Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

20 JAHRE OLYMPIADEN JUNGER MATHEMATIKER

1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
15. Jahrgang 1981
Preis 0,50 M
Index 31 059

Redaktionskollegium:
Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig); Dozent Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer K. Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes (Bad Doberan); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent Dr. H. Lohse (Leipzig); Nationalpreisträger Oberstudienrat Dr. R. Lüders (Berlin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin); Dozent Dr. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer Dr. H. Schulze (Leipzig); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. habil. W. Walsch (Halle), Verdienter Lehrer des Volkes
Redaktion:
StR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1080 Berlin, Krausenstr. 50 · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos bzw. Vignetten: Zentralbild (S. 1); Eigenfoto (S. 5); K.-H. Guckuk, Leipzig (S. 7/IV. U.-Seite); Bildstelle Karl-Marx-Universität Leipzig (S. 8); Plaste-Tafel, Haus der JP Karl-Marx-Stadt (S. 11); Junge Welt/Glocke, Berlin; J. Lehmann, Leipzig; Zentralbild, H. Richter, Gera; L. Ortner, Eichwalde (alle IV. U.-Seite).
Titelblatt: W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128–ISSN 0002–6395

Redaktionsschluß: 29. Oktober 1980

Mathematische Schülerzeitschrift

Dieses Heft wurde in Zusammenarbeit *alpha*–Zentrales Komitee der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR gestaltet.

Inhalt

1 20 Jahre Olympiaden Junger Mathematiker der DDR [5]*
Grußadressen von Fliegerkosmonaut S. Jähn und H. Labs, Sekretär des Zentralrats der FDJ und Vors. der Pionierorganisation *Ernst Thälmann*

2 Zwei Jahrzehnte Olympiaden Junger Mathematiker [5]
Prof. Dr. H. Bausch und Oberlehrer D. Müller, Vorsitzender bzw. Sekretär des Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

4 Gruß aus der UdSSR – Eine sowjetische Olympiadeaufgabe [9]
Dozent A. R. Sawin, Moskau

6 Zwei Olympiadeaufgaben – verschiedene Lösungen [10]

7 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Kurt Rosenbaum [9]
Sektion Math./Phys. der Päd. Hochschule *Dr. Th. Neubauer*, Erfurt/Mühlhausen

8 Aus der Arbeit der Mathematischen Schülergesellschaft des Bezirks Leipzig (MSG) [6]
Dipl.-Lehrer C. P. Helmholz, Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität*, Leipzig

9 Ideen am Schachbrett [9]
Prof. Dr. H. Bausch/Dipl.-Lehrer E. Jähnig, Ingenieurhochschule Berlin-Wartenberg

10 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht speziell für Klasse 5/6
Vier in einer Reihe [5]
Dr. Ch. Bandt, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt-Universität*, Greifswald

11 ABC-Mathematik-Olympiaden [4]
J. Lehmann, Leipzig – Dr. M. Hoffmann, Rat des Bezirkes Erfurt, Abt. Vobi/Schüler, D. Deimling, Erfurt – Dipl.-Lehrer M. Rehn, Fachberater im Stadtbezirk Leipzig-Süd

12 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]

14 Zwei Geometrieaufgaben von Jörg Pietschmann, Stendal [9]

15 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt Deutsch-polnischer Wettstreit [7]
Oberl. Dr. D. Hornauf/Studienr. R. Böhme, Rat des Bezirkes Frankfurt (Oder), Abt. Vobi

16 Mädchen meistern Mathematik [9]
Preisträger der XIX. Mathematikolympiade stellen Aufgaben

17 Die Aufgabenkommission – Herz der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR [5]
J. Lehmann, Leipzig/Dr. L. Stammler, Sekt. Mathem. der *Martin-Luther-Universität*, Halle

18 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

20 *alpha* stellt vor: Dr. W. Burmeister, Dipl.-Math. Ursula Felgenhauer, Dipl.-Lehrer H. Schneider, Doz. Dr. U. Kühler, Dipl.-Math. Christine Wilde [5]

22 Lösungen [5]

III. U.-Seite: *alpha*-Wettbewerb: Preisträger, Vorbildliche Leistungen, Abzeichen in Gold [5]

IV. U.-Seite: Bilddokumentation: 20 Jahre OJM [5]

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet.

Zwei Jahrzehnte Olympiaden Junger Mathematiker

Der Zentralrat der FDJ grüßt und beglückwünscht anläßlich der XX. Mathematikolympiade der DDR alle *Jungen Mathematiker* und ihre Lehrer.

Mit ihrem Wirken auf mathematischem Gebiet geben Tausende Mitglieder der *Freien Deutschen Jugend* und der *Pionierorganisation Ernst Thälmann* ein Beispiel für das Streben nach hohem Wissen und schöpferischem Arbeiten.

Die *Olympiaden Junger Mathematiker* der DDR sind ein überzeugender Beweis dafür, wie sich in unserem sozialistischen Vaterland Begabungen und Talente entfalten können.

Das Beschäftigen mit der Mathematik schafft gute Voraussetzungen für berufliche Meisterschaft. Mathematisches Wissen ist eine wesentliche Bedingung, um den Anforderungen der wissenschaftlich-technischen Revolution gerecht zu werden und ihre Ergebnisse für das Wohl unseres Volkes zu nutzen.

In diesem Sinne sind die Leistungen der FDJ-Mitglieder und Pioniere, die an der Jubiläumsolympiade teilnehmen, ein würdiger Beitrag zur Vorbereitung des X. Parteitages der SED. Möge die Olympiadebewegung auch weiterhin viele FDJ-Mitglieder und Pioniere der Oberschulen anregen, sich intensiv mit der Mathematik zu beschäftigen und ihr Talent für die Meisterung von Wissenschaft und Technik bei der Gestaltung der entwickelten sozialistischen Gesellschaft in unserem Land einzusetzen.

Vorsitzende der Pionierorganisation *Ernst Thälmann*
und Sekretär des Zentralrates der Freien Deutschen Jugend

- Die Schüler sollen basteln und knobeln können, forschen und konstruieren lernen, denn gerade dies fördert Liebe zur Wissenschaft, Interesse für Technik, das Bedürfnis nach schöpferischer Tätigkeit.
- Die Jugend muß vor allem lernen, daß es nur vorwärts gehen kann, wenn man selbst etwas tut; vor allem müssen wir sie befähigen, Probleme selbst zu lösen, Schwierigkeiten selbst zu überwinden.

Aus dem Referat des Ministers für Volksbildung auf dem VIII. Päd. Kongreß

Liebe Jugendfreunde!

Das kameradschaftliche Kräftemessen von *Jungen Mathematikern* ist in unserer Republik im Rahmen der Mathematikolympiadebewegung stark verwurzelt.

Viele gute Mathematiker sind daraus hervorgegangen und stehen heute in unserer Gesellschaft ihren Mann, auch in der Zusammenarbeit mit der Sowjetunion und den anderen sozialistischen Ländern. So soll es auch in Zukunft sein.

Ihr werdet, dessen bin ich gewiß, in den kommenden Jahren in Instituten und Betrieben eine verantwortungsvolle Arbeit leisten. Darauf kann sich keiner früh und intensiv genug vorbereiten. Wer an der Spitze des wissenschaftlich-technischen Fortschritts marschieren will, der braucht gründliche mathematische Kenntnisse, ganz besonders in jenen Zweigen und Richtungen, die maßgeblich die Leistungskraft der Volkswirtschaft bestimmen. Dazu gehört auch die Weltraumforschung. Sie repräsentiert in unserer Zeit den wissenschaftlich-technischen Höchststand.

Ich wünsche Euch, liebe *Junge Mathematiker*, ein erfolgreiches Lösen der schwierigen Aufgaben, das Finden neuer, interessanter Lösungswege, hohe Punktzahlen und erlebnisreiche gemeinsame Stunden.

Fliegerkosmonaut der DDR

Mit stürmischem Beifall begrüßten die Teilnehmer des VIII. Pädagogischen Kongresses den ersten Fliegerkosmonauten der DDR, Sigmund Jähn, im Präsidium.

20 Jahre Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

Im Schuljahr 1980/81 findet die XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR statt.
Diese Jubiläumsolympiade wollen wir zum Anlaß nehmen, um all denjenigen Mathematiklehrern und Mitarbeitern des Hochschulwesens und anderer Institutionen, die seit vielen Jahren unermüdlich helfen, die Mathematikolympiaden aller Stufen zu einem Höhepunkt in der außerunterrichtlichen Arbeit auf mathematischem Gebiet zu gestalten, ein herzliches Dankeschön zu sagen.
Ohne diese vielen ehrenamtlichen Helfer, die regelmäßig mit unseren Pionieren und FDJ-Mitgliedern arbeiten, sie für die Mathematik begeistern, wäre es unmöglich, eine erfolgreiche Bilanz zu ziehen.
Am 17. Dezember 1962 wurde durch das Politbüro des ZK der SED und durch den Ministerrat der DDR der Beschluß „Zur Verbesserung und weiteren Entwicklung des Mathematikunterrichtes in den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen der DDR" gefaßt.
Dieser Beschluß war eine Aufforderung und Verpflichtung, auch in der außerunterrichtlichen mathematischen Betätigung nach höheren Leistungen zu streben. Die Olympiade Junger Mathematiker, mit deren Durchführung wir in der DDR gerade erst begonnen hatten, nahmen einen deutlichen Aufschwung. Sie waren in den folgenden Jahren ein wesentlicher Anstoß dafür, daß an den meisten Schulen, in den Kreisen und Bezirken entsprechende Arbeitsgemeinschaften gebildet wurden. Das führte auch dazu, daß es heute in allen Bezirken der DDR Mathematische Schülergesellschaften bzw. Bezirksklubs Junger Mathematiker gibt, die kontinuierlich mit einer großen Anzahl mathematisch interessierter Schüler arbeiten, welche bereits auf Schul- und Kreisebene ihre Fähigkeiten bewiesen haben.
Die Olympiaden Junger Mathematiker haben in der außerunterrichtlichen Betätigung unserer Schüler eine wichtige Funktion. Dabei geht es niemals nur darum, Spitzenleistungen zu erreichen. Vorrangig steht das Ziel, zur Entwicklung des mathematischen Wissens und Könnens möglichst vieler Schüler anzuregen und beizutragen.
Es kommt darauf an, in der außerunterrichtlichen mathematischen Arbeit noch mehr Schüler für diese interessante Wissenschaft zu begeistern, aktivierende Veranstaltungen an den Schulen und außerschulischen Einrichtungen durchzuführen und dabei die einzelnen Stufen der Olympiade zu einem Höhepunkt und festen Bestandteil des Wettstreitens der FDJ-Mitglieder bzw. Jungen Pioniere zu gestalten.
An der Entwicklung eines „mathematischen Klimas" sollten auch alle Mitglieder von mathematischen Arbeitsgemeinschaften und nicht zuletzt die Leser der Zeitschrift *alpha* mitwirken. Gerade die vielen Beispiele und Erfahrungen, die in der *alpha* dargestellt werden, geben für diese Arbeit an den Schulen zahlreiche Anregungen.
Für viele Schulen sind mathematische Wandzeitungen, Knobelecken u. ä. eine Selbstverständlichkeit. Hier können sich alle Schüler Anregungen holen, werden Aufgaben und ihre Lösungen veröffentlicht und natürlich auch die jeweiligen Stufen der Mathematikolympiade ausgewertet.
Eine schöne und wertvolle Tradition ist es auch, die Delegierten der Schule zu einer höheren Olympiadestufe in würdiger Weise vorzustellen, z. B. während eines Appells oder durch die Veröffentlichung ihres Fotos mit dem erreichten Ergebnis nach der Olympiade. Das spornt an und gibt Mut für die nächsten Aufgaben.
Es ist doch ein schönes Erlebnis, die eigene Schule bei einem so anspruchsvollen Wettbewerb vertreten zu dürfen.
Mit welchem Eifer und gesundem Ehrgeiz unsere Pioniere und FDJler an die Lösung der Olympiadeaufgaben herangehen, kann man in den Wettbewerben der zweiten, dritten und vierten Stufe erleben. Mit Recht werden deshalb an vielen Schulen auch jene Schüler gewürdigt, die keine Preise erringen konnten, sich aber gewissenhaft auf den Wettbewerb vorbereitet und dort ihre besten Leistungen gebracht haben.
Natürlich ist es auch für den Leiter einer Arbeitsgemeinschaft ein anspornender Erfolg, wenn seine Schützlinge erfolgreich an den Olympiaden teilgenommen haben. Viel Arbeit verbirgt sich dahinter, und gerade auf mathematischem Gebiet dauert es oftmals sehr lange, bis sich erste Erfolge einstellen.
Vielfältig sind die Bemühungen in den Bezirken, die 1. Stufe der Olympiade so zu gestalten, daß sie möglichst für viele Schüler interessant und anregend ist. So werden z. B. in den Bezirken Cottbus, Frankfurt (Oder) und Suhl Mannschaftswettbewerbe durchgeführt, die gut geeignet sind, viele Schüler an die 1. Stufe der Olympiade heranzuführen. Wir brauchen diese Breitenwirkung, da sie eine wesentliche Grundlage für die Entdeckung und zielgerichtete Förderung unserer mathematischen Talente darstellt. Das entspricht der Orientierung, wie sie auf dem VIII. Pädagogischen Kongreß durch den Minister für Volksbildung gegeben wurde. Genossin Margot Honecker sagte dort: „Nach wie vor gibt es Grund zu betonen, daß die Arbeitsgemeinschaften, Zirkel, Klubs allen Schülern offenstehen müssen, daß jede Einengung auf wenige Spezialisten genauso falsch wäre wie der Verzicht auf die zielgerichtete Förderung der Talente."
Jeder Schüler, der sich für die Mathematik interessiert, sollte die Möglichkeit haben, sich in einer entsprechenden Arbeitsgemeinschaft, einem Zirkel, einem Klub oder irgendeiner anderen Form aktiv und schöpferisch zu betätigen. Die besten Jungen Mathematiker können ihr Wissen in den zentralen Zirkeln des Kreises, des Bezirkes oder sogar der DDR erweitern. Natürlich wachsen damit auch die Anforderungen. Besonders hohe stellt der Korrespondenzzirkel, der durch die Mathematische Gesellschaft der DDR jährlich für etwa 40 ausgewählte Schüler durchgeführt wird.
In vielen Kreisen und Bezirken gibt es während der Sommerferien Spezialistenlager, in denen sich die Jungen Mathematiker mit ihrer Wissenschaft beschäftigen können und gleichzeitig auch frohe Ferientage erleben.

In Vorbereitung auf die 4. Stufe werden von den meisten Bezirken in den Winterferien Lehrgänge durchgeführt. Die Erfahrungen zeigen, daß die außerunterrichtliche Arbeit auf mathematischem Gebiet wirksam die allseitige Persönlichkeitsentwicklung der Schüler unterstützt, deshalb sollte sie überall breit gefördert werden. Die Beschäftigung mit der Mathematik trägt auch dazu bei, daß bei vielen Pionieren und FDJ-Mitgliedern solche hervorragende Charaktereigenschaften wie Gründlichkeit, Fleiß, Beharrlichkeit, Ausdauer stärker ausgeprägt sind. Nicht zuletzt wird durch eine ständige Beschäftigung mit

mathematischen Problemen das logische Denkvermögen sehr stark geschult.

Sicher ist es ein erstrebenswertes Ziel, einmal an der 4. Stufe der Olympiade teilzunehmen und sich dort mit den Jungen Mathematikern der Republik zu messen. Besonders groß ist natürlich die Begeisterung, wenn es dabei gelingt, einen Preis oder sogar einen Platz unter den Kandidaten der DDR für eine Internationale Mathematikolympiade zu erringen. Das ist aber nur mit einer kontinuierlichen, fleißigen Arbeit zu erreichen. Günstige Bedingungen haben dafür die Schüler, die sich schon frühzeitig an den Aufgaben einer höheren Olympiadeklasse versuchen. Dazu gehört natürlich eine entsprechende Vorbereitung. Diese Schüler, wir nennen sie Frühstarter, haben dann auch die Möglichkeit, früher Teilnehmer der 4. Stufe der Mathematikolympiade zu werden, und sie schneiden bei der Preisverteilung meist auch sehr gut ab. So haben z. B. alle „Frühstarter" der Olympiadeklasse 11/12, die während der XIX. Olympiade Junger Mathematiker an der 4. Stufe teilgenommen haben, einen Preis erhalten; in der Olympiadeklasse 10 waren 50% der Preisträger „Frühstarter".

Für die erfolgreichsten Jungen Mathematiker werden in jedem Jahr drei zentrale Spezialistenlager durchgeführt, in denen auch die Vorbereitung auf Internationale Mathematikolympiaden erfolgt. Diese Lager stellen hohe Anforderungen, und zwar nicht nur an die Teilnehmer, sondern auch an die Lehrkräfte. Es wird dort sehr intensiv gearbeitet. Kennzeichnend dafür ist, daß für eine Veranstaltungsstunde von seiten der Lehrkraft etwa 7 bis 10 Stunden Vorbereitungszeit aufgewendet werden müssen.

Wir sind jedoch der Meinung, daß sich dieser Aufwand lohnt. Dabei denken wir nicht allein und zuerst an ein gutes Abschneiden bei Internationalen Olympiaden. Eine systematische Förderung vorhandener mathematischer Begabungen ist ein wichtiges Erfordernis, das zunehmend an Bedeutung gewinnt, besonders hinsichtlich der wachsenden Rolle der Mathematik auf allen Gebieten unserer gesellschaftlichen Entwicklung.

Eine Vielzahl ehemaliger Olympioniken, die auch dazu beigetragen haben, daß sich die Mannschaften der DDR bei den Internationalen Mathematikolympiaden durch die erreichten Ergebnisse (siehe Tabelle) und ihr Auftreten einen guten Ruf erwerben konnten, sind heute anerkannte Wissenschaftler. Einige von ihnen stellen wir in diesem Heft der *alpha* vor.

Stellvertretend für viele seien hier nur Dr. Wolfgang Burmeister (der erfolgreichste aller Teilnehmer der bisherigen Internationalen Mathematikolympiaden), Dr. Monika Noack (die bis heute einzige IMO-Preisträgerin der DDR) und Prof. Dr. sc. Konrad Schmüdgen (der erste zum Professor berufene IMO-Teilnehmer der DDR) genannt.

Natürlich sind nicht alle ehemaligen erfolgreichen Olympioniken Mathematiker geworden; meist haben sie sich jedoch einem mathematikintensiven Beruf zugewandt. Wir kennen viele, die sich heute als Ingenieure, Physiker, Offiziere der NVA usw. an verantwortungsvollen Stellen in unserer sozialistischen Gesellschaft bewähren. Dabei ist es wegen des wachsenden Kaderbedarfs und derzeitig bereits vorhandenen Kadermangels besonders wichtig, aus dem Kreis der mathematisch interessierten und begabten Schüler Bewerber für den Beruf eines Mathematiklehrers bzw. Diplom-Mathematikers zu gewinnen. Hier gibt es lobenswerte Initiativen an der EOS Herzberg (Bezirk Cottbus). Es ist dort gelungen, die außerunterrichtliche Betätigung auf mathematischem Gebiet sehr gut mit der Berufsorientierung und Berufslenkung zu verbinden.

Sehr beachtenswert ist, daß sich viele ehemalige Olympioniken zur Verfügung stellen, um in ihrem Wirkungskreis, auf Kreis- und Bezirksebene sowie auch im zentralen Maßstab ihr Wissen und Erfahrungen an ihre „Nachfolger" zu vermitteln. Trotzdem können gerade in dieser Hinsicht noch viele Reserven erschlossen werden.

Mit Freude und auch beachtlichem Stolz können wir feststellen, daß sich die Arbeit gelohnt hat. Worauf es jetzt mehr denn je ankommt, ist, an den Schulen, in den einzelnen Klassen, möglichst viele Schüler für die Beschäftigung mit der Mathematik anzuregen. Das ist natürlich vor allem eine Aufgabe unserer Mathematiklehrer. Von seiten der Olympiaden wollen wir ihre Bemühungen durch eine noch bessere Differenzierung der Art und des Schwierigkeitsgrades der in den einzelnen Stufen gestellten Aufgaben unterstützen. Die 1. Stufe soll für viele Schüler interessant sein, soll sie „anlocken". Zwei Aufgaben sollen dabei die obere Leistungsgrenze derjenigen Schüler fordern, die den laufenden Schulstoff ohne größere Schwierigkeiten verarbeiten. In der 2. bis 4. Stufe sind dann in zunehmendem Maße Spitzenleistungen gefragt.

Da es für eine erfolgreiche Beschäftigung mit der Mathematik nötig ist, sehr zeitig (etwa in der 4. und 5. Klasse) mit einer kontinuierlichen Förderung zu beginnen, tragen auch hier unsere Pädagogen eine hohe Verantwortung. Dabei läßt sich die ABC-Olympiade sinnvoll einbeziehen. Natürlich ist es gar nicht so einfach, eine mathematische Begabung bereits in diesem Alter zu erkennen. Diese Frage muß – als Hilfe für unsere Lehrer – in den nächsten Jahren noch wissenschaftlich untersucht werden. Zu prüfen wäre auch, ob zukünftig die 3. bzw. 4. Stufe evtl. bereits Schülern der 5. und 6. bzw. 9. Klassen zugänglich gemacht werden kann.

Auch in vielen anderen Ländern gibt es regelmäßig durchgeführte nationale Mathematikolympiaden, wenn auch z. T. unter anderem Namen. Die älteste Tradition haben Ungarn (1894) und die Sowjetunion (1935). Entsprechend ist bei der IMO die Anzahl der Teilnehmerländer immer größer und die internationale Konkurrenz immer stärker geworden (s. Tabelle Seite 5). Damit wachsen aber auch die Anforderungen an die Vorbereitung der teilnehmenden Schüler.

Bei allem Zufriedensein über das Abschneiden unserer Mannschaften unter den inzwischen mehr als 20 Ländern wollen wir nicht übersehen, daß wir 1972 nur zwei erste Preise erringen konnten, und daß es auch nicht einfach ist, einmal Erreichtes zu verteidigen.

Für die nachrückenden Olympioniken gibt es also lohnenswerte Ziele, und die XX. OJM, die wir als unsere Rechenschaftslegung zum X. Parteitag der SED auffassen, sollte einen neuen Ansporn dazu geben!

Die Meisterung der Mathematik ist eine schöne Aufgabe, für die es sich lohnt, die ganze Kraft einzusetzen.

H. Bausch/D. Müller

Von den Schülern der DDR errungene Preise bei Internationalen Mathematikolympiaden

IMO	Gastgeber	Jahr	1. Preis	2. Preis	3. Preis
I	Rumänien	1959	–	–	–
II	Rumänien	1960	–	–	–
III	Ungarn	1961	–	–	1
IV	ČSSR	1962	–	1	–
V	Polen	1963	–	–	3
VI	UdSSR	1964	–	1	2
VII	DDR	1965	–	2	3
VIII	Bulgarien	1966	3	3	–
IX	Jugoslawien	1967	3	3	1
X	UdSSR	1968	5	3	–
XI	Rumänien	1969	–	4	4
XII	Ungarn	1970	1	2	4
XIII	ČSSR	1971	1	1	4
XIV	Polen	1972	1	3	4
XV	UdSSR	1973	–	3	4
XVI	DDR	1974	–	5	2
XVII	Bulgarien	1975	–	4	4
XVIII	Österreich	1976	–	2	3
XIX	Jugoslawien	1977	2	1	1
XX	Rumänien	1978	nicht teilgen.		
XXI	Großbritannien	1979	–	2	2

Grüße zum Jahreswechsel

$$1^9 \cdot 8 + 0 = 1^{9 \cdot 8^1}$$
$$1 \cdot 9 \cdot 8^0 = 1^9 \cdot \sqrt{81}$$
$$1 \cdot \sqrt{9} + 8 \cdot 0 = \sqrt[1+\sqrt{9}]{81}$$
$$1 + 9 + 8 + 0 = 1 + 9 + 8 \cdot 1$$
$$19^{(8+0)} = 19^{(8 \cdot 1)}$$
$$\sqrt{1 \cdot 9} + \sqrt{8+0!} = \sqrt{1 \cdot 9} + \sqrt{8+1}$$

$$1^9 + 8^0 = 1^9 + \sqrt[8]{1}$$
$$1 + 9 + 8^0 = 1 + 9 + \sqrt[8]{1}$$
$$1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 0! = 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1$$

Dr. M. Krebs, Dresden

Gruß aus der UdSSR

Liebe Junge Mathematiker!
Mir ist es eine große Freude, euch zum Jubiläum eurer Mathematik-Olympiaden beglückwünschen zu können.
Die Freundschaft zwischen Schülern der DDR und der UdSSR wird immer besonders während der Internationalen Mathematik-Olympiaden deutlich. Die Freundschaftstreffen der Mannschaften aus unseren beiden Ländern sind stets besonders bewegend und zudem sehr fröhlich. Die *Jungen Mathematiker* tauschen Souvenirs und Abzeichen. Schließlich stellen sie sich auch gegenseitig Aufgaben.
Wir möchten diese Tradition fortsetzen, indem ich euch das Abzeichen der Allunionsolympiaden der Schüler auf den Gebieten Mathematik, Physik und Chemie sowie eine Aufgabe der vergangenen Allunions-Mathematikolympiade überreiche:

Auf dem Durchmesser AC eines Kreises ist ein Punkt E gegeben. Man zeichne eine Sehne BD derart durch E, daß der Flächeninhalt des Vierecks ABCD maximal wird.

Dozent A. R. Sawin, Leiter der UdSSR-Mannschaft zu den Internat. Mathematikolympiaden

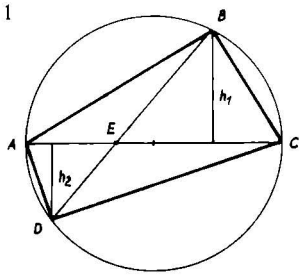
Lösung:

Auf den ersten Blick scheint die Aufgabe nicht besonders interessant zu sein. Aufgaben mit ähnlichen Formulierungen sind euch sicher schon öfter begegnet.
Aber – beginnen wir lieber mit der Lösung!
Wir zeichnen einen Kreis, legen einen Durchmesser AC beliebig fest, markieren auf ihm einen Punkt E und zeichnen schließlich durch diesen Punkt eine Sehne BD. Die so erhaltenen Punkte A, B, C und D bilden die Ecken eines Vierecks (Bild 1). Der Flächeninhalt dieses Vierecks ist gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Dreiecke ABC und CDA. Bezeichnen wir die Höhen dieser Dreiecke, deren Fußpunkte jeweils auf dem Durchmesser liegen, mit h_1 und h_2, dann gilt für den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$

$$A_v=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot h_1+\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot h_2=\frac{1}{2}\overline{AC}(h_1+h_2)$$
$$=R(h_1+h_2),$$

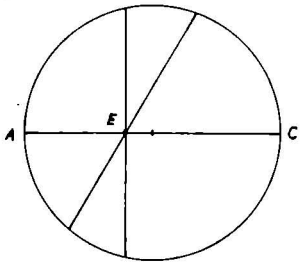
wo R den Radius des Kreises bezeichnet.

Bild 1



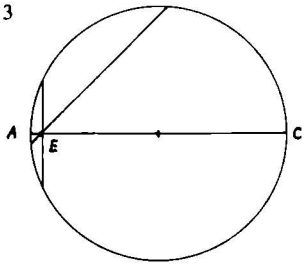
Nun bemerken wir, daß die Größe h_1+h_2 gleich der Länge der Projektion der Sehne BD auf eine Gerade ist, die senkrecht zum Durchmesser AC verläuft. Daraus folgt, daß die Fläche dann größer wird, wenn die Projektion der Sehne auf die Senkrechte zu AC größer wird.
Versuchen wir zu erraten, wie die Sehne verlaufen muß, damit sich die längste Projektion auf die Senkrechte ergibt. Betrachten wir dazu das Bild 2.

Bild 2



Scheint es nicht klar zu sein, daß die Länge der senkrechten Sehne (sie fällt mit ihrer Projektion zusammen) größer ist als die Längen der Projektionen aller anderen Sehnen?
Legen wir aber E nahe an die Kreislinie, dann zeigt die entsprechende Zeichnung (Bild 3), daß Vorsicht geboten ist. Tatsächlich strebt die Länge der senkrechten Sehne bei Annäherung des Punktes E an die Kreislinie gegen Null, während die Länge der Projektion der unter einem Winkel von 45° gegen AC geneigten Sehne gegen den Wert R strebt.

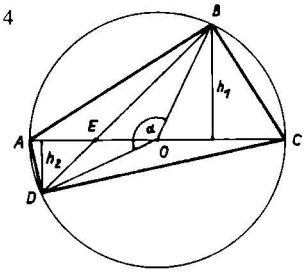
Bild 3



Wie muß nun die gesuchte Sehne tatsächlich gelegt werden?
Wir versuchen jetzt, der Lösung von einer anderen Seite her beizukommen, und betrachten das Dreieck OBD (Bild 4). Der Durchmesser AC teilt dieses in zwei Dreiecke EOB und OED, und sein Flächeninhalt ist dann gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke EOB und OED, also gleich

$$\frac{1}{2}\overline{EO}\,h_1+\frac{1}{2}\overline{EO}\,h_2=\frac{1}{2}\overline{EO}(h_1+h_2).$$

Bild 4

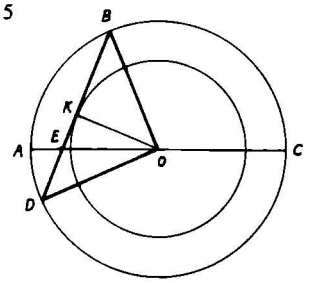


Daraus erkennt man aber leicht, daß sich die Flächeninhalte des Vierecks $ABCD$ und des Dreiecks OBD wie $2R:\overline{EO}$ verhalten, und dieses Verhältnis ist bei gegebenem Punkt E konstant, hängt also nicht von der Neigung der Sehne BD ab. Somit wird der Flächeninhalt unseres Vierecks genau dann maximal, wenn der Flächeninhalt des Dreiecks OBD maximal ist. Letzteren können wir aber auch auf andere Weise angeben, und zwar beträgt er

$$\frac{1}{2}R^2\sin\alpha,$$

wo α die Größe des Winkels $\sphericalangle DOB$ bezeichnet, und er wird dann maximal, wenn $\sin\alpha$ seinen größten Wert annimmt. Dieser größte Wert von $\sin\alpha$ ist aber gleich 1 und wird für $\alpha=90°$ angenommen. Die Konstruktion einer

Bild 5

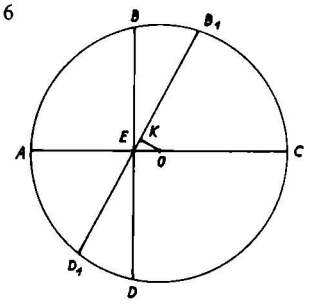


Sehne BD, für die der Winkel $\sphericalangle DOB$ ein rechter wird, ist nicht sehr schwierig. Da das Dreieck OBD gleichschenklig und rechtwinklig ist und seine Katheten die Länge R haben, hat seine Höhe OK die Länge $\frac{R}{\sqrt{2}}$ (Bild 5). Also ist die gesuchte Sehne BD Tangente an den Kreis mit dem Radius $\frac{R}{\sqrt{2}}$ um den Punkt O.

Man konstruiere also eine Tangente an diesen Kreis vom Punkte E aus und verlängere sie nach beiden Seiten bis zum Schnitt mit dem großen Kreis. Man erhält die gesuchte Sehne BD und – die Aufgabe ist gelöst! ...?

Aber Stop! – Wenn nun E innerhalb des kleineren Kreises liegt? Dann existiert die entsprechende Tangente doch gar nicht! Wir lenken nun unsere Aufmerksamkeit darauf, daß das Dreieck OBD dann immer stumpfwinklig ist. Ist aber α ein stumpfer Winkel, dann ist $\sin\alpha$ am größten, wenn α selbst am kleinsten ist, und das ist gerade dann der Fall, wenn BD senkrecht auf AC steht. (Also ist die ursprüngliche Vermutung in diesem Fall richtig.) Die letzte Aussage müssen wir aber erst noch beweisen. Betrachten wir dazu die senkrechte Sehne BD und eine geneigte Sehne B_1D_1 durch E (Bild 6). Auf B_1D_1 fällen wir von O aus das Lot OK. Dann gilt offensichtlich $\overline{OE} > \overline{OK}$, weil die erste Strecke Hypotenuse, die zweite aber Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck ist. Andererseits ist $\overline{OB} = \overline{OB_1} = \overline{OD} = \overline{OD_1}$, so daß der Winkel $\sphericalangle D_1OB_1$ in der Tat größer als $\sphericalangle DOB$ ist. Damit ist die Aufgabe nunmehr vollständig gelöst. Ich hoffe, daß sie euch nun doch gefallen hat. *A. R. Sawin*

Bild 6



Wollt ihr an einem reichhaltigen Leben teilhaben, so füllt eure Köpfe mit Mathematik, solange ihr dazu die Möglichkeit habt. Sie wird euch in eurer gesamten Arbeit große Hilfe leisten. *M. J. Kalinin*

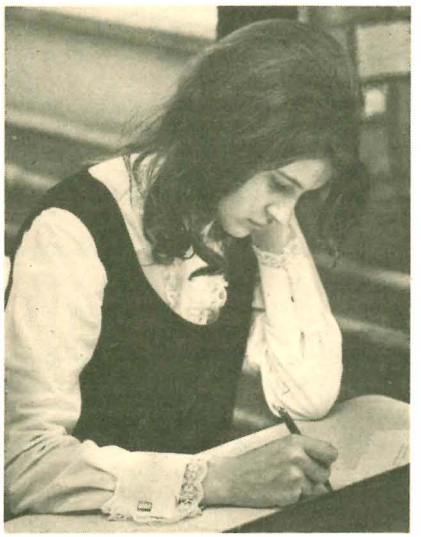
Die Mathematik gehört nicht irgendwie einem Volke, sondern ist wahrhaftig international. Es gibt kein Land, das nicht mit ihr Freundschaft hielte, das ihre Schätze nicht mehrte und rühmte.

A. Markuschewitsch

Die Mathematik soll helfen, die Produktionsprozesse und die Organisation der Arbeit mathematisch zu erfassen, mancherlei Vorteile zu verschaffen und allen Problemen, die bei der Untersuchung eines Betriebes auftreten, Konkretheit zu verleihen. *N. K. Krupskaja*

Der Mensch, der nicht gelernt hat, selbständig zu denken, schenkt den abstrakten Formeln einen zu ehrfürchtigen Glauben und befindet sich deshalb in einem ständigen Zustand der Kollision mit dem Leben.

E. Iljenkow



Internationale Mathematikolympiaden
Punktspiegel (inoffizielle Länderwertung)

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.	XV.	XVI.	XVII.	XVIII.	XIX.	XX.	XXI.
Teilnehmerland	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
Bulgarien	131	176	108	196	145	198	93	238	159	204	189	145	39	120	96	171	186	174	172	182	150
ČSSR	192	257	159	212	151	194	159	215	159	248	170	150	55	130	149	158	162	116	161	195	178
DDR	40	38	146	153	140	196	175	280	257	304	240	221	142	239	188	236	249	142	163	–	180
Kuba	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	(9)	(14)	(42)	(65)	–	(16)	(38)	68	(35)
Jugoslawien	–	–	–	–	162	155	137	224	136	179	181	209	71	136	137	216	163	116	159	171	172
Mongolische VR	–	–	–	–	–	169	63	88	87	74	120	78	26	48	64	60	75	–	48	61	–
Polen	122	–	230	212	134	209	178	269	101	262	119	105	118	160	174	138	124	138	157	156	160
Rumänien	249	248	197	257	191	213	222	257	214	208	219	208	110	206	131	199	180	118	122	237	240
UdSSR	(111)	–	–	263	271	269	281	293	275	298	231	221	205	270	254	–	246	250	192	–	267
Ungarn	233	248	270	289	234	253	244	281	251	291	247	233	255	263	215	–	258	160	190	–	176
SR Vietnam	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	(146)	(175)	112	–	200	(135)
BRD	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	(8)	165	184	235
Finnland	–	–	–	–	–	–	62	–	–	–	–	–	–	–	86	111	–	52	88	118	89
Frankreich	–	–	–	–	–	–	–	–	(41)	–	119	141	38	–	153	194	176	165	127	179	155
Großbritannien	–	–	–	–	–	–	–	–	231	263	193	180	110	179	164	188	241	214	190	201	218
Italien	–	–	–	–	–	–	–	–	(110)	132	–	–	–	–	–	–	–	–	(22)	–	–
Schweden	–	–	–	–	–	–	–	–	135	256	104	110	(43)	60	99	187	160	118	137	117	143
Belgien	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	57	–	–	–	–	–	–	–	(32)	–	66
Niederlande	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	51	87	48	51	96	112	67	78	185	157	135
Österreich	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	104	(82)	136	144	212	192	167	151	174	152
USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	243	247	188	202	225	199
Türkei	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	66	–
Griechenland	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	95	50	–	–	57
Algerien	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	(17)	–	–
Israel	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	119
Brasilien	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	(19)
Luxemburg	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	(7)

Hinweis: Bei in Klammern gesetzten Punktzahlen nahmen weniger als 8 Schüler am Wettbewerb teil. Im Jahre 1980 fand keine IMO statt.

Zwei Olympiadeaufgaben – verschiedene Lösungen

Die Aufgabe 5, Klassenstufe 10, der 4. Stufe der XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR lautete:

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $\sqrt{x^2+5x+28}$ (als reelle Zahl) definiert ist und die die Gleichung

$$x^2+5x+4=5\sqrt{x^2+5x+28} \qquad (1)$$

erfüllen!

Als erstes soll die Lösung der Aufgabenkommission wiedergegeben werden.

Lösung A

Angenommen, eine reelle Zahl x habe die genannten Eigenschaften. Dann gilt $x^2+5x+28 \geqq 0$ und, wenn man $y=\sqrt{x^2+5x+28}$ setzt, $y^2-24=5y$. Diese quadratische Gleichung hat nur die Lösungen $y=8$ und $y=-3$, so daß eine der Gleichungen $x^2+5x+4=40$ bzw. $x^2+5x+4=-15$ folgt. Von diesen beiden Gleichungen besitzt nur die erste reelle Lösungen, und zwar nur $x=-9$ und $x=4$.

Also können höchstens diese beiden Zahlen die geforderten Eigenschaften haben.

Sie haben diese Eigenschaften auch, denn es gilt

$(-9)^2+5(-9)+28=64\geqq 0$ bzw. $4^2+5\cdot 4+28=64\geqq 0$, also existiert für diese Zahlen x die Wurzel $\sqrt{x^2+5x+28}$, und es gilt

$(-9)^2+5(-9)+4=40=5\cdot 8$

$=5\sqrt{(-9)^2+5(-9)+28}$ bzw.

$4^2+5\cdot 4+4=40=5\cdot 8=5\sqrt{4^2+5\cdot 4+28}$. (2)

Daher erfüllen genau die Zahlen $x=-9$ und $x=4$ die Bedingungen der Aufgabe.

Es gab bei der Lösung dieser Aufgabe eine Vielfalt von Lösungsvarianten, von denen hier einige in bearbeiteter und gekürzter Form dargestellt werden sollen.

Lösung B (Martin Ranzinger, Berlin, Frühstarter)

Es gilt $x^2+5x+28=(x+2{,}5)^2+21{,}75$ (3)

Für alle reellen Zahlen x ist somit $x^2+5x+28 \geqq 0$.

$\sqrt{x^2+5x+28}$ ist also für alle reellen Zahlen x als reelle Zahl definiert. Wie in A wird nun $y=\sqrt{x^2+5x+28}$ substituiert, wobei $y\geqq 0$ gelten muß, und $y^2-24=5y$ erhalten, wobei, wegen $y\geqq 0$, die Lösung $y=-3$ sofort ausgeschlossen werden kann.

Wie in A werden $x=-9$ und $x=4$ als einzige mögliche Lösungen ermittelt.

(2) von A bestätigt sie als Lösungen.

Lösung C (Jochen Lattermann, Dresden, Frühstarter)

Wie in B wird zunächst gezeigt, daß $\sqrt{x^2+5x+28}$ für alle reellen Zahlen x als reelle Zahl definiert ist.

Aus (3) von B folgt auch, daß $x^2+5x+28>9$ für alle reellen Zahlen ist.

Es wird $a=x^2+5x+28$ substituiert, wobei $a>9$ gelten muß. Aus (1) erhält man dann, daß $a-24=5\sqrt{a}$ gelten muß. Durch Quadrieren erhält man $a^2-48a+576=25a$. Diese quadratische Gleichung hat nur die Lösungen $a=64$ und $a=9$. Wegen $a>9$, braucht nur $a=64$ betrachtet zu werden. Es muß also $64=x^2+5x+28$ gelten. Diese quadratische Gleichung hat nur die Lösungen $x=-9$ und $x=4$. Also können höchstens diese beiden Zahlen die geforderten Eigenschaften haben.

(2) von A bestätigt sie als Lösungen.

Lösung D (Heinz-Olaf Müller, Suhl, Frühstarter)

Wie in B wird zuerst bewiesen, daß $\sqrt{x^2+5x+28}$ für alle reellen Zahlen x als reelle Zahl definiert ist.

Aus (1) erhält man durch Quadrieren und Zusammenfassen

$x^4+10x^3+8x^2-85x-684=0$. (4)

Es ist

$x^4+10x^3+8x^2-85x-684$

$=(x^2+5x-8{,}5)^2-27{,}5^2$

$=(x^2+5x-36)(x^2+5x+19)$.

Aus (4) ergibt sich somit $(x^2+5x-36)(x^2+5x+19)=0$. Wenn ein Produkt Null ist, so muß es auch ein Faktor sein. Die Gleichung $x^2+5x-36=0$ wird nur für $x=-9$ und $x=4$ erfüllt, wohingegen die Gleichung $x^2+5x+19=0$ für keine reelle Zahl x erfüllt ist.

Also können höchstens $x=-9$ und $x=4$ die geforderten Eigenschaften besitzen.

(2) von A bestätigt sie als Lösungen.

Lösung E (Axel Siebert, Frankfurt (Oder))

Die Lösung verläuft wie bei D bis zu

$x^4+10x^3+8x^2-85x-684=0$. (4)

Nun wird folgender Teil des Vietaschen Wurzelsatzes benutzt:

Wenn a eine ganzzahlige Lösung von (4) ist, so ist a ein Teiler von $684=2^2\cdot 3^2\cdot 19$.

Durch systematisches Probieren wurden $x=4$ und $x=-9$ als ganzzahlige Lösungen von (4) ermittelt und durch Partialdivision

$x^4+10x^3+8x^2-85x-684=(x-4)(x+9)$

$(x^2+5x+19)$ erhalten.

Der weitere Lösungsweg verläuft wie bei D.

Auswertung der Schülerergebnisse:

Wie nicht anders zu erwarten, fanden fast alle Schüler einen Zugang zur Aufgabe, wobei etwa 65% der Lösungen in ihrem Ansatz dem der Lösungen A bis C ähnelten. Die übrigen Schüler gelangten zu der in D genannten Gleichung 4. Grades (4) in x.

Mehr als 70% der Teilnehmer fand auch die Lösungen $x=4$ und $x=-9$. Dabei fiel auf, daß vielen der Stellenwert der „Probe" ((2) von Lösung A) nicht klar war bzw. falsch (es wurde von der Behauptung ausgegangen) geführt wurde.

Dies führte zu folgendem Ergebnis:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	3	7	12	7	3	12	33	40

Dr. H. W. Harnau, Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock – Koordinator bei den zentralen Olympiaden Junger Mathematiker

Die Aufgabe 2, Klassenstufe 10, der 4. Stufe der XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR lautete:

Beweisen Sie, daß die folgende Gleichheit gilt!

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\ldots+\frac{1}{465}-\frac{1}{466}$$

$$=\frac{1}{234}+\frac{1}{235}+\frac{1}{236}+\ldots+\frac{1}{465}+\frac{1}{466}.$$

Von den Lösungen sollen hier einige vorgestellt werden.

1. *Viele Teilnehmer* gingen von der behaupteten Gleichung aus und formulierten sie im wesentlichen wie folgt um:

$$1-\frac{1}{2}+-\ldots+\frac{1}{233}=\frac{2}{234}+\frac{2}{236}+\ldots+\frac{2}{466}$$

$$1-\frac{1}{2}+-\ldots+\frac{1}{233}=\frac{1}{117}+\frac{1}{118}+\ldots+\frac{1}{233}$$

Diese Gleichung ist von gleicher Art wie die Ausgangsgleichung. Sie besitzt aber weniger Summanden. Wendet man diese *Reduzierung* wiederholt an, so erhält man folgende Zwischenergebnisse:

$$1-\frac{1}{2}+-\ldots-\frac{1}{116}=\frac{1}{59}+\frac{1}{60}+\ldots+\frac{1}{116}$$

$$1-\frac{1}{2}+-\ldots-\frac{1}{58}=\frac{1}{30}+\frac{1}{31}+\ldots+\frac{1}{58}$$

$$1-\frac{1}{2}+-\ldots+\frac{1}{29}=\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{29}$$

$$1-\frac{1}{2}+-\ldots-\frac{1}{14}=\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{14}.$$

$$1-\frac{1}{2}+-\ldots+\frac{1}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{7}$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

Die letzte Aussage ist offensichtlich wahr. Da die Umformungen äquivalent sind, ist damit die behauptete Gleichung bewiesen. Etwas kürzer können diese Darlegungen notiert werden, wenn man wie *John Matzke* (Erfurt, 1. Preisträger) und *Joachim Krumnow* (Schwedt, Anerkennung) das Summenzeichen verwendet.

2. Die letzte Überlegung, die einige Schüler außer acht ließen, erübrigt sich, wenn man – wie im *Lösungsvorschlag* der Aufgabenkommission – die Differenz

$$D=\left(1-\frac{1}{2}+-\ldots+\frac{1}{465}-\frac{1}{466}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{234}+\ldots+\frac{1}{466}\right)$$

bildet. Nach völlig entsprechenden Umformungen wie unter 1. ergibt sich $D=0$.

3. Einige der folgenden Lösungen unterstreichen erneut, daß man die Darlegungen wesentlich kürzer notieren kann, wenn man das Summenzeichen benutzt.

Jochen Lattermann (Dresden, 9. Klasse, 1. Preisträger) stellt zunächst die linke Seite der Gleichung $\left(1-\frac{1}{2}+-\ldots+\frac{1}{465}-\frac{1}{466}\right)$ in der Form

$$\sum_{i=1}^{233}\frac{1}{2i-1}+\sum_{i=1}^{233}\left(-\frac{1}{2i}\right) \text{ dar.}$$

Wegen $\left(-\frac{1}{2i}\right)=\left(\frac{1}{2i}-\frac{1}{i}\right)$ ergibt sich weiter

$$\sum_{i=1}^{233}\frac{1}{2i-1}+\sum_{i=1}^{233}\left(\frac{1}{2i}-\frac{1}{i}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{233}\frac{1}{2i-1}+\sum_{i=1}^{233}\frac{1}{2i}-\sum_{i=1}^{233}\frac{1}{i}$$

$$=\sum_{i=1}^{466}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{233}\frac{1}{i}=\sum_{i=234}^{466}\frac{1}{i}.$$

Die letzte Summe ist aber gerade die rechte Seite der behaupteten Gleichung.

Eine entsprechende Lösung legte *Silvia Langner* (Schwarze Pumpe, 3. Preisträger) vor.

4. Mehrere Schüler erkannten, daß hinter der behaupteten Gleichung eine *allgemeine Aussage* über natürliche Zahlen steht:
Für alle natürlichen Zahlen $n\geqq 1$ gilt

$$1-\frac{1}{2}+-\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$
$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}. \qquad (1)$$

Ronald Lehmann (Dresden, Anerkennung) hat sie kurz in folgender Weise geschrieben:

$$\sum_{i=1}^{2n}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}=\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i}. \qquad (2)$$

(Speziell für $n=233$ liegt die ursprüngliche Behauptung vor.)
Zum Beweis wird die *Methode der vollständigen Induktion*[1]) verwendet:
Für $n=1$ ist die Aussage (2) richtig, denn es ist offenbar $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Man zeigt jetzt, daß aus der Gültigkeit von (2) für eine natürliche Zahl $k\geqq 1$ die Gültigkeit von (2) für $n=k+1$ folgt: Wegen

$$\sum_{i=1}^{2(k+1)}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}=\sum_{i=1}^{2k}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}+\frac{1}{2k+1}$$
$$-\frac{1}{2k+2} \text{ und}$$
$$\sum_{i=1}^{2k}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}=\sum_{i=k+1}^{2k}\frac{1}{i} \text{ gilt}$$
$$\sum_{i=1}^{2(k+1)}(-1)^{i+1}\frac{1}{i}=\sum_{i=k+1}^{2k}\frac{1}{i}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$$
$$=\sum_{i=k+2}^{2k+2}\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)$$
$$+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=\sum_{i=(k+1)+1}^{2(k+1)}\frac{1}{i}, \text{ d. h.}$$

dieser „Schluß von k auf $k+1$" gilt. – Damit ist (2) für alle natürlichen Zahlen $n\geqq 1$ bewiesen.

Mathias Thiede (Berlin, 3. Preisträger) gibt einen entsprechenden Beweis, wobei er die Behauptung in der Form

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right)=\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i} \text{ darstellt.}$$

Originell sieht die Lösung von *Thomas Jez* (Herzberg, 9. Klasse) aus. Er kannte wohl das Summenzeichen nicht und definiert dafür induktiv folgende Zeichen „$\|_n$" und „$\|^n$":

$$\|_1 := \frac{1}{1}-\frac{1}{2};\ \|_{n+1} := \|_n+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

bzw. $\|^1 := \frac{1}{2};\ \|^{n+1} := \|^n-\frac{1}{n+1}$

$$+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}.$$

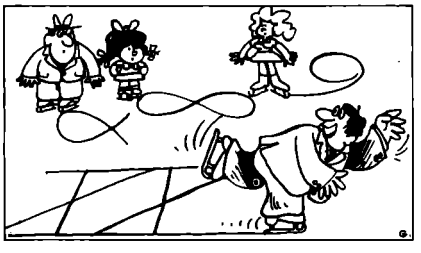
Die Gleichung (1) gewinnt damit die Form $\|_n=\|^n$, und diese beweist er durch vollständige Induktion.
Die allgemeine Gesetzmäßigkeit (1) und einen Beweis durch vollständige Induktion haben folgende Schüler vorgelegt, ohne das abkürzende Summenzeichen zu verwenden: *Jens Jakobi* (Bezirk Potsdam), *Bernd Schmutzler* (Bezirk Karl-Marx-Stadt, 9. Klasse), *Gerald Senckpiel* (Neubrandenburg, 9. Klasse, Anerkennung), *Detlef Bauer* (Bezirk Cottbus).

Auf Grund von $\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n(2n-1)}$ faßt *Peter Domaschke* (Leinefelde, Anerkennung) die allgemeine Behauptung in der Form

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i(2i-1)}=\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i}$$

und beweist dies induktiv.

Dr. E. Quaisser, Sektion Mathematik der Pädagogischen Hochschule Karl Liebknecht, Potsdam – Koordinator bei den zentralen Olympiaden Junger Mathematiker



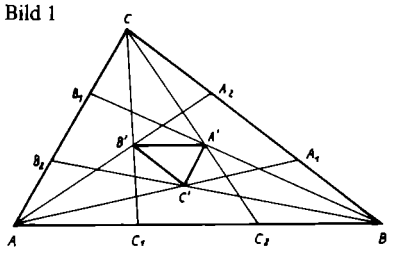
[1]) Den jungen Lesern, die diese mathematische Beweismethode noch nicht kennen, sei das leicht verständliche Büchlein von I. S. Sominski: *Vollständige Induktion* (Deutscher Verlag der Wissenschaften) empfohlen.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Kurt Rosenbaum

Sektion Mathematik der Pädagogischen Hochschule Dr. Th. Neubauer Erfurt/Mühlhausen
Mitglied des Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

▲2053▲ a) (Einfache Variante) Jede Seite eines beliebigen Dreiecks ABC wird in drei gleiche Teile geteilt. Verbindet man jeden Eckpunkt mit den inneren Teilpunkten der gegenüberliegenden Seite, so bilden die gemäß Bild 1 gefundenen Schnittpunkte A', B', C' ein Dreieck mit den Eigenschaften

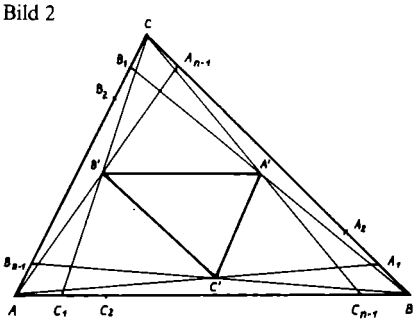
Bild 1



(1) $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$.
(2) Für die Flächeninhalte $F=F_{ABC}$ und $F'=F_{A'B'C'}$ der Dreiecke ABC bzw. $A'B'C'$ gilt
$F=25F'$.

b) (Komplizierte Variante) Jede Seite eines beliebigen Dreiecks ABC wird in n (mit $n>2$) gleiche Teile geteilt. Verbindet man jeden Eckpunkt mit den am weitesten außen liegenden inneren Teilpunkten der jeweils gegenüberliegenden Seite, so bilden die gemäß Bild 2 gefundenen Schnittpunkte $A'B'C'$ ein Dreieck mit den Eigenschaften

Bild 2



(1) $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$.
(2) Für die Flächeninhalte $F=F_{ABC}$ und $F=_{A'B'C'}$ der Dreiecke ABC bzw. $A'B'C'$ gilt
$F=\left(\frac{2n-1}{n-2}\right)^2F'$.

Aus der Arbeit der Mathematischen Schülergesellschaft des Bezirkes Leipzig

Seit 25 Jahren gibt es im Bezirk Leipzig vielfältige Formen der außerunterrichtlichen Arbeit auf mathematischem Gebiet. Ab 1963 wurden diese Bemühungen in zunehmendem Maße durch die Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität unterstützt. Zu einem Höhepunkt dieser Zusammenarbeit zwischen Volksbildung und Universität wurde 1974 die Gründung der *Mathematischen Schülergesellschaft* (MSG).

In diese MSG können Schüler der Klassen 6 bis 12 des Bezirks Leipzig delegiert werden. Voraussetzung sind überdurchschnittliche Leistungen im Fach Mathematik und mindestens gute Leistungen in allen anderen Fächern. Natürlich wird von jedem MSG-Mitglied erwartet, daß es aktiv an der Arbeit der Pionierorganisation bzw. der FDJ teilnimmt.

Die MSG hat sich die Aufgabe gestellt, durch die Förderung der außerunterrichtlichen Tätigkeit von Schülern bei der Erziehung zu allseitig gebildeten sozialistischen Schülerpersönlichkeiten mitzuwirken. Auf der Grundlage des lehrplanmäßigen Mathematikunterrichts sollen die Schüler in einige für die Mathematik typische Arbeitsmethoden, Schlußweisen und Beweisverfahren tiefer eindringen. Ihr Verständnis für das axiomatische und deduktive Vorgehen in der Mathematik, ihre Fähigkeit zu präziser sprachlicher Formulierung und ihr Abstraktionsvermögen sollen weiter entwickelt werden. Dadurch, daß die Schüler vielfältige praktische Anwendungen der Mathematik kennenlernen und noch klarere Vorstellungen über die Bedeutung der Mathematik beim Aufbau der entwickelten sozialistischen Gesellschaft erhalten, wird ihnen geholfen, sich bei der Berufs- und Studienwahl für volkswirtschaftlich wichtige Richtungen entsprechend ihrer persönlichen Begabung verantwortungsbewußt zu entscheiden. Ziel ist es, möglichst viele MSG-Mitglieder für ein Studium in den Fachrichtungen „Diplommathematiker" oder „Diplomlehrer für Mathematik und Physik" zu begeistern.

Die MSG wird von der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig getragen. Wissenschaftliche Mitarbeiter, Forschungs- und Beststudenten der Sektion Mathematik leiten die Arbeit der einzelnen Zirkel. Zur Zeit gibt es 23 Zirkel mit insgesamt 183 Mitgliedern.

Die Zirkelmitglieder treffen sich alle zwei Wochen zu gemeinsamer Arbeit. Natürlich ist es mit diesen Zusammenkünften nicht getan: Im Selbststudium werden Anregungen aus der gemeinsamen Arbeit aufgegriffen, aufgeworfene Fragen weiter verfolgt. Umgekehrt werden Probleme, die sich bei der selbständigen Beschäftigung mit der Mathematik ergaben, oft im Zirkel diskutiert und geklärt. Etwa die Hälfte eines jeden Zirkelnachmittags gehört der Behandlung eines zusammenhängenden Themas, während der Rest der Zeit für ein zielgerichtetes Olympiadetraining genutzt wird. Die Themen knüpfen entweder unmittelbar an den Schulstoff an oder sind weiterführenden Teilgebieten der Mathematik entnommen. Letztere sollen den Schülern einen Eindruck von der Breite und Vielfalt der Mathematik vermitteln. Als Beispiel seien einige Themen aus dem Programm der Klasse 6 genannt:

Arithmetische Beweise unter Verwendung von Variablen – Geometrische Konstruktionen – Wie rechnet ein Computer? (Rechnen mit Dualzahlen) – Einfache indirekte Beweise – Lösungsstrategien für Knobelaufgaben zur Logik – Arbeiten mit Mengen – Extremalprobleme aus der Geometrie.

Manche Themen werden in höheren Klassenstufen erneut aufgegriffen, da sich mit den umfassenderen Schulkenntnissen kompliziertere Probleme bearbeiten lassen. Zwei solcher Themen, die sich von Klasse 6 bis zur Klasse 12 durchziehen, sind: Arbeiten in mathematischen Strukturen, Lösen von Extremalproblemen mit elementaren Mitteln.

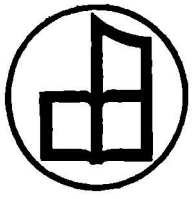
Die entsprechenden Arbeitsmittel für solche komplexen Themen entwickeln Lehrerstudenten der Sektion Mathematik im Rahmen von Diplomarbeiten.

Der Bezirksschulrat, Oberstudienrat Trescher, und der Vorsitzende der MSG, Prof. Dr. Schumann, zeichnen besonders erfolgreiche Mitglieder der MSG aus. Die Auszeichnung erfolgte im Beisein vieler Eltern, die Gast der Eröffnungsveranstaltung des neuen „Lehrjahres" waren.

Eine Aufgabe zum letztgenannten Thema (Klasse 7):

▲1▲ 1978 wurde vor dem neuen Leipziger Universitätskomplex am Karl-Marx-Platz ein Denkmal des berühmten Mathematikers Gottfried Wilhelm Leibniz enthüllt. Das Denkmal ist 8,5 m hoch, wobei der Sockel bereits eine Höhe von 3,3 m hat. In welcher Entfernung vom Denkmal sieht man die Gestalt von Leibniz unter dem größten Winkel, wenn die Augenhöhe des Betrachters 1,5 m beträgt? Diese Aufgabe ist geometrisch-konstruktiv zu lösen.

Die Arbeit in den Zirkeln ist das Hauptfeld der Tätigkeit der MSG. Darüber hinaus halten führende Wissenschaftler und Lehrende der Karl-Marx-Universität Vorträge zu speziellen Themen. In den Sommerferien haben alle MSG-Mitglieder Gelegenheit, am *Bezirksspezialistenlager Junger Mathematiker* teilzunehmen. Dieses wird inhaltlich von der MSG gestaltet. Aktive Erholung in schönen Gegenden unserer Republik wird mit mathematischer Arbeit verbunden. Diese Lager sind Höhepunkt eines jeden Zirkeljahres. In einer Lagerolympiade wird Rechenschaft über das Erreichte abgelegt.



Eine Aufgabe aus einer Lagerolympiade (Klasse 8):

▲2▲ Stelle die Lösungsmenge der Gleichung

$$|y+1| = |x| + 1 \qquad (x \in R; y \in R)$$

in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem grafisch dar!

Wenn in den nächsten Jahren die ersten Schüler, die die MSG ab Klasse 6 durchlaufen haben, ein Studium aufnehmen, hoffen wir, daß sich viele dieser Schüler für den Beruf eines Mathematikers oder Mathematiklehrers entscheiden.

C. P. Helmholz

Ideen am Schachbrett

Wie Aufgaben entstehen können

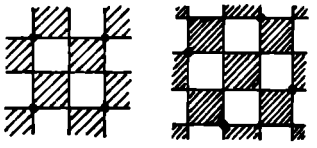
Sicher wird so mancher von euch schon knobelnd vor Olympiadeaufgaben oder anderen mathematischen Fragestellungen gesessen und bei sich gedacht haben: Woher kommen eigentlich solche Aufgaben?
Ein Beispiel für die Entstehung von Aufgaben schildert der folgende Beitrag.

Vorbereitende Betrachtungen

Ein Schachbrett enthält 8^2 quadratische (helle und dunkle) Felder, deren Eckpunkte ein quadratisches Punktegitter von 9^2 Punkten bilden. Nun können vier solcher Punkte aber auch Eckpunkte eines Quadrates sein, das sich von diesen Feldern unterscheidet, wie die Bilder 1 und 2 zeigen. Die sich hier erhebende Frage nach der Anzahl q aller Quadrate, deren Eckpunkte Gitterpunkte sind, ist in der *Trommel* 8/1977 als Aufgabe (für ein Punktegitter mit 8^2 Punkten) erschienen.

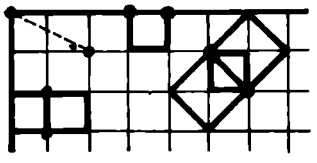
Bild 1

Bild 2



Betrachten wir zwei Gitterpunkte, so können diese für kein, genau ein, genau zwei oder genau drei Quadrate, deren Eckpunkte Gitterpunkte sind, ein Paar von Eckpunkten sein. Bild 3 zeigt dabei einen Teil des Schachbrettrandes. Die Anzahl der Punktepaare, die für genau k solcher Quadrate ($k=0, 1, 2, 3$) Paare von Eckpunkten sind, sei P_k.

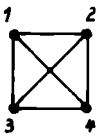
Bild 3



Betrachten wir die zwei einfachsten Beispiele:
1. Bei dem in Bild 4 dargestellten und nur aus einem Feld mit den Eckpunkten 1, 2, 3, 4 bestehenden „Schachbrett" ist $p_0=p_2=p_3=0$ und $p_1=6$, denn jedes der $\binom{4}{2}=6$ Punktepaare (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4) ist ein Paar von Eckpunkten für genau ein Quadrat. Zählen wir bei einem beliebig großen „Schachbrett" mit n^2 Gitterpunkten ($n\geqq 2$) jedes Punktepaar, das für genau k Quadrate ein Paar von Eckpunkten ist, k-fach, so ist

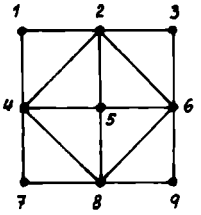
$$\sum_{k=0}^{3} k p_k = 6q \qquad (1)$$

Bild 4



mit q als Anzahl aller Quadrate, deren Eckpunkte Gitterpunkte sind.
2. In Bild 5 enthält das „Schachbrett" 3^2 Gitterpunkte. Die Anzahl aller Punktepaare ist daher $p=\binom{9}{2}=36$, wobei $p_0=p_2=8$, $p_1=20$ und $p_3=0$ ist.

Bild 5



Beispielsweise ist das Punktepaar (1,6) für kein Quadrat ein Paar von Eckpunkten, während die Punktepaare (1,2) bzw. (1,3) bzw. (2,8) für genau ein Quadrat, nämlich das mit den Eckpunkten 1, 2, 4, 5 bzw. 1, 3, 7, 9 bzw. 2, 4, 6, 8 und die Punktepaare (2,4) bzw. (2,5) für genau zwei Quadrate, nämlich die mit den Eckpunkten 1, 2, 4, 5 und 2, 4, 6, 8 bzw. 1, 2, 4, 5 und 2, 3, 5, 6, Paare von Eckpunkten sind.
Klassifizieren Sie so die noch verbleibenden 30 Punktepaare!
Vergleichen wir bei diesen Beispielen die jeweilige Anzahl q aller Quadrate mit der jeweiligen Anzahl p aller Punktepaare, so können wir feststellen, daß

$$6q=p \qquad (2)$$

ist. Falls (2) allgemein für ein „Schachbrett" mit n^2 Gitterpunkten ($n\geqq 2$) gilt, wäre mit (1) und wegen $p=\sum_{k=0}^{3} p_k$

$$\sum_{k=0}^{3} k p_k = \sum_{k=0}^{3} p_k \text{ oder}$$

$$\sum_{k=0}^{3} (k-1)p_k = 0. \qquad (3)$$

Der Beweis für die Allgemeingültigkeit von (2) läßt sich in der Tat erbringen, und die bisherigen Überlegungen verdichten sich zur Formulierung der folgenden Aufgabe:

Erste Variante

Sei n eine natürliche Zahl mit $n\geqq 2$.
In einem kartesischen Koordinatensystem betrachte man alle Quadrate, deren Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten $(x;y)$ mit $1\leqq x,\ y\leqq n$ haben. Sei p_k ($k=0, 1, 2, \ldots$) die Anzahl der Punktepaare, die für genau k solcher Quadrate Paare von Eckpunkten sind.
Man zeige, daß $\sum_k (k-1)p_k = 0$ ist.

Lösung

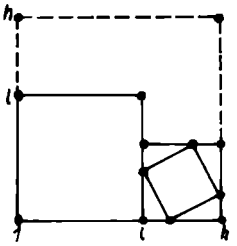
Da die Verbindungsstrecke eines Punktepaares Seite höchstens zweier Quadrate und Diagonale eines dritten sein kann, ist $k=0, 1, 2, 3$.
Die Anzahl aller Punktepaare im Koordinatengitter ist

$$p(n)=\binom{n^2}{2}=\frac{1}{2}n^2(n^2-1). \qquad (4)$$

Die Anzahl der Quadrate, deren Seiten parallel zu denen des Gesamtquadrates sind, ist $\sum_{l=1}^{n-1} l^2$, während die Anzahl der einem solchen Quadrat einbeschriebenen Quadrate $n-l$ ist, wie Bild 6 verdeutlicht. Die Anzahl aller Quadrate ist also

$$q(n)=\sum_{l=1}^{n-1} l^2(n-l)=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n-1}\left[l^2(n-l)+l(n-l)^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}n\sum_{l=1}^{n-1} l(n-l).$$

Bild 6



Wegen (2) besteht die Vermutung

$$6q(n)=p(n) \qquad (5)$$

oder $6\sum_{l=1}^{n-1} l(n-l)=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)$,
was durch vollständige Induktion

$$6\sum_{l=1}^{n} l(n+1-l)=6\left[\sum_{l=1}^{n-1} l(n-l)+\sum_{l=1}^{n} l\right]$$

$$=(n-1)n(n+1)+3n(n+1)=n(n+1)(n+2)$$

bestätigt wird. Aus (5) folgt (3), wie oben gezeigt wurde. Wir erhalten aus (5) jetzt auch die Antwort auf die anfangs aufgeworfene Frage nach der Anzahl aller Quadrate für den Fall $n=9$. Es ist $q(9)=\frac{1}{6}p(9)=\frac{1}{6}p\binom{9^2}{2}=540$.
Für $n=8$ ist $q(8)=\frac{1}{6}(8)=\frac{1}{6}\binom{8^2}{2}=336$.

Betrachten wir nun in dem oben erwähnten Koordinatensystem ein beliebiges Quadrat, dessen Eckpunkte P_m ($m=1, 2, 3, 4$) wieder ganzzahlige Koordinaten haben. Umlaufen wir in der Reihenfolge $P_1\to P_2\to P_3\to P_4$ das Quadrat im mathematisch positiven Sinne wie in Bild 7 und haben wir zwei benachbarte Eckpunkte $P_1(x;y)$ und $P_2(u;v)$ durch ihre Koordinaten festgelegt, so sind die beiden anderen Eckpunkte $P_3(u+(y-v);v+(u-x))$ und $P_4(x+(y-v);y+(u-x))$ durch die Koordinaten von P_1 und P_2 bestimmt. Wenn wir nun von solchen Quadraten alle diejenigen ins Auge fassen, deren sämtliche Eckpunkte sich innerhalb oder auf dem Rande eines Quadrates mit den Eckpunkten $A(1;1)$, $B(n;1)$, $C(n;n)$, $D(1;n)$ befinden, so entsteht eine weitere Aufgabenstellung:

Fortsetzung: siehe Seite 24

Vier in einer Reihe

Das folgende Spiel könnt ihr zu zweit auf kariertem Papier, auf einem Feld der Größe 6 × 6 Kästchen, spielen:

Die Spieler zeichnen abwechselnd ihr Zeichen in ein Kästchen, am besten mit verschiedenen Farbstiften. Wer zuerst vier aneinanderliegende Kästchen in einer Reihe (waagerecht, senkrecht oder diagonal) mit seiner Farbe bzw. seinem Zeichen besetzt hat, hat gewonnen (Bild 1).

Im Beispiel haben die Spieler „+" und „o" schon je zwei Kästchen belegt. Wenn „+" sein Zeichen in das eingerahmte Feld schreibt, hat er drei aneinanderliegende Kästchen in einer Diagonalen besetzt. Im nächsten Zug kann er dann entweder unten oder oben das vierte Kästchen anschließen und ist Sieger. Nachdem ihr einige Runden gespielt habt, wird euch interessieren, welche Züge zum Gewinn führen.

Aufgabe

a) Wieviel Viererreihen lassen sich mit einem Kästchen in einer Ecke, am Rand bzw. in der Mitte des Feldes bilden? Die Antwort zeigt: Es ist am günstigsten, die Kästchen in der Mitte zuerst zu besetzen.

b) Gibt es für den Spieler, der anfängt, einen Spielplan, der ihn sicher zum Gewinn führt?

Reizvoller und bedeutend komplizierter wird das Spiel, wenn 3 oder 4 Spieler teilnehmen, oder wenn man zu zweit „5 in einer Reihe" (auch *Gobang* genannt) spielt. Dazu braucht man ein größeres Feld, etwa 15 × 15.

Lösung

a) Das Ergebnis ist in Bild 1 links unten eingetragen.

b) Der erste Spieler „+" kann bei richtigem Spiel stets gewinnen. Wir geben einen Spielplan für die wichtigsten Fälle an. Die Zeilen des Spielfeldes bezeichnen wir mit Zahlen 1 bis 6 und die Spalten mit den Buchstaben a bis e (wie beim Schach).

Bild 1

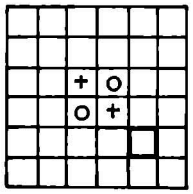
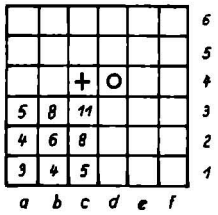


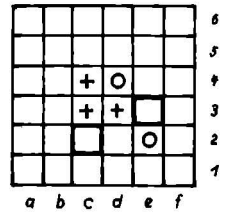
Bild 2



„+" besetzt zuerst das Kästchen c4 (Bild 2).

1. Fall: „o" besetzt ein Kästchen gerade daneben, dies sei d4 (Bild 2). Dann setzt „+" d3. Um zu verhindern, daß „+" vier Kästchen in der Diagonalen bekommt, muß „o" jetzt e2 (oder b5) besetzen. „+" antwortet mit c3 (Bild 3) und kann sich im nächsten Zug mit c2 oder e3 eine „nach beiden Seiten offene Dreierreihe" schaffen. Das heißt, „+" gewinnt im 5. Zug.

Bild 3



2. Fall: „o" besetzt ein Kästchen diagonal daneben, dies sei d3. „+" setzt d5 (oder b3, andere Züge führen nicht sicher zum Gewinn). Um eine offene Dreierreihe zu verhindern, muß „o" b3 besetzen und „+" c3. Nun droht eine offene Dreierreihe auf der c-Linie (Bild 4). Setzt „o" c2, so antwortet „+" c5 und c6 oder b5 im nächsten Zug. Setzt „o" c5, so antwortet „+" d4 und schafft dann mit e4 oder e5 eine offene Dreierreihe. In jedem Fall gewinnt „+" mit dem 6. Zug.

Alle anderen Fälle erfordern nur kleine Änderungen im Spielplan (aber Vorsicht!).

Bild 4

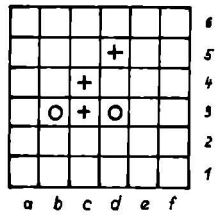
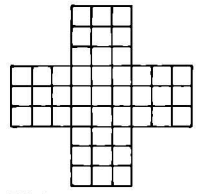


Bild 5



Weiterführende Aufgabe:

Löse die gleichen Aufgaben für ein „Steckhalmafeld"!
(Sie ist noch etwas interessanter.)

Ch. Bandt

Dr. Ch. Bandt ist zur Zeit an der Universität Addis Abeba als Hochschullehrer tätig.

ABC-Mathematik-Olympiade

Jedes Jahr werden die Schüler der Klasse 1 bis 4 im Märzheft der *ABC-Zeitung* aufgefordert, sich an der ABC-Mathematik-Olympiade zu beteiligen. (Die Zeitschrift *Die Unterstufe* informiert die Lehrer jeweils in Heft 2.)

Welches Anliegen haben diese Olympiaden? Sie sollen bei den Schülern von der 1. Klasse an die Liebe zur Mathematik wecken, vorhandenes mathematisches Interesse weiter fördern, die Lust am mathematischen Denken und Knobeln entwickeln helfen und damit zu einer sinnvollen Freizeitbeschäftigung beitragen. Alle Schüler der Klassen 1 bis 4 haben somit die Möglichkeit, ihre Kräfte miteinander zu messen, indem sie die gestellten Aufgaben lösen. Besonders beliebt sind stets Knobel- und Scherzaufgaben. Selbstverständlich werden die Forderungen so bemessen, daß sie nicht über die des Lehrplans hinausgehen. Bei diesen Olympiaden unterscheiden wir zwei Stufen. Die Aufgaben der 1. Stufe. Sie erscheinen in der ABC-Zeitung. Die Schüler lösen die Aufgaben zu Hause. Wer alle Aufgaben gelöst hat, kann sich an der 2. Stufe beteiligen. Sie wird unter Aufsicht von Pädagogen in der Schule, im Hort, an einem Pioniernachmittag oder im Rahmen von zentralen Veranstaltungen in Pionierhäusern, Stationen Junger Naturforscher und Techniker oder Klubhäusern durchgeführt.

Alle erfolgreichen Teilnehmer werden der Redaktion der *ABC-Zeitung* gemeldet. Sie erhalten von dort eine geschmackvoll gestaltete Urkunde. Das spornt natürlich an, sich in den kommenden Jahren zu beteiligen. Im Jahre 1963, dem Gründungsjahr der ABC-Mathematikolympiaden, wurden 2270 Schülern Urkunden ausgehändigt, im Jahre 1980 erhielten 180170 Schüler diese Anerkennung. Das ist ein beachtlicher Erfolg.

Die ABC-Mathematikolympiade kann auf 18jährige Traditionen zurückblicken. An dieser Stelle sei den „Schöpfern" der Aufgaben, den beiden Zeitschriften *ABC-Zeitung* und

Die Unterstufe, den zahlreichen Lehrern, Pionierleitern und Eltern, welche sich Jahr um Jahr einsetzen, um ein Stück außerunterrichtliche Tätigkeit im Fach Mathematik zu leisten, herzlich gedankt. Für alle *alpha*-Leser veröffentlichen wir die Aufgaben der 1. Stufe der 19. ABC-Mathematikolympiade 1981.

J. Lehmann

Aufgaben

▲1▲ Im Rahmen des Auftrages *Piniersignal X. Parteitag* leisten die beiden 4. Klassen der Friedrich-Engels-Oberschule Timur-Hilfe. In der Klasse 4a sind das 17 Thälmann-Pioniere. Das sind 2 Thälmann-Pioniere mehr als der fünfte Teil der Schüler, die sich aus der Klasse 4b beteiligen.
Wieviel Thälmann-Pioniere leisten in der Klasse 4b Timur-Hilfe?

▲2▲ a) $307536+63001+286+4028$
b) $8726-1503-826$
c) $3063 \cdot 735$
d) $50463 : 7$

▲3▲ a) 8 min = s
150 min = h
6 cm = mm
5 km = m
b) Gib den zehnten Teil an!
5 M; 3 kg; 4 cm.

▲4▲ Wie groß ist die Summe, wenn der eine Summand 1360 und der andere das 50fache dieser Zahl ist?

▲5▲ Zeichne drei Punkte A, B und C, die auf ein und derselben Geraden liegen! Zeichne eine Strecke $\overline{PQ}$!
Zeichne von A, B und C aus Strahlen, die parallel zueinander sind!
Trage auf diesen Strahlen von ihren Anfangspunkten aus die Strecke $\overline{PQ}$ ab!

ABC-Mathematik-Olympiaden in Erfurt

Alljährlich im Mai findet für Schüler der 4. Klassen aus dem gesamten Stadtgebiet eine ABC-Mathematik-Olympiade statt. Gastgeber ist die Pionier- und Jugendakademie des Hauses der Jungen Pioniere *Otto Grotewohl*. Durch die ABC-Mathematik-Olympiaden bereiten sich die Schüler auf die 1. und 2. Stufe der *Olympiade Junger Mathematiker der DDR*, Klassenstufe 5, vor. Die Besten werden in einen Mathematikzirkel des Hauses der JP aufgenommen.
Die Schulen delegieren ihre jeweils leistungsstärksten Schüler. Korrektoren sind Mathematikfachlehrer. Die Ergebnisspiegel kommen dann sofort in das Rechenzentrum des Pionierhauses. Es stehen die Kleinrechner SER 2c und 2d zur Verfügung. Das Auswertungsprogramm für diese Olympiaden wurde von dem Schüler *Andreas Saal*, EOS *G. E. Lessing*, entwickelt. Zehnmal schneller als bei einer traditionellen Auswertung druckt der Rechner die Ergebnislisten, Plazierungen und eine Gesamtauswertung, gegliedert nach Schulen und Stadtbezirken, aus.

Aufgaben

Klassenstufe 4
(reine Arbeitszeit: 90 Minuten)

▲1▲ Welches Ergebnis gehört zu welcher Aufgabe?

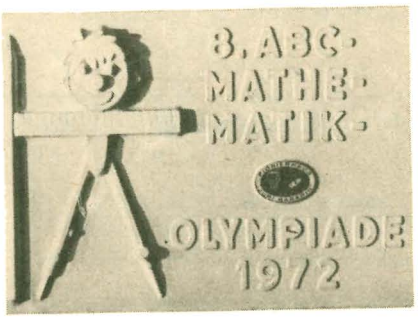
$53 \cdot 32$	$24 \cdot 19$	$28 \cdot 4$	$60 \cdot 8$	$25 \cdot 5$
125	1696	480	112	456

▲2▲ In Halle wurden im Jahre 1977 in jedem der etwa 210000 Haushalte 40 kg Altpapier an die Sammelstellen abgegeben. Eine Tonne Altpapier entspricht etwa dem Wert einer Kiefer von 80 Jahren.
Wieviel Kiefern im Alter von 80 Jahren konnten durch das abgegebene Altpapier erhalten bleiben?

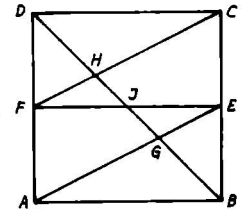
▲3▲ Ordne der Größe nach:
1500 cm, 12000 mm, 3,106 km, 218 dm, 1085 mm, 10,80 cm, 600 cm!

▲4▲ Zeichne zwei Strecken: Die erste mißt 15 cm, die zweite mißt viermal soviel wie der dritte Teil der Länge der ersten Strecke!

▲5▲ Der Berliner Fernsehturm ist höher als der Eiffelturm in Paris, aber nicht so hoch wie der Fernsehturm in Moskau. Der Dresdner Fernsehturm ist nicht so hoch wie der Eiffelturm, aber höher als die Lomonossow-Universität. Der Erfurter Dom ist nicht so hoch wie die Lomonossow-Universität.
Fertige eine Skizze an, und nenne die Bauwerke in der Reihenfolge ihrer Höhe!



▲6▲ Wieviel Dreiecke sind in unserer Abbildung dargestellt?
Stelle eine Übersicht dieser Dreiecke auf!
z. B. $\triangle ABG$ $\triangle BEG$



M. Hoffmann

ABC-Mathematik-Olympiaden in Leipzig

Es ist zu einer Tradition geworden, daß in den Stadtbezirken Leipzig-Mitte und Leipzig-Süd für Schüler der Klassen 3 und 4 Olympiaden durchgeführt werden. Die Besten werden in Mathematikzirkel aufgenommen und bereiten sich – wie in Erfurt – zielstrebig auf die *Olympiaden Junger Mathematiker der DDR* vor. *alpha* veröffentlicht die Aufgaben des Jahres 1980 (reine Arbeitszeit: 60 Minuten). Viel Freude und Erfolg beim Lösen der Aufgaben!

▲1▲ Unser Wohnblock ist 32 m lang und 11 m breit. In einer Entfernung von 1 m von der Hauswand führt ein Plattenweg rings um den Wohnblock. Thomas und Heike wollen jeden Morgen eine Runde um den Häuserblock laufen und diesen Plattenweg benutzen.
Wie lang ist die Laufstrecke?

▲2▲ In Leipzig-Grünau sollen bis 1980 etwa 15000 Wohnungen gebaut werden. Man nimmt an, daß in einem Fünftel der Wohnungen zwei Personen, in der Hälfte drei Personen und im Rest vier Personen einziehen.
Wieviel Bürger werden in den neuen Wohnungen leben?

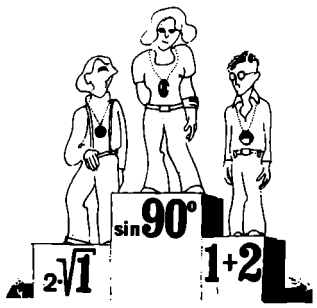
▲3▲ Die Lomonossow-Universität in Moskau ist höher als das Universitätshochhaus in Leipzig. Der Dresdner Fernsehturm ist höher als die Lomonossow-Universität, aber nicht so hoch wie er Eiffelturm in Paris. Der Berliner Fernsehturm ist höher als der Eiffelturm, aber nicht so hoch wie der Fernsehturm in Moskau.
Gib die Bauwerke in der Reihenfolge ihrer Höhe an!

M. Rehn

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb

Aufgaben aus vergangenen Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

Letzter Einsendetermin: 1. Mai 1981



Mathematik

Ma 5 ▪2055 Im Werkunterricht sollen Reagenzglasständer für je 5 Reagenzgläser hergestellt werden. Das obere Brettchen ist 160 mm lang. Es soll 5 Bohrungen von je 18 mm Durchmesser erhalten. Der Abstand der ersten bzw. letzten Lochmitte von den Brettchenenden beträgt je 24 mm. Alle Bohrungen sollen untereinander gleichen Abstand haben.

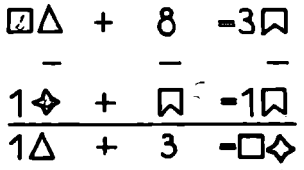
a) Wie groß ist der Abstand von Lochmitte zu Lochmitte?

b) Wie groß sind die Zwischenräume zwischen den Bohrlochrändern?

Ma 5 ▪2056 Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck! Zeichne in das Sechseck alle möglichen Diagonalen ein! Wieviel Diagonalen findest du? Zähle sie auf, indem du sie benennst (z. B. *AB*, ...)!

Ma 5 ▪2057 Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften: Die Summe ihrer Ziffern beträgt 10. Vertauscht man ihre Ziffern und addiert zu dieser dadurch entstandenen Zahl die Zahl 2, so erhält man das Dreifache der ursprünglichen Zahl.

Ma 5 ▪2058 Gib sämtliche Lösungen des nachstehenden Kryptogramms (siehe Bild) an, d. h. ersetze die geometrischen Figuren durch je eine der Ziffern 0 bis 9, daß zusammen mit den bereits angegebenen Ziffern sämtliche (waagerecht und senkrecht stehenden) Aufgaben richtig gelöst sind! Dabei bedeuten gleiche Figuren gleiche Ziffern.



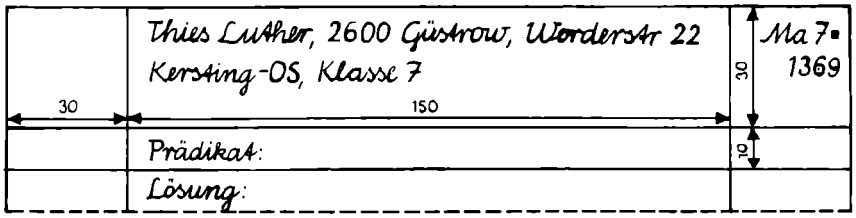
Ma 5 ▪2059 Eine Gruppe *Junger Mathematiker* führte eine Exkursion durch. Jeder Teilnehmer bezahlte 1,50 Mark für die Fahrkosten. Bei der Bezahlung des Sammelfahrscheines blieb ein Betrag von 1,10 Mark übrig. Hätte jeder Teilnehmer 1,40 Mark eingezahlt, so hätten 1,10 Mark an den Kosten des Sammelfahrscheines gefehlt. Ermittle die Anzahl der Teilnehmer an dieser Exkursion! Wieviel Geld erhielt jeder dieser Teilnehmer zurück, als der zuviel eingezahlte Betrag gleichmäßig unter ihnen verteilt wurde?

Ma 5 ▪2060 In einem Kasten befinden sich insgesamt 100 gleichgroße Kugeln, nämlich 28 rote, 28 blaue, 26 schwarze, 16 weiße und 2 grüne. Ulrike soll aus diesem Kasten im Dunkeln (also ohne bei irgendeiner der herausgenommenen Kugeln die Farbe erkennen zu können) eine Anzahl von Kugeln herausnehmen. Die Anzahl soll sie so wählen, daß unter den herausgenommenen Kugeln mindestens 9 die gleiche Farbe haben müssen. Welches ist die kleinste Kugelanzahl, die Ulrike wählen kann, um diese Aufgabe zu erfüllen?

Ma 6 ▪2061 Wieviel verschiedene Arten von Personenzugfahrkarten 2. Klasse braucht man für eine Strecke mit 15 Stationen, wenn es für jede mögliche Verbindung eine Fahrkarte geben soll? Wie hast du die Anzahl ermittelt?

Ma 6 ▪2062 In den Ferien war Klaus auf dem Lande. Aus seinen Beobachtungen ergab sich folgende Scherzaufgabe:

$1\frac{1}{2}$ Hühner legen in $1\frac{1}{2}$ Tagen $1\frac{1}{2}$ Eier.



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1980/81 läuft von Heft 5/80 bis Heft 2/81. Zwischen dem 1. und 10. September 1981 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/80 bis 2/81 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/81 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/80 bis 2/81) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1980/81 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ermittle die Anzahl aller Eier, die bei gleicher Legeleistung 7 Hühner in 6 Tagen legen würden!

Ma 6 ■2063 In der fünfstelligen Zahl

52*2*

sind an den mit * bezeichneten Stellen zwei (gleiche oder verschiedene) Ziffern so einzusetzen, daß die dadurch entstehende Zahl durch 36 teilbar ist. Gib alle Möglichkeiten hierfür an! (*Beachte:* Eine Zahl ist genau dann durch 36 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 9 teilbar ist.)

Ma 6 ■2064 Ruth, Marion und Petra verbringen einen Teil ihrer Ferien in einem Pionierlager. Jede von ihnen betreibt genau eine der Sportarten Tischtennis, Volleyball und Schwimmen. Außerdem ist bekannt:
(1) Marion leiht sich von der Volleyballspielerin gern gute Bücher.
(2) Die Volleyballspielerin und Petra haben nicht gleich viele Preise bei der Mathematikolympiade errungen.
(3) Marion geht in eine höhere Klasse als die Tischtennisspielerin.
Welche Sportart treibt jedes der drei Mädchen?

Ma 6 ■2065 Eine Strecke von 168 m Länge soll in drei Teilstrecken geteilt werden, deren Längen der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet seien. Dabei soll die zweite Teilstrecke dreimal so lang wie die erste und die dritte Teilstrecke viermal so lang wie die erste sein. Ermittle alle Möglichkeiten, die Längen a, b, c der Teilstrecken so anzugeben, daß eine Teilung mit diesen Eigenschaften entsteht!

Ma 7 ■2066 Konstruiere ein beliebiges Quadrat! Konstruiere dann
a) ein Quadrat mit der doppelten Fläche,
b) ein Quadrat mit der halben Fläche
des Ausgangsquadrates! Begründe die Konstruktion!

Ma 7 ■2067 Jemand schreibt alle natürlichen Zahlen von 1 bis 5555 auf, jede genau einmal. Berechne die Anzahl aller dabei geschriebenen Ziffern 9!

Ma 7 ■2068 Nach der Sage machte die böhmische Königin Libussa die Gewährung ihrer Hand von der Lösung eines Rätsels abhängig, das sie ihren drei Freiern aufgab:
„Wenn ich aus diesem Korb mit Pflaumen dem ersten Freier die Hälfte des Inhalts und noch eine Pflaume, dem zweiten die Hälfte des Restes und noch eine Pflaume, dem dritten die Hälfte des nunmehrigen Restes und noch drei Pflaumen geben würde, dann wäre der Korb geleert."
Nenne die Anzahl der Pflaumen, die der Korb enthält!

Ma 7 ■2069 Eine *Gärtnerische Produktionsgenossenschaft* verkaufte in den Monaten August bis November Äpfel. Der Preis für 1 kg Äpfel war im September um 20% niedriger als im August, im November hingegen um 20% höher als im September. Waren die Äpfel im November billiger, im Preis gleich oder teurer als im August? Falls der Preis im November von dem im August abwich, ist anzugeben, um wieviel Prozent des Augustpreises der Novemberpreis von diesem abwich.

Ma 8 ■2070 Bei einem mehradrigen Kabel werden Adern gleichen Durchmessers um eine Mittelader vom gleichen Durchmesser so angeordnet, daß sie einander berühren.
a) Wieviel Adern braucht man?
b) Beweise diese Behauptung!

Ma 8 ■2071 Von einem gleichseitigen Dreieck ist die Länge ϱ des Inkreisradius bekannt. Das Dreieck ist unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal zu konstruieren!

Ma 8 ■2072 Ermittle sämtliche Lösungen des nachstehenden Kryptogramms, d. h., sämtliche Möglichkeiten, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß alle waagerecht und senkrecht stehenden Gleichungen erfüllt sind! Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ABC} - \mathrm{DE} & = & \mathrm{AFG} \\ : \quad - & & - \\ \mathrm{H} \cdot \mathrm{HA} & = & \mathrm{CH} \\ \hline \mathrm{BJ} + \mathrm{AJ} & = & \mathrm{AAC} \end{array}$$

Hinweis: Die Aufgabe ist nicht nur durch Raten zu lösen wie häufig in Rätselzeitschriften, sondern es sind Überlegungen zur Vollständigkeit und Richtigkeit der Lösung anzugeben.

Ma 8 ■2073 Peter stellt seinem Freund Fritz folgende Aufgabe: „Gegeben sei ein Kreis, dessen Durchmesser gleich dem Erddurchmesser ist, und ein zweiter dazu konzentrischer Kreis, dessen Umfang 1 m länger als der Umfang des ersten Kreises ist. Ermittle den Abstand beider Kreislinien voneinander!"
Nach kurzem Überlegen nennt Fritz diesen Abstand und behauptet:
„Wenn der erste Kreis nur den Durchmesser einer Stecknadelkuppe (1 mm) besitzt und der Umfang des zweiten konzentrischen Kreises wiederum 1 m länger als der des ersten Kreises ist, dann ist der Abstand dieser beiden Kreise genau so groß wie in deiner Aufgabe."
Stimmt diese Behauptung von Fritz? Wie groß ist der Abstand der konzentrischen Kreislinien in beiden Fällen?

Ma 9 ■2074 In

$$\begin{array}{r} 1{*}{*}\cdot{*}{*} \\ \hline {*}{*}{*}1 \\ {*}{*}{*}1 \\ \hline {*}{*}{*}1{*} \end{array}$$

sind die Sternchen durch (nicht notwendig einander gleiche) Ziffern so zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht.
Geben Sie alle Möglichkeiten hierfür an!

Ma 9 ■2075 Auf die Frage nach seinem Alter sagte Herr X: „Die Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre beträgt genau ein Drittel dieser Anzahl. Das Quadrat der Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre ist genau dreimal so groß wie die Anzahl meiner Lebensjahre."
Können die Angaben von Herrn X zutreffen? Wenn ja, wie alt ist Herr X? (Angabe in vollen Lebensjahren)

Ma 9 ■2076 Jede Seitenhalbierende eines Dreiecks zerlegt die Dreiecksflächen, die gleichlange Grundseiten und gleichlange Höhen haben und somit inhaltsgleich sind. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines Dreiecks heißt Schwerpunkt des Dreiecks. Untersuchen Sie, ob jede Gerade durch den Schwerpunkt S eines Dreiecks $\triangle ABC$ dessen Fläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt!

Ma 9 ■2077 Während einer GST-Übung schätzten Andreas und Frank die Länge einer Strecke. Wenn Andreas um 10% weniger geschätzt hätte, hätte er die genaue Länge getroffen. Wenn Franks Schätzwert um 10% höher gelegen hätte, hätte er die genaue Länge der Strecke getroffen. Bei welcher der beiden Schätzungen ist der absolute Betrag des absoluten Fehlers geringer?

Ma 10/12 ■2078 In

$$\begin{array}{r} \mathrm{DRE\,I} \\ +\mathrm{DRE\,I} \\ +\mathrm{DRE\,I} \\ \hline \mathrm{NEUN} \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für die gleichen Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden!
Geben Sie alle Lösungen dafür an!

Ma 10/12 ■2079 In einem alten Lehrbuch wird in einer Aufgabe über folgenden Handel berichtet:
Ein Bauer wollte bei einem Viehhändler mehrere Tiere kaufen. Der Viehhändler verlangte für jedes den gleichen Preis. Dem Bauern gelang es, diesen Preis um genau so viel Prozent des geforderten Preises herunterzuhandeln, wie er (in Groschen) betragen sollte. Er bezahlte jetzt 21 Groschen pro Tier. Bei dem ursprünglichen Preis hätte sein Geld genau für drei Tiere gereicht. Jetzt konnte er mehr Tiere kaufen, wobei er sein Geld vollständig ausgab. Wie viele Tiere konnte der Bauer insgesamt kaufen?

Ma 10/12 ■2080 Von einem rechtwinkligen Dreieck seien die Länge c der Hypotenuse und die Länge r des Inkreisradius bekannt. Ermitteln Sie den Umfang des Dreiecks!

Ma 10/12 ■2081 Geben Sie alle reellen Zahlen $x (x \neq -3)$ an, die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{2}{x+3} - \frac{1}{2} \geq \frac{5}{x+3} - \frac{1}{10}. \qquad (1)$$

Physik

Ph6 ▪91 Die Masse eines Würfels aus Gold wurde mit 2250 g und sein Volumen mit 125 cm^3 bestimmt.
Besteht dieser Würfel vollständig aus Gold, oder könnte sich im Inneren ein Hohlraum befinden? Begründe deine Entscheidung! Berechne den tatsächlichen Rauminhalt des Goldes! $\left(\text{Dichte } \varrho = 19{,}3\ \frac{g}{cm^3}\right)$

Ph7 ▪92 Auf einer der beiden Schalen einer Waage befindet sich ein Gefäß mit Wasser, und auf der anderen steht ein Gefäß mit Petroleum. Die Waage befindet sich im Gleichgewicht. An den Enden der Hebelarme einer anderen Waage hängen anstelle der Schalen Messingkugeln gleicher Masse. Diese Waage befindet sich ebenfalls im Gleichgewicht. Die letztere Waage wird nunmehr über die erstere gestellt, und zwar so, daß die Kugeln ganz in die Flüssigkeiten eintauchen, ohne den Boden zu berühren. Was zeigen die beiden Waagen an?

Ph8 ▪93 Gegeben seien die drei Teilwiderstände mit 1 Ω, 2 Ω und 3 Ω. Welche Gesamtwiderstände kann man aus diesen drei gegebenen Teilwiderständen zusammensetzen? Mit welcher Schaltung erhält man den größten bzw. kleinsten Widerstand?

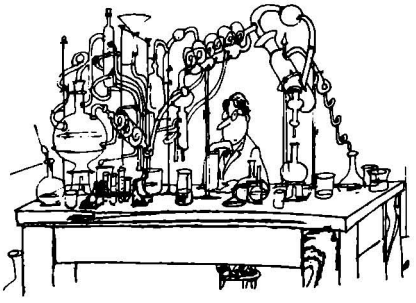
Ph9 ▪94 Eine zylindrische Röhre der Länge l ist an einem Ende verschlossen und wird mit heißer Luft gefüllt. Sie wird mit dem offenen Ende nach unten ins Wasser getaucht, bis das verschlossene Ende sich in Höhe des Wasserspiegels befindet. Nach Temperaturausgleich ist die Röhre zu $\frac{2}{3}$ mit Wasser gefüllt. Zu berechnen ist die Anfangstemperatur der Luft in der Röhre. Für die Wassertemperatur sind T_1 und für den Luftdruck p_0 anzusetzen.

Ph10/12 ▪95 Bei einer Datschen-Beleuchtung sind 18 Lämpchen mit einer Nennspannung von 12 V hintereinandergeschaltet. An diesen Kreis wird eine Spannung von 220 V angelegt. Ein Bastler, der sich eine solche Beleuchtung selbst herstellen will, besitzt gerade noch 18 Lämpchen für 12 V, von denen auf 9 die Leistung 3 W, auf den anderen 9 die Leistung 6 W angegeben ist. Ist die Lichterkettte, bei der diese 18 Lampen hintereinandergeschaltet sind, für den Anschluß an eine Steckdose mit der Spannung 220 V geeignet?

Chemie

Ch7 ▪73 200 g einer 3%igen Kochsalzlösung werden mit 200 g einer 7%igen Kochsalzlösung gemischt. Wieviel Prozent Kochsalz enthält die Mischung?

Ch8 ▪74 Wieviel Wasser muß man 3 kg einer 3%igen Kupfersulfatlösung zusetzen, damit man eine 1,2%ige Kupfersulfatlösung erhält?



Ch9 ▪75 Aus 50 t Eisenerz, das Magnetit (Fe_3C_4) und Hämatit (Fe_2O_3) enthält, wurden 35,7 t Eisen gewonnen. Wie groß war die Menge des Magnetits und wie groß die des Hämatits im Erz?

Ch10/12 ▪76 Um das Gefrieren des Kühlwassers im Motorblock und Kühlsystem eines Kraftfahrzeuges zu verhindern, mischt man vor Beginn des Winters Frostschutzmittel der Dichte 1,135 $g \cdot cm^{-3}$ dem Kühlwasser bei. Hat diese Mischung eine Dichte von 1,027 $g \cdot cm^{-3}$, so erhält man Frostschutz bis $-10\,°C$. Wieviel Liter Frostschutzmittel und wieviel Liter Wasser kommen auf 100 Liter Gefrierschutzmischung dieser Dichte?

Zwei Geometrieaufgaben von Jörg Pietschmann

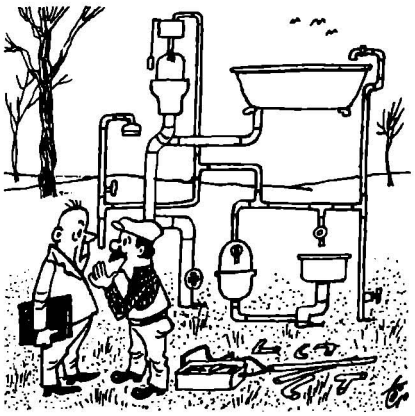
1. Preisträger der XIX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR
Schüler der EOS J. J. Winckelmann, Stendal (Kl. 9)

▲2082▲ In einem rechtwinkligen Dreieck ABC seien a bzw. b die Längen der beiden Katheten.
Es ist zu beweisen, daß für die Länge der Höhe gilt:

$$h_c^{-2} = a^{-2} + b^{-2}!$$

▲2083▲ Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ beliebiger Länge. P sei ein innerer Punkt dieser Strecke. Über $\overline{AP}$ und $\overline{BP}$ seien Halbkreise in ein und dieselbe Halbebene gezeichnet. Um die „Mittelpunkte" M_1 und M_2 dieser Halbkreise seien Kreisbögen mit den Radien $\overline{M_1P}$ und $\overline{M_2P}$ gezeichnet, die sich außer in P in einem weiteren Punkt P' schneiden.
Es ist zu beweisen, daß P' auf dem Halbkreis über $\overline{AB}$ liegt!

Als Schüler der 9. Klasse startete Jörg Pietschmann zur DDR-Olympiade in Klasse 10 und erreichte dort als einziger Teilnehmer die volle Punktzahl (40 Punkte). Zur XIX. OJM gab es weitere 18 sogenannte *Frühstarter*.



alpha aktuell

Zitate von Wissenschaftlern

● Schöpferische Fähigkeiten sind so kostbar und gleichzeitig so störanfällig, daß Behutsamkeit und Sorgfalt dazugehören, sie zu wecken und zu fördern.
Prof. Dr. K. Schwabe, Chemiker

● Praxis ohne Theorie ist blind,
Theorie ohne Praxis unfruchtbar.
Prof. Dr. John D. Bernal, Mediziner

● Wichtig ist nicht, daß ein Schüler etwas über das Klassenziel Hinausragendes geleistet hat, wichtig ist, daß es der Lehrer bemerkt und gefördert hat.
Prof. Dr. K. Schröter, Mathematiker

● Der Klügere gibt nicht nach.
Prof. Dr. Prokop/Prof. Dr. G. Uhlenbruck, Gerichtsmediziner

● Nur Ideen zu haben, ist relativ billig; die Schwierigkeit liegt bei ihrer Verwirklichung mit möglichen Mitteln bis zu einem aussagekräftigen Abschluß.
Prof. Dr. M. Steenbeck, Physiker

ARBEITS-GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Freundschaft in Aktion

Deutsch-polnischer Wettstreit

Seit Jahren bestehen freundschaftliche Beziehungen zwischen der Schuljugend des Bezirkes Frankfurt (Oder) und der Wojewodschaft Gorzow in der Volksrepublik Polen. Es hat sich zu einer schönen Tradition entwickelt, jährlich einen mathematischen Leistungsvergleich durchzuführen.

Während Pioniere und FDJ-Mitglieder aus Oberschulen des Oderbezirks im vergangenen Jahr in Barlinek (VR Polen) zu Gast waren, begrüßten wir im März 1980 *Junge Mathematiker* aus der Wojewodschaft Gorzow. Eisenhüttenstadt war dieses Mal Austragungsort des Wettbewerbs. Die Station Junger Techniker und Naturforscher erwies sich als sehr guter Gastgeber.

Je 15 Schüler in drei Wertungsgruppen (Klassenstufe 7/8, 9/10 und 11/12) hatten in einer vierstündigen Klausur je zwei Pflicht- und eine Wahlaufgabe zu lösen. Für unsere Schüler bedeutete das nicht nur einen Leistungsvergleich, sondern gleichzeitig aktive Vorbereitung auf die Olympiade Junger Mathematiker der DDR.

Neben dem Ringen um gute mathematische Erfolge gab es auch zahlreiche freundschaftliche Begegnungen zwischen den Schülern und Pädagogen beider Länder. Die Bastel- und Wissensstraße, besonders auf naturwissenschaftlich-technischem Gebiet, waren stets umlagert. Jeder Teilnehmer wollte auf jeden Fall ein selbstgebasteltes Geschenk zur Erinnerung an diesen Wettbewerb mit nach Hause nehmen. Auf großes Interesse stieß auch ein von der Station Junger Naturforscher und Techniker Eisenhüttenstadt gedrehter Film über die Entstehung und die Entwicklung dieses Objekts. Bei einem Grillabend mit Disko tauschten die Jugendlichen wie die Pädagogen beider Länder ihre Eindrücke aus. Durch eine Rundfahrt lernten die polnischen Gäste die erste sozialistische Stadt der DDR näher kennen. Eine feierliche Siegerehrung schloß die beiden erlebnisreichen Tage ab.

Aus jeder der drei oben genannten Wertungsgruppen stellen wir den *alpha*-Lesern zwei Aufgaben vor:

Klassenstufe 7/8

▲1▲ a) Wie oft insgesamt stehen im Verlaufe von 24 Stunden (von 0.00 Uhr bis 24.00 Uhr) der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr senkrecht aufeinander?
b) Berechne insbesondere alle derartigen Zeitpunkte zwischen 7.00 Uhr und 8.00 Uhr!

▲2▲ Jemand behauptet, daß es möglich sei, aus 7 Papierstücken auf folgende Weise genau 1980 Stücke herzustellen:
Man teile einige der 7 Papierstücke in 7 Teile, danach wieder einige der nunmehr vorhandenen Papierstücke jeweils in 7 Teile usw.
Ist es möglich, daß man auf diese Weise, indem man also das beschriebene Verfahren genügend lange fortsetzt, genau 1980 Papierstücke erhält?

Klassenstufe 9/10

▲1▲ Gesucht sind die drei kleinsten, unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen z_i mit $i=1, 2, 3$, für die gilt: z_i ist durch $(i+6)$ teilbar und hat die Endziffer i.

▲2▲ Fünf Städte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, sollen durch ein Eisenbahnnetz verbunden werden, das aus vier geradlinigen Strecken besteht. Die Schienenstränge können sich dabei überschneiden; an den betreffenden Stellen werden dann Brükken gebaut.
Wieviel verschiedene dieser Eisenbahnnetze können konstruiert werden?

Klassenstufe 11/12

▲1▲ Gegeben seien ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und eine Gerade g, die Passante bezüglich k ist.
Von den zwei beliebigen Punkten A und B auf g werden an k die Tangenten t_A und t_B gelegt, die k in C bzw. D berühren. Die Kreise um A und B mit den Tangentenabschnitten $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BD}$ als Radien schneiden einander in zwei Punkten P_1 und P_2.
a) Untersuchen Sie die Lage von P_1 und P_2 bezüglich M und g!
b) Beweisen Sie Ihre Vermutung!

▲2▲ a) Es sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Bestimmen Sie die Monotonieeigenschaft der Zahlenfolge

$$(a_n)=(3n-\sqrt{9n^2-5n+1})!$$

b) Untersuchen Sie, ob die Folge nach oben beschränkt ist, und geben Sie, falls die Folge beschränkt ist, eine obere bzw. eine untere Schranke an!

R. Böhme/D. Hornauf

Leserpost

...Ich habe den Wunsch, Mathematik zu studieren. Durch den *alpha*-Wettbewerb sind meine Leistungen gestiegen.

Camillo Grune, Lauchhammer (Kl. 11)

...Die Aufgaben des *alpha*-Wettbewerbs sind interessant und knifflig. Manchmal habe ich stundenlang für die Lösung einer Aufgabe gebraucht. Jede Lösung bringt eine große Wissensaneignung, die mich im Fach Mathematik voranbrachte und Erfolge bei den Kreisolympiaden erzielen ließ.

Elke Goraus, Zwickau (Kl. 11)

...Ich danke Ihnen für die interessanten Mathematikaufgaben, Rätsel und Knobeleien. *alpha* hat einen Anteil an meiner Abschlußprüfung, für die ich das Prädikat „Mit Auszeichnung bestanden" erhalten konnte. Auch 1980/81 werde ich als Lehrling, Facharbeiter für Nachrichtentechnik mit Abitur, am *alpha*-Wettbewerb teilnehmen. Er hilft mir, im Mathematikunterricht komplizierte Aufgaben zu lösen.

Uta Hubrig, Leipzig (Kl. 11)

...Auch in meinem zweiten Jahr der Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb hat mich das Lösen der Aufgaben wieder sehr gefordert. Bei der Bezirksolympiade habe ich einen mittleren (9.) Platz, als Bester des Landkreises Suhl, in meiner Altersklasse belegt. In der Kreisolympiade erhielt ich 1979 zwanzig Punkte, 38 Punkte erreichte ich 1980.

Dirk Langenhan, Zella-Mehlis (Kl. 9)

...Vor allem durch die Arbeit mit *alpha* brachte dieses Jahr für mich den bisher größten Erfolg: 1. Platz bei der Kreisolympiade, 8. Platz bei der Mathematik-Olympiade sowie bei der Physikolympiade des Bezirks.

Mitko Lochan, Rudolstadt

...Durch die Lösung Eurer Wettbewerbsaufgaben – ich nehme seit fünf Jahren teil – war es mir möglich, meine mathematischen Kenntnisse zu erweitern. Das beweisen vordere Plätze bei Kreis- und Bezirksolympiaden. Auch Eure Beiträge sind sehr interessant und bieten für mich wertvolle Gedanken zur Gestaltung der „Mathe-Ecke" im Fachkabinett unserer Schule.
Macht weiter so!

Gabriele Sprotte, Döbeln

...Unser Sohn besucht regelmäßig die Mathematik-AG in unserem Pionierhaus. An zwei Mathematik-Olympiaden nahm er teil und errang die Bronze- und Silbermedaille. Als Eltern freuen wir uns, daß er so gute Lernergebnisse erzielt.

Peter Weinhold, Karl-Marx-Stadt

...An der *alpha* gefällt mir, daß die gestellten Probleme aus verschiedenen Bereichen kommen. *Gunnar Bittersmann, Bernau (13 Jahre)*

...Nun bin ich schon zwei Jahre Angehöriger der NVA. Ich beteilige mich noch sehr gern am *alpha*-Wettbewerb. Er hilft mir sehr, meine Kenntnisse zu festigen und zu vertiefen.

Unteroffizier Volker Schulz, Nauen

...Die *alpha* war in den letzten Jahren ein guter Begleiter. Ich glaube, sie hat auch einen entscheidenden Teil dazu beigetragen, daß ich ab September 1980 in Halle an der Martin-Luther-Universität in einer Spezialklasse Mathematik-Physik lernen werde. Damit bin ich meinem Ziel, Mathematik zu studieren, ein großes Stück näher gekommen.

Kerstin Franz, Eisleben

...Die *alpha* ist seit der 5. Klasse mein ständiger Begleiter. Durch ihre Hilfe konnte ich jedes Jahr bei der Kreisolympiade vordere Plätze belegen. Ich bin jetzt Schülerin der 9. Klasse der EOS in Bernburg und werde weiterhin der Mathematik treu bleiben.

Katrin Hintz, Bernburg

...Ich nehme nun schon seit neun Jahren am *alpha*-Wettbewerb teil. Sicherlich hat die *alpha* einen großen Einfluß auf meine mathematische Entwicklung. Ich beschäftige mich weitergehend in meiner Freizeit mit Problemen, die in der *alpha* selbstverständlich nur angerissen werden konnten. In den letzten vier Jahren besuchte ich die *Heinrich-Hertz-EOS*, eine Spezialschule mathematischer Richtung. Nach meinem Ehrendienst in der NVA werde ich an der Humboldt-Universität zu Berlin ein Mathematikstudium aufnehmen, um Diplom-Mathematiker zu werden. Ich bleibe der *alpha* treu. Mein persönliches Ziel ist es, auf 50 veröffentlichte Aufgaben zu kommen. Bisher wurden 36 Aufgaben von mir veröffentlicht.

Auf weiterhin gute Zusammenarbeit!

Andreas Fittke, Berlin

...Gleichzeitig war der *alpha*-Wettbewerb für mich bei der Vorbereitung auf Mathematikolympiaden eine große Hilfe. Nicht zuletzt konnte ich schon viele Erfolge erringen. Sehr gut finde ich auch, daß in *alpha* verschiedene Berufe vorgestellt werden. Könnte das nicht öfter geschehen?

Gaby Brandt, Magdeburg (Kl. 11)

...Das Lösen der alpha-Aufgaben bereitet mir viel Freude. Ich schätze sie als Training und Vorbereitung auf Mathe-Olympiaden.

Falk Triebsch, Freiberg (Kl. 10)

Mädchen meistern Mathematik

Preisträger der XIX. Mathematikolympiade – DDR-Ausscheid – stellen Aufgaben

Grit Werner (Magdeburg), Spezialklasse Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle, Klasse 11 (2. Preis)

▲2084▲ Man berechne einen Näherungswert für π mit Hilfe des Gravitationsgesetzes (in Anlehnung an die Newtonsche Mondrechnung).

Dazu nehme man an, daß sich der Mond auf einer Kreisbahn um die Erde bewegt.

Dabei betragen: die Masse der Erde $5{,}979 \cdot 10^{24}$ kg, die Gravitationskonstante $6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$, die Umlaufzeit des Mondes 27,32 d, der Abstand Erde–Mond $3{,}83 \cdot 10^5$ km.

Tanja Mittag, *EOS Dr. Theodor Neubauer* Karl-Marx-Stadt, Klasse 9 (3. Preis)

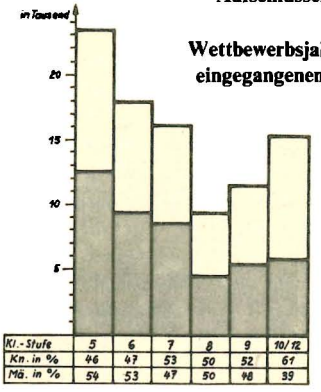
▲2085▲ Man konstruiere ein konvexes Fünfeck $ABCDE$ aus den Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{DB}$, dem von diesen eingeschlossenen Winkel, dem Winkel $\sphericalangle ADC$, der Summe der Diagonalen $\overline{EB}$ und $\overline{EC}$, dem Winkel $\sphericalangle CEB$ sowie der Eigenschaft, daß $AD \parallel BC$.

Mein Lieblingsfach in der Schule und gleichzeitig mein Hobby ist die Mathematik. Deshalb bin ich auch seit vier Jahren eifriger Leser der *alpha*. Es bereitet mir stets große Freude, mich an deren Wettbewerb zu beteiligen. Da man hier Aufgaben der Klassenstufen 5 bis 10 findet, kann ich mich schon in den höheren üben. Die *alpha* bietet mir ausgezeichnete Vorbereitungsmöglichkeiten für die Mathematik-Olympiaden.

Sylvia Langner, *Geschwister-Scholl-Oberschule* Schwarze Pumpe, Klasse 10 (3. Preis)

▲2086▲ Jemand möge zwei Bekannten eine Neuigkeit erzählen, die diese wieder je zwei bisher nicht informierten Personen weitererzählen usw. Nach etwa wieviel Tagen wäre die gesamte Bevölkerung der DDR, die rund 17 Millionen Bürger beträgt, über die Neuigkeit informiert, wenn wir annehmen, daß die unter entsprechenden technischen Bedingungen jeweils innerhalb der nächsten Stunde geschieht und Kinder aus der Informationsweitergabe nicht ausgeschlossen werden?

Aufschlüsselung der im alpha-Wettbewerbsjahr 1979/80 eingegangenen Lösungen



Kl.-Stufe	5	6	7	8	9	10/12
Kn. in %	46	47	53	50	52	61
Mä. in %	54	53	47	50	48	39

Die Aufgabenkommission

Herz der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

In der zwanzigjährigen Geschichte unserer Mathematikolympiaden wurden rund 2000 Wettbewerbsaufgaben gestellt. Eine zielstrebige und kontinuierliche Arbeit war erforderlich, um das zu gewährleisten.
Die Aufgabenkommission ist ein Kollektiv von etwa 25 Mitarbeitern. Ihre Arbeitsweise hat sich vielfach bewährt. Natürlich sind auch neue Ideen und Verbesserungen stets gefragt. Die Kommission untergliedert sich in vier Arbeitsgruppen, die für je eine der Klassenstufen 5/6, 7/8, 9/10 und 11/12 zuständig sind. Hinzu kommen Wissenschaftler und Lehrer, die die Aufgabenserien begutachten und ihre Endfassung herstellen. Jede Aufgabenserie muß bis zu ihrer Fertigstellung mehrere Etappen durchlaufen.

Erste Etappe: Zunächst werden Aufgaben gesammelt, gesichtet und in Altersstufen eingeordnet. Viele Quellen werden dazu genutzt: Aufgabensammlungen, Lehrbücher, Bände der Mathematischen Schülerbücherei (MSB), Zeitungen, Zeitschriften, vor allem aber viele originelle Ideen, die ihren Ursprung oftmals in der beruflichen Tätigkeit der Mitglieder der Aufgabenkommission und anderer Autoren haben.

Zweite Etappe: Für jede Olympiadestufe und -klasse werden geeignete Aufgaben aus dem gesammelten Vorrat zusammengestellt. Anschließend wird über die Aufgaben- und Lösungstexte beraten. Dabei sind zahlreiche Anforderungen zu beachten. Einige wichtige lauten:

- Die Aufgaben sollten originell, interessant und mit dem Wissensstand der betreffenden Klassenstufe lösbar sein.
- Jede Aufgabenserie sollte eine Mischung der Schwierigkeitsgrade enthalten. Es sollte etwa ein leicht überschaubares Problem zum „Warmlaufen" dabei sein, sodann Aufgaben mittlerer Schwierigkeit und auch einzelne anspruchsvolle Aufgaben, die besonders talentierten und ausdauernden Schülern Gelegenheit geben, ihre Fähigkeiten zu beweisen. Eine solche Aufgabe nennen wir gern den „Scharfrichter" der Serie.
- Jede Aufgabenserie sollte eine möglichst breite Palette der verschiedenen mathematischen Teilgebiete (Algebra, Geometrie, Logik/Kombinatorik usw.) bieten. Aufgaben mehr theoretischer Art sollten mit solchen abwechseln, die zu unserer gesellschaftlichen Praxis im weitesten Sinne Bezug haben.
- Der Aufgabentext muß exakt sein und eindeutig abgrenzen, was vom Schüler verlangt wird und was nicht. Um diese Forderungen zu erfüllen, müssen wir zuweilen sogar etwas „trocken" oder „abstrakt" klingende Formulierungen in Kauf nehmen.

Dritte Etappe: Etwa zwei Jahre vor der Veröffentlichung ist die zweite Etappe abgeschlossen. Die Gutachter prüfen nun, ob die oben genannten Anforderungen erfüllt sind und machen gegebenenfalls Vorschläge zu Umformulierungen. Nach einer abschließenden Beratung mit den vier Vorsitzenden der Aufgabengruppen liegt die Endfassung vor. Die Aufgaben der 1. Stufe (Schulolympiade) werden in der *Jungen Welt*, der *Trommel*, der *Deutschen Lehrerzeitung* und natürlich in der *alpha* veröffentlicht. Die Aufgaben für die 2. bis 4. Stufe (Kreis-, Bezirks- und DDR-Olympiade) werden vom Verlag Volk und Wissen gedruckt und den Olympiadekomitees zugesandt.

Das folgende Beispiel gibt einen kleinen Einblick in die Formulierungsarbeiten: Zur XVIII. *Olympiade Junger Mathematiker* (1978) brauchten wir für die 2. Stufe noch eine mittelschwere Aufgabe mit Gleichungen oder Ungleichungen, z. B. im Zusammenhang mit der Zifferndarstellung einer natürlichen Zahl. Solche Aufgaben findet man oft, indem man beim praktischen Rechnen auf „zufällige" Besonderheiten achtet. So kann man z. B. bemerken, daß die Zahl 82 „in der Nähe" des Dreifachen der Zahl 28 liegt, also der durch Ziffernvertauschung aus 82 entstehenden Zahl. Ein erster Versuch, hieraus eine Aufgabe zu formulieren, lautet so:

„Addiert man 2 zu einer zweistelligen Zahl, so erhält man das Dreifache derjenigen Zahl, die durch Vertauschen der Ziffern der Ausgangszahl entsteht. Wie lautet diese Ausgangszahl?" Dieser Text sieht schon recht klar und deutlich aus. Aber er hat einen Mangel: Er verleitet dazu, von vornherein anzunehmen, daß *genau eine* zweistellige Zahl die verlangte Eigenschaft hat. Wird nun vom Schüler verlangt, daß er das auch noch beweisen soll, oder darf er es stillschweigend annehmen? Hier ist also eine Unklarheit, die manchem Leser gar nicht auffallen wird, die aber recht unangenehme Folgen haben kann: Beim Korrigieren könnte ein Lehrer eine Schülerlösung auch dann als „vollständig richtig" werten, wenn sie diese Annahme stillschweigend zugrundelegt. Es bedeutet auch keine Abhilfe, diese Unklarheit nachträglich im Lösungstext auszuräumen; denn diesen kennen die Schüler ja nicht.

Daher entstand nun die folgende Textfassung: „*Ermittle alle* zweistelligen natürlichen Zahlen mit folgender Eigenschaft:

Addiert man ... usw." Auch zu diesem Text gab es zuerst kritische Diskussionen. Würden Schüler z. B. „herauslesen, es müsse" mehrere Lösungen geben („weil doch dasteht, man soll alle ermitteln")? Nun, ein Schüler der 8. Klasse sollte eben schon wissen, daß „alle" auch dann gesagt werden kann, wenn genau eine oder auch keine Lösung existiert. Weiterhin sollte ihm bekannt sein, daß eine Probe erforderlich ist. Aus diesen Gedanken resultiert dann auch der Lösungstext. (Er steht z. B. in *alpha*, Heft 6/1978, S. 140.)

Während des Ablaufs der Olympiaden haben – das ist nun wohl verständlich – nicht nur die Organisatoren und Korrektoren Herzklopfen, wie die *Jungen Mathematiker* den Anforderungen gewachsen sein werden; auch die Mitglieder der Aufgabenkommission erwarten mit Spannung, wie sich diesmal die erarbeiteten Aufgaben bewährt haben.

Unser Ziel ist, das Aufgabenmaterial in Inhalt und Formulierung weiter zu verbessern. Zu beachten sind dabei auch die aus vergangenen Olympiaden zu ziehenden Schlußfolgerungen sowie der internationale Trend.

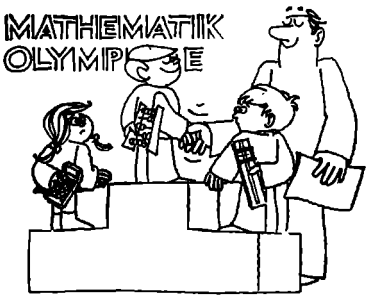
Unser Vorschlag an alle, die sich mit außerunterrichtlicher Arbeit in Mathematik beschäftigen, wäre eine intensive Nutzung des großen Fundus der Olympiadeaufgaben. Hier steht ein reiches Material für Schüler, Zirkelleiter und andere Interessenten zur Verfügung. In geeigneter Auswahl können die Aufgaben auch für den Unterricht genutzt werden.

Unser Wunsch ist, daß vielfältige Aufgabenvorschläge aus Theorie und Praxis an die Adresse der Aufgabenkommission (Zentrales Methodisches Kabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, 1110 Berlin, Platanenstr. 114) gehen mögen, die in ehrenamtlicher Tätigkeit mit unermüdlichem Fleiß, in oft langwieriger Kleinarbeit, immer mit einem weiten Herz für die heranwachsende Jugend, tätig ist.

J. Lehmann/L. Stammler

Zwei Mitglieder der Aufgabenkommission bei der Arbeit

In freien Stunden · alpha-heiter



Das Handschuhproblem

Bei der XIX. Olympiade 1980 wurde in der Klassenstufe 11/12 folgende Aufgabe (gekürzt) gestellt:
In einer Dunkelkammer liegen ungeordnet 20 einzelne Handschuhe von gleicher Größe, und zwar je genau 5 weiße rechte, weiße linke, schwarze rechte und schwarze linke Handschuhe. Bei der Entnahme von Handschuhen ist es unmöglich, eine Auswahl nach Farbe oder Form zu treffen.

a) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft, daß bei Entnahme von n Handschuhen mit Sicherheit ein passendes Paar entnommen wird!

b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl k mit der Eigenschaft, daß die Wahrscheinlichkeit, ein passendes Paar zu entnehmen, bei der Entnahme von k Handschuhen größer als 99% ist!

Zu dieser schwierigen Aufgabe, die den Schülern viele Überlegungen abverlangte, wurde neben den mathematischen Ausführungen vom Schüler Jens Heinrich (Potsdam) auch ein kleines Gedicht mit abgegeben, das wir unseren *alpha*-Lesern nicht vorenthalten wollen:

Ein Mann sucht Handschuhe in der Kammer –
da ist es dunkel, welch ein Jammer!
10 rechte und 10 linke liegen dort
an diesem schrecklich finst'ren Ort.
Doch, oh Schreck, es gibt auch schwarz' und weiße,
der Mensch sitzt ganz schön in der ... Tinte.
Aber wer wirft da gleich ins Korn die Flinte?
Hier hilft uns eine lust'ge Finte.
Heut' ist's schön warm, das ist ein Fakt,
drum geh'n die Hände lieber nackt!

Mitgeteilt von: Dr. H.-D. Gronau, Rostock

XX. OJM

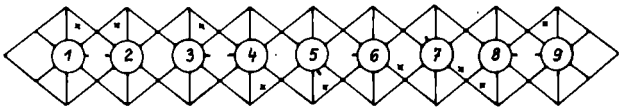
Wieviel Lösungen gibt es für das abgebildete Kryptogramm? Verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern aus der Menge $M = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$.

$$O + L + Y = M + P + I = A + D + E$$

Architekt A. W. Radunski, Moskau

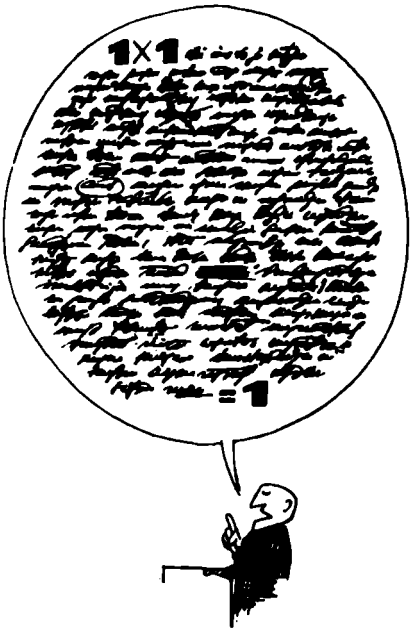
Besonderes Ereignis

Neun Wörter sind im mathematisch positiven Sinn einzutragen. Sie sollen jeweils in dem Feld mit dem Strich beginnen. Die Buchstaben in den angekreuzten Feldern ergeben das besondere Ereignis.



1. Anschauungsmittel,
2. bestimmter Teil der Oberfläche gewisser Körper,
3. nach bestimmten ordnenden Grundsätzen erfolgte Zusammenfassung (z. B. von Maßeinheiten),
4. Ergebnis einer Addition (Plural),
5. ein Ebenflächner,
6. Halbmesser,
7. ein Zeichengerät,
8. unbegrenzte gerade Linie,
9. eine Menge von Elementen, Begriff aus der Algebra.

Oberlehrer D. Völzke, Greifswald



20 Jahre Mathe-Olympiaden

In den Gleichungen sind für die Buchstaben des Wortes OLYMPIADEN die Ziffern von 1 bis 10 so einzusetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Variante 1	Variante 2
$O = L + L - L - L : L$	$O = (M : M) \cdot (M : M)$
$L = L + L + L - L - L$	$L = (M : M) + (M : M)$
$Y = L + L - L + L : L$	$Y = (M + M + M) : M$
$M = L \cdot L \cdot L - L - L$	$M = M + (M - M) \cdot M$
$P = L + L + L - L : L$	$P = (M \cdot M + M) : M$
$I = L + L + L + L - L$	$I = M + (M + M) : M$
$A = LL : L - L - L$	$A = M + M - M : M$
$D = L \cdot L \cdot L + L - L$	$D = M + M + M - M$
$E = L \cdot L \cdot L + L : L$	$E = M + M + M : M$
$N = L + L + L + L + L$	$N = (MM - M) : M$

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

Es kommt auf die Bedeutung der Worte an

Bernd hat konsequent trainiert und konnte deshalb zur Kreisolympiade delegiert werden. Er ist ein wißbegieriger *Junger Mathematiker*, der aber leider auch manchmal etwas neugierig ist. Sein Mathematiklehrer bittet ihn deshalb, die Siegerehrung abzuwarten und nicht schon vorher an der Zimmertür der Jury zu horchen.

Am nächsten Tag gibt Bernd auf die Frage seines Mathematiklehrers, ob er seine Bitte beachtet habe, folgende Antwort: „Ich habe gehorcht, ich habe nicht gehorcht."

Hat Bernd nun die Bitte seines Lehrers befolgt oder nicht?

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

Kryptarithmetik

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern. Wenn die entsprechenden Buchstaben für die Ziffern in der Zahlenreihe 1 2 3 4 5 6 7 8 9 eingesetzt werden, wird dadurch der Name des Ereignisses aus dem Leben der *Jungen Mathematiker* zusammengesetzt.

```
OEDO :     A = LDY
  −          +
 PDE +   I P = IPM
-----------------
OYEL − MPP = EYA
```

Dirigent J. Pěnčik und Tochter

```
JUNGE    MATHE    MATHE    ALPHA
LEUTE     MEIN      IST    MATHE
-----    -----    -----    -----
MATHE    HOBBY    SCHÖN    VIVAT

   ER    ALPHA
LERNT     BETA
 GERN    GAMMA
-----    -----
MATHE    MATHE
```

Dirigent J. Pěnčik, Prag

Silbenrätsel

Aus den Silben

acht – an – be – bie – blem – cel – de – del – dert – dert – e – e – eck – em – end – gra – hal – hohl – hun – hun – in – jahr – ka – kap – kel – le – len – len – li – me – mi – na – nen – nu – o – raum – reich – ren – ri – ro – strahl – ta – te – te – the – thir – ton – tor – ty – ven – win – zah – zah – zehnt – zwei

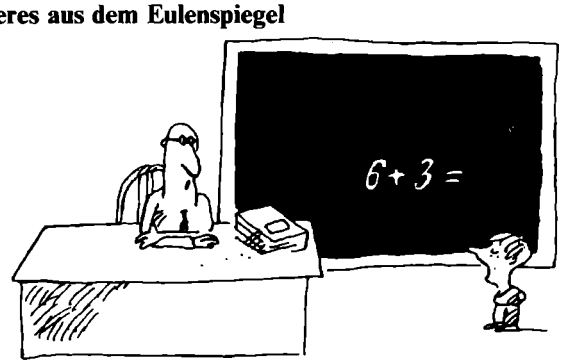
bilde man Wörter der im folgenden angegebenen Bedeutung.

Die jeweils ersten und letzten Buchstaben dieser Wörter ergeben einen Grund zum Feiern.

1. Die natürlichen Zahlen bilden einen, die rationalen auch.
2. Mittel zur gerechten Teilung eines Winkels.
3. Für die Olympischen Spiele sind es 5 Ringe, für die Mathematikolympiade ist es ein 17eck mit Zubehör.
4. Steht anstelle des Striches im Titel des 1544 erschienenen Werkes von dem deutschen Mathematiker *Michael Stifel* verfaßt: „Arithmetica ————".
5. Mehr als 12, aber weniger als 2000 Monate.
6. Halb so viel wie 1604.
7. Ein Vieleck mit 4850 Diagonalen.
8. x in dem geordneten Paar $(x; y)$ mit $y =$ Julia.
9. Ein sehr langer Weg und überall Zahlen darauf.
10. „Halb zwölf" auf englisch.
11. Außen etwas drum und innen nichts drin.
12. Wenn man den südlichen Teil Afrikas als Parabel ansieht, dann ist das der Scheitelpunkt.
13. So hieß ein italienischer Mathematiker und Physiker, der von 1608 bis 1647 lebte und in Florenz zu Hause war.
14. Kurz und knapp – ein griechischer Buchstabe.
15. Es ist sein Schicksal, daß man von ihm immer etwas wegnimmt.
16. Herr Kosinus mit Frau Hypotenuse multipliziert.
17. Wenn man 2000 kg hat, dann hat man 2 davon.

OStR K. Lehmann, VLdV, Berlin

Heiteres aus dem Eulenspiegel



Zuerst hätte ich gern die Meinung des Kollektivs gehört.

Also, Herr Lehrer, viel kann das nicht sein.

Ich schlage vor, daß $6 + 3 = 9$ ist. Wer dafür ist, den bitte ich um das Handzeichen.

alpha stellt vor

Dr. Wolfgang Burmeister

Sektion Mathematik
der Technischen Universität Dresden

Ich wurde 1953 in Rostock geboren und wohne seit 1956 in Dresden. In den ersten Jahren der Schulzeit entwickelte ich besonders für Musik, später auch für Mathematik größeres Interessse. Durch den Unterricht in der Volksmusikschule gewann ich zum ersten Mal Freude an gesellschaftlicher Tätigkeit. Seit der vierten Klasse nahm ich auch an musikalischen Leistungsvergleichen teil, dabei dreimal im Bezirksmaßstab. Mein mathematisches Interesse bekam stärkeres Gewicht, als ich im Jahre 1964 das erste Mal von den Schüler-Mathematikolympiaden hörte, die damals zum dritten Mal im DDR-Maßstab organisiert wurden. Durch erste Erfolge angespornt und von meiner Mathematiklehrerin und meinen Eltern unterstützt, gelang es mir als Schüler der 7. Klasse, mich für die DDR-Olympiade in Klassenstufe 10 zu qualifizieren. Dort errang ich einen ersten Preis. Diese Erfolge betrachtete ich als Verpflichtung, in meiner Klasse in allem, besonders durch Hilfsbereitschaft, als Vorbild zu wirken. Nun zeichnete sich auch die Mathematik als mein Berufswunsch ab. In den folgenden Jahren meiner Schulzeit wurde mir die Förderung der besten *Jungen Mathematiker* im Bezirks- und DDR-Maßstab zuteil. Seit der 8. Klasse nahm ich an den Olympiaden Junger Mathematiker in Klassenstufe 11/12 teil. Damals erschienen auch schon Aufgabensammlungen mit Olympiadeaufgaben, vor allem aus der Sowjetunion, mit deren Hilfe ich mich auf die Olympiade vorbereiten konnte. Als jüngster Teilnehmer der IX. IMO errang ich 1967 in Cetinje/Jugoslawien einen zweiten Preis. Im gleichen Jahr wurde ich in die EOS Dresden-Süd aufgenommen. Meine Tätigkeit in der FDJ-Gruppenleitung setzte ich an der EOS weiter fort. Auch in den folgenden Jahren nahm ich an den Internationalen Mathematikolympiaden teil und konnte meine Erfahrungen an andere weitergeben. Insgesamt erzielte ich drei erste und zwei zweite Preise und trug damit wesentlich zu den Erfolgen der DDR-Mannschaft bei. Während meiner Schulzeit erhielt ich als Anerkennung für gute gesellschaftliche und fachliche Arbeit die Artur-Becker-Medaille in Bronze, Silber und Gold, die Lessing-Medaille in Gold und andere Auszeichnungen. Seit der 9. Klasse begann ich mich neben dem Lösen mathematischer Aufgaben auch auf die Anforderungen des Studiums allseitig vorzubereiten, wobei mir mein Mathematiklehrer und meine Eltern halfen. Als besondere Intensivphase der Studienvorbereitung wurde 1969 für die Schüler der Abiturstufe die wissenschaftlich-praktische Ausbildung eingeführt. Ich folgte dem Vorschlag von Herrn Prof. Schmidt, im Rahmen der WPA die Vorlesung „Einführung in die Numerische Mathematik" zu besuchen. Dem Vorlesungsbesuch im Herbstsemester 1969 folgte eine persönliche Betreuung durch Herrn Prof. Schmidt, die durch einen Vertrag mit der Abteilung Volksbildung beim Stadtbezirk unterstützt wurde. Seitdem leistete ich auf dem Gebiet der Numerischen Mathematik zielgerichtete Forschungstätigkeit. Gleichzeitig erlangten damit meine Vorstellungen über das Wesen der Mathematik und ihrer Anwendungsgebiete konkretere Gestalt. Noch während der Schulzeit entstand meine erste Veröffentlichung in der *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. An der Sektion Mathematik der Technischen Universität bewarb ich mich zum Studium. Durch einen Sonderstudienplan, nach dem ich einige Fächer aus dem 1. Studienjahr sofort zu Beginn des Studiums, die übrigen im Laufe des Studienjahres 1971/72 abschloß, konnte ich 1974 das Studium vorfristig beenden. In der FDJ-GOL arbeitete ich als Funktionär für Jugendobjekte mit. Die Teilnahme am IX. Parlament der FDJ und besonders an den Weltfestspielen 1973 gaben mir Anregungen für meine gesellschaftliche Arbeit. Als Forschungsstudent arbeitete ich an meiner Dissertation zum Thema „Iterative Lösung nichtlinearer Gleichungen und Optimierungsaufgaben mit überlinear konvergenten Verfahren", die ich 1975 einreichte.

Die Olympiadebewegung verfolgte ich weiter mit Interesse und gab meine Erfahrungen in zahlreichen Mathematik-Lagern, Lehrgängen und Klubveranstaltungen weiter. Für gute Leistungen während des Studiums erhielt ich das Karl-Marx-Stipendium und einen Preis der TU Dresden. Seit 1975 bin ich als wissenschaftlicher Assistent an der Sektion Mathematik tätig. In dieser Zeit erhielt ich die Möglichkeit zu einem einjährigen Zusatzstudium in der Sowjetunion, das ich an der *Kiewer Staatlichen Universität* absolvierte. Von dort kehrte ich mit neuen Kenntnissen und Eindrücken zurück. Zu meiner jetzigen Arbeit an der TU Dresden gehört neben der mathematischen Forschung die Ausbildung von Mathematik- und Ingenieurstudenten.

Für die Leser von *alpha* möchte ich die folgende Aufgabe stellen:

▲2054▲ Es sei k eine natürliche Zahl mit $1 \leqq k \leqq 30$.
Es ist zu beweisen, daß man in jedem Jahr einen Monat finden kann, so daß der k-te Tag dieses Monats auf einen Sonntag fällt.

Diplommathematiker

Ursula Felgenhauer

Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Otto von Guericke, Magdeburg

Zwanzig Jahre Olympiaden *Junger Mathematiker* der DDR sind auch für mich als ehemalige Teilnehmerin Anlaß zu Rückblick und Nachdenken über die Mathematik. Erinnerung vor allem an die Schulzeit und Nachdenken über die fast zehn Jahre nach Abitur und Zeugnisausgabe.

Als ich zum ersten Mal einen Preis errang – bei der Kreisolympiade 1965 – hätte ich sicher die Mathematik noch nicht als mein Steckenpferd bezeichnet, auch wenn mir der Unterricht Spaß machte. Ab und an bekam ich mal eine „Extraration" von unserem Mathematiklehrer, und ihm verdanke ich auch die Vermittlung an eine damals existierende Spezialklasse.

Nach zwei Jahren kam ich an die EOS *Heinrich Hertz*, Spezialschule mathematischer Richtung. Mit Dankbarkeit denke ich an die gute Ausbildung in Mathematik – einschließlich Einführung in Näherungsmethoden und Programmierung – aber auch an unsere Wettbewerbe in naturwissenschaftlichen Fächern oder z. B. den guten Musikunterricht. (Das mag sich in der *alpha* komisch ausnehmen. Aber ich habe in der Folgezeit gerade von dieser Allgemeinbildung viel profitiert.)

In den EOS-Jahren wurde mir mehr und mehr klar, daß die Mathematik von allen Fächern für mich das schönste, das interessanteste war. So wurde sie für mich zum Berufswunsch. Die Anforderungen in der mathematischen Forschung und Anwendung sind nun natürlich andere als in der Schule, aber die Fähigkeiten zum Abstrahieren und Vergleichen sowie einige Grundfertigkeiten werden schon im Unterricht ausgebildet – wie auch der Spaß am Gedankenexperiment.

Regelmäßig konnten Schüler unserer Schule an Olympiaden teilnehmen, und es gab auch mehrmals Vertreter der *Heinrich-Hertz-Schule* unter den IMO-Teilnehmern. Es lag beinah schon etwas Professionelles in der Vorbereitung, ging es doch um die Ehre der Schule. Ich habe mich sehr gefreut, 1970 zur DDR-Mannschaft bei der XII. IMO in Ungarn zu gehören. Die Erinnerung an dieses eigenwillige „Jugendtreffen" von ganz und gar nicht trockenen oder langweiligen Tüftel- und Knobelfans und an die herrliche ungarische Landschaft wird mir noch lange bleiben.

Nach der Schule studierte ich wunschgemäß in der Sowjetunion Mathematik. Ich wurde an der *Staatlichen Universität* Donezk immatrikuliert, einer relativ jungen Hochschule im Bergbau- und Industriezentrum des Donbaß. Nach gründlichem Studium der Grundlagenfächer begann im 3. Studienjahr die Spezialausbildung. Die Wahl fiel mir nicht leicht. Aber schließlich entschied ich mich für Differentialgleichungen. Die von Studenten- und Hochschullehrerkonferenzen bekannten Arbeiten auf diesem Gebiet hatten mich durch ihren praktischen Nutzen und die Vielseitigkeit der verwendeten Lösungsmethoden beeindruckt. Mein Diplomthema hatte mit der *Modellierung eines Schmelzvorgangs* zu tun.

1976 begann ich meine Assistententätigkeit an der TH Magdeburg. Wieder neue Anforderungen, auch neue Aspekte, die Mathematik betreffend - sowohl in Forschungs- als auch Ausbildungsfragen. Seit 1978 bin ich Fernaspirant meiner „alten" Uni, wo ich in enger Zusammenarbeit mit dem Donezker Akademieinstitut wieder Stefansche Probleme – – Schmelz- und Erstarrungsprozesse, Phasenübergänge – untersuche. Ein fesselndes Thema, wenn man nur an die Anwendungsmöglichkeiten in der Metallurgie oder gar in der Kunstfaserherstellung denkt! Bei der Bearbeitung stößt man auf immer neue, interessantere Fragestellungen, die keinen Schematismus erlauben.

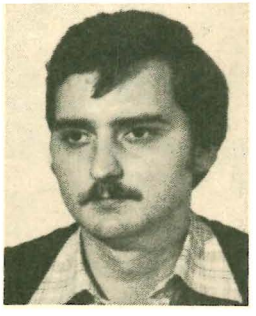
Mein nächstes Ziel ist es, einen relativen Abschluß zu erreichen, danach möglichst weiter Mathematische Physik zu betreiben – und am liebsten in weiterer Zusammenarbeit mit meinen sowjetischen Lehrern und Kollegen.

Den Olympioniken der 80er Jahre wünsche ich Energie und Ausdauer beim Denktraining, Möglichkeiten zum kollektiven Knobeln und einen offenen Blick für interessante inner- und außermathematische Fragestellungen sowie Erfolge in der Schule und beim Wettbewerb. Als zukünftige Kollegen und Partner bei der Nutzung und Entwicklung der Mathematik grüße ich euch ganz herzlich.

Diplom-Lehrer Mathematik/Physik

Hartmut Schneider

Lehrer an der E.-Thälmann-OS Hildburghausen



1953 wurde ich in Schalkau, einem kleinen Ort im Kreis Sonneberg, geboren. Meine Eltern bewirtschafteten damals einen kleinbäuerlichen Betrieb.

Nach vierjährigem Besuch einer Einklassenschule in meinem Heimatort Truckenthal wechselte ich in eine zehnklassige allgemeinbildende polytechnische Oberschule im Nachbarort Schalkau über.
Hier fand ich eigentlich das erste Mal engeren Kontakt zur Mathematik. Ich besuchte über mehrere Jahre eine Mathematik-Arbeitsgemeinschaft und nahm mehrmals erfolgreich an *Olympiaden Junger Mathematiker* (im Kreismaßstab) teil. In dieser Zeit machte ich auch meine erste Bekanntschaft mit der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha*, die damals gerade „geboren" wurde und auch heute noch zu meiner Lektüre gehört. Während meiner Schulzeit in Schalkau entstand auch mein Wunsch nach dem Beruf eines Lehrers in der Fachrichtung Mathematik.
Nach dem Besuch der Vorbereitungsklassen an der EOS *Geschwister Scholl* in Hildburghausen konnte ich nach bestandener Aufnahmeprüfung eine Ausbildung an der *Spezialklasse für Mathematik und Physik* an der Martin-Luther-Universität in Halle aufnehmen. Da an der Spezialklasse sehr stark auf ein Mathematikstudium orientiert wurde, nahm ich nach bestandenem Abitur ein Studium in dieser Fachrichtung an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg auf. Trotzdem blieb auch in diesen Jahren mein Wunsch nach dem Lehrerberuf bestehen, wozu nicht zuletzt auch die Vorbildwirkung einiger meiner Lehrer und Dozenten beitrug. So wechselte ich nach dem ersten Studienjahr und nahm an derselben Bildungseinrichtung ein Lehrerstudium in der Fachrichtung Mathematik/Physik auf, das ich nach dem vierten Studienjahr *Mit Auszeichnung* abschließen konnte. Meine Diplomarbeit schrieb ich auf dem Gebiet der Analysis zum Thema „Diskussion diskret-analytischer Funktionen mit Hilfe einer zweidimensionalen diskreten Operatorenrechnung". Während meiner gesamten Ausbildungszeit in Halle erfüllte ich verschiedene Aufgaben innerhalb unserer Grundorganisation der FDJ.
Nach abgeschlossenem Studium begann ich meinen Dienst als Fachlehrer für Mathematik und Physik an der *Ernst-Thälmann*-Oberschule in Hildburghausen, wo ich in einem guten Kollektiv günstige Arbeitsbedingungen vorfand. Meine nunmehr vierjährige Tätigkeit als Lehrer hat mir gezeigt, daß meine Entscheidung für diesen Beruf richtig gewesen ist. Ich möchte an dieser Stelle den jungen Lesern von *alpha*, die sich auch für diesen Beruf entschieden haben oder noch entscheiden werden, sagen, daß der Lehrerberuf ganz bestimmt einer der schönsten und interessantesten, aber auch einer der schwersten Berufe ist. Neben fachlicher Sicherheit gehören vor allem auch ein klarer politischer Standpunkt, eine hohe Einsatzbereitschaft und eine richtige Einstellung und Liebe zum Kind dazu.
Im vergangenen Jahr war ich im Kreis Hildburghausen als Fachberater für Physik eingesetzt. In meinen vier Dienstjahren war ich auch außerunterrichtlich als Arbeitsgemeinschaftsleiter auf dem Gebiet der Mathematik tätig. Zur Zeit leite ich je eine AG Mathematik Klasse 7 und 8, in denen es um eine Förderung junger mathematischer Talente im Kreismaßstab geht. Hier wollen wir durch konzentriertes Bearbeiten von Olympiadeaufgaben sowie durch Vermittlung erweiterter mathematischer Kenntnisse eine bessere Vorbereitung unserer Schüler auf mathematische Leistungsvergleiche und die spätere berufliche Tätigkeit erreichen. Dabei finden wir auch in der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* Anregung und Unterstützung.

Den Lesern der *alpha* überreiche ich eine Aufgabe (aus einer zurückliegenden Bezirksolympiade), die mir und meinen AG-Teilnehmern sehr gut gefallen hat.

▲2087▲ Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a. Auf BC liege ein Punkt P_1 derart, daß $\overline{BP_1} = \overline{P_1C}$ gilt, auf CD liege ein Punkt P_2 mit $\overline{P_2D} = 3\,\overline{CP_2}$ und auf DA ein Punkt P_3 mit $\overline{P_3A} = 3\,\overline{DP_3}$. Ein Punkt P wandere auf Seiten des Quadrates von P_1 über B und A nach P_3.
Es sei nun A_Q der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ und A_V der des Vielecks $PP_1P_2P_3$.
Ermittle sämtliche Lagen von P, für die das Verhältnis $A_V : A_Q$
a) am größten, b) am kleinsten ist!
Berechne das Verhältnis für jeden der beiden Fälle!
Dabei sei auch zugelassen, daß P mit P_1 bzw. P_3 zusammenfällt, falls hierbei eines der gesuchten Verhältnisse auftritt.

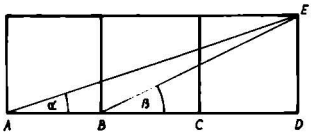
Diplomphysiker
Ulf Brüstel

Sektion Physik
der Karl-Marx-Universität Leipzig

Zur Beschäftigung mit der Mathematik regte mich mein Vater an. Er stellte mir erst einfache, später schwerere Knobelaufgaben. Seit der fünften Klasse habe ich dann regelmäßig Mathematikzirkel besucht und an den Mathematikolympiaden teilgenommen. Ich hatte oft die Möglichkeit, in Spezialistenlagern und Kursen auf Kreis-, Bezirks- und Republikebene meine Kenntnisse auf mathematischem Gebiet zu erweitern. Eine gute Möglichkeit, die exakte Formulierung von Lösungen zu üben, war für mich viele Jahre lang der *alpha*-Wettbewerb.
Etwa seit der neunten Klasse begann ich mich zusätzlich mit physikalischen Problemen zu beschäftigen und besuchte den Schülerzirkel der Sektion Physik der Karl-Marx-Universität Leipzig. Auf Grund meiner Leistungen bei den DDR-Physikolympiaden in Güstrow konnte ich 1974 an der Internationalen Physikolympiade in Warschau teilnehmen.
In der Frage meines Studiums zögerte ich lange mit der Entscheidung: Mathematik oder Physik? Meine Wahl fiel schließlich auf die Physik. Von 1974 bis 1979 habe ich in Leipzig Physik studiert und danach ein Forschungsstudium in der Spezialisierungsrichtung *Halbleiterphysik* aufgenommen. Ich hoffe, daß ich später eine interessante Tätigkeit in der Industrie auf diesem Gebiet aufnehmen kann.
Während des Studiums ist durch meine Tätigkeit als Zirkelleiter in der Mathematischen Schülergesellschaft Leipzig und als Korrektor bei den Bezirksolympiaden der Kontakt zur Mathematik und der Olympiadebewegung nie abgerissen.
Eine für mich wichtige Freizeitbeschäftigung möchte ich noch nennen: Klavierspielen. Während meiner Schulzeit habe ich regelmäßig die Musikschule besucht, obwohl es dabei auch „Durststrecken" gab, in denen die Lust zum notwendigen Üben nicht sehr groß war. Heute ist mir das Klavierspielen zum Bedürfnis geworden, und ich bin froh darüber, daß es an der Sektion Physik die Möglichkeit gibt, in einer Kammermusikgruppe mitzuwirken und als „Amateur" auch öffentlich auftreten zu können. Damit finde ich einen Ausgleich zu meiner oft recht strengen, exakten beruflichen Tätigkeit.

Zum Schluß möchte ich den *alpha*-Lesern eine Aufgabe stellen, die mir recht gut gefällt:

▲2089▲ Gegeben sei ein aus drei Quadraten zusammengesetztes Rechteck.



Es ist zu beweisen, daß $\alpha + \beta = 45°$ ist.

Dozent
Dr. Uwe Küchler

Sektion Mathematik
der Technischen Universität Dresden

Seit ich mich mit kniffliger Zahlentheorie, geometrischen Konstruktionen und anderen Problemen der „Olympiadestrecke" *Junger Mathematiker* beschäftigt habe, sind einige Jahre ins Land gegangen. Heute bin ich fast doppelt so alt. Manche Erlebnisse jener Zeit haben sich mir jedoch fest eingeprägt. Nicht wenige positive Einflüsse auf mein Verhältnis zur Mathematik stammen aus jener Zeit. Dazu gehören unter anderem zahlreiche Fachgespräche mit meinen Lehrern in der Oberschule, die Trainingslager in der Wuhlheide, die Klausurstunden zur DDR-Olympiade am Bogensee, der internationale Wettstreit, damals 1963 in Wroclaw, die vielen angestrengten, aber auch interessanten Tage.
Diese Höhepunkte sowie ihre Vorbereitung in einsamen Stunden des Studierens und Knobelns haben mir geholfen, mich auf die Erfordernisse eines Mathematikstudiums, auf logisches Denken, exakte Darstellung und beharrliches Suchen nach neuen Lösungen einzustimmen.
Von 1963 bis 1968 habe ich an der Technischen Universität Dresden Mathematik studiert, 1970 promoviert und danach für ein Jahr ein Zusatzstudium an der Lomonossow-Universität in Moskau absolviert. Meine Spezialstrecke ist das Gebiet der *Stochastischen Prozesse*, d. h. zeitabhängiger Zufallsprozesse und ihr Zusammenhang mit anderen mathematischen Disziplinen. Dieses Gebiet hat sich in den letzten Jahrzehnten sehr stark entwickelt und besitzt sowohl viele Anwendungen auf praktische Probleme als auch sehr interessante und fruchtbare Verbindungen zur klassischen Mathematik wie z. B. der Differential- und Integralgleichungen.
Im Jahre 1978 habe ich meine Dissertation B verteidigt und arbeite jetzt als Hochschuldozent an der Technischen Universität Dresden. Wir bilden Mathematikstudenten für ihren Einsatz in der Volkswirtschaft und im Hochschulwesen sowie der Akademie aus und vermitteln Ingenieur- und Ökonomiestudenten das für ihren Beruf notwendige Mathematikwissen. Eine wesentliche Aufgabe ist weiterhin, Grundlagen- und anwendungsorientierte Forschung auf dem Gebiet der Mathematik zu leisten. Bei dieser Gelegenheit möchte ich unseren Schülern eine kleine Aufgabe stellen, die ich beim Durchblättern alter Aufzeichnungen gefunden habe:

▲2088▲ Beweise, daß es unendlich viele ganze Zahlen gibt, die nicht in der Form $p + n^2$ darstellbar sind, wobei n eine ganze und p eine Primzahl sein soll!

Diplommathematiker

Christine Wilde

VE Kombinat Datenverarbeitung Leipzig

Als mich mein Mathematiklehrer im 7. Schuljahr zur 1. *Olympiade Junger Mathematiker* der Stadt Leipzig neben dem offiziellen Delegierten einfach als Ersatzmann mitschickte und ich ausnahmsweise in die Schar der 217 Teilnehmer eingereiht wurde, ahnte ich noch nicht, daß sich daraus später mein Wunsch, Mathematik zu studieren, ergeben würde. Noch genau erinnere ich mich daran, wie Studienrat J. Lehmann, der Initiator dieses Wettbewerbs, zur Eröffnung (12. Juni 1960) sagte, daß Olympiaden in solchen sozialistischen Staaten wie Ungarn, UdSSR und Rumänien schon seit Jahrzehnten durchgeführt würden. Das war vor 21 Jahren. Heute können auch wir von Traditionen sprechen.

Mein Mathematiklehrer und mein Vater verstanden es, mich immer mehr für mathematische Probleme zu interessieren. Bald beschäftigte ich mich damit auch außerunterrichtlich.

Von 1960 an wurde ich zu den Olympiaden der Stadt und des Bezirks Leipzig delegiert. Endlich, im Jahre 1963, ich besuchte damals die 10. Klasse, gelang mir der Sprung bis zur zentralen Mathematikolympiade. Für mich war es ein tiefes Erlebnis, als eines der wenigen Mädchen in Ludwigsfelde dabei zu sein. In den folgenden Jahren lernte ich all die *Jungen Mathematiker* unseres Bezirkes kennen, welche genau wie ich Kandidaten für die DDR-Olympiade waren. Erfahrene Pädagogen machten uns in Sonderkursen mit Stoffgebieten vertraut, die im Unterricht nur in geringem Umfange behandelt wurden, wie Zahlentheorie, Kombinatorik u. a.

Nach Abschluß des 10. Schuljahres begann ich die Lehre als Galvaniseur im VEB Galvanotechnik. Damit wählte ich eine damals noch recht seltene Ausbildungsform: *Berufsausbildung mit Abitur*. Auch hier hat mich mein Mathematiklehrer gefordert und gefördert. Mit großem Interesse nahm ich an den Veranstaltungen des neu geschaffenen Bezirkskonsultationspunktes teil. Hochschullehrer machten uns mit Gruppentheorie und komplexen Zahlen vertraut, Studenten der Handelshochschule führten uns in das Gebiet der Matrizenrechnung ein. Inhalt und Form dieser Veranstaltungen haben mir viel Spaß gemacht. Sie schufen neben dem Mathematikunterricht eine gute Grundlage für Studium und Beruf. Genau wie in der Oberschule nahm ich auch als Lehrling an den Mathematikolympiaden teil bis hin zur DDR-Olympiade.

Jetzt stand mein Berufswunsch endgültig fest: Ich wollte Mathematik studieren, auch wenn Freunde und Bekannte meinten, daß diese Fachrichtung für Mädchen zu schwer sei. Fleißige Mitarbeit im Unterricht der Oberschule, die regelmäßige Teilnahme an außerunterrichtlichen Veranstaltungen und eine konsequente Vorbereitung auf Mathematikolympiaden, sei es im intensiven Selbststudium oder im Kollektiv, sind Voraussetzung, daß ein Mädchen genau wie ein Junge zum Mathematikstudium kommen kann.

Das Hochschulstudium an der Karl-Marx-Universität habe ich nach fünf Jahren als Diplom-Mathematiker mit dem Prädikat *Gut* abgeschlossen. Meine Diplomarbeit befaßte sich mit speziellen Fragen der Mengenlehre. Seit Beendigung des Studiums bin ich im VEB *Leitzentrum für Anwendungsforschung*, Betrieb des VE Kombinats Datenverarbeitung, Betriebsteil Leipzig, als Organisator tätig. Wir erarbeiten Systemanalysen, Systemprojekte und EDV-Programme.

Zum Schluß ein Problem aus der Kryptarithmetik, einem Gebiet der Unterhaltungsmathematik, das mir immer viel Freude bereitet hat:

▲2090▲ In der unvollständigen fünfstelligen natürlichen Zahl

418**

sind die beiden Sternchen so durch Ziffern zu ersetzen, daß sich die erhaltene fünfstellige Zahl sowohl durch 6, als auch durch 7 und 9 teilen läßt.

Lösungen

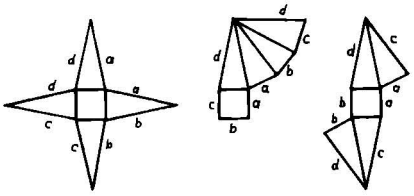
Lösungen zu: Pokalwettkampf in Berlin-Lichtenberg, Heft 6/80

Klasse 4 – Vorrunde

▲1▲ a) $1 \cdot 2+3-4=1$
b) $1+2+3-4=2$
c) $1+2 \cdot 3-4=3$
d) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4=24$

▲2▲ Die Pyramide läßt sich aus den Netzen a), b) und d) herstellen, aus dem Netz c) nicht.

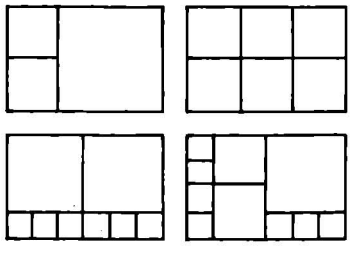
Zusammenfallende Kanten sind mit gleichen Buchstaben markiert.



Klasse 4 – Endrunde

▲1▲ Multipliziert man die Hälfte der gedachten Zahl mit sich selbst, dann muß das Ergebnis eine zweistellige Zahl sein. Daraus folgt, daß diese Hälfte größer als 3 und kleiner als 10 ist. Die gedachte Zahl ist somit größer als 6 und kleiner als 20. Da sie zweistellig sein soll, muß sie zwischen 10 und 20 liegen, und ihre erste Ziffer ist eine „1". Beim Austausch der Ziffern endet damit das Produkt auf „1". Von den in Frage kommenden Zahlen erfüllt nur 9 diese Bedingungen. Die gesuchte Zahl ist also 18. Tatsächlich erhält man aus $9 \cdot 9 = 81$ die Ausgangszahl mit ausgetauschten Ziffern.

▲2▲



Klasse 5

▲1▲ Jedes Quadrat ist ein Rechteck, es ist also mindestens ein Rechteck vorhanden. Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm, es sind also höchstens 4 Rechtecke angezeichnet. Da die Gesamtzahl der Vierecke dreimal so groß ist wie die der Rechtecke, kommt deshalb nur eine der Zahlen 3; 6; 9 oder 12 in Frage. Da schon 4 Parallelogramme vorhanden sind, kann die Gesamtzahl nicht 3 sein. 6 und 12 scheiden aus, weil es gerade Zahlen sind (Widerspruch zu (4)). Also kommt als Gesamtzahl nur 9 in Frage. Demnach wären unter den Vierecken 3 Rechtecke.

Das ist mit allen Angaben vereinbar.

Klasse 6

▲1▲ Erweitert man beide Brüche mit 20, so erhält man $\frac{80}{260}$ bzw. $\frac{100}{260}$. Um auf den Nenner 20 zu kommen, müßte man einen Bruch finden, der zwischen diesen beiden Zahlen liegt und dessen Zähler durch 13 teilbar ist.

Von den möglichen Brüchen erfüllt nur $\frac{91}{260}$ diese Bedingung.

Kürzt man mit 13, so erhält man $\frac{7}{20}$.

▲2▲ a) Solche Dreiecke gibt es nicht. Würden sich z. B. in einem Dreieck ABC die Halbierenden der Winkel α und β unter einem Winkel von 90° in S schneiden, dann müßten nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel, angewendet auf das Dreieck ABS, die beiden restlichen Winkel, also $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$, zusammen 90° betragen, demnach also gelten $\alpha+\beta=180°$. Es gibt jedoch kein Dreieck mit zwei rechten Winkeln.

b) Jedes gleichschenklige Dreieck erfüllt diese Bedingung. Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AC}=\overline{BC}$. Die Halbierenden der Winkel α und β mögen die Gegenseiten BC und AC in D bzw. E schneiden. Nun gilt:

$\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (identisch),

$\sphericalangle DAB \cong \sphericalangle ABE$ (als Basiswinkel),

$\sphericalangle EAB \cong \sphericalangle ABD$ (als halbe Basiswinkel).

Folglich sind die Dreiecke ABD und ABE nach *wsw* kongruent zueinander, und daher sind die Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{DB}$ als einander entsprechende Seiten kongruenter Dreiecke gleich lang.

Klasse 7

▲1▲ Beispielsweise:

$(1+2):3 = 1$
$12:3:4 = 1$
$((1+2) \cdot 3-4):5 = 1$
$(12:3:4+5):6 = 1$
$(((1+2) \cdot 3-4):5+6):7 = 1$
$((1+2):3 \cdot 4+5+6-7):8 = 1$
$((((1+2):3+4):5+6):7+8):9=1$

▲2▲ a) Die Dreiecke müssen nicht kongruent sein. Eines kann die Innenwinkel 45°, 45° und 90° haben, das andere Innenwinkel der Größen 45°, 67,5° und 67,5°.

b) Die Dreiecke müssen kongruent sein. Der rechte Winkel kann nur Winkel an der Spitze sein, da sonst zwei rechte Winkel vorhanden wären. Somit stimmen die Dreiecke in einer

Seite und allen Winkel überein, sind also nach *wsw* kongruent zueinander.

c) Die Dreiecke müssen kongruent zueinander sein. Gleichgültig ob der Winkel von 60° Basiswinkel oder Winkel an der Spitze ist, die beiden anderen Winkel sind jeweils auch 60° groß. Somit liegen gleichseitige Dreiecke vor, und da sie in der Seitenlänge übereinstimmen, müssen sie kongruent sein.

Klasse 8

▲1▲ OBdA gelte $\overline{AB}=\overline{BD}=\overline{AC}=a$. Dann ist eine weitere Seite der Länge a vorhanden, diese sei oBdA die Seite BC.

(1) Das Dreieck ABC ist gleichseitig. Der Winkel ABC hat die Größe 60°.

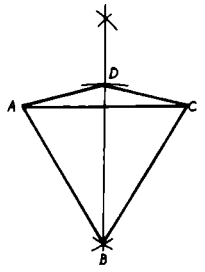
(2) Wegen $\overline{BC}=\overline{BD}$ ist das Dreieck BCD gleichschenklig. Die Winkel BDC und BCD sind als Basiswinkel kongruent zueinander.

(3) Da BD als Symmetrieachse den Winkel ABC halbiert, hat der Winkel DBC die Größe 30°.

(4) Wegen $180-30=150$ und $150:2=75$ folgt aus dem Satz über die Winkelsumme, angewendet auf das Dreieck BCD, daß die Winkel BCD und BDC je 75° groß sind.

(5) Die entsprechenden Überlegungen am Dreieck BDA bzw. eine Betrachtung aus der Symmetrie führen zu der Erkenntnis, daß auch die Winkel BAD und BDA je 75° betragen.

(6) Die Innenwinkel dieses Drachenvierecks haben die Größen 60°, 75°, 75° und 150°.



Lösungen zur Aufgabe 2000

Heft 6/80, IV. Umschlagseite:

Ma 4 ■2000 Da der erste Summand möglichst groß sein soll, ist das Sternchen an der Zehnerstelle durch die Ziffer 6 zu ersetzen. Die Summe $*+*+7$ endet nur dann auf die Ziffer 0, wenn die beiden Sternchen durch die Ziffern 2 und 1 ersetzt werden. Der erste (möglichst große) Summand lautet somit 962. Die Summe $1+(6+8+*)$ endet nur dann auf die Ziffer 8, wenn das Sternchen durch die Ziffer 3 ersetzt wird. Es verbleiben die Ziffern 4 und 5. Damit der zweite Summand größer wird als der dritte, muß der zweite Summand mit der Ziffer 5 beginnen. Die Lösung lautet somit

$$\begin{array}{r} 962 \\ +581 \\ +437 \\ \hline 1980. \\ \hline\hline \end{array}$$

Ma 5 ■2000 Wegen $99+99=198$ könnte in beiden Summanden sowohl das Sternchen an der Hunderterstelle als auch an der Zehnerstelle jeweils durch die Ziffer 9 ersetzt werden. Dann darf aber in beiden Summanden an der Einerstelle jeweils nur die Ziffer 0 stehen. Deshalb gilt

$$\begin{array}{r} 990 \\ +990 \\ \hline 1980. \\ \hline\hline \end{array}$$

Wegen $1+(99+98)=198$ und da der erste Summand nicht kleiner sein soll als der zweite, gibt es zwei weitere Lösungen, nämlich

$$\begin{array}{rcr} 999 & \text{und} & 991 \\ +981 & & +989 \\ \hline 1980 & & 1980. \\ \hline\hline & & \end{array}$$

Ma 6 ■2000 Durch systematisches Probieren findet man genau fünf Lösungen; sie lauten

$$\begin{array}{rcrcr} 585 & \text{und} & 585 & \text{und} & 485 \\ +945 & & +955 & & +945 \\ +450 & & +440 & & +550 \\ \hline 1980 & & 1980 & & 1980 \\ \hline\hline & & & & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcr} 485 & \text{und} & 580 \\ +955 & & +900 \\ +540 & & +500 \\ \hline 1980 & & 1980. \\ \hline\hline & & \end{array}$$

Ma 7 ■2000 Es existiert genau eine Lösung; sie lautet

$$\begin{array}{r} 11898 \\ -9918 \\ \hline 1980. \\ \hline\hline \end{array}$$

Ma 8 ■2000 Angenommen, die Zwillinge sind gegenwärtig z Jahre, die Mutter ist gegenwärtig x Jahre alt; dann gilt

$(28+x)\cdot z\cdot z=1980,$

$(28+x)\cdot z^2 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 11.$

Aus der Faktorenzerlegung ist ersichtlich, daß $z=2$ oder $z=3$ oder $z=6$ gelten könnte. Für $z=2$ wäre die Mutter 467 Jahre alt; für $z=3$ wäre die Mutter 192 Jahre alt. Somit entfallen diese beiden Möglichkeiten.

Es gilt nur $z=6$. Daraus folgt weiter

$(28+x)\cdot 36=1980,$

$28+x=55,$ also $x=27.$

Die Mutter ist gegenwärtig 27 Jahre alt. Aus $27-6=21$ folgt, daß die Mutter 21 Jahre alt war, als die Zwillinge geboren wurden.

Ma 9 ■2000 Durch Umformen erhalten wir

$(a+1)(a+2)\cdot 2a=1980,$

$a(a+1)(a+2) = 990,$

$a(a+1)(a+2) = 9\cdot 10\cdot 11.$

Daraus folgt $a=9$.

Probe: $(9+1)(9+2)(++9)=1980,$

$10\cdot 11\cdot 18=1980.$

Ma 10/12 ■2000 Aus $p=33p_1$ und $p=2p_2$ folgt $33p_1=2p_2$. Also muß p_2 mindestens die Faktoren 3 und 11 besitzen. Da $p_1<p_2$ gilt, kommt für p_2 nur das Produkt $9\cdot 10\cdot 11$ in Frage. Dann ist $p_1=3\cdot 4\cdot 5$ und $p=1980$. Eine andere Möglichkeit für p_2 gibt es nicht, da dann p nicht vierstellig wäre.

Lösungen zu:

Zahlenzauber um das Jahr 2000

● Magisches Quadrat: In die leeren Felder des magischen Quadrates sind folgende Ziffern einzutragen, und zwar jeweils von links nach rechts:

1. Zeile: 202, 213
2. Zeile: 212, 201
3. Zeile: 205, 207, 218
4. Zeile: 210
5. Zeile: 209, 220
6. Zeile: 206, 219, 208
7. Zeile: 200, 211
8. Zeile: 215, 217, 204
9. Zeile: 216, 203, 214

● Darstellung der Zahl 1980:

$1980=(111-1)\cdot(11-1-1)\cdot(1+1)$

$1980=2222+2-222-22$

$1980=333\cdot(3+3)-3\cdot 3\cdot\left(3-\frac{3}{3}\right)$

$1980=\frac{5}{5}\cdot 55\cdot\left(5+\frac{5}{5}\right)^{\frac{5+5}{5}}$

$1980=6^{\frac{6+6}{6}}\cdot\left(66-6-6+\frac{6}{6}\right)$

$1980=\left(7+7+7-\frac{7}{7}\right)\cdot\left[(7+7)\cdot 7+\frac{7}{7}\right]$

$1980=\sqrt{8^8}:\left(\frac{8}{8}+\frac{8}{8}\right)-8\cdot 8-\sqrt{8+8}$

$1980=\left(\frac{99}{9}-9\right)\cdot\left(999-\frac{9\cdot 9}{9}\right)$

● Ein Dreieck $(1+\sqrt{9}+8+0)$ cm: Wegen $(1+\sqrt{9}+8^0)$ cm $=5$ cm, $(1+\sqrt{9}+8+0)$ cm $=12$ cm und $[(1\cdot 9+8\cdot 0)+(1+\sqrt{9}\cdot 8^0)$ cm $=13$ cm bilden die Maßzahlen der Seitenlängen dieses Dreiecks ein pythagoreisches Zahlentripel $[5;12;13]$, für das $5^2+12^2=13^2$ gilt. Das vorliegende Dreieck ist somit ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 5 cm und 12 cm und der Hypotenusenlänge 13 cm.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,

Heft 5/80:

Ma 5 ■1996 Aus $40:5=8$ folgt, daß 8 Schüler der 5. Klasse an der AG teilnehmen. Wir rechnen nun $40-8=32$, $32-8=24$, $24:2=12$, $12+8=20$. Aus der 6. Klasse nehmen 20, aus der 7. Klasse nehmen 12 Schüler an der AG teil.

Ma 5 ■1997 a) Es sind sechs Sägeschnitte erforderlich.

b) Man erhält 27 kleinere Würfel mit einer Kantenlänge von je 10 cm. $(3\cdot 3\cdot 3=27)$

c) Man erhält keinen kleineren Würfel mit vier schwarzen Begrenzungsflächen. An den acht Ecken des Ausgangswürfels entstehen 8 Würfel mit je drei schwarzen Begrenzungsflächen. Ferner erhält man 12 Würfel mit je zwei, 6 Würfel mit je einer und einen Würfel ohne schwarze Begrenzungsflächen.

Ma 5 ■1998 Wenn 2 Bleistifte genau soviel kosten wie 4 Hefte, so kostet 1 Bleistift soviel wie 2 Hefte. 5 Bleistifte kosten demnach soviel wie 10 Hefte. Klaus hätte also denselben Preis bezahlt, wenn er 13 Hefte gekauft hätte, Peter denselben Preis, wenn er 14 Hefte gekauft hätte. Deshalb kostet 1 Heft 11 Pfennige. Somit kostet 1 Bleistift 22 Pfennige. Klaus hatte

$(5 \cdot 22 + 3 \cdot 11)$ Pf = 143 Pf = 1,43 M und Peter hatte $(2 \cdot 22 + 10 \cdot 11)$ Pf = 154 Pf = 1,54 M zu bezahlen.

Ma 5 ▪1999 $3 \cdot 5\,\text{dm} + 2 \cdot 3\,\text{dm} = 21\,\text{dm}$; $3 \cdot 5\,\text{dm} - 2 \cdot 3\,\text{dm} = 9\,\text{dm}$; $2 \cdot 5\,\text{dm} - 3 \cdot 3\,\text{dm} = 1\,\text{dm}$.

Ma 5 ▪2000 Siehe Seite 23

Ma 5 ▪2001 Aus $u = 4a = 200\,\text{km}$ folgt $a = 50\,\text{km}$. Nun gilt $50\,\text{km} \cdot 50\,\text{km} = 2500\,\text{km}^2$. Weil $2500\,\text{km}^2 < 2600\,\text{km}^2$ gilt, ist die getroffene Aussage falsch.

Ma 5 ▪2002 Wegen $20 \cdot 20 = 400 > 299$ kann nur $s = 1$ gelten. Wegen $15 \cdot 15 = 225 > 199$ ist $d < 5$; durch systematisches Probieren finden wir als Lösung $d = 2$, also $h = 4$. Wegen $sp \neq 13$, $d = 2$ und $h = 4$ gilt $p = 8$.
Aus $18 \cdot 144 = 2fg2$ folgt $f = 5$ und $g = 9$. Wegen $b \neq 1$ und $c2 : 12 = b$ gilt $b = 6$ und somit $a = 3$. Daraus folgt schließlich $c = 7$. Wir erhalten somit als Lösung

$$\begin{array}{l} 36 \cdot 72 = 2592 \\ \quad : \quad\; : \quad\;\; : \\ 12 \cdot 12 = \;144 \\ \hline 3 \cdot \;\; 6 = \;\;18 \end{array}$$

Ma 6 ▪2000 Siehe Seite 23

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha heiter

XX. OJM

Die Summe aller Ziffern 1, 2, 3, ..., 9 gleicht 45. Folglich: O + L + Y = M + P + I = A + D + E = 15.
Es gibt nur zwei Summen, die „eins" als den Summanden enthalten: (1 + 5 + 9) und (1 + 6 + 8). Jede dieser Untermengen bestimmt zwei andere Untermengen eindeutig:

A. $M_1 = \{1,5,9\} \to M_2 = \{2,6,7\}$, $M_3 = \{3,4,8\}$.
B. $M_1 = \{1,6,8\} \to M_2 = \{2,4,9\}$, $M_3 = \{3,5,7\}$.

Für A. haben wir sechs Varianten, um die Mengen $M_4 = \{O,L,Y\}$, $M_5 = \{M,P,I\}$ und $M_6 = \{A,D,E\}$ und die Mengen M_1, M_2, M_3 eindeutig aufeinander abzubilden:

M_4	M_1	M_1	M_2	M_2	M_3	M_3
M_5	M_2	M_3	M_1	M_3	M_1	M_2
M_6	M_3	M_2	M_3	M_1	M_2	M_1

In jeder Untervariante haben wir auch sechs Varianten. Zum Beispiel:

O	1	1	5	5	9	9
L	5	9	1	9	1	5
Y	9	5	9	1	5	1

Dies gilt auch für B.
Daraus folgt, daß unsere Aufgabe $2 \cdot 6^4$ Lösungen hat.

Besonderes Ereignis

1. Koordinaten, 2. falsch, 3. Asymptote, 4. Symmetrie, 5. Hyperbel, 6. Axiom, 7. Thales, 8. Radizieren, 9. Operation
Lösungswort: Olympiade

20 Jahre Mathe-Olympiaden

Variante 1 Aus $N = L + L + L + L + L$
folgt $N = 5 \cdot L$

(1) $L = 1$ und $N = 5$ oder
(2) $L = 2$ und $N = 10$
(1) $L = 1$ und $N = 5$ in
$O = L + L - L - L : L$
$O = L - 1$ eingesetzt, ergibt $O = 0$
(Widerspruch zur Voraussetzung)
Es gilt also (2) $L = 2$ und $N = 10$.
Die Probe bestätigt: $O = 1$, $L = 2$, $Y = 3$, $M = 4$, $P = 5$, $I = 6$, $A = 7$, $D = 8$, $E = 9$, $N = 10$.
Variante 2 Für beliebiges M aus dem gegebenen Grundbereich ergeben sich unmittelbar
(1) $O = 1$, (2) $L = 2$, (3) $Y = 3$,
(4) $N = 10$.
Aus $D = M + M + M - M$
$D = 2 \cdot M$
ergeben sich die Zahlenpaare

M	1	2	3	4	5
D	2	4	6	8	10.

Wegen (1), (2), (3) und (4) entfallen die Zahlenpaare (1,2); (2,4); (3,6) und (5,10) als Lösungen.
Also gilt $M = 4$ und $D = 8$.

Es kommt auf die Bedeutung der Werte an

Bernd hat nicht auf die Bedeutung der Worte geachtet. Konsequent bedeutet, *erst* so, dann *wieder* so handeln. Inkonsequent bedeutet, erst *so* und dann wieder *so* handeln.

Silbenrätsel

1. Zahlenbereich, 2. Winkelhalbierende, 3. Emblem, 4. integra, 5. Jahrzehnt, 6. Achthundertzwei, 7. Hunderteck, 8. Romeo, 9. Zahlenstrahl, 10. eleventhirty, 11. Hohlraum, 12. Nadelkap, 13. Torricelli, 14. Eta, 15. Minuend, 16. Ankathete, 17. Tonnen.
ZWEI JAHRZEHNTE MATHEMATIK-OLYMPIADEN

Kryptarithmetik

1981 : 7 = 283 — 1 2 3 4 5 6 7 8 9
− · + — O L Y M P I A D E
589 + 65 = 654
1392 − 455 = 937

$67 + 16754 + 3675 = 20496$;
$16850 + 20640 = 37490$ oder
$25810 + 70530 = 96340$;
$82193 + 8364 = 90557$ oder
$19523 + 1364 = 20887$
$19845 + 628 = 20473$ oder
$39721 + 547 = 40268$ oder
$69843 + 587 = 70430$;
$37613 + 43219 = 80832$;
$14071 + 5321 + 61881 = 81273$ oder
$14091 + 5321 + 61881 = 81293$.

Ideen am Schachbrett

Zweite Variante

Sei n eine natürliche Zahl mit $n \geqq 1$.
Wieviel ganzzahlige Lösungen (x, y, u, v) mit $1 \leqq x, y, u, v \leqq n$ hat das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &\leqq \quad\; y + u - v \leqq n \\ 1 &\leqq -x + u + v \leqq n \\ 1 &\leqq \quad x + y - v \leqq n \\ 1 &\leqq -x + y + u \leqq n? \end{aligned}$$

Lösung

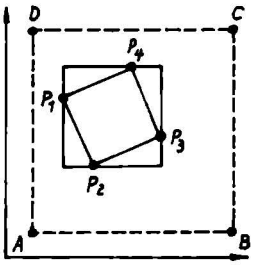
Für $x = u$ und $y = v$ vereinfacht sich das System zu $1 \leqq u, v \leqq n$ und hat n^2 Lösungen (u, v, u, v). Hier ist auch der Fall $n = 1$ enthalten.

Die Anzahl der Lösungen für $n \geqq 2$ und $x \neq u$ oder $y \neq v$ erhalten wir aus der Anzahl q aller Quadrate, deren Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben und sich innerhalb oder auf dem Rande des oben beschriebenen Quadrates $ABCD$ befinden. Mit (5) und (4) ist $q = \frac{1}{6}p = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$.

Da die Koordinaten der P_m bei der zyklischen Vertauschung $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_4 \to P_1$ invariant bleiben, ist die Anzahl der Lösungen des Ungleichungssystems

$$4q + n^2 = \frac{1}{3}n^2(n^2 - 1) + n^2 = \frac{1}{3}n^2(n^2 + 2).$$

Bild 7



Analoge Aufgabe

Es sei nun noch ein ähnliches Problem gestellt, für das Sie eine Lösungsidee und die Lösung selbst finden mögen.
Sei n eine natürliche Zahl mit $n \geqq 1$. Wieviel ganzzahlige Lösungen (x, y, u, v) mit $1 \leqq x, y, u, v \leqq n$ hat das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y \quad\;\; &\leqq n + 1 \\ u + v &\leqq n + 1 \\ 1 \leqq \quad x + y - v &\leqq n \\ 1 \leqq -x + u + v &\leqq n? \end{aligned}$$

H. Bausch/E. Jähnig

Bemerkung: Die Aufgaben „Erste Variante" und „Zweite Variante" wurden als Aufgabenvorschläge der DDR bei der Jury der XIX. Internationalen Mathematik-Olympiade 1977 in Beograd eingereicht. Die „Erste Variante" wurde von der Jury in die engere Wahl gezogen.

E. Lasker (1868 bis 1941), Mathematiker, Philosoph und Schriftsteller, bisher bedeutendster deutscher Schachspieler, Meister der psychologischen Spielführung; Schachweltmeister von 1894 bis 1921

alpha-Wettbewerb

Fortsetzung von alpha 6/80

Preisträger

Michael Taeschner, Ines Schröder, Diana Schlüter, alle Parchim; Steffen Weirich, Pasewalk; Constanze Henger, Claudia Tiersch, beide Potsdam; Wieland Handke, Pulsnitz; Jens Papperitz, Radebeul; Helga Rosner, Rathenow; Heiner Ruser, Anne Ruser, Ines Andrews, Michael Gräber, alle Rostock; Reiner Strauch, Frank Schröter, beide Rotta; Uwe Schwerk, Ruthen; Jörg Jahnel, Schkölen; Uta Möbius, Kerstin Klement, Olaf Petersen, alle Schwerin; Lydia Balzer, Frank Vollborth, beide Sondershausen; Beate Neuber, Antje Faßler, Ines Recknagel, Sylvia Dobrinski, Peggy König, alle Steinbach-Hallenberg; Dirk Dietze, Stralsund; Gerd Mey, Suhl; Cornelia Matthä, Sandra Kunath, beide Tiefenort; Olaf Gleim, Trinkenberg; Wolfram Fischer, Torgau; Jörg Mey, Unterbreizbach; Joachim Riedel, Vacha; Joachim Kleinert, Wernshausen; Lutz Grothe, Wiederitzsch; Grit Keiner, Angelika Weyh, beide Zella-Mehlis; Ronald Peschel, Zittau; Rüdiger Rabe, Zschornewitz; Karsten Seliger, Grenz; Christian Voigtländer, Neubrandenburg

Vorbildliche Leistungen

Beatrice List, Altenburg; Olaf Köbernick, Babelsberg; Andrea Müller, Bad Salzungen; Ines Kinzelberg, Bergwitz; Jens Renneberg, Simone Messer, Steffen Biehl, alle Berka; Reinhard Wegener, Thomas Honigmann, Jörg Albert, Marko Pohl, Ingo Witt, Cornelia Graun, alle Berlin; André Schück, Henning Bergauer, André Lorenz, alle Bernsbach; Markus Otwig, Burg Stargard; Matthias Winkler, Cossebaude; Andreas Donaubauer, Dahlen; Yvonne Wagner, Dahme; Rolf Dach, AG Math. Kl. 7 bis 8 der 38. POS, Oliver Geupel, Peter Hentschel, Birgit Rahn, alle Dresden; Manfred Becker, Eggesin; Frank Schulte, Freienbessingen; Thomas Brahmann, Freital; Ines Fischer, Golzau; Andreas Funk, Volker Bölter, beide Greifswald; Maike Thiele, Corinna Wilde, beide Grimma; Guido Vollbeding, Haldensleben; Kathrin Möckel, Hammerbrücke; Uta Schumann, Ulrich Möhrke, beide Havelberg; Dirk Missal, Insel; Ingo Neubert, Carla Umlauf, Kerstin Hoppe, alle Karl-Marx-Stadt; Matthias Schneider, Kemmlitz; Ute Studzinski, Kietz; Holger Unger, Kleinolbersdorf; Matthias Poller, Lauter; Britta Krägelin, Karl Heyde, Sylvia Richter, Uwe Werner, alle Leipzig; Angelika Schlegel, Mahlsdorf; Christiane Pritz, Meiningen; Jürgen Seifert, Milkau; Elvira Korölus, Neubrandenburg; Hilmar Fickert, Oberlungwitz; Henning Schulz, Potsdam; Steffen Korb, Raschau; Annegret Passargus, Rostock; Thomas Fröhlich, Rudolstadt; Cornell Kubacki, Sargstedt; Susanne Krieger, Sömmerda; Anne Willroth, Stadtlengsfeld; Christina Schmidt, Karola Endler, Anke Wilhelm, alle Steinbach-Hallenberg; Uta Linz, Suhl; Christina Otto, Ueckermünde; Thomas Vandanz, Völkershausen; Michael Tries, Wasserthaleben; Rainer Wichmann, Weimar; Ralph Zumpe, Weinböhla; Bert Winkler, Wilkau-Haßlau; Dirk Seewald, Wolgast; Ralph Bock, Wolfen; Jörg Strüfing, Wredenhaben; Jörg Steinbach, Zwickau; Bezirksklub „Jg. Math." Zirkel 6, Halle

Abzeichen in Gold

Für dreizehnjährige Teilnahme

Christoph Scheurer, Glauchau-Gesau; Henrik Frank, Greifswald; Lutz Pöffeld, Hennigsdorf

Für zwölfjährige Teilnahme

Bernd Hanke, Großschweidnitz; Guido Blossfeld, Halle

Für elfjährige Teilnahme

Holger Jurack, Burkau; Ullrich Riedel, Flöha; Angelika Müller, Greifswald

Für zehnjährige Teilnahme

Arno Feuerherdt, Brandenburg; Marid Hellig, Frankfurt (Oder); Thomas Jakob, Gera; Ursula Märker, Greifswald; Lew Diamenstein, Leningrad (UdSSR); Norbert Littig, Lichtenberg; Sybille Baumgart, Löderburg; Uwe Bormann, Magdeburg; Berthold Wettengel, Oelsnitz; Frank Aßmus, Oranienburg; Rainer Seifert, Pirnau; Bernhard Tschada, Sondershausen

Für neunjährige Teilnahme

Ralf Heuze, Arnstadt; Andreas Fittke, Berlin; Clemens Jasnich, Cottbus; Wolfgang Seeber, Gehren; Rolf Kuhn, Gotha; Bengt Nölting, Greifswald; Stefan Kasper, Leipzig; Gerald Werner, Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Axel Müller, Oberlungwitz; Birgit Rosenberger, Suhl; Manfred Häußler, Westgreußen; Katrin Richter, Wittenberg; Karsten König, Zeuthen; Kurt Oertel, Zschornewitz (Rentner); L. Gruber, Linz (Österr.)

Für achtjährige Teilnahme

Volkmar Türke, Auerbach; Cordula Becker, Andreas Gude, Andrea Nieße, alle Berlin; Werner Jeroch, Reinhard Pohl, Ralf Kretschmer, Frank Regensburger, Uwe Hanisch, alle Dresden; Andrea Puchert, Eichicht; Eberhard Georgy, Erfurt; Wolfhart Umlauft, Freital; Claudia Endtricht, Görlitz; Christian Wolf, Greifswald; Jens Negwer, Grimma; Burkhard Rahr, Gr.-Naundorf; Günter Mosel, Gühle; Jürgen Hüttner, Kottengrün; Armin Körner, Leipzig; Steffen Langhein, Lichte; Michael Apitz, Löbau; Rainer Bauer, Mittweida; Thomas Richter, Neuhausen; Andreas Massanek, Neusornzig; Thomas Köhler, Oederan; Wilfried Röhnert, Radebeul; Thomas Apel, Reichenbach; Christiane Jordan, Reitwein; Armin Hoell, Ribnitz; Michael Zwicke, Riesa; Torsten Löwe, Schleiz; Heinz-Olaf Müller, Heiko Müller, beide Schmalkalden; Bernadette Domaschke, Seifhennersdorf; Hans Schwabe, Simone Mahlow, beide Sondershausen; Dirk Herrmann, Töplitz; Sylvia Zipf, Waldheim; Sylvia Kunze, Weißenfels; Carola Senft, Wingerode; Ralf Becker, Wolmirstedt; Ute Scharkowski, Zepernick

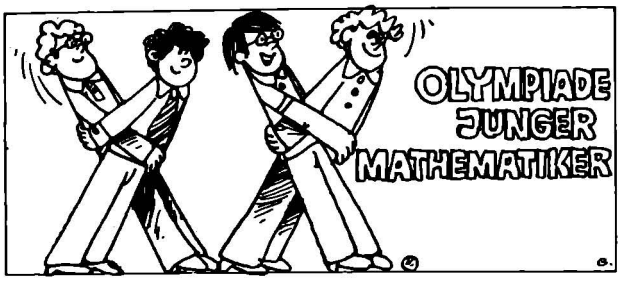
Für siebenjährige Teilnahme

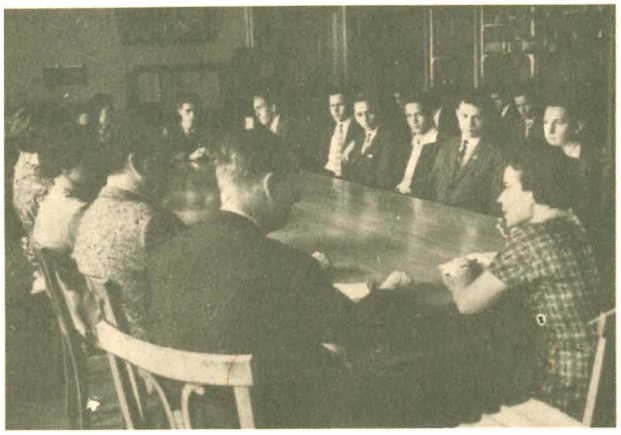
Udo Clemens, Altenburg; Frank Maschke, Altendorf; Dieter und Henri Koch, Arnstadt; Ralph Müller, Bad Bibra; Peter Möller, Burkhard Maeß, beide Bad Doberan; Hans-Jürgen Kopf, Bad Frankenhausen; Lutz Heinrich, Bad Langensalza; Katrin Kolliwer, Michael Prescher, beide Berlin; Werner König, Berlingerode; Thomas Dittrich, Brand-Erbisdorf; Jens Schumann, Coswig; Jens Parand, Ellen Harnath, Andrea Dreyer, alle Cottbus; Jürgen Anders, Dahlewitz; Mario Binkowski, Demmin; Peter-Alexander Pöhler, Annett Körner, Angela Jircik, alle Dresden; Thomas Böhme, Doina Semper, beide Eisleben; Sabine Lützkendorf, Uwe Kintzel, beide Erfurt; Bernd Döbe, Forst; Ute Ribbe, Heike Brüggemann, Thomas Gerlach, Bernd Hartwig, alle Friedeburg; Sylvio Klose, Gera; Matthias Weser, Großenhain; Andrea Potthoff, Groß Wüstenfelde; Hubert Steinmetz, Grüningen; Jens Folgmann, Halle; Ruth Jacobs, Halle-Neustadt; Doris Planer, Hohendorf; Rolf Kamieth, Kakerbeck; Arnd Rösch, Ronald Rösch, Marko Hanke, alle Karl-Marx-Stadt; Jörg Pöhland, Klingenthal; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Jens Rudolf, Leipzig; Ute-Barbara Heuer, Leisnig; Bärbel Wintzler, Lobenstein; Annett Weise, Löderburg; Martina Wolf, Magdeburg; Udo Kretzschmann, Markneukirchen; Peter Stolze, Möhlau; Volkmar Riemer, Neubrandenburg; Rüdiger Düsing, Osterburg; Ute Möllhoff, Piesau; Jens Jacobi, Potsdam; Sigrid und Jens-Peter Plamke, Premnitz; Ronald Bracholdt, Riesa; Jana Walter, Röbel; Ina und Uwe Ebert, Ruppendorf; Regina Bricks, Saalfeld; Siegrid Kretschmann, Schlagsdorf; Ina Spanaus, Schleusingen; Jens Gollmer, Schmalkalden; Torsten Jeschke, Schwarzheide; Barbara Tschada, Sondershausen; Thomas Eichhorn, Steinach; Simone Teichmüller, Stöckey; Heiko Lehmann, Rostock; Dietmar Ulbricht, Velten; Ralf Kurch, Weimar; Uwe Felsberg, Worbis; Uwe Müller, Wrocław (VR Polen); Christoph Chojetzki, Zeitlain; Frank Erdmann, Zeitz; Gabriele Herzig, Birgit Thomas, Uwe Langer, Antje Langer, alle Zittau; Ute Baumann, Zschocken

Für sechsjährige Teilnahme

Matthias Ohm, Ahlbeck; Christine Stäber, Alsleben; Holger Herold, Frank Kämpfer, beide Altenburg; Uwe Mauz, Arnstadt; Guntram Türke, Auerbach; Ralph Müller, Bad Bibra; Frauke Maeß, Bad Doberan; Thorsten Tonndorf, Bad Salzungen; Birgit Wollschläger, Bergwitz; Frank Bendin, Stefan Berg, beide Berlin; Ulrich Kramer, Bernterode; Astrid Markgraf, Bischofferode; Carmen Schneider, Bischofswerda; Pia Zimmermann, Inge Beck, beide Bleicherode; Andreas Kraska, Breitenworbis; Guido Mehne, Ralph Voigtländer, beide Calbe; Maik Weide, Callenberg; Olaf Seifert, Camburg; Andreas Winkler, Cossebaude; Detlef Kerstan, Susanne Liebelt, Kathrin Magister, Claudia Kerstan, Andreas Schlecht, alle Cottbus; Monika Nolte, Dingelstädt; Harry Höfer, Dorndorf; Jörn Wittig, Carolin Engel, Thomas Schindhelm, Ingolf Körner, Jürgen Gräfenstein, Susanne Müller, Lutz Jeroch, Jens Rotsch, Helmuth Goldberg, Elisabeth Schüttke, alle Dresden; Dirk-Thomas Orban, Renate Lützkendorf, Thomas Mittelbach, Henrik Seifert, Uwe Strohmeier, Volker Georgy, alle Erfurt; Math. Zirkel d. Hugo-Joachim-OS, Espenhain; Jörg Batter, Freiberg; Ralf Baumhekel, Steffi Hancke, beide Freital; Andreas Fintzel, Friedeburg; Gerd Hackbarth, Gallentin; Angela Illing, Gersdorf; Frank Scheffler, Gnoien; Ines Kath, Gunnar Boll, Andreas Wolf, Katharina Herrmann, Stefan Göckeritz, alle Greifswald; Michael Katzer, Greußen; Heike Klitz, Grimmen; Regine Binder, Matthias Berle, beide Halle-Neustadt; Volker Reck, Heiligenstadt; Enka Stelzer, Heringsdorf; Eike Harnisch, Hohenferchesar; Mathias Grundmann, Conchita und René Schüppel, alle Hoyerswerda; Volkmar Liebscher, Ilmenau; Horst Fliegner, Jarmen; Andreas Hengst, Birgit Hofmann, Jens Pönisch, Thomas Mader, alle Karl-Marx-Stadt; Steffen Rieth, Klostermansfeld; Kerstin Willek, Kriebitzsch; Karsten Drescher, Ulrich Kramer, Monika Nolte, Astrid Markgraf, Birgit Schmidt, alle Leinefelde; Stephan Bönewitz, Ines Bauer, Katrin Bormann, Heiko Rudolf, alle Leipzig; Holger Gubitz, Meiningen; Tobias Lücke, Meißen; Per Witte, Mittenwalde; Heidrun Jänchen, Mohsdorf; Angelika Radtke, Mittweida; Gudrun Hebestreit, Mühlhausen; Thomas Ehler, Meiningen; Torsten Kretschmer, Naumburg; Uwe Grasnack, Naundorf; Knut Hantschel, Neuenkirchen; Sigrun Massanek, Neusornzig; Karsten Woike, Neustadt; Birgit Uhlmann, Oberlungwitz; Andreas Bollmann, Osteroda; Peter Seifert, Pirnau; Kerstin Zirnstein, Pirna; Hagen Mrowetz, Prenzlau; Christiane Dobberstein, Rathenow; Claudia Würker, Reichenbach; Hartmut Lipke, Ribnitz; Astrid Wruck, Rostock; Birgit Bricks, Saalfeld; Eva Schubert, Schalkau; Maik Rehtanz, Susanne Heuer, Henri Kriechling, Thomas Gerth, alle Schmalkalden; Elke Meißner, Sitzendorf; Bert Hoffmann, Söllichau; Silke Reuscher, Roland Goldenbogen, beide Stralsund; Peter Pfannschmidt, Suhl; Heidrun Tiedt, Teterow; Margit Creutzburg, Thal; Annekatrein Heuer, Tiockow; Katrin Schatz, Ute Bergmann, beide Torgau; Lars Herrmann, Töplitz; Stefan Syring, Waren; Klaus-Detlef Gehrke, Warnemünde; Gudrun Boettcher, Weimar; Olaf Seidel, Weißwasser; Karsten Schlutter, Wittstock; Eva-Maria Heubner, Wolfen; Birgit Schultheiß, Wüstenbrand; Burkhild Kebuscherper, Wustrow; Michael Holdys, Ziesar; Anett Schulzensohn, Zittau; Kerstin Johannes, Oranienbaum

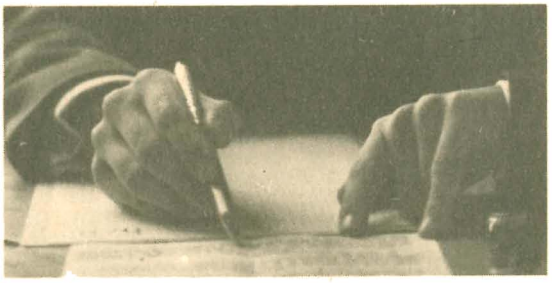
Fortsetzung in Heft 2/81





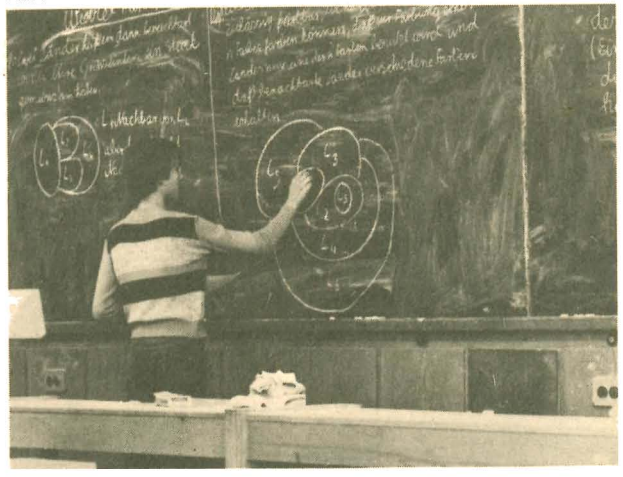
I. Olympiade Junger Mathematiker (1962): Die Preisträger sind Gast im Goethehaus am Frauenplan in Weimar

IV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR (1965): Prof. Dr. K. Schröter (†) und Staatssekretär Lorenz zeichnen die Preisträger aus



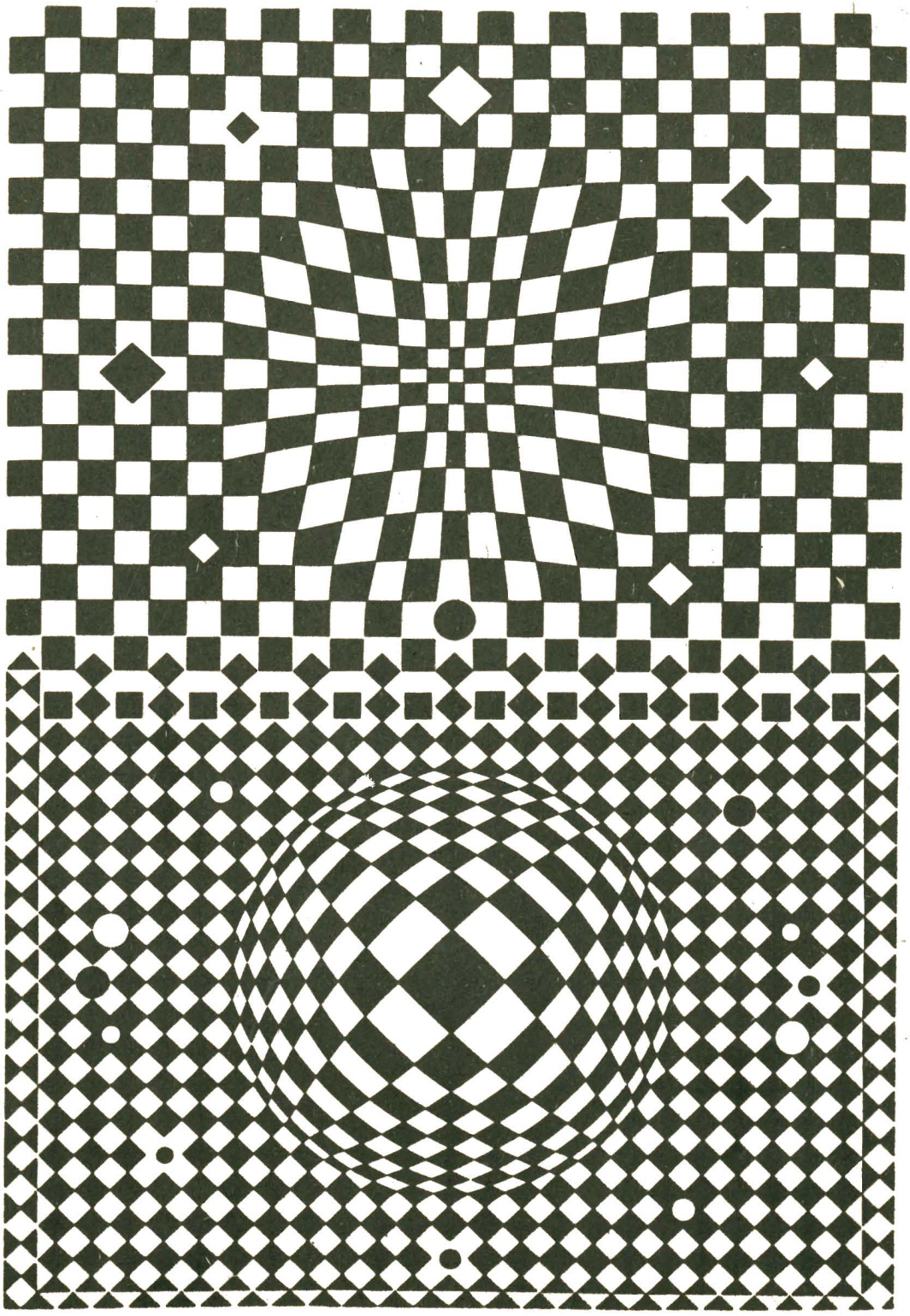
Teilnehmer der Mathematischen Schülergesellschaft Berlin während eines Vortrags

Junger Mathematiker bei der Erläuterung eines mathematischen Problems



Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



2

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
15. Jahrgang 1981
Preis 0,50 M
Index 31 059

Redaktionskollegium:
Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens (Leipzig); Dozent Dr. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Oberlehrer K. Krüger, Verdienter Lehrer des Volkes (Bad Doberan); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent Dr. H. Lohse (Leipzig); Nationalpreisträger Oberstudienrat Dr. R. Lüders (Berlin); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Prof. Dr. habil. U. Pirl (Berlin); Dozent Dr. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Oberlehrer Dr. H. Schulze (Leipzig); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. habil. W. Walsch (Halle), Verdienter Lehrer des Volkes
Redaktion:
StR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1080 Berlin, Krausenstraße 50 · Tel. 20430
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Archiv: Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig, R. Mildner (S. 28, 29); Archiv: W. Thieme, Karl-Marx-Stadt (S. 31); aus: H. Stengel/R. F. Müller: *Die Wortspielwiese* (S. 33, III. U.-Seite); Eigenfoto (S. 35); Iwan Ilijew, Sofia (S. 36); Jesch, Beograd (S. 38); Wochenpost (S. 38); Füles, Budapest (S. 43).
Titelblatt: W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128–ISSN 0002–6395
Redaktionsschluß: 18. Dezember 1980

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

25 Vom „Turmabstand", vom „Eisenbahnabstand" und von anderen „Abständen" [9]*
Dr. P. Göthner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

27 *alpha* stellt vor: Dr. H.-D. Gronau [5]
Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

28 *Im Blickpunkt:* Erster Mathematiker-Kongreß der DDR · 1981 in Leipzig [5]
Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

30 Temperaturkoeffizient oder additive Temperaturkonstante? [11]
Prof. Dr.-Ing. K. Gola, Sektion Elektroautomatisierungstechnik der Ingenieurhochschule Zwickau

31 Ingenieurhochschule Zwickau – Stätte praxisverbundenen Studiums [7]
Bereich Publikation der IH Zwickau

33 *Für Briefmarkenfreunde:* Benjamin Banneker [5]
Dr. P. Schreiber, E.-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

34 aufgepaßt – nachgedacht – mitgemacht [5]
speziell für Klasse 5/7
Nachdenken und sicheres Rechnen gefragt –
Über das Lösen von Sachaufgaben
Dr. K. Reichhold, Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt

35 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Wladimir Mazja [9]
Universität Leningrad

36 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Wettbewerbsaufgaben Mathematik · Physik · Chemie

39 Neu im Verlag Volk und Wissen:
Leseprobe aus J. Lehmann: *2 mal 2 plus Spaß dabei* [4]

40 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig

42 XX. Olympiade *Junger Mathematiker* der DDR [5]
Aufgaben der Kreisolympiade

44 Lösungen [5]

47 *alpha*-Wettbewerb – Abzeichen in Gold

IV. *U.-Seite:* Denksport
Unterhaltungsmathematik aus: *Pionierkalender 1981*
Dr. M. Rehm, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Vom „Turmabstand“, vom „Eisenbahnabstand“ und von anderen „Abständen“

Als ich kürzlich meinen Winterurlaub im Krkonoše in der ČSSR verbrachte, plante ich eine Skiwanderung von Rokytnice zur Sněžka. Auf meine Frage nach der Entfernung antwortete mir mein Gastgeber, daß man im Winter mit mehr als 30 km rechnen müßte, im Sommer dagegen sei die Entfernung etwa 25 km. Sonderbar! Also gibt es in diesem Gebirge einen *Sommerabstand* und einen *Winterabstand* zwischen zwei Orten.

Als wir abends am Schachbrett saßen, fiel mir auf, daß es auch hier voneinander verschiedene *Abstände* zwischen zwei Feldern gibt, etwa einen *Turmabstand*, einen *Damenabstand* oder auch einen *Springerabstand*. So muß ein Turm mindestens 7 Felder überstreichen, um vom Feld B 7 zum Feld G 5 zu gelangen, eine Dame benötigt nur 5 Felder, ein Springer dagegen 6.

Die Auskunft meines Gastgebers und meine Überlegungen am Schachbrett veranlaßten mich, über gemeinsame Eigenschaften der verschiedenartigen *Abstände* nachzudenken:

Zunächst benötigt man einen *Raum*, d. h., eine nicht leere Menge, deren Elemente *Punkte* heißen sollen, zwischen denen *Entfernungen* festzulegen sind. Solche Punkte eines Raumes können z. B. die Felder eines Schachbrettes sein. Eine Entfernung zwischen zwei Punkten ist stets eine nichtnegative reelle Zahl.

Zu den Punkten P und Q gehört sicher genau dann die Zahl Null, wenn $P=Q$ gilt (Bedingung (1): „Nur wer zu Hause bleibt, hat die Entfernung Null zu bewältigen.“) Außerdem wird die Entfernung zwischen dem Punkt P und dem Punkt Q mit der Entfernung zwischen den Punkten Q und P übereinstimmen (Bedingung (2): „Hinweg gleich Rückweg“). Schließlich wird ein Weg von P nach Q höchstens länger, wenn ein *Umweg* über den Punkt S vorgenommen wird (Bedingung (3): „Ein Umweg ist nie kürzer“).

Durchdenkt man sich diesen Sachverhalt, so stellt man fest:

Ein Abstand ist offenbar eine Funktion mit speziellen Eigenschaften; sie besitzt zwei voneinander unabhängige Argumente, ihr Definitionsbereich ist die Menge aller geordneten Paare von Punkten eines Raumes, ihr Wertebereich eine (nicht notwendig echte) Teilmenge der nichtnegativen reellen Zahlen.

Welche reelle Zahl nun zwei Punkten eines Raumes als *Entfernung* zugeordnet wird, hängt davon ab, welche spezielle Abstandsfunktion man betrachtet; alle diese Funktionen müssen jedoch die drei oben genannten Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen.

In mathematischen Nachschlagewerken findet man eine Definition des Abstandsbegriffes, die unsere Vorüberlegungen widerspiegelt:

Es sei R eine nicht leere Menge. Ein Abstand auf R ist eine Funktion ϱ, die jedem geordneten Paar von Elementen P_i, P_j aus R eine nichtnegative reelle Zahl $\varrho(P_i;P_j)$ so zuordnet, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

Für alle $P_i, P_j, P_k \in R$ gilt:

(1) $\varrho(P_i;P_j)=0$ genau dann, wenn $P_i=P_j$

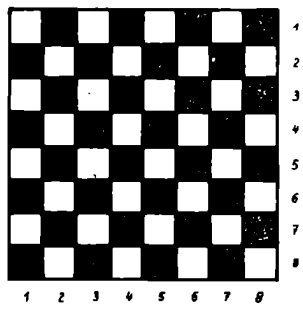
(2) $\varrho(P_i;P_j)=\varrho(P_j;P_i)$

(3) $\varrho(P_i;P_j)\leqq\varrho(P_i;P_k)+\varrho(P_k;P_j)$

$(R;\varrho)$ heißt *metrischer Raum*, seine Elemente heißen *Punkte*. Die Bedingung (3) wird *Dreiecksungleichung* genannt, wie euch sicher einleuchten wird.

Im Schachbrettbeispiel besteht der Raum R_S aus 64 Punkten, die – entgegen der üblichen Weise – mit $P_{ij}\,(i=1;\ldots;8;j=1;\ldots;8)$ bezeichnet werden sollen. Dabei ist z. B. $P_{2,7}$ das Feld in der 2. Zeile und der 7. Spalte des Schachbrettes (vgl. Bild 1).

Bild 1



Wird ein Turm vom Feld P_{23} zum Feld P_{47} gezogen, so überstreicht er $|2-4|+|3-7|$ Felder des Schachbrettes. Die Funktion

$\varrho_T(P_{ij};P_{ks})=|i-k|+|j-s|$

kann als *Turmabstand* im Sinne unserer Definition aufgefaßt werden, wenn nachgewiesen werden kann, daß sie die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt. Dies ist jedoch nicht schwierig:

Zunächst gilt $|i-k|+|j-s|\geqq 0$; d. h., der Wertebereich von ϱ_T enthält nur nichtnegative Zahlen.

Um (1) nachzuweisen, wird gezeigt:

1. Gilt $P_{ij}=P_{ks}$, d. h., $i=k$ und $j=s$, so ist $\varrho(P_{ij};P_{ks})=|i-k|+|j-s|=|0|+|0|=0$.

2. Gilt $\varrho_T(P_{ij};P_{ks})=|i-k|+|j-s|=0$, so muß sowohl $|i-k|=0$ als auch $|j-s|=0$ gelten. Hieraus folgt aber $i=k$ und $j=s$, also $P_{ij}=P_{ks}$.

Die Bedingung (2) ist erfüllt wegen

$\varrho_T(P_{ij};P_{ks})=|i-k|+|j-s|=|k-i|+|s-j|=\varrho_T(P_{ks};P_{ij})$.

Schließlich gilt für ϱ_T auch die Dreiecksungleichung (3):

$\varrho_T(P_{ij};P_{ks})+\varrho_T(P_{ks};P_{rt})=|i-k|+|j-s|+|k-r|+|s-t|\geqq|i-k+k-r|+|j-s+s-t|=|i-r|+|j-t|=\varrho_T(P_{ij};P_{rt})$.

Also bildet $(R_S;\varrho_T)$ einen Raum mit Abstand, einen metrischen Raum (Beispiel 1).

Da sich eine Dame wahlweise längs der Zeilen, der Spalten und der Diagonalen des Schachbrettes bewegen kann, ist die Abstandsfunktion für den *Damenabstand* durch

$\varrho_D(P_{ij};P_{ks})=\max(|i-k|;|j-s|)$

festgelegt. Will nämlich eine Dame z. B. von P_{23} zum Punkt P_{58} gelangen, so bewegt sie sich auf der zweiten Zeile (wie ein Turm) zunächst zum Punkt P_{25} und überstreicht dabei $|2-2|+|3-5|=2$ Felder. Danach zieht sie auf einer Diagonalen von P_{25} nach P_{58} und überstreicht dabei die drei Felder P_{36}; P_{47} und P_{58}; also ist $\varrho_D(P_{25}P_{58})=5$, dem Maximum der Beträge $|2-5|$ und $|3-8|$.

Offenbar besitzt auch die Funktion ϱ_D nur nichtnegative Funktionswerte.

Daß die Bedingungen (1), (2) und (3) durch ϱ_D erfüllt sind, läßt sich leicht zeigen. Versucht es einmal!

Damit bildet auch $(R_S;\varrho_D)$ einen metrischen Raum (Beispiel 2). Auf derselben Menge kann also auf verschiedene Weise ein Abstand definiert werden.

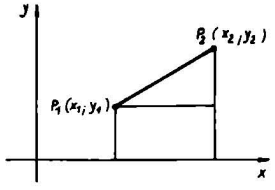
In der Menge R_S auch einen *Läuferabstand* festzulegen, ist nicht möglich, da sich ein Läufer stets entweder nur auf weißen oder nur auf schwarzen Feldern bewegen kann. Dem Punktepaar $(P_{11};P_{12})$ könnte damit keine reelle Zahl als *Entfernung* zugeordnet werden. Ihr könnt jedoch einmal versuchen, einen *Läuferabstand* in der Menge aller schwarzen Felder, also auf einer Teilmenge von R_S, zu beschreiben.

Ein Springer ist in der Lage, von jedem Feld eines Schachbrettes zu jedem beliebigen anderen zu gelangen. Um von P_{11} nach P_{12} zu kommen, müßte er 6 Felder überstreichen, zieht man ihn von P_{11} nach P_{24}, so würde er dagegen nur 4 Felder berühren. Damit läge – bezogen auf einen Springerabstand – der Punkt P_{24} dem Punkt P_{11} erstaunlicherweise näher als der Punkt P_{12}. Wollte man wie beim *Turmabstand* oder beim *Damenabstand* einen *Springerabstand* durch eine Gleichung

beschreiben, so würde man schnell auf Schwierigkeiten stoßen, da z. B. die Springerentfernungen von P_{ij} nach $P_{i+1\,j+1}$ in der Mitte des Schachbrettes kleiner sind als an seinem Rande; verlassen darf ja der Springer das Schachbrett nicht. Aber auch im Falle eines Schachbrettes mit unendlich vielen Zeilen und Spalten läßt sich ein Springerabstand nicht durch genau eine Gleichung festlegen. Ihr könnt ja einmal versuchen, einige Entfernungen anzugeben.
Neben den beiden Abstandsfunktionen ϱ_T und ϱ_D auf dem Schachbrett R_S wollen wir weitere Beispiele suchen.

Beispiel 3: Jedem Punkt P_1 einer Ebene kann man mit Hilfe eines Koordinatensystems umkehrbar eindeutig ein geordnetes Paar reeller Zahlen $(x_1;y_1)$ zuordnen (Bild 2). Die Menge R_2 der geordneten Paare reeller Zahlen wird zum metrischen Raum, wenn man auf ihr mit
$\varrho_2(P_i;P_j)=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}$
eine Abstandsfunktion einführt.
Offenbar gilt $\varrho_2(P_i;P_j)\geqq 0$. (Warum?)

Bild 2



Aus $P_i=P_j$ folgt $x_i=x_j$ und $y_i=y_j$ und somit $\varrho_2(P_i;P_j)=\sqrt{0^2+0^2}=0$;
umgekehrt kann $\varrho_2(P_i;P_j)$ nur dann gleich Null sein, wenn $x_i=x_j$ und $y_i=y_j$ gilt (Begründung?). Damit ist (1) erfüllt. Wegen
$(x_i-x_j)^2=(x_j-x_i)^2$ und $(y_i-y_j)^2=(y_j-y_i)^2$
gilt (2).
Schließlich bestätigt man die Gültigkeit von (3) durch Nachrechnen. Dies ist relativ aufwendig; man hat zu zeigen, daß

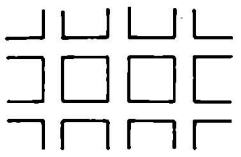
$$\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2} \leqq \sqrt{(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2}+\sqrt{(x_k-x_j)^2+(y_k-y_j)^2}$$

gilt.
Wer sich die notwendige Ausdauer zutraut, wird die Aufgabe jedoch sicher bewältigen.

Beispiel 4: Betrachtet man einen dreidimensionalen Raum R_3 statt einer Ebene R_2, so hat jeder Punkt $P_i\in R_3$ ein geordnetes Tripel reeller Zahlen als Koordinaten. Eine Abstandsfunktion kann durch
$\varrho_3(P_i;P_j)=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2}$
festgelegt werden.

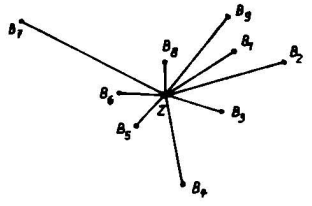
Beispiel 5: In dem gitterförmig angelegten Straßennetz einer Großstadt fahren Straßenbahnen, die Haltestellen an jeder Kreuzung besitzen. Legt man in das Straßennetz ein Koordinatensystem, so daß der Ursprung auf einer Kreuzung liegt und die Achsen mit zwei orthogonal zueinander verlaufenden Straßen zusammenfallen, so kann jedem Kreuzungspunkt P_{ij} ein Koordinatenpaar $(i;j)$ zugeordnet werden. Mit
$\varrho_S(P_{ij};P_{ks})=|i-k|+|j-s|$ ist ein *Straßenbahnabstand* definiert, der die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt (Bild 3).

Bild 3



Beispiel 6: Ein interessantes Beispiel für einen metrischen Raum ist eine Menge von Bahnhöfen mit einem *Eisenbahnabstand*. Die Bahnhöfe B_1, B_2, ..., B_n seien mit einem Zentralbahnhof Z sternförmig durch Strecken der Längen S_1, S_2, ..., S_n verbunden (Bild 4). Der *Eisenbahnabstand* ϱ_E zwischen den Bahnhöfen B_i und B_j ist die Summe der Streckenlängen S_i und S_j, d. h., $\varrho_E(B_i;B_j)=S_i+S_j$ und $\varrho_E(B_i;Z)=\varrho_E(Z;B_i)=S_i$. Man zeigt leicht, daß auch der Eisenbahnabstand die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt.

Bild 4



Beispiel 7: Es sei $R_M=\{a, b, c, \ldots\}$ eine beliebige nichtleere Menge. Man kann auf R_M auf sehr einfache Weise eine Abstandsfunktion ϱ_M definieren, indem man festlegt:
$\varrho_M(a;b)=1$, falls $a\neq b$ und
$\varrho_M(a;b)=0$, falls $a=b$ für bel. Elem. $a;b\in R_M$.
Man zeige, daß $(R_M;\varrho_M)$ einen metrischen Raum bildet, indem man nachweist: ϱ_M erfüllt die Bedingungen (1), (2) und (3).

Spricht man von der Umgebung einer Stadt, der Umgebung eines Sees, der Umgebung eines Wohnhauses, so haben die meisten Menschen eine gewisse Vorstellung. Genau können sie allerdings nicht sagen, wo die Umgebung eines Hauses endet. Besser weiß man sicher schon Bescheid, wenn man von der 2-km-Umgebung eines Hauses spricht.
Wir wollen in metrischen Räumen Umgebungen (genauer: ε-Umgebungen) von Punkten einführen. Wir nutzen dazu den Abstandsbegriff und definieren:
Die ε-Umgebung eines Punktes P_i ist die Menge aller Punkte P_j, für die gilt:
$\varrho(P_i;P_j)<\varepsilon$. ($\varepsilon$ ist eine positive reelle Zahl.)
In Bild 5 ist die $\frac{1}{2}$-Umgebung des Punktes $P_1\in R_2$ (vgl. Beispiel 3) bezüglich der Abstandsfunktion ϱ_2 dargestellt. Sie besteht aus genau den Punkten, die im Inneren eines Kreises mit dem Radius der Länge $r=\frac{1}{2}$ und dem Punkt $P_1(1;1)$ als Mittelpunkt liegen.

Bild 5

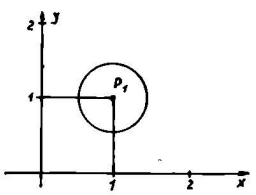
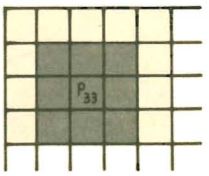


Bild 6 zeigt die 2-Umgebung des Punktes $P_{33}\in R_S$ bezogen auf die Abstandsfunktion ϱ_D (Beispiel 2).
Die 1-Umgebung von P_{33} würde dagegen nur den Punkt P_{33} selbst enthalten.

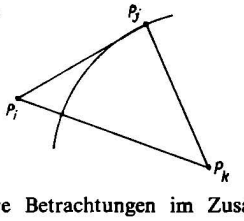
Bild 6



Wie müßte man eine 2-Umgebung von P_{33} bezüglich des *Turmabstandes* ϱ_T veranschaulichen?

In R_M (Beispiel 7) gehört zur 1-Umgebung von a nur der Punkt a selbst, in der 2-Umgebung von a liegen dagegen alle Punkte der Menge R_M, desgleichen natürlich in der 1,1-Umgebung von a. Interessant sind die Umgebungen von Punkten bezüglich des *Eisenbahnabstandes* im Beispiel 6. Es ist durchaus möglich, daß B_5, B_6 und B_8 in einer 100-km-Umgebung von B_1 liegen, nicht dagegen die Punkte B_2 und B_9, obwohl sie anschaulich Nachbarorte von B_1 zu sein scheinen (Bild 4). Wird in einer Ebene unserer Anschauung durch drei Punkte P_i, P_j und P_k ein Dreieck aufgespannt, so scheint klar zu sein, daß die Länge einer Dreieckseite stets größer ist als der Betrag der Differenz der beiden anderen (Bild 7). Läßt man noch zu, daß die drei Punkte auf einer Geraden liegen können, so gilt – ausgedrückt mit Hilfe einer Abstandsfunktion – offenbar sogar
$\varrho(P_i;P_j)\geqq|\varrho(P_i;P_k)-\varrho(P_k;P_j)|$. (*)

Bild 7



Unsere Betrachtungen im Zusammenhang mit dem Umgebungsbegriff zeigen jedoch, daß anschauliche Vorstellungen nicht notwendig ein richtiges Bild von den tatsächlichen Zusammenhängen vermitteln müssen. Man kann deshalb die Frage aufwerfen, ob es überhaupt Abstandsfunktionen gibt, für welche die Ungleichung (*) gilt. Um etwa zu prüfen, ob die Abstandsfunktion ϱ_2 (Beispiel 3) die Ungleichung (*) erfüllt, müßte man zeigen, daß für beliebige reelle Zahlen x_i, x_j, x_k, y_i, y_j, y_k die Beziehung

$$\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2} \geqq \left|\sqrt{(x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2}-\sqrt{(x_j-x_k)^2+(y_j-y_k)^2}\right|$$

gilt.

Es ist zu vermuten, daß dabei der Rechenaufwand keinesfalls geringer wird als beim Nachweis der Bedingung (3).

Wir wählen deshalb einen anderen Weg, indem wir versuchen, die Ungleichung (*) lediglich unter Nutzung der Bedingungen (1), (2) und (3) abzuleiten. Dies ist nun nicht besonders aufwendig:

(*) hat die Form $a \geqq |b-c|$. Um die Allgemeingültigkeit einer solchen Betragsungleichung nachzuweisen, muß man zeigen:

$a \geqq |b-c| = b-c$, falls $b-c \geqq 0$ und

$a \geqq |b-c| = -(b-c) = c-b$,

falls $b-c < 0$.

Aus $\varrho(P_i;P_k) \leqq \varrho(P_i;P_j)+\varrho(P_j;P_k)$ (Bedingung 3) folgt

$\varrho(P_i;P_j) \geqq \varrho(P_i;P_k)-\varrho(P_j;P_k)$

und unter Nutzung von (2)

$\varrho(P_i;P_j) \geqq \varrho(P_i;P_k)-\varrho(P_k;P_j)$. (I)

Setzt man nochmals die Dreiecksungleichung (3) in der Form

$\varrho(P_k;P_j) \leqq \varrho(P_k;P_i)+\varrho(P_i;P_j)$ an, so erhält man – wieder unter Nutzung von (2) –

$\varrho(P_i;P_j) \geqq \varrho(P_k;P_j)-\varrho(P_i;P_k)$. (II)

Aus (I) und (II) folgt (*).

Durch die gewählte Vorgehensweise wird nun nicht etwa nur Rechenaufwand vermieden. Da die Ungleichung (*) lediglich unter Nutzung der Bedingungen (1), (2) und (3), die von jeder speziellen Abstandsfunktion erfüllt werden, bewiesen wurde, gilt sie sofort für jede nur denkbare Abstandsfunktion, für den *Turmabstand* also ebenso wie für den *Eisenbahnabstand*. Damit deutet sich an, daß es sinnvoll ist, eine allgemeine Charakterisierung des Abstandsbegriffes vorzunehmen.

Ihr könnt euch dies noch an einem zweiten Beispiel bewußt machen, indem ihr – ebenfalls nur unter Nutzung der Bedingungen (1), (2) und (3) – zu beweisen versucht, daß für beliebige Punkte P_i, P_j, P_k, P_r und für jede beliebige Abstandsfunktion ϱ eines metrischen Raumes $(R;\varrho)$ die *Viereckungleichung* $|\varrho(P_i;P_j)-\varrho(P_k;P_r)| \leqq \varrho(P_i;P_k)+\varrho(P_j;P_r)$, die ihr ebenfalls anschaulich deuten könnt, erfüllt ist.

P. Göthner

Die Wortspielwiese

alpha stellt vor: Dr. Hans-Dietrich Gronau

Sektion Mathematik
der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock

Zwanzig Jahre *Olympiaden Junger Mathematiker* – ein schönes Jubiläum auch für mich, da ich seit Beginn mit den Olympiaden verbunden bin. Ich möchte diese Gelegenheit nutzen, um etwas über meinen mathematischen Entwicklungsweg zu berichten. Ein erster Höhepunkt war für mich ein 3. Platz bei der Kreisolympiade in Neustrelitz 1963 (II. OJM) in der Klassenstufe 6.

Dieser Erfolg war Ansporn, mich ausgiebiger mit der Mathematik zu beschäftigen. Hierbei wurde ich durch meinen damaligen Mathematiklehrer, Herrn Wiele (III. POS Neustrelitz), unterstützt. Durch Erfolge bei weiteren Olympiaden wurde ich 1965 in den *Bezirksklub Junger Mathematiker* Neubrandenburg aufgenommen. Dieses Ereignis war für meine weitere Entwicklung äußerst wichtig. Durch die monatlichen Bezirksklub-Zusammenkünfte, Ferienlehrgänge und Korrespondenzzirkel wurde die eigene Beschäftigung mit der Mathematik in systematische Bahnen gelenkt und intensiviert. Meine damaligen Mentoren, Herr StR Kerber, Herr Kempcke und Herr OL Pätzold, verstanden es ausgezeichnet, nicht nur wichtiges Wissen zu vermitteln, sondern auch das Interesse und die Begeisterung für die Mathematik zu mehren. Als sehr nützlich erwiesen sich in dieser Zeit auch die Aufgabenwettbewerbe von *Wissenschaft und Fortschritt* und ab 1967 von *alpha* und *Wurzel*.

Erste Olympiade-Erfolge ließen auch nicht lange auf sich warten. Ein zweiter Höhepunkt war eine Anerkennungsurkunde bei der DDR-Olympiade 1966 (V. OJM), bei der ich als Schüler der Klasse 9 in der Klassenstufe 10 startete.

Ebenfalls 1965 wurde ich in die Mathematik-Klasse der EOS *Friedrich Engels* Neubrandenburg delegiert. Obwohl wir dort keinen speziellen Lehrplan hatten, war der Unterricht durch die Konzentration von mathematisch interessierten Schülern und unter der sehr guten Anleitung unseres Mathematiklehrers, Herrn Geist, besonders effektiv, das seinen äußeren Ausdruck in Erfolgen bei Olympiaden und im (meist Mathematik-) Studium fand.

Während dieser EOS-Zeit erhielt ich eine Ausbildung als *Technischer Rechner*. 1969 legte ich mein Abitur ab. Ein dritter Höhepunkt bei den Olympiaden war schließlich ein 3. Preis bei der XI. Internationalen Mathematik-Olympiade 1969 in der SR Rumänien.

Seitdem bin ich in verschiedenen Formen mit der Olympiadebewegung verbunden. So betreue ich drei Schüler des Bezirkes Neubrandenburg, leite einen Mathematikklub im Pionierhaus Rostock und beteiligte mich an IMO-Vorbereitungslehrgängen. Auf meine ehemaligen Schüler, die IMO-Preisträger wurden, Jürgen Roßmann (1973), Helmut Roßmann (1973, 1974, 1975) und Uwe Szyszka (1979), bin ich besonders stolz. Neben dem Einsatz als Korrektor bzw. Koordinator bei Kreis-, Bezirks- und DDR-Olympiaden bin ich Mitautor des zentralen Korrespondenzzirkels und der periodischen Aufgabensammlung *IMO-Übungsaufgaben*. Von 1969 bis 1973 studierte ich Mathematik an der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock und bin seit 1973 wissenschaftlicher Assistent an der dortigen Sektion Mathematik.

Neben den Aufgaben in der Ausbildung, in der ich hauptsächlich mit Lehrerstudenten Mathematik/Physik und Studenten der Sektionen *Technische Elektronik und Schiffstechnik* in den Fächern Algebra und Analysis arbeite, treibe ich Forschungen zur Kombinatorik und Graphentheorie. Mein Interesse gilt insbesondere Extremal-Problemen. In den letzten Jahren haben sich viele derartige Fragestellungen in den verschiedenen Gebieten der Mathematik ergeben. Durch diese Motivation erlebt die Theorie der Extremal-Probleme einen starken Aufschwung.

Mit einer Arbeit hierzu promovierte ich im Juni 1978. Meine Dissertation wurde auf der *Zentralen Leistungsschau der Studenten und Jungen Wissenschaftler* 1979 in Leipzig ausgestellt. Meine Forschungsergebnisse wurden im Dezember 1979 als *Hervorragende wissenschaftliche Leistung* anerkannt. Um einen kleinen Einblick in diese Probleme zu vermitteln, möchte ich folgende Aufgabe stellen:

▲2120▲ Bei einer Abiturfeier stellte eine Gruppe ehemaliger *Junger Mathematiker* fest, daß sie in den vergangenen n Jahren jährlich an den Bezirksolympiaden teilgenommen hatten und daß keine 2 unter ihnen existieren, so daß der eine nur dann Preisträger war, wenn es der andere auch war.

Wie viele Personen umfaßt diese Gruppe höchstens?

a) Schüler der 5. und 6. Klasse versuchen, diese Aufgabe für $n=2$ und $n=3$ zu lösen!

b) Schüler der 7. und 8. Klasse versuchen, diese Aufgabe für $n=2$, $n=3$, $n=4$ und $n=5$ zu lösen!

c) Alle anderen Schüler versuchen, die Aufgabe für alle $n \leqq 6$ und allgemein, für jede natürliche Zahl $n \geqq 2$, zu lösen!

Im Blickpunkt: Erster Mathematiker-Kongreß der DDR 1981 in Leipzig

Liebe Freunde!

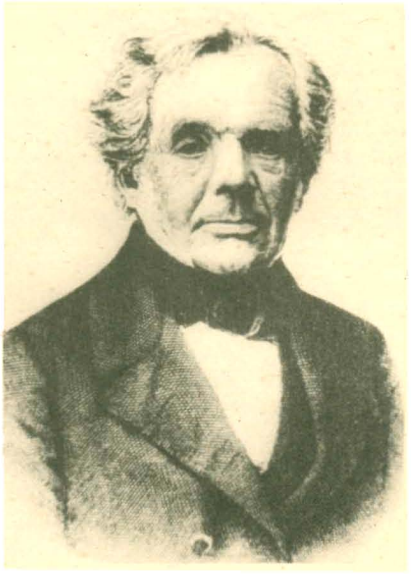
In der Zeit vom 28. 9. bis 2. 10. 1981 – im Jahr des X. Parteitages der SED und wenige Tage vor dem 32. Jahrestag der Gründung der DDR – wird an der Karl-Marx-Universität Leipzig (KMU) ein für unsere mathematische Wissenschaft bedeutendes Ereignis stattfinden: Der erste Mathematiker-Kongreß der DDR.

Er wird veranstaltet von der *Mathematischen Gesellschaft der DDR* (MGDDR) gemeinsam mit der Sektion Mathematik der KMU, welche 1981 den 100. Jahrestag der Gründung des *Mathematischen Seminars* an der Leipziger Universität begeht, und stellt eine Fortsetzung der bisher durchgeführten Wissenschaftlichen Haupttagungen der MGDDR dar. Der Kongreß wird geleitet von Prof. Dr. W. Engel, dem Vorsitzenden der MGDDR und Direktor der Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock. Der örtliche Tagungsleiter ist Prof. Dr. H. Schumann, der Direktor der Sektion Mathematik der KMU.

Ein nationaler Kongreß stellt für die Weiterentwicklung eines Wissenschaftsgebietes und dessen praktische Nutzbarmachung immer einen besonderen Höhepunkt dar. Am Mathematiker-Kongreß in Leipzig werden Fachwissenschaftler von unseren Universitäten, Hoch- und Fachschulen, Mathematiker und Ingenieure aus vielen Bereichen unserer sozialistischen Volkswirtschaft, Mathematiklehrer von unseren Oberschulen, Gäste aus staatlichen und gesellschaftlichen Bereichen, aber auch Mathematiker aus den uns befreundeten sozialistischen Bruderländern sowie aus einigen kapitalistischen Staaten teilnehmen. In Plenarvorträgen sowie in disziplinär angelegten Übersichts- und Spezialvorträgen werden die Teilnehmer des Kongresses den bisher erreichten Entwicklungsstand und die Entwicklungstendenzen der Mathematik einschätzen, sie werden die neuesten mathematischen Forschungsergebnisse und deren Anwendungsmöglichkeiten in der Mathematik selbst, in den Naturwissenschaften und in der Volkswirtschaft vorstellen und diskutieren, sie werden über die Anforderungen an eine moderne Mathematikausbildung für Schüler und Studenten beraten und dabei gewonnene Erfahrungen austauschen. Beispielsweise wird sich eine Diskussionsrunde mit „Methoden zur Förderung mathematischer Talente" beschäftigen.

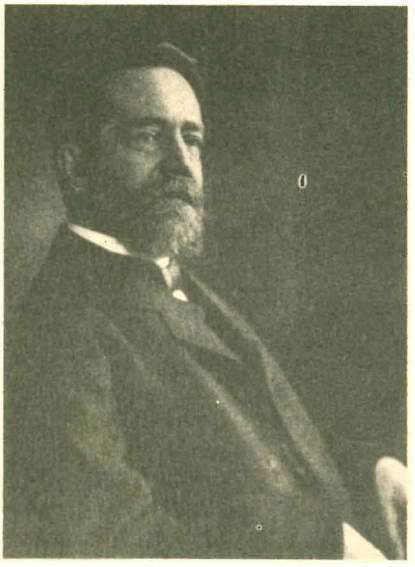
Veranstaltet vom *Wissenschaftlichen Beirat für Mathematik* beim Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen, der MGDDR und dem Zentralrat der FDJ, wird am Vorabend des Mathematiker-Kongresses, am 25. und 26. 9. 1981, die 3. Zentrale Wissenschaftliche Studentenkonferenz Mathematik an der KMU stattfinden. Wie schon bei den vorangegangenen beiden Studentenkonferenzen dieser Art (1977 und 1979 in Leipzig) werden Mathematik- und Mathematiklehrer-Studenten sowie auf dem Gebiet der Mathematik arbeitende junge Wissenschaftler der Universitäten und Hochschulen unserer Republik Ergebnisse ihrer wissenschaftlichen Arbeit vorstellen und diskutieren, die sie in Jugendobjekten und Studentenzirkeln, bei der Lösung von Aufgabenstellungen in Betriebs- bzw. Schulpraktika oder bei der Erfüllung von Forschungsaufgaben im Rahmen von Jahres- und Diplomarbeiten bzw. Dissertationen erzielt haben. Die besten Arbeiten werden durch eine Jury ausgewählt und mit Reisen, Geld- und Buchprämien ausgezeichnet. Erstmalig werden an dieser Studentenkonferenz auch ausländische Studentenvertreter teilnehmen, nämlich je zwei Studenten aus Leningrad, Kiew, Wrocław, Sofia und Olomouc. Spezifisch wird sein, daß die besten Exponate der Studentenkonferenz zum Mathematiker-Kongreß ausgestellt werden, und einige von ihnen können mit der Ehrennadel der MGDDR besonders gewürdigt werden und auf dem Mathematiker-Kongreß zum Vortrag gelangen.

Daß für den Mathematiker-Kongreß das Jahr 1981 und als Tagungsort gerade Leipzig ausgewählt wurden, hat seine besondere Bewandtnis: Vor 100 Jahren nämlich, im Jahre 1881, wurde an der Universität Leipzig ein Mathematisches Seminar gegründet, aus dem später das Mathematische Institut und schließlich die 1969 gegründete heutige Sektion Mathematik der KMU hervorgegangen sind. Initiator der Gründung des Mathematischen Seminars und zugleich sein erster Direktor war der Mathematiker *Felix Klein* (1849 bis 1925), der euch sicher von der Geometrie her – insbesondere durch sein Erlanger Programm – bekannt ist. Die Mathematik in Leipzig, die seit der Gründung der Leipziger Universität im Jahre 1409 bis zur Zeit um 1881 u. a. durch solch bekannte Mathematiker wie *Regiomontanus* (1436 bis 1476), *Johannes Widmann* (1460 bis ?), *Georg Rhaeticus* (1514 bis 1576), *Gottfried Heinsius* (1709 bis 1769), *Abraham Gotthelf Kästner* (1719 bis 1800), *Karl Friedrich Hindenburg* (1739 bis 1808), *Karl Brandan Mollweide* (1774 bis 1825), *August Ferdinand Möbius* (1790 bis 1868) und *Hermann Hankel* (1839 bis 1873) mitgeprägt wurde, erlebte durch die Gründung des Mathematischen Seminars einen neuen Aufschwung. Auch der Mitbegründer der Differential- und Integralrechnung, *Gottfried Wilhelm Leibniz*, studierte 1661 bis 1663 in Leipzig. Zu den bedeutendsten Mathematikern, die in den vergangenen 100 Jahren in Leipzig gewirkt haben, gehören *Wilhelm Scheibner* (1826 bis 1908), *Carl Neumann* (1832 bis 1925), *Adolph Mayer* (1839 bis 1908), der Norweger *Sophus Lie* (1842 bis 1899), *Felix Hausdorff* (1868 bis 1942), *Otto Hölder* (1859 bis 1937), *Karl Rohn* (1855 bis 1920), *Gustav Herglotz* (1881 bis 1953), *Paul Koebe* (1882 bis 1945), *Wilhelm Blaschke* (1885 bis 1962), *Leon Lichtenstein* (1878 bis 1933) und der holländische Mathematiker *B. L. van der Waerden* (geb. 1903). Mathematische Begriffe, wie Mollweidesche



August Ferdinand Möbius

Felix Klein



Formeln, Möbiussches Band, Hankelsches Permanenzprinzip, Neumannsche Potentialfunktion, Liesche Gruppe, Hausdorffsches Trennungsaxiom, Höldersche Ungleichung – um nur einige zu nennen –, erinnern an ihr mathematisches Schaffen. Als Pioniere, die das wissenschaftliche Leben und den Studienbetrieb am Mathematischen Institut nach der Zerschlagung des Hitlerfaschismus 1945 wieder in Gang gebracht haben, sind vor allem die Mathematiker *Ernst Hölder* (geb. 1901), *Erich Kähler* (geb. 1906), *Walter Schnee* (1885 bis 1958) und *Herbert Beckert* zu nennen. NPT Prof. Dr. *Herbert Beckert* war viele Jahre Direktor des Mathematischen Institutes; seit 1969 ist er stellvertretender Direktor für Forschung der Sektion Mathematik der KMU. Viele seiner Schüler sind heute Mathematikprofessoren oder -dozenten an der KMU bzw. an anderen wissenschaftlichen Einrichtungen unserer Republik. Einige Wissenschaftler unserer Sektion haben die Geschichte der Mathematik in Leipzig in einer „Festschrift zum 100. Jahrestag der Gründung des Mathematischen Seminars an der Universität Leipzig" aufgeschrieben, die zum Mathematiker-Kongreß 1981 im Deutschen Verlag der Wissenschaften Berlin erscheinen soll. Auch wurde an der Sektion Mathematik ein Traditionskabinett eingerichtet, das in dem nach vier inhaltlichen Schwerpunkten „Tradition und Neubeginn", „Studienvorbereitung – Studienverlauf – Studienergebnisse", „Forschung heute" und „Gesellschaftliche Wirksamkeit" gegliederten Rundgang ein plastisches Bild über Entwicklung und Leistungsfähigkeit der Sektion Mathematik vermittelt. Ein Besuch, auch für euch, liebe Freunde, lohnt sich bestimmt.

Herbert Beckert

Der Eröffnungsvortrag zum Mathematiker-Kongreß wird dem Leipziger Jubiläum gewidmet sein; ebenso wird das wissenschaftliche Programm des Kongresses stark auf das historisch gewachsene, breite und anwendungsorientierte Forschungsprofil der Leipziger Mathematiksektion orientiert sein, in dem die *Analysis* eine dominierende Stellung einnimmt. Somit wird der Mathematiker-Kongreß der DDR in Leipzig nicht nur einen wesentlichen Beitrag zur Weiterentwicklung unserer schönen Wissenschaft Mathematik und ihrer praktischen Anwendung zum Wohle unserer sozialistischen Gesellschaft leisten, sondern auch zur Pflege fortschrittlicher Traditionen beitragen.

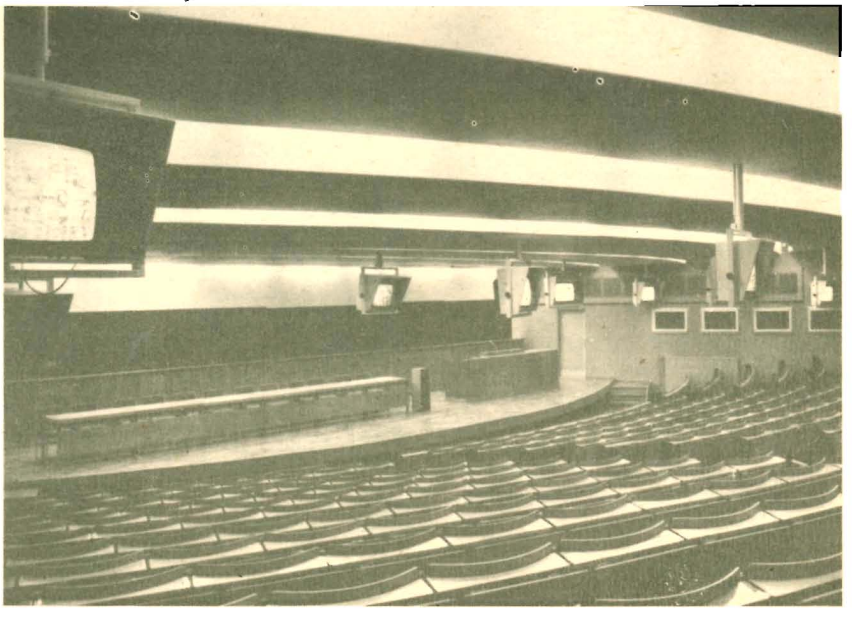
Liebe junge Freunde! Sicher, ihr könnt noch nicht am Mathematiker-Kongreß teilnehmen. Doch sollte euch dieses Ereignis Ansporn sein, euch im schulischen Mathematikunterricht, in Mathematikzirkeln, in mathematischen Schülergesellschaften, bei den Mathematikolympiaden und in eurer Freizeit noch intensiver mit der von euch geliebten Mathematik zu beschäftigen, um vielleicht später einmal selbst ein Mathematikstudium aufzunehmen und danach als Wissenschaftler an unseren Universitäten, Hoch- und Fachschulen, als Mathematiker in der Industrie oder anderen gesellschaftlichen Bereichen oder aber als Mathematiklehrer an unseren Schulen tätig zu sein. Wir wünschen euch dabei viel Erfolg!

R. Mildner

Leibniz-Denkmal vor dem Universitätshochhaus

B. L. van der Waerden

Moderne Lehrstätte im neuen Hörsaalgebäude der Karl-Marx-Universität Leipzig

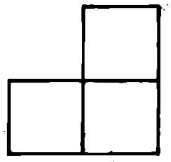


Eine Aufgabengruppe

zusammengestellt aus Anlaß des 1. Mathematiker-Kongresses der DDR von Prof. Dr. Horst Schumann, *Direktor der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig* und Dr. R. Mildner, *Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig*

Temperaturkoeffizient oder additive Temperaturkonstante?

Ma 5 ▪2100 Zerlegt die aus drei Quadraten gleicher Seitenlänge bestehende ebene Figur (siehe Bild) in 4 deckungsgleiche Teilfiguren!



Ma 6 ▪2100 Eine Kompanie A der NVA marschiert um 14.30 Uhr einer 26 km entfernten Kompanie B mit einer Marschgeschwindigkeit von $6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ entgegen. Die Kompanie B bricht um 14.45 Uhr in Richtung von A mit einer Marschgeschwindigkeit von $8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf. Wann begegnen sich beide Kompanien?

Ma 7 ▪2100 Gegeben sei ein nichtgleichseitiges Parallelogramm $ABCD$. Beweise, daß die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden dieses Parallelogramms die Eckpunkte eines Rechtecks sind!

Ma 8 ▪2100 Konstruiert ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC aus den Strecken $AC=b$ und $d=c-a$. Dabei seien $c=AB$ und $a=BC$. Begründet und beschreibt die Konstruktion!

Ma 9 ▪2100 Ein Betriebslabor hat Flaschen mit jeweils 1 kg 14%iger, 11%iger und 9%iger Schwefelsäurelösung im Lager, und zwar jede in ausreichender Anzahl. Wie viele Flaschen einer jeden von diesen Lösungen muß eine Laborantin mischen, damit sie 30 kg 12%ige Schwefelsäurelösung erhält, wobei sie Lösungen aller drei Arten verwenden soll. Man gebe alle Möglichkeiten an!

Ma 10/12 ▪2100 Von den positiven ganzen Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ sei bekannt, daß $a_1 > a_0$, $a_2 = 3a_1 - 2a_0$, $a_3 = 3a_2 - 2a_1, \ldots, a_{100} = 3a_{99} - 2a_{98}$ ist. Man beweise, daß dann $a_{100} > 2^{99}$ gilt!

In vielen Aufgaben der Physik und der Technik muß die Temperaturabhängigkeit physikalischer Größen (z. B. Länge, Volumen, elektrischer Widerstand, Druck, u. a. m.) bei der Lösung einer gegebenen Aufgabe berücksichtigt werden. Im allgemeinen ist diese Abhängigkeit nichtlinear. Eine verallgemeinerte Zustandsgröße $z=f(T)$, T absolute Temperatur, kann um einen Bezugswert $z_0=f(T=T_0)$ in eine Taylorreihe entwickelt werden:

$$z=z_0+\frac{\partial f}{\partial T}\bigg|_{T_0}\cdot\Delta T+\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}\bigg|_{T_0}\cdot(\Delta T)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial T^3}\bigg|_{T_0}\cdot(\Delta T)^3+\ldots \quad (1)$$

mit

$$\Delta T=T-T_0. \quad (2)$$

Die durch die partiellen Ableitungen entstehenden Koeffizienten werden als linearer, quadratischer, kubischer (usw.) Temperaturkoeffizient in der Formel (3)

$z=z_0\cdot[1+\alpha\cdot\Delta T+\beta\cdot(\Delta T)^2+\gamma\cdot(\Delta T)^3+\ldots]$

berücksichtigt und unter Bezug auf $\vartheta_0=20\,^\circ\text{C}$, d. h. $T_0=293{,}16\,\text{K}$, in einschlägigen Tabellenwerken angegeben. Der Temperaturkoeffizient ist eine Materialkenngröße.

In den weitaus meisten Fällen ist es zulässig, die Taylorreihe nach dem linearen Term abzubrechen. Zum Beispiel ist im Intervall $-200\,^\circ\text{C}\leqq\vartheta\leqq+200\,^\circ\text{C}$ der maximale Fehler für den Widerstand metallischer Leiter kleiner als 2,6%. Gleichung (3) vereinfacht sich somit auf die allgemein bekannte Formel

$$z=z_0\cdot(1+\alpha\cdot\Delta T)=z_0\cdot[1+\alpha\cdot(T-T_0)]. \quad (4)$$

Dieser Beziehung haftet jedoch der Nachteil an, daß bei formaler Anwendung auf Probleme, bei denen der Wert der Zustandsgröße bei einer tieferen als der Bezugstemperatur zu berechnen ist, ein erheblicher Fehler entsteht.

Beispiel: Gegeben sei der Widerstand eines metallischen Leiters $R=132\,\Omega$ bei einer Temperatur $\vartheta=100\,^\circ\text{C}$ und der Temperaturkoeffizient des Widerstandes

$$\alpha_R=4\cdot10^{-3}\,\frac{\Omega}{\Omega\cdot\text{K}},$$

gesucht sei der Widerstand bei $\vartheta=20\,^\circ\text{C}$.

Ausgehend von Gleichung (4) ergibt sich bei formaler Anwendung

$$\begin{aligned}R_{20}&=R_{100}\cdot(1+\alpha_R\Delta T)\\&=132\Omega\cdot\left(1-4\cdot10^{-3}\,\frac{\Omega}{\Omega\text{K}}\cdot80\,\text{K}\right)\\&=132\cdot(1-0{,}32)\Omega\\&=89{,}76\Omega.\end{aligned}$$

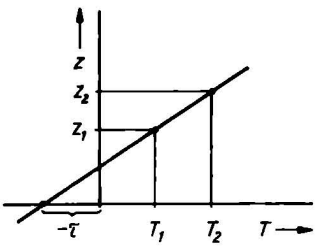
Wird Gleichung (4) jedoch richtig angewandt, so gilt

$$\begin{aligned}R_{100}&=R_{20}\cdot(1+\alpha_R\Delta T)\\R_{20}&=\frac{R_{100}}{1+\alpha_R\Delta T}\\&=\frac{132\Omega}{1+4\cdot10^{-3}\,\frac{\Omega}{\Omega\text{K}}\cdot80\,\text{K}}\\&=\frac{132\Omega}{1{,}32}\\&=100\Omega.\end{aligned}$$

Der Fehler ist also beim obigen Beispiel größer als 10%. Bedeutend günstiger ist es, von der Form der Geradengleichung durch zwei Punkte auszugehen [1]. Die Situation ist in Bild 1 dargestellt. Hierfür gilt

$$\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=\frac{T-T_1}{T_2-T_1}. \quad (5)$$

Bild 1



Zur Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte

Rückt man den Punkt (T_1, z_1) soweit nach links, daß er auf der Abszisse liegt, so wird $T_1=-\tau$, $z_1=0$. Der Punkt (T_2, z_2) kann dann mit dem Bezugspunkt (T_0, z_0) identifiziert werden.

Gleichung (5) geht über in

$$\frac{z}{z_0}=\frac{T+\tau}{T_0+\tau}. \quad (6)$$

Die Größe τ ist die additive Temperaturkonstante und, genau wie der Temperaturkoeffizient α in Gleichung (4), eine Materialkenngröße. Nur ist der prinzipielle, oben gezeigte Nachteil der Gleichung (4) jetzt beseitigt, weil Gleichung (6) symmetrisch ist.

Es soll noch untersucht werden, ob bei gegebenem Temperaturkoeffizienten α die Temperaturkonstante τ auch als bekannt angesehen werden kann. Dazu sind die Gleichungen (4) und (6) zu vergleichen.

Es ergibt sich

$$\frac{z}{z_0}=1+\alpha\cdot(T-T_0)=\frac{T+\tau}{T_0+\tau}, \quad (7)$$

hieraus folgt

$$(T_0+\tau)\cdot[1+\alpha\cdot(T-T_0)]=T+\tau,$$

$$\tau\cdot[1+\alpha\cdot(T-T_0)]-\tau=T-T_0\cdot[1+\alpha\cdot(T-T_0)],$$

$$\tau\cdot\alpha\cdot(T-T_0)=(T-T_0)\cdot(1-\alpha\cdot T_0),$$

$$\tau=\frac{1}{\alpha}-T_0. \qquad (8)$$

Bei gegebenem Temperaturkoeffizienten kann die Temperaturkonstante berechnet werden. Ihr konkreter Wert hängt jedoch davon ab, ob die Temperatur in K oder in °C angegeben wird.

Es wäre wünschenswert, wenn die Werkstoffkennwerttabellen, in denen mittlere Temperaturkoeffizienten α angegeben sind, um die Angabe der Temperaturkonstanten τ ergänzt würden, da dann durch Anwendung von Gleichung (6) auf die Berechnung der Temperaturabhängigkeit einer physikalischen Größe die mit Gleichung (4) eventuell auftretenden Schwierigkeiten beseitigt sind. *K. Gola*

Schulferien 1981/82

Herbstferien

1. Ferientag Sonnabend, 17. 10. 1981
1. Unterrichtstag Montag, 26. 10. 1981

Ferien zum Jahreswechsel

1. Ferientag Mittwoch, 23. 12. 1981
1. Unterrichtstag Montag, 4. 1. 1982

Winterferien

1. Ferientag Sonnabend, 6. 2. 1982
1. Unterrichtstag Montag, 1. 3. 1982
Unterrichtsfreier Tag Sonnabend, 10. 4. 1982

Frühjahrsferien

1. Ferientag Sonnabend, 8. 5. 1982
1. Unterrichtstag Montag, 17. 5. 1982
Unterrichtsfreier Tag Sonnabend, 29. 5. 1982

Sommerferien

1. Ferientag Sonnabend, 3. 7. 1982
1. Unterrichtstag Mittwoch, 1. 9. 1982

Ingenieurhochschule Zwickau

Stätte praxisverbundenen Studiums

Am 1. September 1969 öffnete die *Ingenieurhochschule* Zwickau ihre Pforten. Seitdem profilierte sich die Ingenieurhochschule zu einer anerkannten sozialistischen Bildungs- und Forschungsstätte. Hauptaufgabe der IH ist die kommunistische Erziehung und wissenschaftlich fundierte Ausbildung praxisorientierter Diplomingenieure und Diplomingenieurökonomen auf den Gebieten der Technologie der metallverarbeitenden Industrie, der Kraftfahrzeugtechnik, der Elektroautomatisierungstechnik und der Sozialistischen Betriebswirtschaft. Ziel aller erfahrenen Pädagogen und praxisbewährten Hochschullehrer ist es, der sozialistischen Praxis Absolventen zur Verfügung zu stellen, die bereit und befähigt sind, Aufgaben in der Volkswirtschaft der DDR mit guter Qualität und Effektivität zu lösen, dem wissenschaftlich-technischen Fortschritt zum Durchbruch zu verhelfen und wissenschaftlich-technische Erkenntnisse unverzüglich produktiv wirksam zu machen.

Sehr vielgestaltig ist das Leben an der IH Zwickau. Es reicht vom intensiven Studium über die gesellschaftliche Tätigkeit bis zur aktiven Teilnahme am künstlerisch-kulturellen Leben.

Studienbewerber an der IH müssen einen der gewählten Studienrichtung entsprechenden Beruf und die Hochschulreife nachweisen. Befähigte Facharbeiter können über eine Delegierung ihrer Betriebe die Hochschulreife an der IH erlangen. Günstige Bewerbungs- und Studienmöglichkeiten werden Berufssoldaten und Soldaten auf Zeit der Reserve der bewaffneten Kräfte auf der Grundlage der Reservistenordnung geboten.

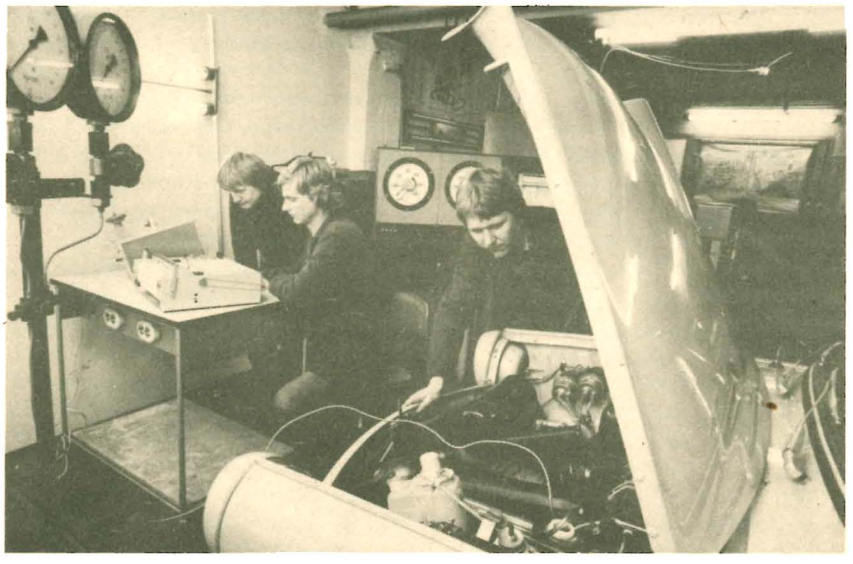
Das Studium an der IH Zwickau dauert vier Jahre. Im 6. bzw. 7. Semester erhalten die Studenten eine berufspraktische Ausbildung in der sozialistischen Industrie, die der Vorbereitung auf den künftigen Einsatz in der Praxis dient. Im 8. Semester wird die Vertiefungsrichtung weitergeführt und die Diplomarbeit angefertigt. Dabei sind rund 80 Prozent der vorgegebenen Diplomthemen aus den Plänen *Wissenschaft und Technik* abgeleitet und werden so unmittelbar produktionswirksam. Besonders befähigte Absolventen können über ein Forschungsstudium den zweiten akademischen Grad eines Dr.-Ing. oder Dr. oec. erwerben.

Liebe junge Leser! Um euch einen weiteren Einblick in das Ausbildungsgeschehen an der IH Zwickau zu vermitteln, möchten wir euch die vier Sektionen mit ihrem Ausbildungsgeschehen näher vorstellen:

Sektion Technologie der metallverarbeitenden Industrie

Fachrichtung: Fertigungsmittelentwicklung (FME)

In der Fachrichtung FME der Sektion Technologie werden Diplomingenieure ausgebildet, welche Geräte und Einrichtungen zur



64 Prozent der Forschungskapazität der Ingenieurhochschule Zwickau sind für Aufträge aus Kombinaten und Betrieben vertraglich gebunden. Die Studenten werden frühzeitig auf ihre spätere Tätigkeit als Ingenieure und Technologen vorbereitet, wo hohes theoretisches Wissen, z. B. auf dem Gebiet der Mathematik, und praktisches Können gleichermaßen gefragt sind. Zur praxisnahen Ausbildung an der Sektion Kraftfahrzeugtechnik der Ingenieurhochschule zählen beispielsweise auch Bremskraftmessungen am PKW Trabant.

Die Studenten haben mit ihren Untersuchungen konkrete Forschungsaufträge zu erfüllen

Handhabung von Werkstücken an den Arbeitsplätzen sowie Rationalisierungsmittel entwickeln. Die Bedeutung des Rationalisierungsmittelbaus wird im Hinblick auf die komplexe Automatisierung der Produktion weiter wachsen. Geht es doch darum, die Arbeitsproduktivität besonders durch die Intensivierung der Produktion zu verbessern und die Werktätigen mehr und mehr von gesundheitsschädigender, schwerer körperlicher und monotoner Tätigkeit frei zu machen.

Die Fachausbildung erfolgt auf folgenden Gebieten: Spanende, schneidende und umformende Werkzeugmaschinen – Grundlagen der Fertigungsmittelkonstruktion – Automatisierung der Fertigungsmittelkonstruktion – Automatisierung der Fertigungsmittel und Montage – Hydro- und Pneumostatik – Entwerfen von Vorrichtungen, Rationalisierungsmittel und deren Steuerungen – Werkzeugmaschinenpraktikum – Fertigungsverfahren einschließlich Wärmebehandlung – Fertigungsprozeßgestaltung – Qualitätssicherung und Fertigungsmeßtechnik.

Fachrichtung Fertigungsprozeßgestaltung (FPG)

Die Fachrichtung FPG bildet Diplomingenieure aus, welche als Organisatoren des betrieblichen Fertigungsprozesses entscheidend auf die Optimierung der Produktion einwirken. Der künftige Fertigungsprozeßgestalter ist zur sachkundigen Untersuchung und Festlegung optimaler Kenngrößen
– des Einsatzes von Rohteilen – der Reihenfolge des Fertigungsprozeßablaufes – des Einsatzes von Maschinen, Werkzeugen und Hilfsmitteln – der Einhaltung der Arbeitswerte und – für die Sicherung der Qualität der Erzeugnisse und die Stabilität der Fertigung zu befähigen.

Zur rationellen Lösung dieser Probleme stehen dem FP-Gestalter die EDV und modern gestaltete Technologenarbeitsplätze zur Verfügung.

Ein weiteres wichtiges Arbeitsgebiet des FP-Gestalters ist die technologische Einsatzvorbereitung automatischer Werkzeugmaschinen und Produktionsausrüstungen.

Spezieller Inhalt der Fachausbildung:

Für seine künftige Tätigkeit wird der FP-Gestalter auf folgenden Gebieten ausgebildet:

– Fertigungsverfahren (Umformtechnik, Umform- und Zerteiltechnik, Abtrenntechnik, Fügetechnik, Oberflächentechnik, Wärmebehandlung und Plastverarbeitung) – Methoden und Theorien der Fertigungsprozeßgestaltung und Automatisierung technologischer Prozesse – Fertigungsmittel (Einsatzbereiche und Ausführungsformen von Werkzeugmaschinen, Konstruktionslehre, Fertigungsmittelkonstruktion, Automatisierung von Fertigungsmitteln) – Qualitätssicherung und Fertigungsmeßtechnik – technologische Betriebsprojektierung, Arbeits- und Fertigungsorganisation – Anwendung und Einsatz von EDV zur Optimierung technologischer Prozesse sowie zur Rationalisierung der Ingenieurtätigkeit.

Absolventeneinsatz: Der Einsatz der Absolventen dieser Fachrichtung kann in der technologischen Fertigungsvorbereitung allgemein und für spezielle Verfahren, in der technologischen Entwicklung, der operativen Produktionsbetreuung sowie in der Leitung, Überwachung und Kontrolle technologischer Prozesse erfolgen.

Fachrichtung: Betriebsgestaltung

Die Fachrichtung Betriebsgestaltung bildet Diplomingenieure aus für die Rekonstruktion, Projektierung und Einrichtung von Fertigungszellen und -bereichen sowie kompletten Produktionsbetrieben der metallverarbeitenden Industrie. Die Betriebsgestalter beherrschen die funktionellen Zusammenhänge des betrieblichen Reproduktionsprozesses, die Anwendung grundlegender Gestaltungsregeln, Methoden und Verfahrensweisen der Projektierung bzw. Rekonstruktion bestehender Fertigungsstätten.

Charakteristisch für diese Tätigkeit ist der Einsatz mathematischer Methoden und der EDV zur Optimierung und Rationalisierung dieser Tätigkeit.

Die Fachausbildung erfolgt auf folgenden Gebieten: – Grundlagen der technologischen Betriebsprojektierung – Technologische Projektierung spezieller Fertigungsstätten – Projektierung von Transport- und Lagerprozessen – Investitionsvorbereitung und -durchführung – Anwendung der EDV in der technologischen Betriebsprojektierung – Zuverlässigkeit und Instandhaltung von Betriebssystemen – Projektierung von Anlagenteilen – Projektierungspraktikum

Einsatzmöglichkeiten der Absolventen:

In der technologischen Planung, als Betriebsingenieur zur Vorbereitung, Steuerung und Überwachung der Produktion sowie in Ingenieurbüros für Rationalisierung und Projektierung.

Sektion Kraftfahrzeugtechnik

Fachrichtung Kraftfahrzeugtechnik

Das Kraftfahrzeug ist ein hochwertiges Produktions- und Konsumtionsmittel, das ständig an Bedeutung gewinnt. Der Inhalt der Ausbildung besteht in folgendem:

– Produktionsvorbereitung (Entwicklung, Erprobung, Fertigung) von Kraftfahrzeugen, Verbrennungsmotoren und Zubehör – Kraft- und Schmierstoffe – Kraftfahrttheorie – Mensch – Kraftfahrzeug – Verkehr (Umweltschutz bezüglich Luftreinhaltung und Geräuschminderung sowie Entwicklungstendenzen, menschengerechte Gestaltung von Kraftfahrzeugen, Anforderung an die Verkehrsgestaltung) – Karosseriebau – Kfz-Elektrik – Antriebs- und Bremsentechnik – Kfz-Fahrwerke – Betrieb und Instandhaltung von Kraftfahrzeugen – Dynamik der Kolbenmaschinen und Maschinendynamik – Betriebsfestigkeit – Strömungstechnik, Ölhydraulik und Pneumatik – Meßtechnik

Einsatzmöglichkeiten der Absolventen in:

– Kfz-Entwicklung und Herstellung – Güterkraftwagen, Autobus-, Anhängerbau – Traktoren-, Landmaschinenbau der Zubehörindustrie – Entwicklungs- und Produktionsstellen für Sonderfahrzeuge aller Wirtschaftszweige.

Sektion Elektroautomatisierungstechnik

Das Ziel in der Ausbildung in der Fachrichtung Elektrotechnik besteht in folgendem:

An der Sektion EAT werden Diplomingenieure der Fachstudienrichtung *Elektrotechnik* für die Entwicklung, Projektierung und Instandhaltung von Rationalisierungseinrichtungen und Energieanlagen ausgebildet. Automatisierungsprobleme in diskontinuierlichen technologischen Prozessen sind nur unter komplexer Anwendung der Elektrotechnik/Elektronik/Mikroelektronik zu lösen. Die Konstruktion elektronischer Automatisierungsrichtungen, z. B. die Entwicklung von Manipulatoren (Industrierobotern) trägt zur Steigerung der Arbeitsproduktivität bei und befreit die Werktätigen von schwerer körperlicher, gesundheitsschädlicher und monotoner Arbeit. Die Automatisierung von Prüf- und Meßprozessen hilft Arbeitskräfte einzusparen und die Qualität der Erzeugnisse zu verbessern.

Hochschulabsolventen der Sektion beeinflussen in der betrieblichen Praxis wesentlich die rationelle Energieverwendung durch die entsprechende konstruktive Auslegung von Elektromaschinen und -anlagen.

Inhaltliche Ausbildung:

Die Grundlagenausbildung leitet sich ab aus dem Grundstudienplan für das Elektroingenieurwesen.

Die darauf aufbauende Fachausbildung wird gewährleistet durch folgende Fachgebiete:

– Bauelemente, Baugruppen und Grundschaltungen der Elektronik – Geräte und Anlagen der Informationstechnik (einschließlich der Mikroelektronik) – Elektrische Maschinen – Elektronische Anlagen und Geräte – Leistungselektronik – Elektromotorische Antriebe und Antriebsregelungen – Steuerungsanlagen – Regelungssysteme

Einsatzmöglichkeiten der Absolventen:

Haupteinsatzgebiete sind: Rationalisierungsbetriebe im Bereich der gesamten Volkswirtschaft – Rationalisierungsbereiche auf Betriebsebene – Konstruktionsabteilungen für die Entwicklung von elektronischen und steuerungstechnischen Anlagen – Forschungszentrum für die Anwendungsforschung auf technologischem Gebiet – Ingenierbüros für die Projektierung von Rationalisierungs- und Energieanlagen – Abteilungen

zur Betriebsüberwachung und Instandhaltung von Rationalisierungs- und Energieanlagen.

Sektion Sozialistische Betriebswirtschaft
Die Ausbildung erfolgt in den Fachrichtungen

- Ingenieurökonomie des Maschinenbaus
- Ingenieurökonomie der elektrotechnischen und elektronischen Industrie

Der *Sozialistischen Betriebswirtschaft* obliegen die Leitung, Planung, Organisation, Kontrolle und Analyse der Phasen des Reproduktionsprozesses der Kombinate und Betriebe.
Diesen Funktionen ist das Ausbildungsprofil der Sektion SBW kongruent.
Das Ausbildungsziel besteht in der Ausbildung von Diplomingenieurökonomen der o.g. Fachrichtungen, welche mit soliden betriebswirtschaftlichen und technisch-technologischen Grundkenntnissen ausgestattet in der Lage sind, die ökonomischen Prozesse in der Einheit von Politik, Ökonomie und Technik zu beherrschen.
Die Ausbildung dauert 4 Jahre. Sie erfolgt vor allem in den Lehrgebieten:

- Marxismus-Leninismus unter besonderer Berücksichtigung der Politischen Ökonomie des Kapitalismus und des Sozialismus
- Mathematik für Ökonomen
- Technisch-technologische Grundlagen (Werkstofftechnik, Konstruktion, Elektronik, technische Grundlagen)
- Sozialistische Volkswirtschaftslehre und sozialistisches Recht
- Kybernetik, EDV-Org. und -programmierung

sowie in der Sozialistischen Betriebswirtschaftslehre und ihren Teilgebieten.
Der Einsatz der Absolventen erfolgt vorwiegend in:
den Direktoraten für Ökonomie, Beschaffung und Absatz, Kader, Bildung, Arbeit – dem Bereich Hauptbuchhaltung sowie in der Forschung, Entwicklung, Technik und Fertigung in den Betrieben, Kombinaten und Forschungseinrichtungen.
Liebe junge Freunde! Wie ihr gesehen habt, sind alle Fachrichtungen an der IH Zwickau aufs engste mit der Mathematik verbunden. Sie trägt durch ihre konkrete Anwendung dazu bei, Arbeitszeit einzusparen, den spezifischen Materialverbrauch zu senken und durch die Anwendung fortschrittlicher Technologien die Arbeitsproduktivität zu steigern und dabei die Arbeits- und Lebensbedingungen der Werktätigen zu verbessern. Dazu möchten wir euch abschließend ein Beispiel nennen. Zur praxisverbundenen Ausbildung der Studenten gehört neben der Mitarbeit in den SRKB der Hochschule u.a. die Lösung von interessanten Aufgaben der MMM. An einem solchen MMM-Exponat arbeitete der Student Egon Dietz aus der Seminargruppe T 1771 mit. Egon war Mitglied eines Jugendkollektivs, dem junge Facharbeiter und Ingenieure des VEB Sachsenring sowie Studenten der Ingenieurhochschule angehörten. Sie beschäftigten sich mit der Vorbereitung des Einsatzes des Beschickungsroboters IR 3P im Bereich der Getriebefertigung des VEB Sachsenring. Bereits im Juni vergangenen Jahres beschickte der IR 3P zwei Zahnradstoßmaschinen mit Teilen und bringt eine Fertigungseinsparung von 1000 Stunden pro Jahr. Zu seiner Mitarbeit am Jugendobjekt erklärte uns Egon Dietz: „Ich arbeitete am Aufbau des Schaltschrankes für den Roboter mit. Einfach war diese Arbeit nicht. Doch gerade, weil sie Probleme in sich barg und sie einen ganzen Mann verlangt, liebe ich diese Arbeit. Die Mitarbeit an der Lösung volkswirtschaftlicher Schwerpunktaufgaben, wie der Fertigungszeitsenkung, durch den Einsatz neuester Technik, begeisterte alle Mitglieder des Jugendkollektivs. Das war ein wertvoller Beitrag, uns auf unseren künftigen Einsatz in der sozialistischen Produktion vorbereiten zu helfen.
Doch ohne die Kenntnisse der Mathematik wäre diese Mitarbeit an den Aufgaben der sozialistischen Rationalisierung nicht denkbar gewesen. Ich kann nur allen jungen Freunden empfehlen, sich mit der Mathematik umfassend zu beschäftigen."

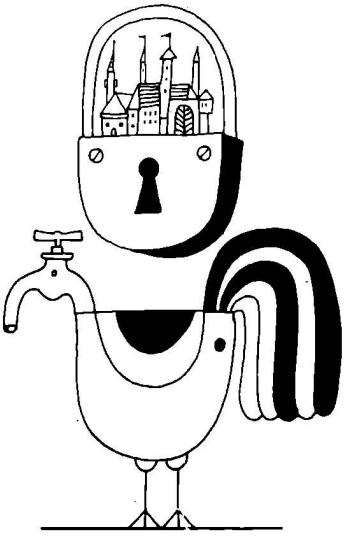
B. Gronwald

Benjamin Banneker

1980 erschien in den USA eine Gedenkmarke für den afroamerikanischen Astronomen, Geodäten und Mathematiker *Benjamin Banneker* (1731 bis 1806). Diesen Namen wird man selbst in sehr speziellen Nachschlagewerken zur Geschichte der Mathematik vergeblich suchen, denn dort sind im allgemeinen nur Personen erwähnt, die einen schöpferischen Beitrag zur Weiterentwicklung der Mathematik geleistet haben. Für solche Leistungen fehlten allerdings in den USA bis zum Ende des 19. Jahrhunderts die gesellschaftlichen Voraussetzungen. Unter den relativ wenigen Persönlichkeiten der US-amerikanischen Geschichte, die mit dem mathematischen Wissen ihrer Zeit überdurchschnittlich vertraut waren und es anzuwenden verstanden, nimmt *Banneker* als erster farbiger Vertreter der mathematischen Wissenschaften einen besonderen Platz ein. Der frühzeitige Kontakt mit der einflußreichen Quäkerfamilie *Ellicot*, die seine seltene Begabung erkannte und förderte, ermöglichte es dem Sklavensohn, ganz auf sich gestellt, anhand von Büchern in die Mechanik, Astronomie und Mathematik einzudringen.
1791 trat *Banneker* in einem in die amerikanische Geschichte eingegangenen Brief an *Thomas Jefferson* (1743 bis 1826), den Verfasser der Unabhängigkeitserklärung und späteren US-Präsidenten, für die Rechte seiner schwarzen Brüder ein. Der Brief wurde zusammen mit einem Exemplar des ersten von *Banneker* erarbeiteten astronomischen Jahrbuchs übergeben. Derartige Jahrbücher, die sich damals großer Beliebtheit erfreuten, verfaßte *Banneker* noch viele Jahre lang. Er wirkte auch an der Vermessung des Columbia-Districts mit, worauf das Markenbild Bezug nimmt.
Die Geschichtsschreibung der Wissenschaften bemühte sich in den vergangenen Jahrzehnten mit zunehmendem Erfolg, ihren Gegenstand nicht mehr nur als Geschichte von wissenschaftlichen Begriffen, Problemen und erfolgreichen Forschern, sondern als gesellschaftlichen Prozeß zu erfassen und darzustellen. In einer so verstandenen Geschichte der Mathematik müssen und werden auch Männer wie *Benjamin Banneker* ihren gebührenden Platz finden.

P. Schreiber

Gleich und gleich und doch verschieden



Nachdenken und sicheres Rechnen gefragt

Über das Lösen von Sachaufgaben

Macht es euch Freude, wenn ihr knobeln könnt, wenn ihr über ein kniffliges Problem nachdenkt, wenn ihr die Lösung einer schwierigen Aufgabe gefunden habt? Ja! Dann gehört ihr zu den vielen Menschen, denen Denken eines der größten Vergnügen ist. So betrachtet, kann man die Beschäftigung mit der Mathematik als eine reizvolle Sache, vielleicht als ein schönes Hobby ansehen. Die Mathematik dient aber nicht vordergründig dazu, uns die Freude des Denkens, die Freude über die großartige Logik eines gefundenen Lösungsweges zu ermöglichen. Vor allem dient die Mathematik dazu, unser aller Leben zu erleichtern und zu verbessern. Das wird durch die Anwendungen der Mathematik erreicht. Im täglichen Leben, bei der Arbeit in der Industrie und Landwirtschaft, im Handel und Transportwesen – überall wird die Mathematik angewendet und gebraucht. Kein Weltraumschiff könnte um die Erde kreisen, wenn nicht ein entsprechend hoher Stand der mathematischen Wissenschaft vorhanden wäre! Wer Sachaufgaben löst, kann sich schon jetzt darin üben, praktische Probleme mit Hilfe der Mathematik zu bewältigen. Auch das kann ein schöner Erfolg sein und Freude und Befriedigung bringen, wenn man ein schwieriges Problem aus der Praxis durch Anwendung seiner mathematischen Kenntnisse gelöst hat. Die folgenden Aufgaben für die Klassen 5 bis 7 sollen Angebote für euch sein, eure mathematischen Kenntnisse anzuwenden. Wer denkt und rechnet mit?

Aufgaben

Klasse 5

▲1▲ Um eine Dachrinne zu befestigen, müssen Rinnenhalter angebracht werden.
Wieviel solcher Rinnenhalter werden benötigt, um eine 9,50 m lange Dachrinne zu befestigen, wenn die äußeren Halter je 0,25 m eingerückt werden und der Abstand der Rinnenhalter höchstens 0,75 m betragen darf?
Lösungshinweise:

a) mit Hilfe einer maßstäblichen Zeichnung

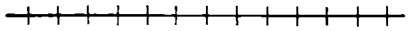


Bild 1

b) durch Rechnung (Bild 2)

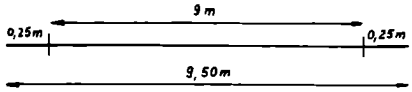


Bild 2

Tabelle:

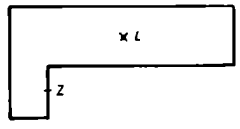
Anzahl d. Abstände	1	2	3		x
Entfernung in cm	75	150	225	...	900

(Solche Tabellen sind ein nützliches Hilfsmittel, um die in der Aufgabe enthaltenen Zusammenhänge aufzudecken!)
Lösungsansatz:
$75 \cdot x = 900$ (Die in der Tabelle untenstehenden Zahlen ergeben sich aus den darüberstehenden durch Multiplikation mit 75.)
$x = 12$
Auswertung des gefundenen Ergebnisses:
Die Anzahl der Halter ist um 1 größer, da der linke (oder rechte) äußere Halter noch dazugerechnet werden muß.
Antwort: Man benötigt 13 Rinnenhalter.

▲2▲ Zum Verlegen einer Lichtleitung in einem Stallgebäude benötigt man Feuchtraumkabel, das mit Halteschellen an Wand bzw. Decke befestigt wird.
Wieviel Halteschellen werden benötigt, wenn 14,50 m Kabel zu befestigen sind, die beiden äußeren Schellen jeweils 0,20 m eingerückt werden und der Abstand der Schellen höchstens 0,60 m betragen soll?

▲3▲ In einem Kellergang, dessen Grundriß im Maßstab 1 : 200 angegeben ist, wird eine Deckenbeleuchtung angebracht. Dazu muß von der Anschlußstelle des Zählers (Z) ein Feuchtraumkabel bis zur anzubringenden Kellerleuchte (L) verlegt werden, das mit Halteschellen an Wand bzw. Decke befestigt wird. Die Anschlußstelle für das Kabel im Zähler (Z) befindet sich 1,30 m über dem Fußboden. Der Kellerraum ist 2,10 m hoch.

Bild 3



a) Wieviel Meter Feuchtraumkabel werden benötigt, wenn das Kabel stets parallel zu den Begrenzungslinien des Raumes verlegt und dabei der kürzeste Weg gewählt wird?
b) Wie groß ist der durchschnittliche Abstand der Halteschellen zu wählen, wenn insgesamt 15 Schellen zur Verfügung stehen und die beiden äußeren Schellen 20 cm von Z bzw. L entfernt anzubringen sind? (Bild 3)

▲4▲ Ein 2,80 m hohes Wohnzimmer mit dem abgebildeten Grundriß (Bild 4) soll tapeziert werden. Im Zimmer befinden sich zwei 1,40 m breite und 1,50 m hohe Fenster, die 80 cm über dem Fußboden beginnen, und eine 1,20 m breite und 2 m hohe Tür.

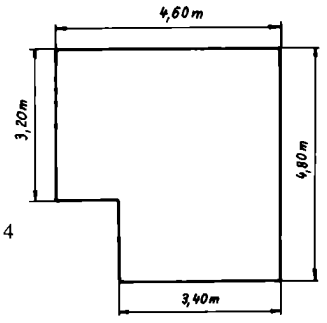


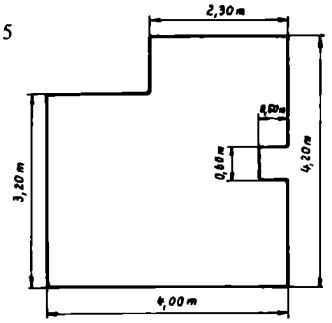
Bild 4

Wieviel Tapetenrollen von 10 m Länge und 0,50 m Breite müssen eingekauft werden? (Dabei sollen auf den Tapetenbahnen von 0,50 m Breite und 2,80 m Höhe nicht zwei Tapetenstücke aneinandergesetzt werden!)

Klasse 6

▲1▲ Zum Streichen von 20 m² Fußboden sind 5 kg Vorstreichfarbe erforderlich.
Welche Menge wird zum Streichen eines Fußbodens benötigt, dessen Grundriß durch das folgende Bild gegeben ist? (Bild 5)

Bild 5



Lösungshinweise:
a) Fußbodenfläche:

$A = A_1 + A_2 - A_3$
$A = 2{,}30\ \text{m} \cdot 1\ \text{m} + 3{,}20\ \text{m} \cdot 4\ \text{m}$
$\quad - 0{,}50\ \text{m} \cdot 0{,}60\ \text{m}$
$A = 14{,}8\ \text{m}^2$

b) Farbmenge: Tabelle

Fläche in m²	20	14,8		1
Farbmenge in kg	5	x	...	y

(Tabellen über den Zusammenhang von zwei Größen sind oft ein nützliches Hilfsmittel für das Finden des Ansatzes.)
Mathematischer Ansatz:
1. Wenn man wüßte, wieviel kg Farbe (y) für 1 m² Fußboden benötigt würde, könnte man die Farbmenge berechnen (Ergänzung der Tabelle durch die letzte Spalte).

$y = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ (Schließen auf die „Einheit")

$x = 14{,}8 \cdot \frac{1}{4} = 3{,}7$.

2. Über Verhältnisgleichungen (direkte Proportionalität):

$$20:5=14{,}8:x$$

Antwort: Man braucht 3,7 kg Farbe.

▲2▲ Bei der Instandsetzung einer Altbauwohnung ist in einem Zimmer mit nachstehendem Grundriß im Maßstab 1:200 die Dielung zu erneuern.

a) Wieviel Quadratmeter Fußbodenbretter werden verbraucht, wenn man für 1 m² Fußbodenfläche wegen Verschnitts 1,15 m² rechnen muß?

b) Wieviel Meter Kehrleiste sind erforderlich, wenn das Zimmer eine 1,20 m breite Tür (keine Kehrleiste) besitzt und man für einen Meter 5 cm Verschnitt hinzufügen muß?

c) Wieviel Kilogramm Nägel werden benötigt, wenn man für 1 m² Fußbodenbelag 0,11 kg und für 1 m Kehrleiste 10 g rechnet? (Bild 6)

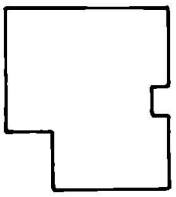


Bild 6

▲3▲ Der im folgenden Grundriß (Maßstab 1:200) dargestellte Raum (2,80 m hoch) wird vorgerichtet (Bild 7). Dazu ist ein alter einschichtiger Tapetenbelag zu entfernen, Decken und Wände sind mit Makulatur zu streichen und zu tapezieren.

Errechne die Lohnkosten dafür entsprechend folgender Tabelle (Fenster- und Türflächen werden mitgerechnet!):

Leistung	Kosten für 1 m²
Alte Tapete entfernen	0,28 M
Makulatur streichen	0,26 M
Wandtapezierung	0,83 M
Deckentapezierung	1,12 M

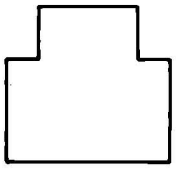


Bild 7

Klasse 7

▲1▲ Für eine Frischwasserleitung ist ein Rohrgraben mit dem im Bild dargestellten Profil und einer Länge von 1,85 km auszuheben.

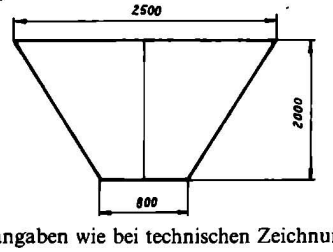


Bild 8

(Maßangaben wie bei technischen Zeichnungen üblich in mm)

In wieviel Stunden wird der Graben mit einem Grabenbagger ausgehoben, wenn in einer Stunde 41 m³ ausgehoben werden? (Bild 8)

Lösungshinweise:

a) Volumen des auszubaggernden Grabens:

Formeln:

$$V_P = A_G \cdot h_P \quad \text{(Prisma)}$$

$$A_G = \frac{a+c}{2} \cdot h_T \quad \text{(Trapez)}$$

geg.: $a = 0{,}8$ m
$c = 2{,}5$ m
$h_T = 2{,}0$ m
$h_P = 1850{,}0$ m
$V_P = 6105$ m³

b) Zeit für die Ausbaggerung:

Tabelle:

Zeit in Stunden	1	2	...	x
ausgebaggerte Erde in m³	41	82		V_P

(Solche Tabellen, die den Zusammenhang von zwei „Größen" betreffen, sind ein nützliches Hilfsmittel für das Suchen eines Ansatzes.)

Mathematischer Ansatz:

$$x \cdot 41 = V_P$$

(die Zahlen der unteren Zeile ergeben sich aus den darüberstehenden durch Multiplikation mit 41)

$$x = 6105:41$$

$$x \approx 149$$

Antwort: In etwa 149 Stunden ist der Graben ausgebaggert.

▲2▲ An beiden Uferseiten eines Flusses wird zum Hochwasserschutz auf einer Flußlänge von 3,2 km ein Damm aufgeschüttet, dessen Querschnitt im Maßstab 1:100 abgebildet ist. Die zur Aufschüttung notwendige Erde wird im Zweischichtbetrieb von 9 Kippern angefahren, von denen jeder eine Ladefähigkeit von 4,1 m³ hat. Pro Schicht kann jeder Kipper 15mal Erde anliefern.

Wieviel Tage müssen die Kipper im Einsatz sein? Dabei muß noch beachtet werden, daß 25% mehr Erde anzuliefern sind, weil die Erde beim Aufschütten des Dammes zusammenrutscht (Bild 9).

Bild 9

▲3▲ Bei der Einrichtung eines HO-Selbstbedienungsladens muß eine Decke, die im Maßstab 1:500 in dem folgenden Bild wiedergegeben ist, abgeputzt werden. Für die vorgesehene Putzdicke von 20 mm auf Holzwolle-Leichtbauplatten ist für jeden Quadratmeter mit 24 l Mörtel zu rechnen.

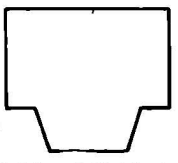


Bild 10

Wieviel Liter Mörtel sind bereitzustellen? (Bild 10)

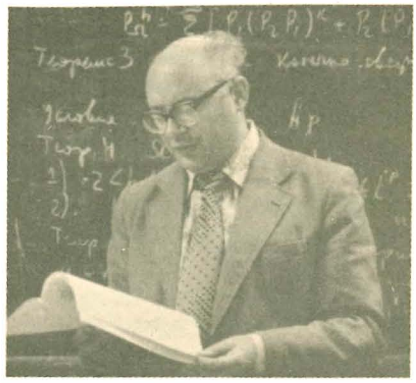
Eine Aufgabe von Prof. Dr. Wladimir Mazja

Wissenschaftliches Forschungsinstitut für Mathematik und Mechanik der Universität Leningrad

▲2091▲ Für jede natürliche Zahl n finde man die größte Zahl c_n, so daß für beliebige positive Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ mit $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n > 0$ gilt:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqq c_n \cdot \max_{1 \leqq k \leqq n} (k \cdot a_k). \qquad (*)$$

Zu einem späteren Zeitpunkt werde ich euch die Lösung dieser Aufgabe und dazu noch einige Verallgemeinerungen nennen.



In der Reihe *Teubner-Texte zur Mathematik* erschienen von Prof. Dr. Mazja bisher: *Einbettungssätze für Soboljewsche Räume, Teil I und II.*

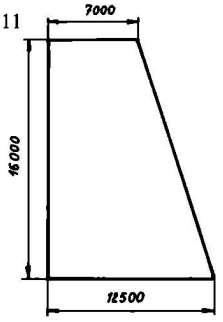
Beide Monographien wenden sich an Mathematiker, Physiker und Studenten dieser Fachrichtungen.

▲4▲ Ein Werkhof (siehe Bild) erhielt einen neuen Belag. Als Normzeit für 1 m² neuen Belag gilt eine Zeit von 0,56 Stunden.

a) Wieviel Stunden stehen für die Arbeit zur Verfügung?

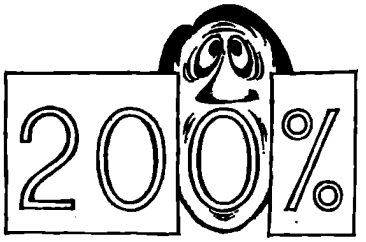
b) In wieviel Stunden wurde die Arbeit beendet, wenn die Normerfüllung 118,5% betrug? (Bild 11)

Bild 11



K. Reichold

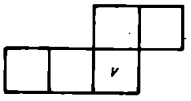
Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1981

Mathematik

Ma 5 ▪2092 Martin sollte das Netz eines Würfels zeichnen.



Er begann so, wie aus dem Bild ersichtlich. Wie muß Martin weiterzeichnen? Es gibt genau vier verschiedene Möglichkeiten, um ein vollständiges Würfelnetz zu erhalten. Zeichne sie, und trage in die Quadratflächen die Buchstaben *h, r, l, o, u* ein, die zum Ausdruck bringen, welche Quadratfläche den Würfel nach dem Falten hinten, rechts, links, oben bzw. unten begrenzt! Der Buchstabe *v* (vorn) ist bereits eingetragen.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

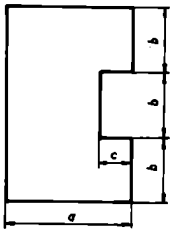
Ma 5 ▪2093 Bilde aus den Grundziffern 5, 6, 7, 8 und 9 fünfstellige Ziffern für ungerade natürliche Zahlen! Grundziffern für aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sollen dabei nicht nebeneinander stehen.

a) Die so dargestellte Zahl soll möglichst klein, aber nicht kleiner als 69000 sein.

b) Die so dargestellte Zahl soll möglichst groß, aber nicht größer als 70000 sein.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 5 ▪2094 Das Bild zeigt die 1275 m² große Fläche eines Schulgartens, der mit Maschendraht eingezäunt werden soll. Wieviel laufende Meter Maschendraht sind anzuschaffen, wenn die Breite *a* des Schulgartens 30 m beträgt und *a* sechsmal so lang ist wie die der Zeichnung zu entnehmende Strecke *c*?



Studentin Marion Staskowiak, PH Köthen

Ma 5 ▪2095 Axel, Bert und Jan haben jeder genau ein Hobby. Jeder von ihnen sammelt entweder Briefmarken oder Ansichtskarten oder Abzeichen. Von ihnen wissen wir:

(1) Axel und der Sammler von Ansichtskarten kennen sich aus einem Kinderferienlager.

(2) Jan sammelt keine Ansichtskarten; er ist älter als der Abzeichensammler.

Welches Hobby betreibt jeder dieser drei Jungen?

Studentin Marion Staskowiak, PH Köthen

Ma 5 ▪2096 Es sind alle zweistelligen ungeraden natürlichen Zahlen *a* und *b* zu ermitteln, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die Zahlen *a* sind dreimal so groß wie die Zahlen *b*.

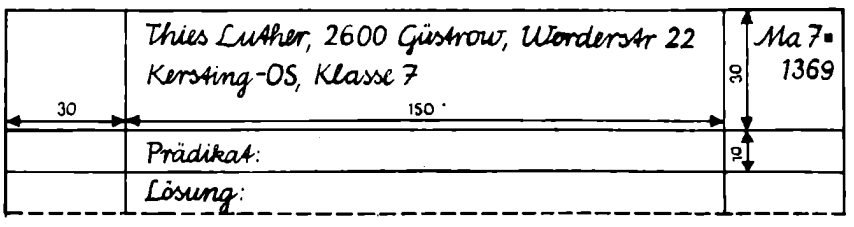
(2) Die Zahlen *b* sind Vielfache von 5.

Studentin Marion Staskowiak, PH Köthen

Ma 5 ▪2097 Drei Mannschaften *A, B* und *C* mit je sechs Spielern führten einen Wurfballwettbewerb durch. Sie warfen mit kleinen Bällen auf gestapelte leere Konservendosen. Jeder Spieler der Mannschaft *A* traf genau drei Dosen. Die Mannschaften *A* und *C* brachten es zusammen auf 41 Dosen. Zwei Mannschaften erzielten gleich viel Treffer. Die Summe der Anzahl der Treffer aller drei Mannschaften ist eine Primzahl. Wie viele Treffer erzielte jeder dieser drei Mannschaften?

Schüler Bernd Gliwa, Staßfurt

Ma 5 ▪2100 Sonderwettbewerb aus Anlaß des 1. Mathematikerkongresses der DDR (siehe Seite 30)



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1980/81 läuft von Heft 5/80 bis Heft 2/81. Zwischen dem 1. und 10. September 1981 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/80 bis 2/81 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/81 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/80 bis 2/81) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1980/81 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ma 6 ■2098 An einer Klassenarbeit im Fach Mathematik waren 25 Schüler beteiligt. Kein Schüler erhielt die Note 5. Es erhielten doppelt so viel Schüler die Note 1 wie die Note 4. Es erhielten dreimal so viel Schüler die Note 3 wie die Note 1. Einige Schüler erhielten die Note 2. Der erreichte Klassendurchschnitt ergab 2,48. Wieviel Schüler erhielten die Note 1, 2, 3 bzw. 4?

Schülerin Regina Pahling, Uchtspringe

Ma 6 ■2099 Bei einem 100-m-Lauf, an dem 7 Schülerinnen beteiligt waren, wurden folgende Ergebnisse erzielt:

(1) Dorothea erreichte 1,5 s vor Simone das Ziel.
(2) Anette erreichte 0,8 s vor Simone das Ziel.
(3) Andrea erreichte die Ziellinie 2 s später als Anette.
(4) Jana kam 0,1 s vor Dorothea im Ziel an.
(5) Silvia verfehlte die Zeit von Jana um nur 0,4 s.
(6) Simone kam 0,2 s später als Daniela im Ziel an.

Addiert man die Laufzeiten aller 7 Schülerinnen, so erhält man 104,4 s. Wieviel Sekunden benötigte jede dieser Schülerinnen zum Durchlaufen der 100-m-Strecke?

Schülerin Petra Hahn, Nordhausen

Ma 6 ■2101 Auf wieviel Nullen endet die Ziffer, die das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 50 darstellt?

Schüler Rainer Wichmann, Weimar

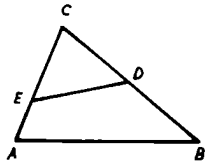
Ma 6 ■2102 Die Summanden der Summe
$\overline{JC}+\overline{JJ}+\overline{PZ}+\overline{JSS}+\overline{CS}+\overline{C}+\overline{ZX}+\overline{JA}+\overline{BX}+\overline{BAT}=\overline{RRP}$
stellen natürliche Zahlen in dekadischer Schreibweise dar.

Dabei sind A, C, T und Z einstellige Primzahlen mit $C<Z<A<T$; $\overline{JJ}$ ist ebenfalls Primzahl. Die den Buchstaben B und R entsprechenden einstelligen natürlichen Zahlen sind durch 3 teilbar. Ferner gilt $\overline{S}<\overline{A}$. Für gleiche Buchstaben sind gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern zu setzen. Welche natürlichen Zahlen erfüllen die vorgegebene Gleichung?

Schülerin Kerstin Graf, Plauen (Kl. 7)

Ma 6 ■2103 Das Bild stellt ein Dreieck ABC dar. Ein innerer Punkt D der Seite $\overline{BC}$ wurde mit einem inneren Punkt E der Seite $\overline{AC}$ verbunden. Es ist nachzuweisen, daß der Umfang des Dreiecks ABC größer ist als der Umfang des Vierecks $ABDE$!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma 6 ■2100 Sonderwettbewerb aus Anlaß des 1. Mathematikerkongresses der DDR (siehe Seite 30)

Ma 7 ■2104 Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC mit seinen drei Höhen $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$! Zeichne durch A die Parallele zu $\overline{CF}$, durch B die Parallele zu $\overline{AD}$, durch C die Parallele zu $\overline{BE}$! Diese drei Parallelen mögen sich in den Punkten G, H und K schneiden. Beweise, daß das Dreieck GHK ebenfalls gleichseitig ist! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 7 ■2105 Welche geordneten Tripel natürlicher Zahlen $[a,b,c]$ erfüllen zugleich die beiden Gleichungen
$a \cdot b+8=c$ und $a+b+c=100$?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■2106 Welche natürlichen Zahlen n erfüllen die Ungleichungen
$987654321 \cdot 98765432 < n < 98765432 \cdot 987654323$? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 7 ■2107 Wie viele dreistellige natürliche Zahlen gibt es, die in der dekadischen Darstellung die Form $\overline{abc}$ haben und für die $a+b=c$ gilt? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 7 ■2100 Sonderwettbewerb aus Anlaß des 1. Mathematikerkongresses der DDR (siehe Seite 30)

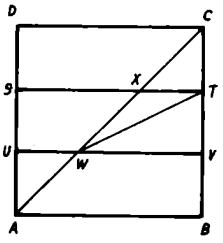
Ma 8 ■2108 Gesucht sind zwei aufeinanderfolgende Quadratzahlen, deren Differenz 33 beträgt. *Schüler Thomas Strobel, Berlin*

Ma 8 ■2109 Gesucht sind alle geordneten Paare $[a;b]$ zweistelliger natürlicher Zahlen a und b mit folgenden Eigenschaften:

(1) $a=4b$ und
(2) das geometrische Mittel der Quersummen von a und b beträgt 8.

Schüler Jörg Hamann, Rostock (Kl. 9)

Ma 8 ■2110 Gegeben sei das abgebildete Quadrat $ABCD$. Ferner gilt:
$\overline{AU} \cong \overline{US} \cong \overline{SD}$ und $\overline{UV} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{ST}$.
Den wievielten Teil des Flächeninhalts des Quadrates $ABCD$ nimmt der Flächeninhalt des Dreiecks WTX ein?



Schüler Tilo Schaarschmidt, Bad Lauchstädt (Kl. 7)

Ma 8 ■2111 Gegeben sei ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit den Längen a bzw. b der parallelen Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$, der Schenkellänge b und der Länge d einer Diagonalen. Es ist nachzuweisen, daß in diesem Falle $d^2+b^2+a \cdot c$ gilt! *Sch.*

Ma 8 ■2100 Sonderwettbewerb aus Anlaß des 1. Mathematikerkongresses der DDR (siehe Seite 30)

Ma 9 ■2112 Gesucht sind zwei natürliche Zahlen a und b, die folgenden Bedingungen genügen:

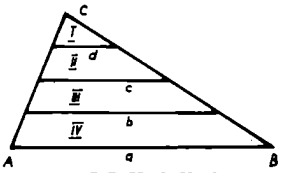
(1) Die Summe ihrer Kuben beträgt 26048,
(2) ihr arithmetisches Mittel ist 22.

Schülerin Uta Boldt, Burg Stargard (Kl. 8)

Ma 9 ■2113 Es ist nachzuweisen, daß der Term
$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$
für jede natürliche Zahl n durch 9 teilbar ist!

Sch.

Ma 9 ■2114 Die Fläche des abgebildeten Dreiecks ABC wird durch drei Strecken, die parallel zu $\overline{AB}$ sind, in vier Teilflächen zerlegt, die jeweils die gleiche Höhe haben. Diese Teilflächen wurden mit I, II, III bzw. IV bezeichnet. Welche zwei Teilflächen nehmen zusammen die halbe Dreiecksfläche ein?



StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 9 ■2115 Es ist ein Dreieck ABC aus den Längen $h_a=4$ cm, $h_b=5$ cm, $h_c=6$ cm der Dreieckshöhen $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ zu konstruieren. Die Konstruktion ist zu begründen!

Schüler Bernd Stammler, Halle-Neustadt

Ma 9 ■2100 Sonderwettbewerb aus Anlaß des 1. Mathematikerkongresses der DDR (siehe Seite 30)

Ma 10/12 ■2116 Es ist ohne Benutzung eines Tafelwerkes zu untersuchen, ob die Summe $\sqrt{1979}+\sqrt{1980}$ gleich der Summe $\sqrt{1978}+\sqrt{1981}$ oder kleiner bzw. größer als diese Summe ist! *Sch.*

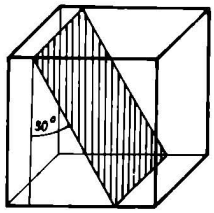
Ma 10/12 ■2117 Die Länge a der Seite $\overline{BC}$ eines Dreiecks ABC beträgt 39 m; die Summe $b+c$ der Längen der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ beträgt 66 m. Der von den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ eingeschlossene Winkel hat eine Größe von 60°. Zu berechnen sind die Längen der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$. *Mathematikfachlehrer G. Stolz, Königs Wusterhausen*

Ma 10/12 ■2118 In einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AC}$ liegt ein Punkt D, so daß gilt: $\overline{AD} \cong \overline{BD} \cong \overline{CD}$. Die Länge von $\overline{AD}$ beträgt 4 cm und die Größe des von $\overline{AD}$ und $\overline{BD}$ eingeschlossenen Winkels 100°. Es ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC zu berechnen.

Schüler Manfred Häußler, Westgreußen (Kl. 12)

Ma 10/12 ■2119 Gegeben sei ein Würfel mit einer Kantenlänge von 5 cm. Durch den Würfel wird ein Schnitt so geführt, wie das

Bild zeigt. Um wieviel Quadratzentimeter wächst der Inhalt der rechteckigen Schnittfläche, wenn der spitze Neigungswinkel der Schnittfläche gegen die Grundfläche um 10° verkleinert wird? (Bild nicht maßgerecht!)

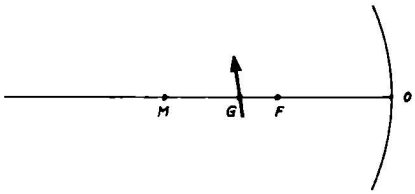


Schülerin Claudia Popien, Magdeburg (Kl. 8)

Ma 10/12 ■2100 Sonderwettbewerb aus Anlaß des 1. Mathematikerkongresses der DDR (siehe Seite 30)

Physik

Ph 6 ■96 Konstruiere am Hohlspiegel das Bild des gezeichneten Pfeiles! Dabei ist $\overline{FO} = 3$ cm und $\overline{GF} = 1$ cm.

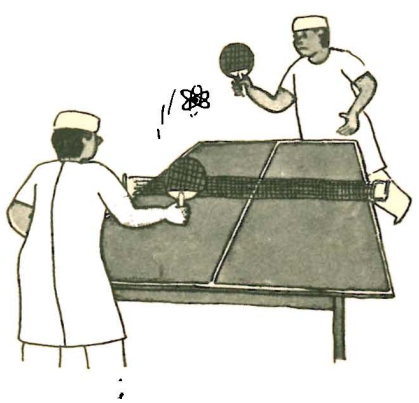


Ph 7 ■97 In einer chemischen Syntheseanlage werden von drei Kolbenpumpen jeweils verschiedene Substanzen in eine gemeinsame Sammelleitung gedrückt.
Dabei drückt innerhalb einer Sekunde
Pumpe Nr. 1 16 cm^3, Pumpe Nr. 2 16 cm^3, Pumpe Nr. 3 128 cm^3
Fördervolumen in die Leitung.
Die gemeinsame Sammelleitung habe einen Querschnitt von 80 mm^2.
a) Berechne die Strömungsgeschwindigkeit in der Sammelleitung!
b) Wie verändert sich die Strömungsgeschwindigkeit, wenn der Querschnitt der Sammelleitung auf 100 mm^2 vergrößert wird?

Ing. A. Körner, Leipzig

Ph 8 ■98 Eine Glühlampe (220 V, 25 W) wird mit einer Fahrrad-Dynamo-Lampe (6 V, 0,5 A) in Reihe geschaltet. Dann wird aus der Steckdose die Netzspannung von 220 V an die Enden der Reihe gelegt. Was geschieht?

A. Schatz, Leipzig

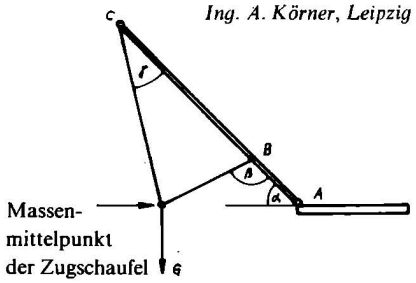


Ph 9 ■99 Eine Stadt liegt an einem Fluß. Oberhalb der Stadt entsteht am Fluß ein Naherholungszentrum.
In welcher Entfernung von der Stadt sollte die Dampferanlegestelle des Erholungsgebietes gebaut werden, damit die reine Fahrzeit des Dampfers von der Stadt zu dieser Stelle und zurück nicht länger als $1\frac{1}{2}$ h dauert?
Die Geschwindigkeit des Dampfers sei 12 $km \cdot h^{-1}$, die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses sei 4 $km \cdot h^{-1}$.

Schüler Steffen Lausch, Grimma (Kl. 10)

Ph 10/12 ■100 Am Ausleger eines Baggers mit Zugschaufelausrüstung hängt die Zugschaufel kurz vor dem Entleeren am Trag- und Zugseil, wie es in dem Bild dargestellt ist. Das Tragseil läuft über den Punkt *C*, das Zugseil über den Punkt *B*. Die Zugschaufel hat mit Inhalt eine Gesamtmasse von 4000 kg. Der Ausleger ist gegenüber der Horizontalen um den Winkel α geneigt. Es seien $\alpha = 45°$, $\beta = 105°$ und $\gamma = 30°$. Gesucht sind die Kräfte am Trag- und Zugseil.

Ing. A. Körner, Leipzig

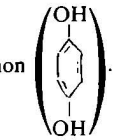


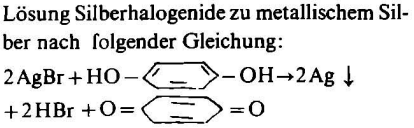
Chemie

Ch 7 ■77 Der VEB ORWO produzierte im Jahre 1975 22 Mio m^2 Foto-Kino-Film (schwarzweiß). Bis 1981 soll die Produktion um 40% gesteigert werden.
a) Wieviel Mio m^2 werden 1981 produziert?
b) Wieviel km^2 sind das?
c) Wie lang (km) würde ein Band von 1 m Breite sein, welches man durch Aneinanderlegen des 1981 hergestellten Filmmaterials erhielte?

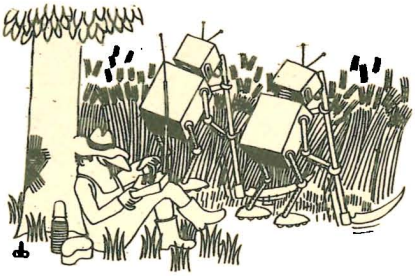
Ch 8 ■78 Im VEB Kombinat Chemische Werke Buna wird PVC aus Vinylchlorid hergestellt. Wieviel Kubikmeter Äthin werden zur Herstellung von 1250 t Vinylchlorid benötigt?

Ch 9 ■79 Die Glasindustrie unserer Republik produzierte 1979 etwa 30 Mio m^2 (150000 t) Fensterglas. Ausgangsstoff für die Glasindustrie ist Soda.
a) Wieviel Tonnen Soda müssen für die Produktion von 30 Mio m^2 Fensterglas von der chemischen Industrie erzeugt werden? (Fensterglas enthält 13% Natriumoxid, das aus dem Natriumkarbonat stammt.)
b) Welchen Transportraum hat die Deutsche Reichsbahn bereitzustellen, wenn in einem Waggon 20 t Soda transportiert werden können?

Ch 10/12 ■80 Als wirksame Substanz im fotografischen Entwickler dient meist Hydrochinon  . Es reduziert in alkalischer Lösung Silberhalogenide zu metallischem Silber nach folgender Gleichung:



Dabei geht das Hydrochinon in das Chinon (O=⟨=⟩=O) über. In der Emulsion eines Filmstreifens befinden sich 0,5 g Silberhalogenid. Bei der Belichtung wurden 55,3% „befähigt", Silberkeime auszubilden. Wieviel Gramm Hydrochinon reduzieren das Halogenid vollständig zu Silber?



Rätsel

Seltener Besuch

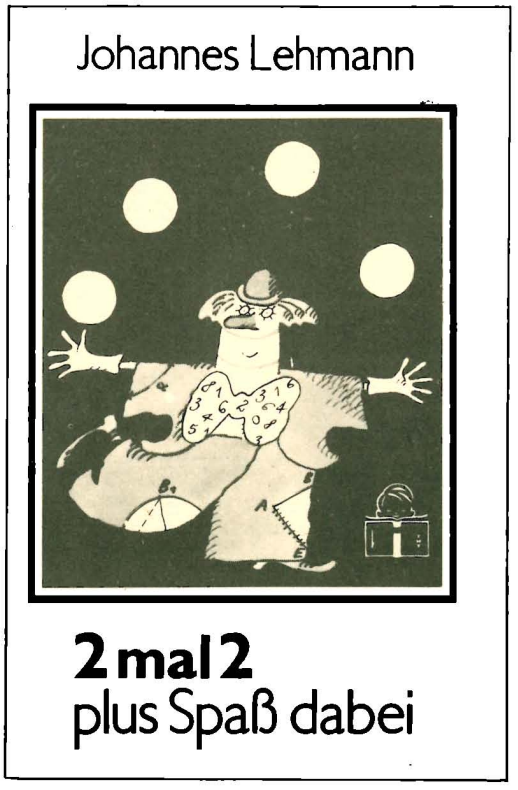
Ein Bruder ist's von vielen Brüdern,
In allen ihnen völlig gleich,
Ein nötig Glied von vielen Gliedern
In eines großen Vaters Reich;
Jedoch erblickt man ihn nur selten,
Fast wie ein eingeschobnes Kind:
Die andern lassen ihn nur gelten
Da, wo sie unvermögend sind.

J. W. von Goethe

Für das Rätsel, das Goethe für die zweite Aufführung von Schillers „Turandot" beisteuerte, gab Schiller folgende Lösung:

Der Sohn, der seinen vielen Brüdern
In allen völlig gleicht
Und dennoch nur in ihren Gliedern
Wie eingeschoben sie umschleicht –
Was gleicht sich wie ein Tag dem Tage?
Es ist der Schalttag, den du meinst.

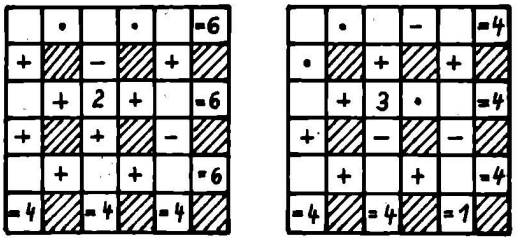
Neu im Verlag Volk und Wissen:



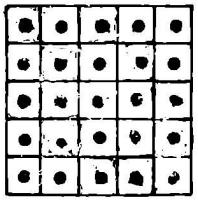
Für Schüler der unteren Klassen; 80 Seiten, 158 Abb.
Pappband, DDR 2,60 M, Ausland 5,90 M,
Bestell-Nr. 707 437 3, Kurzwort: 001721 Mal 2 plus Spaß
Mathematische Schülerbücherei, Band 100

Leseprobe: 1, 2, 3 – Knobelei **Klasse 4**

1. Setze einstellige Zahlen so ein, daß sowohl waagerecht als auch senkrecht richtig gelöste Aufgaben entstehen!



2. Von den 25 Spielmarken sind 10 so wegzunehmen, daß in jeder Zeile, jeder Spalte und in jeder Diagonalen nur noch drei Spielmarken verbleiben.



3. Ute ist jetzt 10 Jahre jünger als ihr Bruder Jan. In einem Jahr wird Jan dreimal so alt wie Ute sein. Wie alt sind Ute und Jan?

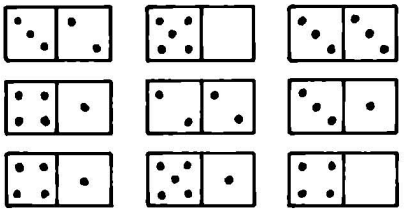
4. Klaus (K), Inge (I), Peter (P) und Uschi (U) sollen an einem Staffellauf teilnehmen.
Wieviel Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge, in der sie laufen können?

5. Unten an einer schönen Linden
war gar ein kleiner Wurm zu finden.
Der kroch hinauf mit aller Macht,
acht Ellen richtig bei der Nacht,
und alle Tage kroch er wieder
vier Ellen dran hernieder.
Zwölf Nächte trieb er dieses Spiel,
bis daß er von der Spitze fiel,
am Morgen in die Pfütze,
und kühlt sich ab von seiner Hitze.
Mein Schüler, sage ohne Scheu,
wie hoch dieselbe Linde sei.

Adam Ries (1550)

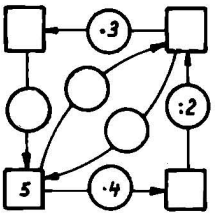
6. Gerd baute einen Turm, indem er gleich große Würfel übereinanderstellte. Von oben und allen Seiten waren genau 33 Quadrate zu sehen.
Aus wieviel Würfeln bestand dieser Turm?

7. Verschiebe diese neun Dominosteine so, daß die Summe der Augen auf den Dominosteinen in allen waagerechten und senkrechten Reihen stets 15 beträgt!

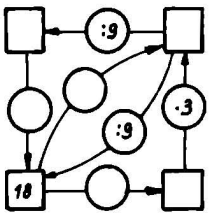


8. Vervollständige!

a)

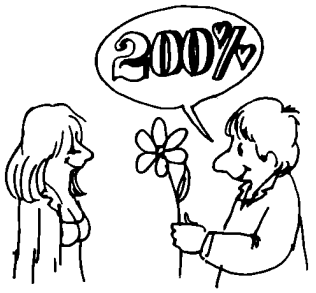


b)



In freien Stunden · alpha-heiter

Mathematik international



Nekra, Moskau

Magisches Quadrat

In dem großen Quadrat ist ein vierreihiges magisches Quadrat versteckt, in dessen senkrechten, waagerechten und diagonalen Reihen die Summe jeweils 34 beträgt. Wo?

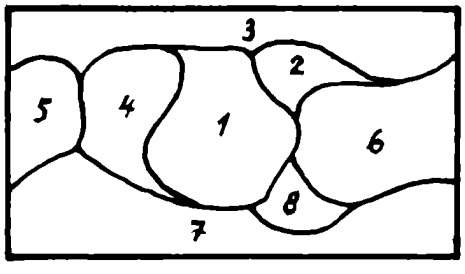
Füles, Budapest

5	12	21	6	7	30	2	11	9	7
13	4	8	3	15	2	6	1	22	5
1	10	2	7	1	15	14	4	17	3
17	5	4	11	12	6	7	9	2	12
4	3	6	15	8	10	11	5	14	9
20	7	15	4	13	3	2	16	2	8
9	3	16	8	2	12	4	7	10	6
1	4	7	15	8	2	3	11	9	5
14	11	3	6	5	4	13	16	1	7
13	5	2	11	12	1	5	4	17	12

Färbung einer Landkarte

Das Bild zeigt acht Länder; es seien (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8) die Namen dieser Länder. Wie können wir diese Landkarte mit den vier Farben Rot, Blau, Gelb und Grau farbig gestalten, so daß für jedes Paar benachbarter Länder die Färbungen verschieden sind?

H. Steinhaus (†), Wroclaw



Silbenrätsel

Aus den Silben a, a, a, an, bruch, by, der, der, di, dop, e, e, go, i, in, kos, le, na, null, me, ok, pel, punkt, ri, rith, schew, ta, te, tik, tsche, va sind acht Wörter zusammenzustellen, die folgende Bedeutung haben:

1. Teilgebiet der Mathematik, das die verschiedenen Zahlenarten und ihre Rechengesetze behandelt,
2. Verbindungsstrecke zweier nichtbenachbarter Ecken eines Vielecks,
3. Gemeiner Bruch, dessen Zähler und Nenner selbst wieder Brüche sind.
4. Ein regelmäßiges Polyeder (Zwanzigflächner),
5. Russischer Mathematiker (1821 bis 1894),
6. Funktion, Zahl oder Eigenschaft, die bei Abbildungen unverändert bleibt,
7. Ein regelmäßiger Polyeder (Achtflächner),
8. Ein bestimmter Punkt auf der Zahlengeraden.

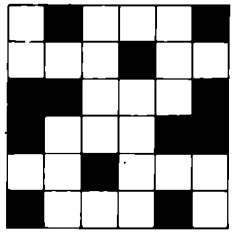
Die ersten und letzten Buchstaben der Lösungswörter, beide von oben nach unten gelesen, ergeben die Namen zweier Begriffe aus der Mathematik.

Th. Scholl, Berlin

Kreuzzahlrätsel

Fülle das Diagramm mit unterschiedlichen zwei-, drei- und vierstelligen Quadratzahlen aus! Keine von ihnen darf mit Null beginnen.

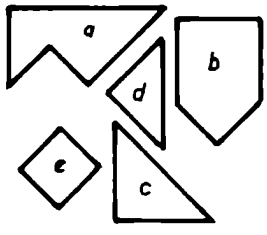
N. Yoshigahara, Tokic



Legespiel

Übertrage die fünf geometrischen Figuren auf Transparentpapier, und schneide sie aus! Vier von ihnen, aber auch alle fünf, lassen sich jeweils zu einem Quadrat zusammensetzen.

Matematički List, Beograd



Lustige Zahlenspielerei

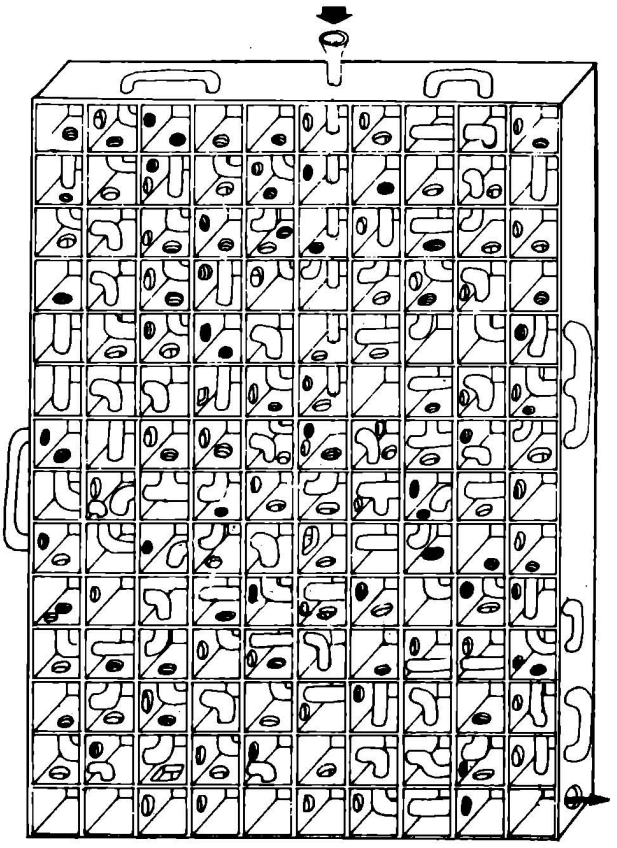
Man nehme viermal die Ziffer 7 und bilde unter Verwendung der vier Rechenzeichen Aufgaben, deren Ergebnis 2, 3, 5, ..., 10 lautet, z. B.

$$1 = \frac{77}{77}; \quad 4 = \frac{77}{7} - 7;$$

B. Amgalan, Ulan-Bator

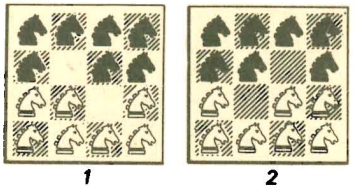
Labyrinth

Ist es möglich, diesen aus Röhren bestehenden Irrgarten zu durchfahren? Wie? *P. Berloquin, Paris*



Rösselsprung

Wie viele Züge sind notwendig, um Stellung 2 aus Stellung 1 zu erzeugen? *Quant, Moskau*



Kryptarithmetik

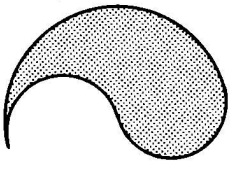
PLUS	MATHE	MINUS
PLUS	MATHE	MINUS
MATHE	HOBBY	HOBBY

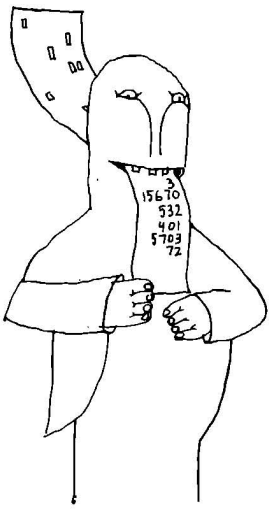
J. Pěnčik, Praha

Denksport

Die dargestellte Figur wird von drei Halbkreisen begrenzt. Sie soll in zwei kongruente Teile zerlegt werden. Kannst du das?

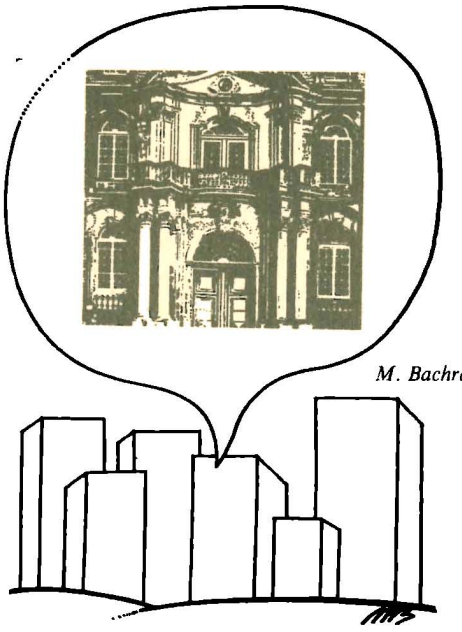
Pythagoras, Groningen





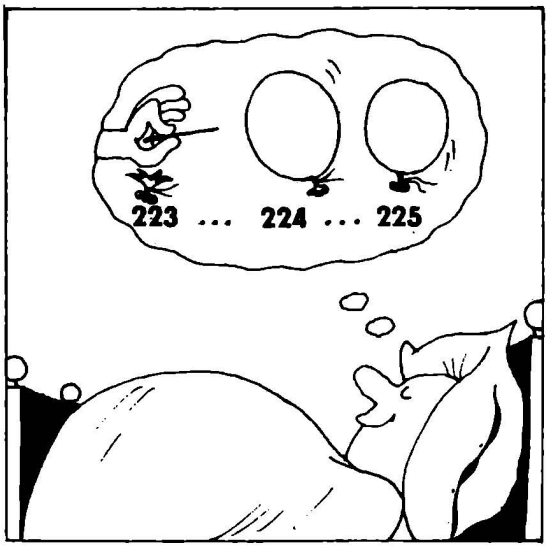
Tomi Ungerer, Kanada

B. Spelnikowa, Rjasan



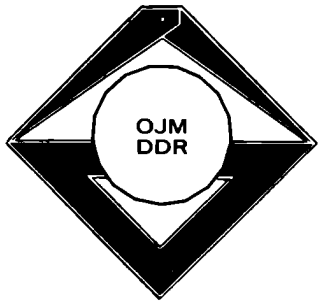
M. Bachraty, Praha

L. Beutlich, Berlin



XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade



Olympiadeklasse 5

1. Zwei Geschwister erhielten im September zusammen 6 Mark für abgelieferte Altstoffe. Im Oktober erhielten sie zusammen 13 Mark. Im November bekamen sie 2 Mark weniger als in den beiden vorigen Monaten zusammen.
Ein Drittel ihres in den drei Monaten erzielten Gesamterlöses spendeten sie für die Solidarität, ein weiteres Drittel des Gesamterlöses legten sie in ihre gemeinsame Ferienkasse. Den Rest teilten sie sich zu gleichen Teilen zum persönlichen Gebrauch.
Ermittle den Betrag, den damit jeder der beiden für sich persönlich erhielt!

2. Bei einem Einkauf wurde der Preis von 170 Mark mit genau 12 Geldscheinen bezahlt. Jeder dieser Geldscheine war ein 10-Mark-Schein oder ein 20-Mark-Schein.
Ermittle die Anzahl der 10-Mark-Scheine und die der 20-Mark-Scheine, die zum Bezahlen der angegebenen Summe verwendet wurden!

3. Fritz will auf einer Geraden vier Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge angeordnet zeichnen. Dabei sollen folgende Bedingungen erfüllt werden:
(1) Die Länge der Strecke AD soll 15 cm betragen.
(2) Die Strecke BC soll um 3 cm länger sein als die Strecke AB.
(3) Die Strecke CD soll doppelt so lang sein wie die Strecke AC.
Untersuche, ob diese Bedingungen erfüllbar sind! Wenn dies der Fall ist, so ermittle alle diejenigen Längenangaben für die Strecken AB, BC und CD, durch die diese Bedingungen erfüllt werden!

4. Ein Mathematiklehrer, ein Physiklehrer und ein Deutschlehrer treffen sich auf einer Tagung. Sie heißen Meyer, Peters und Siewert. (Die Reihenfolge der Familiennamen braucht nicht mit der Reihenfolge der Berufe übereinzustimmen.)
Im Gespräch stellen sie fest, daß einer von ihnen mit Vornamen Otmar, ein anderer Kurt und der dritte Karl heißt und daß einer in Leipzig, einer in Suhl und einer in Schwerin wohnt. Ferner wissen wir:
(1) Herr Meyer erzählt dem Physiklehrer, daß er den Mathematiklehrer in Leipzig besucht habe.
(2) Darauf erwidert ihm Herr Peters: „Das weiß ich schon, Kurt."
(3) Karl hatte ihm nämlich berichtet, daß er Besuch aus Suhl gehabt habe.
In diesem Gespräch ist nur von diesen drei Personen die Rede. Ordne jedem Familiennamen den zugehörigen Vornamen, Wohnort und Beruf zu!

Olympiadeklasse 6

1. Ein Flugzeug, das mit konstanter (gleichbleibender) Geschwindigkeit von A nach B fliegt, war um 10.05 Uhr noch 2100 km, um 11.20 Uhr nur noch 600 km von B entfernt. Um welche Zeit wird es in B eintreffen, wenn es mit der bisherigen Geschwindigkeit weiterfliegt?

2. Ein leeres quaderförmiges Wasserbecken ist 22 m lang, 6 m breit und 2 m tief. Beim Füllen des Beckens fließen in jeder Minute 900 l Wasser in das Becken.
Nach welcher Zeit ist das Becken bis zu einer Höhe von genau 1,50 m gefüllt? Wir nehmen an, daß der Boden des Wasserbeckens genau waagerecht ist.

3. Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen z, für die $1000 \leqq z \leqq 1700$ gilt und die durch 9, 12 und 14 teilbar sind!

4. Vier Schüler, je einer aus der Klasse 5a, 5b, 6a, 6b, unterhalten sich über die Zeitschriften, die sie regelmäßig lesen. Die Schüler heißen Fred, Gerd, Hans und Ingo mit Vornamen. Wie sich herausstellt, liest jeder von ihnen genau eine der beiden Zeitschriften „alpha" bzw. „Frösi" regelmäßig. Ferner werden folgende Angaben gemacht:
(1) Der Schüler aus der Klasse 5b liest nicht die Zeitschrift „alpha".
(2) Hans und außer ihm der Schüler der Klasse 5a lesen die Zeitschrift „alpha" regelmäßig.
(3) Fred und außer ihm der Schüler der Klasse 6b lesen die Zeitschrift „Frösi" regelmäßig. Gerd dagegen nicht.
(4) Der Schüler der Klasse 6a, der Schüler der Klasse 5b und außer diesen beiden noch Gerd wurden von Ingo zum Geburtstag eingeladen.
Gesucht ist eine Zuordnung, durch die beschrieben wird, welcher der vier Schüler welche Klasse besucht und welche der beiden Zeitschriften er regelmäßig liest.
Untersuche, ob es eine solche Zuordnung gibt, die alle Angaben (1), (2), (3), (4) erfüllt, und ob sie durch diese Angaben eindeutig festgelegt ist! Wenn dies der Fall ist, dann gib diese Zuordnung an!

Olympiadeklasse 7

1. Auf einer internationalen Mathematikerversammlung werden Vorträge in russischer, englischer, deutscher, französischer und ungarischer Sprache gehalten. Ferner wissen wir:
(1) Diejenigen Tagungsteilnehmer, die sowohl die russische als auch die französische Sprache verstehen, verstehen außerdem auch alle Englisch.
(2) Diejenigen Teilnehmer, die Ungarisch verstehen, verstehen auch Französisch und Deutsch.
Untersuche, ob diejenigen Tagungsteilnehmer, die sowohl Ungarisch als auch Russisch verstehen, zum Verstehen einer der Vortragssprachen einen Dolmetscher brauchen!

2. Von einem Dreieck wird gefordert: Die Maßzahlen der in cm gemessenen Seitenlängen a, b, c sollen natürliche Zahlen sein, die Seitenlänge a soll genau 36% des Umfangs u betragen, die Seitenlänge b genau 48% des Umfangs.
a) Untersuche, ob es unter diesen Bedingungen ein Dreieck gibt, dessen Umfang $u = 25$ cm ist! Wenn dies der Fall ist, so gib seine Seitenlängen an!
b) Untersuche, ob es unter den genannten Bedingungen auch ein Dreieck gibt, dessen Umfang $u > 25$ cm ist! Wenn dies der Fall ist, so gib seine Seitenlängen an!
c) Ermittle alle diejenigen Längen u, die kleiner als 100 cm sind und als Umfang eines Dreiecks auftreten können, dessen Seitenlängen die gestellten Forderungen erfüllen! Ermittle zu jedem dieser Werte u jeweils die Seitenlängen eines solchen Dreiecks!

3. Jens sagt: „Ich denke mir zwei natürliche Zahlen. Ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) beträgt 51975, ihr größter gemeinsamer Teiler (ggT) ist 45. Eine der beiden Zahlen lautet 4725."
Stelle fest, ob es genau eine natürliche Zahl gibt, die nach diesen Angaben die zweite von Jens gedachte Zahl sein kann! Trifft das zu, so ermittle diese zweite Zahl!

4. a) Beweise den folgenden Satz:
Wenn ein spitzwinkliges Dreieck ABC gleichschenklig mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist, dann haben die von A und B ausgehenden Höhen gleiche Länge.
b) Beweise die folgende Umkehrung dieses Satzes:

Wenn in einem spitzwinkligen Dreieck ABC die von A und B ausgehenden Höhen gleiche Länge haben, dann ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit $\overline{AC}=\overline{BC}$.

Olympiadeklasse 8

1. Herr Schäfer hatte sich zwei Hunde gekauft. Er mußte sie aber bald wieder verkaufen. Dabei erhielt er für jeden Hund 180 Mark. Wie Herr Schäfer feststellte, hatte er damit an dem einen Hund 20% von dessen früherem Kaufpreis dazugewonnen, während er den anderen Hund mit 20% Verlust von dessen früherem Kaufpreis weiterverkauft hatte.
Untersuche, ob sich hiernach für Herrn Schäfer insgesamt beim Verkauf beider Hunde ein Gewinn oder ein Verlust gegenüber dem gesamten früheren Kaufpreis ergeben hat! Wenn dies der Fall ist, so ermittle, wieviel der Gewinn bzw. Verlust beträgt!

2. Ermittle alle Paare $(a;b)$ natürlicher Zahlen mit $a<b$, die folgende Eigenschaften besitzen:
Die Summe der Zahlen a und b beträgt 192. Der größte gemeinsame Teiler der Zahlen a und b ist 24.

3. Gegeben sei ein Halbkreis mit dem Durchmesser AB und dem Mittelpunkt M. Ferner seien P und Q zwei von A und B und voneinander verschiedene Punkte auf diesem Halbkreis. Die in P und Q auf der Geraden durch P und Q errichteten Senkrechten mögen AB in R bzw. in S schneiden.
Beweise, daß dann $\overline{RM}=\overline{SM}$ gilt!

4. Von einem Dreieck ABC und einer Geraden g werde vorausgesetzt:
(1) Es gilt $\overline{AB}=\overline{AC}$.
(2) Die Gerade g schneidet die Strecke BC in einem Punkt P, die Strecke AC in einem Punkt E und die Verlängerung der Strecke BA über A hinaus in einem Punkt D.
(3) Es gilt $\overline{CE}=\overline{CF}$.
(4) Der Winkel $\sphericalangle EDA$ hat die Größe 18°.
Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\sphericalangle ABC$, die Größe β des Winkels $\sphericalangle EFC$ sowie die Größe γ des Winkels $\sphericalangle CAB$!

Olympiadeklasse 9

1. Ermitteln Sie die größte Primzahl p, für die ein Tripel (a,b,c) von natürlichen Zahlen a, b und c so existiert, daß $(a+p)(b+p)(c+p)=1980$ gilt!
Ermitteln Sie zu dieser Primzahl p alle verschiedenen zugehörigen Tripel (a,b,c) mit der genannten Eigenschaft!

2. a) Nennen Sie zwei verschiedene ganze Zahlen x, die die Ungleichung

$$\frac{x+3}{x-1}<0$$

erfüllen, und bestätigen Sie das Erfülltsein dieser Ungleichung für die von Ihnen genannten Zahlen!
b) Ermitteln Sie die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, die diese Ungleichung erfüllen!

3. Von zwei Kreisen k_1 und k_2 seien die Radien r_1 bzw. r_2 gegeben, wobei $r_1>r_2$ gelte. Weiterhin sei vorausgesetzt, daß sich beide Kreise von außen berühren, also genau eine gemeinsame innere Tangente besitzen. Diese innere Tangente schneide die eine gemeinsame äußere Tangente beider Kreise in P und die andere gemeinsame Tangente in Q.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen aus r_1 und r_2 die Länge $\overline{PQ}$!

4. a) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n\geqq 3$, für die die folgende Aussage gilt!
„Jedes Prisma, das ein konvexes n-Eck als Grundfläche hat, hat genau $20n$ Diagonalen."
b) Ermitteln Sie für jedes Prisma, für das die in a) genannte Aussage gilt, die Anzahl der Flächendiagonalen und die der Raumdiagonalen!
Hinweis: Ein n-Eck heißt genau dann konvex, wenn jeder seiner Innenwinkel kleiner als 180° ist.

Olympiadeklasse 10

1. Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die die Zahl

$$1+4\cdot 9^{2n}$$

eine Primzahl ist!

2. Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $\overline{BC}=4$ cm und $\overline{AC}=3$ cm. Der Kreis um C mit dem Radius $\overline{AC}$ schneide AB außer in A noch in einem Punkt P_1, der Kreis um B mit dem Radius $\overline{BP_1}$ schneide BC in einem Punkt P_2 zwischen B und C, der Kreis um C mit dem Radius $\overline{CP_2}$ schneide AC in einem Punkt P_3 zwischen A und C.
Berechnen Sie das Verhältnis $\overline{AP_3}:\overline{CP_3}$!

3. Ermitteln Sie die größte natürliche Zahl n, für die ein Tripel (a,b,c) natürlicher Zahlen so existiert, daß

$$(a+n)(b+n)(c+n)=1980 \text{ gilt!}$$

Ermitteln Sie zu dieser Zahl n alle verschiedenen zugehörigen Tripel (a,b,c) mit der genannten Eigenschaft!

4. Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen z mit $0<z<1$, die zu ihrem Reziproken addiert mindestens 4 ergeben!

Olympiadeklassen 11/12

1. Für jedes $n=1, 2, 3, \ldots$ sei

$$a_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k.$$

Ferner seien I_1, I_2, I_3 und I_4 die abgeschlossenen Intervalle

$I_1=\langle 1;2\rangle$,
$I_2=\langle 0{,}53;0{,}531\rangle$,
$I_3=\langle 0{,}509;0{,}51\rangle$,
$I_4=\langle 0{,}4;0{,}5\rangle$.

Man untersuche für jedes dieser Intervalle, ob in ihm Glieder der Zahlenfolge (a_n) liegen. Ist dies der Fall, so ermittle man jeweils die Indizes n aller Glieder a_n in dem betreffenden Intervall.

2. Man ermittle alle diejenigen positiven reellen Zahlen k, für die die Zahlen

$$a=\frac{2k}{k+1},\ b=\frac{k+1}{2},\ c=\sqrt{k}$$

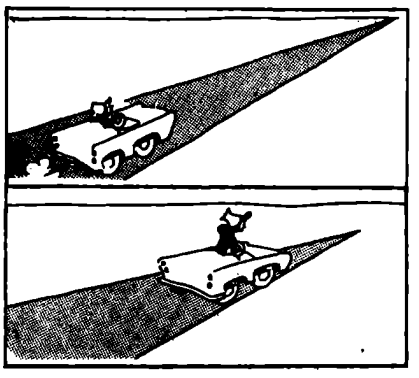
die Maßzahlen der (mit gleicher Maßeinheit gemessenen) Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks sind.

3. An einem Fußballturnier nahmen n Mannschaften teil. Jede Mannschaft spielte dabei gegen jede andere Mannschaft genau einmal. Die jeweils siegreiche Mannschaft erhielt 2 Punkte, die unterlegene Mannschaft keinen Punkt, und bei unentschiedenem Ausgang erhielten beide Mannschaften je einen Punkt. Nach Abschluß des Turniers wurden die Mannschaften auf die Plätze 1, 2, ..., n der Abschlußtabelle nach fallender Gesamtpunktzahl gesetzt. (Bei Punktgleichheit wurden dazu weitere Unterscheidungskriterien genutzt.)
Man ermittle die größtmögliche Zahl, die in allen (nach diesen Regeln) möglichen Turnieren als Punktdifferenz zwischen zwei in der Abschlußtabelle unmittelbar benachbarten Mannschaften auftreten kann.

4. Man untersuche, ob es ein Polynom

$$p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ gibt, das
a) für drei ganzzahlige paarweise voneinander verschiedene Werte von x den Wert 1 und für einen weiteren ganzzahligen Wert von x den Wert 30 annimmt;
b) für vier ganzzahlige paarweise voneinander verschiedene Werte von x den Wert 1 und für einen weiteren ganzzahligen Wert von x den Wert 30 annimmt.
Bejahendenfalls gebe man im Falle a) bzw. im Falle b) ein solches Polynom an.



Lösungen

Nachdenken und sicheres Rechnen gefragt

Klasse 5

▲2▲ 25

▲3▲ a) ≈4,00 m b) ≈26 cm

▲4▲ 10 Rollen

Klasse 6

▲2▲ a) ≈20,6 m² b) ≈18,5 m c) ≈2,2 kg

▲3▲ ≈88,50 M

Klasse 7

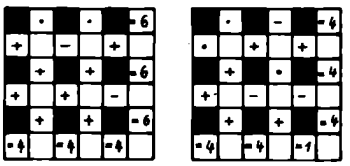
▲2▲ 7 Tage

▲3▲ ≈2100 Liter

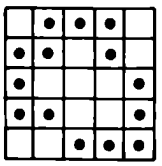
▲4▲ a) 87,5 Stunden b) 73,8 Stunden

Lösungen zu: 2 mal 2 plus Spaß dabei

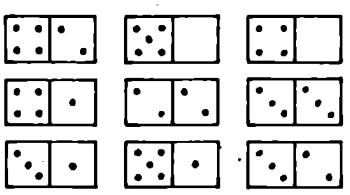
1.



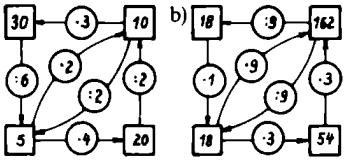
2.



3. Ute ist 4 Jahre und Jan ist 14 Jahre alt.
4. Für die Reihenfolge gibt es 24 Möglichkeiten.
5. Die Linde ist 52 Ellen hoch.
6. Der Turm bestand aus 8 Würfeln.
7.



8. a) b)



Lösungen zu: In freien Stunden · alpha-heiter

Magisches Quadrat

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

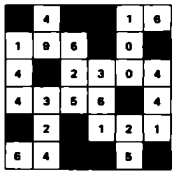
Färbung einer Landkarte

Wir bezeichnen die vier Farben mit *a*, *b*, *c*, *d* und färben zuerst das Gebiet 1 mit *a* und 2 mit *b*. Da 6 ein Nachbar von 1 und 2 ist, erhält dieses Gebiet die Farbe *c*. Die Länder 4 und 6 haben keine gemeinsame Grenze; wir können für 4 also auch *c* wählen. Da 5 und 1 getrennt liegen, können wir 5 mit *a* färben. Das Gebiet 3 ist ein Nachbar von 1, 2, 4, 5, 6; für dieses Gebiet bliebt uns nur die Farbe *d*. Zum Schluß färben wir 7 noch mit *b* und 8 mit *d* und haben so unsere Aufgabe gelöst.

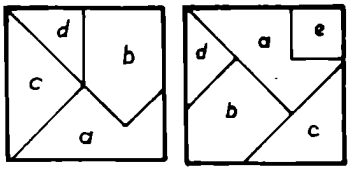
Silbenrätsel

1. Arithmetik; 2. Diagonale; 3. Doppelbruch; 4. Ikosaeder; 5. Tschebyschew; 6. Invariante; 7. Oktaeder; 8. Nullpunkt
(Addition, Kehrwert)

Kreuzzahlrätsel



Legespiel



Lustige Zahlenspielerei

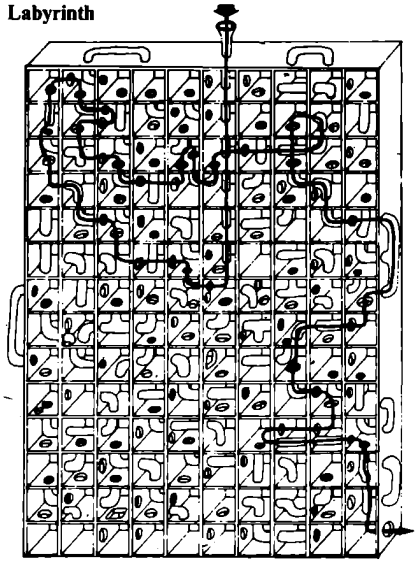
$1=\frac{77}{77}$; $2=\frac{7}{7}+\frac{7}{7}$; $3=\frac{7+7+7}{7}$; $4=\frac{77}{7}-7$;

$5=7-\frac{7+7}{7}$; $6=\frac{7\cdot 7-7}{7}$; $7=7-\frac{7-7}{7}$;

$8=\frac{7+7\cdot 7}{7}$; $9=7+\frac{7+7}{7}$; $10=\frac{77-7}{7}$

$9352+9352=18704$; $17832+17832=35664$
oder
$41385+41385=82770$; $47831+47831=95662$

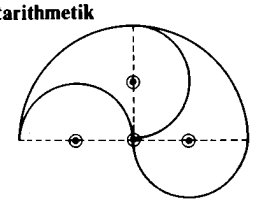
Labyrinth



Rösselsprung

Wer sendet die Lösung an
Redaktion *alpha*, 7027 Leipzig, PSF 14,
Kennwort: Rösselsprung?

Kryptarithmetik



Lösungen zu: Denksport

1. Es waren Großvater, Vater und Sohn.
2. Man kann $4\cdot 3\cdot 2=24$ verschiedene Fußballdresse zusammenstellen.
3. Dirk ist der älteste, Jörg der jüngste von den dreien.
4. Der König hat 15 Pferde bestellt.
5. Aus den 5 Kisten wurden $5\cdot 60=300$ Äpfel entnommen.
Diese Anzahl entspricht dem Inhalt von 3 Kisten, da anzahlmäßig der Inhalt von zwei Kisten übrigbleibt. Also waren in jeder Kiste 100 Äpfel.
6. Die sechs Gewürzfläschchen kosten zusammen 15 Mark und der Gewürzständer 3 Mark. Jedes Fläschchen kostet also 2,50 M.
7. Das ergibt einen großen Heuhaufen.
8. Wenn die drei nicht bummeln, benötigen sie auch nur 10 Minuten.
9. 50 (Die ersten beiden Zahlen jeder Reihe werden addiert und die erste zur Summe noch einmal addiert.)
10. R; ARBEIT (Rückwärts lesen!)
11. 81 (Die jeweils nächste Zahl wird errechnet, indem die vorherige mit 3 multipliziert wird.)
12. Wer etwa die Hälfte richtig hat, ist schon ganz gut.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,
Heft 5/80 (Fortsetzung):

Ma 7 ▪2008

Monat	Monatslänge in Tagen	Bestimmung der Reste bei Division durch 7
Januar	31	$31=4\cdot 7+3$
Februar	28	$28+3=31=4\cdot 7+3$
März	31	$31+3=34=4\cdot 7+6$
April	30	$30+6=36=5\cdot 7+1$
Mai	31	$31+1=32=4\cdot 7+4$
Juni	30	$30+4=34=4\cdot 7+6$
Juli	31	$31+6=37=5\cdot 7+2$
August	31	$31+2=33=4\cdot 7+5$
September	30	$30+5=35=5\cdot 7+0$
Oktober	31	$31+0=31=4\cdot 7+3$
November	30	$30+3=33=4\cdot 7+5$
Dezember	31	$31+5=36=5\cdot 7+1$

In den 12 Monaten tritt bei Division durch 7 jeder mögliche Rest (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) mit Sicherheit auf. In einem Schaltjahr (Februar

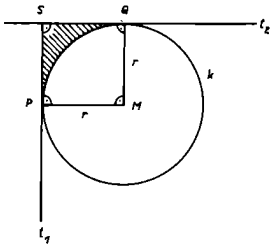
mit 29 Tagen) erhöhen sich die Reste für die folgenden Monate ab März jeweils um 1. Auch in diesem Fall tritt jeder mögliche Rest mindestens einmal auf. Nun repräsentiert aber jeder der möglichen Reste jeweils genau einen Wochentag, d. h., es gibt mindestens einen „Freitag, den 13." jährlich. Daraus geht ferner hervor, daß jede beliebige Kombination von Tageszahl und Wochentag in jedem Jahr mindestens einmal auftritt.

Ma 7 ■2009 Da die Berührungsradien $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ senkrecht auf t_1 und t_2 stehen, ist das Viereck $PMQS$ ein Quadrat. Es sei A_x der zu bestimmende Flächeninhalt; dann gilt

$$A_x = r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 = r^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$A_x = 9\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\text{cm}^2 \approx 9 \cdot 0{,}2146\,\text{cm}^2$$

$$\approx 1{,}9\,\text{cm}^2.$$



Ma 7 ■2010 Aus $ab+8=c$ und $91<a+b+c<94$ folgt durch Einsetzen $91<a+b+ab+8<94$,

$$84<a+ab+b+1<87,$$
$$84<a(b+1)+(b+1)<87,$$
$$84<(a+1)(b+1)<87.$$

Deshalb gilt $(a+1)(b+1)=85$ oder $(a+1)(b+1)=86$.

Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor.

Es sei $(a+1)(b+1)=85=1\cdot 5\cdot 17$.

Wenn $a=0$, so $b=84$ und $c=8$;
wenn $a=4$, so $b=16$ und $c=72$;
wenn $a=16$, so $b=4$ und $c=72$;
wenn $a=84$, so $b=0$ und $c=8$.

Es sei $(a+1)(b+1)=86=1\cdot 2\cdot 43$.

Wenn $a=0$, so $b=85$ und $c=8$;
wenn $a=1$, so $b=42$ und $c=50$;
wenn $a=42$, so $b=1$ und $c=50$;
wenn $a=85$, so $b=0$ und $c=8$.

Die geordneten Tripel [0,84,8], [4,16,72], [16,4,72], [84,0,8], [0,85,8], [1,42,50], [42,1,50], [85,0,8] erfüllen die gestellten Bedingungen.

Ma 7 ■2011 Die zweistellige natürliche Zahl läßt sich darstellen durch $z_1=10a+b$, die dreistellige natürliche Zahl durch $z_2=100a+10x+b$ mit $1\leqq a\leqq 9, 0\leqq x\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$.

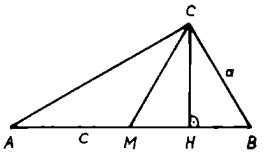
Nun gilt $13z_1=z_2$,

$$13(10a+b)=100a+10x+b,$$
$$130a+13b=100a+10x+b,$$
$$10x=30a+12b,$$
$$x=3a+b+\frac{b}{5}.$$

Für $b=0$ erhalten wir $x=3a$, also $a=1$ oder $a=2$ oder $a=3$. Für $b=5$ erhalten wir $x=3a+6$, also $a=1$.

Es existieren genau vier solche Zahlen; sie lauten 10, 20, 30 und 15; für diese Zahlen gilt $130=13\cdot 10$, $260=13\cdot 20$, $390=13\cdot 30$, $195=13\cdot 15$.

Ma 8 ■2012 Es sei M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Bezeichnet man die Länge der Seite $\overline{AB}$ mit c und die Länge der Seite $\overline{BC}$ mit a, so gilt $c=2a$ nach Aufgabenstellung. Nach Konstruktion gilt $\overline{MB}\cong\overline{BC}$.



Daraus folgt: Dreieck MBC ist gleichschenklig. Wegen $\sphericalangle MBC=60°$ folgt: Dreieck MBC ist gleichseitig. Der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks MBC beträgt $A_1=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

Die Dreiecke AMC und MBC sind flächengleich, da sie gleich lange Grundlinien ($\overline{AM}=MB$) und die gemeinsame Höhe $\overline{CH}$ besitzen. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt somit

$$A=2\cdot A_1=2\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{a^2}{2}\sqrt{3}.$$

Ma 8 ■2013 Da die Ziffern 0 und 2 nicht in der Telefonnummer vorkommen und da alle zweistelligen Primzahlen ungerade Zahlen sind, enthält die Telefonnummer nur die Ziffern 1, 3, 7 oder 9. Da die zweite Ziffer eine Quadratzahl darstellt, kann die zweite Ziffer 1 oder 9 sein.

Da keine zwei gleichen Ziffern aufeinanderfolgen, lautet die erste Ziffer 1, die zweite 9.

Wegen $3^2=9$ lautet die vierte Ziffer 3.

Die dritte Ziffer heißt 7, da 97 die einzige Primzahl ist, die zwischen 90 und 99 liegt.

Aus $7=3+x+y$ folgt $x=1$ und $y=3$, da keine zwei gleichen Ziffern aufeinanderfolgen.

Die Telefonnummer lautet 19 73 13.

Ma 8 ■2014 Nach Voraussetzung gilt $7\mid n_1-n_2$. Dann gilt auch $7\mid k(n_1-n_2)$ für alle natürlichen Zahlen k, also auch für $k=n_1+n_2$. Daraus folgt

$$7\mid(n_1+n_2)(n_1-n_2),$$
$$7\mid {n_1}^2-{n_2}^2, \text{ q.e.d.}$$

Ma 8 ■2015 1. Möglichkeit: Die Zahlen n und n' enthalten die gleichen Ziffern, wenn auch in verschiedener Reihenfolge.

n und n' haben folglich die gleiche Quersumme; sie lassen also bei Division durch 9 den gleichen Rest. Daraus folgt, daß der Rest von $n-n'$ oder $n'-n$ bei der Division durch 9 stets 0 beträgt; d. h. die Differenzen sind stets durch 9 teilbar, w.z.b.w.

2. Möglichkeit: Jede natürliche Zahl n läßt sich zerlegen in

$$n=9k+r\ (k, r\in N).$$

Es gilt also

$$n=9k+r \quad\text{und}$$
$$n'=9j+r \quad\text{mit } k, j, r\in N.$$

Nun gilt

$$n-n'=9k-9j=9(k-j),$$
$$n'-n=9j-9k=9(j-k).$$

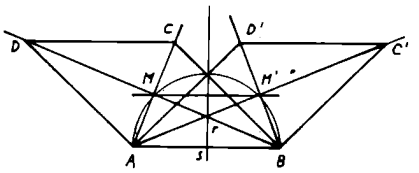
Die Differenzen $n-n'$ und $n'-n$ sind also stets durch 9 teilbar, w.z.b.w.

Ma 9 ■2016 Im Rhombus stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht und halbieren einander. Ihr Schnittpunkt M ist Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises.

Da die Diagonalen den Rhombus in vier kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegen, konstruieren wir zunächst ein solches Teildreieck.

Wir zeichnen eine Seite $\overline{AB}$ des Rhombus und über $\overline{AB}$ den Thaleskreis. Zu $\overline{AB}$ zeichnen wir die Parallele im Abstand $r<\frac{s}{2}$, die den Thaleskreis in M und M' schneidet.

Wir verbinden A und B mit M, verlängern $\overline{AM}$ und $\overline{BM}$ je um sich selbst und erhalten die Punkte C und D. $ABCD$ ist der gesuchte Rhombus.



$\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ stehen senkrecht aufeinander (Thaleskreis!). $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ halbieren einander (nach Konstruktion!).

Für den Radius des einbeschriebenen Kreises gilt $r<\frac{s}{2}$, da die Parallele zu $\overline{AB}$ im Abstand $r<\frac{s}{2}$ gezeichnet wurde. Führt man die Konstruktion mit dem Punkt M' aus, so ist der Rhombus $ABC'D'$ kongruent zum Rhombus $ABCD$ und ist das Bild des Rhombus $ABCD$ bei Spiegelung an der Mittelsenkrechten auf $\overline{AB}$.

Ma 9 ■2017 Der Beweis erfolgt mit vollständiger Fallunterscheidung:

1. Fall: Es sei a eine durch 5 teilbare Zahl, etwa $5n$. Dann gilt $a^2=25n^2$; d. h. a^2 ist durch 5 teilbar.

2. Fall: Die Zahl a lasse bei Division durch 5 den Rest 1. Dann gilt $a=5n+1$; $a^2=(5n+1)^2$; $a^2=25n^2+10n+1$; d. h. a^2 läßt bei Division durch 5 den Rest 1.

3. Fall: Die Zahl a lasse bei Division durch 5 den Rest 2. Dann gilt $a=5n+2$; $a^2=(5n+2)^2$; $a^2=25n^2+20n+4$; d. h. a^2 läßt bei Division durch 5 den Rest 4.

4. Fall: Die Zahl a lasse bei Division durch 5 den Rest 3. Dann gilt $a=5n+3$; $a^2=(5n+3)^2$; $a^2=25n^2+30n+9$; d. h. a^2 läßt bei Division durch 5 den Rest 4.

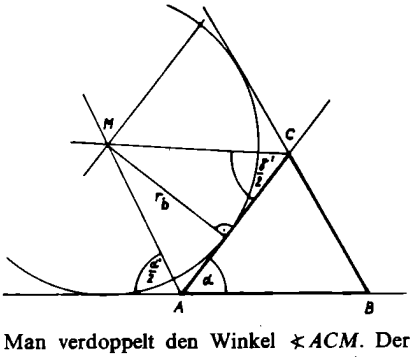
5. Fall: Die Zahl a lasse bei Division durch 5 den Rest 4. Dann gilt $a=5n+4$; $a^2=(5n+4)^2$; $a^2=25n^2+40n+16$; d. h. a^2 läßt bei Division durch 5 den Rest 1, q.e.d.

Ma 9 ■2018 Jede Primzahl, die größer als 2 ist, läßt bei Division durch 4 entweder den Rest 1 oder den Rest 3. Die Quadrate der

Primzahlen lassen bei Division durch 4 dann entweder den Rest 1^2 oder 3^2.
$3^2=9$ läßt bei Division durch 4 den Rest 1; damit ergibt sich stets der Rest 1. Die Summe der Quadrate von vier beliebigen Primzahlen läßt unter o.a. Bedingung den Rest $1+1+1+1=4$; d. h., die Summe ist durch 4 teilbar, q.e.d.

Ma 9 ■2019
$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{225}\right)=\left[1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdot\left[1^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]\cdot\left[1^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]\cdot\ldots\cdot\left[1^2-\left(\frac{1}{15}\right)^2\right]$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{15}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{15}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{15}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{15}\right)$$
$$=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot14}{2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot15}\cdot\frac{3\cdot4\cdot5\cdot\ldots\cdot16}{2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot15}$$
$$=\frac{1}{15}\cdot\frac{16}{2}=\frac{8}{15}$$

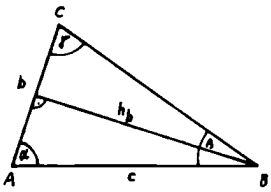
Ma 10/12 ■2020 Man zeichnet die Seite $\overline{AC}$ mit der Länge b. Dann trägt man an $\overline{AC}$ in A den Winkel BAC der Größe α an. Da der Mittelpunkt des Ankreises eines Dreiecks der Schnittpunkt der Halbierenden der Außenwinkel ist, konstruiert man die Halbierende von α'. Die Parallele zu $\overline{AC}$ im Abstand r_b schneidet die Halbierende von α' im Mittelpunkt des Ankreises. Die Gerade CM halbiert den Außenwinkel der Größe γ'.



Man verdoppelt den Winkel $\sphericalangle ACM$. Der freie Schenkel des Winkels der Größe γ' schneidet den freien Schenkel des Winkels der Größe α in B.

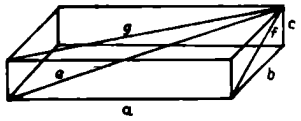
Ma 10/12 ■2021 Für die Summe der ersten n Quadratzahlen gilt
$$s_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
Die Anzahl der Schüler dieser Klasse sei x. Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt dann
$$10x=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\cdot10}+13.$$
Da n die Anzahl der Summanden bezeichnet, gilt nun
$$10x=\frac{20\cdot21\cdot41}{6\cdot10}+13,$$
$$10x=287+13,$$
$$10x=300,$$
$$x=30.$$
In diese Klasse gehen 30 Schüler.

Ma 10/12 ■2022 Skizze nicht maßstäblich.



$\sin\alpha=\frac{15}{c}$, also $c=\frac{15}{\sin\alpha}$; $b:c=\sin\beta:\sin\gamma$,
also $b=\frac{c\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{15\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}$;
$$A=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b=\frac{225\cdot\sin\beta}{2\sin\alpha\cdot\sin\gamma}\approx117.$$
Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt rund 117 cm^2.

Ma 1012 ■2023 Skizze nicht maßstäblich
Kantenmodell



Für die Länge der Raumdiagonalen gilt
$$e^2=a^2+b^2+c^2. \quad (1)$$
Nach dem Satz des Pythagoras gilt bezüglich obigem Bild
$$c^2=f^2-b^2 \quad (2)$$
und
$$a^2=g^2-b^2. \quad (3)$$
Setzt man (2) und (3) in (1) ein, so erhält man
$$e^2=g^2-b^2+b^2+f^2-b^2 \text{ bzw.}$$
$$e^2=g^2+f^2-b^2 \text{ bzw.}$$
$$b^2=g^2+f^2-e^2 \quad (4)$$
$$b=\sqrt{225\text{ cm}^2+145\text{ cm}^2-289\text{ cm}^2},$$
$$b=\sqrt{81\text{ cm}^2},$$
$$b=9\text{ cm}.$$
Nach (2) gilt
$$c=\sqrt{145\text{ cm}^2-81\text{ cm}^2},$$
$$c=\sqrt{64\text{ cm}^2},$$
$$c=8\text{ cm}.$$
Nach (3) gilt $a=\sqrt{225\text{ cm}^2-81\text{ cm}^2}$,
$a=12$ cm. Somit beträgt das Volumen des Quaders $V=a\cdot b\cdot c$, $V=864\text{ cm}^3$.

Ph 6 ■81
Geg.: $a=44$ mm; $a_1=43$ mm;
$a_2=45$ mm;
Ges.: V; V_1; V_2
a) Das Volumen berechnet man nach der Formel $V=a^3$. Es gilt also für den kleinsten Wert $V_1=a_1^3=43^3\text{ mm}^3=79507\text{ mm}^3$, und für den größten Wert $V_2=a_2^3=45^3\text{ mm}^3=91125\text{ mm}^3$.
b) Das Volumen für den gemessenen Wert ist dann
$V=a^3=44^3\text{ mm}^3=85184\text{ mm}^3$.
Der Durchschnittswert von V_1 und V_2 ergibt sich dann nach
$$\frac{79507+91125}{2}\text{ mm}^3=85316\text{ mm}^3.$$
Die Differenz zum Durchschnittswert ist dann
$$85316\text{ mm}^3-85184\text{ mm}^3=132\text{ mm}^3.$$

Ph 7 ■82
Geg.: $v_1=300000\frac{\text{km}}{\text{s}}=300000000\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$v_2=340\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$s_1=1600\text{ km}=1600000\text{ m}$
$s_2=40\text{ m}$
$s_3=3\text{ m}$
Ges.: Zeit für den Fernsehzuschauer t_1
Zeit für den Zuhörer t_2
In beiden Fällen rechnet man mit der Formel $s=vt$ und löst nach t auf. Es gilt also für den Fernsehzuschauer
$$t_1=\frac{s_1}{v_1}+\frac{s_3}{v_2}=\frac{1600000\text{ m s}}{300000000\text{ m}}+\frac{3\text{ m s}}{340\text{ m}}\approx0{,}014\text{ s}.$$
Für den Zuhörer ist
$$t_2=\frac{s_2}{v_2}=\frac{40\text{ m s}}{340\text{ m}}\approx0{,}118\text{ s}.$$
Nun ist die Differenz beider Zeiten 0,118 s − 0,014 s = 0,104 s. Der Fernsehzuschauer in Berlin hört die Musik rd. 0,1 s früher als der Zuhörer in Moskau.

Ph 8 ■83
Geg.: $d_1=30$ cm; $v_1=1{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}$;
$d_2=30$ cm; $v_2=2{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}$;
$d_3=50$ cm; $v_3=1{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}}$;
$d_4=68$ cm; $v_4=1{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}$;
$h=50\text{ cm}=0{,}5\text{ m}$;
$b=1{,}25$ m.
Ges.: Strömungsgeschwindigkeit v
Die Strömungsgeschwindigkeit v im Kanal berechnet man nach
$$v=\frac{V_{ges}}{A_K}. \quad (1)$$
Dabei sind V_{ges} die gesamte Abfluß- bzw. Zuflußmenge und A_k der Strömungsquerschnitt. A_k errechnet man mit
$$A_k=h\cdot b. \quad (2)$$
Die gesamte Zuflußmenge ist dann
$$V_{ges}=V_1+V_2+V_3+V_4. \quad (3)$$
Die Durchflußmengen V_i ($i=1, 2, 3, 4$) sind dann
$V_i=A_i\cdot v_i$ mit $i=1, 2, 3, 4$ und $A=\frac{\pi}{4}\cdot d_i^2$, also
$$V_i=\frac{\pi}{4}\cdot d_i^2\cdot v_i. \quad (4)$$
Setzt man (4) in (3) ein, erhält man
$$V_{ges}=\frac{\pi}{4}(d_1^2v_1+d_2^2v_2+d_3^2v_3+d_4^2v_4). \quad (5)$$
Nun werden (5) und (2) in (1) eingesetzt, und es ergibt sich schließlich
$$v=\frac{\frac{\pi}{4}(d_1^2v_1+d_2^2v_2+d_3^2v_3+d_4^2v_4)}{h\cdot b},$$
$$v=\frac{\frac{3{,}14}{4}(3^2\cdot15+3^2\cdot25+5^2\cdot18+6{,}8^2\cdot10)\frac{\text{dm}^3}{\text{s}}}{12{,}5\text{ dm}\cdot5\text{ dm}}$$
$$v\approx16\frac{\text{dm}}{\text{s}},\quad v=1{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$
Die Strömungsgeschwindigkeit am Ablaufkanal beträgt $1{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ph 9 ■84 Der Abstand der Einspeisungspunkte beträgt 8990 m.

Ph 10/12 ■85 Die Ergebnisse sind

n	2	5	10	50
h in km	2640	7870	13800	38700
n	100	1000	1000000	
h in km	57300	195000	6360000	

Ch 7 ■65 In der Legierung sind enthalten: rund 302 kg Kupfer, rund 151 kg Zink und rund 128 kg Nickel.

Ch 8 ■66 a) Kalkstickstoff setzt sich aus 50% Kalzium, 15% Kohlenstoff und 35% Stickstoff zusammen.
b) 48400 t Kalkstickstoff entsprechen der im Jahre 1970 gebundenen Menge Stickstoff.

Ch 9 ■67 Es müssen 6263 kg Kalkstein und 1253 kg Sand zur Reaktion gebracht werden.

Ch 10/12 ■68 3,8 kg 8,2%ige Salzsäure müssen zum Verdünnen zugesetzt werden.

Lösung zu: Eine Aufgabe von Dr. W. Burmeister, Heft 1/81:

▲2054▲ Um die gesonderte Untersuchung von Schaltjahren zu vermeiden, beschränken wir uns auf die Monate März bis Dezember. Wegen $1 \leqq k \leqq 30$ kommt in jedem dieser Monate der k-te Tag wirklich vor. Angenommen, der k-te März ist Montag. Offenbar ist dann der

k-te April: Donnerstag (= „Montag + 3"),
k-te Mai: Sonnabend (= „Montag + 5"),
k-te Juni: Dienstag (= „Montag + 1"),
k-te Juli: Donnerstag (= „Montag + 3"),
k-te Aug.: Sonntag (= „Montag + 6"),
k-te Sept.: Mittwoch (= „Montag + 2"),
k-te Okt.: Freitag (= „Montag + 4")
usw.

Offenbar kommen in dieser Reihe alle sieben Wochentage vor. Sollte nun der k-te März nicht Montag, sondern ein anderer Wochentag sein, so verschieben sich natürlich alle anderen Tage entsprechend, die angegebene Ziffernreihe 3, 5, 1, 3, 6, 2, 4, 0, 2 (für April bis Dezember) bleibt jedoch unverändert. Infolgedessen kommen auch hier alle sieben Wochentage, speziell auch der Sonntag, vor, und die Behauptung ist bewiesen.

Beispiel: In einem Jahr fällt der 8. März auf Freitag. Wann ist der 8. ein Sonntag?

Antwort (Sonntag = Freitag + 2): Im September und im Dezember.

Bemerkung: Die behauptete Aussage ist falsch, wenn $k = 31$ ist. Der Leser überzeuge sich selbst davon und vergesse dabei nicht, den Monat Januar zu betrachten.

alpha-Wettbewerb

Abzeichen in Gold

Für fünfjährige Teilnahme

Frank Baumgart, Aschersleben; Knut Rommel, Bad Liebenstein; Margret Detsch, Bad Salzungen; Kirsten Rechner, Baruth; Sabine Mantel, Marc Schewe, Jürgen Pommerening, alle Berlin; Henry Fischer, Bitterfeld; Stefanie Löffler, Blankenfelde; Tilman Völzke, Böhlen; Frank Blinkrei, Brita Hoffmann, Heike Hoffmann, alle Boizenburg; Stefanie Begau, Breitenworbis; Irene Palm, Brieselang; Uta Boldt, Burg Stargard; Christine Pompe, Axel Harnath, Stefan Jakubaschk, Royald Lenk, alle Cottbus; Ralf-Torsten Scheel, Dahmen; Petra Sarodnick, Dallgow; Thomas Claus, Demitz-Thumitz; Thomas Richter, Dietlas; Ruth Backhaus, Dingelstädt; Gabriele Sprotte, Döbeln; Helga Loos, Dörfel; Manuela Schwenke, Dohna; Kathrin Wustmann, Stefan Gärtner, Michaela Woelk, Birgit Wittwer, Jochen Lattermann, Asja Nürnberger, Ulf Riechen, Stefan Edelmann, Jörg Hempelt, alle Dresden; Siegfried Obst, Reinhard Weißnicht, beide Eberswalde; Birgit Rößler, Petra Patz, Marlies Patz, alle Eisenach; Steffen Much, Peter Schlag, beide Eisenberg; Thomas Pigorsch, Eisleben; Susanne und Matthias Schreiber, Elsterwerda; Heike Heber, Erfurt; Reinhard Walter, Finsterwalde; Elke Jahn, Freiberg; Carla Müller, Cornelia Voigt, beide Friedeburg; Matthias Bauer, Genthin; Urte Conrad, Gielow; Torsten Siebert, Görlitz; Kerstin Schneider, Goßwitz; Thomas Silz, Gräfenhainichen; Wilfried Schleinitz, Greifswald; Klaus Siemoneit, Grimmen; Grit Möckel, Grünbach; Götz Kluttig, Guben; Petra Brandstädter, Güstrow; Volker Kunert, Halle; Günter Schielinsky, Roger Fischl, beide Halle-Neustadt; René Geipel, Hartha; Bärbel Päßler, Kerstin Wickner, Katrin Ullmann, Frank Eberlein, Heinz Wickner, alle Hermannsdorf; Thomas Jez, Herzberg; Jens Fiebig, Höhnstedt; Frank Thümmler, Horka; Rigobert Hupach, Hüpstedt; Martin Arnold, Ilmenau; Marion Endrigkeit, Jessen; Frank Hübler, Holger Leonhardt, Holger Friedrich, Ralph Gruber, Andreas Berner, alle Karl-Marx-Stadt; Axel Schüler, Kleinmachnow; Antje Schlosser, Klingenthal; Andreas Kardos, Köthen; Joachim Braun, Koßdorf; Ralf Häntsch, Köthen; Frank Batschon, Krauschwitz; Andreas Ludwig, Kreuzbruch; Grit Heyde, Latdorf; Barbara Surma, Dagmar Schunck, Gerald Pfitzenreuter, Rainer Nolte, Ute Hausmann, Meike Pfitzenreuter, Jörg Drechsel, alle Leinefelde; Lutz Lämmer, Leipzig; Heike Nowara, Uwe Lautenschläger, beide Lössau; Birgit Arndt, Loitz; Ute Fischer, Lübbenau; Carola Höhn, Matthias Neundorf, beide Meiningen; Peter Kürbis, Meißen; Uwe Würker, Mülsen; Dieter Seifert, Pinnau; Karsten Milek, Sigurd Assing, Axel Schulz, Georg und Thomas Schreckenbach, alle Potsdam; Jens Uhlemann, Prausitz; Tim Planke, Premnitz; Katrin Arnhold, Radebeul; Lutz Hübschmann, Raschau; Katrin Lippuner, Rheinsberg; Ulrich Zeitzmann, Ribnitz; Manfred und Ina Hille, Uwe Mattutat, alle Riesa; Ines Dalisda, Sabine Heinze, Anett Becker, Kirsten Kowalewski, Christiane Woithe, Klaus Vilbrandt, Sylke Giese, Anette Müller, Ulrike Martin, alle Rostock; Sigrid Schröter, Martina Rühl, beide Schladitz; Beate Rein, Michael Gerth, Gabi Rein, Bernd Winkelmann, Dieter Grebner, Mathias Brandt, Christine Mangold, Katrin Röder, Manuela Recknagel, alle Schmalkalden; Markus Wolf, Schönbach; Gunnar Jeschke, Schwarzheide; Jens Gläßer, Seiffen; Michael Hruschka, Senftenberg; Veiko Recknagel, Silke Köllmann, Anka Wilhelm, Stefan Schüler, Sören Holland-Cunz, alle Steinbach-Hallenberg; Ekkehard Breuer, Stendal; Thomas Merten, Stralsund; Klaus Pfeiffer, Taubach; Holger Nörenberg, Antje Wulf, beide Teltow; Christine Mohr, Teterow; Birgit Schmidt, Weißwasser; Manfred Petzelis, Wendisch-Rietz; Carmen Rauscher, Wilkau-Haßlau; Ralph Nemitz, Wittenförden; Guido Köhnke, Wittstock; Rolf Heubner, Wolfen; Steffen Klimpel, Uwe Eix, beide Wolgast; Claudia Groh, Wüstenbrand; Karl Oertel, Zeitz; Uwe Müller, Thorsten Eidner, beide Zeulenroda; Kerstin Hoffmann, Gabriele Schubert, Michael Mönch, Ingrid Soblik, Olaf Kretschmar, Gerald Sommer, alle Zittau; Birgit Schenke, Norbert Welzel, beide Zschornewitz; Norbert Schlosser, Uta Escher, beide Zwickau; Veit-Thomas Meyen, Grimmen; Antje Meyer, Krautheim

Für vierjährige Teilnahme

Michael Elte, Ahlum; Sven und Jens Fache, Altenburg; Roland Hesse, Bad Blankenburg; Maike Jorzyk, Bad Kleinen; Markus Kostrzewa, Bad Liebenstein; Marei Hellmann, Bad Salzungen; Esther Goroncy, Bahrendorf; Silke Rechner, Baruth; Martin Gröger, Michael Krüger, Katrin Prescher, Christiane Preuß, Sven Bienioschek, alle Berlin; Heidrun Sourell, Bernau; Mike Groß, Bernsbach; Andreas Jock, Blankenfelde; Heike Engling, Boizenburg; Thomas Streich, Marlis Schröder, beide Brandenburg; Uta Heiland, Breitenbach; Guido Siegel, Breitenworbis; Ralf Lohmann, Burgstädt; Sylvia Burgemann, Britz; Cornelia Kopte, Callenberg; Uwe Schütze, Camin; Christian Kunze, Karsten Mittag, Roland Damm, alle Cottbus; Andreas Mann, Cunersdorf; Frank Sarodnick, Dallgow; Ulrich Schuster, Demitz-Thumitz; Georg Kirchner, Dermbach; Sabine Rindermann, Mario Dette, Hanna Baumgarten, Simone Marks, Petra Bülow; Astrid Schunck, alle Dingelstädt; Henry Jahn, Dippoldiswalde; Ronald Meyer, Dörfel; Mario Jäpel, Dohna; Titus Ziegler, Maja Oelschlägel, Stefan Franze, André Pohlers, Grit Kammer, Werner Kirsch, Rainer Schültke, Karsten Zosel, Brigitte Rotter, Cathrin Engel, Christine Kirsch, Ute Schulze, Heike Lauter, Lutz Lauter, alle Dresden; Hardy Kutzscher, Dürrenhofe; Christine Frei, Ebeleben; Uwe Wollert, Edderitz; Ralf Arnold, Olaf Hein, beide Eisenach; Andree Josiek, Eisenhüttenstadt; Frank Stefan, Katrin Schröter, Astrid Kafka, alle Eisleben; Elvira Stallbohm, Eldena; Angela Wolter, Elster; Kati Kremmer, Floh; Regine Stottmeister, Fockendorf; Antje Hollstein, Frankfurt; Birgit Voigtmann, Freiberg; Jörg Schaarschmidt, Fürstenwalde; Jens Franke, Gera; Marion Meyer, Goldbeck; Torsten Knaust, Gossa; Sylvia Döring, Gotha; Marco Silz, Mike Pfeiffer, beide Gräfenhainichen; Frank Creutzburg, Gransee; Martin Herrmann, Karsten Schulz, Frank-Michael Wegner, Britta und Achmed Schulz, Rita Döhner, alle Greifswald; Steffen Lausch, Jörn Wintsche, beide Grimma; Bettina Weser, Großenhain; Kirsten Schlegel, Grünhain; Michael Schulze, Anke Misch, beide Halberstadt; Matthias Schünemann, Frank Siebert, beide Halle; Cordelia Krippner, Kerstin Frank, beide Hammerbrücke; Holger Hartmann, Hartmannsdorf; Gerd Schmalz, Haynsburg; Frank Pampe, Heinrichsort; Sabine Trommler, Ingo Wickner, beide Hermannsdorf; Steffen Frigge, Herzberg; Axel Herbst, Hohendodeleben; Uwe Rahn, Hohenstein-E.; Hagen Fritsch, Hosena; Claus Janke, Ilmenau; Peter Dittmar, Kaltennordheim; Eske Röhrich, Ricarda Ramm, Frank Kutzschebach, alle Karl-Marx-Stadt; Felix und Anita Baitalow, Kasan (UdSSR); Birgit Sandhop, Kasne-

vitz; Martina Albrecht, Christine Matthä, Anita Meyer, Steffen Niebergall, alle Kieselbach; Bernd Schmutzler, Kirchberg; Birgit Plewe, Kleinmachnow; Gert Wendland, Kleinwolmirsdorf; Karla Behrendt, Corinna Matzdorff, beide Klietz; Christoph Hübel, Königsee; Ines Reichert, Königs Wusterhausen; Elke Willek, Kriebitzsch; Vera Montag, Küllstedt; Jens-Uwe Eigenwillig, Lauchhammer; Carola Reimann, Carola Pfützenreuter, Ilona Mehnert, Carmen Schwabs, Gudrun Genzel, alle Leinefelde; Heike Scherf, Leisnig; Uta Hubrig, Leipzig; Heiko Schinke, Stefan Hähnel, beide Leuna; AG Math. der OS W. Pieck (Kl. 8 b), Lichte; Doris Grünler, Ralf Schmidt, Ingo Göll, alle Lössau; Karl-Heinz Gora, Lohsa; Jenny Pelzer, Lübars; Sabine Gerlach, Lübs; Beate Krause, Menteroda; Danny Zeutzschel, Merseburg; Jürgen Welz, Meyenburg; Michael Simang, Mittelherwigsdorf; Olaf Wender, Mühlhausen; Jörg Schmidt, Heidi Teidge, Ina Prescher, alle Neubrandenburg; Andrea Weber, Neukirch; Holger Alsguth, Neuseddin; Jutta Reißmann, Niesky; Kerstin Paul, Nordhausen; Andrea Friedrich, Nünchritz; Thomas Heidrich, Oberlungwitz; Dietmar Hennig, Olbersdorf; Kerstin und Petra Köbke, Oranienburg; Sabine Oestreich, Oschersleben; Margit Möllhoff, Piesau; Steffen Gottschlich, Gudrun Zirnstein, beide Pirna; Manuela Krause, Plauen; Torsten Kühn, Potsdam; Iljana Planke, Premnitz; Karl-Heinz Fandrey, Prenzlau; Dirk Lobbes, Pritzerbe; Frank Unger, Rackwitz; Tobias Mahlow, Radebeul; Frank Berndt, Radeburg; Carsten Stiehl, Jörg Stiehl, Radewege; Andreas Korb, Raschau; Kristian Lauritzen, Reichenberg; Silke Gubick, Anke Wagner, beide Röbel; Ines Gülden, Roitzsch; Evelin Neumann, Jürgen Schmalisch, beide Rotta; Gitta Schöne, Falk von Seck, Mathias Slosarek, alle Rostock; Claudia Lieske, Elke Miemel, Simone Voigt, alle Saalfeld; Ronald Bojarski, Saßnitz; Karola Klitsch, Scharlibbe; Holger Laube, Schlotheim; Thomas Simon, Steffen Abicht, Gerhard Fräbel, Birgit Nößler, Sybille Heuer, Ines Döll, Jens Recknagel, Christoph Notnagel, Bert Ilgen, alle Schmalkalden; Sylke Lüder, Schönborn; Liane Pappe, Angela Böttcher, Heike Beutel, alle Schönfeld; Thomas Tiedtke, Schorssow; Kerstin Freitag, Schwarzheide; Margret Vinatzer, Tim Harrison, beide Schwaz (Österreich); Thomas Bienek, Schwepnitz; Jens Hoffmann, Sebnitz; Andreas Prpic, Volker Leutheuser, Thomas Vorndran, alle Sonneberg; Ralf-Birger Häfner, Sabine Dziatzko, Corina Kaiser, Marion Hausdörfer, Petra Schmidt, Dirk Walther, Steffi Bahner, Markus Heckert, Katrin Pfannschmidt, Stefan Kührt, Thomas Weinert, Dirk Wilhelm, Hagen Kiehm, Andre Bartsch, alle Steinbach-Hallenberg; Ramona Löser, Stendal; Stephan Meyerhöfer, Strasburg; Gabriele Müller, Tangerhütte; Sabine Scheller, Teltow, Toralf Heene, Teterow; Ellen Fleischauer, Trebra; Olaf Rude, Trebsen; Falk Winter, Uhyst; Silke Raßmann, Annette Stephan, beide Unterbreizbach; Reiner Burkhart, Voigtsdorf; Regine Katzy, Meike Dallüge, Birgit Lorenz, alle Waren; Jens Ackermann, Wasungen; Jens Köhler, Weida; Hartmut Boettcher, Dorothee Gebuhr, Marco Götz, alle Weimar; Beate Hentschke, Ines Hoffmann, Sylvia Feige, alle Weißwasser; Gundula Lenz, Wismar; Steffen Noack, Klaus Krügel, beide Wittenberg; Marion Reek, Birgit Zapke, Britta Spyra, Monika Schüppschek, Susanne Grubbert, Christine Koch, Birgit Keller, Doreen Badge, Kerstin Häntschke, Petra Zander, Andreas Klappstein, alle Wittstock; Bernd Frank, Wolgast; Kerstin Vinke, Zarnewanz; Dietmar Polster, Zeithain; Uwe Pallas, Zella-Mehlis; Christina Voß, Liane Solcknick, beide Zepernick; Jörg Wenzel, Zeulenroda; Hilmar Lorenz, Karsten Amthor, beide Zittau

Für dreijährige Teilnahme

Arndt Löber, Ahrenshoop; Thomas Andermann, Altenburg; Rainer Vorbau, Dirk Strohner, Andreas Koch, Steffen Kowalski, Detlev Ender, Olaf Engelke, alle Altentreptow; Frank Schönherr, Anklam; Eckhard Heinrich, Aschersleben; Ines Rothenberg, Artern; Katrin Arndt, Heike Dittmar, Angelika Heilgeist, Nicole Heilgeist, Heike Himmel, Simone Jung, Rowena Rein, Sabine Weisheit, Beate Zimmer, Frank Cramer, Mario Martin, Anke Blumenauer, alle Asbach; André Deckert, Bautzen; Karin Gröger, Holger Neye, Kerstin Kantiem, Daniel Hammer, Thomas Strobel, Udo Bellack, Andris Möller, Berit Kleinbauer, René Damm, alle Berlin; Dagmar Reschke, Bernau; Katrin Hintz, Beate Weber, beide Bernburg; Peter Rößler, Bischofswerda; Kai Fischer, Bitterfeld; Andre Schmidt, Boizenburg; Ines Schönberg, Kerstin Westphal, Heike Fischer, alle Borna; Torsten Scherat, Blankenfelde; Marlis Schröder, Brandenburg; Gitta Rodenwald, Lars Friedel, beide Bürgel; Göran Sterzik, Buttelstedt; Katrin Sylvester, Bad Dürrenberg; Silke Schröder, Bad Kleinen; Heike Eckhardt, Johannes Wien, beide Bad Liebenstein; Constanze Zingler, Bettina Scharenweber, Simone Schultke, Andrea Brunsch, Caterina Zingler, Beate Brönner, Shila Patzer, alle Bärenklau; Christine Rauscher, Bautzen; Manuela Winges, Bad Liebenstein; Jens Bienioschek, Karin Leonhardt, Christiane Ritter, Uwe Zybell, Torsten Zepp, Susanne Krüger, Ulf Rothkirch, Silke Rothkirch, Anne-Rose Lück, Cornelia Frick, alle Berlin; Gabriele Dietrich, Ronny Franz, Florian Schreiber, alle Bernsbach; Sylvia Weiß, Birgit Lampson, beide Blumberg; Annette Kebsch, Böhlen; Heike Sievers, Boizenburg; Kati Hielscher, Dirk Jerxen, beide Borna; Jens Richter, Bernsbach; Tamara Wenig, Ulrike Höfig, Sabine Neumann, Christine Fischer, Sabine Leyh, Heike Füssel, alle Breitungen; Gerhard Henning, Frank Hebestreit, Jens Przybilla, Susanne Kraska, alle Breitenworbis; Andrea Burgemann, Simone Huwe, beide Britz; Silke und Iris Degen, Brottewitz; Birgit Müller, Bürgel; Anette Fussy, Andrea Fischer, beide Burkau; Harald Schiffhauer, Buttlar; Heike Köhler, Callenberg; Roland Herrig, Coswig; Iris Dähn, Daniela Syrbe, Thomas Exner, Peter Strempel, Iris Freitag, Karsten Kehler, Christian Harnath, Uta Bolz, Jeannette Lange, Andreas Heinze, Frank Techen, alle Cottbus; Stefan Klinzing, Creuzburg; Falk-Uwe Koppelt, Crostau; Ulf und Jörn Fache, Culitzsch; Brita Henning, Dambeck; Holger Schmidt, Demmin; Katrin und Dieter Horn, Wolfgang Tenor, alle Dessau; Angela Bransch, Deutschenbora; Lioba Degenhardt, Marion Beil, Heike Förster, Thomas Strecker, Heike Rosenthal, Heike Arnold, Beate Meinhardt, alle Dingelstädt; Kai-Uwe Walter, Döbeln; Mario Fiedler, Dörfel; Olaf Jenkner, Dorfchemnitz; Horst Schulze, Jörg Dehnert, Heiko Ringel, Christoph Metzner, Thomas Scholze, Horst Seidel, Michael Goldberg, Astrid Roll, Christian Donath, Annegret Wustmann, Martin Bismark, Heinz Moll, Kerstin Urban, Britta Schumacher, Jens Danzer, Beatrice Reifenstein, Ernst-Achim Schmidt, Pedro Thiele, Ines Lauter, Susann Piry, Gerald Eichler, alle Dresden; Peter Kallenbach, Claudia Pleyer, Monika Ziegler, alle Eisenach; Annette Wöhner, Eilenburg; Marion Valtin, Eberswalde; Bernd Leifheit, Eigenrieden; Una Heinecke, Gabriele Wehrsdorfer, beide Eisenberg; Andrea Schaaf, Kerstin Franz, beide Eisleben; Holger Graf, Stefan Nitzsche, Enrico Dietrich, alle Elsterwerda; Jörg Klingohr, Kerstin Heer, Ines Mittelbach, Thomas Hecker, Lars Mönch, alle Erfurt; Manuela Hellbach, Ernstthal; Bianka Uhlig, Falken; Thomas Müller, Jens Wackernagel, beide Falkenberg; Mathias Eger, Gabi Gubitz, Thomas Weiß, Heidi Kahlheys, Cornelia Kreher, Michael Riedel, Stefan Voigt, Ramona Ritzmann, alle Floh; Karsten Meißner, Katrin Meißner, beide Forst; Martin Gocht, Frankenberg; Annett Helbig, Frankfurt (O.); Ines Becker, Olaf Drewning, beide Freiberg; Karsten Thon, Freyburg; Cordula Meißner, Steffen Hilmer, Jan Böhm, Mathias Gerlach, Annett Frankowski, Karsten Knauth, alle Friedeburg; Gabi Reinhardt, Friedersdorf; Heiko Mißfeldt, Gammelin; Jan-Martin Hertzsch, Geringswalde; Sylvia Zander, Geisa; Susanne Löffler, Görlitz; Ingolf Thurm, Gößnitz; Veit Manig, Gorden; Bärbel Kolodzik, Golm; Katrin Köhler, Gossa; Lutz Pietsch, Glauschnitz; Holger Stoffel, Grabow; Christian Röhl, Gräfenhainichen; Olaf Becken, Ulrike Brandenburg, beide Greifswald; Ines Schicker, Greiz; Ingolf Hintzsche, Gremmin; Frank Hering, Grieben; Thomas Wedekind, Uwe Werner, beide Grimma; Babett Maulhardt, Helen Stock, beide Großbodungen; Uwe Winkler, Großenhain; Annette Kipka, Großörner; Steffen Werner, Thomas Freudenberg, Steffen Rammer, Timo Freudenberg, alle Großröhrsdorf; Bianca Potthoff, Groß Wüstenfelde; Heiko Motz, Grünhain; Peter Meusel, Guben; Torsten Kirchner, Günstedt; Gunnar Müller, Güstrow; Mathias Reissig, Katrin Friedrich, Petra Mänche, Stefan Schleiff, Eckhard Schröter, alle Halle; Albrecht Stammler, Annett Eichner, Andreas Löffler, alle Halle-Neustadt; Jens Strobel, Hammerbrücke; Bianka Zeh, Heimersgrün; Kerstin Singer, Herlasgrün; Ulrich Baumann, Herold; Nicola Hofmeister, Herzberg; Bernd Müller, Heyerode; Andrea Bauer, Helbra; Hannelore Schwarzwald, Hohenmölsen; Grit Bauer, Hohenstein-E.; Verena Wegner, Jörg Götze, Marion Kühnast, Heidrun Schmidt, Andrea Strauch, Thomas Weber, Thomas Benusch, alle Hoyerswerda; Michael Kaufhold, Hüpstedt; Jens Amling, Ilmenau; Gabi Missal, Insel; Martin Jaekel, Detlef Ritter, Gunter Ritter, Susanne Valentini, alle Jena; Kai-Uwe Scherer, Jessen; Bärbel Modes, Johanngeorgenstadt; Antje Rudolph, Kämmeritz; Olaf Brandt, Udo Müller, Dirk Fleischmann, alle Kaltennordheim; Ralph Buckisch, Steffen Herpich, beide Kamsdorf; Andreas Paukert, Karbow; Ute Rosenkranz, Evelyn Gläser, Thomas Freygang, Annett Werth, Heike Nimmrich, Brit de Luca, Claudia Schwantes, Kay Hesse, Hendrik Pönisch, Tobias Plank, Cornelia Scharf, Angelika Scharf, Tanja Mittag, Jens Siewert, Katrin Richter, alle Karl-Marx-Stadt; Silvia Kriesche, Klausa; Silvana Böhmert, Axel Dübler, beide Klausdorf; Iris Molzahn, Norbert Neumann, beide Kleinmachnow; Thomas Senger, Klosterfelde; Sonnfried Lätsch, Edith Löffler, beide Königshain; Steffi Hasse, Köckenitzsch; Rainer Tauscher, Körbitz; Udo Fromm, Koßdorf; Thomas Gängler, Kraupa; Uta Sauer, Krossen; Jens Zosel, Laage; Andreas Helbig, Langenleuba-N.; Karsten Rieger, Ingolf Raabe, beide Langengrassau; Frank Herzog, Langenwolschendorf; Sabine Mersiowsky, Langewiesen; Heike Philipp, Lauenstein; Manuela Hellbach, René Kirchner, Petra Seibt, Matthias Heller, alle Lauscha; Solveig Woitek, Rena Dette, Sabine Hartung, Manuela Grimm, Marietta Grimm, Richard Hillebrand, Rosina Strickstrock, alle Leinefelde; Wilfried Wolf, Thorsten Lill, Tim Schneider, Dirk Hönicke, Gisela Engel, Michael Rammelt, Jan Klemm, Ralf Laue, Vera Wilhelm, Petra Polster, Max Pohl, Andreas Eifler, Evelyn Sauerzapf, alle Leipzig; Holger Schinke, Leuna; Silke Sontag, Lichte; Sybille und Claudia Seifert, Lichtenberg; Axel Stelzner, Lichtentanne; Monika Mayr, Linz (Österreich); Mathias Springwald, Elvira Sapora, Angela Süssig, Judith Jaenecke, alle Löderburg; Andre Kerl, Lössau; Ute und Antje Rosenbohm, Sybille Hinze, alle Löwenberg; Wolfgang Maaß, Lommatzsch; Klaus Mohnke, Ramona Struck, beide Lübbenau; Jörg Ladendorf, Lübtheen; Katrin Lange, Ludwigsfelde; Andrea Fischer, Lunow; Volker Fett, Ines Skibinski, Peter Zienicke, alle Magdeburg; Erika Schubert, Malchin; Angela Zschöper, Maltitz; Maik Niebling, Mariengast; Andreas Berger, Markritz; Gerd Eckstein, Mehltheuer; Monika Möller, Steffen Hirn, beide Mellenbach; Bettina Heß, Mengersgereuth-H.; Lutz Harnos, Kay Peters, beide Merseburg; Hagen Haberland, Mesekenhagen; Jens Schumacher, Metschow; Andre Wiegand, Mittelschmalkalden; Torsten Berger, Möhlau; Katrin Noack, Mühlberg; Detlef-Sven Saar, Mühlhausen; Lutz Peter, Mühltroff;

Joachim Günnel, Muldenberg; Jörg Fiebig, Mülsen; Babett Panwitz, Mühlbeck; Ute Krampitz, Mengersgereuth-H.; Ines Knick, Nauen; Matthias Haupt, Nerchau; Thorsten Weis, Netzebrand; Ralf Krause, Michael Glockenstein, Michael Münzner, Mario Marinitsch, alle Neubrandenburg; Uwe Knispel, Neuburxdorf; Anett Kopas, André Ewert, Jens Wilhelm, Micaela Ewert, alle Neuhaus; Bettina Richter, Neukirch; Ulf Geyer, Neumark; Uwe Weßollek, Neundorf; Uta Melchior, Neuruppin; Eva Hartmann, Neustadt; Kerstin Sonnenburg, Dietmar Beyer, beide Neustrelitz; Matthias Körner, Niederorschel; Heike Engelhardt, Niedersachswerfen; Timo Kaiser, Niederschmalkalden; Bettina Hirselandt, Volker Franke, Petra Hahn, alle Nordhausen; Andy Marr, Oberschönau; Frank Hennig, Olbersdorf; Olaf Winkler, Oschatz; Jörn Herrmann, Oschersleben; Beate Michael, Kerstin Schönwald, Steffen Köhler, Matthias Kusmierek, Sabine Wettig, Grit Scheumann, Steffi Winter, Silke Böhm, Heike Schulze, Simone Mißloch, alle Osternienburg; Frank Dellit, Pappenheim; Jörg Stahnke, Pasewalk; Birgit Seifert, Pinnau; Mike Butter, Pirna; Jörg Stark, Plauen; Heike Lohde, Kerstin Fischer, beide Plessa; Iris Bernhardt, Podelwitz; Andreas Denecke, Poggendorf; Steffen Hoffmann, Potsdam; Anke Rheinsberg, Friedemann Domke, Susanne Planke, alle Premnitz; André Köhler, Prenzlau; Annett Schmidt, Rackwitz; Antje Hertzschuch, Radebeul; Peter Wenke, Radibor; Sabine Ehrlich, Rechlin; Ute Zahn, Reichenbach; Kirsten Lauritzen, Reichenberg; Elmar Hoell, Ribnitz; Kirstin Tägener, Rietz; Andreas Puls, Röbel; Thomas König, Dirk Heim, Antje Philipp, Heike Baumann, Heike Schmidt, Viola Rexhäuser, Uta Götz, Ralf Pasch, Rene Welsch, Frank Fritschek, Ole Albrecht, Henry Unkart, Silvia Kirchner, Jens Wiedemann, Günther Siebenhaar, alle Roßdorf; Olaf Römer, Birgitt Schild, beide Roßlau; Ralf Heidenreich, Roßleben; Bärbel Kroll, Sylke Pohl, Torsten Haß, Ulf Schlieker, Grit Maciejewski, Lutz Andrews, Gerald Stibbe, Petra Henke, Bodo Barthels, Beate Barthels, Birgit Kroll, alle Rostock; Bodo Bricks, Sabine Pfeffer, beide Saalfeld; Steffen Beck, Frank Schneevoigt, beide Salzwedel; Jens Richter, Schkölen, Christiane Gaudigs, Schkölen; Dan Mandel, Schköna; Carmen Meikies, Schlagsdorf; Gabi Storch, Karin Semm, Heike Lochner, Felizia Huland, Jan Hoffmann, Christian Semm, Andre Wagner, alle Schmalkalden; Annette Eisenbrandt, Schnellmannshausen; Sabine Schüler, Schöna; Heike Schulz, Schönefeld; Axel Delan, Schwarzheide; Heiko Schulz, Schwedt; Carola Paetow, Schwerin; Peter Joschenak, Helga Huber, Schwaz (Österreich); Sören Funck, Sellin; Michael Galetzka, Senftenberg; Regina Weiche, Silbersdorf; Sabine Rahner, Frank Zöllner, Ralf Rogler, Jens Philipp, alle Sondershausen; Birgit Götz, Sonneberg; Heidrun Unger, Spittwitz; Karsten Geißler, St. Egidien; Andreas Kirchner, Rainer Schwäblein, Ulrike Marr, Peter Lehmann, Kerstin Häfner, Mirjam Endler, Barbara Willing, Ralf Häfner, Sabine Büttner, Katrin Genzler, Kay-Uwe Weber, Susanne Oschmann, Thomas Klemmer, Ina Holland-Moritz, Karin Reinhardt, Birgit Schröder, Dagmar Rothämel, Corina Faßler, Andre Selimg, Simone Elbel, Susanne Holland-Cunz, Doreen Wahl, Ramona Holland-Nell, alle Steinbach-Hallenberg; Christian Wiegand, Steinheid; Cordula Gottwald, Stendal; Anke, Heike und Erhard Zilinske, Marga Goltz, alle Stralsund; Mathias Rausch, Straupitz; Harald Kube, Stützerbach; Silvia Pfannschmidt, Jörg Sauerbrei, Stefan Kleiner, Susanne Walter, alle Suhl; Nicole Gößner, Syrau; Thomas Wenzel, Gabriele Neumann, Kerstin Witte, alle Tangerhütte; Angela Schröder, Tautenhain; Thomas Hantel, Jacqueline Drews, Brigitta Müller, alle Teterow; Birgit Martin, Thiemendorf; Joachim Krug, Steffen Weber, Uta Bittorf, alle Tiefenort; Thomas Bergmann, Torgau; Dolores Foth, Kathrin Gädke, beide Torgelow; Karola Bloch, Annett Appelt, Grit Rebert, alle Trebbichau; Ray Langlotz, Ralf Gössinger, Ole Glänzer, alle Unterbreizbach; Dirk Schaub, Uwe Landsiedel, Sibylle Kraft, Stefan Eisenschmidt, alle Vacha; Heike Schulz, Dirk Wenzlaff, beide Vitte; Michael Vogt, Völkershausen; Beate Winter, Vorderhagen; Gisbert Thiere, Wallhausen; Anke Dittmar, Susanne Anschütz, Regina Frindt, Udo Michallik, Irene Michallik, alle Waren; Thomas Harz, Margret Boettcher, Ulf Greiner-Mai, Stefan Thäter, Dirk Lehmann, alle Weimar; Timo Backofen, Weischlitz; Rita Nordmann, Weißenborn-L.; Barbara Schütze, Weißenfels; Anke Lebsa, Weißwasser; Claudia Viehweg, Wiesenburg; Elisabeth Schubbert, Jürgen Kaufmann, beide Wingerode; Bernd Kahl, Wismar; Thomas Peuker, Toralf Schröder, Jörg Angelmann, Steffen Pietz, Katrin Demin, Bernd Salewski, Mario Senst, Karsten Busse, alle Wittenberg; Irene Zoll, Wittenberge; Frank Zapke, Uwe Tefs, Thomas Priebus, alle Wittstock; Maike Weiss, Kerstin Jung, beide Wöbbelin; Claudia Bock, Angela Böhme, beide Wolfen; Petra Herzmann, Astrid Keller, beide Wolgast; Maria Geburzky, Worbis; Udo Riedel, Zeitz; Uwe Scheffler, Erika Schreiber, Kerstin Barthelmes, alle Zella-Mehlis; Dietmar Hennig, Annegret Linke, Thomas Pilz, Ralph Paulsen, Birgit Erdmann, Heide Hilse, alle Zittau; Romi Riedel, Zollschwitz; Mathias Goltzsche, Zschopau; Antje Henke, Zschorgula; Elke Goraus, Zwickau

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Im Heft 1/1980 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 7 ■1950 In einem FDGB-Ferienheim befinden sich 41 Urlauber, die in 2-Bett- und 3-Bett-Zimmern untergebracht sind. Das Ferienheim verfügt über mehr als vier, aber weniger als zehn 2-Bett-Zimmer. Alle Betten sind belegt. Über wieviel 2-Bett- bzw. 3-Bett-Zimmer verfügt dieses Ferienheim?

Im Heft 4/1980 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Angenommen, es sind a 2-Bett- und b 3-Bett-Zimmer; dann gilt $2a+3b=41$ bzw. $3b=39+2-2a$; also $b=13-\frac{2}{3}\cdot(a-1)$ mit $4<a<10$.

Nur für $a=7$ wird $b=13-\frac{2}{3}\cdot 6=9$ ganzzahlig.

Das Ferienheim verfügt somit über sieben 2-Bett- und neun 3-Bett-Zimmer. Probe: $7\cdot 2+9\cdot 3=41$.

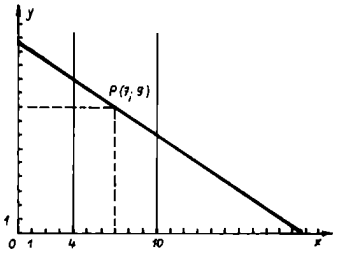
Wir stellen nun die Lösung von Gunnar Bittersmann aus Bernau vor, der Schüler der Klasse 7R II der Carl-Fugger-Oberschule ist.

Gunnar löste diese Aufgabe graphisch wie folgt:

Es sei x die Anzahl der 2-Bett- und y die Anzahl der 3-Bett-Zimmer; dann gilt $2x+3y=41$ mit $4<x<10$. Für $x_1=0$ erhalte ich $y_1=13\frac{2}{3}$; für $y_2=0$ erhalte ich $x_2=20\frac{1}{2}$. Die Koordinaten der Punkte

$$\left(0;13\frac{2}{3}\right) \text{ und } \left(20\frac{1}{2};\ 0\right)$$

legen eine Gerade fest. Von der Geraden kommen aber nur Punkte zwischen $x=4$ und $x=10$ in Frage. Nur für $x=7$ erhält man eine ganzzahlige Lösung $y=9$. In diesem Ferienheim gibt es sieben 2-Bett- und neun 3-Bett-Zimmer.



Wir stellen nun die Lösung von Olaf Kasper aus Berlin vor, der Schüler der Klasse 7b der Eugen-Schönhaar-Oberschule ist.

Olaf löste diese Aufgabe wie folgt:

Das FDGB-Ferienheim verfüge über x 2-Bett- und y 3-Bett-Zimmer; dann gilt $2x+3y=41$ mit $4<x<10$.

Für $x=5$ erhält man $3y=31$, also keine ganzzahlige Lösung;

für $x=6$ erhält man $3y=29$, also keine ganzzahlige Lösung;

für $x=7$ erhält man $3y=27$, also $y=9$;

für $x=8$ erhält man $3y=25$, also keine ganzzahlige Lösung;

für $x=9$ erhält man $3y=23$, also keine ganzzahlige Lösung.

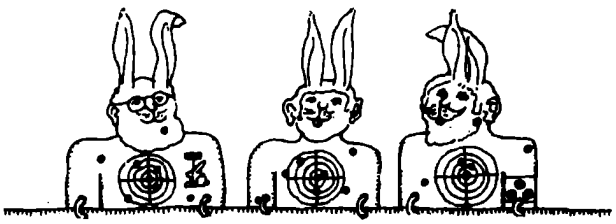
Somit existiert genau eine Lösung. Das FDGB-Ferienheim verfügt über sieben 2-Bett- und neun 3-Bett-Zimmer.

Die *Wort*spiel*wiese*

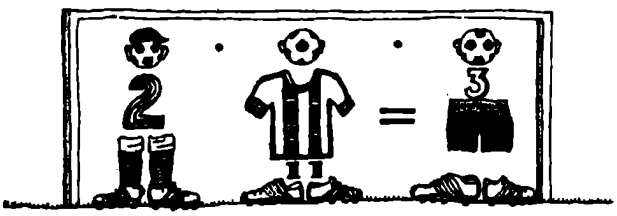
TURM KREUZ KREUZ TONNEL

Denksport

Unterhaltungsmathematik aus: Pionierkalender 1981



1. Zwei Väter und zwei Söhne schießen drei Hasen. Jeder schießt einen. Wie ist das möglich?



2. In einem Sportgeschäft kann man Fußballjerseys in vier Farben, Hosen in drei Farben und Stutzen in zwei Farben kaufen. Wieviel verschiedene Fußballdresse kann man hieraus zusammenstellen?

3. Dirk ist doppelt so alt, wie Jörg sein wird, wenn Ralf so alt ist wie Dirk heute. Wer von den dreien ist der älteste, wer der jüngste?

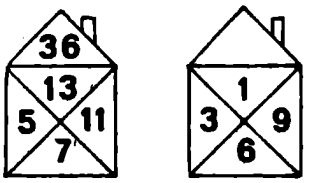
4. Ein Postmeister wurde einmal gefragt, wieviel Pferde der König zum Wechseln auf der Poststation bestellt habe. Er sagte: „Mit der Hälfte der bestellten Pferde und einem halben fährt der König selbst. Mit der Hälfte des Restes und einem halben fährt der Minister. Mit der Hälfte des verbleibenden Restes und einem halben fahren die Diener. Das übrigbleibende letzte Pferd benutzt der Vorreiter."
Wieviel Pferde hat der König bestellt?

5. Fünf Kisten enthalten je die gleiche Anzahl Äpfel. Wenn man jeder Kiste 60 Äpfel entnimmt, bleiben in den Kisten insgesamt soviel Äpfel übrig, wie vorher in zwei Kisten waren. Wieviel Äpfel waren anfangs in jeder Kiste?

6. Ein Gewürzständer mit 6 Fläschchen (von jeweils gleichem Preis) kostet 18 Mark. Die 6 Fläschchen kosten 12 Mark mehr als der Ständer.
Wieviel Mark kostet der Gewürzständer und wieviel jedes Gewürzfläschchen?

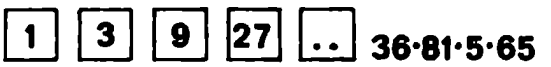
7. Fünf Heuhaufen und sieben Heuhaufen werden zusammengefahren.
Wieviel Heuhaufen ergibt das?

8. Toni, Jirka und Ilka benötigen für den Weg vom Bahnhof zur Schule zehn Minuten, wenn sie jeweils allein gehen. Wieviel Minuten benötigen sie, wenn sie gemeinsam gehen?

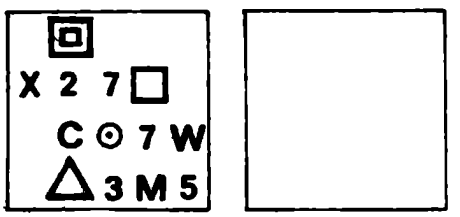


9. Welche Zahl gehört in den leeren Hausgiebel?

10. Setze den fehlenden Buchstaben in das leere Feld und versuche, das richtige Wort zu erkennen, das sich ergibt!



11. Welche Zahl ist in das leere Feld einzusetzen?



12. Sieh dir das Bild 30 Sekunden an, verdecke es dann! Versuche, ohne noch einmal nachzuschauen, in das leere Feld die Buchstaben, Zahlen und Symbole einzutragen, möglichst auch ungefähr an der richtigen Stelle, die du dir gemerkt hast! *M. Rehm*

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
15. Jahrgang 1981
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Diplom-Lehrer C.-P. Helmholz)
Redaktion:
StR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1080 Berlin, Krausenstraße 50 · Tel. 20430
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: Die Abbildungen zu diesem Heft stammen aus Bänden der Mathematischen Schülerbücherei.
Idee und Gestaltung: J. Lehmann, Leipzig
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128–ISSN 0002–6395
Redaktionsschluß: 15. Februar 1981

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

49 111 Bände Mathematische Schülerbücherei [5]
Dorothea Ziegler, verantwortl. Lektor für Mathematik bei BSB B. G. Teubner

50 Mathematik im Reich der Töne [8]
Vorabdruck aus dem Band 106 der Mathematischen Schülerbücherei (MSB)
Dr. E. Schröder, Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden

52 Analogiebetrachtungen [9]
Vorabdruck aus dem Band 103 der MSB
Dr. E. Quaisser/Dr. H. J. Sprengel, Sektion Mathematik der Päd. Hochschule *Karl Liebknecht*, Potsdam

54 Der Autor des Buches: Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Mathematik [8] hat das Wort
Leseprobe aus dem gleichnamigen MSB-Band Nr. 68
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der *E.-M.-Arndt*-Universität Greifswald

56 gut gedacht ist halb gelöst [6]
Eine kleine Auswahl von Denksportaufgaben aus dem Band 53 der MSB
Ing. K. Freyer/Ing. R. Gaebler/Dipl.-Lehrer W. Möckel (alle Leipzig)

58 Eine „niederträchtige" Aufgabe [9]
Prof. Dr. K.-R. Biermann, Akademie der Wissenschaften der DDR, Berlin

60 Mathe mit Pfiff [5]
Leseprobe (Überall natürliche Zahlen) aus dem Band 82 der MSB
J. Lehmann, Leipzig

61 Ein mathematischer Zweikampf [9]
Leseprobe aus: Wegbereiter der neuen Mathematik
Prof. W. A. Nikiforowski/Prof. L. S. Freiman, beide Moskau

62 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Unterhaltungsmathematik aus MSB-Büchern
Zusammenstellung: J. Lehmann

64 XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [7]
Aufgaben der Bezirksolympiade (7./8. Februar 1981)

66 Lösungen [5]

71 Heiteres Ferienmagazin [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann

III. *U.-Seite* · Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen [6]
Zusammenstellung: J. Lehmann/Th. Scholl

Eine Aufgabe von Prof. Dr. L. Berg [9]
Sektion Mathematik der *W.-Pieck*-Universität Rostock

Grundkenntnisse in Geometrie gefragt [5]
Studienrat J. Kreusch, *E.-Weinert*-OS, Löbau/Studienrat Th. Scholl, Berlin

IV. *U.-Seite:* Mathematische Schülerzeitschriften sozialistischer Länder [5]

Innenteil: Seiten 1 bis 16: Gesamtverzeichnis der Mathematischen Schülerbücherei sowie Annotationen [5]

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

111 Bände Mathematische Schülerbücherei

Als vor rund 19 Jahren das Politbüro der SED und der Ministerrat den *Mathematikbeschluß* faßten, wurde damit auch die Idee der *Mathematischen Schülerbücherei* (MSB) geboren. Sie sollte dazu beitragen, das Interesse an der Mathematik und die Freude an mathematischer Betätigung zu wecken und damit die mathematischen Kenntnisse der Schüler und Jugendlichen zu verbessern.

Verschiedene Verlage taten sich zusammen, um für alle Klassen- und Altersstufen entsprechende mathematische Literatur herauszubringen, Verlage, die schon eine gewisse Tradition auf diesem Gebiet hatten: Der Teubner-Verlag (BGT), der Deutsche Verlag der Wissenschaften (DVW), der Verlag Volk und Wissen (VWV), der Urania-Verlag (UV), der Fachbuchverlag (FV) und der Kinderbuchverlag (KV).

Als Autoren wurden hauptsächlich Mathematiklehrer und Wissenschaftler an Universitäten und Hochschulen gewonnen, die bereits in der Arbeit mit Schülerzirkeln Erfahrungen gesammelt hatten. So entstanden z. B. die *Übungen für Junge Mathematiker*, die bei der Vorbereitung auf die Mathematik-Olympiade eingesetzt werden, die *Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik* von M. Hasse, das Büchlein *Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene* von E. Hameister, die vier Bändchen von H. Belkner über *Determinanten*, *Matrizen*, *Metrische Räume* und *Reelle Vektorräume* und viele andere.

Ein großer Teil der Bändchen der *Mathematischen Schülerbücherei* wurde aus anderen Sprachen übersetzt. An erster Stelle stehen die Übersetzungen aus dem Russischen, denn in der UdSSR ist seit mehreren Jahrzehnten bei vielen Schülern die Beschäftigung mit der Mathematik über den Rahmen der Schule hinaus zu einer beliebten Freizeitbeschäftigung geworden, die mit Ausdauer und Fleiß betrieben wird und deren Erfolge sich z. B. bei den Internationalen Mathematik-Olympiaden zeigen. Zahlreiche bedeutende sowjetische Wissenschaftler unterstützen die Schüler durch entsprechende Literatur.

Aber auch Bücher aus anderen Ländern wurden übersetzt und in diese Reihe aufgenommen, z. B. *Einführung in die Graphentheorie* von J. Sedláček aus dem Tschechischen, *Mathematisches Mosaik* von E. Hodi aus dem Ungarischen und *100 neue Aufgaben* von H. Steinhaus aus dem Polnischen.

Viele von den Bänden der Reihe haben bei den Schülern großes Interesse gefunden und sind schon in mehreren Auflagen erschienen. Es ist ja auch wirklich erstaunlich, wie viele interessante Fragen und Probleme mit Hilfe der Mathematik beantwortet und gelöst werden können. Mancher, der ursprünglich glaubte, die Mathematik sei eine „trockene" Sache, hat sich schon durch interessante Lektüre vom Gegenteil überzeugen lassen.

So zeigt z. B. O. Zich im Buch *Unterhaltsame Logik*, wie man mit Hilfe mathematischer Schlüsse einen Kriminalfall lösen kann. N. J. Wilenkin erzählt in seinem Buch *Unterhaltsame Mengenlehre*, was John Tichy auf seiner 1001. Reise in eine andere Galaxis in einem Hotel mit unendlich vielen Betten erlebt hat; dabei zeigt sich, daß man der „Wunderwelt des Unendlichen" mit mathematischen Mitteln ganz schön beikommen kann! So könnte man noch viele Beispiele bringen, wie in den Büchern heiter und unterhaltsam, aber auch ernst und zielstrebig mathematische Zusammenhänge dargeboten werden. Doch das beste ist, ihr seht euch die Liste der 111 bisher erschienenen oder in nächster Zeit erscheinenden Bändchen in diesem kleinen *alpha*-Sonderheft einmal genauer an; dann wird bestimmt jeder etwas Interessantes für sich finden.

D. Ziegler, Vorsitzende der Literaturarbeitsgemeinschaft Mathematik beim Ministerium für Kultur der DDR

Seit 20 Jahren unterstützen zahlreiche Fachverlage der DDR die außerunterrichtliche Arbeit der Schüler im Fach Mathematik, insbesondere die *Olympiaden Junger Mathematiker* der DDR. Im Rahmen der *Literaturarbeitsgemeinschaft Mathematik* beim Ministerium für Kultur beraten Wissenschaftler, Lehrer und Lektoren über weitere Titel der Mathematischen Schülerbücherei (MSB). *Unser Foto:* Aussprache über Entwicklungstendenzen der MSB, geführt von W. Arnold, Abteilungsleiter Mathematik/Physik beim VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, J. Lehmann, Chefredakteur *alpha*, D. Ziegler, verantw. Lektor und J. Weiß, Lektor, beide BSB B. G. Teubner (v. l. n. r.).

Mathematik im Reich der Töne

Leseprobe aus dem Band 106 der MSB (Vorabdruck)

Den Naturwissenschaftlern der Neuzeit erscheint es befremdlich, daß die Philosophen der Antike bezüglich naturwissenschaftlicher Probleme Behauptungen aufstellten, ohne deren Wahrheitsgehalt jemals mit leicht ausführbaren Experimenten nachzuprüfen. Zum Beispiel läßt sich die Behauptung des Aristoteles (384 bis 322 v. u. Z.), daß schwere Körper schneller fallen als leichte, mit einem einfachen Gedankenexperiment widerlegen. Es ist z. B. ohne Einfluß auf die Fallzeit zweier Kilogrammgewichte, ob man diese getrennt voneinander in einen tiefen Brunnen wirft oder ob man beide Gewichte vor dem Versuch fest zusammenbindet.

Ein echter Durchbruch zur experimentellen Fundierung theoretischer Aussagen wurde erst mit Galilei (1564 bis 1642) vollzogen. Durch seine berühmten Pendel- und Fallversuche klärte er den funktionalen Zusammenhang von Pendellänge und Schwingungszeit bzw. Fallhöhe und Fallzeit auf. Auch die Wurfparabel gehört zu seinen Entdeckungen. Die Zeit der „geistigen Wiedergeburt", des „Rinascimento", bildete den Anstoß für eine Fülle naturwissenschaftlicher Entdeckungen, die sich wegbereitend auf das technische Zeitalter der Neuzeit auswirkten.

Eine rühmliche Ausnahme hierzu verkörperte in der Antike (um 550 v. u. Z.) die *Schule der Pythagoreer* bezüglich ihrer Aussagen in der Akustik. Die experimentellen Befunde lieferte ihnen das Monochord. Hierbei handelt es sich um ein einsaitiges Instrument, bei dem über einen quaderförmigen Resonanzkörper eine Saite gespannt ist. Die Saite ist an einem Ende fest verankert, während das andere Ende – über eine feste Rolle geführt – mit einem Gewicht belastet wird. Nun kann die mittels des Gewichtes stets unter gleicher Spannung stehende Saite angezupft und dadurch in Eigenschwingung versetzt werden. Diese Schwingung überträgt sich auf den Resonanzkörper und liefert einen gut vernehmbaren Ton.

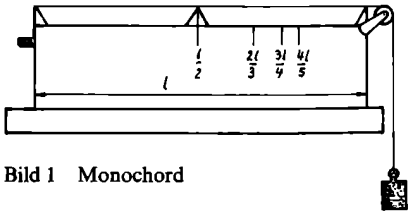


Bild 1 Monochord

Die Pythagoreer experimentierten nun in der Weise mit dem Monochord, daß sie die Länge der unter konstanter Spannung stehenden Saite durch Einschieben eines Steges variierten. Beim Halbieren der Saite ergab sich ein zum Grundton harmonischer Oberton. Diesem harmonischen Zusammenklang zweier Töne entsprach das Zahlenverhältnis 1 : 2. In der Musiktheorie bezeichnet man diesen Tonschritt als Oktave.

Entsprechend ihrer philosophischen Grundhaltung lag es nahe, den schwingenden Anteil auf zwei Drittel der ursprünglichen Länge zu verkürzen. Auch dieser zugehörige Ton ergab mit dem Ausgangston einen annehmbaren Zusammenklang. In der Musiktheorie wird dieser Zusammenklang als Quinte bezeichnet.

Schließlich gaben sie in ihren Experimenten drei Viertel der ursprünglichen Länge zur Schwingung frei. Der so erzeugte Zweiklang hörte sich ebenfalls erträglich an. In der Musiktheorie wird dieser Tonschritt als Quarte bezeichnet.

Ganz allgemein entspricht dem Nacheinanderausführen zweier Tonschritte das Multiplizieren der entsprechenden Verhältniszahlen. Zur Illustration diene das folgende Beispiel: Quinte + Quarte = Oktave

$$\frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Die Tastenreihe des Klavieres läßt sich in gewissem Sinne mit dem Prinzip eines Rechenschiebers vergleichen. Fügt man an einem Rechenschieber mittels der verschiebbaren Zunge zwei Strecken mit den Skalenwerten a und b aneinander, so entspricht auf der Stabskale der Streckensumme der Skalenwert $a \cdot b$. Hingegen ergibt sich zur Charakterisierung des Tonintervalles zwischen Quarte und Quinte bezüglich des gemeinsamen Grundtones der Quotient der Längenverhältnisse, also $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$.

Quinte minus Quarte = ganzer Ton

Bei Vogelstimmen und anderen Tierlauten beschränken sich die verwendeten Tonintervalle keineswegs auf Oktave, Quinte und Quarte. Sicher gab es schon zur Zeit des Pythagoras einfache Melodien von Volksliedern und Instrumente (z. B. Hirtenflöten) mit einem größeren Tonumfang. Auf die Pythagoreer geht der Aufbau einer Tonleiter zurück, bei der die reinen Zusammenklänge von Quinte und Quarte systematisch verarbeitet werden.

Für die folgenden Untersuchungen sollen die Intervalle zweier Töne nicht durch das Längenverhältnis der schwingenden Saiten, sondern durch ihre Kehrwerte, also das Verhältnis der Schwingungszahlen, erfaßt werden. Ist l die Länge der schwingenden Saite und n deren Frequenz, so gilt $l = \frac{k}{n}$, wobei k eine dieser zugeschnittenen Größengleichung angepaßte Konstante ist.

Am Monochord ist die Länge des schwingenden Saitenabschnittes bei konstanter Saitenspannung umgekehrt proportional zur Frequenz. Auf Grund dieser physikalischen Sachverhalte kann damit festgehalten werden: Zwei Tonintervalle sind genau dann gleich, wenn ihre Schwingungszahlen im gleichen Verhältnis zueinander stehen.

Ohne uns bereits jetzt auf absolute Schwingungszahlen festzulegen, können wir für die zunächst nur wichtigen Verhältniszahlen die Bezeichnungen der uns geläufigen c-Dur-

Tonleiter übernehmen, also c - d - e - f - g - a - h - c'. Bisher haben wir am Monochord über folgende Verhältniszahlen bezüglich des Grundtones c verfügt:

c . .	f	g . .	c'	Tonbezeichnung
1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	Verhältniszahl

Prime Quarte Quinte Oktave Intervall

Es sind also noch vier Leerstellen auszufüllen. Die pythagoreische Tonleiter setzt sich aus fünf großen und zwei kleinen Tonschritten zusammen. Der große Tonschritt wird aus Quarte und Quinte wie folgt erklärt: Setzt man $q_1=\frac{3}{2}$ und $q_2=\frac{4}{3}$, so gilt für den großen Tonschritt $q=\frac{q_1}{q_2}=\frac{9}{8}$. Die diesem Verhältnis entsprechende Schrittweite liegt bereits von f nach g vor. Sie wird ferner beim Fortschreiten von c nach d, von d nach e sowie von g nach a und a nach h übernommen. Nun stehen noch die Quotienten offen, welche den Schritt von e nach f und h nach c' beschreiben. Für beide Intervalle ergibt sich zwangsläufig aus den bisherigen Festlegungen das Zahlenverhältnis $\frac{256}{243}$.

Dieser Bruch kann nicht gekürzt werden. Er fällt wegen der Dreistelligkeit von Zähler und Nenner etwas aus dem Rahmen. Auch in akustischer Hinsicht liefern die Töne keinen guten Zusammenklang. Durch eine Zusammenstellung der Zahlenverhältnisse bezogen auf den Grundton bzw. den darunter liegenden Nachbarton wollen wir uns eine Übersicht von dem Pythagoreischen Tonsystem verschaffen:

Tonbezeichnung

c	d	e	f	g	a	h	c'
Schwingungszahl bezogen auf c							
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
bezogen auf Nachbarton							
	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$

In einer ganzzahligen fortlaufenden Proportion stellt sich dieses Stimmungsprinzip wie folgt dar:

384 : 432 : 486 : 512 : 576 : 648 : 729 : 768

Auf kleinere Verhältniszahlen läßt sich diese Tonleiter nicht reduzieren.

Die gleiche Tonleiter kann man sich auch über den sogenannten „Quintenzirkel" erzeugt denken. Dabei geht man in folgender Weise vor: Man zeichnet einen Kreis und teilt diesen mit dem Winkelmesser in sieben gleiche Teile. In den Teilungspunkten trägt man im Uhrzeigersinn die Tonbezeichnungen in das Bild ein, wobei wir mit c vom obersten Teilungspunkt ausgehen wollen. Da sich dieser mit c' decken soll, werden wir ihn besonders stark markieren. Nun machen wir, von c ausgehend, im Uhrzeigersinn Quintensprünge. Durch Überspringen von je drei Teilungspunkten des Kreises gelangt man der Reihe nach auf g, d, a, e und h. Bei jedem Sprung multiplizieren wir die zuletzt erreichte Zahl mit $\frac{3}{2}$. Wird bei einem Quintensprung die zu c gehörige Markierung überquert, so lautet der Faktor $\frac{3}{4}$ statt $\frac{3}{2}$. Man sieht, daß auf diese Weise gleichfalls die Verhältniszahlen der pythagoreischen Tonleiter erzeugbar sind. Die noch fehlende Verhältniszahl für f ergibt sich durch eine Quintendrehung im Gegenzeigersinn. Wir müssen deshalb die zu c gehörige Verhältniszahl mit dem Kehrwert von $\frac{3}{2}$ multiplizieren und – da dieser Sprung als Überschreitung der Markierung zu werten ist – noch mit dem Faktor zwei versehen. Ferner ist zu bemerken, daß sich der Quintenzirkel nicht exakt schließt.

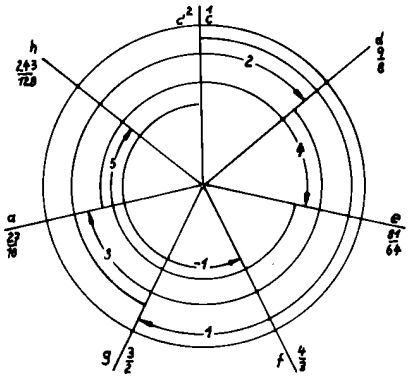


Bild 2 Quintenzirkel

Nach dem beschriebenen Verfahren lassen sich zwar die zu sieben Tönen der Tonleiter gehörigen relativen Schwingungszahlen exakt auffinden. Die zu c' gehörige Zahl 2 kann jedoch nach dem hier beschriebenen Verfahren nicht konstruiert werden. Teilt man nun die fünf großen Intervalle der pythagoreischen Tonleiter in je zwei Teilintervalle, so sind beim Durchlaufen der Oktave von c nach c' insgesamt 12 Tonschritte auszuführen. An Tasteninstrumenten erkennt man deutlich gemäß der Klaviatur die Einschaltung der fünf Zwischentöne. Führen wir nun entsprechend der hier vorgelegten Tonleiter zwölf Quintendrehungen im Uhrzeigersinn mit unserem Zirkel durch und beachten, daß beim Überqueren der c-Marke der Faktor $\frac{3}{4}$ und sonst $\frac{3}{2}$ zu setzen ist, so ergibt sich als Endwert

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{7}=\frac{531441}{524288}=1{,}0137.$$

Hätte sich der Quintenzirkel nach 12 Sprüngen (7 Umläufe) exakt geschlossen, wären wir auf die Zahl eins gekommen. Das diese Abweichung charakterisierende Zahlenverhältnis (531441 : 524288) bezeichnet man in der Musiktheorie als „pythagoreisches Komma". Durch diesen Quotienten wird also das Intervall zwischen der zwölften Quinte und der siebenten Oktave bezüglich eines gemeinsamen Grundtones zahlenmäßig erfaßt. Das hier erläuterte Stimmungsprinzip, nach welchem alle Töne aus einer Quintenreihe abgeleitet werden, bezeichnet man in der Musiktheorie als pythagoreisches Stimmungsprinzip. Es ist keineswegs nur von theoretischer oder musikgeschichtlicher Bedeutung. Vor allem bei solistischen Darbietungen an Streichinstrumenten neigen die Künstler zur Verwendung dieser pythagoreischen Tonstufen. Sie fördern vor allem den melodiösen Klang der Musik. Auch der Klavierstimmer arbeitet, von c ausgehend, mit Quintensprüngen und Oktaven, wobei dann gewisse Feinkorrekturen in Anpassung an die heute gebräuchliche temperierte Stimmung vorzunehmen sind. Für Oktave und Quinte hat das geschulte Ohr ein sicheres Empfinden über den gesamten Hörbereich. Die numerische Zusammenstellung der relativen Schwingungszahlen vermittelt uns schon eine Vorstellung von den Schwierigkeiten, die beim Bau von Instrumenten mit fester Tonlage hinvon Instrumenten mit fester Tonlage hinsichtlich ihres Zusammenklanges in einem Orchester zu bewältigen sind.

Einige Jahrhunderte später (um 30 v.u.Z.) kam man auf den Gedanken, am Monochord vier Fünftel der vorgegebenen Saitenlänge zur Schwingung freizugeben. So ergab sich als weiteres Intervall die große Terz. Die Schwingungszahlen der beiden Töne stehen im Verhältnis 4 : 5. Aus Quinte, Quarte und großer Terz baute man eine Tonleiter auf, deren relative Schwingungszahlen durch folgende fortlaufende Proportion ganzzahlig erfaßbar sind:

24 : 27 : 30 : 32 : 36 : 40 : 45 : 48.

Diese Tonfolge, auch diatonische Tonleiter genannt, enthält pro Oktave fünf Quinten, fünf Quarten, drei große und drei kleine Terzen. Für polyphone Musik ist die diatonische Stimmung der pythagoreischen Stimmung wegen der größeren Zahl harmonischer Zusammenklänge überlegen. Zum Beispiel stehen die Frequenzen der Töne des Grundakkords im Verhältnis 4 : 5 : 6. Für die musikalische Praxis hat jedoch auch dieses Stimmungsprinzip einen grundsätzlichen Nachteil. Da nämlich Instrumente mit fester Tonlage (Klavier, Orgel u.a.m.) modulationsfähig bezüglich aller möglichen Tonhöhen sein müssen, sind an der Reinheit der Stimmung, wie sie die diatonische Tonleiter bietet, gewisse Abstriche vorzunehmen. In Erfüllung dieser Forderung entstand in neuerer Zeit die temperierte Stimmung, nach der heute in den Konzertsälen aller fünf Kontinente musiziert wird. Bei dieser Tonleiter wird nur noch die Oktave rein geboten, während alle anderen Intervalle mehr oder weniger verfälscht sind.

E. Schröder

Analogie-betrachtungen

Leseprobe aus dem Band 103 der MSB (Vorabdruck)

3.1. Was wir unter einer Analogie verstehen wollen

Analogie – das ist ein häufiges, in unterschiedlichen Zusammenhängen gebrauchtes Fremdwort. In der deutschen Sprache könnte man dafür etwa „Ähnlichkeit" setzen.

Mit „Ähnlichkeit" ist aber nicht der geometrische Begriff gemeint, sondern eine Übereinstimmung von zwei verschiedenen Aussagen oder Strukturen in gewissen wesentlichen Teilen. Was dabei die „gewissen wesentlichen Teile" sind, hängt allerdings stark vom Betrachter ab. Wir haben bereits in den vorangegangenen Kapiteln auf „Ähnlichkeiten" zwischen Sachverhalten der ebenen und räumlichen Geometrie hingewiesen, insbesondere kann man sich von Begriffserklärungen der ebenen Geometrie anregen lassen, „ähnliche" für den Raum einzuführen, wie das in den Abschnitten 1.3, 1.4, 1.5 und 2.1 geschehen ist. Außer diesen Möglichkeiten gilt es, eine Fülle anderer „Ähnlichkeiten" zu finden und vor allem auch nutzbar zu machen. Daß dabei der Begriff „analog" unscharf ist, d. h. gar nicht streng festliegt, welche Sachverhalte „analog" sind, ist kein Nachteil, sondern macht den eigentlichen Reiz der Anwendung aus.

Wir beginnen mit einfachen Beispielen. Es gibt Sätze der ebenen und räumlichen Geometrie, die in ihrer Struktur übereinstimmen und durch Ersetzung gewisser Wörter auseinander hervorgehen.

(3.1) In der Ebene gilt: *Wenn zwei Geraden nicht parallel sind, dann haben sie genau einen Punkt gemeinsam.*

(3.1') Im Raum gilt: *Wenn zwei Ebenen nicht parallel sind, dann haben sie genau eine Gerade gemeinsam.* (Vgl. (1.5))

Ersetzt man in (3.1) „Ebene" durch „Raum" und „Gerade" durch „Ebene" und „Punkt" durch „Gerade", so erhält man (3.1').

Die Aussagen (3.1) und (3.1') bezeichnen wir als zueinander analog, (Ebene, Raum), (Gerade, Ebene) und (Punkt, Gerade) als Paare analoger Begriffe.

Wir betrachten ein weiteres Beispiel:

(3.2) *In der Ebene existieren 3 Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.*

Nach obigem Prinzip würde sich folgende richtige Aussage ergeben:

Im Raum existieren 3 Geraden, die nicht in einer Ebene liegen.

Es wäre aber auch sinnvoll, eine zu (3.2) analoge Aussage wie folgt zu bilden:

(3.2') *Im Raum existieren 4 Punkte, die nicht in einer Ebene liegen.*

Aus der Analogie von (3.2) und (3.2') würde sich (Dreieck, Tetraeder) als weiteres Paar analoger Begriffe anbieten.

Wählen wir noch eine Definition als Beispiel:

(3.3) *Der Kreis ist die Menge aller Punkte einer Ebene, die von einem Punkt (dieser Ebene) den gleichen Abstand haben.*

Ersetzt man in (3.3) „Ebene" durch „Raum" und „Punkt" durch „Gerade" (und natürlich „Kreis" durch ein neues Wort), so entsteht zwar wiederum eine Definition, von deren Nützlichkeit wir aber erst noch zu überzeugen wären.

Ersetzt man in (3.3) dagegen nur „Ebene" durch „Raum" und „Kreis" durch „Kugel", so entsteht gerade eine uns bereits bekannte Definition; daher erscheint es uns sinnvoll, (Kreis, Kugel) als ein weiteres Paar analoger Begriffe anzusehen.

Damit ist auch an Beispielen gezeigt, daß der Analogiebegriff kein strenger Begriff ist, daß es zum Beispiel keinen Formalismus gibt, der es ermöglicht, zu einer gegebenen Formulierung *die* analoge zu konstruieren.

Trotzdem kann die Analogiemethode von großem methodischem Wert sein. Wir können sie etwa benutzen, um zu einer Aufgabe der ebenen Geometrie eine analoge der räumlichen Geometrie aufzufinden, bzw. umgekehrt uns beim Lösen einer schwierigen räumlichen Aufgabe die Problemstellung zunächst am analogen (einfacheren!) ebenen Problem deutlich zu machen, d. h. Lösungsmöglichkeiten aufzudecken.

Wir betrachten ein erstes Beispiel:

Aufgabe (3.4) *In einer Ebene sind drei Punkte A, B, C gegeben, die nicht auf einer Geraden liegen. Wie viele verschiedene Geraden (in dieser Ebene) gibt es, so daß die drei Punkte A, B, C jeweils gleichen Abstand von einer solchen Geraden haben?*

Da es keinen Formalismus zur Erzeugung eines analogen räumlichen Sachverhaltes gibt, müssen wir selbst entscheiden, welche der formal möglichen analogen Formulierungen wir auswählen. Unter Beachtung von (3.2) und (3.2') wählen wir:

Aufgabe (3.4') *Im Raum sind vier Punkte A, B, C, D gegeben, die nicht in einer Ebene liegen. Wie viele verschiedene Ebenen gibt es, so daß die vier Punkte A, B, C, D jeweils gleichen Abstand von einer solchen Ebene haben?*

Es ist nun zu erwarten, daß sich die Analogie nicht nur auf die Aufgabenstellung, sondern auch auf die Lösung bezieht; sagen wir besser, daß es Lösungen gibt, die als zueinander analog zu betrachten sind.

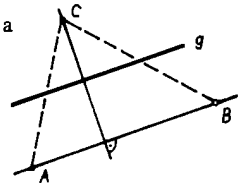
Wir lösen jetzt die Aufgabe (3.4).

Wir gehen zunächst davon aus, daß es eine Gerade g mit der gewünschten Eigenschaft gibt. Auf dieser kann keiner der Punkte A, B, C liegen, sonst müßten sie entgegen der Voraussetzung alle auf einer Geraden (nämlich auf g) liegen. Wir können nun folgende vollständige Fallunterscheidung vornehmen:

1. Fall: A, B, C liegen in ein und derselben Halbebene bez. g. Dann müßten A, B und C auf einer zu g parallelen Geraden liegen; dies widerspricht der Voraussetzung.

2. Fall: Genau einer der drei Punkte wird durch g von den übrigen getrennt; o. B. d. A. treffe das für C zu. Auf Grund der Voraussetzung in (3.4) muß nun g parallel zu der Geraden g_{AB} sein und das Lot von C auf g_{AB} halbieren (Bild 35a). Damit ist g eindeutig bestimmt.

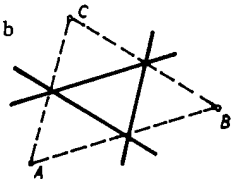
Bild 35a



Umgekehrt besitzt eine derartige Gerade offensichtlich die in (3.4) genannten Eigenschaften.

Da jeder der drei Punkte auf diese Weise durch eine Gerade von den beiden anderen separiert werden kann, gibt es genau drei Geraden mit der gewünschten Eigenschaft (Bild 35b).

Bild 35b



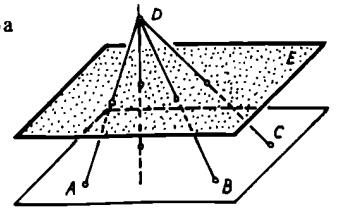
Wir lösen die Aufgabe (3.4'), indem wir die von uns zur Formulierung der Aufgabe verwendete Analogie berücksichtigen.

Eine Ebene ε mit den gewünschten Eigenschaften kann auch hier durch keinen der vorgegebenen Punkte gehen.

1. Fall: A, B, C, D liegen in ein und demselben Halbraum bez. ε. Dann liegen diese Punkte auf einer zu ε parallelen Ebene; dies widerspricht jedoch der Voraussetzung von (3.4').

2. Fall: Genau einer der vier Punkte wird durch ε von den übrigen getrennt; o. B. d. A. treffe das für D zu. Dann muß parallel zu der Ebene ε_{ABC} sein und das Lot von D auf ε_{ABC} halbieren (siehe Bild 36a). Eine solche Ebene ε ist damit eindeutig bestimmt. Da jeder der

Bild 36a



vier Punkte separiert werden kann, gibt es bez. des 2. Falles genau vier Ebenen der verlangten Art.

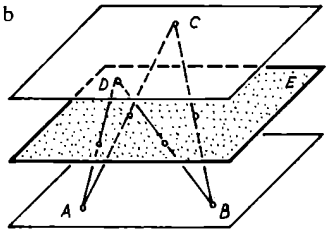
Man erkennt, daß wir bis zu dieser Stelle die Lösung von der zu (3.4) mit den entsprechenden Ersetzungen abgeschrieben haben. In vielen Büchern sparen sich die Autoren berechtigt solche Ausführungen und würden etwa schreiben, daß die Lösung analog zu der des ebenen Problems erfolgt.

Einen wesentlichen Unterschied zur Aufgabe (3.4) gibt es allerdings, unsere Fallunterscheidung ist noch nicht vollständig!

3. Fall: In jedem Halbraum bez. ε liegen genau zwei der vier Punkte; o.B.d.A. mögen die Punkte A und B einem gemeinsamen angehören.

Die Geraden g_{AB} und g_{CD} sind zueinander windschief, da sonst die vier Punkte in einer Ebene liegen würden (vgl. 1.1). Zu zwei windschiefen Geraden existiert nach Satz (1.15) genau ein Paar zueinander paralleler Ebenen durch g_{AB} und g_{CD}. Zu diesen beiden Ebenen existiert genau eine parallele Ebene ε, die von beiden Ebenen (und damit von den vier Punkten) gleichen Abstand hat (siehe Bild 36b).

Bild 36b



Da es genau 3 Möglichkeiten gibt, die vier Punkte zu je zwei auf zwei Halbräume aufzuteilen, haben wir im 3. Fall genau drei Ebenen der gesuchten Art. (Diese sind offensichtlich auch voneinander verschieden.)

Die Antwort auf (3.4') lautet also: Es gibt sieben verschiedene Ebenen der gesuchten Art.

3.2. Analogiebetrachtungen helfen uns Aufgaben lösen

Wie schon erwähnt – und wohl mit Aufgabe (3.4) und (3.4') deutlich geworden ist –, kann man die Analogiemethode mitunter auch benutzen, um ein räumliches Problem zu lösen. Man formuliert ein analoges ebenes Problem, löst zunächst dieses, weil es vertrauter ist, und versucht danach, die Lösungsschritte auf das ursprüngliche Problem zu übertragen. Wir betrachten die folgende Aufgabe als Beispiel:

Aufgabe (3.5) *Im Raum sind fünf Punkte gegeben, die weder in einer Ebene noch auf einer Kugel liegen. Wie viele verschiedene Ebenen oder Kugeln gibt es, so daß die fünf Punkte jeweils gleichen Abstand von einer solchen Ebene oder Kugel haben?*

Offensichtlich ist diese Aufgabe als Fortsetzung von Aufgabe (3.4') gedacht. Eine analoge Aufgabe in der Ebene zu formulieren, fällt uns daher leicht:

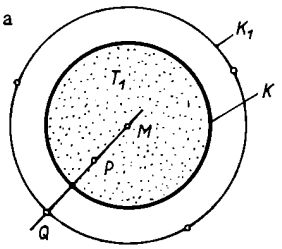
Aufgabe (3.5') *In der Ebene sind vier Punkte gegeben, die weder auf einer Geraden noch auf einem Kreis liegen. Wie viele verschiedene Geraden oder Kreise gibt es, so daß die vier Punkte jeweils gleichen Abstand von einer solchen Geraden oder einem solchen Kreis haben?*

Zur Lösung von (3.5') bemerken wir zunächst, daß eine Gerade g oder ein Kreis K der gewünschten Art die Ebene (ausschließlich der Geraden- bzw. Kreispunkte) vermöge der Halbebenen bzw. des Inneren und Äußeren des Kreises in zwei Teile T_1 und T_2 zerlegt.

1. Fall: Alle Punkte liegen in einer der Teilebenen. Dann müssen sie, da sie von der Geraden g oder dem Kreis K gleichen Abstand haben, auf einer (zu g parallelen) Geraden oder einem (zu K konzentrischen) Kreis liegen, ganz im Widerspruch zur Voraussetzung.

2. Fall: Genau einer der Punkte (etwa mit P bezeichnet) liege in T_1; die anderen drei Punkte liegen dann in T_2. Diese drei Punkte liegen sicher auf einer Geraden oder auf einem Kreis (dem Umkreis des Dreiecks; sein Mittelpunkt sei M). Bei der ersten Lage existiert genau eine Gerade der gesuchten Art (siehe Lösung zu (3.4)). Liegen die drei Punkte auf einem Kreis K_1, so existiert genau ein Kreis K der gesuchten Art. Dieser Kreis K muß zu K_1 konzentrisch sein und $\overline{PQ}$ halbieren, wobei Q der Schnittpunkt von g_{MP} mit K_1 ist (Bild 37a). In diesem Fall gibt es also genau vier verschiedene Geraden oder Kreise. (Vgl. dazu die Lösung von (3.4)!)

Bild 37a



3. Fall: Genau zwei der Punkte (etwa P_1, Q_1) liegen in T_1; die beiden anderen Punkte (P_2, Q_2) dann in T_2. Wir betrachten die Verbindungsgeraden g_1, g_2 von P_1, Q_1 und P_2, Q_2. Gilt $g_1 \parallel g_2$, so existiert genau eine Gerade, die zu g_1 und g_2 parallel ist und von g_1 und g_2 (und damit von den vier Punkten) gleichen Abstand hat. (Vgl. die Lösung zu (3.4)!) Sind aber g_1 und g_2 nicht parallel, so existieren genau zwei konzentrische Kreise K_1 und K_2 mit P_1, $Q_1 \in K_1$ und P_2, $Q_2 \in K_2$. (Siehe Bild 37b; den Existenznachweis erbringt man leicht konstruktiv.) Zu diesen zwei konzentrischen Kreisen gibt es genau einen dritten, der von K_1 und K_2 und damit von den vier Punkten gleichen Abstand hat.

Wir erhalten also stets entweder genau eine Gerade oder genau einen Kreis der gewünschten Art. Da es genau 3 Möglichkeiten gibt, die vier Punkte zu je zwei auf zwei Teilebenen zu verteilen, existieren im 3. Fall genau drei Geraden oder Kreise der gesuchten Art. (Vgl. die Lösung zu (3.4)!)

Bild 37b

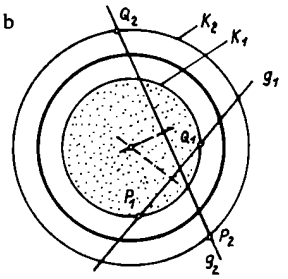
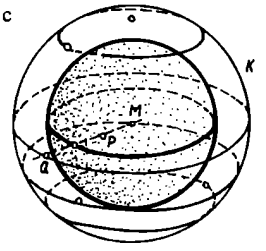


Bild 37c



Als Ergebnis der Aufgabe (3.5') erhalten wir demnach: Es gibt genau sieben verschiedene Geraden oder Kreise der gesuchten Art.

Interessant ist, daß man allerdings nicht von vornherein angeben kann, wie viele davon Geraden und wie viele davon Kreise sind. Das hängt von der speziellen Lage der Punkte ab! (Der Leser betrachte dazu einmal verschiedene Fälle!)

Mit dieser Lösung haben wir praktisch auch die Lösung von (3.5). Der Leser kann sie „völlig analog" zu (3.5') selbst durchführen. (Man betrachte dazu auch das zu 37a) analoge Bild 37c.) Im Unterschied zu den Aufgaben (3.4), (3.4') entsteht für das räumliche Problem sogar kein weiterer Fall!

Quaisser, E./ H. J. Sprengel

Räumliche Geometrie

85 Seiten mit 55 Abbildungen, etwa 7,50 M · Bestell-Nr. 570 978 5
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

Aus Erfahrungen bei der fachlichen Ausbildung von Lehrern und bei der außerunterrichtlichen Tätigkeit in mathematischen Zirkeln ergibt sich, daß Schwierigkeiten in der räumlichen Geometrie bereits zu einem erheblichen Teil ihre Ursache darin finden, daß grundlegende Begriffe und Beziehungen im Anschauungsraum nicht ausreichend bekannt sind. Dazu kommen Unsicherheiten beim Beweisen bezüglich der möglichen Voraussetzungen und bezüglich der Methoden. Hier möchte das Bändchen helfen. Zahlreiche instruktive Abbildungen sowie durchgerechnete Aufgaben dienen dem besseren Verständnis.

Der Autor des Buches

Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie

hat das Wort

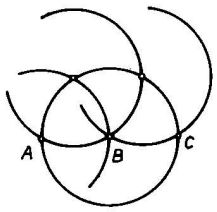
Es war nicht schwer, ein Buch über Briefmarken zu schreiben, deren Motive oder Ausgabenanlässe in enger Beziehung zur Mathematik stehen, denn es gibt sehr viele solcher Marken, und jedes Jahr erscheinen in zunehmendem Umfang neue. Wer sich für Briefmarken interessiert und gleichzeitig ein Herz für die Mathematik hat, kann mathematische Überlegungen leicht auch an solche Marken anknüpfen, die bei oberflächlicher Betrachtung keinen Bezug zur Mathematik zu haben scheinen. Der polnische Mathematiker *Hugo Steinhaus* behauptete im Vorwort seines mathematischen „Bilderbuches" *Kaleidoskop der Mathematik* (deutsche Übersetzung: Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959): *Mathematik ist universell – kein Ding ist ihr fremd.*

Sehen wir uns also unter diesem Aspekt einmal die uns seit Jahren vertraute Dauerserie *Sozialistischer Aufbau in der DDR* an!

Beim Blick auf die 60-Pf-Marke kann man an den Staatlichen Mathematisch-Physikalischen Salon denken, der im Dresdner Zwinger seine Heimstatt hat. Der Beginn dieser einzigartigen Sammlung mathematischer, geodätisch-geographischer, physikalischer, astronomischer und technischer Instrumente und Uhren, die heute zu den bedeutendsten Spezialmuseen ihrer Art in der Welt zählt, reicht bis zum Jahre 1560 zurück. Stücke aus dem Mathematisch-Physikalischen Salon, die häufig neben dem wissenschaftshistorischen einen bedeutenden kunsthistorischen und Schauwert haben, wurden bereits mehrfach als Motiv für Briefmarken der DDR gewählt.

Der Zirkel aus dem Staatswappen der DDR (2-M-Marke), hier als Symbol der Rolle der Wissenschaft und Technik beim sozialistischen Aufbau, gehört zu den ältesten und wichtigsten geometrischen Konstruktionsinstrumenten. Über die Frage, welche Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal exakt lösbar sind, gibt es eine reichhaltige und komplizierte mathematische Theorie. Unter anderem zeigte der italienische Mathematiker *Lorenzo Mascheroni* (1750 bis 1800), daß man jeden Punkt, der aus einer gegebenen Figur mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, auch mit dem Zirkel allein (d. h. ohne Benutzung des Lineals) konstruieren kann. Zum Beispiel läßt sich die Strecke AB über B hinaus wie folgt mit dem Zirkel allein verdoppeln (C ist der gesuchte Punkt) (Bild 1):

Bild 1



Aufgabe 1: Versucht einmal, die Strecke AB mit dem Zirkel allein zu halbieren!

Das Alte Rathaus in Leipzig (70-Pf-Marke), 1556 von dem bedeutenden Renaissance-Baumeister *Hieronymus Lotter* (1497? bis 1580) erbaut, ist gemäß den damals geltenden kunsttheoretischen Regeln durch seinen Turm nach dem „goldenen Schnitt" geteilt, d. h., die Gesamtlänge l verhält sich zum längeren Teilabschnitt x wie dieser zum kürzeren Abschnitt $l-x$:

$$\frac{l}{x}=\frac{x}{l-x}.$$

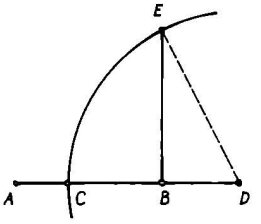
Man glaubte seit der Antike, eine solche Teilung sei besonders harmonisch, dem Auge wohlgefällig. Bei gegebener Länge l ist x die positive Lösung der quadratischen Gleichung $x^2+lx-l^2=0$, d. h.

$$x=\frac{l}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Der zu x gehörige Teilpunkt der Strecke AB mit $\overline{AB}=l$ läßt sich mit Zirkel und Lineal leicht konstruieren (Bild 2).

Man verlängere AB über B hinaus um die Hälfte bis D, errichte in B die Senkrechte auf AB und trage auf ihr $\overline{AB}$ ab, so daß $AB\cong BE$ wird. Durch Zirkelschlag um D mit dem Radius DE läßt sich nun $\overline{DE}$ leicht von D aus in Richtung A abtragen. Der erhaltene Punkt C ist der gesuchte Teilpunkt, da DE nach dem Satz von Pythagoras die Länge $\frac{l}{2}\sqrt{5}$ hat, demnach wegen $\overline{DB}=\frac{l}{2}$ die Strecke BC die gewünschte Länge x hat.

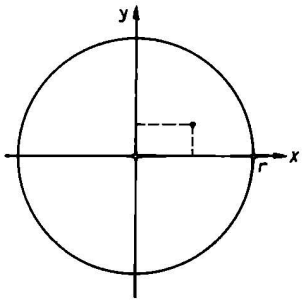
Bild 2



Aufgabe 2: Versucht den Teilpunkt C mit dem Zirkel allein zu konstruieren!

Die interessant gestalteten Dächer des Pavillons auf der Berliner Fischerinsel (15-Pf-Marke) und des Teepotts in Warnemünde (80-Pf-Marke) lassen sich (wie jedes Dach) mathematisch durch eine Funktion f von zwei Veränderlichen x, y beschreiben. Denken wir uns in die Grundrißebene des jeweiligen Gebäudes ein Koordinatensystem gelegt, so läßt sich jeder Punkt des Grundrisses durch ein Paar (x, y) reeller Zahlen beschreiben. Ist der Grundriß z. B. kreisförmig mit dem Radius r, so gehören bei geeigneter Lage des Koordinatensystems genau die Punkte zum Grundriß, für die $x^2+y^2\leqq r^2$ gilt (Bild 3).

Bild 3



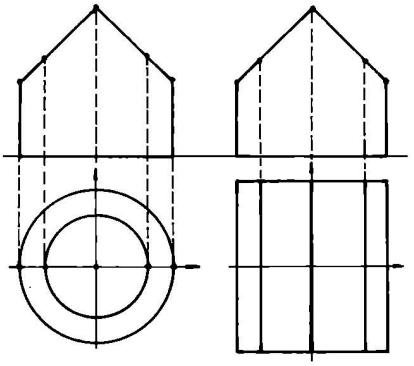
Jedem Paar (x, y), für das der zugehörige Punkt zum Grundriß gehört, wird durch das vorhandene oder gedachte Dach der Wert $z=f(x, y)$ der Höhe des Gebäudes an der Stelle (x, y) über der Grundrißebene zugeordnet. Umgekehrt beschreibt jede Funktion f, die für alle Paare (x, y) von Koordinaten definiert ist, deren zugehörige Punkte einem bestimmten Grundriß in der x-y-Ebene angehören, ein „Dach", falls noch die Bedingung $f(x, y)\geqq 0$ erfüllt ist. (Natürlich ist nicht jede durch eine solche Funktion erfaßte Fläche technisch und ästhetisch als Dachform geeignet!) Eine gute Vorstellung von einer solchen Fläche erhält man, wenn man (analog wie auf geographischen Karten) Punkte mit gleichem Funktionswert durch eine Kurve (eine Höhen- oder Niveaulinie) verbindet.

Eine Aufgabe von Dozent Dr. P. Schreiber

Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

Für einen runden Turm mit kegelförmigem Dach bilden die Höhenlinien eine Schar konzentrischer Kreise, für ein Bauernhaus mit Satteldach bilden sie eine Schar paralleler Strecken (Bild 4):

Bild 4



Die Funktion f, die das Dach beschreibt, ist im Falle des Turms für (x, y) mit $x^2+y^2 \leqq r^2$ durch $f(x, y)=h+c\cdot\sqrt{x^2+y^2}$ und im Falle des Bauernhauses für (x, y) mit $-a \leqq x \leqq a$ und $-b \leqq y \leqq b$ durch $f(x, y)=h+c\cdot|x|$ definiert. Dabei ist h die Höhe der Turmspitze bzw. des Firstes, c der (negative) Anstieg des Daches; $2a$, $2b$ sind die Seitenlängen des rechteckigen Hausgrundrisses. Nun versucht einmal, andere Dachformen durch eine Funktion von zwei Veränderlichen zu beschreiben! Wer ganz mutig ist, wagt sich vielleicht an das Dach des Teepotts oder gar an das Dach des Pavillons auf der Fischerinsel. (Dabei soll es zunächst nicht auf Einzelheiten ankommen, sondern auf die Erfassung wesentlicher Merkmale der Dachform.) Aber auch schon das Zeichnen des ungefähren Verlaufs der Niveaulinien dieser Dächer ist eine lohnenswerte Aufgabe, die das räumliche Vorstellungsvermögen schult.

Mit diesen Betrachtungen sind die mathematischen Möglichkeiten unserer Dauerserie längst nicht ausgeschöpft. Zählt die Zahl der Stockwerke und Fenster der Hochhäuser, und schätzt ab, wie viele Bewohner dieser Häuser uns wohl aus unseren Briefmarken entgegenblicken könnten! Auch an die Weltzeituhr auf dem Berliner Alexanderplatz (25-Pf-Marke) lassen sich sicher interessante Aufgaben knüpfen. Wir erwarten eure Vorschläge und Anregungen.

P. Schreiber

Leseprobe aus:

Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie

Das 20. Jahrhundert

Seit Beginn unseres Jahrhunderts hat das mathematische Wissen ebenso sprunghaft zugenommen wie die Vielfalt und das Ausmaß der Anwendungen. Wir vermeiden hier absichtlich statistische Angaben über die Zahl der Veröffentlichungen oder die Zahl der in Forschung und Lehre tätigen Mathematiker, da solche quantitativen Aussagen, so eindrucksvoll sie sein mögen, kein Bild von dem in der Tat vollzogenen qualitativen Sprung gegenüber früheren Jahrhunderten vermitteln können. Zwar gilt auch für die Mathematik das allgemeine Gesetz, daß die Leistung des einzelnen Wissenschaftlers mehr und mehr im Strom des allgemeinen Fortschritts aufgeht, aber noch ist die Mathematik nicht in das von den meisten Natur- und Ingenieurwissenschaften erreichte Stadium getreten, wo der für weitere Fortschritte nötige finanzielle, experimentelle und personelle Aufwand herausragende Einzelleistungen mehr und mehr vermindert. Andererseits war und ist das Ende des 19. und das 20. Jh. wie keine vorhergehende Epoche reif für grundlegende mathematische Erkenntnisse. So weist die Mathematik dieser Zeit eine beachtliche Zahl von Persönlichkeiten auf, die man eines Tages aus größerem historischem Abstand vermutlich mit Copernicus, Galilei oder Newton gleichsetzen wird: Georg Cantor, David Hilbert, Emmy Noether, Kurt Gödel, John v. Neumann, um nur einige Beispiele zu nennen. Aber noch sind diese Namen im allgemeinen nur Mathematikern bekannt und ihre Leistungen nur solchen faßbar. (Man versuche einmal abzuschätzen, für wieviel Prozent der Weltbevölkerung im 16. Jh. der Name Copernicus etwas bedeutet haben mag!)

Es ist also wahrscheinlich objektiv zu früh für die auf eine breite Öffentlichkeit zugeschnittene philatelistische Würdigung der großen Mathematiker der letzten Jahrzehnte. Sogar die hinsichtlich Wertung und Propagierung der Wissenschaft führende SU hat, wie wir sehen werden, bisher die Leistungen ihrer Mathematiker nur in relativ bescheidenem Umfang auf Briefmarken gewürdigt. Demgegenüber haben verschiedene Staaten Marken zum Andenken an Mathematiker von nationaler Bedeutung herausgegeben, deren Lebens- und Schaffenszeit in das 20. Jh. hineinreicht, die aber sogar in der internationalen Fachwelt kaum bekannt sind. Der Leser wird derartige Ausgaben, die wir aus Platzmangel im Text nicht behandeln können, in der Markenzusammenstellung am Ende des Buches finden.

Annotation siehe Seite 7 des MSB-Sonderheftes.

a) Ein Dreieck soll aus den Seitenlängen a, b und der Differenz $\delta=\alpha-\beta$ der beiden nichteingeschlossenen Winkel konstruiert werden. Man untersuche, unter welchen Bedingungen (an a, b, δ) die Aufgabe keine bzw. genau eine bzw. unendlich viele Lösungen hat, und gebe für den Fall eindeutiger Lösbarkeit ein Konstruktionsverfahren für das gesuchte Dreieck an.

b) Es sei vorausgesetzt, daß es nicht möglich ist, mit Zirkel und Lineal zu jedem gegebenen Winkel ε einen Winkel der Größe $\frac{\varepsilon}{3}$ zu konstruieren. Unter dieser Voraussetzung zeige man, daß die Aufgabe, ein Dreieck aus a, b und $\delta=\gamma-\alpha$ zu konstruieren, ebenfalls nicht allgemein mit Zirkel und Lineal lösbar ist.

c) Man ermittle und löse möglichst viele weitere sinnvolle und wesentlich neue Aufgaben, Dreiecke aus drei Vorgaben zu konstruieren, wenn zu den gegebenen Größen außer Seiten und Winkeln auch Summen und/oder Differenzen von Seiten und/oder Winkeln gehören können.

Hinweise:

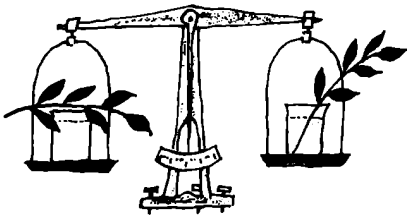
1. Vorgabe von z. B. $\alpha+\beta$ ergibt keine „wesentlich neue" Aufgabe, da sie gleichbedeutend mit der Vorgabe γ ist.
2. Ist z. B. $a+b$ und a oder $a+b$ und $a-b$ gegeben, so lassen sich daraus ohne weiteres a, b einzeln bestimmen. Analoges gilt für Winkel. Diese und ähnliche Fälle ergeben also ebenfalls keine „wesentlich neuen" Aufgaben.

P. Schreiber

gut gedacht ist halb gelöst

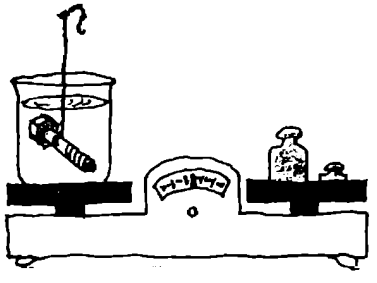
Eine kleine Auswahl von Denksportaufgaben aus dem gleichnamigen Unterhaltungsbuch, MSB Band 53

▲1▲ Auf jeder Schale einer Hebelwaage steht ein mit Wasser gefülltes Becherglas. In ein Glas wird ein Zweig gesteckt, ein zweiter, gleich schwerer Zweig wird quer über das andere Glas gelegt, so daß er das Wasser nicht berührt. Zu diesem Zeitpunkt befindet sich die Waage im Gleichgewicht.
Wie verhält sich die Waage, wenn der flach auf dem Glas liegende Zweig vertrocknet?

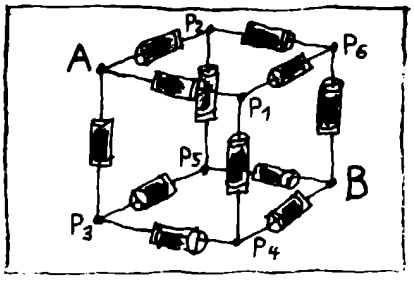


▲2▲ Bei einer Wanderung im Gebirge ergab sich die Frage, wie man die Höhe der Berggipfel bestimmen könne. Ein Tourist behauptete, daß man auch mit einem Thermometer recht genau Höhen messen könne.
Ist eine Höhenbestimmung auf diese Weise möglich?

▲3▲ Auf einer Waage steht eine zu Dreiviertel mit Wasser gefüllte Schüssel. Wirft man eine eiserne Schraube hinein, so zeigt die Waage eine Massenzunahme entsprechend dem Gewicht der Schraube an.
Ist auch dann eine Massenzunahme feststellbar, wenn die Schraube, an einem dünnen Faden hängend, in das Wasser gehalten wird?



▲4▲ Bekanntlich kann man den Gesamtwiderstand einer Schaltung, die aus mehreren zueinander parallel oder in Reihe geschalteten elektrischen Widerständen besteht, mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln berechnen. Ist eine solche Schaltung aus einer größeren Zahl kompliziert aneinandergeschalteter Widerstände aufgebaut, so müssen zur Bestimmung des Gesamtwiderstandes häufig langwierige Rechnungen durchgeführt werden. In manchen Fällen kann jedoch der Rechengang durch Überlegung beträchtlich verkürzt werden, wie an dem folgenden Problem zu erkennen ist.
Bestimmen Sie durch möglichst wenig Rechnung, vielmehr durch etwas Nachdenken, den elektrischen Widerstand zwischen den Punkten *A* und *B* eines „Würfels", der aus zwölf kleinen Widerständen von je 100 Ω als Würfelkanten aufgebaut ist!



▲5▲ Einige Freunde unterhielten sich darüber, wie schwer es sei, Entfernungen oder Höhen einigermaßen richtig zu schätzen, und sie kamen zu der Meinung, daß das menschliche Schätzungsvermögen unvollkommen sei. Konrad widersprach und behauptete, kleinere Zeitabstände mit großer Genauigkeit ohne Uhr schätzen zu können. Es wurde vereinbart, daß er ohne Uhr eine Zeit von 5 Minuten auf 10 Sekunden genau bestimmen sollte. Trotz strenger Kontrolle gelang es ihm.
Wie hatte er das gemacht?

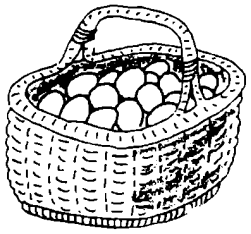
▲6▲ Branco B., ein jugoslawischer Klempner, stellt als Souvenirs für Touristen drei Serien von Kannen her, deren Öffnungen verschiedene Formen haben: kreisrunde, quadratische und dreieckige. Mit dem Korkverschluß der Kannen will er nicht so viel Arbeit haben, und er überlegt, ob sich dafür nicht eine Form finden ließe, mit der man alle drei Kannenöffnungen verschließen kann.
Welche Form muß ein solcher Korkverschluß haben?

▲7▲ In einem großen Betrieb wurde eine Fußballmannschaft aufgestellt. Drei Spieler der Mannschaft hießen mit Familiennamen Krause, vier Lehmann, zwei Schulz und zwei Meyer. Vier der Spieler hatten den Vornamen Dieter, drei den Vornamen Erhard und weitere drei den Vornamen Kurt. Der Mittelstürmer hieß Günther. Keine zwei Spieler hatten die gleichen Vor- und Familiennamen. Torhüter war Erhard Meyer.
Wie hießen die übrigen zehn Spieler mit ihren vollen Namen?

▲8▲ Einer Anekdote zufolge sollte ein zum Tode Verurteilter entweder erschossen oder erhängt werden. Der Richter erklärte dem Verurteilten zynisch, daß er sich seinen Tod selbst wählen könne. Er solle „erraten", ob er erschossen oder erhängt werde. Treffe seine Aussage zu, so werde er erschossen. Treffe sie nicht zu, werde er erhängt. Trotz dieses grausamen Spiels des Richters merkte der Verurteilte auf. Nach seiner Aussage mußte er am Leben gelassen werden.
Warum konnte das Todesurteil nicht vollstreckt werden?

▲9▲ Auf der längsten Straßenbahnlinie einer Stadt benötigt die Bahn von Endstelle zu Endstelle eine Fahrzeit von genau zwei Stunden. Laut Fahrplan fährt jede volle Viertelstunde von jeder der beiden Endstellen eine Straßenbahn ab. Kürzlich stand in der Zeitung, daß beschlossen worden war, den Straßenbahnverkehr wesentlich zu verbessern und künftig die Bahnen alle zehn Minuten verkehren zu lassen. Dazu sei eine beträchtliche Erweiterung des Fahrzeugparks notwendig.
Wie viele Gegenbahnen trifft eine um zehn Uhr von der Endstelle abfahrende Straßenbahn dieser längsten Linie nach dem alten und nach dem neuen Fahrplan auf ihrer Fahrt zur anderen Endstelle?

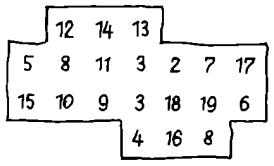
▲10▲ Zwei Kleintierzüchter verkauften u. a. regelmäßig je 30 Eier, einer von ihnen 3 Stück für 1 Mark, der andere 2 Stück für eine Mark. Eines Tages jedoch mußte der eine den anderen bitten, seine 30 Eier mit zu verkaufen. Er könne ja dann jeweils 5 Eier für 2 Mark anbieten.
Der Erlös aus dem Verkauf aller 60 Eier betrug 24 Mark. Bei getrennten Geschäften hingegen hätte der eine 10 Mark, der andere 15 Mark eingenommen, also 1 Mark mehr.
Wie ist das Fehlen dieser einen Mark zu erklären?



▲11▲ Auf einer Baustelle arbeitete eine aus 4 Maurern bestehende Gruppe. Nach ihrem Alter befragt, antwortete einer von ihnen: „Wir sind alle vier verschiedenaltrig. Zusammen sind wir 129 Jahre alt. Drei von uns haben je eine Quadratzahl von Jahren hinter sich. Ebenso hatten drei von uns vor 15 Jahren als Alter eine Quadratzahl."
Wie alt waren die vier Kollegen, als sie gefragt wurden?

▲12▲ Stellen wir uns jetzt die Aufgabe, die kleinste natürliche Zahl zu finden, die in ihren vierten Teil übergeht, wenn man ihre erste Ziffer an die letzte Stelle rückt.
Gibt es eine solche Zahl? Wenn ja, wie lautet sie?

▲13▲ Die folgende Figur, auf der 20 natürliche Zahlen verteilt sind, wollen wir in vier zueinander kongruente Teile zerlegen.



Dabei soll die Summe aus den Zahlen, die sich auf jedem dieser Teile befindet, den Wert 50 haben.
Wie müssen wir die Figur zerlegen?

▲14▲ Auf einem langen, glatten, schräggestellten Brett ließen Bauhandwerker aus der ersten Etage Ziegelsteine in den Hof hinabgleiten, wo sie von einem Jungen gestapelt wurden. Alle Steine hatten die gleiche Masse, gleiche Abmessungen und gleiche Oberflächenbeschaffenheit. Einer der Männer ließ gleichzeitig zwei dieser Steine abwärtsgleiten, einen auf der Breitseite, den anderen auf der Schmalseite. Beide Steine bewegten sich anfangs mit gleich großen Geschwindigkeiten. Während des Rutschens verringerte der Junge den Neigungswinkel des Brettes.
Welcher der beiden Ziegel kam als erster zur Ruhe?

Freyer, K./R. Gaebler/W. Möckel

gut gedacht ist halb gelöst

200 Knobeleien, 223 Seiten mit 284 zweifarbigen Zeichnungen, 4 Tabellen · 12,00 M
Bestell-Nr. 653 195 8
Urania-Verlag Leipzig/Jena/Berlin

„Köpfchen, Köpfchen!" muß man auch bei der Beschäftigung mit diesem Buch haben. „Kniffliges" für jung und alt wird hier in einer abwechslungsreichen, nach Sachgebieten geordneten Auswahl dargeboten. Und wer durch dieses Buch Spaß am „Knobeln" findet, wird sich auch einmal an schwierigere Probleme heranwagen. Unterhaltsame Aufgaben aus verschiedenen Gebieten von Mathematik und Physik regen das logische Denken an.
Aus dem Inhalt: *Physikalische Denkaufgaben* (5 Kapitel); *Mathematische Denkaufgaben:* Es müssen nicht immer gleich Formeln sein! – Schon Grundkenntnisse genügen! – Auf den Ansatz kommt es an! – Die Anschauung nicht vergessen! – Kombiniere – Rechne – Schlußfolgere! – Fortsetzung und Verallgemeinerung führen zum Ziel!

Die Bücher heute sind die Taten
von morgen. Heinrich Mann

Bücher lesen, heißt wandern gehen
in ferne Welten, aus den Stuben
über die Sterne. Jean Paul

Von den vielen Welten,
die der Mensch nicht von der Natur
geschenkt bekam, sondern sich aus
dem eigenen Geist erschaffen hat,
ist die Welt der Bücher die größte.
Hermann Hesse

Der Geizige liest jedes gekaufte
Buch aufmerksamer, er will etwas
für sein Geld haben. Jean Paul

Einige Bücher soll man schmecken,
andere verschlucken und einige
wenige kauen und verdauen.
Sean O'Casey

Lesen – das ist die beste Lehre.
Den Gedanken eines großen Menschen
zu folgen, ist die unterhaltsamste
Wissenschaft. Alexander Puschkin

Menschen, die glauben, sie haben
keine Zeit zum Bücherlesen, wissen
noch nicht, daß die Literatur ihnen
viel mehr gibt, als sie ihnen Zeit
nimmt. Ruth Werner

Nicht die haben die Bücher recht
lieb, welche sie unberührt in
den Schränken aufheben, sondern
die sie Tag und Nacht in den Händen
haben, und daher beschmutzt sind,
welche Eselsohren darein machen,
sie abnutzen und mit Anerkennung
bedecken. Erasmus von Rotterdam

Wir sollten Bücher wie Leckerbissen
ansehen und nicht nur nach
dem greifen, was uns am meisten
reizt, sondern hauptsächlich auf
das achten, was am gesündesten ist;
nicht, als ob wir auf jenes ganz
zu verzichten brauchten, aber dieses
ist doch bei weitem vorzuziehen.
Plutarch

Man muß vom Alten lernen,
Neues zu machen. B. Brecht

Der echte Schüler lernt
aus dem Bekannten das Unbekannte
zu entwickeln. J. W. v. Goethe

Eine „niederträchtige“ Aufgabe

Der große Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855) erhielt als Kind die von Valentin Heins (1637 bis 1704) verfaßte „Schatzkammer der kaufmännischen Rechnung“ geschenkt. Heins war „Rechenmeister“ an einer Hamburger Schule und gründete 1690 zusammen mit Heinrich Meis(s)ner die „Mathematische Gesellschaft“ in Hamburg. Sein Rechenbuch scheint sich großer Beliebtheit erfreut zu haben, denn das Gaußsche Exemplar entstammt der 6. Auflage, die 75 Jahre nach dem Tode von Heins erschienen war. Es spricht eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, daß gerade dies Buch es gewesen ist, das in jeder Gauß-Biographie eine Rolle spielt:

Der Braunschweiger Lehrer Büttner, so heißt es in den Lebensbeschreibungen von Gauß, habe eines Tages seinen Schülern die Aufgabe gestellt, sämtliche Zahlen von 1 bis 100 zusammenzuzählen. Gauß, etwa neun Jahre alt, und der kleinste in der Klasse, habe schon nach wenigen Augenblicken seine Tafel mit der Zahl 5050 abgegeben; während seine Mitschüler alle Additionen ausführten, hatte er das Prinzip der Summenformel für die arithmetische Reihe entdeckt und benutzt. Dadurch auf ihn aufmerksam geworden, habe sein Lehrer Büttner für ihn aus Hamburg ein Rechenbuch kommen lassen. Freilich ist auch ein anderes Rechenbuch im Gespräch, das jener Pädagoge für Gauß gekauft haben soll, aber es spricht viel dafür, daß es tatsächlich Heins' „der lieben Jugend zu Lieb und Besten“ geschriebenes Buch war, welches Büttner seinem Schüler geschenkt hat. Auf jeden Fall hat es der kleine Gauß benutzt, wie aus mehreren handschriftlichen Eintragungen, u. a. mit dem Datum 2. 1. 1789, zu entnehmen ist. So hat er auch seine Auflösung des ersten Teiles „der besonderen, ganz niederträchtig sich aufführenden Schlußzugabe“ auf einer leeren Seite des Buches festgehalten. Diese Aufgabe wollen wir nun hier wiederholen. Wir folgen dabei der Wiedergabe in der Abhandlung von Horst Michling „Aus der Bücherei des Gymnasiasten Johann Friedrich Carl Gauß“ in den Mitteilungen der Gauß-Gesellschaft in Göttingen (Heft Nr. 16/1979, S. 5 bis 16) und behalten weitgehend die altertümliche Ausdrucksweise und Rechtschreibung von Heins bei, modernisieren aber ganz überholte und heute praktisch unbekannte, aus der lateinischen Sprache stammende Fachausdrücke. Außerdem haben wir an einigen Stellen zur Erleichterung des Verständnisses geringfügig in den Text eingegriffen, einige Ergänzungen in eckigen Klammern eingefügt und einige Erläuterungen in Anmerkungen beigegeben.

Algebraische Schluß-Zugabe

Gesucht wird ein Anagramm[1]), so aus einem in 15 Buchstaben verwechselten liebwerthen Eigennamen geflossen. Dieses nun arithmetisch zu erforschen, so ordne man dem Alphabet oder ABC die ordentlich aufeinander folgenden Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., zu, also daß *Z* die Zahl 24 erhalte[2]). Wenn solches verrichtet, suche man 5 Glieder[3]) einer arithmetischen Folge (welche nemlich von dem kleinsten bis zum grössesten mit I, II, III, IV, V zu bezeichnen) von dieser Eigenschaft: So man multipliciret das erste mit dem 5ten, das 2te mit dem 4ten, und das dritte mit sich selber, gibt das 2te Product die Summe der 5 Glieder der Folge +10. So man aber die drei Producte multipliciret, erscheinen 72765[4]). Nachdem nun diese 5 gesuchten Zahlen der arithmetischen Folge bekannt gemacht, auch mit den 5 ersten römischen Zahlen bezeichnet, dann wird weiter das gesuchte Anagramm, oder dessen Buchstaben, folgender massen eröfnet: Die Zahl bey IV giebt den ersten [Buchstaben], die Zahl bey II weiset den 2ten, die Summe der Zahlen II und III geben den 3ten. Wenn 1/4 des Unterschieds der Zahlen I und V von der mit III bezeichneten Zahl subtrahiret wird, weiset die Differenz den 4ten. Die der IV angehörige Zahl, weniger der halben Differenz der Folge, weiset den 5ten; die beiden Zahlen III und IV zu der halben Differenz der Folge addiret, bringen den 6ten; das Doppelte der Zahl bei IV giebt den 7ten. Die Zahlen bey I und II zu der halben Differenz der Folge addiret, entdeken den 8ten. Das Doppelte der Zahl bey III weniger der halben Differenz der Folge zeiget den 9ten. Von dieser Zahl die Differenz der Folge weniger 2 subtrahiret, weiset die Differenz den 10ten; dazu die doppelte Differenz der Folge addiret, eröfnet den 11ten. Die Zahl bei V weniger die halbe Differenz der Folge, davon die Hälfte zeiget den 12ten; dieser zu der doppelten Differenz der Folge addiret, macht bekannt den 13ten. Dessen Quadrat-Wurzel weiset den 14ten, und wenn aus den Zahlen I und II eine Summe gemachet wird, zeigt sie den 15ten und zugleich letzten Buchstaben des Anagramms.

Wann nun dies Anagramm in seiner Bedeutung gefunden, kann es sehr leicht (massen man willens, allhier keine hohen Sprünge thun zu wollen) folgender Gestalt aufgelöset und der rechte eigne Name daraus vorgestellet werden, wie folgt:

Man bezeichne das ABC bis Z, nemlich A mit der ersten Trigonal-, B mit der 2ten Tetragonal-, C mit der 3ten Pentagonal-, D mit der 4ten Hexagonalzahl, und so ferner bis zum Ende des Alphabets[5]).

Wenn dieses verrichtet, addire man alle diese 24 Zahlen und teile die Summe durch 50. Den Quotienten merkt man sich.

Dann suchet man ferner eine harmonische Folge von 5 Gliedern, und zwar in kleinstem Verhältniß ganzer Zahlen. Deren Summe subtrahire vom eben erhaltenem Quotienten. Von 1/3 der Differenz werden 8 subtrahiret, und weist sodann der Rest den ersten Buchstaben. Bevor wir aber die folgenden Buchstaben entdecken, so werde die Zahl dieses ersten Buchstaben weniger 21 in 5 Glieder einer geometrischen Folge zertheilet, also daß das mittlere Glied sei das Quadrat von 6. Wenn solche 5 Glieder oder Zahlen gefunden, numerire man selbige von der kleinsten bis zur grössesten mit Nr. 1, 2, 3, 4, 5. Zu Nr. 4 addire man 1, so weiset die Summe den 2ten [Buchstaben]. Von dieser Zahl subtrahire das halbe mittlere Glied; die Differenz, multipliciret mit dem Quadrat von 3, zeiget den 3ten. Ferner der Zahl des 2ten Buchstaben weniger 3, ihr 1/4 multiplicire [mit der Summe] aus der Zahl des 2ten vermehrt um die Zahl bey Nr. 2. Das Resultat giebt den 4ten.

Diese, des 4ten Buchstaben Zahl + Quadratwurzel des mittleren Gliedes zu dem Product der beiden mit 1 und 5 bezeichneten Zahlen addiret, macht bekannt den 5ten. Die Zahlen Nr. 2 und Nr. 5 addiret zur Quadratwurzel des mittleren Gliedes:

Das Dreifache der Summe zeiget den 6ten. Aber die der Nr. 2 angehörige Zahl halbiret meldet den 7ten. So man ferner das Quadrat der Zahl 10, +1, von der Zahl des 6ten Buchstaben abzieht, verbleibt die Zahl des 8ten. Die Zahl bey Nr. 2 zu Nr. 3 addiret; zum Ergebnis das Product (aus der Differenz der Zahlen bey Nr. 3 und bey Nr. 2 und dem Ergebnis) hinzugezählet, ferner die Zahl bey Nr. 2 addiret, giebt das Resultat den 9ten. Die Zahl bey Nr. 4 + 1 weiset den 10ten. Dessen Sechsfaches + den zweifachen Quotienten der geometrischen Folge zeiget den 11ten. Setzt man die Pronic-Zahl[6]) von 8 rechts an die Kubikzahl von 3 an, also daß es eine einzige Zahl mache, so zeiget solche den 12ten. Aber diese erwehnte Kubikzahl von 3 an die 4. Trigonalzahl[7]) zur Rechten also angefüget, daß es eine einzige Zahl werde, giebt den 13ten zu erkennen. Die Quersumme dieser Zahl trigonal vermehret[8]) zeiget den 14ten. Endlich, wenn aller vorigen Buchstaben Summe das Zehnfache der Pronic-Zahl von 8 sowie die 4. Trigonalzahl addiret und vom Resultat die Kubikzahl von 20 subtrahiret wird, so eröfnet der Rest den 15ten und letzten Buchstaben des ganzen Vor- und Zunamens.

Frage: 1) wie das Anagramm und 2) der daraus wiederhergestellte Name heißt?

K.-R. Biermann

Anmerkungen:

[1]) Unter einem Anagramm versteht man die Bildung von einem oder mehreren Worten durch Versetzung der Buchstaben eines oder mehrerer Worte. Zwei einfache Beispiele: Aus LEBEN wird durch Buchstabenversetzung NEBEL, aus MADE wird DAME.

[2]) I = J = 1 Buchstabe;
U = V = 1 Buchstabe.

[3]) Ganze Zahlen.

[4]) Von der Gaußschen Lösung wissen wir aus der oben erwähnten Publikation, daß die von ihm aus den genannten Bedingungen hergeleitete Gleichung 5. Grades das absolute Glied 14553 [= 72765 : 5] enthielt.

[5]) Gesucht werden die n-ten p-Eckszahlen von $n=1$, $p=3$ bis $n=24$, $p=26$. Die einzelnen gesuchten Zahlen werden berechnet nach der Formel:

$$\frac{n}{2}\times[\{(n-1)\times(p-2)\}+2]$$

Für die 4. Hexagonalzahl ($n=4$, $p=6$) ergibt sich beispielsweise
$2\times[\{(4-1)\times(6-2)\}+2]=28$.

[6]) Unter der Pronic-Zahl von n verstand man die Summe von n^2+n.

[7]) Siehe die Formel in Anmerkung [5]);
$n=4$, $p=3$.

[8]) desgleichen, $n=10$, $p=3$.

Lösung der „niederträchtigen" Aufgabe in Valentin Heins' Schatzkammer der kaufmännischen Rechnung, 6. Auflage 1779

Teil 1

A = 1	G = 7	N = 13	T = 19
B = 2	H = 8	O = 14	U, V = 20
C = 3	I, J = 9	P = 15	W = 21
D = 4	K = 10	Q = 16	X = 22
E = 5	L = 11	R = 17	Y = 23
F = 6	M = 12	S = 18	Z = 24

Die 5 Glieder der arithmetischen Folge gebe man sich am einfachsten in der Form $a-2d$, $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$ vor;
dann ergeben sich die drei Produkte
(A) $(a-2d)(a+2d)=a^2-4d^2$
(B) $(a-d)(a+d)=a^2-d^2=5a+10$
(C) a^2
mit $(a^2-4d^2)(a^2-d^2)a^2=72765$, woraus durch Einsetzen von (B) folgt: $3a^5-14a^4-80a^3-80a^2+14533=0$. Wegen $14533=3^3\cdot7^2\cdot11$ muß eine ganzzahlige Lösung dieser Gleichung Teiler von $3^2\cdot7^2\cdot11$ sein. Man findet $a=7$, damit $d=2$ und die arithmetische Folge 3, 5, 7, 9, 11.
(3 = I; 5 = II; 7 = III; 9 = IV; 11 = V)
≪ $3\times11=33$
$5\times9=45$ $7\times7=49$
$5\times9=45=3+5+7+9+11+10$
$33\times45\times49=72675$ ≫
(Nach einem Faksimile im Heft 17/1980, S. 69, der Mitteilungen der Gauß-Gesellschaft in Göttingen hat Gauß als Lösung des ersten Teils der in Rede stehenden Aufgabe niedergeschrieben:

I = $x-2p=$ 3
II = $x-p=$ 5
III = $x=$ 7
IV = $x+p=$ 9
V = $x+2p=$ 11

$xx-pp=5x+10$
$xx(xx-pp)(xx-4pp)=72765$
$xx(5x+10)(-3xx+20x+40)=72765$
$xx(x+2)(-3xx+20x+40)=14553$
$-3x^5+14x^4+80x^3{}^*+80xx-14553=0$
Davon eine Wurzel $x=7$)
IV = 9 = J
II = 5 = E
II + III = 5 + 7 = 12 = M
V − I = 11 − 3 = 8 : 4 = 2; III = 7; 7 − 2 = 5 = E
IV = 9; 9 − 1 = 8 = H
III + IV = 7 + 9 = 16; 16 + 1 = 17 = R
IV = 9; 2 × 9 = 18 = S
I + II = 3 + 5 = 8; 8 + 1 = 9 = I
III = 7; 2 × 7 = 14; 14 − 1 = 13 = N
2 − 2 = 0; 13 − 0 = 13 = N
13 + 2 + 2 = 17 = R
V = 11; 11 − 1 = 10; 10 : 2 = 5 = E
5 + (2 × 2) = 5 + 4 = 9 = I
$\sqrt{9}=3=$ C
I + II = 3 + 5 = 8 = H
Damit ergeben sich als Lösungsworte:
JE MEHR SINNREICH

* Bei Gauß versehentlich $80xx^3$.

Teil 2

Gesucht wird die n-te Eckszahl von $n=1$, $p=3$ bis $n=24$, $p=26$. Die einzelnen Zahlen werden berechnet nach der Formel

$$\frac{n}{2}\times[\{(n-1)\times(p-2)\}+2],$$

z. B. ergibt sich für die 4. Hexagonalzahl ($n=4$, $p=6$)

$$2\times[(3\times4)+2]=28.$$

Die Ausführung der Berechnung der gesuchten Zahlen ergibt mit Zuordnung der Buchstaben (A zu $n=1$, ..., Z zu $n=24$) die folgenden Werte:

A = 1	I, J = 333	R = 2329	
B = 4	K = 460	S = 2772	
C = 12	L = 616	T = 3268	
D = 28	M = 804	U, V = 3820	
E = 55	N = 1027	W = 4431	
F = 96	O = 1288	X = 5104	
G = 154	P = 1590	Y = 5842	
H = 232	Q = 1936	Z = 6648	

Summe = 42850; 42850 : 50 = 857

≪ Die Rechnung wird einfacher, wenn man erkennt, daß die gesuchten Zahlen eine arithmetische Folge 3. Ordnung bilden, deren dritte Differenzenfolge also konstant (= 3) ist:

3 3 3 3 3 3
5 8 11 14 17 20 23
3 8 16 27 41 58 78 ...
1 4 12 28 55 96 154 232 ... ≫

Eine harmonische Folge aus 5 Gliedern (d. i. eine Folge, in der jedes Glied mit Ausnahme der Randglieder harmonisches Mittel seiner beiden Nachbarglieder ist) setzt man am besten in der Form $\frac{c}{n}, \frac{c}{n+1}, \frac{c}{n+2}, \frac{c}{n+3}, \frac{c}{n+4}$ an (c = const.).

Damit die Bedingung des „Kleinsten Verhältnisses in ganzen Zahlen" erfüllt ist, wähle man $n=1$; dann muß c eine durch 1, 2, ..., 5 teilbare Zahl sein. Die kleinste unter diesen ist 60, also erhält man die harmonische Folge 60, 30, 20, 15, 12 oder in natürlicher Reihenfolge 12, 15, 20, 30, 60.

12 + 15 + 20 + 30 + 60 = 137
857 − 137 = 720; 720 : 3 = 240;
240 − 8 = 232 = H
232 − 21 = 211.

Die geometrische Folge erhält man über den Ansatz

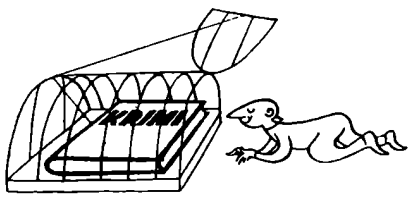
$$211=\frac{36}{q^2}+\frac{36}{q}+36+36q+36q^2;$$

$$\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+q+q^2=\frac{175}{36}.$$

Da mit $q=\frac{m}{n}$ auch $\frac{1}{q}=\frac{n}{m}$ die Gleichung löst, erhält man $\frac{n^2}{36}$ und $\frac{m^2}{36}$, woraus $n=2, m=3$ oder umgekehrt folgt. Beide Lösungen führen auf die geometrische Folge 16, 24, 36, 54, 81.
Nr. 1 = 16, ..., Nr. 5 = 81

54 + 1 = 55 = E
55 − 18 = 37; 37 × 9 = 333 = I
55 − 3 = 52; 52 : 4 = 13; 13 × (55 + 24) = 1027 = N
1027 + 6 = 1033; 1033 + (16 × 81) = 2329 = R
24 + 81 + 6 = 111; 111 × 3 = 333 = I
24 : 2 = 12 = C
333 − (100 + 1) = 232 = H
24 + 36 = 60; 60 + (12 × 60) = 780;
780 + 24 = 804 = M
54 + 1 = 55 = E
55 × 6 = 330; 330 + (2 × 1,5) = 333 = I
2772 = S
1027 = N
1 + 0 + 2 + 7 = 10; für $n=10$,
$p=3$ ergibt sich 55 = E
9599 + 720 + 10 − 8000 = 2329 = R.

Das Lösungswort lautet also HEINRICH MEISNER (Mitbegründer der 1690 in Hamburg entstandenen Mathematischen Gesellschaft).



Mathe mit Pfiff

Leseprobe aus dem Band 82 der MSB

Überall natürliche Zahlen

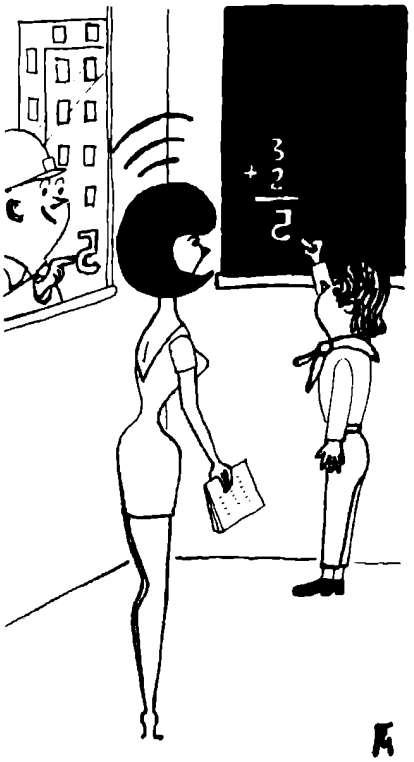
▲1▲ Zum Anfang:
$x = 107 \cdot \{700 - [96 : 2 - (45 + 27) : 9] \cdot 5 - 495\} - 135.$

▲2▲ Die Summe von acht ungeraden natürlichen Zahlen beträgt 20. Wieviel Lösungsmöglichkeiten gibt es, wenn unter diesen acht Zahlen auch gleiche Summanden vorkommen dürfen?

▲3▲ Zwischen den Ziffern 1, 3, 5, 7, 9 sind unter Beachtung dieser Reihenfolge in beliebiger Weise Operationszeichen für die vier Grundrechenarten und eventuell auch Klammern so zu setzen, daß man als jeweiliges Ergebnis folgende natürliche Zahlen erhält:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Beispiel für das Ergebnis 0:
$1 + 3 \cdot 5 - (7 + 9) = 0.$



▲4▲ Von einer zweistelligen Zahl z ist bekannt, daß die Einerziffer eine dreimal so große Zahl darstellt wie die Zehnerziffer. Vertauscht man die Grundziffern, so entsteht eine Zahl, die um 36 größer als die ursprüngliche Zahl ist.
Wie lautet z?

▲5▲ Für sechs von Null verschiedene natürliche Zahlen a, b, c, d, e und f gelte $a + 3b + 5c = 12$ und $d + 3e + 5f = 20$.
Wie groß ist die Summe $a + b + c$, wenn $d + e + f = a + b + c$ gilt? (Löse die Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle! Verschiedene Buchstaben können dieselbe Zahl bedeuten!)

▲6▲ Bilde das Produkt aus der Summe und aus der Differenz der Zahlen 8 und 4, und subtrahiere den Quotienten aus den gegebenen Zahlen!

▲7▲ Es seien a und b beliebige natürliche Zahlen mit $a > b$.
a) Man berechne alle Zahlen x, für die die Summe aus x und dem Produkt von a und b das Quadrat der Zahl a ergibt.
b) Man berechne alle Zahlen y, für die die Differenz aus dem Produkt von a und b und der Zahl y das Quadrat der Zahl b ergibt.

▲8▲ Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 968. Ein Summand endet mit einer Null. Streicht man diese Null, so erhält man den anderen Summanden.
Wie lauten diese beiden Zahlen?

▲9▲ Das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist 21mal so groß wie die Summe dieser Zahlen.
Um welche Zahlen handelt es sich?

▲10▲ Gesucht ist die größte fünfstellige Zahl, für die gilt:
a) Die Zehnerziffer stellt eine halb so große Zahl wie die Tausenderziffer dar.
b) Die Einer- und die Hunderterziffer kann man vertauschen, ohne daß sich die fünfstellige Zahl ändert.

▲11▲ Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen!
a) Die Differenz aus der Zehnerziffer und der Einerziffer beträgt 4, wobei die Einerziffer von Null verschieden sein soll.
b) Vertauscht man die Ziffern einer solchen Zahl, so erhält man eine neue zweistellige Zahl, die kleiner als der dritte Teil der ursprünglichen Zahl ist.

▲12▲ Es sind alle natürlichen Zahlen n anzugeben, für die die Zahl

$$z = \frac{n + 17}{n - 3}$$

ebenfalls eine natürliche Zahl ist.

▲13▲ Von den hintereinander in einer Zeile aufgeschriebenen natürlichen Zahlen 12345678910111213...9899100 sind 10 Ziffern so wegzustreichen, daß die übrigbleibende Zahl möglichst groß ist.

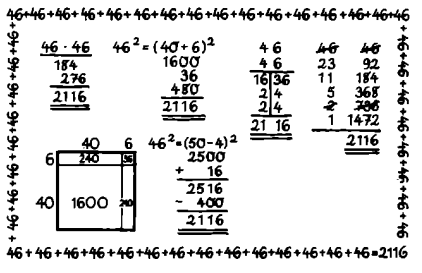
▲14▲ Die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Der Umfang des Dreiecks beträgt 42 cm.
Wie lang ist jede der drei Seiten des Dreiecks?

▲15▲ Versuche, mit Rechenvorteil zu arbeiten!
a) $16 \cdot 19 = x$; b) $26 \cdot 86 = x$; c) $62 \cdot 68 = x$.
Der Rechenvorteil ergibt sich z. B. bei c) dadurch, daß man den (gemeinsamen) Zehner mit dem um 1 vermehrten Zehner multipliziert, also $6 \cdot 7 = 42$ (eigentlich $60 \cdot 70 = 4200$), und an das Ergebnis das Produkt aus den Einern, also $2 \cdot 8 = 16$, „anhängt" (eigentlich $4200 + 16$), $x = 4216$.

▲16▲ Ein Mathematiklehrbuch unserer Republik umfaßt 196 Seiten. Die Seitenzahlen für die ersten beiden Seiten und für die letzte Seite wurden nicht gedruckt.
a) Wieviel Ziffern wurden zum Numerieren der übrigen Seiten verwendet?
b) Wie oft wurde dabei die Ziffer 0 gedruckt?

▲17▲ Axel sagt zu Bernd: „Denk dir eine natürliche Zahl, die größer als 1, aber kleiner als 10 ist! Multipliziere die gedachte Zahl mit 27 und das erhaltene Produkt mit 37! Nenne mir die letzte Ziffer deines Ergebnisses!"
Bernd nannte 7 als letzte Ziffer. Daraus konnte Axel sofort angeben, welche Zahl sich Bernd gedacht hatte. Gib eine Begründung dafür!

▲18▲ Eine vierstellige Kraftfahrzeugnummer weist folgende Besonderheiten auf:
a) Die erste Ziffer ist gleich der zweiten und die dritte gleich der vierten Ziffer;
b) die vierstellige Zahl ist eine Quadratzahl.
Wie lautet die Kraftfahrzeugnummer?



Lehmann, J.

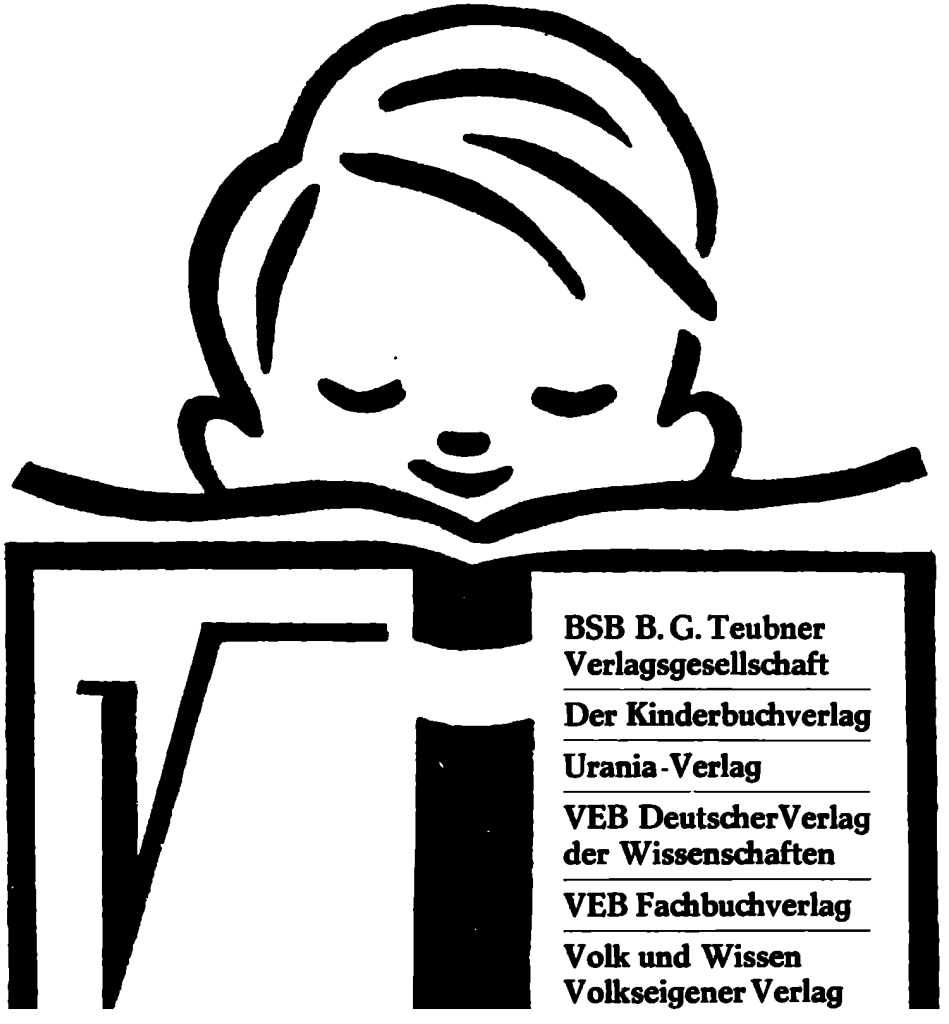
Mathe mit Pfiff

128 Seiten mit 18 farbigen Vignetten und 93 farbigen Zeichnungen, 4,50 M
Bestell-Nr. 653 364 6

Vorliegendes Bändchen der „akzent"-Reihe ist kein Lehrbuch, es bietet Elementarmathematik zur Unterhaltung, als Rätsel und Spiel, zur geistvollen Freizeitbeschäftigung. Es macht Spaß, die lustigen Vignetten und farbigen Zeichnungen anzuschauen. Wer die Mathematik von dieser freundlichen Seite betrachtet, wird viel Freude daran haben.

Notizen

GESAMTVERZEICHNIS MATHEMATISCHE SCHÜLERBÜCHEREI 1981



BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

Der Kinderbuchverlag

Urania-Verlag

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

VEB Fachbuchverlag

Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Sonderheft der mathematischen
Schülerzeitschrift „alpha“
in Zusammenarbeit mit sechs Verlagen

Rusza, Imre

Die Begriffswelt der neuen Mathematik

472 Seiten mit 132 Abbildungen, 21,50 M
Bestell-Nr. 706 732 5 (VWV)

Autorenkollektiv

Biographien bedeutender Mathematiker

536 Seiten mit zahlreichen Abbildungen, 41 Biographien, 22,00 M
Bestell-Nr. 706 107 0 (VWV)

Tobies, R.

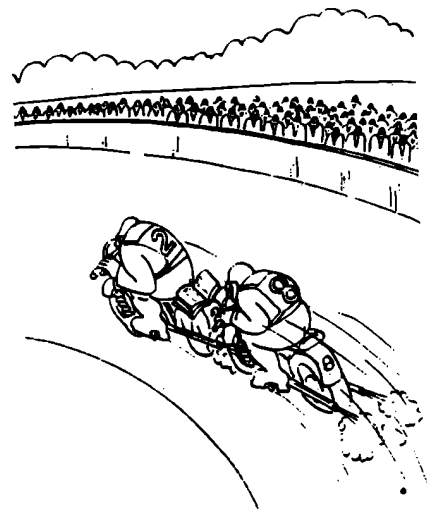
Felix Klein

104 Seiten mit 12 Abbildungen, 6,80 M
Bestell-Nr. 666 026 6 (BGT)

Ilgauds, H.-J.

Norbert Wiener

86 Seiten mit 6 Abbildungen und 4 Schemata, 4,80 M
Bestell-Nr. 665 983 9 (BGT)



Simon, H./K. Stahl/H. Grabowski

Mathematik

Nachschlagbuch für Grundlagenfächer
671 Seiten mit 445 Bildern, 13,50 M
Bestell-Nr. 546 440 7 (FV)

Autorenkollektiv

Kleine Enzyklopädie Mathematik

Ein Ratgeber für Schule und Praxis
820 Seiten mit 950 Textabbildungen, davon über 700 farbig, und 56 Bildtafeln, 18,00 M
Bestell-Nr. 576 288 5
VEB Bibliographisches Institut Leipzig

Wilenkin, N. J.

Methoden der schrittweisen Näherung

Übersetzung aus dem Russischen
108 Seiten mit 34 Abbildungen, 5,90 M
Bestell-Nr. 665 723 5 (BGT)

Steinert, K.-G.

Sphärische Trigonometrie mit einigen Anwendungen aus Geodäsie, Astronomie und Kartographie

160 Seiten mit 69 Abbildungen, 9,50 M
Bestell-Nr. 665 828 9 (BGT)

Gilde, W./S. Altrichter

Mehr Spaß mit dem Taschenrechner

215 Seiten mit 22 Abbildungen, 5,50 M
Bestell-Nr. 546 409 5 (FV)

Höfner, G./M. Wittwer

Wiederholungsprogramm Elementarmathematik

239 Seiten mit 110 Bildern und 6 Leistungskontrollen, 7,80 M
Bestell-Nr. 546 131 0 (FV)

Budden, F. J.

Zahlensysteme und Rechenautomaten

Übersetzung aus dem Englischen
224 Seiten mit 34 Abbildungen, 8,60 M
Bestell-Nr. 665 633 9 (BGT)

Halmos, P. R.

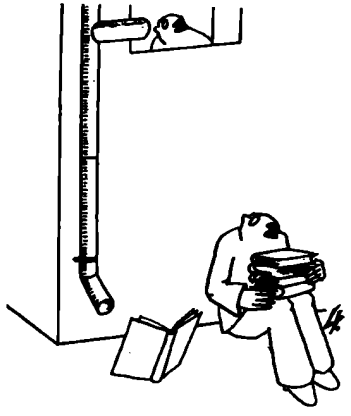
Wie schreibt man mathematische Texte?

Übersetzung aus dem Englischen
64 Seiten, 3,50 M
Bestell-Nr. 665 820 3 (BGT)

Bakelman, I. J.

Spiegelung am Kreis

Übersetzung aus dem Russischen
132 Seiten mit 67 Abbildungen, 7,00 M
Bestell-Nr. 665 735 8 (BGT)



Wentzel, J. S.

Elemente der Spieltheorie

66 Seiten mit 25 Abbildungen, 4,20 M
Bestell-Nr. 665 511 7

René Descartes

Ausgewählte Schriften

Abhandlungen über die Methode (Discours de la méthode)

437 Seiten, 2,50 M
Verlag Philipp Reclam jun. Leipzig
Bestell-Nr. 660 876 7

Schröder, E.

Dürer – Kunst und Geometrie

aus der Sicht seiner „Unterweysung"

79 Seiten mit 61 Abbildungen, 15,00 M
Bestell-Nr. 762 736 1 (6555)
Akademie-Verlag Berlin

Gilde, W.

Gespiegelte Welt

118 Seiten mit 176 Bildern, 24,00 M
Bestell-Nr. 546 369 0

Nikiforowski, W. A./L. S. Freiman

Wegbereiter der neuen Mathematik

222 Seiten mit 37 Bildern, 5,50 M
Bestell-Nr. 546 411 6 (FV)

Wußing, H.

Carl Friedrich Gauß

100 Seiten mit 9 Abbildungen, 4,70 M
Bestell-Nr. 665 700 8 (BGT)

Goetz, D.

Georg Christoph Lichtenberg

108 Seiten mit 10 Abbildungen, 6,80 M
Bestell-Nr. 665 986 3 (BGT)

Band	1	Alexandroff, Einführung in die Gruppentheorie (DVW)
Band	2	Hasse, Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik (BGT)
Band	3	Markuschewitsch, Streifzüge durch die Mathematik I (U)
Band	4	Hameister, Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene (BGT)
Band	5	Vyšin, Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben (BGT)
Band	6	Lietzmann, Der Pythagoreische Lehrsatz (BGT)
Band	7	Varga, Mathematische Logik für Anfänger I (VWV)
Band	8	Sominski, Die Methode der vollständigen Induktion (DVW)
Band	9	Korowkin, Ungleichungen (DVW)
Band	10	Gnedenko/Chintschin, Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung (DVW)
Band	11	Lietzmann, Wo steckt der Fehler? (BGT)
Band	12	Lietzmann, Altes und Neues vom Kreis (BGT)
Band	13	Lietzmann, Riesen und Zwerge im Zahlenreich (BGT)
Band	14	Miller, Rechenvorteile (BGT)
Band	15	Natanson, Einfachste Maxima- und Minimaaufgaben (DVW)
Band	16	Natanson, Summierung unendlich kleiner Größen (DVW)
Band	17	Dubnow, Fehler in geometrischen Beweisen (DVW)
Band	18	Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen I (DVW)
Band	19	Worobjow, Die Fibonaccischen Zahlen (DVW)
Band	20	Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen II (DVW)
Band	21	Kurosch, Algebraische Gleichungen beliebigen Grades (DVW)
Band	22	Gelfond, Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen (DVW)
Band	23	Schafarewitsch, Über die Auflösung von Gleichungen höheren Grades (DVW)
Band	24	Markuschewitsch, Streifzüge durch die Mathematik II (U)
Band	25	Markuschewitsch, Rekursive Folgen (DVW)
Band	26	Dynkin/Uspenski, Mathematische Unterhaltungen III (DVW)
Band	27	Steinhaus, 100 Aufgaben (U)
Band	28	Perelman, Unterhaltsame Geometrie (VWV)
Band	29	Perelman, Unterhaltsame Algebra (VWV)
Band	30	Kolosow, Kreuz und quer durch die Mathematik (VWV)
Band	31	Teplow, Grundriß der Kybernetik (VWV)
Band	32	Jaglom/Boltjanski, Konvexe Figuren (DVW)
Band	33	Belkner, Determinanten (BGT)
Band	34	Autorenkollektiv, Rund um die Mathematik (KB)
Band	35	Schmidt, Kein Ärger mit der Algebra (KB)
Band	36	Übungen für Junge Mathematiker, Teil 1: Lehmann, Zahlentheorie (BGT)
Band	37	Übungen für Junge Mathematiker, Teil 2: Grosche, Elementargeometrie (BGT)
Band	38	Übungen für Junge Mathematiker, Teil 3: Kleinfeld, Ungleichungen (BGT)
Band	39	Krysicki, Zählen und Rechnen einst und jetzt (BGT)
Band	40	Sedláček, Einführung in die Graphentheorie (BGT)
Band	41	Gelfand/Glagolewa/Kirillow, Die Koordinatenmethode (BGT)
Band	42	Markuschewitsch, Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen (DVW)
Band	43	Markuschewitsch, Flächeninhalte und Logarithmen (DVW)
Band	44	Donath, Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks (DVW)
Band	45	Roman, Reguläre und halbreguläre Polyeder (DVW)
Band	46	Autorenkollektiv, Kompendium der Mathematik (VWV)
Band	47	Lehmann, Lineare Optimierung für Junge Mathematiker (BGT)
Band	48	Belkner, Matrizen (BGT)
Band	49	May, Differentialgleichungen (BGT)
Band	50	Sobol, Die Monte-Carlo-Methode (DVW)

Band 51 Zich/Kolman, Unterhaltsame Logik (BGT)
Band 52 Worobjow, Teilbarkeitskriterien (DVW)
Band 53 Freyer/Gäbler/Möckel, Gut gedacht ist halb gelöst (U)
Band 54 Bürger/Wittmar, Was ist, was soll Datenverarbeitung? (U)
Band 55 Cendrowski, Bande der unsichtbaren Hand (KB)
Band 56 Göttner, Was ist, was soll Operationsforschung? (U)
Band 57 Dege, EDV Maschinelles Rechnen (U)
Band 58 Gelfand/Glagolewa/Schnol, Funktionen und graphische Darstellungen (BGT)
Band 59 Kaloujnine, Primzahlzerlegung (DVW)
Band 60 Trachtenbrot, Wieso können Automaten rechnen? (DVW)
Band 61 Boltjanski-Gochberg, Kombinatorische Geometrie (DVW)
Band 62 Varga, Mathematische Logik für Anfänger II (VWV)
Band 63 Maibaum, Wahrscheinlichkeitsrechnung (VWV)
Band 64 Wilenkin, Unterhaltsame Mengenlehre (BGT)
Band 65 Belkner, Metrische Räume (BGT)
Band 66 Jäckel, Mathematik heute (U)
Band 67 Sedláček, Keine Angst vor Mathematik (FV)
Band 68 Schreiber, Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie (BGT) (1980)
Band 69 Gronitz, Praktische Mathematik (VWV)
Band 70 Hilbert, Matrizen (VWV)
Band 71 Wissensspeicher Mathematik (VWV)
Band 72 Steinhaus, 100 neue Aufgaben (U)
Band 73 Miller, Gelöste und ungelöste mathematische Probleme (BGT)
Band 74 Solodownikow, Lineare Ungleichungssysteme (DVW)
Band 75 Golowina/Jaglom, Vollständige Induktion in der Geometrie (DVW)
Band 76 Rehm, Zahl, Menge, Gleichung (KB)
Band 77 Lehmann, Kurzweil durch Mathe (U)
Band 78 Kordemski, Köpfchen, Köpfchen! (U)
Band 79 Glade/Manteuffel, Am Anfang stand der Abacus (U)
Band 80 Baschmakowa, Diophant und diophantische Gleichungen (DVW)
Band 81 Pieper, Zahlen aus Primzahlen (DVW)
Band 82 Lehmann, Mathe mit Pfiff (U)
Band 83 Jaglom, Ungewöhnliche Algebra (BGT)
Band 84 Belkner, Reelle Vektorräume (BGT)
Band 85 Stahl/Wenzel, Elektronische Datenverarbeitung (VWV)
Band 86 Göttner/Fischer/Krieg, Was ist, was kann Statistik? (U)
Band 87 Übungen für Junge Mathematiker, Teil 4: Borneleit, Gleichungen (BGT)
Band 88 Kolman, Die vierte Dimension (BGT)
Band 89 Drews, Lineare Gleichungssysteme und lineare Optimierungsaufgaben (DVW)
Band 90 Lovász/Pelikán/Vesztergombi, Kombinatorik (BGT)
Band 91 Rehm, Strecke, Kreis, Zylinder (KB)
Band 92 Fanghänel/Vockenberg, Arbeiten mit Mengen (VWV)
Band 93 Fehringer, Näherungsrechnung (VWV)
Band 94 Lohse, Elementare Statistik (VWV) (1981)
Band 95 Kantor/Solodownikow, Hyperkomplexe Zahlen (BGT)
Band 96 Smogorschewski, Lobatschewskische Geometrie (BGT)
Band 97 Berg, Differentialgleichungen 2. Ordnung mit Anwendungen (DVW)
Band 98 Ruben, Philosophie und Mathematik (BGT)
Band 99 Thiele, Mathematische Beweise (BGT)
Band 100 Lehmann, 2 × 2 plus Spaß dabei (VWV)

BÜCHER helfen beim Studieren

Autorenkollektiv
(Karl-Marx-Universität Leipzig)

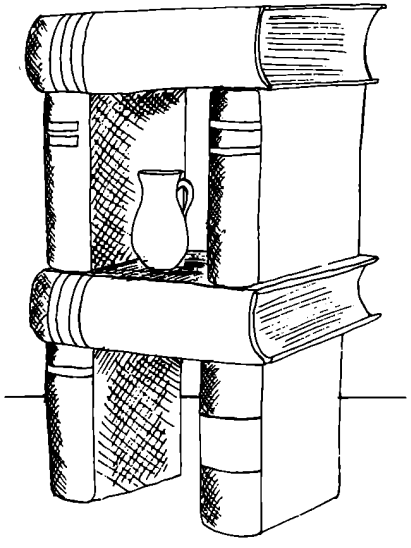
Studienwunsch Mathematik

162 Seiten mit 8 Abbildungen, 7,90 M
Bestell-Nr. 665 781 7 (BGT)

Engel, W./U. Pirl

Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

Band I, Band II je 6,00 M
Bestell-Nr. 00 21 70-1 bzw.
00 21 71-1 (VWV)



Hilbert, A.

Mathematische Arbeitsgemeinschaften

272 Seiten mit 120 Abbildungen,
etwa 7,65 M
Bestell-Nr. 707 441 0 (VWV)

Petigk, J.

Mathematik in der Freizeit

167 Seiten mit zahlreichen Abbildungen,
8,80 M, Bestell-Nr. 685 694 7
Verlag Tribüne, Berlin

Koch, S.

Anleitung zum Lösen mathematischer Aufgaben

136 Seiten mit 61 Bildern, 7,80 M
Bestell-Nr. 545 850 9 (FV)

Berge, M.

Außerunterrichtliche Leistungsvergleiche in der Unterstufe

183 Seiten mit zahlreichen Abbildungen,
6,50 M, Bestell-Nr. 28 15 12-3 (VWV)

Berane, E./K.-H. Gärtner/H. Lohse

Wiederholungsprogramm Gleichungen und Funktionen

214 Seiten mit 92 Abbildungen, 7,80 M
Bestell-Nr. 546 528 2 (FV)

Im vorliegenden Buch werden iterative und direkte Verfahren der Numerischen Mathematik in relativ elementarer Form dargestellt. Die numerischen Methoden, mit denen der Leser vertraut gemacht wird, werden an Beispielen erläutert, bei denen sich alle Rechenschritte vollständig in Formeln ausführen lassen. – Während an Vorkenntnissen nicht einmal der gesamte Schulstoff erforderlich ist, wird jedoch vom Leser eine gewisse Gewandtheit im Umgang mit algebraischen Ausdrücken erwartet Die jedem Abschnitt beigefügten Aufgaben sollen helfen, das erworbene Wissen zu überprüfen und zu vertiefen.

Ruben, P.

Philosophie und Mathematik (Bd. 98)

122 Seiten, 8,50 M
Bestell-Nr. 665 909 7

Der Autor gibt eine marxistische Darstellung der Grundzüge der Philosophie der Mathematik in kurzer und übersichtlicher Form, wobei die dialektische Betrachtungsweise eine hervorragende Rolle spielt.

Thiele, R.

Mathematische Beweise (Bd. 99)

176 Seiten mit 67 Abbildungen, 8,60 M
Bestell-Nr. 665 919 3

In dem Buch wird gezeigt, welche Beweismethoden es gibt, was beispielsweise ein Existenz- oder Unitätsbeweis bezweckt, wie die einzelnen Beweisverfahren funktionieren und wie man sie einsetzt. Viele Beispiele und historische Anmerkungen helfen, das Verständnis für mathematische Beweise zu vertiefen und dienen gleichzeitig zur Auflockerung der Darstellung.

Drinfel'd, I. G.

Quadratur des Kreises und Transzendenz von π (Bd. 101)

Übersetzung aus dem Russischen
138 Seiten mit 18 Abbildungen,
8,00 M, Bestell-Nr. 5708950

Das Buch behandelt das bekannte klassische Problem, allein mit Hilfe von Zirkel und Lineal einen beliebigen Kreis in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln. In diesem Zusammenhang werden folgende Probleme behandelt: algebraische und transzendente Zahlen, das Cantorsche Diagonalverfahren, der binomische Satz, die Zahl *e*, die Eulersche Formel, Logarithmen komplexer Zahlen, der Hauptsatz über symmetrische Polynome und der Beweis der Transzendenz von π.
Eine Einleitung und drei Anhänge stellen historische Bezüge her und bereichern den Stoff u. a. durch die Lösungen einiger vom Autor gestellter Aufgaben.

Autorenkollektiv

Mathematisches Mosaik (Bd. 102)

Herausgeber Endre Hódi

Übersetzung aus dem Ungarischen
318 Seiten mit 220 Zeichnungen, 9,50 M
Bestell-Nr. 653 447 0

Der Band enthält 16 in bunter Folge aneinandergereihte Aufsätze, in denen namhafte ungarische Mathematiker interessante Probleme in unterhaltsamer Form behandeln. Die geometrischen Aufsätze – Graphentheorie, Parkettierungs- und Färbungsprobleme – oder die Beiträge über Mathematik auf dem Schachbrett, mathematische Probleme des Toto-Lotto-Spiels sowie die Aufsätze über Wahrscheinlichkeitsrechnung werden eine große Leserzahl zum Mitknobeln auffordern.

Band 101 Drinfel'd, Quadratur des Kreises und Transzendenz von π (DVW)
Band 102 Hódi, Mathematisches Mosaik (U)
Band 103 Quaisser/Sprengel, Räumliche Geometrie (DVW) (1981)
Band 104 Kufner, Raum und Entfernung (Wie man in der Mathematik mißt) (BGT) (1981)
Band 105 Klotzek, Einführung in die Differentialgeometrie I (DVW) (1981)
Band 106 Schröder, Mathematik im Reich der Töne (BGT) (1982)
Band 107 Kästner, Algebra für Schüler (BGT) (1983)
Band 108 Klotzek, Einführung in die Differentialgeometrie II (DVW) (1982)
Band 109 Belkner/Brehmer, Riemannsche Integrale (DVW) (1982)
Band 110 Pieper, Die komplexen Zahlen (DVW) (1982)
Band 111 Lehmann, 222 historische Aufgaben aus 444 Jahrzehnten (U) (1983)

BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft (BGT)
7010 Leipzig, Postfach 930

Der Kinderbuchverlag (KB)
1080 Berlin, Postfach 1225

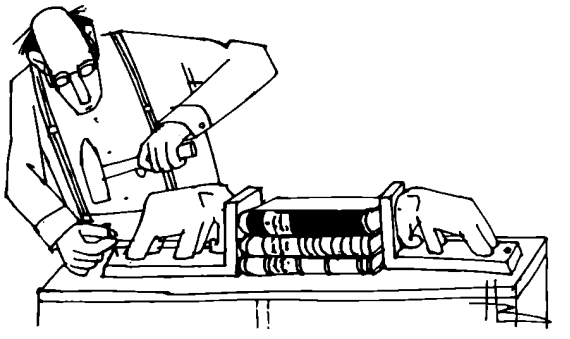
Urania-Verlag (U)
7010 Leipzig, Postfach 969

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (DVW)
1080 Berlin, Postfach 1216

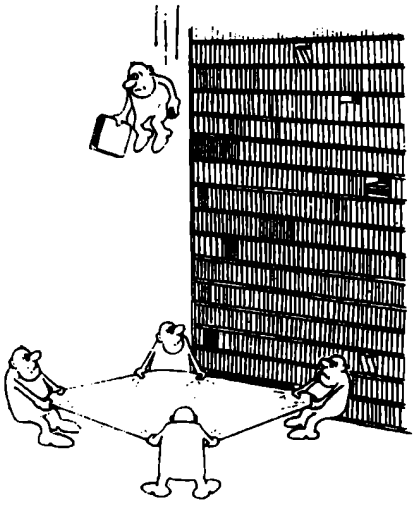
VEB Fachbuchverlag (FV)
7031 Leipzig, Postfach 67

Volk und Wissen Volkseigener Verlag (VWV)
1080 Berlin, Postfach 1213

Redaktionsschluß: 22. April 1981



Eine Auswahl mathematischer Jugendliteratur



Görke, L., K. Ilgner, G. Lorenz, G. Pietzsch, M. Rehm

Rund um die Mathematik (Bd. 34)

160 Seiten mit etwa 260 Abbildungen, 9,80 M, Bestell-Nr. 628 190 1

Das Buch führt unterstützt von einer ansprechenden grafischen Gestaltung und zahlreichen Illustrationen auf unterhaltsame Weise in die Mathematik ein. Durch interessante Problemstellungen (Wie findet man aus einem Labyrinth heraus?), verblüffend wirkende Fragen (Was hat Häkeln mit Mathematik zu tun?) und humorvolle Anknüpfungspunkte (Wie die Schildbürger ihre Glocke versenkten) werden die einzelnen Kapitel des Buches aufgelockert, wird die Neugier des Lesers geweckt. Jeweils ausgehend von einem reizvollen Problem der Umwelt wird dessen mathematischer Kern herausgearbeitet, wobei der Leser stets zum Mitdenken, zum selbständigen Durchdenken angeregt wird.

Übungen für Junge Mathematiker

Lehmann, E.

Teil 1 Zahlentheorie (Bd. 36)

159 Seiten mit 22 Abbildungen, 6,50 M Bestell-Nr. 665 102 8

In Form von Beispielen, Aufgaben, Lösungen, Beweisen und Bemerkungen wird der Schüler mit dem Stoff vertraut gemacht. Die reine Theorie bleibt auf ein Mindestmaß beschränkt, um einem breiten Leserkreis ohne besondere Vorkenntnisse ein Eindringen in die Zahlentheorie zu ermöglichen.

Grosche, G.

Teil 2 Elementargeometrie (Bd. 37)

92 Seiten mit 74 Abbildungen, 4,50 M Bestell-Nr. 665 466 7

An Hand von Aufgaben wird Lehrstoff aus der Elementargeometrie vermittelt. Auf längere theoretische Unterweisungen hat der Verfasser zugunsten praktischer Übungen weitgehend verzichtet.

Kleinfeld, G.

Teil 3 Ungleichungen (Bd. 38)

134 Seiten mit 20 Abbildungen, 5,50 M Bestell-Nr. 665 467 5

Dieses Büchlein bringt eine Aufgabensammlung über Ungleichungen, die methodisch geschickt zusammengestellt sind, so daß der Leser beim Lösen der Aufgaben auch immer in die Theorie eindringt. Zur Vorbereitung der Mathematikolympiaden ist dieser Titel zu empfehlen.

Rauminhaltsmessung ein. Durch anregende Fragen wird die Freude am Knobeln und Experimentieren geweckt.
Es ist vor allem für Schüler der Klassen 4 und 5 geeignet.

Fanghänel, G. und H. Vockenberg

Arbeiten mit Mengen (Bd. 92)

152 Seiten mit 28 Abbildungen, 3,50 M Bestell-Nr. 707 053 2

Das Buch dient als Lehrmaterial für die Durchführung der Arbeitsgemeinschaft „Arbeiten mit Mengen" im Rahmen des Wahlunterrichts in den Klassen 9 und 10 im Fach Mathematik. Es schließt sich inhaltlich eng an den obligatorischen Unterricht an. Neben den stofflichen Erläuterungen sind zahlreiche Beispiele und Aufgaben mit Lösungen enthalten, die zur Festigung und Vertiefung der Kenntnisse aus dem obligatorischen Unterricht beitragen.

Fehringer, K.

Näherungsrechnen – Gleichungen – Ungleichungen (Bd. 93)

Einige Probleme der praktischen Mathematik

156 Seiten mit 61 Abbildungen, 3,70 M Bestell-Nr. 707 150 0

Auf der Grundlage des Rahmenprogramms für die Arbeitsgemeinschaft „Praktische Mathematik" der Klassen 9 und 10 werden Kenntnisse vermittelt, die unmittelbar auf den Stoff des Mathematikunterrichts der Klassen 8 bis 10 aufgebaut sind.

Kantor, I. L. und A. S. Solodownikow

Hyperkomplexe Zahlen (Bd. 95)

Übersetzung aus dem Russischen 156 Seiten mit 18 Abbildungen, 9,00 M Bestell-Nr. 665 871 3

Die uns aus dem täglichen Leben bekannten Zahlen sind vielfach verallgemeinert worden, um mathematische und naturwissenschaftliche Probleme lösen zu können. Das Buch behandelt Erweiterungen des reellen Zahlenkörpers und kann somit als Arbeitsmaterial für Schülerarbeitsgemeinschaften verwendet werden. Nachdem kurz über reelle und komplexe Zahlen gesprochen wird, wendet sich das Buch insbesondere den Quaternionen zu, die sowohl in der Mathematik als auch Physik von großer Bedeutung sind.

Smogorschewski, A. S.

Lobatschewskische Geometrie (Bd. 96)

Übersetzung aus dem Russischen 75 Seiten mit 43 Abbildungen, 6,00 M Bestell-Nr. 665 842 2

Die Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie ist mathematikgeschichtlich, aber auch mathematisch gesehen eines der interessantesten und merkwürdigsten Gebiete, dessen Bedeutung weit über die Mathematik hinausgeht und bis in die Physik, Kosmologie und Philosophie reicht. In populärwissenschaftlicher Weise legt der Autor die von Lobatschewski entwickelte Geometrie dar.

Berg, L.

Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Anwendungen (Bd. 97)

131 Seiten mit 35 Abbildungen, 8,20 M Bestell-Nr. 570 774 7

Das Lehrmaterial dient Schülern der Klassen 9 und 10 für ihre Tätigkeit in einer Arbeitsgemeinschaft. Nach Hinweisen zur Bedeutung und zur Geschichte der elektronischen Datenverarbeitung sowie nach einigen Ausführungen zur Kybernetik, zur mathematischen Logik und zum dualen Zahlensystem werden die Bestandteile eines Computers, also Rechenwerk, Speicher, Eingabewerk usw., beschrieben.

Borneleit, P.

Teil 4 Gleichungen (Bd. 87)

125 Seiten mit 6 Abbildungen, 6,50 M
Bestell-Nr. 665 788 4

Das Büchlein stellt Übungsmaterial für mathematische Schülerzirkel, insbesondere in Vorbereitung der Mathematikolympiaden bereit. Es ist eine echte Ergänzung des entsprechenden Schullehrstoffes, da auch Gleichungen und Gleichungssysteme betrachtet werden, die u. a. Beträge und Fakultäten enthalten. Auch Diophantische Gleichungen treten auf.

Drews, K.-D.

Lineare Gleichungssysteme und lineare Optimierungsaufgaben (Bd. 89)

154 Seiten mit 14 Abbildungen und 28 Tabellen, 7,50 M
Bestell-Nr. 570 221 7

Dieses Bändchen gibt einen Einblick in die Problematik linearer Gleichungssysteme, die Matrizenrechnung und die Bestimmung von Lösungen linearer Optimierungsaufgaben. Es ist bestimmt für Schüler der Abiturstufe und Studenten, die die Mathematik als Handwerkszeug gebrauchen. Deshalb werden die Matrizenrechnung und die Theorie der linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus und der Äquivalenz von Gleichungssystemen behandelt. Dann folgt die Einführung allgemeiner Begriffe (lineare Unabhängigkeit, Rang, usw.).
Die Darstellung wird ergänzt durch das Gauß-Seidel-Verfahren, die Simplexmethode und eine Methode zur Lösung des Transportproblems. Zahlreiche Flußdiagramme und Aufgaben zu allen Kapiteln fördern das Verständnis des Stoffes.

Lovász, L., J. Pelikán
und K. L. Vesztergombi

Kombinatorik (Bd. 90)

Übersetzung aus dem Ungarischen
132 Seiten mit 62 Abbildungen, 6,00 M
Bestell-Nr. 665 824 6

Das Buch führt in erzählender Form in Abzählprobleme ein und geht dann weiter zu arithmetischen Anwendungen der Kombinatorik, zu kombinatorischen Fragen der Geometrie (Färbungsprobleme, Graphen, ...) und zu Blocksystemen. Es wird stets, von interessanten Einzelfällen ausgehend, die Verallgemeinerung gewonnen.

Rehm, M.

Strecke, Kreis, Zylinder (Bd. 91)

Reihe Mein kleines Lexikon
80 Seiten mit 115 Abbildungen, 5,80 M
Bestell-Nr. 629 770 0

Dieses Büchlein ist ein reichhaltig illustriertes, kleines Lexikon, das Eigenschaften und gegenseitige Beziehungen einfacher ebener und räumlicher Gebilde erklärt, erworbene Kenntnisse festigt und erweitert. Es stellt alphabetisch geordnet mathematische Figuren und Körper vor, weist auf deren Vorkommen in unserer Umwelt hin und geht auf Umfangsberechnung sowie auf Flächen- und

Gelfand, I. M., E. G. Glagolewa
und E. E. Schnol

Funktionen und ihre graphische Darstellung (Bd. 58)

Übersetzung aus dem Russischen
127 Seiten mit 132 Abbildungen und 9 Tafeln, 7,00 M
Bestell-Nr. 665 600 5

Der Behandlung von Funktionen und ihrer graphischen Darstellung wird in der Schule ein weiter Raum gegeben, da sie in nahezu allen Bereichen von Wissenschaft und Technik eine hervorragende Rolle spielen. Der Inhalt des vorliegenden Buches ist eine Erweiterung und Vertiefung des Lehrplanstoffes; wesentliche Teile knüpfen genau dort an, wo die schulmäßige Behandlung endet. Mit elementaren Mitteln wird die systematische Kurvendiskussion wirksam vorbereitet und ergänzt.

Maibaum, G.

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Bd. 63)

224 Seiten mit 48 Abbildungen, 7,00 M
Bestell-Nr. 706 214 5

Das Buch kann als Lehrmaterial im Rahmen des fakultativen Unterrichts in der Abiturstufe verwendet werden. Darüber hinaus soll es interessierten Erwachsenen wie auch Studenten technischer, natur- und geisteswissenschaftlicher Fachrichtungen ein relativ bequemer, da pädagogisch wohldurchdachter, Zugang zu einer mathematischen Disziplin sein, die sich in den verschiedenartigen Anwendungsgebieten (Ökonomie, Psychologie, Medizin, Biologie u. a.) zunehmender Verbreitung erfreut.

Wilenkin, N. J.

Unterhaltsame Mengenlehre (Bd. 64)

Übersetzung aus dem Russischen
184 Seiten mit 82 Abbildungen, 6,50 M
Bestell-Nr. 665 636 3

In dem Buch wird die für alle mathematischen Disziplinen fundamentale Mengenlehre aufgelockert, interessant, aber trotz alledem streng dargestellt. Die Behandlung der abstrakten mathematischen Tatsachen wird durch viele interessante Beispiele, z. B. aus der Theorie der reellen Zahlen, den sogenannten Paradoxien der Mengenlehre u. a. immer wieder belebt.

Schreiber, P.

Die Mathematik und ihre Geschichte im Spiegel der Philatelie (Bd. 68)

104 S. mit 16 Tafeln,
9,80 M, Bestell-Nr. 665 984 7

Das Buch soll sowohl breite Kreise zur Beschäftigung mit Wissenschaftsgeschichte anregen als auch Anleitung zur Gestaltung von Motivsammlungen geben. Die Markensammlung gibt einen chronologischen Überblick über die Entwicklung der Mathematik und ihrer nächsten Nachbargebiete von der Antike bis zur Gegenwart, insbesondere auch die Wechselwirkung zwischen Mathematik und ihren Anwendungen in Naturwissenschaft, Technik und Ökonomie.

Hilbert, A.

Matrizenrechnung (Bd. 70)

160 Seiten mit zahlr. Abbildungen, 4,00 M
Bestell-Nr. 706 733 3

In verständlicher Form werden Schüler der Klassen 11 und 12, die am Kurs *Matrizenrechnung* im Rahmen des fakultativen Unterrichts teilnehmen, in die Grundlagen dieses Teilgebiets der Mathematik eingeführt. Dabei wird auch auf die Anwendung der Matrizenrechnung in der Elektrotechnik und in der Ökonomie eingegangen.

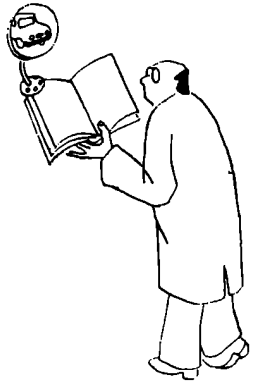
Mader, O. und D. Richter

Wissensspeicher Mathematik (Bd. 71)

Differentialrechnung – Integralrechnung – Vektorrechnung
Das Wichtigste bis zum Abitur in Stichworten und Übersichten

216 Seiten mit zahlr. Abbildungen, 6,00 M
Bestell-Nr. 706 975 0

Der Wissensspeicher gibt eine zusammengefaßte Darstellung des Unterrichtsstoffes Mathematik der Klassen 11 und 12. Er eignet sich besonders für Wiederholungen, Vertiefungen und Systematisierungen sowie zur Vorbereitung auf Prüfungen. Das Nachschlagewerk stellt die Fortsetzung der Ausführungen im bekannten Buch *Mathematik in Übersichten* dar, das den Unterrichtsstoff bis einschließlich zur 10. Klasse enthält.



Rehm, M.

Zahl, Menge, Gleichung (Bd. 76)

Reihe Mein kleines Lexikon
96 Seiten, etwa 70 Abbildungen, 5,80 M
Bestell-Nr. 629 077 9

Das Büchlein ist ein reichhaltig illustriertes, kleines Lexikon, das erworbene Kenntnisse über Begriffe, Grundgesetze und Verfahren in der Arithmetik der natürlichen Zahlen auf unterhaltsame Weise festigt, erweitert und vertieft, einige wichtige Zusammenhänge einsichtig macht und begründet sowie Freude am Mitdenken und Knobeln erweckt. Es ist vor allem für Schüler der Klassen 4 und 5 geeignet.

Lehmann, J.

Kurzweil durch Mathe (Bd. 77)

200 Seiten mit 171 teilweise mehrfarbigen Abbildungen, 19 vierfarb. Illustrationen, 10,00 M, Bestell-Nr. 653 575

Anliegen dieses Buches ist es, das Interesse für Mathematik zu wecken, mathematische Grundkenntnisse zu wiederholen und zu vertiefen, zum logischen Denken anzuregen und die Rechenfertigkeiten zu üben. In 266 mathematischen Aufgaben zu verschiedenen Sachgebieten werden unterhaltsame Probleme dargestellt, deren oft überraschende Lösungen mit logischen Betrachtungen und zumeist geringem Rechenaufwand auffindbar sind.

Kordemski, B. A.

Köpfchen, Köpfchen! (Bd. 78)

Mathematik zur Unterhaltung

328 Seiten mit 493 zweifarbigen Zeichnungen, 12,00 M
Bestell-Nr. 653 034 9

„Köpfchen, Köpfchen" muß man haben, wenn verzwickte Aufgaben zu lösen sind.

Manche „Nuß" läßt der Autor dieses ebenso reizvollen wie lehrreichen Buches den Leser knacken, um ihn plaudernd ins Reich der Zahlen und Figuren und ihren fesselnden Zusammenhängen und Gesetzen zu führen. Spannend enthüllt er anhand der vier Grundrechenarten die vielfältigen Eigenschaften der Zahlen.

Baschmakowa, I. G.

Diophant und diophantische Gleichungen (Bd. 80)

Übersetzung aus dem Russischen
97 Seiten mit 6 Abbildungen, 4,40 M
Bestell-Nr. 570 151 3

Neben den einschlägigen Teilen des Werkes von Euklid sind es die erhalten gebliebenen Bände des alexandrinischen Mathematikers Diophant, die den Ausgangspunkt der Zahlentheorie bilden. Diophantische Gleichungen höheren Grades führten zu interessanten Fragestellungen, die sich bis in unser Jahrhundert hinein erstrecken. Die bekannte sowjetische Mathematikhistorikerin I. G. Baschmakowa zeichnet den Bogen nach, der sich von den alten Griechen bis zu modernen Forschungsrichtungen und -ergebnissen spannt.

Pieper, H.

Zahlen aus Primzahlen (Bd. 81)

167 Seiten, 6,70 M
Bestell-Nr. 570 150 5

In diesem Bändchen wird der Begriff der p-adischen Zahlen als ein Grundbegriff der Zahlentheorie und Algebra für einen breiten Leserkreis verständlich dargestellt. p-adische Zahlen sind additiv aus einer Primzahl p aufgebaute Zahlen, mit denen man in geeigneter Weise addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren kann. Diese von K. Hensel eingeführten Zahlen sind heute aus der Zahlentheorie und Algebra nicht mehr wegzudenken. In der Zahlentheorie hat ihre Einführung zu einer neuartigen Betrachtungsweise geführt, die heute große Teile der modernen Algebra beherrscht.

Jaglom, I. M.

Ungewöhnliche Algebra (Bd. 83)

Übersetzung aus dem Russischen
95 Seiten mit 45 Abbildungen, 5,50 M
Bestell-Nr. 665 789 2

Das Buch führt in die Grundlagen der Booleschen Algebra ein, die eine wesentliche Rolle in der mathematischen Logik, der Kybernetik u. a. mathematischen Disziplinen spielt. Ein Kapitel über Schaltalgebra stellt den Bezug zur praktischen Anwendung in der Rechentechnik vor.
Gemeinschaftsausgabe mit dem Verlag MIR, Moskau

Belkner, H.

Reelle Vektorräume (Bd. 84)

174 Seiten mit 49 Abbildungen, 9,50 M
Bestell-Nr. 665 711 2

Es werden wichtige Grundbegriffe der Mathematik, wie z. B. Vektor, Zahlenfolge, Linearkombination, Basis, Dimension, Unterraum, Abstandsfunktion, Metrik, euklidischer Vektorraum u. a. m. in für Schüler, bei völliger Exaktheit, leicht verständlicher Form dargeboten. Das Bändchen ist deshalb gut geeignet, dem Schüler den Übergang zur Hochschulmathematik zu erleichtern.

Stahl, F. und E. Wenzel

Elektronische Datenverarbeitung (Bd. 85)

112 Seiten mit 59 Abbildungen, 3,00 M
Bestell-Nr. 706 491 7

Ein mathematischer Zweikampf

Leseprobe aus:
Wegbereiter der neuen Mathematik

Die wesentlichsten Entdeckungen europäischer Mathematiker in der Algebra wurden im Renaissancezeitalter (15. bis 16. Jahrhundert) gemacht, und in erster Linie muß man hier die Lösung der kubischen Gleichung nennen. Scipio del Ferro (1456 bis 1526), Professor an der Universität Bologna, fand eine Lösung der Gleichung

$$x^3+ax=b \quad (b>0)$$

in Radikalen, veröffentlichte sie aber nicht, sondern teilte sie seinem Schüler Fiore mit. Die Geheimhaltung mathematischer Entdeckungen war typisch für jene Zeit – es war üblich, wissenschaftliche Zweikämpfe durchzuführen, auf denen die Parteien einander eine Reihe von Aufgaben stellten, und das alleinige Wissen um Lösungsmethoden konnte einer der Seiten beträchtliche Vorteile verschaffen. Der Gewinner des Zweikampfes erhielt eine Auszeichnung, Anerkennung und die sich daraus ergebenden Vorteile.

In einem solchen Zweikampf traf Fiore auf N. Tartaglia (1499 bis 1557), dessen wirklicher Name wahrscheinlich Fontano lautete. Den Spitznamen Tartaglia (=Stotterer) trug er seit einer in der Kindheit erlittenen schweren Verwundung des Kehlkopfs, die ihm zugefügt worden war, als seine Vaterstadt von den Truppen des französischen Königs Franz I. besetzt war.

Die Armut erlaubte es Tartaglia nicht, sich eine ausreichende Bildung zu erwerben, und er konnte nur bis zu seinem vierzehnten Lebensjahr studieren. In seinem Buch „Fragen und verschiedene Erfindungen" schreibt er über die Schwierigkeiten und die erlittene Entbehrungen: „Von da an mußte ich mich selbst weiterbilden, und ich hatte keinen anderen Erzieher als den Begleiter der Armut – die Unternehmungslust." Später lehrte Tartaglia in Verona, Piacenza, Venedig und Brescia Mathematik. Er ist durch seine Arbeiten aus der Mathematik und Mechanik bekannt. Der Zweikampf war auf den 12. Februar 1535 festgelegt. Tartaglia hatte angenommen, Fiore leicht besiegen zu können; als er jedoch erfuhr, daß Fiore das Geheimnis von del Ferro kannte, setzte er alle Kunst und Mühe daran, die Regel von del Ferro auch herauszufinden. Er fand sie acht Tage vor dem festgelegten Zeitpunkt. Auf dem Zweikampf löste er alle ihm vorgelegten Aufgaben. Fiore jedoch (nach Tartaglias Worten) nicht eine.

Einen Tag nach dem Zweikampf löste Tartaglia auch die Gleichung

$$x^3=ax+b.$$

Die Gleichung $x^3+ax=b$ mit a, $b>0$ löste Tartaglia folgendermaßen: Er führte zwei Hilfsgrößen u und v ein, die den Bedingungen

$$u-v=b;\ uv=\left(\frac{a}{3}\right)^3$$

gehorchen. Diese Größe fand er als Wurzeln der quadratischen Gleichung $y^2-by-\left(\frac{a}{3}\right)^3=0$ und kam zu einer Lösung der gegebenen Gleichung in der Form $x=\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$, d. h.

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}+\frac{b}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^3}-\frac{b}{2}}.$$

Analog verfuhr Tartaglia auch mit der Gleichung $x^3=ax+b$, nur setzte er hier $u+v=b$; $uv=\left(\frac{a}{3}\right)^3$, was zur quadratischen Gleichung $y^2+by+\left(\frac{a}{3}\right)^3=0$ und dem Ergebnis $x=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}$, d. h. zu

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}+\frac{b}{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}-\frac{b}{2}}$$

führte.

Man muß bedenken, daß die Lösung nicht in der heutigen Symbolik, sondern rhetorisch gegeben wurde. Allerdings benutzte Tartaglia in seinem „Allgemeinen Traktat über Zahlen und Maße" (1556 bis 1560) Bezeichnungen (z. B. x=co, x^2=ce, x^3=cu, x^4=ce ce), die sich durch Abkürzungen der Worte cosa (Ding), censo (Quadrat), cubo (Würfel) und censo de censo (Quadrat des Quadrats) ergeben. Tartaglia folgte darin L. Paccioli (etwa 1445 bis 1514).

Der Mathematiker, Philosoph und Arzt G. Cardano erfuhr von Tartaglias Entdeckung und unternahm alles, um in den Besitz derselben zu gelangen. 1539 gelang es ihm unter dem heiligen Versprechen, nichts davon zu veröffentlichen, die Formulierung des Lösungsweges von Tartaglia zu erfragen. Tartaglia war vorsichtig – er gab seine Regel in Form eines 25zeiligen Gedichts weiter, das so begann:

Quando che'l cubo con le cose appresso,
Se agguaglia a qualche numero discreto,
Trovan dui altri, differenti in esso ...
(Wenn Rüfel und Ding zusammen irgendeiner Zahl gleich sind, dann finde zwei andre, von ihm unterschiedliche ...)

Cardano dechiffrierte die Regel von Tartaglia und bewies ihre Richtigkeit. Er suchte auch del Ferros Schwiegersohn in Bologna auf und erfuhr von dessen Lösung, die mit der von Tartaglia übereinstimmte. 1545 brach er sein Tartaglia gegebenes Versprechen und veröffentlichte in dem Traktat „Hohe Kunst in Fragen der Algebra" die Lösung von del Ferro und Tartaglia, wobei er allerdings auf Tartaglias Autorenschaft hinwies.

Seitdem wird jedoch die entsprechende Formel nach Cardano benannt. Im selben Traktat veröffentlichte Cardano eine Methode zur Lösung von Gleichungen vierten Grades, die sein Schüler L. Ferrari (1522 bis 1565) gefunden hatte.

Nikiforowski, Wiktor A.,
und Leon S. Freiman

Wegbereiter der neuen Mathematik

Übersetzung aus dem Russischen
VEB Fachbuchverlag Leipzig 1978
222 Seiten mit 37 Bildern,
12,5 cm × 20 cm, Broschur 5,50 M
Bestell-Nr. 546 411 6

In diesem populärwissenschaftlichen Buch wird ein bedeutender Abschnitt aus der Geschichte der Mathematik beschrieben: die erste Hälfte des 17. Jahrhunderts, in der die Grundlage zur analytischen Geometrie und zur Infinitesimalrechnung gelegt wurden. Vier große Männer stehen im Mittelpunkt des Geschehens: Descartes, Fermat, Torricelli, de Roberval. Ihre wissenschaftlichen Ergebnisse werden im Zusammenhang mit den gesellschaftlichen Verhältnissen jener Zeit allgemeinverständlich dargestellt. Leserkreis: alle an populärwissenschaftlichen Darstellungen Interessierten, Oberschüler, Studenten an Fachschulen, Lehrer, Mathematiker.

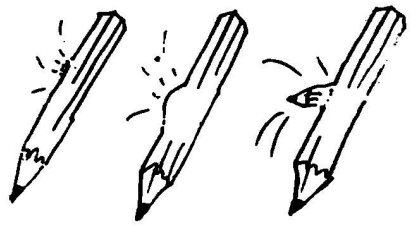
Inhaltsverzeichnis: Vorgänger; Descurtes; Fermat; Torricelli; Roberval; Schlußwort.

Gemeinschaftsausgabe des Verlags MIR Moskau und des VEB Fachbuchverlag Leipzig

---

In freien Stunden · alpha heiter

Unterhaltungsmathematik
aus der Mathematischen Schülerbücherei



Stanislaw Skowryski

Eine Wägungsaufgabe

In seinem Mathematikbuch stellt der berühmte Mathematiker Leonardo von Pisa (13. Jh.) folgende Aufgabe: Es sind fünf Wägestücke anzugeben, mit denen man jeden Körper von 1 kg bis 30 kg wiegen kann, dessen Maßzahl eine ganze Zahl ist, wenn man die Wägestücke nur auf *eine* Waagschale legen darf.

aus: Bausteine des Wissens, Mathematik (MSB Bd. 3)

Rund um das Schachbrett

Wir verbinden zwei benachbarte Ecken des Schachbretts $ABCD$ mit dem Mittelpunkt M der gegenüberliegenden Seite. Dadurch entsteht ein Dreieck T. Es ist festzustellen, wie viele geschlossene Felder des Schachbretts in die rechtwinkligen Dreiecke ABM und DCM fallen.

aus: Methoden zur Lösung mathematischer Aufgaben (MSB Bd. 5)

Wo steckt der Fehler?

Die Gleichung $\frac{a-x}{1-ax}=\frac{1-bx}{b-x}$ ist zu lösen.

Lösung:

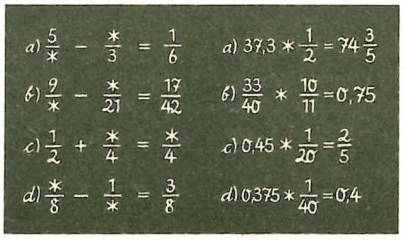
$$(a-x)(b-x)=(1-ax)(1-bx)$$
$$ab-ax-bx+x^2=1-bx-ax+abx^2$$
$$x^2=1+abx^2-ab$$
$$x^2-1=ab(x^2-1)$$
$$1=ab$$

aus: Wo steckt der Fehler (MSB Bd. 11)

Kryptarithmetik

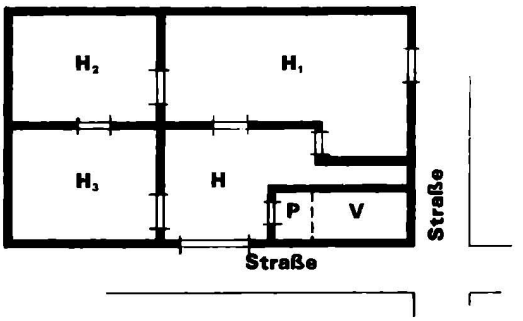
Als Schüler den Fachunterrichtsraum betraten, fanden sie an der Wandtafel einen unvollständigen Text, den ihnen ein gewitzter Lehrer in der Pause angeschrieben hatte. Wer vervollständigt ihn?

aus: Kurzweil durch Mathe (MSB Bd. 77)



In einem Zuge

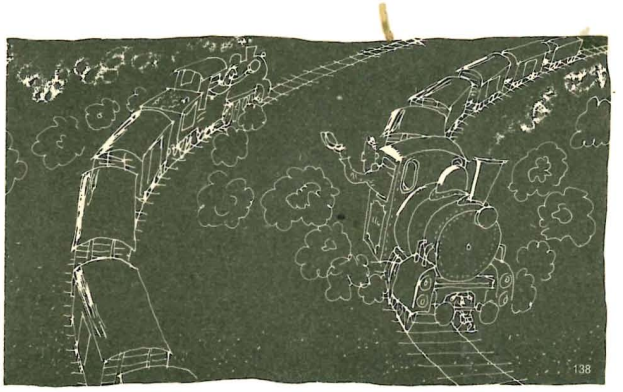
Das Bild zeigt den Plan eines Werkgeländes mit dem Hof H, den Hallen H_1, H_2, H_3 und dem Verwaltungsgebäude V, in das die Pförtnerloge P eingebaut ist. Der Betriebsschutz will auf seinem Nachtrundgang alle Tore und Türen nur einmal durchschreiten und sie danach sofort verschließen. Selbstverständlich soll der Gang in P enden, und das Verschließen von P vor dem Rundgang wird nicht mitgerechnet. Ist ein solcher Gang möglich? Wo müßte er beginnen, und auf welchem Wege könnte er erfolgen?



Begegnung von zwei Eisenbahnzügen

Zwei Güterzüge, jeder 250 m lang, begegnen einander mit der gleichen Geschwindigkeit von 45 km · h^{-1}. Wieviel Sekunden verstreichen von dem Augenblick, in dem die Lokführer einander begegnen, bis zu dem Augenblick, in dem die Zugführer in den letzten Waggons einander begegnen?

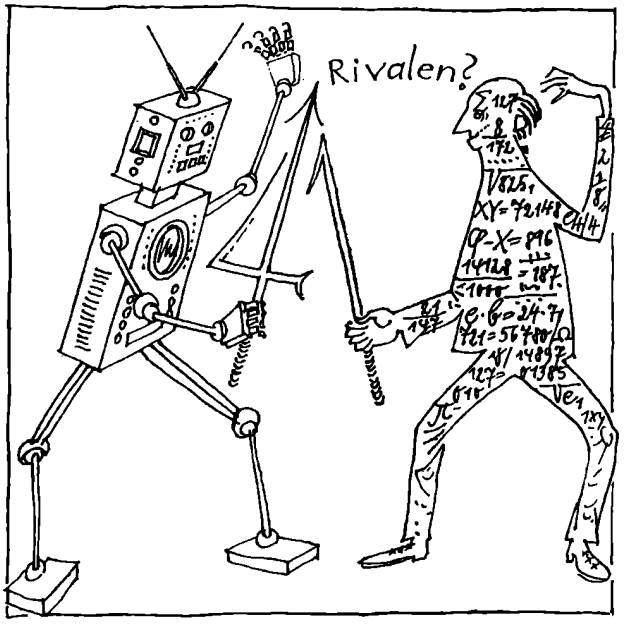
aus: Köpfchen, Köpfchen! (MSB Bd. 78)



Kombinatorik

In einem Sportgeschäft kann man Fußballdresse in vier Farben, Hosen in drei Farben und Wadenschutz in zwei Farben kaufen. Wieviel verschiedene Ausrüstungen kann man hieraus zusammenstellen?
(Je zwei sollen sich in mindestens einem Kleidungsstück unterscheiden.)

aus: Kombinatorik (MSB Bd. 90)



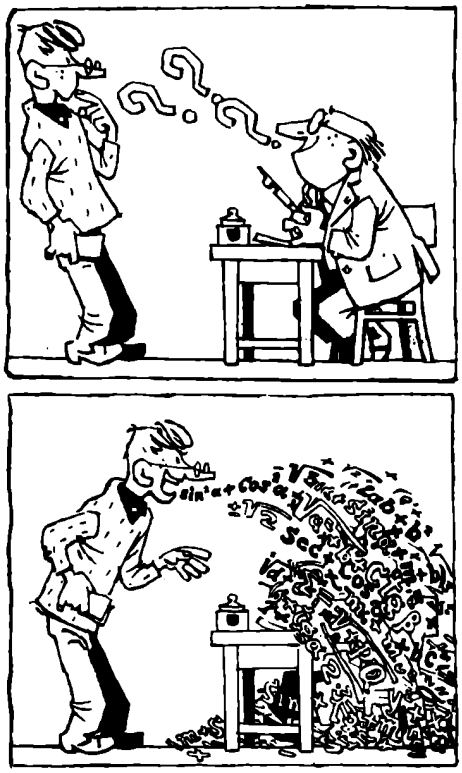
aus: Mathematik heute (MSB Bd. 66)

Ein wenig Mengenlehre

In einer Klasse sind 12 Schüler aktive Fußballer in der Schulmannschaft, 18 Schüler besuchen den Zirkel „Junge Sanitäter", 14 Schüler sind Mitglieder des Schulchores, und nur 2 Schüler gehören keiner dieser AGs an.
Die Anzahl der Schüler läßt sich dann genau ermitteln, wenn man zusätzlich folgende Angaben kennt:
8 Fußballer nehmen am Zirkel „Junge Sanitäter" teil.
5 Fußballer sind Mitglieder des Chores.
7 Chormitglieder nehmen am Zirkel „Junge Sanitäter" teil.
2 Schüler sind Fußballer, Chormitglieder und außerdem gehören sie auch dem Zirkel „Junge Sanitäter" an.

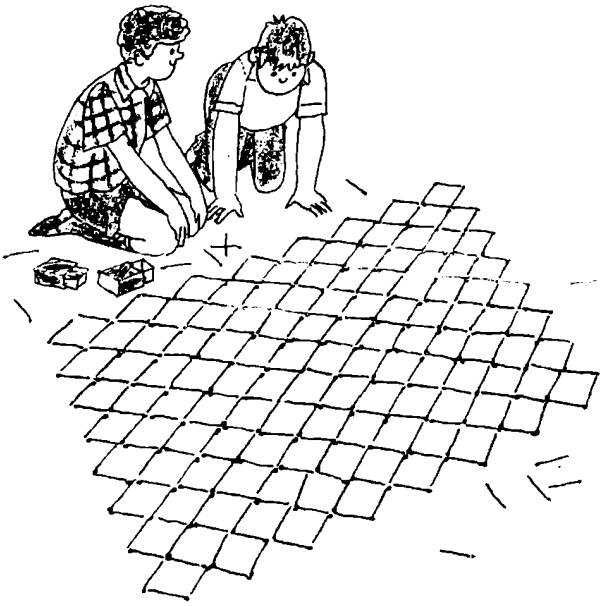
aus: Arbeiten mit Mengen (MSB Bd. 92)

Ein Vorkommnis während der Prüfung



aus: Mathe mit Pfiff (MSB Bd. 82)

Spiel mit Hölzchen



Karl zeigt seinem Freund Friedrich stolz die abgebildete Figur, die, wie er ihm erklärt, aus 114 Quadraten bestehe. Friedrich besieht sich Karls Werk und behauptet kühn, er könne, ohne die Lage auch nur eines der Hölzchen zu verändern, erreichen, daß die Figur nur noch 113 Quadrate besitze. Karl glaubt ihm das einfach nicht, aber Friedrich hatte tatsächlich nicht zu viel versprochen. Was meinst du zu Friedrichs Behauptung? *aus: Gut gedacht ist halb gelöst (MSB Bd. 53)*

XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Bezirksolympiade (7./8. Februar 1981)

Aufgaben

Olympiadeklasse 7

1. Von einer natürlichen Zahl z wird gefordert, daß sie sich in vier Summanden zerlegen läßt, die die folgenden Bedingungen erfüllen:
Der erste Summand beträgt zwei Drittel der Zahl z,
der zweite Summand beträgt ein Viertel des ersten Summanden,
der dritte Summand beträgt vier Fünftel des zweiten Summanden,
der vierte Summand beträgt ein Viertel des dritten Summanden,
der dritte Summand beträgt 48.
Untersuche, ob diese Bedingungen erfüllbar sind!
Ist dies der Fall, so ermittle alle natürlichen Zahlen z und ihre Zerlegungen in vier Summanden, die diese Bedingungen erfüllen!

2. Gegeben seien sieben Strecken mit den Längen 1 cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm und 15 cm.

a) Gib die Anzahl aller verschiedenen Möglichkeiten an, drei von diesen sieben Strecken auszuwählen! Dabei sollen solche Möglichkeiten, die sich nur in der Reihenfolge der ausgewählten Strecken unterscheiden, nicht als verschieden gewertet werden.

b) Gib unter den in a) gefundenen Möglichkeiten alle diejenigen an, bei denen aus den Längen der drei ausgewählten Strecken als Seitenlängen ein Dreieck konstruiert werden kann!

c) Berechne, wieviel Prozent der in a) gefundenen Möglichkeiten die in b) gefundenen Möglichkeiten sind! (Der Prozentsatz ist auf eine Dezimale nach dem Komma gerundet anzugeben.)

3. Es sei S der Scheitel eines spitzen Winkels, dessen Schenkel mit s_1 und s_2 bezeichnet seien. Es werde vorausgesetzt, daß auf dem Strahl s_1 zwei voneinander und von S verschiedene Punkte A, B liegen und daß auf dem Strahl s_2 drei voneinander und von S verschiedene Punkte C, D, E liegen, wobei folgendes gilt: Die Punkte S, A, B sind auf s_1 in dieser Reihenfolge angeordnet; die Punkte S, C, D, E sind auf s_2 in dieser Reihenfolge angeordnet; es ist

$$\overline{SC}=\overline{CA}=\overline{AD}=\overline{DB}=\overline{BE}$$

und $\overline{SB}=\overline{SE}$.
Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\sphericalangle BSE$!

4. Horst, der aktiv Sport treibt, erzählt seinem Freund: „In vier Jahren habe ich insgesamt an 21 Wettkämpfen teilgenommen, in jedem Jahr an mindestens einem Wettkampf. Dabei war die Anzahl der Wettkämpfe von Jahr zu Jahr größer; im vierten Jahr war sie genau dreimal so groß wie im ersten Jahr."
Untersuche, ob es für die Wettkämpfe in den einzelnen Jahren Anzahlen gibt, die Horsts Angaben entsprechen, und ob aus den Angaben diese Anzahlen eindeutig hervorgehen! Ist das der Fall, so ermittle diese vier Anzahlen!

5. Von einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ wird vorausgesetzt, daß sich die beiden Kreise, die die Seiten AD bzw. BC des Trapezes als Durchmesser haben, von außen berühren.
Beweise aus dieser Voraussetzung, daß die Summe der Längen der Seiten AB und CD gleich der Summe der Längen der Seiten AD und BC ist!

6. In eine Leihbibliothek kamen während eines Tages Schüler aus jeder der Klassenstufen 6, 7 und 8; dies waren insgesamt 85 Schüler. Genau ein Drittel der Schüler der Klassenstufe 6, genau ein Drittel der Schüler der Klassenstufe 7 und genau ein Viertel der Schüler der Klassenstufe 8, das waren insgesamt 26 Schüler, entliehen Bücher aus der Bibliotheksreihe „Mathematische Schülerbücherei". Außerdem ergab sich aus Gesprächen, daß genau ein Zehntel der Schüler der Klassenstufe 7 an der Mathematikolympiade des Kreises teilgenommen hatte.
Untersuche, ob aus diesen Angaben die Anzahlen der Schüler der Klassenstufe 6, der Klassenstufe 7 und der Klassenstufe 8 eindeutig hervorgehen! Ist das der Fall, so ermittle diese drei Anzahlen!

Olympiadeklasse 8

1. Uwe erzählt: „In den Winterferien machten wir mit einer Reisegesellschaft eine Fahrt in den Harz. Daran nahmen nicht mehr als 80 Personen teil, und zwar waren es genau 3 Männer weniger als Frauen und genau 20 Erwachsene mehr als Kinder. Unterwegs wurden wir in genau 7 Gruppen von gleicher Personenzahl aufgeteilt."
Ermittle alle Möglichkeiten, die Anzahlen der Männer, Frauen und Kinder so anzugeben, daß Uwes Aussagen zutreffen!

2. Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft, daß das Produkt aus den einzelnen Ziffern von n gleich dem Fünffachen der Quersumme von n ist!

3. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r=4$ cm; $b=6$ cm und $c=7$ cm! Dabei seien r der Umkreisradius des Dreiecks und b, c die Längen der Seiten AC bzw. AB des Dreiecks ABC.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

4. Auf einem Tisch liegen vier Spielkarten mit der Bildseite nach unten. Sie sind von links nach rechts in einer Reihe angeordnet, mit gleich großen Abständen jeweils zwischen unmittelbar benachbarten Karten (siehe Bild).

Den Mitspielern werden folgende Angaben mitgeteilt: Die vier Karten sind ein Bube, eine Dame, ein König und ein As, jede Karte in einer der vier Farben Kreuz, Pik, Herz, Karo, wobei jede dieser Farben genau einmal vertreten ist. Ferner gilt:
(1) Die Dame ist weiter vom As entfernt als das As vom König.
(2) Der Bube liegt näher am As als der König.
(3) Von der Herzkarte bis zur Karokarte ist der Abstand geringer als von der Kreuzkarte bis zur Herzkarte.
(4) Die Karokarte liegt weiter entfernt von der Herzkarte als von der Pikkarte.
(5) Die Pikkarte liegt unmittelbar benachbart links neben der Dame.
Beweise, daß aus diesen Angaben eindeutig hervorgeht, um welche Karten es sich handelt und in welcher Reihenfolge von links nach rechts sie auf dem Tisch liegen!

5. Zwei Strahlen s_1 und s_2, die von einem Punkt S ausgehen und miteinander einen rechten Winkel bilden, mögen von zwei zueinander parallelen Geraden g und h geschnitten werden. Die Gerade g schneide s_1 in A und s_2 in C, die Gerade h schneide s_1 in B und s_2 in D. Ferner gelte $\overline{SB}=5$ cm, und der Flächeninhalt des Dreiecks SAC betrage genau 36% des Flächeninhalts des Dreiecks SBD.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Länge der Strecke SA!

6. Von zwei Dreiecken ABC_1 und ABC_2 werden die folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) vorausgesetzt:

(1) $\overline{\sphericalangle C_1AB} = \overline{\sphericalangle C_2AB}$,

(2) $\overline{BC_1} = \overline{BC_2}$

(3) $\overline{AC_1} < \overline{AC_2}$.

Beweise aus dieser Voraussetzung, daß die Umkreise der Dreiecke ABC_1 und ABC_2 gleiche Radien haben!

Olympiadeklasse 9

1. In dem folgenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe ohne Rest entsteht. Dabei können verschiedene Buchstaben auch durch die gleiche Ziffer ersetzt werden. Wie üblich darf eine mehrstellig geschriebene Zahl nicht die Anfangsziffer 0 haben.

Beweisen Sie, daß es genau eine Ersetzung dieser Art gibt, die den Anforderungen der Aufgabe genügt! Ermitteln Sie diese Ersetzung!

$$\begin{array}{l} a\ b\ c\ 5\ 5\ :\ 5\ d\ e\ =\ f\ 5\ g \\ h\ i\ 5 \\ \hline j\ k\ m\ n \\ p\ 5\ q\ r \\ \hline s\ t\ u\ v \\ w\ x\ y\ z \end{array}$$

2. Es seien a, b, c, d positive reelle Zahlen, für die $a>b>c>d$ sowie $a+d=b+c$ vorausgesetzt wird.

Beweisen Sie, daß dann stets $a^2+d^2>b^2+c^2$ gilt!

3. Von einem Rechteck $ABCD$ und einem Punkt P in seinem Innern wird $\overline{PA}=\sqrt{2}$ cm, $\overline{PB}=\sqrt{3}$ cm, $\overline{PC}=\sqrt{5}$ cm vorausgesetzt.

Beweisen Sie, daß die Länge $\overline{PD}$ durch diese Voraussetzungen eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Länge!

4. Ermitteln Sie alle Paare $(a;b)$ natürlicher Zahlen a, b mit $a>b$, für die die folgenden Aussagen (1), (2), (3) zutreffen!

(1) Die Zahl a ist (in dekadischer Ziffernschreibweise) zweistellig, die Zahl b ebenfalls.

(2) Vertauscht man die Ziffern von a miteinander, so erhält man b.

(3) Subtrahiert man b^2 von a^2, so erhält man eine Quadratzahl.

5. Beweisen Sie, daß man den Körper eines regulären Tetraeders $ABCD$ so durch eine Ebene schneiden kann, daß die Schnittfläche ein Quadrat ist!

Berechnen Sie aus der gegebenen Kantenlänge a des Tetraeders $ABCD$ den Flächeninhalt I eines solchen Quadrates!

Hinweis: Unter dem Körper eines regulären Tetraeders $ABCD$ versteht man denjenigen Körper, der von den Flächen der Dreiecke ABC, ABD, ACD und BCD begrenzt wird, wobei $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{CD}$ gilt.

6. Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $b=7$ cm, $\beta=40°$ und $h_b=5$ cm!

Dabei sollen b die Länge der Seite AC, β die Größe des Winkels $\sphericalangle CBA$ und h_b die Länge der von B ausgehenden Höhe bedeuten.

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck ABC gibt, das die geforderten Größen b, β und h_b aufweist!

Olympiadeklasse 10

1. In einem Stadtbezirk Berlins nahmen in der Olympiadeklasse 10 insgesamt 50 Schüler an der 2. Stufe der OJM teil. Die folgenden Angaben beziehen sich auf diesen Teilnehmerkreis:

(1) Es nahmen ebensoviel Jungen wie Mädchen teil.

(2) Genau 24 der Teilnehmer, darunter genau 15 Jungen, waren Mitglieder einer AG Mathematik.

(3) Genau 13 der Teilnehmer erhielten Preise oder Anerkennungsurkunden. (Diese 13 Teilnehmer werden im folgenden „Preisträger" genannt.)

(4) Genau 12 der Preisträger waren Mitglieder einer AG Mathematik.

(5) Genau 6 der Preisträger waren Mädchen.

(6) Es waren nur solche Mädchen Preisträger, die einer AG Mathematik angehörten.

Ermitteln Sie die Anzahl derjenigen teilnehmenden Jungen, die weder Preisträger waren noch einer AG Mathematik angehörten!

2. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a mit der Eigenschaft, daß das folgende Ungleichungssystem (1), (2), (3) mindestens eine (aus reellen Zahlen x, y bestehende) Lösung hat!

$$\begin{aligned} 2y+x &< 20, && (1)\\ y-x &< 4, && (2)\\ y-ax &\geqq 6. && (3) \end{aligned}$$

3. Gegeben sei ein Punkt P in einer Ebene ε. Untersuchen Sie, ob es in ε ein Quadrat $ABCD$ gibt, für das $\overline{PA}=\sqrt{2}$ cm, $\overline{PB}=\sqrt{5}$ cm, $\overline{PC}=\sqrt{8}$ cm gilt! Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie für jedes derartige Quadrat seine Seitenlänge!

4. Ermitteln Sie alle Tripel (a, h, x) von Null verschiedener natürlicher Zahlen mit folgender Eigenschaft!

Wenn a und h die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Grundkantenlänge bzw. Höhenlänge einer geraden quadratischen Pyramide sind, dann hat sowohl die in Quadratzentimeter gemessene Oberfläche als auch das in Kubikzentimeter gemessene Volumen dieser Pyramide die Maßzahl x.

5. Tausend reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$ seien durch die Festsetzung bestimmt, daß

$$x_1 = 3$$

und für alle $n=1, 2, \ldots, 999$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2+4}{2x_n}$$

gelten soll.

Beweisen Sie, daß (nach diesen Festsetzungen) für jedes $n=1, 2, \ldots, 1000$ die Ungleichung

$$x_n > 2$$

gilt!

6. Konstruieren Sie ein Dreieck ABC, in dem die Längen a, b, c der Seiten BC, CA, AB und die Größen β, γ der Winkel $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ die Bedingungen

$a=8$ cm, $b+c=12$ cm, $\beta+\gamma=100°$

erfüllen!

Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion!

Beweisen Sie, daß alle Dreiecke, die diesen Bedingungen genügen, einander kongruent sind!

Hinweis: In dieser Aufgabe werden auch Dreiecke ABC, $A'B'C'$ als „einander kongruent" bezeichnet, bei denen A', B', C' in irgend einer anderen Reihenfolge mit A, B, C zur Deckung gebracht werden können.

Olympiadeklasse 11/12

1. Man ermittle alle reellen Zahlen x, für die das folgende System von Ungleichungen (1), (2), (3) erfüllt ist:

$$\begin{aligned} x^4+x^2-2x &\geqq 0, && (1)\\ 2x^3+x-1 &< 0, && (2)\\ x^3-x &> 0. && (3) \end{aligned}$$

2. Es sei f die durch

$f(x)=x^4-(x+1)^4-(x+2)^4+(x+3)^4$

definierte Funktion, wobei der Definitionsbereich von f

a) die Menge aller ganzen Zahlen,

b) die Menge aller reellen Zahlen ist.

Man untersuche sowohl für den Fall a) als auch für den Fall b), ob die Funktion f einen kleinsten Funktionswert annimmt, und ermittle, falls das zutrifft, jeweils diesen kleinsten Funktionswert!

3.A Es sind alle natürlichen Zahlen n zu ermitteln, die die folgende Eigenschaft haben: Für alle reellen Zahlen a und b mit $0<a<b$ gilt

$$a+\frac{1}{1+a^n} < b+\frac{1}{1+b^n}.$$

3.B Ist f eine im Intervall $0\leqq x\leqq 1$ definierte Funktion, so seien für sie die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) betrachtet:

(1) Für jedes reelle x mit $0\leqq x\leqq 1$ gilt $f(x)\geqq 0$.

(2) Es gilt $f(1)=1$.

(3) Für jedes reelle x_1 mit $0\leqq x_1\leqq 1$ und jedes reelle x_2 mit $0\leqq x_2\leqq 1$ und $x_1+x_2\leqq 1$ gilt $f(x_1+x_2)\geqq f(x_1)+f(x_2)$.

a) Man beweise:
Wenn f eine Funktion ist, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so gilt $f(x)<2x$ für jedes reelle x mit $0<x\leqq 1$.
b) Man überprüfe, ob auch die folgende Aussage wahr ist: Wenn f eine Funktion ist, die den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, so gilt $f(x)\leqq 1{,}99\cdot x$ für jedes reelle x mit $0<x\leqq 1$.

4. Man ermittle alle diejenigen ganzen Zahlen k, für die die Gleichung

$$\frac{x}{k-4}+\frac{k}{2(k-4)}+\frac{k+4}{x}=0$$

lösbar ist (d. h. mindestens eine Lösung x besitzt), wobei alle Lösungen x ganzzahlig sind.

5. Man beweise, daß für jede natürliche Zahl n die folgende Aussage gilt:
Wenn die Anzahl der Ecken eines regelmäßigen Vielecks gleich $3n$ ist, dann gibt es kein rechtwinkliges Koordinatensystem, in dem beide Koordinaten jedes Eckpunktes dieses Vielecks rationale Zahlen sind.

6. Man zeige, daß zu jeder natürlichen Zahl $n\geqq 1$ und jeder natürlichen Zahl $B>1$ eine natürliche Zahl $C\geqq 1$ existiert, die im Positionssystem mit der Basis B nur aus Ziffern „Null" und „Eins" besteht und durch n teilbar ist.

Lösungen

Lösung zu: Eine Aufgabe
von Prof. Dr. K. Rosenbaum,
Heft 1/81:

▲2053▲ a) Lösung von Domingo Lovis, Kl. 11 der Lenin-Schule, Havanna, Kuba:
In den Bezeichnungen von Bild 1 ergibt sich aus der Aufgabenstellung

$$\frac{\overline{B'A_2}}{\overline{AB'}}=\frac{\overline{A'B_1}}{\overline{BA'}}=\frac{2}{3};$$

folglich ist $AB\parallel A'B'$.
Analog ergibt sich $AC\parallel A'C'$ und $BC\parallel B'C'$, womit die Ähnlichkeit
(1) $\quad\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$
gezeigt ist.
Zum Nachweis der Eigenschaft (2) gehen wir von

$$\frac{\overline{B'A_2}}{\overline{AB'}}=\frac{2}{3}\text{ über zu }\frac{\overline{B'A_2}}{\overline{AB'}}+1=\frac{\overline{B'A_2}+\overline{AB'}}{\overline{AB'}}=\frac{5}{3}.$$

Analog ist auch $\dfrac{\overline{C'A_1}+\overline{AC'}}{\overline{AC'}}=\dfrac{5}{3}$.

Nach dem Strahlensatz folgt hieraus

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{B'C'}}=\frac{5}{3},\text{ also }\overline{BC}=3\,\overline{A_1A_2}=5\,\overline{B'C'}.$$

Analog ist $\overline{AB}=5\,\overline{A'B'}$ und $\overline{AC}=5\,\overline{A'C'}$, so daß sich für die betrachteten Flächeninhalte wie behauptet

$$F=25F'\text{ ergibt.}$$

b) Lösung von Domingo Lovis, Kl. 11 der Lenin-Schule, Havanna, Kuba:
In den Bezeichnungen von Bild 2 ergibt sich aus der Aufgabenstellung

$$\frac{\overline{B'A_{n-1}}}{\overline{AB'}}=\frac{\overline{C'B_{n-1}}}{\overline{BC'}}=\frac{n-1}{n}.$$

Folglich ist $AB\parallel A'B'$.
Analog ergibt sich $AC\parallel A'C'$ und $BC\parallel B'C'$, womit (1) gezeigt ist.
Zum Nachweis von (2) gehen wir von

$$\frac{\overline{B'A_{n-1}}}{\overline{AB'}}=\frac{n-1}{n}\text{ über zu }\frac{\overline{B'A_{n-1}}}{\overline{AB'}}+1$$

$$=\frac{\overline{B'A_{n-1}}+\overline{AB'}}{\overline{AB'}}=\frac{2n-1}{n}.$$

Analog ist auch $\dfrac{\overline{C'A_1}+\overline{AC'}}{\overline{AC'}}=\dfrac{2n-1}{n}$.

Nach dem Strahlensatz folgt hieraus

$$\frac{\overline{A_1A_{n-1}}}{\overline{B'C'}}=\frac{2n-1}{n}.$$

Wegen $\overline{BC}=\dfrac{n}{n-2}\overline{A_1A_{n-1}}$ ist daher

$$\overline{BC}=\frac{n\overline{A_1A_{n-1}}}{n-2}=\frac{2n-1}{n-2}\overline{B'C'}.$$

Analog ist

$$\overline{AB}=\frac{2n-1}{n-2}\overline{A'B'}\text{ und }\overline{AC}=\frac{2n-1}{n-2}\overline{A'C'}.$$

Hieraus ergibt sich für die betrachteten Flächeninhalte wie behauptet

$$F=\left(\frac{2n-1}{n-2}\right)^2F'.$$

Lösungen zu:
Grundkenntnisse in Geometrie gefragt

▲1▲ Der Winkel $\sphericalangle CAB$ hat die Größe $180°-90°-45°=45°$. Aus $\sphericalangle CAB=\sphericalangle CBA$ folgt $\overline{AC}=\overline{BC}$. Somit stellt die erste Figur ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck dar. Das Lot von C auf $\overline{AB}$ habe den Fußpunkt M; dann ist M Mittelpunkt von $\overline{AB}$, und $\overline{CM}$ hat die Länge 4 cm. Daraus folgt für den Flächeninhalt $A=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 4\text{ cm}^2=16\text{ cm}^2$.

▲2▲ Aus $\overline{CB}\cong\overline{CD}$ und $\overline{AB}\cong\overline{AD}$ folgt, daß die zweite Figur ein Drachenviereck darstellt. Somit hat auch der Winkel $\sphericalangle ADC$ die Größe 105° und folglich der Winkel $\sphericalangle BAD$ die Größe 60°. Da das Dreieck ABD gleichschenklig ist, hat jeder der Winkel $\sphericalangle ABD$ und $\sphericalangle ADB$ ebenfalls die Größe 60°. Das Dreieck ABD ist somit gleichwinklig, also auch gleichseitig. Es sei S der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$; dann hat $\overline{CS}$ die Länge 4 cm und $\overline{AS}$ die Länge $4\cdot 3$ cm. Für den Flächeninhalt des Drachenvierecks $ABCD$ gilt somit

$$A=\frac{1}{2}\cdot e\cdot f=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot(4+4\cdot\sqrt{3})\text{ cm}^2$$
$$=16\cdot(1+\sqrt{3})\text{ cm}^2\approx 43{,}7\text{ cm}^2.$$

▲3▲ Da drei Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ die Größe 90° haben, ist auch der vierte Innenwinkel ein Rechter. Das Viereck $ABCD$ ist somit ein Rechteck. Der Winkel $\sphericalangle ACB$ hat die Größe 60°. Aus der Kongruenz der Dreiecke $\triangle ACB$ und $\triangle ACD$ folgt, daß der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ gleich dem Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 8 cm ist. Für den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ gilt deshalb

$$A=\frac{1}{4}\cdot 8^2\cdot\sqrt{3}\text{ cm}^2=16\cdot\sqrt{3}\text{ cm}^2$$
$$\approx 27{,}7\text{ cm}^2.$$

▲4▲ Das Lot von D auf $\overline{AB}$ habe den Fußpunkt F. Im Dreieck AFD hat der Winkel $\sphericalangle ADF$ die Größe 30°. In einem rechtwinkligen Dreieck, dessen spitze Winkel die Größen 60° und 30° besitzen, ist die Hypotenuse doppelt so lang wie die kürzere der beiden Katheten. Wegen $\overline{AF}=\dfrac{1}{2}\cdot(8-4)\text{ cm}=2$ hat $\overline{AD}$ die Länge 4 cm. Verbinden wir den Mittelpunkt M von $\overline{AB}$ mit C und D, so erhalten wir drei gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge 4 cm. Für den Flächeninhalt des gleichschenkligen Trapezes $ABCD$ gilt deshalb

$$A=3\cdot\frac{1}{4}\cdot 4^2\cdot\sqrt{3}\text{ cm}^2=12\cdot\sqrt{3}\text{ cm}^2$$
$$\approx 20{,}8\text{ cm}^2.$$

▲5▲ Der Winkel $\sphericalangle ACD$ hat die Größe 45°. Das Dreieck ACD ist somit ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck. Der Winkel $\sphericalangle ACB$ hat die Größe 30° und folglich der Winkel $\sphericalangle CAB$ die Größe 60°. Deshalb hat $\overline{AC}$ die Länge $2\cdot 8\text{ cm}=16\text{ cm}$. Für den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ gilt somit

$$A=a=\left(\frac{1}{2}\cdot 16^2+\frac{1}{4}\cdot 16^2\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$$
$$=64\cdot(2+\sqrt{3})\text{ cm}^2\approx 238{,}9\text{ cm}^2.$$

Lösungen zu: Zwei Geometrieaufgaben
von Jörg Pietschmann

▲2082▲ Nach dem Höhensatz gilt

$$h_c^2=p\cdot q. \tag{1}$$

Nach dem Kathetensatz gilt

$$a^2=p\cdot c\text{ bzw. }p=\frac{a^2}{c} \tag{2}$$

und $\quad b^2=q\cdot c\text{ bzw. }q=\dfrac{b^2}{c}.$ (3)

Setzt man (2) und (3) in (1) ein, so erhält man

$$h_c^2=\frac{a^2\cdot b^2}{c^2}$$

und wegen des Satzes des Pythagoras

$$h_c^2=\frac{a^2\cdot b^2}{a^2+b^2}.$$

Daraus folgt

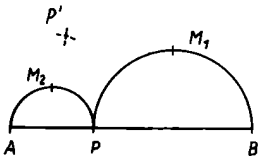
$$\frac{1}{h_c^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2\cdot b^2}\text{ bzw.}$$

$$\frac{1}{h_c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\text{ bzw.}$$

$$h_c^{-2}=a^{-2}+b^{-2},\text{ w.z.b.w.}$$

▲2083▲ Nach dem Satz des Thales beträgt die Größe der Winkel $\sphericalangle AM_2P$ und $\sphericalangle BM_1P$ jeweils 90°.
Die Größe der Winkel $\sphericalangle AP'P$ und $\sphericalangle PP'B$ beträgt jeweils 45°, da diese Winkel Peripheriewinkel über denselben Bögen wie die Zentriwinkel $\sphericalangle AM_2P$ bzw. $\sphericalangle PM_1B$ sind.

Damit beträgt die Größe des Winkels $\sphericalangle AP'B$ 90°. Nach der Umkehrung des Satzes des Thales liegt der Punkt P' auf dem Halbkreis über $\overline{AB}$, w. z. b. w.



Die beiden Aufgaben und Lösungen wurden bearbeitet von dem langjährigen Aufgabenexperten der *alpha*, Oberlehrer Dr. W. Fregin, IfL Leipzig.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 6/80:

Ma 5 ▪2026 Da in diesem Haus vier Familien mit insgesamt sechs Kindern wohnen, und da jede Familie entweder genau ein oder genau zwei Kinder hat, sind es zwei Familien mit genau einem und zwei Familien mit genau zwei Kindern. Da die beiden Familien Ackermann und Dahlmann je genau ein Kind haben, gehören zu den Familien Brauer und Christensen je genau zwei Kinder. Da Gudrun 11 Jahre und die Tochter der Familie Ackermann 8 Jahre alt ist und unter den 6 Kindern nur zwei Mädchen vorkommen, hat Inge den Nachnamen Ackermann. Da die 11jährige Gudrun und der 13jährige Egon Geschwister sind, zur Familie Brauer aber Zwillinge gehören, haben Gudrun und Egon den Nachnamen Christensen. Hans heißt nicht Brauer, da er mit dem Sohn der Familie Brauer befreundet ist; deshalb hat Hans den Nachnamen Dahlmann. Folglich sind Fred und Jochen die Zwillinge mit dem Nachnamen Brauer.

Ma 5 ▪2027 Angenommen, Heinz hat im dritten Laden n Mark ausgegeben; dann hat er im zweiten Laden $3n$ Mark, im ersten Laden $2n$ Mark bezahlt. Insgesamt hat Heinz von seiner Mutter $4 \cdot 2n = 8n$ Mark erhalten. Nun gilt

$$\begin{aligned} 2n+3n+n+10&=8n,\\ 8n&=6n+10,\\ 2n&=10,\\ n&=5. \end{aligned}$$

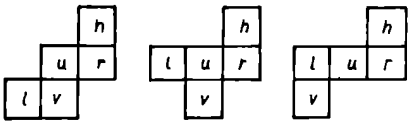
Heinz erhielt von seiner Mutter $8 \cdot 5$ M $= 40$ M zum Einkauf.

Ma 5 ▪2028 Aus (a) folgt: Der Tischtennisspieler heißt nicht Joachim. Aus (d) folgt: Der Speerwerfer heißt nicht Joachim. Folglich ist Joachim der 100-m-Läufer.
Aus (a) und (b) folgt: Die Bronzemedaille wurde im Tischtennis, die Silbermedaille im Speerwurf, also die Goldmedaille im 100-m-Lauf erkämpft.
Aus (c) folgt: Der Tischtennisspieler heißt Thomas. Folglich heißt der Speerwerfer Frank.

Sportart	Medaille	Name
100-m-Lauf	Gold	Joachim
Speerwurf	Silber	Frank
Tischtennis	Bronze	Thomas

Ma 5 ▪2029 Es müßte entweder das Quadrat mit der Ziffer 4 oder das mit der Ziffer 7 oder das mit der Ziffer 8 noch ausgeschnitten werden. Wir erhalten dann folgende drei Würfelnetze für oben offene Würfel:

a) b) c)



Ma 5 ▪2030 a) Die Figur enthält acht Dreiecke, die den Punkt A als Eckpunkt haben; es sind die Dreiecke *AEI, AEH, ABD, ABN, AIH, AND, ACD, ABC.*
b) Die Figur enthält 14 Vierecke, die den Punkt G als Eckpunkt haben; es sind die Vierecke *GCNM, GCIH, GCBM, GCAH, GDNL, GDKF, GDBF, GDAL, GMNL, GMKF, GMBF, GHEF, GHIL, GHAL.*

Ma 5 ▪2031 Es seien n die einstellige natürliche Zahl und z_1, z_2 die beiden zweistelligen natürlichen Zahlen. Dann gilt $z_1 - 9 = z_2$ mit $z_1 = 80 + n$ und $z_2 = 10 \cdot n + 8$. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} 80+n-9&=10n+8,\\ 71+n&=10n+8,\\ 9n&=63,\\ n&=7. \end{aligned}$$

Probe: $87 - 9 = 78$.
Es existiert genau eine solche Zahl; sie lautet 7.

Ma 6 ▪2032 Für die zu ermittelnden natürlichen Zahlen a, b, c gilt

$$a^2 = c \quad (1)$$

$$3a = b \quad (2)$$

und $b = \frac{a+c}{2}$, also $2b = a + c$. (3)

Aus (2) und (3) folgt $2 \cdot 3a = a + c$, $6a = a + c$,

$$c = 5a. \quad (4)$$

Aus (1) und (4) folgt $a^2 = 5a$ und wegen $a \neq 0$ gilt $a = 5$, also $b = 15$, $c = 25$.
Die gesuchten Zahlen sind 5, 15 und 25.

Ma 6 ▪2033 Angenommen, n Schüler machten einen Ausflug; dann gilt

$$n + n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}n + 1 = 100,$$

$$\frac{11}{4} \cdot n = 99,$$

$$n = \frac{99 \cdot 4}{11} = 36.$$

Am Ausflug beteiligten sich 36 Schüler.

Ma 6 ▪2034 Es sei n die Anzahl der Schüler dieser Klasse; dann gilt $16 < n < 24$. Da der fünfte Teil der Anzahl der Schüler dieser Klasse die Note 4 erhielt, muß n ein Vielfaches von 5 sein. Das trifft nur zu für $n = 20$. Dieser Klasse gehören 20 Schüler an. Aus $20 : 5 = 4$ folgt, daß 4 Schüler die Note 4 erhielten. Aus $20 - 4 = 16$ folgt, daß 16 Schüler die Noten 1, 2 oder 3 erhielten. Angenommen, x Schüler haben die Note 1, also $2x$ Schüler die Note 2 und $(3x - 14)$ Schüler die Note 3 erhalten; dann gilt

$$\begin{aligned} x+2x+(3x-14)&=16,\\ 6x&=30,\\ x&=5. \end{aligned}$$

Es erhielten 5 Schüler die Note 1, 10 Schüler die Note 2 und 1 Schüler die Note 3.

Ma 6 ▪2035 $1983 - 1977 = 6$. Angenommen, im Jahre 1977 war Axel n Jahre alt, also Claus $2n$ Jahre alt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{2n \cdot 3 + 2}{4} &= n + 6,\\ 6n + 2 &= 4 \cdot (n + 6),\\ 6n + 2 &= 4n + 24,\\ 2n &= 22,\\ n &= 11. \end{aligned}$$

Im Jahre 1977 war Axel 11 Jahre alt.

Ma 6 ▪2036 Es seien α, β die Größen der Basiswinkel, γ die Größe des Winkels an der Spitze des zu konstruierenden gleichschenkligen Dreiecks ABC. Wegen $\alpha = \beta$ und $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ gilt $2\alpha + \gamma = 180°$. Ferner gilt $\alpha + \gamma = 110°$. Daraus folgt $\alpha = 70°$ und somit $\gamma = 40°$. Wir zeichnen einen Winkel von der Größe 40° mit seinem Scheitelpunkt C. Auf den beiden Schenkeln tragen wir von C bis A und von C bis B Strecken der Länge 6 cm ab, und wir verbinden A mit B.

Ma 7 ▪2037 $100\% - (30\% + 28\% + 21\%) = 21\%$. Angenommen, Angela bringt x Mark wieder mit nach Hause; dann hat sie beim Bäcker $2x$ Mark ausgegeben, und es gilt

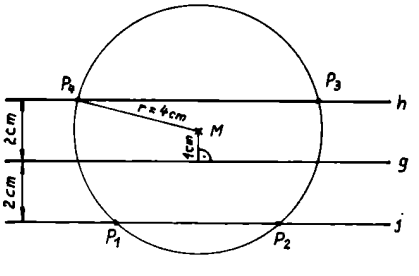
$$x + 2x = 21,\ 3x = 21,\ \text{also } x = 7.$$

Angela brachte 7% des erhaltenen Geldes wieder mit nach Hause; als Taschengeld erhielt sie 3,5%. Nun gilt

$$3{,}5 : 100 = 2{,}1 : y,\ \text{also } y = 60.$$

Also hat Angela von ihrer Mutter 60 M zum Einkauf erhalten.

Ma 7 ▪2038 Alle Punkte, die von der gegebenen Geraden g den Abstand 2 cm haben, liegen auf den beiden zu g parallelen Geraden h und j, von denen jede den Abstand 2 cm von g hat. Alle Punkte, die von M den Abstand 4 cm haben, liegen auf dem Kreis k um M als Mittelpunkt mit dem Radius $r = 4$ cm. Die Schnittpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 des Kreises k mit den Geraden h und j sind die zu konstruierenden Punkte; sie genügen beiden Bedingungen.



Ma 7 ■2039 Angenommen, die Kanne faßt x Kubikzentimeter; dann gilt

$$5x = 80 \cdot 25 \cdot 7 + 6000,$$
$$x = 80 \cdot 5 \cdot 7 + 1200,$$
$$x = 400 \cdot 7 + 400 \cdot 3,$$
$$x = 400 \cdot (7+3)$$
$$x = 4000.$$

Die Kanne faßt 4000 cm³, das sind 4 Liter.

Ma 7 ■2040 Angenommen, der große Würfel besteht aus n^3 Würfeln. Da von den kleinen Würfeln $5 \cdot n^2$ Flächen sichtbar sind, gilt

$$n^3 = 5 \cdot n^2, \text{ also}$$
$$n = 5 \text{ und somit } n^3 = 125.$$

Der große Würfel besteht aus 125 kleinen gleich großen Würfeln.

Ma 8 ■2041 Herr Schmidt hat recht.

Begründung: Es seien x, y bzw. z die Anzahl der Ein-, Zwei- bzw. Dreibettkabinen. Dann gilt für die Anzahl der Betten die folgende Gleichung

$$x + 2y + 3z = 100. \quad (1)$$

Nach Aufgabenstellung gilt die Nebenbedingung $z = x - 5$. (2)

Setzt man (2) in (1) ein, so erhält man

$$x + 2y + 3(x-5) = 100 \text{ bzw.}$$
$$4x + 2y = 115.$$

Die linke Seite der Gleichung kann bei keiner Belegung der Variablen x und y mit natürlichen Zahlen den Wert 115 annehmen, da $4x + 2y$ stets eine gerade Zahl ergibt. Deshalb kann es nicht möglich sein, daß es insgesamt genau 100 Betten sind.

(*Bemerkung:* Die diophantische Gleichung $4x + 2y = 115$ ist nicht lösbar, da der größte gemeinsame Teiler der Zahlen 4 und 2, nämlich 2, kein Teiler von 115 ist!)

Ma 8 ■2042 Wenn $\frac{3}{5}$ für die Spreewaldreise sind, so sind nach Aufgabenstellung $\frac{2}{5}$ für die Ostseereise. $\frac{1}{5}$ entspricht demnach 12 Schülern. Daraus folgt, daß in beide Klassen zusammen 60 Schüler gehen. Nach der angegebenen Bedingung sind in Klasse 8a 31 Schüler, in Klasse 8b 29 Schüler.

Ma 8 ■2043 Der erste Summand sei m, der zweite n; dann gilt

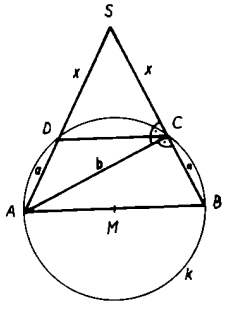
$$m + n = m^3,$$
$$n = m^3 - m,$$
$$n = m(m^2 - 1),$$
$$n = (m-1) \cdot m \cdot (m+1).$$

Wegen $n \neq 0$ muß $m \geqq 2$ sein. Für $m = 11$ erhalten wir $n = 10 \cdot 11 \cdot 12 = 1320 > 99$. Daraus folgt $2 \leqq m \leqq 10$.

m	n	$m+n$	m^3
2	6	8	2^3
3	24	27	3^3
4	60	64	4^3
5	120	125	5^3
6	210	216	6^3
7	336	343	7^3
8	504	512	8^3
9	720	729	9^3
10	990	1000	10^3

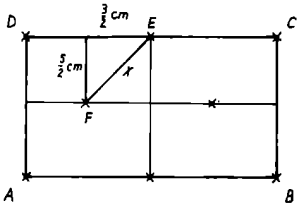
Ma 8 ■2044 Der Mittelpunkt M der Hypotenuse $\overline{AB}$ ist der Mittelpunkt des Umkreises k des rechtwinkligen Dreiecks ABC; $\overline{AM}$ ist gleich dem Radius r dieses Umkreises. Aus Symmetrieeigenschaften folgt, daß das Viereck $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez ist und somit auch $\overline{CS} = \overline{DS}$ gilt. Es sei x die Länge von $\overline{CS}$ bzw. $\overline{DS}$. Nach dem Satz des Pythagoras erhalten wir

$$(a+x)^2 = b^2 + x^2,$$
$$a^2 + 2ax + x^2 = b^2 + x^2,$$
$$2ax = b^2 - a,$$
$$x = \frac{(b-a)(b+a)}{2a}$$
$$= \frac{(6-4)(6+4)}{2 \cdot 4} \text{ cm} = 2{,}5 \text{ cm}.$$



Ma 9 ■2045 Skizze nicht maßstäblich!

Aus der Skizze ist ersichtlich, daß der kleinste Abstand zweier solcher Punkte die Länge der Strecke EF ist.

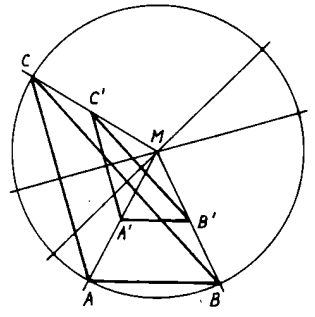


Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$x = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} \text{ cm},$$
$$x = \sqrt{\frac{34}{4}} \text{ cm} > \sqrt{8} \text{ cm}, \text{ w.z.b.w.}$$

Ma 9 ■2046 Man konstruiert zunächst ein Dreieck $A'B'C'$ mit den Seitenlängen 2 cm, 3 cm und 4 cm.

Danach konstruiert man den Umkreismittelpunkt von $A'B'C'$; dieser sei mit M bezeichnet.



Um M zeichnet man einen Kreis mit einem Radius der Länge 4 cm. Die Strahlen MA', MB' und MC' schneiden diesen Kreis in A, B und C. Das Dreieck ABC erfüllt die geforderten Bedingungen. Konstruktion (maßstäblich M 1 : 2)

Ma 9 ■2047 $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \ldots + 99^2 - 100^2 = (1+2)(1-2) + (3+4)(3-4) + (5+6)(5-6) + \ldots + (99+100)(99-100)$
$= -(3+7+11+15+19+\ldots+199)$
$= -(202 \cdot 25)$
$= -5050$

Ma 9 ■2048 Es gilt $30^{15} = (2 \cdot 15)^{15} = 2^{15} \cdot 15^{15}$ und $15^{30} = 15^{15} \cdot 15^{15}$. Daraus folgt weiter
$2^{15} \cdot 15^{15} < 15^{15} \cdot 15^{15}$, also $30^{15} < 15^{30}$.

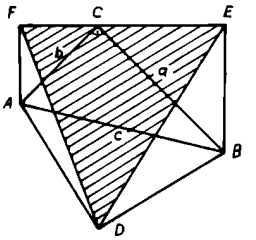
Ma 10/12 ■2049 (Skizzen nicht maßstäblich)

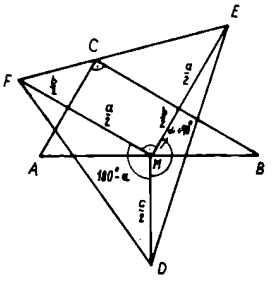
Die Mittelsenkrechten von $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ schneiden einander im Mittelpunkt der Hypotenuse $\overline{AB}$. Es gilt

$$A_{DEF} = A_{DEM} + A_{EFM} + A_{FDM}.$$

Für die Längen der folgenden Strecken gilt:

$$\overline{MF} = \frac{a+b}{2}, \quad \overline{ME} = \frac{a+b}{2}, \quad \overline{MD} = \frac{c}{2}.$$





Dann gilt für die Flächeninhalte der folgenden Dreiecke:

$$A_{EFM} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2;$$

$$A_{FDM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \sin(180° - \alpha)$$

und wegen $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha = \frac{a}{c}$:

$$= \frac{1}{8} \cdot a(a+b);$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \sin(\alpha + 90°)$$

und wegen $\sin(\alpha + 90°) = \cos\alpha = \frac{b}{c}$:

$$= \frac{1}{8} \cdot b(a+b).$$

Daraus folgt:

$$A_{DEF} = \frac{1}{8} \cdot (a+b)[(a+b) + a + b]$$

$$= \frac{(a+b)^2}{4} = 1.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks DEF hat die Maßzahl 1.

Ma 10/12 ■2050 Wegen (1) gilt $\alpha+\beta=360°-240°=120°$, und damit $\gamma=60°$.

Wegen (3) gilt $\frac{ab\cdot\sin\gamma}{2}=\frac{25}{2}\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

bzw. $ab\cdot\sin\gamma=25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ bzw.

$$ab=50\ \text{cm}^2.$$

Nun gilt $a+b=15$ cm und

$$ab=50\ \text{cm}^2 \text{ bzw. } b=\frac{50\ \text{cm}^2}{a}.$$

Durch Einsetzen folgt (ohne Maßeinheiten)

$$a+\frac{50}{a}=15 \text{ bzw.}$$

$$a^2-15a+50=0.$$

Daraus folgt (auch wegen (4)) $a=5$ cm und $b=10$ cm.

Nach dem Kosinussatz gilt

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$$
$$c^2=5^2+10^2-2\cdot5\cdot10\cdot\cos60°,$$
$$c^2=\sqrt{75},$$
$$c=5\sqrt{3}\approx8{,}66\ \text{cm}.$$

Nach dem Sinussatz gilt

$$\sin\alpha:\sin\gamma=5:8{,}66,$$
$$\sin\alpha=\frac{5\cdot\sin60°}{5\sqrt{3}},$$
$$a=30°.$$

Daraus folgt $\beta=90°$.

Es gilt $a=5$ cm, $b=10$ cm, $c=8{,}66$ cm, $\alpha=30°$, $\beta=90°$, $\gamma=60°$.

Ma 10/12 ■2051 Man vereinfacht zunächst den ersten Summanden des linken Terms der Gleichung:

$$3^{[(p-q)(p+q)-2q(p-q)]\cdot(p-q)^2}$$
$$=3^{(p^2-2pq+q^2)(p-q)^2}$$
$$=3^{(p-q)^4}.$$

Nun ist $\sqrt[2p]{4^p}=4^{\frac{p}{2p}}=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$, und damit ist die Gleichung

$$3^{(p-q)^4+4\sqrt{3p+2q+2}}=2$$

zur gegebenen Gleichung äquivalent.

Weiter gilt sicher

$$(p-q)^4\geqq0 \qquad (1)$$

und $\sqrt{3p+2q+2}\geqq0.$ (2)

Aus (1) folgt $3^{(p-q)^4}\geqq1$ (3)

und aus (2) folgt $4\sqrt{3p+2q+2}\geqq1.$ (4)

Wegen (3) und (4) gilt nun

$$3^{(p-q)^4}=1 \text{ und } 4\sqrt{3p+2q+2}=1.$$

Dann ist aber

$$(p-q)^4=0, \text{ d. h. } p=q \qquad (5)$$

und $\sqrt{3p+2q+2}=0$, d. h. $3p+2q+2=0.$ (6)

Setzt man (5) in (6) ein, so erhält man

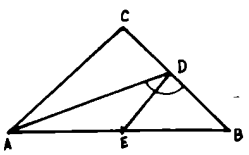
$$3q+2q=-2,$$

$$5q=-2 \text{ und damit } q=p=-\frac{2}{5}.$$

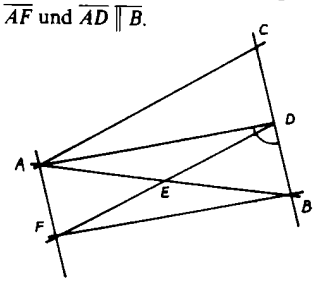
Nur das geordnete Paar $\left[-\frac{2}{5};-\frac{2}{5}\right]$ erfüllt die gegebene Gleichung.

Ma 10/12 ■2052

Planfigur (nicht maßstäblich):



Begründung: Verlängert man $\overline{DE}$ über E hinaus um sich selbst bis F, so ist $FBDA$ ein Parallelogramm mit den Diagonalen $\overline{AB}$ und $\overline{FD}$, die einander in E halbieren. Es gilt dann $\overline{DB}\parallel\overline{AF}$ und $\overline{AD}\parallel B$.

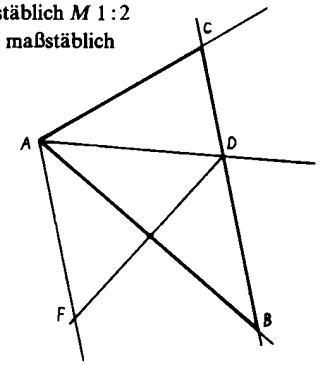


Beschreibung: Man zeichnet die Strecke $\overline{AD}$ mit der Länge 5 cm. In D trägt man an $\overline{DA}$ den Winkel $\sphericalangle ADB$ mit der Größe 105° an. Zu diesem freien Schenkel des Winkels $\sphericalangle ADB$ zeichnet man die Parallele durch A. Der Kreis um D mit einem Radius der doppelten Länge von $\overline{DE}$ schneidet diese Parallele in F. Die Parallele zu $\overline{AD}$ durch F schneidet den freien Schenkel des Winkels $\sphericalangle ADB$ in B. Da $\overline{AD}$ Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ ist, hat der Winkel $\sphericalangle BAD$ die halbe Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$. Man trägt in A an $\overline{AD}$ den Winkel $\sphericalangle BAD$ in die andere Halbebene an. Der freie Schenkel dieses Winkels schneidet die Gerade BD in C.

Konstruktion:

maßstäblich M 1 : 2

nicht maßstäblich

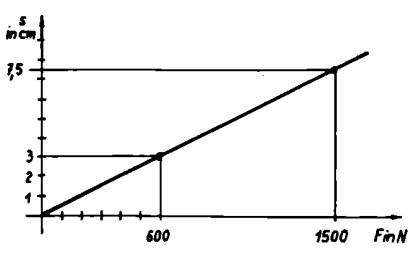


Ph 6 ■86 Geg.: $F_1=600$ N Ges.: s_2

$s_1=3$ cm

$F_2=1500$ N

Bei $F_2=1500$ N liest man $s_2=7{,}5$ cm ab. Die Feder wird um 7,5 cm ausgedehnt.



Ph 7 ■87 Geg.: $A=0{,}45\ \text{m}^2$ Ges.: W

$p=5\ \text{Pa}=5\frac{N}{m^2}$

$s=150$ m

Man rechnet mit der Formel $W=F\cdot s$. Dann gilt

$$W=F\cdot s \text{ mit } F=p\cdot A,$$
$$W=p\cdot A\cdot s,$$
$$W=5\frac{N}{m^2}\cdot0{,}45\ m^2\cdot150\ m,$$
$$W=337{,}5\ Nm=337{,}5\ \text{J}.$$

Der Fußgänger muß eine Arbeit von 337,5 J (rd. 33,75 kpm) verrichten.

Ph 8 ■88 Geg.: $m=500$ kg Ges.: m_1 u. m_2

$\vartheta_1=20°\text{C}$

$\vartheta_2=80°\text{C}$

$\vartheta_m=35°\text{C}$

Da die aufgenommene Wärmemenge gleich der abgegebenen Wärmemenge ist, gilt nach der Formel $W=\text{cm}\,\Delta\vartheta$

$$W_1=cm_1(\vartheta_m-\vartheta_1)$$
$$W_2=cm_2(\vartheta_2-\vartheta_m),$$

und da $m_1+m_2=m$ bzw. $m_1=m-m_2$ ist, gilt weiterhin

$$c(m-m_2)(\vartheta_m-\vartheta_1)=cm_2(\vartheta_2-\vartheta_m), \quad (c\neq0)$$
$$m(\vartheta_m-\vartheta_1)-m_2(\vartheta_m-\vartheta_1)=m_2(\vartheta_2-\vartheta_m),$$
$$m_2(\vartheta_2-\vartheta_1)=m(\vartheta_m-\vartheta_1),$$
$$m_2=\frac{m(\vartheta_m-\vartheta_1)}{\vartheta_2-\vartheta_1},$$
$$m_2=\frac{500\ \text{kg}(35-20)}{60}=125\ \text{kg}.$$

Dann ist $m_1=500\ \text{kg}-125\ \text{kg}=375\ \text{kg}$.

Es müssen 125 kg Wasser von 80 °C mit 375 kg Wasser von 20 °C gemischt werden.

Ph 9 ■89 Geg.: $r=2$ cm Ges.: m_3

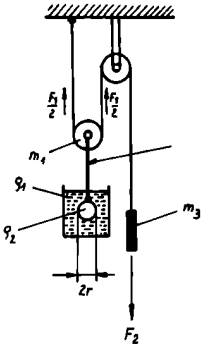
$m_1=100$ kg

$\varrho_1=1{,}0\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

$\varrho_2=7{,}85\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

$g=9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Die Masse m_3 findet man mit Hilfe der Zugkraft F_2 (siehe Bild) nach der Formel



$$F_2=m_3\cdot g \text{ bzw. } m_3=\frac{F_2}{g}. \qquad (1)$$

Für die Zugkraft F_2 gilt aber auch nach dem Bild

$$F_2=\frac{F_1}{2}. \qquad (2)$$

Wird (2) in (1) eingesetzt, erhält man

$$m_3=\frac{F_1}{2g}. \qquad (3)$$

Nun ist $F_1=m_2g+m_1g-F_A,$ (4)

wobei m_2 die Masse der Eisenkugel und F_A die Auftriebskraft sind. Da nach dem Archimedischen Prinzip $F_A=G_F$ gilt,

ist $F_A = V \cdot \varrho_1 \cdot g$ mit $V = \frac{4}{3}\pi r^3$,

also $F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \varrho_1 \cdot g$. (5)

Ferner ist

$$m_2 = V \cdot \varrho_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \varrho_2. \quad (6)$$

Jetzt werden (5) und (6(in (4) eingesetzt und (4) in (3), und es ergibt sich

$$m_3 = \frac{1}{2g}\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_2 g + m_1 g - \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_1 g\right),$$

$$m_3 = \frac{1}{2}\left[m_1 + \frac{4}{3}\pi r^3(\varrho_2 - \varrho_1)\right],$$

$$m_3 = \frac{1}{2}\left[100 + \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 2^3(7{,}85 - 1)\right] \text{g},$$

$m_3 \approx 165$ g.

Eine Masse von 165 g hält die Kugel im Gleichgewicht.

Ph 10/12 ▪90 Geg.: Lichtausbeute der Kohlenfadenlampe $\eta_{L_1} = 3\,\frac{\text{lm}}{\text{W}}$

Lichtstrom der 75-Watt-Lampe $\Phi = 950$ lm

Ges.: Lichtausbeute der 75-Watt-Lampe η_L

Steigerung in %

Die Lichtausbeute berechnet man nach der Formel $\eta_L = \frac{\Phi}{P_{el}}$. Für die 75-Watt-Doppelwendellampe ergibt sich

$$\eta_L = \frac{950\text{ lm}}{75\text{ W}},\quad \eta_L \approx 12{,}66\,\frac{\text{lm}}{\text{W}}.$$

Die Steigerung in % erhält man durch die Proportion

$$100 : x = 3 : (12{,}66 - 3),$$
$$x = 322.$$

Die Lichtausbeute der 75-Watt-Doppelwendellampe beträgt rd. 12,7 $\frac{\text{lm}}{\text{W}}$ und die Steigerung 322%.

Ch 7 ▪69 Jedem Hektar wurden 41 kg Kaliumoxid zugeführt.

Ch 8 ▪70 Ein Liter Lösung besteht aus insgesamt 1,7 ml + 56,0 mol = 57,7 mol.

Ch 9 ▪71 Die Gesamtoberfläche beträgt $25{,}12 \cdot 10^4$ cm².

Ch 10/11 ▪72 Die Kristallisation beginnt bei 70%iger Dissoziation bei $-1{,}1$ °C.

Lösungen zu:
In freien Stunden · alpha-heiter

Eine Wägungsaufgabe

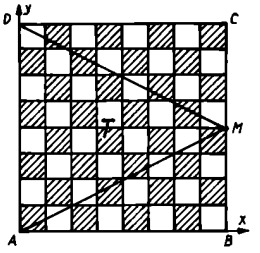
Man benötigt nur die folgenden fünf Wägestücke: 1 kg, 2 kg, 4 kg, 8 kg, 16 kg.

Rund um das Schachbrett

Wir erhalten im Dreieck *ABM* zwölf Quadrate: [2,0], [3,0], [4,0], [4,1], [5,0], [5,1], [6,0], [6,1], [6,2], [7,0], [7,1], [7,2].
Die gleiche Anzahl Schachfelder liegt im Dreieck *DCM*. Insgesamt sind es somit 24 Felder.

Wo steckt der Fehler?

Richtige Lösung: $x_1 = x$; $x_2 = -1$. Es wurde durch $(x^2 - 1)$ dividiert. Selbst wenn $x^2 - 1 \neq 0$ wäre, bliebe die Verringerung der Anzahl von möglichen Lösungen (Graderniedrigung).



Kryptarithmetik

a) $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$; b) $\frac{9}{14} - \frac{5}{21} = \frac{17}{42}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; d) $\frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

a) Division b) Multiplikation
c) Subtraktion d) Addition

In einem Zuge

Der Gang müßte auf dem Hof *H* beginnen und könnte verlaufen:
$H - H_3 - H_2 - H_1 - H - S - H_1 - H - P$.

Begegnung von zwei Eisenbahnzügen

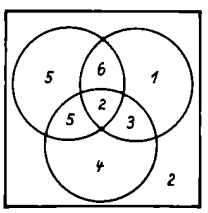
Im Augenblick der Begegnung der Lokführer beträgt der Abstand zwischen den Zugführern 250 m + 250 m = 500 m. Weil jeder Zug mit einer Geschwindigkeit von 45 km · h^{-1} fährt, nähern sich die Zugführer einander mit einer Geschwindigkeit von 90 km · h^{-1} oder 25 m · s^{-1}. Die gesuchte Zeit ist 500 m : 25 m · s^{-1} = 20 s.

Kombinatorik

$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, man kann 24 Ausrüstungen zusammenstellen.

Ein wenig Mengenlehre

Addiert man die im Bild gekennzeichneten Zahlen, so erhält man die Anzahl der Schüler der Klasse: 2 + 6 + 3 + 1 + 5 + 5 + 4 + 2 = 28.



8 = 2 + 6 Fußballer besuchen den Zirkel „Jg. Sanitäter".
2 Schüler sind Fußballer, Chormitglieder, und außerdem gehören sie dem Zirkel „Jg. Sanitäter" an.
12 = 2 + 3 + 6 + 1 Schüler sind aktive Fußballer in der Schulmannschaft.
5 = 2 + 3 Fußballer sind im Chor.
2 Schüler sind in keiner der drei Arbeitsgemeinschaften.
14 = 5 + 2 + 3 + 4 Schüler sind Mitglieder des Chors.
18 = 5 + 2 + 6 + 5 Schüler nehmen am Zirkel „Jg. Sanitäter" teil.
7 = 2 + 5 Chormitglieder nehmen am Zirkel „Jg. Sanitäter" teil.

Spiel mit Hölzchen

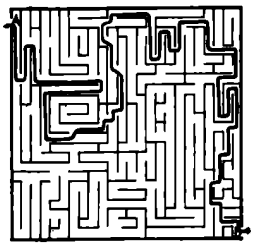
Betrachte die Figur genau, und berechne die Anzahl der Quadrate! Du wirst feststellen: Es sind nicht 114, sondern 113 Quadrate, denn

$2(1 + 3 + 5 + \ldots + 13) + 15 =$

$2\left(\frac{7}{2} \cdot 14\right) + 15 = 98 + 15 = 113.$

Lösungen zum
Heiteren alpha-Ferienmagazin

Troll: Labyrinth



Folgende Schuhpaare gehören zusammen: *A* und 7, *B* und 3, *C* und 4, *D* und 2.

technikus: Das Aquarium enthält 18,75 l Wasser. Es können sechs Fische darin gehalten werden.

Skatspiel: 27, 28 und 29 Augen sind nicht möglich.

Jugend + Technik: Bei einer maßstabgerechten Vergrößerung der Abmessungen der Wanderkarte wird ihr Maßstab verringert. Es gilt 20 : 50 = 35 : 87,5 = x : 10000. Hieraus folgt $x = 4000$; der neue Maßstab ist also 1 : 4000.

Frösi: 3 4 5
6 4 2
3 4 5

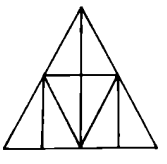
Beim unteren Bild betrachte man die Diagonale!

Bild rechts: Anstelle des Fragezeichens muß stehen:

Trommel: In der Mitte des Bildes sitzt eine Katze.

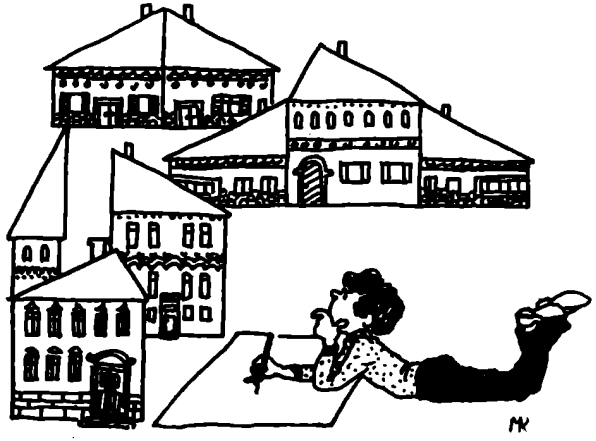
Das Magazin: Von *B* aus ist es möglich, zum Beispiel über die Reihenfolge 3 - 5 - 6 - 8 - 7 - - 4 - 2 - 1. Von *C* aus ist es nicht möglich. Multiplikationsaufgabe: 46 × 715 = 32890.

Für Dich:



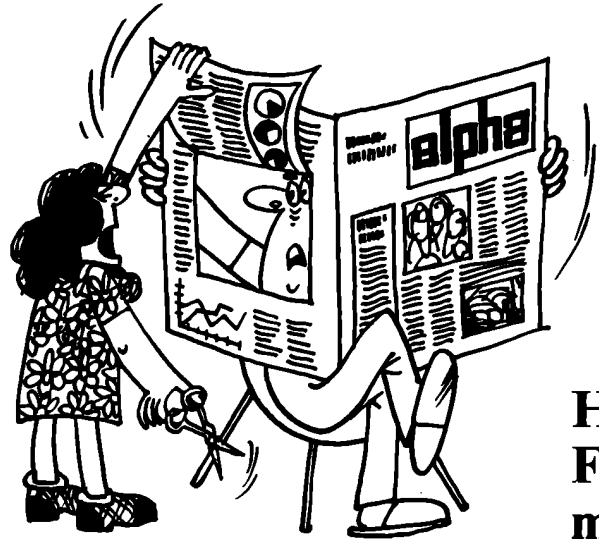
FÜR DICH

Aus den Flächen dieser acht kleinen Dreiecke soll ein großes entstehen. Wie sieht das aus?



Lösungen s. S. 70.

8

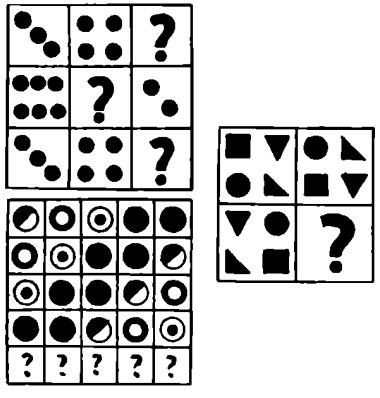


1

Heiteres Ferien-magazin

FRÖSI

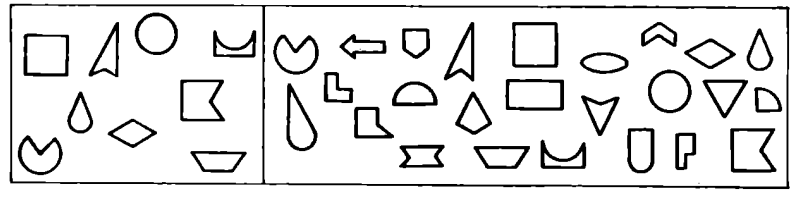
Entschlüsselt die Fragezeichen!



TROMMEL

Was regt den Vogel auf?

NBI - Gedächtnisübung



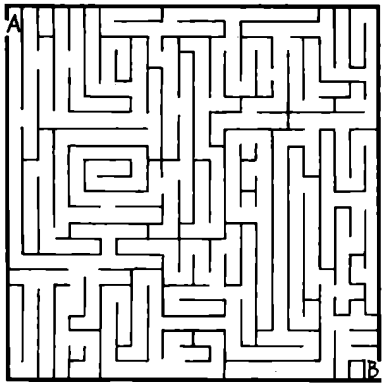
Die Abbildung zeigt neun einfache geometrische Figuren. Betrachtet sie 10 bis 15 Sekunden lang, und prägt sie euch gut ein, während die untere Tafel verdeckt ist! Dann haltet ihr die obere Tafel zu und öffnet die untere

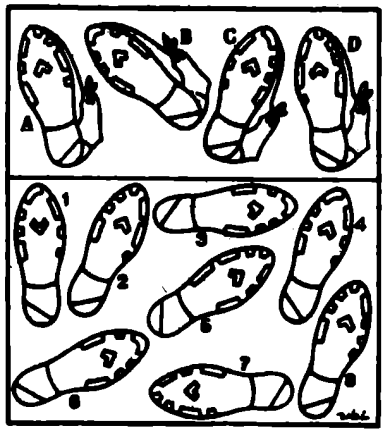
3 mit den 25 Figuren.

Neun davon waren in der ersten Tafel enthalten.
Wißt ihr noch, welche?

TROLL

Von *A* nach *B* ist ein Weg durch das Labyrinth zu finden.



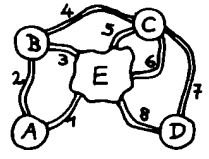


Welche Schuhe von den oben dargestellten gehören zu den unten gezeichneten Profilen?

2

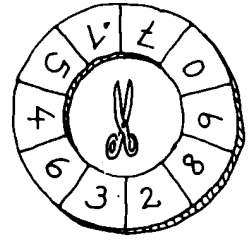
DAS Magazin

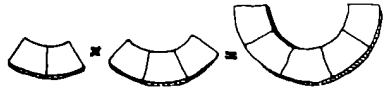
Die Urlaubsorte *A*, *B*, *C*, *D* sind alle durch Straßen mit der Kreisstadt *E* und zum Teil untereinander verbunden. Der Radfahrer möchte nun zur Kreisstadt radeln und dabei alle 8 Straßen befahren, aber keine doppelt. Ist das überhaupt möglich? Er soll einmal von *B*, beim zweiten Mal von *C* aus starten.



7

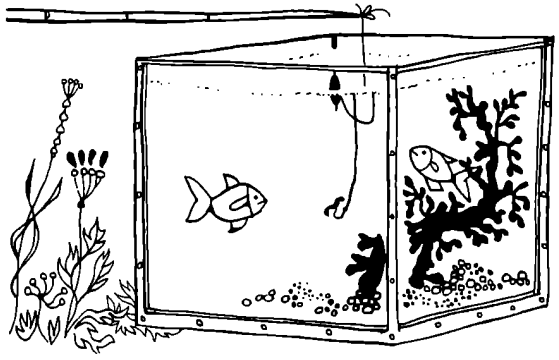
Im dargestellten Zahlenkreis liegt eine Schere. Zerschneidet bitte damit symbolisch den Kreis durch zwei Schnitte in drei Teile, die wie angedeutet eine Multiplikationsaufgabe mit stimmender Lösung ergeben sollen.





technikus

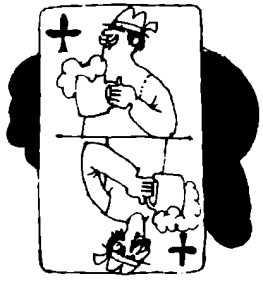
Ein quaderförmiges Aquarium, dessen Grundkanten jeweils 25 cm und dessen Höhe 35 cm betragen, ist bis 5 cm unter den oberen Rand mit Wasser gefüllt. Wieviel Fische können in dem Aquarium gehalten werden, wenn jeder Fisch 31 Wasser braucht?



4

JUGEND + TECHNIK

Ein Skatfan fragt: Der niedrigste Augenstich beim Skat beträgt zwei Augen (1 Bube, 2 leere Karten). Sind alle Augenstiche durchgehend von 2 bis 33 möglich?



5

Ein Fotofan vergrößert eine Wanderkarte mit den Abmessungen 20 cm × 35 cm und einem Maßstab 1 : 10000 maßstabgerecht auf ein Format von 50 cm × 87,5 cm. Welchen Maßstab besitzt die neu angefertigte Wanderkarte?

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Im Heft 6/1979 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma6 ■1916 In dem Schema

$$\begin{array}{r} ab \\ +bc \\ +ca \\ \hline abc \end{array}$$

sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

Im Heft 3/1980 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:
Aus $ab+bc+ca=abc$ folgt $a=1$ oder $a=2$. Dabei gilt $1 \leqq a, b, c \leqq 9$. Nun gilt $(10a+b)+(10c+a)=100a+10b+c$, $b+10c=89a$.
Für $a=2$ erhalten wir $b+10c=178$. Wegen $b, c \leqq 9$ hat diese Gleichung keine Lösung.
Für $a=1$ erhalten wir $b+10c=89$, $10c=80+9-b$, $c=8+\frac{9-b}{10}$. Nur für $b=9$ und damit für $c=8$ erhalten wir eine positive ganzzahlige Lösung; sie lautet

$$19+98+81=198.$$

Wir stellen nun die Lösung von *Dirk Jürgeleit* aus Malchin vor, der Schüler der Klasse 6a der Richard-Ehrlich-OS ist.
Dirk löste diese Aufgabe wie folgt:
Die Summe aus drei zweistelligen natürlichen Zahlen ist kleiner als 300; deshalb muß a gleich 1 oder gleich 2 sein. Unter Beachtung der Einerstellen der drei Summanden müßte $b=8$ sein, wenn $a=2$ ist. Wegen $c \neq 0$ würde dann für die Zehnerstellen $2+8+c=28$ gelten, was nicht möglich ist. Somit entfällt $a=2$.
Für $a=1$ müßte $b=9$ sein. Ich stelle eine Tabelle auf.

a	b	c	ab	bc	ca	Ergebnis	
1	9	1	19	91	11	121	191
1	9	2	19	92	21	132	192
1	9	3	19	93	31	143	193
.	.	.					
1	9	8	19	98	81	198	= 198

Probe: $19+98+81=198$.

Wir stellen nun die Lösung von *Kati Merkel* aus Theuma vor, die Schülerin der Klasse 6 ist; Kati löste diese Aufgabe wie folgt:
Wegen $1 \leqq a \leqq 9$, $1 \leqq b \leqq 9$, $1 \leqq c \leqq 9$, $a \neq b$, $a \neq c$, $b \neq c$ kann nur $a+b+c \leqq 24$ gelten. Die Summe aus drei zweistelligen natürlichen Zahlen ist kleiner als 300. Deshalb kann $a=1$ oder $a=2$ gelten. Ferner gilt $b+c+a=10+c$, also $a+b=10$ und $a+b+c+1=10+b$, also $c+11=10+b$ bzw. $b=c+1$. Daraus folgt weRter $a_1=1, b_1=9, c_1=8$ oder $a_2=2, b_2=8, c_2=7$.
Nur $19+98+81=198$ hat eine Lösung; denn $28+87+72 \neq 287$ führt zum Widerspruch.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Lothar Berg

Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Vorsitzender der Bezirkssektion Nord der Mathematischen Gesellschaft der DDR.

▲2121▲ In einer Ebene sei ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ gegeben. Man wähle in dieser Ebene zwei weitere Punkte D, E so, daß $\triangle CBD$ und $\triangle ACE$ das gegebene Dreieck zu einem Fünfeck $ABCDE$ ergänzen. Unter der weiteren Voraussetzung, daß diese drei Dreiecke (in der angegebenen Reihenfolge der Eckpunkte) zu einander ähnlich sind, beweise man:

a) Das Fünfeck entartet im Punkt C, ist also lediglich ein Viereck $ABDE$.

b) Die Gerade durch die Punkte D, C, E ist die Tangente des Kreises durch die Punkte A, B, C im Punkt C.

Zusatzaufgaben:

c) Nach Einführung eines rechtwinkligen Koordinatensystems stelle man die Gleichung der Geraden durch die Punkte D, C, E auf und berechne ihre Nullstelle x.

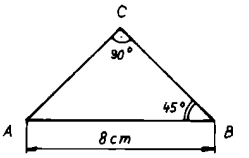
d) Man interpretiere die vorhergehende Berechnung von x als Näherungsverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle einer gegebenen Funktion durch die Punkte A, B, C.

Literatur zur Teilaufgabe d):
L. Berg, Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Anwendungen. Math. Schülerbücherei Nr. 97, DVW, Berlin 1979
L. Berg, Ein ableitungsfreies Dreistufenverfahren mit quadratischer Konvergenz zur Berechnung von Nullstellen. Rostocker Math. Kolloquium 13 (1980), 119–122
(Diese Aufgabe wurde 1979 anläßlich des Jubiläums des Bezirksklubs Neubrandenburg [10jähriges Bestehen] den Jungen Mathematikern gestellt, d. Red.)

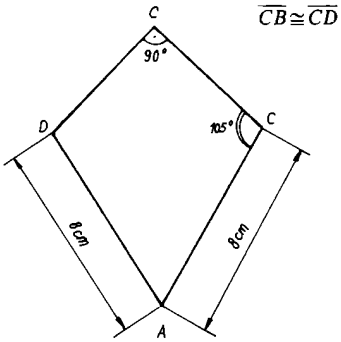
Grundkenntnisse in Geometrie gefragt

Von den nachstehend abgebildeten Figuren ist jeweils der Flächeninhalt zu berechnen.

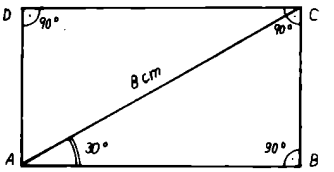
▲1▲



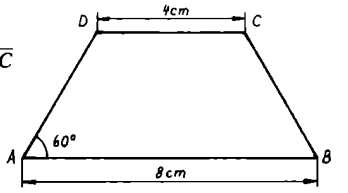
▲2▲ $\overline{CB} \cong \overline{CD}$



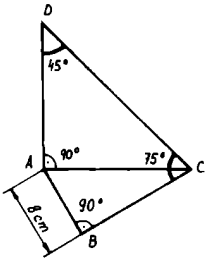
▲3▲



▲4▲ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

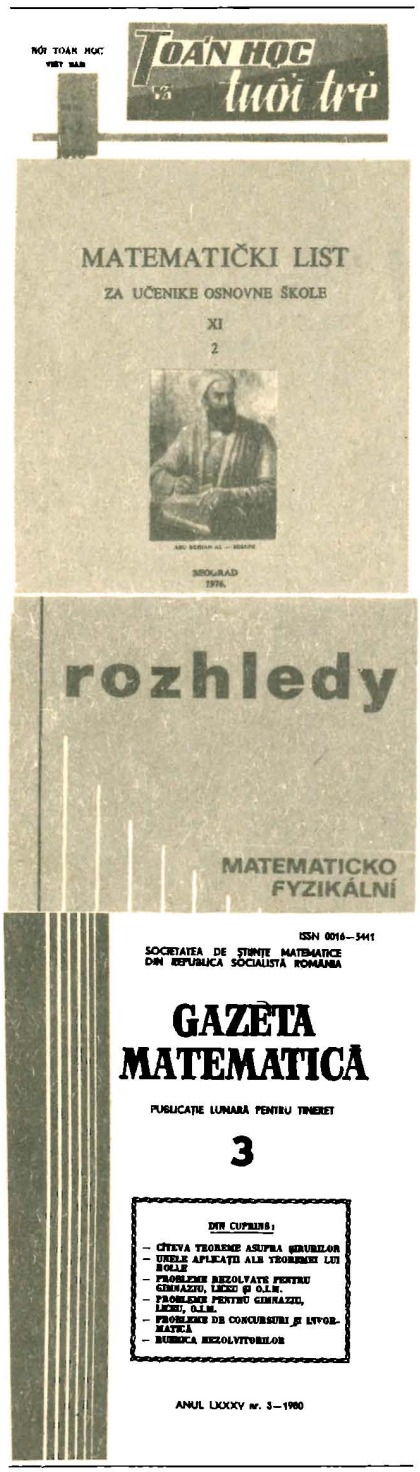


▲5▲



J. Kreusch/Th. Scholl

Mathematische Schülerzeitschriften sozialistischer Länder



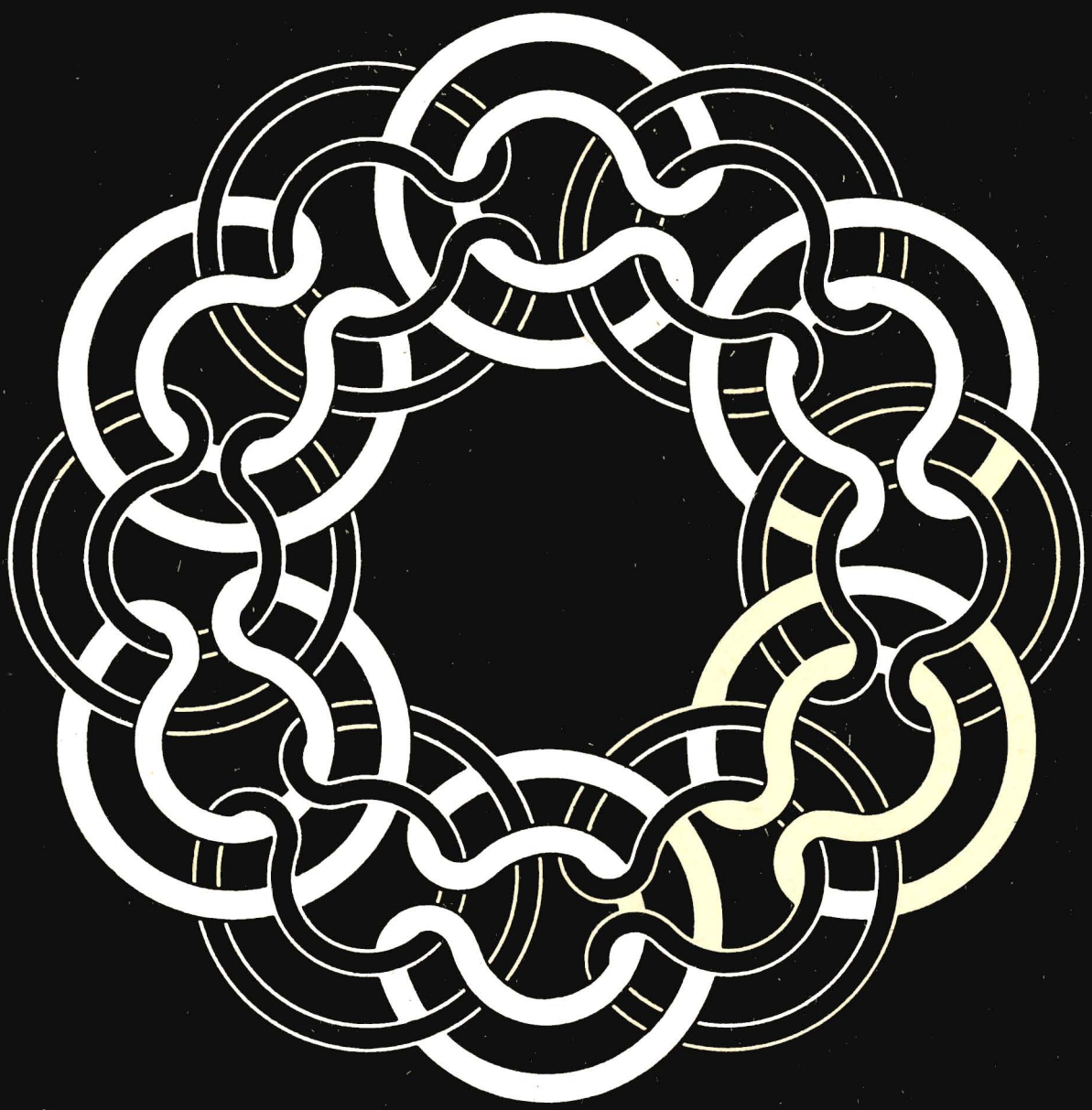
1 SR Vietnam
2 SFR Jugoslawien
3 ČSSR
4 SR Rumänien
5 SR Rumänien, Rayon Timişoara
6 Ungarische VR
7 UdSSR
8 VR Polen
9 Kuba
10 DDR
11 VR Bulgarien
12 DDR

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
15. Jahrgang 1981
Preis 0,50 M
Index 31 059

4



Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Studienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Diplom-Lehrer C.-P. Helmholz)

Redaktion:
StR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
1080 Berlin, Krausenstraße 50 · Tel. 20430
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: H. Triebel, Eigenfoto (S. 76); Briefmarke, J. Lehmann (S. 80); zwei Fotos aus dem Archiv der OS Georgenthal (S. 82, 83); aus: Technikus 3/81 (S. 83), Vlado Javorský, Praha (III. U.-Seite)
Titelblatt entnommen aus der Sowjetischen mathematischen Schülerzeitschrift *Quant* 6/80, gestaltet von W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128–ISSN 0002–6395

Redaktionsschluß: 24. April 1981

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

73 Der Satz von Viviani: ein Spezialfall [9]*
Dr. G. Windisch, Sektion Mathematik der *Technischen Hochschule* Karl-Marx-Stadt
Sektion Mathematik der *Friedrich-Schiller-Universität* Jena

75 Eine Aufgabe von Prof. Dr. Hans Triebel [10]

76 Optimale Reihenfolge [7]
Dr. Ch. Bandt (z. Zt. in Äthopien) Sekt. Math. der Ernst-Moritz-Arndt-Univ. Greifswald/Dipl.-Lehrer F. Käpnick, OS Brüssow

78 Funktionen als „Dolmetscher"
Dr. P. Göthner, NPT H. Kästner, beide Sektion Mathematik der *Karl-Marx-Universität* Leipzig

80 Muhammad ibn Musa al-Huwarizmi [7]
Prof. Dr. O. Stamfort, Sektion Mathematik der *Friedrich-Schiller-Universität* Jena
(Leseprobe aus der *Wurzel*)

81 Für Briefmarkenfreunde: Napoleon I. Bonaparte [8]
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der *Ernst-Moritz-Arndt-Universität* Greifswald

82 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht [4]
speziell für Klasse 4/7
Die großen Leistungen der kleinen Biene
Mathematikfachlehrer H. Begander, Leipzig/Oberlehrer E. Lucas, stellv. Direktor der *Grete Walter-OS*, Georgenthal

84 Arbeitsgemeinschaften im Blickpunkt [3]
II. ABC-Mathematikolympiade – Stadtbezirk Leipzig-Süd
M. Rehn, Fachberater für Mathematik

84 Mathematisches Spiel [5]
stud. math. U. Quasthoff, Leipzig/stud. math. R. Lehmann, Berlin (ehemalige IMO-Teilnehmer)

85 Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/Th. Scholl, Berlin

86 In freien Stunden · alpha-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann/H. Pätzold, Waren (Müritz)

88 XXI. Olympiade Junge Mathematiker der DDR [5]
Aufgaben der Schulolympiade

90 Lösungen [5]

95 Aufgaben aus Freundesland [8]
Sechs Geometrieaufgaben aus der ČSSR
Oberlehrer F. Kriesche, Eilenburg/Studienrat Th. Scholl, Berlin

96 Mathematiksendungen im Schulfunk [6]
Dr. Sieglinde Schwidtmann, *Zentralinstitut für Schulfunk und Fernsehen*, Fachgruppe Naturw./Mathem. Potsdam

IV. U.-Seite: Kreuzworträtsel – Aus Mathematik, Naturwissenschaft und Technik [5]
Dr. R. Mildner, Sektion der *Karl-Marx-Universität* Leipzig

*bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Der Satz von Viviani: ein Spezialfall

1. Aufgabenstellung

Im 17. Jahrhundert wurde eine interessante Eigenschaft der gleichseitigen Dreiecke entdeckt. Zu Ehren des Entdeckers wird diese Eigenschaft als *Satz von Viviani* (1622 bis 1703) bezeichnet und besagt: In jedem gleichseitigen Dreieck ist die Summe der Abstände eines innerhalb des Dreiecks befindlichen Punktes P von den Seiten konstant. Damit wird durch den Satz von Viviani die Lösung der folgenden Aufgabe gegeben:

Für welche inneren Punkte P eines gleichseitigen Dreiecks ist die Summe der Abstände von den Seiten konstant?

Um allgemein für spitzwinklige Dreiecke eine ähnliche Aufgabe formulieren zu können, führen wir zweckmäßigerweise das folgende Funktional f ein. Unter einem Funktional f versteht man eine Abbildung, die jedem Element P einer Menge, hier der Menge aller Dreieckspunkte P, eine reelle Zahl $f(P)$ zuordnet.

Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck und P ein innerer Punkt. Die Fußpunkte der von P auf die Seiten AB, BC und AC gefällten Lote bezeichnen wir mit R, S und T. Dem Punkt P wird nun der folgendermaßen definierte Funktionalwert $f(P)$ zugeordnet:

$$f(P)=\overline{PR}+\overline{PS}+\overline{PT}. \qquad \text{(Bild 1)}$$

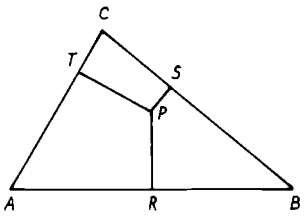
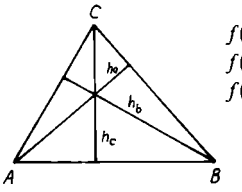


Bild 2



$f(A)=h_a$
$f(B)=h_b$
$f(C)=h_c$

Bei der Definition des Funktionals $f(P)$ kann man von der Voraussetzung abgehen, daß P ein innerer Punkt des Dreiecks ist. Ist P ein Punkt auf einer Dreieckseite, so wird ein entsprechender Summand in der Definition des Funktionals $f(P)$ zu Null. Wenn P ein Eckpunkt ist, dann werden zwei Summanden des Funktionals zu Null, das heißt, $f(A), f(B)$ und $f(C)$ sind die Höhen im Dreieck ABC auf den Seiten, die dem jeweiligen Eckpunkt gegenüberliegen. (Bild 2)

Damit haben wir ein Funktional f definiert, das jedem Punkt P eines spitzwinkligen Dreiecks ABC die Summe der Abstände des Punktes P von den Dreieckseiten als Funktionalwert $f(P)$ zuordnet.

Im weiteren wollen wir uns mit der folgenden Aufgabe befassen:

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC. Für welche Punkte P des spitzwinkligen Dreiecks ABC gilt $f(P)=k=$konstant und welche Werte kann k bei einem spitzwinkligen Dreieck annehmen?

Die Lösung der Aufgabe erfolgt in mehreren Teilabschnitten. Zunächst wenden wir uns noch einmal dem Satz von Viviani zu.

2. Der Satz von Viviani

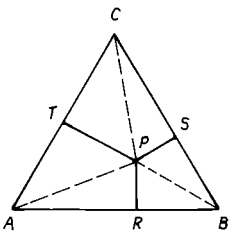
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck

$$f(A)=f(B)=f(C)=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}.$$

Dann gilt für jeden Punkt P des gleichseitigen Dreiecks ABC

$$f(P)=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}=\text{konstant}. \qquad \text{(Bild 3)}$$

Bild 3



Beweis: Zunächst sei P ein innerer Dreieckspunkt. Es seien R, S und T die Fußpunkte der von P auf die Dreieckseiten AB, BC und AC gefällten Lote. Die Fläche F des gleichseitigen Dreiecks ABC ist einerseits gleich

$$F=\frac{1}{2}\overline{AB}\,f(C)$$

und andererseits gleich der Summe der Flächen der Dreiecke ABP, BCP und CAP. Somit ergibt sich

$$F=\frac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{PR}+\frac{1}{2}\overline{BC}\,\overline{PS}+\frac{1}{2}\overline{AC}\,\overline{PT}$$
$$=\frac{\overline{AB}}{2}(\overline{PR}+\overline{PS}+\overline{PT})=\frac{\overline{AB}}{2}f(P).$$

Daraus folgt

$$f(P)=f(A)=f(B)=f(C)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}=\text{konstant}.$$

Der Beweis bleibt gültig, wenn P ein beliebiger Punkt auf einer Dreiecksseite oder ein Eckpunkt ist. Der Wert des Funktionals $f(P)$ ist für jeden Dreieckspunkt P gleich der Höhe des gleichseitigen Dreiecks. w.z.b.w.

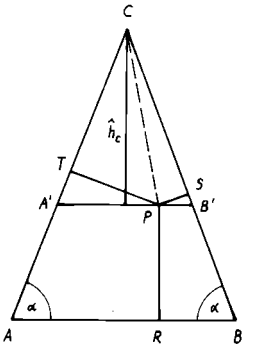
Wenden wir uns nun als nächstes der Bestimmung aller Punkte P eines spitzwinkligen gleichschenkligen Dreiecks zu, für die $f(P)=$ konstant gilt.

3. Das spitzwinklige gleichschenklige Dreieck

Wir betrachten ein spitzwinkliges gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis AB $[f(A)=f(B)]$ und dem Basiswinkel α ($45°\leqq\alpha<90°$). Ist R der Fußpunkt des Lotes eines beliebigen Dreieckspunktes P auf die Basis AB, so gilt

$$f(P)=\overline{PR}\left(1-\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right)+f(A). \qquad \text{(Bild 4)}$$

Bild 4



Das heißt, das Funktional f ist eine lineare Funktion von $\overline{PR}$ und hat für alle Punkte P auf einer Parallelen $A'B'$ zur Basis AB den konstanten Wert

$$k=\overline{PR}\left(1-\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right)+f(A).$$

Beweis: Wir nehmen zunächst an, daß P ein beliebiger innerer Punkt eines spitzwinkligen gleichschenkligen Dreiecks ist. Die Fußpunkte der von P auf die Dreieckseiten gefällten Lote bezeichnen wir wiederum mit R, S und T. Es sei $A'B'$ eine Parallele zur Basis AB durch den Punkt P. Mit $\hat{h}_c$ bezeichnen wir die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks $A'B'C$ über der Basis $A'B'$.

Aus dem Strahlensatz folgt nun

$$\frac{\hat{h}_c}{f(C)}=\frac{\overline{A'C}}{\overline{AC}}.$$

Unter Verwendung dieser Beziehung ergibt sich die Fläche F des gleichschenkligen Dreiecks $A'B'C$ zu

$$F=\frac{1}{2}\overline{A'B'}\,\hat{h}_c=\frac{1}{2}\overline{A'B'}\,\frac{\overline{A'C}}{\overline{AC}}f(C).$$

Sie ist andererseits gleich der Summe der Flächen der Dreiecke $A'PC$ und $B'CP$

$$F=\frac{1}{2}\overline{A'C}\,\overline{PT}+\frac{1}{2}\overline{B'C}\,\overline{PS}.$$

Daraus folgt

$$\overline{PT}+\overline{PS}=\overline{A'B'}\frac{f(C)}{\overline{AC}}.$$

Somit hat das Funktional f für alle Punkte P auf $A'B'$ den Wert

$$f(P)=\overline{PR}+\overline{A'B'}\,\frac{f(C)}{\overline{AC}}.$$

Nach dem Strahlensatz gilt weiter

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{f(C)-\overline{PR}}{f(C)}$$

und somit

$$\overline{A'B'}=\overline{AB}\,\frac{f(C)-\overline{PR}}{f(C)}.$$

Durch Einsetzen in $f(P)$ erhalten wir

$$f(P)=\overline{PR}+\overline{AB}\,\frac{f(C)-\overline{PR}}{f(C)}\,\frac{f(C)}{\overline{AC}}=$$

$$=\overline{PR}\left(1-\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right)+\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\,f(C)=$$

$$=\overline{PR}\left(1-\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right)+f(A),$$

da aus dem Strahlensatz folgt

$$\frac{f(A)}{f(C)}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

Wird nun die Voraussetzung weggelassen, daß P ein innerer Dreieckspunkt ist, so bleibt der Beweis gültig, w.z.b.w.

Betrachten wir einige Schlußfolgerungen. Für alle Punkte P auf der Basis AB gilt wegen $\overline{PR}=0$

$$f(P)=f(A)=f(B).$$

Fällt P mit dem Eckpunkt C zusammen, so gilt wegen $\overline{PR}=\overline{CR}=f(C)$

$$f(C)=\overline{CR}\left(1-\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right)+f(A)$$

$$=f(C)-f(C)\,\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}+f(A)=f(C).$$

Der Wert des Funktionals $f(P)$ variiert linear zwischen $f(A)=f(B)$ und $f(C)$. Im Falle $45°\leqq\alpha<60°$ ergibt sich $f(C)\leqq f(P)\leqq f(A)=f(B)$. Für ein gleichseitiges Dreieck ($\alpha=60°$) folgt wegen $\overline{AB}=\overline{AC}$ für einen beliebigen Dreieckspunkt P die Beziehung $f(P)=f(A)=f(B)=f(C)$, d. h. der Satz von Viviani. Wenn $60°<\alpha<90°$ gilt, so folgt $f(A)=f(B)\leqq f(P)\leqq f(C)$ für alle Dreieckspunkte P.

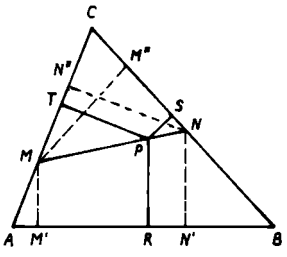
Nach der Betrachtung der beiden Spezialfälle wenden wir uns nun dem allgemeinen Fall eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks zu.

4. Ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck

Die Lösung der Aufgabe, alle Punkte P eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks mit $f(P)=k=$konstant zu bestimmen, führen wir in zwei Teilschritten durch. Dabei wird deutlich, wie sich die bereits betrachteten Spezialfälle einordnen. Im ersten Teilschritt zeigen wir, daß gilt: Wenn auf verschiedenen Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks ABC zwei Punkte M und N mit der Eigenschaft $f(M)=f(N)=k$ bekannt sind, dann gilt für jeden Punkt P auf der Strecke MN:

$$f(P)=k. \qquad \text{(Bild 5)}$$

Bild 5



Beweis: Es seien R, S und T die Fußpunkte der von einem beliebigen Punkt P auf MN auf die Dreieckseiten gefällten Lote. Wir setzen im Beweis voraus, daß MN nicht zur Dreieckseite parallel ist, die weder M noch N enthält. Der Fall MN parallel zu dieser Dreieckseite, wie noch deutlich wird, ist nur für das spitzwinklige gleichschenklige Dreieck möglich und wurde bereits behandelt.

Wir nehmen an, M ist ein Punkt auf AC und N ein Punkt auf BC. Die Strecke MN sei nicht parallel zu AB. Dann gilt nach dem Strahlensatz

$$\frac{\overline{PS}}{\overline{MM''}}=\frac{\overline{PN}}{\overline{MN}},\ \frac{\overline{PT}}{\overline{NN''}}=\frac{\overline{PM}}{\overline{MN}},\ \frac{\overline{PR}-\overline{MM'}}{\overline{PM}}$$

$$=\frac{\overline{NN'}-\overline{MM'}}{\overline{NN}}.$$

Werden die drei Beziehungen nach $\overline{PS}$, $\overline{PT}$ und $\overline{PR}$ aufgelöst und in den Ausdruck für $f(P)$ eingesetzt, so folgt

$$f(P)=\overline{PS}+\overline{PT}+\overline{PR}=\overline{MM''}\,\frac{\overline{PN}}{\overline{MN}}+\overline{NN''}$$

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{MN}}+\overline{MM'}+\overline{PM}\,\frac{\overline{NN'}-\overline{MM'}}{\overline{MN}}$$

$$=\overline{MM'}\left(1-\frac{\overline{PM}}{\overline{MN}}\right)+\overline{MM''}\,\frac{\overline{PN}}{\overline{MN}}+\overline{NN'}$$

$$=\frac{\overline{PM}}{\overline{MN}}+\overline{NN''}\,\frac{\overline{PM}}{\overline{MN}}$$

$$=(\overline{MM'}+\overline{MM''})\,\frac{\overline{PN}}{\overline{MN}}+(\overline{NN'}+\overline{NN''})\,\frac{\overline{PM}}{\overline{MN}}$$

$$=f(M)\,\frac{\overline{PN}}{\overline{MN}}+f(N)\,\frac{\overline{PM}}{\overline{MN}}=k\,\frac{\overline{PN}+\overline{PM}}{\overline{MN}}$$

$=k$, w.z.b.w.

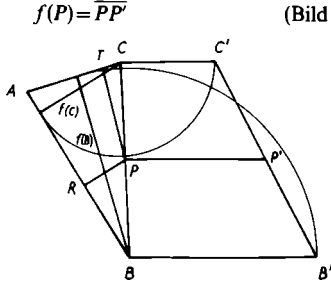
Damit reduziert sich die Lösung der Aufgabe auf die Ermittlung von Punkten M und N auf den Dreieckseiten mit $f(M)=f(N)$. Im zweiten Teilschritt wird dafür eine konstruktive Möglichkeit angegeben.

Als erstes zeigen wir, wie man zu einem beliebigen Punkt P auf einer Seite eines spitzwinkligen Dreiecks den Wert des Funktionals $f(P)$ als Strecke konstruieren kann.

Wir nehmen an, es sei P ein Punkt auf der Seite BC eines spitzwinkligen Dreiecks ABC. Im Punkt B wird unter einem rechten Winkel zur Seite BC die Höhe $f(B)$ antragen. Analog wird unter einem rechten Winkel zur Seite BC im Punkt C die Höhe $f(C)$ angetragen. Wir erhalten die beiden Punkte B' und C'. Es sei P' der Schnittpunkt des im Punkt P auf der Seite BC errichteten Lotes mit der Strecke $B'C'$. Dann gilt

$$f(P)=\overline{PP'} \qquad \text{(Bild 6)}$$

Bild 6



Beweis: Nach dem Strahlensatz können wir folgende Beziehungen ableiten

$$\frac{\overline{PT}}{f(B)}=\frac{\overline{PC}}{\overline{BC}},\ \frac{\overline{PR}}{f(C)}=\frac{\overline{PB}}{\overline{BC}}.$$

Daraus folgt durch Addition der beiden Beziehungen

$$\frac{\overline{PT}}{f(B)}+\frac{\overline{PR}}{f(C)}=\frac{\overline{PC}+\overline{PB}}{\overline{BC}}=1.$$

Gilt $f(B)=f(C)$ so ergibt sich

$$\overline{PT}+\overline{PR}=f(P)=f(B)=f(C).$$

Dieser Fall liegt genau dann vor, wenn BC die Basis eines spitzwinkligen gleichschenkligen Dreiecks ist.

Es sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(C)<f(B)$.

Durch Anwendung des Strahlensatzes folgt

$$\frac{\overline{PP'}-f(C)}{\overline{PC}}=\frac{f(B)-f(C)}{\overline{BC}}.$$

Daraus leiten wir ab

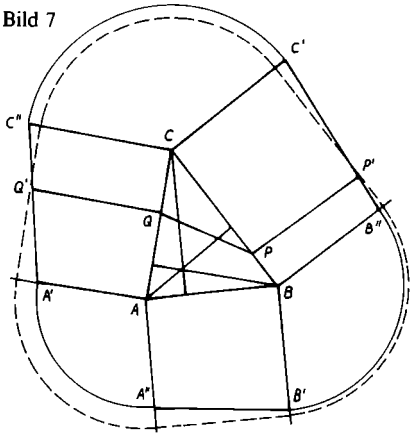
$$\overline{PP'}=f(C)\left(1-\frac{\overline{PC}}{\overline{BC}}\right)+f(B)\,\frac{\overline{PC}}{\overline{BC}}$$

$$=f(C)\,\frac{\overline{PB}}{\overline{BC}}+f(B)\,\frac{\overline{PC}}{\overline{BC}}=f(C)\,\frac{\overline{PR}}{f(C)}$$

$$+f(B)\,\frac{\overline{PT}}{f(B)}=\overline{PR}+\overline{PT}=f(P).\ \text{w.z.b.w.}$$

Wir können jetzt dazu übergehen, alle Punkte P auf den Seiten einschließlich der Eckpunkte eines beliebigen spitzwinkligen Dreiecks ABC mit $f(P)=$konstant zu ermitteln. In den Eckpunkten des Dreiecks A, B und C werden jeweils rechtwinklig zu den angrenzenden Seiten die Höhen $f(A)$, $f(B)$ und $f(C)$ angetragen und deren Endpunkte durch die Strecken $A''B'$, $B''C'$ und $C''A'$ verbunden. Werden anschließend die Punkte B' und B'' durch einen Kreisbogen mit dem Radius $f(B)$, die Punkte C' und C'' durch einen Kreisbogen mit dem Radius $f(C)$ und die Punkte A' und A'' durch einen Kreisbogen mit dem Radius $f(A)$ verbunden, so ergibt sich ein geschlossener Linienzug $A''B'B''C'C''A'$. (Bild 7)

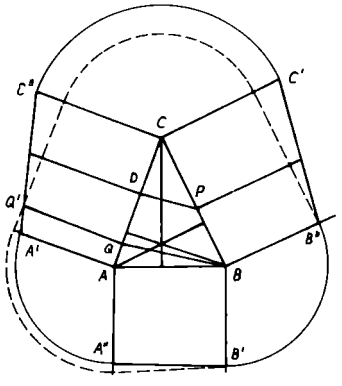
Bild 7



Es sei nun P ein beliebiger Punkt auf den Seiten bzw. ein Eckpunkt des spitzwinkligen Dreiecks ABC. Durch Errichten des Lotes im Punkt P erhalten wir einen Schnittpunkt P' mit dem Linienzug $A''B'B''C'C''A'$. Es gilt $f(P)=\overline{PP'}$. Die Konstruktion einer „Höhenlinie" durch den Punkt P' liefert weitere Schnittpunkte Q' mit dem Linienzug $A''B'B''$

$C'C''A'$. Wird von Q' auf die entsprechende Dreieckseite das Lot gefällt, so ergibt sich ein Punkt Q mit $f(Q)=\overline{QQ'}=\overline{PP'}=f(P)$.
Aus dieser Konstruktion ist sofort ersichtlich, daß für einen beliebigen Punkt P auf den Dreieckseiten gilt
$\min\{f(A), f(B), f(C)\} \leqq f(P)$
$\leqq max\{f(A), f(B), f(C)\}$.
Diese Beziehung bleibt gültig, wenn P ein beliebiger Dreieckspunkt ist, da alle Punkte auf der Verbindungsstrecke PQ zweier Randpunkte P und Q mit $f(P)=f(Q)$ den gleichen Funktionalwert haben.
Es sei nun ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $f(A)<f(B)<f(C)$. Dann gibt es auf der Seite AC genau einen Punkt Q mit $f(Q)=f(B)$. Für alle Punkte P auf QB gilt $f(P)=f(Q)=f(B)$. Wir können sogar noch mehr aussagen. Ist P ein Punkt des Dreiecks BCQ, so gilt $f(B)\leqq f(P)\leqq f(C)$. Wenn dagegen P ein Punkt des Dreiecks ABQ ist, so gilt $f(A)\leqq f(P)\leqq f(B)$. Alle Punkte P des Dreiecks ABC mit $f(P)=$konstant liegen auf Parallelen zur Strecke BQ. (Bild 8)

Bild 8



Beweis: Aus der Konstruktion folgt, daß die „Höhenlinie" durch B' bzw. B'' mit $C''A'$ einen eindeutigen Schnittpunkt Q' hat, woraus sich auf AC der Punkt Q mit $f(Q)=f(B)$ ergibt. Wenn P ein Punkt des Dreiecks BCQ bzw. des Dreiecks ABQ ist, so folgen die Ungleichungen $f(B)\leqq f(P)\leqq f(C)$ bzw. $f(A)\leqq \leqq f(P)\leqq f(B)$ gleichfalls aus der Konstruktion.
Um zu zeigen, daß alle Punkte P mit $f(P)=$ konstant auf Parallelen zu BQ liegen, wählen wir einen beliebigen Punkt P zum Beispiel auf der Seite BC. Dazu gibt es einen eindeutigen Punkt D auf CQ mit $f(D)=f(P)$. Auf der Strecke PD hat das Funktional f einen konstanten Wert. Durch die Anwendung des Strahlensatzes erhalten wir

$$\frac{f(P)-f(B)}{f(C)-f(B)}=\frac{\overline{PB}}{\overline{BC}},\quad \frac{f(D)-f(Q)}{f(C)-f(Q)}=\frac{\overline{QD}}{\overline{QC}},$$

woraus wegen $f(P)=f(D)$ und $f(Q)=f(B)$ die Beziehung

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{QD}}{\overline{QC}}$$

folgt. Das bedeutet aber nach dem Strahlensatz, daß BQ und PD parallel sind. w.z.b.w.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. Hans Triebel

Sektion Mathematik
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

▲2122▲ Eine Aufgabe zur zweidimensionalen allgemeinen Relativitätstheorie

Albert Einstein, der Begründer der allgemeinen Relativitätstheorie, wurde am 14. 3. 1879 geboren. Anläßlich der hundertsten Wiederkehr dieses Ereignisses erschienen 1979 nicht nur zahlreiche wissenschaftliche, sondern auch viele populärwissenschaftliche Arbeiten über Einstein und sein Werk. Dabei spielen solche Begriffe wie „Krümmung des Raumes" usw. eine große Rolle. Der Nichtfachmann steht einem solchen Begriff wie Krümmung des Raumes etwas hilflos gegenüber und versucht, sich etwas Anschauliches darunter vorzustellen. Es handelt sich aber um rein mathematische Kennzahlen, denen man nicht mit Gewalt einen anschaulichen Sinn unterlegen sollte. Man kann aber doch eine gewisse Vorstellung erlangen, wenn man von 3 Dimensionen (unserem realen Raum) zu 2 Dimensionen übergeht. Wir betrachten eine zweidimensionale krumme Fläche F im dreidimensionalen Raum und nehmen an, daß F die Welt zweidimensionaler Wesen ist. Diese zweidimensionalen Wesen leben auf F, sie haben kein Gefühl für eine dritte Dimension.

Bild 1

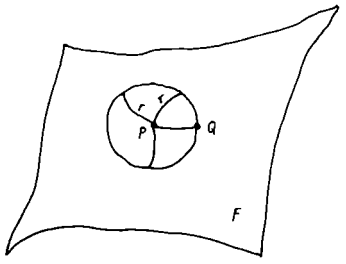
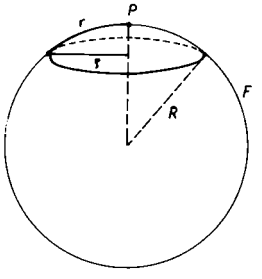


Bild 2



Für sie hat die Aussage „Unsere Welt ist gekrümmt" keinen unmittelbaren geometrischen Sinn. Daß ihre Welt eine Fläche im dreidimensionalen Raum ist, können sie nicht wahrnehmen und eine entsprechende Aussage wäre für diese zweidimensionalen Wesen sinnlos, da diese für sie nicht überprüfbar ist. (Für uns dreidimensionale Wesen wäre eine Aussage der Form, daß unsere Welt eine „Fläche" in einem vierdimensionalen Raum ist, ebenfalls sinnlos). Die Mathematiker und Physiker dieser zweidimensionalen Welt entwickeln nun mathematische und physikalische Theorien, etwa eine zweidimensionale allgemeine Relativitätstheorie und zugehörige geometrische Überlegungen. Sie verkünden ihren staunenden Mitbürgern: „Unsere Welt ist krumm. Wir haben hierfür kein Gefühl, aber wir können eine Formel angeben, die diesen Sachverhalt beschreibt."

Diese Formel wird nun wie folgt gewonnen. Wir nehmen an, daß die Bewohner von F Abstände in ihrer Welt messen können. Dann können sie auch „Kreise" definieren: Der „Kreis" um den Punkt P (auf F) mit dem Radius r ist der geometrische Ort aller Punkte Q (auf F), deren Abstand zu P gleich r ist. $U(r)$ sei der Umfang dieses „Kreises". Dann bezeichnen die zweidimensionalen Mathematiker der Welt die Größe $K(P)$,

$$K(P)=\frac{3}{\pi}\lim_{r\to 0}\frac{2\pi r-U(r)}{r^3}$$

5. Schlußbetrachtungen

Zur Beantwortung der gestellten Aufgabe läßt sich nun zusammenfassend die folgende Aussage formulieren.
Die Summe der Abstände eines beliebigen Punktes eines spitzwinkligen Dreiecks von den Seiten liegt stets zwischen der kleinsten und der größten Höhe des Dreiecks. Außer für das gleichseitige Dreieck gibt es in jedem spitzwinkligen Dreieck eine Schar von Parallelen, wobei für jede der Parallelen gilt, daß die Summe der Abstände aller ihrer Punkte von den Dreiecksseiten den gleichen Wert hat. Die Aussage, ein spitzwinkliges Dreieck hat paarweise verschiedenlange Seiten ist äquivalent zur Aussage, daß die erwähnte Parallelenschar zu keiner Dreiecksseite parallel ist. Im Falle eines spitzwinkligen nichtgleichseitigen gleichschenkligen Dreiecks ist die Parallelenschar zur Basis parallel. Den Ausnahmefall bildet das gleichseitige Dreieck, für das es keine derartigen Parallelenschar gibt. In diesem und nur in diesem Fall gilt der Satz von Viviani.

6. Zwei Aufgaben

a) In einem beliebigen spitzwinkligen Dreieck ABC sind die Punkte P zu ermitteln, für die $f(P)$ extremal wird.
b) Es sei P der Schnittpunkt der Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks ABC. Man bestimme alle Punkte Q des Dreiecks mit $f(Q)=f(P)$.

G. Windisch

als die Krümmung im Punkt P. Bekanntlich ist $2\pi r$ der Umfang eines euklidischen Kreises (in der Ebene) vom Radius r. In der obigen Formel wird also die Abweichung von $U(r)$ zum euklidischen Kreis als Maß für die Krümmung genommen. Ist F eine Ebene, so ist $K(P)=0$ für alle Punkte P. Die Aufgabe besteht nun darin $K(P)$ zu berechnen, falls F die Oberfläche einer Kugel im dreidimensionalen Raum mit dem Radius R ist. In diesem Fall führt die obige Konstruktion zu einem „Kreis" in F, der auch nach unserem euklidischen Verständnis ein Kreis ist, sein Radius ist ϱ. Die Frage lautet:
Wie groß ist $K(P)$?
Oder anders formuliert: Was erzählen die zweidimensionalen Mathematiker auf F ihren Mitbürgern bezüglich der Krümmung ihrer Welt?

Hinweis: Man benutze die Formel

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

Zusatzaufgabe: Man beweise diese Formel.

Prof. Dr. Hans Triebel

Biographie

1936 in Dessau geboren. Besuch der Grund- und Oberschule in Dessau, Abitur 1954. Von 1954 bis 1959 Mathematikstudium in Jena, 1959 Diplom. Von 1959 bis 1960 Tätigkeit als Mathematiker im VEB Carl Zeiß in Jena. 1961 bis 1963 Assistent am damaligen Mathematischen Institut der Universität Jena, 1962 Promotion (Dr. rer. nat.). 1963 bis 1964 Zusatzstudium an der Universität in Leningrad. Von 1964 bis 1969 Oberassistent an der Universität Jena, 1966 Habilitation (Dr. rer. nat. habil.). 1969 bis 1970 Dozent, seit 1970 Professor für Analysis an der Friedrich-Schiller-Universität in Jena. Seit 1978 korrespondierendes Mitglied der Akademie der Wissenschaften der DDR. Vier Bücher und etwa 80 Publikationen in internationalen Fachzeitschriften.

Optimale Reihenfolge

Im Alltag treffen wir oft auf Situationen, bei denen durch die Wahl einer günstigen Reihenfolge von bestimmten Handlungen viel Zeit oder Geld eingespart werden kann.

Beispiel 1: Im Wartezimmer eines Arztes sitzen die Patienten A, B, C, D, E und F. Der Arzt weiß, daß er etwa 20 Minuten für die Behandlung von A, 30 min für B, 15 min für C, 5 min für D und je 10 min für E und F braucht.
Ruft er die Patienten in der Reihenfolge (A, B, C, D, E, F) herein, so wartet A gar nicht und B 20 min. C bleibt $20+30=50$ min im Wartezimmer, D wartet 65, E 70 und F 80 min. Für alle Patienten zusammen ergibt das eine Wartezeit von 285 min, also 4 Stunden und 45 Minuten. Gibt es eine günstigere Reihenfolge? Für welche Reihenfolge der Patienten wird die Gesamtwartezeit am kleinsten? (Lösungen siehe S. 94.)
Eine Reihenfolge von n verschiedenen Buchstaben oder Zahlen wird in der Mathematik als Permutation bezeichnet. Es ist bekannt, daß es $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ verschiedene Permutationen von n Objekten gibt. Prüft diese Formel einmal mit 3 oder 4 Buchstaben nach, indem ihr alle möglichen Anordnungen aufschreibt! In unserem Beispiel gibt es $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=720$ mögliche Reihenfolgen des Empfangs der Patienten.

Es leuchtet ein, daß es aufwendig ist, die günstigen Reihenfolgen durch Probieren zu suchen. Wir werden eine allgemeine Regel für die optimale Reihenfolge ableiten. Wenn ihr diese Regel bei der Lösung von Beispiel 1 noch nicht gefunden habt, schaut euch die Aufgabe noch einmal an oder stellt euch selbst eine ähnliche Aufgabe. Ihr werdet es schnell erraten.
Zunächst wollen wir die Aufgabe etwas allgemeiner formulieren.
Problem 1: In einem Wartezimmer sitzen n Patienten. Die Behandlungsdauer jedes Patienten sei bekannt. Gesucht ist eine solche Reihenfolge der Behandlung, bei der die Summe s der Wartezeiten aller Patienten minimal wird.
Lösung: Wir bezeichnen die Patienten mit A_1, A_2, ..., so, daß $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ eine optimale Reihenfolge ist. Jetzt leiten wir eine Bedingung für die Behandlungszeiten her, die wir mit $a_1, \ldots, a_n$ bezeichnen. Es ergeben sich folgende Wartezeiten:

Patient	Wartezeit
A_1	–
A_2	a_1
A_3	a_1+a_2
⋮	⋮
A_{n-1}	$a_1+a_2+\ldots+a_{n-2}$
A_n	$a_1+a_2+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}$

Durch Addieren und Zusammenfassen erhält man als Gesamtwartezeit $s=(n-1)\cdot a_1+(n-2)\cdot a_2+\ldots+2\cdot a_{n-2}+a_{n-1}$. In dieser Summe wird a_1 mit dem größten Faktor multipliziert, a_2 mit dem zweitgrößten usw. Wir haben vorausgesetzt, daß die Reihenfolge $(A_1, \ldots, A_n)$ bzw. auch $(a_1, \ldots, a_n)$ so gewählt ist, daß s am kleinsten wird. Das heißt, es muß gelten

$$a_1\leqq a_2\leqq\ldots\leqq a_n.$$

Ergebnis: Die Gesamtwartezeit wird am kleinsten, wenn jeweils der Patient mit der kürzesten noch möglichen Behandlungszeit empfangen wird.
Wenn alle Behandlungszeiten verschieden sind, gibt es genau eine optimale Reihenfolge. Haben zwei oder mehrere Patienten die gleiche Behandlungszeit, so können diese in der Reihenfolge miteinander vertauscht werden, ohne daß sich s ändert. In diesem Fall gibt es mehrere Lösungen.
Bei dem nächsten, allgemeineren Problem werden wir das Ergebnis noch mit einer anderen Überlegung gewinnen. Zunächst zwei Aufgaben. Versucht wieder, eine allgemeine Regel abzuleiten!

Beispiel 2a: Ein Direktor hat in einer Stunde 4 Probleme zu besprechen. Zu jedem Thema ist eine bestimmte Sprechzeit vorgesehen und eine bestimmte Anzahl von Besuchern bestellt, die schon im Vorzimmer warten:

Thema	Sprechzeit in min	Anzahl der Besucher
1	20	5
2	25	8
3	10	10
4	5	2

Wir wollen voraussetzen, daß kein Besucher für mehrere Themen vorgesehen ist. Wie ist die Reihenfolge der Themen festzulegen, damit die Gesamtwartezeit der Besucher minimal wird?
Beispiel 2b: In einem Hafen liegen 6 Schiffe vor Anker, die nacheinander entladen werden müssen. Die Entladezeiten und die Kosten, die für die Liegezeit des Schiffes im Hafen entrichtet werden müssen, sind bei den einzelnen Schiffen unterschiedlich.

Schiff	Entladezeit in Stunden	Liegekosten pro Stunde in Mark
A	2	10000
B	4	8000
C	5	15000
D	2	12000
E	4	18000
F	3	18000

Bei welcher Reihenfolge des Entladens wird die Summe der Liegekosten am kleinsten? Die Zahlenangaben sind durchaus realistisch. Statt die Kosten für die gesamte Liegezeit im Hafen zu betrachten, kann man sich auch auf die Wartezeit beschränken, denn die Entladezeit ist ja fest vorgegeben. Wir versuchen, beide Aufgaben in eine allgemeinere mathematische Problemstellung einzuordnen:

Problem 2: n Objekte (Schiffe oder Besuchergruppen) warten auf ihre Abfertigung, die nacheinander erfolgen soll. Die Abfertigungszeit a_i für jedes Objekt A_i und die Kosten c_i (pro Zeiteinheit) für seine Wartezeit sind bekannt. Gesucht ist eine Reihenfolge der Abfertigung, für die die Gesamtsumme s der Wartekosten am kleinsten wird.

Die Wartekosten für A_i sind das Produkt von c_i mit der Zeit, die A_i warten muß. Im Beispiel 2a spielt die Anzahl der Besucher die Rolle des Kostenfaktors c_i, denn die Wartezeit für alle Besucher einer Gruppe ergibt sich als Produkt aus der Anzahl der Besucher und der Wartezeit der Gruppe.

Unsere Lösung erfordert jedoch überhaupt keine Berechnung von Wartekosten, sondern führt das Problem auf den Fall $n=2$ zurück!

Lösung: Wir betrachten eine Reihenfolge mit den Gesamtwartekosten s_1, bei der die Objekte A_i und A_k direkt nacheinander abgefertigt werden. Bei der abgeänderten Reihenfolge, bei der lediglich A_i und A_k die Plätze getauscht haben und alle anderen Objekte auf ihren Plätzen verbleiben, sei die Summe der Wartekosten s_2. Bei beiden Reihenfolgen sind die Kosten für die Wartezeiten der vor bzw. nach A_i und A_k abgefertigten Objekte gleich und auch die Kosten für die Zeit, die A_i und A_k gemeinsam warten. Bezeichnen wir die Summe dieser Kosten mit t, so ist $s_1 = t + a_i \cdot c_k$, denn es kommen nur die Kosten (c_k pro Zeiteinheit) für die Zeitspanne a_i dazu, die A_k auf die Abfertigung von A_i wartet. Entsprechend erhält man $s_2 = t + a_k \cdot c_i$.

Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt $s_1 - s_2 = a_i c_k - a_k c_i$.

Es ist genau dann $s_1 > s_2$, wenn auch die rechte Seite der letzten Gleichung positiv ist: $a_i c_k > a_k c_i$. Da die Kostenfaktoren c_i und c_k größer als Null sind (sonst könnten die entsprechenden Objekte beliebig spät abgefertigt werden), kann man hierfür auch schreiben $\frac{a_i}{c_i} > \frac{a_k}{c_k}$. In Worten ausgedrückt: wenn bei zwei direkt nacheinander abzufertigenden Objekten A_i und A_k der Quotient Abfertigungszeit durch Wartekosten für das erste Objekt größer ist als für das zweite, so kann durch Vertauschen dieser beiden Objekte in der Reihenfolge die Summe der Wartekosten verkleinert werden. Die ursprüngliche Reihenfolge war also nicht optimal.

Ergebnis: Ist $(A_1, \ldots, A_n)$ eine optimale Reihenfolge, so gilt

$$\frac{a_1}{c_1} \leqq \frac{a_2}{c_2} \leqq \ldots \leqq \frac{a_n}{c_n}.$$

Man erhält also die optimale Reihenfolge (es muß ja eine geben), indem man die Quotienten Abfertigungszeit durch Wartekosten bildet und der Größe nach ordnet. Sind einige Quotienten gleich, so gibt es mehrere optimale Lösungen, denn das Vertauschen der entsprechenden Objekte untereinander ändert den Wert von s nicht, wie aus der obigen Überlegung hervorgeht.

Das Ergebnis zu Problem 1 ordnet sich hier als Spezialfall ein, daß $c_1 = c_2 = \ldots = c_n$ ist. – Nun noch eine schwierige Aufgabe:

Beispiel 3a: Ein 3-Familienhaus ist im Rohbau fertig. Ein Maurer und ein Maler kommen, um die Innenarbeiten auszuführen. Sie veranschlagen folgende Arbeitszeit (in Tagen):

	Maurer	Maler
Keller	2	1
Treppenhaus und Abstellräume	6	4
Wohnung 1	4	3
Wohnung 2	3	5
Wohnung 3	5	6

In welcher Reihenfolge ist die Arbeit der beiden zu organisieren, damit das Haus zum frühesten Termin bezugsfertig wird?

Das Problem besteht darin, daß der Maler nur dort mit der Arbeit anfangen kann, wo der Maurer fertig ist.

Diese Art von Aufgaben tritt in der Produktionsplanung häufig auf, wenn eine Reihe von Werkstücken auf mehreren Maschinen nacheinander bearbeitet werden, wobei sie unterschiedliche Zeit für die einzelnen Arbeitsgänge benötigen. Zum Beispiel sägen – feilen – polieren, zuschneiden – nähen. Oder:

Beispiel 3b: Im Beispiel 2b ist vor dem Entladen die Zollkontrolle durchzuführen, die erfahrungsgemäß etwa folgende Zeit in Anspruch nehmen wird: 3 Stunden für Schiff A, 5 für B, 4 für C, 1 Stunde für D, 3 für E und 4 für F. In welcher Reihenfolge sind die Schiffe abzufertigen, wenn wie in 2b die Summe der Liegekosten bzw. Wartekosten möglichst klein gehalten werden soll? Welche Reihenfolge ist zu wählen, wenn das letzte Schiff zum frühestmöglichen Zeitpunkt abgefertigt sein soll?

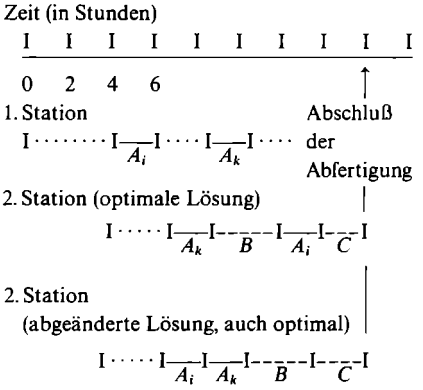
Hier handelt es sich um zwei ganz unterschiedliche Fragestellungen. Die Größe, die möglichst klein (oder groß) gemacht werden soll, nennt man in der mathematischen Optimierung die *Zielgröße*. Was bezüglich der einen Zielgröße günstig oder optimal ist, ist ungünstig bezüglich der anderen. Daher muß man sich bei Optimierungsaufgaben immer im klaren über die Zielgröße sein. Die Losung *Mit minimalem Aufwand maximalen Nutzen zu erreichen* ist mathematisch nicht gerechtfertigt.

Für Beispiel 3a und die zweite Frage von 3b wollen wir zum Abschluß das Problem und die allgemeine Regel formulieren:

Problem 3: n Objekte sollen nacheinander auf 2 Stationen abgefertigt werden. Für jedes Objekt A_i sind die Abfertigungszeit a_i auf der ersten und b_i auf der zweiten Station bekannt. Die zweite Station darf erst nach der ersten durchlaufen werden.

In welcher Reihenfolge sind die Objekte abzufertigen, damit die Abfertigung aller Objekte zum frühestmöglichen Zeitpunkt abgeschlossen ist?

Zunächst ist durchaus nicht klar, daß bei einer optimalen Lösung die Reihenfolge auf beiden Stationen dieselbe ist. Wenn man aber eine optimale Lösung hat, kann man die Reihenfolge auf der zweiten Station so abändern, daß sie mit der Reihenfolge auf der ersten Station übereinstimmt und daß die abgeänderte Lösung auch optimal ist. Die folgende Skizze soll das verdeutlichen und euch gleichzeitig zeigen, wie ihr graphisch an die Lösung solcher Aufgaben gehen könnt.



Die allgemeine Regel wird bewiesen wie bei Problem 2. Allerdings sind Fallunterscheidungen erforderlich.

Ergebnis: Zuerst sind die Objekte abzufertigen, die auf der ersten Station weniger Zeit erfordern als auf der zweiten ($a_i \leqq b_i$). Diese werden nach der ersten Abfertigungszeit geordnet, wobei mit der kleinsten Zeit begonnen wird ($a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots$).

Die anderen Objekte werden nach der zweiten Abfertigungszeit geordnet, wobei mit der größten Zeit begonnen wird ($\ldots \geqq b_{n-1} \geqq b_n$). Beide Stationen werden in gleicher Reihenfolge durchlaufen.

Im Gegensatz zu Problem 1 und 2 erfaßt diese Regel nur einige, aber nicht alle optimalen Lösungen. Vergleiche mit den Beispielen!

Ch. Bandt/F. Käpnick

Neu im Verlag Volk und Wissen

Johannes Lehmann

2mal 2 plus Spaß dabei

Ein Buch mit Unterhaltungsmathematik für *Junge Mathematiker* der Klassen 1 bis 5
80 Seiten, zahlr. mehrfarb. Bilder und Zeichnungen.

Bestell-Nr. 001 721 Preis: 2,60 M

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Funktionen als „Dolmetscher“

Der Schüler A beschäftigte sich im wesentlichen mit der Addition reeller Zahlen, sein Freund M dagegen multiplizierte positive reelle Zahlen. Beide rechneten unabhängig voneinander. A konnte die Lösung der Aufgabe seines Freundes M nicht kontrollieren, und auch M sah sich außerstande, die Rechnungen von A zu verfolgen. Beide rechneten gewissermaßen in verschiedenen Sprachen, A in einer „Additionssprache“ und M in einer „Multiplikationssprache“.

Und dennoch zeigten sich bei genauerem Hinsehen auffällige Übereinstimmungen. Die in der „Multiplikationssprache“ geschriebene wahre Aussage

„(1_M) Für alle $x_1; x_2; x_3 \in P^+$ gilt $(x_1 \cdot x_3) : (x_2 \cdot x_3) = x_1 : x_2$“ geht in die ebenfalls wahre Aussage der „Additionssprache“

„(1_A) Für alle $y_1; y_2; y_3 \in P$ gilt $(y_1 + y_3) - (y_2 + y_3) = y_1 - y_2$[1]“

über, wenn man das Operationszeichen „:“ formal durch das Operationszeichen „+“, das Operationszeichen „:“ durch das Operationszeichen „−“ und $x_1; x_2; x_3$ durch $y_1; y_2; y_3$ ersetzt.

Die beiden Freunde fanden weitere derartige Aussagen: M nannte die Aussage

(2_M) Für alle $x_1; x_2 \in P^+$ gilt $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$

Dazu konnte A die Aussage

(2_A) Für alle $y_1; y_2 \in P$ gilt $y_1 + y_2 = y_2 + y_1$

formulieren.

Nun gab A eine wahre Aussage vor:

(3_A) Für alle $y_1; y_2; y_3 \in P$ gilt:

Aus $y_1 + y_3 = y_2 + y_3$ folgt $y_1 = y_2$

Die formale Übertragung in die „Multiplikationssprache“ lieferte die Aussage

(3_M) Für alle $x_1; x_2; x_3 \in P^+$ gilt:

Aus $x_1 \cdot x_3 = x_2 \cdot x_3$ folgt $x_1 = x_2$

„Diese Aussage ist ebenfalls wahr“, sagte M und war froh, daß die Zahl Null kein Element von P^+ ist.

„In beiden Sprachen scheinen gleiche grammatikalische Regeln zu gelten“, meinte A.

„Man müßte ein Wörterbuch aufstellen, welchem man für jedes ‚Wort' der ‚Additionssprache' seine ‚Bedeutung' in der Multiplikationssprache' entnehmen kann“, erwiderte M.

Dabei ist es natürlich völlig gleichgültig, ob man für die Kennzeichnung der „Wörter“ z. B. in der „Additionssprache“ die Variable x oder die Variable y nutzt.

Es müßte also eine Funktion $f\colon P \to P^+$ konstruiert werden, die jedem $x \in P$ ein $y \in P^+$ und jeder Summe $x_1 + x_2$ der in „Additionssprache“ das Produkt $y_1 \cdot y_2$ der in „Multiplikationssprache“ zuordnet, d. h., für die gilt:

(I) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$
für alle $x_1; x_2 \in P$

„Eine solche Funktion ist leicht anzugeben“, sagte M, „man hat dazu nur jeder reellen Zahl x die Zahl 1 als Funktionswert zuzuordnen, d. h., $f(x) = 1$ für alle $x \in P$ zu setzen.“

Tatsächlich ist die Bedingung (I) für diese Funktion erfüllt. Um diesen einfachen und wenig nützlichen Fall jedoch auszuschließen, schlägt A vor:

„Wir wollen als zweite Bedingung vorgeben, daß f an der Stelle $x = 1$ den Funktionswert $f(1) = a$ besitzen soll“.

(II) $f(1) = a$ mit $a \in P$ und $a > 1$

Zunächst nutzen die beiden Freunde beim Aufstellen des Wörterbuches diese beiden Bedingungen kräftig aus:

Das Wörterbuch entsteht

- Setzt man in (I) $x_2 = 0$, so folgt $f(x_1) = f(x_1) \cdot f(0)$, also gilt, da $f(x_1)$ nicht gleich Null sein kann, $f(0) = 1$ — $0 \to 1$, $1 \to a$
- Setzt man in (I) $x_1 = x_2 = 1$, so folgt wegen (II) $f(2) = f(1) \cdot f(1) = a \cdot a = a^2$ — $2 \to a^2$
- Setzt man in (I) $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$, so folgt $f(3) = f(2) \cdot f(1) = a^2 \cdot a = a^3$ — $3 \to a^3$

Beide Freunde vermuten nun, daß jeder natürlichen Zahl n als Funktionswert a^n zugeordnet wird. — $n \to a^n$

A behauptet, er könne dies (durch vollständige Induktion) beweisen: „Angenommen, wir hätten, in der oben angegebenen Weise fortfahrend, bis zu einer natürlichen Zahl k gezeigt, daß $f(k) = a^k$ gilt. Dann kann man zeigen, daß dem unmittelbaren Nachfolger $k+1$ von k der Funktionswert a^{k+1} zugeordnet wird.

Setzt man nämlich in (I)
$x_1 = k$ und $x_2 = 1$, so folgt
$f(x_1 + x_2) = f(k+1) = f(k) \cdot f(1)$
$= a^k \cdot a = a^{k+1}$

Die Eigenschaft, daß einer beliebigen natürlichen Zahl k durch f die Potenz a^k zugeordnet wird, „vererbt“ sich also stets auf den Nachfolger von k.“

Damit weiß man, wie *natürliche Zahlen* von der „Additionssprache“ in die „Multiplikationssprache“ übersetzt werden. Jeder natürlichen Zahl n wird die positive reelle Zahl a^n als Funktionswert zugeordnet. Offenbar gilt dies auch für die Zahl 0, denn es ist ja $f(0) = a^0 = 1$.

Setzt man in (I) $x_2 = -x_1$, so folgt

$f(0) = f(x_1) f(-x_1)$, also gilt $f(-x_1) = \frac{1}{f(x_1)}$.

Mit Hilfe dieser Beziehung kann man noch eine weitere Funktionalgleichung gewinnen, welcher die Funktion f genügen muß:

Aus $f(x_1 - x_2) = f[x_1 + (-x_2)] =$
$= f(x_1) \cdot f(-x_2) = f(x_1) \cdot \frac{1}{f(x_2)}$ folgt

(I_*) $f(x_1 - x_2) = f(x_1) : f(x_2)$
für alle $x_1; x_2 \in P$.

Ist nun m eine natürliche Zahl, so ergibt sich $f(-m) = \frac{1}{f(m)} = \frac{1}{a^m} = a^{-m}$, also kann

„$-m \to a^{-m}$“ in das Wörterbuch eingetragen werden. Nachdem man durch diese Überlegung die Funktionswerte aller *ganzzahligen Argumente* ermittelt hatte, untersuchte man *rationale Zahlen* der „Additionssprache“ und ihre Bilder:

Die Freunde vermuten, daß jeder rationalen Zahl $\frac{g}{h}$ ($g \in G;\ h \neq 0$) durch f die Potenz $a^{\frac{g}{h}}$ zugeordnet wird.

Zunächst gilt $f(1) = f\left(\frac{h}{h}\right) = f\left(h \cdot \frac{1}{h}\right) = \left[f\left(\frac{1}{h}\right)\right]^h$ wegen (I), also folgt unter Nutzung von $f(1) = a^{(I)}$ die Beziehung $f\left(\frac{1}{h}\right) = a^{\frac{1}{h}}$.

Hieraus und aus (I) erhält man $f\left(\frac{g}{h}\right) = \left[f\left(\frac{1}{h}\right)\right]^g = \left(a^{\frac{1}{h}}\right)^g = a^{\frac{g}{h}}$.

In das Wörterbuch kann also eingetragen werden: $\frac{g}{h} \to a^{\frac{g}{h}}$.

„Wir wissen allerdings noch nicht, wie die irrationale Zahl π aus der „Additionssprache“ in die „Multiplikationssprache“ übersetzt wird“, meint A und hofft, daß man als Bild von π die Potenz a^π erhält.

Da es den beiden Freunden jedoch nicht gelingt, dies nachzuweisen, mußten sie sich bei ihrem Mathematiklehrer Hilfe erbitten. Er bestätigte zunächst ihre Vermutung, daß auch jeder irrationalen Zahl – und damit jeder reellen Zahl x – durch f als Bild a^x zugeordnet wird. Allerdings kommt man beim Nachweis dieser Behauptung mit den Bedingungen (I) und (II) allein nicht aus. Man muß noch verlangen, daß f eine „vernünftige“ Funktion ist, deren Bild weder „Sprünge“ noch „Lücken“ aufweist, f muß eine *stetige Funktion* sein. Diese Forderung wird durch

(III) $f(\lim\limits_{x \to x_0} x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ für alle $x \in P$

beschrieben. Sie besagt, daß an jeder beliebigen Stelle x_0 des Definitionsbereiches von f gelten soll: Strebt eine Folge von Argumenten $x_1; x_2; \ldots; x_n; \ldots$ gegen die reelle Zahl x_0, so strebt die Folge der zugehörigen Funktionswerte gegen $f(x_0)$. Mit Hilfe von (I), (II) und (III) kann man zeigen, daß auch für jedes irrationale x gilt $f(x) = a^x$.

Dieser Nachweis ist nicht so elementar wie die oben durchgeführten Überlegungen. Dies liegt daran, daß man reelle Zahlen und Rechenoperationen in der Menge der reellen Zahlen nicht auf so einfache Weise mit Hilfe rationaler Zahlen definieren kann wie etwa

die gebrochenen Zahlen unter Nutzung der natürlichen. Im Lehrbuch für die Klasse 9 wird auf Seite 139 angedeutet, wie man Potenzen mit irrationalen Exponenten – also z. B. a^{π} – festlegen könnte.

Damit hatten die beiden Freunde A und M mit der Exponentialfunktion $y=f(x)=a^x$ einen „Dolmetscher" gefunden, der die Ausdrücke der „Additionssprache" in solche der „Multiplikationssprache" übersetzen konnte.

„Es gibt unendlich viele ‚Dolmetscher'", meinte A, „wir können ja das Bild der Zahl 1, die reelle Zahl a, noch frei wählen. Für $a=10$ erhalten wir z. B. die Exponentialfunktion $y=10^x$, deren Bild wir im Mathematikunterricht gezeichnet haben."

Daß die Schar der Exponentialfunktionen $y=f(x)=a^x$ $(a\in P;\ a>1)$ die Eigenschaft (I) besitzt, kann man auch unmittelbar bestätigen:

Es gilt $f(x_1+x_2)=a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}$
$=f(x_1)\cdot f(x_2)$ für alle $x_1;\ x_2\in P$.

Interessant ist die Frage, ob es außer den Exponentialfunktionen noch weitere Funktionen gibt, welche die Bedingungen (I), (II) und (III) erfüllen. Daß dies nicht der Fall ist, zeigen die Überlegungen bei der Konstruktion des Wörterbuches: (I), (II) und (III) sind nicht nur hinreichende sondern auch notwendige Bedingungen dafür, daß f eine Exponentialfunktion ist.

„Die Funktion $y=10^x$ ist eineindeutig, sie besitzt also mit $y=\log_{10}x$ eine inverse Funktion. Damit können wir auch jedem Ausdruck der ‚Multiplikationssprache' eindeutig einen Ausdruck der ‚Additionssprache' zuordnen", ergänzte M. A und M konnten also auch folgendes „Wörterbuch" aufstellen:

„Multiplikationssprache"	„Additionssprache"
(Elemente aus P^+)	(Elemente aus P)
0,001	-3
0,01	-2
0,1	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
x	$\log_{10}x$

Und sie rechneten: Aufgaben in der

„Multiplikationssprache"		„Additionssprache"
0,01	$\longleftrightarrow$	-2
$\cdot$		$+$
1000	$\longleftrightarrow$	3
$=$		$=$
10	$\longleftrightarrow$	1

Für die Funktion $y=g(x)=\log_a x$ gilt bekanntlich für alle $x_1;\ x_2\in P^+$ die Beziehung
$\log_a(x_1\cdot x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2$

Die Funktion g erfüllt also die Gleichung

(I′) $g(x_1\cdot x_2)=g(x_1)+g(x_2)$
für alle $x_1;\ x_2\in P^+$

Man kann nun sogar allgemein beweisen: Gilt für eine Funktion f die Gleichung (I), so ist für ihre inverse Funktion f^{-1} (falls diese existiert) die Gleichung (I′) erfüllt.

Dieser Beweis fiel den beiden Freunden nicht schwer:

Mit $y_1=f(x_1)$ und $y_2=f(x_2)$ gilt $x_1=f^{-1}(y_1)$ und $x_2=f^{-1}(y_2)$, also folgt aus $y_1\cdot y_2=$
$=f(x_1)\cdot f(x_2)=f(x_1+x_2)$ sofort $f^{-1}(y_1\cdot y_2)=$
$=f^{-1}[f(x_1+x_2)]=x_1+x_2=f^{-1}(y_1)+f^{-1}(y_2)$.

Die Eigenschaften (I) [bzw. (I′)] sagen aus:

Es ist gleich, ob man die Argumente zunächst multipliziert (bzw. addiert) und dann das Produkt (bzw. Summe) abbildet („übersetzt") oder ob man zunächst die Argumente einzeln abbildet und dann die Bilder addiert (bzw. multipliziert). Abbildungen mit dieser Eigenschaft heißen *verknüpfungstreu*.

Jeder Rechnung von M entspricht eine Rechnung von A und umgekehrt; sie unterscheiden sich nur in der Art der Bezeichnungen. So, wie wir früher gezeigt haben, daß mit (I) auch (I_*) gilt, ist nun mit (I′) gleichzeitig (I′$_*$) erfüllt:

(I′$_*$) $f^{-1}\left(\frac{y_1}{y_2}\right)=f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)$ für alle $y_1;\ y_2\in P^+$

Vertrauter kommt uns diese Beziehung vor, wenn wir statt f^{-1} die Logarithmusfunktion direkt hinschreiben:

$\log_a\frac{y_1}{y_2}=\log_a y_1-\log_a y_2$ für alle $y_1;\ y_2\in P^+$.

Nun waren A und M viele Zusammenhänge klar geworden:

Jedem $x\in P^+$ wird durch das „Wörterbuch", das ja nichts anderes ist als ein Ausschnitt aus einer Logarithmentafel, genau eine Zahl $y\in P$ zugeordnet. Umgekehrt gehört zu jedem $y\in P$ genau eine positive reelle Zahl x. Der „Dolmetscher" $\log_a$ bildet also die Menge der positiven reellen Zahlen eineindeutig auf die Menge der reellen Zahlen ab.

Es ist nun nicht schwierig, den eingangs genannten Zusammenhang zwischen (1_M) und (1_A) zu erklären:

Aus (1_M) folgt wegen
$\log_a[(x_1\cdot x_3):(x_2\cdot x_3)]=\log_a(x_1:x_2)$
$\log_a(x_1\cdot x_3)-\log_a(x_2\cdot x_3)=\log_a x_1-\log_a x_2$
$(\log_a x_1+\log_a x_3)-(\log_a x_2+\log_a x_3)$
$=\log_a x_1-\log_a x_2$ die Beziehung
$(1_A)(y_1+y_3)-(y_2+y_3)=y_1-y_2$

Man beweise auch die angedeuteten Zusammenhänge zwischen (2_M) und (2_A) und zwischen (3_M) und (3_A)!

Man kann sich weiter überlegen, wie die Operation des Potenzierens aus der „Multiplikationssprache" in die „Additionssprache" übertragen werden muß:

Wegen $\log_a x^s=s\log_a x=s\cdot y$ gilt:

Jeder Potenz x^s mit beliebigem reellen Exponenten s der „Multiplikationssprache" wird das Produkt $s\cdot y$ (mit $y=\log_a x$) in der „Additionssprache") zugeordnet.

Die beiden Freunde hatten nun Spaß daran, ihr „Wörterbuch" auszubauen. Tragt selbst fehlende „Vokabeln" ein!

„Multiplikationssprache"	„Additionssprache"
(Elemente aus P^+)	(Elemente aus P)
$x\cdot 1=x$	$\lg x+\lg 1=\lg x$
$x\cdot x^{-1}=1$	$\lg x+(-\lg x)=0$
x_2	...
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\lg x$
x^3	...
	$7\cdot\lg x$
	x
	$n\cdot m\cdot\lg x$
$\sqrt[3]{x^2}$	...
$\sqrt[4]{x_1^7}=\frac{x_2^2}{5}$	$\frac{7}{4}\lg x_1=2\cdot\lg x_2-\lg 5$
...	$\lg x_1-\left(\frac{1}{2}\cdot\lg x_2+\lg x_3\right)$
$\sqrt{\frac{x_1\cdot x_2}{x_3^{\,k}}}$	

Die erste Zeile dieses „erweiterten Wörterbuches" macht deutlich: Das neutrale Element der Multiplikation positiver reeller Zahlen, die Zahl 1, wird dem neutralen Element der Addition reeller Zahlen, der Zahl 0, zugeordnet. Die durch die Logarithmusfunktion festgelegte Abbildung *„respektiert" die neutralen Elemente*.

Sowohl die positiven reellen Zahlen als auch die reellen Zahlen sind durch eine „Größer-Relation" geordnet. Daß diese Ordnung bei der „Übersetzung" erhalten bleibt, kann man bereits an der oben erwähnten graphischen Darstellung erkennen. Für alle positiven reellen Zahlen $x_1;\ x_2$ gilt: Aus $x_1<x_2$ folgt $\lg x_1<\lg x_2$. Die durch die Logarithmusfunktion bewirkte Abbildung ist *ordnungstreu*.

Eine weitere Eigenschaft dieser Abbildung wird ebenfalls bereits an der graphischen Darstellung deutlich, die *Umgebungstreue*. Jede Umgebung einer Zahl x wird auf eine Umgebung ihres Bildes $\lg x$ abgebildet, umgekehrt entspricht jeder Umgebung von $\lg x$ eine Umgebung von x. Dies bedeutet nichts anderes, als daß „benachbarte" Zahlen aus P^+ auf „benachbarte" Zahlen in P abgebildet werden.

So werden z. B. alle Zahlen x, die in dem Intervall $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, also in einer Umgebung von 1 mit dem Radius $\frac{1}{2}$, liegen, für die also $|1-x|<\frac{1}{2}$ gilt, auf eine Umgebung von 0 abgebildet; für alle Bilder $\lg x$ gilt $|0-\lg x|<\left|\lg\frac{1}{2}\right|$.

Man kann sagen: Die beiden Gebilde $[P^+;\cdot;<]$ und $[P;+;<]$ unterscheiden sich offenbar nur durch die Bezeichnung, sie besitzen die gleiche „Struktur", man sagt auch, sie sind zueinander isomorph.

Daß Rechnungen in einer „Sprache" ebensogut stellvertretend in der anderen ausgeführt werden können, macht man sich auch beim Arbeiten mit dem Rechenstab zunutze. Denkt darüber nach!

P. Göthner/H. Kästner

Muhammad ibn Musa al-Huwarizmi

Leseprobe aus: „Wurzel", Jena

Die Flucht des Propheten Mohammad, des Begründers des Islam, im Jahre 622 unserer Zeitrechnung aus seiner Geburtsstadt Mekka, wo er wirkte, nach Medina – Städte im heutigen Saudi-Arabien – ist der Beginn des ungewöhnlichen raschen Aufstiegs der arabischen Welt.

Umgeben von Ägyptern, Syrern, Babyloniern und Persern waren die Bewohner der arabischen Halbinsel nur in ihren Randgebieten von den auf- und niedergehenden Kulturen ihrer Nachbarn beeinflußt worden, während das Innere ihres Landes, das Wüstencharakter zeigt, niemals von diesen Vorgängen berührt worden war.

Hier lebten die Bewohner bis zu dieser Zeit – dem Jahre Eins des heutigen mohammedanischen Kalenders – in primitiven Verhältnissen. Als aber Mohammad im Jahre 632, also 10 Jahre nach seiner Flucht, starb, hatte sein Land bereits starke Machtpositionen aufgebaut. Mohammads Nachfolger – die Kalifen – setzten das von ihm begonnene Werk fort. Sie verbreiteten seine Glaubenssätze mit Feuer und Schwert. Und nicht ganz 100 Jahre genügten, um nicht nur alle Randstaaten zu unterwerfen, sondern auch längs der Küste bis nach Spanien vorzudringen und auch Spanien zum größten Teil zu erobern. Bereits 641 waren die Mohammedaner unter der grünen Fahne ihres Propheten in Ägypten eingedrungen.

Die Eroberer verwüsteten die Universitätsgebäude in Alexandria und verbrannten zum größten Teil die kostbaren Sammlungen, die hier in über 970jähriger Arbeit gesammelt worden waren. Bei diesen wie fast bei allen ihren Siegeszügen trafen die Eroberer auf Völker, die eine höhere Kultur hatten als sie selbst. Sie mußten bald erkennen, daß das Beherrschen solcher Länder und die damit verbundene Ausübung der Verwaltungsfunktionen, die Bewältigung der auftretenden Verkehrsprobleme ob zu Lande oder zu Wasser ohne die Benutzung der bereits vorhandenen Erkenntnisse nicht möglich war. Da sie über Kräfte, die das vermochten, nicht verfügten, bedienten sie sich griechischer, indischer, persischer, auch christlicher und jüdischer Gelehrter, wobei sie ihnen gegenüber, was die religiösen Auffassungen betraf, zunächst tolerant waren.

Ihr besonderes Interesse galt zunächst den mathematischen und astronomischen Erkenntnissen, weil sie nicht nur für die Lösung der ökonomischen Aufgaben notwendig waren, sondern auch zum Erfüllen ihrer religiösen Pflichten, wie sie ihre heilige Schrift, der Koran, vorschreibt. Der Koran enthält z. B. verwickelte Angaben über das Erbrecht, denen ohne mathematische Berechnungen nicht entsprochen werden konnte. Der Koran verlangt auch, daß der gläubige Moslems in seinen täglichen Gebeten sein Antlitz nach Mekka gewandt sich verneigt. Also mußte diese Richtung festgelegt werden. Um dem Rechnung zu tragen, ist in jeder Moschee eine Nische eingebaut, die diese Richtung angibt. Gleichzeitig mit dem Studium der mathematischen und astronomischen Erkenntnisse setzte eine lebhafte Übersetzungstätigkeit der entsprechenden griechischen, lateinischen und indischen Werke in das Arabische ein, das bald in den von den Arabern besetzten Ländern Verständigungsmittel wurde. Nur durch diese Übersetzungen haben wir heute von den Werken von Apollinius, Archimedes, Euklid, Ptolemäus und anderer Wissenschaftler Kenntnis, da die Originale meist verloren gegangen sind oder nur Bruchstücke noch existieren. Von Bedeutung für die Entwicklung der Wissenschaften ist auch, daß in den von Arabern eroberten Ländern bald ein Wohlstand der herrschenden Schicht eintrat und große Paläste, herrliche Moscheen, große Bibliotheken und ausgedehnte Bewässerungsanlagen gebaut wurden.

Im 8. Jahrhundert tauchten auch arabische Übersetzer und Wissenschaftler von Bedeutung auf. Der bekannteste Mathematiker ist Muhammad ibn Musa mit dem Beinamen al-Huwarizmi, dem Namen seiner Geburtsstadt, dem heutigen Chiwa in Usbekistan. Er lebte im ersten Jahrviertel des 9. Jahrhunderts in Bagdad, das sich damals zu einem bedeutenden wissenschaftlichen Zentrum entwickelte. Sein wissenschaftliches Hauptwerk ist in einer lateinischen Übersetzung, die aus dem 13. Jahrhundert stammt, erhalten geblieben und wird in der Universität Cambridge aufbewahrt.

Der Titel der Übersetzung lautet: Algorithmi de numero Indorum (Vom Algorithmus der Zahl der Inder), woraus der in der Mathematik gebräuchliche Ausdruck „Algorithmus" hergeleitet ist.

Durch dieses Werk wurde Westeuropa mit dem indischen System der Zahlenbereiche und dem dezimalen Stellenwertsystem bekannt. Es enthält auch eine eingehende Behandlung der Rechenoperationen. Die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division ganzer Zahlen werden an zahlreichen Beispielen erläutert. Auch die Behandlung von Brüchen erfolgt, ohne daß z. B. die für die Addition und Subtraktion notwendige Auffindung des Hauptnenners erfolgt.

In der Bibliothek der Universität Oxford wird eine arabische Handschrift der Algebra von Muhammad ibn Musa aufbewahrt. Sie ist eine Art Leitfaden, der die Lösung von Aufgaben aus dem täglichen Leben und des Erbrechts behandelt. Diese Algebra enthält die Lehre von der Lösung linearer und quadratischer Gleichungen. Da das Werk für breite Kreise gedacht ist, geht es nicht immer streng wissenschaftlich vor, aber sein Einfluß auf die Entwicklung dieses Gebietes ist groß, und es bewahrte ihn bis in die Mitte des 19. Jahrhunderts. Der Mangel an axiomatischer Fundierung unterscheidet das Werk wesentlich von der Euklidischen Geometrie.

Die lineare Gleichung $ax=b$ wird von Muhammad nach der Regel der zwei Fehler oder, wie sie auch genannt wird, der *Methode der Waagschale* behandelt. Es werden Versuchswerte e_1 und e_2 angenommen, die gegenüber dem gesuchten Wert die Fehler n_1 und n_2 aufweisen. Dabei sind die Zahlen e_1 und e_2 so zu wählen, daß e_1 einen zu großen, e_2 einen zu kleinen Wert für x liefert.

Es gilt also

$$ae_1=b+n_1$$
$$ae_2=b-n_2$$

oder
$$ae_1\cdot n_2=bn_2+n_1\cdot n_2$$
$$ae_2n_1=bn_1-n_1n_2$$

Aus diesem Ansatz wird durch komplizierte Umformungen das Ergebnis

$$x=\frac{b}{a}=\frac{e_1\cdot n_2+e_2\cdot n_1}{n_2+n_1}$$

hergeleitet.

Ein Beispiel zeigt die Bedeutung dieses komplizierten Weges.

Vorgelegt sei die Gleichung

$$x-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=8.$$

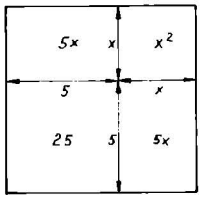
Für $e_1=24$
ergibt sich $24-8-6=10$
und damit $n_1=10-8=2.$
Für $e_2=12$
erhält man $12-4-3=5$
und damit $n_2=8-5=3.$
Also
$$x=\frac{3\cdot 24+2}{3+2}=\frac{96}{5}$$

Ziel der Rechnung ist es, das Rechnen mit Brüchen so weit wie möglich zu vermeiden.

Dem Lösen der quadratischen Gleichungen geht eine eingehende Betrachtung der hier möglichen Formen voraus.

Dabei ergeben sich folgende 4 Fälle:

1) $x^2+10x-39=0$
2) $x^2+10x+39=0$
3) $x^2-10x+16=0$
4) $x^2-10x-11=0$,



wobei die Koeffizienten so gewählt werden, daß die Lösungen positive Werte ergeben. Die Lösung der Gleichung 1 erfolgt in folgender Weise:

An das Quadrat x^2 werden zwei Rechtecke von je $5x$ in der skizzierten Weise angelegt und die erhaltene Figur zu einem Quadrat ergänzt, dessen Flächeninhalt dann $x^2+10x+25=39+25=64$ beträgt. Die Seite des so erhaltenen Quadrats ist 8, d. h. $x+5=8$, und so ergibt sich für $x=3$.

In ähnlicher Weise werden die Gleichungen 3 und 4 gelöst. Für die Gleichung 2 gibt es keine Lösung, da die Summe von Quadrat und Rechteck und einer bekannten Fläche (39) nicht Null sein kann.

Zeitgenossen von Muhammad und auch spätere arabische Mathematiker haben diesen Lösungsweg vereinfacht, insbesondere weitgehend die Fallunterscheidungen beseitigen können. Diese Behandlung der quadratischen Gleichung bildet auch die Ausgangsposition bei der Lösung der Gleichung 3. Grades, wie sie sich in dem Werk des italienischen Mathematikers Hieronimo Cardano (1501 bis 1576) findet.

Es sind auch Abhandlungen Muhammads zu geometrischen Problemen vorhanden. Sie sind aber von geringerer Bedeutung und liefern kaum Ergebnisse, die über die der Griechen hinausgehen.

O. Stamfort

Diesen Beitrag entnahmen wir der mathematischen Schülerzeitschrift „Wurzel". Sie hat sich die Aufgabe gestellt, mathematisch interessierten Schülern der Klassen 9, 10, 11, und 12 Anregungen zur außerschulischen Beschäftigung mit der Mathematik zu geben. Durch einen Preisaufgabenwettbewerb und die Veröffentlichung der Aufgaben und Lösungen von Mathematikolympiaden unterstützt sie die Vorbereitung der Schüler auf Olympiaden. Außerdem leistet sie einen Beitrag zur Vorbereitung der Schüler auf ein Mathematikstudium.

„Wurzel" wird von einem Studentenkollektiv an der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena herausgegeben und ist durch ein Abonnement beim PZV erhältlich.

(Bestell-Nr. 1633, Preis 0,20 M, erscheint monatlich)

Napoleon I. Bonaparte

Napoleon I. Bonaparte (1769 bis 1821) war 1951 und 1969 (zum 200. Geburtstag, Bild 1) auf französischen Briefmarken zu sehen. Was aber hat er mit Mathematik zu tun? Das Namenregister des Buches *Biographien bedeutender Mathematiker* (Verlag Volk und Wissen) weist die 15malige Erwähnung Napoleons aus. Das ist nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, daß die politischen Ereignisse

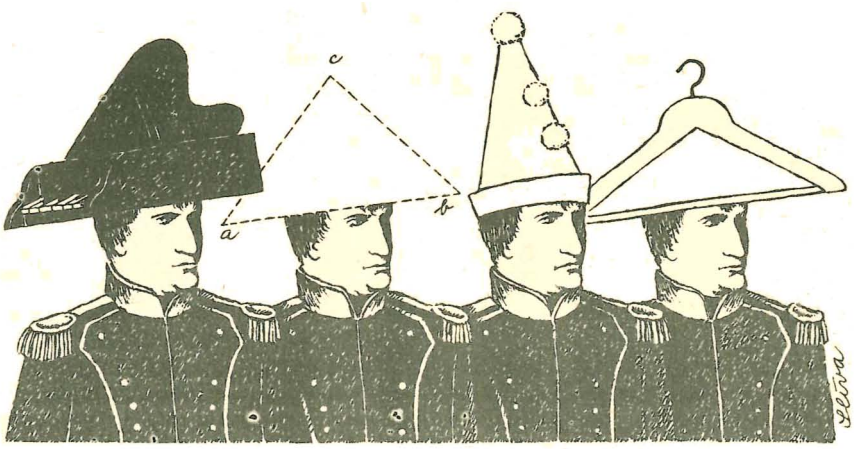
um Napoleon mehr oder weniger entscheidend die Lebensumstände aller Mathematiker der damaligen Zeit bestimmten. Liest man die Stellen nach, so erfährt man manches über engere Beziehungen Napoleons zur Mathematik, insbesondere über seine persönliche Freundschaft mit dem Mathematiker Gaspard Monge (1746 bis 1818), der als Begründer der *Darstellenden Geometrie* gilt. Monge war erster Direktor der 1794 in Paris gegründeten *École Polytechnique*, die von Napoleon sehr gefördert und zur Wirkungsstätte der bedeutendsten französischen Mathematiker des 19. Jh. wurde. 1798/99 beteiligten sich Monge und andere Wissenschaftler am Feldzug Napoleons nach Ägypten, der wegen seiner reichhaltigen wissenschaftlichen Ausbeute als „Ägyptische Expedition" in die Geschichte einging (Bild 2).

Während dieses Feldzuges fanden französische Soldaten bei Schanzarbeiten den „Stein von Rosetta", der zum Schlüssel für die Entzifferung der altägyptischen Schrift und damit auch zum Ursprung unserer heutigen Kenntnisse über die altägyptische Mathematik wurde. Die Aufnahme von Napoleon-Marken in eine mathematische Briefmarkensammlung ist aber auch schon dadurch gerechtfertigt, daß der in Heft 4/1980 als Aufgabe ▲1994▲ abgedruckte geometrische Satz von Napoleon gefunden wurde und nach ihm benannt ist.

Napoleon, der als Artillerieoffizier natürlich über eine mathematische Bildung verfügte, blieb zeitlebens ein Freund der Geometrie und ein Hobby-Mathematiker.

P. Schreiber

BONAPART(I)E von Jiří Sliva (aus Magazin, Berlin)



Die großen Leistungen der kleinen Biene

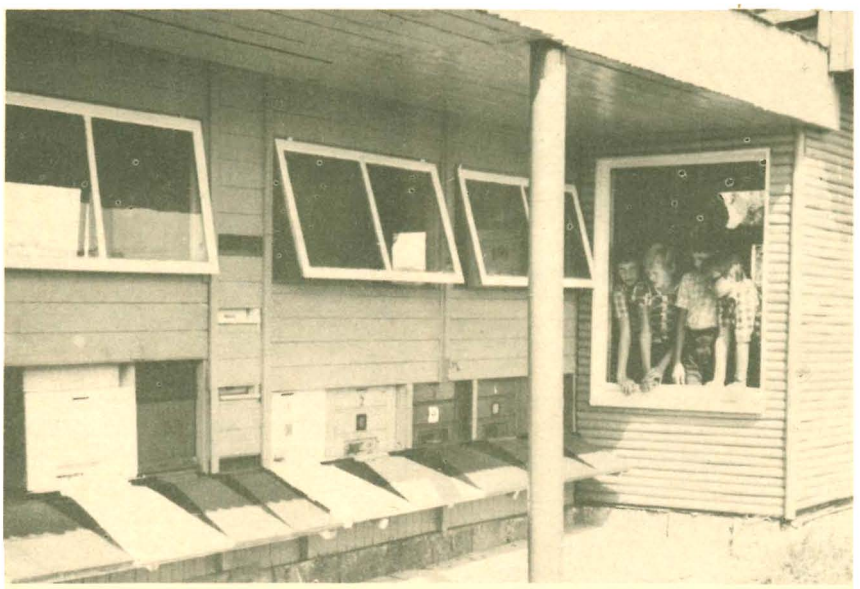
In unserer Republik bestehen an über 100 polytechnischen Oberschulen Arbeitsgemeinschaften *Junge Imker*. Eine dieser Arbeitsgemeinschaften wollen wir euch heute vorstellen.

Es ist die Arbeitsgemeinschaft *Junge Imker* an der Oberschule *Grete Walter* in Georgenthal (siehe Fotos).

Schon seit 1973 besteht diese Arbeitsgemeinschaft und zählt elf Mitglieder aus Klassen 5 bis 10. Ihr Lehrbienenstand besteht aus neun Völkern und steht im Schulgarten mitten zwischen Beerensträuchern, Obstbäumen und verschiedenen Weiden, die im zeitigen Frühjahr den Bienen die erste Nahrung geben. Ihre Bienenbeuten stehen in einem Haus oder in Einzelstellung, meist am Rande des Schulgartens.

Die *Jungen Imker* stellen die Rähmchen für die Waben her, verrichten notwendige Pflegearbeiten, damit die Völker stark werden und gesund bleiben. Sie schleudern den Honig aus den Waben und füttern im August und September ihre Bienen mit einer starken Zuckerwasserlösung für die kalten Wintermonate. Außerdem müssen in jedem Jahr viele pollen- und nektarspendende Blumen gesät und gepflanzt werden. Dazu gehört besonders auch das Schneiden, Stecken und Verpflanzen von Weiden; denn der Pollen ist ein sehr eiweißhaltiges Bienenfutter, und der Nektar der Blüten wird von den Bienen unter Zusatz von Fermenten zu dem wohlschmeckenden Honig verarbeitet.

Daß zu diesen praktischen Tätigkeiten auch noch eine Menge Theorie gehört, könnt ihr euch sicher vorstellen. Einige Hinweise über die Bienen mögen euer Interesse und Verständnis für diese sinnvolle Freizeitbeschäftigung wecken. Diese folgenden Angaben sind numeriert, weil sie dann in den anschließenden Aufgaben mit verwendet werden. Das geschieht dort durch in Klammer gesetzte Zahlen, die mit den Nummern in den Hinweisen übereinstimmen.



Wußtest du schon?

1. 1 kg Honig entsteht aus etwa 3 kg Nektar.
2. 1 Bienenvolk verzehrt im Jahr etwa 45 kg Honig selbst.
3. Für die Abgabe von 1 kg Honig bekommt der Imker von den staatlichen Aufkaufstellen 8,00 M vergütet.
4. Eine Blüte enthält etwa 0,0005 g Nektar.
5. Die Honigblase der Arbeitsbiene kann 50 bis 60 mm^3 Nektar aufnehmen; dies entspricht etwa 0,05 g.
6. Eine Biene bringt bei einem Flug den Pollen von 100 Blüten ein, der etwa 0,02 g wiegt. An einem Tag fliegt eine Biene etwa 12mal aus.
7. Ein Bienenvolk trägt in einem Sommer im Durchschnitt 190 kg Nektar, rd. 35 kg Pollen und 25 l Wasser ein.
8. Die Tagesstrecke einer Arbeitsbiene (Sammlerin) kann bis zu 100 km betragen.
9. Eine Honigbiene fliegt etwa 22 bis 23 $\frac{m}{s}$.
10. Die Honigbienen müssen 30000 „Flugstunden" absolvieren, um 1 kg Honig zu produzieren.
11. Die AG *Junge Imker* der OS *Grete Walter* Georgenthal betreut zur Zeit 9 Bienenvölker.
12. Ein Bienenvolk setzt sich im Sommer aus folgender Anzahl von Einzelwesen zusammen:
1 Königin (Weisel), 200 bis 2000 Drohnen, etwa 50000 Arbeiterinnen, 10000 Larven.
13. Zur Zeit gibt es in der DDR 34400 Imker im VKSK.
14. Zur Zeit gibt es in der DDR ca. 460000 Bienenvölker.
15. Die Masse einer Arbeitsbiene beträgt ca. 0,08 g.

Aufgaben

▲1.1▲ Wieviel kg Honig erzeugt ein Volk in einem Jahr? (7; 1)

▲1.2▲ Wieviel kg Honig bleiben, nach Abzug des Eigenverbrauchs durch das Volk, etwa für den Imker übrig? (2)

▲1.3▲ Ermittle die prozentualen Anteile für den Eigenverbrauch des Volkes und des geschleuderten Honigs für den Imker!

▲2▲ Wieviel Blüten müssen besucht werden, um 1 kg Honig zu erzeugen? (4; 1)

▲3▲ In der DDR halten die Imker etwa 460000 Völker.

▲3.1▲ Wieviel t Honig können damit im Durchschnitt produziert werden? (Verwende das Ergebnis der Aufgabe 1.2!)

▲3.2▲ In der DDR wird bei normalem Witterungsverlauf mit einem durchschnittlichen Honigertrag von 10 kg pro Volk und Jahr gerechnet.
Welches Produktionsergebnis in t ergibt das für unser Land?

▲4.1▲ Welche Last in kg muß ein Volk in einem Sommer im Durchschnitt bewältigen? (7)

▲4.2▲ Im Bezirk Erfurt bestehen 12 Arbeitsgemeinschaften *Junge Imker* mit 98 Mitgliedern, die 41 Bienenvölker betreuen. Berechne die Lasten, die diese Völker in einem Sommer bewältigen müssen! (7)

▲5▲ Zum Frühstück ein frisches Brötchen mit Butter und Bienenhonig – das ist schon ein Leckerbissen. Im Durchschnitt werden pro Kopf der Bevölkerung in der DDR jährlich 320 g Bienenhonig verbraucht.

▲5.1▲ Welcher Bedarf entsteht bei 16700000 Einwohnern unseres Landes dadurch in t?

▲5.2▲ Vergleiche deine Lösung mit der tatsächlichen Produktionsmenge der Imker der DDR, die sie in jedem Jahr erzielen (s. Ergebnis von Aufg. ▲3.2▲). Wieviel t Bienenhonig müssen zur restlosen Deckung des Bevölkerungsbedarfs importiert werden?

▲6▲ Mit den Angaben aus dem Hinweis (14) sowie aus Aufgabe ▲5▲ kannst du errechnen, welche Anzahl von DDR-Bürgern von einem Bienenvolk mit Honig versorgt werden können.

▲7▲ Die AG *Junge Imker* der OS *Grete Walter* Georgenthal konnte 1977 die Zahl ihrer Völker auf 9 erweitern. Die Mitglieder schleuderten 86 kg Bienenhonig. 70 kg verkauften sie davon an den staatlichen Handel.
Welche Einnahme erzielte die AG vom Honigverkauf, um die Einrichtung ihres Schullehrbienenstandes zu verbessern? (3)

▲8▲ Die Sparte Imker aus Königs Wusterhausen in der Nähe von Berlin war der Initiator im sozialistischen Wettbewerb des Verbandes der Kleingärtner, Siedler und Kleintierzüchter und rief zu einem hohen Honigverkauf an den Staat auf. Sie verkauften im Durchschnitt folgende Mengen an den staatlichen Handel:
Wanderimker 17 kg je Volk,
Standimker 6 kg je Volk.

▲8.1▲ Etwa 26% aller Imker der DDR beteiligten sich an der Wanderung. Wieviel Imker wandern mit ihren Bienen? (13)

▲8.2▲ Berechne den Anteil der Wandervölker, 1980 waren es 250000, zur Gesamtzahl der Völker in Prozent! (14)

▲8.3▲ Welche Menge Bienenhonig in t hätte für den Bedarf der DDR-Bevölkerung zur Verfügung gestanden, wenn alle Imker der DDR gleiche Verkaufsergebnisse erzielt hätten wie die Imker aus Königs Wusterhausen?

▲9▲ Im Bezirk Erfurt werden mit modernsten Methoden im Kooperationsverband Thüringen-Obst auf insgesamt 8000 ha Süßkirschen, Äpfel, Pflaumen und Birnen produziert. Da 4 Völker auf einem Hektar Obstanlage reichlich zu tun haben, werden einige tausend Bienenvölker benötigt. In der Nähe sind aber nur 1650 Völker vorhanden. Deshalb müssen Wanderimker für den planmäßigen, vertraglichen Bestäubungseinsatz gewonnen werden, ihre Bienen in die Intensivobstanlagen zu stellen. Der Bieneneinsatz wird für die Bestäubung von Stein- und Kernobstsorten mit 40,00 M je Bienenvolk vergütet. Für die Transportkosten hat der Kooperationsverband 18500,00 M eingeplant.

▲9.1▲ Wieviel Bienenvölker müssen für den Bestäubungseinsatz noch zusätzlich eingesetzt werden?

▲9.2▲ Welchen Betrag muß der Kooperationsverband für diese Völker als Bestäubungsgebühren und für den Transport einplanen?

▲10▲ Eine Bienenkönigin legt im Jahr etwa 150000 Eier. In der Hauptbrutzeit sind dies etwa 2000 Eier täglich. Eine Bienenkönigin kann zwar 5 Jahre alt werden, allerdings sinkt ihre Legeleistung im dritten Jahr sehr ab, so daß der erfahrene Imker sie planmäßig nach zwei Jahren durch eine junge ersetzt. Rechnen wir nur 1500 Eier pro Tag, so entspricht diese Legeleistung der Masse des Körpers der Bienenkönigin.

▲10.1▲ Das Wievielfache der eigenen Körpermasse legt die Bienenkönigin in der Brutzeit eines Jahres an Eiern?

▲10.2▲ Wir wollen die Legeleistung einer Bienenkönigin mit der eines Huhns vergleichen. Ein Huhn wiege 1,5 kg und lege in einem Jahr 200 Eier. Ein Ei soll 60 g wiegen.

▲10.3▲ Eine Bienenkönigin kann an einem Tag soviel Eier legen, wie dies seiner Körpermasse entspricht.
Wieviel Eier müßte ein Huhn an einem Tag legen, um ein gleiches Ergebnis zu erzielen?

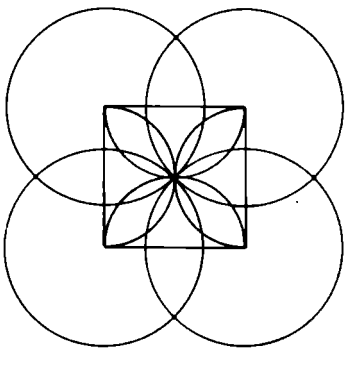
▲11▲ In Mitteleuropa sind 80% aller Blütenpflanzen auf Insektenbestäubung angewiesen. Auszählungen von Insekten auf Obstgehölzen brachten folgende Ergebnisse:
5,5% Wildbienen und Hummeln,
6,5% andere Insekten.
Der Rest, die übergroße Mehrheit der Bestäubungsleistung, wird von den Bienen erbracht.
Fertige davon ein Kreisdiagramm an, und gib an, wieviel Prozent der Auszählung auf die Bienen entfielen! Welcher Winkel ist das?

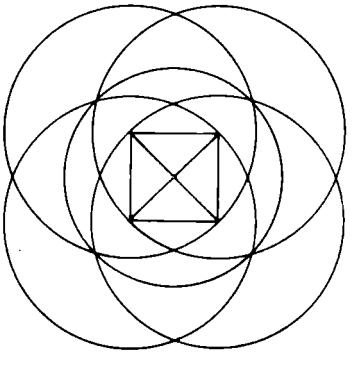
▲12▲ Berechne aus dem arithmetischen Mittel der Angaben (9) die Fluggeschwindigkeit einer Honigbiene in $\frac{km}{h}$, die sie natürlich nur für kurze Zeit entwickeln kann!

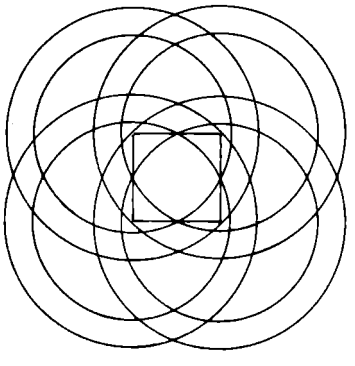
▲13▲ Eine Arbeitsbiene hat eine Körperlänge von 12 mm. Welche Strecke ergibt sich, wenn wir 50000 Arbeitsbienen aneinanderreihen würden?

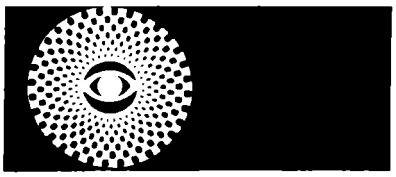
▲14▲ Ein Wanderwagen mit 32 Bienenvölkern steht in einem großen Rapsschlag. Angenommen von den 50000 Arbeitsbienen je Volk sind 20% Sammlerinnen, und diese entnehmen bei einem Flug rd. 55 mg Nektar. Wieviel kg Nektar sind das bei täglich 12 Ausflügen in 15 Tagen?

Mit Zirkel und Zeichendreieck – Kreis und Quadrat









ARBEITS-
GEMEINSCHAFTEN
IM BLICKPUNKT

II. ABC-Olympiade Stadtbezirk Leipzig-Süd

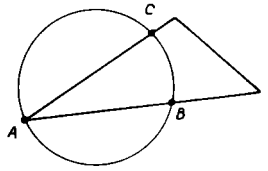
Aufgaben der Olympiadeklasse 3

▲1▲ In der untenstehenden Aufgabe sind die Zeichen „x" so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtige gelöste Additionsaufgabe mit der Summe 1981 entsteht. Dabei dürfen wieder nur die Grundziffern 1, 8 und 9 verwendet werden.

$$\begin{array}{r} xxx \\ +xxx \\ +xxx \\ \hline 1981 \end{array}$$

Gib ein mögliches Beispiel dafür an!
Schreibe danach die Aufgabe so, daß als erster Summand die kleinstmögliche Zahl und als dritter Summand die größtmögliche Zahl steht!

▲2▲ In der untenstehenden Figur haben das Dreieck und der Kreis die drei Punkte *A*, *B* und *C* gemeinsam. Überprüfe, ob es möglich ist, daß ein Dreieck und ein Kreis keinen, 1, 2, 4, 5, 6, 7 Punkte gemeinsam haben!



Fertige für jeden möglichen Fall mit Zirkel und Lineal eine Zeichnung an.

▲3▲ An einer Arbeitsgemeinschaft *Junger Mathematiker* einer Schule nehmen insgesamt 40 Schüler der 5., 6. und 7. Klasse teil. Der fünfte Teil der Anzahl sind Schüler der 5. Klasse. Aus der 6. Klasse nehmen acht Schüler mehr als aus der 7. Klasse teil.
Wieviel Schüler aus jeder dieser drei Klassen nehmen an der Arbeitsgemeinschaft teil?

Aufgaben der Olympiadeklasse 4

▲1▲ In der untenstehenden Aufgabe sind die Zeichen „x" so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe mit der Summe 1981 entsteht. Dabei dürfen wiederum nur die Grundziffern 1, 8 und 9 verwendet werden.

Gib ein mögliches Beispiel dafür an!
Schreibe danach die Aufgabe so, daß als erster Summand die kleinste Zahl und als vierter Summand die größte Zahl steht!

$$\begin{array}{r} xx \\ +\ xx \\ +xxx \\ +xxx \\ \hline 1981 \end{array}$$

▲2▲ Ein Holzwürfel mit der Kantenlänge 30 cm, dessen Oberfläche schwarz gefärbt ist, soll so zersägt werden, daß man kleinere Würfel mit einer Kantenlänge von je 10 cm erhält. Wieviel Würfel mit 10 cm Kantenlänge erhält man?
Wieviel dieser kleineren Würfel haben keine, eine, zwei, drei, vier schwarze Seitenflächen?

▲3▲ Zwei Bagger beladen in 15 Minuten vier Hänger mit Erde. Ein Arbeiter könnte an einem achtstündigen Arbeitstag zwei solcher Hänger mit Erde beladen.
Vergleiche die Leistungen eines Baggers und eines Arbeiters für einen achtstündigen Arbeitstag!
Wieviel Arbeiter können durch einen einzigen Bagger ersetzt werden?

M. Rehn

Durchführung des Wettbewerbs:
18. März 1981
Reine Arbeitszeit: 90 Minuten
Teilnehmer:
Klassenstufe 3 10 Mädchen, 12 Jungen
Klassenstufe 4 16 Mädchen, 20 Jungen
Veranstalter: Rat des Stadtbezirkes Leipzig-Süd, Abt. Volksbildung, Olympiadekomitee Mathematik

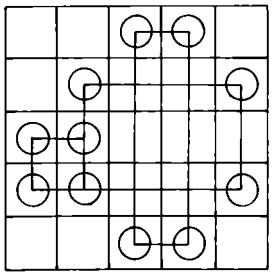
Mathematisches Spiel

Das Spiel, mit dem wir uns beschäftigen wollen, ist ein einfaches Brettspiel, bei dem jedoch (wie bei fast allen mathematischen Spielen) etwas Spielerfahrung große Vorteile bringt.
Als Spielfeld benötigen wir ein quadratisches Brett mit 5 mal 5 Feldern. Dieses Feld kann man sich beispielsweise leicht aus einem Schachbrett durch Abdecken der restlichen Felder herstellen. Jeder der zwei Spieler benötigt 13 Steine einer Farbe. Ein Zug besteht darin, einen der eigenen Steine auf ein freies Feld zu setzen, einmal gesetzte Steine dürfen nicht mehr bewegt werden. Die Spieler ziehen abwechselnd; Aussetzen ist nicht erlaubt. Derjenige Spieler, der zuerst einen Stein so setzt, daß vier Steine seiner Farbe die Eckpunkte eines Rechtecks (mit Kanten parallel zu den Brettseiten) bilden, hat verloren. In Bild 1 sind einige solcher Rechtecke eingezeichnet. Bild 2 zeigt eine Endspielsituation. Falls Schwarz am Zuge ist, kann er seinen Stein auf *A2*, *B3* oder *A4* setzen, ohne ein Rechteck zu erhalten; ist Weiß am Zuge, so führt jeder mögliche Zug zum sofortigen Verlust für Weiß.

Bemerkenswert bei diesem Spiel ist, daß es kein Unentschieden gibt, daß also stets einer der Spieler gewinnt. Dazu überlegen wir uns, daß kein Spieler mehr als 12 Steine setzen kann, ohne dabei ein Rechteck zu erhalten. In Bild 3 sind zwei Möglichkeiten mit je 12 Steinen angegeben. Wir wollen jetzt möglichst viele Steine einer Farbe auf das Spielfeld setzen, ohne ein Rechteck zu erhalten. (Wir betrachten das Spiel als Einpersonenspiel, und unser Ziel ist es, möglichst viele Züge zu machen.) Wenn wir in eine Zeile fünf Steine legen, können wir in jede der restlichen Zeilen nur noch je einen Stein setzen, also insgesamt neun Steine.
Wollen wir in eine Zeile vier Steine legen, dann können wir in jede der anderen Zeilen

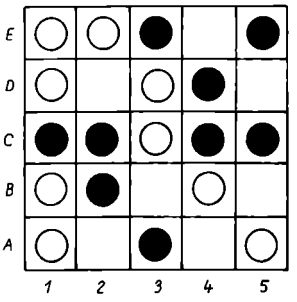
Rechtecke im Sinne des Spiels

Bild 1



Gewinnstellung für Schwarz

Bild 2



12 Steine einer Farbe auf dem Spielfeld

Bild 3 a)

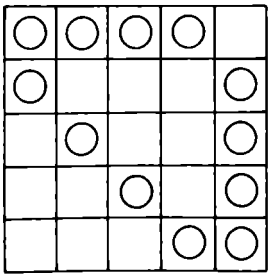
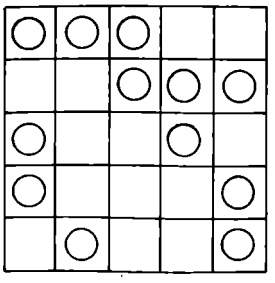


Bild 3 b)



noch höchstens zwei Steine legen, ohne ein Rechteck zu erhalten (Bild 3a), insgesamt setzen wir dann höchstens 12 Steine.
Liegen nun in keiner Zeile vier oder fünf Steine, und wir wollen mindestens 13 Steine setzen, so müssen wir mindestens drei Zeilen mit je drei Steinen belegen. Ihr bemerkt sicher recht schnell, daß man dabei stets ein Rechteck erhält.
Da nun jeder Spieler höchstens 12 Steine setzen kann, ohne zu verlieren, muß der Spieler, der den letzten (25.) Zug macht, bestimmt verlieren. Allerdings wird das nicht sehr oft eintreten, da die meisten Partien viel eher beendet sind. Allgemeiner kann man das Spiel auch auf einem $n \times n$-Brett spielen, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist. Wie man sich denken kann, ist auch für $n > 5$ kein Unentschieden möglich. Ist n jedoch eine gerade Zahl, so kann der Spieler, der als zweiter zieht, stets das Spiel gewinnen. Er muß nur symmetrisch zum Feldmittelpunkt spielen, also seinen Stein auf dasjenige Feld legen, das dem zuletzt gesetzten gegnerischen Stein gegenüberliegt. Da ein Unentschieden unmöglich ist, muß der erste Spieler automatisch als erster ein Rechteck erhalten.

Zum Abschluß noch einige Aufgaben zu diesem Spiel:

▲1▲ Ist es möglich, daß das Spiel auf dem 5×5-Brett erst mit dem 25. Zug beendet ist? Wenn ja, gebe man ein Beispiel an.

▲2▲ Beweist: Spielt man allein auf einem $n \times n$-Brett, so kann man für $n = 6, 7, 8$ maximal 16, 21 bzw. 24 Züge machen!

▲3▲ Wie viele Rechtecke im Sinne des Spiels gibt es, wenn alle Felder des 5×5-Bretts mit Steinen einer Farbe belegt sind?

R. Lehmann/U. Quasthoff

Die größte Primzahl

Die größte bislang bekannte Primzahl hat 13495 Stellen. Sie lautet „Zwei hoch 44497 minus eins" und wurde von zwei Computertechnikern am *Lawrence Livermoore Laboratory* in Kalifornien mit Hilfe einer Rechenmaschine vom Typ Cray-1 in rund 20 Minuten berechnet.
Primzahlen sind nur durch sich selbst teilbar. Ob es sich um eine Primzahl handelt, läßt sich herausfinden, indem eine Zahl durch alle kleineren Zahlen geteilt wird. Systematisch größte Primzahlen zu finden, ist außerordentlich zeitaufwendig. Im Jahre 1644 veröffentlichte der französische Mönch *Marin Mersenne* ein Verfahren, um wenigstens einige größere Primzahlen schneller berechnen zu können. Nach ihm wurden die Mersenne-Zahlen benannt, von denen 100 Jahre später acht als prim bestätigt worden waren. Mersenne war noch der Meinung, daß ein ganzes Leben nicht ausreiche, um zu prüfen, ob eine 15- bis 20stellige Zahl eine Primzahl sei.

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir wollen auch heute wieder Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vorstellen, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am *alpha*-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

In Heft 5/1980 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 5 ■1998 Klaus und Peter gehen einkaufen. Klaus kauft 5 Bleistifte und 3 Hefte, Peter 2 Bleistifte und 10 Hefte. Wieviel Mark muß jeder von ihnen bezahlen, wenn 2 Bleistifte genausoviel kosten wie 4 Hefte und wenn Peter 11 Pfennige mehr bezahlen mußte als Klaus?

In Heft 1/1981 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:
Wenn 2 Bleistifte genausoviel kosten wie 4 Hefte, so kostet 1 Bleistift soviel wie 2 Hefte. 5 Bleistifte kosten demnach soviel wie 10 Hefte. Klaus hätte also denselben Preis bezahlt, wenn er 13 Hefte gekauft hätte, Peter denselben Preis, wenn er 14 Hefte gekauft hätte. Deshalb kostet 1 Heft 11 Pfennige. Somit kostet 1 Bleistift 22 Pfennige. Klaus hatte
$(5 \cdot 22 + 3 \cdot 11)$ Pf $= 143$ Pf $= 1{,}43$ M
und Peter hatte
$(2 \cdot 22 + 10 \cdot 11)$ Pf $= 154$ Pf $= 1{,}54$ M
zu bezahlen.

Wir stellen nun die Lösung von *Dirk Standke* aus Fischbeck vor, der Schüler der Klasse 5b der Hans-Beimler-Oberschule in Schönhausen ist.
Dirk löste diese Aufgabe wie folgt:
Der Preis von 1 Bleistift entspricht dem Preis von 2 Heften. Es sei x der Preis (in Pfennigen) für 1 Heft, also $2x$ der Preis für 1 Bleistift; dann gilt
$10x + 3x = y$ und $4x + 10x = z$ und $z = y + 11$.
Daraus folgt weiter $13x = y$ und $14x = y + 11$, also $x = 11$.
Klaus mußte 1,43 M und Peter 1,54 M bezahlen.

Wir stellen nun die Lösung von *Annerose Schmidt* aus Bleicherode vor, die Schülerin der Klasse 5 der Friedrich-Schiller-Oberschule ist.
Annerose löste diese Aufgabe wie folgt:
Es sei a der Preis für ein Heft (in Pfennigen), also $2a$ der Preis für einen Bleistift. Dann gilt

$$5 \cdot 2a + 3a = 2 \cdot 2a + 10a - 11,$$
$$10a + 3a = 4a + 10a - 11,$$
$$13a = 14a - 11,$$
$$a = 11.$$

Klaus hatte 1,43 M, Peter 1,54 M zu bezahlen.

Wir stellen nun die Lösung von *Kristin Straubel* aus Schorssow vor, die Schülerin der Klasse 5 ist.
Kristin löste diese Aufgabe wie folgt:
Ein Bleistift kostet soviel wie 2 Hefte. Da Peter 11 Pf mehr bezahlte als Klaus und da 11 eine Primzahl ist, muß einer der beiden Artikel 11 Pf das Stück kosten. Der Preis für einen Bleistift stellt aber eine gerade natürliche Zahl dar. Deshalb kostet ein Heft 11 Pf, ein Bleistift 22 Pf. Klaus hatte den Betrag von 1,43 M, Peter von 1,54 M zu bezahlen.

Wir stellen nun die Lösung von *Katrin Schulz* aus Böhne vor, die Schülerin der Klasse 5b der POS Milow ist.
Katrin löste diese Aufgabe wie folgt:
Da 1 Bleistift soviel wie 2 Hefte kostet, muß der Preis für einen Bleistift (in Pfennigen) eine gerade natürliche Zahl sein. Ich stelle eine Tabelle auf.

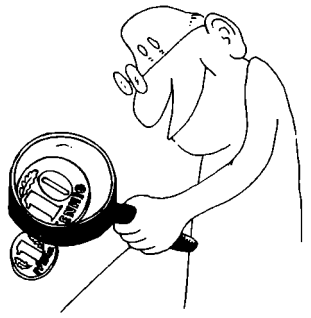
Preis (in Pf) für

1 Bleistift	1 Heft	Klaus	Peter	Differenz
10	5	50 + 15 = 65	20 + 50 = 70	5
12	6	60 + 18 = 78	24 + 60 = 84	6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
22	11	110 + 33 = 143	44 + 110 = 154	11

Nur für die letzte Zeile der Tabelle beträgt die Differenz 11. Klaus mußte 1,43 M und Peter 1,54 M bezahlen.

„Ich will ja nicht drängen, aber in 10 Minuten beginnt das Länderspiel..." *E. Gliege*

In freien Stunden · alpha-heiter



aus: NBI

Guter Rat

Als ein Mathematiklehrer von einem schwachen Schüler gefragt wurde, was er tun solle, damit er nicht sitzenbleiben müsse, antwortete dieser: Das ist nicht schwer zu beantworten.

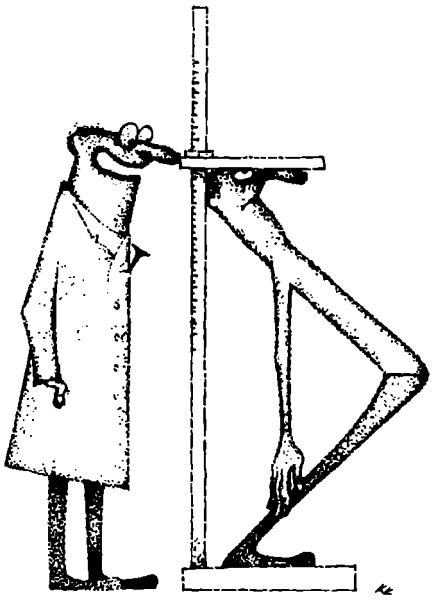
Schreibe das Wort KLASSENZIMMER und ordne den Buchstaben die Ziffern 0 1 2 3 3 4 5 6 7 8 8 4 9 wie angegeben zu!

Nun rechne so:

1. Suche dir drei beliebige Ziffern daraus aus und schreibe damit die größtmöglichste Zahl!
2. Vertausche die vordere und die hintere Ziffer und subtrahiere diese zweite Zahl von der ersten!
3. Vom Ergebnis vertausche wieder die erste und letzte Ziffer und addiere jetzt diese Zahl zum Endergebnis dazu!
4. Zum Schluß addiere noch die Weisheitszahl 13865!

Das Endergebnis kannst du nun am Wort *Klassenzimmer* entziffern. Damit hast du eine Antwort auf deine Frage!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

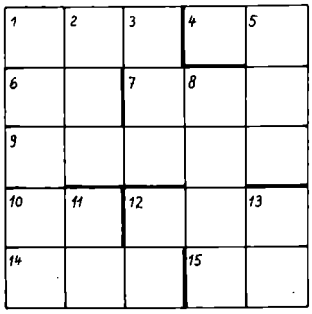


Kurt Hoppe, Berlin

„Hab ich doch gleich gesagt: einssechzig."

Kreuzzahlrätsel

waagerecht: 1. die dritte Stelle dieser Zahl ist das Produkt aus der ersten und zweiten Stelle; 4. die Zahl ist gleich der Quersumme von w9.; 6. eine Primzahl; 7. das Doppelte von s2.; 9. von vorwärts und rückwärts gelesen die gleiche Zahl; 10. das Dreifache von s11.; 12. die Quersumme dieser Zahl ist gleich der Quadratwurzel aus w4.; 14. von vorwärts und rückwärts gelesen die gleiche Zahl; 15. das Dreifache der Quadratwurzel aus s3.

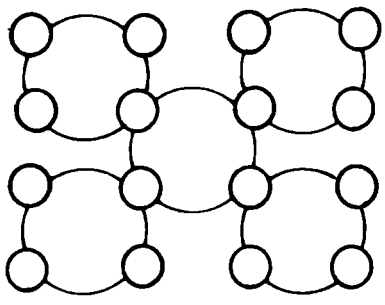


senkrecht: 1. das Quadrat von s2.; 2. eine Kubikzahl; 3. eine Quadratzahl; 5. die Quersumme dieser Zahl ist gleich der Quersumme von s.3.; 8. die Summe aus der ersten und zweiten Stelle ist gleich der Summe aus der dritten und vierten Stelle; 11. eine Primzahl; 12. ist gleich der Quadratwurzel aus w14.; 13. die Zahl ist das Dreifache ihrer Quersumme

Ing. H. Decker, Köln

Magische Kreise

In die Kreisfelder sind die Zahlen 1 bis 16 so einzusetzen, daß sich für jeden Kreis jeweils die Summe 34 ergibt.



Geburtsjahr gesucht

Ermittle die Geburtsjahre der folgenden fünf Mathematiker!

Fachlehrer D. Knape, Jessen

```
  BURG
  BUHR
  BUSE
  BUDE
+BUHL
------
 9679
```

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern.

Silbenrätsel

Aus den folgenden Silben sind 9 Begriffe zu bilden. Die jeweils dritten Buchstaben der gefundenen Wörter von oben nach unten gelesen ergeben ein besonderes mathematisches Ereignis.

a – a – bel – di – di – falsch – hy – ko – les – me – na – o – on – or – pe – per – ra – ra – ren – sym – symp – te – ten – tha – ti – to – trie – xiom – zie.

1. Zahlenpaar in der graphischen Darstellung
2. ein Wahrheitswert
3. Gerade, die sich einer Kurve beliebig nähert, ohne sie je zu erreichen
4. bei der Spiegelung entstehende geometrische Verwandtschaft
5. ein Kegelschnitt
6. einleuchtendes, nicht beweisbares Grundgesetz
7. griechischer Mathematiker, nach dem ein bekannter Satz über rechte Winkel benannt ist
8. eine Rechenoperation
9. die Verknüpfung mathematischer Größen

Ing. D. Völzke, Greifswald

Aus dem Alltag

● Shozo Hamada, 29jähriger Lehrer aus Saitama (Japan), stellte einen neuen Weltrekord im Seilspringen auf. Er hopste in sechseinhalb Stunden 56236mal. 15 Minuten länger als sein Vorgänger.

● Sie kocht. Er denkt.
Er irrt, wenn er denkt, daß sie kocht.
Er kocht, als er merkt, daß sie denkt.
Sie kocht, da er kocht, weil sie denkt.
Nun kochen beide.

● Am Wochenende wurde unsere Bank renoviert,
Dabei ist Ihr Konto gleich mit gestrichen worden.
Die Sparkasse

● Ein Tourist nimmt sich in Berlin ein Taxi. Nach einer gewagten Fahrt fragt er: „Fahren Sie immer so unvorsichtig? Sie hätten jetzt beinahe den dritten Fußgänger angefahren!"
„Sind Sie eigentlich als Tourist hier oder als Statistiker?" fragt der Taxifahrer ungehalten zurück.

● „Guten Tag! Ich hätte gern einen Film!" „24 mal 36?"
„864. Aber warum fragen Sie?"

● Der Arzt zum Patienten: „Wieviel Stunden schlafen Sie am Tage?" „So ungefähr zwei Stunden." „Das ist aber sehr wenig." „Für mich ist es ausreichend", erwidert der Patient. „Ich schlafe ja in der Nacht zehn Stunden."

● Ein Gast, der bereits längere Zeit in der Wohnung seines Gastgebers saß, erkundigte sich bei diesem nach der Uhrzeit.
Der antwortete ihm: „Es ist 23 Uhr, 22 Minuten und 8 Sekunden."

● „Herr Doktor, Sie möchten bitte zu meiner Schwester kommen, sie hat Fieber!" „Wie hoch ist es denn?" „Zwei Treppen!"

● Eine Frau kommt in ein Fischwarengeschäft.
Es ergibt sich der folgende Dialog:
Frau: „Morgen!"
Verkäuferin: „Morgen!"
Frau: „Karpfen?"
Verkäuferin: „Morgen!"
Frau: „Morgen?"
Verkäuferin: „Morgen!"
Frau: „Morgen!"
Verkäuferin: „Morgen!"

Kryptarithmetik

```
A : B = C
:   :   +
D +B = E
A—D = F
```

Elke Schwatz, 4. OS Schmalkalden, Kl. 5

```
 MATHE
   IST
+ MEIN
-------
 LEBEN
```

Jarmila Pěnčiková, Schülerin, Prag

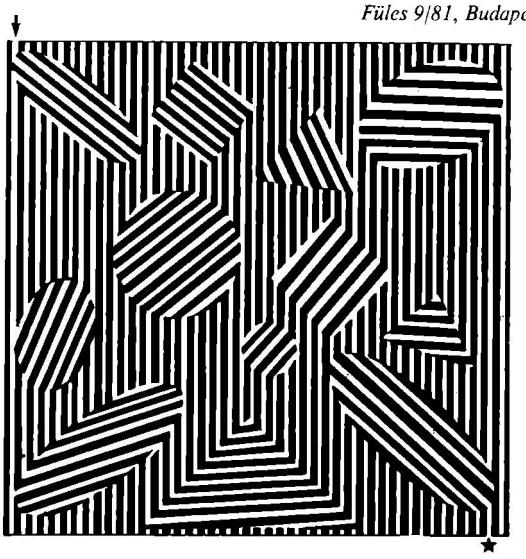
```
xxxxxx : xx = x1x1
xx1
---
11x
 xx
---
xxx
1xx
---
 xx
 xx
---
 _
```

Es tritt keine weitere Ziffer 1 auf!

Lehrerin Regina Bricks, 2. OS Saalfeld

Irrgarten

Füles 9/81, Budapest



XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade)

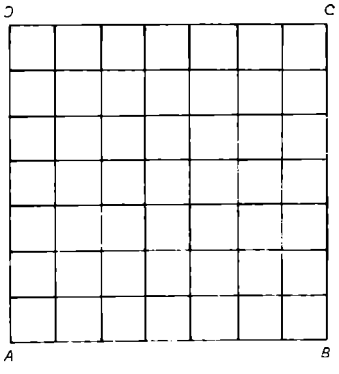
Abgabetermin beim Mathematiklehrer: Ende September 1981

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen und Punktbewertungstabellen werden ab Oktober 1981 veröffentlicht.

Anmerkung: $\sphericalangle ABC$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels ABC. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

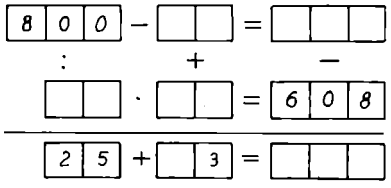
Olympiadeklasse 5

210511 Ein Quadrat $ABCD$ mit 14 cm Seitenlänge ist in 7 mal 7 gleichgroße Teilquadrate zerlegt. Aus einigen dieser Teilquadrate ist ein Streifenzug so zusammengestellt, wie das Bild zeigt. Der Streifenzug ist grau hervorgehoben.
Berechne den Umfang und den Flächeninhalt dieses Streifenzuges!



210512 Die Pioniergruppen der Klassen 5a, 5b und 5c einer Schule fertigten für einen Solidaritätsbasar Buchhüllen an. Dabei fertigte die Klasse 5a genau 6 Hüllen mehr als die Klasse 5b an, und die Klasse 5c schaffte das Doppelte von dem, was die Klasse 5b anfertigte. Insgesamt wurden von den Pionieren der drei Klassen 66 Buchhüllen hergestellt.
Wieviel Buchhüllen fertigte jede der drei Pioniergruppen an?

210513 In jedes leere Kästchen des Bildes soll eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so geschrieben werden, daß die drei waagerechten und die drei senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind.
Eine Beschreibung und Begründung der Lösung wird nicht verlangt.

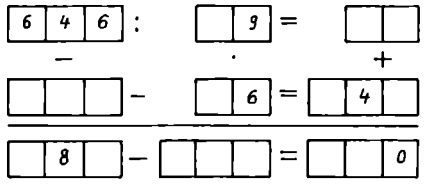


210514 Eine Aufgabe aus einer Leningrader Mathematikolympiade:
Ein „Oktoberkind" (das ist ein Jungpionier bis zur 3. Klasse), ein Pionier und ein Komsomolze fuhren in ein Pionierlager. Ihre Vornamen sind (nicht unbedingt in derselben Reihenfolge) Kolja, Igor und Sascha. Aus ihren Gesprächen im Zug erfuhren wir:
(1) Kolja und der Komsomolze sind zwei begeisterte Angler.
(2) Das Oktoberkind wohnt in Leningrad; Sascha auch, aber in einer anderen Straße.
(3) Sascha ist jünger als der Komsomolze.
Welchen Vornamen hat das Oktoberkind, welchen Vornamen hat der Pionier, und welchen Vornamen hat der Komsomolze?

Olympiadeklasse 6

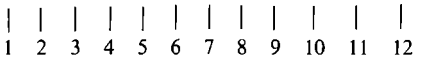
210611 Von einem Rechteck sind folgende Eigenschaften bekannt:
Wenn seine beiden Seitenlängen in Metern gemessen werden, so ergeben sich natürliche Zahlen als Maßzahlen. Die Differenz der beiden Seitenlängen beträgt 20 m. Der Umfang des Rechtecks beträgt 60 m.
a) Welchen Flächeninhalt hat dieses Rechteck?
b) Welche Längen erhalten seine beiden Seiten im Maßstab 1 : 250? Zeichne das Rechteck in diesem Maßstab!

210612 In jedes leere Kästchen soll eine der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so geschrieben werden, daß die drei waagerechten und die drei senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind.
Eine Beschreibung und Begründung der Lösung wird nicht verlangt.



210613 Die drei Schülerinnen Bianka, Heike und Kerstin ernteten im Schulgarten Weißkohl, insgesamt 128 Kohlköpfe. Dabei hat Bianka genau 8 Kohlköpfe mehr als Heike geerntet, und Kerstin hat genau 5 Kohlköpfe weniger als Bianka geerntet.
Wieviel Kohlköpfe hat jedes der drei Mädchen insgesamt geerntet?

210614 Zwölf Hölzchen, die einzeln in einer Reihe liegen (siehe Bild), sollen folgendermaßen in eine Anordnung von sechs „Doppelhölzchen" (d. h. Häufchen von je zwei zusammenliegenden Hölzchen) gebracht werden: Es soll mehrere Male jeweils ein einzeln liegendes Hölzchen entweder nach rechts oder nach links springen und dabei jedesmal (mit Ausnahme des letzten Males) genau drei Hölzchen (entweder drei einzeln liegende oder ein einzeln liegendes und ein Doppelhölzchen) überspringen. Beim letzten Male sollen genau drei Doppelhölzchen übersprungen werden.



Beschreibe eine Serie von Sprüngen, die diese Forderungen erfüllt!

Olympiadeklasse 7

210711 Die FDJler einer Schule haben sich vorgenommen, das Gelände ihrer Schule umzugestalten. Dabei soll eine rechteckige Rasenfläche von 45 m Länge und 26 m Breite mit einem Weg von 2 m Breite umgeben werden. Der Weg soll außerhalb der Rasenfläche verlaufen und ringsum an sie angrenzen. Die Fläche, die von dem Rasen und dem Weg zusammen eingenommen wird, soll insgesamt wieder die Gestalt eines Rechtecks haben.
a) Berechne den Flächeninhalt des vorgesehenen Weges!
b) Wieviel Gehwegplatten müssen auf diesem Weg insgesamt ausgelegt werden, wenn er vollständig von Gehwegplatten bedeckt werden soll und wenn man für jeden Quadratmeter des Weges genau 16 Platten benötigt?

210712 Andreas sagt zu seinem Freund: „Nimm in eine Hand eine gerade, in die andere Hand eine ungerade Anzahl Hölzchen! Verdopple in Gedanken die Anzahl der Hölzchen in der linken und verdreifache die Anzahl der Hölzchen in der rechten Hand! Addiere die beiden Produkte und nenne mir das Ergebnis! Ich werde dir dann mit Sicherheit sagen, in welcher Hand du die gerade Anzahl von Hölzchen hast."

Untersuche, ob man wirklich allein aus dem von dem Freund genannten Ergebnis mit Sicherheit die von Andreas angekündigte Aussage erhalten kann!

21073 Zur Vorbereitung eines Sportfestes soll für die Schülerinnen Andrea, Beate, Christine, Doris, Eva, Frauke und Gerda eine Reihenfolge festgelegt werden. Dabei soll stets von zwei verschieden großen Schülerinnen die größere vor der kleineren stehen. Sind aber zwei Schülerinnen gleichgroß, so soll stets diejenige, deren Vorname einen im Alphabet vorangehenden Anfangsbuchstaben hat, vor der anderen stehen.
Der Organisator, der eine derartige Reihenfolge festlegen soll, kennt die Schülerinnen nicht, aber er meint, sich an folgende Informationen erinnern zu können:
(1) Es ist wahr, daß Doris um genau 2 cm kleiner als Christine ist.
(2) Es ist falsch, daß Andrea nicht dieselbe Größe wie Gerda hat.
(3) Es ist nicht wahr, daß keine der Schülerinnen kleiner als Frauke ist.
(4) Es ist wahr, daß Eva kleiner als Doris, aber größer als Frauke ist.
(5) Es ist unwahr, daß Frauke größer als Christine ist.
(6) Es ist nicht falsch, daß Christine um genau 2 cm größer als Gerda ist und daß Christine größer als Eva ist.
Untersuche, ob es mehr als eine, genau eine oder keine Möglichkeit für die Reihenfolge der Schülerinnen gibt, bei der alle Informationen (1) bis (6) zutreffen!
Falls es sie gibt, ermittle alle möglichen Reihenfolgen, die den genannten Bedingungen entsprechen!

210714 In einem regelmäßigen Fünfeck $ABCDE$ wird eine beliebige Diagonale gezeichnet. Beweise, daß diese Diagonale zu einer der Seiten des Fünfecks parallel ist!
Hinweis: Ein Fünfeck heißt genau dann regelmäßig, wenn alle seine Seiten zueinander gleichlang und alle seine Innenwinkel zueinander gleichgroß sind.

Olympiadeklasse 8

210811 In der Figur soll jedes Zeichen X durch eine der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so ersetzt werden, daß in der zweiten bis neunten Zeile jede Zahl gleich dem absoluten Betrag der Differenz der beiden darüberstehenden Zahlen ist.
Gib eine derartige Ersetzung an!

$$\begin{array}{c} X\ X\ X\ X\ X\ X\ X\ X\ X \\ X\ X\ X\ X\ X\ X\ X\ X \\ X\ X\ X\ X\ X\ X\ X \\ X\ X\ X\ X\ X\ X \\ X\ X\ X\ X\ X \\ X\ X\ X\ X \\ X\ X\ X \\ X\ X \\ X \end{array}$$

210812 Bei einem GST-Wettkampf im Luftgewehrschießen gaben Falk und Heike je 5 Schuß ab.
Auf den Scheiben wurden folgende Treffer ermittelt:
Je genau einmal die 3, zweimal die 5, zweimal die 6, zweimal die 7, einmal die 8, einmal die 9, einmal die 10.
Weiterhin ist bekannt:
(1) Falk erzielte mit seinen letzten vier Schüssen neunmal so viele Ringe wie mit seinem ersten Schuß,
(2) Falk schoß die 9.
Lassen sich nach diesen Angaben die folgenden beiden Fragen eindeutig beantworten?
a) Welcher der beiden Jungen erzielte das bessere Ergebnis?
b) Welcher der beiden Jungen schoß die 10?

210813 a) Beweise den folgenden Satz:
Wenn alle vier Seiten eines Vierecks dieselbe Länge haben, dann stehen die Diagonalen des Vierecks aufeinander senkrecht.
b) Formuliere die Umkehrung dieses Satzes und untersuche, ob sie auch gilt!

210814 Einer Brigade der ausgezeichneten Qualität war der Auftrag erteilt worden, in möglichst kurzer Zeit eine gewisse Anzahl Meßgeräte fertigzustellen. Die Brigade bestand aus einem erfahrenen Arbeiter als Brigadier und neun jungen Arbeitern, die eben erst ihre Ausbildung beendet hatten.
Im Laufe eines Tages stellte jeder von den neun jungen Arbeitern 15 Geräte fertig, der Brigadier aber 9 Geräte mehr als jedes der zehn Brigademitglieder im Durchschnitt.
Wieviel Meßgeräte wurden insgesamt von der Brigade an diesem Arbeitstag fertiggestellt?

Olympiadeklasse 9

210911 Während einer Fußballmeisterschaft spielten im Halbfinale die vier Mannschaften A, B, C und D. Über den Ausgang der Spiele und damit die Ermittlung der beiden Mannschaften für das Endspiel machten Kenner der vier Mannschaften folgende Voraussagen:
(1) Das Endspiel wird lauten: B gegen C.
(2) Das Endspiel wird nicht lauten: A gegen B.
(3) Das Endspiel wird lauten: C gegen D.
(4) Wenn A das Endspiel erreicht, dann erreicht B nicht das Endspiel.
(5) Das Endspiel wird von zwei der Mannschaften B, C, D bestritten.
Nach dem Halbfinale stellte sich heraus, daß genau zwei der Voraussagen (1) bis (5) falsch waren.
Zeigen Sie, daß es aufgrund dieser Angaben möglich ist, die beiden Mannschaften zu ermitteln, die das Endspiel erreichten!

210912 Herr Schulze trifft nach langer Zeit Herrn Lehmann und lädt ihn zu sich nach Hause ein. Unterwegs erzählt er Herrn Lehmann, daß er Vater von drei Kindern ist. Herr Lehmann möchte wissen, wie alt diese sind; ihm genügen Angaben in vollen Lebensjahren.
Herr Schulze antwortet: „Das Produkt der drei Altersangaben beträgt 72. Die Summe der drei Altersangaben ist meine Hausnummer. Wir sind gerade an unserem Haus angekommen; Sie sehen meine Nummer." Darauf erwidert Herr Lehmann: „Aus diesen Angaben kann man aber die drei Altersangaben nicht eindeutig ermitteln." „Das stimmt", meint Herr Schulze, „aber irgendwann zwischen der Geburt des zweiten und des dritten Kindes hat der Bau dieses Hauses stattgefunden. Ein Jahr und einen Tag lang haben wir an dem Haus gebaut." „Vielen Dank! Nun kann man die Altersangaben eindeutig ermitteln", beschließt Herr Lehmann das Gespräch.
Untersuchen Sie, ob es eine Zusammenstellung von drei Altersangaben gibt, für die alle Aussagen dieses Gespräches zutreffen! Untersuchen Sie, ob es nur eine solche Zusammenstellung gibt! Wenn das der Fall ist, ermitteln Sie diese!

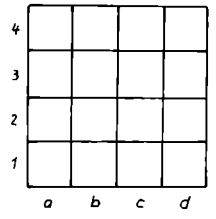
210913 Elsa behauptet: „Man kann die Zahl 1981 folgendermaßen darstellen: Man schreibt die natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer geeigneten Zahl n der Reihe nach auf und setzt zwischen je zwei dieser Zahlen jeweils genau eines der vier Operationszeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$. Dabei braucht nicht überall dasselbe Operationszeichen gewählt zu werden; es brauchen auch nicht alle vier Operationszeichen vorzukommen. An der Reihenfolge der natürlichen Zahlen darf nichts geändert werden; Klammern und weitere Rechenzeichen sollen nicht auftreten. Das Ergebnis der so aufgeschriebenen Rechenaufgabe ist 1981."
Ist Elsas Behauptung wahr?

210914 Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\sphericalangle BAC = \alpha = 70°$, $\sphericalangle ACB = \gamma = 50°$ und $r = 5$ cm, wobei r der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC ist!
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Olympiadeklasse 10

211011 Ein Reisender legte den ersten Teil einer Dienstfahrt mit dem PKW und den Rest mit dem Zug zurück.
Als er die mit dem PKW zurückgelegte Teilstrecke sowie genau ein Fünftel der Bahnstrecke durchfahren hatte, stellte er fest, daß er zu diesem Zeitpunkt genau ein Drittel der Gesamtstrecke zurückgelegt hatte. Später, als er genau die Hälfte der Gesamtstrecke zurückgelegt hatte, war er mit dem Zug bereits 20 km mehr gefahren als zuvor mit dem PKW.
Wie lang war die Gesamtstrecke dieser Reise?

211012 Das Bild zeigt ein Quadrat, das in 16 untereinander kongruente quadratische Felder $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, ..., $d1$, $d2$, $d3$, $d4$ zerlegt ist. Von diesen Feldern sollen genau vier so markiert werden, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.
Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Markierungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei gelten zwei Markierungen genau dann als nicht verschieden, wenn sie aus einander durch eine Drehung, eine Spiegelung, oder mehrere solcher Abbildungen hervorgehen.



211013 Für Kreisflächen ist bekanntlich der Begriff Durchmesser definiert. Man kann aber auch für andere Flächenstücke F eine „längste Strecke" als „Durchmesser" bezeichnen.
(Das heißt, man kann definieren: Wenn es zwei Punkte P, Q in F mit der Eigenschaft gibt, daß für beliebige Punkte X, Y in F stets $\overline{PQ} \geqq \overline{XY}$ gilt, so heißt die Länge $d = \overline{PQ}$ der „Durchmesser" von F.)
Ist beispielsweise F die Fläche eines Dreiecks ABC (einschließlich des Randes) und gilt $\overline{AB} \geqq \overline{AC}$ sowie $\overline{AB} \geqq \overline{BC}$, so ist die Länge $\overline{AB}$ der Durchmesser d von F; denn dann läßt sich beweisen, daß für beliebige Punkte X, Y der Dreiecksfläche F stets $\overline{AB} \geqq \overline{XY}$ ist.
Untersuchen Sie, ob die beiden folgenden Aussagen (1), (2) wahr sind!
(1) Man kann nicht jede Dreiecksfläche F so durch eine Gerade in zwei Dreiecksflächen F', F'' zerlegen, daß jede der beiden Flächen F', F'' einen kleineren Durchmesser hat als F.
(2) Es gibt eine Dreiecksfläche F, die man so durch eine Gerade in zwei Dreiecksflächen F', F'' zerlegen kann, daß jede der beiden Flächen F', F'' einen kleineren Durchmesser hat als F.

211014 a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g, die im Intervall $-1 \leqq x \leqq 3$ durch

$$f(x) = |x|,$$
$$g(x) = x^2 - 3x + 2$$

definiert sind!
b) Im Intervall $-1 \leqq x \leqq 3$ seien nun durch

$$h(x) = f[g(x)],$$
$$k(x) = g[f(x)]$$

zwei weitere Funktionen h und k definiert.
Hinweis: Man erhält also z. B. den Funktionswert $h(x)$ zu einer Zahl x des Intervalls stets dadurch, daß man erst den Wert $z = g(x)$ und dann $f(z) = f[g(x)] = h(x)$ bildet. So ist etwa für $x = -1$ erst $z = g(-1)$ $= (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 2 = 6$ und dann $h(-1)$ $= g(6) = |6| = 6$ zu bilden. Entsprechend erhält man $k(-1) = g[f(-1)] = g(|-1|) = g(1)$ $= 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$.)
Zeichnen Sie die Graphen der so definierten Funktionen h und k und beschreiben Sie, wie man diese Graphen dadurch aus dem Graphen von g gewinnen kann, daß man auf Teilstück des Graphen von g geeignete Spiegelungen anwendet!

Olympiadeklasse 11/12

211211 Gegeben sei die Seitenlänge a eines gleichseitigen Dreiecks ABC. Auf diesem Dreieck als Grundfläche soll eine Pyramide $ABCD$ mit den folgenden Eigenschaften (1), (2) errichtet werden:
(1) Die Kanten AD, BD und CD haben einander gleiche Länge s.
(2) Die Höhe h der Pyramide ist das arithmetische Mittel aus a und s.
Man untersuche, ob es eine derartige Pyramide $ABCD$ gibt und ob dann h und s eindeutig durch a bestimmt sind. Ist dies der Fall, so ermittle man h und s.

211212 Man ermittle alle geordneten Paare $(x; y)$ von Null verschiedener reeller Zahlen x, y, die das folgende Gleichungssystem (1), (2) erfüllen:

$$(x+y)^2 + 3(x+y) = 4, \tag{1}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{6}. \tag{2}$$

211213 Eine Menge M enthalte genau 55 Elemente. Für jede natürliche Zahl k mit $0 \leqq k \leqq 55$ bezeichne A_k die Anzahl aller derjenigen Teilmengen von M, die genau k Elemente enthalten.
Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen k, für die A_k am größten ist!

211214 Jede natürliche Zahl läßt sich bekanntlich eindeutig als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen.
In welcher der beiden natürlichen Zahlen $1981!$ und $1000! \cdot 981!$ erhält bei dieser Darstellung die Primzahl 7 den größeren Exponenten?
Hinweis: Wenn n eine natürliche Zahl mit $n \geqq 1$ ist, so ist $n!$ definiert durch

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

alphaismen

„Ich werde mein Wissen verdoppeln", sagte die Null.

„Ich will vorwärts kommen", sagte das Quadrat, „ich will in bessere Kreise."

Wenn man von beliebig vielen Punkten beliebig viele Striche zieht, gibt es ein beliebig großes Durcheinander.

Lösungen

Eine Aufgabe von Prof. Dr. H. Triebel

Zusatzaufgabe: Es ist

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \text{Terme mit } x^4, x^5, \ldots.$$

Dann gilt

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6} + \text{Terme mit } x, x^2, \ldots,$$

also $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$.

Aufgabe: Es ist $r = R \cdot \phi$, wobei ϕ der angegebene Winkel (in Bogenlänge) ist (Bild 3). Hieraus folgt $\varrho = R \sin \phi$.
Für $K(P)$ erhält man nun

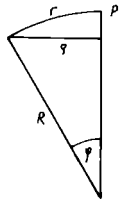


Bild 3

$$K(P) = \frac{3}{\pi} \lim_{r \to 0} \frac{2\pi r - 2\pi\varrho}{r^3} = 6 \lim_{r \to 0} \frac{r - \varrho}{r^3}$$

$$= 6 \lim_{\phi \to 0} \frac{R_\phi - R\sin\phi}{R^3\phi^3}$$

$$= \frac{6}{R^2} \lim_{\phi \to 0} \frac{\phi - \sin\phi}{\phi^3} = \frac{1}{R^2}.$$

Lösungen zu: Die großen Leistungen der kleinen Biene

▲1.1▲ 190 kg : 3 = 63,333 kg ≈ 63 kg
Ein Volk erzeugt in einem Jahr rund 63 kg Honig.

▲1.2▲ 63 kg − 45 kg = 18 kg
Für den Imker bleiben etwa 18 kg Honig übrig.

▲1.3▲ 4500 : 63 ≈ 71%
Das Volk verbraucht rund 71% und der Imker rund 29%.

▲2▲ 1 kg Honig ≙ 3 kg Nektar;
3000 g : 0,0005 g = 6000000
Es müssen 6000000 Blüten besucht werden.

▲3.1▲ 460000 · 18 kg = 8280000 kg = 8280 t
Es können 8280 t Honig produziert werden.

▲3.2▲ 460000 · 10 kg = 4600000 kg = 4600 t
Das Produktionsergebnis beträgt 4600 t.

▲4.1▲ 190 kg + 35 kg + 25 kg = 250 kg

Ein Volk muß im Sommer durchschnittlich eine Last von 250 kg bewältigen.

▲4.2▲ $41 \cdot 250\,\text{kg} = 10250\,\text{kg}$

Diese Völker müssen 10,25 t bewältigen.

▲5.1▲ $16700000 \cdot 0{,}320\,\text{kg} = 5344000\,\text{kg} = 5344\,\text{t}$.

Der Bedarf der Bevölkerung beträgt 5344 t.

▲5.2▲ $5344\,\text{t} - 4600\,\text{t} = 744\,\text{t}$

Es müssen 744 t Honig importiert werden.

▲6▲ $16700000 : 460000 \approx 36$

Es können 36 Bürger mit Honig versorgt werden.

▲7▲ $70 \cdot 8\,\text{M} = 560\,\text{M}$

Die AG erzielte eine Einnahme von 560 M.

▲8.1▲ $34400 \cdot 0{,}26 = 8944$

8944 Imker wanderten mit ihren Bienen.

▲8.2▲ $250000 : 460000 = 0{,}54 = 54\%$

Der Anteil der Wandervölker beträgt 54%.

▲8.3▲ $250000 \cdot 17\,\text{kg} + 210000 \cdot 6\,\text{kg} = 5510000\,\text{kg} = 5510\,\text{t}$

Der Bevölkerung würden 5510 t Honig zur Verfügung stehen.

▲9.1▲ $8000 \cdot 4 = 32000$;
$32000 - 1650 = 30350$

Es müssen noch 30350 Bienenvölker zusätzlich eingesetzt werden.

▲9.2▲ $30350 \cdot 40\,\text{M} = 1214000\,\text{M}$
$1214000\,\text{M} + 18500\,\text{M} = 1232500\,\text{M}$

Der Kooperationsverband muß 1232500 M einplanen.

▲10.1▲ $150000 : 1500 = 100$

Es ist das 100fache ihrer Körpermasse.

▲10.2▲ $\frac{200 \cdot 60}{1500} = 8$

Es ist das 8fache seiner Körpermasse.

▲10.3▲ $1500 : 60 = 25$

Das Huhn müßte an einem Tag 25 Eier legen.

▲11▲ $100\% - 5{,}5\% - 6{,}5\% = 88\%$

Es sind 88% Bienen.

Zum Kreisdiagramm: $5{,}5\% \triangleq 19{,}8°$; $6{,}5\% \triangleq 23{,}4°$; $88\% \triangleq 316{,}8°$.

▲12▲ $\frac{(22+23) \cdot 3600}{2 \cdot 1000} = 81$

Die Biene kann eine Geschwindigkeit von $81\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreichen.

▲13▲ $50000 \cdot 12\,\text{mm} = 600000\,\text{mm} = 600\,\text{m}$

Es käme eine Strecke von 600 m heraus.

▲14▲ $32 \cdot 50000 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}055\,\text{g} \cdot 12 \cdot 15 = 3168000\,\text{g} = 3168\,\text{kg}$

Es sind 3168 kg Nektar.

Lösungen zu alpha-Wettbewerb,

Heft 1/1981:

Ma 5 ■2055

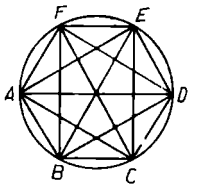
a) $(160 - 2 \cdot 24)\text{mm} : 4 = 28\,\text{mm}$

b) $28\,\text{mm} - 18\,\text{mm} = 10\,\text{mm}$

Ma 5 ■2056 Es seien A, B, C, D, E, F die Ecken des Sechsecks (siehe Bild). Man kann insgesamt 9 Diagonalen in dem Sechseck einzeichnen, nämlich AC; AD; AE; BD; BE; BF; CE; CF; DF. Allgemein gilt für die Anzahl d der Diagonalen im n-Eck:

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2};$$

denn man kann von jeder der n Ecken zu jeder der $n-1$ übrigen Ecken außer zu den beiden benachbarten Ecken genau je eine Diagonale ziehen, insgesamt also $n(n-3)$ Diagonalen. Dabei wird jede Diagonale doppelt gezählt. Die so ermittelte Anzahl muß also noch durch 2 geteilt werden.



Ma 5 ■2057 Die durch Vertauschung der Ziffern entstehende Zahl muß größer sein als die ursprüngliche Zahl, da sie gleich dem um 2 verminderten Dreifachen dieser Zahl sein soll. Bei der ursprünglichen Zahl ist also die Anzahl der Zehner kleiner als die der Einer. Man braucht daher unter Berücksichtigung der Bedingung, daß die Summe der beiden Anzahlen 10 beträgt, nur die Zahlen 19, 28, 37 und 46 in Betracht zu ziehen. Von ihnen erfüllt 28 und nur 28 die Bedingung der Aufgabe.

Ma 5 ■2058 Aus $8 - \square = 3$ folgt $\square = 5$. Setzt man für $\square$ in Spalte 3 jeweils 5 ein, so erhält man $\square = 2$ und $\diamondsuit = 0$. Schließlich ermittelt man auf diese Weise aus Zeile 1, daß $\triangle = 7$ sein muß. Tatsächlich erfüllen die angegebenen Ziffern alle Bedingungen der Aufgabe; denn in

$$\begin{array}{c} 27+8=35 \\ - \quad - \quad - \\ 10+5=15 \\ \hline 17+3=20 \end{array}$$

sind alle waagerecht und senkrecht stehenden Aufgaben richtig gelöst.

Ma 5 ■2059 Da bei einem Teilnehmerbeitrag von 1,40 Mark genau 1,10 Mark zu wenig, bei einem Beitrag von 1,50 Mark genau 1,10 Mark zu viel zusammengekommen wäre, so hätte das gesammelte Geld genau das Doppelte der Kosten des einen Sammelfahrscheines betragen, wenn jeder Teilnehmer 2,90 Mark eingezahlt hätte. Folglich wären genau die Kosten des einen Sammelfahrscheines zusammengekommen, wenn jeder der Teilnehmer 1,45 Mark bezahlt hätte. Jeder der Teilnehmer hatte also 0,05 Mark zu viel bezahlt.

Ma 5 ■2060 Im ungünstigsten Falle kann Ulrike zunächst 8 rote, 8 blaue, 8 schwarze, 8 weiße und die beiden grünen Kugeln herausnehmen.

Nimmt sie zu diesen 34 Kugeln nun noch eine weitere heraus, dann kann diese Kugel nur eine der vier Farben Rot, Blau, Schwarz oder Weiß tragen. In diesem Fall erhält Ulrike also 9 Kugeln gleicher Farbe. Die kleinste Anzahl von Kugeln, bei denen das mit Sicherheit der Fall ist, beträgt daher 35.

Ma 6 ■2061 Jede Station braucht 14 verschiedene Fahrkarten. Insgesamt werden daher $15 \cdot 14$ Fahrkarten $= 210$ Fahrkarten benötigt.

Ma 6 ■2062 In $1\frac{1}{2}$ Tagen würden 3 Hühner doppelt soviel Eier wie $1\frac{1}{2}$ Hühner, also 3 Eier legen. Ein Huhn würde in dieser Zeit den dritten Teil, das ist 1 Ei, legen. Also würden 7 Hühner in $1\frac{1}{2}$ Tagen 7 Eier legen. Da 6 Tage viermal so viel sind wie $1\frac{1}{2}$ Tage, würden mithin die 7 Hühner in 6 Tagen 28 Eier legen.

Oder: 1 Huhn würde in $1\frac{1}{2}$ Tagen 1 Ei legen, also 1 Huhn in 6 Tagen (wegen $4 \cdot 1\frac{1}{2} = 6$) 4 Eier, und 7 Hühner in 6 Tagen $7 \cdot 4 = 28$ Eier.

Ma 6 ■2063 (1) Ist nach Ergänzung der beiden fehlenden Ziffern eine durch 36 teilbare Zahl entstanden, so ist diese sowohl durch 4 als auch durch 9 teilbar.

(2) Ist eine mehrstellige Zahl durch 4 teilbar, so stellen ihre letzten beiden Ziffern (in gleicher Reihenfolge) ebenfalls eine durch 4 teilbare Zahl dar. Daher kann als Einerziffer nur 0; 4 oder 8 eingesetzt werden.

(3) Ist eine Zahl durch 9 teilbar, so ist es auch ihre Quersumme. Nun beträgt die Summe der drei gegebenen Ziffern 9.

Lautet daher die Einerziffer

$\left.\begin{array}{l} 0 \\ 4 \\ 8 \end{array}\right\}$ so kann die Hunderterziffer nur

$\left\{\begin{array}{c} 0 \text{ oder } 9 \\ 5 \\ 1 \end{array}\right\}$ sein.

Also können nur die Zahlen 52020; 52920; 52524; 52128; die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Die Probe zeigt, daß sie dies auch sämtlich tun.

Ma 6 ■2064 (4) Wegen der Aussagen (1) und (2) ist die Volleyballspielerin weder Marion noch Petra. Ruth ist also die Volleyballspielerin.

(5) Da die Tischtennisspielerin wegen (3) nicht Marion und wegen (4) nicht Ruth sein kann, ist Petra die Tischtennisspielerin.

(6) Aus (4) und (5) ergibt sich: Marion ist die Schwimmerin.

Ma 6 ■2065 Angenommen, die Längen a, b, c haben die geforderten Eigenschaften.

Dann gilt:

$a+b+c=168$ m, ferner

$b=3a$ sowie

$c=4a$.

Daraus folgt:

$a+3a+4a=168$ m, also

$8a=168$ m, woraus man

$a=21$ m, also

$b=63$ m und $c=84$ m erhält.

Deshalb können nur diese Längen die gestellten Bedingungen erfüllen. Wegen $63\text{ m}=3\cdot 21\text{ m}$, $84\text{ m}=4\cdot 21\text{ m}$ und $21\text{ m}+63\text{ m}+84\text{ m}=168\text{ m}$ haben sie die geforderten Eigenschaften tatsächlich.

Ma 7 ■2066 Diagonale ist Quadratseite, halbe Diagonale ist Quadratseite, Beweis durch Kongruenz.

Ma 7 ■2067 Die Anzahl der Ziffern 9 beträgt an der Tausenderstelle 0, an der Hunderterstelle (von 1 bis 999, von 1000 bis 1999, von 2000 bis 2999, von 3000 bis 3999, von 4000 bis 4999 je 100mal die Ziffer 9)

$5\cdot 100=500$,

an der Zehnerstelle (in jedem Hunderterbereich 10mal, in 55 Hunderterbereichen also)

$10\cdot 55=550$,

an der Einerstelle (in jedem Zehnerbereich eine Ziffer 9, in 555 Zehnerbereichen also)

$1\cdot 555=555$.

Insgesamt wird die Ziffer 9 dabei 1605mal aufgeschrieben.

Ma 7 ■2068 Ist x die Anzahl der Pflaumen, die der Korb enthält, dann bekommt der erste Freier $\left(\frac{x}{2}+1\right)$ Pflaumen. Als Rest verbleiben Pflaumen in der Anzahl $x-\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{x}{2}-1$.

Die Anzahl der Pflaumen, die der zweite Freier bekommt, ist hiernach

$\frac{\frac{x}{2}-1}{2}+1=\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$, und als nunmehriger Rest verbleiben Pflaumen in der Anzahl $\left(\frac{x}{2}-1\right)-\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{x}{4}-\frac{3}{2}$. Die Anzahl der Pflaumen, die der dritte Freier bekommt, ist dann

$\frac{\frac{x}{4}-\frac{3}{2}}{2}+3=\frac{x}{8}+\frac{9}{4}$.

Danach ist der Korb geleert, woraus die Gleichung $\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{x}{8}+\frac{9}{4}\right)=0$ folgt. Aus dieser ergibt sich $\frac{x}{8}=\frac{15}{4}$, also $x=30$. Daher kann die gesuchte Anzahl nur 30 betragen.

Ma 7 ■2069 Augustpreis A

Septemberpreis $S=(100\%=20\%)\cdot A=80\%\cdot A$

$S=0{,}8\cdot A$

Novemberpreis $N=(100\%+20\%)\cdot S=120\%\cdot S$

$N=1{,}2\cdot S$

$N=1{,}2\cdot 0{,}8\cdot A$

$N=0{,}96A$

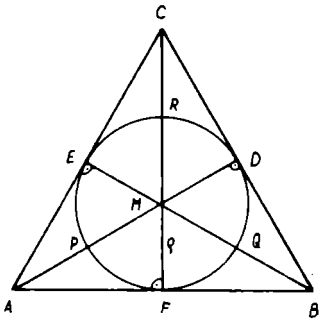
$N=96\%\cdot A$

Im November waren die Äpfel billiger als im August. Die Preisabweichung beträgt 4%.

Ma 8 ■2070 Man denke sich durch die Adern senkrecht zur Aderachse einen ebenen Schnitt gelegt. Dann lautet die Frage:

Wieviel Kreise gleichen Durchmessers lassen sich so um einen gleichgroßen Innenkreis anordnen, daß sie einander berühren? Da der Abstand jedes Kreismittelpunktes von den Mittelpunkten der Nachbarkreise stets 2r beträgt, entstehen aus den Verbindungslinien der Kreismittelpunkte 6 gleichseitige Dreiecke, die ein regelmäßiges Sechseck bilden. Man braucht also einschließlich der Mittelader 7 Adern.

Ma 8 ■2071 (I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei gleichseitig und habe den Inkreisradius der Länge ϱ. Der Mittelpunkt M des Inkreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden AD, BE, CF des Dreiecks. Diese sind gleichzeitig die Höhen, also sind MD, ME, MF die Lote von M auf die drei Seiten, und es hat daher jede von ihnen die Länge ϱ. Die Winkel $\sphericalangle AMF$, $\sphericalangle FMB$, $\sphericalangle BMD$, $\sphericalangle DMC$, $\sphericalangle CME$, $\sphericalangle EMA$ sind paarweise einander kongruent, und jeder von ihnen hat daher die Größe 60°.



(II) Daraus ergibt sich die folgende Konstruktion. Man zeichnet den Kreis K um M mit dem Radius der Länge ϱ und auf seinem Umfang sechs Punkte D, R, E, P, F, Q mit $\overline{DR}=\overline{RE}=\overline{EP}=\overline{PF}=\overline{FQ}=\overline{QD}$. Die Senkrechten in D, E, F, auf MD bzw. ME bzw. MF erzeugen dann das gesuchte Dreieck $\triangle ABC$.

(III) *Beweis:* Es gilt: $\overline{AF}=\overline{FB}=\overline{BD}=\overline{DC}=\overline{CE}=\overline{EA}$, da die Teildreiecke $\triangle AFM$, $\triangle BFM$, $\triangle BMD$, $\triangle CMD$, $\triangle CME$ und $\triangle AME$ einander paarweise kongruent sind; denn sie stimmen in den Winkeln und einer Seite überein.

Also ist $\triangle ABC$ gleichseitig; AD, BE, CF sind seine Seitenhalbierenden, also auch Winkelhalbierenden und Höhen, also ist der gezeichnete Kreis sein Inkreis.

Die Konstruktion ist immer möglich und bis auf Kongruenz eindeutig, da die Größe und Gestalt der erwähnten Teildreiecke nur von ϱ und nicht von der Lage der sechs auf K gleichmäßig verteilten Punkte D, R, E, P, F und Q abhängt.

Ma 8 ■2072 (I) Angenommen, bei einer Angabe von Ziffern für die Buchstaben A, ..., J seien die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Dann folgt:

Da AJ und BJ je zweistellig, also kleiner als 100 sind, ist ihre Summe kleiner als 200. Da sie dreistellig ist, hat sie die erste Ziffer $A=1$. (1)

Da somit $AJ<20$ und $AAC\geqq 110$ ist, folgt $BJ>90$, also $B=9$. (2)

Wegen $A=1$ ist $ABC<200$; wegen $ABC:H=BJ$ gilt daher $H<200:90<3$. Da andererseits H Anfangsziffer ist, also $\neq 0$ gilt, und da $H\neq A=1$ ist, folgt $H=2$. (3)

Damit ergibt sich $CH=H\cdot HA=2\cdot 21=42$, also $C=4$. (4)

Weiter folgt $BJ=ABC:H=194:2=97$, also $J=7$. (5)

Sodann erhält man $DE=HA+AJ=21+17=38$, also $D=3$ (6) und $E=9$. (7)

Schließlich ergibt sich $AFG=ABC-DE=194-38=156$, also $F=5$ (8) und $G=6$. (9)

Daher kann nur

$$\begin{array}{r} 194-38=156 \\ :\quad -\quad - \\ \hline 2\cdot 21=\ 42 \\ \hline 97+17=114 \end{array} \qquad (10)$$

Lösung des Kryptogramms sein.

(II) Da die Angaben (1) bis (9) den verschiedenen Buchstaben A, ..., J verschiedene Ziffern zuordnen, die, wie aus (10) ersichtlich ist, alle waagerecht und senkrecht stehenden Aufgaben des Kryptogramms richtig lösen, hat dieses somit genau die angegebene Lösung.

Ma 8 ■2073 Ist d der Erddurchmesser und u (in m) der Umfang des gegebenen kleineren Kreises, so gilt $\pi\cdot d=u$. Ist x der in Peters Aufgabe gesuchte Abstand, so ist der Durchmesser des zweiten (größeren) Kreises $d+2x$. Andererseits ist dessen Umfang $u+1=\pi d+1$; also gilt $\pi(d+2x)=\pi d+1$, woraus $2\pi x=1$, $x=\frac{1}{2\pi}$ folgt. Analoge Schlüsse gelten aber auch für die Aufgabe von Fritz, wenn $d(=1\text{ mm})=0{,}001$ m ist, da nämlich der erhaltene Wert $x=\frac{1}{2\pi}$ nicht von d abhängt. Somit stimmt die Behauptung von Fritz. Der gesuchte Abstand beträgt in beiden Fällen $\frac{1}{2\pi}$ (in m), das sind etwa 16 cm.

Ma 9 ■2074 Wir setzen zunächst an die Stelle der Sternchen die Buchstaben A bis N wie folgt:

$$\begin{array}{r} 1AB\cdot CD \\ \hline EFG1 \\ \hline HIJ1 \\ \hline KLM1N \end{array}$$

Dabei bedeuten die Buchstaben jeweils eine der Ziffern von 0 bis 9.

Angenommen, die Aufgabe hat eine Lösung, dann ist $KLM1N$ die Summe der Teilprodukte $EFG1$ und $HIJ1$, und es folgt sofort $N=1$ und $J=0$. Die vierstelligen Teilprodukte sind entstanden durch Multiplikation der dreistelligen Zahl $1AB$ mit C bzw. D. Wegen

$199 \cdot 9 < 2000$ sind diese Teilprodukte beide kleiner als 2000, also ist $E = H = 1$, und wegen $199 \cdot 99 < 20000$ ist auch $K = 1$. Außerdem gilt C, $D \neq 1$, da sonst keine vierstelligen Zahlen als Produkt entstehen könnten. Beide Teilprodukte enden auf die Ziffer 1, daher kommen für die Ziffern B, C, D nur 3, 7 oder 9 und wegen $199 \cdot 5 < 1000$ mithin für C, D nur 7 oder 9 in Frage. Von allen vierstelligen Zahlen der Form 1 mal 01 sind nur 1001 und 1701 durch 7 oder 9 teilbar; und zwar ist 1001 durch 7, aber nicht durch 9 teilbar und 1701 durch 7 und durch 9 teilbar. Wegen $1701 : 7 = 243 \neq 1AB$ bleiben davon genau zwei Möglichkeiten, und zwar

(1) $\begin{array}{r} 143 \cdot C7 \\ \hline 1FG\,1 \\ 10\,0\,1 \\ \hline 1LM1\,1 \end{array}$ und (2) $\begin{array}{r} 189 \cdot C9 \\ \hline 1FG\,1 \\ 17\,0\,1 \\ \hline 1LM1\,1 \end{array}$

Im Falle (1) muß $C = 7$ sein, da 7 die einzige einstellige Zahl ist, die mit 3 multipliziert ein auf 1 endendes Produkt ergibt. Damit erhalten wir

$\begin{array}{r} 143 \cdot 77 \\ \hline 1001 \\ 1001 \\ \hline 11011 \end{array}$, also $F = G = M = 0$ und $L = 1$.

Im Falle (2) muß analog $C = 9$ sein, und wir erhalten

$\begin{array}{r} 189 \cdot 99 \\ \hline 1701 \\ 1701 \\ \hline 18711 \end{array}$, also $F = M = 7$, $G = 0$ und $L = 8$.

Das sind die beiden einzigen Lösungen der Aufgabe.

Ma 9 ■2075 (1) Wenn die Angaben von Herrn X zutreffen, so ist das Quadrat der erwähnten Quersumme genau dreimal so groß wie die Anzahl der Lebensjahre und diese wiederum genau dreimal so groß wie die erwähnte Quersumme. Daher ist das Quadrat dieser Quersumme genau neunmal so groß wie die Quersumme selbst. Daraus folgt, daß die Quersumme 9 und somit das Alter von Herrn X 27 Jahre beträgt.

(2) Wenn Herr X 27 Jahre alt ist, so ist die Quersumme der Anzahl seiner Lebensjahre 9, also ein Drittel dieser Anzahl. Ferner ist dann das Quadrat 81 der Quersumme genau dreimal so groß wie die Anzahl der Lebensjahre des Herrn X. Dahèr treffen die Angaben von Herrn X dann zu.

Aus (2) folgt, daß die Angaben von Herrn X zutreffen können. Hieraus und aus (1) folgt, daß Herr X 27 Jahre alt ist.

Ma 9 ■2076 Im Dreieck $\triangle ABC$ seien CM die Seitenhalbierende der Seite AB und S der Schwerpunkt des Dreiecks. Dann gilt nach einem Satz über die Seitenhalbierenden im Dreieck:

$$\overline{SM} : \overline{SC} = 1 : 2. \quad (1)$$

Wir zeigen nun, daß nicht jede Gerade durch S die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt. Die Parallele g zu AB durch S schneide AC bzw. BC in D bzw. E. Diese Punkte existieren stets, da AC und BC nicht parallel zu AB und damit auch nicht parallel zu g sind.

Das Lot CG von C auf die Gerade durch A und B schneide g in F. Dieser Punkt existiert stets, da $CG \perp AB$ und damit $CG \perp g$ gilt. Nach den Strahlensätzen und wegen (1) gilt dann:

$\overline{DE} : \overline{AB} = 2 : 3$, d. h. $\overline{DE} = \frac{2}{3}\overline{AB}$ und

$\overline{CF} : \overline{CG} = 2 : 3$, d. h. $\overline{CF} = \frac{2}{3}\overline{CG}$.

Also beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle CDE$ nur $\frac{4}{9}$ von dem des Dreiecks $\triangle ABC$.

Damit ist gezeigt, daß nicht alle Geraden durch S die Dreieckfläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegen.

Ma 9 ■2077 Es sei s die genaue Länge der Strecke, und es seien a bzw. f die Schätzwerte von Andreas und Frank. Dann gilt:

$a - \frac{a}{10} = s$, woraus $a = \frac{10}{9}s$ folgt.

Der absolute Fehler der Schätzung von Andreas beträgt demnach $\frac{1}{9}s$, sein absoluter Betrag ist $\frac{1}{9}s$. Ferner gilt:

$f + \frac{f}{10} = s$, woraus $f = \frac{10}{11}s$ folgt.

Der absolute Fehler von Franks Schätzung beträgt demnach $-\frac{1}{11}s$, sein absoluter Betrag $\frac{1}{11}s$.

Wegen $\frac{1}{11}s < \frac{1}{9}s$ ist daher der absolute Betrag des absoluten Fehlers bei Franks Schätzung kleiner.

Ma 10/12 ■2078 Es seien die Überträge aus der Einerspalte mit e, aus der Zehnerspalte mit z und aus der Hunderterspalte mit h bezeichnet.

Dann gilt $e, z, h \in \{0; 1; 2\}$, da die Summe dreier einstelliger Zahlen nicht größer als 27 sein kann und auch mit einem eventuellen Übertrag aus der nächsten niederen Stelle 29 nicht überschreitet.

Angenommen, es gäbe eine Lösung, dann müßte gelten

$$3I = 10e + N \text{ und}$$
$$3D + h = N.$$

Durch Subtraktion erhält man

$$3I = 10e + h + 3D, \text{ also}$$
$$3(I - D) = 10e + h.$$

Daraus folgt wegen $10e + h \geqq 0$ zunächst $I \geqq D$, wegen $I \neq D$ also

(1) $I > 0$ und daher $10e + h > 0$. Ferner folgt

(2) $I - D = \frac{10e + h}{3}$.

Unter Berücksichtigung der für e und h geltenden Einschränkungen kommen nur folgende beiden Möglichkeiten in Frage

(3a) $e = 1$; $h = 2$; $I - D = 4$,

(3b) $e = 2$; $h = 1$; $I - D = 7$.

Aus $3D = N - h$, $N < 10$ und $h \in \{1; 2\}$ folgt $3D < 9$, wegen $D > 0$, also

(4) $D \in \{1; 2\}$ und damit wegen (3)

(5) $I \in \{5; 6; 8; 9\}$.

Aus $3I = 10e + N$ und $I \neq N$ folgt $I \neq 5$ und daher

(6) $I \in \{6; 8; 9\}$ sowie

(7) $N \in \{8; 4; 7\}$.

Ferner ist

$3E + e = U + 10z$ und

$3R + z = 10h + E$ d. h. $E = 3R + z - 10h$.

Durch Substitution erhält man

$9R + 3z - 30h + e = U + 10z$, also

(8) $R = \frac{30h + 7z - e + U}{9}$.

Nach (6) kommen für I höchstens drei Zahlen in Frage. Wir untersuchen der Reihe nach diese drei Möglichkeiten.

Fall 1: Es sei $I = 6$.

Dann ist $N = 8$, $e = 1$ und daher wegen (3a) $h = 2$, $D = 2$.

In diesem Fall erhält man aus (8)

$$R = \frac{59 + 7z + U}{9}.$$

Wegen der für die Variablen geltenden Einschränkungen wird diese Gleichung höchstens von folgenden Zahlen erfüllt:

$z = 0$, dann $U = 4$, $R = 7$, $E = 1$;

$z = 1$, dann $U = 6$, $R = 8 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq R$ steht;

$z = 2$, dann $U = 8 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq U$ steht.

Das führt auf folgende Lösung

$$\begin{array}{r} 2716 \\ +2716 \\ +2716 \\ \hline 8148. \end{array}$$

Fall 2: Es sei $I = 8$.

Dann ist $N = 4$, $e = 2$ und daher wegen (3b) $h = 1$, $D = 1$.

In diesem Falle erhält man aus (8)

$$R = \frac{28 + 7z + U}{9}.$$

Wegen der für die Variablen geltenden Einschränkungen wird diese Gleichung höchstens von folgenden Zahlen erfüllt:

$z = 0$, dann $U = 8 = I$, was im Widerspruch zu $I \neq U$ steht;

$z = 1$, dann $U = 1$ und $R = 4 = N$, was im Widerspruch zu $N \neq R$ steht;

$z = 2$, dann $U = 3$ und $R = 5$.

Das führt auf folgende Lösung:

$$\begin{array}{r} 1578 \\ +1578 \\ +1578 \\ \hline 4734. \end{array}$$

Fall 3: Es sei $I = 9$.

Dann ist $N = 7$, $e = 2$ und daher wegen (3b) $h = 1$, $D = 2$.

In diesem Falle erhält man aus (8)

$$R = \frac{28 + 7z + U}{9}.$$

Wegen der für die Variablen geltenden Einschränkungen wird diese Gleichung höchstens von folgenden Zahlen erfüllt:

$z = 0$, dann $U = 8$, $R = 4$ und $E = 2 = D$, was im Widerspruch zu $D \neq E$ steht;

$z=1$, dann $U=1$, $R=4$ und $E=3$;
$z=2$, dann $U=3$, $R=5$ und $E=7=N$, was im Widerspruch zu $N \neq E$ steht.
Das führt auf folgende Lösung

$$\begin{array}{r} 2439 \\ +2439 \\ +2439 \\ \hline 7317. \end{array}$$

Da andere Fälle nicht existieren, hat die Aufgabe genau die angegebenen drei Lösungen.

Ma 10/12 ■2079 (I) Da laut Bericht der Handel stattgefunden hat, besitzt die Aufgabe eine Lösung.
Angenommen der Viehhändler habe zunächst für jedes Tier a Groschen verlangt, dann beträgt die Einsparung $a \cdot \frac{a}{100}$ Groschen, und es gilt

$a-\frac{a^2}{100}=21$. Daraus folgt
$100a-a^2=2100$ und
$a^2-100a+2100=0$.

Hieraus folgt, daß $a=70$ oder $a=30$ sein muß.
Im Falle $a=30$ hätte der Bauer 90 Groschen gehabt. Da 90 nicht durch 21 teilbar ist, entfällt diese Möglichkeit. Daher kann nur $a=70$ den Bedingungen der Aufgabe entsprechen. Laut Aufgabe wurden von dem ursprünglichen Preis (70 Groschen pro Tier) 70%, d. h. 49 Groschen, heruntergehandelt. Somit lautet der neue Preis 21 Groschen pro Tier, und das gesamte Geld von 210 Groschen, das bei dem alten Preis für genau 3 Tiere reichte, wurde bei dem neuen Preis (für eine Anzahl von Tieren) vollständig ausgegeben, da 210 durch 21 teilbar ist.
Diese Anzahl betrug somit 10.

Ma 10/12 ■2080 Die Summe s der natürlichen Zahlen von 1 bis n ist laut Zahlentafel $s=\frac{n(n+1)}{2}$.

a) Angenommen, für eine natürliche Zahl n sei s eine zweistellige Zahl aus zwei gleichen Ziffern. Dann ist s, also auch $2s=n(n+1)$ durch 11 teilbar. Da 11 Primzahl ist, ist somit entweder n oder $n+1$ durch 11 teilbar. Wäre $n \geqq 14$, so wäre $s \geqq 7 \cdot 15 > 100$, also nicht zweistellig. Daher ist $n<14$, $n+1<15$, so daß entweder $n=11$ oder $n+1=11$, d. h. $n=10$ folgt.
Tatsächlich erhält man für $n=11$ den Wert $s=\frac{11 \cdot 12}{2}=66$ und für $n=10$ entsprechend $s=\frac{10 \cdot 11}{2}=55$; also ist für $n=10$ und $n=11$ die Bedingung a) erfüllt.
b) Angenommen, für eine natürliche Zahl n sei s eine dreistellige Zahl aus drei gleichen Ziffern. Dann ist s, also auch $2s=n(n+1)$ durch 111 teilbar. Wäre $n \geqq 45$, so wäre $s \geqq 45 \cdot 23 > 1000$, also nicht dreistellig. Daher ist $n<45$, $n+1<46$.
Also muß wegen $111=3 \cdot 37$ und, weil 3 und 37 Primzahlen sind, einer der beiden Faktoren n, $n+1$ durch 3 teilbar und der andere gleich 37 sein. Da $n+1$ für $n=37$ nicht durch 3 teilbar ist, verbleibt nur $n+1=37$. Tatsächlich erhält man dabei $s=\frac{36 \cdot 37}{2}=666$, also eine dreistellige Zahl aus drei gleichen Ziffern als einzige Lösung.

Ma 10/12 ■2081 Eine reelle Zahl $x(\neq -3)$ erfüllt genau dann (1), wenn

$$-\frac{2}{5} \geqq \frac{3}{x+3} \text{ gilt.} \qquad (2)$$

Für alle $x > -3$ ist $\frac{3}{x+3}$ positiv, also (2) nicht erfüllt. Für $x < -3$ ist (2) gleichbedeutend mit jeder der Ungleichungen

$-2(x+3) \leqq 15$,
$x+3 \geqq -7{,}5$,
$x \geqq -10{,}5$.

Also wird (2) und folglich ebenso auch (1) genau von denjenigen Zahlen x erfüllt, für die $-10{,}5 \leqq x < -3$ gilt.

Lösungen zu: alpha-heiter

Guter Rat

Mit $a>b>c$ laute die Differenz
$100a+10b+c-(100c+10b+a)$.
Wegen $c<a$ übertragen wir 10 aus den Zehnern, also rechnen wir $10+c-a$ (Einer). Bei den Zehnern rechnen wir entsprechend. Da $10b-10<10b$, rechnen wir $100+(10b-10)-10b$; das sind $90=9 \cdot 10$ (also 9 Zehner). Bei den Hundertern müssen wir dann rechnen $(100a-100)-100c$. Das sind $100(a-c-1)$.
Also nun:
$100(a-c-1)+9 \cdot 10+(10+c-a)$
$+100(10+c-a)+9 \cdot 10+(a-c-1)$
Das ergibt dann:

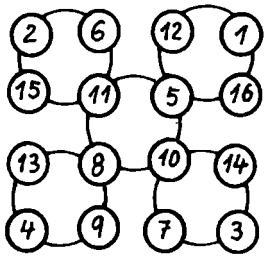
$$\begin{array}{rl} 100(a-c-1+10+c-a)=100 \cdot 9=900 & \\ +9 \cdot 10+9 \cdot 10=90+90=180 & \\ +10+c-a+a-c-1= & 9 \\ \text{Wir erhalten stets} & 1089 \\ \text{Addieren wir jetzt} & 13865 \end{array}$$

so ergibt das 14954 und „entziffert": Lerne!

Kreuzzahlrätsel

1 4	2 2	3 8	4 2	5 5
6 6	1	7 4	8 3	2
9 6	6	1	6	6
10 5	11 1	12 2	1	13 2
14 6	7	6	15 8	7

Magische Kreise



Geburtsjahr gesucht
$1902+1930+1945+1965+1937=9679$

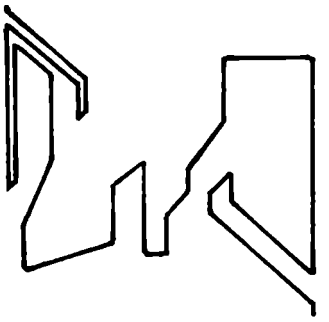
Silbenrätsel
Lösungswort: Olympiade

Kryptarithmetik

$$\begin{array}{rcl} 8:2=4 & \text{oder} & 8:4=2 \\ : \;\; : \;\; + & & : \;\; : \;\; + \\ \hline 1+2=3 & & 1+4=5 \\ \hline 8-1=7 & & 8-1=7 \end{array}$$

$84763+157+8310=93230$;
$302757:97=3121$

Irrgarten



Lösungen zu: Optimale Reihenfolge

1. Die günstigsten Reihenfolgen sind (D, E, F, C, A, B) und (D, F, E, C, A, B) mit je 145 min Gesamtwartezeit.
2a. (3, 4, 2, 1)
2b. (D, F, A, E, C, B) und (F, D, A, E, C, B)
3a. Die Reihenfolge (Wohnung 2, Wohnung 3, Treppenhaus, Wohnung 1, Keller) erfordert 22 Arbeitstage.
3b. Bei der Reihenfolge (D, E, F, C, A, B) werden die Liegekosten am kleinsten; insgesamt 1015000 Mark. Die Entladung ist nach 24 Stunden beendet. Bei den Reihenfolgen (D, E, C, B, F, A) und (D, E, C, B, A, F) ist die Entladung am schnellsten beendet: nach 22 Stunden. Die Liegekosten belaufen sich aber auf 1091000 bzw. 1097000 Mark.

Lösung des Kreuzworträtsels

(IV. U.-Seite)

I. Waagerecht: 5. Detonation, 6. Transformation, 7. RT, 9. Ta, 11. Sechseck, 12. Möbius, 13. 19, 14. 91, 18. Meer, 22. Kosmos, 24. Gent, 25. Usus, 27. old, 28. tla, 29. NVA, 31. RFT, 32. Giga, 34. Diaz, 35. Nernst, 36. Rast, 39. 16, 40. 71, 41. Kepler, 42. Variable, 47. Mn, 48. AN, 49. Parallelogramm, 54. Rauminhalt, 57. Bor, 58. WPU, 59. NTZ, 60. Nis, 62. Sn, 63. Ca, 64. PS, 65. Ti, 67. Ra, 69. ES, 70. Es, 72. Ne, 75. Ina, 76. Tee, 77. Weg, 78. Inn.
II. Senkrecht: 1. MTS, 2. Hof, 3. atm, 4. Dia, 7. Re, 8. Tc, 9. Te, 10. Ac, 13. 19, 15. 18, 16. Hankel, 17. Galois, 18. Mond, 19. est, 20. Emu, 21. Rost, 22. Kelvin, 23. Sulfat, 24. Gong, 26. Satz, 30. Ager, 31. Rist, 33. Ara, 34. DNS, 37. 61, 38. 81, 43. Am, 44. Rn, 45. Ba, 46. In, 50. Lux, 51. Imh, 52. Ohr, 53. Gas, 55. Kongruenzsätze, 56. Proportion,

Aufgaben aus Freundesland

Wir stellen unseren *alpha*-Lesern ausgewählte Aufgaben aus der ČSSR, die sicher das Interesse vieler finden werden, und wir wünschen Erfolg beim Lösen dieser Aufgaben.

▲1▲ Ein Dreieck ABC habe die Seitenlängen $a=9\,\text{cm}$, $b=4\,\text{cm}$ und $c=6\,\text{cm}$. Die Punkte P, Q und R seien in der gegebenen Reihenfolge Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$. Es ist die Länge des Umfangs des Dreiecks PQR zu berechnen.

▲2▲ Eine LPG bestellte ein trapezförmiges Feld, dessen parallele Grundseiten 280 m und 220 m lang sind und dessen Höhe die Länge 140 m besitzt, mit Zuckerrüben. Je Hektar wurden durchschnittlich 38 t Zuckerrüben geerntet.
Wieviel Tonnen Zucker erbrachte die Ernte, wenn der Zuckergehalt der Zuckerrüben 16% betrug?

▲3▲ Auf der Seite $\overline{AB}$ eines Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge $a=6\,\text{cm}$ ist ein innerer Punkt P so festzulegen, daß $\overline{AP}$ die Länge 2 cm hat. Das Quadrat $ABCD$ ist an der Geraden $\overline{CP}$ als Symmetrieachse zu spiegeln; sein Bild sei $A'B'C'D'$.

▲4▲ Das Material für ein Bauvorhaben wurde auf drei LKW mit unterschiedlicher Ladekapazität verladen. Die Masse der Ladung des zweiten LKW war um 20% größer als die des ersten LKW. Die Masse der Ladung des dritten LKW war um 20% größer als die des zweiten LKW. Insgesamt wurden von allen drei LKW 18,2 t Material geladen.
Berechne die Masse der Fracht für jeden der drei LKW!

▲5▲ Die Kanten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BC}$ eines Quaders $ABCDEFGH$ haben die Länge 12 cm bzw. 5 cm. Die Raumdiagonale $\overline{AG}$ bildet mit der Diagonalen $\overline{AC}$ der Grundfläche einen Winkel, dessen Größe um 20° kleiner ist als die Größe des Winkels, der von der Raumdiagonalen $\overline{AG}$ und der Kante $\overline{CG}$ gebildet wird.
Es ist das Volumen des Quaders zu berechnen.

▲6▲ Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $a=6\,\text{cm}$.
Es ist ein Kreis k zu konstruieren, der die Quadratseiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ berührt und durch den Punkt D geht. Die Konstruktion ist zu begründen.

61. Analysis, 62. Sc, 64. Pt, 66. Frequenz, 68. As, 71. Se, 73. Scheitelwinkel, 74. Einermenge.
III. Von links oben nach rechts unten: 1. Ulme, 2. Geel, 3. BAM, 4. Ire, 7. Lot, 8. TP, 9. Ni, 11. km, 14. mm, 16. Br, 17. EOS, 18. nm, 21. Heu, 22. Irre, 23. Mann, 24. Ede.
IV. Von rechts oben nach links unten: 27. Rehe, 28. Dill, 29. Set, 30. Lew, 33. Pik, 34. Li, 35. Er, 37. Ga, 40. Ag, 42. La, 43. Phi, 44. ha, 47. Chi, 48. Hirn, 49. anal, 50. sin.
V. Auf den oberen Kreisbahnen (math. negativer Umlaufsinn): 3. Blei, 5. Kamera, 6. Wärmelehre, 8. Ton, 10. Optik, 12. IMO, 29. Seil, 31. Fehler, 32. Mittelwert, 34. Lie, 36. Mikro, 38. Wal.
VI. Auf den unteren Kreisbahnen (math. positiver Umlaufsinn): 13. IMU, 15. Ebene, 19. Rom, 20. Archimedes, 25. Gerade, 26. Urne, 39. Hai, 41. alpha, 45. AHA, 46. Stochastik, 51. Chinin, 52. Iran.
Lösungswort: *Erster Mathematikerkongress der DDR 1981*

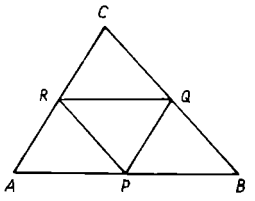
Lösungen

▲1▲ Die Verbindungsgerade der Mittelpunkte zweier Dreieckseiten ist parallel zur dritten Dreieckseite. Folglich sind die Vierecke $APQR$ und $PBQR$ Parallelogramme, und es gilt $\overline{AR}\cong\overline{PQ}$, $\overline{AP}\cong\overline{QR}$, $\overline{BQ}\cong\overline{PR}$. Für den Umfang des Dreiecks PQR gilt somit

$$u=\frac{1}{2}\cdot(a+b+c)=\frac{1}{2}\cdot(9+4+6)\,\text{cm}=9{,}5\,\text{cm}.$$

(Bild 1)

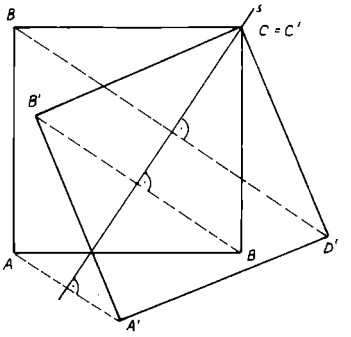
Bild 1



▲2▲ $A=\frac{1}{2}\cdot h\cdot(a+c)=$
$\frac{1}{2}\cdot 140\cdot(280+220)\,\text{m}^2=35000\,\text{m}^2$
$=3{,}5\,\text{ha};\ x=3{,}5\cdot 38\cdot\frac{16}{100}\,\text{t}=21{,}28\,\text{t}.$
Die Ernte erbrachte 12,28 t Zucker.

▲3▲ Die Konstruktion ist der Zeichnung zu entnehmen. (Bild 2)

Bild 2

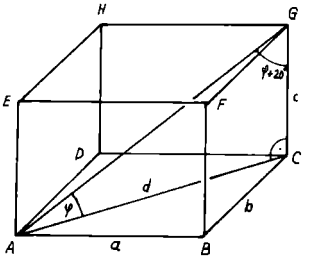


▲4▲
1. LKW: $x\,\text{t}$
2. LKW: $\left(x+\frac{20}{100}\right)\text{t}=1{,}2x\,\text{t}$
3. LKW: $1{,}2x\,\text{t}+\frac{20\cdot 1{,}2x}{100}\,\text{t}=1{,}44x\,\text{t}$

Insgesamt: $3{,}6x\,\text{t}$
Nun gilt $3{,}64\cdot x=18{,}2$, also $x=5$.
Die Ladung des ersten LKW betrug 5 t, die des zweiten 6 t und die des dritten 7,2 t.

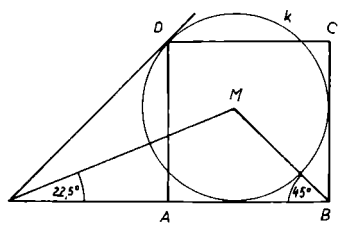
▲5▲ Die Länge von $\overline{AC}$ beträgt $d=\sqrt{144+25}\,\text{cm}=13\,\text{cm}$. Für das Dreieck ACG gilt $\phi+(\phi+20°)=90°$, also $\phi=35°$. Für die Länge c der Seite $\overline{CG}$ gilt dann $c=13\cdot\tan 35°$ und somit $V=abc=$
$12\cdot 5\cdot 13\cdot\tan 35°\,\text{cm}^3\approx 546\,\text{cm}^3$. (Bild 3)

Bild 3



▲6▲ Der Mittelpunkt M des zu konstruierenden Kreises k liegt auf der Winkelhalbierenden des Winkels ABC und auf der Winkelhalbierenden des Winkels AED. Auf Grund der vorliegenden Symmetrieeigenschaften hat der Winkel AED die Größe 45°. (Bild 4)

Bild 4



Übersetzung: OL F. Kriesche, Eilenburg
Bearbeitung: StR Th. Scholl, Berlin

Kreuzworträtsel

Fortsetzung der IV. Umschlagseite

II. Senkrecht: 1. Landtechnische Station der fünfziger Jahre (K), 2. durch Lichtbeugung hervorgerufene atmosphärische Lichterscheinung, 3. bisher gebräuchliche Druckeinheit ($= 101325 \frac{N}{m^2}$), 4. Diapositiv (K), 7. Metall, OZ 75 (S), 8. künstlich herstellbares Metall, früher auch Masurium genannt (S), 9. chem. Element, OZ 52 (S), 10. radioaktives Element, 1899 von Debierne entdeckt (S), 13. Lösung der Gleichung $114 - 5x = x$, 15. kleinste durch 9 teilbare gerade natürliche Zahl, 16. deutscher Mathematiker (1839 bis 1873), 17. französischer Mathematiker (1811 bis 1832), 18. Himmelskörper, 19. lateinisches Zeitwort, 20. straußenähnlicher Vogel, 21. Zersetzungsschicht an Eisenmetallen, 22. Temperatureinheit, 23. Säurerest der Schwefelsäure, 24. Signalgerät, 26. Form mathematischer Aussagen, 30. altrömisches Staatsland in den eroberten Ländern, 31. Fußrücken, 33. Sittichpapagei, 34. Desoxyribonukleinsäure (K), 37. Primzahl p mit $60 < p < 70$, deren Quersumme eine einstellige Primzahl ist, 38. addiert man zu der gesuchten Zahl die Basiszahl des Dezimalsystems, so erhält man die Lösung von 14. waagerecht, 43. radioaktives Element, OZ 95 (S), 44. radioaktives Edelgas, 45. Erdalkalimetall (S), 46. Logarithmus zur Basis e (K), 50. Einheit der Beleuchtungsstärke, 51. Maßeinheit der Lichtmenge, 52. Organ zur akustischen Wahrnehmung, 53. Aggregatzustand der Materie, 55. mathematische Aussagen über deckungsgleiche Dreiecke, 56. Verhältnisgleichung, 61. Teilgebiet der Mathematik, 62. seltenes Erdmetall, OZ 21 (S), 64. Schwermetall (S), 66. Begriff aus der Schwingungslehre, 68. chem. Element, tritt in grauer metallischer und gelber nichtmetallischer Modifikation auf (S), 71. chem. Element, Halbleiter (S), 73. an sich schneidenden Geraden auftretende Winkel, 74. Menge, die genau ein Element enthält.

III. Von links oben nach rechts unten:
1. Laubbaum, 2. Stadt in Belgien, 3. bedeutsamer Schienenweg der Sowjetunion (K), 4. Einwohner eines europäischen Staates, 7. geometrischer Begriff, 8. Hilfspunkt für die Landvermessung (K), 9. Metall (S), 11. Einheit für geographische Entfernungsangaben (K), 14. Längeneinheit (K), 16. Halogen, OZ 35 (S), 17. Bildungseinrichtung der DDR (K), 18. kleine Längeneinheit (K), 21. natürlich getrocknete grüne Futterpflanzen, 22. Geistesverwirrung, 23. maskuline Person, 24. eine Titelgestalt eines Kinderbuches von Alex Wedding.

IV. Von rechts oben nach links unten:
27. Waldtiere, 28. Gewürzpflanze, 29. Maßeinheit für die Breite der Monotypeschrift, 30. bulgarische Währungseinheit, 33. Bergspitze, 34. das leichteste Metall (S), 35. chem. Element, OZ 68 (S), 37. Metall, OZ 31 (S), 40. Edelmetall (S), 42. chem. Element, OZ 57 (S), 43. griechischer Buchstabe, 44. Flächenmaß (K), 47. griechischer Buchstabe, 48. Hauptteil des Zentralnervensystems (K), 49. medizinischer Begriff, 50. periodische Funktion (K).

V. Auf den oberen Kreisbahnen (math. negativer Umlaufsinn):
3. Schwermetall, 5. fotografisches Aufnahmegerät, 6. Teilgebiet der Physik, 8. sinusförmige Schallschwingung im hörbaren Frequenzbereich, 10. Teil der Lehre von den elektromagnetischen Wellen, 12. mathematischer Wettstreit (K), 29. Hilfsmittel für Bergsteiger, 31. Abweichung vom wahren Wert einer Größe, 32. Erwartungswert einer Zufallsgröße, 34. norwegischer Mathematiker (1842 bis 1899), 36. Kurzzeichen vor Maßeinheiten, 38. Meeressäugetier.

VI. Auf den unteren Kreisbahnen (math. positiver Umlaufsinn):
13. Internationale Mathematikerunion (K), 15. geometrisches Gebilde, 19. Hauptstadt Italiens, 20. griechischer Mathematiker und Naturforscher (um 287 bis 212 v. u. Z.), 25. geometrischer Begriff, 26. Behältnis, 39. Raubfisch, 41. mathematische Schülerzeitschrift der DDR, 45. populärwissenschaftliche Jugendsendung des DDR-Fernsehens, 46. Teilgebiet der Mathematik, 51. Alkaloid der Chinarinde, 52. Staat in Mittelasien.

Die Buchstaben und Ziffern der im folgenden angegebenen Kästchen weisen bei richtiger Auflösung und in entsprechender Reihenfolge gelesen auf ein für die mathematische Wissenschaft der DDR bedeutsames Ereignis hin, das in Kürze in Leipzig stattfinden wird:

I/II: 19, 21, 23, 28, 19, 54
1, 10, 28, 16, 19, 47, 48, 65, 75, 22, 19, 54, 55, 27, 29, 32, 36, 19, 62, 71
III/VI: 28, 35, 19
28, 28, 27
I/II: 13, 14, 38, 39

R. Mildner

Spezialschule für Mathematik

Die Spezialschule für Mathematik und Physik an der Humboldt-Universität zu Berlin fördert seit nunmehr 17 Jahren mathematische Talente. Die Schüler studieren anschließend Mathematik und Physik oder werden als Lehrer in der Fachkombination Mathematik/Physik ausgebildet.

Nach Abschluß der 10. Klasse werden an der Spezialschule in zwei Jahren neben einer soliden Ausbildung in allen Fächern der Abiturstufe breite und tiefe Kenntnisse in den Fächern Mathematik und Physik vermittelt

Schüler, die ihren Hauptwohnsitz nicht in Berlin haben, werden in Studentenheimen der Humboldt-Universität untergebracht.

Mathematiksendungen im Schulfunk

RADIO DDR II

Sicher haben viele von euch schon Schulfunksendungen gehört. Manchem ist aber vielleicht nicht bekannt, daß es seit einigen Jahren auch Mathematikschulfunksendungen gibt. Die Sendungen bauen auf dem Stoff, der im Mathematikunterricht bzw. in den Arbeitsgemeinschaften vermittelt wurde, auf. Sie ergänzen, vertiefen und bereichern das angeeignete Wissen vor allem in zwei Richtungen.

Erstens werden Sendungen ausgestrahlt, die die Bedeutung der Mathematik in der Produktion, im alltäglichen Leben demonstrieren. Dabei wird gezeigt, welches mathematische Wissen und Können erforderlich ist, um den gestellten Anforderungen in den verschiedenen Berufen gerecht zu werden. Zweitens gehen diese Sendungen der historischen Entwicklung der Mathematik nach. Dabei könnt ihr erfahren, auf welch oft kompliziertem Wege mathematische Erkenntnisse gewonnen und angewendet wurden und welchen Nutzen sie heute noch haben. Die Sendungen sind so gestaltet, daß ihr Einblick nehmen könnt in die Gedankenwelt großer Erfinder und Entdecker und mit ihnen die „Abenteuer der Erkenntnis" – wie Einstein einmal sagte – erlebt. Es wird gezeigt, welche Probleme und Schwierigkeiten, Wege und Irrwege von den Mathematikern überwunden wurden, um zu neuen Erkenntnissen zu gelangen. Dabei wird zugleich deutlich, daß sich die Mathematik stets in Abhängigkeit von den gesellschaftlichen Bedürfnissen, den Erfordernissen der Praxis entwickelt hat.

Folgende Mathematikschulfunksendungen werden im Schuljahr 1981/82 ausgestrahlt: (Die Schulfunksendungen werden vom Sender Radio DDR II ausgestrahlt. Die Angaben erfolgen nur für das Fach Mathematik. Die verwendeten Symbole bedeuten: Kl = Klassenstufe; T = Termin.)

1. Zur Geschichte der Entwicklung und Einführung der Symbolik in die Mathematik
Kl. 8, 9 T.: 1. 9. 1981, 13.30 Uhr
Bereits in der Antike erkannte man die Vorteile einer mathematischen Symbolik. Zunächst wurde eine gewisse Übersichtlichkeit bei der Formulierung mathematischer Theorien und bei der Lösung von Aufgaben durch die Verwendung von Abkürzungen, meist Anfangs- oder Endbuchstaben der Zahlen oder mathematischen Operationen, erreicht. Der Prozeß der Entwicklung und Einführung der Symbolik – so wie sie uns heute bekannt ist – war sehr langwierig. Welche Mathematiker sich um die Entwicklung und Einführung einer einheitlichen Symbolik in die Mathematik verdient gemacht haben, und welche Schwierigkeiten sie dabei zu überwinden hatten, kann man in dieser Sendung erfahren.

---

2. Adam Ries – Rechenmeister zu Annaberg-Buchholz
Kl. 6 bis 8 T.: 29. 10. 1981, 17.15 Uhr
5. 11. 1981, 10.15 Uhr
Nach Adam Ries macht es...! Dieser Ausspruch wird heute noch oft verwendet, um die Richtigkeit eines Ergebnisses zu beweisen. Warum wir Adam Ries als Zeugen für die Richtigkeit eines mathematischen Ergebnisses benennen, welche Leistungen er auf dem Gebiet der Mathematik vollbracht hat, wird in dieser Sendung dargestellt.

---

3. Die Ähnlichkeitslehre, ihre Anwendung in der Praxis
Kl. 8 T.: 24. 11. 1981, 13.30 Uhr
In dieser Sendung wird erläutert, wie Thales von Milet mit Hilfe der Kenntnis des Strahlensatzes die Höhe der Pyramide aus der Länge ihres Schattens berechnete, wie der Kapitän eines in Seenot geratenen Schiffes mit einem zerbrochenen Jakobstab seine Position auf hoher See bestimmen konnte. Die Sendung bringt auch Beispiele vom großen Nutzen der Ähnlichkeitslehre für unsere Volkswirtschaft (Schiffbau). In der Sendung wird deutlich, wie sich die Ähnlichkeitslehre zu einer selbständigen mathematischen Disziplin entwickelt hat.

---

4. Zur Entwicklungsgeschichte der Trigonometrie
Kl. 10 T.: 26. 11. 1981, 17.15 Uhr
3. 12. 1981, 10.15 Uhr
Im 15./16. Jahrhundert stellte die Schiffahrt, die sich von den Küsten lösen und die hohe See erreichen wollten, erhöhte Forderungen an Nautik, Astronomie und damit letztlich an die Trigonometrie. Es wurde an Ansätzen aus der Antike und an Kenntnisse aus dem islamischen Kulturgebiet angeknüpft und zunächst astronomische und trigonometrische Tafeln entwickelt. Man begann, sich verstärkt mit der Trigonometrie zu beschäftigen und sie als eine mathematische Disziplin zu begründen. Welche Mathematiker dabei eine entscheidende Rolle spielten, erfährt man in dieser Sendung.

---

5. Geschichten von Riesenzahlen
Kl. 7 bis 10 T.: 21. 1. 1982, 17.15 Uhr
28. 1. 1982, 10.15 Uhr
In dieser Sendung wird erläutert, was alles passieren kann, wenn man die Potenzgesetze nicht beherrscht. Im Mittelpunkt stehen zwei Anekdoten:
1. Belohnung: Der Heerführer Terentius kehrt nach einem siegreichen Feldzug nach Rom zurück. Der Kaiser belohnt ihn auf eine ganz ungewöhnliche Weise.
2. Das Schachspiel: Der indische Kaiser Sheram war begeistert von der Scharfsinnigkeit und Vielfalt der möglichen Situationen beim Schachspiel. Er möchte den Erfinder dieses Spieles belohnen, was ihm letztlich nicht möglich war.

---

6. Anwendungen mathematischer Modelle bei Rationalisierungsvorhaben
Kl. 9 bis 12 T.: 28. 1. 1982, 17.15 Uhr
4. 2. 1982, 10.15 Uhr
Es werden in jeweils 15 Minuten zwei Beispiele der Anwendung der Mathematik erläutert:
1. Entwicklung des Werkzeug- und Rationalisierungsmittelbaus der Betriebe im Kreis Suhl: Es wurde ein Modell erarbeitet, das die Einrichtung eines zentralen Materiallagers mit mechanisierter Lagertechnologie und EDV-orientierter Lagerhaltung, Havarie- und Reparaturdienst für Kleinbetriebe und Konstruktionsabteilungen für die Betriebe im Kreis Suhl erforderlich machte.
2. Verbesserung des Arbeiter- und Berufsverkehrs: Es wurde ein Modell erarbeitet, das bei der Realisierung des Arbeiter-, Berufs- und Personenverkehrs in einem abgeschlossenen Territorium die auftretenden Kosten aller beteiligten Betriebe und Einrichtungen minimierte, bei gleichzeitiger Maximierung des Gewinns, bei Realisierung optimaler Arbeits- und Lebensbedingungen der Werktätigen und bei Nichtbeeinträchtigung des Produktionsprozesses.

---

7. Sonja Kowalewskaja
Kl. 9 bis 12 T.: 11. 3. 1982, 17.15 Uhr
18. 3. 1982, 10.15 Uhr
In dieser Sendung wird gezeigt, wie schwer es Frauen noch im 19. Jahrhundert hatten, eine wissenschaftliche Ausbildung zu erhalten und für ihre wissenschaftlichen Leistungen Anerkennung zu finden. Sonja Kowalewskaja beschäftigte sich nicht nur mit der mathematischen Theorie, sondern sie war bestrebt, die gewonnenen Erkenntnisse auf Probleme der Praxis anzuwenden.

---

8. Zahlen, Zeichen und Systeme – Ungleichungssysteme und ihre Anwendung in der Praxis
Kl. 9 bis 12 T.: 23. 3. 1982, 13.30 Uhr
In dieser Sendung erfährt man, unter welchen Bedingungen die Optimierungsrechnung entstand und welche Verantwortung der Mathematiker für seine gewonnenen Ergebnisse trägt. Am Beispiel des rentabelsten Anbauverhältnisses (Roggen, Kartoffeln) für ein durch Melioration gewonnenes Feld werden die wesentlichen Schritte der Optimierungsrechnung erläutert. Weitere Beispiele demonstrieren die enorme Bedeutung der Optimierungsrechnung in unserer Volkswirtschaft.

---

9. Anwendung mathematischer Modelle im Verkehrswesen
Kl. 9 bis 12 T.: 25. 3. 1982, 17.15 Uhr
1. 4. 1982, 10.15 Uhr
22. 6. 1982, 13.30 Uhr
Es werden in jeweils 15 Minuten zwei Beispiele der Anwendung der Mathematik erläutert:
1. Rechnergesteuerte Ampeln: Das Steuergerät für die mikrorechnergesteuerte Ampelregelung im Straßenverkehr hat die Aufgabe, die Verkehrssicherheit zu erhöhen, Wartezeiten an den Verkehrsknotenpunkten zu reduzieren und der Straßenbahn Vorrang einzuräumen. Man errechnete an einer mit dem Gerät ausgestatteten Kreuzung eine jährliche Einsparung von 5000 Liter Kraftstoff und 15000 kWh Elektroenergie.
2. Automaten für den Fahrkartenverkauf: Für Einzelfahrscheine im S-Bahnbereich wurden Automaten und für Zeit- und Fernfahrkarten Dialogautomaten entwickelt. Die Funktions- und Wirkungsweise dieser Automaten werden erläutert.

---

10. Überblick über die Anfänge der Rechenkunst
Kl. 6 bis 9 T.: 1. 6. 1982, 13.30 Uhr
Die Sendung wird die Entwicklung der Zähl- und Rechenhilfsmittel bis zum 17. Jahrhundert darstellen. Man erfährt, wie solche Ausdrücke, wie „seine Rechnung glattmachen", „etwas auf dem Kerbholz haben" entstanden sind und welche Bedeutung sie hatten. Die Entwicklung, Funktionsweise und Anwendung der ersten Rechenhilfsmittel werden erläutert.

---

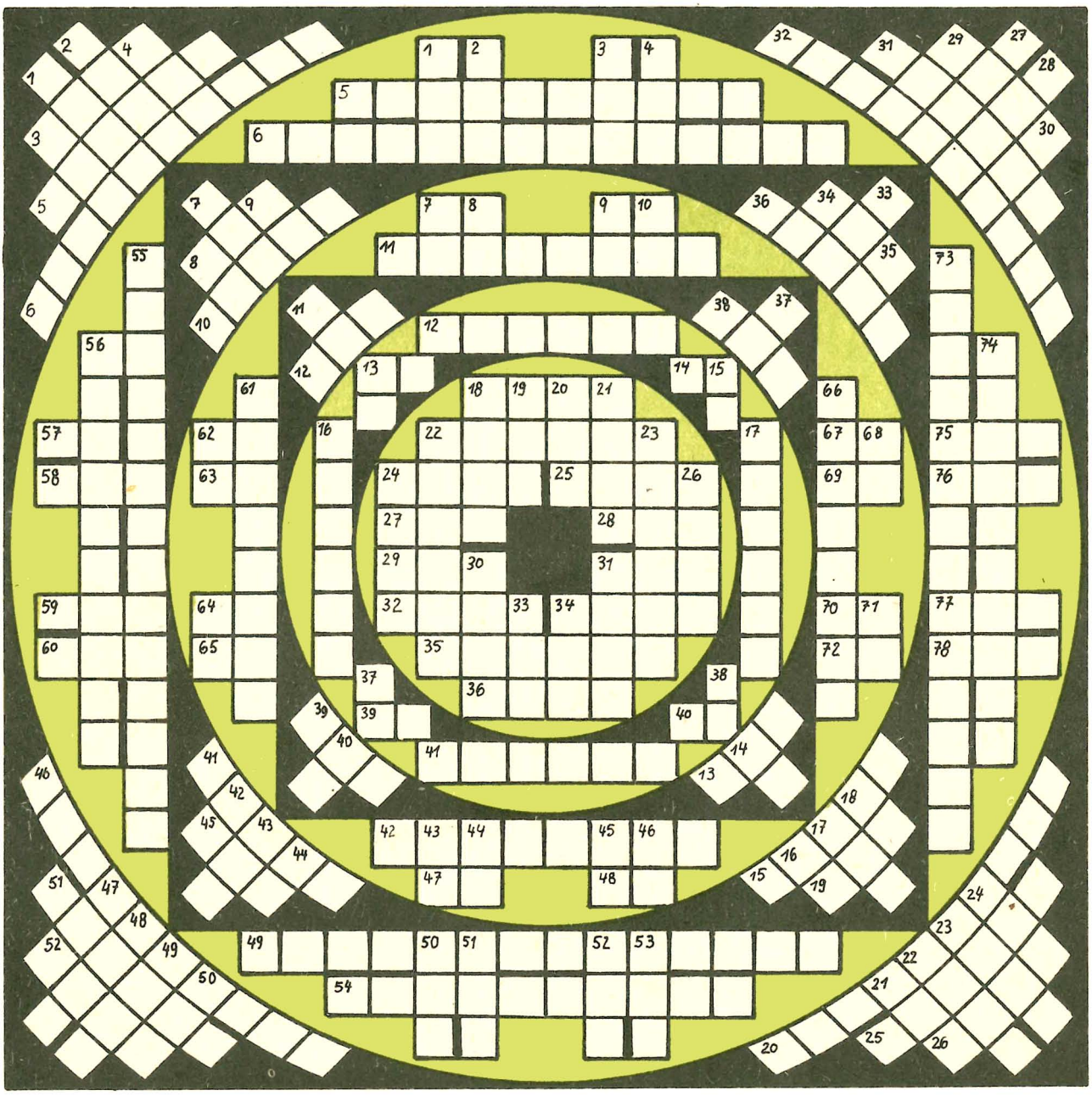
11. Geschichte der Rechenanlagen
Kl. 7 bis 12 T.: 15. 6. 1982, 13.30 Uhr
In dieser Sendung werden wesentliche Etappen des Prozesses von der Konstruktion erster mechanischer Rechenmaschinen bis zur Schaffung moderner elektronischer Rechenanlagen demonstriert. Es werden die Leistungen solcher Mathematiker, wie Schikkardt, Pascal, Leibniz und Babbage gewürdigt. Die Hörer werden über einige wichtige Einsatzgebiete von Computern und Tendenzen der künftigen Entwicklung auf diesem Gebiet informiert.

---

12. Zuwachs für die ESER-Familie
Kl. 7 bis 12 T.: 17. 6. 1982, 17.15 Uhr
24. 6. 1982, 10.15 Uhr
Vom Mini-Rechner bis zum Rechenkomplex mit 12 Millionen Operationen in der Sekunde: Innerhalb von nur zehn Jahren ist das Einheitliche System der elektronischen Rechentechnik (ESER) zu einem sich ständig weiterentwickelnden Komplex von Geräten geworden. Mit seiner Hilfe lassen sich verschiedene Systeme der Erfassung und Verarbeitung von Daten schaffen – von automatisierten Leistungssystemen in einzelnen Betrieben bis hin zu Zentren der kollektiven Nutzung im Rahmen eines ganzen Landes. Die ESER-Baureihe ist im Ergebnis der gemeinsamen Arbeit von Spezialisten der RGW-Länder entstanden.

S. Schwidtmann

Kreuzworträtsel



Aus Mathematik,
Naturwissenschaft und Technik

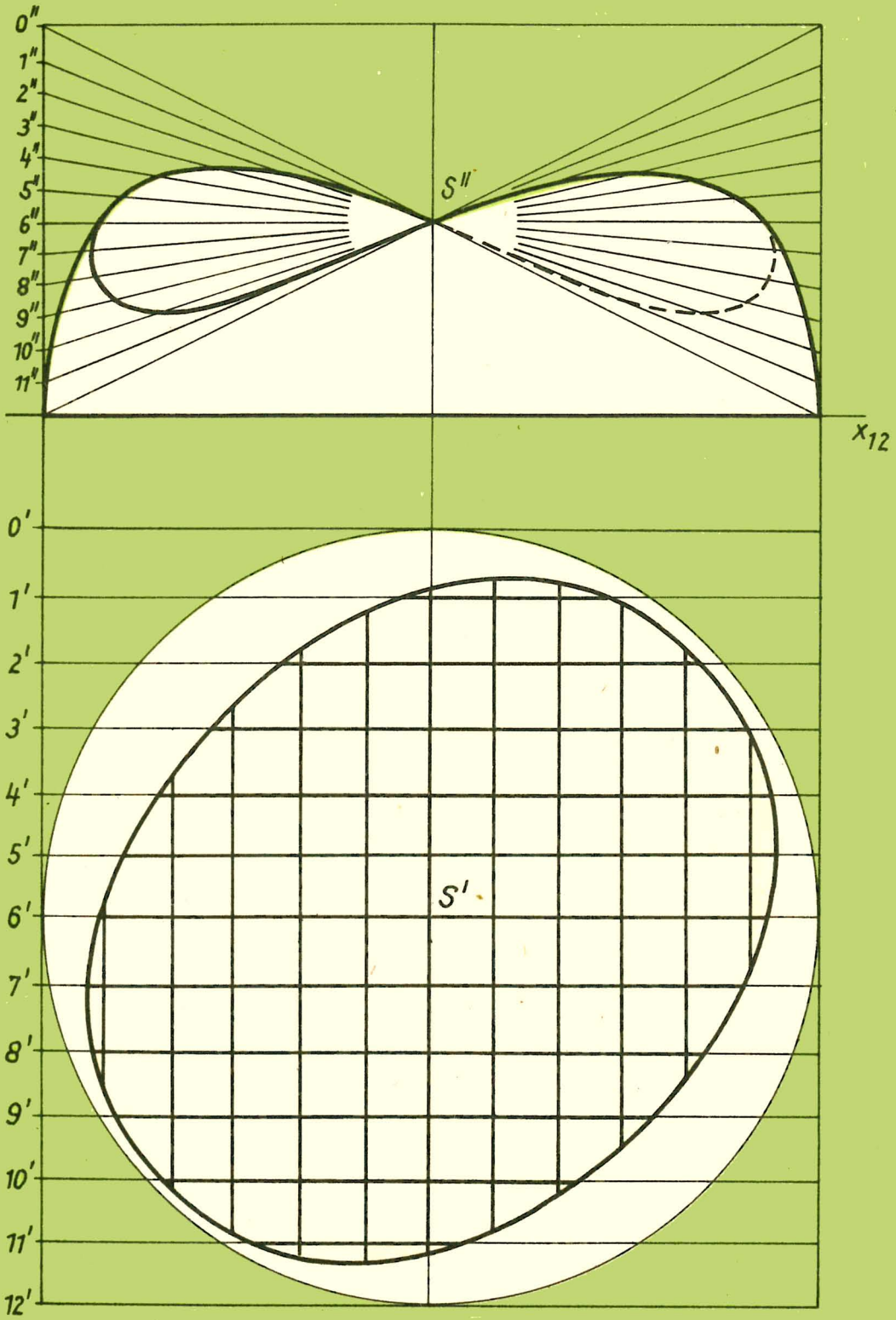
Abkürzungen:
OZ.. Ordnungszahl, (S).. Chemisches Symbol, (K).. Kurzbezeichnung

I. Waagerecht: 5. heftige Explosion, 6. Abbildung, Umwandlung, 7. Raummaß in der Schiffahrt (K), 9. chemisches Element, 1802 von Ekeberg entdeckt (S), 11. Vieleck, 12. Leipziger Mathematiker und Astronom (1790 bis 1868), 13. Primzahl p mit $10 < p < 30$ und der Quersumme 10, 14. dividiert man die gesuchte Zahl durch 13 und subtrahiert davon 6, so erhält man 1, 18. großes Gewässer, 22. Weltall, 24. Stadt in Belgien, 25. Sitte, Brauch (latein.), 27. alt (engl.), 28. ungerade Permutation der drei Buchstaben a, l, t, 29. Schutzorgan der DDR (K), 31. Rundfunktechnik (K), 32. Kurzzeichen vor Maßeinheiten, 34. portugiesischer Seefahrer (um 1450 bis 1500), 35. deutscher Physiker (1864 bis 1941), Nobelpreisträger, 36. Ruhepause, 39. die vierte Wurzel aus der gesuchten positiven Zahl ist gleich 2, 40. eine Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - 70x - 71 = 0$, 41. Mathematiker und Astronom (1571 bis 1630), entdeckte die Gesetze der Planetenbewegung, 42. veränderliche Größe, 47. eisenähnliches Metall, OZ 25 (S), 48. sowjetischer Flugzeugtyp, 49. spezielles Viereck, 54. Volumen, 57. chem. Element mit der relativen Atommasse 10,81, 58. Rostocker Universität (K), 59. Naturwissenschaftlich-Theoretisches Zentrum (K), 60. Stadt in Jugoslawien, 62. silberweißes, sehr geschmeidiges und dehnbares Metall (S), 63. Erdalkalimetall, 1808 von Davy entdeckt (S), 64. bisherige, vor allem in der Kraftfahrzeugtechnik gebräuchliche Leistungseinheit (K), 65. Metall, OZ 22 (S), 67. radioaktives chem. Element (S), 69. Motorrad-Typ, 70. radioaktives Element, nach dem Begründer der Relativitätstheorie benannt (S), 72. Edelgas (S), 75. Fluß in Polen, 76. asiatisches Gewächs, 77. physikalische Größe, 78. Nebenfluß der Donau.

Fortsetzung auf Seite 96

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



5

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
15. Jahrgang 1981
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Dozent Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Diplom-Lehrer C.-P. Helmholz)
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1080 Berlin, Krausenstraße 50 · Tel. 20430
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: LVZ, Repro, Leipzig (S. 99); Zoran Jovanovič, Novi Sad, SFR Jugoslawien (S. 102, S. 110); J. Lehmann, Leipzig (S. 103, S. 113); H. Büttner, Berlin (S. 111); Jiří Slíva, Praha (S. 112); Bild und Heimat, Reichenbach (S. 113); Thomas Schleusing, Gruppe 4 (S. 116, 117);
Titelblatt: W. Fahr, Berlin (nach einer Vorlage des Autors des Artikels S. 97/99)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128–ISSN 0002-6395

Redaktionsschluß: 1. Juli 1981

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

97 Von der zweiten in die dritte Dimension [9]*
Dr. E. Schröder, Sektion Mathematik der Technischen Universität Dresden

100 Einige mathematische Modelle und ihre Verwendung im Schiffbau [10]
Dr. W. Moldenhauer, Sektion Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule *Dr. Th. Neubauer* Erfurt/Mühlhausen

102 Alles dreht sich um den Kreis [8]
Oberstudienrat Th. Scholl, Berlin

103 XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [10]
Preisträger der DDR-Olympiade

104 Mathematikprüfungen in Äthiopien [9]
Dr. H. Büchel, Mühlhausen/Dr. W. Fregin, Leipzig

105 Bernard Bolzano [8]
Prof. Dr. H. Wußing, Karl-Sudhoff-Institut der Karl-Marx-Universität Leipzig

106 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht [4]
Speziell für Klassen 4 bis 7
Prof. Dr. N. I. Wilenkin, phys./math. Fakultät der *Päd. Fernhochschule* Moskau und N. K. Golumbkowa, wissenschaftl. Mitarb. im *Institut für allg. und päd. Psychologie* bei der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, Moskau

108 Eine Aufgabe von Prof. Dr. N. I. Wilenkin, Moskau

108 Über einige häufig vorkommende Summen [8]
Mathematikfachlehrer W. Träger, Schloßberg-OS Döbeln

110 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Wettbewerbsaufgaben Mathematik · Physik · Chemie

112 *alpha* stellt vor: Tilo Schaarschmidt, Goethe-Oberschule Bad Lauchstädt [5]
J. Lehmann, Leipzig

114 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/H. Pätzold, Waren/Müritz

116 Freitag, der Dreizehnte [5]
Auf der Spur rabenschwarzer Unglückstage mit Wochenpostreporter O. Pfeiffer

118 Lösungen [5]

III. U.-Seite: Aufgaben aus der Praxis [7]
Betriebs- und Verkehrseisenbahner stellen Aufgaben
Oberlehrer Diplom-Gewerbelehrer H. Schmidt, BBS Reichsbahnamt Leipzig/Oberstudienrat Th. Scholl, Berlin

IV. U.-Seite: Mathematisches Spiel [5]
stud. math. R. Lehmann, Berlin/stud. math. U. Quasthoff, Leipzig (ehemalige IMO-Teilnehmer)

*bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Von der zweiten in die dritte Dimension

Obwohl sich unser Leben und Wirken im dreidimensionalen Raum abspielt und wir fast ausschließlich mit dreidimensionalen Objekten umgehen, fällt es uns schwer, räumliche Vorgänge oder Lagebeziehungen vorstellungsmäßig zu erfassen und durch eine abstrakte Beschreibung in der Ebene zu charakterisieren. Dies soll hier durch ein Beispiel belegt werden. Aus der Erfahrung und aus dem Schulunterricht ist uns die Parabel eine bekannte Kurve. Wirft man einen Stein schräg nach oben, so stellt seine Flugbahn eine Kurve dar, die durch eine Parabel sehr gut angenähert wird. Diese Wurfparabel liegt in einer Ebene, welche auf der Erdoberfläche senkrecht steht. Man kann diese Kurve durch eine planimetrische Definition erfassen. Hierzu sind ein Punkt F und eine Gerade l in einer Ebene π vorzugeben. Dabei darf l den Punkt F nicht enthalten. Mit diesen Festlegungen lautet die Definition der Parabel: Die Gesamtheit aller Punkte der Ebene π, deren Abstände von einem festen Punkt F und einer festen Geraden l gleich groß sind, ist eine Parabel. F ist der Brennpunkt und l die Leitgerade dieser Parabel.

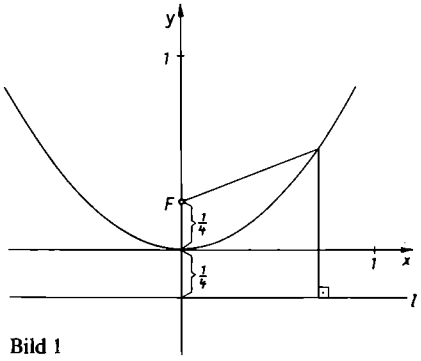


Bild 1
Parabel mit Brennpunkt und Leitgerade

Haben F und l die nach Bild 1 vorgegebenen Lagen bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems, so lautet die Gleichung der zugehörigen Parabel

$$y = x^2, \tag{1}$$

Mit unserer Definition haben wir also eine eindimensionale Punktmannigfaltigkeit (Kurve) in der zweidimensionalen Zeichenebene erfaßt. Der Schritt von der zweiten in die dritte Dimension läßt sich leicht durch Einführung einer Drehung um eine in der Zeichenebene liegende Achse bewerkstelligen. Rotiert z. B. die Parabel um ihre Achse (y-Achse), so entsteht ein Drehparaboloid. Die Fokaleigenschaft der Parabel überträgt sich dann automatisch auf die Drehfläche. F ist der Brennpunkt des Paraboloides. Liegt in F eine Lichtquelle, so werden alle von F ausgehenden Strahlen durch die auf der Innenseite spiegelnde Parabolfläche parallel zur Achse dieses Paraboloides reflektiert. Umgekehrt werden alle zur Achse der Fläche parallel einfallenden Strahlen so reflektiert, daß sie sich in F schneiden. Daraus resultieren wichtige Anwendungen dieser Fläche in der Praxis. Drehparaboloide finden in der Optik als Spiegel und in der Nachrichtentechnik und Astrophysik als Richtantennen zum Zwecke des Sendens und Empfangens energieschwacher Signale Verwendung.

Wir wollen uns den Schritt in den dreidimensionalen Raum jetzt etwas schwerer machen und geben zunächst zwei sich senkrecht kreuzende Geraden g und h vor. Das Wort „kreuzen" ist keineswegs mit dem Wort „schneiden" gleichzusetzen. Wir denken hierbei an eine Autobahnkreuzung, bei der eine Ampelregelung zur Vermeidung von Unfällen nicht erforderlich ist. Zwei Geraden g und h im Raum heißen windschiefe oder sich kreuzende Geraden, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt haben und auch nicht zueinander parallel sind. Der Kreuzungswinkel zweier windschiefer Geraden ist gleich dem Schnittwinkel zweier dazu paralleler, sich schneidender Geraden. Bei zwei sich senkrecht kreuzenden Geraden schneiden sich entsprechende Parallelen unter einem rechten Winkel. Wir können dabei etwa an das Hermsdorfer Kreuz denken.

Nun soll uns folgende Frage beschäftigen: Welches geometrische Objekt bildet die Menge aller Punkte, deren Abstände von zwei sich senkrecht kreuzenden Geraden g und h einander gleich sind?

Bemerkung: Unter dem Abstand eines Punktes P von einer Geraden g versteht man die Länge des von P auf g gefällten Lotes. Dieses Lot läßt sich stets eindeutig fällen (Bild 2).

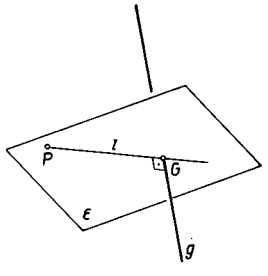


Bild 2 Lot von P auf g

Wir wollen die hier aufgeworfene Frage analytisch behandeln. Durch anschauliche Überlegungen ist leicht einzusehen, daß das gesuchte geometrische Objekt eine Fläche im Raum darstellt. Diese Fläche hat weder mit g noch mit h einen gemeinsamen Punkt. Weiterhin folgt aus der oben angeführten Parabeldefinition, daß eine Ebene α durch h senkrecht zu g diese Fläche nach einer Parabel schneidet. h ist die Leitgerade, und der Durchstoßpunkt Q von g durch α ist der Brennpunkt dieser Parabel. Entsprechendes gilt für die in der Ebene β durch g senkrecht zu h liegenden Schnittkurve.

Ein Schrägbild des dreidimensionalen Sachverhaltes in der zweidimensionalen Zeichenebene soll uns einen leichteren Zugang zu einem analytischen Ansatz eröffnen. Wir gehen von dem Schrägriß eines orthogonalen Achsendreibeins aus. Die x-Achse zeige im Raum nach vorn, die y-Achse nach rechts und die z-Achse nach oben. Auf jeder Achse werde, vom Ursprung 0 ausgehend, eine kartesische Skala mit gemeinsamer Längeneinheit abgetragen. Die Gerade g liege parallel zur x-Achse und gehe durch den Punkt $Q(0, 0, a)$. Die Gerade h liege parallel zur y-Achse und gehe durch den Punkt $R\ (0, 0, -a)$. Damit ist gesichert, daß sich die Geraden g und h im Abstand $2a$ senkrecht kreuzen (Bild 3).

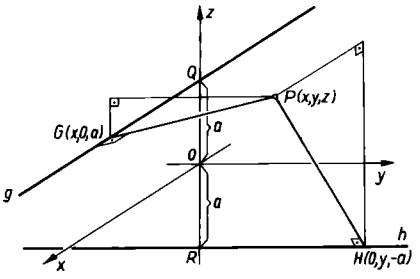


Bild 3
Schrägbild der sich rechtwinklig kreuzenden Geraden g und h

Von dem im Raum liegenden Punkt $P\,(x, y, z)$ werden angenommen, daß er die eingangs gestellten Forderungen erfüllt. Wir fällen die Lote von P auf g und h und erhalten die Lotfußpunkte $G\ (x, 0, a)$ bzw. $H\ (0, y, -a)$. Da P ein Punkt der im Raum ausgezeichneten Menge ist, muß gelten

$$m(PG) = m(PH). \tag{2}$$

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras bestehen die Gleichungen

$$m(PG) = \sqrt{y^2 + (z-a)^2},$$
$$m(PH) = \sqrt{x^2 + (z+a)^2}. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt

$$\sqrt{x^2 + (z+a)^2} = \sqrt{y^2 + (z-a)^2}. \tag{4}$$

Durch Quadrieren und Umordnen findet man weiter

$$4az = y^2 - x^2. \tag{5}$$

Das durch Gleichung (5) beschriebene geometrische Gebilde stellt eine Fläche zweiter Ordnung dar. Eine anschauliche Vorstellung von dieser Fläche Φ im Raum können wir uns dadurch verschaffen, daß verschiedene ebene Schnitte gelegt werden.

1. Schnitt von Φ mit der yz-Ebene: Setze in Gleichung (5) $x = 0$.

Man erhält $4az = y^2$ (6). Aus dem Vergleich von (6) mit (1) folgt, daß die Schnittkurve eine nach oben offene Parabel ist.

2. Schnitt von Φ mit der xz-Ebene: Setze in Gleichung (5) $y = 0$.

Man erhält $4az = -x^2$ (7). Die Schnittkurve ist eine nach unten offene Parabel.

3. Schnitt von Φ mit der xy-Ebene: Setze in Gleichung (5) $z = 0$.

Man erhält $y^2 - x^2 = 0$ (8). Die linke Seite von Gleichung (8) kann als Produkt zweier Faktoren geschrieben werden, nämlich

$$(y - x)(y + x) = 0. \quad (9)$$

Ein Produkt verschwindet, wenn einer seiner Faktoren zu Null wird. Aus (9) folgen daher die beiden Gleichungen

$$y = x \text{ und } y = -x. \quad (10)$$

Durch Gleichung (10) werden die Winkelhalbierenden der x- und y-Achse beschrieben. Wir sagen: Die Schnittkurve von Φ mit der xy-Ebene zerfällt in zwei Geraden mit den Gleichungen $y = x$ und $y = -x$.

4. Schnitt von Φ mit einer zur yz-Ebene parallelen Ebene: Setze in Gleichung (5) $x = k$. Man erhält $4az = y^2 - k^2$ (11). Die Schnittkurve ist eine nach oben offene Parabel. Aus dem Vergleich von (11) mit (6) folgt, daß sie auch durch Parallelverschiebung der in der Ebene α liegenden Parabel erzeugt werden kann.

5. Schnitt von Φ mit einer zur xz-Ebene parallelen Ebene: Setze in Gleichung (5) $y = k$. Man erhält $4az = k^2 - x^2$ (12). Die Schnittkurve ist eine nach unten offene Parabel. Aus dem Vergleich von (12) mit (7) folgt, daß sie auch durch Parallelverschiebung der in der Ebene β liegenden Parabel erzeugt werden kann.

Folgerungen: Auf der Fläche Φ liegen zwei Scharen kongruenter Parabeln. Die Parabeln je einer Schar gehen durch Parallelverschiebung auseinander hervor. Die Fläche Φ läßt sich auch dadurch erzeugen, daß man die in der xz-Ebene liegende Parabel längs der in der yz-Ebene liegenden Parabel parallel verschiebt, wobei der Scheitelpunkt der ersten Parabel auf der zweiten Parabel zu führen ist. Flächen, die sich in der hier angegebenen Weise erzeugen lassen, nennt man Schiebflächen. Die erste Parabel ist die erzeugende Kurve und die zweite Parabel ist die Leitkurve dieser Fläche. Wie leicht zu überschauen ist, können beide Parabeln ihre Rollen vertauschen. Schiebflächen haben wegen der besonderen Art ihrer Erzeugung für die Praxis eine vielfältige Bedeutung (Bild 4).

Mit den von uns bisher geführten ebenen Schnitten haben wir die Besonderheiten der Fläche Φ noch nicht voll ausgeschöpft.

6. Schnitt von Φ mit einer zu xy-Ebene parallelen Ebene: Setze in Gleichung (5) $z = k$. Man erhält $y^2 - x^2 = 4ak$. (13)

Durch Gleichung (13) wird eine Hyperbel beschrieben. Ist $k > 0$, liegen die Scheitel der Hyperbel in der yz-Ebene. Ist $k < 0$, liegen die Scheitel der Hyperbel in der xz-Ebene. Setzt man $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots$, so erhält man eine Schar von gleichseitigen Hyperbeln. Diese sind Höhenlinien oder Schichtenlinien unserer Fläche, da die Schnittebenen parallel zur horizontal angenommenen xy-Ebene liegen. Sie vermitteln uns eine anschauliche Vorstellung von Φ.

Folgerungen: Projiziert man die Schichtenlinien senkrecht auf die xy-Ebene, ergibt sich der Schichtenplan der Fläche Φ. Dieser Schichtenplan wird von einer Schar von Hyperbeln mit den Geraden $y = x$ und $y = -x$ als Asymptoten gebildet. Es liegt also ein Berührungsbüschel von Hyperbeln vor. Auch die beiden Asymptoten gehören dem Schichtenplan an. Nach den Regeln der kotierten Eintafelprojektion ist diesen Geraden die Kote Null zuzuordnen. Die Schichtenlinien mit $k > 0$ schneiden die y-Achse senkrecht. Die Schichtenlinien mit $k < 0$ schneiden die x-Achse senkrecht (Bild 5).

Würden wir einen Pferdesattel mit einer Schar gleichabständiger Ebenen schneiden, so ergäbe sich ein ähnlicher Schichtenplan. Deshalb wird die hier gefundene Fläche auch Sattelfläche genannt. Der im Ursprung 0 liegende Scheitelpunkt von Φ heißt Sattelpunkt. Beim genaueren Studium von Karten mit eingezeichneten Höhenlinien kann man derartige Sattelpunkte finden. Sie zeichnen sich dadurch aus, daß dort die betreffende Höhenlinie einen Knotenpunkt aufweist. Paßstraßen führen vorzugsweise über Sattelpunkte des zugehörigen Gebirgszuges.

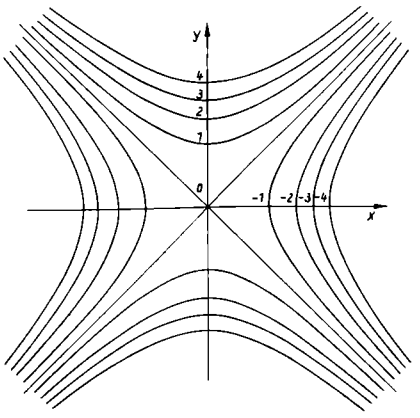


Bild 5
Schichtenplan des hyperbolischen Paraboloides

Für unsere Fläche Φ ist die xy-Ebene Tangentialebene in ihrem Sattelpunkt. Die Tangentialebene τ_0 berührt Φ im Sattelpunkt nicht einseitig, sondern durchsetzend. In jeder noch so kleinen Umgebung von 0 befinden sich Punkte von Φ, die oberhalb und andere, die unterhalb der xy-Ebene liegen.

Die Achse der Fläche Φ geht durch den Scheitelpunkt 0 und steht senkrecht auf τ_0. Die Achse von Φ ist hier identisch mit der z-Achse. Da alle ebenen Schnitte von Φ parallel zur xz-Ebene und yz-Ebene Parabeln ergeben, stellt Φ ein Paraboloid dar. Dieses muß jedoch noch genauer klassifiziert werden. Wie dem Schichtenplan leicht zu entnehmen ist, liegt keine Drehfläche vor. Da der Schichtenplan der Fläche Φ ein Berührbüschel von Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten bildet, nennt man die hier konstruierte Fläche ein *hyperbolisches Paraboloid.*

Das hyperbolische Paraboloid hat eine weitere wichtige geometrische Eigenschaft, die diese Fläche für vielfältige Anwendungen zum Beispiel im Bauwesen interessant macht.

7. Schnitt von Φ mit einer zur Ebene $y = x$ parallelen Ebene: Setze in Gleichung (5) $y = x + k$. Man erhält $2kx + k^2 = 4az$. (14)

Mit (14) hat man eine in x und z lineare Gleichung. Daraus ist zu folgern, daß die Ebenen der Schar $y = x + k$ mit

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ die Fläche Φ nach einer Schar von Geraden schneiden. Völlig analog verläuft die Rechnung, wenn die Fläche Φ durch die Schar von Ebenen mit der Gleichung $y = -x + k$ geschnitten wird.

Folgerungen: Aus Gleichung (14) folgt, daß auf dem hyperbolischen Paraboloid Φ zwei Scharen von geradlinigen Erzeugenden liegen. Je eine Schar von Erzeugenden liegt parallel zu einer Ebene, die von der Flächenachse (z-Achse) und einer der beiden Erzeu-

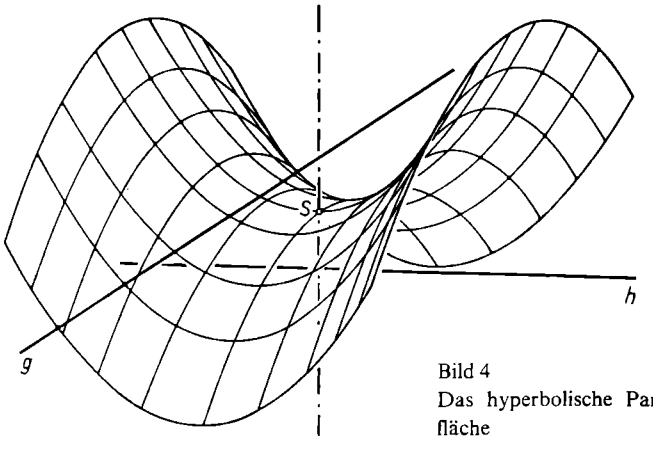


Bild 4
Das hyperbolische Paraboloid als Schiebfläche

genden von Φ durch den Scheitelpunkt 0 aufgespannt wird. Gekrümmte Flächen, auf denen wenigstens eine Schar von geradlinigen Erzeugenden liegt, nennt man Regelflächen. Flächen dieser Art finden im modernen Bauwesen vorwiegend zur Überdachung von Gesellschafts- oder Industriebauten Verwendung. Wird die Überdachung des Bauwerkes in Spannbeton ausgeführt, können geradlinige Stützelemente (z. B. Bretter) für die Verschalung verwendet werden. Bei geeigneter Wahl des Grundrisses ergeben sich für die Traufllinien der Überdachung geschwungene Linien, die auch aus ästhetischer Sicht eine ansprechende Wirkung hervorrufen können. Vielfach wird – etwas phantasielos – ein windschiefes Viereck im Raum vorgegeben. In dieses räumliche Viereck wird dann das hyperbolische Paraboloid – von Baupraktikern „Hyparschale" genannt – eingepaßt (Bild 6).

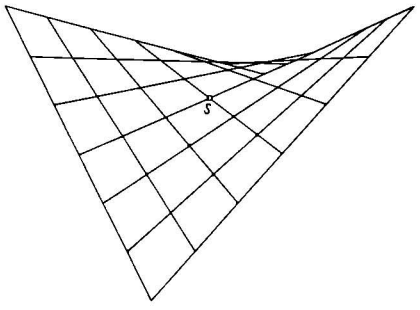


Bild 6
Das hyperbolische Paraboloid als Regelfläche

Für uns ist von Interesse, ob diese Fläche durch Vorgabe eines windschiefen Vierecks, dessen Seiten dann Erzeugende dieser Fläche sind, eindeutig bestimmt ist. Hierzu ist vorauszuschicken, daß die allgemeine Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung 9 wesentliche Konstante enthält. Zur Festlegung einer solchen Fläche im Raum benötigt man also 9 geometrische Vorgaben. Dies können zum Beispiel Punkte der Fläche oder Tangentialebenen sein. Macht man jedoch die Einschränkung, daß die zu verwendende Fläche ein Paraboloid ist, so muß eine bestimmte algebraische Beziehung zwischen den Koeffizienten der Glieder zweiter Ordnung erfüllt sein. Für die Festlegung eines hyperbolischen Paraboloides im Raum hat man damit nur 8 freie Parameter. In der Tat ist die Vorgabe des windschiefen Vierecks im Raum äquivalent mit der Festlegung von 8 Bestimmungsstücken der Fläche. Die Eckpunkte des Vierecks sind offensichtlich Punkte der Fläche. Weiterhin ist die von zwei in einem Punkt zusammenlaufenden Viereckseiten aufgespannte Ebene eine Tangentialebene des hyperbolischen Paraboloides mit dem entsprechenden Eckpunkt als Berührungspunkt.

Durch ein windschiefes Viereck sind daher vier Punkte der Fläche mit den zugehörigen Tangentialebenen festgelegt. Mit diesen 8 Vorgaben ist das hyperbolische Paraboloid bezüglich Lage und Gestalt eindeutig bestimmt (vgl. Bild 6).

In ein vorgegebenes windschiefes Viereck läßt sich genau ein hyperbolisches Paraboloid einpassen. Liegt dieses Viereck beliebig im Raum, dann steht die Achse dieser Fläche auch nicht senkrecht im physikalischen Sinn. Das Auffinden des Scheitels dieser Fläche und seiner Achse bei Vorgabe eines windschiefen Vierecks von Erzeugenden erfordert einen größeren konstruktiven Aufwand, der nur mit den Mitteln der projektiven Geometrie erschließbar ist. Außerdem haben wir in unserem Beispiel einen Sonderfall, bei dem sich die Scheitelerzeugenden senkrecht schneiden. In diesem Fall lassen sich die Schnittlinien des Paraboloides mit anderen gekrümmten Flächen besonders leicht mit Hilfe zugeordneter Normalrisse konstruieren. Durch Bild (7) wird gezeigt, wie man die Schnittlinie eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides mit einem Drehzylinder konstruieren kann. Hier fällt die Achse des Paraboloides mit einer Erzeugenden des Zylinders zusammen. Das Paraboloid ist so gelegt, daß die eine Schar seiner Erzeugenden Frontlinien sind. Dadurch vereinfacht sind die Konstruktion der Schnittpunkte dieser Erzeugenden mit dem Zylinder. Weitere Abbildungen zeigen Entwürfe und vollendete Bauwerke mit der von uns hier untersuchten Fläche als Bauelement.

E. Schröder

Weitere Aufgabenstellung

Die eingangs vorgelegte Aufgabe läßt sich in eine allgemeinere Aufgabenstellung einbetten. Die neue Aufgabe lautet:

Man untersuche, was für ein geometrisches Objekt von der Menge jener Punkte erzeugt wird, für welches das Abstandsverhältnis von zwei sich senkrecht kreuzenden Geraden g und h, nämlich $m(GP) : m(HP) = 1 : K$ mit $K > 1$ ist (vgl. Bild 3).

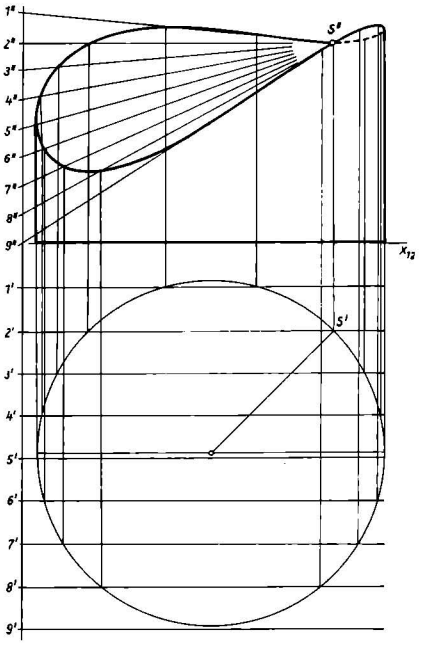
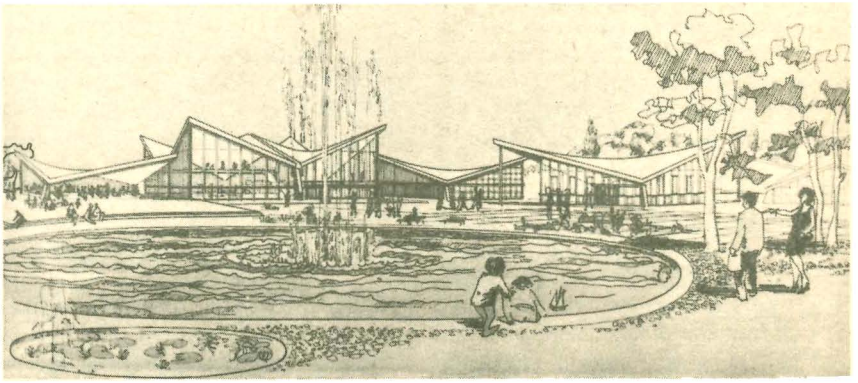


Bild 7
Schnitt von Drehzylinder und hyperbolischem Paraboloid. Die Mantellinie des Drehzylinders durch S ist zugleich Achse des hyperbolischen Paraboloides mit S als Scheitelpunkt.

Bild 8 (siehe Titelseite)
Schnitt von Halbkugel und hyperbolischem Paraboloid. Die Drehachse der Halbkugel fällt mit der Achse des hyperbolischen Paraboloides zusammen. Der Scheitel S des hyperbolischen Paraboloides liegt daher auf der Achse der Halbkugel.

Ein zu (2), (3) und (4) analoger rechnerischer Ansatz führt auf die Gleichung eines einschaligen Hyperboloides, dessen Achse parallel zu g liegt. Die Kehllellipse dieser Fläche liegt in der yz-Ebene. Der Spurpunkt Q von g in der yz-Ebene ist ein Brennpunkt dieser Ellipse. Auf dieser Fläche existieren gleichfalls zwei Scharen von geradlinigen Erzeugenden.

Bild 9
Entwurf eines Freizeitgeländes im Leipziger Rosenthal



Einige mathematische Modelle und ihre Verwendung im Schiffbau

Seit der Aufnahme des serienmäßigen Schiffbaus in der DDR im Jahre 1946 wurden durch unsere Werften bis zum Jahresende 1978 3800 Schiffe mit einer Vermessungstonnage von ca. 6,5 Millionen BRT (Brutto-Registertonnen) fertiggestellt. Eine Registertonne entspricht einer Raumgröße von 2,83 m^3. Die Entwicklung ist in Bild 1 dargestellt.

Die Produktionsstätten sind u. a.

VEB Warnowwerft Warnemünde, *VEB Schiffswerft Neptun* Rostock, *VEB Matthias-Thesen-Werft* Wismar und *VEB Volkswerft* Stralsund.

Hauptauftraggeber der DDR-Schiffbauindustrie ist die UdSSR, deren Reedereien bis zum Jahresende 1978 rund 3000 unserer gebauten Schiffe mit insgesamt 3,7 Millionen BRT in Dienst stellten.

Bei der Vielzahl der anstehenden Aufgaben trifft man auch auf mathematische Fragestellungen. Wir wollen im nachfolgenden ein Beispiel dafür geben.

Zeichnungen werden mit numerisch gesteuerten Zeichenmaschinen erzeugt. Mittels eines Programms wird dabei aus einer gegebenen Punktfolge eine Kreisbogenapproximation mit einem Rechner ermittelt, d. h., es wird eine Folge von Kreisbögen errechnet, die gezeichnet eine Kurve ergeben, die die gegebene Punktfolge näherungsweise darstellt. Hierfür ist eine genügend dichte Punktfolge erforderlich. Praktisch kann dies bedeuten, daß die vorgegebene Punktfolge zu verdichten ist, indem man neue sinnvolle Zwischenpunkte ermittelt (man nennt diesen Vorgang *Interpolation*). Im nachfolgenden werden verschiedene Möglichkeiten für sinnvolle Punktverdichtungen diskutiert.

Ein Spant ist die Schnittkurve der Schiffsaußenhaut mit einer zur Schiffsachse senkrecht stehenden Ebene. Aus Symmetriegründen wird nur die eine Hälfte eines Spantes dargestellt. Eine konkrete Darstellung des Spantes in der Form $y=f(z)$ ist in der Regel nicht gegeben. Statt dessen hat man eine Punktfolge aufgemessen, deren Punkte in geordneter Reihenfolge auf dem Spant liegen. Gesucht ist nun eine Darstellung der Form $y=f(z)$, weil wir dann beliebige Zwischenpunkte errechnen können. Dazu gibt es z. B. folgende Möglichkeiten:

1. Durch die $n+1$ gegebenen Punkte wird ein Polynom n-ten Grades (mit $n+1$ Koeffizienten) gelegt. Dieses Polynom nennt man *Lagrange-Interpolationspolynom.*
2. Man ermittelt ein Polynom p-ten Grades (p ist vom Anwender vorgegeben), das von der vorgegebenen Punktmenge einen minimalen (in welchem Sinne, siehe weiter unten) Abstand hat.
3. Man setzt die Kurve stückweise aus Polynomstücken zusammen, deren Grad vom Nutzer vorgegeben ist.

Neben diesen drei aufgezählten Varianten existieren noch weitere.

Der Schiffbauer hat nun die Aufgabe, eine Methode derart auszuwählen, daß sein Ergebnis den praktischen Forderungen genügt.

Wenden wir uns einem konkreten Beispiel zu. Für den in Bild 2 dargestellten Spant wurden 29 Punkte $P_i(z_i, y_i)$, $i=1, 2, \ldots, 29$, aufgemessen. Wir betrachten das Polynom

$$y_{28}(z)=a_{28}z^{28}+a_{27}z^{27}+\ldots+a_1z+a_0=P_{28}. \quad (1)$$

Durch Einsetzen der Punktkoordinaten erhalten wir 29 Gleichungen

$$y_i=a_{28}z_i^{28}+a_{27}z_i^{27}+\ldots+a_1z_i+a_0, \quad i=1(1)\,29 \quad (2)$$

und können aus diesen die Koeffizienten a_0, $a_1, \ldots, a_{28}$ bestimmen.

Nun wird kein mathematisch Gebildeter versuchen, dieses Gleichungssystem exakt zu lösen, obwohl das natürlich theoretisch möglich ist. Statt dessen wird er zu Näherungsverfahren greifen und dabei die Ergebnisse und in einem derart aufwendigen Fall auch die Zwischenergebnisse runden. Diese wiederholten Rundungsfehler können das Endergebnis erheblich verderben.

In Bild 2 wurde $p^7{}_{28}$ dargestellt. (Die 7 gibt die Anzahl der gültigen Ziffern in der Rechnung an.) Das Ergebnis ist unbefriedigend. Auch $p^{16}{}_{28}$ ist unbrauchbar. Durch gewisse numerische Manipulationen (zunächst wird das y-Intervall auf [0, 1] und anschließend das z-Intervall auf [0, 1] transformiert) kann man aus $p^{16}{}_{28}$ noch $\tilde{p}^{16}_{28}$ und $\bar{p}^{16}_{28}$ erhalten, aber auch diese Funktionen stellen den Spant ungenügend dar. Alle Rechnungen wurden mit einem elektronischen Rechner EC 1040 ausgeführt.

Bild 1

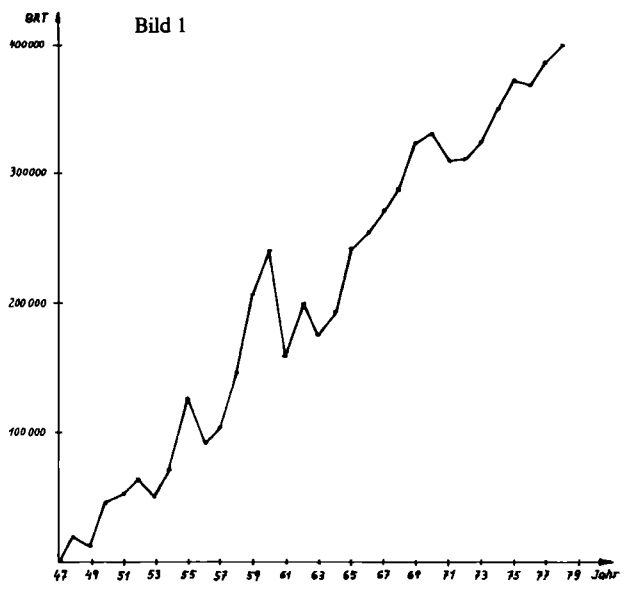


Bild 2

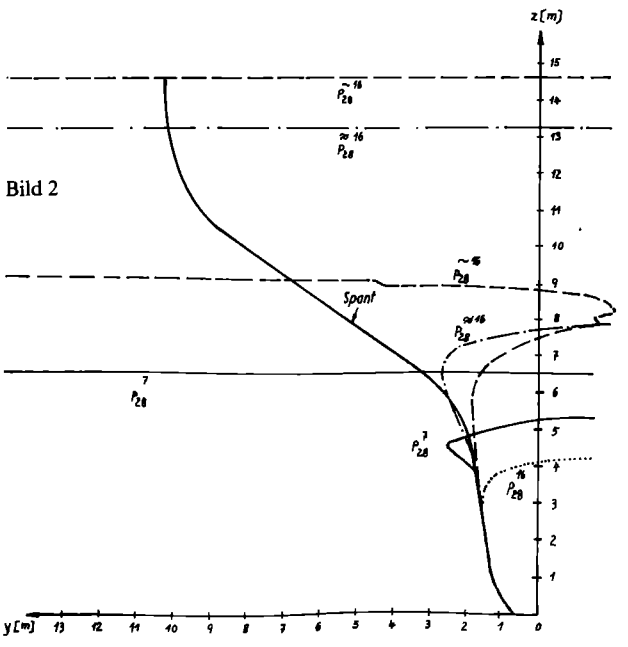


Bild 3

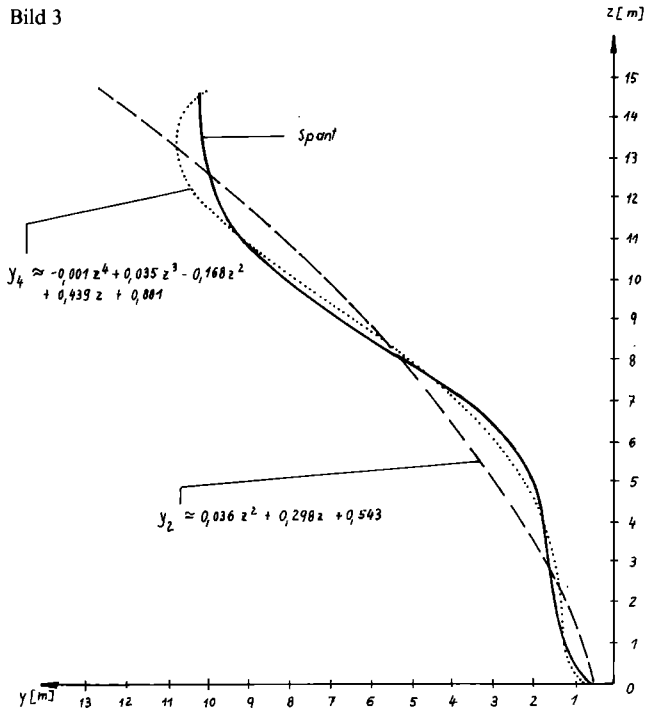
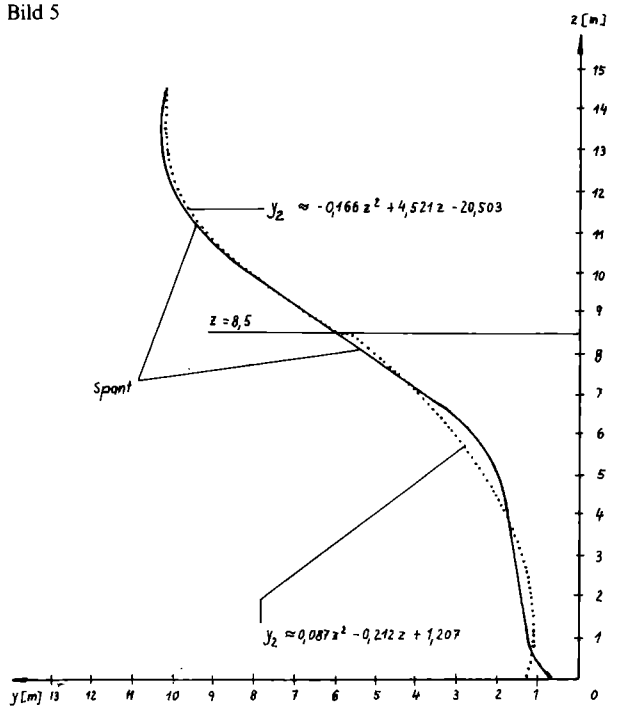


Bild 5



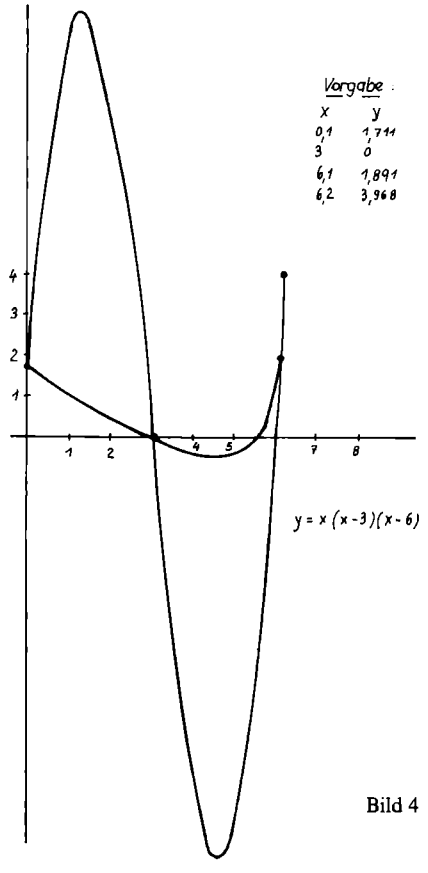


Bild 4

Der Grund für diese schlechten Ergebnisse ist darin zu suchen, daß die Koeffizienten des Gleichungssystems (2) für $a_0, \ldots, a_{28}$ in dem Bereich $4{,}06 \cdot 10^{32}$ bis $1{,}39 \cdot 10^{-17}$ variieren. Diese Variationsbreite erfaßt auch keine 16-stellige Genauigkeit des Rechners und die Rundungsfehler verderben das Ergebnis. (Die Determinante des Gleichungssystems (2) hat den Wert $1{,}09 \cdot 10^{209}$!)

Ein zweiter Lösungsversuch wird in Bild 3 dargestellt. Die Koeffizienten des Polynoms $p_2 = az^2 + bz + c$ sind so ermittelt worden, daß die Funktion

$f(a,b,c) = (y_1 - az_1^2 - bz_1 - c)^2 + \ldots + (y_{29} - az_{29}^2 - bz_{29} - c)^2$

ihr Minimum annimmt. Diese Funktion stellt die Summe der Abweichungsquadrate zwischen dem Polynom an der Stelle z_i und dem gegebenen y_i-Wert dar. Dies ist die sogenannte *Gaußsche Fehlerquadratmethode.* Analog haben wir die Koeffizienten a, b, c, d, e des Polynoms

$p_4 = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$ durch Minimisierung des Ausdrucks

$f(a,b,c,d,e) = (y_1 - az_1^4 - bz_1^3 - cz_1^2 - dz_1 - e)^2 + \ldots + (y_{29} - az_{29}^4 - bz_{29}^3 - cz_{29}^2 - dz_{29} - e)^2$

erhalten. Beide Resultate wurden mit dem programmierbaren Tischrechner K 1002 ermittelt und sind in Bild 3 dargestellt. Eine hier anknüpfende Möglichkeit besteht in der Erhöhung des Polynomgrades. Hier tritt ein neuer unliebsamer Effekt auf. Z. B. ergibt sich für $n = 13$ bis $y = 12$ eine recht gute Übereinstimmung zwischen dem Spant und der Näherungsdarstellung, aber es gilt (vergl. Bild 3) $y(12) = 9{,}967$, $y(12{,}3) = 10{,}017$, $y(12{,}5) = 9{,}968$, $y(14{,}05) = 7{,}538$, $y(14{,}608) = 10{,}205$,

d. h., das ermittelte Polynom schwingt im Endbereich, ist also ebenfalls nicht brauchbar. Noch deutlicher wird dieser Effekt in Bild 4 dargestellt. Die vier vorgegebenen Punkte beschreiben (schlecht) die dargestellte Kurve. Legt man durch diese vier Punkte ein Polynom 3. Grades, so erhält man

$y = x(x-3)(x-6)$.

An dieser Stelle muß einiges zu den Genauigkeitsanforderungen gesagt werden: In den Bildern sind höchstens Abweichungen von 0,1 mm bis maximal 0,2 mm gestattet. Diese scheinbar extremen Forderungen sind dadurch begründet, daß bei dem verwendeten Maßstab Fehler im Millimeterbereich bereits Abweichungen von 5 cm bis 10 cm in der Praxis am Schiff bewirken. Derartige Verformungen einer Platte zum Ausgleich derartiger Abweichungen sind beim Einbau im Nachherein aber nicht möglich.

Der nächste Schritt besteht in der Unterteilung der aufgemessenen Punkte in zwei Teilmengen, und man erhält eine stückweise Darstellung $y = f(z)$. Ein Beispiel für eine solche Unterteilung an der Stelle $z = 8{,}5$ zeigt Bild 5. Die dort dargestellten Polynome sind mit der Gaußschen Fehlerquadratmethode ermittelt worden.

Dieser Weg zeigt zwei Nachteile. An der Trennstelle beider Polynome (vgl. Bild 5) kann ein Sprung entstehen. Eine weitere Fehlermöglichkeit besteht darin, daß sich an dieser Stelle ein Knick ausbildet. Beide Fehlerquellen sind für die Praxis nicht akzeptabel.

Die bisher erörterten Wege zeigen deutlich:

- Es gibt theoretische Wege, die sich für die Lösung praktischer Probleme nicht eignen.
- Für eine Lösung, die für die Praxis akzeptabel ist, bietet sich folgender Weg an:

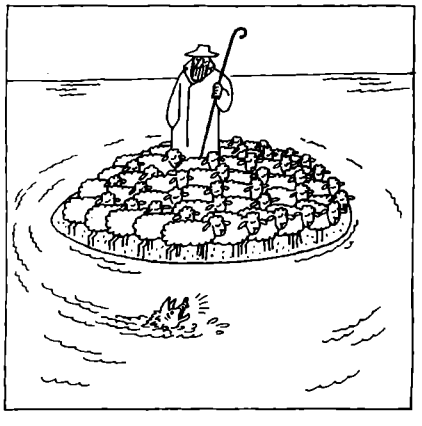
Wir konstruieren nur auf jeweils wenigen Punkten mit aufeinanderfolgenden Abszissen ein niedriggradiges Polynom und benutzen für jeden weiteren Abszissenbereich neue niedriggradige Polynome.

Der denkbar einfachste Weg wäre dadurch gegeben, daß wir je zwei Punkte gradlinig verbinden, also einen Polygonzug erhalten. Dieser hat den Nachteil, daß Knicke auftreten, die Kurve also nicht glatt ist („glatt" ist ein typischer Begriff der Mathematik. Hier genügt die Anschaulichkeit.)

Zur Lösung definieren wir:
$s(z)$ heißt kubischer Spline (gesprochen: Splein) genau dann, wenn
a) $s(z)$ in jedem Interval $(-\infty, z_1)$, (z_1, z_2), ..., (z_{n-1}, z_n), (z_n, ∞) ein Polynom höchstens 3. Grades darstellt und
b) $s(z)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Die Funktion $s(z)$ läßt sich also in jedem der 28 Intervalle $[z_k, z_{k+1}]$, $k=1, 2, \ldots, 28$ als $f_k(z)=A_k(z-z_k)^3+B_k(z-z_k)^2+C_k(z-z_k)+D_k$ darstellen. Damit nun diese zusammengesetzte Funktion unsere Punktmenge darstellt, müssen wir $s(z_k)=y_k$, $k=1, 2, \ldots, 29$ fordern, d. h., die Funktion $s(z)$ verläuft durch die Punkte. Die Bedingung b) bedeutet, daß an den Stellen z_k, an denen die Funktion $s(z)$ zusammengesetzt ist, keine Knicke auftreten. Als mechanisches Modell für diese Spline-Interpolation kann man sich ein durch die Punkte gelegtes elastisches Lineal (englisch spline) vorstellen.
Wir müssen in jedem der $n-1$ Intervalle die Koeffizienten A_k, B_k, C_k und D_k bestimmen. Auf die konkrete Bestimmung dieser Koeffizienten soll hier nicht näher eingegangen werden, da als Hilfsmittel die 1. und 2. Ableitung der Funktion f_k benutzt werden und aufwendige Rechnungen darzustellen wären. (Für den Interessenten verweisen wir auf Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., *Taschenbuch der Mathematik*, 19. Auflage Verlag Nauka, Moskau, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1979)
Diese Rechnungen wurden mit dem EC 1040 ausgeführt. Die numerischen Ergebnisse stimmen ausreichend mit dem ursprünglichen Spant überein, so daß eine akzeptable Lösung des Problems erzielt wurde.

W. Moldenhauer

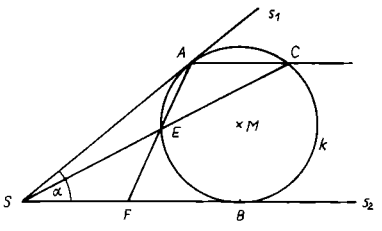
Harri Parschau



Alles dreht sich um den Kreis

(10 Aufgaben für Schüler der Klassen 7 bis 10)

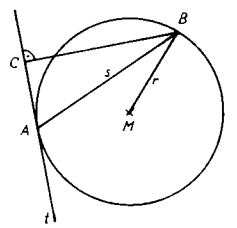
▲1▲ Das Bild stellt einen spitzen Winkel α mit seinem Scheitelpunkt S dar. Ein Kreis k berührt die Schenkel des Winkels α in den Punkten A und B. Die Parallele zu s_2 durch A schneide k in C. Die Gerade CS schneide k in E, und die Gerade AE schneide s_2 in F.
Es ist nachzuweisen, daß der Punkt F die Strecke $\overline{BS}$ halbiert.



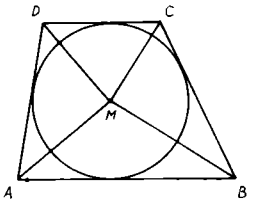
▲2▲ Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Innenwinkel $\sphericalangle BAC=\alpha=30°$.
Es ist zu beweisen, daß die Länge der Seite $\overline{BC}$ dieses Dreiecks gleich der Länge des Radius des Umkreises dieses Dreiecks ist.

▲3▲ Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, dem zwei Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ mit $\overline{AB}=\overline{BC}$ so eingezeichnet seien, daß Winkel $\sphericalangle ABC=120°$ gilt. Beweise, daß die Länge jeder der Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ gleich der Länge des Radius r des Kreises k ist!

▲4▲ Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, dem eine Sehne $\overline{AB}=s$ mit $s<2r$ eingezeichnet wurde. Die im Punkt A an den Kreis k gelegte Tangente t schneide die durch B zu t gezogene Senkrechte in C.
Beweise, daß die Gerade AB den Winkel $\sphericalangle CBM$ halbiert!



▲5▲ Die abgebildete Figur stellt ein Trapez $ABCD$ und einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M dar, der jede der vier Trapezseiten zur Tangente hat.
Beweise, daß die Winkel $\sphericalangle AMD$ und $\sphericalangle BMC$ beide rechte Winkel sind!



▲6▲ Es sei Dreieck ABC ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck, D, E und F seien Fußpunkte der Dreieckshöhen h_a, h_b, h_c.
Es ist zu beweisen, daß die Höhen des Dreiecks ABC gleichzeitig Winkelhalbierende des Dreiecks DEF sind.

▲7▲ Ist es möglich, aus einer quadratischen Platte mit der Seitenlänge a (in mm) eine kreisförmige Scheibe herauszuschneiden, die einen Durchmesser d (in mm) besitzt, wenn
(1) $53 \leqq a \leqq 55$ und $49 \leqq d \leqq 51$,
(2) $53 \leqq a \leqq 55$ und $52 \leqq d \leqq 54$ gilt?
Die Antwort ist zu begründen.

▲8▲ Gegeben seien drei Punkte A, B und C einer Ebene, die nicht sämtlich auf einer Geraden liegen. Jede der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ sei kleiner als 3 cm. Eine Kreisscheibe möge die drei Punkte überdecken.
Gib für alle möglichen Fälle die Grenzen des Intervalls an, in welchem die Maßzahl des Flächeninhalts (gemessen in cm^2) des Kreises liegen muß!

▲9▲ Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r und auf diesem Kreis ein Punkt P, ferner eine Gerade g, die mit dem Kreis k keinen Punkt gemeinsam hat.
Es ist ein zweiter Kreis k' zu konstruieren, der den Kreis k von außen im Punkte P berührt und die Gerade g zur Tangente hat.

▲10▲ Gegeben seien zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien $r_1<r_2$, die sich in den Punkten P und Q schneiden. Auf k_1 ist ein Punkt A, auf k_2 ein Punkt B so zu konstruieren, daß die Gerade AB durch P geht und $\overline{AP}=\overline{BP}$ gilt.

(Lösungen siehe Heft 6/81)

Th. Scholl

XX. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Preisträger

Einen ersten Platz erhielten:

In Olympiadeklasse 10: Volkmar Liebscher, EOS Goethe-Schule, Ilmenau (1); Matthias Hübner (Kl. 9), Humboldt-EOS Leipzig (2); Jens Pönisch (Kl. 9), Karl-Marx-OS, Karl-Marx-Stadt (3)

In Olympiadeklasse 11/12: Detlef Horbach, Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt (4); Jens Galley (Kl. 11), EOS Heinrich Hertz, Berlin (5)

Einen zweiten Platz erhielten:

In Olympiadeklasse 10: Klaus Mohnke, Erich-Weinert-OS, Lübbenau; Torsten Fimmel, EOS Heinrich Hertz, Berlin; Bernd Schmutzler, EOS Artur Becker, Wilkau-Haßlau; Jörg Stahnke (Kl. 9), EOS Willi Sänger, Pasewalk; Oliver Geupel (Kl. 9), EOS Romain Rolland, Dresden; Birgit Thomas, EOS Zittau; Karl-Heinz-Fandrey (Kl. 9), EOS Puschkin, Prenzlau

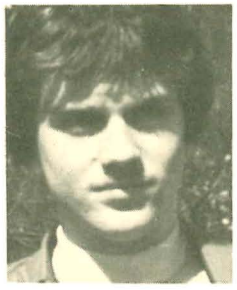
In Olympiadeklasse 11/12: Peter Zienicke (Kl. 11), Spezialschule für Math./Phys. der Humboldt-Universität zu Berlin; Jürgen Gräfenstein und Michael Giesecke, beide Spezialschule für Elektronische Industrie M. A. Nexö, Dresden; Jörg Pietschmann, EOS Johann Joachim Winkelmann, Stendal; Steffen Zahn (Kl. 11), Spezialschule für Math./Phys. der Humboldt-Universität zu Berlin; Bodo Heise (Kl. 11), Spezialklasse der TH Karl-Marx-Stadt; John Matzke (Kl. 11), EOS G. E. Lessing, Erfurt; Ralf Hortig (Kl. 11), I. EOS Cottbus

25 Schüler erhielten einen 3. Preis, 39 Schüler eine Anerkennungsurkunde für gute Leistungen. An der XX. OJM nahmen 171 Schüler, davon 19 Mädchen teil. 38 Schüler waren Frühstarter, d. h., starteten in einer höheren Klassenstufe. 20 über viele Jahre bewährte Wissenschaftler und Lehrer erhielten aus Anlaß dieser XX. OJM hohe Auszeichnungen.

Die Aufgaben und Lösungen der Olympiadeklasse 10 sowie die Aufgaben zur Olympiadeklasse 11/12 veröffentlichen wir in Heft 6/81; die Lösungen zu Olympiadeklasse 11/12 erscheinen in „Mathematik in der Schule".

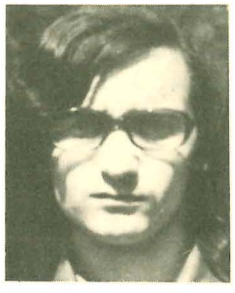
1

2

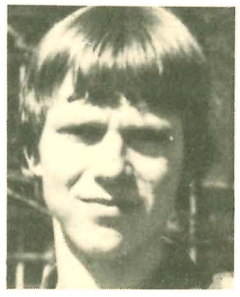


3

4



5



Grußadresse des Ministers für Hoch- und Fachschulwesen Prof. Dr. Böhme

An die Teilnehmer der XX. Mathematik-Olympiade der DDR

Die 1981 zum zwanzigsten Male durchgeführte *Olympiade Junger Mathematiker* nehme ich zum Anlaß, allen Teilnehmern, aber auch den Verantwortlichen und Organisatoren die herzlichsten Glückwünsche auszusprechen.

Die Förderung aller Talente und Begabungen der Jugend ist ein grundlegendes Prinzip unserer sozialistischen Bildungspolitik. In zunehmenden Maße erfordert die Erkenntnis und die Beherrschung der gesetzmäßigen Zusammenhänge in Natur und Gesellschaft einen hohen Stand der mathematischen Theorie und ihrer schöpferischen Anwendung.

Die Mathematik ist zu einem wichtigen Kettenglied bei der Beschleunigung des wissenschaftlich-technischen Fortschritts geworden.

Deshalb kommt der vertieften Beschäftigung der interessierten und talentierten Schüler mit mathematischen Problemen, wie sie durch die traditionsreiche Olympiade-Bewegung in bester Weise realisiert und gefördert wird, große und wachsende Bedeutung zu.

Sie, als Teilnehmer an der XX. Olympiade Junger Mathematiker 1981 in Erfurt, haben sich als die Besten in ihren Altersgruppen erwiesen, und ich möchte allen hohe Anerkennung für die gezeigten Leistungen aussprechen.

Zweifellos werden viele Jugendfreunde, die sich in den Mathematik-Olympiaden bewährt haben, später an den Universitäten und Hochschulen unseres Landes durch das Studium der Mathematik oder anderer mathematisch anspruchsvoller Studienrichtungen ihre Liebe zur Mathematik weiterentwickeln und für unsere ganze Gesellschaft fruchtbringend wirksam werden lassen. Dabei wünsche ich Ihnen viel Erfolg.

Die Olympiade-Bewegung auf dem Gebiet der Mathematik möge auch im 3. Jahrzehnt ihres Bestehens – getragen vom Engagement vieler Lehrer und Wissenschaftler – ihre große Popularität behalten und die teilnehmenden Schüler zu hohen Leistungen beflügeln.

Mathematikprüfungen in Äthiopien

In Äthiopien verläßt man die 12. Klasse der *HIGHER SECONDARY SCHOOL* (höhere Schule), wenn man die *ETHIOPIAN SCHOOL LEAVING CERTIFICATE EXAMINATION* (Prüfung für das äthiopische Schulentlassungszeugnis) auch im Fach Mathematik bestanden hat.
Es ist sicher interessant zu wissen, welche Anforderungen in einer solchen Prüfung in einem afrikanischen Land gestellt werden und auf welche Weise diese Prüfungen durchgeführt werden.
Man sollte sehr vorsichtig sein, wenn man etwa Art, Inhalt und Schwierigkeitsgrad dieser Prüfungen beurteilen bzw. bewerten will, weil man dazu die konkrete Situation des Landes kennen muß. Wir möchten natürlich dazu auffordern, die Aufgaben zu lösen.

Die Prüfung besteht aus drei Teilen:

Teil A: Grundlagen der Mathematik (z. B. Mengenlehre, Arbeit mit Variablen, Gleichungen und Ungleichungen, Gleichungssysteme, Funktionen, Zahlenfolgen, Logarithmen, Restklassen u. a.) Den Teil A *muß* jeder Prüfling bearbeiten; es sind 70 Fragen.

Teil B: Geometrie

Teil C: Commercial Mathematics (etwa: Angewandte Mathematik im Handel). Dieser Teil enthält vorwiegend Proportionen, Mischungsaufgaben, Prozentrechnung usw., wobei es sich um Sachaufgaben handelt.

Der Prüfling wählt entweder Teil B oder Teil C mit je 20 Fragen bzw. Aufgaben. Jeder Prüfling muß sich in der vorgegebenen Zeit von drei Stunden mit 90 Problemen befassen. Zu jeder Frage sind fünf Antworten vorgegeben (vier falsche und eine richtige). Der Prüfling soll die richtige Antwort ankreuzen.

Diese in unseren Prüfungen nicht übliche Methode wird in afrikanischen und auch in einigen anderen Staaten praktiziert.
Wir stellen nun einige Inhalte der einzelnen Prüfungsteile dar. Wir sind der Auffassung, den Teil A recht ausführlich zu behandeln, da es sich hierbei um grundlegendes Wissen handelt.

Auswahl aus Teil A

▲1▲ Welche der Aussagen ist wahr?
A. $0=\{0\}$ B. $0\in\emptyset$ C. $\{0\}=\emptyset$ D. $0\subset\{0;1\}$
E. $0\in\{0\}$

▲2▲ Wenn $A=\{0,\frac{1}{2},2\}$;
$B=\{x;\ 2x^2-5x+2=0\}$ und
$C=\{x;\ 2x^2-5x+2x=0\}$,
welche der Aussagen ist wahr?
A. $A=B$ B. $B\subset A$ C. $C\subset A$ D. $A\subset B$
E. $A\cap C=\emptyset$

▲3▲ Wenn $a+b=c+d$ und $b<d$, welche der Aussagen ist wahr?
A. $a=c$ B. $a<c$ C. $a>c$ D. $a-c=0$
E. keine der Aussagen von A. bis D.

▲4▲ Wenn $\frac{x}{y}=\frac{p}{q}$, welche der Aussagen ist falsch?
A. $xq=py$ B. $\frac{x+y}{y}=\frac{p+q}{q}$
C. $\frac{x-y}{y}=\frac{p-q}{q}$ D. $\frac{x+p}{y+q}=\frac{x}{y}$
E. keine der Aussagen A. bis D.

▲5▲ Bestimme die beste Näherung für $\frac{0{,}00388\cdot 3163000}{21200}$
A. 8 B. 6 C. 0,8 D. 0,6 E. 0,06

▲6▲ Welches der folgenden Polynome hat den Faktor $(x-1)$?
A. x^2+5x+6 B. x^3-1 C. x^3+1
D. x^3+3x+2
E. keines der Polynome A. bis D.

▲7▲ Für welches geordnete Paar $[x;\ y]$ ist die Funktion $f(x;y)=\frac{xy}{x-y}$ nicht definiert?
A. $[1;0]$ B. $[1;-1]$ C. $[-1;1]$
D. $[1;1]$ E. $[0;1]$

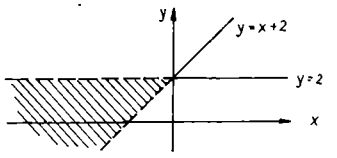
▲8▲ Wenn $f(x;y)=x^2y^3$, welche der Aussagen ist wahr?
A. $f(x;-y)=x^2y^3$ B. $f(-x;-y)=-x^2y^3$
C. $f(-x;y)=-x^2y^3$ D. $f(1;0)=-1$
E. keine der Aussagen von A. bis D.

▲9▲ Welche Aussage ist wahr?
A. $\log_2\frac{16}{3}=4+\log_2 3$
B. $\log_3\frac{16}{3}=\log_3 16-1$
C. $\log_3 60=15\cdot\log_3 4$
D. $\log_2\frac{1}{3}=1-\log_2 3$
E. keine der Aussagen A. bis D.

▲10▲ Welche der Geraden hat keinen gemeinsamen Punkt mit der Geraden $x-y=3$?
A. $x+y=3$ B. $x-y=-3$ C. $x+y=-3$
D. $-y-x=3$ E. keine der Geraden A. bis D.

▲11▲ Welche der Geraden schneidet die Kurve der Funktion $y=2^x$?
A. $y=-1$ B. $y=x$ C. $y=-0{,}003$
D. $y=-x$ E. $y=x-8$

▲12▲ Welche der Mengen beschreibt die schraffierte Fläche?
A. $\{[x;y]: y<x+2 \text{ und } y<2\}$
B. $\{[x;y]: y>x+2 \text{ und } y<2\}$
C. $\{[x;y]: y<x+2 \text{ und } y>2\}$
D. $\{[x;y]: y>x+2 \text{ und } y>2\}$
E. $\{[x;y]: y\leqq x+2 \text{ und } y\geqq 2\}$



▲13▲ Die Lösungsmenge der Gleichung $2^{2x+1}=2^x$ ist
A. $\{0\}$ B. $\{-1\}$ C. $\{1\}$ D. $\{1;0\}$
E. keine der Mengen A. bis D.

▲14▲ Welches der Gleichungssysteme hat *nicht* die Lösungsmenge $\{[-1;2]\}$?
A. $x+y=1$, $2x+y=0$ B. $2x-y=-4$, $x+2y=3$
C. $x+y=1$, $2x-y=-4$ D. $2x+y=0$, $x+2y=3$
E. $x+y=1$, $x-y=3$

▲15▲ Ein leerer quaderförmiger Wassertank hat eine quadratische Grundfläche (Kantenlänge 10 m) und ist 9 m hoch.
Wie lange dauert die Füllung unter folgenden Bedingungen? Während der ersten Stunde fließt 1 m^3 pro Minute ein, während der zweiten Stunde 2 m^3 pro Minute, in der dritten Stunde 3 m^3 pro Minute, während der vierten Stunde 4 m^3 pro Minute und darüber hinaus bis zur vollständigen Füllung.
A. 6 Stunden B. $6\frac{1}{4}$ Stunden
C. 5 Stunden D. 15 Stunden
E. keine der Zeitangaben A. bis D.

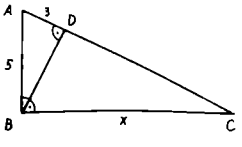
▲16▲ Das 6. Glied einer arithmetischen Folge ist 0, das 7. Glied ist -2. Welche der Aussagen ist wahr?
A. Die Differenz der Folge ist 2.
B. Das Anfangsglied ist -10.
C. Die Summe des 5. und 7. Gliedes ist 0.
D. Das 11. Glied ist 10.
E. Keine der Aussagen A. bis D.

▲17▲ Es sei $|x|\leqq|y|$ und $|y|=0$. Dann gilt
A. $x>0$ B. $x<0$ C. x kann nicht bestimmt werden D. $x=0$
E. keine der Angaben A. bis D.

Auswahl aus Teil B (Geometrie)

▲1▲ x und y sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks; d ist der Durchmesser des Umkreises. Dann gilt
A. $d=x+y$ B. $d>x+y$
C. $d<x+y$ D. $d=x$ oder $d=y$
E. keine der Aussagen A. bis D.

▲2▲ Vgl. Skizze:

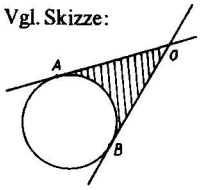


Die Winkel $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle ADB$ sind 90°. $\overline{AB}=5$, $\overline{AD}=3$, $\overline{BC}=x$. x ist dann

A. $\frac{23}{6}$ B. $\frac{16}{3}$ C. $\frac{20}{3}$ D. $\frac{3}{5}$

E. keiner der Werte A. bis D.

▲3▲ Vgl. Skizze:



Der Winkel $\sphericalangle ACB$ ist $\frac{\pi}{3}$. Der Kreis mit dem Radius 1 tangiert die Geraden in A bzw. in B. Die schraffierte Fläche ist

A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ D. $2\sqrt{\pi}-\frac{\pi}{3}$

E. keiner der in A. bis D. angegebenen Werte.

▲4▲ $ABCD$ sei ein gleichseitiges Parallelogramm (Seitenlänge 1). Die maximale Fläche, die $ABCD$ haben kann, ist

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

E. keine der Angaben A. bis D.

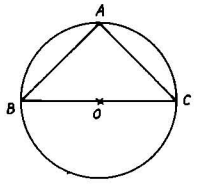
▲5▲ Ein Drahtstück (Länge 100 cm) wird zu einem Viertelkreis gebogen. Welche Länge hat der Radius?

A. $\frac{200}{\pi+2}$ B. $\frac{200}{\pi+4}$ C. $\frac{100}{\pi+4}$

D. $-8+\sqrt{16+1600\pi}$

E. keiner der Werte A. bis D.

▲6▲ Vgl. Skizze:



0 ist der Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius 6; $\overline{AB}=\overline{AC}$. Die Länge $\overline{AB}$ ist

A. 12 B. $3\cdot\sqrt{2}$ C. $6\cdot\sqrt{2}$ D. 72

E. keiner der Werte A. bis D.

Auswahl aus Teil C
(Commercial Mathematics)

▲1▲ Wieviel Liter einer 60%igen Lösung müssen 10 Liter einer 20%igen Lösung zugeführt werden, um eine 45%ige Lösung zu erhalten?

A. 6 B. $\frac{86}{3}$ C. $\frac{50}{3}$ D. 125

E. keine der Angaben A. bis D.

▲2▲ Wieviel Kaffee der Güteklasse 5 BIRR/kg (BIRR ist die äthiopische Währungseinheit) muß 50 kg der Güteklasse 6 BIRR/kg beigegeben werden, damit eine Mischung der Güteklasse 5,60 BIRR/kg entsteht?

A. $33\frac{1}{3}$ kg B. $\frac{1}{3}$ kg C. 60 kg

D. nicht zu berechnen

E. keine der Angaben A. bis D.

▲3▲ *Abebe* und *Getachew* (äthiopische männliche Personennamen) eröffnen eine Reparaturwerkstatt. *Abebe* investiert 6000 *BIRR*, *Getachew* 5000 *BIRR*. Der monatliche Gewinn macht 13% der Gesamtinvestition aus. Welchen Anteil erhält *Abebe*?

A. 1716 *BIRR* B. 650 *BIRR*

C. 390 *BIRR* D. 780 *BIRR*

E. keine der Angaben A. bis D.

Wir haben an den Formulierungen nichts geändert. Dem aufmerksamen Leser wird es nicht entgangen sein, daß zwischen *Strecke* und *Länge einer Strecke*, *Winkel* und *Größe eines Winkels*, *Aussage* und *Aussageform* nicht immer unterschieden wird. Das zieht natürlich auch Konsequenzen in der Anwendung der Symbolik nach sich.

H. Büchel/W. Fregin

Lösungen:

Teil A

1. E.; 2. B; 3. C.; 4. E.; 5. D; 6. B.; 7. D.; 8. B.; 9. B.; 10. B.; 11. D.; 12. B.; 13. B.; 14. E.; 15. E.; 16. C.; 17. D.

Teil B

1. C.; 2. C.; 3. C.; 4. D.; 5. D.; 6. C.;

Teil C

1. C.; 2. A.; 3. D.

Bernard Bolzano

Am 5. Oktober 1981 jährt sich zum 200. Male der Geburtstag des bedeutenden böhmischen Mathematikers, Logikers, Sozialethikers und Philosophen *Bernard Bolzano*. Die UNESCO hat empfohlen, dieses fortschrittlichen Mannes im Jahre 1981 ausführlich zu gedenken. So wird die *Tschechoslowakische Akademie der Wissenschaften* aus Anlaß dieses Jubiläums im September 1981 ein festliches internationales wissenschaftliches Symposion veranstalten, das der Entwicklung der Wissenschaften in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts und Bolzanos wissenschaftlichem Werk gewidmet ist. Auf dem *Mathematikerkongreß der DDR* im September 1981 wird einer der vier Plenarvorträge die revolutionäre mathematische Leistung von Bolzano behandeln.

Die Postverwaltung der ČSSR hat zur Würdigung von B. Bolzano am 10. März 1981 eine Briefmarke mit einem Porträt des Gelehrten herausgegeben.

Der aus einer Prager Kaufmannsfamilie stammende Bolzano hat in seiner Heimatstadt Philosophie, Mathematik und Naturwissenschaften sowie Theologie studiert und wurde nach seiner Priesterweihe im Jahre 1807 an der Prager Universität zum Professor der Religionswissenschaft berufen. In seinen Vorlesungen und Predigten stellte sich Bolzano auf die Seite einer aufgeklärten Religionsphilosophie und gelangte schließlich zu utopisch-sozialistischen Ideen, nach denen alle Menschen gleich seien und daher alle sozialen Unterschiede beseitigt werden müßten. Nach vielerlei Verwarnungen und Bedrohungen wurde Bolzano schließlich im Jahre 1819 vom damaligen österreichischen Kaiser seines Amtes enthoben. Nur mit Mühe konnte er seine Freiheit bewahren, wurde aber der Universität verwiesen und erhielt lebenslanges Publikations- und Redeverbot. Auf dem Landgut seiner Freunde in Těchobuz (Südböhmen) bis 1842 lebend, ist Bolzano unermüdlich wissenschaftlich tätig gewesen; große Teile seiner Schriften sind auch heute noch nicht aus dem Nachlaß herausgegeben worden. Bolzano starb einsam und an Tuberkulose leidend am 18. Dezember 1848 in Prag.

Bolzano gehört zweifellos zu den scharfsinnigsten Mathematikern aller Zeiten. Insbesondere hat er Bleibendes für die begriffliche Grundlegung der Analysis geleistet, manches sogar zeitlich noch vor *A. L. Cauchy*. Freilich ist dies erst im 20. Jahrhundert beim Studium des Nachlasses bekannt geworden, weil Bolzano durch das Publikationsverbot der direkte Einfluß auf die Entwicklung der Mathematik seiner Zeit weitgehend versagt bleiben mußte.

Bolzano verdankt man eine erste scharfe Definition der *Stetigkeit einer Funktion* und des *Grenzwertbegriffes*. Von ihm stammt das auf dem Gebrauch von Partialsummen beruhende, später nach Cauchy benannte *notwendige und hinreichende Konvergenzkriterium für unendliche Reihen*. Es war eine mathematikhistorische Sensation, als man 1930 im Nachlaß von Bolzano entdeckte, daß er als erster, rund 40 Jahre vor *K. Weierstraß*, ein Beispiel einer in einem ganzen Intervall stetigen, aber dort nirgends differenzierbaren Funktion konstruiert hatte. Und schließlich gehört Bolzano auch zu den Wegbereitern der Mengenlehre, wie später G. Cantor zu würdigen wußte.

H. Wußing

Interessante Koordinaten

1. Wege und Netze

Der Bär und andere Tiere leben im Märchenwald. Jedes von ihnen hat seine eigene Hütte. Der Knabe *Christopher Robin* ist ihr gemeinsamer Freund. Das Bild 1 zeigt euch, wie man vom Haus des *Christopher Robin* zu den Hütten des Bären, des Ferkels, des Kaninchens, des Esels, der Eule und des Känguruhs gelangen kann. Um zur Hütte des Bären zu kommen, muß man vom Haus des Knaben aus zunächst nach Süden gehen, sich dann nach Osten wenden und schließlich wieder die Südrichtung einschlagen.

Wir bezeichnen eine Bewegung (von Kreuzungspunkt zu Kreuzungspunkt) nach Süden mit „S", eine Bewegung nach Osten mit „O", nach Westen mit „W" und nach Norden mit „N". Dann wird der Weg vom Haus des Knaben zur Hütte des Bären durch „SOS" beschrieben.

Wie ist der Weg zur Hütte des Känguruhs zu beschreiben?

Wie der zur Hütte des Ferkels?

Wohin führt der Weg „OON"?

Auf welchen Wegen kann *Christopher* in den Wald gelangen? (Bild 1)

Bild 1

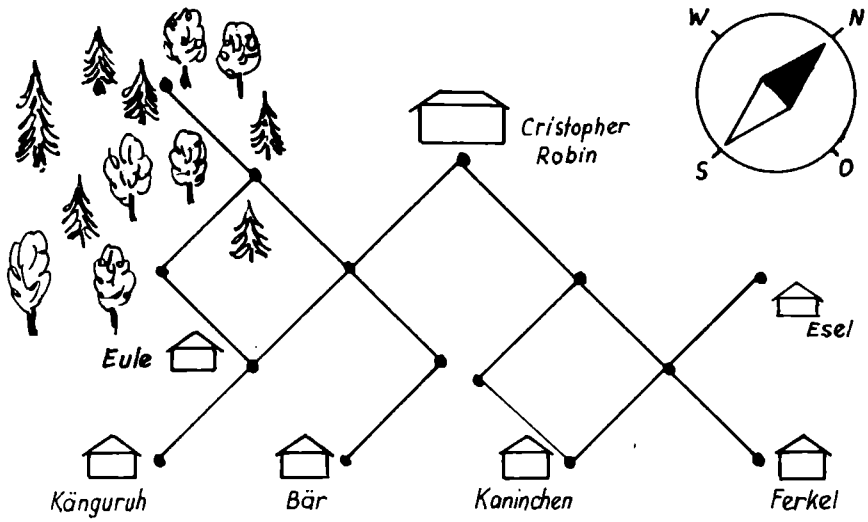
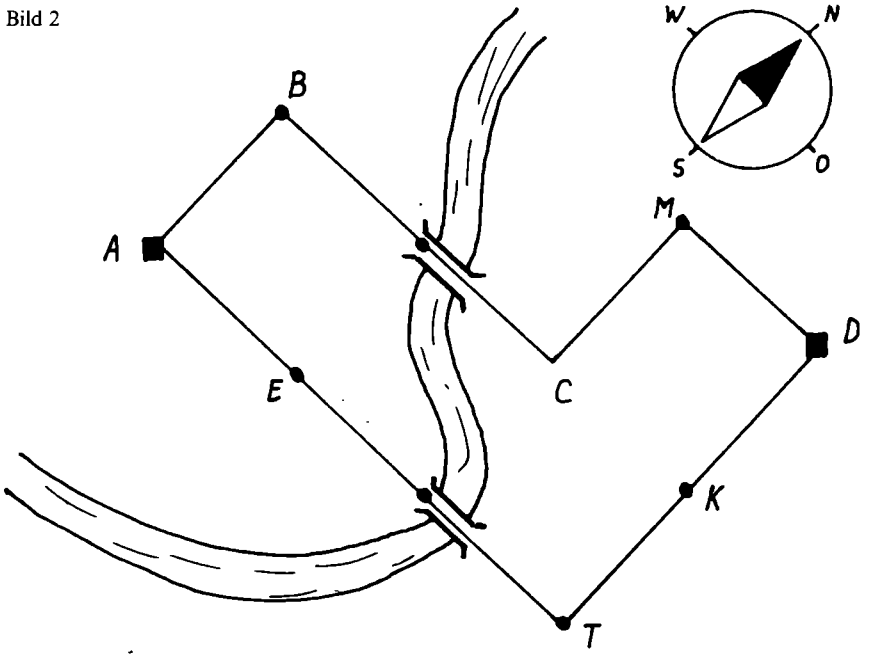


Bild 2



Im Bild 2 ist ein Straßennetz dargestellt. Kann man von der Stadt A zur Stadt D fahren?

Benutzt den auf der Zeichnung angegebenen Kompaß, und bezeichnet die Teilstücke des Straßennetzes mit N, O, S bzw. W!

Wie kann der Weg von A nach D „chiffriert" werden? Wie der von D nach A? Worin unterscheiden sich die Beschreibungen beider Wege?

Die alte Brücke zwischen den Orten B und C stürzt ein.

Wie kann man jetzt von A nach D fahren?

Aber nun wird auch noch die Brücke zwischen den Orten E und T wegen einer Reparatur gesperrt.

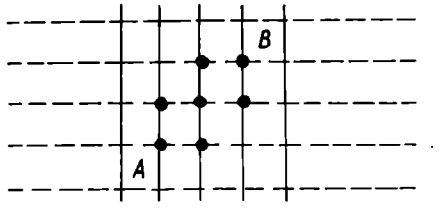
Kann man jetzt von A nach D fahren?

Nennt die Städte, in die man jetzt von A aus fahren kann, und die, die von D aus erreichbar sind! Bezeichnet die entsprechenden Wege!

Im Bild 3 sind nur Bewegungen von Damestein zu Damestein, und zwar nur in „Einzelschritten" auf den eingezeichneten Linien, möglich.

Wie kann man vom Punkt A zum Punkt B gelangen?

Bild 3

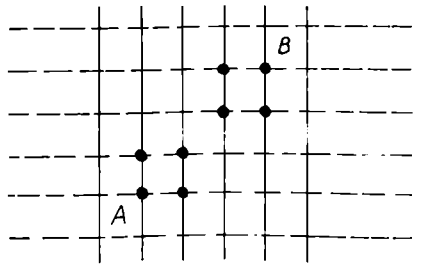


„Chiffriert" diese Wege, indem ihr die Schritte auf gestrichelten Linien mit „g" und die auf durchgezogenen Linien mit „d" bezeichnet!

Welchen Damestein muß man entfernen, damit man nicht mehr von A nach B gelangen kann?

Wo muß im Bild 4 ein Damestein eingefügt werden, damit man nach obigen Regeln vom Stein im Punkt A zum Stein im Punkt B gelangen kann? Wie viele Möglichkeiten gibt es? Beschreibt alle möglichen Wege wie in der vorhergehenden Aufgabe!

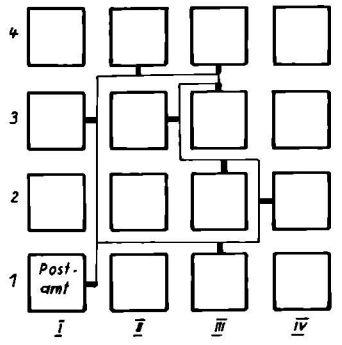
Bild 4



2. Koordinaten

Der Zustellbezirk eines Briefträgers soll sehr einfach aussehen: Er besteht aus vier zueinander parallelen Straßen, in jeder dieser Straßen stehen genau vier Häuser.

Bild 5



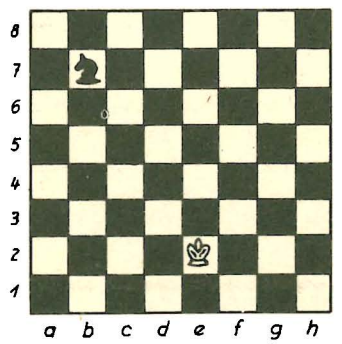
Das Postamt befindet sich im ersten Haus der ersten Straße. Seine Lage kann man wie folgt beschreiben: (I; 1).

Vom Postamt aus geht der Briefträger zum dritten Haus in der ersten Straße. Wir bezeichnen dieses Haus mit (I; 3). An die erste Stelle schreiben wir die Nummer der Straße, an die zweite die Nummer des Hauses in dieser Straße.

Dann bringt er einen Brief in das Haus (II; 4). Seinen weiteren Weg könnt ihr leicht selbst beschreiben.

Die Schachspieler bezeichnen die Felder ihres Spielbrettes schon von alters her mit Hilfe von Buchstaben und Zahlen. Die Senkrechten auf dem Schachbrett bezeichnen sie mit Buchstaben a, b, c, d, e, f, g, h und die Waagerechten mit Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. In Bild 6 steht der weiße König auf dem Feld e2 und der schwarze Springer auf dem Feld b7.

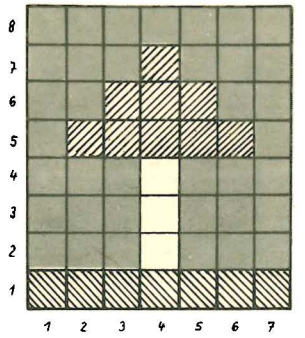
Bild 6



Der französische Mathematiker *René Descartes* kam zu Beginn des 17. Jahrhunderts auf die Idee, auf diese Art auch die Punkte einer Ebene zu beschreiben. Diese bemerkenswerte Erfindung der Koordinaten erlaubte es, das Lösen von geometrischen Aufgaben auf das Lösen von Gleichungen zurückzuführen. Auch im täglichen Leben benutzen wir Koordinaten, z. B. wenn der Platz im Kino durch zwei Zahlen – Nummer der Reihe und Nummer des Sitzes in dieser Reihe – beschrieben wird.

Mit einem Fernschreiber kann man Buchstaben und Ziffern übermitteln, aber farbige Bilder kann man mit ihm nicht übertragen. Wie könnte man mit einem Fernschreiber das Bild 7 doch in eine andere Stadt übermitteln?

Bild 7



Den folgenden Bildern liegt jeweils eine Gesetzmäßigkeit zugrunde. Findet sie, und füllt die leeren Felder!

Viel Erfolg und Freude beim Lösen der Aufgaben wünschen

N. K. Golubkowa und N. I. Wilenkin

3. Lustige Knobeleien

Bild 8

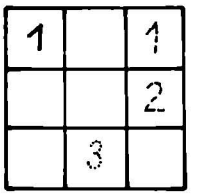


Bild 9

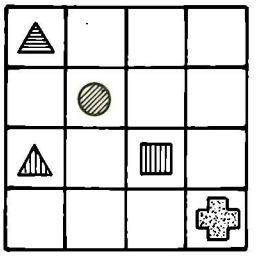


Bild 10

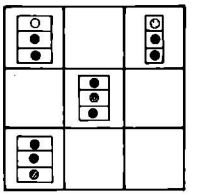


Bild 11

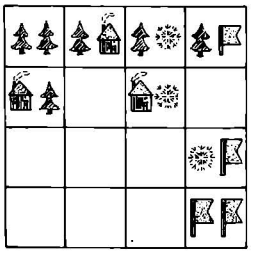


Bild 12

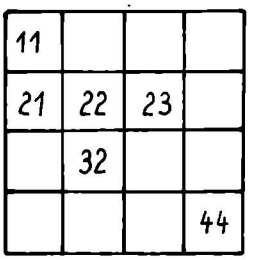


Bild 13

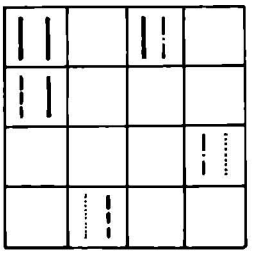


Bild 14

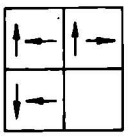


Bild 15

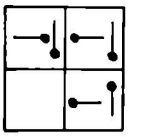


Bild 16

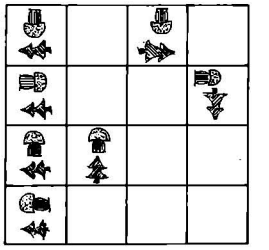


Bild 17

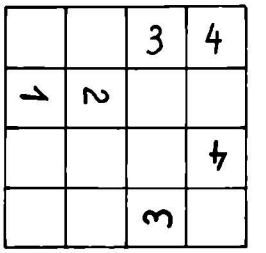


Bild 18

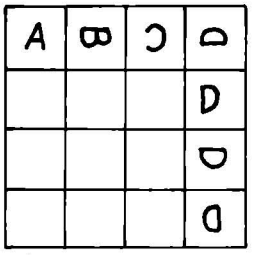
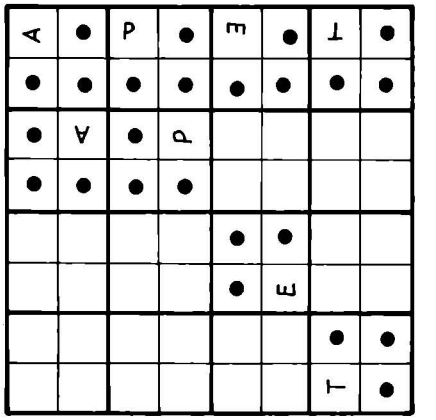
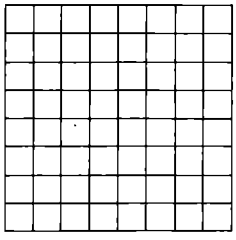


Bild 19



Eine Aufgabe von Prof. Dr. Naum J. Wilenkin

▲2123▲ Schreibt auf die Felder eines Schachbretts jeweils genau eine der Zahlen 1 und -1 so, daß folgende Bedingung erfüllt ist:



Zu je zwei Zeilen gibt es stets eine dritte (von den ersten beiden nicht notwendig verschiedene), deren Felder genau mit den Produkten der auf den entsprechenden Feldern dieser beiden Zeilen stehenden Zahlen besetzt sind.
(Bezeichnet man die in der i-ten Zeile und j-ten Spalte stehende Zahl mit a_{ij} ($i=1, \ldots, 8$; $j=1, \ldots 8$), so kann man diese Bedingung auch wie folgt formulieren:
Zu gegebenen Zeilen Nr. r und s gibt es stets eine Zeile Nr. t, so daß für alle $j=1, \ldots, 8$ gilt: $a_{tj}=a_{rj} \cdot a_{sj}$.)

Zeigt, daß für die aufgeschriebenen Zahlen gilt:
a) Zu je zwei Spalten gibt es stets eine dritte (von den ersten beiden nicht notwendig verschiedene), deren Felder genau mit den Produkten der auf den entsprechenden Feldern dieser beiden Spalten stehenden Zahlen besetzt sind.
(M. a. W.: Zu gegebenen Spalten Nr. k und l gibt es stets eine Spalte Nr. m, so daß für alle $i=1, \ldots, 8$ gilt: $a_{im}=a_{ik} \cdot a_{il}$.)

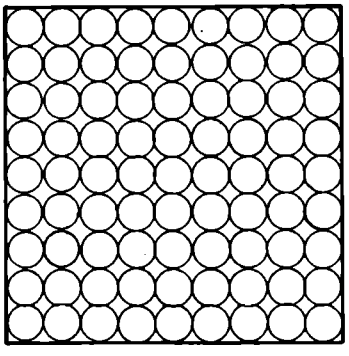
b) Genau eine der Zeilen und eine der Spalten ist nur mit Einsen besetzt; in jeder anderen Zeile (bzw. in jeder anderen Spalte) stehen jeweils zur Hälfte die Zahlen 1 und -1.
Versucht auch zu zeigen, daß *jede* Beschriftung des Schachbretts mit den Zahlen 1 und -1, die der obigen Bedingung genügt, die Eigenschaften a) und b) hat!

Наум Виленкин

Pädagogische Fernhochschule Moskau, Physikalisch-mathematische Fakultät

Über einige häufig vorkommende Summen

Im Schaufenster eines Sportartikelgeschäftes sind Tennisbälle aufgeschichtet. Die Bälle der unteren Schicht (siehe Bild) liegen in Form eines Quadrates, wobei längs jeder Quadratseite jeweils 9 Bälle hintereinander liegen. Die Bälle der unteren Schicht berühren sich gegenseitig und werden durch Leisten am Wegrollen gehindert.



Die Bälle der folgenden Schichten liegen jeweils in den Vertiefungen der darunterliegenden Schicht. Während in der unteren Schicht 9^2 Bälle liegen, sind in der zweiten Schicht 8^2, in der dritten Schicht 7^2 usf. Bälle enthalten. Diese Pyramide besteht demnach aus
$9^2+8^2+7^2+\ldots+1^2$ Bällen.
Diese Anzahl von Bällen läßt sich durch Berechnen der Quadratzahlen von 1 bis 9 und anschließendes Addieren ermitteln. Eleganter ist wohl die Berechnung dieser Summe mittels der auf Seite 43 unseres Nachschlagewerkes „Tabellen und Formeln" in der Tabelle „Einige häufig auftretende Summen" angegebenen Formel

$$(1) \qquad 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

In unserem Falle haben wir für n 9 einzusetzen:

$$\sum_{k=1}^{9} k^2 = \frac{9 \cdot (9+1) \cdot (2 \cdot 9+1)}{6} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} = 3 \cdot 5 \cdot 19 = 285.$$

Auch bei den übrigen Formeln der Tabelle „Einige häufig auftretende Summen" sind die jeweils angegebenen Summen auch in abkürzender Schreibweise mittels Summenzeichen $\sum$ aufgeschrieben worden. So sind z. B. die Summanden von $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ auffaßbar als der nacheinander mit den natürlichen Zahlen $k=1, 2, 3, \ldots, n$ belegte Term k^3. Durch das vor diesen Term gestellte Summenzeichen wird zum Ausdruck gebracht, daß dieser Term nacheinander mit aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen anstelle der Variablen k zu belegen ist und daß die Summe der so entstandenen Zahlen zu bilden ist. Der Zusatz $k=1$ unter dem Summenzeichen bestimmt die kleinste natürliche Zahl, die anstelle der Variablen k einzusetzen ist und der Zusatz n über dem Summenzeichen gibt die größte anstelle k einzusetzende Zahl an:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Zunächst wollen wir aus den in der Tabelle „Einige häufig auftretende Summen" angegebenen Formeln weitere Formeln herleiten. Als zweite Vorbereitung sollen dazu die rechten Seiten von drei Formeln der Tabelle „Einige häufig auftretende Summen" durch Auflösen der Klammern umgeformt werden:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6},$$

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n.$$

Analog ergibt sich:

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1) = \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n,$$

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2.$$

Nach dieser Vorbereitung wollen wir gemeinsam eine Formel für $\sum_{k=1}^{n}(3k+2)^2$ herleiten, d. h. eine geschlossene Darstellung für diese Summe. Mittels der binomischen Formel $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ können wir den Term $(3k+2)^2$ schreiben:

$$(3k+2)^2 = (3k)^2+2 \cdot (3k) \cdot 2+2^2 = 9k^2+12k+4$$

Also gilt zunächst:

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{n}(3k+2)^2 = \sum_{k=1}^{n}(9k^2+12k+4).$$

Da die Addition kommutativ und assoziativ ist, folgt hieraus:

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+2)^2=\sum_{k=1}^{n}9k^2+\sum_{k=1}^{n}12k+\sum_{k=1}^{n}4.$$

Durch Anwenden des Distributionsgesetzes ergibt sich:

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+2)^2 = 9\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2+12\cdot\sum_{k=1}^{n}k+4\cdot\sum_{k=1}^{n}1.$$

Wegen $\sum_{k=1}^{n}1=\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n\text{ mal}}=n$

ergibt sich unter Benutzung der Formeln (2) und (3)

$$(3k+2)^2 = 9\cdot\left(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\right)+12\cdot\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right)+4n.$$

Durch Auflösen der Klammern und Zusammenfassen erhalten wir

$$(6)\qquad \sum_{k=1}^{n}(3k+2)^2=3n^3+\frac{21}{2}n^2+\frac{23}{2}n.$$

Damit lautet die gesuchte geschlossene Darstellung

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+2)^2=\frac{n}{2}(6n^2+21n+23).$$

Selbständig lösen wir die folgenden Aufgaben:

Aufgabe 1: Leite unter Benutzung der Tabelle „Einige häufig auftretende Summen" eine geschlossene Darstellung für

$$\sum_{k=1}^{n}(4k+1)\text{ her!}$$

Aufgabe 2: Berechne $\sum_{k=1}^{100}(4k+1)$!

Aufgabe 3: Leite unter Benutzung der Tabelle „Einige häufig auftretende Summen" eine geschlossene Darstellung für

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\text{ her!}$$

Aufgabe 4: Berechne $\sum_{k=1}^{50}k(k+1)(k+2)$!

Aus dem bisherigen Teil dieses Beitrages wollen wir eine Vermutung ablesen. Diese läßt sich mit dem Begriff des Polynoms ansprechend formulieren. In Anlehnung an die rechten Seiten von (2), (3), (4) und anderen Formeln wird definiert:

Definition: Ist g eine natürliche Zahl, sind $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{g-1}, a_g$ rationale Zahlen, und ist x eine Variable, so heißt die Summe $P_g(x)=a_gx^g+a_{g-1}x^{g-1}+\ldots+a_1x+a_0$ ein Polynom in x. Ist $a_g\neq 0$, so heißt die natürliche Zahl g der Grad des Polynoms. Die in Formel (5) betrachtete Summe läßt sich mittels des Polynoms 2. Grades in $xP_2(x)=9x^2+12x+4$ schreiben als

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+2)^2=\sum_{k=1}^{n}P_2(k).$$

Nach der Formel (6) ist die zugehörige geschlossene Darstellung ebenfalls ein Polynom in n, und zwar vom 3. Grade. Mit der Abkürzung $Q_3(x)=3x^3+\frac{21}{2}x^2+\frac{23}{2}x$ gilt gemäß Formeln (5) und (6)

$$\sum_{k=1}^{n}P_2(k)=Q_3(n).$$

Auf Grund unserer Betrachtungen scheint allgemein zu gelten:

Vermutung: Ist $P_g(x)$ ein Polynom in x vom Grade g (g natürliche Zahl), so gibt es stets ein Polynom $Q_{g+1}(x)$ in x vom Grade $g+1$, so daß für jede natürliche Zahl n mit $n\geqq 1$ gilt:

$$P_g(1)+P_g(2)+P_g(3)+\ldots+P_g(n)=\sum_{k=1}^{n}P_g(k)=Q_{g+1}(n)$$

Diese Vermutung ist wahr! Es ist nach dem Durcharbeiten dieses Beitrages für den Leser eine nützliche Übung, diese Aussage für ein spezielles g, z. B. $g=4$ zu beweisen. Wer mehr Erfahrungen im Führen von Beweisen hat, kann diese Aussage auch für eine beliebige natürliche Zahl g beweisen. Im Rahmen dieses Beitrages wird diese Vermutung uns einen brauchbaren Ansatz zum Auffinden geschlossener Darstellungen für Summen liefern. Dies soll am folgenden Beispiel gezeigt werden:

Wir wollen eine geschlossene Darstellung für $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$ herleiten. Wegen $x(x+1)=x^2+x=P_2(x)$ machen wir gemäß unserer Vermutung den Ansatz

$$(7)\qquad \sum_{k=1}^{n}k(k+1)=Q_3(n)=a_3n^3+a_2n^2+a_1n+a_0.$$

Dabei sind a_3, a_2, a_1 und a_0 in dieser Formel noch zu bestimmende rationale Zahlen. Die Formel (7) wollen wir durch vollständige Induktion beweisen. Beiläufig werden durch diesen Beweis die Konstanten a_3, a_2, a_1 und a_0 mitbestimmt. In Abweichung vom üblichen Vorgehen beim Beweis durch vollständige Induktion 2) wollen wir zunächst den Induktionsschritt und danach erst den Induktionsanfang führen.

Induktionsschritt: Die Formel (7) sei für $n=m$ wahr, d. h. es gelte:

$$(8)\qquad \sum_{k=1}^{m}k(k+1)=a_3m^3+a_2m^2+a_1m+a_0.$$

Es ist zu zeigen, daß mit dieser Annahme auch die Gleichung (7) für $n=m+1$ gilt:

Die linke Seite von Formel (7) für $n=m+1$ lautet, sofern der letzte Summand getrennt aufgeschrieben wird:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m+1}k(k+1)\\&=\sum_{k=1}^{m}k(k+1)+(m+1)[(m+1)+1]\\&=\sum_{k=1}^{m}k(k+1)+(m+1)(m+2)\\&=(a_3m^3+a_2m^2+a_1m+a_0)+m^2+3m+2.\end{aligned}$$

Hierbei wurde zur letzten Umformung die Annahme (8) benutzt. Für die rechte Seite von Formel (7) für $n=m+1$ gilt:

$$\begin{aligned}&a_3(m+1)^3+a_2(m+1)^2+a_1(m+1)+a_0\\&=a_3(m^3+3m^2+3m+1)+a_2(m^2+2m+1)\\&\quad+a_1(m+1)+a_0\\&=(a_3m^3+a_2m^2+a_1m+a_0)+3a_3m^2\\&\quad+(3a_3+2a_2)m+(a_3+a_2+a_1).\end{aligned}$$

Jetzt wurde zur Umformung die binomische Formel für die Exponenten 2 und 3 (siehe „Tabellen und Formeln", S. 42, Tabelle „Binomialkoeffizienten; Binomischer Satz") benutzt.

Linke und rechte Seite der Formel (7) für $n=m+1$ sind einander gleich, falls gilt

$$\begin{aligned}&m^2+\quad 3m+\quad 2\\&=3a_3m^2+(3a_3+2a_2)m+(a_3+a_2+a_1).\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist für alle natürliche Zahlen m sicher dann erfüllt, wenn a_3, a_2 und a_1 den folgenden drei Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned}&\text{I}\quad 3a_3\quad\quad=1\\&\text{II}\quad 3a_3+2a_2\quad=3\\&\text{III}\quad a_3+\ a_2+a_1=2.\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $a_3=\frac{1}{3}$, $a_2=1$ und $a_1=\frac{2}{3}$. Bei dieser Wahl von a_3, a_2 und a_1 im Ansatz (7) wird der Induktionsschritt gültig!

Induktionsanfang: Es ist zu zeigen, daß die Formel (7) für $n=1$ gilt. Für $n=1$ lautet die linke Seite von (7):

$$\sum_{k=1}^{1}k(k+1)=1\cdot(1+1)=1\cdot 2=2.$$

Die rechte Seite von (7) lautet für $n=1$, sofern wir die getroffene Wahl $a_3=\frac{1}{3}$, $a_2=1$ und $a_1=\frac{2}{3}$ berücksichtigen:

$$\frac{1}{3}\cdot 1^3+1^2+\frac{2}{3}\cdot 1+a_0=2+a_0.$$

Die Formel (7) ist also für $n=1$ genau dann gültig, wenn wir $a_0=0$ setzen.

Durch Induktionsanfang und Induktionsschritt ist die Formel

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{1}{3}n^3+n^2+\frac{2}{3}n$$

für jede natürliche Zahl n mit $n\geqq 1$ bewiesen. Nachträglich formen wir die rechte Seite um zu:

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n^2+3n+2)}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Durch analoges Vorgehen wie bei diesem Beispiel können die Formeln der Tabelle „Einige häufig auftretende Summen" und auch andere hergeleitet und bewiesen werden. Zur Übung lösen wir die folgenden Aufgaben selbständig:

Aufgabe 5: Leite ohne Benutzung der Tabelle „Einige häufig auftretende Summen" eine geschlossene Darstellung für

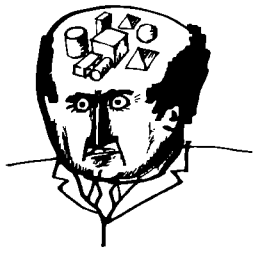
$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$$

her und beweise sie!

Aufgabe 6: Gib eine geschlossene Darstellung für $\sum_{k=1}^{n}k^4$ an und beweise sie!

W. Träger

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1982

Mathematik

Ma5 ▪2124 In dem Schema
$1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 = 100$ ist jedes der sieben Sternchen entweder durch ein Multiplikationszeichen (·) oder durch ein Additionszeichen (+) so zu ersetzen, daß man eine wahre Gleichheitsaussage erhält. (Klammern dürfen nicht gesetzt werden.)

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma5 ▪2125 Astrid, Beate, Cordula und Dorothea sammelten zusammen 43 kg Altpapier. Astrid sammelte dreimal soviel wie Dorothea. Beate und Cordula gaben zusammen 19 kg ab. Beate sammelte 4 kg mehr als Dorothea. Wieviel Kilogramm Altpapier konnte jede von ihnen dem Altstoffhandel zuführen?

Schülerin Barbara Schütze, Weißenfels (Kl. 7)

Ma5 ▪2126 Berechne das Produkt aus fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, deren Summe 25 beträgt!

Schülerin Claudia Popien, Magdeburg (Kl. 8)

Ma5 ▪2127 Eine rechteckige Rasenfläche, die doppelt so lang wie breit ist, wird von einem 1 m breiten Fußweg umgeben, der einen äußeren Umfang von 248 m hat. Es ist der Inhalt der Rasenfläche zu berechnen!

Schülerin Claudia Popien, Magdeburg (Kl. 8)

Ma5 ▪2128 Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, für die folgendes gilt: Vertauscht man die Ziffern einer solchen Zahl, so ist die entstandene Zahl um 27 größer als die ursprüngliche.

Schülerin Uta Boldt, Burg Stargard (Kl. 8)

Ma5 ▪2129 Beim Hans-Beimler-Wettbewerb im Luftgewehrschießen erreichte die Klasse 8a zehn Ringe mehr als die Klasse 8b, diese aber fünfzehn Ringe mehr als die Klasse 8c. Alle drei Klassen erreichten zusammen 901 Ringe. Wieviel Ringe erreichte jede dieser drei Klassen?

Schülerin Beatrix Rost, Riesa (Kl. 7)

Ma6 ▪2130 Klaus fragte seine Schwester Anna, die gerade vom Einkaufen kam, wieviel Äpfel sie mitgebracht habe. Sie antwortete: „Addiert man zur dreifachen Anzahl der von mir gekauften Äpfel noch 5, multipliziert man danach die so erhaltene Summe mit 3, so erhält man die zehnfache Anzahl der mitgebrachten Äpfel." Wieviel Äpfel hat Anna gekauft?

Schülerin Simone Hartwich, Hagenow (Kl. 8)

Ma6 ▪2131 Auf welche Ziffer endet der Wert des Terms

$$17^7 + 12^3 + 15^2 - 16^4 ?$$

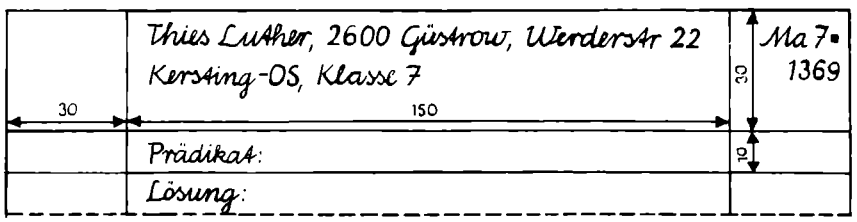
Schülerin Kerstin Lettau, Neustadt (Kl. 5)

Ma6 ▪2132 Es sind alle vierstelligen natürlichen Zahlen z zu ermitteln, die folgende Eigenschaften besitzen:
(1) Jede dieser Zahlen z ist durch 8 teilbar.
(2) Die Zahlen, die den Ziffern einer solchen Zahl z entsprechen, sind paarweise voneinander verschiedene Primzahlen.

Schüler Daniel Hammer, Berlin (Kl. 7)

Ma6 ▪2133 Frau Heller verbrauchte von ihrem Kohlenbestand aus dem Keller bisher den fünften Teil zum Beheizen des Zimmers eines Untermieters, den zehnten Teil zum Beheizen des Badeofens, die Hälfte zum Beheizen ihrer übrigen Wohnräume. Nun sind noch 120 kg Kohlen im Keller. Wieviel Säcke mit je 50 kg Kohle waren zuvor im Keller?

Schülerin Claudia Popien, Magdeburg (Kl. 8)



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1981/82 läuft von Heft 5/1981 bis Heft 2/82. Zwischen dem 1. und 10. September 1982 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/81 bis 2/82 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/82 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/81 bis 2/82) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1981/82 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ma6 ■2134 Frau Meier kaufte in einem Backwarengeschäft 3 Pfannkuchen mehr als Frau Schulze und 5 Spritzkuchen mehr als Frau Lehmann. Frau Winkler kaufte 2 Streuselkuchen mehr als Frau Schulze. Die Anzahl der von Frau Schulze gekauften Pfannkuchen ist kleiner als die Anzahl der von Frau Lehmann gekauften Spritzkuchen, und diese ist kleiner als die Anzahl der von Frau Schulze gekauften Streuselkuchen. Wieviel Stück Kuchen jeder Sorte kaufte jede dieser vier Frauen, wenn es zusammen 22 Stück Kuchen waren?

Schülerin Kathrin Müller, Legde (Kl. 6)

Ma7 ■2135 Holger fordert Peter auf, sich vier von Null verschiedene natürlichen Zahlen zu denken. Dann soll Peter zunächst die ersten drei der gedachten Zahlen, danach die letzten drei, danach die erste, dritte und vierte, schließlich die erste, zweite und vierte jeweils addieren und die Ergebnisse der vier errechneten Summen nennen. Peter errechnete die Summe 13, 17, 14 und 16. Welche Zahlen hat sich Peter gedacht?

Schülerin Claudia Popien, Magdeburg (Kl. 8)

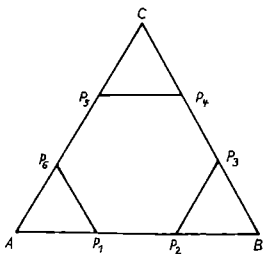
Ma7 ■2136 Jürgen spielt Tele-Lotto. Als ihn sein Freund fragt, welche fünf Zahlen er diese Woche getippt habe, antwortet er: „Die Summe aus den fünf getippten Zahlen beträgt 78. Die Summe aus den beiden größten Zahlen ist doppelt so groß wie die Summe aus den drei übrigen Zahlen. Die Summe aus den beiden kleinsten Zahlen ist gleich der drittgrößten Zahl. Die kleinste Zahl ist um 5 kleiner als die nächste größere. Die beiden größten Zahlen verhalten sich wie 5:8." Welche Zahlen hat Jürgen getippt?

Schüler Rainer Mielke, Gr. Bademeusel (Kl. 7)

Ma7 ■2137 Die Quersumme einer zweistelligen natürlichen Zahl beträgt 9. Multipliziert man diese Zahl mit 3, subtrahiert man vom Produkt 9, so erhält man als Ergebnis eine zweistellige natürliche Zahl, die mit den gleichen Ziffern wie die ursprüngliche Zahl, aber in umgekehrter Reihenfolge geschrieben wird. Wie heißt diese Zahl?

Schülerin Kerstin Graf, Plauen (Kl. 7)

Ma7 ■2138 Einem gleichseitigen Dreieck ABC wurde ein regelmäßiges Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ einbeschrieben. Wieviel Prozent des Flächeninhalts des Dreiecks beträgt der Flächeninhalt des Sechsecks?



Schüler Lutz Andrews, Rostock (Kl. 10)

Ma8 ■2139 Bernd addiert vier natürliche Zahlen richtig und erhält 47. Als er diese vier Zahlen miteinander multipliziert, erhält er 23615. Es ist zu zeigen, daß dieses Ergebnis falsch ist.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma8 ■2140 Es ist zu beweisen, daß für beliebige drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen a, b, c die Differenz b^2-a^2 stets um 2 kleiner ist als die Differenz c^2-b^2!

Schüler Thomas Jez, Herzberg (Kl. 7)

Ma8 ■2141 Es ist zu beweisen, daß der Term $19^{2n}-7^{3n}$ für alle natürlichen Zahlen n durch 18 teilbar ist!

Schülerin Birgit Arndt, Loitz (Kl. 8)

Ma8 ■2142 Es ist zu beweisen, daß in jedem rechtwinkligen Dreieck die Seitenhalbierende der Hypotenuse halb so lang ist wie diese.

Schüler Rolf Kamieth, Kakerbeck (Kl. 12)

Ma9 ■2143 Es sind zwei natürliche Zahlen x und y zu ermitteln, die folgende Bedingungen erfüllen:
(1) Die Summe ihrer Quadratwurzeln ist 42.
(2) Die Differenz ihrer Quadratwurzeln ist 12.

Schüler Andreas Gedat, Bad Liebenstein

Ma9 ■2144 Es ist zu beweisen, daß der Term 9^n-1 für alle natürlichen Zahlen n durch 8 teilbar ist.

Schüler Ulf Lange, Berlin (Kl. 7)

Ma9 ■2145 Durch einen Würfel kann ein ebener Schnitt so geführt werden, daß sich als Schnittfigur ein regelmäßiges Sechseck ergibt. Der Mittelpunkt des Würfels fällt mit dem des Sechsecks zusammen; die Ecken des Sechsecks fallen mit Mittelpunkten von Würfelkanten zusammen.
a) Zeichnen Sie ein Kantenmodell eines Würfels mit dieser Schnittfigur!
b) Drücken Sie den Flächeninhalt dieses Sechsecks durch die Länge a der Würfelkante aus!

Schüler Andreas Löffler, Halle-Neustadt (Kl. 8)

Ma9 ■2146 Jede sechsstellige Zahl der Form $\overline{abcabc}$ in dekadischer Darstellung ist durch drei verschiedene Primzahlen teilbar, deren Summe wieder eine Primzahl ist. Es sind diese drei Primzahlen zu finden.

Schülerin Ingrid Wolf, Berlin (Kl. 10)

Ma10/12 ■2147 In welchem Zahlensystem ist die Gleichung $15^2=321$ eine wahre Aussage?

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma10/12 ■2148 Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten der Länge a bzw. b und der Hypotenuse der Länge c. Außerdem gelte $\cos(\gamma-\beta)-\sin\alpha=0$. Der Flächeninhalt dieses Dreiecks ist durch die Kathetenlänge a auszudrücken.

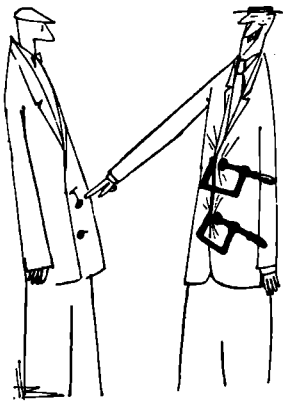
Peter Braumüller, Wiener Neustadt (Österreich)

Ma10/12 ■2149 Beweisen Sie folgenden Satz!
Die Flächeninhalte zweier Dreiecke, die in einem Winkel übereinstimmen, verhalten sich wie die Produkte der Längen derjenigen Seiten, die diesen Winkel einschließen.

Andreas Günther, Altenburg

Ma10/12 ■2150 Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$, dessen Umfang 68 cm und dessen Flächeninhalt 112,5 cm² betragen. Die Größe des Winkels $\sphericalangle BAD$ sei 30°. Es sind die Längen der Parallelogrammseiten zu berechnen.

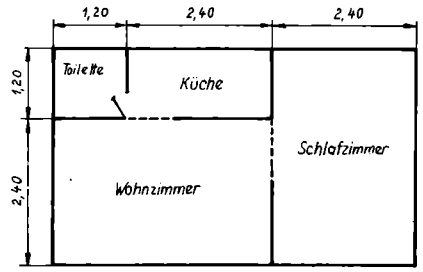
Math. Arbeitsgemeinschaft, Fritz-Heckert-OS Milkau



Physik

Hinweis: In den Physikaufgaben wird das seit 1. Januar 1980 in der DDR verbindliche *Internationale Einheitssystem* (SI) verwendet. Da für den Bereich der Volksbildung die Einführung des Einheiten-Standards in unserer Schule nur schrittweise erfolgt und die Anpassung an das SI mit planmäßiger Überarbeitung bzw. Neuentwicklung von Unterrichtsmitteln verbunden ist, werden im Physik-Wettbewerb der *alpha* die Angaben in alten Einheiten in Klammern gesetzt. Die Lösungen sind dann ebenfalls mit den Angaben der alten Einheiten versehen, um dem Schüler den gewohnten Weg zu zeigen.

Ph6 ■101 Das Wochenendhaus A 20 des VEB Holzbaukombinat, Werk Wernigerode, hat die in der Skizze angegebenen Maße. Die lichte Raumhöhe beträgt 2,40 m. Berechne die Wohnflächen der einzelnen Zimmer und das Volumen aller Räume zusammen!



Skizze nicht maßstabgerecht. Alle Maßangaben sind in Meter und gerundet.

Ph7 ▪102 Beim Umräumen muß ein großer Schrank um 1,25 m verschoben werden. Er drückt mit einer Gewichtskraft von 1648 N (168 kp) auf den hölzernen Fußboden. Berechne die Kraft und die Verschiebungsarbeit während des Schiebens, wenn der Schrank Holzfüße hat!

Ph8 ▪103 Eine Ramme bzw. Rammbär wird zum Eintreiben von Pfählen oder zum Verfestigen des Bodens verwendet. Durch das Anheben wird in der Ramme mechanische Energie gespeichert. Eine solche Ramme habe eine Masse von 1500 kg, das entspricht einer Gewichtskraft von 14715 N (1500 kp), und soll aus einer Höhe von 1,5 m herabfallen. Dabei werden 25% der Energie in Wärmeenergie umgewandelt. Um wieviel °C könnte man damit 1 l Wasser erwärmen?

Ph9 ▪104 Ein elektrischer Lötkolben für eine Spannung von 220 V und eine Leistungsaufnahme von 120 W wird irrtümlich an 110 V angeschlossen. Wie groß ist dann die Leistungsaufnahme?

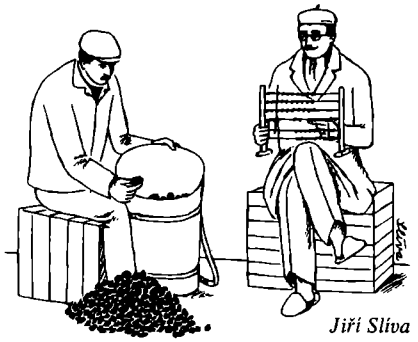
Steffen Lausch, Grimma, BS Borsdorf

Ph10/12 ▪105 Eine Fahrzeugkolonne der NVA erhält den Befehl, mit Höchstgeschwindigkeit einen 120 km entfernten Punkt zu erreichen. Durch Erhöhung ihrer Geschwindigkeit um 10 $km \cdot h^{-1}$ gelangt sie 1 h früher an den angegebenen Punkt, als wenn sie ihre ursprüngliche Geschwindigkeit beibehalten hätte. In welcher Zeit erreicht die Kolonne das angegebene Ziel, wenn man voraussetzt, daß die Bewegung gleichförmig erfolgt?

Steffen Lausch, Grimma, BS Borsdorf

Chemie

Ch7 ▪81 Eine Sauerstoffanlage verbraucht täglich 1560000 m^3 Luft zur Erzeugung von Sauerstoff. Ein Mensch atmet in einer Minute etwa 30 l Luft. Wie lange könnte ein Mensch leben, ehe die Tagesleistung verbraucht ist?


Jiří Sliva

„Hab ich doch gleich gesagt, einundsechzig."

Kurt Koppe, Berlin

Ch8 ▪82 Zur Erhöhung der Bodenfruchtbarkeit setzt eine LPG 90 kg Kalksteinmehl, das 90% Kalziumkarbonat enthält, ein. Da noch Vorräte von Kalziumhydroxid am Lager vorhanden sind, will die LPG diese aufbrauchen.

a) Wieviel Kilogramm Kalziumoxid enthält das Kalksteinmehl?

b) Wieviel Kilogramm Kalziumhydroxid müssen eingesetzt werden, um den Boden mit der gleichen Menge Kalziumoxid zu düngen, die im Kalksteinmehl enthalten ist?

Ch9 ▪83 Wieviel Gramm Chlor sind in 8,2 kg einer 7%igen Kaliumchloridlösung enthalten?

Ch10/12 ▪84 28,2 kg Natriumhydroxid und 35,2 kg Schwefelsäure werden zur Reaktion gebracht. Dabei sollen 50 kg Natriumsulfat mit einem Reinheitsgrad von 95% entstehen. Wie groß ist die Menge der Ausgangsstoffe, die im Überschuß eingesetzt wird? Berechne den Überschuß prozentual!

Fünf und dreyßigste
Belustigung.

Wenn drey Paar Eheleute von einem Schiffmann über ein Waſſer in einem kleinen Kahne, in welchem auf einmal nicht mehr als zwey ſeyn können, geführt werden ſollen, doch ſo, daß niemals ein Mann bey der andern zwey Weibern allein, und kein Weib anders als bey ihrem Manne bleibe, wie ſolches anzuſtellen.

Auflöſung.

Es ſeyen die drey Männer Sempronius, Titus und Sixtus, und des Sempronii Weib heiße Anna, des Titi, Roſina, und des Sixti, Urſula. Um dieſer Forderung nun ein Genüge zu thun, nimmt der Schiffmann zuerſt zwey Weiber, Anna und Roſina. Die Roſina führet er wieder mit ſich herüber, und holet das dritte Weib Urſula. Hierauf nimmt er dieſe letzte wieder mit ſich zurück, die ſodann bey ihrem Manne Sixto bleibet. Hingegen führet er die andern beyden Männer, den Sempronius und Titus zu ihren Weibern, Anna und Roſina, hinüber, und zuletzt holet er auch die Urſula nebſt ihrem Manne Sixto ab, und führet ſie zu den andern. Und ſolchergeſtalt können alle übergeführet werden, ſo daß niemals ein Mann bey den andern zweyen Weibern allein gelaſſen werde, und kein Weib bey einem andern, als bey ihrem Manne bleiben dürfe.

Denksportaufgabe aus dem 18. Jahrhundert. „Neue physikalische und mathematische Belustigungen oder Sammlung von neuen Kunststücken zum Vergnügen". Guyot, Augsburg 1777

alpha stellt vor:

Tilo Schaarschmidt

Bad Lauchstädt

Im vergangenen *alpha*-Wettbewerb erwarben 3660 Schüler eine Urkunde und das *alpha*-Abzeichen in Silber, weiteren 1353 Schülern wurde das Abzeichen in Gold verliehen, 108 Schülern konnte ein Buchpreis überreicht werden. Dies zeigt den unermüdlichen Fleiß, mit dem Tausende von *alpha*-Lesern ihr Wissen und Können einsetzten, um ihre Leistungen in Mathematik zu verbessern.

Bei der Auswertung des Wettbewerbs – es gingen 90000 Lösungen ein – fiel uns ein Schüler besonders auf. Wir möchten ihn vorstellen: *Tilo Schaarschmidt.*

Tilo Schaarschmidt, geb. in Bad Lauchstädt, Schüler der Klasse 7a der Goethe-Oberschule Bad Lauchstädt.

Er erhielt in allen Fächern die Note 1 und in Sport die Note 2.

Hobbys: Tilo spielt Fußball in einer Mannschaft der BSG Chemie Bad Lauchstädt (2. Kreisklasse). Regelmäßig besucht er den Filmzirkel des Klubzentrums. Begriffe wie Studiotechnik, Synchronisation, Kameratechnik sind für ihn inhaltlich klar. Er ist stets aktiv bei der weiteren Ausrüstung des Studios. So baut und repariert er z. B. Verstärkeranlagen.

Beruf des Vaters: Landschaftsgestalter
Beruf der Mutter: Gärtnerin
Berufswunsch: Mathematikstudium in Verbindung mit Elektronik
Erfolge als Junger Mathematiker:
Kreisolympiade Klassenstufe 7: 1. Preis
Klassenstufe 8: 1. Preis
Bezirksolympiade Klassenstufe 8: 1. Preis (38 Punkte).

Urteil des Mathematiklehrers: Tilo hat seit Jahren in Mathematik den Klassendurchschnitt 1,0. Für das Lösen mathematischer Probleme verwendet er einen beträchtlichen Teil seiner Freizeit. Bereits in der 5. Klasse erhielt er in der Kreisolympiade einen 1. Preis. Auch in anderen Fächern besitzt er ein umfangreiches Wissen. Während des Mathematikunterrichts löst Tilo Aufgaben höherer Klassenstufen der Kreis- und Bezirksolympiaden. Im Unterricht kommt es wiederholt vor, daß Tilo an der Tafel seinen Mitschülern recht gut erläutert.

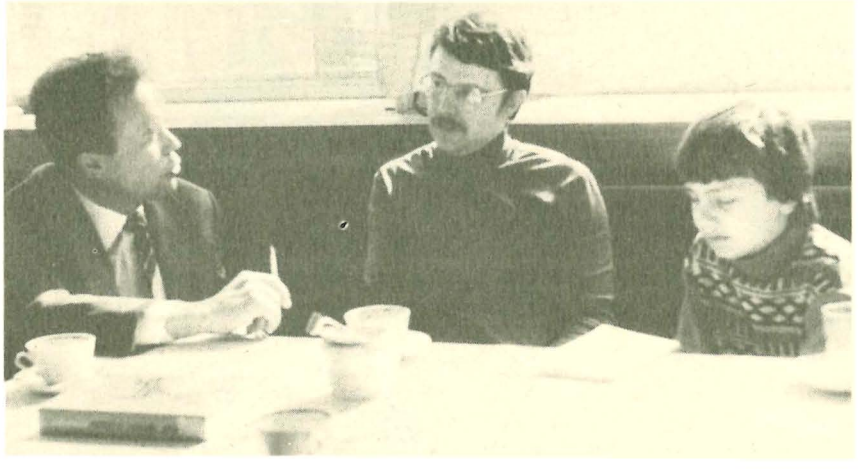
Tilo schreibt an die Redaktion alpha:

...Ich lese die *alpha* seit der 6. Klasse. Sie hat mir geholfen, meine schulischen Leistungen stark zu verbessern. Es ist schon so: Übung macht den Meister! Die zahlreichen *alpha*-Aufgaben, mit denen ich mich beschäftige, sind ein unwahrscheinlich gutes mathematisches Training. Ich verweile nicht nur bei den Aufgaben meiner Klassenstufe, sondern versuche mich auch an Aufgaben höherer Klassenstufen. *alpha* bietet zahlreiche Möglichkeiten der aktiven Vorbereitung auf die Mathematikolympiaden, bei denen ich bisher recht gut abgeschnitten habe....

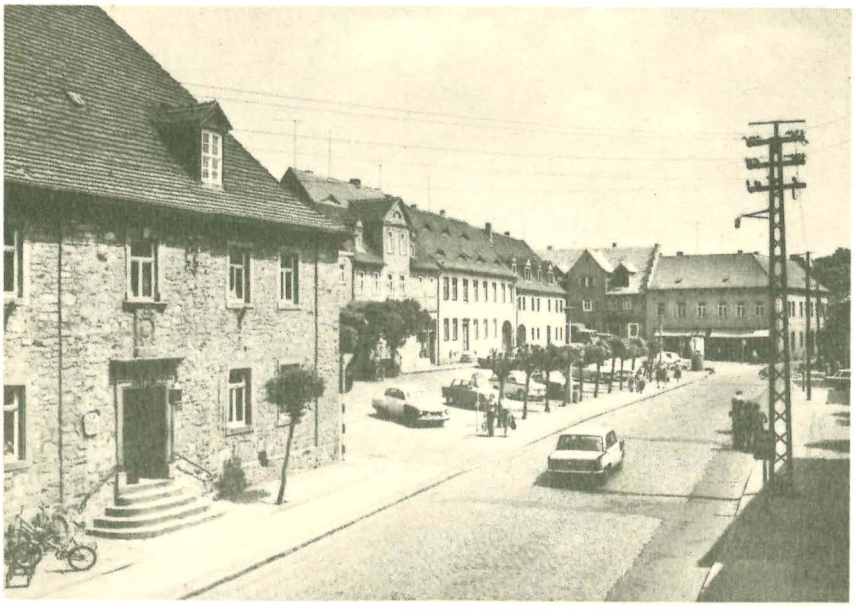
Resultat einer Aussprache: Im Rahmen einer Aussprache an der Sektion Mathematik und Rechentechnik der Technischen Hochschule für Chemie *Carl Schorlemmer* Leuna-Merseburg wurden Inhalt und Form einer individuellen Betreuung Tilo Schaarschmidts abgesprochen.

Tilos Mutter bei der Arbeit im Gewächshaus

Aussprache an der TH in Leuna-Merseburg



Der Markt von Bad Lauchstädt, an dem Tilo wohnt



7 Aufgaben von Tilo

▲1▲ Ermittle alle Quadratzahlen, deren Vorgänger Primzahlen sind!

▲2▲ Rolf geht einkaufen. Er hat genau 15 Geldstücke bei sich, und zwar 10-Pf-, 20-Pf- und 50-Pf-Stücke. Rolf kauft für 4 Mark Waren und geht mit 60 Pf wieder nach Hause. Dabei überlegt er sich: Hätte er statt der 10-Pf-Stücke 2-M-Stücke, statt der 20-Pf-Stücke 20-M-Stücke und statt der 50-Pf-Stücke 5-M-Stücke gehabt, so würde er 101 Mark zurückbringen.
Ermittle, wieviel Münzen von jeder Sorte Rolf bei sich hatte!

▲3▲ Beweise, daß das Produkt der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen durch 13824 teilbar ist, wenn die erste der drei Zahlen gerade und die mittlere durch drei teilbar ist!

▲4▲ a) Löse die Gleichung
$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2\sin^2\alpha=\sqrt{2}$ für $0\leqq\alpha\leqq360°$!
b) Zeige, daß die Ungleichung
$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2\sin^2\alpha>\sqrt{2}$
keine Lösung hat!

Der Aufforderung, einige Aufgaben aus dem Betrieb der Mutter, beschäftigt beim Forschungszentrum für Bodenfruchtbarkeit Müncheberg, Außenstelle Bad Lauchstädt, (Akademie der Landwirtschaftswissenschaften der DDR) zu beschaffen, kam Tilo umgehend nach.

Stud. math. Uwe Quasthoff, Karl-Marx-Universität Leipzig (ehem. erfolgreicher IMO-Teilnehmer) wählte aus der Vielzahl theoretischer (siehe oben) wie praktischer (siehe unten) Aufgaben aus und bearbeitete die gestellten Probleme.

▲5▲ Von einer Fläche von 13,9 m² erntet man 10,85 kg Weizen. Die Trockenmasse der Körner beträgt 81,7%.
Wieviel dt Weizen wurden pro Hektar auf einer anderen Fläche geerntet, wenn die Trockenmasse 86% betrug und die Reinausbeute (d. h. Trockengewicht pro Fläche) gleich war?

▲6▲ Ein Rübenacker soll mit Stickstoff gedüngt werden. Als Stickstoffdünger wird Kalkammonsalpeter verwendet, sein Anteil an reinem Stickstoff beträgt 25,72%. Die auszubringende Menge Reinstickstoff beträgt 180 kg.
Wieviel kg Kalkammonsalpeter sind dazu auszubringen?

▲7▲ Ein Problem zur Unterhaltungsmathematik: Der Erfinder des Schachspiels dachte sich für sich folgende Belohnung aus: Er wollte für das erste der 64 Felder des Schachbretts ein Korn Weizen, für das zweite Feld zwei Körner, für das dritte Feld vier Körner usw., d. h. für jedes weitere Feld die doppelte Anzahl von Körnern. 1000 Körner der Weizensorte „Alcedo" wiegen 42,2 g, in der DDR wurden 1980 9600000 t Weizen geerntet. Das Wievielfache dieser Ernte hat der „bescheidene" Erfinder verlangt, wenn nur „Alcedo" angebaut wird?

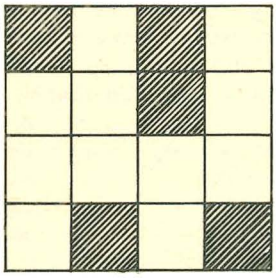
In freien Stunden · alpha-heiter

Die „verrückten" Kommas

Bernd hat erfolgreich an der Kreisolympiade teilgenommen. Sein Mathematiklehrer bittet ihn deshalb, in einem Pioniernachmittag der 4. Klasse über die Olympiade zu berichten. Da Bernd nicht nur für die Mathematik, sondern auch für den Humor etwas übrig hat, schreibt er vor Beginn des Pioniernachmittags folgenden heiteren Text an die Tafel:
Auf meinem Tisch ein unbeschriebenes Blatt Papier in der Colaflasche,
nur noch wenig Flüssigkeit in meinem Gehirn,
eine Lösungsidee in meiner Hand,
ein stumpfer Bleistift in der Frühstücksbüchse,
eine weiche Birne in meinem Kopf,
noch kluge Gedanken im Patronenfüller,
fast keine Tinte mehr im Tafelwerk,
nirgends etwas Brauchbares zu finden.
Nach einem heftigen Gelächter über den sinnlosen Text haben die Pioniere der 4. Klasse natürlich schnell herausgefunden, daß Bernd die Kommas an die falschen Stellen gesetzt hat.
Wo müssen die Kommas stehen, damit aus dem Sinnlosen etwas Sinnvolles wird?

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Primzahlzwillinge



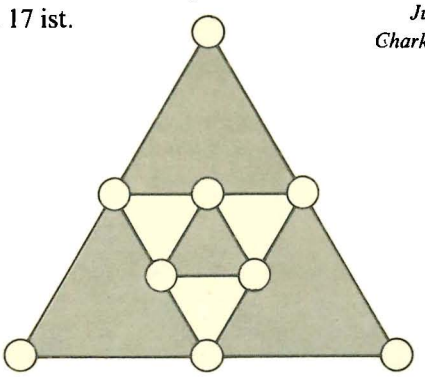
Trage die Summe von Primzahlzwillingen so in die leeren Felder des nebenstehenden Quadrates ein, daß die Summe aller Primzahlen in den einzelnen Spalten bzw. Zeilen, aber auch in einer Diagonalen jeweils 120 beträgt!
Hinweis: Zwei Primzahlen, deren Differenz 2 beträgt, heißen Primzahlzwillinge.

Mathematikfachlehrer G. Stolz, Königs Wusterhausen

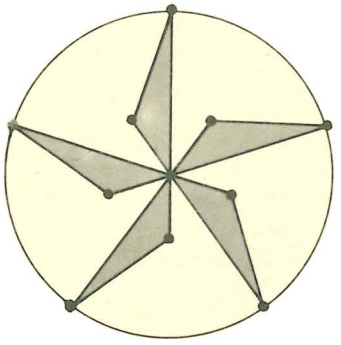
Summe gesucht

Es sind die Zahlen 1 bis 9 so in die Kreise der abgebildeten Figur einzutragen, daß die Summe der Zahlen längs des Randes eines jeden der schraffierten Dreiecke gleich 17 ist.

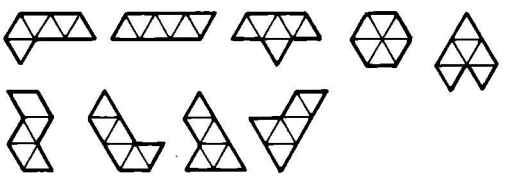
Ju. A. Alenkow, Charkow (UdSSR)



An Stelle der Punkte sind die Zahlen 1 bis 11 so einzutragen, daß die Summe am Rande jedes Dreiecks und des Umfangs stets gleich ist. *Dirigent J. Pěnčik, Praha*



Magisches Sechseck



Aus den neun 6-Zellen ist ein regelmäßiges Sechseck zu legen. Also: Die Figuren sauber auf Transparentpapier übertragen und dann viel Spaß und Geschick beim Legen. Wer ist der Schnellste?

Catherine Le Boëté, Gisors (Frankreich)

Kryptarithmetik

EINS	PLUS	e · g = dc
EINS	PLUS	: : :
EINS	PLUS	a · b = b
+EINS	+PLUS	e · b = af
VIER	MATHE	

Schülerin Sylvia Günther, Dresden (Kl. 11)
Dirigent J. Pěnčik, Praha
Katrin Fink, Neustrelitz (Kl. 5)

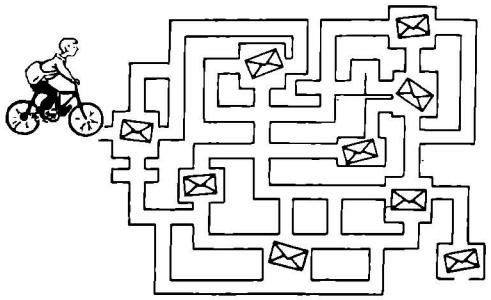
abc · b = cadb	AC + DE = ED
+ − +	− − —
ceea · e = e	AB + DE = FE
cade + b = cadb	C + B = C

Jacqueline Dick, Stolpen (Kl. 7)
Axel Richter, Ludwigsfelde (Kl. 5)

Der Bote und die neun Pakete

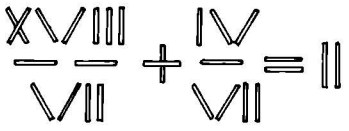
Neun Pakete müssen eilig zugestellt werden. Der Bote sieht sich den Stadtplan an und weiß bald, wie er fahren muß. Er liefert alle Pakete ab, ohne ein Stück des Weges zweimal zurückzulegen. Wie verlief seine Route?

Aus: Sputnik, Moskau



Spiel mit Hölzchen

Gegeben sei folgende durch Hölzchen gelegte Gleichung.

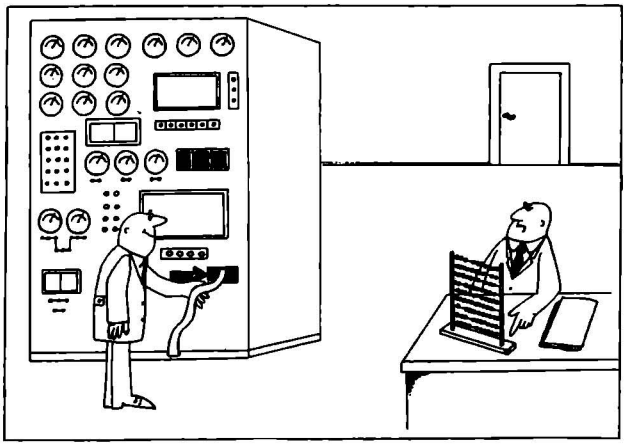


Sie ist natürlich falsch, denn $\frac{18}{7} + \frac{4}{7} = 2$. Man nehme ein Hölzchen weg, so daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht.

Andreas Fittke, Berlin

Weisheiten

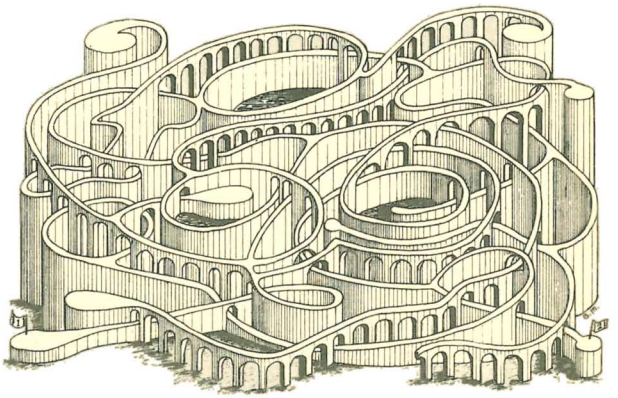
- „Um etwas richtig zu machen, muß man herausfinden, was man dazu nicht braucht." *James Watt*
- Was soll die Relativitätstheorie, wenn der Wecker nicht tickt?
- Wer eine Eins ist, wird von Nullen und Kommas bedrängt.



„Stimmt" *E. Neumann*

Irrgarten

Wer findet am schnellsten den Weg von Fahne Nr. 1 zu Fahne Nr. 2?

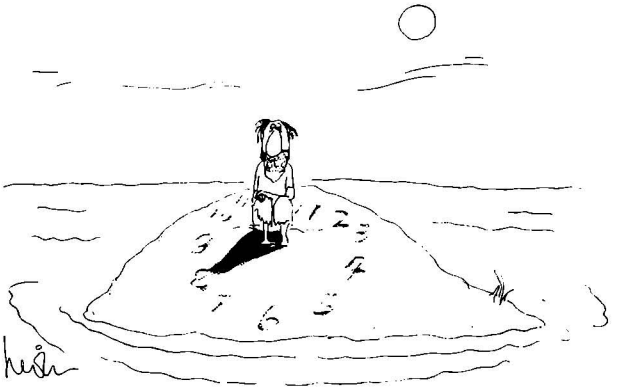


Aus: Füles, Budapest

Ist das möglich?

Der Großvater eines Jungen ist nur sechs Jahre älter als der Vater des Jungen. Es gab keine Wiederverheiratung, Adoption oder ähnliches.

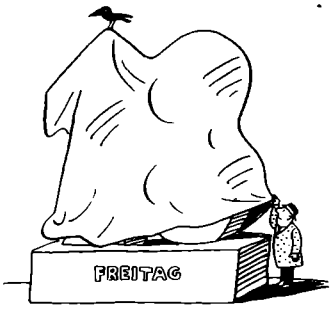
Aus: Math. LOG, Oklahama



Aus: The New Yorker

Freitag, der Dreizehnte

Auf der Spur rabenschwarzer Unglückstage

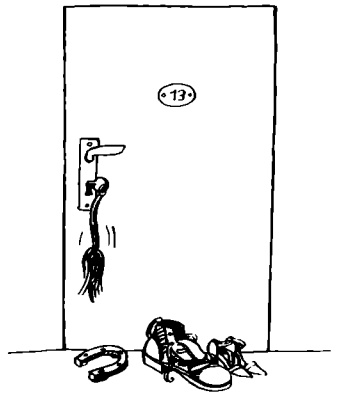


Am vierzehnten Januar vor fünfzig Jahren warnte die „Leipziger Volkszeitung": „Für Abergläubische ist es notwendig zu wissen, daß das Jahr 1931 drei Freitage bringt, die zugleich die Unglückszahl 13 tragen – und zwar im Februar, März und November. Und nun kann das Gruseln losgehen...!"
Bekanntlich hatte zu dieser Zeit sowohl das politische als auch das wirtschaftliche Gruseln längst begonnen, ohne sich nach irgendwelchen Unglücksdaten zu richten.
In der wissenschaftlich gefestigten Überzeugung, daß die Scheu vor einem Freitag, dem Dreizehnten, nur Leute beherrsche, die nicht denken, aber glauben, warf ich einen Blick aufs einundachtziger Kalendarium. Das darf doch nicht wahr sein! erschrak ich und klopfte vorsichtshalber dreimal auf den Schreibtisch, völlig im unklaren darüber, ob kunststoffbeschichtete Preßspanplatten die gleiche unglückabwendende Wirkung wie echtes Holz aufweisen: Nach einem halben Jahrhundert tragen wiederum drei Freitage, und zwar gleichermaßen im Februar, März und November, die Unglückszahl Dreizehn. Da für die Dinge zwischen Himmel und Erde meines Wissens eine Sternwarte zuständig ist, fuhr ich (sicherheitshalber an einem Dienstag, dem Zwanzigsten) nach Babelsberg.

Diplom-Mathematiker Dr. Hans-Joachim Felber ist der Mann, der in der DDR Mond und Sonne auf- und untergehen läßt sowie Ostern, Himmelfahrt oder Pfingsten bewegt, und das alles wenigstens zwei Jahre im voraus, damit die Kalenderhersteller, vor allem Hermes in Halle, rechtzeitig die Druckvorlagen anfertigen können. Seit neun Jahren hat dieser Wissenschaftler das Monopol inne, das der Sternwarte seit siebzehnhundert zusteht. Damals nämlich führten die protestantischen Staaten des Heiligen Römischen Reichs die gregorianische Datierung ein, die der Berechnung des Papstes Gregor XIII. (des Dreizehnten!) von fünfzehnhundertzweiundachtzig zugrunde lag. Um allen Glaubensquerelen endgültig aus dem Weg zu gehen, verordnete Preußenkönig Friedrich Zwo ab siebzehnhundertsechsundsiebzig den Allgemeinen Reichskalender, der mit Gregors Werk praktisch identisch war.

Das Kalenderprivileg der Sternwarte, die sich damals inmitten Berlins in der Dorotheenstraße (heute Clara-Zetkin-Straße) befand, hatte übrigens noch einen höchst irdischen Nebennutzen: Von den Zahlungen der Bezieher des Grundkalendariums honorierte der brandenburgisch-preußische Staat unter anderem den Präsidenten und die Sekretare der Akademie der Wissenschaften. Heute können die Herren froh sein, daß wir nur den Reichskalender, nicht aber die Gehaltsregelung beibehalten haben.

„Was denn", staunt der Republiks-Kalendermacher, „drei schwarze Freitage in einem Jahr? Jahrelang befasse ich mich mit diesen Dingen und komme nicht mal auf solch eine Idee. Kurios, kurios! Da tippt man also das Unglück rein automatisch ins Kalendermanuskript... Nun schlägt's aber doch dreizehn!"
Spricht's, greift nach seinen Tabellen und stellt sogleich fest, daß derartige Pechsträhnen nicht einmal so selten auftreten (siehe Randtext), wie man für gewöhnlich anzunehmen geneigt ist. „Die häufigste Dreierkombination tritt in den Monaten Februar/März/November auf. In Schaltjahren können die Unglückstage aber auch auf drei andere Monate fallen, wie beispielsweise neunzehnhundertvierundachtzig (Januar/April/Juli). Nicht jedes Schaltjahr hat jedoch drei schwarze Freitage, wie man an neunzehnhundertachtzig und -achtundachtzig sehen kann. Das ist ja 'ne ganz boshafte Geschichte!"
Dann rutschen wir gemeinsam forschend mit den Zeigefingern die Zahlenkolonnen entlang und fällen kraft des staatlichen Kalenderprivilegs der Babelsberger Sternwarte die für alle Abergläubischen beachtenswerte Entscheidung, daß drei auf einen Dreizehnten fallende Freitage pro Jahr das Unglücksmaximum darstellen, einer dagegen als Minimum gelten darf. Solch ein Glücksumstand steht uns übernächstes Jahr mit dem Mai ins Haus. „Kein Freitag, der Dreizehnte", sagt der Mathematiker, „das darf nicht sein. Zahlentheoretisch ist das gar nicht drin."
So wissen wir's denn aus berufenem Mund: Mit wenigstens einem schwarzen Freitag müssen wir in jedem Jahr leben. Und wenn das Pech, Gregor XIII., Friedrich II. und Dr. Felber es so fügen, dann auch mit zweien oder dreien.
Unglücksbeweise für solche Termine scheinen aber mehr als rar zu sein. Nach aufwendigem Suchen fand ich schließlich heraus, daß der Philosoph Ludwig Feuerbach an einem derartigen Tag verstarb und Lessings „Emilia Galotti" am Freitag, dem dreizehnten März siebzehnhundertzweiundsiebzig in Braunschweig uraufgeführt wurde, dabei aber vorerst dem Unverstand deutscher Philister zum Opfer fiel. Ein wahres Trauerspiel, zumal wenn man berücksichtigt, daß der Dichter in seinem Stück die prophetischen Worte schrieb: „Nichts unter der Sonne ist Zufall!"
Anzufügen bliebe ein Erlebnis Dr. Felbers: „Am dreizehnten April fünfundvierzig rückten die Amerikaner auf meine Heimatstadt Chemnitz zu. Der Geistliche, der mit uns in die Panzerlöcher vorkommandiert wurde, sagte sarkastisch-ergeben: ‚Ausgerechnet an einem Freitag, dem Dreizehnten! Christliche Seefahrer mieden solche Tage!'"



Christen und Heiden haben gleichermaßen Legenden des Unheils sowohl um unseren heutigen fünften Wochentag als auch um die Zahl Dreizehn gewoben. Der Katholizismus heiligt zwar den Freitag durch Fasten, erblickt in ihm aber gleichzeitig ein Unglück, rechnet er doch als Todestag Jesu. Dem Tod voraus ging das österliche Abendmahl, an dem dreizehn Personen teilnahmen. Da sorgte Judas Ischariot um den Sold von dreißig Silberstücken dafür, daß einer von der Tafelrunde ums Leben kam. „Seither", erklärt Dr. Felber, „bittet man ungern dreizehn Personen zu Tisch. Im ganzen Mittelalter diskutierte und kommentierte man die Schrekkensziffer."
Blicken wir noch etwas hinter das Abendmahl zurück, kommt Philipp von Makedonien auf uns zu, der in seinen Prozessionen immer zwölf goldene Götterbilder zur Schau trug. In einer personenkultischen Anwandlung ließ er sich plötzlich selbst in Gold modellieren und eines Tages beim Umzug mit durch die Stadt führen. Und genau in diesem Moment wurde der etwa Siebenundvierzigjährige von einem Hauptmann seiner Leibwache aus Privatrache ermordet.

Die älteste bekannte Version um die Unglücksdreizehn datiert aus babylonischen Zeiten, in denen man nach Mondjahren rechnete und, um diese den Sonnenjahren anzugleichen, jeweils einen dreizehnten, einen Unglücksmonat, einschob. Als Tierkreiszeichen wurde ihm ein Sternbild des südlichen Himmelsäquators zugeordnet: der Rabe. Doch welch gegenwärtiger Unglücksvogel oder -rabe denkt schon bei seinen mißlichen Verhältnissen ausgerechnet ans babylonische Heidenreich.

So verehren denn unsere Uraltvordern sicherheitshalber lieber die heilige Zwölfzahl, was sowohl an der Menge der Apostel als auch der der römischen, griechischen und ägyptischen Hauptgötter nachprüfbar ist. Selbst das altrömische Recht ward auf zwölf Gesetzestafeln verzeichnet. Welch merkwürdiger Umstand, daß das ehemalige deutsche Strafgesetzbuch, das in der DDR vor dreizehn Jahren außer Kraft gesetzt wurde, ausgerechnet in seinem Paragraphen dreizehn die – Todesstrafe behandelte!

Einer kürzlichen statistischen Umfrage in einer Reihe europäischer Länder zufolge führt ausnahmslos jedes alteingesessene Hotel, das auf sich hält, die Zimmernummern zwölf, zwölf a und vierzehn. Nur die modernen Inter- und sonstigen Riesenhotels kämpfen erfolgreich gegen vorchristlichen und mittelalterlichen Spuk an: Sie beginnen die Numerierung ihrer Gästezimmer erst mit hundert.

Unter Begriffen wie Welt- oder UNO-Kalender hatte in den vergangenen Jahrzehnten erneut eine Reformbewegung an Boden gewonnen. Ein stabiler, immerwährender Kalender wurde gefordert, bei dem jedes Jahr und jedes Quartal mit einem Sonntag beginnen sowie jedes Vierteljahr aus dreizehn Wochen mit einundneunzig Tagen bestehen sollte. Im Gemeinjahr müßte der dreihundertfünfundsechzigste Tag dadurch herbeigezaubert werden, daß zwischen dem dreißigsten Dezember und dem ersten Januar ein undatierter und wochentagloser Welt(feier)tag eingeschoben würde. Gleiches müßte in Schaltjahren zusätzlich zwischen dem dreißigsten Juni und ersten Juli geschehen. Ostern und Pfingsten hätten dann ebenso ihren ständigen festen Platz, wie jedes beliebige Datum in jedem Jahr auf den gleichen Wochentag fiele. Abgesehen davon, daß die Dogmen bedeutender Weltreligionen solchen Reformgedanken unüberbrückbare Hindernisse in den Weg legen, haben inzwischen auch jene Wissenschaftler den Rückzug angetreten, die anfangs im Weltkalender große Planungsvorteile zu erkennen glaubten. Moderne Computer mit ihrem mikroelektronischen Innenleben können heute in Sekundenschnelle mohammedanische in hebräische und diese in christliche beziehungsweise weltliche Zeitberechnungen umsetzen.

Ein reibungsloses Einführen des Weltkalenders wäre nur in solchen Jahren möglich, in denen nach bisheriger Rechnung der erste Januar auf einen Sonntag fällt. Das war zuletzt neunzehnhundertachtundsiebzig der Fall. Die nächste theoretische Chance bestünde neunzehnhundertvierundachtzig – Schreckensgedanke aller Schwarzseher, da ausgerechnet in jenem Jahr drei Freitage auf einen Dreizehnten fallen und uns damit auf ewig erhalten würden. Doch bleibt diese Dauermöglichkeit dreier schwarzer Freitage graue Theorie, weil Dr. Felber und seine Kollegen in aller Welt mit den entsprechenden Berechnungen herkömmlicher Art schon so gut wie fertig sind. Überhaupt bietet sich eine derart finstere Variante in diesem Jahrtausend nicht mehr an, denn auch neunzehnhundertneunundachtzig und -fünfundneunzig verfügen nur über je zwei Freitage, den Dreizehnten, und selbst noch zweitausendsechs verschont die Abergläubischen auf gleiche Weise.

Abschließend bitte ich meine Leser, mir vorsichtshalber dreimal über die Schulter zu spucken, damit dieser zahlenreiche Beitrag ohne Denk- und Druckfehler unter ihre Augen gerät. Denn das Unglück will's, daß er ausgerechnet an einem Freitag, dem Dreizehnten, erscheint! *R. Pfeiffer*

Auskünfte über Kalendermachenschaften gab dem Wochenpostreporter (für W.7/81) R. Pfeiffer der promovierte Mathematiker Dr. H.-J. Felber vom Zentralinstitut für Astrophysik in Potsdam-Babelsberg, einziger Musterkalendermacher der DDR, Chefredakteur der *Astronomischen Nachrichten*, die als älteste Zeitschrift ihrer Art in der Welt gilt.

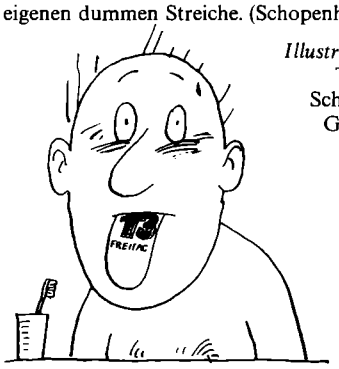
Aberglaubwürdig: Dieses Jahrhundert verzeichnet fünfzehnmal den Vorgang, daß in einem Jahr je drei Freitage auf einen Monatsdreizehnten fielen bzw. noch fallen, und zwar:
1903, 1908, 1914, 1925, 1928,
1931, 1942, 1953, 1956, 1959,
1970, 1981, 1984, 1987 und 1998.
Das erste derartige Jahr im neuen Jahrtausend wird 2009 sein.

Personenkennzeichen und -ziffern: Papst Gregor VIII. (7.1.1502 bis 10.4.1585), vorher Ugo Buoncompagno, Papst seit 1572, Reformer des bis dahin geltenden julianischen Kalenders (nach Julius Cäsar); feierte die blutige Pariser Bartholomäusnacht mit einem Dankfest in der Peterskirche.

Philipp II. von Makedonien (um 383 bis 336 v. u. Z.), Vater Alexanders des Großen, König seit 359, besiegte 338 die verbündeten Griechen und errang damit über sie die Vorherrschaft.

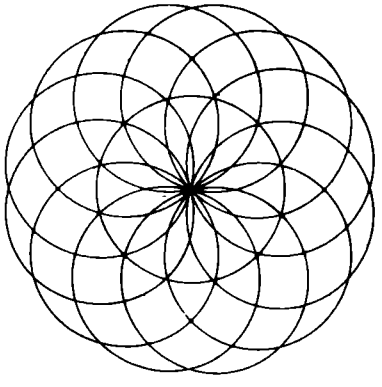
Ludwig Feuerbach (28.7.1804 bis 13.9.1872), einer der bedeutendsten vormarxistischen Philosophen. Seine Theorien bereiteten die bürgerliche Revolution vor.

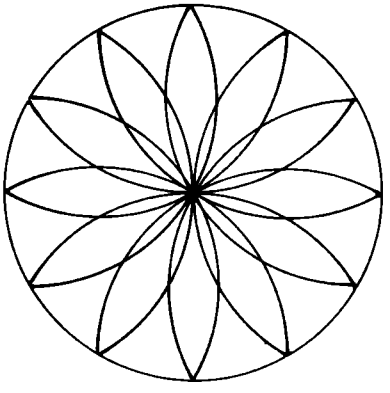
Unglücksjahr-Worte: Was die Menschen Schicksal nennen, sind meistens nur ihre eigenen dummen Streiche. (Schopenhauer)

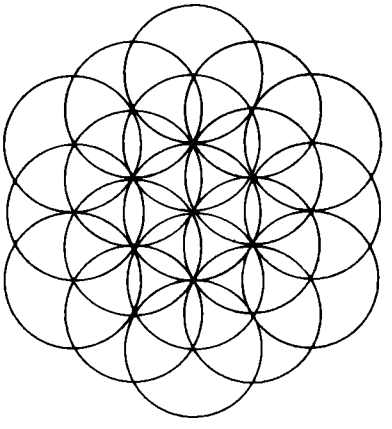


Illustrationen: Thomas Schleusing, Gruppe 4

Mit Zirkel und Farbstift







Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,
Heft 2/81:

Ma5 ▪2092 Es lassen sich aus der begonnenen Zeichnung folgende Würfelnetze zeichnen:

a)

		o	r
h	l	v	
u			

b)

		o	r
h	l	v	
	u		

c)

		o	r
h	l	v	
		u	

d)

		o	r	u
h	l	v		

Ma5 ▪2093 Da nur ungerade natürliche Zahlen dargestellt werden sollen, kann die fünfte Grundziffer von links nur 5 oder 7 oder 9 sein.
Da im Falle a) die Zahl möglichst klein, aber nicht kleiner als 69000 sein soll, muß die erste Ziffer 7, die zweite Ziffer 5 lauten. Somit muß die letzte Ziffer 9 sein. Da die Ziffern 5 und 6 nicht nebeneinander stehen dürfen, muß die dritte Ziffer 8, die vierte Ziffer 6 lauten. Wir erhalten 75869.
Da im Falle b) die Zahl möglichst groß, aber nicht größer als 70000 sein soll, muß die erste Ziffer 6, die zweite Ziffer 8 lauten. Da die Ziffern 8 und 7 nicht nebeneinander stehen dürfen, muß die dritte Ziffer 5, die vierte Ziffer 9 und die fünfte Ziffer 7 lauten. Wir erhalten 68597.

Ma5 ▪2094 Für den Flächeninhalt des Schulgartens gilt $a \cdot 3b - b \cdot c = 1275\,\mathrm{m}^2$. Ferner gilt $6 \cdot c = a$, also $c = a:6 = 30\,\mathrm{m}:6 = 5\,\mathrm{m}$. Daraus folgt weiter $(30 \cdot 3b - b \cdot 5)\mathrm{m}^2 = 1275\,\mathrm{m}^2$, $85 \cdot b\,\mathrm{m}^2 = 1275\,\mathrm{m}^2$, also $b = 15\,\mathrm{m}$.
Daraus folgt weiter für den Umfang des Schulgartens
$u = 2a + 6b + 2c = (2 \cdot 30 + 6 \cdot 15 + 2 \cdot 5)\mathrm{m} = 160\,\mathrm{m}$.
Es müssen 160 m Maschendraht angeschafft werden.

Ma5 ▪2095 Aus (1) folgt: Axel sammelt keine Ansichtskarten. Aus (2) folgt: Jan sammelt keine Ansichtskarten.
Deshalb sammelt Bert Ansichtskarten. Aus (2) folgt: Jan sammelt auch keine Abzeichen. Deshalb ist Jan der Briefmarkensammler. Folglich sammelt Axel Abzeichen.

Ma5 ▪2096 Da es sich um ungerade natürliche Zahlen handelt, könnten die Zahlen b wegen (2) gleich 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95 sein. Aus (1) folgt $a = 3 \cdot b$. Wegen $10 < a < 100$ gilt weiter $a_1 = 3 \cdot 15 = 45$, $a_2 = 3 \cdot 25 = 75$, $a_3 = 3 \cdot 35 = 105 > 100$. Somit existieren genau zwei Lösungen; sie lauten $a_1 = 45$, $b_1 = 15$ und $a_2 = 75$, $b_2 = 25$.

Ma5 ▪2097 Mannschaft A erzielte $6 \cdot 3 = 18$ Treffer. Folglich erzielte die Mannschaft C genau $41 - 18 = 23$ Treffer. Nun könnte Mannschaft B entweder 18 oder 23 Treffer erzielt haben, da zwei Mannschaften gleichviel Treffer erzielten. Damit gilt entweder $18 + 18 + 23 = 59$ oder $18 + 23 + 23 = 64$. Da 64 keine Primzahl, 59 hingegen eine Primzahl ist, entfällt die zweite Möglichkeit. Mannschaft A erzielte somit 18, Mannschaft B ebenfalls 18 und Mannschaft C genau 23 Treffer.

Ma6 ▪2098 Angenommen, x Schüler erhielten die Note 4; dann erhielten $2x$ Schüler die Note 1 und $3 \cdot 2x = 6x$ Schüler die Note 3. Außerdem erhielten y Schüler die Note 2. Nun gilt $x + 2x + 6x + y = 25$,
$9x + y = 25$.
Nur die natürlichen Zahlen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ und somit $y_1 = 16$ und $y_2 = 7$ erfüllen diese Gleichung.
Aus $\frac{2 \cdot 1 + 16 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{25} = 2{,}24 \neq 2{,}48$
folgt, daß $x_1 = 1$ als Lösung entfällt.
In der Klassenarbeit erhielten vier Schüler die Note 1, sieben Schüler die Note 2, zwölf Schüler die Note 3, zwei Schüler die Note 4.
Es gilt $\frac{4 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{25} = 2{,}48$.

Ma6 ▪2099

Name	Laufzeit (in s)
Andrea	x
Anette	$x - 2$
Simone	$x - 1{,}2$
Dorothea	$x - 2{,}7$
Jana	$x - 2{,}8$
Silvia	$x - 2{,}4$
Daniela	$x - 1{,}4$
	$7x - 12{,}5$

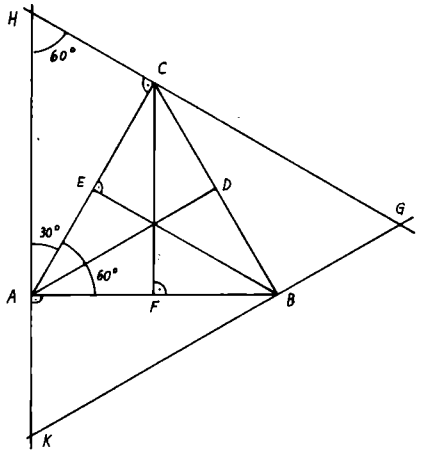
Nun gilt $7x - 12{,}5 = 104{,}4$,
$7x = 116{,}9$,
$x = 16{,}7$.
Andrea benötigte 16,7 s, Anette 14,7 s, Simone 15,5 s, Dorothea 14,0 s, Jana 13,9 s, Silvia 14,3 s und Daniela 15,3 s zum Durchlaufen der 100-m-Strecke.

Ma6 ▪2101 Entscheidend für die Anzahl der Nullen ist die Anzahl der im Produkt vorkommenden Primfaktoren 5 und 2. In den Zahlen 5, 10, 15, 20, 30, 35, 40, 45 kommt der Primfaktor 5 je einmal vor. In den Zahlen 25 und 50 kommt der Primfaktor 5 je zweimal vor. Insgesamt kommt in dem Produkt der Primfaktor 5 genau 12mal vor. Der Primfaktor 2 kommt in dem Produkt mehr als 12mal vor. Deshalb endet die Ziffer, die das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 50 darstellt, auf genau 12 Nullen.

Ma6 ▪2102 Da A, C, T, Z einstellige Primzahlen darstellen, gilt wegen $C < Z < A < T$ somit $C = 2$, $Z = 3$, $A = 5$, $T = 7$. Da $\overline{JJ}$ Primzahl ist, gilt $J = 1$. Daraus folgt zunächst $12 + 11 + P3 + 1SS + 2S + 2 + 3X + 15 + BX + B57 = RRP$, $40 + P3 + 1SS + 2S + 3X + BX + B57 = RRP$.
Nun gilt $B = 6$ oder $B = 9$. Wegen $B57 + 1SS > 1000$ für $B = 9$, gilt $B = 6$ und somit $R = 9$. Daraus folgt
$40 + P3 + 1SS + 2S + 3X + 6X + 657 = 99P$,
$697 + P3 + 1SS + 2S + 3X + 6X = 99P$.
Wegen $S < A$ kann $S = 0$ oder $S = 4$ sein.
Für $S = 4$ wäre $X = 0$ und $P = 8$; dann wäre die Summe $RRP > 1000$, was nicht möglich ist. Folglich gilt $S = 0$, und es gilt $817 + P3 + 3X + 6X = 99P$. Für $X = 8$ müßte $P = 6$ sein, was nicht möglich ist. Folglich gilt $X = 4$ und somit $P = 8$. Die Aufgabe lautet $12 + 11 + 83 + 100 + 20 + 2 + 34 + 15 + 64 + 657 = 998$.

Ma6 ▪2103 In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seitenlängen größer als die Länge der dritten Seite. Danach gilt $\overline{CE} + \overline{CD} > \overline{ED}$. Für den Umfang des Dreiecks ABC gilt: $\overline{AB} + \overline{AE} + \overline{CE} + \overline{BD} + \overline{CD}$; für den Umfang des Vierecks $ABDE$ gilt: $\overline{AB} + \overline{AE} + \overline{BD} + \overline{ED}$. Folglich ist der Umfang des Dreiecks ABC größer als der des Vierecks $ABDE$.

Ma7 ▪2104 Aus $\sphericalangle BAC = 60°$ und $\sphericalangle BAK = \sphericalangle AFC = 90°$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) folgt
$\sphericalangle CAH = 180° - 60° - 90° = 30°$.
Aus $\sphericalangle ACH = \sphericalangle CEB = 90°$ und $\sphericalangle CAH = 30°$ folgt $\sphericalangle AHC = 60°$. Analog dazu gilt $\sphericalangle HKG = \sphericalangle KGH = 60°$.
Das Dreieck GHK ist somit gleichwinklig, also auch gleichseitig.



Ma7 ▪2105 Aus $a \cdot b + 8 = c$ und $a + b + c = 100$ erhalten wir durch Einsetzen
$a + b + ab + 8 = 100$,
$a + b + ab = 92$,
$a(b + 1) + b = 92$,
$a = \frac{92 - b}{b + 1}$,
$a = 92 - \frac{3 \cdot 31 \cdot b}{b + 1}$.

Nur für $b=0, b=2, b=30$ und $b=92$ erhalten wir für a auch natürliche Zahlen. Folgende geordneten Zahlentripel erfüllen die gestellten Bedingungen: [92, 0, 8], [30, 2, 68], [2, 30, 68], [0, 92, 8].

Ma7 ▪2106 Wir setzen $987654321=a$ und $98765432=b$; dann erhalten wir

$$a\cdot b<n<b\cdot(a+2),$$
$$a\cdot b<n<a\cdot b+2b.$$

Aus $(ab+2b)-ab=2b$ folgt, daß $2b-1$ natürliche Zahlen die gegebenen Ungleichungen erfüllen; das sind $2\cdot 98765432-1=197530863$ natürliche Zahlen.

Ma7 ▪2107 Aus $z=100a+10b+c$ und $c=a+b$ folgt durch Einsetzen

$$z=100a+10b+a+b,$$
$$z=101a+11b \text{ für } 0<a\leqq 9 \text{ und}$$
$$0\leqq b\leqq 9.$$

Für a können also die Zahlen von 1 bis 9, für b die Zahlen von 0 bis 9 eingesetzt werden. Das ergibt $9\cdot 10=90$ Möglichkeiten. Wegen $a+b=b+a$ reduziert sich diese Anzahl auf die Hälfte. Somit gibt es $90:2=45$ dreistellige natürliche Zahlen dieser Art.

Ma8 ▪2108 Es seien n^2 und $(n+1)^2$ zwei aufeinanderfolgende Quadratzahlen. $(n\in N)$
Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt

$$(n+1)^2-n^2 = 33,$$
$$n^2+2n+1-n^2=33,$$
$$2n+1=33,$$
$$2n=32,$$
$$n=16.$$

Es folgt $n^2=256$ und $(n+1)^2=289$.
256 und 289 sind die beiden einzigen Quadratzahlen, die die vorgegebenen Bedingungen erfüllen. $(289-256=33)$

Ma8 ▪2109 Es sind $a=40$, also $b=10$ die kleinstmöglichen und $a=96$, also $b=24$ die größtmöglichen Zahlenpaare, die in Betracht kommen. Da a durch 4 teilbar ist, kann die Quersumme q_1 von a höchstens 16 sein, also $4\leqq q_1\leqq 16$. Wegen $10\leqq b\leqq 24$ kann q_2 höchstens 10 sein, also $1\leqq q_2\leqq 10$. Nun gilt $q_1\cdot q=64=4\cdot 16=8\cdot 8=16\cdot 4$.
Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:
(1) Wegen $q_2\leqq 10$ entfällt $q_2=16$.
(2) Für $q_2=8$ existiert nur $b=17$, also $a=68$. Wegen $q_1\cdot q_2=14\cdot 8\neq 64$ entfällt $q_2=8$.
(3) Für $q_2=4$ wäre $b=13$ oder $b=22$, also $a=52$ oder $a=88$. Wegen $q_1=7\neq 16$ entfällt $a=52$.
Es existiert genau eine Lösung; das gesuchte geordnete Paar lautet [88; 22].

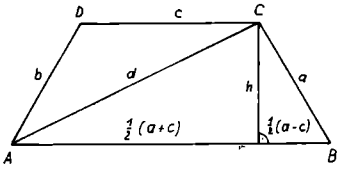
Ma8 ▪2110 Es gilt $A_{WTX}=A_{UWTS}-A_{UWXS}$.
Bezeichnen wir die Länge der Quadratseite mit a, so erhalten wir

$$A_{WTX}=\frac{\frac{a}{3}+a}{2}\cdot\frac{a}{3}-\frac{\frac{a}{3}+\frac{2a}{3}}{2}\cdot\frac{a}{3};$$
$$A_{WTX}=\frac{2a^2}{9}-\frac{a^2}{6};$$
$$A_{WTX}=\frac{a^2}{18}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks WTX nimmt den 18. Teil des Flächeninhaltes des Quadrats $ABCD$ ein.

Ma8 ▪2111 Es sei d die Länge der Diagonale $\overline{AC}$, h die Länge der Höhe $\overline{EC}$. Die Länge der Strecke $\overline{AE}$ beträgt dann $\frac{1}{2}(a+c)$, die Länge der Strecke $\overline{EB}$ beträgt $\frac{1}{2}(a-c)$.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt $h^2=d^2-\frac{1}{4}(a+c)^2$ und $h^2=b^2-\frac{1}{4}(a-c)^2$.
Durch Gleichsetzen erhalten wir

$$d^2-\frac{1}{4}(a^2+2ac+c^2)=b^2-\frac{1}{4}(a^2-2ac+c^2),$$
$$4d^2-a^2-2ac-c^2=4b^2-a^2+2ac-c^2,$$
$$4d^2=4b^2+4ac,$$
$$d^2=b^2+ac.$$



Ma9 ▪2112 Nach (1) gilt $a^3+b^3=26048$, und nach (2) gilt $a+b=44$ bzw. $b=44-a$.
Durch Einsetzen erhalten wir

$$a^3+(44-a)^3=26048,$$
$$a^3+85184-5808a+132a^2-a^3=26048,$$
$$59136-5808a+132a^2=0,$$
$$448-44a+a^2=0.$$
$$a_{1,2}=22\pm\sqrt{22^2-448},$$
$$a_{1,2}=22\pm 6,$$
$$a_1=28;\ a_2=16.$$

Die zwei gesuchten Zahlen sind 28 und 16.
Probe: Das arithmetische Mittel von 28 und 16 ist $\frac{28+16}{2}=22$; die Summe der Kuben 28^3+16^3 beträgt $21952+4096=26048$.

Ma9 ▪2113 Aus dem gegebenen Term folgt schrittweise durch Umformen

$$n^3+n^3+3n^2+3n+1+n^3+6n^2+12n+8$$
$$=3n^3+9n^2+15n+9$$
$$=3n(n^2+3n+5)+9$$
$$=3n[(n+1)(n+2)+3]+9.$$

Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:
(1) Es sei n durch 3 teilbar; dann ist $3n$ und somit auch die Summe durch 9 teilbar.
(2) Es sei n nicht durch 3 teilbar; dann ist entweder $n+1$ oder $n+2$ durch 3 teilbar; damit ist das Produkt und somit auch die Summe durch 9 teilbar.

Ma9 ▪2114 Es sind die Teilflächen II und III.
Begründung: II und III bilden zusammen eine Trapezfläche. Für deren Flächeninhalt gilt $A=\frac{b+d}{2}\cdot\frac{h}{2}$, und wegen

$$\frac{b+d}{2}=c=\frac{a}{2}$$ gilt weiter

$$A=\frac{a}{2}\cdot\frac{h}{2}=\frac{ah}{4}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt

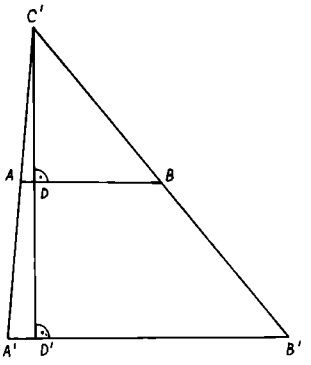
$$A_D=\frac{ah}{2}.$$

Ma9 ▪2115 Aus $A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b$ folgt

$$a:b=h_b:h_a=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}.$$

Aus $A=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c$ folgt

$$b:c=h_c:h_b=\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}.$$



Daraus folgt weiter

$$a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}=\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6},$$
$$a:b:c=\frac{15}{60}:\frac{12}{60}:\frac{10}{60}=15:12:10.$$

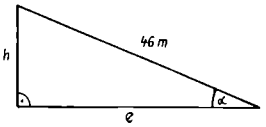
Wir konstruieren ein dem gesuchten Dreieck ABC ähnliches Dreieck $A'B'C'$ aus $a'=15$ cm, $b'=12$ cm, $c'=10$ cm. Wir konstruieren danach eine Höhe, etwa h_c', schlagen um C' einen Kreisbogen mit dem Radius $h_c=6$ cm, der h_c' in D schneidet. Wir konstruieren die Parallele zu $\overline{A'B'}$ durch D; sie schneide $\overline{A'C'}$ in A und $\overline{B'C'}$ in B. Dann ist Dreieck ABC' das gesuchte Dreieck.

Ma10/12 ▪2116 Durch schrittweises Umformen erhalten wir

$$(\sqrt{1979}+\sqrt{1980})^2$$
$$=1979+2\cdot\sqrt{1979\cdot 1980}+1980$$
$$=3959+2\cdot\sqrt{(1979{,}5-0{,}5)(1979{,}5+0{,}5)}$$
$$=3959+2\cdot\sqrt{1979{,}5^2-0{,}25} \text{ bzw.}$$
$$(\sqrt{1978}+\sqrt{1981})^2$$
$$=1978+2\cdot\sqrt{1978\cdot 1981}+1981$$
$$=3959+2\cdot\sqrt{(1979{,}5-1{,}5)(1979{,}5+1{,}5)}$$
$$=3959+2\cdot\sqrt{1979{,}5^2-2{,}25}$$

Da $1979{,}5^2-0{,}25>1979{,}5^2-2{,}25$, gilt $\sqrt{1979}+\sqrt{1980}>\sqrt{1978}+\sqrt{1981}$.

Ma10/12 ▪2117 Skizze (nicht maßstäblich)

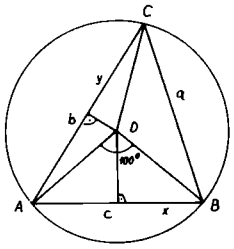


Aus $b+c=66$ folgt $c=66-b$. (1)
Nach dem Kosinussatz gilt
$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos 60°$.
Wir setzen (1) ein und erhalten
$a^2=b^2+(66-b)^2-2b(66-b)\cdot\frac{1}{2}$.
Wir formen weiter um:

$$39^2=b^2+4356-132b+b^2-66b+b^2,$$
$$1521=3b^2+4356-198b,$$
$$0=3b^2-198b+2835,$$
$$0=b^2-66b+945;$$
$$b_{1,2}=33\pm\sqrt{1089-945},$$

$b_{1,2}=33\pm\sqrt{144}$,
$b_{1,2}=33\pm 12$,
$b_1=45$,
$b_2=21$;
$c_1=66-45=21$; $c_2=66-21=45$.
Die gesuchten Seitenlängen sind entweder $b=45\,\text{m}$ und $c=21\,\text{m}$ oder $b=21\,\text{m}$ und $c=45\,\text{m}$.

Ma10/12 ▪2118 Skizze (nicht maßstäblich)



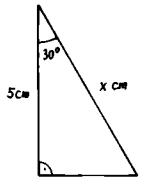
Wegen $\overline{AD}\cong\overline{BD}\cong\overline{CD}$ ist D Mittelpunkt des Umkreises von ABC. $\sphericalangle ACB$ hat die Größe $\gamma=50°$, weil er Peripheriewinkel auf dem gleichen Bogen wie der Zentriwinkel $\sphericalangle ADB$ ist. Wegen $\overline{AB}\cong\overline{BC}$ hat der Winkel $\sphericalangle CAB$ die Größe $\alpha=50°$. Daraus folgt für $\sphericalangle ABC$ die Größe $\beta=80°$ (Innenwinkelsatz).

Nun gilt: $\sin 50°=\frac{x}{4}$; $x=4\cdot\sin 50°$; $x\approx 3{,}06$;
$c=a\approx 6{,}12\,\text{cm}$. $y=4\cdot\sin 80°$; $y\approx 3{,}94$; $b\approx 7{,}88\,\text{cm}$.
Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt:

$$A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma,\ \sin 80°=\frac{y}{4};$$
$$A=\frac{1}{2}\cdot 6{,}12\cdot 7{,}88\cdot\sin 50°$$
$$A\approx 18{,}47\,\text{cm}^2.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt etwa $18{,}47\,\text{cm}^2$.

Ma10/12 ▪2119 Die Schnittfläche ist die Fläche eines Rechtecks mit den Seitenlängen 5 cm und x cm. Wir berechnen zuerst x.

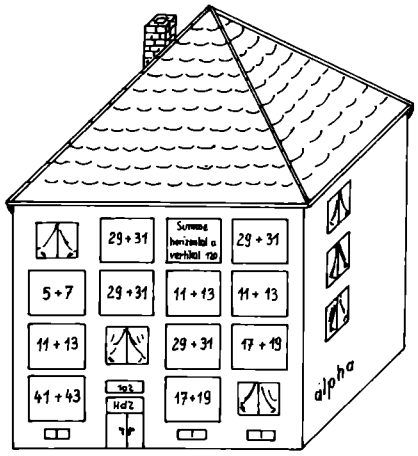


Im abgebildeten rechtwinkligen Dreieck gilt:
$\cos 30°=\frac{5}{x}$; $x=\frac{5}{\cos 30°}$; $x\approx 5{,}77$.
Der Flächeninhalt der Schnittfläche ist $5{,}77\cdot 5\,\text{cm}^2$, also etwa $28{,}85\,\text{cm}^2$. Verkleinert man den Neigungswinkel gegen die Grundfläche, so wird der angegebene Winkel um den gleichen Betrag vergrößert. Dann gilt:
$x=\frac{5}{\cos 40°}$; $x\approx 6{,}53$.
Der Flächeninhalt der Schnittfläche beträgt in diesem Falle $6{,}53\cdot 5\,\text{cm}^2\approx 32{,}65\,\text{cm}^2$. Die Schnittfläche wächst um etwa $3{,}8\,\text{cm}^2$.

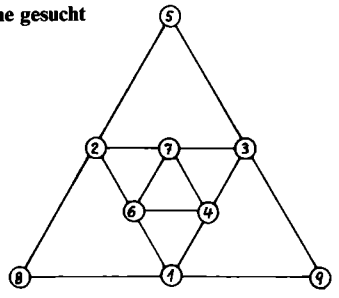
Lösungen zu: In freien Stunden · alpha-heiter

Die verrückten Kommas
Auf meinem Tisch ein unbeschriebenes Blatt Papier, in der Colaflasche nur noch wenig Flüssigkeit, in meinem Gehirn eine Lösungsidee, in meiner Hand ein stumpfer Bleistift, in der Frühstücksbüchse eine weiche Birne, in meinem Kopf noch kluge Gedanken, im Patronenfüller fast keine Tinte mehr, im Tafelwerk nirgends etwas Brauchbares zu finden.

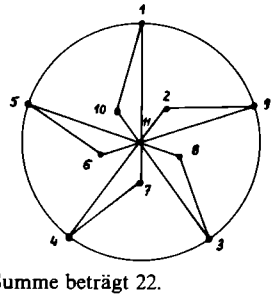
Primzahlzwillinge
Idee von J.-P. Steinhöfel, Kl. 10c der OS Königs Wusterhausen



Summe gesucht

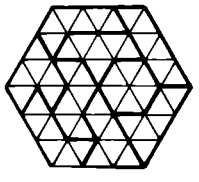


Eine mögliche Lösung:



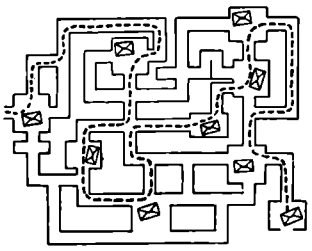
Die Summe beträgt 22.

Magisches Sechseck

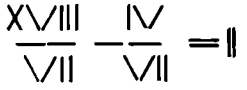


Kryptarithmetik
U. a. gibt es folgende Lösungen:
$1978+1978+1978+1978=7912$;
$2594+2594+2594+2594=10376$
$6\cdot 9=54$; $1\cdot 3=3$; $6\cdot 3=18$.
$753\cdot 5=3765$; $3007\cdot 0=0$; $3760+5=3765$.
$18+24=42$; $10+24=34$; $8+0=8$.

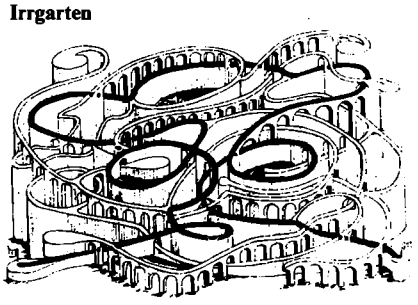
Der Bote und die neun Pakete



Spiel mit Hölzchen



Irrgarten



Ist das möglich?
Der Großvater ist der Vater der Mutter des Jungen.

Lösung zu:
Eine Aufgabe von Prof. Dr. N. I. Wilenkin, Seite 108

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1

400 Sonnenuhren in der DDR registriert

Potsdam (ADN). Über 400 Sonnenuhren wurden durch die Mitglieder der *Sektion Gnomonik* des Kulturbundes in der DDR registriert. Damit ist die erste Phase der vor einem Jahr begonnenen Erfassung dieser besonderen Zeitmesser beendet. Damals waren aus der Literatur erst etwa 200 Sonnenuhren und ihre Standorte bekannt. Zu ihnen zählte die von Zacharias Scultetus 1550 für die Görlitzer Rathausapotheke geschaffene Uhr. Eines der interessantesten Exemplare ist die nahe der Römischen Bäder im Park von Sanssouci stehende *Polyederuhr* mit 45 kunstvollen Zifferblättern.

Aufgaben aus der Praxis

Betriebs- und Verkehrseisenbahner stellen Aufgaben

▲1▲ Es ist der Windungskoeffizient (W_K) der Eisenbahnstrecke Leipzig–Döbeln–Dresden zu ermitteln. Die tatsächliche Entfernung dieser Strecke (E) beträgt laut Kursbuch der DR 133,6 km. Die Luftlinie (E_L) beträgt auf der Kursbuchkarte mit dem Maßstab 1 : 1 000 000 genau 11 cm. Es gilt $W_K = \frac{E}{E_L}$.

▲2▲ In wieviel Minuten durchfährt ein 140 m langer Zug den Brandleite-Tunnel bei Oberhof, der eine Länge von 3038 m hat, wenn die mittlere Fahrgeschwindigkeit des Zuges $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt?

▲3▲ Wie lange dauert die Begegnung zweier Züge von 150 m und 120 m Länge, die mit den mittleren Geschwindigkeiten von $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $60\frac{\text{km}}{\text{h}}$ aneinander vorbeifahren, und zwar in entgegengesetzten Richtungen?

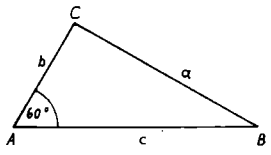
▲4▲ Das Ablaufgleis eines Rangierbahnhofes hat ein Gefälle von 1 : 35.

a) Mit welcher Beschleunigung rollt ein Waggon von 20 Mp Gewicht ab, wenn der Reibungskoeffizient $\mu = 0{,}004$ beträgt?

b) Mit welcher Endgeschwindigkeit verläßt der Waggon die 46 m lange Ablaufstrecke, wenn seine Anfangsgeschwindigkeit $v = 0\frac{\text{km}}{\text{h}}$ beträgt?

c) In welcher Zeit durchläuft der Waggon die Ablaufstrecke?

d) Welchen Weg legt der Waggon auf dem anschließenden waagerechten Gleis noch zurück, wenn nicht zusätzlich gebremst wird?



▲5▲ Unsere Volkswirtschaft erfordert einen zuverlässigen und leistungsfähigen Gütertransport. Die Güterwaggons der DR befinden sich in einem ständigen Umlauf, der von der Beladung bis zur Wiederbeladung reicht. Die Umlaufzeit (Uw), gemessen in Tagen (d), wird ermittelt, indem der vorhandene Wagenpark (P), gemessen in Anzahl der Waggons (Wg), durch die Anzahl (b) der täglich beladenen Waggons, gemessen in $\frac{Wg}{d}$, dividiert wird.

a) Wie hoch war an einem Tag die durchschnittliche Umlaufzeit, wenn von 136 500 Waggons, die sich im Streckennetz der DR befanden, 35 000 Waggons beladen wurden?

b) Die Beschleunigung des Wagenumlaufs, die durch eine schnellere Be- und Entladung zu erreichen ist, stellt eine zentrale Aufgabe dar. Wie viele der 136 500 Waggons könnten jährlich mehr beladen werden, wenn die derzeitige Umlaufzeit von 3,85 d auf 3,75 d gesenkt werden kann?

c) Welche Masse an Gütern könnte dann täglich mehr transportiert werden, wenn ein Güterwagen mit durchschnittlich 19,2 t beladen wird?

▲6▲ Eine Familie (2 Erwachsene und 2 Kinder im Alter von 3 und 5 Jahren) plant eine Tagesfahrt von Leipzig nach Gera (Tarifentfernung 74 km). Die Familie fährt 2. Klasse.

a) Berechne den Fahrpreis, den diese Familie für die Hin- und Rückfahrt zu zahlen hat, wenn ein Eilzug benutzt wird!

(Kinder unter 10 Jahren zahlen den halben Fahrpreis und den halben Zuschlag; Kinder unter 4 Jahren fahren im Beisein der Eltern kostenlos.) Der Eilzugzuschlag beträgt bei der angegebenen Entfernung 1,50 M pro Erwachsenen. Der Fahrpreis 2. Klasse beträgt 8 Pf je km. Die DR rundet Pf stets auf volle Zehn-Pf auf.

b) Wieviel Mark könnte diese Familie einsparen, wenn sie Sonntagsrückfahrkarten mit einer Fahrpreisermäßigung von $33\frac{1}{3}\%$ in Anspruch genommen hätte?

Berufsbild Facharbeiter für Eisenbahntransporttechnik

Die pünktliche und bedarfsgerechte Erfüllung der Transportleistungen im Reise- und Güterverkehr wird entscheidend durch die sichere Betriebsführung mitbestimmt.

Für diese wichtigen Aufgaben werden gut ausgebildete Facharbeiter gebraucht.

Bei einem erfolgreichen Abschluß der 10. Klasse der polytechnischen Oberschule kannst du in zwei Jahren

Facharbeiter für Eisenbahntransporttechnik

mit einer der Spezialisierungsrichtungen Reiseverkehr, Güterverkehr, Stellwerks- und Zugmeldedienst oder Rangiertechnik und Zugbegleitdienst werden.

Welche Anforderungen werden an Dich gestellt?

Der Transport bei der Deutschen Reichsbahn läuft rund um die Uhr, deshalb arbeitest du im Schichtdienst.

Erforderlich sind:

– Zuverlässigkeit und ein hohes Verantwortungsbewußtsein – Schnelles und sicheres Reaktionsvermögen – Aufmerksamkeit – Gutes Seh- und Hörvermögen – Farbtauglichkeit (im Betriebsdienst) – Widerstandsfähigkeit bei langzeitigen Belastungen – Keine Sprachstörungen.

Obwohl der Beruf hauptsächlich für Jungen geeignet ist, finden in ihm auch Mädchen interessante und ihrem physischen Leistungsvermögen angepaßte Tätigkeiten.

Welche Aufgaben hast Du als Facharbeiter zu erfüllen?

Facharbeiter für Eisenbahntransporttechnik bereiten den Transportprozeß vor, wirken bei der Durchführung mit und rechnen ihn ab. Sie tragen durch ihre Arbeit zum sicheren, pünktlichen und wirtschaftlichen Ablauf des Eisenbahntransports bei.

Welche Tätigkeiten übst du aus?

Im Betriebsdienst werden von dir in den Stellwerken die Sicherungs- und Fernmeldeanlagen bedient. Es werden Wagen und Züge rangiert, die Reisezüge begleitet und Fahrausweise kontrolliert.

Du bedienst Maschinen und Automaten zum Druck von Fahrausweisen und Platzkarten, schreibst sie aber auch selbst aus und bist für die ordnungsgemäße Abrechnung der Einnahmen verantwortlich. Reisegepäck und Expreßgut werden von dir angenommen und ausgegeben und mit modernen Umschlagmechanismen befördert.

Im Güterverkehr werden Frachtbriefe geprüft und gebucht sowie Stückgut, Paletten und Container mit Flurförderzeugen ein- und ausgeladen.

Die dir anvertrauten Anlagen und Einrichtungen mußt du auch pflegen, damit sie ständig einsatzbereit sind.

Welche Einsatz- und Entwicklungsmöglichkeiten hast du?

Nach erfolgreichem Abschluß der Ausbildung wirst du entsprechend deiner Spezialisierungsrichtung auf den Bahnhöfen im Fahrkartenverkauf, in der Auskunft oder als Aufsicht eingesetzt. Du kannst aber auch auf dem Stellwerk den Zugverkehr kontrollieren und regeln oder im Rangierdienst Züge nach Plänen zusammenstellen und abfertigen. Als Zugbegleiter oder Zugführer bist du mit den dir anvertrauten Zügen ständig auf Achse.

Wenn du als Facharbeiter für Eisenbahntransporttechnik gewissenhaft arbeitest, kannst du dich zum Leiter von Kollektiven sowie für die Übernahme von Funktionen der mittleren Leitungsebene und zum Dienststellenleiter qualifizieren. Bei guten gesellschaftlichen und fachlichen Voraussetzungen besteht die Möglichkeit für ein Studium an der Ingenieurschule für Verkehrstechnik Dresden oder an der Ingenieurschule für Transportbetriebstechnik Gotha sowie bei vorhandener Hochschulreife an der Hochschule für Verkehrswesen „Friedrich List" in Dresden, um dich für eine leitende Tätigkeit bei der Deutschen Reichsbahn zu qualifizieren.

Welcher Beruf?

KATI E. FARBREICHE
IN BÜCHEN
HAFENSTR.

Autor: D. Knape, Jessen

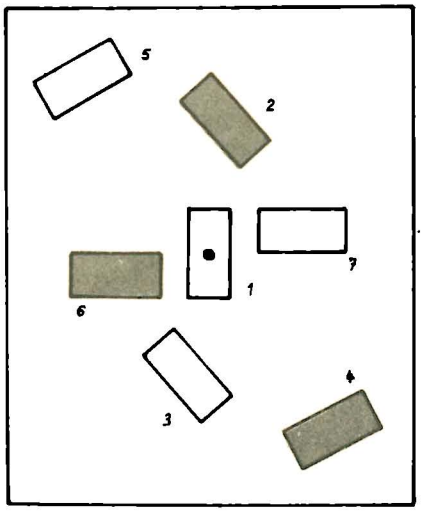
Mathematisches Spiel

Heute möchten wir euch ein Spiel vorstellen, bei dem ein Spieler durch die Anwendung einer sogenannten „symmetrischen Strategie" den Sieg erreichen kann:

Zwei Spieler legen abwechselnd je einen Dominostein (oder ein rechteckiges Kärtchen, eine Streichholzschachtel o. ä.) auf eine rechteckige Fläche. Dieser Stein darf keinen der bereits auf der Fläche befindlichen Steine überlappen und auch nicht über den Rand der Fläche hinausragen, ansonsten kann seine Lage beliebig gewählt werden. Verloren hat der Spieler, der als erster keinen Stein mehr auf der Spielfläche unterbringen kann. Wir wollen voraussetzen, daß genügend Dominosteine vorhanden sind, um die gesamte Fläche zu bedecken. Dadurch ist ein Remis bei diesem Spiel ausgeschlossen.

Nun ergibt sich die Frage, welcher Spieler den Sieg erzwingen kann und wie er zu diesem Zweck zu spielen hat. Es zeigt sich, daß für den Spieler, der den ersten Zug macht, eine überraschend einfache Gewinnstrategie existiert: Er legt seinen ersten Stein genau in die Mitte der Spielfläche (entscheidend hierbei ist nur, daß der Mittelpunkt des Dominosteins mit dem Mittelpunkt der Spielfläche zusammenfällt). Bei allen weiteren Zügen spielt er symmetrisch zu seinem Gegner, d. h., er postiert seinen Stein symmetrisch (in bezug auf den Mittelpunkt der Spielfläche) zu dem zuletzt vom Gegner gelegten Stein (Bild 1).

Bild 1



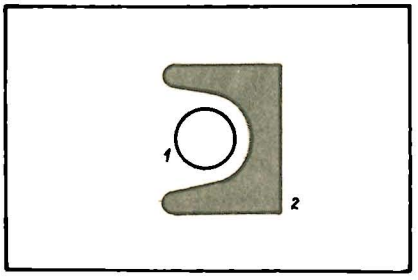
Durch diese Spielweise erreicht der erste Spieler, daß nach jedem seiner Züge (einschließlich dem ersten!) eine (punkt-)symmetrische Anordnung der Steine entsteht. Der zweite Spieler ist gezwungen, diese Symmetrie zu zerstören. Für den ersten Spieler ergibt sich damit jedesmal die Möglichkeit, seinen Stein wieder symmetrisch zum Stein des Gegners auf die Spielfläche zu legen. Falls also der zweite Spieler noch Platz für einen Stein findet, so gelingt dies dem ersten Spieler im folgenden Zug ebenfalls. Der erste Spieler kann auf diese Art und Weise nicht verlieren. Da es kein Remis gibt, erzwingt er damit den Sieg.

Nun wollen wir uns die Frage stellen, für welche anderen Formen von Spielsteinen und Spielfläche der anziehende Spieler ebenso gewinnen kann. Dabei soll auch zugelassen sein, daß Steine verschiedener Größe und Form benutzt werden, allerdings mögen beide Spieler von jeder Spielsteinsorte genügend viele Steine zur Verfügung haben. Wir haben festgestellt, daß der erste Spieler mit jedem seiner Züge eine symmetrische Situation herstellt.

Insbesondere muß die Anordnung nach seinem ersten Zug (punkt-)symmetrisch sein. Daraus können wir die Forderung ableiten, daß sowohl die Spielfläche als auch der erste Stein des ersten Spielers punktsymmetrisch sein müssen, das heißt mit anderen Worten: Man muß sie durch Drehung um 180° in sich selbst überführen können. Geeignet sind also z. B. Rechtecke, Kreise, Ellipsen, aber auch Steine oder Spielflächen in +-, H-, N- oder S-Form.

Die Steine, die im folgenden Spielverlauf gelegt werden, brauchen nicht unbedingt von dieser Art zu sein. Allerdings müssen wir ausschließen, daß ein Stein des zweiten Spielers den ersten Stein des ersten Spielers „umfaßt" und damit den zu sich symmetrischen Platz selbst belegt (Bild 2). Kreisringe oder Steine in U-Form dürfen also nicht erlaubt werden, falls sie so groß sind, daß sie andere Steine umschließen können. Ganz sicher würden wir gehen, wenn wir nur konvexe Spielsteine zuließen.

Bild 2



Man könnte dieses Spiel also z. B. auch auf einem runden Tisch mit Tellern, Tassen und komplettem Besteck spielen. Postkarten und Briefmarken könnten ebenfalls erlaubt werden, während man Hufeisen, Reifen und Bilderrahmen verbieten müßte, wenn der erste Spieler die Möglichkeit behalten soll, den Sieg auf die beschriebene Art und Weise zu erzwingen. Im Gegensatz zu anderen Spielen, bei denen die Kenntnis der richtigen Strategie schon den sicheren Sieg bedeutet, steht hier der anziehende Spieler natürlich vor der Aufgabe „seine große Chance" durch etwas Geschick und gutes Augenmaß auch wirklich zu nutzen.

Als Aufgabe schlagen wir euch vor, Beispiele für Spielfläche und Spielsteine anzugeben, bei denen der erste Spieler den Sieg nicht erzwingen kann, wobei folgende Bedingungen erfüllt sein sollen:

a) Die Spielfläche ist symmetrisch, die Spielsteine sind es nicht.

b) Die Spielsteine sind symmetrisch, die Spielfläche ist es nicht.

c) Die Spielfläche ist symmetrisch, beide Spieler verfügen sowohl über symmetrische als auch über unsymmetrische Steine, jedoch jeweils nur in begrenzter Anzahl.

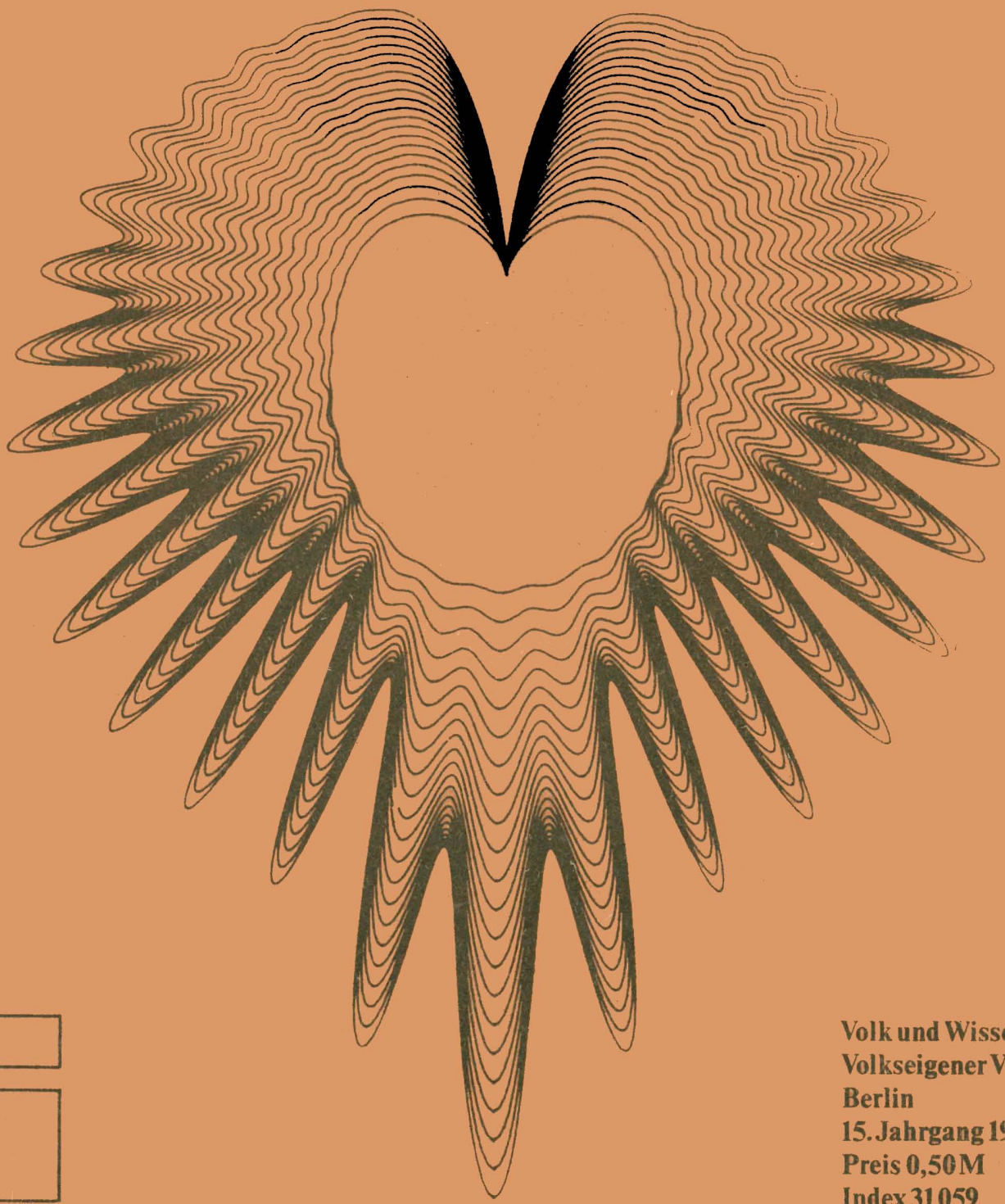
(symmetrisch = punktsymmetrisch)

R. Lehmann/U. Quasthoff

Spieler bei Wein, Würfeln und Karten. Holzschnitt aus Sebastian Brants „Narrenschiff", 1494

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



6

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
15. Jahrgang 1981
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktionskollegium: Prof. Dr. sc. techn. G. Clemens (Leipzig); Oberlehrer Dr. W. Fregin (Leipzig); Dozent Dr. rer. nat. J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dozent Dr. rer. nat. R. Hofmann (Leipzig); Nationalpreisträger H. Kästner (Leipzig); Studienrat H.-J. Kerber (Neustrelitz); Oberlehrer Ing. K. Koch (Schmalkalden); Oberstudienrat J. Lehmann, Verdienter Lehrer des Volkes (Leipzig); Oberlehrer Prof. Dr. sc. phil. H. Lohse (Leipzig); Oberlehrer H. Pätzold (Waren/Müritz); Dr. sc. rer. nat. E. Quaisser (Potsdam); Dozent Dr. sc. nat. P. Schreiber (Greifswald); Dozent Dr. sc. nat. E. Schröder (Dresden); Oberstudienrat G. Schulze (Herzberg/Elster); Dr. W. Stoye (Berlin); W. Träger (Döbeln); Prof. Dr. sc. paed. W. Walsch (Halle); FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (Ltg. Dr. C.-P. Helmholz)
Redaktion:
OStR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1080 Berlin, Krausenstraße 50 · Tel. 20430
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 7010 Leipzig, Leninstr. 16.
Fotos: Wochenpost (s. 123); Bild der *Mona Lisa*, Louvre Paris (S. 121); W. Uborewitsch-Borowski, Moskau (S. 123); Briefstempel, zur Verfügung gestellt von W. Moldenhauer, Eisenach (S. 125); M. Baliachmetowa, Moskau (S. 126); K.-H. Guckuk, Leipzig (S. 127); Vignetten O. Sperling, Berlin (S. 130/131); Vignette aus Krokodil, Moskau (S. 132); H. Büttner, Berlin (S. 134); ADN (S. 132, S. 136).
Titelblatt: W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128–ISSN 0002–6395
Redaktionsschluß: 1. Juli 1981

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

121 Mona Lisa und Fibonacci [9]*
Dipl.-Math. Hannu Korhonen, Universität Helsinki
für *alpha* bearbeitet von Dr. E. Schröder, Dresden

123 Der Zauberwürfel [5]
Ungarn: Ein Spielzeug macht von sich reden

123 Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Havrda [6]
Karls-Universität Prag

124 Was tun, wenn die Formelsammlung nicht mehr helfen kann? [8]
Lösungsverfahren statt Lösungsformel, Teil 1
Prof. Dr. I. O. Kerner, Sektion Mathematik/Geographie der Pädagogischen Hochschule Karl Friedrich Wander, Dresden

125 Für den Briefmarkenfreund [8] Richard Dedekind
Dr. P. Schreiber, Sektion Mathematik der E.-M.-Arndt-Universität Greifswald

126 Computer für die Westentasche
H. Hirschfeld, aus *Guter Rat* 1/81

127 Ehrendoktorwürde für Luis Massera [5]

128 AGs im Blickpunkt [7]
Dr. H. König, Sektion Mathematik der TH Karl-Marx-Stadt

129 aufgepaßt · nachgedacht · mitgemacht
Adam-Ries-Wettbewerb im Bezirk Karl-Marx-Stadt
Dr. H. König, TH Karl-Marx-Stadt

130 Lohntüte ohne Tarnkappe [5]
Prof. Dr. Kuno Brocke, aus *Frösi* 3/81

131 Rätselkette: Von A bis Z [7]
Dr. R. Mildner, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig

132 Wer löst mit? *alpha*-Wettbewerb [5]
Wettbewerbsaufgaben Mathematik, Physik, Chemie

135 *alpha*-Wettbewerb 1980/81 [5]
Kollektive Beteiligung, Statistik

136 Mikroelektronik – eine Sache von Tausenden? [7]
W. Wiener, aus *technikus* 3/81

137 Schriftliche Abschlußprüfung 1980/81 [8]
Fach Mathematik, Klasse 10

138 In freien Stunden · *alpha*-heiter [5]
Zusammenstellung: J. Lehmann, Leipzig/H. Pätzold, Waren/Müritz

140 Lösungen [5]

143 XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR [5]
Aufgaben und Lösungen der Kreisolympiade (18. 11. 1981)

III.-U.-Seite: Perspektiven (Bilddokumentation) [5]

IV.-U.-Seite: Spaß für freie Stunden [5]
Knobeleien aus einem sowjetischen Unterhaltungsbuch

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Mona Lisa und Fibonacci

Leonardo von Pisa, auch Fibonacci genannt, war ein italienischer Mathematiker. Er lebte im Mittelalter, etwa von 1180 bis 1240. Den Namen Fibonacci verbinden wir mit der Zahlenfolge

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...

Die Folge beginnt mit den Zahlen 0 und 1. Die darauf folgenden Zahlen werden nach dem allgemeinen Bildungsgesetz

$$a_{n+1}=a_{n-1}+a_n \qquad (1)$$

berechnet.

Leonardo da Vinci war ein berühmter italienischer Maler, Bildhauer und Kunsttheoretiker. Er lebte von 1452 bis 1519, also an der Wende von Mittelalter zu Neuzeit. Sein populärstes Bildwerk ist die „Mona Lisa".

Welche Gemeinsamkeit verbindet Leonardo von Pisa und Leonardo da Vinci außer ihrem gemeinsamen Vornamen miteinander?

Der Goldene Schnitt (sectio aurea)

Noch vor zehn Jahren wurde an unseren Gymnasien in Finnland im Fach Geometrie der „Goldene Schnitt" behandelt.

Zugang: Eine Strecke $\overline{AB}$ werde von einem Punkt X derart geteilt, daß für die Längen der Streckenabschnitte die Proportion

$$\frac{m(\overline{XB})}{m(\overline{AX})}=\frac{m(\overline{AX})}{m(\overline{AB})} \qquad (2)$$

gilt. Mit $m(\overline{AB})=a$ und $m(\overline{AX})=x$ führt dies auf die Proportion

$$\frac{a-x}{x}=\frac{x}{a} \text{ (vgl. Bild 1).}$$

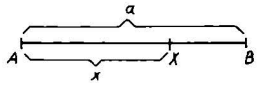
Hinweis zur Symbolik:

$\overline{AB}$ Strecke mit den Endpunkten A, B

$m(\overline{AB})$ vorzeichenbehaftete Länge der gerichteten Strecke $\overline{AB}$

Es gilt: $m(\overline{AB})=-m(\overline{BA})$

Bild 1



Daraus resultiert die quadratische Gleichung

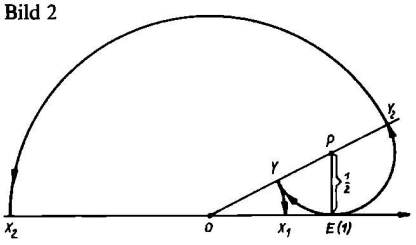
$$x^2+ax-a^2=0. \qquad (3)$$

Wir betrachten zunächst nur die positive Wurzel der Gleichung (3).

$$x_1=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1) \qquad (4)$$

Zur konstruktiven Auswertung des Ergebnisses (4) identifizieren wir A mit dem Ursprung 0 der Zahlengeraden, B mit dem Endpunkt E der Einheitsstrecke. Der zum Wert x_1 gehörige Teilungspunkt X_1 hat dann die Koordinate $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ auf der Zahlengeraden. Errichtet man in E ein Lot der Länge $l=1/2$, so ergibt sich der Endpunkt P (Bild 2).

Bild 2



Die Länge der Verbindung $\overline{OP}$ ist dann $m(\overline{OP})=\sqrt{5}/2$. Durch Subtraktion der Länge $m(\overline{EP})$ erhält man auf $\overline{OP}$ den Teilungspunkt Y_1. Führt man diesen mittels Zirkelschlag um 0 auf den Zahlenstrahl, ergibt sich der Teilungspunkt X_1. Wie leicht einzusehen, ist X_1 ein innerer Teilungspunkt der Strecke $\overline{OE}$.

Auch die negative Wurzel von Gleichung (3)

$$x_2=-\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) \qquad (5)$$

läßt am Zahlenstrahl eine geometrische Interpretation zu. Trägt man auf $\overline{OP}$ über P hinaus die Länge $m(\overline{EP})=1/2$ ab, ergibt sich der Punkt Y_2. Führt man diesen mittels Zirkelschlag um 0 auf die negative Seite des Zahlenstrahles, erhält man den zweiten Teilungspunkt X_2. Dieser Punkt teilt die Strecke $\overline{OE}$ äußerlich nach dem Goldenen Schnitt. Wir stellen nochmals heraus:

Beim Goldenen Schnitt (stetige Teilung einer Strecke) stehen die Längen des kleineren zum größeren Streckenabschnitt im Verhältnis

$$(\sqrt{5}-1):2. \qquad (6)$$

Eine Erweiterung des Goldenen Schnittes

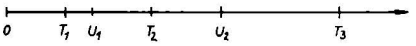
Im folgenden ersetzen wir auf dem Zahlenstrahl X_1 durch T_1 und E durch U_1. Trägt man die Strecke $\overline{OT_1}$ von U_1 in positiver Richtung ab, ergibt sich der Punkt T_2. Dann gilt nach den bisherigen Ergebnissen

$$\frac{m(\overline{OU_1})}{m(\overline{OT_2})}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Nach (6) teilt U_1 die Strecke $\overline{OT_2}$ im Goldenen Schnitt, wobei $\overline{OU_1}$ den größeren Strekkenabschnitt bildet. (Bild 3)

Bild 3



Das Verfahren läßt sich fortsetzen, indem man die Länge $m(\overline{OU_1})$ von T_2 im positiven Sinne abträgt. Man erhält U_2, und es besteht die Proportion

$$\frac{m(\overline{OT_2})}{m(\overline{OU_2})}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Bei Weiterführung der Konstruktion gelangt man zu der allgemeinen Beziehung

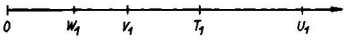
$$\frac{m(\overline{OT_i})}{m(\overline{OU_i})}=\frac{m(\overline{OU_i})}{m(\overline{OT_{i+1}})}=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad (7)$$

$(i=1, 2, 3...)$.

Auch im umgekehrten Sinne ist das Verfahren anwendbar. Trägt man die Länge $m(\overline{T_1U_1})$ von 0 aus in positiver Richtung auf dem Zahlenstrahl ab, erhält man den Teilungspunkt V_1, und es gilt

$$\frac{m(\overline{V_1T_1})}{m(\overline{OV_1})}=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (vgl. Bild 4).}$$

Bild 4



Trägt man $m(\overline{V_1T_1})$ von 0 aus im positiven Sinne auf dem Zahlenstrahl ab, erhält man den Teilungspunkt W_1, und es gilt

$$\frac{m(\overline{W_1V_1})}{m(\overline{OW_1})}=\frac{m(\overline{V_1T_1})}{m(\overline{OV_1})}.$$

Die Teilungsregel nach dem Goldenen Schnitt findet in vielen geometrischen Konstruktionen Anwendung. In Bild 5 sei M der Mittelpunkt eines regelmäßigen Zehnecks und $m(\overline{AB})=s_{10}$ die Länge einer Zehneckseite. Das Dreieck MAB ist gleichschenklig. Für die Größe des Scheitelwinkels gilt $\mu=36°$ und für die Basiswinkel $\alpha=\beta=72°$. Die Winkelhalbierende von $\sphericalangle MAB$ schneidet $\overline{MB}$ in C. Auf Grund der sich ergebenden Winkelbeziehungen sind die Dreiecke $\triangle MAC$ und $\triangle BCA$ gleichschenklig mit den Punkten C bzw. A als Scheitel. Daher gilt

$m(\overline{AB})=m(\overline{AC})=m(\overline{MC})=s_{10}$ und

$m(\overline{BC})=r-s_{10}$.

Ferner besteht wegen der Ähnlichkeit $\triangle(MAB)\approx\triangle(ABC)$ die Proportion

$$\frac{r}{s_{10}}=\frac{s_{10}}{r-s_{10}}.$$

Daraus resultiert die quadratische Gleichung

$$s_{10}^2+rs_{10}-r^2=0 \qquad (8)$$

Für s_{10} ist nur die positive Wurzel der Gleichung (8) verwertbar, also

$$s_{10}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Bild 5

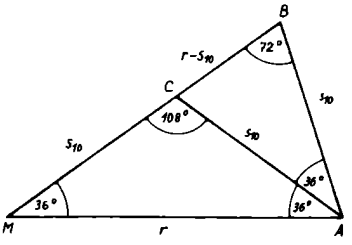
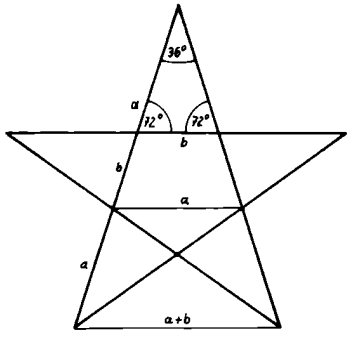


Bild 6



Wegen $s_{10}:r=(\sqrt{5}-1):2$ kann der Satz gefolgert werden:

Die Zehneckseite teilt den Radius des Umkreises nach dem Goldenen Schnitt, wobei die Zehneckseite den größeren Streckenabschnitt bildet.

Auch am Pentagramm tritt dieses Teilverhältnis in verschiedenen Zusammenhängen auf. Zum Beispiel ist aus Bild 6 leicht abzulesen:

$$\frac{b}{a}=\frac{a}{a+b}=\frac{a+b}{2a+b}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ferner gilt:

Im regelmäßigen Fünfeck wird die Diagonale von der Fünfeckseite nach dem Goldenen Schnitt geteilt, wobei die Fünfeckseite den größeren Streckenabschnitt bildet.

Aus Bild 7 folgt wegen der Parallelität der Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{BC}$ sowie der Ähnlichkeitsbeziehung $\triangle(ABC)\approx\triangle(DEA)$ die Proportion

$$d:s_5=s_5:d-s_5. \qquad (9)$$

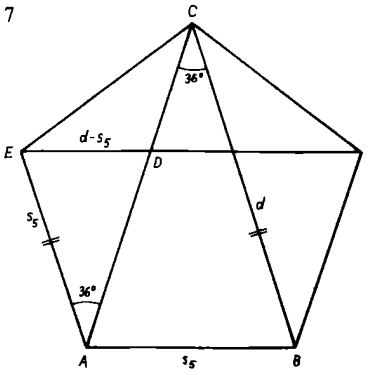
Hieraus resultiert über eine quadratische Gleichung der Gestalt von (3) die Teilungsregel

$$s_5:d=(\sqrt{5}-1):2. \qquad (10)$$

Da der Goldene Schnitt mit Zirkel und Lineal ausführbar ist, kann auch das regelmäßige Zehneck und Fünfeck mit diesen Mitteln exakt konstruiert werden.

Stehen bei einem Rechteck die Seiten im Verhältnis $(\sqrt{5}-1):2$, so läßt sich eine Folge von Rechtecken mit gleichem Seitenverhältnis

Bild 7



nach der in Bild (8) vorgegebenen Weise darin einzeichnen. Diese ineinandergeschachtelte Rechteckfolge bietet das Gerüst für eine Spirale, die man auch in der Natur vorfindet (vgl. Bild 9). Das Gehäuse einer Schnecke, aber auch die Anordnung der Stempel in einem Korbblütler (z. B. Sonnenblume) lassen einen solchen Aufbau von Spiralen erkennen.

Bild 8

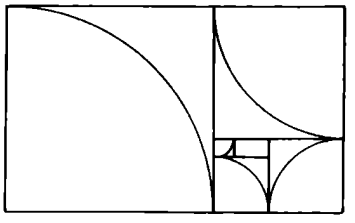
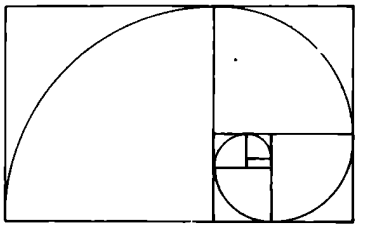


Bild 9



Die Verhältnisse der Fibonacci-Zahlen

Bildet man von je zwei aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen a_n und a_{n+1} das Verhältnis $z_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$, so erhält man die sogenannte Lamén-Folge:

$$0\ \overline{1}\ 1\ \overline{2}\ 3\ \overline{5}\ 8\ \overline{13}\ 21\ \overline{34}\ \cdots$$

Stellt man die Zahlen der Folge (z_n) in einem Säulendiagramm auf Millimeterpapier graphisch dar, so ist zu bemerken, daß die Längen der Säulen um einen gewissen Wert hin- und herpendeln. Die Beträge der Abweichungen von diesem zunächst noch hypothetischen Wert werden mit wachsendem n immer kleiner. Wir fragen nach dem Wert, den z_n annimmt, wenn n über alle Grenzen wächst. Wir suchen also den Wert

$$K=\lim_{n\to\infty} z_n. \qquad (11)$$

Zunächst gilt nach Definition und nach (1):

$$z_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_n}{a_n+a_{n-1}}=\frac{1}{1+\frac{a_{n-1}}{a_n}}. \qquad (12)$$

Ferner ist festzuhalten:

$$\lim_{n\to\infty} z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{a_n}=K. \qquad (13)$$

Nach (12) und (13) gilt daher $K=\frac{1}{1+K}$.

Hierfür kann man weiter schreiben:

$$K^2+K-1=0. \qquad (14)$$

Wegen $K>0$ folgt aus (14) für den gesuchten Grenzwert die eindeutige Lösung

$$K=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad (15)$$

Der Grenzwert K stimmt überein mit der Länge des größeren Teiles der nach dem Goldenen Schnitt zerlegten Einheitsstrecke. Die Lamén-Folge nähert sich diesem Grenzwert alternierend. Damit haben wir aufgezeigt, wie sich Leonardo von Pisa mit dem Goldenen Schnitt in Verbindung bringen läßt.

Die Beschäftigung mit dem Teilungsprinzip nach dem Goldenen Schnitt kann in der Menschheitsgeschichte weit zurück verfolgt werden. Bereits Euklids berühmte „Elemente" (um 300 v. d. Z.) enthalten die Aufgabenstellung, eine Strecke $\overline{AB}$ der Länge a innerlich durch einen Punkt X so zu teilen, daß für die Längen $a-x$ und x der Teilstrecken $\overline{AX}$ bzw. $\overline{XB}$ die Gleichung

$$x^2=a(a-x)$$

erfüllt ist. In der Zeit der Renaissance verfaßte der italienische Mathematiker Paciuolo (1445 bis 1517) zu diesem Gegenstand eine Schrift mit dem Titel „De divina proportione" 1509. Wegen seiner ästhetischen Wirkung nahmen sich die Maler und Architekten vor allem in der Renaissancezeit dieses Teilungsprinzips an. So teilt der Turm am Alten Rathaus zu Leipzig die zum Marktplatz weisende Längsfront des Hauses genau nach dem Goldenen Schnitt.

Auch an Gemälden aus der Zeit der Renaissance ist aus der Anordnung der dargestellten Objekte und deren Größenverhältnissen in Höhe und Breite dieses Teilungsprinzip vielfach ablesbar. Leonardo da Vinci als repräsentativer Vertreter dieser Zeit hat sich des Goldenen Schnittes in seinen Kunstwerken bewußt bedient. Als Beispiel hierfür möge das Bildwerk „Mona Lisa" angeführt werden. So läßt sich über Jahrhunderte hinweg ein Bogen von Leonardo von Pisa zu Leonardo da Vinci spannen.

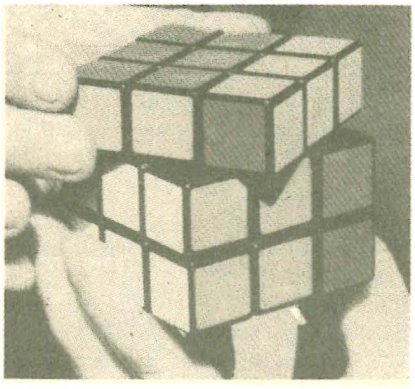
Hannu Korhonen

Von Eberhard Schröder frei bearbeitet nach einem Aufsatz aus dem Finnischen mit dem Titel „Mona Lisa ja Fibonacci". Mathematische Schülerzeitschrift „Funktio", Helsinki

Der Zauberwürfel

Ungarn:
Ein Spielzeug macht von sich reden

Der „büvös kocka" oder Zauberwürfel ist neuerdings nicht nur in Ungarn liebstes Spielzeug. Er hat seinen Siegeszug weit über die Grenzen des Landes angetreten. Ernö Rubik, Professor an der Budapester Hochschule für angewandte Kunst, wollte eigentlich nur das räumliche Vorstellungsvermögen seiner Studenten erweitern, als er den aus 26 farbigen Kleinwürfeln zusammengesetzten Kubus konstruierte. Doch inzwischen wird nun von Millionen versucht, die kleinen Würfel durch vielerlei Drehungen wieder in die ursprüngliche Lage zu versetzen, nachdem durch wenige Verschiebungen die Farben völlig durcheinandergebracht worden sind.



Besteht aus 26 Klein-Quadern:
5,5 Zentimeter lang, breit und hoch ist der bunte „büvös kocka". Durch Drehungen um drei Achsen ist er zu verändern, bis jede Fläche nur eine Farbe hat.

Zuerst waren es Wissenschaftler, die der geniale Einfall faszinierte, als ungarische Kollegen den Zauberwürfel 1978 auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Helsinki vorstellten. Der britische Mathematiker David Singmaster errechnete zum Beispiel, daß mehr als 43 Trillionen verschiedene Farbkombinationen möglich wären.

Nach dem Auftauchen des Zauberwürfels entstanden in Ungarn Clubs, die untereinander Wettbewerbe austragen. Es wurden Lösungsschemen entwickelt, die schrittweise zeigen, welche Drehungen vorgenommen werden müssen, um jedes Würfelchen wieder an seinen richtigen Platz zu bringen. Natürlich gibt es auch Könner, die – fast ohne hinzusehen – nur wenige Drehungen vornehmen, um jede Farbe passend einzuordnen. Anfänger sind jedoch schon glücklich, wenn es ihnen gelingt, wenigstens eine Seite des Würfels wieder in die ursprüngliche Lage zu versetzen.

Im Budapester Kulturzentrum wird gegenwärtig der beste Würfel-Dreher der Hauptstadt gesucht. Die stufenweisen Ausscheidungen nach der Stoppuhr finden im Beisein einer fachmännischen Jury statt. Noch in diesem Frühsommer soll eine Landesmeisterschaft im Würfel-Drehen ausgetragen werden, und für die Sommerferien 1982 denkt man angesichts der Würfel-Begeisterung von Schülern und Studenten sogar an eine Weltmeisterschaft.

Die Wiege des „büvös kocka", der das alles zuwege gebracht hat, steht in den Werkstätten der Industriegenossenschaft Politechnika, deren Zentrale sich in Buda befindet. János Nemcsók (51), Vorsitzender und Mitbegründer dieser Genossenschaft des Spielzeughandwerks, berichtete, wie es dazu kam: „Ende 1976 schickte das Spielzeugunternehmen Trial den Professor Rubik zu uns. Wir sollten uns seine Erfindung einmal ansehen, ob sich die Sache lohne. Als ich den Würfel in die Hand nahm, packte mich sofort Erregung. Ich brachte ihn zu unserem Chefingenieur Manczúr, der die phantastischen Möglichkeiten ebenfalls gleich erkannte. Wir beschlossen auf der Stelle, die zur Produktion nötigen Anlagen anzuschaffen."

Die Genossenschaftler bauten in Handarbeit sieben Maschinen. Sie reichten bald nicht aus, die Fülle der eingehenden Aufträge zu bewältigen. „Für Weihnachten 1977 bestellte Trial fünftausend Würfel, doch wir konnten zwölftausend auf den Markt bringen. Die Ungarn sind ein phantasiebegabtes Volk, und so waren unsere Zauberwürfel im Nu verkauft, würden im Handumdrehen zur Mangelware. Im folgenden Jahr lieferten wir dem Binnenhandel 45000 Stück, 1979 die vierfache Anzahl, und im vergangenen Jahr wurde die Millionengrenze überschritten. Und auch das war noch zu wenig!" Die Genossenschaft wird weitere Maschinen anschaffen müssen, um die Wünsche des unaufhörlich wachsenden Heeres der Freunde dieses genialen Würfel-Spiels befriedigen zu können.

„Beredter als Zahlen aber ist", meinte János Nemcsók, „daß neuerdings der Würfel auf der Liste der Schmuggler steht. Unsere Zöllner fragen daher jetzt regelmäßig: ‚Wie viele Zauberwürfel haben Sie bei sich?'"

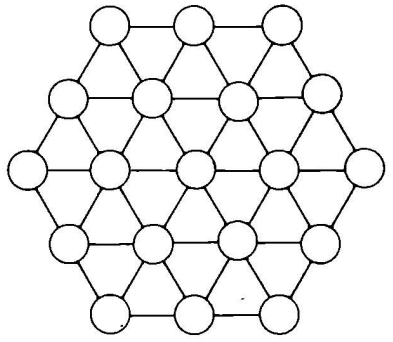
Professor Ernö Rubik, der Erfinder des bunten Zauberwürfels, ruht sich indessen auf seinen Lorbeeren nicht aus. Er tüftelt, wie man unlängst hörte, bereits an einem anderen Spielzeug, das logisches Denken und räumliches Vorstellungsvermögen fördert.

A. Havas

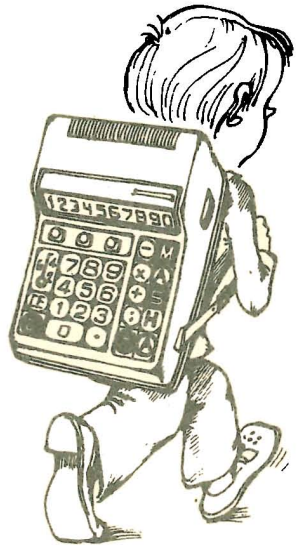
Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Havrda

Karls-Universität Prag

▲2178▲ Man verteile die Zahlen 1 bis 19 so in die 19 Felder des *magischen Sechsecks*, daß in jeder der 15 Reihen die Summe der dort stehenden Zahlen gleich, nämlich gleich 38 ist. Diese Aufgabe (und ihre Lösung) teilte Prof. Havliček, Prag, beim Kolloquium über *konstruktive Geometrie*, das am 23./24. 10. 1980 an der Technischen Universität Dresden



stattfand mit. Wie viele weitere Lösungen zu der auf S. 142 veröffentlichten Lösung können durch Drehungen und Spiegelungen gewonnen werden? Darüber hinaus konnten bisher auch mit Computerhilfe noch keine weiteren Lösungen gefunden werden. Es konnte aber auch nicht bewiesen werden, daß es keine weiteren Lösungen gibt. (Mitgeteilt von unserem Red.-Mitglied Dr. P. Schreiber)



Was tun, wenn die Formelsammlung nicht mehr helfen kann?

Lösungsverfahren statt Lösungsformel
Teil 1

Für viele mathematische Aufgaben oder Probleme gibt es Lösungsformeln. Eine Auswahl davon lernt ihr im Mathematikunterricht kennen, z. B. die Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$x^2+px+q=0$$

$$\{x_1, x_2\}=\left\{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right\}.$$

Solche Formeln zeigen besonders deutlich den funktionellen Zusammenhang zwischen den speziellen eine Aufgabe charakterisierenden Zahlen (den Aufgabenparametern, im Beispiel p und q) und den gesuchten Lösungen (im Beispiel x_1 und x_2). In mathematischer Schreibweise:

$$x_i=f_i(p, q) \quad i\in\{1, 2\}$$

(das sind zwei Formeln oder Funktionen, da der Index 1 oder 2 sein kann; in der ersten Formel heißt die Funktion

$$f_1(p, q)=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

und in der zweiten

$$f_2(p, q)=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}).$$

Solche funktionellen Zusammenhänge werden in der Schule besonders gepflegt und herausgehoben.

Wie ihr aber auch wißt, gibt es zahlreiche Probleme – nun sind sogar außermathematische dabei –, für deren Lösung es keine Formel, sondern ein Verfahren, d. h. eine Arbeitsvorschrift (wir sagen einen „Algorithmus"), gibt. In der Mathematik gehören dazu alle geometrischen Konstruktionsaufgaben, aber auch viele arithmetische – z. B. das Bestimmen des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen. Diese Aufgabe und ihre Lösung habt ihr auch in der Schule kennengelernt. Es ist der sogenannte Euklidische Algorithmus. Er war demnach bereits im Altertum, im klassischen Griechenland vor rund 2000 Jahren, bekannt. Seht einmal im Schulbuch (Welche Klasse? Erinnert ihr Euch?) nach!

Ein Algorithmus ist ganz allgemein eine Arbeitsvorschrift. So sind beispielsweise Kochrezepte, Gebrauchsanweisungen und Bauanleitungen eigentlich schon Algorithmen. Der Mathematiker verlangt aber unter anderem von einem Algorithmus, daß er in seiner Anwendung keinerlei Unklarheit läßt, daß er für seine Aufgabenklasse immer eine Lösung liefert und dazu auch nur endlich viele (manchmal allerdings leider sehr viele) Arbeitsschritte benötigt. Obwohl also Algorithmen im Mathematikstoff der Schule vorkommen und behandelt werden, ist ihre Rolle dabei verglichen mit ihrer gegenwärtigen Bedeutung doch viel zu klein. Für Computer oder elektronische Rechenautomaten (Datenverarbeitungsanlagen: EDVA) kann man nämlich Formeln nicht direkt verwenden. Man muß ihnen die Form einer Arbeitsvorschrift, eben eines Algorithmus, geben.

Ich will euch nun mit einigen einfachen Algorithmen bekannt machen. Es sind eigentlich keine Lösungsalgorithmen für irgendwelche Aufgaben, aber ihr Verhalten ist mathematisch interessant. Einer von ihnen beinhaltet sogar eine bisher noch nicht bewiesene Vermutung. Es ist eine vom Verständnis her ganz einfache Tatsache, und trotzdem ist noch keinem Mathematiker ein Beweis gelungen.

1. Der „3A + 1"-Algorithmus

A sei eine natürliche Zahl. Notiere sie!

1. Falls $A=1$, so beende die Arbeit, andernfalls gehe über zu Schritt 2!
2. Falls A gerade, bilde ein neues $A:=A/2$, notiere es, und gehe über zu Schritt 1! Falls A nicht gerade, gehe über zu Schritt 3! (Das Zeichen „:=" heißt „Ergibtzeichen". Es drückt einen dynamischen Sachverhalt aus. Ein neues A (links) wird aus dem alten A (rechts) berechnet.)
3. Falls A ungerade, bilde ein neues $A:=3A+1$, notiere es, und gehe über zu Schritt 1!

Führe dies für $A=3$, 11, 40 aus!

Kommst du immer zu einem Ende der Arbeit?

Wieviel verschiedene A mußt du in diesen Beispielen bilden? Was beobachtest du, wenn die Endevorschrift im Schritt 1 gestrichen wird?

Laß die Vorschrift „A ist natürliche Zahl" fallen, und nimm auch „ganze Zahlen" als zulässig an! Führe die Vorschrift für $A=-80$, -108, -3 aus! Was ist jetzt zu beobachten?

Wenn du einen Taschenrechner hast, eventuell sogar einen programmierbaren, kommst du schneller voran. Aber es geht auch mit Papier und Bleistift.

(Im nächsten Heft werden mit der Lösung auch interessante Informationen über größere empirische Untersuchungen dieses Algorithmus gegeben, und außerdem wird auf die offene Frage des gesicherten Abbruches für natürliche Zahlen verwiesen. Das ist das oben genannte noch nicht gelöste Problem.)

2. Eine Funktion zur Erzeugung von Primzahlen?

Bilde die Folge der ganzzahligen Glieder aus der Folge

$$a_n=\sqrt{24n+1} \quad n=1, 2, 3, \ldots!$$

Gib die ersten 10 Glieder an!

Was vermutest du? Kannst du deine Vermutung beweisen?

3. Drei Anweisungen

Gegeben sind zwei Kästchen A und B, in welchen die Zahlen a und b mit Bleistift notiert sind. Wenn in den folgenden Summen oder Differenzen die Kästchennamen A oder B genannt werden, soll mit den Kästcheninhalten gerechnet werden.

1. Bilde $A+B$ und notiere dies in A (altes A dort ausradieren)!
2. Bilde $A-B$ und notiere dies in B!
3. Bilde $A-B$ und notiere dies in A!

Welche Wirkung ist dadurch entstanden?

4. Eine Zahlenfolge

1. Beginne mit einer durch 3 teilbaren natürlichen Zahl A!
2. Notiere A!
3. Falls $A=153$, beende die Arbeit!
4. Bilde ein neues A als Summe der 3. Potenzen der Ziffern von A (in der Dezimaldarstellung), und gehe zu Schritt 2!

Warum soll man wohl bei 153 aufhören?

Führe die Vorschrift für $A=9$ durch! Wieviel A-Werte sind zu notieren?

Gibt es ein größtes A, das im Schritt 4 vergrößert wird?

Wie könnte man die Vermutung beweisen, daß die Vorschrift immer bei 153 endet?

Laß die Bedingung fallen, daß A eine durch 3 teilbare Zahl ist! Gibt es Zahlen, welche sich im Schritt 4 nicht ändern?

5. Eine Funktion, die selbst wieder zu ihrer Definition verwendet wird

Solche Funktionen nennt man „rekursiv definiert" (von lat. recurre = zurücklaufen, zurückführen).

Die Aufgabe ist im Gegensatz zu Nr. 1 bis Nr. 4 für Schüler der oberen Klassen, even-

tuell nur 11. und 12. Klasse, gedacht. Aber die Kenntnisse der 8. Klasse genügen eigentlich. Trotzdem wird euch die gedankliche Arbeit dabei schwierig vorkommen, eben weil solche mathematische Denkweise in der Schule kaum trainiert wird. Sogar manche unserer Studenten haben dabei einige Hürden zu überwinden.

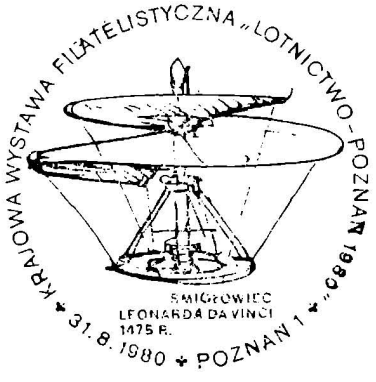
1. Die Argumente der Funktion f sind nur natürliche Zahlen n.
2. Wenn $n > 100$, dann ist $n - 10$ der Wert der Funktion: $f(n) = n - 10$.
3. Wenn $n \leq 100$, dann erhält man den Wert, indem man diese Definition auf $n + 11$ anwendet und auf das Ergebnis noch einmal: $f(n) = f(f(n + 11))$.

Welche Werte liefert f für $n = 101, 100, 99, \ldots, 1$?

Es kommt etwas ganz Interessantes heraus.

Ich werde euch im nächsten Heft die Lösungen und (wie ich meine) dazu ganz verblüffende und interessante Informationen geben.

I. O. Kerner



LEONARDO DA VINCI

wurde am 15. 4. 1452 in Anchiano bei Vinci geboren. Er gilt als der genialste Künstler der Renaissance. Uns ist er als Maler (sein bedeutendstes Bild dürfte die *Mona Lisa* sein), Bildhauer und Baumeister bekannt. Auf ca. 110 Briefmarken wird er mit seinen Werken geehrt. In der Mathematik beschäftigte er sich mit der Ermittlung inhaltsgleicher Figuren und Körper, der Konstruktion regulärer Vielecke, verschiedenen speziellen Kurven und quadrierbaren Kreisbogenzweiecken (sogenannten Möndchen). Er schuf ein Gerät zur maßstabsgerechten Vergrößerung und Verkleinerung von Zeichnungen und ein anderes zum Zeichnen von Parabeln. Als Kuriosum sei vermerkt, daß er als Linkshänder von rechts nach links geschrieben hat, wodurch seine Handschriften nur schwer lesbar sind.

Der abgebildete Sonderstempel aus Poznan (1980) zeigt eine Flugmaschine, die von ihm konstruiert worden war. Am 2. 5. 1519 starb der bedeutende Künstler in Cloux bei Amboise.

W. Moldenhauer

Richard Dedekind

Bis heute zählt es international noch zu den sehr seltenen Ereignissen, daß ein Mathematiker, dessen Schaffenszeit innerhalb der letzten 120 Jahre liegt und der zudem eine ausgeprägt theoretische Richtung der Mathematik pflegte, eine solche philatelistische Würdigung erfährt, wie sie in diesem Jahr *Richard Dedekind* anläßlich seines 150. Geburtstages bei uns zuteil wurde.

Dedekind wurde als Sohn eines hohen Beamten am 6. 10. 1831 in Braunschweig geboren, wo er auch den größten Teil seines Lebens verbrachte und am 12. 2. 1916 starb. Er gehört zu jenen Mathematikern, die in der Zeit etwa zwischen 1870 und 1917 eine grundlegende Umwälzung der allgemeinen Auffassungen von Wesen und Inhalt der Mathematik herbeiführten. Während die Mathematiker der vorhergehenden Jahrhunderte sich als Naturwissenschaftler fühlten, tatsächlich oft zugleich bedeutende Astronomen oder Physiker waren und die Mathematik in engster Wechselwirkung mit ihren Anwendungen vor allem in die Breite entwickelten, war um die Mitte des vorigen Jahrhunderts ein Bedürfnis nach übergreifenden, vereinheitlichenden Begriffen, Gesichtspunkten und Methoden herangereift, durch die die Mathematik aus ihrer Zersplitterung herausgeführt, wieder überschau- und lehrbar gemacht werden könnte.

Zugleich entwickelte sich das Bedürfnis nach logisch einwandfreien Definitionen bisher als anschaulich klar angesehener Begriffe und nach dem Beweis auch scheinbar selbstverständlicher Sachverhalte auf der Grundlage solcher Definitionen. Hauptergebnisse dieser Umwälzung waren Mengenlehre und mengentheoretische Durchdringung der gesamten Mathematik, deren strukturtheoretische Auffassung und ein neues, strengeres Verhältnis zu ihrem deduktiven Charakter.

Eine 1887 erschienene Schrift Dedekinds trägt den programmatischen, bewußt provokatorischen Titel „Was sind und was sollen die Zahlen?" Hier wurde gezeigt, wie man den Begriff und alle Eigenschaften der natürlichen Zahlen, insbesondere Anordnung und Rechenoperationen, aus mengentheoretischen Grundvorstellungen herleiten kann. In dieser Schrift formulierte Dedekind seine berühmte (dem Sinne nach allerdings schon bei Galilei (1564 bis 1642) und Bolzano (1781 bis 1848) vorhandene Erkenntnis:

Eine Menge M ist genau dann endlich, wenn sie sich nicht eineindeutig auf eine echte Teilmenge von M abbilden läßt.

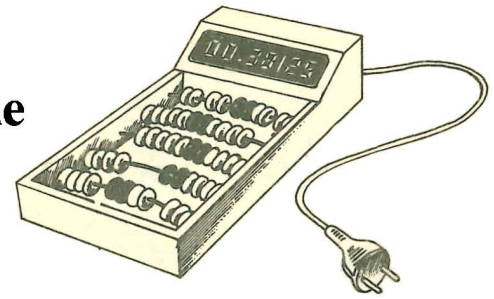
Dies kann man benutzen, um den Begriff der endlichen Menge zu definieren und auf dieser Grundlage (selbstverständlich erscheinende) Sätze wie *Jede Teilmenge einer endlichen Menge ist endlich* oder *Ist M endlich, so auch* $\mathrm{Mu}\{x\}$ exakt zu beweisen. In einer anderen Schrift *Stetigkeit und Irrationalzahlen* (1872) präzisierte Dedekind mit Hilfe des von ihm eingeführten Begriffs des („Dedekindschen") Schnittes jene *mysteriöse* Stetigkeit bzw. Lückenlosigkeit, durch die sich die Menge der reellen Zahlen von jedem ihrer arithmetisch sinnvollen Teil-Zahlen-Bereiche unterscheidet. Der Begriff des Dedekindschen Schnittes kann sowohl dazu dienen, ausgehend vom Bereich der rationalen Zahlen, den Bereich der reellen Zahlen mengentheoretisch-genetisch zu erzeugen, als auch dazu, den Bereich der reellen Zahlen axiomatisch zu charakterisieren.

Die auf der Briefmarke wiedergegebene Formel nimmt Bezug auf eine dritte große Leistung Dedekinds. In der von ihm gemeinsam mit E. Kummer (1810 bis 1893) begründeten *Idealtheorie*, einem Zweig der Strukturalgebra, wird u. a. der Sachverhalt, daß sich jede von 0 verschiedene natürliche Zahl eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen läßt, auf sehr allgemeine Zusammenhänge übertragen. Auf Einzelheiten kann hier nicht eingegangen werden, doch seien zwei elementare Denkanstöße mit auf den Weg gegeben: Was wird aus dem erwähnten Sachverhalt, wenn man ihn auf den Bereich der ganzen Zahlen beziehen möchte? Und gibt es nicht auch im Bereich der Polynome so etwas wie unzerlegbare Faktoren?

P. Schreiber

Lipsia-Katalog-Nr. 2394: 25 Pfennig; Katalogwert gestempelt und ungestempelt jeweils 1,75 M; Entwurf Gerard Stauf, Leipzig; Offsetdruck; gezähnt $13 : 12\frac{1}{2}$; Bogen zu 50 Stück; Maße: 43,0 mm + 25,5 mm, Querformat; Auflage 2000000.

Computer für die Westentasche



Im Angebot des Elektronik-Fachhandels befinden sich zwei interessante Varianten einer neuen Taschenrechner-Generation.

Flach, sehr leicht, modernes Design, gut lesbare Anzeige sind Attribute, die neben moderner elektronischer Technik die Mikrotaschenrechner MR 410 und MR 411 des VEB Kombinat Mikroelektronik auszeichnen. Im Modell MR 411 ist zusätzlich eine Quarzuhr mit Wecker, Stoppuhr und Kalender integriert. Die Weckprogrammierung ermöglicht sekundengenaue Alarmauslösung auf jede volle Minute. Der eingebaute Summer schaltet sich für etwa 10 Sekunden mit einem relativ leisen, aber durchdringenden und kaum überhörbaren Ton zu der festgelegten Zeit ein. Der Alarm ertönt unabhängig, ob der MR 411 auf Rechen-, Uhren- oder Zeitstoppbetrieb geschaltet ist.

Die Digitaluhr besitzt ein 12-Stunden-Display mit Anzeige für die erste Tageshälfte (00.00 bis 12.00 Uhr/AM) und die zweite Tageshälfte (12.00 bis 24.00 Uhr/PM), das Datum, den Wochentag sowie des Sekundentaktes.

Die monatliche Zeitabweichung bleibt unter ±20 Sekunden.

Mit den runden Setztasten der Quarzuhr lassen sich verschiedene Betriebsarten der Stoppuhr wie Additionsstoppen und Splitbetrieb ausführen. Die Meßgenauigkeit beträgt $\frac{1}{10}$ Sekunde, und die Stoppzeiten können bis zu 10 Stunden dauern.

Die LCD-Anzeigeeinheit mißt 45 mal 15 mm. Diese Größe ermöglicht sogar das Ablesen aus einiger Entfernung, so daß sich der MR 411 auch als Tisch- oder Regaluhr auf einem geeigneten Halter benutzen läßt. Die Stromversorgung der Quarzuhr und des Rechners erfolgen aus zwei Silberoxydknopfzellen vom Typ SR 44.

Der Energieverbrauch liegt im Vergleich zu den bisher bekannten Taschenrechnern mit Lumineszenzdiodenanzeige, deren Leuchtanzeige man bei hellem Licht schlecht ablesen konnte, extrem niedrig. Diesen Nachteil besitzen die neuen Taschenrechner nicht. Durch Flüssigkeitskristallanzeige und die energiesparende Konzeption der inneren Elektronik wird den Batterien z. B. beim MR 411 nur noch eine Leistung von 0,00006 VA entnommen. Um sich davon eine Vorstellung zu machen, sei gesagt, daß ein kleines Taschenlämpchen (3,5 V/0,2 A) 11666mal mehr Energie verbraucht oder umgekehrt mit dem Energiebedarf einer Taschenlampe sich etwa 11000 Rechner betreiben ließen.

Ein einziger Batteriesatz reicht laut Werksangaben für 10000 Betriebsstunden. Das bedeutet ununterbrochener Betrieb von mindestens 400 Tagen. Ein Anschluß des Rechners an ein Netzgerät erübrigt sich, da die Silberoxydbatterien über einen langen Zeitraum die Einsatzbereitschaft des Rechners garantieren. Beim Betätigen einer Eingabetaste des Rechenteils schaltet sich der MR 411 automatisch von Zeitanzeige auf Rechenbetrieb um. Ebenso erscheint nach ca. 15 Minuten automatisch nach der letzten Rechenoperation wieder die Uhrzeit auf dem Display, wenn das Einschalten der Digitaluhr vergessen wurde. Tonband-, Film- und Fotoamateure, Sportler, Technologen und alle diejenigen, die exakte Zeitabläufe messen müssen, finden im elektronischen Chronographen des MR 411 eine willkommene Hilfe.

Die einzelnen Zahlen im Anzeigefeld bilden sich aus je sieben kleinen Segmenten. In unterschiedlichen Kombinationen geschieht damit die Darstellung der Ziffern 0 und 1 bis 9.

Eine Kontrollrechnung, die gleichzeitig zur Überprüfung des Rechners, der Batterie und der Anzeige dient, zeigt anschaulich das Prinzip der 7-Segmente-Darstellung.

Zu diesem Zweck wird 7,2 mit 12345679 multipliziert. Bei einwandfrei arbeitendem Rechner muß das Ergebnis 88888888 lauten. Die rechtsbündige Anzeige mit Nullen-Unterdrückung macht die Ergebnisse leichter überschaubar.

Zusätzliche Funktionstasten

√	M+	M−	MR	%	+/−

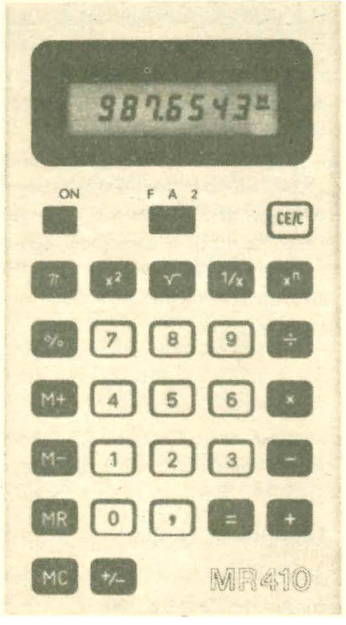
bringen bedeutende Rechenvorteile gegenüber einfachen Rechnern. Der Mikrorechner MR 410 ist außerdem noch mit den Funktionstasten

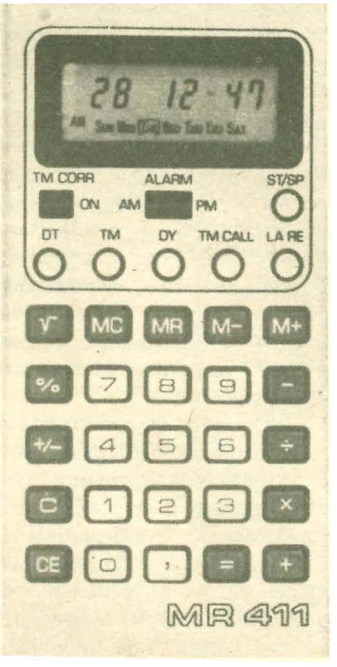
π	x^2	x^n	1/x

sowie einer Festkommaanzeige (auf 2 Stellen) ausgestattet.

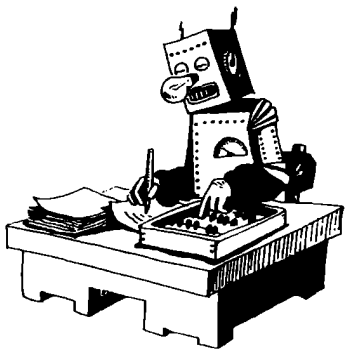
Die Funktionstasten beider Rechner sind gut bedienbar, und die farblich unterschiedlichen Eingabe- und Operationstasten erhöhen die Übersicht. Eine Doppelbelegung der Tasten vermied der Produzent. Klug eingesetzt, bewältigen die Rechner auch komplizierte mathematische Aufgaben. Sie vermögen wesentlich mehr zu leisten, als man auf den ersten Blick vermutet.

Voraussetzungen bleiben natürlich mathematische Grundkenntnisse und ein gewissenhaftes Studium der informativen Betriebsanleitung. Allen Benutzern sei empfohlen, die





darin aufgeführten Rechenbeispiele nachzurechnen. Erst Routine im Umgang ermöglicht, das Gerät optimal einzusetzen.



Was die Rechner sonst noch können

Die Taschenrechner der MR 410 und MR 411 besitzen einen Speicher. Er gestattet bei umfangreichen Rechnungen, Zwischenergebnisse oder konstante Werte aufzubewahren. Durch die Taste [MR] können die betreffenden Werte aus dem addierenden oder subtrahierenden Speicher jederzeit abgerufen werden. Der Speicher reduziert den Rechenaufwand erheblich.

Die Berechnung von Kehrwerten bei Rechnern ohne die Funktionstaste

[$\frac{1}{x}$] geschieht einfach nach Zahleneingabe durch Betätigung der Operationstasten

[=] [÷]

Wird eine Operationstaste versehentlich verwechselt, d. h. statt der Taste für Multiplikation die für die Addition betätigt, braucht man die Rechnung nicht zu wiederholen, wenn man nach der falschen Taste anschließend die richtige drückt. Eingabeerleichterungen bedeuten, daß z. B. bei dem Wert 0,3480000 die letzten vier Nullen nicht getastet zu werden brauchen.

Soll eine vierte Wurzel aus einer Zahl berechnet werden, so ist die Funktionstaste

[$\sqrt{}$]

zweimal zu drücken. Wird die achte Wurzel aus einer Zahl gesucht, muß die Taste mit dem Wurzelzeichen dreimal betätigt werden.

Der Umgang will gelernt sein

Die Programmierung des Rechners erfolgt anders, als man die Aufgabe ausspricht. Beispielsweise sagt man „Wurzel aus 16", den Rechner programmiert man aber zuerst mit dem Wert 16 und betätigt dann erst die Wurzeltaste.

Rechnet man die folgende Aufgabe

$$x = 7 + 8 \cdot \sqrt{4} + 6 : 3 - 5^2$$

in der Reihenfolge wie sie formuliert ist, kann die Rechnung zu einem falschen Ergebnis führen. Die Vorrangregel besagt:

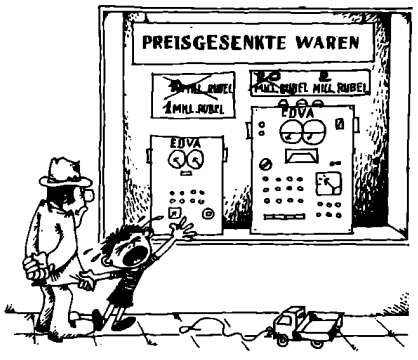
Rechenoperationen der dritten Stufe (Potenzieren, Radizieren) sind vor Rechenoperationen der zweiten Stufe (Multiplizieren, Dividieren) und diese wiederum vor Rechenoperationen der ersten Stufe (Addieren, Subtrahieren) auszuführen.

Rechenungenauigkeiten entstehen, wenn die 8stellige Anzeige überfordert wird, z. B.

$$x = 0{,}001\,13 \cdot 0{,}002\,68.$$

Die Zahlen mit den gleichen Dezimalen, auch so in den Rechner eingetastet, und miteinander multipliziert, ergeben das aufgerundete Ergebnis 0,000003. Durch Überlegungen gelangt man bei vielen Aufgaben zu einem logischen Rechenweg und vermeidet Ungenauigkeiten. Bei dem vorliegenden Beispiel rechnet man genauer, wenn die Aufgabe anders formuliert wird, z. B.

$$113 \cdot 268 \cdot 10^{-10} = 30284 \cdot 10^{-10}$$



Elektronische Taschenrechner sind Präzisionsgeräte

Vor Schlag, Stoß und starken Erschütterungen sind sie in jedem Fall zu schützen. Das „Gehirn" eines Rechners besteht aus einem hochintegrierten Schaltkreis. In diesem Schaltkreis befinden sich auf einer Fläche, nicht größer als dieser gedruckte Buchstabe *M*, einige zehntausend elektronische Bauelemente. Mikroskopisch hauchfeine „Drähtchen" verbinden das Innere des Schaltkreises mit den äußeren Kontakten, und diese wiederum sind durch dünne Leiterbahnen auf einer Kunststoffolie mit den Bedienungs- und Anzeigeelementen verbunden.

Hohe Luftfeuchtigkeit bedeutet Oxydationsgefahr für die empfindliche Elektronik. Staub, besonders feiner Sand beeinträchtigen die mechanischen Funktionen. Kältegrade unter −10 °C und Temperaturen über +50 °C vermögen die Flüssigkeitskristallanzeige und die Elektronik außer Betrieb zu setzen. Stärkere magnetische und elektrische Felder in der Nähe von Lautsprechern, Transformatoren oder Starkstromleitungen wirken sich ebenfalls nachteilig aus. Ebenso sollte man Taschenrechner keiner Röntgenstrahlung (z. B. bei Gepäckkontrollen auf Flughäfen) aussetzen. Besonders die aus extrem dünnen Glasschichten bestehende LCD-Anzeige ist vor jeglichem Druck zu bewahren.

Organische Lösungsmittel wie Alkohole, Benzin, Farb- oder Nitroverdünnungen sind in der Lage, den Taschenrechner zu zerstören. Zum Reinigen eignet sich am besten ein weiches trockenes oder leicht angefeuchtetes faserfreies Tuch.

Der MR 410 und MR 411 zeichnen sich durch hohe Betriebssicherheit und lange Lebensdauer aus. Sollte trotzdem ein Mangel auftreten, verschulden möglicherweise oxydierte Batterien den Fehler. Oft hilft es bereits, die Miniaturbatterie mit einem rauhen, aber trockenen Tuch zu polieren und vorsichtig die Metallkontakte im Rechner zu reinigen.

Im beruflichen Alltag, beim Studium und auch in der Freizeit verkürzen und erleichtern die modernen elektronischen Rechenhilfsmittel die teilweise unproduktiven Zahlenrechnungen wie Addition, Subtraktion, Division, Multiplikation, Wurzel-, Potenz- und Prozentrechnungen. Die elektronischen Taschenrechner MR 410 und MR 411 vermögen mit ihren erweiterten Rechenmöglichkeiten in vielen Bereichen zur Rationalisierung und Intensivierung der geistigen Arbeit beizutragen.

H. Hirschfeld

Wer noch mehr über Taschenrechner wissen möchte, dem empfehlen wir aus der Bibliothek von

Kreul, Hans: *Was kann mein elektronischer Taschenrechner?*
VEB Fachbuchverlag, Leipzig

Ehrendoktorwürde für Luis Massera

Mit der Ehrendoktorwürde der Universität von Nizza wurde der uruguayische Mathematiker Prof. José Luis Massera geehrt. Der Patriot schmachtet seit Oktober 1975 in einem Kerker Uruguays. Die Universitäten von Rom und der DDR-Hauptstadt hatten ihn bereits zum Dr. h. c. erklärt.

In der Laudatio an der Alma mater in Nizza wurden die großen Verdienste José Luis Masseras bei der Entwicklung der heutigen mathematischen Schule Uruguays sowie die von ihm erzielten Resultate auf dem Gebiet der qualitativen Theorie der Differentialgleichungen hervorgehoben. Es wurde auch betont, daß Prof. Massera ein standhafter, stets für seine politischen Ideale eintretender Patriot sei.

Seit 1941 ist Massera Mitglied der KP Uruguays; einige Jahre später wurde er Mitglied des Zentralkomitees. Viele Jahre vertrat er die Werktätigen im uruguayischen Parlament. José Luis Massera, den Sträfling im Militärgefängnis von „Libertad", freizukämpfen, ist Aufgabe aller fortschrittlichen Menschen.

ARBEITS-GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Sektion Mathematik der THK unterstützt die außerunterrichtliche Tätigkeit im Bezirk Karl-Marx-Stadt

Im Jahre 1974 hat unser Bezirkskomitee für die *Olympiaden Junger Mathematiker* damit begonnen, in enger Zusammenarbeit mit der Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt (THK) die Förderung junger Talente im Bezirk neu zu organisieren. Im gleichen Jahr wurde das Jugendobjekt *Mathematische Schülerzirkel* an unserer Sektion gegründet. Über beides wollen wir hier kurz berichten.

Leistungsstarke Schüler aus der Stadt Karl-Marx-Stadt können sich in die *Kreis-Arbeitsgemeinschaften* delegieren lassen, die wöchentlich im Mathematikzentrum des Pionierhauses *Juri Gagarin* durchgeführt werden. Für die inhaltliche Gestaltung der Zirkel in zehn Arbeitsgemeinschaften der Klassen 6 bis 10 sind Mitarbeiter unserer Sektion verantwortlich. Sie betreuen dabei 16 bis 18 Mitglieder der Arbeitsgruppe 1 des genannten Jugendobjekts. Dieser Arbeitsgruppe gehören Mathematiklehrerstudenten aus dem 2. und 3. Studienjahr an, die unter Anleitung die Zirkel durchführen. Die Studenten sind mit viel Freude bei dieser Arbeit; die Aufnahme ins Jugendobjekt ist für sie eine Auszeichnung. Einige von ihnen können auch ihre Diplomarbeit auf diesem Gebiet schreiben. Auf diese Weise wurden Aufgabensammlungen sowie Vorbereitungen auf solche Zirkel ausgearbeitet und erprobt.

Für 200 Schüler unseres Bezirks besteht die Möglichkeit, in den *Korrespondenzzirkel Mathematik* für die Klassenstufen 7 bis 11/12 delegiert zu werden. Sie haben in sieben Serien pro Jahr jeweils fünf Aufgaben zu lösen. Neben Musterlösungen erhalten sie umfangreiches Material zugeschickt, das ihnen helfen soll, ihre Kenntnisse und Fähigkeiten auf mathematischem Gebiet zu verbessern. Dabei bemühen wir uns, diesen Korrespondenzzirkel als eine Art von *Fernkurs im Problemlösen* aufzubauen.

Die Korrektur der Schülerlösungen für Klasse 8 bis 12 wird von acht Mitgliedern der Arbeitsgruppe 2 unseres Jugendobjekts durchgeführt. Dies sind ehemalige Teilnehmer an DDR-Olympiaden, die zur Zeit unsere Spezialklasse Mathematik besuchen oder die an unserer Sektion Mathematik studieren.

Diese erfolgreichen Olympioniken sind stets gern bereit, ihr Wissen und Können bei der Unterstützung der außerunterrichtlichen Tätigkeit einzusetzen.

Für etwa 60 Schüler unseres Bezirks besteht zusätzlich die Möglichkeit, an den einwöchigen *Spezialistenlagern* für die Klassen 7, 8, 9, 10 sowie 11/12 teilzunehmen. Neben harter Arbeit – es sind außer dem Selbststudium in jeder Klassenstufe 20 Stunden Vorlesungen und Seminare zu absolvieren – gibt es auch viel Spaß bei einer sinnvollen Freizeitgestaltung. Daß unsere Schüler immer wieder gern zu diesen Spezialistenlagern kommen, zeigt uns, daß sie mit Freude bei der Sache sind.

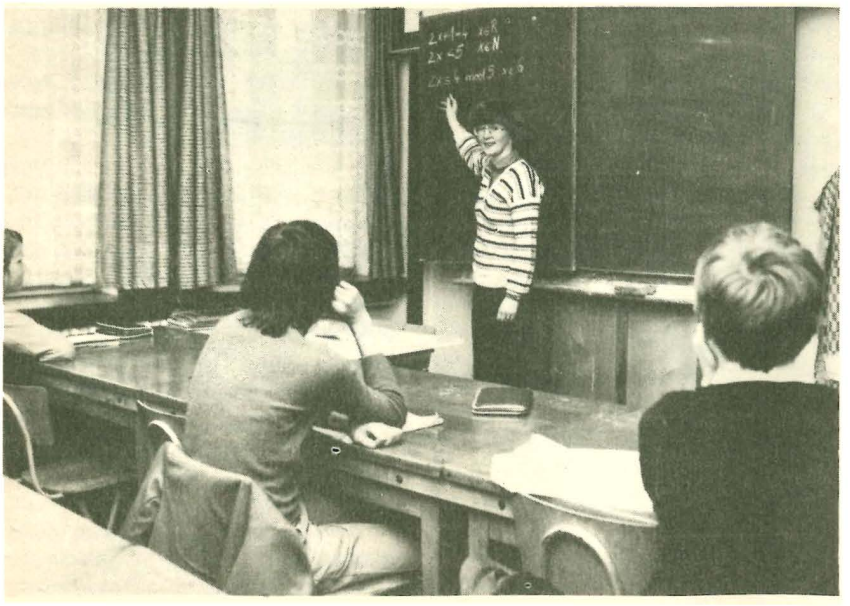
Ihr werdet schon bemerkt haben, daß unser Fördersystem mit einer systematischen Auswahl der leistungsstärksten Schüler verbunden ist. Dabei bemühen wir uns so vorzugehen, daß diejenigen Schüler, die den Sprung zur jeweils nächst höheren Form der Förderung nicht schaffen, den Spaß an der Beschäftigung mit der Mathematik nicht verlieren. Erwähnenswert ist hierbei die gute Zusammenarbeit zwischen dem Bezirkskomitee OJM, dem Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit und unserer Sektion Mathematik.

Die höchste Form der Förderung wird in unseren *Bezirks-Arbeitsgemeinschaften* durchgeführt. Für jeweils etwa 12 Schüler der Klassen 9/10 sowie 11/12 findet an der THK alle vierzehn Tage eine zweistündige Veranstaltung statt. Im Spezialistenlager für Klasse 8 werden 4 bis 6 Schüler für die Bezirks-AG ausgewählt. Sie verpflichten sich, im kommenden Schuljahr als Frühstarter in Klasse 10 zu starten. Ferner werden alle Teilnehmer an der DDR-Olympiade in die Bezirks-AG aufgenommen. Seit einem Jahr sind wir dabei, für etwa vier unserer leistungsstärksten Schüler zusätzlich eine *individuelle Förderung* einzurichten. Sie werden von ehemaligen Teilnehmern an der Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO) in Form von Konsultationen zusätzlich betreut.

Diese Unterstützung der außerunterrichtlichen Tätigkeit bringt für einige Mitarbeiter unserer Sektion einen beträchtlichen Arbeitsaufwand mit sich. Neben dem Ausarbeiten der Materialien für den Korrespondenzzirkel sind jedes Jahr rund 900 Stunden Lehrveranstaltungen vor Schülern zu halten. Natürlich freuen wir uns, daß wir auf diese Weise mit dazu beigetragen haben, die Leistungen unserer Schüler bei Mathematik-Olympiaden deutlich sichtbar zu steigern. (Nach einem 13. Platz bei der XIII. DDR-Olympiade konnten wir in den vergangenen vier Jahren stets vordere Plätze in der inoffiziellen Bezirkswertung erreichen.)

Unser Ziel besteht aber nicht nur darin, mathematisch begabte Schüler zu entdecken und systematisch zu fördern. Wir wollen darüber hinaus erreichen, daß möglichst viele dieser Schüler sich bei ihrer Studien- und Berufswahl der Mathematik oder einer mathematisch orientierten Disziplin zuwenden. Und auch hier können wir bereits auf recht erfreuliche Erfolge verweisen. In wachsendem Maße kommen solche von uns betreuten Schüler in unsere Spezialklasse Mathematik und nehmen anschließend ein Mathematikstudium auf. Schüler, die aus Spaß an der Mathematik viele Stunden ihrer Freizeit mit oft recht harter Arbeit verbrachten, finden so zu einem Beruf, der sie befriedigt und ausfüllt. Und aus ihren Reihen kommen dann wiederum diejenigen Mitarbeiter unserer Sektion, die aus Freude an der Sache einen Teil ihrer Zeit der Förderung junger Talente in unserem Bezirk widmen.

H. König



Adam-Ries-Wettbewerb im Bezirk Karl-Marx-Stadt

Am 10. und 11. 2. 1981 fand in der *Adam-Ries-Oberschule* in Annaberg-Buchholz der erste Adam-Ries-Wettbewerb statt. Jeder der 26 Kreise unseres Bezirks konnte eine aus drei Schülern der Klasse 5 bestehende Mannschaft melden. Die 76 angereisten Schüler hatten in 150 Minuten drei Aufgaben zu lösen.

Den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben hatten wir so hoch gewählt, daß wir erwarteten, daß im Durchschnitt nur etwa die Hälfte der erreichbaren Punkte erzielt werden würden. Die Wettbewerbsteilnehmer haben unsere Erwartungen übertroffen. Sie erreichten 57% der erreichbaren Punkte.

Mit 68 von 90 möglichen Punkten erreichte die Mannschaft aus Karl-Marx-Stadt/Land das beste Ergebnis. Sie erhielt den von unserem Bezirksschulrat gestifteten *Adam-Ries-Ehrenpreis*. Für die erfolgreichsten Teilnehmer gab es ebenfalls Preise, Urkunden und Medaillen.

Natürlich gab es neben der mathematischen Arbeit auch viel Spaß bei der Freizeitgestaltung: Der *Frohnauer Hammer* wurde besucht; ein Zauberer verblüffte durch gekonnte Tricks; bei einem lustigen Knobelwettbewerb gab es kleine Sachpreise zu gewinnen; in einer Bastelstraße konnte man sich kleine Andenken herstellen; ein sehr interessanter Vortrag machte mit Leben und Werk des Rechenmeisters Adam Ries aus Annaberg bekannt. Wohl alle Teilnehmer waren einer Meinung: Diese beiden Tage waren ein großes Erlebnis; man war stolz, dabeigewesen zu sein.

Der *Adam-Ries-Wettbewerb* soll zu einer Tradition in unserem Bezirk werden. Wir hoffen, daß er zu einer Belebung der außerunterrichtlichen Arbeit in unseren Kreisen beiträgt und außerdem hilft, junge Talente frühzeitig zu entdecken und zu fördern. Die erfolgreichsten Teilnehmer dieses ersten Wettbewerbs beginnen sich bereits auf einen Frühstart in Klassenstufe 7 bei der XXI. Olympiade Junger Mathematiker vorzubereiten.

Abschließend wollen wir euch noch die Aufgaben dieses Wettbewerbs mitteilen. Viel Spaß beim Knobeln!

H. König

Aufgaben

▲1▲ Im Schulgarten stecken Schüler auf einem 8 m² großen Beet als Saatgut Erbsen, und zwar so dicht, wie dies auf großen Flächen üblich ist. Der Ernteertrag dieses Beetes betrug das Fünfzehnfache des Saatgutes.

Wieviel kg Erbsen ernteten die Schüler von diesem Beet, wenn für eine 1 ha große Fläche 2 dt Erbsen als Saatgut üblich sind?

▲2▲ Schüler einer Klasse 5 unterhielten sich im Mathematikzirkel über den bei der Olympiade so erfolgreichen DDR-Rudervierer ohne Steuermann. Egon kam dazu und fragte, wie die vier Sportler heißen und in welcher Reihenfolge sie im Boot sitzen. Er erhielt folgende Auskunft:

(1) Die vier Sportler haben die Vornamen Andreas, Jürgen, Siegfried und Stefan; ihre Nachnamen lauten Brietzke, Decker, Semmler und Thiele.

(2) Andreas sitzt unmittelbar hinter Siegfried und unmittelbar vor Semmler.

(3) Thiele sitzt unmittelbar hinter dem Sportler, dessen Vor- und Nachname den gleichen Anfangsbuchstaben hat.

Egon überlegt eine Weile und sagt dann: „Diese Informationen reichen noch nicht aus!" Daraufhin erhält er noch folgende Auskunft:

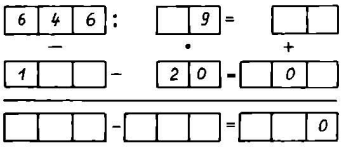
(4) Andreas sitzt hinter Brietzke.

a) Weise nach, daß sich aus diesen vier Aussagen die Namen und die Reihenfolge eindeutig ermitteln lassen!

b) Weise nach, daß Egon mit seiner Meinung recht hatte, daß sich allein aus den Aussagen (1), (2) und (3) die Namen und die Reihenfolge nicht eindeutig ermitteln lassen!

c) Ersetze die Aussage (4) so durch eine andere Aussage (4a), daß sich dann aus (1), (2), (3) und (4a) Namen und Reihenfolgen wieder eindeutig ermitteln lassen!

▲3▲ Uwe, Hans und Horst haben sich an einem Knobelnachmittag mit der Lösung des folgenden Kryptogramms beschäftigt:



Sie versuchen, in jedes leere Kästchen eine solche Ziffer einzusetzen, daß die drei waagerechten und die drei senkrechten Aufgaben richtig gelöst sind.

Uwe stellt fest: „Dieses Kryptogramm besitzt genau eine Lösung. Diese Lösung läßt sich auch dann noch eindeutig bestimmen, wenn die ‚1' in der zweiten Zeile nicht mit eingetragen ist."

Hans ergänzt: „Diese Lösung läßt sich sogar dann noch eindeutig ermitteln, wenn außer der ‚1' auch noch die ‚2' nicht eingetragen ist."

Horst meint: „Stünde dagegen an der Stelle der ‚2' eine ‚3' oder eine noch größere Ziffer, dann hätte dieses Kryptogramm keine Lösung."

Untersuche, ob alle drei Jungen recht hatten! Löse das Kryptogramm!

Wandzeitung, angefertigt von der Arbeitsgemeinschaft „Foto" der Station Junger Techniker und Naturforscher Annaberg

Lohntüte ohne Tarnkappe

Jeder von uns, ob groß oder klein, Arbeiter oder Pionier, besitzt eine unsichtbare Lohntüte.

Sichtbar ist die Lohntüte, die deine Eltern in jedem Monat erhalten. Aus dieser kommt auch dein Taschengeld. Unsichtbar sichtbar ist die zweite Lohntüte. Ein sozialistisches Wunder, eine Errungenschaft, die deine Eltern und alle Werktätigen durch ihre gute Arbeit selbst geschaffen haben. Aus dieser Tüte werden Waren und Leistungen für dich und jeden Bürger unserer sozialistischen Gesellschaft bezahlt.

Das Geld kommt aus den gesellschaftlichen Konsumtionsfonds des sozialistischen Staates, der volkseigenen Betriebe und der gewerkschaftlichen Sozialversicherung.

So gibt es viele Dinge tatsächlich umsonst, oder sie sind billig zu kaufen.

So kannst du Sachen verbrauchen und Leistungen nutzen, ohne daß sie durch dich voll oder überhaupt bezahlt werden.

Brot, Mehl, Wurst, Fleisch, Zucker, Kartoffeln, Eier, Obst, Gemüse haben seit Jahren unverändert niedrige stabile Preise, weil hier Zuschüsse aus der unsichtbaren Lohntüte gezahlt werden! Das geschieht auch für deine Kinderkleidung und Kinderschuhe. Wenn du mit dem Bus, der Straßenbahn oder der Eisenbahn fährst, reist du fast umsonst, denn den überwiegenden Teil des Fahrgeldes zahlt der Staat aus dem gesellschaftlichen Konsumtionsfonds. Natürlich muß viel gearbeitet werden, damit du zur Schule, Lehrlinge zur Betriebsberufsschule und Studenten zur Universität gehen können. Auch wenn du aktiv Sport treibst, Medikamente brauchst, zur Poliklinik oder ins Krankenhaus mußt, um gesund zu werden, niemals hast du in unserem Land dafür etwas zu zahlen.

Eine Neubauwohnung kostet etwa 50000,– Mark. Die Pflege und Erhaltung älterer Wohnhäuser ist sehr teuer. Dennoch sind in der DDR die Mieten weitaus niedriger als in den kapitalistischen Ländern.

Diese und viele andere Leistungen, wie Plätze in Kinderkrippen, Kindergärten, Betriebsferienlager, aber auch in Theatern, Kinos und auf Sportplätzen werden überwiegend aus Mitteln des Staates, der Arbeitsstellen deiner Eltern oder der gewerkschaftlichen Sozialversicherung bezahlt.

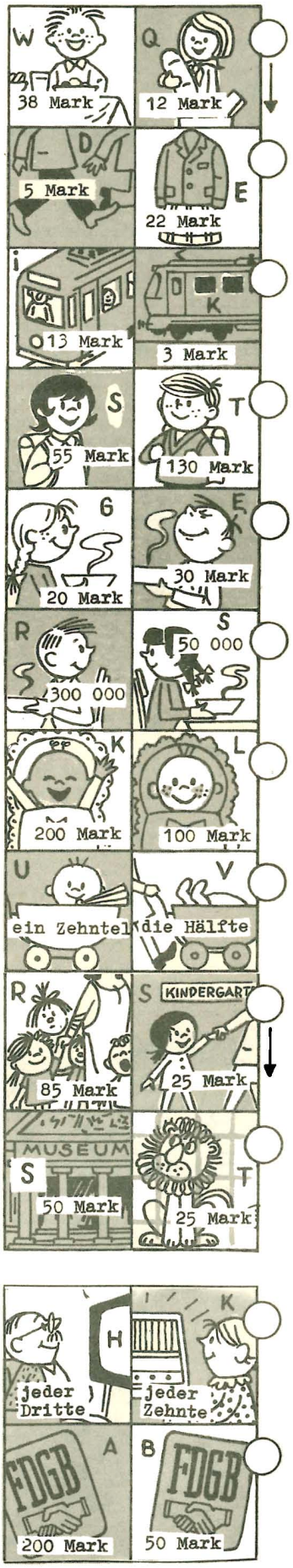
So sieht also die immer voller werdende Lohntüte ohne Tarnkappe aus. Gute Arbeit lohnt sich!

Zeig mal, daß du etwas weißt! Schätze mal!

K. Brocke

Erkunde die richtige Lösung! Wenn du dich richtig entscheidest, ergeben die Buchstaben in den Kreisen hintereinander gelesen einen Satz.

(aus: Frösi 1/81)



Wie hoch sind die Zuschüsse des Staates für die niedrigen Preise der Grundnahrungsmittel, die du monatlich verbrauchst?

Die staatlichen monatlichen Zuschüsse für euren Verbrauch an Kinderkleidung, Schuhen, Briketts, Strom und Gas betragen...

Wieviel Mark erhältst du aus unsichtbaren Lohntüten für Fahrten mit dem Bus, der Straßenbahn oder Eisenbahn?

Wieviel Mark zahlt unsere sozialistische Gesellschaft für deinen Schulbesuch in jedem Monat?

Wie hoch ist der Betrag, der monatlich für dein Schulessen vom sozialistischen Staat hinzugezahlt wird?

Wieviel Schulkinder in der DDR aus kinderreichen Familien erhalten kostenlos täglich ein Mittagessen und einen Viertelliter Milch?

Wieviel Mark werden aus der unsichtbaren Lohntüte für einen Krippenplatz jeden Monat gezahlt?

Wie hoch ist der Kostenanteil der Eltern für einen Krippenplatz?

Wieviel Mark werden aus der unsichtbaren Tüte für einen Kindergartenplatz bezahlt?

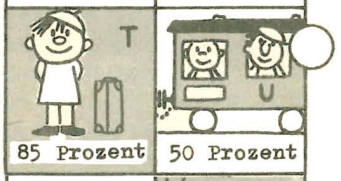
Wieviel Mark werden monatlich aus der gleichen Tüte von einer vierköpfigen Familie für den Besuch von Theatern, Kinos, Museen, Tierparks oder von Sportveranstaltungen in Anspruch genommen?

Schätze mal, wieviel Fernsehzuschauer und Rundfunkhörer als Rentner keine Gebühren zahlen müssen!

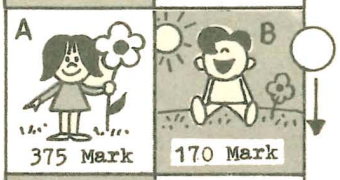
Wie hoch ist der Zuschuß aus den gesellschaftlichen Fonds für eine Ferienreise vom FDGB?

In welcher Höhe beteiligen sich z. B. auch deine Eltern, wenn sie eine FDGB-Reise in Anspruch nehmen?

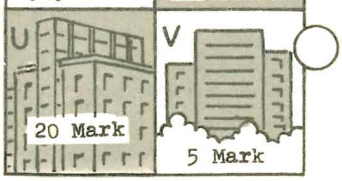
Wie hoch ist der Zuschuß für dich bei einer FDGB-Ferienreise?



Wie hoch ist der Zuschuß für ein Kind bei einer FDGB-Reise der Eltern?

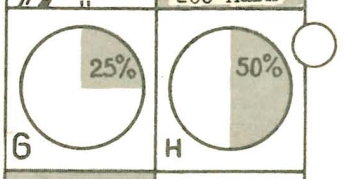


Wie hoch sind die Zuschüsse für einen Platz in einem Betriebsferienlager für euch?

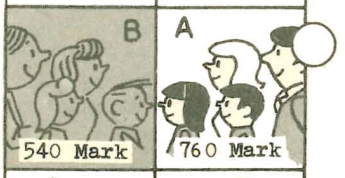


Die durchschnittliche Miete für die Mehrzahl der Haushalte unserer Republik für eine 3-Raum-Wohnung beträgt 87,– Mark. Was meinst du, zahlt der Staat zur Sicherung dieser niedrigen Miete hinzu?

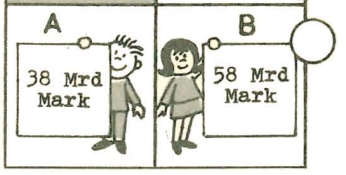
Schätze mal, für wieviel Mark jährlich kostenlos Arzneien, Heil- und Hilfsmittel im Durchschnitt an jeden Bürger der DDR ausgegeben werden!



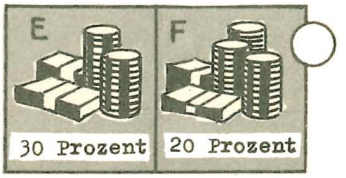
Wie hoch ist der Anteil der Mitgliederbeiträge an den Einnahmen der Sozialversicherung?



Wieviel zahlte der Staat 1980 insgesamt in jedem Monat aus der zweiten Lohntüte für eine vierköpfige Familie?

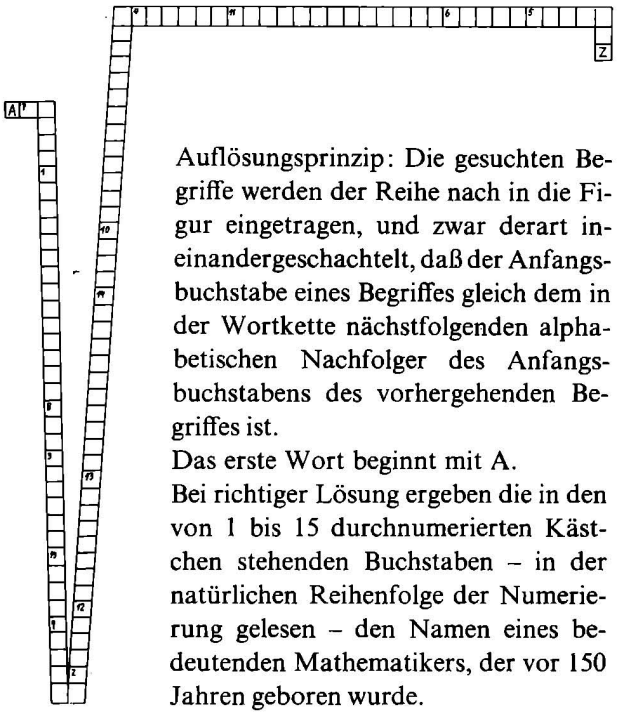


Wieviel Milliarden Mark stellt der sozialistische Staat zusätzlich zu den Löhnen und Prämien für die Verbesserung der Arbeits- und Lebensbedingungen 1981 zur Verfügung?



Wie hoch ist der Anteil des unentgeltlichen Verbrauchs an Konsumgütern und Leistungen aller Arbeiter- und Angestelltenhaushalte der DDR?

Rätselkette: Von A bis Z

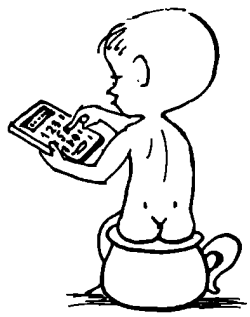


Auflösungsprinzip: Die gesuchten Begriffe werden der Reihe nach in die Figur eingetragen, und zwar derart ineinandergeschachtelt, daß der Anfangsbuchstabe eines Begriffes gleich dem in der Wortkette nächstfolgenden alphabetischen Nachfolger des Anfangsbuchstabens des vorhergehenden Begriffes ist.
Das erste Wort beginnt mit A.
Bei richtiger Lösung ergeben die in den von 1 bis 15 durchnumerierten Kästchen stehenden Buchstaben – in der natürlichen Reihenfolge der Numerierung gelesen – den Namen eines bedeutenden Mathematikers, der vor 150 Jahren geboren wurde.

Die gesuchten Begriffe haben folgende Bedeutung: Umstandswort (lat.)/der nach dem Umpflügen ruhende Acker / monumentales altägyptisches Bauwerk / Erdwall an Flußufern und Meeresküsten / Hochfläche am Nordwestrand des Thüringer Beckens / Standort militärischer Einheiten während eines Manövers / Sinneswahrnehmung / Meeresbewohner / russischer Männervorname / sowjetischer Flugzeugtyp / Sammelbezeichnung für die natürlich vorkommenden Gemische chloridischer und sulfatischer Verbindungen des Kaliums und Magnesiums / Grenzwert / Hafenstadt an der Nordostküste Siziliens / Kurzzeichen vor Maßeinheiten / Berg in Griechenland / Teilgebiet auf Landkarten / geometrische Figur / sehr zu empfehlen / Gewebeart / Niederschlag / Abkürzung für *ultraviolett* / bedeutender deutscher Arzt und Wissenschaftler (1821 bis 1902) / Figur eines früher handelsüblichen Zimmerbarometers / eine der Trockenheit angepaßte Pflanze / chemische Verbindung eines Metalls (Ordnungszahl 39) / Stadt im Süden des Bezirks Halle

R. Mildner

Wer löst mit? alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 8. März 1982

Mathematik

Ma5 ▪2151 Peter kauft für seine Modelleisenbahn Personenwagen zu 5,50 M, Güterwagen zu 5,95 M und Doppelstockwagen zu je 19,70 M das Stück, und zwar von jeder Sorte wenigstens einen Wagen. Insgesamt gibt er 42,15 M dafür aus.
Wieviel Personen-, Güter- bzw. Doppelstockwagen will Peter anschaffen?

Schüler C. Janke, Ilmenau, Kl. 7

Ma5 ▪2152 Anke bittet ihren Vater, aus einem 1 m langen Draht das Kantenmodell eines Würfels herzustellen. Der Vater kommt ihrer Bitte nach. Er schneidet den Draht in gleich lange Stücke, die er dann in den Eckpunkten des Drahtmodells des Würfels zusammenlötet. Es bleiben 4 cm Draht übrig. Welche Kantenlänge hat das so gefertigte Drahtmodell eines Würfels?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma5 ▪2153 Zeichne fünf beliebig große Quadrate, die aus genau a) 6, b) 7, c) 8, d) 9, e) 10 kleineren Quadraten zusammengesetzt sind! (*Hinweis:* Die kleineren Quadrate dürfen verschieden groß sein. Nutze Karopapier für deine Überlegungen!)

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma5 ▪2154 Drei Zimmer einer Wohnung werden renoviert. Für das erste Zimmer werden 7 Rollen Tapete zum Preis von 8,60 M je Rolle benötigt. Für das zweite Zimmer wird eine Rolle mehr als für das erste Zimmer benötigt. Die Tapete für das zweite Zimmer kostet je Rolle 36 Pf weniger als die für das erste Zimmer. Für das dritte Zimmer reichen 5 Rollen Tapete. Der Preis der Tapete für alle drei Zimmer zusammen beträgt 180,12 M. Wieviel Mark kostet eine Rolle Tapete, die für das dritte Zimmer verwendet wurde?

Schülerin Kristina Thude, Bürgel

Ma5 ▪2155 Hans sagt zu Peter: „Wenn du von der Summe der ersten zwanzig ungeraden natürlichen Zahlen die Summe der ersten zehn ungeraden natürlichen Zahlen subtrahierst, so ist diese Differenz gleich der zehnfachen Anzahl der Schüler meiner Klasse. Wieviel Schüler gehören meiner Klasse an?"

Schülerin Elke Goraus, Zwickau

Ma5 ▪2156 Berechne x aus der Gleichung

$$x = 1+2-3-4+5+6-7-8+9+10-11 \\ -12+13+14-\ldots+301+302$$

durch geschicktes Umstellen der Glieder der rechten Seite der Gleichung! *Sch.*

Ma6 ▪2157 Welche natürliche Zahl n mit $n<400$ läßt bei Division durch 2, 3, 5 bzw. 7 jeweils den Rest 1?

Schüler Jens Weber, Karl-Marx-Stadt

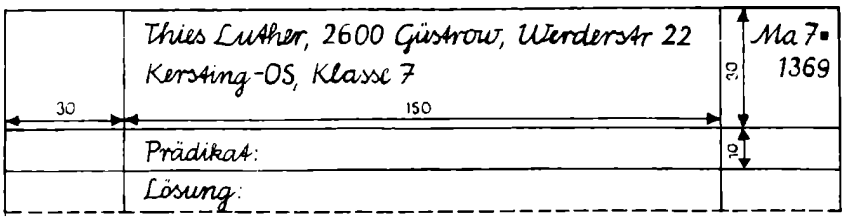
Ma6 ▪2158 Ermittle alle zweistelligen Primzahlen mit der Quersumme 7, die zu geraden natürlichen Zahlen werden, wenn man ihre Ziffern vertauscht.

Schüler Sebastian Horbach, Karl-Marx-Stadt

Ma6 ▪2159 Thomas hat doppelt soviel Freunde wie Freundinnen. Hätte er zwei Freunde und zwei Freundinnen weniger, so wären es viermal soviel Freunde wie Freundinnen. Wieviel Freunde bzw. Freundinnen hat Thomas?

Schülerin Claudia Popien, Magdeburg, Kl. 8

Ma6 ▪2160 Als Peter morgens das erste Mal auf seine Armbanduhr schaut, steht der kleine Zeiger genau in der Mitte zwischen den Ziffern 6 und 7 des Zifferblattes. Als Peter am gleichen Vormittag, aber etwas später erneut auf seine Armbanduhr schaut, hat der große Zeiger genau $\frac{5}{12}$ seiner Kreisbewegung zur vollen Stunde ausgeführt, und der kleine



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1981/82 läuft von Heft 5/1981 bis Heft 2/82. Zwischen dem 1. und 10. September 1982 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/81 bis 2/82 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen von Kollektiven, die sich am Wettbewerb beteiligen, werden in Heft 6/82 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/81 bis 2/82) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1981/82 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Zeiger steht zwischen den Ziffern 9 und 10 des Zifferblattes. Welcher Zeitunterschied besteht zwischen den beiden Zeitpunkten, an denen Peter auf seine Armbanduhr schaute?

Schüler Uwe Lippmann, Karl-Marx-Stadt

Ma6 ■2161 Die Halbierende des Winkels $\sphericalangle CAB$ eines Dreiecks ABC schneide die Mittelsenkrechte der Seite $\overline{AB}$ im Punkte E, und es sei M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Es habe $\overline{AB}$ die Länge 6 cm, $\overline{BC}$ die Länge 7 cm und $\overline{EM}$ die Länge 2 cm. Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren, das die genannten Bedingungen erfüllt.

Schüler Andreas Israel, Karl-Marx-Stadt

Ma7 ■2162 Auf einem Parkplatz sind insgesamt 30 Kraftfahrzeuge, die zusammen 100 Räder haben, abgestellt, und zwar Personenkraftwagen und Motorräder. Wieviel Personenkraftwagen bzw. Motorräder sind auf diesem Parkplatz abgestellt?

Schülerin Claudia Popien, Magdeburg, Kl. 8

Ma7 ■2163 Das Lebensalter einer Mutter (in ganzen Zahlen) verhält sich zu dem ihrer Tochter wie 7 : 3. Die Mutter ist 32 Jahre älter als die Tochter. Wie alt sind Mutter und Tochter?

Schülerin Claudia Popien, Magdeburg, Kl. 8

Ma7 ■2164 Bestimme das Produkt $a \cdot b \cdot c$ aus den drei natürlichen Zahlen a, b und c, für die $a+b=67$, $a+c=33$ und $b+c=58$ gilt!

Schülerin Karin Graf, Plauen, Kl. 6

Ma7 ■2165 An die Wandtafeln A, B und C sind jeweils genau 12 Vierecke gezeichnet. Die Wandtafel A enthält genau 8 Quadrate, genau 10 Parallelogramme, genau 11 Trapeze und genau 10 Drachenvierecke. Die Wandtafel B enthält genau 1 Quadrat, genau 4 Parallelogramme, genau 11 Trapeze und genau 6 Drachenvierecke. Die Wandtafel C enthält genau 5 Quadrate, genau 6 Parallelogramme, genau 11 Trapeze und genau 6 Drachenvierecke. Untersuche, welche dieser drei Angaben mit Sicherheit falsch ist und welche richtig sein könnten!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

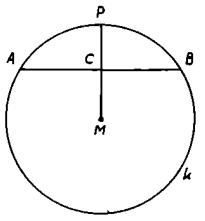
Ma8 ■2166 Es ist folgender Satz zu beweisen:
Wenn die Differenz zweier reeller Zahlen gleich 1 ist, so ist die Differenz ihrer Quadrate gleich der Summe der beiden Zahlen.

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma8 ■2167 Es ist folgender Satz zu beweisen:
Wenn die Summe zweier natürlicher Zahlen durch 10 teilbar ist, so ist die Differenz ihrer Quadrate durch 20 teilbar.

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma8 ■2168 In dem abgebildeten Kreis k mit dem Mittelpunkt M habe die Sehne $\overline{AB}$ die Länge 8 cm. Der Radius $\overline{MP}$ steht senkrecht auf $\overline{AB}$; die Strecke $\overline{CP}$ sei 3 cm lang. Zu errechnen ist der Flächeninhalt des Kreises k. *Sch.*



Ma8 ■2169 Es ist die kleinste durch 7 teilbare Zahl zu bestimmen, die bei Division durch 2, 3, 5 bzw. 11 jeweils den Rest 1 läßt.

Schüler Jörg Uhlig, Crimmitschau

Ma9 ■2170 Ein regelmäßiges Fünfeck habe die Seitenlänge $a=4$ cm. Es ist die Länge einer seiner Diagonalen zu berechnen. *Sch.*

Ma9 ■2171 Welche der beiden Zahlen 27^{400} und 54^{200} ist die kleinere von beiden? *Sch.*

Ma9 ■2172 Das Quadrat einer ungeraden Zahl sei z.
Es ist nachzuweisen, daß der Vorgänger von z stets durch 4 teilbar ist, der Nachfolger von z niemals durch 4 teilbar ist.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma9 ■2173 Es sind alle vierstelligen Zahlen x zu ermitteln, für die gilt:
1) Die aus der ersten und dritten Ziffer gebildete Zahl ist das Doppelte der Zahl, die durch die zweite Ziffer dargestellt wird.
2) Das Produkt der Ziffern dieser Zahl ist eine Kubikzahl.

Andreas Fittke, z. Zt. Soldat

Ma10/12 ■2174 Man ermittle alle Lösungen des Kryptogramms

$$\begin{array}{r} a\ b \\ +\ c\ d \\ \hline a\ e\ a \end{array}$$

so, daß die Zahl, welche durch $a\ b\ c\ d$ dargestellt wird, maximal ist.
Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. *Andreas Fittke, z. Zt. Soldat*

Ma10/12 ■2175 Für die Größen α, β und γ der Innenwinkel eines Dreiecks gelte $\alpha<\beta<\gamma$. Es ist nachzuweisen, daß dann auch $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}<\frac{1}{8}$ gilt! *Sch.*

Ma10/12 ■2176 Für die Seitenlängen a, b und c eines Dreiecks ABC gelte $2c-b=2\sqrt{a^2-\frac{3}{4}b^2}$.
Man untersuche, ob dadurch der von den Seiten mit den Längen b und c eingeschlossene Winkel der Größe α eindeutig bestimmt ist!

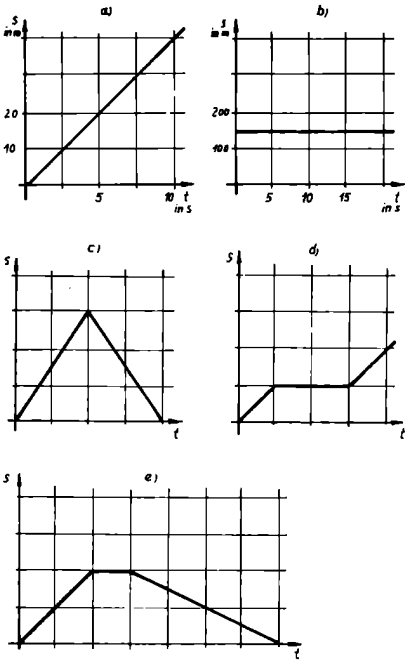
Schüler Thorsten Eidner, Zeulenroda, Kl. 10

Ma10/12 ■2177 Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sei 2 cm länger als die längere Kathete, und diese sei wiederum 2 cm länger als die kürzere Kathete. Wie lang sind die Dreieckseiten? Wie groß sind die den Katheten gegenüberliegenden Innenwinkel?

Steffen Lausch, Grimma, Elektromechanikerlehrling

Physik

Ph6 ■106 In den folgenden Diagrammen sind verschiedene Bewegungen dargestellt. Was sagen die Kurven über die Bewegung der Körper aus?



Ph7 ■107 Eine Diesellokomotive besitzt eine Leistung von 1690 kW. Mit welcher Geschwindigkeit könnte sie eine Steigung von 1 : 100 befahren, wenn die Gewichtskraft des Zuges einschließlich der Diesellokomotive 12000 kN (1223 Mp) beträgt?
(Die Reibungswiderstände und andere Energieverluste sollen dabei unberücksichtigt bleiben.)

Ph8 ■108 Ein Topf aus Stahlblech wird mit 3 Litern Wasser gefüllt und auf eine Temperatur von $-10\,°C$ abgekühlt. Danach wird der Topf auf einen Gaskocher gesetzt, das Eis zum Schmelzen gebracht und das entstandene Wasser auf $+90\,°C$ erwärmt. Vom Aufsetzen auf die Gasflamme bis zum Erreichen der Temperatur von $+90\,°C$ wurde eine Zeit von 45 Minuten ermittelt. Der Gaskocher verbraucht in einer Stunde $0{,}30\,m^3$ Gas. Das Gas hat einen Heizwert von $H = 15922\,kJ/m^3$ $\left(3800\frac{kcal}{m^3}\right)$. Der Topf hat eine Masse von 2,77 kg. Die spezifische Wärmekapazität ist für

Eis $c_E = 2{,}095\frac{J}{g\cdot K}\left(0{,}5\frac{kcal}{kg\cdot grd}\right)$,

Stahl $c_T = 0{,}4609\frac{J}{g\cdot K}\left(0{,}11\frac{kcal}{kg\cdot grd}\right)$,

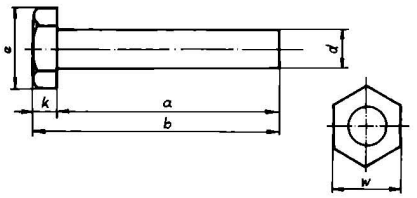
Wasser $c_W = 4{,}19\frac{J}{g\cdot K}\left(1\frac{kcal}{kg\cdot grd}\right)$.

Die Schmelzwärme für Eis beträgt

$q = 333{,}94\frac{kJ}{kg}\left(79{,}7\frac{kcal}{kg}\right)$.

Wieviel Prozent der in Form von Gas zugeführten Wärmemenge wurden für die Erwärmung des gefrorenen Wassers auf die angegebene Temperatur einschließlich des Topfes ausgenutzt? *Ing. A. Körner, Leipzig*

Ph9 ■109 Auf einem Schraubenautomaten werden aus Sechskant-Stabstahl Sechskantschrauben gemäß Skizze hergestellt.



Die Schrauben werden von der Stange gearbeitet, d. h., von der im Automaten eingespannten Sechskantstange wird auf der Länge *a* der Gewindedurchmesser gedreht, das Gewinde geschnitten und die Schraube am Kopf mit der Länge *b* von der Stange abgestochen. Dann schiebt der Automat die Stange selbsttätig um eine Schraubenlänge vor, und die Arbeitsgänge wiederholen sich.

a) Wieviel Schrauben der angegebenen Größe lassen sich aus einer Menge von 74 Tonnen Sechskant-Stabstahl herstellen, wenn jede Stange 5 Meter lang ist, zum Einspannen in den Automaten eine Länge von mindestens 30 Millimeter benötigt wird und der Abstechmeißel eine Breite von 2 Millimetern hat?

b) Wie groß ist der bei der angegebenen Einsatzmasse von 74 Tonnen auftretende Materialverlust absolut in kg und in Prozent? (Die geringen Abfälle beim Gewindeschneiden an Material sollen unberücksichtigt bleiben.)

An Maßen sind gegeben:

$a = 60\,mm$ $\quad d = 10\,mm$

$k = 7\,mm$ $\quad w = 17\,mm$

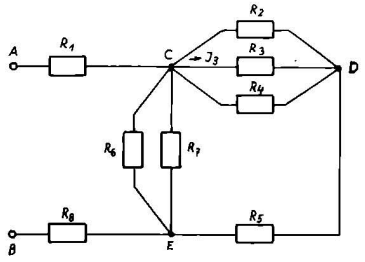
$\varrho = 7{,}85\frac{kg}{dm^3}$ (Dichte von Stahl)

Ing. A. Körner, Leipzig

Ph10/12 ■110 Von dem folgenden vermaschten Stromkreis sind der Gesamtwiderstand, die Gesamtstromstärke, die Spannung U_2 zwischen *C* und *D* und die Stromstärke I_3 zu berechnen.

Die Widerstände betragen $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 60\,\Omega$, $R_3 = 30\,\Omega$, $R_4 = 30\,\Omega$, $R_5 = 8\,\Omega$, $R_6 = 10\,\Omega$, $R_7 = 10\,\Omega$, $R_8 = 6\,\Omega$, und die Spannung zwischen *A* und *B* beträgt $U = 60\,V$.

Steffen Lausch, Grimma, BS Borsdorf



Chemie

Ch7 ■85 Zur Herstellung von Roheisen wird Eisenerz eingesetzt, welches 38% Roheisenstein (Fe_2O_3) enthält. Bei der Verarbeitung treten 2% Verlust ein. Wieviel Kilogramm Roheisen läßt sich aus 1 t Erz herstellen?

Ch8 ■86 Aluminium wird großtechnisch durch Schmelzflußelektrolyse gewonnen. Als Ausgangsstoff dient Bauxit, das zu 63% aus Aluminiumoxid besteht. Bei diesem Vorgang wird Aluminiumoxid in seine elementaren Bestandteile zerlegt. Bevor das Bauxit elektrolysiert wird, wird es gereinigt, so daß nur 70% Aluminiumoxid zerlegt werden.

a) Wieviel Kilogramm Aluminium lassen sich aus 2 t Bauxit herstellen, wenn die vollständige Menge Aluminiumoxid zerlegt wird?

b) Wieviel Kilogramm Aluminium gewinnt man aus 2 t Bauxit, nachdem die Reinigung erfolgte?

Ch9 ■87 Aus 6 g einer 20%igen Salzsäure sollen die Chloridionen restlos mit einer 3%igen Silbernitratlösung ausgefällt werden. Wieviel Gramm Silbernitrat müssen eingesetzt werden?

Ch10/12 ■88 110 g Brom soll aus folgenden Ausgangsstoffen hergestellt werden:

a) reines Kaliumbromid,

b) Braunstein mit einem Gehalt von 95% Mangan (IV)-oxid,

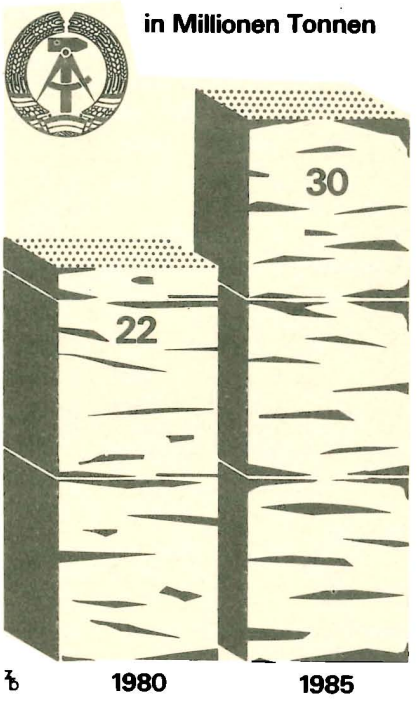
c) 42%iger Schwefelsäure (Dichter der Schwefelsäure beträgt $1{,}32\,g\cdot ml^{-1}$).

Im Reaktionsgemisch soll kein Bromid übrigbleiben.

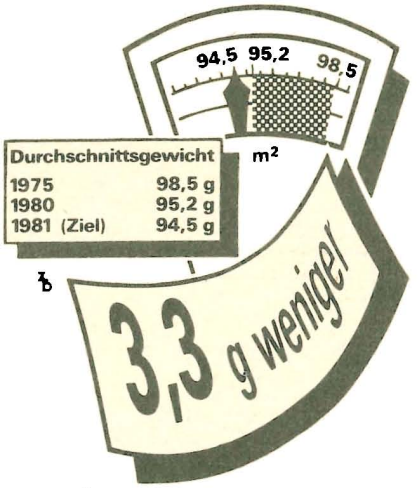
a) Wieviel Gramm der Ausgangsstoffe Kaliumbromid und Braunstein müssen zur Reaktion gebracht werden?

b) Wieviel Milliliter 42%ige Schwefelsäure müssen eingesetzt werden?

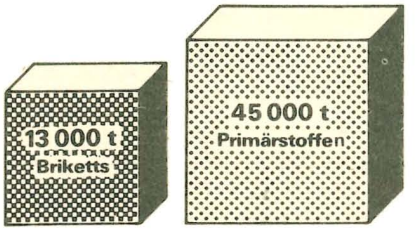
Verwertung von Sekundärrohstoffen



Leichteres Papier



...je m² im Durchschnitt aller Sortimente führen zur Einsparung von



alpha-Wettbewerb 1980/81

Preisträger

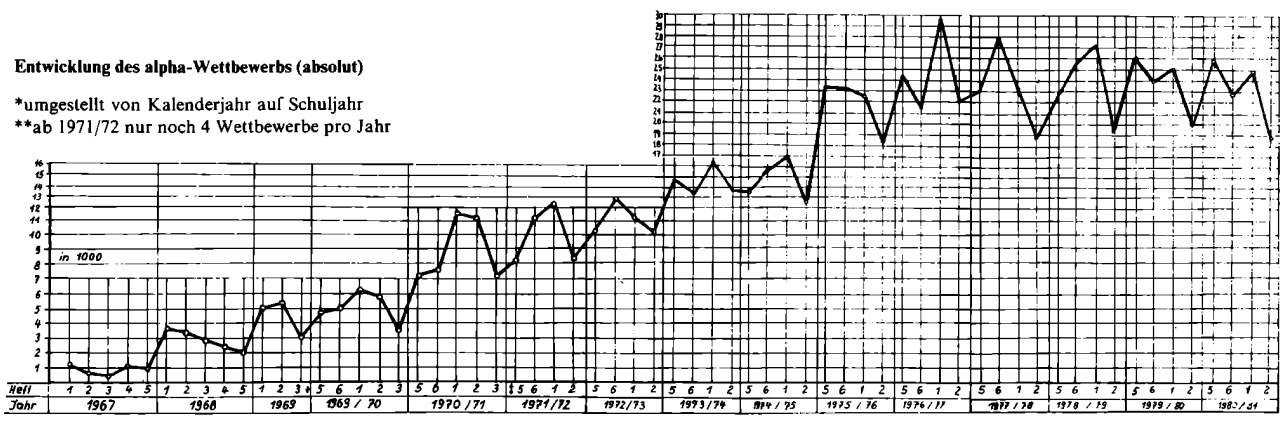
Beatrice List, Altenburg; Uwe Döbler, Arnstadt; Ulrike Eck, Asbach; Regina Suchert, Bad Gottleuba; Tilo Schaarschmidt, Bad Lauchstädt; Olaf Schmidt, Bad Liebenstein; Christiane Böttger, Bad Salzungen; Ulrich Zülicke, Bergwitz; Bernd Trappe, Ines Wippermann, Uta Bernau, R.-Birk Schulze, Jörg Albert, Karen Berg, alle Berlin; André Lorenz, Jens Baumann, beide Bernsbach; Alice Kraneis, Bernburg; Annerose Schmidt, Bleicherode; Kay Mengel, Lars Kliesche, beide Dahme; Manuela Perlwitz, Dellien; Harald Röhrig, Dingelstädt; Bernd Miethig, Birgit Rahn, Ullrich Hartung, alle Dresden; Birgit Burkhardt, Eisenach; Jörg Simon, Engelsdorf; Lutz Küch, Erlau; Ulrich Wenschuh, Falkenstein; Thomas Scheibe, Ferdinandshof; Ulf Winkler, Frankenberg; Giso Strohecker, Frankfurt; Dorothee Heidrich, Freiberg; Ingmar Hellhoff, Friedersdorf; Siegbert Kurtz, Friedrichsrode; Tina Söll, Friesau; Karsten Seliger, Greiz; Beate Thomas, Halle; Mathias Schädlich, Simone Pötzsch, Heike Reichelt, alle Hammerbrücke; Clemens Unger, Hasselfelde; Silke Umbreit, Ilmenau; Steffi Gebauer, Jena; Michael Hoppe, Gert Reifarth, beide Karl-Marx-Stadt; Ute Studzinski, Kietz; Torsten Schütze, Klettenberg; Guido Siegel, Leinefelde; Torsten Tok, Jens-Peter Hrapia, Uwe Werner, alle Leipzig; Sandra Fabian, Liederstädt; Marion Reinhardt, Löbau; Gunnar Knödel, Uwe Iben, Claudia Popien, alle Magdeburg; Torsten Ortloff, Martinroda; Götz Großmann, Meiningen; Andreas Hübler, Mittelbach; Thomas Kitzmann, Reimo Zimmermann, beide Möhlau.

Kollektive Beteiligung

Pablo-Neruda-OS, Ahlbeck; OS Fritz Weineck, Alsleben; Haus der JP, Altenburg; Maxim-Gorki-OS, Kreisklub Junger Math., beide Altentreptow; W.-Pieck-OS, Altenweddingen; OS German Titow, Arneshausen; OS Asbach; POS VIII Arnstadt; OS Bad Bibra; S.-Rädel-OS, Bad Gottleuba; R.-Schwarz-OS, Bad Liebenstein; M.-Poser-OS, Bad Salzungen; OS H. Beimler, Bärenklau; OSK M.-Stein-Schule, Berka; 39. OS E. Schönhaar, 26. OS W. Dubinin, beide Berlin; OS A. Becker, Berlingerode; OS E. Thälmann, OS Fr. Mehring, beide Bernburg; OS E. Weinert, Berka; OS C. Zetkin, Bischofferode; OS O. Buchwitz, Bischofswerda; EOS M. Planck, OS Fr. Schiller, beide Bleicherode; OS Fr. Weineck, Blumberg; OS Blumenthal; H.-Hahn-OS, Boizenburg; Dinter-OS, Borna; OS W. Komarow, Boxberg; OS Breitenworbis; W.-Seelenbinder-OS, OS H. Beimler, beide Breitungen; OS Brehme; Dr.-Th.-Neubauer-OS Brotterode; OS Burkau; W.-Estel-OS, Buttlar; M.-Poser-OS, Bürgel; P.-Neruda-OS, Britz; Sonderschule f. Körperbehinderte, Station Jg. Naturf. u. Techniker, beide Cottbus; Th.-Müntzer-OS, Cochstedt; H.-Zille OS, Demmin; 11. OS, Dessau; OS Deutschenbora; OS Diesdorf; OS Makarenko, Dingelstädt; M.-Curie-OS, Dohna; OS K. Bürger, Dobbertin; OS Domersleben; OS Dorfchemnitz; 123. OS, Pionierpalast Klub Jg. Math., 96. OS, alle Dresden; Fr.-Wolf-OS, Ebersdorf; W.-Pieck-OS, Kreisklub Jg. Math., Eberswalde; W.-Pieck-OS, Eichhof; 9. OS Geschw. Scholl, Eisenach; OS Fr. Heckert, Kreisklub Math., J.-Schehr-OS, alle Eisleben; N.-Ostrowski-OS, Eggersdorf; OS H. Grundig, Ellrich; E.-Weinert-OS, Empfertshausen; H.-Joachim-OS, Espenhain; OS Geschw.-Scholl, Falkensee; Th.-Müntzer-OS, Fambach; B.-Brecht-OS, Floh; 19. OS, Frankfurt; OS Frauensee; OS Friedburg; OS Fr. Krüger, Friedland; H.-Heine-OS, Gadebusch; Friedensschule, Gartz; R.-Arnstadt-OS, Geisa; J.-Gagarin-OS, Geithain; E.-Hartsch-OS, Gersdorf; F.-J.-Curie-OS, Görzke; OS Gohrau; W.-Pieck-OS, Golßen; Kreisklub Jg. Math., Gräfenhainichen; E.-Thälmann-OS, K.-Krull-OS, beide Greifswald; OS W. Seelenbinder, Gröden; III. OS, Gröditz; Cl.-Zetkin-OS, Groitzsch; Lessingschule, Großpostwitz; OS Großbodungen; OS Kl. Gottwald, Großrückerswalde; OS Großschänau; Dr.-S.-Allende-OS, Großweitzschen; J.-Gagarin-OS, Grünhain; Diesterweg-OS, Guben; Haus d. JP Hagenow-Land; M.-Gorki-OS, Hainichen; OS Diesterweg, Allg. OS f. Körperbehinderte, beide Halle; W.-Koenen-OS, AG Math. Block 222/6, beide Halle-Neustadt; Station Jg. Naturf. u. Techniker, Halberstadt; OS Harzgerode; Pestalozzi-OS, Havelberg; OS Hammerbrücke; Schule der DSF, Heiligengrabe; OS Th. Müntzer, Herrmannsdorf; 2. OS Fr. Engels, Herzberg; OS Hillersleben; A.-Becker-OS, Hirschfeld; Goethe-OS Ilsenburg; G.-Ewald-OS, Ivenack; A.-Becker-OS, Jatznick; Schule b. d. Botschaft d. DDR, Kairo (Ägypten); Fr.-Engels-Schule, Kaltennordheim; OS A. Becker, Kamsdorf; Cl.-Zetkin-OS, Kandelin; H.-Beimler-OS, Karbow; E.-Schneller-OS, E.-Thälmann-OS, Tschaikowski-OS, W.-Fricke-OS, Pionierhaus J. Gagarin, alle Karl-Marx-Stadt; OS Cl. Zetkin, Kaulsdorf; C.-Bobach-OS, Karl-Marx-Stadt; EOS Kleinmachnow; OS Th. Müntzer, Klettenberg; H.-Matern-OS, Klietz; OS Könitz; PH W. Ratke, Math. Zirkel Kl. 6 und Bachschule, Köthen; OS Küllstedt; Cl.-Zetkin-OS, L.-Fürnberg-OS, beide Laage; *alpha*-Club der OS Latdorf; OS Lauscha/Ernstthal; OS Lauterbach; Dr.-S.-Allende-OS, K.-Liebknecht-OS, EOS, alle Leinefelde; OS W. Pieck, Lichte; EOS A. Becker, A.-Diesterweg-OS, beide Lobenstein; Pestalozzi-OS, Konsultationsgruppe Math., Löbau; OS W. Wallstab, Löderburg; OS Lössau; E.-Weinert-OS, Loitz; Station Jg. Naturf. u. Techniker, OS Karl Marx, beide Lübz; Lenin-OS, Magdeburg; G.-Eisler-OS, Martinroda; Geschw.-Scholl-OS, Meyenburg; Fr.-Heckert-OS, Milkau; OS Mittelherwigsdorf; OS Mittelstille; OS Naundorf; Lessingschule Neukirch; OS O. Grotewohl, Neukloster; OS Neundorf; Goethe-OS, Neupertershain; W.-Seelenbinder-OS, Neverin; Dr.-Th.-Neubauer-Schule, Niederorschel; W.-Pieck-OS, Niederwiesa; OS J. Gagarin, EOS W. v. Humboldt, beide Nordhausen; OS E. Weinert, Oberschönau; W.-Seelenbinder-OS, Oechsen; Pestalozzi-OS, Oschatz; OS Osternienburg; H.-Matern-OS, Osterwieck; O.-Grotewohl-OS, Pappenheim; Station Jg. Naturf. u. Techniker, Parchim; OS Peißen; OS III Geschw. Scholl, Perleberg; OS Dr. Th. Neubauer, Pfaffschwende; OS Plessa; A.-Becker-OS, Prenzlau; Goetheschule II, OS O. Grotewohl, beide Pritzwalk; Station Jg. Naturf. u. Techniker, Pritzwalk; OS Fr. Plura, Putlitz; OS E. Rietschel, Pulsnitz; OS Quitzöbel; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Rackwitz; OS H. Matern, Pestalozzi-OS, beide Radebeul; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Raguhn; Geschw.-Scholl-Schule, Rathenow; J.-Gagarin-OS, Ribnitz; Spezialschule Fr. Engels, Riesa; J.-Curie-OS, Röbel; J.-Curie-OS, Ronneburg; Ziolkowski-OS, Rossdorf; 34. OS, Haus der JP, beide Rostock; W.-Pieck-OS, Rotta; S. Kosmodemjanskaja OS, Rotterode; OS Rüdnitz; OS Saal; OS II, Saalfeld; W.-Pieck-OS, Kreis-AG Math. Kl. 5, beide Sangerhausen; M.-Gorki-OS, Schkölen; Station Jg. Techniker u. Naturf., OS J. G. Seume, OS K. Marx, OS H. Danz, 4. OS, OS G. Dimitroff, alle Schmalkalden; OS Schneidlingen; OS H. Matern, Schernberg; Haus der JP W. Sonneberg, Schönebeck; OS H. Beimler, Schönhausen; OS Kuba Schule d. DSF, Schorssow; OS Fr. Engels, Schwallungen; J.-R.-Becher-OS, Schwerin; E.-Thälmann-OS, M.-May-OS, beide Sebnitz; OS W. Seelenbinder, Sitzendorf; A.-Hennecke-OS, Senftenberg; OS Sohland; OS W. Pieck, Sondershausen; K.-Marx-OS, OS A. Becker, K.-Liebknecht-OS, alle Spremberg; OS Stadtlengsfeld; O.-Grotewohl-OS, Dr.-S.-Allende-OS, beide Stralsund; 12. OS Dr. R. Sorge, Suhl; EOS K. Marx, Tangerhütte; OS E. Schneller, Taubenheim; OS Teistungen; OS K. Niederkirchner, Teterow; Fr.-Mehring-OS, Tiefenort; E.-Schneller-OS, Töplitz; OS W. Pieck, Trusetal; A.-Nitz-OS, Goetheschule, beide Ueckermünde; H.-Beimler-OS, Unterbreizbach; OS Untermaßfeld; OS J. G. Seume, Vacha; OS Vitte, OS Vitzenburg; EOS J. Fučik, Waldheim; Goetheschule, Waren; Sprachheiloberschule Weimar; E.-Thälmann-OS, Weinböhla; Benditz-OS, Weißenfels; Kreisklub Jg. Math., Weißwasser; OS L. Fürnberg, Wegeleben; OS Wernshausen; OS O. Grotewohl, Westerengel; Cl.-Zetkin-OS, Wiehe; H.-Rau-OS, Wildau; alpha-Kollektiv, Wingerode; Ditteschule, Wilkau-Haßlau; OS Fr. Engels, OS IV, EOS, Station Jg. Techniker u. Naturf., alle Wittstock; OS H. Heine, Wörmlitz; Dr.-Th.-Neubauer-OS, Wolmirstedt; OS Fr. Gießner, Wolfleben; Math.-Lager des Kreises Worbis; OS Th. Müntzer, Wulfen; H.-Eisler-OS, Wusterhusen; OS Zahna; P.-Lamberz-OS, Zehdenick; BBS Robotron, Zella-Mehlis; Lutherschule, Zella-Mehlis; OS M. Lenk, Zepernick; 9. OS, EOS, beide Zittau.

Entwicklung des alpha-Wettbewerbs (absolut)

*umgestellt von Kalenderjahr auf Schuljahr
**ab 1971/72 nur noch 4 Wettbewerbe pro Jahr



Mikroelektronik – eine Sache von Tausenden?

Die Mikroelektronik ist doch eine sehr komplizierte technische Angelegenheit. Ist es nicht übertrieben, wenn gesagt wird, daß für ihre Anwendung überall Verantwortung getragen werden muß? Das fragt Bernd Büchel aus Leipzig.

Die Mikroelektronik ist kein Wundermittel, das selbsttätig irgendein Problem löst. Aber sie ist ein hochwirksames Instrument für die Vertiefung der Intensivierung, das alle Bereiche der Volkswirtschaft verpflichtet, eigene Entwicklungsarbeit zu leisten, eigene Konzeptionen zu erarbeiten, wie diese neue Technik mit höchstem Nutzeffekt eingesetzt werden soll. Dafür tragen die Generaldirektoren der Kombinate die Hauptverantwortung. Aber gefordert, das ist keineswegs übertrieben, sind die Überlegungen, Entschlüsse und Haltungen von Millionen Werktätigen.

Schon heute haben Uhrmacher in Ruhla umgelernt und beherrschen das Herstellen, Einbauen und Prüfen von Mikroelektronik. Technologen vertauschen die Arbeit mit herkömmlichen Arbeitsplan-Stammkarten gegen den Bildschirmarbeitsplatz. Fahrkartenverkäuferinnen gehen mit der elektronischen Schreibmaschine und dem Bildschirm um.

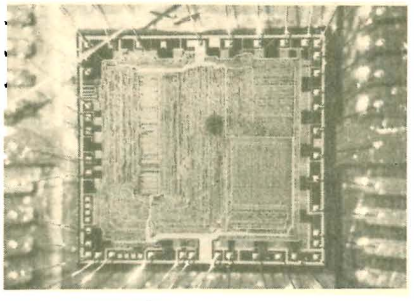
Binnen kurzem werden es viele Tausende Werktätige sein, an die neue berufliche Anforderungen gestellt werden. Aber auch mit der Aneignung von Wissen und Fähigkeiten ist die nötige Einstellung zur Mikroelektronik nicht erschöpft. Auch die vollkommenste elektronische Lösung kann nämlich eines nicht: mangelhafte Organisation z. B. in Ordnung bringen oder ökonomisch uneffektive technische Konzeptionen ausbügeln. Damit der Mikroelektronikeinsatz einen möglichst hohen Wirkungsgrad erreicht, müssen sich Leiter aller Ebenen mit ihren Kollektiven Gedanken machen und Initiativen ergreifen.

Dabei müssen auch subjektive Hemmnisse aus dem Weg geräumt werden. Wer meint, man könne erst richtig mit der Arbeit beginnen, wenn die allerneuesten Bauelemente, die gegenwärtig in der Welt erprobt werden, in der DDR ausreichend zur Verfügung stehen, der verzögert den Prozeß des Lernens und des Sammelns von Erfahrungen. Denn „Anwendung – das ist alles andere als Passivität", sagte Erich Honecker in seiner Geraer Rede.

Es gilt also, Zug um Zug alle Voraussetzungen dafür zu schaffen, daß die Konzeptionen zur Anwendung der Mikroelektronik ständig vervollkommnet und ohne Zeitverlust in die Tat umgesetzt werden.

W. Wiesner

Jugendliche im VEB Robotron Elektronik Dresden bei der Montage einer Zentraleinheit für den Rechner R-40



Blick durch ein Mikroskop auf das „Herz eines hochintegrierten Schaltkreises" (im Vergleich dazu – links oben – ein Haar)

Mikro-ABC

Bauelement:
Elementares Bauelement ist der sogenannte Chip, der ein integrierter Schaltkreis von zahlreichen ihm „eingepflanzten" Transistoren, Dioden usw. ist.

Chip:
Aus künstlichen Siliziumkristallen geschnittenes Scheibchen, in das gezielt Fremdatome „eingepflanzt" und durch den nach bestimmtem Muster aufgedampften Metallfilm zur gewünschten Schaltung verbunden werden.

Dimension:
Ein Chip hat eine Fläche von 4 bis 40 Quadratmillimetern, je nachdem, wieviel Funktionen, wie Dioden usw., ihm „eingepflanzt" wurden (siehe Integrationsgrad).

Fremdatome:
Die in Siliziumscheiben „eingepflanzten" Atome anderer Elemente, die als Transistoren, Dioden, Kondensatoren usw. funktionieren.

Integrationsgrad:
Er wird bestimmt durch die Zahl der einem Chip „eingepflanzten" Funktionen. Niedriger Integrationsgrad: bis 100 Funktionen, mittlerer Grad: 100 bis 1000, hochintegriert: 1000 bis 100000, sehr hoch integriert: mehr als 100000.

Jobkiller:
Im Kapitalismus häufig für Mikroelektronik-Technik verwendeter Begriff. Betont, daß die Anwendung dieser Technik unter Profitbedingungen meist Arbeitslosigkeit zur Folge hat.

Konsumgüter:
Neben der Anwendung für Informationsübertragung, in der Rechentechnik, zur Steuerung von Verarbeitungsmaschinen und im Transportwesen wird Elektronik immer mehr auch bei Konsumgütern angewendet, erhöht deren Leistung, Zuverlässigkeit, Bedienungskomfort und mindert den Wartungsaufwand.

Mikroprozessor:
Ein spezieller integrierter Schaltkreis, der die wesentlichsten Operationen der Rechen- und Steuereinheit einer elektronischen Rechenanlage verwirklicht. Weltweit werden 90 Arten angeboten.

Nanosekunde:
Maß für die Schaltzeiten, die bei integrierten Schaltkreisen auftreten. Sie ist der tausendste Teil einer Millionstelsekunde.

Operation:
Mikroprozessoren können arithmetische und logische Operationen mit vorgegebenen Daten auf der Grundlage eines Programms ausführen. Das sind die qualitativen Merkmale einer Rechenanlage.

Preis:
Ein traditionelles elektronisches Funktionselement kostete 1958 10 Mark, ein mikroelektronisches 1970 nur 10 Pfennig und heute einen Zehntelpfennig.

Reinheitsgrad:
Das verwendete Silizium darf nur eine verschwindend geringe Zahl von Fremdatomen enthalten. Vergleichsweise dürfte sich in einem Zug mit 4000 Waggons Briketts nur eine falsche Preßkohle befinden.

Silizium:
Ein Halbmetall, von den in der Erdrinde vertretenen chemischen Elementen das zweithäufigste, das in der Natur vor allem als Quarz und Quarzsand vorkommt.

Variabilität:
Mikroprozessorensysteme, aufgebaut aus dem Prozessor und wenigen Ergänzungsbausteinen mit ebenfalls hohem Integrationsgrad (siehe dort) lassen sich durch den Austausch von Bausteinen neuen Aufgaben anpassen.

Zeitgewinn:
In der DDR-Wirtschaft sollen in den nächsten Jahren 25 Prozent der geplanten Produktionssteigerung auf Mikroelektronik beruhen. Das heißt, weit über 100 Millionen Arbeitsstunden im Jahr einzusparen.

(Entnommen aus „Tribüne")

Schriftliche Abschlußprüfung

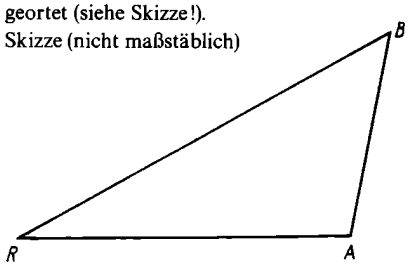
Fach Mathematik
Klasse 10
Schuljahr 1980/81

Pflichtaufgaben

1. Im Jahr 1975 standen in der DDR 715000 Hortplätze zur Verfügung; 1980 waren es 760000 Hortplätze.
a) Wieviel Hortplätze gab es im Jahr 1980 mehr als im Jahr 1975?
b) Berechnen Sie, um wieviel Prozent die Anzahl der Hortplätze gegenüber 1975 erhöht wurde!
c) Stellen Sie die Anzahl der Hortplätze im Jahr 1975 und die der Hortplätze im Jahr 1980 in einem Diagramm dar!

2. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem!
(1) $2x + y = 10$
(2) $6x + 2y = 34$ $(x, y \in P)$
(Führen Sie eine Probe durch!)

3. Von einer Radarstation R in Rostock-Warnemünde wurden zwei Schiffe A und B geortet (siehe Skizze!).
Skizze (nicht maßstäblich)

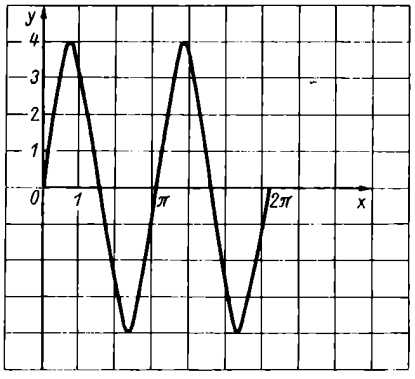


Dabei wurden ermittelt:
$\overline{RA} = 9{,}5$ sm
$\overline{RB} = 11{,}5$ sm
$\sphericalangle ARB = 26{,}0°$
a) Ermitteln Sie zeichnerisch die Entfernung $\overline{AB}$ der Schiffe voneinander! Geben Sie diese Entfernung unter Verwendung der Einheit „Seemeile" an!
b) Ermitteln Sie $\overline{AB}$ auch rechnerisch!
c) Rechnen Sie diese Entfernung in Kilometer um (1 sm = 1,852 km)!

4. Durch die Gleichung
$y = x^2 - 8x + 12$ $(x \in P)$
ist eine Funktion gegeben.
a) Berechnen Sie die Nullstellen dieser Funktion!
b) Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel.
Ermitteln Sie die Koordinaten ihres Scheitelpunktes!
c) Zeichnen Sie diese Parabel mindestens im Intervall $1 \leqq x \leqq 7$!

5. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$. Der Mittelpunkt des Schenkels $\overline{BC}$ sei D, der Mittelpunkt des Schenkels $\overline{AC}$ sei E.
a) Fertigen Sie hierzu eine Skizze an, und verbinden Sie A mit D und B mit E!
b) Beweisen Sie, daß die Dreiecke ABD und BAE zueinander kongruent sind!

6. a) Ermitteln Sie den Umfang und den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Durchmesser $d = 5{,}35$ m!
b) Gegeben ist die Gleichung
$$10x = \frac{1}{1000} \quad (x \in P).$$
Ermitteln Sie x!
c) In der Abbildung ist eine Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot \sin bx$ $(a, b, x \in P)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ dargestellt. Geben Sie für diese Funktion a und b an!



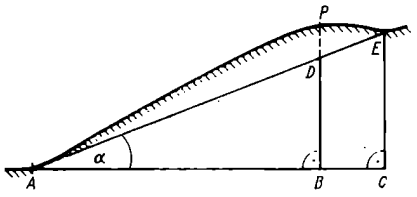
d) Formen Sie die folgende Gleichung nach h um!
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad (r \neq 0)$$

Wahlaufgaben

Von den folgenden Aufgaben 7.1., 7.2. und 7.3. brauchen Sie nur eine zu lösen.

7.1. In einem VEB ist ein Bauteil in großer Stückzahl zu bearbeiten.
a) Für 200 dieser Bauteile entstehen Kosten von 2600 Mark. Berechnen Sie daraus die Kosten für die Bearbeitung eines solchen Teiles!
b) Ein Neuerervorschlag sieht den Einbau einer Vorrichtung vor. Dadurch können die Kosten für die Bearbeitung eines Teiles auf 9,00 Mark gesenkt werden. Es entstehen aber einmalige Kosten von 250,00 M für den Einbau der Vorrichtung.
– Wieviel Mark werden bei der Bearbeitung eines Teiles eingespart, wenn die Vorrichtung eingebaut ist?
– Berechnen Sie die Gesamtkosten für den Einbau der Vorrichtung und die Bearbeitung von 200 solcher Teile nach dem Neuerervorschlag!
c) Berechnen Sie, um wieviel Prozent die Gesamtkosten für den Einbau der Vorrichtung und die Bearbeitung von 200 solcher Teile geringer sind als die Kosten im Fall a)!
d) Wieviel Teile müssen mindestens bearbeitet werden, damit die erzielte Einsparung größer ist als die einmaligen Kosten für den Einbau der Vorrichtung?

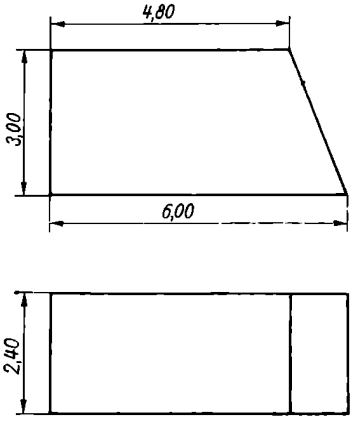
7.2. In bergigem Gelände wird eine Straße von A nach E projektiert. Sie soll gleichmäßig ansteigen.
(Die Skizze zeigt einen Geländeschnitt.)



Skizze (nicht maßstäblich)

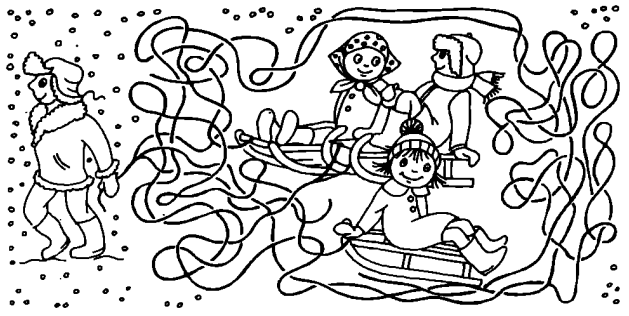
Bekannt sind: $\overline{AC} = 180$ m
$\overline{CE} = 20$ m
$\overline{AB} = 162$ m
$\overline{BP} = 21$ m
a) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{BD}$!
b) Wieviel Meter liegt der Punkt D der projektierten Straße unter dem Geländepunkt P?
c) Berechnen Sie die Größe des Anstiegswinkels α!
d) Die Steigung einer Straße ist das Verhältnis von Höhenunterschied h zur zugehörigen Straßenlänge l. Sie wird gewöhnlich in Prozent angegeben und nach der Formel
$$s = \frac{h}{l} \cdot 100\%$$ berechnet.
Berechnen Sie die Steigung s dieser Straße!

7.3. In der nachfolgenden Zeichnung ist ein Betonkörper, der die Form eines vierseitigen Prismas hat, in Grund- und Aufriß dargestellt.
a) Stellen Sie dieses Prisma in Kavalierperspektive im Maßstab 1 : 100 dar!
b) Die Vorderansicht des Betonkörpers ist ein Trapez. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt!
c) Berechnen Sie das Volumen des Betonkörpers!



(Maßangaben in Meter)

In freien Stunden alpha-heiter



Schlittenpartie
Wen zieht er denn eigentlich?

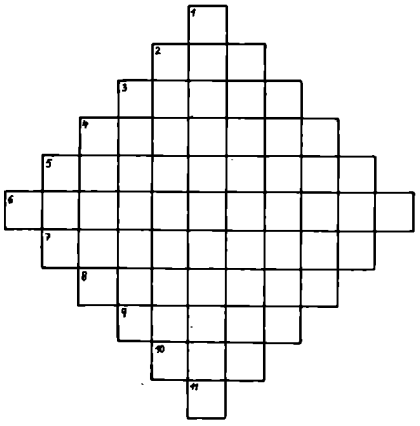
Füllrätsel

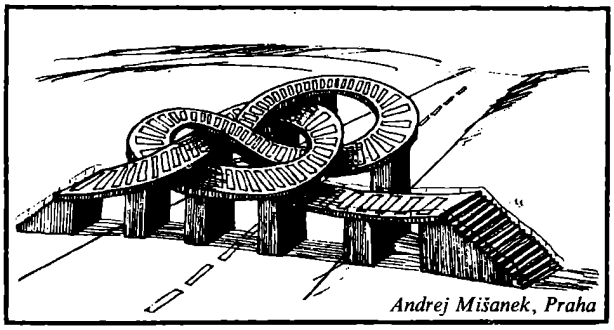
In die waagerechten Reihen der Figur sind Wörter folgender Bedeutung einzutragen:

1. Symbol für Meter
2. Zeichen für Sinus
3. Einheit der Länge
4. Entfernung zweier Punkte
5. Teilgebiet der Mathematik
6. Fester Punkt, der bei der Ortsdefinition des Kreises auftritt
7. Feste Gerade, die bei der Ortsdefinition der Parabel auftritt
8. Eine Winkelfunktion
9. Geometrischer Grundbegriff mit nur Längenausdehnung
10. Zeichen für Limes
11. Eine transzendente Zahl

Bei richtiger Lösung ergeben die Buchstaben in der Senkrechten von 1. bis 11. einen Begriff aus der Geometrie.

Dipl.-Lehrer/Ing. D. Völzke, Greifswald





Andrej Mišanek, Praha

Symmetrische Gleichungen

In der Gleichung $AR \cdot ON = NO \cdot RA$ sind die Buchstaben so durch Ziffern von 1 bis 9 zu ersetzen, daß wahre Aussagen entstehen. Innerhalb einer Gleichung bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, aber nicht notwendigerweise verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Außerdem sollen in jeder Gleichung mindestens drei verschiedene Grundziffern vorkommen, Fälle wie z. B. $22 \cdot 55 = 55 \cdot 22$ also ausgeschlossen bleiben.

Zur Erleichterung ist jeweils der 1. Faktor schon vorgegeben

$AR \cdot ON = NO \cdot RA$		$23 \cdot$	$=$
$12 \cdot 42 = 24 \cdot 21$		$23 \cdot$	$=$
$12 \cdot 63 =$	$\cdot$	$24 \cdot$	$=$
$12 \cdot$	$=$	$24 \cdot$	$=$
$13 \cdot$	$=$	$26 \cdot$	$=$
$13 \cdot$	$=$	$34 \cdot$	$=$
$14 \cdot$	$=$	$36 \cdot$	$=$

OL Ing. K. Koch, Schmalkalden

Heitere Geometrie

Zeichne in ein rechtwinkliges Koordinatensystem folgende Kreise ein, die den Gleichungen genügen!

1. $x^2 + y^2 = 81$
2. $x^2 + y^2 = 4$
3. $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 4$
4. $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 4$
5. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 1$
6. $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 1$
7. $x^2 + y^2 = 49$ für $-6{,}5 \leqq x \leqq +6{,}5$
8. $x^2 + (y - 5)^2 = 100$ für $-6{,}5 \leqq x \leqq +6{,}5$

Bestimme die Schnittpunkte (A und B) des Kreises

$x^2 + y^2 = 81$ (Gleichung 1)

mit der Geraden

$$y = -\frac{x}{3} + 8!$$

Fixiere den Punkt P mit den Koordinaten

$x_P = +4{,}5,$

$y_P = +13{,}5!$

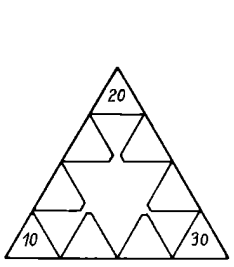
Verbinde die Punkte A, B, P miteinander!

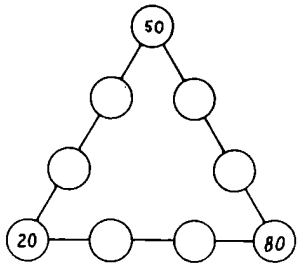
Ing. A. Körner, Leipzig

Magische Dreiecke

Trage jeweils die Zahlen 10, 20, 30, ..., 90 so in die Dreiecke ein, daß auf der linken Figur die Summe der Zahlen auf jeder Seite 170 und auf der rechten Figur die Summe 200 beträgt!

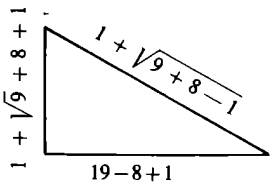
aus einem bulgarischen Unterhaltungsbuch (Sofia 78)

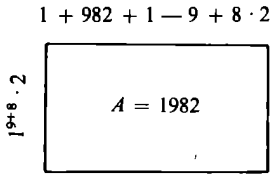




Zahlenzauber um die Jahre 1981 und 1982

Rückschau	Ausblick
$0 = 1 - 9 + 8^1$	$0 = 1 + 9 - 8 - 2$
$1 = 1 + 9 - 8 - 1$	$1 = -1 \cdot 9 + 8 + 2$
$2 = 1 + 9 - 8^1$	$2 = 1 - 9 + 8 + 2$
$3 = \sqrt{1^9 + 8^1}$	$3 = \sqrt{19 - 8 - 2}$
$4 = \sqrt{-1 + 9 + 8^1}$	$4 = (1 + 9 - 8)^2$
$5 = -1 - \sqrt{9} + \sqrt{81}$	$5 = \sqrt{19 + 8 - 2}$
$6 = 1 \cdot \sqrt{9} + \sqrt{8 + 1}$	$6 = \sqrt{-1 + 9 + 8} + 2$
$7 = 1 - \sqrt{9} + \sqrt{81}$	$7 = -1\,(\sqrt{9} - 8 - 2)$
$8 = 1^9 + 8 - 1$	$8 = 1 - 9 + 8 \cdot 2$
$9 = 1^9 + 8^1$	$9 = (1 + 9 + 8) : 2$
$10 = 19 - 8 - 1$	$10 = 1 \cdot \sqrt{98 + 2}$





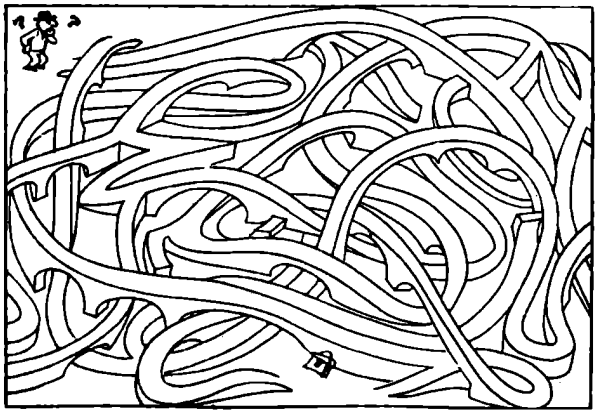
$A = 19 + 8 \cdot 1 + 1 + 9 - 8 + 1FE$

$u = 19 + 8 \cdot 1 + 1 + 9 - 1 - 1FE$

Die Zaubereien stammen aus der Feder von Rainer Bauer, Mittweida (Kl. 12), Udo Retzlaff, Rostock (Kl. 12), Andreas Fittke, Berlin (z. Zt. Soldat)

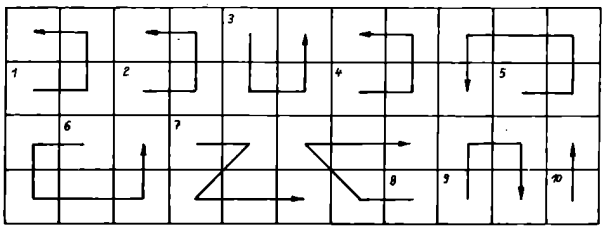
Irrgarten

Wie kommt der Fußgänger zu seiner am Wegrande liegenden Aktentasche? *aus: Troll, Berlin*



Mathematische Begriffe gesucht

Den Streckenzügen entsprechend sind 10 Wörter der nachfolgend angegebenen Bedeutung einzutragen.
Die beiden mittleren Zeilen ergeben drei miteinander eng verwandte mathematische Begriffe.
1. Zusammenstellung zweier Elemente; 2. mehrdimensionales Gebilde; 3. Eigenschaft bestimmter Flächen; 4. Eigenschaft einer bestimmten Menge; 5. Zeichengerät; 6. Teil der Pyramide; 7. Ungeheuer der griechischen Sage, dem, wenn man ihm n Köpfe abschlug, $2n$ neue wuchsen; 8. schottischer Gelehrter, der sich um die Einführung der Logarithmen verdient gemacht hat; 9. norwegischer Mathematiker; 10. Abkürzung für Milliliter *OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin*

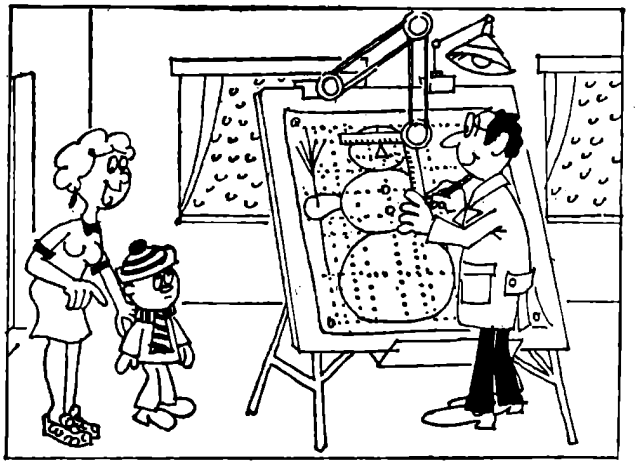


Legespiel

Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge $s = 10\,\text{cm}$ (auf Pappe) entsprechend folgender Anleitung!
Durch Verbinden des Punktes A mit dem Punkt E erhält man die Strecke b. Schlage um den Punkt C einen Kreis mit dem Radius $r = 1{,}61\,s$! Einer der Schnittpunkte mit der Strecke b sei G. Trage vom Punkt B bzw. D eine beliebige Zirkelspanne $s_1 < s$ ab! Der Schnittpunkt mit der Strecke $\overline{AB}$ sei H und der mit der Strecke $\overline{DE}$ sei J. Fälle von H bzw. J jeweils das Lot auf die Strecke $\overline{CG}$! Die Fußpunkte der Lote seien K bzw. L.
Lege die so entstandenen fünf Teilfiguren dann so aneinander, daß ein Quadrat entsteht!

Mathematikfachlehrer G. Scholz, Königs Wusterhausen

Vati geht gleich mit, du kennst ihn doch. Ohne Projektierung baut er nichts. *Zschoche, Halle*

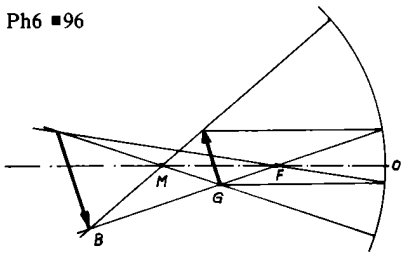


Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb Heft 2/81:

Ergebnisse zum Physik- und Chemiewettbewerb

Ph6 ■96



Ph7 ■97 a) Die Strömungsgeschwindigkeit im Sammelkanal beträgt $2\frac{m}{s}$. b) Die Strömungsgeschwindigkeit beträgt $1{,}6\frac{m}{s}$.

Ph8 ■98 Die Fahrraddynamo-Lampe bleibt dunkel, da durch sie nur 0,11 A statt 0,5 A fließen. Die Glühlampe brennt etwas dunkler, da durch sie nur 0,1129 A statt 0,1136 A fließen.

Ph9 ■99 Die Dampferanlegestelle darf nicht mehr als 8 km von der Stadt entfernt sein.

Ph10/12 ■100 Die Kräfte am Trag- bzw. Zugseil sind 35,2 kN bzw. 10,5 kN.

Ch7 ■77 a) Im Jahre 1975 wurden 31 Mio m^2 Foto-Kino-Film produziert.
b) Die produzierte Menge entspricht 31 km^2 Film.
c) Die Länge des Bandes beträgt 31 000 km.

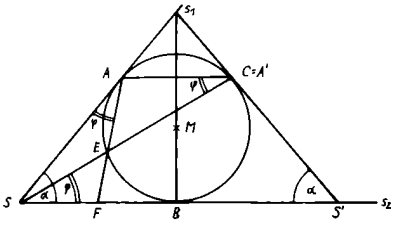
Ch8 ■78 448 000 m^3 Äthin werden als Ausgangsstoff benötigt, um 1250 t Vinylchlorid herzustellen.

Ch9 ■79 a) 33 000 t Soda müssen von der chemischen Industrie für die Produktion von 30 Mio m^2 Fensterglas bereitgestellt werden.
b) 1650 Waggons sind von der Deutschen Reichsbahn für den Transport der Soda zu planen.

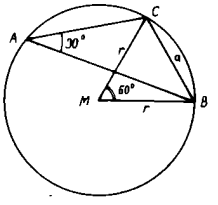
Ch10/12 ■80 0,0809 g Hydrodinom reduzieren das belichtete Halogenid vollständig zu Silber.

Lösungen zu: Alles dreht sich um den Kreis Heft 5/81

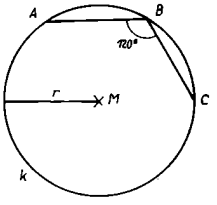
▲1▲ Wir spiegeln S und A an der Geraden BM als Symmetrieachse. Das Bild von S sei S'; das Bild von A sei A'. Da die Symmetrieachse senkrecht auf AC steht, fällt A' mit C zusammen. Aus $SF \parallel AC$ folgt $\sphericalangle CSS' = \sphericalangle ECA$. Da ein Sehnen-Tangenten-Winkel gleich seinem zugehörigen Peripheriewinkel ist, gilt ferner $\sphericalangle FAS = \sphericalangle ECA$ und folglich auch $\sphericalangle FAS = \sphericalangle CSS'$. Die Dreiecke $\triangle SFA$ und $\triangle CSS'$ sind somit ähnlich. Folglich gilt $\overline{SA} : \overline{SF} = \overline{SS'} : \overline{CS'}$. Wegen $\overline{SA} = \overline{SB}$ und $\overline{SB} = \overline{BS'}$ und $\overline{CS'} = \overline{BS'}$ erhalten wir daraus $\overline{SB} : \overline{SF} = (2 \cdot \overline{SB}) : \overline{SB} = 2 : 1$, also $\overline{SF} = \frac{1}{2} \cdot \overline{SB}$.



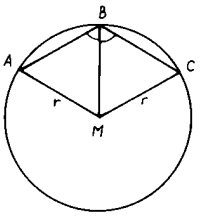
▲2▲ Der Zentriwinkel $\sphericalangle BMC$ ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel $\sphericalangle BAC$, also $\sphericalangle BMC = 2 \cdot 30° = 60°$. Aus $\overline{MB} = \overline{MC} = r$ folgt weiter $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB = \frac{1}{2} \cdot (180° - 60°) = 60°$. Das Dreieck BCM ist somit gleichwinklig, also auch gleichseitig, und es gilt $\overline{BC} = \overline{BM} = r$.



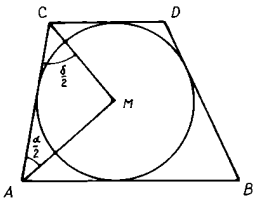
▲3▲ Aus $\overline{AM} = \overline{BM} = r$ und $\overline{BM} = \overline{CM} = r$ und $\overline{AB} = \overline{BC}$ folgt $\triangle ABM \cong \triangle BCM$. Deshalb gilt $\sphericalangle ABM = \sphericalangle CBM = 120° : 2 = 60°$. Aus $\overline{AB} = \overline{BM}$ folgt weiter $\sphericalangle MAB = \sphericalangle ABM = 60°$, also auch $\sphericalangle AMB = 60°$. Aus der Gleichwinkligkeit des Dreiecks ABM folgt $\overline{AB} = \overline{AM} = r$.



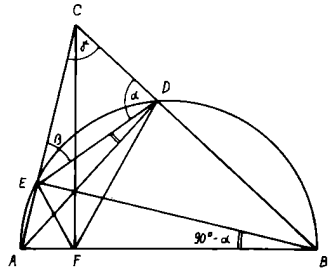
▲4▲ Der Berührungsradius $\overline{MA}$ steht senkrecht auf der Tangente t, deshalb gilt $AM \parallel BC$. Es sei Winkel $\sphericalangle CBA = \Phi$. Nun gilt aber $\sphericalangle CBA = \sphericalangle MAB = \Phi$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Aus $\overline{MA} = \overline{MB} = r$ folgt weiter $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = \Phi$. Deshalb gilt $\sphericalangle CBA = \sphericalangle MBA = \Phi$, d. h. die Gerade AB halbiert den Winkel $\sphericalangle CBM$.



▲5▲ Aus $AB \parallel CD$ folgt $\alpha + \delta = 180°$, also $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\delta = 90°$. Nun liegt der Mittelpunkt M des Kreises k sowohl auf der Winkelhalbierenden von α als auch von δ, d. h. $\sphericalangle MAD = \frac{1}{2}\alpha$ und $\sphericalangle MDA = \frac{1}{2}\delta$. Im Dreieck AMD gilt $\sphericalangle AMD + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\delta = 180°$, also $\sphericalangle AMD = 90°$. Analog dazu gilt $\sphericalangle BMC = 90°$.



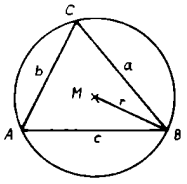
▲6▲ Wir zeichnen den Halbkreis über $\overline{AB}$ als Durchmesser, er geht nach dem Satz des Thales durch die Fußpunkte D und E der Höhen h_a und h_b. Im rechtwinkligen Dreieck ABE gilt $\sphericalangle ABE = 90° - \alpha$. Aus der Gleichheit der Peripheriewinkel $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ABE$ folgt $\sphericalangle ADE = 90° - \alpha$, folglich auch $\sphericalangle CDE = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$. Im Dreieck EDC muß somit der dritte Innenwinkel $\sphericalangle CED = \beta$ sein. Analog dazu gilt $\sphericalangle BFD = \gamma$ und $\sphericalangle BDF = \alpha$. Daraus folgt $\sphericalangle ADF = 90° - \alpha$, also $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ADF$, d. h. DA halbiert den Winkel $\sphericalangle EDF$. Analog dazu läßt sich nachweisen, daß auch die beiden anderen Höhen des Dreiecks ABC Winkelhalbierende im Dreieck DEF sind.



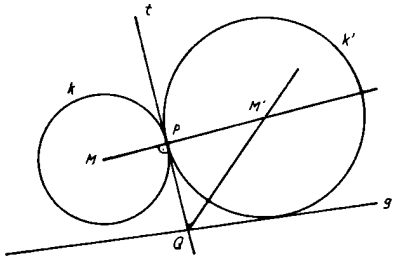
▲7▲ Aus einer quadratischen Platte läßt sich nur dann eine kreisförmige Scheibe herausschneiden, wenn $d \leqq a$ gilt. Aus $d \leqq 51$ und $51 < 53 \leqq a$ folgt $d < a$. Die Aufgabe (1) ist stets lösbar.
Die Aufgabe (2) ist nur dann lösbar, wenn $54 \leqq a \leqq 55$ oder wenn $52 \leqq d \leqq 53$ gilt.

▲8▲ Es sei $a + b + c = 2s$. Für den halben Umfang des Dreiecks ABC gilt $s = \frac{abc}{4r}$ (siehe Tafelwerk) bzw. $r = \frac{abc}{4s}$. Durch Einsetzen er-

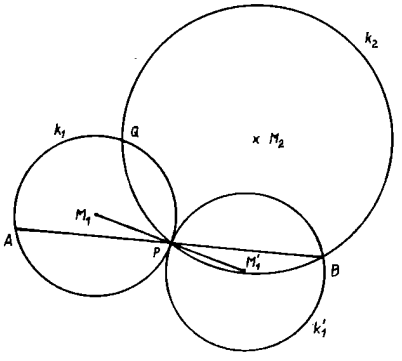
halten wir $r=\frac{abc}{2(a+b+c)}$. Wegen $a<3\,\text{cm}$, $b<3\,\text{cm}$ und $c<3\,\text{cm}$ gilt somit auch $r<\frac{3\cdot 3\cdot 3}{2(3+3+3)}\,\text{cm}$ bzw. $r<\frac{3}{2}\,\text{cm}$. Daraus folgt wegen $A=\pi r^2$ schließlich $A<\frac{9}{4}\pi\,\text{cm}^2$, und wir erhalten das Intervall $0<A<3\pi$ als Lösung.



▲9▲ Da sich k und k' in P berühren, ist die in P an k zu konstruierende Tangente t gemeinsame Tangente beider Kreise. Die Tangente t schneide die Gerade g in Q. Da der Kreis k' sowohl t als auch g berühren soll, liegt sein Mittelpunkt M' auf der Winkelhalbierenden des Winkels zwischen t und g, außerdem auf der Geraden MP.



▲10▲ Wir drehen den Kreis k_1 um den Punkt P als Drehzentrum um einen Drehwinkel von 180°. Das Bild k_1' von k_1 schneide den Kreis k_2 außer im Punkt P noch in B. Die Gerade BP schneide k_1 in A. Dann gilt auf Grund der Konstruktion und der vorliegenden Symmetrieeigenschaften (Punktspiegelung an P) $\overline{AP}=\overline{BP}$.



Lösungen zu: Aufgaben aus der Praxis, Heft 5/81

▲1▲ $W_K=E:E_L=133{,}6:110=1{,}215$;
denn es gilt $x:11=1\,000\,000:1$,
$x=11\,000\,000\,\text{cm}=110\,\text{km}$.
Der Windungskoeffizienz dieser Eisenbahnstrecke beträgt 1,215.

▲2▲ $s=s_1+s_2=140\,\text{m}+3038\,\text{m}=3178\,\text{m}$;
$t=\frac{s}{v}=\frac{3{,}178}{80}\,h=\frac{3{,}178\cdot 60}{80}\,\text{min}\approx 2{,}38\,\text{min}$.
In etwa 2,38 min durchfährt ein 140 m langer Zug bei der mittleren Geschwindigkeit von $80\frac{\text{km}}{\text{h}}$ den Brandleite-Tunnel.

▲3▲ $v=v_1+v_2=80\frac{\text{km}}{\text{h}}+60\frac{\text{km}}{\text{h}}=140\frac{\text{km}}{\text{h}}$;
$s=s_1+s_2=150\,\text{m}+120\,\text{m}=270\,\text{m}=0{,}27\,\text{km}$;
$t=\frac{s}{v}=\frac{0{,}27}{140}\,h=\frac{60\cdot 60\cdot 0{,}27}{140}\,s\approx 6{,}94\,\text{s}$.
In rund 7 Sekunden sind die sich begegnenden Züge aneinander vorbeigefahren.

▲4▲ a) $\tan\alpha=\frac{h}{e}=\frac{1}{35}\approx 0{,}285$; $\alpha=163°$.
$F=m\cdot a$, $F=F_H-F_R$,
$m\cdot a=m\cdot g\cdot\sin\alpha-\mu\cdot m\cdot g\cdot\cos\alpha$,
$a=g\cdot\sin\alpha-\mu\cdot g\cdot\cos\alpha$,
$a=g(\sin\alpha-\mu\cdot\cos\alpha)$,
$a=9{,}8\cdot(\sin 1{,}63°-0{,}004\cdot\cos 1{,}63°)m\cdot s^{-2}$
$\approx 0{,}235 m\cdot s^{-2}$.
Der Waggon hat eine Beschleunigung von $0{,}235\,m\cdot s^{-2}$.
b) $v=\sqrt{2\cdot a\cdot s}=\sqrt{2\cdot 0{,}235\cdot 46}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\approx 4{,}65\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$
Der Waggon verläßt die Ablaufstrecke mit einer Endgeschwindigkeit von $4{,}65\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

c) $t=\frac{2s}{v}=\frac{2\cdot 46}{4{,}65}\,\text{s}\approx 19{,}78\,\text{s}$
Der Waggon durchläuft die Ablaufstrecke in rund 20 Sekunden.

d) $W_{Kin}=W_{Reib}$;
$s=\frac{v^2}{2\cdot\mu\cdot g\cdot\cos\alpha}=\frac{4{,}65^2}{2\cdot 0{,}004\cdot 9{,}8\cdot\cos 1{,}63°}\,\text{m}$
$s\approx 275{,}5\,\text{m}$.
Der Waggon legt anschließend einen Weg von 275,5 m ohne Abbremsung zurück.

▲5▲ a) $Uw=\frac{P}{b}=\frac{136500}{35000}\,d\approx 3{,}9\,d$
Die durchschnittliche Umlaufzeit an einem Tag betrug 3,9 Tage.

b) $b_1=\frac{P}{Uw_1}=\frac{136500}{3{,}85}\,\frac{Wg}{d}=35455\,\frac{Wg}{d}$,
$b_2=\frac{P}{Uw_2}=\frac{136500}{3{,}75}\,\frac{Wg}{d}=36400\,\frac{Wg}{d}$,
Mehrbeladung:
$(36400-35455)\,\frac{Wg}{d}=945\frac{Wg}{d}$ pro Tag,
Jährliche Mehrbeladung:
$365\cdot 945 Wg=344925\,Wg$.
Bei der vorgesehenen Senkung der Wagenumlaufzeit könnten jährlich 344925 Waggons mehr beladen werden.

c) $945\cdot 19{,}2\,\frac{t}{d}=18144\,\frac{t}{d}$
Es könnten 18 144 Tonnen pro Tag an Gütern mehr transportiert werden.

▲6▲ a) Preis für Hinfahrt:

2 Erwachsene: 74 · 0,08 M	
= 5,92 M, gerundet	12,00 M
2 Eilzugzuschläge für Erwachsene	3,00 M
1 Kind: (Halber Fahrpreis)	3,00 M
Eilzugzuschlag für ein Kind	0,75 M
	18,75 M

Hin- und Rückfahrt 37,50 M

b) Hin- und Rückfahrt:

2 Erwachsene $\frac{2}{3}\cdot 24{,}00\,\text{M}=$	16,00 M
2 Eilzugzuschläge für Erwachsene	6,00 M
Eilzugzuschlag für ein Kind	1,50 M
Fahrpreis für ein Kind	4,00 M
	27,50 M

Bei Benutzung von Sonntagsrückfahrkarten hätte diese Familie 10,00 M einsparen können.

Lösung zur Visitenkarte: Facharbeiter für Eisenbahntechnik

Lösungen der Aufgaben von Tilo Schaarschmidt, Heft 5/81

▲1▲ Sei $q=n^2$ eine der gesuchten Quadratzahlen. Für den Vorgänger gilt $n^2-1=(n-1)\cdot(n+1)$. Soll dieser eine Primzahl sein, muß einer der Faktoren gleich 1 sein. Aus $n+1=1$ erhält man $n^2-1=-1$, das ist aber keine Primzahl. $n-1=1$ liefert $n^2-1=3$, also eine Primzahl. Damit liefert $n=2$ die einzige Lösung; 4 ist die einzige Quadratzahl, deren Vorgänger eine Primzahl ist.

▲2▲ Die Anzahl der 10-Pf-, 20-Pf- und 50-Pf-Stücke sei x, y bzw. z. Dann gilt
$x+y+z=15$ (insgesamt 15 Geldstücke),
$0{,}1x+0{,}2y+0{,}5z=4{,}6$ (insgesamt 4,60 Mark),
$2x+20y+5z=105$ (insgesamt 105 Mark).
Subtrahiert man die erste Gleichung vom Zehnfachen der zweiten Gleichung bzw. das Doppelte der ersten Gleichung von der dritten, so erhält man:
$y+4z=31$ und
$18y+3z=75$.
Multipliziert man die letzte Gleichung mit $\frac{4}{3}$ und zieht dann die vorletzte Gleichung ab, so folgt
$23y=69$, also $y=3$.
Setzt man das in eine der beiden vorletzten Gleichungen ein, so folgt $z=7$.
Setzt man das wiederum in eine der drei ersten Gleichungen ein, so folgt schließlich $x=5$.
Rolf hatte also fünf 10-Pf-Stücke, drei 20-Pf-Stücke und sieben 50-Pf-Stücke.

▲3▲ Die drei natürlichen Zahlen seien $n-1$, n und $n+1$. $n-1$ und $n+1$ sind beides gerade Zahlen und haben die Differenz 2, also ist eine von ihnen durch 4 teilbar, ihr Produkt ist dann durch 8 teilbar. Da n ein Vielfaches von 3 ist, ist das Produkt $(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$ durch $2\cdot 3\cdot 4=24$ teilbar, das Produkt der Kuben also sogar durch $24^3=13824$.

▲4▲ a) Es gilt $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2\sin^2\alpha$
$=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha$
$=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha$
$=\cos 2\alpha+\sin 2\alpha$.
Damit bleibt die Gleichung
$\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=\sqrt{2}$ zu lösen.
Quadrieren liefert

$2\sin 2\alpha \cos 2\alpha + 1 = 2$, d. h.

$$\sin 4\alpha = 1.$$

Wegen $0 \leqq 4\alpha \leqq 1440°$ hat die letzte Gleichung die Lösungen $4\alpha = 90° + k \cdot 360°$, $k = 0, 1, 2, 3$, also $\alpha_1 = 22{,}5°$, $\alpha_2 = 112{,}5°$, $\alpha_3 = 202{,}5°$, $\alpha_4 = 292{,}5°$.

Es muß aber $\sin 2\alpha > 0$, $\cos 2\alpha > 0$ gelten, damit entfallen α_2 und α_4 als Lösungen.

Eine Probe bestätigt, daß α_1 und α_3 tatsächlich Lösungen sind.

b) Die gleichen Umformungen wie unter a) würden zu der Ungleichung

$$\sin 4\alpha > 1$$

führen. Diese hat aber keine Lösung, da für alle Winkel x gilt $-1 \leqq \sin x \leqq 1$.

▲5▲ Reinausbeute auf der 1. Fläche:

$$0{,}817 \cdot \frac{10{,}85\,\text{kg}}{0{,}00139\,\text{ha}} = 63{,}77 \frac{\text{dt}}{\text{ha}};$$

Ertrag auf der 2. Fläche:

$$\frac{1}{0{,}86} \cdot 63{,}77 \frac{\text{dt}}{\text{ha}} = 74{,}15 \frac{\text{dt}}{\text{ha}}.$$

Es wurden $74{,}15 \frac{\text{dt}}{\text{ha}}$ geerntet.

▲6▲ Verhältnisgleichung

$$25{,}72\% \triangleq 180\,\text{kg}$$
$$100\% = x \quad \text{kg}$$

d. h. $x = \frac{180}{0{,}2572} = 699{,}8$

Man muß also etwa 700 kg Dünger ausbringen.

▲7▲ Der Erfinder verlangt

$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1$

$\approx 1{,}8447 \cdot 10^{19}$ Körner. Diese würden

$1{,}8447 \cdot 10^{19} \cdot \frac{0{,}0422\,\text{kg}}{10^3} = 7{,}7845 \cdot 10^{19}\,\text{kg}$

ergeben.

Damit hat der Erfinder etwa

$$\frac{7{,}7845 \cdot 10^{11}\,\text{t}}{9{,}6 \cdot 10^6\,\text{t}} = 81088$$

DDR-Jahresernten gefordert.

Wir danken dem Forschungsstudenten *Uwe Quasthoff*, Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig (ehem. IMO-Teilnehmer), für die Auswahl der Aufgaben, die Bearbeitung der Aufgaben und Lösungen, d. Red.

Lösung zu:
Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Havrda,
Seite 123

▲2178▲

			18		11		9	
		17		1		6		14
	3		7		5		8	15
		19		2		4		13
			16		12		10	

Lösung zu: Rätselkette, Seite 131

Auflösung: Adverb / Brache / Cheopspyramide / Deich / Eichsfeld / Feldlager / Geruch / Hai / Ilja / JAK / Kali / Limes / Messina / nano / Olymp / Planquadrat / Quadrat / ratsam / Samt / Tau / UV / Virchow / Wetterhexe / Xerophyt / Yttriumsalz / Zeitz. Lösungswort: *Richard Dedekind.*

Lösungen zu: alpha-heiter

Füllrätsel

1. m, 2. sin, 3. Meter, 4. Abstand, 5. Geometrie, 6. Mittelpunkt, 7. Leitlinie, 8. Kosinus, 9. Linie, 10. lim, 11. e. Lösungswort: Mittellinie

Symmetrische Gleichungen

$(10 \cdot A + R) \cdot (10 \cdot O + N)$
$= (10 \cdot N + O) \cdot (10 \cdot R + A)$

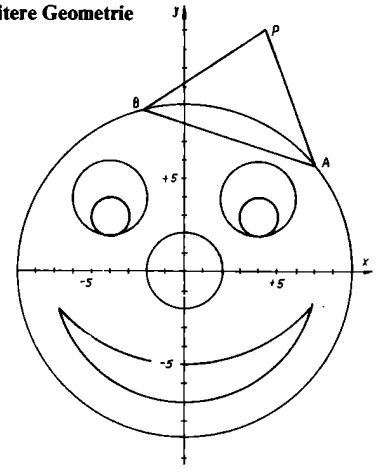
Nach dem Ausmultiplizieren und Zusammenfassen ergibt sich:

$$A \cdot O = R \cdot N.$$

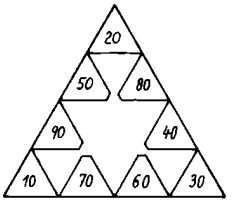
Diese Gleichung liefert insgesamt 13 Lösungen:

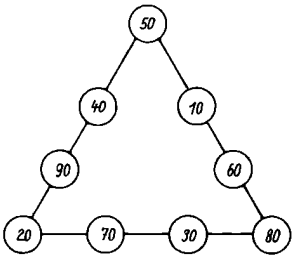
$12 \cdot 42 = 24 \cdot 21$ $\quad$ $14 \cdot 82 = 28 \cdot 41$
$12 \cdot 63 = 36 \cdot 21$ $\quad$ $23 \cdot 64 = 46 \cdot 32$
$12 \cdot 84 = 48 \cdot 21$ $\quad$ $23 \cdot 96 = 69 \cdot 32$
$13 \cdot 62 = 26 \cdot 31$ $\quad$ $24 \cdot 63 = 36 \cdot 42$
$13 \cdot 93 = 39 \cdot 31$ $\quad$ $24 \cdot 84 = 48 \cdot 42$
$\quad$ $\quad$ $26 \cdot 93 = 39 \cdot 62$
$\quad$ $\quad$ $34 \cdot 86 = 68 \cdot 43$
$\quad$ $\quad$ $36 \cdot 84 = 48 \cdot 63$

Heitere Geometrie



Magische Dreiecke





Mathematische Begriffe gesucht

R – A – M – U – E – N – R – E – A – E – N
P – A – R – A – B – E – L – E – L – L – I
P – S – E – H – Y – P – E – R – B – E – L
I – T – Z – D – R – A – E – N – A – L – M

Lösungen zu: Spaß in freien Stunden

Zwölf Figuren

1, 3; 1, 3; 2, 4.

Dominospiel

Als erstes schreiben wir unter Berücksichtigung der Tatsache, daß Marina jünger als Galja, aber älter als ihre Partnerin ist, auf, daß die Partnerin Marinas nicht Galja ist. Weiter wissen wir, daß Lena älter ist als die zwei Mädchen, die gegen sie spielen. Folglich kann Marina nicht ihre Partnerin sein. Marina spielt also mit Alla und Galja mit Lena. Jetzt wird es auch leichter, die Mädchen dem Alter nach einzuordnen. Lena ist älter als Marina und älter als Alla. Und Marina ist älter als ihre Partnerin. Andererseits ist Galja älter als Marina. Folglich ist Alla die jüngste, ihr folgt Marina. Und da das jünste Mädchen und Galja zusammen älter sind als Lena und Marina (vergessen wir nicht, daß Marina älter als Alla ist), wird klar, daß Galja die älteste ist.

Die Zahl 6. Es sind alle Zahlen, die an den Enden der langen Pfeile angeordnet sind, zu summieren. Davon ist die Summe der Zahlen abzuziehen, die an den Enden der kurzen Pfeile angeordnet sind.

Drei Würfel

$a - 1$, $b - 5$, $c - 0$.

In zwei Minuten gelöst

129 Würfel. 15 Würfel sind entnommen worden.

Die große Familie

Es ist am bequemsten, diese Aufgabe vom Ende her „aufzurollen". Selbstverständlich ist, daß derjenige, der sowohl Weißkraut als auch Möhren und Erbsen gern ißt, auch Kraut und Erbsen, Erbsen und Möhren sowie Kraut und Möhren liebt. Im übrigen macht die Lösung keine Arbeit. Wegen der Anschaulichkeit wird die Antwort in Tabellenform gegeben.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Weißkrautliebhaber	0	0	0	0	0	0	0			
Möhrenliebhaber	0			0	0	0		0	0	
Erbsenliebhaber	0	0	0				0			0

Insgesamt muß die Familie 10 Kinder haben.

Quader gegen Würfel

Der Quader wiegt genausoviel wie drei Würfel.

Wer spricht mit wem?

Tamara mit Ilonka, Jan mit Tom, Galina mit Anja, Uwe mit Beate; Susi weckt Katrin.

Lohntüte ohne Tarnkappe

Weiter Kurs Hauptaufgabe

Welcher Beruf?

Heft 5/81, III. U.-Seite: Facharbeiter für Eisenbahntechnik

XXI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

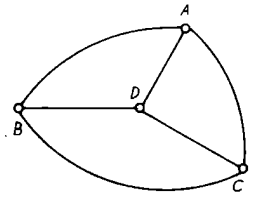
Aufgaben und Lösungen der Kreisolympiade (18. 11. 1981)

Olympiadeklasse 5

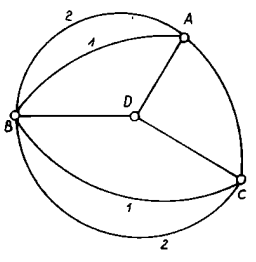
1. Ein Behälter, der mit Sonnenblumenöl gefüllt ist, wiegt 17 kg 500 g. Der leere Behälter würde 2 kg 700 g wiegen.
a) Wieviel Liter Öl befinden sich in dem Behälter, wenn 1 Liter Sonnenblumenöl 925 g wiegt?
b) Für den Ladenverkauf wird das Öl in Flaschen zu 400 g abgefüllt. Wieviel Flaschen lassen sich mit dem im Behälter befindlichen Öl füllen?

Lösung: a) Wegen $17500-2700=14800$ sind 14 kg 800 g Sonnenblumenöl im Behälter. Aus $14800:925=16$ erhält man, daß sich 16 Liter Sonnenblumenöl im Behälter befinden.
b) Wegen $14800:400=37$ lassen sich 37 Flaschen mit der im Behälter vorhandenen Ölmenge füllen.

2. Die vier Springbrunnen A, B, C, D eines Parkes sind so durch Wege verbunden, wie es das Bild zeigt. Ein Spaziergänger möchte so durch den Park gehen, daß er jeden dieser Wege genau einmal durchläuft. Ein solcher Spaziergang soll bei einem beliebigen Brunnen beginnen und bei einem beliebigen Brunnen (nicht unbedingt bei demselben) enden.



a) Untersuche, ob ein derartiger Spaziergang möglich ist!
b) Später wurde noch ein weiterer Weg zwischen B und A und ein weiterer Weg zwischen B und C angelegt, wie das Bild zeigt. Untersuche, ob es danach möglich ist, einen Spaziergang der gewünschten Art zu machen!



Hinweis: Lautet bei a) oder b) die Antwort, daß ein derartiger Spaziergang nicht möglich ist, so beweise, warum nicht! Lautet die Antwort aber, daß er möglich ist, so gib einen solchen Spaziergang an!

Lösung: a) Angenommen, ein Spaziergang der genannten Art wäre möglich, dann gäbe es unter den vier Springbrunnen A, B, C, D einen, der nicht Ausgangspunkt und nicht Endpunkt des Spaziergangs wäre. Zu diesem Springbrunnen käme man bei dem Spaziergang auf einem der drei Wege, die von ihm wie von jedem der vier Brunnen abgehen; auf einem zweiten Weg müßte man ihn wieder verlassen. Es verbleibt ein dritter Weg zu diesem Springbrunnen, und dieser Weg müßte während des Spaziergangs ebenfalls durchlaufen werden und somit entweder zum betrachteten Springbrunnen hin oder von ihm weg führen. Es gäbe dann aber keinen vierten Weg, auf dem man wieder von diesem Springbrunnen weg oder vorher zu ihm hinkommen könnte, d. h., der Springbrunnen wäre doch End- oder Anfangspunkt des Spaziergangs. Damit ist die Annahme, es gäbe einen derartigen Spaziergang, zu einem Widerspruch geführt. Sie muß also falsch sein, d. h., es gibt in diesem Fall keinen Spaziergang der genannten Art.
b) Ein möglicher Spaziergang nach dem Einrichten der beiden weiteren Verbindungswege ist z. B.

$$B \xrightarrow{1} A \to D \to C \xrightarrow{1} B \xrightarrow{2} A \to C \xrightarrow{2} B \to D.$$

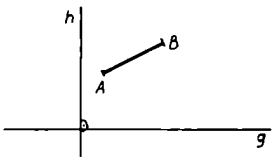
3. Vier Schüler mit den Familiennamen Erdborn, Freimuth, König und Meyer haben die Vornamen Alfred, Martin, Norbert und Torsten (nicht unbedingt in derselben Reihenfolge). Sie treffen sich auf der Geburtstagsfeier ihres Mitschülers Franz Neubert. Außer ihnen nahmen keine weiteren Personen an dieser Feier teil. Es ist bekannt:

(1) Als ersten Gast konnte Franz seinen Mitschüler Meyer begrüßen, als zweiten Norbert und danach Erdborn und später Martin.

(2) Jeder Gast brachte genau ein Geschenk mit: Meyer hatte ein Würfelspiel, Alfred einen Kugelschreiber, Martin einen Strauß Rosen und König ein Buch mitgebracht.
Wie heißen die vier Schüler mit ihren Vor- und Familiennamen?

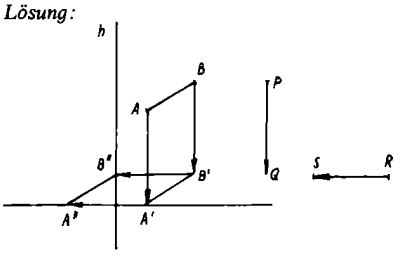
Lösung: Meyer heißt nach (1) weder Norbert noch Martin. Nach (2) heißt er auch nicht Alfred. Daher gilt: Meyer heißt Torsten.
König heißt folglich nicht Torsten. Nach (2) heißt er auch weder Alfred noch Martin. Hieraus folgt: König heißt Norbert. Erdborn heißt demnach weder Torsten noch Norbert. Nach (1) heißt er auch nicht Martin. Somit ergibt sich: Erdborn heißt Alfred. Es verbleibt nun noch: Freimuth heißt Martin.
Damit sind alle zusammengehörigen Vor- und Familiennamen (eindeutig) ermittelt.

4. Auf dem Arbeitsblatt sind zwei Geraden g, h und eine Strecke AB gegeben.
Konstruiere einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$ parallel zu h und danach einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{RS}$ parallel zu g, und zwar so, daß folgendes gilt:



Wenn man die Strecke AB durch die Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$ in die Strecke $A'B'$ überführt und diese danach durch die Verschiebung $\overrightarrow{RS}$ in die Strecke $A''B''$, so liegt A'' auf g und B'' auf h.
Eine Beschreibung und Begründung der Konstruktion wird nicht verlangt.

Lösung:



Olympiadeklasse 6

1. Ein Güterzug fährt von einer Station A (Kilometer 0) zu einer Station B (Kilometer 60). Beim Kilometer 15 hält der Zug 30 Minuten lang; in der übrigen Zeit fährt er mit der gleichbleibenden Geschwindigkeit von 45 Kilometern je Stunde. Um 9.30 Uhr fährt der Zug in A ab.
Lege eine Tabelle an, aus der zu ersehen ist, bei welchem Kilometer sich der Zug zu den Uhrzeiten alle 10 Minuten nach der Abfahrt (9.40 Uhr, 9.50 Uhr, 10.00 Uhr usw.) befindet! Begründe diese Kilometerangaben!

Lösung: Bei der Geschwindigkeit von 45 Kilometern je Stunde legt der Zug jeweils in 10 Minuten ein Sechstel der Strecke 45 km zurück, das sind (wegen $45:6=7\frac{1}{2}$) jeweils $7\frac{1}{2}$ km.
Berücksichtigt man noch die Wartezeit, so ergibt sich folgende Tabelle:

Uhrzeit:	9.40	9.50	10.00	10.10	10.20	10.30	10.40	10.50	11.00	11.10	11.20
km	$7\frac{1}{2}$	15	15	15	15	$22\frac{1}{2}$	30	$37\frac{1}{2}$	45	$52\frac{1}{2}$	60

2. Fritz findet in einem alten Lehrbuch in einer Aufgabe fünfstellige natürliche Zahlen abgedruckt. Bei einer dieser Zahlen sind die an der Einer- und die an der Zehnerstelle stehenden Ziffern nicht mehr lesbar. Wenn man für diese beiden unlesbaren Ziffern jeweils ein Sternchen (*) setzt, dann hat die Zahl die Form 418 * *.
Außerdem meint Fritz, aus dem Aufgabentext entnehmen zu können, daß sich die fünfstellige Zahl ohne Rest sowohl durch 6 als auch durch 7 und durch 9 teilen läßt.
Untersuche, ob es eine fünfstellige Zahl gibt, die als die betreffende Zahl in dem Lehrbuch gestanden haben könnte und alle genannten Teilbarkeitseigenschaften hat! Nenne diese Zahl! Gibt es außer ihr noch andere derartige Zahlen?

Lösung: Angenommen, es gibt eine solche Zahl. Dann folgt: Die Zahl ist durch 6 teilbar, also gerade; ihre Einerziffer lautet mithin 0, 2, 4, 6 oder 8. Die Zahl ist ferner durch 9 teilbar; dasselbe gilt folglich für ihre Quersumme. Diese ist um 4+1+8, d.h. um 13 größer als die Summe aus ihrer Zehner- und ihrer Einerziffer. Setzt man der Reihe nach für die Einerziffer 0, 2, 4, 6, 8, dann ergibt sich für die Zehnerziffer jeweils der in der folgenden Tabelle angegebene Wert:

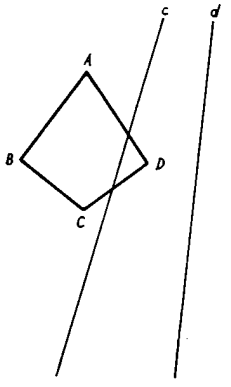
Einerziffer	Summe aus 13 und der Einerziffer	Zehnerziffer
0	13	5
2	15	3
4	17	1
6	19	8
8	21	6

Also kann die gesuchte Zahl nur eine der Zahlen 41850, 41832, 41814, 41886, 41868 sein. Von diesen ist nur 41832 durch 7 teilbar.
Daher kann nur diese Zahl an der angegebenen Stelle im Lehrbuch gestanden haben; denn sie hat als einzige alle verlangten Teilbarkeitseigenschaften und ist von der Form 418 * *, wie in der Aufgabe angegeben.

3. Im Laufe eines Jahres ist in einem Möbelwerk die Zahl der hergestellten Tische monatlich um 10 angewachsen. Im Laufe des ganzen Jahres wurden 1920 Tische hergestellt.
a) Wieviel Tische wurden im Monat Juni hergestellt?
b) Wieviel Tische wurden im Monat Dezember hergestellt?

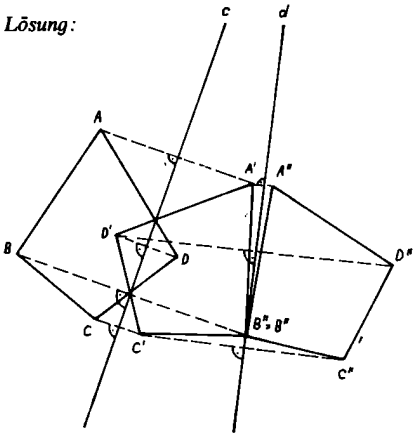
Lösung: In dem Betrieb wurden im Februar 10, im März 20, ..., im Juni 50, ..., im Dezember 110 Tische mehr hergestellt als im Monat Januar. Wegen
10+20+30+40+50+60+70+80+90
+100+110=660
sind das insgesamt 660 Tische mehr, als wenn die Produktionssteigerung nicht erfolgt wäre, d.h. in allen 12 Monaten gleich viele Tische hergestellt worden wären, ebenso viele wie im Januar.
Wegen 1920−660=1260 und 1260:12=105 wurden im Januar somit 105 Tische produziert.
a) Aus 105+50=155 folgt, daß im Juni 155 Tische angefertigt wurden.
b) Wegen 105+110=215 wurden im Dezember 215 Tische hergestellt.

4. Spiegele die Figur *ABCD* auf dem Arbeitsblatt nacheinander an den gegebenen Geraden *c* und *d*!



Eine Beschreibung der Konstruktion ist nicht erforderlich.

Lösung:



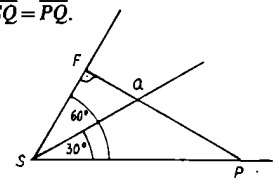
Olympiadeklasse 7

1. a) Ein rechteckiges Flurstück ist durch einen Weg in zwei rechteckige Felder geteilt. Die Länge des Flurstücks, parallel zu diesem Weg gemessen, beträgt 105 m. Die Breite des ersten Teilfeldes beträgt 270 m, die des zweiten Teilfeldes 180 m.
Der Weg ist 3 m breit.
Ermittle den Flächeninhalt des ersten Teilfeldes und den des zweiten Teilfeldes!
b) Das gesamte Flurstück wird nun zu einem großen Feld zusammengelegt, indem der Weg mit umgepflügt wird.
Ermittle den Flächeninhalt des so entstehenden großen Feldes!
c) Ermittle, wieviel Meter Draht für einen elektrischen Weidezaun gebraucht werden, wenn dieses Gesamtfeld vollständig mit zwei Drähten umspannt werden soll! Dabei sollen Durchgäng und Befestigung des Drahtes dadurch berücksichtigt werden, daß der doppelte Umfang um ein Hundertstel erhöht wird. (Es ist auf volle Meter zu runden.)
Hinweis zu a) und b): Die Flächeninhalte sind in Hektar anzugeben, auf zwei Dezimalstellen gerundet.

Lösung: a) Das erste Teilfeld hat die Länge 105 m und die Breite 270 m, wegen 105 · 270 = 28350 also den Flächeninhalt 28350 m², d.h. in der angegebenen Weise gerundet 2,84 ha. Das zweite Teilfeld hat die Länge 105 m und die Breite 180 m, wegen 105 · 180 = 18900 also den Flächeninhalt 18900 m², d.h. 1,89 ha.
b) Das gesamte Flurstück hat die Länge 105 m und wegen 270+3+180=453 die Breite 453 m, wegen 105 · 453 = 47565 also den Flächeninhalt 47565 m², d.h. gerundet 4,76 ha. (Man kann auch so rechnen: Der Weg hat wegen 105 · 3 = 315 gerundet den Flächeninhalt 0,03 ha. Wegen 2,84+0,03+ +1,89=4,76 ergibt sich so der Flächeninhalt 4,76 ha.)
c) Das gesamte Flurstück hat wegen 2 · (105+453)=2 · 558=1116 den Umfang 1116 m. Für den Zaun werden wegen 2 · 1116 =2232 und wegen 2232:100=22,32 sowie 2232+22,32=2254,32 daher gerundet 2254 m Draht gebraucht.

2. Gegeben sei ein Winkel mit dem Scheitelpunkt *S* und der Größe 60°. Auf einem seiner Schenkel liege ein Punkt *P*. Von *P* sei das Lot auf den anderen Schenkel gefällt. Der Schnittpunkt dieses Lotes mit der Halbierenden des gegebenen Winkels heiße *Q*.
Beweise, daß *Q* auf der Mittelsenkrechten der Strecke *SP* liegt!

Lösung: Der Fußpunkt des Lotes von *P* auf den anderen Schenkel sei *F*. Nach Voraussetzung ist $\sphericalangle FSP = 60°$ und $\sphericalangle PFS = 90°$; wegen des Winkelsummensatzes, angewandt auf das Dreieck *SPF*, folgt $\sphericalangle SPF = 30°$. Außerdem ist nach Voraussetzung $\sphericalangle QSP = 30°$; also ist das Dreieck *SPQ* gleichschenklig mit $\overline{SQ} = \overline{PQ}$.

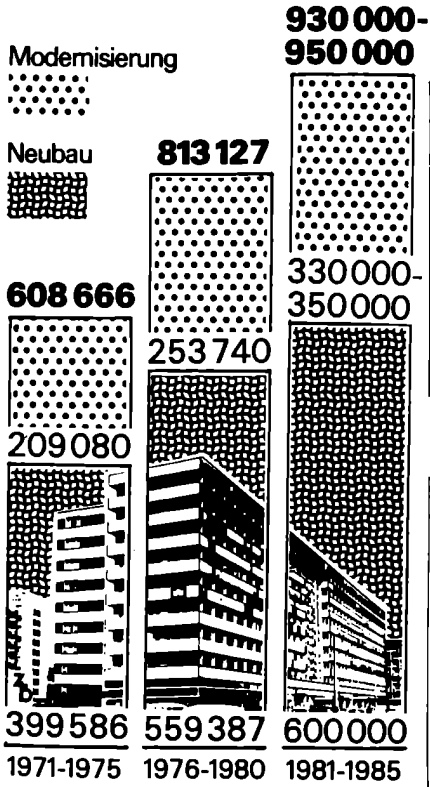


Folglich ist *Q* ein Punkt der Mittelsenkrechten von *SP*, w.z.b.w.

3. Ermittle alle Paare (*a*; *b*) natürlicher Zahlen *a* und *b* mit $0 < a < b$, deren größter gemeinsamer Teiler 15 und deren Produkt 7875 ist!

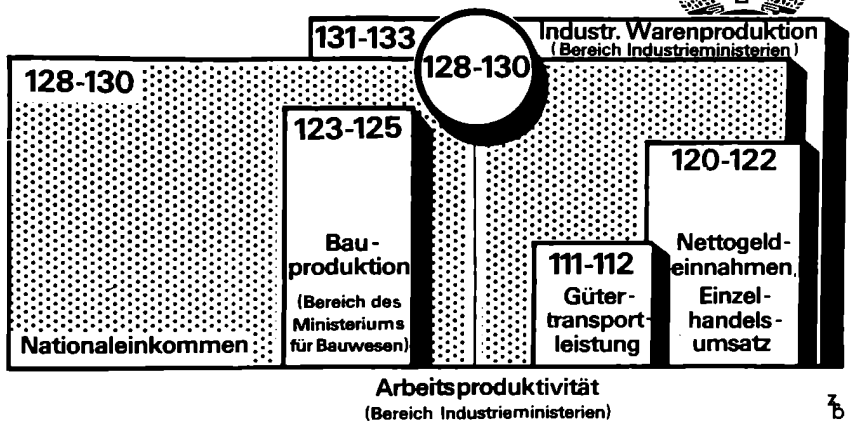
Fortsetzung in *alpha* 1/82

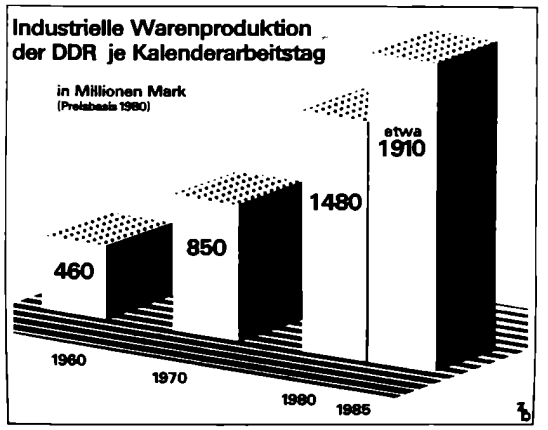
WOHNUNGSBAU-PROGRAMM DER DDR



Entwicklung der Volkswirtschaft 1981 bis 1985

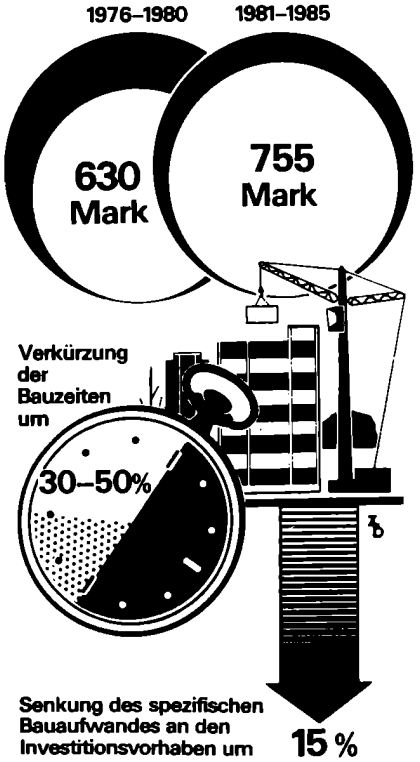
Zuwachs in Prozent





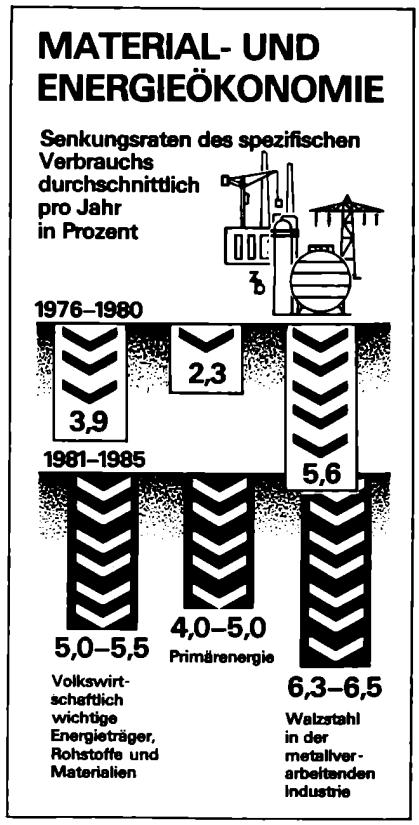
Neue Maßstäbe der Investitionspolitik

Warenproduktionszuwachs je 1000 Mark eingesetzte Investitionen



MATERIAL- UND ENERGIEÖKONOMIE

Senkungsraten des spezifischen Verbrauchs durchschnittlich pro Jahr in Prozent

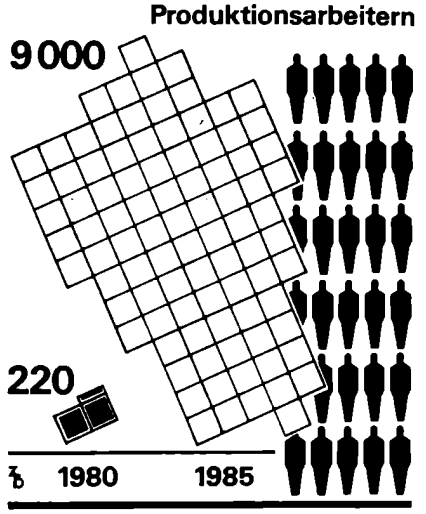


Perspektiven

Bis 1985 Einsatz von 9 000

INDUSTRIEROBOTERN

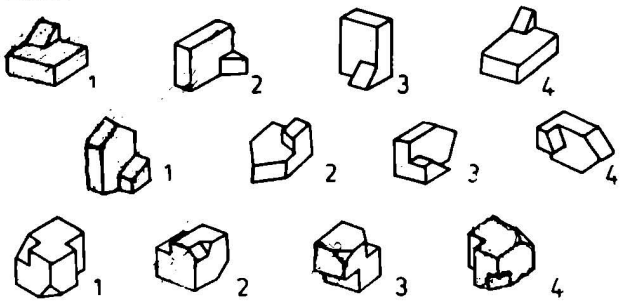
≈ Leistungsvermögen von 25 000 - 30 000 Produktionsarbeitern



Spaß für freie Stunden

Zwölf Figuren

In jeder der Reihen sind zwei Figuren gleich. Finde diese!



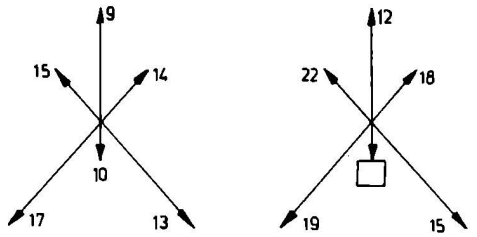
Aufregender Spaziergang

Sieben Erwachsene haben in dieser turbulenten Menge ihre Kinder verloren. Hilf ihnen, sie wiederzufinden! Dabei raten wir dir, nach gemeinsamen Merkmalen zu suchen: gleiche Muster auf den Schals, Pullovern, gleiche Abzeichen und ähnliches.

Dominospiel

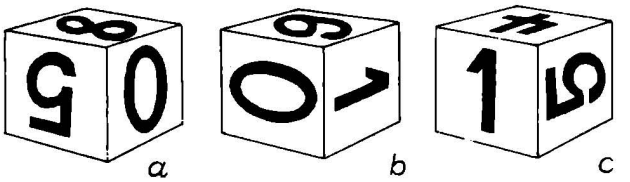
Alla, Galja, Lena und Marina spielen Domino.
Marina ist jünger als Galja.
Lena ist älter als jede ihrer Gegnerinnen.
Marina ist älter als ihre Partnerin.
Alla und Galja sind zusammen älter als Lena und Marina zusammen.
Wer hat mit wem gespielt? Wie sind die Mädchen dem Alter nach zu ordnen?

Auf dem Schema unten fehlt eine Zahl. Sie ist durch ein Quadrat ersetzt. Welche Zahl setzt du dort ein?



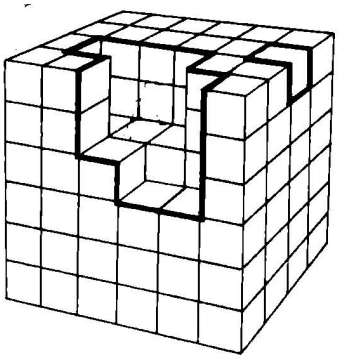
Drei Würfel

Auf den sichtbaren Flächen des Würfels sind die Ziffern 0, 1, 4, 5, 6, 8 aufgetragen. Der Zeichner hat ihn in drei Stellungen gezeichnet. Sage nun, welche Ziffer sich in jeder der drei Positionen auf der unteren, verdeckten Fläche befindet!



In zwei Minuten gelöst

1. Wie viele Würfel sind hier aufgebaut?
2. Wie viele Würfel sind herausgenommen?

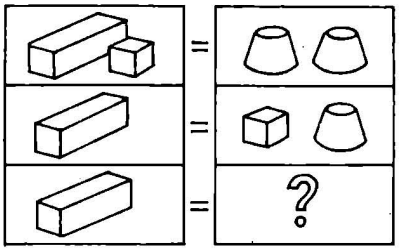


Die große Familie

Eine Familie hat viele Kinder. Sieben von ihnen essen gern Weißkraut, sechs Möhren, fünf Erbsen. Vier mögen besonders Weißkraut und Möhren, drei Weißkraut und Erbsen, zwei Möhren und Erbsen. Einer ißt alles gern. Wie viele Kinder hat die Familie?

Quader gegen Würfel

Wieviel Würfel müssen auf die Waage, um den Quader aufzuwiegen?



Diese Aufgaben entnahmen wir dem sowjetischen Unterhaltungsbuch. Es enthält 217 Rätsel, Spiele und Denkaufgaben.

Autorenkollektiv
Spaß in freien Stunden
191 Seiten, zahlreiche Bilder Preis 11,80 M
Bestell-Nr. 6724450
Verlag MIR, Moskau/Verlag für die Frau, Leipzig