern Interessantes zur Mengenlehre. In Vorbereitung auf den zweiteiligen Beitrag „Läßt sich der Zufall berechnen“ (Heft 2 und 3/90) von W. Träger drucken wir einen Teil davon (Heft 2/67, S. 43/44) ab.

Vereinigung und Durchschnitt von Mengen

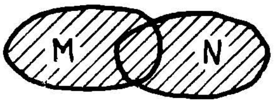
Für unsere folgenden Überlegungen denken wir uns als Grundbereich eine Schulklasse K gegeben. Die Elemente von K sind also Schüler, die wir durch den jeweiligen Anfangsbuchstaben ihres Familiennamens kennzeichnen wollen. (Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß jeder Buchstabe des Alphabets höchstens einmal als Anfang eines Familiennamens in der Klasse vorkommt.) Wir wollen annehmen, daß wir einige Teilmengen von K kennen:

(1) Den Schachklub der Klasse:
$S = \{a, b, c, d\}$.
(2) Die Menge der Schüler, die am Englischunterricht teilnehmen:
$E = \{e, f, g\}$.
(3) Die Volleyballmannschaft:
$V = \{c, d, h, i, k, l\}$.
(4) Die Menge der Schüler, die an einem Zirkel im Fach Mathematik teilnehmen: $Z = \{e, f, g, h, k, l, m\}$.

Eines Tages gibt der Klassenlehrer bekannt: „Alle Schüler, die zum Schachklub oder zur Volleyballmannschaft gehören, treffen sich nach dem Unterricht im FDJ-Zimmer!“
Welche Schüler sind damit gemeint? Sicher die Schüler a und b; denn sie gehören zum Schachklub, und ebenso die Schüler h, i, k und l; denn sie gehören zur Volleyballmannschaft. Wie steht es aber mit c und d? Diese Schüler müssen natürlich ebenfalls hingehen; denn sie gehören ja sogar zu beiden Mengen! Nach dem Unterricht versammelt sich also im FDJ-Zimmer eine Menge, die durch Vereinigung der beiden Mengen S und V entstanden ist. Man schreibt dafür $S \cup V$ (gelesen: „S vereinigt mit V“ oder „Vereinigung von S und V“), und es ist in unserem Falle

$$S \cup V = \{a, b, c, d, h, i, k, l\}.$$

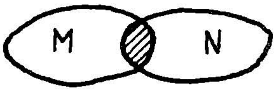
Wir merken uns allgemein: Ein Element x gehört zur Vereinigungsmenge der Mengen M und N genau dann, wenn x zu M oder zu N gehört. In kurzer Schreibweise:
$x \in M \cup N$ genau dann, wenn $x \in M$ oder $x \in N$ ist.
In Bild 1 ist die Vereinigung zweier Mengen veranschaulicht. Die Vereinigungsmenge ist schraffiert dargestellt.

Bild 1


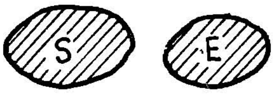
An einem anderen Tag heißt es in unserer Klasse: „Alle Schüler, die zur Volleyballmannschaft und auch zum Mathematikzirkel gehören, melden sich beim Klassenlehrer!“ Wer ist gemeint? Nur die Schüler h, k und l; denn nur diese gehören sowohl zur Volleyballmannschaft als auch zum Mathematikzirkel. Die Schüler h, k und l bilden ebenfalls eine Menge, die man den Durchschnitt der Mengen V und Z nennt. Man schreibt dafür $V \cap Z$ (gelesen: „V geschnitten mit Z“ oder „Durchschnitt von V und Z“), und es ist also:

$$V \cap Z = \{h, k, l\}.$$

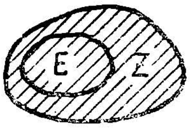
Wir merken uns hier: Ein Element x gehört zum Durchschnitt der Mengen M und N genau dann, wenn x zu M und N gehört:
$x \in M \cap N$ genau dann, wenn $x \in M$ und $x \in N$ ist.
In Bild 2 ist der Durchschnitt der Mengen M und N wieder schraffiert dargestellt.

Bild 2


Die Begriffe Durchschnitt und Vereinigung sind nicht sehr schwierig, das werden wir an den folgenden Beispielen, in denen wir mit unseren Mengen S, E, V und Z arbeiten wollen, gleich sehen.
Bilden wir einmal $S \cup E$ (d. h. die Menge der Schüler, die im Schachklub sind oder Englisch lernen). Wie jeder sicher leicht findet, ist $S \cup E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. (Dem entspricht die in Bild 3 dargestellte Situation. Die Vereinigungsmenge ist wieder schraffiert gezeichnet.)

Bild 3


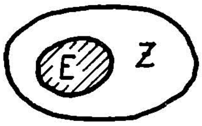
Was gibt $E \cup Z$? Ganz einfach:
$E \cup Z = \{e, f, g, h, k, l, m\}$,
d. h. $E \cup Z = Z$. Wie kommt das? Ihr habt es sicher schon gemerkt: E ist eine Teilmenge von Z, es kommt also beim Bilden der Vereinigungsmenge gar kein neues Element zu Z hinzu. (Siehe auch Bild 4!)

Bild 4


Nun betrachten wir den Durchschnitt von S und E (d. h. die Menge der Schüler, die im Schachklub sind und außerdem auch noch Englisch lernen). Wie wir feststellen müssen, gibt es solche Schüler in unserer Klasse gar nicht, der Durchschnitt der Mengen S und E ist also leer: $S \cap E = \emptyset$. (Siehe auch Bild 5!)

Bild 5


Wie steht es mit $E \cap Z$? Prüft selbst nach, daß $E \cap Z = E$ gilt! (In Bild 6 ist wieder eine entsprechende Situation dargestellt.)

Bild 6


Wir wollen das Bilden von Durchschnitten bzw. Vereinigungsmengen mit drei einfachen Beispielen aus der Mathematik abschließen:
a) Die Ungleichung $x + 3 \leqq 8$ ist eine kurze Schreibweise für „$x + 3 < 8$ oder $x + 3 = 8$“. Die Menge X aller natürlichen Zahlen, die die Ungleichung $x + 3 \leqq 8$ erfüllen, ergibt sich somit als Vereinigung der Mengen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (das sind die natürlichen Zahlen, die die Ungleichung $x + 3 < 8$ erfüllen) und $B = \{5\}$ (die natürliche Zahl, die die Gleichung $x + 3 = 8$ erfüllt). Es gilt also
$X = A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
b) Sei G die Menge aller geraden natürlichen Zahlen, D die Menge aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen. Dann ist $G \cap D$ die Menge aller durch 6 teilbaren natürlichen Zahlen – das sind nämlich diejenigen, die gerade und durch 3 teilbar sind.
c) Sei R_1 die Menge aller Rechtecke und R_2 die Menge aller Rhomben. Dann ist $R_1 \cap R_2$ gleich der Menge Q aller Quadrate: $R_1 \cap R_2 = Q$.
Wer bis zum nächstenmal etwas üben will, kann das an Hand der vorhin betrachteten Mengen S, E, V und Z tun. Zum Beispiel wäre noch zu untersuchen:

$$S \cup Z,\ E \cup V,\ S \cap Z,\ S \cap V,\ E \cap V.$$

Die Quadratur der Parabel

Zum 2 200. Jahrestag des Todes von Archimedes Teil 2

Den Satz über die Parabelquadratur, der bis dahin noch unbekannt war, hat Archimedes mit Hilfe der Mechanik gefunden. Dabei spielen der Schwerpunktbegriff und das Hebelgesetz eine große Rolle.

Archimedes hat zahlreiche weitere Flächeninhalte und Volumina unter Benutzung des Hebelgesetzes gefunden. Eine erst im Jahre 1906 in Konstantinopel wieder aufgefundene Schrift „Des Archimedes Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen“ hat uns einen Blick in seine „Werkstatt“ tun lassen. Sie zeigt, wie sehr Archimedes sich beim Auffinden der Sätze des mechanischen Hilfsmittels bedient hat.

Vom Schwerpunkt

Archimedes nahm stillschweigend an, daß jede Größe einen wohlbestimmten Schwerpunkt hat. Macht man den Schwerpunkt einer Größe zu ihrem Unterstützungspunkt, so ist sie im Gleichgewicht. Hat man einen Hebel mit festem Drehpunkt (Unterstützungspunkt) um eine horizontale Achse, so können die Längen des einen und des anderen Hebelarmes (kurz „Abstände“ genannt) gleich oder ungleich sein. Gleiche Gewichte in gleichen Abständen sind im Gleichgewicht. Gleiche Gewichte in ungleichen Abständen sind nicht im Gleichgewicht, sondern es tritt ein Sichneigen nach der Seite des Gewichts im größeren Abstand hin ein. Größen stehen stets im Gleichgewicht, wenn ihre Abstände (vom Unterstützungspunkt) sich umgekehrt proportional zu ihren Gewichten verhalten (Hebelgesetz).

Archimedes bestimmte auch den Schwerpunkt ebener geometrischer Figuren. Der Schwerpunkt einer Geraden ist ihr Mittelpunkt. Archimedes bewies, daß in einem Parallelogramm nur der Mittelpunkt der Schwerpunkt sein kann. Indem er das Dreieck aus Parallelogrammen aufbaute, fand er den Schwerpunkt des Dreiecks und damit eines jeden Polygons. Der Schwerpunkt des Dreiecks liegt auf jeder Seitenhalbierenden, also auf ihrem Schnittpunkt. Der Schwerpunkt teilt jede Seitenhalbierende vom Eckpunkt aus im Verhältnis 2:1.

Eigenschaften der Parabel

Bevor die mechanischen Überlegungen des Archimedes zur Parabelquadratur dargestellt werden können, sind noch einige der dabei benutzten Eigenschaften der Parabel zu beschreiben.

Die Parabel $y^2 = 2px$ liegt symmetrisch zur x-Achse (Bild 1).

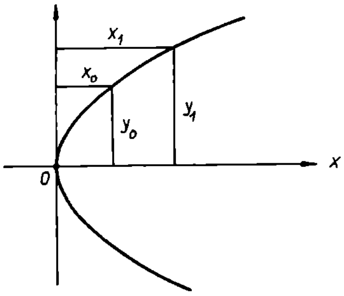


Bild 1

Die x-Achse heißt auch Achse der Parabel. Jede Parallele zur Achse heißt ein Durchmesser der Parabel. Er halbiert gewisse parallele Sehnen. Für parallele Sehnen gibt es stets einen Durchmesser, der diese halbiert.

Eigenschaft E 1:
Sind $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ und (x_1, y_1) zwei Punkte auf der Parabel, so gilt

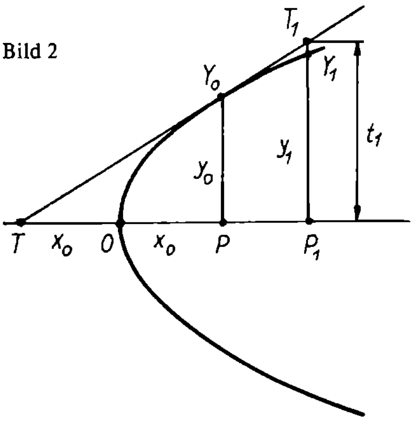
$$\left(\frac{y_1}{y_0}\right)^2 = \frac{x_1}{x_0}.$$

Beweis: Aus $y_0^2 = 2px_0$, $y_1^2 = 2px_1$ folgt die Behauptung.

Die y-Achse ist Tangente im Scheitelpunkt O der Parabel. Über die Tangenten an von O verschiedenen Punkten gelten die folgenden zwei Aussagen:

Eigenschaft E 2: T sei ein Punkt der verlängerten Achse außerhalb der Parabel so, daß $TO = OP$ ist. P sei der Fußpunkt der Ordinate Y_0P (Bild 2). Dann berührt Y_0T die Parabel in Y_0; Y_0T ist die Tangente an die Parabel in Y_0.

Bild 2



Beweis als *Aufgabe P 2:* Man zeige, daß die Gerade TY_0 keinen Innenpunkt der Parabel enthält; die Annahme $t_1 < y_1$ (für $y_1 \neq y_0$, siehe Bild 2) führt zu einem Widerspruch.

Eigenschaft E 3: Ist umgekehrt die Tangente an die Parabel im Punkt Y_0 gegeben, so sei T ihr Schnittpunkt mit der Verlängerung der Parabelachse. Dann gilt $TO = OP$ (P sei der Fußpunkt der Ordinate von Y_0 auf der Achse).

Aufgabe P 3: Dies ist analytisch-geometrisch zu beweisen.

Eigenschaft E 4: YY' sei senkrecht zur Achse. YY' sei die Grundlinie eines Parabelsegments und O der Scheitelpunkt des Segments. Trifft der Durchmesser durch irgendeinen anderen Parabelpunkt U die Gerade YY' in P' (Bild 3) und YO (wenn nötig, verlängert) in R, so gilt:
$P'R : UR = PY' : PP'$.

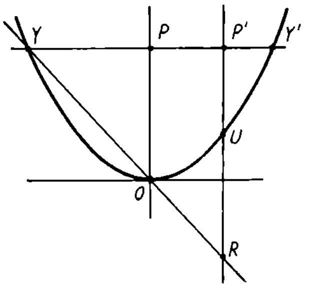
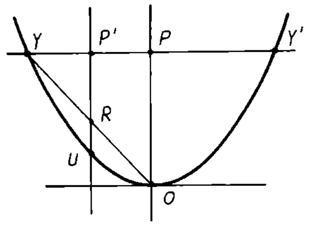


Bild 3



Aufgabe P 4: Beweis!

Unter Benutzung von *E 3, E 4* folgt (*Aufgabe P 5:* Wie?) die *Eigenschaft E 5:* Die Tangente in Y schneide die Verlängerung der Parabelachse OP in T. Man ziehe eine beliebige Parallele $P'R$ zu PT, die die Parabel in U schneidet. Dann gilt
$YP' : P'Y' = RU : UP'$ (vgl. Bild 4).

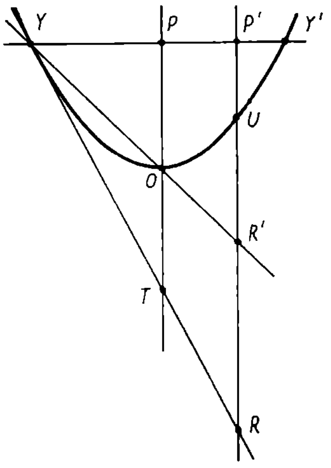


Bild 4

Hieraus folgt
$(YP' + P'Y') : P'Y' = (RU + UP') : UP'$,
d. h.
$YY' : P'Y' = RP' : UP'$.

Mechanische Überlegungen zur Parabelquadratur

Es sei $Y'OY$ das Parabelsegment, das vom Parabelbogen $Y'OY$ und der Sehne $Y'Y$ begrenzt wird. Man zeichne die Tangente im Punkt Y, verbinde die Punkte O und Y' sowie O und Y und zeichne durch Y' die Parallele zu OP (Bild 5). Diese Parallele schneide die verlängerte Gerade OY in K, die Tangente schneide die verlängerte Gerade OP in T und die Parallele in S. Der Punkt H werde auf der verlängerten Geraden YK so gewählt, daß

(1) $HK = KY$

ist. Archimedes: „Man denke sich YH als ein Waagebalken (Hebel) mit dem Mittelpunkt K.“

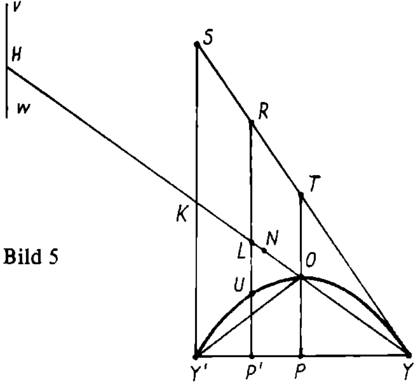


Bild 5

Es sei nun $P'U$ eine beliebige Parallele zur Achse PO der Parabel. (P' zwischen Y und Y' einschließlich gelegen.) Sie schneide die Gerade YH in L und die Tangente in R. Dann gilt wegen $TO = OP$ (Parabeleigenschaft $E3$) auch

(2) $RL = LP'$

und auch

(3) $SK = KY'$.

Da $YY' : Y'P' = RP' : P'U$ (Parabeleigenschaft $E5$) und offenbar auch $YY' : Y'P' = YK : KL = HK : KL$ (letzteres wegen (1)), so folgt

(4) $HK : KL = RP' : P'U$.

Nun „hänge“ man am Ende H des Hebels die Strecke VW von gleicher Länge wie $P'U$ und parallel zu $P'U$ in ihrem Schwerpunkt auf (so daß $VH = HW$). Die Gerade $P'R$ „hängt“ ebenfalls in ihrem Schwerpunkt L (wegen (2)) am Hebel. Wegen $VW = P'U$ und (4) gilt

(5) $HK : KL = RP' : VW$.

Diese Proportion besagt, daß die „Gewichte“ der beiden Strecken VW und RP' umgekehrt proportional sind zu ihren Abständen HK und KL vom Unterstützungspunkt K. Die Gerade VW mit H als Schwerpunkt ist somit (nach dem Hebelgesetz) im Gleichgewicht mit der Geraden RP', wenn man diese an der Stelle läßt, wo sie ist. (K ist der Schwerpunkt des aus beiden zusammengesetzten Gewichts und gleichzeitig Unterstützungspunkt.)

Archimedes: „Ebenso werden alle Geraden, die im Dreieck $SY'Y$ parallel zu TP gezogen werden, an der Stelle, wo sie sind, im Gleichgewicht sein mit ihren durch die Parabel abgeschnittenen Teilen, wenn diese nach H versetzt werden, so daß K der Schwerpunkt des aus beiden zusammengesetzten Gewichts ist.“

Nun denkt sich Archimedes das Dreieck $Y'SY$ aus lauter (unendlich vielen) Strecken, die parallel zu TP gezogen werden, zusammengesetzt, und ebenso das Parabelsegment aus den entsprechenden durch die Parabel abgeschnittenen Teilstrecken.

Diese „Indivisibelnvorstellung“, d. h. die Vorstellung, daß ebene Figuren aus Geraden zusammengesetzt sind, stammt wohl aus der altgriechischen Atomistik.

Archimedes: „Und weil aus den Geraden im Dreieck $Y'SY$ das Dreieck $Y'SY$ besteht und aus den im Parabelsegment der Geraden $P'U$ entsprechend genommenen das Parabelsegment $Y'OY$, so wird das Dreieck $SY'Y$ an der Stelle, wo es ist, im Punkte K im Gleichgewicht sein mit dem Parabelsegment, wenn dies nach H als Schwerpunkt versetzt wird, so daß K der Schwerpunkt ist des aus beiden zusammengesetzten Gewichts.“

Ist N der Schwerpunkt des Dreiecks, so gilt somit nach dem Hebelgesetz:

(6) Das „Gewicht“ des Dreiecks $Y'SY$ (an der Stelle, wo es ist; mit N als Schwerpunkt) verhält sich zum „Gewicht“ des Parabelsegments $Y'OY$, das in H als Schwerpunkt „aufgehängt“ ist, wie $HK : KN$.

Da N als Schwerpunkt des Dreiecks die Seitenhalbierende KY von $Y'S$ im Verhältnis $2 : 1$ teilt, ist $KY = 3 \cdot KN$.

Da $HK = KY$ ist, gilt somit auch $HK = 3 \cdot KN$, d. h. $HK : KN = 3$.

Nach (6) muß daher das „Gewicht“ (der Flächeninhalt) des Dreiecks $Y'SY$ dreimal so groß sein wie das „Gewicht“ (der Flächeninhalt) des Parabelsegments $Y'OY$.

Weil nach (3) $SK = KY'$ ist, ist der Flächeninhalt vom Dreieck SKY (kurz: ΔSKY) gleich dem von $KY'Y$ (Grundlinie $SK = KY'$, Höhe YY'), also $\Delta Y'SY = 2 \cdot \Delta KY'Y$. Der Flächeninhalt vom Dreieck $KY'Y$ ist wiederum doppelt so groß wie der Flächeninhalt von $Y'OY$ (weil $YP = PY$ ist).

Somit $\Delta Y'SY = 4 \cdot \Delta Y'OY$.

Da andererseits

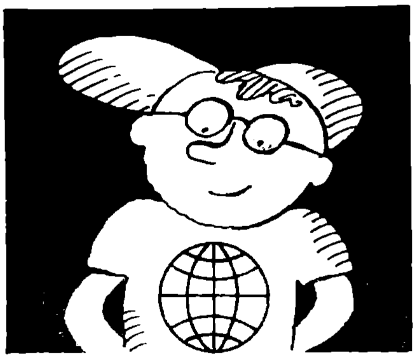
$\Delta Y'SY = 3 \cdot \text{Segm. } Y'OY$ ist, so folgt

$$(7) \quad \text{Segm. } Y'OY = \frac{4}{3} \Delta Y'OY.$$

Archimedes: „Dies ist zwar nicht bewiesen durch das hier Gesagte, es deutet aber darauf hin, daß das Ergebnis richtig ist. Da wir nun sahen, daß es nicht bewiesen ist, aber vermuteten, daß das Ergebnis richtig ist, so haben wir selbst einen geometrischen Beweis ersonnen, den wir schon früher veröffentlicht haben“, nämlich vor der Publikation der „Methodenlehre“ in der Schrift „Die Quadratur der Parabel“.

Wer diesen Beweis kennenlernen will, lese Archimedes' Schrift „Die Quadratur der Parabel“. Sie ist in der Reihe „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften“ erschienen (Reprint: Leipzig 1987).

H. Pieper

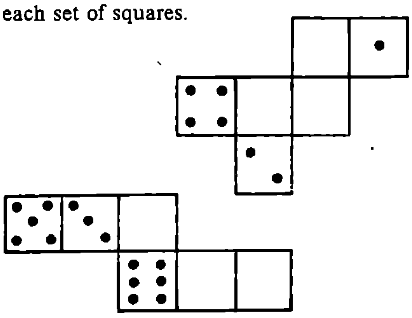


▲1▲ Cubic squares

The drawings show two sets of squares, each of which can be folded to produce a cube.

The faces of a cube are usually numbered in such a way that the numbers one opposite faces add up to 7.

Mark the missing numbers on the faces of each set of squares.



aus: Fun with mathematics, Toronto

▲2▲ A vol d'oiseau

En partant d'un point A, vous faites:

1. 1 kilomètre vers le nord
2. 2 kilomètres vers l'ouest
3. 3 kilomètres vers le sud
4. 6 kilomètres vers l'est

Après ces 4 déplacements, quelle est la distance qui vous sépare, à vol d'oiseau, de A, votre point de départ?

a) 3,4 kilomètres
b) 4,5 kilomètres
c) 6,6 kilomètres

aus: Logigram, Paris

▲3▲ В газете „Советский спорт“ (3. 5. 1987) была опубликована промежуточная таблица одного футбольного турнира:

	Игры	Побед	Ничьих	Пораж.	Разн. мяч.	Очки
Венгрия	2	2	0	0	4–1	4
Швеция	2	1	1	0	1–1	3
Испания	2	0	2	0	3–3	2
Ирландия	3	0	1	2	3–5	1
Франция	1	0	0	1	0–2	0

Докажите, что в таблице имеется ошибка, и, зная, что ошибка одна, исправьте ее и укажите результаты сыгранных матчей.

aus: Quant, Moskau

Der Schulrechner SR 1 – das Allheilmittel?

Mit dem Schulrechner SR 1 können wir schneller und genauer rechnen, als das früher mit dem Rechenstab möglich war. Dennoch, so finde ich, ergeben sich auch einige Nachteile und Gefahren im Schulalltag. Und genau darum soll es gehen. Ich konnte beobachten, daß sich viele Schüler oft bedingungslos dem Rechner anvertrauen. Sie vergessen häufig sich förmlich aufdrängende Vereinfachungen (oft ist Kürzen zeitsparend und vermeidet Fehler beim Eintippen), sie kontrollieren die Rechenresultate nicht durch eine Überschlagsrechnung und glauben manchmal die unsinnigsten Ergebnisse.

Der Schulrechner ist uns ein willkommenes und nützliches Hilfsmittel, um die Rechenarbeit zu vereinfachen. Er kann uns aber das Denken nicht abnehmen, denn er führt nur die Rechenschritte aus, die wir ihm vorschreiben. Da heißt es dann also trotzdem kontrollieren, da der Rechner keine Tippfehler erkennt. Auch sonst hat er seine Grenzen und rechnet nicht immer ganz genau.

Dazu einige Beispiele:

1. Was ergibt $\frac{7}{3}+\frac{12}{9}$? Der SR 1 zeigt 3,6666667 an, aber ihr erkennt auch sofort, daß die Summe $\frac{11}{3}$ bzw. $3\frac{2}{3}$ beträgt!

2. Wir geben die Tastenfolge $\boxed{3}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{x^2}$ in den SR 1 ein und erhalten 8,9999998 angezeigt, was aber genaugenommen falsch ist, denn es ist $((\sqrt{3})^2)^2=9$.

3. Für welche reelle Zahl x gilt $\frac{1+\cos x}{2}=0{,}5$? Durch Umformen erhält man $\cos x=0$ bzw. $x=\arccos 0$. Mit der Tastenfolge $\boxed{0}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\cos}$ liefert der SR 1 den Wert 1,5707963. Wer kann erkennen, daß dies ein Näherungswert für $x=\frac{\pi}{2}$ ist? Der Verlauf der cos-Funktion hätte uns sofort sämtliche Lösungen, nämlich $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in N$, geliefert.

4. $(-1)^9$ könnte formal über $\boxed{1}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{9}$ $\boxed{=}$ mit dem SR 1 berechnet werden? Nein, er liefert die Fehlermeldung E (ERROR). Im SR 1 wird vermutlich $e^{9\ln(-1)}$ gebildet, und das führt zur Fehlermeldung, weil die Logarithmusfunktion $y=\ln x$ nur für $x\geqq 0$ definiert ist.

5. Mit dem Schulrechner erhalten wir für $\sqrt[72]{2^{144}}$ den Wert 4.
Hätten wir diese Aufgabe nicht auch schneller im Kopf lösen können?

Ich glaube, diese wenigen Beispiele zeigen bereits, daß man seinen Kopf öfter bemühen sollte, manche scheinbar schwere Aufgabe wird dann auf einfache Weise lösbar. Hinzu kommt, daß jeder Taschenrechner nur endlich viele Dezimalzahlen (inter: Dualzahlen) verarbeiten kann. So entstehen Rundungsfehler. Es kann z. B. vorkommen, daß $x+y=x$ gilt, obwohl $y \neq 0$ war. Das könnt ihr etwa mit $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{EEX}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$ bestätigen! Manche Schüler erwarten vom SR 1 mehr, als er zu leisten vermag.

Eine weitere Fehlerquelle bildet die Verwendung der Funktionstasten ($\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$, $\boxed{\tan}$, $\boxed{y^x}$ usw.). Die Funktionswerte werden hierbei über Näherungsformeln bzw. Näherungsverfahren berechnet, sie sind meist für Anwendungszwecke genau genug, aber eben nicht immer ganz exakt. Aufpassen muß man insbesondere beim Aufruf von $\boxed{y^x}$. Wenn wir beispielsweise $\sqrt{251}$ mit Hilfe der $\boxed{y^x}$-Taste berechnen, also $\boxed{2}$ $\boxed{5}$ $\boxed{1}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ eingeben, so liefert der SR 1 15,843. Mit der $\boxed{\sqrt{\ }}$-Taste erhält man 15,842 98 oder eigentlich 15,842 979 5 (dies „entlokken" wir dem SR 1, indem wir von 15,842 98 die Zahl 15 subtrahieren).

Während unserer Lehrausbildung waren oft Logarithmen zu berechnen.

Zur Erinnerung: *Wir nennen z den Logarithmus einer Zahl a zur Basis b, falls* $b^z = a$ *ist, und wir schreiben* $z=\log_b a$.

Eine besondere Rolle spielen die *dekadischen Logarithmen* (Basis $b=10$), die *natürlichen Logarithmen* (Basis $b=\mathrm{e}$, e ist die *Eulersche Zahl* $\mathrm{e}\approx 2{,}718\ldots$) und die *binären Logarithmen* (Basis $b=2$). Noch vor wenigen Jahren mußten die Schüler Logarithmen aus Zahlentafeln entnehmen. Heute besitzen wir unseren Schulrechner, der uns die Arbeit erleichtert. Der SR 1 kann natürliche Logarithmen ($y=\ln x$) und dekadische Logarithmen ($y=\lg x$) sowie die Werte der Umkehrfunktionen ($y=\mathrm{e}^x$ bzw. $y=10^x$) näherungsweise berechnen. Binäre Logarithmen lassen sich direkt nicht bestimmen. Für Logarithmen sind folgende Gesetze bekannt:

i) $b^{\log_b a}=a$
ii) $\log_b a^r = r\log_b a$
iii) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$
iv) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

wobei a, b, c, r positive reelle Zahlen sind.

Einen Näherungswert für die irrationale Zahl e könnt ihr mit $\boxed{1}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\ln}$ als e^1 berechnen: $\mathrm{e}\approx 2{,}718\,281\,8$. Weil die Exponentialfunktionen nur positive Funktionswerte besitzen, sind deren Umkehrfunktionen, also die Logarithmenfunktionen, nur für positive Argumente definiert!

Wir wollen nun Logarithmen zu Basen berechnen, die von e und 10 verschieden sind. Dazu nutzen wir das Gesetz iv) aus. *Für welche Zahlen x und z gilt* $2^x=8$ *und* $2^z=9$? Offenbar ist

$x=\mathrm{lb}\,8=\log_2 8=\frac{\lg 8}{\lg 2}$ und $z=\frac{\lg 9}{\lg 2}$.

Das berechnen wir mit dem SR 1:

$\boxed{8}$ $\boxed{\lg}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\lg}$ $\boxed{=}$ und
$\boxed{9}$ $\boxed{\lg}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\lg}$ $\boxed{=}$

Es ergibt sich $x=3$ und $z=3{,}169\,924\,9$. Eine Probe bestätigt unsere Ergebnisse: $2^x=8$ und $2^z=9$. Gesetz iv) gibt an, daß auch die Taste $\boxed{\ln}$ verwendet werden darf:

$\boxed{8}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{=}$ und
$\boxed{9}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{=}$.

Nun liefert der SR 1 die Werte $x=2{,}999\,999\,94$ (mit Subtraktionstrick für die Anzeige der letzten Stelle) bzw. $z=3{,}169\,925\,04$. Meine Erfahrungen besagen, daß die $\boxed{\ln}$-Funktionstaste meistens etwas ungenauere Werte liefert.

Wie groß ist $y=\ln 2+\ln 0{,}5$?

Exakt ist es

$y=\ln 2+\ln\frac{1}{2}=\ln 2+\ln 1-\ln 2$

$=\ln 1=0$. Der Schulrechner bestimmt gemäß $\boxed{2}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{=}$ den Wert $-1\cdot 10^{-8}$, der zwar näherungsweise mit 0 übereinstimmt, aber eben nicht genau ist. Überprüft auch, ob $\ln \mathrm{e}=\lg 10=1$ ist! (Der SR 1 zeigt $\ln\mathrm{e}=9{,}999\,9\cdot 10^{-1}$ an!) Verlaßt euch also nicht blindlings auf den „Gehilfen" SR 1!

Jetzt sollen n-te Wurzeln mit $n\geqq 2$ berechnet werden. $y=\sqrt[7]{698}$ läßt sich wegen $y=698^{\frac{1}{7}}$ mit dem Schulrechner so bestimmen:

$\boxed{6}$ $\boxed{9}$ $\boxed{8}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{7}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$.

Der SR 1 zeigt $y=2{,}548\,39$ an.

Eine andere Möglichkeit bietet die Darstellung $y=\mathrm{e}^{1/7\ln 698}$ mit dem SR 1-Ablaufplan

$\boxed{6}$ $\boxed{9}$ $\boxed{8}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{7}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\ln}$

und der Anzeige 2,548 385 1. Es werden mehr Stellen angezeigt, dieser zweite Weg muß aber nicht genauer sein, wie die Berechnung von $\sqrt[5]{243}$ (mit dem exakten Resultat 3) zeigt. Allgemein kann $\sqrt[n]{a^m}$ als $a^{\frac{m}{n}}$ bzw. $\mathrm{e}^{m/n\ln a}$ geschrieben und dann direkt mit dem SR 1 oder einem Computer ausgewertet werden. Für BASIC-Experten habe ich diese beiden Möglichkeiten programmiert:

```
10 REM WURZELN UEBER EXPONEN-
   TEN
20 CLS: INPUT"RADIKAND"; RA
30 INPUT"EXPONENT";E
40 ?SPC(80):REM 2LEERZEILEN
50 IF E=2 THEN R=SQR(RA):ELSE
   R=RA∧(1/E)
60 ?R:?
70 END
```

```
10 REM WURZELN MIT LOGARITH-
   MEN
20 CLS:INPUT"RADIKAND";RA
30 INPUT"EXPONENT";E
40 ?SPC(80)
50 IF E=2 THEN R=SQR(RA):ELSE
   R=EXP(1/E*LN(RA))
60 ?R:?
70 END
```

Sollen mit einem Computer Wurzeln und Logarithmen berechnet werden, so muß man sich zuerst informieren, welche Funktionen als Standardfunktionen fest programmiert vorhanden sind. Das sind meistens die Funktionen Quadratwurzel SQR(X), die Exponentialfunktion EXP(X) und der natürliche Logarithmus LN(X). Andere Funktionen und speziell Logarithmen zu anderen Basen lassen sich in der oben beschriebenen Art mit diesen Standardfunktionen ausdrücken. Hier ist ein Programm zur Berechnung von Logarithmen mit der Basis B:

```
10 REM LOG MIT BELIEBIGER BASIS
   >0 UND <>1
20 CLS:INPUT"ARGUMENT";A
30 INPUT"BASIS";B
40 R=LN(A)/LN(B)
50 ?SPC(80):?R?
60 END
```

Nun möchte ich euch noch vier Probleme stellen:

6. Zu berechnen sind die Nullstellen von $f(x) = 1 + \sin x - \cos 2x$ im Bereich $0° \leq x < 360°$. Wegen $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ist $f(x) = \sin x \cdot (1 + 2\sin x)$. Folglich gilt $f(x) = 0$ genau dann, wenn $\sin x = 0$ oder $\sin x = -\frac{1}{2}$ ist. Auch ohne Schulrechner erhält man die vier Nullstellen 0°, 180°, 210° und 330°. Natürlich könnt ihr $\sin x = 0$ bzw. $\sin x = -\frac{1}{2}$ auch mit dem SR 1 als $x = \arcsin 0$ bzw. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ bei Schalterstellung DEG lösen, es werden dann aber nur die Nullstellen 0° und −30° angezeigt!

7. Beweist, daß $4\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3} = 3$ ist!

Ihr könnt drauflostippen und die linke Seite der Gleichung mit dem SR 1 auswerten und auf das Resultat 3 kommen. Ein exakter Beweis ist das aber nicht! Wenn ihr euch aber daran erinnert, daß $\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ist, so wird die Identität ganz selbstverständlich!

8. Man berechne $\sin\frac{2}{3}x$ für $x = 270°$.

Das geht auch ohne SR 1, denn es ist $\sin\frac{2}{3}270° = \sin 180° = 0$, das weiß doch hoffentlich jeder!

Sicher habt ihr den Speicher des Schulrechners zu schätzen gelernt. Oft geht es aber auch ohne ihn. Das ist auch wichtig, falls zwei Zahlen gespeichert werden müßten, aber eben nur ein Speicher vorhanden ist. Wir versuchen als Beispiel

$$\frac{e^3}{(\ln \lg 5)\frac{\pi}{e}}$$

ohne Benutzung des Speichers zu berechnen. Das geht folgendermaßen:

$\boxed{\pi}\ \boxed{\div}\ \boxed{1}\ \boxed{F}\ \boxed{\ln}\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{5}\ \boxed{\lg}\ \boxed{\ln}$
$\boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{F}\ \boxed{\ln}\ \boxed{=}\ \boxed{1/x}$,
wobei wir als Ergebnis −48,525 erhalten.

Ihr werdet mir jetzt sicher zustimmen: *„Der Mensch ist nicht der Sklave der Technik. Auch wenn sie versagt, bleibt ihm immer noch das Wertvollste, sein Einfallsreichtum, seine Schöpferkraft...“*

(technikus, Berlin) *Th. Bahls*

Gerhard Herma

Runden von Exponenten

Schüler (und Erwachsene ...) mögen gelegentlich meinen, die Zahlen 10^{28} und $10^{28,3}$ seien zwar furchtbar groß, aber der kleine Unterschied in den Exponenten spiele keine nennenswerte Rolle, es mache das Abrunden auf 28 nicht allzuviel aus. Irrtum! Jeder materielle Körper ist aus Nukleonen (nämlich Protonen und Neutronen, ihre Massen stimmen fast überein, sie betragen $1{,}6 \cdot 10^{-27}$ kg) aufgebaut. Ein Koffer von 16 kg Masse enthält somit rund 10^{28} Kernbausteine. Enthielte er $10^{27,3}$ Nukleonen, d. s. $2 \cdot 10^{28}$ dieser Partikel, wäre er doppelt so schwer. Ob man 16 kg oder 32 kg in den 5. Stock über Stiegen zu tragen hat, ist kein „kleiner“ Unterschied! Daher: Vorsicht beim Runden von Exponenten!

Eine Aufgabe von Prof. Dr. H. Heckendorf

Direktor der Sektion Mathematik der TU Karl-Marx-Stadt

Kurzbiographie

Jahrgang 1937 – Abitur 1955 – Von 1955 bis 1959 Mathematikstudium an der Martin-Luther-Universität Halle – Einjährige Tätigkeit als Oberstufenlehrer für Mathematik an der Oberschule Thale/Harz und am Pädagogischen Institut Karl-Marx-Stadt – Von 1961 bis 1964 Aspirantur an der Schewtschenko-Universität Kiew – Promotion zum Dr. rer. nat. mit einer Arbeit zur Anwendung von Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Statistischen Physik – Seit 1965 an der Sektion Mathematik der TU Karl-Marx-Stadt – 1981 Promotion B – Seit 1. 9. 1984 ordentlicher Professor für das Fachgebiet Stochastik, ab 1. 5. 1989 Direktor der Sektion Mathematik der TU Karl-Marx-Stadt.

Eine Aufgabe aus der Versuchsplanung

In nahezu allen angewandten Wissenschaften ist es eine wichtige Aufgabe, mit Hilfe von Experimenten Zusammenhänge zwischen Größen aufzuklären. Angenommen, in einem Experiment soll der Einfluß von m Größen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (auch Faktoren genannt) auf eine Größe Y (Zielgröße) untersucht werden. So können die m Faktoren gewisse Druck-, Temperatur- und andere Einstellgrößen an einer Maschine (z. B. einer Spritzgießmaschine für Plasteteile) und entsprechende Materialkennziffern sein, während die Zielgröße ein Qualitätsparameter des erzeugten Produktes ist, z. B. die Bruchfestigkeit des hergestellten Plasteteils.

Das Experiment besteht darin, daß zur i-ten Einstellung der Faktoren $x_1, x_2, \ldots, x_m$ auf feste Werte $x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{mi}$ der zugehörige Wert Y_i gemessen wird, $i = 1, 2, \ldots, n$. Im Falle $m = 1$ haben wir es nur mit einem Faktor x_1 zu tun, das Experiment liefert dann n Wertepaare (x_{1i}, Y_i), also n Punkte in der Ebene. Die Auswertung des Experiments besteht in der Ermittlung der Gleichung $Y=f(x_1)$ der Kurve, die durch die gemessenen Punkte geht, bei m Faktoren in der Form $Y=f(x_1,\dots,x_m)$. Als Wertebereich jedes Faktors soll das Intervall $[-1, +1]$ angenommen werden (andernfalls läßt sich dies durch eine Transformation erreichen). Die Punkte, in denen gemessen wird, werden als Versuchsplan bezeichnet.

Ist bereits vorher bekannt, daß der Zusammenhang zwischen $x_1, x_2, \dots, x_m$ und Y linear in der Form

$$Y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m$$

ist, so genügt es, im Falle $m=1$ nur in zwei Punkten zu messen, denn durch zwei Punkte ist eine Gerade bereits bestimmt. Als Versuchsplan werden dann die Punkte $x_{11}=-1$ und $x_{12}=+1$ gewählt. Im Falle $m=2$ sind mindestens $n=3$ Messungen erforderlich, um die Koeffizienten der Gleichung $Y=a_0+a_1x_1+a_2x_2$ zu bestimmen. Werden für die Faktoren x_1 und x_2 jeweils nur Werte -1 und $+1$ genommen, so ergäben alle Kombinationen dieser Werte den sogenannten vollständigen zweistufigen Faktorplan in der folgenden Form:

Nummer des Versuchs	Faktor x_1	Faktor x_2
1	-1	-1
2	-1	$+1$
3	$+1$	-1
4	$+1$	$+1$

Der vollständige Faktorplan enthält also $n=4$ Versuchspunkte, wobei zu bemerken ist, daß die Summe der Faktorwerte jeweils Null ergibt (längs der Spalten summiert), obendrein ist das Skalarprodukt der Spalten gleich Null

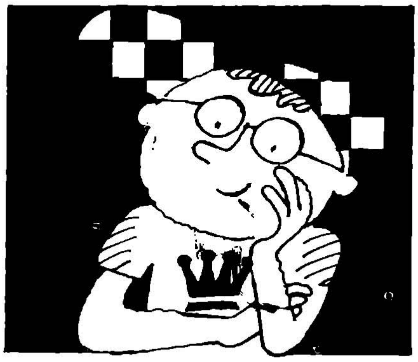
$$((-1)(-1)+(-1)(+1)+(+1)(-1) + (+1)(+1)=0).$$

(Diese Eigenschaften sind für die Versuchsauswertung von Vorteil.)

Allgemein würden bei m Faktoren $n=m+1$ Messungen als minimal erforderliche Anzahl ausreichen, um eine lineare Gleichung zwischen $x_1, x_2, \dots, x_m$ und Y aufzustellen.

Frage 1: Aus wie vielen Punkten besteht ein vollständiger zweistufiger Faktorplan für m Faktoren? Stellen Sie diesen Plan für $m=3$ auf.

Frage 2: Da der vollständige Faktorplan (lt. Antwort auf Frage 1) schon bei $m=3$, aber besonders bei größeren Werten von m, wesentlich mehr Punkte enthält als z. B. zur Bestimmung einer linearen Gleichung erforderlich sind, ist man bestrebt, Versuchspläne aufzustellen, die nur einen Teil des vollständigen Plans verwenden, mindestens $m+1$ Punkte enthalten, aber die Nebenbedingungen Spaltensumme gleich Null und alle Skalarprodukte von je zwei Spalten gleich Null weiterhin erfüllen. Ist dies für beliebiges n möglich? Stellen Sie für $m=3$ wenigstens zwei solche unvollständigen Faktorpläne auf.



Schach als Stimulator geistiger Entwicklung

Im Ergebnis moderner psychologischer Untersuchungen konnte nachgewiesen werden, daß schachspielende Schüler durch ihre Aufmerksamkeit im Unterricht, durch vorbildliche Disziplin und besonnene Lernhaltung beeindrucken. Sie erkennen Probleme gewöhnlich schneller als ihre Altersgefährten und suchen gezielt nach effektiven Lösungsvarianten. Im Gegensatz zu ihren nichtschachspielenden Mitschülern handeln sie seltener spontan und unbedacht aufs Geratewohl. Mit zunehmender Spielstärke beweisen schachspielende Schüler überwiegend Umsicht, Rücksicht, Verantwortungsfreude und Beharrlichkeit in der konsequenten Erfüllung einmal übernommener Pflichten.

Auch leistungsschwächeren, unruhigen Kindern hilft das methodisch durchgeführte Schachspielen, sich besser auf den Unterricht zu konzentrieren. In nachweisbaren Einzelfall-Langzeitstudien konnten schachspielende Schüler ihren Zensurendurchschnitt im Laufe von ein bis zwei Jahren bis zu 1,5 Noten verbessern. Für versetzungsgefährdete Schüler ist dieser Leistungszuwachs entscheidend, damit sie das Klassenziel doch noch erreichen.

Spielerisch gestellte Aufgaben (z. B. Schachaufgaben) fördern das sachliche freiwillige emotionale Engagement und die individuellen Denkpotenzen bei Schülern rationeller als manche zur Pflicht auferlegte Problemstellung (z. B. Textaufgaben).

In Form spielerischer Problemstellungen kann das Schach in elementaren didaktischen Stufungen bereits in der Vorschulerziehung eingesetzt werden. Berichte aus jenen Kindergärten, in denen Schach bisher ins Erziehungsprogramm aufgenommen wurde, lassen hoffen, daß Vorschulkinder auf diese Weise von Anfang an auf effektiverem Niveau zu lernen beginnen und als Schulanfänger weniger Schwierigkeiten als ihre Altersgefährten – z. B. beim relativ abstrakten Operieren mit Mengenbegriffen – haben werden.

Dr. sc. Marion Kauke konnte durch die Anwendung psychologischer Testverfahren bei Jungen im Alter von 13 bis 14 Jahren, die seit mehr als fünf Jahren eine Schach-Arbeitsgemeinschaft besucht hatten, bedeutsame Leistungsvorteile im „sprach- und zahlengebundenen Denken“, in der räumlichen Vorstellungsfähigkeit und im Konzentrationvermögen gegenüber nichtschachspielende Altersgefährten nachweisen. Beispielsweise in der psychologisch gut untersuchten Problemlösungsanforderung „Turm von Hanoi“ setzten die schachspielenden Kinder effektivere Strategien ein.

Freilich hinterlassen solche Untersuchungen über den positiven Einfluß des Schachs auf die geistige Leistungsfähigkeit zwangsläufig offene Fragen. Unklar bleibt vorerst noch die Stabilität der gemessenen Leistungssteigerungen und deren Abhängigkeit von der Art, Intensität und Dauer schachlicher Ausbildung.

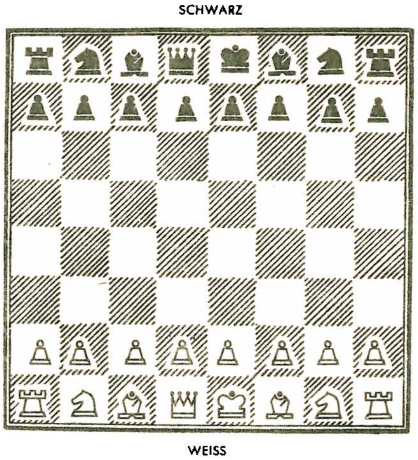
Auch die Frage, inwiefern das Schach zur Stabilisierung und Beibehaltung der intellektuellen Leistungsfähigkeit auf lange Dauer bis ins hohe Lebensalter und zur Verzögerung von Abbauprozessen beitragen kann, ist natürlich von großem Interesse.

In unserer Zeit, in der die Dynamik moderner Produktivkraftentwicklung die Verfügbarkeit qualifizierten Arbeitsvermögens herausfordert, sind Umstellungsfähigkeit, lebenslanges Lernen und hohe eigene Ansprüche an geistige Arbeit schließlich zu gesellschaftlichen Bedürfnissen geworden. In dieser Hinsicht reift auch im Rahmen höherer Anstrengungen zur Erschließung und Nutzung geistiger Ressourcen eine neue gesellschaftliche Bedeutung des Schachs heran.

(Diesem Artikel lagen Beiträge von Dr. sc. Marion Kauke und Dr. Roderich Strobel in der Zeitschrift „Schach“ zugrunde.)

H. Rüdiger

Nun noch eine kleine Aufgabe aus dem reichhaltigen Knobelnachlaß von Sam Loyd. Wie kann Weiß aus der Partieanfangsstellung Schwarz im 4. Zug matt setzen, wenn Schwarz gezwungen ist, analoge Gegenzüge zu den weißen Zügen auszuführen?



Es gibt zwei Lösungsmöglichkeiten!
Beispiele für analoge Zugfolgen:
1. Sf3 Sf6 2. Sg5 Sg4 3. d4 d5 oder
1. e4 e5 2. Dh5 Dh4 3. Lc4 Lc5.

Neue Studienrichtung:

Diplomlehrer für Mathematik/Informatik

Seit dem 1. 9. 1989 werden an der Technischen Universität Karl-Marx-Stadt und an der Pädagogischen Hochschule Güstrow Diplomlehrer in der Fachkombination Mathematik/Informatik ausgebildet.

Warum eine solche neue Fachkombination in der Lehrerausbildung?

In den letzten Jahren hat die Bedeutung der Informatik ständig zugenommen. Computer und damit die Informatik dringen in alle Bereiche des Lebens ein. In der Wissenschaft, in der Industrie, in der Planung und Leitung sind heute Computer unentbehrliche Hilfsmittel. Jeder sieht das tagtäglich selbst.

Das alles hat natürlich Auswirkungen auf das gesamte Bildungssystem, insbesondere auch auf die Arbeit in den Schulen.

Aspekte der Informatik haben Einzug gehalten in den obligatorischen und wahlobligatorischen Unterricht. Im fakultativen Unterricht und in der außerunterrichtlichen Arbeit spielt die Informatik eine zunehmend größere Rolle. Viele Schüler können mit Computern umgehen; demnächst werden an den Schulen Bildungscomputer vorhanden sein.

Für die Volksbildung werden deshalb Lehrer benötigt, die den wachsenden Anforderungen gerecht werden können, die in der Lage sind, Unterricht im Fach Informatik zu gestalten, außerunterrichtliche Arbeit auf diesem Gebiet durchzuführen und den anderen Lehrern bei der Nutzung von Computern in ihren Fächern zu helfen.

Schon jetzt werden den Mathematik- und Polytechniklehrern Grundkenntnisse in Informatik vermittelt. Aber entsprechend der zukünftigen Bedeutung der Informatik erweist es sich als unbedingt notwendig, auch Lehrer speziell für dieses Fachgebiet auszubilden.

Eine Kombination der Fächer Mathematik und Informatik in der neuen Ausbildungsrichtung der Lehrer ist besonders sinnvoll, weil diese Fächer enge Beziehungen zueinander haben und weil das tiefere Verständnis der Informatik solide mathematische Kenntnisse erfordert.

Wer kann sich in dieser Fachrichtung zum Studium bewerben?

Abiturienten, die sich für Mathematik und Informatik interessieren und die gerne Lehrer werden wollen. Vorteilhaft ist, wenn sich die Bewerber auch außerhalb des Unterrichts mit mathematischen Problemen beschäftigt haben (die Schülerzeitschrift „alpha“ lesen, am Aufgabenwettbewerb, an Mathematikolympiaden, an mathematischen Schülerzirkeln teilnehmen), wenn sie sich für Computer interessieren und mit diesen umgehen können (an entsprechenden Arbeitsgemeinschaften und am fakultativen Unterricht teilnehmen) und wenn sie mit Kindern gerne arbeiten wollen.

Womit beschäftigt sich der Lehrerstudent in der Ausbildung?

In den ersten beiden Studienjahren erhält der Student eine solide fachliche Grundausbildung in Mathematik und Informatik. Die Studenten werden mit typischen Denk- und Arbeitsweisen sowie Aufgabenstellungen der Wissenschaften Mathematik und Informatik vertraut gemacht.

Die Fachausbildung wird in den höheren Studienjahren fortgesetzt. In der Mathematik und im Fach Informatik erhalten die Studenten die Voraussetzungen für die Erteilung eines wissenschaftlich fundierten obligatorischen und fakultativen Unterrichts sowie für die Gestaltung fachspezifischer außerunterrichtlicher Tätigkeit. Die Bedeutung der beiden Wissenschaften für die Praxis, insbesondere die Rolle für den wissenschaftlich-technischen Fortschritt, werden in der Ausbildung bewußt gemacht. Die enge Verbindung zwischen Mathematik und Informatik, die Wechselbeziehungen zwischen beiden Wissenschaften und deren Bedeutung für andere Unterrichtsfächer werden besonders beachtet.

Die Mathematikausbildung umfaßt die Gebiete Grundlagen der Mathematik, Diskrete Mathematik, Analysis, Algebra und Geometrie, Numerische Mathematik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik, sowie Geschichte der Mathematik.

Die Informatikausbildung besteht aus einem Grundkurs, der sich mit Programmierungstechnik und Softwaretechnologie, mit Rechner- und Betriebssystemen, mit theoretischen Problemen und Computergeometrie (hier werden u. a. auch die Beziehungen zur Geometrieausbildung und zur Darstellenden Geometrie hergestellt) befaßt, der Angewandten Informatik mit dem Inhalt Informationssysteme, Modellierung und Simulation, Datenbanken, Software-Werkzeuge, Datenschutz und Datensicherheit sowie dem Lehrgebiet Physikalische Grundlagen der Informatik.

Die fachliche Ausbildung wird vervollkommnet durch entsprechende Praktika, so u. a. durch ein Praktikum zur Numerischen Mathematik, durch Arbeit der Studenten mit Computern und durch ein Praktikum zu den Physikalischen Grundlagen der Informatik. Die Studenten erwerben auch Fertigkeiten im Umgang mit Software und werden befähigt zur Wartung und Pflege der Schul- und Unterrichts-Software.

Die pädagogisch-psychologische Ausbildung erstreckt sich wie in anderen Lehrerfachrichtungen über die ersten drei Studienjahre und erfolgt in den Gebieten Erziehungstheorie, Didaktik, Pädagogik und Psychologie. Im dritten und vierten Studienjahr werden in den Disziplinen Methodik des Mathematik- und Informatikunterrichts Aufgaben, Methoden und Organisationsformen des Fachunterrichts behandelt. Weiterhin erwerben die Studenten entsprechend ihren wissenschaftlichen Interessen vertiefte Kenntnisse auf einem speziellen Wissensgebiet der Mathematik, Informatik, Pädagogik, Psychologie oder Methodik, auf dem sie dann ihre Diplomarbeiten schreiben.

Den besonderen Anforderungen des Lehrerberufes dienen mehrere Praktika (Ferienlagerpraktikum, schulpraktische Übungen in Pädagogik, Psychologie und in den Methodiken des Mathematik- und Informatikunterrichts sowie im fünften Studienjahr ein mehrmonatiges Praktikum an einer polytechnischen Oberschule). Außerdem können Studenten als Leiter von Arbeitsgemeinschaften tätig sein.

Die Studenten haben während ihrer Ausbildung viele Möglichkeiten für selbständige wissenschaftliche Arbeit; so können sie im Rahmen von Jugendobjekten an Forschungsaufgaben mitarbeiten bzw. leiten Arbeitsgemeinschaften Mathematik und Informatik für Schüler.

Wo erfolgt der Einsatz der Lehrer?

Der Einsatz erfolgt als Fachlehrer Mathematik/Informatik in den Klassen 5 bis 10 im obligatorischen, wahlobligatorischen und fakultativen Unterricht der POS sowie an erweiterten Oberschulen. Es wird davon ausgegangen, daß der Informatiklehrer auch anderen Lehrern Unterstützung bei Einsatz der Computertechnik gibt, in der Lage ist, Computerkabinette und Softwarebibliotheken zu betreuen sowie bei der Einführung, Pflege und Wartung schulorganisatorischer Software helfen kann.

Wohin kann man sich wenden, wenn man Anfragen hat?

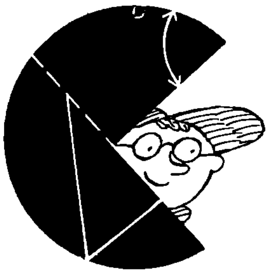
Wer Anfragen zu dieser neuen Fachkombination des Lehrerstudiums hat, sollte sich an die Sektion Mathematik der
Technischen Universität Karl-Marx-Stadt
PSF 964, Reichenhainer Straße 39/42
Karl-Marx-Stadt, 9010
oder an die
Pädagogische Hochschule
„Liselotte Herrmann“ Güstrow
Goldberger Straße 12, Güstrow, 2600
wenden.

J. Gronitz

Übrigens – auch die zukünftigen Lehrer für Mathematik und Physik können sich im Kurs „Numerische Mathematik“ mit Kleinrechnern und zukünftig dem Bildungscomputer bekannt machen. In welchem Umfang, ist natürlich vom Interesse abhängig. So erhalten leistungsfähige Studenten an der Karl-Marx-Universität Leipzig außerdem die Möglichkeit, Teile des Postgradualstudiums für ausgebildete Mathematiklehrer zur Qualifizierung auf dem Gebiet der Informatik zu absolvieren und damit die Bestätigung, das Fach Informatik lehren zu können.

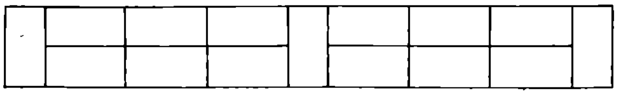
Alphons

In freien Stunden · alpha-heiter



Legespiel mit Dominosteinen

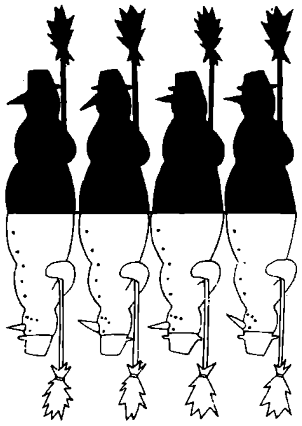
Der abgebildete Streifen ist in 15 Rechtecke zerlegt, deren jedes die Größe eines Dominosteines hat. Aus einem Dominospiel mit 28 Steinen ist auf jedes dieser Rechtecke so ein Dominostein zu legen, daß gilt: Zwei zu verschiedenen Steinen gehörende Hälften, die längs einer Kante aneinanderstoßen, haben zusammen stets 8 Punkte.



W. Träger, Döbeln

Eisiges

Die Schatten sind vertauscht. Ordne sie zu!



Mathematischer Rösselsprung

In die Figuren wurden ein mathematischer Begriff (linke Figur) sowie der Name eines mathematischen Schüler-Wettbewerbs (rechte Figur) eingetragen. Wie lauten diese Begriffe?

Schüler Jens Mildner, Leipzig

	T	S	A	
	K	■	B	
	U	R	T	
		E		
H	E	I	S	N
	N	■	I	
	C	Z	O	

	I	E	M	
	Y	■	A	
	D	P	L	
		A		
T	M	O	T	M
	I	■	E	
	H	A	K	

5 Zeichen – 5 Buchstaben

Für die fünf verschiedenen Zeichen sind fünf verschiedene Buchstaben so zu setzen, daß sich in den sechs Zeilen sechs verschiedene Worte ergeben. In der ersten Spalte ergibt sich dann ein weiteres Wort. Zur Erleichterung sind bereits die Buchstaben W und S eingetragen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

W	○	□	□	○
△	<	S	○	□
<	○	□	>	○
>	□	○	△	<
○	<	>	○	□
□	○	△	<	○

Mitternachtsknobeleien

Herr Lehmann hat seinem Töchterchen zum Geburtstag ein nettes Spiel gekauft. Sein Freund Herbert fragt neugierig, was er dafür bezahlt hat und erhält zur Antwort:
„Nimm die Zahl der Stunden, die seit Mitternacht verflossen sind, doppelt. Was herauskommt, vervielfache mit 2, und das Ergebnis teile durch die Zahl der verflossenen Stunden. Dann erhältst du die Zahl, die im Augenblick die Uhr dort als Stunde anzeigt. Füge 1,65 M hinzu, und du weißt den Preis."
Gib Preis und Uhrzeit an!

H.-J. Böhland, Wallroda

Raten und Rechnen

Jeder Buchstabe bedeutet eine Ziffer, gleiche Buchstaben also immer gleiche Ziffern. Diesen Angaben entsprechend sind die Ziffern zu finden, die für die Buchstaben eingesetzt, die waagerechten und senkrechten Rechenaufgaben richtig lösen.

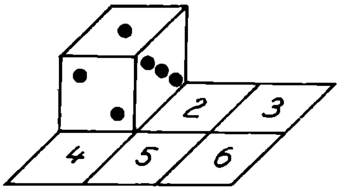
$$\begin{array}{ccccc} CCB & - & GFB & = & ICF \\ : & & + & & - \\ \hline BE & \cdot & GG & = & HAE \\ \hline GJ & + & GGH & = & GBG \end{array}$$

H. Raduschewski, Berlin

Wer findet die kürzeste Zugfolge?

Das Spielfeld besteht aus 6 quadratischen Feldern, deren jedes so groß ist wie die Seitenfläche eines Spielwürfels. Der Würfel wird so auf das Feld 1 gesetzt, daß seine Deckfläche einen Punkt und seine Vorderfläche 2 Punkte trägt (siehe Bild). Bei einem Zug wird dieser Würfel um eine seiner jeweiligen Grundkanten um 90° auf ein anderes Feld gekippt. Mit möglichst wenig Zügen ist zu erreichen, daß der Würfel
a) auf Feld 2 liegt, seine Deckfläche 4 und seine Vorderfläche 5 Punkte zeigt und
b) auf Feld 3 liegt, seine Deckfläche einen Punkt und seine Vorderfläche 2 Punkte zeigt.

W. Träger, Döbeln



Mathe-ABC

$$\boxed{ABCDC \cdot C = CDCBA}$$

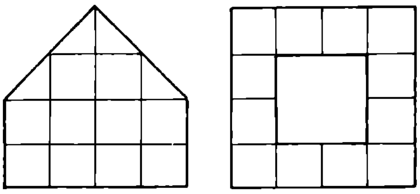
Man ersetze die Buchstaben so durch dezimale Grundziffern, daß eine wahre Gleichung entsteht! Gleiche Buchstaben stehen für die gleiche Ziffer, und unterschiedliche Buchstaben für verschiedene Ziffern.

stud. phys. Toralf Mildner, Leipzig

Geschickt geteilt

Zerlege die Figur A so mit 3 Schnitten, daß aus den entstehenden Teilen die Figur B zusammengesetzt werden kann.

W. Görgens, Schönebeck
H. Engelhaupt, Gundelsheim (BRD)

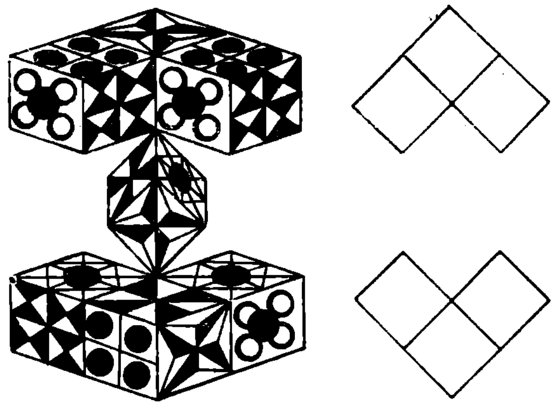


James Franck, Nobelpreisträger für Physik, war trotz seiner herausragenden wissenschaftlichen Fähigkeiten bei seinen Mitarbeitern als schlechter Rechner bekannt. Bei mathematischen Problemen, aber auch bei einfacheren Aufgaben stellte er sich so ungeschickt an, daß eines Tages Kollegen seinen Rechenstab mit dem Stempelaufdruck aus der Buchhaltung versahen: „Nur zur Verrechnung".

aus: Lingmann/Schmiedel: Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten, VEB Fachbuchverlag Leipzig

Kombinieren gefragt

Die geometrische Figur aus sieben gleichen Würfeln ist so aufgebaut, daß man maximal immer nur die Abhängigkeit von jeweils drei Seiten erkennt. Wie sehen die Unterseiten der oberen und unteren 3 Würfel aus?



W. Neugebauer, Berlin

Zum Jahreswechsel

$$\begin{array}{l}
1+\ 9+\ 8+9\\
1+\ 9+\ 8+9\\
1+\ 9+\ 8+9\\
1+\ 9+\ 8+9\\
\hline
=19+89=98+9+1
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\ 1+9\cdot\ 9+0\\
+\ 1\cdot 9+\ 9+0\\
\hline
=\ 1+9+90=1+99+0
\end{array}$$

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Denkt nach – schlagt nach – fragt nach!

Kulle, Kalle und Kelle waren in den großen Ferien auf dem Dorf bei Opa Helle. Dieser erzählte aus seiner Tätigkeit vor 40 Jahren:
„Ich hatte eine Siedlung und bewirtschaftete 12 Morgen mit Getreide. Die Getreideernte war für heutige Verhältnisse besonders umständlich und mühevoll (Mähen – Binden in Garben/zum Teil mit der Hand – Aufstellen der Garben zum Trocknen in Stiegen (Hocken oder Mandeln) – Einfahren und in Mieten lagern und später Dreschen).
Nach dem Dreschen wurde die Masse der Körner in Doppelzentner angegeben.
Für ein 3-Pfund-Roggenbrot bezahlte ich vor 40 Jahren – genau wie heute – etwa 5 Groschen.
Täglich holte ich aus dem Hühnerstall etwa 1 Schock Eier."
Nun wollen Kulle, Kalle und Kelle die heute nicht mehr gebräuchlichen Begriffe in genormte Einheiten übertragen.
Helft den Dreien!

StR Hans Mörke, Neubrandenburg

XXX. Internationale Mathematik-Olympiade in Braunschweig

Vom 13. bis zum 24. Juli 1989 fand in Braunschweig (BRD) die XXX. Internationale Mathematik-Olympiade statt. Unter den 50 Teilnehmermannschaften war auch eine 6-Schüler-Mannschaft aus der DDR. Für diese Mannschaft hatten sich Rüdiger Belch, Andreas Siebert, Gérard Zenker, André Pönitz, Jan Fricke und Frank Göring qualifiziert. Prof. Burosch (W.-Pieck-Universität Rostock) war Delegationsleiter, Prof. Gronau (E.-M.-Arndt-Universität Greifswald) war sein Stellvertreter.

Wir trafen uns am Freitag, dem 14. Juli im Pionierpalast in Berlin (Wuhlheide), denn das Programm für die Mannschaften begann erst am 16. Juli. Nur Prof. Burosch steckte schon voll im Streß, denn am 14. Juli begann die Jury mit der Auswahl der Klausuraufgaben, während wir noch vom Ministerium verabschiedet wurden. Dies geschah gemeinsam mit der DDR-IPhO-Mannschaft; die IPhO fand etwa zur gleichen Zeit in Polen statt. Eine kleine Dampferfahrt rundete die Verabschiedungszeremonie am Sonnabend ab. Während wir uns also im Forsthaus auf die Abreise zur IMO bzw. IPhO vorbereiteten, waren die letzten IChO-Teilnehmer, die kuweitische Mannschaft, noch nicht abgereist (die IChO fand in der DDR statt). So konnten wir gleich noch unsere Fremdsprachenkenntnisse testen, wir verständigten uns auf Englisch.

Am Sonntag fuhren wir dann (endlich) ab. Wir passierten die Grenze in Berlin Friedrichstraße und fuhren von dort aus mit dem Zug nach Braunschweig.

Als nächstes wurden wir per Kleinbus in unsere Unterkunft – das Jugendgästehaus in Braunschweig – gefahren. Prof. Gronau und Prof. Burosch waren von uns getrennt im Hotel Mercure Atrium untergebracht. Wir schauten uns mit unserer Betreuerin noch ein bißchen in Braunschweig um, nachdem wir uns in unserem Quartier eingerichtet hatten. Wir waren dort mit der sowjetischen und der chinesischen Mannschaft auf einem Gang. Auf dem Gebiet des Jugendgästehauses waren unter anderem noch die Australier, die Mannschaft der USA, die der BRD, die österreichische Mannschaft und die Mannschaft aus Neuseeland untergebracht. Gleich am ersten Tage gab es dann auch ein für die IMO typisches babylonisches Sprachgewirr, als wir gemeinsam mit den Mannschaften aus Australien und aus der SU versuchten, uns von den Chinesen ein Kartenspiel erklären zu lassen. Am Ende meinte wenigstens der Gérard, die Spielregeln einigermaßen verstanden zu haben.

Am Montag war dann die Eröffnungsveranstaltung. Da dies eine der wenigen Gelegenheiten vor dem Feststehen der Ergebnisse ist, wo die Mannschaften ihre Mannschaftsleitung zu Gesicht bekommen, wurden hier lange Hälse gemacht, und jede Mannschaft versuchte, die eigene Delegationsleitung auf sich aufmerksam zu machen, noch einen letzten Blick zu erhaschen, aus dem man vielleicht entnehmen könnte, ob denn die bevorstehenden 6 Klausuraufgaben leicht sein würden oder schwer. Auf jeden Fall lächelten Prof. Burosch und Prof. Gronau. Ob das nun war, weil die Aufgaben relativ leicht, und von uns zu bewältigen sein würden, oder weil die Aufgaben schwer sein würden, dadurch das Spitzenfeld etwas weiter auseinandergezogen und wir als gut vorbereitete Mannschaft so bessere Chancen haben würden, war daraus jedoch absolut nicht zu erkennen.

Beeindruckend war aber an der Eröffnungsveranstaltung im Audimax der TU Braunschweig schon allein die Vielzahl der Fahnen von Teilnehmerländern, die Zeitdauer, bis alle Schilder hereingetragen waren, die die Namen der Teilnehmerländer als Aufschrift trugen. Diese XXX. IMO war immerhin die IMO mit der bisher höchsten Teilnehmerzahl.

Nachdem nun die Eröffnungsreden vorbei und die kulturelle Umrahmung verklungen waren, sollte es eigentlich Mittag geben. Das Mittagessen sollte in der Mensa der TU stattfinden. Wir hatten uns mit unserer Betreuerin dann so abgesprochen, daß wir versuchen würden, möglichst schnell den Saal zu verlassen, um dort nicht lange anstehen zu müssen. Doch Saal verlassen war nicht. Es ging nicht vorwärts. Der Grund: Die Jury kannte ja nun die Aufgaben. Somit mußte sie erst per Bus vom Vorplatz abgeholt werden, bevor die Teilnehmer das Audimax verlassen konnten. Und ebendieser Bus kam nicht. Also hieß es erst mal warten. Als der Bus dann endlich da war, hatten wir noch einen Fototermin. Doch dann ging unsere Rechnung auf. Während die anderen Mannschaften noch unschlüssig rumstanden, setzten wir uns schon Richtung Mensa in Bewegung. So kamen wir ohne längeres Anstellen zu unserem Mittag. Die letzten Mannschaften standen wohl 2 Stunden.

Langsam merkte man, daß es auf den Ernst des Lebens, oder besser der IMO, zuging, auf die Klausuren. Schon nach dem Mittagessen war erstes Probesitzen angesagt. Jeder aus unserer Mannschaft hatte ja seinen eigenen Klausurraum. Ungünstig erwischte es Jan, er mußte in der Turnhalle schreiben.

Nachdem sich also jeder so auf die folgenden Klausuren eingestellt hatte, war eine Stadtrundfahrt vorgesehen. Allerdings kam, was kommen mußte – das Interesse an restaurierten Fachwerkhäusern erschöpfte sich schnell, zumal wir ja schon mit unserer Betreuerin ein bißchen von Braunschweig gesehen hatten. Viel interessanter waren da schon die Unterhaltungen mit den Australiern. Besonders einer in deren Mannschaft konnte Geschichten erzählen, daß sich die Balken bogen.

Nach einem bombastischen Büffet am Abend machten wir dann mit unserer Betreuerin und ein paar anderen Mannschaften noch einen kleinen Ausflug in die Innenstadt von Braunschweig, wonach wir dann müde zurückkehrten, um im Jugendgästehaus die letzte Nacht vor der ersten Klausur mit Schlafen zu verbringen.

Am nächsten Morgen war es dann soweit. Die Aufregung trat erst unbewußt, dann immer deutlicher zutage. Was würde drankommen? Zahlentheorie, Geometrie, Kombinatorik, vielleicht was mit 1989? Jeder stellte da so seine eigenen Vermutungen an. Nach Frühstück und Busfahrt zu den Klausurräumen nahmen dann alle ihre Plätze ein. Auf dem Tisch lagen schon die Mappen, die die Aufgaben enthalten mußten.

Die Spannung näherte sich ihrem Höhepunkt, die Uhr ging auf neun zu, endlich der Startmoment, die Mappe aufgeklappt, da lag schon das Blatt mit den 3 Aufgaben, erstes Durchlesen, die Spannung war dahin, Arbeitsatmosphäre kam auf. In der ersten halben Stunde hat man ja noch Zeit, Anfragen zu stellen, da heißt es, erst einmal an jeder Aufgabe basteln, um sie zu verstehen, um Unklarheiten auszuschließen. Später dann geht es darum, Lösungsgedanken zu finden, sich durchzubeißen, wenn alles nichts nutzt, heißt es in den letzten zehn bis zwanzig Minuten noch alles hinschreiben, was man trotzdem rausgekriegt hat. Im Letztgenannten mußten sich aber erfreulicherweise nur drei von uns üben; Gérard, Andreas und Frank hatten an beiden Tagen die richtigen Ansätze parat.

Nach der Klausur dann wieder das IMO-typische babylonische Sprachgewirr. Schließlich wollte jeder wissen, wie so die anderen Mannschaften abgeschnitten haben. Erste Hochrechnungen wurden angestellt, wie die eigene Mannschaft so liegen könnte. Und schnell verbreitete sich auch das Gerücht, daß der stellvertretende Delegationsleiter der USA seiner Mannschaft untersagt hatte, zu verraten, welche Aufgaben wer wie herausgekriegt hatte. Die Mitglieder der USA-Mannschaft sahen darüber jedenfalls nicht sehr glücklich aus, erfuhren sie doch so auch weniger von uns anderen

Mannschaften. Auf jeden Fall war dadurch die Gerüchteküche nur noch mehr angeheizt worden. Und keiner wußte genau, wo die USA sich einordnen würde.

Nach der ersten Klausur machten wir nun einen Stadtrundgang in Wolfenbüttel, doch das Interesse an restaurierten Fachwerkhäusern und geschlossenen Standesämtern war geringer denn je; zu sehr steckte die letzte Klausur noch in den Knochen, zu groß war die Aufregung vor der nächsten. Und die nächste Klausur kam. Und irgendwie erschien sie uns diesmal etwas leichter als die vorige. Während Gérard mittels autogenem Training den nötigen Abstand gewann, um seine Lösungen unvoreingenommen nochmals durchzusehen, nahm sich Frank die Zeit, seine Lösungen ein Stündchen zu überschlafen. Bei der Diskussion hinterher vor den Klausurräumen stellte sich dann heraus, das auch in anderen Mannschaften der zweite Tag etwas besser ausgefallen war als der erste. Das Gerücht von „kubanischen Verhältnissen“ machte die Runde. Damals vor zwei Jahren bei der IMO in Kuba waren die Aufgaben so „leicht“, daß etwa ein Zwölftel der Teilnehmer volle Punktzahl erhielt, es also nur bei voller Punktzahl einen ersten Preis gab. Diese Einschätzung bestätigte sich jedoch nicht; die Aufgaben waren wohl besonders am ersten Tag um einiges schwerer als damals.

Im Gegensatz zum Vortage war allerdings am zweiten Klausurtag das Nachmittagsprogramm wirklich auf Entspannung ausgelegt und fand entsprechend regen Zuspruch. Wir wurden nach dem Mittagessen per Bus zum Bürgerpark gefahren. Dort konnte man je nach Belieben Fußball spielen, die verschiedensten Geschicklichkeitstests ausprobieren, einer Trampolinvorführung zuschauen oder sich selbst am Trampolin betätigen, konnte sich im Bogenschießen testen, einer Laientanzgruppe zuschauen und vieles andere mehr. Man kam zwanglos ins Gespräch mit Teilnehmern anderer Mannschaften, es wurde über Hobby geredet und auch über Politik und natürlich wurden Hochrechnungen oder besser „Hochschätzungen“ über die Länderwertung ausgetauscht, die zwar eigentlich inoffiziell ist, aber dafür von allen als besonders von Interesse erachtet wird. Hier zeichnete sich schon ab, daß die DDR recht gut abschneiden würde.

Am nächsten Tag, Donnerstag, war ein Ganztagesausflug nach Clausthal-Zellerfeld angesagt. Hier erfuhren wir einiges über den Kupferbergbau im Oberharz. Besonders eindrucksvoll war die Besichtigung eines Schaubergwerkes. Nachmittags gingen wir in einem Wellenbad schwimmen, was die nötige Abkühlung für die klausurerhitzten Köpfe brachte. Am Abend sollte dann ein Volleyballturnier stattfinden, an dem sich unsere Mannschaft auch beteiligte, obwohl kaum einer von uns Ahnung von Volleyball hatte. Zum Spiel kamen wir gerade noch rechtzeitig, unser Bus hatte sich verfahren und brauchte daher für den Rückweg aus dem Harz mehr Zeit als eingeplant. Wir gewannen dann auch nur das allererste Spiel gegen Irland und landeten auf Platz 18 von 24 teilnehmenden Mannschaften. An diesem Abend wurden die Gerüchte immer lauter, daß die Lösungen im Prinzip vollständig korrigiert seien. Und die Mannschaft der USA ließ versehentlich den streng geheimen Zettel mit ihren Punkteinschätzungen rumliegen, wodurch sie sich nun doch zu einer berechenbaren Größe entwickelten. In der Nacht stieg dann bei der Rückfahrt Andreas am Mercure Atrium aus, wo die bisher durchkoordinierten Punktelisten aushängen sollten. Wir anderen fuhren zum Jugendgästehaus, um zu sehen, ob dort schon etwas aushinge oder über Bildschirmtext etwas in Erfahrung zu bringen sei. Und spät in der Nacht klärte sich dann das Bild bis auf wenige Aufgaben. Unsere Mannschaft lag ziemlich sicher auf Platz vier, konnte höchstens noch die SU-Mannschaft einholen. Ein Spitzenergebnis zeichnete sich also ab. Und insbesondere lagen wir klar vor der BRD-Mannschaft, ein Ziel, was wir uns insgeheim vorgenommen hatten.

Am Freitag dann war der Flughafen Hannover unser Ausflugsziel für den Vormittag, nachmittags machten wir eine Stadtbesichtigung in Celle. Und am Abend stand dann alles fest. Beim Grillabend im Internationalen Windmühlenmuseum Gifhorn, was an sich schon sehr interessant war, erfuhren wir von unserer Delegationsleitung unsere Ergebnisse. Welche Freude, als endlich klar war, wie wir abgeschnitten hatten. Als einzige Mannschaft dreimal volle Punktzahl, nur einen Punkt hinter der SU-Mannschaft, USA und BRD klar hinter uns! Was noch unklar war, war die Preisverteilung. Die Jury-Sitzung dazu sollte erst noch stattfinden.

Drei erste Preise, das war klar, aber würde für André noch eine Silbermedaille herausspringen? Da stand's auf der Kippe. Also noch eine Zitterpartie für André.

Sonnabend war dann nochmals Hannover geplant. Diesmal Stadtbesichtigung. Wir waren uns alle einig: Stadtbesichtigungen hatten wir mehr als genug gemacht. Zum Glück war dies die letzte.

Am Abend fand ein Empfang bei der Niedersächsischen Landesregierung im Schloß Herrenhausen statt. Mit Stehbankett. Und mit allen, die an der IMO mitgewirkt hatten. Und was besonders André interessierte – mit den offiziellen Punktgrenzen für die Medaillen. Jetzt war alles klar. Unsere Mannschaft würde mit dreimal Gold, zweimal Silber und einmal Bronze heimkehren. Ein Bombenergebnis! Es durfte gefeiert werden. Und es wurde gefeiert. Als Abschluß nahmen wir am Kleinen Fest im Großen Garten teil, welches eine Festveranstaltung mit viel Kultur und einem abschließenden Feuerwerk war. Über die Kultur will ich mich hier nicht weiter äußern, da gab es Gutes und nicht ganz so Gutes; das Feuerwerk dagegen war top-spitzenmäßig.

Der nächste Tag war ja nun schon der letzte, denn am Montag dann war ja schon wieder die Abreise heimwärts. Wie das nun mal an solchen letzten Tagen ist, gab es auch eine Abschlußfeier mit Siegerehrung und haufenweise Presseleuten. Da wurden die Medaillen verteilt und da wurden Reden gehalten.

Nachdem die Auszeichnungsfeier mit einem Stehempfang mit kleinem Imbiß einen würdigen Ausklang genommen hatte, machten wir schnell noch ein paar Mannschaftsfotos am Braunschweiger Gaußdenkmal und wollten dann eins der Schwimmbäder in Braunschweig aufsuchen, um uns dort noch ein wenig zu entspannen. Doch aufgrund der außerordentlichen Seltenheit, mit der am Sonntag die öffentlichen Verkehrsmittel verkehrten, entspannten wir uns dann doch lieber im eigenen Bett im Jugendgästehaus. Abends war schließlich noch ein gemeinsames Essen aller IMO-Teilnehmer in der Stadthalle angesagt. Unsere Delegationsleitung reservierte uns in weiser Voraussicht einen vorzüglichen Startplatz für die Essensschlacht am Büffett. So konnten wir nun wohlversorgt unseren Erfolg nochmals genießen. Als dieses gemeinsame Essen beendet war, war der Abend noch lang und wir noch munter, zumal wir ja schon am Nachmittag ausgiebig geschlafen hatten. Also beschlossen wir gemeinsam mit einigen anderen Mannschaften noch einen kleinen Besuch in einer der Braunschweiger Discos zu unternehmen. Auf Vorschlag unserer Betreuerin, die ja wohnhaft in Braunschweig war, sich also als Studentin auch ein bißchen auskennen mußte, wählten wir das Jolly aus. Dies war ein topausgebauter Disco-Schuppen (mit mehreren Ebenen), der eben nicht nur Raum für's Tanzen ließ, sondern auch viele abgelegenen Ecken aufwies, kleinere Bars und Sitzgelegenheiten, wo man sich auch prima unterhalten konnte. Leider hatten wir dort nicht allzuviel Zeit, denn der letzte Bus fuhr schon um 0.20 Uhr.

Aber letztlich hatte das auch sein Gutes, denn am nächsten Tag mußten wir früh raus, Betten abziehen, saubermachen, … – wir wollten ja unseren Zug noch schaffen. Wir schafften ihn auch, am Bahnsteig noch eine kleine Verabschiedung, dann rein in den Zug und weg waren wir. Am frühen Mittag kamen wir in Berlin Friedrichstraße an, wurden, nachdem wir die Begrüßungsgesellschaft gefunden hatten, auch herzlich begrüßt, dann von der Presse in die Mangel genommen, mit einem recht guten Mittagessen versorgt, und nachdem wir sämtliche Begrüßungs-, Dankes- und Lobesworte entgegengenommen hatten, nach Hause verabschiedet. Als unsere Begrüßungszeremonie beendet war, kam gerade die DDR-IPhO-Mannschaft an, mit der zusammen wir verabschiedet wurden, und die ja auch nicht ganz erfolglos war. Diese IMO war ein interessanter und erfolgreicher Abschluß meiner Olympiadelaufbahn.

Frank Göring

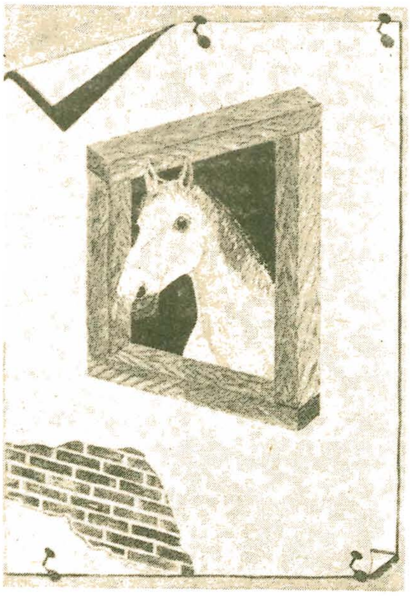
ALPHA unmöglich

Es ist bekannt, daß Oscar Reutersvärd 1934 als erster das Dreieck mit 3 rechten Winkeln konstruierte (s. alpha Heft 4/82), und daß zwei Engländer, die Brüder P. S. und R. Penrose 24 Jahre später, also 1958 diese Figur wiederentdeckten und veröffentlichten. Bemerkenswert wäre dabei, daß der eine wohl ein Mathematiker, und der andere ein Psychologe war, speziell der Psychologie des Sehens zugetan.

Es ist nicht schlechthin die Tatsache interessant, daß es ein Dreieck mit 3 rechten Winkeln gibt, sondern die sich daraus ergebenden Aspekte in bezug auf die Erforschung des menschlichen Auges, also des Sehens und in diesem Zusammenhang die Erforschung der Vorgänge des Übertragungsmechanismus Auge (ebene Netzhautabbildung) und räumliches Vorstellungsvermögen unseres Gehirns. Auf diesem Gebiet wird gerade jetzt mit der Weiterentwicklung der Computertechnik intensiv geforscht. Durch optische Sensoren z. B. werden Computer zur Steuerung mechanisch-technischer Abläufe an Maschinen programmiert (Robotervision).

Zu unmöglichen Figuren wurde bereits in den Heften 1/85 (Grundproblem) bzw. 2/88 (Konstruktionsprinzipien) berichtet. Einen Teil der Konstruktionsprinzipien stellen die sogenannten Ein- und Mehrbalken-Konstruktionen dar. Die bekannteste 3-Balkenkonstruktion ist das Dreieck mit 3 rechten Winkeln (Heft 2/88). Eine 4-Balkenkonstruktion von mir wurde bereits im Heft 1/85 abgebildet, wobei die „Balken“ sich aus einzelnen „Quadern“ zusammensetzten. Hier in diesem Beitrag als unmögliches Fenster dargestellt in Bild 1. Setzt man die „Balken“ aus „Würfeln“ zusammen, so erhält man einen zusätzlichen Vorstellungsaspekt der Räumlichkeit. Dies zeigte Oscar Reutersvärd bei der Konstruktion seines Dreiecks mit 3 rechten Winkeln (s. Heft 4/82).

Bild 1



Man kann auch Buchstaben als Balkenkonstruktion ausführen.

Bild 2

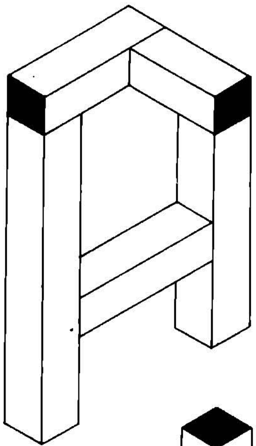
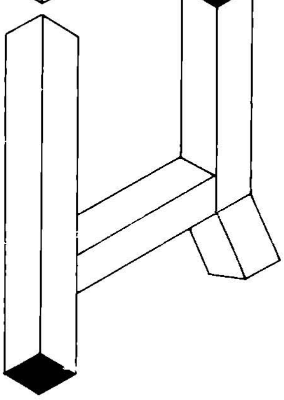


Bild 3



Wenn man hierbei dann noch die eben genannten Würfel verwendet, so erhält man ALPHA unmöglich (Bilder 4 und 5).

Bild 4

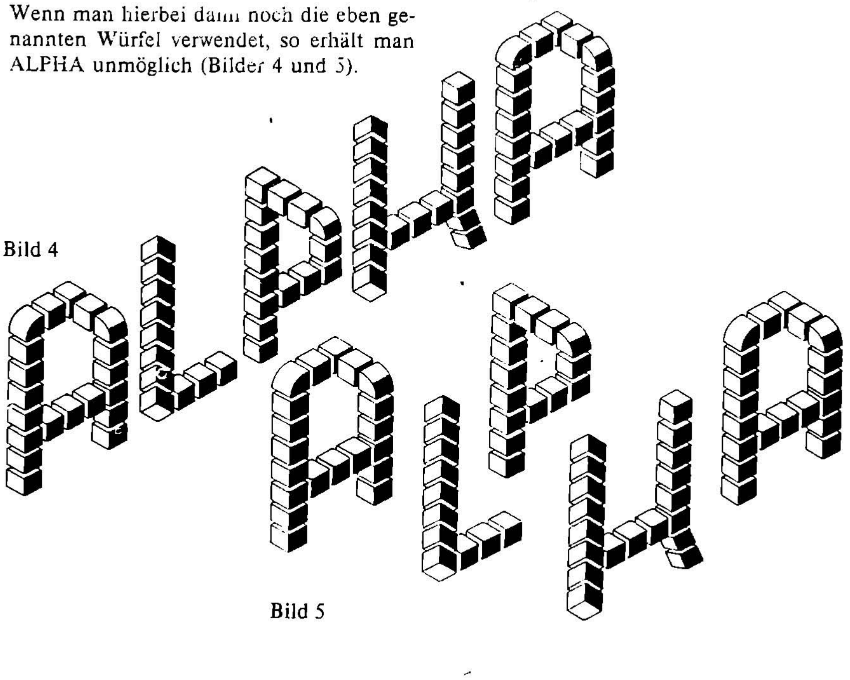


Bild 5

Weitere Motive ergeben sich durch die Verwendung von Rundungen. Ist ein einfacher Bogen nach Bild 6 unmöglich herstellbar, so erkennt man die Unmöglichkeit bei zwei Bögen, die versetzt auf einer Kreuzplatte stehen (Bild 7 und 8).

Bild 6

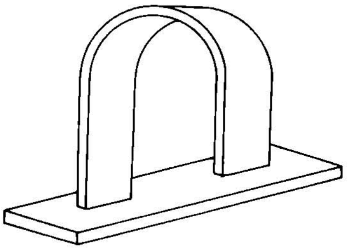


Bild 7

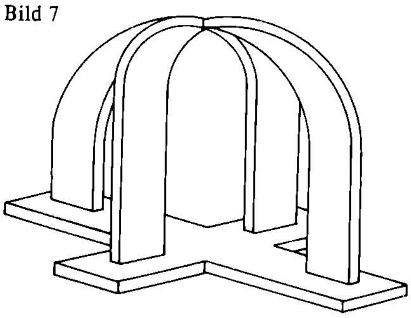
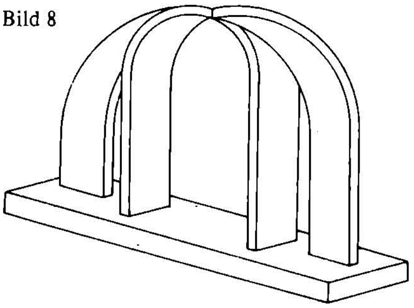


Bild 8



Bei Bild 9 kommt der verdrehte Bogen rechts im Bild in der gleichen „Ebene“ an und verläuft dann nach „hinten“. Ein Bolzen verbindet unmöglich diese Schleife. Wie Bild 10 zeigt, lassen sich durch Verdeckungen weitere Varianten dieser Form herstellen.

Bild 9

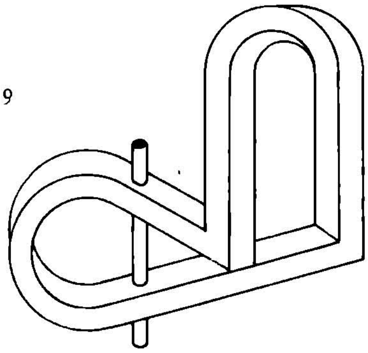
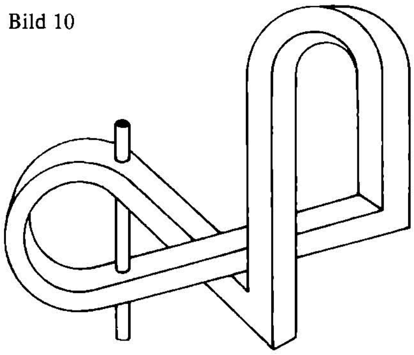


Bild 10



Im Bild 11 findet man neben dem unmöglichen Gewölbe zwei weitere Unmöglichkeiten (betrachte den Leuchter und die Stufe). Der Text, vor über 2 000 Jahren von Plato ausgesprochen, hat auch heute noch seine Gültigkeit.

Bild 11

Die Bilder 12 und 13 zeigen zwei weitere Motive aus meiner Serie mit dem „Nichts“ (s. Heft 1/85, Abb. „Ein Loch im Nichts“). Zum Schluß sei auf eine Vielzahl unmöglicher Figuren verwiesen, die aus sog. Rahmenkuboiden, Treppen usw. entstehen. Als Beispiel für die Rahmenkuboide nenne ich hier meine im Heft 1/85 abgebildete Figur: Unmöglicher Korb.

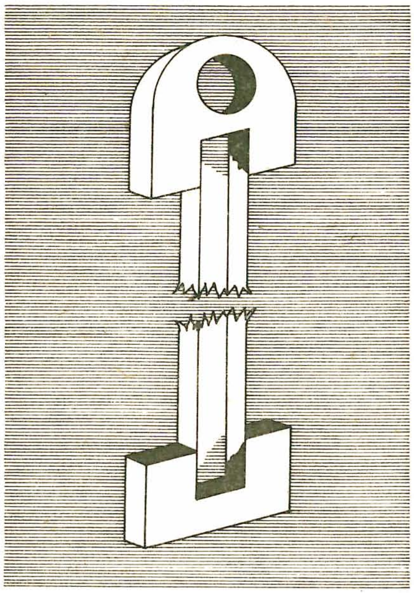


Bild 12

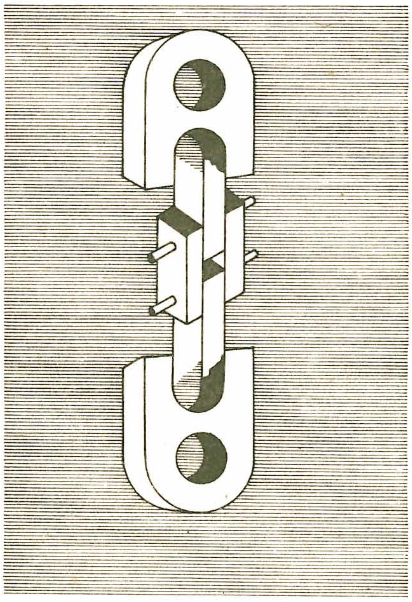
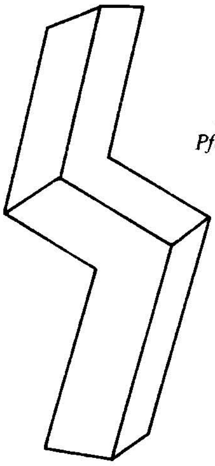


Bild 13

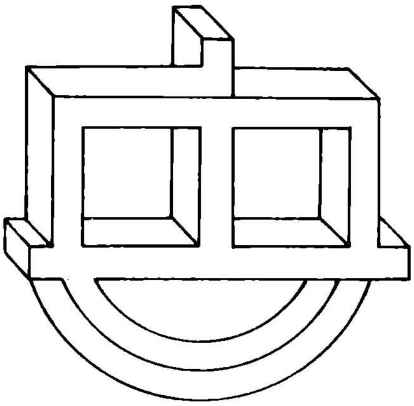
Eine Treppendarstellung zeigt Bild 14 im Zusammenhang mit einer unmöglichen Tempelruine.

Ich hoffe mit dieser Auswahl meiner unmöglichen Figuren weitere Konstruktionsprinzipien und Darstellungsmöglichkeiten gezeigt zu haben. Bei Verwendung von farbig dargestellten Flächen wirken solche Figuren besonders plastisch.

R. Breitenfeld



Heike Lückert
Pferdsdorf/Rhön



Rosita Ruprecht
Coswig

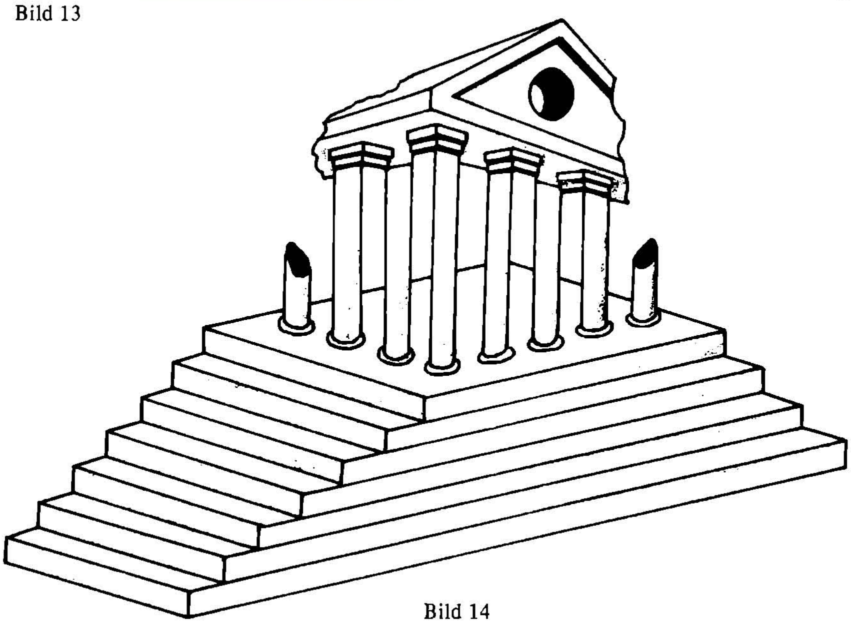


Bild 14

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der DDR-Olympiade

Die Aufgaben wurden in Heft 5/89 veröffentlicht.

Olympiadeklasse 10

281041 I. Wenn für eine natürliche Zahl n die genannte Zahl das Quadrat einer natürlichen Zahl k ist, so folgt

$2^8 + 2^{11} + 2^n = k^2$,

$2^n = k^2 - (1+8) \cdot 2^8 = k^2 - (3 \cdot 2^4)^2$,

$= (k-48)(k+48)$. (1)

Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung muß

$k - 48 = 2^i,\ k + 48 = 2^j$ (2)

mit natürlichen Zahlen i, j sein.

Daraus folgt $i < j$ sowie

$2^j - 2^i = 96,\ 2^i \cdot (2^{j-i} - 1) = 2^5 \cdot 3$.

Nochmals wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung und da $2^{j-i} - 1$ wegen $i < j$ ungerade ist, folgt $i = 5$, nach (2) also $k = 80$. Hieraus und aus (2) ergibt sich $j = 7$, woraus nach (1),

$2^n = 2^5 \cdot 2^7,\ n = 12$ folgt.

II. In der Tat ist

$2^8 + 2^{11} + 2^{12} = (1 + 8 + 16) \cdot 2^8$

$= (5 \cdot 2^4)^2$ eine Quadratzahl.

Mit I. und II. ist gezeigt, daß die genannte Zahl für genau eine natürliche Zahl n, nämlich genau für $n = 12$ eine Quadratzahl ist.

Bemerkungen: Der Aufgabentyp ist recht bekannt und bereitete den Teilnehmern kaum Schwierigkeiten. Wenn es überhaupt eine Schwierigkeit gab, so war es der des Nachweises von $n = 12$ als einziger Lösung, denn aus der binomischen Formel

$(2^4) + 2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 + 2^n = k^2$ ist

$n = 2 \cdot 6 = 12$ als Lösung sofort abzulesen.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	1	3	20	9	4	9	17	28

Dr. W. Harnau, Sektion Mathematik der PH „K. F. W. Wander" Dresden

281042 Für den geforderten Nachweis genügt es, ein Beispiel eines Paares von Funktionen f, g anzugeben und (1), (2), (3) für dieses Beispiel als erfüllt nachzuweisen.

Ein solches Beispiel ist etwa:

Für alle reellen x sei $f(x) = 7 \cdot 2^x$,

$g(x) = 1$. In der Tat erfüllen diese Funktionen (1) und (2) sowie wegen $f(x) \neq 0$ für alle x und

$$\frac{g(x) \cdot f(x+1)}{f(x)} = \frac{1 \cdot 7 \cdot 2^{x+1}}{7 \cdot 2^x} = 2$$

$= g(2x) + 1$ auch (3).

Heuristisches Hilfsmittel zum Auffinden derartiger Beispiele kann es sein, einen Ansatz $g(x) = \text{const}$, z. B. $g(x) = 1$, zur Vereinfachung von (3) zu wählen und so zur Forderung $f(x+1) = 2 \cdot f(x)$ zu gelangen (oder auch umgekehrt mit diesem Ansatz zur Forderung $2 \cdot g(x) = g(2x) + 1$). So kann man eine Vielzahl weiterer Funktionenpaare f, g erhalten, z. B. für alle reellen x sei

$f(x) = 7 \cdot 8^x,\ g(x) = x^3 + \frac{1}{7}$ oder mit

unstetigem f: $f(x) = 7 \cdot 2^k$ in jedem Intervall $k \leqq x < k + 1$ (k ganzzahlig),

$g(x) = x + 1$ für alle reellen x.

Bemerkungen: Zwei Drittel der Schüler konnten diese Aufgabe im wesentlichen lösen. Ein Drittel fand kein geeignetes Beispiel. 33 Teilnehmern mußte ein Punkt abgezogen werden, da sie für ihr Beispiel nicht vermerkten: $f(x) \neq 0$ für alle reellen x, so daß in (3) die Existenz des Ausdrukkes $\frac{g(x) \cdot f(x+1)}{f(x)}$ nicht gesichert war.

Weitere Ungenauigkeiten waren die Angabe von Funktionen ohne explizites Nennen des Definitionsbereiches und das Führen der Probe für (3) von der Behauptung zur wahren Aussage. Das ausführliche Schildern des Auffindens der Funktionenpaare führte bei einigen Schülern zu langen und unübersichtlichen Lösungsvorschlägen.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	25	1	0	4	4	33	25

Dr. J. Prestin, Sektion Mathematik der W.-Pieck-Universität Rostock

281043A Um die Zahlen in der genannten Diagonale zu erreichen, hat man von der Zahl 41 aus, immer abwechselnd nach rechts oben und links unten Wege der Schrittlängen 1, 2, 3, 4, ... zu gehen. Mit der Formel

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$ folgt damit, daß jede in der Diagonale stehende Zahl z ausgedrückt werden kann durch

$z = x^2 - x + 41\ (x = 1, 2, 3, \ldots)$.

Nun konnte man sich auf die Aufgabe 281011 berufen, in der das Ergebnis von Euler zu überprüfen war, daß z für alle Zahlen $x = 1, 2, 3, \ldots, 40$ prim ist!

Bemerkungen: Das allerdings machte nicht ein Schüler der 36, die diese Aufgabe gewählt hatten. Unterschätzen unsere Schüler die Bedeutung der 1. Stufe der OJM?

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	1	0	4	5	5	9	8	4

Dr. H.-J. Sprengel, Sektion Mathematik/Physik der PH „K. Liebknecht" Potsdam

281043B Wir lösen folgende Verallgemeinerung der Aufgabenstellung: Es sei n, $n \geqq 1$, eine gegebene natürliche Zahl.

Über $2n + 1$ sonst beliebige Punkte in der Ebene werde vorausgesetzt, daß sich unter je drei dieser $2n + 1$ Punkte stets zwei befinden, deren Abstand voneinander kleiner als 1 cm ist.

a) Man beweise, daß aus dieser Voraussetzung stets folgt: Es gibt einen Kreis von Radius 1 cm, dessen Inneres $n + 1$ der $2n + 1$ Punkte enthält.

b) Man untersuche, ob aus dieser Voraussetzung stets folgt: Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres $n + 2$ der $2n + 1$ Punkte enthält.

Lösung dieser Verallgemeinerung:

a) Es sei k der Kreis um einen (beliebig gewählten) der $2n + 1$ Punkte mit dem Radius 1 cm. Für die Lage der anderen $2n$ Punkte gibt es nun folgende Möglichkeiten:

1. Fall: Der Kreis k enthält in seinem Inneren noch n weitere der $2n + 1$ Punkte. Dann ist er ein Kreis der behaupteten Art.

2. Fall: Der Kreis k enthält in seinem Inneren höchstens $n - 1$ weitere der $2n + 1$ Punkte. Dann gibt es auf dem Rand oder außerhalb von k noch $n + 1$ der $2n + 1$ Punkte. Einer von ihnen sei P. Für P und jeder der n anderen dieser $n + 1$ Punkte gilt: Sie haben beide vom Mittelpunkt des Kreises k Abstände nicht kleiner als 1 cm; nach Voraussetzung haben sie also voneinander einen Abstand kleiner als 1 cm. Folglich enthält das Innere des Kreises c um P mit dem Radius 1 cm auch jeden dieser n anderen Punkte, d. h., c ist ein Kreis der behaupteten Art.

b) Aus der Voraussetzung folgt nicht stets die Existenz eines Kreises der in b) genannten Art. Um dies zu beweisen, genügt es, ein Beispiel für $2n + 1$ Punkte in einer Ebene so anzugeben, daß sie zwar die Voraussetzungen erfüllen, daß aber kein Kreis vom Radius 1 cm existiert, dessen Inneres $n + 2$ der $2n + 1$ Punkte enthält. Ein solches Beispiel kann man folgendermaßen bilden:

Man wähle zwei Kreise k_1 und k_2 mit dem Radius $\frac{1}{2}$ cm, deren Mittelpunkte M_1, M_2 voneinander den Abstand l, $l > 3$ cm, haben. Im Inneren von k_1 wähle man $n + 1$ Punkte, im Inneren von k_2 n Punkte. Unter je drei dieser $2n + 1$ Punkte befinden sich dann stets zwei, die im Inneren desselben der beiden Kreise k_1, k_2 liegen und daher einen Abstand kleiner als 1 cm voneinander haben. Jeder Kreis c aber, dessen Inneres $n + 2$ der $2n + 1$ Punkte enthält, muß unter diesen $n + 2$ Punkten sowohl einen inneren Punkt P_1 von k_1 als auch einen inneren Punkt P_2 von k_2 enthalten. Nach der Dreiecksungleichung folgt, daß

$$l\,\text{cm} = \overline{M_1M_2} \leqq \overline{M_1P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2M_2} < \frac{1}{2}\,\text{cm} + \overline{P_1P_2} + \frac{1}{2}\,\text{cm}, \quad \text{also} \quad \overline{P_1P_2} > l - 1\,\text{cm}$$

> 2 cm gelten muß und daher c einen Durchmesser größer als 2 cm haben muß. Somit kann es keinen Kreis mit dem Radius 1 cm geben, dessen Inneres $n + 2$ der

$2n+1$ Punkte enthält. Für $n=6$ erhält man aus dieser Verallgemeinerung die Lösung der Aufgabe 281043B.

Bemerkungen: Die Aufgabe wurde als angemessen eingeschätzt. Keinem Schüler gelang die (naheliegende) Verallgemeinerung. Von einigen Schülern wurde mit verschwommenen Begriffen und Vorstellungen vom „Abstand von Punktmengen“ operiert. Ein Gegenbeispiel wurde teilweise mit recht allgemeinen Bemerkungen (auch in Verbindung mit Teil a)) angegeben. Die Angabe einer konkreten Punkteverteilung fehlte dann. Rund 60 % der Schüler wählten diese Wahlaufgabe.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	4	3	3	2	6	9	6	23

Dr. W. Moldenhauer, Sektion Mathematik der PH „Dr. Th. Neubauer“ Erfurt/Mühlhausen

281044 I. Wie man durch Ausmultiplizieren leicht bestätigen kann, gilt

$$x^4-6x^3+14x^2-24x+40$$
$$=(x^2+4)(x^2-6x+10)$$
$$=(x^2+4)((x-3)^2+1).$$

Für alle reellen x gilt

$$x^2+4>0 \text{ und } (x-3)^2+1>0.$$

Folglich gibt es kein reelles x, für das das Produkt 0 wäre.

II. $x^4-6x^3+14x^2-24x+40$

$$=x^2(x^2-6x+9)+5\left(x^2-\frac{24}{5}x+\frac{144}{25}\right)-\frac{144}{5}+40$$
$$=x^2(x-3)^2+5\left(x-\frac{12}{5}\right)^2+\frac{56}{5}\geqq\frac{56}{5}>0$$

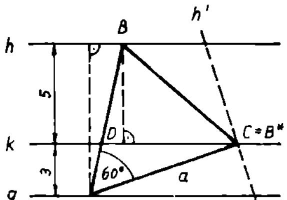
für alle reellen x.

Bemerkungen: Eine für die DDR-Olympiade Klasse 10 relativ leichte Aufgabe. Im Aufgabentext („... für *keine* reelle Zahl x ...“) ist die Zielrichtung der Lösung schon mit vorgegeben.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	7	2	4	8	8	8	55

Dr. N. Grünwald, Sektion G der IH für Seefahrt Warnemünde/Wustrow

281045 Die Problemstellung bietet eigentlich ein bekanntes Paradebeispiel für den vorteilhaften Einsatz von Bewegungen. Im Text werden klare Teilaufgaben gestellt.



Um so mehr überrascht, daß eine Reihe von Schülern recht aufwendige und hinsichtlich der verschiedenen Teilfragen undifferenzierte Darlegungen vorlegte. Nur ein geringer Teil der Schüler setzte die Drehung mit dem Drehwinkel von 60° um einen auf g beliebig gewählten Punkt A ein. Das Bild h' der Geraden h bei dieser Drehung schneidet die Gerade k in einem Punkt C. Die Punkte A, B und das Urbild, B von C auf der Geraden h bilden ein gleichseitiges Dreieck. Damit ist konstruktiv sowohl die Existenz eines geeigneten Dreiecks als auch seine Seitenlänge ausgewiesen.

Nur die rechnerische Bestimmung der Seitenlänge (etwa über geeignete rechtwinklige Teildreiecke) unter der Voraussetzung eines Dreiecks bereitete den Teilnehmern i. a. keine Schwierigkeiten; man erhält $a=\frac{14}{3}\sqrt{3}$.

Mehrere Schüler nutzten die Einsicht, daß k die Seite $\overline{AB}$ eines derartigen Dreiecks im Verhältnis 3 : 5 teilen muß. Sie gingen deshalb von einem beliebigen gleichseitigen Dreieck $A'B'C'$ oder einem solchen mit der Seitenlänge $a=\frac{14}{3}\sqrt{3}$ aus, bestimmten den Punkt D', der $\overline{A'B'}$ im Verhältnis 3 : 5 teilt, zogen die Verbindungsgerade $C'D'$ und dazu die Parallelen durch A' und B'. Um auf die gegebenen Maße zu kommen, wurde erforderlichenfalls noch eine Streckung durchgeführt. Einige von ihnen übersahen bei einer derartigen Vorgehensweise aber, daß die Geraden g, h und k vorgegeben sind und nicht im nachhinein einem Dreieck der Seitenlänge $a=\frac{14}{3}\sqrt{3}$ angepaßt werden dürfen.

Der Punktespiegel zeigt dennoch, daß die Aufgabe im Grunde genommen zu leicht war. Bei der Arbeit mit Schülern sollte auch in der Klassenstufe 10 Wert auf Kenntnis und Verwendung einfacher und der Aufgabenstellung angemessener Mittel und auf klare Darlegungen gelegt werden.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	3	2	4	4	11	12	14	42

Dr. E. Quaisser, Sektion Mathematik/Physik der PH „K. Liebknecht“ Potsdam

281046 Diese Aufgabe war eindeutig die schwierigste in der Olympiadeklasse 10. Nur 22 Schüler der 92 konnten sie lösen! Die kürzesten Lösungen erbrachten die 9 Schüler, die eine Lösung angaben und durch Einsetzen diese Eigenschaft, Lösung zu sein, nachwiesen.

Eine Lösung ist $x=2\sqrt{\frac{(b^2+bc+c^2)}{3}}$,

$$y=2\sqrt{\frac{(c^2+ca+a^2)}{3}},$$
$$z=2\sqrt{\frac{(a^2+ab+b^2)}{3}}.$$

13 Schüler erkannten, daß der Term $\frac{d}{2}\sqrt{3}$ auf die Höhe im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge d hinwies. Nach einem bekannten Satz ist dann a, b als auch c als Abstand eines Punktes P im Inneren des Dreiecks von den Seiten zu interpretieren. Nun muß man umgekehrt zeigen, daß zu vorgegebenen Zahlen a, b, c und d ein zugehöriger Punkt P existiert. Aus dem Satz des Pythagoras ergibt sich dann, daß x, y, z existieren, nämlich als Abstände des Punktes P von den Eckpunkten des gleichseitigen Dreiecks.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	60	10	-	-	5	-	7	10

Dr. H. Sprengel, Sektion Mathematik/Physik der PH „K. Liebknecht“ Potsdam

Olympiadeklasse 11/12

281241 Von den Schülern wurden drei recht unterschiedliche Lösungswege beschritten, die hier kurz skizziert werden sollen.

1. Lösung: Angenommen es existiert eine Lösung (x,y,z) des Gleichungssystems (I, II), dann gilt

(II') $\quad x=\sqrt{14}-2y-3z$ bzw.

(II'') $\quad x=14+4y^2+9z^2-4\sqrt{14y}-6\sqrt{14z}+12yz.$

Einsetzen in (I) führt zu

(I') $\quad y^2-\left(\frac{4}{5}\sqrt{14}-\frac{12}{5}z\right)y+2z^2-\frac{6}{5}\sqrt{14}\,z+\frac{13}{5}=0.$

Als quadratische Gleichung für y aufgefaßt, folgt

$$y_{1,2}=\frac{1}{5}(2\sqrt{14}-6z)\pm\frac{1}{5}\sqrt{56-24\sqrt{14}\,z+36z^2-50z^2+30\sqrt{14}\,z-65}.$$

Der Radikant $R=-(\sqrt{14}\,z-3)^2\leqq 0$; also ergibt sich als notwendige Bedingung für die Lösung, daß $z=\frac{3}{\sqrt{14}}$ ist, woraus $y=\frac{2}{\sqrt{14}}$ und $x=\frac{1}{\sqrt{14}}$ folgt. Davon, daß $\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ tatsächlich Lösungstripel ist, überzeugt man sich durch die Probe.

2. Lösung: Werden x, y, z als karthesische Koordinaten im Raum aufgefaßt, so liegt jeder Punkt $P(x,y,z)$, der (I) genügt, auf der Einheitskugel mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung.

Die Transformation der Ebenengleichung (II) in die Hessesche Normalform ergibt: (x,y,z) ist Lösung von

(II) $\quad x+2y+3z=\sqrt{14}$

genau dann, wenn (x,y,z) Lösung von

(IIa) $\quad \frac{x}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}+\frac{2y}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}+\frac{3z}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}-\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}x+\frac{2}{\sqrt{14}}y+\frac{3}{\sqrt{14}}z-1=0$

ist. Also ist der Abstand der durch (II) beschriebenen Ebene vom Koordinatenursprung gleich 1. Dieser Abstand wird in genau einem Punkt der Ebene angenommen, woraus folgt, daß (I, II) genau eine Lösung besitzt. Aus der Transformation in die Hessesche Normalform ist bereits bekannt, daß $1^2+2^2+3^2=14$ ist.

Hieraus erkennt man sofort

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

als Lösung.

3. Lösung: Nach der bekannten Ungleichung zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel gilt für beliebige reelle Zahlen x,y,z:

(*) $\quad \frac{1}{14}\left(x+4\frac{y}{2}+9\frac{z}{3}\right)\leqq\sqrt{\frac{1}{14}\left(x^2+4\left(\frac{y}{2}\right)^2+9\left(\frac{z}{3}\right)^2\right)}$

bzw.

(**) $x + 2y + 3z = \sqrt{14}\,(x^2 + y^2 + z^2)$.
Angenommen (x, y, z) ist Lösung von (I, II), dann gilt in (**) das Gleichheitszeichen. Dies trifft jedoch genau dann zu, wenn alle Summanden gleich sind, d. h. wenn $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ ist, woraus unmittelbar folgt, daß (x, y, z)
$= \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ die Lösung ist.

Punkte	0	1	2	3	4	5
Anzahl	6	2	9	3	3	52

Dr. M. Noack, Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen Berlin

281242 Für eine feste natürliche Zahl $n \geqq 1$ machen wir den Ansatz $f(x) = ax$ mit einer Konstanten a. Nach (3) ist dann $f_k(x) = a^k x$ für $k = 1, 2, \ldots, n + 1$ und es soll gelten $ax + a^2x + \ldots a^n x = a^{n+1}x$.
Wegen (2) ist $a \neq 0$ und es folgt

$$(4) \qquad \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{a} = 1.$$

Zum Nachweis, daß es eine Zahl $a \neq 0$ gibt, die die Gleichung (4) erfüllt, betrachten wir die für $t > 0$ stetige Funktion

$$g(t) = \frac{1}{t^n} + \frac{1}{t^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{t}.$$

Wegen $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = \infty$ und
$g(1) = \frac{1}{n}$ folgt unter Beachtung der Stetigkeit von $g(t)$ die Existenz einer Zahl a mit $0 < a \leqq 1$ und $g(a) = 1$. Die Funktion $f(x) = ax$ mit dieser Zahl a erfüllt alle drei Bedingungen (1), (2), (3).

Punkte	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	13	14	3	2	3	3	37

Dr. M. Krüppel, Sektion Mathematik/ Physik der PH „L. Herrmann" Güstrow

281243 X sei innerer Punkt des konvexen n-Ecks $P_1P_2\ldots P_n$. Dann gilt für den Flächeninhalt F_i des Teildreiecks P_iXP_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ P_{n+1} = P_1)$

$$2F_i = \overline{P_iX} \cdot \overline{P_{i+1}X} \cdot \sin \overline{\measuredangle P_iXP_{i+1}}$$
$$\leqq \overline{P_iX} \cdot \overline{P_{i+1}X}. \qquad (1)$$

Für beliebige reelle Zahlen a, b gilt wegen $(a - b)^2 \geqq 0$
$ab \leqq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. Damit folgt aus (1)

$$2F_i \leqq \overline{P_iX} \cdot \overline{P_{i+1}X} \leqq \frac{1}{2}(\overline{P_iX^2} + \overline{P_{i+1}X^2}). \quad (2)$$

Das Gleichheitszeichen in (1) gilt genau dann, wenn $\sin \overline{\measuredangle P_iXP_{i+1}} = 1$ ist, wegen der Lage von X also genau dann, wenn $\overline{\measuredangle P_iXP_{i+1}} = 90°$ gilt. Das Gleichheitszeichen in (2) gilt genau dann, wenn $\overline{P_iX} = \overline{P_{i+1}X}$ gilt. Aus (1) und (2) folgt für den Flächeninhalt F von $P_1P_2\ldots P_n$

$$2F = \sum_{i=1}^{n} 2F_i \leqq \overline{P_1X^2} + \overline{P_2X^2} + \ldots$$
$$+ \overline{P_nX^2}. \qquad (3)$$

Das Gleichheitszeichen in (3) gilt genau dann, wenn für jedes i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ das Gleichheitszeichen in (1) und in (2) gilt, d. h. genau dann, wenn jedes Teildreieck P_iXP_{i+1} rechtwinklig und gleichschenklig ist. Gibt es in $P_1P_2\ldots P_n$ einen inneren Punkt X, für den in (3) das Gleichheitszeichen steht, so folgt wegen

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\measuredangle P_iXP_{i+1}} = 360° \text{ und } \overline{\measuredangle P_iXP_{i+1}} = 90°$$

für $i = 1, 2, \ldots, n$ notwendig $n = 4$. Es sind alle Teildreiecke P_iXP_{i+1} kongruent (sws), und es folgt
$\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = \overline{P_3P_4} = \overline{P_4P_1}$ und die Gleichheit der Innenwinkel im Viereck $P_1P_2P_3P_4$. Das Viereck muß aber ein Quadrat sein. Jedes Quadrat erfüllt auch die gestellten Bedingungen, denn für den Mittelpunkt X eines Quadrates mit der Kantenlänge a gilt $\overline{P_iX} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und folglich

$$\overline{P_1X^2} + \overline{P_2X^2} + \overline{P_3X^2} + \overline{P_4X^2} = 4 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot 2$$
$$= 2a^2 = 2F.$$

Bemerkungen: Fast alle Schüler fanden zu dieser relativ leichten Aufgabe einen Zugang. Auf die Abschätzung (1) wurde durch die Aufgabenstellung orientiert. Die Abschätzung $a^2 + b^2 \geqq 2ab$ für reelle Zahlen a, b gehört zum Handwerkszeug fast jedes Schülers, der die 4. Stufe der Mathematikolympiade erreicht.
Für die Ableitung der Ungleichung (3) gab es verschiedene Lösungsvorschläge. Neben individuellen, untypischen Fehlern mußte in einigen Fällen das Fehlen des Nachweises bestraft werden, daß jedes Quadrat den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	7	15	2	1	4	2	8	36

Dipl.-Math. B. Noack, Amt für Erfindungen und Patentwesen Berlin

281244 Für eine Kombination $k = (k_1, k_2, k_3)$ werde genau dann gesagt, sie „überdecke" (a_1, a_2, a_3), wenn sie mindestens zwei der drei Bedingungen $k_i = a_i$ erfüllt. Die acht möglichen Werte der a_i seien o. B. d. A. die Zahlen 0, 1, …, 7.
I. Es seien S, T, U die Mengen
$S = \{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,1)\}$,
$T = \{(0,0,2), (0,2,0), (2,0,0), (2,2,2)\}$,
$U = \{(0,0,0), (4,4,4)\}$.
Die 32 Kombinationen $k = s + t + u$ $(s \in S,$ $t \in T,$ $u \in U)$ bilden ein Beispiel für Kombinationen, mit denen alle 8^3 Kombinationen (a_1, a_2, a_3) überdeckt werden. Um dies zu beweisen, sei eine beliebige dieser Kombinationen (a_1, a_2, a_3) betrachtet. Man setze zunächst

$$u = (u_1, u_2, u_3) = \begin{cases} (0,0,0), & \text{falls mindestens zwei} \\ & a_m, a_n \leqq 3 \text{ sind } (m \neq n) \\ (4,4,4) & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1)$$

Hiernach gibt es stets zwei Indizes $m < n$ so, daß für $i = m$ und für $i = n$ gilt: Die Zahl $b_i = a_i - u_i$ (2)
erfüllt $0 \leqq b_i \leqq 3$; also existieren
$s_i \in \{0; 1\}$, $t_i \in \{0; 2\}$ (3)
mit $b_i = s_i + t_i$. (4)
Für jede Möglichkeit des Indexpaares $(m; n) = (1; 2), (1; 3), (2; 3)$ und für jede gemäß (3) bestehende Möglichkeit der s_i, t_i findet man nach Definition von S und T ein $s = (s_1, s_2, s_3) \in S$ und ein $t = (t_1, t_2, t_3) \in T$, in denen s_m, s_n bzw. t_m, t_n gerade die Zahlen aus (3) und (4) sind. Die hiermit sowie mit u aus (1) gebildete Kombination $k = (k_1, k_2, k_3) = s + t + u$ erfüllt nach (4) und (2) die beiden Bedingungen $k_i = s_i + t_i + u_i = b_i + u_i = a_i$ $(i = m, n)$, w. z. b. w.

Fortsetzung in Heft 2/90.

Ein Bericht

7. Zentrale Wissenschaftliche Studentenkonferenz Mathematik

Die Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald war am 29. und 30. September 1989 Gastgeber der vom Wissenschaftlichen Beirat für Mathematik beim Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen, der Zentralen Fachkommission Mathematik beim Ministerium für Volksbildung und beim Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen, der Mathematischen Gesellschaft der DDR sowie dem Zentralrat der FDJ veranstalteten Konferenz. Zu diesem turnusmäßig alle 2 Jahre stattfindenden Treffen hatte eine Ausschreibung die Studenten und jungen Wissenschaftler von Mathematiksektionen der Universitäten, Technischen Hochschulen und Pädagogischen Hochschulen aufgerufen.
Mit ihren Beiträgen sollten sie schon in ihrem Studium bzw. Forschungsstudium bekunden, was sie zur Lösung von Aufgaben ihrer Wissenschaftsdisziplin oder bei der Anwendung der Mathematik in anderen Wissenschaften sowie in der gesellschaftlichen Praxis zu leisten vermögen. Dazu konnten Betriebspraktikums- oder Jahresarbeiten, Ergebnisse von Jugendobjekten oder besonderen Förderungsmaßnahmen, Veröffentlichungen vor der Diplomarbeit, Diplomarbeiten und termingerecht fertiggestellte Dissertationen eingereicht werden (eine Dissertation ist eine wissenschaftliche Arbeit zur Erlangung des Doktorgrades). Der Grundlagen- und Praxisforschung zugehörige Resultate waren gemäß der in der DDR betriebenen sieben mathematischen Hauptforschungsrichtungen gefragt: Algebra und Geometrie; Analysis; Optimierung; Numerische Mathematik, Stochastik (Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik); Mathematische Grundlagen der Informationsverarbeitung; Diskrete Mathematik; Algebra und Logik.
Es wurden 128 Arbeiten eingereicht, davon wählte die Jury 65 auf Grund ihrer Qualität zum Vortrag bei der ZWSK aus. Über die üblichen sieben Konferenzsektionen hinaus wurde erstmalig noch eine 8. Sektion eingerichtet. Diese hatte die Computerunterstützte Mathematik von Diplomlehrerstudenten zum Inhalt.
Zur feierlichen Eröffnung der Konferenz, die der Rektor der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald OPhR Prof. Dr. P. Richter vornahm, versammelten sich die Teilnehmer und Gäste in der ehrwürdigen Aula. Ein Festvortrag von Akademiemitglied Prof. Dr. W. Ebeling, Humboldt-Universität zu Berlin, widmete sich den mathe-

matischen Modellen von Prozessen der Selbstorganisation und Evolution. Danach begann das Programm in den Konferenzsektionen. Es überstrich einen großen Teil der aktuellen mathematischen Forschung in der DDR.

Die drei Plenarvorträge wurden von den jungen Wissenschaftlern Dr. Gabriele Steidl (Wilhelm-Pieck-Universität Rostock) und Dr. Jacob Spies (Humboldt-Universität Berlin) sowie dem Studenten Jörg Stahnke (Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald) bestritten. Dr. Steidl, die inzwischen auf eine Reihe wissenschaftlicher Veröffentlichungen verweisen kann, legte in ihrem Vortrag „Grundlagen schneller Algorithmen für verallgemeinerte diskrete Fouriertransformationen“ eigene Beiträge zur Begründung einer möglichst schnellen Lösung spezieller Probleme auf dem Computer dar. Dr. Spies und J. Stahnke stellten größere Forschungsergebnisse aus ihren Arbeitsgebieten vor. Dies betraf Zusammenhänge zwischen Kurven und Differentialgleichungen bzw. die mathematische Modellierung physikalischer Prozesse auf Fraktalen – das sind grob gesprochen stark zerklüftete Medien mit einer gewissen regelmäßigen Struktur. Erste Preise, teilweise in Form einer Freundschaftsreise, wurden vergeben für zwei Dissertationen, zwei Diplomarbeiten und zwei herausragende Beiträge für Vorstufen von Dissertationen. Diese sechs erstrangigen Arbeiten enthalten auch aus internationaler Sicht bedeutende Resultate.

J. Tschinkel, Moskau, erhielt für seine bemerkenswerten Forschungsresultate als 1. Preis den Ehrenpreis des Ministers für das Hoch- und Fachschulwesen. Des weiteren erfolgten noch Auszeichnungen mit zehn zweiten und 18 dritten Preisen. Insgesamt wurden schöne Leistungen geboten.

Noch ein Wort zum Trend! Neben die klassischen Untersuchungsmethoden der „Studierstuben“, wo man mit der reinen Kraft des Nachdenkens und Analysierens den Problemen zu Leibe rückt, tritt mehr und mehr die Benutzung des Computers. Die Computer haben bekanntlich eine umwälzende Entwicklung großen Stils gebracht, die alle Kulturstaaten der Erde erfaßt und noch manche Überraschungen bescheren wird. Die Computer sind mehr als ein Bindeglied von der Theoretischen Mathematik zur Praxis. Mit dem Computer erwächst auch dem theoretisch forschenden Mathematiker ein wirksames Hilfsmittel. Diesen Trend spiegelte die Konferenz schon deutlich wider. Für die Sektion Numerische Mathematik war und ist das ein gewohntes Bild. Für die anderen klassischen Sektionen schält sich diese Seite jetzt nachdrücklicher heraus. Die Konferenzsektion Computerunterstützte Mathematik von Lehrerstudenten zeigt, daß in der Lehrerausbildung die Computeraspekte einen größeren Spielraum erhalten. Solche Erscheinungen werden sich nach und nach natürlich auch in unseren Schulen stärker bemerkbar machen.

Im folgenden wollen wir auf ein ausgewähltes Thema der 7. ZWSK näher eingehen. Die Auswahl ist von uns einzig und allein danach vorgenommen worden, daß wir uns dem Leser schnell verständlich machen können. Die Simulation (Nachahmung) realer Prozesse mit zufälligem Ausgang mittels Computer gewinnt in der Gegenwart immer stärkere Bedeutung. Das Ziel dieses Verfahrens besteht darin, mit Hilfe geeigneter mathematischer Modelle Aussagen über technische und naturwissenschaftliche Vorträge zu erhalten, insbesondere z. B. dann, wenn diese für vernünftige Beobachtungen etwa zu schnell (wie beim Teilchenzerfall) bzw. zu langsam (wie bei Vererbungsprozessen) ablaufen oder für den Beobachter zu gefährlich sind (wie bei der Radioaktivität). In seiner im Rahmen der gegenwärtigen Diskussion der Einbeziehung wahrscheinlichkeitstheoretischer Inhalte in die Schulbildung sehr interessanten Diplomarbeit „Grundlagen für Simulation von Vorgängen mit zufälligem Ergebnis auf Beispiele für Anwendungen in der Schule“ zeigt Thomas Machmer (Humboldt-Universität Berlin), daß mit relativ geringen Kenntnissen und ohne großen Aufwand für die Schule nutzbare Computerprogramme erstellt werden können.

Als Beispiele wählt der Autor u. a. den Neutronendurchgang durch eine Platte und das Wirken der Mendelschen Gesetze in der Vererbung. Die Idee der Simulation wollen wir an einem Beispiel erläutern.

Nehmen wir einmal an, wir würden ein physikalisches Experiment sehr oft unter gleichen Bedingungen durchführen und dabei jeweils eine physikalische Größe messen. Setzen wir weiter voraus, daß die Meßergebnisse im Intervall von 0 bis 1 gleichverteilt sind. Dann können wir dieses Experiment durch ein in einem Computer ablaufendes Programm simulieren.

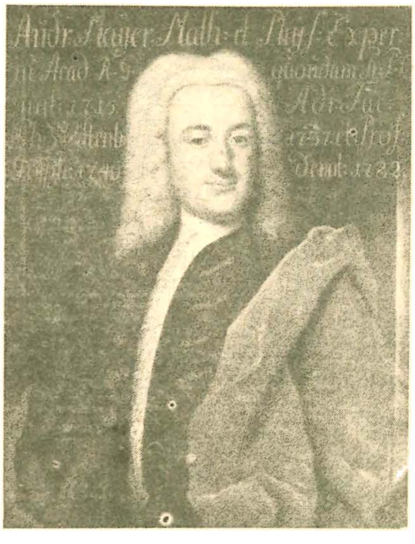
Ließe man dieses Programm sehr oft wiederholt ablaufen, müßte jede im Ausgabebereich des Computers zwischen 0 und 1 liegende Zahl etwa gleich oft erscheinen. Ein solches Programm ist auf den meisten Kleinrechnern durch die RND-Funktion realisiert.

T. Machmer gibt in seiner Arbeit einen kleinen Katalog von Schüleraufgaben an. Eine davon möchten wir dem Leser mit Programmiererfahrung in etwas abgewandelter Form zur Lösung mittels Computer empfehlen. Die Aufgabe soll lauten: Wie kann man durch die RND-Funktion unter Ausnutzung des Verhältnisses des Flächeninhaltes eines Quadrates und seines Innenkreises die Zahl π durch eine näherungsweise relative Häufigkeit bestimmen? Welches Trefferexperiment hat man dafür zu simulieren?

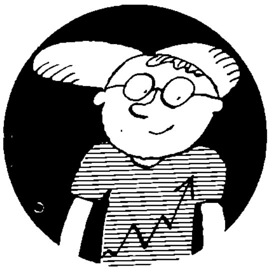
J. Flachsmeyer, K. Keller

Hauptgebäude der Universität Greifswald, erbaut in den Jahren 1747 bis 1750 unter der Leitung des Mathematikprofessors Andreas Mayer

Prof. Andreas Mayer (1715 bis 1782)
Ölgemälde im Besitz der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald



Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1990

Ma 5 ■ 3077 Martin geht einkaufen; dafür erhält er von seiner Mutter 5 M. Außerdem bringt er noch leere Flaschen zu 30 Pf bzw. 20 Pf Pfandgeld mit in die Kaufhalle. Als er die leeren Flaschen zählt, stellt er fest, daß es insgesamt 22 Flaschen sind, aber 4 Flaschen zu 30 Pf Pfandgeld mehr als Flaschen zu 20 Pf Pfandgeld. Nach der Flaschenabgabe kauft Martin zwei Stück Butter zu je 2,40 M, zwei Flaschen Milch zu je 0,56 M einschließlich Pfandgeld, ein Brot zu 0,62 M und ein Glas Marmelade zu 1,09 M. Wieviel Geld behält Martin übrig, wenn er das Pfandgeld für die zurückgegebenen leeren Flaschen zu den von der Mutter erhaltenen 5 M hinzuzählt?
Schülerin A. Braun, Torgau

Ma 5 ■ 3078 Beate verbrachte 59 Tage hintereinander bei ihren Großeltern. Sie schickte jeden Sonntag einen Brief zu ihren Eltern. Wie viele Briefe schrieb Beate mindestens und wie viele höchstens?
Schülerin I. Biziak, Dreitzsch

Ma 5 ■ 3079 Von drei Freunden mit den Rufnamen Maik, Sven, Udo und den Nachnamen Meier, Schulz, Schmitt ist folgendes bekannt:

(1) Maik und Schulz sind jeder ein Jahr älter als Sven.
(2) Sven und Schmitt wohnen im gleichen Haus.
(3) Alle drei Freunde sind zusammen 35 Jahre alt.

Wie heißen die drei Freunde mit Vor- und Nachnamen und wie alt ist jeder von ihnen? *Schülerin H. Engel, Brotterode*

Ma 5 ■ 3080 Ein Gartengrundstück in Form eines Quadrates und mit einem Flächeninhalt von 625 m^2 ist von einem 1 m hohen Bretterzaun umgeben, der mit Farbe angestrichen werden soll. Für einen Quadratmeter Zaunfläche benötigt man eine halbe Dose Farbe.
Wie viele Dosen Farbe werden zum Anstreichen des Zaunes benötigt?
Schüler Ch. Schreiter, Fürstenwalde

Ma 5 ■ 3081 Eine Familie besteht aus zwei Kindern, ihrem Vater, ihrer Mutter und ihrer Großmutter. Von diesen fünf Personen ist folgendes bekannt:

(1) Der Vater ist drei Jahre älter als seine Frau, aber 34 Jahre jünger als seine Mutter, die Großmutter der zwei Kinder.
(2) Annett ist 7 Jahre jünger als ihr Bruder Frank.
(3) Vor 5 Jahren war Frank doppelt so alt wie Annett.
(4) Annett, Frank und ihre Großmutter sind zusammen 110 Jahre alt.

Ermittle das Lebensalter jeder dieser fünf Personen! *Schülerin U. Kehr, Naumburg*

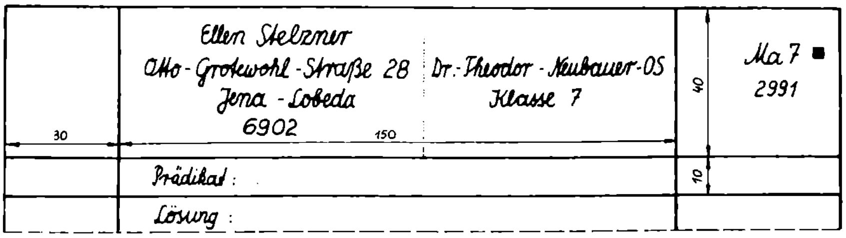
Ma 5 ■ 3082 Ein Speiseeis mit Früchten kostet 0,80 M; die Früchte kosten 20 Pf mehr als das Speiseeis. Wie teuer ist das Speiseeis ohne Früchte?
Schülerin I. Biziak, Dreitzsch

Ma 5 ■ 3083 Jirka sagt: „Als mein Vater 28 Jahre alt war, war ich 6 Jahre alt. Jetzt ist mein Vater dreimal so alt wie ich.“ Wie alt ist Jirka jetzt?
Schülerin I. Biziak, Dreitzsch

Ma 6 ■ 3084 Hans fragt Bruno, wieviel eineinhalb Drittel von 218 sind. Bruno überlegt kurz und nannte dann die richtige Antwort. Wie lautet sie? *Sch.*

Ma 6 ■ 3085 Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$. Die Winkelhalbierende des Winkels $\measuredangle BAC = \alpha$ schneide $\overline{BC}$ in einem inneren Punkt D so, daß $\overline{AB} = \overline{AD}$ gilt.
Berechne die Größen der Innenwinkel dieses gleichschenkligen Dreiecks.
Mathematiklehrer J. Kreusch, Löbau

Ma 6 ■ 3086 Welche durch 7 (ohne Rest) teilbare, kleinste natürliche Zahl läßt bei Division durch 2, 3, 4, 5 oder 6 stets den Rest 1? *Sch.*



Ellen Stelzner
Otto-Grotewohl-Straße 28
Jena-Lobeda
6902

Dr.-Theodor-Neubauer-OS
Klasse 7

Ma 7 ■
2991

Prädikat:

Lösung:

Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich *alpha*-Leser beteiligen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

3. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. (Die Klassenstufennummer steht vor der Aufgabennummer.) Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12 oder Na/Te 10/12 gekennzeichnet sind.
4. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (siehe Muster), da die eingehenden Lösungen aufgabenweise sortiert und korrigiert werden. Noch eine Bitte an die Schulen: Sendet bitte die Lösungen bereits nach Aufgaben sortiert ein.
5. Teilnehmer, die eine richtige Lösung (nicht nur Antwortsatz) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst“, „gut gelöst“ oder „gelöst“. Anderenfalls erhalten sie eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst“. Nach dem Einsendetermin eingehende Lösungen werden nicht mehr bearbeitet!
6. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um sie mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen vergleichen zu können.

Der Jahreswettbewerb 1989/90 läuft von Heft 5/1989 bis Heft 1/1990. Zwischen dem 1. und 10. September 1990 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/89 bis 1/90 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden.

Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden ab Heft 6/90 veröffentlicht.

Wer mindestens 10 Antwortkarten (von den Wettbewerben der Hefte 5/89 bis 1/90) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein *alpha*-Abzeichen. Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1989/90 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunde zurück). Schüler, die schon mehrere Jahre teilnehmen, senden bitte die zuletzt erhaltene Urkunde mit ein. Allein anhand dieser werden die Teilnehmerlisten aufgestellt. Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion alpha

Ma 6 ■ 3087 In einem Dreieck ist eine Seite 3 cm, eine andere 1 cm lang. Die Maßzahl des Umfangs dieses Dreiecks (gemessen in cm) ist eine natürliche Zahl. Wie lang ist der Umfang dieses Dreiecks?
Schülerin I. Biziak, Dreitzsch

Ma 6 ■ 3088 Einer Schulklasse gehören mehr als 20, aber weniger als 40 Schüler an. Kein Schüler dieser Klasse erhielt als Jahresendzensur im Fach Mathematik die Note 5, jeder neunte Schüler die Note 1, jeder dritte Schüler die Note 2, jeder sechste Schüler die Note 4. Wie viele Schüler dieser Klasse erhielten als Jahresendzensur im Fach Mathematik die Note 3?
Schüler J. Bergmann, Unterbreizbach

Ma 6 ■ 3089

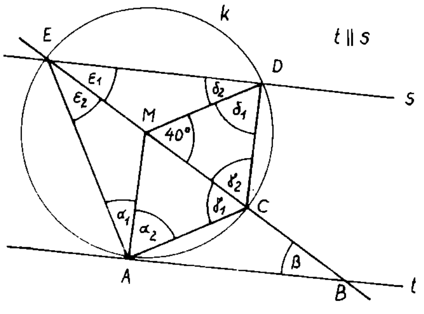
$$\begin{array}{r} \text{M A T H E} \\ +\text{M A T H E} \\ \hline \text{A L P H A} \end{array}$$

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Finde mindestens eine Lösung. *Mathematiklehrer J. Kreusch, Löbau*

Na/Te 6 ■ 469 Ein kleines Gefäß ist mit Wasser gefüllt und hängt an einem Federkraftmesser. Die Feder wird um 1 cm gedehnt. An Stelle des Wassers wird Quecksilber in das Gefäß gefüllt. Wie groß ist nun die Längenänderung? Die Gewichtskraft des Gefäßes wird vernachlässigt. *R.*

Ma 7 ■ 3090 Von den Schülern einer Klassenstufe nehmen regelmäßig drei Viertel an der AG „Malen und Zeichnen“, ein Neuntel an der AG „Schach“ und die übrigen 10 Schüler an der AG „Bergsteigen“ teil. Wie viele Schüler nehmen regelmäßig an den einzelnen Arbeitsgemeinschaften teil? *Schüler S. Exner, Borgsdorf*

Ma 7 ■ 3091 Im Bild ist die Gerade t Tangente an dem Kreis k im Punkt A, die Gerade s Sekante, und es gilt $s \parallel t$. Die Gerade BE geht durch den Mittelpunkt M des Kreises k und schneidet ihn im Punkt C. Gib die Größe aller im Bild benannten Winkel an und begründe deine Aussagen!
Mathematiklehrer J. Kreusch, Löbau



Ma 7 ■ 3092 Wie lautet die kleinste natürliche Zahl, die bei Division durch 2 den Rest 1, durch 3 den Rest 2, durch 4 den Rest 3, durch 5 den Rest 4, durch 6 den Rest 5, durch 7 den Rest 6, durch 8 den Rest 7, durch 9 den Rest 8 und durch 10 den Rest 9 läßt? *Sch.*

Ma 7 ■ 3093 Gegeben sei ein Dreieck ABC und sein Umkreis k. Der Innenwinkel $\sphericalangle ABC$ habe die Größe 75°. Die Halbierungslinie des Winkels $\sphericalangle ABC$, der die Größe β hat, schneide den Umkreis k im Punkte D so, daß $\overline{BC} = \overline{CD}$ gilt. Es sind die Größen der beiden anderen Innenwinkel dieses Dreiecks zu berechnen!
Mathematiklehrer J. Kreusch, Löbau

Ma 7 ■ 3094 Addiert Axel zur Zahl seines Geburtsjahres ihre Quersumme, so erhält er als Ergebnis die Jahreszahl 1989. In welchem Jahre des 20. Jahrhunderts wurde Axel geboren? *Sch.*

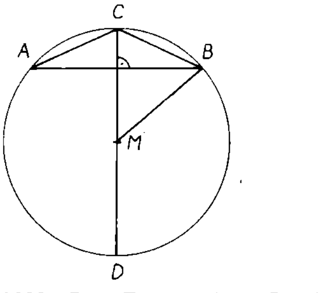
Na/Te 7 ■ 470 Bei einem Federkraftmesser bewirkt eine Kraft von 1 N eine Längenänderung von 5 mm. An diesen Federkraftmesser wird ein Stahlwürfel mit einer Kantenlänge von 5 cm angehängt. Wie groß ist die Längenänderung der Feder in cm? *R.*

Na/Te 7 ■ 471 Eine Pumpe zum Betanken eines Tankwagens mit einer Ladefähigkeit von 10 t fördert 50 l Öl in einer Sekunde. Wie lange dauert es, bis der Wagen mit Schmieröl gefüllt ist? $\left(\varrho = 0{,}9\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)$ *R.*

Ma 8 ■ 3095 Es sind alle diejenigen dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, deren Querprodukt fünfmal so groß ist wie deren Quersumme. *Sch.*

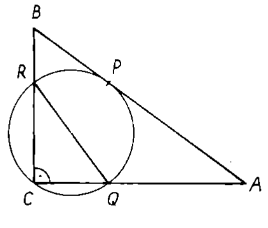
Ma 8 ■ 3096 Es ist zu beweisen, daß für alle natürlichen Zahlen n der Term $8^n + 2^n$ oder der Term $8^n - 2^n$ durch 10 teilbar ist!
Frank Zöllner, Sondershausen

Ma 8 ■ 3097 Die abgebildete Figur stellt einen Kreis mit dem Mittelpunkt M und einer Sehne $\overline{AB}$ dar, die senkrecht zu dem Durchmesser $\overline{CD}$ ist. Die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB$ sei mit α und die des Winkels $\sphericalangle CMB$ mit β bezeichnet. Es ist zu beweisen, daß stets gilt: $\alpha + \beta = 180°$!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma 8 ■ 3098 Der Träger einer Brücke wird durch einen Kreisbogen AMB begrenzt, dessen Höhe h eine Länge von 3 m hat. Der Radius des Kreises durch A, M und B beträgt 8,5 m. Es ist die Spannweite $\overline{AB}$ der Brücke zu berechnen!
A. Kellner, Halberstadt

Ma 8 ■ 3099 Das Bild stellt ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $\overline{BC} = 6$ cm und $\overline{AC} = 8$ cm dar. Ein Kreis k, der $\overline{BC}$ in R und $\overline{AC}$ in Q schneidet, geht durch den Punkt C und berührt $\overline{AB}$ im Punkte P. Es ist die Länge der Sehne $\overline{QR}$ für denjenigen Kreis k zu berechnen, dessen Durchmesser am kürzesten ist. *Sch.*



Na/Te 8 ■ 472 Der Boden eines Kajaks hat eine Fläche von 1,6 m². Die mittlere Eintauchtiefe beträgt 20 cm. Welche Druckkraft und welcher Druck wirken auf den Boden des Bootes? *R.*

Na/Te 8 ■ 473 Überlege, wie die Seilführung an einem Flaschenzug vorgenommen werden muß, für den folgende Gleichung gilt: $F_1 = \frac{F_2}{3}$!
aus: Aufgabensammlung Physik, Teil 1, Volk und Wissen, Berlin

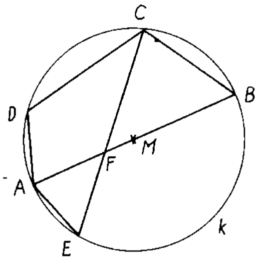
Ma 9 ■ 3100 Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 + x + n;\ n \in P$.
Es ist zu zeigen, daß für alle reellen Zahlen k gilt:

$$k = \frac{f(k) - f(k-1)}{2}!$$

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ■ 3101 Es ist nachzuweisen, daß für den Inkreisradius ϱ und die drei Höhen h_a, h_b, h_c eines Dreiecks die Beziehung $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ gilt! *Sch.*

Ma 9 ■ 3102 Das Bild stellt einen Kreis k mit einem Durchmesser $\overline{AB}$ dar, der eine Seite des Sehnenvierecks $ABCD$ ist. $\overline{AB}$ wird von der Sehne $\overline{CE}$ in F geschnitten, E wird mit A verbunden.
Folgende Längen sind bekannt: $\overline{AF} = 6$ cm, $\overline{AE} = 3$ cm, $\overline{FC} = 10$ cm.
Es ist die Länge von $\overline{CB}$ zu berechnen!
Schüler Th. Pitzschke, Halle



Ma 9 ■ 3103 Es ist zu beweisen, daß es keine reellen Zahlen a, b, c mit $a = b + c$ gibt, für die gilt

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c} - \frac{1}{a}!$$

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ■ 3104 Es ist der Wert der Summe

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

zu berechnen! *Sch.*

Na/Te 9 ■ 474 Ein PKW „Trabant“ wird aus dem Stand annähernd gleichmäßig beschleunigt und erreicht nach einer Zeit von 20,7 s eine Geschwindigkeit von $80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Welcher Weg wird dabei zurückgelegt? *R.*

Na/Te 9 ■ 475 Welche Beschleunigung

erfährt ein Elektron in Feldlinienrichtung, wenn es sich in einem elektrischen Feld mit einer Feldstärke von $2\,000{,}0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$ befindet?

aus: Aufgabensammlung, Physik, Teil 2, Volk und Wissen, Berlin

Ma 10/12 ■ 3105 Es ist zu beweisen, daß in jedem rechtwinkligen Dreieck ABC mit c als Länge der Hypotenuse gilt

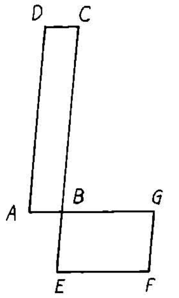
$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}=\frac{c\sqrt{2}}{w_\gamma}\,!$$

Th. Kuessner, Greifswald

Ma 10/12 ■ 3106 Es ist die folgende Aussage zu beweisen:
Wenn $100a + b$ durch 7 teilbar ist, dann ist auch $a + 4b$ durch 7 teilbar. (a und b seien ganze Zahlen)

R. Schulz, Ribnitz

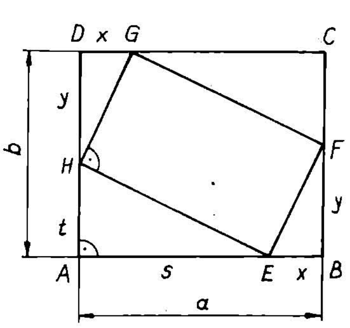
Ma 10/12 ■ 3107 Das Bild stellt zwei flächengleiche Parallelogramme $ABCD$ und $BEFG$ dar. Dabei liegen die Punkte A, B und C bzw. C, B und E jeweils auf einer Geraden. Es ist zu beweisen, daß die Verbindungsgeraden AE und CG parallel zueinander verlaufen! *Sch.*



Ma 10/12 ■ 3108 Weisen Sie nach, daß ein Dreieck ABC existiert, bei dem die Maßzahlen der Seitenlängen drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind und ein Innenwinkel doppelt so groß wie einer der beiden anderen Innenwinkel ist! *Sch.*

Ma 10/12 ■ 3109 In ein Rechteck ist ein weiteres Rechteck so eingezeichnet, wie das Bild zeigt. Gesucht ist ein Zusammenhang zwischen a, b, x und y!

Lehrling S. Kieselberger, Schwarzenhof

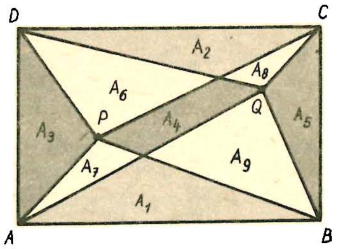


Na/Te 10/12 ■ 476 Im Emissionsspektrum des Wasserstoffs kann eine grüne Linie mit der Wellenlänge 486,1 nm beobachtet werden. Welche Wellenlänge und welche Frequenz hätte dieses Licht im Wasser? *R.*

Na/Te 10/12 ■ 477 Zwei Körper, die anfangs 100 m Abstand haben, bewegen sich geradlinig aufeinander zu:
der erste mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_1 = 3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, der zweite gleichförmig beschleunigt mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 7\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ und der Beschleunigung $a = 4\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$. Bestimmen Sie die Zeit, nach welcher sich beide Körper treffen! *R.*

Gut studiert?

Wer in „alpha“ 6/1989 die Seite 138 gut studiert hat, wird die folgenden, doch recht interessanten Behauptungen ohne allzu große Schwierigkeiten beweisen können. (Dies gilt bereits für Leser ab Klasse 6!) Zeichne in das Innere eines Rechtecks $ABCD$ zwei beliebige Punkte P und Q ein und verbinde jeden dieser Punkte mit den vier Eckpunkten des Rechtecks! Dabei soll es in neun Teile (acht Dreiecke, ein Viereck) zerlegt werden. Ihre Flächeninhalte sind mit A_1 bis A_9 zu bezeichnen (siehe Bild).



Es soll bewiesen werden, daß folgender Flächenvergleich gilt:
a) $A_1 + A_2 = A_3 + A_4 + A_5$
b) $A_6 + A_7 = A_8 + A_9$.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Die Lösungen erscheinen im nächsten Heft!

Ein Dankeschön

Im Heft 3/89 hatten wir unsere Leser gebeten, „ausgelesene“ Exemplare der „alpha“ an uns zu senden, damit wir bei Nachfragen besser helfen können. Wir möchten uns heute bei folgenden Lesern herzlich für die Zusendung von „alphas“ bedanken: Bruno Halecker, Erfurt; G. Schreckenbach, Potsdam; Ulrike Obst, Radebeul; Silke Rudolph, Großröhrsdorf; Anemone Wasner, Freital; H. Schubert, Moritzburg; A. Vetter, Pirna; Lutz Hübschmann, Schwarzenberg; Käthe Bäckmann, Karl-Marx-Stadt; Sabine Schwarz, Halle-Neustadt; Joachim Bußler, Berlin; H. Schenk, Pirna; Wolfgang Mörtl, Potsdam; H. Schütze, Camin; Huch, Plauen.
Gleichzeitig erneuern wir unseren Aufruf!

Alphons

Lösungen

Lösungen zu: alpha-Wettbewerb
Heft 5/89

Ma 5 ■ 3011 $231 + 453 + 675 + 897 = 2256$

Ma 5 ■ 3012 Wegen $M + M = A$ und $E + E = A$ gilt $E \geqq 6$. Wegen $1 + H + H = H$ gilt $H = 9$, also $E = 6$ oder $E = 7$ oder $E = 8$.
Durch weiteres systematisches Probieren findet man folgende vier möglichen Lösungen:
$12\,396 + 12\,396 = 24\,792$;
$12\,896 + 12\,896 = 25\,792$;
$24\,097 + 24\,097 = 48\,194$;
$24\,197 + 24\,197 = 48\,394$

Ma 5 ■ 3013 Für eine Erdumkreisung brauchte das Raumschiff 90 Minuten, also $1\frac{1}{2}\,\mathrm{h}$. In 3 h erfolgten somit 2 Erdumkreisungen, in 24 h bzw. in einem Tag erfolgten $8 \cdot 2 = 16$ Erdumkreisungen. Wegen $325 \cdot 16 = 5200$ hat Juri Romanenko mit dem Raumschiff 5200mal die Erde umkreist.

Ma 5 ■ 3014 Aus der Aufgabenstellung ergibt sich, daß beide Summanden dreistellig sind. Aus $**6 + 23* = 1234$ folgt $996 + 238 = 1234$. Die richtige Aufgabe lautet somit $991 + 998 = 1989$.

Ma 5 ■ 3015 $132 : 44 = 3$ und $112 : 4 = 28$. Von den Befragten betreiben jeder dritte Junge und 28 Mädchen regelmäßig Sport.

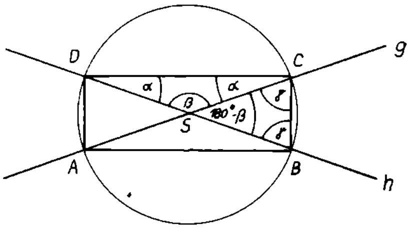
Ma 5 ■ 3016 Es seien n und $n + 1$ zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen; ihre Summe lautet $2n + 1$. Nun gilt $(2n + 1 - 7) \cdot 4{,}5 = 81$, $2n - 6 = 18$, $2n = 24$, $n = 12$. Die beiden Zahlen lauten 12 und 13.

Ma 5 ■ 3017 Aus (1) folgt: Andreas hat entweder den Familiennamen Müller oder Schmidt. Aus (2) und (5) folgt: Bernd hat entweder den Familiennamen Müller oder Reich. Aus (3) und (4) folgt: Bernd hat nicht den Familiennamen Reich, also hat Bernd den Familiennamen Müller. Wegen (1) hat deshalb Andreas den Familiennamen Schmidt. Also hat Claus den Familiennamen Reich.

Ma 6 ■ 3018 $1\,\mathrm{dm} = 10\,\mathrm{cm}$, $2\,\mathrm{mm} = \frac{1}{5}\,\mathrm{cm}$, $1\,\mathrm{dm}^3 = 1000\,\mathrm{cm}^3$; wegen $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot 5 \cdot x = 1000$, also $x = 5000$, werden 5000 Streichhölzer und somit $5000 : 50 = 100$ Schachteln benötigt.

Ma 6 ■ 3019 $\frac{8}{8}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$;
$(12+12)$ Schüler, also 24 Schüler sind gleich $\frac{3}{4}$ der Anzahl aller am Wettbewerb teilnehmenden Schüler. Am Wettbewerb nahmen deshalb $\frac{4}{3}\cdot 24 = 32$ Schüler teil. $\frac{1}{8}\cdot 32 = 4$ Schüler hatten alle vier Namen falsch zugeordnet.

Ma 6 ■ 3020 $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sind Diagonalen des Vierecks $ABCD$. Es gilt: $\overline{AS}\cong\overline{SC}$ und $\overline{BS}\cong\overline{SD}$. Daraus folgt, daß $ABCD$ ein Parallelogramm ist, denn es gilt: „Wenn in einem Viereck $ABCD$ die Diagonalen einander halbieren, so ist dieses Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm.“

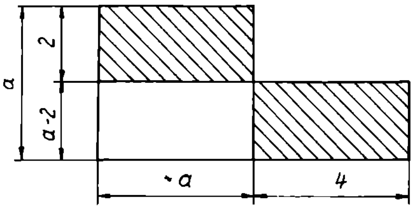


Es ist nun noch zu zeigen, daß $ABCD$ einen rechten Winkel besitzt.
Wir behaupten (bezogen auf das Bild), daß gilt: $\alpha+\gamma=90°$.
Auf Grund des Außenwinkelsatzes für Dreiecke und weil alle Teildreiecke gleichschenklig sind, gilt: $180°-\beta=2\alpha$ und $\beta=2\gamma$. Addiert man beide Gleichungen, so erhält man
$180°=2(\alpha+\gamma)$ bzw. $90°=\alpha+\gamma$.
Das entspricht unserer Behauptung.
Daraus folgt: $ABCD$ ist ein Rechteck.

Ma 6 ■ 3021 Angenommen, Dana ist x Jahre alt; dann ist Susanne $(x-2)$ Jahre, Doreen $(x+2)$ Jahre, Jeanette $2\cdot x$ Jahre, Angelika $(2x-3)$ Jahre alt. Zusammen sind sie $(7x-3)$ Jahre alt, und es gilt
$7x-3=25$, $7x=28$, $x=4$.
Susanne ist 2 Jahre, Dana 4 Jahre, Angelika 5 Jahre, Doreen 6 Jahre, Jeanette 8 Jahre alt.

Ma 6 ■ 3022 Aus (1) folgt: Andrea und Beate haben nicht den Familiennamen Hofmann. Aus (2) folgt: Christine hat nicht den Familiennamen Hofmann. Also heißt Doris Hofmann. Wegen (3) hat Beate den Familiennamen Ilgen. Aus (4) und (5) folgt: Andrea hat den Familiennamen Fischer, Christine heißt Grohmann.

Ma 6 ■ 3023 Dem Bild ist folgendes zu entnehmen: $2\cdot a=4\cdot(a-2)$,
$2a=4a-8$, $2a=8$, $a=4$.
Die rechteckige Rasenfläche ist 8 m lang und 2 m breit.

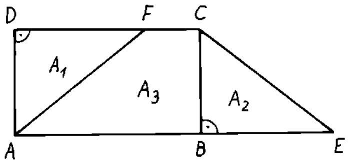


Na/Te 6 ■ 452 Von der Höhe 4,30 m sind 0,50 m zu subtrahieren. Das Volumen des Wassers ergibt sich als Produkt aus der Länge, der Breite und der verminderten Höhe der Schleusenkammer.
$V=325\ \text{m}\cdot 25\ \text{m}\cdot 3{,}80\ \text{m}=30\,875\ \text{m}^3$.
Das gerundete Ergebnis lautet:
$V=30\,900\ \text{m}^3$.

Ma 7 ■ 3024 Die Zahl des Geburtsjahres von Axel sei (in dekadischer Schreibweise) $\overline{19xy}$; dann gilt
$1900+10x+y+(1+9+x+y)=1989$
und $0\leqq x\leqq 9$ und $0\leqq y\leqq 9$.
Daraus folgt $11x+2y=79$; nur für $x=7$ und $y=1$ wird diese Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen erfüllt. Axel wurde im Jahre 1971 geboren; im Jahre 1989 wird er 18 Jahre alt.

Ma 7 ■ 3025 a) Wegen $\frac{z}{1989}=0{,}4$, also $z=795{,}6$ lautet der Zähler 796 und der Bruch $\frac{796}{1989}$.
b) Wegen $x=\frac{10}{21}=0{,}\overline{476\,190}$ und $1989=6\cdot 331+3$ lautet die 1989. Stelle hinter dem Komma 6.

Ma 7 ■ 3026 Wegen $\overline{AF}\cong\overline{EC}$, $\overline{AD}\cong\overline{BC}$ und $\sphericalangle ADF\cong\sphericalangle EBC$ (90°) sind die Dreiecke AFD und BEC kongruent, also erst recht flächengleich.
Wegen $A_1=A_2$ gilt $A_1+A_3=A_2+A_3$, also Flächengleichheit von Rechteck und gleichschenkligem Trapez.



Ma 7 ■ 3027 Wegen der umgekehrten Proportionalität gilt $x:63=72:84$,
$x:63=6:7$, also $x=54$.
Somit wurden $(63-54)$ Pferde, also 9 Pferde verkauft.

Ma 7 ■ 3028 Aus (1) folgt: Herr Kempcke wohnt nicht in Anklam. Aus (2) folgt: Herr Kempcke wohnt nicht in Neustrelitz. Aus (3) folgt: Herr Kempcke wohnt nicht in Neubrandenburg. Folglich wohnt Herr Kempcke, der einen Skoda hat, in Röbel. Aus (1) folgt: Herr Birken wohnt nicht in Anklam. Aus (2) folgt:
Herr Birken wohnt nicht in Neustrelitz. Folglich wohnt Herr Birken in Neubrandenburg; er fährt einen Trabant. Aus (3) folgt: Herr Mett aus Anklam fährt einen Lada. Also fährt Herr Rebrek aus Neustrelitz einen Dacia.

Na/Te 7 ■ 453 Durch eine Gewichtskraft von 10 N wird die Feder um 10 cm gedehnt. Bei einer Dehnung um 25 cm beträgt die Gewichtskraft des Körpers 25 N.

Na/Te 7 ■ 454 Man zeichnet aus der Wertetabelle ein Diagramm. Aus dem Graphen liest man ab, daß ein Körper mit der Masse 1 kg in 1000 km Höhe eine Gewichtskraft von 7,3 N hat. Ein Körper mit der 4fachen Masse hat demnach eine Gewichtskraft von rund 30 N. (Der Rechenwert beträgt 29,4.)

Ma 8 ■ 3029 Aus (1) und (4) folgt, daß Becker keinen blauen Schlips trägt. Aus (6) folgt, da Schneider einen grünen Schlips trägt, daß Fischer einen blauen Schlips, also Becker überhaupt keinen Schlips trägt. Aus (3) folgt weiter, daß Becker den Vornamen Kurt hat. Aus (2) und (5) folgt, daß Fischer nicht Jörn heißt. Deshalb hat Fischer den Vornamen Hans und Schneider den Vornamen Jörn.

Ma 8 ■ 3030 Schreibt man für die rechte Seite der Gleichung
$2x^2+11x+\square$, so muß das erste Kästchen der linken Seite der Gleichung x lauten. Wegen $2x^2+3x+(2x+3)\cdot\square$ ergibt sich für dieses Kästchen 4. Wegen $2x\cdot 4=8$ und $3x+8x=11x$ und $3\cdot 4=12$ ergibt sich für das Kästchen auf der rechten Seite der Gleichung 12. Die Gleichung lautet somit
$(2x+3)(x+4)=x\cdot(2x+11)+12$.
Durch Ausmultiplizieren kann man die Allgemeingültigkeit feststellen.

Ma 8 ■ 3031 Nach Aufgabenstellung gilt
$1111+z^2=(z+1)^2$.
Wir formen äquivalent um und erhalten
$1111=(z+1)^2-z^2$, $1111=z^2+2z+1-z^2$, $1110=2z$, $555=z$.
Probe: $1111+555^2=556^2$;
$1111+308\,025=309\,136$.

Ma 8 ■ 3032 Der Fußpunkt des Lotes von C auf $\overline{AB}$ sei D und der des Lotes von A auf $\overline{CB}$ sei E. Wenn nun $\overline{CD}\cong\overline{AE}$, dann sind die Dreiecke CDB und ABE kongruent, denn sie stimmen in der Länge einer Seite $(\overline{CD}\cong\overline{AE})$ und der Größe zweier Winkel ($\sphericalangle AEB\cong\sphericalangle CDB$; $\sphericalangle CBA$ kommt in beiden Dreiecken vor) überein. Es folgt, daß auch die Hypotenusen $\overline{CB}$ und $\overline{AB}$ gleiche Länge haben, d. h., das Dreieck ABC ist gleichschenklig, w. z. b. w.

Ma 8 ■ 3033 Die Gerade durch P und Q schneide die Gerade g im Punkte S. Der zu konstruierende Kreis k möge die Gerade g im Punkt R berühren. Nach dem Sekanten-Tangenten-Satz gilt dann $\overline{SP}\cdot\overline{SQ}=\overline{SR}^2$. Wir konstruieren über $\overline{SQ}$ als Durchmesser den Halbkreis k'. Die Senkrechte zu $\overline{SQ}$ durch P schneide k' im Punkte N. Nach dem Kathetensatz gilt dann
$\overline{NS}^2=\overline{SP}\cdot\overline{SQ}$, also $\overline{NS}=\overline{SR}$.
Der Kreis um S mit dem Radius $\overline{NS}$ schneide die Gerade g im Punkte R. Die Mittelsenkrechten von $\overline{PQ}$ und $\overline{PR}$ schneiden einander im Punkte M, dem Mittelpunkt des zu konstruierenden Kreises k.

Na/Te 8 ■ 455 Der Skiläufer hat eine Gewichtskraft von 700 N; er wird um 300 m gehoben (Höhenunterschied 0,5 · Länge). Die Hubarbeit beträgt
$700\ \text{N}\cdot 300\ \text{m}=210\,000\ \text{J}=210\ \text{kJ}$.
Diese Arbeit wird am Skiläufer verrichtet.

Na/Te 8 ■ 456 Die Hangabtriebskraft dieses Körpers wird mit F'_G bezeichnet. Dann gilt: $F'_G=\mu\cdot F_G$; $F'_G=25\ \text{N}$.

Ein Körper mit der Masse von 2,5 kg bewirkt, daß der Körper auf der Waagerechten gerade zum Gleiten gebracht wird.

Ma 9 ■ 3034 Zunächst formen wir um und erhalten
$\sqrt{9n^4 + 18n^3 + 9n^2} = \sqrt{9n^2(n+1)^2}$
$= 3n \cdot (n+1)$. Der Term ist für alle natürlichen Zahlen n durch 3 teilbar, weil er den Faktor 3 enthält. n und $n+1$ sind zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen also eine gerade und eine ungerade ist. Ihr Produkt ist gerade und damit durch 2 teilbar. Somit ist der Term durch 6 teilbar, w. z. b. w.

Ma 9 ■ 3035 Es ist zu zeigen, daß gilt

$$M^2 = \frac{Q^2 + G^2}{2}, \text{ also } M^2 = \frac{\frac{a^2 + b^2}{2} + a \cdot b}{2},$$

$$\text{d. h. } M^2 = \frac{\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{2}}{2} \text{ bzw.}$$

$$M^2 = \frac{(a+b)^2}{4};\ M^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$\text{d. h. } M = \frac{a+b}{2}.$$

Ma 9 ■ 3036 Eine dreistellige Zahl werde mit $\overline{abc}$ bezeichnet. Laut Teilbarkeitsregel gilt $3/\overline{abc}$ genau dann, wenn $3/a + b + c$. Eine arithmetische Folge hat die Eigenschaft, daß je zwei benachbarte Glieder eine konstante Differenz d haben. In $\overline{abc}$ sei $b = a + d$ und $c = b + d$ bzw. $c = a + 2d$ $(d \in N)$. Das setzen wir in die Behauptung $3/a + b + c$ ein und erhalten
$3/a + a + d + a + 2d$, d. h. $3/3a + 3d$ bzw. $3/3(a + d)$. Das ist allgemeingültig; daraus folgt die Behauptung, w. z. b. w.

Ma 9 ■ 3037 Der Flächeninhalt eines konvexen Vierecks, in dem die Diagonalen zueinander senkrecht sind, ist gleich dem halben Produkt aus den Längen seiner Diagonalen. Somit gilt $A_{ABDE} = \frac{1}{2} \cdot s_a \cdot s_b$.
Wegen $A_{ABC} : A_{EDC} = 2^2 : 1^2 = 4 : 1$ gilt
$A_{ABC} : A_{ABDE} = 4 : 3$ und somit
$A_{ABC} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot s_a \cdot s_b = \frac{2}{3} \cdot s_a \cdot s_b$.

Ma 9 ■ 3038 Ja, es ist möglich! Man nimmt eine Kugel aus der Schachtel mit der Aufschrift „schwarz und weiß“ heraus. Ist sie weiß, muß auch die zweite weiß sein. Dann muß in der Schachtel mit der Aufschrift „zwei schwarze“ eine schwarze und eine weiße Kugel sein, und in der Schachtel mit der Aufschrift „zwei weiße“ liegen zwei schwarze Kugeln. Wenn dagegen die herausgenommene Kugel eine schwarze ist, muß auch die zweite eine schwarze sein.
Dann kann in der Schachtel mit der Aufschrift „zwei weiße“ nur eine schwarze und eine weiße Kugel liegen, und in der letzten Schachtel befinden sich dann zwei weiße Kugeln.

Na/Te 9 ■ 457 Aus dem Tafelwerk können der lineare Ausdehnungskoeffizient für Kupfer und der für Wasser entnommen werden:
$\alpha_{Cu} = 16 \cdot 10^{-6}\,K^{-1}$ und
$\alpha_{H_2O} = 180 \cdot 10^{-6}\,K^{-1}$. Das Volumen des Wassers und des Würfels vergrößern sich beim Erhitzen unterschiedlich. Da sich das Wasser stärker ausdehnt als das Kupfer, läuft das Wasser über:
$V' = V \cdot T \cdot (\alpha_{H_2O} - 3 \cdot \alpha_{Cu})$.
Mit $V = 1\,cm^3$ und $T = 60\,K$ ergibt sich $V' = 0{,}007\,92\,cm^3$. Es laufen etwa 8 mm³ Wasser über.

Na/Te 9 ■ 458 Aus dem Tafelwerk entnehmen wir eine Beziehung zwischen dem Druck und der Temperatur eines Gases bei konstantem Volumen. Der Anfangsdruck p_1 beträgt p_0, der Enddruck p_2 beträgt $6 \cdot p_0$. Die Anfangstemperatur T_1 beträgt 293 K, die Endtemperatur T_2 kann aus $T_2 = T_1 \cdot \frac{p_2}{p_1}$ berechnet werden. Man erhält 1485 °C.

Ma 10/12 ■ 3039 Aus der gegebenen Ungleichung folgt schrittweise durch Umformen

$$\frac{1}{9 - 4\sqrt{5}} \cdot \frac{9 + 4\sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}} < 18,$$

$$\frac{9 + 4\sqrt{5}}{81 - 16 \cdot 5} < 18,\ 9 + 4\sqrt{5} < 18,$$

$4\sqrt{5} < 9$, $80 < 81$. Die gegebene Ungleichung stellt eine wahre Aussage dar.

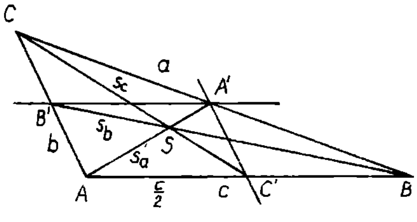
Ma 10/12 ■ 3040 Sicher ist $a \neq 0$. Wenn $a \geqq 2$, so $(100a + 11b)\ (10a + c) \geqq 4000$. Es ist aber $1000a + 110b + c < 3000$. Somit ist also $a = 1$. Dann gilt
$(100 + 11b)(10 + c) = 1000 + 110b + c$,
also $1000 + 110b + 100c + 11bc$
$= 1000 + 110b + c$, $99c + 11bc = 0$,
d. h. $c = 0$. Nun kann b außer 0 und 1 jede einstellige natürliche Zahl annehmen, d. h. wir erhalten die folgenden Tripel (a, b, c) als Lösungen:
$(1,2,0)$; $(1,3,0)$; $(1,4,0)$; $(1,5,0)$; $(1,6,0)$; $(1,7,0)$; $(1,8,0)$; $(1,9,0)$.

Ma 10/12 ■ 3041 Im abgebildeten Dreieck ABC haben wir durch A' und B' die Parallele zu $\overline{AB}$ gezeichnet! Nach einem bekannten Satz ist die Gerade durch die Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten parallel zur dritten Seite, und die Strecke $\overline{A'B'}$ ist halb so lang wie diese. Es seien die Längen der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ mit c, b und a bezeichnet. Dann hat $\overline{A'B'}$ die Länge $\frac{c}{2}$ und $\overline{A'C'}$ die Länge $\frac{b}{2}$. Nun gelten nach Dreiecksungleichung im Dreieck $AA'B'$:

(1) $s_a < \frac{c}{2} + \frac{b}{2}$, im Dreieck $B'BA'$:

(2) $s_b < \frac{c}{2} + \frac{a}{2}$ und im Dreieck $CC'A'$:

(3) $s_c < \frac{b}{2} + \frac{a}{2}$. Addiert man diese drei Ungleichungen, so erhält man
$s_a + s_b + s_c < a + b +. c$, w. z. b. w.



Ma 10/12 ■ 3042 Jedes der entstandenen Dreiecke ergänzt das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm, in dem $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AC}$ jeweils Diagonale ist. Damit ist deren Kongruenz zu ABC erwiesen. Dreht man räumlich diese drei Dreiecke jeweils um die Seite $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CA}$, so sind die Spuren der Punkte D_1, D_2 und D_3 die Lote auf die jeweiligen Dreieckseiten. Der Schnittpunkt der drei Spuren ist D'. D' ist eindeutig bestimmt, da wegen der zu ABC parallelen Seiten die drei Lote die Höhen im Dreieck $D_1D_2D_3$ sind, die einander in genau einem Punkt schneiden. Verbindet man D' mit A, B und C, so erhält man den Grundriß der Pyramide.

Ma 10/12 ■ 3043 Es sei γ die Größe des Winkels, der der Seite mit der Länge c gegenüberliegt. Dann gilt für den Flächeninhalt dieses Dreiecks
$2A = h \cdot c$, $2A = a \cdot b \cdot \sin\gamma$.
Nun gilt $\sin\gamma \leqq 1$,
d. h. $a \cdot b \cdot \sin\gamma \leqq a \cdot b$ und somit
$h \cdot c \leqq a \cdot b$, w. z. b. w. Das Gleichheitszeichen gilt, falls $\sin\gamma = 1$, d. h. $\gamma = 90°$ ist.

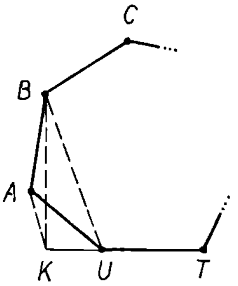
Na/Te 10/12 ■ 459 Nach dem Gesetz von Archimedes ist die Auftriebskraft so groß wie die Gesichtskraft des verdrängten Stoffes. Der Ballon verdrängt kalte Luft mit der Gewichtskraft $g \cdot \varrho_1 \cdot V$. Die Auftriebskraft muß tragen die Gewichtskraft des Ballons $(g \cdot m)$ und die Gewichtskraft der eingeschlossenen heißen Luft $(g \cdot \varrho_2 \cdot V)$.
Aus der Kräftebilanz erhält man:
$V(\varrho_1 - \varrho_2) = m$. Zur Berechnung der Dichte ϱ_2 bei der Temperatur t_2: Bei Temperaturänderung ändert sich das Volumen bei konstantem Druck und konstanter Masse. Aus dem Tafelwerk kann man den Zusammenhang zwischen Volumen und Temperatur bei konstantem Druck entnehmen. Unter Berücksichtigung der Definitionsgleichung für die Dichte ergibt sich $\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{T_2}{T_1}$. Daraus erhält man die Dichte der heißen Luft $\varrho_2 = 0{,}944\,kg \cdot m^{-3}$. Setzt man die Werte ein, so ergibt sich $m = 100\,kg$. Das ist die gesuchte Gesamtmasse.

Na/Te 10/12 ■ 459 a) Auf den Aufzug mit dem Körper wirkt eine Gewichtskraft $(m_1 + m_2) \cdot g$; als beschleunigende Kraft steht demnach zur Verfügung $F - (m_1 + m_2) \cdot g$. Aus dem Newtonschen Kraftgesetz ergibt sich $a = \frac{(F - (m_1 + m_2) \cdot g)}{(m_1 + m_2)}$.
Nach Einsetzen der Werte erhält man als Beschleunigung $a = 2{,}08\,m \cdot s^{-2}$.
b) Auf den Faden wirkt die Gewichtskraft des Körpers und die Kraft zum Beschleunigen des Körpers: $F_s = m_2 \cdot g + m_2 \cdot a$. Man erhält $F_s = 59{,}5\,N$.
c) Nach dem Zerreißen des Fadens wirkt die resultierende beschleunigende Kraft nur noch auf den Aufzug (Masse m_1). Dieser Wird nunmehr mit der Beschleunigung $a = 2{,}1\,m \cdot s^{-2}$ bewegt.
Der Körper fällt frei mit der Fallbeschleunigung $g = 9 \cdot 91\,m \cdot s^{-2}$.

Lösungen zu: Die Quadratur der Parabel

P1: Im Bild 1 sei ein Teil $ABC\ldots TUA$ des Vielecks dargestellt. Man schneide das Dreieck ABU ab, ziehe durch A die Parallele zu BU, die die verlängerte Gerade TU in K schneide. Nun verbinde man B und K. Das Vieleck $KBC\ldots TK$ hat eine Seite weniger, doch den gleichen Flächeninhalt wie das gegebene Vieleck. In der Tat ist das Dreieck KBU flächengleich mit dem Dreieck ABU (beide haben die gleiche Basis BU und die gleiche Höhe, da sie zwischen den Parallelen BU und AK liegen).

Bild 1



P2: Wir setzen (Bild 2) $TO = OP = x_0$, $PY_0 = y_0$. T_1 sei ein von Y_0 verschiedener Punkt der Parabel, P_1 der Fußpunkt der Ordinate $P_1T_1 = t_1$. P_1T_1 schneide die Parabel in Y_1; $P_1Y_1 = y_1$, $OP_1 = x_1$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke Y_0PT und T_1P_1T folgt

$\frac{x_0 + x_1}{2x_0} = \frac{t_1}{y_0}$. Wäre $t_1 < y_1$, so

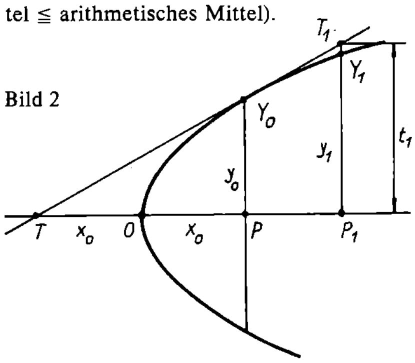
$$\left(\frac{x_0 + x_1}{2x_0}\right)^2 = \left(\frac{t_1}{y}\right)^2 < \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^2 = \frac{x_1}{x_0}$$

(letzteres wegen $E1$). Daraus folgt

$\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)^2 < x_0x_1$, was falsch ist, da stets

$\sqrt{x_0x_1} \leqq \frac{x_0 + x_1}{2}$ ist (geometrisches Mittel ≦ arithmetisches Mittel).

Bild 2



P3: Die Verbindungsgerade der Punkte $Y_0 = (x_0, y_0)$, $Y_1 = (x_1, y_1)$ ist

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Da die Punkte auf der Parabel $y^2 = 2px$ liegen, gilt $y_0^2 = 2px_0$,

$y_1^2 = 2px_1$, $y_1^2 - y_0^2 = 2p(x_1 - x_0)$,

$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{2p}{x_1 + y_0}$. Die Gleichung der Verbindungsgeraden (Parabelsekante) ist also

$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{2p}{y_1 + y_0}$. Ist $Y_1 = Y_0$ (die Sekante wird zur Tangente), so wird $\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{2p}{2y_0}$, woraus $yy_0 - y_0^2 = yy_0 - 2px_0 = px - px_0$ folgt.

Die Gleichung der Tangente in Y_0 ist also $yy_0 = p(x + x_0)$.

Ihr Schnittpunkt T mit der Achse $y = 0$ ist $p(x + x_0) = 0$, d. h. $x = -x_0$.

Es ist in der Tat $TO = OP = x_0$.

P4: Es werde durch U parallel zu YY' eine Gerade gezogen (Bild 3), K sei der Schnittpunkt mit OP, I sei der Schnittpunkt mit YO. Dann gilt (Eigenschaft $E1$)

$\left(\frac{PY'}{KU}\right)^2 = \frac{OP}{OK}$, d. h. $\frac{OP}{OK} = \frac{PY'^2}{KU^2}$. Nun ist

$\frac{OP}{OK} = \frac{OY}{OI}$ (ähnliche Dreiecke YPO, IKO)

und $\frac{PY'}{KU} = \frac{PY}{PP'} = \frac{OY}{OR}$ ($KU = PP'$, $PY' = PY$, ähnliche Dreiecke OPY, $RP'Y$).

Somit gilt

$\frac{OY}{OI} = \frac{OY^2}{OR^2}$ (d. h. $OY : OR = OR : OI$, d. h. OR ist die mittlere Proportionale zwischen OY und OI). Aus

$\frac{OI}{OR} = \frac{OR}{OY}$ folgt $\frac{OY}{OR} = \frac{OY + OR}{OR + OI} = \frac{YR}{IR}$.

Nun gilt $\frac{OY}{OR} = \frac{PY}{PP'}$ (Dreiecke OPY, $RP'Y$) $= \frac{PY'}{PP'}$ ($PY = PY'$) und $\frac{YR}{IR} = \frac{RP'}{RU}$ (Dreiecke $RP'Y$, RUI). Also: $\frac{RP'}{RU} = \frac{PY'}{PP'}$. Qed.

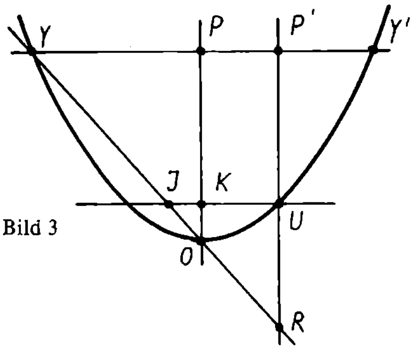


Bild 3

P5: Wir verbinden Y und O; diese Gerade schneide $P'R$ in R' (Bild 4, S. 2). Nach Eigenschaft $E4$ gilt

$P'R' : UR' = PY' : PP'$,

also (beachte $PY' = PY$)

$PY : PP' = P'R' : R'U$ oder $YP : (PY' - PP')$
$= P'R' : (P'R' - R'U)$, d. h.

$$YP : Y'P' = P'R' : P'U \qquad (*).$$

Nun ist $OT = OP$, woraus $RR' = P'R'$ folgt. Verdoppeln wir die Vorderglieder in (*), so ergibt sich

$\frac{YY'}{Y'P'} = \frac{P'R}{P'U}$,

woraus $\frac{YY' - Y'P'}{Y'P'} = \frac{RP' - P'U}{P'U}$,

also $\frac{YP'}{P'Y'} = \frac{RU}{UP'}$ folgt.

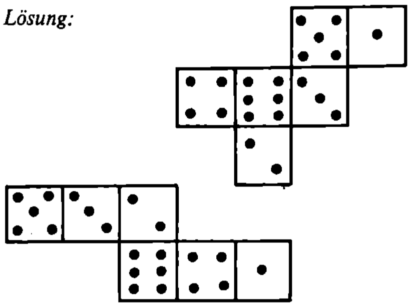
Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Würfelnetze

Die Zeichnungen zeigen zwei Würfelnetze, die zu Würfeln gefaltet werden können. Die Seiten eines Würfels werden meistens so numeriert, daß die Summe gegenüberliegender Seiten 7 ergibt.

Setze in jedes Würfelnetz die fehlenden Ziffern ein.

Lösung:



▲2▲ Im Vogelflug

Von einem Ausgangspunkt A werden folgende Verschiebungen durchgeführt:

1. 1 km nach Norden
2. 2 km nach Westen
3. 3 km nach Süden
4. 6 km nach Osten.

Wie groß ist nach diesen vier Verschiebungen der Abstand des Endpunktes vom Ausgangspunkt A?

a) 3,4 km, b) 4,5 km, c) 6,6 km.

Lösung: Der Abstand beträgt etwa 4,5 km.

▲3▲

In der Zeitung „Sovietskij Sport“ (3. 5. 1987) wurde die Zwischentabelle eines Fußballturniers veröffentlicht. Beweise, daß in der Tabelle ein Fehler existiert. Korrigiere ihn unter der Voraussetzung, daß nur genau ein Fehler vorhanden ist.

Weise die Ergebnisse der Spiele aus.

Lösung: Der Fehler befindet sich in der Spalte „Torunterschied“ bei der Mannschaft Schwedens. Bei einem Sieg und einem Unentschieden kann der Torunterschied nicht 1–1 betragen. Aus der Tabelle errechnet man einmal 11 als Gesamtzahl der durch die am Turnier beteiligten Mannschaften erzielten Tore, das andere Mal 12 als Gesamtzahl der Gegentore. Deshalb enthält die Tabelle einen sich auf ein Spiel beziehenden Fehler, d. h. der Torunterschied Schwedens ist gleich 2–1 oder 1–0. Als Ergebnis der Fallunterscheidung findet man die folgende Tabelle

	Ungarn	Schweden	Spanien	Irland	Frankreich	Torunterschied	Punkte
Ungarn	*	–	–	2:1	2:0	4–1	4
Schweden	–	*	1:1	1:0	–	2–1	3
Spanien	–	1:1	*	2:2	–	3–3	2
Irland	1:2	0:1	2:2	*	–	3–5	1
Frankreich	0:2	–	–	–	*	0–2	0

Lösung zur Schachecke

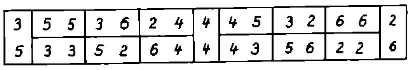
I) 1. d4 d5 2. Dd3 Dd6 3. Dh3 Dh6 4. D:c8 matt.

II) 1. c4 c5 2. Da4 Da5 3. Dc6 Dc3 4. D:c8 matt.

Lösungen zu: In freien Stunden · alpha-heiter

Legespiel mit Dominosteinen

Eine mögliche Lösung ist:



Mathematischer Rösselsprung
Links: Subtraktionszeichen;
Rechts: Mathematikolympiade

5 Zahlen – 5 Ziffern
Welle, Insel, Nelke, Klein, Enkel,
Leine; 1. Spalte: Winkel

Mitternachtsknobeleien
Als Zahl der „seit Mitternacht verflossenen Stunden“ kann man jede beliebige einsetzen. Das Ergebnis der Rechnung ist immer 4, die „Zahl, die im Augenblick die Uhr anzeigt“. Folglich war es 4 Uhr, und das Spiel kostete 5,65 M.

Raten und Rechnen

663 − 103 = 560
: + −
39 · 11 = 429
17 + 114 = 131

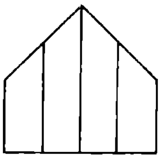
Wer findet die kürzeste Zugfolge?
Ein Zug wird beschrieben durch die durch einen Pfeil verbundenen Nummern von Feld und Folgefeld.

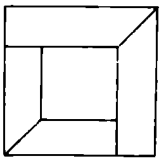
a) $1 \to 4 \to 5 \to 6 \to 3 \to 2$

b) $1 \to 2 \to 5 \begin{smallmatrix} \nearrow 4 \to 1 \to 2 \to 3 \to 6 \searrow \\ \searrow 6 \to 3 \to 2 \to 1 \to 4 \nearrow \end{smallmatrix} 5 \to 2 \to 3$

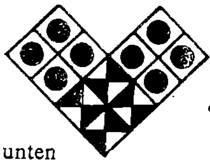
Mathe-ABC
Es kann nur $C = 9$ sein, woraus sich $A = 1$ ergibt. Es muß $B = 0$ sein (sonst wäre das Ergebnis 6stellig), woraus $D = 8$ folgt. Es ergibt sich die eindeutige Lösung des Kryptogramms:
$10\,989 \cdot 9 = 98\,901$. (Übrigens ist 10 989 die einzige fünfstellige natürliche Zahl, bei der sich bei Multiplikation mit einer bestimmten einstelligen natürlichen Zahl die Grundziffern in ihrer Reihenfolge umkehren.)

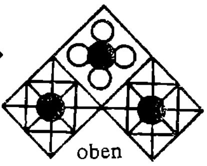
Geschickt geteilt





Kombinieren gefragt





Denkt nach – schlagt nach – fragt nach!
1 Morgen = 0,25 ha = 2500 m^2
1 Schock = 60 Stück
1 Mandel = 15 Stück
1 Stiege = 20 Stück
1 Hocke = 6, 8 oder 9 Stück
1 Doppelzentner = 100 kg
1 Pfund = 0,5 kg = 500 g
1 Groschen = 10 Pfennige

Denk dir eine Zahl!

Das *Institut für Arabische Manuskripte* in Kuwait veröffentlichte im Jahre 1985 Aufgaben des arabischen Mathematikers Abu Mansur al-Baghdadi (um 1035). In dem Werk „Al-Takmila fi'l hisab“ befindet sich das Kapitel: *Über die Ermittlung der verborgenen Sachen und der ausgedachten Zahlen.* Frau Dr. Sonja Brentjes vom Karl-Sudhoff-Institut der Karl-Marx-Universität Leipzig stellte daraus eine Aufgabe – von uns stark bearbeitet – als Einführung zu diesem Beitrag zur Verfügung. Wir wünschen bei der Beschäftigung mit diesen Denksportaufgaben viel Freude und Erfolg.

J. Lehmann/Th. Scholl

Aus: „Al-Takmila fi'l hisab“ von Abu Mansur (um 1035)

▲1▲ *A* fordert *B* auf, sich eine natürliche Zahl n zu denken, für die $1 \leqq n \leqq 105$ gilt, die gedachte Zahl durch 5 zu dividieren und den verbleibenden Rest r_1 (0, 1, 2, 3 oder 4) zu nennen, die gedachte Zahl dann durch 7 zu dividieren und den verbleibenden Rest r_2 (0, 1, 2, 3, 4, 5 oder 6) zu nennen, die gedachte Zahl nun durch 3 zu dividieren und den verbleibenden Rest r_3 (0, 1 oder 2) zu nennen. Wie kann *A* aus den drei genannten Resten r_1, r_2, r_3 die von *B* gedachte Zahl ermitteln?

Aus: „Enthüllte Zaubereyen und Geheimnisse der Arithmetik“ von Joh. Ph. Gruson, Berlin 1800

▲2▲ Laß von der Zahl, die man sich denkt, 1 subtrahieren und den Rest doppelt nehmen; laß von diesem Doppelten wieder 1 wegnehmen und die gedachte Zahl dafür addieren. Wie läßt sich die gedachte Zahl ermitteln?

Aus: „Die Wunder der Rechenkunst“ von Joh. Christ. Schäfer, Weimar 1831

(Originaltext)

▲3▲ *Die von einer Person in Sinn genommene Zahl zu nennen*
Wenn eine Person sich eine Zahl gedacht hat, und dieselbe hierauf mit 2 multipliciren, dann noch 5 dazu addiren, diese Summe wieder mit 5 multipliciren, zu dem Produkt 3 addiren, das dadurch erhaltene wieder mit 10 multipliciren, dann noch 3 dazu addiren und von dieser Summe 150 abziehen läßt; wie kann man aus dem jetzt bleibenden Rest, den man sich angeben läßt, die von der Person gedachte Zahl wissen?

▲4▲ Marie-Luise fordert Monika auf: „Denke dir eine natürliche Zahl und addiere 2; multipliziere die Summe mit 3, subtrahiere danach 4! Multipliziere diese Differenz mit 3, addiere nun die gedachte Zahl und addiere abschließend noch 4! Nenne mir das Ergebnis!“ Wie kann Marie-Luise aus diesem Ergebnis die von Monika gedachte Zahl ermitteln?

▲5▲ Jemand denkt sich eine natürliche Zahl, verdoppelt diese und addiert danach 4. Er halbiert diese Summe und addiert 7, multipliziert nun mit 8, subtrahiert 12, dividiert durch 4 und subtrahiert zum Schluß 11. Wie läßt sich aus dem Ergebnis die gedachte Zahl ermitteln?

▲6▲ *Erraten des Geburtstages:* Man fordere jemanden auf, das Tagesdatum seines Geburtstages mit 6 zu multiplizieren, danach 12 zu addieren, diese Summe mit 5 zu multiplizieren, nun das Zehnfache der Zahl des Tagesdatums zu subtrahieren, die Zahl des Geburtsmonats zu addieren und abschließend 60 zu subtrahieren. Wie läßt sich aus dem Ergebnis das Tagesdatum und der Geburtsmonat ermitteln?

▲7▲ Bitte deinen Freund, die Zahl seines Lebensalters (in ganzen Zahlen) aufzuschreiben und dann schrittweise folgende Rechenoperationen auszuführen:
a) Multipliziere die notierte Zahl mit 5,
b) addiere zum Produkt 25,
c) multipliziere diese Summe mit 2,
d) addiere nun die Zahl des Wochentages, an dem du geboren wurdest (Montag ist der 1. Tag),
e) subtrahiere abschließend 50!
Wenn dir dein Freund das Ergebnis nennt, kannst du sofort sagen, wie alt er ist, und an welchem Wochentag er geboren wurde. Wie ist das möglich?

▲8▲ Fordere einen Mitschüler auf: „Multipliziere die Zahl deines Geburtstages mit 12 und die Nummer des Monats, in dem du geboren bist, mit 31; addieren danach beide Produkte und nenne mir das so erhaltene Resultat.“ Aus diesem Resultat läßt sich der Geburtstag (Tag und Monat) erraten. Wie ist das möglich?

▲9▲ *Geburtstagsraten:* Das Tagesdatum des jeweiligen Geburtstages ist mit 20 zu multiplizieren. Nach der Addition von 3 und der Multiplikation der entstehenden Summe mit 5 ist die Zahl zu addieren, die dem jeweiligen Geburtsmonat entspricht (also 1 für Januar, 2 für Februar usw.). Die entstandene Summe ist wiederum mit 20 zu multiplizieren, und es ist 3 zu addieren. Nach der Multiplikation dieser Summe mit 5 wird zum Schluß der Rechnung die aus den letzten beiden Grundziffern des Geburtsjahres gebildete Zahl addiert (also vom Geburtsjahr 1970 beispielsweise nur die Zahl 70). Aus der nun entstandenen fünf- oder sechsstelligen natürlichen Zahl kann man bei richtiger Rechnung sofort die vollständige Angabe des Geburtstages ermitteln. Wie ist das möglich?

Die Lösungen erscheinen im nächsten Heft!

Spezialistenlager Mathematik im Blick

Mit unserem kleinen Beitrag wollen wir uns bei den Mitarbeitern der *alpha* bedanken, da diese Zeitschrift bereits seit 20 Jahren ein treuer Begleiter unseres Spezialistenlagers Mathematik ist. Wir, das sind in diesem Jahr 30 Schüler vorwiegend aus der 5. und 6. Klasse sowie Lehrer aus dem Kreis Plauen/Land. Gastgeber für uns ist in bewährter Weise die Touristenstation Johanngeorgenstadt.

Morgens beschäftigten wir uns mit mathematischen Problemen und arbeiten gruppenweise am Computer. Der Nachmittag gehört dem Wintersport, zu dem haben wir hier ausreichend Gelegenheit.

Anschließend sitzen wir gemeinsam beim Lösen von *alpha*-Aufgaben und knobeln. Kathrin, Heike und Thomas sind Schüler der Klasse 10 und bereits zum 5. Mal dabei. Da Heike und Thomas Lehrer werden wollen, leiten sie zum Teil die Jüngsten beim Gruppenunterricht an.

Für alle Leser nun einige bei uns entstandene Knobelaufgaben:

▲1▲ Die Familie Schmidt besteht aus dem Vater, der Mutter und deren Kindern Andreas und Stefanie. Diese vier Personen sind zusammen 66 Jahre alt. Der Vater ist vier Jahre älter als die Mutter und dreimal so alt wie die beiden Kinder zusammen alt sind. Das Lebensalter von Andreas ist ohne Rest durch drei teilbar.
Wie alt ist jedes der vier Familienmitglieder, wenn Stefanie älter ist als Andreas?

Schüler Thomas Kriegelstein, Syrau

▲2▲ Zur Familie Hinz gehören die Mutter, der Vater, die Tochter Angelika und der Sohn Steffen. Alle vier zusammen sind dreimal so alt wie die Mutter. Der Vater ist zwei Jahre älter als die Mutter. Angelika ist acht Jahre jünger als Steffen, dieser 22 Jahre jünger als die Mutter.
Wie alt ist jedes Familienmitglied?

Schüler Sven Zimmermann, Leubnitz

▲3▲ Die Mitglieder einer fünfköpfigen Familie sind zusammen 195 Jahre alt. Der Vater ist viermal so alt wie seine Tochter Susi. Der Sohn Ralf ist 30 Jahre jünger als seine Mutter. Susi ist drei Jahre jünger als ihr Bruder Ralf. Die Großmutter der beiden Geschwister ist 30 Jahre älter als deren Mutter.
Gib das Alter der fünf Familienmitglieder an!

Schülerin Ramona Holzmüller, Syrau

▲4▲ In dem folgenden Schema ist jeder Buchstabe so durch eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Für gleiche Buchstaben sind gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben sind verschiedene Ziffern einzusetzen. Dabei muß jede Zeile mit einer von Null verschiedenen Ziffer beginnen. Es ist eine vollständige Lösung anzugeben.

$$\begin{array}{r} \text{WOLF} \\ +\ \text{WOLF} \\ \hline \text{RUDEL} \end{array}$$

Schüler Bernhard Großer

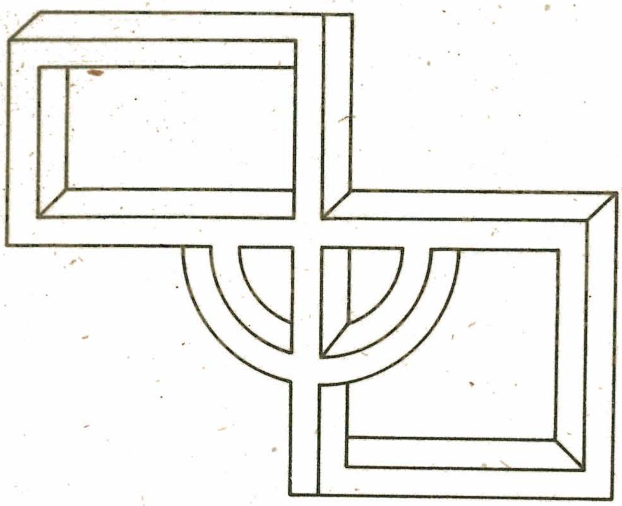
Viel Spaß beim Knobeln!

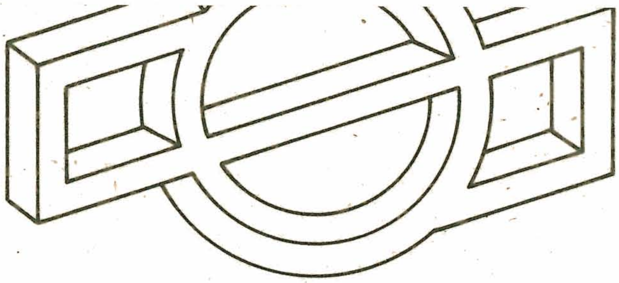
Dauerkalender für die Jahre 1801 bis 2100

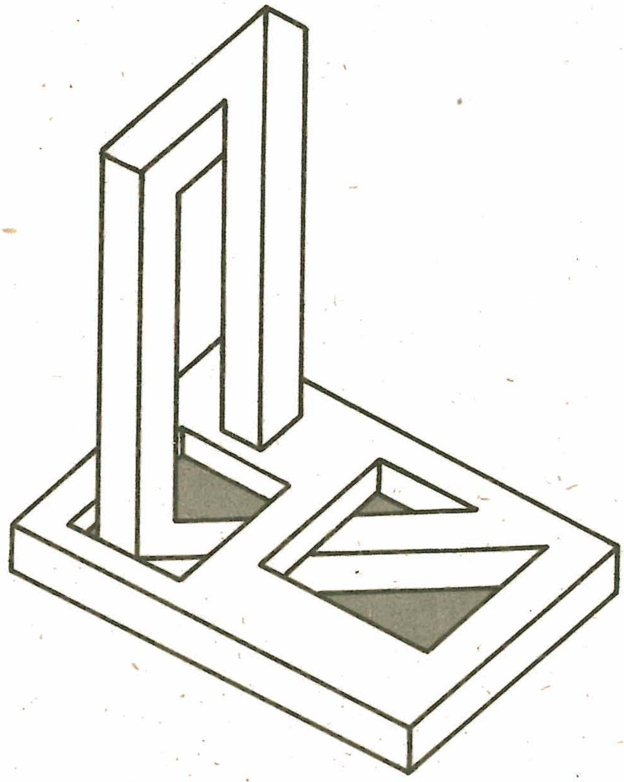
Jahre													Monate											
1801–1900				1901–2000				2001–2100					J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
01	29	57	85		25	53	81		09	37	65	93	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
02	30	58	86		26	54	82		10	38	66	94	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
03	31	59	87		27	55	83		11	39	67	95	6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
04	32	60	88		28	56	84		12	40	68	96	0	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
05	33	61	89	01	29	57	85		13	41	69	97	2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
06	34	62	90	02	30	58	86		14	42	70	98	3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
07	35	63	91	03	31	59	87		15	43	71	99	4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
08	36	64	92	04	32	60	88		16	44	72		5	1	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
09	37	65	93	05	33	61	89		17	45	73		0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
10	38	66	94	06	34	62	90		18	46	74		1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
11	39	67	95	07	35	63	91		19	47	75		2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
12	40	68	96	08	36	64	92		20	48	76		3	6	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
13	41	69	97	09	37	65	93		21	49	77	00	5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
14	42	70	98	10	38	66	94		22	50	78		6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
15	43	71	99	11	39	67	95		23	51	79		0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
16	44	72		12	40	68	96		24	52	80		1	4	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
17	45	73		13	41	69	97		25	53	81		3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
18	46	74		14	42	70	98		26	54	82		4	0	0	3	5	1	3	6	2	4	0	2
19	47	75		15	43	71	99		27	55	83		5	1	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
20	48	76		16	44	72	00		28	56	84		6	2	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
21	49	77	00	17	45	73		01	29	57	85		1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
22	50	78		18	46	74		02	30	58	86		2	5	5	1	3	6	1	4	0	2	5	0
23	51	79		19	47	75		03	31	59	87		3	6	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1
24	52	80		20	48	76		04	32	60	88		4	0	1	4	6	2	4	0	3	5	1	3
25	53	81		21	49	77		05	33	61	89		6	2	2	5	0	3	5	1	4	6	2	4
26	54	82		22	50	78		06	34	62	90		0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5
27	55	83		23	51	79		07	35	63	91		1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6
28	56	84		24	52	80		08	36	64	92		2	5	6	2	4	0	2	5	1	3	6	1

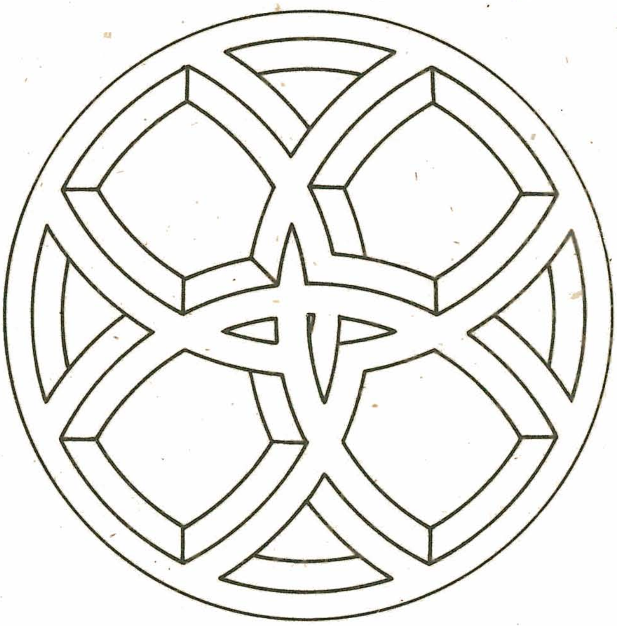
S	1	8	15	22	29	36
M	2	9	16	23	30	37
D	3	10	17	24	31	
M	4	11	18	25	32	
D	5	12	19	26	33	
F	6	13	20	27	34	
S	7	14	21	28	35	

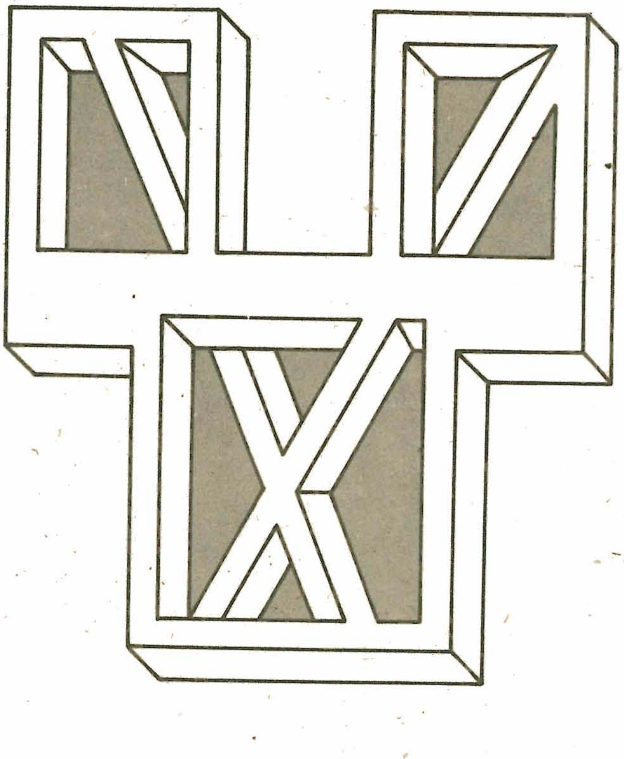
Beispiel: Auf welchen Wochentag fiel der 15. 2. 1930?
Lösung: Suche für 1930 (Jahrestafel) in der Monatstafel unter Februar die zugehörige Monatskennzahl (6); zuzüglich der Zahl des gesuchten Wochentages (15), ergibt sich die Schlüsselzahl (6 + 15 = 21), für die man in der Wochentagstafel den Sonnabend findet.

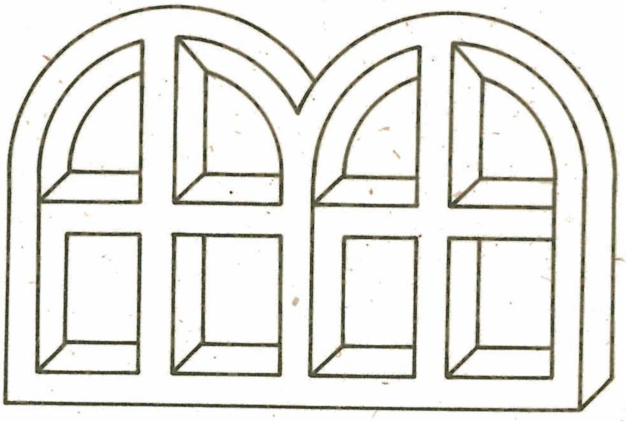








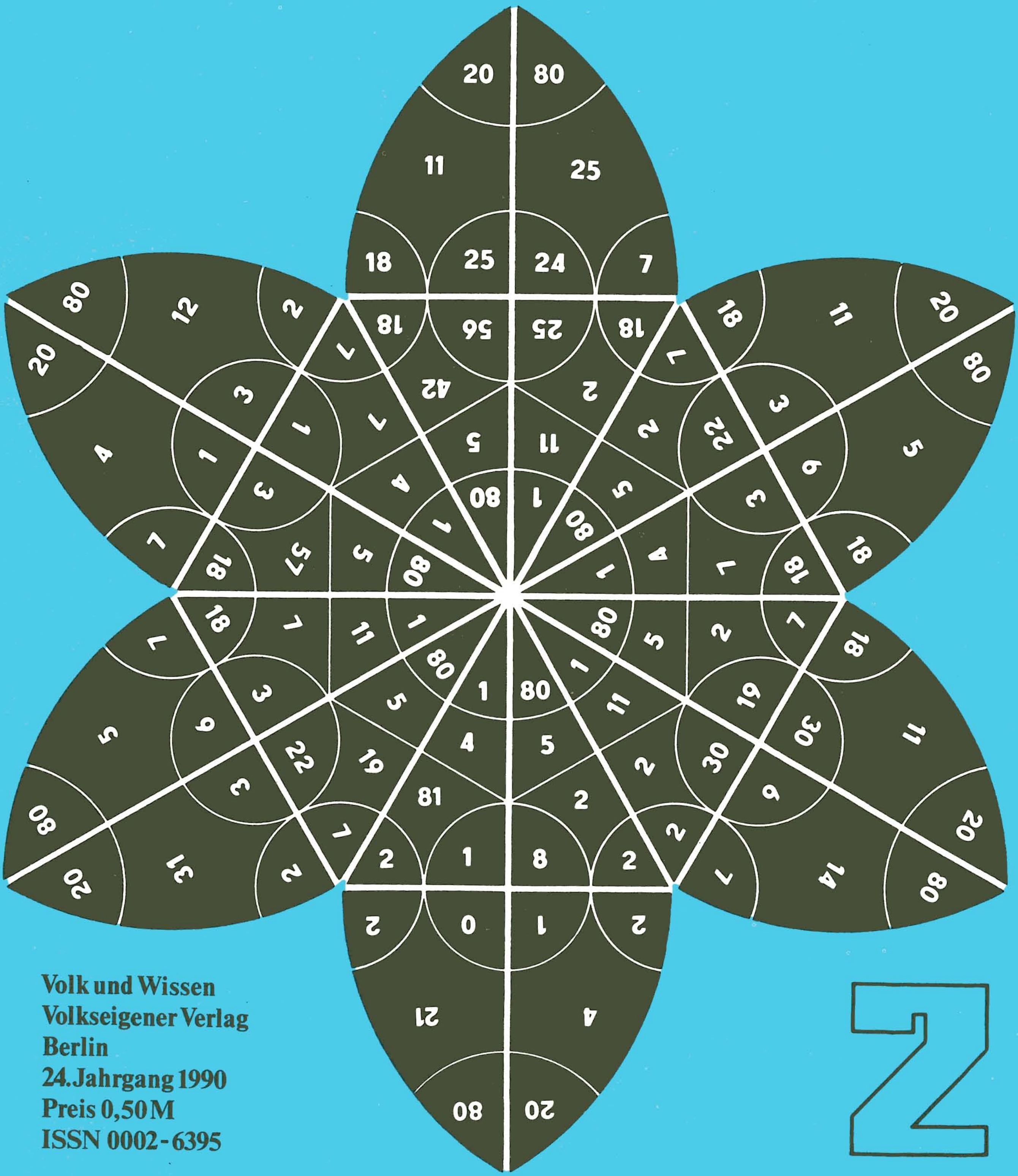




ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 24 (1990) 1 · Seiten 1 bis 24

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
24. Jahrgang 1990
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

2

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

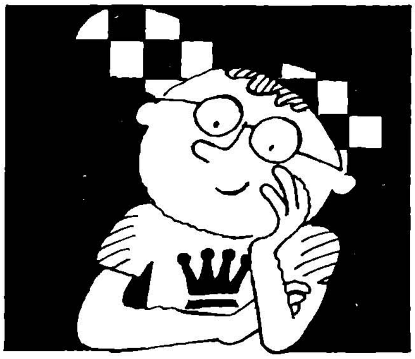
Fotos: Dr. H. Martini (S. 34); W. Träger (S. 38); G. Stelzer (S. 41); Prof. A. Engel (S. 41); Prof. Dr. M. Schukowski (IV. U.-Seite)
Vignetten: L. Otto Leipzig (Titelvignetten)
Technische Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, nach einer Vorlage von W. Neugebauer, beide Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig, *Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit*, III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 8. Dezember 1989
Auslieferungstermin: 10. April 1990

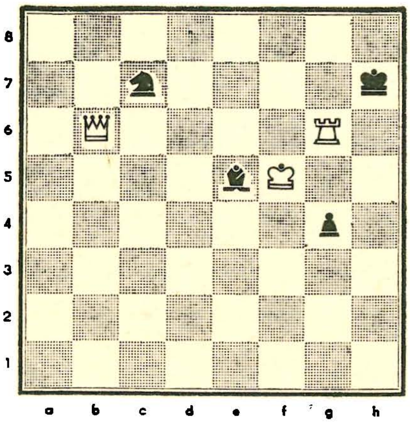
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Alphons weist die Schüler der 5. bis 7. Klasse auf speziell für sie geeignete Beiträge hin.



Der Trick der Dame



Matt in drei Zügen

In dieser dreizügigen Miniatur von Dr. Gerhard Kaiser („Leipziger Volkszeitung“, 1954) droht die weiße Dame nach dem Schlüsselzug ein Matt auf der h-Linie an. Nach der schwarzen Parade schwenkt die Dame auf die 8. Reihe, um dort den schwarzen König mattzusetzen. Zwar kann sich Schwarz dagegen verteidigen, doch nur unter Freigabe der Deckung für die h-Linie, was die weiße Dame zum Mattzug ausnutzt. Wer durchschaut den Trick der Dame? *H. Rüdiger*

---

2. Internationaler Spezialkurs der TU Dresden: Bedeutung des Schachs für Erziehung, Wissenschaft und Kultur

Neben Fußball, Eishockey und Tennis macht in letzter Zeit immer öfter eine Sportart auf sich aufmerksam, die bisher leider eher abseits des öffentlichen Interesses stand: das Schachspiel. Die Vereinigung der drei Elemente Wissenschaft, Sport und Kunst dürfte in dieser Form einmalig sein und zieht immer mehr Interessenten der verschiedensten Fachbereiche in ihren Bann. So konnte vom 15. bis 28. August 1989 im Rahmen des Internationalen Schachfestivals Dresden ein zweiter Kongreß zu diesem Thema stattfinden, welcher wie sein Vorgänger in der Schachwelt auf reges Interesse stieß. Hier erörterten Mathematiker, Physiker, Informatiker, Mediziner, Psychologen, Großmeister und Trainer aus 19 Ländern die verschiedensten Spezifika des königlichen Spiels, wiesen auf seinen allgemeinen Nutzen und seine Möglichkeiten hin. Doch auch die Praxis sollte in Dresden nicht zu kurz kommen – mit einem internationalen Frauenturnier und einem Openturnier setzten die Veranstalter hohe Maßstäbe.

In seiner Begrüßungsansprache betonte Dr. rer. nat. Strobel – wissenschaftlicher Leiter des Spezialkurses und Mitglied des Präsidiums des Deutschen Schachverbandes – daß es das Anliegen des Kongresses sei, Schach in noch breiterer Palette anzubieten und zu nutzen, womit man nahtlos an den Spezialkurs 1988 anschließe und diesen weiterführe.

Die Mobilisierung geistiger Ressourcen ist eine gesellschaftlich höchst relevante Aufgabe. Wie Untersuchungen der letzten Jahre deutlich machen, wirkt sich das Schachspiel positiv auf die Entwicklung der Fähigkeiten des Planens, Analysierens, Programmierens und der Strategiebildung aus. Es beeinflußt den Stil der geistigen Tätigkeit (siehe auch alpha 1/90).

Schachspielende Kinder sind ihren Altersgenossen auf erstaunlich vielen Gebieten voraus, besonders wird die Entwicklung von Talenten auf dem Gebiet der Mathematik und der Naturwissenschaften gefördert. Aber auch erwachsene Schachspieler betreiben ihr Hobby nicht umsonst. Es wirkt nachweisbar auf die Stabilisierung der geistigen und körperlichen Spannkraft ein. So wurde es in Persien vor der Jahrtausendwende gar als Medizin verordnet. Mit dem Wie und Warum solcher Wirkungen befaßten sich, neben Vorträgen zur Geschichte und Entwicklung des Spiels, zu neuen Erkenntnissen im Computerschach u. a. m., viele Referenten.

Dabei wurde dem Schulschach immer wieder breiter Raum gewidmet. Dr. rer. nat. Jordan – Vorsitzender der Arbeitsgruppe „Schach in der Schule (SiS) der DDR legte dar, daß in aller Welt Bemühungen zur Einführung des Schulschachs zu verzeichnen sind. Es existiert fakultativ in Österreich, Großbritannien, Frankreich und anderen Ländern. In Island können mehr als 75 % der 15jährigen Schüler Schach spielen. (Vgl. DDR: 25 bis 50 %) Das wahrscheinlich umfangreichste SiS-Projekt der Welt wird zur Zeit in der Provinz Quebec (Kanada) durchgeführt. Dort erlernen 25 000 Schüler im Rahmen des Mathematikunterrichtes das königliche Spiel. Die mathematischen Leistungen liegen dabei im Vergleich zu anderen Kursen (ohne Schach) deutlich höher.

Aber auch die Bemühungen des Deutschen Schachverbandes (DSV) der DDR können sich sehen lassen. Wir denken dabei in erster Linie an fakultative Kurse, an Schach im Schulhort und im Kindergarten. Im Vordergrund soll keinesfalls die Gewinnung von Schachtalenten stehen, sondern die Herausbildung allgemeiner Fähigkeiten bei den Schülern. Dazu bieten sich gerade im Vorschulalter und in der Unterstufe ideale Bedingungen. Dementsprechend nannte die sowjetische Kommission ihr Projekt nicht Schach in, sondern für die Schule.

In Leipzig und Dresden sind in dieser Richtung bereits erfolgversprechende Experimente angelaufen. So konnten 14 Hortnerinnen aus 11 Dresdener Schulen einen Schachintensivkurs besuchen, der es ihnen ermöglicht, das königliche Spiel zum festen Bestandteil der Beschäftigung im Schulhort werden zu lassen.

Initiiert von der Musikhochschule Leipzig findet in der Messestadt unter Leitung von Prof. Dr. Mehlhorn ein großangelegtes Experiment zur Förderung künstlerisch begabter Kinder statt. Es soll sich über einen Zeitraum von 5 Jahren erstrecken und beginnt in der letzten Kindergartengruppe.

Seit 1. 9. 1988 wurde zu diesem Zweck in ausgewählten Kindergärten eine breite Palette von künstlerischen Beschäftigungen angeboten, darunter auch Schach. Innerhalb von 6 Monaten erlernten 155 Kinder dieses Spiel mit großer Begeisterung. In seiner Eigenschaft als Regelspiel steht Schach in voller Übereinstimmung mit dem Bildungsprogramm des Kindergartens. Eine Ausbildungsanleitung liegt in Leipzig bereits vor. Auf die Ergebnisse des dortigen Experimentes darf man gespannt sein.

Nicht unerwähnt können in diesem Zusammenhang auch die Bemühungen des Nestors der Schulschachidee in der DDR, OSR Helmut Hartmann, Vizepräsident des DSV, bleiben, der an der Käthe-Kollwitz-OS Wittenberg schon seit mehr als einem Jahrzehnt auf schöne Erfolge mit und durch Schach zurückblicken kann. Schach hilft den Kindern, spielend schwierige Denkprozesse zu vollziehen, die in anderen Fächern als wesentlich abstrakter empfunden werden müssen. Laut einer Befragung, die Frau Dr. paed. Riemann an 21 Schulkindern vornahm, würden sich 20 davon auf Schach als Schulfach freuen, wenn es ohne Benotung bliebe. Das ist allerdings auch nicht vorgesehen. Erwähnenswert scheint mir ebenfalls der Fakt, daß mit Schach gerade die Leistungen durchschnittlich und unterdurchschnittlich begabter Kinder wesentlich gefördert werden können, was durch empirische Untersuchungen bereits belegt wurde.

Der hier angesprochene Beitrag des Schulschachs zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlicher Fähigkeiten dürfte besonders die Leser der alpha interessieren. Über Meinungen, Fragen und Kommentare zu diesem Thema würde ich mich sehr freuen.

Versehen mit Hinweisen auf Alter und
Tätigkeit können sie gerichtet werden
an: Markus Spindler, K.-Miehe-Str. 3 a,
Sangerhausen, 4700

M. Spindler

30 Jahre Greifswalder Mathematikolympiaden

In Greifswald fand die erste Kreisolympiade bereits 1961 statt. Am 15. November 1989 begingen wir die 30. Kreisolympiade. Zu diesem Jubiläum fand ein Treffen mit 66 ehemaligen erfolgreichen Olympionikenstatt.

Wie kam es zu den bisherigen Erfolgen?

Seit Januar 1968 gibt es bei uns in Greifswald den Klub „Junge Mathematiker“, aber davor gab es schon mathematische Arbeitsgemeinschaften, die regelmäßig ihre Tätigkeit durchführten. Die Erfassung und Förderung mathematisch begabter Schüler beginnt mit der Klassenstufe 4 und endet mit der Klassenstufe 12. Außerdem wurde im Juli 1989 unser 25. Sommerlager für Junge Mathematiker durchgeführt. Ein Teil ist auch Mitglied im Bezirkskorrespondenzzirkel, und einige Schüler sind in der Mathematischen Schülergesellschaft der Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald. Für unsere Schüler der 3. bis 6. Klassen hat diese Sektion einen mathematischen Schülerwettstreit unter dem Namen „Pokal des Rektors“ im Jahre 1987 ins Leben gerufen.

Wenn ich so überlege, warum ich mich eigentlich ausgerechnet für Mathematik interessiere, so liegt es wohl daran, daß die Mathematik in erster Linie auf der Logik des menschlichen Verstandes basiert, daß man wirklich jeden Sachverhalt selbst überprüfen und seinen Beweis nachvollziehen kann. Das ist nicht in jeder anderen Wissenschaft in solch einer Strenge und Exaktheit möglich. Hinzu kommt besonders bei den Olympiadeaufgaben, daß zur Lösung oftmals sehr originelle Ideen gefragt sind, daß man schöpferisch werden kann.

Ich hatte das Glück einer Klassenstufe anzugehören, in der es in unserer Stadt eine breite Leistungsspitze von Schülern gab, die sich der Mathematik verschrieben hatte, so daß bei den Bezirksolympiaden immer mehrere Greifswalder Schüler mit an der Spitze lagen. So etwas stimuliert natürlich enorm. Ich selbst nahm erst in der 9. Klasse zum ersten Male an einer Bezirksolympiade teil und erreichte ganz unerwartet einen 2. Preis. Dies gab mir einen mächtigen Auftrieb, so daß ich mich bereits ein Jahr später über einen 3. Preis bei der DDR-Olympiade freuen konnte. Zwei Jahre später (1989) konnte ich in Klasse 12 diesen Erfolg wiederholen.

Wie lief nun die AG-Tätigkeit in den drei letzten Jahren ab? Wir kamen wöchentlich einmal bis zu zwei Stunden zusammen und erhielten häufig schwierige Aufgaben aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik vorgelegt. Oft waren es Aufgaben, die echt ganz neu für mich waren. Manchmal gab es einen Tip. Hatten wir die Lösung oder den Beweis endlich vollständig, so wurden wir angehalten, nach anderen Lösungswegen zu suchen. Dazu gehörte eine Portion Ausdauer und Beweglichkeit, die wir natürlich nicht gleich mitbrachten. Aber der Reiz an der Sache hielt uns zusammen, und manchmal gab es auch ein lobendes Wort. Viel machten der Eifer und die Begeisterung unseres AG-Leiters, W. Bramschreiber, aus, der so manche Perle aus der Eigenschatulle holte. Hinzu kamen echte Ergänzungen zum Unterricht, gelegentlich auch physikalische Probleme. Aufgaben aus „Wurzel“ und „Wissenschaft und Fortschritt“, waren Vorkost unseres Speiseplanes. Hart, aber interessant wurde es, wenn wir die eine oder andere IMO-Aufgabe vorgesetzt bekamen! Wie mußten wir uns doch anstrengen, um hinter den Witz zu kommen!

Nachdem ich das Mathematikabitur vorfristig ablegen durfte, wurde ich gemeinsam mit einem Pasewalker Schüler seit Mitte der 11. Klasse von Wissenschaftlern unserer Universität in Analysis und Funktionalanalysis eingeführt. Das war eine gute Vorbereitung auf das Mathematikstudium, das ich aufnehmen werde.

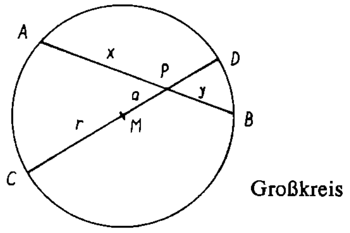
Bei allen, die mein Interesse für die Mathematik geweckt und erhalten haben, mir halfen und Anregungen gaben, möchte ich mich auf diesem Wege bedanken.

Thilo Kuessner

Unter den Förderern von Thilo und seinen Mitschülern finden sich für alpha-Leser so bekannte Namen wie Prof. Terpe, Prof. Flachsmeyer, Prof. Gronau, Dr. Schreiber und Dr. Dörbandt von der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald. Prof. Terpe, Vorsitzender der MSG Greifswald, feiert in diesem Jahr seinen 60. Geburtstag. Wir und die Greifswalder gratulieren ganz herzlich. Undenkbar aber wären solche Erfolge ohne die oft jahrelangen intensiven Bemühungen von Mathematiklehrern und Arbeitsgemeinschaftsleitern. Einen von ihnen, Thilos AG-Leiter Wolfried Bramschreiber wollen wir deshalb mit eigenen Beiträgen vorstellen. W. Bramschreiber leitet seit 25 Jahren im Klub „Junger Mathematiker“ des Stadtkreises Greifswald Arbeitsgemeinschaften und betreute Thilo und seine Mitstreiter von der 10. bis zur 12. Klasse. *Alphons*

Eine runde Sache

Wir setzen eine Kugel mit dem Mittelpunkt M, dem Radius r und einem festen Punkt P im Innern der Kugel mit $\overline{MP} = a$ voraus. Durch P gibt es unendlich viele Kugelsehnen $\overline{AB}$ mit den Kugelsehnenabschnitten $\overline{AP} = x$ und $\overline{BP} = y$.



Es könnte von Interesse sein, ob das Produkt $x \cdot y$ der Längen der Kugelsehnenabschnitte jeder Sehne auch eine Konstante ist, wie wir es vom Kreis her kennen.

Zu jeder Kugelsehne $\overline{AB}$ durch P existiert ein Großkreis, der als Schnitt der Ebene, die durch A, B und M geht, mit der Kugel erzeugt wird.

Nehmen wir im Bild den Durchmesser $\overline{CD}$ durch P als weitere Kugelsehne, so erhalten wir die Sehnenabschnittlängen

$\overline{CP} = r + a$ und $\overline{DP} = r - a$.

Durch Anwendung des Sehnensatzes auf den Großkreis erhalten wir

$x \cdot y = (r + a)(r - a) = r^2 - a^2 =$ konstant.

Sollte der Sehnensatz nicht so geläufig sein, so erhalten wir das Ergebnis aus einer Proportion, die aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ACP und BDP folgt. Es gilt $\sphericalangle APC \cong \sphericalangle BPD$ (Scheitelwinkel) und $\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle BDC$ (Peripheriewinkel über $\overline{CB}$).

Damit sind die Dreiecke ACP und BDP einander ähnlich nach dem Hauptähnlichkeitssatz. Deshalb gilt (für die entsprechenden Strecken dieser Dreiecke)

$\frac{x}{r - a} = \frac{r + a}{y}$ und folglich

$x \cdot y = (r + a)(r - a)$.

Nun können die Längen der Kugelsehnen durch P und auch deren Abschnittslängen selber sehr unterschiedlich ausfallen. Fassen wir die Abschnitte x und y als Kanten von Würfeln auf, so werden deren Rauminhalte und die Summe dieser Rauminhalte als veränderlich erwartet.

Deshalb sei die Aufgabe gestellt, für welche Kugelsehne der Länge $x + y$ durch P mit den Abschnitten x und y ist

a) $x^3 + y^3$ möglichst groß,

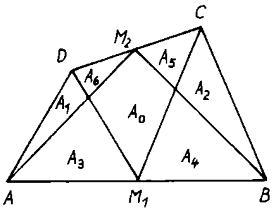
b) $x^3 + y^3$ möglichst klein.

Hinweis: Das Ergebnis $x \cdot y =$ konstant ist bei diesen Untersuchungen von besonderer Bedeutung.

W. Bramschreiber

Einige Perlen aus W. Bramschreibers „Eigenschatulle“

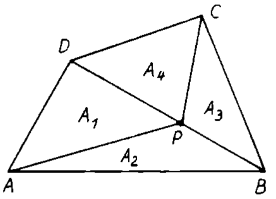
▲1▲ In einem beliebigen konvexen Viereck $ABCD$ sei M_1 der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und M_2 der Mittelpunkt von $\overline{CD}$. Verbindet man M_1 mit C und D und M_2 mit A und B, so erhält man folgende Skizze:



Es ist zu beweisen:
Sind A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 und A_6 die Flächeninhalte der aus dem Bild ersichtlichen Figuren, so gilt stets

I. $A_1 + A_2 = A_0$
II. $A_3 + A_5 = A_4 + A_6$

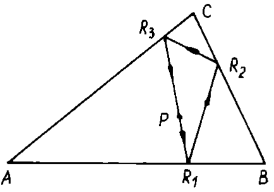
▲2▲ P sei ein beliebiger Punkt auf der Diagonale $\overline{BD}$ eines beliebigen konvexen Vierecks $ABCD$. Verbindet man P mit A und C, so erhält man die Figur:



Es ist zu beweisen:
Für die Flächeninhalte A_1, A_2, A_3, A_4 der Teildreiecke gilt

$$A_1 \cdot A_3 = A_3 \cdot A_4 .$$

▲3▲ Gesucht sind alle Punkte P im Innern eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks ABC, für die folgendes zutreffen soll: Wird P nacheinander an den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ reflektiert, so ist der Reflexionsweg eine geschlossene Figur (Dreieck $R_1R_2R_3$):



▲4▲ Einer Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r sei eine Schar von Tetraedern $ABCD$ einbeschrieben, wobei die drei von D ausgehenden Kanten aufeinander paarweise senkrecht stehen mögen.
Beweise, daß für alle diese Tetraeder gilt: $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \text{konstant}$.

▲5▲ Einem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r sei eine Schar von Dreiecken ABC mit $\overline{AB} = \text{konstant}$, C auf dem Kreis variabel einbeschrieben.
I. Gesucht ist der geometrische Ort der Schnittpunkte der Winkelhalbierenden dieser Dreiecke.
II. Gesucht ist der geometrische Ort der Schnittpunkte der Höhen dieser Dreiecke.
III. Gesucht ist der geometrische Ort der Schnittpunkte der Seitenhalbierenden dieser Dreiecke.

▲6▲ Ein beliebiges gerades Prisma, dessen Grundfläche ein Parallelogramm ist, werde von einer Ebene in allen vier Höhenkanten geschnitten. Dadurch entstehen zwei Prismenstümpfe.
Ist A der Flächeninhalt des Parallelogramms und sind h_1, h_2, h_3 und h_4 die Höhenkantenlängen eines Stumpfes, so ist zu beweisen, daß

$$V = \frac{1}{4} \cdot A \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4) .$$

▲7▲ Ein Schüler stellte im Jahr 1988 an seinem Geburtstag überrascht fest, daß sein Alter in Jahren bei Ziffernvertauschung seinen Geburtsjahrgang ergibt.
a) Wie alt wurde der Schüler?
b) Für welche Jahrgänge dieses Jahrhunderts gilt das auch?
c) Für welche Geburtsjahrgänge dieses Jahrhunderts tritt das nach 1988 wieder ein?
(Bemerkung: Ich bin Jahrgang 35, wurde im Jahr 1988 53 Jahre alt und 53+35=88.)

▲8▲ Von einem Quadrat mit genau 64 Quadraten gleicher Größe fehlen die Eckfelder einer Hauptdiagonalen. Zur Verfügung stehen genügend Rechteckplättchen der Größe zweier Quadrate aneinandergelegt.
Ist es möglich mit diesen Rechteckplättchen die vorausgesetzte Figur vollständig (ohne Überlappung) zuzudecken?

▲9▲ Man beweise: Jede Kubikzahl ist als Differenz zweier Quadratzahlen darstellbar.

▲10▲ Man beweise: Der Flächeninhalt von rechtwinkligen Dreiecken mit ganzzahligen Seiten ist nie eine Quadratzahl.

Für euch zum Weiterknobeln noch zwei Eigenaufgaben von Mitgliedern der MSG Greifswald.

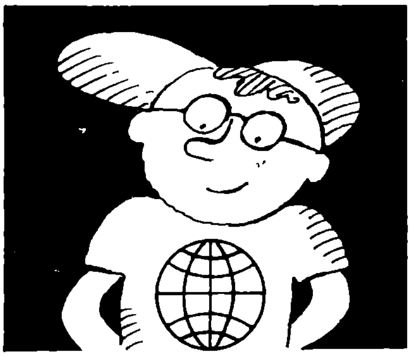
Ein OSG-Laden will gleich große Ananas- und Mandarinenbüchsen so aufstellen, daß in der untersten Reihe des Stapels n Büchsen, dann $n - 1$, dann $n - 2$, ..., in der obersten Reihe $n - (k - 1)$ Büchsen symmetrisch zu einer vertikalen Achse ohne Lücken stehen. Dabei sollen die Mandarinenbüchsen stets außen (oben, unten, links, rechts) und die Ananasbüchsen stets innen stehen. Welche Werte können n und k annehmen, damit der Stapel gleich viele Büchsen jeder Sorte enthält?

Jan Fricke, Pasewalk

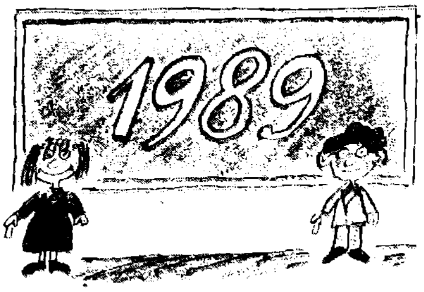
Gegeben sei die Menge aller konvexen Vierecke $ABCD$ mit
$AB = 3x$, $BC = AD = 2x$ und $CD = x$.
Der Inkreis des Vierecks ABCD berühre die Seiten BC bzw. AD in F bzw. H. Man ermittle das Verhältnis Q der Flächeninhalte der Vierecke $ABFH$ und $HFCD$ in Abhängigkeit von einem Parameter und, wenn möglich, den größten und den kleinsten Wert von Q!

René Schöne, Rostock

Übrigens – in Greifswald wird für die Hand von AG-Leitern und anderen Interessenten ein Heft „Geometrische Eigenaufgaben" zum Druck vorbereitet.

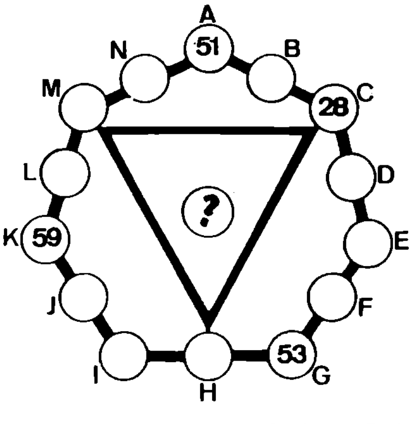


▲1▲ К чуслу 1989 припишите по цифре слева и справа так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 88.



aus: Quant, Moskau

▲2▲ **Polygone des nombres**
Sachant que $C + H + M = 114$, placez dans les cercles vides les nombres cidessous de façon à toujours obtenir un total de 114 sur chaque côté de cet heptagone.
8 – 16 – 20 – 22 – 33 – 35 – 39 – 41 – 45 – 47



Aus: Logigram, Paris

▲3▲ **Search for squares**
Here are three unusual squares: 41^2, 33^2, 836^2. What is so unusual about them? (A hint: look for new squares in the integer you get from computing the full number equal to each of the squares.)

aus: Fun with mathematics, Toronto

„... auf eine so leichte und schöne Art bewiesen“

Ein zahlentheoretischer Satz im Briefwechsel zwischen Euler und Goldbach

Zum 300. Jahrestag der Geburt von Christian Goldbach

Zu den berühmtesten Vermutungen der Mathematik gehört die im Jahre 1742 von Goldbach ausgesprochene Behauptung: „Jede natürliche Zahl, die größer als 2 ist, kann in drei Summanden zerlegt werden, die alle Primzahlen oder 1 sind.“

Beispiele:

$3 = 1 + 1 + 1$, $4 = 1 + 1 + 2$,
$5 = 1 + 1 + 3$, $6 = 1 + 2 + 3$,
$289 = 3 + 3 + 283$.

Die Goldbachsche Vermutung ist bis heute weder bewiesen noch widerlegt worden. – Wer war eigentlich Goldbach?

Christian Goldbach ist am 18. 3. 1690 in Königsberg (heute Kaliningrad) geboren worden. Er studierte an der Albertus-Universität seiner Geburtsstadt. Danach unternahm er ausgedehnte Reisen durch Europa. Hierbei suchte er den Kontakt zu zahlreichen Gelehrten.

Im Jahre 1725 kam er nach Petersburg (heute Leningrad). Hier war ein Jahr zuvor durch Peter dem Großen die Akademie der Wissenschaften begründet worden. Goldbach übernahm als erster ständiger Sekretär die wissenschaftliche Federführung an der Akademie. Von 1727 an lebte er am kaiserlichen Hofe (vom Januar 1828 an in Moskau) als Erzieher des jungen Zaren Peter II. Anfang 1732 kehrte er nach Petersburg an die Akademie zurück. Im Jahre 1742 wurde Goldbach an das Collegium für auswärtige Angelegenheiten versetzt. Er lebte weiterhin in Petersburg, hatte aber oft längere Zeit in Moskau zu tun. Er starb am 20. 11. (nach dem damals in Rußland noch üblichen julianischen Kalender) bzw. 1. 12. (nach dem gregorianischen Kalender) 1764 in Petersburg.

Goldbach war ein Mensch mit vielseitigen Neigungen und Talenten. Man hat ihn als einen Polyhistor (einen Gelehrten, der über das Wissen seiner Zeit verfügt) bezeichnet. Ein Goldbach-Biograph schrieb: „Goldbach hatte ungewöhnlich weite Interessen, unter denen das Interesse für Mathematik ... vorherrschend war. Er zeigte jedoch wenig Neigung, sich systematisch mit einem Gebiet zu beschäftigen, wenig Neigung zur ständigen konzentrierten Arbeit an einem bestimmten abgegrenzten Komplex von Fragen. Und auch in der Mathematik ... blieb er immer ein Liebhaber und Autodidakt. ... Die Entdeckungen Goldbachs auf mathematischem Gebiet waren im Vergleich zu den Entdeckungen verschiedener anderer Wissenschaftler des 18. Jahrhunderts nicht bedeutend“.

Im Jahre 1727 war mit Leonhard Euler (1707 bis 1783) ein mathematisches Genie nach Petersburg berufen worden, das sich zu einem der bedeutendsten Mathematiker entwickeln sollte. (Euler wirkte von 1741 bis 1766 an der Akademie der Wissenschaften in Berlin und kehrte danach wieder nach Petersburg zurück.) Während seiner ersten Petersburger Jahre hat Euler bei seiner Arbeit bedeutsame Anregungen von Goldbach erhalten. Im Oktober 1729 begannen Euler und Goldbach einen 35 Jahre andauernden Briefwechsel, in dem sie vorwiegend mathematische Fragen diskutierten. Goldbach lenkte bereits in seinen ersten Briefen Eulers Interessen auch auf zahlentheoretische Probleme. Das waren zunächst unbewiesene Behauptungen (Vermutungen) von Fermat, wie sie in dessen nach seinem Tode publizierten Werken enthalten waren bzw. unter „Zahlenliebhabern“ als eine Art von Folklore zirkulierten (auch Goldbach zitierte Fermat vom Hörensagen). Pierre de Fermat (1601 bis 1665) hatte sich neben seiner Tätigkeit als Jurist in Toulouse mit Mathematik beschäftigt. Er gilt als der größte französische Mathematiker des 17. Jahrhunderts. „Seine genialste Leistung ist die Neuschöpfung der Zahlentheorie“ – schrieb ein Mathematikhistoriker. Angeregt durch Goldbach wurde Euler der große Nachfolger Fermats in der Zahlentheorie. Das zahlentheoretische Werk Eulers füllt zwar nur vier Bände seines 29 Bände umfassenden mathematischen Werks; doch dieses allein hätte ihm einen geachteten Platz in der Mathematikgeschichte gegeben.

Zahlentheoretische Fragen waren damals nicht besonders populär. Für viele Jahre war Goldbach der einzige, der sich für Eulers arithmetisches Werk interessierte.

Im Folgenden soll ein mehrjähriges zahlentheoretisches Wechselgespräch zwischen Euler und Goldbach vorgestellt werden, das Goldbach zu einem Beweis des von Euler im August 1741 behaupteten Satzes 1 führte.

Satz 1: Zahlen der Form $4mn - m - 1 = 4n(m - 1) - 1$ können niemals eine Quadratzahl sein, wenn m und n natürliche Zahlen sind.

Goldbach an Euler (2./13. 2. 1742): „Das theorema, daß $4mn - m - 1$ kein quadratum sein könne, gefället mir sehr“. Er könne den Satz aber nicht beweisen. Euler an Goldbach (23. 2./6. 3. 1742): „Daß $4mn - m - 1$ ... niemals ein quadratum sein könne, konnte ich bis anjetzo auch nicht rigorose [streng] demonstrieren, sondern ich hatte solches aus einem theoremate Fermatiano [Theorem von Fermat] ... hergeleitet. ... Die Richtigkeit davon beruhet also auf der Wahrheit dieses theorematis ...“. Es handelt sich um den von Fermat im August 1640 ausgesprochenen

Satz 2: Nicht eine einzige Primzahl der Form $4n - 1$ kann Teiler der Summe von zwei teilerfremden Quadraten sein.

Ist eine ungerade Zahl durch keine Primzahl der Form $4n - 1$ teilbar, so besitzt sie nur Primteiler der Form $4k + 1$. Ein Produkt von Primzahlen der Form $4k + 1$ ist aber wieder von dieser Form. Nach dem Satz 2 hat also eine Summe von zwei teilerfremden Quadraten keine Teiler der Form $4n - 1$. Das gilt auch für die Summe $a^2 + 1 = a^2 + 1^2$. Es ist stets (wie auch die natürlichen Zahlen a, m, n gewählt werden) $a^2 + 1 \neq (4n - 1)m$, d. h. $a^2 \neq 4mn - m - 1$.

Den ersten uns überlieferten Beweis des Satzes 2 gab Euler in diesem Brief an Goldbach! Damit war der Satz 1 bewiesen. Doch Goldbach suchte, wie aus mehreren Briefen an Euler zu entnehmen ist, nach einem neuen Beweis des Satzes 1, also nach einem Beweis, der vom Satz 2 unabhängig ist.

Goldbach an Euler (23. 3. 1743): „Endlich stellet sich die demonstratio nova (neuer Beweis) ein.“

Euler an Goldbach (29. 3./9. 4. 1743): „Ew. Wohlgeb. bin ich für die mir gütigst überschriebene Demonstration, daß $4mn - m - 1$ keine Quadratzahl sein kann, gehorsamst verbunden. Die Raisonnemens [Überlegungen] darin sind ... so tiefsinnig, daß ich viel Mühe gehabt, ehe ich dieselben habe völlig einsehen und auseinanderwickeln können. ... Wenn die letzte Konklusion [Folgerung] ihre Richtigkeit hat, so ist die ganze übrige Demonstration vollkommen. Allein, eben diese letzte Konsequenz erwecket bei mir einen Skrupel, welchen ich nicht wohl mit Worten ausdrücken kann.“

Nach weiterer Diskussion der fraglichen „Konklusion“ muß Goldbach am 11./22. 6. 1743 bekennen: „... so erkenne ich doch nunmehr, daß die Demonstration [der Beweis] ... nicht bestehen kann. ... Vielleicht findet sich künftig etwas besseres“.

Am 19./30. 7. 1743 schrieb Goldbach an Euler: „Nachfolgende Demonstration [Beweis] habe ich zu dem Ende in unterschiedene kleine propositiones [Sätze] abgeteilet, damit E. Hochedelgeb. diejenige, bei welcher sie einigen Anstand finden möchten [Anstoß nehmen], desto bequemer anzeigen könnten.“ Nun formulierte er in lateinischer Sprache elf Sätze:

1. Wenn es überhaupt ein b^2 gibt, das der Gleichung $4mn - m - 1 = b^2$ mit natürlichen Zahlen m, n genügt, so sei a^2 das kleinste Quadrat mit $4mn - m - 1 = a^2$.
2. Addiere ich auf beiden Seiten dieser Gleichung $-4ma + 4m^2$, so ergibt sich $4m(n - a + m) - m - 1 = (a - 2m)^2$ oder $4mn' - m - 1 = b'^2$ mit $b' = a - 2m$ oder $2m - a$ und $n' = n - a + m$.

3. In dieser Gleichung kann nicht $a = m$ werden (dann wäre die rechte Seite der Gleichung durch m teilbar, die linke Seite jedoch nicht).
4. Es kann auch nicht $a > m$ werden, dann wäre nämlich $n - a + m < n$ und daher
$b'^2 = 4mn' - m - 1 = 4m(n - a + m)$
$- m - 1 < 4mn - m - 1 = a^2$,
was der Annahme widerspricht, daß a^2 das kleinste unter den Quadraten b^2 mit $4mn - m - 1 = b^2$ ist.
5. Es muß folglich $a < m$ sein.
6. Ähnlich gilt: Wenn man $-4an + 4n^2$ auf beiden Seiten der Gleichung
$4mn - m - 1 = a^2$ addiert, so ergibt sich
$4n(m - a + n) - m - 1 = (a - 2n)^2$.
7. In dieser Gleichung kann nicht $a = n$ werden. Sonst wäre
$4mn - m - 1 = n^2$ oder
$n^2 - 4mn + m - 1 = 0$ (quadratische Gleichung für n) oder
$n_{1,2} = 2m \pm \sqrt{4m^2 - m - 1}$.
Diese Zahl ist jedoch (wie man zeigen kann) irrational.
8. Es kann auch nicht $a > n$ werden, dann wäre $m - a + n < m$ und daher
$(a - 2n)^2 = 4n(m - a + n) - m - 1 < 4nm$
$- m - 1 = a^2$,
was der Annahme widerspricht.
9. Es muß folglich $a < n$ sein. Da nach Satz 5. $a < m$ ist, ergibt sich $a^2 < mn$.
10. Folglich gilt $4mn - m - 1 < mn$, was absurd ist.
11. Deshalb kann es unter allen ganzzahligen Quadraten der Form $4mn - m - 1$ (wenn sie existieren) kein kleinstes Quadrat geben. Folglich gibt es gar keines.

Euler vermerkte auf dem Rand des Briefes: „Diese Demonstration [Beweis] kann etwas kürzer gefaßt werden und nur allein gezeiget werden, daß a non $> m$ nec $> n$ [nicht $> m$ und auch nicht $> n$], woraus schon folget, daß $4mn - m - n$ non $> mn$ [nicht $> mn$], quod est absurdum [was absurd ist].“ Und an Goldbach schrieb er am 13./14. 8. 1743: „Wann [wenn] $4mn - m - 1$ in einem Fall ein quadratum [Quadrat] wäre, so würde man gleich unendlich viele andere casus [Fälle] daraus finden können. Was nun Ew. Wohlgeb. annehmen, daß a^2 das kleinste quadratum sei, welches in formula [in der Form] $4mn - m - 1$ enthalten ist, so muß notwendig a kleiner sein als m, und daher haben die 5 ersten propositiones [Sätze] ihre völlige Richtigkeit. Wann aber Ew. Wohlgeb. ferner zu dieser Aequation [Gleichung] fortgehen
$4n(m - a + n) - m - 1 = (a - 2n)^2$, weilen dieselbe nicht in der vorgelegten Form $4mn - m - 1$ enthalten ist, so folgt auch nicht, daß $(a - 2n)^2$ kleiner sein müsse als a^2; dann [denn] $4mn - m - 1$ könnte das kleinste mögliche quadratum geben, ungeachtet $4n(m - a + n) - m - 1$ einem noch kleineren quadrato gleich wäre, und also kommt mir die 8$^{\text{te}}$ proposition verdächtig vor, weilen non obstante hypothesi [ohne der Annahme zu widersprechen] a^2 größer sein kann als $(a - 2n)^2$.“
Goldbach scheint in 8. analog wie in 4. geschlossenen zu haben.
In Wirklichkeit erhält er
$b''^2 = 4nm'' - m - 1 < 4nm - m - 1 = a^2$
(mit $b'' = a - 2n$, $m'' = m - a + n$),
wobei $4nm'' - m - 1$ (wegen $m'' \neq m$!) nicht von der Form $4nk - k - 1$ ist (die für $k = m$ nach der Annahme das kleinste derartige ganzzahlige Quadrat $4nm - m - 1 = a^2$ liefert); also ist auch $b''^2 < a^2$ kein Widerspruch zur Annahme!
Euler schrieb weiter: „Bei diesem tentamine [Versuch] fällt mir ein, ob man dieses theorema nicht etwan auf eine gleiche Art demonstrieren könnte, wie man zu erweisen pflegt, daß $a^4 + b^4$ oder $a^4 - b^4$ kein quadratum sein könne.“ Fermat hatte einst gezeigt, daß die Gleichungen $x^4 + y^4 = z^2$ und $x^4 - y^4 = z^2$ keine nichttrivialen ganzzahligen Lösungen besitzen.

Euler schlug nun vor, die dabei benutzte Beweismethode, die Fermat „Methode des unendlichen Abstiegs“ nannte (vgl. alpha 17 (1983), H. 2, S. 29), auf das diskutierte Problem anzuwenden.
Er beschrieb das Vorgehen konkreter: „Weil … gewiß ist, daß in numeris parvis [in kleinen Zahlen] $4mn - m - 1$ kein Quadrat sein könne, so würde die Demonstration auf folgende Art vollkommen richtig sein.“ Und Euler notierte (in lateinischer Sprache);
I. [Es wird angenommen, daß es ein Quadrat gibt, das sich in der verlangten Form darstellen läßt.] Das Quadrat a^2, das sich in der Form $4mn - m - 1$ darstellen läßt, sei gegeben.
II. Daraus kann ein anderes Quadrat b^2 kleiner als a^2 gefunden werden, das gleichfalls in der Form $4mn - m - 1$ dargestellt ist.
III. Man wird also fortgesetzt zu kleineren Quadratzahlen kommen, was absurd ist. [Die Annahme I muß also falsch sein.]
„Die ganze Demonstration würde also auf den II. Satz ankommen.“
Am 28. 9. 1743 schrieb Goldbach an Euler: „Aus Eurer Hochedelgeb. Erinnerung gegen die vorige Demonstration habe ich die prop. 6 ipsius demonstrationis [zu diesem Beweis] allerdings unrichtig befunden, dahero ich dieselbe nebst darauffolgenden in meinem letzteren Schreiben auszustreichen und an deren Stelle folgende zu substituieren bitte“. Und er formulierte die Sätze 6. bis 8. (in lateinischer Sprache) neu:
6. Addiert man zu der Gleichung
$(4n - 1)\,m - 1 = a^2$ beiderseits
$-2a(4n - 1) + (4n - 1)^2$, so ergibt sich
$(4n - 1)(m - 2a + 4n - 1) - 1$
$= (a - (4n - 1))^2$.
7. Da a^2 das kleinste Quadrat ist, das der Gleichung $(4n - 1)\,m - 1 = a^2$ genügt, so muß $a^2 < (a - 4n + 1)^2$ oder
$a^2 = (a - 4n + 1)^2$ sein. Wegen $4n \neq 1$ kann das Gleichheitszeichen nicht gelten. Es gilt folglich
$(-2a + (4n - 1))(4n - 1) > 0$, und daher
$4n - 1 > 2a$. Nach Voraussetzung ist aber
$4n - 1 = \frac{a^2 + 1}{m}$; folglich gilt
$\frac{a^2 + 1}{m} > 2a$ oder $a^2 > 2am - 1$ oder
$a > 2m - \frac{1}{a}$.
8. Da nach dem 5. Satz $a < m$ ist, folgt
$m > 2m - \frac{1}{a}$, was absurd ist, wenn m und a ganze Zahlen sind.
Letzteres ist jedoch in $4mn - m - 1 = a^2$ angenommen worden.
Die Annahme ist somit falsch. Stets gilt $4mn - m - 1 \neq \square$ [Quadratzahl], wenn m und n natürliche Zahlen sind. Und das war zu beweisen.
„Nunmehr hat Ew. Wohlgeb. Demonstration, daß $(4n - 1)\,m - 1 \neq a^2$, ihre völlige Richtigkeit“, schrieb Euler am 4./15. 10. 1743, denn „da Dieselben [Sie] vorher erwiesen, daß posito $a\,a$ omnium quadratorum, sie quae darentur, minimo [wenn man a^2 das kleinste aller Quadrate setzt, sofern welche gegeben sind], sein müsse $m > a$, anjetzo aber pro eodem casu [in demselben Fall], daß $(4n - 1) > 2a$, so muß folglich sein $(4n - 1)\,m > 2a^2$, nun aber ist $(4n - 1)\,m = a^2 + 1$, und wäre also $a^2 + 1 > 2a^2$, welches nicht sein kann nisi sit $a = 0$ [außer wenn $a = 0$ ist], vel [oder] $a = 1$, dann [denn] hier muß das Zeichen $>$ nicht majus [größer], sondern non minus [nicht kleiner] heißen. Wann [wenn] man aber setzt vel [entweder] $a = 0$, vel [oder] $a = 1$, so wird die Aequation [Gleichung] $(4n - 1)\,m - 1 = a^2$ unmöglich.
Ich muß gestehen, daß ich nicht geglaubt hatte, daß dieses theorem auf eine so leichte und schöne Art bewiesen werden könnte, und ich bin dahero versichert, daß die meisten theoremata Fermatii [Theoreme von Fermat] auf eine gleiche Art bewiesen werden können, weswegen ich Ew. Wohlgeb. um so vielmehr für die Kommunikation [Mitteilung] dieser herrlichen Demonstration [dieses Beweises] verbunden bin“.
Der Zahlentheoretiker André Weil (geb. 1908) machte darauf aufmerksam, daß dieser von Goldbach mit Eulers Hilfe so mühsam gefundene Beweis des Satzes 1 den ersten Keim der sog. Reduktionstheorie für binäre quadratische Formen enthält, die später von Joseph Louis Lagrange (1736 bis 1813, siehe alpha 21, 1987, H. 3 und 4, Seiten 52, 77) entwickelt worden ist.
Lagrange hatte sich seit 1768, sowohl von Fermats Vermutungen als auch von Eulers Abhandlungen angeregt, mit der Zahlentheorie befaßt. *H. Pieper*

Buchtip

H. Wußing

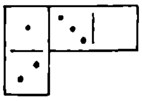
Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik

2., überarb. Auflage, etwa 365 S.,
zahlr. Abb. Bestell-Nr.: 571 832 3
Preis: 17,80 M
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
Ein Band aus der Studienbücherei für Lehrer, der aber sicher allen unseren mathematikhistorisch interessierten Lesern viel Freude bereitet.

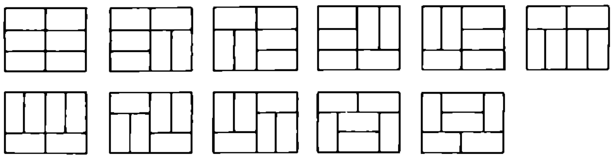
In freien Stunden · alpha-heiter

Leistungsfähiges Dominostein-Sextett

Deutet man die Punkte auf jeder Dominosteinhälfte als Ziffer, so kann man nebeneinanderliegende Hälften als Darstellung einer natürlichen Zahl auffassen. So stellen z. B. die hier nebeneinanderliegenden Hälften die Zahl 130 dar:



Von den 28 Steinen eines Dominospiels sind sechs geeignete auszuwählen: Diese sollen sich auf jede der 11 abgebildeten Schablonen so legen lassen, daß sich durch Addieren der Zahl der ersten Zeile und der der zweiten Zeile die Zahl der dritten Zeile ergibt.



W. Träger, Döbeln

15 Meter im Quadrat

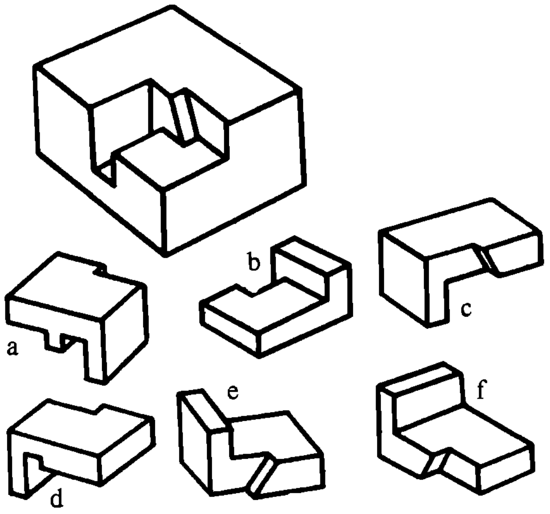
Herr Ackermann hat einen Garten. Dieser ist quadratisch von 15 m Seitenlänge. Seine Beete legte er so an: Zuerst teilte er die gesamte Fläche in drei gleichgroße Rechtecke und danach teilte er jedes dieser Rechtecke in zehn gleichgroße Rechtecke. So erhielt er 30 gleichgroße Beete. Nun wächst und blüht alles. In einer Ecke des Gartens befindet sich der Wasserhahn. Zum Begießen geht es mit zwei Gießkannen bei jedem Beet an der längeren Seite einmal rauf und einmal runter. Das Wasser reicht immer gerade für ein Beet. Zum Schluß stellt er die Kannen wieder beim Wasserhahn ab. Da sagt Herr Ackermann zu seiner Frau und seinem Sohn: „Ihr müßt mir in Zukunft helfen, denn ich alleine muß über einen Kilometer weit gehen, wenn ich alle Beete begießen will."

„Natürlich helfen wir", meint Frau Ackermann, „aber du hast sicher etwas übertrieben." Hat Herr Ackermann recht?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

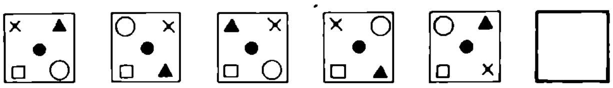
Zum Knobeln

Welches der Teile paßt genau in den Körper?



Scharf nachgedacht

Wie müssen die fünf Figuren im sechsten Quadrat angeordnet sein?



Iris Biziak, Dreitzsch

Wortspielereien

Vervollständige mittels Zahlworten zu Begriffen.
… füßler, … felderwirtschaft, … eck, … er,
… chreiben, … spitz, Re …, … schönchen, Schl …,
Gem … amkeit, … samkeit, … atz, Tr …, … chlag,
… achser, … zylindermotor, … teiler, … angel,
… losigkeit.

Jane Birkholz, Wilhelm-Pieck-Stadt Guben

J. Jakob v. Berzelius (Chemiker, 1779 bis 1848) soll ein sehr witziger Mann gewesen sein. So bat er seinen Schüler Wöhler, als dieser mit der Untersuchung eines neu entdeckten Minerals beschäftigt war, einen seiner Freunde „durch Ernennung zum Taufpaten des Minerals zu ehren" – und zwar nach dem Spanier Miguel Erecacoexecohoncrena.

aus: Lingmann/Schmiedel: „Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten", VEB Fachbuchverlag Leipzig

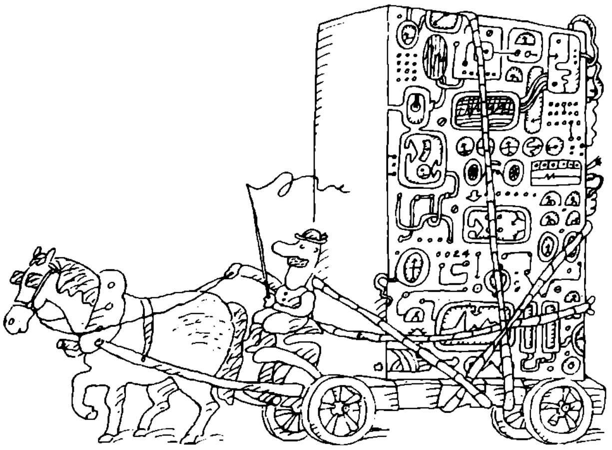
Mathematisches Kreuzworträtsel

Waagerecht: 1. Längeneinheit, 6. natürliche Zahl, 7. ganze Zahl, 9. Unendlichkeitsstelle einer Funktion, 12. norwegischer Mathematiker (1802 bis 1829), 14. Zeitabschnitt, 15. algebraische Struktur

1		2		3		4		5
	●		●		●		●	
6				●	7			
	●		●	8	●		●	
	●	●	9			●	●	
	●	10	●		●	11	●	
12			13	●	14			
	●	15					●	
	●		●	●	●		●	

Senkrecht: 1. Verbindungsstrecke zweier Ecken eines Polygons, die keine Seite ist, 2. grundlegendes mathematisches Objekt, 3. kleine Längeneinheit (Abk.), 4. norwegischer Mathematiker (1863 bis 1922), 5. Zykloide, 8. geometrischer Begriff, 10. Segment, 11. Begriff aus der Graphentheorie, 13. Logarithmus zur Basis 2 (Abk.), 14. gegenteilige Entscheidung von „nein".

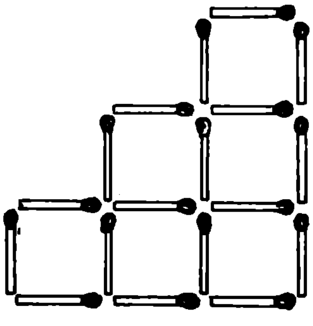
Dr. R. Mildner, Leipzig



L. Otto, Leipzig

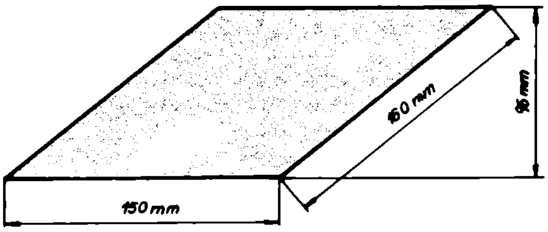
Hölzchentrick

Nimm zwei Hölzchen so weg, daß vier Quadrate übrig bleiben.



Flächenverwandlung mittels Legespiel

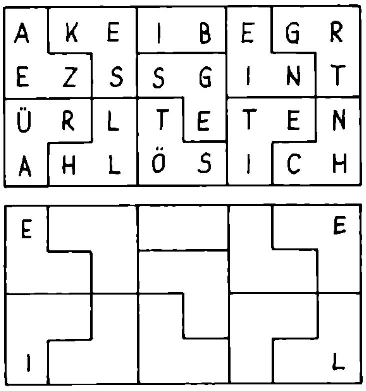
Ein mit den angegebenen Maßen auf Papier gezeichnetes und ausgeschnittenes Parallelogramm ist durch einen Schnitt in zwei kongruente Vierecke zu zerschneiden. Beide Teile sind genau übereinander zu legen und dieses Paket ist durch einen weiteren Schnitt zu teilen, so daß insgesamt 4 Vierecke entstehen.
Wie müssen beide Schnitte ausgeführt werden, damit sich diese 4 Teile zu einem Quadrat aneinanderlegen lassen?



W. Träger, Döbeln

Sinnvoll getauscht

Die durch Umrandung abgegrenzten Buchstabengruppen der oberen Figur sind auf gleichgestaltete Felder der unteren so zu übertragen – zeilenweise gelesen –, daß es eine Aussage über natürliche Zahlen ergibt.

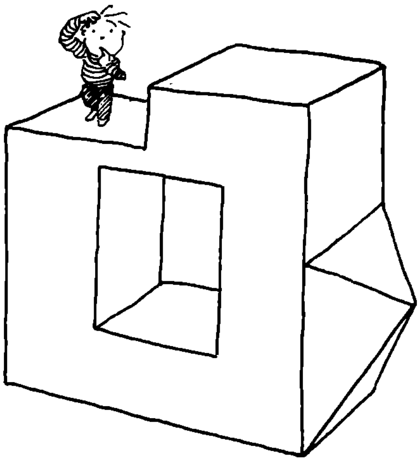


A	K	E	I	B	E	G	R
E	Z	S	S	G	I	N	T
Ü	R	L	T	E	T	E	N
A	H	L	Ö	S	I	C	H

E							E
I							L

OL O. Chromy, Coswig

Wieviel Flächen hat dieser Körper?



Über selbstregenerierende Zahlenfolgen

So, wie sich Lebewesen durch den genetischen Code regenerieren lassen, spricht man auch in der Mathematik von selbstregenerierenden Zahlenfolgen, wenn ein Teil der Folge den Code dafür liefert, wie die gesamte Folge auszusehen hat.

Ein Beispiel

Im Jahre 1957 wurde in der Zeitschrift American Mathematical Monthly (Band 64, Seite 198) die Folge
0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1 ... (*)
untersucht.
Sie läßt sich wie folgt erzeugen:
Wir betrachten zunächst nur endliche Zahlenfolgen, bestehend aus 0 und 1. Begonnen werde mit (0). Als Induktionsschritt werde jede 0 durch 0 1 (im obigen Vergleich heißt das: 0 ist der Code für die Kombination 0 1) und jede 1 durch 0 1 1 ersetzt, man erhält folgendes Schema:

Folge	Nullenanzahl	Einsenanzahl
0	1	0
0 1	1	1
0 1 0 1 1	2	3
0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 1	5	8

Interessanterweise stehen links immer gleiche Ziffern untereinander (Selbstregenerierungsbedingung) und rechts die Fibonaccischen Zahlen. Wir wollen prüfen, ob dies nur zufällig für das Anfangsstück der Folge gilt, und wir wollen versuchen, eine Bildungsvorschrift für das allgemeine Folgenglied der unendlichen Zahlenfolge (*) zu finden. Vor dem Weiterlesen empfehlen wir dem Leser, die ersten etwa 200 Folgeglieder der Folge (*) aufzuschreiben und sich selbst mit der Lösung der drei genannten Probleme zu befassen. Wer die Übersicht zu verlieren fürchtet macht es am besten zu zweit: Einer liest ganz langsam die letzte Zeile des Schemas vor, der andere schreibt für jede vorgelesene Null auf ein Blatt 0 1, für jede gelesene Eins 0 1 1. Danach steht auf diesem Blatt die nächste Zeile des Schemas. Diese wird wieder langsam vorgelesen, und der andere schreibt entsprechend auf ein neues Blatt Papier wieder 0 1 für Null und 0 1 1 für Eins ....

Allgemeine Definition

Das Problem wird nicht komplizierter, wenn wir es allgemeiner formulieren: (a) und (b) seien zwei endliche Folgen aus 0 und 1. Dann gilt

Satz 1: Beginnt man mit der Folge (0) und ersetzt im Induktionsschritt jede 0 durch die Folge (a) und jede 1 durch die Folge (b), so ist die Selbstregenerierungsbedingung genau dann erfüllt, wenn (a) mit 0 beginnt.

Beweis: Daß (a) mit 0 beginnen muß, ist klar, da anderenfalls schon in der zweiten Zeile vorn eine 1 stehen würde. Nun setzen wir voraus, daß (a) mit 0 beginnt und führen den Beweis durch vollständige Induktion. Als Induktionsanfang wissen wir bereits, daß in der ersten und zweiten Zeile nur gleiche Zahlen übereinanderstehen, nämlich die 0 am Anfang. Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, daß in der $(k-1)$-ten und k-ten Zeile nur gleiche Zahlen übereinanderstehen. Ersetzen wir in diesen beiden Zeilen jede 0 durch (a) und jede 1 durch (b), stehen auch wieder nur gleiche Zahlen übereinander. Damit ist gezeigt, daß auch in der k-ten und $(k+1)$-ten Zeile nur gleiche Zahlen übereinanderstehen, w. z. b. w.

Etwas abstrakter können wir unser Schema wie folgt beschreiben: Wir konstruieren eine unendliche Folge, deren Elemente endliche Zahlenfolgen sind, und zwar in das k-te Folgenglied gerade diejenige endliche Folge, die durch die k-te Zeile unseres Schemas gegeben ist.

Fibonaccische Zahlen

Wir wollen jetzt mit $N(a)$ die Anzahl der Nullen der Folge (a) und mit $E(a)$ die Anzahl ihrer Einsen bezeichnen, analog $N(b)$ und $E(b)$. Im obigen Beispiel gilt also $N(a) = E(a) = N(b) = 1, \quad E(b) = 2$. Die Nullenanzahl der k-ten Folge (d. h. der k-ten Zeile des Schemas) werde mit N_k und die Einsenanzahl mit E_k bezeichnet. Laut Annahme ist $N_1 = 1$, $E_1 = 0$. Die weiteren Glieder lassen sich rekursiv bestimmen:

$$\begin{aligned} N_{k+1} &= N(a)N_k + N(b)E_k, \\ E_{k+1} &= E(a)N_k + E(b)E_k \end{aligned} \qquad (1)$$

Im Wortlaut: N_{k+1}, die Anzahl der Nullen in der $(k+1)$-ten Zeile, ist die Summe aus $N(a)N_k$, der Anzahl der aus den Nullen der k-ten Zeile stammenden Nullen, und $N(b)E_k$, der Anzahl der aus den Einsen der k-ten Zeile stammenden Nullen. Im obigen Beispiel gilt also als Spezialfall von Formel (1)

$$N_{k+1} = N_k + E_k, \; E_{k+1} = N_k + 2E_k \qquad (2)$$

Jetzt können wir beweisen:
Satz 2: In der Tabelle stehen rechts die Fibonaccischen Zahlen $(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$, die durch $f_1 = f_2 = 1, f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$ definiert sind, und zwar gilt für $k = 2, 3, \ldots,: f_{2k-3} = N_k, f_{2k-2} = E_k$.

Beweis: Mittels Formel (2) können wir als Induktionsanfang $N_2 = E_2 = 1$ nachprüfen. Der Induktionsschritt erfolgt über die beiden Formeln $E_k + N_k = N_{k+1}$ und $N_{k+1} + E_k = E_{k+1}$, w. z. b. w.

Kettencode für Geraden

Nun haben wir die ersten beiden Probleme gelöst, aber eine Bildungsvorschrift für das allgemeine Folgenglied der Folge (*) konnte noch nicht gefunden werden. Hier ist die in Abschnitt 2 und 3 vorgenommene Verallgemeinerung hinderlich, und wir fragen speziell nach einer Bildungsvorschrift für die Folge (*).

Wir bezeichnen deren Folgenglieder mit (r_m), $m = 1, 2, \ldots$, also $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0$, $r_4 = r_5 = 1, \ldots$.

In dieser Form läßt sich schwer eine Bildungsvorschrift erraten. Wir bilden die Partialsummen $s_n = r_1 + \ldots + r_n$. Man kann stattdessen auch rekursiv schreiben

$$s_1 = r_1, \, s_n = s_{n-1} + r_n, \, n \geqq 2. \qquad (3)$$

Es gilt also $s_1 = 0$, $s_2 = s_3 = 1$, $s_4 = 2$, $s_5 = 3, \ldots$.

Diese Werte werden nun in das $n - s_n$-Diagramm eingetragen, vgl. Bild 1. Sie liegen annähernd auf einer Ursprungsgeraden (und zwar, genau betrachtet, alle unterhalb derselben), die zum Vergleich ebenfalls eingezeichnet wurde.

Diese Tatsache und die konstruktionsbedingte Ganzzahligkeit der Werte s_n legt nun die Vermutung nahe, daß eine allgemeine Bildungsvorschrift der Art

$$s_n = [x\,n] \qquad (4)$$

besteht. Dabei ist $x > 0$ eine noch zu bestimmende reelle Zahl, und [ ] bezeichnet den ganzzahligen Teil, d. h., für jede reelle Zahl y werden $[y]$ und $\{y\}$ durch $0 \leqq \{y\} < 1$, $[y]$ ganzzahlig, $y = [y] + \{y\}$ eindeutig definiert. Damit ist zumindest gewährleistet, daß alle Werte s_n knapp unterhalb der Ursprungsgeraden $y = x\,n$ liegen.

Bevor wir jetzt *den* Wert von x bestimmen wollen, so daß Formeln (3) und (4) dieselbe Folge (s_n) definieren, soll noch auf eine Anwendung hingewiesen werden: In der Computergraphik bis hin zur automatischen Bildauswertung besteht das Problem, daß Geraden, die schräg zum Raster des Bildschirms liegen, nur näherungsweise dargestellt werden können. Diese Näherung wird so realisiert, daß zu der ideal gedachten Geraden die jeweils nächstgelegenen Rasterpunkte (Pixel genannt) zum Aufleuchten gebracht werden, eben wie in Bild 1 die Kreuze ein Näherungsraster für die Gerade $y = x\,n$ darstellen. Und um ein Programm zu schreiben, das diese nächstgelegenen Rasterpunkte berechnet, muß man diese möglichst „rechnerfreundlich" beschreiben können, hier taucht dann der Begriff „Kettencode für Geraden" auf.

Jetzt wollen wir den Wert für x bestimmen:
Nach Satz 2 gilt ja für $k \geqq 2$:

$$N_k = f_{2k-3}, \, E_k = f_{2k-2}. \qquad (5)$$

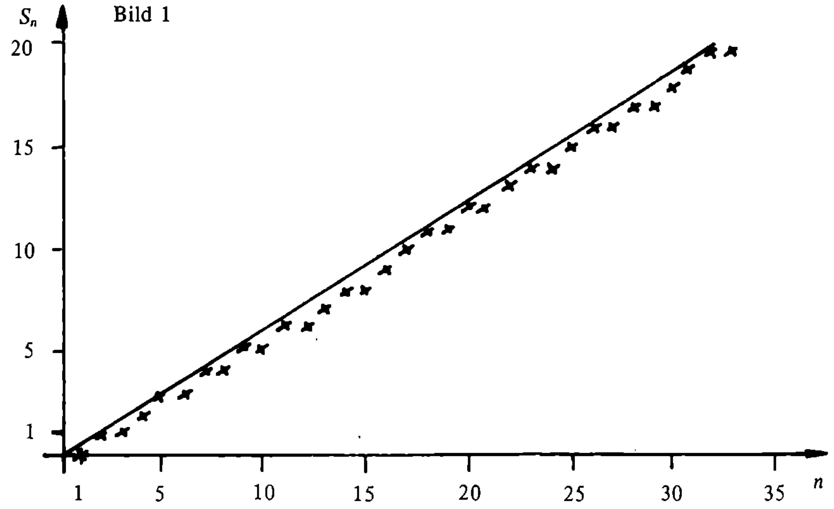


Bild 1

In der n-ten Partialsumme s_n der k-ten Folge ist jeder der n Summanden entweder 0 oder 1, und daher ist $N_k + E_k = n$ und $E_k = s_n$. Wegen (2) $N_k + E_k = N_{k+1}$ können wir auf $n = N_{k+1}$ schließen.

Aus Formel (4) folgt $xn - 1 < s_n \leqq xn$. Setzen wir hier die Werte für n und s_n ein, erhalten wir

$$xN_{k+1} - 1 < E_k \leqq xN_{k+1}.$$

Wir teilen durch N_{k+1} und benutzen Formel (5). Es ergibt sich

$$x - \frac{1}{f_{2k-1}} < \frac{f_{2k-2}}{f_{2k-1}} \leqq x. \quad (6)$$

Für jedes $k \geqq 2$ stellt Formel (6) eine Doppelungleichung für x dar. Setzen wir beispielsweise $k = 6$, so erhalten wir

$$0{,}618 \approx \frac{55}{89} \leqq x < \frac{56}{89} \approx 0{,}629.$$

Je größer wir k wählen, desto kleiner wird das entsprechende Intervall für x. Die Leser, die mit Grenzwerten vertraut sind, können x auch genau ausrechnen (unter der Voraussetzung, daß der Grenzwert existiert):

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1} + f_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{f_{n-1}}{f_n} + 1\right)} = \frac{1}{x+1}, \text{ also}$$

$$x^2 + x - 1 = 0,\ x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}.$$

Wegen $x > 0$ erhalten wir schließlich

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618\,034 \quad (7)$$

Wenden wir nun die Formeln (3), (4) und (7) an, erhalten wir die gesuchte Formel

$$r_n = [nx] - [(n-1)x]$$
$$= [x + \{(n-1)x\}]. \quad (8)$$

Der vollständige Beweis, daß Formel (8) und Abschnitt 1 dieselbe Folge definieren, muß hier aus Platzgründen weggelassen werden. Wir fordern aber den Leser auf, sich für $n = 1, \ldots 20$ von der Richtigkeit dieser Aussage zu überzeugen.

Ausblick

Wenn wir nun für x andere Werte einsetzen, erhalten wir mit Formel (8) andere Folgen (r_n). Es gibt für viele quadratische Irrationalitäten (d. h., Zahlen der Form $f + \sqrt{g}$, f, g rational, $g > 0$, aber nicht Quadrat einer rationalen Zahl) die Möglichkeit, dann mit Abschnitt 2 zugehörige endliche Folgen (a) und (b) zu finden, daß sich wieder dieselbe Folge (r_n) ergibt. Bei irrationalen Zahlen, die keine quadratische Irrationalität darstellen, ist das jedoch wesentlich komplizierter: Ohne auf die Einzelheiten dieser Aussage einzugehen, wollen wir sie wie folgt plausibel machen: Wenn wir die eben für Formel (2) vorgenommene Grenzwertbetrachtung auf den allgemeinen Fall (1) ausdehnen, ergibt sich ebenfalls eine quadratische Gleichung für x, deren Lösung rational oder eben quadratisch irrational ist.

Jetzt noch zwei Aufgaben für den Leser.

▲1▲ Man beweise die Gültigkeit des zweiten Gleichheitszeichens in Formel (8).

▲2▲ Man zeige, daß die Folge (r_n), Formel (8), für rationale Zahlen x periodisch ist, d. h., daß es ein $m \geqq 1$ gibt, so daß für alle $n \geqq 1$ gilt $r_n = r_{n+m}$.

Schließlich teilen wir noch ohne Beweis mit, daß die Umkehrung dieser Aussage auch gültig ist, speziell also die Folge (*) aus Abschnitt 1 nicht periodisch ist.

H.-J. Schmidt

Verflixt und zu-gepuzzelt!

Aufgabe zum Titelblatt

Die abgebildete Figur ist aus 12 rechtwinkligen Dreiecken und 12 halben Kreisabschnitten derart zusammengesetzt, daß die Summe der an den stark ausgezogenen Linien sich gegenüberliegenden Zahlen immer eine Quadratzahl ergibt. Übertragt die Figur auf Transparentpapier und zerschneidet sie an den stark ausgezogenen Linien. Die 24 Teile sind nun zu zwei gleich großen Kreisen zusammenzufügen und zwar derart, daß die Summe der gegenüberliegenden Zahlen wieder eine Quadratzahl ergibt.

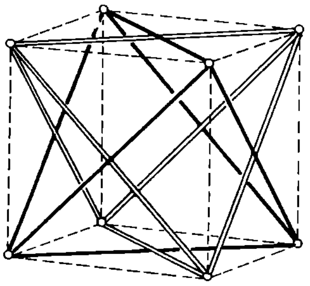
W. Neugebauer, Berlin

Ein bewegliches Tetraederpaar

Im Jahre 1982 entdeckte L. Tompos, damals Student an der Ungarischen Hochschule für Angewandte Kunst und Design, eine interessante Eigenschaft des regulären Tetraeders. Es ist erstaunlich, daß diese relativ einfach zu beweisende, anschaulich verblüffende Eigenschaft nicht schon im vorigen Jahrhundert oder noch davor bekannt wurde.

Als zugrundeliegende geometrische Figur betrachten wir die Kantengerüste zweier kongruenter, regulärer Tetraeder. (Ein reguläres Tetraeder ist bekanntlich eine von insgesamt vier gleichseitigen Dreiecken berandete Pyramide.) Diese Tetraeder seien so zusammengepaßt, daß ihre Kanten sich paarweise rechtwinklig in den Mittelpunkten schneiden. Wir erhalten also zwei solche Kantengerüste durch die 12 Flächendiagonalen eines Würfels, wobei (siehe Bild 1) die Kanten des ersten Tetraeders durch dick gezeichnete, die des zweiten durch doppelt dünn gezeichnete Strecken markiert sind. Baut man so die Modelle beider Tetraeder aus 12 gleichlangen, geeignet verhefteten Stäben, wobei das erste Kantenmodell das zweite an den sechs Knotenpunkten stets von außen berühren soll (also unmerklich größer ist), so bemerkt man beim Festhalten eines Tetraeders, daß das zweite bequem bewegt werden kann, indem die sich berührenden Kantenpaare jeweils übereinander gleiten. Stellen wir uns erneut diese Stäbe als unendlich dünn und nicht verbiegbar, d. h. als Strecken gleicher Länge im mathematischen Modell vor, dann hat man zur Bestätigung dieser Beobachtung zu zeigen, daß es Bewegungen gibt, welche die entsprechenden Kantenpaare in jeweils einer Ebene (also insgesamt sechs Ebenen) liegenlassen, d. h. ob die Kanten paarweise in sich schneidenden, parallelen oder identischen Geraden liegen. (Natürlich können beide Tetraeder auch „zusammenbewegt“

Bild 1

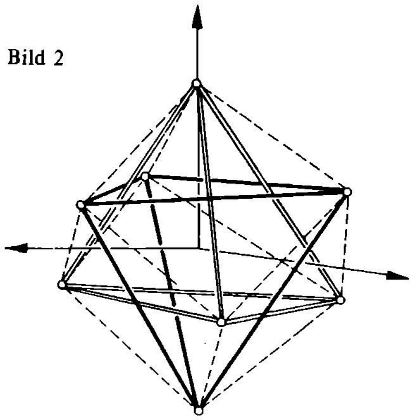


werden, aber wir schließen solch einfache Bewegungen aus.)

Es sei also ein Tetraeder festgehalten und nach allen in diesem Sinne zulässigen Bewegungen des anderen gefragt.

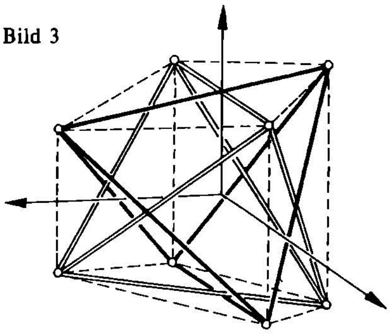
Zwei Arten von Bewegungen sind anhand unseres (physikalischen oder mathematischen) Modells leicht beschreibbar: Eines der Tetraeder festhaltend, bewegen wir das andere um eine Raumdiagonale des Würfels (Bild 1) und stellen fest, daß dies unter Erhaltenbleiben der sechs Kontaktpunkte möglich ist. Eine solche Bewegung, die sich also aus einer Drehung (um die Raumdiagonale des Würfels) und einer Verschiebung (in Richtung dieser Drehachse) zusammensetzt, nennt man naheliegenderweise eine Schraubung.

Bild 2



In Bild 2 ist eine Position beider Kantengerüste dargestellt, die aus der in Bild 1 durch eine solche Schraubung erhalten wurde. Eine zweite Bewegungsart erhalten wir wie folgt: Wir stellen uns eine Seitenfläche des Würfels (Bild 1) als in einer Horizontalebene liegend vor. (Horizontalebenen liegen, im Sinne der darstellenden Geometrie, parallel zur Grundrißebene.) Dann ist die dazu parallele Ebene *S* durch das Würfelzentrum eine Symmetrieebene des Würfels, und eines der Tetraeder ist das Spiegelbild des anderen bezüglich *S*. Wir wählen eine beliebige Gerade in *S*, die das Würfelzentrum enthält. Wenn wir nun ein Tetraeder um diese Achse um einen bestimmten Winkelbetrag drehen und es dann vertikal (d. h. senkrecht zu einer Horizontalebene), ebenfalls um einen bestimmten Betrag, verschieben, dann ist das Spiegelbild dieses gedrehten und verschobenen Tetraeders bezüglich *S* aus dem anderen Tetraeder durch Drehung um die gleiche Achse mit gleichem Drehwinkel, aber anderem Drehsinn, und vertikale Verschiebung um den gleichen Betrag, aber in entgegengesetzter Richtung, erhältlich. Dann sind jene Kantenpaare der beiden Tetraeder, welche ursprünglich Diagonalen einer vertikalen Würfelfläche waren, Spiegelbilder voneinander, d. h. jedes Paar liegt auf sich schneidenden (oder parallelen oder zusammenfallenden) Geraden. Wenn nämlich ein solches Kantenpaar selbst nicht horizontal liegt, dann liegt sein Schnittpunkt in *S*, und wenn es horizontal liegt, dann liegen beide Kanten parallel oder fallen zusammen. Im allgemeinen werden jene Kantenpaare, die ursprünglich Diagonalen einer horizontalen Würfelfläche waren, nicht in sich schneidenden Geraden liegen. Wählen wir aber die erwähnte vertikale Verschiebung so, daß dies gewährleistet ist (und aus Symmetriegründen muß dann die gleiche Bedingung vom ursprünglich in der zweiten Horizontalfläche gelegenen Kantenpaar erfüllt werden), dann haben wir wieder eine in unserem Sinne zulässige, nichttriviale Bewegungsart erhalten. Eine derart erzeugte Position beider Kantengerüste zeigt Bild 3.

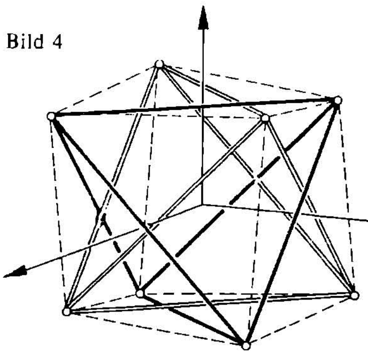
Bild 3



(Es sei bemerkt, daß beim Spiel mit dem physikalischen Modell nur eine Drehung beider Tetraedergerüste um besagte Achse nötig ist; die notwendige Verschiebung erfolgt automatisch, da die Kanten paarweise in ständiger Berührung bleiben.)

Wir kommen nun zur dritten Bewegungsart, die allerdings mit dem physikalischen Modell nicht ausgeführt werden kann. Ein Tetraeder festhaltend, drehen wir das andere aus seiner Ausgangslage (Bild 1) genau 180° um eine Achse durch die Mittelpunkte der Horizontalflächen des Würfels. Dann wird jedes Kantenpaar der zwei Tetraeder aus einer Vertikalfläche des Würfels in ein paralleles Kantenpaar überführt. Gleichzeitig wird jedes aus einer Horizontalfläche stammende Kantenpaar auf sich schneidenden Geraden verbleiben. Somit können wir die sich bewegenden Tetraeder horizontal in eine beliebige Richtung verschieben (um einen beliebigen Betrag) und erhalten dadurch erneut eine zulässige Bewegungsart. Eine solchermaßen erzeugte Position zeigt Bild 4.

Bild 4



Mit Mitteln der Elementarmathematik (trigonometrische Beziehungen, Lösung linearer Gleichungssysteme) kann man den folgenden Satz beweisen.

Satz: Die einzigen zulässigen Bewegungsarten des Tetraederpaares sind die drei beschriebenen.

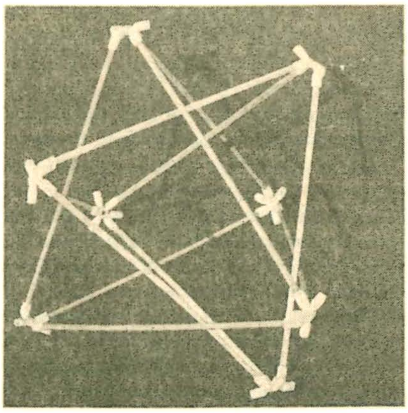
Probleme wie das hier behandelte, also Fragen der Stabilität oder Beweglichkeit von Gerüsten, spielen z. B. in der Architektur eine Rolle, wo insbesondere lasttragende Gerüste wie etwa Verstrebungen in Gebäuden oder beim Brückenbau derart konstruiert werden müssen, daß große Formveränderungen (Deformationen) und folglich Zerstörungen möglichst ausgeschlossen sind. Für das Bestimmen der zulässigen Bewegungen unseres Tetraederpaares waren ingenieurtechnische Methoden nutzbringend. Die Berechnung der Kräfte, welche zwischen beiden Kantengerüsten (oder zwischen Bestandteilen allgemeinerer Gerüste) auftreten, ist nämlich eng verknüpft mit der Möglichkeit zulässiger Bewegungen der Gerüste.

Weiterhin wollen wir eine Verallgemeinerung vom beschriebenen Zusammenhang zwischen zwei kongruenten Kantengerüsten regulärer Tetraeder erwähnen.

Wenn wir die Flächendiagonalen eines beliebigen Quaders betrachten, dann stellen sie (analog zu Bild 1) die Kantengerüste zweier kongruenter Tetraeder dar. Wenn diese Kantengerüste als Stabmodelle genauso zusammengepaßt werden wie im Falle zweier regulärer Tetraeder, kann man mit einem Kantengerüst bei Festhalten des anderen ähnlich verblüffende Bewegungen ausführen. Mathematisch kann man hier also einen ähnlichen Satz bezüglich zulässiger Bewegungsarten des Tetraederpaares beweisen. (Man sieht sofort, daß Analogien zu den an zweiter und dritter Stelle beschriebenen Bewegungen existieren, und auch zur zuerst dargestellten Art gibt es eine gewisse Analogie. Darüber hinaus hat man für bestimmte Quader eine vierte zulässige Bewegungsart.)

Die abschließend gegebene Fotografie zweier physikalischer Kantenmodelle regulärer Tetraeder, deren eines das andere in sechs Kontaktpunkten jeweils von außen berührt, soll Anregung für den Eigenbau dieser einfachen geometrischen Figur sein.

E. Makai, H. Martini, T. Tarnai



Die Arbeit an der hier behandelten Problematik wurde zum Teil aus dem Ungarischen Nationalen Forschungszuschuß Nr. 744 unterstützt.

alpha-Wettbewerb 1988/89

Preisträger

Susanne Dräbenstedt, Aderstedt; Martina Hebenstreit, Altenburg; Veneta Türke, Auerbach; Steffen Dittrich, Andrea Weigl, beide Bad Salzungen; Thoralf Czichy, Bergfelde; Thomas Trinks, Bert Minske, Gundula Hofer, Ulrich Fahrenberg, alle Berlin; Norbert Schröder, Bernau; Enrico Senger, Bischofferode; Ulrich Voigt, Roland Voigt, Böhlen; Doreen Luck, Breitungen; Anett Gschwender, Brohm; Alexandra Parth, Bötzow; Thomas Riedel (Frühstarter)*, Hagen Lessing, Uta Neumann, Dörte Poelzig, Michael Schwenk, alle Cottbus; Uwe Martin, Crossen; Andrea Mann, Markus Stub, beide Dermbach; Steffen Eisenblätter, Delitzsch; Andreas Kirchberg, Dingelstädt; Ullrich Hartung, Marcus Heinrich, Cornelia Zillmann, Frank Steinigen, Hendrik Pomiers, Matthias Gehlert, Daniel Arndt, Jörg Frühauf, alle Dresden; André Kratzert, Dürröhrsdorf; Arvid Dahle, Erfurt; Ulrike und Ulrich Müller, Fischheim; Werner Ernst, Finsterwalde; Thomas Nopp, Frankfurt/O.; Karsten Wackernagel, Falkenberg; Katrin Schünemann, Freital; Nadine Koch, Gehofen; Sven Wroblewski, Glienicke; Cathrin Kunze, Michael Gronau, beide Greifswald; Steffen Vollbarth, Greußen, AG Math. Kl. 5 der Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Grevesmühlen; Frank Schneegaß, Großbodungen; Silke Rudolph, Großröhrsdorf; Christian Schuster (Frühstarter), Grünhain; Jens Rennefahrt, Halle; Andreas Nüchter, Halle-Neustadt; Rico Ramolla, Hennigsdorf; Angela Wiesjahn, Holzendorf; Manuela Winkler, Hoyerswerda; Björn Borchardt, Ilmenau; Sabine Scheller, André Langd, Thilo Bocklisch, alle Karl-Marx-Stadt; Roland Becker. Kleinmachnow; Ronny Parchert, Kirsten Tostmann, beide Leegebruch; Patrick Fladerer, Leinefelde; Jens Gärtner, Jörg und Torsten Schreiber, Andrea Englisch, Lars-Peter Müller, André Gärtner, alle Leipzig; Gunter Semmler, Jens Grundmann, beide Limbach-Oberfrohna; Andreas Willnow, Lindenthal; Veit Kannegieser, Lübben; Martin Stein, Anke Misch, beide Magdeburg; Gerald Werner, Meiningen; Johannes Krause, Möser; Christina Hoba, Neuhaus; Thomas (Frühstarter) und André Westphal, Neuruppin; Matthias Loesdau, Neustrelitz; Torsten Möller, Ohrdruf; Robert Wetzker, Katja Schürer, Ilka Riedel, alle Oranienburg; Enrico Bruder (Frühstarter), Potsdam; Claudia Walter, Riesa; Christoph Weidling, Riethnordhausen; Frank Schönheit, Rudolstadt; Kordula Pabst, Sachsenhausen, Willi Jacobs, Saurasen; Katja Manski, Olaf Kallert, beide Schildow; Christian Schmaltz, Schwerin, Holger Strahl, Thomas Lotze, beide Suhl; Jens Krubert, Templin; Ralf Schubert, Vacha; Sven Peyer, Weimar; Otmar Jannasch, Wiednitz; Bert Winkler, Wilkau-Haßlau; Peter Stübner, Windischholzhausen; Mathe-Zirkel, Winniza (UdSSR); Ronald Peters, Wismar; Stefan Bretfeld, Jörg Silde, beide Zepernick

* Frühstarter sind Schüler der Klassenstufen 1 bis 4

Abzeichen in Gold

Für zweiundzwanzigjährige Teilnahme
Lutz Püffeld, Halberstadt

Für einundzwanzigjährige Teilnahme
Guido Blosfeld, Halle

Für zwanzigjährige Teilnahme
Ullrich Riedel, Flöha

Für fünfzehnjährige Teilnahme
Uwe Maaz, Arnstadt; Guntram Türke, Auerbach; Sylvia Glomb, Berlin; Harry Höfer, Dorndorf; Ingolf Körner, Gudrun Thäter, Karl-Heinz Jünger, Jörn Wittig, Carolin Engel, alle Dresden; Dirk-Thomas Orban, Erfurt; Jörg Butter, Freiberg; Volker Reck, Heiligenstadt; René Schüppel, Hoyerswerda; Horst Fliegner, Jarmen; Jens Pönisch, Andreas Hengst, Thomas Mader, alle Karl-Marx-Stadt; Per Witte, Königs Wusterhausen; Claudia Trochold, Reichenbach; Heidrun Tiedt, Teterow; Hans Creutzburg, Thal; Eva-Maria Wabbel, Wolfen; Birgit Schultheiß, Wüstenbrand

Für zehnjährige Teilnahme
Ralf und Wolfgang Beukert, Altenburg; Annegret Schädlich, Auerbach; Yvonne Großmann, Matthias Tittel, beide Berlin; Eberhard Balzer, Bernburg; Frank-Jürgen Schwerin, Blumberg; Peter Sitz, Calau; Olaf Krause, Eisenhüttenstadt; Ulrich und Peter Wenschuh, Falkenstein; Ulf Winkler, Frankenberg; Frank und Udo Schulte, Freienbessingen; Dirk Wenzlaff, Grieben; Jörg Blaurock, Guben; Beate Thomas, Halle; Antje Hüttig, Halle-Neustadt; Henrik Hodam, Kaltennordheim; Michael Tix, Jürgen und Michael Hoppe, alle Karl-Marx-Stadt; Kay Leitz, Parchim; Steffen Scheithauer, Parey; Antje Reichel, Pirna; Beate Walter, Röbel; Annegret und Heiner Ruser, Rostock; Achim Kröber, Schönbach; Roland Drendel, Senftenberg; Jochen Wetzel, Sömmerda; Wolfgang Vogel, Thalheim; Lothar Matzker, Torno; Johannes Thäter, Weimar; Bert Winkler, Wilkau-Haßlau; Mathias Schwenck, Wittenburg; Susan Hoffmann, Klingenthal

Für sechsjährige Teilnahme
Uta Schmidt, Altenburg; Sven Völker, Bad Salzungen; Katja Geißler, Berlin; Ingo Moldenhauer, Blankenfelde; Wolfram Schubert, Borna; René Aust, Calau; Thomas Freier, Creuzburg; Jens Renner, Dürröhrsdorf; Thomas Prüver, Eberswalde; Patrick Zacharias, Eilsleben; Maik Denner, Empfertshausen; Rüdiger Hochheim, Steffen Zillmer, beide Erfurt; Ortrun Grahl, Dresden; Jana Reinhardt, Corinna Mäder, Katharina Hildebrandt, Christiane Siebert, Kristin Danz, alle Fambach; Werner Ernst, Finsterwalde; Uwe Danz, Floh; Holger Hänchen, Forst; Katharina Dost, Geithain; Torsten Feigl, Gera; Britta Bölter, Greifswald; Jörn Pamperin, Hagenow; Britta und Rainer Struwe, Halberstadt; Göran Glockmann, Jena; Petra Koglin, Hoyerswerda; Mirko Niepel, Käthe Bäckmann, beide Karl-Marx-Stadt; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Kirsten Völz, Köchar; Marco Ringel, Jänickendorf; Jan Rüdiger, Leipzig; Christel Fritze, Magdeburg; Eberhard Schulze, Mildenberg; Kay Pfennighaus, Neubrandenburg; Manuela Grewe, Neuhaus; Carola Franke, Niedergräfenhainichen; Grit Pfützner, Ohorn; Michael Schmarje, Jürgen Rietz, beide Pirna; Kathrin Lönnig, Pretitz; Ralph Neumann, Ribnitz; Tobias Franke, Riesa; Ralf und Dirk Seifert, Rochlitz; Ulrich Rothe, Kirstin Peter, beide Rostock; Nicole Schmidt, Schmalkalden; Stefan Erb, Schwallungen; Alexander Otto, Schwanebeck; Peter Hörnich, Schwedt; Lars Prieske, Schwerin; Holger Reinitz, Sommerfeld; Andreas Lange, Stendal; Kerstin Schuster, Taubenheim; Stephan Marx, Ueckermünde; Horst Rex, Wählitz; Regine Katzy, Waren; Manuela Montag, Weißenschirmbach; Sebastian Steinbach, Wernigerode; Janet Thon, Wünschendorf; Jens Müller, Wolgast; Ulrike Häfner, Schmalkalden; Monika Döring, Berlin

Für fünfjährige Teilnahme
Dietmar Schimmel, Adorf; Tilo Kaiser, Aken; Frank Grembus, Altentreptow; Ronald Stüve, Anklam; Kathleen Heilfort, Bad Gottleuba; Uwe Völker, Jan Schwate, beide Bad Salzungen; Thoralf Räsch, Bad Wilsnack; Ina Müller, Alexander Starick, beide Bärenklau; Claudia Groll, Bannewitz; Alexander Golz, Jana Hoffmann, Bodo Petermann, Annekatrin Hegewald, alle Berlin; Torsten Adam, Jens Opalka, beide Bernburg; Stephan Hantsch, Berthelsdorf; Falk Wietreck, Bischofswerda; Andreas Liebmann, Bitterfeld; Ulrich Voigt, Böhlen; Heike Engel, Brotterode; Claudia Tittmann, Cainsdorf; Michael Schwenk, Cottbus; Stefan Daske, Dabendorf; Andreas Kirchberg, Dingelstädt; Edith Bombach, Jens Meyer, Stefan Seifert, Jens Herrmann, Ulf Erben, Beate Schreiber, Michael Grüning, alle Dresden; Burgund Berger, Barbara Berger, beide Drosa; Ivonne Gierth, Dürröhrsdorf; Kornelia Eckert, Effelder; Jan Buchmann, Eisenberg; Änne Heyl, Eisenach; Reinhard Schrippa, Eisenhüttenstadt; Lars Lämmerhirt, Ettenhausen; Karsten Wackernagel, Falkenberg; Steffen Pietsch, Frankfurt/O.; Karl Etourno, Freiberg; Roland Popp, Gotha; Jacqueline Spatke, Gräfenthal; Cornelia Bär, Greifendorf; Steffen Vollbarth, Greußen; Susanne Schulz, Grimma; Thomas Henker, Groitzsch; Frank Schneegaß, Großbodungen; Jan Glaser, Großdeuben; Ines Pannenberg, Jana Pausch, beide Grünhain; Alois Belter, Hagenow; Roland Kunert, Gundhild Berg, beide Halle; Vivian Bähr, Halle-Neustadt; Antje Stehfest, Havelberg; Michael Puchta, Hecklingen; Stephan Lexow, Henningsdorf; Jens Weinhold, Hermsdorf; Olaf Schmidt, Hohenebra; Torsten Borchardt, Steffen Vogler, beide Ilmenau; Ellen Stelzner, Jena; Andreas Anders, Jüterbog; Jana Bioly, Stefan Mader, beide Karl-Marx-Stadt; Matthias Müller, Klaffenbach; Karsten Knobloch, Kleinmachnow; Jan Richter, Krostitz, Olaf Dreyer, Krumbeck; Mario Menger, Lauterbach; Mirko Jelinek, Katrin Anton, Kirsten Schröter, alle Leegebruch; Martin Schreiter, Andreas Winter, Sebastian Meinhardt, alle Leinefelde; Mareike Schmidt, Christian Tiedt, beide Leipzig; Olaf Weber, Meuselwitz; Daniela Voigtländer, Dorit Pinnow, Steffi Pörschel, Stefan König, alle Mügeln; Christian Bittner, Mühlhausen; Mirko Teidge, Neubrandenburg; Rigo Hinkelmann, Neuenbeuthen; Petra Ropenus, Neuhof; Gabriele Bräuer, Niederodewitz; Christian Rißler, Niederodewitz; Susan Abbe, Niederorla; Michael Hummel, Olbersdorf; Torsten Kaiser, Oranienbaum; Jan Fricke, Pasewalk; Susanne Kraenz, Picher; Claudia Burkhardt, Prettin; Sylke Ahrend, Rakow; Christoph Weidling, Riethnordhausen; Stephan Sprang, Doris Seifert, beide Rochlitz; Burkhard Rothe, Rostock; Daniela Möser, Sangerhausen; Sören Hader, Schlotheim; Torsten Haase, Schmalkalden; Andreas Seifert, Schönebeck, Enrico Rommel, Schwallungen; Diana Heinrich, Seyda; Eileen Hesse, Babette Stietz, Korina Maloszyk, Petra Gerlach, Sandy Schinkel, Ivonne Bühling, alle Sondershausen; Peter Brock, Stralsund; Silvana Seifert, Strausberg; Torsten Wöstenberg, Templin; Joachim Vogel, Thalheim; Diana Brenn, Daniel Schuster, Jörg Steinbach, Annett Storch, alle Trusetal; Hans-Helmut Zappe, Michael Lotz, Sven Buchholz, alle Vacha; Elko Kinlechner, Mario Zitek, Ronald Petigk, alle Weimar; Tanja Voigt, Wernburg; Otmar Jannasch, Wiednitz; Ronald Peters, Wismar; Manuela Kabelitz, Wollin; Kristina Bergmann, Wolzig; Heino Kuhn, Anja Hebestreit, beide Worbis; Nico Qual, Zeitz; Lutz Hengelhaupt, Zella-Mehlis; Holger Beyer, Zschopau

Für vierjährige Teilnahme
Lars Ziethmann, Altlüdersdorf; Tino Wirsing, Bad Salzungen; Jan Eska, Bad Sülze; Andreas Kunthel, Bautzen; Ines Heßelbach, Behrungen; Ingo Maas, Jan Strischek, Monika Zühlsdorff, Torsten und Jens Finner, alle Berlin: Norbert Schröder, Bernau; Tobias Priemuth. Karina Trübe, beide Bernburg; Karin Hüske, Biesenthal; Andreas Beleites, Bleicherode; Beate Pohler, Brand-Erbisdorf; Ronny Diener, Kati Reum, beide Breitungen; Gerd Heiser, Dorothe Fuchs,

Fortsetzung auf Seite 44

Überall Algorithmen

Teil 1

Ein Algorithmus – was ist das?

▲1▲ Gib die richtige Reihenfolge der Bilder an (Bild 1)!

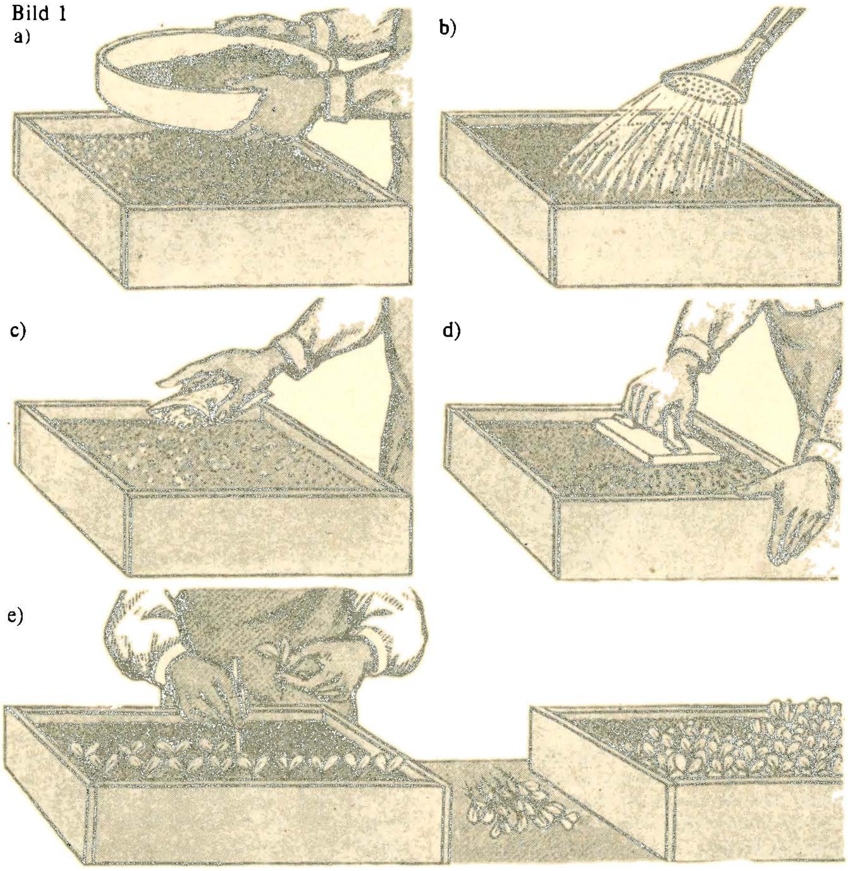


Bild 1

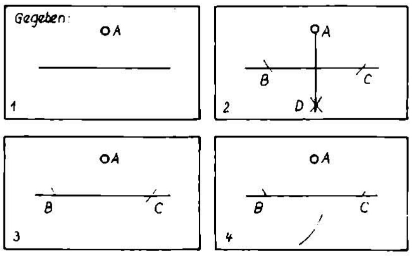
▲2▲ Ordne die Kästchen so an, daß sie eine vernünftige Vorschrift zur Zubereitung einer Sofix-Cremespeise ergeben! Du kannst die Reihenfolge durch Pfeile zum Ausdruck bringen.

1. Ich nehme einen Schneebesen und rühre so lange, bis das Pulver aufgelöst ist.
2. Ich fülle die Creme in kleine Schalen.
3. Ich gebe das Cremespeisepulver dazu.
4. Ich gieße die Milch in ein Gefäß.
5. Ich kaufe im Konsum 2 Sofix Cremespeisepulver und 1 Flasche (0,5 l) Milch.
6. Wir essen die Cremespeise.
7. Ich stelle die gefüllten Schalen kühl.
8. Ich warte 15 Minuten.

▲3▲ Gib die richtige Reihenfolge der Bilder an (Bild 2)!

Bild 2

Konstruktion des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade



▲4▲

	a)	b)	c)
1. Zahl	2	2	3
2. Zahl	4	6	5
3. Zahl	3	2	3
Ergebnis			

Fülle die letzte Zeile der obigen Tabelle nach folgender Vorschrift aus!

(1) Addiere zur ersten Zahl die zweite Zahl!
(2) Dividiere das Ergebnis durch 2!
(3) Multipliziere das Ergebnis mit der 3. Zahl!
(4) Schreibe das so erhaltene Ergebnis auf!

▲5▲ Was ist an der Vorschrift für die Addition von Dezimalbrüchen (DZB) falsch?

Schreibe die DZB untereinander!

↓

Addiere die DZB wie natürliche Zahlen ohne Rücksicht auf das Komma!

↓

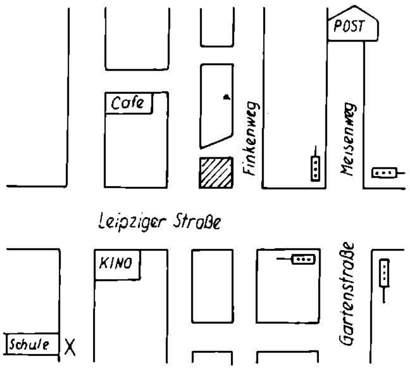
Setze in der erhaltenen Summe ein Komma so, daß es genau unter den Kommas der einzelnen Summanden steht!

▲6▲ Verändere nachstehende Vorschrift so, daß sie von einem Schüler, der **nicht** weiß, wie man das Quadrat einer Zahl bildet, verstanden und abgearbeitet werden kann! Gegeben sind zwei natürliche Zahlen a, b.

(1) Bilde das Quadrat der Zahl a! Das ergibt x.
(2) Bilde das Quadrat der Zahl b! Das ergibt y.
(3) Berechne die Summe aus x und y!

▲7▲ Am Punkt x fragt dich jemand nach dem Weg zur Post.
Wie würdest du ihm antworten (Bild 3)?

Bild 3



Bei all den angegebenen Aufgaben treten *Folgen von Anweisungen* auf. Die ersten drei Aufgaben enthielten die Forderung, die einzelnen Anweisungen in eine *richtige* Reihenfolge zu bringen. Durch die Aufgabe 4 wurde der Leser aufgefordert, selbst eine Vorschrift abzuarbeiten. Damit nun alle Leser, die die Aufgabe 4 lösen, zum gleichen Resultat gelangen, ist es erforderlich (Rechenfehler sind natürlich ausgeschlossen), daß die einzelnen *Schritte eindeutig* und für den Ausführenden (Mensch/Maschine) hinreichend *elementar* formuliert sind.

In den Anweisungen zur Addition von Dezimalbrüchen (Aufgabe 5) habt ihr sicher den Fehler gefunden. Der erste Schritt ist nicht eindeutig formuliert. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:

Es sollen die Zahlen 23,91 und 0,632 nach der Vorschrift aus Aufgabe 5 addiert werden.

Entsprechend der ersten Anweisung kann man die Zahlen z. B. so 23,91, aber
0,623
auch so 23,91, aber auch so 23,91 , ...
0,632 0,632
untereinander schreiben.

Das wollen wir nicht zulassen. Wir müssen die erste Anweisung *eindeutig* formulieren. Hier unser Vorschlag:

> Schreibe die DZB stellengerecht untereinander!

Der Vorschlag setzt allerdings voraus, daß *stellengerecht* dem Nutzer der Vorschrift bekannt ist.

Beim Lösen der Aufgabe 6 wird deutlich, was es heißt, die einzelnen Schritte so zu formulieren, daß sie für den Ausführenden hinreichend *elementar* sind. ‚So wissen Schüler unterer Klassen oft nicht, was man unter *Bilde das Quadrat der Zahl a*! versteht.

Verändert man die Formulierung und sagt: *Multipliziere die Zahl a mit sich selbst!*, so wissen auch sie, was gemeint ist.

Mit der Aufgabe 7 wird der Leser aufgefordert, selbst eine Folge von endlich vielen Anweisungen anzugeben, damit der Ortsunkundige den Weg von der Schule zur Post findet.

Folgen von endlich vielen, eindeutig formulierten und für einen Ausführenden hinreichend elementaren Anweisungen, wie wir sie in obigen Aufgaben kennengelernt haben, nennt man *Algorithmen.*

Algorithmen müssen stets gewährleisten, daß man mit ihnen ein Problem (z. B. eine Konstruktion, das Lösen einer Gleichung, die Zubereitung einer Speise usw.) in endlich vielen Schritten löst. Aus diesem Grunde darf z. B. eine Anweisung wie *Addiere alle natürlichen Zahlen!* **nicht** in einem Algorithmus auftreten.

Einer der ältesten uns bekannten Algorithmen ist der sogenannte *Euklidische Algorithmus* (Euklid, geb. um 365 v. u. Z., gest. um 300 v. u. Z.) zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von zwei natürlichen Zahlen a und b ($a > b$, $b \neq 0$) durch schrittweise Division mit Rest.

Im ersten Schritt ist b Divisor und a Dividend. In jedem folgenden Schritt wird der Divisor des vorhergehenden zum Dividenden und der Rest des vorhergehenden Schrittes zum Divisor. Der letzte von 0 verschiedene Rest (bzw. der zuletzt auftretende Divisor) ist dann der größte gemeinsame Teiler der Zahlen a und b. Das hört sich sehr kompliziert an, ist es aber gar nicht, wenn man folgendes Beispiel betrachtet.

$a = 273$; $b = 104$
273 : 104 = 2 Rest 65
104 : 65 = 1 Rest 39
65 : 39 = 1 Rest **13**
26 : 13 = 2 Rest 0

13 ist der größte gemeinsame Teiler von 273 und 104.

Da der Rest immer kleiner als der Divisor ist, bricht das Verfahren nach endlich vielen Schritten ab.

▲ 8 ▲ a) Ermittle den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 1785 und 858!
b) Ermittle den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 2730; 3289 und 4199!

▲ 9 ▲ Für welche der folgenden Tätigkeiten lassen sich Algorithmen angeben?
a) Messen eines Winkels mit Hilfe des Winkelmessers;
b) Multiplikation zweier Dezimalbrüche;
c) Fortgesetztes Verdoppeln der Zahl 3;
d) Schreiben eines Romans;
e) Überqueren einer Straße;
f) Annähen eines Knopfes;
g) Konstruktion eines Dreiecks aus drei gegebenen Seiten;
h) Berechnen des Flächeninhalts eines Quadrates bei gegebener Seitenlänge a;
i) Binden einer Schleife.

▲ 10 ▲ Welche der folgenden Vorschriften ist ein Algorithmus?
a) Gegeben sind zwei natürliche Zahlen a, b ($0 < a < b$). Zu berechnen ist ein Term nach folgender Vorschrift.
(1) Multipliziere a mit b! Das ergibt x.
(2) Quadriere die eine Zahl! Das ergibt y.
(3) Multipliziere x und y und schreibe das Ergebnis auf!
b) Gegeben ist eine Gleichung der Form $\frac{a}{x} = b$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $x \neq 0$), die zu lösen ist.
Wir lösen die Gleichung folgendermaßen:
(1) Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit x.
(2) Wir dividieren nun beide Seiten der entstandenen Gleichung $a = b \cdot x$ durch b.
(3) Wir erhalten $x = \frac{a}{b}$ als einzige Lösung.
c) Gegeben ist eine Textaufgabe, die zu lösen ist. Wir lösen die Textaufgabe in folgender Weise:
(1) Schreibe gegebene und gesuchte Größen heraus!
(2) Stelle eine Gleichung auf!
(3) Löse die Gleichung!
(4) Führe die Probe am Text durch!
(5) Formuliere einen Antwortsatz!

Lediglich die Schrittfolge zur Lösung einer Gleichung des Typs $\frac{a}{x} = b$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $x \neq 0$) stellt einen Algorithmus dar. Die Vorschrift 10 a) ist nicht eindeutig formuliert (Schritt (2)!) und die Schrittfolge 10 c) gibt nur eine grobe Orientierung zur Lösung einer Textaufgabe. Wenn man die einzelnen Schritte abarbeitet, gelangt man aber nicht zwingend zur Lösung einer gegebenen Textaufgabe. Damit ist eine wichtige Eigenschaft eines Algorithmus – in endlich vielen Schritten mit Sicherheit zum Resultat zu gelangen – nicht erfüllt.

Wie wir sehen, gibt es im täglichen Leben, aber auch in der Mathematik, für viele zu lösende Aufgabenklassen Algorithmen. Ist uns für die Lösung einer Aufgabenklasse ein Algorithmus bekannt, so können oft Computer helfen, Aufgaben zu lösen. Sie arbeiten im Vergleich zum Menschen äußerst schnell. Von selbst *können* sie aber sehr wenig. Um einen Computer zu nutzen, muß man den Algorithmus zur Lösung eines Problems in für den Computer hinreichend elementare Anweisungen zerlegen. Außerdem ist es erforderlich, die Anweisungen in einer für den Computer verständlichen Sprache zu verfassen. Diesen Vorgang nennt man *Programmieren.* Das entstandene Ergebnis heißt Programm. Erst wenn man einem Computer ein Programm *eingibt*, ist er in der Lage, unermüdlich und beliebig oft dieses Programm abzuarbeiten.

Schleicht sich jedoch in das Programm ein Fehler ein, so steht er still oder liefert die unsinnigsten Resultate.

Ohne hier auf Einzelheiten weiter einzugehen, wollen wir ein mögliches Computerprogramm für die Vorschrift der Aufgabe 4 in der Programmiersprache BASIC vorstellen:

```
10 INPUT "1. Zahl:"; A      } Eingabe
20 INPUT "2. Zahl:"; B      } von Zahlen
30 INPUT "3. Zahl:"; C      }
40 LET D = A + B            } Verarbeitung
50 LET E = D/2              } der Zahlen
60 LET F = E*C              }
70 PRINT "Ergebnis:"; F     } Ausgabe
80 END                      } des Resultats
```

Erklärung: input (engl.) – Eingabe,
let (engl.) – sei,
print (engl.) – drucken
/ Sumbol für die Division
* Symbol für die Multiplikation

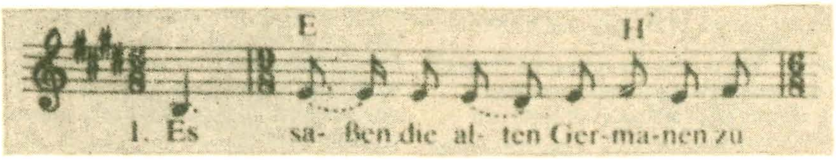
Durch die Anweisung "LET d = A + B" wird der Variablen D der Wert von A + B zugeordnet.

Alle in Anführungszeichen geschriebenen Texte sind für den Computer und seine Arbeit unbedeutend. Man könnte auf diese Texte auch verzichten. Sie sind aber für den Nutzer eine große Hilfe, damit er z. B. weiß, welche Zahl er wann einzugeben hat. Die in Anführungszeichen geschriebenen Texte des Programms erscheinen nämlich auf dem Bildschirm, der dem Computer angeschlossen ist. *L. Flade*

Ostereiereien

Egon und Fritz färben insgesamt 30 Ostereier und teilen diese so auf, daß jeder gleichviel erhält. Egon hat eine gleiche Anzahl blauer und violetter Eier und halbsoviel rote wie blaue. Fritz hat eineinhalb mal soviel violette Eier wie rote und blaue zusammen. Er hat 2 rote Eier mehr als Egon. Wieviel rote, blaue und violette Eier haben sie gefärbt? *Alice Kraneis, Bernburg*

Läßt sich der Zufall berechnen?

Teil 1

Bei einem Wurf mit einem Spielwürfel ist die gewürfelte Augenzahl ein zufälliges Ergebnis, das in der Wahrscheinlichkeitsrechnung Elementarereignis genannt und als Menge aufgefaßt wird. Die möglichen Elementarereignisse beim einmaligen Würfeln sind also $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ und $\{6\}$. Wird eine 6 gewürfelt, so sagen wir, das Elementarereignis $\{6\}$ ist eingetreten. Mit einem Würfel bei einem Wurf eine ungerade Augenzahl, eine 1 oder 3 oder 5 zu würfeln, ist gleichbedeutend mit dem Eintreten des Ereignisses $U = \{1\} \cup \{3\} \cup \{5\} = \{1; 3; 5\}$, der Vereinigung der Elementarereignisse $\{1\}$, $\{3\}$ und $\{5\}$.

Das Würfeln wird als zufälliger Versuch bezeichnet. Allgemein ist ein zufälliger Versuch ein beliebig oft wiederholbarer Versuch, dessen Ergebnis im Bereich gewisser Möglichkeiten ungewiß ist.

Definition 1: Die endlich vielen möglichen Ausgänge eines zufälligen Versuches heißen *Elementarereignisse* und werden mit E_1, E_2, ..., E_v bezeichnet. Jede Untermenge von $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_v = \Omega$, der Vereinigung aller Elementarereignisse, heißt *Ereignis*. Das bei jedem Versuch eintretende Ereignis Ω heißt *sicheres Ereignis* und das bei keinem Versuch eintretende Ereignis $\varnothing$, das Ereignis „leere Menge“, heißt *unmögliches Ereignis*.

Die Germanen benutzten zum Würfeln den Talus, den auch als Würfel- oder Sprungbein bezeichneten Knochen der Fußwurzel der Säuger, der beim Fallen auf eine Unterlage vier verschiedene Lagen einnehmen kann. Der römische Geschichtsschreiber Publius Cornelius Tacitus berichtet um das Jahr 100 u. Z. über die Germanen: „Dem Würfelspiel huldigen sie merkwürdigerweise in voller Nüchternheit, ... daß sie, wenn sie alles andere verspielt haben, mit dem letzten entscheidenden Wurfe um ihre Freiheit und um ihre eigene Person kämpfen ... Sklaven, die sie auf diese Weise gewonnen haben, verkaufen sie weiter ...“1)

Bild 1
Würfelbeine des Hausschweins

Tacitus' Schilderung der Spielleidenschaft der Germanen ist sicher übertrieben und das auf dieser Schilderung fußende, zum Teil abgedruckte Lied entstellt diese weiter.

Die Römer benutzten zum Würfeln bereits den kubischen Würfel. Ihnen war schon bekannt, daß man durch Ausgießen eines Würfels mit Blei an geeigneter Stelle dem „Glück“ beim Würfelspiel auf unlautere Weise nachhelfen kann.2) Betrug mit gezinkten Würfeln wurde im Mittelalter hart bestraft, wie die Fotokopie einer Textstelle aus einem 1569 in Leipzig gedruckten Sachsenspiegel (Rechtsbuch) belegt.

Zur Einführung weiterer Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und als Zahlenmaterial für einige Aufgaben werden die Versuchsergebnisse bei wiederholtem Würfeln mit einem für diesen Beitrag angefertigten gezinkten Würfel benutzt: Bei den ersten 100 Würfen mit diesem Würfel trat das Elementarereignis $\{6\}$ 42mal ein. Als ein zweites und danach ein drittes Mal 100 Würfe ausgeführt wurden, trat das gleiche Elementarereignis 47 und nochmals 47mal ein, bei diesen 300 Würfen also im Mittel bei 100 Würfen

$$\frac{45 + 47 + 47}{3} = 46,\overline{3}$$ und im Mittel bei einem Wurf $$\frac{45 + 47 + 47}{300} = 0,46\overline{3}\text{mal}.$$

Nach insgesamt 1000 Würfen war insgesamt 85mal $\{1\}$, 88mal $\{2\}$, 89mal $\{3\}$, 131mal $\{4\}$, 151mal $\{5\}$ und 456mal $\{6\}$ eingetreten. In der genannten Reihenfolge traten diese Elementarereignisse im Mittel bei einem Wurf

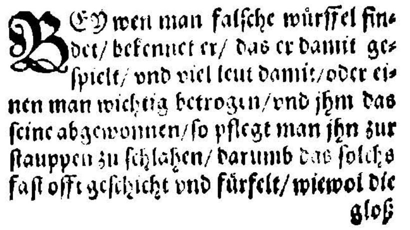
$h_1 = 0,085, h_2 = 0,088,\ h_3 = 0,089,$
$h_4 = 0,131,\ h_5 = 0,151$ und $h_6 = 0,456$

mal ein. Dabei gilt $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6 = 1$. Bei diesen 1000 Würfen wurden insgesamt $85 + 89 + 151$mal ungerade Augenzahlen gewürfelt. Das Ereignis $U = \{1; 3; 5\}$ trat im Mittel bei einem Wurf

$$H(U) = \frac{85 + 89 + 151}{1000} = 0,325\text{mal ein.}$$

Die experimentell ermittelten Zahlen h_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ und $H(U)$ heißen relative Häufigkeiten für das Eintreten eines Elementarereignisses E_i bzw. des Ereignisses U bei den mit dem gezinkten Würfel ausgeführten 1000 Würfen. Die relative Häufigkeit für das Elementarereignis $\{6\}$ beim Würfeln mit dem gezinkten Würfel beträgt bei den ersten 100 Würfen 0,45, bei den ersten 300 Würfen $0,45\overline{3}$ und bei allen 1000 Würfen 0,456.

Bild 2
Abschnitt „Falsche Würfel“ aus dem 1569 gedruckten Sachsenspiegel, in Besitz des Stadtarchivs Döbeln



Falſche Würffel.

BEY wen man falſche würffel findet/ bekennet er/ das er damit geſpielt/ vnd viel leut damit/oder einen man wichtig betrogen/vnd jhm das ſeine abgewonnen/ſo pflegt man jhn zur ſtauppen zu ſchlahen/ darumb das ſolchs faſt offt geſchicht vnd fürfelt/ wiewol die
gloß

Für wiederholtes Ausführen desselben zufälligen Versuches wird erklärt:

$$\begin{array}{l} \text{relative} \\ \text{Häufigkeit} \\ \text{für Ereignis } A \end{array} = \frac{\text{Zahl der Versuche mit eingetretenem Ereignis } A}{\text{Zahl aller Versuche}}$$

Wird die relative Häufigkeit für das Eintreten eines Ereignisses A bei einem zufälligen Versuch mehrfach ermittelt, so schwanken diese relativen Häufigkeiten um eine Zahl, die als Wahrscheinlichkeit (engl. probability; franz. probabilité) $P(A)$ für das Eintreten des Ereignisses A bei diesem zufälligen Versuch bezeichnet wird. Es gilt $0 \leqq P(A) \leqq 1$. Die ermittelten relativen Häufigkeiten sind im allgemeinen um so bessere Näherungswerte für $P(A)$, je länger die zugehörigen Versuchsfolgen sind, aus um so mehr Wiederholungen des zufälligen Versuchs die Versuchsfolgen bestehen. Diese experimentell erkannten Aussagen sind zutreffend, obgleich z. B. beim Würfeln mit einem nicht gezinkten Würfel auch die folgende genügend lange Versuchsfolge denkbar ist: Bei jedem Wurf tritt stets das Elementarereignis $\{6\}$ ein. Die relative Häufigkeit für das Elementarereignis $\{6\}$ ist hier 1 und die relativen Häufigkeiten für alle anderen Elementarereignisse sind 0. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung bestätigt und präzisiert diese durch Experimente erhaltenen Ergebnisse mittels des sogenannten „Gesetzes der großen Zahlen“ (Jacob Bernoulli, 1654 bis 1705, schweiz. Math.): Der Betrag der Differenz aus Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit für das gleiche Ereignis nähert sich mit zunehmender Gewißheit unbegrenzt der 0, falls dazu nur die relative Häufigkeit zu immer längeren Versuchsfolgen benutzt wird. („Mit zunehmender Gewißheit“ bedeutet exakt „mit gegen 1 strebender Wahrscheinlichkeit“. – Der Leser vergleiche diese Mitteilung mit den Betrachtungen über den radioaktiven Zerfall im Teil III dieses Beitrages, voraussichtlich im Heft 5/90.)

Da die mittels einer genügend langen Versuchsfolge bestimmte relative Häufigkeit für ein Ereignis A im allgemeinen stets ein brauchbarer Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ ist, kann auf Grund der beschriebenen 1000 Versuche für das einmalige Würfeln mit dem gezinkten Würfel $P(E_i) = p_i = h_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ gesetzt werden. (Bei experimentell bestimmten Wahrscheinlichkeiten ist es üblich, statt des Zeichens $\approx$ das Gleichheitszeichen zu benutzen.)

Die Betrachtungen über die relative Häufigkeit beim Würfeln mit dem präparierten Würfel und die Beziehung zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit lassen erkennen, daß jede Wahrscheinlichkeit die folgenden Grundannahmen erfüllt.

Grundannahmen (Axiome):

Jedem Elementarereignis E_i $(i = 1, 2, \ldots, v)$ eines zufälligen Versuches ist eindeutig als Wahrscheinlichkeit eine Zahl
$P(E_i) = p_i$ mit $0 \leqq p_i \leqq 1$ zugeordnet, wobei gilt $p_1 + p_2 + \ldots + p_v = 1$.

Jedem Ereignis A eines zufälligen Versuchs ist als Wahrscheinlichkeit die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller zu A gehörenden Elementarereignisse zugeordnet.

Ein sich auf Axiome stützender exakter Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde erstmals von A. N. Kolmogorow (sowj. Math., geb. 1903) vollzogen.

Aus unseren Grundannahmen folgt insbesondere, daß die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses $\Omega = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_v$
$P(\Omega) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_v)$
$= p_1 + p_2 + \ldots + p_v = 1$ ist.

Für den gezinkten Würfel ergibt sich aus den Grundannahmen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A = \{5; 6\}$ zu
$P(A) = p_5 + p_6 = 0{,}151 + 0{,}456 = 0{,}607$.

Die Elementarereignisse eines zufälligen Versuchs heißen gleichwahrscheinlich, wenn $p_1 = p_2 = \ldots = p_v$ gilt. In diesem Fall folgt aus den Grundannahmen $P(E_i) = p_i = \frac{1}{v}$ und es gilt:

$$\begin{array}{l} \text{Wahrscheinlichkeit} \\ \text{für Ereignis } A \end{array} = \frac{\begin{array}{l}\text{Anzahl der zu } A \\ \text{gehörenden} \\ \text{Elementarereignisse}\end{array}}{\begin{array}{l}\text{Anzahl aller} \\ \text{Elementarereignisse}\end{array}}$$

Mit diesem Spezialfall ergibt sich der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff, den P. Laplace (franz. Math., 1749 bis 1827), als erster formelmäßig als Verhältnis der für ein Ereignis günstigen Möglichkeiten zu der aller Möglichkeiten erfaßte. Bei einem nicht präparierten, fehlerfreien Würfel, Idealwürfel genannt, kann angenommen werden, daß alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind und daß damit

$P(E_i) = p_i = \frac{1}{6}$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ gilt.

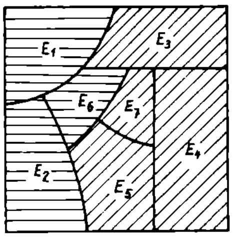
Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $U = \{1; 3; 5\}$ bei einem Idealwürfel ist also $P(U) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Bei Anwendungen in der Volkswirtschaft werden Wahrscheinlichkeiten häufig als Prozentsätze $P_{\bullet}(A)$ angegeben. Dabei gilt $P_{\bullet}(A) = P(A) \cdot 100\,\%$. Beim präparierten Würfel ist die Wahrscheinlichkeit in Prozent für das Eintreten von $\{1\}$ also 8,5 %. Die Maßzahl 8,5 gibt hier an, wie oft im Mittel bei 100 Würfen eine 1 gewürfelt wird.

Aufgabe 1: In eine Schachtel wurden die 28 Steine eines Dominospieles geschüttet. Es soll ohne Hinzusehen ein Stein herausgenommen werden. Dabei soll für jeden in der Schachtel befindlichen Stein die Wahrscheinlichkeit gezogen zu werden, gleich groß sein. Berechne die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ und $P(D)$, wenn für die Ereignisse A, B, C und D gilt:

A – Die Summe aller Augen des gezogenen Steines ist kleiner als 5.
B – Die Summe aller Augen des gezogenen Steines ist 5.
C – Die Summe aller Augen des gezogenen Steines ist 6.
D – Der gezogene Stein besitzt auf beiden Hälften gleich viel Augen.

Zur Veranschaulichung kann man die Elementarereignisse und Ereignisse eines zufälligen Versuches in einem sogenannten Venn-Diagramm darstellen (Bild 3):

Bild 3



Ordnet man dem sicheren Ereignis $\Omega = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_v$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(\Omega = 1$ die Fläche eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 dm zu, so kann dem Elementarereignis E_i $(i = 1, 2, \ldots, v)$ eine Teilfläche dieses Quadrates mit dem Flächeninhalt $P(E_i)\,\mathrm{dm}^2$ zugeordnet werden. Verschiedenen Elementarereignissen werden Flächen zugeordnet, die keine inneren Punkte gemeinsam haben.

Jedem Ereignis A wird die Fläche zugeordnet, die die Flächen aller zu A gehörenden Elementarereignisse gerade bedeckt. Nach den Grundannahmen ist damit der Flächeninhalt der dem Ereignis A zugeordneten Fläche $P(A)\,\mathrm{dm}^2$. In Bild 3 ist ein solches mögliches Venn-Diagramm für $v = 7$ dargestellt. Die schräg schraffierte Fläche gehört zum Ereignis $A = E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_7$ und es gilt
$P(A) = P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_7)$.

Die waagerecht schraffierte Fläche gehört zum zu A bezüglich Ω komplementären Ereignis $\overline{A} = E_1 \cup E_2 \cup E_6$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Definition 2: Zwei Ereignisse eines zufälligen Versuchs heißen *komplementäre Ereignisse*, falls das eine genau dann eintritt, wenn das andere nicht eintritt.

Für komplementäre Ereignisse A und $\overline{A}$ gilt also $A \cap \overline{A} = \emptyset$ und $A \cup \overline{A} = \Omega$.

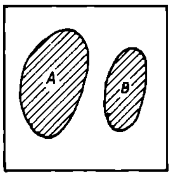
Satz 1: Sind A und $\overline{A}$ komplementäre Ereignisse eines zufälligen Versuchs, so gilt $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Definition 3: Zwei zum gleichen zufälligen Versuch gehörende Ereignisse A und B heißen *unvereinbar*, wenn es kein Elementarereignis E_i $(i = 1, 2, \ldots, v)$ gibt, für das gleichzeitig $E_i \subset A$ und $E_i \subset B$ gilt.

Für zwei unvereinbare Ereignisse A und B gilt $A \cap B = \emptyset$. Insbesondere sind zwei komplementäre Ereignisse und zwei verschiedene Elementarereignisse unvereinbar.

Satz 2: Für zwei unvereinbare Ereignisse A und B eines zufälligen Versuchs gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (siehe Bild 4).

Bild 4



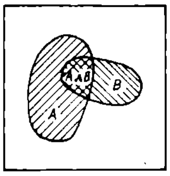
Aufgabe 2: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus der Schachtel der Aufgabe 1 einen Stein mit verschiedenen Augenzahlen auf beiden Hälften zu ziehen?

Aufgabe 3: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus der Schachtel der Aufgabe 1 einen Stein mit insgesamt mehr als 6 Augen zu ziehen?

Aufgabe 4: Welche Paare der in Aufgabe 1 genannten Ereignisse sind nicht unvereinbar?

Sind A und B zwei nicht unvereinbare Ereignisse, so gibt es mindestens ein Elementarereignis E_i $(i = 1, 2, \ldots, v)$ mit $E_i \subset A$ und $E_i \subset B$. Zwei solchen Ereignisse A und B sind im Venn-Diagramm Flächen zugeordnet, die ein Flächenstück gemeinsam haben. Zum gemeinsamen, doppelt bedeckten Flächenstück gehört das Ereignis $A \cap B$ (Bild 5).

Bild 5



Satz 3: Für zwei nicht unvereinbare Ereignisse A und B eines zufälligen Versuchs gilt
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Aufgabe 5: Berechne die Wahrscheinlichkeit, daß der aus der in Aufgabe 1 betrachteten Schachtel gezogene Stein insgesamt weniger als 5 Augen oder auf beiden Seiten gleich viele Augen hat!

W. Träger

---

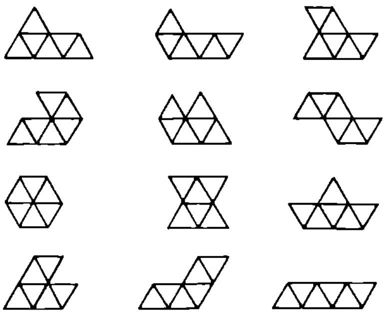
[1] P. C. Tacitus, Germania (Lateinisch/deutsch). Phillipp Reclam jun., Leipzig 1976

[2] R. Thiele, Die gefesselte Zeit. Urania-Verlag, Leipzig/Jena/Berlin 1987

Noch einmal: Köpfchen, Köpfchen

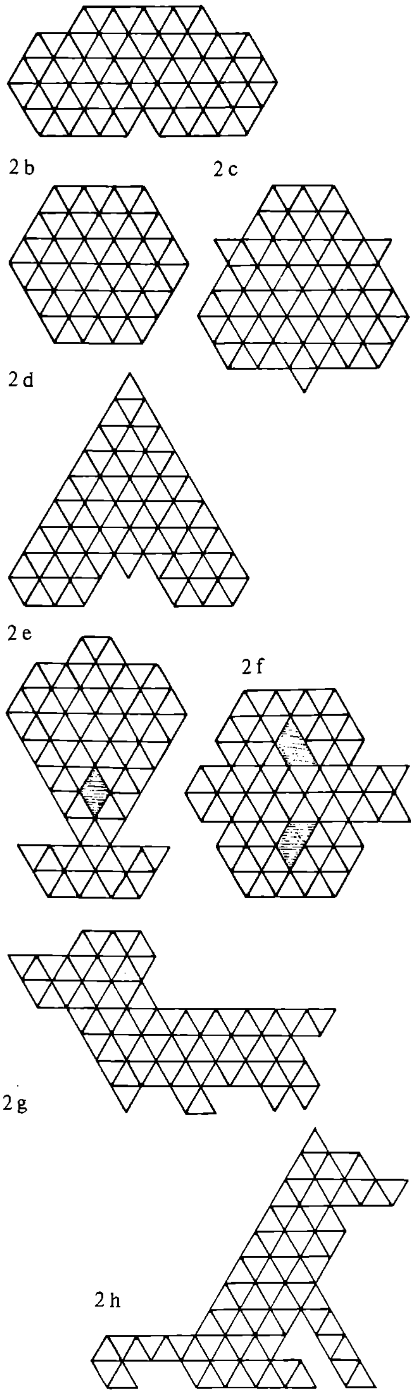
Ebene Legespiele regen immer wieder viele Leser zum Knobeln an. In *alpha*, Heft 4 und 5 (1983) haben wir die Spiele Hexatrion, Pentomino und Tangram beschrieben und zahlreiche Zuschriften erhalten.
Beim Spiel Hexatrion sollen aus 12 Elementen (Bild 1), von denen jedes aus sechs gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt ist, ebene Figuren gelegt werden. Dabei darf jedes der 12 Elemente höchstens einmal verwendet werden. Man darf die Spielelemente auch umdrehen (spiegeln)!

Bild 1



Folgende Aussage ist wahr:
Wenn eine ebene Figur beim Hexatrion zusammengesetzt werden kann, so läßt sich diese Figur in kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegen. Dabei ist die Anzahl derartiger Dreiecke durch 6 teilbar und kleiner oder gleich 72.
Die Teilbarkeit durch 6 ist eine *notwendige Bedingung* dafür, daß sich Figuren aus den Hexatrion-Elementen zusammensetzen lassen. Wir können die Aussage auch so formulieren:
Läßt sich eine ebene Figur nicht in 6n kongruente gleichseitige Dreiecke (mit $1 \leqq n \leqq 12$) *zerlegen, so kann sie mit Hexatrion nicht zusammengebaut werden.*
Ihr könnt euch leicht Figuren überlegen, die aus $6n$ kongruenten gleichseitigen Dreiecken ($1 \leqq n \leqq 12$) bestehen und die ihr mit den Hexatrion-Elementen nicht legen könnt. Die angegebene Bedingung ist also *nicht hinreichend*!
Zu vorgegebenen Figuren kann es mehrere Lösungen geben!
Es kann passieren, daß sich beim Aufzeichnen Flüchtigkeitsfehler oder Druckfehler einschleichen. Gelegentlich überlegt man sich auch Figuren, bei denen es sich beim genauen Nachprüfen erweist, daß sie nicht aus einer durch 6 teilbaren Zahl von Dreiecken bestehen. Die oben angeführte Bedingung ist dann verletzt. Alle Bemühungen, diese Figuren zu legen, sind somit von vornherein zum Scheitern verurteilt.
In Bild 2 sind acht Figuren dargestellt, versucht bitte, sie aus den zwölf Hexatrion-Elementen zu legen. Zwei dieser Figuren hat Herr Schubert aus Pfaffroda unserer Redaktion vorgeschlagen!

Bild 2 a



2 b
2 c
2 d
2 e
2 f
2 g
2 h

Beim Pentomino (Bild 3) sind aus 12 Elementen, die jeweils aus fünf gleichgroßen Quadraten bestehen, Figuren zu konstruieren.
Formuliert wieder eine notwendige Bedingung dafür, daß eine ebene Figur mit diesem Spiel gelegt werden kann. Ist diese Bedingung auch hinreichend?

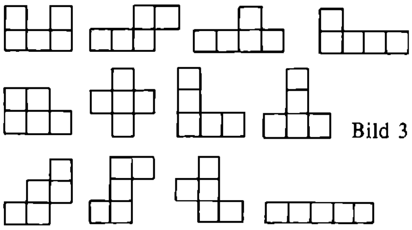


Bild 3

Viel Spaß wird euch sicher das Zusammensetzen der sechs Schachfiguren (Bild 4) und der stilisierten Tierfiguren Kamel, Elefant, Hirsch und Hahn (Bild 5) bereiten.

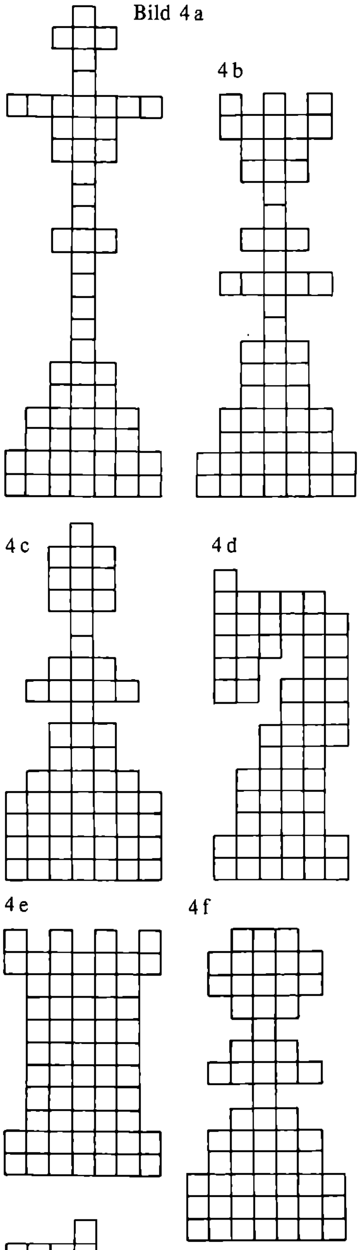


Bild 4 a
4 b
4 c
4 d
4 e
4 f

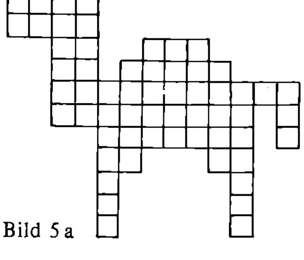


Bild 5 a

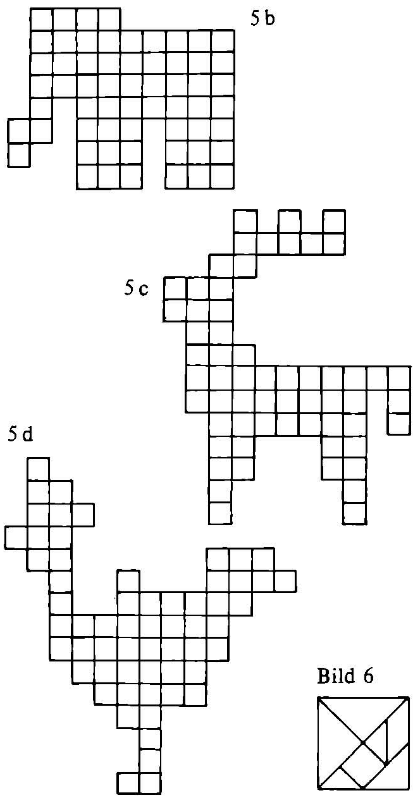


Bild 6

Die Elemente des Spieles Tangram findet ihr noch einmal in Bild 6.
Damit könnt ihr euren kleinen *Knobelzoo* vervollständigen (Bild 7).

Bild 7 a

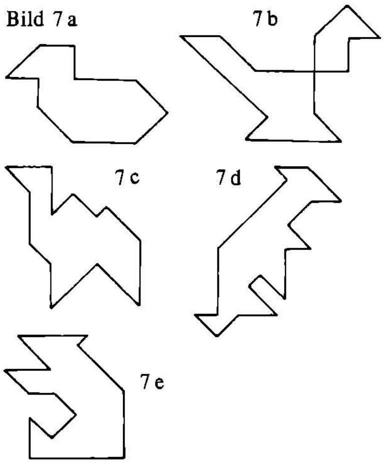
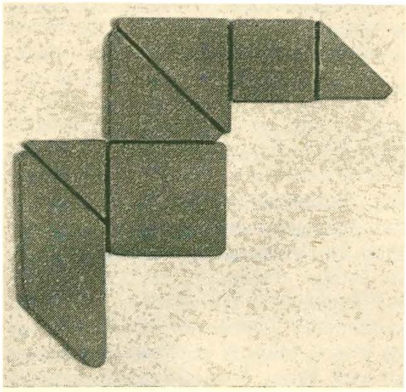
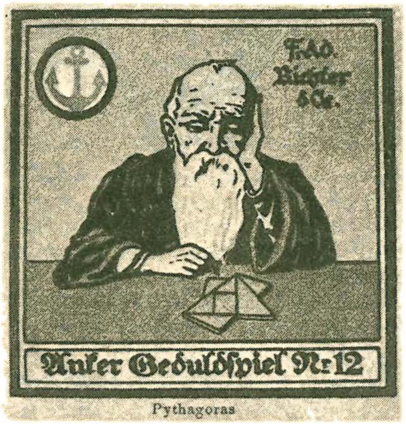


Bild 8



Ein ganz ähnliches Spiel aus der Zeit der Jahrhundertwende ist in Bild 8 dargestellt. Der nachdenkliche alte Herr (Bild 9) entsprang dabei der Phantasie des Gestalters und ist sicher nicht Pythagoras!

Bild 9



Wir empfehlen euch, die Elemente der drei Spiele auf Pappe, Plaste oder Sperrholz zu übertragen und auszuschneiden bzw. auszusägen. Bestimmt findet ihr dann auch weitere schöne Figuren.

U. und W. Schmidt

Buchtips für Schachfreunde

David Bronstein

Bronsteins Schachlehre

Wege zum erfolgreichen Spiel
247 Seiten, 202 Diagramme, Leinen
Bestell-Nr. 671 783 2 Preis: 16,50 M

Mark Taimanow

Gewinnen mit Sizilianisch

160 Seiten, 124 Diagramme, Leinen
Bestell-Nr. 671 787·5 Preis: 12,80 M

A. Suetin

Russisch bis Königsgambit

Bestell-Nr. 671 764 8 Preis: 14,00 M

M. Taimanow

Königsindisch

Bestell-Nr. 671 765 6 Preis: 14,00 M

A. Krogius/A. Mazukewitsch

Marshall-Angriff

Bestell-Nr. 671 785 9 Preis: 15,50 M

A. Suetin

Schachlehrbuch für Fortgeschrittene

Bestell-Nr. 671 791 2 Preis: 16,00 M

Eine Aufgabe von Prof. Arthur Engel

J. W. Goethe Universität Frankfurt/BRD
Vorsitzender der Jury der XXX. IMO

Es sei $b(0) = 1$, und für $n \geqq 1$ sei $b(n)$ die Anzahl der Zerlegungen von n in lauter Zweierpotenzen. Z. B.:

$$
\begin{aligned}
(7) &= 4+2+1 = 4+1+1+1\\
&= 2+2+2+1 = 2+2+1+1+1\\
&= 2+1+1+1+1+1\\
&= 1+1+1+1+1+1+1.
\end{aligned}
$$

D. h., $b(7) = 6$. Leite eine Rekursion für $b(n)$ her.

Hinweis: Für gerade und ungerade n sind die Formeln verschieden. Man kann die Richtigkeit der Formeln prüfen durch Berechnung von $b(4) = 390$.

Kurzbiographie

Arthur Engel wurde am 21. 1. 1928 geboren, studierte 1947 bis 1952 Mathematik und Physik an der TH Stuttgart. Danach lehrte er 18 Jahre lang Mathematik am Karls-Gymnasium in Stuttgart.

Er war mit seiner Stellung sehr zufrieden, so daß er nur schweren Herzens und nach guten Zureden von Freunden 1970 den Ruf als Professor an die PH Ludwigsburg annahm. 1972 nahm er den Ruf als Professor für Didaktik der Mathematik an die Universität Frankfurt an. Neben seinen Schwerpunkten Stochastik und Algorithmik trainiert er seit 1977 die IMO-Mannschaft der BRD. Mit wenigen Ausnahmen war er auch ihr Delegationsleiter.

In der Wissenschaft kann eine gute und fruchtbare Revolution nur dann durchgeführt werden, wenn man sich bemüht, sowenig wie möglich zu ändern, wenn man sich zunächst auf die Lösung eines engen, fest umrissenen Problems beschränkt. Der Versuch, alles Bisherige aufzugeben und willkürlich zu ändern, führt zu reinem Unsinn.

Werner Heisenberg

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade

(15.11.1989)

Olympiadeklasse 5

290521 Die leeren Felder im Bild sind so mit Zahlen 1, 2, 3, 4 auszufüllen, daß jede dieser Zahlen in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal vorkommt.

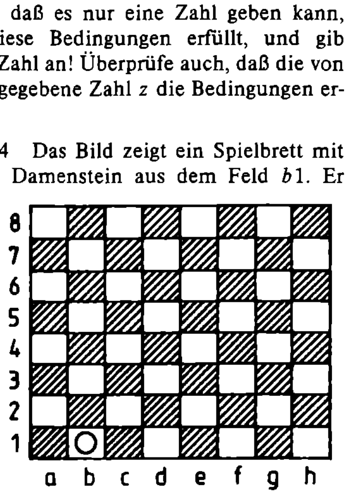
1			
		2	
	3		
			4

Gib alle solche Eintragungen an!
(Ein Beweis, daß es keine weiteren derartigen Eintragungen gibt, wird nicht verlangt.)

290522 Susanne besitzt 18 Spielwürfel. Einige davon sind rot, andere blau und die restlichen gelb. Sie stellt fest, daß die Anzahl der blauen Würfel um 1 kleiner ist als die doppelte Anzahl der roten Würfel. Weiter bemerkt sie, daß das Dreifache der Anzahl der roten Würfel, wenn man es um 1 vermehrt, gerade die Anzahl der gelben Würfel ergibt.
Zeige, daß Susannes Feststellungen nur bei einer einzigen Möglichkeit für die drei Anzahlen der roten, blauen und gelben Würfel wahr sein können! Gib diese drei Anzahlen an!

290523 Gesucht ist eine natürliche Zahl z, die folgende Bedingungen erfüllt:
(1) An der Zehnerstelle von z steht die Ziffer 0.
(2) Wenn man aus z durch Weglassen der Ziffer 0 an der Zehnerstelle eine neue Zahl z' bildet und dann die Summe $z + z'$ ausrechnet so erhält man 5174.
Zeige, daß es nur eine Zahl geben kann, die diese Bedingungen erfüllt, und gib diese Zahl an! Überprüfe auch, daß die von dir angegebene Zahl z die Bedingungen erfüllt!

290524 Das Bild zeigt ein Spielbrett mit einem Damenstein aus dem Feld $b1$. Er darf, wie im Damespiel üblich, nur stets einen Schritt nach links oben oder nach rechts oben gezogen werden.



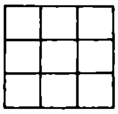
a) Ermittle die Anzahl aller Wege, auf denen der Stein von $b1$ bis zum Feld $g8$ gelangen kann!
b) Ermittle die Anzahl aller Wege, auf denen der Stein von $b1$ bis zum Feld $e8$ gelangen kann!

Olympiadeklasse 6

290621 Jana will an der Wandzeitung über Christians, Alexanders und Martins Erfolge in der außerunterrichtlichen Tätigkeit berichten. Sie befragt die drei Schüler und notiert sich folgendes:
(1) Alle drei Schüler nahmen an der Mathematikolympiade teil.
Einer dieser Schüler errang einen ersten Preis, ein weiterer von ihnen einen zweiten Preis und der restliche Schüler einen dritten Preis.
(2) Martin und der Gewinner des zweiten Preises betreiben gern Leichtathletik. Beide erkämpften beim letzten Sportfest je eine Silbermedaille.
(3) Im Wettbewerb der Jungen Rezitatoren schnitt der Gewinner des zweiten Preises bei der Mathematikolympiade besser als Christian ab.
(4) Der Gewinner des ersten Preises bei der Mathematikolympiade spielt in seiner Freizeit gern Schach; sein häufigster Gegner dabei ist Martin.
Als Jana ihre Notizen durchliest, stellt sie fest, daß sie gar nicht aufgeschrieben hat, welcher der drei Schüler welchen der drei Preise bei der Mathematikolympiade errang.
Stelle fest, ob sich das trotzdem aus den Notizen von Jana eindeutig ermitteln läßt! Wenn dies der Fall ist, so gib die Verteilung der drei Preise an!

290622 a) Zeichne in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm) die Punkte $A(2; 3)$, $B(6; 1)$, $C(6; 5)$ und $D(4; 6)$ ein! Verbinde die Punkte A, B, C und D so miteinander, daß ein Viereck entsteht! Verbinde dann in diesem Viereck den Punkt A mit dem Punkt C und den Punkt B mit D! Bezeichne den Schnittpunkt der Strecken AC und BD mit E!
b) Spiegele die erhaltene Figur an der Geraden durch C und D! Verbinde anschließend noch den Punkt A mit seinem Bildpunkt A' und den Punkt B mit seinem Bildpunkt B'!
c) Die insgesamt erhaltene Figur soll längs ihrer Strecke so durchlaufen werden, daß jede Strecke genau einmal in einem solchen Weg vorkommt. Wähle einen geeigneten Anfangspunkt und schreibe einen derartigen Weg auf!

290623 Das Bild zeigt ein Quadrat, das sich aus neun Feldern zusammensetzt. Die Seitenlänge jedes einzelnen Feldes sei 1 cm.

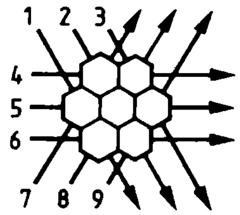


a) Ermittle die Anzahl aller derjenigen Rechtecke, die aus solchen Feldern bestehen!
b) Ermittle die Summe der Flächeninhalte aller dieser Rechtecke!

290624 a) In ein 3 × 3-Quadrat sollen die Zahlen 1 bis 9 so eingetragen werden, daß jede Zahl in genau ein Feld kommt, in jedes Feld genau eine Zahl kommt und daß sich in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen die gleiche Summe ergibt.
Das Bild zeigt dafür ein Beispiel.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Gib eine weitere Eintragung der geforderten Art an!
b) Als in der Mathematik-AG über solche Aufgaben gesprochen wurde, versuchte Peter, eine Aufgabe mit sechseckigen Feldern zu stellen. Er wählt die Figur aus dem Bild und stellt die Aufgabe: In die sieben Felder sollen die Zahlen 1 bis 7 so eingetragen werden, daß jede Zahl in genau ein Feld kommt, in jedes Feld genau eine Zahl kommt und daß sich in jeder der neun gekennzeichneten Linien die gleiche Summe ergibt.



Gibt es eine derartige Eintragung? Wenn das der Fall ist, gib ein Beispiel an! Wenn es unmöglich ist, eine solche Eintragung zu bilden, begründe das!

Olympiadeklasse 7

290721 Susi geht einkaufen. Von dem Geld, das ihr die Mutter gegeben hat, gibt sie 30 % im Fleischerladen aus; im Milchladen bezahlt sie mit einem Viertel desjenigen Betrages, den ihr die Mutter gegeben hatte. Im Gemüseladen braucht sie genau vier Fünftel desjenigen Betrages, den sie im Fleischerladen bezahlt hatte. Beim Bäcker schließlich gibt sie doppelt so viel Geld aus, wie sie danach als Restbetrag wieder mit nach Hause bringt. Von diesem Rest-

betrag gibt ihr die Mutter die Hälfte, nämlich genau 1,05 M, damit sie sich ein Softeis kaufen kann.
Ermittle den Geldbetrag, den Susi zu Anfang von der Mutter bekommen hatte!

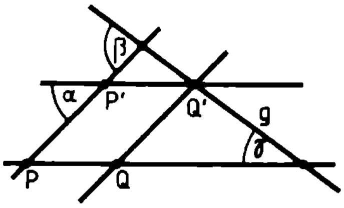
290722 An einem Fußballturnier nehmen genau 14 Mannschaften teil. Jede Mannschaft trägt gegen jede andere genau ein Spiel aus. Gewinnt eine Mannschaft, so erhält sie 2 Gewinnpunkte und ihre Gegnermannschaft 2 Verlustpunkte. Geht ein Spiel unentschieden aus, so erhält jede der beiden Mannschaften je einen Gewinnpunkt und einen Verlustpunkt.

a) Nach Abschluß aller Spiele kann man für jede Mannschaft die Summe aller derjenigen Punkte bilden, die sie erhalten hat, gleichgültig, ob es Gewinn- oder Verlustpunkte waren.
Weise nach, daß dabei jede der 14 Mannschaften dieselbe Summe erhält, und gib diese Summe an!

b) Nach Abschluß aller Spiele kann man auch die Summe aller Gewinnpunkte bilden, gleichgültig, welche Mannschaften sie erhalten haben. Weise nach, daß bei jeder Möglichkeit für die Ergebnisse der einzelnen Spiele des Turniers dieselbe Summe aller Gewinnpunkte entsteht, und gib diese Summe an!

c) An einem anderen Turnier mit denselben Regeln der Punktvergabe nahm eine andere Anzahl von Mannschaften teil. Wieder trug jede Mannschaft gegen jede andere genau ein Spiel aus. Kann als Summe aller Gewinnpunkte, wie in b) gebildet, dabei 432 entstehen? Begründe deine Antwort?

290723 Das Bild zeigt zwei Punkte *P*, *Q* und ihre Bildpunkte *P'*, *Q'* bei einer Verschiebung.
Durch *Q'* ist eine Gerade *g* gelegt.
Ferner seien α und β die Größen der im Bild gekennzeichneten Winkel.



Ermittle eine Größenangabe für γ, ausgedrückt durch α und β!

290724 a) Ermittle alle Möglichkeiten, an die Zahl 331 eine vierte Ziffer so anzufügen, daß die entstehende vierstellige Zahl durch 3 teilbar ist!

b) Stelle fest, ob man an die Zahl 331 eine Ziffer 6 oder mehrere Ziffern 6 so anfügen kann, daß die entstehende Zahl durch 3 teilbar ist!

c) Untersuche, ob es mehr als 250 dreistellige Zahlen gibt, aus denen durch Anfügen von vier Ziffern 7 jeweils eine durch 3 teilbare Zahl entsteht!

d) Beweise, daß man aus jeder dreistelligen Zahl durch Anfügen von einer Ziffer 7 oder von mehreren Ziffern 7 jeweils eine durch 3 teilbare Zahl erhalten kann!

Olympiadeklasse 8

290821 Über die Anzahl *x* der Schüler einer 8. Klasse ist folgendes bekannt:
(1) Die Zahl *x* ist eine Primzahl.
(2) Genau 9 Schüler dieser Klasse können schlittschuhlaufen.
(3) Genau 12 Schüler dieser Klasse können skilaufen.
(4) Genau 4 Schüler dieser Klasse können weder schlittschuhlaufen noch skilaufen.
Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Schülerzahl *x* eindeutig ermitteln läßt!

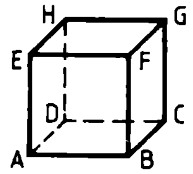
290822 a) Untersuche, ob die Gleichung

$$\left(\frac{x}{2}+2\right)(4x-7)=2x^2+\frac{x}{3}+1$$

eine natürliche Zahl *x* als eine Lösung besitzt!

b) In der genannten Gleichung soll die Zahl 7 so durch eine rationale Zahl *r* ersetzt werden, daß die entstehende Gleichung die Zahl $x = 1$ als eine Lösung besitzt.
Ermittle alle diejenigen rationalen Zahlen *r*, die diese Forderung erfüllen!

290823 Es sei *ABCDEFGH* ein Würfel mit beliebiger Kantenlänge (siehe Bild).



a) Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle DEB$!

b) Beweise, daß die Winkel $\sphericalangle AHB$ und $\sphericalangle BEC$ zueinander gleiche Größen haben!

290824 Das 4 × 4-Felder-Quadrat im Bild soll so in vier Teile zerlegt werden, daß folgende Forderungen erfüllt sind:
(1) Jedes Teil besteht aus genau vier Feldern.
(2) Jedes Teil ist derart zusammenhängend, daß sich je zwei Mittelpunkte seiner Felder durch einen Weg miteinander verbinden lassen, der ganz in dem Teil verläuft und nur aus Strecken besteht, von denen jede zu einer Seitenkante des Quadrates parallel ist.
(3) Jedes Teil enthält alle vier Zahlen 1, 2, 3, 4.

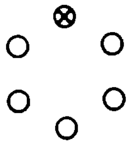
1	2	3	1
3	4	2	4
2	4	1	3
1	2	3	4

Gib alle Zerlegungen an, die diese Forderungen erfüllen! Weise nach, daß es keine weiteren derartigen Zerlegungen gibt!

Olympiadeklasse 9

290921 Kann man in einer Ebene eine Figur bilden, die aus genau 1989 Geraden besteht und dadurch mehr als 2 Millionen Schnittpunkte enthält?

290922 Auf die Felder des Bildes sollen drei weiße und drei schwarze Steine verteilt werden, auf jedes Feld ein Stein. Ferner wird eine natürliche Zahl $a \geqq 1$ fest vorgegeben. Nun soll, beginnend mit dem angekreuzten Feld, im Uhrzeigersinn umlaufend, Stein für Stein weitergezählt werden, von 1 bis *a*.



Der Stein, der dabei die Nummer *a* erhält, wird weggenommen. Anschließend beginnt das Abzählen wieder mit 1 bei dem im Uhrzeigersinn folgenden Stein, und wieder wird der Stein, der die Nummer *a* erhält, weggenommen. Dann schließt sich noch eine dritte Durchführung dieses Abzählens und Wegnehmens an. Bei diesen Fortsetzungen ist zu beachten, daß leere Felder nicht mitgezählt, sondern übersprungen werden.

a) Es sei $a = 4$. Wie sind zu Beginn die Steine zu verteilen, damit am Ende die drei weißen Steine übrigbleiben?

b) Jemand vermutet: „Wenn man *a* durch $a + 6$ ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine." Widerlegen Sie die Vermutung, indem Sie sie für $a = 4$ nachprüfen!

c) Beweisen Sie, daß es eine Zahl *z* gibt, mit der für jedes $a \geqq 1$ die folgende Aussage wahr ist: „Wenn man *a* durch $a + z$ ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine – auch bei Abzählbeginn im angekreuzten Feld – ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine."

290923 Man ermittle die kleinste natürliche Zahl *n*, für die (bei Darstellung im dekadischen Positionssystem) 5 sowohl Teiler der Quersumme von *n* als auch Teiler der Quersumme von $n + 1$ ist.

290924 Das Bild stellt sechs Punkte *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* in senkrechter Eintafelprojektion mit zugehörigem Höhenmaßstab dar. Die Punkte *C'*, *B'*, *D'* und ein vierter nicht bezeichneter Punkt sind in dieser Reihenfolge die Eckpunkte eines Quadrates mit der Seitenlänge $a = 6$ cm. Die Punkte *A'* und *F'* sind die Mittelpunkte der im Bild ersichtlichen Quadratseiten. Im Höhenmaßstab haben *A*, *F* von *B*, *D* den Abstand 3 cm und *C*, *E* von *B*, *D* den Abstand 6 cm.

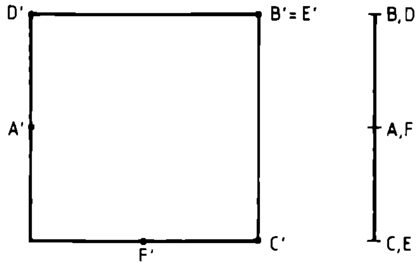
a) Zeichnen Sie in schräger Parallelprojektion, wobei mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ sei, eine Darstellung desjenigen Würfels, zu dem die Eckpunkte *B*, *C*, *D*, *E* gehören, und dazu die Punkte *A* und *F*!

b) Zeichnen Sie anschließend die Dreiecksflächen *ABC* und *DEF* durch Wiedergabe ihrer Seitenkanten sowie der Schnittstrecke *XY*, die diese beiden Dreiecksflächen miteinander gemeinsam haben! Berücksichtigen Sie in a) und b) die Sichtbarkeitsverhältnisse, indem Streckenteile, die durch eine davorliegende Dreiecksfläche verdeckt sind, gestrichelt wiedergegeben werden! Eine Verdeckung durch davorliegende Seitenflächen des Würfels soll dagegen nicht berücksichtigt werden (diese Flächen sind als „nicht vorhanden“ oder „durchsichtig“ zu betrachten).

Verdeutlichen Sie die sichtbaren Teile der Dreiecksflächen durch Schraffur, im Dreieck *ABC* parallel zu *CB*, im Dreieck *DEF* in dichterer Schraffur parallel zu *DE*!

c) Geben Sie für die Schnittstrecke *XY* eine Herleitung der – von Ihnen in b) verwendeten – Konstruktion der Bildpunkte von *X* und *Y*! Beschreiben Sie diese Konstruktion!

Projektion: Höhenmaßstab:



Olympiadeklasse 10

291021 Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen *x* und *y*, für die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllt ist:

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{9}, \qquad (1)$$

$$\frac{x + \sqrt{x}}{y + \sqrt{y}} = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

291022 Zwei Spieler haben sich folgendes Spiel ausgedacht: Auf einem Spielbrett sind 8 Spielfelder im Kreis angeordnet, eines dieser Felder gilt als Anfangsfeld *A*. Jeder Spieler hat einen Spielstein und setzt ihn auf das Feld *A*.

Dann führt jeder Spieler mit einem Würfel einen Wurf aus. Werfen beide Spieler unterschiedliche Augenzahlen, so setzt der Spieler mit der höheren Augenzahl seinen Stein um zwei Schritte im Uhrzeigersinn vorwärts, der andere um einen Schritt. Dieses Voransetzen beider Steine gilt dann als ein „Zug“. Werfen beide Spieler die gleiche Augenzahl, so wird kein „Zug“ ausgeführt, sondern nochmals gewürfelt. Infolge der kreisförmigen Anordnung der Spielfelder kann es vorkommen, daß ein Stein beim Voransetzen das Feld *A* erreicht oder überschreitet (und damit einen neuen Umlauf beginnt).

Das Spiel ist beendet, sobald nach Durchführung eines „Zuges“ der Stein mindestens eines Spielers genau auf dem Feld *A* steht. Dieser Spieler hat gewonnen, falls der Stein des anderen Spielers dabei nicht auf *A* steht. Falls jedoch beide Steine auf *A* stehen, endet das Spiel unentschieden.

Welches ist die kleinstmögliche Anzahl von „Zügen“, aus denen ein unentschiedenes Spiel bestehen kann?

Begründen Sie Ihre Antwort!

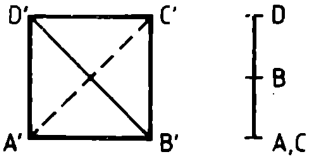
291023 Gegeben sei ein Trapez mit parallelen Seiten *AB* und *CD*. Dabei sei $\overline{AB} > \overline{CD}$. Man zeige, daß sich das Trapez genau dann durch eine zu einem der beiden Schenkel parallele Gerade in zwei Vierecke gleichen Flächeninhaltes zerlegen läßt, wenn $\overline{AB} < 3\overline{CD}$ gilt.

291024 Das Bild stellt einen ebenflächig begrenzten Körper *ABCD* in senkrechter Eintafelprojektion dar. Die Punkte *A'*, *B'*, *C'*, *D'* sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge *a*. Im Höhenmaßstab haben *A*, *C* von *D* ebenfalls den Abstand *a*, während *B* im Höhenmaßstab den Abstand $\frac{a}{2}$ von *D* hat.

a) Zeichnen Sie diesen Körper *ABCD* in schräger Parallelprojektion, wobei mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ sei!

b) Ermitteln Sie aus den obigen Angaben das Volumen $V\,(ABCD)$ des Körpers!

Projektion: Höhenmaßstab:



Olympiadeklassen 11/12

291221 Man ermittle alle diejenigen Paare $(x; y)$ reeller Zahlen *x*, *y*, die das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) erfüllen:

$$x + xy + xy^2 = -21, \qquad (1)$$

$$y + xy + x^2y = 14, \qquad (2)$$

$$x + y = -1. \qquad (3)$$

291222 Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen *m*, die die Bedingung erfüllen, daß für jede reelle Zahl *x* die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$x^2 + (m + 2)x + 8m + 1 > 0. \qquad (1)$$

291223 Über fünf Streckenlängen *a*, *b*, *c*, *d*, *e* werde vorausgesetzt, daß je drei von ihnen die Seitenlängen eines Dreiecks sind.

Man beweise, daß unter dieser Voraussetzung stets eines dieser Dreiecke spitzwinklig sein muß.

291224 Man löse die folgende Aufgabe

a) für $n = 8$ und $k = 5$,

b) für $n = 9$ und $k = 6$.

Aufgabe: Untersuchen Sie, ob bei jeder Eintragung der natürlichen Zahlen 1, 2, …, n^2 in ein schachbrettartiges nxn-Felder-Quadrat zwei zueinander benachbarte Felder vorkommen müssen, in denen Zahlen stehen, deren Differenz größer oder gleich *k* ist!

Hinweise: 1. Die genannten Eintragungen sollen die Bedingungen erfüllen, daß jedes Feld genau eine Zahl erhält und daß jede Zahl genau einmal verwendet wird.

2. Zwei Felder sollen genau dann zueinander benachbart heißen, wenn sie eine Seitenstrecke miteinander gemeinsam haben.

Solltet ihr Probleme bei der Lösung dieser Aufgaben haben, wendet euch bitte über euren Mathematiklehrer an den Fachberater des entsprechenden Kreises.

Fortsetzung von Seite 35

Michael Wolf, Nadine Werner, Juliane Büchner, Enrico Schild, Sindy Eck, Raimund Horn, Jürgen Krahmann, Marco Möller, alle Brotterode; Alek Opitz, Hagen Lessing, beide Cottbus; Karina Gattung, Dermbach; Henrik Jäger, Dersekow; Sebastian Haase, Dersekow; Holger Bogatsch, Doberschütz; Thomas Ziesche, Susann Wagner, Anja Waller, Katrin Dubitzky, alle Dohna; Susanne Überschär, Dorndorf; Benno Brandstetter, Yvonne Schmeißer, Falk Baumann, Grit Berthold, Kerstin Röske, Jörg Wagner, André Zillmann, alle Dresden; Cornelia Gruhn, Drosa; Anke Lehmann, Eberswalde; Olaf und Matthias Hirschfeld, Carsten Bundesmann, alle Eilenburg; Jan Blumentritt, Eisenberg; Andreas Luleich, Elsterberg; Joachim Suck, Essen (BRD); Mandy Jäger, Fambach; Christian Gruhl, Finsterwalde; Senta und Maresa Puls, Frankfurt/O.; Ute Jahn, Jörg Mildner, beide Freiberg; Dana Horak, Susann Hurt, Doreen Wald, Beatrice Worm, Angelika Senitz, Tobias Gerlach, Götz Lothal, Mirko Grasemann, Nicole Schüler, alle Friedeburg; Anni-Claire Lehmann, Beate Brandenburg, Ulrike Schmidt, alle Greifswald; Anke Grell, Stefan Detschner, beide Greußen; Silvia Wachholz, Görlitz; Mirko Süß, Grünhain; Frank Balszuweit, Güstrow; Enrico Alexander, Andreas Horn, beide Gützkow; Jan Wettstein, Gumpelstadt; Michael Köhler, Hainichen; Michael Göpfert, Halle; Karsten Sauer, Anja Goldschmidt, Thomas Pitzschke, alle Halle-Neustadt; Ulf Timme, Havelberg; Tom Werner, Peggy Marx, beide Hennigsdorf; Glenn Hofmann, Hohenstein-E.; Angela Wiesjahn, Holzendorf; Björn Borchardt, Ilmenau; Annett Lieske, Joachimsthal; Daniel Fiekers, Mandy Koch, Evelin Karl, alle Kaltennordheim; Lothar Tischer, Kamenz; Katja Wurziger, Daniela Baumann, Lutz Thierbach, Vera Lorenz, Alexander Gräf, Thomas Kraußе, Andreas Lönig, alle Karl-Marx-Stadt; Toralf Pusch, Karlsburg; Jürgen Frey, Kipsdorf; Regina Sachse, Kleinmachnow; Lars Nöbel, Klingenthal; Anke Neuber, Latdorf; Anke Jubel, Langenstriegis; Claudia Heßler, Lauscha; Kathleen Tiedt, André Gärtner, beide Leipzig; Katrin Schubert, Markus Wendler, beide Lengenfeld; Steffen Haas, Leutersdorf; Carsten Herboth, Löderburg; Katja Roesler, Lubmin; Matthias Weckner, Matthias Kassner, beide Meiningen; Karl-Günther Lautsch, Menteroda; Mathias Sekatzek, Merseburg; Lars Wagner, Simone Nattermann, Jana Linß, alle Mittelstille; Claudia Liebenow, Mühlhausen; Andreas und Axel Richter, Naundorf; Christian Weber, Neu Boltenhagen; Anja Wilkending, Neuhaus; Alexander Blacha, Niederorschel, Tilman Weigel, Niederwiesa; Andreas Birkner, Katja Schürer, beide Oranienburg; Patrick Leitz, Parchim; Steffen Siebert, Pionierrepublik „W. Pieck“; Steffen Blaess, Gregor Moskau, Klaus Klapproth, alle Plauen; Matthias Walther, Pleetz; Sebastian Clauß, Possendorf; Felix Ballani, Potsdam; Susan Paufler, Michael Meinel, beide Radebeul; Christian Holfeld, Nobert Klawuhn, beide Rathenow; Jörn Weichert, Riesa; Manuela Radtke, Rodewitz; Torsten Gerhardt, Ralf Hafften, Stephanie Horn, Malte Korten, Anne Seifert, Manuela Radke, Jennis Freyer, Antje Feldmann, alle Rostock; Ralf Fröhlich, Rudolstadt; Maida Tennemann, Saßnitz; Elko Jacobs, Saurasen; Björn Zimmermann, Schildow; Peggy Machelett, Schmaikalden; Kay Herrmann, Stefan Langenbucher, Kathleen Schneider, alle Schwallungen; Sven Kieselberger, Schwarzenberg; Mario Sellig, Schwerin; Heike Claußnitzer, Senftenberg; Jörg Näther, Christian Schäfer, Marco Siegmann, alle Sondershausen; Klaus Ullmann, Spremberg; Kati Wilhelm, Dirk Weber, Danny Gerlach, Ronny Malzo, Andy Reumschüssel, Nicole König, Ilka Reinhardt, Katja Zieger, Annett Jannoch, alle Steinbach-Hallenberg.

Fortsetzung in „alpha“ 3/90

XXVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der DDR-Olympiade
Fortsetzung aus Heft 1/90

II. Angenommen, es existiere eine Menge K von höchstens 31 Kombinationen, mit denen alle 8^3 Kombinationen (a_1, a_2, a_3) überdeckt werden. Aus dieser Annahme läßt sich z. B. folgendermaßen ein Widerspruch herleiten: Zunächst folgt, daß für mindestens einen der acht Werte $p = 0, 1, \ldots, 7$ die Menge P aller (p, y, z) $(y, z \in \{0, 1, \ldots, 7\})$ höchstens drei Kombinationen aus K enthält. Daher gibt es erst recht drei paarweise verschiedene Zahlen c, d, e so, daß aus $(k_1, k_2, k_3) \in K$ und $k_1 = p$ stets $k_2 \in \{c, d, e\}$ folgt, und es gibt (nichtnotwendig verschiedene) Zahlen f, g, h so, daß aus $(k_1, k_2, k_3) \in K$ und $k_1 = p$ stets $k_3 \in \{f, g, h\}$ folgt. Es sei $Y = \{0, \ldots, 7\} \setminus \{c, d, e\}$ und $Z = \{0, \ldots, 7\} \setminus \{f, g, h\}$.
Die Menge aller

$$(p, y, z) \quad (y \in Y, z \in Z) \tag{5}$$

enthält mindestens $(8-3) \cdot (8-3) = 25$ Kombinationen. Jede von ihnen wird nach Annahme durch ein $(k_1, k_2, k_3) \in K$ überdeckt. Nach Wahl der $c, \ldots, f$ ist das nur mit $k_1 \neq p$ und folglich nur mit $k_2 \in Y$ und $k_3 \in Z$ möglich; somit müssen zu je zwei voneinander verschiedenen Kombinationen (5) auch zwei voneinander verschiedene überdeckende Kombinationen aus K gehören. Damit ist gezeigt, daß es mindestens 25 Kombinationen $(k_1, k_2, k_3) \in K$ mit $k_2 \notin \{c, d, e\}$ geben muß und folglich höchstens $31 - 25 = 6$ mit $k_2 \in \{c, d, e\}$ geben kann.
Wegen der paarweisen Verschiedenheit der c, d, e folgt nun, daß für mindestens einen der drei Werte $q = c, d, e$ die Menge Q aller (x, q, z) $(x, z \in \{0, \ldots, 7\})$ höchstens zwei Kombinationen aus K enthält. Analog wie bei P ergibt sich hieraus die Existenz von mindestens $(8-2) \cdot (8-2) = 36$ Kombinationen in K und damit ein Widerspruch.
Mit I. und II. ist als gesuchte kleinste Zahl $N = 32$ nachgewiesen.
Bemerkungen: Die Aufgabe ist äquivalent zur Bestimmung der minimalen Anzahl von „dreidimensionalen Türmen", die insgesamt alle Felder eines „dreidimensionalen Schachbrettes" der Abmessungen $8 \times 8 \times 8$ bedrohen. Diese geometrische Veranschaulichung ist bei der Lösungsfindung sehr nützlich (man interpretiere z. B. den obigen Beweis geometrisch). Interessenten wird auch die Lösung des entsprechenden allgemeineren Problems für ein „$n \times n \times n$-Schachbrett" empfohlen. Die Aufgabe kann als schwer bis sehr schwer eingeschätzt werden. Etwa 90 % aller Teilnehmer fanden keinen tragfähigen Zugang zu ihrer Lösung.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl	52	11	1	1	3	1	0	4	1

Dr. E. Wegert, Sektion Mathematik
der Bergakademie Freiberg

281245 Bezeichnet man die Volumina der Tetraeder *ABCD*, *MBCD*, *MACD*, *MABD* bzw. *MABC* mit V, V_1, V_2, V_3 bzw. V_4, so gilt
$V_i > 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ und

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V. \tag{1}$$

Sind h_1, h_2, h_3 bzw. h_4 die Längen der Höhen des Tetraeders *ABCD* bezüglich der Grundflächen *BCD*, *ACD*, *ABD* bzw. *ABC* und h'_1, h'_2, h'_3 bzw. h'_4 die Längen der Höhen der Tetraeder *MBCD*, *MACD*, *MABD* bzw. *MABC* bezüglich derselben Grundflächen, so gilt

$$\frac{V_i}{V} = \frac{h'_1}{h_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{2}$$

Die Lote von A und M auf die Ebene durch B, C, D sind zueinander parallel; daher liegen sie mit der Geraden durch A, M, A' in einer Ebene, und aus dem Strahlensatz folgt die erste der Gleichungen

$$\frac{\overline{MA'}}{\overline{AA'}} = \frac{h'_1}{h_1}, \ldots, \frac{\overline{MD'}}{\overline{DD'}} = \frac{h'_4}{h_4}; \tag{3}$$

die übrigen ergeben sich analog für B, C bzw. D statt A.
Aus (1), (2), (3) folgt

$$\frac{\overline{MA'}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{MB'}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{MC'}}{\overline{CC'}} + \frac{\overline{MD'}}{\overline{DD'}} = 1,$$

wegen $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = \overline{MD} = r$ also

$$\frac{\overline{AA'} - r}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{BB'} - r}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{CC'} - r}{\overline{CC'}} + \frac{\overline{DD'} - r}{\overline{DD'}} = 1,$$

$$\frac{1}{\overline{AA'}} + \frac{1}{\overline{BB'}} + \frac{1}{\overline{CC'}} + \frac{1}{\overline{DD'}} = \frac{3}{r}. \tag{4}$$

Da das harmonische Mittel der vier Kantenlängen $\overline{AA'}, \ldots \overline{DD'}$ nicht größer als ihr arithmetisches Mittel ist, gilt

$$\frac{4}{\frac{1}{\overline{AA'}} + \frac{1}{\overline{BB'}} + \frac{1}{\overline{CC'}} + \frac{1}{\overline{DD'}}} \leqq \frac{\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} + \overline{DD'}}{4}.$$

Hieraus und aus (4) folgt

$$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} + \overline{DD'} \geqq \frac{16}{\frac{1}{\overline{AA'}} + \frac{1}{\overline{BB'}} + \frac{1}{\overline{CC'}} + \frac{1}{\overline{DD'}}} = \frac{16}{3} r.$$

Bemerkungen: Eine größere Anzahl von Schülern fand auf Grund unzureichenden räumlichen Vorstellungsvermögens und nicht genügend entwickelten Könnens im Lösen von Aufgaben aus der räumlichen Geometrie keinen zum Ziel führenden Lösungsansatz. Viele gingen vom regulären Tetraeder aus, veränderten die Lage der Eckpunkte und meinten, die Längen der betrachteten Strecken könnten sich nur vergrößern, was aber nicht zutreffend ist.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	33	21	6	0	0	1	3	10

Dr. M. Rehm, Sektion Mathematik
der Humboldt-Universität zu Berlin

281246A Bezeichnen wir für $o < x \leqq y$ mit $f(x, y)$ die Funktion $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, so folgt durch Ausmultiplizieren

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) = n + \sum_{1 \leqq i < k \leqq n} f(a_i, a_k). \tag{3}$$

Für jedes positive z gilt bekanntlich $z + \frac{1}{z} \geqq 2$ mit Gleichheit genau für $z = 1$.
Damit gilt stets $f(x, y) \geqq 2$, da die rechte Summe in (3) aus $\frac{n(n-1)}{2}$ Summanden besteht, folgt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqq n + \frac{2n(n-1)}{2} = n^2.$$

Damit ist die linke Ungleichung von (2) bewiesen. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.
Wir betrachten uns nun den Ausdruck auf der rechten Seite von (3) in folgendem Schema angeordnet:

$$\begin{array}{r} 1 + f(a_1, a_2) + f(a_1, a_3) \\ + \ldots + f(a_1, a_{n-1}) + f(a_1, a_n) \\ + 1 + f(a_2, a_3) \\ + \ldots + f(a_2, a_{n-1}) + f(a_2, a_n) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + 1 + f(a_{n-1}, a_n) \\ + 1 \end{array}$$

Um diesen Ausdruck abzuschätzen, betrachten wir zwei Hilfsungleichungen (hier ohne Beweis):
1. Für $0 < w \leqq x \leqq y \leqq z$ gilt $f(w, z) \leqq f(x, y)$. Gleichheit gilt genau für den Fall $w = x$, $y = z$.
2. Für $0 < x \leqq y \leqq z$ gilt $f(x, y) + f(y, z) \leqq 2 + f(x, z)$. Gleichheit gilt genau für die zwei Fälle $y = x$ und $y = z$.
Betrachten wir nun zwei Zahlen i, k mit $1 \leqq i < k \leqq n$ und $i + k \leqq n + 1$ in unserem Schema die Summanden in der k-ten Spalte der i-ten Zeile und der $(n + 1 - i)$-ten Spalte der k-ten Zeile, so gilt für deren Summe nach der
zweiten Hilfsungleichung: $f(a_1, a_k) + f(a_k, a_{n+1-i}) \leqq 2 + f(a_1, a_{n+1-i})$.
Nach der ersten Hilfsungleichung folgt daraus wegen (1)
$f(a_1, a_k) + f(a_k, a_{n+1-i}) \leqq 2 + f(p, q)$.
Damit können wir unsere Summe nicht verkleinern, wenn wir für alle möglichen Werte von i und k die Summanden $f(a_i, a_k)$ und $f(a_k, a_{n+1-i})$ jeweils durch $\left(1 + \frac{1}{2} f(p, q)\right)$ ersetzen. Die einzigen Summanden in unserem Schema, die noch nicht ersetzt sind, sind die Summanden auf der Diagonalen $f(a_1, a_n)$, $f(a_2, a_{n-1})$, …. Nach der ersten Hilfsungleichung können wir jeden durch $f(p, q)$ ersetzen. Unser Schema hat dann die Gestalt

$$\begin{array}{r} 1 + \left(1 + \frac{1}{2} f(p, q)\right) + \left(1 + \frac{1}{2} f(p, q)\right) \\ + \ldots + \left(1 + \frac{1}{2} f(p, q)\right) + f(p, q) \\ 1 + \left(1 + \frac{1}{2} f(p, q)\right) \\ + \ldots + f(p, q) + \left(1 + \frac{1}{2} f(p, q)\right) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + 1 + \left(1 + \frac{1}{2} f(p, q)\right) \\ + 1 \end{array}$$

Durch Abzählen der Summanden erhält

man: Ist n ungerade, so hat das neue Schema die Summe
$\frac{(n^2+1)}{2} + f(p,q)\frac{(n^2-1)}{4}$, ist n gerade, $\frac{n^2}{2} + f(p,q)\frac{n^2}{4}$.

Berücksichtigt man noch, daß

$$f(p,q) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2 + 2,$$

so folgt daraus die Behauptung der Aufgabe. Gleichheit gilt, falls in unseren Hilfsungleichungen stets Gleichheit galt, d. h. für $p = x_1 = \ldots = x_m$,
$x_{m+1} = \ldots = x_n = q$ mit $m = \frac{n}{2}$ für n gerade und $m = \frac{(n-1)}{2}$ und $m = \frac{(n+1)}{2}$ für n ungerade.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	1	1	25	11	1	1	1	3

Dr. U. Quasthoff, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

281246B Die gesuchte größtmögliche Anzahl ist 1. Sei *ABCD* das gegebene Quadrat der Seitenlänge 1,99. Offenbar kann man ein Quadrat der Seitenlänge 1 in *ABCD* legen. Mit zwei Quadraten ist das jedoch nicht mehr möglich, weil sich zwei beliebige, in *ABCD* liegende Quadrate der Seitenlänge 1 gegenseitig überlappen. Um das zu zeigen, wird bewiesen, daß ein beliebiges Quadrat mit der Seitenlänge 1, das in *ABCD* liegt, den Mittelpunkt *M* von *ABCD* in seinem Innern enthält.

Angenommen, für ein solches Quadrat *PQRS* ist das nicht der Fall. Wir bezeichnen die Geraden durch *P*, *Q* bzw. *Q*, *R* bzw. *R*, *S* bzw. *S*, *P* mit *p*, *q*, *r* bzw. *s*. Dann liegt *M* auf dem Rand oder außerhalb von mindestens einem der beiden Streifen zwischen *p* und *r* bzw. zwischen *q* und *s*. Also hat *M* von mindestens einer der Geraden *p*, *q*, *r* oder *s* einen Abstand $\geqq 1$, o. B. d. A. von *p*.

Also liegt *p* ganz außerhalb des Inkreises *k* von *ABCD*, da dieser den Radius $\frac{1}{2} \cdot 1{,}99 < 1$ hat. Andererseits enthält der Durchschnitt von *p* mit der Quadratfläche *ABCD* mindestens die Strecke $\overline{PQ}$ und ist daher selbst eine Strecke $\overline{XY}$. Wir bezeichnen nun mit *E*, *F*, *G*, *H* die Mittelpunkte von *AB*, *BC*, *CD*, *DA* sowie mit *AEH* die Differenz zwischen $\triangle AEH$ und dem in $\triangle AEH$ liegenden, durch *E* und *H* bestimmten Segment von *k*, wobei *AEH* ohne den Bogen $\widehat{EH}$, aber mit allen übrigen Randpunkten verstanden sei. Analog seien die Flächenstücke *BFE*, *CGF* und *DHG* definiert. Da nun *ABCD* mit dem Außengebiet von *k* nur die vier paarweise disjunkten Flächenstücke *AEH*, *BFE*, *CGF* und *DHG* gemeinsam hat, muß die Strecke $\overline{XY}$ ganz in einem dieser Stücke liegen, o. B. d. A. in *AEH*. Ihre Endpunkte *X*, *Y* sind Randpunkte von *ABCD*, wegen
$\overline{XY} \geqq \overline{PQ} = 1 > 0{,}5 \cdot 1{,}99 = \overline{AE} = \overline{AH}$ also o. B. d. A. mit *X* auf *AH* und *Y* auf *AE*.

Unter allen Geraden, die parallel zu *p* sind und durch einen Punkt der Strecke $\overline{XH}$ gehen, muß es genau eine geben, die *k* berührt, denn *p* selbst liegt außerhalb *k*, und die Parallele durch *H* zu *p* schneidet den Kreis *k* in zwei Punkten, da sie nicht auf dem Radius *MH* senkrecht steht. Diese *k* berührende Gerade *u* schneidet die Strecke $\overline{XH}$ also in einem inneren Punkt *U* und somit die Strecke $\overline{YE}$ in einem inneren Punkt *V*, ihr Berührungspunkt mit *k* sei *W*. Wegen $\overline{AX} < \overline{AU}$ ist nach dem Strahlensatz auch $\overline{XY} < \overline{UV}$.

Nach Dreiecksungleichungen und dem Satz von der Gleichheit der Tangentenabschnitte folgt schließlich

$$1 = \overline{PQ} \leqq \overline{XY} < \overline{UV}$$
$$< \frac{1}{2}(\overline{AU} + \overline{AV} + \overline{UW} + \overline{VW})$$
$$= \frac{1}{2}(\overline{AU} + \overline{AV} + \overline{UH} + \overline{VE})$$
$$= \overline{AE} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}99.$$

Dieser Widerspruch zeigt, daß unsere Annahme falsch war und beendet den Beweis.

Bemerkungen: Die Aufgabe war sowohl von ihrem Charakter als auch vom Schwierigkeitsgrad und den erreichten Punktzahlen her als Wahlaufgabe der 4. Stufe sehr gut geeignet.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	5	8	4	3	7	1	1	1

Dr. R. Labahn, Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

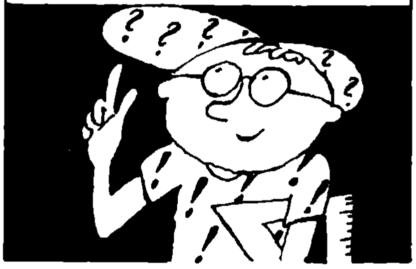
---

Ein Dankeschön an unsere Verlage

Die Redaktion alpha konnte in diesem Jahr den Preisträgern des alpha-Wettbewerbs 1988/89 wieder viele interessante Bücher senden. Diese stellten uns zahlreiche Verlage zur Verfügung, denen wir an dieser Stelle herzlichen Dank sagen möchten:

Altberliner Verlag, Berlin 1
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig;
VEB Domowina Verlag Bautzen;
VEB Fachbuchverlag, Leipzig;
VEB Hinstorff Verlag, Rostock;
Der Kinderbuchverlag, Berlin;
Militärverlag der DDR, Berlin;
Mitteldeutscher Verlag, Halle;
Buchverlag Der Morgen, Berlin;
Verlag Neues Leben, Berlin;
VEB Postreiter-Verlag, Halle;
Verlag Philipp Reclam jun., Leipzig;
Sportverlag, Berlin;
VE Verlag Technik, Berlin;
Urania-Verlag, Leipzig;
Verlag Volk und Welt, Berlin;
VE Verlag Volk und Wissen, Berlin;
VE Verlag der Wissenschaften, Berlin

Lösungen



Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 6/89

Ma 5 ■ 3045 Wenn Lothar ein Jahr älter ist als Roland und Roland fünf Jahre älter ist als Heinz, dann ist Lothar sechs Jahre älter als Heinz.
Wir rechnen deshalb $41 - 5 - 6 = 30$, $30 : 3 = 10$. Heinz ist 10 Jahre, Roland 15 Jahre, Lothar 16 Jahre alt.

Ma 5 ■ 3046 Die Mutter verfügt über 100 M − 60 M = 40 M, der Vater über 40 M + 10 M = 50 M, jedes der beiden Kinder über 10 M : 2 = 5 M Taschengeld.

Ma 5 ■ 3047 Die Zahl 139 ist die kleinste, die Zahl 940 die größte dreistellige natürliche Zahl mit der Quersumme 13.

Ma 5 ■ 3048 Aus (1) folgt: Der Schüler Gänsich hat nicht den Vornamen Bernd oder Claus. Aus (2) folgt: Der Schüler Gänsich hat auch nicht den Vornamen Andreas. Deshalb heißt er Daniel Gänsich. Aus (3) folgt: Claus hat nicht den Nachnamen Hermhaus. Deshalb heißt er Claus Eckbart. Somit hat Bernd den Nachnamen Hermhaus.

Ma 5 ■ 3049 a) Nach dem Verdoppeln erhält Jan 20 und das Doppelte seiner gedachten Zahl. Dann ist dieses Doppelte aber um $52 - 20 = 32$ größer als seine Zahl. Also lautet seine gedachte Zahl 32.
Probe:
$(32 + 10) \cdot 2 = 84$ und $32 + 52 = 84$.
b) Nach dem Verdoppeln erhält Jörg 20 und das Doppelte seiner gedachten Zahl. Dann ist dieses Doppelte aber um $20 - 20 = 0$ größer als deine Zahl. Also lautet seine gedachte Zahl 0.
Probe: $(0 + 10) \cdot 2 = 20$ und $0 + 20 = 20$.

Ma 5 ■ 3050 Da die Summe $E + E + E$ auf die Ziffer E endet, könnte $E = 0$ oder $E = 5$ sein. Da die Summe $E + E + E$ aber auch auf die Ziffer S endet, gilt $E = 5$ und somit $S = 6$. Daraus folgt weiter $L = 8$ und $K = 7$.
Die vollständige Lösung lautet
$7855 + 7855 + 7855 = 23\,565$.

Ma 5 ■ 3051 Wegen $63 + 5 = 68$ verbrauchte der Lada für 800 km 68 Liter Benzin. Wegen $68 : 8 = 8{,}5$ verbrauchte der Lada auf 100 km im Durchschnitt 8,5 Liter Benzin. Wegen $8{,}5 - 1 = 7{,}5$ verbrauchte der Dacia auf 100 km 7,5 Liter Benzin. Wegen $(63 : 7{,}5) \cdot 100 = 840$ hat der Dacia 840 km zurückgelegt.

Ma 6 ■ 3052 Der Wanderer legt in einer Minute 6000 m : 60 = 100 m, der Radfahrer 4 · 100 m = 400 m zurück. Je Minute verändert sich also ihre Entfernung voneinander um 100 m + 400 m = 500 m.
Nach zwei Minuten treffen sie sich, nach weiteren zwei Minuten sind sie wieder 1000 m, also 1 km voneinander entfernt. Somit vergeht bis dahin eine Zeit von 4 Minuten.

Ma 6 ■ 3053 Die Seitenlänge des Quadrates beträgt 12 cm; denn 12 cm · 12 cm = 144 cm². Jede Teilstrecke einer Quadratseite beträgt deshalb 12 cm : 3 = 4 cm. Zwei Teildreiecke ergeben zusammen ein Quadrat mit einem Flächeninhalt von 4 cm · 4 cm = 16 cm². Zwei Teildreiecke ergeben zusammen ein Rechteck mit einem Flächeninhalt von 4 cm · 8 cm = 32 cm. Somit beträgt der Flächeninhalt des Sechsecks
$144\,\text{cm}^2 - 16\,\text{cm}^2 - 32\,\text{cm}^2 = 96\,\text{cm}^2$.

Ma 6 ■ 3054 Angenommen, die Schüler der Klasse 5 sammelten x kg Altpapier; dann entfallen auf die Schüler der Klasse 6 nur $(x - 18)$ kg, auf die Schüler der Klasse 4 aber $(x - 8)$ kg Altpapier. Zusammen sind es $(3x - 26)$ kg Altpapier.
Nun gilt $3x - 26 = 274$, $3x = 300$, $x = 100$. Die Schüler der Klasse 4 sammelten 92 kg, die der Klasse 5 sammelten 100 kg und die der Klasse 6 sammelten 82 kg Altpapier.

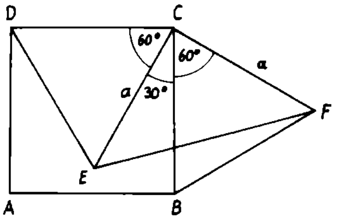
Ma 6 ■ 3055 Angenommen, es sind x Gänse, also $2x$ Hühner und $3 \cdot 2x = 6x$ Kaninchen. Nun gilt
$2 \cdot (x + 2x) + 4 \cdot 6x = 120$, $30x = 120$,
$x = 4$. Der Kleintierhalter besitzt 4 Gänse, 8 Hühner und 24 Kaninchen.

Ma 6 ■ 3056 Angenommen, es wurden x kg Radieschen verkauft; dann waren es noch $2x$ kg Möhren, $(2x + 10)$ kg Kohlrabi und $(x - 20)$ kg Kohl. Das sind zusammen $(6x - 10)$ kg Gemüse. Nun gilt
$6x - 10 = 290$, $6x = 300$, $x = 50$. Es wurden 50 kg Radieschen, 100 kg Möhren, 110 kg Kohlrabi und 30 kg Kohl verkauft.

Ma 6 ■ 3057 Aus $\frac{1}{4} < \frac{x}{17} < \frac{1}{3}$ folgt
$17 < 4x$ und $3x < 17$, also $x > 4$ und $x < 6$ und somit $x = 5$. Es existiert genau ein solcher Bruch; er lautet $\frac{5}{17}$.

Na/Te 6 ■ 460 Der Zug legt in einer Minute 120 : 102 km = 1,176 km zurück, in einer Stunde (60 min) also
1,176 · 60 km = 70,58 km. Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt $70{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ma 7 ■ 3058 Winkel ECB hat die Größe 90° − 60° = 30°, Winkel BCF hat die Größe 60°, Winkel ECF hat somit die Größe 30° + 60° = 90°. Wegen
$\overline{AB} = \overline{CE} = \overline{CF} = a$ gilt $A_{EFC} = \frac{1}{2} \cdot a^2$
und $A_{ABCD} = a^2$, d. h. der Flächeninhalt des Dreiecks EFC ist halb so groß wie der des Quadrates $ABCD$.

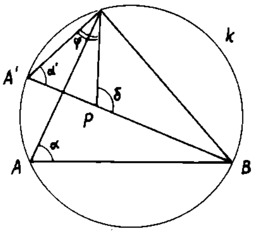


Ma 7 ■ 3059 Angenommen, Ulrike ist x Jahre alt; dann ist Dagmar $(x + 3)$ Jahre, die Mutter $(3x + 3)$ Jahre, der Vater $3 \cdot (x + 3) - 3 = 3x + 6$ Jahre alt. Die vier Personen sind zusammen $(8x + 12)$ Jahre alt, und es gilt $8x + 12 = 92$, $8x = 80$, $x = 10$. Ulrike ist 10, Dagmar 13, die Mutter 33, der Vater 36 Jahre alt.

Ma 7 ■ 3060 Angenommen, das jüngste Kind war x Jahre alt; dann war das zweite Kind $(x + 4)$ Jahre, das älteste Kind $2x$ Jahre, die Mutter $(3x + 12)$ Jahre, der Vater $(3x + 16)$ Jahre alt. Zusammen waren diese fünf Personen $(10x + 32)$ Jahre alt, und es gilt
$10x + 32 = 112$, $10x = 80$, $x = 8$.
Das jüngste Kind war 8 Jahre, das zweite Kind 12 Jahre, das älteste Kind 16 Jahre, die Mutter 36 Jahre, der Vater 40 Jahre alt.

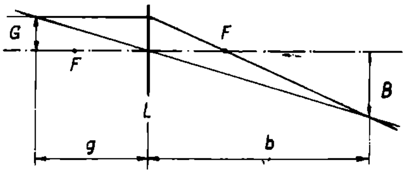
Ma 7 ■ 3061 Nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen hat der Winkel AED die Größe $\frac{\delta}{2}$ und der Winkel BEC die Größe $\frac{\gamma}{2}$.
Daraus folgt $\overline{AD} = \overline{AE}$ und $\overline{BE} = \overline{BC}$.
Wegen $\overline{CD} = \overline{AB} = \overline{AE} + \overline{BE}$ gilt somit auch $\overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$.

Ma 7 ■ 3062 Es seien $\sphericalangle BAC = \alpha$ und $\sphericalangle BPC = \delta$; die Gerade BP schneide den Umkreis k des Dreiecks ABC in A', und es seien $\sphericalangle CA'P = \alpha'$ und $\sphericalangle PCA' = \varphi$. Dann gilt $\alpha = \alpha'$ als Peripheriewinkel über derselben Sehne $\overline{BC}$. Ferner gilt $\varphi + \alpha' = \delta$ nach dem Außenwinkelsatz. Daraus folgt durch Einsetzen $\varphi + \alpha = \delta$, also $\alpha < \delta$.



Na/Te 7 ■ 461 Das Volumen des Würfels beträgt 9 cm³. Gegeben ist: Dichte von Aluminium $\varrho_A = 2{,}7\,\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Dichte von Stahl $\varrho_S = 7{,}8\,\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Der Aluminiumwürfel hat demnach eine Masse von 24,3 g, der Stahlwürfel eine Masse von 70,2 g, d. h. seine Masse ist $\frac{70{,}2}{24{,}3} = 2{,}9$fach größer. Das gilt auch für die Gewichtskraft. Demzufolge stellt sich eine 2,9fache Verlängerung ein. Die gesuchte Verlängerung beträgt 29 mm.

Na/Te 7 ■ 462 $b = 30\,\text{cm}$, $B = 8\,\text{cm}$



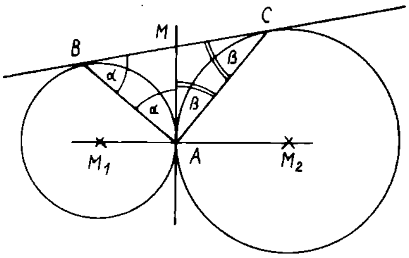
Ma 8 ■ 3063 a) Beispiel: 7325 − 3572 = 3753; 9/3753, denn 9 · 417 = 3753.
b) Stellt man eine vierstellige natürliche Zahl in dekadischer Schreibweise so dar: $\overline{abcd}$ und geht man davon aus, daß alle Ziffern voneinander verschieden sind, so gibt es insgesamt 23 echte Vertauschungsmöglichkeiten, die angedeutet werden sollen:

	$\overline{bacd}$	$\overline{cabd}$	$\overline{dabc}$
$\overline{abdc}$	$\overline{badc}$	.	.
$\overline{acbd}$	.	.	.
$\overline{acdb}$	.		.
$\overline{adbc}$	.	.	.
$\overline{adcb}$	$\overline{bdca}$	$\overline{cdba}$	$\overline{dcba}$

c) Beim Vertauschen der Ziffernfolge bleiben die Quersumme einer Zahl und damit deren Rest bei Teilbarkeit durch 9 unverändert.
Wenn die Ausgangszahl bei Division durch 9 den Rest r läßt, so lassen auch alle Vertauschungen diesen Rest r.
Die Differenz zweier solcher Zahlen hat somit den Rest $r - r = 0$, w. z. b. w.

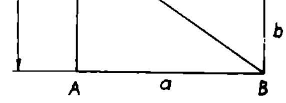
Ma 8 ■ 3064 Beispiel: $6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40$, $40 \cdot 2 = 80$, 8 ist dritter Summand.
Beweis: Die Summe sei $a + a + 1 + a + 2 + a + 3 + a + 4 = 5a + 10$.
Die Verdopplung dieser Summe ergibt $10a + 20 = (a + 2) \cdot 10$. Das Ergebnis endet somit stets mit Null. Streicht man diese Ziffer 0, so verbleibt $a + 2$ als dritter Summand, w. z. b. w.

Ma 8 ■ 3065 Die Tangente an beide Kreise in A schneide $\overline{BC}$ in M.



Wegen $\overline{MB} \cong \overline{MA}$ und $\overline{MC} \cong \overline{MA}$ (Tangentenabschnitte von einem Punkt außerhalb des Kreises an den Kreis sind gleich lang) sind die Dreiecke AMB und ACM gleichschenklig. Daraus folgt $\sphericalangle MBA \cong \sphericalangle MAB$ und $\sphericalangle MAC \cong \sphericalangle MCA$. Bezeichnet man entsprechende Winkelgrößen mit α bzw. β, so gilt
$2\alpha + 2\beta = 180°$, $\alpha + \beta = 90°$
(Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$), w. z. b. w.

Ma 8 ■ 3066 Dem Bild ist folgendes zu entnehmen: Nach dem Strahlensatz gilt



$\frac{c-b}{a-d}=\frac{c}{a}$, $ac-ab=ac-cd$, $a\cdot b=c\cdot d$.
Die Strecken der Länge c und d sind die Seitenlängen eines Rechtecks, das dem Rechteck $ABCD$ inhaltsgleich ist.

Ma 8 ■ 3067 Nach Aufgabenstellung gilt $a^3=6a^2$. Weil $a \neq 0$, kann man diese Gleichung durch a^2 dividieren und erhält $a=6$. Die Kante des Würfels ist 6 cm lang; das Volumen beträgt $V=216\,\text{cm}^3$; der Oberflächeninhalt ist $0=216\,\text{cm}^2$.

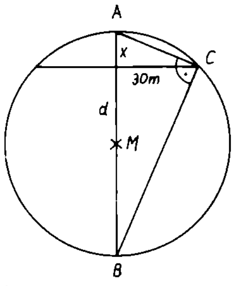
Na/Te 8 ■ 463 Der Motor nimmt eine Leistung $P_{aufg.}=220\,\text{V}\cdot 59\,\text{A}=13\,\text{kW}$ auf. Da die Definitionsgleichung für den Wirkungsgrad auch für Leistungen gilt,

also $\eta=\frac{P_{Nutz}}{P_{aufg}}$ ist, ergibt sich
$P_{Nutz}=\eta\cdot P_{aufg}$, d. h. $P_{Nutz}=11\,\text{kW}$.

Na/Te 8 ■ 464 Gesucht wird die Temperatur $t_W=x\,°\text{C}$ des Wassers vor dem Eintauchen. Beim Eintauchen hat das Thermometer die Wärme $Q_{aufg.}=1{,}93\cdot 14{,}6\,\text{J}$ $=28{,}2\,\text{J}$ aufgenommen. Wenn die spezifische Wärmekapazität des Wassers $c=\frac{4{,}19\,\text{J}}{\text{g}\cdot\text{K}}$, hat das Wasser an das Thermometer die Wärme

$Q_{ab.}=(x-32{,}4)\,\text{K}\cdot 6{,}7\,\text{g}\cdot 4{,}19\frac{\text{J}}{\text{g}\cdot\text{K}}$ abgegeben. Da bei diesem Wärmeaustausch $Q_{ab.}=Q_{aufg.}$ ist, gilt (nach Kürzung mit J)
$1{,}93\cdot 14{,}6=(x-32{,}4)\cdot 6{,}7\cdot 4{,}19$.
Man errechnet $x=33{,}4$. Die Temperatur des Wassers betrug 33,4 °C.

Ma 9 ■ 3068 Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt $x:d=1:10$, also $d=10x$. Das Dreieck ABC ist rechtwinklig, da der Winkel $\sphericalangle ACB$ ein Peripheriewinkel über dem Durchmesser $\overline{AB}$ ist. Im Dreieck ABC gilt nach dem Höhensatz
$30^2\cdot m^2=x\cdot(d-x)$,
$900\,\text{m}^2=x(10x-x)$, $900\,\text{m}^2=9x^2$,
$100\,\text{m}^2=x^2$, $10\,\text{m}=x$. Die Pfeilhöhe des Brückenbogens beträgt 10 m.

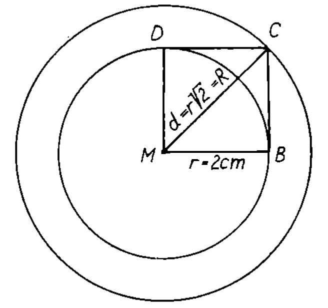


Ma 9 ■ 3069 Für die Anzahl der Diagonalen eines n-Ecks gilt $\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-3)$; daraus folgt entsprechend der Aufgabenstellung
$\frac{1}{2}\cdot(n+3)\cdot n-\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-3)=21$,
$n^2+3n-n^2+3n=42$, $6n=42$, $n=7$.
Es handelt sich um ein Sieben- und ein Zehneck.

Ma 9 ■ 3070 Für die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks gilt $h=\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Nach dem Strahlensatz gilt deshalb
$\frac{a}{2}\sqrt{3}:\frac{a}{2}=x:\frac{a-x}{2}$.
Wir formen um und erhalten
$\sqrt{3}=\frac{2x}{a-x}$; $a\sqrt{3}-x\sqrt{3}=2x$;
$2x+x\sqrt{3}=a\sqrt{3}$;
$x=\frac{a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=a\left(2\cdot\sqrt{3}-3\right)$;
$x^2=a^2\left(21-12\cdot\sqrt{3}\right)=3a^2(7-4\sqrt{3})$.
$\frac{A_Q}{A_D}=\frac{3a^2\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)\cdot 4}{a^2\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$,
$\frac{A_Q}{A_D}=4\cdot\sqrt{3}\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)=28\cdot\sqrt{3}-48$,
$\frac{A_Q}{A_D}=4\cdot\left(7\cdot\sqrt{3}-12\right)\approx 0{,}497$.
Der Flächeninhalt des Quadrates beträgt etwa 49,7 % des Flächeninhalts des gleichseitigen Dreiecks.

Ma 9 ■ 3071 Wird die erste der vier Zahlen mit a bezeichnet, so erhält man a, $2a$, $6a$, $18a$. Da $1986:2$ keine Primzahl ergibt und $1986:18$ keine natürliche Zahl ist, kann nur noch $1986=6a$ gelten. Tatsächlich ist dann $a=331$ eine Primzahl, und die vier Zahlen lauten 331, 662, 1986, 5958.

Ma 9 ■ 3072 Bezeichnet man den Radius des kleinen Kreises mit r und den des großen Kreises mit R, so ist der Flächeninhalt der Rasenfläche $A_R=\pi r^2$ und der Inhalt der Wegfläche $A_W=\pi(R^2-r^2)$. Wenn beide Flächen gleich groß sein sollen, gilt $\pi r^2=\pi(R^2-r^2)$, $\pi R^2=2\pi r^2$,
$R^2=2r^2$, $R=r\sqrt{2}$.
Die Diagonale $d=r\cdot\sqrt{2}$ des Quadrates $MBCD$ mit der Seitenlänge r ist deshalb gleich dem Radius R des großen Kreises.



Na/Te 9 ■ 465 Hintereinandergeschaltet ergeben die drei Widerstände 35 Ohm, parallelgeschaltet 2,86 Ohm. Unter Berücksichtigung des Innenwiderstandes der Spannungsquelle fließt ein Strom bei Hintereinanderschaltung von 0,38 A, bei Parallelschaltung von 3,5 A. Die sich einstellende Klemmenspannung zwischen den Polen der Spannungsquelle beträgt 13,1 V resp. 10 V.
b) Die Stromstärke beträgt im Zweig mit dem 5-Ohm-Widerstand 2,0 A, im Zweig mit dem 10-Ohm-Widerstand 1,0 A und im Zweig mit dem 20-Ohm-Widerstand 0,5 A. Die Wärmeleistungen betragen 20 W, 10 W und 5 W. Man kann diese Werte mit der Gleichung $P=I^2\cdot R$ berechnen.

Na/Te 9 ■ 466 Die Kochplatte erzeugt in 15 min eine Wärme von $1000\cdot 0{,}7\cdot 15$ $\times 60\,\text{W}\cdot\text{s}$. Die Wärme $Q'=m\cdot 82\,\text{K}$ $\times 4{,}18\,\text{J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ist erforderlich, um das Wasser (Masse m, spez. Wärmekapazität $4{,}187\,\text{J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot\text{K}$) um 82 K zu erwärmen. Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke kann m berechnet werden. $m=1830\,\text{g}$. Es können in der angegebenen Zeit 1,83 l Wasser erwärmt werden.

Ma 10/12 ■ 3073 Wir stellen die Gleichung so dar, daß die einzelnen Zahlen als Summen geschrieben werden, deren Summanden Vielfache von Potenzen mit der Basis x sind:
$(x^3+3x^2+5x+4)\cdot(x+2)$
$=x^4+6x^3+4x^2+7x$. Wir formen schrittweise äquivalent um und erhalten
$x^4+3x^3+5x^2+4x+2x^3+6x^2+10x$
$+8=x^4+6x^3+4x^2+7x$,
$x^3-7x^2-7x=8$, $x(x^2-7x-7)=8$.
Diese Gleichung wird nur von der natürlichen Zahl 8 erfüllt; es ist
$8(64-56-7)=8$. Die Basis des gesuchten Zahlensystems ist 8.
Probe: $(1\cdot 8^3+3\cdot 8^2+5\cdot 8+4)(1\cdot 8+2)$
$=(1\cdot 8^4+6\cdot 8^3+4\cdot 8^2+7\cdot 8)$
$7480=7480$.

Ma 10/12 ■ 3074 Es muß zunächst untersucht werden, unter welchen Bedingungen die Summe dreier natürlicher Zahlen durch 3 teilbar ist. Es sind vier Fälle zu unterscheiden:
1. Fall: Jede der drei Zahlen ist durch 3 teilbar,
2. Fall: Jede der drei Zahlen läßt bei Division durch 3 den Rest 1,
3. Fall: Jede der drei Zahlen läßt bei Division durch 3 den Rest 2,
4. Fall: Eine Zahl läßt den Rest 0, eine den Rest 1 und eine den Rest 2. Nun ist zu prüfen, daß in jedem der vier Fälle, in denen die Voraussetzung erfüllt ist, auch die Behauptung zutrifft. Es genügt dabei, wenn wir nur mit den Resten rechnen!
1. Fall: $0^3+0^3+0^3=0$ und $3/0$;
2. Fall: $1^3+1^3+1^3=3$ und $3/3$;
3. Fall: $2^3+2^3+2^3=24$ und $3/24$;
4. Fall: $0^3+1^3+2^3=9$ und $3/9$.
In allen Fällen, in denen die Voraussetzung erfüllt ist, trifft auch die Behauptung zu, w. z. b. w.

Ma 10/12 ■ 3075 Im rechtwinkligen Dreieck EAB gilt $a:\sin\gamma=b:\sin 90°$, also $b=\frac{a}{\sin\gamma}$. Die Höhe h im gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge b wird nach dem Satz des Pythagoras berechnet und beträgt $h=\frac{b}{2}\sqrt{3}$; der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks ist dann
$A_D=\frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot b^2$.
Nun setzt man für $b=\frac{a}{\sin\gamma}$ ein und erhält $A_D=\frac{1}{4}\sqrt{3}\cdot\frac{a^2}{\sin^2\gamma}$.
Für das prozentuale Verhältnis der Dreiecksfläche zur Quadratfläche ergibt sich somit
$\frac{A_D}{A_Q}=\frac{\sqrt{3}\cdot a^2}{4\cdot a^2\cdot\sin^2\gamma}=\frac{\sqrt{3}}{4\cdot\sin^2 75°}\approx 0{,}464$.
Der Anteil der Dreiecksfläche an der Quadratfläche beträgt etwa 46,4 %.

Ma 10/12 ■ 3076 Aus (2) folgt $\sqrt{abc} = a$, $abc = a^2$, $bc = a$ (wegen $a \neq 0$), $b = \frac{a}{c}$.
Durch Einsetzen in (1) folgt daraus

$c \cdot \sqrt{c} + a \cdot \sqrt{c} = c \cdot (a + c)$,
$\sqrt{c} \cdot (a + c) = c \cdot (a + c)$,
$c = 1$ (wegen $c \neq 0$), also $a = b$.

Das Gleichungssystem ist lösbar, wenn $c = 1$ und $a = b$ ist.
Wir führen eine Probe für $a = b = 3$ und $c = 1$ durch:

(1) $\sqrt{1^3} + \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 1^2} = 3 \cdot 1 + 1^2$,
$1 + 3 = 3 + 1$, $4 = 4$

(2) $\sqrt{3 \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

Ma 10/12 ■ 3077 Es seien $n - 1$, n, $n + 1$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen mit $n \geqq 2$; dann gilt $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = k^3$, $n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = k^3$, $3n^3 + 6n = k^3$, $3n \cdot (n^2 + 2) = k^3$. Die Kubikzahl k^3 muß also durch 3 teilbar sein; das trifft für die Kubikzahlen 27, 216, 729, ... zu. Es entfällt 27, da $3n \cdot (n^2 + 2) = 27$, also $n \cdot (n^2 + 2) = 9$, für $n = 2$ bereits $12 > 9$ ergibt. Für $k^3 = 216$ erhalten wir $3n \cdot (n^2 + 2) = 216$ bzw. $n \cdot (n^2 + 2) = 72$. Diese Gleichung wird für $n = 4$ erfüllt; denn $4 \cdot 18 = 72$. Die Lösung lautet somit $3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 + 125 = 216 = 6^3$.

Na/Te 10/12 ■ 467 Die Periodendauer der Schwingung kann mit der Gleichung für die Periodendauer eines Federschwingers berechnet werden. Sie lautet $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, wobei T die Periodendauer, m die schwingende Masse und k die Federkonstante (sie gibt die Kraft an, die notwendig ist, um die Feder um 1 m zu dehnen) bedeuten. Beträgt die Dichte der schwingenden Flüssigkeitssäule ϱ und der Querschnitt der Röhre A, so ergibt sich als Masse für die Säule $m = l \cdot A \cdot \varrho$. Zur Berechnung der Federkonstanten: Senkt man den Meniskus in einem Schenkel um Δl, so hebt er sich im anderen auch um Δl. Mit $k = \frac{F}{\Delta l}$ ergibt sich $k = 2 \cdot A \cdot g \cdot \varrho$.
In die Gleichung für die Periodendauer eingesetzt, erhält man $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$. Setzt man die vorgegebene Länge ein, so ergibt sich $T = 1{,}4$ s.

Na/Te 10/12 ■ 468 Sind Spannung U, Widerstand R und Zeit t gegeben, so erzeugt ein elektrischer Strom die Wärme $Q = U^2 \cdot \frac{t}{R}$. Beachtet man, daß bei der Spannung U_1 in $t + 120$ s die gleiche Wärme erzeugt wird, wie in t bei der Spannung U_2, so erhält man:
$t = \frac{U_1^2 \cdot 120\,\text{s}}{U_2^2 - U_1^2}$. Setzt man die gegebenen Werte ein, so erhält man $t = 13$ min 11 s.

Lösung zur Sprachecke:

▲ 1 ▲ Zur Zahl 1989 ist von links und rechts je eine Ziffer hinzuzuschreiben, so daß die erhaltene sechsstellige Zahl durch 88 teilbar ist.

Lösung: Es seien x und y die zu ergänzenden Ziffern und $\overline{x1989y} = z$ die gesuchte Zahl. Laut Aufgabe gilt $88 \mid \overline{x1989y} = z$. Da $88 = 8 \cdot 11$ und ggT $(8, 11) = 1$ ist, folgt $88 \mid z$, wenn $8 \mid z$ und $11 \mid z$. Auf Grund der Teilbarkeitsregeln für 8 und 11 muß $8 \mid \overline{89y}$ und $11 \mid (y - 9 + 8 - 9 + 1 - x)$ gelten, so daß man zunächst $y = 6$ schließt und damit $6 - 9 + 8 - 9 + 1 - x = -(x + 3)$ errechnet. Folglich kann nur $x = 8$ richtig sein. Tatsächlich ist $819\,896 : 88 = 9317$. Man hat 8 vor 1989 zu schreiben und an die entstandene Zahl noch 6 anzuhängen, damit die so gefundene Zahl $z = 819\,896$ durch 88 teilbar ist.

▲ 2 ▲ Zahlenpolygon

In die leeren Kreise sind die Zahlen 8 – 16 – 20 – 22 – 33 – 35 – 39 – 41 – 45 – 47 so einzusetzen, daß man für jede Seite des Siebenecks die Summe 114 erhält. Darüber hinaus gilt: $C + H + M = 114$.
Lösung: $B = 35$, $D = 45$, $E = 41$, $F = 20$, $H = 39$, $I = 22$, $J = 33$, $L = 8$, $M = 47$, $N = 16$.

▲ 3 ▲ Untersuchung von Quadraten

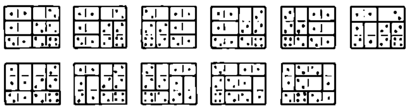
Hier sind drei ungewöhnliche Quadrate: 41^2, 33^2, 836^2. Was ist an ihnen ungewöhnlich? (Ein Hinweis: Suche nach neuen Quadratzahlen in den Zahlen, die du bei der Berechnung der jeweiligen Quadrate erhältst.)
Lösung: $41^2 = 1681{,}16 = 4^2$ und $81 = 9^2$, 4 und 9 sind selbst Quadrate; $33^2 = 1089$, $9801 = 99^2$; $836^2 = 698\,896$, rückwärts gelesen ergibt sich wieder eine Quadratzahl.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Leistungsfähiges Domino-Sextett

Benutzte Dominosteine:

Mögliche Lagerungen:



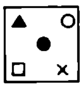
15 Meter im Quadrat

Wegen 15 : 3 ist jedes Beet 5 m lang und wegen 15 : 10 ist es 1,50 m breit. Daraus ergibt sich: $(5 \cdot 2) \cdot 10 \cdot 3 = 300$ als Wegsumme an den Längsseiten. Hinzukommen wegen $1{,}50 \cdot 2 = 3$ $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27 = 4 \cdot 30 + 15 = 135$ und $135 + 10 \cdot 10 = 235$ und $135 + 20 \cdot 10 = 335$, $300 + 135 + 235 + 335 = 1005$. Das sind 1,005 km. Also stimmt die Meinung von Herrn Ackermann.

Zum Knobeln

Teil e

Scharf nachgedacht



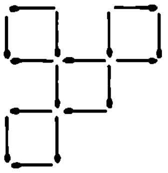
Wortspielereien

Tausendfüßler, Dreifelderwirtschaft, Dreieck, Zehner, Einschreiben, Dreispitz, Revier, Tausendschönchen, Schlacht, Gemeinsamkeit, Zweisamkeit, Einsatz, Tracht, Einschlag, Zweiachser, Vierzylindermotor, Zweiteiler, Dreiangel, Achtlosigkeit

Mathematisches Kreuzworträtsel

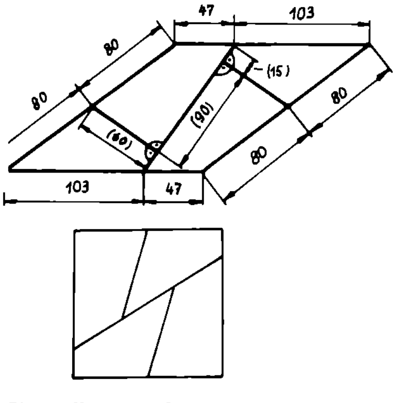
Waagerecht: 1. Dezimeter, 6. Acht, 7. Null, 9. Pol, 12. Abel (Niels Henrik), 14. Jahr, 15. Ideal.
Senkrecht: 1. Diagonale, 2. Zahl, 3. mm (Millimeter), 4. Thue (Axel), 5. Rollkurve, 8. Lot, 10. Teil, 11. Wald, 13. Id, 14. Ja.

Hölzchentrick

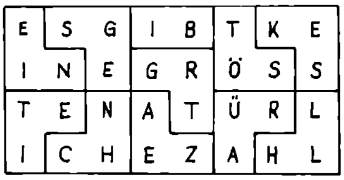


Flächenverwandlung mittels Legespiel

Die zusätzlich in Klammern angegebenen Maße lassen sich mit dem Satz des Pythagoras und den Flächeninhaltsformeln von Parallelogramm und Quadrat berechnen.



Sinnvoll getauscht



E	S	G	I	B	T	K	E
I	N	E	G	R	Ö	S	S
T	E	N	A	T	Ü	R	L
I	C	H	E	Z	A	H	L

Wieviel Flächen hat dieser Körper?

16 Flächen

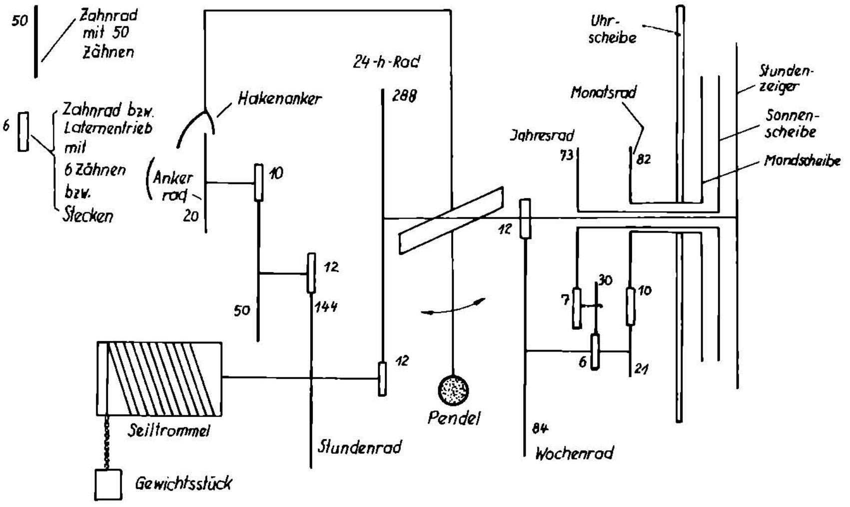
Lösung zu: Gut studiert? Heft 1/90

Betrachtet man z. B. nur den Punkt P mit den vier Strecken von P zu den Eckpunkten des Rechtecks, so ergeben sich vier Dreiecke mit den Flächeninhalten A_{ABP}, A_{BCP}, A_{CDP}, A_{DAP}. Mit den Bezeichnungen des Bildes wären dies
$A_1 + A_7$, $A_4 + A_5 + A_8 + A_9$, $A_2 + A_6$, A_3.
Wie sich zeigen läßt (siehe auch alpha-Wettbewerb Aufgabe Ma 6 ■ 2963 oder im angegebenen Beitrag, Aufgabe 1) gilt (1) bezüglich Punkt P
$(A_1 + A_7) + (A_2 + A_6) = A_3 + (A_4 + A_5 + A_8 + A_9)$, (2) bezüglich Punkt Q
$(A_1 + A_9) + (A_2 + A_8) = A_5 + (A_3 + A_4 + A_6 + A_7)$. Durch Addition von (1) und (2) erhält man die Behauptung a) und z. B. durch entsprechende Subtraktion die Behauptung b).

Die Rostocker Monumentaluhr

Wohl jeder hat von der berühmten astronomischen Uhr am Altstädter Rathaus in Prag gehört oder sie sogar gesehen. Weniger bekannt ist, daß auch wir bedeutende öffentliche Uhren mit astronomischer Anzeige besitzen. Ich nenne nur die wohl älteste original weitgehend erhaltene astronomische Uhr Europas in Stralsund, die Rathausuhr in Görlitz und die Rostocker Monumentaluhr in der Marienkirche. Von ihr soll im folgenden die Rede sein.

Im Jahre 1472 vollendete der in Danzig (Gdańsk) wohnende Hans Düringer die Kunstuhr in Rostocks Hauptkirche. Mit ihrer Höhe von 12 Metern, ihren astronomischen und kalendarischen Anzeigen, ihrer technischen Realisierung und künstlerischen Gestaltung und ihrem Erhaltungszustand ist sie heute eine der bedeutendsten mittelalterlichen astronomischen Großuhren auf der Erde.



Nach 170 Jahren wurde die gotische Uhr Düringers 1641/43 gründlich überholt, um ein Musikwerk ergänzt und mit einem Renaissancerahmen versehen.

Nach der Einführung des Pendels als Gangregler bei Uhren (Christian Huygens, 1657) und der Erfindung der Hakenhemmung (Robert Hooke, 1676) wurde die Rostocker Uhr 1710 von der ursprünglichen Spindel-Waag-Hemmung auf die noch heute vorhandene Pendel-Haken-Hemmung umgebaut.

Die gründlichste Restaurierung ihrer Geschichte erlebte diese Uhr 1974/77. Sie wurde im Auftrage des Instituts für Denkmalpflege der DDR von dem Metallrestaurator Wolfgang Gummelt vorgenommen. Seither ist sie mit allen ihren Werken und Anzeigen wieder in Funktion.

Die Rostocker Uhr zeigt eine Dreiteilung, die sich auch bei anderen astronomischen Großuhren findet (u. a. Strasbourg, Münster, Lübeck, Lund, Danzig): Über der in der Mitte liegenden Uhrscheibe befindet sich ein Figurenspiel, darunter eine Kalenderscheibe.

Der Ziffernring auf der Uhrscheibe zeigt zweimal die Ziffern von I bis XII. Er wird von dem stabförmigen Stundenzeiger einmal in 24 Stunden umrundet. Einen Minutenzeiger besaß diese Uhr nie. Konzentrisch zum Stundenring befinden sich auf der Uhrscheibe die Ringe der Tierkreiszeichen und der Monatsbilder.

Koaxial mit dem Stundenzeiger drehen sich zwei übereinanderliegende Scheiben: Die Sonnenscheibe einmal im Jahr, und die unter ihr befindliche Mondscheibe einmal während eines siderischen Monats (27,32 Tage). Im Zusammenspiel dieser beiden Scheiben wird in einer kreisförmigen Öffnung in der Sonnenscheibe die jeweilige Mondphase sichtbar. Da sich gleiche Mondphasen nach einem synodischen Monat wiederholen (29,53 Tage), müssen die Scheiben nach dieser Zeit wieder die gleiche Stellung zueinander haben. An den beiden Scheiben befindet sich je ein Zeiger mit einem Mond- bzw. Sonnenbild. Sie zeigen die Stellung von Mond und Sonne im Tierkreis. Der Sonnenzeiger gibt außerdem den jeweiligen Monat an.

Die Rostocker Uhr besitzt als einzige in der DDR eine Kalenderscheibe. Die jetzige ist die vierte in ihrer Geschichte (1472, 1643, 1745, 1885) und reicht bis ins Jahr 2017. Sie gibt zwei Gruppen von kalendarischen Anzeigen: Die einen sind dem jeweiligen Datum (Tag und Monat) zugeordnet (Tagesbuchstabe, kirchlicher Tagesname, Zeit des Sonnenaufgangs, Dauer von Tag und Nacht); die anderen sind einem bestimmten Jahr fest zugehörig (Goldene Zahl, Sonntagsbuchstabe, Sonnenzirkel, Römerzinszahl, Zeitraum zwischen Weihnacht und Fastnacht, Ostertermin). Diese letzteren müssen für die nächste Scheibe ab 2018 weitergeschrieben bzw. neu berechnet werden.

Aus der Vielzahl der Anzeigen greife ich nur ein Beispiel heraus: Tages- und Sonntagsbuchstaben (Buchstabenfolge A … G) bilden einen „ewigen Kalender“. Er gestattet, den Wochentag für jedes beliebige Datum zwischen dem 1. 1. 1885 und dem 31. 12. 2017 zu ermitteln. Dafür ein Beispiel: Auf welchen Wochentag fällt der 1. Januar 2001, der erste Tag des 21. Jahrhunderts?: Der Tagesbuchstabe jedes 1. Januar ist A. Das Jahr 2001 hat den Sonntagsbuchstaben G, d. h. in diesem Jahr sind alle Tage mit dem Tagesbuchstaben G Sonntage. A ist in der genannten Buchstabenfolge der Nachfolger von G. Also ist der 1. 1. 2001 ein Montag.

Zu jeder vollen Stunde ertönt bei dieser Uhr der Stundenschlag, und daran anschließend wird ein beliebig einstellbares Musikstück gespielt. Mittags um 12 Uhr wird der Figurenumlauf auf dem Aufsatz oberhalb der Uhrscheibe ausgelöst.

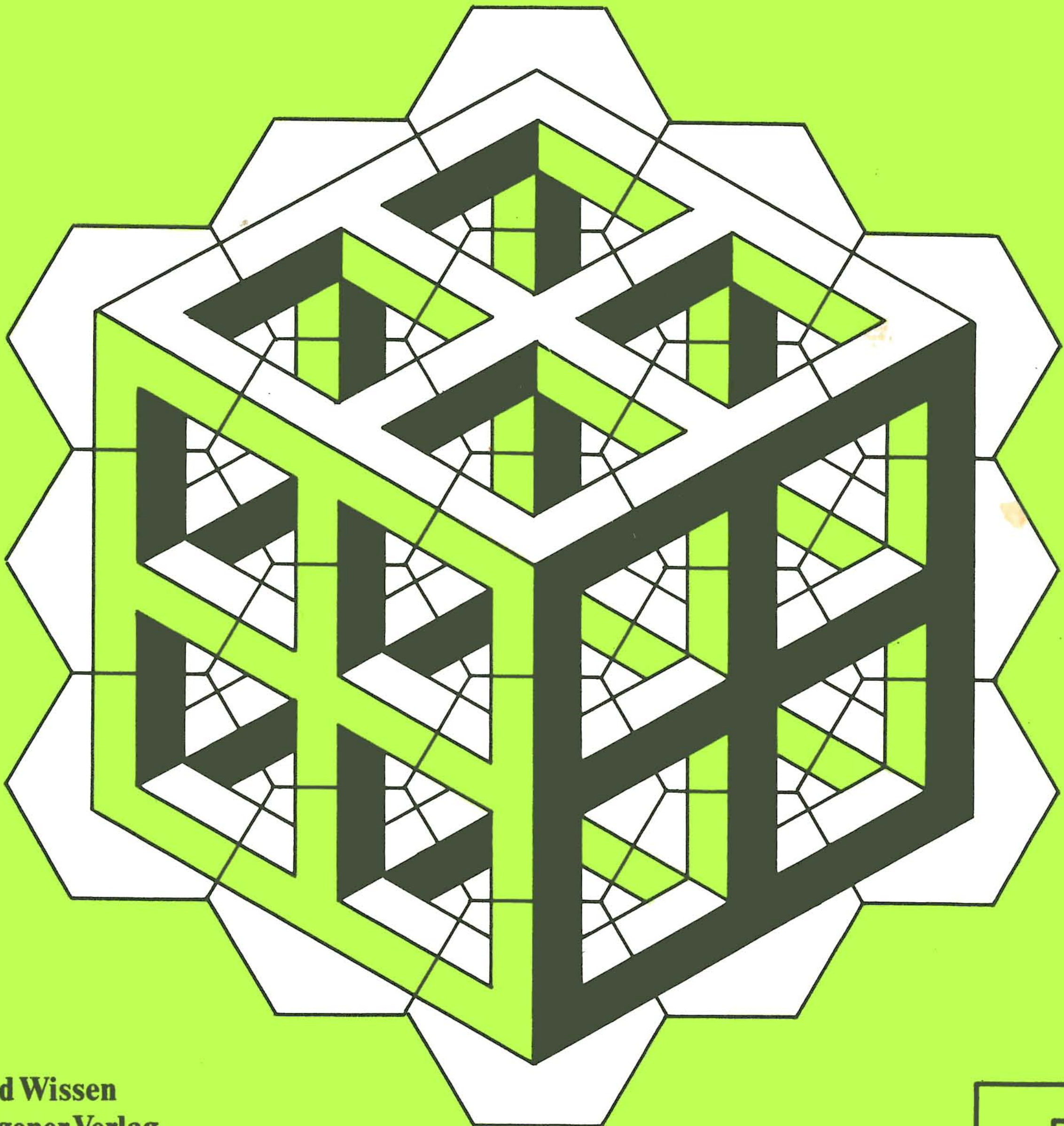
Vom Hauptwerk (siehe Zeichnung) dieser Uhr, das die Drehung des Stundenzeigers und der beiden Scheiben bewirkt, werden weitere vier Werke gesteuert: Das Schlagwerk, das Musikwerk, das Figurenwerk und das Kalenderwerk. Bis auf letzteres werden alle diese Werke täglich von Hand aufgezogen – die Arbeit des Küsters Siegfried Engel. Versucht einmal, die Schwingungsdauer des Uhrpendels zu berechnen, wenn außer den Zahn- bzw. Triebstreckenzahlen der Zahnräder und Laternentriebe bekannt ist, daß sich der Stundenzeiger in 24 Stunden einmal im Uhrzeigersinne dreht. Nutzt die so ermittelte Schwingungsdauer um zu prüfen, wie die Zeiten für eine Drehung von Sonnen- und Mondscheibe von den Werten für das tropische Jahr (365, 2422 Tage) und den siderischen Monat (27, 3217 Tage) abweichen. In welcher Richtung drehen sich die Scheiben?

Ich habe nichts über die künstlerische Ausgestaltung des Uhrenäußeren gesagt. Am besten, Ihr seht Euch auch das bei nächster Gelegenheit in der Rostocker Marienkirche selbst an. Sie ist Dienstag bis Sonnabend von 10.00 bis 12.00 und von 15.00 bis 17.00 zu besichtigen. *M. Schukowski*

ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 24 (1990) 2 · Seiten 25 bis 48

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
24. Jahrgang 1990
Preis 0,50 M
ISSN 0002-6395

3

Ausgezeichnet mit der *Artur-Becker-Medaille* in Gold
Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027
Redaktion:
Dr. paed. Gabriele Liebau (Chefredakteur); Rosemarie Schubert (redaktioneller Mitarbeiter)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Dr. sc. Lothar Flade (Halle); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. C. P. Helmholz (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle)
Veröffentlicht unter Registriernummer 1545 des Presse- und Informationsdienstes der Regierung der DDR
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 0,50 M. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Dr. H.-J. Schmidt (S. 62); R. Witzlau (IV. U.-Seite)
Vignetten: L. Otto, Leipzig
Techn. Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach „Pythagoras“, Amsterdam
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 9. Februar 1990
Auslieferungstermin: 11. Juni 1990

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Euch ist inzwischen sicher bekannt, daß die Presseerzeugnisse unseres Landes stark subventioniert waren. So auch unsere Zeitschrift. Die Erlöse deckten schon seit vielen Jahren nicht mehr die Kosten für Papier, Satz und Druck. Mit dem Wegfall der Subventionen sehen wir uns deshalb gezwungen, ab Heft 4/90 den Preis unserer Zeitschrift auf 1,50 Mark zu erhöhen (im Abonnement zweimonatlich 1,20 Mark). Wenn ihr unsere Zeitschrift abbestellen möchtet, so muß dies für das III. Quartal bis zum 9. Juli bei der Deutschen Post erfolgen. Wir hoffen aber sehr, euch auch weiterhin zu unseren Lesern zählen zu können. *Eure Redaktion*

Alphons weist euch auf Artikel mit geringerem Schwierigkeitsgrad hin. Das heißt aber nicht, daß alle anderen Beiträge für mathematische Anfänger ungeeignet sind. Probiert es selbst aus!

De honingraatkubus
Der Honigwabenwürfel

Auf unserem Titelblatt seht ihr ihn – den Honigwabenwürfel. Er glänzte auf dem Titelblatt unserer niederländischen Schwesternzeitschrift „Pythagoras". Und gefiel uns so ausnehmend gut, daß wir ihn und die dazugehörigen Betrachtungen euch nicht vorenthalten wollten.

Alphons

Was sehen wir? Einen Würfel, der im Mittelpunkt des Sechsecks einen nach vorn weisenden Eckpunkt, sechs Eckpunkte entlang des Randes der Figur hat und dessen vorderer und hinterer Eckpunkt sich überdecken.

Jede der Kanten ist ein Balken mit quadratischem Querschnitt, jede der sechs Seitenflächen mit einem Balkenkreuz versehen. Innen ist der Würfel leer – oder doch nicht? Könnte sich in der Würfelmitte ein zentrales „Achsenkreuz" befinden, das die gegenüberliegenden Flächenmittelpunkte verbindet?

Oder sieht man durch die Öffnungen nur die Balken der Rückseite?

Versuchen wir, die Doppelsinnigkeit durch einen Zeichentrick aufzuheben. An Schnittpunkten, die zwar in der Zeichnung zu sehen sind, die aber in Wirklichkeit nicht existieren, werden die Linien unterbrochen. Schaut euch die folgenden beiden Bilder genau an. Welcher der beiden Würfel hat ein zentrales Achsenkreuz?

Ein winziger Unterschied an drei Stellen und Bild 1 zeigt den hohlen Würfel, Bild 2 einen Würfel mit zentralem Achsenkreuz.

Welchen Sinn hat nun das „Honigwabenmuster" hinter dem Würfel?

Ganz einfach: Alle Balken des Würfels werden durch drei parallele Linienstücke angedeutet, die jeweils senkrecht auf einer Honigwabenseite stehen. Das mittlere Linienstück geht durch die Mitte dieser Seite. (Zerschneidet ihr die Titelfigur in Sechsecke, erhaltet ihr ein ganz schön anstrengendes Puzzle.) Jedes Honigwabenstück ist nun aus ein und derselben Grundfigur abzuleiten.

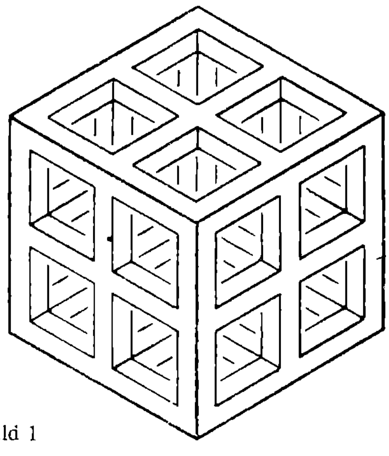


Bild 1

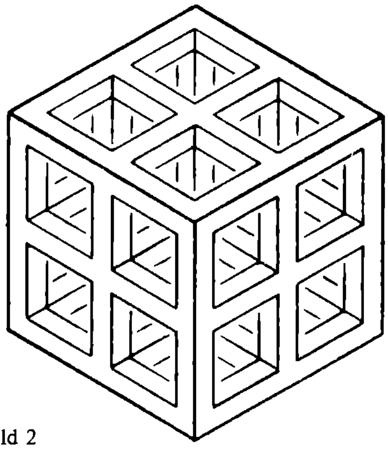


Bild 2

In einem regelmäßigen Sechseck werden die Mitten jedes Paares gegenüberliegender Seiten durch eine Linie verbunden (Bild 3 a). Beiderseits jeder Linie werden im Abstand von einem Drittel der Länge der Sechseckseite Parallelen gezogen (Bild 3 b).

Fertig ist die Grundfigur.

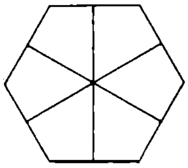


Bild 3 a

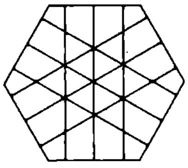


Bild 3 b

Der Honigwabenwürfel und Verwandte von ihm (diesen fehlen einzelne oder mehrere Balken) können nun daraus abgeleitet werden, indem Teile daraus wegradiert werden.

Beispiel 1: Wo kann das folgende Puzzlestück sitzen?

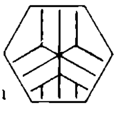


Bild 4 a

Die Lösung, falls das Rahmenkreuz der oberen Fläche weggelassen wurde und der Würfel hohl ist.

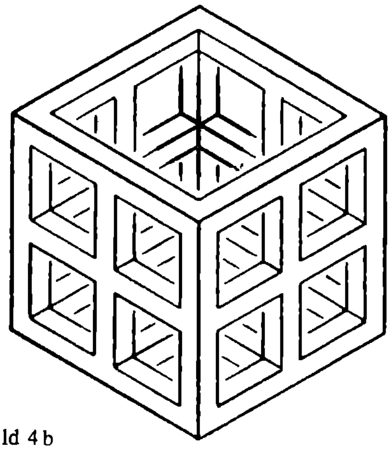


Bild 4 b

Beispiel 2: Wo befindet sich dieses Puzzlestück?

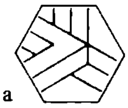


Bild 5 a

Eine Lösung:

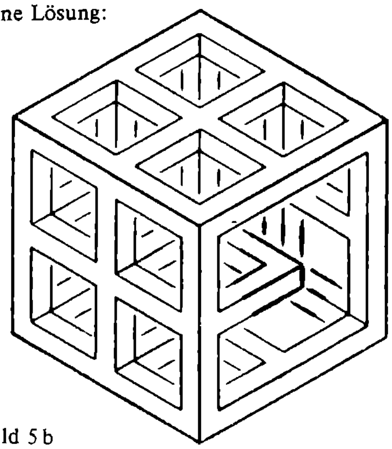


Bild 5 b

Nun seid ihr dran. Sucht für die sechs Teile von Bild 6 eine Stelle im Gebilde der Titelfigur, in der, wie gesagt, Balken entfernt werden dürfen.

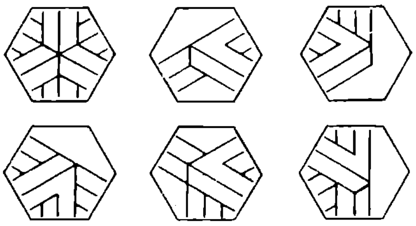


Bild 6

Ein Bild wurde allerdings hineingemogelt, das nicht sein kann!

nach: „De honingraatkubus", Pythagoras, Amsterdam Hessel Pot/Klaas Lakeman nach einer Idee von G. J. Westerink

Die Lösung der Aufgabe sei dem Leser selbst überlassen.

Überall Algorithmen

Teil 2
Darstellungsformen von Algorithmen

Im Teil 1 (alpha, Heft 2/90) lernten wir Bildfolgen und verbale Beschreibungen als Darstellungsformen von Algorithmen kennen.

BASIC-Programm

Einem Computer nützt es wenig, wenn der Algorithmus z. B. in deutscher Sprache oder in Form einer Bildfolge vorliegt. Für ihn muß man die Vorschrift in eine spezielle „Computersprache" übersetzen. Darauf wurde in Teil 1 schon kurz eingegangen.

Vor der Übersetzung einer Vorschrift in eine Computersprache ist es erforderlich, den Algorithmus in elementare, für den Computer verständliche Anweisungen zu zerlegen. Dabei kann es nützlich sein, den Algorithmus zunächst in Form eines *Programmablaufplanes* bzw. eines *Struktogramms* darzustellen. Auf beide Möglichkeiten der Darstellung gehen wir nun noch etwas näher ein.

Als erstes Beispiel wollen wir die Vorschrift der Aufgabe 4 (siehe Teil 1) in Form eines Programmablaufplans darstellen. In etwas veränderter Form hatte die Vorschrift folgendes Aussehen:

Gegeben sind die Zahlen a, b, c.

(1) Addiere zu a die Zahl b! Das ergibt x.

(2) Dividiere x durch 2! Das ergibt y.

(3) Multipliziere y mit c! Das ergibt z.

(4) Schreibe die Zahl z auf!

Hier nun ein entsprechender Programmablaufplan (Bild 1):

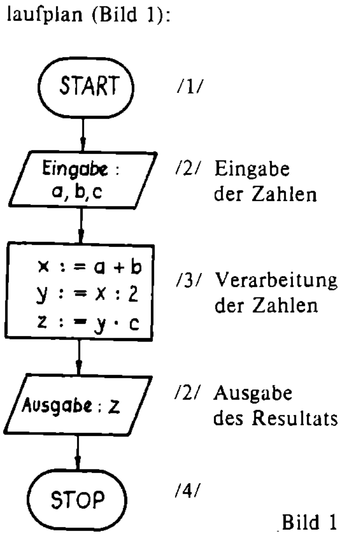


Bild 1

/1/ Dieses Symbol markiert den Anfang eines jeden Programmablaufplans.

/2/ Das Parallelogramm ist das Symbol für die Eingabe oder Ausgabe von Daten (z. B. Zahlen).

/3/ Ein Rechteck ist das Symbol für die Verarbeitung von Daten. Das Symbol „:=" wird übersetzt mit „ergibt sich aus". $x := a + b$ bedeutet, daß sich der Wert der Variablen x als Summe von a und b ergibt. Ist z. B. $a = 2$ und $b = 4$, so erhält x nach der Anweisung $x := a + b$ den Wert 6. Anweisungen wie $x := a + b$ nennt man auch *Ergibtanweisungen.*

In einer Ergibtanweisung darf links vom Zeichen „:=" nur *eine* Variable stehen. Dieser Variablen wird der Wert des rechts vom Zeichen „:=" stehenden Ausdrucks zugewiesen. Zuweilen findet man auch eine Anweisung wie $x := x + 1$. Eine solche Anweisung ist nur sinnvoll, wenn zuvor der Variablen x ein Wert zugeordnet wurde. Angenommen, x hätte durch die Anweisung $x := 6$ den Wert 6 und anschließend wäre die Anweisung $x :=\ + 1$ abzuarbeiten, dann würde sich nun der alte Wert von x um 1 erhöhen und x würde der Wert 7 zugeordnet werden, d. h., vor Abarbeitung der Anweisung $x := x + 1$ hat x den Wert 6, nach Abarbeitung der Anweisung $x := x + 1$ hat x den Wert 7.

/4/ Dieses Symbol markiert das Ende eines jeden Programmablaufplans. Die Abarbeitung des Algorithmus erfolgt in Pfeilrichtung. Mit dem im Programmablauf (Bild 1) angegebenen Algorithmus kann man den Flächeninhalt eines Trapezes ermitteln, falls a und b die Zahlenwerte der zueinander parallelen Seiten sind und c der Zahlenwert der zugehörigen Höhe ist. (Die Maßeinheit sei jeweils „cm"!) z ist dann der Zahlenwert des Flächeninhalts (in cm^2).

▲ 11 ▲ Schreibe einen Programmablaufplan für die Berechnung des Volumens und der Oberfläche eines Würfels mit der Kantenlänge a!

Im Bild 3 ist ein Flußdiagramm zur Ermittlung der kleinsten von drei vorgegebenen Zahlen dargestellt. In diesem Programmablaufplan finden wir ein neues Symbol (Bild 2):

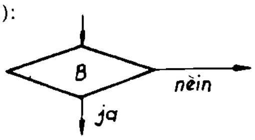


Bild 2

Der Rhombus ist das Symbol für eine Verzweigung. Er hat einen Eingang und zwei Ausgänge. Welcher Ausgang zu benutzen ist, hängt davon ab, ob die Bedingung B im Rhombus erfüllt ist (ja-Weg) bzw. nicht erfüllt ist (nein-Weg).

▲ 12 ▲ Wieviel verschiedene Wege gibt es im Programmablaufplan (Bild 3), um von (START) nach (STOP) zu gelangen? Gib für jeden Weg ein Zahlentripel a, b, c an!

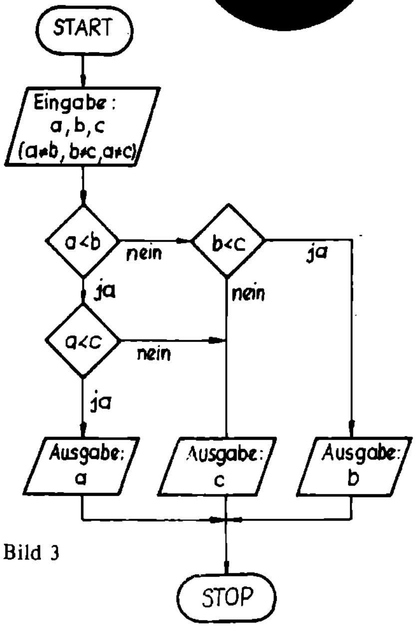


Bild 3

▲ 13 ▲ Entwickle einen Programmablaufplan, nach dem man die größte von drei vorgegebenen Zahlen a, b, c ($a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$) ermitteln kann!

▲ 14 ▲ Versuche, durch systematisches Probieren alle natürlichen Zahlen von 0 bis 10 zu ermitteln, die die Gleichung $x \cdot x = 11 \cdot x - 24$ erfüllen.

Für die Lösung der Aufgabe 14 fertigen wir uns am besten eine Tabelle an:

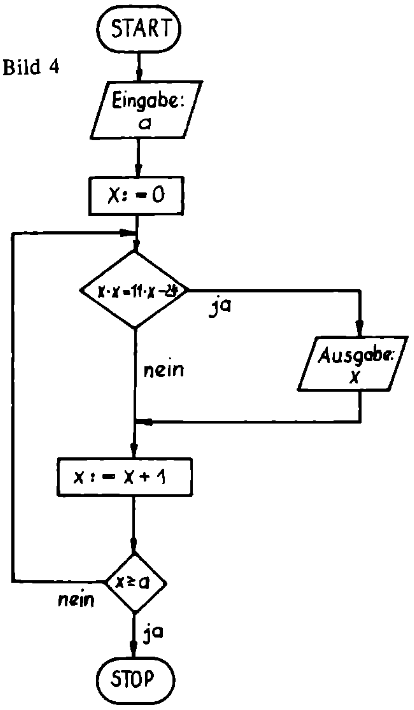
x	$x \cdot x$	$11 \cdot x - 24$	Gilt $x \cdot x = 11 \cdot x - 24$?
0	0	−24	nein
1	1	−13	nein
⋮			
10			

Das systematische Suchen nach den Lösungen könnte auch ein Computer übernehmen, denn dem Suchvorgang liegt ein Algorithmus zugrunde.

Allerdings muß man dem Computer „sagen", von welcher natürlichen Zahl x die Suche beginnen soll und bis zu welcher natürlichen Zahl a die Suche nach einer Lösung durchgeführt werden soll.

Die Suche beginnen wir mit $x = 0$. In Form eines Programmablaufplanes hätte der Suchalgorithmus folgendes Aussehen (Bild 4):

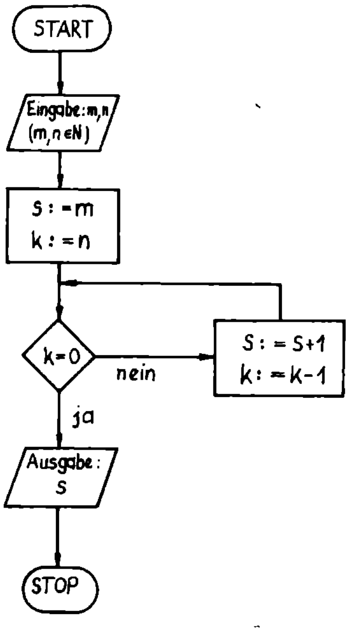
Bild 4



Dieses ständige Wiederholen desselben Weges bezeichnet man als *Schleife* (Zyklus oder Wiederholung). Die *Schleifenvariable* ist in unserem Falle x. Ihr wird durch $x := 0$ zunächst der Anfangswert 0 zugewiesen. Mit diesem Wert ist die Schleife erstmals zu durchlaufen. Danach wird der Wert der Variablen durch $x := x + 1$ um 1 erhöht. Der Durchlauf ist nun so lange zu wiederholen, bis der aktuelle Wert der Variablen größer als der Wert von a ist. Für unser Beispiel legten wir für a den Wert 10 fest.

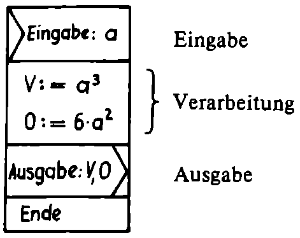
▲ 15 ▲ Arbeite den Programmablaufplan (Bild 5) für folgende Werte ab!
a) $m = 3$; $n = 2$; b) $m = 6$; $n = 3$.

Bild 5



Neben Programmablaufplänen setzen sich mehr und mehr auch *Struktogramme* als anschauliche Darstellungsformen für Algorithmen durch. Deshalb wollen wir zum Abschluß unseres Beitrages noch einige Bemerkungen zu Struktogrammen machen. Als erstes betrachten wir die Darstellung eines Struktogrammes für einen Algorithmus zur Berechnung von Oberfläche und Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge a (Bild 6).

Bild 6



Eine Verzweigung wird im Struktogramm mit Hilfe eines Dreiecks dargestellt (vgl. Bild 7). Im Vergleich ist im Bild 7 noch der entsprechende Teil eines Programmablaufplanes angegeben.

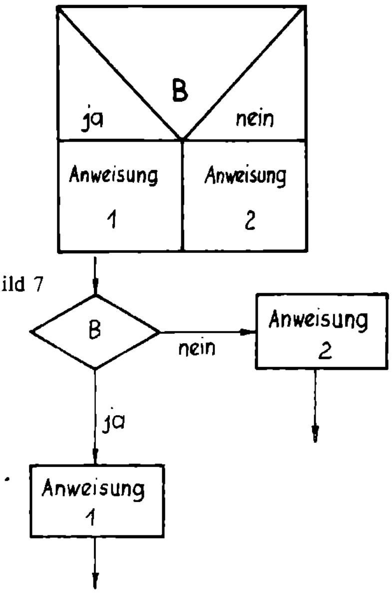
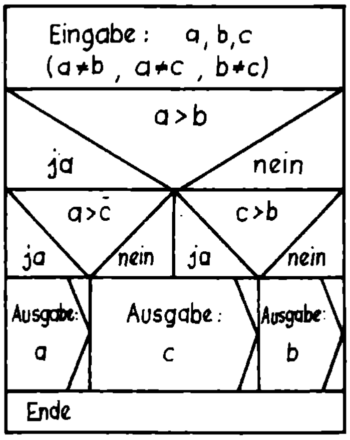


Bild 7

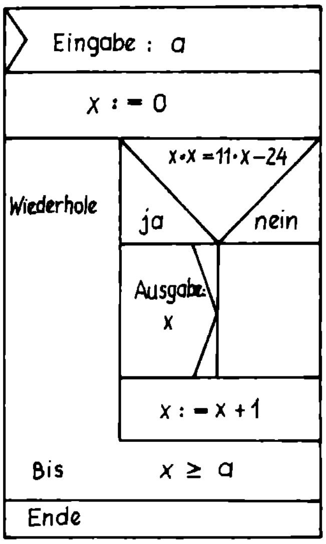
Ein Struktogramm für die Ermittlung der größten von drei angegebenen Zahlen a, b, c ($a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$) könnte nun wie folgt aussehen (Bild 8):

Bild 8



Als letztes Beispiel wollen wir noch den Algorithmus zur Bestimmung der Lösung der Gleichung
$x \cdot x = 11 \cdot x - 24$ ($x \in N$, $x \leqq 10$)
in. Form eines Struktogramms vorstellen. Dabei ist a wieder die Variable für die Zahl, bis zu der die Suche nach einer Lösung durchgeführt werden soll. An dem Struktogramm (Bild 9) kann man erkennen, wie man eine Wiederholung (mit Endbedingung) in einem Struktogramm darstellen kann.

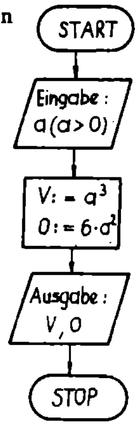
Bild 9



L. Flade

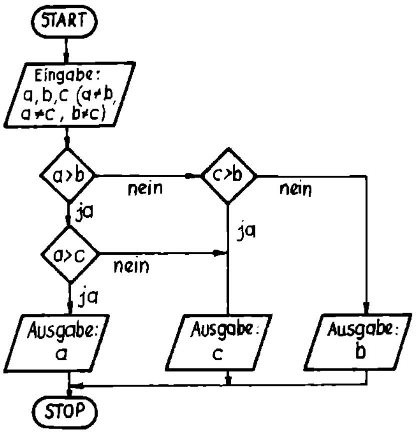
Lösungen

▲ 11 ▲



▲ 12 ▲ 4 Wege!
Beispiele für Zahlentripel:
(2, 3, 4), (4, 3, 2), (3, 2, 4), (3, 4, 2)

▲ 13 ▲



▲ 14 ▲ $x_1 = 3$; $x_2 = 8$

▲ 15 ▲ Als Ausgabewert ergibt sich:
a) $s = 5$; b) $s = 9$.

Weißt du, wieviel Sternlein stehen?

Die Entwicklung der Zahlwörter und Zahlzeichen

Teil 1

In einem alten Kinderlied wird die Frage gestellt, wie viele Sterne am Himmel stehen. Auch eine Antwort wird gegeben: die große Schar sei gezählt. Warum zählen wir eigentlich Dinge, und wie tun wir das? Anders gesagt, wie kam es zu dem Bedürfnis, etwas zu zählen, und wie entwickelten wir Zählfertigkeiten?

Der schwedische Mathematiker Mittag-Leffler (1846 bis 1927) begann seine Arbeit „Einleitung zur Theorie der analytischen Functionen“ von 1920 mit der Bemerkung: „Die Zahl ist Anfang und Ende des Denkens. Mit dem Gedanken wird die Zahl geboren. Über die Zahl hinaus reicht der Gedanke nicht.“ Diese Feststellung unterstreicht nicht nur die grundlegende Rolle des Zählens, denn nach Mittag-Lefflers Meinung erreicht das abstrakte Denken in dem Zahlbegriff und im Umgang damit seinen Höhepunkt schlechthin. So verwundert es nicht, wenn Mittag-Leffler diese Aussage für würdig hielt, den Eingang des von ihm in Djursholm gegründeten mathematischen Instituts zu zieren.

Daß Mathematiker es mit den Zahlen haben, versteht sich. Aber übertreiben sie nicht, wenn sie wie Isodorus (560 bis 636) behaupten: „Nimm allem die Zahl, und alles zerfällt“? Keineswegs, denn dreizehn Jahrhunderte nach Isodorus ist die Rolle der Zahl noch viel offensichtlicher geworden. Es ist der 22. 1. 1990, an dem ich diesen Artikel in die Maschine tippe, am nächsten Tag (23. 1.) werde ich um 6.30 Uhr aufstehen und um 7.32 oder 7.37 Uhr mit den Straßenbahnlinien 2 oder 3 zum Bahnhof fahren, um den Zug 7331 um 8.04 Uhr der Strecke 515 Halle – Leipzig zu benutzen. In Leipzig werde ich am Johannisplatz der alpha-Redaktion das 6seitige Manuskript abgeben. Ich habe dann noch einige Besprechungen in Leipzig zu verschiedenen Uhrzeiten und werde bestimmte Telephonnummern anrufen. Schließlich will ich mir aus der Bibliothek einige Bücher ausleihen, deren Signatur ich dafür angeben muß. Am Abend werde ich das Rundfunk- oder Fernsehprogramm zu einer bestimmten Zeit einstellen. Das Fernsehbild oder die Tonübertragung ließen sich übrigens durch Zahlenfolgen beschreiben, d. h., aus dieser Zahlenfolge könnte das Bild oder der Ton mittels geeigneter Technik rekonstruiert werden. Bankkonto, Postleitzahl, Personenkennziffer, Autonummer, Schulklassenbezeichnung und vieles andere zeigen, wo sich Zahlen unwiderruflich „breit gemacht“ haben.

Es ist heute unmöglich, unser Leben ohne Zahlen zu ordnen und in den Griff zu bekommen. War das schon immer so? Nein, und es ist reizvoll zu sehen, wie die Bedeutung der Zahlen zugenommen hat und wie die Menschen den wachsenden Bedürfnissen mit geeigneten Zahlzeichen und Zahlwörtern gerecht zu werden versuchten. Das Zählen (Benennen der Zahl) und das elementare Rechnen (Umgehen mit Zahlzeichen) sinkt heute bereits nach der Unterstufe unserer Schulen zur Handfertigkeit herab, und es wird deshalb als nicht besonders schwierig oder tiefgründig angesehen. Das ist aber ein Irrtum, denn die Leichtigkeit des Umgangs liegt an den außerordentlich praktischen Bezeichnungen und einfachen Regeln, die in einem sich über Jahrhunderte erstreckenden Prozeß aus vielen Ziffernsystemen als die günstigsten herausgeschält wurden.

Das Zählen ist eine angeborene Fähigkeit des Menschen, vergleichbar mit der angeborenen Fähigkeit zu sprechen. Aber wie diese, muß auch die Fähigkeit des Zählens entwickelt werden: der Geist fällt nicht vom Himmel. Allem Zählen voran geht jedoch ein Zweck. Das ist auch heute noch so. Eine Reisegesellschaft wird beispielsweise vom Reiseleiter anders gezählt als von Hotelangestellten, die Zimmer anweisen oder Speisen und Getränke austeilen. Erst ein Zweck erklärt eine Menge und macht sie zählbar.

Die Fähigkeit des Zählens beruht auf dem räumlichen Vorstellungsvermögen des Gehirns. Um irgendwelche „Mächtigkeitseindrücke“ einer Menge von Dingen aufzulösen, sie also zu benennen und zu bezeichnen, müssen die Elemente der Menge angeordnet werden, d. h., jedes Ding bekommt seinen Ort. [Gegebenenfalls werden Dinge wie Wasser, Luft u. ä. (Kontinua) durch Maße meßbar gemacht.] Zweckmäßig ist das Aneinanderreihen in einer (geraden) Linie.

Und hier sitzt ein Problem, das aus moderner Sicht leicht übersehen wird. Wir haben keine Schwierigkeit, eine Herde Vieh zu zählen, denn wir abstrahieren beim Zählen und übersehen damit individuelle Unterschiede der Tiere. Jedes Tier ist beim Zählen für uns ein Ding, nämlich ein Tier der zu zählenden Art. Das war aber bei unseren Vorfahren, die zu zählen begannen, längst nicht so. Das Individuelle der Tiere, Menschen oder Dinge überwogs anfangs weit mehr als das Bedürfnis, einen abstrakten Begriff (wie Pferd, Stein oder Baum) zu schaffen, der sich zum Zählen eignet. Hinzu kommt, daß die Mengen, die zunächst gezählt werden sollten, auch ohne einen abstrakten Elementbegriff „zählbar“ waren. Genau wie jeder in einer Gruppe von guten Freunden weiß, ob alle da sind, ohne dabei die Gruppe durchzuzählen. Hirten von Naturvölkern (Indianer, Afrikaner), die sehr verbunden mit ihrer Welt und deren Dingen leben, bewältigen auf diese Art das Zählen großer Viehherden bis zu mehreren hundert Tieren. Auch Tiere übersehen auf diese Weise kleinere Mengen (Junge, eigene Horde). Im allgemeinen leisten moderne Menschen beim sogenannten „intuitiven“ Zählen auch nicht mehr als Tiere. Tierversuche haben gezeigt, daß Raben in diesem Sinn bis sieben „zählen“ können.

Noch ein Beispiel zum Abstrahieren: Ein kleines Kind, das mit einem Ball spielt, wird diesen ganz anders sehen als ein Physiker, der die Flugbahn dieses Balles bestimmt, oder ein Mathematiker, der das Volumen dieses Balles errechnet. Die Farbe des Balls, die für das Kind von größter Bedeutung ist und die Unterschiede zu anderen Bällen schafft, interessiert weder den Mathematiker noch den Physiker – bei ihrem abstrakten Ballbegriff sind Bälle aller Farben lediglich (Hohl-) Kugeln mit bestimmten Radien.

Mit der Paarbildung setzt das begriffliche Isolieren ein. Jedoch noch nicht vollständig, denn es gibt viele wichtige paarweise Dinge im Alltag, die eine Einheit bilden (Augen, Hände, Mann und Frau usw.) und am Anfang des Zählens auftraten. Zahlwörter entstehen, um Mächtigkeiten zu beschreiben und zu erfassen. In den ältesten bekannten Sprachen (wie z. B. im Sumerischen um 4000 v. u. Z.) lautet die Folge der ersten Zahlwörter modern gesagt so: eins, zwei, viele. Die Sumerer hatten nicht wie wir eigene Wörter für eins und zwei, sondern sie benutzten dafür die vorhandenen Wörter: Mann für eins und Frau für zwei. Wie man sich bei den Zahlwörtern mühsam über die Zählgrenze zwei hinausgearbeitet hat, zeigen die Zahlwörter der Pygmäen:

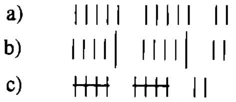
1	a	4 = 2 + 2	oa	oa	
2	oa	5 = 2 + 2 + 1	oa	oa	a
3	ua	6 = 2 + 2 + 2	oa	oa	oa

Man kommt also durchaus mit drei Zahlwörtern über die 3 hinaus!

Aber man muß die Dinge nicht immer benennen, um sie zu zählen. Seit Urzeiten sind Hilfsmengen in Gebrauch. Die einfachste Hilfsmenge besteht aus unseren 10 Fingern, die immer zur Hand sind und mit denen kleine Mengen abgezählt werden können. Steinchen und Stöcke eignen sich auch, um beispielsweise eine Herde zu zählen. Für jedes Tier, das auf die Weide geht, legt man ein Zählsteinchen in eine Urne, und abends, wenn die Tiere wieder in den Stall kommen, nimmt man pro Tier wieder ein Steinchen heraus. Die eineindeutige Zuordnung ermöglicht das Zählen unabhängig von Zahlwörtern (und Ziffern).

Älter als die Zahlwörter sind die Zahlzeichen. Am Anfang standen einfache Kerben (siehe alpha 1/89, Am Anfang war die Kerbe), um Mächtigkeiten von Mengen zu fixieren. Aus der Zeit des Cro-Magnon-Menschen (etwa 30 000 v. u. Z.) kennen wir einen Wolfsknochen mit 55 Kerben. Die Kerben sind linear angeordnet. Es ist unwahrscheinlich, daß für 55 damals bereits ein Zahlwort vorhanden war. Das unablässige Bemühen, das Einkerbungssystem zu verbessern sowie Zahlwörter für die Kerbenzahlen zu finden, weist auf ein grundlegendes Bedürfnis der Menschen jener Zeit hin, sich mit Hilfe von Zahlen besser in Raum und Zeit orientieren zu können.

Das Reihen der Kerben konnte durch Bündeln übersichtlicher gemacht werden, wie wir für die 12 es an drei Möglichkeiten aufzeigen:



Sehr viele Zahlwörter, die ohne ein System die Vielfalt der Zahlreihe stets aufs Neue benennen, kann man sich nicht merken. Die Pygmäen haben bereits mit ihren Zahlwörtern versucht, das Bündeln auch in der Sprache wirksam werden zu lassen. Ein australischer Stamm ging ebenso vor:

1	mal	$4 = 2 + 2$	bulan-bulan
2	bulan	$5 = 2 + 3$	bulan-guliba
3	guliba	$6 = 3 + 3$	guliba-guliba

Jedoch erweisen sich drei Zahlwörter auf die Dauer als Sackgasse, da mit der Entwicklung der menschlichen Gesellschaft die Zählgrenzen ständig nach vorn geschoben werden. Sumerisches Zählen (um 2000 v. u. Z.) zeigt, wie man versuchte, mit den Zahlwörtern sich voranzuarbeiten und die Zahlgrenze zu überschreiten: Reste eines Fünfersystems finden sich, wenn für 7 bzw. 9 mit alten Zahlwörter $5 + 2$ bzw. $5 + 4$ gesagt wird, ein Zwanzigersystem schimmert durch, wenn für 40 bzw. 50 mit bekannten Zahlwörtern so operiert wird 2×20 bzw. $2 \times 20 + 10$. Schließlich weist 30, als 3×10 benannt, auch noch auf ein Zehnersystem hin. Endergebnis sumerischen Zählens war ein Sexagesimalsystem, also ein Zahlensystem, das in 60er Einheiten bündelte. Wir finden heute noch Reste davon in den 60 Minuten einer Stunde oder in der Winkeleinteilung (360°).

Die mühselig errungene Lösung benutzt konsequent die Bündelung, die ein Verfahren (einen Algorithmus) liefert, für beliebige Anzahlen, Zahlwörter zu liefern. Beim Zehnersystem, das sich durch die Benutzung der 10 Finger als Bündeleinheit herausbildete, sieht das Verfahren so aus: 10 Dinge bilden bekanntlich das erste Bündel, zehn solcher Bündel werden als neues Bündel begriffen und bezeichnet usw. Für die neun möglichen Anzahlen des ersten Bündels, die unterschieden werden müssen, gibt es neun verschiedene Zahlwörter (eins, zwei, ..., neun); für die neun Bündel zweiter Art werden hieraus Zahlwörter abgeleitet (zehn, zwanzig, dreißig, ..., neunzig) usw. Die Herleitung des Wortes zehn aus eins leuchtet nicht ein, aber ab zwanzig ist das grammatische Verfahren klar. Logische und geschichtliche Entwicklung laufen eben nicht immer gleich ab. Wir sagen nicht ein-zehn bzw. zwei-zehn, sondern elf bzw. zwölf, dann aber drei-zehn usw. Die Franzosen haben sogar nach der 10 (dix) bis 16 (seize) individuelle Namen, erst mit 17 (dix sept) greifen sie das erwähnte Prinzip auf. Im Gegensatz zu uns wird das größere Bündel zuerst genannt: erst Zehner, dann Einer. Sie zählen folglich weiter Zwanziger-Einer wie z. B. vingt quatre (24) und nicht vier-und-zwanzig (Einer und Zwanziger) wie wir. Bei den Franzosen bricht bei der 80 ein altes Zwanzigersystem (an Händen und Füßen wurde gezählt) durch:

80 quatre-vingt (vier Zwanziger)

90 quarte-vingt dix (vier Zwanziger [und] zehn).

Sprachliche Logik, die 80 und 90 aus 8 (huit) und 9 (none) ableiten müßte, hätte huitante und nonante hervorgebracht.

Bleiben wir noch einen Augenblick bei sprachlichen Betrachtungen. Die heute übliche Angabe „37 Stunden“, in der das Zahlwort 37 adjektivisch gebraucht wird, hat sich bequemerweise eingebürgert (obwohl sie nicht korrekt ist, denn 37 ist keine Eigenschaft einer Stunde). Ursprünglich wurde der Zahlbegriff in die Endung des Substantivs eingearbeitet. Neben der von uns noch heute so gebrauchten Einzahl (Elter), gab es eine Zweizahl (Eltern), eine Dreizahl usw. Diese grammatische Variante kam allerdings in keiner Sprache über die Vierzahl hinaus, da sich auf lange Sicht der adjektivische Gebrauch als zweckmäßiger erwies und durchsetzte. Im Deutschen gibt es heute nur eine Einzahl (Singular) und eine Mehrzahl (Plural), im klassischen Griechischen oder im heutigen Arabischen finden sich drei grammatische Formen für einen, zwei und mehr als zwei Freunde. Auch im Russischen gab es früher eine Zweizahl (Dual). Für 2, 3 oder 4 Häuser lautete diese alte Dualform „дома“ anstelle von „дом“ (Haus). Für fünf Häuser wird dann logisch „fünf der Häuser“ bzw. „пять домов“ gesagt usw., aber für 2, 3 oder 4 Häuser benutzt man die alte Dualform, die äußerlich mit dem Genitiv Singular übereinstimmt, aber inhaltlich nichts mit ihm zu tun hat. Die scheinbar wörtliche, aber unverständliche Übersetzung von „два дома“ durch „zwei des Hauses“ erklärt sich hiermit. Die alte Zweizahlform erscheint im Russischen bei 100 wieder. Der Plural von „сто“ wäre „ста“, aber 200 heißt „двести“ (Doppelhundert) und nicht „двеста“ (Zweihundert), dann folgt aber für 300 regelmäßig „триста“ usw.

Da das Zählen eine wichtige Tätigkeit war und ist, lassen sich in der Sprache noch viele Schwierigkeiten, die unsere Vorfahren beim Entwickeln der Zählfertigkeiten hatten, aufweisen. Wir haben schon darauf hingewiesen, daß das Abstrahieren wichtig für das Zählen ist. So kam es, daß für bestimmte Sorten von Dingen Zahlwörter entwickelt wurden, aber für andere Arten von Dingen entstanden andere Zahlwörter (für die gleiche Anzahl!). Beispielsweise zählte ein Naturvolk jeweils lebende, runde oder lange Dinge sowie Tage mit verschiedenen Zahlwortarten. In Japan gibt es eine Zählklasse für lange Dinge und Mörder. Bei uns erinnern alte Zählmaße wie Stück, Paar, Dutzend, Schock oder Mandel daran. Man spricht zwar von einem Joch Ochsen, aber nicht von einem Joch Socken, man verlangt zwei Stück Salatköpfe, aber redet nicht über zwei Stück Mensch. Selbst unbestimmte Mengen zählen wir in Klassen: eine Herde Schafe, ein Rudel Hirsche, ein Schwarm Mücken.

Die Kerben sind die ältesten Zahlzeichen. Obwohl mit ihnen Mächtigkeiten erfaßt werden sowie einfache Rechnungen (Weiterzählen) ausgeführt werden können, wurden die Zählgrenzen jedoch durch die Zahlwörter vorangeschoben. Heute eilen die Zahlzeichen jedoch den Zahlwörtern voraus. Das wird vermutlich so bleiben, denn wer will sich wohl der praktischen und einfachen Schreib- und Sprechweise der Physiker entziehen, wenn die Masse der Erde mit $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg anstelle von 5 Quadrillionen und 980 Trilliarden Kilogramm angegeben wird. Spätestens bei der geschätzten Zahl der Atome im All, nämlich rund 10^{50}, dürfte auch der zahlwortfreudigste Leser das Handtuch werfen, denn das ebenso leistungsfähige wie einfache Prinzip der Potenzschreib- und -sprechweise überwindet mühelos jede Zahlwortgrenze. Der polnische Mathematiker unserer Zeit Hugo Steinhaus zeigte, daß es sehr leicht ist, symbolisch riesige Zahlen aufzuschreiben. Dazu vereinbarte er folgendes:

$$a^a = \triangle\kern-0.85em{\scriptstyle a}\;$$

$$a \text{ in } a \text{ Dreiecken} = \boxed{a}$$

$$a \text{ in } a \text{ Quadraten} = \textcircled{a}$$

Was bedeuten in diesem Sinn ① und ②? Aber mit dieser Frage sind wir schon bei den Ziffersystemen. Wie verschiedene Zahlzeichen Ziffersysteme hervorbrachten, das wollen wir im zweiten Teil unseres Artikels untersuchen.

R. Thiele

Gerechte und ungerechte Würfelspiele – Überraschungen mit ungewöhnlichen Würfeln

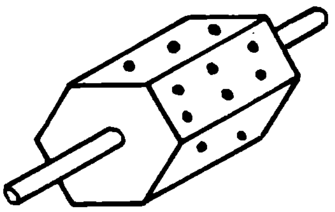
Teil 1

Jedes Kind lernt schon frühzeitig den gewöhnlichen Spielwürfel kennen, der auf seinen sechs Quadratflächen die Augenzahlen 1 bis 6 trägt. Deren Anordnung erfolgt bereits seit dem Mittelalter einheitlich so, daß die Augenzahlen einander gegenüberliegender Flächen zusammen 7 ergeben. Würfeln ist wohl das älteste Glücksspiel der Welt, doch würfelten unsere Vorfahren zunächst mit den Fußgelenkknöcheln von Lämmern; diese konnten nicht 6, sondern nur 4 (verschieden bewertete) Seiten zeigen.

In Sumer vor über 4500 Jahren spielte man mit Tetraedern, also dreiseitigen Pyramiden. „Würfeln mit Pyramiden" erscheint manchem vielleicht als etwas in sich Widersprüchliches. Dann bedenkt er aber nicht, daß der regelmäßige Körper, den die Griechen *Hexaeder*, also *Sechsflächner*, nannten und die Römer *Cubus*, zwar in der deutschen Sprache seit geraumer Zeit nach seiner Verwendung beim Glücksspiel bezeichnet wird, daß das aber nicht selbstverständlich ist. So heißt dieser Körper im Englischen wie im Französischen *cube* (wobei die Aussprache freilich unterschiedlich ist), der Spielwürfel aber *die* (Plural *dice*) bzw. *dé*. Auch in der russischen Sprache unterscheidet man zwischen куб(ик) und (игральная) кость. Der legendäre Ausruf Caesars *Die Würfel sind gefallen*, nachdem er durch Überschreiten des Grenzflusses Rubikon mit seinen Legionen den Bürgerkrieg eröffnet hatte, kann schließlich im Original nur *alea iacta est* und nicht etwa *cubi iacti sunt* gelautet haben. Das Würfelspiel hieß bei den Römern nämlich alea, der Spielwürfel *talus* (mit vier gültigen Seiten) oder *tessera* (mit sechs Seiten).

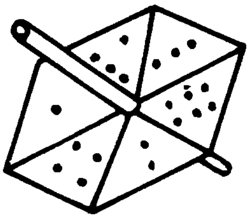
Anstelle eines Hexaeders mit 1 bis 6 Augen auf seinen Flächen kann man auch einen Kreisel als Spielgerät verwenden. In Gesellschaftsspielen für jüngere Kinder findet man zuweilen einen solchen Kreisel mit einem regelmäßigen sechsseitigen Prisma als Kreiselkörper, dessen Seitenflächen die Augen tragen (Bild 1).

Bild 1



Leichter selbst anzufertigen als ein solcher Kreisel oder als ein „richtiger Würfel" ist ein Kreisel, bei dem ein – etwa aus starker Pappe ausgeschnittenes – regelmäßiges Sechseck als Kreiselkörper dient, ein in der Mitte hindurchgesteckter Stab als Achse (Bild 2).

Bild 2



Sorgfalt ist allerdings auch bei seiner Anfertigung nötig, denn es darf ja keine Augenzahl bevorzugt werden – etwa dadurch, daß die Achse nicht genau durch den Mittelpunkt des Sechsecks geht, vielleicht auch nicht senkrecht auf der Sechseckfläche steht, oder auch dadurch, daß die Seiten des Sechsecks verschieden lang sind. Jede Augenzahl muß also – beim Kreisel wie beim Würfel, den schon im antiken Rom geschickte Betrüger durch das Einbringen von Metall fälschten – im Durchschnitt etwa gleich oft fallen. Die Abweichung von einer solchen gleichmäßigen Häufigkeitsverteilung wird freilich nur bei einer sehr großen Anzahl von „Würfen" genügend klein.

Ist der Würfelkreisel nicht homogen, der Würfel „gezinkt", so muß dennoch kein Nachteil bzw. Vorteil für einen Spieler entstehen. Das Spiel bleibt gerecht, wenn alle Beteiligten das gleiche Spielgerät benutzen. Voraussetzung für ein gerechtes Spiel sind außerdem natürlich Spielregeln, die allen Spielern die gleichen Chancen einräumen – wenn schon nicht bei jedem einzelnen Wurf, so doch im Spiel insgesamt. Würfeln etwa zwei Spieler – und nur solche „Zweipersonenspiele" wollen wir im folgenden betrachten – mit einem Würfel und hat derjenige, der die kleinere Augenzahl erzielt, dem anderen eine Spielmarke, einen Chip, zu zahlen, so ist das Spiel fair, wenn bei gleichen geworfenen Augenzahlen keinerlei Zahlung erfolgt: Insgesamt sind 36 verschiedene „Augenkombinationen" möglich, von (1; 1) bis (6; 6). In der Tabelle ist für den „vorgebenden" Spieler V der Gewinn eines Chips durch „+1", der Verlust durch „−1" gekennzeichnet.

Z V	1	2	3	4	5	6
1	0	−1	−1	−1	−1	−1
2	+1	0	−1	−1	−1	−1
3	+1	+1	0	−1	−1	−1
4	+1	+1	+1	0	−1	−1
5	+1	+1	+1	+1	0	−1
6	+1	+1	+1	+1	+1	0

Für ihn ist also bei jedem einzelnen Spiel der „Erwartungswert" des Gewinns

$$E_V = \frac{15}{36}\cdot 1 \left(+\frac{6}{36}\cdot 0\right) + \frac{15}{36}\cdot(-1) = 0,$$

und für den an zweiter Stelle würfelnden Spieler Z ist analog $E_Z = 0$. (Allgemein – d. h. nicht nur bei Zweipersonenspielen – bezeichnet man ein Glücksspiel als fair, wenn zu Beginn des Spiels der „Erwartungswert" des Gewinns für jeden Spieler gleich Null ist.)

Spielt man aber nach dem Grundsatz „mit gibt's nicht", gewinnt also bei gleicher Augenzahl derjenige, der sie zuerst geworfen hat, so hat V bei jedem Spiel einen Gewinn von $\frac{1}{6}$ Chip zu erwarten, wird also bei einer Serie von 60 Einzelspielen „im Mittel" 10 Chips gewinnen. Diesen Vorteil kann man ausgleichen, indem man sich beim Vorgeben von Spiel zu Spiel abwechselt oder – wie das häufiger geschieht, oft mit der Bemerkung „Dumm fängt an" – das Vorgaberecht immer wechseln läßt, wenn der Vorgebende gewonnen hat.

▲1▲ a) Auch ein einzelnes Spiel nach dem Motto „mit gibt's nicht" kann man fair gestalten, indem man für V und Z unterschiedliche Höhe der Zahlung vereinbart. Wie könnte eine solche Vereinbarung lauten?

b) A und B würfeln nach der Regel: Wenn beide eine gerade Augenzahl würfeln, erhält A von B *a* Chips, andernfalls zahlt er an B *b* Chips. Wie sind *a* und *b* zu vereinbaren, wenn das Spiel fair sein soll?

Wirft man 2-, 3-, ... mal nacheinander, addiert die Augenzahlen der einzelnen Würfe und ermittelt den Sieger durch Vergleichen der Summen, so bleibt das Spiel fair, sofern im Falle gleicher Summen eine Zahlung unterbleibt. (Freilich ist es einfacher und kommt auf dasselbe heraus, wenn man mit 2, 3, ... gleichzeitig zu werfenden Würfeln spielt.) Und läßt man als Gewinner denjenigen gelten, der mit weniger Würfen eine festgelegte Zielzahl, etwa 100, erreicht bzw. übertrifft, so ist auch das ein faires Spiel.

▲2▲ Statt die Augenzahlen mehrerer Würfe(l) zu addieren, kann man sie auch in anderer Weise verknüpfen. Bei „Hoch mal hoch durch niedrig" ist die Verknüpfung aus dem Namen des Spiels abzulesen; es wird mit drei Würfeln gespielt.

a) Welches ist der höchste (niedrigste) Wurf in diesem Spiel?

b) Welche der folgenden Zahlen sind als Spielwerte nicht möglich, und welche können auf unterschiedliche Weise zustandekommen? 2; 2,5; 4; 4,5; $5,\overline{3}$; 5,5; 7; 7,2; 7,5

c) Manchmal werden bei diesem Spiel nur Würfe gewertet, die auf eine im Bereich der natürlichen Zahlen lösbare Divisionsaufgabe führen. Wieviel (welche) Kombinationen von Augenzahlen muß man dann ausklammern?

Etwas anders muß man bei „unsymmetrischer Spielweise“ überlegen:
Hier würfelt nur ein Spieler (A), der andere ist Bankhalter (B) und hat beispielsweise für jedes von A geworfene Auge einen Chip auszuzahlen. Wie hoch muß in diesem Fall der „Einsatz“ von A sein, damit das Spiel fair ist? Da der Würfel auf seinen sechs Flächen insgesamt
$1+2+3+4+5+6=21$ Augen trägt, sind „im Mittel“ bei einem Wurf $\frac{21}{6}=3{,}5$ Augen zu erwarten. Also muß A an B pro Wurf 3,5 Chips als Einsatz zahlen.
Dieser Einsatz ist auch zu entrichten, wenn man mit einem Würfel spielt, bei dem die 21 Augen auf den Würfelflächen anders verteilt sind, beispielsweise drei Flächen je 3 Augen und die übrigen drei je 4 Augen zeigen.

▲ 3 ▲ Wieviel verschiedene „ungewöhnliche“ Würfel sind möglich, die auf ihren sechs Flächen insgesamt 21 Augen, aber anders verteilt als beim „Normalwürfel“, tragen? Dabei wird vorausgesetzt, daß jede Fläche mindestens 1 Auge und höchstens 6 zeigt.

Kehren wir nun wieder zur symmetrischen Spielweise zurück, lassen einen Spieler den „Normalwürfel“ N benutzen, den anderen aber den eben beschriebenen ungewöhnlichen Würfel, der wegen der recht gleichmäßigen Verteilung der Augenzahlen mit G bezeichnet werde.
Dabei soll nach jedem Wurf beider Spieler derjenige, der die höhere Augenzahl geworfen hat, von dem anderen einen Chip erhalten. Das Auftreten gleicher Augenzahlen soll als „unentschieden“ gewertet werden, bei dem jegliches Zahlen unterbleibt. Davon, daß auch dieses Spiel fair ist, können wir uns leicht anhand einer 6 × 6-Tabelle überzeugen, deren Felder nach dem jeweils gewinnenden Würfel zu kennzeichnen sind:

N G	1	2	3	4	5	6
3	G	G	–	N	N	N
3	G	G	–	N	N	N
3	G	G	–	N	N	N
4	G	G	G	–	N	N
4	G	G	G	–	N	N
4	G	G	G	–	N	N

Die Anzahl g_G der Gewinnwürfe von G ist ebenso groß wie die der Gewinnwürfe von N: $g_G = g_N = 15$.
Wie ist es aber, wenn der zweite Spieler nicht mit G, sondern einem anderen der (in Aufgabe 3 angesprochenen) ungewöhnlichen Würfel spielt, etwa dem mit der Augenverteilung 1, 1, 4, 5, 5, 5, – nennen wir ihn (wegen der vielen Fünfen) F? Die Berechnung von g_N und g_F soll hier etwas platzsparender erfolgen; in der Tabelle steht in Klammern hinter der jeweiligen Augenzahl, auf wie viele Weisen sie erzielt werden kann:

N	1 (1)	2 (1)	3 (1)	4 (1)	5 (1)	6 (1)
F	1 (2)	–	–	4 (1)	5 (3)	–

$g_N = 1\cdot 2 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 6 = 15$
$g_F = 1\cdot 3 + 3\cdot 4 = 15$

Auch hier liegt also ein faires Spiel vor.

▲ 4 ▲ Bei welchen der ungewöhnlichen Würfel (vgl. Aufgabe 3) ist das Spiel gegen den Normalwürfel (nach den beschriebenen Regeln) ebenfalls fair? Beantworte die Frage möglichst, ohne alle Kombinationen durchzurechnen!

Bleibt das Spiel nun auch fair, wenn die Chips immer erst nach zwei Würfen den Besitzer wechseln und die Summe der bei diesen Würfen erzielten Augenzahlen für den Gewinn maßgebend ist? Man könnte stattdessen auch fragen, ob ein Spiel, bei dem jeder Spieler mit zwei Würfeln (der jeweiligen Art) würfelt, ebenfalls gerecht ist. Man ist sowohl geneigt, diese Frage ohne langes Nachdenken zu bejahen. Doch untersuchen wir das genauer, zunächst für den Vergleich N und G:
Bei zwei Würfen mit dem Normalwürfel N (bzw. bei einem Wurf mit zwei Würfeln N) kann man Augenzahlen von 2 bis 12 erhalten, dabei zwei auf genau eine Weise, drei auf zwei Weisen, ... Zwei Würfel G liefern nur Augenzahlen 6, 7 oder 8, aber jede davon auf verschiedene Weise.

$N^{(2)}$	2 (1)	3 (2)	4 (3)	5 (4)	6 (5)	7 (6)
$G^{(2)}$	–	–	–	–	6 (9)	7 (18)

$N^{(2)}$	8 (5)	9 (4)	10 (3)	11 (2)	12 (1)
$G^{(2)}$	8 (9)	–	–	–	–

$g_N^{(2)} = 6\cdot 9 + 5\cdot 27 + 4\cdot 36 + 3\cdot 36 + 2\cdot 36$
$+ 1\cdot 36 = 540$
$g_F^{(2)} = 9\cdot 10 + 18\cdot 15 + 9\cdot 21 = 540$

Damit wird unsere Vermutung bestätigt: Auch das Spiel mit zwei Würfeln G gegen zwei Würfel N ist fair. Ersetzt man G durch F, so erhält man:

$N^{(2)}$	2 (1)	3 (2)	4 (3)	5 (4)	6 (5)	7 (6)
$F^{(2)}$	2 (4)	–	–	5 (4)	6 (12)	–

$N^{(2)}$	8 (5)	9 (4)	10 (3)	11 (2)	12 (1)
$F^{(2)}$	8 (1)	9 (6)	10 (9)	–	–

$g_N^{(2)} = 2\cdot 4 + 3\cdot 4 + 4\cdot 4 + 5\cdot 8 + 6\cdot 20 + 5$
$\times 20 + 4\cdot 21 + 3\cdot 27 + 2\cdot 36 + 1\cdot 36$
$= 569$
$g_{(F)}^{(2)} = 4\cdot 6 + 12\cdot 10 + 1\cdot 21 + 6\cdot 26 + 9\cdot 30$
$= 591$

Überraschenderweise sind also zwei Würfel F zwei Normalwürfeln N überlegen. Als Maß der Überlegenheit kann man den Quotienten $Q_{F/N}^{(2)}$ aus $g_F^{(2)}$ und $g_N^{(2)}$ ansehen:
$Q_{F/N}^{(2)} = 591 : 569 = 1{,}039$
(auf drei Dezimalen gerundet)
Dieser Quotient ist nur wenig größer als 1, so daß die Überlegenheit erst bei einer ungeheuer großen Zahl von Spielen bzw. bei sehr, sehr langer Spieldauer merklich in's Gewicht fällt.

Ohne die Berechnung hier zu erläutern, sei der „Überlegenheitsquotient“ für das Spiel mit drei Würfeln F gegen drei Würfel N mitgeteilt (ebenfalls auf drei Dezimalstellen gerundet):
$Q_{F/N}^{(2)} = 21\,678 : 20\,841 = 1{,}040$
Obwohl also „auf Dauer“ die Würfel F und N gleich stark sind – bei beiden sind ja im Mittel 3,5 Augen zu erwarten –, liegt also $Q_{F/N}^{(3)}$ nicht etwa näher bei 1 als $Q_{F/N}^{(2)}$.
Für das Spiel mit 4 bzw. 5 Würfe(l)n erhält man
$Q_{F/N}^{(4)} = 787\,299 : 760\,957 = 1{,}035$,
$Q_{F/N}^{(5)} = 28\,523\,280 : 27\,684\,580 = 1{,}030$.
Die bisherigen Erfahrungen zeigen jedoch, daß es vermessen wäre, daraus zu schlußfolgern, daß sich bei weiter wachsender Anzahl der Würfe(l) die Überlegenheitsquotienten „monoton“ immer mehr dem Wert 1 nähern müßten.
Ein gewissermaßen „umgekehrtes“ Verhalten gegenüber dem Normalwürfel N wie beim Würfel F finden wir beim „Zweierwürfel“ Z mit den Augenzahlen 2, 2, 2, 3, 6, 6. Bei nur einem Wurf mit jeweils einem einzigen Würfel ist auch er gleichwertig mit dem Würfel N:
$Q_{Z/N} = g_Z : g_N = 15 : 15 = 1$.
Danach ergeben sich aber gerade die Reziproken der Überlegenheitsquotienten für den Vergleich von F mit N (also gewissermaßen „Unterlegenheitsquotienten“):
$Q_{Z/N}^{(2)} = 569 : 591 = 0{,}962\,8$
$Q_{Z/N}^{(3)} = 20\,841 : 21\,678 = 0{,}961\,4$
$Q_{Z/N}^{(4)} = 760\,957 : 787\,299 = 0{,}966\,5$
$Q_{Z/N}^{(5)} = 27\,684\,580 : 28\,523\,280 = 0{,}970\,6$
2 (3, 4, 5) Würfel Z sind also „schwächer“ als 2 (3, 4, 5) Normalwürfel N.

▲ 5 ▲ Vergleiche den „Viererwürfel“ V, dessen Flächen die Augenzahlen 1, 4, 4, 4, 4, 4 tragen, mit dem Normalwürfel N bei zwei und drei Würfen! Berechne dazu die Überlegenheitsquotienten $Q_{V/N}^{(2)}$ und $Q_{V/N}^{(3)}$!

G. Lorenz

---

alpha-Wettbewerb 1988/89

Für vierjährige Teilnahme

Fortsetzung aus Heft 2/90

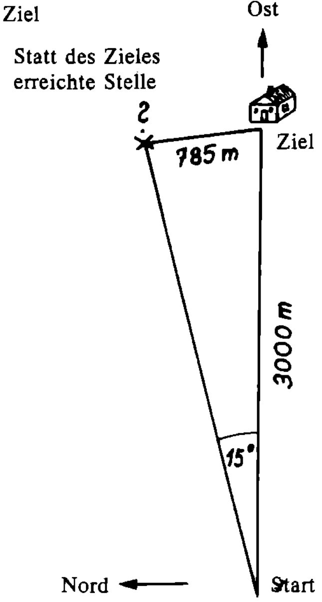
Katja Giesche, Stralsund; Enrico Jandt, Stützerbach; Thomas Lotze, Andreas Hamm, Ute Streck, alle Suhl; Jens Buchholz, Tantow; Stefan Hannusch, Thale; Andrej Sokol, Templin; Hannah Ullrich, Tripkau; Yvonne Keiderling, Manuela Ullrich, Daniela Weyh, alle Trusetal; Andreas Otto, Mario Pfahl, beide Ueckermünde; Stev Glodowski, Juliane Lohde, beide Vacha; Maik Freitag, Verchau; Thomas Most, Völkerhausen; Roland Isensee, Wanzleben; Ines Schulz, Weimar; Daniel Henkel, Weißenborn-L.; Birgit Elßner, Werneuchen; Christian Kühn, Wismar; Dirk Halama, Wittenberg; Uta Lenhardt, Wittenburg; AG Math. der OS Dr. R. Sorge, Wollin; Kathrin Scholz, Wulfen; Mathias Tötzke, Jens Kandziora, beide Zehdenick; Jörg Siede, Zepernick; Irka Schulze, Zittau; Antje Müller, Zwickau

Das verfehlte Ziel

Es war Mitte Juni, nahe dem Tag der Sommersonnenwende, als eine Schülergruppe in der Schorfheide unweit des Werbellin-Sees den Auftrag erhielt, um 6 Uhr innerhalb von 40 Minuten das Ziel, eine 3 km entfernte Blockhütte, zu erreichen, um sich dort mit einer anderen Gruppe zu treffen.

Wie aber war es möglich, daß das Ziel um fast 800 m verfehlt wurde, und zwar in nördlicher Richtung? Man hatte doch alles genau beachtet, und um 6 Uhr die Ostrichtung festgelegt. Ja, selbst die 6 Minuten Unterschied zwischen der Mitteleuropäischen Zeit und der wahren Sonnenzeit hatte der Gruppenleiter eingehalten und den Stand der Sonne erst um 6.06 Uhr MEZ festgelegt.

Bild 1
Seitliche Abweichung vom Ziel



Es war für alle ein Rätsel, daß eine so große Abweichung vom Ziel zustande gekommen war. Noch am Vortage wurde die bekannte Orientierungsregel gründlich wiederholt, wonach die Sonne um 6 Uhr im Osten und um 18 Uhr im Westen stehe.

Inwieweit ist diese Orientierungsregel richtig?

Nehmen wir diese Regel, die beständig erwähnt wird, einmal kritisch unter die Lupe! Hätte dieser Orientierungsmarsch zur Zeit der Frühlings- oder Herbsttagundnachtgleiche stattgefunden, wäre es nämlich zu keiner Abweichung gekommen. In der Zeit um den 21. 3. oder 23. 9. steht die Sonne um 6 Uhr wirklich im Osten und um 18 Uhr im Westen. Im Sommer dagegen, wenn die Sonne einen großen Tagbogen beschreibt, können wir die Sonne nicht als Kompaß für die Bestimmung der Ost- und Westrichtung zu diesen Zeiten benutzen. Fachmännisch ausgedrückt: Die Sonne befindet sich nördlich (oberhalb) des Himmelsäquators und legt in der Stunde größere Schritte zurück als im Frühling und Herbst oder gar im Winter. Wie allgemein bekannt ist, geht die Sonne streng genommen nur an zwei Tagen im Jahr (21. 3./23. 9.) genau im Osten auf und im Westen unter. Im Sommerhalbjahr verschieben sich diese Punkte in Richtung Nordosten bzw. Nordwesten, im Winterhalbjahr in Richtung Südosten bzw. Südwesten.

Kommen wir auf unser Beispiel mit dem Orientierungsmarsch zurück, der zur Zeit der Sommersonnenwende, also des längsten Tages, stattgefunden hatte! Die Gruppe hatte sich um 6 Uhr wahrer Ortszeit (= 6.06 Uhr MEZ) nach der Sonne gerichtet, ohne zu wissen, daß sie um diese Zeit noch längst nicht die Ostrichtung erreicht haben konnte. Sie befand sich noch rund 15° von dieser Richtung entfernt, weshalb das Ziel selbstverständlich verfehlt wurde.

Dies wäre auch eingetreten, wenn man sich um 18 Uhr nach der Westrichtung hätten orientieren wollen. Das Bild 2 (Seite 57) zeigt deutlich, daß die Sonne die Ostrichtung später als 6 Uhr und die Westrichtung früher als 18 Uhr erreicht. Diese Unterschiede sind von dem Winkelabstand der Sonne vom Himmelsäquator, d. h. vom zeitlichen Abstand zum 21. 3./23. 9. abhängig, wie aus der folgenden Übersicht zu entnehmen ist:

Wann befindet sich die Sonne in der Ost- bzw. Westrichtung?

Datum	Uhrzeit Osten	Uhrzeit Westen	Gültig für 52° nördliche Breite (Mitte der DDR)
21. 6.	7.19 Uhr	16.41 Uhr	
21. 7./21. 5.	7.06 Uhr	16.54 Uhr	Zeitangaben in wahrer Ortszeit (Sonnenzeit)
21. 8./21. 4.	6.38 Uhr	17.22 Uhr	
21. 3./23. 9.	6 Uhr	18 Uhr	

Wollen wir die Sonne für die Bestimmung der Ost-West-Richtung benutzen, müssen wir diese Zeiten einhalten und uns nicht nach 6 Uhr bzw. 18 Uhr richten, den 21. 3. und 23. 9. ausgenommen. Infolge des kleinen Tagbogens und der damit verbundenen kurzen Tage ist im gesamten Winterhalbjahr die Sonne um 6 Uhr noch nicht aufgegangen und um 18 Uhr bereits untergegangen.

Eine Überprüfung der hier geschilderten Verhältnisse ist an einer Hauswand, die in der Ost-West-Richtung verläuft, gut möglich. Eine solche Ost-West-Wand läßt sich auch in einem Modell aus starker Pappe oder Holz errichten, um den Stand der Sonne zu kontrollieren. Dabei sind die beiden Wände nach Süden und Norden gerichtet, und es wird auffallen, daß die Nordwand im Sommerhalbjahr in den frühen Morgen- und späten Abendstunden sogar Sonnenlicht erhält.

Wie sieht es mit den Nebenhimmelsrichtungen aus?

Auch hier müssen wir unsere kritische Betrachtung fortsetzen und darauf verweisen, daß die Sonne um 9 Uhr nicht im Südosten und um 15 Uhr nicht im Südwesten stehen kann. In diesem Fall können wir das Winterhalbjahr mit einbeziehen, da die Sonne zu dieser Zeit über dem Horizont steht (Bild 3, S. 57).

Die folgende Übersicht zeigt, wie ungenau diese Orientierungsregel ist und wann man evtl. die Sonne zur Bestimmung der SO- bzw. SW-Richtung benutzen kann:

Datum	Uhrzeit Südosten	Uhrzeit Südwesten
21. 6.	10.16 Uhr	13.44 Uhr
21. 7./21. 5.	10.08 Uhr	13.52 Uhr
21. 8./21. 4.	9.51 Uhr	14.09 Uhr
21. 3./23. 9.	9.27 Uhr	14.27 Uhr
21. 2./21. 10.	9.06 Uhr	14.54 Uhr
21. 1./21. 11.	8.47 Uhr	15.13 Uhr
21. 12.	8.21 Uhr	15.39 Uhr

Dabei ist interessant, daß am 21. 3. und 23. 9. (Tag- und Nachtgleiche) die Sonne um 9 Uhr bzw. 15 Uhr nicht die Südost- bzw. Südweststellung einnimmt. Dies ist erst um den 12. 2. und 31. 10. der Fall.

Wie aber steht es mit den Richtungen Nordosten und Nordwesten? Für eine grobe Orientierung eignet sich dafür die Zeit der Sommersonnenwende (21. 6.), wenn die Sonne nur 3° entfernt vom Nordostpunkt aufgeht und ebenso so weit entfernt im Nordwestpunkt untergeht.

Unsere Betrachtungen beziehen sich auf die Mitte der DDR (52° nördlicher Breite), die Unterschiede zum Norden (Ostseeküste) bzw. zum Süden (Vogtland, Bezirk Suhl) sind gering, so daß wir sie für unsere Zwecke vernachlässigen können.

Bei unserer kritischen Betrachtung der Orientierungsregel muß auch die vielerorts bekannte „Taschenuhrenregel“ erwähnt werden, bei der der kleine Zeiger auf die Sonne gerichtet und der Winkel zur 12 Uhr halbiert wird. Dieses Verfahren gibt die Himmelsrichtungen sehr grob an und zeigt ebenso die Fehler, wie sie hier dargelegt wurden.

In einem Falle aber können wir uns auf unseren Stern Sonne ganz sicher verlassen: *Sie steht um 12 Uhr wahrer Ortszeit (Sonnenzeit) stets im Süden,* – gleich ob im Sommer oder Winter oder in Nord und Süd! Zu diesem Zeitpunkt erreicht sie auf ihrem Tagbogen den höchsten Punkt, die sogenannte

Bild 2 a
Die Stellung der Sonne am 21. 6. sowie am 21. 3./23. 9. am Osthorizont. Die Sonne hat um 6 h noch nicht die Ostrichtung erreicht.

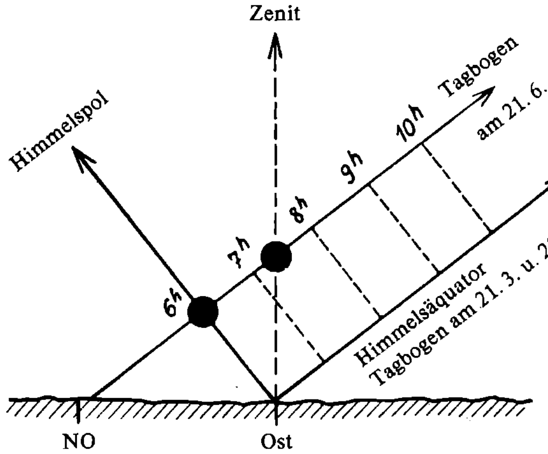


Bild 2 b
Die Stellung der Sonne am 21. 6. sowie am 21. 3./23. 9. am Westhorizont. Die Sonne hat um 18 h die Westrichtung bereits überschritten.

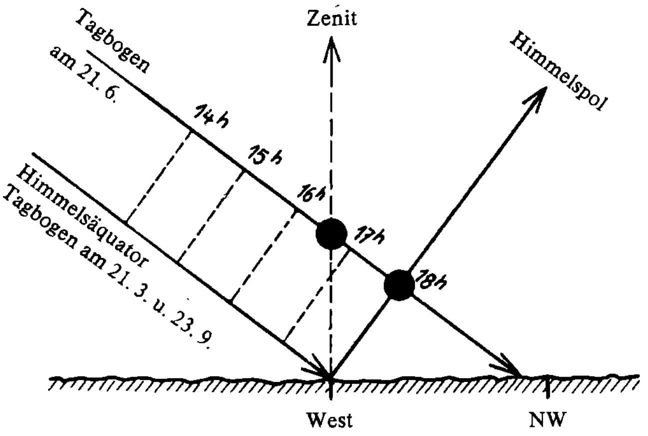
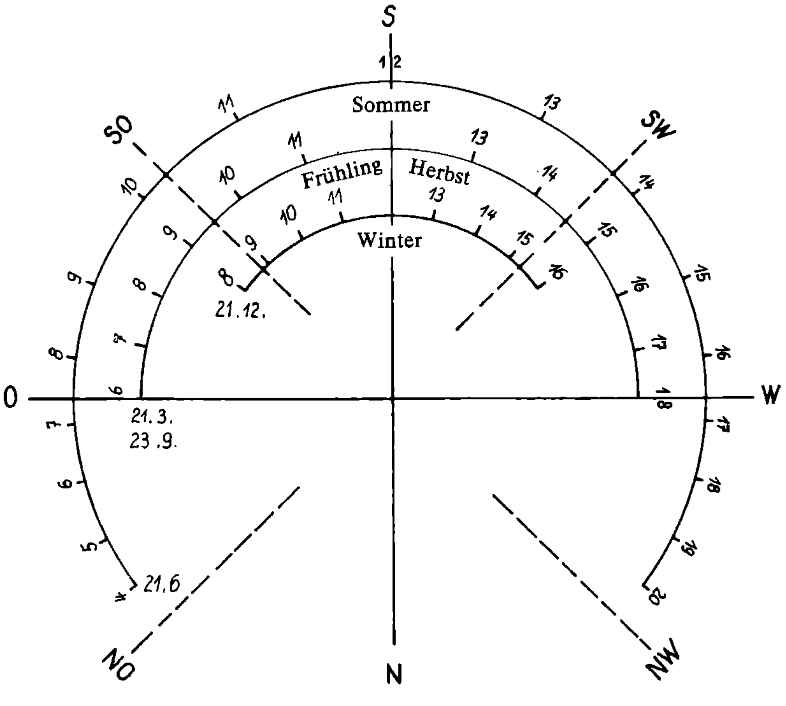


Bild 3
Die Richtung zur Sonne in den Jahreszeiten. Im Sommer sind die wesentlich größeren „Schritte“ deutlich zu erkennen.



Kulmination (lat. culmen = Gipfel). Wahre Ortszeit bedeutet, daß diese mit unserer MEZ nur in Görlitz (15° Länge) zusammenfällt. Je weiter westlich, desto später tritt diese Südstellung ein, so daß wir pro Längengrad die Korrektur von +4 Minuten berücksichtigen müssen. So gelten für Potsdam 8 Min., Halle 10 Min. und Erfurt bereits 16 Min. *A. Zenkert*

Bemerkung: Die Datumsangaben beziehen sich auf den Beginn der jeweiligen Jahreszeit. Infolge des vierjährigen Schaltjahrzyklusses können sich diese Daten um einen Tag verschieben. So lag z. B. der Frühlingsbeginn 1988 am 20. 3., der Herbstbeginn am 22. 9.

100mal 1989 ohne Trick

Unsere Leser Andreas Hempler, Walter Görgens, Klaus-Horst Milde, Ralf Wojatschke, Axel Henchert, Volkmar Färber, Rudolf Strischek, Klaus Göring, Beate Balzer, Olaf Lummer, Katja Sonntag, Roland Jancke und Hans Engelhaupt sandten uns zum Beitrag aus Heft 6/89 folgende Lösungen ein:

$38 = -(1+9) + 8 \cdot \sqrt{9}\,!$
$\quad = (1+\sqrt{9}) \cdot 8 + \sqrt{9}\,!$
$\quad = 19 \cdot (8 - \sqrt{9}\,!)$
$42 = 1 \cdot \sqrt{9} \cdot (8 + \sqrt{9}\,!)$
$\quad = ((-1)^9 + 8) \cdot \sqrt{9}\,!$
$\quad = 1 \cdot \sqrt{9}\,! \cdot 8 - \sqrt{9}\,!$
$56 = 1^9 \cdot 8! : (\sqrt{9}\,!)!$
$\quad = -1 + 9 + 8 \cdot \sqrt{9}\,!$
$\quad = (1+\sqrt{9}) \cdot (8 + \sqrt{9}\,!)$
$57 = 1 \cdot 9 + 8 \cdot \sqrt{9}\,!$
$\quad = 1 \cdot \sqrt{9}\,! \cdot 8 + 9$
$\quad = 19 : \sqrt{8! : 9!}$
$60 = 1 + \sqrt{9} + 8! : (\sqrt{9}\,!)!$
$\quad = (-1 + \sqrt{9} + 8) \cdot \sqrt{9}\,!$
$\quad = (1 + 9! : 8!) \cdot \sqrt{9}\,!$
$\quad = 1 \cdot \sqrt{(\sqrt{9}\,!)! \cdot (8 - \sqrt{9})}$
$78 = 1 \cdot \sqrt{9}\,! + 8 \cdot 9$
$\quad = 1 \cdot 9 \cdot 8 + \sqrt{9}\,!$
$\quad = (-1 + \sqrt{9}\,! + 8) \cdot \sqrt{9}\,!$
$84 = 1 - \sqrt{9}\,! + 89$
$\quad = (1+9)! : 8! - \sqrt{9}\,!$
$\quad = 1 \cdot (\sqrt{9}\,! + 8) \cdot \sqrt{9}\,!$

Ralf Wojatschke sandte die Lösungen bis zur 121 ein und will weitertüfteln.
Klaus-Horst Milde machte den Vorschlag, die Aufgabenstellung noch anspruchsvoller zu gestalten. Zum Beispiel einen Logarithmus oder eine Wurzel zu verwenden. Er wies uns auch auf einen Druckfehler hin: statt $16 = 1^9 + 8 + 9$ muß es heißen $16 = -1^9 + 8 + 9$.
Axel Henchert bemängelte die in die Irre führende Erklärung des Ausdrucks [ ]. Es muß richtig heißen: Der Nachkommaanteil des Ausdrucks wird abgeschnitten. Fazit für uns: Auch wir haben noch Reserven, die besser ausgenutzt werden müssen.
Alphons

Ein Zuschneideproblem

Aus der Werkstatt einer Hobbyschneiderin

Hella Genau will sich einen Rock schneidern, der am Saum möglichst weit sein soll. In Muttis Restekiste findet sie ein Stück geeignetes Material; aber dieser rechteckige Stoffrest ist bei einer Breite (Abstand der Webekanten) von 1,50 m nur 1,35 m lang.

Der Schnitt soll folgende Bedingungen erfüllen:

1. Taillen- und Saumlinie seien konzentrische Kreise oder Kreisbögen; die Linien für Naht und Reißverschluß bzw. für die Seitennähte müssen Radien des Saumkreises sein.
2. Bei der Berechnung des kleineren Radius r_T ist von Hellas Taillenweite auszugehen. Diese beträgt 62 cm.
3. Für die Rocklänge l_R gelte: $60\text{ cm} < l_R < 68\text{ cm}$.
4. Der Bundstreifen ist im Fadenlauf zuzuschneiden, d. h. parallel zu den Webekanten. Der Mode entsprechend und weil er längs gefaltet werden muß, soll er möglichst breit sein.
5. Wegen Nahtzugabe und Untertritt muß der Bundstreifen mindestens 3 cm länger als Hellas Taillenweite sein.

Zwei Zuschneidepläne hat Hella schon gezeichnet (Bild 1 und 2), aber beide wieder verworfen. Warum?

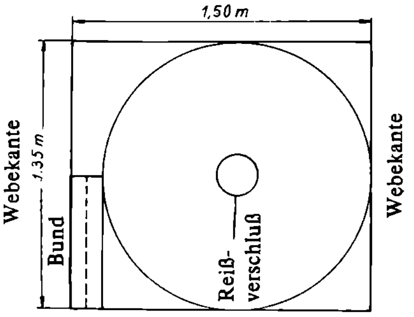


Bild 1
Tellerrock

Es gibt zwei bessere Lösungen des Problems. Bei der einen wird der Rock aus einem Stück zugeschnitten, bei der anderen aus einem vorderen und zwei symmetrischen hinteren Rockteilen zusammengesetzt.

Zeichne beide Schnittlösungen als maßstabgerechte Skizzen und errechne jeweils folgende Maße:

- Radius der Taillenlinie r_T
- Rocklänge l_R
- Weite an der Saumlinie s
- Länge l_B und Breite b des Bundstreifens

Welchen Vorteil bietet die eine, welchen die andere Schnittlösung?

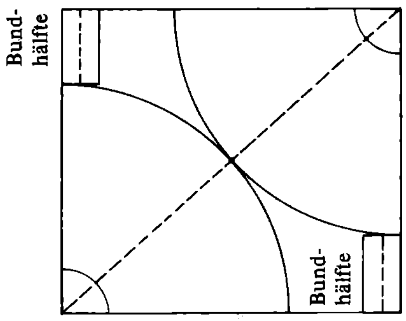


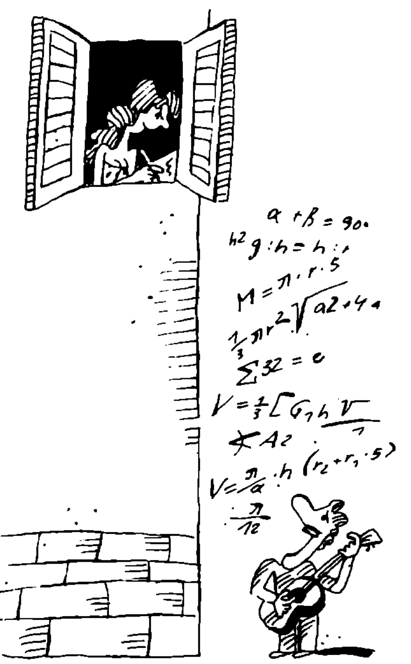
Bild 2
Glockenrock

J. Heller

Ihr werdet es schon gemerkt haben: Unsere Vignetten und der Löwenanteil der Karikaturen stammen vom Leipziger Grafiker Lothar Otto. Darüber freuen wir uns riesig, denn – Lothar Otto ist ein gefragter Mann. Und – ein preisgekrönter! Wir gratulieren herzlich zum 1. Preis im Ergebnis der Auswahl der weltbesten Cartoonbücher bei der internationalen Cartoonale in Beringen (Belgien) 1989.

Das Spitzenprodukt: „Ottografie“ vom Kinderbuchverlag Berlin. *Alphons*

(Eine „Otto-Schöpfung“)



AJHSME

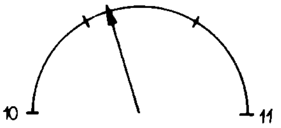
Eine Geheimschrift? Nein! Es ist die Abkürzung für den jährlich in den USA stattfindenden Amerikanischen Hochschulwettbewerb für Kinder (american junior high school mathematics examination).

Für 25 Aufgaben erhalten die Schüler der Klassen 7 und 8 40 Minuten reine Arbeitszeit. Alle Aufgaben sind im Antwort-Wahl-System gestellt, nur eine der fünf angegebenen Antworten ist richtig und damit anzukreuzen.

Wir haben einige der Aufgaben des Jahres 88 für euch ausgewählt.

Versucht, sie in 10 Minuten zu lösen.

▲1▲ Das Diagramm zeigt einen Teil einer Skala eines Meßgerätes.



Der Zeiger zeigt näherungsweise
A) 10,05 B) 10,15 C) 10,25
D) 10,3 E) 10,6 an.

▲2▲ Das Produkt $8 \cdot 0{,}25 \cdot 2 \cdot 0{,}125$ ist gleich

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2.

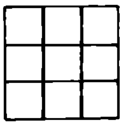
▲3▲ Betty benutzt den Taschenrechner, um das Produkt $0{,}075 \cdot 2{,}56$ auszurechnen. Sie vergaß dabei das Dezimalkomma (d. h. das Komma) zu drücken. Der Rechner zeigte 19200 an. Wenn Betty das Komma korrekt eingetippt hätte, dann wäre die Antwort
A) 0,0192 B) 0,192 C) 1,92
D) 19,2 E) 192.

▲4▲ Wir setzen voraus, daß die geschätzten Kosten von 20 Billionen Dollar, die der Flug eines Menschen zum Planeten Mars kostet, gleichmäßig auf die 250 Millionen Menschen der USA aufgeteilt wird. Dann hat jede Person
A) 40 Dollar B) 50 Dollar
C) 80 Dollar D) 100 Dollar
E) 125 Dollar zu bezahlen.

▲5▲ Wenn Rosenstöcke mit einem Fuß* Abstand gepflanzt werden, dann benötigt man rund
A) 12 B) 38 C) 48 D) 75 E) 450
Rosenstöcke, um ein rundes Beet mit einem Radius von 12 Fuß anzulegen.

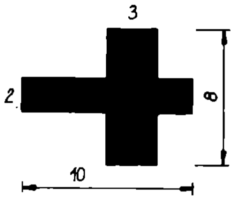
(* Fuß = veraltetes, von der Länge des Fußes abgeleitetes Längenmaß, 1 Fuß entspricht etwa 30 cm)

▲6▲ Es darf höchstens ein Kreuz in jedes kleine Quadrat gezeichnet werden. Bestimme die größte Anzahl von Kreuzen, die man in dem quadratischen Gitter unterbringen kann, wenn keine drei Kreuze in jeder Vertikalen, Horizontalen und Diagonalen sein dürfen!

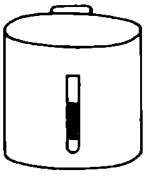


A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6.

▲7▲ Die dunkle Fläche wird von zwei sich überschneidenden, senkrecht aufeinanderstehenden Rechtecken gebildet. Die Fläche beträgt dann
A) 23 B) 38 C) 44 D) 46 E) es ist unmöglich, mit den gegebenen Informationen eine Entscheidung zu treffen.



▲8▲ Das Glasfenster in einer zylindrischen Kaffeemaschine zeigt an, daß man 45 Tassen erhalten kann, wenn die Maschine zu 36 % gefüllt ist. Wie viele Tassen enthält sie, wenn sie gefüllt ist?



A) 80 B) 100 C) 125 D) 130 E) 262.

Sofia Kowalewskaja (1850 bis 1891), erste Universitätsprofessorin der Welt für Mathematik, gehört zu den bedeutendsten Mathematikern des 19. Jahrhunderts. Ihre hervorragenden Leistungen haben bis heute nichts von ihrem Glanz eingebüßt.
Zunächst studierte sie in Heidelberg bei Königsberger, dann in Berlin als Privatschülerin bei Weierstraß.
Für ihre vortrefflichen Arbeiten über die Rotation schwerer Körper erhält sie den Bordin-Preis der Akademie der Wissenschaften Frankreichs. Ab 1884 ist sie zum Professor für Mathematik an die Universität Stockholm berufen.
Im Gegensatz zu ihrer erfolgreichen beruflichen Laufbahn verläuft ihr persönliches Leben eher tragisch. Auf dem Höhepunkt ihres schöpferischen Lebens ereilt sie völlig unerwartet der Tod.
Über diese hervorragende Frau hat der Moskauer Mathematiker Alexander Halameisär jetzt ein Buch geschrieben. Es ist im Selbstverlag des Autors veröffentlicht und kann bei folgender Kontaktadresse zu einem Betrag von 10,– M zuzüglich Versandkosten bestellt werden: Dr. M. Röhr, Alte Salzstraße 110, 7062 Leipzig

---

Dem Erdmittelpunkt näher oder die schiefe Friedrichstraße

Unsere Erde ist infolge der bei ihrer Eigendrehung (Rotation) auftretenden Zentrifugalkraft an den Polen abgeplattet. So ist der Poldurchmesser um 42,952 km kürzer als der Äquatordurchmesser.
Das Abplattungsverhältnis ist aber sehr klein und beträgt 1 : 297, ganz im Gegensatz zu den beiden Riesenplaneten Jupiter und Saturn, wo es 1 : 16 bzw. 1 : 10 beträgt. Würde man das Verhältnis auf einen Erdglobus mit 33 cm Durchmesser (Schulglobus) übertragen, wäre der Poldurchmesser nur um reichlich 1 mm kürzer. Bewegen wir uns auf der Erde von Süden nach Norden (auf der Südhalbkugel von Norden nach Süden), müssen wir folglich dem Erdmittelpunkt näher kommen. Betrachten wir einmal eine von Süden nach Norden verlaufende Straße und wählen wir darauf eine Strecke von 1 Kilometer aus! Befindet sich das Nordende unserer ausgewählten Straße tatsächlich näher am Erdmittelpunkt oder handelt es sich dabei um einen unbedeutenden Betrag, der überhaupt nicht ins Gewicht fällt?
Wir wollen dabei eine gleichmäßige Verteilung der Abplattung zwischen Pol und Äquator annehmen, auch spielt das Oberflächenprofil der Erde (Berge, Täler) keine Rolle.
Unsere ausgewählte Strecke sei die Friedrichstraße in Berlin!
Die Entfernung von der Leipziger Straße bis zum Bahnhof Friedrichstraße, Ecke Georgenstraße, beträgt genau 1 km. Wem ist beim Abschreiten dieses Kilometers schon einmal bewußt geworden, daß man am Bahnhof Friedrichstraße dem Erdmittelpunkt 2,15 m näher ist als in der Leipziger Straße?
Eine kurze Berechnung soll unser Ergebnis bestätigen! Ein Kilometer ist der zehntausendste Teil eines Erdquadranten. Der ganze Erdquadrant hat eine Länge von 10 000 km (genauer Wert: 10 002,288 km). Damit wurde früher übrigens auch unser Längenmaß, das Meter, definiert. Unser Kilometer in der Friedrichstraße macht demnach den 10 000. Teil des Erdquadranten aus. Die Verkürzung des Erdhalbmessers infolge der Abplattung beträgt 21,476 km (= 21 476 m), die wir durch 10 000 teilen müssen.
Wenn unsere Kilometerstrecke in der Friedrichstraße den 10 000. Teil des Erdquadranten ausmacht, muß dieser Anteil auf die Abplattung entfallen. Das Ergebnis ist demnach 2,15 m!
Wählen wir eine größere Strecke, so werden die Unterschiede noch augenscheinlicher. Rostock und Gera liegen auf demselben Längenkreis, ihre Luftlinienentfernung beträgt 353 km. Diese Strecke entspricht dem 28,334. Teil des Erdquadranten. Beziehen wir diesen Betrag auf die Abplattung der Erde, indem wir 21,476 km durch 28,334 teilen, so erhalten wir 0,757 958 km (gerundet: 758,5 m).
Ist den Rostockern schon einmal bewußt geworden, daß sie um 758,5 m dem Erdmittelpunkt näher sind als die Einwohner von Gera?

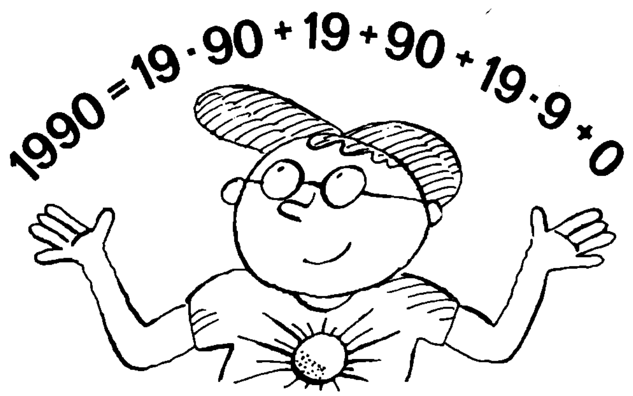
Erdwölbung und Hauswände

Es ist selbstverständlich, daß die Wände der Häuser senkrecht gebaut werden. Das bedeutet, daß eine senkrechte Hauswand in ihrer Verlängerung zum Erdmittelpunkt gerichtet ist.
Infolge der gewölbten Erdoberfläche können zwei voneinander entfernte Hauswände zueinander aber nicht mehr parallel verlaufen, sondern müssen einen Winkel bilden. Dieser Winkel beträgt bei einer 1 km langen Strecke immerhin 32,4 Bogensekunden, also eine reichliche halbe Bogenminute. Unter diesem Winkel sehen wir z. B. ein Zehnpfennigstück in einer Entfernung von 133,7 m. Handelt es sich um eine Strecke von 111,11 km, was einem Breitengrad entspricht (z. B. Jüterbog – Gransee), beträgt dieser Winkel bereits 1°.
Kommen wir zu der 1 km langen Strecke noch einmal zurück:
Multiplizieren wir den Winkel von 32,4″ mit 10 000 (Länge des Erdquadranten: 10 000 km) so erhalten wir 324 000″, also 90°. Dies ist genau der Winkel, den senkrechte Wände auf dem Pol mit denen auf dem Äquator bilden würden.

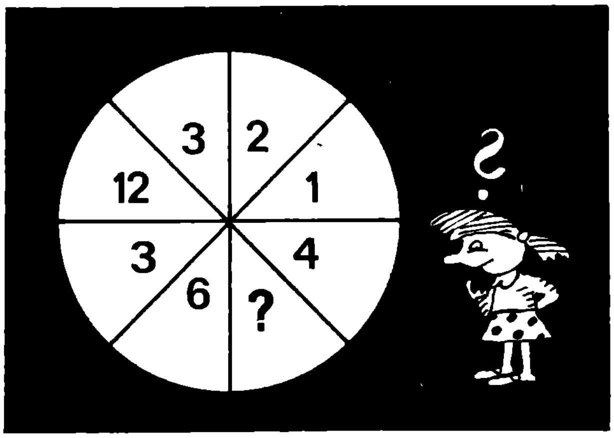
A. Zenkert

Im Heft 3/88 hatten wir es bereits berichtet: Unser Autor, StR A. Zenkert leitet den Kulturbund-Arbeitskreis Gnomonik. Dieser brachte den Katalog der ortsfesten Sonnenuhren auf dem Gebiet der DDR auf den neuesten Stand. Insgesamt gibt es 1374 Sonnenuhren, mit 265 hat der Bezirk Dresden die Nase vorn.
563 gelten als historisch bzw. künstlerisch wertvoll. Aus der Zeit vor 1500 stammen 124, aus den letzten vier Jahrzehnten ein Drittel der Uhren.

Alphons



FERIENMAGAZIN



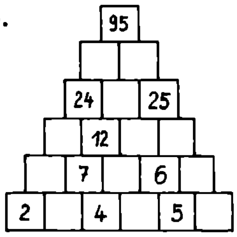
1.

12 ·8 + 2 =
123 ·8 + 3 =
1234 ·8 + 4 =
12345 ·8 + 5 =
123456 ·8 + 6 =
1234567 ·8 + 7 =
12345678 ·8 + 8 =
123456789 · 8 + 9 =

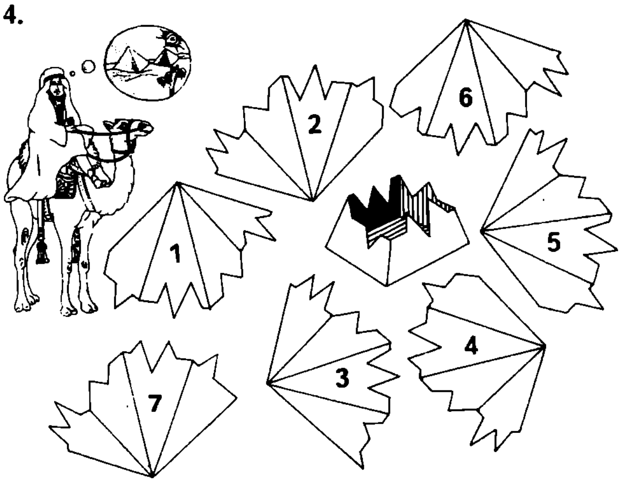
2.

60	?	10	?	60	—	10
5	?	2	?	3	—	30
20	?	5	?	15	—	40
10	?	9	?	31	—	50

3.



4.



5.

E = R : 2 R = K + A
K = A · 3 A = 210 : 7
E + R + I + K + A = 350

E	R	I	K	A

$3280 + a = 3330$
$a + b = 200$
$c : a = 4$
$a + b + c + d = 500$

$a =$	$b =$	$c =$	$d =$

6.

840 : 120 = ○
○ · 5 = △
(△ − 31)² = □
□ + 4 = □

7.

AAA · A = BBB
−   −
CCC · A = DDD
FFF · A = 3 3 3

10 : 2 + □ = 9
+ + + +
14 · 2 − □ = 3
+ + + +
□□ − □ − 2 = 7
36 − 7 − □ = □□

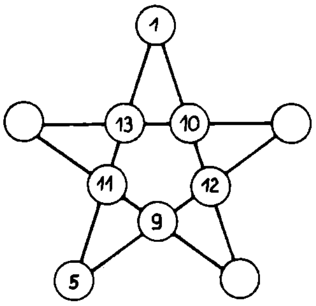
□△ + 8 = 3 ○
− − −
1 ◇ + ○ = 1 ○
1 △ + 3 = □◇

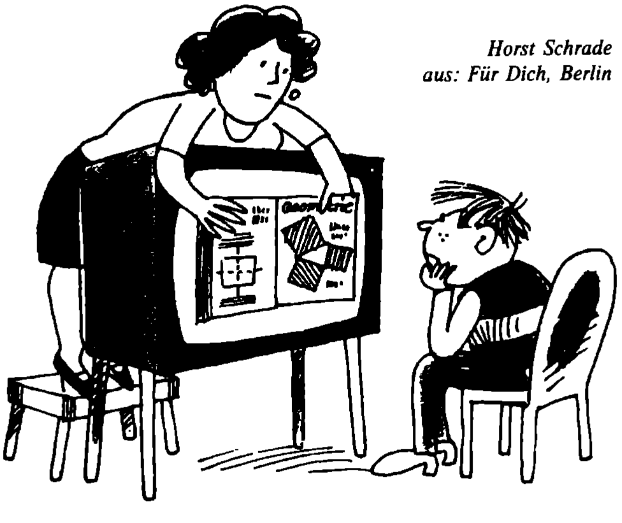
8.

+9		−5	+6
−2		+4	+1
	−1		
−3			−6

1		14	4
12	6		
	10	11	
13			16

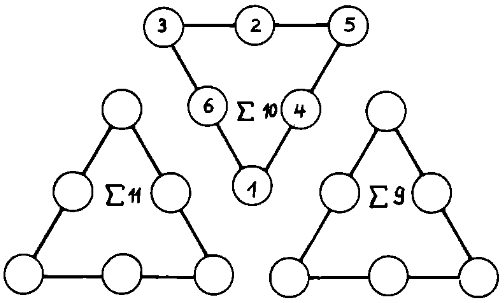
9.



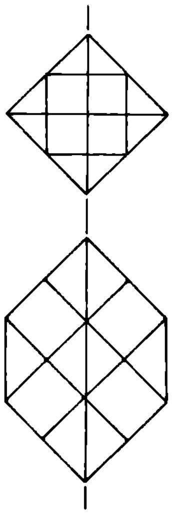


Horst Schrade
aus: Für Dich, Berlin

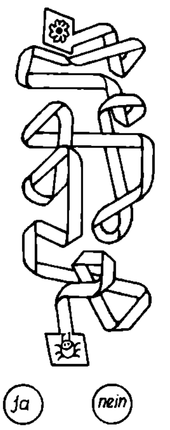
10.



11. Zähle die Dreiecke, die in jeder der Figuren enthalten sind.



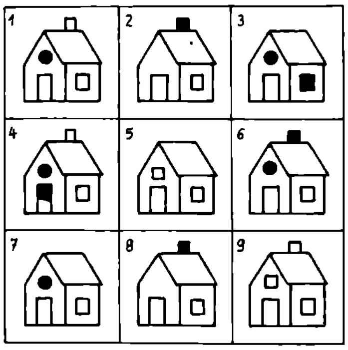
12. Erreicht der Marienkäfer die Blume?



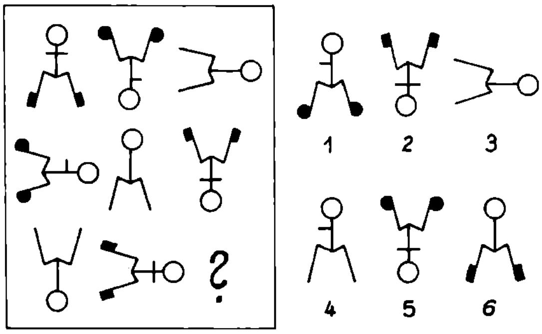
13.

▨	oh	▨	ster	▨	Ü
ne	▨	Preis	▨	mei	▨
▨	und	▨	bung	▨	den
kein	▨	Fleiß	▨	macht	▨

14. Welche Häuser gleichen sich?



15.



Mit oder ohne Feder?

Am Hof eines orientalischen Herrschers dienten einst drei Weise: Abdul, Ali und Achmed. Jeder von ihnen behauptete ohne falsche Bescheidenheit, daß gerade er der Weiseste der Weisen sei.

„Wer ist aber wirklich der Weiseste?“, wollte der Herrscher von seinem Hofnarr wissen.

„Das herauszubekommen, ist nicht schwierig, oh mein Gebieter“, antwortete der Narr bereitwillig. „Lasse nur fünf Samtmützen mit je einem Turban herstellen, und zwei davon mit einer Fasanenfeder schmücken. Und dann rufe deine Weisen.“

Als die Weisen kamen, zeigte ihnen der Narr sämtliche Mützen, befahl ihnen, sich ihre Augen zu verbinden, stülpte jedem eine der Mützen auf den Kopf, zog ihnen die Binde ab und sprach:

„Derjenige, der errät, ob sein Turban eine Feder hat oder nicht, wird als der Weiseste anerkannt. Kannst du diese Frage beantworten, oh Abdul der Weise?“

Der Narr setzte aber allen dreien die Mütze ohne Feder auf.

Abdul sah, wie die anderen „Weisesten“, zwei Mützen ohne Feder bei seinen Rivalen, wußte aber nicht, ob er selbst an seiner eine Feder hat.

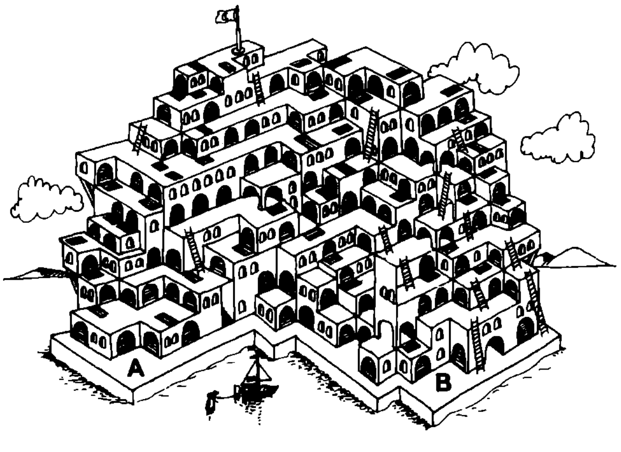
„Ich wage es nicht, denn ich fürchte, mich zu irren und ausgelacht zu werden“, sagte Abdul vorsichtshalber.

„Und du, oh weisester Ali?“ forschte der Narr weiter.

„Ich auch nicht“, antwortete Ali.

„Aber ich weiß es!“ rief sogleich Achmed. „Meine Mütze hat keine Feder! Ich bin also wirklich der Weiseste der Weisen!“

A. Halameisär



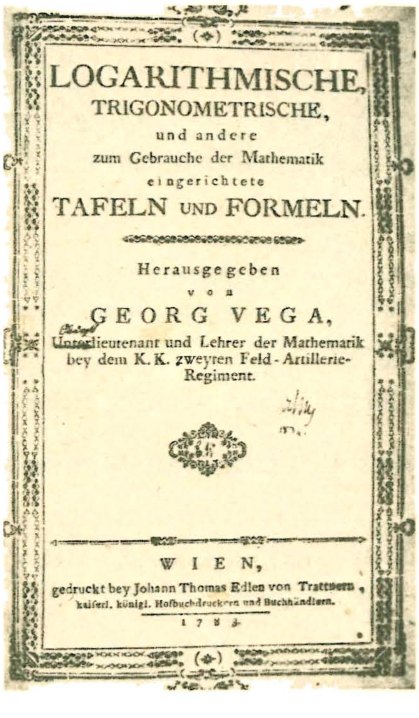
In alten Formelsammlungen geblättert: über eine Näherungsformel zum Wurzelziehen

Es ist recht reizvoll, in alten Mathematikbüchern zu schmökern.

Immer wieder ist man erstaunt, was damals schon zum Allgemeingut gehörte: So in dem 488 Seiten starken und über 200 Jahre alten Band

„Logarithmische, trigonometrische,
und andere zum Gebrauche der Mathematik
eingerichtete Tafeln und Formeln“,

aus dem wir nachfolgend eine Näherungsformel zum Wurzelziehen behandeln wollen.



LOGARITHMISCHE,
TRIGONOMETRISCHE,
und andere
zum Gebrauche der Mathematik
eingerichtete
TAFELN UND FORMELN.

Herausgegeben
von
GEORG VEGA,
Ober ~~Unter~~lieutenant und Lehrer der Mathematik
bey dem K. K. zweyten Feld-Artillerie-Regiment.

WIEN,
gedruckt bey Johann Thomas Edlen von Trattnern,
kaiſerl. königl. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.
1783.

Schon die im Vorbericht versprochene Zuverlässigkeit der Tafeln ist beachtlich; wir lesen:

„... und derselben ein volles Zutrauen verschaffet zu haben, dass man sich kraft einer öffentlichen Ankündigung verbindlich machte für jede erste Anzeige eines jeden in gegenwärtigen Tafeln entdekten wirklichen Fehlers einen kaiserlichen Dukaten zu bezahlen ...

Wien am letzten Novembris 1783
GEORG VEGA“

Eine vergleichbare Ankündigung dürfte heute kaum ein Herausgeber wagen können!

Auf S. 387 finden wir folgenden Abschnitt:

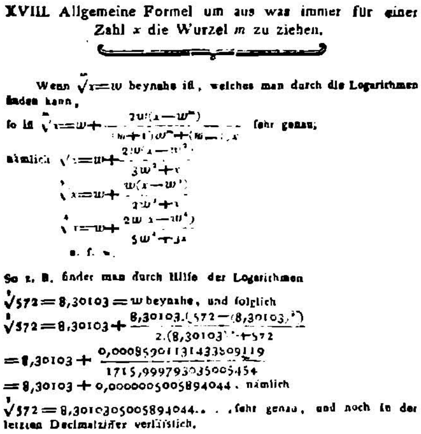
„Allgemeine Formel um aus was immer für einer Zahl x die Wurzel m zu ziehen.

Wenn $\sqrt[m]{x} = w$ beynahe ist, welches man durch die Logarithmen finden kann, so ist

$$\sqrt[m]{x} = w + \frac{2w(x-w^m)}{(m+1)w^m+(m-1)x}$$

sehr genau. So z. B. findet man durch Hilfe der Logarithmen $\sqrt[3]{572} = 8{,}301\,03 = w$ beynahe, und folglich

$\sqrt[3]{572} = 8{,}301\,030\,500\,589\,404\,4.$ sehr genau, und noch in der letzten Decimalziffer verlässlich.“



XVIII. Allgemeine Formel um aus was immer für einer Zahl x die Wurzel m zu ziehen.

Wenn $\sqrt[m]{x}=w$ beynahe iſt, welches man durch die Logarithmen finden kann,

ſo iſt $\sqrt[m]{x}=w+\frac{2w(x-w^m)}{(m+1)w^m+(m-1)x}$ ſehr genau;

nämlich $\sqrt{x}=w+\frac{2w(x-w^2)}{3w^2+x}$

$\sqrt[3]{x}=w+\frac{w(x-w^3)}{2w^3+x}$

$\sqrt[4]{x}=w+\frac{2w(x-w^4)}{5w^4+3x}$

u. ſ. w.

So z. B. findet man durch Hilfe der Logarithmen

$\sqrt[3]{572}=8{,}30103=w$ beynahe, und folglich

$\sqrt[3]{572}=8{,}30103+\frac{8{,}30103.(572-(8{,}30103)^3)}{2.(8{,}30103)^3+572}$

$=8{,}30103+\frac{0{,}00085901131433809119}{1715{,}999793035005454}$

$=8{,}30103+0{,}0000005005894044$. nämlich

$\sqrt[3]{572}=8{,}3010305005894044$... ſehr genau, und noch in der letzten Decimalziffer verläſslich.

In heutiger Anwendung mag die erste Näherung eher durch den Taschenrechner ermittelt werden, aber wenn man eine Wurzel auf mehr Dezimalstellen genau benötigt als der Taschenrechner angibt, ist die angegebene Formel überaus praktisch, da sie zum einen recht einfach gebaut ist und zum anderen, wie das zitierte Beispiel zeigt, in einem einzigen Näherungsschritt eine Vielzahl von gültigen Dezimalstellen erzeugen kann.

Nun gibt es seit einigen Jahren Kriterien für die Güte von Näherungsverfahren. Wir wollen dies alte Verfahren daraufhin untersuchen und mit dem heute verbreiteten Newtonschen Näherungsverfahren vergleichen.

Wir schreiben die Aufgabe wie folgt um: Seien $x > 0$ eine reelle und $m \geqq 2$ eine natürliche Zahl, gesucht ist $w = \sqrt[m]{x}$, also die positive Nullstelle der Funktion

$$f(w) = w^m - x$$

wobei eine Näherungslösung $w = w_1$ bereits bekannt ist.

Ein Näherungsverfahren besteht nun in der Angabe einer Vorschrift F, wie aus einer Näherung eine bessere Näherung ermittelt werden kann. Durch mehrfache Anwendung dieser Vorschrift erhält man induktiv eine ganze Näherungsfolge (w_n), die induktiv durch $w_{n+1} = F(w_n)$ definiert wird. Das Verfahren aus der VEGA-Sammlung wird also durch die Vorschrift

$$F_V(w) = w\left[1 + \frac{2(x-w^m)}{(m+1)w^m+(m-1)x}\right] \quad (1)$$

definiert, während beim bekannten Newtonschen Verfahren

$$F_N(w) = w\left[\frac{m-1}{m} + \frac{x}{m \cdot w^m}\right] \quad (2)$$

zu berechnen ist.

Der Übersichtlichkeit halber sollen die Spezialfälle für die Quadratwurzeln, also $m = 2$, auch angegeben werden:

$$F_V(w) = w \cdot \left[1 + \frac{2(x-w^2)}{3w^2+x}\right],$$

$$F_N(w) = w\left[\frac{1}{2} + \frac{x}{2w^2}\right].$$

Nun verlangt man von einem guten Näherungsverfahren nicht nur, daß für sehr große n der Wert w_n sehr nahe an der genauen Lösung liegt, sondern man erwartet schon für kleine Werte n einen befriedigend genauen Näherungswert w_n. Die Güte eines Näherungsverfahrens läßt sich dadurch beschreiben, wie der Fehler $\varepsilon_{n+1} = f(w_{n+1})$ der $(n+1)$-ten Näherungslösung w_{n+1} im Vergleich zum Fehler ε_n der n-ten Näherungslösung w_n ausfällt.

Ist beispielsweise $|\varepsilon_{n+1}| \approx \frac{|\varepsilon_n|}{10}$, so kann man, grob gesagt, davon ausgehen, daß sich in jedem Näherungsschritt eine weitere gültige Dezimalstelle ergibt. Wie sieht das jetzt bei den beiden oben angegebenen Verfahren aus? Sie lassen sich gemeinsam behandeln. Wir schreiben in Abhängigkeit von A und B

$$F(w) = w \cdot \left[1 + \frac{2(x-w^m)}{Aw^m + Bx}\right] \quad (3)$$

so, daß sich für $A = m+1$ und $B = m-1$ gerade F_V nach (1) und für $A = 2m$ und $B = 0$ gerade F_N nach (2) ergibt.

$\varepsilon = f(w)$ ist der Fehler der Lösung w, $\varepsilon^* = f(F(w))$ der der nächsten Näherungslösung. Es wird also $f(w) = w^m - x$ nach x aufgelöst und $x = w^m - \varepsilon$ in (3) eingesetzt: man erhält dann

$$\varepsilon^* = w^m\left[1 - \frac{2\varepsilon}{(A+B)w^m - B}\right]^m + \varepsilon - w^m \quad (4)$$

Für $\varepsilon = 0$ ist natürlich auch $\varepsilon^* = 0$; d. h., wenn man die genaue Lösung als erste Näherung benutzt, ist die zweite Näherung dieser gleich.

Wir wollen jetzt die Koeffizienten A und B so bestimmen, daß bei festem $|\varepsilon| \gtrsim 0$ der Wert von $|\varepsilon^*|$ möglichst klein wird. Wir benutzen die binomischen Formeln

$$(1+\alpha)^m = 1 + m\alpha + \frac{m}{2}(m-1)\alpha^2 + \ldots \quad (5)$$

speziell für $m = -1$

$$\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \alpha + \ldots \quad (6)$$

und ordnen (4) nach Potenzen von ε. Man erhält

$$\varepsilon^* = \left(1 - \frac{2m}{A+B}\right)\varepsilon + G\varepsilon^2 + H\varepsilon^3 + \ldots \quad (7)$$

mit gewissen Koeffizienten G und H, die von A, B und m abhängen. Wir fordern den Leser auf, diese zu berechnen. Dafür

genügt es, die Formeln (5) und (6) in der angegebenen Näherung zu verwenden.
Nun sind wir in der Lage, die Güte der beiden angegebenen Verfahren miteinander zu vergleichen. In beiden Fällen gilt $A + B = 2m$, so daß der Faktor vor ε in Formel (7) verschwindet.
Für das Newtonsche Verfahren ist $|G| \approx 1$, also $|\varepsilon^*| \approx \varepsilon^2$, d. h. mit jedem Näherungsschritt wird die Zahl der gültigen Dezimalstellen verdoppelt. Für das von VEGA angegebene Verfahren ist dagegen $G = 0$, und $|H| \approx 1$, also $|\varepsilon^*| \approx \varepsilon^3$, d. h., die Zahl der gültigen Dezimalstellen wird sogar mit jedem Näherungsschritt verdreifacht. Die Leser, denen der Übergang von Formel (4) zu Formel (7) Probleme bereitet, fordern wir auf, sich anhand einer Reihe selbst ausgedachter Beispiele von der Gültigkeit der Beziehungen $|\varepsilon^*| \approx \varepsilon^2$ bzw. $|\varepsilon^*| \approx \varepsilon^3$ zu überzeugen.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß das von Vega angegebene Verfahren, obwohl es nur unwesentlich aufwendiger zu handhaben ist, eine höhere Güte besitzt als das Newtonsche Verfahren:
Seine Konvergenzgeschwindigkeit ist kubisch im Gegensatz zur quadratischen Konvergenzgeschwindigkeit beim Newtonschen Verfahren. Das angegebene Beispiel $\sqrt[3]{572}$ (von 6 auf 17 gültige Dezimalen) ist also ein typischer Genauigkeitszuwachs.

H.-J. Schmidt

Buchtip: Carl Friedrich Gauß Erlebtes und Erstrebtes

Selbstdarstellung des „Fürsten der Mathematiker“ in Briefen und Gesprächen
Herausgeber: Kurt-R. Biermann
232 S., zahlr. Abb., Leinen
Bestell-Nr. 654 385 2 Preis: 19,80 M
Urania-Verlag Leipzig

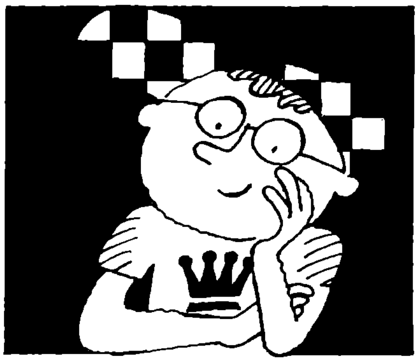
Kryptarithmetische Knobelaufgabe

In einer bekannten Rätselzeitschrift wurde folgende kryptarithmetische Aufgabe veröffentlicht:

$$\begin{array}{ccccc} EIC & - & IH & = & GBC \\ : & & + & & - \\ II & \cdot & DC & = & BCG \\ \hline CI & + & GC & = & AIF \end{array}$$

Dabei hatte aber der Druckfehlerteufel seine Hand im Spiel, und so war für zwei verschiedene Ziffern der gleiche Buchstabe verwendet worden.
Es heißt aber stets, daß gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und ungleiche Buchstaben ungleiche Ziffern bedeuten.
Wenn man die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 mit den Buchstaben *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I* und *K* bezeichnet, so fehlte der Buchstabe *K*.
Finde heraus, wo der Druckfehler steckt!

A. Körner



Schach dem König – Muß der Schachweltmeister einem Computer weichen?

Diese Frage erregt unter Schachspielern, Mathematikern – Wissenschaftlern und Laien immer wieder größtes Interesse. Antworten gibt es viele – Meinung prallt auf Meinung. Haben wir in unserer letzten Ausgabe über die pädagogischen Seiten des königlichen Spiels berichtet, so wollen wir heute auf neue Erkenntnisse im Computerschach eingehen.
Vieldiskutiert ist nicht nur der Kampf um die Schachkrone; seit mehr als tausend Jahren träumen begeisterte Anhänger davon, eine perfekte Spielweise zu entwickeln, unschlagbar zu werden. Gibt es diese optimale Strategie? Nur wenige wissen, daß bereits vor 75 Jahren der deutsche Mathematiker Ernst Zermelo (1871 bis 1953) auf diese Frage eine erschöpfende Antwort gab. Durch Anwendung einfacher Methoden der Kombinatorik und der Schachregeln lassen sich alle nur möglichen Stellungen beschreiben, in denen Schwarz matt gesetzt wurde. Eine solche Position nennen wir S0. (Wir betrachten hier nur diesen Fall, für einen Verlust von Weiß – W0 – gilt alles analog.) Wird in jeder solchen Stellung der letzte weiße Zug zurückgenommen, erhalten wir Stellungen des Types S1, wobei darauf geachtet wird, daß nur praktisch mögliche Konfigurationen auftreten – z. B. niemals beide Könige im Schach stehen u. a. Hier ein Beispiel für eine Stellung: S0 und alle aus ihr folgenden Positionen S1: W – Kb6, Da7, Sf7; S – Ka8. Daraus ergeben sich 3 Stellungen S1, nämlich W – Kb6, Sf7; S – Ka8 und die weiße Dame steht entweder auf e7, d7 oder c7. Die Menge S2 wird entsprechend durch Zurücknahme des letzten schwarzen Zuges gebildet – aus jeder der 3 Stellungen S1 ergibt sich im Beispiel genau eine Stellung S2, da der König nur von b8 gekommen sein kann. Zu beachten ist dabei, daß zu S2 nur Positionen gehören, in denen jeder schwarze Zug zu einer Stellung S1 führt. Für De7 ist dann auch Kc8 möglich, doch gehört natürlich auch diese Position zur großen Menge S1. Bei optimalem Spiel von Weiß gewinnt dieser also jede Position S2 in 2 Halbzügen.
Führt man dieses Verfahren immer weiter fort und wendet es auf jedes Mattbild S0 an, so erhält man die Menge aller Positionen SX, in denen Weiß zwangsläufig nach einer Anzahl von X Halbzügen gewinnt. Ebenso erhält man die Menge aller WX. Alle übrigen Stellungen – weder Weiß noch Schwarz können bei optimalem Spiel gewinnen – bilden die Menge aller möglichen Remispositionen R. Sowohl Schwarz als auch Weiß steht hier mindestens ein Zug zur Verfügung, der zum Remis führt. Daraus folgt eine mathematisch bewiesene, optimale Strategie:

1. In jeder Position SX muß sowohl Weiß als auch Schwarz zu S(x − 1) überleiten. Das sichert Weiß den schnellstmöglichen Sieg und Schwarz den längsten Widerstand. Für WX gilt das analog.
2. In Stellungen aus R müssen beide Spieler Züge wählen, die wieder zu Positionen aus R führen.

Jeder Zug, der den Anforderungen dieser Strategie entspricht, ist der in der jeweiligen Stellung beste, wobei mehrere solcher Züge existieren können. Im Durchschnitt sind es ungefähr 1,4 bis 1,7 pro Stellung.
Damit wäre die Angelegenheit Schach erledigt – wenn jeder nach der optimalen Strategie spielt, haben alle Partien das gleiche Ergebnis. Von entscheidender Bedeutung ist jedoch, daß niemand stets genau einschätzen kann, ob er sich in einer Position der Menge S, W oder R befindet. Nicht geklärt ist z. B. auch, zu welcher Menge die Ausgangsstellung gehört. Ebenso sind die optimalen oder Meisterzüge, von denen der Algorithmus ausgeht, nur schwer zu finden. Die absolute Wahrheit existiert unabhängig von unserem Spiel – wir können sie nicht nutzen.
Was aber führt uns von Ernst Zermelo zum Computerschach und dem Kampf um die Krone?
Zur Einschätzung der Spielstärke eines Schachsportlers existiert das sogenannte Ratingsystem. Es ordnet jedem Spieler eine Punktzahl entsprechend seiner Leistung zu. Dabei kommen Lernende auf Werte zwischen 0 und 1500, Spieler der Leistungsklasse 1 auf durchschnittlich 2070 und Großmeister auf ungefähr 2500 Punkte. Neuer Rekordhalter ist mit 2810 Punkten Weltmeister Garri Kasparow. Die besten Computer bleiben mit einer Ratingzahl von 2550 deutlich unter diesem Niveau.
Nach neuesten Erkenntnissen könnte sich jedoch eine plötzliche Wandlung in diesem Verhältnis einstellen. Anhand empirischer Untersuchungen wurde folgendes festgestellt: Sei A die Anzahl an Meisterzügen in Prozent, welche ein Spieler innerhalb seiner Partien ausführt und B die Ratingzahl dieses Spielers, so gilt erstaunlich gut folgende Formel:
$A = 70 + 24 \cdot 10^{-3}(B - 1800)$
Danach hätte ein Spieler, welcher nach dem Zermelo-Algorithmus spielt, eine Wertzahl von
$B = (100 - 70) : (24 \cdot 10^{-3}) + 1800 = 3050$.
Auch der Weltmeister ist demnach schlagbar – nur von wem?
Mathematiker, Informatiker und andere

beschäftigen sich mit sogenannten Kollektiven Entscheidungssystemen (CIS). Diese werden dadurch charakterisiert, daß verschiedene Individuen nach bestimmten Regeln gekoppelt werden. Dabei sind die Aufgaben jedes Individuums und des Gesamtsystems identisch. Die Leistung des Systems ist berechenbar und liegt deutlich über der Ausgangsleistung der Individuen, wenn diese paarweise voneinander verschieden sind. Entsprechende Tests, bei denen mit Hilfe komplizierter Programme die Bedingungen eines Zusammenschlusses rechnerisch simuliert worden, haben ergeben, daß z. B. 5 Spieler mit einer durchschnittlichen Ratingzahl von 2000 ein System bilden würden, welches mehr als 2600 Punkte besäße. Bei Computern, die sich nicht in so hohem Maße voneinander unterscheiden, liegt der Zuwachs etwas unter diesem Wert.
Interessant werden solche Überlegungen, geht es um die Konstruktion neuwertiger Computer. Zur Zeit erreicht die Entwicklung neuer Schachprogramme einen jährlichen Zuwachs von maximal 40 Ratingpunkten. Sollte es jedoch gelingen, mit Hilfe der CIS besagte Simulation praktisch zu verwirklichen, so ergäbe bereits der Zusammenschluß von 3 Spitzencomputern mit einer Ratingzahl von 2550 ein System, welches über die bisher unerreichte Spielstärke von 2900 Punkten verfügen würde. Der Weltmeister müßte sich geschlagen geben.
Im Verlaufe seiner fast 2000jährigen Entwicklung durchlief das Schachspiel immer wieder Höhen und Tiefen; trotz Verboten und vielen anderen Hindernissen trat es einen triumphalen Siegeszug um die Welt an. Auf weitere neue Erkenntnisse und Entwicklungen dürfen wir gespannt sein. Ob es sich aber um die heißumkämpfte Schachkrone handelt oder um eine gemütliche Freundschaftspartie – das königliche Spiel schlägt stets aufs Neue Millionen in seinen Bann – und nicht nur Könige.
(Die Veröffentlichung dieser neuen Erkenntnisse und Hypothesen erfolgte mit freundlicher Genehmigung von Dipl. Physiker Frank Rieger, selbst begeisterter *alpha*-Leser, dem ich hiermit für sein Entgegenkommen herzlich danken möchte.)

M. Spindler

W. Spelnikow, aus: Junge Welt, Berlin

Verlockende Knobelei

Scharfsinn, Geduld und nicht zuletzt Einfallsreichtum waren beim **7. alpha-Schachwettbewerb** gefragt, um die vier Aufgaben richtig zu lösen und spielerisch das logische Denken zu trainieren. Vielen Lesern vermittelte der Wettbewerb wieder Spaß und Freude. „Ich hatte auch diesmal viel Freude beim Lösen" (F. Rauhe, Wendgräben). Wobei „die vier Urdrucke eine gelungene Überraschung für alle Schachfreunde" (F. Götze, Döbeln) waren. In Versform gab D. Koch (Arnstadt) sein Gefallen an der schachlichen Knobelei zum Ausdruck:

„Es erscheint der alpha-Schachwettbewerb alljährlich,
für mich als Laie ist das Lösen mitunter beschwerlich,
doch das königliche Spiel ist Spitze,
auch wenn ich manche Stunde versitze.
Aber viel Freude wird echt empfunden,
wenn durch Knobeln Richtiges gefunden."

Lösungen

▲1▲ 1. Kd3 Kd6/Kf5
2. Ke4/Kd4 matt.

Vom Aufgabenverfasser als leichter Einstieg in den Wettbewerb gedacht. So hatten auch nur 2 % der Einsender eine falsche Lösung hierzu aufgeschrieben.

▲2▲ 1. e5 (droht 2. Sf4/Sg5 matt)
1. … T:e5/L:e5
2. Sf4/Sg5 matt.

Gegen die zweifache Mattdrohung hat Schwarz keine Parade mehr. Sie kann nur noch durch Schlagen des Bauern differenziert werden. Deshalb erstaunlich, daß diese Aufgabe mit 18,7 % die meisten Fehllösungen aufwies. Die Versuche
1. Df1 und 1. Df3 oder 1. Da1
scheitern an 1. … Tc5 bzw. an
1. … b2, ebenso 1. Dc1 an 1. … Th6.

▲3▲ 1. Dd7 (droht 2. Sf5 matt)
1. … Sc3+/S:e3/Tc6
2. d:c3/d:e3/d:c6 matt.
1. … Td6/Te6/Tf6
2. Dg4/d:e6/Le5 matt.
1. … Tg5/T:g3
2. Da7/Da7 matt.

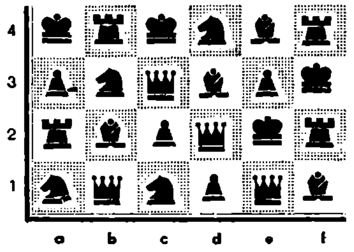
Zu dieser Aufgabe notierten 17,7 % der Teilnehmer eine fehlerhafte Lösung. Als vermeintlichen Schlüsselzug wurde oftmals 1. Df5 angegeben, was jedoch Schwarz mit 1. … Sf2 parieren kann.

▲4▲ 1. g8T+ Kf5/Kh5/Kh6
2. e8S/e8D+/e8D K:e5/Kh6/Kh7
3. Tg5/Dg6/Dg6 matt.

Der Reiz dieser dreizügigen Miniatur liegt in den beiden Unterverwandlungen. Zunächst führt die Umwandlung des g-Bauern in die stärkste Figur, die Dame, nicht zum Ziel.
Nach 1. g8D+ folgt 1. … Kh6 und ein Matt im 3. Zug ist nicht möglich, da sich z. B. bei 2. e8D oder 2. g4 ein Patt ergibt. In dem Abspiel 1. … Kf5 ist die zweite Unterverwandlung in einen Springer (2. e8S) mattwirksamer als wiederum die Umwandlung in eine Dame. Die Zahl derer, die die Verführung 1. g8D+ als Lösung notierten, betrug 12,8 %.

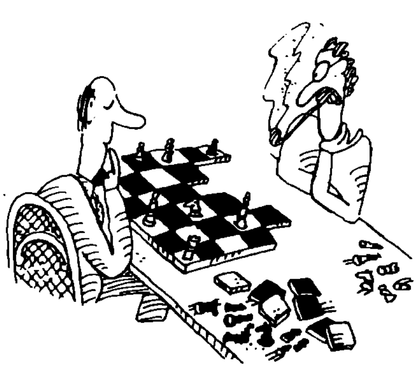
Unter den Einsendern, die alle vier Aufgaben richtig gelöst hatten, wurden folgende Gewinner ermittelt:
Christian Kühnert (Karl-Marx-Stadt),
Sebastian Kumke (Berlin),
Yvonne Langer (Eisenach),
Hans-Georg Sobeck (Radebeul) und
Roman Strecker (Dingelstädt).
Weiterhin wurden Preise unter allen Teilnehmern verlost, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst hatten:
Annerose Hoff (Hohen-Demzien),
Martin Michalk (Erfurt),
Andreas Napp (Riesa),
Michael Nowakowski (Wittenberg) und
Birgit Stiller (Hoyerswerda).
Allen Gewinnern herzlichen Glückwunsch!
„Dieser alpha-Schachwettbewerb war wieder eine Verlockung für jeden Schachfreund" (F. Fiedler, Mügeln).
Wer wieder dieser Verlockung erlegen sein möchte, schaue in Heft 6/90, dort erscheint der nächste alpha-Schachwettbewerb!

In einem Teil des Schachbretts sind die sechs verschiedenen Schachsteine scheinbar willkürlich jeweils viermal angeordnet. Es gibt jedoch vier zusammenhängende unregelmäßige Flächen, in denen die sechs Schachsteine jeweils einmal enthalten sind.



Wie sehen diese Flächen bzw. aus welchen Feldern setzen sie sich zusammen?

H. Rüdiger



Lothar Otto, aus: Eulenspiegel, Berlin

Einige Folgerungen aus dem Eulerschen Polyedersatz

Die folgenden Ausführungen beziehen sich nur auf konvexe Polyeder. Für diese Polyeder gilt der Eulersche Polyedersatz:

Ist P ein konvexes Polyeder mit e Ecken, f Flächen und k Kanten, so gilt

$$e + f - k = 2. \qquad (1)$$

Dieser Satz wurde bereits in der *alpha*, Heft 4/1983 behandelt.
Jedoch wollen wir noch einmal darauf hinweisen, daß es auch nichtkonvexe Polyeder gibt, für die (1) gilt.
Ein solches Beispiel zeigt Bild 1.

Bild 1

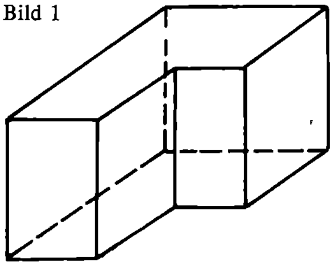


Bild 2

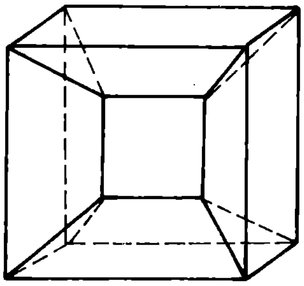


Bild 2 zeigt aber ein nichtkonvexes Polyeder das (1) nicht erfüllt.
Die folgenden Ergebnisse stammen von *Leonhard Euler* (1707 bis 1783). In dem Buch ***Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*** von ***Ernst Steinitz*** (1871 bis 1928) sind diese Ergebnisse (ebenfalls) zusammengefasst dargestellt.
Nun betrachten wir für das Weitere ein konvexes Polyeder P mit e Ecken, f Flächen und k Kanten und bezeichnen mit $p_1, p_2, \ldots, p_f$ die Anzahl der Kanten jeder Fläche sowie mit $q_1, q_2, \ldots, q_e$ die Anzahl der Kanten, die von jeder Ecke von P ausgehen.

1. Da P ein konvexes Polyeder ist, hat natürlich jede Polyederfläche mindestens drei Kanten, und von jeder Polyederecke gehen ebenfalls mindestens drei Kanten aus. Es gilt also

$$p_i \geqq 3 \quad \text{und} \quad q_j \geqq 3, \qquad (2)$$

wobei $i = 1, 2, \ldots, f$ und $j = 1, 2, \ldots, e$ gilt.
Summieren wir nun die Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_f$ und die Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_e$, so erhalten wir jeweils die doppelte Anzahl der Kanten, da bei dieser Addition jede Kante doppelt gezählt wurde. Es gehört nämlich jede Kante zu genau zwei Flächen, und zu jeder Kante gehören genau zwei Ecken des Polyeders. Damit gelten

$$2k = p_1 + p_2 + \ldots + p_f \qquad (3)$$
$$\text{und} \quad 2k = q_1 + q_2 + \ldots + q_e.$$

Aus den Gleichungen (3) folgt aber mit (2) sofort, daß

$$2k = p_1 + p_2 + \ldots + p_f \geqq 3f$$
$$\text{und} \quad 2k = q_1 + q_2 + \ldots + q_e \geqq 3e,$$
$$\text{also} \quad 2k \geqq 3f \qquad (4)$$
$$\text{und} \quad 2k \geqq 3e \quad \text{gelten.} \qquad (5)$$

Nehmen wir zu der Ungleichung (4) noch die Eulersche Formel (1) hinzu, so erhalten wir $2k \geqq 3f = 3(2 + k - e)$, woraus $3e \geqq k + 6$ folgt. Zusammen mit der Ungleichung (5) gilt dann

$$2k \geqq 3e \geqq k + 6. \qquad (6)$$

Analog folgt aus (5) unter Verwendung der Eulerschen Formel (1) und der Ungleichung (4), daß

$$2k \geqq 3f \geqq k + 6 \quad \text{gilt.} \qquad (7)$$

Aus (6) und (7) folgt gleichzeitig, daß $2k \geqq k + 6$ ist, und damit gilt für jedes konvexe Polyeder P

$$k \geqq 6. \qquad (8)$$

Damit hat also jedes konvexe Polyeder mindestens sechs Kanten; die Tetraeder (dreiseitige Pyramiden) haben genau sechs Kanten. Es ist erstaunlich, daß es kein konvexes Polyeder gibt, das genau sieben Kanten hat. Wir werden dies gleich zeigen. Mit der Ungleichung (8) können wir aus (6) und (7) sofort schlußfolgern, daß

$$e \geqq 4 \quad \text{und} \quad f \geqq 4 \quad \text{gilt.} \qquad (9)$$

Nun nehmen wir an, daß es ein konvexes Polyeder P_1 mit genau sieben Kanten gibt. Da für dieses Polyeder auch die Eulersche Formel (1) mit $k = 7$ gelten muß, haben wir $e + f - 7 = 2$ und damit

$$e + f = 9. \qquad (10)$$

Wegen der Ungleichungen (9) kann P_1 nur ein Polyeder mit $e = 4$ und $f = 5$ oder $e = 5$ und $f = 4$ sein.
Im ersten Fall bedenken wir, daß das *einzige* Polyeder mit $e = 4$ nur ein Tetraeder sein kann. Ein Tetraeder hat aber nur 4 Flächen.
Im zweiten Fall bedenken wir, daß ein Polyeder mit $f = 4$ auch nur ein Tetraeder sein kann. Dieses Tetraeder hat aber genau 4 Ecken.
Folglich gibt es kein solches Polyeder P_1, und damit gibt es kein konvexes Polyeder mit genau sieben Kanten.

Aufgabe 1

Zeige, daß es konvexe Polyeder mit $k = 8, 9, 10, \ldots$ Kanten gibt.
Zeige, daß es konvexe Polyeder mit $e = 5, 6, 7, \ldots$ Ecken gibt.
Zeige, daß es konvexe Polyeder mit $f = 5, 6, 7, \ldots$ Flächen gibt.

2. Bevor du hier weiterliest, versuche ein konvexes Polyeder zu finden, das entweder nur von Sechseckflächen begrenzt wird, oder bei dem von jeder Ecke genau sechs Kanten ausgehen.
Selbst nach längerem Probieren wirst du wohl kein solches Polyeder gefunden haben, und wir vermuten, daß es solche nicht geben kann. Zum Beweis dieser Vermutung bezeichnen wir mit

$p = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_f}{f}$ die mittlere Kantenzahl der Flächen und mit

$q = \frac{q_1 + q_2 + \ldots + q_e}{e}$ die mittlere Kantenzahl der Ecken eines konvexen Polyeders P. Wegen (3) gilt

$$p = \frac{2k}{f} \qquad (11)$$
$$\text{und} \quad q = \frac{2k}{e} \qquad (12)$$

Nun stellen wir (7) etwas um.
Es gilt sicher $k + 6 \leqq 3f$, woraus sofort $2k \leqq 6f - 12$ folgt.
Daraus erhalten wir

$$\frac{2k}{f} \leqq 6 - \frac{12}{f}. \qquad (13)$$

Weil $\frac{12}{f}$ stets positiv ist, ist

$6 - \frac{12}{f} < 6$ stets richtig. Damit gilt

$\frac{2k}{f} < 6$ und mit der Beziehung (11) gilt

$$p < 6. \qquad (14\,\text{a})$$

Analog erhalten wir aus der Ungleichung (6) unter der Verwendung der Beziehung (12), daß

$$q < 6 \quad \text{gilt.} \qquad (14\,\text{b})$$

Aus der Ungleichung (14 a) folgt nun, daß es kein konvexes Polyeder gibt, das nur durch Sechseckflächen begrenzt wird. Entsprechend folgt aus (14 b), daß es kein konvexes Polyeder gibt, bei dem von jeder Ecke genau sechs Kanten ausgehen.

3. Um eine weitere interessante Eigenschaft von konvexen Polyedern herzuleiten, bezeichnen wir mit $f_3, f_4, \ldots$ die Anzahl der Flächen mit genau 3, 4, … Kanten und mit $e_3, e_4, \ldots$ entsprechend die Anzahl der Ecken, von denen genau 3, 4, … Kanten ausgehen.
Es ist klar, daß

$$f_3 + f_4 + f_5 + \ldots = f \quad \text{und}$$
$$e_3 + e_4 + e_5 + \ldots = e \quad \text{ist} \qquad (15),$$

wobei die linken Seiten dieser Gleichungen natürlich aus endlich vielen Summanden bestehen. Außerdem überlegen wir uns leicht, daß

$$3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots = 2k \quad \text{und}$$
$$3e_3 + 4e_4 + 5e_5 + \ldots = 2k \qquad (16)$$

gilt. Aus den Gleichungen (15) folgt
$4f_3 + 4f_4 + 4f_5 + \ldots = 4f$ und
$4e_3 + 4e_4 + 4e_5 + \ldots = 4e.$ (17)
Subtrahieren wir nun die Gleichungen (16) von den entsprechenden Gleichungen (17), so erhalten wir
$f_3 - 1f_5 - 2f_6 - \ldots = 4f - 2k$ und
$e_3 - 1e_5 - 2e_6 - \ldots = 4e - 2k.$ (18)
Die beiden Gleichungen (18) werden nun nach f_3 bzw. e_3 umgestellt.
Wir erhalten
$f_3 = 4f - 2k + 1f_5 + 2f_6 + \ldots$ und
$e_3 = 4e - 2k + 1e_5 + 2e_6 + \ldots$
Nun addieren wir noch diese beiden Gleichungen und erhalten
$f_3 + e_3 = 4f + 4e - 4k + (f_5 + e_5)$
$+ 2(f_6 + e_6) + \ldots$
Nun ist aber $f_5 + e_5 \geqq 0$, $f_6 + e_6 \geqq 0$, …, und folglich erhalten wir
$$f_3 + e_3 \geqq 4\,(f + e - k). \qquad (19)$$
Nun erkennen wir sofort, daß wir wieder die Eulersche Polyederformel (1) anwenden können, und wir erhalten aus der Ungleichung (19), daß
$$f_3 + e_3 \geqq 8 \text{ ist.} \qquad (20)$$
Das heißt, daß in jedem konvexen Polyeder die Summe aus der Anzahl der Dreiecksflächen und der Ecken, von denen genau drei Kanten ausgehen, mindestens acht ist.
Eine abgeschwächte, aber auch interessante Interpretation von (2) besagt, daß es kein Polyeder gibt, in dem gleichzeitig Dreiecksflächen und Ecken mit genau drei Kanten fehlen.
Oder: Ein Polyeder ohne Dreiecksflächen hat mindestens acht Ecken, von denen genau drei Kanten ausgehen.
Ein Beispiel dazu ist der Würfel.
Das Oktaeder liefert uns ein Beispiel für ein Polyeder, das keine Ecken hat, von denen genau drei Kanten ausgehen. Das Oktaeder hat aber acht Dreiecksflächen.
Beim Tetraeder ist $e_3 = f_3 = 4$.

Aufgabe 2

Zwei konvexe Polyeder sollen vom gleichen Typ heißen, wenn sie dieselbe Anzahl von Flächen, Ecken und Kanten haben, und wenn von einander entsprechenden Ecken die gleiche Anzahl von Kanten ausgeht. Zum Beispiel gehören Würfel und Quader zum selben Typ. Im Bild 3 sind zwei konvexe Polyeder dargestellt, die jeweils fünf Flächen haben, aber nicht vom gleichen Typ sind.

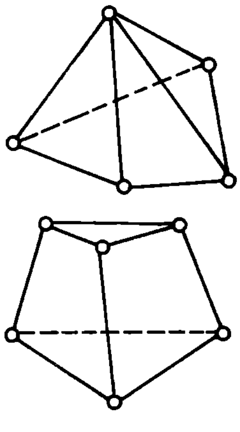


Bild 3

Unter allen konvexen Polyedern mit genau fünf Flächen gibt es nur die zwei oben gezeigten Typen.
Beweise diese Aussage!
Versuche alle Typen von konvexen Polyedern zu finden, die genau sechs Flächen haben.
Gib zu jedem Typ ein Beispiel an!

Aufgabe 3

Unter einem Flächenwinkel eines konvexen Polyeders P verstehen wir einen Innenwinkel eines Polygons von P.
Zeige, daß die Summe aller Flächenwinkel eines konvexen Polyeders stets $2\pi(k - f)$ ist.

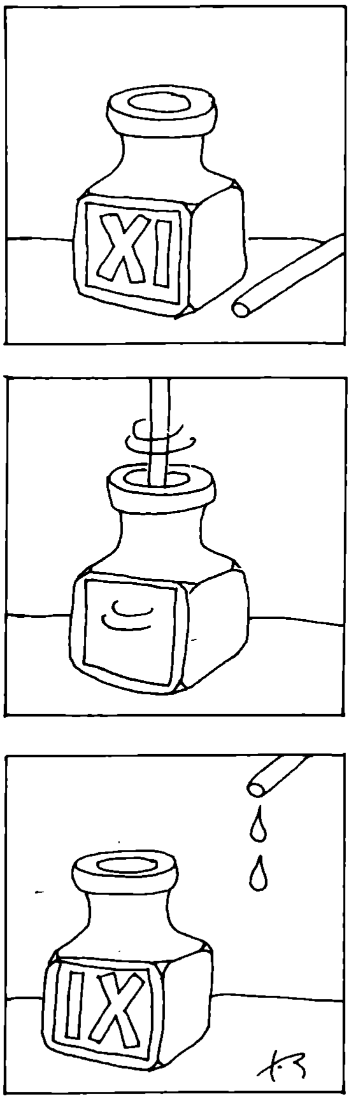
Aufgabe 4

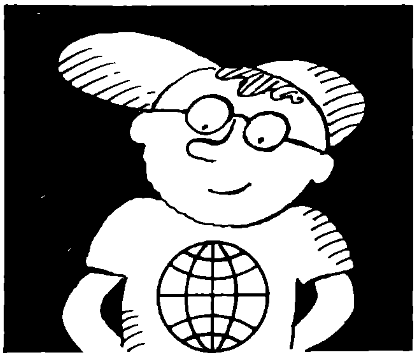
Gibt es Tetraeder, bei denen jede Kante Schenkel eines stumpfen Winkels von einem Flächenwinkel ist?

M. Schmitz

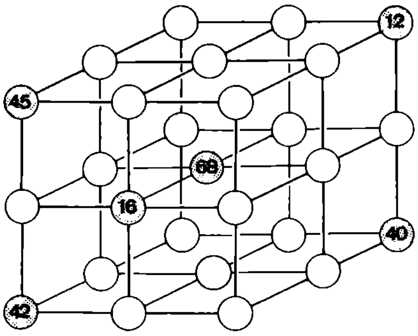
Die Lösungen erscheinen im Heft 4/90

aus: Funktio, Helsinki





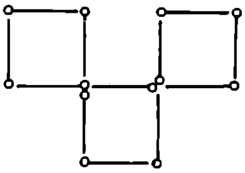
▲1▲ Jeu de billes
Placez dans chacune des sphères vides l'un des nombres suivants: 6–7–9–10–11–14–16–17–20–23–24–25–28–31–33–37–41–42–51–57, de manière à toujours obtenir le même total de 249 en additionnant les valeurs contenues dans neuf sphères situées dans un même plan.
N.B.: les sphères concernées sont réparties dans neuf plans différents.



aus: Logigram, Paris

▲2▲ С числом, записанным на доске, разрешается производить следующие операции: либо заменять его удвоенным, либо стирать его последнюю цифру. Как с помощью этих операций получить из числа 458 число 14?
aus: Quant, Moskau

▲3▲ Still Square—but up in the air
The drawing shows twelve matches put together to form three unit squares. Using the same number of matches, can you make six unit squares?



aus: Fun with mathematics, Toronto

Kein niederländisches Wörterbuch im Haus? Probiert es doch mal ohne!
▲4▲ Gegeven zijn twee op elkaar volgende priemgetallen p en q, beide groter dan 2 (tussen p en q bevinden zich dus geen andere priemgetallen). Bewijs dat de som $p + q$ geschreven kan worden als het produkt van drie natuurlijke getallen groter dan 1. *aus: Pythagoras, Amsterdam*

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade

Februar 1990

Olympiadeklasse 7

290731 28 Schüler einer Klasse beteiligen sich an einem Sportfest; dabei nahm jeder dieser Schüler an mindestens einer der Disziplinen Kugelstoßen, Weitsprung und 100-m-Lauf teil. Außerdem ist über die Schüler dieser Klasse bekannt:

(1) Die Anzahl derjenigen, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100-m-Lauf teilnahmen, ist größer als 1, und sie ist gleich der Anzahl derer, die sich nur am Kugelstoßen beteiligten.

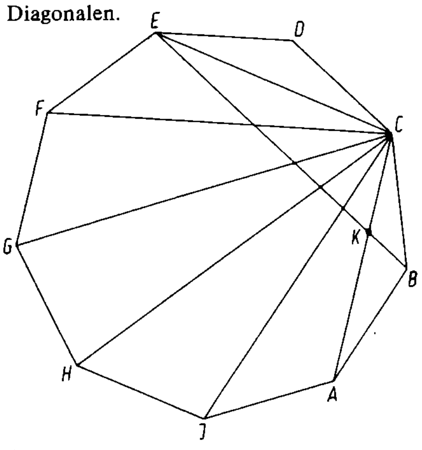
(2) Mindestens einer der Schüler nahm an allen drei Disziplinen teil; fünfmal so groß wie die Anzahl dieser Schüler ist insgesamt die Anzahl derjenigen, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100-m-Lauf starteten.

(3) Genau 6 der Schüler starteten in den Disziplinen Kugelstoßen und 100-m-Lauf und nahmen nicht am Weitsprung teil.

(4) Kein Teilnehmer trat nur im Weitsprung oder nur im 100-m-Lauf an.

Untersuche, ob aus diesen Angaben für jede der drei Disziplinen die Anzahl derjenigen in diese Klasse gehenden Schüler eindeutig ermittelt werden kann, die an der betreffenden Disziplin teilnahmen! Ist das der Fall, dann gib diese drei Anzahlen an!

290732 Das Bild zeigt ein regelmäßiges Neuneck *ABCDEFGHI* und einige seiner Diagonalen.



a) Ermittle die Anzahl aller Diagonalen dieses Neunecks!

b) Ermittle die Größe eines Innenwinkels dieses Neunecks!

c) Es sei *K* der Schnittpunkt der Diagonalen *AC* und *BE*.

Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle CKE$!

Hinweis: Ein Neuneck heißt genau dann regelmäßig, wenn alle seine Seiten dieselbe Länge und alle seine Innenwinkel dieselbe Größe haben.

290733 Von einem Dreieck *ABC* wird gefordert, daß $a = 5,0$ cm, $s_a = 6,0$ cm und $h_c = 4,3$ cm gilt, wobei a die Länge der Seite *BC*, s_a die Länge der Seitenhalbierenden der Seite *BC* und h_c die Länge der auf *AB* senkrechten Höhe des Dreiecks ist.

a) Beweise: Wenn ein Dreieck diese Forderungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Längen 5,0 cm, 6,0 cm und 4,3 cm konstruiert werden!

b) Beschreibe eine solche Konstruktion und fertige eine Konstruktionszeichnung an!

c) Beweise: Wenn ein Dreieck nach der Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Forderungen!

d) Stelle fest, ob durch die Forderungen ein Dreieck *ABC* bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

290734 Ermittle alle diejenigen Paare $(z_1; z_2)$ aus zweistelligen natürlichen Zahlen z_1 und z_2, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen!

(1) Es gilt $z_1 > z_2$.

(2) Die Differenz der Zahlen z_1 und z_2 beträgt 59.

(3) Die Differenz, die entsteht, wenn man von der Quersumme der Zahl z_1 die Quersumme der Zahl z_2 subtrahiert, beträgt 14.

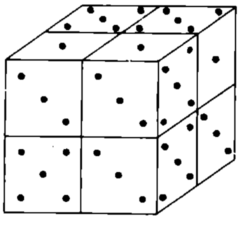
290735 Wir betrachten das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis einschließlich 1000.

Ermittle die Anzahl der Nullen, mit denen dieses Produkt endet!

290736 Ein Würfel wurde aus acht gleichgroßen Spielwürfeln zusammengesetzt. Jeder Spielwürfel hat auf seinen sechs Seitenflächen die Augenzahlen 1 bis 6, jede auf genau einer Seitenfläche; dabei haben die drei Seitenflächen mit den geraden Augenzahlen 2, 4, 6 eine Ecke gemeinsam, und dasselbe gilt für die drei Seitenflächen mit den ungeraden Seitenzahlen 1, 3, 5. Von dem zusammengesetzten Würfel sind drei Seitenflächen sichtbar, wie das Bild zeigt. Alle sichtbaren Augenzahlen sind ungerade, ihre Summe beträgt 40.

a) Zeichne von einem Würfel, der ebenso aus acht Spielwürfeln zusammengesetzt ist, bei dem aber andere sichtbare Augenzahlen vorkommen, ein Schrägbild (Kantenlänge eines Spielwürfels 2 cm, $\alpha = 45°$, $q = 0,5$)! Trage sichtbare Augenzahlen so ein, daß alle sichtbaren Augenzahlen ungerade sind und ihre Summe 30 beträgt!

b) Beweise, daß in jeder Eintragung, die die in a) gestellten Forderungen erfüllt, mindestens vier der sichtbaren Augenzahlen 1 lauten müssen!



Olympiadeklasse 8

290831 Eine Aufgabe des bedeutenden englischen Naturwissenschaftlers Isaak Newton (1643 bis 1727) lautet:

Ein Kaufmann besaß eine gewisse Geldsumme. Im ersten Jahr verbrauchte er davon 100 Pfund; zum Rest gewann er durch seine Arbeit ein Drittel desselben dazu. Im zweiten Jahr verbrauchte er wiederum 100 Pfund und gewann zum Rest ein Drittel dazu. Im dritten Jahr verbrauchte er erneut 100 Pfund und gewann zum Rest ein Drittel dazu. Dabei stellte er fest, daß sich sein Geld gegenüber dem Anfang des ersten Jahres verdoppelt hatte.

Ermittle aus diesen Angaben, welche Geldsumme anfangs des ersten Jahres vorhanden gewesen sein muß!

Weise nach, daß bei dieser Anfangssumme die Angaben des Aufgabentextes zutreffen!

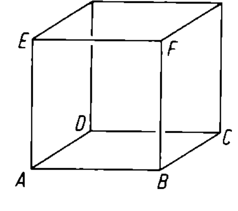
290832 Einem Kreisausschnitt soll ein Quadrat so einbeschrieben werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Die – aus zwei Strecken (Radien) und einem Kreisbogen bestehende – Randlinie des Kreisausschnittes enthält die vier Eckpunkte des Quadrates.

(2) Der Kreisbogen wird durch zwei dieser Eckpunkte in drei gleichlange Teilbögen zerlegt.

Untersuche, ob durch diese Bedingungen die Größe α des Zentriwinkels des Kreisausschnittes eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, so gib diese Größe an!

290833 In einem Würfel *ABCDEFGH* (siehe Bild) seien *V, W, X, Y* in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seitenflächen *ABCD, BCGF, EFGH* bzw. *ABFE*.



Beweise, daß unter dieser Voraussetzung die Strecken *VW, WX, XY* und *YV* sämtlich einander gleichlang sind!

290834 Ermittle alle diejenigen Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen a, b und c, die

die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen!

(1) Es gilt $a + b = c^3$.

(2) Es gilt $a + b + c = 130$.

(3) Die Zahl $a - b$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von 19.

290835 Aus einer sechsstelligen natürlichen Zahl n soll eine weitere Zahl errechnet werden, indem eine Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division mit einer höchstens dreistelligen natürlichen Zahl durchgeführt wird, wobei nur die Multiplikation mit 0 und die Division durch 0 nicht zugelassen sind. Auf das Ergebnis soll wieder eine der genannten Rechenoperationen angewandt werden, auf das neue Ergebnis ebenfalls usw.

Erst wenn ein Ergebnis den Wert 0 hat, soll das Bilden weiterer Zahlen nicht mehr fortgesetzt werden.

a) Gibt es sechsstellige Zahlen n, von denen ausgehend das Ergebnis 0 bereits mit zweimaligem Ausführen derartiger Rechenoperationen erreichbar ist?

b) Beweise, daß von jeder sechsstelligen Zahl n aus, die nicht größer als 999 000 ist, das Ergebnis 0 mit höchstens dreimaligem Ausführen derartiger Rechenoperationen erreichbar ist!

290836 Von einem Viereck $ABCD$ wird gefordert, daß es ein Trapez mit

$AB \| DC$, $e = 7$ cm, $f = 6$ cm, $\alpha = 48°$,

$\varepsilon = 114°$ ist, wobei e die Länge der Diagonale AC, f die Länge der Diagonale BD, α die Größe des Winkels $\sphericalangle DAB$ und, wenn S den Schnittpunkt von AC mit BD bezeichnet, ε die Größe des Winkels $\sphericalangle ASB$ ist.

a) Beweise: Wenn ein Viereck diese Forderungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Längen und Winkelgrößen konstruiert werden!

b) Beschreibe eine solche Konstruktion und fertige eine Konstruktionszeichnung an!

c) Beweise: Wenn ein Viereck nach der Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Forderungen!

d) Beweise, daß durch die Forderungen ein Viereck $ABCD$ auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

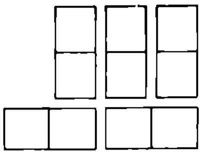
Olympiadeklasse 9

290931 Beschreiben und begründen Sie für die folgende Aufgabe eine Konstruktion, die ausführbar ist, indem außer gezeichnet vorgegebenen Strecken nur Lineal und Zirkel (zum Konstruieren von Geraden und Kreisen, nicht zur Nutzung von Millimeter- oder Grad-Skalen) verwendet werden!

Gezeichnet vorgegeben seien zwei Strecken AB und AC, die einen Winkel $\sphericalangle BAC$ der Größe 7° bilden. Zu konstruieren ist eine Zerlegung dieses Winkels in 7 gleich große Teile.

Das zeichnerische Ausführen der beschriebenen Konstruktion wird nicht verlangt.

290932 Aus einem Satz von Dominosteinen soll eine Zusammenstellung von möglichst vielen nebeneinanderliegenden Figuren gebildet werden. Jede dieser Figuren soll die im Bild gezeigte Gestalt haben, ferner soll sie die folgende Bedingung erfüllen: Liest man in jeder Zeile die drei bzw. vier Zeichen als Ziffemdarstellung einer Zahl, so gibt die Figur eine richtig gerechnete Additionsaufgabe an (erste Zeile + zweite Zeile = dritte Zeile). Wie üblich ist die Null als Anfangsziffer nicht zugelassen.



Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von nebeneinanderliegenden Figuren der geforderten Art, die sich aus einem Satz Dominosteine bilden lassen!

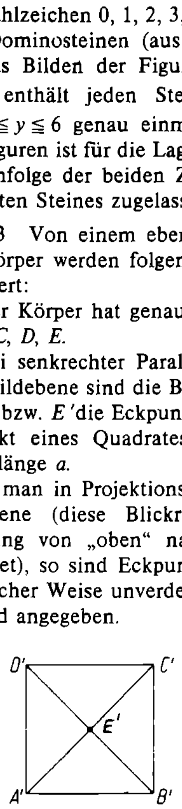
Hinweis: Jeder Dominostein enthält auf jeder seiner beiden Teilflächen genau eines der Zahlzeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Der Satz von Dominosteinen (aus dem die Steine für das Bilden der Figuren auszuwählen sind) enthält jeden Stein $\boxed{x}\boxed{y}$ mit $0 \leqq x \leqq y \leqq 6$ genau einmal; beim Bilden der Figuren ist für die Lage der Steine jede Reihenfolge der beiden Zahlen eines verwendeten Steines zugelassen.

290933 Von einem ebenflächig begrenzten Körper werden folgende Bedingungen gefordert:

(1) Der Körper hat genau fünf Eckpunkte A, B, C, D, E.

(2) Bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Bildebene sind die Bildpunkte A', B', C', D' bzw. E'die Eckpunkte bzw. der Mittelpunkt eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a.

Blickt man in Projektionsrichtung auf die Bildebene (diese Blickrichtung sei als Richtung von „oben“ nach „unten“ bezeichnet), so sind Eckpunkte und Kanten in gleicher Weise unverdeckt sichtbar, wie im Bild angegeben.



(3) Die durch A, B, C gehende Ebene ε ist parallel zu der in (2) genannten Bildebene.

(4) Der Punkt D liegt „oberhalb“ der Ebene ε im Abstand $\frac{a}{2}$ von ihr.

(5) Der Punkt E liegt „oberhalb“ der Ebene ε im Abstand a von ihr.

(6) Der Körper hat das Volumen $\frac{1}{4} \cdot a^3$.

Zeigen Sie, daß der Körper durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt ist, und zeichnen Sie diesen Körper in schräger Parallelprojektion!

290934 Beweisen Sie, daß es zu je zwei beliebigen rationalen Zahlen a, b mit $a < b$ eine rationale Zahl x und eine irrationale Zahl y gibt, für die $a < x < y < b$ gilt!

290935 a) Beweisen Sie, daß es zu jeder Funktion f, die für alle reellen Zahlen x die Gleichung

$$f(x-1) = (x^2 - 1) \cdot f(x+1) \qquad (*)$$

erfüllt, unendlich viele verschiedene reelle Zahlen x mit $f(x) = 0$ gibt!

b) Beweisen Sie, daß es eine Funktion f gibt, die für alle reellen Zahlen x die Gleichung (*) erfüllt, bei der aber nicht jede reelle Zahl x den Funktionswert $f(x) = 0$ hat!

290936 Es seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die einander von außen berühren. Für ihre Radien r_1 bzw. r_2 gelte $r_1 > r_2$. Eine Gerade, die k_1 und k_2 in zwei voneinander verschiedenen Punkten berührt, seit t. Die von t verschiedene und zu t parallele Tangente an k_1 sei u.

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von r_1 und r_2 den Radius r_3 desjenigen u berührenden Kreises k_3, der k_1 und k_2 von außen berührt!

Olympiadeklasse 10

291031 Man stelle fest, ob die Zahl

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{1989 + \sqrt{1990}}}}}$$

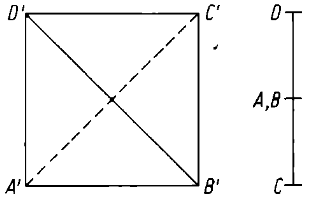
rational oder irrational ist.

291032 In einem Lande gebe es eine Anzahl $n \geqq 3$ von Städten $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Für je zwei Städte S_i, S_j mit $i < j$ gebe es genau eine von S_i nach S_j führende Einbahnstraße und genau eine von S_j nach S_i führende Einbahnstraße; dies seien alle Straßen des Landes. Auf einer Landkarte seien diese Straßen unter Verwendung von genau $n - 1$ Farben so gefärbt, daß für jede Stadt gilt: Die $n - 1$ von dieser Stadt ausgehenden Straßen sind mit den $n - 1$ Farben gefärbt, jede mit genau einer Farbe.

Untersuchen Sie für jedes $n \geqq 3$, ob man eine Färbung der Straßen unter Einhaltung dieser Bedingungen so wählen kann, daß für eine einheitlich gewählte Reihenfolge $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ der Farben die folgende Aussage (*) zutrifft!

(*) Für jede Stadt S_i $(i = 1, \ldots, n)$ gilt: Startet man in S_i und fährt der Reihe nach auf den Straßen der Farben $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$, jeweils auf einer dieser Straßen bis zur nächsten Stadt, so endet diese Fahrt stets in der Stadt S_1.

291033 Das Bild stellt in senkrechter Eintafelprojektion einen ebenflächig begrenzten Körper dar, der genau vier Eckpunkte A, B, C, D hat. Ihre Bildpunkte A',



B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a. Im beigefügten Höhenmaßstab hat D die Höhendiffe-

renz a zu C, und A, B haben die Höhendifferenz $\frac{a}{2}$ zu C.
Ermitteln Sie aus diesen Angaben das Volumen des Körpers!
291034 Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung (*) erfüllen

$$\frac{\sqrt{x+5}}{x+1} > 1\,! \qquad (*)$$

291035 Man begründe und beschreibe eine Konstruktion, durch die zu beliebig vorgegebenen Dreiecken ABC alle diejenigen Geraden g erhalten werden können, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen:
(1) Die Gerade g geht durch den Mittelpunkt M der Seite AC.
(2) Die Gerade g schneidet die Verlängerung der Seite BA über A hinaus in einem Punkt P und folglich die Seite BC in einem Punkt Q.
(3) Der Flächeninhalt des Dreiecks AMP ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks CMQ.
Man zeichne ein beliebiges, nicht gleichschenkliges und nicht rechtwinkliges Dreieck ABC und führe dann die beschriebene Konstruktion aus.

291036 a) Man beweise, daß es zu jeder natürlichen Zahl k eine natürliche Zahl m sowie eine Möglichkeit gibt, m Vorzeichen (jeweils + oder −) derart zu wählen, daß mit den gewählten Vorzeichen

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \ldots \pm m^2 = k \qquad (*)$$

gilt.
b) Man beweise, daß es zu jeder natürlichen Zahl k sogar unendlich viele verschiedene natürliche Zahlen m und zugehörige Vorzeichenwahlen gibt, mit denen (*) gilt.

Olympiadeklassen 11/12

291231 Man beweise: Wenn n eine natürliche Zahl größer als 2 ist und wenn $a_1, \ldots, a_n$ Zahlen sind, die $a_1^2 = \ldots = a_n^2 = 1$ und
$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$
erfüllen, dann ist stets n durch 4 teilbar.

291232 Ist $ABCD$ ein Tetraeder, so bezeichne R den Radius seiner Umkugel (d. h. derjenigen Kugel, auf der die Punkte A, B, C, D liegen) und r den Radius seiner Inkugel (d. h. derjenigen Kugel, deren Mittelpunkt im Innern des Tetraeders liegt und die jede der Flächen ABC, ABD, ACD, BCD berührt).
Man beweise, daß es unter allen Tetraedern $ABCD$ mit $AB \perp AC$, $AC \perp AD$, $AD \perp AB$ auch solche gibt, für die das Verhältnis $R : r$ einen kleinsten Wert annimmt; man ermittle diesen Wert.

Von den nachstehenden Aufgaben 291233A und 291233B ist genau eine auszuwählen und zu lösen:

291233 A Auf der Randlinie eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit der Seitenlänge 1 m bewegen sich drei Punkte P_1, P_2, P_3, und zwar P_1 mit der Geschwindigkeit $1\,\frac{m}{s}$, P_2 mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2}\,\frac{m}{s}$, P_3 mit der Geschwindigkeit $\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$. Zu Beginn (Zeitpunkt $t = 0$) befindet sich P_1 in A, P_2 in B und P_3 in C. Die Bewegungsrichtung ist bei allen drei Punkten einheitlich stets im Umlaufssinn von A nach B, von B nach C, von C nach A.
Man untersuche, ob es einen Zeitpunkt $t > 0$ gibt, zu dem P_1, P_2, P_3 wieder die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind (wobei auch der Fall $P_1 = P_2 = P_3$ als Sonderfall eines gleichseitigen Dreiecks aufgefaßt werde).

291233 B Man untersuche für jede gegebene natürliche Zahl $n \geqq 2$, ob es unter allen denjenigen n-Tupeln $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reeller Zahlen, für die

$$x_i \geqq \frac{1}{n^2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und $\quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$
gilt, eines gibt, für das der Term

$$s = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}$$

a) einen kleinsten Wert,
b) einen größten Wert
annimmt. Ist das jeweils der Fall, so ermittle man in Abhängigkeit von n diesen kleinsten bzw. größten Wert.

291234 Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen a, mit denen die durch

$$x_1 = \sqrt{a},$$
$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

definierte Folge (x_n) konvergent ist; man ermittle zu jeder solchen Zahl a den Grenzwert der Folge (x_n).

291235 Man beweise: In jeder Menge aus fünf Punkten, die in einer gemeinsamen Ebene liegen und von denen keine drei in einer gemeinsamen Geraden liegen, gibt es vier Punkte, die die Ecken einer konvexen Vierecksfläche sind.
Hinweis: Eine Vierecksfläche heißt genau dann konvex, wenn mit jedem beliebigen Paar von Punkten dieser Fläche jeder Punkt der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte zu der Fläche gehört.

291236 Man beweise: Schreibt man alle natürlichen Zahlen n mit $111 \leqq n \leqq 999$ in beliebiger Reihenfolge hintereinander auf, so erhält man stets die Ziffernfolge einer durch 37 teilbaren Zahl.

Solltet ihr Probleme bei der Lösung der Aufgaben haben, wendet euch bitte über euren Mathematiklehrer an das Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit.

Achtung!
Wir bitten alle Statistikfans um Verständnis, wenn wir aus Platzgründen den 2. Teil von „Kann man den Zufall berechnen?“ erst im nächsten Heft bringen. *Alphons*

Lösungen

Lösungen zu: alpha-Wettbewerb
Heft 1/90

Ma 5 ■ 3077 Wir rechnen $22 - 4 = 18$, $18 : 2 = 9$, $9 + 4 = 13$. Das Geld für die leeren Flaschen beträgt
$13 \cdot 0{,}30\,\text{M} + 9 \cdot 0{,}20\,\text{M} = 5{,}70\,\text{M}$;
deshalb verfügt Martin über
$5{,}00\,\text{M} + 5{,}70\,\text{M} = 10{,}70\,\text{M}$.
Er behält somit $10{,}70\,\text{M} - 4{,}80\,\text{M}$
$- 1{,}12\,\text{M} - 0{,}62\,\text{M} - 1{,}09\,\text{M} = 3{,}07\,\text{M}$
übrig.

Ma 5 ■ 3078 Wegen $59 = 7 \cdot 8 + 3$ schrieb Beate mindestens acht und höchstens neun Briefe.

Ma 5 ■ 3079 Aus (1) folgt: Schulz hat nicht den Rufnamen Maik und auch nicht Sven. Also hat Schulz den Rufnamen Udo. Aus (2) folgt: Schmitt hat nicht den Rufnamen Sven, also hat Schmitt den Rufnamen Maik. Deshalb hat Meier den Rufnamen Sven. Wir rechnen $35 - 2 = 33$ und $33 : 3 = 11$. Sven Meier ist 11 Jahre, Maik Schmitt und Udo Schulz sind jeweils 12 Jahre alt.

Ma 5 ■ 3080 Wegen $25 \cdot 25 = 625$ ist jede Gartenseite 25 m lang. Der Zaun hat deshalb einen Flächeninhalt von
$4 \cdot 25 \cdot 1\,\text{m}^2 = 100\,\text{m}^2$. Wegen $100 : 2 = 50$ werden zum Anstreichen des Zaunes 50 Dosen Farbe benötigt.

Ma 5 ■ 3081 Wegen (2) haben Frank und Annett einen Altersunterschied von 7 Jahren. Als Frank doppelt so alt war wie Annett, müssen Annett 7 Jahre und Frank 14 Jahre alt gewesen sein.
Wegen (3) ist Annett $7 + 5 = 12$ Jahre, Frank $14 + 5 = 19$ Jahre alt. Wegen (4) ist die Großmutter $110 - 19 - 12 = 79$ Jahre alt. Wegen (1) ist der Vater $79 - 34 = 45$ Jahre, seine Frau $45 - 3 = 42$ Jahre alt.

Ma 5 ■ 3082 Wir rechnen $80 - 20 = 60$, $60 : 2 = 30$; das Speiseeis kostet ohne Früchte 30 Pf.

Ma 5 ■ 3083 Wir stellen eine Tabelle auf: Lebensalter (in Jahren) von Jirka und dem Vater

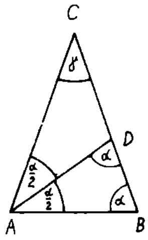
J	6	7	8	9	10	11
V	28	29	30	31	32	33

Jirka ist jetzt 11 Jahre alt.

Ma 6 ■ 3084

$$\frac{1\frac{1}{2}}{3} = \frac{3}{2} : 3 = \frac{1}{2}; \ \frac{1}{2} \cdot 218 = 109.$$

Ma 6 ■ 3085 Wegen $\overline{CA} = \overline{CB}$ haben die beiden Basiswinkel $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle CBA$ die Größe α. Wegen $\overline{AB} = \overline{AD}$ haben die beiden Winkel $\sphericalangle ABD$ und $\sphericalangle$ADB die Größe α.
Nach dem Außenwinkelsatz gilt deshalb
$\gamma + \frac{\alpha}{2} = \alpha$, also $\gamma = \frac{\alpha}{2}$. Daraus folgt weiter $\frac{5}{2} \cdot \alpha = 180°$, $\alpha = 72°$, $\gamma = 36°$.



Ma 6 ■ 3086 Das k. g. V. der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 ist 60. Den Rest 1 lassen bei Division durch jede dieser Zahlen 61, 121, 181, 241, 301, 361, ... Davon ist 301 die kleinste durch 7 teilbare Zahl.

Ma 6 ■ 3087 Wegen $a + b > c$, also $3 + 1 = 4 > c$, kann nur $c = 3$ gelten; denn für $b = 2$, also $1 + 2 = 3$ existiert kein Dreieck.
Der Umfang des Dreiecks beträgt 7 cm.

Ma 6 ■ 3088 Die Anzahl der Schüler dieser Klasse muß durch 9, 3 und 6, also durch 18 teilbar sein. Wegen $20 < 18 \cdot n < 40$ gilt $n = 2$. Zu dieser Klasse gehören 36 Schüler. Die Note 1 erhielten 4 Schüler, die Note 2 erhielten 12 Schüler, die Note 4 erhielten 6 Schüler. Deshalb erhielten $36 - 4 - 12 - 6 = 14$ Schüler die Note 3.

Ma 6 ■ 3089
Zum Beispiel: 12 301 + 12 301 = 24 602.

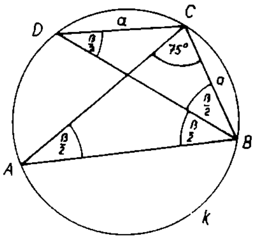
Na/Te 6 ■ 469 Da sich im Gefäß stets das gleiche Volumen der benutzten Stoffe befindet, vergrößert sich die Masse und damit auch die Gewichtskraft des Gefäßes auf das 13,6fache. Demzufolge ist auch die Ausdehnung 13,6mal größer als bei Wasser. Die Längenänderung beträgt, wenn sich im Gefäß Quecksilber befindet, 13,6 cm.

Ma 7 ■ 3090 Angenommen, zu dieser Klassenstufe gehören x Schüler; dann gilt $\frac{3}{4}x + \frac{1}{9}x + 10 = x$, $x - \frac{31}{36}x = 10$, $\frac{5}{36}x = 10$, $x = 72$. An der AG „Malen und Zeichnen" nehmen $\frac{72 \cdot 3}{4} = 54$ Schüler, an der AG „Schach" $72 : 9 = 8$ Schüler, an der AG „Bergsteigen" 10 Schüler teil.

Ma 7 ■ 3091 Wegen
$\overline{MA} = \overline{MC} = \overline{MD} = \overline{ME}$ sind die Dreiecke $\triangle ACM$, $\triangle CDM$, $\triangle DEM$, $\triangle EAM$ sämtlich gleichschenklig.
Daraus folgt
$\delta_1 = \gamma_2 = (180° - 40°) : 2 = 70°$,
$\sphericalangle DME$ hat die Größe $180° - 40° = 140°$,
$\delta_2 = \varepsilon_1 = (180° - 140°) : 2 = 20°$,
$\beta = \varepsilon_1 = 20°$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen). Ferner gilt $\sphericalangle AMB$ hat die Größe $90° - 20° = 70°$ (Berührungsradius und Tangente sind senkrecht zueinander), also gilt
$\alpha_2 = \gamma_1 = (180° - 70°) : 2 = 55°$
und somit $\alpha_1 = \varepsilon_2 = 90° - 55° = 35°$.

Ma 7 ■ 3092
Entsprechend der Aufgabenstellung gilt
$2a + 1 = 3b + 2 = 4c + 3 = 5d + 4$
$= 6e + 5 = 7f + 6 = 8g + 7 = 9h + 8$
$= 10i + 9$. Durch Addition von 1 und anschließendem Ausklammern erhalten wir daraus
$2(a + 1) = 3(b + 1) = 4(c + 1) = 5(d + 1)$
$= 6(e + 1) = 7(f + 1) = 8(g + 1)$
$= 9(h + 1) = 10(i + 1)$. Das k. g. V. der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ist 2520. Die Zahl 2519 erfüllt die gestellten Bedingungen.

Ma 7 ■ 3093 Nach Voraussetzung hat der Winkel $\sphericalangle CBD$ die Größe $\frac{\beta}{2}$. Wegen $\overline{BC} = \overline{CD}$ hat auch der Winkel $\sphericalangle BDC$ die Größe $\frac{\beta}{2}$. Als Peripheriewinkel über der gleichen Sehne $\overline{BC}$ haben die Winkel $\sphericalangle BDC$ und $\sphericalangle BAC$ beide die Größe $\frac{\beta}{2}$.
Nun gilt $\frac{3}{2} \cdot \beta + 75° = 180°$, also
$\beta = 70°$ und $\alpha = 35°$!



Ma 7 ■ 3094 Die Zahl des Geburtsjahres von Axel sei (in dekadischer Schreibweise) $\overline{19xy}$ mit $0 \leqq x \leqq 9$ und $0 \leqq y \leqq 9$. Sie hat die Quersumme $10 + x + y$. Nun gilt
$(1900 + 10x + y) + (10 + x + y) = 1989$,
$11x + 2y = 79$. Nur für $x = 7$ und $y = 1$ wird diese Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen erfüllt. Axel wurde im Jahre 1971 geboren, und es gilt $1971 + (1 + 9 + 7 + 1) = 1989$.

Na/Te 7 ■ 470 Volumen des Würfels: $V = a^3 = 125\ \text{cm}^3$; Masse des Würfels: $m = \varrho \cdot V = 975\ \text{g}$; Gewichtskraft des Würfels: $F_G = 9{,}75\ \text{N}$; Längenänderung bei 9,75 N: $s = 9{,}75 \cdot 5\ \text{mm} = 48{,}7\ \text{mm}$. Die Feder wird also um rund 5 cm gedehnt.

Na/Te 7 ■ 471 Aus der Angabe der Dichte kann man entnehmen:
$1\ \text{m}^3 = 1000\ \text{l}$ haben eine Masse von 0,9 t. Demnach nehmen 10 t Öl ein Volumen von $\frac{10}{0{,}9}\ \text{m}^3$ ein,
$V = 11{,}1\ \text{m}^3 = 11 \cdot 10^3\ \text{l}$; da die Pumpe in 1 s 50 l fördert, benötigt sie für das Volumen V die Zeit
$t = \frac{11\,000}{50}\ \text{s}$, $t = 220\ \text{s}$. Der Wagen ist in 3 min und 40 s gefüllt.

Ma 8 ■ 3095 Es sei $z = \overline{abc}$ eine dreistellige natürliche Zahl in dezimaler Schreibweise; dann gilt
$a \cdot b \cdot c = 5 \cdot (a + b + c)$.
Wegen $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ muß einer der drei Faktoren a, b, c gleich 5 sein. Aus $c = 5$ folgt
$a \cdot b \cdot 5 = 5 \cdot (a + b + 5)$,
$a \cdot b = a + b + 5$, $a \cdot b - b = a + 5$,
$b \cdot (a - 1) = a + 5$, $b = \frac{a + 5}{a - 1}$,
$b = 1 + \frac{6}{a - 1}$. Diese Gleichung hat genau vier positive ganzzahlige Lösungen, nämlich

a	2	3	4	7
b	7	4	3	2

Wegen der Vertauschbarkeit der Summanden bzw. der Faktoren existieren genau 12 solcher Zahlen; sie lauten
257, 275, 345, 354, 435, 453, 527, 534, 543, 572, 725, 752.

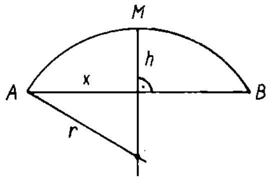
Ma 8 ■ 3096 Wir stellen folgende Tabelle auf:

n	Letzte Ziffer von 8^n		Letzte Ziffer von 2^n		Letzte Ziffer von		$10/8^n+2^n$ oder $10/8^n-2^n$?
					8^n+2^n	8^n-2^n	
0	1		1		2	0	ja
1	8	Periode	2	Periode	0	6	ja
2	4		4		8	0	ja
3	2		8		0	4	ja
4	6		6		2	0	ja
5	8		2		0	6	ja
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮

Da die Endziffern der Potenzen mit den Basen 8 und 2 die gekennzeichnete Periode durchlaufen, treten keine anderen Fälle auf. $8^n + 2^n$ oder $8^n - 2^n$ ist für alle $n \in N$ durch 10 teilbar, w. z. b. w.

Ma 8 ■ 3097 Der Durchmesser CD halbiert die Sehne AB und auch den Winkel $\sphericalangle ACB$ (Symmetrie). Da $\overline{CM} \cong \overline{BM}$ ist (beides sind Radien), ist das Dreieck CMB gleichschenklig. Daraus folgt die Kongruenz der Winkel $\sphericalangle MCB$ und $\sphericalangle CBM$. Nach dem Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck
ist dann $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \beta = 180°$, also
$\alpha + \beta = 180°$, w. z. b. w.

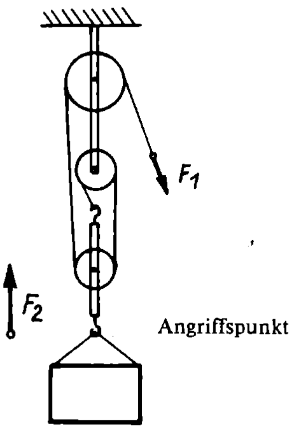
Ma 8 ■ 3098 Nach dem Satz des Pythagoras gilt $x^2 = r^2 - (r - h)^2$. Wir rechnen nur mit den Maßzahlen und erhalten:
$x^2 = 8{,}5^2 - (8{,}5 - 3)^2$;
$x^2 = 8{,}5^2 - 5{,}5^2$; $x^2 = 42$; $x \approx 6{,}18$.
Die Spannweite der Brücke beträgt etwa 13 m.



Ma 8 ■ 3099 Der Durchmesser des Kreises k ist am kürzesten, wenn er gleich der Höhe $\overline{CP}$ auf $\overline{AB}$ ist. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle BCP$ *und* $\triangle ABC$ gilt $d:6 = 8:10$, $d = 4{,}8$. Da Winkel $\measuredangle ACB$ 90° beträgt, ist QR nach dem Satz des Thales Durchmesser des Kreises k. Deshalb hat die Sehne QR die Länge 4,8 cm.

Na/Te 8 ■ 472 Die Kraft wird durch den Schweredruck hervorgerufen. Die Kraft auf die Bodenfläche A bei einer Eintauchtiefe s ist gleich der Gewichtskraft F_G des von einem Quader mit der Grundfläche A und der Höhe s verdrängten Wassers. Der Druck p ergibt sich als Quotient aus Gewichtskraft F_G und Fläche A.
Masse des Wassers: $m = A \cdot s \cdot \varrho$,
$m = 320\,\text{kg}$, $F_G = 3200\,\text{N}$,
Druck $p = \frac{F_G}{A}$; $p = 2000\,\text{Pa}$.
Die Kraft auf den Boden des Kajaks beträgt 3200 N, der Druck 2000 Pa.

Na/Te 8 ■ 473 Der Flaschenzug muß so konstruiert sein, daß drei tragende Seilstücke vorhanden sind:



Ma 9 ■ 3100

$$k = \frac{k^2 + k + n - [(k-1)^2 + (k-1) + n]}{2};$$

$$k = \frac{k^2 + k + n - k^2 + 2k - 1 - k + 1 - n}{2};$$

$$k = \frac{2k}{2};\ k = k. \text{ w. z. b. w.}$$

Ma 9 ■ 3101 Aus $u = 2s = a + b + c$ folgt durch äquivalente Umformungen schrittweise $s = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$,

$$\frac{\varrho \cdot s}{\varrho} = \frac{\frac{1}{2}a \cdot h_a}{h_a} + \frac{\frac{1}{2}b \cdot h_b}{h_b} + \frac{\frac{1}{2}c \cdot h_c}{h_c},$$

$$\frac{A}{\varrho} = \frac{A}{h_a} + \frac{A}{h_b} + \frac{A}{h_c},\ \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

Ma 9 ■ 3102 Wir beweisen zunächst, daß die Dreiecke AEF und FBC ähnlich sind:
$\measuredangle AFE \cong \measuredangle CFB$ (Scheitelwinkel);
$\measuredangle AEF \cong \measuredangle FBC$ (Im Sehnenviereck $ECDA$ gilt $\measuredangle AEC + \measuredangle ADC = 180°$, im Sehnenviereck $ABCD$ gilt $\measuredangle FBC + \measuredangle ADC = 180°$, es folgt daraus $\measuredangle AEF \cong \measuredangle FBC$.) Damit gilt nach dem Hauptähnlichkeitssatz
$\triangle AEF \sim \triangle FBC$. Daraus folgt

$$\overline{AE} : \overline{AF} = \overline{BC} : \overline{FC} \text{ bzw. } \overline{BC} = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{FC}}{\overline{AF}}.$$

$\overline{BC} = 5\,\text{cm}$. Die Strecke $\overline{BC}$ hat eine Länge von 5 cm.

Ma 9 ■ 3103 Angenommen, es gäbe solche Zahlen a, b, c, so müßten diese verschieden von Null sein, und äquivalente Umformungen ergäben dann
$\frac{2}{a} \geqq \frac{b+c}{bc}$, $2bc \geqq a(b+c)$. Wegen
$a = b + c$ folgt $2bc \geqq (b+c)^2$ und schließlich $0 \geqq b^2 + c^2$, was für keine reelle Zahl, die ungleich Null ist, erfüllt werden kann. Somit ist die Annahme falsch und die Behauptung damit bewiesen.

Ma 9 ■ 3104 Durch schrittweises Umformen erhalten wir

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{(\sqrt{2} + \sqrt{1})(\sqrt{2} - \sqrt{1})} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} + \ldots + \frac{\sqrt{100} - \sqrt{99}}{(\sqrt{100} + \sqrt{99})(\sqrt{100} - \sqrt{99})}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{2 - 1} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} + \ldots + \frac{\sqrt{100} - \sqrt{99}}{100 - 99}$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{100} - \sqrt{99}$$

$$= -\sqrt{1} + \sqrt{100} = -1 + 10 = 9.$$

Na/Te ■ 474 Aus $s = \frac{a}{2} \cdot t^2$ und $a = \frac{v}{t}$ (da gleichmäßig beschleunigt) erhält man $s = \frac{v \cdot t}{2}$, $s = 230\,\text{m}$.

Na/Te 9 ■ 475 Es wird zunächst die Kraft auf das Elektron berechnet. Aus dem Tafelwerk entnimmt man den Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke E, der Kraft F auf eine Ladung im elektrischen Feld: $E = \frac{F}{Q}$. Daraus kann die Kraft berechnet werden. Setzt man das Newtonsche Grundgesetz ein, so erhält man für die Beschleunigung
$a = \frac{Q \cdot E}{m}$, $a = 3{,}15 \cdot 10^{14}\,\frac{m}{s^2}$.

Ma 10/12 ■ 3105 Aus der Skizze geht hervor: $A_{ABC} = A_{ADC} + A_{DBC}$,

$$\frac{ab}{2} = \frac{1}{2}b \cdot w_\gamma \cdot \sin 45° + \frac{1}{2}a \cdot w_\gamma \cdot \sin 45°,$$

$$= \frac{1}{2} \cdot w_\gamma \cdot \sin 45° \cdot (a + b)$$

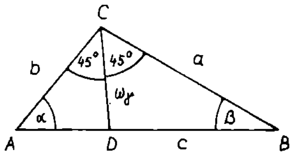
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot w_\gamma \cdot (a + b),$$

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot w_\gamma,\ \frac{a+b}{ab} = \frac{2}{w_\gamma\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{\sqrt{2}}{w_\gamma} \,\Big|\, \cdot c,\ \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = \frac{c\sqrt{2}}{w_\gamma} \text{ und}$$

wegen $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\sin\beta = \frac{b}{c}$ folgt

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} = \frac{c \cdot \sqrt{2}}{w\gamma}. \text{ w. z. b. w.}$$



Ma 10/12 ■ 3106 Nach Voraussetzung, daß $7/100a + b$, muß es eine ganze Zahl n geben, so daß gilt $7 \cdot n = 100a + b$. Wir multiplizieren diese Gleichung mit 4 und erhalten $4 \cdot 7 \cdot n = 400a + 4b$. Weitere äquivalente Umformungen ergeben
$4 \cdot 7 \cdot n - 399a = a + 4b$,
$4 \cdot 7 \cdot n - 7 \cdot 57a = a + 4b$,
$7(4n - 57a) = a + 4b$.
Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar, daß $7/a + 4b$ ist, denn es gibt eine ganze Zahl (es ist $4n - 57a$), die, mit 7 multipliziert, $a + 4b$ ergibt, w. z. b. w.

Ma 10/12 ■ 3107 Die Längen der Parallelogrammseiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BE}$ bzw. $\overline{BG}$ seien a, b, c bzw. d, der Winkel $\measuredangle ABC$ habe die Größe φ; dann gilt
$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot c \cdot d \cdot \sin\varphi$,
$a \cdot b = c \cdot d$, $a : c = d : b$. Folglich sind die Dreiecke $\triangle AEB$ und $\triangle GCB$ einander ähnlich, und es gilt $AE \parallel CG$.

Ma 10/12 ■ 3108 Der Zeichnung ist folgendes zu entnehmen:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{n+1}{n-1},\ \frac{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{n+1}{n-1},\ \cos\alpha = \frac{n+1}{2 \cdot (n-1)};$$

ferner gilt

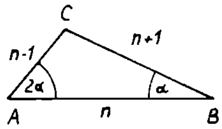
$$\cos\alpha = \frac{n^2 + (n+1)^2 - (n-1)^2}{2 \cdot n \cdot (n+1)}$$

$$= \frac{n \cdot (n+4)}{2n \cdot (n+1)} = \frac{n+4}{2 \cdot (n+1)}.$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir

$$\frac{n+4}{2 \cdot (n+1)} = \frac{n+1}{2 \cdot (n-1)},$$

$(n-1)(n+4) = (n+1)^2$,
$n^2 + 3n - 4 = n^2 + 2n + 1$, $n = 5$.
Für die Seitenlängen des Dreiecks ABC gilt somit $b = n - 1 = 4$,
$c = n = 5$, $a = n + 1 = 6$.



Ma 10/12 ■ 3109 Die Dreiecke AEH und HGD sind ähnlich, denn sie stimmen in den Innenwinkeln überein ($\measuredangle HAE$ und $\measuredangle GDH$ sind rechte Winkel und, da Winkel, deren Schenkel paarweise zueinander senkrecht sind, auch kongruent sind, gilt $\measuredangle DHG \cong \measuredangle AEH$ und $\measuredangle DGH \cong \measuredangle AHE$).
Aus der Ähnlichkeit dieser Dreiecke folgt
$\frac{x}{y} = \frac{t}{s}$. Wegen $t = b - y$ und $s = a - x$ gilt
$\frac{x}{y} = \frac{b-y}{a-x}$.

Na/Te 10/12 ■ 476 Aus der Gleichung für die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Lichtquelle $c = \lambda \cdot f$ folgt, da die Frequenz f unabhängig vom Stoff ist:

$$\frac{c_L}{\lambda_L} = \frac{c_w}{\lambda_w};\ \lambda_w = \frac{c_w \cdot \lambda_L}{c_L};$$

$$\lambda_w = \frac{2{,}25\,000 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1} \cdot 4{,}861 \cdot 10^{-7} m}{2{,}99\,711 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}}.$$

Die Wellenlänge im Wasser beträgt $\lambda_w = 365 \cdot 10^{-9} m$. Aus der Gleichung $c_L = \lambda_L \cdot f$ kann auch die Frequenz berechnet werden:

$$f = \frac{2{,}99\,711 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}}{4{,}861 \cdot 10^{-7} m}.$$

Die Frequenz dieser Linie beträgt $6{,}17 \cdot 10^{14}$ Hz.

Na/Te 10/12 ■ 477 Gesucht ist die Zeit t. Während dieser Zeit legt der 1. Körper den Weg $v_1 \cdot t$, der zweite Körper den Weg $v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$ zurück. Zum Zeitpunkt des Treffens haben beide Körper zusammen 100 m zurückgelegt. Die Zeit t errechnet sich aus
$100m = t \cdot 3m \cdot s^{-1} + t \cdot 7m \cdot s^{-1} + 2 \cdot t^2 m \cdot s^{-2}$ zu $t = 5s$. Die Körper treffen sich nach 5 s.

Lösung zu: Denk dir eine Zahl

Heft 1/90

▲ 1 ▲ Für die gedachte Zahl n gilt
$n = 21r_1 + 15r_2 + 70r_3 - 105 \cdot k$,
wobei k gleich 1 oder 2 oder 3 ist.
1. Beispiel: $r_1 = 4,\ r_2 = 6,\ r_3 = 2$,
$n = 21 \cdot 4 + 15 \cdot 6 + 70 \cdot 2 - 105 \cdot 2$
$= 84 + 90 + 140 - 210 = 104$;
2. Beispiel: $r_1 = 1,\ r_2 = 6,\ r_3 = 0$,
$n = 21 \cdot 1 + 15 \cdot 6 + 70 \cdot 0 - 105 \cdot 1$
$= 21 + 90 + 0 - 105 = 6$;
3. Beispiel: $r_1 = 0,\ r_2 = 0,\ r_3 = 1$,
$n = 21 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 70 \cdot 1 - 105 \cdot 0 = 70$.
Für $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ lautet die gedachte Zahl 105.

▲ 2 ▲ Es sei x die gedachte Zahl; dann gilt $(x - 1) \cdot 2 - 1 + x = y$,
$x = (y + 3) : 3$. Zum Ergebnis sind 3 zu addieren, diese Summe ist danach durch 3 zu dividieren.
Beispiel: Es sei $y = 48$ das Ergebnis, also $x = (48 + 3) : 3 = 17$ die gedachte Zahl.

▲ 3 ▲ Angenommen, jemand habe sich die Zahl n gedacht; dann gilt
$[(n \cdot 2 + 5) \cdot 5 + 3] \cdot 10 + 3 - 150 = x$,
also $n = \frac{x - 133}{100}$. Vom verbleibenden Rest x sind 133 zu subtrahieren, diese Differenz ist durch 100 zu dividieren, um die gedachte Zahl n zu ermitteln.
Beispiel: $n = 21,\ x = 2233$, also
$n = \frac{2233 - 133}{100} = 21$.

▲ 4 ▲ Es sei x die von Monika gedachte Zahl; dann gilt
$[(x + 2) \cdot 3 - 4] \cdot 3 + x + 4 = y$,
$(3x + 2) \cdot 3 + x + 4 = y,\ 10x + 10 = y$,
$10x = y - 10,\ x = (y - 10) : 10$.
Marie-Luise braucht vom Ergebnis y nur 10 zu subtrahieren und danach durch 10 zu dividieren, um die von Monika gedachte Zahl x zu ermitteln.
Beispiel: Monika habe die Zahl 11 gedacht; sie rechnete schrittweise
$11 + 2 = 13,\ 13 \cdot 3 = 39,\ 39 - 4 = 35$,
$35 \cdot 3 = 105,\ 105 + 11 + 4 = 120$,
also $y = 120$ und somit
$x = (120 - 10) : 10 = 11$.

▲ 5 ▲ Angenommen, es wurde die Zahl x gedacht; dann gilt
$\{[(x \cdot 2 + 4) : 2 + 7] \cdot 8 - 12\} : 4 - 11 = y$;
$[(x + 9) \cdot 8 - 12\} : 4 - 11 = y$;
$2x + 4 = y$; $x = (y - 4) : 2$.
Vom Ergebnis y sind 4 zu subtrahieren, danach durch 2 zu dividieren, um die gedachte Zahl x zu ermitteln.
Beispiel: Die gedachte Zahl sei 13, dann ist schrittweise zu rechnen
$13 \cdot 2 = 26,\ 26 + 4 = 30,\ 30 : 2 = 15$,
$15 + 7 = 22,\ 22 \cdot 8 = 176$,
$176 - 12 = 164,\ 164 : 4 = 41$,
$41 - 11 = 30$, also $y = 30$ und somit
$x = (30 - 4) : 2 = 13$.

▲ 6 ▲ Es sei t die Zahl des Tagesdatums und m die Zahl des Geburtsmonats; dann gilt
$(t \cdot 6 + 12) \cdot 5 - 10t + m - 60 = x$,
$20t + m = x$,
$t = (x - m) : 20$ mit $1 \leqq m \leqq 12$.
Beispiel: Es sei $x = 592$ das Ergebnis, dann könnte $m = 2$ oder $m = 12$ sein. Da 590 nicht durch 20 teilbar ist, entfällt $m = 2$. Wir erhalten $m = 12$ und
$t = (592 - 12) : 20 = 580 : 20 = 29$.
Die betreffende Person hat am 29. Dezember Geburtstag.

▲ 7 ▲ Es sei x die Zahl des Lebensalters des Freundes, t die Zahl des Wochentages, an dem er geboren wurde, und y das Rechenergebnis; dann gilt
$(x \cdot 5 + 25) \cdot 2 + t - 50 = y$,
$10x + t = y$ mit $1 \leqq t \leqq 7$.
Beispiel: $y = 135 = 10 \cdot 13 + 5$; der Freund ist 13 Jahre alt und am Freitag (5. Wochentag) geboren.

▲ 8 ▲ Es sei x die Zahl des Tages und y die Nummer des Monats, in dem der Befragte geboren wurde, und S sei die Summe der beiden Produkte; dann gilt
$12x + 31y = S$, also $x = (S - 31y) : 12$,
wobei $1 \leqq y \leqq 12$ gilt.
Beispiel: Der Geburtstag sei am 17. Juni (17. 6.); daraus folgt
$S = 12 \cdot 17 + 31 \cdot 6 = 390$, also
$x = (390 - 31y) : 12$. Nur für $y = 6$ und somit $x = 17$ erhalten wir eine ganzzahlige Lösung.

▲ 9 ▲ Es sei x das Tagesdatum des Geburtstages, y die Zahl für den Geburtsmonat, z die Zahl, die aus den beiden letzten Grundziffern des Geburtsjahres gebildet wird; dann gilt
$\{[(x \cdot 20 + 3) \cdot 5 + y] \cdot 20 + 3\} \cdot 5 + z$
$= (2000x + 303 + 20y) \cdot 5 + z$
$= 10\,000x + 100y + z + 1515$.
Man braucht nur von der angesagten Zahl die Zahl 1515 zu subtrahieren und erhält die gewünschten Zahlen in der richtigen Reihenfolge.
Beispiel: Ergebnis der Rechnung sei die Zahl 212 286. Es ist zu rechnen $212\,286 - 1515 = 210\,771$. Der Geburtstag ist der 21. Juli 1971 (21. 07. 71).

Lösungen zu: Spezialistenlager Mathematik im Blick

Heft 1/90

▲ 1 ▲ Angenommen, Andreas ist $3x$ Jahre und Stefanie y Jahre alt; dann ist der Vater $3 \cdot (3x + y) = (9x + 3y)$ Jahre,
die Mutter $(9x + 3y - 4)$ Jahre alt, und es gilt
$3x + y + (9x + 3y) + (9x + 3y - 4) = 66$,
$21x + 7y = 70,\ 3x + y = 10,\ y = 10 - 3x$.
Nur für $x = 1$, also $y = 7$ ist
$y > 3x (7 > 3)$. Der Vater ist 30 Jahre, die Mutter 26 Jahre, Stefanie 7 Jahre, Andreas 3 Jahre alt.

▲ 2 ▲ Angenommen, Angelika ist x Jahre alt, dann ist Steffen $(x + 8)$ Jahre, die Mutter $(x + 30)$ Jahre, der Vater $(x + 32)$ Jahre alt. Alle zusammen sind $(4x + 70)$ Jahre alt, und es gilt
$4x + 70 = 3 \cdot (x + 30)$,
$4x + 70 = 3x + 90,\ x = 20$.
Angelika ist 20 Jahre, Steffen 28 Jahre, die Mutter 50 Jahre, der Vater 52 Jahre alt.

▲ 3 ▲ Angenommen, Susi ist x Jahre alt, dann ist Ralf $(x + 3)$ Jahre, der Vater $4x$ Jahre, die Mutter $(x + 33)$ Jahre, die Großmutter $(x + 63)$ Jahre alt. Zusammen sind sie $(8x + 99)$ Jahre alt, und es gilt
$8x + 99 = 195,\ 8x = 96,\ x = 12$.
Susi ist 12 Jahre alt, Ralf 15 Jahre, die Mutter 45 Jahre, der Vater 48 Jahre, die Großmutter 75 Jahre alt.

▲ 4 ▲ $5342 + 5342 = 10\,684$; $5463 + 5463$
$= 10\,926$; $5384 + 5384 = 10\,768$;
$6726 + 6726 = 13\,452$; $5347 + 5347$
$= 10\,694$; $6926 + 6926 = 13\,852$;
$6547 + 6547 = 13\,094$; $7268 + 7268$
$= 14\,536$; $5468 + 5468 = 10\,936$.

Lösungen zu: Läßt sich der Zufall berechnen?

Heft 2/90

▲ 1 ▲ Die 28 Steine des Dominospieles werden durch die geordneten Zahlenpaare $(i; j)$ mit $i; j \in N$ und $i \leqq j \leqq 6$ beschrieben. Damit sind $\{(i; j)\}$ mit $i; j \in N$ und $i \leqq j \leqq 6$ die 28 Elementarereignisse.
$A = \{(0; 0), (0; 1), (0; 2), (0; 3), (0; 4),$
$(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 2)\}$
$B = \{(0; 5), (1; 4), (2; 3)\}$
$C = \{(0; 6), (1; 5), (2; 4), (3; 3)\}$
$D = \{(0; 0), (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4),$
$(5; 5), (6; 6)\}$
$P(A) = \frac{9}{28},\ P(B) = \frac{3}{28},\ P(C) = \frac{1}{7},$
$P(D) = \frac{1}{4}$

▲ 2 ▲ $P(\bar{D}) = 1 - P(D) = \frac{3}{4}$

▲ 3 ▲ $P = 1 - P(A) - P(B) - P(C)$
$= 1 - \frac{9}{28} - \frac{3}{28} - \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

▲ 4 ▲ A und D, C und D

▲ 5 ▲ $A \cap D = \{(0; 0), (1; 1), (2; 2)\}$
$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D)$
$= \frac{9}{28} + \frac{1}{4} - \frac{3}{28} = \frac{13}{28}$

Beweisskizze zu: Eine Aufgabe von Prof. A. Engel, Heft 2/90

a) Ist $k = 2n + 1$, so enthält die Zerlegung mindestens eine 1, und es muß daher nur noch $2n$ in 2-Potenzen zerlegt werden. D. h. $b(2n + 1) = b(2n)$.
b) Eine Zerlegung von $2n$ enthält entweder keine 1. Davon gibt es $b(n)$, da man jedes Glied halbieren kann. Oder sie enthält mindestens 2 Einsen. Davon gibt es $b(2n - 2)$. Also ist
$b(2n) = b(2n - 2) + b(n)$.

Lösung zu: Eine runde Sache

Heft 2/90

Vorüberlegung: Ich betrachte zwei Sehnen unterschiedlicher Länge durch den Punkt P.
Sei $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$ (**)

$\rightarrow x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 < x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2$.
Da $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$ folgt
$$x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2 < x_2^2 - x_2y_2 + y_2^2, \qquad (*)$$
wobei jeder Term $x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2$, $x_2^2 - x_2y_2 + y_2^2$ positiv ist. Multiplizieren wir die linke Seite von (**) mit der linken Seite von (*) und die rechte Seite von (**) mit der rechten Seite von (*), so erhalten wir die Ungleichung
$$(x_1 + y_1)(x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2)$$
$$< (x_2 + y_2)(x_2^2 - x_2y_2 + y_2^2).$$
Das führt auf
$$x_1^3 + y_1^3 < x_2^3 + y_2^3.$$
Hieraus folgt: Die längste Sehne $x + y$ erzeugt die größte Summe $x^3 + y^3$ und die kleinste Sehne $x + y$ erzeugt die kleinste Summe $x^3 + y^3$.
Zu a): Die längste Kugelsehne durch P ist $\overline{CD}$, also $(x^3 + y^3)_{\max} = (r + a)^3 + (r - a)^3 = 2r^3 + 6ra^2$.
Zu b): Es gilt
$$\frac{x^3 + y^3}{2} \geqq \sqrt[2]{x^3y^3} = \text{konstant.}$$
$x^3 + y^3$ wird genau dann am kleinsten, wenn das Gleichheitszeichen zur Geltung kommt. Das Gleichheitszeichen gilt aber nur dann, wenn $x = y$,
d. h. $x^2 = y^2 = r^2 - a^2$ und damit
$(x^3 + y^3)_{\min} = 2 \cdot \sqrt[2]{(r_1^2 - a_1^2)^3}$.
Gibt es nun auch eine solche Sehne durch P mit $x = y$? Es ist die Sehne durch P, die senkrecht auf $\overline{CD}$ steht.

Lösungen zu: Über selbstregenerierende Zahlenfolgen, Heft 2/90

▲1▲ Wir wenden die Formel
$[a] + [b] = [[a] + b]$ an.

▲2▲ Sei $x = \frac{p}{m}$, m, p natürlich, dann ist $r_n = r_{n+m}$.

Lösung zur Schachecke, Heft 2/90

1. Db7 (2. Dh1 + Lh2 3. D:h2 matt) Lh2
2. Db8 (3. Dg8 matt) Se8
3. D:h2 matt

Lösungen zu: Überall Algorithmen
Heft 2/90

▲1▲ *c a d b e*
▲2▲ 5 4 3 1 2 7 8 6
▲3▲ 1 4 3 2
▲4▲ a) 9 b) 8 c) 12
▲5▲ Der erste Schritt ist nicht eindeutig formuliert.
▲6▲ Mögliche Antwort: Gegeben sind zwei natürliche Zahlen *a*, *b*.
(1) Multipliziere *a* mit sich selbst!
Das ergibt *x*.
(2) Multipliziere *b* mit sich selbst!
Das ergibt *y*.
(3) Berechne die Summe aus *x* und *y*!
▲7▲ „Sie gehen geradeaus bis zum Kino. Wenn Sie das Kino erreicht haben, biegen Sie rechts ab. Sie befinden sich dann auf der Leipziger Straße. Nun laufen Sie bis zur ersten Ampelkreuzung. Wenn Sie an der Ampelkreuzung sind, biegen Sie links in den Meisenweg ein. Wenn Sie das Ende des Meisenwegs erreicht haben, stehen Sie vor der Post."
▲8▲ a) 3 b) 13
▲9▲ *a, b, e, f, g, h, i*
▲10▲ Nur 10 b) ist ein Algorithmus.

Lösung zu: Ostereiereien, Heft 2/90

Egon: $\frac{1}{2}x + x + x = 15$ mit x – Anzahl der blauen bzw. violetten Eier; $x = 6$
Fritz: $1{,}5(r + b) + r + b = 15$; da $r = 5$ folgt $b = 1$; $v = 9$.
Sie haben 15 Eier violett, 8 Eier rot und 7 Eier blau gefärbt.

Lösungen zum Ferienmagazin

Titelblatt: Es fehlt die Zahl 9.
▲1▲ 98, 987, ..., 987 654 321.
▲2▲ $60 + 10 - 60 = 10$; $5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$; $20 + 5 + 15 = 40$; $10 + 9 + 31 = 50$.
▲3▲ 95; 47; 48; 24, 23, 25; 12, 12, 11, 14; 5, 7, 5, 6, 8; 2, 3, 4, 1, 5, 3.
▲4▲ Das zum Hohlkörper gefaltete Netz 2 vervollständigt die Pyramide.
▲5▲ $E = 60$; $R = 120$; $I = 50$; $K = 90$; $A = 30$. $a = 50$; $b = 150$; $c = 200$; $d = 100$.
▲6▲ $840 : 120 = 7$; $7 \cdot 5 = 35$; $(35 - 31)^2 = 16$; $16 + 4 = 20$.
▲7▲ $333 \cdot 3 = 999$; $222 \cdot 3 = 666$; $111 \cdot 3 = 333$. $10 : 2 + 4 = 9$; $14 : 2 - 4 = 3$; $12 - 3 - 2 = 7$; $36 - 7 - 10 = 19$.
$27 + 8 = 35$; $10 + 5 = 15$; $17 + 3 = 20$.
▲8▲ 1, 15, 14, 4; 12, 6, 7, 9; 8, 10, 11, 5; 13, 3, 2, 16. +9, −4, −5, +6; −2, +3, +4, +1; +2, −1, 0, +5; −3, +8, +7, −6.
▲9▲ Den Stern ergänzen die Zahlen 3, 4 und 7.
▲10▲ 6, 1, 4; 4, 5, 2; 2, 3, 6. 1, 5, 3; 3, 4, 2; 2, 6, 1.
▲11▲ Die obere Figur enthält 20, die untere 12 Dreiecke.
▲12▲ Der Käfer erreicht die Blume.
▲13▲ Übung macht den Meister und kein Preis ohne Fleiß.
▲14▲ Die Häuser 2 und 8 sind gleich.
▲15▲ Die Figur 1 gehört an Stelle des Fragezeichens.

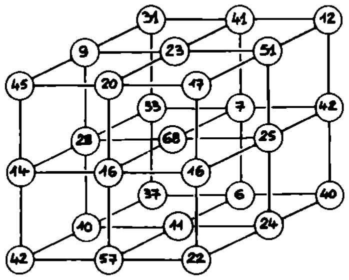
Mit oder ohne Feder?

Falls einer der Weisen zwei Mützen mit der Feder gesehen hätte, dann würde er sofort begreifen (und sagen), daß seine eigene Mütze gar keine Feder hat.
Das heißt also:
(1) Abdul sah die zwei Mützen mit der Feder nicht.
(2) Auch Ali sah die zwei Mützen mit der Feder nicht. Er sah jedoch auch die eine Feder nicht!
(3) Achmed konnte etwa folgende Überlegungen anstellen: „Wenn ich eine Feder habe, so würde Ali, wenn er eine Feder sieht, und weiß, daß Abdul die zwei Federn nicht sieht, schlußfolgern, daß er selbst keine Feder hat. Gelangt Ali nicht zu dieser Schlußfolgerung, dann heißt das, daß er die Feder auf meinem Turban auch nicht sieht. Dann habe ich also wirklich keine Feder!"

Lösungen zur Sprachecke

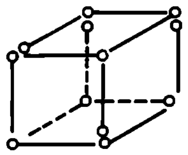
▲1▲ Kugelspiel

Schreibe in jede der leeren Kugeln eine der folgenden Zahlen:
6 – 7 – 9 – 10 – 11 – 14 – 16 – 17 – 20 – 23 – 24 – 25 – 28 – 31 – 33 – 37 – 41 – 42 – 51 – 57 und zwar so, daß man immer die Zahl 249 erhält, wenn man die Zahlen der Kugeln addiert, die in einer Ebene liegen! Hinweis: Die abgebildeten Kugeln können neun verschiedenen Ebenen zugeordnet werden.
Lösung:



▲2▲ Mit einer an die Tafel geschriebenen Zahl ist es gestattet, folgende Operationen durchzuführen: Entweder sie durch die doppelte Zahl zu ersetzen, oder ihre letzte Ziffer zu löschen. Wie erhält man mit Hilfe dieser Operationen aus der Zahl 458 die Zahl 14?
Lösung: Um dies zu erreichen, kann man z. B. wie folgt verfahren: 458 – 45 – 90 – 9 – 18 – 36 – 72 – 7 – 14

▲3▲
Noch Quadrat – dann hoch in die Luft
Die Zeichnung zeigt zwölf zu drei einzelnen Quadraten zusammengelegte Streichhölzer. Kann man mit derselben Anzahl von Streichhölzern sechs einzelne Quadrate zusammenlegen?
Lösung: Es geht, aber nur in drei Dimensionen. Man muß mit den zwölf Hölzern einen Würfel konstruieren.



▲4▲ Gegeben sind zwei aufeinanderfolgende Primzahlen p und q, beide größer als 2 [zwischen p und q gibt es (befindet sich) keine weitere (andere) Primzahl]. Beweise, daß die Summe $p + q$ dargestellt (geschrieben) werden kann als Produkt von 3 natürlichen Zahlen größer als 1.
Lösung: Da p und q beide von zwei verschiedene aufeinanderfolgende Primzahlen sind, sind beide voneinander verschiedene natürliche Zahlen. Ist q die größere von beiden, so gilt $q = p + 2n$ mit $n \in N$ und $n \neq 0$.
Damit gilt $p + q = p + p + 2n = 2(p + n)$. Wegen $p < p + n < p + 2n = q$ liegt $p + n$ zwischen p und q. Da zwischen p und q keine weitere Primzahl liegt, ist $p + n$ eine zusammengesetzte Zahl und damit als Produkt zweier natürlicher Zahlen n_1 und n $_2$mit $n_1 > 1$ und $n_2 > 1$ darstellbar:
$p + n = n_1 \cdot n_2$.
Mithin gilt $p + q = 2 \cdot n_1 \cdot n_2$.

Lösung zur Schachaufgabe, S. 64

1. Fläche: a1, a2, a3, a4, b1, b2.
2. Fläche: b3, b4, c2, c3, c4, d3.
3. Fläche: d2, d4, e2, e3, e4, f4.
4. Fläche: c1, d1, e1, f1, f2, f3.

Peter Apian und der Jakobsstab

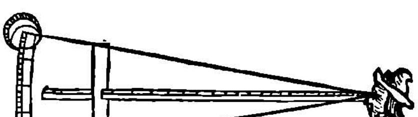
Im Rahmen unserer Serie „Historische mathematische Instrumente“ stellte Dr. P. Schreiber im Heft 5/89 den Jakobsstab vor. Leider mußten wir, an das Format dieser einen Seite gebunden, einige Informationen streichen. Ein Grund mehr für uns, den von unserem Leser R. Witzlau eingesandten ergänzenden Beitrag zum Jakobsstab zu veröffentlichen. Alphons

Im Jahre 1533 erschien in Ingolstadt ein Buch mit dem Titel „Instrument Buch“, in dessen letztem Teil ausführlich der Auf- und Nachbau sowie die Nutzung des Jakobsstabes für geodätische Messungen erklärt wurde. Dieses Buch war eines der ersten und umfassendsten Instrumentenbeschreibungen der Renaissance in deutscher Sprache. Der Verfasser dieses Buches, Peter Apianus (oder kurz Apian, latinisiert aus dem eigentlichen Namen Bienewitz oder Bennewitz) wurde 1495 oder 1501 (Das Geburtsjahr Apians steht urkundlich nicht fest!) in Leisnig geboren und wirkte als Professor für Mathematik an der bayrischen Universität Ingolstadt (1826 nach München verlegt), wo er 1552 starb.

Der Jakobsstab Apians bestand aus einem Meßstab und einem Läufer, wobei Apian eine nichtlineare Teilung des Meßstabes vorschlug.

Die Nutzung des Jakobsstabes für die Messung der Abstände des Mondes zu Fixsternen zeigte er bereits im Jahre 1524 in seinem Buch „Cosmographicus liber“.

Mit Hilfe der Monddistanzmessung war es möglich, die geographische Länge eines Ortes zu bestimmen. Dieses Verfahren war Apian durch Johannes Werner (1468 bis 1528) bekannt, der es im Jahre 1514 in seinen Kommentaren zum ersten Buch der Ptolemäischen Geographie vorgeschlagen hatte. Bis zur Einführung des Chronometers im 18. Jahrhundert stellte die Monddistanzmessung eine wichtige Orientierungsmethode in der Nautik dar.

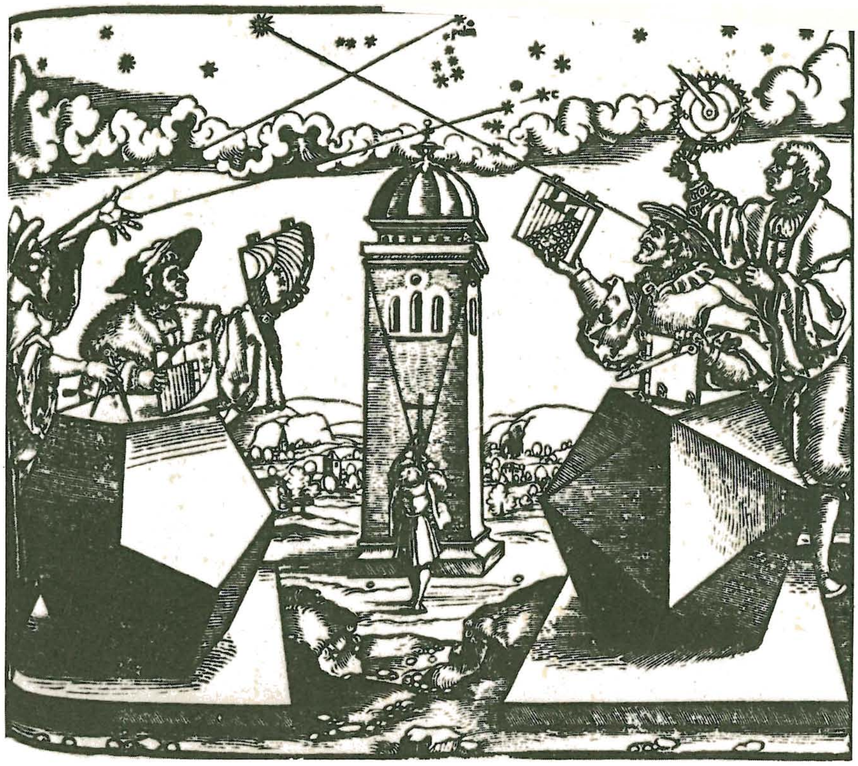


Monddistanzmessung nach Apian, 1524

Apian sah den Einsatz des Jakobsstabes vielseitig. Er erläuterte dessen Gebrauch für geodätische und astronomische Messungen auch 1532 in seinem Werk „Introductio geographica“.

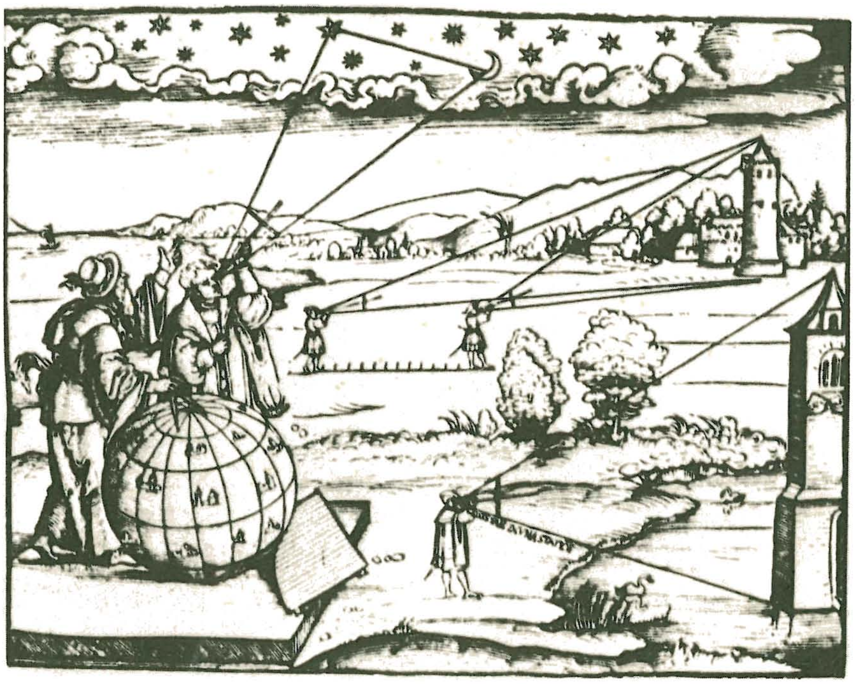
Die genannten Werke Apians, sein in der Bayrischen Staatsbibliothek erhaltenes Manuskript über den Jakobsstab und der nachweisliche Einsatz desselben für Kometenbeobachtungen durch Apian im Jahre 1532 sind u. a. Beweise für seinen Anteil an der Popularisierung der Kenntnisse über den Jakobsstab und dessen weiterer Entwicklung und Anwendung.

Nachzutragen wäre noch, daß im Jahre 1984 die Studenten M. Wendt und M. Gleichmann von der Pädagogischen Hochschule Potsdam unter der Betreuung von Frau Prof. Dr. sc. Goetz im Rahmen einer Diplomarbeit die historische Entwicklung des Jakobsstabes und den Nachbau eines „Apianischen“ Jakobsstabes behandelt haben. *R. Witzlau*



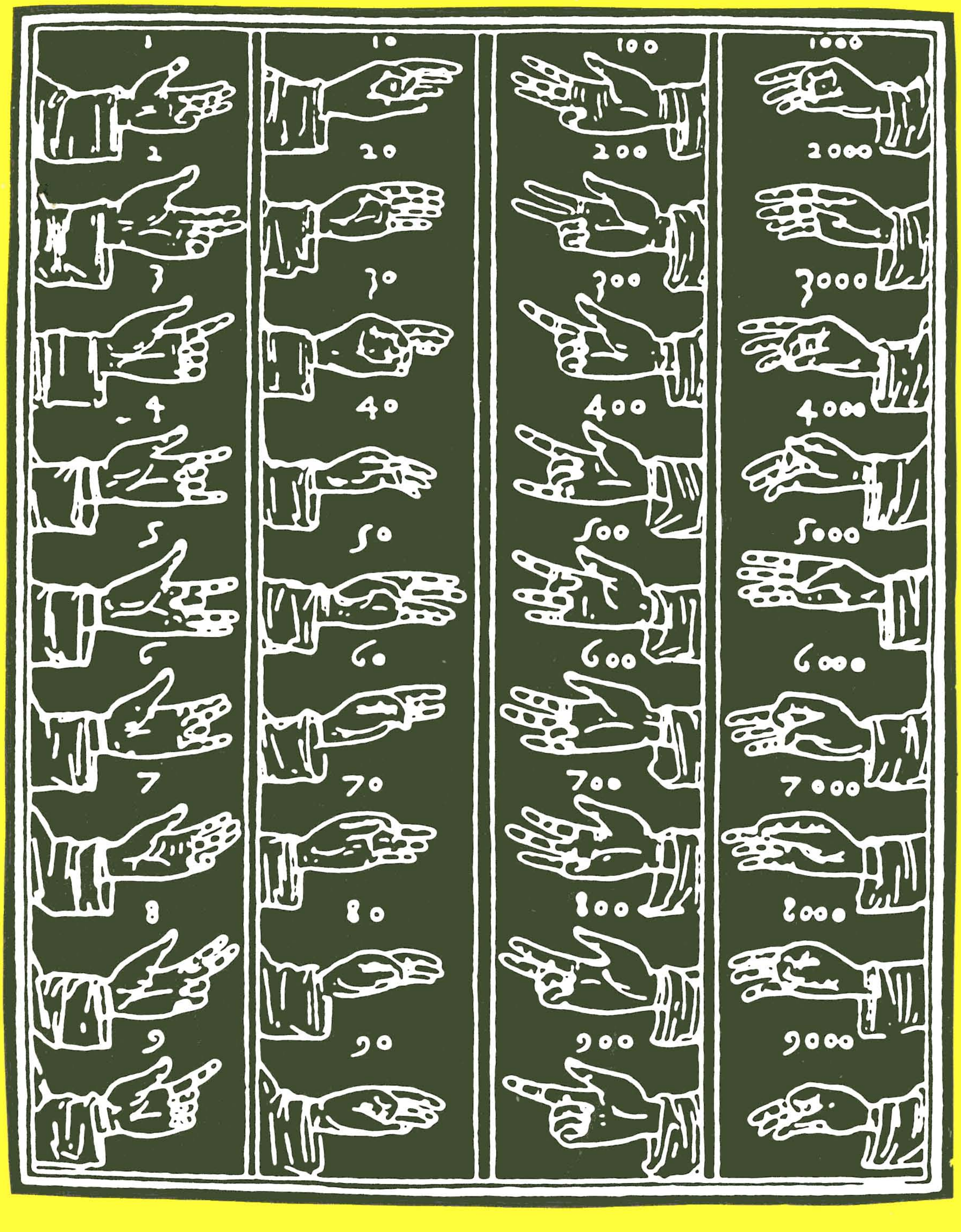
Titelblatt des Instrument Buches (Ingolstadt, 1533) zeigt u. a. die Nutzung des Jakobsstabes zur Höhenmessung eines Turmes

Vielseitige Anwendung des Jakobsstabes nach Apian, 1532



Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



4

Volk und Wissen
Verlag Berlin
24. Jahrgang 1990
Preis 1,50 DM
ISSN 0002-6395

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Verlag
Anschrift des Verlags:
Krausenstr. 50, PSF 1213, Berlin 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig 7027

Redaktion:
Dr. paed. Gabriele Liebau (Chefredakteur); Rosemarie Schubert (redaktioneller Mitarbeiter)

Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presse- und Informationsdienstes der Regierung der DDR
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 DM, im Abonnement zweimonatlich 1,20 DM. Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen. Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin (West) erfolgt über den Buchhandel: für das osteuropäische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR, 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Dr. R. Thiele (S. 73/74/89); G. Stelzer (IV. U.-Seite)
Vignetten: L. Otto, Leipzig
Techn. Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einem historischen Holzschnitt
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb Leipzig III/18/97
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 12. April 1990
Auslieferungstermin: 9. August 1990

Alphons weist euch auf Artikel mit geringerem Schwierigkeitsgrad hin. Das heißt aber nicht, daß alle anderen Beiträge für mathematische Anfänger ungeeignet sind. Probiert es selbst aus!

Eine mathematische Exkursion rund um das Wahlrecht

Das Wahlrecht ist in unserem Lande in die öffentliche Diskussion gerückt. Innerhalb kurzer Zeit wurden die Volksvertretungen unseres Landes neu gewählt. Um zu erreichen, daß die vom Wähler abgegebene Stimme letztlich zu einem handlungsfähigen Parlament führt, muß die Mathematik angewendet werden.

Am einfachsten ist dies beim Mehrheitswahlrecht. Das Wahlgebiet (das Land, der Bezirk, der Kreis, die Stadt oder Gemeinde, der Stadtbezirk) werden dazu in eine bestimmte Zahl von Wahlkreisen untergliedert. In diesen Wahlkreisen sind jeweils ein oder mehrere Abgeordnetensitze zu vergeben. Um diese Abgeordnetensitze bewerben sich in der Regel mehrere Kandidaten. Im Falle des **absoluten Mehrheitswahlrechts** erhält derjenige Kandidat einen Sitz im Parlament, der mehr als 50 % der abgegebenen Stimmen erhalten hat.

Ein Beispiel: In einem Wahlkreis wurden 21 300 Stimmen abgegeben. Der Kandidat A hat 11 200 Stimmen, der Kandidat B 6 400 Stimmen und der Kandidat C 3 700 Stimmen erhalten. Für den Abgeordnetensitz werden mehr als 50 % der Stimmen, also in diesem Falle mindestens 10 651 Stimmen benötigt. Das bedeutet, daß Kandidat A die Wahl gewonnen hat.

Beim **relativen Mehrheitswahlrecht** reicht die relative Mehrheit der abgegebenen Stimmen zur Erlangung des Parlamentssitzes, d. h. gewonnen hat derjenige Kandidat, der im Verhältnis zu den anderen Kandidaten die meisten abgegebenen Stimmen auf sich vereinigen kann.

Auch dazu ein Beispiel: Von den in einem Wahlkreis abgegebenen 16 490 Stimmen entfallen auf den Kandidaten A 2 321, den Kandidaten B 791, den Kandidaten C 5 322, den Kandidaten D 4 293 und den Kandidaten E 3 763 Stimmen. Gewonnen hat der Kandidat C, der mit 5 322 Stimmen die relative Mehrheit bekommen hat.

Das Mehrheitswahlrecht hat den Nachteil, daß nur die für den siegreichen Kandidaten abgegebenen Stimmen erfolgreich sind, während beim 1. Beispiel 47,4 % der Stimmen verfallen und beim 2. Beispiel sogar nur 32,3 % Stimmenanteil für einen Abgeordnetensitz ausreichen.

Etwas komplizierter ist die Berechnung bei Anwendung des **Verhältniswahlrechts.** Beim Verhältniswahlrecht kommt es darauf an, die für die Kandidatenlisten von Parteien abgegebenen Stimmen proportional in Parlamentssitze umzurechnen.

Dazu gibt es verschiedene Möglichkeiten. In der Weimarer Republik kam zum Beispiel ein **automatisches Verfahren** zur Anwendung, nach dem ein bestimmter Stimmenanteil für die Zuteilung eines Abgeordnetensitzes gesetzlich festgelegt wurde.

Ein Beispiel: Im Wahlgebiet wurden 63 752 319 Stimmen abgegeben. Gesetzlich werden 120 000 Stimmen für einen Abgeordnetensitz vorgeschrieben.

Die Partei A erhält 18 372 500 Stimmen, die Partei B 21 273 184 Stimmen, die Partei C 10 200 243 Stimmen und die Partei D 13 906 392 Stimmen. Die Umrechnung dieser Stimmen in Abgeordnetensitze ergibt folgende Ergebnisse:

Partei A: 153 Sitze; Partei B: 177 Sitze; Partei C: 85 Sitze; Partei D: 115 Sitze.

Damit sind im Parlament insgesamt 530 Abgeordnete vertreten.

Das Wahlrecht kennt neben den automatischen auch mathematische Verfahren.

Ein solches mathematisches Verfahren ist das **Auszählverfahren nach d'Hondt.**

Ein Beispiel: In einem Wahlkreis sind insgesamt 14 700 Stimmen abgegeben worden. Es stehen 12 Abgeordnetensitze zur Verfügung. Die Partei A hat 7 100, die Partei B 4 200 und die Partei C 3 400 Stimmen erhalten.

		A	B	C
Stimmenzahl	1	7 100	4 200	3 400
dividiert		(1)	(2)	(4)
durch:	2	3 550	2 100	1 700
		(3)	(6)	(8)
	3	2 366	1 400	1 133
		(5)	(10)	(12)
	4	1 775	1 050	850
		(7)		
	5	1 420	840	680
		(9)		
	6	1 183	700	566
		(11)		

Nachdem die für die einzelnen Parteien abgegebenen Stimmen durch 1, 2, 3 usw. dividiert wurden, werden die 12 größten Quotienten (da 12 Abgeordnetensitze zu vergeben sind) der Reihenfolge nach numeriert. Die Anzahl der durchzuführenden Divisionen richtet sich nach der Anzahl der Abgeordnetensitze. Nach diesen Rechenoperationen erhält die Partei A 6 Sitze, Partei B 3 Sitze und die Partei C ebenfalls 3 Sitze.

Bei den Wahlen in der DDR kommt das sogenannte **Hare-Niemeyer-Verfahren** zur Anwendung.

Auch hierzu ein Beispiel:

Wir gehen wieder von 12 Abgeordnetensitzen und 14 700 abgegebenen Stimmen aus, die sich wie im obigen Beispiel auf die einzelnen Parteien verteilen. Nach dem Hare-Niemeyer-Verfahren wird die Gesamtzahl der Sitze (a) multipliziert mit der für eine Partei abgegebenen Stimmen (b) und dividiert durch die Gesamtzahl der abgegebenen Stimmen (c), d. h.

$d = \frac{a \cdot b}{c}$, wobei $a = 12$, $c = 14\,300$ gilt.

Nach entsprechenden Berechnungen ergibt sich folgende Übersicht:

		A	B	C
Stimmenzahl	(b)	7 100	4 200	3 400
Quotient	(d)	5,79	3,43	2,77
Sitze	(e)	5	3	2
plus Sitze	(f)	1		1
Gesamtsitze	(e+f)	6	3	3

Die Ziffern vor dem Komma ergeben die Zahl der Abgeordnetensitze (e), die jeder Partei zustehen. Die danach noch verbleibenden Sitze (f = a − e) werden nach der Anzahl der Zehntel bzw. Hundertstel nach dem Komma vergeben. *H.-J. Scharfenberg*

Merkwürdiges Rechnen

Wie leicht zu bestätigen ist, gelten $\frac{9}{6} - \frac{6}{10} = \frac{9}{10}$ und $\frac{25}{5} - \frac{5}{6} = \frac{25}{6}$. Es sind alle geordneten Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen a, b und c zu ermitteln, die die Gleichung $\frac{a}{b} - \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$ erfüllen!

Angenommen, das Tripel $(a; b; c)$ mit $a, b, c \in N$ und $bc \neq 0$ ist Lösung. Durch Multiplikation beider Seiten der Gleichung $\frac{a}{b} - \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$ mit dem gemeinsamen Nenner bc ergibt sich $ac - b^2 = ab$ und durch weitere äquivalente Umformungen $a(c - b) = b^2$. Insbesondere muß also auch $a \neq 0$ gelten. x^2 mit $x \in N$ sei die größte Quadratzahl, die Teiler von a ist und y^2 mit $y \in N$ die größte Quadratzahl, die Teiler von $c - b$ ist. Mit geeigneten natürlichen Zahlen m und n gilt dann $a = mx^2$ und $c - b = ny^2$.

In der Primfaktorzerlegung von m und auch in der von n kann kein Primfaktor mehr als einmal auftreten. Denn ist p eine Primzahl und würde p^2 Teiler von m gelten, so wäre im Widerspruch zur Maximalauswahl von x^2 die Quadratzahl $(px)^2 > x^2$ ein Teiler von a.

Aus $b^2 = a(c - b) = mx^2ny^2$ folgt nunmehr $m = n$ und wegen $b, m, x, y \in N$ auch $b = mxy$. Aus $c - b = my^2$ ergibt sich schließlich

$c = b + my^2 = mxy + my^2 = my(x + y)$. Da die benutzten Umformungen äquivalent sind, erfüllen für alle von 0 verschiedenen natürlichen Zahlen m, x und y die Tripel $(a; b; c)$ mit $a = mx^2$, $b = mxy$ und $c = my(x + y)$ und nur diese die Gleichung $\frac{a}{b} - \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$.

Es gibt also unendlich viele Lösungstripel $(mx^2; mxy; my(x + y))$ mit $m, x, y \in N$ und $mxy \neq 0$. Für $m = 1$, $x = 3$ und $y = 2$ ergibt sich z. B. (9; 6; 10). *W. Träger*

Weißt du, wieviel Sternlein stehen?

Die Entwicklung der Zahlwörter und Zahlzeichen

Teil 1

Wir hatten uns bereits im ersten Teil überlegt, wie weitgehend Zahlen in unser Alltagsleben eingedrungen sind. Jeder, der schon einmal im Ausland gewesen ist, hat die international einheitliche Zahlenschreibweise schätzen gelernt. Auch wenn die Sprachkenntnisse nicht mehr ausreichten, der aufgeschriebene Kaufpreis oder die notierte Zugabfahrt waren ohne weiteres verständlich.

Benannt werden die von uns gebrauchten Ziffern nach den Arabern, erfunden wurden sie aber in Indien. – Kurioserweise benutzt man jedoch heute sowohl in Arabien als auch in Indien noch Ziffernschreibweisen, die nicht dem heutigen Standard der „arabischen Ziffern" entsprechen.

Die älteste Form, Mengenangaben „schriftlich" festzuhalten, dürfte das Einkerben gewesen sein: für jedes Mengenelement wurde eine Kerbe auf einem Holzstück angebracht. Die ältesten Zahlenschriften lassen ihren Ursprung im Kerben erkennen, etwa die chinesischen Bambusziffern (vgl. Bild 1). Die Zahlzeichen der Mayas wiederum verarbeiten das Zählen mit Hilfe von Steinchen (vgl. Bild 2).

Da das Aneinanderreihen gleicher Zeichen bei größeren Zahlen zu unübersichtlichen Zeichenfolgen führt, wurden Folgen von Kerben strukturiert, und schließlich ersetzte man eine bestimmte Menge von Kerben durch ein neues Zeichen. Das ägyptische Ziffernsystem arbeitete für die Zahlen von 1 bis 9 mit einfachen Strichen (= Kerben); die 10 wurde durch ein einem auf dem Kopf stehenden U ähnelnden Zeichen wiedergegeben (vgl. Bild 3). Die Zehner wurden mit diesem Zeichen notiert, 10 solcher Zehner wurden durch eine neue Hieroglyphe bezeichnet usw. Um 3000 v. u. Z. sind auf einem Denkmal, das das älteste bekannte Zeugnis für Hieroglyphen ist, bereits die riesigen Zahlenangaben 120 000 Gefangene, 400 000 erbeutete Rinder und 1 422 000 erbeutete Ziegen bei einem Kriegszug des Königs Narmer gemacht. Die propagandistische Übertreibung bei der Siegesmeldung (schon damals üblich) interessiert uns nicht, für uns ist die Fähigkeit der Ägypter bemerkenswert, derart große Zahlen aufschreiben zu können (vgl. Bild 4).

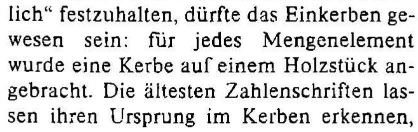


Bild 1
Chinesische Bambusziffern

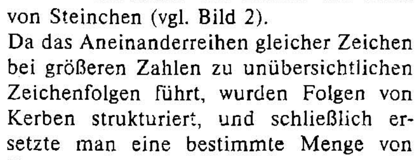


Bild 2
Maya Ziffern

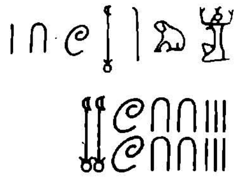


Bild 3
Ägyptische Hieroglyphen. Die obere Reihe zeigt von links nach rechts die Zahlen 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 (Frosch) und 1 Million (Luftgott). Die untere Reihe zeigt die Zahl 2 246.

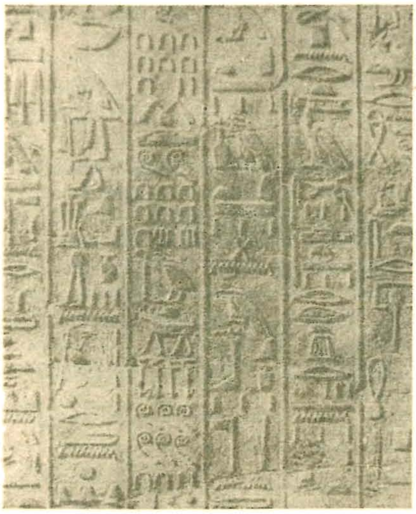


Bild 4
Ein ägyptischer Hieroglyphentext mit Zahlzeichen aus der Zeit um 1500 v. u. Z. (3. Spalte von links).

Die ägyptische Zahlschreibweise führte aber in eine Sackgasse, da sich diese Art der Zahldarstellung zwar recht gut für das Zählen und Weiterzählen (Addieren) eignet, aber Multiplikations- oder Divisionsverfahren nicht sehr angepaßt ist. Beim praktischen Gebrauch schliffen sich die „Schönschreibweisen" der Hieroglyphen immer mehr ab, so daß die ägyptische Schreibschrift schließlich sehr viele individuelle Zeichen für die Ziffern besaß, was das Algorithmisieren des Rechnens außerordentlich behinderte und erschwerte (vgl. Bild 5).

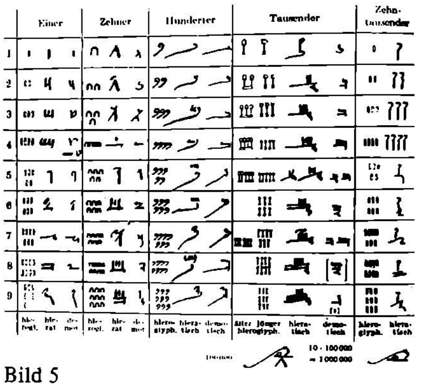


Bild 5
Zahlzeichen in hieroglyphischer und daraus abgeleiteten „Schreibschriften". Die Verzifferung ist deutlich zu erkennen.

Das andere Extrem einer Verzifferung ist die Dualschreibweise. Hier reichen zwei Ziffern (in der Regel sind es die Zeichen 0 und L), um jede beliebige natürliche Zahl zu notieren. Der Nachteil des geringen Zeichenbestandes zeigt sich in der „Länge" großer Zahlen, bereits 4 wird dual mit drei Ziffern L00 geschrieben. Computer stört das nicht so sehr, denn günstig ist bei ihnen die Möglichkeit, den Ziffern 0 und L zwei elektrische Ladungszustände im Rechenwerk zuordnen zu können.

Die Grundlage des Dualsystems ist das Zusammenfassen in Zweiergruppen. Die Ägypter benutzten wie auch wir Zehnergruppen. Die Babylonier faßten nach einigen Vorformen ihre Zahlenangaben in 60er Einheiten zusammen, modern geschrieben:

$z = a_n 60^n + a_{n-1} 60^{n-1} + \ldots + a_1 60 + a_0$

$(a_i = 0, 1, 2, \ldots, 59$ für $i = 1, \ldots, n)$.

Auch die babylonische Keilschrift benutzt für die ersten neun Zahlen Zeichen, die an Kerben erinnern (vgl. Bild 6). Für die 10 erscheint ein neues Zeichen; die Zahlen zwischen 10 und 60 werden aus beiden Zeichenarten kombiniert (vgl. Bild 7).

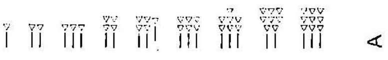


Bild 6
Keilschrift. Zahlzeichen von 1 bis 10

Bild 7
Die Zahl 23 in Keilschrift

Sollen Zahlen über 60 hinaus dargestellt werden, greift man auf ein Stellensystem zurück. Damit können die alten Zahlzeichen weiter benutzt werden. Der Wert eines Zeichens ist nicht absolut (wie bei den Ägyptern), sondern hängt von dessen Stelle ab. Das ist uns von den arabischen Ziffern her vertraut. Ein Beispiel: die Ziffer 2 steht für unterschiedliche Werte in 22.

Das Keilschriftsystem weist aber gegenüber der arabischen Zahlschreibweise einen Mangel auf: die Null fehlt. Die Null ermöglicht es, eine Leerstelle zu markieren, also beispielsweise anzuzeigen, daß in 204 keine Zehner vorhanden sind. Andererseits weist 30 darauf hin, daß keine Einer erscheinen. Die Keilschrift ist aus diesem Grund mehrdeutig. Auch wenn der Schreiber für fehlende Einheiten einen Leerraum ließ, war dieser doch subjektiv und ersetzte das Schreiben von Nullen nicht. Beispielsweise lassen sich zwei Keile so deuten (vgl. Bild 8):

$$\begin{aligned} \text{𒁹𒁹} &= 2 \\ &= 1\cdot 60 + 1 = 61 \\ &= 1\cdot 60^2 + 1 = 3\,601 \\ &= 2\cdot 60^2 + 0\cdot 60 + 0 = 7\,200 \end{aligned}$$

Bild 8
Vieldeutigkeit der Keilschrift. Das Fehlen der Null (oder eines Leerraumzeichens) macht die Lesung der Zahlen mehrdeutig.

Der Rechner, der die Zahlen aufschrieb, hatte jedoch aus der Aufgabenstellung heraus eine Vorstellung von deren Größe. Damit beseitigte er die Unbestimmtheit, die für uns besteht. Das uns irritierende Verfahren hat so Jahrhunderte gut funktioniert. Das Keilschriftsystem hat gegenüber den ägyptischen oder römischen Ziffern einen gewaltigen Vorteil. Weil sich die Positionen der Ziffern nicht eindeutig festlegen lassen, können zwei Keile auch als

$$2\cdot 60^{-1} \text{ oder } 1\cdot 60^{-1} + 1\cdot 60^{-2}$$

usw. gedeutet werden. Damit können Brüche problemlos dargestellt werden und wie natürliche Zahlen in die Rechenschemata einbezogen werden.

Die Griechen benutzten zwei Zahlschreibweisen. Die herodianischen Zahlen greifen auf die Anfangsbuchstaben der Zahlwörter zurück:

Γ = 5 Penta (Γ ist eine alte Schreibweise des Pi),
Δ = 10 Deka,
H = 100 Hekaton.

Interessant ist dabei eine Multiplikationsschreibweise:
$50 = 5\cdot 10$ wurde 𐅄 geschrieben, entsprechend 𐅅 $= 500 = 5\cdot 100$ usw. Die ionischen Zahlzeichen sind mit den 24 Buchstaben des griechischen Alphabets identisch, wobei noch drei alte Buchstabenformen aufgenommen wurden, damit 27 Zeichen für die drei Gruppen von Einern, Zehnern und Hundertern zu je 9 Ziffern vorhanden waren. Die Multiplikation mit 1000 wurde durch einen Strich links vom Buchstaben notiert. Um in einem geschriebenem Text Zahlen nicht mit Wörtern zu verwechseln, wurden Zahlen überstrichen (vgl. Bild 9).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Einer	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ϝ	Ζ	Η	Θ
	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
Zehner	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Q
	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	q
Hunderter	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	ϡ
	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
Tausender	͵α	͵β	͵γ	͵δ	͵ε	͵ς	͵ζ	͵η	͵θ

Bild 9
Die ionischen Zahlzeichen

Uns geläufige Potenzgesetze wie $10^n\cdot 10^m = 10^{m+n}$ waren bei diesen Buchstabenziffern und ihrem 1×1 nicht leicht zu erkennen. Archimedes (287 bis 212 v. u. Z.) meisterte in einer berühmten Arbeit über die Sandzahl diese Schwierigkeiten virtuos, indem er bei der Berechnung der Anzahl der Sandkörner im Weltall Myriaden von Myriaden bildete. Mit dem Wort Myriade wurde im Griechischen die Zahl 10000 benannt. Archimedes berechnete auf diese Weise die gesuchte Anzahl mit rund 10^{57} Sandkörnern, wobei er sowohl Zahlwörter erfand als auch Rechenregeln erkannte, um die außergewöhnliche Größenordnung zu bewältigen.

Die Zuordnung von Zahlen und Buchstaben, wie sie die Griechen vornehmen, hat im Verlauf der Geschichte immer wieder zu unbegründeten Spekulationen geführt, die einen tieferen Sinn in der aus praktischen Erwägungen getroffenen Doppeldeutigkeit der Zeichen sahen. Dabei wurde die mit Zahlen gemachte Erfahrung, daß sich die Wirklichkeit durch diese beschreiben läßt, unkritisch auf geschriebene Texte übertragen. Genauer: wichtige Texte (wie etwa eine Bibelstelle) wurden „dechiffriert" und gedeutet. Michael Stifel kam auf diese Weise dazu, einen Weltuntergang für den 18. Oktober 1533 um 8 Uhr morgens in Lochau vorherzusagen (vgl. „alpha" 5/89). Das Wort „Amen" hatte beispielsweise den Zahlenwert 99
$\alpha = 1, \mu = 40, \varepsilon = 8, \nu = 50;$
also $\alpha\mu\varepsilon\nu = 1 + 40 + 8 + 50 = 99$).
Religiöse mittelalterliche Manuskripte enden daher oft mit der Zahl 99.

Die römischen Ziffern sind bis heute bekannt und werden für besondere Anlässe noch benutzt (Angabe von Jahreszahlen, Seiten- oder Kapitelzählung in Büchern u. a. m.). Auch hier ist der Ursprung Kerbe nicht zu übersehen. X markierte die Bündelung in Zehnereinheiten (durchgestrichene Kerbe) und erhielt so den Zahlwert 10. Die Hälfte des Zeichens ist V und bedeutet 5.

Hiervon kommt die Redensart „Ein X für ein U (= V im Lateinischen) vormachen", die besagt, daß einem in einer Rechnung eine 10 für eine 5 untergeschoben werden soll, womit sich der zu zahlende Betrag verdoppelt. Die Zeichen für 100 oder 1000 wurden ursprünglich anders als in der heute durch die mittelalterliche Schreibweise verbreiteten Form geschrieben. 1000 war eine eingeklammerte I, d. h. (I); doppelte Einklammerung ((I)) ergab den Wert von 10000 usw. 500 als die Hälfte von 1000 wurde sinnfällig durch das halbe Zeichen I) bzw. später im Druck durch D wiedergegeben. Erst im Mittelalter kamen die Abkürzungen C = 100 (C von centum) und M = 1000 (M von mille) auf. Größere Zahlen wurden durch Überstreichen aus kleineren gewonnen: $(\overline{\text{I}}) = 1$ Million (d. h. Überstreichen ist Multiplikation mit 1000).

Diese römischen Zahlzeichen wurden bis ins Mittelalter verwendet, wobei sie später im Druck durch kleine Buchstaben wiedergegeben wurden: i für eins, j am Ende einer Einerkette (z. B. 3 = iij), v für 5 und x für 10 usw. Die arabischen Ziffern kamen im 8. Jahrhundert von Indien nach Arabien und wurden von dort nach Europa gebracht. In der Regierungszeit des Kalifen al-Ma'mun, eines Sohnes des berühmten Harun al-Raschids, schrieb al-Chorizmi ein Buch (um 820) über den Gebrauch der arabischen Zahlen, das im 12. Jahrhundert ins Lateinische übersetzt wurde und damit im Abendland lesbar wurde. Vermutlich haben jedoch Kaufleute und Händler die Verbreitung der arabischen Ziffern sowohl von Indien nach Arabien als auch von dort nach Europa bereits früher durch den Handel gebracht.

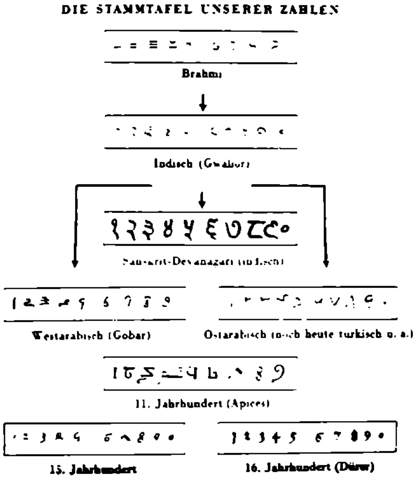


Bild 10
Die Entwicklung der arabischen Zahlen

Über die Entstehung der sogenannten arabischen Ziffern in Indien ist nicht viel bekannt. In Indien waren verschiedene Ziffernsysteme verbreitet (vgl. Bild 10). Um 870 erscheint erstmals in der Gwalios-Schrift schriftlich die Null, aber sie dürfte schon vorher bekannt gewesen sein. Die Inder liebten große Zahlen. Obwohl sie zur Zeit der Ägypter und Sumerer auch nicht weiter als bis 100000 zählen konnten, ist um die Zeitwende die Rede davon, daß Buddha die Zahlen bis 10^{54} benennen könne. Auch die Sissa-Zahl

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615,$$

die in einer der Legenden über die Erfindung des Schachs erscheint und die Anzahl der Weizenkörner angibt, wenn auf das erste Feld des Schachbretts ein Korn gelegt wird und auf den weiteren Feldern jeweils verdoppelt wird, ist indischer Herkunft. Näherungsweise ist die Sissa-Zahl gleich $18\cdot 10^{18}$, eine Zahl, die nicht jeder gleich benennen könnte (nämlich 18 Trillionen).

Ein Grund, weshalb die arabischen Ziffern nicht sofort die römischen Ziffern verdrängten, ist der, daß das praktische Rechnen mit dem Abakus vollzogen wurde. Der Abakus war ein Rechenbrett mit Rechensteinen. Diese Steine wurden gemäß der Rechenvorschrift auf Linien bewegt. Das Liniensystem spiegelt ein Stellenwertsystem wider (vgl. Bild 11/12).

Fortsetzung auf Seite 89

Wie lange bekommt eine Wand Sonne?

Die Arbeit mit der Besonnungsscheibe

Angenommen, eine Hauswand verläuft genau in der Ost-West-Richtung, ist also nach Süden ausgerichtet. Wie lange bekommt diese Wand Sonne? In den meisten Fällen ist die Antwort rasch zur Stelle: 12 Stunden, natürlich! – Ganz so einfach ist die Beantwortung dieser Frage jedoch nicht, und die Antwort ist nur sehr bedingt richtig. Genau genommen trifft es nur für zwei Tage des Jahres zu, nämlich für den Frühlings- und Herbstbeginn (1989: 20. 3. und 23. 9.). Im Winterhalbjahr, wenn die Tage kürzer als 12 Stunden sind, wird die Sonnenscheindauer durch die Tageslänge bestimmt, die am 21. 12. nur 7 h 36 min betragen kann. Für das Sommerhalbjahr (20. 3. bis 23. 9.) wird vielfach angenommen, daß die Sonnenscheindauer an der Wand, die sogenannte Besonnung, mehr als 12 Stunden betragen muß.

Wer aber den Beitrag in Heft 3/90 über das verfehlte Ziel aufmerksam gelesen hat, weiß, daß die Sonne erst nach 6 Uhr die Ostrichtung erreicht und bereits vor 18 Uhr die Westrichtung überschreitet.

Am 21. 6., dem Tag der Sommersonnenwende, ist dieser Unterschied am größten, so daß die Ost-West-Wand nur für 9 h 20 min Sonnenlicht erhält. Dies mag vielleicht etwas paradox klingen, da allgemein angenommen wird, daß die Sonne infolge ihres großen Tagbogens im Hochsommer ja viel länger scheine. Maßgeblich ist aber die Ost-West-Richtung der Wand und wann die Sonne diese beiden Himmelsrichtungen erreicht.

Die Frage nach der Besonnungsdauer einer Wand ist von praktischer Art, denn wer möchte nicht gern wissen, wie lange die Sonne auf den Balkon oder die Terrasse scheint oder von wann bis wann eine Sonnenuhr Licht erhält? Auf den ersten Augenblick mag diese Thematik sehr einfach erscheinen: Man nehme sich eine Uhr und notiere sich an einem Sonnentag die Zeiten, wann die Sonne „um die Ecke“ kommt und wieder verschwindet. Diesem sei geraten, die Ablesung nach ein oder zwei Monaten zu wiederholen – und er wird nicht wenig erstaunt sein: Die Werte stimmen nicht überein!

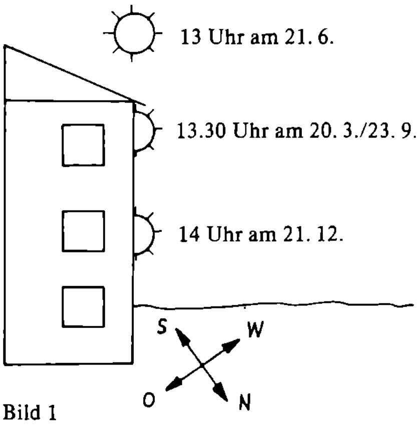


Bild 1
Der Zeitpunkt einer bestimmten Sonnenrichtung ist in den Jahreszeiten verschieden.

Das Problem liegt wie folgt: Die Sonne steht zur gleichen Zeit nicht in derselben Richtung. Im Sommer macht die Sonne größere Schritte in der Richtung, im Winter kleinere. Nur zu Mittag, wenn die Sonne den Höchststand im Süden einnimmt, geschieht dies unabhängig von der Jahreszeit um 12 Uhr wahrer Ortszeit.

Kommen wir zu unserer Ost-West-Wand zurück, die nur am 20. 3. bzw. 23. 9. für 12 h Sonnenschein erhält. An diesen beiden Tagen geht die Sonne genau im Osten auf und im Westen unter. Maßgeblich für die Dauer der Besonnung ist der Zeitpunkt, wann die Sonne die Ostrichtung bzw. die Westrichtung überschreitet. Im Sommerhalbjahr wird die Besonnungsdauer in jedem Fall kürzer als 12 h sein, wie aus der folgenden Übersicht hervorgeht:

Datum	Besonnungsdauer
20. 3. bzw. 23. 9.	12 h
21. 7. bzw. 21. 8.	10 h 44 min
21. 5. bzw. 21. 7.	9 h 40 min
21. 6.	9 h 22 min

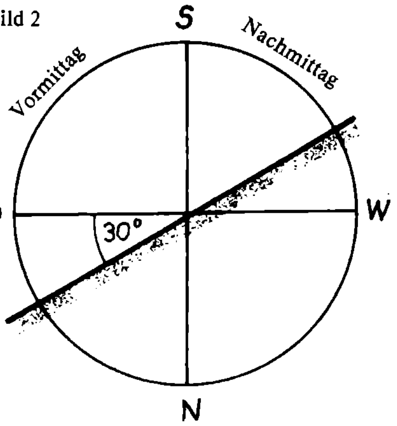
Die Berechnungen gelten für die geographische Breite von 52°, was der Mitte unserer Republik entspricht. In südlicheren Gebieten wird die Besonnungsdauer um weitere 10 min am 21. 6. eingeschränkt (Sonneberg), in den nördlichen ist sie um 14 min länger (Rügen). Die Übersicht zeigt, daß die Veränderungen zwischen dem 21. 5. und 21. 7. verhältnismäßig gering sind. In dieser Zeit verändern sich der Tagbogen und die Tagesdauer kaum merklich.

Die Besonnungsdauer bei abweichenden Wänden

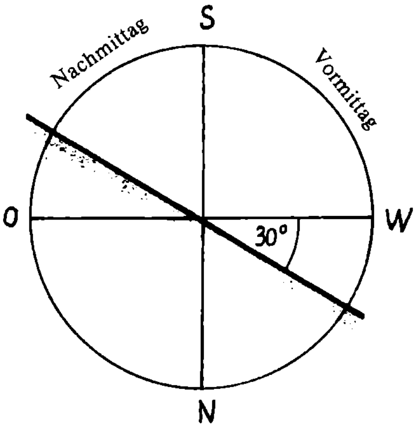
Es handelt sich hierbei um Wände, die von der Ost-West-Richtung abweichen, wie dies auch zumeist der Fall sein dürfte. Mit dieser „Drehung“ aus der Ost-West-Richtung verändern sich selbstverständlich die Besonnungsverhältnisse, je nachdem, ob die Wand nach Osten oder Westen weist. Bei einer Ostabweichung wird die Besonnungsdauer am Vormittag verlängert, am Nachmittag dagegen verkürzt. Sinngemäß ist es bei einer Westabweichung der Wand. Auch hier ist die Besonnung von der Jahreszeit, d. h. von der Größe des Sonnen-Tagbogens abhängig. Für die Berechnung ist hierfür eine recht umständliche Formel notwendig, die wir uns aber ersparen wollen. Wir können die Besonnungsdauer mittels einer sehr einfachen graphischen Darstellung rasch bestimmen. Es ist damit möglich, das sogenannte *Streiflicht der Sonne* zeitlich zu bestimmen. Mit anderen Worten:

Wir können den Zeitpunkt festlegen, wann die Wand Sonne erhält und wann das Sonnenlicht verschwindet. Bei dieser graphischen Darstellung ist eine Tagesgenauigkeit nicht erforderlich, es reicht aus, wenn wir die Ergebnisse für die astronomisch wichtigen Tage (21. 6., 20. 3./23. 9. und 21. 12.) bekommen.

Bild 2



Östliche Wandabweichung



Westliche Wandabweichung

Wichtig ist es zu wissen, um wieviel Grad die Wand von der Ost-West-Richtung abweicht. Für die Bestimmung gibt es mehrere Methoden, die mit Berechnungen verbunden sind. Die Lage eines Gebäudes zu den Himmelsrichtungen kann man einem Bauplan entnehmen oder mit einem guten Kompaß bestimmen. Bei der Arbeit mit dem Kompaß ist jedoch zu beachten, daß Eisenteile oder elektrische Leitungen im Gebäude das Ergebnis beeinträchtigen können.

Die folgenden Beispiele zeigen, wie sich die Wandabweichung von 30° in Richtung Ost sowie in Richtung West auf die Sonnenscheindauer an der Wand auswirken kann.

Die Übersicht zeigt einige interessante Fakten: Eine nach Osten abweichende Wand bekommt im Hochsommer am Nachmittag wenig Sonne. Im Frühling und Herbst ist die Besonnung aber um 1 Stunde länger. Im Winter wirkt sich die Wandabweichung nicht aus, da die kurze Sonnenscheindauer (kleiner Tagbogen) im Bereich der Wand bleibt.

Mit Hilfe der Besonnungsscheibe können wir für jede Wandabweichung die Besonnungsdauer ermitteln. Der innere Teil besteht aus einer Einteilung für den 21. 6., 20. 3./23. 9. und 21. 12., die anzeigt, in welcher Richtung (Azimut) die Sonne zu der betreffenden Zeit steht. Diese Richtungen sind in den Jahreszeiten verschieden, wie auch die Richtungsänderung unterschiedlich groß ist. So ersehen wir daraus, daß die Sonne am 21. 6. um 10 Uhr mit der Sonnenrichtung vom 20. 3./23. 9. um 9 Uhr sowie mit dem Sonnenaufgang am 21. 12. zusammenfällt. Die Einteilung beweist aber auch die Aussagen über die Kritik an der Orientierungsregel über das verfehlte Ziel in Heft 3/90. Die Ost-West-Richtung wird von der Sonne am 21. 6. erst um 7.20 Uhr bzw. bereits um 16.40 Uhr erreicht. Der Winkelabstand der Sonne von der Südrichtung (Meridian) kann an der Gradeinteilung am Außenrand leicht abgelesen werden.

Die Gradeinteilung am Außenrand dient der Einstellung der Wandabweichung. Dazu legen wir ein Lineal an, daß dieses z. B. von 30° über den Mittelpunkt zu 30° auf der gegenüberliegenden Seite reicht, wobei wir die betreffende Wandabweichung zu berücksichtigen haben. Da unsere Besonnungsscheibe mit den Himmelsrichtungen auf einer Windrose übereinstimmt, erfolgt die Drehung des Lineals in der gewünschten Richtung der Wandabweichung.

Die nachfolgenden Beispiele dienen zur Kontrolle:

Wann beginnt die Besonnung (Streiflicht) bei einer Wandabweichung von 15° nach West am 21. 6.? Ergebnis: 8.30 Uhr. Wann endet die Besonnung (Streiflicht) bei einer Wandabweichung von 50° nach Ost am 20. 3./23. 9.? Ergebnis: Kurz vor 15 Uhr.

Die Zeitangaben entsprechen der wahren Ortszeit oder Sonnenzeit (WOZ). Diese differiert gegenüber der Mitteleuropäischen Zeit um den Betrag des Längenunterschiedes zu Görlitz (15°).

Im östlichen Teil der DDR ist dieser Unterschied gering, nimmt jedoch in Richtung Westen zu und beträgt z. B. in Potsdam bereits 8 min, in Erfurt aber schon 16 min. Der Zeitunterschied ist zur wahren Ortszeit bei uns stets hinzuzuzählen, um die MEZ zu erhalten. Wir wollen die Zeitgleichung bei der Arbeit mit der Besonnungsscheibe außer acht lassen.

Datum	Richtung Ost		Richtung West	
	Beginn	Ende	Beginn	Ende
21. 6.	Sonnenaufgang	14.35 Uhr	9.25 Uhr	Sonnenuntergang
20. 3./23. 9.	Sonnenaufgang	15.35 Uhr	8.20 Uhr	Sonnenuntergang
21. 12.	In jedem Falle vom Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang			

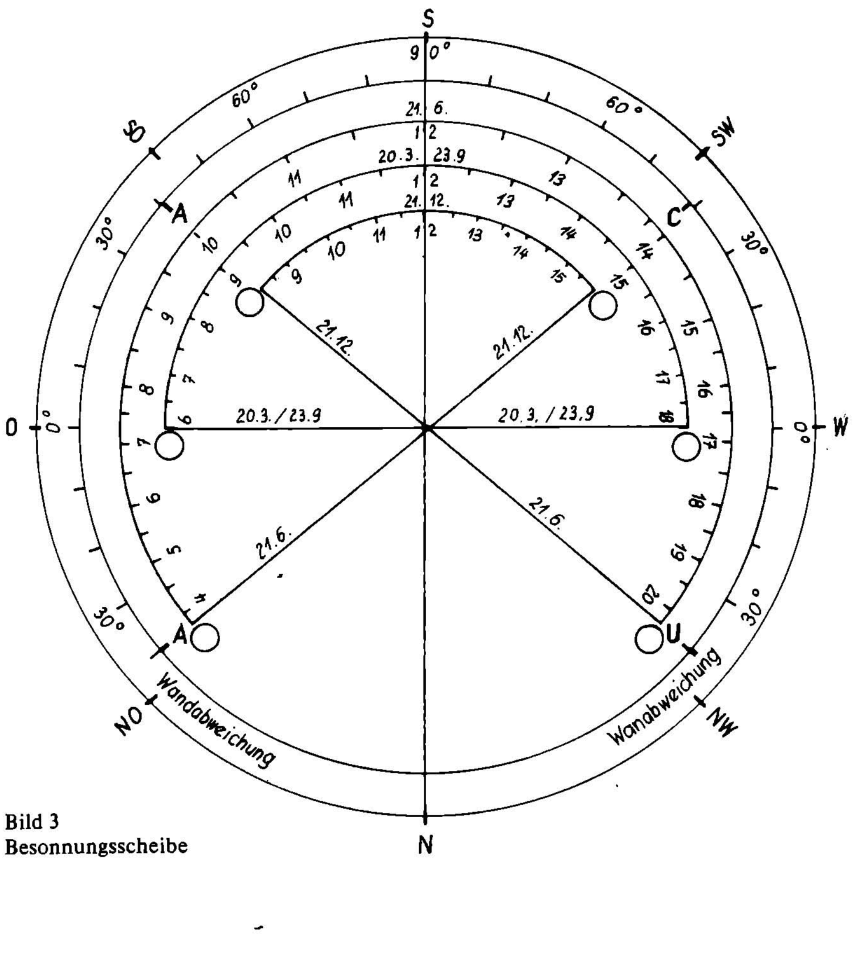


Bild 3
Besonnungsscheibe

Unsere Vorrichtung läßt sich aber auch zur Bestimmung der Wandabweichung verwenden. In diesem Falle gehen wir von der Uhrzeit aus, indem wir von der MEZ den Zeitunterschied (Längendifferenz) abziehen. Beobachten wir z. B., wie am 21. 6. um 15 Uhr WOZ die Sonne hinter einer Wand (Streiflicht) verschwindet, so kann es sich nur um eine Wandabweichung von 22° nach Ost handeln. Wir legen das Lineal am 21. 6. bei 15 Uhr an und lesen an der Gradeinteilung 22° ab.

Erscheint z. B. die Sonne am 21. 12. erst um 11 Uhr an der Hauswand, so handelt es sich um eine sehr große Wandabweichung von 75° in Richtung West.

Sonnenschein an einer Nordwand?

Diese Frage wird oft etwas übereilt mit einem Nein beantwortet.

Betrachten wir die Besonnungsscheibe, so sehen wir, daß im Sommer die Sonne weit über Osten bzw. Westen in Richtung Norden hinausgeht und somit eine Nordwand durchaus bescheinen kann. So gibt es eine Reihe von Nord-Sonnenuhren, die jedoch nur zwischen dem 20. 3. und 23. 9. (Sommerhalbjahr) die Zeit anzeigen können.

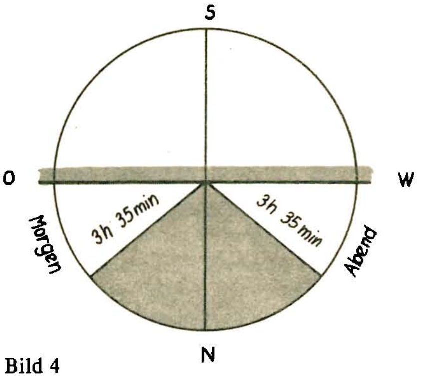


Bild 4
Die Besonnung einer Nordwand.
Dauer der Besonnung am 21. 6.:
Insgesamt 7 h 10 min.

Dieser Anzeigebereich ist um so größer, je mehr man sich dem 21. 6., dem Tag der Sommersonnenwende, nähert.

Wer also eine Nordwand hat, braucht nicht wegen des fehlenden Sonnenscheins verzagt zu sein. Die Wand bekommt immerhin vom Sonnenaufgang bis gegen 7.20 Uhr und von 16.40 Uhr bis zum Sonnenuntergang Sonne, wenn wir dabei den längsten Tag des Jahres berücksichtigen. Für ein Sonnenbad reicht es immerhin noch aus, wenngleich die Sonne dann aber tiefer steht.

Bei einer nach Norden gerichteten Wand kommt es somit zu einer Doppel-Besonnung, und zwar in den frühen Vormittagsstunden sowie in den späten Nachmittagsstunden. Besteht hier eine Wandabweichung, so kann die eine oder andere Seite mehr oder weniger eingeschränkt bzw. erweitert werden.

Mit den Buchstaben A und U an der randlichen Gradeinteilung werden diejenigen Punkte am Horizont gekennzeichnet, wo die Sonne an den Tagen der Sommer- und Wintersonnenwende aufgehen bzw. untergehen kann. Diese Punkte liegen jeweils 40,2° vom Ost- bzw. Westpunkt entfernt, erreichen nicht die Nebenhimmelsrichtungen SO, SW, NO und NW, die bei jeweils 45° liegen.

Unsere Besonnungsscheibe ist für die Breite von 52° berechnet, kann aber im gesamten Gebiet der DDR verwendet werden. Die dabei auftretenden Unterschiede sind gering und können für unsere Zwecke vernachlässigt werden.

Es muß in diesem Zusammenhang auch bemerkt werden, daß eine zeitliche genaue Bestimmung des Streiflichtes nicht leicht ist und sich um 2 bis 3 Minuten unterscheiden kann. Die Sonne ist keine punktförmige Lichtquelle sondern hat eine Ausdehnung von 0,5° am Himmel. Wer den genauen Zeitpunkt des Streiflichtes an der Wand bestimmen möchte, muß dafür eine Latte von 1 bis 2 m Länge verwenden, die in Verlängerung der Hauswand gelegt wird.

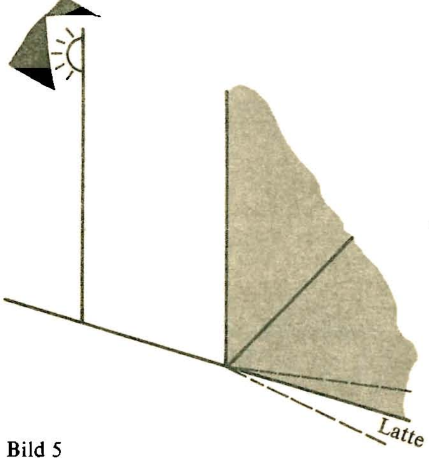


Bild 5
Die Bestimmung des Streiflichtes an einer Wand mittels des Schattenwurfes und einer Latte.

——— richtig
– – – – falsch

Der Schatten der Wand muß genau auf die Latte fallen, wobei kein Knick zwischen Latte und Schatten entstehen darf. Auf diese Weise wird eine Genauigkeit von einer Minute erzielt.

A. Zenkert

Gerechte und ungerechte Würfelspiele – Überraschungen mit ungewöhnlichen Würfeln

Teil 2

Spielwürfel, die eine andere Augenverteilung als der „Normal-Würfel“ (N) aufweisen, jedoch wie dieser insgesamt 21 Augen tragen, sind ihm gleichwertig, wenn man – nach der Regel „Höhere Augenzahl gewinnt“ – nur einmal wirft. Wir haben aber bemerkt, daß sie sich gegenüber N ganz unterschiedlich verhalten, wenn man die Augenzahlen mehrerer Würfe zusammen wertet bzw. mit mehreren Würfeln spielt: G (Augenverteilung 3, 3, 3, 4, 4, 4) ist auch dann immer gleichwertig mit N, F (Augenverteilung 1, 1, 4, 5, 5, 5) ist ihm überlegen und Z (2, 2, 2, 3, 6, 6) unterlegen.

Wir werden also wohl mit weiteren Überraschungen rechnen können, wenn wir diese Würfel gegeneinander antreten lassen! Tun wir dies zunächst für G und Z, und beschränken wir uns dabei auf einen einzigen Wurf:

G	–	3(3)	4(3)	–
Z	2(3)	3(1)	–	6(2)

$g_G = 3\cdot 3 + 3\cdot 4 = 21$

$g_Z = 2\cdot 6 = 12$

$Q_{G/Z} = 21:12 = 1,75$

Das ist nun ein ganz erheblicher Qualitätsunterschied, der sich beim Spielen deutlich bemerkbar macht: Spielt etwa ein Spieler S_G mit dem Würfel G gegen S_Z mit dem Würfel Z nach der beschriebenen Regel (wer die höhere Augenzahl geworfen hat, erhält vom anderen einen Chip), so dürfte nach 100 Spielen S_G „im Schnitt“ (d. h. nicht etwa in jeder Serie von 100 Spielen!) 25 Chips von S_Z gewonnen haben:

$100\cdot\frac{21}{36} = 58,\overline{3}$ Spiele mit Gewinn für S_G,

$100\cdot\frac{12}{36} = 33,\overline{3}$ Spiele mit Gewinn für S_Z

und $100\cdot\frac{3}{36} = 8,\overline{3}$ Spiele mit unentschiedenem Ausgang.

Beim Vergleich von G und F erhalten wir ebenfalls einen Überlegenheitsquotienten 1,75, allerdings zugunsten von F:

$Q_{F/G} = 1,75.$

Der Würfel F ist also gewissermaßen um ebensoviel stärker als der Würfel G, wie dieser stärker ist als Z. Nun erwartet man gewiß (sofern man sich nicht wegen der bisherigen Überlegungen zur Vorsicht gemahnt fühlt), daß dann F erst recht dem Würfel Z überlegen ist. Prüfen wir das nach:

Z	–	2(3)	3(1)	–	–	6(2)
F	1(2)	–	–	4(1)	5(3)	–

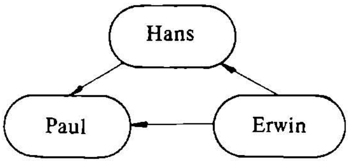
$g_Z = 3\cdot 2 + 1\cdot 2 + 2\cdot 6 = 20$

$g_F = 1\cdot 4 + 3\cdot 4 = 16$

$Q_{Z/F} = 20:16 = 1,25$

Demnach ist im Gegenteil der Würfel Z dem Würfel F überlegen, wenn auch der Überlegenheitsquotient nicht so stark von 1 abweicht wie beim Vergleich von G mit F oder mit Z. Dieses Ergebnis scheint auf den ersten Blick unseren Erfahrungen zu widersprechen: Wenn wir wissen, daß Hans größer ist als Erwin und Paul wiederum größer ist als Hans, dann können wir daraus schlußfolgern, daß Paul auch („erst recht“) größer ist als Erwin (Bild 3).

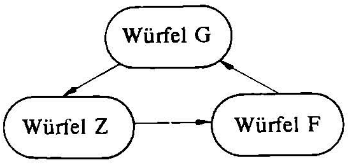
Bild 3



X ← Y bedeutet
Y ist kleiner als X bzw. X ist größer als Y

Die Beziehung *ist größer als* ist „transitiv“ (von *transire* (lat.) – *überleiten*, wörtlich *hinübergehen*, vgl. Transitverkehr u. ä.). Dasselbe trifft auch auf andere Beziehungen zu wie *ist älter als*, *ist wärmer als*, die eine gewisse Anordnung zum Ausdruck bringen. Warum aber gilt eine derartige „Übertragbarkeit“ für *ist stärker als* bei den ungewöhnlichen Würfeln nicht (Bild 4)?

Bild 4



X ← Y bedeutet
Y unterliegt X bzw. X besiegt Y

Die Überlegenheitsquotienten, die wir berechnet haben, sind ja kein Maß für eine „absolute Spielstärke“, so wie etwa Größe, Alter, Temperatur feststehende Maßzahlen für die oben genannten transitiven Beziehungen liefern. Bei den Überlegenheitsquotienten geht es vielmehr immer nur um einen zweiseitigen Vergleich.

Sie liefern keine Qualitätszahlen, die einem Würfel ein für allemal, gegenüber allen anderen, zukommen. Deshalb ist an das Q auch ein Z/G oder dgl. als Index angehängt worden, und eigentlich hätte schon in den Bezeichnungen für die Anzahlen der Gewinnwürfe zum Ausdruck kommen müssen, gegen welchen Würfel jeweils gespielt wird, also etwa

$g_{G/Z} = 21,\ g_{Z/G} = 12,\ g_{G/F} = 21,$
$g_{F/G} = 12,\ g_{Z/F} = 20,\ g_{F/Z} = 16.$

Bei dem *ist stärker als* der ungewöhnlichen Würfel liegt deshalb ebenso wenig Transitivität vor wie etwa beim Aufeinandertreffen je zweier Mannschaften in gewissen sportlichen Vergleichen.

▲6▲ Berechne die Quotienten $Q_{Z/G}^{(2)}$, $Q_{F/G}^{(2)}$ und $Q_{F/Z}^{(2)}$ für den paarweisen Vergleich der Würfel Z, F und G bei zwei Würfen (bzw. das Spiel mit jeweils zwei derartigen Würfeln)!

Was scheint dir an den Ergebnissen besonders überraschend?

Die „geschlossene Kette“, die von den Würfeln F, G, Z gebildet wird (Bild 4), ist mit drei Gliedern eine der kürzestmöglichen. Sie ist auch von allen Ketten mit drei Gliedern bei den Würfeln mit der Augensumme 21 wegen der relativ großen Überlegenheitsquotienten 1,75, 1,75 und 1,25 die bemerkenswerteste. Interessant ist nun die Frage nach längeren derartigen Ketten, bei denen keiner der Überlegenheitsquotienten kleiner als 1,5 (gerundet) ist. Um solche Ketten zu finden, wählt man aus allen möglichen Würfeln mit insgesamt 21 Augen nur diejenigen aus, für die man im direkten Vergleich mit einem anderen mindestens einmal einen Überlegenheitsquotienten von (gerundet) 1,5 oder mehr (bzw. einen Quotient von 1 : 1,5 oder weniger) errechnet. Man gelangt so zu den fünfzehn im Bild 5 dargestellten Würfeln.

▲7▲ Wieviel zweiseitige Vergleiche muß man durchrechnen, um diese Würfel auszusortieren?

▲8▲ Die Bezeichnung der Würfel mit N, F, G, Z, V und dgl. ist recht unübersichtlich, zumal es beispielsweise außer dem Würfel F noch weitere gibt, die drei Fünfen auf ihren Flächen tragen. Man gelangt zu einer besseren Bezeichnungsweise, wenn man alle möglichen Würfel mit insgesamt 21 Augen geeignet anordnet. Dazu kann man beispielsweise die Augenzahlen auf den sechs Flächen als Ziffern deuten, mit denen man dann eine möglichst kleine sechsstellige Zahl darstellt – so, als würde man mit sechs Würfeln „niedrige Hausnummer“ spielen und hätte die von den Seiten gezeigten Augen geworfen. Die verschiedenen Zahlen werden dann der Größe nach geordnet, mit der kleinsten beginnend. Die „Platzziffern“ bei dieser Anordnung liefern dann für jeden Würfel eine eindeutig bestimmte Zahl zur Kennzeichnung. So erhält beispielsweise der Würfel mit 1, 1, 1, 6, 6, 6 die Nummer 1, der Normalwürfel die Nummer 10.

a) Ermittle für jeden Würfel im Bild 5 die zugehörige Nummer!

b) Welche Nummern ergeben sich für die Würfel, wenn man möglichst große sechsstellige Zahlen darstellt (wie beim Spiel „hohe Hausnummer“) und dann bei der Anordnung der Zahlen mit der größten beginnt?

Die Pfeile, die im Bild 5 eingezeichnet sind, symbolisieren die Qualitätsvergleiche, und zwar – mit Ausnahme des (gestrichelten) Pfeils von Würfel F zum Würfel Z – nur solche, die zu Überlegenheitsquotienten vom (gerundeten) Mindestwert 1,5 gehören.

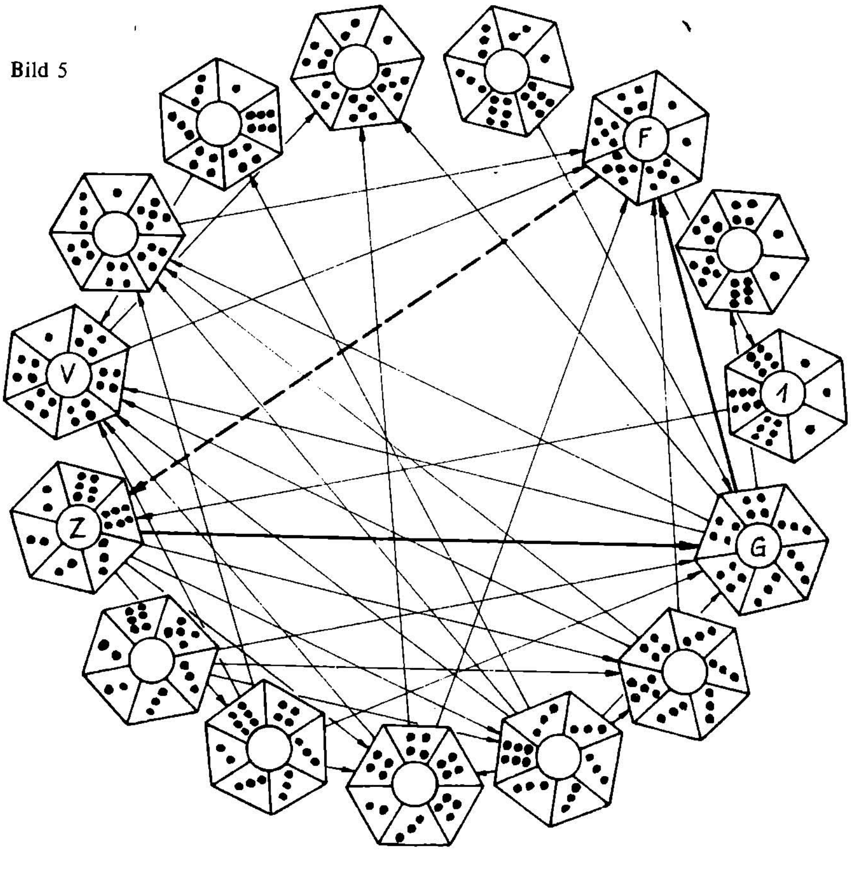


Bild 5

Die Pfeilspitze ist dabei immer auf den jeweils überlegenen Würfel gerichtet. Die Pfeile erleichtern es, geschlossene Ketten unterschiedlicher Länge zu bilden. So erhält man beispielsweise eine viergliedrige Kette, wenn man in der Kette mit den drei Würfeln F, G, Z den Würfel Nummer 1 zwischen F und Z „einfügt“. Die längstmöglichen Ketten enthalten 6 Würfel.

▲9▲ a) Berechne die Überlegenheitsquotienten $Q_{1/F}$ und $Q_{Z/1}$ in der angegebenen viergliedrigen Kette!

b) Versuche, unter den Würfeln im Bild 5 zwei solche zu finden, bei deren Vergleich sich ein möglichst großer Überlegenheitsquotient ergibt!

c) Welche der Würfel im Bild 5 können in keiner geschlossenen Kette vorkommen? Welche Würfel müssen in jeder Kette auftreten?

d) Stelle einige sechsgliedrige Ketten zusammen! Warum kann keine Kette mehr als 6 Würfel enthalten?

Fertigt man sich alle Würfel einer solchen Kette an, so kann man zu einem Spiel herausfordern, das jedem Uneingeweihten fair erscheint und bei dem man dennoch zur Verblüffung des Spielpartners (und aller neutralen Beobachter) so gut wie immer Sieger wird. Eine solche Herausforderung kann mit folgenden Worten geschehen:

„Hier habe ich 4 (5, 6) ungewöhnliche Würfel. Ungewöhnlich sind sie deshalb, weil sie nicht wie unser normaler Spielwürfel auf ihren Flächen die Augenzahlen von 1 bis 6 zeigen. Bei allen beträgt aber die Augenzahl insgesamt 21 – wie beim normalen Würfel –, wovon du dich überzeugen kannst. – Ich mache dir nun folgendes, einmalig günstiges Angebot: Du suchst dir einen beliebigen dieser Würfel aus – den Würfel, den du für den besten hältst. Ich nehme mir dann einen der übrigen Würfel, und wir spielen gegeneinander nach der Regel ‚Wer die höhere Augenzahl wirft, bekommt einen Punkt‘. Wer bei einer Serie von Spielen zuerst 20 (25, 50, ...) Punkte erreicht hat, ist Gewinner. Wenn du während des Spielens zu der Meinung kommst, daß ein anderer Würfel besser ist, kannst du wechseln und dabei auch den wählen, mit dem ich gerade würfle. Allerdings erhalte ich bei einem solchen Wechsel auch immer die Möglichkeit, mir einen anderen Würfel zu nehmen. Du darfst außerdem beliebig oft mit verschiedenen Würfeln probieren – nicht nur, bevor wir anfangen zu spielen, sondern auch zwischendurch, wenn du willst!“

Natürlich muß man sich die Aufeinanderfolge der Würfel gut einprägen, wenn man gewinnen will. Das fällt am leichtesten, wenn die Kette nur vier Würfel enthält. Andererseits macht aber die Benutzung von sechs Würfeln mehr Eindruck. Bei ihr fällt es dem Spielpartner (und allen Zuschauern) gewiß auch schwerer dahinterzukommen, daß sich zu ausnahmslos jedem Würfel unter den übrigen fünf ein anderer finden läßt, der dem zuerst ausgewählten Würfel erheblich überlegen ist. *G. Lorenz*

Mathematik und das Fahrrad von Olaf Ludwig

Auf dem Weg zum Olympiasieg 1988 in Soul legte Olaf Ludwig mit seinem Rennrad bei der größten Übersetzung mit einer Pedalumdrehung 10,1 m zurück. Woher wir das wissen? Nun, wir haben einen Brief an Olaf Ludwig geschrieben und um einige Angaben über sein Rennrad gebeten. Wir haben sie bekommen und noch ein Autogramm dazu, dann haben wir gerechnet.

1. Das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines beliebigen Kreises

Um die vom Fahrrad zurückgelegte Strecke zu bestimmen, muß man den Umfang des Laufrades kennen. Ihn zu messen, ist eine umständliche Angelegenheit, leicht schleichen sich Fehler ein.

▲1▲ Überlege dir ein geeignetes Meßverfahren. Erkenne die Fehlerquellen!

Viel leichter fällt es uns, den Durchmesser eines Kreises zu messen. Wir suchen deshalb nach einem Zusammenhang zwischen Durchmesser und Umfang eines Kreises. Dazu betrachten wir den Quotienten aus diesen beiden Größen. Wir haben folgende Gegenstände vermessen:

Gegenstand	Umfang u	Durchmesser d	Quotient $\frac{u}{d}$
Topfdeckel	64,1 cm	20,9 cm	3,07
Sportrad	220,0 cm	71,5 cm	3,08
Kinderrad	151,4 cm	50,0 cm	3,03
Blumenuntersetzer	34,0 cm	11,0 cm	3,09
Rad ohne Bereifung	200,0 cm	64,0 cm	3,13

▲2▲ Ergänze unsere Meßreihe durch eigene Messungen an kreisförmigen Gegenständen.

Betrachtet ihr die Meßreihen, dann vermutet ihr vielleicht, daß der Quotient $\frac{u}{d}$ eine feste Zahl in der Nähe von 3 ist, egal, welchen Kreis man untersucht. Die geringen Schwankungen des Quotienten $\frac{u}{d}$ könnten daher rühren, daß nicht richtig abgelesen wurde, das Meßverfahren zu ungenau oder der Gegenstand nicht kreisrund war.

Tatsächlich kann man beweisen:

Der Quotient aus Umfang u und Durchmesser d ist für jeden Kreis ein und dieselbe Zahl. Ein Näherungswert für diese Zahl ist 3,14.

Diese feste Zahl erhielt den Namen π (lies: pi). Ihr findet sie auf fast jedem Taschenrechner. Der SR 1 gibt den Wert 3,1415927 aus. Wir verwenden in allen weiteren Rechnungen den Näherungswert 3,14. Diesen Näherungswert fand bereits um 300 vor unserer Zeitrechnung Archimedes, ein bedeutender Mathematiker des Altertums. Seit dem Ende des 18. Jahrhunderts ist bekannt, daß π eine irrationale Zahl, d. h. ein unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch ist. Bis heute bemühen sich die Mathematiker darum, die Zahl π auf möglichst viele Stellen hinter dem Komma genau zu berechnen. Am 8. 8. 89 meldete die Presse einen neuen Rekord bei der Berechnung von π. Einem japanischen Informatikprofessor gelang es, π auf 536 870 000 Stellen nach dem Komma zu bestimmen. Das Symbol π führte übrigens erst der berühmte Mathematiker Leonhard Euler (1707 bis 1783) ein.

Wir halten fest: $\frac{u}{d} = \pi$. Indem wir diese Gleichung nach u umstellen, gewinnen wir die Aussage:

Für den Umfang u eines Kreises mit dem Durchmesser d gilt
$u = \pi \cdot d$ (Umfang $= \pi \cdot$ Durchmesser).

Wir können also den Umfang eines Kreises *berechnen*, wenn wir den Durchmesser kennen.

Offenbar ist es wesentlich einfacher, den Durchmesser eines Kreises mit einer vorgegebenen Genauigkeit zu messen als den Umfang.

▲3▲ Begründe diese Aussage!

Warum sehen Besitzer von 28er Fahrrädern eigentlich auf die von 24er Fahrrädern herab? Der Unterschied besteht in der Größe der Laufräder, und wir wollen uns genauer ansehen, was diese seltsamen Zahlenangaben bedeuten.

2. Die Größeneinteilung der Fahrräder und ein „hartnäckiges" altes Längenmaß

Bei einem 28er Fahrrad hat ein Laufrad einschließlich Bereifung einen Durchmesser von etwa 28 Zoll. Man schreibt dafür abkürzend 28″.

▲4▲ Suche auf den Reifen deines Fahrrades eine Bezeichnung wie $28 \times 1\frac{3}{8} \times 1\frac{5}{8}$.

Die Bezeichnung $28 \times 1\frac{3}{8} \times 1\frac{5}{8}$ sagt aus, daß der Reifen auf ein 28er Rad paßt und daß er $1\frac{3''}{8}$ breit und $1\frac{5''}{8}$ hoch ist.

Das Maß Zoll ist ein Längenmaß, das im Mittelalter eingeführt wurde und wie viele damalige Einheiten von Abmessungen des menschlichen Körpers abgeleitet war. Ein Zoll bedeutete eine Daumenbreite. Wessen Daumen war da wohl *maß*gebend? Wir können uns lebhaft vorstellen, daß diese Festlegung von Land zu Land unterschiedlich war und sich außerdem im Laufe der Zeit veränderte.

Wir merken uns nur, daß heute gilt
1 Zoll = 1″ = 1 Inch = 1 in = 0,0254 m
= 25,4 mm.

Das ist das alte englische Zoll $\left(\text{gleich } \frac{1}{12} \text{ Fuß}\right)$. Die meisten Länder haben sich inzwischen einer internationalen Vereinbarung über Maßeinheiten angeschlossen, wonach das Meter die grundlegende Längenmaßeinheit ist. (Abgeleitete Einheiten sind z. B. cm, dm, mm und km.) Das Maß Zoll leistet dem in der Praxis hartnäckigen Widerstand und behauptet sich vor allem noch in speziellen Industrie- und Handwerkszweigen. So gibt es in vielen Haushalten Zollstöcke (mit mm-Teilung), der Klempner verlegt $\frac{3''}{4}$-Rohre, die importierten Jeans tragen die Größenangaben W 27 (in), L 36 (in), und wir fahren ein 28er Rad.

Da wir schon lange mit dem Meter viel vertrauter sind, rechnen wir die Größenangaben für Fahrräder in diese oder eine davon abgeleitete Einheit um.

Beispiel: 28er Fahrrad:
Durchmesser = 28″ = 28 · 25,4 mm
= 711 mm
Umfang = π · Durchmesser
= 3,14 · 711 mm = 2,2 m.

Bei einer Umdrehung rollt also das Laufrad eines 28er Fahrrades 2,2 m weit.

▲5▲ Vervollständige die folgende Tabelle:

Fahrradtyp	Vertreter	Durchmesser in ″	Durchmesser in mm	Umfang in m
28er	Sportrad	28	711	2,2
27er	Rennrad			
26er	Tourenrad		660	
24er	Jugendrad			
20er	Kinderrad			
$12\frac{1}{2}$er	Bambirad		318	1,0
8er	Roller	8		

Ein Vorläufer unseres heutigen Fahrrades war das Hochrad. Wir kennen es aus dem Museum. Die Tretkurbel befand sich am Vorderrad. Dieses hatte einen Durchmesser von etwa 2 m (knapp dreimal soviel wie ein Sportfahrrad) und legte demnach bei einer Kurbelumdrehung $\pi \cdot 2$ m = 6,3 m zurück. Das war das Ziel seiner Erfinder gewesen: Mit einer Kurbelumdrehung sollte eine möglichst lange Strecke zurückgelegt werden. Dazu brauchte der Fahrer allerdings auch sehr viel Kraft. Außerdem setzten die Körpermaße eines Menschen und das Bedürfnis, einigermaßen sicher auf- und abzusteigen sowie bremsen zu können, der Entwicklung immer größerer Hochräder bald Grenzen. Eine neue Idee wurde geboren.

3. Der Kettenantrieb

Die Kraft wird auf das Kettenrad ausgeübt und mit Hilfe der Kette auf den (hinteren) Zahnkranz und damit auf das Hinterrad übertragen.

Beispiel: Wenn das Kettenrad 51 Zähne und der Zahnkranz 17 Zähne hat, dann dreht sich bei einer Pedalumdrehung das Kettenrad einmal und der Zahnkranz und mit ihm das Hinterrad $\frac{51}{17} = 3\text{mal}$.

Wenn es sich außerdem um ein 28er Fahrrad handelt, fahren wir bei einer Pedalumdrehung $3 \cdot \text{Umfang} = 3 \cdot 2{,}2\,\text{m} = 6{,}6\,\text{m}$ weit. Etwa genauso weit wären wir mit einem Hochrad von 2,1 m Durchmesser bei einer Kurbelumdrehung gefahren.

▲ 6 ▲ Begründe die letzte Aussage!

Das *Übersetzungsverhältnis* ist die Zahl

$$\frac{\text{Anzahl der Zähne am Kettenrad}}{\text{Anzahl der Zähne am Zahnkranz}} = \frac{\text{Zähne vorn}}{\text{Zähne hinten}}.$$

Die Übersetzungsverhältnisse können bei einem 28er und einem 26er Fahrrad gleich sein und trotzdem sind die Auswirkungen unterschiedlich. Ein 26er Fahrrad rollt nämlich bei einem Übersetzungsverhältnis von 3 bei einer Pedalumdrehung nur 6,3 m weit.

▲ 7 ▲ Überprüfe diese Aussage!

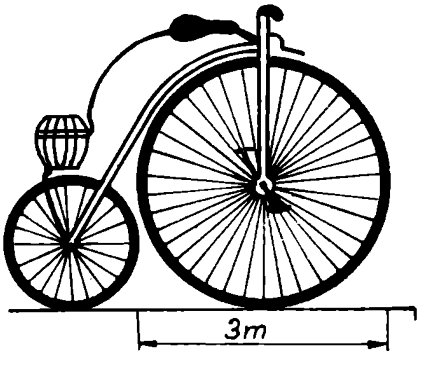
Um die Übersetzung eines bestimmten Fahrrades zu beschreiben, hat man die *Entfaltung* eingeführt. Sie wird berechnet als

$$\text{Entfaltung} = \text{Übersetzungsverhältnis} \cdot \text{Radumfang}.$$

Die Entfaltung gibt also die Wegstrecke (in m) an, die das Fahrrad bei einer Pedalumdrehung zurücklegt. Mit Hilfe der Entfaltung können wir unser Fahrrad in Gedanken mit einem Hochrad vergleichen. Beim Hochrad ist die Entfaltung gleich dem Umfang. Aus dem Umfang berechnen wir den Durchmesser als

$$\text{Durchmesser} = \frac{\text{Umfang}}{3{,}14}.$$

Beispiel: Ein Klappfahrrad mit einer Entfaltung von 4,6 m entspricht in diesem Sinne einem Hochrad mit einem Durchmesser von $\frac{4{,}6}{3{,}14}\,\text{m} = 1{,}5\,\text{m}$.



Radrennfahrer haben ihre eigene Sprache. Sie sagen z. B.: „Ich fahre 120 Zoll“ und meinen damit eigentlich „Ich schaffe es, ein Hochrad mit einem Durchmesser von 120″ zu bewegen“. 120 Zoll sind immerhin $120 \cdot 0{,}0254\,\text{m} = 3\,\text{m}$.

Es kann also wohl nur im übertragenen Sinne gemeint sein. Aber wir bekommen eine ungefähre Vorstellung von der dazu erforderlichen Kraft.

▲ 8 ▲ Ein Rennrad gehört zur 27er Kategorie. Welche Entfaltung gehört zu der Aussage „Ich fahre 120 Zoll“? Mit welchem Übersetzungsverhältnis kann der Fahrer diese Entfaltung erreichen? Wie viele Zähne müßte der Zahnkranz dann haben, wenn das Kettenrad 51 Zähne hat?

Beispiel: Wir „berechnen“ ein sogenanntes Bambirad. Das sind die kleinen Fahrräder, mit denen viele Kinder das Radfahren erlernen. Die Laufräder sind $12\frac{1}{2}$″ groß. Ihr Durchmesser beträgt 318 mm und ihr Umfang 1 m. Das Kettenrad hat 30 Zähne, der Zahnkranz 16.

Wir berechnen

$$\text{Übersetzungsverhältnis} = \frac{\text{Zähne vorn}}{\text{Zähne hinten}}$$

$= \frac{30}{16} = 1{,}875$ und Entfaltung

$= \text{Übersetzungsverhältnis} \cdot \text{Radumfang}$

$= 1{,}875 \cdot 1\,\text{m} = 1{,}875\,\text{m}$.

Das Rad rollt also bei einer Pedalumdrehung 1,9 m weit. Das entspricht einem Hochrad folgender Größe:

$$\text{Durchmesser} = \frac{\text{Umfang}}{3{,}14} = \frac{1{,}9}{3{,}14} = 0{,}6\,\text{m} = 24''.$$

Unsere kleinen Rennfahrer fahren demnach 24 Zoll.

▲ 9 ▲ Berechne nun dein Fahrrad!

Wir betrachten noch einmal die Formel

$$\text{Entfaltung} = \frac{\text{Zähne vorn}}{\text{Zähne hinten}} \cdot \text{Radumfang}.$$

Der Radumfang sei fest vorgegeben (z. B. 2,2 m, d. h. ein 28er Fahrrad). Wir wollen untersuchen, wie sich die Anzahl der Zähne vorn und hinten auf die Entfaltung auswirkt. Dazu stellen wir zwei Wertetabellen auf:

1. Kettenrad 48 Zähne		2. Zahnkranz 18 Zähne	
Zähne hinten	Entfaltung	Zähne vorn	Entfaltung
13	8,1 m	36	4,4 m
16	6,6 m	40	4,9 m
18	5,9 m	46	5,6 m
20	5,3 m	48	5,9 m
24	4,4 m	51	6,2 m

Wir erkennen:

Die Entfaltung wird größer, wenn die Anzahl der Zähne hinten kleiner oder die Anzahl der Zähne vorn größer wird.

Zugleich beachten wir:

Je größer die Entfaltung ist, desto größer ist das vergleichbare Hochrad, desto anstrengender ist das Fahren.

Wir unternehmen nun einen kurzen Abstecher in die Sportgeschichte: Großes Rennen Berlin–Wien um die Jahrhundertwende. Am Berg halten die Rennfahrer an. Sie drehen die Hinterräder um. Wir sehen am Hinterrad zwei Zahnkränze. Sie fahren mit dem größeren Zahnkranz (d. h. mit dem kleineren Hochrad!) den Berg hinauf, oben angekommen wechseln sie das Hinterrad zurück. Diese Wechsel kosten wertvolle Zeit.

Der Wunsch nach höheren Geschwindigkeiten spornte den Erfindungsgeist der Menschen an.

4. Die Gangschaltung

Eine Gangschaltung ermöglicht es, das Übersetzungsverhältnis während der Fahrt zu verändern. Gangschaltungen für Freizeitsportler besitzen ein oder zwei Kettenradblätter und 3 bis 5 Zahnkränze. Ein *Gang* ist ein bestimmtes Übersetzungsverhältnis.

Beispiel: Bei einer Gangschaltung mit Zweifachkettenrad und drei Zahnkränzen gibt es $2 \cdot 3 = 6$ verschiedene Kombinationen von Kettenrad und Zahnkranz.

Offensichtlich müssen nicht alle möglichen Kombinationen zu verschiedenen Gängen führen.

▲ 10 ▲ Überlege dir ein entsprechendes Beispiel.

Es ist also möglich, daß eine sogenannte 10-Gang-Schaltung nur so viel leistet wie z. B. eine 8- oder 6-Gang-Schaltung. Wer sich eine Gangschaltung selbst baut, sollte das beachten.

Zum Abschluß wenden wir uns dem Olympiafahrrad von Olaf Ludwig zu. Es ist ein 27er Rennrad, das Kettenrad hat die Größen 50 und 55, der Zahnkranz die Größen 12, 13, ..., 18. Daraus ergeben sich in geordneter Reihenfolge die Gänge 4,6; 4,2; 3,9; 3,7; 3,6; 3,4; 3,3; 3,2; 3,1; 2,9 und 2,8. In der Aufgabe 5 haben wir den Radumfang 2,2 m berechnet. Im größten Gang beträgt die Entfaltung demnach 10,1 m. Das entspricht einem Hochrad von 3,2 m Durchmesser. *E. u. W. Warmuth*

Preisaufgabe

Im Straßen-Einzelwettbewerb in Soul 1988 siegte Olaf Ludwig vor Bernd Gröne und Christian Henn (beide BRD) in der Zeit von 4 h 32 min und 22 s. Die Strecke war 196,8 km lang.

Löst die folgenden Aufgaben und ihr bekommt eine Vorstellung von der Leistung dieser Rennfahrer.

1. Wie viele Kurbelumdrehungen hätte es für Olaf Ludwig auf dem Olympiakurs höchstens geben können?
2. Wie viele Umdrehungen hat er mit den Pedalen mindestens vollführt, wenn wir annehmen, daß Olaf Ludwig ständig „auf Anschlag“ getreten hat. Welche Zeit hatte er dabei im Durchschnitt für eine Kurbelumdrehung?

Wir losen 8 Autogrammfotos von Olaf Ludwig aus.

Nur Postkarten an: Redaktion „alpha“
PSF 14, Leipzig, 7027

Einsendeschluß: 10. 9. 1990

Läßt sich der Zufall berechnen?

Teil 2

Mischt der Zufall die Karten, so verliert der Verstand das Spiel.

Um die Einführung des Begriffes „bedingte Wahrscheinlichkeit“ vorzubereiten, wird vorübergehend angenommen: Beim im Teil I (Heft 2/90) betrachteten gezinkten Würfel sind die 5 und 6 Punkte tragenden Würfelflächen als einzige rot gefärbt. Und von den mit diesem Würfel ausgeführten 1 000 Würfen sind alle ungültig, bei denen das Ereignis
$U = \{1; 3; 5\}$ eingetreten ist.
Unter diesen Annahmen wäre

$$P(R) = \frac{456}{88 + 131 + 456} \text{ als Näherungswert}$$

der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Rot“, für $R = \{5; 6\}$ ermittelt worden. Bei Wertung aller 1000 Würfe kann dieser Quotient nicht als Näherungswert einer Wahrscheinlichkeit bezeichnet werden. Er wird dann Näherungswert der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(R/G)$ für $R = \{5; 6\}$ bezüglich $G = \{2; 4; 6\}$ genannt.
Für diesen Quotienten gilt:

$$P(R/G) = \frac{\frac{456}{1000}}{\frac{88 + 131 + 456}{1000}} = \frac{P(R \cap G)}{P(G)}.$$

Allgemein wird festgesetzt:
Definition 4: Sind A und B zum gleichen zufälligen Versuch gehörende Ereignisse mit $P(A) > 0$, so heißt

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$ *bedingte Wahrscheinlichkeit für B bezüglich A* (kurz: B bez. A).

Gemäß dieser Definition ist für $P(B) > 0$ die bedingte Wahrscheinlichkeit für A bez. B gleich
$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Durch Umstellen der Formeln für $P(A/B)$ und $P(B/A)$ nach $P(A \cap B)$ ergibt sich der folgende Satz.
Satz 4: Sind A und B zum gleichen zufälligen Versuch gehörende Ereignisse mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$, so gilt
$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A) = P(A/B) \cdot P(B)$.
Im Spezialfall der Gleichwahrscheinlichkeit der Elementarereignisse gilt:

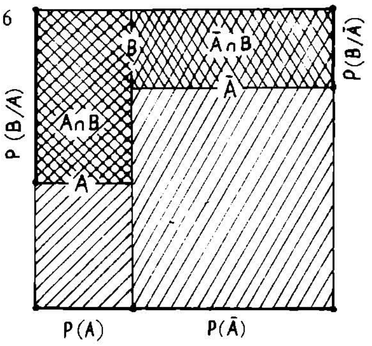
$$\begin{array}{l}\text{bedingte}\\ \text{Wahrschein-}\\ \text{lichkeit}\\ \text{für } A \text{ bez. } B\end{array} = \frac{\begin{array}{c}\text{Anzahl der sowohl zu } A\\ \text{als auch zu } B \text{ gehörenden}\\ \text{Elementarereignisse}\end{array}}{\begin{array}{c}\text{Anzahl der zu } B\\ \text{gehörenden Elementar-}\\ \text{ereignisse}\end{array}}.$$

▲ 6 ▲ Wie groß sind die mit den in Aufgabe 1 eingeführten Ereignisse A und D gebildeten bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A/D)$ und $P(D/A)$?

▲ 7 ▲ Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für $R = \{5; 6\}$ bez. $G = \{2; 4; 6\}$ bei einmaligem Würfeln mit einem Idealwürfel?

In speziellen Venn-Diagrammen werden Wahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeiten auch als Strecken sichtbar: Wird dem Ereignis A als Fläche die eines Rechtecks zugeordnet, dessen eine Seite 1 dm lang ist, so hat die andere Rechteckseite, da der Flächeninhalt $P(A)\,\text{dm}^2$ ist, die Länge $P(A)\,\text{dm}$. Werden nunmehr den Ereignissen $A \cap B$ und $\bar{A} \cap B$ Flächen von Rechtecken, deren eine Seite $P(A)\,\text{dm}$ bzw. $P(\bar{A})\,\text{dm} = [1 - P(A)]\,\text{dm}$ lang ist, zugeordnet, so sind deren andere Seiten $P(B/A)\,\text{dm}$ bzw. $P(B/\bar{A})\,\text{dm}$ lang (Bild 6).

Bild 6

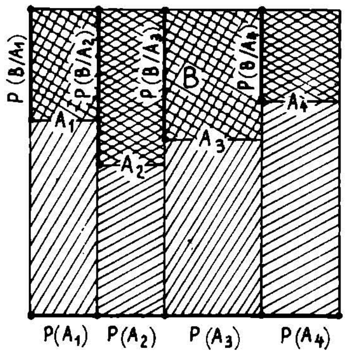


Definition 5: Die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißen ein *vollständiges System von Ereignissen eines zufälligen Versuchs*, wenn zwei beliebige von ihnen unvereinbar sind und wenn bei jeder Ausführung des zufälligen Versuchs unbedingt eines von ihnen eintritt.
Für ein vollständiges System von Ereignissen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gilt also
$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und damit
$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$.

▲ 8 ▲ Für einmaliges Würfeln mit einem Würfel sollen die Ereignisse $A_1 = \{1; 2; 3\}$, $A_2 = \{6\}$ und A_3 ein vollständiges System bilden. Wie lautet A_3?

Für jeden zufälligen Versuch sind zwei komplementäre Ereignisse sowie alle Elementarereignisse vollständige Systeme von Ereignissen.
Für einen zufälligen Versuch mögen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ein vollständiges System von Ereignissen mit $P(A_i) > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bilden, und B sei ein zum gleichen zufälligen Versuch gehörendes Ereignis. Im Venn-Diagramm seien die Ereignisse A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ durch n Rechtecke mit der Seite 1 dm dargestellt und das Ereignis B durch n Rechtecke, so daß die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(B/A_i)$ als Strecken sichtbar sind (Bild 7).

Bild 7



Aus dieser Darstellung ist der Flächeninhalt jedes der n Rechtecke des Ereignisses B als
$P(B/A_i) \cdot P(A_i)\,\text{dm}^2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$
ablesbar. Demnach gilt
$P(B)\,\text{dm}^2 = P(B/A_1) \cdot P(A_1)\,\text{dm}^2 + P(B/A_2) \cdot P(A_2)\,\text{dm}^2 + \ldots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)\,\text{dm}^2$.
Damit wurde die „Formel der totalen Wahrscheinlichkeit“ anschaulich erhalten.
Satz 5: Sind A_1, A_2, ..., A_n ein vollständiges System von Ereignissen eines zufälligen Versuchs mit
$P(A_i) > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und ist B ein zum gleichen zufälligen Versuch gehörendes Ereignis, so gilt
$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n) \cdot P(A_n).$$

▲ 9 ▲ In einer Urne befinden sich viele rote und grüne Kugeln. 30 % aller Kugeln sind rot, 70 % aller Kugeln sind grün gefärbt. 40 % aller roten Kugeln und 50 % aller grünen Kugeln haben weiße Punkte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus dieser Urne eine Kugel mit weißen Punkten herauszunehmen?

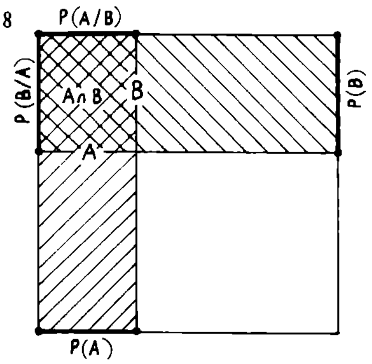
Mit $A = A_i$ gilt laut Satz 4
$P(B/A_i) \cdot P(A_i) = P(A_i/B) \cdot P(B)$
und damit $P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)}$.
Wird in dieser Formel $P(B)$ durch die in Satz 5 angegebene Darstellung ersetzt, so ergibt sich die Formel von Bayes (Th. Bayes, 1702 bis 1763, engl. Math.).
Satz 6: Sind A_1, A_2, ..., A_n ein vollständiges System von Ereignissen eines zufälligen Versuchs und ist B ein weiteres Ereignis des gleichen zufälligen Versuchs, so gilt
$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i) \cdot P(A_i)}{P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \ldots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)}.$$

▲ 10 ▲ Zum Futteranbau sät eine LPG eine Gemengesaat aus, bei der 29 % der Samenkörner Blaue Süßlupine, 54 % Sommerwicke und 17 % Sonnenblume sind. Bei der Lupine beträgt die Keimfähigkeit 80 % (d. h. von 100 Lupinesamenkörnern keimen im Mittel 80), bei der Wicke 95 % und bei der Sonnenblume 85 %. Wie groß ist

die Wahrscheinlichkeit, daß eine aufgehende Pflanze
a) eine Lupine,
b) eine Wicke und
c) eine Sonnenblume ist?

Bild 6 läßt erkennen: Gilt speziell $P(B/A) = P(B/\bar{A})$, so gelten ebenfalls $P(A/B) = P(A)$ und $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (Bild 8).

Bild 8



Definition 6: Zwei Ereignisse A und B eines zufälligen Versuchs heißen *unabhängig*, falls gilt
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

▲11▲ Welche Paare der in Aufgabe 1 betrachteten Ereignisse sind unabhängig?

▲12▲ Es sind zwei zum einmaligen Würfeln mit einem Idealspielwürfel gehörende, nicht unabhängige Ereignisse anzugeben!

Aus Satz 4 und Definition 6 folgt:
Satz 7: Die zum gleichen zufälligen Versuch gehörenden Ereignisse A und B mit $P(B) > 0$ sind unabhängig genau dann, wenn $P(A/B) = P(A)$ gilt.

W. Träger

Die Fortsetzung folgt im nächsten Heft

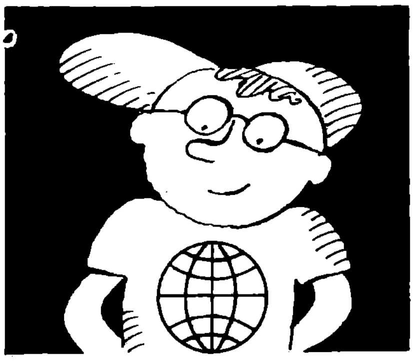
„Noch" Euripides (480 bis 406 v. u. Z.) meinte:

Des Zufalls Wege sind uns unbekannt.
Sie zu berechnen, lehrt uns keine Kunst.

Wen wundert es, denn die Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde erst in der Mitte des 17. Jahrhunderts von P. de Fermat, B. Pascal, C. Huygens und Jakob Bernoulli bei der mathematischen Behandlung von Glücksspielen begründet.
Probleme der Naturwissenschaften förderten ihre Weiterentwicklung bedeutend, z. B. durch die Fehlertheorie, die kinetische Gastheorie, die Zuverlässigkeitstheorie und die Bedienungstheorie.

Eine Zufalls-Beobachtung kann in der Tat jeder machen. Aber von ihr bis zu der großen Ahnung, daß etwas Bedeutsames dahintersteckt, ist ein großer Schritt, und ein noch größerer von dieser Ahnung bis zur klaren wissenschaftlichen Erkenntnis, was dieses Etwas ist.

Max von Laue



▲1▲ Милиционер Степан Степанов обернулся на звук бьющегося стекла и увидел четырех подростков, убегающих от разбитой витрины. Через 5 минут они были в отделении милиции.
Андрей заявил, что стекло разбил Виктор, Виктор же утвержлал, что виноват Сергей. Сергей заверял, что Виктор лжет, а Юрий твердил, что это сделал не он. Из дальнейшего разговора выязнилось, что лишь один из ребят говорил правду.
Кто разбил стекло?

aus: Quant, Moskau

▲2▲ **Find the pattern**
Create two more examples of the same nature as the following:

$3^2 - 1^2 = 2^3$, $6^2 - 3^2 = 3^3$, $10^2 - 6^2 = 4^3$.

Notice the particular set from which we took the integers that are squared. When you succeed in identifying the required set you should have no difficulty creating more examples; you should also find it easy to prove the general validity of the pattern.

aus: Fun with mathematics, Toronto

▲3▲ **Carrés magiques**
Avec, pour chacun, les nombres de 1 à 25 inclus, à vous de reconstituer ces 2 carrés magiques. Les positions de certains nombres sont imposées d'avance et vous devez trouver un total de **65** sur chaque ligne, chaque colonne et sur les grandes diagonales.

		3		
23			19	
	4			
6		20	2	24
			11	

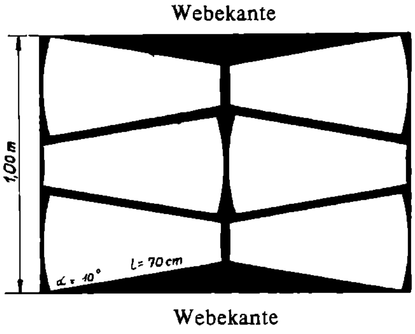
		21		
24	7			
	11			
2			16	
				23

Coup de pouce: répartissez les 25 nombres en 5 tranches (1-5, 6-10, 11-15, 16-20, 21-25). Ils doivent alors être disposés de telle façon que ceux d'une même tranche figurent obligatoirement sur des lignes **et** sur des colonnes **différentes**!

aus: Logigram, Paris

Noch ein Zuschneideproblem: Der Sechs-Bahnen-Rock

Ihr wißt, liebe alpha-Leser, daß Technologien weitgehend von den Eigenschaften des Materials bestimmt werden, das man verarbeiten will. So könnt ihr die im Heft 3/90 vorgestellten Methoden, einen weiten Rock zuzuschneiden, nur bei festen Stoffen anwenden. Aus Seide zugeschnitten würde der Rock zipfeln, d. h. er würde an den Stellen, wo der Faden schiefwinklig zum Radius bzw. zum senkrechten Fall des Kleidungsstückes läuft, länger werden.
Es gibt im wesentlichen drei Rockformen, bei denen dieses Übel nicht auftritt: den angekrausten, den Stufen- und den Sechs-Bahnen-Rock.
Setze ich den Rock aus sechs gleichen, symmetrischen Bahnen zusammen, dann kann die Abweichung vom Fadenlauf gering gehalten werden (Fadenlauf = Parallele zur Webekante).
Das Bild zeigt, wie man den Schnitt auf den Stoff legen kann. Nun kommt es darauf an, ihn so zu konstruieren, daß die Stoffbreite 1 m gut ausgenutzt wird.



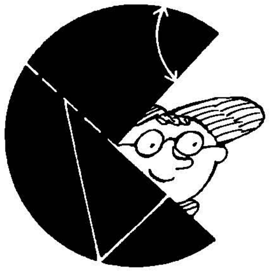
Folgende Bedingungen sind zu erfüllen:
1. Die Rockbahnen haben die Form eines Kegelstumpfmantels. Die Schnitteile sind so aufzulegen, daß ihre Symmetrieachsen die Richtung des Fadenlaufs haben.
2. Die Nahtlinien bilden mit dem Fadenlauf einen Winkel von 10°.
3. Die Rocklänge beträgt vor dem Säumen 70 cm.
4. Für die Nahtzugaben und das versetzte Auflegen der mittleren Rockbahn ist ein geschätzter Spielraum von insgesamt 8 cm zu veranschlagen.

Damit haben die Sehnen der drei Kreisbogen, die die Schnittkante berühren, eine addierte Länge von $2S + s = 92$ cm.
Rechnet weiter und konstruiert!

J. Heller

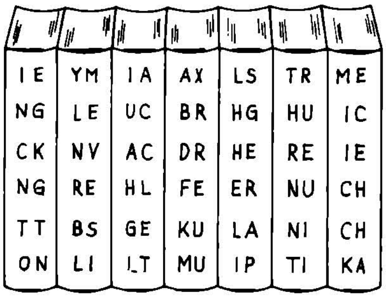
Die Lösung erscheint im nächsten Heft.

In freien Stunden · alpha-heiter



Mathe-Mix

Sechs mathematische Begriffe wurden untereinander auf sieben Buchrücken geschrieben; doch die Bücher wurden umgestellt.



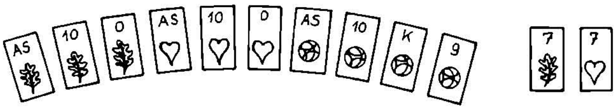
IE	YM	IA	AX	LS	TR	ME
NG	LE	UC	BR	HG	HU	IC
CK	NV	AC	DR	HE	RE	IE
NG	RE	HL	FE	ER	NU	CH
TT	BS	GE	KU	LA	NI	CH
ON	LI	LT	MU	IP	TI	KA

Bringt die Bücher wieder in die richtige Reihenfolge, und ihr werdet wissen, um welche Begriffe es sich handelt!

Dr. R. Mildner, Leipzig

Ein Farbspiel „ohne 11 Spitzen“

Das Blatt eines Skatspielers besteht aus den 10 Karten As, Zehn und Ober von Pik und auch von Herz sowie As, Zehn, König und Neun von Karo. Beim Reizen erhält er das Spiel auf „24“. Im Skat findet er Pik- und Herz-Sieben. Er spielt Kreuz und gewinnt das Spiel, obgleich ein Spieler mit derartigen Karten im Mittel nur jedes 18. Spiel gewinnen kann.



a) Welche Kartenblätter haben seine Gegner?
b) Welche Karten hat der Spieler in den Skat gelegt?
c) Welche Spielweise wendet der Spieler an?

W. Träger, Döbeln

Einer paßt nicht

Stempel Fenster Klafter Klammer Klemmer Stummel Meister

Von den sieben Begriffen weisen sechs eine Gemeinsamkeit auf. Einer paßt nicht in diese Reihe. Welcher ist es und warum?

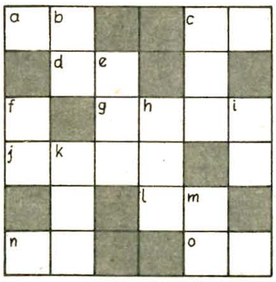
Ing. K.-H. Milde, Dresden

Lernen ist wie Rudern gegen den Strom.
Sobald man aufgibt, treibt man zurück.

Chinesisches Sprichwort

Kreuzzahlrätsel

Waagerecht: a_w Quersumme aller drei- und vierstelligen Zahlen dieses Rätsels; c_w Quadratzahl; d_w echter Teiler von n_w; g_w Primzahl kleiner als j_w; j_w Zahl mit gleichen Ziffern; l_w Vielfaches von f_s; n_w Quadratzahl; o_wVielfaches von l_w



a	b	▨	▨	c	
▨	d	e	▨		▨
f	▨	g	h		i
j	k			▨	
▨		▨	l	m	▨
n		▨	▨	o	

Senkrecht: b_s gerade Zahl; c_s Zahl mit den drei Ziffern von k_s; e_s ungerade Zahl; f_s Teiler von j_w; h_s Primzahl; i_s Quadratzahl; k_s Teiler von j_w; m_s ungerade Zahl.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Personalpronomen

Die abgebildeten Kryptogramme sind – durch Einsetzen von dezimalen Grundziffern für die Buchstaben – mehrdeutig lösbar.
Gebt im Falle b) alle Lösungen und in den Fällen a) und c) mindestens vier verschiedene Lösungen an!

a) $$\begin{array}{r} \mathrm{ICH} \\ +\mathrm{DU} \\ \hline \mathrm{WIR} \end{array}$$
b) $$\begin{array}{r} \mathrm{ER} \\ +\mathrm{ES} \\ \hline \mathrm{SIE} \end{array}$$
c) $$\begin{array}{r} \mathrm{WIR} \\ +\mathrm{IHR} \\ \hline \mathrm{SIE} \end{array}$$

Dr. R. Mildner, Leipzig

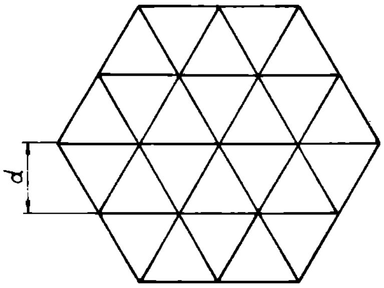
Otto Hahn (Chemiker, Nobelpreisträger, 1879 bis 1968) ging mit einem jüngeren Wissenschaftler, aufmerksam seine Umgebung beobachtend, spazieren. Dabei entschlüpfte dem 78jährigen die Äußerung: „Wissen Sie, wenn man die vielen hübschen jungen Mädchen sieht, möchte man wirklich noch einmal 70 sein.“

aus: Lingmann/Schmiedel: Anekdoten, Episoden, Lebensweisheiten, VEB Fachbuchverlag Leipzig

Magische Hexagone

Den 24 kongruenten gleichseitigen Dreiecken sind
a) die natürlichen Zahlen von 1 bis 24 und
b) die natürlichen Zahlen von 1 bis 6, wobei jede genau viermal verwandt wird,
so zuzuordnen, daß die Summen der in allen 12 sichtbaren Streifen der Breite d stehenden Zahlen gleich sind.

W. Träger, Döbeln



Vom Kern zum Wort

Unabhängig von ihrer Reihenfolge sind die bereits eingetragenen Wörter zu Begriffen nachstehender Bedeutung zu ergänzen. Richtig gelöst ergeben die Anfangsbuchstaben den Namen des Ergebnisses einer Grundrechenoperation.

				R	A	T	
				E	I	S	
		D	I	N			
					I	O	N
		P	L	I			
			O	N	E		
					A	L	E
			G	E	N		

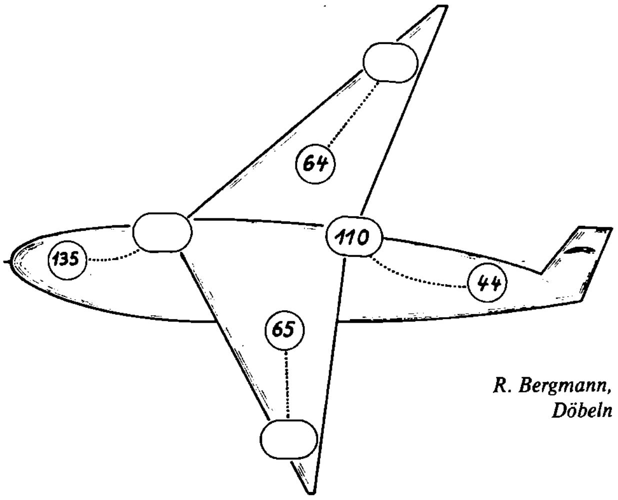
1. Gerade, die eine Kurve in einem Punkt berührt,
2. spezielle Vierecke,
3. Hochzahl einer Potenz,
4. Zahlwort (lateinisch),
5. 10^{18} als Zahlwort,
6. Kreise, auf denen die Eckpunkte eines Vielecks liegen,
7. Gegenteil von explizit,
8. y-Wert im Koordinatensystem.

OL K. Koch, Schmalkalden

Mathematische Luftfracht

In die drei freien ovalen Felder sind natürliche Zahlen derart einzutragen, daß das Flugzeug sich im „Gleichgewicht" befindet, daß also die Summe der auf der linken Tragfläche stehenden beiden Zahlen (Kreis und Oval) gleich der Summe der beiden auf der rechten stehenden ist und die Summe der beiden vorn stehenden Zahlen gleich der Summe der beiden hinten stehenden ist. Dabei ist zu beachten, daß die Summe

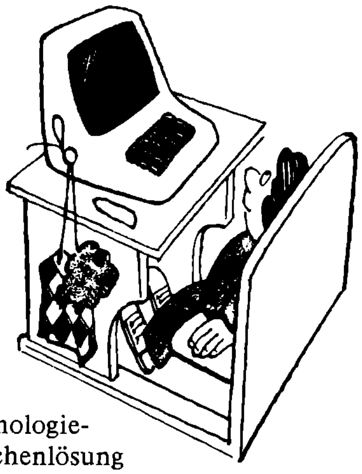
a) aller in Kreisen stehenden Zahlen gleich der Summe aller in den Ovalen stehenden,
b) der Quadrate aller in Kreisen stehenden Zahlen gleich der Summe der Quadrate aller in den Ovalen stehenden sein soll.
Wie lauten die einzutragenden Zahlen?



R. Bergmann, Döbeln

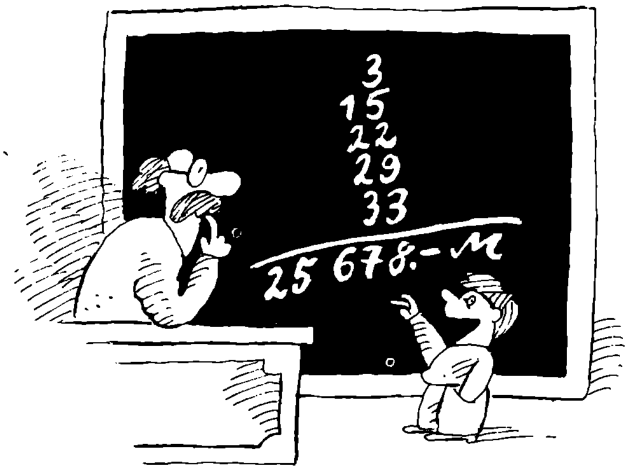
Wir wünschen allen (Schul-)anfängern einen guten Start in den neuen Lebensabschnitt!

Alphons



Technologie-Zwischenlösung

Peter Dittrich aus: Eulenspiegel



„Ganz einfach, wir haben im Lotto gewonnen!"

Lothar Otto

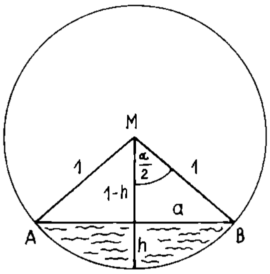
Eine Aufgabe für den Schulrechner SR1

Ein Flüssigkeitstank habe die Gestalt eines liegenden Zylinders, der Durchmesser betrage 2 m und die Länge L des liegenden Zylinders 10 m. Für diesen Tank soll ein Meßstab angefertigt werden. Nun werden einige Leser einwenden, daß diese Aufgabe nicht sehr sinnvoll ist, denn für einen echten Tank wird man den Meßstab doch durch Ausprobieren (Einfüllen abgemessener Flüssigkeitsmengen) schnell erhalten können. Unlängst hat sich aber ein Betrieb mit einem derartigen Problem an uns gewandt. In diesem Betrieb ist der Behälter bereits teilweise gefüllt und soll nie restlos leer werden, eine Füllanzeige fehlt aber.

1. Ein gleichmäßig unterteilter Stab

Es soll zuerst ein gleichmäßig unterteilter Stab hergestellt werden, bei dem die Markierungen im Abstand von 10 cm aufzutragen sind. Das Bild 1 stellt einen Schnitt parallel zu den Stirnflächen des Tanks dar.

Bild 1



Es ist $\cos\frac{\alpha}{2} = 1 - h$. Alle Winkel sollen in Bogen angegeben werden, bei Berechnungen mit dem SR 1 ist dieser deshalb auf RAD zu stellen. Der Kreissektor ABM hat den Flächeninhalt $S = \frac{\alpha}{2}$ (weil der Kreis vom Radius 1 den Flächeninhalt π besitzt, gilt nämlich: $S : \pi = \alpha : 2\pi$).

Der Flächeninhalt F_D des Dreiecks ABM ist $F_D = \frac{a}{2}(1-h)$. Wegen

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}$ folgt $F_D = (1-h)\sin\frac{\alpha}{2}$.

Mithin ist der Flächeninhalt F_K des durch AB markierten Kreisabschnittes

$$F_K = \frac{\alpha}{2} - (1-h)\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\alpha - 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(\alpha - \sin\alpha).$$

Ihr könnt F_K nun auch als Funktion von h notieren. Es ist aber einfacher, die Rechnung so zu organisieren:

a) Vorgabe von h
b) Berechne $\alpha = 2\arccos(1-h)$
c) Berechne $V = 5(\alpha - \sin\alpha)$
d) Notiere V und beginne die Rechnung mit einem neuen h bei a).

Um das Zwischenergebnis α nicht aufschreiben zu müssen, wird α im Speicher M des SR 1 durch Drücken der Taste $\boxed{x\to M}$ abgespeichert. Nachdem $\sin\alpha$ gebildet wurde, kann die Zahl α durch $\boxed{MR}$ zurückgeholt und zu $-\sin\alpha$ addiert werden. wir haben also folgende Tasten auf dem SR 1 zu drücken:

$\boxed{}\ldots\boxed{}\ \boxed{+/-}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{F}\ \boxed{\text{arccos}}$
Eingabe h

$\boxed{\times}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{x\to M}\ \boxed{\sin}$

$\hookrightarrow \boxed{+/-}\ \boxed{+}\ \boxed{MR}\ \boxed{=}\ \boxed{\times}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$
↑ Ergebnis notieren

Aus Symmetriegründen braucht die Rechnung nur für $0 < h \leqq 1$ durchgeführt zu werden.

Tabelle 1

Höhe h [m]	Volumen V [m³] SR 1	Z 9001	Vol. [l] (rund)
0,1	0,58725	0,58726	590
0,2	1,6350111	1,63501	1640
0,3	2,9549883	2,95499	2950
0,4	4,472952	4,47295	4470
0,5	6,141848	6,14185	6140
0,6	7,9267319	7,92674	7930
0,7	9,7992199	9,79922	9800
0,8	11,734794	11,7348	11730
0,9	13,711305	13,7113	13710
1,0	15,707963	–	15710

In der 3. Spalte sind die mit dem Heimcomputer robotron Z 9001 erhaltenen Resultate angegeben. Für die vorliegende Aufgabe bietet es sich an, einen programmierbaren Rechner zu benutzen, weil für verschiedene Werte h immer die gleichen Rechenoperationen auszuführen sind. Der Heimcomputer kann jedoch die Werte der Funktion arccos nicht direkt berechnen, d. h. diese Funktion ist für den Z 9001 nicht als (fest programmierte) Standardfunktion vorgesehen. Der Z 9001 besitzt aber die Standardfunktion arctan. Weil aus $u = \cos v$ stets

$$\tan v = \frac{\sqrt{1-\cos^2 v}}{\cos v} = \frac{\sqrt{1-u^2}}{u} \text{ folgt,}$$

ist bei uns

$$\alpha = 2\arctan\left(\frac{\sqrt{2h-h^2}}{1-h}\right).$$

Das entsprechende BASIC-Programm lautet:

```
10 FOR H=0.1 TO 0.91 STEP 0.1
20 AP=2*ATN(SQR(2*H-H*H)/
   (1-H))
30 V=5*(AP-SIN(AP))
40 PRINT "V=";V,"H=";H
50 NEXT
```

Bei diesem Programm werden die Anweisungen 20, 30 und 40 für H = 0,1, H = 0,2, …, H = 0,9 abgearbeitet. AP bezeichnet die Größe α. ATN, SIN und SQR stehen für die im Computer programmierten Funktionen arctan, sin und $\sqrt{}$. Für H = 1 würde das Programm kein Ergebnis liefern, weil dann in Anweisung 20 eine Division durch 0 auftreten würde.

2. Ein nichtlinear unterteilter Stab

Wie hoch ist der Tank bei einer vorgegebenen Flüssigkeitsmenge gefüllt? Wie ist die Unterteilung eines Stabes vorzunehmen, wenn Markierungen zu bestimmten Volumina anzuzeichnen sind? Dieses Problem soll jetzt skizziert werden.

Es ist

$V = 5(\alpha - \sin\alpha)$ und $h = 1 - \cos\frac{\alpha}{2}$.

Bestimme zuerst α so, daß

$\alpha - \sin\alpha - \frac{1}{5}V = 0$ ist, und ermittle anschließend die zugehörige Höhe h, wobei V gegeben ist. Es liegt eine nichtlineare Gleichung für die Unbekannte α vor. Grafisch können wir die Lösung näherungsweise als Abszisse des Schnittpunktes der Kurve $y = \sin\alpha$ mit der Geraden $y = \alpha - \frac{1}{5}V$ bestimmen. Beim Heimcomputer kann man sich die Funktion $\alpha - \sin\alpha - \frac{V}{5}$ auf dem Bildschirm aufzeichnen lassen, dann kann ungefähr die Nullstelle abgelesen werden. Häufig ist die erhaltene Näherung α_0 *iterativ* auf folgende Weise zu verbessern:

Wegen $\alpha = \sin\alpha + \frac{1}{5}V$ kann

$\alpha_1 = \sin\alpha_0 + \frac{1}{5}V$ berechnet werden,

anschließend

$\alpha_2 = \sin\alpha_1 + \frac{1}{5}V$, usw. Für „genügend gute“ Näherungen α_0 und Lösungen α mit $0 < \alpha < \pi$, die nicht zu nahe bei π liegen, liefert diese Methode immer bessere Näherungen für die Nullstelle.

Ist z. B. $V = 5$, so finden wir grafisch (Bild 2) $\alpha_0 \approx 2$.

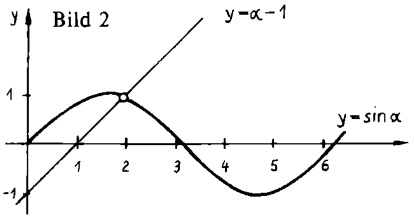


Bild 2

Auf dem SR 1 ist die Tastenfolge

$\boxed{2}\ \boxed{\sin}\ \boxed{+}\ \boxed{1}\ \boxed{=}$
↑ Ergebnis notieren

auszuführen. Wir finden die Näherungen

$\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 1{,}909, \ldots,$
$\alpha_{10} = 1{,}9345633$.

Der SR 1 zeigt den Funktionswert $\alpha_{10} - \sin\alpha_{10} - 1 = 4 \cdot 10^{-8}$ an, also haben wir die Nullstelle sehr gut angenähert.

Dazu finden wir $h = 0{,}43246$ m. Eine andere Iterationsvorschrift zur Nullstellenbestimmung erhaltet ihr mit dem Newton-Verfahren:

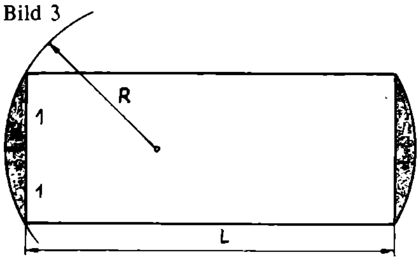
$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{\alpha_k - \sin\alpha_k - \frac{1}{5}V}{1 - \cos\alpha_k}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Probiert es auf eurem Schulrechner aus und berechnet die Abstände auf dem Meßstab, wenn die zugehörigen Volumendifferenzen 1 m³ betragen sollen!

3. Behälter mit gewölbten Stirnflächen

In Wirklichkeit haben die Tankbehälter gewölbte Stirnhauben.
Wir *nehmen* hier *an*, daß es sich dabei um Abschnitte einer Kugel mit einem gewissen Radius R handelt (Bild 3).
Nun werden die durchzuführenden Rechnungen schwierig.

Bild 3



a) Sind nur „schwache" Wölbungen vorhanden, so berechne man näherungsweise den Meßstab für einen etwas längeren Zylinder. Das Volumen V_Z des Zylinders der Länge $L = 10$ m beträgt 10πm³.
Die schraffierten Kugelabschnitte besitzen das Volumen

$$V_A = 2\frac{1}{6}\pi(3 + H^2)H,$$

also ist das Gesamtvolumen des Tanks

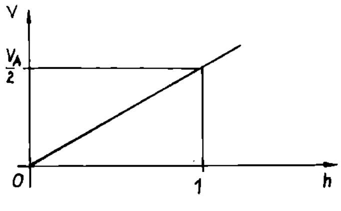
$$V_G = V_Z + V_A = 10\pi + \frac{1}{3}\pi(3 + H^2)H$$
$$= \pi\left(10 + H + \frac{H^3}{3}\right).$$

Ist z. B. $H = 0{,}2$ m, so ergibt dies $V_G = 32{,}053$ m³. Das entspricht dem Volumen eines liegenden Kreiszylinders vom Radius 1 m und der Länge

$$10 + H + \frac{H^3}{3} = 10{,}203 \text{ m}.$$

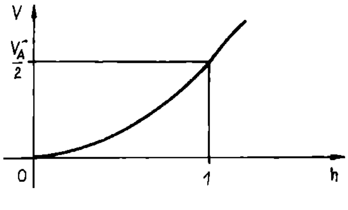
b) Man könnte auch so vorgehen: Die beiden Kugelabschnitte haben zusammen das Volumen V_A. Dieses Volumen fügen wir proportional zur vorgegebenen Höhe h der (wie in 1. berechneten) Flüssigkeitsmenge des zur Höhe h gefüllten Zylinders hinzu (Bild 4).

Bild 4



Weil für kleine h diese Korrektur zu groß ist, wäre es günstiger, eine Funktion der in Bild 5 gezeichneten Gestalt zu suchen.

Bild 5



Die Funktion

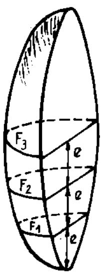
$$g(h) = \frac{1}{2\pi}(\pi h - 0{,}7\sin(\pi h))\,V_A \text{ ist}$$

z. B. recht gut geeignet. Ihr könnt also

$$V(h) = 5(\alpha - \sin\alpha) + \frac{1}{2\pi}(\pi h - 0{,}7\sin(\pi h))\,V_A \text{ mit}$$

$\alpha = \arccos(1 - h)$ berechnen bzw. zu den in Tabelle 1 angegebenen Zahlen den zweiten Summanden als Korrektur zufügen.
c) Das Volumen ließe sich näherungsweise auch folgendermaßen ermitteln: Wir legen im Abstand $h = l, 2l, \ldots$ zur Grundfläche (Erdboden) parallele Ebenen (Bild 6) und nähern die Kugel vom Radius R „schichtweise" durch Kegelstümpfe an.

Bild 6



Damit werden auch die Kugelabschnitte, welche die Stirnwölbungen des Tanks bilden, schichtenweise aus Abschnitten von Kegelstümpfen zusammengesetzt. Die Deckfläche einer derartigen Schicht (zur Höhe $h = il$) ist ein Kreisabschnitt, seinen Flächeninhalt F_i wollen wir berechnen. Überlegt euch, daß

$$R = \frac{1}{2H}(1 + H^2) \text{ ist. Für die Sehnenlänge}$$

s ($= 2a = \overline{AB}$, siehe Bild 1) gilt
$s = 2\sqrt{2h - h^2}$.
Die Kugel vom Radius R wird in der Höhe $h = il$ von einer zur Grundfläche parallelen Ebene in einem Kreis vom Radius
$\varrho = \sqrt{R^2 - (1 - h)^2}$ geschnitten, mithin gilt für den Inhalt der gesuchten

$$\text{Fläche } F_i = \frac{\varrho^2}{2}(\beta - \sin\beta) \text{ mit}$$

$$\beta = 2\arcsin\frac{s}{2\varrho},\ F_0 = 0.$$

Bild 7

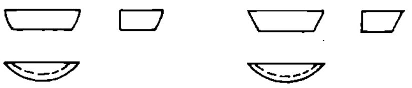


Bild 7 zeigt euch die Schichten des Kugelabschnittes und die approximierenden Kegelstumpfabschnitte in drei Ansichten. Wir bezeichnen (ähnlich wie vorn) mit $V_G(h)$, $V_A(h)$ und $V_Z(h)$ die Flüssigkeitsmenge vom Tank, von den beiden Kugelabschnitten und vom Kreiszylinder bei der Füllhöhe h. Dann ist ungefähr
$V_A(l) = lF_1$ und
$V_A(il) = V_A((i-1)\,l) + l(F_i + F_{i-1})$
für $i \geqq 2$.
Als konkretes Beispiel betrachten wir einen Tank mit $H = 0{,}2$ m, $L = 10$ m und wählen $l = 0{,}1$ m.
Dann ist $R = 2{,}6$ und $R^2 = 6{,}76$.

Wir erhalten (unter Berücksichtigung der Werte $V_Z(h)$ aus Tabelle 1) die gerundeten Werte

Tabelle 2

i	h	F_i [m²]	$V_A(h)$ [m³]	$V_G(h)$ [m³]
1	0,1	0,0229	0,0023	0,590
2	0,2	0,0593	0,0105	1,646
3	0,3	0,0994	0,0264	2,981
4	0,4	0,1392	0,0503	4,523
5	0,5	0,1760	0,0818	6,224
6	0,6	0,2080	0,1202	8,047
7	0,7	0,2340	0,1644	9,964
8	0,8	0,2531	0,2131	11,948
9	0,9	0,2648	0,2649	13,976
10	1,0	0,2688	0,3183	16,026

Wir können uns davon überzeugen, wie gut diese Näherungen sind.
Exakt berechenbar ist

$$V_A = V_A(2) = 2\frac{1}{6}\pi H(3 + H^2),$$

mit dem SR 1 erhält man
$V_A = 0{,}63669$ m³. Nun muß

$$\left[\sum_{i=1}^{10} F_i + \frac{1}{2}F_{10}\right]\frac{1}{10} \approx \frac{1}{4}V_A \text{ sein;}$$

eigentlich muß nach unserem Vorgehen zwischen den beiden Zahlen „<" stehen.
Wir überprüfen dies mit dem SR 1 und notieren

$$\frac{1}{10}\left[\sum_{i=1}^{90} F_i + \frac{1}{2}F_{10}\right] = 0{,}1591 \text{ sowie}$$

$\frac{1}{4}V_A = 0{,}1592$. Da hier nur mit vier Dezimalstellen gerechnet wurde, ist dies eine sehr gute Übereinstimmung.

Zum Schluß sind in Tabelle 3 die mit den Methoden a), b) und c) berechneten Volumina (in m³) zu vorgegebenen Höhen dargestellt:

Tabelle 3

h [m]	a)	b)	c)
0,1	0,599	0,597	0,590
0,2	1,668	1,657	1,646
0,3	3,015	2,993	2,981
0,4	4,564	4,533	4,523
0,5	6,267	6,230	6,224
0,6	8,088	8,050	8,047
0,7	9,998	9,965	9,964
0,8	11,973	11,948	11,948
0,9	13,990	13,976	13,976
1,0	16,027	16,026	16,026

W. Schmidt

Buchtip

H. Backe/R. Backe/H. Giegengack

Erlebte Physik

Das Physik-Experimentierbuch
304 S., 328 Abb.
Bestell-Nr. 654 051 2 Preis: 18,00 DM
Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Physik 200mal zum Selbermachen! Das ist das Skelett dieses Experimentierbuches, das bereits zwei Generationen in die Physik eingeführt hat.

Was ist eine Delaunay-Triangulierung?

Alle nachfolgenden Betrachtungen wollen wir der Einfachheit halber nur in der Ebene durchführen. Zunächst definieren wir den Begriff „Triangulierung". Dazu sei eine Menge von n paarweise verschiedenen Punkten gegeben.

Definition: Ein zusammenhängendes Netz von Dreiecken heißt genau dann *Triangulierung einer Menge von n Punkten,* wenn alle Eckpunkte der Dreiecke Punkte der Menge sind und wenn jeder Punkt der Menge Eckpunkt eines Dreiecks ist.

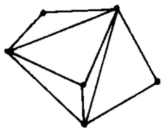


Bild 1

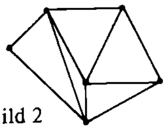


Bild 2

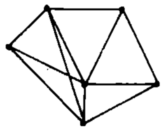
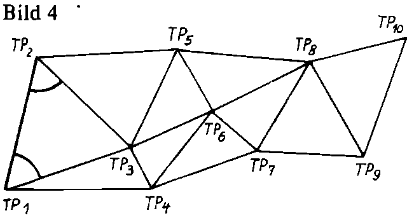


Bild 3

In den Bildern 1 und 2 sind zwei verschiedene Triangulierungen derselben Menge von 6 Punkten dargestellt. Das in Bild 3 aufgeführte Beispiel ist keine Triangulierung dieser Menge.

Triangulierungen spielen in verschiedenen Gebieten eine Rolle. Beispielsweise werden zur Landvermessung markante Punkte in der Landschaft als trigonometrische Punkte gekennzeichnet und durch eine Triangulierung verbunden (Bild 4).

Bild 4



Wenn die Entfernung zwischen zwei trigonometrischen Punkten bekannt ist, etwa die zwischen TP_1 und TP_2, so lassen sich, indem nur Winkel zwischen trigonometrischen Punkten gemessen werden, sukzessive alle anderen Entfernungen berechnen. Dies ist sicher nützlich, da in der Landschaft Winkel leichter gemessen werden können als Entfernungen und zudem Hindernisse zwischen trigonometrischen Punkten, zum Beispiel Flüsse, eine direkte Entfernungsmessung erschweren. (Vgl. den Artikel K.-G. Steinert: Gauß' Beiträge zur Astronomie und Geodäsie. *Alpha* 11 (1977) 2, S. 25ff.)

▲1▲ Nenne Beispiele aus anderen Gebieten, in denen Triangulierungen auftreten!

Die in den Bildern 1 und 2 angeführten Beispiele zeigen, daß es im allgemeinen mehrere verschiedene Möglichkeiten gibt, Triangulierungen einer gegebenen Menge von Punkten zu zeichnen. Eine spezielle unter Umständen sogar eindeutig bestimmte Triangulierung ist dagegen die Delaunay-Triangulierung.

Bevor wir diese definieren, werden wir zunächst einen Begriff einführen, auf dessen Grundlage später die Delaunay-Triangulierung einer Punktmenge bestimmt wird. Dazu ordnen wir jedem Punkt einer gegebenen Menge ein Territorium zu. Für alle Punkte, die dem Territorium von P angehören, gilt dabei, daß der Abstand zum Punkt P kleiner ist als der zu den übrigen Punkten der betrachteten Menge. Aus dieser Zuordnungsvorschrift folgt unmittelbar, daß die Territorialgrenze, die die Territorien zweier benachbarter Punkte A und B gegeneinander abgrenzt, auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB liegt, da genau für die Punkte auf der Mittelsenkrechten gleiche Abstände zu A und B vorliegen. Die Territorialgrenzen bilden um jeden Punkt ein konvexes Vieleck, das Voronoi-Polygon dieses Punktes (Bilder 5 und 6).

Bild 5

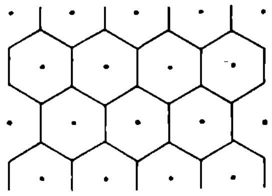
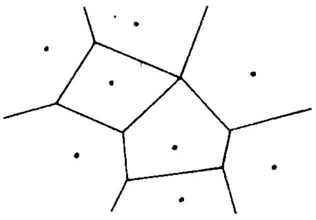


Bild 6



Einige dieser Voronoi-Polygone begrenzen unendliche Territorien, andere sind geschlossen. Die Zerlegung der Ebene, die durch die Voronoi-Polygone erzeugt wird, heißt Dirichlet-Zerlegung. Sie wird unter anderem dazu verwendet, das Territorialverhalten von Tieren zu beschreiben.

▲2▲ Wähle 10 Punkte und konstruiere die zugehörige Dirichlet-Zerlegung!

Fall 1: Wir betrachten vorerst nur solche Anordnungen von n Punkten, deren Dirichlet-Zerlegung die Eigenschaft haben, daß jeweils genau drei Voronoi-Polygone einen gemeinsamen Eckpunkt besitzen. Sind A, B und C drei Punkte, deren zugehörige Voronoi-Polygone den Eckpunkt U gemeinsam haben, so ist U der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks $\triangle ABC$, also dessen Umkreismittelpunkt.

▲3▲ Beweise, daß der Umkreis des erwähnten Dreiecks $\triangle ABC$ außer A, B und C keinen weiteren Punkt der betrachteten Menge im Inneren oder auf dem Rand enthält!

Wir definieren jetzt den Begriff Delaunay-Triangulierung.

Definition: Eine Triangulierung einer Menge von n Punkten heißt genau dann **Delaunay-Triangulierung**, wenn der Umkreis jedes Dreiecks der Triangulierung keinen Punkt der Menge im Inneren enthält.

Nun können wir eine Delaunay-Triangulierung einer Menge von Punkten konstruieren. Wir verbinden drei Punkte genau dann zu einem Dreieck, wenn ihre Voronoi-Polygone einen gemeinsamen Eckpunkt besitzen. Aufgrund der in Aufgabe 3 genannten Eigenschaft enthält der Umkreis jedes dieser Dreiecke keinen weiteren Punkt der Menge. Es liegt demnach eine Delaunay-Triangulierung vor.

Die Besonderheit, die Delaunay-Triangulierungen gegenüber anderen Triangulierungen auszeichnet, ist die Eigenschaft, annähernd „gleichwinklige" Dreiecke zu erzeugen.

Zwei Dreiecke, die eine gemeinsame Seite besitzen, bilden ein Viereck, wobei die gemeinsame Seite eine Diagonale darstellt. Liegt ein konvexes Viereck vor, besteht die Möglichkeit, diese Diagonale durch die andere Diagonale zu ersetzen, wodurch zwei neue Dreiecke entstehen (Bilder 7 und 8).

Bild 7

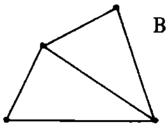
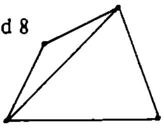


Bild 8



Während die beiden Dreiecke in Bild 7 nahezu „gleichwinklig" sind, ist bei den beiden Dreiecken in Bild 8 eine größere Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten der sechs Innenwinkel festzustellen.

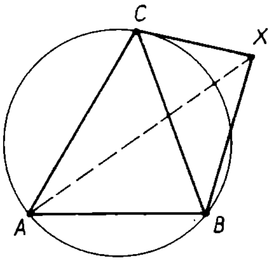
Erst 1978 hat R. Sibson folgenden Satz bewiesen:

Genau dann, wenn eine Diagonale in einem konvexen Viereck, das kein Sehnenviereck ist, so gewählt wird, daß die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten der sechs Innenwinkel minimal ist, liegt eine Delaunay-Triangulierung vor.

Nach diesem Max-Min-Winkelkriterium ist die Lage der Diagonalen im Viereck $ABCX$ abhängig von der Lage des Punktes X bezüglich des Dreiecks $\triangle ABC$.

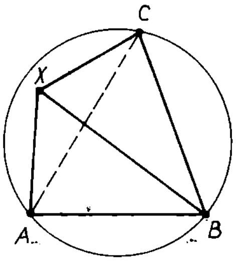
Liegt X außerhalb des Umkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ (Bild 9), so ergibt sich nach dem Max-Min-Winkelkriterium als Diagonale BC.

Bild 9



Wenn X dagegen innerhalb des Umkreises, aber noch außerhalb des $\triangle ABC$ liegt (Bild 10), liefert das Kriterium BX als Diagonale.

Bild 10



Betrachten wir nun die Umkreise der Dreiecke, die bei einer Triangulation nach dem Max-Min-Winkelkriterium entstehen, so zeigt sich, daß es keinen Punkt der jeweils gegebenen Menge gibt, der innerhalb des Umkreises eines Dreiecks liegt.

Fall 2: Wir betrachten nun beliebige Anordnungen von n Punkten, also auch solche, bei deren Dirichlet-Zerlegung mehr als drei Voronoi-Polygone einen gemeinsamen Eckpunkt besitzen.

Um eine Delaunay-Triangulierung derartiger Mengen konstruieren zu können, müssen wir noch festlegen, wie mehr als drei Punkte, deren Voronoi-Polygone einen gemeinsamen Eckpunkt haben, zu Dreiecken zu verbinden sind.

▲4▲ Beweise, daß alle Punkte einer gegebenen Menge, deren Voronoi-Polygone einen gemeinsamen Eckpunkt U besitzen, auf einem Kreis um U liege, der keinen weiteren Punkt der Menge im Inneren enthält!

Aus dem in Aufgabe 4 genannten Sachverhalt folgt, daß wir alle Punkte einer gegebenen Menge, die einem Kreis angehören, der keinen Punkt der Menge als inneren Punkt besitzt, auf beliebige Art und Weise zu Dreiecken verbinden können, ohne daß die Eigenschaft der Delaunay-Triangulierung verletzt wird. Eine eindeutig bestimmte Delaunay-Triangulierung erhalten wir daher genau dann, wenn immer genau drei Voronoi-Polygone der Dirichlet-Zerlegung der betrachteten Menge einen gemeinsamen Punkt haben.

▲5▲ Konstruiere eine Delaunay-Triangulierung der in Aufgabe 2 gewählten Punktmenge!

Wo spielt in der Mathematik dieser elementargeometrische Sachverhalt eine Rolle?

Wir geben skizzenhaft ein Beispiel an.

Es sollen die Strömungsverhältnisse an der Tragfläche eines Flugzeugs untersucht werden. Die mathematische Beschreibung ist durch ein Differentialgleichungssystem gegeben. Differentialgleichungen sind Gleichungen, die Beziehungen zwischen Funktionen und deren Ableitungen angeben. Im allgemeinen gelingt es meist nicht, die Lösungsfunktion explizit zu bestimmen. Daher begnügt man sich mit Funktionswerten der gesuchten Funktion an einigen Stellen. Diese Stellen können die Eckpunkte der Dreiecke einer Triangulierung, zum Beispiel einer Delaunay-Triangulierung sein. Deshalb ist es wichtig, solche Triangulierungen zu beherrschen.

W. Moldenhauer, K. Wetwitschka

Fortsetzung von Seite 75

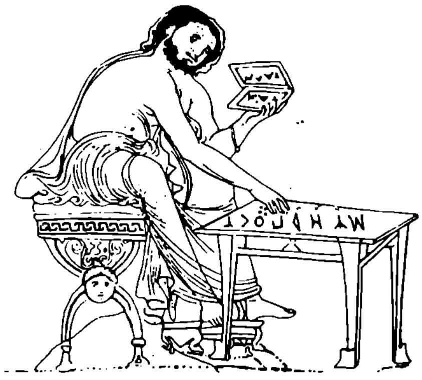


Bild 11
Darstellung eines griechischen Rechenbretts (Abakus)

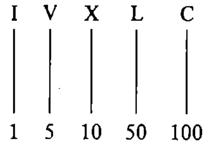


Bild 12
Prinzipskizze des Abakus.
Das Liniensystem ist mit römischen Ziffern bezeichnet

Obwohl die Position der Steine deren Wert bestimmte und dies dem Rechner tagtäglich vor Augen geführt wurde, übertrugen die Rechner dieses unbewußt gehandhabte Positionssystem nicht in die Ziffernschreibweise. Erst mit den arabischen Ziffern setzte sich langsam das Positionssystem durch, und noch Adam Ries schrieb (um 1520) Rechenbücher zum Rechnen auf den Linien (Abakus) oder mit der Feder (entspricht arabischen Ziffern mit Multiplikationstabellen, d. h. dem 1×1). Erst allmählich faßte das algorithmische Rechnen Fuß. Der Grund: Was man konnte, funktionierte, und niemand lernt gern um, wenn es nicht nötig ist (Bild 13).

Bild 13
Symbolische Darstellung:
Sieg des Ziffernrechnens über das Rechnen auf den Linien

Die Schriftform der Ziffern wurde durch das Aufkommen des Buchdrucks stabilisiert. Als die Frakturschrift bei den Zahlzeichen durch Antiquaschriften abgelöst wurde, bekamen die Ziffern die im wesentlichen noch heute übliche Form. Erst neuerdings sind mit Bank- und Computerzahlen neue Formen verbreitet worden, wobei der auf vielen Waren des täglichen Bedarfs angebrachte Strichcode, die Europäische Artikelnummer (EAN), die radikalste Änderung der Zahlzeichen ist, bedingt durch die Forderung nach Maschinenlesbarkeit (Bild 14).

Bild 14
Computerzahlen sowie ein Beispiel für den Strichcode

R. Thiele

Wie mit dem Abakus gerechnet wird, demonstrieren wir in Heft 5/90. *Alphons*

Kuriose Identitäten

1. Es gibt eine natürliche Zahl m, für die folgendes gilt:

a) $\sqrt[4]{m} = \frac{1}{4}\sqrt{m}$

und

b) $\sqrt[8]{m} = \frac{1}{8}\sqrt{m}$

Wie heißt sie?

2. Es gibt eine natürliche Zahl m, für die folgendes gilt:

$$\sqrt[3]{n} = \frac{1}{3}\sqrt{n}$$

Wie heißt sie?

Ing. Klaus-Horst Milde, Dresden

XXX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Schulolympiade

Abgabe beim Mathematiklehrer: Ende September 1990

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen werden im Oktober 1990 in der Trommel und der Jungen Welt veröffentlicht.

Hinweis: Unter den Aufgaben der 1. Stufe befinden sich auch solche (in der Regel ist es die 4. Aufgabe), die aus mehreren Teilaufgaben von steigendem Schwierigkeitsgrad bestehen. Dabei ist Teil a) meist recht einfach zu lösen und gibt in der Regel Hilfe für die Lösung der anderen Teilaufgaben. Die Lösung der letzten Teilaufgabe stellt bewußt hohe Anforderungen. Diese Teilaufgabe ist vorwiegend für die leistungsstärkeren Schüler gedacht. Es wird empfohlen, über diese anspruchsvollen Aufgaben in Klassen und Arbeitsgemeinschaften zu diskutieren.

Anmerkung: $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

300511 Die folgenden Figuren sollen jeweils in gleichgroße Teile zerlegt werden, d. h. in Teile, die alle denselben Flächeninhalt haben.

a) Zeichne ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 5 cm und zeichne darin ein, wie es in zwei gleich große Teile zerlegt werden kann!

b) Zeichne ein weiteres gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 5 cm und seine Zerlegung in drei gleich große Teile!

c) Zeichne für ein weiteres solches Dreieck eine Zerlegung in vier gleich große Teile!

d) Zeichne ein Quadrat der Seitenlänge 7 cm und eine Zerlegung dieses Quadrates in sieben gleich große Teile!

300512 Die Schüler Arnim, Bert, Conny und Detlef wohnen in verschiedenen Städten der DDR, und zwar jeder in genau einer der Städte Dresden, Magdeburg, Potsdam, Schwerin. Darüber macht Arnim folgende vier Aussagen:

(1) Ich bin weder aus Potsdam noch aus Dresden.
(2) Bert ist entweder aus Potsdam oder aus Schwerin.
(3) Conny ist weder aus Dresden noch aus Magdeburg.
(4) Detlef ist entweder aus Potsdam oder aus Magdeburg.

Stelle fest, ob alle diese Aussagen Arnims gleichzeitig wahr sein können! Begründe deine Feststellung!

300513 Fritz, Hans und Petra haben am Ostseestrand einen Beutel voll Muscheln gesammelt. Sie wissen nicht, wieviel Muscheln sie im Beutel haben.

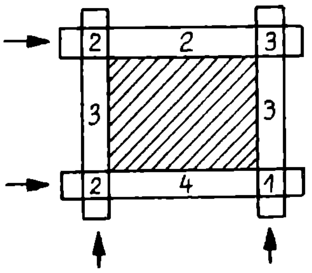
Fritz meint: „Wenn man siebenmal hintereinander je 12 Muscheln aus dem Beutel nimmt, dann bleiben noch mehr als 6 Muscheln übrig."

Hans meint: „Wenn man aber neunmal hintereinander je 10 Muscheln aus dem Beutel nehmen wollte, dann würden die Muscheln dafür nicht ausreichen."

Petra zählt nun die Muscheln nach und stellt fest: „Keiner von euch beiden hat recht."

Wieviel Muscheln waren insgesamt im Beutel?

300514 In einem Schema wie im Bild sollen natürliche Zahlen eingetragen werden. Das Bild zeigt ein Beispiel. Darin beträgt die Summe aller acht Zahlen 20. In jeder Zeile und in jeder Spalte (siehe die Pfeile) entsteht dieselbe Teilsumme, nämlich 7.



a) Gib zwei verschiedene Eintragungen an, bei denen jeweils die Summe aller acht Zahlen 30 beträgt und in jeder Zeile sowie in jeder Spalte die Teilsumme 8 entsteht!

b) Gib eine Eintragung an, bei der in jeder Zeile und in jeder Spalte die Teilsumme 10 entsteht und die Summe aller acht Zahlen möglichst klein ist!

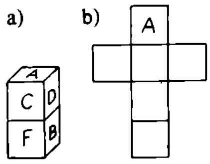
c) Gib eine Eintragung an, bei der die Summe aller acht Zahlen 24 beträgt und in jeder Zeile sowie in jeder Spalte ein einheitlicher Wert als Teilsumme entsteht, der möglichst klein ist!

Eine Begründung zu den Eintragungen wird nicht verlangt.

Olympiadeklasse 6

300611 Das Bild a) zeigt zwei gleiche, mit den Buchstaben *A, B, C, D, E, F* in gleicher Anordnung beschriftete Würfel.

Man soll die Beschriftung des Würfelnetzes im Bild b) so ergänzen, daß zwei Würfel, die mit je einem solchen Netz hergestellt werden, sich zum Bild a) zusammenstellen lassen.



Gib zwei verschiedene Ergänzungsmöglichkeiten an! Gib zu beiden Ergänzungsmöglichkeiten an, welche Fläche des unteren Würfels dann als Grundfläche gewählt werden muß!

300612 a) Gib alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen an, bei denen eine der beiden Ziffern um 4 kleiner ist als die andere!

b) Ermittle unter diesen Zahlen alle diejenigen, die durch ihre Quersumme teilbar sind!

Hinweis: Die Quersumme einer natürlichen Zahl ist die Summe ihrer Ziffern. So hat z. B. die Zahl 24801 wegen $2 + 4 + 8 + 0 + 1 = 15$ die Quersumme 15.

300613 Lina kauft 7 Bleistifte und 8 Hefte ein und stellt dabei fest, daß 7 Bleistifte teurer als 8 Hefte sind.

Was ist teurer: 10 Bleistifte und 2 Hefte oder 11 Hefte und 2 Bleistifte? Begründe deine Antwort!

300614 Die Seiten eines Buches sind mit den Zahlen von 1 bis 235 durchnumeriert.

a) Wie oft wurde bei der Numerierung insgesamt die Ziffer 4 verwendet?

b) Wie oft wurde bei der Numerierung insgesamt die Ziffer 0 verwendet?

c) Wie viele Ziffern sind insgesamt bei dieser Numerierung zu drucken?

Olympiadeklasse 7

300711 Während eines mathematischen Spielnachmittages wurden alle Mitspieler vom Spielleiter aufgefordert, in eine Hand eine gerade Anzahl und in die andere Hand eine ungerade Anzahl von Hölzchen zu nehmen. Anschließend erhielt jeder Mitspieler die Aufgabe, die Anzahl der Hölzchen in seiner rechten Hand mit 2 zu multiplizieren und das entstandene Produkt zur Anzahl der Hölzchen in seiner linken Hand zu addieren.

Jedesmal, wenn ein Mitspieler die so gebildete Summe dem Spielleiter mitteilte, war dieser in der Lage, zutreffend zu sagen, ob der Mitspieler eine gerade Anzahl von

Hölzchen in seiner rechten oder in seiner linken Hand hatte. Wie war das möglich?

300712 Fünf Schüler der Klasse 7a sammelten Altpapier. Von der Menge, die sie insgesamt zusammenbrachten, hatte Marco ein Viertel, Frank ein Sechstel, Matthias ein Fünftel und Steffen ein Zehntel beigetragen. Dirk hatte 2 kg mehr als Marco gesammelt.
a) Wieviel Kilogramm Altpapier hatte jeder dieser fünf Schüler beigetragen?
b) Welcher Betrag wurde für die von den fünf Schülern insgesamt abgelieferte Papiermenge bezahlt, wenn für jedes Kilogramm 30 Pfennig bezahlt wurden?

300713 Von drei Geraden wird vorausgesetzt, daß sie durch einen Punkt C gehen. Von einer vierten Geraden wird vorausgesetzt, daß sie nicht durch C geht und die drei anderen Geraden in Punkten A, B, D schneidet, wobei B zwischen A und D liegt. Auf der Geraden durch A und C liege ein Punkt E so, daß C zwischen A und E liegt. Weiter wird vorausgesetzt, daß die Winkel $\sphericalangle ECD$ und $\sphericalangle ABC$ einander gleich groß sind.
a) Zeichne vier Geraden und dazu Punkte A, B, C, D, E so, daß diese Voraussetzungen erfüllt sind!
b) Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets die Winkel $\sphericalangle BCD$ und $\sphericalangle BAC$ einander gleich groß sein müssen!

300714 In jedem Dreieck beträgt bekanntlich die Innenwinkelsumme 180°, in jedem Viereck 360°.
a) Zeichne je ein Fünfeck, ein Sechseck und ein Siebeneck! Miß die Innenwinkel und berechne jeweils die Innenwinkelsumme! Was vermutest du?
b) Beweise deine Vermutung für jedes Fünfeck, Sechseck und Siebeneck!
c) Versuche eine Formel zu finden und zu beweisen, die für jede natürliche Zahl $n > 3$ die Innenwinkelsumme in jedem n-Eck angibt!
Hinweis: In dieser Aufgabe werden alle n-Ecke als konvex vorausgesetzt, d. h. als n-Ecke, in denen kein Innenwinkel größer als 180° ist. Außerdem wird in dieser Aufgabe vorausgesetzt, daß kein Innenwinkel gleich 180° ist.

Olympiadeklasse 8

300811 Axel läßt Jörg mit einem roten, einem blauen und einem gelben Würfel würfeln. Ohne daß er die geworfenen Augenzahlen sieht, sagt er dann: „Verdopple die Augenzahl des roten Würfels, addiere dazu die Zahl 8 und multipliziere die Summe mit 50! Merke dir das Resultat! Addiere nun zur Augenzahl des blauen Würfels die Zahl 10 und multipliziere die Summe mit 10! Bilde dann zum Schluß die Summe aus dem gerade erhaltenen Produkt, dem vorher gemerkten Resultat und der Augenzahl des gelben Würfels! Wenn du mir diese Summe nennst, kann ich dir von jedem der drei Würfel die geworfene Augenzahl nennen."
a) Wähle drei mögliche Augenzahlen und führe die angegebenen Berechnungen aus!
b) Beschreibe, wie man von der am Ende der Berechnungen genannten Summe zu den Augenzahlen kommen kann! Erkläre, warum man nach deiner Beschreibung stets die richtigen Augenzahlen findet!

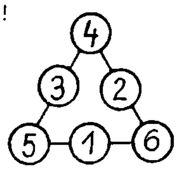
300812 Im Mathematikunterricht wird zur Berechnung des Flächeninhalts eines Drachenvierecks folgende Formel benutzt:

$$A = \frac{e \cdot f}{2}.$$

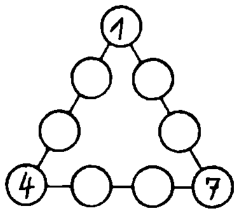
Dabei bedeuten e bzw. f die Längen der beiden Diagonalen des Drachenvierecks. Rolf behauptet, daß diese Formel für jedes Viereck gilt, dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.
Hat er recht?

300813 In einer Ebene seien sieben Punkte so gegeben, daß keine drei von ihnen auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Ermittle die Anzahl aller derjenigen Dreiecke, deren Ecken drei der gegebenen Punkte sind!

300814 a) In das Schema des Bildes a) sind die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 so einzutragen, daß jede der drei „Seitensummen" $5 + 1 + 6$, $6 + 2 + 4$, $4 + 3 + 5$ den Wert $S = 12$ hat.
Untersuche, ob eine solche Eintragung der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 auch mit $S = 9$ möglich ist, ebenso auch mit $S = 10$ und $S = 11$!



Gib jedesmal, wenn das der Fall ist, je eine derartige Eintragung an!
b) In das Schema des Bildes b) sollen außer den bereits eingetragenen „Eckenzahlen" 1, 4, 7 die Zahlen 2, 3, 5, 6, 8, 9 so eingetragen werden, daß jede der drei „Seitensummen" den Wert $S = 19$ hat.



Ermittle alle verschiedenen Eintragungen dieser Art! Dabei sollen zwei Eintragungen genau dann als verschieden gelten, wenn in einer dieser beiden Eintragungen mindestens eine der Zahlen 2, 3, 5, 6, 8, 9 einer anderen Dreiecksseite angehört als in der anderen Eintragung.
c) Im Bild b) beträgt die „Eckensumme" $E = 1 + 4 + 7 = 12$. Ermittle alle diejenigen Werte E, die als „Eckensumme" auftreten können, wenn man die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so in das Schema einträgt, daß die drei „Seitensummen" einen einheitlichen Wert S haben! Begründe, daß es für andere Werte E keine solche Eintragung geben kann!

Olympiadeklasse 9

300911 Drei Schüler wollen ein Spiel nach folgenden Regeln spielen:
1. Es wird (d. h. durch Auslosung der Reihenfolge) festgelegt, daß jeder der drei Schüler stets eine bestimmte Rechenoperation auszuführen hat, und zwar
ein Schüler A die Subtraktion der Zahl 2,
ein Schüler B die Division durch die Zahl 2, der dritte Schüler C das Ziehen der Quadratwurzel (z. B. mit dem Taschenrechner ermittelt).
2. Dann wird eine dreistellige natürliche Zahl zufallsbedingt gewählt (z. B. durch Auslosen unter allen dreistelligen natürlichen Zahlen) und als „Startzahl" bezeichnet.
3. Nun führen die Schüler stets gleichzeitig jeweils ihre Rechenoperation aus. Beim ersten Mal wenden sie die Operation auf die „Startzahl" an, jedes weitere Mal auf das zuvor erhaltene Resultat.
4. Sobald ein Schüler ein Resultat kleiner als 1 erhält, ist das Spiel beendet; dieser Schüler hat verloren.
Bei der Diskussion zur Vereinbarung der Regeln protestiert ein Schüler. Er meint, nach diesen Regeln ergäbe schon die Festlegung der Rechenoperationen zwangsläufig, wer verlieren müsse.
Stimmt das?

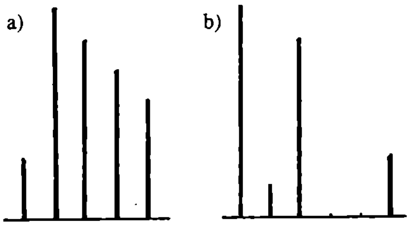
300912 Ein Betrieb hat in den letzten vier Jahren seine Produktion (jeweils gegenüber dem Vorjahr) um 8%, 11%, 9% bzw. 12% gesteigert. Peter meint, daß der Betrieb dann eine Produktionssteigerung von insgesamt 40% erreicht hat.
Weisen Sie nach, daß das nicht stimmt!
Bernd meint, der Betrieb hätte eine größere Steigerung erreicht, wenn er die Produktion viermal um 10% gesteigert hätte.
Stellen Sie fest, ob das richtig ist!

300913 Beweisen Sie, daß in jedem Trapez $ABCD$ mit $AB \| CD$, dessen Diagonalen AC und BD aufeinander senkrecht stehen,

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = (\overline{AB} + \overline{CD})^2$$

gilt!

300914 Ansgar, Bernd und Christoph sehen auf einer Wanderung die Schornsteine eines Kraftwerkes aus genau südlicher Richtung und später aus genau westlicher Richtung. Ansgar fertigte jeweils eine maßstabsgerechte Skizze an. Dabei war in beiden Fällen niemals ein kleinerer Schornstein genau vor einem größeren zu sehen (siehe Bild a, b).
Während der Wanderung stellen die Freunde außerdem fest, daß das Kraftwerk genau sieben Schornsteine hat, von denen keine zwei die gleiche Höhe haben.



Blick aus südlicher Richtung

Blick aus westlicher Richtung

Bernd meint: „Aus südwestlicher Richtung waren nur vier Schornsteine zu sehen.“
Christoph korrigierte ihn: „Es waren genau fünf Schornsteine, einer von ihnen stand genau vor einem größeren.“
Schließlich bemerken sie, daß der drittkleinste Schornstein aus keiner der drei Beobachtungsrichtungen (südlich, westlich, südwestlich) zu sehen war, sondern jeweils durch einen größeren verdeckt wurde.
Ermitteln Sie alle Anordnungen von Schornsteinen auf einem Gelände, die nach diesen Beobachtungen möglich sind! Dabei sei angenommen, daß die Korrektur von Bernds Aussage durch Christoph den Tatsachen entspricht.

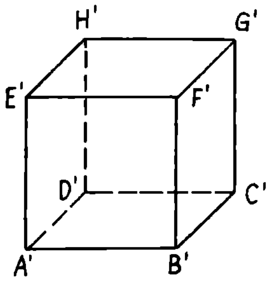
Olympiadeklasse 10

301011 a) Beweisen Sie, daß es unendlich viele pythagoreische Zahlentripel gibt!
b) Beweisen Sie, daß es auch pythagoreische Zahlentripel mit verschiedenen Werten jeweils des Quotienten aus der größten und der kleinsten Zahl des Tripels gibt!
Hinweis: Ein pythagoreisches Zahlentripel ist ein Tripel (a, b, c) aus drei positiven natürlichen Zahlen a, b, c, für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.

301012 Armin möchte ein (auf einem KC lauffähiges) BASIC-Programm schreiben, mit dem sich nach Eingabe jeweils einer natürlichen Zahl $Z > 1$ feststellen läßt, ob Z eine Primzahl ist. Er legt das Programm so an, daß darin (durch eine FOR ... NEXT-Anweisung) alle natürlichen Zahlen $N = 2, \ldots, Z - 1$ geprüft werden, ob sie Teiler von Z sind.
Bert sagt dazu: „Es genügt, nur die natürlichen Zahlen
$N = 2, \ldots, G$ zu prüfen, wobei G die ganze Zahl mit
$G \leqq \sqrt{Z} < G + 1$ ist (also durch
G = INT(SQRZ) ermittelt werden kann).“
Er sagt außerdem: „Wenn Z eine mindestens dreistellige Primzahl ist, so sind nach meinem Vorschlag weniger als ein Zehntel so vieler Zahlen zu überprüfen wie bei deinem Verfahren.“ Armin entgegnet: „Bei deinem Vorschlag, bei dem ja Teiler von Z ungeprüft bleiben können, hat man keine Sicherheit, daß jede Nichtprimzahl als solche erkannt wird.“
a) Ist Berts erste Aussage oder Armins Entgegnung wahr?
b) Ist Berts zweite Aussage wahr?

301013 Wenn die Produktion eines Betriebes um 50 % zurückging (z. B. infolge des Ausfallens eines Teils der Anlage), so muß sie anschließend offensichtlich verdoppelt, d. h. um 100 % erhöht werden, um wieder auf den Anfangswert gebracht zu werden.
Ermitteln Sie eine Formel, durch die man jeweils aus einem gegebenen Prozentsatz a denjenigen Prozentsatz b berechnen kann, für den die nachstehende Aussage (1) gilt!
(1) Wenn die Produktion um a Prozent zurückging, so muß sie anschließend um b Prozent erhöht werden, um wieder auf den Anfangswert gebracht zu werden.

301014 Das Bild sei das Bild eines von genau sechs ebenen Vierecksflächen begrenzten Körpers $ABCDEFGH$ in Parallelprojektion. Die Vierecke $A'B'F'E'$ und $D'C'G'H'$ sind einander kongruente Quadrate, die vier Strecken $A'D'$, $B'C'$, $F'G'$, $E'H'$ sind zueinander parallel und gleichlang, D' liegt im Innern von $A'B'F'E'$.



Beweisen Sie, daß es einen Körper gibt, mit dem bei geeigneter Parallelprojektion diese Bedingungen erfüllt sind und bei dem keine seiner sechs begrenzenden Vierecksflächen einen Innenwinkel der Größe 90° hat!

Olympiadeklassen 11/12

301211 Man untersuche, ob es natürliche Zahlen a, b, c, d gibt, für die die folgenden beiden Bedingungen (1) und (2) gelten:
$$a \cdot b \cdot c \cdot d = 111111111111, \qquad (1)$$
$$a + b + c + d < 11111. \qquad (2)$$
Falls das zutrifft, gebe man solche Zahlen an.

301212 Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a, für die die Gleichung
$$3x^2 + ax - 2 = 0 \qquad (1)$$
zwei reelle Lösungen besitzt, die, wenn man sie in geeignet gewählter Reihenfolge mit x_1 und x_2 bezeichnet, der Bedingung
$$6x_1 + x_2 = 0 \qquad (2)$$
genügen.

301213 Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die die beiden folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten:
$$3x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0, \qquad (1)$$
$$3x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0. \qquad (2)$$

301214 In jedem Dreieck ABC seien die Seitenlängen wie üblich mit a, b, c bezeichnet. Die Winkelhalbierende von $\sphericalangle CAB$ schneide die Seite BC in einem Punkt D.
Man beweise, daß in jedem Dreieck für die Länge w der Strecke AD gilt:
$$w = \frac{\sqrt{bc}}{b + c}\sqrt{(b + c)^2 - a^2}.$$

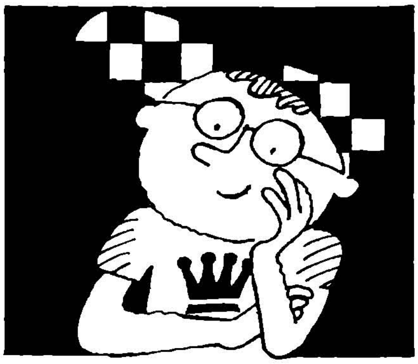
Über einfache Gewinnstrategien

Mit diesem Beitrag möchten wir interessierten *alpha*-Lesern einfache Gewinnstrategien für zwei Spiele mit mathematischen Inhalten vorstellen.

Zum ersten Spiel gehören zwei Spielpartner A und B und 100 (oder weniger) Spielmünzen. Die beiden Spieler müssen von den vorhandenen Spielmünzen abwechselnd jeweils mindestens eine Spielmünze, aber höchstens sechs Spielmünzen wegnehmen. Wer auf diese Weise die letzte Spielmünze erhält, hat verloren.
Es ist nun sicherlich von Interesse, wie der beginnende Spieler A vorgehen muß, damit sein Mitspieler B verliert. Geht man vom Spielende aus, so wird klar, daß Spieler A gewinnt, wenn er nach dem eigenen Wegnehmen von Spielmünzen dem Spielpartner B 1, 8, 15, 22, ..., 99 Spielmünzen, also stets $(7 \cdot n + 1)$ Spielmünzen, hinterläßt. Ist dem Spieler B diese Spielstrategie nicht bekannt, so könnte Spieler A auch den Spieler B beginnen lassen. Spieler A muß in diesem Fall nur dafür sorgen, daß er nach dem Wegnehmen von Spielmünzen einmal dem Spieler B die Anzahl von $(7 \cdot n + 1)$ Spielmünzen hinterläßt. (Dabei vertritt die Variable n beliebige natürliche Zahlen.) Ist dies erreicht, muß Spieler A nur noch darauf achten, daß er selbst und Spieler B bei jedem Wechsel der Entnahme von Spielmünzen zusammen stets sieben Stück entfernen.

Zum zweiten Spiel gehören ebenfalls zwei Spielpartner A und B und ausreichend Spielmünzen. Die beiden Spieler A und B müssen abwechselnd von den vorhandenen Spielmünzen (z. B. 100 Stück) mindestens eine Spielmünze, aber höchstens die Hälfte der jeweils noch vorhandenen Spielmünzen wegnehmen. Wer auf diese Weise die letzte noch vorhandene Spielmünze nehmen muß, hat verloren.
Dieses Spiel gewinnt Spieler A, wenn es ihm gelingt, seinem Spielpartner B zum Schluß drei Spielmünzen zu hinterlassen. Von diesen restlichen drei Spielmünzen muß Spieler B eine Spielmünze wegnehmen.
Wegen $2 > \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ darf Spieler B nicht zwei Spielmünzen entfernen. Für Spieler A verbleiben dann noch zwei Spielmünzen, von denen er eine wegnimmt, so daß Spieler B die letzte Spielmünze nehmen muß und somit das Spiel verliert.
Spieler A erzwingt den Sieg im Spiel, wenn es ihm gelingt, nach einer eigenen Entnahme von Spielmünzen seinem Partner B ..., 63, 31, 15, 7, 3, 1 (allgemein $2^{n-1,}$ wobei n eine natürliche Zahl gleich oder größer als 1 darstellt) Spielmünzen zu hinterlassen. In der rückläufigen Zahlenfolge 1, 3, 7, 15, 31, 63, ... ist jede Zahl gleich dem um eins vermehrten Doppelten der vorangehenden Zahl. (Allgemein gilt $(2^n - 1) \cdot 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$).
Um zu gewinnen, muß Spieler A so viele Spielmünzen wegnehmen, daß er dem Mitspieler B stets die Anzahl $(2^n - 1)$ an Spielmünzen hinterläßt.
Nun möge der fleißige Leser sich einen Partner suchen und diese beiden Spielstrategien in der Praxis erproben.

Th. Scholl



Jährlich eine neue Attraktion – Schülerpokal im Schach

Das zentrale Pionierlager Wilhelmsthal bei Eisenach lud jedes Jahr im 2. Feriendurchgang zur großen Endrunde des Pionierpokals der Schachspieler ein. Für 17 Tage versammelten sich hier rund 500 junge Sportler aus allen Teilen der Republik, um in herrlicher Umgebung ihrem königlichen Spiel zu fröhnen.

Der Thüringer Wald bietet dafür beste Bedingungen – Wartburg und Drachenschlucht, Ruhla und Bad Liebenstein erfreuen sich jährlich aufs Neue großer Beliebtheit. Aber mit Fußballplatz und Schwimmbecken, Tischtennisplatten und Zeltkino fordert auch das Lager zum Verweilen auf. Der Pionierpokal ist zur Tradition geworden. Entstanden aus den Anfängen des Schulschachs, aus harten Kämpfen von Arbeitsgemeinschaften und Schulen gegeneinander schon zu Beginn der fünfziger Jahre, hat er sich über das Einschlafen der Schulschachbewegung hinweg gehalten und darf nun auch ihren Aufstieg wieder miterleben. Bereits zum 30. Mal konnten 1989 die begehrten Trophäen vergeben werden. Ein seltener Rekord!

Im gleichen Jahr feierte Wilhelmsthal als Austragungsort sein 10. Jubiläum. Der Andrang hier ist groß – wer möchte nicht gerne DDR-Pokalsieger genannt werden?

Harte Vorausscheide reduzieren deshalb in den Frühlingsmonaten das Bewerberfeld. Oft sind mehr als 100 Mannschaften Anwärter auf die maximal 12 zu vergebenden Plätze pro Altersklasse. Gekämpft wird in den Altersgruppen 9/10, 11/12, 13/14 jeweils männlich und weiblich. Bei 4 Runden k.-o.-System bleiben viele auf der Strecke – nur die Besten erhalten die begehrten Fahrkarten. Pro Mannschaft 6 Spieler und ein Ersatzmann erreichen die zentrale Endrunde, welche im Rundensystem ausgetragen wird. 11 harte Kämpfe stehen ihnen bevor.

Doch nicht nur Schach soll hier die Ferien bestimmen, bei Wanderungen, Sport und Spiel können sich die Mannschaften erholen. Ein Jahr Training, ein Jahr fleißiges Üben, Siege und Niederlagen sollen hier für alle belohnt werden. Wichtig kann und darf nicht nur harter Kampf sein, wichtig sind auch Kameradschaftlichkeit, Hilfsbereitschaft, Fairneß; der Sommer hier oben schmiedet die Teams enger zusammen, läßt neue Beziehungen wachsen.

Stark vertreten in allen Altersklassen sind vor allem Halle, Leipzig, Dresden und Berlin – Bezirke, die auch bei den Mathematikolympiaden traditionell gute Ergebnisse aufzuweisen haben. Spielerisch werden in den Ferien neue Erkenntnisse gewonnen, schachlich-mathematische Fähigkeiten trainiert. So konnte die Sektion Buna-Halle-Neustadt dreimal in Folge den „Supercup" als erfolgreichste Sektion des Pokalwettbewerbs gewinnen, mußte ihn aber 1989 nach zweiter Wertung an MoGoNo Leipzig abtreten. Besonders stark vertreten stets auch Stahl Niederschönhausen, Post Dresden und TSG Wittenberg, um hier nur einige zu nennen.

Die meisten unserer heutigen Großmeister haben als Kinder einmal hier gesessen, Pokalfieber gespürt. Die wahren Schachspieler sind wie die Wissenschaftler bezüglich ihres Fachgebietes fanatisch. Wer hier einmal wirklich gekämpft hat, behält nicht nur Siege und Medaillen, sondern auch Freude und Ferienspaß in guter Erinnerung. Ein Dank gilt an dieser Stelle allen Betreuern, Schiedsrichtern und besonders den Organisatoren, welche seit vielen Jahren dafür sorgen, daß hier alles in geordneten Bahnen verläuft.

Heute ändern sich die Zeiten in rasendem Tempo. Vieles, was vor kurzem noch unmöglich war, erscheint plötzlich schon als selbstverständlich.

Das Schulschach, stiefmütterlich behandelt in den letzten 20 Jahren, geht einer neuen Blüte entgegen.

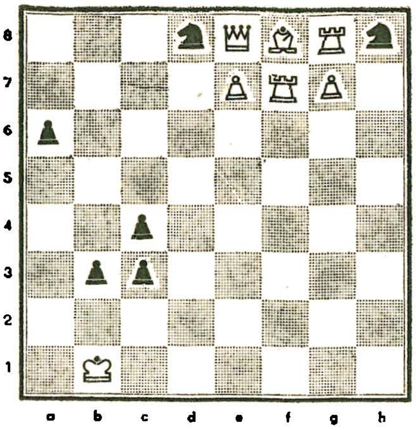
Viel ist zu tun, um z. B. den Stand der BRD auf diesem Gebiet zu erreichen. Hier werden die Zusammenhänge Schach-Mathematik seit langem intensiv genutzt (alpha wird darüber berichten).

Aber schon beginnen in der DDR auch Diskussionen um die Notwendigkeit der Austragung eines „Schülerpokals". Doch sollten wir nicht alles Alte verwerfen, besonders dann nicht, wenn es uns viel gegeben hat und dies auch weiterhin noch kann. Verwerfen sollten wir insbesondere nicht ein solches Großereignis, um das uns selbst die BRD-Schachfreunde beneiden.

M. Spindler

Mattfelder gesucht

Kennst Du das Schachspiel? Kaum jemand wird diese Frage verneinen, eher kommen dann oftmals Aussagen wie „Aber spielen kann ich es nicht gut", die das spielerische Können negieren. Jedoch die unausschöpfliche Vielfalt des Schachspiels hält neben dem schier unergründlichen Spiel selbst noch genügend kleinere und größere, faszinierende und knifflige Aufgaben sowohl für den Anfänger als auch für den Meister bereit.



Als kleines Beispiel dazu folgende Aufgabe. In dem abgebildeten Diagramm fehlt der schwarze König. Auf wie vielen Feldern könnte der schwarze König mit einem Zug von Weiß sofort mattgesetzt werden? Ein Lösungsbeispiel: Man setzt den schwarzen König auf das Feld h3 und Weiß zieht g7:h8D matt.

H. Rüdiger

Buchtips für Schachfreunde

E. Gufeld

Gewinnen mit Königsindisch

160 S., 120 Diagr.,
Leinen mit Schutzumschlag
Bestell-Nr. 671 840 5 Preis: 12,80 DM

J. Awerbach

Damenendspiele

416 S., 734 Diagr.,
Leinen mit Schutzumschlag
Bestell-Nr. 671 838 4 Preis: 22,00 DM

S. Steffens

Go spielend lernen

256 S., 460 Abb.,
Leinen mit Schutzumschlag
Bestell-Nr. 671 852 8 Preis: 18,80 DM

Eine Einführung in das älteste Brettspiel der Welt.

Wie findet man Zugang zum Go?

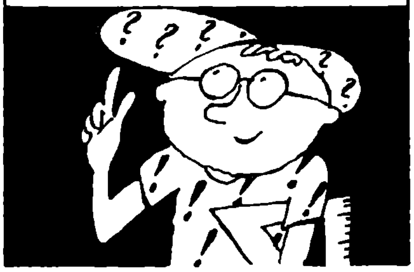
Der Autor wählte anstelle des mit 19 Linien versehenen Standardbretts das überschaubare 9er Brett, um den Leser Schritt für Schritt in die Regeln und die Taktik des Go einzuführen. Der mit zunehmendem Schwierigkeitsgrad des Stoffes wachsende Übungsbedarf wird dabei berücksichtigt.

alle Titel: Der Sportverlag Berlin

Übrigens – das Go-Spiel könnt ihr in den Spielwarenläden erwerben.

Alphons

Lösungen



Lösungen zu: Zwei Eigenaufgaben aus der MSG Greifswald

Heft 2/90

Aufgabe von Jan Fricke

Wenn der Stapel gleich viele Büchsen jeder Sorte enthalten soll, muß die Gleichung
$$4n + 2k - 6 = \frac{k(2n + 1 - k)}{2} \text{ gelten.}$$
Die Bedingungen $n = k$ und n, $k \in N$ gestatten die Lösungen $n = 14$, $k=5$ und $n = k = 0$. Die letztere „ist keine Lösung im Sinn der Aufgabenstellung, sie ist jedoch praxisnäher“ (J. F.).

Aufgaben von René Schöne

Der Winkel $\alpha = \measuredangle DAB$ variiert zwischen α_0 und α_1 mit $\cos\alpha_0 = \frac{7}{9}$ und $\cos\alpha_1 = \frac{1}{3}$, wobei α_0 und α_1 die Winkel des Dreiecks mit den Seitenlängen $3x$, $3x$, $2x$ sind, welches als Grenzfall entsteht, wenn D auf $\overline{AC}$ oder C auf $\overline{BD}$ liegt. Aus Symmetriegründen braucht nur der Fall $60° \leqq \alpha \leqq \alpha_1$ behandelt werden. Sei M der Mittelpunkt des Inkreises. Wir verwenden
$$p := \frac{\overline{AM}}{x} \text{ als Parameter und erhalten}$$
$$Q(p) = \frac{7 + 72}{(4p^4 - 24p^2 - 9)}.$$
Es gilt $p^2 = \frac{3}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{p}{3} + \frac{1}{2p}$.

Diese Gleichung ist für $\sqrt{\frac{3}{2}} \leqq p \leqq \sqrt{3}$ eindeutig umkehrbar. Dort ist Q monoton wachsend, nimmt sein Maximum $\frac{27}{5}$ bei 3 an, $\alpha = 60°$. Das Minimum 5 wird erst im Entartungsfall $p = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\alpha = \alpha_1$ angenommen.

Lösung zu: Kryptarithmetische Knobelaufgabe

Heft 3/90

Wir sind es gewöhnt, bei Additionen oder Subtraktionen die betreffenden Zahlen senkrecht untereinander zu schreiben. Damit erhalten wir z. B. folgende Gleichung:
$$\begin{array}{r} E\;I\;C \\ -\;\;I\;H \\ \hline G\;B\;C \end{array} \qquad (1)$$
Wegen: $C - H = C$ folgt $H = 0$ und wegen $I - I = B$ folgt $B = 0$! Also steckt der Fehler schon hier in dieser Gleichung!

Eine weitere Gleichung ist:
$$II \cdot DC = BCG. \qquad (2)$$
Hieraus folgt aber, daß B nicht Null sein kann! Damit haben wir die Aussage $H = 0$ und $B \neq 0$! Deshalb ist in der Gleichung (1) ein Buchstabe I durch K zu ersetzen!

Weil der Ausdruck $\overline{IH}$ falsch ist, (unter Voraussetzung, die wir eben begründet haben) schreiben wir dafür jetzt KH. Damit heißt die Gleichung (1) jetzt:
$$EIC - KH = GBC.$$
Die Lösung der Aufgabe ist:
$$\begin{array}{ccccc} 924 & - & 50 & = & 874 \\ : & & + & & - \\ 22 & \cdot & 34 & = & 748 \\ \hline 42 & + & 84 & = & 126 \end{array}$$
Die einzelnen Buchstaben haben folgende Ziffernzuordnung:

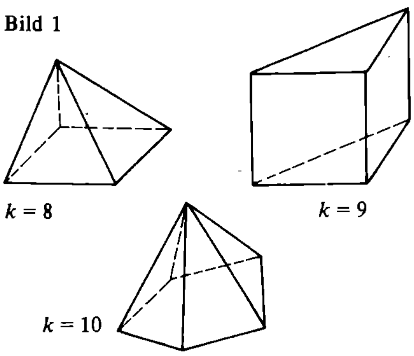
$A = 1$, $B = 7$, $C = 4$, $D = 3$, $E = 9$,
$F = 6$, $G = 8$, $H = 0$, $I = 2$, $K = 5$.

Lösungen zu: Einige Folgerungen aus dem Eulerschen Polyedersatz

Heft 3/90

▲ 1 ▲ a) Wir geben zuerst je ein Beispiel für ein Polyeder mit $k = 8$, $k = 9$ und $k = 10$ an (Bild 1):

Bild 1



Errichten wir nun über einer Dreiecksfläche jedes Polyeders ein Tetraeder, so entsteht ein neues Polyeder, das jeweils drei Kanten mehr als das Ausgangspolyeder sowie weitere Dreiecksflächen enthält. Außerdem kann man die Höhe des angesetzten Tetraeders stets so wählen, daß das neu entstandene Polyeder konvex ist. Dieses Verfahren können wir fortsetzen, womit die Aufgabe gelöst ist.

b) Wir können sehr leicht Beispiele für Polyeder mit $e = 5, 6, 7, \ldots$ Ecken angeben. Dazu betrachten wir in der Ebene ein regelmäßiges $(e - 1)$-Eck, $e \geqq 5$, und errichten darüber eine gerade Pyramide. Damit ist ein konvexes Polyeder mit $e = 5, 6, 7, \ldots$ Ecken entstanden.

c) Als Beispiel für Polyeder mit $f = 5, 6, 7, \ldots$ Flächen eignen sich ebenfalls die geraden Pyramiden mit regelmäßiger Grundfläche. Vergrößern wir nämlich die Anzahl der Ecken der Grundfläche um eins, so erhöht sich die Anzahl der Flächen des Polyeders ebenfalls um eins. Da es eine gerade Pyramide mit fünf Flächen (quadratische Grundfläche) gibt, ist diese Aufgabe gelöst.

▲ 2 ▲ Wir zeigen, daß es unter allen konvexen Polyedern mit genau fünf Flächen genau zwei Typen gibt.

Dazu bedenken wir, daß es keine Polyederecke eines Polyeders mit genau fünf Flächen geben kann, in der fünf Flächen zusammentreffen. Außerdem treffen in jeder Polyederecke mindestens drei Flächen zusammen.

Es entstehen zwei Fälle:

1. Ein Polyeder mit genau fünf Flächen enthält (mindestens) eine Ecke, in der genau vier Flächen zusammentreffen.

Dann muß die fünfte Fläche aber die anderen vier Flächen schneiden, und es entsteht eine Pyramide mit viereckiger Grundfläche.

2. Ein Polyeder mit genau fünf Flächen enthält nur Ecken, in denen genau drei Flächen zusammentreffen.

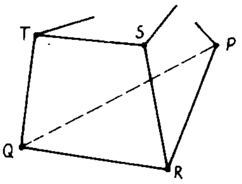
Aus dem Eulerschen Polyedersatz folgt dann mit $f = 5$ und $k = \frac{3}{2} \cdot e$, daß $e = 6$ und $k = 9$ ist. Enthält ein Polyeder ein p-Eck, so hat dieses Polyeder wenigstens $2p$ Kanten. Folglich enthält ein Polyeder mit genau fünf Flächen in diesem Fall höchstens Vierecke.

Würde ein solches Polyeder nur Vierecke enthalten, so hätte es $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot f = 10$ Kanten.

Würde ein solches Polyeder nur Dreiecke enthalten, so hätte es $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot f = 7{,}5$ Kanten.

Folglich muß ein Polyeder mit genau fünf Flächen in diesem Fall wenigstens ein Dreieck und ein Viereck enthalten. Dann muß es eine Kante $\overline{QR}$ geben, an der ein Dreieck und ein Viereck zusammentreffen (Bild 2).

Bild 2



P sei der dritte Eckpunkt des Dreiecks und S, T die weiteren Ecken des Vierecks. Da in diesem Fall von jeder Ecke genau drei Kanten ausgehen, muß von P, S und T jeweils noch genau eine weitere Kante ausgehen. Damit haben wir bereits die neun Kanten, die uns zur Verfügung stehen, verbraucht, denn P kann nicht mit S bzw. T durch eine Kante verbunden werden. Da unser Polyeder sechs Ecken hat, müssen sich die freien Kanten von P, S und T in einem Punkt U treffen. Das entstandene Polyeder hat genau fünf Flächen. Damit ist gezeigt, daß es genau zwei Typen von Polyedern mit genau fünf Flächen gibt. Ohne Beweis soll mitgeteilt werden, daß es sieben verschiedene konvexe Polyedertypen mit genau sechs Flächen gibt. Die Bilder zeigen zu jedem Typ ein Beispiel.

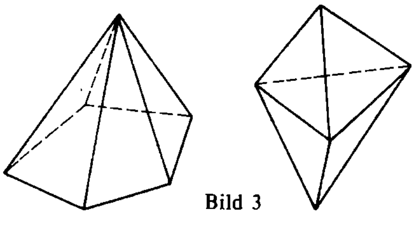
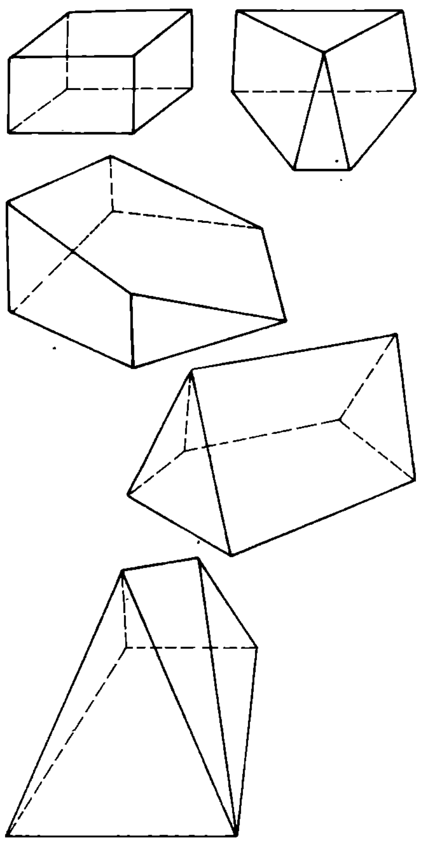


Bild 3



▲3▲ P sei ein konvexes Polyeder mit e Ecken, f Flächen und k Kanten. f_3, f_4, … ist die Anzahl der Flächen mit genau 3, 4, … Ecken. Dann kann man die Summe der Flächenwinkel $\sum\alpha$ wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}\sum\alpha &= \pi f_3 + 2\pi f_4 + 3\pi f_5 + \ldots\\ &= \pi\cdot(f_3 + 2f_4 + 3f_5 + \ldots)\\ &= \pi\cdot((3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots)\\ &\quad - 2(f_3 + f_4 + f_5 + \ldots))\\ &= \pi\cdot(2k - 2f)\\ &= 2\pi(k - f).\end{aligned}$$

▲4▲ Wir versuchen im folgenden ein Tetraeder $ABCS$ zu konstruieren, bei dem jede Kante Schenkel eines stumpfen Winkels ist.

In einem 1. Fall nehmen wir an, daß alle stumpfen Winkel, die am Tetraeder $ABCS$ vorkommen, an genau einer Ecke liegen. Dann können aber höchstens drei Kanten als Schenkel von stumpfen Winkeln auftreten, und damit erfüllt ein solches Tetraeder nicht die gestellten Anforderungen.

In einem 2. Fall, nehmen wir an, daß es im gesuchten Tetraeder an genau zwei Ecken stumpfe Winkel gibt. Dann gibt es höchstens fünf Kanten, die Schenkel eines stumpfen Winkels sind, denn die beiden betrachteten Ecken sind durch genau eine Kante verbunden.

Also müssen bei dem gesuchten Tetraeder an wenigstens drei Ecken stumpfe Winkel liegen.

Nehmen wir nun in einem 3. Fall an, daß an genau drei Ecken des gesuchten Tetraeders stumpfe Winkel liegen. A, B und C seien diese drei Ecken. Dann muß jedes der Dreiecke ABS, BCS und CAS genau einen stumpfen Winkel enthalten, da AS, BS und CS Kanten von stumpfen Winkeln sein sollen. Außerdem kann das Dreieck ABC noch stumpfwinklig sein.

Ist $\sphericalangle SAB$ stumpf, so folgt, daß dann auch $\sphericalangle SBC$ und $\sphericalangle SCA$ stumpf sein müssen. Durch mehrmaliges Anwenden der Dreiecksungleichung folgt $|SC| > |BS| > |AS| > |SC|$, womit sich ein Widerspruch zu $|SC| = |SC|$ ergibt. Folglich kann auch dieser Fall nicht auftreten.

Als letzte Möglichkeit für unser gesuchtes Tetraeder bleibt im 4. Fall, daß an jeder Tetraederecke ein stumpfer Winkel liegt. Da aber ein Tetraeder genau vier Flächen hat, folgt sofort, daß es im letzten Fall genau vier stumpfe Winkel gibt.

Ist $\sphericalangle ASB$ stumpf, so gibt es für die Lage des stumpfen Winkels an der Ecke A zwei Möglichkeiten: entweder ist $\sphericalangle SAC$ oder $\sphericalangle CAB$ stumpf. Ist $\sphericalangle ASB$ und $\sphericalangle SAC$ stumpf, so folgt sofort, daß entweder $\sphericalangle SBC$ und $\sphericalangle ACB$ (Bild 4) oder $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle BCS$ (Bild 5) ebenfalls stumpf sind. Ist $\sphericalangle ASB$ und $\sphericalangle CAB$ stumpf, so folgt sofort, daß auch $\sphericalangle SBC$ und $\sphericalangle ACS$ stumpf sind (Bild 6).

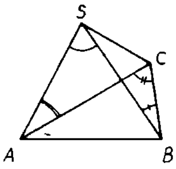


Bild 4

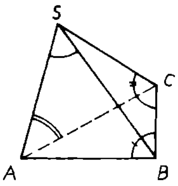


Bild 5

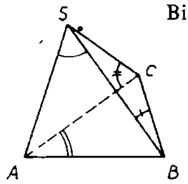


Bild 6

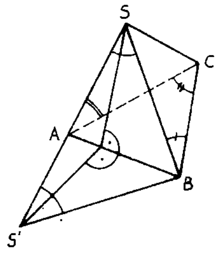
Bei der Verteilung der stumpfen Winkel nach Bild 5 folgt durch mehrmaliges Anwenden der Dreiecksungleichung, daß $|AB| > |BS| > |CS| > |AC| > |AB|$ gilt.

Bei der Verteilung nach Bild 6 folgt analog, daß $|AB| > |AS| > |SC| > |BC| > |AB|$ gilt.

In beiden Fällen entsteht also ein Widerspruch zu $|AB| = |AB|$, und folglich können diese beiden Verteilungsmöglichkeiten nicht auftreten.

Nun bleibt noch die Verteilungsmöglichkeit der stumpfen Winkel nach Bild 4 zu untersuchen. Hier hilft uns die Anwendung der Dreiecksungleichung nicht weiter.

Bild 7



Um festzustellen, daß auch diese Verteilungsmöglichkeit nicht zu realisieren ist, klappen wir das Dreieck ABS in die Ebene des Dreiecks ABC. S' sei das Bild von S (Bild 7). Es ist klar, daß $|\sphericalangle SAC| < |\sphericalangle S'AC|$ und $|\sphericalangle SBC| < |\sphericalangle S'BC|$ ist.

Folglich gilt

$|\sphericalangle SAC| + |\sphericalangle SBC| < |\sphericalangle S'AC| + |\sphericalangle S'BC|$. (1)

Weil das Dreieck ACB bei C stumpfwinklig ist, gilt

$|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle CBA| < 90°$. (2)

Weil das Dreieck ASB bei S' stumpfwinklig ist, gilt

$|\sphericalangle SAB| + |\sphericalangle SBA| < 90°$, bzw.

$|\sphericalangle S'AB| + |\sphericalangle S'BA| < 90°$. (3)

Aus (2) und (3) folgt

$|\sphericalangle S'AC| + |\sphericalangle S'BC| = |\sphericalangle S'AB| + |\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle S'BA| + |\sphericalangle CBA| < 180°$.

Dieses ergibt zusammen mit (1), daß $|\sphericalangle SAC| + |\sphericalangle SBC| < 180°$ ist. Damit entsteht aber ein Widerspruch zu der Tatsache, daß die Summe von zwei stumpfen Winkeln stets größer als 180° ist.

Folglich gibt es kein Tetraeder, bei dem jede Kante Schenkel eines stumpfen Winkels ist.

Lösungen zu: Gerechte und ungerechte Würfelspiele, Teil 1

Heft 3/90

▲1▲ a) Beispielsweise: V erhält im Falle des Gewinns von Z 5 Chips, zahlt aber andernfalls an ihn 7 Chips.
b) $a : b = 1 : 3$

▲2▲ a) 1(36)
b) nicht möglich: 2,5; 5,5; 7;
unterschiedlich möglich:
2(2, 1, 1; 2, 2, 2); 4(4,-1, 1; 4, 2, 2; 4, 3, 3; 4, 4, 4)
c) 9(3, 3, 2; 5, 3, 2; 5, 5, 2; 4, 4, 3; 4, 5, 3; 5, 5, 3; 5, 5, 4; 5, 6, 4; 6, 6, 5)

▲3▲ 31

▲4▲ Bei allen

▲5▲ $Q_{V/N}{}^{(2)} = 585 : 545 = 1{,}0734$;
$Q_{V/N}{}^{(3)} = 21225 : 20280 = 1{,}0466$

Teil 2

▲6▲ $Q_{Z/G}{}^{(2)} = 612 : 567 = 1{,}0794$;
$Q_{F/G}{}^{(2)} = 612 : 567 = 1{,}0794$
$Q_{F/Z}{}^{(2)} = 688 : 536 = 1{,}2836$

▲7▲ Da Vergleich mit dem Normalwürfel stets 1 ergibt (Aufgabe 3), genügen wegen der 31 ungewöhnlichen Würfel (Aufgabe 2) $31 \cdot 30 : 2 = 465$ Berechnungen.

▲8▲ a) Die Nummern lauten, im Bild 5 bei Nr. 1 beginnend in mathematisch positivem Drehsinn (entgegen dem Uhrzeigersinn):
1; 5; 6(F); 9; 13; 15; 17; 18(V); 19(Z); 22; 26; 29; 30; 31; 32(G)
b) Die Nummern sind die gleichen.

▲9▲ a) $Q_{1/F} = Q_{1/6} = 18 : 12 = 1{,}5$;
$Q_{Z/1} = Q_{19/1} = 18 : 12 = 1{,}5$
b) Mit den Bezeichnungen von Aufgabe 7a: Nr. 18 und Nr. 32 sowie Nr. 30 und Nr. 32 ($Q_{18/32} = Q_{32/30} = 15 : 6 = 2{,}5$);
ferner ist $Q_{18/30} = 25 : 11 = 2{,}27$.
c) In keiner Kette: 5; 9; 13; 22;
in jeder Kette: 1; 6; 19
d) 1 – 19 – 26 – 29 – 18 – 6; 1 – 19 – 26 – 32 – 17 – 6; 1 – 19 – 26 – 32 – 18 – 6; 1 – 19 – 30 – 15 – 18 – 6; 1 – 19 – 30 – 29 – 18 – 6.

Lösungen zu:
Läßt sich der Zufall berechnen?
Teil 2

▲6▲ $P(A/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{3}{7}$,

$P(D/A)=\frac{P(A\cap D)}{P(A)}=\frac{1}{3}$

▲7▲ $P(R/G)=\frac{P(R\cap G)}{P(G)}=\frac{1}{6}:\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

▲8▲ $A_3=\{4;5\}$

▲9▲ R – Die herausgenommene Kugel ist rot. G – Die herausgenommene Kugel ist grün. W – Die herausgenommene Kugel hat weiße Punkte.

$P(R)=0{,}3$, $P(G)=0{,}7$, $P(W/R)=0{,}4$,
$P(W/G)=0{,}5$
$P(W)=P(W/R)\cdot P(R)+P(W/G)\cdot P(G)$
$=0{,}3\cdot 0{,}4+0{,}7\cdot 0{,}5=0{,}47=47\,\%$

▲10▲ L – Ein Samenkorn ist ein Lupinesamen. W – Ein Samenkorn ist ein Wikkesamen. S – Ein Samenkorn ist ein Sonnenblumensamen. K – Ein Samenkorn keimt.

$$P(L/K)=\frac{P(K/L)\cdot P(L)}{P(K/L)\cdot P(L)+P(K/W)\cdot P(W)+P(K/S)\cdot P(S)}$$
$$=\frac{0{,}80\cdot 0{,}29}{0{,}80\cdot 0{,}29+0{,}95\cdot 0{,}54+0{,}85\cdot 0{,}17}\approx 0{,}26=26\,\%$$

$P(W/K)\approx 58\,\%$, $P(S/K)\approx 16\,\%$

▲11▲ C und D

▲12▲ $U=\{1;3;5\}$ und $G=\{2;4;6\}$ sind nicht unabhängig, denn wegen

$P(U)=P(G)=\frac{1}{2}$, $U\cap G=\emptyset$ und $P(U\cap G)=0$ gilt $P(U\cap G)\neq P(U)\cdot P(G)$.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Auf den Laut zerspringenden Glases wandte sich der Milizionär Stepan Stepanowitsch um und erblickte vier Jugendliche, die von einer zerschlagenen Fensterscheibe fortliefen. Nach fünf Minuten befanden sie sich auf der Milizstation.
Andrej bekannte, daß Viktor das Glas zerschlug, Viktor behauptete, daß Sergej schuld sei. Sergej beteuerte, daß Viktor lügt und Juri bekräftigte, daß er es nicht getan habe. Bei dem weiteren Gespräch stellte sich heraus, daß nur (genau) einer der Jungen die Wahrheit sagte. Wer schlug die Fensterscheibe ein?
Lösung: Aus den Aussagen von Viktor und Sergej folgt, daß beide nicht gleichzeitig die Unwahrheit gesagt haben können und somit sprach einer von ihnen die Wahrheit. Da nur genau einer der Jungen die Wahrheit sagte, lügen Andrej und Juri. Also lügt Juri, wenn er behauptet, daß er es nicht gewesen sei. Juri war der Täter.

▲2▲ **Finde die Regeln**
Gib zwei weitere Beispiele mit denselben Eigenschaften der folgenden an: $3^2-1^2=2^3$, $6^2-3^2=3^3$, $10^2-6^2=4^3$.
Beachte die Reihe, aus der wir die Zahlen genommen haben, die quadriert wurden. Wenn du die Reihe weiter fortsetzt, wirst du keine Schwierigkeiten haben, weitere Beispiele zu finden; dir wird es auch nicht schwerfallen, die Allgemeingültigkeit der Regeln zu zeigen.
Lösung: Die nächsten beiden Beispiele würden sein: $15^2-10^2=5^3$ und $21^2-15^2=6^3$. Die Zahlen 3, 6, 10, 15, … erhält man aus der Reihe der Zahlen, die durch die Addition $1+2+3+\ldots+n$ entstehen. Die Regelmäßigkeit läßt vermuten, daß die Differenz der Quadrate zweier solcher aufeinanderfolgender Zahlen immer eine ganzzahlige dritte Potenz ist. Offensichtlich ist

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$
$$\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{(n-1)^2n^2}{4}$$
$$=\frac{n^2}{4}[(n+1)^2-(n-1)^2]$$
$$=\frac{n^2}{4}(n^2+2n+1-n^2-2n-1)$$
$$=\frac{n^2}{4}\cdot 4n=n^3.$$

▲3▲ **Magische Quadrate**
In jedem der beiden Quadrate sind einige Zahlen eingetragen.
Trage in jedes Quadrat die noch fehlenden Zahlen bis 25 ein, so daß die Summe jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen 65 beträgt!
Hinweis: Teile die fünfundzwanzig Zahlen in fünf Gruppen (1 – 5; 6 – 10; 11 – 15; 16 – 20; 21 – 25)! Diese Gruppen müssen so angeordnet werden, daß zwei Zahlen der gleichen Gruppe unbedingt in verschiedenen Zeilen und Spalten stehen!
Lösung:

14	16	3	25	7
23	10	12	19	1
17	4	21	8	15
6	13	20	2	24
5	22	9	11	18

15	3	21	9	17
24	7	20	13	1
18	11	4	22	10
2	25	8	16	14
6	19	12	5	23

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Mathe-Mix

AX	IA	LS	YM	ME	TR	IE
BR	UC	HG	LE	IC	HU	NG
DR	AC	HE	NV	IE	RE	CK
FE	HL	ER	RE	CH	NU	NG
KU	GE	LA	BS	CH	NI	TT
MU	LT	IP	LI	KA	TI	ON

Ein Farbspiel „ohne 11 Spitzen“

a) Da seine Gegner von jeder der „Farben“ Pik, Herz und Karo insgesamt 3 Karten haben, und dazu noch 11 Trumpfkarten, kann der Spieler höchstens je einen Farbstich in den „Farben“ Pik, Herz und Karo machen. Mit Skat und diesen drei Farbstichen kann er selbst zu seinem Partiegewinn maximal 53 Augen (3 Asse, 2 Zehnen) beisteuern. Von seinen Gegnern kann er mit diesen drei Stichen maximal 11 Augen (2 Könige, 1 Ober), 8 Augen (2 Könige) oder noch weniger Augen erhalten. Da er mindestens 61 Augen erzielen muß, muß er alle 3 Stiche machen, dabei von seinen Gegnern mindestens 8 Augen erhalten. Einer der beiden Gegner hat also eine Karokarte, der andere 2 Karokarten in seinem Blatt. Ein Gegner hat den Pikkönig und der andere Pikneun und Pikacht in seinem Blatt. Und weiterhin hat ein Gegner Herzkönig und der andere Herzneun und Herzacht in seinem Blatt.
b) Der Spieler muß in den Skat zwei verschiedenfarbige Karten mit insgesamt 22, 21 oder 20 Augen legen.
c) Ist der Spieler selbst der Vorderhandspieler, so muß er sofort nacheinander die drei Farbstiche kassieren. Andernfalls muß er die Pik-Herz- und Karokarte seines Blattes mit jeweils maximaler Augenzahl so lange aufheben, bis er mit einer von diesen drei Karten erstmals einen Stich machen kann. Im Anschluß muß er sofort die beiden anderen gewinnträchtigen Stiche einheimsen.

Einer paßt nicht

Außer dem Wort Klammer haben die anderen im Singular und im Plural die gleiche Schreibweise.

Kreuzzahlrätsel

Man beginnt mit j_w. Wegen e_s muß j_w ungerade sein. 3 entfällt wegen k_s und n_w, sowie 5, 7, 9 wegen c_s und c_w. Mit $j_w = 1111$ ergibt sich dann die gesamte Lösung eindeutig.

2	7	■	■	1	6
■	2	7	■	1	■
1	■	1	1	0	3
1	1	1	1	■	6
■	0	■	3	3	■
8	1	■	■	9	9

Personalpronomen

Je vier Lösungen sind:

a)	153	271	352	478
	+64	+58	+79	+62
	217	329	431	540

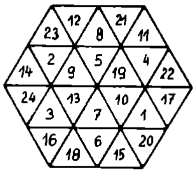
b) Es gibt genau die vier Lösungen:

	54	65	76	87
	+51	+61	+71	+81
	105	126	147	168
c)	612	543	157	425
	+102	+403	+597	+295
	714	946	754	720

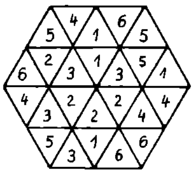
Magische Hexagone

Eine Lösung ist:

a)



b)



Vom Kern zum Wort

Quadrate; Umkreise; Ordinate; Trillion; Implizit; Exponent; Numerale; Tangente →Quotient

Mathematische Luftfracht

a) Die Summe aller in Kreisen stehenden Zahlen ist 308. Da 110 + 44 = 154 ist, muß in das vordere Oval 19(= 154 − 135) eingetragen werden. Die Summe der zwei in die verbleibenden freien ovalen Felder zu schreibenden Zahlen ist somit
179 = 308 − (19 + 110). Weil beide sich

um Eins unterscheiden (wegen $65 - 64 = 1!$), lauten sie 89 und 90.

b) Die Summe der Quadrate aller in Kreisen stehenden Zahlen ist

$135^2 + 44^2 + 65^2 + 64^2 = 28\,482$. Auf gleiche Art wie bei a) bestimmt man für das vordere Oval die Zahl 19. Somit ist die Summe der Quadrate der noch in die beiden freien Ovale zu schreibenden Zahlen $28\,482 - 19^2 - 110^2 = 16\,021$. Da die Differenz der einzutragenden Zahlen Eins beträgt (vgl. Lösung a)!), folgert man die Gleichung

$x^2 + (x + 1)^2 = 16\,021$ $(x \in N)$, wobei x die kleinere der beiden Zahlen, $x + 1$ die größere ist. Die Lösung $x = 89$, weshalb die zweite gesuchte Zahl $x + 1 = 90$ ist.

Die gesuchten drei Zahlen sind 19, 89 und 90. Mit ihnen erhält man die Paare (Oval, Kreis) = (19; 135), (89; 65), (90; 64), die mit dem gegebenen Paar (110; 44) allen Bedingungen der Aufgabe genügen.

Lösung zur Schachecke

Auf 36 Feldern kann der schwarze König mit einem Zug von Weiß sofort mattgesetzt werden, z. B. auf a3 mit e:d8S oder auf e2 mit e:d8T.

Lösungen zu: Ein Zuschneideproblem
Heft 3/90

- Beim Tellerrock (Bild 1) ist der Radius der Saumlinie

$$r_S = \frac{135\,\text{cm}}{2} = 67{,}5\,\text{cm}.$$

Der Radius der Taillenlinie ergibt sich aus $2r_T \cdot \pi = 62\,\text{cm}$; $r_T = 9{,}9\,\text{cm}$.

Mithin beträgt die Rocklänge (vor dem Säumen):

$l_R = 67{,}5\,\text{cm} - 9{,}9\,\text{cm} = 57{,}6\,\text{cm}$.

Dieser Rock wäre zu kurz.

- Der Glockenrock (Bild 2) ist aus zwei Viertelkreisen zusammengesetzt; folglich ist der Radius r_T für die Taillenlinie doppelt so groß wie der entsprechende für den Tellerrock: $r_T = 19{,}8\,\text{cm}$.

Der größtmögliche Radius r_S für die Saumlinie des Glockenrocks ist die Hälfte der Diagonalen im Rechteck mit den Seitenlängen 1,50 m und 1,35 m, also:

$(2r_S)^2 = (150\,\text{cm})^2 + (135\,\text{cm})^2$;

$r_S = 100{,}9\,\text{cm}$.

Mit dieser Saumlinie wird der Rock

$l_R = 100{,}9\,\text{cm} - 19{,}8\,\text{cm} = 81{,}1\,\text{cm}$

lang, also viel zu lang, aber nicht sehr weit.

- Bild 3 zeigt den aus einem Stück geschnittenen Rock.

Als Ausgangspunkt für alle weiteren Berechnungen muß der Zentriwinkel $\sphericalangle AMB = \alpha$ ermittelt werden. Das Lot vom Kreismittelpunkt M auf die untere Schnittkante (Fußpunkt F) halbiert diesen Winkel und ist Ankathete von $\frac{\alpha}{2}$ im rechtwinkligen Dreieck MAF.

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{135\,\text{cm} - 75\,\text{cm}}{75\,\text{cm}} = 0{,}8;$$

$$\frac{\alpha}{2} = 36{,}87°;\ \alpha = 73{,}74°.$$

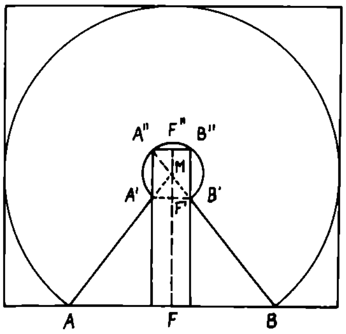


Bild 3
Weiter Glockenrock

Im großen Teilkreis (Saumlinie) ist der Teilumfang s zu errechnen:

$$s = \frac{\pi \cdot 150\,\text{cm}\,(360° - \alpha)}{360°};$$

$s = 374{,}7\,\text{cm}$;

im kleinen Teilkreis (Taille) dagegen der Radius r_T, der zum Teilumfang 62 cm (Taillenweite) gehört:

$$\frac{2r_T \cdot \pi \cdot (360° - \alpha)}{360°} = 62\,\text{cm};\ r_T = 12{,}4\,\text{cm}.$$

Die Rocklänge l_R (= Differenz zwischen beiden Radien) liegt mit

$75\,\text{cm} - 12{,}4\,\text{cm} = 62{,}6\,\text{cm}$ im vorgeschriebenen Bereich.

Die Breite des Bundstreifens b ist doppelt so groß wie die Gegenkathete von $\frac{\alpha}{2}$ im $\Delta MA'F'$:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2} : r_T = \frac{b}{2r_T};$$

$b = 2 \cdot 12{,}4\,\text{cm} \cdot \sin 36{,}87°$; $b = 14{,}9\,\text{cm}$.

Die Länge des Bundstreifens l_B kann so groß werden wie die Summe der Kathetenlängen $\overline{MF}$ und $\overline{MF''}$ in den entsprechenden ähnlichen Dreiecken.

$\overline{MF} = 60\,\text{cm}$ ist bekannt. $\overline{MF''}$ sei x.

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{r_T};$$

$x = 12{,}4\,\text{cm} \cdot \cos 36{,}87°$; $x = 9{,}9\,\text{cm}$

$l_B = 60\,\text{cm} + 9{,}9\,\text{cm} = 69{,}9\,\text{cm}$.

- Bild 4 zeigt wieder einen Tellerrock.

Sein Taillenradius wurde bereits mit 9,9 cm berechnet. Um die nötige Rocklänge zu erreichen, muß der Radius der Saumlinie mindestens 70 cm, wegen Nahtzugabe und Saum besser 71 cm betragen. Für die Weite an der Saumlinie ergibt sich dann

$s = \pi \cdot 142\,\text{cm} = 446{,}1\,\text{cm}$. Für den Bund bleibt ein 8 cm breiter, mehr als ausreichend langer Streifen.

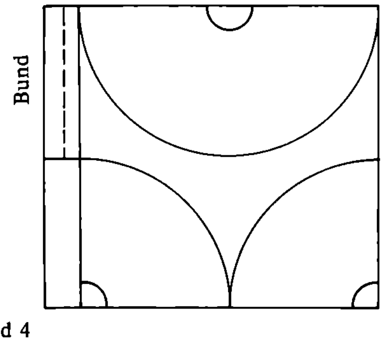
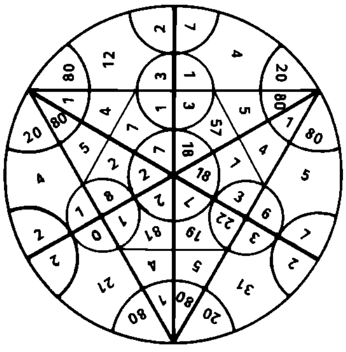
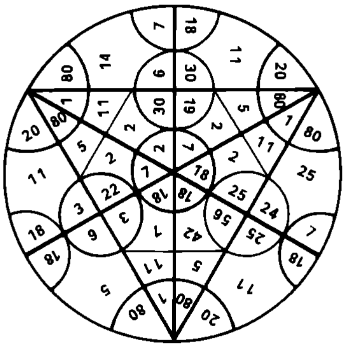


Bild 4
Tellerrock mit Seitennähten und hinterer Mittelnaht

Eine Gegenüberstellung der errechneten Maße macht deutlich, daß die Schnittlösung Bild 3 einen modisch breiten Bund bietet, während der Tellerrock Bild 4 die größere Saumweite hat.

Lösung zu: Verflixt und zu-gepuzzelt, Heft 2/90





Lösungen zu: AJHSME
Heft 3/90

▲1▲ Die drei Striche auf der Skala unterteilen 10 bis 11 in vier Teile. Daher bedeuten die Teilstriche nacheinander (bei 10 beginnend) 10,25; 10,50; 10,75. Daher ist D die Antwort.

▲2▲ Es ist $8 \cdot 0{,}25 \cdot 2 \cdot 0{,}125$
$= 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$. Daher gilt C.

▲3▲ Es ist $0{,}075 \cdot 2{,}56$
$= 75 \cdot 10^{-3} \cdot 256 \cdot 10^{-2} = 19\,200 \cdot 10^{-5}$
$= 0{,}192$. B ist richtig.

▲4▲ Eine Billion bedeutet in den USA 10^9.

Die Kosten jedes USA-Bürgers betragen also $\frac{20 \cdot 10^9}{250 \cdot 10^6} = \frac{20 \cdot 10^3}{250} = 80$ Dollar.

C ist anzukreuzen.

▲5▲ Der Umfang des Beetes beträgt $2\pi r = 2\pi \cdot 12 \approx 75$ Fuß. Daher sind rund 75 Rosenstöcke erforderlich. D ist richtig.

▲6▲ E ist richtig.

▲7▲ Der sich überschneidende Teil beträgt $2 \cdot 3 = 6$ FE (Flächeneinheiten). Die Fläche des horizontalen Rechtecks ist gleich $2 \cdot 10 = 20$ FE und die des vertikalen Rechtecks $3 \cdot 8 = 24$ FE. Damit ist die gesuchte Fläche gleich $20 + 24 - 6 = 38$ FE. B gilt.

▲8▲ Die 36 % entsprechen 45 Tassen. Also entsprechen 4 % dann $45 : 9 = 5$ Tassen. Ist die Maschine mit 100 % gefüllt, enthält sie $5 \cdot 25 = 125$ Tassen. C ist wahr.

Auf den Spuren von Mathematikern
Andreas Mayer

Ich möchte über einen Mathematiker des 18. Jahrhunderts berichten, der für die Universität in Greifswald Bedeutendes geleistet hat. Es wäre heute aber sicher nur wenigen Spezialisten bekannt, hätte er sich nicht selbst ein großartiges Denkmal gebaut: das Hauptgebäude der Universität Greifswald. Der Name des Mathematikers ist Andreas Mayer. Er wurde am 8. 6. 1716 in Augsburg als Sohn eines Architekten geboren und studierte in Berlin, Wittenberg und Marburg. In Marburg beeinflußte ihn vor allem Christian Wolff (1679 bis 1754). Bei diesem Gelehrten promovierte er auch im Alter von 20 Jahren. Wolff riet ihm, nach Wittenberg zu gehen. Dort hielt Andreas Mayer Vorlesungen und verfaßte Arbeiten über Physik, Astronomie und Mathematik. Schon 1740 habilitierte er.

In Greifswald wurden zu dieser Zeit die Naturwissenschaften nur wenig beachtet. Als Wolff aufgefordert wurde, einen Vorschlag für die Besetzung der naturwissenschaftlichen Lehrämter zu unterbreiten, nannte er der Universität und dem schwedischen König (Greifswald gehörte von 1648 bis 1815 zu Schweden) seinen ehemaligen Schüler Mayer. Im Herbst 1740 wurde Andreas Mayer nach Greifswald berufen, er zog aber erst zu Ostern 1741 an seine neue Wirkungsstätte, an der er 41 Jahre ohne Unterbrechung tätig war.

Als Universitätslehrer für Mathematik, Physik, Astronomie und Geographie wird ihm großer Erfolg bescheinigt. In Greifswald ließ er nach seinen Entwürfen ein Haus (Martin-Luther-Str. 10) bauen. Durch die runden Bodenfenster führte er jahrelang genaue astronomische Messungen durch. 1775 wurde unter seiner Lei- [illegible] verturm am [illegible] e Sternwarte errichtet. Andreas Mayer leistete auch Beiträge zur Landvermessung. Als Ostsee und Bodden zugefroren waren, führte er exakte Küstenvermessungen durch. Eine Karte Mayers von Rügen und Vorpommern aus dem Jahre 1763 wurde zur 525-Jahrfeier der Ernst-Moritz-Arndt-Universität (1981) nachgedruckt.

In seinen zahlreichen Lehrveranstaltungen benutzte Mayer u. a. die Eulerschen Werke und die in Greifswald gedruckten Lehrbücher von W. J. G. Karsten (siehe alpha 1/1986), höchstwahrscheinlich auch die Bücher von Ch. Wolff.

Andreas Mayer erhielt zahlreiche internationale Ehrungen durch Mitgliedschaften an verschiedenen Akademien, und er unterhielt einen regen Briefwechsel mit großen Gelehrten seiner Zeit.

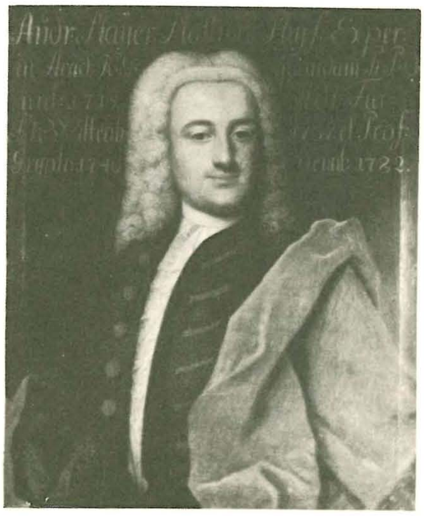
A. Mayer war zweimal verheiratet. Er starb am 20. 12. 1782 in Greifswald.

Wohl einmalig für einen Mathematiker und Rektor einer Universität ist, daß Andreas Mayer den Entwurf und die Bauleitung eines neuen Universitätshauptgebäudes übernahm. Am 3. 8. 1747 war die Grundsteinlegung für den Mittelflügel, bereits am 28. 4. 1750 wurde das spätbarocke Gebäude eingeweiht. Die ehemalige Universitätsbibliothek mit einer schönen Galerie, die von 24 Säulen getragen wird, dient heute als Aula. Hier ist auch ein Ölgemälde mit dem Porträt A. Mayers zu sehen.

In der Aula finden in unserer Zeit Konzerte und wissenschaftliche Veranstaltungen statt. Hier trafen wir uns auch zur Jugendweihefeier.

Über Andreas Mayer habe ich mich informiert nach Aufsätzen von J. Fait (Festschrift zur 500-Jahrfeier I, Greifswald 1956), F. v. Krbek (dieselbe Festschrift, Band II) und J. Buhrow (Wissenschaftliche Zeitschrift der EMAU, Greifswald, 1984).

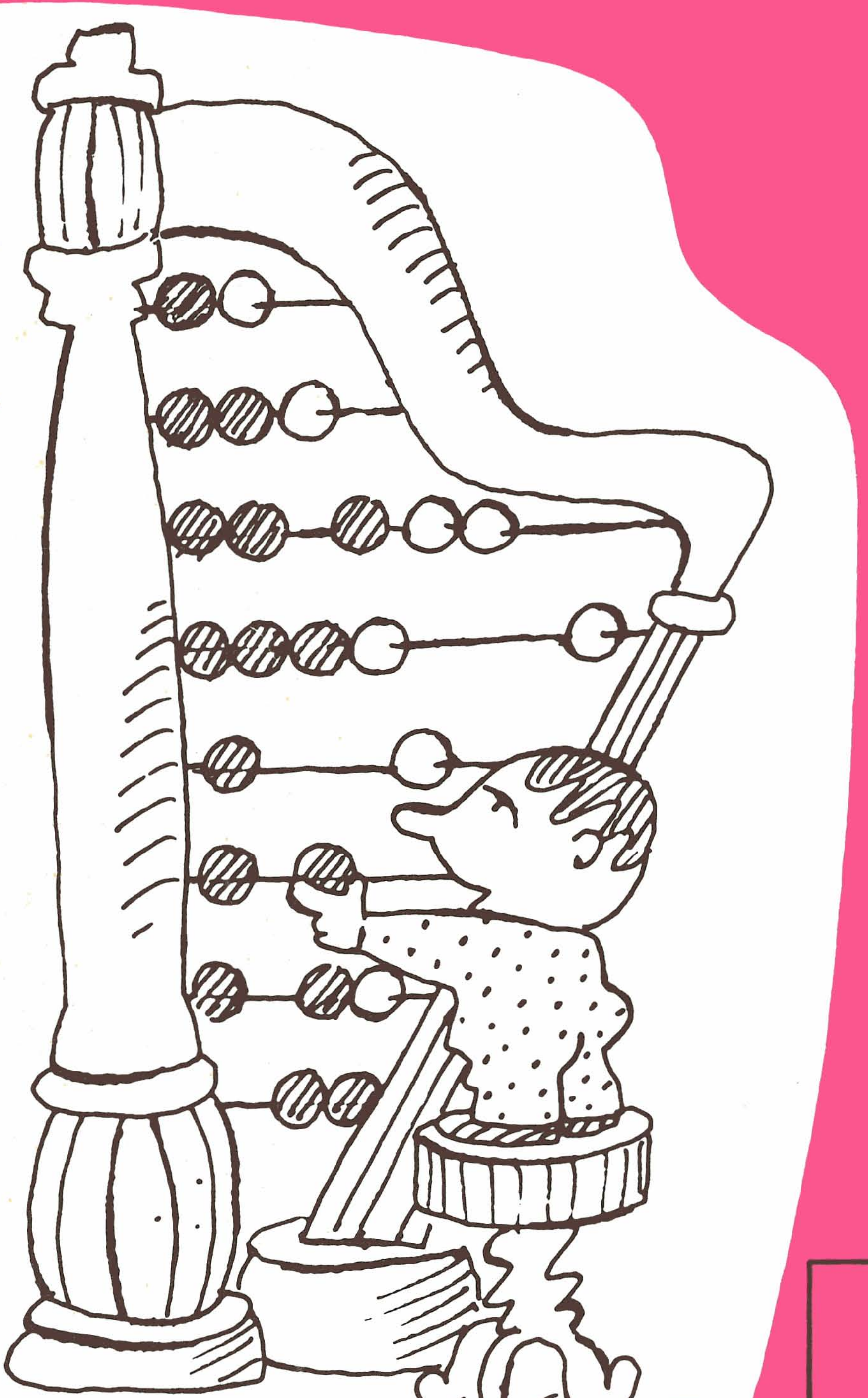
A. Schmidt



ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 24 (1990) 4 · Seiten 73 bis 96

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Verlag GmbH Berlin
24. Jahrgang 1990
Preis 1,50 DM
ISSN 0002-6395

5

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Verlag GmbH
Anschrift des Verlages:
Lindenstr. 54a, PSF 1213, Berlin, 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig, 7027
Redaktion:
Dr. paed. Gabriele Liebau (Chefredakteur); Rosemarie Schubert (redaktioneller Mitarbeiter)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Dr. sc. Lothar Flade (Halle); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Chemnitz); Dr. C. P. Helmholz (Leipzig); Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle)
Lizenznummer: 1545
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 DM, im Abonnement zweimonatlich 1,20 DM.
Bestellungen werden in der DDR von der Deutschen Post und dem Buchhandel entgegengenommen.
Außerhalb der DDR kann die Zeitschrift über den internationalen Buch- und Zeitschriftenhandel bezogen werden.
Bei Schwierigkeiten wendet euch bitte direkt an unseren Verlag.

Fotos: R. Voigt (S. 110); aus: H. Wußing: Mathematik in der Antike, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1965 (S. 112); Dr. J. Buhrow (III. U.-Seite)
Vignetten: L. Otto (Titelvignetten)
Techn. Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einer Vorlage von L. Otto, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Aus organisatorischen Gründen können wir den Wettbewerb 1990/91 nur in den Heften 6/90 und 1/91 – **mit neuen Wettbewerbsbedingungen** – durchführen.

Satz und Druck: Interdruck GmbH Leipzig
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 19. Juli 1990
Auslieferungstermin: 10. Oktober 1990

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Alphons weist euch auf Artikel mit geringerem Schwierigkeitsgrad hin. Das heißt aber nicht, daß alle anderen Beiträge für mathematische Anfänger ungeeignet sind. Probiert es selbst aus!

Liebe Leser! In den vergangenen Monaten erreichten uns zahlreiche Leserbriefe, in denen besorgt nach der Zukunft von „alpha“ gefragt wird. Wir haben uns natürlich über diese treue Anhängerschaft gefreut und fühlten uns zugleich in unseren Bemühungen um „alpha“ bestärkt.

Und sie haben sich gelohnt!

Unsere Zeitschrift wird nicht nur weiter bestehen, sondern auch den Sprung zu einer gesamtdeutschen Schülerzeitschrift wagen.

Mit diesem Heft wird „alpha“ mit Unterstützung des Friedrich-Verlages aus Seelze bei Hannover in Westdeutschland eingeführt.

Wir werden euch den Friedrich-Verlag im Heft 6/90 näher vorstellen. Denn seine Zeitschrift „mathematik lehren“ sponsort unseren diesjährigen „alpha“-Wettbewerb und ab Heft 1/91 wird „alpha“ in diesem Verlag erscheinen.

Und dies weiterhin unter der Devise: Rund um die Mathematik für jeden etwas, ob Anfänger, Hobbymathematiker oder Könner. Freuen würden wir uns natürlich über eine auch zukünftig so aktive Mitarbeit, denn die Beiträge, Hinweise, Wünsche und Kritiken unserer Leser helfen uns, eine Zeitschrift für unsere Leser zu machen.

Dr. Gabriele Liebau

Gardinen für ein Blumenfenster – rationell zugeschnitten

Hella Genau bekommt in der neuen Wohnung ein eigenes Zimmer. Für das Fenster, das 1,40 m hoch und 2,10 m breit ist, will sie sich eine Rüschengardine nähen, die die Fenstermitte bogenförmig freiläßt. Üblicherweise rechnet man beim Einkauf: Storebreite gleich Fensterhöhe und Meterzahl gleich zweieinhalb- bis dreimal Fensterbreite. „Das wird zu teuer für mich“, denkt Hella traurig, „und ich wollt's doch so gern allein finanzieren!

Schade auch um das Stück, das ich im symmetrischen Bogen herausschneiden würde und nicht weiterverwenden könnte; denn eine Rüsche, die aus ungleich langen Streifen zusammengesetzt wäre, sähe gar nicht gut aus.“

Hella zeichnet und rechnet und findet eine rationelle Lösung für den Fall, daß der Gardinenstoff rechts wie links gleich aussieht; denn sie will die Gardine aus zwei gleichen Teilen zusammensetzen, und zwar nicht, indem sie wie üblich vorm Nähen rechts auf rechts legt, sondern links auf rechts. (Die kurze Naht soll später in einem Reihfältchen verschwinden.)

Der von Hella gewählte Gittertüll, der die genannte Bedingung erfüllt, liegt 1,40 m breit und bietet durch sein klares, rechtwinkliges Muster noch den Vorteil, daß zum Messen von Abständen nur das Maßband erforderlich ist. Passende Rüsche gibt es in einer Breite von 0,25 m.

Hella kauft vom Tüll 2,70 m und von der Rüsche ... Aber das wollen unsere Leser wohl lieber selbst ausrechnen.

Hier noch einige Hinweise und Hellas Aufgabenstellung:

Die Schnittlinie, die den Stoff zentralsymmetrisch teilen soll, kann aus zwei Kreisbogen oder einer halben Sinuskurve bestehen. Anfang und Ende dieser Linie sind so zu führen, daß man sich die Tangenten in diesen Punkten senkrecht zu den Schnittkanten vorstellen kann.

Um die optisch und herstellungstechnisch bessere Variante zu finden, ist für jede der beiden Möglichkeiten eine maßstabgerechte Zeichnung anzufertigen.

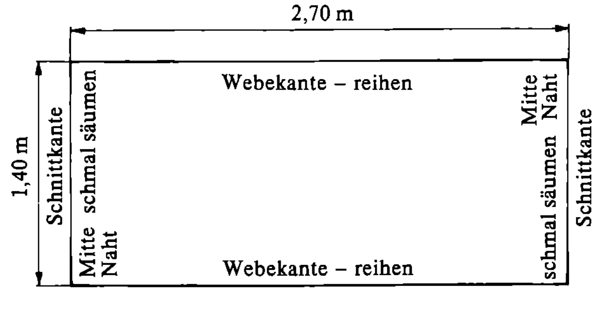
Dazu sind folgende Aufgaben zu lösen:

1. Wie groß ist in beiden Fällen der Abstand d zwischen der Fensterbank und der kürzesten Stelle der Gardine, wenn diese nach dem Ansetzen der Rüsche an den Seiten wieder 1,40 m lang sein und genau bis zur Fensterbank reichen soll?
2. Nenne die Bestimmungslinien für die Kreisbogenmittelpunkte!
3. Wie lang muß bei der Kreisbogenvariante die Rüsche sein?
4. Stelle für die Sinuskurvenvariante eine Funktionsgleichung auf, und vervollständige die unten begonnene Wertetabelle so weit wie nötig! Beachte dabei, daß x und y hier nicht die Abstände von den (gedachten) Achsen des Koordinatensystems sind, sondern daß x der Abstand von einer Schnittkante und y der von einer Webekante ist.

x	α	y
0,15 m		
0,30 m		
0,45 m		
⋮		

(Verluste für Nähte und Säume sind zu vernachlässigen.)

J. Heller



Leserpost

Die Lösung der Aufgabe 4 des Beitrages „Einige Folgerungen aus dem Eulerschen Polyedersatz“ (Hefte 3 und 4/90) läßt sich wesentlich verkürzen.

Die aufwendige Fallunterscheidung bezüglich der stumpfen Winkel kann entfallen. Dazu sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Kante SC die längste Kante des Tetraeders $ABCS$. (Gibt es mehrere längste Kanten, betrachten wir ebenfalls SC. Diese Kante sei Schenkel eines stumpfen Winkels. Ist der stumpfe Winkel der Winkel BSC (BCS, ACS, ASC), so folgt $|BC| > |SC|$ ($|SB| > |SC|$, $|AS| > |SC|$, $|AC| > |SC|$). Damit haben wir einen Widerspruch zur Maximalität der Kante SC erhalten. Die längste Kante des Tetraeders kann also nicht Schenkel eines stumpfen Winkels sein.

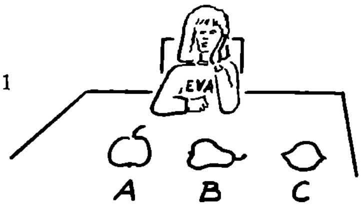
Dr. W. Moldenhauer, Erfurt

Orientierung im Raum: rechts/links

Um sich im Raum zurechtzufinden oder Gegenstände räumlich zu ordnen und sich darüber mit anderen verständigen zu können, muß man ganz sicher hinsichtlich rechts und links sein. Ihr wißt natürlich, wo rechts und wo links ist. Aber könnt ihr die Begriffe auch definieren? „Rechts ist, wo der Daumen links ist" – das geht natürlich nicht. Also denkt mal darüber nach. Wenn euch nichts einfällt, sucht die Begriffe in einem Lexikon auf.
Etwas anderes ist es dann noch, in Streßsituationen ganz schnell über rechts und links entscheiden zu können. Da zeigen sich Erwachsene oft noch unsicher, wie mir Autofahrlehrer berichteten. Wir wollen hier also etwas zur Einübung der Beziehungen tun.

Rechts von ... und links von ...

Bild 1



Vor uns auf dem Tisch liegen ein Apfel, eine Birne und eine Citrone; und zwar kann man hier sehen, wie sie zueinander liegen:
B rechts von A und links von C
A links von B und links von C
C rechts von A und rechts von B
Wie sieht Eva, die uns gegenübersitzt, diese Beziehungen?
Nimm jetzt drei solche Gegenstände und stelle sie so vor dir auf: B rechts von A und rechts von C. Wie liegen dann A und C zueinander?

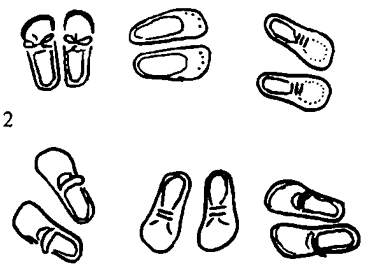


Bild 2

Hier sind Paare von Schuhen abgestellt worden.
Welches ist jedesmal der rechte Schuh?

Bild 3

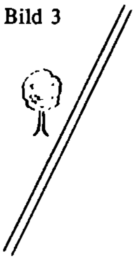


Bild 4

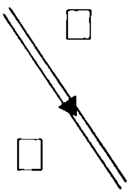


Bild 5

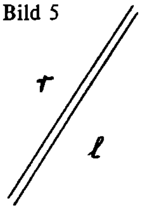


Bild 3: Auf welcher Seite der Straße steht der Baum? (Was muß ich dazu wissen?)
Bild 4: Die Pfeilspitze zeigt, wie ich mich auf der Straße bewege. Welche Straßenseite ist dann rechts, welche links? – Trage r und l richtig ein.
Bild 5: Wie muß ich mich auf dieser Straße bewegen, damit r und l stimmen? (Pfeilspitze zeichnen.)

Bild 6

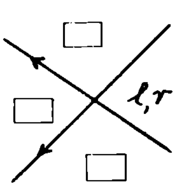


Bild 7

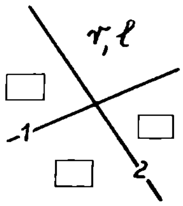
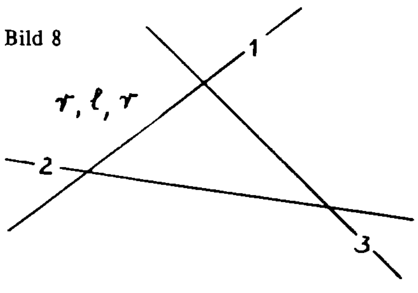


Bild 6: Das Gebiet l, r liegt links der Straße 1 und rechts der Straße 2. Bezeichne die anderen Gebiete entsprechend.
Bild 7: Welche Richtungen müssen diese beiden Straßen haben, damit r, l stimmt? – Pfeilspitzen zeichnen und die anderen Gebiete benennen.

Bild 8

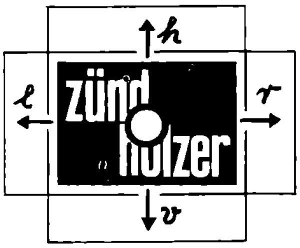


Das Gebiet r, l, r liegt rechts der Straße 1, links der Straße 2 und rechts der Straße 3. Welche Richtungen haben die drei Straßen? Wie müssen die anderen Gebiete bezeichnet werden?
Diese Aufgabe kannst du selbst vielfach verändern und dann deinen Freunden stellen: a) du gibst wie hier die Straßennummern und ein Gebiet an, b) du gibst Straßennummern und Richtungen an und läßt die Gebiete bezeichnen, c) du gibst ein Gebiet und die Straßenrichtungen an und läßt die Straßennummern herausfinden.

Kippen nach rechts und nach links

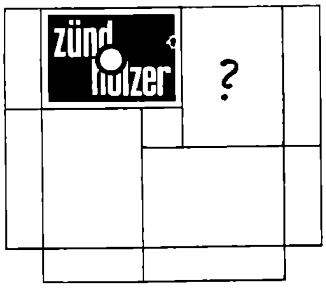
Lege eine Streichholzschachtel vor dir so auf den Tisch, daß du die Aufschrift lesen kannst. Dies ist die Oberseite. Wenn man die Schachtel aus dieser Stellung nach hinten oder nach vorn, nach rechts oder nach links kippt, steht sie jedesmal auf einer der schmalen Seitenflächen.

Bild 9



Man kann sie aber auch mehrmals kippen, bis wieder die Oberseite oder die Unterseite oben liegt. In der folgenden Abbildung sollst du ablesen, ob am Ende bei □, O oder U zu sehen ist. Kippe deine Streichholzschachtel entsprechend auf dem Tisch.

Bild 10



Diese Kippfolge kann man so aufschreiben:

$$O \xrightarrow{l\cdot v\cdot r\cdot v\cdot r\cdot h\cdot r\cdot h\cdot l} \square$$

Im folgenden sind noch einige Kippfolgen notiert. Vollziehe sie mit einer Streichholzschachtel nach und schreibe dann O oder U in das Kästchen am Ende. Vielleicht kannst du dir diese Bewegungen aber auch vorstellen, ohne wirklich zu kippen. Dann schreibe deinen Freunden entsprechende Kippfolgen auf und laß sie die Endlage der Schachtel aus dem Kopf sagen, indem sie sich die Bewegungen also bloß vorstellen.

$$O \xrightarrow{l\cdot h\cdot l\cdot v\cdot r\cdot r\cdot h} \square$$

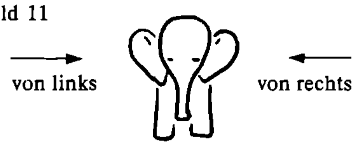
$$O \xrightarrow{r\cdot v\cdot r\cdot r\cdot h\cdot l} \square$$

$$O \xrightarrow{l\cdot v\cdot r\cdot r\cdot v\cdot l} \square$$

$$O \xrightarrow{r\cdot r\cdot r\cdot h\cdot l\cdot l\cdot l} \square$$

Ansichten von rechts und von links

Bild 11



Du hast einen Spielzeugelefanten vor dir stehen, so daß er dich ansieht. An den folgenden Bildern sollst du entscheiden, welches die Ansicht von rechts und welches die von links ist. Welche Seite des Elefanten siehst du von links?

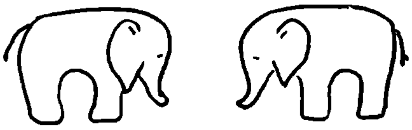
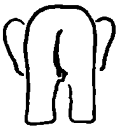


Bild 12

Vielleicht hast du so ein ähnliches Stofftier. Stelle es dann so vor dir auf, daß das folgende Bild die Ansicht von links zeigt:

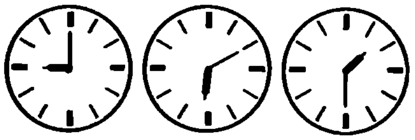
Bild 13



Drehungen rechtsherum und linksherum

Man sagt, die Zeiger der Uhr drehen sich rechtsherum. Manchmal kann man aber auch eine witzige Uhr kaufen (eine „Ostfriesenuhr"), auf der drehen sich die Zeiger linksherum. Welche Uhrzeit zeigen die folgenden Ostfriesenuhren an?

Bild 14



Wie herum mußt du drehen, um einen Wasserhahn zu schließen?
– um einen Marmeladendeckel festzuschrauben? – um eine Heizung abzustellen? – um eine Schraube festzuziehen?
– um einen Korkenzieher einzudrehen?
Kniffliger: Wie herum dreht sich ein Riesenrad auf dem Jahrmarkt?

Rechts- und Linksschraubungen

Beim Zu- und Aufdrehen in den vorigen Beispielen handelt es sich eigentlich um Schraubungen; denn beim Handrad oder bei der Mutter auf dem Gewinde bewegt man durch Drehen zugleich Rad und Schraube vorwärts oder rückwärts.

Bild 15

Holzschrauben, Metallschrauben und -spindeln haben fast immer Rechtsgewinde. Wenn du das betrachtest, erkennst du, warum man bei Rechtsdrehung etwas hineindreht oder schließt.
Stelle dazu bei nächster Gelegenheit noch einige Beobachtungen an: Wie herum führt eine Wendeltreppe? Wie verläuft die Treppe in einem mehrstöckigen Wohnhaus? Wie windet sich ein spitzzulaufendes Schneckenhaus? Wie ranken Stangenbohnen? – Auch hier noch etwas zum Nachdenken: Wenn du eine Wendeltreppe mit „Rechtsschraubung" hinaufsteigst –, wie herum drehst du dich? Wie ist das beim Hinabgehen? Hat dieselbe Wendeltreppe dann plötzlich „Linksschraubung"? Es macht dir hoffentlich jetzt Spaß, künftig in deiner Umgebung mehr auf rechts und links zu achten. *H. Besuden*

Und nun noch eine Knobelaufgabe für alle, die sich in Sachen „rechts" und „links" sicher sind.

Was vertauscht der Spiegel wirklich?

Bekanntlich vertauscht der Spiegel rechts und links. Aber warum dann nicht auch oben und unten? Logischerweise wäre das doch zu erwarten; und das tut er auch tatsächlich. Den Beweis liefert eine einfache Überlegung:
Ich drehe mich in Gedanken, immer das Gesicht zum Spiegel gewandt, in eine waagerechte Lage, so daß mein rechter Arm oben liegt. Da der Spiegel rechts und links vertauscht, nunmehr auch oben und unten. Die Frage ist nur, warum bemerkt man das nicht? Ganz einfach:
Weil das Bild auf der Netzhaut wieder umgekehrt wird, wie man in der Physik lernt. Oder ist an dieser Überlegung doch irgendwas falsch? *H. Besuden*

Buchtip

Oskar R. Meseck

Logisch denken leicht gemacht

Weltbild Verlag Augsburg

Über 200 Testfragen und Beispiele aus allen Bereichen der Denkprobleme als systematisches Denktraining

Arithmetik mit 6

Man setze Operationszeichen +, −, ·, :, $\sqrt{\ }$ (Quadratwurzel) oder ! (Fakultät) und gegebenenfalls Klammern, so daß die 20 Rechenaufgaben richtig gelöst werden.

0 0 0 = 6
0 1 2 = 6
1 1 1 = 6
1 2 3 = 6
2 2 2 = 6
4 3 2 = 6
3 3 3 = 6
5 4 3 = 6
4 4 4 = 6
6 5 4 = 6

5 5 5 = 6
7 6 5 = 6
6 6 6 = 6
8 7 6 = 6
7 7 7 = 6
7 8 9 = 6
8 8 8 = 6
10 9 8 = 6
9 9 9 = 6
10 10 10 = 6

Dr. W. Schmidt, Greifswald

Alphons logische Abenteuer (1)

Der Schüler Alphons las in einem Buch, daß „nicht wahr" dasselbe bedeute, wie „falsch". Man dürfe deshalb an den Stellen, an denen der eine Ausdruck stehe, den anderen setzen, „falsch" also für „nicht wahr", und umgekehrt. Gleiches gelte für „nicht falsch" und „wahr". Er nahm sich vor, in seiner und der Rede anderer darauf zu achten. Als seine kleine Schwester behauptete, er habe in der Marmelade genascht, erwiderte er, daß das nicht wahr, also logisch zwingend falsch sei. Ihrer Mutter sagte sie dann, so recht überzeugt sei sie zwar nicht, aber gegen logisch Zwingendes sei nichts zu machen.

Was doch Wissen möglich macht, dachte Alphons und überhörte dabei fast, daß er von seiner Mutter angesprochen wurde: „Du hast deine Schularbeiten gemacht, nicht wahr?" Flugs übersetzte er: „Du hast deine Schularbeiten gemacht, falsch?" Gemacht habe ich sie, aber ob falsch? „Das hoffe ich nicht", sagte er laut zur Verwunderung seiner Mutter, die nun drängender wiederholte: „Du hast doch deine Schularbeiten gemacht, nicht wahr?" Wir scheinen uns nicht mehr zu verstehen, stellte Alphons betrübt fest. Vielleicht meint seine Mutter, ob es falsch sei, sich mit dieser Frage an mich zu wenden? Etwas unsicher antwortet er: „Du kannst mich das fragen." Die Mutter verlor die Geduld und forderte Alphons auf, ihr seine Schulhefte zu zeigen, das würde er wohl noch richtig verstehen. Alphons verstand, es kam ja nichts zum Ersetzen vor.

Dann ging er zweifelnd in sein Zimmer und holte sich nochmals das Buch hervor, aus dem er sich hatte belehren lassen. Tatsächlich, er hatte nicht bis zum Ende gelesen. Ersetzbarkeit gilt, wenn einer dieser Ausdrücke zur Behauptung gehört. Der Satzteil „Du hast deine Schularbeiten gemacht" ist für sich ein sinnvoller Aussagesatz, der behauptet werden kann. Aber seine Mutter hatte nicht behauptet, sondern gefragt. Der Ausdruck „nicht wahr" übernimmt hier also die Funktion eines Fragewortes, und auf diesen Fall bezieht sich die Ersetzungsregel nicht. „Ich habe die Schularbeiten gemacht", rief er seiner Mutter zu, worauf sie nickte und das sagte, was ihm eben beruhigend durch den Kopf ging: „Na, wir verstehen uns ja doch, nicht wahr?"

L. Kreiser

Seltsame Sparkassen und die Zahl e

Eine Geschichte

Die ideale Sparkasse

Wir stellen uns vor, daß es in einem Land der Phantasie unendlich viele, mit $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ durchnumerierte Sparkassen gibt. Diese sollen unterschiedliche, in jedem Falle aber sehr günstige Bedingungen bieten:
Sparkasse 1 verzinst jährlich mit 100 %,
Sparkasse 2 verzinst halbjährlich mit 50 %,
Sparkasse 3 verzinst dritteljährlich mit $33\frac{1}{3}$ %
usw. Allgemein soll gelten: Sparkasse Nr. n verzinst n-mal im Jahr mit jeweils $\frac{100}{n}$ %.

Jemand will am Jahresanfang ein Konto eröffnen und eine „Phantasiemark" einzahlen. Wie hoch wird der Kontostand am Jahresende sein? Es handelt sich um ein sogenanntes Zinseszinsproblem. Um es zu lösen, arbeitet man besser mit Bruchteilen anstatt mit Prozentangaben. Es ergeben sich die folgenden Kontostände:
Sparkasse 1: 1 + 1 = 2 Phantasiemark (kurz: PM)

Sparkasse 2: $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2{,}25$ PM

Sparkasse 3: $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2{,}370\,370\,370\ldots$ PM

usw. Allgemein gilt:
Auf der Sparkasse Nr. n beträgt das Guthaben am Jahresende

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

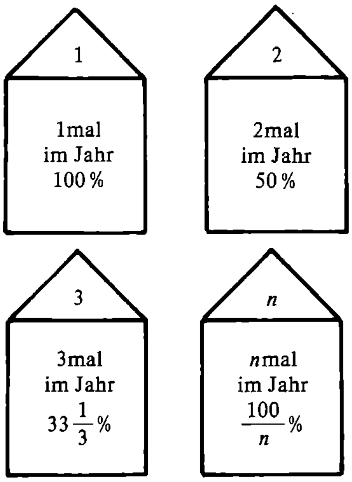
Phantasiemark. Nach der 1. Verzinsung ist nämlich das Konto von 1 auf $1+\frac{1}{n}$ angewachsen, nach der 2. Verzinsung ist es um denselben Bruchteil angewachsen, also von $1+\frac{1}{n}$ auf

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \text{ PM}$$

usw. bis zur n-ten Verzinsung innerhalb eines Jahres.

Wir stellen uns weiter vor: Eigentlich will der Sparer sein Guthaben von $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ am Jahresende abheben. Aus irgendeinem Grunde (vielleicht wegen Silvester?!) komme es nicht dazu und der nächstmögliche Auszahltermin sei unmittelbar nach der nächstfälligen Verzinsung (d. h. der ersten Verzinsung im zweiten Jahr des Sparens). Das Guthaben beträgt dann offenbar

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$



Die Sparkassen
und ihre Verzinsungsbedingungen

Etwas Mathematik

Durch die obige Geschichte haben wir zwei sogenannte Zahlenfolgen a_n und b_n definiert. Wir berechnen ihre ersten fünf Glieder und dann einige Glieder mit einer Zehnerpotenz als Nummer n mittels des Taschenrechners. Der Einfachheit halber runden wir auf vier Stellen nach dem Komma.

n	$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$
1	2	4
2	2,2500	3,3750
3	2,3704	3,1605
4	2,4414	3,0518
5	2,4883	2,9860
10	2,5937	2,8531
100	2,7048	2,7319
1 000	2,7169	2,7196
10 000	2,7182	2,7184

Aus dem Taschenrechner-Experiment leiten wir Vermutungen ab:
a_n ist stets kleiner als b_n, d. h. $a_n < b_n$.
a_n steigt mit wachsendem n, d. h. $a_n > a_{n-1}$.
b_n fällt mit wachsendem n, d. h. $b_n < b_{n-1}$.
$b_n - a_n$ nähert sich mit wachsendem n der Zahl 0.

Die Vermutungen formulieren wir als mathematische Sätze und beweisen diese zum Teil.

Satz 1: Die Zahlenfolge $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist echt monoton wachsend, d. h. $a_n > a_{n-1}$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$

Beweis: Wir beginnen mit

$$1+\frac{1}{n-1} = \frac{n-1}{n-1}+\frac{1}{n-1} = \frac{(n-1)+1}{n-1} = \frac{n}{n-1}$$

und gehen zu den Kehrwerten über:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} = \frac{n-1}{n} = 1-\frac{1}{n}.$$

Diese Gleichung multiplizieren wir auf beiden Seiten mit der positiven Zahl $1+\frac{1}{n}$ und benutzen die 2. binomische Formel:

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{1}{n^2}.$$

Die entstandene Gleichung erheben wir auf beiden Seiten in die n-te Potenz:

$$\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Auf die rechte Seite wenden wir die sogenannte Bernoullische Ungleichung
$(1+p)^n > 1+np$
an. Sie gilt allgemein für $p > -1$; wir setzen hier $p = -\frac{1}{n^2}$ und erhalten

$$\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n > 1+n\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1-\frac{1}{n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}.$$

Diese Ungleichung multiplizieren wir auf beiden Seiten mit der positiven Zahl $\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$. Aufgrund der bekannten Potenzgesetze kann man auf beiden Seiten Kürzungen vornehmen.
Das Ergebnis lautet

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \quad \text{d. h. } a_n > a_{n-1}.$$

Satz 2: Die Zahlenfolge $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ist echt monoton fallend, d. h. $b_n < b_{n-1}$ für $n = 2, 3, 4, \ldots$

Beweis: Wir übernehmen eine Formel aus dem Beweis von Satz 1 und rechnen weiter:

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}} = 1-\frac{1}{n^2} = \frac{n^2-1}{n^2}.$$

Wir gehen auf beiden Seiten zum Kehrwert über:

$$\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{n^2-1} = \frac{(n^2-1)+1}{n^2-1}$$

$$= 1 + \frac{1}{n^2 - 1}.$$

Die entstandene Gleichung erheben wir auf beiden Seiten in die $(n + 1)$-te Potenz:

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^{n+1}.$$

Auf die rechte Seite wenden wir die Bernoullische Ungleichung in der Form
$(1 + p)^{n+1} > 1 + (n + 1)\,p$ für $p > -1$
an, indem wir

$$p = \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{(n+1)(n-1)} \text{ einsetzen.}$$

Wir erhalten

$$\left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} > 1 + (n+1)\frac{1}{(n+1)(n-1)} = 1 + \frac{1}{n-1}.$$

Diese Ungleichung multiplizieren wir auf beiden Seiten mit der positiven Zahl $\dfrac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n-1}}$. Aufgrund von Potenzgesetzen kann gekürzt werden; das Ergebnis lautet

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \text{d.h.} \quad b_{n-1} > b_n.$$

Satz 3: Es gilt $2 = a_1 < a_n < b_n < b_1 = 4$.

Beweis: Der Teil $a_1 < a_n$ folgt aus Satz 1, der Teil $b_n < b_1$ aus Satz 2. Der noch fehlende Teil $a_n < b_n$ folgt aus

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}} = 1 + \frac{1}{n} > 1.$$

Fortsetzung der Geschichte

Kehren wir noch einmal zum Ausgangspunkt zurück: Der Sparer, der am Jahresanfang 1 Phantasiemark einzahlen und am Jahresende a_n Phantasiemark abheben will (wir nehmen jetzt an, daß dies möglich sei), überlegt erst noch: Auf dem Weg zur n-ten Sparkasse befallen ihn Zweifel, denn aufgrund von $a_{n+1} > a_n$ würde er auf der $(n + 1)$-ten Sparkasse günstiger sparen. Er wendet sich letzterer zu, überlegt sich aber, daß wegen $a_{n+2} > a_{n+1}$ die $(n + 2)$-te Sparkasse noch günstiger wäre usw. Jemand, der die vorteilhafteste Lösung sucht, wird paradoxerweise überhaupt nicht sparen, denn zu jeder Sparkasse gibt es eine noch günstigere. Als Ausweg aus dem Dilemma werde die „ideale Sparkasse" eingeführt, welche nicht zu bestimmten festen Terminen verzinst, sondern ständig, zu jedem Zeitpunkt! Die ideale Sparkasse arbeitet nicht so wie im Bankwesen üblich, sondern die Konten wachsen auf ihr so ähnlich wie die Pflanzen in der Natur.

e als Grenzwert

Die höhere Mathematik verfügt über Begriffe, mit denen sie den Übergang von den Sparkassen mit den Nummern $n = 1, 2, 3, \ldots$ zu der idealen Sparkasse beschreiben kann: Es handelt sich um einen sogenannten Grenzprozeß und das Guthaben am Jahresende auf der idealen Sparkasse ist der sogenannte Grenzwert der Zahlenfolge a_n. Man schreibt dafür

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Wir geben hier auch die exakte mathematische Bedingung für diese Grenzwertbeziehung an, ohne sie weiter zu diskutieren: Für beliebig kleines positives ε existiert eine Nummer n_0, so daß $|a_n - \mathrm{e}| < \varepsilon$ für alle Nummern $n \geqq n_0$. Die Existenz des Grenzwerts wird im vorliegenden Fall durch folgendes Theorem gesichert – so bezeichnet man besonders wichtige mathematische Sätze:

Theorem: Eine monoton wachsende und nach oben beschränkte Zahlenfolge besitzt einen Grenzwert. Ebenso besitzt eine monoton fallende nach unten beschränkte Zahlenfolge einen Grenzwert.

Aufgrund der Sätze 1, 2, 3 ist das Theorem auf die beiden konkreten Zahlenfolgen a_n und b_n anwendbar. Wir bemerken, daß a_n durch 4 nach oben beschränkt ist und daß b_n durch 2 nach unten beschränkt ist. Man kann leicht zeigen, daß a_n und b_n den gleichen Grenzwert haben, d. h. es gilt auch

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Weiter gilt für jede natürliche Zahl n

$$a_n < \mathrm{e} < b_n.$$

Indem man n hinreichend groß wählt, kann man e beliebig genau annähern, und zwar von unten durch a_n und von oben durch b_n. Beispielsweise erhalten wir für $n = 10\,000$ aus unserer obigen Tabelle e mit einer Genauigkeit von 3 Stellen nach dem Komma:
$\mathrm{e} = 2{,}718\ldots$ Mit Computern erreicht man natürlich höhere Genauigkeiten. Wir führen als Beispiel 20 Stellen nach dem Komma an:

$$\mathrm{e} = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ldots$$

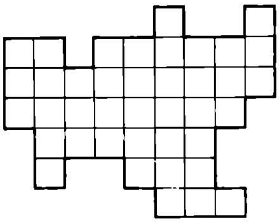
Ende der Geschichte

Die Zahl e hat viele interessante Eigenschaften. Unter anderem ist sie irrational, d. h. sie läßt sich nicht als Quotient zweier natürlicher Zahlen darstellen. Daraus folgt für den Sparer in unserer Geschichte: Die ideale Sparkasse kann den Betrag e am Jahresende nicht exakt auszahlen, auch dann nicht, wenn kleinere Untereinheiten der Phantasiemark eingeführt werden. Denn es werden immer kleinere Untereinheiten benötigt, so daß man mit dem Unterteilungsprozeß und Auszahlungsprozeß nie fertig werden würde. Der Sparer muß sich deshalb mit einem rationalen Näherungswert von e zufrieden geben, so daß effektiv für ihn die ideale Sparkasse doch keinen Vorteil gegenüber der Sparkasse mit einer genügend hohen Nummer n aufweist!

R. Schimming

▲ 1 ▲ Une succession difficile

Un propriétaire terrien rédige son testament. Il veut répartir son terrain entre quatre fils très pointilleux et très jaloux, de façon à obtenir quatre parties exactement superposables. Voici le plan du terrain.



Pouvez-vous aider le propriétaire en représentant le partage sur le plan?

aus: Tangente, Paris

▲ 2 ▲ The number 1990

The basic numerical structure of this number is quite simple $1990 = 2 \cdot 5 \cdot 199$, 199 is a very interesting prime because it is the first prime of a sequence of ten primes that creates an arithmetical progression, with a constant difference of 210: 199, 409, 619, 829, ...2089 – all these are primes. Show that the next integer in this progression is *not* a prime.

aus: Fun with mathematics, Toronto

▲ 3 ▲ На лесной поляне собрались друзья: Попугай, Удав, Слоненок, Теленок, Котенок, Мартышка и Верблюжонок. Попугай начал всех мерить. Оказалось, что Слоненок длиннее Теленка на 3 Попугая, Верблюжонок длиннее Мартышки тоже на 3 Попугая, Теленок длиннее Попугая на 7 Попугаев, Верблюжонок длиннее Котенка на 6 Попугаев, а все они укладываются в точности на Удаве, длина которого 38 Попугаев. Выразите длины друзей в Попугаях.

aus: Quant, Moskau

Was Farbtöpfe mit der Mathematik zu tun haben – ein Problem der Linearen Optimierung

Ein überaus interessantes Gebiet mit vielen praktischen Anwendungsmöglichkeiten ist die Optimierung, ein relativ junger Zweig am Baum der Mathematik. Diese Disziplin entwickelte sich im wesentlichen erst in den letzten 40 Jahren. Wie auch viele andere Bereiche der Mathematik verfügt die Optimierung über eine Reihe von Begriffen, Methoden und Herangehensweisen, die gegenüber der „Schulmathematik" völlig neu sind. Es soll deshalb hier versucht werden, ein typisches Problem der Linearen Optimierung vorzustellen und mit einfachsten Mitteln zu lösen, da sich dieses Teilgebiet am besten für eine Darlegung eignet und schon breite Anwendung gefunden hat.

Problem des Malers: Wie kann man aus zwei Sorten weißer Farbe, die sich in ihrer Qualität hinsichtlich Leimanteil, Luftdurchlässigkeit und Helligkeitsgrad sowie im Preis unterscheiden, einen Anstrichstoff mischen, der bestimmten Mindestanforderungen bezüglich der aufgezählten Kriterien genügt und dabei möglichst billig ist?

Zunächst wollen wir uns mit der genauen Formulierung sowie der Modellierung des genannten Problems befassen. Danach werden wir ein grafisches Lösungsverfahren beschreiben.

Das „Problem des Malers" wird etwas allgemeiner als *Mischungsproblem* bezeichnet. Für den vorliegenden Fall zweier Farbsorten I und II stellen wir alle notwendigen Angaben in Form einer Tabelle zusammen:

	Leimanteil (in %)	Luftdurchlässigkeit (in %)	Helligkeitsgrad (in Punkten)	Preis $\left(\text{in } \frac{\text{DM}}{\text{kg}}\right)$
Farbsorte I	15	50	3	6
Farbsorte II	60	15	9	4
Mindestforderungen	30	25	4	

Der Helligkeitsgrad wurde entsprechend einer Punktskala von 1 (ziemlich dunkel) bis 10 (sehr hell) bewertet. Diese Skala sei additiv beschaffen, so daß beispielsweise bei Mischung gleicher Teile von Farben der Helligkeitsgrade 1 bzw. 7 eine Farbe der Helligkeit 4 entsteht.

Schaut man sich die Daten genau an, so erkennt man, daß eine Farbsorte allein den Anforderungen nicht genügt, so daß tatsächlich eine Farbmischung erforderlich ist. Da es in unserer Aufgabe nicht auf die Menge, wohl aber auf das Verhältnis der beiden Sorten ankommt, führen wir die Variablen x und y ein, die den Anteil der Farbsorten I bzw. II an der Farbmischung angeben.

Die Werte dieser beiden Größen sind uns zunächst unbekannt und sollen erst durch das Lösen des Mischungsproblems ermittelt werden. Wir wissen aber nach Definition von x und y, daß

$$0 \leqq x \leqq 1 \text{ (d. h. } 0\,\% \leqq 100x\,\% \leqq 100\,\%) \qquad (1)$$

und

$$0 \leqq y \leqq 1 \text{ (d. h. } 0\,\% \leqq 100y\,\% \leqq 100\,\%) \qquad (2)$$

gilt. Nun wollen wir untersuchen, welchen Leimanteil der gemischte Anstrichstoff haben wird. Enthielte er nur Farbe der Sorte I, so hätte er 15 % Leim, bestünde er nur aus der Farbsorte II, wären es 60 %. Nehmen wir von jeder der beiden Farben die Hälfte, erhalten wir einen Leimanteil von

$$\frac{1}{2} \cdot 15\,\% + \frac{1}{2} \cdot 60\,\% = 37{,}5\,\%.$$

Allgemein beträgt die Leimmenge im Anstrichstoff bei einem Anteil x der Sorte I und y der Sorte II gerade

$$15\,\% \cdot x + 60\,\% \cdot y.$$

Dieser Ausdruck muß, um der Mindestforderung zu genügen, größer oder gleich 30 % sein. Unter Weglassung der „Maßeinheit" Prozent kommen wir somit zu der Ungleichung $15x + 60y \geqq 30.$ (3)

Ähnliche Überlegungen hinsichtlich der Eigenschaften Luftdurchlässigkeit (für die ebenfalls Additivität unterstellt sei) und Helligkeitsgrad führen uns auf die Ungleichungen

$$50x + 15y \geqq 25 \qquad (4)$$

und $3x + 9y \geqq 4.$ (5)

Damit haben wir fast alle Angaben aus der obigen Tabelle genutzt und in Form von Ungleichungen mathematisch beschrieben, d. h., wir haben das *mathematische Modell* des Problems aufgestellt. Es ist allerdings noch nicht vollständig, denn bisher wurden lediglich die *Beschränkungen (Nebenbedingungen)* formuliert, denen die Unbekannten x und y genügen müssen. Das Ziel der Aufgabe aber wurde außer acht gelassen, welches darin besteht, eine möglichst billige Farbe zu mischen. Diese Zielstellung läßt sich mittels der (von den beiden Veränderlichen x und y abhängigen) *Zielfunktion* $K(x,y) = 6x + 4y$ (6) ausdrücken, die den Preis der Mischung in $\frac{\text{DM}}{\text{kg}}$ angibt. Für konkrete Zahlen x und y nimmt die Kostenfunktion $K(x,y)$ jeweils einen bestimmten Wert an. Die Forderung nach kleinstmöglichen Kosten formuliert man mathematisch so:

$$K(x,y) \rightarrow \min,$$

wobei „min" vom Wort *Minimum* („das Kleinste") kommt. Nunmehr können wir die zum „Problem des Malers" gehörige lineare Optimierungsaufgabe wie folgt aufschreiben: Unter allen den Nebenbedingungen (1) bis (5) genügenden Zahlen x und y (diese nennt man *zulässig*) sind diejenigen zu finden, für die die Funktion (6) ihren kleinsten Wert – ihr Minimum – annimmt (die entsprechenden Werte von x und y nennt man *optimale* oder *bestmögliche Lösung*).

Es ist an der Zeit, den bereits mehrfach aufgetretenen Begriff „linear" zu erklären. Dieser bedeutet nichts anderes, als daß die Unbekannten x und y in den Beziehungen (1) bis (6) nur linear, also in der 1. Potenz, vorkommen (und nicht etwa in der Form x^2, $x \cdot y$ oder y^3 usw.).

Wie läßt sich nun die Aufgabe (1) bis (6) lösen? Sicher kann man x und y nicht aus irgendeiner Formel berechnen. Die Unbekannten lassen sich aber algorithmisch bestimmen, ähnlich wie wir es vom Lösen eines linearen (wieder „linear"!) Gleichungssystems her kennen (siehe z. B. den Artikel von W. L. Gutermann in „alpha" 4/85). Allerdings brauchen wir dazu zusätzlich neue Ideen, die ihren mathematischen Ausdruck in der sogenannten *Simplexmethode* finden. Hier wollen wir allerdings auf ein grafisches Verfahren zur Lösung des gestellten Problems zurückgreifen.

Zunächst führen wir ein x,y-Koordinatensystem ein, in welches mehrere Geraden eingezeichnet werden sollen. Wie wir wissen, läßt sich eine Gerade in der Ebene durch eine lineare Gleichung $ax + by = c$ darstellen, und umgekehrt beschreibt jede solche Gleichung eine Gerade in der Ebene.

Nun befassen wir uns mit der Ungleichung (3). Vorerst machen wir aus ihr eine Gleichung, also $15x + 60y = 30$, und zeichnen

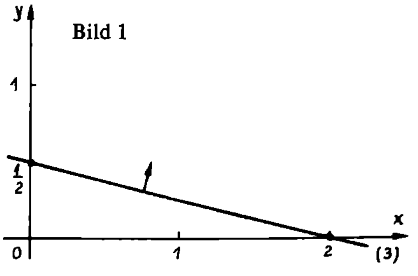


Bild 1

die dieser Gleichung entsprechende Gerade in das Koordinatensystem ein. Diese Gerade ist in Bild 1 dargestellt. Alle auf ihr liegenden Punkte erfüllen die Beziehung (3) mit Gleichheit.

Welche Punkte erfüllen jedoch (3) als Ungleichung? Es ist nicht allzu schwer sich zu überlegen (man kann dies selbstverständlich auch streng beweisen), daß das alle Punkte sind, die auf einer Seite der Geraden (3) liegen. Mit anderen Worten, alle der *Ungleichung* (3) genügenden Punkte bilden eine *Halbebene*.

Welche von beiden ist aber die Richtige? Das bekommt man ganz einfach heraus, indem man die Koordinaten eines nicht auf der Geraden liegenden Punktes in die Ungleichung (3) einsetzt. Am leichtesten geht das mit dem Koordinatenursprung (Nullpunkt), weil da am wenigsten zu rechnen ist. Verläuft allerdings die betreffende Gerade durch den Nullpunkt, so muß man einen anderen Punkt wählen.

Nehmen wir also den Punkt $(x,y) = (0,0)$ und setzen wir ihn in (3) ein. Im Ergebnis erhalten wir die offensichtlich falsche Ungleichung $0 \geqq 3$. Wir schließen daraus, daß der Ursprung auf derjenigen Seite der Geraden liegt, die dem Ungleichheitszeichen $<$ entspricht; wir aber benötigen gerade die andere Seite, die „Nordosthälfte" der Ebene. In Bild 1 ist diese durch einen Pfeil gekennzeichnet. Auch für die Ungleichungen (4) und (5) lassen sich ähnliche Überlegungen anstellen, deren Resultat in Bild 2 durch die mit Pfeilen versehenen Geraden (4) und (5) dargestellt ist. Schließlich haben wir noch die Beziehung (1) und (2) zu beachten, die insgesamt vier Ungleichungen verkörpern.

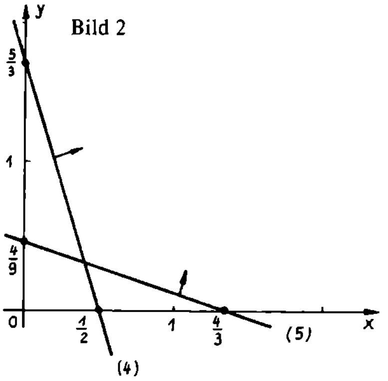


Bild 2

Alle Punkte, die (1) und (2) gleichzeitig erfüllen, liegen in dem in Bild 3 eingezeichneten Quadrat.

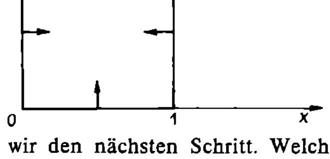


Bild 3

Gehen wir den nächsten Schritt. Welche Variablen x, y genügen den Beziehungen (1) bis (5) gleichzeitig und sind somit zulässig? Das sind diejenigen Veränderlichen x und y, für die die zugehörigen Punkte mit den Koordinaten (x,y) in den (durch Pfeile gekennzeichneten) „richtigen" Halbebenen für *alle* Bedingungen liegen. Die Gesamtheit solcher Punkte ist in Bild 4 als schraffierte Fläche dargestellt.

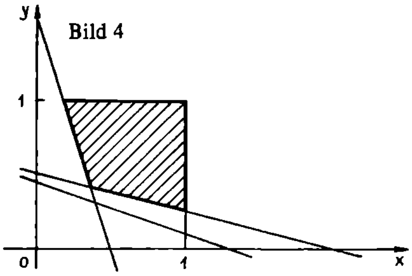


Bild 4

So, jetzt wissen wir, welche Punkte zulässig sind. Wie kann man nun unter ihnen optimale Punkte finden (das waren solche, für die die Funktion $K(x,y)$ ihren kleinsten Wert annimmt)? Zunächst interessieren wir uns für folgende Frage: Wie läßt sich die Menge aller Punkte (x,y) charakterisieren, für die die Funktion (6) einen festen Wert hat (oder, wie man sagt, konstant ist)? Dieser Wert sei z. B. gleich 12. Um die Frage beantworten zu können, müßten wir die Gleichung

$$6x + 4y = 12 \qquad (7)$$

lösen. Das ist eine Gleichung mit zwei Unbekannten; sie hat unendlich viele Lösungen. Geometrisch ist der Sachverhalt einfacher zu erklären: Gleichung (7) beschreibt eine Gerade in der Ebene (siehe Bild 5), und alle auf dieser Gerade gelegenen Punkte haben die Eigenschaft, daß für sie der Wert der Funktion (6) gleich 12 ist. Man nennt (7) *Höhenlinie (Niveaulinie)* der Funktion K zur Höhe 12. Setzt man die rechte Seite in (7) gleich einer anderen Konstanten, etwa gleich 6, erhält man eine andere Höhenlinie, die ebenfalls in Bild 5 eingetragen ist. Man überlegt sich leicht, daß beide Höhenlinien parallel verlaufen.

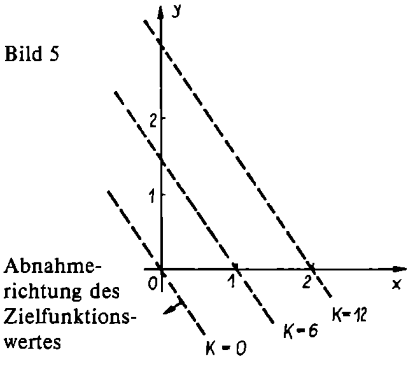


Bild 5

Die durch den Ursprung gehende Höhenlinie gehört offenbar zur Höhe Null. Wie wir sehen, nimmt in unserem Beispiel die zu den Linien gehörige Höhe in Richtung „Südwesten" ab, nach „Nordosten" hin nimmt sie zu.

Nunmehr sind wir gerüstet, das „Problem des Malers" mit geometrischen Mitteln vollständig zu lösen. Entsprechend der Aufgabenstellung haben wir unter allen zulässigen Punkten diejenigen (oder denjenigen) zu finden, für die die Funktion $K(x,y)$ ihren kleinsten Wert annimmt. Geometrisch bedeutet das: Nimm eine beliebige Niveaulinie und verschiebe sie so weit wie möglich nach links unten, aber höchstens so weit, daß sie den zulässigen Bereich in noch mindestens einem Punkt schneidet. Im Ergebnis kommen wir zum Punkt $(\bar{x},\bar{y})$ (Bild 6).

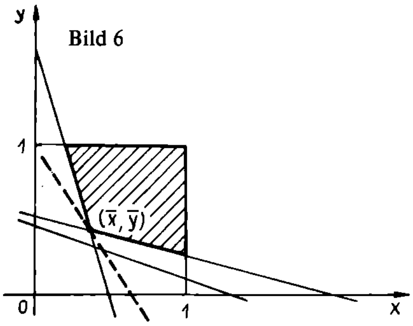


Bild 6

Um seine genauen Koordinaten zu bestimmen, müssen wir in den Beziehungen (3) und (4) anstelle des Ungleichheitszeichens das Gleichheitszeichen setzen (denn diesen Gleichungen entsprechen die sich in $(\bar{x},\bar{y})$ schneidenden Geraden) und das entstehende System mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten

$$15x + 60y = 30$$
$$50x + 15x = 25$$

lösen, was jeder selbst tun kann.

Das Ergebnis lautet:

$$\bar{x} = \frac{14}{37} \approx 0{,}38, \quad \bar{y} = \frac{15}{37} \approx 0{,}41.$$

Damit müßte unsere Farbmischung zu 38 % aus Sorte I und zu 41 % aus Sorte II bestehen.

„Halt!" werden jetzt aufmerksame Leser rufen. „Hier kann irgend etwas nicht stimmen. Wenn x und y Anteile an der Gesamtmischung bezeichnen, so müssen sie doch in der Summe 100 % ergeben!" Recht haben diese Leser! Eben die Beziehung $x + y = 1$, die in jedem Fall gelten muß, haben wir in unserer Modellierung nicht beachtet. (Hier zeigt sich die allgemein bekannte Tatsache, daß man beim Modellieren sehr sorgfältig zu Werke gehen muß, um wirklich alle wesentlichen Momente zu erfassen, sonst stimmt das erhaltene Modell nicht mit der Wirklichkeit überein und die Lösung wird falsch sein. Leider läßt sich Modellieren nicht „lehren", da es einen echt schöpferischen Prozeß darstellt; es ist aber durchaus trainierbar.)

Um nun unser Mischungsproblem endgültig zu lösen, haben wir im Bereich der zulässigen Lösungen nur diejenigen Punkte zu betrachten, die auf der der Gleichung $x + y = 1$ entsprechenden Geraden liegen, und genauso vorzugehen, wie oben beschrieben. Durch die Einbeziehung der hinzugekommenen Gleichung verringert sich hierbei die Dimension des zulässigen Bereichs um Eins, so daß aus der schraffierten Fläche eine Strecke wird. Auf dieser suchen wir denjenigen Punkt (x^*,y^*), der den kleinsten Zielfunktionswert liefert, d. h., wir verschieben wiederum die Höhenlinie soweit wie möglich nach „Südwesten" (Bild 7). Die endgültige und tatsächlich optimale Lösung lautet

$$x^* = \frac{2}{7}, \quad y^* = \frac{5}{7}.$$

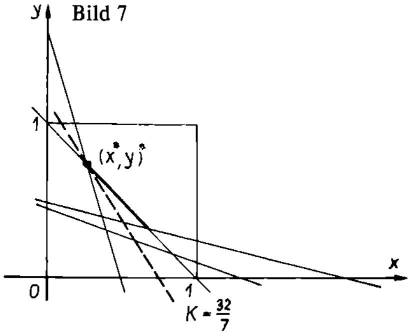


Bild 7

Der zu mischende Anstrichstoff muß damit zwei Teile der Farbsorte I und fünf Teile der Sorte II enthalten; die Kosten belaufen sich dabei auf $\frac{32}{7} \approx 4{,}57$ DM pro Kilogramm Farbe.

Überlegt euch, was sich an dem betrachteten Mischungsproblem ändert, wenn die Preise für die Farbsorten I und II 5,00 DM bzw. 6,00 DM pro Kilogramm betragen.

Obgleich schwieriger, lassen sich auch Aufgaben mit drei Unbekannten eventuell noch grafisch lösen. Für Probleme mit vier und mehr Variablen müssen wir allerdings auf die Geometrie verzichten und andere Mittel zu Hilfe nehmen. Diese sind algebraischer Natur und bestehen in der bereits erwähnten Simplexmethode, die freilich nur bei kleinen Aufgaben für die Rechnung von Hand geeignet ist.

Das behandelte „Problem des Malers“ (Mischungsproblem) ist eine ganz typische Aufgabenstellung der Linearen Optimierung. In praktischen Problemen trifft man sie bei der Produktionsplanung, der Fruchtfolgenbestimmung für die Feldbestellung, der langfristigen Investitionsplanung usw. wieder. Dabei können sehr große Probleme mit Hunderten und Tausenden, ja sogar Zehntausenden von Nebenbedingungen und Variablen entstehen, die selbstverständlich nur noch mit Hilfe des Computers gelöst werden können.

Zum Abschluß seien noch einige typische Aufgabenstellungen genannt, die auf lineare Optimierungsprobleme führen:

„Problem des Dispatchers“ *(Transportproblem)*: Wie soll man den Transport von Großplatten für den Wohnungsbau zwischen zwei Plattenwerken und drei Baustellen so organisieren, daß die Gesamtfahrstrecke der Schwerlasttransporter so kurz wie möglich wird?

„Problem des Technologen“ *(Zuschnittproblem)*: Wie kann man aus rechteckigem Ausgangsmaterial Verkehrszeichen verschiedener Form, die in bestimmten Stückzahlen benötigt werden, so ausstanzen, daß möglichst wenig Originalplatten verwendet werden müssen?

„Problem des Arbeitsplaners“ *(Zuordnungsproblem)*: Auf welche Weise sollen m vorhandenen (und flexibel einsetzbaren) Arbeitskräften m Arbeitsaufgaben zugeordnet werden, so daß der durch diese Zuordnung entstehende Gesamtnutzen maximal wird?

B. Luderer

Läßt sich der Zufall berechnen?

Teil 3

Nunmehr sollen Wahrscheinlichkeiten bei zufälligen Mehrfachversuchen betrachtet werden.

Das sind zufällige Versuche, die sich als durch Kopplung von mehreren zufälligen Versuchen entstanden auffassen lassen. Die in einen zufälligen Mehrfachversuch eingebundenen zufälligen Versuche heißen zufällige Teilversuche.

Zur Einführung werden 3 Aufgaben vorgestellt und anschließend analysiert:

▲ 13 ▲ Gleichzeitig oder nacheinander wird einmal mit einem Idealwürfel gewürfelt und einmal mit einer Idealmünze geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei diesem Doppelversuch mit dem Würfel 3 Augen gewürfelt werden und daß die Münze das Wappen zeigt? (Eine Münze zeigt nach jedem Wurf entweder Wappen (Elementarereignis $F_1 = \{w\}$) oder Zahl (Elementarereignis $F_2 = \{z\}$).)

▲ 14 ▲ Es wird gleichzeitig oder nacheinander einmal mit einem schwarzen gezinkten Würfel und mit einem weißen Idealwürfel gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei diesem Doppelwurf mit dem schwarzen Würfel i $(i = 1,2,\dots,6)$ und mit dem weißen Würfel j $(j = 1,2,\dots,6)$ Augen zu würfeln? Die Wahrscheinlichkeiten, mit dem schwarzen Würfel $1,2,\dots,5$ oder 6 Augen zu würfeln, seien

$p_1 = p_2 = 0{,}05$, $p_3 = 0{,}1$, $p_4 = 0{,}2$ und $p_5 = p_6 = 0{,}3$.

▲ 15 ▲ In einer Urne befinden sich 7 rote und 4 gelbe Kugeln. Aus dieser Urne wird erst eine und, ohne diese in die Urne zurückzulegen, noch eine zweite Kugel ohne Hinzusehen entnommen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit

a) zwei rote,
b) zuerst eine rote und als zweite eine gelbe,
c) als erste eine gelbe und als zweite eine rote und
d) 2 gelbe Kugeln herauszunehmen?

Die zufälligen Versuche dieser drei Aufgaben können als aus zwei zufälligen Teilversuchen bestehend, also als zufällige Doppelversuche aufgefaßt werden:

Der zufällige Doppelversuch der Aufgabe 13 besteht in einer losen Kopplung des zufälligen Versuchs zV_e „einmaliges Würfeln mit einem Idealwürfel“ mit den sechs Elementarereignissen

$E_i = \{i\}$ $(i = 1,2,\dots,6)$ und des zufälligen Versuchs zV_f „einmaliges Werfen einer Idealmünze“ mit den zwei Elementarereignissen

$F_1 = \{w\}$ und $F_2 = \{z\}$. Zum zufälligen Doppelversuch gehören hier 12 Elementarereignisse, die durch die Symbole E_iF_j mit $i = 1,2,\dots,6$ *und* $j = 1,2$ eindeutig fixiert sind.

Im zufälligen Doppelversuch der Aufgabe 14 sind der zufällige Versuch zV_e „einmaliges Würfeln mit dem schwarzen Würfel“ mit den 6 Elementarereignissen

$E_i = \{i\}$ $(i = 1,2,\dots,6)$ und der zufällige Versuch zV_f „einmaliges Würfeln mit dem weißen Würfel“ mit den 6 Elementarereignissen

$F_j = \{j\}$ $(j = 1,2,\dots,6)$ ebenfalls lose gekoppelt. Dieser zufällige Doppelversuch besitzt $6 \cdot 6 = 36$ Elementarereignisse, die eindeutig angebbar sind durch

E_iF_j mit $i = 1,2,\dots,6$ und $j = 1,2,\dots,6$. In diesem Symbol steht das zum zV_e gehörende Elementarereignis stets vor dem zum zV_f gehörenden Elementarereignis.

Der zufällige Doppelversuch der Aufgabe 15 kann als enge Kopplung der beiden folgenden zufälligen Versuche aufgefaßt werden:

zV_e – Entnehmen einer Kugel aus einer weißen Urne mit 7 roten und 4 gelben Kugeln mit den Elementarereignissen $E_1 = R$ und $E_2 = G$

zV_f – Entnehmen einer Kugel aus einer schwarzen Urne mit 7 roten und 4 gelben Kugeln mit den Elementarereignissen $F_1 = R$ und $F_2 = G$.

Die Kopplung legt hier fest, daß die erste Kugel aus der weißen Urne zu entnehmen ist, daß damit automatisch eine mit der entnommenen Kugel gleichfarbige aus der schwarzen Urne verschwindet und daß nunmehr die zweite Kugel aus der schwarzen Urne zu entnehmen ist. Zu diesem zufälligen Doppelversuch gehören die 4 Elementarereignisse

$E_1F_1 = RR$, $E_1F_2 = RG$, $E_2F_1 = GR$ und $E_2F_2 = GG$.

Definition 7: Ein zufälliger Versuch heißt zufälliger Doppelversuch, wenn zwei zufällige Versuche, zV_e mit den Elementarereignissen $E_1, E_2, \dots, E_v$ und zV_f mit den Elementarereignissen $F_1, F_2, \dots, F_w$ angebbar sind, so daß die Elementarereignisse des zufälligen Doppelversuchs eindeutig durch die $v \cdot w$ Symbole E_iF_j $(i = 1,2,\dots,v;$ $j = 1,2,\dots,w)$ festgelegt sind.

Analog wie die Elementarereignisse lassen sich bei einem zufälligen Doppelversuch noch andere Ereignisse vorteilhaft durch Doppelsymbole angeben:

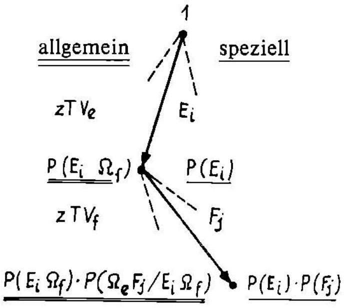
Definition 8: Ist A ein Ereignis des zufälligen Versuchs zV_e, B ein Ereignis des zufälligen Versuchs zV_f und ist der zufällige Doppelversuche eine Kopplung des zV_e und des zV_f, so heißt die Vereinigung aller Elementarereignisse E_iF_j des zufälligen Doppelversuchs, für die gleichzeitig $E_i \subset A$ und $F_j \subset B$ gelten, Ereignis AB des zufälligen Doppelversuchs!

▲16▲ Welche Elementarereignisse des zufälligen Doppelversuchs der Aufgabe 14 sind Teilmengen des Ereignisses AB mit $A = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ und $B = F_2 \cup F_4$?
Ist ein zufälliger Doppelversuch durch Koppeln der zufälligen Versuche zV_e und zV_f mit den sicheren Ereignissen
$\Omega_e = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_v$ und
$\Omega_f = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_w$ entstanden, dann wird jedes Ereignis $A\Omega_f$ des Doppelversuchs (A ist in diesem Symbol gemäß Definition 8 ein Ereignis des selbständigen zufälligen Versuchs zV_e) auch als Ereignis des im Doppelversuch enthaltenen zufälligen Teilversuchs zTV_e bezeichnet. Ebenso wird jedes Ereignis Ω_eB des Doppelversuchs auch als Ereignis des anderen zufälligen Teilversuchs zTV_f bezeichnet.
Abkürzend wird das Ereignis $A\Omega_f$ oft Ereignis A des zufälligen Teilversuchs zTV_e und das Ereignis Ω_eB Ereignis B des zTV_f genannt.
Der Durchschnitt der Ereignisse $A\Omega_f$ und Ω_eB der zufälligen Teilversuche ist übrigens das Ereignis AB *des Doppelversuchs:*
$A\Omega_f \cap \Omega_eB = AB$
(siehe Lösung der Aufgabe 14!).
Für die Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses E_iF_j eines zufälligen Doppelversuchs gilt nach Definition 4

$$P(E_iF_j) = P(E_i\Omega_f) \cdot \frac{P(E_iF_j)}{P(E_i\Omega_f)}$$
$$= P(E_i\Omega_f) \cdot P(\Omega_eF_j/E_i\Omega_f).$$

$P(E_i\Omega f)$ ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_i beim zufälligen Teilversuch zTV_e und $P(\Omega_eF_j/E_i\Omega_f)$ ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis F_j beim zufälligen Teilversuch zTV_f bez. des Ereignisses E_i beim zTV_e.
Bei allen drei Aufgaben 13, 14 und 15 sind die beiden zufälligen Versuche so zu einem zufälligen Doppelversuch gekoppelt, daß für einen zufälligen Teilversuch, mit zTV_e bezeichnet,
$P(E_i\Omega_f) = P(E_i)$ für $i = 1, 2, \ldots, v$ gilt.
In Worten: Die Wahrscheinlichkeiten für das Elementarereignis E_i beim zufälligen Teilversuch zTV_e und beim selbständig ausgeführten zufälligen Versuch zV_e sind gleich (siehe Lösungen der Aufgaben 13, 14 und 15).
Bei allen drei Aufgaben kann der zufällige Doppelversuch, ohne die Wahrscheinlichkeiten zu verändern, so ausgeführt werden, daß der zufällige Teilversuch zTV_e vor dem zTV_f ausgeführt wird. Dabei läuft der zTV_e ebenso ab, als ob er als selbständiger zufälliger Versuch zV_e ausgeführt wird.
Bei den Aufgaben 13 und 14 kann jeder der beiden zufälligen Teilversuche in dieser Weise als erster ausgeführt werden. Hier gilt auf alle Fälle noch $P(\Omega_eF_j) = P(F_j)$. Bei diesen beiden Aufgaben wird darüber hinaus die Wahrscheinlichkeit, mit der beim zuletzt ausgeführten zufälligen Teilversuch zTV_f ein Ereignis F_j eintritt, nicht dadurch beeinflußt, welches Elementarereignis E_i beim vorher ausgeführten zTV_e eingetreten ist: Es gilt $P(\Omega_eF_j/E_i\Omega_f) = P(F_j)$ und die Ereignisse $E_i\Omega_f$ und Ω_eF_j sind unabhängig (siehe Lösung der Aufgabe 14!). Für jeden zufälligen Doppelversuch gilt wegen
$E_i\Omega_f = E_iF_1 \cup E_iF_2 \cup \ldots \cup E_iF_w$
nach den Grundannahmen
$P(E_i\Omega_f) = P(E_iF_1) + P(E_iF_2) + \ldots$
$+ P(E_iF_w)$. Nach diesen für $i = 1, 2, \ldots, v$ gültigen Gleichungen ist es naheliegend, die Wahrscheinlichkeiten eines zufälligen Doppelversuchs und die zu seinen zufälligen Teilversuchen gehörenden Ereignisse mittels eines gerichteten und bewerteten Graphen darzustellen (siehe Lösung der Aufgabe 15!): Den Pfeilen sind die dem angegebenen zufälligen Teilversuch zugehörigen Ereignisse zugeordnet und den Knoten (Endpunkte der Pfeile) die zu den angegebenen Ereignissen gehörenden Wahrscheinlichkeiten (Bild 9).

Bild 9



▲17▲ Berechne die Wahrscheinlichkeit für das zum zufälligen Doppelversuch der Aufgabe 14 gehörende Ereignis AB mit $A = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ und $B = F_2 \cup F_4$!
Die angegebene, die Grundannahmen benutzende Lösung der Aufgabe 14 läßt die Gültigkeit des folgenden Satzes erkennen:
Satz 8: Ist A ein mit der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ beim zufälligen Versuch zV_e eintretendes Ereignis, B ein mit der Wahrscheinlichkeit $P(B)$ beim zufälligen Versuch zV_f eintretendes Ereignis und sind die beiden zufälligen Versuche zV_e und zV_f lose zu einem zufälligen Doppelversuch gekoppelt, so tritt beim zufälligen Doppelversuch das Ereignis AB mit der Wahrscheinlichkeit $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ ein. Dabei bedeutet „lose Kopplung von zV_e und zV_f“: Für die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse
E_i $(i = 1, 2, \ldots, v)$ des zV_e,
F_j $(j = 1, 2, \ldots, w)$ des zV_f und
E_iF_j des Doppelversuchs gelten
$P(E_iF_j) = P(E_i) \cdot P(F_j)$.
„Lose Kopplung von zV_e und zV_f“ ist gleichbedeutend mit „Die Elementarereignisse $E_i\Omega_f$ des zufälligen Teilversuchs zTV_e und Ω_eF_j des zufälligen Teilversuchs zTV_f sind paarweise unabhängig. Ein zufälliger Doppelversuch, entstanden durch Koppeln des zV_e und des zV_f, ist selbst ein zufälliger Versuch und kann mit einem weiteren zufälligen Versuch zV_g zu einem zufälligen Dreifachversuch gekoppelt werden“ usf.
Für zufällige Mehrfachversuche gilt ein zum Satz 8 analoger Satz. *W. Träger*

Eine Aufgabe von Prof. Dr.
G. Mandshavidze

*Institut für angewandte Mathematik
der Universität Tbilissi*

Die reelle Funktion $f(x, y)$ sei innerhalb des Kreises
$$K = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 < 1\}$$
definiert und stetig.
Weiterhin ist bekannt, daß die Funktion im Punkte $(x_1, y_1) \in K$ negativ und im Punkte $(x_2, y_2) \in K$ positiv ist.
Es ist zu zeigen, daß $f(x, y)$ den Wert Null in einer unendlichen Anzahl von Punkten aus K annimmt!

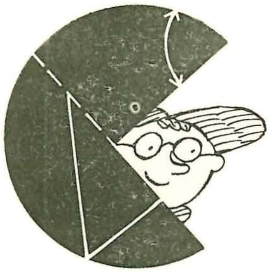
Kurzbiographie

Prof. Mandshavidze wurde am 6. Mai 1924 geboren und studierte 1941 bis 1947 an der Universität Tbilissi. Von 1947 bis 1950 war er Aspirant am mathematischen Institut Tbilissi, zugehörig zur Akademie der Wissenschaften der Georgischen SSR. 1970 wurde er Doktor der Wissenschaften und 1972 erfolgte die Berufung zum Professor. Nach der Tätigkeit als wissenschaftlicher Sekretär und stellvertretender Direktor für Forschung am mathematischen Institut leitet er dort seit 1977 die Abteilung „Komplexe Analysis und deren Anwendung“.

Es gibt kein größeres Hindernis des Fortgangs in den Wissenschaften als das Verlangen, den Erfolg davon zu früh verspüren zu wollen.

Georg Christoph Lichtenberg

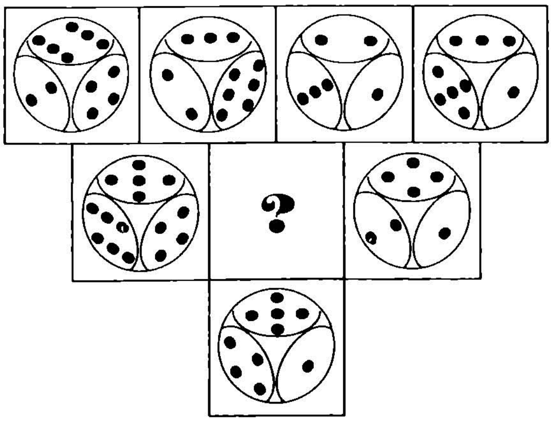
In freien Stunden · alpha-heiter



Zusammengestellt aus unterhaltsamer mathematischer Literatur von Hermann-Dietrich Hornschuh, erschienen im MANZ-Verlag München

Verflixte Würfel

Die sieben Würfel in der folgenden Anordnung haben alle eine gemeinsame Eigenschaft.
Wie viele Augen muß demzufolge der Würfel haben, der an die Stelle des Fragezeichens gehört?

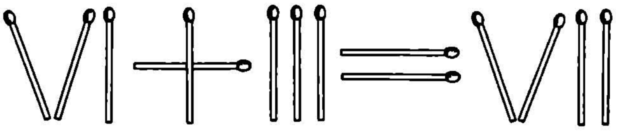


Bunte Kugeln

Eine grüne Kugel ist so schwer wie zwei rote Kugeln und zwei blaue Kugeln sind so schwer wie eine rote Kugel.
Wie viele blaue Kugeln sind so schwer wie drei grüne Kugeln?

Mißbrauchte Streichhölzer

Liest man die folgende Streichholzanordnung ab, dann ergibt sich 6 + 3 = 7, was offensichtlich falsch ist.



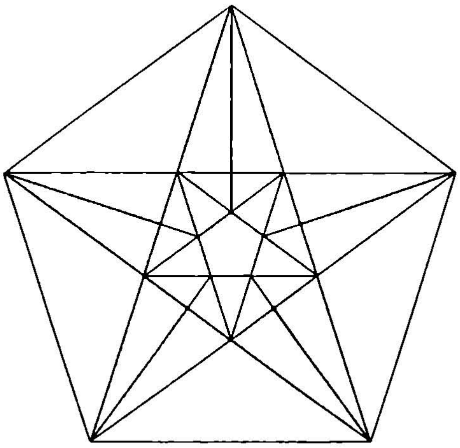
Durch Umlegen eines Streichholzes soll die Anordnung in eine Gleichung umgeformt werden.

Neun Neunen

Ist es möglich, 9 Neunen so durch zwei verschiedene Rechenzeichen zu verknüpfen, daß der entstehende Term genau den Wert 1000 besitzt?

Etliche Dreiecke

In einem Buch hat Herbert die folgende Figur gefunden. Er überlegt nun, wie viele Dreiecke in dieser Figur enthalten sind.



Wie viele Dreiecke kann Herbert höchstens finden?

Die Mathematik ist als Fachgebiet so ernst, daß man keine Gelegenheit versäumen sollte, es möglichst unterhaltsam zu gestalten.

B. Pascal

Fehlende Ziffern

Wie viele Zahlen von 1 bis 1000 gibt es, die weder die Ziffer 0 noch die Ziffer 9 besitzen?

Die Acht

Wenn einer eine 8 sieht
und 8sam in Betr8 zieht,
daß sie auch, wenn sie kopfsteht,
noch 8bar durch die Welt geht,
so ist die 8, wenn auch verkehrt,
hoch8ungsvoller 8ung wert.
Wenn aber einer hergeht
und eine 8, die hochsteht,
roh von der Seite antippt,
so daß sie 8los umkippt,
dann wird durch diese Schändlichkeit
aus einer 8 Unendlichkeit
und bleibt, wie dieses Beispiel lehrt,
hoch8ungsvoller 8ung wert!

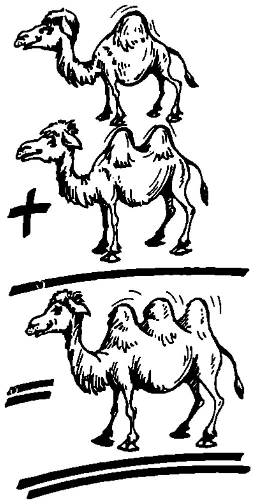
A. Wittmann

Fatale Verwandtschaft

Peter erzählt seinem Freund Paul: „Der Bruder meines Onkels ist der Onkel meines Bruders. Kannst du mir sagen, wie das verwandtschaftlich bei uns zusammenhängt?“
„Nichts leichter als das“, antwortet Paul seinem Freund Peter.

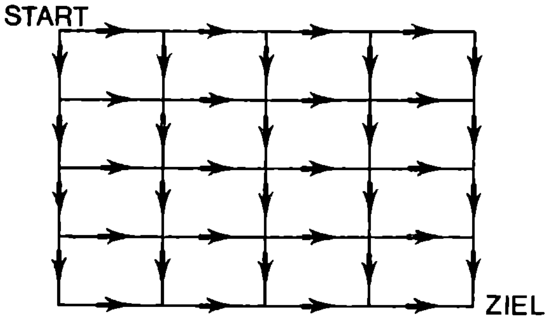
Mathematische Zoologie

Anton Oberfrank



Verschiedene Wege

Die folgende Zeichnung zeigt, auf welchen Wegen man vom Start zum Ziel gelangen kann.



Wie viele verschiedene Wege führen vom Start zum Ziel?

Die normalverteilte Klasse

Zeichner unbekannt

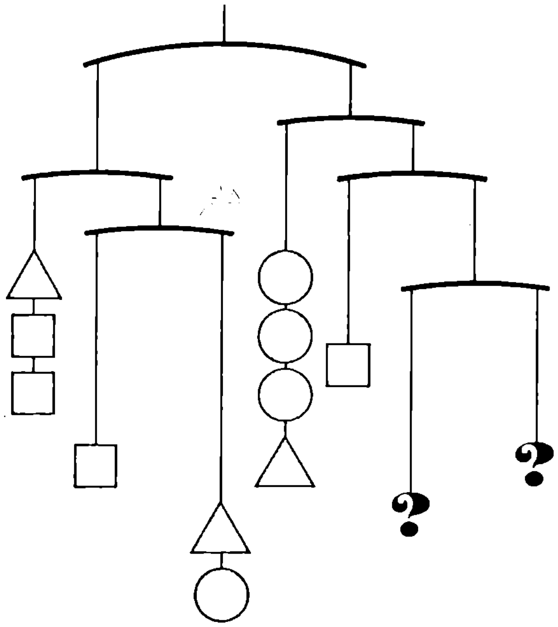
Komischer Kreis

Welchen Radius hat ein Kreis, der ebenso viele Zentimeter Umfang wie Quadratzentimeter Fläche besitzt?

Keiner in der Schule kann mich ausstehen“, jammerte der Sohn, „die Lehrer nicht und die Kinder auch nicht. Der Busfahrer haßt mich, der Hausmeister macht mir die Hölle heiß. Ich gehe nicht mehr in die Schule.“
„Du mußt aber gehen“, sagte die Mutter, „du bist gesund. Du mußt noch viel lernen. Außerdem bist du jetzt fünfundvierzig Jahre alt und der Mathematiklehrer. Du mußt also in die Schule gehen!“

Fatales Mobile

An einem Mobile hängen Dreiecke, Kreise und Quadrate. Stäbe gleicher Größe sind gleich schwer. Die Fäden haben praktisch kein Gewicht.



Welche Symbole müssen an die Stelle des Fragezeichens gehängt werden, damit das Mobile im Gleichgewicht ist?

Für alle, die neugierig geworden sind, die vier Titel, aus denen wir für alpha-heiter „mausen“ durften:

Hermann-Dietrich Hornschuh
Mathe mit Köpfchen, Manzbuch 880
Mehr Mathe mit Köpfchen, Manzbuch 881
Noch mehr Mathe mit Köpfchen, Manzbuch 882
Jedes Buch enthält einhundert interessante Denksportaufgaben mit oft überraschenden Lösungen.

Humor rund um die Mathematik, Manzbuch 891
Eine Sammlung heiterer Gedichte, Texte, Zeichnungen um eine ernste Wissenschaft

Warum ist der Kreis nicht rund?

Diese merkwürdige Frage stellte Andreas seinem Vater, nachdem er den Heimcomputer KC85/3 mit dem CIRCLE-Befehl einen Kreis zeichnen ließ. Natürlich ist der Kreis, den der Mathematiker definiert, rund; runder geht es nicht. Anders sieht es vielleicht schon mit dem Kreis aus, den der Mathematiker mit dem Zirkel schlägt. Böse Zungen behaupten, daß sich unter den Mathematikern besonders viele Menschen befinden, die „zwei linke Hände“ besitzen. Also ist es nicht verwunderlich, daß nach der Anwendung des Zirkels durch einen Mathematiker kein vollkommen rundes Gebilde auf dem Papier zu sehen ist. Um sich nicht beim Kreiszeichnen zu blamieren, würde der Mathematiker diese Arbeit gern dem Computer überlassen. Doch wir ahnen nun schon, daß auch Computerkreise ihre Ecken haben.

Der Befehl zum Zeichnen eines Kreises für den KC85/3 (bzw. den KC85/2 mit Zusatzmodul M 006 BASIC) lautet

CIRCLE A, B, R

wobei A und B die Koordinaten des Mittelpunkts sind und R der Radius. Damit der Kreis vollständig auf den Bildschirm paßt, wählt man den Radius so, daß

$R \leqq A, \quad R \leqq B \quad$ und $\quad A + R \leqq 319, \quad B + R \leqq 255$

gilt. Doch der vom Computer gezeichnete Kreis besitzt 4 auffällige Spitzen in den Punkten $(A \pm R, B)$ und $(A, B \pm R)$ (s. Bild 1 und 2).

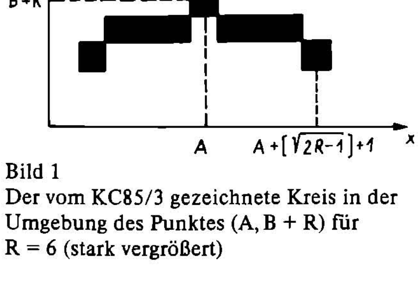


Bild 1

Der vom KC85/3 gezeichnete Kreis in der Umgebung des Punktes (A, B + R) für R = 6 (stark vergrößert)

Wir wollen im folgenden Abschnitt untersuchen, wieso der KC85 eckige Kreise zeichnet und wie man das Programm leicht abändern kann, um rundere Kreise zu erhalten. Außerdem ließ sich Andreas mit der Befehlskette

FOR R=0 TO 127: CIRCLE 128,128,R: NEXT R

konzentrische Kreise zeichnen, die eigentlich den letzten Kreis mit Radius 127 vollkommen ausfüllen müßten (s. Bild 2).

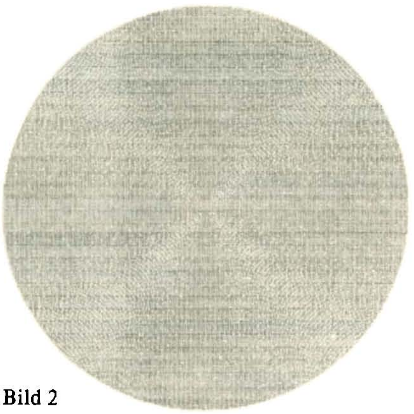


Bild 2

In Wirklichkeit bleiben einige Punkte weiß, wobei in der Umgebung der beiden Geraden y = 128 und x = 128 der Kreis sehr gut ausgefüllt wurde. Im übernächsten Abschnitt untersuchen wir, wieso dies der Fall ist und wieviel Prozent der Punkte innerhalb des Kreises mit R=127 vom KC85 nicht geschwärzt wurden. Im letzten Abschnitt wird ein Verfahren angegeben, wie man einfacher als der KC85 bei der Abarbeitung des CIRCLE-Befehls Kreise mit dem Computer zeichnen kann.

1. Die Ecken im Computerkreis

Das Unterprogramm CIRCL ist im KC85/3 in Maschinensprache formuliert und wird bei dem Kommando CIRCLE A,B,R der Sprache BASIC aufgerufen. Die Idee dieses Unterprogramms besteht in der Berechnung des in Bild 3 markierten Achtelkreises in der angegebenen Richtung. Gesetzt werden dann alle 8 symmetrischen Punkte.

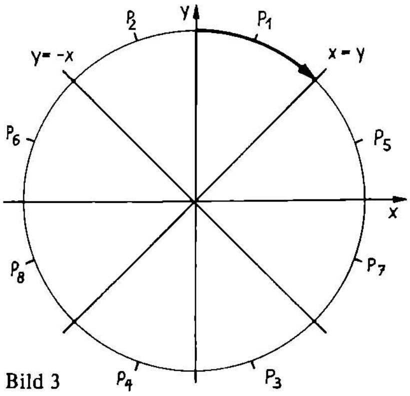


Bild 3

Will man diese Idee in ein BASIC-Programm umsetzen, so könnte es wie folgt aussehen:

Programm P1

```
10 FOR X=0 TO R/SQR(2): Y
   =INT(SQR(R*R-X*X))
20 PSET A+X,B+Y: PSET A-X,B+Y
30 PSET A+X,B-Y: PSET A-X,B-Y
40 PSET A+Y,B+X: PSET A-Y,B+X
50 PSET A+Y,B-X: PSET A-Y,B-X
60 NEXT X
```

Da die Koordinaten der Bildpunkte ganzzahlig sein müssen, wird Y als die größte ganze Zahl definiert, die kleiner oder gleich $\sqrt{R^2 - X^2}$ ist. Jetzt können wir uns schon erklären, woher der Computerkreis seine Ecken hat: Für X=0 ist Y=R, für X=1 ist

$Y = [\sqrt{R^2 - 1}\,] = R - 1$. ([Z] ist das mathematische Symbol für den ganzen Anteil von Z, d. h. die größte ganze Zahl, die nicht größer als Z ist.) Auch für X=2 ist schon für $R \geqq 3$

$R - 1 \geqq Y = [\sqrt{R^2 - 4}\,] \geqq \sqrt{R^2 - 2R + 1}$

$= R - 1$, d. h. Y=R−1. Ebenso zeigt man, daß für

$1 \leqq X \leqq [\sqrt{2R - 1}\,] \quad Y = R - 1$ ist und für

$X = [\sqrt{2R - 1}\,] + 1 \quad Y = R - 2$. Damit sieht der Computerkreis in der Umgebung des Punktes (A,B+R) entspechend dem Punktraster des Bildes 1 aus. Der Grund für die Ecke im Punkt (A,B+R) ist also der, daß der sich aus dem Satz des Pythagoras ergebende Term $\sqrt{R^2 - X^2}$ stets abgerundet wird. Würde man entsprechend den Rundungsregeln auf ganze Zahlen runden, d. h. für $N - 0{,}5 \leqq Z \leqq N + 0{,}5$ (N ganzzahlig) auf N, so wäre $\sqrt{R^2 - 1}$ für R=2 auf R aufzurunden. Denn es gilt

$R^2 - 1 > (R - 0{,}5)^2 = R^2 - R + 0{,}25$.

Gewöhnlich wird für $Z = N + 0{,}5$, für geradzahliges N ab- und ungeradzahliges N aufgerundet. Will man mit dem Computer runden, ist es günstiger, die Regel „Z=N+0,5 wird stets aufgerundet“ zu verwenden. Denn diese Regel läßt sich durch INT(Z+.5) einfach realisieren.

Wenn wir nun den Befehl für Y im Programm P1 abwandeln zu

Y = INT(SQR(R*R − X*X) + .5),

so verlieren die Kreise ihre Ecken. Anstelle von Bild 1 würde man z. B. das Bild 4 erhalten.

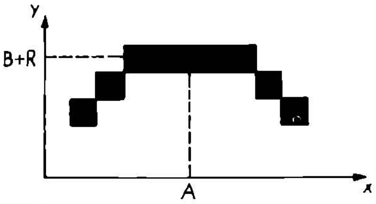


Bild 4

Der mit abgewandelter Rundungsregel gezeichnete Kreis in der Umgebung des Punktes (A, B + R) für R = 6

Ein guter Programmierer macht sich auch Gedanken, wie er sein Programm gestalten kann, damit möglichst wenig Rechenzeit benötigt wird. Zum Beispiel ist das Wurzelziehen eine im Vergleich zum Addieren oder Subtrahieren sehr zeitaufwendige Operation. Deshalb wird im Unterprogramm CIRCL der ganze Anteil $W = [\sqrt{Z}\,]$ einer Wurzel nach folgendem Verfahren, das wir wieder aus der Maschinensprache in BASIC übersetzt haben, berechnet:

Programm P2

```
10 W=-1: D=-1
20 W=W+1: D=D+2: Z=Z-D
30 IF Z > =0 AND Z < 2 ∧ 15 THEN
   GOTO 20
40 REM W IST DIE GESUCHTE
   ZAHL
```

Da $Z = R^2 - X^2$ für $R < 128 = 2^7$ stets die Bedingung $Z < 2^{15}$ erfüllt, ist für Kreise, die voll auf den Bildschirm passen, der Test

„$Z < 2 \wedge 15$“ ohne Bedeutung. In dem Befehl „$Z = Z - D$“ nimmt D nacheinander die Werte 1, 3, 5, 7, ... an.
Nun gilt die Formel
$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2N - 1) = N^2$,
wie man dem Bild 5 unmittelbar durch Auszählen der Kästchen in jedem Streifen entnimmt. Damit besteht also die Idee in dem Verfahren zur Berechnung von $[\sqrt{Z}]$ darin, daß im Befehl 30 das größte W gesucht wird, für das $Z - W^2 \geqq 0$ gilt.

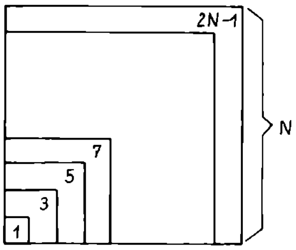


Bild 5
$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2N - 1) = N^2$

Durch Anfügen eines Befehls wollen wir erreichen, daß für $\sqrt{Z} - [\sqrt{Z}] > 0{,}5$ $\sqrt{Z}$ aufgerundet wird. (Der problematische Fall $\sqrt{Z} - [\sqrt{Z}] = 0{,}5$ kann für ganzzahliges Z nicht auftreten, denn aus
$\sqrt{Z} = 0{,}5 + [\sqrt{Z}]$ würde
$Z = 0{,}25 + [\sqrt{Z}] + [\sqrt{Z}]^2$ folgen. Diese Gleichung stellt aber einen Widerspruch dar, da alle Summanden in ihr außer 0,25 ganzzahlig sind.)
Wir ergänzen das Programm P2 durch den Befehl

```
35 IF Z+W>=0 THEN W=W+1
```

Er entspricht dem Test $Z + W \geqq (W + 1)^2$, nach dem bei positiver Antwort $\sqrt{Z}$ aufgerundet wird.
Nachdem wir gesehen haben, wie sich Programmierer gern um das Wurzelziehen drücken, verblüfft es uns nicht mehr, daß in dem Befehl 10 des Programms P1 nicht wirklich $R/\sqrt{Z}$ berechnet wird. Stattdessen wird 182R/256 gebildet. Der Computer kann uns sehr schnell die Güte seiner Näherung angeben:
$1/\sqrt{2} \approx 0{,}70710678$ und
$182/256 = 0{,}71093750$.
Wenn man $1/\sqrt{2}$ durch einen Bruch annähern möchte, bieten sich solche mit kleinerem Nenner und Zähler an. Schon $99/140 \approx 0{,}70714286$ ist ein besserer Näherungswert. (Wie man solche Brüche konstruiert, können die Schüler der oberen Klassenstufen in dem Buch von I. M. Winogradow „Elemente der Zahlentheorie“, DVW Berlin 1955, im §I.4 über Kettenbrüche nachlesen.) Aber der Bruch $182/2^8$ hat den großen Vorteil, daß in einer Dualzahldarstellung keine echte Division durch 2^8 vorgenommen werden muß. Es genügt, das Komma einfach 8 Stellen nach links zu verrücken.
Verblüffen kann uns nur, warum nicht $1/\sqrt{2}$ durch $181/256 = 0{,}70703125$ besser angenähert wurde. Dadurch passiert es, daß der Punkt (70,70) auf dem Kreis mit Radius R = 99 gezeichnet wird, während er bei der Approximation $1/\sqrt{2} \approx 181/256$ wegen der prinzipiellen Abrundung
$[99 \cdot 181/256] = [69{,}996094] = 69$ verloren ginge.
Und wer noch ein paar Eigenheiten des CIRCLE-Befehls auf dem KC85/3 kennenlernen möchte, zeichne Kreise mit
a) $R > 255$ b) $181 < R \leqq 255$ und
c) $R < 181$, $Y + R > 255$ oder $Y - R < 0$.
Er stellt fest, daß a) der Radius kongruent Modul 256 auf eine Zahl im Intervall [0; 255) verändert wird, b) durch den Test „$Z < 2 \wedge 15$“ statt gewisser Teile des Kreises Strecken gezeichnet werden und daß c) Kreisteile, die oben oder unten aus dem Bildschirm ragen würden, unten bzw. oben auf dem Bildschirm erscheinen. Letzteres bedeutet also, daß auch für die Y-Koordinate Kongruenzrechnung Modul 256 angewandt wird.
Die Eigenschaft b) ließe sich sofort beheben, wenn der Test „$Z < 2 \wedge 15$“ weggelassen oder durch den wirkungslosen Test „$Z < 2 \wedge 16$“ ersetzt wird. Denn wegen $R < 256 = 2^8$ ist stets $R^2 - X^2 < 2^{16}$.

2. Weiße Flecken im Kreis

Nachdem nun Andreas weiß, warum die Kreise auf dem KC85/3 so eckig sind, versteht er aber noch nicht, warum der eckige Kreis mit Radius 127 nicht durch die eckigen Kreise mit Radien $R = 0, 1, \ldots, 126$ vollständig ausgefüllt wird.
Da wir nun wissen, wie der Heimcomputer Kreise berechnet, betrachten wir im Bild 6 nur den markierten Achtelkreis. Wir wählen ein bestimmtes X, z. B. 10, und berechnen R so, daß $X = [182R/256]$ ist.

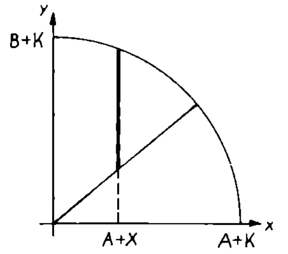


Bild 6

Wir erhalten also R = 15 in unserem Beispiel bzw. allgemein $R \approx \sqrt{2}X$.
Der durch die Formel $Y = [\sqrt{R^2 - X^2}]$ (= 11) gegebene Wert erfüllt also $Y \approx X$. Wir stellen für X = 10 erstaunt fest, daß der Punkt mit X = Y = 10 also weiß bleibt. Nun vergrößern wir bei festem X die R-Werte und erhalten für die zugehörigen Werte $Y = [\sqrt{R^2 - X^2}]$ die folgende Tabelle:
X = 10

R	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	...	49	50	51	52 ...
Y	11	12	13	14	16	17	18	19	20	21	22	24	25	...	47	48	50	51 ...

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir uns ja schon überlegt, daß genau für $[\sqrt{2R - 1}] \geqq X$, d. h. für $R \geqq (X^2 + 1)/2$ $Y = R - 1$ gilt.
Also brauchten wir die Tabelle ab R = 27 gar nicht mehr zu berechnen, denn wir wissen, daß erst ab $(10^2 + 1)/2 = 50{,}5$ die Differenz $R - Y$ gleich 1 wird. Die Tabelle zeigt uns, daß neben dem Punkt (A + 10, B + 10) auf der Geraden $x = A + 10$ noch die Punkte (A + 10, B + 15), (A + 10, B + 23) und (A + 10, B + 49) weiß bleiben.

Wir können uns nun erklären, warum für kleine Werte von X, d. h. in der Umgebung der Geraden x = A, die Färbung vollständig erscheint: Für kleines X gilt $Y = [\sqrt{R^2 - X^2}] = R - 1$ schon für relativ kleines R. Bei Vergrößerung von R um 1 wird Y um 1 vergrößert. Also sind alle Punkte (A + X, B + Y) mit $Y = R - 1 \geqq (X^2 + 1)/2$ geschwärzt. Weiterhin taucht die Frage auf, wieviel Prozent der Rasterpunkte weiß bleiben, wenn der Kreis mit Radius K mit Kreisen vom Radius $R = 0, 1, 2, \ldots, K - 1$ ausgefüllt wird. Natürlich kann man mit dem Computer die einfache Aufgabe lösen, solche Tabellen wie die obige zu entwerfen und die Zahl der ganzzahligen Y-Werte mit
$X \leqq Y \leqq \sqrt{K^2 - X^2}$ zu bestimmen, die in ihnen nicht auftreten. Aber wozu den Computer so bemühen, wenn es nur um die Anzahl der Punkte geht? Da die Abstände zwischen aufeinanderfolgenden Quadratzahlen wachsen, liegt in dem Intervall
$(R^2 - X^2, (R + 1)^2 - X^2]$ mindestens eine Quadratzahl. Also gilt
$[\sqrt{R^2 - X^2}] < [\sqrt{(R + 1)^2 - X^2}]$ und es ist kein Zufall, daß in der obigen Tabelle nie 2 gleiche Y-Werte auftreten.
Die Zahl der geschwärzten Punkte (A + X, B + Y) für festes X ist also gleich der Zahl der R-Werte in der zugehörigen Tabelle. Für den kleinsten R-Wert gilt $R \approx \sqrt{2}X$, für den größten R = K. Folglich werden für festes X rund $K - \sqrt{2}X$ Punkte geschwärzt. Die Anzahl aller schwarzen Punkte im Achtelkreis ist damit rund
$K + (K - \sqrt{2}) + (K - 2\sqrt{2}) + \ldots$
$+ (K - [K/\sqrt{2}]\sqrt{2})$.
Der größte X-Wert im Achtelkreis beträgt nämlich rund $K/\sqrt{2}$.
Wegen der Rundung auf ganze Zahlen ist die obige Summe bis auf eine Abweichung von maximal K die Anzahl der geschwärzten Punkte. Die Summe ist etwa die Zahl der Rasterpunkte in einem Dreieck mit Kathetenlängen $K/\sqrt{2}$ und K, d. h. sie ist ungefähr gleich der Dreiecksfläche $K^2/(2\sqrt{2})$ (s. Bild 7).

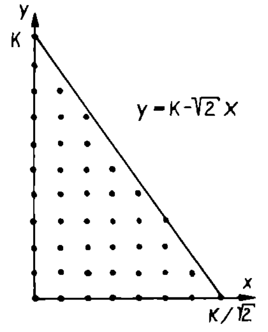


Bild 7
Zur Berechnung von $\sum_{X=0}^{K/\sqrt{2}} K - \sqrt{2}X$

Die Zahl aller Rasterpunkte im Achtelkreis mit Radius K ist ungefähr dessen Fläche, d. h. $K^2\pi/8$.

Deshalb ist die Anzahl der weißgebliebenen Punkte rund $K^2(\pi/8 - 1/(2\sqrt{2}))$, d. h. ihr Anteil ist wegen

$$(\pi/8 - 1/(2\sqrt{2}))/(\pi/8) = 1 - \sqrt{8}/\pi$$
$$\approx 0{,}09968369$$

knapp 10 %. Der Fehler bei der Berechnung der Punktanzahl von der Größenordnung K fällt für große K bei Summen der Größenordnung K^2 nicht mehr ins Gewicht. Würden wir einen Computer mit unendlich großem Bildschirm haben, so würde sich dort der Wert $1 - \sqrt{8}/\pi$ als Grenzwert des Anteils der nichtgeschwärzten Bildpunkte für gegen Unendlich strebendes K ergeben. Wenn wir in dem vorgestellten Programm für die Kreiskonstruktion nur die Rundungsregel für Y abändern, ändern sich die Punkte, die bei der Konstruktion aller konzentrischen Kreise weiß bleiben. Aber die zuletzt angestellten Überlegungen für ihren Anteil treffen weiterhin zu, so daß für große K wiederum knapp 10 % nicht geschwärzt werden.

3. Ein anderes Verfahren für die Kreiskonstruktion

Zeichnet man mit dem vorgestellten BASIC-Programm zum Wurzelziehen einen Kreis mit dem Radius R = 41, so benötigt der KC85/3 etwa 38 Sekunden. Verantwortlich ist vor allem das zeitraubende Verfahren zum Wurzelziehen, das in einem Programm in Maschinensprache viel schneller abgearbeitet wird. Wir wollen nun eine Methode vorstellen, mit der der Computer Kreise zeichnet, ohne eine Wurzel ziehen zu müssen. Für einen Kreis mit Radius 41 benötigt der KC85 in einem BASIC-Programm nur noch 4 Sekunden.

Das Verfahren wurde im Heft 12/1985 der Zeitschrift mc auf Seite 84 vorgestellt und liefert auch „eckige" Kreise. Wir stellen es gleich abgeändert vor, damit die Kreise runder aussehen:

Programm P3

```
10 Y=R: X=0: W=R*R+R
20-50 wie im Programm P1
60 IF Y<=X THEN STOP ELSE
   X=X+1
70 IF X*X+Y*Y>W THEN Y=Y-1:
   GOTO 20
```

Die Idee des Programms besteht darin, daß man sich innerhalb des markierten Achtelkreises von Bild 3 von Punkt zu Punkt weitertastet. Ist ein Punkt der Kreislinie gesetzt worden, geht man zum rechten Nachbarpunkt. Ist dieser mehr als 0,5 von der idealen Kreislinie $X^2 + Y^2 = R^2$ entfernt, geht man zum darunterliegenden Punkt. Ansonsten wird dieser Punkt geschwärzt. So einfach geht es!

In Wirklichkeit geht es sogar noch einfacher, nämlich ohne Multiplikation bei der Berechnung von X^2 und Y^2: Da in der Maschinensprache Additionen und Subtraktionen viel schneller als Multiplikationen ablaufen, empfiehlt es sich, nur einmal R^2 zu berechnen und damit $Y^2 = R^2$ und $X^2 = 0$ für den ersten Schritt. Die Werte

$(Y - 1)^2 = Y^2 - Y - Y + 1$ bzw.
$(X + 1)^2 = X^2 + X + X + 1$

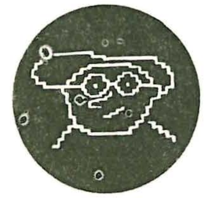
lassen sich aber schnell nur mit Addition bzw. Subtraktion berechnen, wenn Y^2 bzw. X^2 bekannt sind.

Die ursprüngliche Version in der Literatur hatte im Befehl 10 W = R*R stehen. Das hatte zur Folge, daß nie Punkte außerhalb der idealen Kreislinie gezeichnet werden und entspricht dem prinzipiellen Abrunden in der Vorschrift $Y = [\sqrt{R^2 - X^2}]$.

Deshalb ergäben sich die gleichen nichtgeschwärzten Punkte beim Zeichnen konzentrischer Kreise wie beim CIRCLE-Befehl des KC85/3.

Wir hoffen, daß ihr an dem von Andreas aufgeworfenen Problem gesehen habt, daß es sehr viele Möglichkeiten gibt, um ein Computerprogramm zu schreiben. Aber um ein elegantes Programm zu schreiben, bedarf es Erfahrung und mathematischer Kenntnisse. Wir wünschen euch viel Spaß am Computer!

H.-J. Herrler



Lösungsvarianten einer Wettbewerbsaufgabe

vorgestellt von einem Frühstarter

Ich heiße Roland Voigt und bin 9 Jahre alt. Ich gehe in die 4. Klasse der G.-Dimitroff-Oberschule Böhlen. Mathematik gehört zu meinen Lieblingsfächern. Bei uns zu Hause wird sehr viel geknobelt. Von meinen Geschwistern (9. Klasse und 1. Studienjahr Mathematik) habe ich mir schon viel abgeguckt.

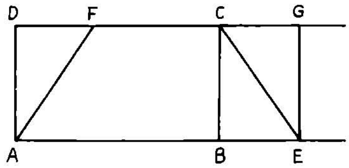
Am alpha-Wettbewerb nehme ich schon seit der 1. Klasse teil.

In meiner Freizeit spiele ich außerdem sehr gern und häufig Schach.

Mit der Aufgabe Ma 7 ■ 3026 (Heft 5/89) habe ich mich einmal ausführlicher auseinandergesetzt.

Zur Erinnerung:

Gegeben sei ein Rechteck *ABCD*. Zeichne ein beliebiges gleichschenkliges Trapez *AECF* so hinzu, daß $AE \parallel CF$ gilt, *F* innerer Punkt von *CD* ist und *E* auf der über *B* hinaus verlängerten Strecke *AB* liegt. Beweise, daß Rechteck und Trapez flächengleich sind.



1. Ich betrachte die Dreiecke *AFD* und *BEC*.
Es ist $\overline{BC} = \overline{AD}$ (gegenüberliegende Seiten des Rechtecks),
$\overline{AF} = \overline{CE}$ (da das Trapez gleichschenklig ist) und
$\overline{\sphericalangle ADF} = 90° = \overline{\sphericalangle CBE}$.
Also gilt nach ssw: Dreiecke *AFD* und *BEC* sind kongruent, also haben sie auch die gleiche Fläche.

$$A_{ABCD} = A_{ABCF} + A_{AFD}$$
$$= A_{ABCF} + A_{BEC} = A_{AECF} \qquad \text{q. e. d.}$$

2. Ich betrachte wieder die Dreiecke *AFD* und *BEC*.
Es ist wie bei 1. $\overline{BC} = \overline{AD}$,
$\overline{\sphericalangle ADF} = \overline{\sphericalangle CBE}$,
$\overline{\sphericalangle AFD} = \overline{\sphericalangle BAF}$ (Wechselwinkel) und
$\overline{\sphericalangle BAF} = \overline{\sphericalangle BEC}$ (gleichschenkliges Trapez).
Also gilt
$\overline{\sphericalangle AFD} = \overline{\sphericalangle BEC}$, somit auch
$\overline{\sphericalangle DAF} = \overline{\sphericalangle ECB}$.
Es gilt nach wsw: Dreiecke *AFD* und *BEC* sind kongruent. Weiter wie bei 1.

3. Ich betrachte wieder die Dreiecke *AFD* und *BEC*.
Es gilt $\overline{BC} = \overline{AD}$,
$\overline{AF} = \overline{CE}$,
$\overline{\sphericalangle DAF} = 90° - \overline{\sphericalangle BAF}$,
$\overline{\sphericalangle BAF} = \overline{\sphericalangle BEC}$ (gleichschenklig) und
$\overline{\sphericalangle BEC} = 90° - \overline{\sphericalangle BCE}$.
Also gilt: $\sphericalangle DAF = \sphericalangle BCE$.
Es gilt nach sws: Dreieck *AFD* und Dreieck *BEC* sind kongruent. Weiter wie bei 1.

4. Es gilt $\overline{BE} = \overline{CG} = \overline{DF}$ (gleichschenkliges Trapez),

$$\overline{AE} + \overline{FC} = \overline{AB} + \overline{BE} + \overline{FC} = \overline{AB} + \overline{CG} + \overline{FC}$$
$$= \overline{AB} + \overline{DF} + \overline{FC} = \overline{AB} + \overline{DC}$$
$$= 2 \cdot \overline{AB},$$
$$A_{AECF} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AE} + \overline{FC}) \cdot \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$$
$$= A_{ABCD}. \qquad \text{q. e. d.}$$

R. Voigt

Für die Zusendung nicht mehr benötigter „alphas" bedanken wir uns herzlich bei unseren Lesern:
Juliane Scholz, Heiligenstadt;
T. Eidner, Zeulenroda;
Hannes Püschel, Eiche;
K.-H. Milde, Dresden;
POS Gülow 2041
und Ingolf Thurm, Dresden.

Alphons

Ein Schachklub stellt sich vor

Ob Dienstag, ob Freitag oder Wochenende – im Schülerfreizeitzentrum Pankow ticken die Uhren. Doch handelt es sich hierbei nicht um Wecker oder Kuckucksuhren – die Schachspieler sind am Werke. In den Räumlichkeiten des Freizeithauses Pestalozzistraße 8a wird hart gearbeitet. Seit vielen Jahren trainiert und kämpft hier die Sektion Schach der ehemaligen BSG Stahl Niederschönhausen Berlin – beim Gang durch die Eingangstür fühlen sich Jung und Alt bereits heimisch.

Diese Sektion – im männlichen Nachwuchsbereich ein erfolgreicher Schachklub – nennt rund 100 Mitglieder ihr eigen. Mehr als die Hälfte davon besuchen noch die Schule – die Förderung von Nachwuchstalenten im Alter von 7 Jahren an wird hier groß geschrieben. In vier Arbeitsgemeinschaften können alle, die Lust und Zeit dafür mitbringen, die Regeln des königlichen Spiels erlernen, die Eröffnung und das Mattsetzen üben und so die Grundlagen für eine intensive Beschäftigung mit diesem „Probierstein des Gehirns“ legen. Für die Besten unter ihnen besteht die Möglichkeit, in eine der vier Leistungsgruppen aufgenommen zu werden, die in den Altersklassen 9/10, 11/12, 13/14 und 15/18 am Wettkampfbetrieb des Deutschen Schachverbandes teilnehmen.

Die sechs „Bretter“, aus denen jede Mannschaft besteht, sind heiß umkämpft. Wer möchte nicht gern ganz vorne sitzen, von sich sagen können, er sei der Beste in seinem Team?! Manch anderer jedoch will lieber alle Partien gewinnen und ist mit einem hinteren Platz zufrieden; dort spielen die leichteren Gegner. Den größten Erfolg aber haben natürlich diejenigen, die sich von Verlusten nicht abschrecken lassen und an die Spitze drängen.

Leicht ist die Arbeit oft weder für den Übungsleiter noch für seine Schützlinge; zwei mal zwei Stunden Training pro Woche sind kaum nebenbei zu erledigen, dazu gibt es regelmäßig Hausaufgaben, die auch bei den Kleinen schon eine Stunde zusätzlich beanspruchen können. Die besten Jugendspieler hingegen setzen sich zu Hause bereits freiwillig oft ganze Nachmittage ans Brett, um sich notwendiges Wissen anzueignen. Nicht selten machen sie ihren Trainern dann ernsthaft Konkurrenz.

Doch zur Arbeit gehört auch das Vergnügen. Gemeinsame Freizeitgestaltung, Ferienfahrten ins Ferienlager und viele andere Aktivitäten belohnen die tägliche Mühe. Hinzu kommen die Erfolge. Eine Mannschaft, die sich bis ins Finale der besten Sechs zur DDR-Meisterschaft vorkämpfen konnte, weiß, wofür sie gearbeitet hat. Eine Fahrt zu solchem Wettkampf wird zum Erlebnis, selbst wenn man ohne Medaillen zurückkehren sollte. Und die Chronik des Klubs kann auf Erfolge verweisen. Mit Claudia und Ronny Gaerths z. B. hat er Spieler in seinen Reihen, die schon einmal ganz oben auf dem Siegerpodest gestanden haben. Auch zahlreiche DDR-Vizemeistertitel und andere vordere Plätze lassen aufhorchen. Die heutige Jugendmannschaft konnte 1989 nicht nur DDR-Meister und Pokalsieger in der Altersklasse 13/14 werden, sondern zudem auch noch den DDR-Pokal 15/16 knapp aber sicher nach Hause tragen, ein besonders schöner Erfolg!

Doch der Kampf geht weiter! Neue Ziele werden in Angriff genommen, neue Vorhaben erörtert. Nach neuen Wegen muß vor allem bei der Finanzierung gesucht werden, denn Gelder werden knapp, und kein Kind kann alle Ausgaben selber tragen. In diesem Sinne hoffen wir, daß die gute Zusammenarbeit mit unserem Trägerbetrieb ZIM Berlin auch in Zukunft fortgesetzt werden kann und nicht, wie in vielen Betrieben vorgekommen, alle Mittel für die Jüngsten ausbleiben.

Doch auch viel Positives kann berichtet werden. Erste Vergleichskämpfe gegen Westberliner Mannschaften waren für beide Seiten ein langersehntes Erlebnis. In vielen Dingen ist der Schachverband der BRD anders aufgebaut als der Unsrige – wertvolle Erfahrungen lassen sich austauschen. Auch das Schulschach ist – z. B. in Westberlin – breiter entwickelt (alpha wird in einer der nächsten Nummern darüber berichten). In der Zwischenzeit werden bereits gemeinsame Trainingslager, Turniere und Freundschaftskämpfe absolviert, von denen jeder mit vielen neuen Eindrücken nach Hause geht.

In Zusammenarbeit mit der Schulschachkommission des DSV und dem Stadtbezirksschulrat von Berlin-Pankow möchten wir das Schachspiel vielen Schülern näherbringen. Erste Schritte auf diesem Wege sollen im September getan werden. Dann wird auch an Berliner Schulen der positive Einfluß des Schachspiels auf die mathematisch-naturwissenschaftliche Ausbildung überprüft werden können – nach einer kleinen Umfrage von mir wären die Kinder begeistert.

Bereits jetzt zeigt sich diese Kopplung Mathematik – Schach an den Arbeitsgemeinschaften des Freizeithauses. Nicht wenige, die dienstags und donnerstags zum Schachtraining gehen, sieht man am Montag oder Freitag im Mathematikzirkel. Ganz im Gegenteil scheint der relativ hohe Prozentsatz einer solchen Doppelbelegung symptomatisch. In beiden AG’s wird nicht nur für das jeweilige Fach trainiert, sondern jeder Schüler nimmt auch für das andere etwas mit.

Auch die Mathematik-Arbeitsgemeinschaften haben bereits viele Talente hervorgebracht, die dann zur weiteren Betreuung in die Mathematische Schülergesellschaft delegiert werden. „Das Schönste ist“, so verriet mir die Leiterin des Hauses, Renate Neubert, „wenn die Großen dann trotzdem noch unserem Zirkel treu bleiben und immer wieder kommen.“

Dem ist nicht viel hinzuzufügen. Im rasanten Tempo der heutigen Veränderungen dürfen wir die Weiterentwicklung gerade der Pädagogik nicht aus den Augen verlieren. Neue Wege müssen bestritten werden, Gutes, Erprobtes darf nicht verlorengehen. Gerade das Fortschreiten von Wissenschaft und Technik läßt es als notwendig erscheinen, auf diesem Gebiet frühzeitig mit der Ausbildung zu beginnen. Die Aktivitäten in Pankow sind ein nachahmenswertes Beispiel dafür.

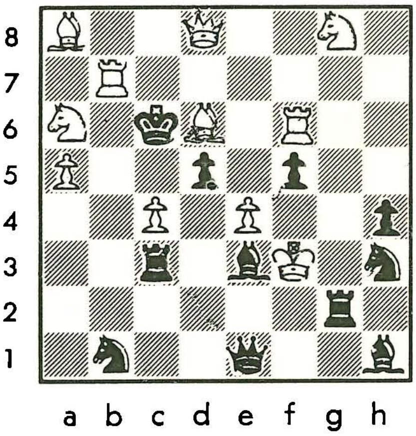
Wir aber möchten uns an dieser Stelle bei ZIM Berlin und unserem Schülerfreizeitzentrum für die vielfältige Unterstützung bedanken und unserer Hoffnung Ausdruck geben, daß sie in dieser neuen Zeit nicht anderen, vielleicht als wichtiger eingestuften Dingen zum Opfer fällt!

Ein ganz herzliches Dankeschön geht aber auch an alle Eltern, die oft weder Zeit noch Mühe scheuen, um ihren Söhnen und Töchtern diese interessante und lehrreiche Freizeitbeschäftigung zu ermöglichen.

M. Spindler

Trotz Auflösung der BSG beschlossen wir, diesen Beitrag zu veröffentlichen. Wir sind der Meinung, daß eine so gute Sache (wenn auch unter anderem Namen) erhaltenswert ist.

Eine Fülle von Mattzügen



Das oberste Ziel im Schachspiel ist bekanntlich der Gewinn einer Partie durch Mattsetzen des gegnerischen Königs. Im abgebildeten Diagramm kann eine maximierte Anzahl von Mattzügen sofort ausgeführt werden.

Wie viele verschiedene Mattzüge (Lösungsbeispiele: Tb6 oder Df2) sind in dieser Stellung für Weiß und Schwarz zu entdekken?

H. Rüdiger

Das Rechnen mit dem römischen Abakus

Der Abakus war das wichtigste Rechenhilfsmittel in der Antike. Die schriftlichen Zahlendarstellungen, die damals üblich waren, erlaubten keine günstigen Berechnungsalgorithmen. So verwendeten die Griechen ihr Alphabet, um Zahlen zu bezeichnen (Bild 1).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Einer	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ϝ	Ζ	Η	Θ
	α	β	γ	δ	ε	s	ζ	η	θ
Zehner	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Q
	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	q
Hunderter	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	Ϡ
	ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
Tausender	,α	,β	,γ	,δ	,ε	,s	,ζ	,η	,θ

Bild 1
Die griechische Buchstabenschrift
(nach Literaturhinweis [2])

Diese Zeichen stellen gewissermaßen die Ziffern dar und man muß für alle die Einmaleins-Regeln auswendig kennen. Die Multiplikation
$\varkappa\gamma\cdot\nu\beta$ (23 × 52) z. B. erfordert folgende Teiloperationen:

$$\left.\begin{array}{l} \varkappa\cdot\nu = {,\alpha} \\ \left.\begin{array}{l}\varkappa\cdot\beta=\mu\\ \gamma\cdot\nu=\varrho\nu\end{array}\right\} \mu+\varrho\nu=\varrho q \\ \gamma\cdot\beta = s\end{array}\right\} {,\alpha}+\varrho q+s = {,\alpha\varrho q s}$$

Ähnlich ungünstig, obwohl viel weniger Grundzeichen benutzend, sind die römischen Zahlzeichen. Die gleiche Multiplikationsaufgabe besteht dann aus folgenden Schritten:

XXIII × LII → XX × L = M,
III × L = CL,
XX × II = XL,
III × II = VI,
M + CL + XL + VI = MCXCVI.

Der Abakus ist eine besondere Art der Zahlendarstellung, und zwar eine gegenständliche. Seine ursprünglichste Form ist die Salaminische Rechentafel. Von den unterschiedlichsten Abakustypen sind der römische Handabakus, die russische Stschoty und der japanische Soroban die bekanntesten. Die Nachbildung eines römischen Abakus ist im Bild 2 gezeigt. Diese Art der gegenständlichen Zahlendarstellung wurde in Japan für den Soroban übernommen, der bis in die fünfziger Jahre unseres Jahrhunderts hinein weit verbreitet war. Abakusrechnen war damals Pflichtfach in der Schulausbildung. In Japan gab es Meisterschaften im Abakusrechnen. Abakusrechner konnten ihre Geschicklichkeit in Tests und Wettbewerben nachweisen und Titel erwerben.

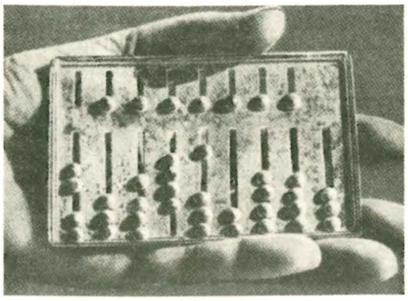


Bild 2
Nachbildung eines römischen Abakus

Das Prinzip der Zahlendarstellung auf dem römischen (bzw. japanischen) Abakus ist im Bild 3 dargestellt.

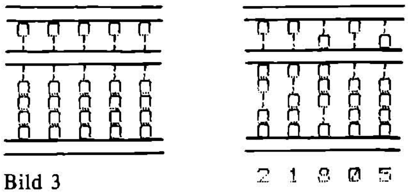


Bild 3
Der römische Abakus
a) Ausgangsstellung
b) Darstellung der Zahl 21 805

Der Abakus besteht aus Stäben (bzw. Nuten), die bewegliche Kugeln führen. Die Stäbe sind durch eine Querleiste in einen oberen und einen unteren Teil getrennt. Im oberen Teil befindet sich auf jedem Stab eine einzelne Kugel, im unteren Teil sind es vier. Der Fortschritt der Abakusdarstellung einer Zahl gegenüber den schriftlichen Zeichen besteht in der Verwendung eines dezimalen Positionssystems: in der rechten Spalte wird die Einerziffer angegeben, dann nach links fortschreitend die Zehner, Hunderter usw. In jeder Spalte wird die gewünschte Ziffer durch das Heranführen entsprechender Kugeln an die Querleiste eingestellt, wobei die obere Kugel für eine fünf, die unteren Kugeln für die Ziffern eins bis vier stehen (vgl. die Darstellung von 21 805 in Bild 3 b).

Für den konstruktiven Aufbau eines zusammengesetzten Zeichens bei arithmetischen Operationen mit Hilfe des Abakus gibt es jeweils einen Algorithmus, der genau die gleichen Elementaroperationen besitzt, wie wir sie beim schriftlichen Rechnen benutzen:

1. Additions- bzw. Subtraktions-Operationen für die Ziffern,
2. Multiplikations- bzw. Divisions-Operationen für die Ziffern (kleines Einmaleins),
3. Übertragsbildung und Übertragsverrechnung auf der jeweils linken Nachbarposition.

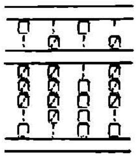
Durch Anwenden dieser Elementaroperationen lassen sich beliebige arithmetische Operationen mit Zahlen (die zusammengesetzte Zahlzeichen besitzen) exakt ausführen.

Zur Verdeutlichung des Rechnens mit dem römischen (bzw. japanischen) Abakus sollen anhand von Beispielen die Addition, Multiplikation und Division erläutert werden.

Die Addition auf dem Abakus

Es sind die beiden Zahlen 3 908 und 279 zu addieren.

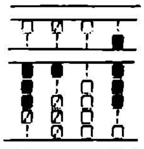
Zunächst wird der erste Summand 3 908 auf dem Abakus eingestellt:



Die Reihenfolge, in der die Ziffern des zweiten Summanden 279 positionsgerecht mit dem ersten Summanden verrechnet werden, ist beliebig. Man kann also z. B. die Ziffern des zweiten Summanden auch so verrechnen, wie sie der sprachlichen Darstellung entsprechen: zweihundert – neun – undsiebzig.

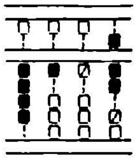
Zur Ziffer 9 auf der Hunderterposition wird 2 addiert. Da sich auf der betrachteten Position 2 nicht addieren läßt, wird auf der links benachbarten 1 hinzugefügt (das entspricht +1000) und von der 9 wird 8 abgezogen (das entspricht −800). Auf diese Weise erhält man die Ziffer 1 und den Übertrag 1.(1)

+200:



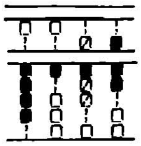
Da die Einerposition größer als Null wird, ist so zu verfahren: Auf der links benachbarten Position wird 1 hinzugefügt (das entspricht +10) und auf der betrachteten Einerposition wird 1 subtrahiert.

+9:



Auf der Zehnerposition wird 7 hinzugefügt, d. h. die obere Kugel und zwei untere werden an die Querleiste geschoben. Damit ist die Addition beendet. Das Ergebnis lautet 4 187.

+70:



Man erkennt an dieser Vorgehensweise, daß die einzelnen Schritte denjenigen des heute üblichen schriftlichen Addierens äquivalent sind. Von Vorteil ist, daß man Summanden, die mündlich genannt werden, sofort, noch während des Sprechens

---

(1) Bemerkung zur Darstellungsweise: Die im betrachteten Schritt neu geschobenen Kugeln werden durch Ø angegeben, die gegenüber dem vorherigen Schritt unverändert gebliebenen Kugeln (die sich an der Querleiste befinden) durch ▮.

verrechnen kann. Beim schriftlichen Verfahren muß der gesamte zweite Summand erst ausgesprochen und aufgeschrieben sein, ehe die Rechnung beginnen kann. Außerdem muß die Addition rechts, bei der Einerstelle beginnend nach links in strenger Reihenfolge ausgeführt werden, damit einmal notierte Ziffern der Summe nicht mehr geändert werden müssen.

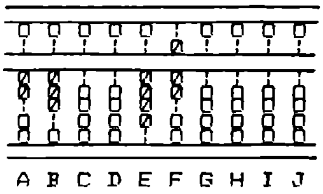
Die Multiplikation auf dem Abakus

Es sind die beiden Zahlen 23 und 47 miteinander zu multiplizieren.
Zur Erläuterung sollen zunächst die Schritte der Abakusmultiplikation denen des schriftlichen Multiplizierens gegenübergestellt werden:

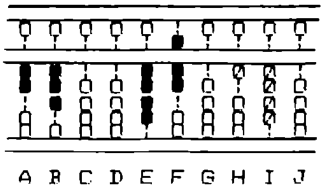
23 × 47
14 /2 × 7
21 /3 × 7
8 /2 × 4
12 /3 × 4
1081
Abakusmultiplikation

23 × 47 bzw. 23 × 47
21 → 161
14 ↗ 98
12
8
1081
schriftliche Multiplikation

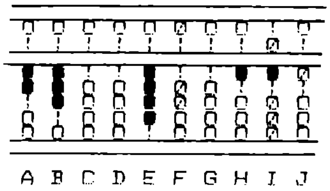
Man erkennt, daß sich beide Verfahren nur in der Reihenfolge der zu bildenden Teilprodukte unterscheiden.
1. Darstellung der beiden Faktoren auf dem Abakus:



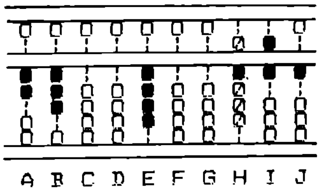
2. Begonnen wird mit der Einerstelle des rechten Faktors, d. h. mit 7. Die 7 wird zunächst mit der höchsten Position des linken Faktors, d. h. mit 2, multipliziert und das Ergebnis in der Position I eingetragen.



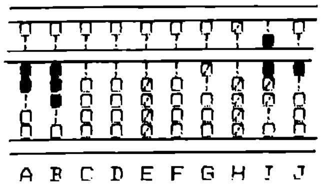
3. Multiplikation von 7 mit der Einerstelle des linken Faktors und Eintragen des Ergebnisses in Position J. Die Einerstelle des rechten Faktors kann damit gelöscht werden.



4. Multiplikation der Zehnerposition des rechten Faktors mit der höchsten Position des linken Faktors. Das Ergebnis wird in die Position H eingetragen.



5. Multiplikation der Zehnerposition des rechten Faktors mit der Einerposition des linken und Eintragen des Ergebnisses in die Position I. Die Zehnerposition 4 kann damit gelöscht werden und die Multiplikation ist beendet. Das Ergebnis lautet 1081.

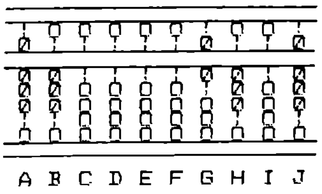


Division mit dem Abakus

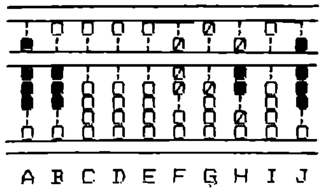
Die Division mit dem Abakus kann prinzipiell genauso erfolgen wie man beim schriftlichen Rechnen verfährt. Die Aufgabe 6308 : 83 wird so gelöst, daß man den gesamten Divisor betrachtet:

6308 : 83 = 76
581
498
498
0

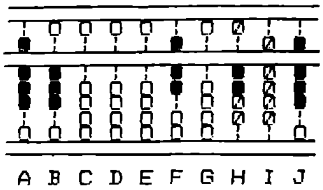
Die erste Teiloperation z. B. lautet 630 : 83. Bei diesem Algorithmus muß man die Vielfachen des Divisors im Kopf bilden, um die Teiloperationen ausführen zu können. Die Kürze des Algorithmus wird hier durch den Mehraufwand beim Kopfrechnen (Beherrschen des „großen“ Einmaleins) erkauft. Es gibt aber auch einen Divisionsalgorithmus, bei dem nur die Kenntnis des kleinen Einmaleins zur Ausführung der Teiloperationen erforderlich ist. Insbesondere dieser letztgenannte Algorithmus wird beim Abakusrechnen benutzt. Er kann aber ebenso auch dem schriftlichen Rechnen zugrunde gelegt werden.
Die Division 6308 : 83 auf dem Abakus geschieht folgendermaßen.
1. Darstellung des Divisors und Dividenden auf dem Abakus:



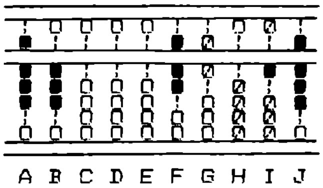
2. Vergleich der 8 in 83 mit der 6 in 6308. Da 8 größer ist als 6, wird sie mit 63 in 6308 verglichen. Sie ist 7mal enthalten und die 7 wird in Position F eingetragen. Nun wird
7 × 8 = 56 von 63 abgezogen und es bleibt 7 in Position H übrig.



3. Die 3 in 83 wird mit 7 multipliziert und von 70 in 708 abgezogen.



4. Vergleich der 8 in 83 mit 49 in 498. Sie ist 6mal enthalten. In Position G wird 6 eingetragen und das Produkt
6 × 8 = 48 wird von 49 abgezogen.



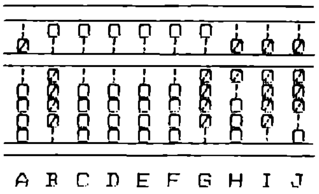
5. Die 3 in 83 wird mit 6 multipliziert und von 18 abgezogen. Es ergibt sich Null an der Stelle, wo der Dividend eingetragen war. Die in den Positionen F und G enthaltene Zahl 76 ist damit das Ergebnis.

Ein weiteres Beispiel soll den Divisionsalgorithmus für einen komplizierteren Fall erläutern. Es ist 4698 : 54 zu berechnen. In schriftlicher Form würde der Algorithmus lauten:

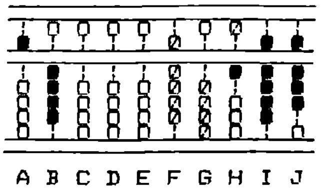
4698 : 54 = ~~9~~87
~~486~~
432
378
378

1. Vergleich der ersten Ziffer des Divisors (5) mit der ersten Ziffer des Dividenden (4). Da 5 > 4, wird die erste Ziffer des Divisors mit der Zahl aus den ersten beiden Ziffern des Dividenden (46) verglichen. Sie ist 9mal enthalten; 9 wird als die erste Ziffer des Ergebnisses notiert.
2. Es wird 9 × 54 gebildet und mit der Zahl verglichen, die aus den ersten drei Ziffern des Dividenden besteht. Da 486 > 469, wird die 9 im Ergebnis gestrichen und durch die 8 ersetzt.
3. Bildung der Differenz 469 − 8 × 54 = 37.
4. Die erste Ziffer des Divisors ist 7mal in 37 enthalten.
5. Mit 378 − 7 × 54 = 0 ist die Division beendet. Das Ergebnis lautet 87.

Die Abarbeitung auf dem Abakus verläuft in folgenden Schritten:
1. Darstellung des Divisors und Dividenden auf dem Abakus:

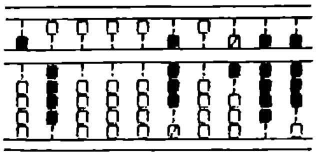


2. Die 5 in 54 ist 9mal in 46 von 4698 enthalten.
In Position F wird 9 eingetragen.
Von 46 wird $5 \times 9 = 45$ abgezogen.

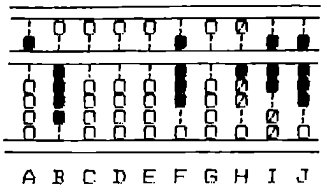


3. Die 4 in 54 wird mit 9 multipliziert, das ergibt 36. 36 läßt sich aber nicht von 19 in den Positionen H und I abziehen.

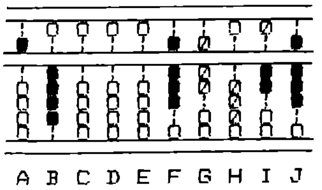
4. Es ist eine Korrektur zu vollziehen. Die 9 in Position F wird um 1 vermindert. Damit ist in Position H 1×5 hinzuzufügen.



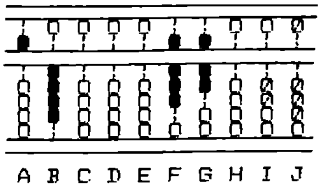
5. Die 4 in 54 wird nun mit 8 multipliziert und das Ergebnis von 69 in den Positionen H und I abgezogen. Man erhält 37 in H und I.



6. Die 5 in 54 wird mit 37 in H und I verglichen, sie ist 7mal enthalten. In Position G wird die 7 eingetragen und von 37 wird $5 \times 7 = 35$ abgezogen.



7. Die 4 in 54 wird mit 7 multipliziert und von 28 in den Positionen I und J abgezogen. Es ergibt sich Null an der Stelle des Dividenden. Damit ist das Ergebnis der Division 87.



Das Wichtigste, worauf beim Multiplizieren und Dividieren mit dem Abakus geachtet werden muß, ist die Eintragung der Teilergebnisse in die richtige Position. Bei etwas Übung im Umgang mit dem Abakus hat man sich jedoch rasch an die Regeln gewöhnt und kann auch komplizierte Rechnungen sicher und schnell ausführen.

Wie ist der Abakus in die Geschichte der Rechentechnik einzuordnen? Kann er als erste mechanische Rechenmaschine betrachtet werden? Die Arbeit mit dem Abakus macht sofort deutlich, daß die eigentlichen Rechenoperationen im Kopf auszuführen sind, d. h. alle drei oben genannten Elementaroperationen muß der Nutzer des Abakus beherrschen, um arithmetische Operationen mit beliebigen Zahlen ausführen zu können. Der Abakus ist lediglich ein Hilfsmittel, die Zwischenergebnisse, die bei der Abarbeitung des Algorithmus anfallen, zu speichern und mit neuen aus Elementaroperationen erhaltenen Teilresultaten zu verrechnen. Der Abakus ist somit nichts anderes als eine Form der Zahlendarstellung, und zwar eine gegenständliche, die dem schriftlichen dezimalen Positionssystem, das von den Indern entwickelt wurde, vollkommen äquivalent ist.

E. Klett

Literatur:
[1] Beauclair, W. de: Rechnen mit Maschinen, Braunschweig 1968.
[2] Klix, F.: Erwachendes Denken, Berlin 1980.
[3] Kojima, T.: The Japanese Abacus, Tokyo 1954.

Interessante Flächenvergleiche

Aufgabenstellungen zur IV. Umschlagseite

1. Wieviel Prozent des Flächeninhalts A_Q des Quadrates *ABCD* beträgt der Flächeninhalt A_x des Quadrates *PQRS*?

2. Wieviel Prozent des Flächeninhalts A_Q des Quadrates *ABCD* beträgt der Flächeninhalt A_x des Rhombus *APCQ*?

3. Wieviel Prozent des Flächeninhalts A_Q des Quadrates *ABCD* beträgt der Flächeninhalt A_x des Dreiecks *AEF*?

4. Wieviel Prozent des Flächeninhalts A_R des Rechtecks *ABCD* beträgt der Flächeninhalt A_x des Vierecks *BEDF*?

5. Wieviel Prozent des Flächeninhalts A_Q des Quadrates *ABCD* beträgt der Flächeninhalt A_x des Drachenvierecks *BPQR*?

6. Wieviel Prozent des Flächeninhalts A_R des Rechtecks *ABCD* beträgt der Flächeninhalt $A_s = 2 \cdot (A_x + A_y)$ der schraffiert dargestellten Teilflächen?

7. Wieviel Prozent des Flächeninhalts A_Q des Quadrates *ABCD* beträgt der Flächeninhalt A_x des Achtecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$?

8. Wieviel Prozent des Flächeninhalts A_S der Sternfigur beträgt der Flächeninhalt A_x des Trapezes?

9. Wieviel Prozent des Flächeninhalts A_Q des Quadrates *ABCD* beträgt der Flächeninhalt A_x des achtzackigen Sterns *APHQBRESCTFUDVGW*?

J. Lehmann

Unzureichende Informationen?

Stelle dir vor, du wärst Zeuge des folgenden merkwürdigen Gesprächs zwischen einem Mathematikprofessor (M) und zwei seiner Studenten (A und B).
M (zu A und B): „Ich möchte, daß Sie zwei natürliche Zahlen erraten, die beide größer als 1 und voneinander verschieden sind. Herrn A werde ich ihre Summe ins Ohr flüstern, Herrn B ihr Produkt."
Nachdem dies geschehen ist:
A: „Ich weiß die beiden Zahlen nicht."
B: „Ich weiß sie auch nicht."
A: „Jetzt weiß ich sie!"
B: „Jetzt weiß ich sie auch!"
Um welche Zahlen handelt es sich?

An der Sektion Mathematik der Leipziger Universität werden zu Ehren bekannter Mathematiker Aufgabenwettbewerbe veranstaltet.
Anläßlich des 200. Geburtstages von A. L. Cauchy fand der Wettbewerb 1989 universitätsoffen statt. In diesem Rahmen stellte Dr. Brock, an dieser Sektion tätig, die folgende Version der oben gegebenen, vor Jahren in der sowjetischen Schülerzeitschrift „Quant" veröffentlichten Aufgabe und sorgte so für heiße Köpfe und auch verschiedenste falsche Lösungen.

Stelle dir vor, du wärst Zeuge des folgenden merkwürdigen Gesprächs zwischen einem Mathematikprofessor (M) und zwei seiner Studenten (A und B).
M (zu A und B): „Ich möchte, daß Sie zwei natürliche Zahlen erraten, die beide größer als 1 und kleiner als 100 sind. Herrn A werde ich ihr Produkt ins Ohr flüstern, Herrn B ihre Summe."
Nachdem dies geschehen ist:
A: „Ich weiß die beiden Zahlen nicht."
B: „Das wußte ich schon!"
A: „Jetzt weiß ich sie!"
B: „Jetzt weiß ich sie auch!"
Um welche Zahlen handelt es sich?

Übrigens – beide Aufgaben sind trotz scheinbar unzureichender Informationen eindeutig lösbar.
Viel Spaß beim Knobeln und ausreichende Widerstandsfähigkeit gegen das vorzeitige Nachsehen bei den Lösungen wünscht euch

Alphons

Die BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft empfiehlt:

Autorenkollektiv der Sektion Mathematik der Universität Leipzig
Ergänzende Kapitel zu Bronstein/Semendjajew Taschenbuch der Mathematik
Bestell-Nr. 666 456 6 Preis: 19,80 DM

J. Flachsmeyer/U. Feiste/K. Manteuffel
Mathematik und ornamentale Kunstformen
Dieser Band knüpft an bekannte Gegenstände wie Symmetrie, Abstand, Abbildung an und führt den Leser zu ebenen Isometrien, Gruppen ebener Bewegungen, Friesgruppen, Streifenornamenten, Wandmustergruppen und Flächenornamenten. Die behandelten Kongruenzbetrachtungen werden durch zahlreiche Anwendungen und durch Beispiele aus der Erfahrungswelt des Lesers ergänzt.
Bestell-Nr. 666 514 7 Preis: etwa 15,00 DM

F. Kadeřávek
Geometrie und Kunst in früherer Zeit
Das Buch, eine Übersetzung nach dem 1935 in Prag erschienenem Original, behandelt in interessanter und ansprechender Form die Anwendung geometrischer Kenntnisse im Bauwesen: vom alten Ägypten bis zur Etablierung der darstellenden Geometrie als selbständige mathematische Disziplin. Beim Leser werden nur geringe mathematische Kenntnisse vorausgesetzt.
Bestell-Nr. 666 582 5 Preis: etwa 10,00 DM

Nachauflagen der Mathematischen Schülerbücherei:
H. Belkner: **Determinanten** (MSB 33)
Preis: 6,00 DM
E. Schröder: **Mathematik im Reich der Töne** (MSB 106) Preis: 8,60 DM
R. Thiele: **Mathematische Beweise** (MSB 99)
Preis: 8,60 DM

Der Deutsche Taschenbuch Verlag empfiehlt:

F. Reinhardt/H. Soeder
dtv-Atlas zur Mathematik
Der „dtv-Atlas zur Mathematik" gibt einen Überblick über den Stand der modernen Mathematik und ihre Ergebnisse. Die Gliederung geht vom Gesamtbereich der Mathematik aus und enthält alle wesentlichen Teildisziplinen mit den dazugehörigen Theorien.
Titel-Nr.: 3007/3008 Preis: je 19,80 DM

A. Szabó
Das geozentrische Weltbild
Astronomie, Geographie und Mathematik der Griechen
Titel-Nr.: 4490 Preis: etwa 24,80 DM

Der Ernst Klett Schulbuchverlag empfiehlt:

B. Bolt
Eine mathematische Fundgrube
Ein breites Spektrum an Anregungen bietet diese Sammlung von über 150 Aufgaben, z. B. geometrische Puzzle, Konstruktionen oder Merkwürdiges von Zahlen und Figuren
Klettbuch 72271 Preis: 32,80 DM

P. Eigenmann
Geometrische Denkaufgaben
Geometrie in Reinkultur – ohne viele Worte werden insgesamt fast 300 knifflige Probleme gestellt
Klettbuch 72231 Preis: 16,80 DM

E. Oettinger
Kaleidoskop
Bekannte und weniger bekannte mathematische Problembereiche, zu deren Verständnis Schulkenntnisse genügen, werden dargestellt. In vielfältigen Bezügen zu den schönen Künsten und zur Philosophie. In historischen und anekdotischen Beiträgen. Mit einer Aufgabenbörse samt nachschlagbaren Lösungsverfahren.
Klettbuch 72201 Preis: 31,00 DM

W. Schmidt
Mathematikaufgaben 7–10
Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt
Klettbuch 7111 Preis: 15,50 DM

Der Fachbuchverlag Leipzig empfiehlt:

U. Schmidt/W. Schmidt
Mathematische Knobeleien mit und ohne Kleincomputer
Bestell-Nr. 547 513 0 Preis: 10,80 DM

Einige unserer Leser haben vielleicht bereits im Herbst 1989 das interessante Buch mit dem Titel „Mathematische Knobeleien mit und ohne Kleincomputer" kaufen können. Die Autoren Dipl. Math. Uta Schmidt und Dr. sc. Werner Schmidt von der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald kennt ihr sicher aus der „alpha" als Verfasser von Aufgaben und Artikeln. Erschienen ist soeben eine 2. Auflage des Buches im Fachbuchverlag Leipzig, eine Lizenzausgabe wird vom Aulis-Verlag Deubner & Co in diesen Tagen in die Buchhandlungen ausgeliefert (Mathematische Knobeleien mit und ohne Computer).

In ihrem Buch behandeln die Autoren Denksport- und Knobelaufgaben. Häufig ist deren Lösung nur durch systematisches Probieren zu finden, dieser Weg erfordert jedoch vor allem Rechenfertigkeit und Fleiß (und ist daher langweilig). Da Computer sehr schnell mit jeweils neuen Zahlen die gleiche Folge von Rechenoperationen ausführen können, sind sie bei der Lösung derartiger Aufgaben ein nützliches Hilfsmittel. Die Autoren empfehlen, Computer als ein Werkzeug zum Lösen von Knobelaufgaben anzuwenden. Anhand zahlreicher Beispiele zeigen sie aber auch, daß dieses wunderbare Werkzeug Computer logisches Denken und mathematische Analyse nicht ersetzen kann. Manchmal ist eine klassische Lösung kürzer und eleganter! Sehr schön wird an Beispielen erläutert, daß Computer nicht gänzlich genau rechnen. Die Rundungsfehler sind oft zu vernachlässigen, führen aber manchmal direkt zu „Computerkatastrophen". Das alles könnt ihr selbst in diesem Buch nachlesen, das Lothar Otto aus Leipzig treffend illustriert hat.

Bei der Lektüre sind die Lösungen vieler Aufgaben mit und auch ohne Computer nachzuvollziehen. Das Buch ist auch für Arbeitsgemeinschaften und Computerklubs nützlich. Und hier eine Kostprobe:

Auf einer Reise konnte Sindbad beim König von Sarandib einen wunderbaren Würfel bestaunen, der aus vielen kleinen, untereinander gleich großen Goldwürfeln zusammengesetzt war. Als der König von den Schwierigkeiten bei der Teilung des Mosaiks hörte, bat er Sindbad, ihm zu helfen. Es war sein Wunsch, daß jeder seiner Söhne einen gleich großen Würfel aus den Goldbausteinen gefertigt bekäme. Sindbad zählte schnell die kleinen Bausteine in des Königs großem Würfel, es waren weniger als 500 in jeder Kante. Dann überlegte er lange und sagte, daß eine Teilung ohne Rest auf gar keinen Fall zu machen sei. Sindbad bot sich aber an, die Aufgabe zu lösen, wenn er die übrigbleibenden Bausteine als Andenken an Sarandib behalten dürfe. Es würden auch höchstens 5 kleine Goldwürfel übrigbleiben und jeder zu bauende Würfel bestände aus weit mehr als einhundert kleinen Goldbausteinen. Wieviel Söhne hatte der König und wieviel Goldwürfel erhielt Sindbad? Aus wieviel kleinen Würfeln war des Königs großer Würfel zusammengesetzt? Beachtet, daß der König mindestens zwei und höchstens sieben Söhne besaß.

A. G. Konforowitsch/St. Galina
Logischen Katastrophen auf der Spur
Bestell-Nr. 547 576 3 Preis: 16,00 DM
Dieses Buch umfaßt 178 Aufgaben aus den Gebieten der Arithmetik, Algebra und Analysis, Geometrie und Logik. Jede Aufgabe enthält einen versteckten logischen Fehler, der auf einer Stufe der Überlegungen entstand und widersinnige Ergebnisse bedingte. Der Verfasser analysiert die aus der Geschichte bekanntesten Paradoxa und gibt mögliche Lösungswege an.

Der MANZ-Verlag München empfiehlt:

H.-D. Hornschuh (Hrsg.)
Internationale Mathematikolympiaden
Drei Bände sämtlicher Aufgaben der Olympiaden von 1959 bis 1988 mit ausführlichen Lösungen
Manzbuch 358/359/820 Preis: je 21,80 DM

H. Sewerin (Hrsg.)
Mathematische Klausuraufgaben
Sammlung sämtlicher Aufgaben mit Lösungen, die bei der Auswahl der BRD-Mannschaft für die Internationalen Mathematikolympiaden gestellt wurden (1977 bis 1985)
Manzbuch 821 Preis: 15,80 DM

Der Sportverlag empfiehlt:

Reihe: Schacheröffnungen im Überblick

E. Gufeld/N. Kalinitschenko
Offene Spiele
Spanisch bis Königsgambit
Bestell-Nr.: 671 848 0 Preis: 12,00 DM

Halboffene Spiele
Französisch bis Caro-Kann
Bestell-Nr.: 671 849 9 Preis: 12,00 DM

Halboffene Spiele
Skandinavisch bis Sizilianisch
Bestell-Nr.: 671 860 8 Preis: 13,50 DM

Geschlossene Spiele
Damengambit bis Reti
Bestell-Nr.: 671 850 1 Preis: 15,00 DM

Geschlossene Spiele
Nimzowitsch-Indisch bis Holländisch
Bestell-Nr.: 671 861 6 Preis: 15,00 DM

Preis für alle 5 Bände: 60,00 DM

Im Eigenverlag erschienen:

A. Halameisär
Mathematik? – Amüsant!
Ein unterhaltsames Lesebuch, in dem der Leser neue Begriffe und Tatsachen, ungewöhnliche Methoden zur Lösung von „nichtstandardgemäßen" Aufgaben in lustiger Form kennenlernen kann.
Preis: 13,00 DM (bei Sammelbestellungen ab 10 Exemplaren 8,00 DM)
Zu bestellen bei Dr. M. Röhr, Alte Salzstr. 110, 7062 Leipzig

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Erfurt, Mai 1990

Olympiadeklasse 10

291041 Gegeben seien drei Geraden g, h, j in einer Ebene; keine zwei dieser Geraden seien zueinander parallel; kein Punkt der Ebene liege auf allen drei Geraden. Gegeben sei ferner eine Länge a. Gesucht ist für jede solche Vorgabe von g, h, j, a die Anzahl aller derjenigen Kreise c, die die folgenden Bedingungen erfüllen:
(1) Der Kreis c schneidet jede der Geraden g, h, j in zwei Punkten G_1, G_2 bzw. H_1, H_2 bzw. J_1, J_2.
(2) Es gilt $\overline{G_1G_2} = \overline{H_1H_2} = \overline{J_1J_2} = a$.

291042 Von zwei reellen Zahlen werde gefordert: Die Summe aus den Reziproken der beiden Zahlen und dem Reziproken des Produktes der beiden Zahlen beträgt 1.

Man ermittle alle diejenigen Werte, die sich als Summe s zweier derartiger Zahlen ergeben können.

Von den nachstehenden Aufgaben 291043A und 291043B ist genau eine auszuwählen und zu lösen.

291043A Man beweise die folgende Aussage:
Die Folge $(2^n - 1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ enthält für jede beliebige Zahl z einen Abschnitt, dessen Länge größer als z ist und in dem keine Primzahl vorkommt.
Hinweis: Ist (a_n) $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Folge und sind $k \geqq 1$ und m natürliche Zahlen, so heißt das k-Tupel $(a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{m+k})$ ein Abschnitt der Folge (a_n) und k seine Länge.

291043B Gegeben seien fünf Punkte A, B, C, D, E. Sie seien so im Raum gelegen, daß keine vier dieser fünf Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen und daß keine zwei Verbindungsstrecken von je zwei verschiedenen dieser fünf Punkte einander gleichlang sind.
Ermitteln Sie für jede Lagemöglichkeit derartiger Punkte die Anzahl aller verschiedenen Polyeder, die genau die fünf Ecken A, B, C, D, E haben!
Dabei seien zwei Polyeder genau dann als voneinander verschieden bezeichnet, wenn es keine Drehung und keine Spiegelung gibt, die das eine Polyeder in das andere überführt.
Hinweis: Ein Polyeder ist ein Körper endlicher Größe, dessen Oberfläche aus ebenen Vielecken besteht.

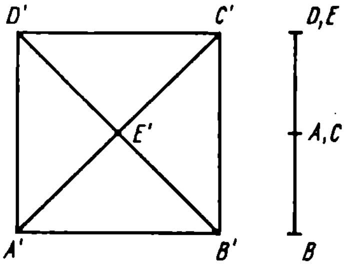
291044 In jedes leere Kästchen des Bildes soll eine natürliche Zahl so eingetragen werden, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte eine (fünfgliedrige) arithmetische Folge steht.

				65
	41			
		81		
1				

Ermitteln Sie alle Eintragungen, die diese Forderung erfüllen!

291045 Ermitteln Sie eine Verteilung von fünf verschiedenen Punkten auf die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich seines Randes), bei der der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte möglichst groß wird!

291046 Das Bild stellt in senkrechter Eintafelprojektion ein Polyeder dar, das genau die Punkte A, B, C, D, E als Ecken hat. Die Bildpunkte A', B', C', D' sind die Eckpunkte eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a, der Bildpunkt E' ist der Mittelpunkt dieses Quadrates.



Im beigefügten Höhenmaßstab ist a die Höhe von D und E über der von B, und $\frac{a}{2}$ ist die Höhe von A und C über der von B.
Beweisen Sie, daß es bis auf Kongruenz genau ein Polyeder gibt, auf das diese Beschreibung zutrifft! Ermitteln Sie das Volumen dieses Polyeders!

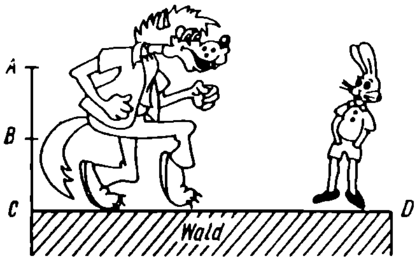
Olympiadeklassen 11/12

291241 Für jede reelle Zahl a untersuche man, ob die Gleichung

$$a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}}} = x \quad (1)$$

(mindestens) eine reelle Lösung x hat, und ermittle alle reellen Lösungen der Gleichung (1).

291242 Ein Waldstück werde durch eine Strecke CD begrenzt (siehe Bild). In derjenigen Halbebene, die von der Geraden durch C und D begrenzt wird und in der das Waldstück nicht liegt, befinde sich auf der durch C senkrecht zu CD gehenden Geraden ein Hase in einem Punkt A und ein Wolf in einem Punkt B zwischen A und C. Dabei sei $\overline{AB} = \overline{BC} = a$ und $\overline{CD} = 5a$ mit einer gegebenen Länge a.



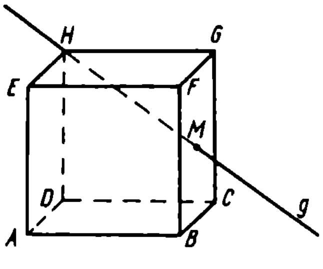
Der Hase laufe geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit vom Punkt A zu einem von ihm gewählten Zielpunkt X der Strecke CD. Der Wolf kann höchstens halb so schnell laufen wie der Hase. Der Hase werde genau dann unterwegs vom Wolf gefaßt, wenn die Strecke AX einen Punkt H enthält, den der Wolf gleichzeitig mit dem Hasen oder sogar eher als der Hase erreichen kann.
Man ermittle alle diejenigen Punkte X auf CD, bei deren Wahl als Zielpunkt der Hase erreicht, daß er nicht unterwegs vom Wolf gefaßt wird.

291243 Man beweise: Zu jedem System (a, b, c, d) von positiven ganzen Zahlen a, b, c, d, die den Bedingungen
$a \cdot b = c \cdot d$ und $a + b = c - d$ genügen,
gibt es ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Seitenlängen, in cm gemessen, sämtlich ganze Zahlen als Maßzahlen haben und dessen Flächeninhalt, in cm² gemessen, die Maßzahl $a \cdot b$ hat.

291244 Man ermittle alle diejenigen Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen x, y und z, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$x + 2y^2 - 3z = 17, \quad (1)$$
$$x^2 - 3y + 2z = 9. \quad (2)$$

291245 Die Ecken eines Würfels mit gegebener Kantenlänge a seien wie im Bild mit A, B, C, D, E, F, G, H bezeichnet. Die Ebene, in der A, B, C, D liegen, sei ε_1; die Ebene, in der B, C, G, F liegen, sei ε_2; die Gerade durch H und den Mittelpunkt M des Quadrates $BCGF$ sei g genannt.



Man beweise, daß es unter allen Strecken, die einen Punkt von ε_1 mit einem Punkt von ε_2 verbinden und deren Mittelpunkt auf g liegt, eine Strecke von kleinster Länge gibt. Man ermittle diese kleinste Länge.

291246A In zwei Urnen A und B befinden sich insgesamt genau m rote und genau n blaue Kugeln. Die Gesamtzahl der Kugeln ist größer als 2; mindestens eine der Kugeln ist rot. Zu Beginn enthält A alle roten und B alle blauen Kugeln.
Indem nacheinander abwechselnd aus A und B jeweils eine zufällig ausgewählte Kugel herausgenommen und in die andere Urne hineingelegt wird, sollen die Kugeln vermischt werden. Begonnen wird mit der Entnahme aus Urne A.
Man ermittle alle diejenigen Paare $(m;n)$ von Anzahlen m und n, bei deren Vorgabe die vierte umgelegte Kugel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ rot ist.

Hinweis: Enthält eine Urne genau Z Kugeln, so wird hier unter zufälliger Auswahl einer Kugel verstanden, daß für alle Z Kugeln die Wahrscheinlichkeit ihrer Auswahl gleich $\frac{1}{Z}$ ist. Werden allgemeiner von M möglichen Ereignissen G als „günstig“ und $M-G$ als „ungünstig“ angesehen, und sind alle M Ereignisse gleichwahrscheinlich, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines „günstigen“ Ereignisses gleich $\frac{G}{M}$.

291246B Man ermittle für jede natürliche Zahl n mit $n>1$ alle diejenigen Funktionen f, die mit dieser Zahl n den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:

(1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert.
(2) Die Funktion f ist an der Stelle $x=0$ stetig.
(3) Für jede reelle Zahl x gilt
$n \cdot f(nx) = f(x) + nx$.

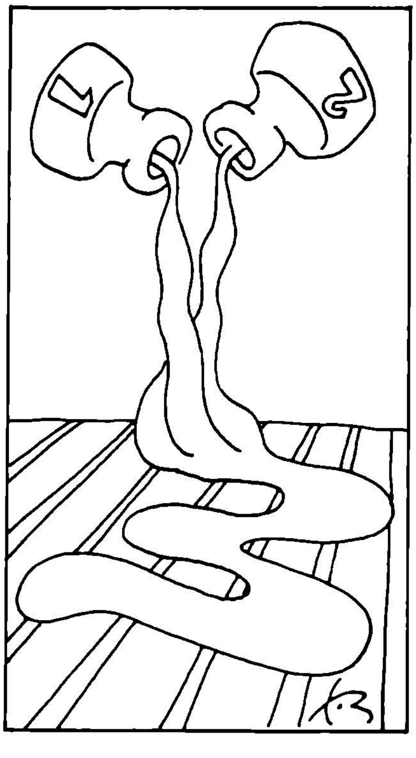
Die Lösungen werden im Heft 6/90 veröffentlicht.

Die XXIX. OJM fand nun schon traditionsgemäß an der Pädagogischen Hochschule „Dr. Theodor Neubauer“ Erfurt statt. Diesmal nahmen 174 Teilnehmer, darunter 22 Mädchen an dem Wettstreit teil. Der Vorsitzende der Jury Prof. Dr. G. Burosch (Universität Rostock) gab in seiner Eröffnungsrede einen Überblick über die Geschichte der Olympiadebewegung. Viele namhafte Mathematiker haben ihre ersten Berührungen zur Mathemnatik der Olympiade zu verdanken. In seiner Festrede zur Siegerehrung forderte Prof. Dr. E. Hertel (F.-Schiller-Universität Jena) die Mathematikeleven zum Studium der Mathematik als der Königin der Wissenschaften auf.
Angeregt durch die Delegationsleiter und unterstützt durch die teilnehmenden Schüler wurde durch das Zentrale Komitee Olympiade Junger Mathematiker an den Minister für Bildung und Wissenschaft Prof. Dr. Meyer ein Brief gerichtet, in dem er bei der Durchführung der 30. Olympiade um Unterstützung gebeten wurde. Neben dem „Bundeswettbewerb Mathematik“ sollte in Zukunft unser Klausurwettbewerb als eine Möglichkeit eines Leistungsvergleiches erhalten bleiben.
Alle Teilnehmer, Lehrer und Hochschullehrer sprachen sich für die Beibehaltung der Talenteförderung auf mathematischem Gebiet aus.

Erste Preise in der Klassenstufe 10 erhielten: Michael Herrmann (Spezialschule „C. F. Gauß“, Frankfurt/O.), Ulrich Müller (E.-Thälmann-OS, Rochlitz, Schüler der Klasse 8), Julia Kempe (Spezialschule „H. Hertz“, Berlin), Rüdiger Krauße (Spezialschule „F. Engels“, Riesa) und Remo Brandt (Spezialschule Rostock).
Ein erster Preis in Klasse 11 wurde an Michael Dreher (Spezialklasse, M.-Luther-Universität Halle) vergeben.
In Klasse 12 erhielten Tobias Franke, Astrid Mirle (beide Spezialschule „F. Engels“, Riesa) und Thomas Mautsch (EOS „J. W. v. Goethe“, Lübben) erste Preise.

In den 11köpfigen Kader für die IMO in China wurden die Schüler Rüdiger Belch (Chemnitz), Frank Schneegaß (Erfurt) aus Klasse 10, Raymond Hemmecke (Erfurt) aus Klasse 11 und Michael Dreher (Halle), Tobias Franke (Dresden), Astrid Mirle (Dresden), Thomas Mautsch (Cottbus), Jan Fricke (Neubrandenburg), Ingrid Voigt (Leipzig), Torsten Erhardt (Chemnitz) und Stefan Liebscher (Potsdam) berufen.

Dr. W. Moldenhauer
Inst. f. Math. der Pädag. Hochschule Erfurt



aus: Funktio, Helsinki

Lösungen zu: Kuriose Identitäten
Heft 4/90

1. a) $\sqrt[4]{m} = \frac{1}{4}\sqrt{m}$; $4\sqrt[4]{m} = \sqrt{m}$; $4^4 = m$;
$m = 256$
b) $\sqrt[8]{m} = \frac{1}{8}\sqrt{m}$; $8\sqrt[8]{m} = \sqrt{m}$; $8^8 = m^3$;
$m = 256$
2. $\sqrt[3]{m} = \frac{1}{3}\sqrt{m}$; $3\sqrt[3]{m} = \sqrt{m}$; $3^3 = \sqrt{m}$;
$m = 729$.

Lösung zu: Der Sechs-Bahnen-Rock
Heft 4/90

Vorgegeben war die Gleichung $2S + s = 92\ cm$, in der S die Länge der größeren Sehne ist und s die der kleineren. Um eine zweite Gleichung mit diesen beiden Unbekannten zu bilden, müssen wir die Länge des Lotes a von der oberen Ecke des Schnittes auf die Webekante ermitteln, denn $S + 2s = 92\ \text{cm} - 2a$. Dieses Lot ist die Gegenkathete des Winkels $\alpha = 10°$ im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $l = 70\ \text{cm}$. Also ist $\sin 10° = \frac{a}{70\ \text{cm}}$;
$a = 70\ \text{cm} \cdot \sin 10°$, $a = 12{,}15\ \text{cm}$.
Das Gleichungspaar lautet jetzt:
$2S + s = 92\ \text{cm}$, $S + 2s = 67{,}7\ \text{cm}$.
Für die Schnittkonstruktion ist nur die Länge der größeren Sehne erforderlich, denn sie ist die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Basiswinkeln $\beta = \beta' = 80°$. Die freien Schenkel schneiden sich im Mittelpunkt der beiden konzentrischen Kreisbogen. Man wird deshalb im o. a. Gleichungssystem s eliminieren und erhält, aufgerundet: $S = 38{,}8\ \text{cm}$.
Zum Schluß ein Hinweis für diejenigen, die diese Aufgabe nicht nur mathematisch, sondern auch praktisch lösen wollen:
Man steckt das Papier, aus dem der Schnitt hergestellt werden soll, längs gefaltet so auf dem Teppich fest, daß eine Gerade im Teppichmuster die Bruchkante (= Symmetrieachse des Schnitts) verlängert. Auf einer Senkrechten zur Bruchkante markiert man das Ende der halben Sehne (19,4 cm) und errechnet mit Hilfe der Tangensfunktion die Länge der Mittelsenkrechten:

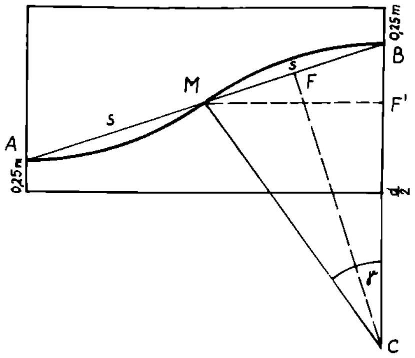
$$\tan 10° = \frac{19{,}4\ \text{cm}}{h};$$

$$h = \frac{19{,}4\ \text{cm}}{\tan 10°} = 110\ \text{cm}.$$

So ist die Gefahr der Ungenauigkeit, die sich aus dem Größenverhältnis zwischen den handelsüblichen Winkelmessern und den Schnittmaßen ergibt, geringer. Als Zirkel fungiert wieder ein Maßband, besser ein Metallmaßband. *Hella Genau*

Lösungen zu: Gardinen für ein Blumenfenster

1. Wenn die Gardine mit Rüsche an den Seiten wieder die Länge der Stoffbreite haben soll, muß die Schnittlinie in 0,25 m Abstand (Rüschenbreite) von der einen Webekante beginnen und in ebendiesem Abstand von der anderen Webekante enden. Die erfragte Differenz zwischen der kürzesten und der längsten Stelle der Gardine beträgt demnach:
$d = 1{,}40\,\text{m} - 2 \cdot 0{,}25\,\text{m} = 0{,}90\,\text{m}$.



2. Bestimmungslinien für den Kreisbogenmittelpunkt sind
– die Verlängerung der seitlichen Schnittkante (als Senkrechte auf einer Tangente im Berührungspunkt),
– die Mittelsenkrechte auf der Kreisbogensehne.

3. Um die Rüschenlänge l zu berechnen, müssen der Radius r und der Zentriwinkel γ an einem der Kreisbogen ermittelt werden. Verbindet man die beiden Endpunkte der Schnittkurve zur Strecke $\overline{AB}$ und fällt von deren Mittelpunkt M aus das Lot mit dem Fußpunkt F' auf eine Seitenkante, so erhält man mit $\triangle BMF'$ ein rechtwinkliges Dreieck, das dem $\triangle MCF$ ähnlich ist. ($\sphericalangle F'BM$ und $\sphericalangle FMC$ sind als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck kongruent.) Folglich ist auch

$\sphericalangle BMF' = \sphericalangle MCF = \frac{\gamma}{2}$. Im $\triangle BMF'$ sind die Katheten bekannt:

$\overline{MF'} = \frac{2{,}70\,\text{m}}{2} = 1{,}35\,\text{m}$ und

$\overline{F'B} = \frac{d}{2} = 0{,}45\,\text{m}$ (vgl. Aufgabe 1!).

Mithin beträgt die Länge der Hypotenuse $\overline{MB}$, die zugleich Sehne des Kreisbogens ist,

$s = \sqrt{(1{,}35\,\text{m})^2 + (0{,}45\,\text{m})^2} = 1{,}423\,\text{m}$

und für $\frac{\gamma}{2} = \sphericalangle BMF'$ gilt:

$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}45\,\text{m}}{1{,}35\,\text{m}} = \frac{1}{3}, \frac{\gamma}{2} = 18{,}43°$;
$\gamma = 36{,}86°$.

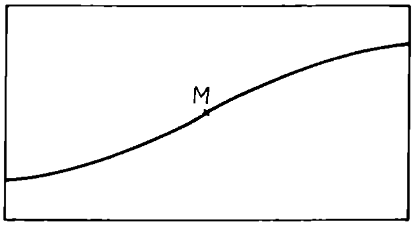
Der Kreisbogenradius läßt sich am einfachsten mit Hilfe der Seitenverhältnisse in den ähnlichen Dreiecken ermitteln.

$r : \frac{s}{2} = s : \frac{d}{2}$; $r = \frac{s^2}{d} = \frac{2{,}025\,\text{m}^2}{0{,}9\,\text{m}}$;
$r = 2{,}25\,\text{m}$.

Die Länge l der Rüsche ist das Vierfache der Länge des Kreisbogens, also

$l = 4 \cdot \frac{2r\pi\gamma}{360°} \approx 5{,}80\,\text{m}$.

4. Für die Sinuskurvenvariante muß man sich den Koordinatenursprung im Punkt M vorstellen und die Abszissenachse als Parallele zu den Webekanten. Der Bogen von A bis M entspricht dem 4. Quadranten einer Sinuskurve. Für den sich anschließenden ersten Quadranten brauchen wir die Wertetabelle nicht fortzusetzen, sondern nur die für den 4. Quadranten berechneten Abstände von der anderen Schnitt- und der anderen Webekante aus zu messen (Zentralsymmetrie!). Diese Methode ist auch wegen der Länge des Maßbandes – 1,50 m – günstiger.



Ein Abstand von 0,15 m auf der Abszissen-Achse bzw. von der linken Schnittkante – vgl. die begonnene Wertetabelle – bedeutet einen Winkelzuwachs von 10°; und dem Sinuswert 1 in der „Normalkurve" entsprechen $\frac{d}{2} = 0{,}45\,\text{m}$ im gegebenen Rechteck.

Damit ist der Koeffizient von $\sin\alpha$ gegeben. Nun ist noch der Abstand der gedachten Abszissenachse von der Webekante zu addieren:
$y = 0{,}45\,\text{m} \cdot \sin\alpha + 0{,}45\,\text{m} + 0{,}25\,\text{m}$;
$y = 0{,}45\,\text{m} \cdot \sin\alpha + 0{,}70\,\text{m}$.

x	α	y
0,15 m	−80°	0,26 m
0,30 m	−70°	0,28 m
0,45 m	−60°	0,31 m
0,60 m	−50°	0,36 m
0,75 m	−40°	0,41 m
0,90 m	−30°	0,48 m
1,05 m	−20°	0,55 m
1,20 m	−10°	0,62 m

Zur Entscheidung für eine der beiden Lösungen

Herstellungstechnisch einfacher ist das Messen der Abstände bzw. der Koordinaten der Punkte auf unserer Sinuskurve. Um die Kreisbogenlinie zu zeichnen, braucht man, selbst wenn man den Stoff quer zu den Webekanten faltet und zum Zeichnen des zweiten Kreisbogens umwendet, eine Arbeitsfläche von mindestens 1,35 m · 2,95 m (Radius + halbe Stoffbreite). Erschwerend kommt hinzu, daß das Maßband als „Zirkel" zu kurz ist.

Auch optisch gebührt der Sinuskurve der Vorzug: Wir empfinden diese Linie als schön, wohl weil mancherlei natürliche Wellen die Form einer immer wiederkehrenden Sinuskurve haben.

Daß Hella die Rüschenlänge für die Kreisbogenlinie berechnet hat, war nicht ganz überflüssig. Beim Vergleich der Zeichnungen sagt ihr das Augenmaß, daß die Sinuskurve keinesfalls länger, sondern ein wenig kürzer ist als die Kreisbogenlinie. Die aufgerundeten 5,80 m werden also ausreichen, aber auch nicht viel Abfall ergeben.

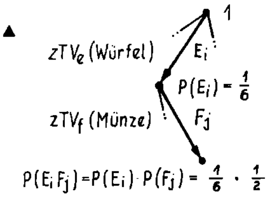
Für welche Variante Hella sich auch entscheidet – sie hat mit ihrer Knobelei fast die Hälfte Stoff eingespart.

Lösung zu: Was vertauscht der Spiegel wirklich?

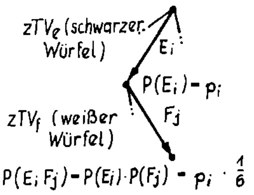
Der Spiegel vertauscht in Wahrheit vorn und hinten. Dagegen bleibt was rechts liegt, und oben bleibt oben.

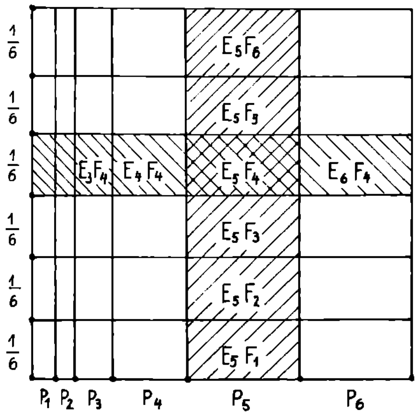
Lösungen zu: Läßt sich der Zufall berechnen? Teil 3

▲ 13 ▲



▲ 14 ▲



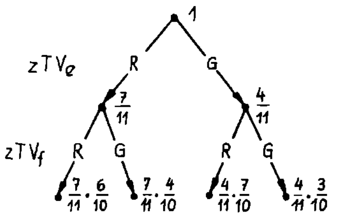


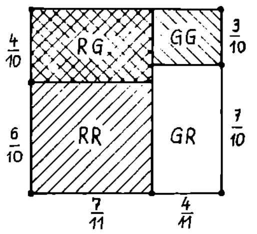
Im Venn-Diagramm sind die Ereignisse $E_5\Omega_f$ *und* Ω_eF_4 durch Schraffieren hervorgehoben.

▲ 15 ▲ Für jede der gerade in der Urne befindlichen Kugeln ist es jeweils gleichwahrscheinlich, herausgenommen zu werden. Da ursprünglich in der Urne 7 rote und 4 gelbe Kugeln sind, ist die Wahrscheinlichkeit, beim 1. Teilversuch eine rote Kugel zu ziehen, gleich $\frac{7}{11}$. Um danach beim 2. Teilversuch eine gelbe Kugel zu ziehen, beträgt die Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{10}$, denn es sind noch 10 Kugeln in der Urne, von denen 4 gelb sind. Die Wahrscheinlichkeit, zuerst eine rote und danach eine gelbe Kugel zu ziehen, ist also

$$P(RG) = \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10}.$$

Laut Venn-Diagramm sind die zum zufälligen Doppelversuch gehörenden Ereignisse $E_1\Omega_f = RR \cup RG$ und $\Omega_e F_2 = RG \cup GG$ nicht unabhängig.





▲16▲ E_1F_2, E_2F_2, E_3F_2, E_1F_4, E_2F_4, E_3F_4

▲17▲

$$\begin{aligned}
&P(AB)\\
&= P(E_1F_2) + P(E_2F_2) + P(E_3F_2)\\
&\quad + P(E_1F_4) + P(E_2F_4) + P(E_3F_4)\\
&= P(E_1)\cdot P(F_2) + P(E_2)\cdot P(F_2)\\
&\quad + P(E_3)\cdot P(F_2) + P(E_1)\cdot P(F_4)\\
&\quad + P(E_2)\cdot P(F_4) + P(E_3)\cdot P(F_4)\\
&= [P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)]\cdot[P(F_2) + P(F_4)]\\
&= P(A)\cdot P(B)\\
&= (0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}1)\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{15}
\end{aligned}$$

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Verflixte Würfel

Bei einem Würfel müssen wenigstens 6 Augen und können höchstens 15 Augen gleichzeitig sichtbar sein. In unserer Anordnung fehlen also die Würfel mit 8 Augen, 13 Augen und 14 Augen. Da es bei keinem Würfel eine Lage gibt, bei der gleichzeitig 8 Augen oder 13 Augen zu sehen sind, weil die Summe der Augen zweier Gegenseiten stets 7 beträgt, fehlt in der Anordnung somit der Würfel mit 14 Augen.

Bunte Kugeln

Wenn eine grüne Kugel so schwer wie zwei rote Kugeln ist, dann sind drei grüne Kugeln so schwer wie sechs rote Kugeln. Wenn eine rote Kugel so schwer wie zwei blaue Kugeln ist, dann sind sechs rote Kugeln so schwer wie zwölf blaue Kugeln. Somit sind zwölf blaue Kugeln so schwer wie drei grüne Kugeln.

Mißbrauchte Streichhölzer

Diese Aufgabe hat, wie die folgenden Abbildungen zeigen, zwei Lösungen.

1. Lösung: VI + II=VIII
2. Lösung: IV + III=VII

Neun Neunen

999 + 999 : 999 = 1000

Etliche Dreiecke

125 Dreiecke

Fehlende Ziffern

Für die Einerziffer, Zehnerziffer und Hunderterziffer stehen die acht Ziffern von 1 bis 8 zur Verfügung. Es gibt

$8 \quad = \quad 8$ einstellige Zahlen,
$8 \cdot 8 \quad = \quad 64$ zweistellige Zahlen,
$8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ dreistellige Zahlen,

zusammen also 584 Zahlen zwischen 1 und 1000, die weder die Ziffer 0 noch die Ziffer 9 enthalten.

Fatale Verwandtschaft

Die Onkel sind entweder zwei Brüder von Peters Vater oder zwei Brüder von Peters Mutter.

Verschiedene Wege

70 Wege

Komischer Kreis

Es gilt $A = u$, also $\pi r^2 = 2\pi r$, woraus $r = 2$ (Zentimeter) folgt.
Die Probe, $A = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$ (Quadratzentimeter) und $u = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$ (Zentimeter) zeigt, daß die gemeinsame Maßzahl 4π ist.

Fatales Mobile

Werden die Dreiecke, Fragezeichen, Kreise, Quadrate und Stäbe mit D, F, K, Q und S bezeichnet, dann lassen sich aus der Abbildung fünf Gleichungen darstellen:
$D + 2Q = S + 2K + 2F$, $Q = K + S$,
$Q = D + K$, $3K + D = 2S + Q + 2F$,
$Q = S + 2F$, woraus sich $F = D$ ergibt.
An die Stelle des Fragezeichens müssen Dreiecke.

Lösung zur Schachecke

Weiß und Schwarz können aufgrund der spiegelbildlichen Stellung jeweils mit 34 verschiedenen Zügen mattsetzen.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Prof. Dr. Mandshavidze

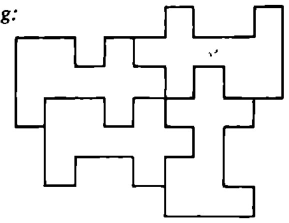
Wir verbinden die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) durch einen stückweise geradlinigen Linienzug L mit endlich vielen Richtungsänderungen („gebrochene Strecke"), der vollständig innerhalb von K liegt. Die Funktion $f(x,y)$ kann auf L als Maß des von (x_1, y_1) zurückgelegten Weges s auf L betrachtet werden, d. h.
$f(x,y) = \varphi(s)$. Es ist bekannt, daß $\varphi(0) < 0$ und $\varphi(\lambda) > 0$ gilt, wobei λ die Länge von L ist. Deshalb muß es ein s_0 geben, $0 < s_0 < \lambda$, so daß $\varphi(s_0) = 0$ ist.
Dem entspricht auf L ein Punkt
$(x_0, y_0) \in K$ mit $f(x_0, y_0) = \varphi(s_0) = 0$.
Da wir nun unendlich viele „gebrochene Strecken" von (x_1, y_1) nach (x_2, y_2) im Kreis K finden, die paarweise keine weiteren gemeinsamen Punkte besitzen, so gibt es auch unendlich viele verschiedene Punkte im Kreis K, in denen die Funktion $f(x,y)$ den Wert Null annimmt. q. e. d.

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Ein schwieriger Erbfall

Ein Landbesitzer verfaßt sein Testament. Er will sein Gelände unter seine vier Söhne, die sehr kleinlich und eifersüchtig aufeinander sind, aufteilen, und zwar so, daß er vier Teile erhält, die genau dekkungsgleich sind. Beiliegend der Geländeplan. Könnt ihr dem Besitzer helfen, indem ihr die Teilung auf dem Plan vornehmt?

Lösung:



▲2▲ Die Zahl 1990

Die arithmetische Grundstruktur dieser Zahl ist sehr einfach:
$1990 = 2 \cdot 5 \cdot 199$. 199 ist eine sehr interessante Zahl, denn sie ist die erste Primzahl einer Folge von 10 Primzahlen, die eine arithmetische Reihe mit der konstanten Differenz von 210 bilden: 199, 409, 619, 829, ..., 2089.
Zeige, daß die nächste Zahl dieser Reihe keine Primzahl ist.
Lösung: $2089 + 210 = 2999 = 11^2 \cdot 19$.

▲3▲ Auf einer Waldlichtung versammelten sich Freunde: Papagei, Boa, Elefantenbaby, Kalb, Kätzchen, Meerkatze und Kamelkind. Der Papagei begann alle zu messen. Es erwies sich, daß das Elefantenbaby 3 Papageilängen länger war als das Kalb. Das Kamelkind war ebenfalls 3 Papageilängen länger als die Meerkatze, das Kalb 7 Papageilängen länger als der Papagei, das Kamelkind 6 Papageilängen länger als das Kätzchen, und alle zusammen waren sie genau so lang wie die Boa, deren Länge 38 Papageilängen betrug.
Drückt die Längen der Freunde in Papageienlängen aus!
Lösung: Es sei p die Papageienlänge, mp die Meerkatzenlänge und np die Kätzchenlänge. Damit ist die

Länge der Boa	$38p$,
Länge des Kalbs	$p + 7p = 8p$,
Länge des Elefantenbabys	$8p + 3p = 11p$,
Länge des Kamelkindes	$(m + 3)p = (n + 6)p$.

Folglich beträgt die Länge der Meerkatze $mp = (n + 3)p$ und damit gilt
$p + 11p + (n + 6)p + 8p + (n + 3)p + np = 38p$. Also beträgt die Länge des Kätzchens $np = 3p$, der Meerkatze $6p$ und des Kamelkindes $9p$.

Lösungen zu:
Interessante Flächenvergleiche

1. $x^2 + (2x)^2 = a^2$, $5x^2 = a^2$, $x^2 = \frac{a^2}{5}$,

$A_x = a^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x = a^2 - 4x^2$,

$A_x = a^2 - \frac{4a^2}{5} = \frac{a^2}{5}$, $\frac{A_x}{A_Q} = \frac{1}{5} = 0{,}20$.

A_x beträgt 20 % von A_Q.

2. $A_{AHP} = A_{HBP} = A_{BEP} = A_D$,

$3 \cdot A_D = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$, $A_D = \frac{a^2}{12}$,

$A_x = a^2 - 8 \cdot \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{3}$.

$\frac{A_x}{A_Q} = \frac{1}{3} = 0{,}33\bar{3}$. A_x beträgt $33\frac{1}{3}$% von A_Q.

3. $A_x = a^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$,
$A_x = a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{8} = \frac{3a^2}{8}$,
$\frac{A_x}{A_Q} = \frac{3}{8} = 0{,}375$. A_x beträgt 37,5 % von A_Q.

4. $A_x = 2a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot 2a - \frac{1}{2} \cdot a \cdot a$,
$A_x = 2a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = a^2$, $\frac{A_x}{A_R} = \frac{1}{2} = 0{,}50$.
A_x beträgt 50 % von A_R.

5. $\overline{AB} : \overline{AF} = \overline{BR} : \overline{AR} = 2:1$;
$\overline{AR} = x$, $\overline{BR} = 2x$, $5x^2 = a^2$,
$x^2 = \frac{a^2}{5}$; $\frac{1}{2} \cdot A_x = A_{ABQ} - A_{ABR} = \frac{1}{2} \cdot a$
$\times \frac{2a}{3} - \frac{1}{2} \cdot 2x^2$, $A_x = \frac{2}{3}a^2 - \frac{2}{5}a^2 = \frac{4}{15} \cdot a^2$;
$\frac{A_x}{A_Q} = \frac{4}{15} = 0{,}2\bar{6}$. A_x beträgt $26\frac{2}{3}$% von A_Q.

6. $A_S = 2a^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{2a}{3}\right)$,
$A_S = 2a^2 - \frac{a^2}{6} - \frac{2a^2}{3} = \frac{7a^2}{6}$, $\frac{A_S}{A_R} = \frac{7}{12}$
$= 0{,}58\bar{3}$. A_S beträgt $58\frac{1}{3}$% von A_R.

7. Umkreisradius des Achtecks $r = \frac{a}{4}$;
$A_x = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{4} \cdot \sin 45°$,
$A_x = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot a^2$,
$\frac{A_x}{A_Q} = \frac{\sqrt{2}}{8} \approx 0{,}17677$.
A_x beträgt rund 17,7 % von A_Q.

8. Die dunkle Fläche der Sternfigur ist gleich der weißen Fläche. Untereinander gleich sind die Flächen 1, 2, 3, 5, 6, 7 sowie die Flächen 4 und 8.
Damit ist die Summe der Flächen 1, 2, 3 und 4 gleich der Summe der Flächen 5, 6, 7 und 8. A_x beträgt 50 % von A_S.

9. $A_x = a^2 - 8 \cdot A_{AHP}$;
$\overline{HP} : \overline{AP} = \overline{BE} : \overline{AB} = 1:2$; $\overline{HP} = x$,
$\overline{AP} = 2x$, $5x^2 = \frac{a^2}{4}$, $x^2 = \frac{a^2}{20}$;
$A_x = a^2 - 8 \cdot \frac{a^2}{20} = \frac{3a^2}{5}$, $\frac{A_x}{A_Q} = \frac{3}{5} = 0{,}60$.
A_x beträgt 60 % von A_Q.

Lösungen zu: Unzureichende Informationen?

Wir bezeichnen die gesuchten Zahlen mit a und b ($a < b$), ihre Summe mit S und ihr Produkt mit P. Ferner bezeichnen wir die Antworten der beiden Studenten entsprechend ihrer Reihenfolge mit (1) bis (4).
Aus (1) folgt, daß $S \geqq 7$ ist. (Für $S = 4$, $S = 5$ und $S = 6$ gibt es höchstens eine Zerlegung!) Wegen (2) enthält die Faktorzerlegung von P mindestens 3 Primfaktoren und es ist $P \neq p^3$ sowie $P \neq p^4$ (p: Primzahl). Ferner besitzt P mindestens zwei Faktorzerlegungen, die auf eine Summe mit mehrdeutiger Zerlegung führen.
Aus (3) schließen wir: Unter den Zerlegungen von S gibt es genau eine „ausgezeichnete“ Zerlegung, die auf ein Produkt P' führt, das mindestens 3 Primfaktoren enthält, für das $P' \neq p^3$ und $P' \neq p^4$ (p: Primzahl) ist, und dessen Faktorzerlegungen sämtlich auf Summen führen, die keine eindeutige Zerlegung haben. Diese ausgezeichnete Zerlegung ist die richtige.
Wir nehmen an, daß $S \geqq 13$ ist. Dann besitzt S die beiden ausgezeichneten (disjunkten) Zerlegungen
$S = 4 + (S - 4) = 6 + (S - 6)$.
Somit ist $S \leqq 12$. Mehr als eine ausgezeichnete Zerlegung erhält man auch für $S = 9$, $S = 11$ und $S = 12$, denn es ist
$9 = 3 + 6 = 4 + 5$, $11 = 2 + 9 = 3 + 8$
bzw. $12 = 2 + 10 = 4 + 8$.
Zu untersuchen sind also noch die Fälle $S = 7$, $S = 8$ und $S = 10$.
Nehmen wir zunächst $S = 7$ an. Dann folgt $a = 3$, $b = 4$ und $P = 12$. Nach (3) kann B schlußfolgern:
„Angenommen, es wäre $a = 2$ und $b = 6$, also $S = 8$. In diesem Fall hätte A sich folgendes überlegt:
‚8 besitzt die Zerlegungen $S = 2 + 6 = 3 + 5$. Die Kombination $a = 3$, $b = 5$ kommt wegen (2) nicht in Frage. Also ist $a = 2$ und $b = 6$.‘
Ebenso wäre A im Falle $S = 7$ in eindeutiger Weise auf $a = 3$ und $b = 4$ gekommen.“
Also kann sich B nach (3) noch nicht entscheiden.
Nehmen wir nun $S = 8$ an. Dann folgt $a = 2$, $b = 6$ und $P = 12$.
Nach (3) kann B schlußfolgern:
„Angenommen, es wäre $a = 3$ und $b = 4$, also $S = 7$. In diesem Fall hätte sich A folgendes überlegt:
‚7 besitzt die Zerlegungen $7 = 2 + 5 = 3 + 4$. Die Kombination $a = 2$, $b = 5$ kommt wegen (2) nicht in Frage. Also ist $a = 3$ und $b = 4$.‘
Ebenso wäre A im Falle $S = 8$ in eindeutiger Weise auf $a = 2$ und $b = 6$ gekommen.“
Also kann sich B nach (3) noch nicht entscheiden.
Endlich nehmen wir $S = 10$ an. Daraus folgt $a = 4$, $b = 6$ und $P = 24$.
Nach (3) kann B dann schlußfolgern:
„Angenommen, es wäre $a = 2$ und $b = 12$, also $S = 14$. Dann gäbe es die ausgezeichneten Zerlegungen
$14 = 2 + 12 = 4 + 10 = 5 + 9 = 6 + 8$
und A hätte noch keine Entscheidung fällen können.
Angenommen, es wäre $a = 3$ und $b = 8$, also $S = 11$. Dann gäbe es die ausgezeichneten Zerlegungen
$11 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6$
und A hätte ebenfalls noch keine Entscheidung fällen können.
Also folgt $a = 4$ und $b = 6$.“
Somit ist $a = 4$ und $b = 6$ die einzige Lösung der Aufgabe.

Lösung der Version:

Wir bezeichnen die gesuchten Zahlen mit a und b, ihre Summe mit S und ihr Produkt mit P. Ferner bezeichnen wir die Antworten der beiden Studenten entsprechend ihrer Reihenfolge mit (1) bis (4).
Der Gang der Lösung läßt sich nun wesentlich abkürzen, wenn man den folgenden, noch unbewiesenen, zahlentheoretischen Satz kennt, der bekannt ist unter dem Namen Goldbachsche Vermutung: Jede gerade natürliche Zahl, die größer als 4 ist, läßt sich als Summe zweier ungerader Primzahlen darstellen. (5)
(Für natürliche Zahlen, die kleiner als 200 sind, überprüft man den Satz ohne weiteres durch Nachrechnen.)
Aus (1) folgt, daß P mindestens 3 Primfaktoren enthält. (6)
Aus (2) folgt, daß S keine Darstellung $S = 2 + p$ (p: Primzahl) besitzt. (7)
(Anderenfalls wäre ja $P = 2 \cdot p$, und die Faktorzerlegung von P eindeutig, was (1) widerspräche.)
Wegen (2) ist offenbar $S \geqq 6$. (8)
Wäre S gerade, so gäbe es wegen (5) eine Zerlegung $S = p_1 + p_2$, (P_1, P_2: ungerade Primzahlen). Dies widerspricht ebenfalls (2). Also ist S ungerade. (9)
Wäre $S \geqq 55$, so gäbe es die Zerlegung $a = 53$, $b = S - 53$. P besäße dann wegen der Einschränkung $a, b < 100$ nur eine Faktorzerlegung, was (2) widerspräche. Also ist $S \leqq 53$. (10)
Zu untersuchen bleiben wegen (8), (9) und (10) nur die Summen 11, 17, 21, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 51 und 53.
Wir haben:
$53 = 41 + 12 = 37 + 16$, $51 = 47 + 4$
$= 32 + 19$, $47 = 31 + 16 = 43 + 4$,
$37 = 32 + 5 = 29 + 8$,$35 = 32 + 3$
$= 19 + 16$, $27 = 16 + 11 = 19 + 8$,
$21 = 16 + 5 = 13 + 8$.
Alle diese Summenzerlegungen führen auf Produkte, die genau eine Faktorzerlegung besitzen, die mit (2) vereinbar ist. Somit kann sich in diesen Fällen B nicht für eine der zwei Summenzerlegungen entscheiden.
Weiter gilt:
$41 = 37 + 4 = 32 + 9$, $29 = 16 + 13$
$= 25 + 4$, $11 = 7 + 4 = 9 + 2$.
Die rechts stehenden Summenzerlegungen führen auf die Produkte $32 \cdot 9$, $25 \cdot 4$ und $9 \cdot 2$, die außerdem nur noch die Faktorzerlegungen $96 \cdot 3$, $20 \cdot 5$ bzw. $6 \cdot 3$ gestatten. Diese Produktzerlegungen führen auf die Summen 99, 25 und 9, die wegen (7) nicht in Frage kommen. Auch im Falle der links stehenden Summenzerlegungen und den zugehörigen Produkten $37 \cdot 4$, $16 \cdot 13$ und $4 \cdot 7$ hätte A nur je eine Produktzerlegung zur Auswahl. Somit kann in den Fällen $S = 41$, $S = 29$ und $S = 11$ B keine Entscheidung über die Zerlegung treffen.
Jetzt sei $S = 17$. Wir betrachten zunächst die Summenzerlegungen
$17 = 2 + 15 = 3 + 14 = 5 + 12$
$= 6 + 11 = 7 + 10 = 8 + 9$. Es gilt
$2 \cdot 15 = 6 \cdot 5$, $3 \cdot 14 = 2 \cdot 21$, $5 \cdot 12 = 3 \cdot 20$,
$6 \cdot 11 = 2 \cdot 33$,
$7 \cdot 10 = 2 \cdot 35$ und $8 \cdot 9 = 24 \cdot 3$.
Alle diese Produktzerlegungen sind mit (1), (2) und (5) bis (9) vereinbar. A könnte also im Falle dieser Zerlegungen keine Entscheidung fällen, was (3) widerspräche.
Schließlich sei $P = 52$. In diesem Falle kann A wegen (9) auf die Zerlegung $4 \cdot 13$ schließen. Somit ist $a = 4$, $b = 13$ die einzige Lösung der Aufgabe.

Die Ludolphsche Kreiszahl π

Ludolph van Ceulen (1540 bis 1610) wurde vor genau 450 Jahren in Hildesheim geboren und starb mit 70 als angesehener Gelehrter an der Universität Leiden in Holland. Nach dem Studium war er als Lehrer für Mathematik in Breda, Amsterdam, Delft, Arnheim und Leiden tätig, bevor ihn Prinz Moritz von Oranien auf die neugeschaffene Professur für Kriegsbaukunst in Leiden berief. Auf seinen ausdrücklichen Wunsch sind in seiner Grabsteinplatte 36 richtige Ziffern der Kreiszahl π eingemeißelt, seine mathematische Meisterleistung, auf die er völlig zu recht sehr stolz war.

Alle seine kleineren und größeren Schriften widmen sich vor allem diesem Thema. Keiner vor ihm kam auf so eine hohe Genauigkeit.

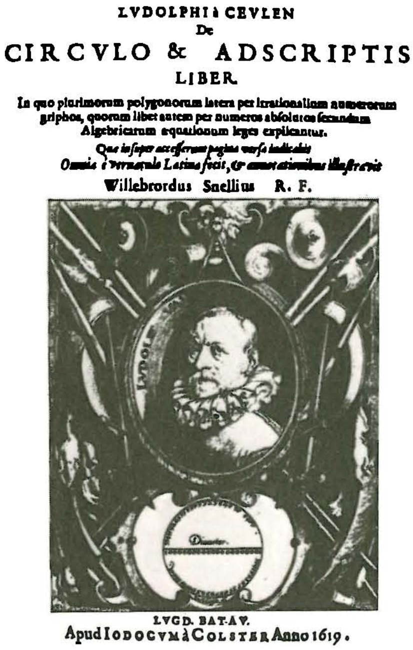
Nur Adriaen van Roomen (1561 bis 1615) konnte in seinem Buch „Ideae mathematicae" von 1593 die Kreiszahl erstmalig immerhin auf 17 Stellen nach dem Komma berechnen. Der Weg dahin ist seit Archimedes stets der gleiche: einem Kreis mit festem Radius werden durch Halbieren der Seiten an der Kreislinie regelmäßige Vielecke ein- und umbeschrieben. Im allgemeinen fängt man mit dem Sechseck, dessen Seite gleich dem Radius ist, an. Mit steigender Zahl der Seiten wird die Kreiszahl, das Verhältnis von Kreisumfang zum Durchmesser, immer besser eingeschachtelt. Während Archimedes bis zum 96-Eck kam, gingen die oben genannten weit darüber hinaus. Sie konnten dabei auf den Leistungen von Vieta (1540 bis 1603) aufbauen, der bereits 9 genaue Dezimalstellen berechnete und die ersten Formeln für π als unendliche Produkte und Kettenbrüche kannte.

Doch immer wieder gab es falsche Propheten für die „Quadratur des Kreises". In mehreren Streitschriften mußte van Ceulen wiederholt die Klinge mit Duchesne und Scaliger kreuzen, die selbst die altbewährte Abschätzung für die Kreiszahl von Archimedes nicht gelten ließen

$$\left(3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}\right).$$

„Van den Circkel" ist dann der Titel seines ersten Buches von 1596, das seine Witwe Adriana van Ceulen 1615 noch einmal drucken ließ. Willebrod van Snell (1580 bis 1626) übersetzte diese und andere Schriften schon 1615 ins Lateinische mit dem zusammenfassenden Titel:

„De circulo et adscriptis liber", d. h. das Buch über den Kreis und Dazugehöriges. Es ist als ein kostbarer Besitz mit einem sehr schönen Titeldruck in der Greifswalder Bibliothek noch vorhanden.



LVDOLPHI à CEVLEN
De
CIRCVLO & ADSCRIPTIS
LIBER.
In quo plurimorum polygonorum latera per irrationalium numerorum
griphos, quorum libet autem per numeros absolutos secundum
Algebraicarum aequationum leges explicantur.
Willebrordus Snellius R. F.
LVGD. BAT. AV.
Apud Iodocvm à Colster Anno 1619.

Mit einem Umfang von 260 Seiten enthält die lateinische Ausgabe zahlreiche schöne geometrische Gedanken, Aufgaben und Beweise. Darunter finden wir die Eigenschaften des Sehnenvierecks mit den speziellen ganzzahligen Seiten 6, 8, 9 und 18 cm. Für seinen Flächeninhalt ist wohl erstmalig in Europa die schon den Indern bekannte Formel genannt:

$$F^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d)$$

mit $s = \frac{(a + b + c + d)}{2}$, a, b, c und d sind die Viereckseiten. Wir kennen diese Formel mit $d = 0$ als Dreiecksinhalt nach Heron von Alexandria um 75 u. Z.

Eine Fundgrube für den Geometer ist auch das zweite Buch van Ceulens, das mit dem Titel „De arithmetische en geometrische Fondamenten" erst 1615 nach seinem Tode herauskam und 1619 von Snell ins Lateinische übersetzt wurde. Die 36 genauen Ziffern der Kreiszahl finden wir gedruckt auch im Buch von Snell „Cyclometricus" 1621, erst am Ende des 17. Jahrhunderts gab es weiterführende Berechnungen auf der Grundlage von Potenzreihen in England. Die vollständige Berechnung der Kreiszahl van Ceulens hat die Ziffern

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288$$

Der Buchstabe π für die Ludolphsche Zahl hat sich erst seit Eulers Bemühungen eingebürgert, zuerst finden wir ihn bei William Jones 1706.

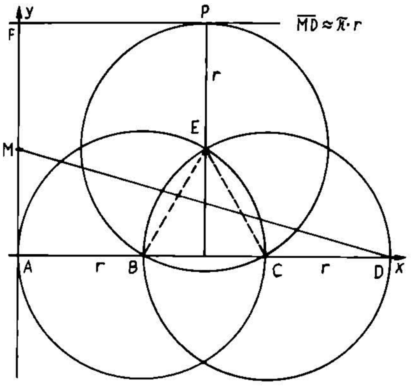
Abschließend soll dem Geometer van Ceulen zu Ehren noch eine geometrische Näherungskonstruktion für π vorgestellt werden, die mit einer einzigen Zirkeleinstellung auskommt und von G. Pfaff stammt. Im Schnittpunkt E zweier Kreise mit gleichem Radius r, deren Mittelpunkte auf der x-Achse im Abstand r liegen, wird der dritte gleich große Kreis gezeichnet. Die Tangente dieses Kreises in P parallel zur x-Achse liefert auf der y-Achse einen Abschnitt

$\overline{AF} = r\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, d. h. Höhe im gleichseitigen Dreieck BCE mit der Seite r und dazu $\overline{EP} = r$. Die Länge der Strecke vom Seitenmittelpunkt M zum Punkt D des zweiten Kreises auf der x-Achse ist schon eine recht gute Näherung für die Kreiszahl. Denn nach dem Satz des Pythagoras erhalten wir

$$\overline{MD}^2 = r^2\left(3^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2\right)$$

und daraus die Wurzel

$\overline{MD} = r \cdot 3{,}141737 \approx r \cdot \pi$, mit nur weniger als ein Promille als Fehler.



Aufgabe: Läßt man den Punkt D auf der x-Achse stetig nach rechts oder links wandern, ohne die Kreise zu verändern, so wird auch die Konstruktionsstrecke $\overline{MD}$ veränderlich, wir wollen sie y nennen.

1. Welcher Kurventyp wird von y als Ordinate durchlaufen, wenn x sich stetig ändert (dabei muß x nicht nur positiv sein)?
2. Man konstruiere die gesuchte Kurve, indem in jedem Punkt D auf der x-Achse die Lote mit der Länge $\overline{MD}$ gezeichnet werden.
3. Wie groß muß der Wert von x sein, damit die Strecke $\overline{MD}$ die Kreiszahl von Ludolph auf 6 Stellen genau liefert?

J. Buhrow

Wer war näher dran?

Ahmes (ägyptischer Schreiber, wahrscheinlich 18. Jh. v. u. Z.) rechnete mit

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2,$$

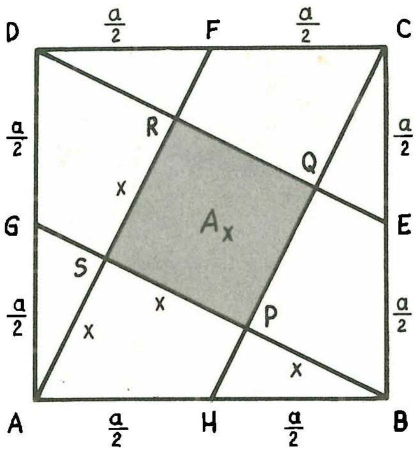
Archimedes (um 287 bis 212 v. u. Z.) mit

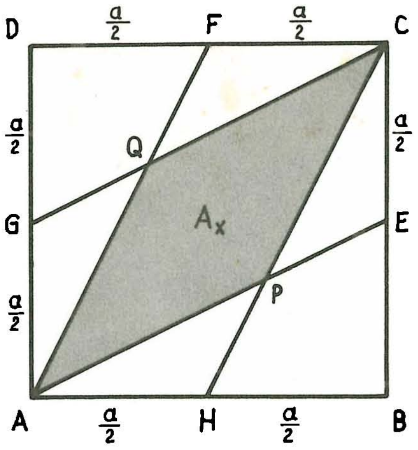
$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70},$$

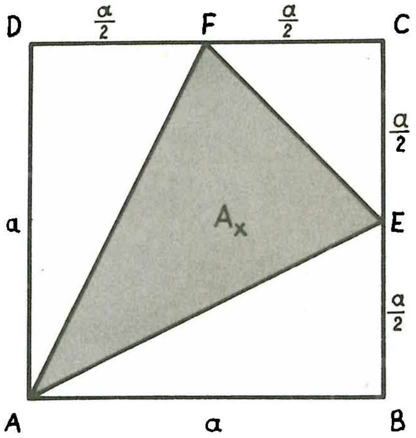
Claudius Ptolemäus (um 83 bis 161 u. Z.) mit $\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60 \cdot 60}$ und 700 Jahre später der Chinese Tsu Chhung Chih mit

$$\pi = \frac{355}{113}.$$

Überprüft es!

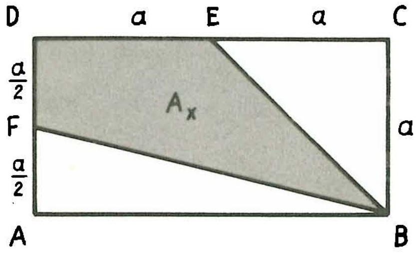


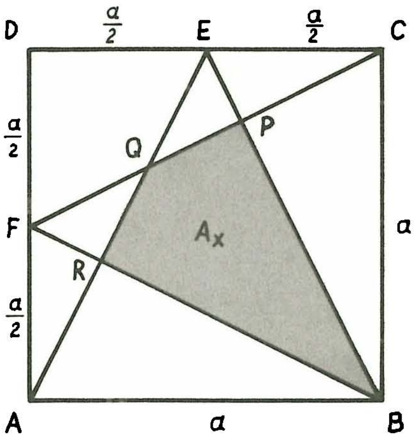


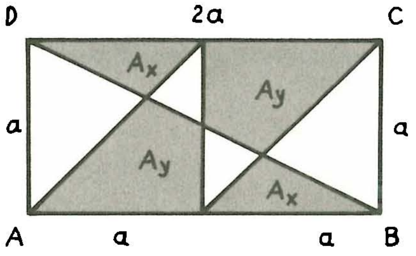


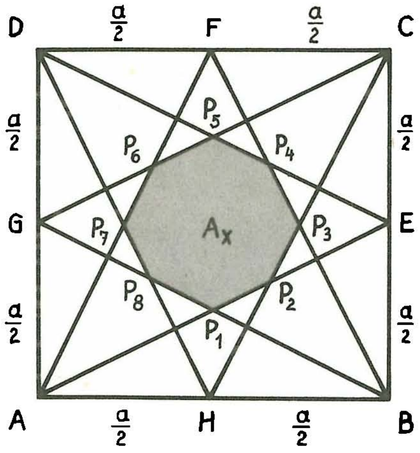
Interessante Flächenvergleiche

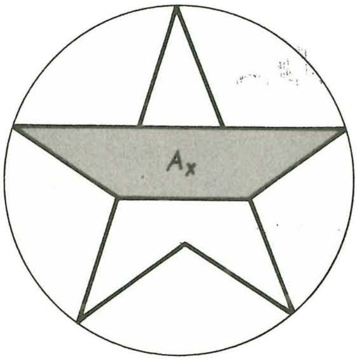
siehe Beitrag auf Seite 114

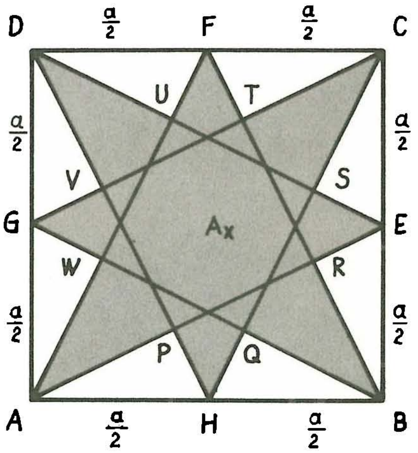












ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 24 (1990) 5 · Seiten 97 bis 120

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Verlag GmbH
24. Jahrgang 1990
Preis 1,50 DM
ISSN 0002-6395

6

Friedrich Verlag
in Velber

mathematik lehren

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Verlag GmbH
Anschrift des Verlages:
Lindenstr. 54a, PSF 1213, Berlin, 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig, 7027
Redaktion:
Dr. paed. Gabriele Liebau (Chefredakteur); Rosemarie Schubert (redaktioneller Mitarbeiter)
Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Dr. sc. Lothar Flade (Halle); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Chemnitz); Dr. C. P. Helmholz (Leipzig); Dr. sc. nat. R. Hofmann (Unterschleißheim); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberstudienrat J. Lehmann, VLdV (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dr. rer. nat. W. Schmidt (Greifswald); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. rer. nat. W. Schulz (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch, VLdV (Halle)
Lizenznummer: 1545
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 DM, im Abonnement zweimonatlich 1,20 DM.
„alpha“ ist zu beziehen über den Buch- und Zeitschriftenhandel, die Post oder die Redaktion.
Fotos: Dr. P. Schreiber (S. 122); K.-Sudhoff-Institut der Universität Leipzig (S. 138/139)
Vignetten: L. Otto (Titelvignetten); aus Funktio, Helsinki (S. 136)
Technische Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin, nach einem Titelblatt von „mathematik lehren“, Friedrich Verlag in Velber
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Satz und Druck: Interdruck GmbH Leipzig
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 14. August 1990
Auslieferungstermin: 10. Dezember 1990

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Alphons weist euch auf Artikel mit geringerem Schwierigkeitsgrad hin. Das heißt aber nicht, daß alle anderen Beiträge für mathematische Anfänger ungeeignet sind. Probiert es selbst aus!

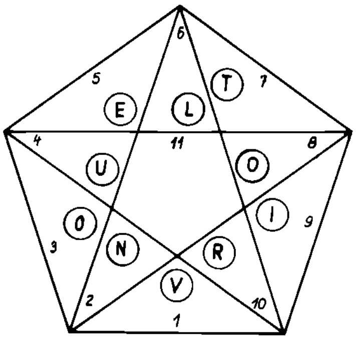
Schiebespiel im Pentagon

Teil 1

Wer den Spielbetrieb kennt, weiß,
welcher Zauber ihm innewohnt.
G. Hauptmann

Das Spielfeld dieses Schiebespiels ist ein mit seinen Diagonalen auf Papier gezeichnetes regelmäßiges Pentagon (Fünfeck). Zu Spielbeginn wird auf jedes der 10 Randfelder (Dreiecksflächen) ein mit je einem der Buchstaben R, E, V, O, L, U, T, I, O und N beschrifteter Spielstein (Pappstück) in ungeordneter, beliebiger Reihenfolge gesetzt, während das Mittelfeld (kleine Pentagonfläche) zunächst unbesetzt bleibt. Bei einem Zuge darf ein Stein von einem Feld auf ein benachbartes unbesetztes Feld gezogen werden, das mit dem Ausgangsfeld eine Seite gemeinsam hat. Als erster Zug kann also nur einer der Steine von den Randfeldern 2, 4, 6, 8 oder 10 auf das Mittelfeld 11 gezogen werden (siehe Bild). Durch eine Folge von Zügen sind die Spielsteine auf den Randfeldern so umzugruppieren, daß sich beim im Randfeld 1 beginnenden Lesen im Uhrzeigersinn das Wort „Revolution“ ergibt.

Der Leser möge zunächst versuchen, die Ausgangslage des Bildes in die Ziellage überzuführen.



Doch das im Felde 1 beginnende, im Uhrzeigersinn zu lesende Zielwort „Revolution“ läßt sich ausgehend von jeder Ausgangslage stets durch eine Folge von Zügen herstellen!

Zugfolgen, die die spezielle Ausgangslage des Bildes bzw. eine beliebige Ausgangslage in die Ziellage überführen, werden im Folgeheft vorgestellt. Somit hat der interessierte Leser genügend Zeit zum selbständigen Auffinden geeigneter Zugfolgen. Es sei noch mitgeteilt, daß die Theorie des „Schiebespiels im Pentagon“ viel gemeinsam hat mit der des „Fünfzehnerspiels“, das in der angegebenen Literatur analysiert wird:

- R. Thiele, Die gefesselte Zeit, Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin 1987
- L. A. Kaloujnine, V. I. Suščanskij, Transformationen und Permutationen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1986 (Mathematiche Schülerbücherei Nr. 124)
- M. Deweß, G. Deweß, Summa summarum, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1986 (Mathematische Schülerbücherei Nr. 125)

W. Träger

Ein interessantes Anordnungsproblem

Der Schriftsteller W. K. Schweickert erzählt in seinem Buch „Der Senor und die Punkte“ folgende Geschichte aus Mexiko: Ein Aufseher betrügt die ihm unterstellten Arbeiterinnen um 24 Fässer mit Schmalz, die ihnen als Teil des Jahreslohnes in Naturalien ausgezahlt werden sollten. Der Aufseher war viel zu faul, täglich Faß für Faß zu zählen, deshalb hatte er die vorhandenen 68 Fässer mit Schmalz, von denen 24 Stück den Arbeiterinnen gehörten, so im Fabrikhof aufstellen lassen, daß in jeder Randreihe 21 (4 + 13 + 4) Fässer standen. Ein flüchtiger Blick durch sein Kontorfenster zeigte ihm so, daß sein Diebesgut unangetastet war. Die Fässer waren also wie folgt angeordnet:

4	13	4
13		13
4	13	4

Ein neuer Kollege gab den Arbeiterinnen einen Tip, wie sie zu ihrem Recht kommen könnten. Die Arbeiterinnen sollten in gewissen zeitlichen Abständen jeweils vier Fässer unbemerkt vom Hof holen und dabei so vorgehen, daß der Aufseher trotzdem in jeder Randreihe 21 Fässer sah. Der Schriftsteller gibt in seinem Buch nur eine empirische Lösung für dieses Anordnungsproblem an.

Wir wollen es deshalb einmal mathematisch näher durchleuchten.

Zur Veranschaulichung verwenden wir ein Quadrat, daß aus neun gleichgroßen quadratischen Feldern besteht.

4	13	4
13	▨	13
4	13	4

e	m	e
m	▨	m
e	m	e

Nennt man die Anzahl der Fässer jedes Eckfeldes e, die jedes Mittelrandfeldes m, und setzt man eine symmetrische Anordnung, also gleiches e für alle Eckfelder und gleiches m für alle Mittelrandfelder, voraus, so beträgt die Gesamtzahl s aller Fässer

$$s = 4e + 4m = 2 \cdot (2e + m) + 2m.$$

Um den Aufseher zu täuschen, müssen die Arbeiterinnen darauf achten, daß die Anzahl der Fässer jeder Randreihe, also die Summe $2e + m$ konstant bleibt.

Darum gilt $4e + 4m = s$ und

$2e + m = k$ bzw. $e + m = \frac{s}{4}$ und

$m = k - 2e.$

Daraus folgt durch Einsetzen $e = k - \frac{s}{4}$.

Da das Mittelrandfeld nicht leer sein darf, um den Argwohn des Aufsehers nicht zu erregen, gilt $m \geqq 1$;

wegen $s = 4 \cdot (e + m)$ muß s ein Vielfaches von 4 sein.

Für den konkreten Fall ($s_1 = 68$ und $k = 21$) sind folgende Anordnungen möglich:

s	k	$e = k \cdot \frac{s}{4}$	$m = k - 2e$
68	21	4	13
64	21	5	11
60	21	6	9
56	21	7	7
52	21	8	5
48	21	9	3
44	21	10	1

Wegen $68 - 44 = 24$ sind die Arbeiterinnen nach sechs Entnahmen von jeweils vier Fässern zu ihren 24 Fässern Schmalz gekommen. Dabei entstehen schrittweise folgende sechs weiteren Anordnungen der Fässer:

5	11	5
11	▨	11
5	11	5

6	9	6
9	▨	9
6	9	6

7	7	7
7	▨	7
7	7	7

8	5	8
5	▨	5
8	5	8

9	3	9
3	▨	3
9	3	9

10	1	10
1	▨	1
10	1	10

Th. Scholl

Derjenige, welcher von klein auf von der Mathematik durchdrungen wird, indem er sich ihre unumstößlichen Beweise aneignet, ist so zur Wahrnehmung der Wahrheit vorbereitet, daß er leicht jeglichen Betrug abschüttelt.

Petrus Gassendi (1592 bis 1655,
franz. Philosoph und Mathematiker)

Der gallische Apollonius

Zum 450. Geburtstag von François Viète (Vieta)

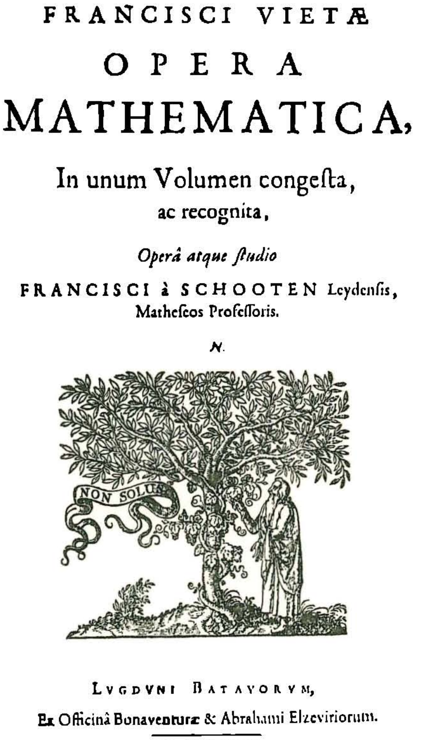
Frankreich in der zweiten Hälfte des 16. Jh.: Handel und Handwerk, darunter z. B. der Buchdruck, haben einen raschen Aufschwung genommen, aber das Land ist zerrüttet durch Kriege nach außen und durch die blutigen Auseinandersetzungen zwischen Katholiken und Kalvinisten (in Frankreich als Hugenotten bezeichnet). Diese Religionskämpfe, in deren Hintergrund es aber um die Rivalität zweier Adelsparteien ging, begannen 1562 mit dem „Blutbad von Vassy“, erreichten ihren Höhepunkt in der „Bartholomäusnacht“ vom 23. zum 24. August 1572, als in einer einzigen Nacht mehr als 2000 Hugenotten in Paris und an den folgenden Tagen rund 20000 in der Provinz einem Pogrom zum Opfer fielen, und endeten erst, als König Henri IV. 1598 im Edikt von Nantes den Katholizismus zur Staatsreligion erklärte, zugleich aber den Hugenotten Religionsfreiheit und gewisse politische Autonomierechte garantierte. In der Literatur ist diese bewegte Zeit später vielfach wiedergespiegelt worden, so von Heinrich Mann („Jugend und Vollendung des Königs Henri Quatre“), von Alexandre Dumas d. Ä. („Die Königin Margot“) und von Prosper Mérimée („Chronik der Regierung Karls IX.“, deutsch auch unter dem Titel „Die Bartholomäusnacht“). Eigentlich muß man alle diese, durchweg spannend abenteuerlichen Romane gelesen haben, um sich ein ungefähres Bild von den Lebensumständen des Mathematikers François Viète (besser unter seinem latinisierten Gelehrtennamen Vieta bekannt) malen zu können – und dann wird man um so beeindruckter von Umfang, Vielfalt und Originalität der Leistungen dieses Mannes sein. Wie konnte er, noch dazu in wichtigen Funktionen in die Adels- und Staatsaffären seiner Zeit verstrickt, Zeit und innere Ruhe für ein so gewaltiges Werk finden? Auf diese Frage gibt es bis heute keine befriedigende Antwort.

Bild 1

Vieta wird an einem heute unbekannten Tag des Jahres 1540 in der westfranzösischen Stadt Fontenay-le-Comte in einer wohlhabenden Kaufmannsfamilie geboren, die im Begriff ist, in den Adel aufzusteigen. Er wird später den Titel eines Seigneur de la Bigotière tragen, aber im Titel seiner wissenschaftlichen Abhandlungen wird er als Franciscus Vieta Frontenäensis (lat. s. v. w. aus Fontenay) bezeichnet werden. Nach dem üblichen Besuch einer Klosterschule studiert er Rechtswissenschaft und wird alsbald gesuchter juristischer Berater hochgestellter Familien und Personen, darunter zweier Könige von Frankreich: Heinrich III. von Valois (1574 bis 1589, ermordet) und Henri IV. von Bourbon (1589 bis 1610, ermordet), letzterer der berühmte „Zaunkönig“ von Navarra, lange Zeit Haupt der hugenottischen Partei, bis ihm 1593 „Paris eine Messe wert“ war, d. h. er trat zum Katholizismus über, um in die Hauptstadt einziehen zu können.

Eine aufsehenerregende Probe seines Scharfsinns hatte Vieta 1589 abgelegt, als es ihm gelang, den Geheimcode der mit Frankreich im Krieg befindlichen Spanier zu dechiffrieren. Fortan gehörten Chiffrieren und Dechiffrieren zu seinen ständigen Aufgaben im Dienst der französischen Krone. Bezüglich weiterer Einzelheiten aus dem Leben Vietas müssen wir auf seine Biographie in Wußing/Arnold: Biographien bedeutender Mathematiker, Volk und Wissen 1975, ^{4}1989 verweisen. Etwa seit 1571, verstärkt aber seit 1591 setzte Vieta eine Reihe von Büchern und Schriften mathematischen Inhalts in Umlauf, die er auf eigene Kosten drucken und an Interessenten, auch im Ausland, verschicken ließ.

So wurden seine Ergebnisse rasch bekannt, sein Ruhm wuchs, manche seiner Schriften wurden schon bald nachgedruckt, aber als der selbst bedeutende niederländische Mathematiker Frans van Schooten (um 1615 bis 1660) 1646 die Gesammelten Abhandlungen Vietas (Bild 2) herausgab, konnte er schon nicht mehr alle zusammenbringen, und manche Schrift Vietas, von deren einstiger Existenz wir wissen oder sie vermuten, gilt bis heute als verloren. In der mathematikhistorischen Lehrbuch- und Populärliteratur wird Vieta heute – und durchaus berechtigt – vor allem als Begründer der Algebra im Sinne eines Rechnens mit Buchstaben zur Bezeichnung gegebener und gesuchter Zahlen und beginnender Symbolisierung der auszuführenden Rechenschritte herausgestellt.



FRANCISCI VIETÆ
OPERA
MATHEMATICA,
In unum Volumen congeſta,
ac recognita,
Operâ atque ſtudio
FRANCISCI à SCHOOTEN Leydenſis,
Matheſeos Profeſſoris.

LVGDVNI BATAVORVM,
Ex Officinâ Bonaventuræ & Abrahami Elzeviriorum.
clↄ Iↄ c XLVI.

Bild 2

Er selbst nannte dieses Rechnen mit Buchstaben „logistica speciosa“ (etwa „kostbare Rechenkunst“) im Gegensatz zur „logistica numerosa“, dem Rechnen mit konkreten Zahlen. In späteren Ausgaben seiner diesbezüglichen Schriften erscheint in diesem Zusammenhang auch die Bezeichnung „Algebra nova“ (neue Algebra). Der neuen Algebra sind gewidmet:

– die kleine, kaum 25 Druckseiten umfassende Schrift „In Artem analyticam Isagoge“, deutsch etwa: Einführung in die analytische Kunst (1591, 1635 in Holland nachgedruckt). Übrigens ist das griechische Wort Isagoge (eigentlich Eisagoge) für Einführung ein Fremdling im sonst lateinischen Text. Daher weist seine Wiederverwendung durch Fermat (1636) und andere bedeutende Mathematiker des folgenden Jh. deutlich auf die bewußte Anknüpfung an eine von Vieta mit seiner „Isagoge“ begründete neue mathematische Tradition hin.

– „Zeteticorum libri quinque“ (1593), deutsch etwa: Fünf Bücher über „Zetetik“, worunter Vieta das Aufsuchen von unbekannten Größen versteht, nachdem man sie mit Buchstabensymbolen bezeichnet hat und sie nun durch Umformen von Gleichungen zwischen ihnen und den gegebenen Größen gewissermaßen „jagt“.

– „De aequationum recognitione et emendatione“ (postum 1615 in Paris gedruckt), deutsch etwa: Über die Untersuchung und Verbesserung (im Sinne von Aufbereiten, auf Normalform bringen) von Gleichungen.

– „Ad logisticam speciosam notae priores“ (postum 1631 in Paris gedruckt), deutsch etwa: Erste Bemerkungen zur logistica speciosa. In diesen algebraischen Abhandlungen findet sich unter vielem anderen die Aufstellung einer Gleichung mit vorgegebenen Lösungen und der „Vietasche Wurzelsatz“ und die später als Tschirnhaus-Transformation bezeichnete Methode, den zweithöchsten Koeffizienten a_{n-1} eines Polynoms

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

durch lineare Substitution einer neuen Unbekannten y zum Verschwinden zu bringen. „alpha“ plant zum 400. Jahrestag des Erscheinens der „Isagoge“, die man ja mit einem gewissen Recht als Geburtsurkunde der modernen Algebra bezeichnen kann, einen besonderen Artikel über Vietas Verdienste um die Algebra. Darum und auch um der historischen Gerechtigkeit willen wollen wir uns hier im folgenden nur mit den in der modernen Literatur weit weniger gewürdigten, aber ebenfalls bemerkenswerten und zum Teil erhebliche historische Wirkungen auslösenden Beiträgen Vietas zur Geometrie beschäftigen.

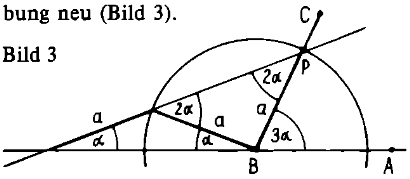
Der leider verlorene „Canon mathematicus“ (1579) enthielt erstmals eine moderne Einführung in alle sechs trigonometrischen Funktionen (sinus, cosinus, tangens, cotangens, secans und cosecans) und deren Tabellierung, von Bogenminute zu Bogenminute fortschreitend, ferner eine Darstellung der ebenen und sphärischen Trigonometrie, eine Berechnung der Zahl π mittels dem Kreis einbeschriebener und umbeschriebener regulärer 1296-Ecke auf neun Dezimalstellen genau und eine Fülle goniometrischer Beziehungen, die fast bis zum Satz von Moivre reichen. Auch später hat sich Vieta immer wieder als ein Meister des Rechnens mit trigonometrischen Funktionen erwiesen und als erster trigonometrische Formeln in Gestalt (modern gesprochen) unendlicher Reihen aufgestellt, wie z. B.

$$\sin nx = \cos^n x \left(n \tan x - \binom{n}{3} \tan^3 x + \binom{n}{5} \tan^5 x - \ldots\right) \quad \text{oder}$$

$$\sin nx = \sin x \left((2 \cos x)^{n-1} - \binom{n-2}{1} (2 \cos x)^{n-3} + \ldots\right).$$

1593 begann er systematisch, die Ausführung algebraischer Operationen durch geometrische Konstruktion an durch Strecken, Flächen und Volumina repräsentierten Größen auseinanderzusetzen. Zwar hatte er hierin einen unmittelbaren Vorläufer in dem Italiener Giovanni Battista Benedetti (1530 bis 1590), der Analoges schon 1585 in seinen „Speculationes diversae“ durchgeführt hatte, Vieta geht jedoch weit über Benedetti hinaus, indem er auch algebraische Gleichungen 3. und 4. Grades durch gegenüber Zirkel und Lineal leistungsfähigere Konstruktionsmittel löst, insbesondere durch die schon in der Antike erfundene Einschiebung, bei der ein mit zwei Abstandsmarken versehenes Lineal durch Probieren in eine solche Lage gebracht wird, daß es durch einen gegebenen Punkt geht und die beiden Marken auf je einer gegebenen Linie (im einfachsten Fall Gerade oder Kreis) liegen. Während Vieta so wesentliche Vorleistungen für die in der nächsten Generation von Pierre de Fermat (1601 bis 1665) und René Descartes (1596 bis 1650) begründete Koordinatenmethode erbringt (vgl. hierzu den Artikel „Die Koordinatenmethode im Wandel der Zeiten“ in „alpha“ 1987, Heft 6 und 1988, Heft 1), gelangt er zu der damals fast unglaublichen Erkenntnis, daß man jede Aufgabe 3. Grades auf Winkeldreiteilung und Volumenvervielfachung zurückführen kann, ein Resultat, das erst zu Beginn des 19. Jh. im Lichte der Gaußschen Deutung der komplexen Zahlen in der „Zahlenebene“ voll verständlich werden konnte. Nebenbei entdeckte Vieta unabhängig von Archimedes dessen Winkeldreiteilung durch Einschiebung neu (Bild 3).

Bild 3



Winkeldreiteilung durch Einschiebung: Der gegebene Winkel sei ∡ *ABC*. Man verlängere den Schenkel *BA* rückwärts über *B* hinaus und schlage mit der einzuschiebenden Strecke *a* einen Halbkreis um *B*, der den Schenkel *BC* in *P* schneide. Nun wird das Lineal so plaziert, daß es durch *P* geht und die Enden der markierten Strecke auf dem Halbkreis bzw. dem rückwärts verlängerten Schenkel liegen; es entsteht α als dritter Teil von ∡ *ABC*. Die Schrift des Archimedes, die diese elegante Lösung enthält, wurde erst nach Vietas Tod in Europa bekannt.

In der sphärischen Geometrie entdeckte Vieta das Polaritätsprinzip (jedem Punkt ist sein Großkreis um ihn als Mittelpunkt und jedem Großkreis sein „Pol“ zugeordnet) und findet so den Zugang zum letzten Kongruenzsatz der sphärischen Geometrie (sphärische Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen drei Winkeln übereinstimmen) und zur Lösung der zugehörigen konstruktiven bzw. rechnerischen Aufgabe, ein Dreieck aus seinen drei Winkeln zu berechnen (mittels des erstmals von Vieta formulierten Winkelkosinussatzes) bzw. zu konstruieren. Freilich ist die Methode bei ihm noch etwas unübersichtlich, aber auf seiner Vorarbeit fußend, findet Willebrord Snellius (1580 bis 1626) 1621 das heute übliche Polardreieck (vgl. hierzu den Abschnitt Sphärische Trigonometrie in der Kleinen Enzyklopädie Mathematik).

In seiner letzten Schrift „Apollonius Gallus“ (d. h. der französische Apollonios) löste 1600 Vieta alle zehn Konstruktionsaufgaben, die sich ergeben, wenn man zu drei gegebenen Stücken aus der Menge der Punkte, Geraden und Kreise der Zeichenebene alle Kreise sucht, die die drei gegebenen Stücke berühren.

Diese Aufgaben hatte der antike Mathematiker Apollonios von Perge (um 262 bis um 190 v. u. Z.) in einer verlorenen Schrift „Über Berührungen“ gestellt und gelöst, von deren Existenz und Inhalt nur durch den spätantiken Mathematik-Compilator Pappos (um 320) etwas bekannt ist. Vieta stellte den vermutlichen Inhalt dieser Schrift als erster Mathematiker wieder her. (Eine schöne Darstellung der Lösungen des „Apollonischen Berührungsproblems“ allerdings ohne historische Bemerkungen, wurde in „alpha“ 1980, Heft 5 veröffentlicht.) Das Appolonische Berührungsproblem hat nach Vieta noch eine bewegte Geschichte gehabt. Einer Aufforderung von Descartes folgend, löste Fermat das analoge Problem im Raum, zu vier gegebenen Kugeln alle Kugeln zu konstruieren, welche sämtliche gegebenen Kugeln berühren. Im 19. Jh. löste M. Chasles (1793 bis 1880) die analoge Aufgabe sogar für beliebige Flächen 2. Grades. Neue Lösungen des ebenen Problems gaben u. a. Descartes, Newton, Lambert und Euler. Am Ende des 19. Jh. erlebte die Aufgabe noch einmal eine unerwartete Blüte. Nachdem der Franzose E. Lemoine (1840 bis 1912) 1888 die sogenannte Geometrographie begründet hatte, in der es darum geht, eine Konstruktionsaufgabe in möglichst wenigen Schritten zu lösen, berechnete man die nach Vieta benötigte Schrittzahl für die Konstruktion der Berührungskreise dreier Kreise (die Aufgabe hat im allgemeinen 8 Lösungen) mit 335 Schritten, und es gelang mehreren Mathematikern, u. a. Lemoine selbst, wesentlich kürzere (zugleich aber weniger einsichtige) Lösungen mit schließlich nur noch 152 Schritten zu finden.

Am Rande sei bemerkt, daß Vieta bei der Lösung einiger Aufgaben des Berührungsproblems erstmals die später als „Inversion am Kreis“ oder auch als „Transformation durch reziproke Radien“ bezeichnete Abbildung der Ebene auf sich benutzte, bei der nach Wahl eines festen Kreises k_0 vom Radius R um einen Punkt P_0 jedem Punkt $P \neq P_0$ derjenige Punkt Q zugeordnet wird, der auf dem Strahl P_0P liegt und für den gilt: $\overline{P_0P} \cdot \overline{P_0Q} = R^2$. Diese Abbildung spielt seit dem 19. Jh. eine wichtige Rolle in der Geometrie und einigen anderen Gebieten der Mathematik. Man sieht leicht (Übung für den Leser), daß bei dieser Abbildung genau die Punkte des gewählten Kreises k_0 auf sich abgebildet werden, hingegen jedem „inneren“ Punkt des Kreises k_0 ein „äußerer“ Punkt entspricht und umgekehrt und daß man zu gegebenem Kreis k_0 und Punkt P den Bildpunkt mit Zirkel und Lineal konstruieren kann (wie?). Vieta bewies aber weiterhin den nach ihm benannten Satz:

Bei einer Inversion am Kreis ist das Bild jedes nicht durch den Mittelpunkt P_0 gehenden Kreises wieder ein Kreis, während alle durch P_0 gehenden Kreise in Geraden und umgekehrt alle Geraden in durch P_0 gehende Kreise abgebildet werden.

Beweist diesen Satz! Seine Bedeutung liegt u. a. darin, daß aus der Sicht der Inversion am Kreis die Geraden sozusagen Ausartungsfälle von Kreisen sind, nämlich Kreise mit unendlich großem Radius bzw. Kreise, die durch den „unendlich fernen Punkt" gehen, der seinerseits der in der euklidischen Ebene fehlende Bildpunkt des Mittelpunktes P_0 des Inversionskreises k_0 ist.

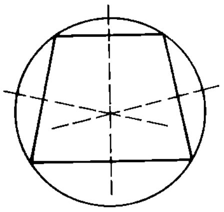
Da Apollonios von Perge einer der bedeutendsten Mathematiker der Antike war, hat Vieta sich mit dem Titel seiner letzten Schrift einen Ehrennamen zugelegt, den wir ihm gern zugestehen wollen.

Als kostbare Probe aus dem geometrischen Schaffen Vietas geben wir abschließend (leicht bearbeitet und modernisiert) seine Lösung der Aufgabe wieder, ein Sehnenviereck (d. h. ein Viereck, dem sich ein Kreis umbeschreiben läßt) aus seinen vier Seiten zu konstruieren. Diese Aufgabe und ihre Lösung bilden einen der Anhänge von Vietas Schrift „Pseudomesolabum" (1596). Vieta bemerkt einleitend, daß in jedem Viereck die Summe dreier beliebiger Seiten stets größer als die vierte ist. Daher müssen die vier gegebenen Seitenlängen a, b, c, d den Ungleichungen

(*) $a < b + c + d,\ b < c + d + a,$
$c < d + a + b,\ d < a + b + c$

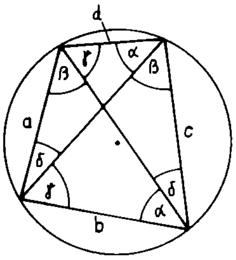
genügen, damit die Aufgabe lösbar ist. Weiter behandelt er den Spezialfall, daß wenigstens ein Paar gegenüberliegender Seiten kongruent ist. In diesem Fall besitzt das gesuchte Sehnenviereck offenbar eine Symmetrieachse (Bild 4) und ist daher leicht zu konstruieren (Aufgabe!).

Bild 4



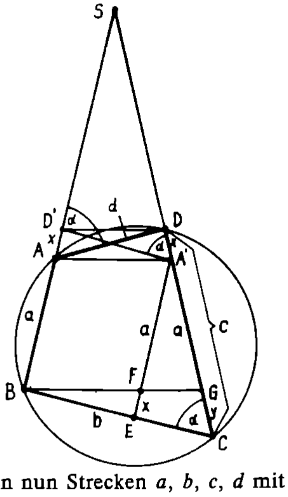
Als Hilfsbetrachtung für den allgemeinen Fall stellen wir fest, daß ein konvexes Viereck genau dann ein Sehnenviereck ist, wenn die Summe zweier gegenüberliegender Winkel (und folglich auch die Summe der beiden anderen Winkel) 180° beträgt. Dies folgt leicht durch mehrfache Anwendung des Peripheriewinkelsatzes.

Bild 5



Man betrachte Bild 5: Die zur Sehne a gehörigen Peripheriewinkel sind mit α bezeichnet, die zu b gehörigen mit β, die zu c gehörigen mit γ und die zu d gehörigen mit δ. Da die Gesamtwinkelsumme $2(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$ 360° beträgt, folgt
$(\alpha + \delta) + (\beta + \gamma) = 180°$
(und $(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = 180°$).

Bild 6



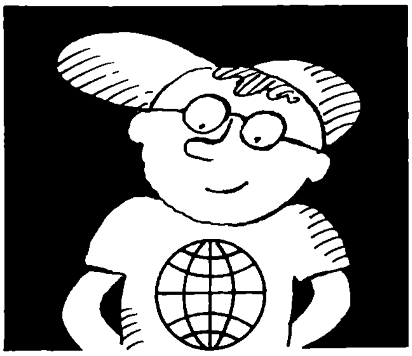
Es seien nun Strecken a, b, c, d mit $a < c$ und $d < b$ so gegeben, daß die Ungleichungen (*) erfüllt sind. So ein Viereck mit den Seiten a, b, c, d (in dieser Reihenfolge aneinanderhängend) kann man sich gelenkig vorstellen. In welcher Stellung wird es in einen Kreis einbeschreibbar sein? Offenbar würde es genügen, eine Diagonale oder einen Innenwinkel, etwa α, zu kennen.

Vieta folgend, zeichnen wir eine Analysisfigur $ABCD$ so in einen Kreis hinein (Bild 6), daß $\overline{AB} = a < c = \overline{CD}$ und $\overline{DA} = d < b = \overline{BC}$ ist. Dann werden sich die Verlängerung von $\overline{CD}$ über D hinaus und die Verlängerung von $\overline{AB}$ über A hinaus in einem Punkt S außerhalb des Kreises schneiden. Aus der obigen Hilfsbetrachtung folgt, daß $\alpha = \sphericalangle BCD$ nochmals als zu $\sphericalangle BAD$ komplementärer Winkel $\sphericalangle SAD$ auftritt. D' entstehe durch Abtragen von $\overline{SD}$ an S in Richtung A und A' durch Abtragen von $\overline{SA}$ an S in Richtung D. Daher ist auch $\sphericalangle SA'D' = \alpha$, folglich $D'A'$ parallel zu BC. E entstehe durch Abtragen von d ($= \overline{DA} = \overline{D'A'}$) an B in Richtung C. Daher ist $\overline{EC} = b - d$ und $BEA'D'$ ein Parallelogramm. Die Parallele zu AA' durch B schneidet DC in G und $A'E$ in F. Dann ist auch $BFA'A$ ein Parallelogramm und Dreieck $FA'G$ gleichschenklig, weil ähnlich zum gleichschenkligen Dreieck ASA'. Folglich sind $\overline{A'G}$ und $\overline{A'F}$ zu $\overline{AB} = a$ kongruent, und $c = \overline{CD}$ ist zerlegt in die Teilstrecken $x = \overline{DA'}$, $a = \overline{A'G}$ und $y = \overline{GC}$. Da die Dreiecke $AA'D$ und FBE kongruent sind (warum?), ist auch $\overline{FE} = x$. Da ferner die Dreiecke BCG und $D'A'D$ ähnlich sind (warum?), kann man x und y aus den Beziehungen

$$\frac{x}{d} = \frac{y}{b} \text{ und } x + y = c - a$$

konstruieren. Dazu ist einfach die Strecke $c - a$ im Verhältnis $d : b$ zu teilen. Nunmehr sind vom Dreieck ECA' die Seiten $\overline{EC} = b - d$, $\overline{CA'} = a + y$ und $\overline{A'E} = a + x$ bekannt, woraus sich der gesuchte Winkel α ergibt. Führt nun die gesamte Konstruktion des Sehnenvierecks an einem Beispiel durch!

P. Schreiber



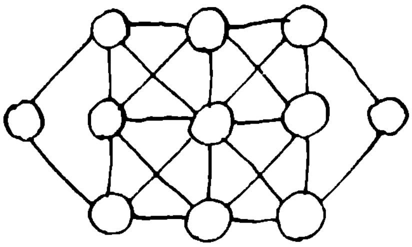
▲1▲ Les cruches

M. Crucheau, qui vit dans le désert, part avec sa camionette et ses cruches vers le marché de l'oasis voisine. Il dispose de 9 récipients de contenances respectives: 3*l*, 6*l*, 10*l*, 11*l*, 15*l*, 17*l*, 23*l*, 25*l* et 30*l*.

Il revient avec deux fois plus de lait de chameau que d'huile d'olive, et trois fois plus d'eau que de lait de chameau. Tous ses récipients sont complètement remplis, sauf un qui reste vide. Pouvez-vous indiquer, au-dessous de chaque cruche, le liquide qu'elle contient?

aus: tangente, Paris

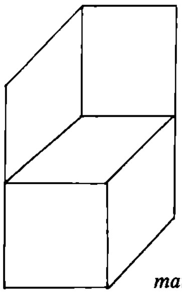
▲2▲ Расставьте в кружках фигуры, изображенной на рисунке числа 1, 2, ..., 11 так, чтобы сумма чисел в вершинах каждого квадрата была одна и та же.



aus: Quant, Moskau

▲3▲ What do you see?

Look carefully at the drawing given. Concentrate on the middle of the drawing. After a while you will notice that the picture has changed. The part of the drawing that you perceived as being on the bottom has suddenly moved up. If you continue concentrating it will again change its place and continue switching back and forth. This shows that our perception of a drawing is influenced by changes in our nervous system. This drawing was invented by a 14-year-old boy. Try to develop similar ones.



aus: Fun with mathematics, Toronto

Erstaunlicher Tipschein

Heino aus Rostock war mit seinen Eltern in Hamburg auf Besuch. Sein Freund Heiner hatte ihn herzlich mit „Hallo“ und „Hummel-Hummel“ begrüßt. Es gab natürlich viel zu erzählen. Auch hatte Heiner seinem Freund den Hamburger Fischmarkt gezeigt. Schließlich waren sie wieder zu Hause angelangt, und nun kam man auf ihr gemeinsames Hobby zu sprechen: Die Mathematik.

Das Zahlen-Lotto fand ihr besonderes Interesse. Sie stellten fest, daß ihre Eltern beide die Spielform „6 aus 49“ spielten. Heiner: „Die Wahrscheinlichkeit, einen Sechser zu gewinnen bei einem Spielschein mit willkürlich gewählten Zahlen oder z. B. mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 ist in beiden Fällen völlig gleich. Es ist nun einmal ein Glücksspiel. Da nützen auch keine sogenannten Zahlen-Systeme, die die Aussichten auf Gewinn verbessern sollen.“

Darauf Heino: „Da wollte doch jemand bei uns sein Tip-System verkaufen, das so gut wie totsicher Gewinn bringen würde.“

„Und da hast du ihm doch bestimmt geantwortet, warum er es nicht selber benutzt.“

Nun kamen Heiners und Heinos Eltern dazu und Heinos Vater rief dazwischen: „Also, alles Zufall, Leute! Wir wählen die Zahlen so aus: Wir nehmen unsere Geburtstagsdaten her und daraus wählen wir unsere sechs Lotto-Zahlen.“ Heiners Vater daraufhin: „Und wir machen es so: Bei einem alten Kartenspiel haben wir die Vorderseiten mit den 49 Zahlen beschriftet. Es wird gemischt und einer aus der Familie darf sechs Karten ziehen.“

„Wir müßten einmal etwas mathematischer an die Sache herangehen“, war bald die Meinung der beiden Jungen. Nach einigem Hin und Her kam man auf folgende „Methode“: Wir denken uns eine beliebige vierstellige Zahl. Aus den vier Ziffern dieser Zahl bilden wir die größtmögliche und die kleinstmögliche Zahl und subtrahieren die zweite von der ersten. Mit dieser errechneten Zahl gehen wir genauso vor. Diese Differenzbildung machen wir – sagen wir – insgesamt siebenmal. Aus den Ziffern des letzten Ergebnisses bilden wir dann alle möglichen zweistelligen Zahlen. Sollten sie nicht ausreichen, können wir ja noch die einstelligen hinzunehmen.

„Gut!“, meinte Heiner. „Aber unsere vierstellige Zahl darf nicht aus lauter gleichen Ziffern bestehen, denn dann hätten wir sofort Null als Ergebnis.“

Nun war man sich einig. Jeder nahm sich einen Taschenrechner, damit die Rechnerei sie nicht aufhielt, und los ging es.

Jeder hatte nun seine sechs Lotto-Zahlen. Sie wollten gerade ihren Vätern ihre neue Methode zeigen, als Heino erschreckt ausrief: „Mensch, Heiner! Du hast ja die gleichen wie ich; nämlich 14, 16, 17, 41, 46, 47! Welch ein Zufall! – Wir versuchen es gleich noch einmal. Ich nehme die Zahl 1234.“ „Und ich nehme 5000!“ Wie groß war ihr Erstaunen, als sie beide wiederum die gleichen Lotto-Zahlen ermittelt hatten!

Soweit die Geschichte von Heino und Heiner. Doch für uns ist die Sache noch nicht zu Ende. Müssen wir uns doch fragen: Erhält man immer – bei allen möglichen 8991 vierstelligen Zahlen – diese „zauberhafte“ Zahl 6174, woraus sich dann die oben genannten sechs Lotto-Zahlen ergeben?

Überlegen wir allgemein, wie unsere erste Differenz zustande kommt! Die größte Zahl sei $x_0 = 1000a + 100b + 10c + d$,
mit $9 \geqq a \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0$.

Die kleinste Zahl ist dann
$\overline{x_0} = 1000d + 100c + 10b + a$.

Unsere neue Zahl ergibt sich mit

$$x_1 = x_0 - \overline{x_0} = 999a + 90b - 90c - 999d$$
$$= 999(a-d) + 90(b-c).$$

Nun sei $a - d = m$ und $b - c = n$.

Dann gilt $x_1 = 999m + 90n$, mit $9 \geqq m \geqq n \geqq 0$, außer $(m, n) = (0, 0)$.

Damit verringert sich die Untersuchung auf 54 Fälle. Nämlich $(m, n) = (1,0), (1,1); (2,0), (2,1), (2,2); (3,0), (3,1), (3,2), (3,3)$ usw. bis $(9,9)$.

Das schafft ein einfacher Computer natürlich spielend. Wir erhalten tatsächlich stets unsere Fixzahl 6174. Und zwar:

1mal nach 1 Schritt (nämlich bei $a - d = 6$, $b - c = 2$), 3mal nach 2 Schritten, 12mal nach 3 Schritten, 10mal nach 4 Schritten, 10mal nach 5 Schritten, 10mal nach 6 Schritten, 8mal nach 7 Schritten.

(Zu beachten ist nur noch, daß bei $(m, n) = (1, 0)$ man $x_1 = 999$ erhält. Hier muß auf eine vierstellige Zahl wieder ergänzt werden, also 9990. Dies ist 18mal der Fall: 1000, 1110, 2111, 2221, usw.)

Wer nun einen Computer besitzt, könnte weiterforschen und jetzt die fünfstelligen Zahlen nach der soeben beschriebenen Methode untersuchen. Es sei aber vorweggesagt, daß es zu einer Fixzahl wie im vorigen Fall nicht kommen wird.

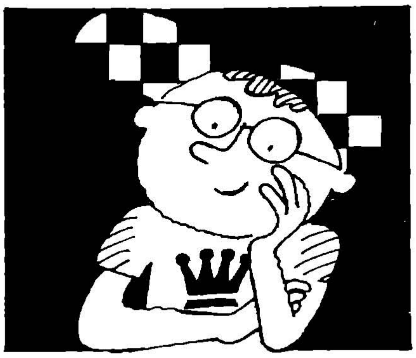
Unsere erste Differenz lautet jetzt
$x_1 = x_0 - \overline{x_0} = 9999m + 990n$,
mit $m = a - e$, $n = b - d$.

Nach weiteren drei Differenzbildungen wiederholen sich diese vier Differenzen im Vierer-Zyklus, also $x_1, x_2, x_3, x_4; x_1, \ldots$. In den Fällen $(m, n) = (5,0), (5,4), (6,0)$ erhalten wir bereits einen Zweier-Zyklus, also $x_1, x_2; x_1, x_2; \ldots$, z. B. für 86 663, 87 533, 87 733, usw.

Soweit unsere Betrachtungen. Mit dem Computer lassen sich über die Vierer und die Zweier-Zyklen noch weitere Gesetzmäßigkeiten finden. Nach einer Information von Prof. Dr. H.-D. Gronau (Ernst-Moritz-Arndt-Universität, Greifswald) gehört unsere kleine Untersuchung zum sogenannten KAPRIKAR-Problem. *H.-J. Kerber*

Alphons logische Abenteuer (2)

Alphons las in seinem Buch, daß man genau darauf achten müsse, wann man den Ausdruck „dasselbe“ und wann den Ausdruck „das gleiche“ korrekt verwenden dürfe. Wenn zwei Personen feststellen, den gleichen Mantel zu haben, so ist die Rede von zwei Mänteln. Stellen sie aber fest, daß sie denselben Mantel haben, müssen unter Umständen die Besitzverhältnisse geklärt werden, denn dann ist nämlich nur von einem Mantel die Rede. Korrekt wollte Alphons sein, also beschloß er, diese Mahnung zu beherzigen. Als seine kleine Schwester beim Kartenspiel seufzte, sie falle immer auf den gleichen Trick von ihm herein, korrigierte er sofort: „Nicht auf den gleichen, sondern auf denselben Trick.“ Seiner Schwester mußte er auch widersprechen, als sie meinte, das sei doch dasselbe. „Das ist nicht dasselbe und auch nicht das gleiche.“ Worauf seine Schwester – zu unrecht – schnippisch bemerkte, er wisse es wohl selber auch nicht genau. Ehe er ihr erklären konnte, daß „dasselbe“ identisches und „das gleiche“ in der Art übereinstimmendes meint, hörte er die interessante Frage des Vaters, was es heute Mittag gäbe. „Dasselbe wie heute vor einer Woche“, kam die Antwort der Mutter aus der Küche. „Das gleiche!“, rief Alphons. „Wenn es erst nach einer Woche dasselbe gibt, kann man wohl nicht sagen, daß es schon wieder das gleiche gibt“, protestierte die Mutter. „Wenn Alphons etwas anderes essen will, braucht er ja nicht an den Tisch zu kommen“, sekundierte der Vater. „Ich meine doch dasselbe wie ihr, wenn ich vom gleichen Mittagessen spreche, nur daß es eben nicht dasselbe Mittagessen ist“, rechtfertigte sich Alphons. „Er weiß noch nicht, was er will“, versuchte seine Schwester einzulenken. „Wir sprechen alle von demselben Mittagessen, nämlich dem, das Mutti soeben in der Küche bereitet, aber es wird doch hoffentlich nicht dasselbe Mittagessen sein, wie vor einer Woche“, versuchte sich Alphons nochmals verständlich zu machen. „Nach einer Woche ist das Essen doch schlecht geworden“, wollte er noch sagen, doch resolut erklang aus der Küche: „Ich koche nichts anderes als das, was ich vor einer Woche auch gekocht habe. Und wenn es schmeckt, soll es mir egal sein, ob es dasselbe oder das gleiche ist.“ – „Nun habe ich dieselbe Erfahrung gemacht, von der im Buch die Rede ist: Im praktischen Leben soll man nicht so streng sein. Das stimmt, sonst verhungert man.“ *L. Kreiser*



alpha-Schachwettbewerb

Zum 8. Mal fordert alpha alle Schachfreunde zur Teilnahme an einem Lösungswettbewerb auf!
Dieses Mal sind wieder acht Schachaufgaben mit steigendem Schwierigkeitsgrad zum Lösen vorgegeben. Wenn der eine oder der andere Leser vielleicht auch nicht alle Aufgaben lösen kann, so ist dennoch seine Teilnahme sehr erwünscht und wird auch in der Gewinnverlosung berücksichtigt. In erster Linie soll der Wettbewerb aber Spaß an den reizvollen Knobeleien auf dem Schachbrett bereiten und als Anregung dienen, sich etwas intensiver mit dem königlichen Spiel zu beschäftigen.

In allen acht Aufgaben beginnt Weiß und setzt trotz bester Gegenwehr von Schwarz in der geforderten Zügezahl matt.
Als vollständig gilt die Lösung, wenn alle Abspiele bis zum Matt angeführt werden.
Unter den Teilnehmern, die alle Aufgaben korrekt gelöst haben, werden Buchpreise verlost und Urkunden verteilt.
In einer weiteren Verlosung haben auch alle anderen Teilnehmer, die zumindest eine Aufgabe richtig gelöst haben, die Chance, einen Buchpreis zu gewinnen.

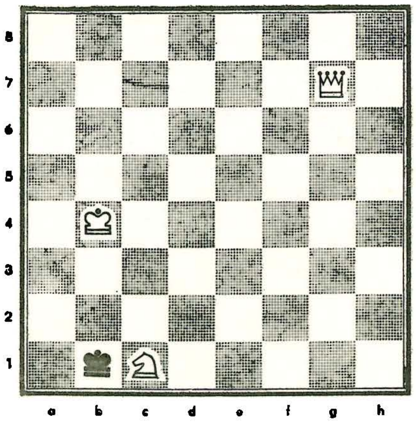
Die Einsendung der Lösungen ist bitte bis zum 1. März 1991 unter Angabe von Name, Vorname und Alter zu richten an

Redaktion alpha
PSF 14
Leipzig
7027.

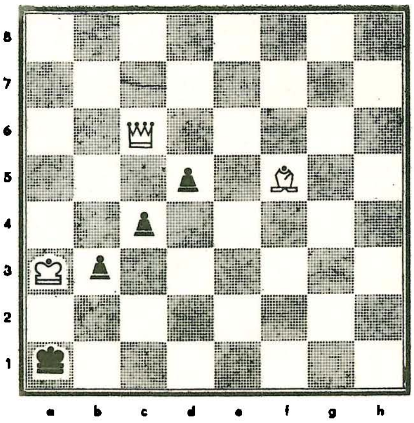
Die Lösungen sowie die Gewinner werden in alpha 4/1991 veröffentlicht.

H. Rüdiger

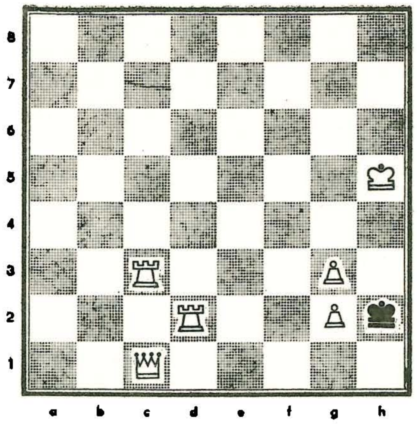
W. Spelnikow



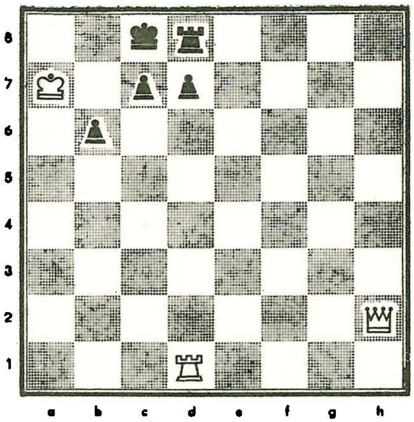
Nr. 1 **Matt in zwei Zügen**



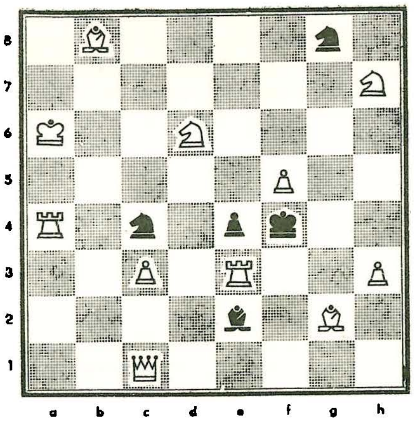
Nr. 2 **Matt in zwei Zügen**



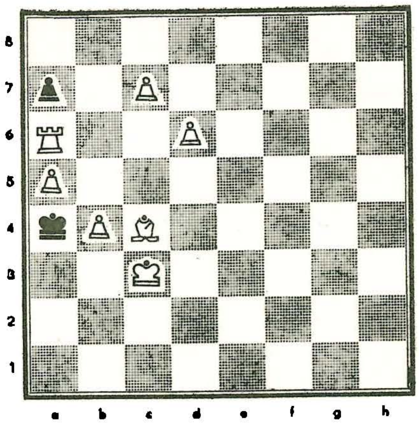
Nr. 3 **Matt in zwei Zügen**



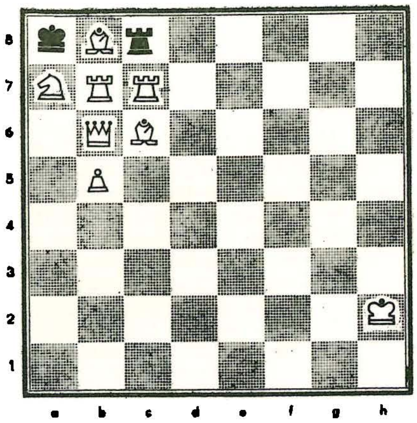
Nr. 4 **Matt in zwei Zügen**



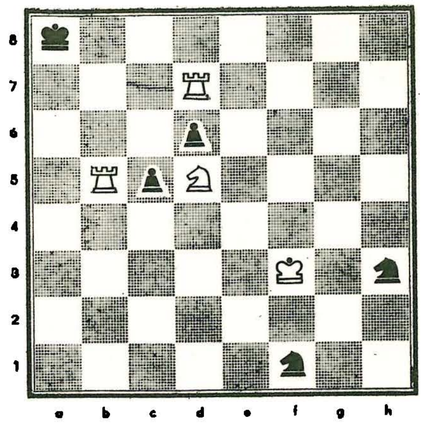
Nr. 5 **Matt in zwei Zügen**



Nr. 6 **Matt in drei Zügen**



Nr. 7 **Matt in drei Zügen**



Nr. 8 **Matt in vier Zügen**

alpha-Wettbewerb

Kollektive Beteiligung 1989/90

Fr.-Weineck-OS, Alsleben; OS E. Schneller, Fr.-Engels-OS, E.-Mäder-OS, alle Altenburg; Stadtclub Jg. Math., Altentreptow; W.-Seelenbinder-OS, Alt Ruppin; E.-Weinert-OS, Arnstadt; OS Dr. R. Sorge, Asbach; Fr.-Engels-OS, Bad Dürrenberg; OS S. Rädel, Bad Gottleuba; STN[1], OS VI, EOS E. Thälmann, O.-Grotewohl-OS, Th.-Neubauer-OS, Magnus-Poser-OS, R.-Teichmüller-OS, OS A. Saefkow, alle Bad Salzungen; R.-Schwarz-OS, Bad Liebenstein; H.-Beimler-OS, Bärenklau; H.-Heine-OS, Barchfeld; Fr.-A.-Norbert-OS, Barth; A.-Seghers-OS, Bebertal; H.-Belz-OS, Behrenhoff; OS O. Brosowsky, Belleben; 26. OS L. Renn, 44. OS F. Espenbeck, 33. OS L. Grundig, 12. OS W. Guddorf, alle Berlin; A.-Becker-OS, Berlingerode; G.-Scholl-OS, Bernsdorf; OS Bernterode; W.-Seelenbinder-OS, Bismark; Fr.-Weineck-OS, Blumberg; OS Fr. Schiller, Bleicherode; OS Blumenhagen; G.-Ewald-OS, Blumenthal; STN Bleicherode; P.-Mosig-OS, Bockau; OS E. Thälmann, Boizenburg; K.-Bürger-OS, Bredenfeld; OS B. Brecht, Brehme; OS W. Pieck, Breitenworbis; OS H. Beimler, Breitungen; OS Freundschaft u. Frieden, Brieselang; P.-Neruda-OS, Britz; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Brotterode; M.-Poser-OS, Bürgel; W.-Pieck-OS, Burow; W.-Estel-OS, Buttlar; 2. OS O. Grotewohl, Calau; STN Calbe; OS A. Einstein, Caputh; E.-Thälmann-OS, H.-Menzel-OS, A.-v.-Humboldt-OS, M.-Saupe-OS, A.-S.-Makarenko-OS, Fr.-Heckert-OS, E.-Schneller-OS, G.-Agricola-OS, Wl.-Komarow-OS, FEZ, Fr.-Matschke-OS, K.-Wieland-OS, P.-Tschaikowski-OS, N.-Niederkirchner-OS, alle Chemnitz; STN Cottbus; OS R. Luxemburg, Dallgow; Fr.-Weineck-OS, Delitzsch; Kreisklub Math. Demmin; M.-Gorki-OS, Dermbach; OS Dersekow; R.-Breitscheid-OS, Dessau;E.-Weinert-OS, Deuna; OS Makarenko, Dingelstädt; 2. OS, Döbeln; OS Dömitz; M.-Curie-OS, Dohna; OS K. Niederkirchner, Domersleben; A.-Matrossow-OS, Dorndorf; O.-Grotewohl-OS, Dreitzsch; 103. OS K. Hahnewald, FEZ[2], beide Dresden; M.-Seydewitz-OS, Dürröhrsdorf; OS A. Diesterweg, Ebeleben; W.-Pieck-OS, Eberswalde; OS F. Heckert, J.-Schehr-OS, beide Eisleben; OS H. Grundig, Ellrich; OS Neues Leben, Elstal; OS R. Arndt, Elsterwerda; O.-Grotewohl-OS, Elxleben; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; OS 23 R. Gothe, Erfurt; STN Ernstthal; FEZ Falkensee; Th.-Müntzer-OS, Fambach; W.-Pieck-OS, Fehrbellin; 5. OS G. Dimitroff, 1. OS J. Korcak, beide Finsterwalde; K.-Marx-OS, Flöha; B.-Brecht-OS, Floh; STN Forst; STN Frankfurt/O.; E.-Thälmann-OS, Freital; E.-Thälmann-OS, Friedeburg; OS II, Friedland; OS W. Seelenbinder, Fünfeichen; OS V H. Günther, Fürstenwalde; R.-Arnstadt-OS, Geisa; J.-Gagarin-OS, Geithain; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; Kalinin-OS, Geschwenda; OS Gielow; 5. OS, 7. OS, beide Görlitz; W.-Husemann-OS, OS J. Brinckmann, beide Goldberg; OS R. Luxemburg, Gotha; OS J. Gagarin, Grabowhöfe; E.-Thälmann-OS, Marx-OS, beide Greifswald; STN Gransee; OS J. Gagarin, K.-Marx-Schule, H.-Beimler-OS, alle Greußen; STN Grevesmühlen; A.-Frank-OS, Grimma; A.-Walther-OS, Gröditz; OS Cl. Zetkin, Groitzsch; OS Großbartloff; A.-Kuntz-OS, Großbodungen; OS N. Ostrowski, Großdeuben; Pestalozzi-OS, Großenhain; OS Gr. Nemerow; OS Großrückerswalde; J.-Gagarin-OS, Grünhain; Th.-Müntzer-OS, Gumpelstadt; OS H. Günther, Hachelbich; STN Halberstadt; OS G. Dimitroff, Haldensleben; W.-Bredel-OS, Hagenow; M.-Gorki-OS, Hainichen; OS f. körperbeh. N. Ostrowski, Halle; STN Halle-Neustadt; OS Hammerbrücke; K.-Öppermann-OS, Harzgerode; OS J. Marchlewski. Havelberg: W.-Koenen-OS, Halle-Neustadt; Schule d. DSF, Heiligengrabe; EOS W. Pieck, Heiligenstadt; P.-Schreier-OS, Hennigsdorf; E.-Weinert-OS, Henningen; OS Th. Müntzer, Hermannsdorf; FEZ Hermansdorf; 2. OS Fr. Engels, Herzberg; OS K. Liebknecht, Hohendodeleben; Goethe-OS, Hohenleipisch; OS 20, Hoyerswerda; Goethe-OS, Ilsenburg; G.-Dimitroff-OS, Immelborn; OS G. Ewald, Ivenack; E.-Weinert-OS, Johanngeorgenstadt; Fr.-Engels-Schule, Kaltennordheim; OS M. Gorki, Kemenz; OS A. Becker, Kamsdorf; H.-Beimler-OS, Karbow; OS E. Boberg, Karlsburg; J.-Warnke-OS, Katzow; OS Cl. Zetkin, Kaulsdorf; G.-Dimitroff-OS, Keula; Th.-Neubauer-Schule, Kieselbach; H.-Matern-OS, Klietz; OS E. Thälmann, Klosterfelde; OS H. Matern, Klochow; Goethe-OS, Königsee; AG Math. Königs Wusterhausen; OS O. Grotewohl, Köthen; OS Küllstedt; OS M. Zimmering, Krakow; OS Cl. Zetkin, Laage; OS R. Breitscheid, Latdorf; Goetheschule, Lauscha; K.-Marx-OS, Lauterbach; OS J. Gagarin, Langenweddingen; OS E. Weinert, Leegefeld; OS V R. Luxemburg, E.-Thälmann-OS, K.-Liebknecht-OS, Dr.-S.-Allende-OS, STN, alle Leinefelde; Weinert-OS, FEZ, 6. OS Cl. Zetkin, alle Leipzig; OS J. Schehr, Lengefeld; G.-E.-Lessing-OS, Lessing-OS, beide Lengenfeld; E.-Thälmann-OS, Leutenberg; EOS Lichtenstein; C.-B.-Geißler-OS, Liebstadt; Prof. Dr. M. Schneider-OS, Lichtenstein; OS Makarenko, Leubnitz; G.-Eisler-OS, Löcknitz; OS W. Wallstab, Löderburg; A.-Diesterweg-OS, Lobenstein; OS G. Schubert, Lohmen; H.-Günther-OS, Lohsa; 1. OS, Lommatzsch; OS 6 Math.-Club, Lübben; W.-Bredel-OS, STN, beide Lübz; FEZ Ludwigslust; Kaßner-OS, STN, M.-Kühne-OS, alle Magdeburg; Goetheschule, Malchow; OS L. S. Titow, Manschnow; FEZ Markkleeberg; B.-v.-Suttner-OS, Mechterstädt; Cl.-Zetkin-OS, Meerane; 7. OS M. I. Kalinin, Meiningen; A.-Dürer-OS II, Merseburg; OS H. Rau, Mieste; OS Mittelstille; E.-Steinfurth-OS, Mittenwalde; OS H. Danz, Möser; OS Margenröthe-R.; Kinderheim Munzig; W.-Pieck-OS, Nauen; O.-Grotewohl-OS, Naumburg; OS J. Fucik, Naundorf; OS W. Bykowski, Neetzow; OS M. Burwitz, Neuenkirchen; OS Neuhaus; OS Neundorf; W.-Seelenbinder-OS, Niederlichtenau; Dr.-Th.-Neubauer-Schule, Niederorschel; OS Fr. Lesch, Niegripp; OS Dr. I. Lenin, OS J. Gagarin, OS L. Einicke, EOS W. v. Humboldt, alle Nordhausen; G.-Schwarz-OS, Olbersdorf; FEZ, Oranienburg; O.-Eichler-OS, Oschatz; OS E. Thälmann, Oschersleben; OS P. Kmiec, Osternienburg; OS W. Pieck, Osterwieck; E.-Weinert-OS, Osterweddingen; Th.-Müntzer-OS Osthausen; OS O. Grotewohl, Pappenheim; FEZ Parchim; FEZ Pasewalk; OS 8. Mai, Peitz; OS Dr. Th. Neubauer, Pfaffschwende; Kreis-AG, Plauen-Land; OS Plessa; OS E. Schneller, Polleben; K.-Foerster-OS, Potsdam; W.-Pieck-OS, Premnitz; OS Pritzerbe; Goetheschule II, Pritzwalk; OS K. Kollwitz, Quellendorf; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; OS G. Titow, OS Pestalozzi, beide Radebeul; W.-I.-Lenin-OS, Radewege; G.-Scholl-OS, Rathenow; E.-Weinert-OS, Reichenbach; H.-Burmeister-OS, J.-Gagarin-OS, beide Ribnitz; STN, H.-Matern-OS, Spezialschule Fr. Engels, alle Riesa; J.-Gagarin-OS, Riethnordhausen; J.-Curie-OS, Röbel; R.-Wöhl-OS, Rodleben; Ziolkowski-OS, Rossdorf; FEZ, 37. OS, 1. OS W. Schröder, alle Rostock; OS K. Niederkirchner, Saal; OS G. Scholl, OS W. Komarow, beide Saalfeld; STN Salzwedel; OS Th. Müntzer, STN, beide Sangerhausen; T.-Bunke-OS, Sanitz; OS H. Matern, Schernberg; MG OS, Schköleb; H.-Beimler-OS, Schlagsdorf; G.-Hauptmann-OS, Schleusingen; OS H. Danz, OS K. Marx, beide Schmalkalden; P.-Göring-OS, Schönbrunn; OS P. Neruda, Schönebeck; OS H. Beimler, Schönhausen; POS Kuba, Schorssow; OS Fr. Engels, Schwallungen; Fr.-Fröbel-Schule, Schweina; FEZ Sebnitz; 1. OS, Seifhennersdorf; OS H. Warnke, Sielow; Fr.-Engels-OS, Sömmerda; OS Glückauf, Sondershausen; W.-Pieck-OS, Sonneberg; A.-Becker-OS, Spreenhagen; OS K. Marx, OS A. Becker, beide Spremberg; H.-A.-Eckelmann-OS, Sponholz; III. OS E. Wölk, Pestalozzi-OS, beide Stadtroda; L.-Uhland-OS, OS W. I. Lenin, beide Staßfurt; J.-Fucik-OS, Steinbach; R.-Luxemburg-OS, Steinsdorf; F.-Dettmann-OS, K.-Marx-OS, beide Stralsund; FEZ Strausberg; Schule der DSF Dr. E. Lasker, Ströbeck; Kreisförderzirkel 1. OS F. Sattler, 12. OS Dr. R. Sorge, beide Suhl; OS E. Thälmann, Tannenbergsthal; E.-Weinert-OS, Teichwolframsdorf; OS Teistungen; A.-Frank-OS, Themar; Fr.-Weineck-OS, Thonhausen; OS Tiefenort; E.-Schneller-OS, Töplitz; A.-Einstein-OS, Torgelow; OS Treben; Lenin-OS, Treuenbritzen; OS W. Pieck, Trusetal; E.-Welk-OS, MM OS, beide Ueckermünde; H.-Beimler-OS, Unterbreizbach; OS Unterweißbach; E.-Schneller-OS, Umshausen; OS j. G. Seume, Vacha; W.-Seelenbinder-OS, Viernau; OS Vitte; OS Völkershausen; OS E. Schneller, Waldkirchen; Goetheschule Waren; G.-Scholl-OS, Weißenborn-K.; Kreisklub Jg. Math. Weißwasser; J.-Gagarin-OS, Werneuchen; OS A. Günther, Wernshausen; OS Wesenberg; OS o.-Grotewohl, Westerengel; B.-Brecht-OS, Wiederitzsch; Cl.-Zetkin-OS, Wildberg; Päd.-Kreiskab. Zwickau-Land, K.-Marx-OS, beide Wilkau-Haßlau; OS Wipperdorf; OS H. Heine, Wörmlitz; OS Wohlmirstedt; OS I H. Werner, OS W. I. Lenin, Math.-Winterlager, alle Worbis; OSTh. Müntzer, Wulfen; OS Fr. Reuter, Zarrentin; STN Zembschen; W.-Pieck-OS, Fr.-Schiller-OS, beide Zeulenroda; OS W. Seelenbinder, Zielitz; OS O. Benario-Pestes, Zobendorf; OS J. H. Pestalozzi, Zschornewitz; OS M. Gorki, Züssow

[1] Schülertreff Technik und Natur

[2] Freizeitzentrum

Ein Dankeschön

Die Redaktion alpha konnte in diesem Jahr den Preisträgern des alpha-Wettbewerbs 1989/90 wieder viele interessante Bücher senden. Diese stellten uns zahlreiche Verlage zur Verfügung, denen wir an dieser Stelle herzlichen Dank sagen möchten:

Wilhelm Heyne Verlag, München;
Kinderbuchverlag, Berlin;
Ernst Klett, Schulbuchverlag, Stuttgart;
MANZ Verlag, München;
Verlag Neues Leben, Berlin;
Philipp Reclam Verlag jun., Ditzingen;
Verlag P. Reclam jun., Leipzig;
Sportverlag, Berlin; Technik Verlag, Berlin;
Urania Verlag, Leipzig;
Verlag Volk und Welt, Berlin;
Verlag der Wissenschaften, Berlin;
Verlag Volk und Wissen GmbH, Berlin

Logisch kombinieren

Jeder Buchstabe bedeutet eine Ziffer, gleiche Buchstaben also immer gleiche Ziffern. Diesen Angaben entsprechend sind die Ziffern zu finden, die für die Buchstaben eingesetzt, die waagerechten und senkrechten Rechenaufgaben richtig lösen.

a)
$$\begin{array}{ccccc} BEE & - & CBB & = & GGG \\ : & & + & & - \\ E & \cdot & B & = & CE \\ \hline DC & + & CBA & = & GHD \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{ccccc} AGI & - & HF & = & AEC \\ : & & + & & - \\ I & \cdot & AA & = & EGI \\ \hline FA & + & CB & = & EIA \end{array}$$

H. Raduschewski, Berlin

Pythagoras – einmal anders!

In einigen afrikanischen Ländern, z. B. in der VR Moçambique hat man erkannt, daß die Beschäftigung mit einheimischen Handarbeitstechniken wie Flechten und Weben, Herstellen von Matten, Netzen und Körben, den Schülern hilft, mit der Mathematik bekannt zu werden. Bild 1 zeigt ein Muster, das beim Flechten von Körben entsteht. Von ihm geht ein ästhetischer Reiz aus, der zum Nachdenken über die entstandenen Figuren anregt.

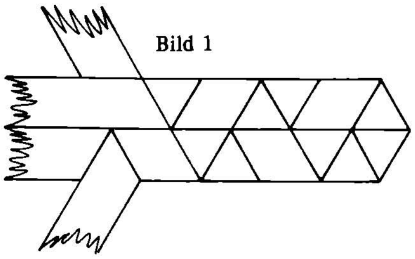
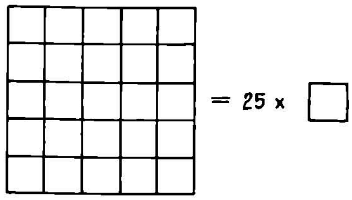


Bild 1

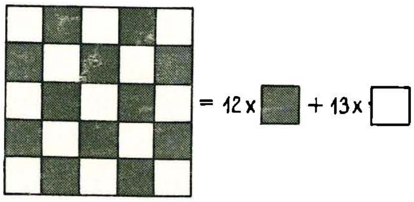
Wir kennen den Satz des Pythagoras – sowohl in geometrischer als auch in arithmetischer Formulierung. Wir wissen auch, was pythagoreische Zahlentripel sind. Wo treten nun bei handwerklichen Arbeiten Muster auf, in denen zugleich Quadrate, Summen von Quadraten, rechte Winkel und natürliche Zahlen eine Rolle spielen? Wo finden wir Quadrate, deren Flächeninhalte sich durch Auszählen kleinerer Quadrate ermitteln lassen? Beim Flechten und Weben, beim Sticken und Fliesenlegen!

Wir wollen einigen Überlegungen unserer afrikanischen Freunde folgen.

Wenden wir uns beispielsweise der Parallelflechttechnik mit gleichbreiten Pflanzenstreifen zu. Hier entstehen Quadrate, die aus gleichgroßen kleineren Quadraten zusammengesetzt sind. Fassen wir die kleinen Quadrate als Einheitsquadrate auf, so können wir die Flächeninhalte größerer Quadrate durch Auszählen leicht ermitteln (Bild 2).

Bild 2


Bei sehr vielen handgemachten Produkten (z. B. Matten) wird mit farbigem Material gearbeitet. Nehmen wir Streifen mit zwei unterschiedlichen Farben, so erhalten wir schachbrettartige Muster. Zählt man die entstehenden Einheitsquadrate getrennt nach ihrer Farbe, so wird der Flächeninhalt eines Quadrats in zwei Summanden zerlegt (Bild 3). Allerdings lassen sich diese Summanden noch nicht als Flächeninhalte von Quadraten mit ganzzahliger Seitenlänge auffassen.



Etwas ganz Überraschendes können wir feststellen, wenn beim Flechten ein sogenanntes „gekerbtes Quadrat“ entsteht. Bild 4a zeigt ein gekerbtes Quadrat, das aus 13 Einheitsquadraten besteht und dessen Diagonallänge fünf Einheiten beträgt.

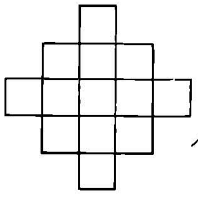


Bild 4a

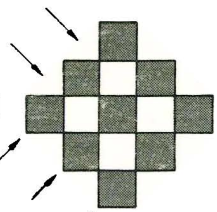


Bild 4b

Zählen wir die schwarzen und die weißen Einheitsquadrate im Bild 4b, so erhalten wir 4 weiße und 9 schwarze, 4 und 9 sind Quadratzahlen. Wir können also das gekerbte Quadrat aus Bild 4b als Summe von zwei gewöhnlichen Quadraten auffassen, deren Seitenlängen bezüglich der vom gekerbten Quadrat vorgegebenen Einheiten natürliche Zahlen als Zahlenwerte haben. (Solche Quadrate wollen wir im folgenden „glatte Quadrate“ nennen.)

Dazu brauchen wir die Einheitsquadrate nur anders anzuordnen (Bild 5).

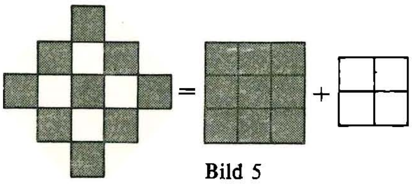


Bild 5

▲ 1 ▲ Zeichnet weitere gekerbte Quadrate und untersucht, ob sie sich in zwei glatte Quadrate zerlegen lassen!

Wir vermuten: *Zu jedem gekerbten Quadrat gibt es zwei glatte Quadrate, so daß der Flächeninhalt des gekerbten Quadrats gleich der Summe der Flächeninhalte dieser beiden glatten Quadrate ist.*

Diese Vermutung können wir beweisen: Der Zahlenwert d der Diagonallänge eines gekerbten Quadrats ist aus Symmetriegründen stets ungerade:

$d = 2k + 1$; $k = 1, 2, 3, \ldots$

Die Anzahl z der Einheitsquadrate in einem gekerbten Quadrat mit der Diagonallänge $2k + 1$ Einheiten ist

$2 \cdot (1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)$

$+ (2k + 1)$. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)$

ist die Summe der ersten k Glieder der arithmetischen Zahlenfolge mit dem Anfangsglied 1 und der Differenz 2, sie ist gleich $\frac{k}{2}(1 + (2k - 1)) = k^2$. Damit ist

$z = 2k^2 + 2k + 1 = k^2 + (k^2 + 2k + 1)$

$= k^2 + (k + 1)^2$. Dies ist die Summe zweier Quadratzahlen, w. z. b. w.

Übrigens: Bei einer schachbrettartigen Färbung ist k die Anzahl der Einheiten der einen Farbe und $k + 1$ die der anderen Farbe in der Diagonale mit $d = 2k + 1$ Einheiten.

Eine andere Möglichkeit, die Vermutung zu beweisen, deutet Bild 6 an.

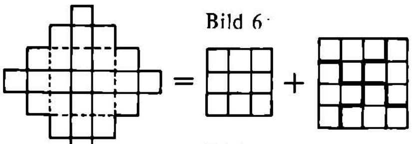
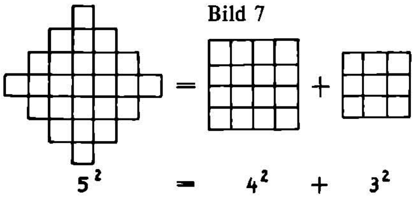


Bild 3

▲ 2 ▲ Erläutert diese Beweisidee!

Beim weiteren Experimentieren stoßen wir auf eine weitere interessante Eigenschaft der gekerbten Quadrate: Es gilt die im Bild 7 dargestellte Beziehung.



In diesem Fall können wir auch das gekerbte Quadrat selbst in ein glattes überführen. Bild 8 zeigt, wie dies durch Umlegen einzelner Einheitsquadrate geschehen kann.

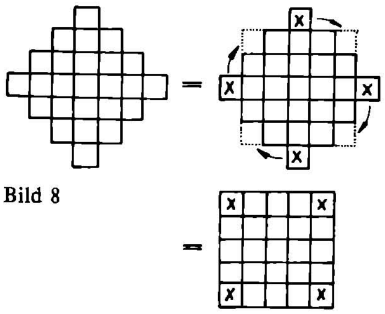
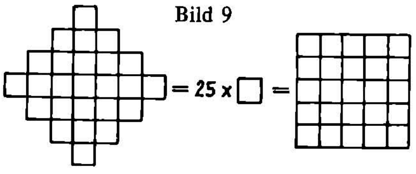
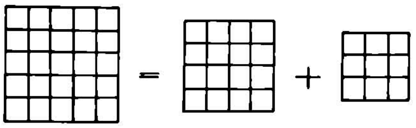


Bild 8

Man kann aber auch wie im Bild 9 vorgehen: Die Einheitsquadrate im gekerbten Quadrat werden ausgezählt und anschließend neu angeordnet.



Zusammenfassend erhält man Bild 10.

Bild 10


Durch Probieren stellt man allerdings fest, daß die Überführung eines gekerbten Quadrats in ein glattes nur selten gelingt. Erst bei einer Diagonallänge des gekerbten Quadrats von 41 Einheiten würden wir wieder Glück haben.

Gibt es einen allgemeinen Zusammenhang zwischen der Diagonallänge des gekerbten Quadrats und der Möglichkeit, dieses durch Umordnungen der Einheitsquadrate in ein glattes zu überführen?

Die Kenntnis solch eines Zusammenhangs würde es uns ermöglichen, sofort zu entscheiden, ob die (immer mögliche) Zerlegung eines gekerbten Quadrats in zwei glatte einem pythagoreischen Zahlentripel entspricht.

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir zunächst Bild 11.

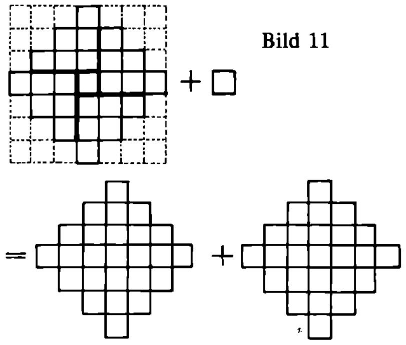


Bild 11

Die Anzahl der Einheitsquadrate des großen glatten Quadrats ist d^2. Bezeichnen wir die Anzahl der Einheitsquadrate des gekerbten Quadrats wieder mit z, so gilt offensichtlich $d^2 + 1 = 2z$. Zu dieser Beziehung kommen wir auch unabhängig von der speziellen Zeichnung: Aus dem für $d = 2k + 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ bereits hergeleiteten Zusammenhang $z = 2k^2 + 2k + 1$ erhalten wir

$$2z = 4k^2 + 4k + 2 = (4k^2 + 4k + 1) + 1$$
$$= (2k+1)^2 + 1 = d^2 + 1.$$

Ein pythagoreisches Zahlentripel liegt genau dann vor, wenn z eine Quadratzahl ist. Es interessieren also diejenigen natürlichen Zahlen d, für die $z = \frac{1}{2}(d^2 + 1)$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist. Um solche zu finden, legen wir eine Tabelle an. Wie wir bereits bemerkt haben, kommen für d nur ungerade Zahlen in Betracht.

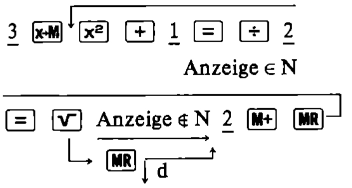
d	d^2	$d^2 + 1$	$\frac{1}{2}(d^2 + 1)$
3	9	10	5
5	25	26	13
7	49	50	$25 = 5^2$
…	…	…	…
41	1681	1682	$841 = 29^2$
…	…	…	…
239	57121	57122	$28561 = 169^2$

Wir erhalten auf diese Weise die pythagoreischen Gleichungen

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$20^2 + 21^2 = 29^2$$
$$119^2 + 120^2 = 169^2,$$

die jeweils einer Zerlegung eines gekerbten Quadrats in zwei glatte entsprechen.

Das Auffinden weiterer Möglichkeiten ist sehr aufwendig, auch wenn wir den Schulrechner – etwa nach folgendem Ablaufplan – benutzen:



▲3▲ Arbeitet den angegebenen Ablaufplan so oft ab, bis ihr für d die Zahlen 7 und 41 erhalten habt!

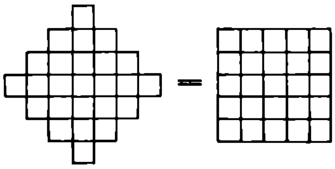
Mit einem entsprechend programmierten Kleincomputer erhielten wir 1393, 8119 und 14845 als nächste Zahlenwerte für Diagonallängen von gekerbten Quadraten, die sich in glatte überführen lassen.

▲4▲ Stellt die pythagoreischen Gleichungen auf, die diesen Diagonallängen entsprechen!

Erinnern wir uns jetzt daran, daß das gekerbte Quadrat mit der Diagonallänge 7 Einheiten und das glatte Quadrat mit 5 Einheiten als Seitenlänge denselben Flächeninhalt haben. Wie wir gesehen haben, ist bei weitem nicht für jedes gekerbte Quadrat ein Umwandeln in ein glattes Quadrat, d. h. in ein gewöhnliches Quadrat mit natürlichem Zahlenwert der Seitenlänge möglich. Verzichten wir auf die letztgenannte Bedingung und lassen beliebige positive reelle Zahlenwerte der Seitenlängen zu (immer bezüglich der vom gekerbten Quadrat vorgegebenen Einheiten), so läßt sich jedes gekerbte Quadrat in ein zu ihm flächengleiches gewöhnliches Quadrat überführen. Wie ist dies auf rein geometrischem Wege möglich?

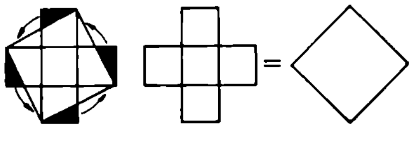
Nehmen wir zunächst das kleinstmögliche gekerbte Quadrat (Bild 13).

Bild 12



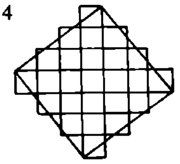
▲5▲ Begründe, warum das gekerbte Quadrat und das gewöhnliche Quadrat im Bild 13 flächengleich sind!

Bild 13



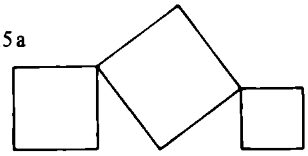
Wenden wir diese Methode beispielsweise auf das gekerbte Quadrat mit der Diagonallänge 7 Einheiten an, so erhalten wir Bild 14.

Bild 14



Versuchen wir nun, die beiden kleineren (glatten) Quadrate, deren Flächeninhalte zusammen den Flächeninhalt des größeren Quadrats ergeben, auf eine sinnvolle Art in das Bild 14 einzufügen, dann finden wir nach einigen Versuchen ganz sicher die geometrische Veranschaulichung des altbekannten *Satzes des Pythagoras* (Bild 15).

Bild 15a



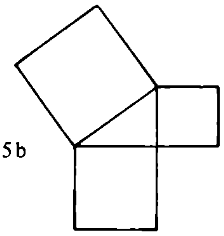


Bild 15b

C. P. Helmholz/P. Gerdes/H. Meyer

Zittert, ihr Ochsen!

Als der griechische Philosoph Pythagoras, der auch als Mathematiker Bedeutendes vollbrachte, wieder einmal einen genialen Einfall gehabt hatte, war man überall im Lande des Lobes voll über seine Leistung. Aber wie das so ist, fanden sich auch Neider, die sein Verdienst zu schmälern suchten. Pythagoras verdanke seine neue Idee nur seinem guten Verhältnis zu den Göttern. Die Olympier hätten ihn erleuchtet, behaupteten sie. Pythagoras konnte es nicht wagen, dem zu widersprechen. Sollte er öffentlich die Götter herabsetzen? Das Volk hätte ihm das nie verziehen, ja ihn womöglich als Gottlosen gesteinigt. Seine Kollegen, wahrlich Schlitzohren, nötigten ihn schließlich, den Göttern zwanzig Ochsen zu opfern. Das war schon damals eine teure Angelegenheit. Zu dem ausgiebigen Mahl gehörte ja auch ein kräftiger Umtrunk. „Fortan müssen Ochsen vor jeder neuen Erkenntnis zittern“, sagte Pythagoras.

aus: E. Oetzel/W. Polte:
Der gescholtene Thales,
Urania Verlag Leipzig · Jena · Berlin

Besteht der Wert des Satzes des Pythagoras etwa nur darin, daß er uns die Möglichkeit gibt, aus bekannten Kathetenlängen die Länge der Hypotenuse zu berechnen? Bedeutet die durch den Satz erhaltene Gewißheit in die Ewigkeit und Unerschütterlichkeit der Mathematik etwa wenig? Ein Felsen wird doch durch Wald und Regen letztendlich vernichtet, der Satz des Pythagoras aber bleibt ewig wahr.

J. A. Schreider, sowjet. Mathematiker

Pythagoreische Zwillinge sowie Potenzen von Drillingen und Vierlingen

Habt ihr schon einmal beobachtet, wie Maurer einen rechten Winkel abstecken? Sie benutzen eine Schnur, auf der nacheinander 3, 4 und 5 Längeneinheiten angetragen sind, und spannen damit ein Dreieck auf. Wegen $3^2 + 4^2 = 5^2$ ist ein Dreieck mit diesen Seitenlängen rechtwinklig.

Das Beispiel zeigt euch, daß die Summe zweier Quadrate wieder eine Quadratzahl sein kann. Man nennt positive natürliche Zahlen x, y, z ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn $x^2 + y^2 = z^2$ ist.

Die Zahlen 3, 4, 5 stellen ein Beispiel für ein pythagoreisches Zahlentripel dar, sie weisen aber noch eine Besonderheit auf: $y = 4$ ist der Nachfolger von $x = 3$ (und auch der Vorgänger von $z = 5$). Wir wollen definieren: Zahlen x und y heißen *pythagoreische Zwillinge*, falls $y = x + 1$ ist und wenn es eine natürliche Zahl z gibt, so daß x, y, z ein pythagoreisches Zahlentripel bilden.

1. Frage: 3 und 4 sind pythagoreische Zwillinge. Gibt es noch andere pythagoreische Zwillinge?

Wir stellen uns nun weitere, ähnliche Probleme, doch vorher führen wir noch zwei Begriffe ein.

Definition: Drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen x, y, z werden *Zahlendrillinge* genannt (d. h. $x = y - 1$, $z = y + 1$).

Vier unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen w, x, y, z heißen Zahlenvierlinge (d. h. $w = y - 2$, $x = y - 1$, $z = y + 1$).

3, 4, 5 sind z. B. Zahlendrillinge und 1, 2, 3, 4 sind Zahlenvierlinge.

2. Frage: Existieren Zahlendrillinge x, y, z mit der Eigenschaft, daß $x^2 + y^2 + z^2$ eine Quadratzahl ist?

3. Frage: Gibt es Zahlenvierlinge w, x, y, z für die $w^2 + x^2 + y^2 + z^2$ eine Quadratzahl ist?

4. Frage: Existieren natürliche Zahlen x, y, z mit $x + 1 = y$, so daß $x^3 + y^3 = z^3$ gilt?

5. Frage: Könnt ihr Zahlendrillinge x, y, z angeben, für welche $x^3 + y^3 + z^3$ wieder eine Kubikzahl ist?

6. Frage: Sind Zahlenvierlinge bekannt, so daß $w^3 + x^3 + y^3 + z^3$ eine Kubikzahl ist?

7. Frage: Gibt es Zahlendrillinge x, y, z, bei denen die Summe ihrer vierten Potenz wieder die vierte Potenz einer natürlichen Zahl m ist (d. h. $x^4 + y^4 + z^4 = m^4$)?

8. Frage: Oder könnt ihr Zahlenvierlinge w, x, y, z finden, bei denen die Summe ihrer vierten Potenzen sich wieder als vierte Potenz einer (anderen) natürlichen Zahl erweist?

Sehen wir uns die erste Frage näher an. Es gibt bekanntlich unendlich viele pythagoreische Zahlen (z. B. $x = 2pq$, $y = p^2 - q^2$, $z = p^2 + q^2$ mit beliebigen natürlichen Zahlen p und q, sowie alle Vielfachen ax, ay, az dieser Zahlen mit $a \in N$). Um die Frage 1 zu beantworten, könnten nun aus der Menge der pythagoreischen Zahlen x, y, z einfach alle pythagoreischen Zwillinge x, y ausgesucht werden. Dazu ist zu überprüfen, ob $y = x + 1$ gilt oder nicht. Man kann auch anders vorgehen: Man bestimmt diejenigen natürlichen Zahlen x, für welche sich $x^2 + (x + 1)^2$ als Quadratzahl erweist. Das Überprüfen dieser Bedingung (Probierverfahren) ist aber selbst für relativ kleine Zahlen (etwa für $x \leqq 1000$) eine umfangreiche und langweilige Rechnerei! Für einen Computer ist die Arbeit (mit der angegebenen Beschränkung für x, also z. B. $x \leqq 1000$) in wenigen Sekunden erledigt, falls ihr vorher ein richtiges Programm habt.

Dabei könnte man so vorgehen:

Zu jeder natürlichen Zahl x mit $0 < x \leqq 1000$ bilde man $z = x^2 + (x + 1)^2$, also $z = 2x(x + 1) + 1$. Dann überprüfe man, ob z eine Quadratzahl ist. Dazu wird $\sqrt{z}$ berechnet. Fall $\sqrt{z}$ eine ganze Zahl ist, stellt das zugehörige x eine Lösung dar.

Wir notieren uns dieses Vorgehen als BASIC-Programm:

```
10 FOR X = 1 TO 1000
20 Z = 2*X*(X+1)+1
30 IF Z = INT(SQR(Z)) THEN PRINT
   ”LOESUNG: X =“; X, ”Y =“; X + 1
40 NEXT X
```

Ihr wißt bereits vom Schulrechner SR 1, daß die Werte der Wurzelfunktion (in der BASIC-Notation SQR(Z)) in elektronischen Rechnern mit Hilfe eines Näherungsverfahrens ermittelt werden.

Diese Werte sind recht genau, aber dennoch nur Näherungswerte.

Das liegt u. a. an der Endlichkeit (Beschränktheit) der Menge der in einem Taschenrechner oder in einem Computer darstellbaren Zahlen. Es könnte deshalb passieren, daß bei dem Test (Befehl 30) Lösungen nicht erkannt werden. Wir empfehlen daher, diese Befehle so abzuändern:

```
30 M = INT(SQR(Z + .1)): IF M*M = Z
THEN PRINT
”LOESUNG: X = “; X, ”Y = “; X + 1.
```

Es wird euch nun leichtfallen, für vorgegebene kleine Zahlenbereiche auch die Fragen 2 bis 8 mit Hilfe eines Computers zu untersuchen. Für den KC 85/3 bzw. KC 87 mit einer sechsstelligen Zahldarstellung beschränken wir uns auf $0 < x \leqq 1000$ (bei den Fragen 2 und 3) bzw. $0 < x \leqq 1000$ (bei den Fragen 4 bis 6) oder $0 < x \leqq 30$ (bei den Fragen 7 und 8).

Noch ein Hinweis: Zum Überprüfen von Identitäten ist möglichst nicht die Potenzfunktion (Symbol ∧ bzw. ↑) zu benutzen, besser ist es, mehrere Multiplikationen auszuführen.

Bestätigt folgende Ergebnisse zu den Fragen:

1. $3^2 + 4^2 = 5^2$, $20^2 + 21^2 = 29^2$,
   $119^2 + 120^2 = 169^2$, $696^2 + 697^2 = 985^2$
5. $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$
6. $11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 = 20^3$

Für die übrigen Probleme existieren keine Lösungen in den angegebenen Zahlbereichen.

Wir wissen allerdings nicht, welche Verhältnisse außerhalb der untersuchten Zahlbereiche gelten. Insbesondere fanden wir bei den Fragen 2 bis 4 sowie 7 und 8 keine Lösungen unter den vom angegebenen Einschränkungen für die Zahlen x. Was passiert, wenn auf diese Einschränkungen verzichtet wird? Kann es überhaupt Lösungen geben? Als Matheexperten solltet ihr die Probleme eingehender untersuchen!

Es ist nützlich, sich die Endziffern von n^2, n^3 und n^4 in Abhängigkeit von der Endziffer der Zahlen n zu notieren.

Ihr findet:

Tabelle 1

Endziffer von n	0	1	2	3	4
n^2	0	1	4	9	6
n^3	0	1	8	7	4
n^4	0	1	6	1	6
Endziffer von n	5	6	7	8	9
n^2	5	6	9	4	1
n^3	5	6	3	2	9
n^4	5	6	1	6	1

In Frage 2 sei $x = y - 1$ und $z = y + 1$. Gesucht sind natürliche Zahlen y, für welche $3y^2 + 2$ eine Quadratzahl ist, für die es also ein $m \in N$ mit $3y^2 + 2 = m^2$ gibt. Angenommen, eine ungerade Zahl y habe diese Eigenschaft. Dann gibt es eine Darstellung $y = 2p + 1$, $p \in N$, folglich gilt $y^2 = 4p(p + 1) + 1$. Also läßt y^2 bei Division durch 8 den Rest 1 und daher $3y^2 + 2$ bei Division durch 8 den Rest 5. (Wir sagen: $3y^2 + 2 \equiv 5 \bmod 8$, wenn wir mit Kongruenzen rechnen.) Wegen $m^2 = 3y^2 + 2$ wäre m^2 und folglich m eine ungerade Zahl. Nach unseren obigen Überlegungen muß m^2 bei Division durch 8 aber den Rest 1 liefern. Das ist ein Widerspruch, daher kann y nicht ungerade sein. Ist aber eine gerade Zahl y eine Lösung, d. h. $y = 2p$, $p \in N$, so ist auch m eine gerade Zahl, und es kann $m = 2s$ geschrieben werden. Folglich gilt $4s^2 = 12p^2 + 2$ und demnach $2s^2 = 6p^2 + 1$. Hier steht aber links eine gerade und auf der rechten Seite der Gleichung eine ungerade Zahl. Dieser Widerspruch bedeutet: Es gibt keine Zahlendrillinge x, y, z, für die $x^2 + y^2 + z^2$ eine Quadratzahl ist.

Bei der Frage 3 ist die Summe der Quadrate von Zahlenvierlingen zu untersuchen. Wir setzen
$z = (y-2)^2 + (y-1)^2 + y^2 + (y+1)^2$,
d. h. $z = (2y-1)^2 + 5$. Angenommen z ist eine Quadratzahl, also $z = m^2$ für ein $m \in N$. Wegen $m^2 > (2y-1)^2$ muß $m \geqq 2y$ sein. Für $y \geqq 2$ folgt
$m^2 \geqq 4y^2 > 4y^2 - 4y + 6 = z$, was wegen $m^2 = z$ aber unmöglich ist. Die gesuchten Zahlenvierlinge existieren daher nicht.

Bei Frage 4 handelt es sich um einen Spezialfall der Fermatschen Vermutung (für $n = 3$ und mit $y = x + 1$). Die Fermatsche Vermutung ist noch nicht für beliebige natürliche Zahlen n bewiesen.

Faltings hat 1983 einen sehr wichtigen Beitrag zu ihrer Lösung geleistet (siehe „alpha“ Heft 3/1984). Für $n = 3$ hat aber bereits Euler gezeigt, daß keine natürlichen Zahlen x, y, z mit $x^3 + y^3 = z^3$ existieren. Die Suche mit dem Computer wäre also von vornherein sinnlos!

Bei Frage 7 ist
$z = (y-1)^4 + y^4 + (y+1)^4$, also
$z = 3y^4 + 12y^2 + 2$ zu bilden. Analog zu Tabelle 1 notieren wir die möglichen Endziffern der Zahlen z:

Tabelle 2

Endziffer von y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3y^4 + 2$	2	5	0	5	0	7	0	5	0	5
$12y^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2
z	2	7	8	3	2	7	2	3	8	7

Ein Vergleich der in Frage kommenden Endziffern von z mit den möglichen Endziffern der 4. Potenzen natürlicher Zahlen (Tab. 1) zeigt, daß z keine 4. Potenz einer natürlichen Zahl sein kann.

Es gibt folglich keine Zahlendrillinge mit den verlangten Eigenschaften.

Bei Frage 8 kann
$(y-1)^4 + y^4 + (y+1)^4$ [illegible] $(y+2)^4$ zu
$4y^4 + 8y^3 + 36y^2 + 32y + 18$ umgeformt werden. Wenn ihr die möglichen Endziffern dieser Zahlen mit denen von 4. Potenzen (siehe Tab. 1) vergleicht, so erkennt ihr, daß die Summe der vierten Potenzen von Zahlenvierlingen niemals die vierte Potenz einer anderen natürlichen Zahl sein kann. Bestätigt das!

Zum Schluß wenden wir uns noch einmal den Fragen 5 und 6 zu.

Da wurde gefragt, ob es natürliche Zahlen y und m gibt mit der Eigenschaft $3y^3 + 6y = m^3$ (Frage 5 mit $x = y - 1$ und $z = y + 1$).

Wenn es solche Zahlen gibt, so ist m durch 3 teilbar, mithin m^3 durch 27, und demnach gilt $9 \mid y(y^2 + 2)$. Hieraus folgt, daß y die Gestalt $y = 9k$, $y = 9k + 4$ oder $y = 9k + 5$, $k \in N$, haben muß. Dadurch kann die Anzahl der zu testenden Zahlen deutlich verringert werden. Will man größere Zahlen y einbeziehen, so sollte man nach natürlichen Zahlen y, m fragen, für die
$\frac{y^2 + 2}{m} = \frac{m^2}{3y}$ ist. Wegen $m^3 = 3y^3 + 6y$
kann man sich auf Zahlen m aus dem Bereich $\sqrt[3]{3}\,y < m < \sqrt[3]{3}\,(y+1)$ beschränken.

Bei Frage 6 ist zu untersuchen, ob $w^3 + x^3 + y^3 + z^3$ eine Kubikzahl, also gleich m^3 für ein $m \in N$ ist. Weil $w = y - 2$, $x = y - 1$ und $z = y + 1$ ist, muß also geprüft werden, ob es natürliche Zahlen y und m gibt, so daß
$2\,[2y^3 - 3y(y-3) - 4] = m^3$ gilt.
Wegen $2 \mid m^3$ folgt $2 \mid m$, daher $8 \mid m^3$
und $4 \mid [2y^3 - 3y(y-3) - 4]$.

Man zeige, daß dies nur möglich ist, falls 4 ein Teiler von y ist oder y bei der Division durch 4 den Rest 1 läßt ($y = 4k$, $y = 4k + 1$, $k \in N$). Die Anzahl der zu durchmusternden Zahlen kann somit halbiert werden! Um auch größere Zahlen (als 100) zu erfassen, sollte man überprüfen, ob
$\frac{m^2}{2} = \frac{y}{m}\,[2y^2 - 3(y-3)] - \frac{4}{m}$ in natürlichen Zahlen (etwa $\leqq 1000$) erfüllbar ist. Überlegt euch, daß
$4(y-1)^3 < m^3 < 4(y+1)^3$ sein muß.
Daher sind zu vorgegebenen y
die Zahlen m durch $\sqrt[3]{4}\,(y-1) < m$
$< \sqrt[3]{4}\,(y+1)$ eingeschränkt.

Stellt Computerprogramme auf, die diese Überlegungen berücksichtigen!

Ganz ohne Probieren können wir die vorn gestellten Fragen nicht klären, deshalb bietet sich hier der Computer als wertvoller Helfer an. Durch mathematische Überlegungen ließen sich einige Probleme ohne Computer lösen, bei anderen kann die Zahl der zu untersuchenden Fälle verringert werden. Es empfiehlt sich immer, den Computer erst einzusetzen, nachdem über den konkreten Sachverhalt nachgedacht wurde.

W. Schmidt

Buchtips aus dem E. Klett Schulbuchverlag

B. Bolt

Die zweite mathematische Fundgrube

100 neue Aufgaben, Bastelideen, ungewöhnliche Fragestellungen, Puzzles und andere Rätsel

Klettbuch 72272 Preis: 32,80 DM

E. Flachsel

Hundertfünfzig Matherätsel

Die nächsten hundertfünfzig Matherätsel

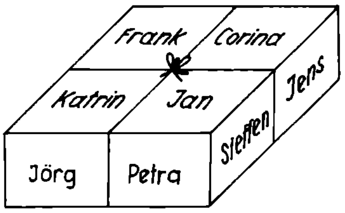
Klettbuch 72232/72234 Preis: je 32,80 DM
Eine Sammlung von Knobel- und Denkaufgaben, gleichzeitig Lesebuch über Geschichte, Geschichtchen und Anekdoten

Wir wünschen allen Lesern ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch in ein erfolgreiches und gesundes Jahr 1991. Natürlich verknüpfen wir diese Wünsche mit einigen passenden Knobeleien, erdacht von Walter Träger aus Döbeln.

Alphons

Die Weihnachtspäckchen

Zu Beginn der Ferien zum Jahreswechsel wird an einer Schule jedem der 8 Teilnehmer am Kreisausscheid der Mathematikolympiade ein Päckchen in verschlüsselter Form überreicht. Die Päckchen sind mit den Ziffern 1 bis 8 beschriftet und die Vornamen der Olympioniken in die 8 Felder des mit überreichten Bildes eines Paketes eingetragen. Der Dechiffriercode lautet: Bei richtigem Eintragen der Päckchennummern 1 bis 8 zu den Vornamen in die Felder gilt: In jedem der 4 im Innern des Päckchenbildes gelegenen gemeinsamen Eckpunkt von Feldern stoßen Felder aneinander, deren Zahlen stets die gleiche Summe haben. Die auf Jens' Päckchen stehende Zahl ist um 4 größer als die auf dem Päckchen für Jan. Wer darf welches Päckchen nehmen?



Silvesterscherz?

An einem Silvesterabend wollen die Zwillinge Ramona und Daniel von ihren Eltern Auskünfte über ihre Geburt erhalten. Die Mutter antwortet: „Ramona wurde eine halbe Stunde vor Daniel geboren.“
Der Vater ergänzt: „Daniel erblickte am 31. Dezember 10.35 Uhr und Ramona am 1. Januar 9.05 Uhr das Licht der Welt.“ Daniel erwidert: „Wenn ich jünger als Ramona bin, wäre ich demnach fast ein ganzes Jahr jünger als Ramona und wir beide wären keine Zwillinge.“ Können die Auskünfte der Eltern trotzdem stimmen?

Wie alt?

Grits Uroma ist 3 Jahr jünger als ihr Uropa. Am Neujahrstag des Jahres 1991 wünscht Grit ihren Urgroßeltern alles Gute für das neue Jahr. Sie berichtet dabei freudestrahlend, daß die neue Jahreszahl in besonderer Beziehung zu ihren Lebensaltern steht: Addiert man die Zahl der Lebensjahre meiner Uroma zu der meines Uropas und multipliziert diese Summe mit der Zahl meiner Lebensjahre, so erhält man gerade die neue Jahreszahl. Wie alt sind Grit, Uroma und Uropa?

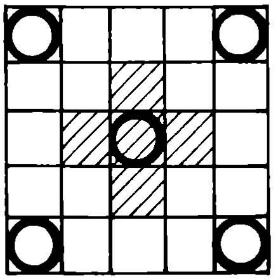
In freien Stunden · alpha-magisch

Magische Quadrate

Weil Zauberspiele, Knobeleien
nicht nur ein Kinderherz erfreuen,
scheint es verständlich und erklärlich,
warum Objekte, die gefährlich
als magische Quadrate man
bezeichnet, schon mit viel Elan
vor Tausenden an Menschheitsjahren
beliebt in Untersuchung waren.

Wer kennt sie nicht, die Lust der Qualen
sich ein Quadratschema an Zahlen,
auf daß konstanten Wert erhalten
die Summen jeweils von den Spalten
und Zeilen und Diagonalen,
in Mußestunden aufzumalen?[1]

Vom Urgroßvater, der gar viele
der Aufgaben und Knobelspiele
gesichtet und gesammelt hat,
stammt nun das folgende Quadrat,
das mir durch seine Harmonie
erscheint im Stil von Poesie:



Es gilt, ins Schema rasch und fleißig,
die Zahlen acht bis zweiunddreißig
so einzusetzen – ist es schwer? –,
daß waagerecht, daß weiter quer,
diagonal – Geduld wird reißen! –
und außerdem zu den fünf Kreisen
und zu den Feldern, die schraffiert,
ein Aufsummiern auf hundert führt!

Ich wünsche Spaß bei aller Müh'!
Im Spiele wird Verstand geschärft –
drum bitte sieh', total entnervt,
zur Lösung nicht schon allzufrüh.

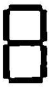
K. Näther, Leipzig

---

[1] Die Magiksummen oftmals stehen
zu irgendwelchen Jubiläen
und Anlässen ganz ohne Trug
zwecks Unterhaltung in Bezug.

Auf den Kopf gestellt

Elektronisch gesteuerte Ziffernanzeigen (z. B. beim Taschenrechner) verwenden häufig zur Darstellung der Ziffern folgendes Grundraster:

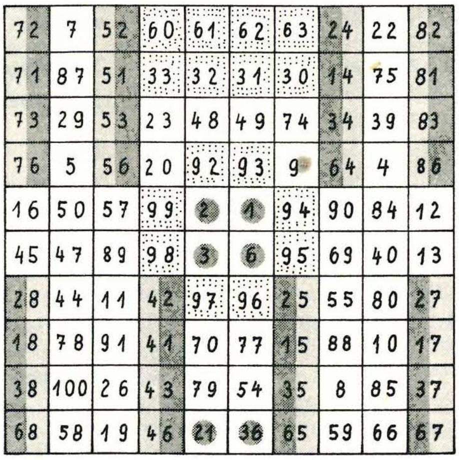


Die Ziffern 1, 2, 5, 6, 8, 9 und 0 sind, um 180° gedreht, ebenfalls eindeutig als Ziffern lesbar.
Bilde ein magisches Quadrat aus 4×4 Feldern mit 16 voneinander verschiedenen zweistelligen Zahlen so, daß sich auf den Kopf gestellt wieder ein richtiges magisches Quadrat ergibt und
a) die Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen der beiden Quadrate nicht gleich sind bzw.
b) diese Summen gleich sind.
Dabei müssen nicht alle in Frage kommenden Ziffern verwendet werden.

A. Körner, Leipzig

Magisches, optisch attraktiv

Unser Leser Siegfried Linßner schickte uns folgendes, durch seine Symmetrie bestechendes magisches Quadrat zu.
Seht es euch genau an!



72	7	52	60	61	62	63	24	22	82
71	87	51	33	32	31	30	14	75	81
73	29	53	23	48	49	74	34	39	83
76	5	56	20	92	93	9	64	4	86
16	50	57	99	2	1	94	90	84	12
45	47	89	98	3	6	95	69	40	13
28	44	11	42	97	96	25	55	80	27
18	78	91	41	70	77	15	88	10	17
38	100	26	43	79	54	35	8	85	37
68	58	19	46	21	36	65	59	66	67

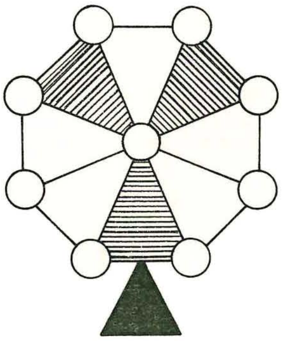
Vertauscht nun die Zahlen 7 und 22 in der 1. Zeile. Wie sind dann in der 2. und 9. Spalte die Zahlen zu setzen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Magisches Karussell

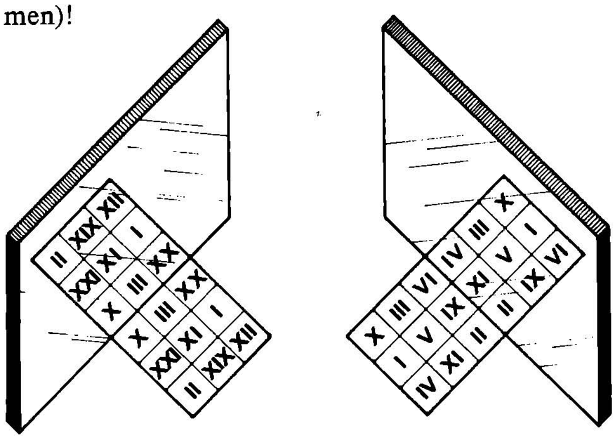
Tragt die natürlichen Zahlen von 1 bis 9 so in die Kreisfelder der Figur ein, daß die Zahlensumme auf jeder Diagonalen 12 und in jedem schraffierten Dreieck 10 beträgt!

Schüler Jens Mildner, Leipzig



Mit Spiegel und Schere

a) Das Bild zeigt zwei neunfeldrige Zahlenquadrate und ihre Spiegelbilder. Untersuche jeweils Urbild und Spiegelbild auf magische Eigenschaften (Gleichheit der Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen)!



Lassen sich aus römischen Ziffern noch andere Zahlenquadrate mit ähnlichen Eigenschaften bilden?

b) Jedes der folgenden Zahlenquadrate ist entlang der Linien so in vier Teile zu zerschneiden, daß diese Teile jeweils zu zwei magischen Quadraten zusammengefügt werden können.
(Denke an den Lehrsatz des Pythagoras!)

22	12	19	9	5
17	25	14	4	3
20	11	2	7	6
23	16	18	13	1
10	21	15	24	8

1.

11	17	20	4	18
19	5	10	15	9
6	22	24	7	21
16	8	3	14	1
2	25	12	23	13

2.

16	10	5	4	24
15	3	25	9	6
20	13	18	7	12
21	14	22	2	1
17	19	8	11	23

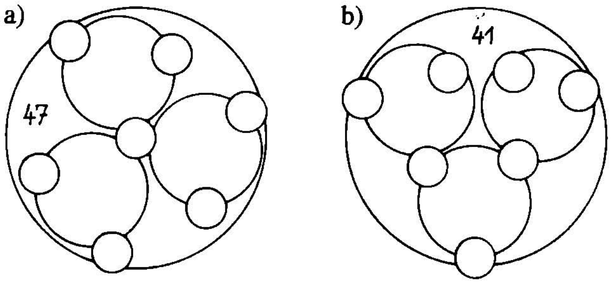
3.

Werner Miller, Wien

Wie ist es möglich, daß die Mathematik, letztlich doch ein Produkt menschlichen Denkens unabhängig von der Erfahrung, den wirklichen Gegebenheiten so wunderbar entspricht? *Albert Einstein*

Magische Primzahlen

Verteile die Primzahlen von 5 bis 23 jeweils so in die Figuren, daß sich in jedem Kreis die angegebene Summe ergibt.



Dr. Christian Werge, Leipzig

Typisch Mathe

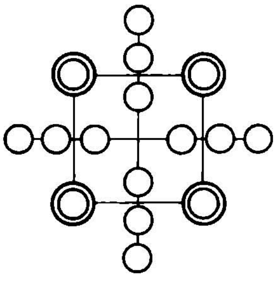
Es wird erzählt, wie einst ein Astronom, ein Physiker und ein Mathematiker durch Schottland reisten. Aus dem Fenster des Wagens sahen sie auf einer Weide ein schwarzes Schaf.
„Interessant", bemerkte der Astronom, „in Schottland sind die Schafe also schwarz."
„Nein", rief der Physiker, „in Schottland gibt es schwarze Schafe."
Der Mathematiker stimmte beiden nicht zu: „In Schottland gibt es wenigstens eine Weide, auf der wenigstens ein Schaf weidet, welches wenigstens auf einer Seite ein schwarzes Fell hat."

aus: A. G. Konforowitsch „Logischen Katastrophen auf der Spur", Fachbuchverlag Leipzig

Magische Doppelkreise

Die Zahlen 0 bis 15 sind so in die Kreisfiguren einzutragen, daß die Summe der Zahlen in den vier Doppelkreisen und die Summe der Zahlen in den Kreisen auf jeder der beiden Symmetrieachsen gleich 40 ist.

aus: J. Lehmann „Mathe mit Pfiff", Urania-Verlag Leipzig · Jena · Berlin



Magische Begrüßung eines neuen Jahres

1991 ist das Produkt der Primzahlen 11 · 181. Die Zahlen von 61…301 sind im Zweierabstand (61, 63, 65, …) so in einem Magischen Quadrat 11ter Ordnung unterzubringen, daß die Summe in allen Reihen und Spalten sowie in den beiden Diagonalen jeweils 1991 beträgt und die Zahl 181 sich im Mittelfeld befindet.

Klaus-Horst Milde, Dresden

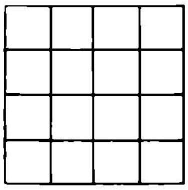
Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 8. März 1991

5/1 Zwei Schulklassen wollen einen Ausflug machen. Die Wegstrecke beträgt 14 km. Die erste Gruppe wandert um 8.30 Uhr los. Sie legt in jeder Stunde vier Kilometer zurück und will nach zwei Stunden eine Pause von 20 Minuten einlegen. Die zweite Gruppe fährt mit dem Fahrrad. Der Leiter dieser Gruppe möchte, daß die erste Gruppe unterwegs nicht überholt wird. Wann darf deshalb die zweite Gruppe frühestens abfahren, wenn sie dreimal so schnell wie die erste Gruppe ist und nach 7 Kilometern 10 Minuten Pause machen will? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

5/2 In Neubrandenburg fährt ein Bus der Linie 9 die Strecke Busbahnhof – Datzeberg hin und zurück. Für die Hinfahrt braucht der Bus 18 Minuten, für die Rückfahrt 4 Minuten weniger, da Hin- und Rückfahrt eine unterschiedliche Streckenführung haben.
Am Wendepunkt Datzeberg hat der Bus 8 Minuten und am Busbahnhof eine Minute Aufenthalt. Welche Zeit (in Stunden und Minuten) benötigt der Bus, wenn er die Strecke Busbahnhof – Datzeberg – Busbahnhof zwölfmal fährt?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

5/3 In die 16 Felder des abgebildeten Quadrates sind jeweils acht Kreuze so einzutragen, daß
a) in jeder Zeile und in jeder Spalte genau zwei Kreuze,
b) in keiner Zeile und in keiner Spalte genau zwei Kreuze sind. *Sch.*



5/4 „Ich vergesse immer den Tag und den Monat deines Geburtstages“ meint Susis Freundin. Darauf antwortet Susi lustig: „Du brauchst dir nur die Zahl 112 zu merken, denn sie ist gleich dem Produkt aus der Tages- und der Monatszahl meines Geburtstages. Die Differenz aus Monats- und Tageszahl ist aber nicht einstellig.“ Wann hat Susi Geburtstag?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

5/5 In dem abgebildeten Schema sind die Sternchen so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht.

```
      *** · ***
      ---------
      ***
  4 8 9 5
  ***
-----------
******
```

Sch.

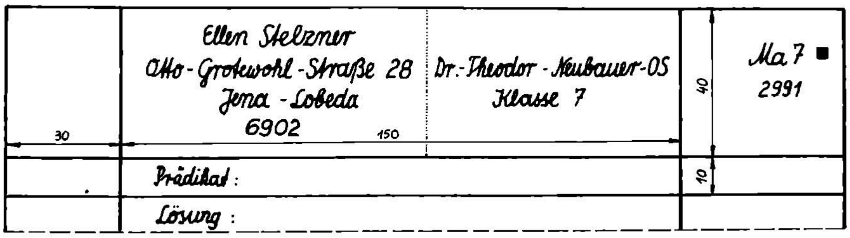
5/6 Für welche natürlichen Zahlen n gilt: $(n-3)\cdot(21-n)=32$?
OStR J. Kreusch, Löbau

5/7 Hans sagt: „Meine Sperrholzplatte hat die Form eines Rechtecks und besitzt einen Flächeninhalt von 3000 cm^2. Es läßt sich mit einem einzigen geraden Sägeschnitt eine quadratische Platte von 30 cm Seitenlänge absägen.“ Wie lang sind die Seiten der übrig bleibenden rechteckigen Platte? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

6/1 Es sind alle durch 15 teilbaren dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, an deren Zehnerstelle jeweils die Ziffer 7 steht! *Sch.*

6/2 „Denke dir eine von Null verschiedene natürliche Zahl, addiere 11, multipliziere danach die Summe mit 9, addiere zu diesem Produkt den Nachfolger deiner gedachten Zahl, subtrahiere nun von dieser Summe eine beliebige natürliche Zahl, die größer als 90 aber kleiner als 100 ist. Nenne mit das Ergebnis, und ich sage dir deine gedachte Zahl!“ Wie findet man die gedachte Zahl?
Gib eine Begründung dafür!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/3 Oma ist 24 Jahre älter als Utes Mutter. Die Mutter ist viermal und die Oma siebenmal so alt wie Ute. Wie alt war die



Ellen Stelzner
Otto-Grotewohl-Straße 28
Jena - Lobeda
6902

Dr.-Theodor-Neubauer-OS
Klasse 7

Ma 7 ■
2991

Prädikat:

Lösung:

Wettbewerbsbedingungen

NEU!

1. Der Wettbewerb 1990/91 läuft über nur **zwei Teilwettbewerbe** in den Heften 6/90 und 1/91.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an:

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
7027

Die Lösungen sind **in einem Kuvert** und möglichst der Reihenfolge nach fortlaufend, auf Vorder- und Rückseite beantwortet, einzusenden. (Die Lösungen werden zur Korrektur nicht mehr aufgabenweise sortiert!)
Beizulegen ist ein **frankierter* und adressierter Rückumschlag** für die Zusendung der Antwortkarte, auf der alle Ergebnisse des Teilwettbewerbes registriert werden.
Da **Schulen** die Antwortkarten geschlossen zurückerhalten, ist das Porto in entsprechender Höhe zu entrichten.

3. Von dem Teilnehmer sind nur Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden (Die Klassenstufennummer steht vor der Aufgabennummer). Schüler ab Klassenstufe 11 und Erwachsene lösen die mit 10 gekennzeichneten Aufgaben.

4. Zu empfehlen ist allen Teilnehmern die **Einsendung der Lösungen vor dem Einsendeschluß**, da in diesem Fall die Korrektur umgehend erfolgt und die Antwortkarte bereits mit Einsendeschluß zurückgesandt werden kann.

5. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um sie mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen vergleichen zu können.

6. Diejenigen Teilnehmer, die insgesamt **mindestens acht Aufgaben richtig gelöst** haben, senden bis zum 10. September 91 beide Antwortkarten, einen entsprechend **frankierten* und adressierten Rückumschlag** und
a) bei mehr als dreimaliger Teilnahme die zuletzt erhaltene Urkunde, bzw.
b) bei mit diesem Wettbewerb dreimaliger Teilnahme die bereits vorhandenen zwei Urkunden ein.
Bei erst- bzw. zweimaliger Teilnahme genügen die beiden Antwortkarten und der entsprechende Rückumschlag.

7. Alle erfolgreichen Teilnehmer erhalten eine Anerkennungsurkunde und einen alpha-Button.
Pro Klassenstufe 5 bis 10/12 und unter den Frühstartern werden die 10 besten Teilnehmer ermittelt (entscheidend ist die Anzahl der sehr gut gelösten Aufgaben) und unter den Übrigen je fünf Teilnehmer ausgelost.
Sie erhalten attraktive Buchpreise.

* *Entsprechend der Portogebühren im März bzw. September 91.*

Mutter, als Ute geboren wurde? Begründe deine Behauptung!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/4 Gegeben sei eine beliebige dreistellige natürliche Zahl in dekadischer Schreibweise, die als Grundziffer nicht die Ziffer 0 enthält. Es sind durch Umstellung der Grundziffern alle möglichen dreistelligen natürlichen Zahlen zu bilden. Beweise, daß die Summe aus all diesen dreistelligen natürlichen Zahlen stets durch 222 teilbar ist! *Sch.*

6/5 Rita führt ihrer Mutter ihre „Rechenkünste“ vor, die sie in der Arbeitsgemeinschaft Mathematik erworben hat. Sie fordert die Mutter auf: „Schreibe fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen untereinander, addiere sie und verdopple dann noch das Ergebnis.“ Nachdem Rita nur die erste der fünf von der Mutter notierten Zahlen gesehen hatte, schreibt Rita bereits die Lösung auf einen Zettel und legt diesen beiseite. Die Mutter ist erstaunt, daß Rita das Ergebnis bereits ermittelt hatte.
Begründe Ritas „Geheimnis“!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/6 „Denke dir eine von Null verschiedene natürliche Zahl, addiere 10, multipliziere danach die Summe mit 10, subtrahiere von diesem Produkt eine beliebige natürliche Zahl, die größer als 90 aber kleiner als 100 ist. Nenne mir das Ergebnis, und ich sage dir deine gedachte Zahl.“ Wie findet man die gesuchte Zahl?
Gib eine Begründung dafür!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/7 Der Zug 7330 fährt in Leipzig 7.44 Uhr ab und erreicht das 38 km Bahnkilometer entfernte Halle 8.16 Uhr. Welche Durchschnittsgeschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt dieser Zug? *R.*

7/1 Robert spielt mit seinem Kettenschlepper, der von einer Batterie angetrieben wird und immer gleichmäßig schnell fährt. Er macht stets nach sechs Sekunden eine rechtwinklige Drehung nach rechts oder nach links, also nach 6 Sekunden, 12 Sekunden, 18 Sekunden usw. eine solche Drehung. Begründe, daß der Kettenschlepper nicht nach genau einer Minute wieder am Ausgangspunkt sein kann!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

7/2 Beweise, daß in einem rechtwinkligen Dreieck die Höhe und die Seitenhalbierende, die vom Scheitel des rechten Winkels ausgehen, einen Winkel einschließen, dessen Betrag mit der Differenz aus den Größen der beiden spitzen Innenwinkel des Dreiecks ABC übereinstimmt. *Sch.*

7/3 Otto, Paul und Rolf gingen kegeln. Für jeden gefallenen Kegel wurde ein Punkt vergeben. Nach drei Würfen je Spieler wurde folgendes festgestellt:
(1) Mit dem ersten Wurf schaffte Rolf drei Punkte weniger als Paul; Otto schaffte sechs Punkte weniger als Paul und Rolf zusammen. Beim ersten Wurf wurden insgesamt 20 Punkte erzielt.
(2) Beim zweiten Wurf kegelte Paul besser als beim ersten Wurf; Otto erreichte fünf Punkte weniger als Paul, Rolf einen Punkt mehr als Otto.
(3) Mit allen drei Würfen schaffte Paul insgesamt 18 Punkte, Otto insgesamt zwei Punkte mehr als Paul. Nach Abschluß der dritten Runde waren insgesamt 48 Punkte vergeben worden.
Wie fielen die einzelnen Würfe von Otto, Paul und Rolf aus?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

7/4 Gegeben seien drei natürliche Zahlen a, b und c, von denen keine durch 3 teilbar ist. Es ist nachzuweisen, daß mindestens eine der Summen
$a + b$, $a + c$, $b + c$ oder $a + b + c$
durch 3 teilbar ist. *Sch.*

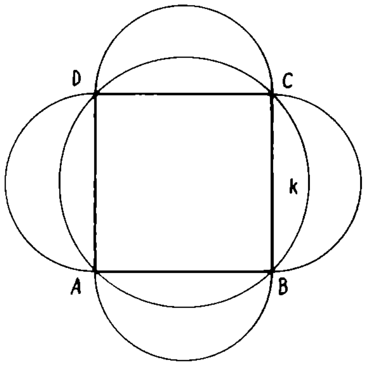
7/5 Elke ist (in ganzen Jahren gerechnet) halb so alt wie ihre Mutter, die drei Jahre jünger als Elkes Vater, der aber dreimal so alt wie Elkes Schwester Beate ist. Wie alt ist jedes dieser vier Familienmitglieder, wenn sie zusammen 123 Jahre alt sind?
Schülerin Jana Träger, Werchau

7/6 Das Wellrad besteht aus 2 fest miteinander verbundenen Rollen mit unterschiedlichen Radien auf gemeinsamer Achse. Die größere Rolle kann auch durch eine Kurbel ersetzt werden. Das Wellrad ist eine kraftumformende Einrichtung wie z. B. der Hebel. Für die Berechnung der Kräfte am Umfang der Rollen kann man das Hebelgesetz anwenden, wenn man anstelle der Länge der Hebelarme die Radien der Rollen setzt. Das Wellrad ist also ein Kraftwandler: an der kleineren Rolle wirkt die größere Kraft. (Wellräder werden u. a. zur Kraftübersetzung beim Fahrrad verwendet.)
Bei einem Fahrrad beträgt die Länge der Tretkurbel 10 cm, der Radius des Kettenrades 5 cm. Welche Kraft überträgt die Kette auf das kleine Kettenrad am Hinterrad, wenn auf die Tretkurbel eine Kraft von 100 N wirkt? Welche Kraft wirkt am Umfang des Hinterrades, wenn das Verhältnis der Radien Hinterrad: Kettenrad 10 : 1 beträgt? *R.*

7/7 Ein zweiseitiger Hebel mit einer Masse von 0,1 kg hängt an einem Federkraftmesser. Am Hebel hängen zwei Körper mit der Gewichtskraft $F_1 = 4$ N und der Gewichtskraft F_2, so daß der Hebel im Gleichgewicht ist. Die Länge der Hebelarme betragen $l_1 = 20$ cm und $l_2 = 40$ cm. Was zeigt der Federkraftmesser an? *R.*

8/1 Es ist der folgende Satz zu beweisen: Das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist stets durch 4 teilbar, wenn die kleinste der drei Zahlen gerade ist und nicht stets durch 4 teilbar, wenn die kleinste der drei Zahlen ungerade ist.
Schüler Roland Holke, Leipzig

8/2 Das Bild stellt ein Quadrat $ABCD$ mit seinem Umkreis k dar. Über jede Quadratseite als Durchmesser wurde nach außen ein Halbkreis konstruiert. Der Umkreis des Quadrates und die vier Halbkreise bestimmen vier Kreisbogenzweiecke. Es sei A_1 die Summe der Flächeninhalte dieser vier Kreisbogenzweiecke und A_2 der Flächeninhalt des Quadrates. Es ist zu untersuchen, welche der drei Beziehungen $A_1 < A_2$, $A_1 = A_2$, $A_1 > A_2$ gilt!
Die Antwort ist zu begründen! *Sch.*



8/3 Es ist folgende Behauptung zu beweisen: Wenn sich in einem rechtwinkligen Dreieck die Größen der spitzen Innenwinkel wie 2 : 1 verhalten, so zerlegt die Mittelsenkrechte zur Hypotenuse das Dreieck in zwei Teile, deren Flächeninhalte sich wie 2 : 1 verhalten. *Bruno Hermann, Töplitz*

8/4 In den beiden Dreiecken $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ mit den Seitenlängen a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 stimmen a_1 und a_2 überein; b_1 ist um 7 cm größer und c_1 um 2 cm kleiner als a_1; c_2 ist fünfmal so groß wie a_2 und b_2 beträgt 10 cm. In welchem Verhältnis stehen die Umfänge beider Dreiecke?
Schüler Roland Holke, Leipzig

8/5 Es ist die folgende Behauptung zu beweisen: Der Vorgänger des Quadrates einer jeden nicht durch 3 teilbaren natürlichen Zahl ist durch 3 teilbar. Für durch 3 teilbare natürliche Zahlen trifft dies nicht zu. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

8/6 Ein quaderförmiger Körper aus Eichenholz (Grundfläche $A = 20\,\text{cm}^3$, Höhe $h = 25$ cm) schwimmt im Wasser (4 °C). Wie tief taucht der Körper ein? *R.*

8/7 Klaus erhitzt einen Topf mit 2 l Wasser. Er benötigt für das Erhitzen von 20 °C auf 100 °C 20 min. Wieviel Liter Propangas benötigt er, wenn der Wirkungsgrad mit 100 % angenommen wird?
Enrico Lüdecke, Mario Wolters, Zechlin-Dorf

9/1 In einem Rhombus $ABCD$ sei a die Länge der Seite $\overline{AB}$, e die Länge der Diagonalen $\overline{AC}$ und β die Größe des Innenwinkels $\sphericalangle ABC$. Ein solcher Rhombus ist aus $a + e = 8$ cm und $\beta = 40°$ zu konstruieren.
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

9/2 Weisen Sie nach, daß für $a \cdot b \cdot c = 1$ die Beziehung
$a + b + c + ab + ac + bc \geqq 6$ gilt! *Sch.*

9/3 Zeichnen Sie durch die drei Eckpunkte eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks ABC die Parallelen zu den drei gegenüberliegenden Seiten und bezeichnen Sie die entstehenden Schnittpunkte mit D_1, D_2 und D_3!

a) Beweisen Sie, daß die so entstandenen Dreiecke paarweise zueinander kongruent sind!
b) Das entstandene Bild kann als Körpernetz einer Pyramide (eines nichtregulären Tetraeders) aufgefaßt werden.
Zeichnen Sie daraus den Grundriß dieses Körpers, indem Sie den Fußpunkt der Tetraederhöhe konstruieren!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

9/4 Welche Primzahlen a, b, c erfüllen die Gleichung

$$\frac{4a+bc}{(a+b)c}=\frac{17}{10},$$

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

9/5 Es sei z eine von Null verschiedene natürliche Zahl. Es ist zu zeigen, daß es für die Gleichung

$$\sqrt{0,z-0,0z}=0,z$$

nur eine solche Zahl z gibt!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

9/6 Ein Heißluftballon hat ein Volumen $V = 3500\,\mathrm{m}^3$. Die Luft im Inneren wird bei einer Außentemperatur von $t_a = 0\,°\mathrm{C}$ und einem Druck von 1013 hPa auf eine Temperatur $t_i = 40\,°\mathrm{C}$ aufgeheizt. Wieviel Luft entweicht? Wie groß darf die Gewichtskraft der Ballonhülle, Gondel und Ladung insgesamt sein, damit der Ballon gerade steigt? Die Dichte der Luft ϱ beträgt bei $p = 1013$ hPa:

t in °C	0	10	20
ϱ in $\frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{m}^3}$	1,293	1,247	1,204
t in °C	30	40	50
ϱ in $\frac{\mathrm{kp}}{\mathrm{m}^3}$	1,164	1,127	1,092

R.

9/7 Welche Leistung muß die Heizspirale einer Waschmaschine haben, die 10 l Wasser in 30 min von 15 °C auf 95 °C erwärmt?
Der Wirkungsgrad soll 95 % betragen. *R.*

10/1 Es sei M der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ eine Sehne, die senkrecht zu diesem Durchmesser ist. Es ist zu beweisen, daß die Winkel $\sphericalangle DAC$ und $\sphericalangle DMB$ kongruent sind.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

10/2 Welche Paare $(x; y)$ natürlicher Zahlen erfüllen die folgenden Bedingungen? (4 Aufgaben!)
a) $x(x-y) = 64$ und $y(x-y) = 0$
b) $x(x+y) = 10$ und $y(x+y) = 40$
c) $x(x+y) = 11$
d) $x(x-y) = 12$

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

10/3 Die Maßzahl des Umfanges eines rechtwinkligen Dreiecks (gemessen in cm) sei gleich der Maßzahl seines Flächeninhaltes (gemessen in cm²); die Maßzahlen der Seitenlängen seien natürliche Zahlen. Es ist zu untersuchen, ob es solche rechtwinklige Dreiecke gibt und welche Seitenlängen sie im Falle ihrer Existenz haben müßten. *Sch.*

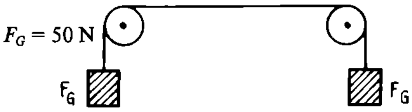
10/4 In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\sphericalangle ACB = 90°$ teile die Höhe h_c die Hypotenuse $\overline{AB}$ nach dem goldenen Schnitt, d. h. der kleinere Abschnitt der Hypotenuse verhält sich zum größeren wie der größere Abschnitt zur gesamten Hypotenuse. Es ist die Größe der Innenwinkel $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle CBA$ zu berechnen!

Dipl.-Landwirt Hartmut Boettcher, Weimar

10/5 In ein rechtwinkliges Koordinatensystem seien der Graph der linearen Funktion $y = f(x) = 2x + 3$ und der Punkt $P(6; 15)$ mit seiner Abszisse und Ordinate (jeweils als Strecke) eingezeichnet. In das entstandene Rechteck lassen sich zwei Quadrate so einbeschreiben, daß jeweils genau einer der Eckpunkte des Quadrats auf der Geraden mit der Gleichung $y = 2x + 3$ und zwei Seiten auf den Rechteckseiten liegen. Der jeweilige Eckpunkt dieser beiden Quadrate ist zu berechnen!

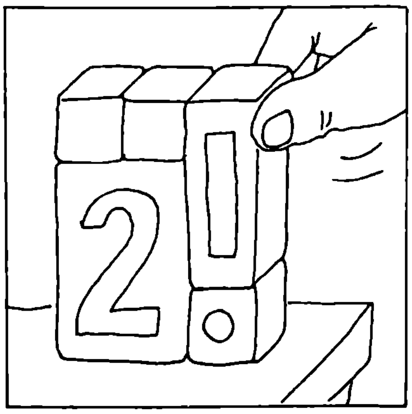
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

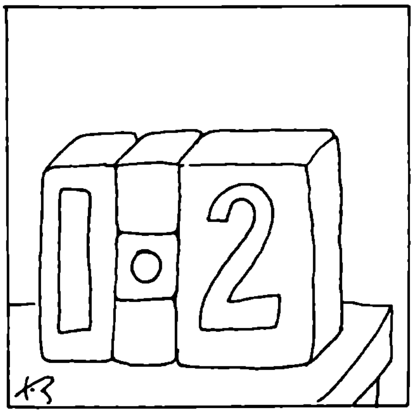
10/6 Gegeben ist folgende Anordnung:



Welche Kraft wirkt im Seil? *R.*

10/7 Ein 80 m hoher Turm steht in einem ebenen Gelände. Von der Spitze des Turmes wird ein Körper waagerecht mit einer Geschwindigkeit $v = 5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ abgeschossen.
Wann erreicht er den Erdboden? *R.*





In eigener Sache

Im Jahre 1991 wird die „alpha" 25 Jahre jung.
Wir hatten bereits im Heft 5/90 darüber informiert, daß der Friedrich-Verlag in Velber beabsichtigt, „alpha" mit diesem Jubiläumsjahrgang zu übernehmen.
In der Hoffnung, daß sich dieser für unsere Zeitschrift beste Weg nicht doch noch zerschlägt, wollen wir euch den Friedrich-Verlag und seine Pläne etwas näher vorstellen.
Dieser in der Nähe von Hannover angesiedelte Verlag hat sich auf Zeitschriften für den Unterricht, für die Hand des Lehrers spezialisiert. Seine das gesamte Spektrum der Unterrichtsfächer erfassenden Zeitschriften sind für die Praxis bestimmt und leben von Beiträgen aus der Praxis. Es geht also um fachlich exakte, anwendungsbezogene und psychologisch-pädagogisch aufbereitete Handreichungen für den Lehrer.
Dieser schwierigen Aufgabe stellt sich der Friedrich-Verlag sicher auch deshalb mit soviel Erfolg, weil er sie mit Herz anpackt.
Und dieses zeigte er auch angesichts unserer finanziellen Sorgen um den alpha-Wettbewerb und war spontan bereit zu helfen. Und das lange bevor an ein Überwechseln der „alpha" zu ihm überhaupt gedacht wurde. Also ein zweiter Grund, unser Titelblatt für diesen Verlag zu reservieren.
Warum nun aber, so werden viele Leser fragen, steht seine Zeitschrift „mathematik lehren" ebenfalls darauf.
Ganz einfach – beide Zeitschriften beabsichtigen eine enge Zusammenarbeit, um sowohl Schülern als auch Lehrern zu helfen, die älteste Wissenschaft der Welt immer wieder neu zu entdecken. „Mathematik lehren" für einen kreativen, differenzierten und anwendungsbezogenen Unterricht – „alpha" für die sinnvolle Freizeitbeschäftigung der Schüler.
Ihr solltet also mal euren Mathelehrer fragen, ob er die „mathematik lehren" kennt. Wenn nicht, kann er unverbindlich und kostenfrei ein Kennenlernangebot unter folgender Adresse bekommen:

Friedrich Verlag, Vertrieb
Postfach 100150
W-3016 Seelze.

Und Ihr könnt ihm ruhig noch verraten, daß er im Falle eines Abonnements ab 1/91 den Jubiläumsjahrgang der „alpha" kostenlos mitgeliefert bekommt, sozusagen als Lehrprüfungsexemplar für seine Schüler. Und da soll Mathematik keinen Spaß machen!?

Wichtig! Lest Euch bitte genau die neuen Wettbewerbsbedingungen durch. Und vergeßt keinesfalls, die Portokosten in entsprechender Höhe zu entrichten. Denn müßten wir dies tun, würde unser Etat für den Wettbewerb weit überschritten und das hieße unweigerlich das „Aus".

31. Ausstellung „Herzberger Spiele“

Vom 24. bis 30. März 1990 fand im Kinder- und Jugendfreizeitzentrum Markkleeberg die 31. Ausstellung „Herzberger Spiele“ statt. Die von Oberstudienrat G. Schulze gezeigte Ausstellung umfaßt eine unerschöpfliche Fülle von Spielideen mit mathematischen Hintergrund. Es werden Spielregeln, Strategien bzw. Lösungen und Varianten der Spiele bis hin zu neuen, bisher noch nicht gelösten oder nicht lösbaren Teilproblemen anschaulich und übersichtlich dargestellt. Einen wichtigen Teil der Ausstellung bilden die Spiele mit dem von G. Schulze kreierten Herzberger Quader (siehe auch alpha Heft 3/86), dem Somawürfel und anderen ähnlich gestalteten zusammengesetzten Körpern.

Möglichkeiten und Varianten des Zusammensetzens der Quader werden ebenso gezeigt wie Beweise der Unmöglichkeit der Kombination bestimmter Einzelteile. Wie mit geringem materiellen Aufwand vielfältige Problemstellungen mit stark differenziertem Schwierigkeitsgrad gefunden werden können, zeigen die Legespiele „Bunte Dreiecke“. Die Dreiecke sind auf der vorderen Umschlagseite des Mathematikarbeitsheftes Klasse 3 (Volk und Wissen Verlag) aufgedruckt und können ausgeschnitten und sofort verwendet werden. Die daraus entwickelten Aufgaben regen Jung und Alt an. Ebenso anregend empfanden die Besucher die mathematische Aufbereitung solcher Spiele wie z. B. „Nur kein Rechteck“, „Über Ecken und Kanten“ und das unter Knobelfreunden gut bekannte „Solohalma“.

In der Ausstellung waren Spielmaterialien in ausreichender Menge ausgelegt, so daß die Besucher unmittelbare Betätigungsmöglichkeiten fanden.

In insgesamt 22 geschlossenen Veranstaltungen stellte OStR G. Schulze bzw. B. Junghanns als Mitarbeiterin des Freizeitzentrums Spielideen und Strategien vor und gaben Anregungen für die weitere selbständige Beschäftigung mit mathematischen Spielen.

Zahlreiche Markkleeberger Schulklassen nutzten eine Stunde ihres Mathematikunterrichts, um einmal auf ganz spezielle Weise ihr Wissen und Können anzuwenden und zu erweitern, ebenso kamen aber auch Lehrer, Studenten und Lehrkräfte der Universität Leipzig und des Instituts für Lehrerbildung und interessierte Bürger.

Die Ausstellung regte die Kreativität der Besucher an und half mit, die Popularität der Mathematik weiter zu erhöhen.

Eingebunden war sie in die Arbeit des Kinder- und Jugendfreizeitzentrums Markkleeberg, das mit seinem vielfältigen Angebot auf dem Gebiet der Freizeitpädagogik vielen Kindern und Jugendlichen Möglichkeiten zu einer sinnvollen und freudbetonten Freizeitgestaltung und das Lehrern durch die Möglichkeit zur Information Hilfestellung bei der Unterrichts- und Hortarbeit geben will.

B. Junghanns, pädag. Mitarbeiterin
am Kinder- und Jugendfreizeitzentrum
Markkleeberg

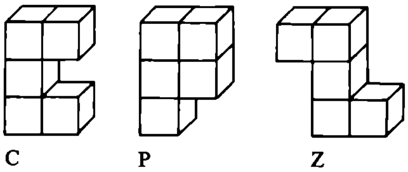
Einige Kostproben für unsere Leser aus dieser Ausstellung.

Wir setzen Fünflinge und Vierlinge aus Würfeln zusammen

Aus gleich großen Würfeln aus Holz oder Plaste wollen wir einige Fünflinge und Vierlinge zusammensetzen. Die Flächen aller Würfel sind dabei zueinander parallel oder senkrecht und aneinanderstoßende Würfel haben eine gemeinsame Quadratfläche.

Von den möglichen 29 Würfel-Fünflingen wählen wir die drei aus, die uns Bild 1 zeigt. Da diese Spielsteine die Form von Großbuchstaben haben, wollen wir sie auch mit diesen Buchstaben *C*, *P* und *Z* bezeichnen.

Bild 1



Aufgabe 1: Verwendet man beim Zusammenkleben dieser drei Spielsteine übliche Spielwürfel, bei denen die Augensumme zweier gegenüberliegender Seiten 7 ist, wie groß ist dann jeweils die

a) kleinste,

b) größte Augensumme auf der gesamten Oberfläche der drei Fünflinge?

Von den möglichen acht Würfel-Vierlingen nehmen wir die fünf, die in Bild 2 dargestellt sind. Wir geben Ihnen Namen, die an der Anschauung orientiert sind und verwenden als Abkürzung die Anfangsbuchstaben, bei der Platte Pl zur Unterscheidung vom Fünfling P.

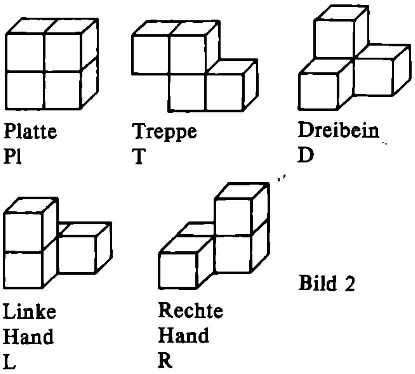


Bild 2

Aufgabe 2: Ermittle entsprechend der Aufgabe 1 die jeweils

a) kleinste,

b) größte Augensumme der fünf Vierlinge!

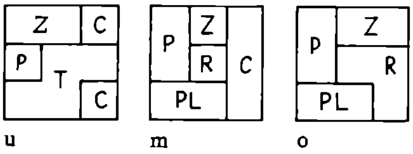
Wir setzen aus den Fünflingen und Vierlingen Würfel zusammen

Aus den drei Fünflingen und jeweils drei Vierlingen kann man einen (3, 3, 3)-Würfel zusammensetzen.

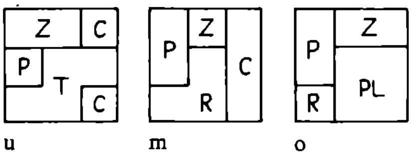
Aufgabe 3: Wieviel Möglichkeiten gibt es, aus den drei Fünflingen und verschiedenen Vierlingen einen solchen Würfel zusammenzusetzen?

Wählen wir z. B. die Vierlinge Pl, T und R, so gibt es zwei Lösungen, die im Bild 3 dargestellt sind.

Bild 3



1. Lösung



2. Lösung

u – untere Schicht
m – mittlere Schicht
o – obere Schicht

Aufgabe 4: Ermittle für jeden anderen Fall eine Lösung und zeichne sie entsprechend Bild 3 jeweils in drei Schichten!

Aufgabe 5: Für den Fall Pl, T und D wurde bisher noch keine Lösung gefunden. Versuche eine Lösung zu ermitteln oder führe einen Unmöglichkeitsbeweis für eine Lösung!

OStR G. Schulze, Herzberg

Mathematische Traditionen in Leipzig

Die Stadt Leipzig – deren Name sich vom slawischen Wort lipa für Linde herleitet – erlebte Ende des 14./Anfang des 15. Jahrhunderts einen raschen Aufschwung. Sie dürfte zur Mitte des Jahrhunderts bereits 6000 bis 7000 Einwohner besessen haben und sie war Ende des Jahrhunderts Hauptzentrum der Schwarzen Kunst, des Buchdruckes.

Seit 1409 besaß Leipzig eine Universität, als Folge dramatischer Vorgänge in Prag. An der dortigen, seit 1348 bestehenden Universität hatten sich die Glaubensgegensätze zwischen Katholiken und der hussitischen Partei und der Streit um die Rechte der bömischen bzw. deutschen Nation zugespitzt. Anfang 1409 kam es zum Bruch. Mitte Mai begann der Auszug der deutschen Nation. Es mögen etwa 2000 Studenten und 46 Lehrer gewesen sein; ein großer Teil wandte sich nach Leipzig. Der damalige Markgraf von Meißen, Friedrich der Streitbare, unterstützte die Gründung einer mit Prag konkurrierenden Universität als Teil seines Kampfes gegen den bömischen König Wenzel IV. Mit päpstlicher Genehmigung wurde die Universität am 2. Dezember 1409 im Augustinerkloster St. Thomas feierlich eröffnet.

Die Leipziger Universität trug anfangs reichlich konservative und altmodische Züge, trotz päpstlicher Empfehlungen, eine moderne Universitätsstruktur anzustreben. Insbesondere hielt man in Leipzig am Prinzip der sog. walzenden Lektionen fest, wonach jeder Lehrer im Wechsel über sämtliche Fächer vorzutragen hatte. Im Gegensatz zu den Universitäten von Wien, Krakow, Padua und Paris etwa kam es in Leipzig folgerichtig nicht zur Herausbildung von Spezialisten und herausragenden Fachgelehrten, auch nicht im Felde von Mathematik und Astronomie.

Lediglich zwei Namen bedeutender Mathematiker sind im 15. Jahrhundert mit der Leipziger Universität in Verbindung zu bringen. Der aus Königsberg in Franken stammende Johannes Müller (1436 bis 1476), der sich der Sitte der Zeit folgend einen lateinischen Namen zulegte und Regiomontanus (d. i. Königsberger) nannte, wurde bereits 1447 an der Leipziger Universität immatrikuliert. Als Zwölfjähriger(!) berechnete er einen Kalender für das Jahr 1484, genauer gesagt, ein Jahrbuch der Planetenörter sowie der Voll- und Neumonde für Leipzig. Doch schon 1450 verließ Regiomontanus Leipzig und wandte sich nach Wien, wo mit Georg Peurbach ein berühmter Lehrer der Astronomie wirkte. Regiomontanus seinerseits wuchs zu einem der bedeutendsten Mathematiker des 15. Jahrhunderts heran; u. a. verfaßte er eine zusammenfassende Darstellung der ebenen und sphärischen Trigonometrie.

Johannes Regiomontanus (1436 bis 1476) Mathematiker und Astronom in Leipzig

Für eine, wenn auch sehr kurze Zeit, schien es, als könne Leipzig zu einem Zentrum der Mathematik werden. Der vermutlich 1460 oder 1462 in Eger (dem heutigen Cheb in der ČSFR) geborene Johannes Widmann studierte seit 1480 in Leipzig und wurde 1485 Magister. Widmann hat 1486 Vorlesungen über Algebra gehalten, vermutlich die ersten Vorlesungen zu diesem Thema, die je stattgefunden haben. Es haben sich sogar die Widmannschen Entwürfe zu seiner Vorlesung und eine Art Studentennachschrift erhalten. Darüberhinaus hat der akademische Lehrer Widmann auch ein Lehrbuch des praktischen Rechnens verfaßt. Es trug den Titel „Behende und hübsche Rechenung auf allen Kaufmannschafft“ und wurde 1489 in Leipzig gedruckt.[1]) Vom Leben des Widmann nach 1489 fehlen sichere Nachrichten.

Widmanns Buch, in dem die Zeichen + und − erstmals im Druck vorkommen, hat die nachfolgende Entwicklung nachhaltig beeinflußt, insbesondere die große Zahl der im 16. Jahrhundert entstehenden Rechenbücher. Übrigens hat die Leipziger Universität ein positives Gutachten zum großen Rechenbuch „Rechenung nach der lenge auff den Linihen und Feder“ des Adam Ries abgegeben, das dann mit Kaiserlichem Privileg 1550 in Leipzig gedruckt wurde. Auch eine sog. „Brotordnung“ des Adam Ries wurde 1536 in Leipzig gedruckt. Diese Schrift sollte betrügerischen Manipulationen bei der Berechnung des Brotpreises vorbeugen und hat beispielgebend für die Bergstädte des Erzgebirges gewirkt. Und schließlich wurde Isaac Ries, ein Sohn des Adam, Rechenmeister und Visierer in Leipzig.

Die Reformation löste auch in Leipzig Unruhe und Machtkämpfe aus. Luther war schlecht auf die Stadt und ihre Theologen zu sprechen. Schließlich konnte sich neues Denken durchsetzen, auch an der Universität. Die walzenden Lektionen wurden abgeschafft und mit Georg Joachim Rhaeticus gelang es, einen namhaften Mathematiker nach Leipzig zu berufen. Er gehörte zum Wittenberger Gelehrtenkreis um Philipp Melanchthon, der sich große Verdienste um die Neuorganisation des Lehrbetriebes an reformierten Universitäten erwarb. Rhaeticus hatte sich frühzeitig um die Bekanntmachung und Veröffentlichung der heliozentrischen Astronomie des Nicolaus Copernicus bemüht und berechnete in Leipzig sehr genaue trigonometrische Tafeln. Er verstarb 1576 während einer Reise im damaligen Ungarn.

Die enge Bindung zwischen Mathematik und Astronomie war auch für Leipzig Ausgang des 16. Jahrhunderts bis Mitte des 17. Jahrhunderts typisch, doch es fehlte an herausragenden Lehrern. Und doch war es Leipzig, wo der 17jährige dänische Edelmann Tycho Brahe, zum Rechtsstudium an eine reformierte Universität entsandt, durch den Magister Johann Hommel zur Astronomie hingeführt wurde. Brahe wurde der bedeutendste Astronom vor Johannes Kepler.

Der Dreißigjährige Krieg warf Deutschland ökonomisch und in wissenschaftlicher Leistungsfähigkeit weit zurück; die Zentren der Wissenschaft lagen im 17. Jahrhundert in Westeuropa. Und so studierte der Leipziger Professorensohn Gottfried Wilhelm Leibniz zwar an der Universität seiner Vaterstadt und in Jena, zum überragenden europäischen Universalgelehrten dagegen wuchs er in Paris heran. Jedoch entstanden enge wissenschaftliche Beziehungen zwischen Leibniz und Leipzig. Der Leipziger Frühaufklärer Otto Mencke gab seit 1682, unterstützt vom Mathematiker und ehemaligen Rektor der Universität Christoph Pfautz, die „Acta Eruditorum“ (Berichte der Forscher) heraus, eine wissenschaftliche Zeitschrift, die bald internationalen Ruf erreichte. Hier fand Leibniz Publikationsmöglichkeiten für seine grundlegenden Arbeiten zur Differential- und Integralrechnung.

Während des 18. Jahrhunderts war Leipzig ein Zentrum der europäischen Aufklärung. Hier wirkte u. a. der Rechtsgelehrte Christian Thomasius und Caroline Neuber engagierte sich für ein modernes Theaterwesen. An der Leipziger Universität lehrte eine Reihe von Mathematikern, aus der Christian August Hausen und Abraham Gotthelf Kästner herausragen. Kästner trat mit einer Fülle damals vielgelesener Lehrbücher hervor. 1756 wurde er Professor in Göttingen und dort noch in hohem Alter einer der akademischen Lehrer von Carl Friedrich Gauß.

Am Ausgang des 18. Jahrhunderts wies Leipzig gegenüber anderen deutschen Universitäten eine Besonderheit auf. Es war Karl Friedrich Hindenburg gelungen, eine mathematische Schule aufzubauen, die sich kombinatorischen Problemen widmete. Hindenburg lehrte mehr als 20 Jahre, bis 1807, in Leipzig. Er war zugleich Hauptinitiator der Gründung und Herausgabe zweier mathematischer Fachzeitschriften in Leipzig, doch konnten sich diese, die ersten ihrer Art, noch nicht behaupten.

Die in West- und Mitteleuropa Ende des 18., Anfang des 19. Jahrhunderts stürmisch einsetzende Industrialisierung schuf für Mathematik und Naturwissenschaften eine neue, eine günstige Position. Einerseits wurden Anwendungen betont; die Mathematik fand über die Astronomie hinaus breite Verwendung in den Naturwissenschaften, in Mechanik, im Maschinenbauwesen, beim Eisenbahnbau. Andererseits konnte sich die Mathematik als reine Fachdisziplin nach Breite und Tiefe entfalten, getragen von jener allgemeinen gesellschaftlichen Anerkennung ihrer Wirksamkeit für die Praxis.

Die positiven Auswirkungen für die Mathematik zeigten sich auch an der Leipziger Universität, insbesondere nach der Universitätsreform von 1830. Wir finden im 19. Jahrhundert eine Reihe namhafter Mathematiker in Leipzig. So trat Karl Brandan Mollweide mit Arbeiten zur Trigonometrie und theoretischen Astronomie hervor, denen sich Heinrich Wilhelm Drobisch anschloß. Drobisch, selbst Sohn der Stadt, vertrat in der Lehre fast das gesamte Spektrum damaliger Mathematik, war engagiert beteiligt an der Modernisierung des Unterrichts an den Gymnasien im Königreich Sachsen und erwarb sich herausragende Verdienste um die Gründung – am 1. Juli 1846, anläßlich des 200. Geburtstages von Leibniz – der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig.

Die herausragende Leipziger mathematische Persönlichkeit jener Zeit begegnet uns in August Ferdinand Möbius. Er studierte in Leipzig, u. a. bei Mollweide und einige Zeit bei Gauß in Göttingen. Von ihm empfohlen begann er 1815 seine Lehr- und Forschungstätigkeit zur Astronomie, Mechanik und Mathematik und da besonders auf dem Gebiete der Geometrie. Das 1827 erschienene Werk „Der barycentrische Calcul“ ist damals nicht in seiner vollen Bedeutung gewürdigt worden. Erst später wurde erkannt, daß dem Kerngedanken nach jene gruppentheoretische Klassifizierung der Geometrie vorgezeichnet war, die unter dem Namen Felix Kleins als „Erlanger Programm“ von 1872 zu einem herausragenden Ereignis in der Geschichte der Mathematik geworden ist.

Möbius hat mehr als ein halbes Jahrhundert außerordentlich gewissenhaft seine Vorlesungstätigkeit wahrgenommen. Ihm verdankt man letzten Endes die Heranbildung ganzer Generationen von Gymnasiallehrern der Mathematik im sächsischen und thüringer Raum.

Neben Möbius waren während der Mitte des 19. Jahrhunderts u. a. noch Wilhelm Scheibner und der frühverstorbene Hermann Hankel tätig. Scheibner stand vorwiegend der mathematischen Astronomie nahe. Hankel dagegen gehört mit seinen Arbeiten über hyperkomplexe Systeme zu jenen weitschauenden Mathematikern, die sich dem Studium abstrakter algebraischer Strukturen zuwandten. Überdies war Hankel ein herausragender Kenner der Geschichte der Mathematik; auch in der Historiographie der Mathematik hat Hankel der späteren Entwicklung den Weg geebnet.

Mit dem Jahre 1868 ging eine ganze Periode der Mathematik in Leipzig zu Ende. Drobisch gab seine Professur für Mathematik auf und wandte sich voll der Philosophie zu. Möbius starb nach langen Jahrzehnten erfolgreichen Wirkens im Alter von 77 Jahren. Wohl bemühte sich Scheibner mit einigem Erfolg um die Stärkung der Mathematik an der Leipziger Universität. Carl Neumann, Adolf Mayer und K. von der Mühll vertraten höhere Analysis und mathematische Physik. Doch fand sich kein Geometer für Leipzig.

Felix Klein (1849 bis 1925)
Mathematiker in Leipzig

Mit der Berufung von Felix Klein im Jahre 1880 nach Leipzig, der schon damals einen internationalen Ruf besaß, konnte diese Lücke geschlossen werden. Mit ihm begann eine neue Entwicklungsetappe, die die Mathematik an der Leipziger Universität in eine europäische Spitzenstellung führen sollte. *H. Wußing*

1) siehe auch alpha Heft 4/89

Literatur:

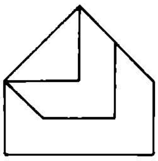
Geschichte Sachsens. Herausgegeben von Karl Czok. Weimar 1989.

100 Jahre Mathematisches Seminar der Karl-Marx-Universität Leipzig. Herausgegeben von H. Beckert und H. Schumann. Berlin 1981.

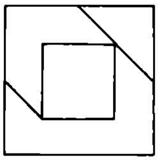
Biographien bedeutender Mathematiker. Herausgegeben von H. Wußing und W. Arnold. 4. Auflage. Berlin 1989.

Leserpost

1. In der alpha 1/90 erschien auf Seite 9 die Aufgabe „Geschickt geteilt“, bei der es sich offensichtlich um eine Variante des Problems zu Heft 6/88, S. 135 handelt. Ich möchte noch eine weitere Variante mit einer (meiner Meinung nach) geschickteren Teilung hinzufügen: Es genügt nämlich, die Figur *A* in drei Teile zu zerlegen, um daraus Figur *B* zusammenzusetzen.



A



B

Vielleicht interessiert euch auch die folgende kleine Aufgabe:
Wie heißt a) die kleinste, b) die größte Zahl, die sich aus den Ziffern 1, 9, 9, 0 (ohne Verwendung weiterer Zeichen) darstellen läßt? *A. Hempler, Rüdnitz*

2. Die Dichte von Kork beträgt $0{,}2\ldots0{,}35\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$.
Stellt euch vor, man hätte aus Kork mit einer Dichte von $\varrho = 0{,}25\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ eine Kugel mit einem Durchmesser von $d = 1\,\mathrm{m}$ geformt. Wie viele solcher Kugeln könnte man wohl auf ein Mal wegtragen?

K.-H. Milde, Dresden

3. Ein Polyeder *M* mit einem Volumen *V* liegt in einem Kubus, dessen Kantenlänge *a* ist. Man muß beweisen, daß es zwei Punkte in *M* gibt, die sich in einer Entfernung

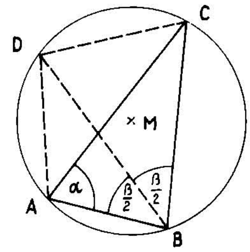
$$p \geqq \frac{V}{\lambda a^2}$$

voneinander befinden, wobei

$$\lambda > \frac{2}{3}\sqrt[3]{18} \text{ ist.}$$

Lubomir Lubenov, Stara Zagora, Bulgarien

4. Wie groß sind die Innenwinkel des Sehnenvierecks *ABCD*, wenn $\alpha = 78°$ und $\beta = 80°$ ist? *J. Kreusch, Löbau*



5. Ermittle alle positiven Wurzeln *x* und *z* welche der Gleichung

$$x^2 + 7056 = z^2$$

genügen! *A. Körner, Leipzig*

Leichter wird, wer Kenntnis hat, zur Erkenntnis reifen; wer noch nichts gelernt zuvor, der wird auch nichts begreifen.

Pindar
(522 bis um 446 v. u. Z., griech. Dichter)

XXIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der DDR-Olympiade

Die Aufgaben wurden im Heft 5/90 veröffentlicht.

Olympiadeklasse 10

291041 (Musterlösung der Aufgabenkommission):
I. Wenn ein Kreis c die Bedingungen (1), (2) erfüllt, so folgt: Ist M der Mittelpunkt und r der Radius von c, so hat M von jeder der Geraden g, h, j den Abstand

$$s=\sqrt{r^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\,. \qquad (3)$$

Dies ergibt sich aus dem Satz, daß jeweils das Lot von M auf eine Sehne diese halbiert, und aus dem Satz des Pythagoras.
Nach Voraussetzung bilden g, h, j die Seiten (und deren Verlängerungen) eines Dreiecks D. Also ist M einer der vier Punkte, die von den (einschließlich ihrer Verlängerungen verstandenen) Seiten von D jeweils drei gleichgroße Abstände haben; d. h., M ist der Inkreismittelpunkt oder einer der drei Ankreismittelpunkte von D, und die in (3) genannte Länge s ist der Inkreisradius bzw. der Radius des betreffenden Ankreises. Aus (3) folgt ferner, daß c den Radius

$$r=\sqrt{s^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2} \qquad (4)$$

hat.
II. Umgekehrt folgt: Wenn M der Mittelpunkt und s der Radius des Inkreises oder eines Ankreises von D ist und wenn hiermit r die nach (4) gebildete Länge ist, dann schneidet der um M mit r konstruierte Kreis c jede der drei Geraden g, h, j in einer Sehne, deren halbe Länge

$\sqrt{r^2-s^2}=\frac{a}{2}$ beträgt; d. h., dann erfüllt c die Bedingungen (1), (2).
Damit ist bewiesen: Für jede der in der Aufgabe genannten Vorgaben von g, j, j, a gibt es genau vier Kreise c, die (1) und (2) erfüllen.

Doz. Dr. W. Harnau,
Inst. f. Math. u. ihre Didaktik
Pädag. Hochschule Dresden

291042 (I) Für die Summe $s:=x+y$ zweier reeller Zahlen x, y mit

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1 \qquad (1)$$

folgt zunächst $\frac{1}{x}+\frac{1}{s-x}+\frac{1}{x(s-x)}=1$

und daraus

$$x^2-sx+s+1=0 \qquad (2).$$

Da in (1) notwendig $x\neq 0$ und $y=s-x\neq 0$ gilt, folgt aus (2) weiter

$0\neq x(s-x)=sx-x^2=s+1$, d. h.

$$s\neq -1 \qquad (3).$$

Andererseits wird (2) durch quadratische Ergänzungen zu

$\left(x-\frac{s}{2}\right)^2=\frac{s^2}{4}-s-1$. Folglich ist

$s^2-4s-4\geqq 0$, $(s-2)^2\geqq 8$

und schließlich

$$|s-2|\geqq 2\sqrt{2} \qquad (4).$$

Insgesamt liegt s also notwendigerweise in einem der Intervalle

$$s<-1;\ -1<s\leqq 2-2\sqrt{2}\,;$$
$$s\geqq 2+2\sqrt{2} \qquad (5).$$

(II) Ist umgekehrt s aus einem dieser Intervalle, so sind die Zahlen

$x=\frac{s}{2}+\sqrt{\frac{s^2}{4}-s-1}$ und

$y=\frac{s}{2}-\sqrt{\frac{s^2}{4}-s-1}$ reell (wegen (4)),

$\neq 0$ (wegen (3)), und es gilt $x+y=s$ sowie $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1$. Also sind die gesuchten Werte für s genau diejenigen, die in einem der Intervalle aus (5) liegen.

Dr. R. Labahn, Sektion Math.
der W.-Pieck-Universität Rostock

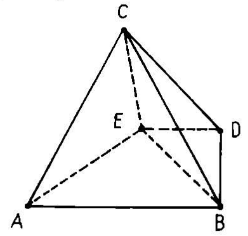
291043A Die Aufgabe läßt sich in zwei Teilaufgaben zerlegen, die den Schülern z. T. bekannt waren.
1. Für jede natürliche Zahl n gilt: Ist n zusammengesetzt, so ist 2^n-1 nicht Primzahl.
Beweis: Es sei $n=pq$ mit natürlichen Zahlen p, $q>1$. Dann ist mit $x=2^p$ die Zahl
$2^n-1=x^q-1=(x-1)(x^{q-1}+\ldots+x+1)$ wegen $x-1>2-1=1$ und $x^{q-1}+\ldots+x+1\geqq x+1>1$ zusammengesetzt.
2. Für jede natürliche Zahl $N>1$ gilt: Keine der $N-1$ Zahlen

$$n=N!+2,\ N!+3,\ \ldots,\ N!+N \qquad (1)$$

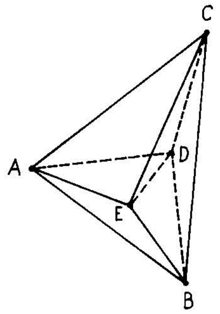
ist Primzahl, denn diese Zahlen sind jeweils durch 2, 3, …, N teilbar und größer als die genannten Teiler.
Wählt man ein $N>1$ mit $N>z+1$, so hat der mit den Zahlen n aus (1) gebildete Abschnitt der Folgeglieder 2^n-1 die Länge $N-1>z$, und in diesem Abschnitt gibt es aufgrund 1. keine Primzahl.

Dr. W. Moldenhauer, Inst. f. Math.
der Pädag. Hochschule Erfurt

291043B Wesentlich ist die Fallunterscheidung:
a) Es existieren vier Punkte – o. B. d. A. die Punkte A, B, C, D – so, daß der fünfte Punkt E im Inneren des Tetraeders $ABCD$ liegt (Bild a).



b) Negation von Fall a (Bild b)



Im Fall a lassen sich entweder ein oder zwei der Tetraeder mit dem Eckpunkt E aus dem Tetraeder $ABCD$ „herausschneiden“. Damit entstehen in diesem Fall 10 Polyeder.
Im Fall b muß eine der Verbindungsstrecken (im Bild b ist es DE) im Inneren des Körpers verlaufen, wenn $ABCDE$ konvex ist (konvexe Hülle). Schneidet man nun aus diesem konvexen Körper die drei Tetraeder heraus, die eine zu DE windschief verlaufende Kante haben, so erhält man drei weitere Körper. Damit existieren in diesem Fall 4 Polyeder.
In jedem Fall sind alle diese Polyeder voneinander verschieden, da sie nicht in allen Verbindungsstrecken übereinstimmen können und laut Voraussetzung alle Verbindungsstrecken voneinander verschieden sind.

Dr. H.-J. Sprengel, Sektion Math.
der Pädag. Hochschule Potsdam

291044 I. Wenn eine Eintragung die Forderung erfüllt, so folgt für die in Bild a mit x, y, z, w bezeichneten Zahlen: Da in der 1. und 2. Zeile sowie in der 1. und 3. Spalte je eine arithmetische Folge steht, gilt

$$y-x=65-y, \qquad (1)$$
$$41-z=w-41, \qquad (2)$$

X		Y		65
Z	41	W		
		81		
1				

$$3\cdot(z-x)=1-z, \qquad (3)$$
$$w-y=81-w. \qquad (4)$$

Aus (1) bzw. (2) folgt

$$x=2y-65 \qquad (5)$$

bzw. $z=82-w$. (6)

Setzt man dies in (3),
d. h. $4z-3x=1$ ein, so folgt
$328-4w-6y+195=1$, $2w=261-3y$.
Hieraus und aus (4), d. h.

$$2w=81+y, \qquad (7)$$

erhält man $261 - 3y = 81 + y$,

$$y = 45. \qquad (8)$$

Damit ergibt sich aus (7), (6), (5):

$$w = 63, z = 19, x = 25. \qquad (9)$$

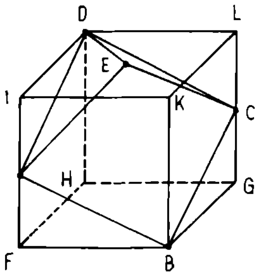
Aus diesen in (8), (9) genannten Werten ergeben sich durch Vervollständigung der arithmetischen Folgen die in Bild b genannten Zahlen, z. B. erst die in der 1. und 2. Zeile und dann die in den Spalten fehlenden Werte.

25	35	45	55	65
19	41	63	85	107
13	47	81	115	149
7	53	99	145	191
1	59	117	175	233

291045 (I) Die Verbindungsstrecken der 3 Seitenmitten des gegebenen gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge a zerlegen es in vier kongruente gleichseitige Teildreiecke der Seitenlänge $\frac{a}{2}$. Daher findet man bei jeder Verteilung von 5 Punkten nach dem Dirichletschen Schubfachschluß ein Teildreieck, in dem – einschl. des Randes – mindestens zwei der 5 Punkte liegen. Diese beiden haben einen Abstand, der nicht größer als die Seitenlänge, also nicht größer als $\frac{a}{2}$ ist. Folglich kann bei keiner Verteilung von 5 Punkten der kleinste Abstand zwischen 2 von ihnen größer als $\frac{a}{2}$ sein.

(II) Wir legen 2 der 5 Punkte in Eckpunkte und die restlichen 3 in die Seitenmitten des gegebenen Dreiecks. Dann ist der kleinste Abstand zwischen 2 von ihnen gleich $\frac{a}{2}$. Wegen (I) ist dies eine gesuchte Verteilung. *Dr. R. Labahn, Sektion Math. der W.-Pieck-Universität Rostock*

291046 Zunächst beweist man die Einzigkeit des Polyeders. Wegen der laut Aufgabenstellung gleichen Höhe von A und C über der Ebene durch F, B, G, H schneidet die Strecke $\overline{AC}$ die Strecke $\overline{BD}$ (= Raumdiagonale im Würfel). Damit liegen A, B, C und D in einer Ebene und E kann nur die Spitze einer „zugehörigen" vierseitigen Pyramide sein.



Für die Volumenberechnung bieten sich verschiedene Wege an:

1. Subtraktion der Volumina von Teilkörpern, die die Pyramide zu einem Würfel ergänzen, vom Würfelvolumen.
2. Direkte Berechnung des Volumens
2.1. mit $ABCD$ als Grundfläche
2.2. bei Zusammensetzung der vierseitigen Pyramide aus den beiden Tetraedern $ACED$ und $ACEB$.

Der Weg 2.2 ist der eleganteste.

In jedem Fall ergibt sich $V = \frac{1}{6}a^3$.

Dr. H.-J. Sprengel, Sektion Math. der Pädag. Hochschule Potsdam

Olympiadeklasse 11/12

291241 a) Zurückführen von (1) auf eine einfachere Gleichung:

I. Wenn (1) für ein reelles a ein reelles x als Lösung hat, so ist es auch Lösung der Gleichung

$$a + \sqrt{x} = x. \qquad (2)$$

Beweis: Wäre $a + \sqrt{x} > x$, so folgte

$a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}}} > a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{x}}} > \ldots > a + \sqrt{x} > x$ im Widerspruch gegen die Voraussetzung (1). (Im wesentlichen analog für $a + \sqrt{x} < x$.)

II. Wenn (2) für ein reelles a ein reelles x als Lösung hat, so ist es auch Lösung von (1). (Der Beweis erfolgt analog zu dem in I.)

b) Lösen der Gleichung (2) (einschl. Probe bzw. Rückschluß):

Für $a < -0{,}25$ hat (2) und damit (1) keine reelle Lösung x.

Für $a = -0{,}25$ ist $x = 0{,}25$ einzige Lösung von (2) und damit (1). Für $-0{,}25 < a \leqq 0$ sind genau die zwei Zahlen

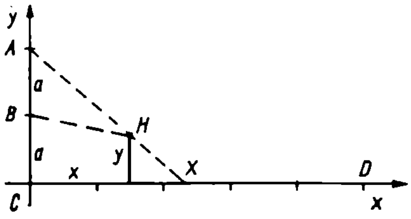
$x_{1,2} = 0{,}5 \cdot (2a + 1 \pm \sqrt{4a + 1})$,

für $a > 0$ genau die Zahl

$x = 0{,}5 \cdot (2a + 1 + \sqrt{4a + 1})$ Lösung von (2), also von (1).

Dr. M. Rehm, Sektion Math. der Humboldt-Universität Berlin

291242 Man lege ein Koordinatensystem so, daß C, B, A, D die Koordinaten $(0; 0)$, $(0; a)$, $(0; 2a)$ bzw. $(5a; 0)$ haben (Bild a).



Hat ein beliebiger Punkt H der Ebene die Koordinaten $(x; y)$ und bezeichnet v die größtmögliche Geschwindigkeit des Wolfs, also $2v$ die des Hasen, so erreicht der Hase den Punkt H geradlinig in der Zeit $t_1 = \frac{\overline{AH}}{2v}$ und der Wolf frühestens in der Zeit $t_2 = \frac{\overline{BH}}{v}$. Der Wolf kann somit genau dann den Punkt H weder gleichzeitig mit dem Hasen noch sogar eher als dieser erreichen, wenn für diese Zeiten $t_1 < t_2$ gilt. Das ist der Reihe nach äquivalent mit

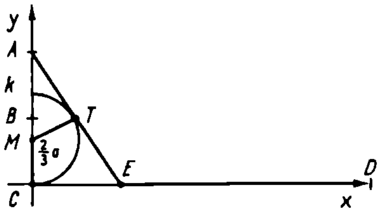
$\overline{AH} < 2 \cdot \overline{BH}$,

$\sqrt{x^2 + (y - 2a)^2} < 2 \cdot \sqrt{x^2 + (y - a)^2}$,

$3x^2 + 3y^2 - 4ay > 0$,

$$x^2 + \left(y - \frac{2}{3}a\right)^2 > \left(\frac{2}{3}a\right)^2. \qquad (1)$$

Damit ist gezeigt, daß der Hase durch Wahl seines Zielpunktes x genau dann erreicht, nicht unterwegs vom Wolf gefaßt zu werden, wenn die Koordinaten aller Punkte der Strecke AX die Ungleichung (1) erfüllen. Das trifft genau dann zu, wenn die Strecke AX vollständig außerhalb desjenigen Kreises k liegt, dessen Mittelpunkt M die Koordinaten $\left(0; \frac{2}{3}a\right)$ hat und dessen Radius $\frac{2}{3}a$ beträgt (Bild b).



Es sei nun E der Schnittpunkt der positiven x-Achse mit derjenigen von A an k gelegten Tangente, die die positive x-Achse schneidet. Für diesen Punkt E und für den Berührungspunkt T der Tangente gilt

$\overline{TM} = \frac{2}{3}a$, $\overline{MA} = \frac{4}{3}a$ und $\overline{\sphericalangle MTA} = 90°$,

also $\triangle CEA \sim \triangle TMA$,

$\overline{CE} : \overline{EA} = \overline{TM} : \overline{MA} = 1 : 2$,

$\overline{EA} = 2 \cdot \overline{CE}$, $\overline{CA} = \overline{CE}\sqrt{3}$,

$\overline{CE} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$.

Insbesondere liegt daher wegen $\frac{2}{3}\sqrt{3} < 5$ der Punkt E auf der Strecke CD, und es ist bewiesen: Die gesuchten Zielpunkte X sind genau die auf der Verlängerung von CE über E hinaus gelegenen Punkte der Strecke CD, d. h. genau die Punkte X auf CD mit $\overline{CX} > \frac{2}{3}a\sqrt{3}$.

291243 Als ein möglicher Versuch, aus dem in den beiden Gleichungen zwischen den Zahlen a, b, c und d gespeicherten Wissen, Hinweise über das gesuchte pythagoreische Zahlentripel zu erhalten, kann das Quadrieren der Gleichung $a + b = c - d$ dienen. Man erhält:

$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 - 2cd + d^2$, woraus unter Nutzung der Identitäten

$c = a + b + d$ und $a \cdot b = c \cdot d$

die Gleichung

$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + d^2 + 2ab + 2ad + 2bd - 2ab + d^2$ bzw.

$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2ad + d^2 + b^2 + 2bd + d^2$ also

$(a + b)^2 = (a + d)^2 + (b + d)^2$ folgt,

d. h. mit den Maßzahlen $u = a + d$, $v = b + d$ und $w = a + b$ sind (positiv-ganzzahlige) Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks gefunden.

Für den Flächeninhalt A dieses rechtwinkligen Dreiecks gilt:

$A = \frac{1}{2}u \cdot v = \frac{1}{2}(a + d)(b + d)$

$= \frac{1}{2}(ab + d(a + b + d)) = \frac{1}{2}(ab + cd)$

d. h. $A = a \cdot b$, also ist mit dem Zahlentripel $a + d$, $b + d$ und $a + b$ die Aufgabe gelöst.

Dr. M. Noack, Ministerium für Bildung

291244 I. Wenn für ein Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen das System (1), (2) gilt, so folgt

$$3x^2 + 2x + 4y^2 - 9y = 61,$$
$$16(3x + 1)^2 + 3(8y - 9)^2 = 3187, \qquad (3)$$
$$0 < (3x + 1)^2 \leqq 199,\ 0 < x \leqq 4.$$

Bei $x = 1; 2; 4$ ergibt sich für y keine natürliche Zahl. Für $x = 3$ folgt (aus (3)) $y = 4$ und (aus (2)) $z = 6$. Somit kann nur das Tripel (3, 4, 6) aus natürlichen Zahlen bestehen und (1), (2) erfüllen.

II. Die Probe zeigt, daß dieses Tripel (1), (2) erfüllt.

Dr. M. Rehm, Sektion Math. der Humboldt-Universität Berlin

291245 Ein Koordinatensystem sei so gewählt, daß folgende Punkte folgende Koordinaten haben: $B(0, 0, 0)$, $C(a, 0, 0)$, $A(0, a, 0)$, $F(0, 0, a)$. Dann haben M, H die Koordinaten $\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}\right)$ bzw. (a, a, a) und g ist die Menge aller Punkte

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{at}{2}, at, \frac{a}{2} + \frac{at}{2}\right),\ t \in R.$$

Mit $s = \frac{1 + t}{2}$ besteht g aus der Menge aller Punkte $(as, a(2s - 1), as)$, $s \in R$. Jeder Punkt aus ε_1 kann durch $(x, y, 0)$ und jeder Punkt aus ε_2 durch $(v, 0, w)$ beschrieben werden. Der Mittelpunkt einer Verbindungsstrecke zweier solcher Punkte hat die Koordinaten

$\left(\frac{x + v}{2}, \frac{y}{2}, \frac{w}{2}\right)$ und liegt genau dann auf g, wenn es ein $s \in R$ mit

$\frac{x + v}{2} = as$, $\frac{y}{2} = a(2s - 1)$, $\frac{w}{2} = as$ gibt.

Dies gilt genau dann, wenn $x + v = w$, $y = 2w - 2a$ ist. Das Quadrat q der zu betrachtenden Streckenlänge ist

$$\begin{aligned} q &= (x - v)^2 + y^2 + w^2 \\ &= (w - 2v)^2 + (2w - 2a)^2 + w^2 \\ &= (w - 2v)^2 + \frac{(5w - 4a)^2 \cdot 4a^2}{5}. \end{aligned}$$

Es nimmt seinen kleinsten Wert genau dann an, wenn $w - 2v = 0$ und $5w - 4a = 0$ ist, also wenn $w = \frac{4a}{5}$, $v = x = \frac{2a}{5}$, $y = \frac{-2a}{5}$, $s = \frac{2}{5}$ gilt.

Der kleinste Wert von q ist damit gleich $\frac{4a^2}{5}$, die gesuchte kleinste Länge beträgt mithin $2a\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Dr. W. Moldenhauer, Inst. f. Math. der Pädag. Hochschule Erfurt

291246A 1. Für jeden Zug, bei dem eine Kugel aus Urne A in Urne B gelegt wird, gibt es genau m gleichwahrscheinliche Möglichkeiten; bei einem Zug, wo eine Kugel von B nach A gelegt wird, sind es genau $n + 1$ gleichwahrscheinliche Möglichkeiten. Insgesamt gibt es daher für die Folge der ersten vier Züge genau $m^2(n + 1)^2$ verschiedene gleichwahrscheinliche Möglichkeiten.

2. Wir bestimmen nun die Anzahl der Möglichkeiten im ersten bis vierten Zug, eine rote bzw. blaue Kugel herauszugreifen: Für den Fall, daß im *1. Zug* eine rote Kugel gegriffen wird, gibt es genau m Möglichkeiten (daß eine blaue gegriffen wird, 0 Möglichkeiten).

Im *2. Zug* gibt es für jeden der m (durch den 1. Zug möglichen) Fälle genau n Möglichkeiten, eine blaue Kugel und genau eine Möglichkeit, eine rote Kugel zu greifen.

Im *3. Zug* gibt es für jeden der $n \cdot m$ Fälle (wo im 2. Zug eine blaue Kugel gegriffen wurde) $(m - 1)$ Möglichkeiten, eine rote und 1 Möglichkeit, eine blaue Kugel herauszugreifen. Für jeden der $1 \cdot m$ Fälle (wo im 2. Zug eine rote Kugel gegriffen wurde) gibt es m Möglichkeiten, eine rote und 0 Möglichkeiten, eine blaue Kugel herauszugreifen. Schließlich gibt es beim *4. Zug* für jeden der $(m - 1) \cdot n \cdot m$ Fälle (2. Zug blau, 3. Zug rot) 2 Möglichkeiten, eine rote (und $n - 1$ Möglichkeiten, eine blaue) Kugel zu greifen; für jeden der $1 \cdot n \cdot m$ Fälle (2. und 3. Zug blau) genau 1 Möglichkeit, eine rote (und n Möglichkeiten, eine blaue) Kugel zu greifen; für jeden der $m \cdot 1 \cdot m$ Fälle (2. und 3. Zug rot) genau 1 Möglichkeit, eine rote (und n Möglichkeiten, eine blaue) Kugel herauszugreifen. So ergibt sich als Anzahl S der günstigen Fälle (d. h. im 4. Zug wird eine rote Kugel gegriffen):

$$S = 2 \cdot (m - 1) \cdot n \cdot m + 1 \cdot 1 \cdot n \cdot m + 1 \cdot m \cdot 1 \cdot m.$$

Also ist die Menge aller ganzzahligen Paare $(m; n)$ zu finden, für die

$$\frac{m \cdot n + 2(m - 1)n \cdot m + m^2}{m^2(n + 1)^2} = \frac{1}{2} \text{ ist.}$$

Wegen $m \neq 0$ gilt diese Gleichung genau dann, wenn

$$(\ast) \qquad m - 2n + 2mn - mn^2 = 0$$

ist, woraus folgt, daß einerseits m ein Teiler von $2n$ ist, andererseits aber m von n geteilt wird.

Somit gilt $m = t \cdot n$ mit $t = 1$ oder $t = 2$. Für $t = 1$ wird $(\ast)$ zu $-n + 2n^2 - n^3 = 0$ bzw. $n \cdot (n - 1)^2 = 0$.

Diese Gleichung hat wegen $n = m$ und $n + m > 2$ keine Lösung. Der Fall $t = 2$ hingegen führt zu $4n^2 - 2n^3 = 0$, woraus unmittelbar $n = 2$, $m = 4$ folgt. Diese Zahlen erfüllen in der Tat die Ausgangsgleichung. Also hat genau die Vorgabe von 4 roten und 2 blauen Kugeln die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft.

Dr. M. Noack, Ministerium für Bildung

291246B I. Angenommen, f und g seien zwei Funktionen, die beide den (für g entsprechend umzuformulierenden) Bedingungen (1), (2), (3) genügen. Es sei x_0 eine beliebige reelle Zahl und hierzu $c = f(x_0) - g(x_0)$. Dann folgt aus (3), mit $x = \frac{x_0}{n}$ auf f und g angewandt,

$$c = f(x_0) - g(x_0) = \frac{1}{n} \cdot \left(f\left(\frac{x_0}{n}\right) - g\left(\frac{x_0}{n}\right)\right).$$

Durch vollständige Induktion beweist man hieraus für jedes natürliche

$$k \geqq 1 \quad n^k \cdot c = f\left(\frac{x_0}{n^k}\right) - g\left(\frac{x_0}{n^k}\right).$$

Wegen (2) existieren mit $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{1}{n^k} = 0$ auch die Grenzwerte

$$\lim_{k \to \infty} f\left(\frac{x_0}{n^k}\right) = f\left(\lim_{k \to \infty} \frac{x_0}{n^k}\right) = [f(0)] \text{ und}$$

$\lim\limits_{k \to \infty} g\left(\frac{x_0}{n^k}\right) = [g(0)]$, also existiert auch der Grenzwert $\lim\limits_{k \to \infty} (n^k \cdot c)$.

Das ist aber nur für $c = 0$ möglich.

Da diese Schlüsse mit jeder beliebigen reellen Zahl x_0 ausgeführt werden können, gilt folglich $f(x) = g(x)$ für alle reellen Zahlen x. Es kann also höchstens eine Funktion f geben, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt.

II. Die oben in (6) definierte Funktion genügt diesen Bedingungen (Nachweis wie im 1. Lösungsweg). Eine weitere Beweisvariante besteht darin, aus (3) mit dem Ansatz $f(x) = a + b$ sogleich $b = 0$, $a = \frac{n}{n^2 - 1}$ zu erhalten, dann für die Funktion $c(x) = f(x) - \frac{nx}{n^2 - 1}$ die Bedingungen (1), (2) und $c(x) = \frac{1}{n} \cdot c\left(\frac{x}{n}\right)$ herzuleiten und daraus ähnlich wie oben $c(x) = 0$ für alle x zu beweisen.

Was wird aus den Olympiaden?

Zu einer Diskussion über dieses Thema trafen sich Teilnehmer des Mathematiker-Kongresses der (noch) DDR, der vom 10.–14. September 1990 in Dresden stattfand.

Das Interesse war so groß, daß zunächst ein Umzug in einen größeren Raum notwendig war.

In einem waren sich die zahlreichen Olympiadeenthusiasten einig:

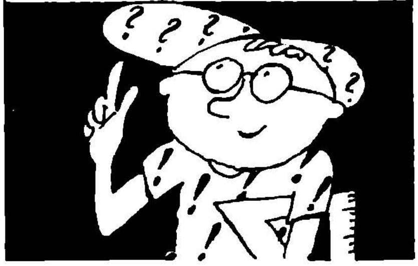
Diese Olympiadebewegung hat sich bestens bewährt, sollte beibehalten, sogar auf ganz Deutschland ausgedehnt werden. Organisieren will man sie künftig auf Länderebene, Länderkomitees wurden bereits in Thüringen, Brandenburg, Mecklenburg-Vorpommern und Sachsen gebildet. Für die Finanzierung müssen neue Wege gegangen werden. Sehr wesentlich dürfte dabei die Unterstützung der (in Ostdeutschland noch zu bildenden) Kulturministerien sein. Und noch ein Fakt muß Berücksichtigung bei der zukünftigen Konzipierung der Olympiaden finden – die Abstimmung mit dem Bundeswettbewerb. Dieser jährlich stattfindende Mathematikwettbewerb spricht die Sekundarstufe II, also die 11.–13. Klasse an, sein Ziel besteht ebenfalls in der Findung mathematisch interessierter und begabter Schüler.

(In einem der nächsten Hefte informieren wir Euch näher über ihn.)

Sinnvoll wäre nun sicher, beide Formen der Mathematikförderung und Begabungsfindung zu vereinen.

Die erste Runde des nächsten Bundeswettbewerbes findet im Dezember statt. Da zum Redaktionsschluß unseres Heftes 6 die Aufgaben noch nicht vorlagen, können wir sie nicht veröffentlichen, sind aber gern bereit, Euch die Aufgaben zuzusenden. Bitte legt Eurem Schreiben einen frankierten und adressierten Rückumschlag bei.

Lösungen



Lösung zur Preisaufgabe Heft 4/90

Kleinster Gang:
Übersetzungsverhältnis 2,8
Entfaltung 6,2
196 800 m : 6,2 m = 31 741,9 ≈ 31 800
Größter Gang:
Übersetzungsverhältnis 4,6
Entfaltung 10,1
196 800 m : 10,1 m = 19 486,1 ≈ 19 500
Fahrzeit 16 342 s
16 342 s : 19 500 Umdrehungen = 0,8 s/Umdrehung. Also
1. 31 800 Umdrehungen
2. 19 500 Umdrehungen, durchschnittlich 0,8 s/Umdrehung

Ein Autogrammfoto von Olaf Ludwig haben gewonnen:
Kai Uwe Zimmermann, Neustrelitz;
Ulrike Krause, Görlitz;
Mechthild Krause, Görlitz;
Stan Ileana, Tirgu Mureş (Rumänien)

Lösung zu: Arithmetik mit 6
Heft 5/90

$(0!+0!+0!)! = 6$ $\quad (5-5)!+5 = 6$
$0+(1+2)! = 6$ $\quad 7-6+5 = 6$
$(1+1+1)! = 6$ $\quad 6\cdot 6:6 = 6$
$1+2+3 = 6$ $\quad (8-7)\cdot 6 = 6$
$2+2+2 = 6$ $\quad 7-(7-7)! = 6$
$4\cdot 3:2 = 6$ $\quad 7+8-9 = 6$
$3\cdot 3-3 = 6$ $\quad \left(\sqrt{8+(8-8)!}\right)! = 6$
$5+4-3 = 6$ $\quad \left(\sqrt{10-9+8}\right)! = 6$
$4+4-\sqrt{4} = 6$ $\quad \sqrt{9}\cdot\sqrt{9}-\sqrt{9} = 6$
$((6!):5):(4!) = 6$ $\quad \left(\sqrt{10-(10-10)!}\right)! = 6$

Lösungen zu: Logisch kombinieren

$$\begin{array}{l} \text{a) } 355 - 133 = 222 \\ \quad : \quad\ + \qquad - \\ \quad 5 \ \cdot \ \ 3 = \ 15 \\ \hline \quad 71 + 136 = 207 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{b) } 365 - 47 = 318 \\ \quad : \quad\ + \qquad - \\ \quad 5 \ \cdot \ 33 = 165 \\ \hline \quad 73 + 80 = 153. \end{array}$$

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Die Krüge
Herr Crucheau, der in der Wüste lebt, fährt mit seinem Lieferwagen und seinen Krügen zum Markt der benachbarten Oase. Er besitzt 9 Gefäße mit den folgenden Inhalten: 3 l, 6 l, 10 l, 11 l, 15 l, 17 l, 23 l, 25 l und 30 l.
Er kommt zurück mit zweimal mehr Kamelmilch als Olivenöl und mit dreimal mehr Wasser als Kamelmilch. Alle seine Gefäße sind randvoll gefüllt, bis auf eines, das leer blieb.
Könnt ihr für jeden der Krüge angeben, welche Flüssigkeit er enthält?
Lösung: Mit Olivenöl sind die Krüge mit 3 l und 10 l Fassungsvermögen gefüllt. Wasser befindet sich in den Krügen mit 6 l, 17 l, 25 l und 30 l Fassungsvermögen. In den Gefäßen mit 11 l und 15 l Fassungsvermögen ist Kamelmilch. Der 23 l-Behälter bleibt leer.

▲2▲ Setzt in die Kreise der auf der Zeichnung dargestellten Figur die Zahlen 1, 2, ..., 11 derart ein, daß die Summe der Zahlen an den Ecken eines jeden Quadrates dieselbe ist.
Lösung: 1 10 3
8 7 6 5 4
9 2 11

▲3▲ Was siehst du?
Sieh dir die Zeichnung sorgfältig an, konzentriere dich auf die Mitte. Nach einer Weile wirst du bemerken, daß sich das Bild verändert. Der Teil der Zeichnung, den du in der Tiefe wahrnimmst, hat sich plötzlich bewegt. Wenn du dich weiter konzentrierst, wird er wieder seinen Platz wechseln und sich weiter vorwärts und rückwärts bewegen. Das zeigt, daß unsere Wahrnehmung eines Bildes von Veränderungen in unserem Nervensystem beeinflußt wird. Dieses Bild dachte sich ein 14jähriger Junge aus. Versuche ähnliche Bilder zu finden.

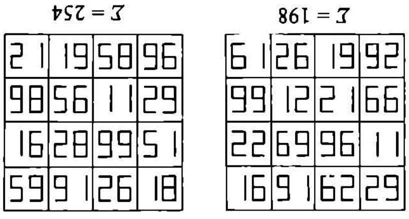
Lösung zur Quadratkomposition
Da die Veröffentlichung der gesamten Lösung unser Platzangebot überfordert, hier nur ein Hinweis:
1. Die Zeilen-Spalten- und Diagonalensumme im $n \times n$-Quadrat ist jeweils das n-fache der mittleren Zahl.

Lösungen zu: alpha-magisch

Magische Quadrate

18	31	14	27	10
11	19	32	15	23
24	12	20	28	16
17	25	8	21	29
30	13	26	9	22

Auf den Kopf gestellt
a) Eine mögliche Lösung unter Verwendung aller in Frage kommenden Ziffern



Σ = 194 Σ = 198

b) Eine mögliche Lösung (rechts)

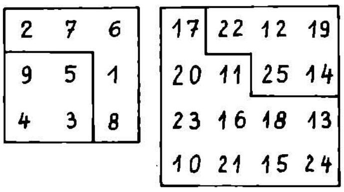
Magisches optisch attraktiv
2. Spalte: 22, 87, 39, 4, 50, 47, 80, 10, 100, 66.
9. Spalte: 7, 75, 29, 5, 84, 40, 44, 78, 85, 58.

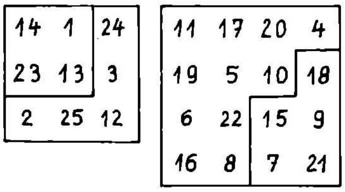
Magisches Karussell 6 7
Eine mögliche Lösung 3 2
1
9 8
4 5

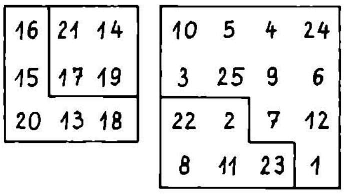
Mit Spiegel und Schere
a) Zum Beispiel bleibt folgendes Quadrat bei Spiegelung am oberen oder unteren Rand magisch.

IX	C	XCII	XXIII
XCIII	XXII	X	XCIX
XXI	XC	CII	XI
CI	XII	XX	XCI

b)

1.


2.


3.


Magische Primzahlen
a) Oben links beginnend im Uhrzeigersinn: 19 5 11 13 17 7; Mitte: 23
b) Von links nach rechts: oben 11 7 19 17; Mitte: 23 5; unten: 13

Magische Doppelkreise
Doppelkreise 3 + 14 + 15 + 8 = 40
Symmetrieachse
7 + 5 + 13 + 12 + 1 + 2 = 40
Symmetrieachse
4 + 10 + 11 + 9 + 0 + 6 = 40

Magische Begrüßung eines neuen Jahres
Eine Lösung:

71	213	91	233	111	253	131	273	151	293	171
193	93	235	113	255	133	275	153	295	173	73
95	215	115	257	135	277	155	297	175	75	195
217	117	237	137	279	157	299	177	77	197	97
119	239	139	259	159	301	179	79	199	99	219
241	141	261	161	281	181	81	201	101	221	121
143	263	163	283	183	61	203	103	223	123	243
265	165	285	185	63	205	83	225	125	245	145
167	287	187	65	207	85	227	105	247	147	267
289	189	67	209	87	229	107	249	127	269	169
191	69	211	89	231	109	251	129	271	149	291

In einem solchen magischen Quadrat ergibt sich noch folgendes: Die Summe der Zahlen ist in den mittleren 9 Feldern $3^2 \cdot 181$, in den mittleren 25 Feldern $5^2 \cdot 181$, ..., für alle Felder $11^2 \cdot 181$.

Lösungen zu:

Die Weihnachtspäckchen

Frank 7, Corina 3, Jens 5, Katrin 4, Jan 1, Steffen 6, Jörg 2, Petra 8.

Silvesterscherz

Ja! Die beiden Zwillinge wurden in einem Flugzeug geboren, das nach Ramonas, aber vor Daniels Geburt die durch den Pazifik verlaufende Datumsgrenze und auch eine Zeitzonengrenze von West nach Ost überquerte. Beim Überqueren der Datumsgrenze von West nach Ost ist die Datumsangabe um einen Tag zurückzuverlegen und beim Überqueren der Zeitzonengrenze von West nach Ost stellte der Vater seine Zonenzeit anzeigende Uhr notwendigerweise um eine Stunde vor.

Wie alt?

Die einzigen Produktdarstellungen von 1991 sind $1 \cdot 1991$ und $11 \cdot 181$. Grit ist 11 Jahre, die Uroma 89 und der Uropa 92 Jahre alt.

Lösungen zur Leserpost

1. a) z. B. 199° b) $9^{9^{10}}$

2. Keine! Diese Kugel hätte eine Masse von $m = V \cdot \varrho = \frac{\pi}{6} d^3 \cdot \varrho = \frac{\pi}{6} \cdot 1^3\,\text{m}^3$
$\times 0{,}25\,\text{tm}^{-3} = 0{,}13\,\text{t} \mathrel{\hat{=}} 130\,\text{kg}$!

3. Nehmen wir an, daß solche zwei Punkte mit einer Entfernung voneinander $p \geqq \frac{V}{\lambda a^2}$ nicht bestehen. Dann besteht eine Kugel mit einem Radius $\frac{V}{\lambda a^2}$, in der M gänzlich enthalten ist und wir können notieren, daß
$\frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{V}{\lambda a^2}\right)^3 > V$. Da $\pi < 4$ ist,
bekommen wir von der letzten Ungleichung, daß $\frac{16}{3} \cdot \frac{V^3}{\lambda^3 a^6} > V$, oder
$V^2 > \frac{3}{16} \cdot a^6 \cdot \lambda^3$. Dann
$V > a^3 \cdot \sqrt{\frac{3\lambda^3}{16}} > a^3$, für $\lambda > \frac{2}{3}\sqrt[3]{18}$.
Es stellt sich heraus, daß das Volumen von M größer als das Volumen des Kubus ist (Kantenlänge a). Das Letzte ist unmöglich, weil der Polyeder M gänzlich im Kubus mit der Kantenlänge a liegt.
Damit ist die Aufgabe gelöst.

4. $\overline{\sphericalangle DAC} = \frac{\beta}{2}$ (über $\widehat{DC} \rightsquigarrow \overline{\sphericalangle DAB} = 118°$
$\overline{\sphericalangle DCB} = 62°$ (Gegenwinkel) $\overline{\sphericalangle ADC} = 100°$ (Gegenwinkel)

5. Wegen $7056 = 84^2$ gilt $x^2 + 84^2 = z^2$.
Es handelt sich also um pythagoreische Zahlentripel.
Für $x^2 + y^2 = z^2$ gilt

$$\left.\begin{array}{l} x = p^2 - q^2 \\ y = 2pq \\ z = p^2 + q^2 \end{array}\right\} p,\, q = \text{ganze Zahlen} \neq 0,$$

also ist $2pq = 84$ oder $pq = 42$.
Die Wurzeln heißen:

x	y	z
13	84	85
187	84	205
437	84	445
1763	84	1765

XXXI. Internationale Mathematikolympiade

Peking, 8. bis 19. Juli 1990

Aufgaben

1. Die Sehnen AB und CD eines Kreises schneiden sich im Punkt E im Innern des Kreises. Sei M ein innerer Punkt der Strecke EB. Die Tangente in E an den Kreis durch D, E und M schneidet die Geraden BC und AC in F und G. Ist $t = \overline{AM}/\overline{AB}$, so bestimme man $\overline{EG}/\overline{EF}$ als Funktion von t.

2. Seien $n \geqq 3$ eine natürliche Zahl und E eine Menge von $2n-1$ verschiedenen Punkten eines Kreises. Genau k dieser Punkte werde schwarz gefärbt. Eine solche Färbung heißt gut, wenn es mindestens ein Paar schwarzer Punkte gibt, so daß mindestens einer der Bögen zwischen ihnen im Innern genau n Punkte von E enthält. Man bestimme die kleinste Zahl k, so daß jede Färbung von k Punkten von E gut ist.

3. Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n > 1$ für die

$$\frac{2^n + 1}{n^2}$$

eine ganze Zahl ist.

4. Sei Q^+ die Menge der positiven rationalen Zahlen.
Man konstruiere eine Funktion f: $Q^+ \rightarrow Q^+$, so daß

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y} \text{ für alle } x,\, y \in Q^+.$$

5. Gegeben sei eine natürliche Zahl $n_0 > 1$. Zwei Spieler A und B wählen abwechselnd natürliche Zahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots$ gemäß den folgenden Regeln:
Ist n_{2k} bekannt, so wählt A eine beliebige Zahl n_{2k+1} mit

$$n_{2k} \leqq n_{2k+1} \leqq n_{2k}^2.$$

Ist n_{2k+1} bekannt, so wählt B eine beliebige Zahl n_{2k+2} mit

$$\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}} \text{ ist eine Primzahlpotenz.}$$

A gewinnt, wenn er 1990 wählt, B gewinnt, wenn er 1 wählt.
Für welche n_0 hat
a) A eine Gewinnstrategie,
b) B eine Gewinnstrategie,
c) keiner von beiden eine Gewinnstrategie?

6. Man beweise, daß es ein 1990-Eck mit folgenden Eigenschaften gibt:
a) alle Innenwinkel sind gleich,
b) die Längen der Seiten sind die Zahlen $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 1989^2, 1990^2$ in gewisser Anordnung.

Jede Aufgabe 7 Punkte.

An der 31. IMO in China nahmen 308 Schüler aus 54 Ländern teil.
Unter ihnen befanden sich sechs Schüler aus unserer Republik.

Einen zweiten Preis (Silbermedaille) errangen:
Thomas Mautsch, EOS „J. W. v. Goethe“, Lübben
Jan Fricke, „Willi Sänger“ OS, Pasewalk
Torsten Ehrhardt, SPS „Hans Beimler“, Chemnitz
Ingrid Voigt, Spezialschule Leipzig

Einen dritten Preis (Bronzemedaille) errangen:
Astrid Mirle, SPS „F. Engels“, Riesa
Rüdiger Belch, SPS „Hans Beimler“, Chemnitz.

An zwei Klausurtagen mußten alle Teilnehmer sechs anspruchsvolle Aufgaben aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik lösen.

Delegationsleiter:
Prof. Dr. Gustav Burosch
Universität Rostock
Stellv. Delegationsleiter:
Prof. Dr. Hans-Dietrich Gronau,
Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

Inoffizielle Länderwertung – Preisverteilung

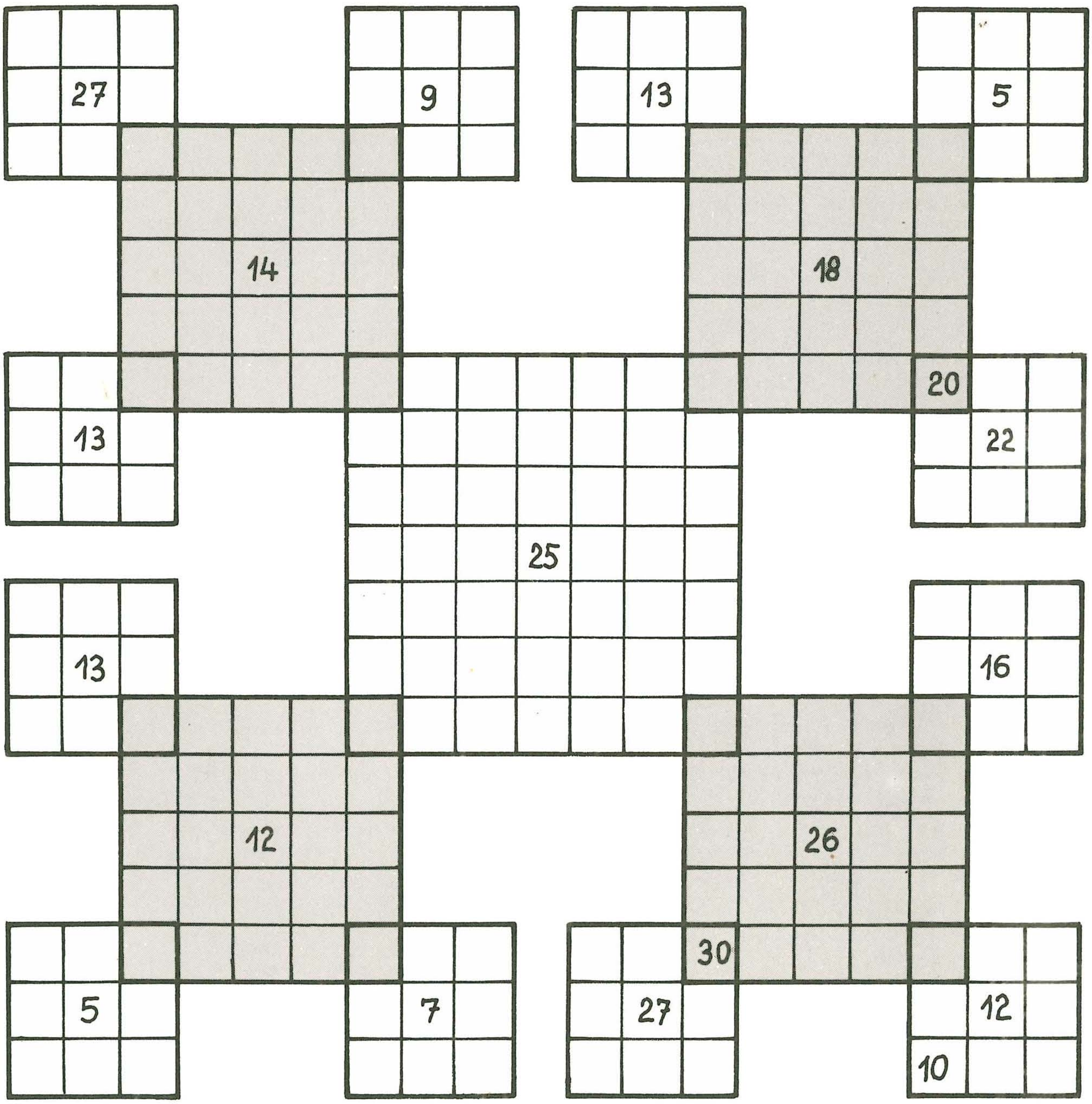
Platz	Land	1.	2.	3.
1.	China	5	1	–
2.	UdSSR	3	2	1
3.	USA	2	3	–
4.	Rumänien	2	2	2
5.	Frankreich	3	1	–
6.	Ungarn	1	3	2
7.	DDR	–	4	2
8.	ČSFR	–	5	1
9.	Bulgarien	1	4	1
10.	Großbritannien	2	–	2
11.	Kanada	–	3	1
12.	BRD	–	2	4
13.	Italien	1	1	4
14.	Australien	–	2	4
	Iran	–	4	–
	Österreich	–	1	4
17.	Indien	1	1	2
18.	Norwegen	–	3	1
19.	KVDR	–	1	3
20.	Japan	–	2	1
⋮				

Die 32. IMO findet in Schweden statt.

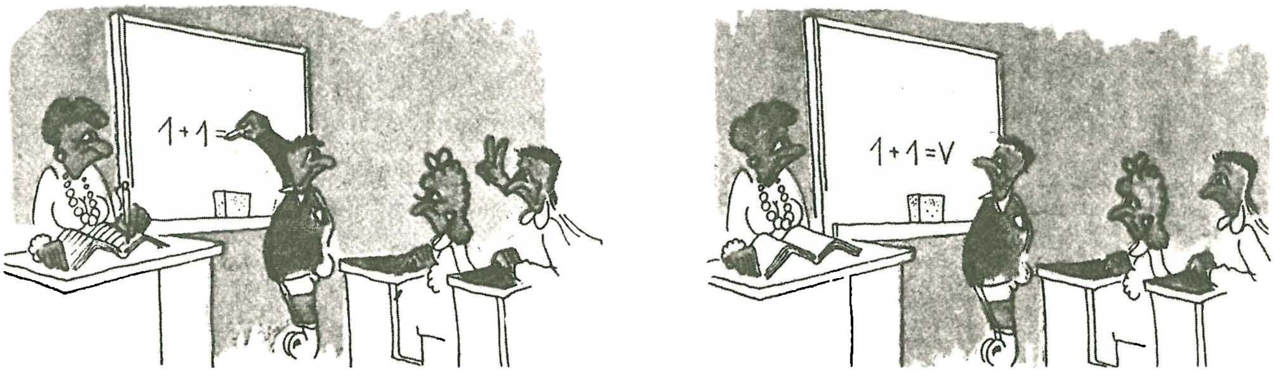
Quadratkomposition

Setzt die Zahlen von 0 bis 50 so in die Quadratkomposition ein, daß sich jeweils magische Quadrate ergeben.

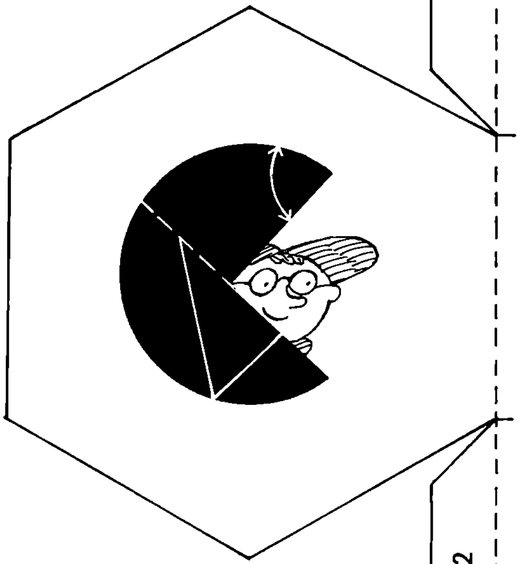
K. Ernst, Erfurt

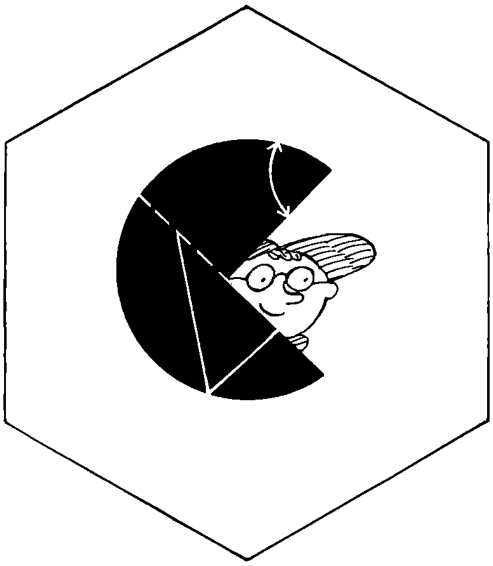


Czesław Przezak, aus: Eulenspiegel, Berlin



Jahreskalender 1991





2

JANUAR 1991 FEBRUAR

Mo		7	14	21	28		Mo		4	11	18	25	
Di	**1**	8	15	22	29		Di		5	12	19	26	
Mi	2	9	16	23	30		Mi		6	13	20	27	
Do	3	10	17	24	31		Do		7	14	21	28	
Fr	4	11	18	25			Fr	1	8	15	22		
Sa	5	12	19	26			Sa	2	9	16	23		
So	**6**	**13**	**20**	**27**			So	**3**	**10**	**17**	**24**		

3

MÄRZ 1991 APRIL

Mo		4	11	18	25		Mo	**1**	8	15	22	29	
Di		5	12	19	26		Di	2	9	16	23	30	
Mi		6	13	20	27		Mi	3	10	17	24		
Do		7	14	21	28		Do	4	11	18	25		
Fr	1	8	15	22	**29**		Fr	5	12	19	26		
Sa	2	9	16	23	30		Sa	6	13	20	27		
So	**3**	**10**	**17**	**24**	**31**		So	**7**	**14**	**21**	**28**		

3

2

MAI 1991 JUNI

Mo		6	13	**20**	27		Mo		3	10	17	24	
Di		7	14	21	28		Di		4	11	18	25	
Mi	**1**	8	15	22	29		Mi		5	12	19	26	
Do	2	**9**	16	23	30		Do		6	13	20	27	
Fr	3	10	17	24	31		Fr		7	14	21	28	
Sa	4	11	18	25			Sa	1	8	15	22	29	
So	**5**	**12**	**19**	**26**			So	**2**	**9**	**16**	**23**	**30**	

3

2

JULI 1991 AUGUST

Mo	1	8	15	22	29		Mo		5	12	19	26	
Di	2	9	16	23	30		Di		6	13	20	27	
Mi	3	10	17	24	31		Mi		7	14	21	28	
Do	4	11	18	25			Do	1	8	15	22	29	
Fr	5	12	19	26			Fr	2	9	16	23	30	
Sa	6	13	20	27			Sa	3	10	17	24	31	
So	**7**	**14**	**21**	**28**			So	**4**	**11**	**18**	**25**		

3

2

SEPTEMBER 1991 OKTOBER

Mo		2	9	16	23	30	Mo		7	14	21	28	
Di		3	10	17	24		Di	1	8	15	22	29	
Mi		4	11	18	25		Mi	2	9	16	23	30	
Do		5	12	19	26		Do	**3**	10	17	24	31	
Fr		6	13	20	27		Fr	4	11	18	25		
Sa		7	14	21	28		Sa	5	12	19	26		
So	1	**8**	**15**	**22**	**29**		So	**6**	**13**	**20**	**27**		

3

2

NOVEMBER 1991 DEZEMBER

Mo		4	11	18	25		Mo		2	9	16	23	30
Di		5	12	19	26		Di		3	10	17	24	31
Mi		6	13	**20**	27		Mi		4	11	18	**25**	
Do		7	14	21	28		Do		5	12	19	**26**	
Fr	1	8	15	22	29		Fr		6	13	20	27	
Sa	2	9	16	23	30		Sa		7	14	21	28	
So	**3**	**10**	**17**	**24**			So	**1**	**8**	**15**	**22**	**29**	

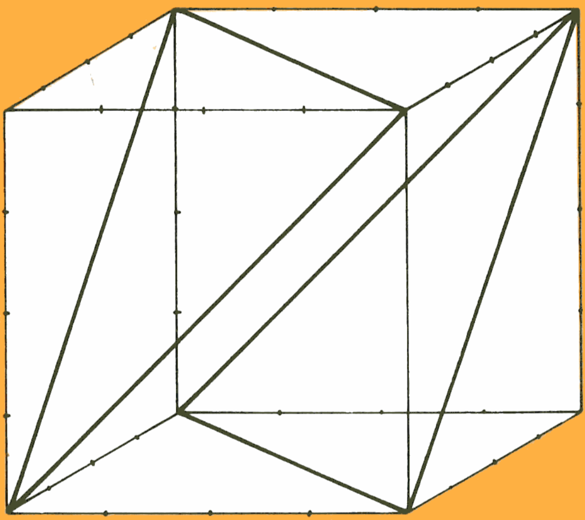
3

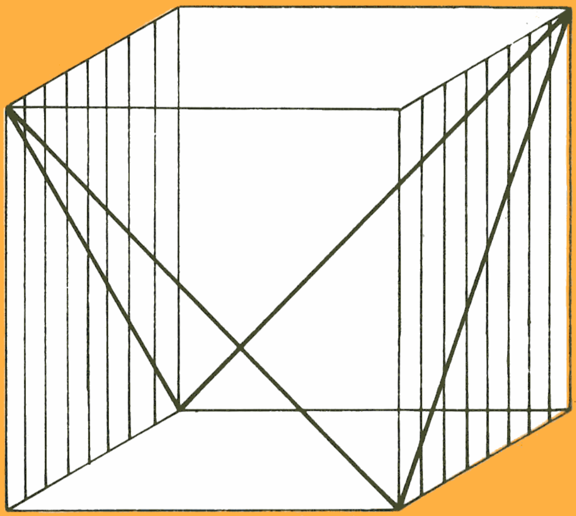
Die Idee zu diesem Kalender in Form eines sechsseitigen Prismas entnahmen wir der Zeitschrift „Mathematics in School", herausgegeben von der englischen mathematischen Gesellschaft „The Mathematical Association".

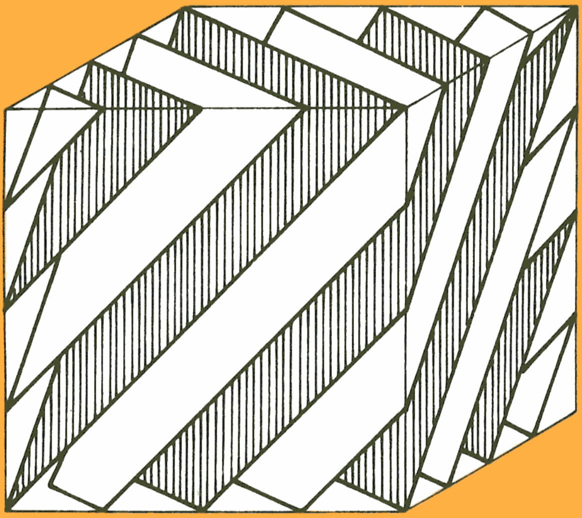
ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 24 (1990) 6 · Seiten 121 bis 144

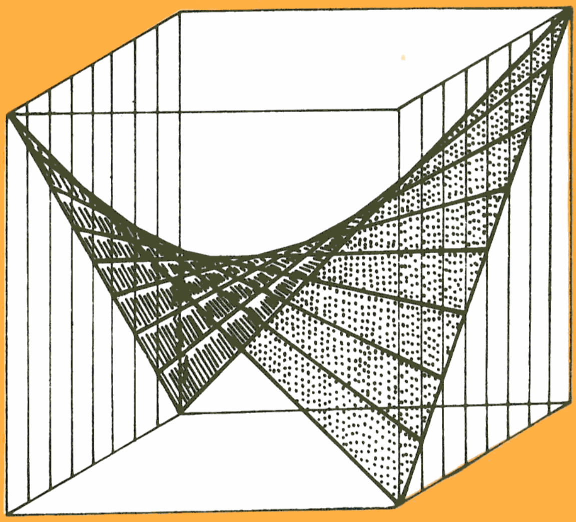
Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha









Mach's
mal
nach

Volk und Wissen
Verlag GmbH Berlin
25. Jahrgang 1991
Preis 1,50 DM
ISSN 0002-6395

1

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Verlag GmbH
Anschrift des Verlages:
Lindenstr. 54a, PSF 1213, Berlin, 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 14, Leipzig, 7027
Redaktion:
Dr. paed. Gabriele Liebau (Chefredakteur);

Lizenznummer: 1545
Erscheinungsweise: zweimonatlich

Abonnement für die neuen Bundesländer über die Deutsche Bundespost, Einzelheft 1,50 DM, im Abonnement zweimonatlich 1,20 DM

Abonnement für die alten Bundesländer und das Ausland über:
Friedrich Verlag, Vertrieb
Postfach 100150
W-3016 Seelze
Einzelheft 2,50 DM

Bei Bezugsschwierigkeiten wendet euch bitte direkt an die Redaktion.

Fotos: Wissenschaft und Fortschritt, Berlin (S. 1); J. Fricke, Pasewalk (S. 17)
Vignetten: L. Otto, Leipzig (Titelvignetten); H. Teske, Leipzig (IV. U.-Seite)
Technische Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Satz und Druck: Interdruck Leipzig GmbH
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 10. Dezember 1990
Auslieferungstermin: 12. Februar 1991

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Alphons weist euch auf Artikel mit geringerem Schwierigkeitsgrad hin. Das heißt aber nicht, daß alle anderen Beiträge für mathematische Anfänger ungeeignet sind. Probiert es selbst aus!

Die Fields-Medaille – mathematisches Pendant zum Nobelpreis

In jedem Jahr findet die Auswahl der Nobelpreisträger für die Gebiete Physik, Chemie sowie Physiologie und Medizin große Beachtung, insbesondere in der wissenschaftlichen Welt; der Literatur- und Friedensnobelpreis hingegen beanspruchen das Interesse einer noch breiteren Öffentlichkeit. Aber es gibt keinen Nobelpreis für Mathematik. Nobel wollte die Mathematik nicht unter die auszuzeichnenden Gebiete gerechnet wissen. Für den Grund dieses Ausschlusses gibt es keinen dokumentarischen Beweis, doch gibt der Mathematikerklatsch dafür einen persönlichen Konflikt zwischen Alfred Nobel und dem schwedischen Mathematiker Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846–1927) an.

Der irische Mathematiker J. L. Synge schreibt dazu: „Von Fields hörte ich über die Probleme zwischen Nobel und Mittag-Leffler. Ich nehme an, daß es sich um eine Sache persönlicher Eifersucht handelte ...“.

Der kanadische Mathematiker John Charles Fields (1863–1932), ein Freund Mittag-Lefflers, stiftete an Stelle des fehlenden Nobelpreises für Mathematik eine Auszeichnung. Fields legte 1884 an der Universität Toronto sein Bachelor-Examen ab und promovierte 1887 an der John-Hopkins-University in Baltimore. Dort lehrte er bis 1889, dann bis 1892 am Allegheny College (Pennsylvania) und ging schließlich für 10 Jahre nach Europa. Dort entstand seine Freundschaft mit Mittag-Leffler. Von 1902 bis zu seinem Tod 1932 war Fields Professor für Mathematik an der Universität in Toronto.


Vorder- und Rückseite der Fields-Medaille

1923 wurde die Internationale Mathematische Union (IMU) mit der Absicht gegründet, die Internationalen Mathematiker-Kongresse fortzusetzen, deren erster 1897 in Zürich stattgefunden hatte und deren Folge durch den ersten Weltkrieg unterbrochen worden war.

Der zweite Nachkriegskongreß fand 1924 entsprechend Fields Planung in Toronto statt.

Bei einem 1931 durchgeführten Treffen des ehemaligen Komitees für den Internationalen Mathematikerkongreß 1924 unter Vorsitz von Fields wird erstmals die Verleihung einer Mathematik-Medaille öffentlich erwähnt. Über den Charakter der Auszeichnung schrieb Fields: „Wohlgemerkt sollten die Auszeichnungen, wiewohl in Anerkennung bereits geleisteter Arbeit verliehen, gleichzeitig gemeint sein als Ermutigung für weitere Leistungen seitens der Empfänger und als Anreiz für neue Bemühungen seitens anderer“. Sie sollten ein „neuer Anfang in der Sache internationaler wissenschaftlicher Zusammenarbeit sein ... die Medaillen sollten einen rein internationalen Charakter haben, so unpersönlich wie möglich. In keiner Weise sollte mit ihnen der Name des Landes einer Institution oder Person verbunden sein“.

Fields vertrat eine auch heute aktuelle Position. „Sein langer Aufenthalt in Europa hatte ihm Einsichten in die Funktion der Universität und in die Rolle des Universitätsprofessors in der Gesellschaft Nordamerikas gegeben. An diesen Überzeugungen hielt er fest, und er bestand darauf, daß die Forschung eine mindestens ebenso wichtige Funktion sei, wie der Unterricht von Studenten der Anfangssemester ...“ (J. L. Synge). Fields starb 1932 noch vor dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Zürich und stiftete testamentarisch sein Vermögen im wesentlichen für Medaillen, welche auf den Internationalen Mathematiker-Kongressen verliehen werden sollten.

Auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Oslo 1936 wurden die ersten Medaillen vergeben.

Im Unterschied zu den von Alfred Nobel gestifteten Preisen bestand Fields darauf, daß nirgendwo ein Verweis auf den Stifter „seiner“ Medaille zu finden sei.

Der Entwurf der Medaille stammte von dem kanadischen Künstler Robert Tait McKenzie. Die Vorderseite zeigt Archimedes' Kopf im rechtsseitigen Profil und die Inschrift „TRANSIRE SUUM PECTUS MUNDOQUE POTIRI“ (Für das Überschreiten der Grenzen eines Menschen und für die Bezwingung der Welt), ferner des Künstlers Monogramm RTM und eine Jahresangabe. Die Inschrift der Rückseite heißt „CONGREGATI EX TOTO ORBE MATHEMATICI OB SCRIPTA INSIGNIA TRIBUERE“ (Die aus der ganzen Welt versammelten Mathematiker ehren beachtliche Beiträge zum Wissen); im Hintergrund ist die einem Zylinder einbeschriebene Kugel nach Archimedes zu sehen.

Wegen des zweiten Weltkrieges fand 14 Jahre lang keine Auszeichnung statt, erst 1950 wieder in Cambridge (USA). Die Medaillen werden entgegen den Vorstellungen des Stifters doch als Fields-Medaillen bezeichnet. Eine ungeschriebene Regel – sicher in Fields Sinn – legt fest, daß kein Preisträger zu benennen ist, der älter als 40 Jahre ist.

Trotz beachtlicher Leistungen deutscher Mathematiker findet sich erst 1986 ein Deutscher unter den Preisträgern: nämlich Gerd Faltings, BRD. Die durch zwei Weltkriege entstandenen Emotionen haben sicher zum Fehlen deutscher Mathematiker in der Liste der Fields-Medaillenträger beigetragen. Faltings, 1954 geboren, war zweifacher Preisträger beim Bundeswettbewerb Mathematik und studierte in Münster, 1978 promovierte er und verbrachte anschließend ein Jahr an der Harvard University. 1981 habilitierte er sich und wurde danach ordentlicher Professor an der Gesamthochschule Wuppertal. 1983 trug P. Deligne, selbst Fields-Medaillenträger, auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Warschau in einem Sondervortrag über Faltings Ergebnisse vor, und 1986 wurde jener mit der Fields-Medaille ausgezeichnet. Der Internationale Mathematikerkongreß 1990 fand in Kyoto (Japan) statt.

W. Engel

Redaktionell gekürzter Nachdruck des Beitrages gleichen Titels in: wissenschaft und fortschritt 2/1990, Berlin

K_5 – Der komplette 5er-Graph

1. Ein Spiel auf dem vollständigen 5er-Graphen

Zwei Spieler A und B verabreden folgendes Spiel auf dem vollständigen 5er-Graphen. Beide setzen einen Spielstein auf einen der 5 Eckpunkte. Dabei können sie durchaus den gleichen Eckpunkt wählen.

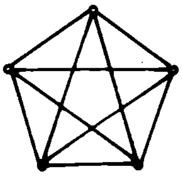
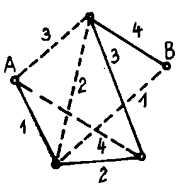
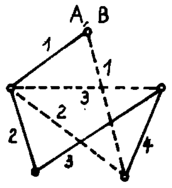
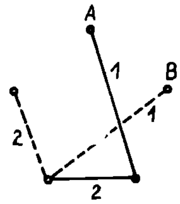


Bild 1
Das 5Eck mit seinen 5 Eckpunkten,
5 Seiten und 5 Diagonalen
bildet den kompletten 5er-Graphen K_5

Spieler A und Spieler B ziehen jetzt nacheinander längs der vorhandenen Linien zu einem weiteren Eckpunkt. Durchfahrene Linien werden etwa vom Spieler A stark nachgezeichnet, während sie vom Spieler B gestrichelt markiert sein sollen. Ein Spieler darf nicht die vom Gegenspieler markierten Linien benutzen. Jeder Spieler soll jeden Punkt genau einmal erreichen! Wenn der am Zuge befindliche Spieler nicht mehr fortfahren kann, hat er verloren. Das Spiel gilt als unentschieden, wenn beide Spieler zum Ziele gelangt sind, d. h. alle 5 Punkte nach 4 Zügen angelaufen wurden. In der folgenden Liste notieren wir drei mögliche Spielverläufe.

Spielverlauf			
Spielausgang	Unentschieden	A gewinnt nach 4 Zügen	B gewinnt nach 2 Zügen

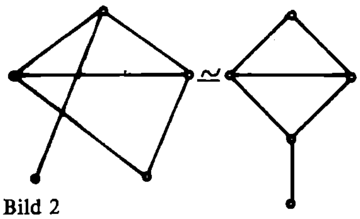


Bild 2
Das Verbindungsnetz der im letzten
Spielverlauf nicht benutzten Linien

Bei dem letzten Spielverlauf sind von den 10 Linien (Seiten und Diagonalen) des vollständigen 5er-Graphen 4 durch die erfolgten Züge markiert. Es verbleibt ein Restgraph von 6 Linien. Dieser besitzt das folgende Verbindungsschema:
Das ist nicht der einzige in dem vollständigen 5er-Graphen enthaltene 6kantige „Restgraph". Es kommen vielmehr noch die nachstehenden Möglichkeiten in Betracht.

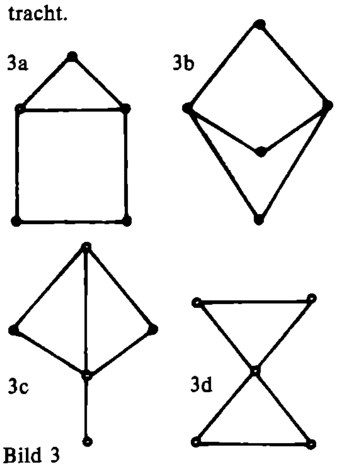


Bild 3
Weitere Verbindungsnetze innerhalb
des vollständigen 5er-Graphen,
die 6 Kanten besitzen

Wir wollen darüber nachdenken, ob die in Bild 3 dargestellten „Restgraphen" als nicht benutzte Linienzüge bei Spielverläufen im vollständigen 5er-Graphen entstehen können. Das führen wir beispielsweise für die „Hauskontur" (Bild 3a) durch. Die Spielzüge von A und B sind längs der fehlenden Kanten erfolgt. Das liefert ohne Einschränkung der Allgemeinheit die in Bild 4b angegebene Markierung.

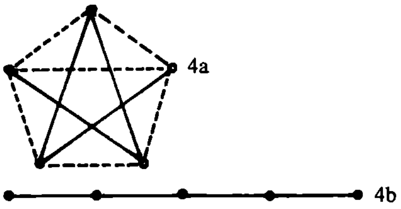


Bild 4
Die Hauskontur als 6kantiger Teilgraph
und der Ergänzungsgraph im
vollständigen 5er-Graphen

In dieser Art kann aber kein Spiel abgelaufen sein, wobei der Spieler B nach 2 Zügen gewinnt. Denn das Spiel müßte in einem Eckpunkt beendet worden sein, in den 2 markierte Linien einmünden.

Der Spieler A käme aber noch sehr wohl um einen Zug weiter, weil mindestens einer der Nachbarpunkte von ihm noch nicht besetzt war.

Aufgabe 1: Der Leser finde heraus, ob noch weitere Fälle von Bild 3 als Restgraphen von Spielverläufen ausscheiden.

2. Systematik der 5er-Graphen

Graphen spielen in den verschiedensten Disziplinen der Mathematik eine wichtige Rolle. Sie stellen ein Verbindungsschema von Punkten (den sogenannten *Knoten*) und Linien (den sogenannten *Kanten*) dar.
In anschaulicher Ausdeutung denke man sich die Knoten als Städte und die Verbindungslinien als Straßen zwischen diesen Städten. Dabei kommt es nicht auf die Länge der Verbindungswege sondern lediglich auf die gegenseitige Erreichbarkeit an. Zwei Städte, die durch eine Kante in Verbindung stehen, sind in diesem Sinne Nachbarstädte. Die Wiedergabe eines solchen Verbindungsschemas kann durch die Menge V der Knoten und die Menge E der Kanten erfolgen. Die Buchstaben V und E erklären sich aus den englischen Wörtern für Knoten bzw. Kanten: „vertex" (eigentlich: Wirbel) bzw. „edge". Man versucht dabei der Übersichtlichkeit halber die Kanten möglichst geradlinig zu zeichnen, obwohl das nicht notwendig ist. Ein Graph wird dann oft mit $G(V, E)$ bezeichnet. Es soll von jedem Knoten wenigstens eine Kante ausgehen. Bei unseren Graphen soll es zwischen zwei Knoten höchstens eine Kante geben.
Solche Graphen heißen *schlicht.* Anschaulich gesprochen: Der Fall, daß zwei Nachbarstädte durch zwei Straßen verbunden sind, wie z. B. Stralsund und Greifswald durch die Fernverkehrsstraßen 96 und 96a, soll ausgeschlossen sein. Daß eine Kante zu einem Knoten zurückführt – solche Kanten heißen *Schlingen* – soll auch nicht auftreten. Außerdem beschränken wir uns auf *zusammenhängende* Graphen. Das sind solche, wo je zwei Knotenpunkte durch eine Folge von Straßen (Kanten) untereinander erreichbar sind.
Das Straßensystem zwischen Dörfern der Insel Hiddensee und das Straßensystem zwischen den Städten des übrigen Bezirks Rostock sind zwei verschiedene zusammenhängende Graphen. Das gemeinsame System stellt einen unzusammenhängenden Graphen dar.
Bereits im Abschnitt 1. dieses Artikels hatten wir die dort betrachteten Spielverläufe durch Graphen dargestellt. Wir befassen uns jetzt mit der daraus resultierenden Aufgabe, alle zusammenhängenden, schlichten, schlingenlosen Graphen mit drei, vier und fünf Knoten aufzulisten.
Außerdem interessieren wir uns noch dafür, wie viele Kanten in einem Knoten zusammentreffen. Diese Anzahl nennt man die *Valenz des Knotens.* Bezeichne i_1 die Anzahl der Knoten in einem Graphen mit der Valenz 1, i_2 die mit Valenz 2, usw., so nennen wir das geordnete m-Tupel

$(i_1, i_2, \dots, i_m)$ den *Valenzvektor* des Graphen.

Feststellung: Ein schlichter, schlingenloser, zusammenhängender Graph aus n Knoten hat wenigstens $n-1$ Kanten.
Das kann man beispielsweise durch eine Induktionsschlußweise wie folgt begründen:
Induktionsanfang: $n = 2$, $k = 1$ (k Kantenzahl)
Induktionsschritt von n auf $n+1$: Bei Hinzunahme eines weiteren Knotens kommt mindestens eine Kante hinzu, die (wegen des Zusammenhangs des Graphen) den hinzugekommenen Knoten mit einem Knoten des ursprünglichen Graphen verbindet.

Aufgabe 2: (Für einen mit der vollständigen Induktion vertrauten Leser) Bezeichne k, k' bzw. n, n' die Kantenzahl bzw. Knotenzahl vor bzw. nach Hinzunahme eines weiteren Knotens, so läßt sich die Induktionsbehauptung formulieren durch

$$k' \geqq k + 1.$$

Beweise diese Formel unter Zugrundelegung der Induktionsannahme

$$k \geqq n - 1.$$

Es ist offensichtlich, daß bei einem schlichten, schlingenlosen Graphen von n Knoten der Valenzvektor ein $(n-1)$-Tupel ist, da ein Knoten bestenfalls die übrigen $n-1$ Knoten zu Nachbarn haben kann.
Welche Beziehungen bestehen nun zwischen der Knotenzahl n, der Kantenzahl k und den Valenzwerten? Bildet man die Summe

$$1 \cdot i_1 + 2 \cdot i_2 + \dots + (n-1) \cdot i_{n-1},$$

so hat man jede Kante des Graphen doppelt gezählt, und deshalb gilt

$$1 \cdot i_1 + 2 \cdot i_2 + \dots + (n-1) \cdot i_{n-1} = 2k. \qquad (1)$$

Summiert man andererseits die Valenzwerte, so erhält man für einen schlichten, schlingenlosen, zusammenhängenden Graphen die Beziehung

$$i_1 + i_2 + \dots + i_{n-1} = n, \qquad (2)$$

weil jeder Knoten einen eindeutig bestimmten Valenzwert zwischen 1 und $n-1$ hat. Notwendig für die Existenz eines schlichten, schlingenlosen und zusammenhängenden Graphen von n Knoten und k Kanten ist das Bestehen der beiden diophantischen Gleichungen (1) und (2).
Die Graphen der Spielverläufe, die als Kanten die durchgezogen und gestrichelt markierten Verbindungsstrecken haben, besitzen beispielsweise die folgenden Valenzvektoren:
1. Spielverlauf: (0, 1, 2, 2)
2. Spielverlauf: (0, 2, 2, 1)
3. Spielverlauf: (3, 1, 1, 0)
Nicht jede Lösung der diophantischen Gleichungen legt einen eindeutig bestimmten Graphen fest, wie man an gewissen Beispielen der folgenden Tabellen bemerken kann.
Wir wollen nun mit der Auflistung aller zusammenhängenden, schlichten, schlingenlosen Graphen der Knotenzahl 3, 4 und 5 beginnen.

Tabelle 1: Zusammenstellung möglicher Fälle der Lösungen der diophantischen Gleichung (1) bei einer Knotenzahl $n = 3$

Lfd. Nr.	k	diophantische Gleichung (1)	Lösung von (1)	Valenzvektor	Graph bzw. Kommentar
1	2	$a + 2b = 4$	$a = 0,\ b = 2$	(0, 2)	 keine Realisierung
2			$a = 2,\ b = 1$	(2, 1)	
3			$a = 4,\ b = 0$	(4, 0)	keine Realisierung
4	3	$a + 2b = 6$	$a = 0,\ b = 3$	(0, 3)	
5			$a = 2,\ b = 2$	(2, 2)	keine Realisierungen
6			$a = 4,\ b = 1$	(4, 1)	
7			$a = 6,\ b = 0$	(6, 0)	

Aufgabe 3: Vervollständige die Tabelle 1 und zeichne die zugehörigen Graphen!
Im folgenden werden nur noch die gemeinsamen Lösungen der diophantischen Gleichungen (1) und (2) betrachtet.

Tabelle 2: Die zusammenhängenden, schlichten, schlingenlosen Graphen mit 4 Knoten

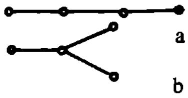
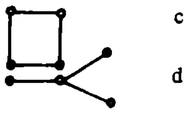
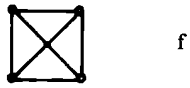
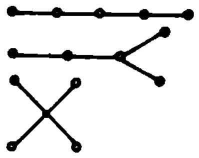
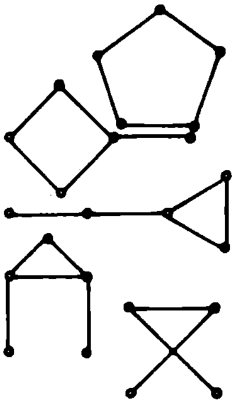
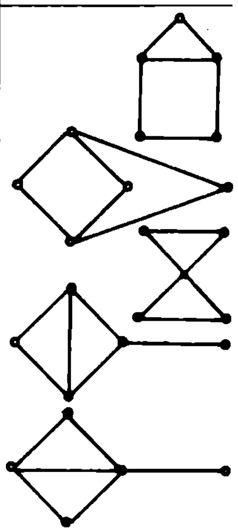
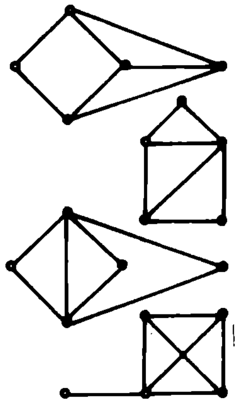
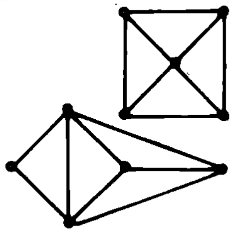
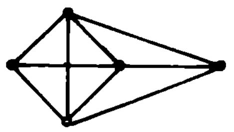
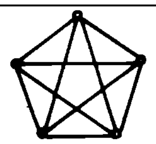
Lfd. Nr.	k	diophantische Gleichung (1)	Valenzvektor	Graph
1	3	$a + 2b + 3c = 6$	(2, 2, 0)	
2			(3, 0, 1)	
3	4	$a + 2b + 3c = 8$	(0, 4, 0)	
4			(1, 2, 1)	
5	5	$a + 2b + 3c = 10$	(0, 2, 2)	
6	6	$a + 2b + 3x = 12$	(0, 0, 4)	

Tabelle 3: Die zusammenhängenden, schlichten, schlingenlosen Graphen mit 5 Knoten

Lfd. Nr.	k	diophantische Gleichung (1)	Valenzvektor	Graph
1	4	$a + 2b + 3c + 4d = 8$	(2, 3, 0, 0)	
2			(3, 1, 1, 0)	
3			(4, 0, 0, 1)	
4	5	$a + 2b + 3c + 4d = 10$	(0, 5, 0, 0)	
5			(1, 3, 1, 0)	
6			(1, 3, 1, 0)	
7			(2, 1, 2, 0)	
8			(2, 2, 0, 1)	

Lfd. Nr.	k	diophantische Gleichung (1)	Valenzvektor	Graph
9	6	$a + 2b + 3c + 4d = 12$	(0, 3, 2, 0)	
10			(0, 3, 2, 0)	
11			(0, 4, 0, 1)	
12			(1, 1, 3, 0)	
13			(1, 2, 1, 1)	
14	7	$a + 2b + 3c + 4d = 14$	(0, 1, 4, 0)	
15			(0, 2, 2, 1)	
16			(0, 3, 0, 2)	
17			(1, 0, 3, 1)	
18	8	$a + 2b + 3c + 4d = 16$	(0, 0, 4, 1)	
19			(0, 1, 2, 2)	
20	9	$a + 2b + 3c + 4d = 18$	(0, 0, 2, 3)	
21	10	$a + 2b + 3c + 4d = 20$	(0, 0, 0, 5)	

Die Nummern 2 und 4 der Tabelle 1 ergeben die einzigen zusammenhängenden, schlichten, schlingenlosen Graphen der Knotenzahl $n = 3$. Die Untersuchung weiterer diophantischer Gleichungen (1) wie $a + 2b = 0$, $a + 2b = 2$, $a + 2b = 8$, ... wurde nicht vorgenommen, da keine Realisierungen in unserem Sinne zu erwarten sind.

Der Graph aus Tabelle 1 mit Nr. 2, die ersten beiden Graphen aus Tabelle 2 und die ersten drei Graphen aus Tabelle 3 heißen *Bäume*, während die anderen Zyklen enthalten.

Die Beispiele 5 und 6 bzw. 9 und 10 aus Tabelle 3 haben denselben Valenzvektor, obwohl die Graphen verschieden sind, während der Graph 17 aus dem Graphen  erhalten wird, indem man den inneren Knoten nach links oben verlegt, so daß er außerhalb des ihn umschließenden Dreiecks zu liegen kommt und mit diesen Knoten ein Viereck bildet. (Die Kanten bleiben in den Knoten befestigt.) Das kann man sich so realisiert denken, als ob die Kanten Gummibänder darstellten, die in den Knoten aneinander befestigt sind. Graphen, die in ähnlicher Weise auseinander hervorgehen, sollen zueinander *isomorph* heißen. Die Definition lautet mittels mengentheoretischer Begriffe wie folgt:

Zwei Graphen $G(V, E)$ und $G'(V', E')$ sind genau dann zueinander *isomorph*, wenn es eine eineindeutige Abbildung F von der Menge V auf die Menge V' gibt mit $F(x) = x'$, so daß für alle x, $y \in V$ Knoten x', $y' \in V'$ mit der Eigenschaft existieren: Die Kante $[x, y]$ gehört genau dann zu E, wenn die Kante $[x', y']$ zu E' gehört.

Isomorphe Graphen haben die gleiche Gestalt im Sinne des abstrakten Verbindungsschemas, können aber geometrisch verschieden realisiert sein.

Aufgabe 4: Weise nach, daß der Graph  zu  isopmorph ist!

Aufgabe 5: Weise nach, daß die Graphen der Beispiele 5 und 6 aus Tabelle 3 nicht isomorph sind, ebenso nicht die der Beispiele 9 und 10!

3. Die 5er-Graphen als Skelette von lustigen Figuren

Nach der systematischen Ermittlung aller möglichen zusammenhängenden 5er-Graphen geben wir noch unserer spielerischen Phantasie freien Lauf und stellen aus den Graphen amüsante Figuren her (siehe IV. Umschlagseite). Der Leser nehme die Angebote als Anreiz, um noch weitere Darstellungen zu finden.

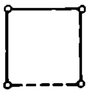
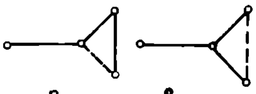
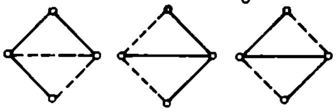
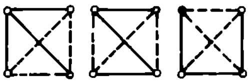
4. Aufspannende Bäume und Restgraphen

Kehren wir zum Anfang unserer Untersuchungen zurück! Der Spieler A kommt in den Spielen 1 und 2 genau einmal zu jedem Knoten des 5er-Graphen und zwar längs eines Baumes. Auch der Spieler B kommt im Spiel 1 zu jedem Knoten des 5er-Graphen längs eines Baumes.

Solche Bäume wollen wir aufspannend nennen. Präzis wollen wir sagen: Ein Teil eines Graphen G (Teilgraph) soll ein ***aufspannender Baum*** des Graphen G heißen, wenn jeder Knoten des Graphen G durch ihn genau einmal längs des Baumes erreicht wird. Den übrigbleibenden Teil des Graphen wollen wir „Restgraphen" nennen.

Unsere Aufgabe soll es nun sein, alle aufspannenden Bäume der Graphen mit 4 bzw. 5 Knoten zusammenzustellen. Die Auflistung soll bis zu einer gewissen Nummer bis auf Isomorphie vollständig erfolgen. Um nochmaliges Zeichnen der Ausgangsgraphen zu vermeiden, verwenden wir die Nummern der Tabellen 2 und 3 von Abschnitt 2 und zeichnen nur die aufspannenden Bäume in ausgezogener Linie, die Restgraphen gestrichelt (Tabelle 4 und 5).

Tabelle 4: Aufspannende Bäume und Restgraphen der Graphen mit 4 Knoten (vgl. Tabelle 2)

Lfd. Nr.	Tabelle 2
3	
4	
5	
6	

In Nr. 11 treten alle drei möglichen Bäume zum ersten Mal als aufspannende Bäume auf. Die Figur 14d ist isomorph zu .

Der aufspannende Baum in 14c ist natürlich isomorph dem von 14d und ebenso sind die entsprechenden Restgraphen isomorph. Aber die Bäume und Restgraphen sind beidesmal in ihrer gegenseitigen Kopplung unterschiedlich gelegen. Denn es gibt keinen Isomorphismus von 14c auf 14b, der die aufspannenden Bäume ineinander und auch gleichzeitig die Restgraphen ineinander überführt. Davon überzeugt man sich wie folgt: Die Knoten seien beginnend mit dem oberen zeilenweise fortlaufend numeriert mit 1, 2, ..., 5.

Wäre ein Isomorphismus vorhanden, so müßte gelten: $1 \mapsto 4$ (Das sind die einzigen Knoten des jeweils aufspannenden Baumes mit der Valenz 3) $5 \mapsto 2$ (Die Wurzelpunkte der entsprechenden Bäume).

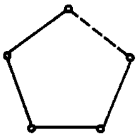
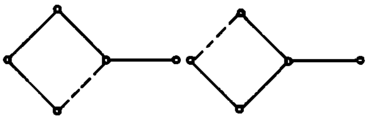
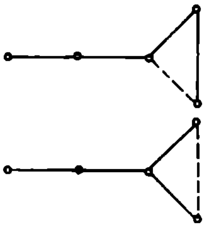
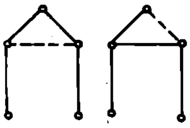
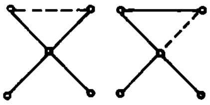
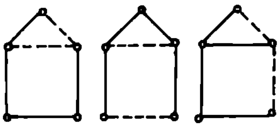
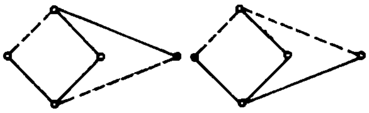
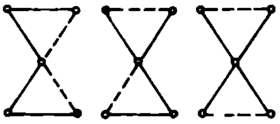
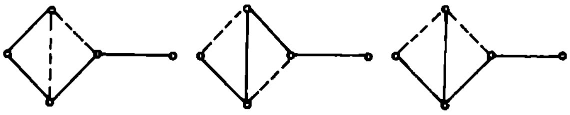
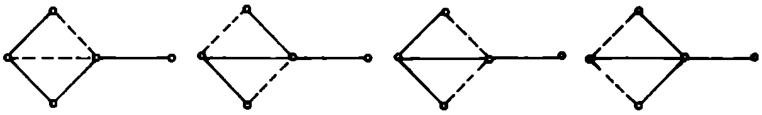
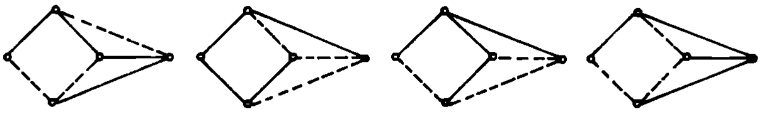
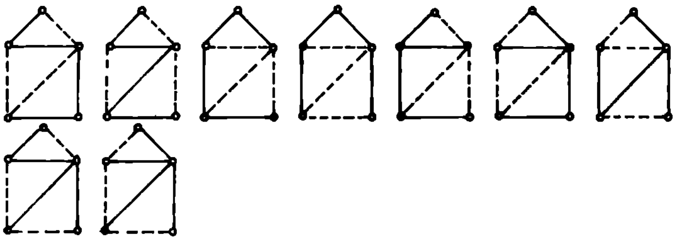
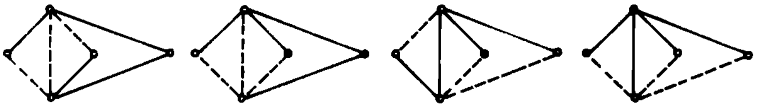
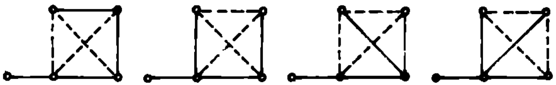
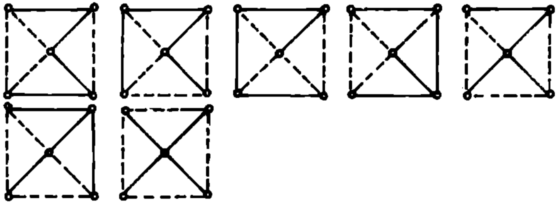
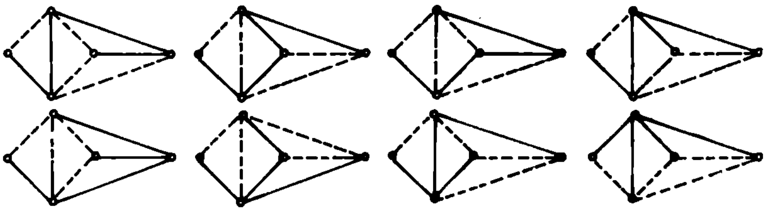
$\{1, 3\} \rightarrow \{2, 5\}$ (Endpunkte der entsprechenden Bäume, die vom Wurzelpunkt verschieden sind).

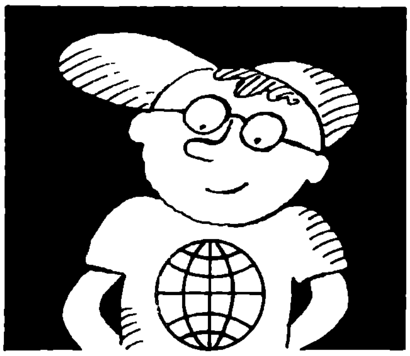
Das liefert aber einen Widerspruch, da in 14d diese Endpunkte des Baumes durch eine Kante des Restgraphen verbunden sind, aber dies nicht für 14c zutrifft.

Aufgabe 6: Gib bis auf Isomorphie alle aufspannenden Bäume und Restgraphen der Graphen 20 und 21 auf Tabelle 3 an!

J. Flachsmeyer/W. Schleinitz

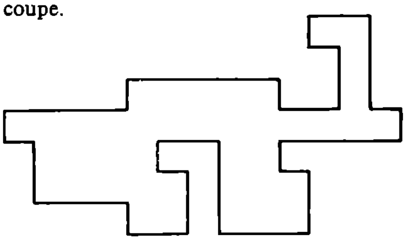
Tabelle 5: Aufspannende Bäume und Restgraphen der Graphen mit 5 Knoten (vgl. Tabelle 3)

Lfd. Nr.	Tabelle 3
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	



▲1▲ Découpage

Découpez ce polygone en seulement trois morceaux, de façon à pouvoir reconstituer un carré. On se contentera de tracer distinctement sur la figure les lignes de découpe.



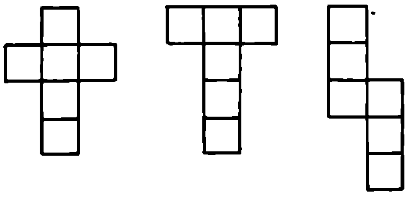
aus: tangente, Paris

▲2▲ Может ли выражение $a^2 - b^2 + c^2$ делиться на 5, если ни одно из целых чисел a, b и c не делится на 5?

aus: Quant, Moskau

▲3▲ Nets for cubes

The drawing shows three nets composed of six quares each. It is easy to see that the two on the left can be folded to form a cube. With slightly more effort, you will see that the net on the right can also be folded to form a cube. How many more nets of six squares can you draw that, when folded, will produce a cube.



aus: Fun with mathematics, Toronto

aus: Eleusis, Paris

Mitstreiter gesucht!

Seit etwa sechs Jahren engagiert sich eine Gruppe von Mathematikern, Lehrern und Mathematikhistorikern für die Bestandsaufnahme aller auf dem Territorium der früheren DDR befindlichen „Sachzeugen" mathematischer Traditionen. Unter Sachzeugen verstehen wir museale Einrichtungen wie den Mathematisch-Physikalischen Salon im Dresdner Zwinger, das Adam-Ries-Haus in Annaberg-Buchholz, einschlägige Museumsgüter von den geodätischen und mathematischen Instrumenten über alte Rechenmaschinen bis zu den ersten Computern, Grabstätten bedeutender Mathematiker, Gedenktafeln an bzw. in ihren ehemaligen Wohn- und Arbeitsstätten, Plastiken, Gemälde und andere Kunstwerke, die Mathematikern oder mathematischen Themen gewidmet sind, Münzen und Medaillen, Archivalien und seltene Bücher, nicht zuletzt auch Benennungen von Straßen, Plätzen, Gebäuden und Institutionen (z. B. Schulen) nach Mathematikern. Ein reich illustriertes Buch, das die Ergebnisse dieser Sammlung allen Freunden der Mathematik präsentieren sollte, war bereits im Entstehen. Es sollte im traditionsreichen Teubner-Verlag in Leipzig erscheinen, der wegen seiner weit zurückreichenden Verdienste um die Herausgabe von mathematischen Büchern und Zeitschriften in gewisser Weise selbst zu unseren Sachzeugen zählt.

Nun, unter den veränderten Bedingungen, ist ein solches Vorhaben natürlich auf gesamtdeutsches Territorium auszudehnen. Wie vorher die Mathematische Gesellschaft der DDR, so wird nun die gesamtdeutsche Mathematiker-Vereinigung das Vorhaben fördern und „beschirmen". Aber von neuem sind wir auf die Hinweise und Material in Wort und Bild von vielen freundlichen Helfern angewiesen. Wie solche Hinweise etwa beschaffen sein könnten, zeigt der nebenstehend abgedruckte Brief von Herrn Dr. Büchel aus Zella-Mehlis.

Alpha wird weiterhin geeignete Zuschriften veröffentlichen.

Hinweise können aber auch direkt an den Leiter des Projektes,
Dozent Dr. Peter Schreiber,
Fachbereich Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald,
F.-L.-Jahn-Str. 15a,
O-2200 Greifswald, eingesandt werden.

Dr. P. Schreiber, Stralsund

Leserpost

Vielen Lesern wird es wie mir gehen. Obwohl an der Mathematik und ihrer Geschichte nicht nur interessiert, sondern von Berufs wegen ständig mit ihr in Berührung, war mir der Name Athanasius Kircher noch nicht begegnet.

Ich stöberte in einem Rhönführer von Justus Schneider aus dem Jahre 1922 (Druck und Verlag der Universitätsdruckerei H. Stürtz A.G., Würzburg) bei der Vorbereitung von Wanderungen in einem Landschaftsgebiet, das durch die Grenzziehung der Vergangenheit und damit verbundenen Sperrzonen nicht zugänglich war.

Auf Seite 211 fand ich unter der Stadt Geisa:

„Geburtsort des berühmten Jesuiten Athanasius Kircher, Professor der Mathematik und Physik zu Rom (geb. 1602)."

Inzwischen habe ich dem Rhönstädtchen Geisa an der Ulster einen Besuch abgestattet. Malerisch ist es am und auf dem Gangolfsberg gelegen, dessen Gipfel u. a. den Friedhof mit Kapelle, das alte Schloß, Steine vom alten Centgericht trägt. Unter herrlichen Lindenbäumen findet man auch den Gedenkstein für Athanasius Kircher mit der Inschrift:

„Dem großen Sohn unserer Stadt
Athanasius Kircher
1602–1680
Der Wissenschaft zum Nutzen, unserer
Stadt zur Ehre und allen zur Lehre"

Ich hatte mich darauf eingestellt, nach A. Kircher fragen zu müssen, vielleicht in der Katholischen Kirche, und war überrascht, wie Geisa die Erinnerung an einen Wissenschaftler wach hält.

Eine der Straßen trägt seinen Namen, und neben dem Rathaus in gotischer Bauart ist an einem Haus eine weitere Erinnerungstafel angebracht:

„Auf diesem Grundstück stand das Haus,
in dem der hervorragende Wissenschaftler
Athanasius Kircher
am 2. Mai 1602 geboren wurde.
Berühmt im In- und Ausland."

In Meyers Handlexikon, Bibliographisches Institut, Leipzig 1922, fand ich noch den Hinweis:

„... erfand einen Brennspiegel, Laterna magica; stiftete eine Kunstsammlung (Museo Kircheriano) in Rom."

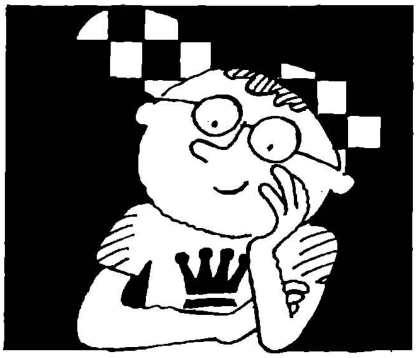
Abseits der breiten Straßen und nicht in der vorderen Reihe der großen Mathematiker – Athanasius Kircher.

Dr. H. Büchel, Zella-Mehlis

Zu A. Kircher ist noch zu ergänzen, daß er sich (typisch für seine Zeit) sehr um die „Mathematisierung der Geographie" verdient gemacht hat.* Von ihm stammt die erste Karte der Meeresströmungen und der erste Versuch, die Isogonen, d. h. die Linien gleicher Mißweisung des Kompaß, auf einer Karte darzustellen.

Dies mündete später zu Gauß' Zeiten in die weltweite kartographische Erfassung des Erdmagnetfeldes ein. Außerdem werden Kircher zugeschrieben: die Erfindung des Sprachrohres, einer Zeichenschrift für Taubstumme, Beschäftigung mit Phänomenen der Hypnose, mit Paläontologie, Versuche der Entzifferung der ägyptischen Hieroglyphen, was freilich erst 1822 durch Champollion gelang. Kircher starb am 30. 10. 1680 in Rom.

* Mit den Zusammenhängen zwischen Mathematik und Geographie wird sich „alpha" in den Heften 2 und 3/91 beschäftigen.



Schulschach in der BRD und in der Schweiz

Dieser Beitrag bezieht sich auf das Gebiet der Bundesrepublik vor dem 3. 10. 1990. Über Schachaktivitäten in den nun neuen fünf Bundesländern berichteten wir im 90er Jahrgang von alpha.

Im Jahre 1984 fand in Hamburg der zweite internationale Schulschachkongreß der FIDE (Internationale Schachföderation) statt. Hier wurde der Versuch unternommen, sporadisch entstandene Aktivitäten und Ideen aus den einzelnen Mitgliedsländern zu systematisieren und international einen einheitlichen Standpunkt zum Thema Schach in den Schulen zu erarbeiten. Wenn sie auch noch immer in den Kinderschuhen steckt, so hat diese Idee doch weltweit Verbreitung gefunden. Einen groben Überblick gab alpha bereits im Heft 2/90 – heute wollen wir etwas näher auf spezielle Entwicklungen im deutschsprachigen Raum eingehen.

In der Bundesrepublik lassen sich die Wurzeln des Schulschachs bis in die Gründerjahre zurückverfolgen. Dort kann man bereits seit langem von einer Massenbewegung sprechen. An vielen Schulen wird in der einen oder anderen Weise Schach gespielt.

Meist findet das Training nachmittags in Form einer Arbeitsgemeinschaft statt und wird von einem Lehrer geleitet. Die Kinder spielen ausschließlich aus Spaß und Interesse – in die Bildungskonzeption der Schulen ist Schach nur sehr selten eingebunden. Auch funktioniert zumeist der Wechselwirkungsprozeß mit den Klubs noch ungenügend – so kommt es, daß diese beispielhafte Initiative oft losgelöst vom Schachleben der „Profis“ existiert, was Vor- aber auch Nachteile hat.

Im Schuljahr 1987/88 beteiligten sich an der BRD Schulschachmannschaftsmeisterschaft 2590 4er Mannschaften, 1988/89 sogar 2630. Diese Zahlen führen den Massencharakter noch einmal deutlich vor Augen.

Alljährlich bietet Hamburg eine Attraktion besonderer Art – die Schulschachbewegung organisiert hier am letzten Mittwoch im Februar das größte Schachturnier der Welt. Der Wettbewerb „Rechtes gegen linkes Alsterufer“ lockt regelmäßig mehr als 3000(!) Schachkinder ins Congreß-Centrum und hat 1990 seine 32. Auflage erfahren. Dabei steht die Teilnahme allen offen – in diesem Jahr konnten z. B. erstmals 11 Dresdener Mannschaften teilnehmen, wobei die „Uferzugehörigkeit“ nicht so eng gesehen wird. Hauptsache, es macht Spaß! Kleinere Turniere dieser Art finden des öfteren statt, befreien ebenfalls eine große Menge kleiner Weltmeisterkandidaten von einem Tag Schulstreß und bieten dafür den Direktoren die Gelegenheit, ihren Kollegen um einige Plätze voraus zu sein.

So hat das Schach einen festen Platz im Leben vieler Kinder gefunden – gewiß nicht zum Nachteil ihres Leistungsvermögens. Wie auch auf dem Gebiet der ehemaligen DDR gibt es innerhalb der DSJ (Deutsche Schachjugend) einen Schulschachreferenten mit seiner Schulschachkommission, die Zeitschrift Jugendschach (für alle, die am Nachwuchsschach Interesse haben, nur zu empfehlen) berichtet ausführlich über solche Großereignisse und druckt auch von Zeit zu Zeit Unterrichtshilfen.

Als Ausnahme muß hier noch das Schachgymnasium Altensteig erwähnt werden – eine Privatschule mit Internat, finanziert vom Christlichen Jugenddorfwerk. Hier existiert Schach in der 5./6. Klasse als Pflichtfach, in der 7./8. kann es als Wahlfach weiter belegt werden. Wer sich talentiert zeigt, kann von hochrangigen Meistern betreut werden – einige Schüler der Anstalt sind selbst bereits auf dem besten Wege zu diesem Titel. Eine Ausnahme – sicher. Doch auch ein Beispiel, das Schule machen kann.

Szenenwechsel – Alpen – Schweiz.

Hier bemüht sich Schulschachverantwortlicher Beat Ruegsegger bereits seit vielen Jahren sehr erfolgreich um die Einführung und Verbreitung des königlichen Spiels an den Schulen. Von Anbeginn zentralisiert durchgeführt, soll das Schach in der Schweiz auch direkt in den Dienst der Pädagogik gestellt werden. So liegen erste Erfahrungen vor, die Schachfreund Ruegsegger im Rahmen einer sogenannten Projektwoche sammeln konnte. Eine solche Woche ist der alleinigen intensiven Beschäftigung mit einem Thema nach Wahl vorbehalten – in diesem Falle Schach. Nicht nur herkömmliche Mittel wie Figuren und Demonstrationsbretter sowie Schachbücher nutzend, gestaltete der Schachlehrer hier mit Kassetten, Computern und Videofilmen einen Lehrgang, der Schüler aller Leistungsstadien zur weiteren Beschäftigung mit dem Spiel anregte. Seiner Initiative und dem Sponsor – der Schweizerischen Kreditanstalt – ist es auch zu verdanken, daß in der Schweiz ein für Lehrer wie Schüler gleichermaßen interessanter Schulschachlehrgang in 6 Heften erscheinen konnte, der für die erste Beschäftigung mit dieser Sportart gut geeignet ist und durch niedrige Preise allen Kindern zugänglich sein sollte.

Interessenten wenden sich bitte an
Beat Ruegsegger, Luzernstr. 18a,
CH – 4950 Huttwil.

Ebenfalls sehr zu empfehlen wäre die Nr. 1/1990 der Schweizerischen „Schachpraxis“ – hier wurden in einem ganzen Heft für Lehrer vielfältigste Möglichkeiten des Schaches im Unterricht dargelegt, Entwicklungen aufgezeigt und eine gute Zusammenfassung des weltweit bisher Erreichten gegeben. Über einen in vielen Schach- und Schulzeitschriften des Landes veröffentlichten Fragebogen hofft Sportfreund Ruegsegger eine noch weitgreifendere Entwicklung ins Leben rufen zu können.

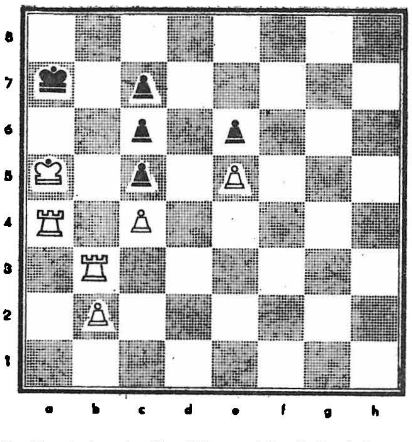
Da bisher Schulschachinitiativen in ihren Ländern organisch gewachsen sind, weisen sie alle eine gewisse Originalität auf, von der es das jeweils Beste zu nutzen gilt. Im September fand deshalb eine erste gemeinsame Sitzung der Schulschachkommissionen der ehemaligen DDR und BRD statt, die sicher neue Impulse geben wird. Bis alle Potenzen dieses uralten Spiels für unser modernes Leben zwischen Punkthochhäusern und Düsenflugzeugen ausgeschöpft sind, wird noch viel Zeit vergehen. Gerade deshalb aber muß diese Aufgabe zügig angegangen werden.

Vielleicht „pauken“ in 30 Jahren unsere Kinder und Enkel nicht mehr in 6 Wochenstunden Logarithmen u. a. m., sondern nutzen einige Zeit davon, um allgemeinere logische Prozesse mittels eines spannenden, interessanten Spiels beherrschen zu lernen – wäre das nicht eine Anstrengung wert?!

M. Spindler

Der Rochade-Trick

Matt in fünf Zügen



Bedingt durch die Zügezahl wird einigen alpha-Schachfreunden die Aufgabe von K. A. Kubbel („Deutsche Schachzeitung“, 1910) als zu schwierig erscheinen. Daher ein Lösungshinweis. Versucht man scheinbar vergeblich mit 1. Ta1 zum Ziel zu kommen, so sollte das Schachbrett nach diesem Zug von der linken Brettseite her betrachtet und an einem Platztausch von König und Turm wie bei einer Rochade gedacht werden.

In freien Stunden · alpha-heiter

Dieses alpha-heiter steht ganz im Zeichen unseres Jubiläums. Für die erste Ausgabe des 25. Jahrgangs haben wir in den sechs Heften des 1. Jahrgangs (1967) geblättert und Aufgaben sowie Vignetten herausgesucht.

Aus den Silben

au – be – can – di – durch – e – ex – hek – in – kan – kel – kreis – li – mes – mit – ne – nent – punkt – po – ra – se – ser – ßen – te – tel – ter – to – tor – us – win

sollen 10 Wörter mit folgender Bedeutung gebildet werden, deren Anfangsbuchstaben, von oben nach unten gelesen, einen bekannten Mathematiker des Altertums ergeben:

1. Winkel am Dreieck
2. Halbmesser des Kreises
3. deutscher Mathematiker (Begründer der Mengenlehre)
4. Hohlmaß
5. einbeschriebener Kreis
6. Ort, der von allen Punkten des Kreisumfangs konstante Entfernung hat
7. Hochzahl
8. größte Sehne im Kreis
9. Begriff aus der Geometrie
10. einen Kreis schneidende Gerade

Magie

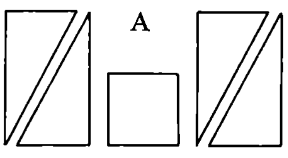
Trage die Zahlen 1, 3, 5, ..., 17 so in die Felder des linken Quadrates ein, daß die Summe in jeder Zeile, Spalte und Diagonale stets 27 beträgt!

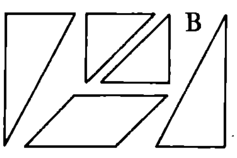
$\frac{1}{5}$		$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{5}$		$\frac{4}{5}$

Ergänze die Felder des rechten Quadrates so, daß die Summe in jeder Zeile, Spalte und Diagonale stets $\frac{3}{2}$ beträgt!

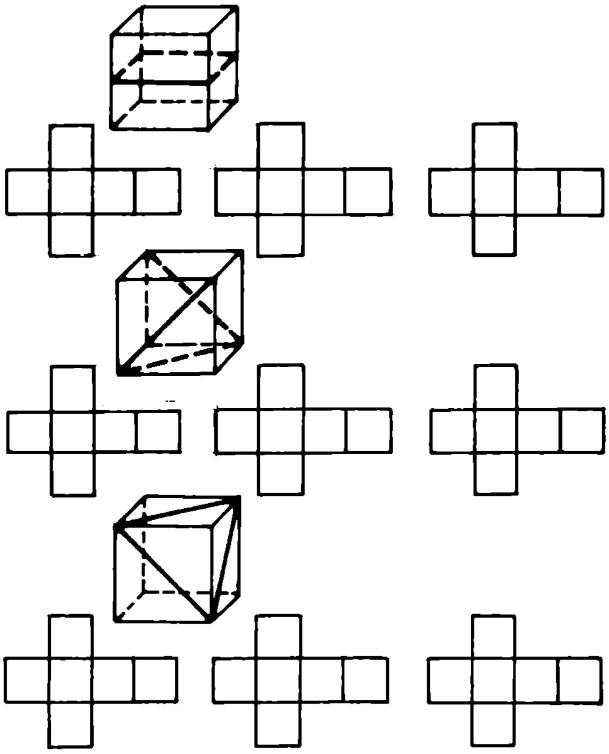
Schnell zusammensetzen!

Paust die Figuren von A und B auf Pappe und schneidet sie aus! Die fünf Stücke von A ergeben richtig zusammengesetzt ein Quadrat. Die fünf Stücke von B ergeben ebenfalls ein Quadrat.

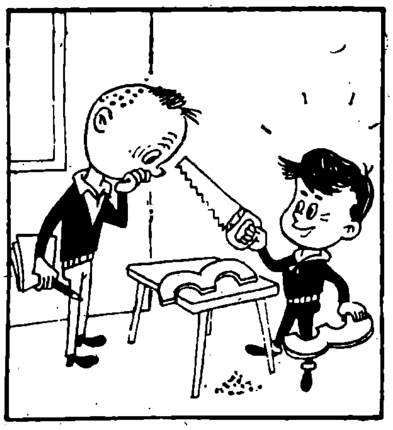




Nicht im Netz verfitzen



Tragt in die Würfelnetze (Abwicklungen) je drei verschiedene Möglichkeiten ein, wie die stark eingezeichneten Linien am Würfel in den Abwicklungen erscheinen können!



„Na bitte, Langer, bei mir ist die Hälfte von 8 niemals 4.“ *Fritz Berger, aus: Leipziger Volkszeitung*

Erst Buchstaben, dann Ziffern!

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Ersetze die Buchstaben so durch Ziffern, daß in den Zeilen und Spalten richtige Ergebnisse entstehen. Wieviel verschiedene Lösungen hat die Aufgabe?

$$\begin{array}{ccccc} ed & + & ce & = & ga \\ - & & - & & - \\ bd & + & ba & = & cd \\ \hline fa & + & be & = & ee \end{array}$$

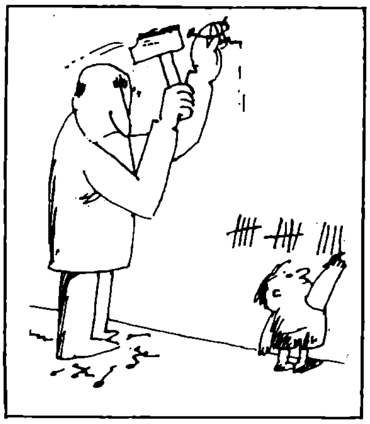
„Bum!“

Die Teilnehmer setzen sich in eine Runde und beginnen zu zählen: 1, 2, 3, 4, ... Wer eine Zahl erreicht, die entweder durch 7 teilbar ist oder 7 zur Endziffer hat, ruft: „Bum!“ und sein Nachbar zählt weiter. Wer sein „Bum!“ verpaßt, oder sein „Bum!“ nicht sofort herausplatzt, zahlt eine Strafe, gibt ein Pfand. Aber wir wünschen, daß ihr nicht nur eine sinnvolle Unterhaltung habt, sondern auch einmal nachdenkt:
Wievielmal wird sich das „Bum!“ beim Zählen bis 1000 wiederholen?

Knifflige Fragen

- Welches Zeichen muß man zwischen die Zahlen 4 und 5 setzen, um eine Zahl zu erhalten, die größer als 4, aber kleiner als 5 ist?
- In einer Familie sind 5 Söhne. Jeder Sohn hat eine Schwester.
  Wieviel Kinder sind im ganzen in der Familie?
- Ein Balken wurde in drei Minuten in Stücke zu je $\frac{1}{2}$ m Länge zersägt, wobei jeder Schnitt 1 Minute dauerte.
  Wie lang war der Balken?
- Aus zwei Zweien und einem Zeichen soll eine Zahl gebildet werden, die gleich $\frac{11}{5}$ ist.

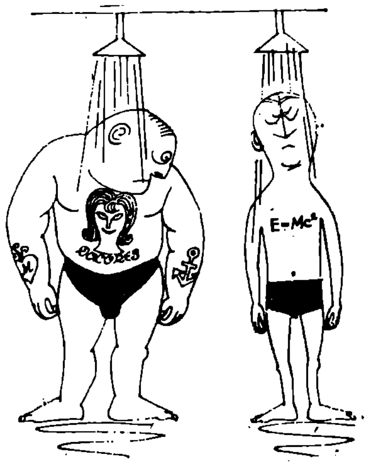
Irrgärten



L. Otto, aus: Freie Welt

Chemische Untersuchungen

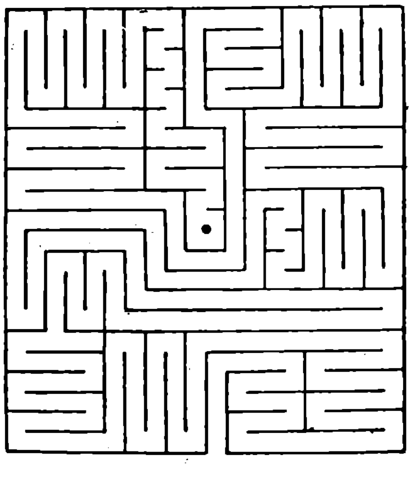
Im Chemieunterricht nehmen Klaus, Peter und Fritz von 320 g einer Substanz nacheinander je 25 % von der jeweils in dem Gefäß vorhandenen Menge weg. Wieviel Gramm verbleiben im Gefäß?



joppy, aus: „Wochenpost“

Haarspaltereien

Ein Mensch hat auf dem Kopf nicht mehr als 150 000 Haare. Es ist zu beweisen, daß in Moskau mindestens 40 Menschen leben, die die gleiche Zahl von Haaren auf dem Kopf haben.



Der Erforscher des „unendlich Fernen“

Zum 400. Geburtstag von Girard Desargues

Viele Sätze der Geometrie, besonders solche, in denen nur von Schnittpunkten gewisser Geraden und Verbindungsgeraden gewisser Punkte die Rede ist, gelten scheinbar nicht ausnahmslos. Ein einfaches und überzeugendes Beispiel dafür liefert der Satz von Desargues. Um ihn bequem formulieren zu können, definieren wir:

Zwei Dreiecke *ABC* und *A′B′C′* liegen **zentralperspektiv** zueinander, wenn es einen Punkt *S* (das Perspektivitätszentrum der Dreiecke) gibt, so daß *S, A, A′, S, B, B′* und *S, C, C′* jeweils auf einer Geraden liegen (Bild 1).

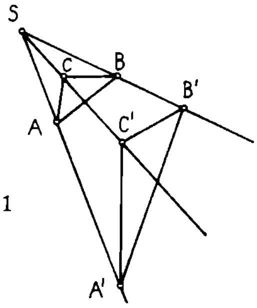


Bild 1

Zwei Dreiecke *ABC* und *A′B′C′* liegen **achsenperspektiv** zueinander, wenn es eine Gerade *g* (die Perspektivitätsachse der Dreiecke) gibt, so daß sich die Geraden *AB* mit *A′B′*, *BC* mit *B′C′* und *AC* mit *A′C′* jeweils in einem Punkt von *g* schneiden (Bild 2).

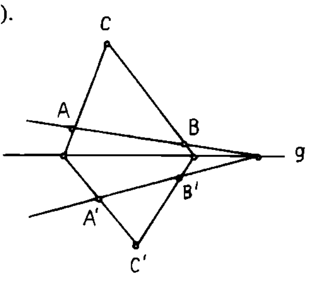


Bild 2

Mit diesen Begriffen läßt sich der *Satz von Desargues* wie folgt aussprechen: Zwei Dreiecke sind zentralperspektiv genau dann, wenn sie achsenperspektiv sind.

Prüft dies, indem ihr in Bild 1 nachträglich die Perspektivitätsachse und in Bild 2 nachträglich das Perspektivitätszentrum einzeichnet!

Wie die Bilder 3 und 4 zeigen, ist der Satz jedoch nicht ohne Ausnahme gültig. Die nähere Untersuchung dieser und weiterer Ausartungsfälle lehrt, daß man den Satz „retten“ könnte, wenn man annimmt, daß parallele Geraden sich in einem der gemeinsamen Richtung dieser Geraden zugeordneten „unendlich fernen“ oder „uneigentlichen“ Punkt schneiden und daß die Gesamtheit aller so der Ebene hinzugefügten uneigentlichen Punkte ihrerseits auf einer „unendlich fernen“ Geraden liegt. Die systematische Ausarbeitung dieser Idee führt zu einer geometrischen Struktur, die man als eine projektive Ebene oder in bezug auf diejenige euklidische Ebene, aus der sie durch Hinzufügen unendlich ferner Objekte entsteht, als deren projektive Abschließung bezeichnet. Was wir zunächst für die Ebene beschrieben haben, läßt sich analog auch für den dreidimensionalen Raum durchführen. Das Studium projektiver Abschließungen bietet gegenüber der gewöhnlichen euklidischen Geometrie viele Vorteile, zum Beispiel bei der mathematischen Behandlung der Zentralperspektive. Das Büschel aller von einem festen Projektionszentrum Z ausgehenden Geraden vermittelt in der projektiven Abschließung stets eine umkehrbar eindeutige Abbildung zwischen Urbildebene und Bildebene; auch für den Fall, daß die projizierende Gerade parallel zur Urbildebene oder parallel zur Bildebene wird, gibt es nun den zugeordneten Punkt der anderen Ebene (Bild 5).

Bild 3

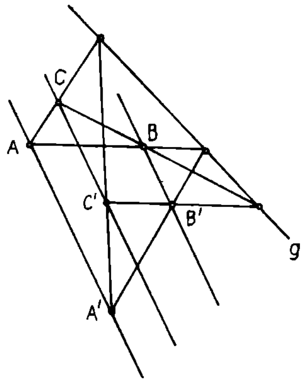


Bild 4

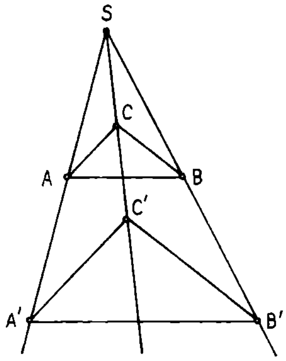
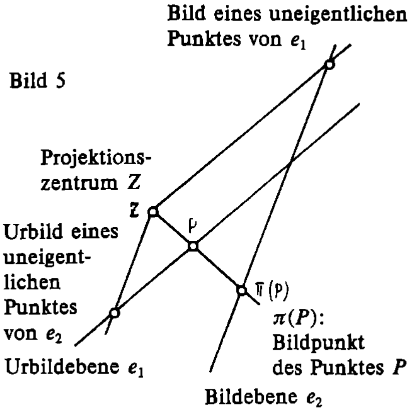


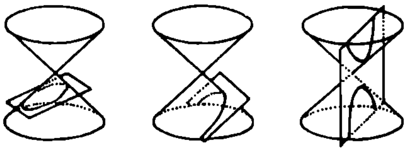
Bild 5



Vor allem aber ist der „projektive Standpunkt“ sachgemäß für das Studium derjenigen Eigenschaften von Kegelschnitten (d. h. von Schnittkurven eines unendlich ausgedehnten geraden Kreis-Doppelkegels mit einer Ebene, Bild 6), die bei beliebigen Zentralprojektionen erhalten bleiben und demzufolge insbesondere einheitlich auf die drei auf den ersten Blick recht unterschiedlichen Grundformen Ellipse, Parabel, Hyperbel von nichtausgearteten Kegelschnitten zutreffen.

Bild 6

Erzeugung von

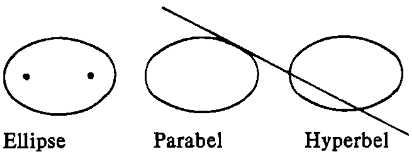


Ellipse Parabel Hyperbel

am geraden Doppel-Kreiskegel

Vom Standpunkt der projektiven Geometrie gibt es nur eine, einfach geschlossene Art von Kegelschnitten. Je nachdem, ob diese Kurve mit der unendlich fernen Geraden ihrer Ebene keine, einen oder zwei (unendlich ferne) Punkte gemeinsam hat, handelt es sich um eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel (Bild 7).

Bild 7



Ellipse Parabel Hyperbel

in ihrer relativen Lage zur uneigentlichen Geraden

Aus moderner Sicht ist projektive Geometrie nichts anderes als eine zweckmäßige Art, bestimmte Teile der gewöhnlichen Geometrie zu betreiben. Man kann jederzeit jeden Satz der projektiven Geometrie in einen naiv verständlichen Satz der gewöhnlichen Geometrie „zurückübersetzen“

zen“, indem man einfach für jeden der beteiligten Punkte die Fallunterscheidung durchführt, ob er unendlich fern ist oder im Endlichen liegt, d. h. ein gewöhnlicher Punkt ist, und dabei noch beachtet, daß eine Gerade, die wenigstens zwei unendlich ferne Punkte enthält, selbst unendlich fern ist. In der projektiven Ebene erweist sich der Satz von Desargues in der ursprünglichen Fassung als uneingeschränkt gültig. Indem man unterscheidet, ob das Perspektivitätszentrum eigentlich oder uneigentlich (Bild 3) ist und ob von den drei Schnittpunkten auf der Perspektivitätsachse keiner, einer oder zwei (und damit die ganze Achse, Bild 4) unendlich fern sind, erhält man insgesamt 6 mögliche Fälle, von denen der ursprünglich beschriebene sozusagen der Regelfall ist. Dies zeigt ganz deutlich, daß durch die projektive Betrachtungsweise komplizierte Sachverhalte übersichtlicher und kürzer beschreibbar werden, daß sie darüber hinaus in gewissem Sinne tiefer in das Wesen der Dinge eindringt, obwohl ihre Aussagen, naiv betrachtet, von nicht existenten Dingen handeln. Im Grunde ist unser Vorgehen ganz analog zum Übergang von einem Zahlbereich zum nächsthöheren durch gedankliche Konstruktion: Wenn man an der Vorstellung festhält, daß natürliche Zahlen Anzahlen von real existierenden Dingen sind, dann wirft die Frage nach der Art der Existenz von negativen ganzen Zahlen genau die gleichen Probleme auf wie die Frage nach dem Wesen der unendlich fernen geometrischen Objekte. Beide Existenzfragen finden durch mengentheoretische Konstruktion der entsprechenden Erweiterungsstrukturen eine Antwort, die den heutigen Mathematiker, aber nicht unbedingt den Philosophen zufriedenstellt.

Uns bleibt hier die Frage nach der historischen Herkunft des projektiven Denkens in der Geometrie. Erste, noch recht unscharfe Vorstellungen von unendlich fernen Punkten finden sich bei Johannes Kepler in seiner Schrift „Ad Vitellionem paralipomena“ 1604 und zwar interessanterweise bei dem Versuch, den stetigen Übergang zwischen den drei verschiedenen Formen von Kegelschnitten gedanklich dadurch zu bewältigen, daß der eine Brennpunkt der Ellipse sich immer weiter vom anderen entfernt, wodurch die Ellipse eine immer länglichere Form bekommt, bis der Qualitätsumschlag zur Parabel erfolgt, wenn der wandernde Brennpunkt unendlich fern ist. Darauf kehrt er „von der anderen Seite her“ ins Endliche zurück, wodurch die nun entstehende Hyperbel aus endlicher Sicht in zwei getrennte Äste zerfällt, die aber über zwei unendlich ferne Punkte doch wieder zu einer geschlossenen Kurve verbunden sind (Bild 7). Ihre große Blütezeit und nach anfänglichen begrifflichen Unklarheiten auch strenge Begründung erlebte die projektive Geometrie im 19. Jh., beginnend mit dem Buch „Traité des propriétés projectives des figures“ (d. h. Abhandlung über die projektiven Eigenschaften von Figuren) des Franzosen Jean-Victor Poncelet aus dem Jahre 1822.

Der eigentliche Ahnherr des projektiven Denkens in der Geometrie ist jedoch der französische Architekt und Ingenieur Girard Desargues, dessen 400. Geburtstag 1991 zu begehen ist. (In manchen Büchern wird irrtümlich 1593 als sein Geburtsjahr angegeben.) Desargues wurde in Lyon als Sohn eines Notars geboren, lebte zwischen 1626 und 1650 überwiegend in Paris und kehrte 1650 nach Lyon bzw. auf sein nahe gelegenes Landgut zurück, wo er 1661 starb. Er nahm als Ingenieur an der Belagerung der Hugenottenfestung La Rochelle 1628 teil, gemeinsam mit seinem Freund René Descartes, der zu den wenigen Gelehrten Frankreichs gehörte, die Desargues' Gedanken schon zu dessen Lebzeiten verstanden und würdigten. Von der Mehrheit der Zeitgenossen wurden seine Schriften (oft nur großformatige Flugblätter, in relativ wenigen Exemplaren gedruckt) scharf kritisiert oder verspottet, zumal er sich eine etwas befremdliche, aus Begriffen der Botanik gebildete Fachsprache geschaffen hatte. Am Rande sei erwähnt, daß Desargues schon 1640, rund 150 Jahre vor Monge, im Besitz des Zweitafelverfahrens der darstellenden Geometrie war. Den eingangs erläuterten „Satz von Desargues“, der in den modernen Grundlagen der Geometrie eine zentrale Rolle spielt, veröffentlichte Desargues' Schüler, der Graveur Abraham Bosse 1648, nachdem Desargues selbst infolge vieler Anfeindungen seit etwa 1642 nichts mehr publiziert hatte.

Desargues' Hauptwerk mit dem merkwürdigen Titel „Erster Entwurf eines Versuchs über die Ergebnisse beim Zusammentreffen eines Kegels mit einer Ebene“ (1639) beeinflußte stark den jungen Blaise Pascal und regte ihn zur Entdeckung des nach ihm benannten Satzes (1640) über die einem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechsecke an. Durch Mittler wirkten Desargues' Ideen schließlich sogar auf Newton ein. Zu Beginn des 19. Jh. waren jedoch sein Name und sein Lebenswerk nur noch eine verblaßte Legende. Poncelet zollte dem Vorgänger in seinem erwähnten Traité von 1822 Achtung, noch ohne eines seiner Werke gelesen zu haben. Erst 1845 stieß der französische Geometer und Mathematikhistoriker Michel Chasles zufällig auf eine Abschrift des Hauptwerkes von 1639, die Philippe de la Hire 1679 angefertigt hatte. Danach setzten intensive Nachforschungen über Leben und Werk von Desargues ein, und 1864 konnten in Frankreich 2 Bände seiner Schriften neu herausgegeben werden.

P. Schreiber

Wir danken dem Buchverlag Der Morgen für die interessante Literatur, die er uns als Buchprämien für die Preisträger des alpha-Wettbewerbes 1989/90 zur Verfügung stellte.

Alphons logische Abenteuer (3)

Als Alphons aus der Schule kam, wartete seine kleine Schwester schon ganz ungeduldig auf ihn. „Hilf mir doch einmal, ich soll eine Zahl zwischen 5 und 8 angeben und dann die Zahl zwischen 5 und 8, die das Doppelte einer Zahl zwischen 1 und 5 ist.“

Alphons versuchte Haltung und Blick seines Mathematiklehrers nachzuahmen und sagte: „Dein Problem ist, was heißt *eine* Zahl und was heißt *die* Zahl?“ So sei es, bestätigte seine Schwester. „Na schön, nenne mir eine Zahl zwischen 5 und 8.“ Die Antwort kam prompt: „6 oder 7“. Alphons lobte: „Sehr gut. Doch nun nenne mir die Zahl zwischen 5 und 8!“ Seine Schwester gab etwas zögernd dieselbe Antwort. „Eine Zahl zwischen 5 und 8 ist also dasselbe, wie die Zahl zwischen 5 und 8“, erwiderte Alphons. Darauf sei sie auch schon gekommen und deshalb fände sie zwischen 5 und 8 keine weitere Zahl außer 6, die das Doppelte einer Zahl zwischen 1 und 5 sei. Alphons dachte nach. Da kam ihm eine Idee. „Wenn eine Zahl und die Zahl wenigstens zwei Zahlen sind, warum sagst du dann, daß die Mutti kommt?“ – „Das habe ich doch gar nicht gesagt, sie kommt doch erst am Abend“, protestierte seine Schwester.

Alphons präzisierte sich: „Wenn sie heute abend kommt, sagst du dann die Mutti kommt oder eine Mutti kommt?“ Schon wollte sie wieder auf ihre gewohnte schnippische Art antworten, da stutzte sie: „Mutti ist zwar keine Zahl, darauf kommt es hier aber nicht an. Sie wünscht sich auch oft vier Arme zu haben, also doppelt zu sein, aber sie ist doch nur die eine … die eine! Ach so ist das! Eine, das ist *eine*, die, und das können mehrere sein. Dagegen die, das ist *die* eine, und das kann nur eine einzige sein.“

Alphons nickte zufrieden. „Somit mußt du nur noch zeigen, daß es außer 3 keine andere natürliche … hm, also keine Zahl zwischen 1 und 5 gibt, deren Doppeltes zwischen 5 und 8 liegt. Statt:

Die Zahl zwischen 5 und 8, die das Doppelte einer Zahl zwischen 1 und 5 ist, kannst du auch sagen: Die Zahl zwischen 1 und 5, deren Doppeltes eine Zahl zwischen 5 und 8 ist. Es ist immer mit dem bestimmten Artikel die Einzigkeit angezeigt“, fügte er dozierend hinzu. „Aber bei Mutti steht fest, daß sie einzig ist“, sagte seine Schwester. „Irgendwie muß sie immer das letzte Wort haben“, dachte Alphons, nickte aber zustimmend.

L. Kreiser

Schiebespiel im Pentagon

Teil 2

Züge und Zugfolgen des „Schiebespiels im Pentagon“ (Heft 6/90) sollen unter Verwendung von Permutationen (umkehrbar eindeutige Abbildungen einer endlichen Menge auf sich) angegeben werden. Durch das Benutzen von Permutationen und ihren Eigenschaften wird es gleichzeitig mit möglich, dieses Spiel zu analysieren.

In diesem Beitrag sind Permutationen der natürlichen Zahlen von 1 bis 11, der Feldnummern, zu betrachten. Eine solche ist z. B.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 10 & 9 & 6 & 2 & 5 & 7 & 4 & 8 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

In jedem derartigen Symbol stehen in der oberen Zeile stets die Nummern der Originalfelder und in der unteren Zeile die der Bildfelder. Unter der Nummer jedes Originalfeldes steht die des zugehörigen Bildfeldes. Die angegebene Permutation α beschreibt ein mögliches Umsetzen der Spielsteine der Ausgangslage (Bild 1) in die Ziellage.

Bild 1

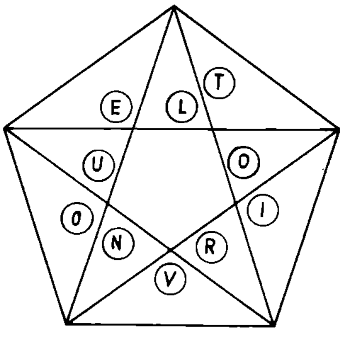
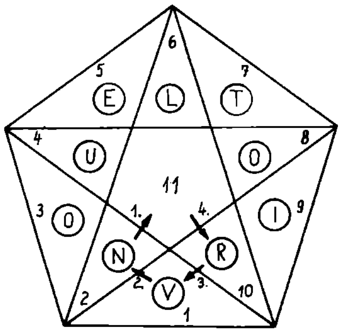


Bild 2

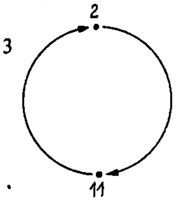


Gemäß α ist der Stein vom Felde 1 auf Feld 3, der vom Felde 2 auf Feld 10 u.s.f. zu transportieren. Um die Ausnahmestellung des unbesetzten Feldes aufzuheben, denken wir uns dieses jeweils mit einem angenommenen, einem fiktiven, einem keinen Buchstaben tragenden Stein besetzt. Die Permutation α läßt den fiktiven Stein auf Feld 11 stehen.

Jede mögliche Lösungszugfolge, die eine Ausgangslage der Steine in die Ziellage überführt, besteht aus Teilzugfolgen, deren jede mit dem Schieben eines Buchstaben von einem spitzwinkligen Randfeld, einem Feld mit gerader Nummer, auf Feld 11 beginnt und mit dem Zurückführen dieses Buchstaben auf ein Randfeld mit gerader Nummer endet. Eine mögliche Lösungszugfolge zur Ausgangslage des Bildes 1 bzw. 2 zerfällt in 5 Teilzugfolgen: Die 1. dieser Teilzugfolgen besteht aus den Zügen $2 \rightarrow \mathbf{11}$, $1 \rightarrow \mathbf{2}$, $10 \rightarrow \mathbf{1}$ und $11 \rightarrow \mathbf{10}$ (Bild 2.). Beim Zug $2 \rightarrow \mathbf{11}$ wird der reale Stein Ⓝ von Feld 2 auf Feld 11 gezogen (Bild 2). Da der fiktive Stein eingeführt wurde, wird dieser gleichzeitig mit von Feld 11 auf Feld 2 gezogen. Dieser Zug besteht damit aus dem zyklischen Vertauschen der Steine auf den Feldern 2 und 11. Er ist ein Zyklus der Länge 2, der durch das Symbol $(2\ \mathbf{11})$ angegeben wird und im Bild 3 schematisch dargestellt ist. Dieser Zyklus ist auffaßbar als die Permutation der natürlichen Zahlen von 1 bis 11, bei der nur die Zahlen 2 und 11 permutiert werden:

$$(2\ \mathbf{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 11 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

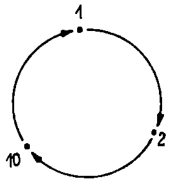
Bild 3



Die drei folgenden Züge sind angebbar durch die Zyklen $(1\ \mathbf{2})$, $(\mathbf{1}\ 10)$ und $(\mathbf{10}\ 11)$. Zur Verdeutlichung soll in jedem einen Zug darstellenden Zyklus der Länge 2 die Nummer des vor dem Ausführen des Zuges mit dem fiktiven Stein besetzten Feldes fett gedruckt werden. Die Nacheinanderausführung dieser 4 Züge, das Produkt der 4 Zyklen der Länge 2, bewirkt ein zyklisches Vertauschen der Steine auf den Feldern 1, 2 und 10. Es realisiert den Zyklus (1 2 10) der Länge 3 (Bild 2):

$$(2\ \mathbf{11}) \circ (1\ \mathbf{2}) \circ (\mathbf{1}\ 10) \circ (\mathbf{10}\ 11) = (1\ 2\ 10)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 10 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

Bild 4



Im Bild 4 ist der Zyklus (1 2 10) symbolisch dargestellt. Daß das Nacheinanderausführen der Züge $(2\ \mathbf{11})$, $(1\ \mathbf{2})$, $(1\ 10)$ und $(\mathbf{10}\ 11)$ in der angegebenen Reihenfolge dasselbe Umsetzen der Steine erfaßt wie der Zyklus (1 2 10), ist auch ohne Bezug auf Bild 2 leicht zu bestätigen: Durch den 1. Faktor $(2\ \mathbf{11})$ wird der Stein von Feld 2 auf Feld 11 transportiert. Durch den 2. Faktor $(1\ \mathbf{2})$ und auch durch den 3. $(1\ 10)$ wird der Stein von Feld 11 nicht weiter bewegt. Durch den 4. Faktor $(\mathbf{10}\ 11)$ schließlich wird der Stein von Feld 11 auf Feld 10 geschoben. Analog ergibt sich, daß durch das Produkt der Stein von Feld 1 auf Feld 2 und der von Feld 10 auf Feld 1 gebracht wird. Die vier weiteren Teilzugfolgen sind:

2. Teilzugfolge: $(4\ \mathbf{11}) \circ (\mathbf{4}\ 5) \circ (\mathbf{5}\ 6) \circ (\mathbf{6}\ 11) = (4\ 6\ 5)$
3. Teilzugfolge: $(2\ \mathbf{11}) \circ (\mathbf{2}\ 3) \circ (\mathbf{3}\ 4) \circ (\mathbf{4}\ 11) = (2\ 4\ 3)$
4. Teilzugfolge: $(2\ \mathbf{11}) \circ (1\ \mathbf{2}) \circ (\mathbf{1}\ 10) \circ (\mathbf{10}\ 11) = (1\ 2\ 10)$
5. Teilzugfolge: $(8\ \mathbf{11}) \circ (\mathbf{8}\ 9) \circ (\mathbf{9}\ 10) \circ (1\ \mathbf{10}) \circ (\mathbf{1}\ 2) \circ (\mathbf{2}\ 3) \circ (\mathbf{3}\ 4) \circ (\mathbf{4}\ 11) = (1\ 10\ 9\ 8\ 4\ 3\ 2)$

Das Nacheinanderausführen der 1. bis 5. Teilzugfolge bewirkt die eingangs angegebene Permutation α:

$$(1\ 2\ 10) \circ (4\ 6\ 5) \circ (2\ 4\ 3) \circ (1\ 2\ 10) \circ (1\ 10\ 9\ 8\ 4\ 3\ 2) = (1\ 3\ 9\ 8\ 4\ 6\ 5\ 2\ 10)$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 10 & 9 & 6 & 2 & 5 & 7 & 4 & 8 & 1 & 11 \end{pmatrix} = \alpha$$

Diese aus 24 Zügen bestehende Zugfolge führt also die Ausgangslage des Bildes 1 in die Ziellage über.

Bei den weiteren Betrachtungen werden die folgenden Eigenschaften von Permutationen benutzt, über deren Herleitung sich der Leser in zugänglicher Literatur1) orientieren kann: Jede Permutation ist darstellbar als Zyklus oder als Produkt von Zyklen. – Jede Permutation ist entweder gerade oder ungerade. – Jeder Zyklus ungerader Länge ist eine gerade und jeder Zyklus gerader Länge eine ungerade Permutation. – Ein Produkt von Zyklen ist genau dann eine gerade Permutation, wenn die Anzahl der Zyklen gerader Länge eine gerade Zahl ist.

Gemäß dieser Mitteilungen ist jeder Zug als Zyklus der Länge 2 eine ungerade Permutation. Die durch die oben angegebene Lösungszugfolge bewirkte Permutation α ist als Produkt von 24 Zyklen der Länge 2 eine gerade Permutation. Das folgt auch aus der Darstellung von α als Zyklus (1 3 9 8 4 6 5 2 10) der Länge 9.

Jede Teilzugfolge läßt sich durch eventuelles Einschieben von Doppelzügen „Schieben eines Buchstaben von einem Randfeld gerader Nummer auf Feld 11“ und des inversen Zuges „Zurückschieben dieses Buchstaben von Feld 11 auf das gleiche Randfeld“ in jeweils aus 4 Zügen bestehende Elementarzugfolgen zerlegen. Die oben betrachteten Teilzugfolgen 1 bis 4 sind Elementarzugfolgen. Die obige 5. Teilzugfolge läßt sich durch Einschieben von zwei Doppelzügen in drei Elementarzugfolgen zerlegen:

$$[(8\ \mathbf{11}) \circ (\mathbf{8}\ 9) \circ (\mathbf{9}\ 10) \circ (\mathbf{10}\ 11)]$$
$$\circ [(10\ \mathbf{11}) \circ (1\ \mathbf{10}) \circ (\mathbf{1}\ 2) \circ (\mathbf{2}\ 11)]$$
$$\circ [(2\ \mathbf{11}) \circ (\mathbf{2}\ 3) \circ (\mathbf{3}\ 4) \circ (\mathbf{4}\ 11)].$$

Jede Elementarzugfolge ist als Produkt von 4 Zyklen der Länge 2 eine gerade Permutation. Damit bewirkt auch jede Teilzugfolge und jede mögliche Lösungszugfolge dieses Spieles eine gerade Permutation.

Die obige Permutation α gibt an, daß der Buchstabe *O* von Feld 3 auf Feld 9 und der von Feld 8 auf Feld 4 transportiert wird. Das Umsetzen der Spielsteine der Ausgangslage des Bildes 1 in die Ziellage, bei der das O von Feld 3 auf Feld 4 und das von Feld 8 auf Feld 9 gebracht wird, ist durch die Permutation

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 10 & 4 & 6 & 2 & 5 & 7 & 9 & 8 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Da α eine gerade Permutation ist, ist
$\beta = \alpha \circ (4\;9) = (3\;8) \circ \alpha$ eine ungerade Permutation und damit durch Züge nicht realisierbar.

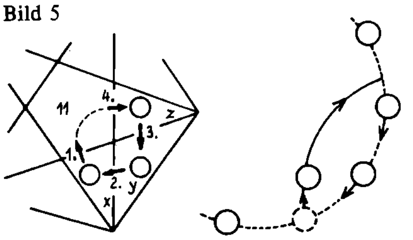
Nun soll gezeigt werden: Von einer Ausgangslage, bei der die Buchstaben eines Wortes mit 10 Buchstaben, von denen zwei gleich sind (z. B. Revolution, Pythagoras, Schokolade) in beliebiger Anordnung auf die Randfelder gesetzt werden, läßt sich die Ziellage (Beim im Felde 1 beginnenden Lesen im Uhrzeigersinn bilden die Buchstaben das Zielwort) stets durch Züge herstellen. Da das Zielwort genau zwei gleiche Buchstaben hat, ist das Überführen der Ausgangslage in die Ziellage durch Umsetzen der Steine gemäß zweier Permutationen α und β möglich. Durch Multiplikation von rechts der einen dieser beiden Permutationen mit dem Zyklus $(k\;l)$, wobei k und l die Nummern der Zielfelder der beiden gleichen Buchstaben sind, ergibt sich die andere: $\beta = \alpha \circ (k\;l)$.

Mithin ist entweder α oder β eine gerade Permutation. Die gerade von beiden sei mit α, die ungerade mit β bezeichnet.

Die Realisierung von β durch Züge ist unmöglich, die von α ist möglich:

Da jede Lösungszugfolge ein Produkt von Elementarzugfolgen ist, ist zunächst festzustellen, welche Permutationen der Spielsteine durch Elementarzugfolgen bewirkt werden. Ist y die Nummer eines stumpfwinkligen Randfeldes und sind x und z die geraden Nummern der benachbarten spitzwinkligen Randfelder, so bewirkt die Elementarzugfolge
$(x\;11) \circ (x\;y) \circ (y\;z) \circ (z\;11)$ das zyklische Vertauschen der Steine auf den Feldern z, y und x, den Zyklus $(z\;y\;x)$ (Bild 5).

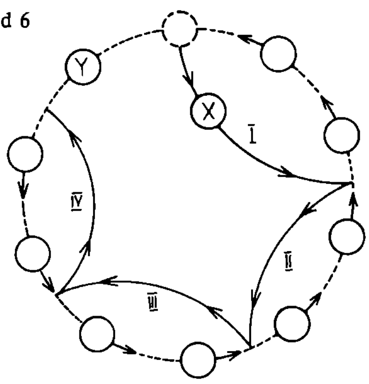
Bild 5



Durch eine Elementarzugfolge springt scheinbar im Buchstabenkreis lediglich ein Buchstabe über zwei Buchstaben hinweg. Dieser Buchstabe rückt von einem spitzwinkligen Randfeld auf eines der beiden nächstgelegenen spitzwinkligen Randfelder und gleichzeitig rücken die beiden „übersprungenen“ Buchstaben mit entgegengesetztem Drehsinn um ein Feld weiter.

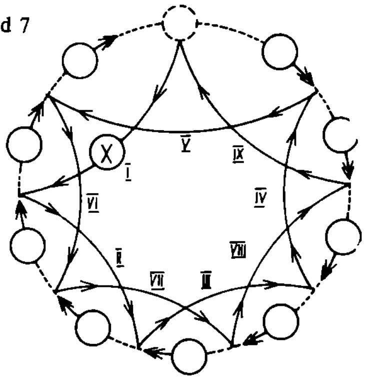
Aus geeignet aneinander gereihten Elementarzugfolgen entstehen zwei Typen von Teilzugfolgen, aus denen dann eine Lösungszugfolge gebildet wird. Eine Teilzugfolge vom Typ I besteht aus vier Elementarzugfolgen I bis IV (Bild 6).

Bild 6



Durch eine solche vertauschen zwei beliebig wählbare benachbarte Buchstaben im Buchstabenkreis ihre Plätze. Wird der von beiden Buchstaben auf einem spitzwinkligen Randfeld liegende mit X und der andere mit Y bezeichnet, so gilt: Bei allen vier Elementarzugfolgen überspringt der Buchstabe X scheinbar mit gleichem Drehsinn im Buchstabenkreis jeweils zwei Buchstaben. Die Richtung für das Weiterrücken von X wird so gewählt, daß der Buchstabe Y nicht bewegt wird.

Bild 7



Eine Teilzugfolge vom Typ II besteht aus neun Elementarzugfolgen I bis IX (Bild 7). Für einen auf einem spitzwinkligen Randfeld liegenden, mit X bezeichneten Buchstaben gilt: Bei jeder dieser Elementarzugfolgen überspringt X scheinbar mit positivem Drehsinn im Buchstabenkreis zwei der übrigen neun Buchstaben, insgesamt also jeden der neun Buchstaben zweimal. Mithin rückt jeder dieser neun Buchstaben und damit auch X als zehnter im negativen Drehsinn um zwei Felder weiter.

Zum Beschreiben der Lösungszugfolge werden noch die Begriffe Vorgänger und Nachfolger für Spielsteine eingeführt: In einer Spielsituation heißt der Stein mit Buchstaben Y Nachfolger des Steines mit Buchstaben X, wenn beide Spielsteine auf benachbarten Randfeldern stehen und das Feld des Steines Y im Uhrzeigersinn auf das des Steines X folgt. Der Stein X heißt dann Vorgänger des Steines Y.

Durch die Permutation α ist jedem einen Buchstaben tragenden Spielstein eindeutig ein Zielfeld i $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ zugeordnet. Ab jetzt wird der reale Spielstein mit Zielfeld i mit A_i bezeichnet. Ist bei der Ausgangslage der Stein A_2 nicht Nachfolger des Steines A_1, so wird durch eine Teilzugfolge vom Typ I der Stein A_2 mit seinem Vorgänger im Buchstabenkreis vertauscht.

Ist nunmehr der Stein A_2 noch nicht Nachfolger des Steines A_1, so wird durch eine weitere Teilzugfolge vom Typ I der Stein A_2 mit seinem jetzigen Vorgänger im Buchstabenkreis vertauscht, usf. Spätestens nach der 8. Teilzugfolge vom Typ I ist A_2 zum Nachfolger von A_1 geworden. Durch weitere, maximal 7 Teilzugfolgen vom Typ I ist zu erreichen, daß zusätzlich A_3 Nachfolger von A_2 wird usf. Nach maximal $8 + 7 + \ldots + 1$ Teilzugfolgen vom Typ I ist das Zielwort im Uhrzeigersinn lesbar entstanden. Nur der Anfangsbuchstabe liegt im allgemeinen noch nicht auf Feld 1. Sollte der Stein A_1 nicht auf Feld 1 oder 10 liegen, so wird dies durch Ausführen von maximal vier Teilzugfolgen vom Typ II erreicht. Der Fall, A_1 liegt auf Feld 10, kann nicht eingetreten sein:

Denn dann wäre die bis hierher durch Züge realisierte Permutation γ der Spielsteine eine gerade Permutation. Um endgültig die Ziellage herzustellen, wäre noch die ungerade Permutation

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$
$$= (1\;2\;3\;4\;5\;6\;7\;8\;9\;10)$$ erforderlich.

Und damit wäre entgegen der Annahme $\alpha = \gamma \circ \delta$ eine ungerade Permutation. Also liegt der Stein A_1 auf Feld 1 und die Ziellage ist hergestellt. Damit ist gezeigt, daß sich jedes Zielwort mit mindestens zwei gleichen Buchstaben aus jeder Ausgangslage seiner Buchstaben stets durch Züge herstellen läßt. Wird hingegen ein Zielwort mit 10 paarweise verschiedenen Buchstaben (z. B. Braunkohle) benutzt, so ist die Ziellage (Anfangsbuchstabe auf Feld 1) nicht von jeder Ausgangslage durch Züge realisierbar.

Bei jeder konkreten Ausgangslage läßt sich die Ziellage bei einem Zielwort mit mindestens zwei gleichen Buchstaben bereits mit einer relativ geringen Zahl von Zügen stets herstellen. Insbesondere zum Üben im Auffinden günstiger Lösungszugfolgen wird die folgende Aufgabe angeboten:

Die Buchstaben des Wortes a) Pythagoras, b) Schokolade, c) Braunkohle und d) Braunkohle sind wie angegeben auf die Randfelder des Pentagons zu legen.

Randfeld-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a) aufgelegter Buchstabe	*S*	*P*	*Y*	*T*	*H*	*A*	*G*	*O*	*R*	*A*
b) aufgelegter Buchstabe	*E*	*S*	*C*	*H*	*O*	*K*	*O*	*L*	*A*	*D*
c) aufgelegter Buchstabe	*B*	*E*	*L*	*H*	*O*	*K*	*N*	*U*	*A*	*R*
d) aufgelegter Buchstabe	*B*	*L*	*E*	*H*	*O*	*K*	*N*	*U*	*A*	*R*

Welche dieser vier Ausgangslagen ist durch Züge nicht in die Ziellage überführbar? Zu den drei anderen Ausgangslagen ist jeweils eine Lösungszugfolge anzugeben.

Für Hinweise möchte ich Herrn Prof. Dr. Gronau, Greifswald, Dank sagen.

W. Träger

---

1) L. A. Kaloujnie, V. I. Suščanskij, Transformationen und Permutationen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1986

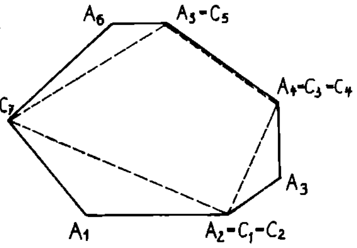
Ein geometrisches Optimierungsproblem und seine Lösung mit Hilfe des Kleincomputers

Die Jungen Mathematiker des Bezirkes Leipzig hatten in ihrem Spezialistenlager die Gelegenheit, in einem Vortrag von Prof. Dr. sc. R. Klötzler (Universität Leipzig) einen Überblick über geometrische Optimierungsprobleme zu erhalten. Dabei sprach Prof. Klötzler auch über folgende Aufgabe:

Zu einem gegebenen konvexen Polygon (Vieleck) $P = A_1A_2 \ldots A_n$ soll ein Inpolygon $C_1C_2 \ldots C_n$ mit kleinstem Flächeninhalt konstruiert werden.

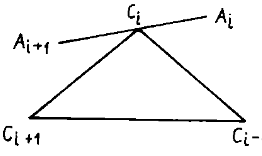
Dabei verstehen wir unter einem *Inpolygon* $I_n = C_1C_2 \ldots C_n$ ein solches Polygon, bei dem der Eckpunkt C_i auf der Seite A_iA_{i+1} des Polygons P für jedes $i = 1, \ldots, n-1$ liegt und der Eckpunkt C_n auf der Seite A_nA_1 liegt. Es ist zugelassen, daß C_i mit einem der Punkte A_i bzw. A_{i+1} oder daß C_i mit C_{i+1} zusammenfällt
$(i = 1, \ldots, n;\ A_{n+1} = A_1;\ C_{n+1} = C_1)$.
Das ist in Bild 1 dargestellt.

Bild 1



Wir wollen zeigen, daß zu gegebenem Polygon P stets ein Inpolygon kleinster Fläche existiert und ein solches unter jenen Inpolygonen zu finden ist, deren Eckpunkte mit gewissen Eckpunkten des gegebenen Polygons zusammenfallen. Dabei kann es mehrere Inpolygone mit gleicher kleinster Fläche geben, z. B. kann der Punkt C_4 in Bild 1 beliebig auf der Strecke A_4A_5 gewählt werden.

Bild 2



Wir halten die Punkte C_{i-1} und C_{i+1} fest und lassen den Punkt C_i auf A_iA_{i+1} wandern (Bild 2). Die Fläche des Dreiecks $C_{i-1}C_iC_{i+1}$ und damit des Inpolygons ist am kleinsten, wenn die Höhe im Punkt C_i am kleinsten wird. Dies tritt aber auf jeden Fall in einem der Randpunkte A_i oder A_{i+1} auf. Nur wenn die Gerade $g(A_iA_{i+1})$ parallel zur Geraden $g(C_{i-1}C_i)$ verläuft, ist jeder Punkt der Strecke A_iA_{i+1} von $g(C_{i-1}C_i)$ gleich weit entfernt.

Jetzt betrachten wir nur solche Inpolygone, deren Ecken der Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ angehören. Um die Ecken des Polygons zu finden, die gleichzeitig Ecken des Inpolygons sind, wollen wir diese mit einer „0" markieren (Bild 1), die anderen Ecken erhalten die Markierung „1". Im Beispiel aus Bild 1 haben wir die Markierung $(1, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$. Für das optimale Polygon muß die Folge (e_i) von Nullen und Einsen folgende Eigenschaften besitzen:

i) Es stehen nie zwei Einsen nebeneinander. Wenn nämlich $e_i = e_{i+1} = 1$ wäre, so hätte das konstruierte Polygon keinen Punkt mit der Seite A_iA_{i+1} gemeinsam und wäre folglich kein Inpolygon.

ii) Es stehen nie drei Nullen nebeneinander. Wäre nämlich $e_{i-1} = e_i = e_{i+1} = 0$, so könnte man ein Inpolygon kleinerer Fläche durch Abschneiden des Dreiecks $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ erhalten.

Da A_n Nachbarpunkt von A_1 ist, müssen diese beiden Bedingungen auch erfüllt sein, wenn e_1 und e_2 an das Ende der Folge $(e_n, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ angehängt werden!

Prof. Klötzler stellte den Jungen Mathematikern drei Aufgaben:

(A) Wieviel Folgen der Länge n von Nullen und Einsen gibt es, die die Bedingungen i) und ii) erfüllen?

(B) Man suche ein Verfahren, mit dem man alle diese Folgen erzeugen kann!

(C) Es ist ein Computerprogramm zu schreiben, welches eine Folge berechnet, die zu einem flächenkleinsten Polygon gehört!

Prof. Klötzler erwähnte, daß man ebenfalls auf die Aufgaben (A), (B) und (C) geführt wird, wenn man zu einem gegebenen konvexen Polygon $P = A_1A_2 \ldots A_n$ ein konvexes Umpolygon $U = B_1B_2 \ldots B_n$ mit größtem Umfang konstruieren will. Dabei nennen wir U ein *Umpolygon* zu P, wenn die Punkte A_i auf den Seiten B_iB_{i+1} liegen, $i = 1, \ldots, n$, wobei $B_{n+1} = B_1$ gesetzt wird.

Die Aufgaben von Prof. Klötzler regten uns zu verschiedenen Überlegungen an. Wir fanden ein Verfahren zur Bestimmung der besten Folge (e_i), bei dem nicht alle zulässigen Folgen, welche die Bedingungen i) und ii) erfüllen, zu überprüfen sind. Daher haben wir uns mit der Aufgabe (B) nicht beschäftigt. Interessierte Leser, die Zugang zu Computern haben, können sich der Aufgabe (B) widmen, um zu sehen, wieviel Rechenzeit ein darauf aufbauendes Computerprogramm benötigt. Wer sich für ein detailliertes Computerprogramm interessiert, wende sich bitte über die Redaktion der „alpha" an die Autoren. Die Aufgabe zeigte uns, daß man erst umfangreiche mathematische Überlegungen anstellen sollte, bevor man den Computer mit Programmen „füttern" kann. Wir waren von der Vielfalt der von uns eingesetzten Ideen, die über den unmittelbaren Schulstoff hinausgehen, überrascht. So verwendeten wir neben Elementargeometrie und einer einfachen Idee aus der Optimierung auch vollständige Induktion, rekursive Folgen, Kombinatorik, komplexe Zahlen, Gleichungen dritten Grades und anderes.

Aus Platzgründen können wir darauf nicht näher eingehen, Einzelheiten sind über die Redaktion bei den Autoren zu erfragen.

Die Anzahl der zulässigen Folgen

Wir wollen Näherungswerte für die Anzahl der Folgen (e_i) aus Nullen und Einsen angeben, die den Bedingungen i) und ii) genügen, d. h., bei denen nie zwei Einsen nebeneinanderstehen und nie drei Nullen aufeinander folgen. Die Zahl aller derartiger Folgen sei Z_n. Wir zeigen

$$Z_n \approx 2^{\frac{n}{2,5}} \approx (1{,}311\,95)^n \text{ für große } n. \qquad (1)$$

Jede zulässige Folge kann, abgesehen vom Anfang und vom Ende, in Abschnitte der Länge 2 oder 3 zerlegt werden, die mit einer „1" beginnen und dann eine oder zwei Nullen haben. Eine typische Folge hat also rund $\frac{n}{2,5}$ solcher Abschnitte.

Nach jedem Abschnitt kann man zwischen zwei Fällen wählen, ob der nächste Abschnitt die Länge 2 oder 3 haben soll. Das ergibt rund $2^{\frac{n}{2,5}}$ Möglichkeiten. Für große n gilt $Z_n > 2^{\frac{n}{2,5}}$. Für kleine n muß die Ungleichung nicht erfüllt sein, was für $n = 4$ sofort nachzuweisen ist.

Wir können beweisen, daß eine positive Konstante c existiert, so daß

$$Z_n \approx c \cdot (1{,}324\,7)^n \text{ ist.} \qquad (2)$$

Auch ohne Kenntnis von c folgt hieraus
$Z_n \approx c \cdot (1{,}324\,7)^n > (1{,}319\,5)^n$
für große Zahlen n.

Zuerst wurde dazu die Beziehung

$$Z_{n+3} = Z_n + Z_{n+1} \qquad (3)$$

gezeigt. Zwei Beweise, die einige Tricks ausnutzen, sind uns zum Nachweis von (3) gelungen. Aus (3) haben wir dann (2) hergeleitet.

Wegen $Z_2 = Z_4 = 2$ (die Folgen sind $(0, 1)$, $(1, 0)$ bzw. $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$) und $Z_3 = 3$ (die Folgen sind $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$), lassen sich mit Hilfe der Beziehung (3) leicht weitere Werte Z_n ausrechnen, dazu kann ein Computer benutzt werden. Man erhält:

n	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Z_n	5	5	7	10	12	17	22	29	39	51	68

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Z_n	90	119	158	209	277	367	486	644	853	1130

Die Bestimmung einer optimalen Folge

Mit $F_i > 0$ bezeichnen wir die Fläche des Dreiecks $A_{i-1}A_iA_{i+1}$. Die Fläche des Inpolygons I_n zu einer zulässigen Folge (e_i) ist die Differenz der Fläche des Polygons P und der Fläche $F = e_1F_1 + \ldots + e_nF_n$. Zu einer gegebenen Folge (F_i) suchen wir eine Folge (e_i), welche den Bedingungen i) und ii) genügt, und für die F maximal wird. Es reicht aus, F bezüglich der Bedingung i) zu maximieren, die optimale Folge erfüllt dann die Bedingung ii) automatisch.

Es sei $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ eine optimale Folge. Wir vergleichen sie mit irgendeiner zulässigen Folge $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ mit der Einschränkung $e'_1 = e_1$, $e'_j = e_j$ für $j \geqq i$, wobei der Index i vorerst festgehalten wird. Aus der Optimalität von $(e_1, \ldots, e_n)$ folgt

$$e_2F_2 + \ldots + e_{i-1}F_{i-1} \geqq e'_2F_2 + \ldots + e'_{i-1}F_{i-1}. \qquad (4)$$

Für Variable $j, k \in \{0, 1\}$ bezeichnen wir mit $s_i(j, k)$ den maximalen Wert von $e'_1F_1 + e'_2F_2 + \ldots + e'_iF_i$ unter der Nebenbedingung $e'_1 = j$ und $e'_i = k$. Aus der Ungleichung (4) folgt dann

$$s_i(e_1, e_i) = e_1F_1 + \ldots + e_{i-1}F_{i-1} + e_iF_i.$$

Die Zahlenwerte $s_i(j, k)$ lassen sich aus s_{i-1} berechnen, falls mit $s_2(j, k) = jF_1 + kF_2$ für $j \cdot k = 0$ gestartet wird. $s_2(1, 1)$ ist nicht definiert, da eine Folge der Länge 2 nicht mit 1 beginnen und enden darf. Deshalb geben wir uns noch $s_3(1, 0) = F_1$ vor.

Nun ist

$$s_i(j, 0) = \max\{s_{i-1}(j, 0), s_{i-1}(j, 1)\},$$

falls $i > 3$ oder $j = 0$ ist, und es ist

$$s_i(j, 1) = s_i(j, 0) + F_i \text{ für } i \geqq 3.$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$s_i(j, 0) = \max\{s_{i-1}(j, 0), s_{i-2}(j, 0) + F_{i-1}\}.$$

Weil im optimalen Fall

$e_1 \cdot e_n = 0$ sein muß, folgt

$$F = \max\{s_n(0, 0), s_n(1, 0), s_n(0, 1)\} = s_n(0, 0) + F_n.$$

Dieser Algorithmus, der die Grundidee der sogenannten *dynamischen Optimierung* ausnutzt, läßt sich leicht in ein BASIC-Programm umsetzen. Aufwendig wird es nur, wenn der Computer das gegebene Polygon sowie das optimale Inpolygon auf dem Bildschirm grafisch darstellen soll. Für diesen Algorithmus spricht, daß sein Zeitaufwand proportional zur Eckenzahl n ist. Beim Überprüfen aller zulässigen Folgen entsprechend Aufgabe (B) nach dem Vorschlag von Prof. Klötzler wäre der Zeitaufwand proportional zu $(1{,}3247)^n$. Bisher lag nur ein Programm für Kleincomputer vor, das sämtliche Folgen aus Nullen und Einsen erzeugt und unter diesen die zulässigen aussondert. Hier ist der Zeitbedarf sogar proportional zu 2^n.

Im folgenden Beispiel sind die Zahlen F_i als Pseudozufallszahlen vom Computer erzeugt worden. Anschließend wurde die optimale Folge berechnet.

i	1	2	3	4
F_i	69,14	44,53	65,62	94,14
e_i	1	0	1	0
i	5	6	7	
F_i	85,93	70,31	82,03	
e_i	1	0	1	
i	8	9	10	11
F_i	32,81	79,68	33,98	32,81
e_i	0	1	0	1
i	12	13	14	
F_i	15,62	91,01	35,93	
e_i	0	1	0	
i	15	16	17	18
F_i	41,79	45,31	0,39	7,81
e_i	0	1	0	0
i	19	20		
F_i	21,48	57,81	$T = 573{,}01$	
e_i	1	0		

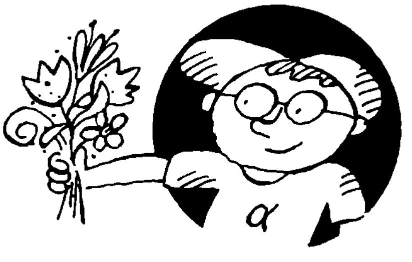
H. Englisch/Ch. Eisele

Die Entdeckung der Osterinsel

An einem Ostertag entdeckte der holländische Admiral Jacob Roggeveen im Pazifik eine Insel, der er den Namen Paasch Eyland (Osterinsel) gab. Das Datum (Tag, Monat, Jahr) dieser Entdeckung ist in Form eines Rösselsprungs in die Randfelder eines 3×3-Schachbrettes eingetragen, bei dem der Springer jedes Randfeld genau einmal betritt. Welches ist das Datum dieses Ostertages?

7	6	.
4		2
2	1	.

W. Träger, Döbeln



Walter Träger, Redaktionsmitglied und einer der aktivsten Mitarbeiter unserer Zeitschrift, feierte im November vorigen Jahres seinen 65. Geburtstag.

Wir möchten ihm nachträglich auf das herzlichste gratulieren, wünschen ihm Gesundheit und persönliches Glück sowie, nicht ganz uneigennützig, weiterhin so viele Ideen und Schaffenskraft.

Wo liegt die geographische Mitte im vereinten Deutschland?

Wie soll man den Mittelpunkt eines Landes mit dessen oft verschlungenen Umrissen feststellen? Am einleuchtendsten ist es, wenn die extremen geographischen Koordinaten (Breite, Länge) berücksichtigt werden, um die Differenzen zwischen Nord und Süd sowie Ost und West zu halbieren. Bei der Anweisung dieses Verfahrens kann aber der kuriose Fall eintreten, daß die geographische Mitte eines Landes im benachbarten Land liegt, wie dies z. B. für Norwegen zutrifft, wo die Mitte in Schweden ist.

Bisher lag die Mitte der Bundesrepublik im Wehretal unweit von Oetmannshausen südwestlich von Eschwege.

Der Mittelpunkt der ehemaligen DDR lag bei der kleinen Gemeinde Verlorenwasser bei Belzig im Lande Brandenburg.

Berücksichtigt man das vereinte Deutschland, so befinden sich die äußersten Punkte wie folgt:

Norden: Nordspitze der Insel Sylt. 55°03′ n. Br.

Süden: Stillachtal südlich von Oberstorf. 47°16,5′ n. Br.

Osten: Neiße bei der Gemeinde Deschka nördl. Görlitz. 15°02′ ö. L.

Westen: Westlich der Gemeinde Havert nördl. Aachen. 5°52′ ö. L.

Aus der Halbierung der Breiten- und Längendifferenzen kommt man auf eine Landesmitte mit den geographischen Koordinaten von 51°11′ n. Br. und 10°27′ ö. L. Dieser Punkt befindet sich nur 2 km südlich der Kreisstadt Mühlhausen i. Thür. Mit Recht bezeichnen wir Thüringen als das „grüne Herz Deutschlands“!

Verweilen wir noch ein wenig bei der Geographie Gesamtdeutschlands! Die Ost-West-Ausdehnung unseres Landes von 9°10′ bedingt einen beachtlichen Unterschied in der Ortszeit, der sogenannten wahren Sonnenzeit, von 36 Minuten 40 Sekunden. Um diesen Betrag geht nämlich eine Sonnenuhr im Gebiet von Aachen gegenüber einer in Görlitz nach. Das bedeutet auch, daß die Sonne sowie sämtliche Gestirne um diesen Betrag bei Aachen später im Süden stehen (kulminieren) als in Görlitz. Diese Differenz kann man auch auf die Sonnenauf- und -untergänge beziehen. Interessant ist in diesem Zusammenhang die unterschiedliche Länge des lichten Tages (zwischen Sonnenaufgang und -untergang) im Norden und im Süden Deutschlands. So beträgt auf Sylt der längste Tag (21.6.) 17 h 8 min, in den bayrischen Alpen bei Oberstorf aber nur 16 h 46 min. Am kürzesten Tag des Jahres (21. 12.) liegen die Verhältnisse jedoch genau umgekehrt. Der beachtliche Breitenunterschied von 8°45,5′ hat außerdem zur Folge, daß die Sommernächte im Norden infolge der Mitternachtsdämmerung hell sind. Diese Erscheinung tritt südlich der Linie Mainz – Schweinfurt (50° n. Br.) nicht mehr auf.

StR A. Zenkert, Potsdam

Der Champion und seine Alpträume –

oder: Was grüne Männchen so alles anrichten können

Fabian ging nun schon fast ein ganzes Jahr zur Max-Planck-Schule, einer der weiterführenden Schulen der großen Hansestadt, in der er so lange wohnte, wie er denken konnte. Gewissermaßen als besonderer Höhepunkt zum Ausklang des Schuljahres war vom Lehrerkollegium eine Projektwoche angesetzt worden. Fabian hatte sich den „Wettbewerb Kopf- gegen Taschenrechner“ ausgesucht – warum wußte er nicht mehr so genau.- Vielleicht hatte ihn sein Verwundern beeinflußt, daß die Frau an der Kasse leicht im Kopf lösbare Rechenaufgaben umständlich in einen Apparat eintippte, als er seiner Mutter beim letzten Großeinkauf helfen mußte. Höchstwahrscheinlich lag der Grund aber noch mehr bei seinem besten Freund Peter, der wie er gerade seinen elften Geburtstag gefeiert hatte und mit dem er auch in der Projektwoche zusammenbleiben wollte. Sie hatten sich nur auf dieses Thema aus dem Angebot einigen können.

Fabian war, wie es sich für Leistungssportler gehört, heute am Vorabend des abschließenden Wettkampftages schon früher als sonst ins Bett gegangen. Aber er konnte nicht einschlafen. Immer mehr Gedanken strömten in seinen Kopf:

Am ersten Projekttag hatten sie sich auf die Regeln für die Durchführung des Wettkampfes geeinigt. Es sollten zweistellige Zahlen miteinander multipliziert werden. Die jeweilige Aufgabenstellung sollte durch einen Computer mit Hilfe seines Zufallsgenerators aus einem Aufgabenpool ausgewählt werden, den die beiden konkurrierenden Gruppen je zur Hälfte eingeben durften. Sie sollte dann, für die beiden jeweiligen Einzelkonkurrenten gut erkennbar, auf einem mittleren Schirm sichtbar werden. Der Kopfrechner sollte sein Ergebnis mit Hilfe eines Overheadprojektors (Polylux) auf einem weiteren Schirm links davon den Zuschauern mitteilen. Der Wettspielpartner aus der anderen Gruppe sollte am rechten Overheadprojektor stehen und sein ertipptes Ergebnis entsprechend aufschreiben. Der stellvertretende Klassensprecher, der Schwierigkeiten hatte, sich bei einer der beiden Gruppen zu engagieren, war schließlich auf Vorschlag des Mathelehrers zum Schiedsrichter gewählt worden.

Zwei Tage lang hatten sie sich dann in der „Kopfgruppe“ um Rechenregeln bemüht. Wie man günstig mit 50 oder 25 multipliziert, war ihnen dabei sehr schnell wieder eingefallen. Auch kam ihnen bald in den Sinn, daß man mit Faktoren wie 21, 49, 51, 99 und 81 sehr günstig operieren kann. Bettina erinnerte sich am zweiten Tag der Projektwoche schließlich noch an ihren älteren Bruder, der ihr früher einmal

$15 \cdot 15 \text{ — } (1 \cdot 2)(5 \cdot 5) \rightarrow 225$ und
$65 \cdot 65 \text{ — } (6 \cdot 7)(5 \cdot 5) \rightarrow 4225$ und
$95 \cdot 95 \text{ — } (9 \cdot 10)(5 \cdot 5) \rightarrow 9025$ und
$195 \cdot 195 \text{ — } (19 \cdot 20)(5 \cdot 5) \rightarrow 38\,025$

beigebracht hatte. Und es regte sich zudem ganz vage in ihrem Gedächtnis, daß man da noch manches mehr anstellen kann. Dieser zweite Tag wurde dann mit der Vereinbarung abgeschlossen, in der ganzen Nachbar-, Freund- und Verwandtschaft nach Kopfrechenregeln zu fahnden und sich außerdem noch in einer Stadtbücherei umzusehen.

Zu Beginn des dritten Vormittags war dann einiges zusammengetragen, jedoch verlief die Sitzung langatmig. Es dauerte fast bis zum Mittag, bis plötzlich fast alle Scheuklappen auf einmal fielen.

Sie konnten nun vieles ganz schnell rechnen, z. B.

$24 \cdot 26 \text{ — } (2 \cdot 3)(4 \cdot 6) \rightarrow 624$ und
$31 \cdot 39 \text{ — } (3 \cdot 4)(1 \cdot 9) \rightarrow 1209$ und
$42 \cdot 48 \text{ — } (4 \cdot 5)(2 \cdot 8) \rightarrow 2016$ und
$42 \cdot 48 = 45 \cdot 45 - 3 \cdot 3 = 2025 - 9$ und
$32 \cdot 48 \text{ — } (3 \cdot 5)(2 \cdot 18) \rightarrow 1\,536$ und
$32 \cdot 48 = 40 \cdot 40 - 8 \cdot 8 = 1600 - 64$ und
...

Sie waren von ihren Erfolgen so fasziniert, daß sie sich für den Nachmittag bei Bettina verabredeten, deren Mutter dann viel Mühe hatte, alle unterzubringen und zu beköstigen, da sage und schreibe zehn aus der Zwölfergruppe dafür den sonst freien Nachmittag für weitere vorbereitende Überlegungen opferten.

Der vierte Projekttag begann mit einer selbstbewußten Diskussion. Die Gruppe wurde übermütig und versuchte, Rekorde aufzustellen, indem sie nach der Multiplikationsaufgabe suchte, zu der es die größte Anzahl von verschiedenen Ausrechnungsverfahren gibt. Nicht zu spät wurde die Aufmerksamkeit aber wieder auf das eigentliche Ziel gerichtet. Eine interne Ausscheidung ergab zwar auch für Bettina die Höchstpunktzahl, jedoch wurde er, unser langsam ins Reich der Träume hinübergleitende Fabian zum Champion erkoren, der dann als letzter der drei auszuwählenden Kopfrechner im Wettbewerb für die Gruppe anzutreten hatte. Der Gedanke an die langwierige Diskussion über die Aufgabenvorschläge für den Wettbewerbspool guckte zwar auch noch aus Fabians Unterbewußtsein heraus, verkrümelte sich dann aber wieder.

Er fiel in den Schlaf. Aber wie das mit dem Unterbewußtsein so ist, wenn es angeregt und unkontrolliert ans Laufen kommt. Es brütet die abenteuerlichsten Kombinationen aus. Bei Fabian waren es die kleinen grünen Weltraumknaben aus einer Fernsehreklame, welche ihm zuerst die Selbstsicherheit stahlen, dann Schweißausbrüche hervorriefen und ihn schließlich im Schlaf sprechen ließen.

Sie erschienen nämlich auch am nächsten Tag und forderten zu einem interstellaren Wettbewerb heraus. Das Problem war nur, daß sie zwölf Finger hatten und deshalb im Zwölfersystem operierten.

Ihre Rechnungen wie

$12 \cdot 1z = 218$ und $52 \cdot 5z = 2618$ und
$z1 \cdot ze = 920e$

überforderten ihn restlos. Er protestierte zwar noch lauthals: „Das ist unfair, warum rechnen wir nicht im Zehnersystem“. Und es kam noch von einem Schiedsrichter, dessen fünf endloslange Arme gleichzeitig sowohl bis zu den Tasten des Computers als auch bis zu den Einschaltknöpfen der beiden Overheadprojektoren reichten, der Vorschlag, im Elfersystem zu rechnen, da es ja „genau in der Mitte“ liegt. Jedoch bewirkte dies nur, daß Fabian sich seltsam leicht in die Luft erhob, plötzlich keinen Halt mehr hatte und in unendliche Tiefen fiel.

Fabians Mutter rettete ihn schließlich dadurch, daß sie ihn, aufgeschreckt durch sein durch die Tür dringendes stöhnendes Reden, aus seinem Traum aufweckte und beruhigend auf ihn einsprach.

Fragen, Anregungen und Aufforderungen an den Leser:

1. Stelle die in diesem Artikel schon verwendeten und möglichst noch weitere Regeln für das schnelle Multiplizieren von zweistelligen Zahlen zusammen und versuche, sie zu beweisen.

2. Für die Aufgabe $22 \cdot 28$ sind uns acht wesentlich verschiedene Ausrechnungsmöglichkeiten bekannt. Kannst auch Du so viele (oder vielleicht sogar noch mehr) zusammenstellen?
Gibt es eine Multiplikationsaufgabe mit zweistelligen Zahlen, die noch mehr als acht verschiedene Lösungsmöglichkeiten hat?

3. Welche 200 Aufgaben würdest Du dem Team von Fabian als seinen Beitrag für den Aufgabenpool empfehlen? – und welche der „Taschenrechnergruppe“?

4. Versuche, auf 1 bis 2 Schreibmaschinenseiten (oder gut leserlich handschriftlich im entsprechenden Umfang) den Ablauf des Wettkampfes am letzten Projekttag möglichst originell (und trotzdem realistisch) zu beschreiben. Sende uns diese Deine Fortsetzung zu, wenn sie Dir und Deiner Umgebung gut gelungen scheint.

5. Stelle Dir vor, daß bei dem Wettkampf auch die Eltern der beteiligten Schüler zuschauen und daß danach noch ein gemütliches Zusammensein stattfindet. Dabei könnte dann unser Fabian seinem Mathematiklehrer den Traum von den grünen Männchen erzählen.
Kannst Du mit der Bemerkung dieses Lehrers etwas anfangen, daß auch eine Einigung auf das Elfersystem unfair gewesen wäre und daß man sich unter der vorgegebenen Konstellation eher auf so etwas wie das Achtersystem einigen müßte?

6. Fallen Dir selbst noch weitere Fragen mit mathematischem Hintergrund im Anschluß an unsere Geschichte ein?

K. Kießwetter/M. Stupka

XXXI. Internationale Mathematik-Olympiade in Peking

Vom 8. bis zum 19. Juli 1990 fand in Peking (China) die XXXI. Internationale Mathematik-Olympiade statt. Dafür konnten sich in diesem Jahr nach langer Zeit wieder einmal zwei Mädchen qualifizieren: Ingrid Voigt (Böhlen, 12. Klasse) und Astrid Mirle (Kleindehsa, 12. Klasse). Weiterhin gehörten zur letzten IMO-Mannschaft der DDR: Rüdiger Belch (Freiberg, 10. Klasse, IMO-Teilnehmer '89), Thomas Mautsch (Duben, 12. Klasse, Ersatzmann '89), Torsten Ehrhardt (Chemnitz, 12. Klasse) und Jan Fricke (Pasewalk, 12. Klasse, IMO-Teilnehmer '89). Die Delegationsleitung war wie in den letzten Jahren das bewährte Duo Prof. Burosch (Delegationsleiter, Rostock) und Prof. Gronau (Stellvertreter, Greifswald).

Als wir das Pekinger Flughafengebäude verließen, dachten wir, daß wir in einer Sauna gelandet wären, so heiß und feucht war das Wetter. Unser Bus fuhr dann erst einmal zum Ji Men Hotel. Dort waren die stellvertretenden Delegationsleiter untergebracht, wir wohnten im Pekinger Sprachinstitut. Dort wurden auch die Klausuren geschrieben.

Am ersten Tag stand ein Besuch im Pekinger Zoo auf dem Programm, danach war die Eröffnungsveranstaltung der IMO. Sie fand in einer großen Sporthalle statt. Der offizielle Teil wurde durch eine Artistik-Vorstellung mit den traditionellen Teilen der chinesischen Artistik, so zum Beispiel das Balancieren von Tabletts mit pyramidenartig aufgebauten Gläsern, ergänzt. Abends durften wir dann schon mal einen Blick in die Klausurräume werfen. An den nächsten 2 Tagen schrieben wir die 2 Klausuren. Die schweren Aufgaben machten uns ganz schön zu schaffen. So hatten wir uns die Tage der Erholung redlich verdient!

In den folgenden Tagen hatten wir ein sehr umfangreiches Besichtigungs- und Erholungsprogramm, das uns praktisch an alle bekannten Kulturdenkmäler von Peking und Umgebung führte. Es ging gleich mit der Fahrt zum Sommerpalast, der Sommerresidenz des Kaiserpaares, los. Am nächsten Tag besuchten wir das „China Science and Technology Museum“ und den Pekinger Vergnügungspark. Sonnabends trafen sich alle IMO-Teilnehmer zu einem geselligen Beisammensein. Das kleine Kulturprogramm des Veranstalters zeigte einen Querschnitt durch die chinesische Musik – von den traditionellen Tänzen bis zu den populären chinesischen Schlagersängern.

Mit dem Besuch einer Eliteschule begann für uns der Sonntag. Das ist eine Schule, in der man das Abitur ablegen kann, jedoch herrscht hier ein extrem hohes Niveau, so daß 95 % der Schüler studieren, während nur 5 % der Abiturienten der „normalen“ Schulen einen Studienplatz erhalten. Außerdem sind diese Schulen hervorragend mit Lehrmitteln ausgestattet. Das Mittagessen gab es auch in dieser Schule. Dort mußten wir zum ersten Mal mit Stäbchen essen, aber unter sachkundiger Anleitung durch die Schüler und unsere Dolmetscherin lernten wir es schnell; wir wurden alle satt.

Eine weitere Station unseres Besichtigungsprogramms war der Biyun Tempel, eine riesige Tempelanlage am Stadtrand von Peking. Vom Biyun Tempel gingen wir direkt zum Fragrant Hill Hotel, hier erfuhren wir von unserer Delegationsleitung unsere Punktzahlen. (Von 42 erreichbaren Punkten: Thomas 33, Jan 30, Torsten 27, Ingrid 25, Astrid 22 und Rüdiger 21.) Wir waren alle sehr erfreut und erstaunt über unser Ergebnis. Wir hatten nicht mit so viel Punkten gerechnet. Abends gingen wir in die Pekinger Oper. Dort sahen wir drei typische chinesische Theaterstücke, die den europäischen Vorstellungen von Theater nun ganz und gar nicht entsprachen. Sie waren eine Mischung aus Pantomime und Akrobatik und wurden musikalisch durch Rhythmusinstrumente umrahmt.

Am Montag besichtigten wir den Kaiserpalast. Das anschließende Mittagessen gab es dann im „He Ping Men“, einem Spezialitätenrestaurant für Pekingente. Auch hier wurde natürlich nur mit Stäbchen gegessen. Nachmittags waren wir im Himmelstempel, dort betete früher der Kaiser für eine gute Ernte. Auch das war ein riesiges Gelände. Man hätte viel mehr Zeit benötigt, wenn man alles sehen wollte.

Dienstag machten wir einen Ausflug zur großen chinesischen Mauer, das wohl beeindruckendste Erlebnis unserer Reise. Nachmittags fuhren wir zu den Minggräbern.

Am nächsten Tag fand die Siegerehrung statt, auf der jedem seine Medaille (Silber: Thomas, Jan, Torsten und Ingrid; Bronze: Astrid und Rüdiger) und sein Preis, eine chinesische Vase, überreicht wurde. An die Siegerehrung schloß sich das Abschiedsbankett in der Großen Volkshalle an. Diese Volkshalle liegt direkt neben dem Platz des himmlischen Friedens, den wir bei dieser Gelegenheit noch einmal fotografieren konnten.

Wir besuchten zum Abschluß traditionell die Botschaft der DDR. Von der Botschaft fuhren wir direkt zum Fragrant Hill Hotel, wo uns der österreichische Delegationsleiter noch einmal mit unseren Medaillen fotografierte, und dann ging es zum Flughafen. Damit war die IMO nun auch für uns beendet.

Im Namen der ganzen Mannschaft möchte ich mich bei allen bedanken, die uns bei unserem Weg zur IMO geholfen und unterstützt haben. Besonders meine ich damit Frau Kessel, unsere Betreuerin auf den vielen Vorbereitungslehrgängen (sie mußte sich mit den ganzen organisatorischen Angelegenheiten 'rumärgern) und die Dozenten und Mentoren einschließlich unserer Delegationsleitung, die uns mathematisch ausgebildet haben.

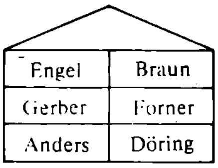
Jan Fricke

Am Abreisetag vor dem Fragrant Hill Hotel (hinten v.l.n.r.: Prof. Gronau, Astrid, Jan, Ingrid, Torsten, Thomas; vorn sitzend: Rüdiger und Prof. Burosch)

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1991

5/8 In einem Haus mit drei Stockwerken wohnen (wie im Bild angegeben) sechs Familien mit den Nachnamen Anders, Braun, Döring, Engel, Forner und Gerber. Von deren Kindern wissen wir folgendes: Maria wohnt links neben Ingo, Luise rechts neben Hans. Ingo wohnt genau über Jürgen, Hans tiefer als Jürgen.



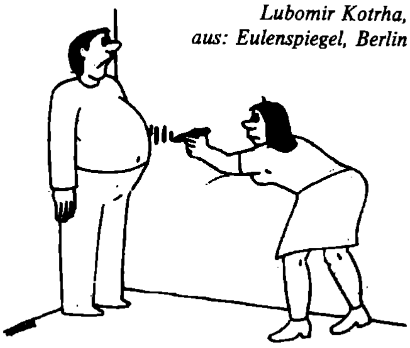
Engel	Braun
Gerber	Forner
Anders	Döring

Jede der sechs Familien hat genau ein Kind. Es ist der Nachname von Klaus zu ermitteln. *Sch.*

5/9 Es sei $z = 100a + 10b + c$ eine dreistellige natürliche Zahl, für die $a < b < c$ gilt.
Welche Zahlen z erfüllen die Bedingung $a^2 + b^2 + c^2 = 56$? *Sch.*

5/10 Auf einer Geraden liegen (in dieser Reihenfolge) die Punkte A, B, C, D. Es gelte:
a) $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{CD} = 3$ cm; die Mittelpunkte M_1 und M_2 dieser beiden Strecken sind 8 cm voneinander entfernt.
Wie lang ist die Strecke $\overline{BC}$?
b) $\overline{AB} = \overline{CD}$; die Mittelpunkte dieser beiden Strecken sind 8 cm voneinander entfernt.
Wie lang sind die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, wenn die Strecke $\overline{AD}$ die Länge 14,5 cm hat? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

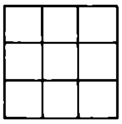
5/11 Gegeben sei eine dreistellige natürliche Zahl, deren Quersumme 11 beträgt, und deren Hunderterziffer mit deren Zehnerziffer übereinstimmt. Vertauscht man die Zehnerziffer mit der Einerziffer, so erhält man eine Zahl, die um 18 größer ist als die ursprüngliche Zahl. Um welche Zahl handelt es sich? *Sch.*



Lubomir Kotrha, aus: Eulenspiegel, Berlin

5/12 Welche und wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Geldbetrag von 0,30 DM auszuzahlen, wenn dafür ausreichend 1-Pf-, 5-Pf-, 10-Pf- und 20-Pf-Münzen zur Verfügung stehen? *Sch.*

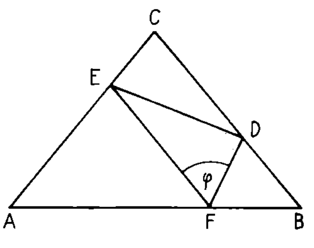
5/13 Die abgebildete Figur ist ein Quadrat, das aus neun kleineren Quadraten besteht. Wie viele Rechtecke findet man in der abgebildeten Figur? *Sch.*



5/14 Gegenwärtig ist Lars 8 Jahre, sein Vater 31 Jahre alt. Nach wieviel Jahren wird der Vater doppelt so alt wie sein Sohn Lars sein?
Schüler Lars Zietschmann, Stolzenburg

6/8 Man hat ein bis zum Eichstrich mit Wasser gefülltes 10-Liter-Gefäß und zwei leere, ebenfalls geeichte Gefäße, die 4 Liter bzw. 3 Liter fassen. Durch Umfüllen will man jede ganzzahlige Literzahl von 1 bis 9 Litern erreichen. Gib eine Möglichkeit der Umfüllungen an, um diese Literzahlen zu erreichen!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/9 Das Bild stellt ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ dar. Der



Winkel $\sphericalangle ACB$ hat die Größe 80°. Ferner gilt $\overline{AE} \cong \overline{AF}$ und $\overline{BD} \cong \overline{BF}$. Es ist die Größe φ des Winkels $\sphericalangle DFE$ zu bestimmen. *Sch.*

Wettbewerbsbedingungen

NEU!

1. Der Wettbewerb 1990/91 läuft über nur **zwei Teilwettbewerbe** in den Heften 6/90 und 1/91.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an:

Redaktion alpha
Postfach 14
Leipzig
O-7027

Die Lösungen sind **in einem Kuvert** und möglichst der Reihenfolge nach fortlaufend, auf Vorder- und Rückseite beantwortet, einzusenden. (Die Lösungen werden zur Korrektur nicht mehr aufgabenweise sortiert!)
Beizulegen ist ein **frankierter* und adressierter Rückumschlag** für die Zusendung der Antwortkarte, auf der alle Ergebnisse des Teilwettbewerbs registriert werden.
Da **Schulen** die Antwortkarten geschlossen zurückerhalten, ist das Porto in entsprechender Höhe zu entrichten.

3. Von dem Teilnehmer sind nur Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden (Die Klassenstufennummer steht vor der Aufgabennummer). Schüler ab Klassenstufe 11 und Erwachsene lösen die mit 10 gekennzeichneten Aufgaben.

3. Zu empfehlen ist allen Teilnehmern die **Einsendung der Lösungen vor dem Einsendeschluß**, da in diesem Fall die Korrektur umgehend erfolgt und die Antwortkarte bereits mit Einsendeschluß zurückgesandt werden kann.

5. Jeder Teilnehmer sollte einen Durchschlag seiner Lösungen anfertigen, um sie mit den jeweils zwei Hefte später erscheinenden Lösungen vergleichen zu können.

6. Diejenigen Teilnehmer, die insgesamt **mindestens acht Aufgaben gelöst** haben, senden bis zum 10. September 1991 beide Antwortkarten, einen entsprechend **frankierten* und adressierten Rückumschlag** und
a) bei mehr als dreimaliger Teilnahme die zuletzt erhaltene Urkunde, bzw.
b) bei mit diesem Wettbewerb dreimaliger Teilnahme die bereits vorhandenen zwei Urkunden ein.
Bei erst- bzw. zweimaliger Teilnahme genügen die beiden Antwortkarten und der entsprechende Rückumschlag.

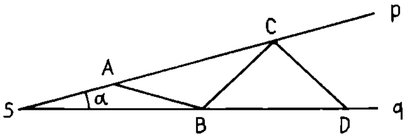
7. Alle erfolgreichen Teilnehmer erhalten eine Anerkennungsurkunde und einen alpha-Button.
Pro Klassenstufe 5 bis 10 und unter den Frühstartern werden die 10 besten Teilnehmer ermittelt (entscheidend ist die Anzahl der sehr gut gelösten Aufgaben) und unter den Übrigen je fünf Teilnehmer ausgelost.
Sie erhalten attraktive Buchpreise.

* *Entsprechend der Portogebühren im Mai bzw. September 1991.*

6/10 Es sei $z = 100a + 10b + c$ eine dreistellige natürliche Zahl, für die $a^2 + b^2 + c^2 = 49$ gilt. Für welche Zahlen z trifft dies zu? *Sch.*

6/11 Ein Würfel ist aus 125 gleichgroßen kleineren Würfeln von 1 cm Kantenlänge zusammengesetzt. Bestimme die Größe der entstehenden Oberfläche, wenn
a) alle diejenigen kleineren Würfel entfernt werden, die zu genau einer der Kanten des großen Würfels gehören;
b) an jeder Würfelecke des großen Würfels ein kleinerer Würfel entfernt wird;
c) alle diejenigen kleineren Würfel entfernt werden, die zu allen Kanten des großen Würfels gehören!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/12 Das Bild stellt einen Winkel der Größe α mit seinem Scheitelpunkt S und seinen Schenkeln p und q dar. Auf dem Schenkel p wurden Punkte A und C, auf dem Schenkel q Punkte B und D so festgelegt, daß $\overline{AS} \cong \overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD}$ gilt, d. h., daß die Dreiecke $\triangle SBA$, $\triangle CAB$, $\triangle BDC$ gleichschenklig sind. Wie viele solcher gleichschenkligen Dreiecke lassen sich für $\alpha = 15°$ konstruieren? *Sch.*



6/13 Die drei Schüler mit Familiennamen Schulz, Meier und Neumann sind im Ferienlager. Sie haben (in anderer Reihenfolge) die Vornamen Gerd, Horst und Jan. Je einer dieser Jungen ist Schüler der 5., 6. bzw. 7. Klasse. Sie kommen aus verschiedenen Städten, nämlich aus Rostock, Berlin bzw. Schwerin. Von ihnen ist folgendes bekannt:
(1) Der Schüler aus der 6. Klasse, der Schweriner und Horst spielen gern Fußball.
(2) Der Berliner und der Schüler Schulz lernten sich erst im Ferienlager kennen.
(3) Der Schüler aus der 6. Klasse war noch nie in Rostock.
(4) Der Berliner und der Schüler Meier sind im Mathematikzirkel des Ferienlagers.
(5) Gerd und der Schüler Schulz kennen sich bereits vom vorjährigen Ferienlager her.
(6) Der Schüler aus der 7. Klasse und Jan haben zusammen mit dem Rostocker eine Wandzeitung gestaltet.
Es sind von jedem Jungen der Vorname, der Familienname, die Klassenstufe und der Wohnort anzugeben.
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

6/14 Gegeben ist eine Stahlkugel mit einem Volumen von 15 cm³. Welches Volumen muß ein Quader aus Aluminium haben, damit er die gleiche Masse hat? *R.*

7/8 Susanne will das Lebensalter ihrer Großmutter, die jünger als 100 Jahre ist, errechnen. Sie sagt zur Großmutter: „Subtrahiere von der Zahl, die dein Lebensalter angibt, die Quersumme. Nenne mir das Ergebnis!“ (Die Großmutter nennt die Zahl 63.) Susanne fordert nun die Großmutter auf: „Nun kehre die Zahl deines Lebensalters um, vertausche also die beiden Ziffern; subtrahiere davon wieder die Quersumme. Nenne mir auch dieses Ergebnis.“ (Die Großmutter nennt die Zahl 18.) „Nun weiß ich dein Alter“, meint Susanne. Wie findet Susanne das Alter ihrer Großmutter heraus?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

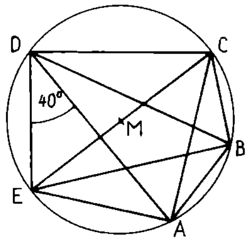
7/9 Von einem Dreieck wird folgendes gefordert: Die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Seitenlängen a, b, c sollen natürliche Zahlen sein; die Seitenlänge a soll 36 %, die Seitenlänge b soll 48 % des Umfanges des Dreiecks betragen.
Es ist zu untersuchen, ob es unter diesen Bedingungen ein Dreieck gibt, dessen Umfang $u = 25$ cm beträgt! *Sch.*

7/10 Wie viele dreistellige natürliche Zahlen gibt es, die folgende Bedingung erfüllen? Schreibt man eine solche Zahl rückwärts durch entgegengesetzte Anordnung ihrer drei Ziffern, so erhält man eine um 297 größere Zahl. *Sch.*

7/11 Für die Seitenlänge a und b eines Dreiecks gelte $a > b$. Die Längen der zu diesen Seiten gehörenden Höhen seien h_a und h_b. Es ist nachzuweisen, daß in diesem Fall stets
$a + h_b > b + h_a$ gilt! *Sch.*

7/12 Zwei Bagger würden einen Arbeitsauftrag zusammen in 12 Tagen ausführen können. Der erste Bagger würde dazu allein 20 Tage benötigen. In wieviel Tagen würde der zweite Bagger allein die Arbeit ausführen können?
Schüler Andreas Kellner, Halberstadt

7/13 Es gelte $\overline{AB} = \overline{BC}$ bzw. $\widehat{AB} = \widehat{BC}$.
Wie groß ist $\sphericalangle ABC$?
OStR J. Kreusch, Löbau

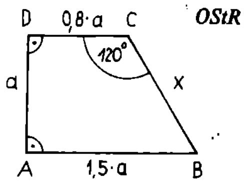


7/14 Ein Becherglas hat einen Durchmesser von 5 cm und eine Masse von 45 g. Es ist mit 60 ml Wasser (4 °C) gefüllt und schwimmt im Wasser. Wie tief taucht es ein?

8/8 Für welche dreistellige natürliche Zahlen ist jeweils ihr Querprodukt fünfmal so groß wie ihre Quersumme? *Sch.*

8/9 Bei einer Uhr ist der große Zeiger 10 cm, der kleine Zeiger 7,5 cm lang. Wieviel Zentimeter legen die Spitzen der Zeiger in jeder Minute zurück?
Schüler Roland Holke, Leipzig

8/10 Ermittle folgende Größen:
a) x b) Umfang des Trapezes
c) Fläche des Trapezes



OStR J. Kreusch, Löbau

8/11 Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Katheten $\overline{BC}$ und $\overline{AV}$ die Längen $a = 8$ cm und $b = 6$ cm haben. Es ist der Radius r des Inkreises dieses rechtwinkligen Dreiecks durch die Längen a und b seiner Katheten auszudrücken und danach zu berechnen. *Sch.*

8/12 Fritz, der Ratekünstler, sagt: „Denke dir eine vierstellige natürliche Zahl! Bilde die Quersumme! Multipliziere diese mit 8! Addiere dieses Ergebnis zu deiner gedachten vierstelligen Zahl! Streiche nun eine Ziffer dieser errechneten Zahl (aber bitte keine Null)! Nenne mir die neue Zahl! Ich sage dir, welche Ziffer du gestrichen hast.“
a) Wie macht Fritz das?
b) Begründe, weshalb das so ist!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

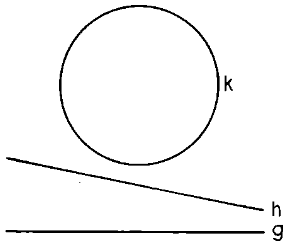
8/13 An einem masselosen Stab hängen im Abstand von 0 cm, 6 cm, 10 cm und 20 cm vom linken Ende Körper mit der Masse $m = 100$ g. In welchem Abstand vom linken Ende muß der Stab unterstützt werden, damit er sich im Gleichgewicht befindet?

8/14 Ein U-Rohr ist auf der einen Seite mit Wasser und auf der anderen mit Quecksilber gefüllt. Wie groß ist der Abstand zwischen beiden Menisken, wenn die Quecksilbersäule 1 cm lang ist (gemessen von der Trennfläche beider Flüssigkeiten)?

9/8 Welches Relationszeichen (<, >, =) ist zwischen $0,\overline{75}$ und $0,7\overline{57}$ zu setzen? Begründung! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

9/9 Die Summe zweier Zahlen beträgt 19, die Summe ihrer Quadrate 205. Um welche Zahlen handelt es sich?
Schülerin Kathrin Zapf, Fambach

9/10 Gegeben sei ein Kreis k und zwei sich schneidende Geraden g und h, die mit dem Kreis k keinen Punkt gemeinsam haben.



Der Kreis k liegt nicht innerhalb des Schnittwinkels der beiden Geraden. Es ist ein Quadrat $ABCD$ so zu konstruieren, daß A auf g, B und D auf h und C auf dem Kreis k liegen. Die Konstruktion ist zu begründen! *Sch.*

9/11 Es ist die kleinste Primzahl zu ermitteln, die bei Division durch 5, 7 und 11 jeweils den Rest 1 läßt.
Schülerin Rene Schulz, Ribnitz

9/12 Berechnen Sie den Wert des Terms

$$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(11^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(12^4+\frac{1}{4}\right)}!$$

Nutzen Sie dabei die Identität $n^4 + 4 = [(n-1)^2 + 1]\cdot[(n+1)^2 + 1]$.

nach: Quant, Moskau

9/13 Ein Elektron mit der Anfangsgeschwindigkeit $0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ gelangt in ein homogenes elektrisches Feld eines Plattenkondensators mit der Feldstärke $E = 100\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{cm}}$.

a) Wie groß ist die Beschleunigung des Elektrons?

b) Welche Geschwindigkeit hat es nach einer Beschleunigungsstrecke von 2 mm?

9/14 Durch eine Doppelleitung aus Aluminium (Länge 100 m, Querschnitt 25 mm^2) fließt ein Strom von 80 A. Wie groß ist der Spannungsabfall?

10/8 Setzt man vor eine dreistellige Primzahl p_1 eine Ziffer, so erhält man eine vierstellige Primzahl p_2. Bildet man den Nachfolger des Quadrates der kleineren Primzahl, so erhält man das Doppelte der größeren. Wie lauten die beiden Primzahlen? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

10/9 In einem ungleichseitigen und spitzwinkligen Dreieck ABC möge die Winkelhalbierende w_α die Höhe h_c derart in E schneiden, daß $\overline{AE} \cong \overline{CE}$ gilt. Es ist zu zeigen, daß damit die Größe des Innenwinkels α eindeutig bestimmt ist! Wie groß ist α? *OStR J. Kreusch, Löbau*

10/10 Untersuche, ob die Ungleichung

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} < \frac{714}{113}$$

eine wahre oder eine falsche Aussage darstellt! *Sch.*

10/11 Löse nachfolgendes Gleichungssystem.

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, unterschiedliche Buchstaben bedeuten unterschiedliche Ziffern. Für die Sterne sind Buchstaben zu setzen:

(1) $abc : *^2 = **$

(2) $acb : ad = ad$ *Frank Pampel,*

(3) $abc - acb = **$ *Zeulenroda*

10/12 In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel $\sphericalangle ACB$ seien die Länge der Kathete $\overline{AC}$ mit $b = 10$ cm und die Länge der Höhe $\overline{CD}$ auf die Hypotenuse mit $h_c = 8$ cm bekannt.

Es ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks zu berechnen! *H. Boettcher, Weimar*

10/13 Eine Spule und ein Plattenkondensator bilden einen Parallelschwingkreis. Alle Abmessungen der Schaltelemente werden halbiert. Wie ändert sich die Resonanzfrequenz des Schwingkreises? (Formfaktor der Spule unberücksichtigt.) *R.*

10/14 Ein Holzkörper (Auflagefläche $A = 10$ cm^2) liegt auf einer geneigten Ebene aus Holz. Der Neigungswinkel wird – von 0° beginnend – langsam vergrößert. Er beginnt bei einem Winkel von 33° zu gleiten. Wie groß ist die Haftreibungszahl? *R.*

alpha-Wettbewerb 1989/90

Preisträger

Sandra Wiedersberg, Albersroda; Dieter Koch, Arnstadt; Juliane Friedrichs, Martin Friedrich, beide Bergfelde; Gundula Hofer, Ulrich Fahrenberg, Bert Minske, Thomas Trinks, Dana Krüger, alle Berlin; Norbert Schröder, Bernau; Jens Opalka, Bernburg; Marco Fiedler, Bischofferode; Ingo Moldenhauer, Blankenfelde; Roland und Ulrich Voigt, Böhlen; Astrid Neidhardt, Brotterode; Yvonne Kinzel, Bühlow; Anne-Kathrin Richter, Chemnitz; Piere Gehmlich, Clausnitz; Matthias Berse, Cottbus; Oliver Fritsche, Dauban; Almuth Griebel, Deesbach; Georg Kirchner, Dermbach; Christian Vögle, Dingelstädt; Leonhard Karsch, Jürgen Schmerler, Daniel Arndt, Lutz Lauter, Jörg Wagner, alle Dresden; Matthias Stech, Dömitz; Stefanie Steglich, Yvonne Langer, beide Eisenach; Kai Ganskow, Kirsten Siebke, beide Eisenhüttenstadt; Stefan Schwarz, Rumen Iliew, Ulrike Rößner, alle Erfurt; Daniel Häfner, Konstanze Kuhse, beide Fambach; Thomas Morchel, Finsterwalde; Ulrich und Ulrike Müller, Fischheim; Katrin Schünemann, Christiane Dammann, beide Freital; Katja Grande, Friedeburg; Manuel Fey, Gehaus; Clemens Gothert, Gera; Diana Fanghänel, Gersdorf; Ingolf Müller, Geschwenda; Antje Sydow, Glienicke; Juliane Bloß, Görlitz; Michael Gronau, Katja Lißke, Cathrin Kunze, alle Greifswald; Denise Kraus, Großräschen; Silke Rudolph, Großröhrsdorf; Christian Schuster, Grünhain; Manuela Vogel, Halberstadt; Anja Goldschmidt, Thomas Pitzschke, beide Halle-Neustadt; Schulclub der EOS W. Pieck, Heiligenstadt; Angela Wiesjahn, Holzendorf; Marcus Krause, Hennigsdorf; Claudia Fach, Nicole Templin, beide Hohen Neuendorf; Rene Schüppel, Hoyerswerda; Carsten Pettig, Jena; Sabine Hüther, Kaltennordheim; Regina Sachse, Kleinmachnow; Matthias Loesdau, Landshut (W); Björn Schoof, Langenweddingen; Steffen Hoffmann, Leegebruch; Andreas Willnow, Jens Gärtner, Lars-Peter Müller, Jörg Schreiber, André Gärtner, Clemens Crucius, alle Leipzig; Gunter Semmler, Limbach-O.; Steffen Winter, Liebenwalde; Stephan Brumme, Luckenwalde; Christiane Czech, Bianca Truthe, beide Magdeburg; AG Math. der OS H. Rau, Mieste; Dirk Habermann, Mühlhausen; Sarah Bardy, Nepthen (W); Martin Anhuth, Neubrandenburg; Susanne Gloth, Maik Daum, beide Neuhaus; Jan Fricke, Pasewalk; Rico Jänicke, Prenzlau; Dirk Jahn, Arlett Prangel, Frank Rodenhagen, Andreas Ahrens, Jan Wunderlich, Mathias Jeschke, Katharina Pierer, alle Rostock; Heinz-Olaf Müller, Schmalkalden; Kathrin Brandt, Susan König, beide Schwallungen; Karsten Andrae, Karin Streck, Thomas Lotze, alle Suhl; Juliane Neubert, Steinbach-Hallenberg; Stephanie Möder, Schmalkalden; Kerstin Reinhardt, Constanze Frötschner, beide Trusetal; Hartmut Boettcher, Weimar; Stefan Herrmann, Wegefarth; Jörg Winterfeldt, Wismar; Steffen Hohmann, Zella-Mehlis

Abzeichen in Gold

Für dreiundzwanzigjährige Teilnahme

Lutz Püffeld, Halberstadt

Für zweiundzwanzigjährige Teilnahme

Guido Blosfeld, Halle

Für zwanzigjährige Teilnahme

Rainer Seifert, Dessau; Frank Aßmus, Oranienburg

Für neunzehnjährige Teilnahme

Arno Feuerherdt, Brandenburg; Kurt Oertel, Gräfenhainichen; Volker Schulz, Ketzin; Gerald Werner, Meiningen; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Lothar Gruber, Wien (Österreich)

Für achtzehnjährige Teilnahme

Eberhard Georgy, Erfurt; Heinz-Olaf Müller, Schmalkalden

Für siebzehnjährige Teilnahme

Dieter Koch, Arnstadt; Ina Büttner, Berlin; Matthias Weser, Großenhain; Rüdiger Düring, Halle; Ruth Jacobs, Halle-N.; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Rolf Kamieth, Leipzig; Udo Kretschmann, Markneukirchen; Siegrid Kretschmann, Schlagsdorf

Für sechzehnjährige Teilnahme

Uwe Maaz, Arnstadt; Guntram Türke, Auerbach; Andrea Hengst, Jens Pönisch, beide Chemnitz; Harry Höfer, Dorndorf; Jörn Wittig, Carolin Engel, Karl-Heinz Jünger, Gudrun Thäter, alle Dresden; Thomas Mittelbach, Erfurt; Jörg Butter, Freiberg; Volker Reck, Heiligenstadt; René Schüppel, Hoyerswerda; Horst Fliegner, Jarmen; Christian Tiedt, Jena; Per Witte, Königs Wusterhausen; Claudia Trochold, Reichenbach; Heidrun Tiedt, Teterow; Hans Creutzburg, Thal; Eva-Maria Wabbel, Wolfen

Für fünfzehnjährige Teilnahme

Marc Schewe, Berlin; Tilman Völzke, Böhlen; Thomas Mader, Chemnitz; Stefan Edelmann, Dresden; Siegfried Obst, Reinhard Weißnicht, beide Eberswalde; Susanne und Matthias Schreiber, Elsterwerda; Volker Georgy, Erfurt; Manfred Hille, Riesa; Dieter Seifert, Hagenow; Günter Schielinsky, Halle-N.; Karsten Milek, Hohen-Ndf.; Uwe Würker, Mülsen; Rolf Heubner, Wolfen; Thorsten Eidner, Zeulenroda

Für vierzehnjährige Teilnahme

Uwe Schütze, Camin; Andreas Mann, Cunersdorf; Georg Kirchner, Dermbach; Lutz Lauter, Dresden; Michael Schulze, Halberstadt; Claus Janke, Ilmenau; Karl-Heinz Gora, Lohsa; Sabine Ansorge, Oschersleben; Kurt Schulze, Schernberg; Hartmut Boettcher, Weimar

Für dreizehnjährige Teilnahme

Kerstin Kantiem, Berlin; Kerstin Müller, Ines Lauter, Gerald Eichler, Stefan Thäter, alle Dresden; Jens Wackernagel, Falkenberg; Jens Grundmann, Gevelsberg; Sonnfried Lätsch, Görlitz; Annett Weißker, Halle-N.; Birgit Seifert, Hagenow; Uta Mersiowsky, Sabine Pohlmann, beide Langewiesen; Uwe Knispel, Prösen; Jana Renner, Röbel; Erhard Zilinske, Stralsund; Irene Michallik, Waren; Erika Schreiber, Norbert Fuchs, beide Zella-Mehlis

Für zwölfjährige Teilnahme

Beate Müller, Bert Minske, beide Berlin; Christian Sitz, Calau; Andreas Israel, Chemnitz; Uwe Martin, Crossen; Carsten und Helmut Schreiber, Ingolf Thurm, alle Dresden; Barbara Voigt, Erfurt; Heike Morgner, Falkenstein; Carsten Leibnitz, Hohenstein-E.; Friedhelm Reichert, Heiko Witte, beide Königs Wusterhausen; Bernd Fucke; Leipzig; Irma Goßmann, Oranienburg; Katja Uhlemann, Prausitz; Ralf Heidenreich, Roßleben; Ronald Laue, Schleid; Delia Wolfert, Söllichau; Evelin Schott, Thalheim; Horst Rißmann, Wesenberg

Für elfjährige Teilnahme

Ralf und Wolfgang Beukert, Altenburg; Annegret Schädlich, Auerbach; Yvonne Großmann, Matthias Tittel, beide Berlin; Eberhard Balzer, Bernburg; Peter Sitz, Calau; Michael Tix, Jürgen und Michael Hoppe, alle Chemnitz; Olaf Krause, Eisenhüttenstadt; Ulf Winkler, Frankenberg; Jörg Blaurock, Guben; Henrik Hodam, Kaltennordheim; Steffen Scheithauer, Parey; Annegret Ruser, Rostock; Achim Kröber, Schönbach; Jochen Wetzel, Sömmerda; Johannes Thäter, Weimar; Bert Winkler, Wilkau-Haßlau; Antje Ohlhoff, Halberstadt

Für zehnjährige Teilnahme

Marcus Markardt, Bad Salzungen; Frauke Wendt, Berlin; Alice Kraneis, Bernburg; Rainer Werner, Chemnitz; AG Math. der K. Niederkirchner OS, Domersleben; Jens Haufe, Ullrich Hartung, beide Dresden; Ulrike Rößner, Erfurt; Marie-Luise Funk, Greifswald; Sven Rudolph, Großröhrsdorf; Holger Porath, Güstrow; Hanka Pruditsch, Geithain; Birgit Bremer, Heiligenstadt; Frank Müller, Klaffenbach; Petra Heiliger, Leuna; Karsten Kattner, Pasewalk; Birgit und Dagmar Lenz, Reichenbach; Dirk Jahn, Rostock; Astrid Rogowski, Schwerin; Torsten Marx, Ueckermünde; Frank Goth, Waltersdorf; Edith Boettcher, Weimar; Katrin Neumann, Zella-Mehlis

Für neunjährige Teilnahme

Veneta Türke, Auerbach; Ines Sobanski, Bad Liebenstein; Sven Aßmus, Berlin; Peter Graber, Bibra; Carsten Schmidt, Borna; Angela Maier, Bürgel; Steffen Eisenblätter, Delitzsch; Eva Faßmann, Dessau; André Kratzert, Dürröhrsdorf; Christian Pigorsch, Eisleben; Gerd Kunert, Freiberg; Heinz Seifert, Hagenow; Lutz Eichern, Halle-N.; Schulclub der EOS W. Pieck, Heiligenstadt; Charis Förster, Leipzig; Beate Balzer, Lindow; Dirk Welke, Neuruppin; Michael Taeschner, Parchim; Ute und Stefan Warnest, Rostock; Reiner Möwald, Sömmerda; Matthias Klinke, Zeulenroda; Diana Michler, Zschortau

Für achtjährige Teilnahme

Carsten Karl, Aken; Dirk Pandel, Berlin; Detlef Bartmuß, Buhrow; Matthias Buchmann, Eisenberg; Andreas Kupsch, Finsterwalde; René Franke, Gersdorf; Gernot Mersiowsky, Görlitz; Elke Heidemann, Halberstadt; Hans-Hermann Epstude, Kirchheilingen; Jörg Anschütz, Lehesten; Beate Wasner, Leipzig; Norbert Wölfel, Limbach-O.; Hardy Dömpke, Löderburg; Karsten Knothem Merseburg; Gislher Schütze, Ottstedt; Felix Kraenz, Picher; Axel Buerke, Potthagen; Andrea Thiele, Rackwitz; René Schulz, Ribnitz; Markus Spindler, Sangerhausen; Oliver Henze, Schneidlingen; Karin Möwald, Sömmerda; Sven Kannegießer, Wolmiersleben; Andreas Vogt, Worbis; Ralph Schammer, Zerbst; Claudia Heret, Zwickau

Für siebenjährige Teilnahme

Ulrich Egermann, Altenburg; Sven Völker, Bad Salzungen; Monika Döring, Berlin; Wolfram Schubert, Borna; René Aust, Calau; Thomas Freier, Creuzburg; Thomas Prüver, Eberswalde; Rüdiger Hochheim, Erfurt; Werner Ernst, Finsterwalde; Britta Bölter, Greifswald; Britta und Rainer Strawe, Halberstadt; Göran Glockmann, Jena; Werner Unger, Lehesten; Eberhard Schulze, Mildenberg; Kay Pfennighaus, Neubrandenburg; Jürgen Rietz, Pirna; Kilian Kindelberger, Potsdam; Ralf und Dirk Seifert, Rochlitz; Beate Walter, Röbel; Ulrich Rothe, Kirsten Peter, beide Rostock; Uwe Danz, Schmalkalden; Tobias Franke, Schrebitz; Peter Hörnich, Schwedt; Stefan Erb, Schwallungen; Kerstin Schuster, Taubenheim; Stephan Marx, Ueckermünde; Horst Rex, Wählitz

Für sechsjährige Teilnahme

Tilo Kaiser, Aken; Uwe Völker, Bad Salzungen; Thoralf Räsch, Bad Wilsenack; Claudio Groll, Bannewitz; Alexander Golz, Jana Hoffmann, beide Berlin; Jens Opalka, Christian Neufert, beide Bernburg; Andreas Liebmann, Bitterfeld; Ulrich Voigt, Böhlen; Stefan Mader, Chemnitz; Jens Heermann, Beate Schreiber, beide Dresden; Yvonne Gerth, Dürrröhrsdorf; Kornelia Eckert, Effelder; Jan Buchmann, Eisenberg; Karsten Wackernagel, Falkenberg; Steffen Pietsch, Frankfurt/O.; Karl Etourno, Freiberg; Jacqueline Spatke, Gräfenthal; Cornelia Bär, Greifswald; Steffen Vollborth, Greußen; Thomas Henker, Groitzsch; Jan Glaser, Großdeuben; Alois Belter, Hagenow; Antje Stehfest, Havelberg; Michael Puchta, Hecklingen; Steffen Vogler, Ilmenau; Andreas Anders, Jüterbog; Matthias Müller, Klaffenbach; Astrid Mirle, Kleindehsa; Jan Richter, Krostitz; Mario Menger, Lauterbach; Martin Schreiter, Andreas Winter, beide Leinefelde; Mareike Schmidt, Leipzig; Dorit Pinnow, Mügeln; Mirko Teidge, Neubrandenburg; Rigo Hinkelmann, Neuenbeuthen; Christian Rißler, Niederodewitz; Torsten Kaiser, Oranienburg; Jan Fricke, Pasewalk; Susanne Kraenz, Picher; Sylke Ahrend, Rakow; Doris Seifert, Rochlitz; Burkhard Rothe, Rostock; Sören Hader, Schlotheim; Diana Heinrich, Seyda; Michael Lotz, Vacha; Otmar Jaunasch, Wiednitz; Mario Zitek, Weimar; Ronald Peters, Wismar; Holger Beyer, Zschopau

Für fünfjährige Teilnahme

Steffen Siebert, Altenhof; Jan Eska, Bad Sülze; Jan und Jana Strischek, Ingo Maas, beide Berlin; Norbert Schröder, Bernau; Beate Pohler, Brand-Erbisdorf; Alek Opitz, Cottbus; Hendrik Jäger, Dersekow; Falk Baumann, Jörg Wagner, beide Dresden; Anke Lehmann, Eberswalde; Carsten Bundesmann, Eilenburg; Andreas Luleich, Elsterberg; Joachim Suck, Essen (W); Nicole Schüler, Tobias Gerlach, Götz Lothal, Mirco Grasemann, alle Friedeburg; Sylvia Wachholz, Görlitz; Ulrike Schmidt, Greifswald; Stefan Detschner, Greußen; Anja Goldschmidt, Halle-N.; Glenn Hofmann, Hohenstein-E.; Angela Wiesjahn, Holzendorf; Lothar Tischer, Kamenz; Toralf Pusch, Karlsburg; Christian Weber, Katzow; Jürgen Frey, Kipsdorf; Regina Sachse, Kleinmachnow; Torsten Schreiber, André Gärtner, beide Leipzig; Steffen Haas, Leutersdorf; Carsten Herbothe, Löderburg; Matthias Kassner, Meiningen; Matthias Sekatzek, Merseburg; Alexander Blucha, Niederorschel; Klaus Klapproth, Gregor und Alexander Moskau, alle Plauen; Sebastian Clauß, Possendorf; Hendryk Wetzel, Radebeul; Christian Holfeld, Rathenow; Manuela Radtke, Rodewitz; Elko und Willi Jacobs, Saurasen; Kay Herrmann, Schwallungen; Sven Kieselberger, Schwarzenberg; Mario Seelig, Schwerin; Heike Claußnitzer, Senftenberg; Dirk Weber, Steinbach-Hallenberg; Thomas Lotze, Suhl; Klaus Ullmann, Spremberg; Daniel Henkel, Weißenborn-L.; Birgit Elßner, Werneuchen; Mirko Stolle, Wittenberg; Matthias Tötzke, Zehdenick; Jörg Siede, Zepernick; Antje Müller, Zwickau; Andreas Hamm, Suhl

Für vierjährige Teilnahme

Konstanze Kaiser, Aken; René Erler, Ralf Ronneburger, Lars Kreßner, Sylvia Martin, Martina Hebenstreit, Carsten Hergt, alle Altenburg; Mario Wagner, Aschersleben; Michael Karlinsky, Heike Walter, Andrea Höppner, alle Berlin; Marita Fronz, Diana Gehrke, Bettina Gutjahr, Steffi Gudat, Antje Nagel, Antje Kumm, Karina Winkelmann, alle Buhrow; Reinhard Schulze, Carwitz, Antje Berndt, André Lange, Steve Leber, alle Chemnitz; Uta Neumann, Cottbus; Kerstin Stolze, Pia Weißenborn, beide Deuna; Andreas Witkowsky, Dingelstädt; Ute Raußendorf, Dohna; Ulrike Kretschmer, Kristin Schröder, Marcus Heinrich, Frank Wagner, Jürgen Schmerler, alle Dresden; Mattias Hirschfeld, Eilenburg; Karola Rockmann, Eisleben; Beate Kragl, Dirk Borsch, beide Erfurt; Ursula Lenk, Essen (W); Ulrich Müller, Fischheim; Nina Haeckert, Bert Lothal, Dominik Schewski, Janet Goßrau, alle Friedeburg; Mechthild Krause, Görlitz; Beatrice und Michael Gronau, Cathrin Kunze, alle Greifswald; Thomas Müller, Jörg Augner, beide Greußen; Daniel Döring, Großbartloff; Silke Rudolph, Großröhrsdorf; Stefan Krähe, Rainer Künzel, beide Güstrow; Andreas Göpfert, Halle; Danny Schwarzenberger, Silvio Trommer, Sven Baumann, Ronny Rosenbaum, alle Hammerbrücke; Michael Zieger, Jena; Jörg Driesner, Klein Petershagen; Lars Hartmann, Klein-Quenstedt; Matthias Loesdau, Landshut (W); Steffen Berlich, Jens Gärtner, Jörg Schreiber, alle Leipzig; Ronny Ficker, Leubetha; Gunter Semmler, Limbach-O.; Swen Geißler, Lomnitz; Veit Kannegieser, Lübben; Sandra Engelke, Dana Biallas, beide Magdeburg; Franziska Sauer, Merkers; Daniel Wolf, Mittweida; Dagmar Quast, Neuhaus; Thomas Beyer, Frances Ließ, beide Rackwitz; Antje Brämer, Rathenow; Thomas Fischer, Rochlitz; Tobias Soneit, Rostock; Nicole Kirchner, Nico Pehlert, beide Schwallungen; Lars Freitag, Schwarzheide; Beate Hartkopf, Schneidlingen; Katja Fisch, Senftenberg; Lutz Kratzsch, Sömmerda; Mary Brodhagen, Dana und Kati Bockmann, alle Ueckermünde; Nico Eberhardt, Wiesenthal; Ingolf Näther, Heiko Barthel, beide Wilsendorf

Mathematik im Wandel

Unbekannter Verfasser

aus: H.-D. Hornschuh; Humor rund um die Mathematik, Manz Verlag München

Volksschule 1950

Ein Bauer verkauft einen Sack Kartoffeln für 20 Mark. Die Erzeugungskosten betragen $\frac{4}{3}$ des Erlöses.

Wie hoch ist der Gewinn?

Realschule 1960

Ein Bauer verkauft einen Sack Kartoffeln für 20 Mark. Die Erzeugungskosten betragen 16 Mark.

Berechne bitte den Gewinn!

Gymnasium 1970

Ein Bauer verkauft eine Menge Kartoffeln (K) für eine Menge Geld (G). G hat die Mächtigkeit 20. Für die Menge G gilt, daß jedes Element g eine Mark ist. In Strichmengen müßtest du für die Menge G „zwanzig“ (||||| ||||| ||||| |||||) Strichlein machen, für jedes Element g eines. Die Menge der Erzeugungskosten (E) ist um „vier“ (||||) Strichlein weniger mächtig als die Menge G. Zeichne das Bild der Menge E als Teilmenge der Menge G und gib die Lösungsmenge (L) an für die Frage:

Wie mächtig ist die Gewinnmenge?

Integrierte Gesamtschule 1980

Ein Bauer verkauft einen Sack Kartoffeln für 20 Mark.

Die Erzeugungskosten betragen 16 Mark, der Gewinn beträgt 4 Mark. Aufgabe: Unterstreiche das Wort „Kartoffeln“ und diskutiere mit deinem Nachbarn darüber!

Reformierte Schule 1990

Ein kapitalistisch privilegierter bauer bereicherd sich ohne rechtfärtigunk an einem sak kartoffen um 4 marck.

untersuche den tekst auf inhaldlische gramatische ortogravische un zeichen sätzungsfeler.

koorigiere die aufgabenstälunk und demonstriere gegen die lösunk!

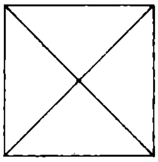
XXX. Olympiade Junger Mathematiker

2. Stufe (Kreisolympiade)

Oktober 1990

Olympiadeklasse 5

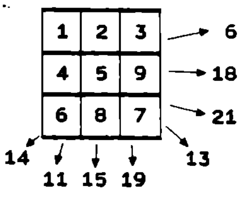
300521 a) Das Bild zeigt eine Zerlegung eines Quadrates durch geradlinige Schnitte in vier Teilfiguren.



Gib an, wie sich aus diesen Teilfiguren zwei einander gleichgroße Quadrate zusammensetzen lassen!
Als Lösung genügt eine Zeichnung der beiden neu zusammengesetzten Quadrate.
b) Stelle fest, ob man ein Quadrat durch geradlinige Schnitte so in sechs Teilfiguren zerlegen kann, daß sich aus ihnen zwei einander gleichgroße Quadrate zusammensetzen lassen! Wenn eine solche Zerlegung möglich ist, genügt es als Lösung, eine solche Zerlegung und die beiden neu zusammengesetzten Quadrate zu zeichnen.

300522 Über das Alter der fünf Personen Antje, Dirk, Manuela, Susanne und Thomas werden folgende Angaben gemacht:
(1) Antje ist älter als Manuela, aber jünger als Susanne.
(2) Thomas ist genau so alt wie Antje und Manuela zusammen.
(3) Dirk ist älter als Antje und Susanne zusammen.
a) Zeige, daß aus diesen Angaben eindeutig folgt, wer die jüngste und wer die älteste dieser fünf Personen ist!
b) Stelle fest, ob aus den Angaben auch eindeutig folgt, welche Reihenfolge für die Altersangaben der übrigen drei Personen vorliegt! Begründe deine Feststellung!

300523 a) Die Zahlen 1, 2, ..., 9 lassen sich so in ein Quadrat von 3×3 Feldern eintragen, daß keine zwei der acht Summen in den drei Zeilen, den drei Spalten und den beiden Diagonalen einander gleich sind. Das Bild zeigt ein Beispiel hierfür.



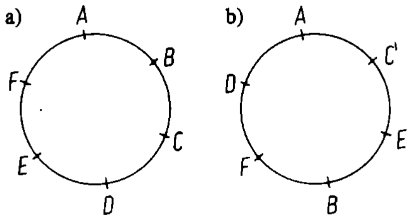
Gib zwei weitere Beispiele an, die aus dem Bild weder durch Spiegeln noch durch Drehen zu erhalten sind und die auch nicht auseinander durch Spiegeln oder Drehen hervorgehen!
b) Ist es möglich, in ein Quadrat von 2×2 Feldern die Zahlen 1, 2, 3, 4 so einzutragen, daß keine zwei der Summen in den Zeilen, den Spalten und den Diagonalen einander gleich sind?
Begründe deine Antwort!

300524 An einem Sportwettkampf sollen 10 Mannschaften teilnehmen. Sie sollen so mit einfarbigen Turnhemden und mit einfarbigen Turnhosen ausgestattet werden, daß sie an den damit erreichbaren Farbkombinationen voneinander zu unterscheiden sind.
a) Welches ist die kleinste Anzahl von Farben, mit der das zu erreichen ist?
b) Wie lautet die Antwort, wenn zusätzlich verlangt wird, daß bei jeder Mannschaft die beiden Farben von Turnhemd und Turnhose voneinander verschieden sind?
Begründe deine beiden Antworten!

Olympiadeklasse 6

300621 a) Zeichne in ein Koordinatensystem das Quadrat $ABCD$ mit den Eckpunkten $A(1;1)$, $B(5;1)$, $C(5;5)$, $D(1;5)$ und das Quadrat $PQRS$ mit den Eckpunkten $P(9;1)$, $Q(13;1)$, $R(13;5)$, $S(9;5)$ ein!
b) Gibt es eine Spiegelung und auch eine Drehung, bei der das Quadrat $PQRS$ das Bild des Quadrates $ABCD$ ist? Wenn dies der Fall ist, gib die Koordinaten des Drehzentrums und die Größe des Drehwinkels an! Eine Begründung wird nicht verlangt.
Hinweis: Wenn das Quadrat $PQRS$ das Bild des Quadrates $ABCD$ ist, so braucht die Reihenfolge P, Q, R, S nicht die Reihenfolge der Bildpunkte A, B, C, D zu sein.

300622 Sechs Personen A, B, C, D, E, F wollen ihre Sitzordnung (Bild a) so ändern, daß in der neuen Sitzordnung jede Person feststellen kann: Unter meinen beiden Nachbarn befindet sich jetzt keiner der beiden, die ich vorher (in Bild a) als Nachbarn hatte.
a) Bild b zeigt eine solche neue Sitzordnung. Fülle zur Überprüfung, daß tatsächlich eine Sitzordnung der geforderten Art vorliegt, die folgende Tabelle aus!



Person	Nachbarn in Bild a	Nachbarn in Bild b
A		
B		
C		
D		
E		
F		

b) Gib alle weiteren Möglichkeiten in einer neuen Sitzordnung der geforderten Art an! Dabei sollen jeweils außer einer schon angegebenen Möglichkeit diejenigen nicht mehr angegeben werden, die aus ihr durch Drehung oder Spiegelung zu erhalten sind. Eine Begründung wird nicht verlangt.

300623 Eine Buchdruckerei habe zum Druck der Ziffern 0, 1, ..., 9 Lettern in folgenden Stückzahlen zur Verfügung:

Ziffer	0	1	2	3	4
Stückzahl	350	340	320	340	360
Ziffer	5	6	7	8	9
Stückzahl	310	300	320	320	340

Unter Verwendung nur dieser Lettern sollen die Seitenzahlen von 1 bis 1020 eines Buches gedruckt werden. Dabei soll keine Letter mehr als einmal benutzt werden. Reichen die Lettern hierfür aus? Begründe deine Antwort!

300624 Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die sich in der Form $n = 5a + 7b$ darstellen lassen, wobei a und b natürliche Zahlen sind!

Olympiadeklasse 7

300721 Über die Schüler einer Schulklasse werden folgende Aussagen gemacht:
(1) Genau 10 Schüler gehören einer Arbeitsgemeinschaft an.
(2) Genau 8 Schüler gehören einer Sportgemeinschaft an.
(3) Genau 5 Schüler gehören weder einer Arbeitsgemeinschaft noch einer Sportgemeinschaft an.
Gib eine a) möglichst kleine,
b) möglichst große
Schülerzahl der Schulklassen an, bei der die drei Aussaagen wahr sein können! Begründe deine Angaben!

300722 a) Ermittle unter den natürlichen Zahlen a, die größer als 100 und kleiner als 1000 sind, alle diejenigen, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!
(1) a hat genau zwei voneinander verschiedene natürliche Zahlen als Teiler.
(2) a läßt sowohl bei Division durch 11 den Rest 2 als auch bei Division durch 13 den Rest 2.
(3) a ist eine ungerade Zahl.
b) Stelle für jede der drei Bedingungen (1), (2), (3) fest, ob sich am Ergebnis der Aufgabe a) etwas ändert, wenn man diese Bedingung wegläßt und nur jeweils die beiden anderen Bedingungen fordert!

300723 a) Ein an der gesamten Oberfläche gefärbter Holzwürfel soll in gleichgroße Teilwürfel zersägt werden. Dabei wird gefordert, daß mindestens 40 dieser Teilwürfel völlig ungefärbt sind.

Ermittle die kleinstmögliche Anzahl der Teilwürfel, in die der gesamte Holzwürfel zu zerlegen ist, damit diese Forderung erfüllt wird!

b) Aus 40 so erhaltenen ungefärbten Teilwürfeln soll ein Quader (ohne freibleibende Hohlräume im Innern) zusammengesetzt werden; dabei soll jeder dieser 40 Teilwürfel verwendet werden.

Ermittle das Volumen dieses Quaders, wenn bekannt ist, daß der ursprüngliche Holzwürfel ein Volumen von 27 dm^3 hatte!

300724 In einem Dreieck ABC seien BD bzw. CE die Winkelhalbierenden der Innenwinkel $\sphericalangle ABC$ bzw. $\sphericalangle ACB$, und S sei der Schnittpunkt von BD mit CE.

a) Beweise: Wird ferner vorausgesetzt, daß der Innenwinkel $\sphericalangle BAC$ die Größe $\alpha = 60°$ hat, so folgt, daß dann auch stets der Winkel $\sphericalangle BSE$ die Größe 60° hat!

b) Ermittle eine Formel, mit der sich zu beliebig vorgegebener Größe α des Innenwinkels $\sphericalangle BAC$ die Größe des Winkels $\sphericalangle BSE$ ergibt!

Olympiadeklasse 8

300821 In einem Garten stehen zwei Fässer mit Wasser. Jörg gießt aus dem ersten Faß so viele Liter Wasser in das zweite Faß, wie dort bereits enthalten sind. Anschließend gießt er aus dem zweiten Faß so viele Liter Wasser in das erste, wie sich dort nach dem vorigen Umgießen befinden. Nach diesen beiden Umfüllvorgängen befinden sich in jedem der beiden Fässer genau je 24 Liter Wasser.

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig folgt, wie viele Liter Wasser sich anfangs in jedem der beiden Fässer befanden! Ist dies der Fall, so gib diese beiden Literzahlen an!

300822 Ein Rechteck, dessen Seitenlängen sich wie 1 : 2 zueinander verhalten, soll in acht einander kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden.

a) Zeichne und beschreibe eine solche Zerlegung! Begründe, warum die nach deiner Beschreibung entstehenden acht Dreiecke gleichschenklig-rechtwinklig und einander kongruent sind!

b) Ermittle die Länge eines Schenkels dieser Dreiecke in Abhängigkeit von der kleineren der beiden Seitenlängen des Rechtecks!

300823 Jemand möchte in einer Ebene eine Anzahl n von Punkten zeichnen. Sie sollen so gewählt werden, daß keine drei dieser Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Anschließend will er Dreiecke suchen, deren sämtliche drei Ecken zu den gezeichneten n Punkten gehören. Ermittle die kleinste Anzahl n solcher Punkte, für die es möglich ist, 120 verschiedene derartige Dreiecke zu finden!

300824 Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., 99 999 derart hintereinander aufgeschrieben, daß die Ziffemdarstellung einer Zahl z entsteht.

Der Beginn dieser Darstellung lautet

$$z = 123456789101112131415\ldots;$$

beispielsweise an der elften Stelle steht die Ziffer 0, die Ziffer 2 tritt z. B. an der zweiten Stelle, an der 15ten Stelle und noch an weiteren Stellen von z auf.

Welche Ziffer steht an der 206 788sten Stelle von z?

Olympiadeklasse 9

300921 Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen $x \neq 3$, für die die folgende Ungleichung (1) gilt!

$$\frac{2}{x-3} + \frac{1}{2} < \frac{5}{x-3} - \frac{1}{10} \qquad (1)$$

300922 Man untersuche, ob es ein Rechteck $ABCD$ mit einander gegenüberliegenden Ecken A und C gibt, bei dem im Dreieck ABC die Winkelhalbierende des Innenwinkels $\sphericalangle ACB$ die Seite AB in deren Mittelpunkt schneidet.

300923 a) Wie viele dreistellige natürliche Zahlen, bei denen (wie z. B. 921) die Zehnerziffer größer als die Einerziffer, aber kleiner als die Hunderterziffer ist, gibt es insgesamt?

b) Wie viele sechsstellige Zahlen insgesamt lassen sich dadurch herstellen, daß man zwei verschiedene der unter a) beschriebenen Zahlen auswählt und die größere dieser beiden Zahlen hinter die kleinere schreibt?

c) Die kleinste unter allen denjenigen in b) beschriebenen sechsstelligen Zahlen, bei denen die zweite der genannten dreistelligen Zahlen genau um 1 größer ist als die erste, ist die Telefonnummer des Senders Potsdam. Wie lautet sie?

300924 Für jede natürliche Zahl $m \geqq 2$ sei folgendes Vorhaben betrachtet: Jemand möchte m verschiedene von einem Punkt P ausgehende Strahlen zeichnen. Dann möchte er alle diejenigen Winkelgrößen zwischen 0° und 360° feststellen, die bei Messung eines Winkels jeweils von einem dieser Strahlen in mathematisch positivem Drehsinn zu einem anderen dieser Strahlen auftreten können.

Er möchte die m Strahlen so zeichnen, daß sich dabei

a) möglichst wenige,

b) möglichst viele

verschiedene Winkelgrößen feststellen lassen. Ermitteln Sie in Abhängigkeit von m die kleinst- bzw. größtmögliche Anzahl verschiedener Winkelgrößen, die so erreichbar sind!

Olympiadeklasse 10

301021 In dem nachstehenden Kryptogramm sind die Buchstaben so durch Ziffern 0, 1, 2, ..., 9 zu ersetzen, daß gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden und daß eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Der Buchstabe o braucht nicht durch die Ziffer 0 (Null) ersetzt zu werden.

$$\begin{array}{rr} & \text{m o r d} \\ + & \underline{\text{r a u b}} \\ = & \text{k r i m i} \end{array}$$

a) Beweisen Sie, daß sogar in keiner Lösung des Kryptogrammes der Buchstabe o durch 0 ersetzt wird!

b) Geben Sie vier Ersetzungen an, unter denen sich keine zwei mit gleichem Wert für a befinden! Bestätigen Sie, daß die von Ihnen angegebenen Ersetzungen vier Lösungen des Kryptogramms sind!

301022 Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n, die nicht Quadratzahl ist, die Zahl $\sqrt{n}$ irrational ist!

(Dabei werde wie üblich eine natürliche Zahl n genau dann Quadratzahl genannt, wenn es eine natürliche Zahl k gibt, mit der $n = k^2$ gilt.)

301023 Beweisen Sie die folgende Aussage!

Wenn $ABCD$ ein Rechteck mit $\overline{AB} > \overline{AD}$ ist, so schneidet die Mittelsenkrechte der Diagonale AC die Randlinie des Dreiecks ABC in einem Punkt P, der zwischen B und dem Mittelpunkt Q der Strecke AB liegt.

301024 Für jede ganze Zahl $n > 0$ sei

$$a_n = \left((n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}\right)^{-1};$$

mit dieser Bezeichnung sei

$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_{1989} + a_{1990}.$$

Beweisen Sie, daß hieraus $0{,}5 < s < 1$ folgt!

Olympiadeklassen 11/12

301221 Man beweise die folgende Aussage: Wenn a, b, c positive reelle Zahlen sind, für die

$$b^2 - a^2 = c^2 - b^2 \qquad (1)$$

gilt, dann gilt auch stets

$$\frac{1}{a+c} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c}. \qquad (2)$$

301222 Man ermittle alle diejenigen Paare $(x;y)$ ganzer Zahlen x und y, die dem System der folgenden Ungleichungen (1) und (2) genügen:

$$2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 65 < 0, \qquad (1)$$

$$4x + 2y > 5. \qquad (2)$$

301223 Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 2$ die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}. \qquad (1)$$

Hinweis: Für jede natürliche Zahl $q = 2$ bezeichnet $q!$ wie üblich das Produkt aller derjenigen natürlichen Zahlen i, für die $1 \leqq i \leqq q$ gilt.

301224 Ist ABC ein Dreieck, so bezeichne S den Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden, ferner sei mit U, V bzw. W der Fußpunkt des von S auf die Seite BC, CA bzw. AB gefällten Lotes bezeichnet, und $J(ABC)$ bzw. $J(UVW)$ bezeichne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC bzw. UVW.

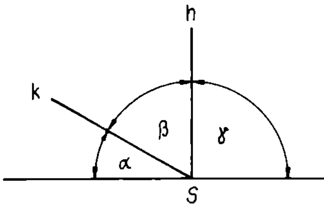
Man beweise mit diesen Bezeichnungen, daß das Verhältnis

$$r = J(UVW) : J(ABC)$$

in allen rechtwinkligen Dreiecken ABC denselben Wert hat und ermittle diesen Wert r.

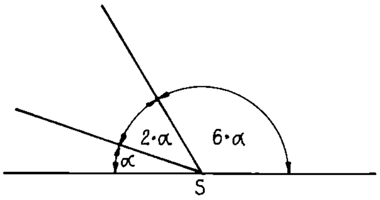
Kurz nachgedacht!

1. Wie groß sind α, β und γ? Begründe!

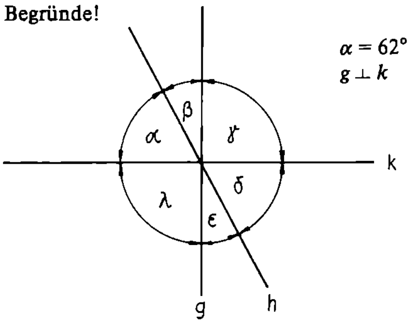


$g \perp h$
$\beta = 2 \cdot \alpha$

2. Wie groß ist α? Begründe!

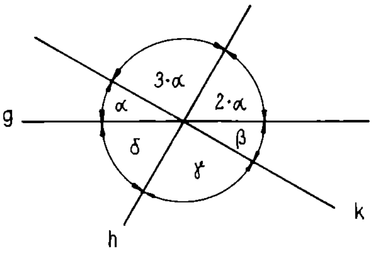


3. Wie groß sind β, γ, δ, ε und λ? Begründe!

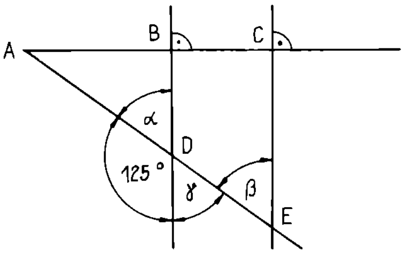


$\alpha = 62°$
$g \perp k$

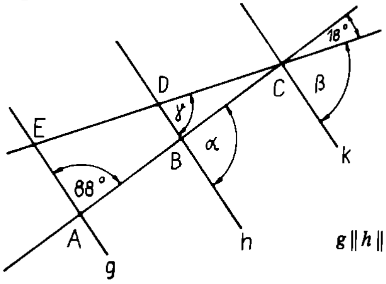
4. Wie groß sind α, β, γ und δ? Begründe!



5. Wie groß sind α, β und γ? Begründe!

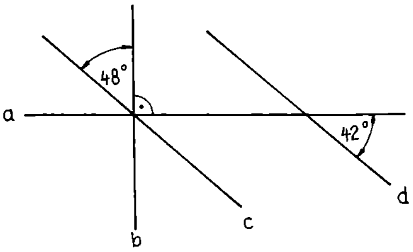


6. Wie groß sind α, β und γ? Begründe!

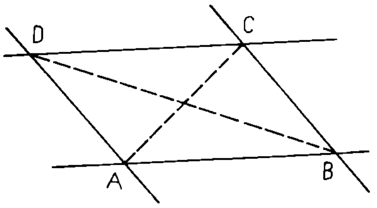


$g \parallel h \parallel k$

7. Beweise, daß $c \parallel d$!

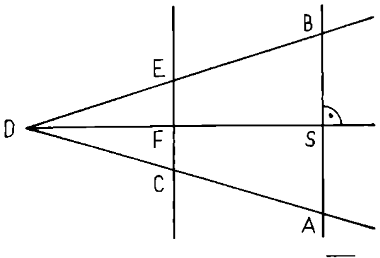


8. Begründe, daß
a) $\sphericalangle DAC \cong \sphericalangle BCA$,
b) $\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle BDC$!



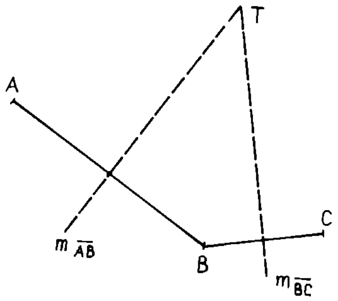
$AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$

9. Begründe, daß
a) CE Symmetrieachse zu $\overline{DS}$ ist,
b) $\overline{DC} = \overline{CS}$ und $\overline{DE} = \overline{ES}$ gilt.
Wann gilt $\overline{DC} = \overline{DE} = \overline{ES} = \overline{CS}$?

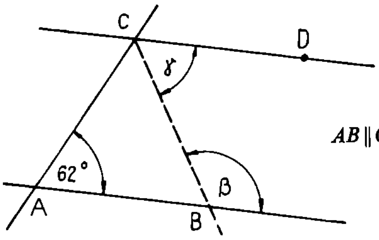


$AB \parallel CE$ und $\overline{DF} = \overline{FS}$

10. Beweise, daß $\overline{AT} = \overline{CT}$!



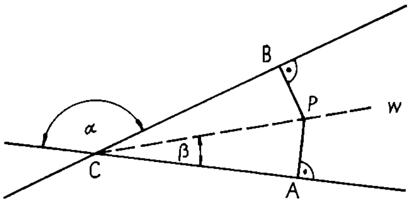
11. Wie groß sind β und γ? Begründe!



$AB \parallel CD$

CB sei Halbierende des Winkels $\sphericalangle ACD$!

12. Gib eine Gleichung zwischen α und β so an, daß für alle Punkte P auf w gilt: $\overline{PA} = \overline{PB}$!



Lösungen

1. $\gamma = 90°$, da $g \perp h$; $\alpha + \beta + \gamma = 180°$;
$\alpha + \beta = 90°$; $3\alpha = 90°$;
$\alpha = 30°$; $\beta = 60°$

2. $\alpha + 2\alpha + 6\alpha = 180°$;
$9\alpha = 180°$; $\alpha = 20°$

3. $\gamma = 90°$, $\lambda = 90°$,
$\alpha + \beta = \varepsilon + \delta = 90°$, da $g \perp k$; $\beta = \varepsilon$ und $\alpha = \delta$, da Scheitelwinkel;
$\alpha = 62°$; $\delta = 62°$; $\beta = 28°$; $\varepsilon = 28°$

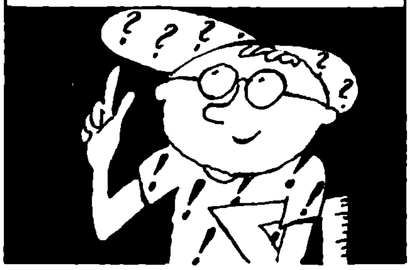
4. $\alpha + 3\alpha + 2\alpha = 180°$; $\alpha = 30°$
$\alpha = \beta$ (Scheitelwinkel), $\beta = 30°$;
$3\alpha = \gamma$ (Scheitelwinkel), $\gamma = 90°$;
$2\delta = \delta$ (Scheitelwinkel), $\delta = 60°$

5. $\alpha = \beta$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen);
$\alpha = \gamma$ (Scheitelwinkel);
$\alpha + \gamma + 2 \cdot 125° = 360°$;
$2\alpha + 250° = 360°$;
$\alpha = 55°$; $\beta = 55°$; $\gamma = 55°$

6. $\alpha = \beta + 18°$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen);
$\alpha = 180° - 88°$ (Stufenwinkel an Parallelen g und h);
$\alpha = 92°$; $\beta = 74°$;
$\beta = \gamma$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen); $\gamma = 74°$

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

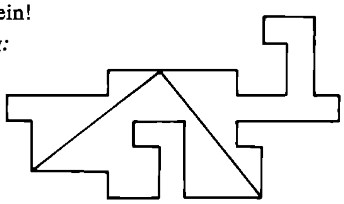
Lösungen



Lösungen zur Sprachecke

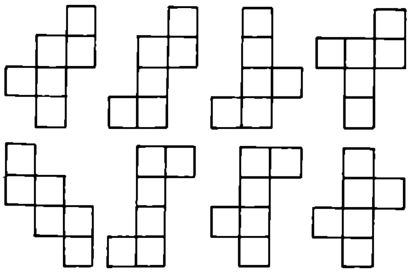
▲1▲ Zerlegung
Zerlegt die vorliegende Fläche in genau drei Teile, so daß ihr diese dann zu einem Quadrat zusammensetzen könnt! Zeichnet die entsprechenden Zerlegungslinien in die Figur ein!

Lösung:



▲2▲ Kann der Ausdruck $a^2 - b^2 + c^2$ (ohne Rest) durch 5 geteilt werden, wenn nicht eine der ganzen Zahlen a, b und c durch 5 teilbar ist?
Lösung: Nein, das ist nicht möglich. *Beweis:* Das Quadrat einer ganzen Zahl, welche kein ganzzahliges Vielfaches von 5 ist, läßt bei Division durch 5 den Rest 1 oder 4. Somit ist $a^2 - b^2$ entweder ohne Rest durch 5 teilbar (Fall 1), oder es entsteht der Rest 2 oder 3 (Fall 2). Da laut Aufgabenstellung c nicht ohne Rest durch 5 teilbar ist, folgt die Richtigkeit der Behauptung im Fall 1. Im Fall 2 errechnet man, daß der gegebene Ausdruck bei Division durch 5 den Rest 1, 2, 3 oder 4 läßt. Somit gilt die Behauptung auch in diesem Falle. Sie gilt damit insgesamt, w. z. b. w.

▲3▲ Würfelnetze
Das Bild zeigt drei, aus je sechs Quadraten bestehende Netze. Es ist leicht zu sehen, daß aus den beiden linken ein Quader gefaltet werden kann. Mit etwas mehr Mühe kannst du erkennen, daß auch das rechte Netz zu einem Quader geformt werden kann. Wieviel Netze aus sechs Quadraten gibt es, die man zu einem Würfel falten kann?
Lösung: Es gibt acht weitere Netze aus sechs Quadraten, die zu einem Würfel gefaltet werden können.



Lösung zur Schachecke

1. Ta1 Ka8 2. Ka4 Ka7 3. Ka3 Ka6 4. Ka2 Ka5 5. Kb1 matt.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Aus den Silben
Außenwinkel, Radius, Cantor, Hektoliter, Inkreis, Mittelpunkt, Exponent, Durchmesser, Ebene, Sekante – Archimedes.

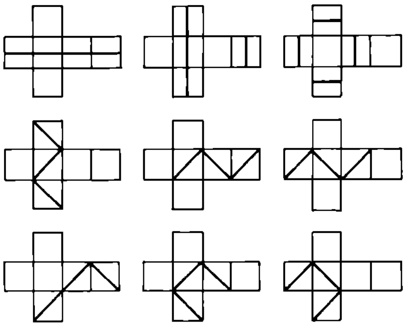
Magie

3	17	7
13	9	5
11	1	15

$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$

Schnell zusammensetzen
Die Lösung sei dem Leser überlassen.

Nicht im Netz verfitzen



Erst Buchstaben, dann Ziffern
$a = 0$; $b = 1$; $c = 2$; $d = 4$; $e = 6$; $f = 5$; $g = 9$.

„Bum!"
142mal

Knifflige Fragen
Komma (4,5); 6 Kinder; 2 *m*; 2,2.

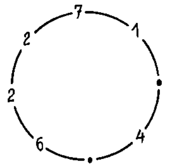
Irrgärten
Die Lösung sei dem Leser überlassen.

Chemische Untersuchungen
$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 320 = 135.$
Im Gefäß bleiben 135 g der Substanz.

Haarspaltereien
Unter 150001 Menschen gibt es wenigstens zwei Personen, die die gleiche Anzahl von Kopfhaaren besitzen. Moskau hat über 6 Millionen Einwohner.
$39 \cdot 150001 = 5850039$.
Aus $5850039 < 6000000$ folgt die Richtigkeit der Behauptung.

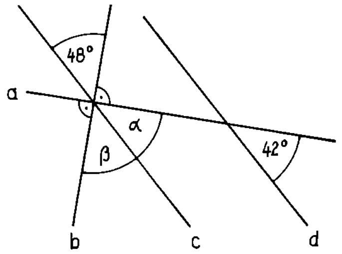
Lösung zu:
Die Entdeckung der Osterinsel

Die auf diesem Schachbrett möglichen Züge bilden den abgebildeten Zyklus der Länge 8.
Mittels zulässiger Rösselsprünge ergeben sich damit als mögliche Datumsangabe 1. 4. 6227, 26. 4. 172 und 6. 4. 1722. Die beiden ersten Angaben scheiden aus. Die Entdeckung der Osterinsel kann weder im noch nicht begonnenen 7. Jahrtausend u. Z. noch aus geschichtlichen Gründen im 2. Jahrhundert u. Z. erfolgt sein. Im 2. Jahrhundert war der Seeweg von Europa nach dem Pazifik noch unbekannt, dürften die technischen Voraussetzungen für eine so lange Seereise nicht gegeben gewesen sein und gab es noch keinen niederländischen Staat und keine niederländische Sprache. Das gesuchte Datum ist 6. 4. 1722.



Fortsetzung von Seite 24

7. Behauptung $c \parallel d$ kann nur gelten genau dann, wenn $\alpha = 42°$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen).



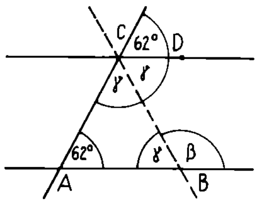
Beweis: $90° + \alpha + \beta = 180°$
$\beta = 48°$ (Scheitelwinkel)
$\alpha = 180° - 90° - 48°$
$\alpha = 42°$ w. z. b. w.

8. $\sphericalangle DAC \cong \sphericalangle BCA$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen);
$\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle BDC$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen)

9. a) $\sphericalangle EFS = 90°$
(Stufenwinkel zu 90°-Winkel in S);
$\overline{DF} = \overline{FS}$ (nach Voraussetzung);
also ist CE Symmetrieachse zu $\overline{DS}$
b) $\triangle DFE \cong \triangle FSE$ (nach sws),
also gilt $\overline{DE} = \overline{ES}$;
$\triangle DCF \cong \triangle CSF$ (nach sws),
also gilt $\overline{DC} = \overline{CS}$.
$\overline{DC} = \overline{DE} = \overline{ES} = \overline{CS}$ gilt genau dann, wenn $\sphericalangle CDF \cong \sphericalangle FDE$

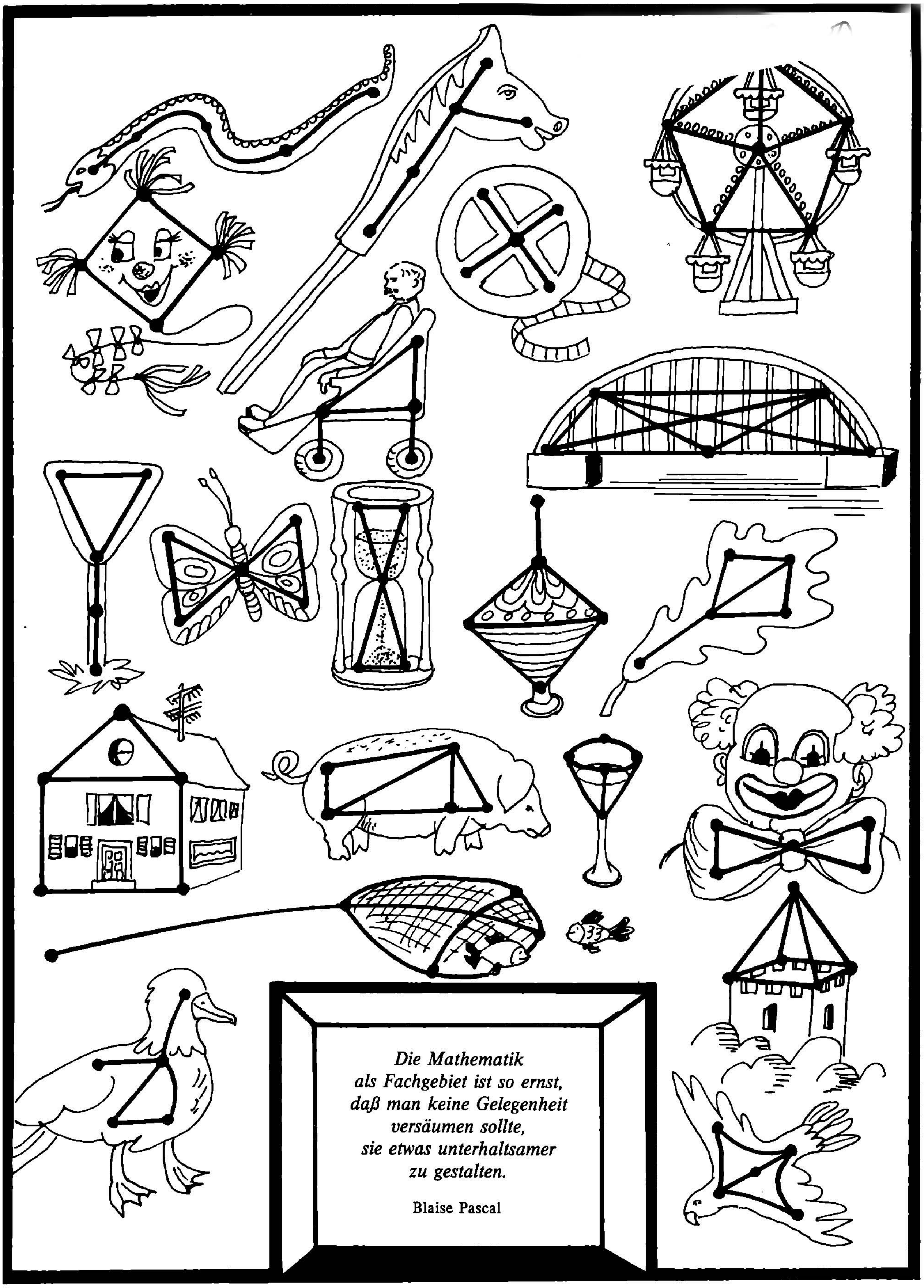
10. $\triangle ATB$ gleichschenklig, da T Punkt auf $m_{\overline{AB}}$; $\triangle BTC$ gleichschenklig, da T Punkt auf $m_{\overline{BC}}$; also $\overline{AT} = \overline{BT} = \overline{CT}$

11. $2\gamma + 62° = 180°$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und CB Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACD$)



$\gamma = 59°$; $\beta = 180° - \gamma$, $\beta = 121°$

12. $\overline{PA} = \overline{PB}$ für alle P auf w genau dann, wenn w Winkelhalbierende von $\sphericalangle BCA$.
Dann gilt: $\sphericalangle BCP = \beta$, also $\alpha + 2\beta = 180°$.



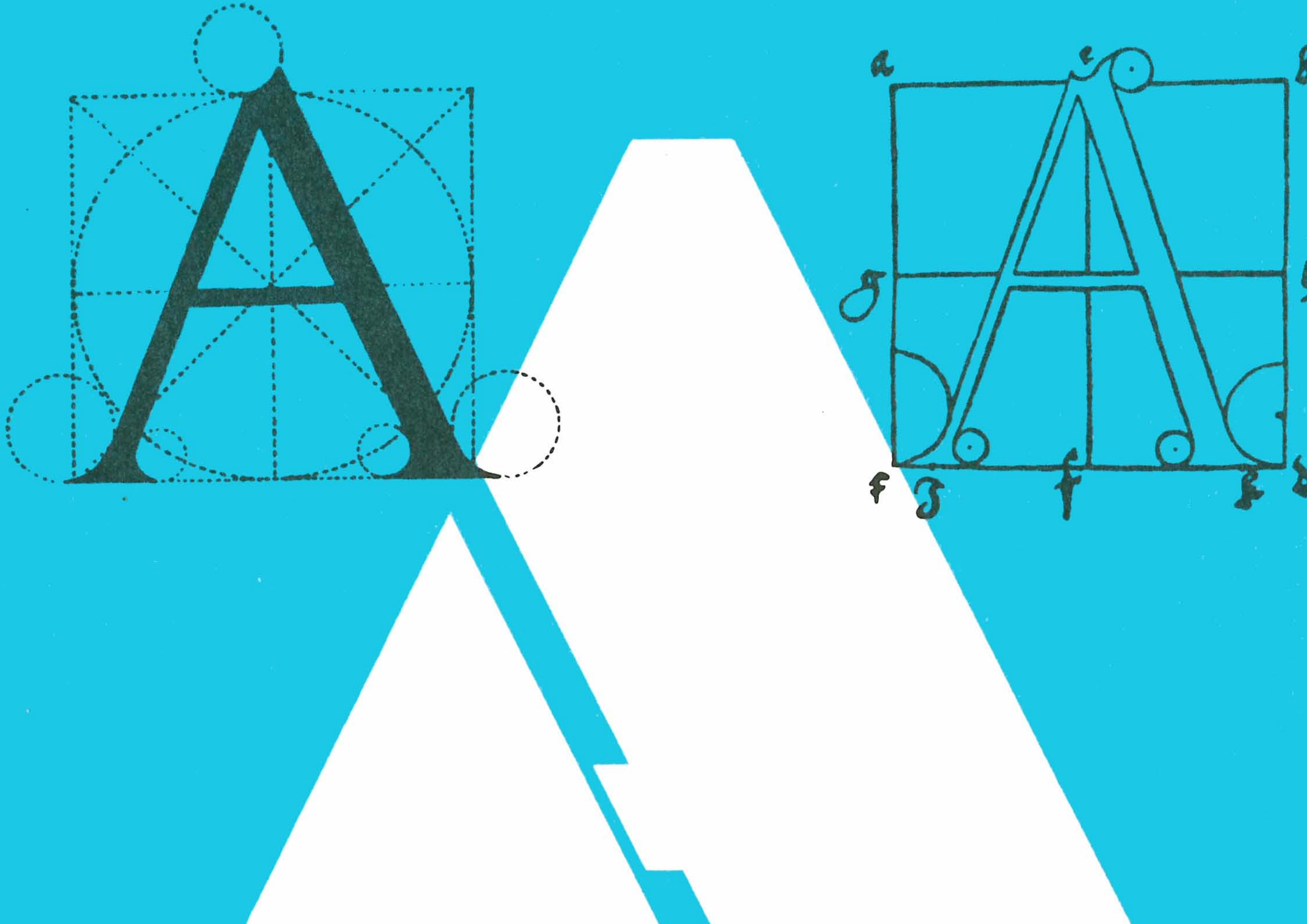
Die Mathematik
als Fachgebiet ist so ernst,
daß man keine Gelegenheit
versäumen sollte,
sie etwas unterhaltsamer
zu gestalten.

Blaise Pascal

ISSN 0002-6395 · alpha · Berlin · 25 (1991) 1 · Seiten 1 bis 24

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



Volk und Wissen
Verlag GmbH Berlin
25. Jahrgang 1991
Preis 1,50 DM
ISSN 0002-6395

2

Herausgeber und Verlag:
Volk und Wissen Verlag GmbH
Anschrift des Verlages:
Lindenstr. 54a, PSF 1213, Berlin, 1086
Anschrift der Redaktion:
PSF 129, Leipzig, 7010
Redaktion:
Dr. paed. Gabriele Liebau (Chefredakteur);

Lizenznummer: 1545
Erscheinungsweise: zweimonatlich

Abonnement über
Friedrich Verlag, Vertrieb
Postfach 10 01 50
W-3016 Seelze

Fotos: Fachbuchverlag Leipzig (S. 42)
Vignetten: L. Otto, Leipzig (Titelvignetten)
Technische Zeichnungen: OStR G. Gruß, Leipzig
Titelblatt: W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Satz und Druck: Interdruck Leipzig GmbH
Artikelnummer (EDV) 128
ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 12. März 1991
Auslieferungstermin: 12. April 1991

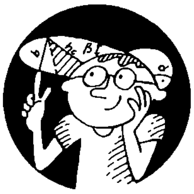
alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Alphons weist Euch auf Artikel mit geringerem Schwierigkeitsgrad hin. Das heißt aber nicht, daß alle anderen Beiträge für mathematische Anfänger ungeeignet sind. Probiert es selbst aus!

Ein Vierfarbenspiel

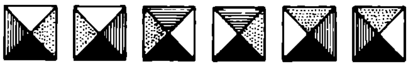


Ein Quadrat werde durch Einzeichnen der beiden Diagonalen in vier Dreiecke zerlegt. Diese werden mit unterschiedlichen Farben (etwa Gelb, Grün, Rot, Weiß) ausgemalt. Wir können hier leider keine Farben verwenden, deshalb kennzeichnen wir die unterschiedliche Färbung so:

Bild 1 

Ihr erkennt: Es gibt 6 verschiedene Färbungen eines derartig unterteilten Quadrates. Wir erhalten somit genau 6 verschiedene (ebene) Bausteine, die mit Großbuchstaben *A*, *B*, ..., *F* bezeichnet werden:

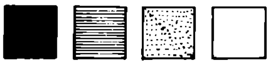
Bild 2



A *B* *C* *D* *E* *F*

Außerdem sollen 4 einfarbige Quadrate (gelb, grün, rot bzw. weiß) vorhanden sein. Wir kennzeichnen diese Bausteine mit den Buchstaben *G*, *H*, *I*, *J*:

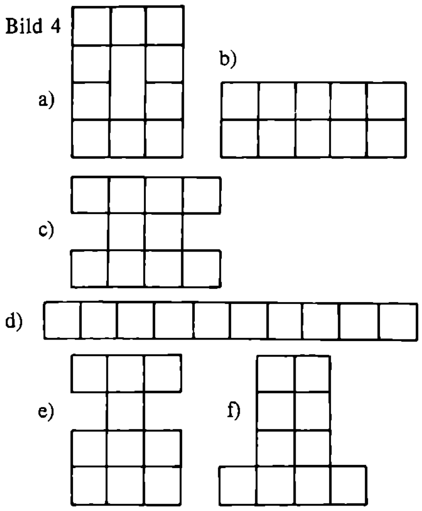
Bild 3

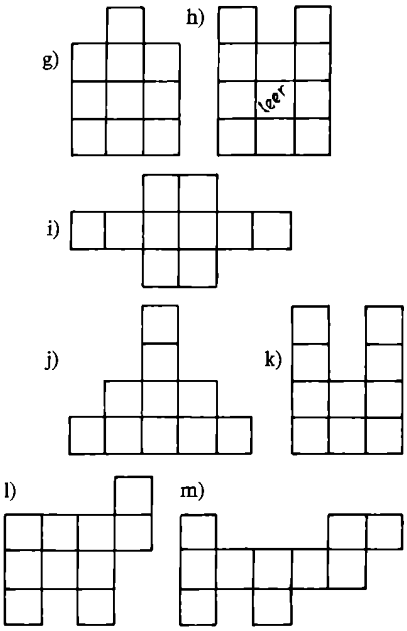


G *H* *I* *J*

Versucht nun, mit den 10 gefärbten Quadraten *A*, ..., *J* ebene Figuren auszulegen. Dabei wollen wir jedoch eine Bedingung stellen: Zwei Quadrate dürfen sich nur mit Seiten (von Dreiecken) gleicher Farbe berühren! Hier haben wir einige Figuren aufgezeichnet, die Ihr bei Beachtung der Anlegeregel zusammenbauen sollt.

Bild 4





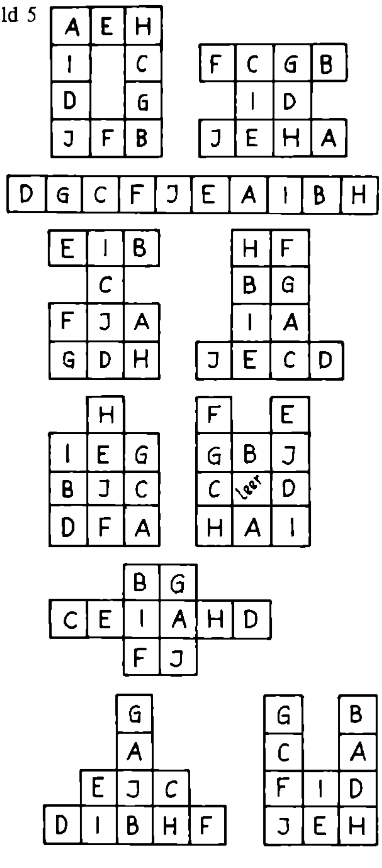
Zwölf Aufgaben werden Euch keine Mühe bereiten, bei einer Figur gibt es jedoch keine Lösung.

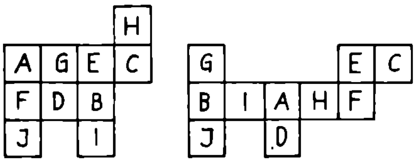
Übrigens, wenn Ihr die zehn Quadrate (Bausteine aus Pappe, dünner Plaste oder aus Sperrholz anfertigt, erhaltet Ihr ein originelles Geschenk. Wir empfehlen, dazu zehn Quadrate mit der Seitenlänge von je 2 cm herzustellen. Und nun viel Spaß!

W. Schmidt

Lösung

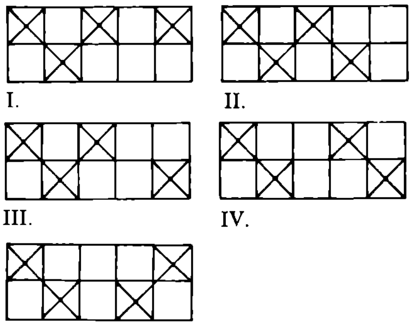
Bild 5





Wir wollen zeigen, daß die Figur b) in der gewünschten Weise nicht gelegt werden kann. Dazu ist eine Fallunterscheidung notwendig. Aus Symmetriegründen gibt es nur fünf Klassen von Möglichkeiten, wie die einfarbigen Steine *G*, *H*, *I*, *J* angeordnet sein können. Dabei sollen die konkreten Farben nicht beachtet werden, weil ja alle Einfarbensteine und alle möglichen Vierfarbensteine genau einmal vorkommen:

Bild 6



Zur Diskussion der fünf Fälle numerieren wir die 10 Quadrate des Rechtecks b) in folgender Weise:

Bild 7

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

Angenommen, es gibt eine Lösung.

Fall I. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die einfarbigen Steine so gesetzt: *G*-1, *H*-7, *J*-3 und *I*-5. Weil sich nur gleichgefärbte Seiten berühren dürfen, folgt zwangsläufig *B*-2, *C*-8 und *D*-4. Dann kann aber das Quadrat 9 nicht mehr belegt werden, was unserer Annahme widerspricht.

Fall II. Ohne Einschränkung des allgemeinen Falles seien die einfarbigen Steine so gesetzt: *G*-1, *H*-7, *J*-3 und *I*-9. Dann muß *B*-2, *A*-8 und *F*-4 sein. Das Feld 6 kann nicht mehr belegt werden.
Widerspruch.

Fall III. Wenn *G*-1, *J*-3, *H*-7, *I*-10 ist, so folgt *B*-2, *C*-8, *F*-9, *A*-4, *D*-5. Aber *E* paßt nicht auf Feld 6. Widerspruch.

Fall IV. Wenn *G*-1, *H*-7, *J*-4 und *I*-10 ist, so muß automatisch *E*-9, *D*-8 und *A*-3 sein. Das Feld 2 kann dann nicht mehr belegt werden.

Fall V. Angenommen, *G*-1, *I*-5, *H*-7 und *J*-9 gehört zu einer Lösung. Feld 8 soll nun belegt werden. Wäre *E*-8, so ergäbe sich *B*-2, *A*-10 und *D*-3. Das Quadrat 4 kann nicht belegt werden, also kann *E*-8 nicht gelten. Daher muß *F*-8 gesetzt werden, was sofort *B*-2 nach sich zieht. Mit den verbliebenen Steinen kann jedoch Feld 3 nicht mehr gefüllt werden. Das bedeutet, auch der Fall V kann nicht eintreten!

Mithin ist die Figur b) nicht zu legen.

Von der Schulbank zur Internationalen Mathematik-Olympiade

Oberwolfach ist ein schöner, reizvoll gelegener Kurort im Schwarzwald. Königstein ist ein schöner, reizvoll gelegener Kurort im Taunus. Neben den landschaftlichen Vorzügen haben beide Orte noch eine andere Gemeinsamkeit: sie sind eng mit den Erfolgen der bundesdeutschen Schüler bei der Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO) verbunden.

Seit 1959 gibt es diesen mathematischen Schülerwettbewerb, und seit 1977 nahm die Bundesrepublik ohne Unterbrechung daran teil (die ehemalige DDR war schon im ersten Austragungsjahr dabei).

Zwar ist die IMO ein Einzelwettbewerb, aber die inoffizielle Gesamtpunktzahl erlaubt eine Rangfolge der Teilnehmerländer. Tabelle 1 zeigt das gute, teilweise hervorragende Abschneiden der bundesdeutschen Schüler im internationalen Vergleich. (Dem *alpha*-Leser sind die Zahlen für die DDR sicher bekannt.)

Normalerweise erleben neu teilnehmende Länder eine unangenehme Überraschung: ihre Schüler landen zunächst auf den hinteren Plätzen. Erst nach mehreren Jahren ist der Anschluß an den Durchschnitt hergestellt. Wir bewegten uns von Anfang an in der Spitzengruppe. Gerne haben Bildungspolitiker verschiedener Bundesländer die schönen Erfolge „ihrer" Schüler als Zeichen für die Wirksamkeit und Qualität ihres jeweiligen Schulsystems beansprucht. Doch zu gleichmäßig verteilt sich die Herkunft erfolgreicher Olympioniken auf die von unterschiedlicher politischer Couleur geprägten Länder, als daß sich hier ein Zusammenhang ableiten ließe. Außerdem gibt es bei der IMO Teilnehmerstaaten mit vergleichbarem Bildungssystem, aber höchst verschiedenem Erfolgsprofil ebenso wie Länder mit völlig anderen schulischen Voraussetzungen, dafür aber über Jahre hinweg vergleichbaren Leistungen ihrer Teilnehmer. Will man Aussagen über Ursachen der guten Ergebnisse deutscher Schüler treffen, so muß man den Weg der Teilnehmer von der Schule bis zur IMO beleuchten.

Die IMO ist ein Klausurwettbewerb. An zwei aufeinanderfolgenden Tagen müssen die Teilnehmer je drei Aufgaben in viereinhalbstündiger Klausur ohne Hilfsmittel wie etwa Taschenrechner oder Formelsammlung bearbeiten. Dabei begegnen ihnen Probleme wie das folgende (mit dem unsere Schüler übrigens gar nicht gut zurechtgekommen sind):

Aufgabe 4 der XXXI. IMO 1990

Es sei Q^+ die Menge aller positiven rationalen Zahlen. Man gebe eine Funktion f: $Q^+ \to Q^+$ an, so daß für alle $x, y \in Q^+$ die Gleichung

$$f(x \cdot f(y)) = \frac{f(x)}{y} \text{ gilt.}$$

Mit solchen Aufgaben haben selbst gestandene Mathematiker ihre Schwierigkeiten, insbesondere unter Zeitdruck und mit weiteren zwei Aufgaben des gleichen oder eines noch höheren Kalibers im Nacken. Zwar wird seit jeher darauf geachtet, daß die IMO als Schülerwettbewerb sich auch wirklich nur auf die sogenannte „Schulmathematik" stützt, aber weder findet man Aufgaben wie diese jemals in einem Schulbuch, noch kann man billigerweise selbst von sehr guten Schülern erwarten, daß sie solche Probleme in einer Klausur lösen können. Daher hat die Bundesrepublik in Anlehnung an die Praxis anderer Länder mit der Entscheidung für die Teilnahme an der IMO gleichzeitig eine Förderung für die in Frage kommenden Schüler eingerichtet, die seit 1977 in fast unveränderter Form praktiziert wird.

Zunächst muß man einen Kreis von förderungswürdigen Begabten kennen. Förderung ist also im Hinblick auf die IMO untrennbar mit Auswahl verbunden. Die Teilnehmer für die Vorbereitung auf die IMO kommen vom Bundeswettbewerb Mathematik, der allen Schülern der zur Hochschulreife führenden Schulen offensteht. Andere Quellen, wie etwa der Wettbewerb „Jugend forscht", haben sich als nicht sehr ergiebig erwiesen. Die etwa 100 Besten der 2. Runde des Bundeswettbewerbs werden zu zwei Auswahlklausuren eingeladen. Die 18 erfolgreichsten Klausurschreiber qualifizieren sich zu mehreren Trainingswochenenden, die regelmäßig im Frühjahr in Königstein stattfinden. (Seit 1989 allerdings mußten wir nach Frankfurt a. M. ausweichen.) Neben der inhaltlichen Vorbereitung, über die im folgenden noch mehr zu lesen sein wird, stehen jedesmal auch weitere Klausuren auf dem Programm. Immerhin haben die Teilnehmer am Bundeswettbewerb die gestellten Probleme in beiden Runden zu Hause lösen können und müssen nun allmählich auf die Klausuren bei der IMO eingestellt werden. Man könnte es auch etwas härter sagen: Die Teilnehmer, die sich in den Klausuren als besonders erfolgreich erweisen, qualifizieren sich gegenüber ihren Mitkonkurrenten, deren mathematische Hochbegabung sich vielleicht nicht so sehr in Schnelligkeit und Streßtoleranz äußert.

Deshalb ist es gut, daß die gesamte IMO-Vorbereitung – es folgt noch ein Abschlußseminar in Oberwolfach von einwöchiger Dauer – vor allem unter dem Gesichtspunkt der Talentförderung betrieben wird. Auch die Teilnehmer, die sich am Ende nicht für die Mannschaft qualifizieren, nehmen Anregungen in Fülle mit und erleben die Mathematik auf einem Niveau, das ihnen zwar angemessen ist, von der Schule aber so nicht vermittelt werden kann.

Die Vorbereitungsseminare enthalten neben den bereits erwähnten Klausuren insbesondere Vorträge zu verschiedenen mathematischen Themen. Dabei liegen Schwerpunkte bei Zahlentheorie, Geometrie und Kombinatorik/Stochastik. Weitere Gebiete sind Ungleichungen, Gleichungen und Gleichungssysteme, Trigonometrie, Polynome, Funktionalgleichungen, Algorithmen, Folgen und Reihen. Dagegen fehlt weitgehend eine intensive Behandlung der Analysis. Der Grund dafür ist, daß Aufgaben aus der Analysis bei der IMO fast keine Rolle spielen, weil dieses Gebiet in vielen Ländern nicht zum Unterrichtsstoff der Sekundarstufe gehört. Das Vorkommen von Methoden aus der Analysis ist damit nicht ausgeschlossen.

Wir betrachten folgende Aufgabe:

Man beweise: Auf einer stetigen, geschlossenen, sich nicht überschneidenden Linie L im Raum gibt es stets vier Punkte, die den Umfang von L in vier gleiche Teile teilen und die alle in einer Ebene liegen.

Zur Lösung wähle man zunächst irgendwelche vier Punkte A, B, C und D, die L in vier gleich lange Teilstücke zerlegen. Der Tetraeder $ABCD$ habe ein von Null verschiedenes orientiertes Volumen (die Orientierung ergibt sich z. B. aus dem Drehsinn des Dreiecks ABC und der Lage von D zur so orientierten Ebene (ABC)). Läßt man nun die Punkte synchron um jeweils eine Viertellänge von L weiterwandern, so ist der ursprüngliche Tetraeder in einen zu ihm kongruenten Tetraeder mit also gleichem Volumen übergeführt worden. Allerdings hat dieses Volumen entgegengesetztes Vorzeichen, denn die Orientierung ist jetzt entgegengesetzt. Da das Volumen eine stetige Funktion der Eckpunktskoordinaten ist, und da diese Koordinaten sich bei dem Umlauf der Punkte stetig ändern, gibt es nach dem Zwischenwertsatz der Analysis eine Lage der Punkte, in welcher das Vorzeichen wechselt und der zugehörige Tetraeder das Volumen Null besitzt. Dort müssen aber die vier Punkte in einer Ebene liegen.

Die Themenliste wäre unvollständig, würde man nicht die Methoden des Problemlösens erwähnen, die wir ebenfalls recht gründlich trainieren. Darunter fällt etwa das Schubfachprinzip, die Methode des Unendlichen Abstiegs, Vollständige Induktion, das Auswahlprinzip, Rückwärtsarbeiten und das Invarianzprinzip. Sämtliche mathematischen Gebiete, und diese Strategien werden nicht in Form von Vorlesungen, sondern im Seminarstil mit Übungscharakter angeboten. Die Schüler beteiligen sich spontan, lösen Aufgaben oder diskutieren verschiedene Zugänge zu einem Problem.

Leider sind bei uns von Anfang an die Mädchen kraß in der Minderheit. In 13 Jahren haben sich insgesamt erst fünf Schülerinnen für die Vorbereitung qualifiziert; den Sprung in die IMO-Mannschaft hat noch keine geschafft! In vielen anderen Ländern ist es nicht besser, wenn auch bei der letztjährigen IMO eine 14jährige Schülerin aus der UdSSR mit voller Punktzahl eine Goldmedaille erringen konnte.

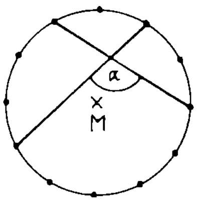
Die oben genannten Gebiete, welche in der Vorbereitung trainiert werden, beschreiben die zentralen Themen des Schulstoffs bis weit in die Oberstufe hinein. (Sollten Sie dabei Bruchrechnung, Dreisatz oder gar die „Mengenlehre" vermissen, so liegt das daran, daß solche Grundlagen nicht weiter erwähnt werden.) Oft reicht jedoch der Schulstoff bei weitem nicht aus, den Olympiadeteilnehmern das nötige Gerüst für die Bewältigung der Wettbewerbsaufgaben zu geben. Die Lehrpläne in den einzelnen Bundesländern unterscheiden sich zwar im Kern nicht sehr, lassen aber stellenweise Differenzierungen und Wahlmöglichkeiten zu und sind in der Tat – um ein altes Vorurteil zu bestätigen – gegenüber früheren Jahrzehnten kräftig abgespeckt worden. Was daher die Vorbereitung für die IMO leisten muß, soll nun an einigen Beispielen illustriert werden.

I. Geometrie

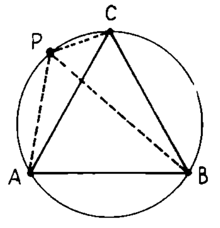
In der Schule kommt praktisch keine Raumgeometrie vor. Hier holt die Vorbereitung sehr viel nach, insbesondere bei der Untersuchung von Tetraedern. Aber auch Abbildungsgeometrie wird vertieft und als Beweismittel nutzbar gemacht. Analytische Geometrie spielt aus ähnlichen Gründen wie die Analysis kaum eine Rolle; dafür lernen die Schüler beim Training jedoch das Rechnen mit Vektoren und komplexen Zahlen und können diese Fertigkeit bei manchen Aufgaben gut einsetzen.

Daneben gibt es aber noch die „gewöhnliche" Schulgeometrie. Wir kennen die mit ihr verbundenen Begriffe: Pythagoras, Thaleskreis, Kongruenzsätze, Strahlensätze – um nur eine kleine Auswahl zu nennen. Es wäre natürlich schön, wenn man deren Inhalte genauso bedingungslos voraussetzen könnte wie Bruchrechnung oder Dreisatz, aber leider sieht es oft gerade auf dem Gebiet der Geometrie mit dem Schülerwissen schlimm aus – selbst bei unseren mathematisch Interessierten. Da bei Zeitmangel oder Stundenkürzung zuerst an der Geometrie gespart wird, entsteht ein Mangel, der deutlich wird, wenn wir eine typische schwere Schulaufgabe mit einer typischen leichten Wettbewerbsaufgabe vergleichen, beide zum Thema „Umfangswinkel".

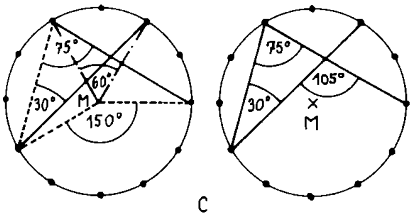
1. Ein Kreis ist – wie das Ziffernblatt einer Uhr – in 12 gleiche Teile unterteilt. Berechne den Winkel α zwischen den eingezeichneten Sehnen.

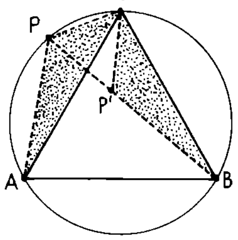


2. Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Ein Punkt P auf seinem Umkreis wird mit den Ecken A, B und C verbunden. Zeige, daß eine der Strecken $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ oder $\overline{PC}$ gleich der Summe der beiden anderen ist.



Während man zur Lösung der 1. Aufgabe lediglich eine zwangsläufig sich aufdrängende Reihe geeigneter Umfangs- und Mittelpunktswinkel zu betrachten hat (linke Figuren unten), bedarf es bei der 2. Aufgabe einer komplexeren Überlegung (rechte Figur unten).





Man dreht am besten um C mit dem Drehwinkel 60° und stellt fest, daß A dabei in B und P in einen Punkt P' übergeht, der auf PB liegen muß, weil nämlich die Umfangswinkel über der Sehne $\overline{PC}$ bei A und B gleich sind. (Die Dreiecke ACP und BCP' müssen ja kongruent sein, weil sie durch Drehung ineinander übergehen.) Weil aber CPP' gleichseitig ist (60°-Winkel bei C und gleiche Länge von $\overline{CP}$ bzw. $\overline{CP'}$), gilt

$$\overline{PA} + \overline{PC} = \overline{P'B} + \overline{PP'} = \overline{PB}.$$

Diese Aufgaben zeigen den üblichen Unterschied zwischen Schul- und Wettbewerbsaufgaben: bei den letzteren weiß man zunächst oft gar nicht, welche Hilfsmittel für den Beweis verwendet werden können und in der Regel muß man mehrere solcher Sätze oder Eigenschaften miteinander kombinieren, wobei durch psychologische Hürden das Erkennen der erfolgversprechenden Möglichkeiten häufig blockiert wird. Daher reicht selbst das vollständige Aufgabenmaterial aus Schulbüchern noch nicht aus, um einen guten Problemlöser zu formen. Aber die Lehrplaninhalte selbst sind lückenhaft. Den Satz des Ptolemäus, die Inversion am Kreis, den Satz von Morley, die Formel von Pick und viele andere wichtige oder schöne Dinge aus der Geometrie lernen die Schüler erst im Training kennen. Dies ist nicht auf die Geometrie beschränkt.

II. Kombinatorik

Dieses Gebiet taucht im Schulunterricht nicht eigenständig wie Algebra oder Geometrie auf, sondern es wird – vor allem im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung – mehr oder weniger intensiv betrieben. Die Schüler können bestenfalls Anzahlen von Kombinationen, Permutationen oder Teilmengen bestimmen und kennen aus der Jahrgangsstufe 12 vielleicht noch die Binomialkoeffizienten. Dort machen Aufgaben wie die nächste große Mühe, während die übernächste zu den eher leichten Trainingsaufgaben gehört.

1. Aus einer Urne, in der sich n gleichartige Kugeln mit den Nummern 1, 2, ..., n befinden, werden zufällig k Kugeln gleichzeitig herausgegriffen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die größte gezogene Zahl kleiner oder gleich i ist ($i = k, k+1, \ldots, n$).

2. Ein reguläres $(2n+1)$-Eck ist einem Kreis einbeschrieben. Drei Ecken werden zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß das entstehende Dreieck den Mittelpunkt des Umkreises enthält?

Beide Berechnungen seien dem Leser überlassen, der unter der Laplace-Annahme ja nur die Anzahl der günstigen durch die Anzahl aller möglichen Fälle zu dividieren braucht. Als Hinweis die Antworten: bei 1. ergibt sich

$$[i!(n-k)!]:[n!(i-k)!]$$

und bei 2. $(n+1):2(2n-1)$.

Dem einfacheren Ergebnis steht bei der letzten Aufgabe der weit schwierigere Zugang entgegen, genau wie in den Beispielen aus der Geometrie.

III. Zahlentheorie

Ähnlich wie die Kombinatorik taucht dieses Gebiet nur gelegentlich und ohne eigene Nennung im Schulunterricht auf. Oft ist die Teilbarkeitslehre am Ende von Klasse 5 oder kurz darauf der einzige Ort bewußter Auseinandersetzung mit zahlentheoretischen Fragen. Selbstverständlich kann daher das Rechnen mit Restklassen, die Kenntnis des kleinen Satzes von Fermat, der Eulerschen φ-Funktion oder gar des Chinesischen Restsatzes von Schülern nicht erwartet werden, denen oft sogar der Euklidische Algorithmus völlig unbekannt ist. Andererseits liefert die Zahlentheorie immer wieder schöne und elementar zu lösende Wettbewerbsaufgaben, wenn man sich bei der Verwendung des Begriffs „elementar" auf etwas mehr als bloß die Teilbarkeitsregeln verständigt. Das folgende Beispiel zeigt, was gemeint ist.

Man bestimme alle Primzahlen p und q, für die $p^q + q^p$ auch eine Primzahl ist.

Zur Lösung – bitte nicht weiterlesen, wenn Sie sich die Freude an der eigenen Lösung nicht nehmen wollen, – stellt man zunächst fest, daß die Summe größer als 2 und daher ungerade sein muß. Dann muß aber genau ein Summand gerade und daher genau eine der Primzahlen – es sei p – gleich 2 sein. Die andere Primzahl q muß größer als 3 sein (ausprobieren!) und läßt daher bei Division durch 6 den Rest 1 oder 5. Ihr Quadrat q^2 läßt dann bei Division durch 3 den Rest 1, während 2^q für ungerades q stets den Rest -1 bei Division durch 3 hat. Die Summe ist also durch 3 teilbar und kann deswegen ihrerseits keine Primzahl sein.

Natürlich bedarf es auch hier wieder der Kunst, zu sehen, welche ganz einfachen, elementaren Beweismittel richtig kombiniert werden müssen. Es ist schön mitzuerleben, wie talentierte Schülerinnen und Schüler aufgrund der Förderung ihrer Begabungen diese Kunst allmählich erlernen und selbständig praktizieren können.

Der Zusammenschluß beider Teile Deutschlands hat in der Zukunft auch für das Olympiadetraining Auswirkungen. Die Förderung muß die Schüler in ihrer Schulsituation abholen, und diese ist im östlichen Teil sicher noch auf Jahre hinaus anders als in der ehemaligen Bundesrepublik. Dazu hat das weitverzweigte und strukturierte Wettbewerbssystem beigetragen, das dort einen Teil der insgesamt recht kurzen Förderung übernommen hatte. So wird bereits 1991 der letzte Teil der IMO-Vorbereitung in Form zweier längerer Seminare gemeinsam abgehalten. Dabei darf man auf den Vergleich nach Herkunft sicher gespannt sein und wird Rückschlüsse für den künftigen Aufbau der Vorbereitung ziehen müssen. Eines wollen wir allerdings vermeiden: das Förderungsangebot darf für die Teilnehmer nicht zur Belastung werden, nur um besonders gute Ergebnisse zu erreichen. Das Abschneiden bei der IMO mag der äußere Ansporn sein, der eigentliche Zweck des Trainings liegt in der Entfaltung der Begabungen, die sich bereits durch vorherige Erfolge gezeigt haben.

Schließlich würde es nur zur Verkrampfung führen, wollte man das immer weiter steigende Niveau und die Professionalisierung des Trainingsbetriebs mancher anderer Länder für die IMO nachahmen.

H. Sewerin

Abschneiden der bundesdeutschen Mannschaft bei der IMO – Anzahl der Teilnehmerländer/ Platz in der Gesamtwertung

1977	20/7.	1985	38/7.
1978	17/6.	1986	37/3.
1979	23/3.	1987	42/2.
1980	(keine IMO)	1988	49/4.
1981	27/2.	1989	50/8.
1982	30/1.	1990	54/12.
1983	32/1.		
1984	34/9.		

Die elf Sternmosaike

Unter einem geometrischen Mosaik (oder Teppich) soll in dieser Abhandlung eine die Ebene völlig ausfüllende Anordnung von regelmäßigen Vielecken verstanden werden. Sie wird als „Sternmosaik“ bezeichnet, wenn sie Seite an Seite und Ecke an Ecke liegen und wenn dabei um jede Ecke herum die gleichen Vielecke in der gleichen zyklischen Folge angeordnet sind. Im folgenden werden die Geradenbüschel an den Ecken „Sterne“ und die zugehörigen Linien „Strahlen“ genannt. Obige Voraussetzungen bedeuten, daß sowohl die zum Mosaik gehörenden regelmäßigen Vielecke gleicher Art als auch deren Sterne untereinander kongruent sein müssen.

Im folgenden wird gezeigt, daß es genau 11 solcher Sternmosaike gibt.

Da die Winkel eines Sternes insgesamt 360° betragen und das kleinste regelmäßige Vieleck, das Dreieck, einen Winkel von 60° hat, kann kein Stern des Mosaiks mehr als 6 Strahlen haben; da kein regelmäßiges Vieleck einen überstumpften Winkel haben kann, muß ein solcher Stern andererseits mindestens 3 Strahlen haben. Wir untersuchen daher im folgenden vier verschiedene Fälle: Sterne mit 3, 4, 5 oder 6 Strahlen, das heißt, mit je drei, vier, fünf oder sechs an einer Ecke zusammenstoßenden regelmäßigen Vielecken.

Aufgabe: Ermittle die Größe des Innenwinkels eines regelmäßigen n-Ecks!

I. Mosaike mit drei regelmäßigen Vielecken

Wir nennen die Seitenzahlen dieser Vielecke n_1, n_2 und n_3 mit $n_1 \leqq n_2 \leqq n_3$. Die Winkel des von ihren Seiten gebildeten Sterns müssen dann nachstehende Bedingung erfüllen:

$$180° \cdot \left(\frac{n_1 - 2}{n_1} + \frac{n_2 - 2}{n_2} + \frac{n_3 - 2}{n_3}\right) = 360°$$

oder $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$.

a) Für $n_1 = 3$ geht die Gleichung über in: $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{6}$.

Daher kommen für n_2 nur die Werte von 7 bis 12 in Frage.

b) Für $n_1 = 4$ erhalten wir: $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4}$.

Hier hat man also nur zu testen, ob sich für $n_2 = 5$, 6, 7 und 8 ganzzahlige n_3 ergeben.

c) Für $n_1 = 5$ erhält die rechte Seite der Gleichung den Wert $\frac{3}{10}$. Man hat daher hier nur n_3-Werte für $n_2 < \frac{20}{3}$ oder für $n_2 = 5$ und 6 zu suchen.

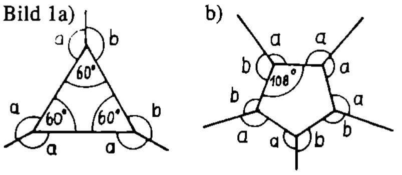
Auf diese Weise finden wir nur die folgenden ganzzahligen Lösungen der Ausgangsgleichung, d. h., daß sich aus drei gleichseitigen Vielecken folgende 10 Sterne bilden lassen:

Nr.	n_1	n_2	n_3
1	3	12	12
2	3	10	15
3	3	9	18
4	3	8	24
5	3	7	42
6	4	8	8
7	4	6	12
8	4	5	20
9	5	5	10
10	6	6	6

Da es sich aber nur um eine notwendige, nicht aber hinreichende Bedingung für die Existenz eines Sternmosaiks handelt, ist noch zu untersuchen, ob es tatsächlich Mosaike mit diesen Sternen gibt.

Eine kleine Überlegung zeigt nun, daß ein regelmäßiges Vieleck mit ungerader Seitenzahl nicht von zwei anderen regelmäßigen Vielecken mit unterschiedlicher Seitenzahl eingeschlossen werden kann, wenn lauter kongruente Sterne entstehen sollen (siehe Bild 1a für das regelmäßige Dreieck bzw. Bild 1b für das regelmäßige Fünfeck).

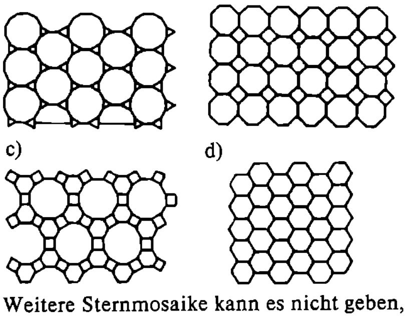
Bild 1a) b)



Die Tabelle weist aber nur ein einziges Dreieck und überhaupt kein Fünfeck in Verbindung mit zwei anderen kongruenten Vielecken aus. Damit scheiden die Sterne 2, 3, 4, 5, 8 und 9 für die Bildung eines Sternmosaiks aus.

Daß die restlichen Sterne 1, 6, 7 und 10 tatsächlich zur Bildung eines Sternmosaiks Anlaß geben, zeigen die Figuren a) bis d) in Bild 2.

Bild 2a) b) c) d)



Weitere Sternmosaike kann es nicht geben, da drei vorgegebene Winkel mit der Summe von 360° – wenn man von Spiegelungen und Drehungen absieht – eben nur auf eine einzige Art kreisförmig zusammengefügt werden können.

II. Mosaike mit vier regelmäßigen Vielecken

Wir bezeichnen wiederum die Seitenzahl der Vielecke mit n_1, n_2, n_3, n_4 mit $n_1 \leqq n_2 \leqq n_3 \leqq n_4$.
Auf ähnliche Weise wie unter I. erhalten wir jetzt die Gleichung

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1.$$

Die schnell zu findende Ganzzahllösung $n_1=n_2=n_3=n_4=4$ lehrt, daß alle übrigen Lösungen $n_1=3$ enthalten müssen. So erhalten wir die einfachere Gleichung

$$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{2}{3}.$$

Aus der (nichtganzzahligen) Lösung $n_2=n_3=n_4=\frac{9}{2}$ sehen wir, daß n_2 nur die Werte 3 und 4 haben kann.

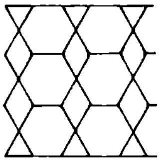
a) Für $n_2=3$ erhalten wir $\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=\frac{1}{3}$.
Wegen der Lösung $n_3=n_4=6$ haben wir hier nur für $n_3=4$ und $n_3=5$ nach weiteren Lösungen zu suchen.

b) Für $n_2=4$ nimmt die rechte Seite den Wert $\frac{5}{12}$ an. Daher kann hier n_3 $\left(n_3 \geqq 4;\ \text{„Lösung“}\ n_3=n_4=\frac{24}{5}\right)$ nur den Wert 4 haben. Somit erhalten wir hier die vier ganzzahligen Lösungen:

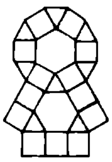
Nr.	n_1	n_2	n_3	n_4
1	3	3	6	6
2	3	3	4	12
3	3	4	4	6
4	4	4	4	4

Man kann die in den Fällen 1 bis 3 paarweise auftretenden Vielecke jeweils entweder einander berührend oder nichtberührend anordnen, also jeweils zwei verschiedene Sterne bilden. Aus Bild 3 ist ersichtlich, daß sich bei Lösung 1 und 3 in einem der beiden Fälle (a bzw. b) und bei Lösung 2 in beiden Fällen (c) und (d) Mosaike mit inkongruenten Sternen bilden.

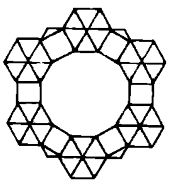
Bild 3a)



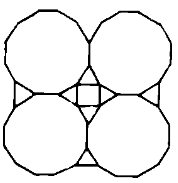
b)



c)

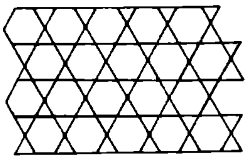


d)

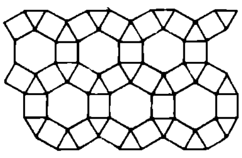


Es ergeben sich daher hier nur die beiden Sternmosaiken, die Bild 4a und b) zeigt.
Die Lösung Nr. 4 gibt natürlich nur zu einem Sternmosaik Anlaß (Bild 4c).
Es lassen sich daher aus 4 regelmäßigen Vielecken hier nur 3 Sternmosaiken bilden.

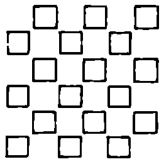
Bild 4a)



b)



c)



III. Mosaike mit fünf regelmäßigen Vielecken

Die Seitenzahlen seien auch hier wieder $n_1, n_2, \ldots, n_5$ mit $n_1 \leqq n_2 \leqq n_3 \leqq n_4 \leqq n_5$.
Die Gleichung lautet hier

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2}.$$

Für $n_1=3$ nimmt die rechte Seite der Gleichung den Wert $\frac{7}{6}$ an; woraus geschlossen werden kann, daß auch $n_2=3$ sein muß $\left(n_1=n_2=n_3=n_4 \text{ ergäbe } \frac{24}{7}\right)$.
Ist aber auch $n_2=3$, so bleibt für $\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}$ noch $\frac{5}{6}$; bei $n_3=n_4=n_5$ wäre die Summe gleich $\frac{18}{5}$; also muß auch $n_3=3$ sein. Schließlich erhält man

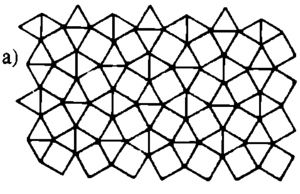
$$\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Es sind also für n_4 die beiden Werte 3 und 4 mögliche Ganzzahllösungen der Ausgangsgleichung.
Wir erhalten hier nur 2 Sterne:

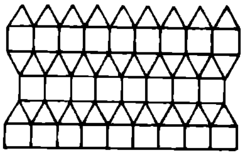
Nr.	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
1	3	3	3	4	4
2	3	3	3	3	6

Aus den Vielecken der Lösungen 1 lassen sich hier wiederum zwei verschiedene Sterne bilden, bei Lösung Nr. 2 dagegen nur ein einziger. Die Bilder 5a–c zeigen diese Sternmosaiken.

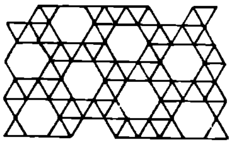
Bild 5a)



b)



c)



IV. Mosaike mit sechs regelmäßigen Vielecken

Hier lautet die entsprechende Gleichung für die Sternbilder:

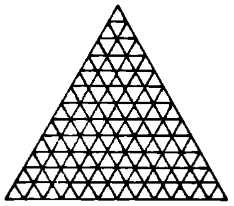
$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=2.$$

Es ist evident, daß es hier nur eine einzige ganzzahlige Lösung mit n_1 größer oder gleich 3 gibt:

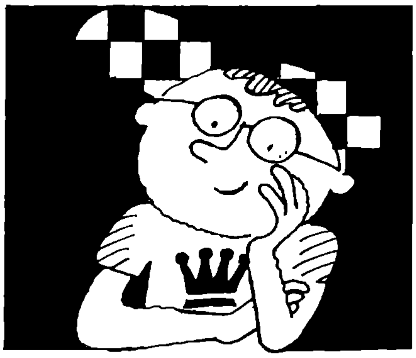
$$n_1=n_2=n_3=n_4=n_5=n_6=3;$$

das entsprechende Sternmosaik zeigt die Anlage in Bild 6.

Bild 6



Zusammenfassend läßt sich feststellen:
Es gibt genau 11 Sternmosaike.
Die in Bild 2d, 4c und 6 gezeigten Mosaike sind die bekannten drei Möglichkeiten, die unendliche Ebene mit nur einer einzigen Art von regelmäßigen Vielecken zu bedecken; die dabei auftretenden Sterne sind nicht nur untereinander kongruent, sondern auch gleichwinklig, d. h. ebenfalls regelmäßig. Die 11 Sternmosaike zerfallen also in 2 Sorten mit 3 bzw. 8 Arten.
Wenn man auf die Vorschrift verzichtet, daß die an den Ecken sich bildenden Sterne kongruent sein müssen, dann gibt es eine überaus große Anzahl von Mosaiken aus regelmäßigen Vielecken. *H. Oehl*



Partieergebnis eines Schachturniers

Holger, Christian, Angela, Katrin, Frank und Martin führten in ihrer Klasse ein Schachturnier durch. Jeder spielte mit jedem eine Partie. Holger gewann dabei alle fünf Partien, was fünf Punkten entspricht. (Bei einem Remis gibt es 0,5 Punkte für jeden der beiden Spieler.)
Angela, Katrin, Frank und Martin erreichten den gleichen Punktestand, jedoch verlor Martin weniger Partien. Christian wäre Erster geworden, hätte er gegen Holger gewonnen.
Wie lautete das Ergebnis der Partie zwischen Angela und Martin?

Venus im größten Glanz

Wie der Mond zwischen Neumond und Vollmond, so durchlaufen auch andere Himmelskörper wie z. B. die Venus verschiedene Phasen. (Als Phase bezeichnet man die wechselnde Lichtgestalt von nicht selbstleuchtenden Himmelskörpern.) Schon mit dem kleinsten Fernrohr kann man beobachten, daß der scheinbare Venusdurchmesser nahe Vollvenus beträchtlich kleiner ist als in der Nähe von Neuvenus, wenn also nur eine schmale Sichel zu sehen ist (Bild 1).

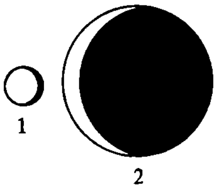


Bild 1
Wahre Größenverhältnisse der Venus
1 Venus in der Nähe der oberen Konjunktion (nahe Vollvenus)
2 Venus in der Nähe der unteren Konjunktion (nahe Neuvenus)

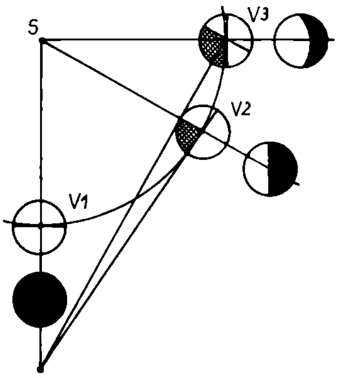


Bild 2
Venusphasen
$V1$ untere Konjunktion
$V2$ Halbvenus
$V3$ Quadratur

Aus Bild 2 geht hervor, daß dies keine optische Täuschung sondern ein reales Phänomen ist. Der Abstand Erde – Venus schwankt zwischen $42 \cdot 10^6$ km und $258 \cdot 10^6$ km. Das heißt, bei Vollvenus ist diese mehr als sechsmal so weit entfernt wie bei Neuvenus und deshalb entsprechend kleiner. Kommt die Venus uns näher, so vergrößert sich ihr scheinbarer Durchmesser, ihre beleuchtete Fläche wird jedoch kleiner.

Eine interessante mathematische Extremwertaufgabe ist es nun, auszurechnen, wann Venus im größten Glanz erstrahlt, d. h. wann sie der Erde die größte beleuchtete Fläche zuwendet. Dazu ist es erforderlich, einen funktionalen Zusammenhang zwischen der Zeit und dem Inhalt der beleuchteten Venusfläche zu finden.

Bevor wir zur Lösung der Aufgabe kommen, ein paar Festlegungen und Vereinfachungen:
1. Die Bahnen von Venus und Erde werden als Kreise angenommen, da die Abweichung von der Kreisbahn gering ist. Außerdem bleibt die Bahnneigung, d. h. der Winkel zwischen Erdbahn und Venusbahn unberücksichtigt, da dieser nur 3,5° beträgt.
2. Wir werden mit einer geozentrischen Betrachtungsweise arbeiten, d. h. alle Angaben beziehen sich auf einen Beobachter auf der „festen“ Erde.
3. Die Linie Erde – Sonne wird als feststehend betrachtet. Die eigentliche Bewegung der Erde wird berücksichtigt, indem für die Umlaufzeit der Venus statt der siderischen (auf die Sonne bezogene), die synodische (auf die Erde bezogene) Umlaufzeit verwendet wird (Bild 3).

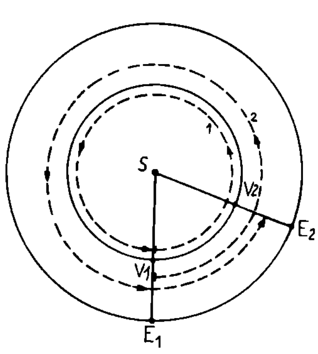


Bild 3
siderischer und synodischer Umlauf
1 siderischer Umlauf (von der Sonne aus gesehen)
2 synodischer Umlauf (von der Erde aus gesehen)

4. Als „Nullpunkt“ der Bewegung sei die untere Konjunktion gewählt, d. h. der Zeitpunkt, zu dem die Venus mit Erde und Sonne in einer Linie steht und zwar vor der Sonne (Position $V1$ in Bild 4).

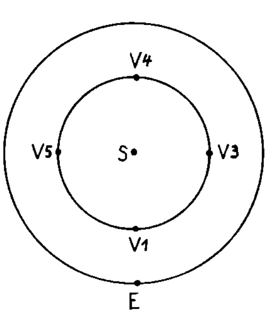


Bild 4
besondere Stellungen der Venus
$V1$ untere Konjunktion
$V3$, $V5$ Quadratur
$V4$ obere Konjunktion

Erwähnt sei auch noch Position $V3$ (Bild 4), die (ebenso wie $V5$) Quadratur genannt wird und erreicht ist, wenn Venus, Sonne und Erde einen rechten Winkel (mit der Sonne als Scheitel) bilden. Diese Position ist allerdings nicht identisch mit Halbvenus. (Diese Erscheinung tritt etwas eher auf.) Der gesuchte Zeitpunkt der größten Helligkeit liegt, soviel sei verraten, zwischen unterer Konjunktion und Halbvenus. Deshalb können wir die Berechnungen auf diesen Quadranten beschränken.

Kommen wir nun zur Lösung der Aufgabe. Dazu gehen wir in drei Schritten vor:
1. Aufstellen eines funktionalen Zusammenhanges zwischen Zeit und Abstand Venus – Erde. Daraus läßt sich dann der scheinbare Radius in Abhängigkeit von der Zeit ableiten.
2. Ermitteln eines Zusammenhangs zwischen Zeit und Inhalt der beleuchteten Fläche.
3. Verknüpfen beider Funktionen, Formulieren und Lösen der Extremwertaufgabe.

1. Schritt:
Verwendete Abkürzungen und Daten
V: Venus
E: Erde
S: Sonne
R_{VB}: Venusbahnradius, $R_{VB} = 108 \cdot 10^6$ km
R_{EB}: Erdbahnradius, $R_{EB} = 150 \cdot 10^6$ km
T_V: synodische Umlaufzeit der Venus T_V: 584 Erdtage
R_V: Venusradius
Winkel zwischen den Verbindungslinien Venus – Sonne und Sonne – Erde
t: Zeit nach der unteren Konjunktion
a: gesuchter Abstand Erde – Venus
r_s: scheinbarer Radius der Venus

Zuerst legen wir ein Koordinatensystem fest. Da die gegenseitige Neigung von Erd- und Venusbahn unberücksichtigt bleibt, können wir ein ebenes Koordinatensystem benutzen. Es bietet sich an, Polarkoordinaten zu verwenden. In diesen Koordinaten ist jeder Punkt durch seinen Abstand von einem festen Mittelpunkt und den Winkel, den die Linie Punkt – Mittelpunkt mit einer festgelegten Nullinie bildet, bestimmt (Bild 5).

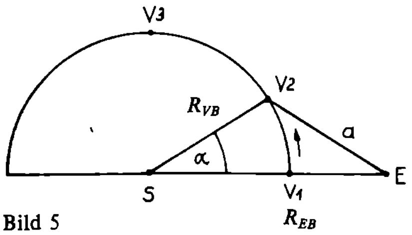


Bild 5
Venusbewegung
$V1$ untere Konjunktion
$V3$ Quadratur

Als Mittelpunkt sei die Sonne gewählt, die o. g. Nullinie ist die als feststehend angenommene Verbindungslinie Sonne – Erde. Da wir die Venusbahn als Kreislinie betrachten, ist der Abstand der Venus vom

Mittelpunkt Sonne fest. Die jeweilige Position der Venus ist also nur vom Winkel α abhängig. Da sich die Venus unter den genannten Voraussetzungen gleichförmig bewegt, ist der Winkel α proportional zur Zeit t:

$$\alpha : t = \pi : \frac{T_V}{2},$$

$$\alpha = 2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T_V} \qquad (1)$$

Um die Beziehung zwischen Zeit und Abstand zu ermitteln, ist es jetzt noch nötig, den Abstand a in Abhängigkeit vom Winkel α zu bestimmen. Dazu verwenden wir den Kosinussatz auf das Dreieck $SEV2$ (Bild 5) an:

$$a^2 = R_{VB}^2 + R_{EB}^2 - 2 \cdot R_{VB} \cdot R_{EB} \cdot \cos\alpha \qquad (2)$$

Nach Einsetzen von (1) ergibt sich die zeitliche Abhängigkeit des Abstandes Erde – Venus:

$$a = \sqrt{R_{VB}^2 + R_{EB}^2 - 2 \cdot R_{VB} \times R_{EB} \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T_V}\right)} \qquad (3)$$

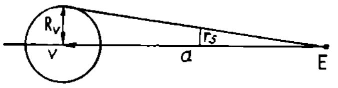


Bild 6
scheinbarer und wahrer Venusradius
R_V wahrer Venusradius
r_s scheinbarer Venusradius (= Winkel zwischen den Verbindungslinien Erdmittelpunkt – Venusmittelpunkt und Erdmittelpunkt – Venusoberfläche)

Betrachtet man nun Bild 6, so kommt man zu folgender Formel für den scheinbaren Radius der Venus:

$$\tan r_s = \frac{R_V}{a}$$

$$r_s = \arctan\frac{R_V}{a} \qquad (4)$$

(arctan – Abkürzung für Arkustangens – ist die Umkehrfunktion der Funktion tan, d. h. es gilt: $x = \tan y \leftrightarrow \arctan x = y$. Entsprechendes gilt für die weiter unten verwendete Funktion arccos.)

Formel (3) und (4) bilden somit das Ergebnis des ersten Schritts.

2. Schritt: Zusätzlich verwendete Abkürzungen und Daten:

β: Winkel zwischen der Lichtgrenze (Terminator; steht senkrecht auf Verbindungslinie Sonne – Venus) und der Sichtbarkeitsgrenze (steht senkrecht auf Verbindungslinie Venus – Erde) auf der Venus

A: Flächeninhalt der beleuchteten Fläche

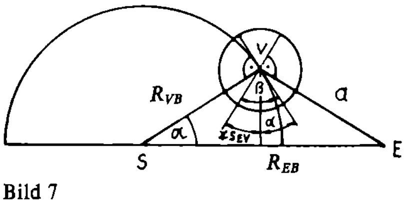


Bild 7
Winkelbeziehung zwischen Lichtgrenze (Terminator) und Sichtbarkeitsgrenze auf der Venus
R_{VB} Venusbahnradius
R_{EB} Erdbahnradius

Auf Grund von Bild 7 findet man mit Hilfe des Kosinussatzes folgenden Zusammenhang zwischen dem Winkel α und dem Winkel β:

$$R_{VB}^2 = R_{EB}^2 + a^2 - 2 \cdot R_{EB} \cdot a \times \cos(\sphericalangle SEV)$$

$$\sphericalangle SEV = \arccos\left(\frac{R_{EB}^2 + a^2 - R_{VB}^2}{2 \cdot R_{EB} \cdot a}\right)$$

Nach dem Satz, daß Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, kongruent sind, folgt für Winkel β:

$$\beta = \alpha + \sphericalangle SEV$$

$$\beta = \alpha + \arccos\left(\frac{R_{EB}^2 + a^2 - R_{VB}^2}{2 \cdot R_{EB} \cdot a}\right) \qquad (5)$$

Beobachten wir die Venuskugel, so nehmen wir statt der sichtbaren Halbkugeloberfläche eine Kreisfläche wahr. Diesen Vorgang werden wir jetzt mathematisch nachvollziehen (Bild 8).

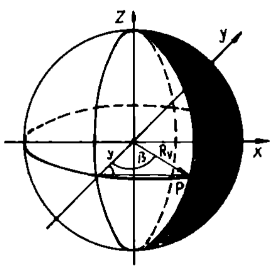


Bild 8
Venuskugel
P Punkt auf der Lichtgrenze (Terminator)
R_V Venusradius

Der Verbindungsstrahl Kugelmittelpunkt – Oberflächenpunkt werde Leitstrahl genannt. Für die nachfolgenden Rechnungen genügt es, die Ordinate des Punktes auf der Lichtgrenze zu bestimmen, der in der x-y-Ebene liegt (Punkt P in Bild 8). Solch ein Punkt auf der Kugeloberfläche ist bestimmt durch den Kugelradius R_V und den Winkel β zwischen der y-Achse und dem Leitstrahl (Bild 8). (Die y-z-Ebene liefert die Sichtbarkeitsgrenze.)

$$\cos\beta = \frac{y}{R_V}$$

$$y = R_V \cdot \cos\beta \qquad (6)$$

Damit haben wir den Punkt der Kugeloberfläche auf die beobachtete Kreisscheibe projiziert. Die beleuchtete Fläche besteht also aus einem Halbkreis, von dem ein Kreisabschnitt abgezogen wird (Bild 9).

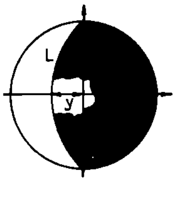


Bild 9
beobachtete Venusscheibe (zusammengesetzt aus Halbkreis und Kreisabschnitt)
L Lichtgrenze

Der Flächeninhalt des Halbkreises beträgt $\frac{\pi}{2} \cdot R_V^2$. Der Inhalt des Kreisabschnitts berechnen wir nach einer Näherungsformel $\left(\text{Fläche} = \frac{2}{3} \cdot h \cdot s\right)$ und kommen zu folgender Formel für die beleuchtete Fläche:

$$A = \frac{\pi}{2} \cdot R_V^2 - \frac{2}{3} \cdot y \cdot 2 \cdot R_V$$

$$A = \frac{\pi}{2} \cdot R_V^2 - \frac{4}{3} \cdot y \cdot R_V \qquad (7)$$

Die Formeln (7), (6), (5) liefern die Lösung des zweiten Schrittes.

3. Schritt: Zusätzlich beleuchtete Fläche $AS(t)$: scheinbare beleuchtete Fläche

Setzt man in die Formeln (6) und (7) statt des Venusradius R_V den scheinbaren Radius r_s entsprechend den Formeln (3) und (4) ein, so kommt man zu der gesuchten Funktion, die maximiert werden soll:

$$AS(t) = \frac{\pi}{2} \cdot r_s^2 - \frac{4}{3} \cdot y \cdot r_s$$

$$AS(t) = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} \cdot \cos\beta\right) \cdot r_s^2 \qquad (8)$$

mit folgenden Substitutionen:

(5) $\beta = \alpha + \arccos\left(\frac{R_{EB}^2 + a^2 - R_{VB}^2}{2 \cdot R_{EB} \cdot a}\right)$

(4) $r_s = \arctan\left(\frac{R_V}{a}\right)$

(3) $a = \sqrt{R_{VB}^2 + R_{EB}^2 - 2 \cdot R_{VB} \times R_{EB} \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T_V}\right)}$

Wir begnügen uns mit einer numerischen Lösung, die am günstigsten mit Hilfe eines Computers und eines kleinen Rechenprogramms (eventuell mit grafischer Darstellung) gewonnen wird. Eine Darstellung der Funktion $AS(t)$ zeigt Bild 10.

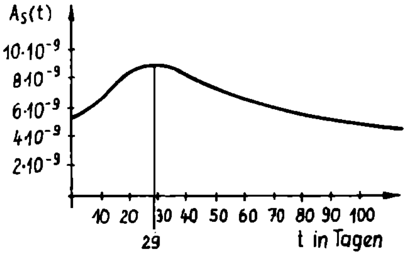
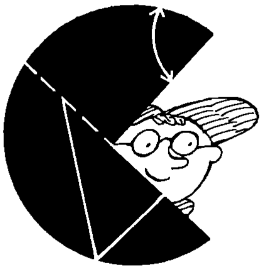


Bild 10
graphische Darstellung
der Lösungsfunktion $AS(t)$ mit Maximum bei $t = 29$ Tagen

Hier können wir als Maximum $t = 29$ Tage ablesen. Dieser Wert stimmt trotz der Vereinfachungen sehr gut mit dem wahren Wert überein. Die nächste untere Konjunktion der Venus findet am 26. August 1991 statt. Beobachtet doch 'mal 29 Tage davor oder danach!

A. Ohlhoff

In freien Stunden · alpha-heiter



Für Tierfreunde

In das aus 12 quadratischen Feldern bestehende Rechteck wurde in der Gangart eines Springers beim Schachspiel der Name eines in Südostasien lebenden Tieres eingetragen. (Jedes Feld wird genau einmal betreten.) Wie heißt dieses Tier?

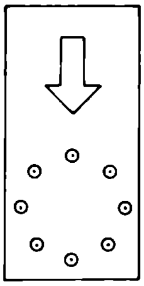
W. Träger, Döbeln

T	L	R	S
F	C	T	K
E	E	I	H

Für Straßenbahnfans

Die Fahrscheinentwerter in den Erfurter Straßenbahnen und Stadtbussen enthalten je acht ringförmig angeordnete Stanzeisen, die in unterschiedlicher Auswahl in Arbeits- oder in Ruhestellung geschaltet werden können. Weil sich der Fahrschein nur senkrecht von oben in den Entwerter schieben läßt, zeigen schon zwei Stanzlöcher die jeweils typische Anordnung, so daß dem Kontrolleur ein vergleichender Blick genügt. Wie viele unterschiedliche Einstellungen sind möglich, wenn sich mindestens zwei Stanzeisen in Arbeitsstellung befinden müssen?

J. Heller, Erfurt



Für Scherzkekse

a) In einem Korb liegen 5 Äpfel. Wie verteilt man diese Äpfel so unter 5 Mädchen, daß jedes einen Apfel erhält und einer im Korb bleibt?
b) Wieviel Katzen sind im Zimmer, wenn in jeder der 4 Ecken eine Katze sitzt, jeder Katze gegenüber 3 Katzen sitzen und auf dem Schwanz jeder Katze eine Katze sitzt?

St. Spitzenberg, Silberhausen

Für Rätselfreunde

Mit Hilfe der Buchstaben:
AAAAAAAAAA B CC DDDDDD EEEEEEE G HHHHH IIIII KK LL MM NNNNN OOO P RRR SSSS TTT Z
sind 8 Wörter waagerecht einzusetzen.

1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							

1. Kreisdurchmesser
2. Mathematiker (gest. 1963)
3. mathematisches Zeichen
4. Fünfeck
5. Grundrechenart
6. ebene Kurve
7. Mathematiker im 6. Jh.
8. winkelbegrenzender Strahl

Die Buchstaben an 4. Stelle ergeben die Ziffernfolge hinter dem Komma.

H. Raduschewski, Berlin

Für Hobbyhistoriker

In den Büchern der Nowgoroder Schreiber des XV. Jahrhunderts werden die Hohlmaße „Bočka“ (Faß), „Nasadka“ und „Vedro“ (Eimer) erwähnt.
Aus den gleichen Büchern wurde bekannt, daß 1 Faß und 20 Eimer Kwaß gleich kommen 3 Fässern mit Kwaß, aber 19 Fässer ein Nasadka und $15\frac{1}{2}$ Eimer gleich sind mit 20 Fässern und 8 Eimern.
Können die Historiker auf der Grundlage dieser Angabe bestimmen, wie viele Nasadok ein Faß sind?

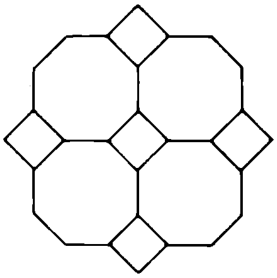
aus: Quant, Moskau, übersetzt und bearbeitet von R. Bergmann (†), Döbeln

Für Naturfreunde

Drei Hühner und 60 Maiskörner. Alle drei fangen gleichzeitig zu picken an, und alle drei picken gleich schnell, im gleichen Takt. Wie viele Körner kriegt da jedes Huhn mit? Natürlich: 20!
Wie aber wird die Sache, wenn das erste Huhn jedesmal, nachdem es zweimal gepickt hat, zwei Takte aussetzt, um zweimal zu gackern, das zweite Huhn nach jeweils vier Picktakten drei Gackertakte und das dritte Huhn nach jeweils sechs Picktakten vier Gackertakte einlegt? Wie viele Körner bekommt dann jedes mit?

H.-J. Böhland, Wallroda

Für Zahlenakrobatiker



Die natürlichen Zahlen von 1 bis 9 sind so in die quadratischen und achteckigen Felder einzusetzen, daß die in jedem Quadrat stehende Zahl gleich dem arithmetischen Mittel der Zahlen in den angrenzenden Achtecken ist.

W. Träger, Döbeln

Für Logiker

35355	1125	21	1
41515	100	16	12
55550	0	20	0
54321	x	y	z

Das Bild zeigt in jeder Zeile vier Zahlen, bei denen jeweils die drei letzten Zahlen in ganz bestimmter Weise aus der ersten Zahl gebildet wurden. Wie müssen demnach die Zahlen x, y und z lauten?

Dr. R. Mildner, Leipzig

Für Osterhasenfans

Ersetze die Buchstaben durch Ziffern so, daß eine wahre Aussage entsteht.

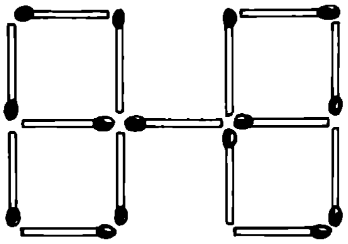
$$\begin{array}{r} \text{HASEN} \\ +\,\text{HASEN} \\ \hline \text{OSTERN} \end{array}$$

Schülerin Isabel Blei, Tannenbergsthal

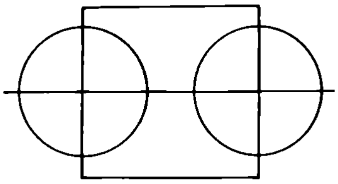
„Wieviel ist sieben mal sechs?" –
„Keine Ahnung, Herr Lehrer.
Die Batterie in meinem Taschenrechner ist leer!"

Für Trickkünstler

Durch geschicktes Umlegen von zwei Streichhölzern entstehen 5 Quadrate.



Für Könner

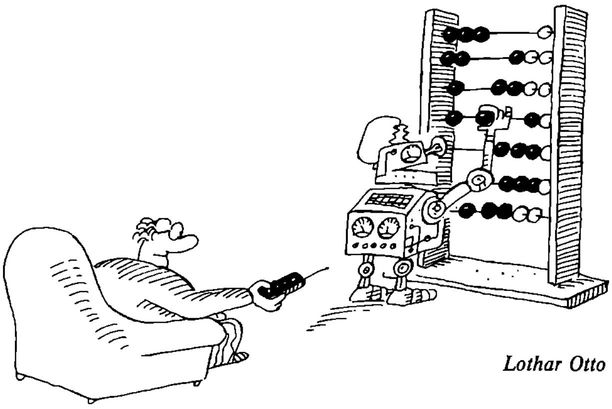


Versuche diese Figur in einem Zug nachzuzeichnen, ohne eine Linie doppelt zu ziehen.

Gar nicht borniert

Um 1930 gab es in Göttingen drei physikalische Institute, die zur gleichen Zeit von drei namhaften Physikern – Pohl, Franck und Born – geleitet wurden.
Jemand schlug vor, um die Studenten der drei physikalischen Institute zu unterscheiden, sie nach den Namen ihrer Leiter zu benennen: polierte, frankierte und bornierte Studenten. Als man Max Born (Nobelpreisträger für Physik) nach seiner Reaktion fragte, denn seine Studenten kamen dabei am schlechtesten weg, meinte er: „Ich mußte herzlich darüber lachen!"

aus: Lingmann/Schmiedel: Anekdoten; Episoden, Lebensweisheiten, Fachbuchverlag Leipzig



Lothar Otto

Schalterangestellter zu einem Briefauflieferer: „Sie müssen aber die Adresse deutlich schreiben, Herr, so kann ich das nicht weitergeben!"
Darauf er: „Sie können – der Empfänger ist mein Bruder, und der kann meine Schrift lesen!"

Ein interessanter Bildungsweg

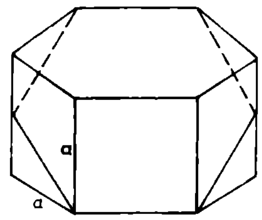
Welcher künftige Student träumt nicht davon, einen Teil seines Studiums an einer ausländischen Hochschule zu absolvieren? Aber organisieren und vorbereiten muß man das heutzutage schon selbst.
Die Vorbereitung beginnt mit dem Erlernen der Sprache, und das sollte so früh wie möglich sein. Eine günstige Chance bietet der Erwerb der Hochschulreife am Institut zur Vorbereitung auf das Auslandsstudium (IVA) der Martin-Luther-Universität Halle. Ab Klasse 9 oder 11 kann man in einem 4- bzw. 2jährigen Kurs jeweils eine west- und eine osteuropäische Sprache weiterführen bzw. neu erlernen in einem Umfang, der ein späteres Auslandsteilstudium ermöglicht. Gleichzeitig haben mathematisch-naturwissenschaftlich interessierte Schüler die Möglichkeit, in den von ihnen bevorzugten Fächern Leistungskurse zu belegen, die eine solide Studienvorbereitung sichern. An keiner einzigen Einrichtung in Deutschland besteht die Chance, neben Englisch, Französisch und Russisch zwischen solchen Sprachen zu wählen wie Bulgarisch, Polnisch, Slowakisch, Tschechisch oder Ungarisch. Der zunehmende europäische Einigungsprozeß bietet künftig gerade demjenigen gute berufliche Möglichkeiten, der neben einer westeuropäischen auch eine osteuropäische Sprache perfekt beherrscht.
Der Sprachunterricht am IVA wird vor allem von ausländischen Lektoren erteilt. Unter diesen befinden sich eine Reihe Mathematiklehrer, die in *alpha* Aufgaben aus ihren Ländern vorstellen möchten. Diese Aufgaben entstammen Lehrbüchern und Aufgabensammlungen verschiedener osteuropäischer Länder. Wer für eine der *-Aufgaben eine interessante Lösung findet, schicke sie bitte an das IVA der Universität Halle, Franckeplatz 1, Haus 47, Halle, O-4020. Originelle Lösungen werden prämiert und haben günstigen Einfluß auf die Aufnahmeprüfung am IVA.

Aufgaben zur Stereometrie und zur Differentialrechnung aus **Bulgarien** (zusammengestellt von Zenka Stojkowa):

▲ B$_1$ ▲ Der Mantelflächeninhalt einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide sei S. Die Seitenflächen bilden mit der Grundfläche einen spitzen Winkel α. Bei welchem Wert von $\tan \alpha$ hat die Pyramide das größte Volumen?

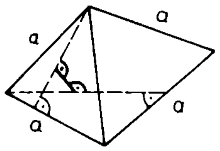
▲ B$_2^*$ ▲ In einem regelmäßigen sechsseitigen Prisma mit quadratischen Seitenflächen wird eine Ebene durch die zueinander gegenüberliegenden Grundkanten der unteren und der oberen Grundfläche gezeichnet (Bild 1). Berechnen Sie den Flächeninhalt des Schnitts!

Bild 1



▲ B$_3^*$ ▲ Berechnen Sie den kürzesten Abstand zwischen den (zueinander windschiefen) Höhen zweier Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders mit Seitenkanten der Länge a (Bild 2).

Bild 2



▲ B$_4$ ▲ Es ist die Funktion

$$y = f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2a+1}{2} \cdot x^2 + 2ax + a$$

gegeben, wobei $a > \frac{1}{2}$ ein Parameter ist.

a) Bei welchem Wert des Parameters a gilt die Ungleichung

$$y_{\min} + y_{\max} \geqq \frac{4a^3}{3} - \frac{17}{6}.$$

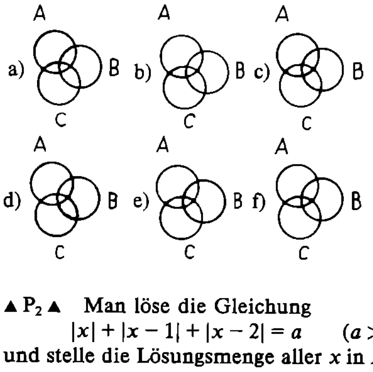
b) Untersuchen und zeichnen Sie den Graph der Funktion für $a = 1$.

Verschiedene Aufgaben für die Klassenstufen 10 und 11 aus **Polen** (zusammengestellt von Ludwika Bonczak):

▲ P$_1$ ▲ Man gebe die grau angelegten Mengen (Bild 3) mit Hilfe von Durchschnitts-, Vereinigungs- und Differenzmenge an. (Hinweis: Differenzmenge

$$A \backslash B = \{x;\ x \in A \text{ und } x \in B\})$$

Bild 3



▲ P$_2$ ▲ Man löse die Gleichung

$$|x| + |x-1| + |x-2| = a \qquad (a > 0)$$

und stelle die Lösungsmenge aller x in Abhängigkeit vom Parameter a graphisch dar.

▲ P$_3$ ▲ Man beweise, daß aus $m > 0$ folgt

$$m + \frac{4}{m^2} \geqq 3.$$

▲ P$_4^*$ ▲ Man beweise, daß die reellen Zahlen a, b und c ($a, b, c \neq 0$) genau dann die Gleichung
$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = abc(a^3 + b^3 + c^3)$
erfüllen, wenn sie aufeinanderfolgende Glieder einer geometrischen Folge sind.

Beweisaufgaben zum Funktionsbegriff und Aufgaben zur Algebra aus der **Sowjetunion** (zusammengestellt von Alexej Krutow):

▲ S$_1^*$ ▲ Gegeben sei im Intervall $(-a; a)$ die Funktion $f(x)$. Es ist zu beweisen, daß man dann $f(x)$ eindeutig als Summe aus einer geraden und einer ungeraden Funktion darstellen kann!

▲ S$_2^*$ ▲ Es ist die Funktion $f(x)$ zu bestimmen, die nicht durchweg den Wert Null hat und für die gilt:

$$f(x) \cdot f(a) = f(x-a),\ x, a \in R.$$

▲ S$_3^*$ ▲ Für eine Funktion $f(x)$ gelte für alle x des Definitionsbereichs die Beziehung $f(a+b) = f(a) + f(b)$. Bestimmen Sie alle Funktionen $f(x)$, die diese Eigenschaft haben. Zeigen Sie, daß es keine weiteren Funktionen gibt!

▲ S$_4^*$ ▲ Wir betrachten die reelle Funktion f, die auf R definiert und stetig ist und für die gilt $|f(x)| < |x|$, wenn $x \neq 0$ ist. Es ist zu beweisen, daß $f(0) = 0$ ist.

▲ S$_5$ ▲ Man löse die Gleichung

$$\sin x = x^2 + x + 1.$$

▲ S$_6$ ▲ Man bestimme die Lösung der Gleichung

$$2\cos^2 \frac{x^2+x}{6} = 2^x + 2^{-x}.$$

$\left(\text{Hinweis: Es gilt } a + \frac{1}{a} \geqq 2 \text{ für } a > 0\right)$

▲ S$_7^*$ ▲ Man löse die Gleichung

$$x^2 + 6x \cdot \sin 3xy + 9 = 0.$$

▲ S$_8$ ▲ Man löse das System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} (x+y)(x+y+z) &= 72 \\ (y+z)(x+y+z) &= 120 \\ (z+x)(x+y+z) &= 96 \end{aligned}$$

Aufgaben zur Planimetrie aus der **Tschechoslowakei** (zusammengestellt von Jana Bimova):

▲ T$_1$ ▲ Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt S und dem Radius $r = 5$ cm sowie ein Punkt $A \in k$.
a) Konstruieren Sie das Dreieck ABC, das dem Kreis k einbeschrieben ist und für das gilt
$|\sphericalangle CAB| = 45°$, $|\sphericalangle ABC| = 60°$.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
c) Berechnen Sie die Größe der Seitenhalbierenden $s_{\overline{AB}}$.

▲ T$_2$ ▲ Vom Parallelogramm $ABCD$ sind gegeben: $|\overline{AB}| = 3{,}5$ cm,
$|\overline{BD}| = 5$ cm und $|\sphericalangle ADB| = 40°$.
a) Konstruieren Sie das Parallelogramm aus den gegebenen Größen und beschreiben Sie den Konstruktionsgang!
b) Berechnen Sie die restlichen Stücke und den Flächeninhalt!

▲ T_3 ▲ Von einem Trapez *ABCD* sind gegeben
$a = 15$ cm, $b = 6{,}5$ cm, $c = 8$ cm
und $d = 7{,}5$ cm.
a) Berechnen Sie die Größe der Innenwinkel des Trapezes!
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes! (Lösung: 69 cm^2)
c) Konstruieren Sie das Trapez aus den gegebenen Größen!

▲ T_4^* ▲ Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden *a* und *b* sowie ein Punkt *M* in einem ihrer Winkel. Es ist ein Kreis zu konstruieren, der durch den Punkt *M* geht und der die beiden Geraden *a* und *b* berührt!

Aufgaben zur Kombinatorik und zu arithmetischen Zahlenfolgen aus **Ungarn** (zusammengestellt von Zoltan Fogarasi):

▲ U_1 ▲ Für welchen kleinsten Wert von *n* wird die Ungleichung
$2^{\frac{1}{7}} \cdot 2^{\frac{3}{7}} \cdot 2^{\frac{5}{7}} \cdot \ldots \cdot 2^{\frac{2n+1}{7}} > 1\,000$ erfüllt?

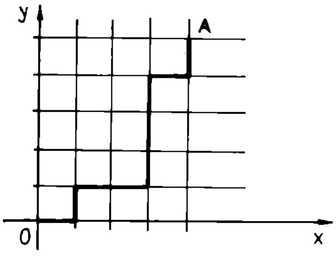
▲ U_2 ▲ Können $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ Glieder einer arithmetischen Folge sein? (Achtung: nicht nur Trivialfall „aufeinanderfolgende Glieder“)

▲ U_3^* ▲ α, β, γ sind Winkel im Dreieck.
$\cot\frac{\alpha}{2}$, $\cot\frac{\beta}{2}$ und $\cot\frac{\gamma}{2}$ seien drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Man bestimme den Wert des größten Winkels!

▲ U_4 ▲ Wir werfen einen Würfel dreimal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist nur der dritte Wurf eine Sechs?

▲ U_5^* ▲ Wir wollen vom Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems in Schritten zu einer Längeneinheit nach rechts bzw. oben bis zum Punkt *A* (4; 5) gehen. Wieviel verschiedene Wege gibt es (siehe Bild 4)?

Bild 4

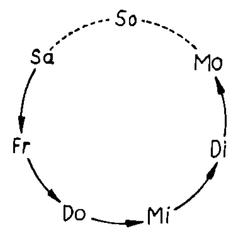


▲ U_6^* ▲ In einem Kasten befinden sich 30 Zettel mit den Nummern 1 bis 30. Wir nehmen 5 beliebige Zettel heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß auf diesen Zetteln 3 vorher gewünschte Nummern stehen?

D. Hetsch

An welchem Ostertag wurde die Osterinsel entdeckt?

Als Datum der Entdeckung dieser Insel durch den holländischen Kapitän Jacob Roggeveen wird in unserer Literatur der 6. 4. 1722 angegeben.
Andererseits wird auch mitgeteilt, daß diese Entdeckung am Ostersonntag erfolgte. Beide Angaben sind scheinbar widersprüchlich:
Nach dem auf Anordnung (Bulle „Inter gravissimas ...“) des Papstes Gregor XIII. in den katholischen Ländern ab 15. 10. 1582 eingeführten Gregorianischen Kalender, der später auch in den nichtkatholischen Ländern benutzt wird und bis heute gültig ist, haben alle Jahre mit einer nicht durch 4 teilbaren Jahreszahl sowie alle mit einer durch 100 teilbaren, aber nicht durch 400 teilbaren Jahreszahl 365 Tage. Alle übrigen Jahre sind Schaltjahre mit einem eingeschalteten 29. Februar und haben damit 366 Tage. Im protestantischen Holland wird der Gregorianische Kalender ab 1. 1. 1583 benutzt. Zwischen 1722 und 1991 sind 67 Jahreszahlen durch 4 teilbar. Dies sind $1724 + 4k$ mit $k \in N$ und $0 \leqq k \leqq 66$. Von diesen 67 Jahreszahlen ist keine durch 400 teilbar, jedoch sind 2 durch 100 teilbar, nämlich 1800 und 1900.
Da 1800 und 1900 keine Schaltjahre waren, gab es zwischen 1722 und 1991 65 Schaltjahre. Wegen $365 = 52 \cdot 7 + 1$ und $366 = 52 \cdot 7 + 2$ gilt: Ist das Folgejahr eines Jahres kein (ein) Schaltjahr, so verschiebt sich der Wochentag des 6. 4. vom Jahr zum Folgejahr im Siebenerzyklus der Wochentage um einen Tag (zwei Tage) weiter. Vom 6. 4. 1722 bis zum 6. 4. 1991 sind 269 Jahre verstrichen. Danach ist der Wochentag des 6. 4. von 1722 bis 1991 um $269 + 65 = 334$ Wochentage im Wochentagszyklus weitergerückt.
Von vollen Umläufen im Wochentagszyklus abgesehen, ist er also wegen $334 = 47 \cdot 7 + 5$ um 5 Wochentage weitergerückt. Da der 6. 4. 1991 Samstag ist, ist der 6. 4. 1722 um 5 Wochentage im Wochentagszyklus gegenüber dem des Jahres 1991 zurückverschoben:



Der 6. 4. 1722 war ein Montag und damit der Ostermontag.
Gemäß seiner Aufzeichnungen entdeckte J. Roggeveen die Osterinsel am Ostersonntag gegen 20.00 Uhr wahrer Ortszeit. Die Osterinsel hat die geographischen Koordinaten 27° südlicher Breite und 109° westlicher Länge. Die Entdeckung der Osterinsel erfolgte also am 5. 4. 1722 gegen 20.00 Uhr wahrer Ortszeit des 109. westlichen Meridians. (Alle Orte eines Meridians, also alle Orte mit gleicher geographischer Länge, haben die gleiche wahre Ortszeit. Nach wahrer Ortszeit ist es 12.00 Uhr, wenn mittags die Sonne am höchsten über dem Horizont steht.)
Amsterdam, von dem aus Roggeveen seine Reise begann, hat die geographische Länge 5° Ost. Die Differenz der Länge von Amsterdam und der der Osterinsel beträgt 114°. Dieser Differenz entspricht der Zeitunterschied
$24 \cdot \frac{114}{360} = 7{,}6 \approx 7{,}5$ Stunden. Wegen
20.00 Uhr + 7 h 30 min = 24 h + 3.30 Uhr läßt sich der Zeitpunkt der Entdeckung der Osterinsel wie folgt angeben:
a) Ostersonntag, der 5. 4. 1722 gegen 20.00 Uhr wahrer Ortszeit des 109. westlichen Meridians
b) Ostermontag, der 6. 4. 1722 gegen 3.30 Uhr wahrer Ortszeit des 5. östlichen Meridians.
Für Amerikaner und Polynesier fällt der Zeitpunkt der Entdeckung der Osterinsel auf Ostersonntag, für Europäer, Afrikaner, Asiaten und Australier auf Ostermontag. Für Menschen, die sich in unmittelbarer Nähe des längs des 180. Meridians verlaufenden Teiles der Datumsgrenze, jedoch etwas westlich (östlich) von ihr, aufhalten, ist der Zeitpunkt der Entdeckung der Osterinsel Ostermontag, der 6. 4. (Ostersonntag, der 5. 4.) gegen 15.15 Uhr wahrer Ortszeit des 180. Längengrades. Denn wegen
$180° - 109° = 71°$ gilt
$71° \mathrel{\hat{=}} \frac{71}{360} \cdot 24\,\text{h} = 4{,}7\overline{3}\,\text{h} \approx 4\,\text{h}\,45\,\text{min}.$

W. Träger

Osterinsel
Chilenische Vulkaninsel im Osten Polynesiens; 3600 km von Chile entfernt; Fläche 166 km^2; 1400 Einwohner, von Ackerbau und Fischerei lebend; bekannt durch die 8 m hohen, von Ureinwohnern geschaffenen Steinfiguren.

Mathematik und Geographie – Eine zweitausendjährige Partnerschaft

Einige von Euch wird diese Überschrift sicher verwundern, denn wenn Ihr an Euren Schulunterricht denkt, so sind auf den ersten Blick nur sehr wenig Berührungspunkte zwischen Mathematik und Geographie erkennbar. Deshalb stellen sich natürlich folgende Fragen: Worin besteht eigentlich diese Partnerschaft? Wie ist deren Entstehung zu erklären, und wie hat sie sich entwickelt? Auf welchen Teilgebieten beider Wissenschaften finden wir besonders enge Wechselbeziehungen? Welches Verhältnis besteht zwischen ihnen in der heutigen Zeit? Die Beantwortung dieser Fragen soll in diesem Artikel versucht werden.

Die Mathematik und die Geographie gehören ohne Zweifel zu den ältesten Wissenschaften überhaupt. Der Wunsch des Menschen, seinen Lebensraum, die Erde, verstehen, beschreiben und erklären zu lernen, förderte beide gleichermaßen. Um nämlich die Erde beschreiben zu können, mußten z. B. Größen und Zeiten gemessen und angegeben sowie die Koordinaten verschiedener Orte bestimmt werden können. So bildete die Erdbeschreibung (Geographie) bereits im Altertum einen wesentlichen Anstoß für die Herausbildung und Entwicklung der Mathematik und erlebte umgekehrt eigentlich erst durch die Anwendung erster mathematischer Erkenntnisse eine Weiterentwicklung. Da diese Beziehung wechselseitig war bzw. ist, kann man hier durchaus von einer Partnerschaft sprechen. Dabei ist natürlich zu beachten, daß die Geographie damals durchaus umfassender als heutzutage war, denn einige, jetzt selbständige Wissenschaften bildeten über viele Jahrhunderte hinweg einen festen Bestandteil der Geographie. Als Beispiel dafür seien nur die Geodäsie (heute: Wissenschaft von der Vermessung und Darstellung der Erde, einschließlich ihres Gravitationsfeldes) oder auch die Astronomie genannt. Letztere zählte zur Geographie, soweit sie sich mit den Hilfsmitteln der Geodäsie, dem Verhältnis der Erde zu den erdnächsten Himmelskörpern, den Ursachen von Tages- und Jahresrhythmus und ihren Auswirkungen auf das Klima beschäftigte. Sie galt aber auch z. T. als mathematische Teildisziplin, soweit sie sich mit Positionsbestimmungen befaßte. So war die Astronomie über viele Jahrhunderte hinweg, zumindest teilweise, als ein Grenzgebiet zwischen der Mathematik und der Geographie anzusehen. Möchte man nun die zeitliche Entwicklung dieser Partnerschaft näher beleuchten, so ist es zweckmäßig, dabei folgende Etappen bzw. Entwicklungsstufen zu unterscheiden:

- die geometrische Stufe
- die geophysikalische Stufe
- die statistische Stufe
- die Stufe des komplexen Eindringens der Mathematik in die Geographie.

Diese Reihenfolge entspricht der zeitlichen Herausbildung der Beziehung auf dem entsprechenden Gebiet, jedoch führte das Eintreten in eine neue Entwicklungsetappe nie ganz zum Erlöschen der vorherigen, sondern ergänzte die bereits vorhandenen durch neue, aber weitgehend unabhängige, Wechselwirkungsgebiete. Auf diese Stufen soll im folgenden anhand einiger weniger ausgewählter Beispiele eingegangen werden.

Die geometrische Stufe

Dieser Abschnitt begann bereits in der Antike (vor etwa 2500 Jahren) und dauert in der Gegenwart noch an.

Er umfaßt u. a. die Fragen nach

- der Form und der Größe der Erde
- dem Verhältnis der Größen der Abstände der Erde zu Sonne und Mond
- der Ermittlung der Koordinaten eines Ortes auf der Erdoberfläche
- der kartographischen Darstellung der Erdoberfläche oder ihrer Ausschnitte
- der optimalen Anlage von Verkehrsverbindungen
- der Standortoptimierung

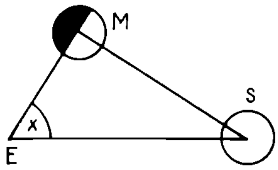
um nur einige zu nennen. Diese Fragestellungen regten verschiedene mathematische Disziplinen bzw. Theorien mitunter entscheidend an, wie z. B.

- die Elementargeometrie in der Ebene und im Raum
- die Sphärische Geometrie (Geometrie auf der Kugel)
- die Ebene und Sphärische Trigonometrie
- die Darstellende Geometrie
- die Fehler- und Ausgleichsrechnung
- die Differentialgeometrie
- die Graphentheorie.

Am Anfang standen vor allem die Fragen nach der Form und der Größe der Erde im Mittelpunkt des Interesses. Diese bilden gemeinsam mit der zweiten und dritten Fragestellung den wesentlichen Bestandteil der Mathematischen Geographie bzw. Astronomischen Erdkunde. Unter diesen beiden oder ähnlichen Bezeichnungen findet man bis zum Beginn dieses Jahrhunderts Arbeiten, die sich mit der immer vollkommneren Lösung dieser Probleme befassen oder sie interessierten Personen nahebringen sollten. Dieses Fachgebiet wurde sogar in den oberen Klassen der höheren Schulen Deutschlands gelehrt, weshalb auch noch viele empfehlenswerte Lehrbücher aus jener Zeit existieren. Heute würde man diese Fragestellungen wohl mehr der Geodäsie bzw. der Astronomie zuordnen.

Den Beginn der Lösung dieser Probleme finden wir bereits in der Antike bei den Pythagoreern (etwa um 500 v. u. Z.). Von Mitgliedern dieses, von Pythagoras von Samos begründeten Geheimbundes, wurde nämlich erstmals, wenn auch wahrscheinlich nur aus ästhetischen Gründen, die Kugelgestalt der Erde gelehrt. Aristoteles (etwa 380 bis 320 v. u. Z.), der berühmte griechische Philosoph und Mathematiker, lieferte vermutlich die erste Begründung für diese Gestalt, indem er den immer kreisförmigen Schatten der Erde bei Mondfinsternissen erkannte. Aristarch von Samos (etwa 310 bis 230 v. u. Z.) bestimmte mit mehreren Experimenten (Abb. 1 und 2) die relativen Größen und Entfernungen von Mond und Sonne bzgl. der Erde, um die Einheit von „Irdischem und Himmlischem“ zu zeigen.

Bild 1



Das Bild 1 verdeutlicht sein erstes Experiment, es zeigt die Konstellation der 3 Untersuchungsobjekte bei Halbmond. Aus der Kenntnis des zu messenden Winkels x erhält man das Verhältnis der Abstände zwischen Erde und Mond bzw. Erde und Sonne (= cos x). Von Aristarch wurde auf Grund der Meßungenauigkeit der damaligen Hilfsmittel ein Winkel x von 87° gemessen (tatsächlicher Winkel etwa 89°51′). Daraus ergab sich bei ihm für die Abstände ein Verhältnis von 1 : 19 (real: rund 1 : 389). Aus der Tatsache, daß die Sonne und der Mond auf der Erde ungefähr unter dem gleichen Sehwinkel von 0.5° erscheinen (in Wirklichkeit: Sonne 0.53°, Mond 0.517°), schlußfolgerte er, daß sich die Durchmesser beider Himmelskörper zueinander wie deren Abstände zur Erde verhalten. Nach diesem 2. Experiment betrachtete er das dritte, eine Beobachtung einer totalen Mondfinsternis. Es zeigte, daß die Zeit, die der Mond von der Berührung des Erdschattens bis zum vollständigen Eintritt

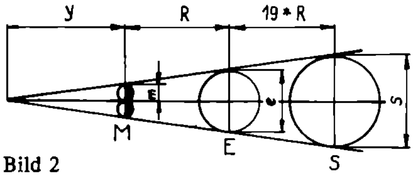


Bild 2

in ihn benötigt, ungefähr gleich der Zeit für seinen Durchgang bis zu seinem Wiedererscheinen ist (Bild 2).

Man erhält daraus die folgenden beiden Verhältnisgleichungen:

$$y:(2*m)=(y+R):e \text{ und}$$

$$(y+20*R):s=(y+20*R):(19*m).$$

Daraus ergäbe sich ein Verhältnis von 20 : 57 für die Durchmesser von Mond und Erde, was natürlich nicht der Realität entspricht. Er erhielt aber auch unter anderem ein Ergebnis, was die Sonne eindeutig als größten der drei Himmelskörper ausweist und schlußfolgerte daraus, daß sie dann deshalb im Mittelpunkt der Welt stehen müsse, da es doch wahrscheinlicher sei, daß sich das kleinere Objekt um das größere bewege und nicht umgekehrt. Somit gab er eine erste wissenschaftliche Begründung für ein heliozentrisches Weltbild. Das macht seine Experimente so bedeutsam, auch wenn die numerischen Ergebnisse auf Grund der zeitbedingten Meßfehler ziemlich ungenau waren. Demgegenüber standen vor allem die Argumente von Aristoteles, daß die Erde ruhen müsse, also folglich im Mittelpunkt stehen müsse, weil bei einer Bewegung sonst u. a. ein größerer „Fahrtwind“ zu spüren sein müsse. Dieses, uns heute sehr absurd erscheinende, Argument hielten die Menschen damals im Verbund mit anderen für wesentlich plausibler als die Argumente von Aristarch, nicht zuletzt vielleicht auch wegen der großen Popularität von Aristoteles, die über viele Jahrhunderte das Denken der Menschen beeinflußte. So erwähnte der hervorragende Mathematiker und Geograph Klaudios Ptolemaios (etwa 83 bis 161 u. Z.) in seinem berühmten Werk „Einführung in die Geographie“ zwar auch die Ergebnisse Aristarchs, stellte sich aber eindeutig auf die Seite von Aristoteles. Die Ideologie der katholischen Kirche tat dann ein übriges, so daß erst Nikolaus Kopernikus dem heliozentrischen Weltbild zum Durchbruch verhelfen konnte. Durch Eratosthenes von Kyrene (etwa von 276 bis 195 v. u. Z.) wurde der Erdumfang erstaunlich gut bestimmt, dadurch wurde es nun möglich, bereits in der Antike Aussagen über die absolute Größe der Himmelskörper zu treffen. Ein anderer Grieche, Hipparch von Nikaia (etwa 190 bis 125 v. u. Z.), führte u. a. die Beschreibung der Lage von Punkten auf der Erdoberfläche durch die Angabe der geographischen Länge und Breite ein. Gerade die Beschreibung der Lage von Punkten der Erdoberfläche war für die Geographie unerläßlich, ging es doch neben dem Wiederauffinden von bestimmten Orten u. a. auch um die exakte Darstellung von Gebieten, und für beides ist die Verwendung von Koordinaten unabdingbar. War die Bestimmung der geographischen Breite eines Ortes relativ leicht, indem man die Polhöhe mit Winkelmeßgeräten wie z. B. dem Jakobsstab oder später dem Sextanten ermittelte, so erwies sich die Ermittlung der geographischen Länge als Problem, da Zeitunterschiede zwischen den Orten gemessen werden mußten (1 Stunde Zeitdifferenz = 15° Längenunterschied). Schon Hipparch schlug deshalb die Bestimmung der Zeitdifferenz durch die synchrone Beobachtung eines astronomischen Ereignisses von verschiedenen Orten der Erde aus und den Vergleich der jeweiligen Ortszeit für dieses Ereignis vor. Diese Methode blieb über mehr als 1000 Jahre ein wesentlicher Untersuchungsgegenstand der Astronomie. Erst später, nach der Erfindung des Chronometers (Uhr mit hoher Ganggenauigkeit) durch John Harrison (1693 bis 1796), war es möglich, durch die Mitnahme der Ortszeit eines Eichortes, die Zeitdifferenz zum gesuchten Ort und damit die Längendifferenz zu ermitteln (vgl. Artikel von P. Schreiber in alpha 19 (1985) 2, S. 40/41).

Natürlich leitete man auch die Lage anderer Orte durch direkte Entfernungsmessungen ab, aber diese Messungen, die in der Antike vor allem durch Bematisten (Schrittzähler) ermittelt wurden, waren lange Zeit sehr ungenau. Aber durch die Verwendung von Dreiecksnetzen bei der Vermessung (Triangulation), die wahrscheinlich auf Peter Apian (1495–1552) zurückgeht, und die wesentliche Verbesserung der Meßinstrumente und -methoden, konnten die realen Lageverhältnisse später sehr genau ermittelt werden. Lange Zeit spielte auch die Gradmessung, also die Vermessung eines bestimmten Meridianbogens, eine bedeutende Rolle, wollte man doch neben der Größe der Erde auch ihre wirkliche Gestalt erfahren. Viele berühmte Mathematiker, wie z. B. auch C. F. Gauß, beteiligten sich an solchen Experimenten (vgl. Artikel von K.-G. Steinert in alpha 11 (1977) 2 S. 25ff.). Erstmals war 1617 eine solche Gradmessung mittels Triangulation durch den niederländischen Mathematiker W. Snellius (1580–1626) durchgeführt worden. Der Nachweis der Erdabplattung erfolgte durch den Vergleich solcher Gradmessungen von 1736/37; an denen u. a. Wissenschaftler wie Anders Celsius (1701–1744) teilnahmen (vgl. Artikel von P. Schreiber in alpha 18 (1984) 3 S. 71). Durch viele spätere, immer genauere Messungen, in jüngster Zeit sogar mit Satellitenunterstützung, kann die Gestalt und Größe der Erde heute als weitestgehend geklärt angesehen werden.

Die Frage der Darstellung der Erdoberfläche auf Karten ist ein weiteres historisches Problem dieser Stufe. Sie wird sehr umfassend z. B. im Buch „Kartenentwürfe der Erde“ von E. Schröder (Math. Schülerbücherei Nr. 128) behandelt, deshalb sei sie hier nur erwähnt. Die Karte ist aber für die geographische Arbeit aller Teildisziplinen als ein sehr wesentliches Hilfsmittel anzusehen. Von den mathematischen Disziplinen wurden durch die Kartographie sowohl die Darstellende Geometrie als auch die Differentialgeometrie angeregt.

Aber auch die Graphentheorie erhielt z. B. durch das, aus der Kartographie stammende, Vierfarbenproblem einen bedeutenden Impuls, nämlich durch die Fragestellung, ob 4 verschiedene Farben ausreichen, jede beliebige Landkarte so zu färben, daß alle benachbarten Länder jeweils verschiedenfarbig sind. Diese Frage wurde erstmalig von A. de Morgan im Jahre 1852 gestellt (vgl. Artikel von H. Pieper in alpha 12 (1978) 5 S. 97f.). Dieses Problem und Fragestellungen nach optimalen Verkehrsnetzen, Industriestandorten u. dgl. sind wichtige mathematische und geographische Fragen bis in die Gegenwart. Auch hierbei spielt die Graphentheorie eine bedeutende Rolle, z. B. auch bei der Frage nach kostengünstigen Straßennetzen (vgl. Artikel von W. Träger in alpha 23 (1989) 5 S. 98ff.).

Das Problem der optimalen Eisenbahnverbindung zwischen den Städten Harburg, Bremen, Hannover und Braunschweig führte C. F. Gauß 1836 auf eine Variante des sogenannten Fermat'schen Problems zurück, das seit der Mitte dieses Jahrhunderts beständig als Steiner-Problem bzw. Steiner-Weber-Problem bezeichnet wird und noch heute seine Bedeutung in der Graphentheorie besitzt (vgl. u. a. den Artikel von P. Schreiber in alpha 21 (1987) 2 S. 25f.). Aus geographischer Sicht spielen diese Fragen z. B. noch bei der Streckenoptimierung von Erdgasferntrassen eine Rolle. Andere, modernere Berührungspunkte in diesem Entwicklungsabschnitt dienen z. B. der Klassifikation geographischer Objekte und ihrer Beschreibung mit Kennziffern. Zu erwähnen sind in diesem Zusammenhang semiquantitative Verfahren, mit deren Hilfe die Gestalt und Konfiguration solcher Objekte wie z. B. Siedlungen oder auch Flußeinzugsgebiete vergleichbar gemacht werden sollen, so daß man Maßzahlen für sie einführen kann.

O. Kappler

Die Gedankenwelt des Joh. G. Aug. Galletti, Professor am Gymnasium zu Gotha

Das ist dabei das allerwichtigste, was aber von gar keiner Bedeutung ist.

Afrika hat auf allen 4 Ecken eine rundliche Gestalt, die sich gegen die Mitte verengt.

Die Mauern von Babylon waren so breit, daß 4 Wagen übereinander fahren konnten.

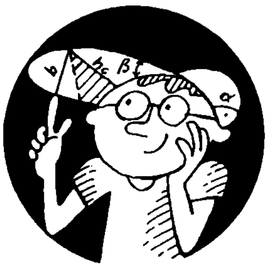
Nordamerika besteht aus lauter großen und kleinen Inseln, von denen jedoch die wenigsten von Wasser umflossen sind.

Das Känguruh springt 32 Fuß. Es würde noch weiter springen, wenn es 4, statt 2 Beine hätte.

Als ich Sie von Ferne sah, Herr Hofrat Ettinger, glaubte ich, Sie wären Ihr Bruder, der Buchhändler Ettinger, als Sie jedoch näher kamen, sah ich, daß Sie es selbst sind – und jetzt sehe ich nun, daß Sie Ihr Herr Bruder sind.

Nicht unbemerkt wollen wir lassen, daß der Herzoglich Sächsische Hofrat durchaus kein Narr, sondern anerkannter Historiker und Geograph war.

Wie uns die Einerziffer helfen kann



Schon beim Treppensteigen hatte Stefan den umfänglichen Umschlag mit einem Brief von seinem Freund Nikolai geöffnet. Nach den üblichen alltäglichen Nachrichten las Stefan am Ende des Briefes folgendes:

Schau Dir aufmerksam folgende Tabelle an.

Tabelle 1

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
k^2	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
k^3	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
k^4	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
k^5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

In der ersten Zeile stehen alle Dezimalziffern, mit anderen Worten, die Einerziffern jeder natürlichen Zahl k. In den anderen Zeilen stehen alle möglichen Einerziffern der natürlichen Zahlen der Art k^2, k^3, k^4 und k^5. Ich habe k^2 als $k \cdot k$, die Zahl k^3 als $k^2 \cdot k$, k^4 als $k^3 \cdot k$ und k^5 als $k^4 \cdot k$ dargestellt.

Wenn die Einerziffer der Zahl k beispielsweise 8 ist, so ist die Einerziffer von k^2 gleich der Einerziffer von $8 \cdot 8 = 64$, also 4; die Einerziffer von k^3 ist gleich der Einerziffer von $8 \cdot 4 = 32$, also 2 usw.

Nachdem die Tabelle ausgefüllt war, stellte ich fest, daß die erste gleich der letzten Tabellenzeile ist. Das bedeutet, daß die natürlichen Zahlen k und k^5 ein und dieselbe Einerziffer besitzen. So gibt die Tabelle die Lösung für folgende Aufgabe an.

Aufgabe 1: Es ist nachzuweisen, daß die Einerziffer von k^5 für jede natürliche Zahl k gleich der Einerziffer von k ist.

Ich habe absichtlich die Aufgabe numeriert, weil ich Dir vorschlage, daß wir mit Hilfe der Tabelle noch andere Aufgaben suchen. Ich erwarte Deine Vorschläge mit Ungeduld, Nikolai.

Dem Stefan hat Nikolais Aufgabe gut gefallen. Ihm ist sofort aufgefallen, daß die Zahl $k^5 - k$ teilbar durch 10 ist, wenn die Zahlen k und k^5 ein und dieselbe Einerziffer besitzen.

Denn die Einerziffer von $k^5 - k$ ist gleich der Differenz der Einerziffer von k^5 und der Einerziffer von k, d. h. 0.

Nach einigen Tagen hatte Stefan genug Material gesammelt, um Nikolai eine Antwort geben zu können.

Lieber Nikolai!

Ich nehme die Idee an, die Du mir anbietest. Gleich, nachdem ich den Brief gelesen hatte, habe ich festgestellt, daß man noch folgende Aufgabe formulieren kann:

Aufgabe 2: Es ist nachzuweisen, daß für jede natürliche Zahl k
$k^5 - k$ durch 10 teilbar ist.

Für mich war die vierte Tabellenzeile von besonderem Interesse. Durch sie wird klar, daß alle möglichen Einerziffern der Zahlen in der Form k^4 gleich 0, 1, 5 und 6 sind. Genauer, wenn die Einerziffer von k gleich 0 oder 5 ist, dann ist die Einerziffer von k^4 auch 0 oder 5 und folglich ist k^4 auch teilbar durch 5. In allen übrigen Fällen (Einerziffer von k ist 1 oder 6) bleibt beim Dividieren von k^4 durch 5 der Rest 1. So haben wir die Lösung der Aufgabe 3 erhalten.

Aufgabe 3: Es sei k eine natürliche Zahl. Es ist nachzuweisen, daß die möglichen Reste bei der Division von k^4 durch 5 gleich 0, wenn k (und folglich auch k^5) teilbar durch 5 ist, und 1 sind, wenn k nicht durch 5 teilbar ist.

Seien x und y natürliche Zahlen. Wenn sie teilbar durch 5 sind, ist es klar, daß die Zahl $x^4 + 4y^4$ teilbar durch 5 ist. Die Aufgabe 3 hat mir geholfen einen weiteren Fall zu finden, in dem die Summe $x^4 + 4y^4$ teilbar durch 5 ist.

Aufgabe 4: Die Zahlen x und y seien natürliche Zahlen und nicht durch 5 teilbar. Es ist nachzuweisen, daß die Summe $x^4 + 4y^4$ durch 5 teilbar ist.

Lösung: Da x nicht durch 5 teilbar ist, ergibt entsprechend der Aufgabe 3 die Division von x^4 durch 5 den Rest 1. Die Division von y^4 durch 5 ergibt ebenfalls den Rest 1. Folglich bleibt bei Division von $4y^4$ durch 5 der Rest 4. Dann ist der Rest bei der Division von $x^4 + 4y^4$ durch 5 gleich $1 + 4 = 5$, damit ist $x^4 + 4y^4$ durch 5 teilbar.

Noch mehr: die beiden genannten Fälle sind die einzigen, bei denen die Summe $x^4 + 4y^4$ teilbar durch 5 ist.

Mit anderen Worten, ich habe die Aufgabe 5 gefunden und es geschafft, sie zu lösen:

Aufgabe 5: Es ist nachzuweisen, daß 5 nicht Teiler der Summe $x^4 + 4y^4$ genau dann, wenn eine der natürlichen Zahlen x und y teilbar durch 5 ist und die andere nicht.

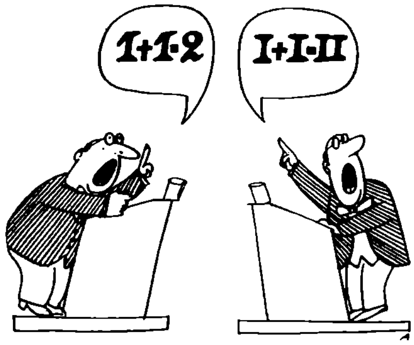
Lösung: a) Wenn x teilbar durch 5 ist und y nicht, so ergibt x^4 einen Rest von 0 bei der Teilung durch 5 und y^4 ergibt einen Rest von 1 bei der Division durch 5. Dann ergibt $x^4 + 4y^4$ den Rest $0 + 4 \cdot 1 = 4$ bei der Division durch 5 und ist folglich nicht durch 5 teilbar.

b) Wenn 5 Teiler von y, nicht aber von x ist, dann ergibt x^4 einen Rest von 1 und y^4 einen Rest von 0 bei der Division durch 5. Dann ergibt $x^4 + 4y^4$ den Rest $1 + 4 \cdot 0 = 1$ bei der Division durch 5, ist also nicht durch 5 teilbar.

Ich habe noch festgestellt, daß mit Hilfe der Aufgabe 3 eine Aufgabe gelöst werden kann, die ich in der sowjetischen Zeitschrift „Quant“ gelesen habe. Ich werde Dir die Aufgabenstellung aufschreiben und schlage Dir vor, die Lösung zu finden.

Aufgabe 6: Seien a, b, c, d und e natürliche Zahlen, für die gilt:
$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$. Es ist nachzuweisen, daß dann mindestens drei der Zahlen a, b, c, d durch 5 teilbar sind. Stefan

Wird Nikolai diese Aufgabe bewältigen? Und Ihr, liebe Leser?



aus Eulenspiegel, Berlin

Nach einer Weile erhielt Stefan Nikolais Antwort.

Lieber Stefan!

Ich beginne mit der *Lösung* der Aufgabe 6.

Angenommen, es gibt natürliche Zahlen a, b, c, d und e so, daß die Gleichung
$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$ gültig ist.

Wir wissen, daß die Zahl e^4 bei Division durch 5 den Rest 0 läßt, wenn e teilbar durch 5 ist und 1, wenn 5 nicht Teiler von e ist. Es versteht sich, daß auch jede der Zahlen a^4, b^4, c^4 und d^4 den Rest 0 oder 1 bei der Division durch 5 läßt. Folglich ist der Rest, den die Division von
$a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ durch 5 ergibt, gleich einer Summe von 4 Zahlen, von denen jede gleich 0 oder 1 ist. Es ist klar, daß diese Summe nur gleich 0 oder 1 sein kann, wenn mindestens drei der Summanden gleich 0 sind. Das bedeutet, daß mindestens drei der Zahlen a, b, c oder d durch 5 teilbar sein müssen.

In der Aufgabe 2 beweist Du, daß die Zahl $k^5 - k$ für jede natürliche Zahl k durch 10 teilbar ist.

Da aber

$$k^5 - k = k(k^4 - 1) = k(k^2 - 1)(k^2 + 1)$$
$$= (k - 1)\,k\,(k + 1)(k^2 + 1)$$

und von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $k-1$, k, $k+1$ eine durch 3 teilbar ist, ist die Zahl k^5-k ebenfalls durch 3 teilbar. Da 10 und 3 teilerfremd sind, ist k^5-k teilbar durch 30. So haben wir die Lösung einer Aufgabe 7 erhalten.

Aufgabe 7: Es ist nachzuweisen, daß für jede natürliche Zahl k
k^5-k durch 30 teilbar ist.

Jetzt schlage ich Dir vor, selbst die Aufgabe 8 zu lösen.

Aufgabe 8: Es ist nachzuweisen, daß keine natürlichen Zahlen x und y existieren, für die $2x^2-5y^2=29$ ist.

Ich erwarte Deine Lösung! Nikolai

Lieber Nikolai!
Hier beschreibe ich Dir die Lösung der Aufgabe 8.
Betrachten wir die Tabelle 2, in deren Zeilen alle möglichen Einerziffern der Zahlen der linken Spalte aufgeschrieben sind.

Tabelle 2

x oder y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
x^2 oder y^2	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
$2x^2$	2	8	8	2	0	2	8	8	1	0
$5y^2$	5	0	5	0	5	0	5	0	5	0

Aus dieser Tabelle wird ersichtlich, daß die Einerziffer von $29+5y^2$ gleich 4 oder 9 ist. Deswegen kann sie nicht gleich der Einerziffer von $2x^2$ sein. Folglich gibt es keine natürlichen Zahlen x, y, welche die Gleichung $2x^2-5y^2=29$ erfüllen.
Jetzt schlage ich vor, der Tabelle 1 noch eine Zeile hinzuzufügen:

k^{10}	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0

In dieser Zeile stehen alle möglichen Einerziffern der natürlichen Zahlen der Art k^{10}. Für deren Ermittlung habe ich die Tatsache genutzt, daß $k^{10}=k^5\cdot k^5$ ist.
Diese Zeile wird uns helfen, die Aufgabe 9 zu lösen.

Aufgabe 9: Es sollen alle natürlichen Zahlen k ermittelt werden, für die $k^{10}+1$ durch 10 teilbar ist.

Lösung: Die Zahl $k^{10}+1$ ist teilbar durch 10 dann und nur dann, wenn ihre Einerziffer gleich 0 ist, d. h. genau dann, wenn die Einerziffer von k^{10} gleich 9 ist. Aus der Zeile k^{10} ist ersichtlich, daß dies nur der Fall ist, wenn die Einerziffer von k gleich 3 oder 7 ist. So sind die gesuchten Zahlen alle natürlichen Zahlen, deren Einerziffer gleich 3 oder 7 ist.
Herzliche Grüße! Stefan

Wahrscheinlich haben Stefan und Nikolai die Aufgabenliste fortgesetzt. Wir bieten Euch, liebe Leser, folgende Aufgaben zum Selbstlösen an:

Aufgabe 10: Es ist nachzuweisen, daß keine natürlichen Zahlen n existieren, für die n^2+3 durch 5 teilbar ist.

Aufgabe 11: Es ist nachzuweisen, daß die Summe der Quadrate zweier ungerader Zahlen kein Quadrat einer ganzen Zahl sein kann.

Aufgabe 12: Es sind alle natürlichen Zahlen x und y zu ermitteln, für die mindestens eine der Zahlen
$x^2-2xy+2y^2$ und $x^2+2xy+2y^2$
durch 5 teilbar ist.

Aufgabe 13: Existiert eine natürliche Zahl n so, daß dem Ausdruck $\frac{n(n+1)}{2}$ eine Zahl entspricht, die auf 1989 endet? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 14: Ist es möglich, daß $a^2+b^2-c^2$ durch 5 teilbar ist, wenn keine der ganzen Zahlen a, b, c den Teiler 5 hat?
Begründe Deine Antwort.

L. Ljubenov

Die Lösungen der Aufgaben 10 bis 14 geben wir in alpha nicht an. Solltet Ihr Probleme dabei haben, wendet Euch bitte an Euren Mathematiklehrer.

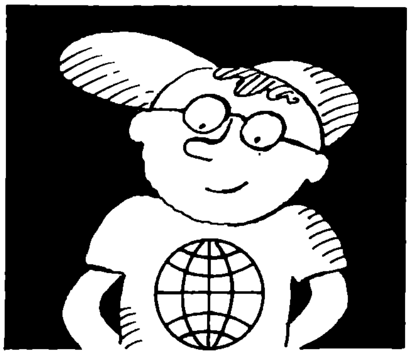
Mathematische Schülerbücherei

Im Jahr 1975 erschien im Deutschen Verlag der Wissenschaften der erste Band der Mathematischen Schülerbücherei (MSB). Über 16 Jahr lang beteiligten sich sechs Verlage der ehemaligen DDR an der Herausgabe dieser Reihe mit dem Ziel, mathematische Literatur vor allem für Schüler bereitzustellen. Im Heft 2/88 veröffentlichte *alpha* deren Liste bis zum Band 138. Inzwischen kann sie um zwei Bände erweitert werden:

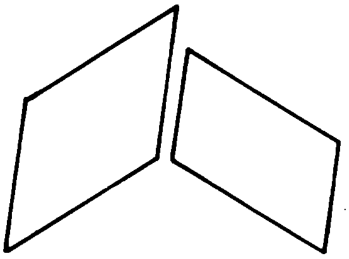
MSB 139
W. Engel/U. Pirl
Mathematik in Aufgaben
ISBN 3-326-00505-9 Preis: 28,00 DM
Deutscher Verlag der Wissenschaften GmbH

In der 2. Auflage erscheint in diesem Verlag der MSB-Band:
H. Pieper
Heureka. Ich hab's gefunden
55 historische Aufgaben der Elementarmathematik
ISBN 3-326-00364-1 Preis: etwa 24,80 DM

MSB 148
Flachsmeyer/Feiste/Manteuffel
Mathematik und ornamentale Kunstformen
Bestell-Nr. 666 514 7 Preis: 16,80 DM
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft



▲1▲ Find the line
The drawing shows two parallelograms in the same plane. It is very easy to cut each of them into two parts of equal area. We can do it by drawing, in each of them separately, a line which provides such a division. But can you draw one straight line which will divide both parallelograms into two such equal parts? Yes you can. Try to find how to draw the line.

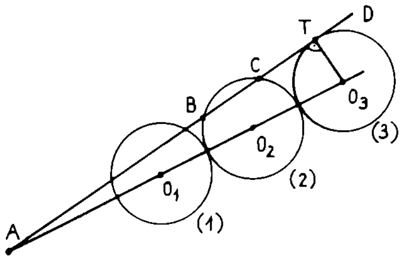


aus: Fun with mathematics, Toronto

▲2▲ Известно, что $a+\frac{1}{a}$ – целое число. Докажите, что $a^3+\frac{1}{a^3}$ – тоже целое число.

aus: Quant, Moskau

▲3▲ Les trois cercles
Les cercles (1), (2) et (3) ont 2 mètres de diamètre. La droite (D) est tangente au cercle (3), c'est-à-dire O_3T perpendiculaire à AT. Quelle est la longueur de BC?



aus: Tangente, Paris

Quotation

Whatever you do,
Do with your might.
Things done by halves
Are never done right.

Mathematik studieren in Leipzig

Wohl jeder *alpha*-Leser hat Freude an mathematischen Knobeleien, beschäftigt sich gern mit mathematischen Zusammenhängen und interessiert sich möglicherweise auch für mathematische Theorien und deren Anwendungen. Sicher wird es auch nicht wenige Leser der *alpha* geben, die auf diesem „Hobby“ ihren Beruf aufbauen wollen. Diesen sei gesagt:

Leipzig ist ein guter Platz ein Studium der Mathematik.

Am Augustusplatz und somit in zentraler und äußerst verkehrsgünstiger Lage – und überdies an traditioneller Stätte – beherbergt das Hauptgebäude der Universität auch den **Fachbereich Mathematik.** Kaum einen Steinwurf davon entfernt befinden sich Hörsaal- und Seminargebäude, die Zentralmensa, eine Zweigstelle der Universitätsbibliothek und der Studentenklub „Moritzbastei“; in unmittelbarer Nähe auch Gewandhaus und Oper sowie Hauptpost und Hauptbahnhof. Daraus erwachsen den Studenten der Mathematik günstige Arbeitsbedingungen, Zeit und Geld für lange Wege werden gespart. Übrigens: Sorgen wegen überfüllter Hörsäle und Seminarräume sind unbegründet, in den Computerkabinetten findet man noch immer freie Zeit zum Arbeiten. Der Fachbereich Mathematik verfügt über eine eigene, wohlausgestattete Bibliothek, deren Bestände auch jedem Studenten im Lesesaal zur Verfügung stehen.

Lehre und Forschung auf dem Gebiet der Mathematik besitzen in Leipzig eine lange Tradition.

Davon zeugen die Namen solcher Gelehrten wie Sophus Lie, Carl Neumann und Leon Lichtenstein, Felix Klein und B. L. van der Waerden.

Heute repräsentieren 25 Hochschullehrer ein breites Themenspektrum in der Forschung. An folgenden Abteilungen des Fachbereiches sind wichtige Forschungsrichtungen durch Lehrstühle vertreten: Algebra, Analysis, Funktionalanalysis/Mathematische Physik, Informationsverarbeitung/Numerik, Optimierung/Wirtschaftsmathematik sowie Didaktik der Mathematik und Informatik.

Der Fachbereich Mathematik bietet vielseitige Ausbildungsmöglichkeiten.

Man kann ein Studium aufnehmen, welches in der Regel nach fünf Jahren mit dem Erwerb des akademischen Grades **Diplommathematiker** abgeschlossen wird. Mathematiker werden sowohl zur Grundlagenforschung in der Mathematik selbst als auch zur Lösung konkreter Probleme in Wirtschaft, Technik und in „angewandten“ Wissenschaften gebraucht.

Der Diplomstudiengang **Wirtschaftsmathematik** setzt sich aus dem Studium der Mathematik, der Wirtschaftswissenschaft und der Informatik etwa im Verhältnis 5 : 3 : 2 zusammen. In der Regel wird dieses Studium nach 9 Semestern mit dem akademischen Grad **Diplomwirtschaftsmathematiker** abgeschlossen. Im Grundstudium gleicht hier die Ausbildung im wesentlichen der im Diplomstudiengang Mathematik. Im Hauptstudium überwiegen jene Disziplinen, welche für einen späteren beruflichen Einsatz vor allem in der Wirtschaft, im Bank- und Versicherungswesen besonders bedeutsam sind – z. B. Optimierung, Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dazu kommt eine vertiefte Ausbildung in Informatik einschließlich rechentechnischer Praktika und in den Wirtschaftswissenschaften.

Im Studiengang **Lehramt** kann man Mathematik als eines der Kombinationsfächer studieren. Dieses Fach wird an nahezu allen Schulen mit einer relativ hohen Wochenstundenzahl gelehrt. Für die Wahl eines zweiten Kombinationsfaches bietet sich an der Universität Leipzig ein breites Spektrum an, von Physik, Chemie, Biologie bis hin zu Englisch, Französisch oder Russisch. Das Lehrerstudium an der Universität wird in der Regel nach vier bzw. fünf Jahren mit der **1. wissenschaftlichen Staatsprüfung** abgeschlossen, je nachdem, ob man als Lehrer an einer Haupt- oder Realschule oder an einem Gymnasium tätig sein möchte.

Ein Wechsel von einem Studiengang für ein Lehramt zu einem Diplomstudiengang (und umgekehrt) ist während des Grundstudiums durchaus noch möglich.

Ein Studium der Mathematik – und was dann?

Die Chancen, eine Arbeitsstelle als Diplommathematiker bzw. als Diplomwirtschaftsmathematiker oder eine Anstellung als Mathematiklehrer zu bekommen, sind zur Zeit und auch in naher Zukunft recht günstig. Spätestens ab Mitte der neunziger Jahre wird es in allen Bundesländern auch einen großen Bedarf an Lehrern, insbesondere an Mathematiklehrern, geben. Die Einsatzaussichten steigen sicher noch, wenn der Bewerber über Kenntnisse in Informatik und über Fähigkeiten im Umgang mit Rechentechnik verfügt. Es ist sicher nicht uninteressant zu wissen, daß an einer Universität ausgebildete Gymnasiallehrer für Mathematik und ein attraktives weiteres Fach auch gute Einstellungschancen außerhalb des Schulwesens besitzen.

Von der Immatrikulation bis zum Examen – ein Studium im Überblick.

Für alle Studiengänge ist die Hochschulreife einzige Zulassungsvoraussetzung, Beschränkungen gibt es nicht. Die Immatrikulation erfolgt in der Regel zu Beginn des Wintersemesters im September/Oktober eines jeden Jahres. Während des **Grundstudiums** hört der Student überwiegend obligatorische Basiskurse (Differential-/Integralrechnung, Differentialgleichungen, Algebra und Geometrie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Informatik). Zu den Vorlesungen gehören Seminare und Übungen in kleinen Gruppen, in denen individuell auf die Studenten eingegangen werden kann. Überhaupt ist die persönliche Beratung und Betreuung jedes einzelnen Studenten ein Kennzeichen des Leipziger Fachbereichs Mathematik. Das Grundstudium schließt mit der Diplom-Vorprüfung bzw. (bei Lehrerstudenten) mit der Staatszwischenprüfung in der Regel nach dem vierten Semester ab.

Im **Hauptstudium** wählt der Student entsprechend seinen wissenschaftlichen Interessen Aufbau- und Vertiefungskurse sowie Spezialvorlesungen aus den Angeboten der einzelnen Abteilungen des Fachbereichs aus. Daneben setzt er seine Ausbildung im gewählten Neben- bzw. Kombinationsfach fort.

Das Studium wird mit der **Diplomprüfung** in den Diplomstudiengängen bzw. mit der 1. wissenschaftlichen **Staatsprüfung** in einem Lehramtsstudium abgeschlossen. Ein wesentlicher Bestandteil dieser Prüfung ist die selbständige Bearbeitung eines Themas in einer wissenschaftlichen Arbeit. Mit der Entgegennahme der Diplomurkunde hat man das Recht zu weiterführenden Studien, die zur Promotion sowie zur Habilitation führen.

Natürlich lockt Leipzig die Studenten auch als Stadt des Handels, des Buches und der Kunst.

Leipzig bietet sich als eine anregende und produktive, in Aufbruch und Umgestaltung befindliche Stätte dar, an der jeder Student vielfältige Interessen pflegen und neue Anregungen aufnehmen kann.

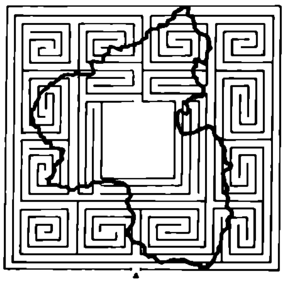
Sollte Ihr Interesse an einem Studium der Mathematik an der Universität Leipzig geweckt worden sein, so fordern Sie bitte weitere Informationen an:

Universität Leipzig
Studienabteilung des
Fachbereichs Mathematik
Telefon 7 19 24 82
Augustusplatz
O-7010 Leipzig

In diesem Heft haben wir auf Wunsch vieler Leser in Form gleich zweier Beiträge die Informationen über Ausbildungsmöglichkeiten mathematisch Interessierter wieder aufgenommen. Angestrebt wird, diese Beiträge stets mit mathematischen Problemen anzureichern. Daß der Beitrag der Leipziger Universität da etwas aus dem Rahmen fällt, hat gute Gründe. Seit 25 Jahren prüfen Mathematiker dieser Universität die meisten Beiträge auf Eignung für alpha, hilft das Sudhoff-Institut bei historischen Belangen und findet alpha dort zuverlässige Autoren, haben sich also enge Kontakte zum Wohle von alpha entwickelt.

Alphons

Landeswettbewerb Mathematik auch in Rheinland-Pfalz



Erstmalig nahmen an der Erfurter Kreisolympiade 25 Schülerinnen und Schüler aus Rheinland-Pfalz teil. Neben der Teilnahme an der 2. Stufe gab es für die Gäste ein interessantes Rahmenprogramm (Stadtführung durch Erfurt, Besuch des optischen Museums und der Zeisswerkstatt in Jena, Stadtbummel durch Weimar, Besichtigung der Wartburg in Eisenach). Das Wichtigste aber dürften die geknüpften Freundschaften sein. Im April 1991 ist dann der Gegenbesuch der Erfurter Schüler in Mainz geplant.

Wir erfuhren, daß auch in Rheinland-Pfalz ein Mathematikwettbewerb stattfindet. Seit dem Schuljahr 1989/90 gibt es für die Schüler der 8. und 9. Klassen einen Landeswettbewerb.

*Monoid** berichtet darüber:

„Die Beteiligung an der 1. Runde im November 1989 übertraf bereits alle Erwartungen: An insgesamt 94 Gymnasien beteiligten sich 1500 Schülerinnen und Schüler der 8. Klassen an einer zweistündigen Klausur, zusätzlich versuchten sich auch 180 „Frühstarter“ aus 7. Klassen an der Lösung der anspruchsvollen und interessanten Aufgaben.

Der Wettbewerb besteht aus insgesamt drei Runden.

Die 1. Runde richtet sich an Schüler der 8. Klassen, die in einer zweistündigen Klausur 5 „Knobel- und Denkaufgaben“ lösen müssen.

Die 2. Runde richtet sich an die Preisträger der 1. Runde, die dann in der 9. Klasse sind und hier 4 umfangreichere Aufgaben in Hausarbeit bewältigen müssen. Die 3. Runde schließlich hat weniger Wettbewerbs- als zusätzlichen Anregungs- und Förderungscharakter: kleinere Gruppen besonders begabter Schüler werden zu einem mehrtägigen „mathematischen Feriencamp“ an die Universitäten unseres Landes eingeladen, wo sie zusammen mit Professoren interessante Einblicke in die Welt der Mathematik erhalten und ihre Problemlösefähigkeiten trainieren können.“ [1]

Nachstehend stellen wir euch die Aufgaben der 1. Runde 1990 vor und wünschen euch viel Spaß beim Lösen. (Lösungen auf S. 48)

W. Moldenhauer

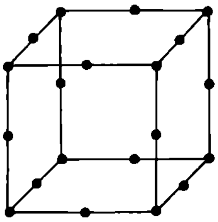
/1/ Monoid, 10 (1990) 28, S. 22

Hinweise zur Bearbeitung der Aufgaben:

Die Aufgaben müssen nicht in der vorgegebenen Reihenfolge bearbeitet werden. Es werden auch richtige Teillösungen gewertet. Die wichtigsten Lösungsschritte müssen aufgeschrieben werden. Es genügt nicht, nur das Ergebnis einer Aufgabe anzugeben. In den meisten Fällen ist es nützlich, die Lösung an Hand einer Skizze, Zeichnung oder Tabelle zu erläutern.

Aufgabe 1

Aus Kugeln und Verbindungsstäben werden – wie in der Abbildung zu sehen ist – Würfel gebaut.



Bestimme in der Tabelle jeweils die fehlende Anzahl!

Kugelanzahl auf einer Kante	3	4	10		1000
Gesamtzahl der Kugeln	20	32		80	

Begründe den Rechenweg für die Kugelanzahl auf einer Kante: 1000.

Aufgabe 2

Aus dem Alltag im alten Ägypten:

Ein Schuhmacher vermag an einem Tag entweder 15 Paare Sandalen aus dem Leder zuzuschneiden oder 10 Paare Sandalen aus bereits zugeschnittenen Teilen zusammenzunähen.

Nun will er an einem Tag sowohl zuschneiden als auch zusammennähen.

Wie viele Sandalenpaare kann er dann an einem Tag aus noch nicht zugeschnittenem Leder herstellen?

Aufgabe 3

Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC. Markiere D als Mittelpunkt der Strecke AB und E als Mittelpunkt der Strecke AC. Verlängere die Strecke DE über E hinaus auf die doppelte Länge. Der Endpunkt dieser Verlängerung ist F.

Begründe nun, daß das Viereck $ADCF$ ein Rechteck ist!

Aufgabe 4

Es gilt: $1 = 77 : 77$

$2 = 7 : 7 + 7 : 7$

$3 = (7 + 7 + 7) : 7$

Stelle nun die Zahlen 4, 5, 6 und 7 ebenfalls mit Hilfe von genau vier Ziffern 7 dar! Verwende dabei die Rechenzeichen +, −, ·, : und Klammern!

Aufgabe 5

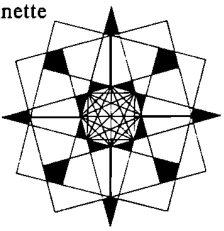
In einem Jahr stieg die Einwohnerzahl einer Stadt um 6 %, das Müllvolumen jedoch nur um 2 %.

Wieviel % Müll wurden durchschnittlich eingespart?

Gib das Ergebnis mit einer Nachkommastelle an!

* MONOID – Mathematikblatt für Mitdenker erschien erstmals im Juni ’81. Ursache war ein innerschulischer Wettbewerb zur 200-Jahrfeier des Karolinen-Gymnasiums, Frankenthal im Jahr 1980. Die Ergebnisse und schönsten Lösungen wurden festgehalten, eine Lösung des damals hochaktuellen „Rubik-Würfels“, eine Knobelseite und neue Aufgaben kamen hinzu, Name und Titelblatt wurden gesucht – fertig war die 32seitige Zeitschrift. Und da sich die Herausgeber (Lehrer und Schüler) darin zu einer zweiten Ausgabe verpflichteten, wurde eine Schülerzeitschrift ins Leben gerufen. Bisher erschienen 23 Hefte, davon drei Sonderhefte in Zusammenarbeit von Lehrern und Schülern, inzwischen auch vom Gymnasium an der Frankenstraße, Alzey.

Titelvignette



Ähnlich wie ***alpha*** hat auch *Monoid* feste Rubriken: „Neue Aufgaben“, „Gelöste Aufgaben“, „Wir lernen eine neue Formel“, „Knobelseite“, „Die Aufgabe von Anno dazumal“, ...

In der Rubrik „Neue Aufgaben“ erscheinen pro Heft 10–15 von Lehrern oder Schülern gestellte Aufgaben. Die Lösungen können eingesandt werden. Die Korrektur übernehmen Schüler der Stufen 12–13, die Preisverleihung findet im festlichen Rahmen kurz vor den Weihnachtsferien statt.

Inzwischen arbeiten mindestens 15 verläßliche Mitarbeiter mit viel Engagement an ihrer Zeitschrift, die mit einer Auflage von etwa 350 Exemplaren die Grenzen beider Gymnasien weit überschritten hat. *Alphons*

Mathematik – katastrophal und paradox!?

Es ist schon paradox, da gibt es schöne neue Regeln für das Kürzen von Brüchen, und kein Lehrer bringt sie seinen Schülern bei:

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4},\ \frac{19\cancel{9}8}{89\cancel{9}1}=\frac{1\cancel{9}8}{8\cancel{9}1}=\frac{18}{81}.$$

Und nicht nur für das Kürzen von Brüchen gibt es so einfache Regeln, es sind auch

$$\frac{9-25}{6+10}=\frac{9}{6}-\frac{25}{10},$$

$$\frac{121-64}{55+40}=\frac{121}{55}-\frac{64}{40},$$

sogar das manchmal verflixt komplizierte Rechnen mit Wurzeln kann ganz einfach sein:

$$\sqrt{5\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}},\ \sqrt[3]{2\frac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}}.$$

Dies sind nur einige Möglichkeiten, die die Lehrer den Schülern nicht verraten. Es gibt noch viel mehr!

Und jetzt gibt es ein Buch, das dem schlauen Schüler allerhand solcher Geheimnisse verrät:

Logischen Katastrophen auf der Spur heißt es, wurde von **A. G. Konforowitsch** geschrieben, 1990 beim **Fachbuchverlag Leipzig** verlegt (ISBN 3-343-00551-7) und bietet dem Leser für 16,– DM „Mathematische Sophismen und Paradoxa“ (so der Untertitel) in 122 Bildern und 178 Aufgaben mit Lösungen – sowie auf jeden Fall viel Spaß beim Lesen und Mitdenken.

Nicht nur überraschend einfache Rechenregeln kennt der Verfasser dieses Buches, er kann auch katastrophal erscheinende Resultate herleiten wie beispielsweise $1 = 2$.

Und das geht sogar ganz einfach:

Es ist nämlich $1=\frac{2}{3-1}$ und mithin ist auch

$$1=\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-1}}.$$

Dieses Einsetzen von $\frac{2}{3-1}$ für 1 ist so einfach, daß man es gleich noch mehrmals machen möchte und am liebsten damit gar nicht mehr aufhört, weil man schließlich

$$1=\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\ldots}}}$$

erhält und dieser „Kettenbruch“ so schön einfach und symmetrisch ist. Da sollte man doch gleich einmal versuchen, auch die Zahl 2 solcherart darzustellen.

In der Tat ist $2=\frac{2}{3-2}$, also auch

$$2=\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-2}}$$

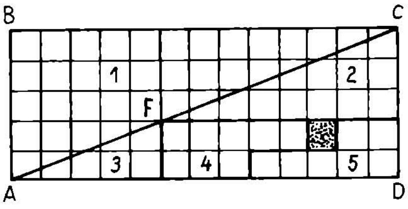
und fortgesetztes Einsetzen ohne Ende liefert dem neugierigen Rechner

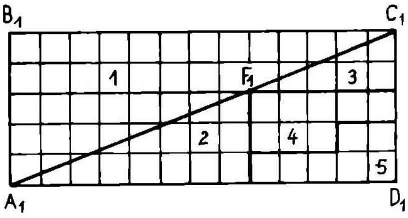
$$2=\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\cfrac{2}{3-\ldots}}}$$

und damit die Gleichheit $1 = 2$.

Für den Leser, der dieser Rechnung mißtraut, hält unser Buch auch einen geometrischen Beweis parat. Er ist allerdings etwas umständlicher, weil er einen Umweg beschreitet und erst als Zwischenresultat $64 = 65$ zu beweisen verlangt. Das ist aber ganz einfach einzusehen, wie sich aus den beiden folgenden Bildern durch Flächenumlagerung (nach Zerschneiden längs der stark gezeichneten Linien) sofort ergibt. und damit ist natürlich wieder

$1 = 64 - 63 = 65 - 63 = 2.$





Weitere katastrophale Resultate wie $\pi = 2$ oder $4 > 12$, wie die Gleichwinkligkeit und die Gleichschenkligkeit aller Dreiecke oder die Formel $0 = \pi^2R^2$ für die Oberfläche einer Kugel vom Radius R, die alle in diesem Buch zu finden sind, verschweigen wir lieber. Statt dessen wollen wir die Leser, die jetzt noch nicht auf dem Weg in den nächsten Buchladen sind, noch mit einer Aufgabe aus diesem Buch erfreuen:

Ein Logiker besuchte eine Insel, auf der zwei Völkerschaften lebten, Wahrheitsliebende und Lügner. Die einen sprachen stets die Wahrheit, während die anderen stets logen. An einer Weggabelung fragte der Logiker einen Inselbewohner, welcher Weg ins Dorf führt. Der Reisende wußte nicht, welcher Völkerschaft der Inselbewohner angehörte. Trotzdem stellte er nur eine Frage, aus deren Antwort er genau erfahren konnte, welcher Weg ins Dorf führte. Welche Frage hat er gestellt?

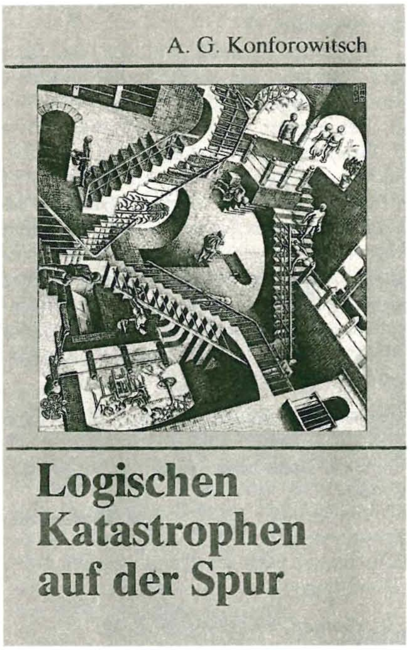
Aber nicht nur mathematische Scherze (mit durchaus ernstem Hintergrund) und Knobeleien bietet dieses Büchlein, es vermittelt dem Leser auch einen Einblick in schwieriger lösbare, scheinbar paradoxe Probleme wie die Frage, ob der jetzt folgende, halbfett gedruckte Satz

Dieser Satz ist falsch.

wahr oder falsch ist. Ist er nämlich wahr, d. h. stimmt es, was er besagt, dann ist er falsch – weil er ja die eigene Falschheit besagt; ist dieser Satz aber falsch, dann stimmt es ja gerade, was er besagt – und also muß er wahr sein. Das Büchlein zeigt auch, wie man durch Übereinanderstellen von 4 Stühlen einen Fluß überqueren kann, es weist nach, daß alle Katzen dieselbe Augenfarbe haben – und es zeigt ein perpetuum mobile, in dem ein Wasserfall in einem geschlossenen Wasserkreislauf ein Mühlrad pausenlos antreibt.

Mathematische und andere Knobeleien im vergnüglichen Gewande erwarten den Leser. Sie bieten dem Lehrer viele Möglichkeiten, im Unterricht nicht nur todernste Aufgaben zu stellen – und gewitzten Schülern manche Variante, ihre „heißgeliebten“ Lehrer mit kniffligen Problemen aufs (mathematische oder logische) Glatteis zu locken. Und ganz nebenbei bekommt jeder Leser noch manch bedenkenswertes Zitat mit auf den Weg, wie eine Bemerkung des deutschen Mathematikers Hermann Weyl (1885–1955): „Die Logik ist die Hygiene, deren sich der Mathematiker bedient, um seine Gedanken gesund und kräftig zu erhalten“ und einen Hinweis des österreichischen Schriftstellers Alfred Polgar (1875–1955): „Und dann erweitern Bücher den Gesichtskreis. Wenn man sie nämlich liest“.

S. Gottwald



Zwei Sätze über Flächenverhältnisse

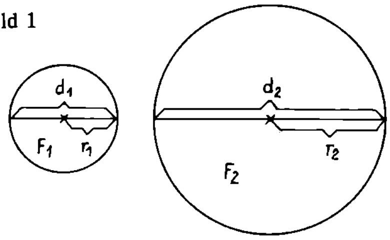
Das Flächenverhältnis ähnlicher Figuren

Satz 1: Die Flächeninhalte ähnlicher ebener Figuren verhalten sich wie die Quadrate der Längen einander entsprechender Strecken.

Dieser Satz ist uns allen gut bekannt. Deshalb nur drei Beispiele zur Illustration:

a) Zwei Kreise sind immer ähnlich, siehe Bild 1.

Bild 1



Ihre Flächeninhalte seien F_1 und F_2.

$$F_1 = \pi r_1^2 = \frac{\pi}{4} d_1^2 \quad \text{und}$$

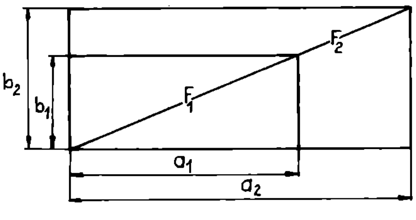
$$F_2 = \pi r_2^2 = \frac{\pi}{4} d_2^2.$$

Also gilt

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \text{und} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}.$$

b) Zwei Rechtecke sind genau dann ähnlich, wenn die einander entsprechenden Seiten jeweils im gleichen Verhältnis stehen, siehe Bild 2.

Bild 2



Wegen der Ähnlichkeit gilt $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$. Die Flächeninhalte sind $F_1 = a_1 b_1$ und $F_2 = a_2 b_2$. Daher gilt

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} \quad \text{und} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{b_1^2}{b_2^2},$$

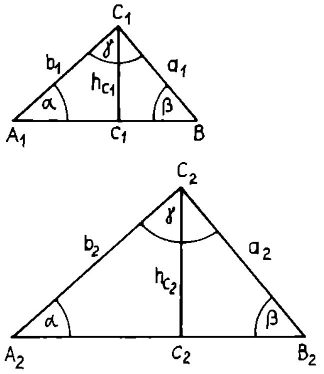
was der Leser nachrechnen möge.

c) Zwei Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn sie in der Größe zweier ihrer Winkel übereinstimmen, siehe Bild 3.

Einander entsprechende Strecken stehen im gleichen Verhältnis:

$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = h_{c_1} : h_{c_2} = \ldots.$

Bild 3



Die Flächeninhalte sind $F_1 = \frac{1}{2} c_1 \cdot h_{c_1}$ und $F_2 = \frac{1}{2} c_2 \cdot h_{c_2}$.

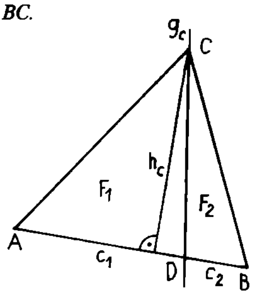
Also kann man für das Flächenverhältnis schreiben:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2}, \; \frac{F_1}{F_2} = \frac{b_1^2}{b_2^2}, \; \frac{F_1}{F_2} = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \; \frac{F_1}{F_2} = \frac{h_{c_1}^2}{h_{c_2}^2}.$$

Das Flächenverhältnis bei geteilten Dreiecken

Wir betrachten ein Dreieck $\triangle ABC$. Es werde durch eine Gerade g durch einen Eckpunkt und seine Gegenseite in zwei Teildreiecke zerlegt. Eine solche Gerade nennt man Transversale, genauer Ecktransversale. Bild 4 zeigt eine Ecktransversale g_C durch den Eckpunkt C des Dreiecks ABC.

Bild 4



D sei der Schnittpunkt von g_C mit der Seite c. Es liege D zwischen A und B, und es sei insbesondere $D \neq A$ und $D \neq B$. Dann teilt g_C das Dreieck ABC in die beiden Teildreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle DBC$ und die Seite c in die Teilstrecken c_1 und c_2.

$c = c_1 + c_2$

Flächeninhalt von $\triangle ABC = F$

Flächeninhalt von $\triangle ADC = F_1$

Flächeninhalt von $\triangle DBC = F_2$

$F = F_1 + F_2$.

Die Flächeninhalte berechnen sich zu

$$F_1 = \frac{1}{2} c_1 h_c \quad \text{und} \quad F_2 = \frac{1}{2} c_2 h_c.$$

Also gilt hier für das Flächenverhältnis

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad \text{oder in Worten}$$

Satz 2: Wird ein Dreieck durch eine Ecktransversale in zwei Teildreiecke zerlegt, so verhalten sich die Flächeninhalte der Teildreiecke wie die Teilstrecken der geteilten Seite.

Problem

Nun ist folgendes recht bemerkenswert: Wir haben zwei Sätze, die etwas aussagen über das Verhältnis von Flächeninhalten. Beim ersten Satz gehen die Quadrate (also die zweiten Potenzen) von gewissen Streckenlängen ein, beim zweiten Satz sind es die ersten Potenzen der Längen der Teilstrecken. Beide Sätze haben aber gemeinsam, daß sie anwendbar sind auf ein Dreieckspaar (Δ_1, Δ_2).

Satz 1 sagt etwas aus unter der Voraussetzung, daß die Dreiecke des Paares ähnlich sind, also $\Delta_1 \sim \Delta_2$. Satz 2 sagt etwas aus für den Fall, daß die Dreiecke des Paares durch Teilung aus einem Dreieck hervorgegangen sind.

Wir fragen uns nun:

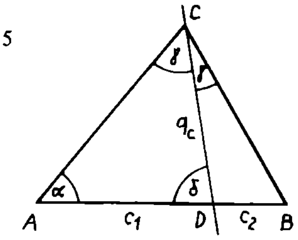
Kann es vorkommen, daß bei Teilung eines Dreiecks durch eine seiner Ecktransversalen zwei zueinander ähnliche Dreiecke entstehen, bei denen die beiden Teile der geteilten Seite des ursprünglichen Dreiecks einander entsprechende Seiten sind?

Ist dies der Fall, so ist das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Dreiecke zum einen gleich dem Verhältnis der genannten Längen dieser beiden einander entsprechenden Seiten, zum anderen gleich dem Verhältnis der Quadrate dieser beiden Seitenlängen.

Antworten

Wir teilen (siehe Bild 5) $\triangle ABC$ durch eine Ecktransversale g_C in die Teildreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle DBC$. Es soll nun $\triangle ADC \sim \triangle DBC$ sein, wobei $\overline{AD} = c_1$ und $\overline{DB} = c_2$ einander entsprechen sollen.

Bild 5



Gehen wir das Problem arithmetisch an, so führen die Sätze 1 und 2 auf die Gleichung $x^2 = x$ mit $x = \frac{c_1}{c_2}$. Sie hat in der Menge der reellen Zahlen genau zwei Lösungen, nämlich $x = 0$ und $x = 1$.

$\frac{c_1}{c_2} = 0$ bedeutet, daß $c_1 = 0$, also $D = A$ ist.

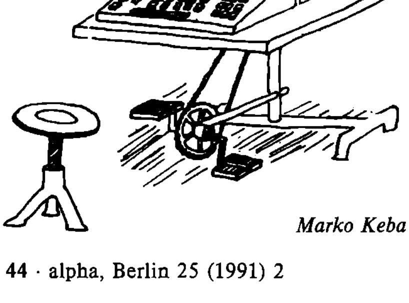
Diesen Grenzfall hatten wir in Abschnitt 2 ausgeschlossen. Es bleibt also $\frac{c_1}{c_2} = 1$. Der Ähnlichkeitsfaktor ist dann 1, also sind die Teildreiecke nicht nur ähnlich, sondern sogar kongruent.
Eine geometrische Betrachtung liefert uns weitere Eigenschaften der Teildreiecke: ΔADC habe die Innenwinkel α, δ, γ. Zu jedem dieser Winkel muß es im Dreieck ΔDBC einen gleichgroßen Innenwinkel geben.
Da c_1 und c_2 in den ähnlichen Teildreiecken einander entsprechende Strecken sein sollen, muß $\sphericalangle DCB = \gamma$ sein. Für die Winkel α und δ gibt es nun im Dreieck ΔDBC zwei Möglichkeiten:

1. Fall: $\sphericalangle DCB = \delta$ und $\sphericalangle CBD = \alpha$;
$2 \cdot \delta = 180°$, also $\delta = 90°$.
Das Dreieck ΔABC ist gleichschenklig, und die Ecktransversale g_C ist gleichzeitig Höhe h_c und Symmetrieachse des Dreiecks ΔABC. Das entsprechende Dreieckspaar besteht aus kongruenten, rechtwinkligen Dreiecken.

2. Fall: $\sphericalangle CDB = \alpha$ und $\sphericalangle CBD = \delta$.
Aus $\alpha + \delta + \gamma = 180°$ (Innenwinkelsatz) und $\alpha + \delta = 180°$ ($\sphericalangle ADB$ ist gestreckter Winkel) folgt $\gamma = 0°$
und damit $\sphericalangle ACB = 2 \cdot \gamma = 0°$.
Der Fall 2 kann also nicht eintreten, solange ΔABC kein entartetes Dreieck ist.

Damit haben wir gefunden:
Wenn es Dreiecke der gesuchten Art gibt, so entstehen sie durch Teilung eines gleichschenkligen Dreiecks durch seine Symmetrieachse.
Jedes Paar kongruenter rechtwinkliger Dreiecke hat aber auch tatsächlich die geforderten Eigenschaften, denn
1. sind wegen der Kongruenz beider Dreiecke des Paares auch ähnlich,
2. lassen sich zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke stets zu einem (gleichschenkligen) Dreieck zusammensetzen,
3. ist das Verhältnis der Flächeninhalte der beiden kongruenten Dreiecke gleich 1, also sowohl gleich dem Verhältnis der Längen zweier kongruenter Katheten als auch gleich dem Verhältnis der Quadrate dieser Längen.

W. Dörband



Marko Keba

Alphons logische Abenteuer (4)

Alphons hörte, wie sein Vater, nachdem er in sein Zimmer geschaut hatte, zu seiner Mutter sagte: „Alphons arbeitet und schläft nicht." Dann, am Abend, bemerkte der Vater plötzlich mitten im Zeitunglesen: „Das hätte ich nicht gedacht, Herr Grau ist gestorben!" Die Mutter schüttelte nachdenklich den Kopf und meinte: „In der Tat, woran nur, er rauchte und trank nicht." Da mischte sich Alphons ein: „Eins von beiden reicht eben schon, also Papi, höre auf zu rauchen." Seine Eltern schauten sich verblüfft an. „Junge", sagte die Mutter, „du hast nicht richtig hingehört, ich habe doch gesagt, daß Herr Grau nicht rauchte." Nun war die Reihe des Staunens an Alphons.
Er hatte am Nachmittag gearbeitet und nicht geschlafen, als sein Vater ins Zimmer schaute. Auf den jetzigen Fall übertragen bedeutet das doch, Herr Grau hat geraucht und nicht getrunken. Deswegen hat er seinen Vater gebeten, das Rauchen einzustellen. Nun sagte aber seine Mutter, daß Herr Grau nicht geraucht habe. Wollte sie also sagen, Herr Grau habe vermutlich geraucht oder getrunken, sie wisse nur nicht, welches von beiden? Laut sagte Alphons deshalb: „Es ist wirklich egal, ob man raucht oder ob man trinkt, beides kann eben zum Tode führen." Ehe die Eltern etwas dazu sagen konnten, warf Alphons' Schwester spitzbübisch ein: „Alphons scheint heute im Sportunterricht mit Nachwirkungen auf den Kopf gefallen zu sein." Das reichte Alphons. Um Streit zu vermeiden, ging er in sein Zimmer und dachte nach. Wenn „Alphons arbeitet und schläft nicht" etwas anderes bedeuten soll als der grammatisch gleichgebaute Satz „Grau raucht und trinkt nicht", so muß das etwas mit der Verneinung, dem „nicht", und seiner Stellung im Satz zu tun haben. In meinem Fall haben wir eine Und-Verbindung zweier Aussagen, von denen die eine verneint ist. Wollte meine Mutter so verstanden sein, daß beide Aussagen verneint sind? „Moment", sagte da Alphons laut zu sich, „die deutsche Grammatik erlaubt, daß zwei Sätze mit demselben Prädikat und durch „und" verbunden so zu einem Satz umgestellt werden, daß die Subjekte beider Sätze mit „und" verbunden werden und das Prädikat dann angefügt wird. Werden die beiden Aussagen nachgestellt verneint, haben wir etwas wie ein gleiches Prädikat, also wird umgestellt: Wieder in der Stube, sagte er seiner Mutter: „Ich verstehe dich so: Herr Grau rauchte nicht und Herr Grau trank nicht." Bei den Tücken der deutschen Sprache (wie eben vollständige Sätze als Satzteile zu behandeln) hat seine Schwester wohl nicht recht, wenn sie die Bemerkung nicht unterlassen konnte: „Bei manchen fällt der Groschen eben langsam."

L. Kreiser

Für Aufgabenfans

Jahrgangsstufe 5
Für ein Konzert wurden genau 1999 Eintrittskarten verkauft. An Kasse A Eintrittskarten der Nummern 1 bis 504, an Kasse B Eintrittskarten der Nummern 1296 bis 2001. An Kasse C hatte die erste verkaufte Eintrittskarte die Nummer 4000.
Welche Nummer stand auf der Eintrittskarte, die an Kasse C zuletzt verkauft wurde?

Jahrgangsstufe 6
Ein Rechteck ist 9 cm lang und 6 cm breit. Um welche Strecke ist dieses Rechteck zu a) verlängern, b) verbreitern, damit sein Flächenumfang um ein Viertel zunimmt?

Jahrgangsstufe 7
Auf welche Ziffer endet die Zahl 12^{100}?

Jahrgangsstufe 8
Mayers waren 25 Tage im Urlaub. Zurückgekehrt, wurden sie nach dem Wetter gefragt. Herr Mayer antwortete:
„95 % der Tage waren kalt, 85 % naß, 75 % windig und 55 % trübe." Wie viele Tage des Urlaubs waren zugleich kalt, naß, windig und trübe?

Jahrgangsstufe 9
Es ist die Lösungsmenge der Exponentialgleichung
$2^{x+1} + 3^{x-3} + 2^{x-2} = 3^{x-1}$
zu ermitteln.

Jahrgangsstufe 10
Ein Berghotel liegt $a = 70{,}20$ m über dem Wasserspiegel eines Sees. Vom Hotel aus erblickt ein Beobachter einen Wetterballon unter dem Höhenwinkel $\alpha = 58{,}1°$, dessen Spiegelbild unter dem Tiefenwinkel $\beta = 61{,}2°$.
In welcher Höhe befindet sich der Ballon über dem See?

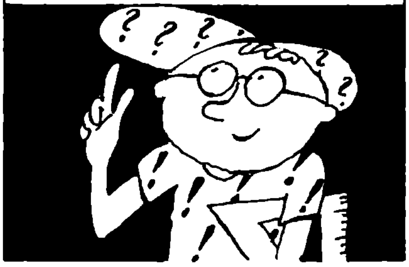
Diese und noch 334 Aufgaben zum Köpfeheißwerden findet Ihr in den Aufgabensammlungen für mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler des 5.–7., 8.–10. und 11.–13. Jahrgangs, erschienen im MANZ Verlag München, herausgegeben von Hermann-Dietrich Hornschuh. Die Aufgaben sind ausnahmslos der „elementaren" Mathematik entnommen und bieten für jeden Anspruch viel. Und – natürlich – gibt es zu jedem Bändchen ein Lösungsheft.

5.–7. Jahrgangsstufe
Aufgaben: 48 S., DM 9,80, ISBN 3-7863-0841-1
Lösungen: 80 S., DM 12,80, ISBN 3-7863-0842-X

8.–10. Jahrgangsstufe
Aufgaben: 48 S., DM 9,80, ISBN 3-7863-0843-8
Lösungen: 80 S., DM 12,80, ISBN 3-7863-0844-6

11.–13. Jahrgangsstufe
Aufgaben: 48 S., DM 9,80, ISBN 3-7863-0845-4
Lösungen: 80 S., DM 12,80, ISBN 3-7863-0846-2

Lösungen



Lösungen zum alpha-Wettbewerb
Heft 6/90

5/1 Wegen 14 km = 3 · 4 km + 2 km beträgt die reine Wanderzeit der ersten Gruppe 3 Stunden und 30 Minuten. Hinzu kommt eine Pause von 20 Minuten; das ergibt eine Gesamtzeit von 3 Stunden und 50 Minuten. Da die Wanderung um 8.30 Uhr begann, trifft die erste Gruppe nach 3 h 50 min, also um 12.20 Uhr am Ziel ein.
Wegen 14 km = 1 · 12 km + 2 km beträgt die reine Fahrzeit der zweiten Gruppe 1 Stunde und 10 Minuten. Hinzu kommt eine Pause von 10 Minuten; das ergibt eine Gesamtzeit von 1 Stunde und 20 Minuten. Um nicht vor 12.20 Uhr am Ziel zu sein, darf die zweite Gruppe frühestens um 11.00 Uhr abfahren.

5/2 Die Fahrzeit für eine Hin- und Rückfahrt beträgt
(18 + 8 + 14) min = 40 min; für 12 solcher Fahrten benötigt der Bus
12 · 40 min = 480 min = 8 h. Am Busbahnhof ergeben sich zwischen 12 Fahrten elf Pausen von je einer Minute. Somit benötigt der Bus insgesamt 8 Stunden und 11 Minuten.

5/3 Wir geben für a) und b) jeweils eine mögliche Lösung an:

a)

×	×		
	×	×	
		×	×
×			×

b)

		×	
×	×	×	
	×	×	×
	×		

5/4 Es gibt folgende fünf Zerlegungen von 112 in zwei Faktoren, nämlich
1 · 112, 2 · 56, 4 · 28, 7 · 16, 8 · 14.
Die ersten beiden Produkte entfallen, da kein Faktor größer als 31 sein kann. Die letzten beiden Produkte entfallen, da die Differenzen
16 − 7 = 9 und 14 − 8 = 6 beide einstellig sind. Also erfüllen nur die Zahlen 4 und 28 alle Bedingungen. Susi hat am 28. April Geburtstag.

5/5 Die Zahl 4895 besitzt nur den einstelligen Teiler 5. Wegen 4895 : 5 = 979 lautet der erste Faktor 979, der zweite *5*. Da 2 · 979 = 1958 bereits eine vierstellige Zahl ergibt, sind die beiden Sternchen des zweiten Faktors durch die Ziffer 1 zu ersetzen.
Die vollständige Aufgabe lautet

$$\begin{array}{r}
\underline{979 \cdot 151} \\
979 \\
4895 \\
\underline{979} \\
147\,829
\end{array}$$

5/6 Wegen der Eindeutigkeit der Faktorenzerlegung von 32 in
32 = 1 · 32 = 2 · 16 = 4 · 8, gibt es nur die beiden Lösungen $n_1 = 5$ und $n_2 = 19$.
Proben: (5 − 3) · (21 − 5) = 2 · 16 und
(19 − 3) · (21 − 19) = 16 · 2

5/7 Da eine quadratische Platte abgesägt wurde, ist die eine Seite der Sperrholzplatte 30 cm lang. Wegen
30 cm · 100 cm = 3000 cm² ist die andere Seite der Sperrholzplatte 100 cm lang. Deshalb ist die zweite Seite der übrig bleibenden rechteckigen Platte 100 cm − 30 cm = 70 cm lang.

6/1 Es sei $\overline{a7b}$ eine solche dreistellige natürliche Zahl in dezimaler Schreibweise; dann gilt
$1 \leqq a \leqq 9$ und $0 \leqq b \leqq 9$.
Wegen 15 = 3 · 5 muß eine solche Zahl durch 3 und durch 5 teilbar sein, d. h., ihre Quersumme muß durch 3 teilbar und sie muß auf die Ziffer 0 oder 5 enden. Das trifft nur für folgende Zahlen zu: 270, 570, 870, 375, 675, 975.

6/2 Ist a die gedachte Zahl, so erhält man schrittweise $a + 11$,
$9 \cdot (a + 11) = 9a + 99$,
$9a + 99 + (a + 1) = 10a + 100$.
Subtrahiert man nun eine natürliche Zahl zwischen 90 und 100, so erhält man $10a + n$, wobei n eine einstellige natürliche Zahl ist, also im Ergebnis die Anzahl der Einer darstellt. Streicht man diese Einer, so erhält man die gedachte Zahl a.
Beispiel: $a = 17$, also
(17 + 11) · 9 + 18 = 28 · 9 + 18 = 270,
270 − 92 = 178, also 17.

6/3 Angenommen, Ute ist x Jahre alt; dann ist die Mutter $4x$ Jahre und die Oma $7x$ Jahre alt, und es gilt
$7x - 4x = 24$, $3x = 24$, $x = 8$.
Somit ist die Mutter 32 Jahre, Ute 8 Jahre alt. Wegen 32 − 8 = 24 war die Mutter 24 Jahre alt, als Ute geboren wurde.

6/4 Es sei $n = \overline{abc}$ eine beliebige dreistellige natürliche Zahl in dekadischer Schreibweise, wobei weder a, noch b, noch c die Grundziffer 0 vertritt. Durch Umstellung der Grundziffern lassen sich weitere fünf Zahlen bilden, nämlich $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ und $\overline{cba}$. Die Summe der sechs zu addierenden Zahlen läßt sich somit darstellen durch
$s = 222a + 222b + 222c = 222 \cdot (a + b + c)$.
D. h. die Summe ist stets durch 222 teilbar.

6/5 Es seien n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$ fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen; ihre Summe beträgt dann $5n + 10$; das Doppelte davon ist
$2 \cdot (5n + 10) = 10 \cdot (n + 2)$. Die Lösung endet also auf die Ziffer Null. Rita braucht daher zu der ersten gesehenen Zahl n nur die Zahl 2 zu addieren, an die Summe eine Null anzuhängen, und schon hat sie die Lösung ermittelt.

6/6 Ist a die gedachte Zahl, so erhält man schrittweise
$a + 10$, $10 \cdot (a + 10) = 10a + 100$. Subtrahiert man nun eine natürliche Zahl zwischen 90 und 100, so erhält man $10a + n$, wobei n eine einstellige natürliche Zahl ist, also im Ergebnis die Anzahl der Einer darstellt. Streicht man diese Einer, so erhält man die gedachte Zahl a.
Beispiel: $a = 13$, also
(13 + 10) · 10 = 230, 230 − 98 = 132,
also 13.

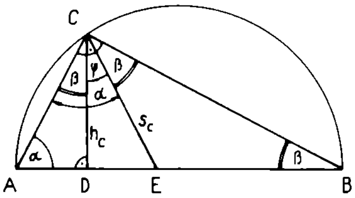
6/7 Die Fahrzeit t beträgt 32 min, der Weg s 38 km.

Nach der Gleichung $v = \frac{s}{t}$ ergibt sich

$v = 1{,}2 \frac{\text{km}}{\text{min}}$. In einer Minute fährt der Zug 1,2 km, in einer Stunde (60 min) 72 km. Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt also $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

7/1 Um zum Ausgangspunkt zurückzukommen, muß der Kettenschlepper immer eine gewisse Anzahl von Teilstrecken vorwärts und die gleiche Anzahl rückwärts fahren. Er muß aber auch die Anzahl der nach rechts bzw. links gefahrenen Strecken wieder nach links bzw. rechts zurücklegen. Somit muß die Anzahl aller Teilstrecken durch vier teilbar sein. Da 10 · 6 Sekunden = 60 Sekunden = 1 Minute und 10 kein Vielfaches von 4 ist, kann der Kettenschlepper nicht nach genau einer Minute wieder am Ausgangspunkt sein, sondern höchstens 12 Sekunden vorher oder nachher.

7/2 Im rechtwinkligen Dreieck ADC gilt
$\sphericalangle ACD = 90° - \alpha = \beta$.
Nach dem Satz des Thales gilt
$\overline{EC} = \overline{EB}$ und somit $\sphericalangle EBC = \sphericalangle ECB = \beta$.
Daraus folgt weiter
$\sphericalangle ACE = 90° - \beta = \alpha$. Es sei $\sphericalangle DCE = \varphi$;
dann gilt $\varphi = \alpha - \beta$.



7/3 (1) Angenommen, mit dem ersten Wurf erzielte Rolf x Punkte, Paul also $(x + 3)$ Punkte, Otto $(2x - 3)$ Punkte; deshalb gilt $4x = 20$, $x = 5$. Mit dem ersten Wurf erreichte Otto 7, Paul 8, Rolf 5 Punkte.
(2) Da zum Kegelspiel 9 Kegel gehören, erreichte Paul mit dem zweiten Wurf 9 Punkte, Otto 4 Punkte, Rolf 5 Punkte.
(3) Mit dem dritten Wurf erreichte Paul (18 − 9 − 8) Punkte, also einen Punkt, Otto 9 Punkte. Rolf erreichte mit drei Würfen (48 − 20 − 18) Punkte = 10 Punkte, mit dem dritten Wurf also keinen Punkt; er warf eine „Ratte“.

7/4 Jede natürliche Zahl, die nicht durch 3 teilbar ist, läßt bei Division durch 3 entweder den Rest 1 oder den Rest 2. Es gilt also
$a = 3x + 1$ oder $a = 3x + 2$, $b = 3y + 1$ oder $b = 3y + 2$, $c = 3z + 1$ oder $c = 3z + 2$. Lassen alle drei Zahlen a, b, c den Rest 1, dann gilt
$a + b + c = 3x + 3y + 3z + 3$
$= 3 \cdot (x + y + z + 1)$, also ist $a + b + c$ durch 3 teilbar. Lassen alle drei Zahlen a, b, c den Rest 2, dann gilt
$a + b + c = 3x + 3y + 3z + 6$
$= 3 \cdot (x + y + z + 2)$, also ist $a + b + c$ durch 3 teilbar. Läßt eine der drei Zahlen, zum Beispiel a, den Rest 1, eine zweite Zahl, zum Beispiel b, den Rest 2, dann gilt (ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit)
$a + b = 3x + 3y + 3 = 3 \cdot (x + y + 1)$,
also ist $a + b$ durch 3 teilbar.

7/5 Angenommen, Beate ist x Jahre, der Vater also $3x$ Jahre, die Mutter $(3x - 3)$ Jahre und Elke $(1{,}5x - 1{,}5)$ Jahre alt; das sind zusammen $(8{,}5x - 4{,}5)$ Jahre. Nun gilt
$8{,}5x - 4{,}5 = 123$, $8{,}5x = 127{,}5$ und somit $x = 15$. Beate ist 15 Jahre, Elke 21 Jahre, die Mutter 42 Jahre und der Vater 45 Jahre alt.

7/6 Das Verhältnis Länge der Tretkurbel zu Radius des Kettenrades beträgt 2 : 1, am Kettenrad wirkt also die doppelte Kraft wie an der Tretkurbel. Diese Kraft muß die Kette übertragen (200 N). Da das Verhältnis der Radien am Hinterrad 10 : 1 beträgt und auf das kleine Kettenrad 200 N wirken, wirken am Umfang des Hinterrades 20 N.

7/7 Der Hebel befindet sich im Gleichgewicht. Da l_2 doppelt so lang ist wie l_1, muß F_2 die Hälfte von F_1 betragen, also 2 N. Der Federkraftmesser zeigt 7 N an.

8/1 (1) Die kleinste Zahl sei gerade:
$2n(2n + 1)(2n + 2) = 8n^3 + 12n^2 + 4n$
$= 4(2n^3 + 3n^2 + n)$; das Produkt enthält den Faktor 4; $(n \in \mathrm{N})$.
(2) Die kleinste Zahl sei ungerade:
$(2n + 1)(2n + 2)(2n + 3)$
$= 8n^3 + 24n^2 + 22n + 6$, $(n \in \mathrm{N})$.
Wie man sieht, enthält nicht jeder Summand den Faktor 4; somit ist das Produkt nur dann durch 4 teilbar, wenn $22n + 6$ durch 4 teilbar ist (z. B., wenn $n = 3$ ist).

8/2 Das Quadrat $ABCD$ habe die Seitenlänge a; die Länge des Umkreisradius beträgt dann $\frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$, die Länge eines Halbkreisradius $\frac{a}{2}$, und es gilt

$$A_1 = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \pi \cdot \left(\frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2,$$

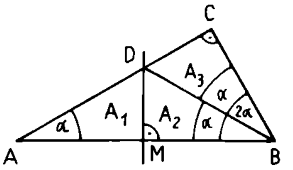
$$A_1 = a^2 + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \pi,$$

$A_1 = a^2$, $A_2 = a^2$, also $A_1 = A_2$.

8/3 Nach Voraussetzung hat der spitze Innenwinkel $\sphericalangle BAC$ die Größe α und der spitze Innenwinkel $\sphericalangle ABC$ die Größe 2α. Wegen $\alpha + 2\alpha = 3\alpha$ und $3\alpha = 90°$ gilt $\alpha = 30°$, $2\alpha = 60°$.

Wegen $\overline{AD} \cong BD$ gilt $\sphericalangle MBD \cong \sphericalangle MAD = \alpha$, also auch $\sphericalangle CBD = \alpha$.
Die Dreiecke MBD und BCD sind deshalb kongruent (sww). Für die Flächeninhalte A_1, A_2, A_3 gilt somit
$A_1 = A_2$, $A_2 = A_3$, also $A_2 + A_3 = 2 \cdot A_1$ bzw. $A_1 : (2 \cdot A_1) = 1 : 2$.

Skizze (nicht maßgerecht!)



8/4 Der Umfang des Dreiecks $A_1B_1C_1$ beträgt
$u_1 = a_1 + a_1 + 7\,\mathrm{cm} + a_1 - 2\,\mathrm{cm}$
$= 3a_1 + 5\,\mathrm{cm}$; der Umfang des Dreiecks $A_2B_2C_2$ beträgt
$u_2 = a_2 + 5a_2 + 10\,\mathrm{cm} = 6a_2 + 10\,\mathrm{cm}$.
Wegen $a_1 = a_2$ gilt somit $u_1 : u_2 = 1 : 2$.

8/5 Nicht durch 3 teilbare natürliche Zahlen können durch $3n - 1$ oder $3n - 2$ mit $n \in \mathrm{N}$ und $n \geqq 1$ dargestellt werden. Der Vorgänger des Quadrates einer solchen Zahl ist dann
$(3n - 1)^2 - 1$ oder $(3n - 2)^2 - 1$.
Im ersten Fall erhalten wir nach Umformung den äquivalenten Term $9n^2 - 6$, im zweiten Fall $9n^2 - 12n + 3$; jeder dieser Terme ist durch 3 teilbar. Eine durch 3 teilbare natürliche Zahl sei in der Form $3n$ mit $n \in \mathrm{N}$ dargestellt. Der Vorgänger ihres Quadrates ist dann $(3n)^2 - 1$ bzw. $9n^2 - 1$, und dieser Term ist nicht durch 3 teilbar.

8/6 Das Volumen des verdrängten Wassers beträgt $x \cdot A$ (x – Eintauchtiefe), die Gewichtskraft des verdrängten Wassers
$F_W = x \cdot A \cdot g \cdot \varrho_W$ (Beachte: Gewichtskraft = Masse · Fallbeschleunigung).
Die Gewichtskraft des Körpers beträgt
$F_K = h \cdot A \cdot g \cdot \varrho_K$. Nach dem Gesetz von Archimedes und der Bedingung für das Schwimmen gilt: $F_W = F_K$.

Daraus ergibt sich $x = \frac{h \cdot \varrho_K}{\varrho_W}$.

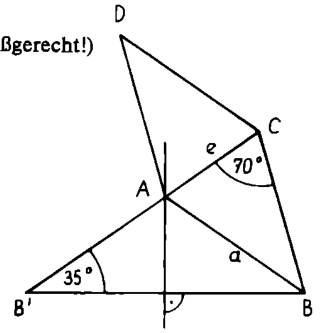
Setzt man die Werte ein $\left(\varrho_K = 0{,}8\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3},\ \varrho_W = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)$, so erhält man $x = 20\,\mathrm{cm}$.

8/7 Die zum Erwärmen des Wassers benötigte Wärme Q beträgt
$Q = c \cdot m \cdot \Delta T \left(c_{\mathrm{Wasser}} = 4{,}186\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}},\ m_{\mathrm{Wasser}} = 2\,\mathrm{kg},\ \Delta T = 80\,\mathrm{K}\right)$. $Q = 670\,\mathrm{kJ}$.

Es werden $V_{\mathrm{Prop.}} = \frac{Q}{H_{\mathrm{Prop}}}$ Propan benötigt.
$V_{\mathrm{prop}} \approx 3{,}6\,\mathrm{l}$.

9/1 Kurzbeschreibung: $\overline{CB'} = a + e = 8\,\mathrm{cm}$ zeichnen; in B' an $B'C$ Winkel der Größe 35° und in C an CB' Winkel der Größe 70° antragen, die freien Schenkel dieser Winkel schneiden einander in B. Die Mittelsenkrechte von BB' schneidet CB' in A; die Kreise um A und um C mit einem Radius der Länge von AB schneiden einander in D.

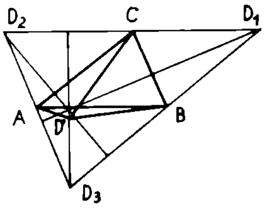
Skizze
(nicht maßgerecht!)



9/2 Aus $abc = 1$ folgt
$ab = \frac{1}{c}$, $ac = \frac{1}{b}$, $bc = \frac{1}{a}$. Durch Einsetzen erhalten wir $a + b + c + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$
$= \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right)$.
Wegen $x + \frac{1}{x} \geqq 2$ gilt somit
$a + b + c + ab + ac + bc \geqq 2 + 2 + 2 = 6$.
Für $a = b = c = 1$ gilt das Gleichheitszeichen.

9/3 a) Es ist leicht nachzuweisen, daß alle entstandenen Dreieckseiten paarweise zueinander kongruent sind (Parallelität!). Somit sind alle Dreiecke nach dem Kongruenzsatz *sss* paarweise kongruent zueinander.
b) Die Lote von D_1, D_2 und D_3 auf CB, AC und AB schneiden einander in D' (Fußpunkt der Tetraederhöhe im Grundrißbild und damit Bild der Pyramidenspitze im Grundriß). Nun sind die Strecken $D'A$, $D'B$ und $D'C$ einzuzeichnen. Damit ist das Grundrißbild der Pyramide mit ABC als Grundfläche und D' als Spitze konstruiert.

Skizze



9/4 Man formt die vorgegebene Gleichung äquivalent um und erhält:
$10(4a + bc) = 17c(a + b)$,
$40a + 10bc = 17ac + 17bc$,
$a(40 - 17c) = 7bc$.
Da a, b, c Primzahlen sind, ist nur $c = 2$ möglich (für $c > 2$ wäre eine der Variablen negativ). Wegen $6 \cdot a = 7 \cdot b \cdot 2$ ist $a = 7$ und $b = 3$.
Probe in der Ausgangsgleichung:
$\frac{4 \cdot 7 + 2 \cdot 3}{(7 + 3) \cdot 2} = \frac{17}{10}$, $\frac{34}{20} = \frac{17}{10}$
(wahre Aussage).

9/5 Schreibt man die Gleichung in Dezimalbrüchen und quadriert die Gleichung, so erhält man
$\frac{z}{10} - \frac{z}{100} = \frac{z^2}{100}$, $\frac{z^2}{100} - \frac{9z}{100} = 0$,
$\frac{z}{100} \cdot (z - 9) = 0$. Da wegen $z \neq 0$ nur $z = 9$ diese Gleichung erfüllt, ist auch nur die Gleichung $\sqrt{0{,}9 - 0{,}09} = 0{,}9$ eine wahre Aussage.

9/6 Nach dem Volumen-Temperatur-Gesetz (Druck bleibt konstant) kann man das Volumen der heißen Luft berechnen. Da sich die Ballonhülle nicht ausdehnt, müssen 513 m³ Luft entweichen. Nach dem Archimedischen Gesetz ist die Auftriebskraft gleich der Gewichtskraft der verdrängten kalten Luft.
Die Masse dieser kalten Luft beträgt

$$3500\,\mathrm{m}^3 \cdot 1{,}293\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 4525\,\mathrm{kg},$$

die Masse der heißen Luft im Ballon

$3500\,\mathrm{m}^3 \cdot 1{,}127\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 3945\,\mathrm{kg}$. Die Auftriebskraft muß mindestens genau so groß sein wie die Gewichtskraft aus Hülle, Gondel, Ladung und heißer Luft im Ballon. Diese darf demzufolge höchstens 5800 N betragen.

9/7 Die Wärme

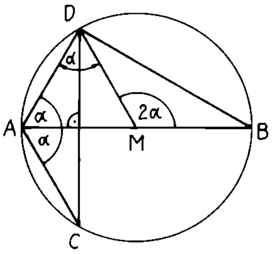
$Q = 4{,}19\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} \cdot 10\,\mathrm{kg} \cdot 80\,\mathrm{K}$ muß dem Wasser zugeführt werden. Da dies in $30\,\mathrm{min} = 30 \cdot 60\,\mathrm{s}$ erfolgen soll, ergibt sich für die elektrische Leistung

$$P = \frac{Q}{30 \cdot 60\,\mathrm{s}} = 1{,}86\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{s}}.$$

Die erforderliche Leistung beträgt

$$\frac{1{,}86\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{s}}}{0{,}95} = 1{,}958\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{s}},$$ also rund 2 kW.

10/1 Es sei $\sphericalangle DAM = \alpha$. Wegen $AM \cong DM$ ist auch $\sphericalangle MDA = \alpha$ und somit $\sphericalangle BMD = 2\alpha$ (Außenwinkelsatz).
Aus Symmetriegründen halbiert der Durchmesser $\overline{AB}$ den Winkel $\sphericalangle DAC$, also ist $\sphericalangle DAC = 2\alpha$.
Daraus folgt die Kongruenz der Winkel $\sphericalangle DAC$ und $\sphericalangle DMB$.



10/2
a) (8; 0) $x - y \neq 0$; $y = 0 \rightarrow x = 8$
b) kein Paar erfüllt die Bedingungen
c) (1; 10)
d) (4; 1), (6; 4), (12; 11)

10/3 Es seien a und b die Maßzahlen der Längen der Katheten und c die Maßzahl der Länge der Hypotenuse eines solchen rechtwinkligen Dreiecks; dann gilt

$$a + b + c = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b,$$

$$a + b = \frac{a \cdot b}{2} - c,\ (a+b)^2 = \left(\frac{a \cdot b}{2} - c\right)^2,$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = \frac{1}{4} \cdot a^2b^2 - abc + c^2$$

und wegen $a^2 + b^2 = c^2$ somit

$2ab + abc = \frac{1}{4}a^2b^2$ und wegen $a \cdot b \neq 0$ schließlich

$2 + c = \frac{1}{4}ab$, also $c = \frac{ab}{4} - 2$.

Durch Einsetzen erhalten wir

$$a + b + \frac{ab}{4} - 2 = \frac{ab}{2},$$

$$4a + 4b + ab - 8 = 2ab,\ ab - 4a = 4b - 8,$$

$$a \cdot (b - 4) = 4b - 8,\ a = \frac{4b - 8}{b - 4},$$

$$a = 4 + \frac{8}{b - 4}.$$

Es existieren genau vier solcher Dreiecke. Die nachfolgende Tabelle enthält die Maßzahlen der Seitenlängen.

a	b	c
12	5	13
8	6	10
6	8	10
5	12	13

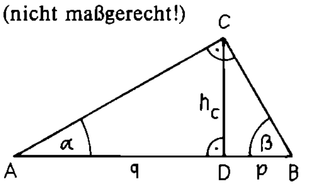
Von diesen vier Dreiecken sind jeweils zwei kongruent.

10/4 Im Dreieck ABC gilt: $(p < q)$
$h_c^2 = p \cdot q$ (Höhensatz); $p : q = q : (p + q)$ (goldener Schnitt); daraus folgt
$q^2 = p^2 + pq$; $q^2 - pq - p^2 = 0$;

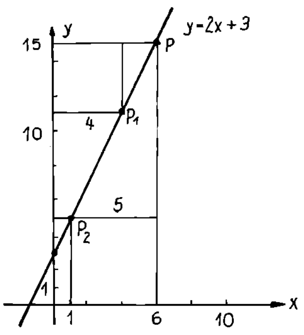
$$q_{1,2} = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{p^2 + 4p^2}{4}};$$

$$q_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)p;\ q_1 \approx 1{,}618p;$$

q_2 ist nicht definiert.
Im Dreieck DBC gilt:
$h_c^2 = pq \approx 1{,}618p^2$; $h \approx 1{,}272p$;
$\tan(\sphericalangle DBC) = h_2 : p \approx 1{,}272$.
Es folgen $\beta \approx 51{,}83°$ und $\alpha \approx 38{,}17°$.
Skizze (nicht maßgerecht!)



10/5 Quadrat 1: Ist $P_1(x_1;\ y_1)$ der gesuchte Eckpunkt des Quadrats, so ist
$x_1 = 15 - y_1$, $x_1 = 15 - (2x_1 + 3)$,
$3x_1 = 12$, $x_1 = 4$ und somit $y_1 = 11$. Die Seiten des Quadrats haben die Länge 4.



Quadrat 2: Ist $P_2(x_2;\ y_2)$ der gesuchte Eckpunkt des Quadrats, so ist
$6 - x_2 = y_2$, $6 - x_2 = 2x_2 + 3$, $3 = 3x_2$,
$x_2 = 1$ und somit $y_2 = 5$. Die Seiten des Quadrats haben die Länge 5.

10/6 Das Seil dient nur zum Übertragen der Kraft.
Im Seil wirkt eine Kraft von 50 N.

10/7 Der Körper führt zwei Bewegungen aus: eine gleichförmige in Richtung parallel zur Erdoberfläche und eine Fallbewegung. Für den Zeitpunkt des Auftreffens auf die Erdoberfläche ist nur die Fallbewegung entscheidend.
Unter Benutzung von $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ ergibt sich mit $s = 80\,\mathrm{m}$ und $g = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ $t = 4\,\mathrm{s}$, der Körper trifft also nach 4 s auf.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Für Tierfreunde

Der *Kletterfisch* (anabas testudineus) ist ein kleiner, die Binnengewässer Südostasiens bewohnender Fisch, der durch sein zusätzliches Luftatmungsorgan, das Labyrinthorgan, auch in sauerstoffarmen Gewässern überleben kann und bei hoher Luftfeuchtigkeit robbend über das Land kriechen soll. (Nach Brockhaus abc Biologie, F. A. Brockhaus Verlag, Leipzig 1986)

Für Straßenbahnfans

Zunächst ermitteln wir die Anzahl aller möglichen Einstellungen des Entwerters, einschließlich der laut Aufgabe unzulässigen: Für 1 Stanzeisen gibt es 2 Möglichkeiten, für 2 Stanzeisen gibt es $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten, für 3 Stanzeisen gibt es $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ Möglichkeiten, …, für 8 Stanzeisen gibt es $2^8 = 256$ Möglichkeiten.
Unzulässig ist die (eine) Möglichkeit, alle Stanzeisen auf Ruhestellung zu schalten, und unzulässig sind die acht verschiedenen Möglichkeiten, nur ein Stanzeisen in Arbeitsstellung zu bringen. Es verbleiben also $256 - 9 = 247$ Möglichkeiten.

Für Scherzkekse

a) Man gibt 4 Mädchen je einen Apfel, und dem 5. Mädchen den übrigen Apfel zusammen mit dem Korb.
b) 4 Katzen

Für Rätselfreunde

1. Diameter; 2. Hadamard; 3. Aehnlich;
4. Pentagon; 5. Addition; 6. Zissoide;
7. Bhaskara; 8. Schenkel
Gesuchtes Wort: Mantisse

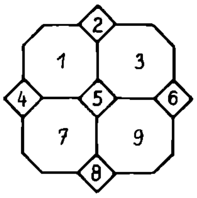
Für Hobbyhistoriker

Laut Aufgabe ist 1 Faß + 20 Eimer = 3 Faß; also sind 20 Eimer = 2 Faß, so daß 1 Faß = 10 Eimer ist. Außerdem sind 19 Faß + 1 Nasadka + $15\frac{1}{2}$ Eimer = 20 Faß + 8 Eimer, woraus man 1 Nasadka = 1 Faß − $7\frac{1}{2}$ Eimer = $2\frac{1}{2}$ Eimer und somit 1 Faß = 4 Nasadka errechnet. 1 „Vedro“ ≈ 12 Liter.

Für Naturfreunde

Das erste Huhn kriegte 18, das zweite 20, das dritte 22 Körner mit.

Für Zahlenakrobatiker



Für Logiker

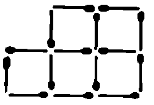
Es ist die 2. Zahl das Querprodukt, die 3. Zahl die Quersumme und die 4. Zahl die alternierende Quersumme der 1. Zahl. Es ist folglich $x = 120$, $y = 15$ und $z = 3$.

Für Osterhasenfans

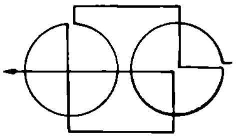
Zwei mögliche Lösungen:

$$\begin{array}{rr} 83\,620 & 69\,370 \\ +83\,620 & +69\,370 \\ \hline 167\,240 & 138\,740 \end{array}$$

Für Trickkünstler



Für Könner



Lösungen zu:
Ein interessanter Bildungsweg

▲B$_1$▲ $\tan\alpha = \sqrt{2}$
▲B$_4$▲ a) $0{,}5 \leqq a \leqq 1{,}5$
▲P$_1$▲ a) $A \setminus B \cup C$ b) $A \cap C \setminus B$
c) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ d) $C \cup B \setminus A$
e) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$
f) $A \cap B \cap C$
▲P$_2$▲ $a < 2$: keine Lösung; $a = 2 : x = 1$;
$2 < a < 3 : x_1 = 3 - a,\ x_2 = a - 1$
$a \geqq 3 : x_1 = \frac{3-a}{3},\ x_2 = \frac{3+a}{3}$
▲P$_3$▲ Hinweis:
$m^3 - 3m^2 + 4 = (m-2)^2 \cdot (m+1)$
▲S$_5$▲ keine Lösung
▲S$_6$▲ $x = 0$
▲S$_8$▲ $(2; 4; 6), (-2; -4; -6)$
▲T$_1$▲ b) 29,57 c) 6,26
▲T$_2$▲ b) 1. Parallelogramm:
$\alpha = 66{,}7°,\ \beta = 113{,}3°,\ A = 16{,}8\ \text{cm}^2$
2. Parallelogramm:
$\alpha = 113{,}3°,\ \beta = 66{,}7°,\ A = 7{,}85\ \text{cm}^2$
▲T$_3$▲ a) $\alpha = 53{,}1°,\ \beta = 67{,}4°,\ \gamma = 112{,}6°,\ \delta = 126{,}9°$ b) $69\ \text{cm}^2$
▲U$_1$▲ $n = 8$
▲U$_2$▲ nein
▲U$_4$▲ 0,116

Lösungen zur Sprachecke

▲1▲ Finde die Linie
Die Zeichnung zeigt zwei Parallelogramme in derselben Ebene. Es ist sehr leicht, jedes in zwei flächengleiche Teile zu zerlegen. Wir können in jedem für sich eine Linie finden, welche diese Teilung liefert. Aber kannst du eine Gerade finden, welche beide Parallelogramme in zwei kongruente Teile zerlegt? Ja, du kannst. Versuche diese Linie zu finden.
Lösung: Jedes Parallelogramm hat ein Zentrum. Jede Linie durch dieses Zentrum teilt das Parallelogramm in zwei kongruente Teile. Die Verbindungslinie der zwei Zentren erfüllt dies in beiden Parallelogrammen.

▲2▲ Es ist bekannt, daß $a + \frac{1}{a}$ eine ganze Zahl ist. Beweise, daß dann auch $a^3 + \frac{1}{a^3}$ eine ganze Zahl ist.

Lösung: Wenn $a + \frac{1}{a} = z$ $(a \neq 0)$ eine ganze Zahl ist *, dann ist es sicher auch

$$z^3 - 3z = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3a - 3 \cdot \frac{1}{a} = a^3 + \frac{1}{a^3}.$$

w. z. b. w.
* Daß ein solches z existiert, überprüft man leicht, indem man $a = 1$ setzt.

▲3▲ Drei Kreise
Die Kreise (1), (2) und (3) haben alle einen Durchmesser von 2 m. Die Gerade (D) ist Tangente an den Kreis (3), d. h. $\overline{O_3T}$ ist senkrecht zu $\overline{AT}$.
Bestimme die Länge der Strecke BC!
Lösung: H sei der Fußpunkt des Lotes von O_2 auf die Gerade AT. Nach dem Satz des Pythagoras folgt im Dreieck O_2HC:

$$\overline{HC}^2 = 1 - \overline{O_2H}^2 \qquad (1).$$

Nach dem Strahlensatz ergibt sich:

$$\frac{\overline{O_2H}}{\overline{O_3T}} = \frac{\overline{AO_2}}{\overline{AO_3}} = \frac{3}{5} \text{ bzw. } \overline{O_2H} = \frac{3}{5}, \text{ da } \overline{O_3T} = 1.$$

Unter Verwendung von (1) erhält man:

$$\overline{HC}^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}, \text{ also } \overline{HC} = \frac{4}{5}.$$

Da das Dreieck BO_2C gleichschenklig ist, gilt:

$$\overline{BC} = 2 \cdot \overline{HC} = \frac{8}{5}.$$

Die Strecke $\overline{BC}$ ist also 1,60 m lang.

Lösungsskizzen zu: Landeswettbewerb Mathematik Rheinland-Pfalz

1. Die Kugelanzahl auf einer Kante sei n, wobei $n \in N$ und $n \geqq 2$ gilt. Von diesen n Kugeln bilden genau 2 Kugeln die Enden eines Verbindungsstabes und $n - 2$ Kugeln sind „innere" Kugeln. Nun besteht der Würfel aus genau 12 Kanten und 8 Ecken, so daß sich die Gesamtzahl der Kugeln zu $12(n-2) + 8$ ergibt. Die in der Tabelle fehlenden Zahlen lauten also: 104, 8, 11 984 (in dieser Reihenfolge).

2. Der Schuhmacher möge an einem Tag x Paare Sandalen zuschneiden und y Paare zugeschnittener Sandalen zusammennähen. x und y seien dabei natürliche Zahlen und es muß $x \geqq y$ gelten, da er nur zugeschnittene Sandalen zusammennähen kann. Da der Schuhmacher $\frac{1}{15}$ Tag zum Zuschneiden eines Paares und $\frac{1}{10}$ Tag zum Zusammennähen eines Paares benötigt, verbraucht er für den obigen Vorgang $x \cdot \frac{1}{15} + y \cdot \frac{1}{10}$ Tag. Es muß also $\frac{x}{15} + \frac{y}{10} \leqq 1$ und damit $2x + 3y \leqq 30$ gelten. Wegen $x \geqq y$ folgt $5y \leqq 2x + 3y \leqq 30$, also $y \leqq 6$. Da sicher danach gefragt ist, wieviel Paare er maximal an einem Tage aus noch nicht zugeschnittenem Leder herstellen kann, ergibt sich $y = 6$ und hieraus $x = 6$. Der Schuhmacher kann also 6 Paare an einem Tag aus noch nicht zugeschnittenem Leder herstellen.

3. Die Diagonalen $\overline{DF}$ und $\overline{AC}$ des Vierecks $ADCF$ halbieren einander, denn E ist Mittelpunkt von $\overline{AC}$ und es gilt $\overline{ED} = \overline{EF}$. Damit ist das Viereck $ADCF$ ein Parallelogramm. $\overline{CD}$ ist im gleichseitigen Dreieck ABC Seitenhalbierende und damit gleichzeitig Höhe. Also gilt $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ und mithin $\sphericalangle ADC = 90°$. Folglich ist das Parallelogramm $ADCF$ sogar ein Rechteck. (Die verwendeten Eigenschaften kann man als bekannt zitieren, oder sie über die Kongruenzsätze beweisen.)

4. Es ist z. B.
$4 = 77 : 7 - 7,\ 5 = 7 - (7 + 7) : 7,$
$6 = (7 \cdot 7 - 7) : 7,\ 7 = (7 - 7) \cdot 7 + 7.$

5. Von e Einwohnern stieg die Einwohnerzahl in einem Jahr auf
$e + \frac{6}{100}e = 1{,}06e$ und das Müllvolumen m erhöhte sich in diesem Jahr auf $1{,}02m$. Damit produzierte die neue Einwohnerzahl
$\frac{1{,}02}{1{,}06} \cdot 100\,\% = 96{,}22\ldots\,\%$ und mithin wurden durchschnittlich 3,8 % Müll eingespart.

Lösung zur Schachecke

Holger erzielt 5 und Christian 4 Punkte. Somit verbleiben von den 15 gespielten Partien noch 6 Punkte für Angela, Katrin, Frank und Martin, und bei gleichem Stand erzielten sie jeweils 1,5 Punkte. Martin verlor nur gegen Holger und Christian und spielte gegen Katrin, Frank und Angela remis.

Lösungen zu: Für Aufgabenfans

5. Die Karte trug die Nummer 4788.
6. Ursprünglicher Flächenumfang 30 cm; veränderter Umfang 37,5 cm;
a) $2 \cdot (9 + x + 6) = 37{,}5;\ x = 3{,}75;$
b) $2 \cdot (9 + 6 + x) = 37{,}5;\ x = 3{,}75;$
Das Rechteck muß um 3,75 cm verlängert bzw. verbreitert werden.
7. Endet die Zahl 2^4 auf 6, so auch 2^{4n}; Wegen $12^{100} = 12^{4 \cdot 25}$ endet diese Zahl auf 6.
8. An mindestens 10 % der Tage.
9. Einzige Lösung: $x = 5$
10. Der Ballon befindet sich 1135 m über dem See.

Erster mathematischer Unfall

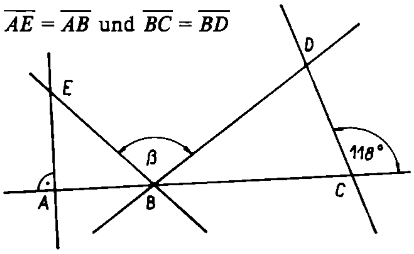
Ein Rechteck fuhr mit dem Quadrat
auf einem schnellen Motorrad.
Doch kamen beide nicht sehr weit!
Zu hoch war die Geschwindigkeit.
Woran sie beide nicht gedacht,
in einer Kurve hat's gekracht.
Sie rammten eine Häuserwand,
an der man sie verunglückt fand.
Nun waren beide Invalid:
ein Rhombus und ein Rhomboid.

Ehrenfried Winkler
aus: H.-D. Hornschuh, Humor rund um die Mathematik, Manz Verlag, München

Kurz nachgedacht

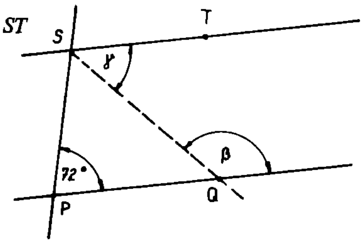
1. Wie groß ist β? Begründe!

$\overline{AE} = \overline{AB}$ und $\overline{BC} = \overline{BD}$



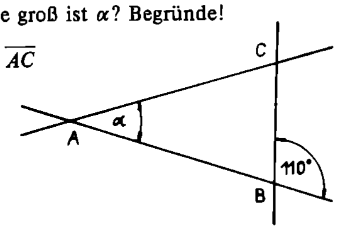
2. SQ sei die Halbierende des Winkels $\sphericalangle PSF$. Wie groß sind die Winkel β und γ? Begründe!

$PQ \parallel ST$

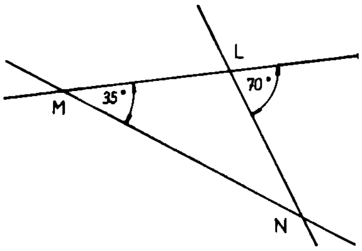


3. Wie groß ist α? Begründe!

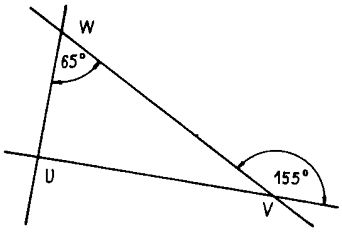
$\overline{AB} = \overline{AC}$



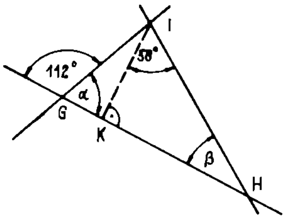
4. Begründe, daß $\overline{LM} = \overline{LN}$!



5. Begründe, daß $UV \perp UW$!

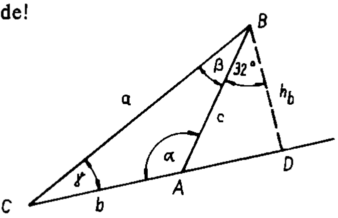


6. Wie groß sind die Winkel α, β und $\sphericalangle GIK$? Begründe!



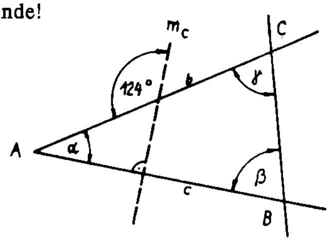
7. Wie groß sind die Winkel α, β und γ? Begründe!

$b = c$

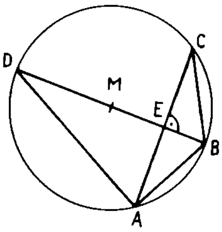


8. Wie groß sind die Winkel α, β und γ? Begründe!

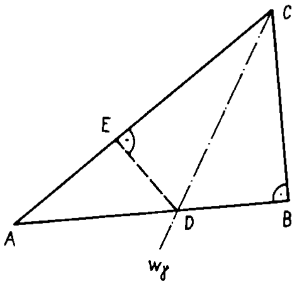
$b = c$



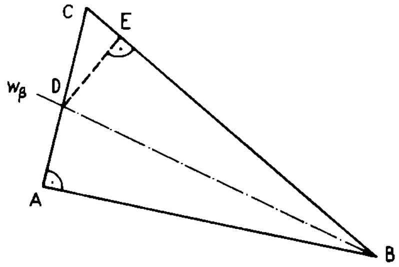
9. Beweise, daß $\triangle ABD \sim \triangle EBC$!



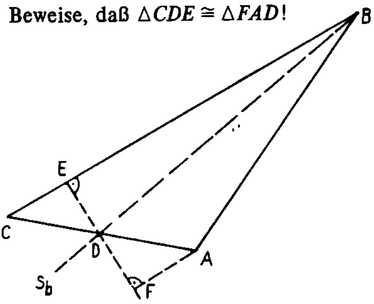
10. Beweise, daß a) $\triangle DBC \sim \triangle DCE$ b) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$!



11. Beweise, daß $\triangle ABD \cong \triangle BDE$!



12. Beweise, daß $\triangle CDE \cong \triangle FAD$!



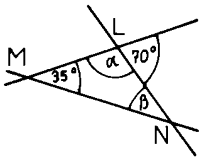
Lösungen:

1. $\beta = 180° - 45° - 56° = 79°$

2. $\gamma = 54°$, $\beta = 126°$

3. $\alpha = 40°$

4. $\overline{LM} = \overline{LN}$ genau dann, wenn $\beta = 35°$.
Vollwinkel um L: $360° = 2 \cdot 70° + 2 \cdot \alpha$;
$\alpha = 110°$
Winkelsumme im $\triangle$: $\alpha + \beta + 35° = 180°$;
$\beta = 180° - 145° = 35°$, w. z. b. w.

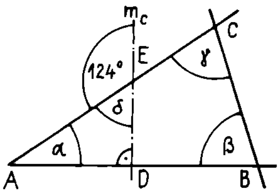


5. $UV \perp UW$ genau dann, wenn $\sphericalangle WUV = 90°$.
Vollwinkel um V: $2 \cdot 155° + 2 \cdot \sphericalangle UVW = 360°$;
$\sphericalangle UVW = 25°$;
Winkelsumme im $\triangle UVW$:
$65° + 25° + \sphericalangle WUV = 180°$;
$\sphericalangle WUV = 90°$, w. z. b. w.

6. $\alpha + 112° = 180°$ (Nebenwinkel); $\alpha = 68°$;
$\triangle kHI$: $90° + \beta + 58° = 180°$; $\beta = 32°$;
$\triangle GHI$: $\alpha + \beta + \sphericalangle GIH = 180°$; $\sphericalangle GIH = 80°$;
$\sphericalangle GIK = 22°$.

7. Winkelsumme im $\triangle ADB$:
$\sphericalangle BAD + 90° + 32° = 180°$; $\sphericalangle BAD = 58°$;
$\alpha + \sphericalangle BAD = 180°$ (Nebenwinkel); $\alpha = 122°$;
Winkelsumme im $\triangle CAB$: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$;
$\gamma = \beta\ (b = c)$;
$2\alpha + 122° = 180°$; $\alpha = 29°$; $\gamma = 29°$

8. Vollwinkel um E: $2 \cdot 124° + 2 \cdot \delta = 360°$;
$\delta = 56°$
Winkelsumme im $\triangle ADE$: $\alpha + 90° + \delta = 180°$;
$\alpha = 34°$;
Winkelsumme im $\triangle ABC$: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$;
$2\beta + 34° = 180°$ $(b = c)$; $\beta = \gamma = 73°$



9. I) $\sphericalangle ADB \cong \sphericalangle ACB$ (Peripheriewinkel zu $\overset{\frown}{AB}$)
II) $\sphericalangle DAB \cong \sphericalangle CEB$ (Satz des Thales)
$\triangle ABD \sim \triangle EBC$ nach Hauptähnlichkeitssatz

10. a) $\triangle DBC \sim \triangle DCE$ nach Hauptähnlichkeitssatz, denn $\sphericalangle DEC \cong DBC$ und (da w_γ) $\sphericalangle ECD \cong \sphericalangle DCB$.
b) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ nach Hauptähnlichkeitssatz, denn $\sphericalangle AED \cong \sphericalangle ABC = 90°$ und $\sphericalangle EAD \cong \sphericalangle CAB$.

11. I) $\sphericalangle DAB \cong \sphericalangle DEB = 90°$
II) $\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle DBE$ (da w_β)
III) $\overline{BD} = \overline{BD}$
$\triangle ABD \cong \triangle BDE$ nach *wsw*

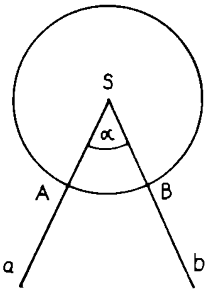
12. I) $\sphericalangle CDE = \sphericalangle FDA$ (Scheitelwinkel)
II) $\sphericalangle DCE \cong \sphericalangle DAF$(Innenwinkelsumme im $\triangle$)
III) $\overline{CD} = \overline{DA}$ (S_b – Seitenhalbierende)
$\triangle CDE \cong \triangle DFA$ wegen *wsw*

Dreiteilung eines beliebigen Winkels

Die Dreiteilung oder Trisektion eines beliebigen Winkels ist ein bekanntes Problem der Geometrie, das im klassischen Sinne – d. h., nur durch Anwendung von Zirkel und Lineal – nicht lösbar ist.
Allerdings ist eine exakte Konstruktion (keine Näherungskonstruktion) bei Erweiterung der zugelassenen Instrumentariums möglich. Das Verfahren soll am folgenden Beispiel demonstriert werden:

Gegeben sei ein beliebiger Winkel $\sphericalangle(a, b)$ (Bild 1).

Bild 1



Der vorliegende Sachverhalt könnte auch als der Grundriß eines geraden Kreiszylinderkörpers, dessen Achse durch den Scheitelpunkt S des Winkels $\sphericalangle(a, b)$ geht, interpretiert werden (Bild 2).

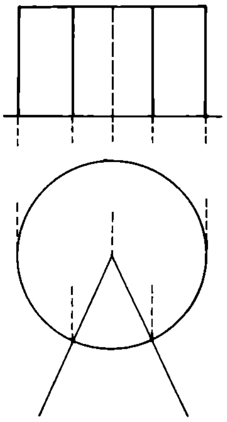
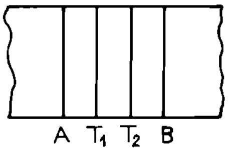


Bild 2

Durch Abwicklung des Zylindermantels oder eines entsprechenden Teils desselben wird der Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ zur Strecke $\overline{AB}$, die mit Hilfe des Strahlensatzes leicht in drei gleiche Teile geteilt werden kann (Bild 3).

Bild 3

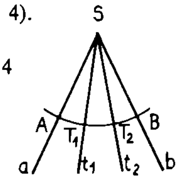


Die mit T_1 und T_2 bezeichneten Teilungspunkte der Strecke $\overline{AB}$ werden dann nach Wiederherstellung der Ausgangslage des Mantels zu Punkten des Kreisbogens $\overset{\frown}{AB}$. Es gilt also

$$\overset{\frown}{AT_1} \cong \overset{\frown}{T_1T_2} \cong \overset{\frown}{T_2B}.$$

Somit hat jeder der drei Teilwinkel $\sphericalangle(a, t_1)$, $\sphericalangle(t_1, t_2)$ und $\sphericalangle(t_2, b)$ die Größe $\frac{\alpha}{3}$ (Bild 4).

Bild 4



Die beschriebene Methode läßt sich für jede Winkelteilung von beliebigen Winkeln anwenden und somit ist die Konstruktion beliebiger regelmäßiger n-Ecke stets ausführbar, freilich nicht allein mit Zirkel und Lineal.
Zur Ausführung der Konstruktion benötigt man daneben noch den Mantel eines geraden Kreiszylinders. Es ist zweckmäßig, einen oben offenen Hohlkörper mit durchsichtiger Grundfläche zu verwenden. Durchmesser und Höhe des Zylinders sind beliebig wählbar; beispielsweise $d = 6$ cm, $h = 3$ cm.

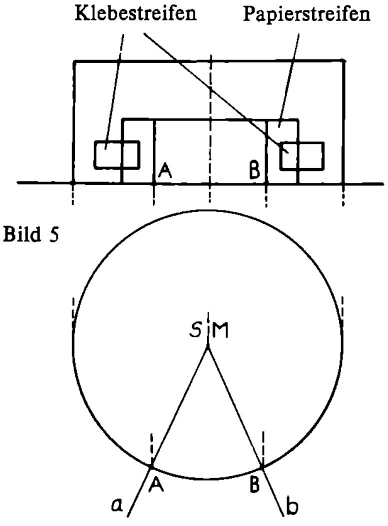
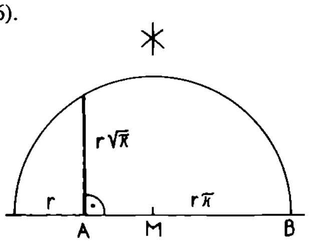


Bild 5

In Bild 5 ist der beschriebene Hohlkörper mit einem am Zylindermantel befestigten Papierstreifen versehen. Der Mittelpunkt M des Grundkreises und der Radius $\overline{MA}$ sind auf der Grundfläche eingezeichnet. Der abnehmbare Papierstreifen bildet nunmehr den Zylindermantel bzw. eines Teils davon. Setzt man den Hohlzylinder so auf das Zeichenblatt, daß der Mittelpunkt M der Grundfläche auf den Scheitelpunkt S des Winkels $\sphericalangle(a, b)$ und der Radius $\overline{MA}$ auf den Schenkel a zu liegen kommen, dann lassen sich die Schnittpunkte der Schenkel mit dem Zylindermantel auf dem Papierstreifen markieren. Diese Punkte seien A und B. Nach Abnehmen des Papierstreifens vom Zylinder kann die Strecke $\overline{AB}$ in drei oder auch mehr gleiche Teile geteilt werden. Durch Befestigen des Papierstreifens am Zylinder wird die Ausgangslage wiederhergestellt.
Der Punkt A liegt auf a, der Punkt B auf b und M auf S.
Jetzt können die Teilungspunkte auf dem Zeichenblatt markiert und mit S verbunden werden. Damit ist die Teilung des Winkels in drei gleiche Teile (bzw. in n gleiche Teile) vollzogen.
Der bei der Konstruktion verwendete Zylinder öffnet den Weg auch noch für die Lösung eines anderen Problems. Markiert man nämlich die Schnittpunkte der Schenkel eines gestreckten Winkels auf dem Papierstreifen, so ist die Länge des Kreisbogens $\overset{\frown}{AB}$ genau $r\pi$. Addiert man dazu noch den Radius des Zylinders, so läßt sich hier der Höhensatz anwenden. Die Länge der so konstruierten Strecke beträgt dann genau $r\sqrt{\pi}$. Der Flächeninhalt des mit dieser Seitenlänge konstruierten Quadrates beträgt genau $r^2\pi$. Die Quadratfläche ist demnach genausogroß wie die Grundfläche des verwendeten Zylinders. Die Konstruktion führt somit zur Quadratur des Kreises (Bild 6).

Bild 6



Aus dem Radius und dem halben Umfang des Grundkreises des Zylinders läßt sich ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren. Der halbe Kreisumfang hat nämlich die Länge $r\pi$. Mit Hilfe dieses feststehenden Dreiecks kann die Konstruktion weiterer Quadratseiten wegen der Proportionalität auf Kreise mit beliebigem Radius angewandt werden (Bild 7).

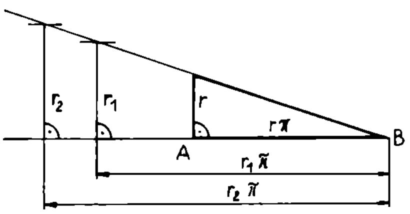


Bild 7

M. Walter