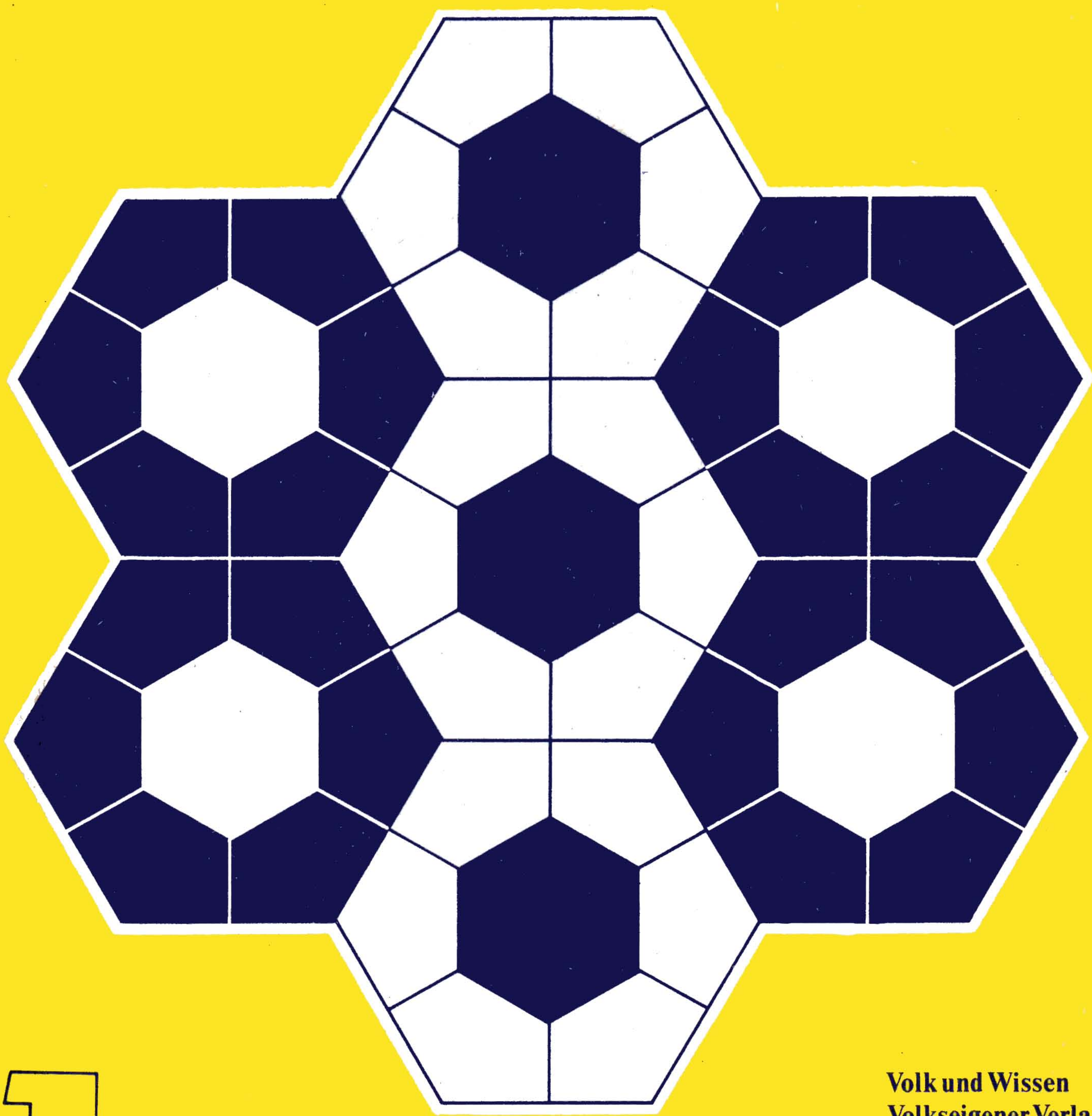
Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
12. Jahrgang 1978
Preis 0,50 M
Index 31 059

Redaktion:
StR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 10,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
AN (EDV) 128 – ISSN 0002-6395
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: H. Tracksdorf, Leipzig (S. 1); Kaczmarczyk, Berlin (S. 14); H. Jankofsky, Berlin (S. 15)
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluß: 24. Oktober 1977

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Das arithmetisch-geometrische Mittel

Teil 1

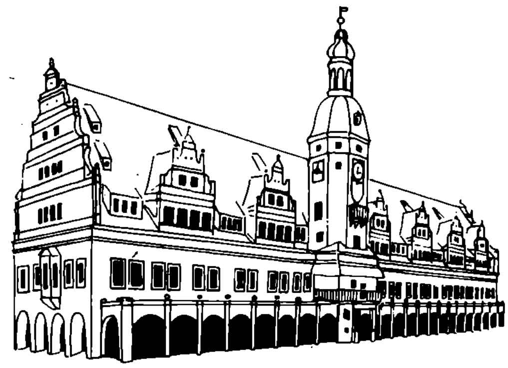


Bild 1

Arithmetisches Mittel

Alexander bekommt die Aufgabe, einen Waldweg gegebener (aber unbekannter) Länge l_0 als Strecke für das Lauftraining auszumessen. Er führt fünf Messungen aus und erhält folgende Meßwerte:

$$l_1=3189{,}2\text{ m},\ l_2=3191{,}8\text{ m},$$
$$l_3=3190{,}6\text{ m},\ l_4=3193{,}4\text{ m},$$
$$l_5=3188{,}0\text{ m}.$$

Es ist naheliegend, die Zahl

$$l=\frac{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5}{5}=\frac{15953}{5}=3190{,}6$$

als den Mittelwert der gemessenen Werte zu bezeichnen und als zuverlässigsten Wert anzusehen. (Das Mittel l wird im allgemeinen von der richtigen Länge l_0 der gemessenen Strecke abweichen.)

Definition: Das arithmetische Mittel m von n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist die Zahl

$$m=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Daß die Wahl des *arithmetischen Mittels* als zuverlässigster Wert der Messung sinnvoll ist, zeigen die folgenden Überlegungen. Bei n Messungen einer gesuchten Größe (z. B. die Länge einer Waldlaufstrecke) seien die Meßwerte $l_1, l_2, \ldots, l_n$ erzielt worden, die mehr oder weniger voneinander abweichen. (Im Beispiel ist $n=5$.) Es sei l' ein beliebiger möglicher Wert der gemessenen Größe. Die Differenzen $d_1=l_1-l'$, $d_2=l_2-l'$, $\ldots$, $d_n=l_n-l'$ sind die Abweichungen der gemessenen Größen von diesem Wert. (Im Beispiel gilt, falls $l'=3190$ m, $d_1=-0{,}8$ m, $d_2=1{,}8$ m, $d_3=0{,}6$ m, $d_4=3{,}4$ m, $d_5=-2{,}0$ m.) Einige Abweichungen sind positiv, andere negativ. Am günstigsten wäre ein Wert l', für den die gesamte Abweichung in gewissem Sinne so klein wie möglich ist. *Gauß* nahm nicht die Abweichungen $d_1, d_2, \ldots, d_n$ selbst, sondern ihre Quadrate $d_1^2, d_2^2, \ldots, d_n^2$ als Maß für die Ungenauigkeit. Gesucht ist nun der Wert von l', für den die Summe der Quadrate der Abweichungen minimal, also so klein wie irgend möglich, ist: Für welches l' ist $d_1^2+d_2^2+\ldots+d_n^2=(l_1-l')^2+(l_2-l')+\ldots+(l_n-l')^2$ minimal?

Es gilt folgende Aussage: Sind $d_1=l_1-l'$, $d_2=l_2-l'$, $\ldots$, $d_n=l_n-l'$ die Abweichungen von n gegebenen (gemessenen) Zahlen $l_1, \ldots, l_n$ von einer Zahl l', so wird die Summe ihrer Quadrate

$$d_1^2+d_2^2+\ldots+d_n^2$$

ein Minimum genau dann, wenn l' das arithmetische Mittel dieser Zahlen ist,

$$l'=\frac{l_1+l_2+\ldots+l_n}{n}.$$

(Dieser Satz ist der Ausgangspunkt für die „Gaußsche Methode der kleinsten Quadrate"!)

(Im Beispiel ist, falls $l'=3190$ m ist, $d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2+d_5^2=0{,}64+3{,}24+0{,}36+11{,}56+4{,}0=19{,}8$. Für das arithmetische Mittel $l'=l=3190{,}6$ der gemessenen Werte ist

$$d_1=-1{,}4,\ d_2=1{,}2,\ d_3=0,$$
$$d_4=2{,}8,\ d_5=-2{,}6 \text{ und}$$

$d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2+d_5^2$
$=1{,}96+1{,}44+0+7{,}84+6{,}76=18{,}0.$

Wie auch l' gewählt wird, nach dem Satz ist dieser Wert 18,0 für die Summe der Quadrate der Abweichungen der kleinstmögliche Wert. Er ergibt sich, wenn man für l' das arithmetische Mittel $\frac{1}{5}(l_1+l_2+l_3+l_4+l_5)$ der Meßwerte nimmt.)

Wir bemerken, daß für das arithmetische Mittel die Summe der positiven Abweichungen gleich der Summe der negativen ist, d. h. $d_1+d_2+\ldots+d_n=0$. In der Tat, es ist $d_1=l_1-l$, $d_2=l_2-l$, $\ldots$, $d_n=l_n-l$ und damit

(1) $\quad d_1+d_2+\ldots+d_n=l_1+l_2+\ldots+l_n-nl$
$=nl-nl=0.$

Der oben angegebene Satz kann auch leicht bewiesen werden:

Es ist $d_i=l_i-l'=(l-l')+(l_i-l)$ (worin l das arithmetische Mittel sei), i ist dabei eine der Zahlen 1, 2, …, n. Dann gilt

$d_i^2=(l-l')^2+2(l-l')(l_i-l)+(l_i-l)^2$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Die Addition dieser n Gleichungen ergibt $d_1^2+d_2^2+\ldots+d_n^2=n(l-l')^2+(l_1-l)^2+(l_2-l)^2+\ldots+(l_n-l)^2$. [Die Summe der mittleren Glieder ist Null: $2(l-l')(l_1+l_2+\ldots+l_n-nl)=0$, vgl. (1).]

Somit ist stets $d_1^2+d_2^2+\ldots+d_n^2=(l_1-l')^2+(l_2-l')^2+\ldots+(l_n-l')^2\geqq(l_1-l)^2+(l_2-l)^2+\ldots+(l_n-l)^2$.

Das Gleichheitszeichen steht aber auch nur für $l'=l$. Damit ist eine Haupteigenschaft des arithmetischen Mittels bewiesen.

Harmonisches Mittel

Svante legt mit seinem Fahrrad eine Strecke von der Länge s mit einer Geschwindigkeit von $20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurück; den umgekehrten Weg gleicher Länge durchfährt er mit einer Geschwindigkeit von nur $12\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wie groß ist seine mittlere Geschwindigkeit für die Gesamtfahrzeit? (Die Aufenthaltsdauer am Wendepunkt werde vernachlässigt.)

Die mittlere Geschwindigkeit ist hier nicht gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Geschwindigkeiten, also nicht

$$\frac{20+12}{2}=16\,\frac{\text{km}}{\text{h}}!$$

Setzen wir $v_1=20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $v_2=12\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, so ist (da Geschwindigkeit = Weg : Zeit) $t_1=\frac{s}{v_1}$ die Zeit für die Hinfahrt und $t_2=\frac{s}{v_2}$ die Zeit für die Rückfahrt. Die Gesamtfahrzeit ist somit $t=t_1+t_2=\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}=s\frac{v_2+v_1}{v_1v_2}$. Die durchschnittliche Geschwindigkeit ist daher

$$(2)\qquad v=\frac{2s}{t}=\frac{2s}{s\,\frac{v_2+v_1}{v_1v_2}}=2\cdot\frac{v_1v_2}{v_1+v_2}.$$

Das Einsetzen der Werte für v_1 und v_2 ergibt $v=2\,\frac{20\cdot 12}{20+12}=15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Die Formel (2) läßt sich auch in der Form

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)$$

schreiben; v ist das *harmonische Mittel* der Zahlen v_1, v_2.

Definition: Das harmonische Mittel h von n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist gegeben durch $\frac{1}{h}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$.

Noch ein Beispiel für das harmonische Mittel: *Cornelia* kauft im Selbstbedienungsladen für 3,60 M Apfelsinen, das Stück zu 0,60 M und außerdem auch für 3,60 M Apfelsinen, das Stück zu 0,90 M. Welches ist der mittlere Preis für die gekauften Apfelsinen?

Sie hat 6 Apfelsinen zu 0,60 M und 4 Apfelsinen zu 0,90 M gekauft. Bezeichnet man den mittleren Preis mit h, so muß gelten $6h+4h=7{,}20$, also $10h=7{,}20$, $h=0{,}72$ M. h ist das *harmonische Mittel* der Preise 0,60 und 0,90:

$$\frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{0{,}6}+\frac{1}{0{,}9}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{10}{6}+\frac{10}{9}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{30+20}{18}\right)=\frac{25}{18},\ h=\frac{18}{25}=0{,}72.$$

Geometrisches Mittel

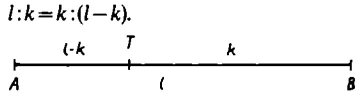
Cornelia und *Svante* weilen in Leipzig. Bei einem Stadtbummel führt ihr Weg vorbei an der Thomaskirche hin zum Markt. An der Ostseite dieses Platzes nimmt sie ein langes zweigeschossiges Haus mit einem stattlichen Satteldach, abgetreppten Giebeln und einem Turm gefangen. Es ist ein reizvolles Gebäude, dieses älteste deutsche Renaissancerathaus (16. Jahrhundert). *Cornelia* erfreut sich an den Zwerchgiebeln im Dachgeschoß. Dem *Svante* fällt besonders die Asymmetrie am Alten Rathaus auf.

Nicht in der Mitte ist der sehenswerte aus einem viereckigen Unter- und einem achteckigen Oberteil bestehende Turm mit barocker Haube und Laterne errichtet. Zwei der sechs Zwerchgiebel befinden sich nördlich, vier südlich vom Turm. Trotz dieser Asymmetrie finden *Cornelia* und *Svante* das Bauwerk recht harmonisch.

Welche Größenverhältnisse hat der Architekt hier für die künstlerische Gestaltung verwendet?

Bezeichnen wir mit l die Länge der Vorderfront des Rathauses, ferner mit T den Fußpunkt der Turmspitze und mit k die Länge der längeren der beiden durch die Teilung (in T) erhaltenen Teilstrecken, so gilt folgende Proportion:

$$l:k=k:(l-k).$$

Bild 2 

Die ganze Strecke hat zum größeren Teil dasselbe Verhältnis wie der größere Teil zum kleineren. Man spricht von der *goldenen Teilung* der Strecke $\overline{AB}$.

Der Turm des Leipziger Alten Rathauses teilt die Vorderfront im Verhältnis des „Goldenen Schnittes"!

(Wird die kleine Strecke auf der großen abgetragen, so wird dadurch die große Strecke wiederum im goldenen Schnitt geteilt. Wegen dieser Fortsetzbarkeit der Teilung spricht man auch von *stetiger Teilung*.)

Das goldene Verhältnis $s=\frac{l}{k}=\frac{k}{l-k}$ läßt sich leicht berechnen. Aus $\frac{l}{k}=\frac{k}{l-k}$ folgt $l^2-lk=k^2$ und damit $\left(\frac{l}{k}\right)^2-\left(\frac{l}{k}\right)=1$. $s=\frac{l}{k}$ genügt somit notwendigerweise der Gleichung

$$s^2-s=1.$$

Alle Lösungen der quadratischen Gleichung

(3) $\quad x^2-x=1$

sind leicht zu bestimmen. Es gilt (3), daher auch

$$x^2-x+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}.$$

Dieses bedeutet

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4},$$

also (indem wir auf beiden Seiten die Quadratwurzeln ziehen)

$$\left|x-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Für $x\geqq\frac{1}{2}$ ist $\left|x-\frac{1}{2}\right|=x-\frac{1}{2}$ und damit $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Für $x<\frac{1}{2}$ ist $\left|x-\frac{1}{2}\right|=-\left(x-\frac{1}{2}\right)$ und damit $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Jede Lösung von (3) hat notwendigerweise diese Form. Daß $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ auch wirklich Lösungen sind, bestätigt man leicht. Da $s>0$ ist, muß $s=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ gelten.

Da $\sqrt{5}$ keine rationale Zahl ist, ist auch s irrational. Der unendliche nicht-periodische Dezimalbruch beginnt mit

$s=1{,}61803\ldots$

Bei einer im goldenen Schnitt geteilten Strecke l betragen die Teilstrecken

$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\cdot l=0{,}618\ldots\cdot l$ und

$\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\cdot l=0{,}382\ldots\cdot l.$

Aus $\frac{l}{k}=\frac{k}{l-k}$ folgt $k^2=l(k-l)$, also $k=\sqrt{l(l-k)}$.

Definition: Für n positive Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ heißt

$$g=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

ihr geometrisches Mittel.

Beim *goldenen Schnitt* ist somit der eine (größere) Abschnitt gleich dem geometrischen Mittel aus der gesamten Strecke und dem anderen (kleineren) Abschnitt.

Für zwei Zahlen $a>0$, $b>0$ ist das geometrische Mittel $g=\sqrt{ab}$. Daher gilt $g^2=ab$ und damit $a:g=g:b$, d. h. g ist die mittlere Proportionale von a und b.

Beim goldenen Schnitt wird eine Strecke $\overline{AB}$ innen so geteilt, daß der größere Teilabschnitt $\overline{BT}$ mittlere Proportionale zwischen dem kleineren und der gesamten Strecke wird, d. h. daß gilt: $\overline{AB}:\overline{BT}=\overline{BT}:\overline{AT}$.

$h\leqq g\leqq m$

Für das arithmetische Mittel $m=\frac{a+b}{2}$, das harmonische Mittel h (mit $\frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$) und das geometrische Mittel $g=\sqrt{ab}$ zweier positiver Zahlen a und b ($a\geqq b>0$) gilt:

$$b\leqq h\leqq g\leqq m\leqq a.$$

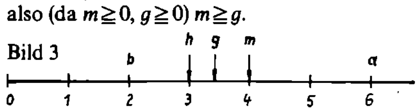
In der Tat, es ist

$$(m+g)(m-g)=m^2-g^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4}=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}$$

$$=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\geqq 0, \text{ d. h. } m^2\geqq g^2,$$

also (da $m\geqq 0$, $g\geqq 0$) $m\geqq g$.

Bild 3 

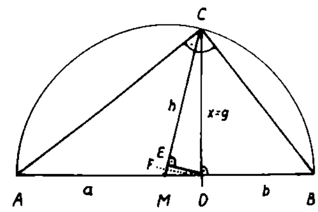
$b=2, a=3$

$m=\frac{2+6}{2}=4,\ h=\frac{2\cdot 2\cdot 6}{2+6}=\frac{24}{8}=3$

$g=\sqrt{2\cdot 6}=3{,}464\ldots$

Es ist ferner

$$h=\frac{2ab}{a+b}=\frac{ab}{\frac{a+b}{2}}=\frac{(\sqrt{ab})^2}{\frac{a+b}{2}}=\frac{g^2}{m}.$$

Bild 4 

Über der Gesamtstrecke $\overline{AB}=a+b$ ist der Halbkreis geschlagen. Sein Mittelpunkt sei M. Sein Radius ist $m=\frac{a+b}{2}$. m ist offenbar größer als die Höhe x des rechtwinkligen Dreiecks ABC. Nach dem Höhensatz gilt für die Höhe $x^2=ab$, also $x=\sqrt{ab}=g$. Somit ist $g\leqq m$.

Aufgabe: Zeige, daß $\overline{EC}=h$ ist. (Offenbar ist dann $h\leqq g$.)

Wäre $h>g$, so auch $\frac{g^2}{m}>g$, d. h. $g^2>gm\geqq gg$ $=g^2$ (wegen $m\geqq g$), d. h. $g^2>g^2$, was ein Widerspruch ist. Somit gilt $h\leqq g$. Nebenbei ergab sich $\sqrt{ab}=g=\sqrt{hm}$.

Fortgesetzte Mittelwertbildung

Es seien $a\geqq b>0$ positive Zahlen. Wir bilden

$$a_1=\frac{a+b}{2},\ b_1=\sqrt{ab}.$$

Dann gilt auch $a_1\geqq b_1>0$.

Man kann erneut

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\ b_2=\sqrt{a_1b_1} \text{ bilden.}$$

Diese Mittelwertbildung setzen wir beliebig fort:

$$a_3=\frac{a_2+b_2}{2},\ b_3=\sqrt{a_2b_2},$$

$$a_4=\frac{a_3+b_3}{2},\ b_4=\sqrt{a_3b_3}\ \ldots, \text{ usw.}$$

Betrachten wir einige Beispiele:

$a=6, b=2$

$a_1=4, b_1=3{,}46410\ldots$

$a_2=3{,}73205\ldots, b_2=3{,}72242\ldots$

$a_3=3{,}72723\ldots, b_3=3{,}72723\ldots$

…

$a=77, b=3$

$a_1=40, b_1=15{,}19868\ldots$

$a_2=27{,}59934\ldots, b_2=24{,}65659\ldots$

$a_3=26{,}12757\ldots, b_3=26{,}08650\ldots$

$a_4=26{,}10724\ldots, b_4=26{,}10723\ldots$

$a_5=26{,}10724\ldots, b_5=26{,}10724\ldots$

…

Die in den Tabellen gegebenen Zahlenbeispiele (mit einer erstaunlich großen Anzahl von angegebenen Dezimalstellen) sind von *C. F. Gauß*.

Durch die *fortgesetzte Mittelwertbildung* erhalten wir zwei Zahlenfolgen:

$$a, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$
$$b, b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$$

Bild 5a

$a=\sqrt{2},\ b=1$

$a\ =1{,}41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 2$
$a_1=1{,}20710\ 67811\ 86547\ 52440\ 1$
$a_2=1{,}19815\ 69480\ 94634\ 29555\ 9$
$a_3=1{,}19814\ 02347\ 93877\ 20908\ 3$
$a_4=1{,}19814\ 02347\ 35592\ 20744\ 1$
$b\ =1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$
$b_1=1{,}18920\ 71150\ 02721\ 06671\ 7$
$b_2=1{,}19812\ 35214\ 93120\ 12260\ 7$
$b_3=1{,}19814\ 02346\ 77307\ 20579\ 8$
$b_4=1{,}19814\ 02347\ 35592\ 20743\ 9$

Die Glieder dieser Folgen sind positive Zahlen und lassen sich beliebig weit berechnen

$$a_1=\frac{a+b}{2},\ b_1=\sqrt{ab},$$
$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\ b_2=\sqrt{a_1b_1},$$
$$a_k=\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2},\ b_k=\sqrt{a_{k-1}b_{k-1}}.$$

(für $k=3, 4, \ldots$).

Wir beschreiben einige Eigenschaften dieser Zahlenfolgen. Ist $a=b$, so sind alle Glieder beider Folgen $=a=b$. Es gilt ja $\frac{a+b}{2}=\frac{2a}{2}=a$ und $\sqrt{ab}=\sqrt{a^2}=|a|=a$ (da $a>0$).

Wir setzen im folgenden $a\neq b$, also $a>b$, voraus. (Man vergleiche die folgenden Aussagen mit den angegebenen Zahlenbeispielen.)

1) Es ist $b_1<a_1$, $b_2<a_2$, $b_k<a_k$ (für alle k), d. h., jedes Glied der unteren Folge ist kleiner als das entsprechende der oberen Folge.

Dies folgt aus der schon bewiesenen Größenbeziehung zwischen dem geometrischen Mittel g und dem arithmetischen Mittel m zweier (verschiedener) positiver Zahlen: $g<m$.

2) Es ist $a>a_1>a_2>a_3\ \ldots$, d. h. die Zahlen der oberen Folge nehmen ab.

In der Tat, wegen $b<a$ ist $\frac{b}{2}<\frac{a}{2}$ und damit $a_1=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}<\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a$. Ebenso folgt $a_2<a_1$, $a_3<a_2$, usw.

3) Es ist $\ldots>b_3>b_2>b_1>b$, d. h. die Zahlen der unteren Folge nehmen zu.

Es ist ja $a>b$, also $ab>b^2$, und damit $b_1=\sqrt{ab}>\sqrt{b^2}=|b|=b$ (weil $b>0$ ist). Ebenso folgt $b_2>b_1$, $b_3>b_2$, usw.

4) Beim Nachweis von $m\geqq g$ zeigten wir, daß $(m+g)(m-g)=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ ist. Hieraus folgt

$$\frac{m-g}{a-b}=\frac{a-b}{4(m+g)}=\frac{a-b}{2(a+b)+4g}.$$

Aus $0<2b+2g$ folgt $a<a+2b+2g$,

$$a-b<a+b+2g,\ \frac{a-b}{a+b+2g}<1,\ \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b+2g}\right)$$
$$=\frac{a-b}{2(a+b)+4g}<\frac{1}{2}.$$ Es ist also stets $\frac{m-g}{a-b}<\frac{1}{2}$, d. h.

$$m-g<\frac{1}{2}(a-b). \tag{4}$$ Hieraus folgt

$$a_1-b_1<\frac{1}{2}(a-b),$$

Bild 5b

$a=1,\ b=0{,}2$

$a\ =1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$
$a_1=0{,}60000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$
$a_2=0{,}52360\ 67977\ 49978\ 96964\ 1$
$a_3=0{,}52080\ 54052\ 86123\ 66484\ 5$
$a_4=0{,}52080\ 16381\ 12999\ 95414\ 3$
$a_5=0{,}52080\ 16381\ 06187$
$b\ =0{,}20000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$
$b_1=0{,}44721\ 35954\ 99957\ 93928\ 2$
$b_2=0{,}51800\ 40128\ 22268\ 36005\ 0$
$b_3=0{,}52079\ 78709\ 39876\ 24344\ 0$
$b_4=0{,}52080\ 16380\ 99375$
$b_5=0{,}51080\ 16381\ 06187$

$$a_2-b_2<\frac{1}{2}(a_1-b_1)<\frac{1}{4}(a-b)$$
$$a_3-b_3<\frac{1}{2}(a_2-b_2)<\frac{1}{8}(a-b),\ \text{usw.},$$

allgemein

$$a_k-b_k<\frac{1}{2^k}(a-b).$$

H. Pieper

Der Beitrag wird in Heft 2/78 fortgesetzt mit: *Das arithmetisch-geometrische Mittel; Lemniskate* und *Ellipse; Das arithmetisch-geometrische Mittel bei C. F. Gauß.*

Dir – Mathematik

Begegnete einst mir ein Schüler.
Der klagte sein Weh mir, sein Leid.
Du seist so schwer ihm verständlich.
Du raubtest ihm Kraft und die Zeit.

Der Schüler gestand es mir ehrlich:
Er sei von Dir wie gebannt.
Doch hat er, so mußt ich ihm sagen,
Dein Wesen ein wenig verkannt.

Wer Dich packt, der hat den Schlüssel
für Zeitgewinn und Kraft.
Der weiß um die Welt der Dinge,
um Deine Meisterschaft.

Du bist so logisch, so strenge.
Doch das ist an Dir grade schön.
Deine Sprache, sie ist so deutlich.
Wie sollt man Dich nicht verstehn?

Du faßt das vielfältige Einzel
so wundersam allgemein,
daß dieses erstrahlet im Lichte,
in hellem, verständlichem Schein.

Der Weg zu Deinen Höhen
er ist gepflastert mit Schweiß,
mit Lust und Liebe zur Arbeit,
mit menschlich forschendem Fleiß.

Doch wer Deine Höhen erklommen,
bereut nicht die Müh, die er gab.
Er blicket von Deinen Gipfeln
in tiefere Welten hinab.

Er sieht das Wesen der Dinge,
den Raum in Vielfalt und Zahl.
Er kennt die Zusammenhänge,
vergessen der Mühe Qual.

Roland Mildner

Das macht Pythagoras verlegen

Teil 2

4. Chemie

In den Naturwissenschaften, die zunächst nur mittelbar mit Mathematik etwas zu tun haben, zeigte sich, daß die pythagoreische Zahlenlehre wenigstens als Arbeitshypothese Berechtigung hat und den Forscher auf fundamentale Erkenntnisse bezüglich seines Faches führen kann. Vor allem ist es die Wertigkeit von Elementen, die bei quantitativen Untersuchungen immer wieder auf das Verhältnis von ganzen Zahlen führt. Eine methodische Voraussetzung zur Aufdeckung dieser Zusammenhänge bestand in der Einführung der Waage als Arbeitsinstrument. Erst sie ermöglichte eine quantitative Analyse chemischer Prozesse. Es war das Verdienst des französischen Chemikers Antoine-Laurent Lavoisier (1743 bis 1794), durch systematische Wägungen Klarheit in die Natur chemischer Reaktionen, z. B. bei der Verbrennung eines Stoffes, gebracht zu haben.

Mittels der von Lavoisier entwickelten methodischen Grundlagen konnte der englische Chemiker und Physiker John Dalton (1766 bis 1844) verschiedene Gesetze aufstellen, die ihn zum wissenschaftlichen Begründer der Atomtheorie werden ließen. Zum Beispiel besagt das von ihm gefundene Gesetz der konstanten multiplen Proportionen: Die Massen, in denen ein Element mit einer anderen bestimmten Menge eines anderen Elementes zu verschiedenen Verbindungen zusammentritt, stehen im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen.

Avogadro (1776 bis 1856) kam auf Grund seiner quantitativen Experimente zu der Erkenntnis: Verschiedenartige Gase enthalten bei gleichem Druck und gleicher Temperatur die gleiche Anzahl Moleküle pro Kubikzentimeter. Der Hinweis auf die Loschmidtsche Zahl und das periodische System der Elemente (Mendelejew, Meyer) mag in diesem Zusammenhang genügen.

5. Biologie

Um 1900 stellte der Botaniker Carl Correns (1864 bis 1933) mit zwei Varietäten der japanischen Wunderblume (Mirabilis Jalapa) folgenden Versuch an: Er kreuzte die rot blühende mit der weiß blühenden Art dieser sonst in allen anderen Merkmalen übereinstimmenden Blume. Die Tochtergeneration dieser Kreuzung wies durchgehend rosa Blüten auf. Sie bildet den sogenannten intermediären Bastard. Durch Bestäubung der Blüten dieser Generation unter sich ergibt sich die Enkelgeneration. Hier war nach dem äußeren Erscheinungsbild eine Aufspaltung in drei Gruppen zu verzeichnen. 25% der Enkelgeneration hatten rote Blüten, 50% rosa Blüten und 25% weiße Blüten. Die Enkelgeneration spaltete sich also im Verhältnis 1:2:1 auf. Daraus ist zu folgern, daß sich die Erbträger (Gene) des Elternpaares nach den Gesetzen der Kombinatorik miteinander verbinden.

Auch mit Erbsen, die sich in genau zwei Merkmalen unterscheiden, wurde experimentiert. Durch Kreuzung einer Sorte, die gelbe und glatte Samen liefert mit einer anderen, die grüne und kantige Samen hervorbringt, ergaben sich in der Enkelgeneration alle möglichen Verbindungen von Erbanlagen. Die auftretenden Zahlenverhältnisse stimmen mit denen überein, die nach den Gesetzmäßigkeiten der Kombinatorik zu erwarten sind. Auf die sich hieraus bietenden Möglichkeiten für die Pflanzenzüchtung soll hier nicht eingegangen werden.

Ähnliche Versuche hatte bereits 1866 der Augustinerabt Gregor Mendel in Brünn (Brno) durchgeführt. Sein Vortrag und eine Veröffentlichung zu diesem Gegenstand fanden damals jedoch keine Beachtung. Die von Correns, Tschermak und de Vries um 1900 wiederentdeckten Vererbungsregeln werden deshalb nach dem Erstentdecker „Mendelsche Gesetze" genannt. Mit diesen Gesetzen hat sich die Zahl im pythagoreischen Sinne in der Botanik ein Heimatrecht erworben.

6. Physik

Schon im Altertum lehrte Demokrit (um 460 bis 370 v.u.Z.), daß die Welt aus unendlich vielen sich im unendlichen leeren Raum bewegenden Atomen besteht. Die Einzeldinge entstehen und vergehen durch Vereinigung und Trennung der Atome. Die Mannigfaltigkeit der Dinge ist bedingt durch die Unterschiedlichkeit von Gestalt, Lage und Anordnung der Atome. Handfeste experimentelle Befunde, die diese Hypothese bestätigt hätten, gab es zu dieser Zeit noch nicht. Im folgenden werden experimentelle Resultate von zwei mikrokosmischen Vorgängen angeführt, zu deren Beschreibung die Zahl im pythagoreischen Sinne erfolgreich anwendbar ist.

Johann Jakob Balmer (1825 bis 1898) stellte 1885 zur rechnerischen Erfassung der den Spektrallinien des Wasserstoffatoms im sichtbaren Teil des Spektrums zugeordneten Frequenzen folgende Formel auf:

$$\nu_n = R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right) \text{ mit } n = 3, 4, 5, \ldots \qquad (*)$$

In der Formel (*) ist R eine konstante Größe (Rydberg-Konstante) mit $R = 3291 \cdot 10^9 \sec^{-1}$. Jeder Spektrallinie dieser Balmer-Serie läßt sich daher ein rationales Vielfaches der Rydberg-Konstanten zuordnen.

Joseph John Thomson (1856 bis 1940) stellte zwischen zwei horizontalen Platten eines Kondensators einen mit Wasserdampf übersättigten Raum her und ließ in diesen einen Kathodenstrahl fallen. Dabei darf der Strahl keine der Platten treffen. Ein Kathodenstrahl ionisiert die von ihm durchstrahlte Luft, indem jedes fliegende Elektron genau ein Luftmolekül in ihre Ionen aufspaltet. In Luft, die mit Wasserdampf übersättigt ist, kondensiert sich an den negativen Elektronen der Wasserdampf zu Nebeltröpfchen. Jeder Tropfen umschließt genau ein freies Elektron mit seiner Ladung als Kondensationskern. Läuft der Versuch eine gewisse Zeit, wird die untere Platte durch die auffallenden Tropfen schwerer und zugleich meßbar elektrisch aufgeladen. Durch Division der nach einer gewissen Laufzeit gemessenen Ladung durch die Anzahl der aufgefallenen Nebeltröpfchen erhält man die negative Ladungseinheit eines Luftions. Das Experiment ergibt, daß jedes Ion die Ladung $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Coulomb (elektrisches Elementarquantum) mit sich führt.

In der Antike war man bereits mit Erscheinungsformen der Elektrostatik vertraut. Zum Beispiel sind elektrostatische Experimente durch Reiben von Harz und Bernstein an Fellen belegt. Ob Pythagoras bei Aufstellung seiner philosophischen Lehre von der Zahl auch an die Abzählbarkeit elektrostatischer Ladungsmengen gedacht hat, ist kaum wahrscheinlich. Hätten den Pythagoreern alle diese experimentellen Befunde bereits zur Verfügung gestanden, wären sie gewiß noch selbstbewußter und vielleicht auch hochmütiger aufgetreten.

Nun wollen wir uns wieder dem unbequemen Schüler Hippasos zuwenden, der noch ein abschließendes Wörtchen in dieser Angelegenheit mitzureden hat. Seine Überlegungen könnten von folgender Art gewesen sein: Nach der Lehre seines Meisters müßte sich für die Strecken d_0 und d_1 am Pentagramm (Abb. 9) ein gemeinsames Maß derart finden lassen, daß die Längen von d_0 und d_1 durch ganze Maßzahlen bezüglich dieser Einheit ausdrückbar sind. Damit ist die Problemstellung auf die Aufgabe zurückgeführt, zu zwei natürlichen Zahlen einen gemeinsamen Teiler zu finden. Als einfachster Algorithmus hierzu bietet sich die Kettendivision an. Aus geometrischer Sicht handelt es sich um eine Wechselwegnahme von Strecken.

Rechnerisch wird hierbei in folgender Weise vorgegangen:

Es seien d_0 und d_1 zwei natürliche Zahlen mit $d_0 > d_1$ und $d_1 \neq 0$. Unter der Annahme, daß bei der Division $d_0 : d_1$ der Rest d_2 bleibt, gilt folgende Darstellung:

$$\frac{d_0}{d_1} = q_0 + \frac{d_2}{d_1} \qquad (1)$$

$$\text{oder } d_0 = q_0 d_1 + d_2. \qquad (1')$$

Der nächste Schritt besteht darin, daß man den Divisor aus (1) zum Dividenden und den Rest aus (1) zum Divisor macht, also

$$\frac{d_1}{d_2} = q_1 + \frac{d_3}{d_2} \qquad (2)$$

$$\text{oder } d_1 = q_1 d_2 + d_3. \qquad (2')$$

Ist $d_3 \neq 0$, kann das Verfahren fortgeführt werden.

$$\frac{d_2}{d_3} = q_2 + \frac{d_4}{d_3}\,. \qquad (3)$$

$$\text{oder } d_2 = q_2 d_3 + d_4 \qquad (3')$$

....

Es werde angenommen, daß das Verfahren bis zum $(k-1)$-ten Schritt durchgeführt werden kann; d. h. es gilt $d_0 \neq 0, d_1 \neq 0 \ldots d_k \neq 0$. Damit folgt für diesen Schritt

$$\frac{d_{k-2}}{d_{k-1}} = q_{k-2} + \frac{d_k}{d_{k-1}} \qquad (4)$$

$$\text{oder } d_{k-2} = q_{k-2} d_{k-1} + d_k. \qquad (4')$$

Sind d_0 und d_1 von Null verschiedene natürliche Zahlen, so muß die hier beschriebene Wechselwegnahme nach einer endlichen Zahl von Schritten ohne Rest ausführbar sein. Wir nehmen an, daß dies für den k-ten Schritt erfolgt. Es gilt also

$$\frac{d_{k-1}}{d_k} = q_{k-1} \qquad (5)$$

$$\text{oder } d_{k-1} = q_{k-1} d_k. \qquad (5')$$

Wir behaupten, daß d_k der größte gemeinsame Teiler von d_0 und d_1 ist. Wendet man zunächst (5') auf (4') an, ergibt sich

$$d_{k-2} = (q_{k-2} q_{k-1} + 1) d_k. \qquad (6)$$

Der nächste Schritt führt auf die Gleichung

$$d_{k-3} = [q_{k-3}(q_{k-2} q_{k-1} + 1) + q_{k-1}] d_k. \qquad (7)$$

Setzt man das Verfahren fort, gelangt man zu zwei Gleichungen der Form

$$d_1 = p d_k \text{ und } d_0 = q d_k$$

$$\text{mit } p, q \in N. \qquad (8)$$

Folglich ist d_k gemeinsamer Teiler von d_0 und d_1. Da ferner p und q teilerfremd sind, ist d_k der größte gemeinsame Teiler von d_0 und d_1.

Dieses Verfahren hat bereits Euklid im siebenten Buch seiner „Elemente" beschrieben. Euklid lebte etwa von 365 bis 300 v.u.Z. Seine berühmten Elemente stellen das Sammelwerk des mathematischen Wissens der griechischen Antike dar. Das hier vorgeführte Verfahren zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen bezeichnet man als euklidischen Algorithmus. Es ist als sicher anzunehmen, daß Hippasos bereits mit dem Verfahren der Wechselwegnahme zur Bestimmung des gemeinsamen Maßes zweier Strecken vertraut war und er sich dieses Algorithmus zu bedienen verstand.

Bevor wir diesen Algorithmus in geometrische Operationen am Pentagramm umsetzen, soll die Brauchbarkeit des Verfahrens an zwei Zahlenbeispielen vorgeführt werden. Gesucht ist der größte gemeinsame Teiler von $d_0 = 1474$ und $d_1 = 1155$. Die Anwendung der Kettendivision führt auf folgende Gleichungen:

$$\frac{1474}{1155}=1+\frac{319}{1155} \qquad \frac{121}{77}=1+\frac{44}{77}$$
$$\frac{1155}{319}=3+\frac{198}{319} \qquad \frac{77}{44}=1+\frac{33}{44}$$
$$\frac{319}{198}=1+\frac{121}{198} \qquad \frac{44}{33}=1+\frac{11}{33}$$
$$\frac{198}{121}=1+\frac{77}{121} \qquad \frac{33}{11}=3.$$

Aus der letzten Gleichung folgt, daß 11 der größte gemeinsame Teiler von 1474 und 1155 ist. Man kann sich – etwas umständlicher – durch Zerlegung in Primfaktoren von der Richtigkeit dieser Aussage überzeugen.

Ist 1 der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen, so bezeichnet man diese als teilerfremd. Auch hierzu möge ein Beispiel vorgeführt werden. Wir setzen $d_0=1474$ und $d_1=1153$.

Es ergeben sich folgende Rechenschritte:

$$\frac{1474}{1153}=1+\frac{321}{1153} \qquad \frac{59}{13}=4+\frac{7}{13}$$
$$\frac{1153}{321}=3+\frac{190}{321} \qquad \frac{13}{7}=1+\frac{6}{7}$$
$$\frac{321}{190}=1+\frac{131}{190} \qquad \frac{7}{6}=1+\frac{1}{6}$$
$$\frac{190}{131}=1+\frac{59}{131} \qquad \frac{6}{1}=6.$$
$$\frac{131}{59}=2+\frac{13}{59}$$

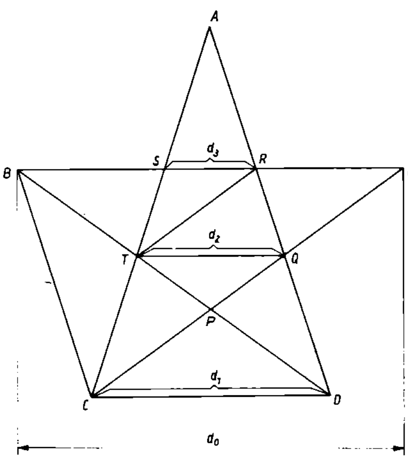


Bild 9
Größenbeziehungen am Pentagramm

Aus der letzten Gleichung folgt, daß 1 der größte gemeinsame Teiler von 1474 und 1153 ist, d. h. die Zahlen sind teilerfremd.

Nun wollen wir mit Hilfe des euklidischen Algorithmus die Gedankengänge des Hippasos am Pentagramm zu rekonstruieren versuchen. In Bild 9 setzen wir $\overline{BE}=d_0$, $\overline{CD}=d_1$, $\overline{TQ}=d_2$ und $\overline{SR}=d_3$. Im regelmäßigen Fünfeck gibt es zu jeder Seite genau eine parallele Diagonale: Es gilt daher $(CD) \parallel (BE)$, $(BC) \parallel (AD)$ und $(CE) \parallel (RT)$. Hieraus folgt, daß die Vierecke $(BCDR)$ und $(ERTQ)$ Parallelogramme darstellen. Daher gilt weiterhin

$$\overline{CD}=\overline{BR}=d_1 \text{ und } \overline{TQ}=\overline{RE}=d_2.$$

Mit diesem Ergebnis kann aus Bild 9 abgelesen werden

$$d_0=d_1+d_2 \text{ oder } \frac{d_0}{d_1}=1+\frac{d_2}{d_1}. \tag{9}$$

Wegen der Regularität des Pentagramms folgt durch zyklische Vertauschung:

$$\overline{BE}=\overline{AC}=d_0,\ \overline{BR}=\overline{AT}=d_1,$$
$$\overline{ER}=\overline{AS}=d_2.$$

Mit diesen Bezeichnungen resultieren aus Bild 9 folgende Proportionen:

$$\frac{d_0}{d_1}=\frac{d_1}{d_2} \text{ und } \frac{d_1}{d_2}=\frac{d_2}{d_3}. \tag{10}$$

Diese Proportionen legen es nahe, das Pentagramm bezüglich eines Eckpunktes mit dem Faktor $\lambda=\frac{d_1}{d_0}$ zentrisch zu stauchen. Das Stauchzentrum sei der Eckpunkt A (vgl. Bild 10). Dies führt auf das Pentagramm mit den Eckpunkten $AB'C'D'E'$. Aus diesem läßt sich wieder wie oben ablesen:

$$d_1=d_2+d_3 \text{ und } \frac{d_1}{d_2}=\frac{d_2}{d_3} \text{ oder}$$
$$\frac{d_1}{d_2}=1+\frac{d_3}{d_2} \text{ und } \frac{d_1}{d_2}=\frac{d_2}{d_3}. \tag{11}$$

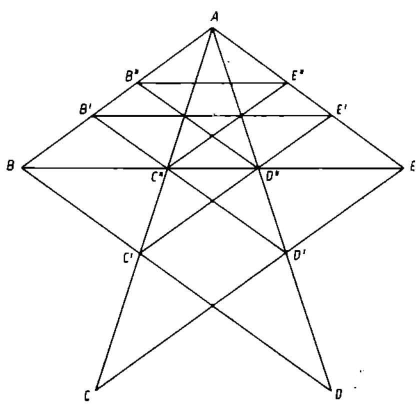


Bild 10
Zentrische Stauchung des Pentagramms

Es werde angenommen, daß die zentrische Stauchung bezüglich A mit dem Stauchfaktor λ $(k-1)$-mal durchgeführt ist. Dem so entstehenden Pentagramm ist das folgende Gleichungssystem zuzuordnen:

$$\frac{d_{k-1}}{d_k}=1+\frac{d_{k+1}}{d_k}, \tag{12}$$
$$\frac{d_{k-1}}{d_k}=\frac{d_k}{d_{k+1}}. \tag{13}$$

Sollen d_0 und d_1 ein gemeinsames Maß besitzen, dann muß das Verfahren nach unseren Kenntnissen über den euklidischen Algorithmus an einer gewissen Stelle abbrechen. Wir nehmen an, beim $(k+1)$-ten Pentagramm sei dieser Schritt erreicht.

Es gilt daher $\frac{d_k}{d_{k+1}}=n$ mit $n \in N$ und $n \neq 0$. (14)

Setzt man (14) in (13) ein, folgt $\frac{d_{k-1}}{d_k}=n$. (15)

Mit (15) und (14) folgt aus (12)

$$n=1+\frac{1}{n}. \tag{16}$$

Äquivalent mit (16) ist die quadratische Gleichung

$$n^2-n-1=0. \tag{17}$$

Unter den Lösungen $n_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\text{und } n_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{18}$$

findet sich im Widerspruch zu (14) keine natürliche Zahl. Die Annahme, daß d_0 und d_1 ein gemeinsames Maß besitzen, führt auf einen Widerspruch. d_0 und d_1 sind inkommensurabel. Die philosophische Lehre der Pythagoreer wurde in dieser oder ähnlicher Weise durch logisches Schließen an ihrem eigenen Bundeszeichen widerlegt.

Das Prinzip der Wechselwegnahme (Antanairesis) zum Nachweis der Inkommensurabilität von d_0 und d_1 im regelmäßigen Fünfeck läßt sich auch an einer Folge von ineinandergeschachtelten Fünfecken übersichtlich demonstrieren (vgl. Bild 11). Aus dem k-ten Fünfeck ist die Gleichung

$$d_{k-1}=d_k+d_{k+1}$$

abzulesen. Aus dem $(k-1)$-ten und k-ten Fünfeck resultiert die Proportion

$$\frac{d_{k-1}}{d_k}=\frac{d_k}{d_{k+1}}.$$

Auch an dieser Figur (Bild 11) führt die Annahme eines gemeinsamen Maßes für d_0 und d_1 analog zu den Gleichungen (12) bis (18) auf einen Widerspruch. Es ist denkbar, daß sich Hippasos zum Nachweis der Inkommensurabilität von d_0 und d_1 eines solchen Bildes bedient hat.

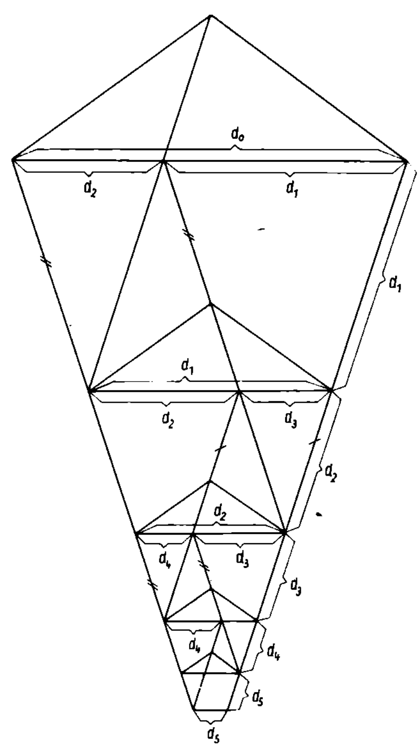


Bild 11
Demonstration der Wechselwegnahme an einer Folge von regulären Fünfecken

Die voreuklidischen Quellen zur Geschichte der Mathematik fließen sehr spärlich, so daß vieles nur vermutet werden kann. Der italienische Geometer Federigo Enriques (1871 bis 1940) hat zur voreuklidischen Epoche der griechischen Geometrie einmal lächelnd bemerkt, sie biete dem Historiker den großen Vorteil, daß seine Phantasie nur wenig durch Quellen behindert wird. Der Leser wird es sicher mit Nachsicht beurteilen, wenn im vorliegenden Beitrag von diesem Vorteil ein wenig Gebrauch gemacht wurde.

E. Schröder

Aufgaben: Das Pentagramm ($ABCDE$) werde so gelegt, daß sich der Eckpunkt A mit dem Mittelpunkt eines Kreises k deckt, der außerdem durch die Eckpunkte C und D geht. Für den Radius r von k gilt: $r=\overline{AC}=\overline{AD}$. Wir bezeichnen mit s_6 die Seitenlänge des k einbeschriebenen regulären Sechsecks, mit s_5 die Seitenlänge des k einbeschriebenen regulären Fünfecks und mit s_{10} die Seitenlänge des k einbeschriebenen regulären Zehnecks. Offensichtlich gilt: $r=s_6$, $\overline{CD}=s_{10}$ und $2\overline{CL}=s_5$.

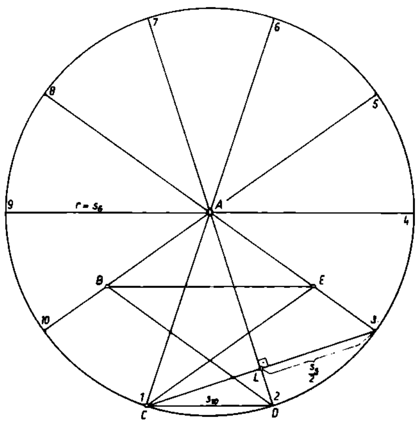


Bild 12
Pentagramm und reguläres Zehneck

Man beweise mittels des vorgelegten Bildes 12:

1. $\frac{s_6-s_{10}}{s_{10}}=\frac{s_{10}}{s_6}$
2. $s_{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}s_6$
3. $s_5=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}s_6$
4. $s_5^2=s_6^2+s_{10}^2$
5. Mittels der gefundenen Ergebnisse konstruiere man s_5 und s_{10} aus s_6 unter Verwendung von Zirkel und Lineal.

Zwei Aufgaben aus der mathematischen Fernolympiade 1976

Mongolische Volksrepublik

1. Aufgabe

Es seien n eine natürliche Zahl mit $n\geqq 2$ und
$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)-1$ (1)
ein Polynom.
Man beweise, daß man dieses Polynom nicht als Produkt von zwei Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen kann, von denen jedes mindestens den Grad 1 hat.

Lösung:
Angenommen, es gäbe eine Zerlegung
$P(x)=g(x)\,h(x)$, (2)
wobei $g(x)$ und $h(x)$ Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten sind, die mindestens den Grad 1 haben.
Wegen $P(1)=P(2)=\ldots=P(n)=-1$ (3)
wäre dann wegen (2) für jede Zahl k der Menge $M=\{1,2,\ldots,n\}$
entweder $g(k)=1$ und $h(k)=-1$
oder $g(k)=-1$ und $h(k)=1$.
Gibt es nun in M genau m Zahlen k_i ($i=0,1,2,\ldots,m$), für die
$g(k_i)=1$, also $h(k_i)=-1$,
so gibt es in M genau $n-m$ Zahlen k_i ($i=m+1, m+2, \ldots, n$), für die $g(k_i)=-1$, also $h(k_i)=1$ ist.
Daraus folgt einerseits
$g(x)=(x-k_1)(x-k_2)\ldots(x-k_m)+1,$ (4)
$h(x)=(x-k_1)(x-k_2)\ldots(x-k_m)-1,$ (5)
andererseits
$g(x)=(x-k_{m+1})(x-k_{m+2})\ldots(x-k_n)-1,$ (6)
$h(x)=(x-k_{m+1})(x-k_{m+2})\ldots(x-k_n)+1.$ (7)
Nun gilt wegen (4) und (5) für $x=k_1, k_2, \ldots, k_m$
$g(x)=1$, $h(x)=-1$, also wegen (6)
$(x-k_{m+1})(x-k_{m+2})\ldots(x-k_n)=g(x)+1=2.$
Wegen (7) gilt aber
$(x-k_{m+1})(x-k_{m+2})\ldots(x-k_n)=h(x)-1=-2,$
was zu einem Widerspruch führt.
Daher ist die Annahme (2) falsch, es gibt also keine Zerlegung des Polynoms $P(x)$ mit den verlangten Eigenschaften, w.z.b.w.

2. Aufgabe

Es sei $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ eine Folge von natürlichen Zahlen mit

$a_1=1^1, a_2=2^{2^2}, a_3=3^{3^{3^3}}, \ldots\ldots a_n=n^{n^{n^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}$
(Basis n und n Exponenten n),
......

Ferner sei $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ die Folge der Endziffern im dekadischen Positionssystem der Zahlen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$
also $b_1=1$, $b_2=6$, $b_3=7$ usw.
a) Man beweise, daß die Folge $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ periodisch ist, d.h., daß es eine natürliche Zahl s mit $s\geqq 1$ gibt, so daß $b_{n+s}=b_n$ für alle $n=1,2,\ldots$ gilt.
b) Man gebe die kleinste Periodenlänge an, d.h. die kleinste Zahl s, die die unter a) angegebene Eigenschaft hat.

Lösung:
Ist die letzte Ziffer der natürlichen Zahl n gleich 1, 5, 6 bzw. 0, so ist auch die letzte Ziffer der Zahl n^m gleich 1, 5, 6 bzw. 0, wenn m eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist.
Daher gilt für alle natürlichen Zahlen k
$b_{10k+1}=1$, $b_{10k+5}=5$, $b_{10k+6}=6$,
$b_{10k+10}=0$. (1)
Ferner gilt für alle natürlichen Zahlen k und m mit $m\geqq 1$
$(10k+2)^{4m}\equiv 2^{4m}\equiv 16^m\equiv 6 \pmod{10}$,
$(10k+4)^{4m}\equiv 4^{4m}\equiv 6 \pmod{10}$,
$(10k+8)^{4m}\equiv 8^{4m}\equiv 6 \pmod{10}$, also
$b_{10k+2}=6$, $b_{10k+4}=6$, $b_{10k+8}=6$. (2)
Auf Grund von (1) und (2) könnte man nun die Periodenlänge $s=10$ vermuten, da sie für alle Zahlen gilt, die auf 1, 2, 4, 5, 6, 8, 0 enden.
Nun ist aber zu beachten, daß zwar, wenn k, t, m natürliche Zahlen und $r=0,1,2,3$ sind,
$(10k+t)^{4m+r}\equiv t^{4m+r}\equiv t^r \pmod{10}$
gilt, jedoch
einerseits $3^3\equiv 3 \pmod 4$, $3^{3^3}\equiv 3 \pmod 4$,
also $a_3=3^{3^{3^3}}\equiv 3^3\equiv 7 \pmod{10}$,
andererseits $13^{13}\equiv 1^1\equiv 1 \pmod 4$, $13^{13^{13}}\equiv 1 \pmod 4$,
also $a_{13}\equiv 13^1\equiv 3 \pmod{10}$, d.h.
die Periodenlänge beträgt mindestens 20.
Setzt man
$f_n(n)=n^{n^{\cdot^{\cdot^{n}}}}$ (n Zahlen n),
so wird wegen
$(20k+3)^{20k+3}\equiv 3^3\equiv 3 \pmod 4$,
$f_{20k+3}(20k+3)\equiv 3 \pmod 4$,
$a_{20k+3}=(20k+3)^{f_{20k+3}(20k+3)}\equiv 3^3\equiv 7\equiv a_3$
(mod 10). (3)
Ferner gilt
$(20k+7)^{20k+7}\equiv 7^7\equiv 3^3\equiv 3 \pmod 4$,
also
$a_{20k+7}\equiv(20k+7)^3\equiv 7^3\equiv 3\equiv a_7 \pmod{10}$. (4)
Endlich gilt
$(20k+9)^{20k+9}\equiv 9^9\equiv 1 \pmod 4$,
also
$a_{20k+9}\equiv(20k+9)^1\equiv 9\equiv a_9 \pmod{10}$. (5)
Aus (1), (2), (3), (4) und (5) folgt, daß die Folge der b_n periodisch ist, wobei die kleinste Periodenlänge $s=20$ beträgt.

Wir danken dem mongolischen Studenten *P. Altanzog*, z. Z. stud. math. an der *Martin-Luther-Universität* Halle, für die Übersendung von Aufgabenmaterial. Die vorliegenden beiden Aufgaben (und Lösungen) bearbeitete *Oberstudienrat Dr. R. Lüders, Berlin.*

Niels Henrik Abel

Porträt eines Mathematikers

Der Mathematiker Felix Klein (1849 bis 1925), dem wir eine bedeutende Darstellung der Mathematikgeschichte des 19. Jh. verdanken, nannte Niels Henrik Abel eines „der großen, ursprünglichen Genies“ der Mathematik, einen „idealen Typ eines Forschers, wie ihn die Geschichte der Wissenschaft nur selten aufzuweisen hat“. Obwohl Abel nur 26 Jahre alt wurde, gehört er zu den bedeutendsten Mathematikern des 19. Jh. In der Theorie der elliptischen Funktionen und in der Auflösungstheorie algebraischer Gleichungen erzielte dieser hochbegabte norwegische Mathematiker grundlegende Resultate.

„Nichs Examen, nur Mathematik“

Niels Henrik Abel wurde am 5. August 1802 als Sohn eines protestantischen Pastors im norwegischen Dorf Finnö geboren. Anfangs erhielt Abel Unterricht vom Vater. Von 1815 bis 1821 besuchte er dann die Domschule in Christiania, dem heutigen Oslo. Er war körperlich und psychisch schwächlich und sensibel. In den meisten Fächern war er mittelmäßig. Doch schon als 16jähriger zeigte er ein außergewöhnliches Talent für die Mathematik. Sein junger, verständnisvoller und intelligenter Mathematiklehrer, *B. M. Holmboe*, leitete seine Studien in ausgezeichneter Weise. *Abel* las Bücher von *Euler*, *Lacroix*, *Francœur*, *Poisson*, *Gauß*, *d'Alembert* und *Newton*.

Als Mathematikstudent an der 1811 gegründeten Universität in Christiania zeichnete er sich in den Jahren 1821 bis 1825 so aus, daß ihm ein Stipendium gewährt wurde, damit er seine Studien in Deutschland und Frankreich fortsetzen könne.

Im Herbst und Winter 1825/26 weilte *Abel* in Berlin. Hier traf er mit *A. L. Crelle* (1780 bis 1855), der später ein fürsorglicher Förderer *Abels* wurde, zusammen. Der schwedische Mathematiker *G. Mittag-Leffler* (1846 bis 1927) schildert den ersten Besuch *Abels* bei *Crelle* folgendermaßen (so wie der Berliner Mathematiker *K. Weierstraß* ihm darüber berichtete und letzterer es von *Crelle* selbst erfahren hatte): „Eines schönen Tages trat ein blonder Jüngling in *Crelles* Zimmer, sehr schüchtern, sehr jugendlich und von sehr intelligentem Aussehen. *Crelle* glaubte, daß er ein Examen zu absolvieren wünsche, um in das Gewerbe-Institut eintreten zu können, und erklärte, daß dies mit großen Schwierigkeiten verbunden sei. Da endlich öffnete der junge Mann seinen Mund und sagte:

‚Nichs Examen, nur Mathematik‘. *Crelle* erkannte, daß er es mit einem Ausländer zu tun hatte, und versuchte es mit Französisch, einer Sprache, die *Abel* ganz gut beherrschte, wenn auch nicht ohne Schwierigkeit. Auf die Frage *Crelles* nach seinen Studien antwortete er, daß er unter anderem *Crelles* eigene kürzlich (1823) erschienene Arbeit über „Analytische Facultäten“ gelesen habe, die ihn trotz vieler Fehler in höchstem Maße interessiert habe. Bei dem Besprechen dieser Fehler wurde *Crelle* ganz Ohr, und nun entwickelte sich ein Gespräch, das später zu einer engen Freundschaft zwischen *Crelle* und *Abel* führen sollte.“

Crelle erkannte das große Genie *Abels* und gewann ihn zum Mitarbeiter am geplanten *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. (Im ersten Band dieses *Crelleschen Journals* erschienen allein fünf Abhandlungen von *Abel*.)

Nach einem Abstecher nach Norditalien kam *Abel* am 10. Juli 1826 in Paris an. „Endlich bin ich jetzt am Brennpunkt aller meiner mathematischen Wünsche angekommen, in Paris“, schrieb er an Prof. *C. Hansteen* nach Christiania.

Hier in Paris wirkten damals so bedeutende Mathematiker wie *A. L. Cauchy* (1789 bis 1857), *A.-M. Legendre* und *S.-D. Poisson* (1781 bis 1840). Der Aufenthalt ist für *Abels* wissenschaftliche Entwicklung sehr förderlich gewesen.

Zwar mit hohem mathematischem Gewinn und vielen Anregungen, jedoch zugleich enttäuscht über die reservierte Haltung der französischen Mathematiker verließ *Abel* im Dezember 1826 Paris. Über Berlin kehrte er im Mai 1827 nach Christiania zurück. Dort wurde er 1828 der Vertreter Prof. *Hansteens* an der Universität. Ende 1828 verschlechterte sich *Abels* Gesundheitszustand sehr; am 6. April 1829 starb er an einem Lungenleiden.

Es gibt keine allgemeine Auflösungsformel

Ein berühmtes Resultat, das *Abel* erzielte, soll kurz erläutert werden. Es betrifft ein altes Problem über algebraische Gleichungen.

Quadratische Gleichungen wurden bereits vor über 2000 Jahren von den griechischen Mathematikern behandelt. Für diese Gleichungen gibt es eine seit langem bekannte Lösungsformel. Nachdem in der Renaissance Lösungsformeln auch für kubische und biquadratische Gleichungen gefunden worden waren, haben die Mathematiker im 17. und 18. Jahrhundert bis zu Beginn des 19. Jh. versucht; allgemeine Lösungsformeln für algebraische Gleichungen höheren als vierten Grades zu finden. Sie suchten nach einer Formel, die die Lösungen z. B. der Gleichung fünften Grades

$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

durch deren Koeffizienten ausdrückt (die a_0, a_1, a_2, ..., a_5 sind beliebige reelle Zahlen). Diese können in der Formel durch Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren miteinander verbunden sein; außerdem können darin Wurzelausdrücke aus den so gebildeten Größen auftreten.

Nur für spezielle Gleichungen konnte man bereits Lösungsformeln angeben.

Über 200 Jahre lang wurde um die allgemeinen algebraischen Gleichungen fünften und höheren Grades gerungen. Alle Bemühungen, solche Gleichungen durch Formeln exakt zu lösen, blieben ohne Erfolg. In seiner Doktorarbeit (1799) sprach *C. F. Gauß* die Vermutung aus, daß eine Auflösungsformel überhaupt nicht existiert: „Es dürfte wohl gar nicht so schwer sein, die Unmöglichkeit für den fünften Grad in aller Strenge zu beweisen; ich werde an anderer Stelle meine Untersuchungen über die Frage ausführlicher darlegen.“ Den Nachweis der Unmöglichkeit hat *Gauß* nicht publiziert. Einen Beweisversuch machte 1799 *Paolo Ruffini* (1765 bis 1822).

1823 beschäftigte sich der Student *Abel* mit diesem Problem. Er glaubte zunächst, eine Auflösungsformel der allgemeinen Gleichung fünften Grades gefunden zu haben. Doch bald entdeckte er seinen Irrtum. Weitere Untersuchungen führten ihn dann auf das Ergebnis: Für algebraische Gleichungen höheren als vierten Grades gibt es im allgemeinen keine Lösungsformeln. Damit wurde ein klassisches Problem der Algebra gelöst.

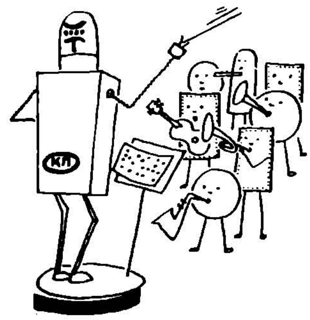
Nicht etwa das Unvermögen der Mathematiker ist die Ursache dafür, daß keine Lösungsformel gefunden werden kann. *Abel* bewies, daß eine solche Auflösungsformel unmöglich ist. Um algebraische Gleichungen fünften und höheren Grades zu lösen, ist man daher auf geeignete Näherungsverfahren angewiesen. Der *Satz von Abel* ist auch eine Folgerung eines Theorems der Galois-Theorie.

Es gibt in der Geschichte der Mathematik des 19. Jh. eine tragische Duplizität von Ereignissen: Die klassische Frage nach der Auflösbarkeit von Gleichungen ist unabhängig voneinander von zwei genialen jungen Mathematikern beantwortet worden, dem Norweger *N. H. Abel* und dem Franzosen *Evariste Galois* (1811 bis 1832); beide starben in jungen Jahren, *Abel* an der Tuberkulose im Alter von 26 Jahren, *Galois* in einem Duell im Alter von 20 Jahren.

H. Pieper

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 5. Mai 1978



Mathematik

Ma 5 ■1708 Anke und ihr Bruder Bernd halfen der Mutter vor Ostern beim Färben von Eiern. Anke hat zweimal soviel, die Mutter dreimal soviel Eier gefärbt wie Bernd. Insgesamt wurden mehr als 25, aber weniger als 35 Eier gefärbt. Wieviel Eier haben die Mutter, Anke bzw. Bernd gefärbt?

Schülerin Susanne Blohm, Grabow

Ma 5 ■1709 Wenn man die Summe aus zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen mit 23 multipliziert und von dem erhaltenen Produkt 343 subrahiert, so erhält man als Ergebnis 968. Um welche Zahlen handelt es sich?

Schüler K. Tietz, Strasburg

Ma 5 ■1710 Jeder Schüler aus den Klassen 5a, 5b und 5c einer Oberschule verpflichtet sich, bis zum Ende des Schuljahres 8 Mark zu erarbeiten und dem Solidaritätskonto für Chile zur Verfügung zu stellen. Zur Klasse 5a gehört ein Schüler mehr als zur Klasse 5c. Während einer Zwischenbilanz stellte sich heraus, daß die Schüler der Klasse 5b mit 128 Mark ihre Verpflichtung schon zur Hälfte erfüllt hatten. Das angestrebte Ziel der Schüler der Klassen 5a und 5c beträgt auf Grund der Selbstverpflichtung insgesamt 440 Mark. Wieviel Schüler gehören jeder dieser drei Klassen an?

Schülerin Birgit Weyh, Fambach, Kl. 8

Ma 5 ■1711 In zwei Großtanks eines Öllagers befanden sich ursprünglich zusammen 500 t Öl. Im ersten Tank lagerten 20 t Öl mehr als im zweiten. Auf Grund eines Lecks mußte der zweite Tank repariert werden. Nach Abschluß der Reparatur lagerten im zweiten Tank nur noch halb soviel Tonnen Öl wie ursprünglich im ersten. Wieviel Tonnen Öl befanden sich im Öllager, wenn nach der Reparatur 90 t Öl durch Tankwagen angeliefert wurden?

Schüler Michael Glockenstein, 8. OS Neubrandenburg, Kl. 5b

Ma 5 ■1712 In das nachfolgende Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzusetzen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind.

$$\begin{array}{ccccc} aabc & - & bac & = & def \\ : & & - & & + \\ ghe & - & cbd & = & ach \\ \hline g & \cdot & cbd & = & kdh \end{array}$$

Sch.

Ma 5 ■1713 Es gibt Zahlenfolgen, die eine bestimmte gleichbleibende Differenz haben, so z. B.:

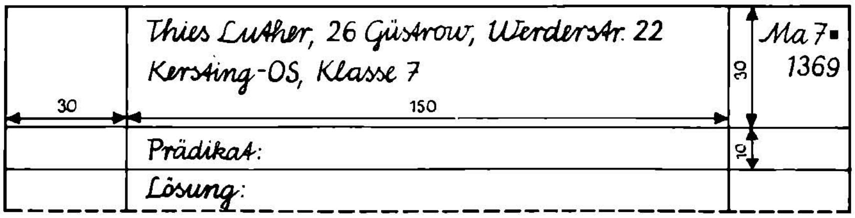
30, 60, 90, 120 (Differenz 30),
2, 7, 12, 17, 22 (Differenz 5),
0, 2, 4, 6, 8, 10 (Differenz 2).

		7		
	7			
				25
	13			

In die leeren Kästchen des nachstehend abgebildeten großen Quadrates sind Ziffern so einzutragen, daß in jeder waagerechten Zeile und senkrechten Spalte Zahlenfolgen enthalten sind, die eine bestimmte gleichbleibende Differenz haben.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■1714 Von den Schülern einer Klasse gehören genau 12 Schüler der Arbeitsgemeinschaft „Fotoamateure", genau 14 Schüler der AG „Radiobastler" und genau 15 Schüler der AG „Musikfreunde" an. Genau ein Schüler ist in allen drei AG's tätig. Genau 4 Schüler gehören sowohl der AG „Fotoamateure"



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1977/78 läuft von Heft 5/77 bis Heft 2/78. Zwischen dem 1. und 10. September 1978 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/77 bis 2/78 erworbenen Karten *geschlossen* an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.

Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/78 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/77 bis 2/78) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1977/78 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

als auch der AG „Radiobastler“ an. Genau 3 Schüler gehören sowohl der AG „Fotoamateure“ als auch der AG „Musikfreunde“ an. Genau 5 Schüler gehören sowohl der AG „Musikfreunde“ als auch der AG „Radiobastler“ an. Wieviel Schüler gehören zu dieser Klasse, wenn jeder Schüler in wenigstens einer AG tätig ist?

Schülerin Kerstin Müller, Wernshausen

Ma6 ▪1715 Einem Korb mit Äpfeln wurden zunächst 6 Äpfel, danach der dritte Teil der im Korb verbliebenen Äpfel und schließlich nochmals 6 Äpfel entnommen. Nun befand sich im Korb nur noch die halbe Anzahl der ursprünglich vorhandenen Äpfel. Wieviel Äpfel lagen ursprünglich im Korb?

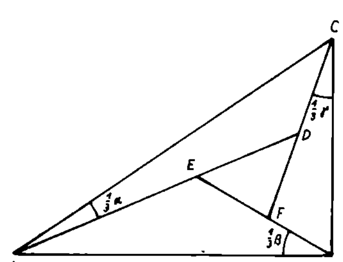
Schülerin Silke Herrmann, Krottorf

Ma6 ▪1716 Entlang eines Wohnblocks stehen genau 12 Bäume in gleichen Abständen. Hans und Werner laufen um die Wette. Sie starten zugleich am ersten Baum; Ziel ist der zwölfte Baum. Hans befand sich 8 s nach dem Start am achten Baum; Werner befand sich 7 s nach dem Start am siebten Baum. Nach wieviel Sekunden erreichte jeder der beiden Läufer das Ziel, wenn ihre Laufgeschwindigkeiten als konstant angenommen werden? Wer hat den Lauf gewonnen?

Schülerin Anke Malsch, Wernhausen

Ma6 ▪1717 Die abgebildete Figur stellt ein Dreieck ABC mit den Innenwinkelgrößen $\sphericalangle CAB=\alpha=39°$ und $\sphericalangle ABC=\beta=84°$ dar. In A wurde an AC der Winkel $\frac{1}{3}\alpha$, in B an BA der Winkel $\frac{1}{3}\beta$, in C an CB der Winkel $\frac{1}{3}\gamma$ angetragen, und zwar jeweils so, daß der freie Schenkel im Innern des Dreiecks ABC liegt. Die freien Schenkel der angetragenen Winkel schneiden sich in den Punkten D, E, F. Es sind die Größen der Innenwinkel des Dreiecks DEF zu berechnen!

Sch.



Ma6 ▪1718 Von den Schülern einer 6. Klasse wurden in einer Klassenarbeit im Fach Mathematik folgende Ergebnisse erzielt:
Der dritte Teil der Anzahl der Schüler dieser Klasse erhielt die Note 1. Die Anzahl der Schüler, die die Note 2 erhielten, war um 6 kleiner als die Anzahl der Schüler, die die Note 1 erhielten. Die Note 3 erhielten soviel Schüler, wie es Schüler mit den Noten 1 oder 2 gab. Ein Schüler erhielt die Note 4; kein Schüler die Note 5. Es haben alle Schüler dieser Klasse die Klassenarbeit mitgeschrieben. Wieviel Schüler erhielten die Noten 1, 2 bzw. 3?

Schüler Ralf-Peter Lorenz, POS Hasenthal, Kl. 6

Ma7 ▪1719 Die Zahl $\frac{3}{35}$ soll als Differenz $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ dargestellt werden, wobei $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ unkürzbare echte Brüche und a, b, c, d paarweise verschiedene natürliche Zahlen sein sollen.

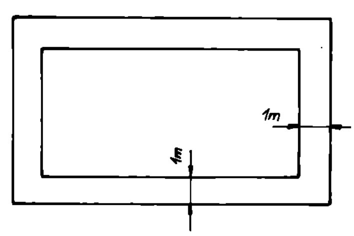
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma7 ▪1720 Andreas fährt mit seinem Fahrrad vom Ort A nach dem 18 km entfernten Ort B; Matthias fährt ihm von B aus entgegen. Andreas fährt 15 min früher los als Matthias. Beide fahren mit der gleichen konstanten Geschwindigkeit $v=24\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Wie weit sind beide vom Ort A entfernt, wenn sie sich treffen?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

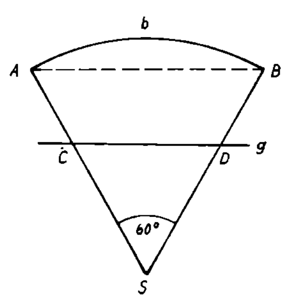
Ma7 ▪1721 Eine Rasenfläche in Form eines Rechtecks, das doppelt so lang wie breit ist, soll von einem 1 m breiten Weg umsäumt werden. Für diesen Weg werden 640 quadratische Betonplatten von 50 cm Seitenlänge benötigt. Welchen Inhalt hat die Rasenfläche?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz



Ma7 ▪1722 Die abgebildete Figur stellt einen Kreissektor ASB mit dem Radius $\overline{SA}=\overline{SB}=r=12$ cm und dem Zentriwinkel $\sphericalangle ASB=60°$ dar. Parallel zur Geraden AB wurde eine Gerade g, die $\overline{AS}$ in einem inneren Punkt C und $\overline{BS}$ in einem inneren Punkt D schneidet, so gezogen, daß der Umfang des Dreiecks CSD gleich dem Umfang der Figur ist, die von den Strecken $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ und dem Kreisbogen $b=\overset{\frown}{AB}$ gebildet wird. Es ist die Länge der Strecke $\overline{CS}$ zu berechnen!

Sch.



Ma8 ▪1723 Die Abbildung stellt ein Würfelnetz dar. Der eingezeichnete Streckenzug sei der Weg einer Ameise.

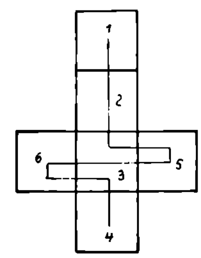
a) Zeichne ein Schrägbild des Würfels mit dem Weg der Ameise!

b) Zeichne ein Würfelnetz so, daß die Ameise jeden Flächenmittelpunkt der sechs Quadratflächen genau einmal durchläuft und dabei den kürzest möglichen Weg beschreibt.

c) Zeichne ein Schrägbild dieses Würfels mit dem Weg der Ameise!

d) Wie lang ist der Weg, wenn die Würfelkante 1 cm lang ist?

Fr.



Ma8 ▪1724 Gegeben sei ein Kreis k mit einem Durchmesser von 6 cm Länge. Die Randpunkte des Durchmessers seien mit A und B bezeichnet. Der Punkt D sei Mittelpunkt von $\overline{AB}$ und zugleich Höhenfußpunkt des Dreiecks ABC. C liege auf der Peripherie von k. Berechne den Umfang des Dreiecks ABC und den Flächeninhalt eines der beiden Kreissegmente!

Gudrun Tappert, Wilhelm-Pieck-Stadt Guben

Ma8 ▪1725 Es werden fünf beliebige aufeinanderfolgende natürliche Zahlen addiert. Mit welcher Ziffer endet eine solche Summe, wenn die erste Zahl a) gerade, b) ungerade ist? Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Summe von zehn aufeinanderfolgenden durch 5 teilbaren natürlichen Zahlen, wenn die erste Zahl gerade ist?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma8 ▪1726 Gesucht sind alle Brüche aus der Klasse $\frac{1}{5}$, bei denen die Summe aus Zähler und Nenner eine zweistellige Quadratzahl ist.

Andreas Fittge, EOS H. Hertz, Berlin, Kl. 9

Ma9 ▪1727 Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen a und b mit $a\neq 0$ und $b\neq 0$ der Bruch

$$\frac{5a^2+a^4}{35b^3+7b}$$ durch 6 kürzbar ist!

Ralph Ott, OS Demmin, Kl. 9

Ma9 ▪1728 In einem rechtwinkligen Dreieck ABC ($\sphericalangle ACB=R$) werde die Höhe h_c von einem Strahl geschnitten, dessen Anfangspunkt ein Eckpunkt des Dreiecks ist (nicht C). Die Schnittpunkte des Strahls mit der Höhe h_c bzw. mit der dem Anfangspunkt gegenüberliegenden Seite seien mit D bzw. E bezeichnet. Unter welcher Bedingung ist das Dreieck DEC gleichschenklig? ($\overline{DE}$ sei Basis.)

K. Häfner, Fachberater f. Math. OS Brehme

Ma9 ▪1729 Man wähle eine beliebige dreistellige Zahl, deren Ziffern nicht alle gleich sind. Dann ordne man die Ziffern der Größe nach, indem man mit der größten Ziffer beginnt; man erhält so die dreistellige Zahl x.

Die Zahl y erhält man, wenn man alle Ziffern der Zahl x so ordnet, daß die kleinste am Anfang steht. Nun bilde man die Zahl $x-y$. Man beweise, daß die Zahl $x-y$ stets durch 3, durch 9, durch 11, durch 33 und durch 99 teilbar ist.
Wenn man so weiter verfährt, d. h. die Zahl $x-y$ wieder so behandelt wie die ursprüngliche dreistellige Zahl unserer Aufgabe, so erhält man immer Zahlen mit den gleichen Eigenschaften. Nach endlich vielen Schritten ergibt sich dann stets ein und dieselbe feste dreistellige Zahl. Wie heißt diese?

Marcus Schütz, OS Berlin-Lichtenberg, Kl. 9

Ma 9 ▪1730 In ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b ist ein einbeschriebenes Quadrat $CDEF$ so zu konstruieren, daß D auf $\overline{AC}$, F auf $\overline{BC}$ und E auf $\overline{AB}$ liegt. Der Flächeninhalt A, die Länge der Diagonalen d und der Umfang u dieses Quadrats sind zu berechnen (in a und b auszudrücken)!

Ralph Ott, OS Demmin, Kl. 9

Ma 10/12 ▪1731 In einem Kreis stehen zwei Sehnen senkrecht aufeinander. Die kürzere Sehne $\overline{CD}$ schneidet die längere Sehne $\overline{AB}$ in S. Es ist $\overline{AS}=8$ cm und $\overline{BS}=3$ cm. Ferner gilt: $\overline{AS}=\overline{BS}+\overline{BC}$. Man zeige, daß gilt $\overline{AD}=\overline{CD}$!

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 10/12 ▪1732 In einem unregelmäßigen Tetraeder stehen die drei Seitenflächen paarweise senkrecht aufeinander. Die Grundkanten sind 6,4 cm bzw. 5,83 cm bzw. 5 cm lang. Wie lang sind die drei Seitenkanten? (Sinnvoll runden!)

Jürgen Gräfenstein, Dresden, Kl. 8

Ma 10/12 ▪1733 Man bestimme alle ganzen Zahlen x, für die x^3+x^2-4x+4 Kubikzahl ist!

Dipl.-Math. W. Moldenhauer, W.-Pieck-Universität Rostock

Ma 10/12 ▪1734 Wieviel Prozent der Oberfläche eines Würfels ist als sichtbar zeichnerisch dargestellt, wenn man den Würfel in Kavaliersperspektive

a) mit $\alpha=45°$ und $q=\frac{1}{2}$

b) mit $\alpha=30°$ und $q=\frac{1}{3}$ abbildet? *Fr.*

Zwei Quadratflächen seien parallel zur Bildebene.

Physik

Ph 6 ▪31 Ein Klassenzimmer ist 10,25 m lang, 8,25 m breit und 5,5 m hoch.

a) Welche Masse hat die Luft in diesem Klassenzimmer, wenn die Dichte der Luft $1{,}29\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ beträgt?

b) Könnte man einen Körper gleicher Masse hinaustragen oder brauchte man dazu einen Handwagen?

(Erst schätzen, dann rechnen!)

Ein Handwagen kann mit 150 kg Masse beladen werden. *Adalbert Schatz, Leipzig*

Ph 7 ▪32 Ein Pkw fuhr vom Ort A zum Ort B. Ein Drittel des gesamten Weges legte er mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zurück. Den restlichen Weg fuhr er mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wie groß war die Durchschnittsgeschwindigkeit, mit der der Pkw von A nach B fuhr?

Birgit Arndt, Diesterweg-OS Loitz, Kl. 7

Ph 8 ▪33 Gegeben sei ein senkrecht stehender Kessel (in Form eines geraden Kreiszylinders) mit einem Innendurchmesser von $d=37$ cm. In der Höhe $h=93$ cm über dem Kesselboden befindet sich eine Überlauföffnung. (Der Kessel ist mit einem Kohlebadeofen vergleichbar.) Der Kessel sei mit Wasser der Temperatur $t_1=15\,°\text{C}$ gefüllt und wurde durch die Heizung auf eine Temperatur von $t_2=70\,°\text{C}$ gebracht. Durch die Erwärmung dehnt sich das Wasser aus und läuft durch die Überlauföffnung ab. Das überlaufende Wasser werde in einem Meßzylinder aufgefangen. Wieviel cm³ Wasser befinden sich in dem Meßzylinder, wenn die gesamte, der Temperatur von 70 °C entsprechende Überlaufmenge aufgefangen und dann auf $t_3=20\,°\text{C}$ abgekühlt wurde?

Anmerkung: Da Wasser keinen konstanten Ausdehnungskoeffizienten hat, sind die folgenden Dichtewerte (ϱ) zu verwenden:

$$t_1=15\,°\text{C};\ \varrho_1=0{,}9990\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$
$$t_2=70\,°\text{C};\ \varrho_2=0{,}9777\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3},$$
$$t_3=20\,°\text{C};\ \varrho_3=0{,}9982\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}.$$

Ing. A. Körner, Leipzig

Ph 9 ▪34 Die defekte Dachrinne eines doppelstöckigen Hauses tropft 120mal in einer Minute. Wenn ein Wassertropfen den Erdboden (gleiche Höhe wie der Fußboden der unteren Etage) erreicht, befindet sich der nächste schon in der Luft, auf halber Höhe des oberen Stockwerkes. In welcher Höhe ist die Dachrinne angebracht? (Luftwiderstand wird vernachlässigt.)

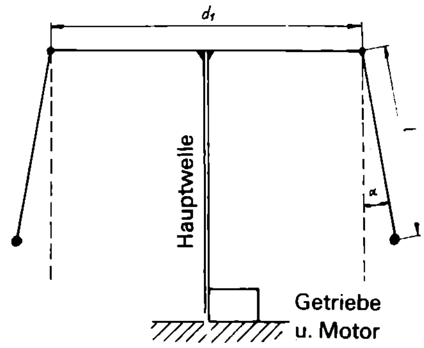
Olaf Raeke, Neubrandenburg

Ph 10/12 ▪35 An einem Kettenkarussell wurde beobachtet, daß die Tragketten der Sitze bei voller Fahrt gegenüber der Senkrechten um 15° nach außen gelenkt wurden. Die Schwerpunkte der Sitze haben vom Aufhängungspunkt der Tragketten einen Abstand von $l=2{,}55$ m, während die genannten Aufhängungspunkte auf einem Kreis mit $d_1=10{,}08$ m Durchmesser liegen.

a) Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich die Sitze?

b) Wie groß ist die Drehzahl des Antriebsmotors, wenn zwischen Motor und Karussell-Hauptwelle ein Getriebe mit dem Übersetzungsverhältnis $i=116$ eingeschaltet ist?

Anmerkung: Die Masse der Ketten, Reibung und Luftwiderstand werden nicht berücksichtigt. In der Technik wird unter dem Übersetzungsverhältnis i allgemein das Verhältnis Antriebs- zu Abtriebszahl verstanden. Prinzipskizze:



Ing. A. Körner, Leipzig

Chemie

Ch 7 ▪25 3,4 g Eisen werden oxydiert. Berechne,

a) wieviel Eisen(II)-oxid,

b) wieviel Eisen(II, III)-oxid,

c) wieviel Eisen(III)-oxid

dann daraus entstehen!

d) Ermittle graphisch die Masse Eisen(II)-oxid, die aus 5 g, 8 g und 9,5 g Eisen entsteht!

Ch 8 ▪26 Kalkmörtel ist ein wichtiger Baustoff.

a) Wieviel Kilogramm Kohlendioxid müssen 10 kg Kalkmörtel, die 24% Kalziumhydroxid enthalten, aufnehmen, wenn sich beim Abbinden Kalziumkarbonat bildet?

b) Wieviel Liter des Gases sind das?

c) Wieviel Wasser entsteht dabei?

d) 0,7 g des entstehenden Kalziumkarbonats werden mit Salzsäure versetzt. Wieviel Milliliter trockenes Kohlendioxid von 18 °C und 745 Torr entstehen dabei?

Ch 9 ▪27 In einem Labor soll Äthansäure nach zwei verschiedenen Methoden hergestellt werden. Es stehen jeweils 50 g Äthen und Äthanol als Ausgangsstoffe zur Verfügung. Welche Variante zur Herstellung von Äthansäure liefert die größte Ausbeute?

Ch 10/12 ▪28 In unserer Republik wird Schwefelsäure auf Grund der vielfältigen Verwendung in großen Mengen hergestellt. Im Rahmen der engen wirtschaftlichen Beziehungen der sozialistischen Länder erhalten wir aus der Sowjetunion umfangreiche Lieferungen sulfidischer Erze. Aus 8 t Eisenkies (Eisensulfid) mit 15% Verunreinigungen soll eine 60%ige Schwefelsäure hergestellt werden. Die Ausbeute an Schwefeldioxid beträgt 96%. Wieviel Tonnen 60%ige Schwefelsäure entstehen?

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir wollen auch heute wieder Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vorstellen, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am alpha-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

In Heft 1/1977 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 5 ■ 1567 Vier Schülerinnen, und zwar Ina, Katrin, Andrea und Carola, bilden einen Timurtrupp. Sie helfen den Rentnerinnen Frau Neumann, Frau Peter, Frau Heller und Frau Weise. Jede dieser vier Schülerinnen hilft genau einer dieser Frauen. Nun wissen wir folgendes:

a) Ina hilft weder Frau Heller noch Frau Peter,
b) Carola hilft Frau Neumann,
c) Andrea hilft nicht Frau Peter.

Wie lauten die Vornamen derjenigen Schülerinnen, die Frau Peter, Frau Heller bzw. Frau Weise helfen?

Schülerin Birgit Weyh, Fambach

In Heft 3/77 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:

Aus a) folgt: Ina hilft entweder Frau Neumann oder Frau Weise. Da nach b) Carola die Helferin von Frau Neumann ist, so hilft Ina Frau Weise. Aus c) folgt: Andrea hilft Frau Heller. Somit hilft Katrin Frau Peter.

Wir stellen nun die Lösung der Schülerin *Frauke Wagner* aus Güstrow vor, die Schülerin einer 4. Klasse der Kersting-Oberschule ist. Frauke löste diese Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle.

Wir wollen das Vorgehen von Frauke näher erläutern.

In der Aufgabe heißt es unter a): Ina hilft weder Frau Heller noch Frau Peter. Frauke trägt nun in die entsprechenden leeren Felder „Nein“ ein. In der Aufgabe heißt es unter b): Carola hilft Frau Neumann. Frauke trägt in das entsprechende Feld „Ja“ ein. Da jede Schülerin genau eine Rentnerin betreut, trägt Frauke in der Zeile für Carola noch dreimal „Nein“ ein.

In der Aufgabe heißt es unter c): Andrea hilft nicht Frau Peter. Frauke trägt in das entsprechende Feld „Nein“ ein. In der Spalte unter Peter finden wir jetzt drei Felder mit der Eintragung „Nein“. Folglich muß das noch freie Feld die Eintragung „Ja“ erhalten. In der Zeile für Katrin müssen die freien Felder nun die Eintragung „Nein“ erhalten. Das wird analog fortgesetzt, bis jedes der Felder entweder die Eintragung „Ja“ oder „Nein“ aufweist. Danach läßt sich ablesen, wer von den Schülerinnen welcher Rentnerin hilft.

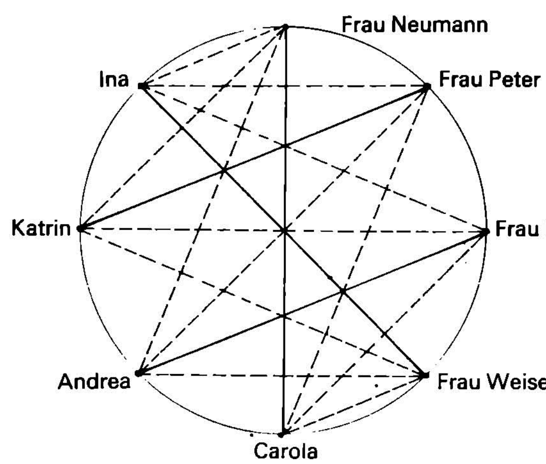
Für eine Schülerin einer 4. Klasse stellt diese Lösung eine ausgezeichnete Leistung dar.

Der Schüler Tino Heber aus Falkenberg, der die 5. Klasse besucht, sandte uns eine ähnliche Lösung. Auf einem Kreis legt er acht Punkte fest und versieht diese mit den entsprechenden Namen. Trifft der Sachverhalt „x hilft y“ zu, so verbindet er zwei einander entsprechende Punkte durch eine Gerade; trifft dieser Sachverhalt nicht zu, so verbindet er zwei einander entsprechende Punkte durch eine gestrichelt gezeichnete Gerade.

Auch Tino gebührt ein Lob für seine einwandfreie Lösung.

J. Lehmann/Th. Scholl

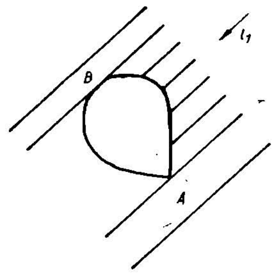
Vorname	Name Neumann	Peter	Heller	Weise
Ina	Nein	a) Nein	a) Nein	Ja
Katrin	Nein	Ja	Nein	Nein
Andrea	Nein	c) Nein	Ja	Nein
Carola	b) Ja	Nein	Nein	Nein



Eine Aufgabe von Leninpreisträger Prof. Dr. Wladimir Boltjanski

Korrespondierendes Mitglied der sowjetischen Akademie der pädagogischen Wissenschaften

▲1705▲ Es seien in einer Ebene eine beschränkte konvexe Figur (eine Figur heißt konvex, wenn für je zwei Punkte der Figur die Verbindungsstrecke dieser Punkte ganz zur Figur gehört, z. B. Kreis, Rechteck) und ein Büschel B paralleler Geraden (Lichtstrahlen) mit der Richtung l gegeben. Ein Randpunkt A der Figur F heißt aus der Richtung l beleuchtet, wenn das Büschel der Richtung l den Randpunkt A und eine volle Umgebung von A (d. h. rechts und links von A befindliche Randpunkte) trifft. In der Abbildung werden z. B. in der Richtung l_1 die Randpunkte A und B nicht beleuchtet.



Wieviel Beleuchtungsrichtungen sind für die vollständige Beleuchtung des Randes

a) eines Kreises,
b) eines Parallelogramms nötig?

Wieviel Beleuchtungsrichtungen benötigt man mindestens für die vollständige Beleuchtung des Randes einer beschränkten ebenen konvexen Figur?

Berufsbild:

Facharbeiter für Eisenbahnbau-technik

Wie oft sehen wir aus dem Eisenbahnfenster entlang dem Schienenstrang fleißige Bauarbeiter am Werk. So eine Gleisbaustelle bietet ein recht interessantes Bild. Sie wird beherrscht von modernen gigantisch aussehenden Maschinen, wie z. B. dem dieselelektrisch angetriebenen Gleisjochverlegekran *Platow UK 25* mit seiner Länge von 44,86 Metern. 720 Meter komplette Gleisanlagen zieht er auf 12 Rollwagen hinter sich her. Er kann mit einer Montagefabrik verglichen werden. Auch wuchtige Spezialkrane sind weithin sichtbar. Schweißarbeiten werden auf diesen Bauplätzen oft direkt an befahrenen Streckenabschnitten ausgeführt. Die moderne Technik ermöglicht es, in einer Schicht bis zu 500 bis 1000 Meter Gleis zu verlegen.

Wenn der Facharbeiter für Eisenbahnbautechnik auch heute nicht mehr mit Stopfhacke und Kronenschlüssel von Schwelle zu Schwelle zieht und kleine Maschinen ihn von der früher vorherrschenden körperlichen Schwerstarbeit weitgehend entlasten, so muß er doch in jeder Beziehung ein ganzer Kerl sein. Nicht nur seine Muskelkräfte müssen entwickelt sein, er muß auch denken können. Ein anwendungsbereites Wissen und Können auf mathematisch-naturwissenschaftlichem Gebiet und technische Interessen sowie Liebe zur Natur sind gute Voraussetzungen für das Erlernen der Berufe *Facharbeiter für Eisenbahnbautechnik* und *Gleisbaufacharbeiter*. Der laufende Fünfjahrplan sieht den Bau von 800 km zweiter Gleise vor. Das ist eine hohe Zielstellung für die Baueisenbahner. Es lohnt sich mitzuarbeiten!

Das nachfolgende Berufsbild soll der Berufsaufklärung über diese volkswirtschaftlich wichtigen Berufe dienen. Vielleicht regen die beiden Beispiele fachkundlicher Mathematikaufgaben ein wenig zum Nachdenken an.

Facharbeiter für Eisenbahnbautechnik sowie Gleisbaufacharbeiter bauen Gleisanlagen und halten Gleise, Weichen und Kreuzungen nach festliegendem Wartungsplan instand. Sie helfen, die Leistungsfähigkeit des Streckennetzes der Deutschen Reichsbahn und der schienengebundenen Nahverkehrsmittel zu erhöhen.

Tätigkeitsmerkmale: Bedienung, Wartung und Pflege von Maschinen, maschinellen Anlagen und Aggregaten, die beim Eisenbahnbau eingesetzt werden, wie Stopfgeräte, Schraubenein- und -ausdrehmaschinen, Schienensägen. Entsprechend der beruflichen Spezialisierung – Gleisbau, Tiefbau oder Baumaschinen – bedienen sie auch Großgeräte für die Gleisbettreinigung, für die Montage und das Verlegen von Gleisjochen sowie Spezialkrane.

Voraussetzungen: Erfolgreicher Abschluß der 10. Klasse; guter allgemeiner Gesundheitszustand, kräftiger Körperbau, Reaktionsfähigkeit, Farbtüchtigkeit, gutes Seh- und Hörvermögen.

Lehrzeit: Zwei Jahre. Während der Ausbildung wird u. a. ein Befähigungsnachweis erworben, z. B. Grundlehrgang für Oberbauschweißer oder Fahrerlaubnis Klasse V oder Erlaubnis zum Bedienen von Hebezeugen bzw. Großbaumaschinen.

Bei Berufsausbildung mit Abitur umfaßt die Lehrzeit drei Jahre.

Einsatzmöglichkeiten: Im Hauptdienstzweig Bahnanlagen der Deutschen Reichsbahn, im Bereich der Reichsbahnbaudirektion, in Nahverkehrsbetrieben der Großstädte sowie in Bergwerken und anderen Großbetrieben, die über werkseigene Bahnanlagen verfügen.

Perspektiven:

- Qualifizierung zum Spezialisten, z. B. zum Fahrer schwerer Hebefahrzeuge/Oberbaugroßmaschinen, Bediener von Kränen, Oberbauschweißer mit Spezialkenntnissen
- Meister
- Ingenieur
- Diplomingenieur.

Abgänger der 8. Klasse können ab 1977 in einer dreijährigen Lehrzeit den Beruf als Gleisbaufacharbeiter erlernen. Ihr Aufgabengebiet erstreckt sich auf das Laden und Transportieren von Gleisbaustoffen, Bauen und Pflegen von Böschungsbefestigungen und Anlagen für die Entwässerung, den Brand- und Schneeschutz.

Weitere Auskünfte erteilen die Abteilungen Berufsbildung/Berufsberatung bei den Räten der Kreise und Bezirke sowie die Dienststellen der Deutschen Reichsbahn.

G. Klemm/R. Wiegand

Aufgabe: a) Bei schienengleichen Fahrzeugen werden bei höheren Geschwindigkeiten in Gleisbögen Überhöhungen eingebaut. Diese Überhöhungen haben die Aufgabe, die Fliehkräfte in den Kurven möglichst zu kompensieren. Dadurch wird eine gleichmäßige Belastung und Abnutzung der Schienen erreicht und die Sicherheit gegen Kippen bei den Fahrzeugen erhöht. Die auf Reisende und Ladungen wirkenden Kräfte werden ausgeglichen und somit Unfälle bei Reisenden und Beschädigungen der Güter verhindert.

Die Regelüberhöhung für Strecken, die mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten befahren werden, wird nach folgender Formel berechnet:

$$\ddot{U}_r = \frac{8 \cdot V^2}{R} \qquad \frac{V \quad\; R \quad \ddot{U}_r}{\mathrm{km \cdot h^{-1} \; m \; mm}}$$

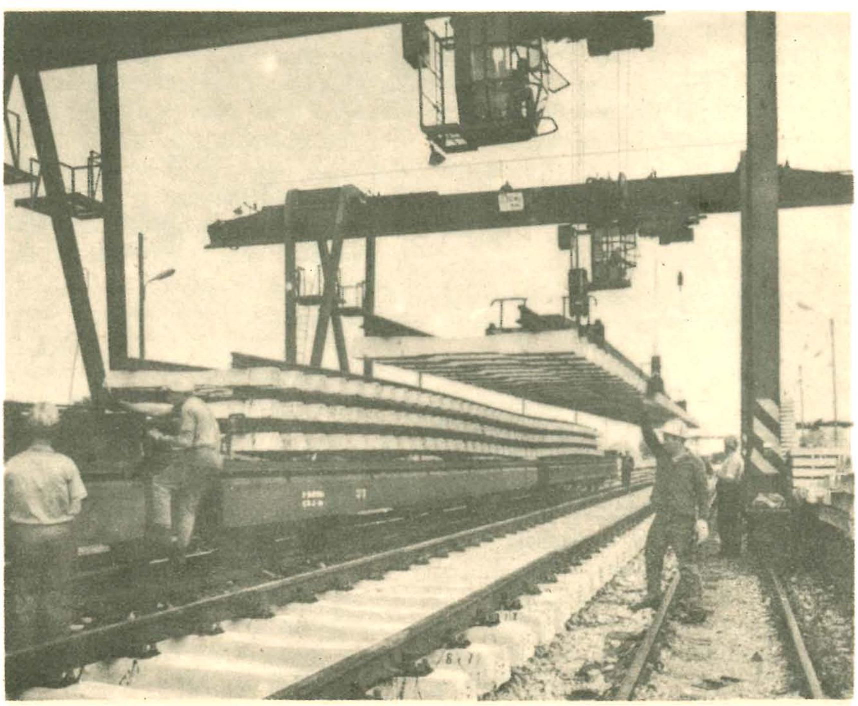
Aufgabe: $V = 100\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $R = 800\ \mathrm{m}$

(R = Radius des Bogens)

b) Gestatten die örtlichen Verhältnisse nicht den Bau einer Regelüberhöhung, so ist eine Mindestüberhöhung anzuwenden, die für Bögen $R < 300\ \mathrm{m}$ nach folgender Formel zu berechnen ist:

$$U_{\min} = \frac{11{,}8 \cdot V^2}{R} \left(\frac{R}{4} + 25\right) \qquad \frac{V \quad\; R \; \ddot{U}_{\min}}{\mathrm{km \cdot h^{-1} \; m \; mm}}$$

Aufgabe: $V = 50\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $R = 250\ \mathrm{m}$



ARBEITS-GEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Mathematische Pokalwettbewerbe in Strasburg

Als in Strasburg durch Schulneubau und die Aufteilung aus einer großen Schule drei kleinere entstanden, wurde die Idee geboren, die Jungen Mathematiker der Klassen 4 und 5 aller drei Schulen in einer Stadt-Arbeitsgemeinschaft zusammenzufassen. Um durch zahlreiche Wettbewerbe das Interesse zu erhalten und zu vertiefen, führen wir viermal im Jahr Pokalwettbewerbe durch, zu denen jede Schule mit einer Mannschaft, bestehend aus Schülern der Klassen 4 und 5, startet. Alle Schulen des Kreisgebietes luden wir dazu ein, und bald wurde ein Wettbewerb auf Kreisebene daraus. Dabei erwies sich der Pokal tatsächlich als Wanderpokal.

An einem Vormittag (mittwochs) kommen Schüler und ihre Betreuer sowie die Jury-Mitglieder nach Strasburg. In einer zweistündigen Klausur werden drei Aufgaben gelöst. In die Mannschaftswertung kommen die Punktzahlen der drei erfolgreichsten Mitglieder jeder Mannschaft. In der Einzelwertung erhalten die jeweils zehn Besten eine Urkunde. Seit dem vergangenen Schuljahr führt auch unser Bezirk einen derartigen Wettbewerb durch.

Um die dem Mannschaftswettbewerb entwachsenen Schüler der sechsten und siebenten Klassen weiter zu betreuen, laden wir etwa zehn Junge Mathematiker zum Wettbewerb um die Urkunde „Bester Junger Mathematiker der Klasse 6 bzw. 7 des Kreises Strasburg" ein.

Wir überreichen eine Auswahl von Aufgaben.

Renate Diessner

Pokalwettbewerb Klasse 4

▲1▲ Inge geht für Mutti einkaufen. Sie kauft: 1 Weißbrot zu 500 g, 2 Stück Butter zu je 250 g, 5 Bockwürste zu je 100 g. Sie erhält von Mutti 10 Mark. Inge schaut auf die Preisliste:

Weißbrot	500 g	–,70 M
Butter	250 g	2,50 M
Bockwurst	100 g	–,75 M

a) Wieviel Geld erhält sie zurück?

b) Wie schwer sind die Waren im Netz?

▲2▲ Addiert man zum Siebenfachen einer Zahl 76 und multipliziert die Summe mit 8, so erhält man 696 mehr als das Dreifache von 8.

▲3▲ Zeichne einen Punkt S! Von S aus zeichne nun 5 Strahlen! Zeichne ferner zwei Geraden, die gleiche Richtung haben! Die beiden Geraden sollen alle 5 Strahlen schneiden.

Wieviel gezeichnete Dreiecke und wieviel gezeichnete Vierecke sind in der Zeichnung enthalten?

Pokalwettbewerb Klasse 5

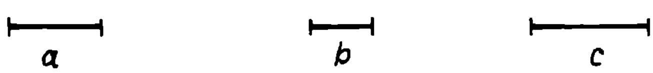
▲1▲ Eine Strecke $\overline{AB}$ ist 72 m lang. Durch die Punkte C und D wird sie in drei Teilstrecken geteilt. Die Teilstrecke $\overline{CD}$ ist doppelt so lang wie die Teilstrecke $\overline{AC}$. Die Teilstrecke $\overline{DB}$ dagegen besitzt die dreifache Länge der Teilstrecke $\overline{CD}$.

Berechne die Längen der einzelnen Teilstrecken!

▲2▲ Unter den Teilnehmern einer Arbeitsgemeinschaft Mathematik befinden sich genau dreimal soviel Jungen wie Mädchen. Als Ursula einmal fehlte, hatte ein Arbeitsgemeinschaftsmitglied Uwe als Gast mitgebracht. An diesem Tag waren viermal soviel Jungen wie Mädchen anwesend.

Wieviel Jungen und wieviel Mädchen nehmen regelmäßig an der Arbeitsgemeinschaft teil?

▲3▲ Gegeben sind drei Strecken mit den Längen a, b und c.



Konstruiere eine Strecke $\overline{AB}$ mit der Länge

$$2\cdot(a+3\cdot b-c)!$$

Bei der Konstruktion darf die Maßeinteilung des Lineals nicht benutzt werden. Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

Miß die Strecke $\overline{AB}$ nach Abschluß der Konstruktion, und schreibe das Ergebnis auf!

Talentsuche Mathematik

Unter diesem Titel veranstaltete der Rat des Bezirkes Neubrandenburg (Abt. Volksbildung) eine Aktion für Junge Mathematiker der Klassen 4 bis 6. Aus den an die Kreise verschickten Aufgabensammlungen nutzten wir zahlreiche Aufgaben für unsere Pokalwettbewerbe. Wir veröffentlichen eine Auswahl dieser Aufgaben:

Klassenstufe 5

▲1▲ Nach dem Plan sind von einem Zementwerk im 2. Halbjahr 16400 t Zement zu produzieren. Im Juli werden 2430 t, im August 2310 t, im September 2680 t, im Oktober 2830 t, im November 2940 t produziert.

a) Berechne die hinreichend kleinste Anzahl von Tonnen Zement, die im Dezember produziert werden müssen, um den Plan zu erfüllen!

b) Berechne den Preis dieser Menge vom Dezember, wenn eine Tonne Zement 39,– M kostet!

▲2▲ Der Schulgarten einer Stadtschule hat einen Flächeninhalt von 0,15 ha. Der Garten wird in 9 Parzellen aufgeteilt, die einen Flächeninhalt von je 150 m² bzw. 200 m² besitzen.

Wieviel Parzellen von jeder der beiden Größen befinden sich im Garten?

▲3▲ Eine Strecke von 168 m Länge wurde in drei Teile geteilt. Die zweite Teilstrecke war dreimal so groß wie die erste, dagegen betrug die dritte Teilstrecke das Vierfache der ersten Strecke.

Berechne die Länge der einzelnen Teilstrecken!

▲4▲ Gesucht ist eine natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:

Dividiert man 100 durch diese Zahl, so bleibt der Rest 4, dividiert man 90 durch diese Zahl, so bleibt der Rest 18.

Wie lautet die gesuchte Zahl?

▲5▲ Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 968. Ein Summand endet mit einer Null. Streicht man diese Null, so erhält man die andere Zahl.

Bestimme diese beiden Zahlen!

▲6▲ a) Wieviel zweistellige natürliche Zahlen gibt es, bei denen die Differenz der beiden Ziffern gleich 5 ist?

b) Bei wie vielen dieser Zahlen ist die Zahl selbst achtmal so groß wie ihre Quersumme, d. h. wie die Summe ihrer beiden Ziffern?

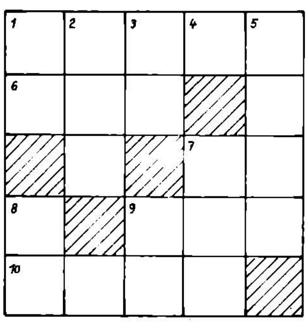
Im Kreis Strasburg (Bez. Neubrandenburg) wird an Stelle des sonst üblichen Stempels der Abteilungen Volksbildung ein Stempel verwendet, der die Idee der Mathematikolympiaden kennzeichnet. Er wird nicht nur für das Klausurpapier verwendet, sondern auch für die Urkunden der Besten der Mathematikolympiaden und der Pokalwettbewerbe (s. Abb.).

In freien Stunden alpha heiter

Kreuzzahlrätsel

Waagerecht:

1. Eine fünfstellige Zahl mit Ziffern in natürlicher Folge
6. durch 9 teilbare Zahl
7. die verdoppelte Zahl von 3. senkrecht
8. Quadratwurzel aus der Zahl 1. senkrecht
9. Quadrat einer Primzahl
10. Zahl aus gleichen Ziffern



Senkrecht:

1. Quadrat einer Primzahl
2. durch 11 teilbare Zahl
3. Quadrat einer Primzahl
4. Primzahl
5. Vierstellige Zahl mit Ziffern in natürlicher Folge
7. durch 9 teilbare Zahl
8. Primzahl
9. Primzahl

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Relativer Schachtelsatz oder geschachtelter Relativsatz

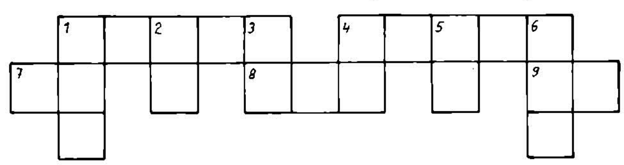
Die Leser, die eine Wettbewerbsaufgabe, die in der *alpha*, die durch den Postzeitungsvertrieb, der jederzeit Bestellungen, die in einer Form, die schriftlich sein muß, entgegennimmt, zugestellt wird, veröffentlicht ist, lösen und an die Redaktion, die sich in Leipzig, das ist die Postleitzahl 7027, befindet, schicken, erhalten eine Antwortkarte.

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Silbenkreuzworträtsel

Waagerecht:

1. Zeichengerät im Mathematik-Kabinett
4. Faktor vor einer Variablen
7. norwegischer Mathematiker (1802 bis 1829)
8. Fremdwort für „Begriff“
9. französischer Mathematiker (1601 bis 1665)



Senkrecht:

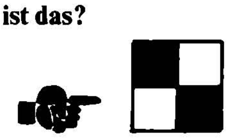
1. Form einer Darstellung von Zahlenpaaren
2. Einheit für das Volumen von Flüssigkeiten
3. Anzahl der Lebensjahre
4. Fremdwort für „Kegel“
5. ebenes geometrisches Gebilde
6. Abstand

OStR K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

Auf der Waage

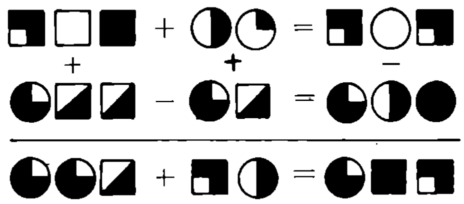
Die kleine Dame betrat die Waage und sagte: „Ich wiege also nicht 20 Kilo zuviel, ich bin laut Tabelle nur 50 Zentimeter zu klein!“

Was ist das?

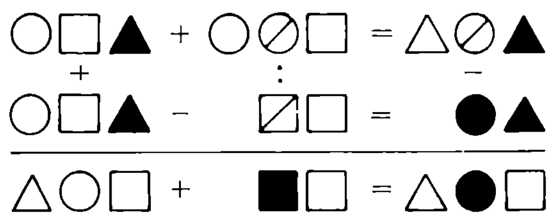


Kombiniere und rechne!

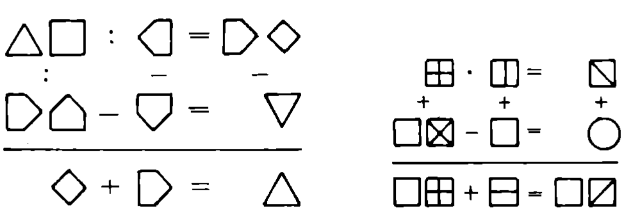
Jedes Zeichen (jeder Buchstabe, jede Figur) bedeutet eine Ziffer, gleiche Zeichen sind gleiche Ziffern.



Birgit Wunsch, 107. OS Dresden, Kl. 5



Diplom-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald



Schüler Heiko Müller, Schmalkalden

Magische Zahlenquadrate

● Die Anzahl der Felder jeder (waagerechten, senkrechten und diagonalen) Reihe des untenstehenden Zahlenquadrats beträgt 5, die Gesamtzahl aller Felder $5 \cdot 5 (= 25)$.
Die Summe der Zahlen jeder Reihe ergibt $5 \cdot 5 \cdot 5$ $(= 125)$, die Gesamtsumme aller Zahlen des Quadrats $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 (= 625)$, wenn alle ungeraden Zahlen von 1 bis 49 (diese beiden und zwei weitere Zahlen sind zur Erleichterung der Lösung bereits eingetragen) entsprechend verteilt werden (Bild 1).

		41		
	1		49	
		9		

10			
		20	
	30		
			40

● Alle geraden Zahlen von 10 bis 40 sind in die Felder so zu verteilen, daß sie in jeder waagerechten, senkrechten und diagonalen Reihe die Summe von 100 ergeben.

Um die Lösung der Aufgabe zu erleichtern, sind die „vollen Zehner" bereits eingetragen (Bild 2).

Dr. Chr. Lange, Inst. f. Lehrerbildung
N. J. Krupskaja, Leipzig

Magisches Quadrat · 1978

Die Summe jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonale ergibt 1978. *Ing. H. Decker, Köln*

$1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8$ $+1 \cdot 9-7-8$	$1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8$ $+1+9-7-8$	$1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8$ $+1-\sqrt{9}-7-8$	$1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8$ $-1 \cdot 9+7-8$
$1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8$ $+1-\sqrt{9} \cdot 7+8$	$1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8$ $-1^9 \cdot 7-8$	$1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8$ $-1-\sqrt{9}-7+8$	$1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8$ $-1 \cdot 9-7+8$
$1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8$ $-1-9+7-8$	$1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8$ -1^9-7-8	$1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8$ $-19+7+8$	$1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8$ $-1+9-7-8$
$1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8$ $-1-9-7+8$	$1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8$ -1^9+7-8	$1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8$ $-1-\sqrt{9} \cdot 7+8$	$1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8$ $-1+\sqrt{9}-7-8$

Silbenrätsel

Aus den folgenden Silben sind 13 Begriffe zu bilden. Die Anfangsbuchstaben der gefundenen Wörter ergeben den Namen eines Schweizer Mathematikers.
a – al – bel – bel – ben – bo – chen – dreh – e – e – eu – fang – fläch – hy – jekt – klid – le – li – li – ma – nal – ne – ner – null – o – ob – per – ra – ro – stel – ter – ti – tron – ung – um.
1. Hohlmaß, 2. Mathematiker des Altertums, 3. Begriff aus der Mengenlehre, 4. Schnittpunkt einer Funktion mit der x-Achse, 5. ein Kegelschnitt, 6. norwegischer Mathematiker, 7. Nenner eines Bruches von der Wurzel befreien, 8. eine Bewegung, 9. eine transzendente Zahl, 10. äußere Begrenzung einer Fläche, 11. Zeichengerät, 12. Bezeichnung für Körper mit nur ebenen Begrenzungsflächen, 13. Name eines Rechenautomaten. *Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald*

XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade (16. November 1977)

Olympiadeklasse 5

1. Im Schulgarten steckten Schüler auf einem $8\,\mathrm{m}^2$ großen Beet als Saatgut Erbsen, und zwar ebenso dicht, wie dies auf großen Flächen üblich ist. Der Ernteertrag dieses Beetes betrug das Fünfzehnfache des Saatgutes.
Wieviel kg Erbsen ernteten die Schüler von diesem Beet, wenn für eine 1 ha große Fläche 2 dt Erbsen als Saatgut üblich sind?

2. Auf drei Bäumen sitzen insgesamt 56 Vögel. Nachdem vom ersten Baum 7 auf den zweiten und vom zweiten 5 Vögel auf den dritten Baum geflogen waren, saßen nun auf dem zweiten Baum doppelt so viel Vögel wie auf dem ersten und auf dem dritten doppelt so viel Vögel wie auf dem zweiten Baum.
Berechne, wieviel Vögel ursprünglich auf jedem der Bäume saßen!

3. Eine Fläche von $1710\,\mathrm{m}^2$ ist in 9 Parzellen eingeteilt. Jede der Parzellen hat entweder die Größe $150\,\mathrm{m}^2$ oder die Größe $210\,\mathrm{m}^2$. Wieviel Parzellen jeder dieser Größe gibt es insgesamt auf der genannten Fläche?

4. Drei vorgegebene Strecken $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ und drei Strecken gesuchter Längen a, b, c sollen die folgenden Eigenschaften haben:
$\overline{AB}=a+b=5{,}6\,\mathrm{cm}$;
$\overline{CD}=a-b=1{,}8\,\mathrm{cm}$;
$\overline{EF}=b+c=6{,}2\,\mathrm{cm}$.
Zeichne drei derartige Strecken $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, und ermittle aus ihnen durch eine Konstruktion (nur mit Zirkel und Lineal) die gesuchten Längen a, b und c!
Begründe, warum deine Konstruktion die gesuchten Längen a, b, c ergibt, wenn sie die geforderten Eigenschaften haben!

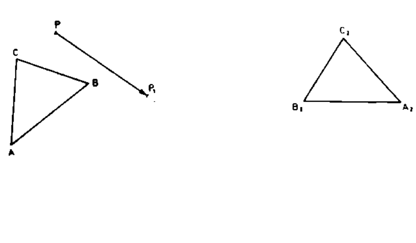
Olympiadeklasse 6

1. Eine Expedition von Wissenschaftlern legte am ersten Tag ein Drittel der geplanten Gesamtstrecke, am zweiten Tag 150 km und am dritten Tag noch einmal ein Viertel der Gesamtstrecke zurück und erreichte damit den Zielort.
Wie lang war die von der Expedition zurückgelegte Strecke?

2. Bei einem Schulsportfest bestritten Christa, Doris, Elke, Franziska und Gitta den 60-m-Endlauf. Auf die Frage, welche Plätze diese fünf Schülerinnen beim Einlauf ins Ziel belegen würden, machten einige der zuschauenden Klassenkameraden folgende Voraussagen:
(1) Christa wird nicht unmittelbar vor Elke ins Ziel kommen.
(2) Elke wird entweder als Vorletzte einlaufen oder sogar einen noch besseren Platz belegen.
(3) Es ist nicht wahr, daß Doris nicht schneller als Gitta laufen wird.
(4) Franziska wird einen anderen als den dritten Platz belegen.
Als der Endlauf vorbei war, wurde festgestellt, daß die fünf Schülerinnen sämtlich verschiedene Zeiten gelaufen waren und daß alle vier Voraussagen über den Einlauf falsch waren.
Wie lautet nach diesen Angaben die tatsächliche Reihenfolge des Einlaufs?

3. In der Dreherei eines Betriebes dreht man Einzelteile aus Bleirohlingen. Jeder Bleirohling ergibt ein Einzelteil. Die Abfallspäne, die man bei der Anfertigung von je 6 Einzelteilen erhält, kann man schmelzen und daraus noch einen Bleirohling anfertigen. (Jede kleinere Menge von Abfallspänen ist hierfür zu wenig.)
Welches ist die größte Anzahl von Einzelteilen, die man hiernach insgesamt aus 36 Rohlingen anfertigen kann?

4. Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet. Gesucht ist eine Gerade g mit folgender Eigenschaft: Wendet man auf das Dreieck ABC zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann die Spiegelung an der Geraden g an, so entsteht das Dreieck $A_2B_2C_2$.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal eine Gerade g mit dieser Eigenschaft! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



Olympiadeklasse 7

1. Anja hatte zum Geburtstag ihre beiden Freundinnen Cathrin und Eva eingeladen, mit denen sie nicht verwandt ist. Außerdem waren die Jungen Bernd, Dirk, Frank und Gerold eingeladen, von denen jeder ein Bruder eines der drei Mädchen ist. Nachdem diese sieben Personen an einem runden Tisch in der alphabetischen Reihenfolge ihrer Vornamen Platz genommen hatten, stellte man fest:

(1) Keiner der Jungen saß neben seiner Schwester.

(2) Frank und Gerold sind Zwillinge.
Untersuche, ob aus den vorstehenden Aussagen die Namen der anwesenden Brüder jedes der drei Mädchen zu ermitteln sind; ist das der Fall, so sind diese Namen anzugeben!

2. a) Beweise: Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 5 teilbar!
b) Untersuche, ob auch die Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen immer durch 6 teilbar ist!
c) Ermittle eine weitere natürliche Zahl n ($n>6$), für die gilt: Die Summe von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch n teilbar!

3. Von einem gleichschenkligen Dreieck sei nur bekannt, daß die Summe der Größen zweier Innenwinkel und eines Außenwinkels genau 300° beträgt. Dagegen sei nicht vorgeschrieben, welche der genannten Innenwinkel Basiswinkel sind und ob der genannte Außenwinkel zu einem dieser Innenwinkel gehört oder nicht.
Ermittle alle Möglichkeiten für die Größen der drei Innenwinkel dieses Dreiecks!

4. Ermittle alle vierstelligen natürlichen Zahlen, die durch 24 teilbar sind und deren Zifferndarstellung die Form $\overline{9x7y}$ hat! Hierbei sind x und y durch je eine der zehn Ziffern (0, ..., 9) zu ersetzen.

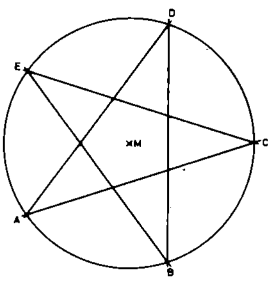
Olympiadeklasse 8

1. Vier Schüler, Anja, Birgit, Christoph und Dirk, spielten folgendes Spiel, dessen Regeln ihnen allen bekannt sind:
Einer von ihnen, z. B. Dirk, verläßt das Zimmer. Nun nimmt eine der Personen Anja, Birgit oder Christoph einen vereinbarten Gegenstand, etwa einen Fingerhut, an sich, und Dirk wird wieder hereingerufen. Er erhält dann von den Mitspielern Aussagen mitgeteilt, wobei genau derjenige eine falsche Aussage macht, der den Fingerhut bei sich hat.
Bei einer Durchführung dieses Spiels lauteten die Aussagen:
Anja: Ich habe den Fingerhut nicht, und Christoph hat den Fingerhut.
Birgit: Anja hat den Fingerhut, und ich habe den Fingerhut nicht.

Christoph: Ich habe den Fingerhut nicht.
Untersuche, ob mit Hilfe dieser Aussagen eindeutig feststeht, welcher Spieler den Fingerhut genommen hatte!
Ist dies der Fall, so ermittle diesen Spieler!

2. Beweise folgenden Satz: Jede Strecke, die zwei Punkte paralleler Seiten eines Parallelogramms miteinander verbindet und durch den Schnittpunkt der Diagonalen geht, wird von diesem Schnittpunkt halbiert!

3. Die Abbildung zeigt einen fünfstrahligen Stern, dessen Spitzen A, B, C, D, E Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sind.
Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle ADB$!



4. Dieter erzählt seinen Klassenkameraden: „Mein Bruder Fritz ist nur halb so alt wie ich. Wenn man die Anzahl seiner Lebensjahre mit sich selbst multipliziert, erhält man das Alter meines Vaters. Meine Mutter ist drei Jahre jünger als mein Vater. Alle zusammen sind wir 87 Jahre alt."
Ermittle das Alter aller 4 Personen! (Es sind jeweils nur die vollendeten Lebensjahre zu berücksichtigen.)

Olympiadeklasse 9

1. Für jede reelle Zahl m und jede reelle Zahl n wird durch $y=f(x)=mx+n$ (x reell) eine Funktion f definiert, deren Graph eine Gerade g ist.

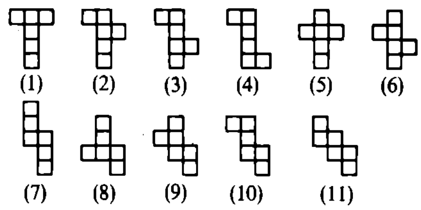
a) Es sei $m=\frac{1}{2}$ und n beliebig reell.

Ermitteln Sie die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf g, deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse!
b) Es seien m und n beliebig reell.
Ermitteln Sie die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf g, deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse!
(Stellen Sie insbesondere fest, für welche m und n überhaupt ein solcher Punkt auf g existiert!)

2. Jens sagt zu Christa: „Ich kann die Zahl 30 durch einen Term darstellen, der genau dreimal die Zahl 5 und außerdem nur Zeichen von Grundrechenoperationen enthält." Nach kurzem Besinnen sagt Christa: „Man kann sogar für jede natürliche Zahl $n>2$ die Zahl 30 durch einen Term darstellen, der genau n-mal die Zahl 5 und außerdem nur Zeichen von Grundrechenoperationen und Klammern enthält."
Beweisen Sie, daß Christas Aussage wahr ist!

3. Gegeben seien ein Kreis k und ein Durchmesser AB von k. Der Mittelpunkt von k sei M. Sind C und D so auf k gelegen, daß $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $AB \parallel DC$ ist, so sei α die Größe des Winkels $\sphericalangle CMB$ und β die Größe desjenigen spitzen Winkels, den die Sehne DC mit der Tangente t an k in D einschließt. Man ermittle diejenigen Werte des Abstandes zwischen AB und CD, für die
a) $2\alpha=\beta$, b) $\alpha=\beta$ gilt.

4. Die folgende Abbildung zeigt 11 Würfelnetze.



a) Ermitteln Sie davon diejenigen, die sich in einem Zuge zeichnen lassen, d. h. als ein zusammenhängender Streckenzug, bei dem jede im Netz auftretende Strecke genau einmal durchlaufen wird!
b) Geben Sie für diese Netze je einen Anfangs- und Endpunkt eines solchen Streckenzuges an!

Olympiadeklasse 10

1. Von vier Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4 wird verlangt, daß sie die folgenden beiden Eigenschaften (1), (2) haben:
(1) Der Durchmesser von k_4 ist um 1 cm größer als der Durchmesser von k_3, dessen Durchmesser ist um 1 cm größer als der von k_2, und dessen Durchmesser ist um 1 cm größer als der von k_1.
(2) Der Flächeninhalt von k_4 ist so groß wie die Summe der Flächeninhalte der anderen drei Kreise.
Untersuchen Sie, für welche Länge des Durchmessers von k_1 diese beiden Forderungen (1), (2) erfüllt sind!

2. Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn M der Mittelpunkt eines Kreises k ist und wenn eine Gerade g, die durch einen Punkt A von k geht, auf AM senkrecht steht, dann ist sie eine Tangente des Kreises k, d. h., sie hat mit k genau einen Punkt gemeinsam!

3. Man ermittle die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, für die der Term $\lg(x^2+7x-30)$ definiert ist.

4. Wenn eine natürliche Zahl $Z \neq 0$ im dekadischen System durch die Ziffernfolge $a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0$ (mit $0 \leq a_i \leq 9$ für $i=0, \ldots, n$ und mit $a_n \neq 0$) dargestellt ist, so bezeichnen wir als Quersumme $Q(Z)$ dieser Zahl Z die Summe
$Q(Z)=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_1+a_0$
und als Querprodukt $P(Z)$ dieser Zahl Z das Produkt
$P(Z)=a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot a_0$.
Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen Z mit $0<Z<1000$, für die (1) $Q(Z)+P(Z)=Z$ gilt!

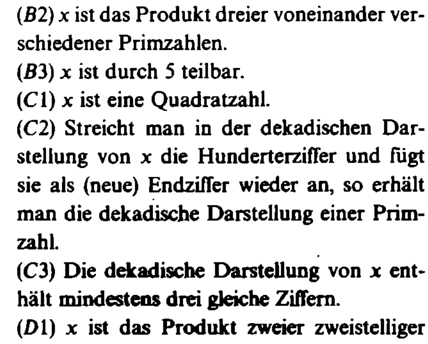
Olympiadeklassen 11/12

1. Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen a_1, d, b_1, q, für die folgende Aussage gilt: Wenn (1) a_1 das Anfangsglied und d die Differenz einer arithmetischen Folge (a_n) ist und wenn (2) b_1 ($\neq 0$) das Anfangsglied und q der Quotient einer geometrischen Folge (b_n) ist, so haben diese Folgen die Eigenschaften
(3) $a_1=-3b_1$, (4) $a_2=2b_2$,
(5) $a_3=b_3$, (6) d ist eine ganze Zahl.

2. Über eine natürliche Zahl x werden von vier Schülern A, B, C, D je drei Aussagen gemacht. Dabei macht der Schüler A genau zwei wahre Aussagen, während die Schüler B, C, D mindestens eine und höchstens zwei wahre Aussagen treffen.
Man ermittle alle natürlichen Zahlen a, die diesen Bedingungen genügen:
($A1$) x ist dreistellig.
($A2$) Es gilt: $500<x<600$.
($A3$) Jede der Ziffern 1, 3, 5, 7, 9 tritt genau einmal entweder in der dekadischen Darstellung von x oder in der dekadischen Darstellung der Quersumme von x auf; andere Ziffern kommen in beiden Darstellungen nicht vor.
($B1$) In der dekadischen Darstellung von x ist die Anzahl der Zehner das arithmetische Mittel aus der Anzahl der Hunderter und der Einer.
($B2$) x ist das Produkt dreier voneinander verschiedener Primzahlen.
($B3$) x ist durch 5 teilbar.
($C1$) x ist eine Quadratzahl.
($C2$) Streicht man in der dekadischen Darstellung von x die Hunderterziffer und fügt sie als (neue) Endziffer wieder an, so erhält man die dekadische Darstellung einer Primzahl.
($C3$) Die dekadische Darstellung von x enthält mindestens drei gleiche Ziffern.
($D1$) x ist das Produkt zweier zweistelliger Zahlen.
($D2$) x ist Primzahl.
($D3$) x ist ungerade.

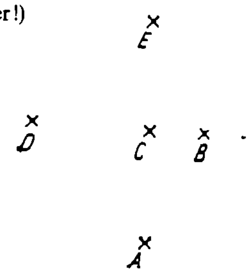
3. Es sind alle ganzen Zahlen zu ermitteln, für die
$$f(x)=\frac{3x^2+x-2}{x^2-2}$$
ganzzahlig ist.

4. Gegeben sei in einer Ebene ε ein gleichseitiges Dreieck ABC. Man ermittle die Menge aller derjenigen Punkte X in ε, für die $\overline{AX}+\overline{BX}=\overline{CX}$ gilt.



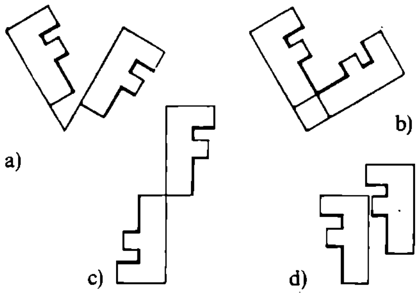
Der richtige Dreh ist zu finden!

▲1▲ Drehe um den Punkt D so, daß B Bild von A ist! (Arbeite mit Transparentpapier!)

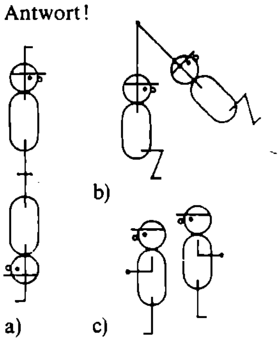


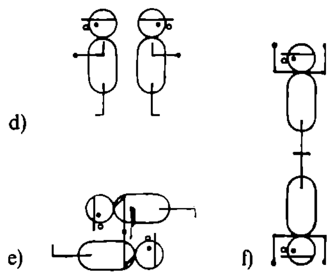
a) Wie groß ist der Drehwinkel?
b) Wo liegen dann die Bilder von B, C, D, E und F?
c) Gibt es Punkte der Ebene, die bei dieser Abbildung keinen Bildpunkt besitzen?
d) Welcher Punkt wird auf F abgebildet?

▲2▲ In welchen Beispielen ist es nicht möglich, die eine Figur durch eine Drehung auf die andere abzubilden? Begründe deine Antwort!

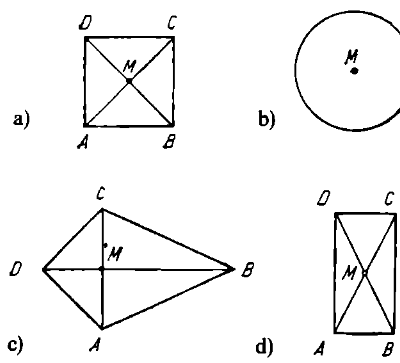


▲3▲ In welchen Beispielen ist es nicht möglich, die eine Figur durch eine Drehung auf die andere abzubilden? Begründe deine Antwort!

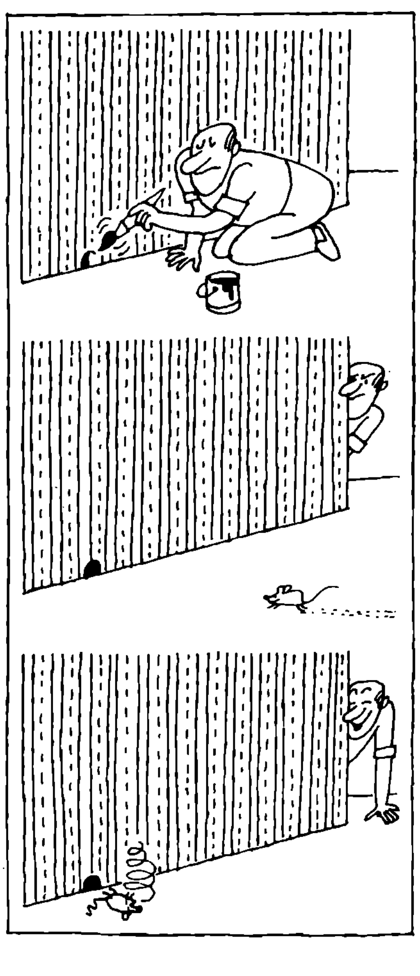




▲4▲ Überlege! Wie groß kannst du jeweils den Drehwinkel wählen, damit die Figur bei Drehung um M wieder auf sich selbst abgebildet wird? Überprüfe deine Antwort mit Transparentpapier!



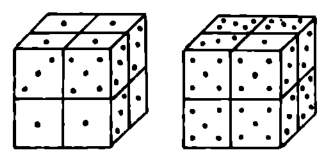
H. Reichenbach



Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 5/77

Ma 5 ▪1650 Von beiden Jungen wurden zusammen $3+7=10$ Buntstifte und $4+6=10$ Hefte für einen Gesamtbetrag von 1,08 M $+2{,}12\text{ M}=3{,}20\text{ M}=320$ Pf gekauft. Folglich kosteten 1 Buntstift und 1 Heft zusammen 32 Pf. Für 3 Buntstifte und 3 Hefte wären insgesamt $3\cdot 32$ Pf $=96$ Pf zu zahlen. Da 3 Buntstifte und 4 Hefte zusammen 108 Pf kosten, beträgt der Preis für 1 Heft 108 Pf $-$ 96 Pf $=12$ Pf. Der Preis für einen Buntstift beträgt demnach 32 Pf $-$ 12 Pf $=20$ Pf.

Ma 5 ▪1651
1. $n=7\cdot 1+4\cdot 3+1\cdot 5=24$



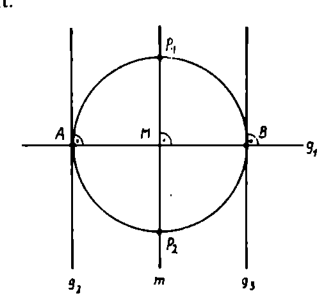
2. $m=7\cdot 5+4\cdot 3+1\cdot 1=48$

Ma 5 ▪1652 Bei dieser Subtraktionsaufgabe ist der Minuend 5stellig, der Subtrahend 4stellig und die Differenz 1stellig. Daher sind die ersten vier Ziffern des Minuenden 1, 0, 0, 0. Der Minuend ist also gleich 1006. Nun gilt

$10006-9999=7,$
$10006-9998=8,$
$10006-9997=9.$

Weitere Lösungen sind nicht möglich.

Ma 5 ▪1653 Halbiere die Strecke $\overline{AB}$! Der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ sei M. Zeichne durch M die Senkrechte auf g_1. Schlage um M als Mittelpunkt einen Kreis mit $\overline{AM}$ als Radius! Dieser Kreis schneide die Mittelsenkrechte m von $\overline{AB}$ in den Punkten P_1 und P_2. Diese beiden Punkte haben die geforderte Eigenschaft.



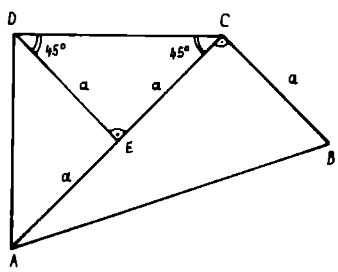
Ma 5 ■1654 Aus $u=2\cdot(a+b)=14$ cm folgt $a+b=7$ cm.
Wir fertigen eine Tabelle an:

a	b	$a\cdot b$
1	6	6
2	5	10
3	4	12
4	3	12
5	2	10
6	1	6

Nur für „$a=2$ und $b=5$" oder „$a=5$ und $b=2$" werden die Gleichungen $2\cdot(a+b)=14$ und $a\cdot b=10$ erfüllt. Die Rechteckseiten haben eine Länge von 2 cm und 5 cm.

Ma 5 ■1655 Nach Ablauf einer Woche verblieben von dieser Lieferung noch $45-25=20$ Anzüge. Aus $10825\text{ M}-6725\text{ M}=4100\text{ M}$ und $4100:20=205$ folgt, daß ein Anzug 205,– M kostet. Aus $45\cdot 205\text{ M}=9225\text{ M}$ und $10825\text{ M}-9225\text{ M}=1600\text{ M}$ und $1600\text{ M}:20=80\text{ M}$ folgt, daß ein Kleid 80,– M kostet.

Ma 6 ■1656 Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt
$$A_1=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 2a=a^2.$$
Die Höhe $\overline{DE}$ im gleichschenkligen Dreieck ACD steht senkrecht auf $\overline{AC}$ und halbiert $\overline{AC}$. Deshalb gilt $\overline{AE}=\overline{CE}=a$. Die Höhe $\overline{DE}$ halbiert aber auch den Winkel $\sphericalangle ADC$; deshalb gilt $\sphericalangle CDE=45°$. Wegen $\sphericalangle DCE=45°$ ist das Dreieck CDE gleichschenklig, und es gilt $\overline{CE}=\overline{DE}=a$.



Für den Flächeninhalt des Dreiecks ACD erhalten wir somit
$$A_2=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{DE}=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot a=a^2.$$
Deshalb trifft die Beziehung $A_1=A_2$ zu.

Ma 6 ■1657 a) Es sei d die Differenz; dann gilt
$d=2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 20\cdot 21-2\cdot 21$,
$d=2\cdot 21\cdot(3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 20-1)$,
also ist d durch 7 teilbar, denn $21=3\cdot 7$.
b) Es sei p_1 der Minuend und p_2 der Subtrahend von d; wegen $16=2^4$ und $5=1\cdot 5$, $10=2\cdot 5, 15=3\cdot 5, 20=4\cdot 5$ kommen im Produkt p_1 je viermal die Faktoren 2 und 5 vor. Daraus kann $(2\cdot 5)^4=10^4=10000$ gebildet werden. Somit endet p_1 auf vier Nullen. Subtrahiert man von p_1 das Produkt $p_2=42$, so endet die Differenz d auf die Ziffern 9958.

Ma 6 ■1658 Wegen $5+9+9=23<24$ und $6+9+9=24$ kommen als Summanden der Quersumme 24 nur 6, 7, 8 oder 9 in Frage. Deshalb sind zunächst folgende Zahlen zu untersuchen:
699, 789, 798, 879, 897, 978, 987, 969, 996.
Die daraus durch Addition bzw. Subtraktion von 1 hervorgehenden Zahlen lauten:
698, 700, 788, 790, 797, 799, 878, 880, 896, 898, 977, 979, 986, 988, 968, 970, 995, 997.
Von diesen Zahlen sind nur die Zahlen 700 und 896 durch 7 teilbar. Deshalb erfüllen nur die Zahlen 699 und 897 die gestellten Bedingungen, und es gilt
$(699+1):7=700:7=100$,
$(897-1):7=896:7=128$.

Ma 6 ■1659
Wegen $a\cdot b=6=1\cdot 2\cdot 3$ könnte
$a=1$ und $b=6$ oder
$a=2$ und $b=3$ oder
$a=3$ und $b=2$ oder
$a=6$ und $b=1$ sein.
Aus $b=6$ und $b\cdot c=4$ folgt $6\cdot c=4$, was nicht möglich ist. Aus $b=3$ und $b\cdot c=4$ folgt $3\cdot c=4$, was nicht möglich ist. Aus $b=2$ und $b\cdot c=4$ folgt $2\cdot c=4$, also $c=2$, was nicht möglich ist, da $b\neq c$ sein soll.
Aus $b=1$ und $b\cdot c=4$ folgt $c=4$. Die gesuchte Zahl lautet somit $z=\overline{614d}$. Nun muß die Quersumme $q=6+1+4+d=11+d$ durch 3 teilbar sein. Das trifft zu für $d=1, d=4, d=7$. Wegen $b=1$ und $b\neq d$ entfällt $d=1$. Wegen $c=4$ und $c\neq d$ entfällt $d=4$. Es existiert genau eine Zahl, die die Bedingungen erfüllt; sie lautet 6147.

Ma 6 ■1660 Die zu ermittelnden zweistelligen natürlichen Zahlen lassen sich durch $10a+b$ darstellen; dabei gilt die Einschränkung $1\leq a\leq 5$ und $2\leq b\leq 9$. Alle möglichen Fälle sind in der folgenden Tabelle erfaßt:

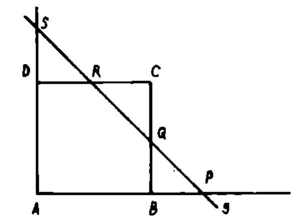
a	b	$a+4$	$b-2$
1	9	5	7
2	8	6	6
3	7	7	5
4	6	8	4
5	5	9	3

Nur für $a=1$ und $b=9$ existiert eine Lösung, und es gilt $19\cdot 3=57$.

Ma 7 ■1661 Die gesuchte sechsstellige natürliche Zahl läßt sich in der Form
$z_1=2\cdot 100000+x=200000+x$
darstellen. Die Zahl z_2 hat dann die Form $z_2=10x+2$, und es gilt $3\cdot z_1=z_2$. Wir erhalten somit folgende Gleichung:
$$\begin{aligned}3\cdot(200000+x)&=10x+2,\\600000+3x&=10x+2,\\7x&=599998,\\x&=85714.\end{aligned}$$
Die ursprüngliche Zahl lautet somit
$z_1=200000+85714, z_1=285714$.
Probe:
$z_2=857142;\ 3\cdot 285714=857142$.

Ma 7 ■1662 Die dekadische Darstellung einer solchen dreistelligen Primzahl sei $\overline{abc}$, und es seien a, b, c die als Zahlen aufgefaßten Ziffern; dann gilt $a\cdot b\cdot c=252=2^2\cdot 3^2\cdot 7$. Da mit Ausnahme der Primzahl 2 alle weiteren Primzahlen ungerade sind, könnte c nur 1, 3, 5, 7 oder 9 sein.
Wegen $ab\leq 81$ gilt ferner $c=\frac{252}{ab}\geq\frac{252}{81}>3$.
Außerdem gilt $c\neq 5$, da eine dreistellige Primzahl nicht auf 5 enden kann.
Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:
1. Es sei $c=7$; dann gilt $a\cdot b=36$, also $a=4$ und $b=9$ oder $a=9$ und $b=4$ oder $a=6$ und $b=6$. Daraus folgt $z_1=497=7\cdot 71$ oder $z_2=947$ oder $z_3=667=23\cdot 29$. Die Zahlen z_1 und z_3 sind keine Primzahlen; nur die Zahl z_2 ist Primzahl, da z_2 nicht durch 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 und 31 teilbar ist und da $31^2>947$ gilt.
2. Es sei $c=9$; dann gilt $a\cdot b=28$, also $a=4$ und $b=7$ oder $a=7$ und $b=4$. Daraus folgt $z_4=479$ und $z_5=749=7\cdot 107$. Die Zahl z_5 ist keine Primzahl. Nur die Zahl z_4 ist Primzahl, da z_4 nicht durch 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 und 23 teilbar ist und da $23^2>479$ gilt.
Es gibt somit genau zwei solcher Primzahlen, nämlich die Zahlen 479 und 947, und es gilt $4\cdot 7\cdot 9=9\cdot 4\cdot 7=252$.

Ma 7 ■1663 Es seien $ABCD$ ein Quadrat und g eine Gerade, die die verlangten Eigenschaften hat. Dann folgt aus $\overline{RQ}=\overline{QP}$,
$\sphericalangle RCQ=\sphericalangle QBP=90°$ und $\sphericalangle RQC=\sphericalangle BQP$ (Scheitelwinkel)
$\triangle BPQ\cong\triangle QCR$. Somit gilt $\overline{BQ}=\overline{CQ}$.
Analog dazu gilt $\overline{CR}=\overline{DR}$.
Die zu konstruierende Gerade g geht somit durch die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ des Quadrates $ABCD$.



Ma 7 ■1664 Angenommen, dieser Klasse gehören x Jungen an; dann gehören der Klasse $(x+15)$ Mädchen an, und es gilt
$$\begin{aligned}(x+15):x&=5:2,\\5x&=2\cdot(x+15),\\5x&=2x+30,\\3x&=30,\\x&=10.\end{aligned}$$
Dieser Klasse gehören somit 10 Jungen und 25 Mädchen an. Jeder Teilnehmer hat $875\text{ M}:35=25\text{ M}$ aufzubringen.

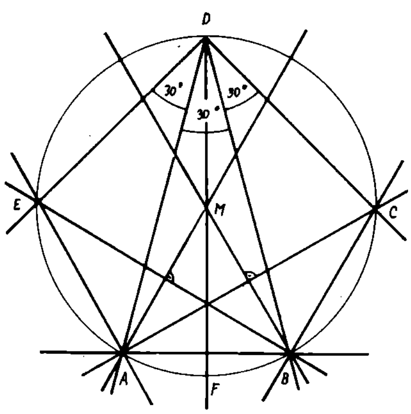
Ma 8 ■1665 Es sei x der zur Verfügung stehende Betrag (in Mark). Dann gab der Vater dem ersten Sohn $\frac{x}{3}+3$. Ihm blieben nun noch $\frac{2}{3}x-3$ übrig. Dem zweiten Sohne gab er dann $\frac{\frac{2}{3}x-3}{3}+3$, dem dritten 35 M. Addiert man diese drei Beträge, so erhält man den Gesamtbetrag x. Es läßt sich also folgende Gleichung aufstellen:

$$\frac{x}{3}+3+\frac{\frac{2}{3}x-3}{3}+3+35=x.$$

Die äquivalente Umformung ergibt $x=90$. Es folgt $L=\{90\}$. Der Vater hat 90 M Taschengeld ausgegeben. Der erste Sohn erhielt 33 M, der zweite 22 M, der dritte 35 M.

Ma 8 ▪1666 Die drei Zahlen seien a, $a+1$, $a+2$.
Das Produkt aus der kleinsten und der größten Zahl ist dann $a(a+2)=a^2+2a$; das Quadrat der mittleren Zahl ist
$(a+1)^2=a^2+2a+1$, q. e. d.

Ma 8 ▪1667 a) (1) $\sphericalangle EDC$ ist Peripheriewinkel des Kreises k und beträgt nach Voraussetzung 90°. Daraus folgt, daß $\overline{EC}$ Durchmesser von k ist.
(2) Der Zentriwinkel $\sphericalangle AMB$ ist doppelt so groß wie der zur Sehne $\overline{AB}$ gehörende Peripheriewinkel $\sphericalangle ADB$ und beträgt somit 60°.
(3) Da $\overline{AM}$ und $\overline{BM}$ Radien sind und Winkel $\sphericalangle AMB=60°$, folgt, daß Dreieck ABM gleichseitig ist, also $\overline{AB}=4$ cm.
(4) Wegen (1) ist $\sphericalangle CME=180°$, und die Dreiecke $\triangle BCM$ und $\triangle AME$ sind gleichseitig.
(5) Aus (4) folgt: $ABCM$ ist ein Rhombus. Da im Rhombus die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, gilt: $AC \perp MB$ und da $ABME$ ebenfalls ein Rhombus ist, gilt: $MA \perp EB$.



b) Berechnung des Umfangs des Fünfecks (u):
Sei $\overline{ED}=y$. Es gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$y^2=2r^2$$
$$y=\sqrt{32}$$
$$y\approx 5{,}66$$
$$u=3\cdot \overline{AB}+2\cdot \overline{ED}$$
$$=12\text{ cm}+2\cdot y$$
$$\approx 12\text{ cm}+2\cdot 5{,}66\text{ cm}$$
$$\approx 12\text{ cm}+11{,}32\text{ cm}$$
$$\approx 23{,}32\text{ cm}.$$

Berechnung des Flächeninhalts des Fünfecks (A):
Der Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDE$ setzt sich zusammen aus den Flächeninhalten von drei paarweise kongruenten gleichseitigen Dreiecken und dem Flächeninhalt des Dreiecks ECD. Es gilt:

$$A=\left(3\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}+8\cdot\frac{4}{2}\right)\text{cm}^2$$
$$A\approx(20{,}78+16)\text{ cm}^2$$
$$A\approx 36{,}78\text{ cm}^2$$

Der Umfang des Fünfecks $ABCDE$ beträgt etwa 23,32 cm, sein Flächeninhalt etwa 36,78 cm².

Ma 8 ▪1668 Aus (2) $y+z=11$ folgt $z=11-y$. Das setzt man in (1) ein und erhält:

$$7x+5y-(11-y)=8.$$

Die weitere äquivalente Umformung ergibt

$$7x+6y=19.$$

Da x und y natürliche Zahlen sind, gilt: $0\leqq x\leqq 2$, denn $7\cdot 3=21>19$. Setzt man für x die Zahl 1 ein, so ergibt sich

$$7+6y=19$$
$$6y=12$$
$$y=2.$$

Es folgt $z=9$.
Da $x, y, z\in N$ erfüllt ist und x den kleinstmöglichen Wert angenommen hat (x also ein ein Minimum ist), gilt:
Es gibt nur ein einziges Zahlentripel, das die geforderten Bedingungen erfüllt. Es ist das Tripel [1, 2, 9].

Ma 9 ▪1669 Der Fehler steckt gleich in der ersten Zeile! Die Division durch $2-x$ ist nur möglich, wenn $(2-x)\neq 0$, d. h. wenn $x<2$ oder $x>2$ ist. Ist nun $x<2$, also $x=0$ oder $x=1$, so sind 0 und 1 deshalb keine Lösungen, da die äquivalente Umformung $x>3$ ergibt. Ist nun $x>2$, so ist $2-x<0$, und bei Division durch eine negative Zahl ändert sich das Relationszeichen.
Es ergibt sich dann schließlich $x<3$. Es gibt aber keine natürliche Zahl, die größer als 2 und kleiner als 3 ist; deshalb ist die Lösungsmenge leer.

Ma 9 ▪1670 Man formt die Gleichungen zunächst äquivalent so um, wie es an der 1. Gleichung gezeigt werden soll:

(1) $xy+1=x+y$
$xy-y-x+1=0$
$y(x-1)-(x-1)=0$
$(y-1)(x-1)=0.$

Verfährt man mit den anderen Gleichungen analog, so erhält man folgendes System:

(1') $(y-1)(x-1)=0$
(2') $(x-1)(z-1)=0$
(3') $(y-1)(z-1)=0.$

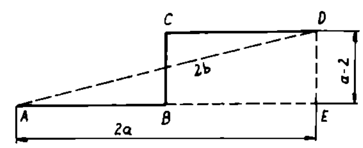
Da ein Produkt genau dann gleich Null ist, wenn mindestens ein Faktor gleich Null ist, ergibt sich:
$(y-1)=0$ oder $(x-1)=0$ und
$(x-1)=0$ oder $(z-1)=0$ und
$(y-1)=0$ oder $(z-1)=0$, d. h.
($y=1$ oder $x=1$) und ($x=1$ oder $z=1$) und ($y=1$ oder $z=1$).
Das heißt aber: Zwei von den drei Variablen nehmen stets den Wert 1 an; die dritte Variable kann jeden beliebigen Wert aus dem Bereich der reellen Zahlen annehmen. Man setzt nun für diese dritte Variable t und bezeichnet t als freien Parameter. Somit ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems:
$L=\{[1, 1, t], [1, t, 1], [t, 1, 1]\}, t\in P.$

Ma 9 ▪1671 Die vierstellige Zahl hat die Form $1000a+100b+10c+d$.
Ihre doppelte Quersumme ist dann $2(a+b+c+d)$. Addiert man beides, so erhält man

$$1002a+102b+12c+3d.$$

Da jeder Summand durch 3 teilbar ist, ist auch die Summe durch 3 teilbar, q. e. d.

Ma 9 ▪1672 Es sei a die Maßzahl der Länge der Strecke $\overline{AB}$. Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras: $(2a)^2+(a-2)^2=26^2$. Die äquivalente Umformung führt zu $a^2-\frac{4}{5}a-\frac{672}{5}=0$.
Daraus folgt, daß die Strecke $\overline{AB}$ 12 m lang ist.
Die Länge des Streckenzuges $\overline{ABCD}$ beträgt $(12+10+12)\text{ m}=34\text{ m}$.



Ma 10/12 ▪1673 Es sei $444444444444444=a$ und $444444444444445=b$. Es gilt:
$b^2-a^2=(b+a)(b-a)$ und wegen $b-a=1$ gilt dann $b^2-a^2=b+a$. Es ist also zu zeigen, daß $b+a+111111111111111=10^{15}$ ist:

$$\begin{array}{r} 444444444444445 \\ +444444444444444 \\ +111111111111111 \\ \hline 1000000000000000=10^{15}. \end{array}$$

Ma 10/12 ▪1674 Die Endziffern wiederholen sich periodisch.
7^{4n} hat die Endziffer 1 ($n\in N$)
7^{4n+1} hat die Endziffer 7 ($n\in N$)
7^{4n+2} hat die Endziffer 9 ($n\in N$)
7^{4n+3} hat die Endziffer 3 ($n\in N$).
Da $7^{2281}=7^{4\cdot 570+1}$ ist, hat die Zahl 7^{2281} die Endziffer 7 und demzufolge $7^{2281}-2$ die Endziffer 5. Die Zahl ist demnach durch 5 teilbar, d. h. sie ist keine Primzahl, q. e. d.

Ma 10/12 ▪1675 Die Strecke $\overline{DC}$ ist gemeinsame Seite der Dreiecke $\triangle ACD$ und $\triangle BDC$. Diese Dreiecke sind kongruent (Nachweis durch Spiegelung an der Geraden DE).
Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks ACD:
Der Schnittpunkt des Durchmessers $\overline{DE}$ mit der Sehne $\overline{AB}$ sei F. Zur Grundseite $\overline{DC}$ gehört die Höhe $\overline{AF}$. Es gilt:

$$A=\frac{\overline{DC}\cdot\overline{AF}}{2}$$
$$A=3\text{ cm}^2.$$

Der Flächeninhalt des Deltoids $ACBD$ beträgt 6 cm².
Berechnung der Größe des Winkels $\sphericalangle BDA=\delta$:

Man verbindet M mit A und B. Im rechtwinkligen Dreieck AFM gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AF}}{r} \quad (\alpha \text{ ist die Größe des Winkels } \sphericalangle MAF)$$

$$\cos\alpha = \frac{3\,\text{cm}}{4\,\text{cm}} = 0{,}75.$$

Daraus folgt: $\alpha \approx 41{,}4°$.

γ sei die Größe des Winkels $\sphericalangle AMB$, und es gilt:

$$\gamma = 180° - 2\alpha \quad (\text{Dreieck } ABM \text{ ist gleichschenklig})$$

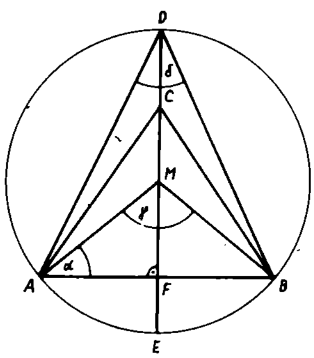
$$\gamma \approx 97{,}2°.$$

Der Winkel $\sphericalangle BDA$ ist ein Peripheriewinkel, der auf der gleichen Sehne steht wie der Zentriwinkel $\sphericalangle BMA$; also gilt:

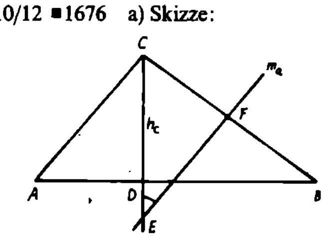
$$\delta = \frac{1}{2}\gamma$$

$$\delta \approx 48{,}6°.$$

Die Größe des Winkels $\sphericalangle BDA$ beträgt etwa 48,6°.



Ma 10/12 ■1676 a) Skizze:



b) Berechnung der Größe des gesuchten Winkels:

[3, 4, 5] ist ein pythagoreisches Zahlentripel. Es gilt $3^2 + 4^2 = 5^2$. Folglich liegt der Seite mit der Länge 5 cm ein rechter Winkel gegenüber.

Wegen $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ gilt $\overline{AC} \parallel m_a$. ($m_a$ ist die Bezeichnung der Mittelsenkrechten auf $\overline{BC}$.)

Daraus folgt:

$\sphericalangle DCA \cong \sphericalangle FEC$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) und $\sphericalangle DCA \cong \sphericalangle DBC$, da die Dreiecke ADC und BCD ähnlich sind. (Sie stimmen in zwei Winkeln überein.)

Sei β die Größe des Winkels DBC, dann gilt:

$$\sin\beta = \frac{3}{5} \text{ und somit } \beta \approx 36{,}9°.$$

Die Mittelsenkrechte auf der Seite $\overline{BC}$ schneidet die Gerade, auf der die Höhe h_c liegt, unter einem Winkel, der etwa 36,9° beträgt.

Ph 6 ■21 Geg.: $s = 51{,}6\,\text{km} - 50{,}2\,\text{km}$
$= 1{,}4\,\text{km} = 1400\,\text{m}$
$t = 70\,\text{s}$

Ges.: Geschwindigkeit des Zuges v
Abstand der Telegrafenmasten a

Die Geschwindigkeit des Zuges findet man nach der Formel

$$v = \frac{s}{t}$$

$$v = \frac{1400\,\text{m}}{70\,\text{s}} = \frac{1400\,\text{m} \cdot 3600}{1000 \cdot 70\,\text{h}}$$

$$v = 72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Bei 36 gezählten Masten sind 35 Abstände der Länge a vorhanden.

Also $35 \cdot a = 1400\,\text{m}$
$a = 40\,\text{m}$

Die Telegrafenmasten sind 40 m voneinander entfernt, und der Zug hatte eine Geschwindigkeit von $72\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Ph 7 ■22 Geg.: $t = \frac{1}{900}\,\text{s}$ Ges.: P
$W = 350\,\text{kpm}$

$$P = \frac{W}{t}$$

$$P = \frac{350\,\text{kpm} \cdot 900}{1\,\text{s}}$$

$$P = 315000\,\frac{\text{kpm}}{\text{s}}$$

Umwandeln von $\frac{\text{kpm}}{\text{s}}$ in kW:

$315000\,\frac{\text{kpm}}{\text{s}} \cdot \frac{9{,}80665}{1000} \approx 3090\,\text{kW}$. In dem Gewehr muß eine Leistung von 3090 kW erzielt werden.

Ph 8 ■23 Geg.: $P = 60\,\text{W}$ Ges.: t

Für 8 Pfennig erhält man $1\,\text{kWh} = 1000\,\text{Wh}$, also für 1 Pfennig $\frac{1000}{8}\,\text{Wh} = 125\,\text{Wh}$.

$$125\,\text{Wh} : 60\,\text{W} = 2\frac{1}{12}\,\text{h} = 2\,\text{h}\ 5\,\text{min}$$

Die 60-Watt-Glühlampe kann für einen Pfennig 2 h 5 min in Betrieb genommen werden.

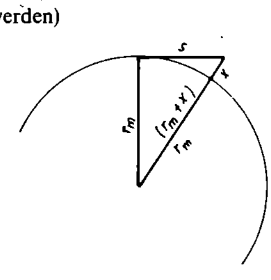
Ph 9 ■24 Geg.: $x = 1{,}70\,\text{m} = 0{,}0017\,\text{km}$
$r_m = 1738\,\text{km}$
Ges.: Sichtweite s

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$(r_m + x)^2 = r_m^2 + s^2$$

$$r_m^2 + 2r_m x + x^2 = r_m^2 + s^2$$

(x^2 kann wegen seiner Kleinheit vernachlässigt werden)



$$s^2 = 2r_m x$$

$$s = \sqrt{2r_m x}$$

$$s = \sqrt{2 \cdot 1738\,\text{km} \cdot 0{,}0017\,\text{km}}$$

$$= \sqrt{5{,}9\,\text{km}^2} \approx 2{,}431\,\text{km}$$

Die Sichtweite für einen erwachsenen Menschen beträgt 2,431 km.

Fortsetzung siehe Heft 2/78.

Lösungen zu alpha-heiter

Kreuzzahlrätsel

1 2	2 3	3 4	4 5	5 6
6 5	4	9		7
	1		7 9	8
8 5		9 1	6	9
10 3	3	3	3	

Silbenkreuzworträtsel

	1 TA	FEL	2 LI	NE	3 AL		4 KO	EF	5 FI	ZI	6 ENT	
7 A	BEL		TER		8 TER	MI	NUS		GUR		9 FER	MAT
	LE										NUNG	

Was ist das?

„Schachspiel für Anfänger"

Kombiniere und rechne!

456 + 18 = 474	105 + 180 = 285
− + −	+ : −
233 − 23 = 210	105 − 60 = 45
223 + 41 = 264	210 + 30 = 240
60 : 4 = 15	2 · 4 = 8
: − −	+ + +
12 − 3 = 9	10 − 1 = 9
5 + 1 = 6	12 + 5 = 17

Magische Zahlenquadrate

Bild 1

29	43	17	31	5
3	27	41	15	39
37	1	25	49	13
11	35	9	23	47
45	19	33	7	21

Bild 2

10	36	38	16
32	22	20	26
24	30	28	18
34	12	14	40

Silbenrätsel

1. Liter, 2. Euklid, 3. Objekt, 4. Nullstelle, 5. Hyperbel, 6. Abel, 7. Rationalmachen, 8. Drehung, 9. e, 10. Umfang, 11. Lineal, 12. Ebenflächner, 13. Robotron.

Lösungswort: LEONHARD EULER

Lösungen zu:
Facharbeiter für Eisenbahnbautechnik

a) $\ddot{U}_r = \frac{8 \cdot 100^2}{800} = 100$

$\ddot{U}_r = 100\,\text{mm}$

b) $\ddot{U}_{\min} = \frac{11{,}8 \cdot 50^2}{250} - \left(\frac{250}{4} + 25\right)$

$= 118 - (63 + 25)$

$\ddot{U}_{\min} = 30\,\text{mm}$

alpha-Wettbewerb Abzeichen in Gold

Für zehnjährige Teilnahme
Christoph Scheurer, Glauchau-Gesau; Henrik Frank, Greifswald; Lutz Püffeld, Hennigsdorf; Uwe Lewandovski, Leipzig; Annegret Kirsten, Leuna; Eckhard Schadow, Oranienburg; Ralph Lehmann, Petershagen

Für neunjährige Teilnahme
Michael Schnelle, Calau; Martin Ermrich, Elbingerode; Bernd Hanke, Großschweidnitz; Guido Blosfeld, Halle; Detlef Poppe, Mühlhausen; Astrid Rösel, Rostock; Gerlinde Koch, Schmalkalden; Ines Greiner, Wurzen

Für achtjährige Teilnahme
Hellfried Schumacher, Ahlbeck; Holger Jurack, Burkau; Hermann Tenor, Dessau; Ulf Hutschenreiter, Dresden; Ullrich Riedel, Flöha; Ulrike Bandemer, Freiberg; Angelika Müller, Greifswald; Lars Luther, Güstrow; Birgit Krötenheerdt, Falk Bachmann, beide Halle; Rainer Gutsche, Herzberg; Ilona Drews, Wöbbelin

Für siebenjährige Teilnahme
Regina Kupfer, Belgershain; Borwin Wegener, Berlin; Arno Feuerherdt, Brandenburg; Manfred Seidler, Ralf Mayas, Ingo Fietze, alle Cottbus; Carola Zimmermann, Döbeln; Eva Gerstner, Elke Seidel, Klaus Schlegel, alle Dresden; Bernhard Tschada, Eilenburg; Uwe Beck, Falkensee; Marid Helbig, Frankfurt; Thomas Jakob, Gera; Andreas Illing, Gersdorf; Isolde Kehr, Gospenroda; Ursula Märker, Greifswald; Thies Luther, Güstrow; Matthias Heinevetter, Heiligenstadt; Dietmar Glanz, Keffershausen; Roland Kaschner, Lauchhammer; Ulv Krabisch, Bernd Kreußler, beide Leipzig; Lew Dimenstein, Leningrad (UdSSR); Norbert Littig, Lichtenberg; Sybille Baumgart, Löderburg; Uwe Bormann, Magdeburg; Karl Krause, Mansfeld (Rentner); Berthold Wettengel, Oelsnitz; Frank Aßmus, Oranienburg; Rainer Seifert, Pinnau; Beate Brandtner, Schildau; Volker Lerche, Schmalkalden; Kerstin Utke, Stralsund; Gudrun Drews, Wöbbelin; Manuela Lehmert, Worbis

Für sechsjährige Teilnahme
Ralf Henze, Arnstadt; Andreas Fittke, Audrey Hoffmann, Jens-Peter Mönch, alle Berlin; Ulf Ritschel, Booßen; Uwe Lumm, Clingen; Jürgen Sägenschnitter, Clemens Jaunich, Frank Mayas, alle Cottbus; Karl-Heinz Jünger, Rainer Grunert, beide Dresden; Arnhild Lorenz, Karin Kramer, beide Görlitz; Dieter Kratsch, Göhren; Sylke Nölting, Bengt Nölting, Michael Fukarek, Irmhild Bittner, alle Greifswald; Cornelia Thiel, Güstrow; Ingo Lenz, Hagenow; Stefan Krötenheerdt, Halle; Uta Gutsche, Herzberg; Claudia Kummer, Uwe Klaus, beide Leipzig; Lothar Gruber, Linz (Österreich); Rüdiger Tanzke, Hans-Joachim Berger, Andreas Erben, Löderburg; Wolfgang Blachnik, Lübbenau; Gerald Werner, Wolfgang Taubert, beide Meiningen; Volker Schulz, Nauen; Axel Müller, Oberlungwitz; Iris Schulz, Rotta; Birgit Rosenberger, Suhl; Petra Henkel, Töplitz; Manfred Zimmer, Volkstedt; Roland Löffler, Weida; Manfred Häußler, Westgreußen; Katrin Richter, Wittenberg; Karsten König, Zeuthen; Jörg Brüstel, Ziegelheim; Kurt Oertel, Zschornewitz (Rentner); Andreas Bernert, Zwickau

Für fünfjährige Teilnahme
Christine Stüber, Alsleben; Birgit Oelschlegel, Altenbeuthen; Roger Labahn, Anklam; Volkmar Türke, Auerbach; Peter Möller, Bad Doberan; Torsten Flade, Beierfeld; Andreas Gude, Cordula Becher, Peter Pörs, Frank Thienert, Claudia Ziehm, alle Berlin; Martina Menge, Bernburg; Dirk Markgraf, Peter Wiehe, Michael Feudel, alle Bischofferode; Gudrun Billig, Coswig; Annette Schulz, Uwe Gätzschmann, beide Cottbus; Ralf Ott, Demmin; Carla Bergd, Dittersdorf; Ralf Kretschmer, Werner Jeroch, Reinhard Pohl, Frank Regensburger, Michael Apitz, Uwe Apitz, alle Dresden; Andrea Puchert, Eichicht; Heidelore Stallbohm, Eldena; Sabine Lützkendorf, Eberhard Georgy, alle Erfurt; Wolfhart und Astrid Umlauft, Freital; Dietmar Richter, Garitz; Frank Kratsch, Göhren; Uwe Reimann, Görlitz; Michael Schott, Gräfenthal; Wolfgang Fukarek, Christian Wolf, beide Greifswald; alpha-Zirkel der OS *Juri Gagarin*, Greußen; Jens Negwer, Ramona Zschau, Holger Heydrich, Carola Berger, alle Grimma; Burkhard Rahr, Groß-Naundorf; Günter Mosel, Gülze; Torsten Musiol, Güstrow; Torsten Ueberdiek, Halle; Andrea Herrmann, Hammerunterwiesenthal; Ute Sonnenburg, Hennigsdorf; Ulrike Otto, Ilmenau; Volker Helmert, Reinhardt Rascher, beide Karl-Marx-Stadt; Torsten Busch, Klausdorf; Jürgen Hüttner, Kottengrün; Dirk Markgraf, Peter Wiehe, beide Leinefelde; Armin Körner, Dagmar Laux, beide Leipzig; Steffen Langbein, Lichte; Gabriele Otto, Meißen; Rainer Bauer, Mittweida; Michael Weicker, Mügeln; Andreas Massanek, Neusornzig; Thomas Köhler, Oederan; Michael Monse, Olbersdorf; Michael Thränhardt, Oranienbaum; Bernd Hübner, Oybin; Jürgen Krahl, Plauen; Ulrich Kammer, Pirna; André Wortha, Pleetz; Carmen Henze, Pratau; Wilfried Röhnert, Radebeul; Thomas Apel, Reichenbach; Christiane Jordan, Reitwein; Armin Hoell, Ribnitz-D.; Michael Zwicke, Riesa; Andreas Matthus, Rostock; Siegfried Müller, Ralf Briesemeister, beide Sachsendorf; Jürgen Rolle, Schlegel; Torsten Löwe, Schleiz; Heiko Müller, Henri Hoffmann, Monika Kaufmann, alle Schmalkalden; Hans-Dietrich Schwabe, Sondershausen; Christine Döll, Steinbach-Hallenberg; Holger Hoppe, Stendal; Andrea Hönemann, Stützerbach; Günter Carlsen, Titschendorf; Dirk Herrmann, Bernd Hübner, Antje Lorenz, alle Töplitz; Katrin Wahn, Ellen Krüger, beide Uebigau; Sylvia Zipf, Waldheim; Bettina Schade, Waren; Gunter Reißig, Jürgen Lehmann, Thomas Weiß, alle Weimar; Sylvia Kunze, Weißenfels; Manuel Richter, Wilthen; Carola Senft, Wingerode; Rolf Kuhn, Wintzingerode; Holger Schnabel, Wismar; Ralf Becker, Wolmirstedt; Andreas Pietsch, Zella-Mehlis; Ute Scharkowski, Zepernick; Steffen Heinrich, Zittau; Birgit Baldauf, Zschornewitz

Für vierjährige Teilnahme
Udo Clemens, Altenberg; Frank Maschke, Altendorf; Dieter Koch, Henri Koch, beide Arnstadt; Olaf Rausch, Aue; Burkhard Maeß, Bad Doberan; Lutz Heinrich, Bad Langensalza; Michael Prescher, Marion Breitschuh, Dagmar Fischer, Birgit Ewald, Katrin Kolliwer, Christina Ziehm, alle Berlin; Werner König, Berlingerode; Volker Wesely, Uwe Weißflog, Cerstin Berger, Sylvia Neubert, alle Bernsbach; Barbara Würth, Bernterode; Annegret Opitz, Borna; Thomas Dittrich, Brand-Erbisdorf; Vera Schulze, Brandis; Heinz-Wilfried Bötticher, Breitenworbis; Peter Krabbe, Britz; Peter Surján, Budapest (Ungarische VR); Adelbert Heddergott, Büttstedt; Iris Grinda, Calbe; Grit Schulze, Ellen Harnath, Iris Grundke, Claudia Kerstan, Jens Purand, Ilka Kohlstock, Andrea Dreyer, Uwe Ring, alle Cottbus; Jens Schumann, Coswig; Jürgen Anders, Dahlewitz; Mario Binkowski, Demmin; Jens Paetzold, Demmin; Peter-Alexander Pöhler, Frank Wittwer, Sabine Rahn, K.-Dieter Cloe, Andreas Schimmang, Uta Oelschlägel, Heike-Karen Bochmann, Annett Körner, Angela Jircik, Matthias Apitz, Lutz Friedmann, Uwe Krebs, Norbert Koksch, Klaus Conrad, alle Dresden; Jörg Bruchertseifer, Dubna (UdSSR); Matthias Arbeiter, Eisenach; Thomas Böhme, Daina Gemper, beide Eisleben; Uwe Kintzel, Erfurt; Thomas Wingeß, Birgit Weyh, Barbara Gehb, Harald Laabs, Marita Heß, Lutz Mittelsdorf, Elke Hüfner, Thomas Kassel, Ellen Reum, Heike Reckenbeil, Cornelia Möller, Steffi Ilgen, alle Fambach; Beret Brabec, Bernd Jäger, beide Frankfurt; Kathrin Meißner, Forst; Steffen Müller, Freital; Heike Brüggemann, Thomas Gerlach, Ute Ribbe, Bernd Hartwig, Mike Liebegott, Stef-

fen Töpfer, Dirk Kramer, alle Friedeburg; Viola Richter, Garitz; Sylvio Klose, Gera; Angela Illing, Gersdorf; Claudia Hartung, Jörg Gärtner, Birgit Thiele, Christina Hesse, alle Gerstungen; Angelika Brose, Görlitz; Christof Herrmann, Kerstin Hiller, beide Greifswald; Matthias Weser, Großenhain; Andrea Potthoff, Groß Wüstenfelde; André Motz, Grünhain; Gudrun Tappert, Uwe Bias, beide Guben; Jens Folgmann, Halle; Ruth Jacoby, Halle-Neustadt; Christine Naß, Hinternah; Doris Planer, Hohendorf; Knut Bauer, Hohenstein; Undine Nathan, Michael Dietrich, Sylvia Fischer, alle Hoyerswerda; Rolf Kamieth, Kakerbeck; Arnd Rösch, Petra Quasdorf, Marko Hanke, alle Karl-Marx-Stadt; Mario Hoffmann, Kirchberg; Jörg Pöhland, Klingenthal; Alois Weninger, Knittelfeld (Österreich); Andreas Bernstein, Lehmitz; Heimo Woitek, Thomas Reimann, beide Leinefelde; Karola Näther, Thomas Richter, Jens Rudolf, Uwe Haberlandt, alle Leipzig; Ute-Barbara Heuer, Leisnig; Jörg Steinbach, Limbach-Oberfrohna; Bärbel Wintzler, Lobenstein; Annett und Katleen Weise, Anne Brünner, alle Löderburg; Martina Wolf, Magdeburg; Udo Kretzschmann, Markneukirchen, André Wenzel, Meiningen; Jürgen Wage, Jens Güth, Birgit Wilhelm, Bodo Ußfeller, alle Mittelstille; Peter Stolze, Möhlau; Peter Weingart, Mühlhausen; Volkmar Riemer, Neubrandenburg; Liane Krümmling, Neuenhofe; Matthias Theurich, Uta Rößler, beide Olbersdorf; Rüdiger Düsing, Osterburg; Antje Langer, Uwe Langer, beide Oybin; Ute Möllhoff, Piesau; Jens-Uwe Sprengel, Potsdam; Klaus Beck, Potsdam-Babelsberg; Jens Jacobi, Potsdam; Jens-Peter Planke, Premnitz; Gunter Jürschick, Rackwitz; Ulrike Baumann, Uwe und Frank Hadamik, Falk und Karsten Breuer, Dagmar Herrlich, alle Radebeul; Kerstin Neubert, Ribnitz-D.; Ronald Bracholdt, Riesa; Christine Schober, Birgit und Heiko Lehmann, Dirk Dalische, alle Rostock; Petra Forner, Rotta; Uwe Ebert, Ina Ebert, beide Ruppendorf; Regina Bricks, Saalfeld; Helmut Engelmann, Sachsendorf; Jens-Uwe Otto, Sangerhausen; Siegrid Kretschmann, Schlagsdorf; Ina Spanaus, Schleusingen; Martin Tengler, Reinhold Beckmann, Almut Beckmann, Ines Semmelrogge, Heinz-Olaf Müller, Corina Eckstein, Volker Siebenhaar, Carmen Güth, alle Schmalkalden; Lutz Möller, Schmiedeberg; Torsten Jeschke, Schwarzheide; Eckart Möbius, Roderich Winkler, beide Schwerin; Christine Kosmehl, Senftenberg; Annelie Meyer, Silberstraße; Barbara Tschada, Simone Mahlow, beide Sondershausen; Gerd Birnbaum, Spitzkunnersdorf; Volker Steuer, Spremberg; Thomas Eichhorn, Steinach; Tamara König, Jens Hoffmann, Petra Kiehm, Heiko Weiner, Angela Bieber, Sabine Munk, Marion Wolf, Frank Bähner, Christine Recknagel, Cornelia Horn, Kathrin Döll, alle Steinbach-Hallenberg; Simone Teichmüller, Stöckey; Michael Hauff, Teuchern; Heike Carlsen, Titschendorf; Michael Rehm, Torgau; Sylke Meier, Torgelow; Dietmar Ulbricht, Velten; Frank Jeschek, Vitte; Bettina Glorius, Wallrode; Jürgen Prestin, Katrin Pech, beide Waren; Sabine Stolpe, Beate Nahler, Beate Seiler, Ralf Kurch, alle Weimar; Steffen Grunewald, Werder; Bianka Schrödter, Wellmitz; Heike Vießmann, Wilkau-Haßlau; Uwe Müller, Wroclaw (VR Polen); Christoph Chojetzki, Jens Mucke, beide Zeithain; Frank Erdmann, Zeitz; Frank Lohmeyer, Steffen Pankow, Regina Kreul, Gabriele Herzig, Stefan Gondlach, Udo Matzner, Gerald Sommer, Michael Steurich, Birgit Thomas, Heike Grigoleit, Angelika Schubert, Uta Hochberger, alle Zittau; Ute Baumann, Zschocken

Für dreijährige Teilnahme

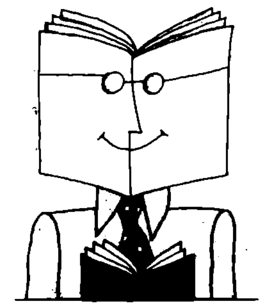
Uwe Maaz, Arnstadt; **Henri Kriechling,** Asbach; **Guntram Türke,** Auerbach; **Thorsten Tonndorf,** Bad Salzungen; **Kerstin Wegner,** Braunsbedra; **Andreas Winkler,** Cossebaude; **Ralf Hortig, Thomas Hoffmann, Andreas Schlecht, Ralf Bernhardt,** alle Cottbus; **Andreas Haubold,** Daasdorf; **Annette Meurer,** Dietzhausen; **Harry Höfer,** Dorndorf; **Carolin Engel, Thomas Hartwig, Jürgen Gräfenstein, Michael Pietschner, Lutz Jeroch,** alle Dresden; **Michael Wagner,** Fambach; **Cornelia Schädlich,** Floh; **Jörg Butter,** Freiberg; **Burkhard Fleck,** Geisa; **Angela Illing,** Gersdorf; **Bodo Heise,** Görlitz; **Yvonne Pforr,** Gräfenhainichen; **Gunnar Möller,** Greifswald; **Michael Katzer,** Greußen; **Heike Arnold,** Grimma; **Susanne Zöllner,** Halle; **Gernot Bernhardt,** Halle-Neustadt; **Heike Macionga,** Hammerbrücke; **Volkmar Liebscher,** Ilmenau; **Christel Mitzenheim,** Jena; **Jens Pönisch, Thomas Mader,** beide Karl-Marx-Stadt; **Ines Bauer,** Leipzig; **Jens Grundmann,** Limbach-Oberfrohna; **Grit Werner,** Magdeburg; **Uwe Zscherpel,** Meerane; **Per Witte,** Mittenwalde; **Heidrun Jänchen,** Mohsdorf; **Sabine Schmidt,** Nauendorf; **Meike Pfützenreuter,** Niederorschel; **Uwe Pauluhn,** Nordhausen; **Anett Rabe, Birgit Uhlmann,** beide Oberlungwitz; **Anett Schulzensohn,** Oberseifersdorf; **Kerstin Johannes,** Oranienbaum; **Peter Seifert,** Pinnau; **Kerstin Zirnstein,** Pirna; **Thomas Mittelbach,** Plessa; **Astrid Wruck,** Rostock; **Wolfgang Stein,** Rudolstadt; **Andreas Hempler,** Rüdnitz; **Birgit Bricks,** Saalfeld; **Jens Collmer, Thomas Gerth,** beide Schmalkalden; **Martin Förster, Silke Mistol,** beide Söllichau; **Bert Hoffmann,** Söllichau; **Bärbel Häfner,** Steinbach-Hallenberg; **Manfred Jahn,** Stralsund; **Peter Pfannschmidt,** Suhl; **Ute Bergmann,** Torgau; **Sabine Ender, Sabine Rommel,** beide Trusetal; **Frank Berner,** Vorbein; **Gudrun Boettcher,** Weimar; **Sebastian Strube,** Wernsdorf; **Eric Link,** Wismar; **Bernd Dunger, Gabriele Schubert,** beide Zittau; Katharina Gose, Ahlum; Holger Herold, Frank Kämpfer, Gunter Thomas, alle Altenburg; Hajo Herbst, Altenpleen; Kathrin Frey, Altwigshagen; Sibylle Heymann, Aschersleben; Uwe Wachtel, Petra Bergander, Sabine Kumineck, Ralph Müller, alle Bad Bibra; Frauke Maeß, Bad Doberan; Jörg Barthelmann, Bad Frankenhausen; Carsten Willing, Elke Herrlich, Steffen Miersch, Petra Hillig, Cornelia Weinhold, alle Bad Gottleuba; Katrin Huß, Bad Langensalza; Kersten Pegesa, Bad Muskau; Jens Mertlik, Bahratal; Caterina Beyer, Beetzendorf; Jens Spyrka, Bergen; Birgit Wollschläger, Steffen Hönicke, beide Bergwitz; Ingrid Wolf, Frank Bendin, Stefan Berg, Andreas Schaale, alle Berlin; Lothar Riemekasten, Bermbach; Hagen Geppert, Bernburg; Karsten Günther, Jörg Günthel, Matthias Neubert, Matthias Mosch, alle Bernsbach; Ulrich Kramer, Gundolf Schilling, beide Bernterode; Petra Keßler, Astrid Markgraf, beide Bischofferode; Carmen Schneider, Bischofswerda; Pia Zimmermann, Kunigunde Schmidt, Inge Beck, alle Bleicherode; Susanne Timmann, Boizenburg; Birgit Rühlemann, Sylvia Schnitter, beide Braunsbedra; Andreas Kraska, Breitenworbis; Hartwig Ranft, Martin Eschrich, Heike Kümpel, Astrid Cimalla, Heike Reckenbeil, alle Breitungen; Birgit Weishaupt, Bülow; Marita Hartleb, Büttstedt; Bärbel König, Annegret Schneider, Kerstin Ziesch, Simone Kahl, Heike Grohmann, alle Burkau; Guido Mehne, Volker Stephan, Ralph Voigtländer, alle Calbe; Olaf Seifert, Camburg; Maik Weide, Callenberg; Dietrich Schmidt, Collmen; Detlef Baur, Susanne Liebelt, Uta Lehmann, Detlef und Eberhard Kerstan, Monika Ludwig, Lutz Graupe, Kathrin Magister, Birgit Schreiber, Uwe Röhl, Jens-Uwe Schlüßler, Jörg Hortig, Verena Braun, Thomas Kolb, Thomas Brendahl, alle Cottbus; Karin Bähr, Crispendorf; Karola Sarodnik, Dallgow; Carsten Lehmann, Gabriele Voigt, beide Dahmsdorf; Gabriele Sehmisch, Dessau; Beate Schrenk, Manfred Kutschank, beide Deutschenbora; Silke Zimpel, Monika Nolte, Manuela Frankenberg, Yvonne Dellner, Eva Wetter, alle Dingelstädt; Andreas Harz, Döbeln; Grit Böttcher, Dorfstadt-Falkenstein; Michael Beetz, Dreetz; Michael Giesecke, Steffen Taut, Helmuth Goldberg, Steffen Rommeck, Titus Ziegler, Michael Berton, Timm Scheidig, Antje Zschock, Peter Hirche, Thomas Schindhelm, Holger Kschichenk, Jörn Wittig, Jens Rotsch, Detlef John, Anett Jünger, Gerlind Bartusch, Heiko Ploß, Peter Roth, Ralph Gruber, Uwe Senf, Hans-Ullrich Mäser, Thomas Süß, Karl Klotzsche, Jörg Baum, alle Dresden; Olaf Niederlein, Ebersbach; Bernhard Unkart, Eckardts; Thomas Marek, Peter Weise, Mandy Rinklin, alle Eisenach; Volkmar Kolleck, Eisenhüttenstadt; Henrik Seifert, Volker Georgy, Renate Lützkendorf, Uwe Strohmeier, Ralf York, Dirk-Thomas Orban, alle Erfurt; Uwe Nagel, Erfurt-Hochheim; Math. Zirkel der Hugo-Joachim-OS, Espenhain; Jan Beck, Falkensee; Jens Büttner, Iris Abt, Elke Schabacker, alle Fambach; Burkhard Büchler, Feldberg; Cornelia Schädlich, Simone Danz, beide Floh; Kathrin Jahn, Fockendorf; Heike Marks, Frankenthal; Gunar Stübner, Ralf Baumhekel, beide Freital; Ralph Krause, Freiberg; Andreas Fintzel, Gottfried Spiegel, beide Friedeburg; Hartmut und Stefan Fritsch, Fürstenwalde; Gerd Hackbarth, Gallentin; Anne-Katrin Schmidt, Gelmeroda; Andreas Lemke, Genshagen; Andrea Rebling, Gerstungen; Frank Scheffler, Gnoien; Rafael Stein, Gödern; Torsten Siebert, Anne-Kathrin Endtricht, Kerstin Dömeland, alle Görlitz; Babett Brehme, Ingo Brehme, beide Goßwitz; Klaus-Dieter Bartl, Gotha; Jens Vader, Grabow; Matthias Kasparek, Birgit Köhler, beide Gräfenhainichen; Stefan Gökkeritz, Katharina Herrmann, Ines Kath, Andreas Wolf, Kathrin Rohland, Pedro Tiesler, Manuela Heims, Astrid Renz, Silvia Falk, Martin Haufe, Johannes Rhein, alle Greifswald; Gabi Kramer, Greiz; Jana Henkel, Greußen; Torsten Weinhold, Andreas Kästner, Andrea Tschiche, alle Grimma; Heike Klitz, Grimmen; Christina Kaufmann, Carola Riesmeyer, beide Großbodungen; Astrid Leuteritz, Heike Schurig, Gerd Hennig, alle Großröhrsdorf; Jürgen Starke, Christine Helm, Cornelia Mewes, Marion Wiepke, alle Guben; Dirk Schreiter, Helgard Dalchow, beide Halle; Jens Matuschek, Regine Binder, Matthias Berle, alle Halle-Neustadt; Holger Unglaube, Hammerbrücke; Steffi Ehring, Christel Henneschen, Petra Bunk, Heike Krämer, alle Hedersleben; Volker und Petra Reck, Heiligenstadt; Jan Pampel, Heinrichsort; Enka Stelzer, Heringsdorf; Bettina Amarell, Dagmar Bartholomäus, Birgit Gärtner, Elke Hanf, Sabine Hegewaldt, Simone Fritz, Heike Hanf, alle Hinternah; Eike Harmel, Hohenferchesar; Thomas Klein, Roland Dietrich, Petra Ziegler, René Schüppel, Falk Neumann, Conchita Schüppel, alle Hoyerswerda; Kerstin Hirsch, Holzdorf; Horst Fliegner, Jarmen; Jens Buckisch, Ina Woytinas, Ulrich Voigt, Sylvio Milch, alle Kamsdorf; Torsten Zahn, Rocco Zieris, beide Kandelin; Birgit Hofmann, Birgit Lang, Andreas Hengst, Anett Märker, Ellen Gluthmann, alle Karl-Marx-Stadt; Christian Saegebarth, Kirchdorf; Anett Sander, Klettenberg; Steffen Rieth, Klostermansfeld; Gabriele Enigk, Christine Stein, beide Kolochau; Antje Meyer, Krautheim; Kerstin Willek, Kriebitzsch; Jens-Uwe Paprotny, Kühlungsborn; Fred Kleemann, Kyritz; Gunar Schneider, Langenbach; Horst Kügler, Langenleuba-Niederhain; Petra Pluta, Lauchhammer; Angela Schönfelder, Stefan Schippel, beide Lauscha; Joachim Gessert, Leina; Carola Günther, Beate Kistner, Gabi Gold, Karsten Drescher, Bettina Hagemann, alle Leinefelde; Steffen Zopf, Jörg Schwarzer, Katrin Bormann, Holger Laux, Heiko Rudolf, Birgit Haberlandt, Stephan Bönewitz, alle Leipzig; Mario Görmer, Lichtenhain; Carmen Krämer, Lobenstein; Karola Waterstraat, Lubmin; Thomas Kühn, Lübben; Monika Kube, Lübbenau; Andreas Berger, Lüttewitz; Sigrun Oppenheimer, Mallиß; Manuela Marpert, Markersdorf; Ina Groll, Meerane; Silke Marquardt, Rüdiger Malsch, Holger Gubitz, Thomas Eller, alle Meiningen; Tobias Lücke, Meißen; Kerstin Graf, Kristin Müller, Kerstin Friedrich, Beate Dutschke, alle Mittelherwigsdorf; Ralf Kausmann, Mittelndorf; Antke Kössel, Mittelschmalkalden; Holger Lehmann, Marion Jacksteit, Andrea Büchner, Evelyn König, Jörg Voigtsberger, Andrea Büchner, Maik Möller, Regina Nattermann, Ramona Meyer, alle Mittelstille; Angelika Radtke, Mittweida; Gudrun Hebestreit, Ralf Schreiber, beide Mühlhausen; Volker Müller, Müllersdorf; Uwe Grasenack, Pierre Beilschmidt, beide Nauendorf; Torsten Kretschmer, Naumburg; Birger Wirth, Nermsdorf; Dirk Säger, Neuenhagen; Knut Hantschel, Neuenkirchen; Tino Radau, Neukirch; Thomas Schönmuth, Neukirch; Ilka Serbe, Neukloster; Kerstin Feigel, Neundorf; Anne Henker, Neukloster; Sigrun Massanek, Neusornzig; Karsten Woike, Neustadt; Marion Müller, Neustrelitz; Bärbel Kiel, Niederorschel; Reinhard Moser, Nimritz; Uwe Koch, Nordhausen; Jörg Lehnert, Oelsen; Steffi Raabe, Ohrdruf; Tino Steurich, Olbersdorf; Stefan Wust, Osmünde; Ariane Görner, Osternienburg; Andreas Bollmann, Osteroda; Burkhard Ganß, Pappenheim; Evelyn Riemer, Ponickau; Elisabeth Schültke, Frank Treichel, beide Potsdam; Dorit Rheinsberg, Premnitz; Hagen Mrowetz, Prenzlau; Jörg Lobbes, Pritzerbe; Bianka Kappler, Radeberg; Christiane Dobberstein, Rathenow; Claudia Würker, Reichenbach; Lutz Winter, Ingo Bartsch, beide Reuden; Ralph Neumann, Ulrich Zeitzmann, beide Ribnitz-D.; Uwe Mattutat, Riesa, Axel Haubeiß, Ringleben; Torall Buchholz, Rosenow; Bernd und Jens Möhring, Thomas Gramm, alle Roßlau; Susanne Forstreuter, Kirsten Kowalewski, beide Rostock; Christina Reuter, Constanze Behmke, Matthias Teschendorf, Armin Kunze, alle Rüdnitz; Heike Brüning, Saalfeld; Anke Müller, Klaus Weinberg, beide Sachsendorf; Andreas Gießler, Steffen Krümmling, beide Sangerhausen; Birgit Bockholdt, Satow; Eva Schubert, Schalkau; Andreas Ullmann, Scheibenberg; Cornelia Grulke, Schernberg; Jens-Uwe Thiel, Antje Gerbig, Susanne Heuer, Silvio Schmidt, Ines Rieger, Rene Hellmann, Claudia König, alle Schmalkalden; Ines Müller, Schmatzin; Sabine Buß, Schorssow; Udo Schmidt, Schulzendorf; Wolfgang Förg, Schwaz (Österreich); Elke Meißner, Sitzendorf; Rolf Wendler, Gottfried Schubert, beide Sömmerda; Steffen Hildisch, Matthias Schneiderheinze, beide Sondershausen; Kordula Scholz; Spremberg; Gunter Rothämel, Sabine Avemarg, Kerstin Holland-Letz, Christine Häfner, Pia Köllmann, Anette Kaiser, Beate König, Silke König, Cornelia Recknagel, Corina Speck, Andrea Wagner, Knuth Ender, Birgit Jahn, Frank Wurschi, Anette Recknagel, Udo Walther, Christiane Büchel, Frank Dümmke, Sabine Henkel, Heidrun Bäckert, alle Steinbach-Hallenberg; Katharina Grothe, Stöckheim; Beate Doelfs, Roland Goldenbogen, Holger Chamier, Silke Reuscher, Ines Pubanz, Martin Schuster, Barbara Pfuhl, alle Stralsund; Elke Rösner, Strausberg; Ralf-Torsten Scheel, Thomas Hantel, Heidrun Tiedt, alle Teterow; Margrit Creutzburg, Thal; Annekatrin Heuer, Tieckow; Ulf Carlsen, Titschenbach; Katrin Schatz, Volker Barop, beide Torgau; Ilona Tiede, Torgelow; Antje Uhrlaß, Treben; Elke Wahn, Uebigau; Jörg Hoerenz, Vitte; Jan Günther, Voigtsdorf; Kerstin Spiegel, Waldheim; Torsten Winkler, Walldorf; Gisbert Thiere, Wallhausen; Stefan Syring, Warin; Klaus-Detlef Gehrke, Warnemünde; Kerstin Ackermann, Wasungen; Birgit Körner, Wegeleben; Reiner Maschke, Heike Eckardt, beide Weimar; Olaf Seidel, Weißwasser, Erika Petzelis, Wendisch-Rietz; Kerstin Müller, Karla Kemlein, Anke Malsch, Thomas Krech, Mayk Rehtanz, Heike Kreuter, alle Wernshausen; Torsten Grimm, Uwe Welz, Sven Rißmann, alle Wesenberg; Rudolf Willing, Wien (Österreich); Rainer Enge, Wingerode; Ralf Mahnke, Silke Gabriel, Marita Kalisch, alle Wismar; Karsten Schlutter, Wittstock; Torsten Noack, Wittenberg; Jörg Schleinitz, Wölsickendorf; Eva-Maria Heubner, Wolfen; Birgit Schmidt, Worbis; Mario Noack, Birgit Schultheiß, beide Wüstenbrand; Torsten Ninebuck, Roland Wehmeier, beide Wüsteney; AG Math. OS Zahna; Stefan Langenhan, Zella-Mehlis; Christine Gruhn, Zepernick; Heike Kiehne, Michael Holdys, beide Ziesar; Knut Kretschmar, Peter Wenzel, Heimo Henschelmann, alle Zittau; Ulrich Zurth, Zerpenschleuse

Hinweis: Mit dem alpha-Wettbewerb 1976/77 erhalten unsere aktivsten Einsender (ein-, zweijährige Teilnahme) sowie die vorbildlichsten *Träger des Abzeichens in Gold für dreijährige Teilnahme* neben der Urkunde und dem *alpha*-Abzeichen Buchpreise. Wie seit Beginn des Wettbewerbs (1969) werden weiterhin alle Namen der Träger des Abzeichens in Gold veröffentlicht. Über 250 Einsender erhielten ihre eingesandten Unterlagen zurück, da sie nicht die für den Erwerb geforderte Anzahl von zehn Antwortkarten (richtig gelöst) vorweisen konnten.

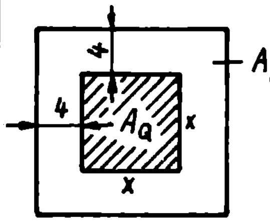
Red. *alpha*

Wissen wo

Inhaltsverzeichnis des Jahrgangs 1977

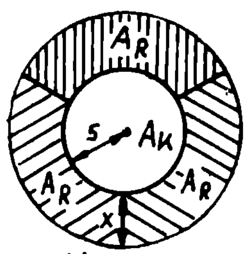


Gut gedacht ist halb gelöst



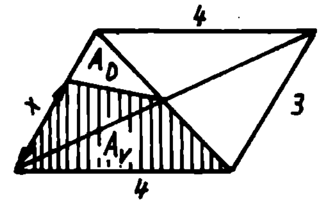
$A_R : A_Q = 3$

gesucht : x



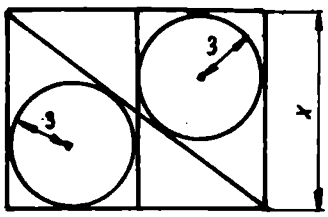
$A_R = A_K$

gesucht : x

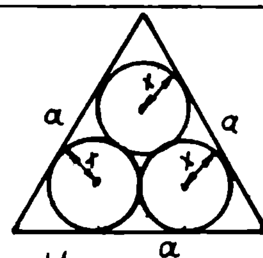


$A_V : A_D = 5$

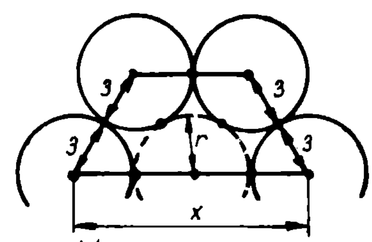
gesucht : x



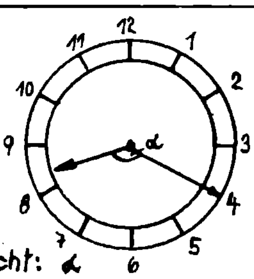
gesucht : x



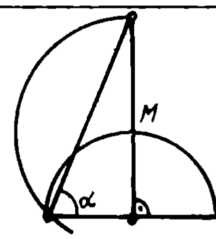
gesucht : x



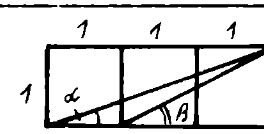
gesucht : x



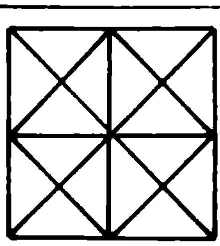
gesucht: α



gesucht: α



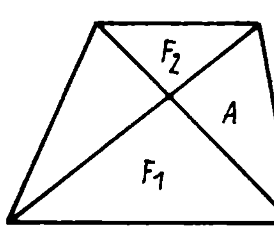
gesucht : α + β



x - Anzahl der Dreiecke

y - Anzahl der Rechtecke

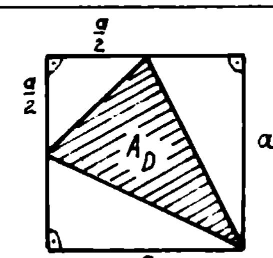
gesucht : x, y



$F_1 = 18$

$F_2 = 9$

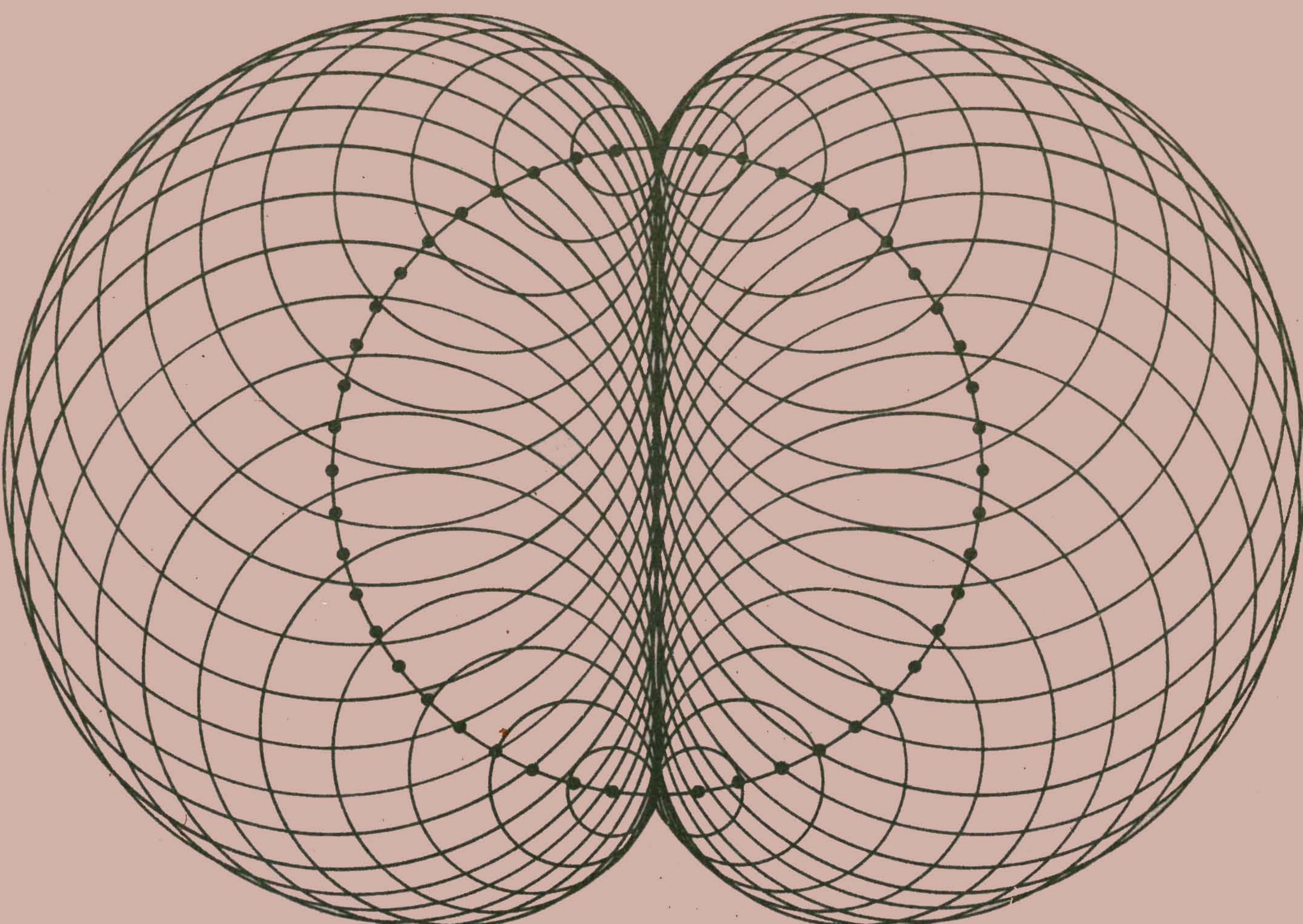
gesucht: A



gesucht : $A_{Qu} : A_D$

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



2

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
12. Jahrgang 1978
Preis 0,50 M
Index 31 059

Redaktion:
StR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 10,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: H. Parschau, Berlin (S. 27); H. Seyferth, Leipzig (S. 29); J. Haunack, TH Magdeburg (S. 30); *Krokodil* 25/77, Moskau (S. 34); B. Henninger, Berlin (S. 35); K. Günter, PH Güstrow; Kaczmarczyk, Berlin (S. 38); C. Otto, Berlin (S. 39).
Das Titelblatt wurde unserer sowjetischen Bruderzeitschrift *Quant* 9/77 entnommen.
Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128 · ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 20. Dezember 1977

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Eigenschaften von Verknüpfungen

Teil 1

In den beiden Beiträgen „Die ‚Uhr-Addition' und andere Verknüpfungen" sowie „Verknüpfungen in der Ebene" (alpha 6/1976 und 4/1977) haben wir bereits eine ganze Palette von Verknüpfungsgebilden kennengelernt. Jetzt wollen wir einige Verknüpfungsgebilde näher untersuchen. Betrachten wir z. B. die Addition ganzer Zahlen, so wissen wir aus dem Mathematikunterricht, daß für dieses Verknüpfungsgebilde $(G, +)$ die folgende Eigenschaft erfüllt ist:

Für alle ganzen Zahlen x und y gilt

$$E_1: x+y=y+x.$$

D. h., die Summanden x und y sind vertauschbar. Wir sagen, die Verknüpfung $+$ (Addition) oder das Verknüpfungsgebilde $(G, +)$ ist *kommutativ*. Beide Redeweisen bedeuten dasselbe.

Auch das Verknüpfungsgebilde $(G, \circ_1)$ mit

$x \circ_1 y =_{Df} 2(x+y)$ für alle $x, y \in G$

ist kommutativ; für alle ganzen Zahlen x, y gilt nämlich:

$x \circ_1 y = 2(x+y) = 2(y+x) = y \circ_1 x.$

Weitere kommutative Verknüpfungen sind uns durch die verschiedenen Mittelwerte gegeben:

$x \circ_2 y =_{Df} \frac{x+y}{2}$ über R^* (oder R oder P),

$x \circ_3 y =_{Df} \sqrt{x \cdot y}$ über P^+ (oder $P^+ \cup \{0\}$),

$x \circ_4 y =_{Df} \frac{2xy}{x+y}$ über P^+ (oder $R^* \setminus \{0\}$)

(Begründung?), wobei P^+ die Menge der positiven reellen Zahlen ist.

Die „Uhr-Addition" ist ebenso kommutativ (vgl. alpha 6/1976, Aufgabe 2b) wie die Konstruktion des Mittelpunktes oder die Streckenhalbierung (vgl. alpha 4/1977, Aufgabe 2). Daß aber nicht jedes Verknüpfungsgebilde kommutativ sein muß, zeigt uns z. B. die Subtraktion ganzer Zahlen (Warum?). D. h., die Eigenschaft der Kommutativität ist für ein Verknüpfungsgebilde keineswegs selbstverständlich.

Aufgabe 1:

a) Untersuche, ob die Verknüpfungen

$x \circ_5 y =_{Df} 2x+y$	über R^*,
$x \circ_6 y =_{Df} x \uparrow y = x^y$	über $N \setminus \{0\}$,
$x \circ_7 y =_{Df} x \sqcap y = \text{ggT}(x, y)$	über N,
$x \circ_8 y =_{Df} \sqrt{x^2+y^2}$	über $P^+ \cup \{0\}$,
$x \circ_9 y =_{Df} x(x+y)$	über R,
$x \circ_{10} y =_{Df} x+y+xy$	über G,
$x \circ_{11} y =_{Df} \lvert x-y \rvert$	über R^*

kommutativ sind.

b) Gib für die nicht-kommutativen Verknüpfungen $\circ$ aus a) alle Lösungen der Gleichung $x \circ y = y \circ x$ an!

c) Stelle fest, welche der über der Ebene ε definierten geometrischen Verknüpfungen $\circ$, $*$, $\square$, $\bullet$, $\blacktriangle$, $\blacksquare$, ∇ kommutativ sind (vgl. alpha 4/1977)!

d) Gib selbst kommutative und nicht-kommutative Verknüpfungen an!

Neben der Kommutativität gibt es nun eine Reihe weiterer interessanter Eigenschaften, die in einem vorgegebenen Verknüpfungsgebilde $(M, \circ)$ erfüllt sein können. Unser Ziel ist es, möglichst viele dieser Eigenschaften aufzudecken. Dabei werden wir aber zugleich festhalten, welche (der uns aus anderen Beispielen schon bekannten) Eigenschaften *nicht* erfüllt sind. Letzteres wird sich insbesondere dann als nützlich erweisen, wenn wir Verknüpfungsgebilde vergleichen bzw. gegenüberstellen wollen.

Eine Eigenschaft, die wir ebenfalls schon aus dem Unterricht kennen, ist die *Assoziativität*. Addition und Multiplikation sind assoziative Verknüpfungen, d. h. für alle reellen Zahlen x, y und z gilt

E_2: $(x+y)+z = x+(y+z)$ bzw.
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

Aufgabe 2:

Wir setzen voraus, die Verknüpfungsgebilde $(P, +)$ und $(P, \cdot)$ sind assoziativ.

Zeige, daß dann auch die Verknüpfungsgebilde

a) $(N, +)$, $(G, +)$, $(R^*, +)$, $(R, +)$ und

b) $(N, \cdot)$, $(G, \cdot)$, $(R^*, \cdot)$, $(R, \cdot)$

assoziativ sind!

Für ein Verknüpfungsgebilde $(M, \circ)$ hat der Term $x \circ y \circ z$ zunächst keinen Sinn, da der Definitionsbereich $D_\circ$ der Funktion $\circ$ laut Definition aus der Menge aller (geordneten) Paare (x, y) mit $x \in M$ und $y \in M$ besteht:

$D_\circ = M \times M = \{(x, y) \mid x \in M \text{ und } y \in M\}$.

Das wird auch anhand unseres Automaten deutlich, der lediglich *zwei* Eingänge besitzt! (Vgl. Abbildung 1, alpha 6/1976.) Erst durch Klammersetzung

$(x \circ y) \circ z$ oder $x \circ (y \circ z)$

erreichen wir, daß jeweils *zwei* Elemente miteinander verknüpft werden; nämlich im 1. Fall:

$(x, y) \rightarrow x \circ y = u$ und daraufhin

$(u, z) \rightarrow u \circ z = (x \circ y) \circ z = v$,

im 2. Fall:

$(y, z) \rightarrow y \circ z = p$ und daraufhin

$(x, p) \rightarrow x \circ p = x \circ (y \circ z) = q$.

Wenn nun das Verknüpfungsgebilde $(M, \circ)$ assoziativ ist, d. h. für alle x, y und $z \in M$ gilt

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

dann bedeutet das demnach, daß die Automaten-„Bäume" für $(x \circ y) \circ z$ bzw. $x \circ (y \circ z)$ jeweils dasselbe Element liefern:

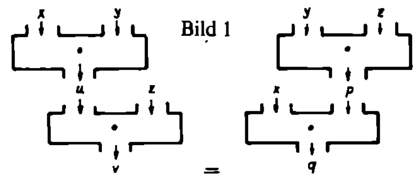


Bild 1

D. h. also, die Assoziativität erlaubt das Versetzen der Klammern:

$(\vec{x} \circ [y) \vec{\circ} z]$.

Dann können wir die Klammern aber auch, ohne Mißverständnisse zu befürchten, ganz weglassen:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = x \circ y \circ z.$$

Ein weiteres Beispiel:

Über der Menge G der ganzen Zahlen definieren wir

$$x \circ_{12} y =_{Df} x+y-3.$$

Das Verknüpfungsgebilde $(G, \circ_{12})$ ist kommutativ und assoziativ, denn für alle ganzen Zahlen x, y und z gilt:

a) $x \circ_{12} y = x+y-3 = y+x-3 = y \circ_{12} x$;

b) $(x \circ_{12} y) \circ_{12} z = (x+y-3)+z-3$
$= x+(y+z-3)-3$
$= x \circ_{12} (y \circ_{12} z)$.

Aufgabe 3:

a) Beweise, daß die Verknüpfungsgebilde $(G, \circ_{13})$ und $(G, \circ_{14})$ mit

$x \circ_{13} y =_{Df} x+y+c$ bzw. $x \circ_{14} y =_{Df} x \cdot y \cdot c$

kommutativ und assoziativ sind! Dabei sei c jeweils eine beliebige, aber feste ganze Zahl.

b) Wähle c so, daß $(G, \circ_{13})$ bzw. $(G, \circ_{14})$ in dir bereits bekannte Verknüpfungsgebilde übergehen!

Wie im Falle der Kommutativität überzeugen wir uns jetzt, daß auch die Assoziativität nicht immer erfüllt sein muß. So sind die Subtraktion und die Division reeller Zahlen (Welche Einschränkung an die Trägermenge ist bzgl. der Division erforderlich?) weder kommutativ noch assoziativ! (Begründung?)

Aufgabe 4:

a) Zeige, daß auch die Verknüpfungsgebilde $(G, -)$ und $(R, -)$ sowie $R^* \setminus \{0\}, :)$ und $(R \setminus \{0\}, :)$ weder kommutativ noch assoziativ sind!

b) Vgl. deine Begründung mit der für Aufgabe 2! Formuliere die Aufgabe (evtl.) um, daß du analog zu Aufgabe 2 schließen kannst!

Mit unseren nächsten Beispielen wollen wir dem vielleicht entstandenen Eindruck begegnen, daß Kommutativität und Assoziativität in einem Verknüpfungsgebilde entweder beide zugleich gelten müssen oder aber beide zugleich nicht erfüllt sein können. Wir betrachten deshalb das kommutative Verknüpfungsgebilde $(G, \circ_1)$ mit $x \circ_1 y =_{Df} 2(x+y)$ für

alle ganzen x, y. Es ist nicht assoziativ. Um das zu zeigen, genügt es wieder, ein Gegenbeispiel zu finden:
$(1\circ_1 2)\circ_1 3=18$, aber $1\circ_1(2\circ_1 3)=22$.
Auch die Mittelwerte liefern Verknüpfungen, die zwar kommutativ, aber sämtlich nicht assoziativ sind! (Beweis?)
Eine assoziative Verknüpfung, die nicht kommutativ ist, finden wir über der Menge N der natürlichen Zahlen, wenn wir unter $x\circ_{15}y$ diejenige natürliche Zahl z verstehen wollen, deren Zifferndarstellung durch Hintereinandersetzen der Ziffern von x (zuerst) und der Ziffern von y gewonnen wird. Dieses Verknüpfungsgebilde $(N, \circ_{15})$ ist offensichtlich assoziativ, aber nicht kommutativ; z. B. gilt $1\circ_{15}2=12$, aber $2\circ_{15}1=21$.

Aufgabe 5:

a) Untersuche, ob die in Aufgabe 1 a) genannten Verknüpfungen assoziativ sind!
b) Gib selbst assoziative und nicht-assoziative Verknüpfungsgebilde an!
Stütze dich dabei auch auf die Beispiele aus alpha 6/1976, und 4/1977!
Unserem Anliegen, neben der Kommutativität (Eigenschaft E_1) und Assoziativität (E_2) weitere Eigenschaften von Verknüpfungen aufzuspüren, kommen wir bereits näher, wenn wir die vier Grundrechenarten einmal vergleichen und gegenüberstellen. Nach unseren bisherigen Überlegungen können wir allerdings lediglich feststellen, daß entweder Assoziativität und Kommutativität erfüllt sind (Addition, Multiplikation) oder aber beide Gesetze nicht gelten (Subtraktion, Division). Bei näherer Untersuchung stoßen wir jedoch im Falle von Subtraktion (über P) und Division (über $P\setminus\{0\}$) z. B. auf die folgenden „Rechengesetze“:
Für alle x, y, z, u und v gilt
E_3: $x\circ x=y\circ y$,
E_4: $(x\circ z)\circ(y\circ z)=x\circ y$,
E_5: $x\circ(x\circ y)=y$ und
E_6: $(x\circ y)\circ(u\circ v)=(x\circ u)\circ(y\circ v)$.
Die Eigenschaft E_3 heißt *Unipotenz*, die Eigenschaft E_6 *Bisymmetrie*. (Auch die beiden restlichen Eigenschaften haben in der Fachliteratur einen Namen, nämlich Rechts-Transitivität bzw. Links-Systemregel.)
Während die drei Gesetze E_3 bis E_5 weder von der Addition noch von der Multiplikation erfüllt werden, überzeugen wir uns ohne Mühe, daß die Bisymmetrie eine Eigenschaft ist, die *alle vier Grundrechenarten* besitzen! Denn für alle reellen x, y, u und v gilt

$$(x+y)+(u+v)=(x+u)+(y+v),$$
$$(x-y)-(u-v)=(x-u)-(y-v),$$
$$(x\cdot y)\cdot(u\cdot v)=(x\cdot u)\cdot(y\cdot v),$$
$$(x:y):(u:v)=(x:u):(y:v),$$

wobei für die Division wieder $P\setminus\{0\}$ als Trägermenge fungiert.
Der Vergleich der vier Grundrechenarten hat demzufolge jetzt dieses Aussehen:

Tabelle 1

Eigenschaft	Verknüpfungsgebilde $(P,+)$ $(P,\cdot)$	$(P,-)$ $(P\setminus\{0\},:)$
E_1	x	–
E_2	x	–
E_3	–	x
E_4	–	x
E_5	–	x
E_6	x	x

Aufgabe 6:

Untersuche die bisher aufgeführten Verknüpfungen in bezug auf diese neuen Eigenschaften (E_3 bis E_6), und stelle die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen!
Gilt für ein Element x eines Verknüpfungsgebildes $(M,\circ)$ $x\circ x=x$, so heißt dieses Element *idempotent*. So sind sowohl 0 als auch 1 idempotente Elemente, wenn wir bei den entsprechenden Grundrechenarten bleiben:
$0+0=0$, $0-0=0$, $0\cdot 0=0$, $1\cdot 1=1$
und $1:1=1$,
dies sind dann auch schon die einzigen idempotenten Elemente. Die Mittelwert-Verknüpfungen hingegen, die einerseits kommutativ und bisymmetrisch sind, andererseits aber keine der Eigenschaften E_2 bis E_5 erfüllen (Beweis?), besitzen die Eigenschaft, daß *alle Elemente* der Trägermenge idempotent sind. Wir sagen dann, die Verknüpfung selbst ist *idempotent*. Für alle x gilt also
E_7: $x\circ x=x$.
Es gilt in der Tat

$$x\circ_2 x=\frac{x+x}{2}=\frac{2x}{2}=x,$$
$$x\circ_3 x=\sqrt{x\cdot x}=\sqrt{x^2}=x$$
(beachte die Trägermenge!),
$$x\circ_4 x=\frac{2x\cdot x}{x+x}=\frac{2x^2}{2x}=x.$$

Aufgabe 7:

Ergänze deine Tabelle aus Aufgabe 6 in bezug auf Idempotenz!
Auch sind – mit einer Ausnahme – alle in *alpha*, 4/1977, aufgeführten geometrischen Verknüpfungen idempotent. (Die Ausnahme, nämlich das Verknüpfungsgebilde $(c,\circ)$ enthält nur entweder einen, drei oder neun idempotente Elemente; das sind gerade die Wendepunkte der Kubik c!) Bleiben wir in der Ebene, so erweist sich z. B. die Mittelpunktskonstruktion oder Streckenhalbierung $\circ_{16}$ (alpha 4/1977) als idempotente und bisymmetrische Verknüpfung. Während die Idempotenz von $(\varepsilon,\circ_{16})$ dabei laut Definition gesichert ist, spiegelt sich die Bisymmetrie in dem folgenden bekannten Satz wider:
Die Mittelpunkte der Seiten eines Vierecks sind die Eckpunkte eines Parallelogramms.

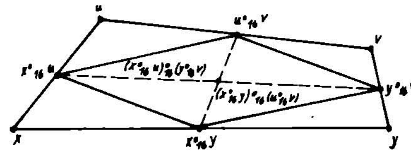


Bild 2

Aufgabe 8:

Beweise diesen Satz!
Von einigen geometrischen Verknüpfungen wissen wir darüber hinaus, daß sie auch die Eigenschaft E_5 erfüllen (vgl. alpha 4/1977, Aufgaben 8 b und 13).

Aufgabe 9:

Überlege und veranschauliche dir, welche Eigenschaften die uns bekannten geometrischen Verknüpfungen besitzen! *I. Lehmann*

Lösungen der Aufgaben

Aufgabe 1:
a) Die Verknüpfungen $\circ_7$, $\circ_8$, $\circ_{10}$ und $\circ_{11}$ sind kommutativ: $x\circ_7 y=x\sqcap y=y\sqcap x=y\circ_7 x$ (vgl. dazu die Definition von $\sqcap$ in alpha 4/1977).
$x\circ_8 y=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{y^2+x^2}=y\circ_8 x$;
$x\circ_{10}y=x+y+xy=y+x+yx=y\circ_{10}x$;
$x\circ_{11}y=|x-y|=|-(y-x)|=|y-x|$
$=y\circ_{11}x$.
Die Verknüpfungen $\circ_5$, $\circ_6$ und $\circ_9$ sind nicht kommutativ, z. B. gilt:
$1\circ_5 2=4$, aber $2\circ_5 1=5$;
$1\uparrow 2=1$, aber $2\uparrow 1=2$;
$1\circ_9 2=3$, aber $2\circ_9 1=6$.
b) Die Gleichung $x\circ_5 y=y\circ_5 x$ hat nur die triviale Lösung $x=y$;
die Gleichung $x\circ_6 y=y\circ_6 x$ hat neben der trivialen Lösung $x=y$ noch das Lösungspaar $x=2$, $y=4$ (bzw. $x=4$, $y=2$) (beachte, daß x und y *natürliche* Zahlen sind!)
die Gleichung $x\circ_9 y=y\circ_9 x$ hat neben der trivialen Lösung $x=y$ die Lösung $x=-y$.
c) Nur $\circ$ (bzw. $\hat{}$ mit $a:b=1$).

Aufgabe 2:
Da *für alle* reellen Zahlen x, y und z $(x+y)+z=x+(y+z)$ bzw. $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ gilt, folgt die Behauptung aus der Tatsache, daß N, G, R^* und R (echte) Teilmengen von P sind.

Aufgabe 3:
a) Der Beweis verläuft analog zu dem für $(G,\circ_{12})$.
b) $(G,\circ_{13})$: $c=0$, $c=-3$; vgl. auch die Definition der „Uhr-Addition“; $(G,\circ_{14})$: $c=1$.

Aufgabe 4:
a) $2-1\neq 1-2$; $(1-2)-3\neq 1-(2-3)$, d. h. $(G,-)$ und $(R,-)$ sind weder kommutativ noch assoziativ;
$2:1\neq 1:2$; $(1:2):3\neq 1:(2:3)$, d. h. auch $(R^*\setminus\{0\},:)$ und $(R\setminus\{0\},:)$ sind weder kommutativ noch assoziativ.

b) Aus der Tatsache, daß $(P, -)$ und $(P\setminus\{0\}, :)$ nicht kommutativ und nicht assoziativ sind, können wir nicht – wie in Aufgabe 2 – auf die Behauptung schließen. Wenn wir die Teilmengenbeziehungen ($G \circ R \circ P$ bzw. $R^*\setminus\{0\} \circ R\setminus\{0\} \circ P\setminus\{0\}$) ausnutzen wollen, könnte die Aufgabe wie folgt lauten:
$(G, -)$ und $(R^*\setminus\{0\}, :)$ sind weder kommutativ noch assoziativ. Zeige, daß dies dann auch für die Verknüpfungsgebilde $(R, -)$, $(P, -)$, $(R\setminus\{0\}, :)$ und $(P\setminus\{0\}, :)$ zutrifft!

Aufgabe 5:

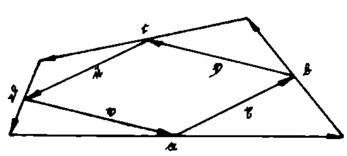
a) Die Verknüpfungen $\circ_5$, $\circ_6$, $\circ_9$ und $\circ_{11}$ sind nicht assoziativ:
$(1\circ_5 2) \circ_5 3 = 11$, aber $1 \circ_5 (2 \circ_5 3) = 9$;
$(2 \uparrow 3) \uparrow 2 = 64$, aber $2 \uparrow (3 \uparrow 2) = 512$;
$(1 \circ_9 2) \circ_9 3 = 18$, aber $1 \circ_9 (2 \circ_9 3) = 11$;
$(1 \circ_{11} 2) \circ_{11} 3 = 2$, aber $1 \circ_{11} (2 \circ_{11} 3) = 0$;
Die Verknüpfungen $\circ_7$, $\circ_8$ und $\circ_{10}$ sind assoziativ: $(x \circ_7 y) \circ_7 z = (x \sqcap y) \sqcap z =_{Df} t$. Dann folgt $t \mid (x \sqcap y)$ und $t \mid z$. Wegen $(x \sqcap y) \mid x$ und $(x \sqcap y \mid y$ folgt damit auf Grund der Transitivität der Teilbarkeitsrelation auch $t \mid x$ und $t \mid y$. Mit $t \mid y$ und $t \mid z$ folgt andererseits nach Definition des größten gemeinsamen Teilers $t \mid (y \sqcap z)$; entsprechend folgt aus $t \mid x$ und $t \mid (y \sqcap z)$ jetzt $t \mid [x \sqcap (y \sqcap z)]$. Analog zeigt man, daß auch $[x \sqcap (y \sqcap z)] \mid [(x \sqcap y) \sqcap z]$ gilt, so daß der Beweis, nämlich $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$, erbracht ist.
$(x \circ_8 y) \circ_8 z = \sqrt{(x^2+y^2)+z^2} = \sqrt{x^2+(y^2+z^2)}$
$= x \circ_8 (y \circ_8 z)$;
$(x \circ_{10} y) \circ_{10} z = (x+y+xy)+z+(x+y+xy)\cdot z$
$= x+(y+z+yz)+x(y+z+yz) = x \circ_{10} (y \circ_{10} z)$.

Aufgabe 6:

Keine der Verknüpfungen ($\circ_1$ bis $\circ_{15}$) ist rechts-transitiv oder erfüllt die Links-Systemregel. Lediglich die Verknüpfung $\circ_{11}$ ist unipotent. Bis auf die Verknüpfungen $\circ_6$, $\circ_9$, $\circ_{11}$ und $\circ_{15}$ sind alle anderen bisymmetrisch.

Aufgabe 7:

Die Verknüpfungen $\circ_2$, $\circ_3$, $\circ_4$ und $\circ_7$ sind die einzigen idempotenten Verknüpfungen.



Aufgabe 8:

Vektorieller Beweis:

(1) $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=\mathfrak{o}$,

(2) $\mathfrak{x}+\mathfrak{y}+\mathfrak{u}+\mathfrak{v}=\mathfrak{o}$,

(3) $\mathfrak{x}=\frac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$, $\mathfrak{y}=\frac{1}{2}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$,
$\mathfrak{u}=\frac{1}{2}(\mathfrak{c}+\mathfrak{d})$, $\mathfrak{v}=\frac{1}{2}(\mathfrak{d}+\mathfrak{c})$.

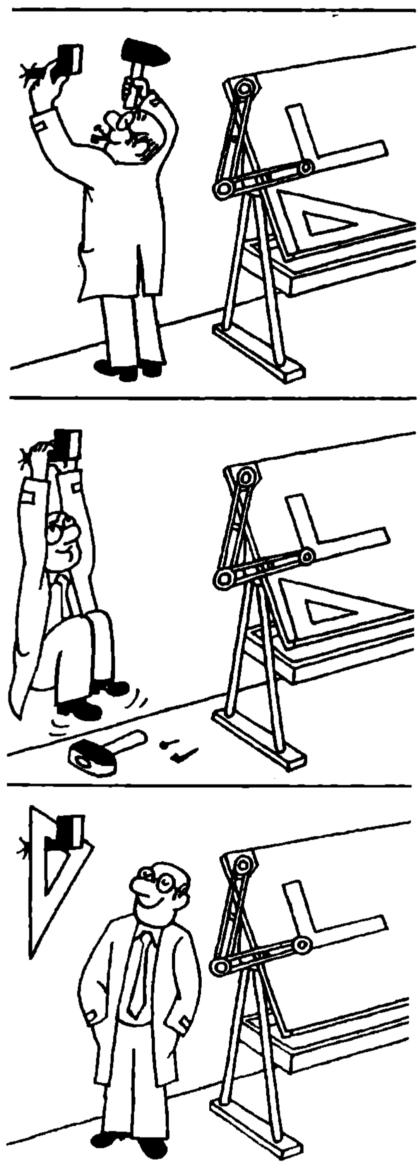
Damit erhalten wir:

a) $\mathfrak{x}+\mathfrak{u}=\frac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\frac{1}{2}(\mathfrak{c}+\mathfrak{d})=\mathfrak{o}$;
$\mathfrak{x}=-\mathfrak{u}$ und

b) $\mathfrak{y}+\mathfrak{v}=\frac{1}{2}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})+\frac{1}{2}(\mathfrak{d}+\mathfrak{a})=\mathfrak{o}$;
$\mathfrak{y}=-\mathfrak{v}$.

Aufgabe 9:

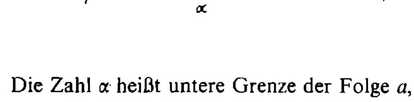
Alle in alpha 4/1977 aufgeführten geometrischen Verknüpfungsgebilde sind – mit einer Ausnahme – bisymmetrisch und idempotent. Die Verknüpfung $\circ$ über der Kubik c ist zwar bisymmetrisch, aber nicht idempotent. Keine der Verknüpfungen ist unipotent oder assoziativ. Die Verknüpfungsgebilde $(\varepsilon, \circ)$, $(p, \circ_2)$, $(e\setminus\{A\}, \circ_2)$ und $(c, \circ)$ sind kommutativ, die restlichen nicht. Die Links-Systemregel erfüllen die Verknüpfungsgebilde $(\varepsilon, \square)$, $(k, \circ_2)$, $(p, \circ_1)$, $(e, \circ)$, $(e\setminus\{A\}, \circ_1)$ und $(c, \circ)$, die restlichen wieder nicht.



Das arithmetisch-geometrische Mittel Teil 2

Das arithmetisch-geometrische Mittel

Fassen wir zusammen: Mit wachsendem k werden die a_k immer kleiner (nach (2)), bleiben jedoch größer als b, die b_k werden immer größer (nach 3)), bleiben jedoch kleiner als a, und die Differenzen $a_k - b_k$ werden auch immer kleiner (nach 4)).
Wir erwähnen (ohne Beweis) folgende bemerkenswerte Tatsache:
Setzt man $a=1$ und b gleich einem echten Dezimalbruch, so stimmen a_2 und b_2 in der ersten Stelle hinter dem Komma, a_3 und b_3 in den ersten $3=2^2-1$ Stellen hinter dem Komma, a_4 und b_4 in den ersten $7=2^3-1$ Stellen hinter dem Komma, a_5 und b_5 in den ersten $15=2^4-1$ Stellen hinter dem Komma, allgemein a_{k+1} und b_{k+1} in den ersten 2^k-1 Stellen hinter dem Komma überein! (Vgl. das Gaußsche Zahlenbeispiel $a=1$, $b=0$, 2.) Die Ziffern bleiben überdies in allen folgenden Gliedern a_{k+2}, b_{k+2}; a_{k+3}, b_{k+3}; usw. erhalten.
Betrachten wir nun zunächst die (obere) Folge $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$ Es ist eine Folge immer kleiner werdender reeller Zahlen; jedoch gilt $b<a$, $b<a_1$, $b<a_k$ (für alle k). Die Zahl b ist eine untere Schranke für die Glieder der Folge; kleiner als b kann kein Glied werden. Es sei α die größte aller unteren Schranken. (Daß es eine solche reelle Zahl α wirklich gibt, kann hier nicht bewiesen werden.) Dann hat α folgende Eigenschaften:
(1) Es ist stets $\alpha \le a$, $\alpha \le a_k$ (für alle $k=1, 2, 3, \ldots$).
(2) Jede Zahl α', die größer als α ist, ist keine untere Schranke der Folge mehr (d. h. es gibt mindestens ein Glied der Folge, das kleiner als α' ist).



Die Zahl α heißt untere Grenze der Folge $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$ (Die Zahlen $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$ werden immer kleiner und nähern sich immer mehr dieser reellen Zahl. Wenn wir „genügend weit" in der Folge gehen, können wir sicher sein, daß sich die einzelnen Glieder „beliebig wenig“ von α unterscheiden, sich also die Differenzen $a_k-\alpha$ für großes k „beliebig wenig“ von 0 unterscheiden. Die Zahlen $a_k-\alpha$ werden nie gleich 0, auch wenn k noch so groß ist. Vielmehr unterscheiden sich die $a_k-\alpha$ von 0 immer weniger. – Diese Aussagen sollen hier nicht weiter präzisiert werden.)

Betrachten wir nun die (untere) Folge b, b_1, b_2, b_3, ... Es ist eine Folge immer größer werdender reeller Zahlen; jedoch gilt $b<a$, $b_1<a$, $b_k<a$ (für alle k). Die Zahl a ist eine obere Schranke für die Glieder der Folge, größer als a kann kein Glied werden. Es sei β die kleinste aller oberen Schranken. (Daß es eine solche reelle Zahl β wirklich gibt, kann hier nicht bewiesen werden.) Dann hat β folgende Eigenschaften,

(1) Es ist stets $b<\beta$, $b_k<\beta$ (für alle $k=1, 2, 3, \ldots$).

(2) Jede Zahl β', die kleiner als β ist, ist keine obere Schranke mehr (d. h. es gibt mindestens ein Glied der Folge, das größer als β' ist).

Die Zahl β heißt obere Grenze der Folge b, $b_1, b_2, b_3, \ldots$ (Die Zahlen $b, b_1, b_2, b_3, \ldots$ werden immer größer und nähern sich immer mehr dieser reellen Zahl β.)

Wir zeigen nun: Es muß $\beta\leq\alpha$ sein, es kann nicht $\beta>\alpha$ sein. Wäre $\beta>\alpha$, so gäbe es nach der Eigenschaft (2) von α ein Glied der Folge $a, a_1, a_2, \ldots$, das kleiner als β ist: $a_i<\beta$ für ein gewisses i.

Nach der Eigenschaft (2) von β gäbe es dann ein Glied der Folge $b, b_1, b_2, \ldots$, das größer als a_i ist:

$a_i<b_j$ für ein gewisses j.

Andererseits gilt $b_j<\beta$. Also

(5) $\quad a_i<b_j<\beta$.

Nun ist

$$b<b_1<b_2<\ldots<b_i<a_i<a_{i-1}<\ldots<a_2<a_1<a,$$

d. h. $\quad b_k<a_i$ für $k=1, 2, \ldots, i$.

Hiernach kann in (5) nicht $j\leq i$ sein, es muß $j>i$ sein. Ferner ist

$$b<b_1<b_2<\ldots<b_j<a_j<a_{j-1}<\ldots<a_2<a_1<a,$$

d. h. $\quad b_j<a$ für $k=1, 2, \ldots, j$.

Hiernach kann in (5) doch nicht $i\leq j$ sein, es muß $i>j$ sein. Es muß einerseits $j>i$, andererseits $j<i$ sein. Dies ist ein Widerspruch. Daher kann die Annahme $\beta>\alpha$ nicht richtig sein und somit ist aber die Behauptung $\beta\leq\alpha$ richtig.

Aus $\alpha<a_k$ (für alle k) und $\beta>b_k$, also $-\beta<-b_k$ (für alle k) folgt (da $\alpha\geq\beta$ ist) $0\leq\alpha-\beta<a_k-b_k$.

Nach 4) ist $a_k-b_k<\frac{a-b}{2^k}$. Somit gilt $0\leq\alpha-\beta<\frac{a-b}{2^k}$. Da $\frac{a-b}{2^k}$ für großes k beliebig klein werden kann, $\alpha-\beta$ aber eine bestimmter

Wert ≥ 0 ist, der gar nicht von k abhängt, muß notwendig $\alpha-\beta=0$ sein. Somit gilt

$\alpha=\beta$.

Definition: Der gemeinsame Wert $\alpha=\beta$ der unteren Grenze α der Folge $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$ und der oberen Grenze β der Folge $b, b_1, b_2, b_3, \ldots$ heißt das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen a und b. Wir schreiben dafür $M(a, b)$.

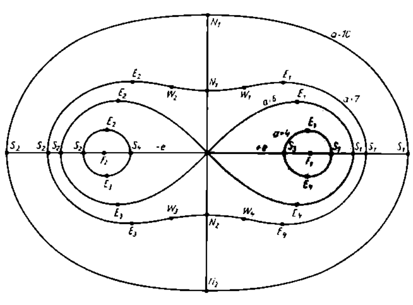
Aufgaben:

Die folgenden Eigenschaften des arithmetisch-geometrischen Mittels sind zu begründen: a) $M(a, b)=M(a_k, b_k)$, b) $M(na, nb)=nM(a, b)$. c) $M(a, b)=aM\left(1, \frac{b}{a}\right)=bM\left(\frac{a}{b}, 1\right)=M(b, a)$.

Lemniskate und Ellipse

Im folgenden werden Anwendungen des arithmetisch-geometrischen Mittels beschrieben (die Resultate werden nicht begründet).

Wir betrachten eine Lemniskate, das ist eine Kurve in Form einer Acht, der geometrische Ort aller Punkte P, für die das Produkt r_1r_2 der Abstände r_1 und r_2 von den festen Punkten F_1 und F_2 stets einen konstanten Wert hat.



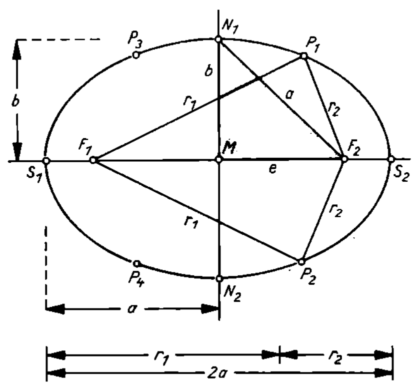
Lemniskate

Ist a der Abstand der Punkte F_1 und F_2 vom Nullpunkt, so gilt

$r_1r_2=a^2$.

Der Flächeninhalt einer Schleife ist $F=a^2$. Die Länge einer Lemniskatenschleife ist $\frac{\pi a\sqrt{2}}{M(\sqrt{2}, 1)}$. Hier tritt die aus der Kreisberechnung bekannte Zahl π auf. (π ist charakterisiert als das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser des Kreises.) Ferner tritt das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen 1 und $\sqrt{2}$ auf! Da $\pi=3{,}14159\ldots$ und $M(\sqrt{2}, 1)=1{,}19814\ldots$ (siehe das Gaußsche Zahlenbeispiel) ist, erhält man für die Länge den Näherungswert $3{,}7081a$.

Eine Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte P, für die die Summe r_1+r_2 der Abstände r_1 und r_2 von den festen Punkten F_1 und F_2 stets einen konstanten Wert hat: $r_1+r_2=2a$. Jede Gerade durch den Mittelpunkt M schneidet die Ellipse in einem Durchmesser. Der größte Durchmesser einer Ellipse



Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte einer Ebene, für die die Summe der Abstände von zwei festen Punkten konstant ($2a$) ist.

hat den Wert $2a$. Der kleinste Durchmesser habe den Wert $2b$. Der Flächeninhalt einer Ellipse ist dann $F=\pi ab$. Um ihren Umfang U anzugeben, führen wir für $a>b$ die positive Zahl $k<1$ durch $k^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$ $\left(\text{also } k=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right)$ ein. Ferner setzen wir $k'=\frac{b}{a}$, so daß $k^2+k'^2=1$, also $k'=\sqrt{1-k^2}$ ist. Dann gilt

$$U=2\pi a\left\{\frac{k'^2}{M(1, k')}+\frac{k'k^2M_1(1, k')}{M(1, k')^2}\right\}.$$

Hier erscheint das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen 1 und $k'=\sqrt{1-k^2}$. $M_1(1, k')$ ist eine Größe, die von $M(1, k')$ abhängt. (Genauer gilt: $M_1(1, k')$ ist der Differentialquotient $\frac{dM(1, k')}{dk'}$.)

Man kann den Umfang der Ellipse auch als Summe der Reihe

$$\frac{2\pi}{M(a, b)}\{a_1^2-2(a_2^2-b_2^2)-4(a_3^2-b_3^2)-8(a_n^2-b_n^2)-\ldots\}$$

erhalten. Hierin ist $M(a, b)$ das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen der großen Halbachse a und der kleinen Halbachse b und $a_1=\frac{a+b}{2}$, $b_1=\sqrt{ab}$, $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2=\sqrt{a_1b_1}$, ... usw.

Es sei bemerkt, daß durch

$$\pi\left(3\cdot\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)$$

ein sehr genauer Näherungswert für den Ellipsenumfang U gegeben wird. (Hier erscheint das arithmetische Mittel $\frac{a+b}{2}$ und das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ der großen Halbachse a und der kleinen Halbachse b.)

Das arithmetisch-geometrische Mittel bei C. F. Gauß

Schon während seiner Schulzeit beschäftigte sich *C. F. Gauß* (in Braunschweig) mit zahlentheoretischen Fragestellungen, mit der *Methode der kleinsten Quadrate*, mit den Grundlagen der Geometrie. In seinen Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert (Teil I erschien als Buch in Berlin 1926) sagte *F. Klein* (1849 bis 1925) darüber: „Ein natürliches Interesse, ich möchte fast sagen eine gewisse kindliche Neugier, führen den Knaben unabhängig von allen äußeren Einflüssen zuerst auf mathematische Fragen. Und zwar ist es das reine Handwerk des Zahlenrechnens, das ihn zunächst anzieht. Er rechnet immerfort mit einem geradezu überwältigenden Fleiß und nicht zu ermüdender Ausdauer. Durch diese fortwährende Übung im Handhaben der Zahlen, z. B. Dezimalbrüchen von unglaublicher Stellenzahl, erwirbt er sich nicht nur die erstaunliche Virtuosität der Rechentechnik, die ihn zeitlebens auszeichnete; er erringt sich auch ein ungeheures Gedächtnismaterial an bestimmten numerischen Werten und damit eine Kennerschaft und einen Überblick im Reiche der Zahlen, wie ihn vorher und nachher wohl kaum jemand besessen hat. Neben dem Zahlenrechnen beschäftigt ihn das numerische Operieren mit unendlichen Reihen. Von den Erfahrungen, die er an Zahlen macht, also auf induktivem, ‚experimentellem' Wege, kommt er dann schon frühe zu der Erkenntnis allgemeiner Beziehungen und Gesetze... Einer der ältesten Gegenstände, der *Gauß'* Entdeckerlust reizte, ist das sog. arithmetisch-geometrische Mittel." Mit 14 Jahren (1791) entdeckte er die Existenz des arithmetisch-geometrischen Mittels und „diese Entdeckung übte einen solchen Reiz auf ihn aus, daß er während der folgenden 10 Jahre ununterbrochen an der Ausgestaltung der Theorie arbeitete" (*H. Geppert*). Ob er von selbst auf das arithmetisch-geometrische Mittel (agM) gekommen ist oder durch Buchstudium oder von irgendeiner anderen Quelle her dazu angeregt wurde, ist nicht feststellbar.

(Bereits 1784/85 hatte der französische Analytiker *J. L. Lagrange* [1736 bis 1813] den Algorithmus des agM aufgestellt. Doch es ist sehr unwahrscheinlich, daß der 14jährige Gymnasiast *Gauß Lagranges* Veröffentlichungen darüber gelesen haben sollte.)

Der junge *Gauß* hatte zu jener Zeit noch keine Kenntnisse in der Infinitesimalrechnung. Sicherlich hatte er die schnelle Annäherung der fortgesetzt gebildeten arithmetischen und geometrischen Mittel aus zwei Zahlen bemerkt und den gemeinsamen Grenzwert geahnt.

„Freilich konnte der wißbegierige Knabe bei seiner mehr spielerischen Beschäftigung mit dem agM nicht ahnen, daß er sich mit diesem unerschöpflichen Problem eine schier unerschöpfliche Quelle reichster und tiefster Erkenntnisse erbohrt hatte, aus der auch der reife Mann bis ins hohe Alter immer wieder schöpfen konnte, aber es scheint doch, als ob ihn ein unbewußtes Gefühl für die eigenartige Bedeutung des agM veranlaßt hätte, den Gegenstand nicht wieder aus den Augen zu lassen" (*L. Schlesinger*).

„Wir begegnen aber hier einer seltsamen und gewiß nicht zufälligen Erscheinung. All diese frühen, nur zu eigner Lust ersonnenen Gedankenspiele sind Ansätze zu dem großen, erst viel später bewußt gewordenen Ziel. Es ist eben die ahnende Weisheit des Genies, selbst bei den halbspielenden Erstlingsproben der Kräfte ohne Bewußtsein des tieferen Sinnes, die Spitzhacke gerade da ans Gestein zu setzen, wo die Goldmine verborgen liegt" (*F. Klein*).

Am 30. Mai 1799 fand er den Zusammenhang des agM mit der Länge der Lemniskate, und zwar nach *F. Klein* „wiederum auf rein rechnerischem Wege, in dem er den Wert $\frac{1}{M(1, \sqrt{2})}$ bis auf 11 Dezimalen bestimmt."

In der Folgezeit gelangte er dann aus diesen Ergebnissen zu einer *Theorie der* sog. *elliptischen Funktionen* und der *Modulfunktionen*. Er fand das erste Beispiel einer sog. *automorphen Funktion*.

(Die Theorie der automorphen Funktionen und Formen ist gegenwärtig wieder ein von zahlreichen Mathematikern bearbeitetes Gebiet.)

„Wie bei allen hervorragenden Genies ist auch bei *Gauß* das Eigentümliche die Sicherheit, mit der er in seinen Arbeiten gerade dort einsetzt, wo – zunächst ihm unbewußt – die schönsten und tiefsten Sätze verborgen liegen. Es ist außerordentlich reizvoll zu verfolgen, wie *Gauß* in seinen Jugendarbeiten drei zunächst scheinbar ganz heterogene Gebiete in Angriff nimmt: die lemniskatischen Funktionen, das agM und die Potenzreihen, deren Exponenten nach einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung fortschreiten, und wie sich diese Untersuchungen plötzlich – man möchte fast sagen: zufällig – zu dem gewaltigen harmonischen Massiv zusammenschließen, das die gesamte Theorie der Modulfunktion und der elliptischen Transzendenten umfaßt... Im Jahre 1800, d. i. mit 23 Jahren, ist *Gauß* im Besitze aller, auch der tiefstliegenden Resultate, die das folgende Jahrhundert erst in harter, zäher Arbeit wiedererringen mußte" (*H. Geppert*).

Von diesen Dingen hat *Gauß* nämlich fast nichts publiziert. In einer Arbeit aus dem Jahre 1818 (in der eine Berechnung der Säkularstörung, welche ein Planet ausübt, erfolgte), verwendet er das agM zur Berechnung sog. elliptischer Integrale.

„Das ist aber auch alles, was *Gauß* der Öffentlichkeit über seine genialen Entdeckungen mitteilte! Sei es, daß er seine Zeit als noch nicht reif genug ansah, um diese tiefliegenden Theorien erfassen und verarbeiten zu können, sei es, daß er selbst seine Schöpfung als noch nicht abgeschlossen und zur höchsten Vollendung getrieben erachtete und daher gemäß seinem Wahlspruch: *pauca sed matura*![1] von einer Publikation Abstand nahm, unsere Kenntnis über die Gaußschen Entdeckungen beruht lediglich auf den Aufzeichnungen des Nachlasses" (*H. Geppert*).

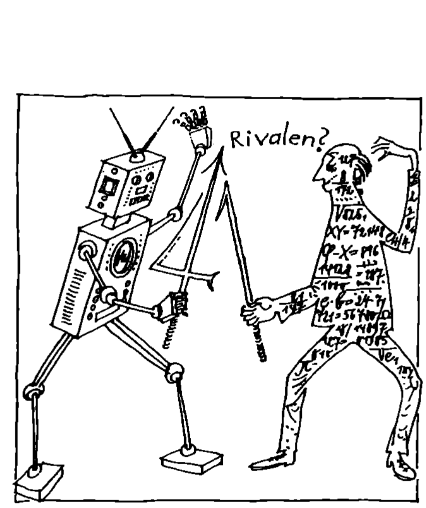
Erst die Bearbeitung und Herausgabe des Nachlasses an handschriftlichen Aufzeichnungen wissenschaftlichen Inhalts, darunter des Tagebuchs 1796 bis 1814, sowie des Briefwechsels von *Gauß* mit seinen Freunden brachte der Nachwelt wichtige Erkenntnisse von *Gauß'* Schaffen. Die Arbeit aus dem Jahre 1818, sowie alles aus dem Nachlaß, was sich auf das agM und die Theorie der elliptischen Funktionen bezieht, hat *H. Geppert* im Band 225 von „Ostwalds Klassikern" (Leipzig 1927) übersetzt und zu einem lesbaren Ganzen gestaltet.

Die von *Gauß* entwickelten Methoden und damit gewonnenen Erkenntnisse hätten, so betont *A. I. Markuschewitsch* (im *C. F. Gauß* Gedenkband anläßlich des 100. Todestages am 23. Februar 1955 – Hrsg. von *H. Reichardt* [Leipzig 1957]),

„die gesamte Analysis in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts erheblich beeinflußt, wären sie rechtzeitig veröffentlicht worden. *Gauß* hat sich zwar wiederholt bemüht, sie systematisch darzulegen. Seine Versuche hierzu wurden jedoch nicht vollendet, und dadurch blieben wertvollste und tiefste Ergebnisse auf dem Gebiet der Analysis in den vier Wänden seines Arbeitszimmers verborgen. Sie wurden später von *Cauchy*, *Abel*, *Jacobi* u. a. neu entdeckt und gingen unabhängig von *Gauß* in die Wissenschaft ein."

H. Pieper

[1] Weniges, aber ausgereiftes!



Studenten im Wettstreit

Vom 31. Mai bis 2. Juni 1977 fand der 3. zentrale Ausscheid im *Mathematikwettstreit der Studenten technischer und ökonomischer Fachrichtungen* in der Technischen Hochschule Otto von Guericke Magdeburg statt. An dem zentralen Ausscheid nehmen die Sieger und Plazierten der Mathematikwettstreite an den Universitäten und Hochschulen unserer Republik teil. Im vergangenen Jahr waren 76 Studentinnen und Studenten in Magdeburg zusammengekommen. Teilnehmer sind Ökonomiestudenten des 3. Studienjahres und Ingenieurstudenten des 2. Studienjahres; Studenten niedrigerer Studienjahre dürfen ebenfalls am Wettstreit teilnehmen.

Im vergangenen Jahr konnten bei der Siegerehrung, an der der stellvertretende Minister für Hoch- und Fachschulwesen, Dipl.-Ing. Groschupf, der Vorsitzende des Wissenschaftlichen Beirates für Mathematik, Prof. Dr. Winkler, Dresden und der stellvertretende Vorsitzende der Mathematischen Gesellschaft der DDR, Prof. Dr. Manteuffel, Magdeburg, teilnahmen, durch Prof. Dr. Kadner (Dresden), den Vorsitzenden des Wettbewerbskomitees, sechs 1. Preise, fünf 2. Preise und elf 3. Preise vergeben werden.

Mit 97 von 100 erreichbaren Punkten erreichte stud. ing. Peter Zacharias, Student im 1. Studienjahr an der Sektion Technische Kybernetik und Elektrotechnik der TH Magdeburg die beste Leistung. Peter Zacharias hat als Schüler mit Erfolg an Mathematik- und Physikolympiaden teilgenommen. Schon als Schüler arbeitete er in einer internationalen Studentenbrigade in Ufa (UdSSR) mit. Neben der Mathematik und Physik gilt seine Liebe der Musik; er schloß die Oberstufe im Fach Cello an der Musikhochschule in Halle mit der Gesamtnote sehr gut ab! Peter Zacharias ist Absolvent der Spezialklasse der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg.

Im Rahmenprogramm konnten die Teilnehmer Besichtigungen z. B. des gotischen Domes, des romanischen Klosters und des Schiffshebewerkes durchführen. Eine Vortragsveranstaltung war der mathematischen Behandlung praktischer Probleme gewidmet; dort wurde über Untersuchungen an der Ultraschallsäge, über Probleme der Materialökonomie beim Bau von Elektromotoren und über Optimierung von Walzwerken vorgetragen. Das zweite Thema der Vortragsveranstaltung war dem Leben und Werk von C. F. Gauß gewidmet.

Abschließend seien zwei Aufgaben aus diesem Mathematikwettstreit vorgestellt:

▲1▲ Eine der Pflichtaufgaben für Ingenieurstudenten:
Ein kartesisches x,y,z-Koordinatensystem hat die Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, wobei $\vec{e}_3$ ein lotrechter (senkrecht auf der Erdoberfläche stehender) Vektor ist.
In der Ebene $E: 4x+3y+5\sqrt{3}z-40=0$ liegt eine $100\,m^2$ große Dachfläche eines Gebäudes. Auf dieser Dachfläche liegt eine an allen Stellen gleichstarke Schneedecke mit einem Gesamtgewicht von 4000 kp. In der durch den Einheitsvektor $\vec{w}=-\frac{1}{5}(4\vec{e}_1+3\vec{e}_2)$ gegebenen Richtung greift Wind an, der beim Auftreffen auf eine zu $\vec{w}$ senkrechte Fläche einen Druck von $90\,kp/m^2$ erzeugen würde.
a) Es ist der Vektor der von Schnee- und Windlast erzeugten, senkrecht zur Dachfläche wirkenden Gesamtdruckkraft $\vec{N}$ zu ermitteln.
b) In welcher Richtung würde bei Tauwetter und Windstille das Schmelzwasser ablaufen? Der Einheitsvektor dieser Richtung ist anzugeben.
Hinweis: Eine Lösungsvariante ergibt sich durch Einführung der Schnittgeraden von Dachebene und x,y-Ebene als Hilfslinie.

▲2▲ Eine der Wahlaufgaben der Ökonomiestudenten:
Einem Stoff B müssen Zuschlagstoffe B_1 und B_2 zugesetzt sein, so daß in der gewünschten Mischung 20% der Masse aus B_1 und 30% der Masse aus B_2 bestehen. Folgende Gemische sind vorhanden:
C_1 mit 20% B_1 und 40% B_2,
C_2 mit 30% B_1 und 20% B_2,
C_3 mit 20% B_1 und 20% B_2,
C_4 mit 10% B_1 und 40% B_2.
a) Geben Sie das mathematische Modell für diese Problemstellung an!
b) Bestimmen Sie die Lösung des Modells!

K. Manteuffel

Zu Ehren von C. F. Gauß

DDR-Studentenkonferenz „Mathematik und Praxis"

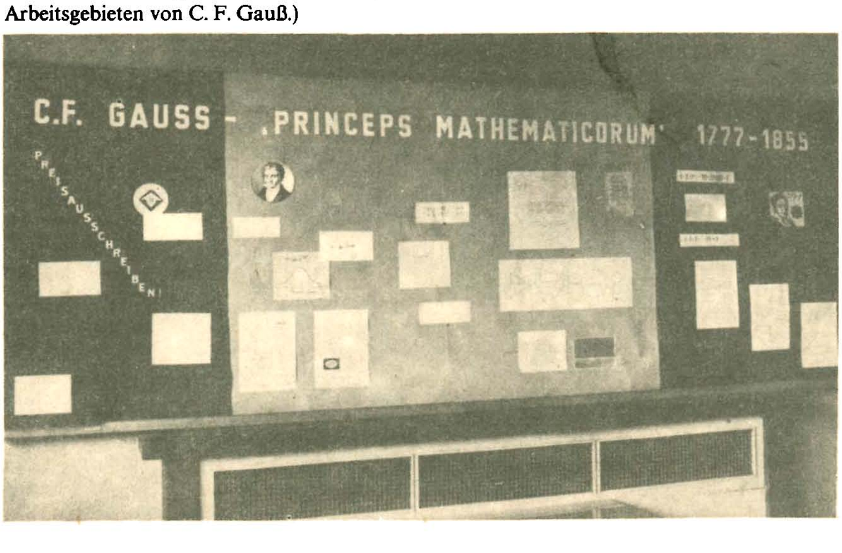
Im Dezember 1977 fand in Leipzig eine *Zentrale Studentenkonferenz* „Mathematik und Praxis" statt, an der Studenten aller zwölf Hochschulausbildungsstätten für Mathematiker in der DDR beteiligt waren. Mit dieser bedeutenden Veranstaltung zeigten die Mathematik-Studenten, wie sie zur Verwirklichung ihrer Disziplin in der gesellschaftlichen Praxis beitragen.

Zugleich ehren sie damit das Andenken des großen Mathematikers, Physikers und Astronomen *C. F. Gauß*. Zu dieser Konferenz hatten Ende 1976 der *Wissenschaftliche Beirat für Mathematik* beim Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen der DDR, der *Zentralrat der FDJ* und die *Mathematische Gesellschaft der DDR* aufgerufen.

Prof. Dr. *W. Winkler* (TU Dresden) eröffnete die Studentenkonferenz mit einem Vortrag über die Praxiswirksamkeit der Mathematik. In vier Plenarvorträgen wurden Ergebnisse der wissenschaftlichen Arbeit von Mathematik-Studenten vorgestellt, deren Verwirklichung in der Praxis hohen ökonomischen Nutzen bringt.

Insgesamt wurden auf der Konferenz 28 von 80 eingereichten Arbeiten in Vorträgen vorgestellt. In einer Feierstunde erhielten 13 Studenten die *Gauß-Ehrenplakette*. Elf Reisen in die UdSSR und andere Auszeichnungen wurden an die Autoren der besten Arbeiten vergeben.

Wandzeitung der math. Wissenschaftsbereiche der Sektion Math./Phys. der TH anläßlich des 200. Geburtstages von C. F. Gauß. (Das „Preisausschreiben" enthält Aufgaben aus Arbeitsgebieten von C. F. Gauß.)



Vier Aufgaben aus Moskau

MOSKAU

Vier Aufgaben der schriftlichen Aufnahmeprüfung 1977 im Fach Mathematik für Studienbewerber des Moskauer Ingenieurinstituts für Bodenbearbeitung

▲1▲ Es ist der folgende Term zu vereinfachen:

$$\frac{1-x^{-1}}{1+x}-\frac{x+x^{-1}}{x-1}.$$

▲2▲ Zu lösen ist die Ungleichung:

$$-5x^2+x+4>0.$$

▲3▲ Man beweise, daß für alle reellen Zahlen x mit $x \neq \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ und $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, wobei k eine ganze Zahl ist,

$$\tan 2x-\tan x=\frac{\tan x}{\cos 2x} \text{ gilt.}$$

▲4▲ Die Basis $\overline{AB}$ eines gleichschenkligen Dreiecks ABC habe die Länge b, der Winkel zwischen der Basis und einem der Schenkel habe die Größe α.
Man ermittle den Umfang des Dreiecks ABC.

▲1▲ Für alle reellen Zahlen x mit $x \neq 0$ und $|x| \neq 1$ gilt

$$f(x)=\frac{1-x^{-1}}{1+x}-\frac{x+x^{-1}}{x-1}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)(1-x)+\left(x+\frac{1}{x}\right)(1+x)}{1-x^2}$$

$$=\frac{1-x-\frac{1}{x}+1+x+x^2+\frac{1}{x}+1}{1-x^2}$$

$$=\frac{x^2+3}{1-x^2}.$$

▲2▲ Setzt man $f(x)=-5x^2+x+4$, so gilt $f(x)=-5\left(x^2-\frac{x}{5}\right)+4$.

Durch Addition und Subtraktion von $-5\cdot\frac{1}{100}=-\frac{1}{20}$ erhält man

$$f(x)=-5\left(x^2-\frac{x}{5}+\frac{1}{100}\right)+4+\frac{1}{20}$$

$$=-5\left(x-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{81}{20}.$$

Nun gilt $f(x)>0$ genau dann, wenn

$$5\left(x-\frac{1}{10}\right)^2<\frac{81}{20}, \text{ also wenn}$$

$$\left(x-\frac{1}{10}\right)^2<\frac{81}{100}, \text{ d. h.,}$$

$$-\frac{9}{10}<x-\frac{1}{10}<\frac{9}{10},$$

$$-\frac{4}{5}<x<1.$$

Die gegebene Ungleichung ist also für alle reellen Zahlen x mit $-\frac{4}{5}<x<1$ und nur für diese erfüllt.

▲3▲ Für alle reellen Zahlen x mit der obigen Einschränkung gilt

$$f(x)=\tan 2x-\tan x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\frac{2\sin x\cos x}{\cos 2x}-\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos 2x\cos x}(2\cos^2 x-\cos 2x)$$

$$=\frac{\tan x}{\cos 2x}(2\cos^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x)$$

$$=\frac{\tan x}{\cos 2x}(\cos^2 x+\sin^2 x)$$

$$=\frac{\tan x}{\cos 2x}, \text{ w.z.b.w.}$$

▲4▲ Bezeichnet man die Länge jedes der Schenkel mit a, so ist der Umfang des Dreiecks ABC gleich

$$u=2a+b.$$

Nun gilt (vgl. die Abb.)

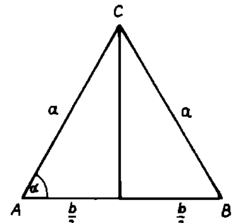
$$\cos\alpha=\frac{b}{2a}, \text{ also}$$

$$a=\frac{b}{2\cos\alpha}.$$

Daher ist der Umfang des Dreiecks ABC gleich

$$u=2a+b=\frac{b}{\cos\alpha}+b,$$

$$u=b\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right).$$



A. Halameisär/R. Lüders

Eine Aufgabe von Sh. B. Linkowski

Fachlehrer für Mathematik, Moskau

Multipliziert man zwei aufeinanderfolgende Zahlen der Folge der ungeraden natürlichen Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 miteinander und addiert die Zahl 1, so erhält man stets das Quadrat einer natürlichen Zahl, wie die folgende Tabelle zeigt:

$$1\cdot 3+1=\ 4=2^2$$
$$3\cdot 5+1=16=4^2$$
$$5\cdot 7+1=36=6^2$$
$$7\cdot 9+1=64=8^2$$

Dasselbe gilt, wenn man zwei aufeinanderfolgende Zahlen der Folge der geraden natürlichen Zahlen 2, 4, 6, 8 miteinander multipliziert und die Zahl 1 addiert, wie die folgende Tabelle zeigt:

$$2\cdot 4+1=\ 9=3^2$$
$$4\cdot 6+1=25=5^2$$
$$6\cdot 8+1=49=7^2$$

Es ist zu beweisen, daß das allgemein gilt, daß also für *alle* natürlichen Zahlen gilt:
Die Summe aus dem Produkt zweier aufeinander folgender ungerader bzw. zweier aufeinander folgender gerader natürlicher Zahlen und der Zahl 1 ist stets gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl.

Lösung:

a) Es seien $2n+1$ und $2n+3$ $(n=0, 1, 2, 3, \ldots)$ zwei aufeinander folgende ungerade natürliche Zahlen. Dann gilt

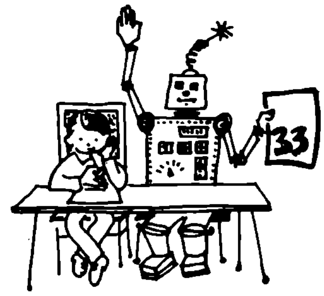
$$(2n+1)(2n+3)+1=4n^2+6n+2n+3+1$$
$$=4n^2+8n+4$$
$$=4(n^2+2n+1)$$
$$=[2(n+1)]^2.$$

b) Es seien $2n$ und $2n+2$ $(n=0, 1, 2, 3, \ldots)$ zwei aufeinander folgende gerade natürliche Zahlen. Dann gilt

$$2n(2n+2)+1=4n^2+4n+1$$
$$=(2n+1)^2.$$

Damit ist bewiesen, daß die Summe aus dem Produkt zweier aufeinander folgender ungerader bzw. zweier aufeinander folgender gerader natürlicher Zahlen und der Zahl 1 stets gleich dem Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 12. Juni 1978

Mathematik

Ma 5 ■1736 Joachim erhielt nach erfolgreicher Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb als Anerkennung ein Buch. Bereits am nächsten Tag las er den neunten Teil der Anzahl der Seiten dieses Buches durch. Am darauffolgenden Tag las er weitere 63 Seiten dieses Buches durch; das waren dreimal soviel Seiten wie am Tage zuvor. Wie viele Seiten umfaßt dieses Buch? *Schülerin Birgit Weyh, Fambach*

Ma 5 ■1737 An den Olympischen Sommerspielen 1976 in Montreal beteiligten sich insgesamt 1314 Leichtathleten, und zwar 526 Männer mehr als Frauen. Wieviel Frauen und wieviel Männer nahmen an den Leichtathletikwettbewerben teil?
Schüler Ralf Hortig, Cottbus

Ma 5 ■1738 Die beiden Freunde Klaus und Mario kaufen in einer Konditorei ein. Klaus kauft zwei Stück Streuselkuchen und ein Schweineohr; er bezahlt dafür 68 Pf. Mario kauft ein Stück Streuselkuchen und zwei Schweineohren; er bezahlt dafür 0,61 M. Wie teuer ist ein Stück Streuselkuchen bzw. ein Schweineohr?
Schülerin Kerstin Kassek, Klosterfelde

Ma 5 ■1739 Das um 14 vergrößerte Zweifache einer natürlichen Zahl ist gleich dem Achtfachen dieser um 8 verkleinerten natürlichen Zahl. Um welche natürliche Zahl handelt es sich? *Schüler Frank Schlaak, Berlin*

Ma 5 ■1740 Zeichne vier Rechtecke! Zeichne dann jedesmal zwei Geraden so, daß beide den Rand des Rechtecks schneiden und dabei das Rechteck in folgende Figuren zerlegen:
a) zwei Dreiecke und ein Viereck,
b) ein Dreieck und zwei Vierecke,
c) ein Dreieck und drei Vierecke,
d) ein Dreieck, ein Viereck und ein Fünfeck!
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

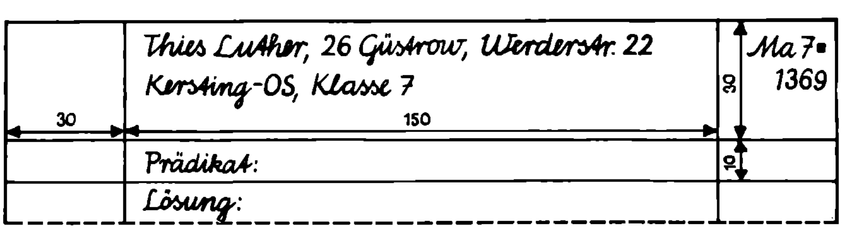
Ma 5 ■1741 Jemand hebt von seinem Sparkonto 500 M ab. Er erhält zweimal soviel 50-Mark-Scheine wie 100-Mark-Scheine. Die Anzahl der ausgezahlten 20-Mark-Scheine ist um 1 größer als die Anzahl der 50-Mark-Scheine. Wieviel 20-Mark-Scheine, 50-Mark-Scheine bzw. 100-Mark-Scheine erhielt dieser Sparer?
Schülerin Kerstin Müller, Wernshausen

Ma 6 ■1742 Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die ein Vielfaches ihrer Quersumme sind, wobei die Quersumme eine Primzahl ist!
Mathematikfachlehrer Helmut Engelmann, Sachsendorf

Ma 6 ■1743 Gegeben sei ein Dreieck ABC. Der Außenwinkel bei A sei um 29° kleiner als der Außenwinkel bei C. Der Außenwinkel bei B sei um 49° kleiner als der Außenwinkel bei C. Es ist die Größe der Innenwinkel α, β, γ dieses Dreiecks zu berechnen!
Schülerin Beate Floeter, POS Sachsendorf, Kl. 8

Ma 6 ■1744 Wenn Frank seinen Ball aus einer bestimmten Höhe senkrecht fallen läßt, so springt der Ball um den dritten Teil der Fallhöhe wieder zurück. Nach dem zweiten Aufprall sprang der Ball um einen Meter weniger hoch als nach dem ersten. Aus welcher Höhe ließ Frank den Ball fallen?
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ■1745 Eine Großmutter wurde nach dem Lebensalter ihrer Enkeltochter gefragt; sie antwortete: „Ich bin genau zwölfmal so alt wie meine Enkeltochter. Die Summe der Zahlen, die das Lebensalter von meiner Enkeltochter und mir angeben, beträgt 65." Wie alt sind Großmutter und Enkeltochter, wenn das Lebensalter stets in ganzen Zahlen angegeben wird?
(Aus einer sowjetischen Zeitschrift)



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabengruppe wird von einem anderen Mitarbeiter korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1977/78 läuft von Heft 5/77 bis Heft 2/78. Zwischen dem 1. und 10. September 1978 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/77 bis 2/78 erworbenen Karten *geschlossen* an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/78 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/77 bis 2/78) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1977/78 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind, und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird. Redaktion *alpha*

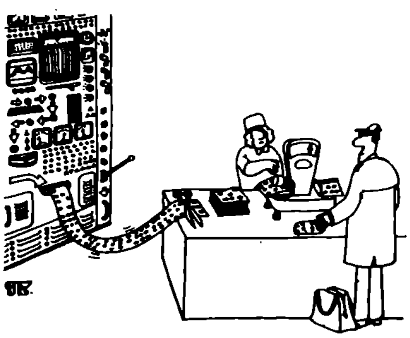
Ma 6 ■1746 Gib für jede der nachstehenden drei Gleichungen alle Paare (x, y) von natürlichen Zahlen an, für die die jeweilige Gleichung zu einer wahren Aussage wird!
a) $x \cdot (x+y)=41$,
b) $x \cdot (x-y)=41$,
c) $x \cdot (y-x)=41$.

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 7 ■1747 In einem regelmäßigen Fünfeck $ABCDE$ werde eine beliebige Diagonale gezeichnet. Es ist zu beweisen, daß diese Diagonale parallel zu einer der Fünfeckseiten verläuft!

Klaus Meier, PH „Wolfgang Ratke" Köthen Sektion Mathematik

Ma 7 ■1748 Am Wochenende kaufte Hans insgesamt 25 Flaschen Getränke ein, weil die Familie Besuch erwartete, und zwar Limonade zu 0,21 M, Cola zu 0,35 M und Bier zu 0,48 M pro Flasche. Hans hatte ohne Pfandgeld genau 7,61 M zu bezahlen. Wieviel Flaschen Limonade, Cola bzw. Bier hat Hans eingekauft? *Schüler Bodo Heise, Juri-Gagarin-OS Görlitz, Kl. 7*



Ma 7 ■1749 Gegeben sei eine dreistellige natürliche Zahl, deren drei Ziffern ohne Beachtung ihrer Anordnung drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen entsprechen. Dividiert man diese dreistellige natürliche Zahl durch 9, so erhält man eine Primzahl. Um welche Zahl handelt es sich?

Schülerin Marion Endrigkeit, Jessen, Kl. 6

Ma 7 ■1750 Man beweise, daß jede vierstellige natürliche Zahl durch 11 teilbar ist, wenn die Summe aus den als Zahlen aufgefaßten Ziffern der ersten und dritten Stelle gleich der Summe aus den als Zahlen aufgefaßten Ziffern der zweiten und vierten Stelle ist! *Schüler Klaus Beck, Potsdam*

Ma 8 ■1751 Beweise folgenden Satz:
Für alle ungeraden natürlichen Zahlen u gilt: Wenn $u>3$ und kein ganzzahliges Vielfaches von 3 ist, so ist u^2-1 stets durch 24 teilbar.

Dr. G. Hesse, Radebeul

Ma 8 ■1752 Drei Behälter haben zusammen ein Fassungsvermögen von 170 Litern. Würde man den Inhalt des ersten Behälters in den zweiten umfüllen, so würden im ersten zwei Neuntel seines Inhalts zurückbleiben. Würde man dagegen den Inhalt der letzten zwei Behälter in den ersten umfüllen, so würden noch 10 Liter fehlen, um den ersten vollständig zu füllen. Wieviel Liter faßt jeder Behälter? *Andreas Fittge, Berlin, EOS „Heinrich Hertz", Kl. 10*

Ma 8 ■1753 Einem Kreis sei ein Dreieck ABC derart einbeschrieben, daß der Mittelpunkt M des Kreises im Inneren des Dreiecks ABC liegt. D sei der Fußpunkt der Höhe von C auf $\overline{AB}$. Es ist zu beweisen, daß dann stets gilt: $\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle MCB$!

Mathematiklehrer F. Sprang, Rochlitz

Ma 8 ■1754 Im Viereck $ABCD$ soll gelten: Die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{DC}$ sind gleichlang. Die Innenwinkel haben die folgenden Größen:

Winkel	Größe
DAB	α
ABC	2α
BCD	3α
CDA	4α

a) Ermittle die Größe jedes einzelnen Innenwinkels in Gradmaß!
b) Welches spezielle Viereck ist $ABCD$? Begründe! Skizziere!
c) Beweise, daß die Diagonale $\overline{AC}$ den Winkel $\sphericalangle DAB$ halbiert!
d) Beweise, daß das Dreieck ABC rechtwinklig ist!
e) Beweise, daß $\overline{BC}$ kürzer als $\overline{AD}$ ist!
f) Beweise, daß $\overline{AB}$ doppelt so lang ist wie $\overline{AD}$! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 9 ■1755 Es ist zu beweisen:
Wenn a, b, c, d, e reelle Zahlen sind, dann gilt für alle a, b, c, d, e:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geqq a(b+c+d+e)$$

stud. math. Susján Peter, Budapest

Ma 9 ■1756 Ein Stadion verfügt über 25 Sitzreihen. In der untersten Reihe befinden sich 800 Sitzplätze, in der obersten 2504. Wieviel Sitzplätze sind insgesamt vorhanden, wenn die Anzahl der Sitzplätze von Reihe zu Reihe gleichmäßig zunimmt?

Andreas Geipel, Dresden, Lehrling

Ma 9 ■1757 Beweisen Sie, daß $\log_4 12$ keine rationale Zahl ist! *Andreas Fittge, Berlin, EOS „Heinrich Hertz", Kl. 10*

Ma 9 ■1758 In einem beliebigen Trapez $ABCD$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ sei ein Punkt E auf $\overline{AD}$ so gelegen, daß $\overline{AE} \cong \overline{ED}$ gilt.
Beweisen Sie, daß die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ECD und ABE gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks EBC ist!

Frank Berner, POS Sassen, Kl. 8

Ma 10/12 ■1759 Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$.
a) Man beweise: Das über eine der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$ errichtete Quadrat hat mindestens einen doppelt so großen Flächeninhalt wie das Rechteck!
b) Ermitteln Sie zwei Seitenlängen a und b für dasjenige Rechteck $ABCD$, das genau ein Drittel des Flächeninhalts des über einer seiner Diagonalen errichteten Quadrats besitzt! *Mathematikfachlehrer K.-H. Glaser, Pritzwalk*

Ma 10/12 ■1760 Man beweise folgenden Satz: Wenn $\tan(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$ gilt, so gilt auch $\cos(\alpha+2\beta)=\sin\alpha$!

Schüler Volker Schulz, EOS Nauen, Kl. 11

Ma 10/12 ■1761 Verbindet man auf der Oberfläche eines regelmäßigen Tetraeders die Mittelpunkte aller Kanten miteinander, so erhält man alle Kanten eines dem Tetraeder einbeschriebenen Körpers.
a) Zeichnen Sie eine Skizze!
b) Wieviel Flächen, Ecken und Kanten hat dieser einbeschriebene Körper?
c) In welchem Verhältnis stehen die Volumina beider Körper?

StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 10/12 ■1762 Zeichnen Sie ein Dreieck ABC mit folgenden Seitenlängen:

Seite	Länge
$\overline{AB}$	4 cm
$\overline{BC}$	6 cm.
$\overline{AC}$	6 cm.

Fällen Sie folgende Lote:
1) von A auf $\overline{CB}$; Fußpunkt sei D,
2) von D auf $\overline{AC}$; Fußpunkt sei E,
3) von E auf $\overline{AD}$; Fußpunkt sei F,
4) von E auf $\overline{BC}$; Fußpunkt sei G.
Wieviel Prozent der Dreiecksfläche nimmt die Fläche des Rechtecks $FDGE$ ein? *Fr.*

Physik

Ph 6 ■36 Der Stauraum der Rappbode-Talsperre wird mit rund 0,11 km³ Wasser angegeben. Wie dick wäre die Schneedecke (in cm), wenn dieses Wasservolumen als Schnee auf die Bezirke Leipzig, Dresden und Karl-Marx-Stadt fallen würde?
Der Flächeninhalt dieser drei Bezirke beträgt rund 17712 km². Die Dichte von Schnee wird durchschnittlich mit $\varrho_s = 0{,}075\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ angenommen. Die Dichte des Wassers ist mit $\varrho_w = 1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$ einzusetzen.

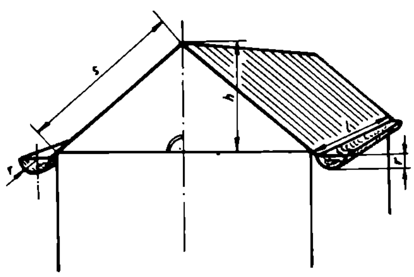
Ing. A. Körner, Leipzig

Ph 7 ■37 Bei einem hydraulischen Wagenheber hat der Pumpenkolben einen Durchmesser von $d=3$ cm und einen Hub von $h=6$ cm, während der Lastkolben einen Durchmesser von $D=12$ cm und einen maximalen Hub von $h_{max}=36$ cm hat. Der Pumpenkolben wird durch einen „einseitigen" Handhebel mit dem Kraftarm $b=100$ cm und dem Lastarm $a=20$ cm betätigt.

a) Welche Last F kann mit einer Handkraft von $F_H = 15$ kp gehoben werden?
b) Wieviel Pumpenhübe n sind notwendig, um diese Last 30 cm hochzuheben?

Ing. A. Körner, Leipzig

Ph 8 ▪38 Auf ein Dach vom skizzierten Querschnitt fällt Regel mit einer Menge von 1 mm pro Stunde. Das Dach habe eine Länge von $l = 18$ m.
a) Wieviel Regenwasser wird vom Dach aufgefangen, wenn die Dauer des Regens 90 Minuten beträgt und vorausgesetzt wird, daß der Regen senkrecht fällt?



b) Nach welcher Zeit würden die beiden Dachrinnen überlaufen, wenn die darin befindlichen Abflußöffnungen verschlossen sind?

Ing. A. Körner, Leipzig

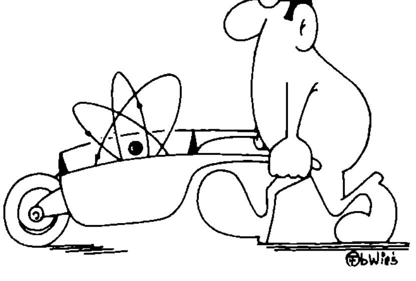
Ph 9 ▪39 Ein Freiballon habe bei vollständiger Füllung einen Durchmesser von $d = 8$ m und werde mit Wasserstoffgas gefüllt. Seine gesamte Leermasse (einschließlich Ballonkorb und Zuladung) betrage $m_g = 282$ kg.
a) Welche Vertikalbeschleunigung erfährt der Ballon unmittelbar bei dem Start? Der Luftdruck betrage 770 Torr, die Temperatur 20 °C.
b) Berechnen Sie die Steighöhe, wenn man annimmt, daß der Luftdruck durchschnittlich mit je 10,5 m Erhebung um 1 Torr abnimmt! Die Temperatur soll dabei als konstant angenommen werden.

Ing. A. Körner, Leipzig

Ph 10/12 ▪40 Wieviel Kilokalorien könnte man aus einem Kubikmeter Wasser mit Hilfe der Kernfusion gewinnen, wenn es gelänge, das darin enthaltene Deuterium etwa nach folgendem Reaktionszyklus zu Helium zu verschmelzen?

$$^2_1D + ^2_1D \rightarrow ^3_2He + ^1_0n + 3{,}3\ \text{MeV}$$
$$^2_1D + ^3_2He \rightarrow ^4_2He + ^1_1p + 18{,}3\ \text{MeV}$$

Adalbert Schatz, Leipzig



Chemie

Ch 7 ▪29 In der Direktive des IX. Parteitages der SED zum Fünfjahrplan heißt es: „Aufkommen und Einsatz von Stahlschrott sind auf 114 bis 118% zu erhöhen. Die anfallenden und auf der Halde liegenden Schlakken, insbesondere die Siemens-Martin-Schlacke sind einer verstärkten Verwendung für die Roheisen- und Stahlproduktion zuzuführen."
a) Berechne, wieviel Tonnen Eisen(III)-oxid in einem der Hochöfen im VEB Eisenhüttenkombinat Ost eingebracht werden müssen, um täglich 226 t Roheisen zu erhalten!
b) Wieviel Kohlenstoff wird für die Reaktion benötigt?
c) Wieviel Kilogramm Kohlenstoff sind in der erzeugten Menge an Roheisen enthalten?

Ch 8 ▪30 Ein Kalkstein enthält 10% Gangat. 2 t dieses Kalksteins sollen gebrannt werden. Hierbei gehen 3% Kohlendioxid verloren. Berechnen Sie die Ausbeute an Kohlendioxid in Tonnen!

Ch 9 ▪31 Je 6 g Natronlauge werden mit
a) Salzsäure,
b) Phenol und
c) Essigsäure versetzt.
Wieviel Gramm der Reaktionsprodukte entstehen bei jeder der angegebenen Reaktionen?

„Was ist eigentlich das Gegenteil von ‚Heureka'?"

Ch 10/12 ▪32 Im VEB Schwefelsäure- und Superphosphat-Werk, Coswig, schließt man natürliche tertiäre Kalziumphosphate mit Schwefelsäure auf. Hierbei bildet sich ein Gemisch von $Ca(H_2PO_4)_2 + 2CaSO_4$, das ein hochwertiges Phosphordüngemittel darstellt und unter der Bezeichnung „Superphosphat" in den Handel kommt. Wieviel Prozent Phosphorpentoxid sind in dem Düngemittel enthalten, wenn es die o. g. Zusammensetzung hat?

Leser schreiben an alpha

● ...Im Namen meiner Tochter Elke übersende ich die Lösungskarten. Seit September 1977 studiert sie in Moskau *Ökonomische Kybernetik*. Ihre guten mathematischen Kenntnisse und Fertigkeiten wurden entscheidend mitgebildet durch die 7jährige erfolgreiche Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb... *H. Seidel, Dresden*

● ...Seit 1973 nehme ich schon am *alpha*-Wettbewerb teil, und es macht mir immer noch Spaß. Das ist nicht zuletzt Ihr Verdienst. Selbst Vater und Schwager greifen oft zur *alpha*... *Peter Pörs, Berlin*

● ...Die *alpha* fand bei uns in der ganzen Familie Anklang. Oft saßen wir zusammen und lösten knifflige Aufgaben...

Kerstin Franz, Eisleben

● ...*alpha* hilft mir in der Schule und in der AG!... *Andreas Schaale*

● ...Wir arbeiten auch im Kreisklub mit der *alpha*. Besonders schwierige Aufgaben lösen wir gemeinsam. Großen Spaß machten uns solche Beiträge wie: Kleine Wörter – große Bedeutung; Die russische Rechenmaschine „СЧЕТА"... *Cornelia Reuter, Stadtroda*

● ...Felix und Anita sind Staatsbürger der DDR wie ich, mein Mann sowjetischer Staatsbürger. Für ständig leben wir in Kasan – mein Mann als Elektrochemiker an der hiesigen Universität, ich als Deutschlehrerin. Wir danken Ihnen für die interessanten Aufgaben. *Gudrun Baitalowa, Kasan*

● ...*alpha* ist eine gute und interessante Sache. Ich bleibe dabei!...

Georg Lang, Burg/Spreewald

● ...Der *alpha* herzlichen Dank! Die Beschäftigung mit Ihrer Zeitschrift bringt viel Anregung und Freude. Offensichtlich sind unter den Autoren zahlreiche junge Menschen, die durch die *alpha* zur Mathematik gekommen sind. Ich schlage vor:
In jedem Heft einen Ihrer Autoren mit Foto und Entwicklungsweg vorzustellen...

Gottfried Hoffmann, Sebnitz

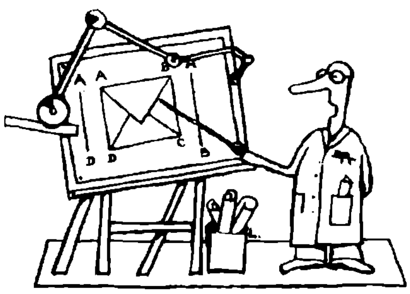
● ...Die *alpha*-Wettbewerbsaufgaben regen zum Nachdenken an, wenn nötig zum Nachschlagen in Fachbüchern. Auch an meinen Erfolgen bei den Kreismathematikolympiaden und am Besuch der Spezialschule (phys.-

techn. Richtung) hat die *alpha* großen Anteil. Herzlichen Dank!...

Ronald Bracholdt, Riesa

● ...Da ich bereits vor 25 Jahren die 8. Klasse und damit den schulischen Mathematikunterricht beendet hatte, versuche ich ständig, meine mathematischen Kenntnisse zu erweitern. Bei diesem „Hobby" hilft mir die *alpha* sehr. Lediglich auf dem Gebiete der Wirtschaftsmathematik könnten die Beiträge zahlreicher sein...

Dieter Koch, Arnstadt



● ...Durch *alpha* kann man sein mathematisches Wissen maximal gründlich auf die Probe stellen...

Bettina Lohmann, Neundorf

● ...Über den Kurswettbewerb (d. i. Kreiswettbewerb) zum Gebietswettbewerb vorgestoßen, trennte mich nur ein Punkt von der Teilnahme am gesamtösterreichischen Bundeswettbewerb. Sicherlich trug zu diesem kleinen Erfolg vor allem das reiche Material an Aufgaben der DDR-Olympiaden bei, das ich regelmäßig in *alpha* vorfand.

Gernot Kubin, Leonding (Österreich)

● ...In den letzten neun Jahren habe ich die *alpha* immer wieder gern gelesen, und mit Freude rechne ich auch heute noch die Aufgaben. In der Schulzeit, während der Armeezeit gab sie mir viel, auch heute gibt sie mir im Studium sehr viel...

Martin Ermrich, Elbingerode

● ...Auch während meiner Dienstzeit bei der NVA werde ich mich am *alpha*-Wettbewerb beteiligen...

Michael Hauff, Teuchern

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Speziell für Klasse 5/6

Mit Heft 5/77 der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* haben wir begonnen, interessante Lösungen von Schülern zu Wettbewerbsaufgaben vorzustellen. Wir hoffen, mit den veröffentlichten Lösungsvarianten unseren jungen Lesern Anregungen in bezug auf das Herangehen an Problemlösungen gegeben zu haben. In unserem heutigen Heft stellen wir zwei bei uns eingegangene vorbildliche Lösungen vor.

In Heft 2/77 wurde von uns folgende Aufgabe gestellt:

Ma 5 ■1622 Zwei Boote fahren auf einem Fluß stromaufwärts. Sie sind gegenwärtig 6 km voneinander entfernt. Nachdem das hintere Boot 5 km weitergefahren ist, hat das vordere Boot in der gleichen Zeit nur 3 km zurückgelegt.

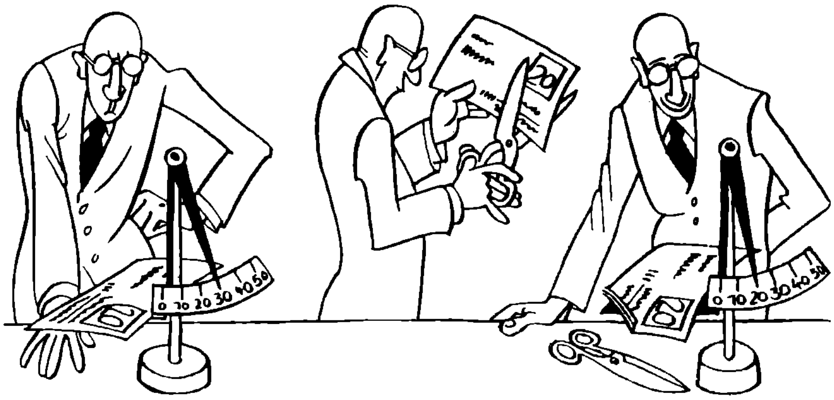
a) Welchen Abstand haben die beiden Boote nun noch voneinander?

b) Wieviel Kilometer müßte das hintere Boot noch zurücklegen, um das vordere einzuholen, wenn beide Boote jeweils mit der gleichen Geschwindigkeit weiterfahren?

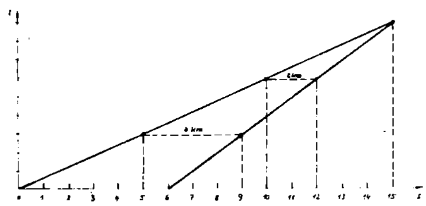
In Heft 5/77 veröffentlichten wir dazu folgende Lösung:

a) Während das hintere Boot 5 km weitergefahren ist, hat das vordere Boot nur 3 km zurückgelegt. Darum gilt $6\text{ km} - 5\text{ km} + 3\text{ km} = 4\text{ km}$. Die Boote haben nun einen Abstand von 4 km.

b) Während das hintere Boot 5 km zurücklegte, hat sich der Abstand zwischen beiden Booten um 2 km verringert. Um den noch vorhandenen Abstand von 4 km auszugleichen, muß das hintere Boot noch $2 \cdot 5\text{ km} = 10\text{ km}$ fahren.



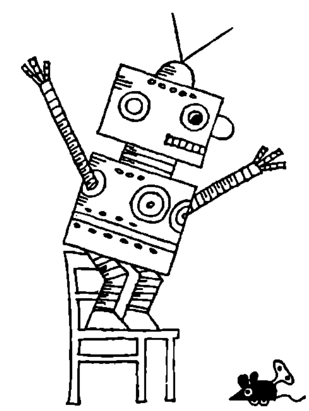
• Unsere Leserin *Gerhild Bochmann*, Schülerin einer 5. Klasse der Heinrich-von-Kleist-Oberschule in Frankfurt (Oder), sandte uns folgende graphische Lösung:



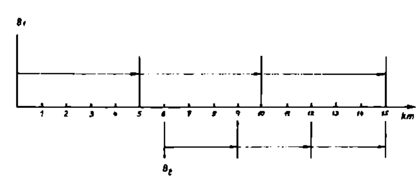
Antwort zu a): Die beiden Boote haben einen Abstand von 4 km.

Antwort zu b): Das hintere Boot müßte noch 10 km zurücklegen, um das vordere einzuholen.

Unser Kommentar: Für eine Schülerin der 5. Klasse eine vorbildliche Leistung.



• Unsere Leserin *Corinna Matzdorff*, Schülerin einer 5. Klasse der Hermann-Matern-Oberschule Klietz, sandte uns ebenfalls eine graphische Lösung:



Antwort zu a): Ich nehme folgendes an: Das hintere Boot (B_1) befindet sich anfangs am Kilometer 0, das vordere (B_2) am Kilometer 6. Wenn B_1 um 5 km weitergefahren ist, befindet es sich am Kilometer 5. In der gleichen Zeit hat B_2 nur 3 km zurückgelegt und befindet sich am Kilometer 9. Beide Boote haben jetzt einen Abstand von 4 km.

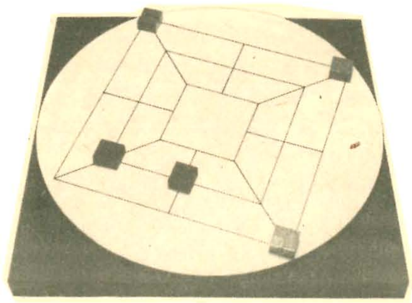
Antwort zu b): Wenn B_1 sich am Kilometer 10 befindet, hat B_2 den Kilometer 12 erreicht. Wenn B_1 sich am Kilometer 15 befindet, hat B_2 ebenfalls den Kilometer 15 erreicht, d. h., B_1 muß noch $2 \cdot 5\text{ km} = 10\text{ km}$ zurücklegen, um B_2 einzuholen.

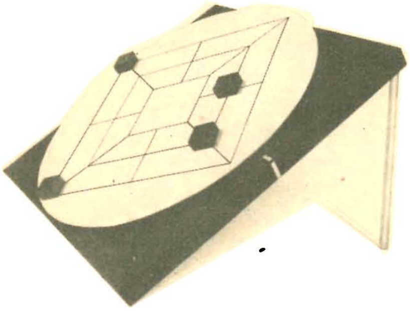
Unser Kommentar: Ebenfalls eine vorbildliche Leistung. Mach weiter so!

Zusammenstellung: J. Lehmann/Th. Scholl

Ein bewegliches Mühlespiel

Dieses Spiel ist eine Weiterentwicklung des herkömmlichen Mühlespiels, dessen Regeln als allgemein bekannt vorausgesetzt werden. Beim beweglichen Mühlespiel müssen die beiden Spieler jedoch wesentlich mehr Faktoren der gegenwärtigen und künftigen Spiellage vergleichen, als das beim herkömmlichen Spiel der Fall ist. Damit üben sie Verhaltensweisen, die auch für praktische Tätigkeiten wichtig sind.
Mit ein wenig Geschick kann man sich dieses Spiel selbst herstellen:
Man braucht dazu eine quadratische Grundplatte mit einer Seitenlänge zwischen 30 cm und 50 cm aus Holz oder einem anderen geeigneten Werkstoff und eine kreisförmige Drehscheibe aus magnetisiertem Eisenblech, deren Durchmesser etwas geringer ist. Im Mittelpunkt der Grundplatte ist ein Dorn anzubringen, im Mittelpunkt der Drehscheibe eine Öse, die den Dorn aufnehmen kann, so daß die Scheibe sich wie der Teller eines Plattenspielers frei drehen kann. Den Spielplan kann man auf Papier zeichnen und dann auf die Drehscheibe aufkleben.
Der Spielplan ist dem des herkömmlichen Mühlespiels ganz entsprechend, nur werden auch die gleichliegenden Eckpunkte der drei konzentrischen Quadrate jeweils durch ein Geradenstück verbunden, Der Abstand der Quadrate voneinander soll genauso groß sein wie der Abstand einer Seitenlinie des innersten Quadrates vom Mittelpunkt der Scheibe. Auf der Abbildung ist das gut zu erkennen.
Zum Spiel gehören außerdem 2 Sätze von jeweils 7 Magnethaftsteinen beliebiger Form in zwei verschiedenen Farben. Vorsichtshalber sollte man einige Ersatzsteine haben. Ein solcher Stein sollte etwa so viel (in g) wiegen, wie die halbe Seitenlänge des innersten Quadrates (in cm) beträgt.
Das Spielbrett kann um etwa 45° gegen die Horizontale geneigt aufgestellt werden, wie es die Abbildung zeigt, man kann es aber auch an die Wand hängen.





Spielregeln:

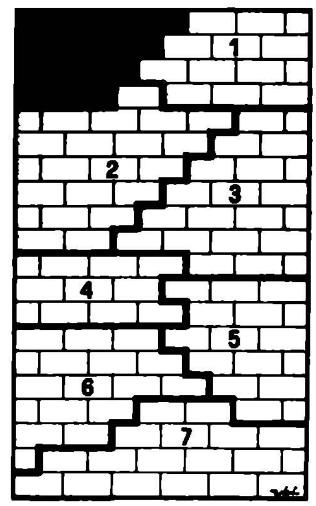
Das Ziel der Spieler ist das gleiche wie beim herkömmlichen Mühlespiel, man will also selbst Mühlen schließen (drei Steine auf einem Geradenstück unterbringen) und verhindern, daß das dem Gegner gelingt. Jeder der beiden Spieler erhält 7 Steine einer Farbe, und sie setzen nun zunächst abwechselnd jeweils einen Stein auf die Schnittpunkte der den Spielplan bildenden Geradenstücke. Nach jedem Satz aber verändert sich die Lage der Drehscheibe bei diesem beweglichen Spiel. Gelingt es einem Spieler, eine Mühle im oberen Teil des Spielplans zu schließen, so darf er einen Stein des Gegners vom Plan nehmen. Diese, die herkömmlichen Regeln des Spieles einschränkende Bedingung muß gestellt werden, damit tatsächlich bei jedem Satz eine Drehung der Scheibe hervorgerufen wird.
Was soll nun unter „oberer Teil" verstanden werden?
Wir nennen die beiden durch den Mittelpunkt der Scheibe führenden und senkrecht aufeinander stehenden Geradenstücken, die die Quadratseiten halbieren, die Achsen des Spieles. Kommt nach einem Satz die Drehscheibe wieder zum Stehen, so ist eine der beiden Achsen der horizontalen Lage näher als die andere. Oberhalb dieser Achse befindet sich der obere Teil des Plans.
Ist das Setzen beendet, so wird nicht wie beim herkömmlichen Spiel gezogen, sondern die Spieler nehmen (wieder abwechselnd) einen ihrer Steine vom Plan und setzen ihn an anderer Stelle wieder ein. Dabei verfolgen sie das gleiche Ziel wie beim anfänglichen Setzen. Sieger ist derjenige Spieler, der alle Steine des Gegners vom Brett genommen hat.
Wodurch wird dieses Spiel so interessant und lehrreich?
Die Lage der Drehscheibe ist von der Summe der Gleichgewichte der aufgebrachten Spielsteine abhängig. In der zur Verfügung stehenden Zeit ist es dem Spieler kaum möglich, die künftige Lage nach dem Umsetzen oder Setzen eines Steines zu berechnen, er ist also auf eine Schätzung angewiesen, deren Genauigkeit mit zunehmender Übung wachsen wird. Das stellt hohe Anforderungen an den Spieler. Dabei wird die Fähigkeit entwickelt, das Verhalten beweglicher Systeme zu begreifen.

H. George/G. Maiwald

1 – 2 – 3 Logelei

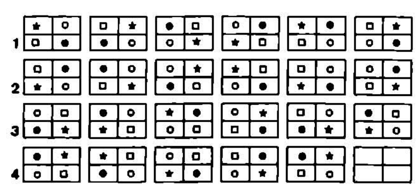
Schwarz malen

Welche der 7 Teile muß man schwarz malen, damit der Anteil schwarzer und weißer Felder gleich wird?



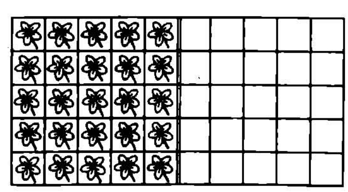
Das ist logisch

Die Bilder folgen einander in einer gewissen Reihenfolge. Suche den Zusammenhang, und trage das fehlende Bild in der vierten Reihe ein!



Verwelkte Stecklinge

Von den 25 Blumenstecklingen sind 8 verwelkt. Der Gärtner hat die Aufgabe, die restlichen Stecklinge so anzuordnen, daß 6 Geraden entstehen, von denen jede gerade 5 Stecklinge enthält.
Wie würdest du die Aufgabe lösen?



Zahlenfolgen

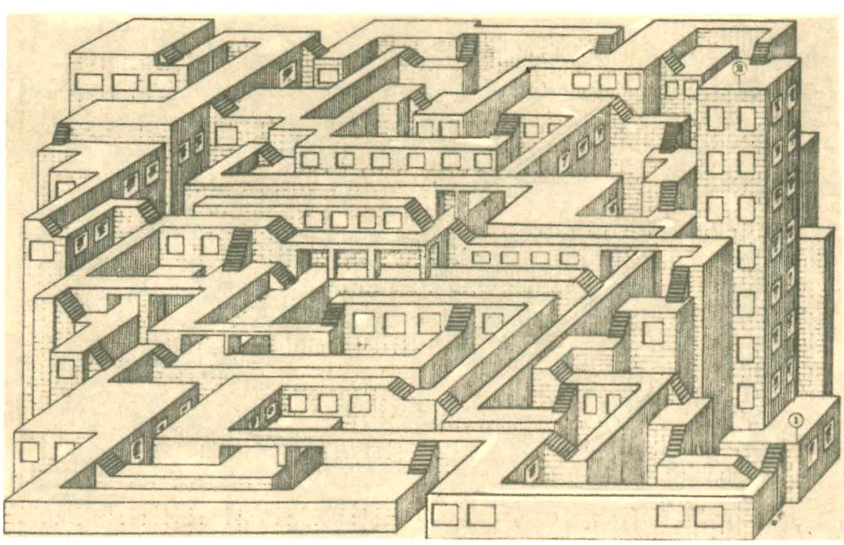
Die Folgen der Zahlen in *A* bis *H* haben jeweils eine andere Bildungsregel. Im Beispiel *A*: Zur 1 wird 2 addiert, zur 3 dann 3, zur 6 dann 4 usw., zur 15 wird also 6 addiert, so daß die 6. Zahl 21 heißt.
Man versuche, die Bildungsgesetze der Folgen *B* bis *H* zu formulieren und die jeweils 6. Zahl einzutragen.

A	1	3	6	10	15	21
B	4	8	16	32	64	
C	0	3	1	4	2	
D	2	9	17	26	36	
E	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	
F	49	37	43	31	37	
G	20	17	13,5	9,5	5	
H	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16	

Diese fünf Probleme wurden der ungarischen Rätselzeitschrift *Füles* entnommen.

Wegsuche

Welcher Weg führt von unten nach oben (von 1 nach 2)?



Eine Aufgabe von Prof. Dr. J. Wendt

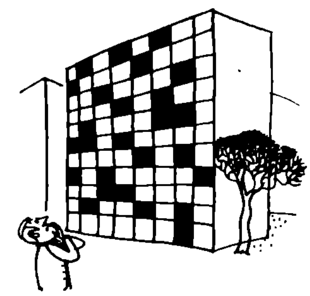
Pädagogische Hochschule „L. Herrmann", Güstrow, Sektion Mathematik/Physik; Wissenschaftsbereichsleiter

▲1735▲ In einem Kugelbehälter mit einem Durchmesser von 5 m wird Sauerstoff bei 293 K mit einem Druck von 150 kPa eingepreßt. Der Behälter wird dann verschlossen. Welche Gasmasse befindet sich in dem Behälter? Welche Kraft wirkt auf 1 cm² Kugelfläche, wenn die Temperatur des Gases auf 893 K erhöht wird?

Prof. Dr. Wendt, seit Jahren Delegationsleiter der DDR-Mannschaft zu den Internationalen Physikolympiaden (II. bis X. IPO), im Kreise der Teilnehmer der X. IPO: H. Schuster, Meißen; Th. Richter, Jena; R. Glaser, Dresden; R. Meinel, Jena; M. Hegner, Berlin; F. Marlow, Berlin

Kurzbiographie: Prof. Dr. Wendt wurde 1927 in Rostock geboren. Er war seit 1949 Lehrer in Roggentin (Kreis Rostock) und später an der EOS in Torgelow, Kr. Ückermünde. Seit 1954 ist er Mitarbeiter an der Päd. Hochschule Güstrow, Bereich Methodik des Physikunterrichts. Die Hochschule unterstützt die außerunterrichtliche Arbeit der *Jungen Physiker* hervorragend. Seit 1973 werden in Güstrow *Olympiaden Junger Physiker* durchgeführt. Im Februar 1978 läuft der VI. Wettbewerb. Im Bereich Methodik des Physikunterrichts werden wissenschaftliche Untersuchungen zur inhaltlichen und methodischen Gestaltung des fakultativen Unterrichts in den *Arbeitsgemeinschaften nach Rahmenprogrammen* und in den Lehrgängen der Abiturstufe durchgeführt.

In freien Stunden alpha heiter



Remis

Für dieses Spiel zu zweit benötigt ihr vier weiße und vier schwarze Steine sowie 16 Spielfelder, die ihr auf Pappe aufzeichnet. Auf unserer Abbildung seht ihr die Ausgangsstellung der Steine. Beide Spieler ziehen abwechselnd einen Stein ihrer Farbe auf ein unbesetztes Nachbarfeld, und zwar senkrecht oder waagerecht, nach oben oder nach unten, aber nicht diagonal.

	A	B	C	D
4	●	○	●	○
3				
2				
1	○	●	○	●

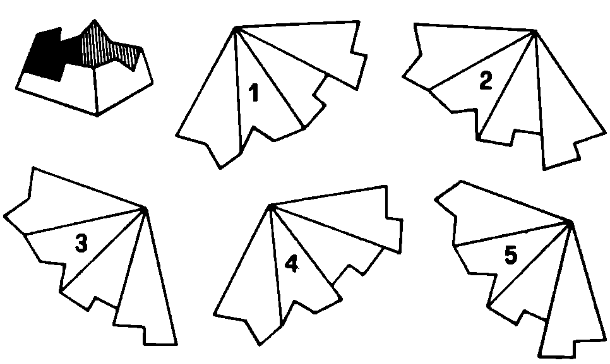
Wer beginnt, wird durch Los entschieden. Jeder Spieler muß versuchen, drei Steine seiner Farbe nebeneinander oder diagonal in eine Reihe zu bekommen. Die Züge sind möglichst schnell auszuführen. Sicherlich wird einer der Spieler gewinnen, obwohl mit Hilfe eines Computers ermittelt worden ist, daß es bei fehlerfreiem Spiel keinen Gewinner geben kann und das Unentschieden (Remis) unvermeidlich ist.

aus: NBI 46/77

Welches Netz?

Durch eines der fünf Netze läßt sich die oben links gezeichnete Basis zu einer Pyramide ergänzen. Durch welches?

aus: „Füles", Budapest



alpha-Gleichungen

Jedem Element der Menge $M_1 = \{\alpha, C, E, G, H, I, L, N, U\}$ ist genau ein Element der Menge $M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ so zuzuordnen, daß die nachstehenden Gleichungen zu wahren Aussagen werden.

(1) $\alpha = \alpha + \alpha \cdot (\alpha - \alpha)$
(2) $G = \alpha + \alpha + \alpha - \alpha$
(3) $L = (\alpha + \alpha + \alpha) : \alpha$
(4) $E = (\alpha + \alpha) : (\alpha + \alpha)$
(5) $I = (\alpha \cdot \alpha + \alpha) : \alpha$
(6) $C = (\alpha + \alpha) : \alpha + \alpha$
(7) $H = \alpha\alpha : \alpha - \alpha$
(8) $U = \alpha + \alpha + \alpha : \alpha$
(9) $N = (\alpha \cdot \alpha) : (\alpha + \alpha)$
(10) $G = \alpha \cdot \alpha - \alpha - \alpha$
(11) $E = (\alpha \cdot \alpha) : (\alpha \cdot \alpha)$
(12) $N = \alpha : \alpha + \alpha : \alpha$

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

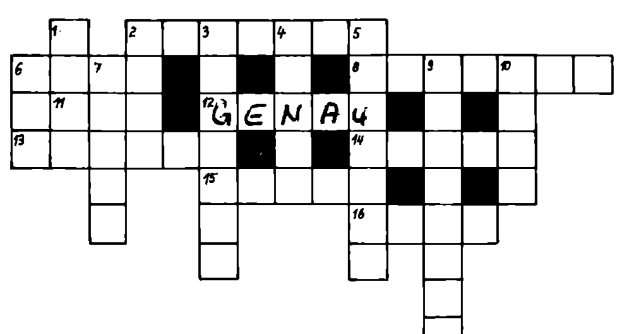
Kreuzworträtsel

Die Wörter haben folgende Bedeutung:

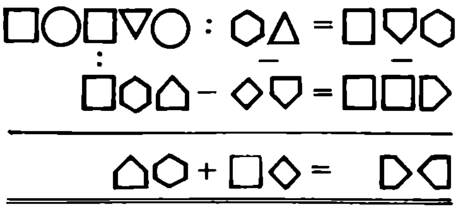
Waagerecht: 2. eine natürliche Zahl; 6. Vorsilbe bei Einheiten (10^6); 8. Problemstellung; 11. Vertiefung im Gelände; 12. soviel wie „exakt"; 13. griechischer Buchstabe; 14. eine Winkelfunktion; 15. Seiten einer Gleichung; 16. aufgewickelte Oberfläche eines Körpers.

Senkrecht: 1. griechischer Buchstabe; 2. ein bestimmter Teil eines Ganzen; 3. Eigenschaft bestimmter rationaler Zahlen; 4. ein Stellenwert; 5. eine natürliche Zahl; 7. griechischer Buchstabe; 9. eindeutige Abbildung; 10. Wendung bei Schlußfolgerungen.

Oberstudienrat K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin



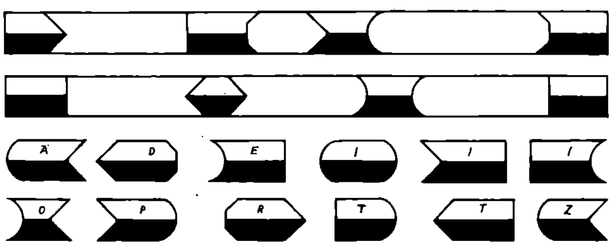
Kryptarithmetik



Schüler Heiko Müller, Schmalkalden

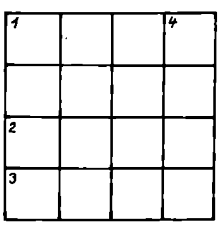
Buchstabenleiste

Die unten abgebildeten Teile sind in die beiden oberen Leisten passend einzufügen. Die Buchstaben ergeben dann eine Eigenschaft, die bestimmte Dezimalbrüche und bestimmte Funktionen besitzen.



Kreuzzahlrätsel

Waagerecht: 1. Geburtsjahr Fermats, 2. Geburtsjahr Keplers, 3. Geburtsjahr von Leibniz.
Senkrecht: 1. Geburtsjahr von Galois, 4. Todesjahr von Leibniz.
Diagonalen: 1. Todesjahr Cardanos, 3. Geburtsjahr Cardanos. *Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden*



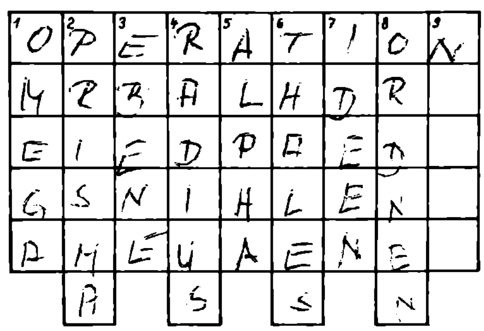
Bilder und Schattenbilder

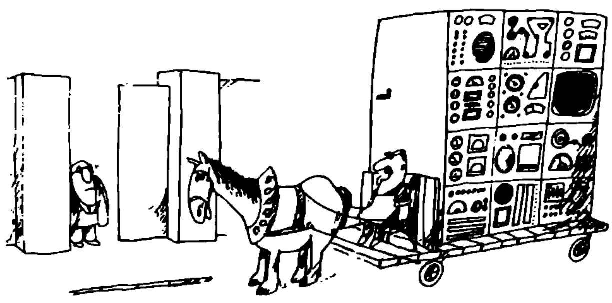
Man suche das Schattenbild eines jeden Kochs. Es bleibt eine Figur übrig, zu der kein Schattenbild und ein Schattenbild, zu der keine Figur gehört.
Welches sind die zusammengehörigen Paare bzw. die alleinstehende Figur und das einzelne Schattenbild?

Füllrätsel

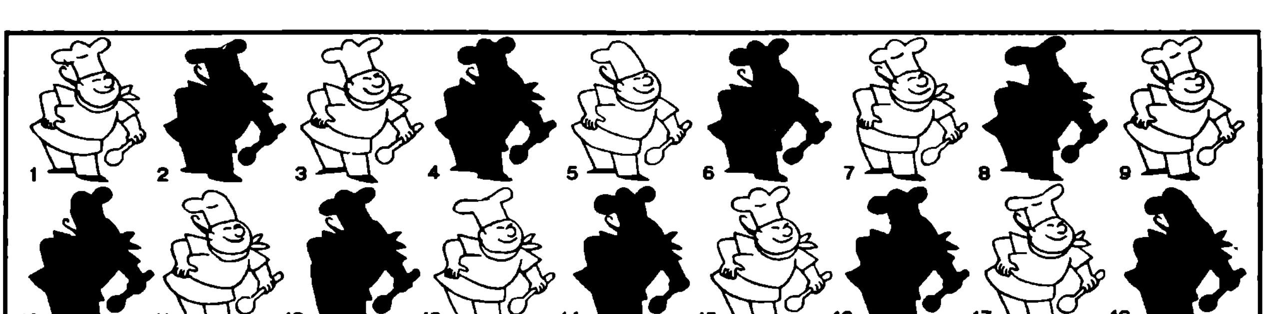
Es sind abwechselnd Wörter mit fünf und sechs Buchstaben zu suchen und nacheinander senkrecht in die Figur einzutragen. Bei richtiger Lösung ergeben die Anfangsbuchstaben von links nach rechts gelesen die Bezeichnung für die Verknüpfung mathematischer Größen.

1. Letzter Buchstabe des griechischen Alphabets.
2. Ein Körper, dessen Grund- und Deckfläche kongruente, in parallelen Ebenen liegende Vieleckflächen und dessen Seitenflächen Parallelogramme oder Rechtecke sind.
3. Grundbegriff der Geometrie.
4. Halbmesser, halber Durchmesser eines Kreises.
5. Erster Buchstabe des griechischen Alphabetes.
6. Griechischer Mathematiker (um 624 bis 547 v. u. Z.), nach dem ein bekannter Satz der Planimetrie benannt ist.
7. Guter Einfall (Plural).
8. Sortieren.
9. Maschinenelement, das in der technischen Zeichnung nicht in Schnittdarstellung gezeichnet wird (Pl.). *Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald*





Wir bringen den neuen Computer!



XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade

(4./5. Februar 1978)

Klassenstufe 7

1. Es sei A die Menge aller derjenigen natürlichen Zahlen a, für die

$$1500 \leqq a \leqq 2650 \text{ gilt.}$$

Untersuche, ob es in der Menge A fünfundsechzig verschiedene Zahlen gibt, die gerade und durch 9 teilbar sind!

2. Uli hat vier verschiedene, mit A, B, C und D bezeichnete Sorten Stahlkugeln. Dabei haben Kugeln gleicher Sorte auch stets einander gleiches Gewicht. Mit Hilfe einer Balkenwaage stellt er fest, daß zwei Kugeln der Sorte B genau so schwer sind wie eine Kugel der Sorte A. Drei Kugeln der Sorte C wiegen ebensoviel wie eine Kugel der Sorte B. Fünf Kugeln der Sorte D haben das gleiche Gewicht wie eine Kugel der Sorte C.
a) Wieviel Kugeln der Sorte D muß Uli in die (leere) eine Waagschale legen, wenn sie einer Kugel der Sorte A in der anderen Waagschale das Gleichgewicht halten sollen?
b) In der einen Waagschale liegen 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C. Wieviel Kugeln der Sorte B muß Uli in die andere (leere) Waagschale legen, um Gleichgewicht zu erhalten?

3. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\overline{AC} = 9{,}0$ cm; $\overline{BC} = 6{,}0$ cm und $\sphericalangle BCA = 120°$.
Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck $CDEFGH$, derart, daß D auf AC, F auf AB und H auf BC liegen!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob es genau ein Sechseck $CDEFGH$ gibt, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht!

4. Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege der Punkt D so, daß $\overline{BD} = \overline{AB}$ ist.
Beweise, daß dann $\sphericalangle DCA = 90°$ ist!

5. Ermittle alle zweistelligen Zahlen, für die sowohl die folgende Aussage (1) als auch die folgende Aussage (2) zutrifft:
(1) Setzt man zwischen Einerziffer und Zehnerziffer der zweistelligen Zahl die Ziffer 5, so erhält man eine Zahl, die um genau 230 größer ist als die ursprüngliche Zahl.
(2) Setzt man die Ziffer 5 vor die zweistellige Zahl, so erhält man ein ganzzahliges Vielfaches der ursprünglichen Zahl.

6. In einem Quadrat $ABCD$ habe die Diagonale AC eine Länge von 10,0 cm.
a) Konstruiere ein solches Quadrat! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
b) Ein Rechteck $EFGH$ heißt dann dem Quadrat $ABCD$ einbeschrieben, wenn bei geeigneter Bezeichnung E auf AB, F auf BC, G auf CD und H auf DA liegt. Dabei gilt $EF \parallel AC$. Ermittle für jedes derartige Rechteck $EFGH$ seinen Umfang!

Klassenstufe 8

1. Es ist zu beweisen: Wenn der Winkel $\sphericalangle CBA$ eines Dreiecks ABC die Größe 30° hat, dann hat die Seite AC des Dreiecks ABC die gleiche Länge wie der Radius des Umkreises k dieses Dreiecks.

2. Gegeben seien ein Punkt S und zwei von S ausgehende Strahlen a und b, die miteinander einen spitzen Winkel bilden. Konstruiere im Innern dieses Winkels einen Punkt P, der folgenden Bedingungen entspricht:
(1) P hat von a den doppelten Abstand wie von b.
(2) Die Länge der Strecke SP beträgt 5,0 cm.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Bedingungen der Aufgabe ein Punkt P eindeutig bestimmt ist!

3. Die gebrochene Zahl $\frac{9}{91}$ soll als Differenz zweier positiver echter Brüche mit den Nennern 7 und 13 dargestellt werden. Untersuche, ob es eine solche Darstellung gibt, ob es mehr als eine gibt, und ermittle alle derartigen Darstellungen!

4. Eine Pioniergruppe sammelte Altpapier; der gesamte Erlös wurde auf das Solidaritätskonto überwiesen. Die Pioniere bildeten zwei Brigaden, jeder Pionier der Gruppe gehörte genau einer dieser Brigaden an. Über das Sammelergebnis ist folgendes bekannt:
(1) Jeder Pionier der Brigade A sammelte genau 13 kg, außer einem, der nur genau 6 kg mitbrachte.
(2) Jeder Pionier der Brigade B sammelte genau 10 kg, außer einem mit nur genau 5 kg.
(3) Brigade A sammelte insgesamt die gleiche Menge wie Brigade B.
(4) Die gesamte Pioniergruppe sammelte mehr als 100 kg, jedoch weniger als 600 kg Altpapier.
a) Wieviel Pioniere gehörten einer jeden Brigade insgesamt an?
b) Wieviel Mark konnte die Pioniergruppe auf das Solidaritätskonto überweisen, wenn der Altstoffhandel 0,15 Mark pro kg Altpapier bezahlte?

5. Man ermittle alle geordneten Tripel $[P_1, P_2, P_3]$ von Primzahlen P_1, P_2, P_3 mit $P_2 > P_3$, die der Gleichung

$$P_1(P_2 + P_3) = 165 \qquad (1)$$

genügen!

6. Zwei Platten von gleicher Dicke bestehen aus Eichenholz bzw. Stahl. Der Flächeninhalt der Grundfläche der Eichenplatte ist um 20% größer als der Flächeninhalt der Grundfläche der Stahlplatte. Die Dichte des Eichenholzes verhält sich zur Dichte des Stahls wie 1 : 10. Ermittle, um wieviel Prozent die Masse der Stahlplatte größer als die Masse der Eichenplatte ist!

Klassenstufe 9

1. Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 (einschließlich dieser Grenzen), die weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar sind!

2. Es sei $ABCD$ ein nicht überschlagenes Viereck, das die Seitenlängen $\overline{AB} = 9$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{CD} = 11$ cm, $\overline{AD} = 8$ cm hat und in dem der Innenwinkel bei B die Größe 110° hat.
Untersuchen Sie durch Konstruktion, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt von $ABCD$ eindeutig bestimmt ist! Von einem Rechteck $EFGH$ werden nun folgende Eigenschaften gefordert:
(1) Das Rechteck $EFGH$ ist flächeninhaltsgleich dem Viereck $ABCD$.
(2) A liegt auf der Rechteckseite EH zwischen E und H, und C liegt auf der Rechteckseite FG.
(3) Die Rechteckseite EH steht auf AC senkrecht.
Begründen und beschreiben Sie, wie sich alle diejenigen Punkte konstruieren lassen, die als Eckpunkt E eines Rechtecks $EFGH$ mit den geforderten Eigenschaften (1), (2), (3) auftreten können!

3. In einem Dreieck ABC sei $\overline{AC}=b=13$ cm und $\overline{BC}=a=15$ cm. Das Lot von C auf die Gerade durch A und B sei CD, und es gelte $\overline{CD}=h_c=12$ cm.
Ermitteln Sie für alle Dreiecke ABC, die diesen Bedingungen entsprechen, den Flächeninhalt I!

4. Für ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ gelte $\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=a$, sowie $\overline{AB}>a$.
a) Beweisen Sie, daß die Diagonale AC den Innenwinkel $\sphericalangle DAB$ des Trapezes halbiert!
b) Berechnen Sie die Länge von AB für den Fall, daß $\sphericalangle DAB=60°$ gilt!

5. Beweisen Sie folgende Aussage:
Vergrößert man das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen um 1, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl!

6. Für jedes $i=1, 2, 3$ seien x_i und y_i zwei beliebige voneinander verschiedene reelle Zahlen, und es sei mit d_i die größere der beiden Zahlen x_i und y_i bezeichnet.
a) Beweisen Sie:
Wenn $x_1 \leqq x_2+x_3$ und $y_1 \leqq y_2+y_3$ gilt, dann gilt $d_1 \leqq d_2+d_3$.
b) Stellen Sie fest, ob auch die folgende Aussage gilt:
Wenn $d_1 \leqq d_2+d_3$ gilt, dann gilt auch
$$x_1 \leqq x_2+x_3.$$

Klassenstufe 10

1. Es seien a und b positive reelle Zahlen, n eine natürliche Zahl.
Beweisen Sie, daß dann
$$(a+b)^n \leqq 2^n(a^n+b^n) \text{ gilt!}$$

2. Es sei $ABCD$ ein nicht überschlagenes Viereck, das die Seitenlängen $\overline{AB}=9$ cm, $\overline{BC}=6$ cm, $\overline{CD}=11$ cm, $\overline{AD}=8$ cm hat und in dem der Innenwinkel bei B eine Größe von 110° hat.
Untersuchen Sie durch Konstruktion, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt von $ABCD$ eindeutig bestimmt ist! Begründen und beschreiben Sie eine Konstruktion derjenigen Länge $\overline{UV}$, die die Seitenlänge eines zu $ABCD$ flächeninhaltsgleichen Quadrates $UVWX$ ist!

3. Jens, Uwe, Dirk und Peter diskutieren darüber, welchem Zahlenbereich die Zahl z angehört, die durch den Term
$$z=\frac{\lg(7-4\cdot\sqrt{3})}{\lg(2-\sqrt{3})}$$
definiert werden soll.
Jens sagt, daß z eine natürliche Zahl ist, Dirk meint, die Zahl z sei eine rationale Zahl, Uwe hält z für irrational, und Peter vermutet, daß der Term überhaupt keine Zahl z definiert.
Entscheiden Sie, wer recht hat!

4. Geben Sie alle Primzahlen p an, für die $3p+4=z^2$ gilt, wobei z eine natürliche Zahl ist!

5. Aus den natürlichen Zahlen von 1 bis 200 werden 101 verschiedene Zahlen beliebig ausgewählt.
Es ist zu zeigen, daß bei jeder solchen Auswahl unter den ausgewählten Zahlen mindestens zwei existieren, so daß die eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist.

6. Gegeben sei der Radius r eines Kreises k. Unter allen zu k konzentrischen Kreisen k', deren Radius r' größer als r ist, seien diejenigen betrachtet, für die folgendes gilt:
(1) Es gibt ein gleichseitiges Dreieck ABC so, daß A auf k' liegt und B und C auf k liegen.
a) Beweisen Sie, daß unter allen so entstehenden Dreiecken ABC auch solche mit maximalem Flächeninhalt existieren und daß diese für genau einen Wert r_1' von r' zustandekommen! Drücken Sie diesen Wert r_1' und diesen maximalen Flächeninhalt F_1 durch r aus!
b) Zeigen Sie, daß für den Wert r_1' auch noch Dreiecke ABC existieren, die (1) erfüllen und einen Flächeninhalt $F_0<F_1$ haben! Beweisen Sie, daß es genau einen solchen Flächeninhalt F_0 gibt und drücken Sie ihn durch r aus!
c) Beweisen Sie, daß es genau einen Wert r_2' von r' mit folgender Eigenschaft gibt: Alle Dreiecke ABC, die (1) für dieses r' erfüllen, haben denselben Flächeninhalt! Drücken Sie diesen Wert r_2' und den zugehörigen Flächeninhalt F_2 durch r aus!

Klassenstufe 11/12

1. Gegeben sei die Folge (a_n) durch
$$a_n=\frac{4n}{4n^2+121} \qquad (1)$$
für $n=1, 2, 3, \ldots$
Man ermittle die obere Grenze und die untere Grenze von (a_n), sofern diese existieren.

2. Zu jeder ganzen Zahl a ermittle man alle reellen Lösungen x der Gleichung
$$x^4+x^3+a^2x^2+x+1=0.$$

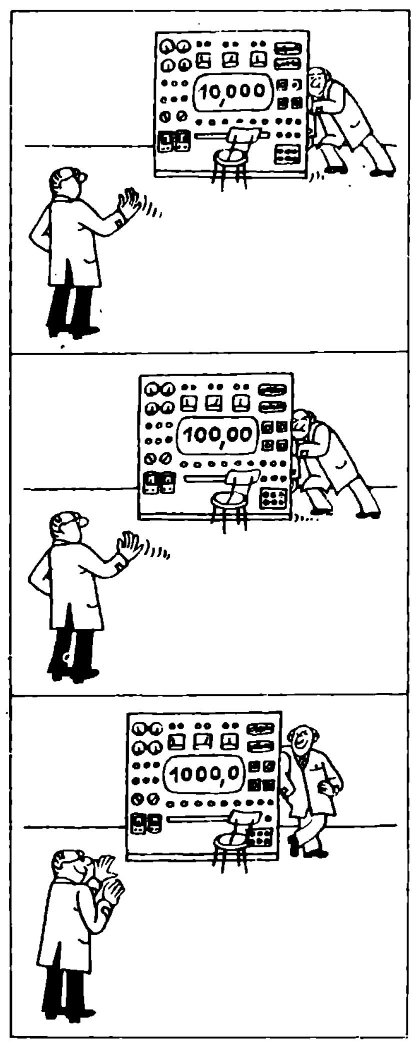
3. Es sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge s, in dem fünf kongruente Kugeln (mit den Mittelpunkten P, Q, R, S, T) so angeordnet sind, daß gilt:
(1) Die Kugel um P berührt die drei von A ausgehenden Seitenflächen ABC, ACD, ADB des Tetraeders,
(2) die Kugel um Q berührt die drei von B ausgehenden Seitenflächen,
(3) die Kugel um R berührt die drei von C ausgehenden Seitenflächen und
(4) die Kugel um S berührt die drei von D ausgehenden Seitenflächen.
(5) Die Kugel um T berührt die vier übrigen Kugeln von außen. Man ermittle den Radius r dieser fünf Kugeln.

4. Man beweise, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b, c mit $a^2+b^2+c^2=\frac{5}{3}$ die Ungleichung $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}<\frac{1}{abc}$ gilt.

5. Man beweise folgenden Satz:
Sind u der Umfang, r der Radius des Inkreises und R der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC, dann gilt $R>\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{ur}$. Ist das Dreieck insbesondere rechtwinklig, dann gilt sogar $R \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{ur}$.

6A. Es sei n eine natürliche Zahl mit $n>1$.
a) Man ermittle alle diejenigen in der Menge R der reellen Zahlen definierten Funktionen f, die in R stetig sind und die Eigenschaft haben, daß für jede reelle Zahl x die Gleichung
$$f(x^n)=f(x) \text{ gilt.} \qquad (1)$$
b) Man gebe eine in R definierte und unstetige Funktion f an, die die Eigenschaft (1) hat.

6B. Ist z eine reelle Zahl, so bezeichnet $[z]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich z ist. Beispielsweise gilt
$$\left[\frac{7}{2}\right]=3;\ [5]=5;\ [-\pi]=-4.$$
Man beweise: Für jede reelle Zahl x und jede positive ganze Zahl n gilt
$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$



Lösungen

Lösungen zum alpha-Wettbewerb Heft 5/77, Fortsetzung:

Ph 10/12 ▪25

Geg.: $N_l = 300$ Windungen
$D = 5\,\text{cm} = 0{,}05\,\text{m}$
$d = 0{,}1\,\text{cm} = 0{,}001\,\text{m}$
$I = 10\,\text{A}$
$\frac{\varrho}{A} = 2{,}27 \cdot 10^{-2}\,\frac{\Omega}{\text{m}}$

Ges.: 1) Anzahl der Wicklungslagen M
2) Meßfehler in Ohm
3) magnetische Feldstärke H in $\frac{AN}{\text{m}}$
4) Leistung P in Watt

1) Die Länge l_1 des Kupferdrahtes der 1. (äußeren) Lage ist $l_1 = \pi N_l\,(D-d)$, die der zweiten $l_2 = \pi N_l\,(D-2d)$ usw. und schließlich die der M-ten Lage $l_M = \pi N_l\,(D-Md)$. Die Gesamtlänge des Drahtes bei M Lagen ist somit

$$l(M) = \pi N_l \sum_{m=1}^{M} (D-md) \text{ oder}$$
$$= \pi N_l \left[MD - \frac{d(M+1)M}{2} \right]$$

und nach der Formel $R = \frac{\varrho \cdot l}{A}$ damit der Gesamtwiderstand

$$R(M) = 0{,}0227\pi N_l \left[MD - \frac{d(M+1)M}{2} \right] \Omega,$$

denn $\frac{\varrho}{A} = 2{,}27 \cdot 10^{-2}\,\frac{\Omega}{\text{m}}$; $l = l(M)\,\text{m}$; $R = R(M)$.

Die (diskrete) Funktion $R(M)$ nimmt für $M = 9, 10, 11$ die Funktionswerte $R(9) = 8{,}66$ Ohm, $R(10) = 9{,}52$ Ohm und $R(11) = 10{,}35$ Ohm an. Da $R(M)$ eine monoton steigende Funktion ist und R_{gem} zu $(9{,}6 \pm 0{,}1)$ Ohm gegeben ist, kann eindeutig für $M = 10$ entschieden werden. Die Anzahl der Wicklungslagen ist $M = 10$.

2) Der maximal zulässige Meßfehler wird aus

$$MIN \left\{ \frac{[R(10)-R(9)]}{2}, \frac{[R(11)-R(10)]}{2} \right\}$$

zu $\pm 0{,}42$ Ohm bestimmt; aus Sicherheitsgründen wird $\pm 0{,}4$ gewählt. Der maximal zulässige Meßfehler ist $\pm 0{,}4$ Ohm.

3) Die Spule hat bei $M = 10$ Lagen $10 \cdot 10$ Windungen je cm bzw. $10 \cdot 10 \cdot 100 = 10^4$ Windungen je m, womit sich nach Formel $H = I \cdot \frac{N}{l}$ bei $I = 10\,\text{A}$ mit $H = \frac{10\,\text{A} \cdot 10^4}{\text{m}}$ eine Feldstärke von $H = 10^5\,\frac{AN}{m}$ ergibt. Die magnetische Feldstärke im Spuleninneren ist $10^5\,\frac{AN}{\text{m}}$.

4) Die der Spule zugeführte elektrische Leistung ist $P = U \cdot I$ mit $U = R \cdot I$ (Ohmsches Gesetz), also $P = R \cdot I^2$ und hier $P = R(M)I^2 = 9{,}52 \cdot 10^2$ Watt. Zur Aufrechterhaltung der Spulentemperatur muß diese abgeführt werden. Die abzuführende Leistung des Kühlaggregats ist $P = 952$ Watt.

Ch 7 ▪17

a) 1 l Kraftstoff $\triangleq$ 8430 l Luft
6 l Kraftstoff $\triangleq$ x l Luft

$$x = \frac{8430\,\text{l} \cdot 6\,\text{l}}{1\,\text{l}}$$
$$x = 50\,580\,\text{l} \triangleq 50\,580\,\text{dm}^3$$

50 580 dm³ Luft werden benötigt.

b) $5\,\text{m} \cdot 3{,}50\,\text{m} \cdot 2{,}50\,\text{m} = 43{,}75\,\text{m}^3$
$50{,}58\,\text{m}^3 > 43{,}75\,\text{m}^3$
$50\,580\,\text{dm}^3 \triangleq 50{,}58\,\text{m}^3$

Die Luft im Zimmer reicht nicht zur vollständigen Verbrennung aus.

Ch 8 ▪18

a) 1 kg Stickstoff $\triangleq$ 80 kg Grünfutter
3000000 kg Stickstoff $\triangleq$ x kg Grünfutter

$$x = \frac{3000000\,\text{kg} \cdot 80\,\text{kg}}{1\,\text{kg}}$$
$$x = 240000000\,\text{kg}$$
$$x = 240000\,\text{t}$$

240000 t Grünfutter können zusätzlich erzeugt werden.

b) 240000 t $\triangleq$ 4%
$x \triangleq 100\%$
$x = 6000000\,\text{t}$

6000000 t werden jährlich erzeugt.

c) 1 Waggon $\triangleq$ 60 t
$x \triangleq 3000\,\text{t}$

$$x = \frac{1 \cdot 3000\,\text{t}}{60\,\text{t}}$$
$$x = 50$$

Die Deutsche Reichsbahn muß 50 Waggons zur Verfügung stellen.

Ch 9 ▪19 a) 1 mol K_2SO_4 enthält
2 mol Kalium
1 mol Schwefel
4 mol at. Sauerstoff

In 1 g K_2SO_4 sind daher

$$\frac{2\,\text{K} \cdot 1\,\text{g}}{K_2SO_4} = \frac{2 \cdot 39 \cdot 1\,\text{g}}{174} = 0{,}449\,\text{g Kalium}$$
$$\frac{\text{S} \cdot 1\,\text{g}}{K_2SO_4} = \frac{32 \cdot 1\,\text{g}}{147} = 0{,}184\,\text{g Schwefel}$$
$$\frac{4\,\text{O} \cdot 1\,\text{g}}{K_2SO_4} = \frac{4 \cdot 16 \cdot 1\,\text{g}}{174} = 0{,}367\,\text{g Sauerstoff}$$

b) 44,9% Kalium
18,4% Schwefel
36,7% Sauerstoff
100,0%

c) 20 g einer 10%igen Lösung enthalten

$$\frac{20\,\text{g} \cdot 10\%}{100\%} = 2\,\text{g Kaliumsulfat}$$

Ch 10/12 ▪20 In 100 l Stadtgas sind 50 l H_2, 35 l CH_4, 3 l C_2H_4, 8 l CO, 3 l N_2

Verbrennung der Stoffe nach folgenden Gleichungen:

50 l x
$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$
44,8 l 22,4 l
$x = 25\,\text{l}$

35 l x
$CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$
22,4 l 44,8 l
$x = 70\,\text{l}$

3 l x
$C_2H_4 + 3O_2 \rightarrow 2CO_2 + 2H_2O$
22,4 l 72,2 l
$x = 9\,\text{l}$

8 l x
$2CO + O_2 \rightarrow 2CO_2$
44,8 l 22,4 l
$x = 4\,\text{l}$

100 l Stadtgas verbrauchen 25 l + 70 l + 9 l + 4 l = 108 l Sauerstoff

1 m³ verbraucht 1080 l Sauerstoff, was 5 · 1080 l = 5400 l oder 5,4 m³ Luft entspricht. Zur völligen Verbrennung von 1 m³ Stadtgas sind 5400 l oder 5,4 m³ Luft erforderlich.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 6/77:

Ma 5 ▪1679 Angenommen, Katrin besitzt a grüne, b gelbe Buntstifte; dann hat sie noch $2 \cdot a$ rote und b blaue Buntstifte. Nun gilt

$a + b + 2a + b = 12$,
$3a + 2b = 12$.

Nur für gerade Zahlen a wird diese Gleichung erfüllt. Für $a = 2$ erhalten wir

$3 \cdot 2 + 2b = 12$,
$2b = 6$,
$b = 3$.

Für $a = 4$ erhalten wir

$3 \cdot 4 + 2b = 12$
$2b = 0$,

was nicht möglich ist.

Somit besitzt Katrin zwei grüne, drei gelbe, drei blaue und vier rote Buntstifte.

Ma 5 ▪1680 In diese Aufgabe hat sich ein Fehler eingeschlichen. Die Aufgabe ist nur dann lösbar, wenn es in Punkt b) heißt: „David ist *jünger* als der Erfurter."

Die Lösung wäre dann:

$c = d < b < a$,

wenn a, b, c, d die Zahlen sind, die das Lebensalter von Andreas (Weimar), Bert (Erfurt), Christian (Gotha), David (Sömmerda) angeben. *Alle* Einsender zu dieser Lösung erhielten eine Antwortkarte „richtig gelöst".

Ma 5 ▪1681 Aus $A = a \cdot b = 480 \cdot 360\,\text{cm}^2$ und $A_F = 40 \cdot 40\,\text{cm}^2$ folgt, daß $(480 \cdot 360) : (40 \cdot 40) = 108$ Teppichfliesen benötigt werden. Der Stapel aus diesen Teppichfliesen ist somit 108 · 4 mm – 20 mm = 412 mm = 41,2 cm hoch.

Ma 5 ▪1682 Angenommen, auf der Weide grasen n Pferde: dann sind es noch $2 \cdot n$ Kühe und $8 \cdot n$ Schafe. Nun gilt

$$90 < n + 2n + 8n < 100,$$
$$90 < 11 \cdot n < 100.$$

Nur $n = 9$ erfüllt diese Ungleichungen. Auf der Weide befinden sich somit 9 Pferde, 18 Kühe und 72 Schafe.

Ma 5 ▪1683 Wenn in jedem Bus die gleiche Anzahl von Schülern fahren soll, müssen in jedem Bus $87 : 3 = 29$ Schüler fahren. Angenommen, im ersten Bus befanden sich ursprünglich a, im zweiten b und im dritten c Schüler, dann befanden sich nach dem Umsteigen im ersten Bus $a - 6 - 3 = a - 9$ Schüler, im zweiten $b + 6 - 4 = b + 2$ Schüler und im dritten $c + 3 + 4 = c + 7$ Schüler. Nun gilt $a - 9 = 29$ und $b + 2 = 29$ und $c + 7 = 29$, also $a = 38$, $b = 27$ und $c = 22$. Vor dem Umsteigen befanden sich im ersten Bus 38, im zweiten 27, im dritten 22 Schüler.

Ma 5 ▪1684 Angenommen, n Schüler haben diese Klassenarbeit geschrieben. Aus $20 < n < 30$ folgt $4 < n : 5 < 6$. Da das Ergebnis $n : 5$ eine natürliche Zahl ergeben muß, kann nur $n = 25$ gelten. Somit haben 5 Schüler die Note 1, 8 Schüler die Note 2, 10 Schüler die Note 3 und 2 Schüler die Note 4 erhalten.

Ma 6 ▪1685 Es sei b die Länge der Basis, s die Länge eines Schenkels dieses gleichschenkligen Dreiecks. Für seinen Umfang gilt $b + 2s = 14$ cm. Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

a) Die Basis sei dreimal so lang wie ein Schenkel; wegen $b = 3s$ gilt dann $3s + 2s = 14$ cm, $5s = 14$ cm, $s = 28$ mm und somit $b = 84$ mm. In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite. Es muß also $s + s > b$, also $2s > b$ gelten. Wegen $2s = 56 \text{ mm} < 84 \text{ mm} = b$ ist dieser Fall nicht möglich.

b) Ein Schenkel sei dreimal so lang wie die Basis; wegen $s = 3b$ gilt dann $b + 6b = 14$ cm, $7b = 14$ cm, $b = 2$ cm. Die Basis hat eine Länge von 2 cm; jeder Schenkel ist 6 cm lang.

Ma 6 ▪1686 Die zweistelligen natürlichen Zahlen haben die Form $z = 10a + b$ mit $0 < a \leqq 9$ und $0 \leqq b \leqq 9$. Für die Quersumme $q = a + b$ dieser Zahlen gilt

$$10a + b = 5 \cdot (a + b),$$
$$10a + b = 5a + 5b,$$
$$5a = 4b.$$

Nur die Zahlen $a = 4$ und $b = 5$ genügen den Bedingungen. Somit existiert genau eine solche Zahl; sie lautet 45, und es gilt $45 : 5 = 9$; $4 + 5 = 9$.

Ma 6 ▪1687 Angenommen, in der ersten Schale lagen anfangs n Äpfel; dann lagen in den beiden anderen Schalen jeweils $2n$ Äpfel. Der ersten Schale wurden 2 Äpfel entnommen und später 6 Äpfel hinzugefügt, so daß sie schließlich $(n + 4)$ Äpfel enthielt. Der zweiten Schale wurden 2 Äpfel hinzugefügt und später 4 Äpfel entnommen, so daß sie schließlich $(2n - 2)$ Äpfel enthielt. Nun gilt

$$2n - 2 = n + 4,$$
$$n = 6.$$

Die erste Schale enthielt sechs, die beiden übrigen enthielten jeweils 12 Äpfel.

Ma 6 ▪1688 Angenommen, es waren n Silbermedaillen; dann waren es noch $(n - 1)$ Goldmedaillen und $(n + 1)$ Bronzemedaillen, insgesamt also $3n$ Medaillen. Nun gilt $3 \cdot n = 24$ und somit $n = 8$. Die Sportler der Volksrepublik Bulgarien errangen 7 Gold-, 8 Silber- und 9 Bronzemedaillen.

Ma 6 ▪1689 Angenommen, der Vater sammelte n Pilze; dann hat der Großvater $(n + 2)$ Pilze und der Sohn $(n + 7)$ Pilze gesammelt. Nun gilt

$$n + (n + 2) + (n + 7) = 78,$$
$$3n + 9 = 78,$$
$$3n = 69,$$
$$n = 23.$$

Somit kommen auf den Großvater 25, auf den Vater 23, auf den Sohn 30 Pilze.

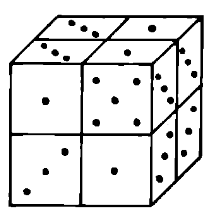
Ma 7 ▪1690 Von genau einem Würfel sind die Augenzahlen 1, 3 und 5 sichtbar. Aus $30 - (1 + 3 + 5) = 21$ folgt, daß die Summe der Augenzahlen der neun verbleibenden sichtbaren quadratischen Spielwürfelflächen gleich 21 ist. Von diesen neun verbleibenden Spielwürfelflächen mögen x die Augenzahl 1, y die Augenzahl 3 und z die Augenzahl 5 haben; dann gilt

$x + 3y + 5z = 21$ und $x + y + z = 9$ bzw.

$z = 9 - x - y$.

Durch Einsetzen erhalten wir

$$x + 3y + 5 \cdot (9 - x - y) = 21,$$
$$x + 3y + 45 - 5x - 5y = 21,$$
$$4x + 2y = 24,$$
$$2x + y = 12.$$



Aus $x = 1$ folgt $y = 10$, was wegen $x + y + z = 9$ nicht möglich ist. Aus $x = 2$ folgt $y = 8$, was wegen $x + y + z = 9$ nicht möglich ist. Aus $x = 3$ folgt $y = 6$ und $z = 0$.

Wegen $1 + 3 = 4$ muß die Augenzahl 1 mindestens viermal vorkommen.

Ma 7 ▪1691 Die Laufzeit für die 100-m-Hürden-Strecke von Tatjana Anissimowa betrug $(12{,}77 + 0{,}01)\,\mathrm{s} = 12{,}78$ s. Nun gilt

$$v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{100\,\mathrm{m}}{12{,}78\,\mathrm{s}} = \frac{10000\,\mathrm{m}}{1278\,\mathrm{s}}.$$

Ferner gilt

$$s_2 = v_1 \cdot t_2 = \frac{10000\,\mathrm{m}}{1278\,\mathrm{s}} \cdot \frac{1}{100}\,\mathrm{s}$$
$$= \frac{100}{1278}\,\mathrm{m} = \frac{10000}{1278}\,\mathrm{cm} \approx 7{,}82\,\mathrm{cm}.$$

Johanna Schaller hatte einen hauchdünnen Vorsprung von nur etwa 8 cm gegenüber Tatjana Anissimowa, als sie über den Zielstreifen lief.

Ma 7 ▪1692 $7{,}20\,\mathrm{M} : 3 = 2{,}40\,\mathrm{M}$; $2{,}40\,\mathrm{M} : 2 = 1{,}20\,\mathrm{M}$; Ute hat zwei Filzstifte gekauft. Es verbleiben noch $7{,}20\,\mathrm{M} - 2{,}40\,\mathrm{M} = 4{,}80\,\mathrm{M}$. Angenommen, Ute hat a Hefte und b Schnellhefter gekauft; dann gilt

$$12a + 105b = 480,$$
$$4a + 35b = 160,$$
$$4a = 160 - 32b - 3b,$$
$$a = 40 - 8b - \frac{3b}{4}.$$

Nur für $b = 4$, also $a = 40 - 8 \cdot 4 - \frac{3 \cdot 4}{4} = 5$ wird diese Gleichung entsprechend den einschränkenden Bedingungen erfüllt.

Ute kaufte 5 Hefte und 4 Schnellhefter.

Ma 7 ▪1693 Aus $b - a = 12$ folgt $b = a + 12$ und somit $x = \frac{a}{a + 12}$. Nun gilt

$\frac{1}{4} < \frac{a}{a + 12} < \frac{1}{3}$, also $\frac{1}{4} < \frac{a}{a + 12}$ und $\frac{a}{a + 12} < \frac{1}{3}$,

$a + 12 < 4a$ und $3a < a + 12$,

$12 < 3a$ und $2a < 12$,

$4 < a$ und $a < 6$.

Aus $4 < a < 6$ folgt $a = 5$.

Es existiert genau eine solche gebrochene Zahl; sie lautet $x = \frac{5}{17}$.

Ma 8 ▪1694 Aus (4) folgt:

Dahlen ist Gärtner.

Aus (2) folgt: Lohe ist Lehrer; daraus folgt: Krüger ist Elektriker.

Aus (3) folgt: Krüger hat den Vornamen Dieter, aus (4) folgt: Dahlen hat den Vornamen Bernd; daraus folgt: Lohe hat den Vornamen Günter.

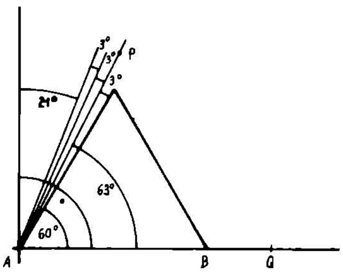
Dieter Krüger ist Elektriker, Günter Lohe ist Lehrer, und Bernd Dahlen ist Gärtner. Die Angabe (1) ist überflüssig.

Ma 8 ▪1695 Es seien a, b, c, d vier beliebige natürliche Zahlen. Nach Voraussetzung gilt: $a + b + c + d$ ist ungerade.

Das kann nur gelten, wenn entweder genau eine oder drei dieser Zahlen ungerade sind. Daraus folgt: Mindestens eine dieser Zahlen ist gerade.

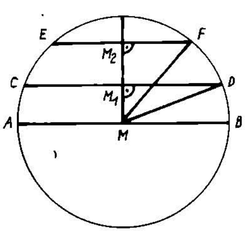
Wenn ein Produkt aus beliebig vielen natürlichen Zahlen wenigstens einen geradzahligen Faktor enthält, so ist dieses Produkt eine gerade Zahl, w. z. b. w.

Ma 8 ▪1696 a) Es sei $\sphericalangle PAQ$ ein Winkel von 63° mit dem Scheitelpunkt A. Man konstruiert ein gleichseitiges Dreieck mit beliebiger Seitenlänge derart, daß ein Eckpunkt mit dem Scheitelpunkt des Winkels zusammenfällt und eine Seite auf einem Schenkel des Winkels liegt. Man erhält so einen Winkel von 3°, den man noch zweimal antragen kann, so daß sich ein Winkel von 9° ergibt. Nun errichtet man im Punkt A auf der Dreieckseite, die auf dem Schenkel des gegebenen Winkels liegt, die Senkrechte und erhält einen Winkel von 21°. Das ist ein Drittel des gegebenen Winkels. Dieser Winkel läßt sich nun an einen der Schenkel des gegebenen Winkels zweimal antragen.



b) Der bei der Konstruktion a) erhaltene Winkel von 9° ist ein Siebentel des gegebenen Winkels von 63° und läßt sich an einen der Schenkel des gegebenen Winkels sechsmal antragen.

Ma 8 ■1697 Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:
1. Fall: Beide Sehnen liegen auf derselben Seite des zu ihnen parallelen Durchmessers,
2. Fall: Beide Sehnen liegen auf verschiedenen Seiten des zu ihnen parallelen Durchmessers.
Skizze: (*1. Fall*)



Es seien $\overline{AB}$ der Durchmesser, $\overline{CD}$ die 10 cm lange und $\overline{EF}$ die 5 cm lange Sehne, M_1 und M_2 seien die Mittelpunkte der Sehnen $\overline{CD}$ bzw. $\overline{EF}$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\overline{M_1M}^2=\overline{MD}^2-\overline{M_1D}^2$$
$$\overline{M_1M}^2=100\text{ cm}^2-25\text{ cm}^2$$
$$\overline{M_1M}\approx 8{,}660\text{ cm}.$$
$$\overline{M_2M}^2=\overline{MF}^2-\overline{M_2F}^2$$
$$\overline{M_2M}^2=100\text{ cm}^2-6{,}25\text{ cm}^2$$
$$\overline{M_2M}\approx 9{,}682\text{ cm}$$

1. Fall: $\overline{M_1M_2}=\overline{M_2M}-\overline{M_1M}\approx 9{,}682\text{ cm}-8{,}660\text{ cm}\approx 1{,}022\text{ cm}.$

2. Fall: $\overline{M_1M_2}=\overline{M_2M}+\overline{M_1M}\approx 9{,}682\text{ cm}+8{,}660\text{ cm}\approx 18{,}342\text{ cm}.$

Im *1. Fall* beträgt der Abstand der Sehnen etwa 1 cm; im *2. Fall* wenig mehr als 18 cm.

Ma 9 ■1698 Nach Aufgabenstellung gilt: $s=x+y=xy$. Löst man die Gleichung $x+y=xy$ nach x auf, so erhält man $x=\frac{y}{y-1}$ $(y\neq 1)$. Nun lassen sich leicht solche Zahlenpaare $(x;y)$ mit $x, y\in P$ finden, die die gestellten Forderungen erfüllen; z. B. $\left(\frac{3}{2};3\right)$ oder $\left(\frac{8}{7};8\right)$ usw.

Betrachtet man nun folgendes Gleichungssystem:
(1) $s=x+y$
(2) $s=xy$, dann führt dessen Lösung auf die quadratische Gleichung $y^2-ys+s=0$ mit den Lösungen

$$y_{1,2}=\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}-\frac{4s}{4}}.$$

Daraus ist ersichtlich, daß y nur dann rational ist, wenn s^2-4s eine Quadratzahl ist. Analoges gilt für x, w.z.b.w.

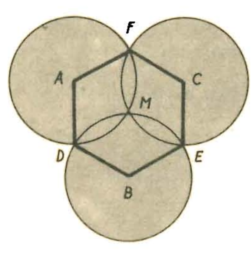
Ma 9 ■1699 $\sqrt{\sqrt{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot n}}=\frac{n}{\sqrt{n}}$

$$\sqrt{\sqrt{n^2}}=\frac{n}{\sqrt{n}}$$
$$\sqrt{n}=\frac{n}{\sqrt{n}}$$
$$\sqrt{n}=\frac{n\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}}$$
$$\sqrt{n}=\frac{n\cdot\sqrt{n}}{n}$$
$$\sqrt{n}=\sqrt{n}$$
$$n=n.$$

Da alle Schritte rückwärts äquivalente Umformungen sind, ist der Beweis erbracht.

Ma 9 ■1700 Es sei a^2 eine beliebige Quadratzahl; ihre Wurzel ist a. Man hat drei Fälle zu unterscheiden; denn a läßt bei der Division durch 3 entweder den Rest 0 oder 1 oder 2.
1. Fall: a ist durch 3 teilbar. Dann gibt es eine natürliche Zahl n, für die gilt: $a=3n$. Es gilt dann $a^2=9n^2$. a^2 ist durch 3 teilbar, läßt also nicht den Rest 2.
2. Fall: a läßt bei der Division durch 3 den Rest 1. Dann gibt es eine natürliche Zahl n, für die gilt: $a=3n+1$. Es gilt dann $a^2=(3n+1)^2=9n^2+6n+1$. a^2 läßt bei der Division durch 3 den Rest 1, also nicht den Rest 2.
3. Fall: a läßt bei Division durch 3 den Rest 2. Dann gibt es eine natürliche Zahl n, für die gilt: $a=3n+2$. Es gilt dann $a^2=(3n+2)^2=9n^2+12n+4$. a^2 läßt bei Division durch 3 den Rest 1, also nicht den Rest 2, w.z.b.w.

Ma 9 ■1701 a) A, B und C seien die Mittelpunkte, M der gemeinsame Randpunkt und D, E und F die gemeinsamen Randpunkte je zweier Kreise. $ADBECF$ ist nach Aufgabenstellung ein regelmäßiges Sechseck. Jedes seiner sechs gleichseitigen Dreiecke hat einen Flächeninhalt von $\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$. Jeder der drei Kreissektoren hat einen Zentriwinkel von 240°.



Für den Flächeninhalt A gilt somit:

$$A=6\cdot\frac{r^2}{4}\sqrt{3}+3\cdot\frac{240°}{360°}\cdot\pi r^2$$

bzw. $A=\frac{r^2}{2}(3\sqrt{3}+4\pi)$.

b) Für $A=80\text{ cm}^2$ erhalten wir

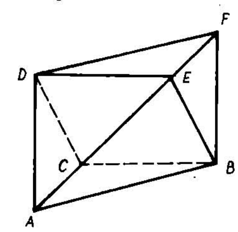
$$80\text{ cm}^2=\frac{r^2}{2}(3\sqrt{3}+4\pi).$$

Die Auflösung nach r ergibt:

$$r^2=\frac{2\cdot 80\text{ cm}^2}{3\sqrt{3}+4\pi}$$
$$r\approx 3\text{ cm}.$$

Ma 10/12 ■1702 Es sei V_K das Volumen des abgebildeten Körpers, V_W das Volumen des Würfels mit der Kantenlänge $\overline{AC}=a$ und V_P das Volumen einer der „abgeschnittenen" Pyramiden, dann gilt

$$V_K=V_W-2V_P$$
$$V_K=a^3-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot a$$
$$V_K=\frac{2}{3}a^3.$$



Ma 10/12 ■1703 Die Voraussetzung läßt sich zu

$$x\geqq y\geqq z>1 \qquad (2)$$

verschärfen. Daraus folgt $\frac{1}{x}\leqq\frac{1}{y}\leqq\frac{1}{z}$.

Damit (1) gilt, muß also $\frac{1}{z}\geqq\frac{1}{3}$, d. h. $z\leqq 3$ sein.

Wegen (2) sind zwei Fälle möglich:
1. Fall: $z=3$
Das liefert $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$, also $\frac{1}{y}\geqq\frac{1}{3}$, d. h. $y\leqq 3$.
Wegen $y\geqq z$ ergibt dies $y=3$. Somit ist die erste Lösung $x=y=z=3$.
2. Fall: $z=2$
Das liefert $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$, also $\frac{1}{y}\geqq\frac{1}{4}$, d. h. $y\leqq 4$.
$y=4$ führt zu $x=y=4$ und $z=2$.
$y=3$ führt zu $x=6$; $y=3$; $z=2$.
$y=2$ liefert einen Widerspruch.
Damit sind alle Lösungen ermittelt, und die Lösungsmenge heißt:

$$L=\{[3;3;3],[4;4;2],[6;3;2]\}.$$

Ma 10/12 ■1704 1. Nach der Aufgabenstellung gilt

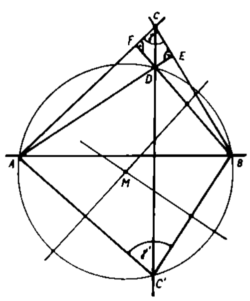
$$\frac{4}{3}\pi r^3=4\pi r^2 \;\Big|\cdot\frac{3}{4\pi}$$
$$r^3=3r^2 \;|\; :r\ (r\neq 0)$$
$$r=3.$$

2. Der Durchmesser der Kugel $(2r)$ ist zugleich Raumdiagonale des Würfels $(a\sqrt{3})$. Aus $2r=a\sqrt{3}$ folgt $a=2\sqrt{3}$.
3. Der Oberflächeninhalt des Würfels $(6a^2)$ hat die Maßzahl 72; der Oberflächeninhalt

der Kugel ($4\pi r^2$) hat die Maßzahl 113 (Näherungswert). Das Verhältnis $A_{OK}:A_{OK}$ beträgt etwa 1 : 1,57.

4. Das Volumen des Würfels (a^3) hat die Maßzahl 41,57 (Näherungswert); das Volumen der Kugel $\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$ hat die Maßzahl 113 (Näherungswert). Das Verhältnis $V_W:V_W$ beträgt etwa 1 : 2,72.

Ma 10/12 ▪1705 Spiegelt man das Dreieck ABC an der Geraden AB, so erhält man $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AC'B = \gamma$. $\sphericalangle EDF = 180° - \gamma$ $= \sphericalangle ADB$ (Scheitelwinkel!). Die Summe der beiden gegenüberliegenden Winkel $\sphericalangle AC'B$ und $\sphericalangle ADB$ im Viereck $AC'BD$ beträgt 180°. Somit ist das Viereck $AC'BD$ ein Sehnenviereck, q. e. d.



Ph 6 ▪26 Geg.: $l_0 = 200$ m

$\vartheta_0 = +10\,°C$

$\vartheta_1 = -15\,°C$

$\vartheta_2 = +30\,°C$

$\alpha = 0{,}0000117\,\frac{1}{\text{grd}}$

Ges.: a) Die Längen des Mastes l_1 und l_2.
b) Die Längendifferenz Δl.

Zunächst berechnet man die Temperaturdifferenzen $\Delta\vartheta_1$ und $\Delta\vartheta_2$ nach

$\Delta\vartheta_1 = \vartheta_1 - \vartheta_0 = -25$ grd

$\Delta\vartheta_2 = \vartheta_2 - \vartheta_0 = +20$ grd.

a) Man berechnet die Längen nach der Formel

$l_1 = l_0\,(1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta_1)$.

$l_1 = 200\text{ m}\left(1 - 0{,}0000117 \cdot 25\,\frac{\text{grd}}{\text{grd}}\right)$

$l_1 \approx 199{,}94$ m

$l_2 = l_0\,(1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta_2)$

$l_2 = 200\text{ m}\left(1 + 0{,}0000117 \cdot 20\,\frac{\text{grd}}{\text{grd}}\right)$

$l_2 \approx 200{,}05$ m

Die Höhen des Mastes sind 199,94 m bzw. 200,05 m.

b) Die Längendifferenz Δl findet man mit

$\Delta l = l_2 - l_1$

$\Delta l = 200{,}05\text{ m} - 199{,}94\text{ m}$

$\Delta l = 0{,}11$ m

Die Längendifferenz des Mastes zwischen $-15\,°C$ und $+30\,°C$ beträgt 0,11 m.

Ph 7 ▪27 Geg.: $V_Z = \frac{\pi a^2 h}{4}$

$V_P = \frac{a^2 h}{3}$

$\varrho_W = 0{,}95\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$

Ges.: Dichte ϱ der Pyramide

Da die Massen des Zylinders m_Z und der Pyramide m_P gleich sind, gilt mit $m_Z = V_Z \cdot \varrho_W$ und $m_P = V_P \cdot \varrho$

$m_Z = m_P$

$\frac{\pi a^2 h \varrho_W}{4} = \frac{a^2 h \varrho}{3}$

Nach ϱ aufgelöst

$\varrho = \frac{3\pi a^2 h \varrho_W}{4a^2 h}$

$\varrho = \frac{3\pi\varrho_W}{4}$

$\varrho = \frac{3 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}95\text{ kg}}{4\text{ dm}^3} = 2{,}237\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$

Die Pyramide besteht aus Quarzglas, da dessen Dichte dem Ergebnis am nächsten kommt.

Ph 8 ▪28 Geg.: $R_1 = 5\,\Omega$ $\quad R_4 = 1\,\Omega$

$R_2 = 50\,\Omega$ $\quad R_5 = 10\,\Omega$

$R_3 = 500\,\Omega$ $\quad R_6 = 100\,\Omega$

$R_7 = 1000\,\Omega$

Ges.: R

Der Gesamtwiderstand setzt sich zusammen als Summe aus den in Reihe geschalteten Widerständen R_1 und R_4 und den zwei Gruppen parallel geschalteter Widerstände R' bzw. R'' mit

$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ $\quad \frac{1}{R''} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}$

$R' = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$ $\quad R'' = \frac{R_5 \cdot R_6 \cdot R_7}{R_5R_6 + R_5R_7 + R_6R_7}$.

Dann ist der Gesamtwiderstand R gleich

$R = R_1 + R' + R_4 + R''$

$R = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + R_4$

$+ \frac{R_5 \cdot R_6 \cdot R_7}{R_5R_6 + R_5R_7 + R_6R_7}\,\Omega$

$R = 5 + \frac{50 \cdot 500}{50 + 500} + 1$

$+ \frac{10 \cdot 100 \cdot 1000}{1000 + 10000 + 100000}\,\Omega$

$R \approx 60{,}46$

Der Gesamtwiderstand beträgt 60,46 Ω.

Ph 9 ▪29 Geg.: $F = 0{,}25\,p = 0{,}00245\,N$

$= 0{,}00245\,\frac{\text{VAs}}{\text{m}}$

$r = 2\text{ cm} = 0{,}02$ m

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}$

Ges.: Ladung Q

Da es sich um kleine Kugeln handelt, verwendet man das Modell der elektrischen Punktladung, und es gilt das Coulombsche Gesetz. Demzufolge ist

$F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^2}$ mit $Q_1 = Q_2 = Q$ und

$F = \frac{Q^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$.

$Q^2 = F \cdot 4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2$

$Q = r\sqrt{F \cdot 4\pi \cdot \varepsilon_0}$

$Q = 0{,}02\text{ m}$

$\cdot \sqrt{0{,}00245\,\frac{\text{VAs}}{\text{m}} \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}}$

$Q \approx 10^{-8}$ As

Die Ladung auf jeder der beiden Kugeln beträgt 10^{-8} As.

Ph 10/12 ▪30 Geg.: $\overline{B_1B_2} = a = 18\,500$ m

$t_1 - t_2 = t = 37$ s

$\alpha = 85{,}2°$

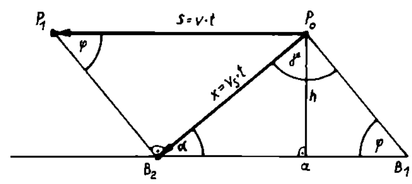
$v_s = 340\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Ges.: a) Geschwindigkeit des Flugzeuges v
b) Flughöhe h

Wenn ein bewegter Punkt P in P_0 einen Druckimpuls erzeugt, habe die Druckwelle nach t Sekunden den Punkt B_2 erreicht und damit einen Weg $x = \overline{P_0B_2} = v_s \cdot t$ zurückgelegt. Der Punkt P_0 ist in der Zeit t jedoch bei P_1 angelangt. Der Weg von P_0 nach P_1 ist dann $s = \overline{P_0P_1} = v \cdot t$, wobei v die Punktgeschwindigkeit und v_s die Schallgeschwindigkeit ist.

Aus der Abbildung folgt für den Winkel ϕ

$\sin\phi = \frac{P_0B_2}{P_0P_1} = \frac{x}{s} = \frac{v_s t}{vt} = \frac{v_s}{v}$.



Dabei wird das Verhältnis $\frac{v}{v_s}$ als „Machsche Zahl" und der Winkel ϕ als „Machscher Winkel" bezeichnet.

a) Da $a = \overline{B_1B_2}$ und $\overline{B_1B_2} = \overline{P_1P_0}$, ist $\overline{P_1P_0} = a$, und es gilt

$v = \frac{a}{t} = \frac{18\,500\text{ m}}{37\text{ s}} = 500\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Das Flugzeug hat eine Geschwindigkeit von $500\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) Für den Machschen Winkel folgt

$\sin\phi = \frac{v_s}{v} = \frac{340\text{ m} \cdot \text{s}}{500\text{ s} \cdot \text{m}} = 0{,}6800$

und hieraus $\phi = 42{,}84°$. Damit kann man den Winkel γ errechnen nach

$\gamma = 180° - (\phi + \alpha)$

$\gamma = 180° - (85{,}2° + 42{,}8°)$

$\gamma = 52°$.

Nun ist $\sin\alpha = \frac{h}{x}$

$h = x \cdot \sin\alpha$. (1)

Nach dem Sinussatz folgt weiter

$\frac{\sin\phi}{\sin\gamma} = \frac{x}{a}$

$x = \frac{a \cdot \sin\phi}{\sin\gamma}$. (2)

(2) in (1) eingesetzt ergibt

$h = \frac{a \cdot \sin\phi \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a \cdot v_s \cdot \sin\alpha}{v \cdot \sin\gamma}$

$h = \frac{18\,500\text{ m} \cdot 340\text{ m} \cdot \text{s} \cdot 0{,}9965}{500\text{ s} \cdot \text{m} \cdot 0{,}7880}$

$h = 15\,908$ m

$h \approx 15\,900$ m.

Das Flugzeug fliegt in einer Höhe von 15900 m.

Ch 7 ▪21

a) 250 kg Braunstein ≙ 140 kg Mangan

x „ ≙ 200 kg „

$$\frac{250\,kg}{x}=\frac{140\,kg}{200\,kg}$$

$x=\frac{250\,kg\cdot 200\,kg}{140\,kg}=357\,kg$. Täglich werden 357 kg Braunstein benötigt.

b) $357\,kg\cdot 30=10714\,kg$

$10{,}7\,t$

Der Betrieb muß monatlich 10,7 t Braunstein erhalten.

Ch 8 ■22 1.

m 100 g

$3\,Mg+2\,H_3PO_4\rightarrow Mg_3(PO_4)_2+3\,H_2$

72 g 262 g

$m=\frac{72\,g\cdot 100\,g}{262\,g}=27{,}5\,g$

Kosten: 1 kg Mg$\hat{=}$23,28 M

27,5 g$\hat{=}x$ M

Bei der Herstellung von 100 g Magnesiumphosphat aus Magnesium, betragen die Kosten für Magnesium 0,64 M.

2.

m 100 g

$3\,MgO+2\,H_3PO_4\rightarrow Mg_3(PO_4)_2+3\,H_2O$

120 g 262 g

$m=\frac{120\,g\cdot 100\,g}{262\,g}=45{,}9\,g$

Kosten: 1 kg MgO$\hat{=}$11,16 M

45,9 g$\hat{=}x$

Die Kosten bei der Herstellung von 100 g Magnesiumphosphat aus Magnesiumoxid betragen 0,51 M.

3.

m 100 g

$3\,MgCO_3+2\,H_3PO_4\rightarrow Mg_3(PO_4)_2+3\,H_2O$

252 g 262 g $+3\,CO_2$

$m=\frac{252\,g\cdot 100\,g}{262\,g}=96\,g$

Kosten: 1 kg $MgCO_3$$\hat{=}$6,12 M

96 g$\hat{=}x$

Die Kosten bei der Herstellung von 100 g Magnesiumphosphat aus Magnesiumkarbonat betragen 0,59 M.

Die kostengünstigste und ökonomischste Methode zur Herstellung von Magnesiumphosphat ist:

Magnesiumoxid + Phosphorsäure →

Magnesiumphosphat + Wasser

Ch 9 ■23 a)

I $CS_2+2\,S_2Cl_2\rightarrow CCl_4+6\,S$

II $CS_2+3\,Cl_2\rightarrow CCl_4+S_2Cl_2$

1,5 t $\rightarrow x$

CS_2 CCl_4

76 g 154 g

$x=\frac{1{,}5\,t\cdot 154\,g}{76\,g}=30{,}4\,t$

Die Gesamtmenge des Tetrachlormethans beträgt 3,04 t.

b) Bei einem 58%igen Umsatz werden 42% nicht umgesetzt.

$1{,}5\,t=100\%$

$x=42\%$

$\frac{x}{1{,}5\,t}=\frac{42\%}{100\%}$

$x=\frac{1{,}5\,t\cdot 42\%}{100\%}=0{,}63\,t$

In der 1. Stufe werden 0,63 t Schwefelkohlenstoff nicht umgesetzt.

c) 0,63 t m

$CS_2+3\,Cl_2\rightarrow CCl_4+S_2Cl_2$

76 g 213 g

$m=\frac{0{,}63\,t\cdot 213\,g}{76\,g}=1{,}76\,t$

Es werden 1,76 t Chlorgas gebraucht, um den in der 1. Stufe nicht umgesetzten Schwefelkohlenstoff zu chlorieren.

Ch 10/12 ■24 a)

m 1000 t

$CaSO_4+2\,NH_3+H_2CO_3\rightarrow(NH_4)_2SO_4$

34 g $+CaCO_3$

$m=\frac{34\,g\cdot 1000\,t}{132\,g}=258\,t$ 132 g

b)

m 1000 t

$CaSO_4+2\,NH_3+H_2CO_3\rightarrow(NH_4)_2SO_4$

136 g $+CaCO_3$

$m=\frac{136\,g\cdot 1000\,t}{132\,g}=1030\,t$ 132 g

c)

m 1000 t

$CaSO_4+NH_3+H_2CO_3\rightarrow(NH_4)_2SO_4$

62 g $+CaCO_3$

$m=\frac{62\,g\cdot 1000\,t}{132\,g}=470\,t$ 132 g

m 470 t

$CO_2+H_2O\rightarrow H_2CO_3$

44 g 62 g

$m=332\,t$

Zur Herstellung von 1000 t Ammoniumsulfat werden 258 t Ammoniak, 1030 t Gips und 332 t Kohlendioxid benötigt.

Lösungen zu alpha-heiter:

Welches Netz?

Die Pyramide wird vollständig durch das 2. Netz.

alpha-Gleichungen

Aus Gleichung (12) folgt $N=2$. Gleichung (9) besitzt mit $N=2$ die Lösung $\alpha=4$. $\alpha=4$ in die übrigen Gleichungen eingesetzt, liefert die nachfolgenden Zuordnungen:

α	C	E	G	H	I	L	N	U
4	6	1	8	7	5	3	2	9

Kreuzworträtsel

	B		H	U	N	D	E	R	T						
M	E	G	A		E		I		A	U	F	G	A	B	E
	T	A	L		G	E	N	A	U		U		L		
L	A	M	B	D	A		E		S	I	N	U	S		
		M			T	E	R	M	E		K		O		
		A			I				N	E	T	Z			
					V				D		I				
											O				
											N				

Kryptarithmetik

$$\begin{array}{ccccc} 10140 & : & 52 & = & 195 \\ : & & - & = & - \\ 156 & - & 39 & = & 117 \\ \hline 65 & + & 13 & = & 78 \end{array}$$

Buchstabenleiste

Periodizität

Kreuzzahlrätsel

1601
8507
1571
1646

Bilder und Schattenbilder

Der Koch 5 hat keinen Schatten, der Schatten 10 hat keine entsprechende Figur. Die Paare sind: 1 und 14, 3 und 16, 7 und 12, 9 und 6, 11 und 18, 13 und 8, 15 und 4 sowie 17 und 2.

Füllrätsel

1. Omega, 2. Prisma, 3. Ebene, 4. Radius, 5. Alpha, 6. Thales, 7. Ideen, 8. Ordnen, 9. Niete; OPERATION

Lösungen zu 1 – 2 – 3 Logelei:

Schwarz malen

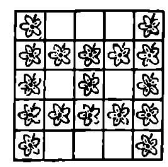
Man muß die Teile mit den Nummern 3, 5 und 6 schwarz malen.

Das ist logisch

Jedes Bild in einer geraden Reihe ist das Spiegelbild des über ihm liegenden. Das fehlende hat also folgende Gestalt:

★	○
●	□

Verwelkte Stecklinge



Zahlenfolgen

B: Jede folgende Zahl beträgt das doppelte der vorangehenden. Die 6. Zahl heißt also 128.

C: Man erhält die folgende Zahl, indem man abwechselnd 3 addiert und dann 2 subtrahiert. Die 6. Zahl heißt −5.

D: Die Folge entsteht, indem man der Folge nach die natürlichen Zahlen von 8 an addiert. Die 6. Zahl heißt 47.

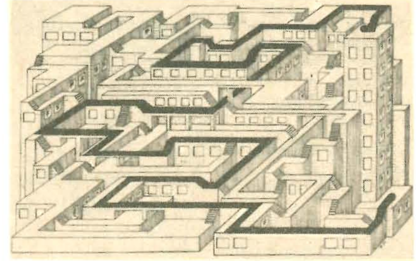
E: Jede folgende Zahl ist $\frac{1}{3}$ der vorangehenden. Die 6. Zahl heißt also $\frac{1}{27}$.

F: Die Folge entsteht, indem man abwechselnd 12 subtrahiert und 6 addiert. Die 6. Zahl heißt also 25.

G: Die Folge entsteht, indem man der Folge nach 3, dann 3,5, dann 4, dann 4,5, dann 5 subtrahiert. Die 6. Zahl heißt also 0.

H: Jede folgende Zahl ist das Vierfache der vorangehenden. Die 6. Zahl heißt also 64.

Wegsuche



Leser fragen – alpha antwortet

Unser Leser *Harald Friesel* aus Hohenstein-Ernstthal stellte eine Anfrage über das folgende zahlentheoretische Problem – hier unsere Antwort:

Beweis eines Satzes über die Darstellung von n als Summe von Potenzen

Satz: Für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq 1$ gilt

$$n! = (n+1)^n - \binom{n}{1}n^n + \binom{n}{2}(n-1)^n - \binom{n}{3}(n-2)^n + - \dots + (-1)^{n-1} \cdot n \cdot 2^n + (-1)^n.$$

Beweis: Zunächst beweisen wir den folgenden *Hilfssatz:*

Für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq 1$ und für alle natürlichen Zahlen k mit $k \leq n$ gilt

$$f(n,k) = (n+2)^k - \binom{n+1}{1}(n+1)^k + \binom{n+1}{2}n^k - + \dots + (-1)^n(n+1)\cdot 2^k + (-1)^{n+1} = 0. \quad (1)$$

Beweis des Hilfssatzes: Für $n=1$ und $k=0$, $k=1$ ist (1) richtig, denn

$f(1,0) = 3^0 - 2\cdot 2^0 + 1\cdot 1^0 = 1-2+1 = 0$,
$f(1,1) = 3^1 - 2\cdot 2^1 + 1\cdot 1^1 = 3-4+1 = 0$.

Angenommen, (1) sei für alle $n \leq n_0$ und alle $k \leq n$ richtig. Dann gilt
$f(n,k) = 0$, falls $n \leq n_0$ und $k \leq n$.
Daraus folgt

$$(n+2)f(n,k) = (n+2)^{k+1} - \binom{n+1}{1}(n+1)^k \cdot (n+1+1) + \binom{n+1}{2}n^k(n+2) - + \dots + (-1)^n(n+1)2^k(2+n) + (-1)^{n+1} \cdot (1+n+1) = 0,$$

$$(n+2)^{k+1} - (n+1)(n+1)^{k+1} + \binom{n+1}{2}n^{k+1} - \binom{n+1}{3}(n-1)^{k+1} + \dots + (-1)^n \cdot (n+1)2^{k+1} + (-1)^{n+1} - (n+1) \cdot (n+1)^k + \binom{n+1}{2}n^k \cdot 2 - \binom{n+1}{3}(n-k)^k \cdot 3 + \dots + (-1)^n(n+1)2^k \cdot n + (-1)^{n+1} \cdot n = 0,$$

$$f(n,k+1) - (n+1)\left[(n+1)^k - n \cdot n^k + \binom{n}{2}(n-1)^k + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n \cdot 2^k + (-1)^n\right] = 0,$$

$$f(n,k+1) - (n+1)f(n-1,k) = 0.$$

Hieraus folgt, da nach Voraussetzung
$f[(n-1),k] = 0$,
$f(n,k+1) = 0$.
Analog beweist man, daß auch $f(n+1,k) = 0$ gilt. Also gilt $f(n,k) = 0$ für alle natürlichen n mit $n \geq 1$ und alle natürlichen $k \leq n$, womit der Hilfssatz bewiesen ist.
Nun beweisen wir den Satz über $n!$ mit Hilfe der vollständigen Induktion. Der Satz ist für $n=1$ richtig, denn

$$1! = 2^1 - 1 \cdot 1^1 = 2 - 1 = 1.$$

Angenommen, der Satz sei für n richtig; dann folgt

$$(n+1)! = n!(n+1) = (n+1)^{n+1} - (n+1)n \cdot n^n + (n+1)(n)(n-1)^n - + \dots + (-1)^{n-1} \cdot (n+1)n2^n + (n+1)(-1)^n$$
$$= (n+1)^{n+1} - (n+1)n^{n+1} + \binom{n+1}{2} \cdot (n-1)^{n+1} - + \dots + (-1)^{n-1}\binom{n+1}{2}2^{n+1} + (n+1)(-1)^n.$$

Nun gilt nach dem Binomischen Satz

$$(n+1)^{n+1} = (n+2-1)^{n+1} = (n+2)^{n+1} - (n+1)(n+2)^n + \binom{n+1}{2}(n+2)^{n-1} + \dots + (-1)^n(n+1)(n+2)^1 + (-1)^{n+1},$$

$$-(n+1)(n+1-1)^{n+1} = -(n+1)(n+1)^{n+1} + (n+1)(n+1)(n+1)^n - (n+1)\binom{n+1}{2}(n+1)^{n-1} + \dots + (-1)^{n+1}(n+1)(n+1)(n+1)^1 + (-1)^n(n+1), \dots,$$

$$+(-1)^n(n+1)(2-1)^{n+1} = (-1)^n\left[(n+1)2^{n+1} - (n+1)(n+1)2^n + (n+1)\binom{n+1}{2}2^{n-1} - \dots + (-1)^n(n+1)(n+1) \cdot 2^1 + (-1)^{n+1}\right],$$

$$+(-1)^{n+1}(1-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}\left[1^{n+1} - (n+1) \cdot 1^n + \binom{n+1}{2} \cdot 1^{n-1} - \dots + (-1)^n \cdot (n+1) \cdot 1^1 + (-1)^{n+1}\right].$$

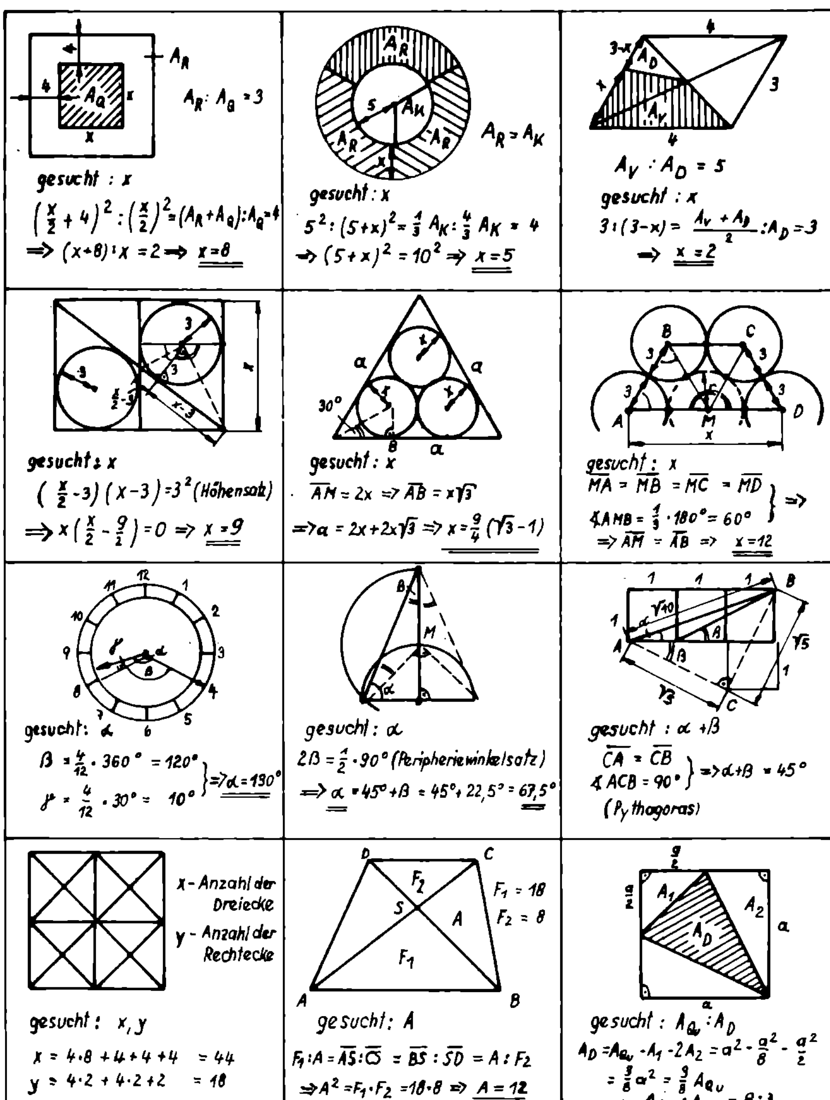
Durch Addition erhält man

$$(n+1)! = (n+2)^{n+1} - (n+1)(n+1)^{n+1} + \binom{n+1}{2}n^{n+1} - \dots + (-1)^n(n+1)2^{n+1} + (-1)^{n+1}$$
$$-(n+1)\left[(n+2)^n - (n+1)(n+1)^n + \binom{n+1}{2}n^n - \dots + (-1)^n(n+1)2^n + (-1)^{n+1}\right]$$
$$+\binom{n+1}{2}\left[(n+2)^{n-1} - (n+1)(n+1)^{n-1} + \binom{n+1}{2}n^{n-1} - \dots + (-1)^n(n+1)2^{n-1} + (-1)^{n+1}\right]$$
$$+ \dots$$
$$+(-1)^{n+1}\left[1 - (n+1) + \binom{n+1}{2} - \dots + (-1)^n + (-1)^{n+1}\right].$$

Nach dem Hilfssatz sind alle Summen in den eckigen Klammern gleich Null; also ist der Satz auch für $n+1$ richtig. Da er auch für $n=1$ zutrifft, ist der Satz somit für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq 1$ bewiesen.

Dr. R. Lüders, Berlin

Lösungen zu: Gut gedacht ist halb gelöst (III)



$1 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8 = (1+9 \cdot 7-8)(1+9+7-8)$

- $19+78=1^9+78+19+7-8$
- $19-78=-1 \cdot 9+\overline{7 \cdot 8}-1-97-8$
- $19 \cdot 78=19 \cdot \sqrt{-7+8} \cdot 1^9 \cdot 78$
- $19 : 78=19^{-7+8} : 1^9 \cdot 78$
- $1+9+7+8=\dfrac{19 \cdot 7-8}{-1-9+7+8}$
- $\sqrt{1 \cdot 9}+7 \cdot 8=-19+78$
- $(1-9-7-8)(1-9-78)=1978$
- $1+9+7+8+19 \cdot 7-8=(1+9)(7+8)$
- $(1+\sqrt{9}+7-8)^{1 \cdot 9+7-8}=(1+9-7)^8$
- $\sqrt{(1+9+7+8)^{\sqrt{1+9+7-8}}}=19 \cdot 7-8$

$1978=2222-222-22$
$1978=9 \cdot 8+7 \cdot 6+5+43^2+10$
$1978=\text{MCMLXXVIII}$
$\qquad \text{MC}-\text{M}-\text{L}=\text{X} \cdot \text{XV} \cdot \text{III}$

$$\begin{array}{rr} & 1+\ 9+7+8 \\ + & 19+7+8 \\ + & 19+7-8 \\ + & 19-7+8 \\ \hline & 19+78 \end{array}$$

$1=1^9 \cdot (-7+8)$
$2=1^9-7+8$
$3=1+(9+7):8$
$4=\sqrt{1^9+7+8}$
$5=\sqrt{1+9+7+8}$
$6=1 \cdot (-9)+7+8$
$7=1-9+7+8$
$8=(1+9 \cdot 7):8$
$9=1+9+7-8$
$10=1 \cdot 9-7+8$
$11=1+9-7+8$
$12=\sqrt{1 \cdot 9}+7+8$
$13=1+\sqrt{9}+7+8$
$14=-1^9+7+8$
$15=1^9 \cdot (7+8)$
$16=1^9+7+8$
$17=-1+\sqrt{9}+7+8$
$18=19+7-8$
$19=19 \cdot (-7+8)$
$20=19-7+8$
$21=1 \cdot (\sqrt{9})!+7+8$
$22=1+(\sqrt{9})!+7+8$
$23=-1+9+7+8$
$24=(1+9-7) \cdot 8$
$25=1+9+7+8$

Aufgaben

▲1▲ Die Jahreszahl kann man mit 10 Dreien folgendermaßen schreiben:
$1978=333 \cdot (3+3)-33:3-3 \cdot 3$
Schreibe die Zahl 1978 mit 13 Dreizehnen, zweimal 7 Siebenen!

▲2▲ Vervollständige!

$\dfrac{1}{7}+\dfrac{9}{8}=\dfrac{1 \cdot 9 \cdot 7+8}{1^9 \cdot 7 \cdot 8}$ $\qquad \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{9}{8}=$

$\dfrac{1}{7}-\dfrac{9}{8}=$ $\qquad \dfrac{1}{7}:\dfrac{9}{8}=$

▲3▲ In einer Familie leben vier männliche Mitglieder, nämlich Großvater, Vater und zwei verschieden alte Kinder. Alle vier Familienmitglieder feiern in derselben Woche des Jahres 1978 ihren Geburtstag; dabei stellt sich heraus, daß das Produkt aus den Zahlen, die ihre Lebensalter angeben, genau 1978 ergibt. Wie alt sind die vier Familienmitglieder?

▲4▲ Mit Stichtag 1. 1. 1978 wird festgestellt, daß in den sieben Klassen der fünften Schulstufe einer Schule genau doppelt so viel Elfjährige wie Zwölfjährige sitzen und daß in jeder Klasse gleichviel Zehnjährige sind. Die Lebensjahre der 191 Schüler ergeben zusammen 1978.
Wieviel Zehn-, Elf-, Zwölfjährige sind in diesen 7 Klassen?

▲5▲ Stelle die Zahl 1978 als Summe von zwei Primzahlen dar! Wie viele Möglichkeiten gibt es?

▲6▲ Es sei k eine natürliche Zahl und n diejenige natürliche Zahl, die die Beziehung
$n<(44+\sqrt{1978})^k<n+1$ erfüllt. (1)
Zeige: 1. Ist k eine ungerade Zahl, so ist n gerade.
2. Ist k gerade, so ist n ungerade.

Diese Seite wurde aus umfassenden Einsendungen folgender *alpha*-Leser zusammengestellt: Schüler U. Bähnisch, Bärenstein; Ing. H. Decker, Köln; Schüler A. Fittke, Berlin; Mathematikfachlehrer W. Förg, Schwaz (Österreich); Schüler U. Habler, Potsdam; stud. math. W. Janous, Innsbruck.

Lösungen:

▲1▲
$1978:=13 \cdot 13 \cdot 13-13 \cdot 13-13-13-13-13+13:13+13:13$
$=(7+7+7+7:7+7:7) \cdot (77+7+7:7+7:7)$

▲2▲ $\dfrac{1}{7}-\dfrac{9}{8}=-\dfrac{1 \cdot 9 \cdot 7-8}{1^9 \cdot 7 \cdot 8}$

$\dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{9}{8}=\dfrac{1+9+7-8}{1^9 \cdot 7 \cdot 8}$

$\dfrac{1}{7}:\dfrac{9}{8}=\dfrac{1 \cdot 9+7-8}{1+(\sqrt{9})!+7 \cdot 8}$

▲3▲ $1978=1 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 43$. Das Alter der Familienmitglieder ist 1, 2, 23 und 43 Jahre.

▲4▲ 140 Zehnjährige, 34 Elfjährige, 17 Zwölfjährige.

▲5▲

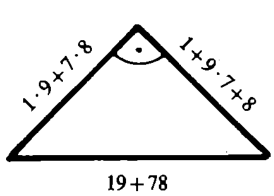
5+1973	359+1619	881+1097
29+1949	419+1559	887+1091
47+1931	467+1511	929+1049
71+1907	479+1499	947+1031
89+1889	491+1487	
101+1877	569+1409	
107+1871	617+1361	
131+1847	659+1319	
167+1811	677+1301	
191+1787	701+1277	
257+1721	719+1259	
269+1709	761+1217	
281+1697	797+1181	
311+1667	827+1151	

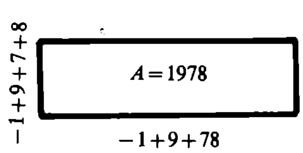
▲6▲ Wie man leicht nachrechnet, ist $44<\sqrt{1978}<45$; also ist $0<\sqrt{1978}-44<1$ und auch (2): $0<(\sqrt{1978}-44)^k<1$ für jede natürliche Zahl k. (Im Folgenden sei $z=(\sqrt{1978}+44)^k$.)
1) Sei nun k eine ungerade Zahl:
dann ist $z-(\sqrt{1978}-44)^k$ eine ganze Zahl, wie folgende Rechnung zeigt: (Man beachte den binomischen Lehrsatz!)

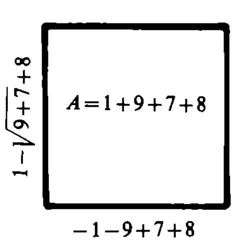
$$(\sqrt{1978}+44)^k-(\sqrt{1978}-44)^k$$
$$=\sum_{j=o}^{k} \binom{k}{j} (\sqrt{1978})^{k-j} \cdot 44^j \cdot (1-(-1)^j)$$
$$=2 \cdot \sum_{j=o,\ j \text{ ungerade}}^{k} \binom{k}{j} (\sqrt{1978})^{k-j} \cdot 44^j=2x,$$

wobei x eine ganze Zahl ist ($k-j$ ist immer ungerade, also ist $(\sqrt{1978})^{k-j}$ ganz!)
Nun ist aber $z-(\sqrt{1978}-44)^k=n$ (vgl. (2))
2) Sei k gerade:
Analog 1) zeigt man, daß $z+(\sqrt{1978}-44)^k=n+1$ eine gerade Zahl ist; also ist n eine ungerade Zahl.
Damit ist die Aufgabe gelöst.

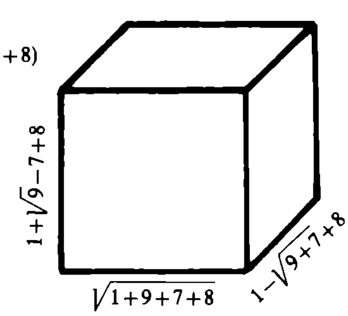
$A=\sqrt{1 \cdot 9} \cdot 78 \cdot 1(9-7+8)$
$U=(19+7-8)(1-\sqrt{9}+7+8)$
$s=(1+9+7-8)(1+\sqrt{9}+7+8)$

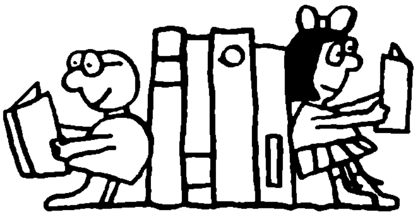






$V=19 \cdot 7-8$
$A_O=(1+9)(7+8)$





Bücher aus dem BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft

LEIPZIG

N. J. Wilenkin
Methoden der schrittweisen Näherung
108 S. mit 34 Abb., kartoniert 5,90 M
Bestell-Nr. 665 723 5

K.-G. Steinert
Sphärische Trigonometrie
mit einigen Anwendungen aus Geodäsie, Astronomie und Kartographie
160 S., mit 69 Abb., kartoniert 9,50 M
Bestell-Nr. 665 828 9

I. M. Gelfand/E. G. Glagolewa/E. Schnol
Funktionen und ihre graphische Darstellung
128 S. mit 132 Abb. und 9 Tafeln, kartoniert
Bestell-Nr. 665 600 5 7,00 M

I. M. Jaglom
Ungewöhnliche Algebra
95 S. mit 45 Abb., kartoniert 5,50 M
Bestell-Nr. 665 789 2

N. J. Wilenkin
Unterhaltsame Mengenlehre
184 S. mit 82 Abb., kartoniert 6,50 M
Bestell-Nr. 665 636 3

I. J. Bakelman
Spiegelung am Kreis
Grundlagen und Anwendungen
132 S. mit 67 Abb., kartoniert 7,00 M
Bestell-Nr. 665 735 8

A. S. Smogorschewski
Lobatschewskische Geometrie
76 S. mit 43 Abb. kartoniert 6,00 M
Bestell-Nr. 665 842 2

A. W. Butkewitsch/M. S. Selikson
Ewige Kalender
124 S. mit 22 Abb., kartoniert 5,90 M
Bestell-Nr. 665 696 1

F. J. Budden
Zahlensysteme und Rechenautomaten
224 S. mit 34 Abb., kartoniert 8,60 M
Bestell-Nr. 665 633 9

G. P. Makejewa/M. S. Zedrik
Verwunderliches aus der Physik
70 S. mit 45 Abb. (Band 2), kartoniert 4,15 M
Bestell-Nr. 665 527 2

Physikalische Paradoxa und interessante Aufgaben
Experimentelle physikalische Aufgaben zum Nachdenken
170 S. mit 48 Abb., kartoniert 5,60 M
Bestell-Nr. 665 835 0

L. Lovász/K. L. Vesztergombi/J. Pelikán
Kombinatorik
132 S. mit 62 Abb., kartoniert 6,00 M
Bestell-Nr. 665 824 6

Hier eine Leseprobe aus dem Buch, das für Schüler ab Klasse 7 geeignet ist.

Wir wollen zusammenzählen!
– Na, was soll daran schon schwer sein! Zählen erlernen wir schon in den unteren Klassen – wir sehen förmlich, daß ihr dies im Innern denkt. Wir wollen euch jetzt zeigen, daß es oft viel einfacher ist, etwas geschickt zu berechnen, als bloß zusammenzuzählen, weil man hierbei manchmal viel nachdenken muß und damit auch mehr erreicht. Dieser Weg führt in das Reich der Kombinatorik. Wir wollen uns mit den Kindern bekanntmachen, die unsere Reisegefährten sein werden!
Zu Andrea kommen ihre Klassenkameraden zu Besuch: Albert, Achim, Dora, Elisabeth, Fränzchen und Gabriela, alle mit ihren Eltern. – Wieviel werden es denn sein? – fragt Andrea während des Tischdeckens und beginnt bereits aufzuzählen: – Mutti, Vati, ich, Elisabeth, Dora, Onkel Stephan, Tante Käthe, Tante Lisbeth, ...
– Genug, genug! Von jedem Ort kommen jeweils drei, es werden also insgesamt sieben mal drei, d. h. einundzwanzig sein – sagt Mutti, und wenn Andrea mit den Gedanken nicht nur beim Kaffeetrinken wäre, hätte sie sich das schon selbst klargemacht. Die Gäste treffen ein, und die Kinder geben einander zur Begrüßung die Hand. Andrea hat, so scheint es, aus dem vorigen Fall Nutzen gezogen, denn ihr ist etwas eingefallen:
– Wieviel Händedrücke ergibt das? –
Nach kurzem Schweigen ergriff Dora das Wort:
– Ich jedenfalls habe sechsmal die Hand gegeben. –
– Ich desgleichen – sagte Gabi.
– Natürlich hat jeder sechs anderen die Hand gegeben – meldete sich Achim zu Wort. – Da wir sieben sind, ergibt das insgesamt $7 \cdot 6 = 42$ Händedrücke. –
– Das scheint mir zu viel zu sein – sagte Elisabeth. Fränzchen warf gereizt ein:
– So, wie Achim zählt, zählt er jeden Händedruck zweimal, wenn sich zwei Kinder die Hand geben. –
– Achim hat ganz recht – sagte Albert –, er hat nur vergessen, daß an jedem Händeschütteln zwei beteiligt sind und daß wir das Händeschütteln bei beiden berücksichtigt haben. Daher ist die 42 noch durch 2 zu teilen, d. h., wir bekommen 21 Händedrücke. –

Textaufgaben zur Mathematik
mit Ansatz und Lösung

Von Anton Cuninka, Karol Križalković und Dr. rer. nat. Ondrej Šedivý

Übersetzung aus dem Slowakischen
188 Seiten mit 63 Bildern, 16,5 cm × 23 cm, Pappeinband 9,00 M LSV 1002

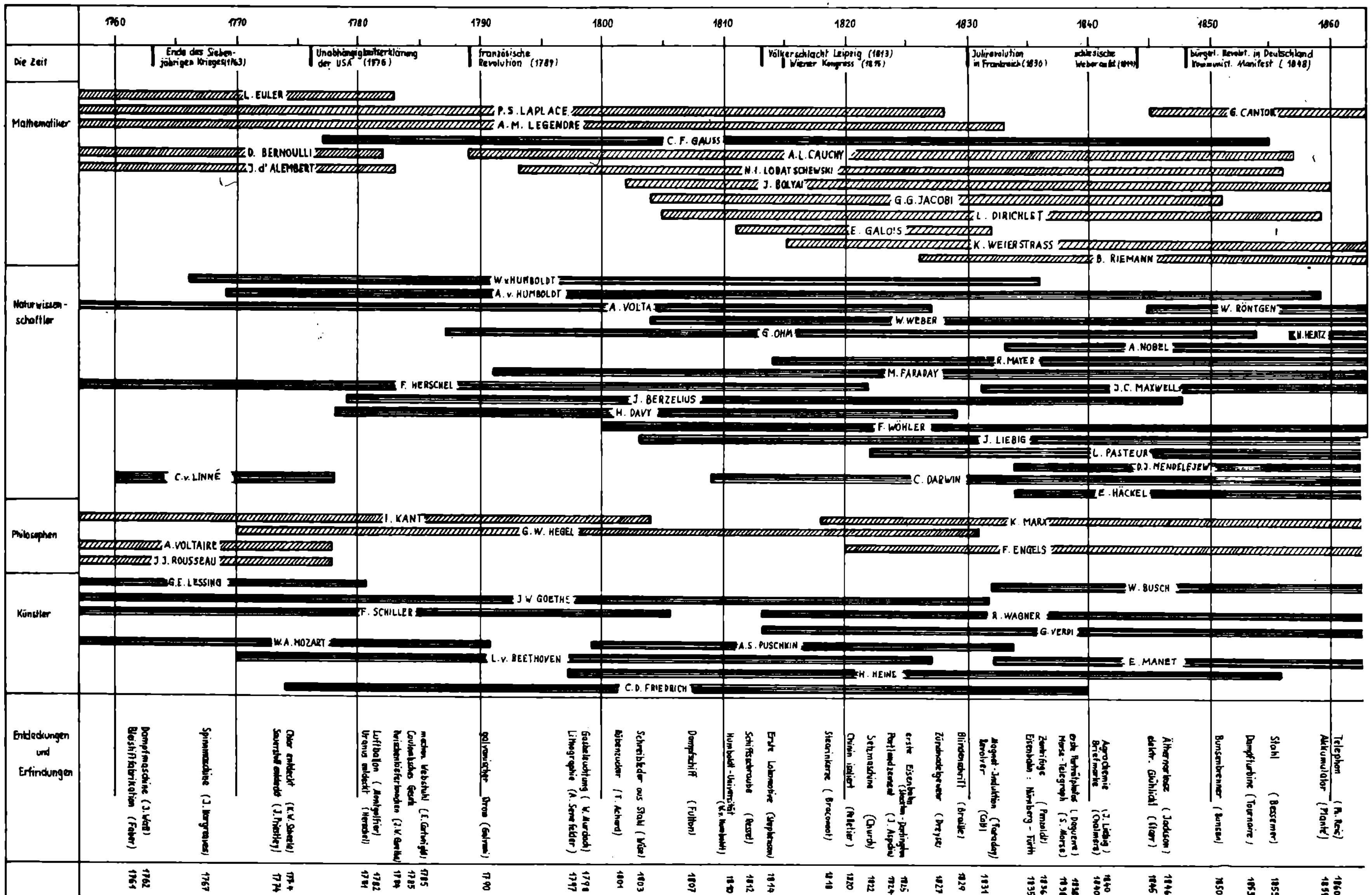
VEB Fachbuchverlag Leipzig

Aus dem Inhalt: Lineare Gleichungen (Textaufgaben) / Systeme linearer Gleichungen (Textaufgaben) / Quadratische Gleichungen – Lösen von Textaufgaben mit Hilfe quadratischer Gleichungen / Lösen von Textaufgaben mit Hilfe von Gleichungen und Ungleichungen / Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen
Das Buch enthält Aufgaben aus der Gleichungslehre. Es werden lineare Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten, quadratische, logarithmische und Exponentialgleichungen sowie Ungleichungen behandelt. Der Unterschied dieser Aufgabensammlung zu anderen besteht darin, daß hier die Lösungswege angegeben sind. Die Aufgaben, die dem Niveau der 9. und 10., zum Teil bis zu dem der 12. Klasse entsprechen, sind sinnvoll ausgewählt und führen von einfachen bis zu komplizierten Fällen.

Leserkreis: Oberschüler, Hörer an Volkshochschulen, Teilnehmer an Wiederholungslehrgängen, Studenten an Fachschulen

Gauß und die technische Revolution

Zusammenstellung: Dr. R. Thiele, Leipzig

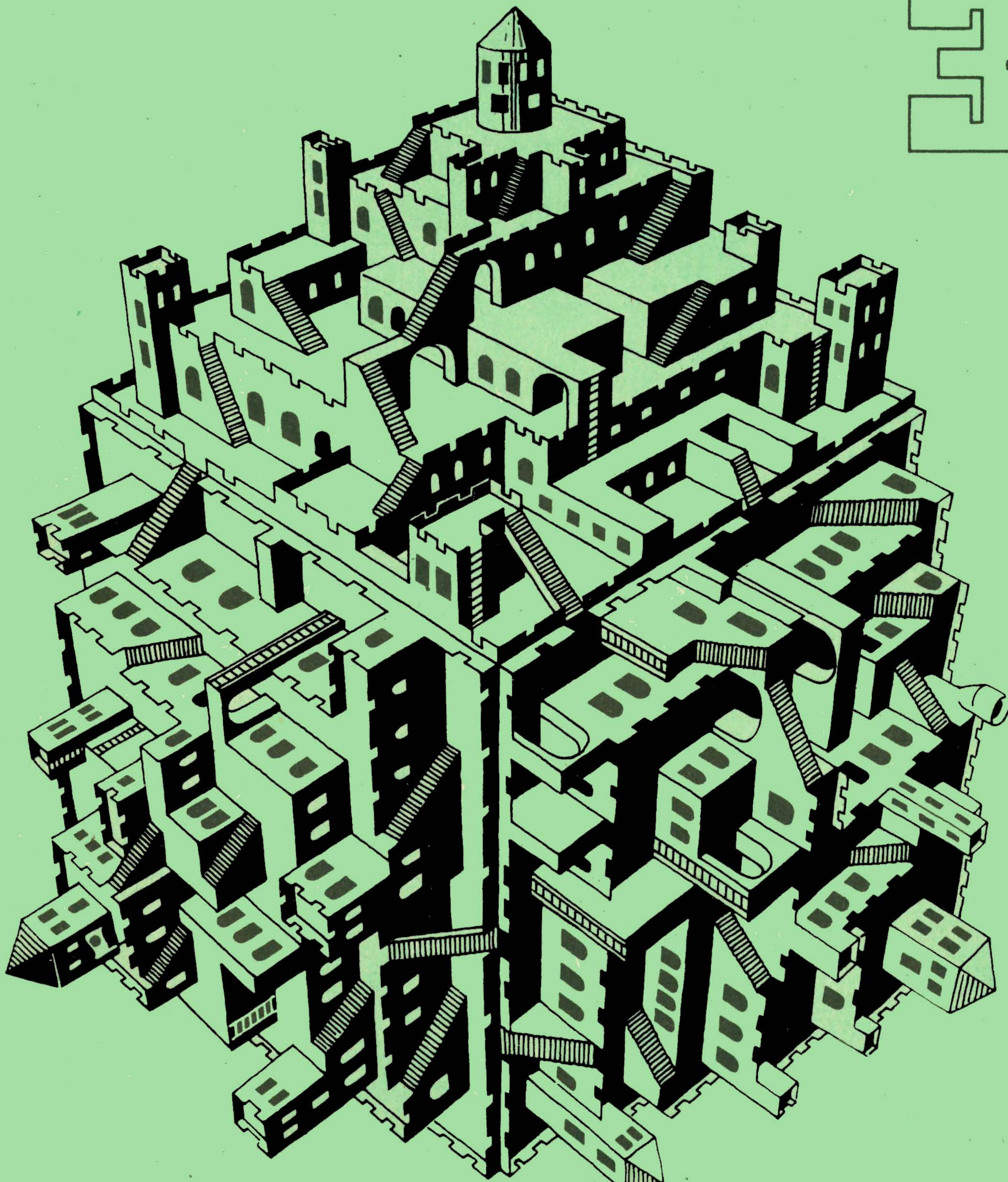


Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
12. Jahrgang 1978
Preis 0,50 M
Index 31 059

3



Redaktion:
StR J. Lehmann, VLdV (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430. Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.

Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 10,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.

Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.

Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: J. Lehmann, Leipzig (S. 52); Bild und Heimat, Reichenbach (S. 53); Vignette aus *Krokodil*, Moskau (S. 55); Vignette aus DLZ, H.-J. Sprengel (S. 59); Zeichnung: Dreke, Urania 7/76 (S. 60); Vignetten: B. Henniger, Berlin, aus Eulenspiegel (S. 61); R. E. Moritz, New York, H. Kretzschmar, Berlin, M. Köpp, Leipzig (S. 66/67).
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Das Titelbild wurde aus der ungarischen Rätselzeitschrift „Füles" (10/77) übernommen. Es stellt ein Labyrinth dar. *Graphische Gestaltung:* W. Fahr, Berlin.

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128 · ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 23. Februar 1978

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Über Punktspiegelungen in der euklidischen Ebene

Der Abbildungsbegriff gehört zu den grundlegenden Begriffen der Mathematik. Bewegungen und Ähnlichkeitsabbildungen sind eineindeutige Abbildungen der Menge aller Punkte und der Menge aller Geraden der Ebene auf sich, bei denen gewisse Eigenschaften geometrischer Figuren erhalten bleiben. Wendet man auf eine Originalfigur F eine Bewegung β an ($\beta(F)=F'$), so bleiben in der Bildfigur F' die Form und Größe erhalten; die Figur ändert im allgemeinen nur ihre Lage in der Ebene. Unterwirft man eine geometrische Figur einer Ähnlichkeitsabbildung α, so bleibt im allgemeinen nur ihre Form erhalten; die Abbildung ist winkeltreu. Punktspiegelungen sind Bewegungen (Drehungen um $\pm 180°$) und zugleich spezielle Ähnlichkeitsabbildungen (zentrische Streckungen mit dem Streckungsfaktor $k=-1$). In den nachfolgenden Betrachtungen wollen wir einige Abbildungseigenschaften über Punktspiegelungen und ihren Zusammenhang zu den Verschiebungen herleiten sowie Punktspiegelungen zum Beweisen geometrischer Sätze und zum Lösen von Konstruktionsaufgaben verwenden. Dabei sollen die schönen Verbindungen zwischen anschaulich-konstruktiven und abstrakt-algebraischen Arbeitsmethoden der Geometrie genutzt werden.

1. Bewegungen

Aus dem Geometrieunterricht der 6. Klasse ist uns bekannt, daß zu den Bewegungen die Verschiebungen, Drehungen und Geradenspiegelungen gehören. Ferner gibt es noch die Klasse der Schubspiegelungen. In der Menge aller Bewegungen nehmen die Geradenspiegelungen eine ausgezeichnete Stellung ein; sie bilden ein Erzeugendensystem der Bewegungen der Ebene. Aus diesen Abbildungen lassen sich durch Nacheinanderausführung alle anderen Bewegungen der euklidischen Ebene erzeugen. Dieser Sachverhalt wird aus den Bildern 1a–1d ersichtlich.

Geradenspiegelungen heißen auch Grundabbildungen, weil sie sich nicht durch Nacheinanderausführung aus anderen Bewegungen erzeugen lassen. Als eineindeutige Abbildung der Menge aller Punkte der Ebene auf sich ordnet eine Geradenspiegelung S_a (= Spiegelung an der Geraden a) jedem Punkt P der Ebene seinen symmetrischen Punkt P' bezüglich der festen Geraden a als Bild zu, und alle Punkte der Geraden a werden sich selbst zugeordnet. Die Punkte der Spiegelungsgeraden heißen Fixpunkte, und a ist die Fixpunktgerade der Abbildung S_a. Für die Anwendung von Geradenspiegelungen auf die Punkte der Ebene verwenden wir die funktionale Schreibweise. So bedeutet $S_a(P)=P'$, daß die Spiegelung des Punktes P an der Geraden a den Bildpunkt P' ergibt. Spiegelt man zunächst einen beliebigen Punkt P der Ebene an einer Geraden a_1, so erhält man den Bildpunkt P', und durch anschließende Spiegelung an einer Geraden a_2 wird P' und P'' überführt. Symbolisch läßt sich die auf einen Punkt angewandte Nacheinanderausführung von zwei Geradenspiegelungen durch die Abbildungsgleichung $S_{a_1}S_{a_2}(P)=S_{a_2}(S_{a_1}(P))=S_{a_2}(P')=P''$ beschreiben.

Führt man dieselbe Geradenspiegelung S_a zweimal nacheinander aus, bildet man also $S_aS_a(P)=S_a(S_a(P))=S_a(P')=P''=P$, so läßt die resultierende Bewegung $S_aS_a=i$ jeden Punkt der Ebene fest; i bezeichnet die identische oder Ruheabbildung. Eine Abbildung, die nicht selbst die Ruheabbildung ist und bei zweimaliger Nacheinanderausführung die Ruheabbildung ergibt, heißt Involution. Danach sind die Geradenspiegelungen involutorische Abbildungen.

Aus Bild 1b und 1c erkennt man, daß die Nacheinanderausführung oder das Produkt zweier Geradenspiegelungen an parallelen (sich schneidenden) Geraden a_1, a_2 stets eine Verschiebung (Drehung) ergibt. Dabei ist die Schiebstrecke PP'' zweier zugeordneter Punkte der Verschiebung $v=S_{a_1}S_{a_2}$ mit $a_1 \cap a_2=\emptyset$ doppelt so lang und gleichgerichtet wie jede orientierte Abstandsstrecke der beiden Geraden a_1, a_2. Der Drehwinkel der Rotation $r=S_{a_1}S_{a_2}$ mit $a_1 \cap a_2=\{D\}$ ist der orientierte Winkel $\sphericalangle[PDP'']$, wobei (P, P'') ein beliebiges zugeordnetes Punktepaar der Rotation r darstellt. Man beweist über die Symmetrieeigenschaften von Punkten bei Geradenspiegelungen, daß der Drehwinkel ϕ doppelt so groß und gleichorientiert ist wie der orientierte Winkel α zwischen den Spiegelungsgeraden a_1, a_2. Verschiebungen und Drehungen sind gleichsinnige Bewegungen, weil durch sie der Umlaufsinn jedes n-Ecks erhalten bleibt, was bei Geradenspiegelungen offenbar nicht der Fall ist. Deshalb gehören die Geradenspiegelungen auch zur Klasse der ungleichsinnigen Bewegungen. Durch ein Produkt aus drei Geradenspiegelungen, deren Geraden die in Bild 1d angegebenen Lagebeziehungen haben, entsteht eine weitere Art von Bewegungen, die sog. Schubspiegelung. Man spiegelt zunächst an a_1 und sodann an der zu a_1 parallelen Geraden a_2, das Ergebnis ist eine Verschiebung, und anschließend an der zu a_1 und a_2 senkrechten Geraden a_3. Mit dieser kurzen Betrachtung haben wir eine vollständige Aufzählung der verschiedenen Arten von Bewegungen gegeben, und es gilt der Satz, daß sich jede Bewegung der euklidischen Ebene als Nacheinanderausführung aus höchstens drei Geradenspiegelungen erzeugen läßt, und jede Bewegung aus drei Geradenspiegelungen ist eine Schubspiegelung.

2. Punktspiegelungen

Unter den gleichsinnigen Bewegungen gibt es noch eine spezielle Klasse von Bewegungen, die uns besonders interessieren soll. Man überprüft leicht an einem Beispiel, daß das Produkt $S_{a_1}S_{a_2}$ aus zwei Geradenspiegelungen im allgemeinen nicht kommutativ ist (vgl. Bild 2). Sind jedoch die beiden Spiegelungsgeraden zueinander senkrecht (Bild 3), so ist die Spiegelungsgleichung $S_{a_1}S_{a_2}=S_{a_2}S_{a_1}$ richtig. Es ist also in diesem Falle

Bild 1a: Gruppenspiegelung

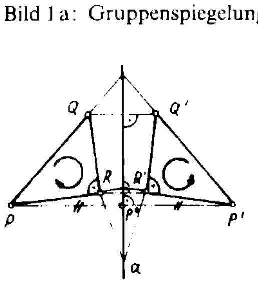


Bild 1b: Verschiebung

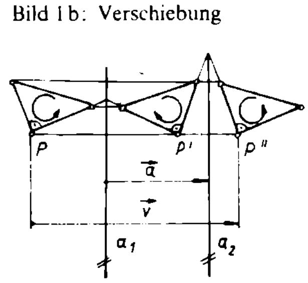


Bild 1c: Drehung

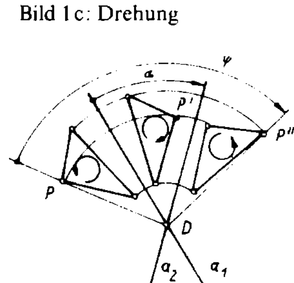
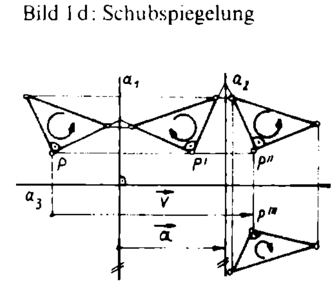


Bild 1d: Schubspiegelung



gleich, ob ich zuerst an a_1 und dann an a_2 spiegele oder umgekehrt, stets erhalte ich für einen vorgegebenen Punkt (oder eine Figur) dasselbe Bild. Mit $r = S^\circ_{a_1} S_{a_2}$ und $a_1 \perp a_2$ haben wir eine spezielle Drehung um den Punkt D mit $\{D\} = a_1 \cap a_2$ und dem Drehwinkel $\phi = \pm 180°$ vor uns; sie heißt Punktspiegelung $S_D = S^\circ_{a_1} S_{a_2}$ am Punkt D. Man findet nämlich das Bild eines Punktes P sofort durch Spiegelung an D, indem die Strecke PD über D hinaus um sich selbst verlängert wird. Punktspiegelungen sind auch involutorische Bewegungen, d. h. es gilt $S^\circ_D S_D(P) = P$ für alle Punkte der Ebene. Der Beweis ist einfach. Es ist zu zeigen, daß $S^\circ_D S_D = i$ ist. Für Bewegungen gilt das Assoziativgesetz, also ist

$S^\circ_D S_D = (S^\circ_{a_1} S_{a_2}) \circ (S^\circ_{a_1} S_{a_2}) = (S^\circ_{a_1} S_{a_2}) \circ (S^\circ_{a_2} S_{a_1})$
$= S^\circ_{a_1} (S^\circ_{a_2} S_{a_2}) \circ S_{a_1}$,

und wegen $S^\circ_{a_2} S_{a_2} = S^\circ_{a_1} S_{a_1} = i$ folgt

$S^\circ_D S_D = S_{a_1} \circ i \circ S_{a_1} = (S^\circ_{a_1} i) \circ S_{a_1} = S^\circ_{a_1} S_{a_1} = i.$

Bild 2

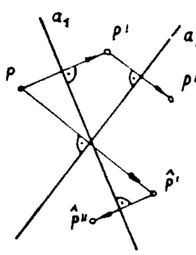


Bild 3

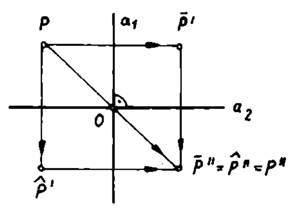
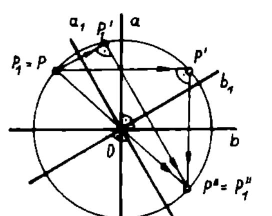


Bild 4



Für Punktspiegelungen gilt ein Ersetzungssatz. Wie aus Bild 4 hervorgeht, liefert die Spiegelung eines Punktes P an den senkrechten Geraden a, b dasselbe Bild P'' wie die Spiegelung an den ebenfalls senkrechten und sich in D schneidenden Geraden a_1, b_1. Den Beweis zu diesem Satz kann man mit Hilfe des Thalessatzes führen. Der betrachtete Sachverhalt läßt sich verallgemeinern, denn an Stelle von a, b können noch andere zueinander senkrechte Geradenpaare treten, die durch D gehen. Damit lautet der Ersetzungssatz für Punktspiegelungen: Jede Punktspiegelung S_D darf auf unendlich viele Arten durch ein Produkt aus zwei Geradenspiegelungen ersetzt werden, wenn nur die beiden Spiegelungsgeraden senkrecht sind und durch den Punkt D gehen. Man überlegt sich leicht, daß es für beliebige Drehungen und für Verschiebungen analoge Ersetzungssätze gibt.

Für Punktspiegelungen gelten alle bekannten Abbildungseigenschaften, die für jede Bewegung richtig sind. Diese können im Lehrbuch der Mathematik für die 6. Klasse, VWV Berlin 1970, S. 99, Satz 5, wiederholt werden. Überdies gibt es noch Sätze, die nur für die Punktspiegelungen gelten, von denen zwei genannt werden sollen. Jede Gerade g, die durch den Spiegelungspunkt D einer Punktspiegelung S_D geht, wird durch S_D auf sich selbst abgebildet, und zwar so, daß D einziger Fixpunkt von $S_D(g) = g'$ ist und die beiden durch D erzeugten Halbgeraden von g miteinander vertauscht werden. Andererseits wird jede Gerade g, die nicht durch D geht, vermöge der Abbildung $S_D(g) = g'$ in eine zu g parallele Gerade g' überführt, wobei ein der Geraden g aufgeprägter Durchlaufsinn (z. B. durch ein geordnetes Punktepaar A, B) umgekehrt wird. Wendet man auf eine Gerade g eine Verschiebung an, so sind ebenfalls Original- und Bildgerade zueinander parallel, der Durchlaufsinn bleibt jedoch erhalten.

3. Punktspiegelungen und Verschiebungen

Zwischen Punktspiegelungen und Verschiebungen gibt es einen einfachen Zusammenhang. Das Produkt aus zwei Punktspiegelungen an verschiedenen Punkten D_1, D_2 ist nämlich stets eine von der identischen Verschiebung verschiedene Verschiebung, wie aus Bild 5 hervorgeht. Dabei ist die Schiebstrecke PP'' doppelt so lang und gleichgerichtet wie die orientierte Strecke D_1D_2 zwischen den beiden Spiegelungspunkten, denn D_1D_2 ist Mittelparallelstrecke im Dreieck $PP'P''$. Mit Geradenspiegelungen läßt sich das Produkt aus zwei Punktspiegelungen unter Verwendung des Ersetzungssatzes wie im Bild 6 darstellen, so daß $S^\circ_{D_1} S_{D_2} = S^\circ_{a_1} S^\circ_{a_3} S^\circ_{a_3} S_{a_2} = S^\circ_{a_1} S_{a_2}$ mit $a_1 \parallel a_2$ gilt, und dies ist bekanntlich eine Verschiebung v. Weil eine Verschiebung durch die Angabe von zwei zugeordneten Punkten der Ebene bestimmt ist, kann sie auf unendlich viele Arten als Produkt aus zwei Punktspiegelungen

Bild 5

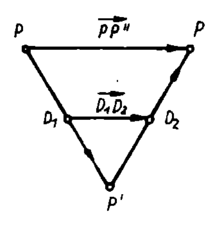
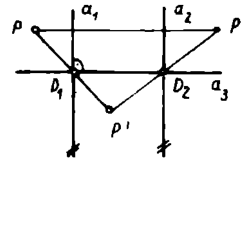
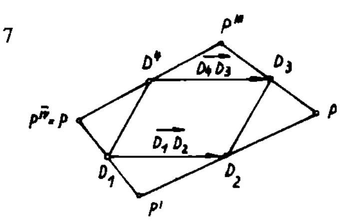


Bild 6



dargestellt werden, wenn nur deren Spiegelungspunkte den halb so langen gleichorientierten Abstand haben wie ein beliebiges Paar zugeordneter Punkte der Verschiebung. Aus den vorangehenden Erkenntnissen folgt der für unsere weiteren Betrachtungen bedeutungsvolle Dreispiegelungssatz für Punktspiegelungen. Sind D_1, D_2, D_3 drei Punkte der Ebene, so ist $S^\circ_{D_1} S^\circ_{D_2} S_{D_3}$ gleich der Spiegelung S_{D_4} an dem vierten Punkt D_4, wobei die gerichteten Strecken D_1D_2 und D_4D_3 gleich sind, d. h. sie haben die gleiche Länge und gleiche Orientierung (vgl. Bild 7). Es gilt also die Gleichung $S^\circ_{D_1} S^\circ_{D_2} S_{D_3} = S_{D_4}$ für Punktspiegelungen. Wegen der Darstellung von Verschiebungen durch Punktspiegelungen besteht die Gleichung $S^\circ_{D_1} S_{D_2} = S^\circ_{D_4} S_{D_3}$. Durch Multiplikation dieser Gleichung von rechts mit S_{D_3} folgt $S^\circ_{D_1} S^\circ_{D_2} S_{D_3} = S^\circ_{D_4} S^\circ_{D_3} S_{D_3}$, und wegen $S^\circ_{D_3} S_{D_3} = i$ erhalten wir die Behauptung $S^\circ_{D_1} S^\circ_{D_2} S_{D_3} = S_{D_4}$. Damit ist der Dreispiegelungssatz bewiesen. Bilden nun D_1, D_2, D_3 ein Dreieck, so ergänzt der vierte Punkt D_4 dieses Dreieck zu einem Parallelogramm. Sonst liegen die vier Punkte auf einer Geraden.

Bild 7



Beim Beweis des Dreispiegelungssatzes haben wir von einer Methode zum Umformen von Spiegelungsgleichungen Gebrauch gemacht, die auf *G. Thomsen* zurückgeht. Setzen wir in $S^\circ_{D_1} S^\circ_{D_2} S_{D_3} = S_{D_4}$ $D_1 = D_3 = M$, $D_2 = A$ und $D_4 = B$, so folgt die Gleichung $S^\circ_M S^\circ_A S_M = S_B$, und durch Multiplikation mit S_M von links erhalten wir $S^\circ_A S_M = S^\circ_M S_B$, d. h. die beiden orientierten Strecken AM und MB sind gleich, M ist der Mittelpunkt der Strecke AB. Auf diese Weise kann man noch andere Lagebeziehungen von Punkten der Ebene durch Gleichungen ihrer Punktspiegelungen ausdrücken.

Wir wollen noch einen wichtigen Satz der Spiegelungsgeometrie herleiten. Nach dem Dreispiegelungssatz für Punktspiegelungen gilt $S^\circ_{D_1} S^\circ_{D_2} S_{D_3} = S_{D_4}$. Weil die Punktspiegelung S_{D_4} involutorisch ist, ist auch $S^\circ_{D_1} S^\circ_{D_2} S_{D_3}$ eine involutorische Bewegung. Es gilt also $(S^\circ_{D_1} S^\circ_{D_2} S_{D_3})^2 = i$ oder $S^\circ_{D_1} S^\circ_{D_2} S^\circ_{D_3} S^\circ_{D_1} S^\circ_{D_2} S_{D_3} = i$. Durch Multiplikation dieser Gleichung von rechts mit $S^\circ_{D_3} S^\circ_{D_2} S_{D_1}$ erhalten wir $S^\circ_{D_1} S_{D_2} S_{D_3} = S^\circ_{D_3} S^\circ_{D_2} S_{D_1}$. Dieses Resultat ist der Inhalt des Umkehrsatzes für Punktspiegelungen: Jedes Produkt aus drei Punktspiegelungen darf umgekehrt werden. Liegt ein Produkt aus vier Punktspiegelungen vor, so läßt sich dies stets mit dem Dreipunktspiegelungssatz auf ein Produkt aus zwei

Punktspiegelungen reduzieren und das Ergebnis ist eine Verschiebung, insbesondere die identische Verschiebung i, wenn die beiden Punkte zusammenfallen.

4. Beweise elementargeogetrischer Sätze mit Punktspiegelungen

Jedem Punkt der Ebene läßt sich in eineindeutiger Weise die Spiegelung an diesem Punkt zuordnen. Wir haben schon gesehen, daß sich gewisse geometrische Lagebeziehungen zwischen Punkten durch Gleichungen von Produkten ihrer Punktspiegelungen darstellen lassen, und umgekehrt können Spiegelungsgleichungen geometrisch interpretiert werden. So gelten die folgenden Äquivalenzen:

1. $S_A^\circ S_B^\circ S_C^\circ S_D=i$ $\updownarrow$

Die Punkte A, B, C, D sind Eckpunkte eines Parallelogrammes, welches im Sonderfall zusammengeklappt ist.

2. $S_A^\circ S_M^\circ S_B^\circ S_M=i$ $\updownarrow$

M ist Mittelpunkt der Strecke AB.

3. $S_A^\circ S_S^\circ S_B^\circ S_S^\circ S_C^\circ S_S=i$ $\updownarrow$

S ist Schwerpunkt des Dreiecks ABC.

Produkte aus Punktspiegelungen, die die identische Abbildung ergeben, heißen Spiegelungszyklen. Wir wollen nun zwei Sätze der Elementargeometrie mit Spiegelungszyklen beweisen.

Satz 1:

Wenn sich in einem Viereck die Diagonalen halbieren, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Das Viereck habe die Ecken A, B, C, D, die Diagonalen schneiden sich im Punkt M. Die Voraussetzung, daß sich die Diagonalen halbieren, läßt sich durch die Spiegelungszyklen $S_A^\circ S_M^\circ S_C^\circ S_M=i$ und $S_B^\circ S_M^\circ S_D^\circ S_M=i$ erfassen, und die Behauptung wird durch den Zyklus $S_A^\circ S_B^\circ S_C^\circ S_D=i$ dargestellt. Wir haben also die beiden Voraussetzungen mit Hilfe der hergeleiteten Sätze über Punktspiegelungen so umzuformen, daß wir die Behauptung erhalten.

Voraussetzung: (1) $S_A^\circ S_M^\circ S_C^\circ S_M=i$ und

(2) $S_B^\circ S_M^\circ S_D^\circ S_M=i$.

Behauptung: (3) $S_A^\circ S_B^\circ S_C^\circ S_D=i$.

Beweis: Die Zyklen (1) und (2) lassen sich gleichsetzen oder verketten (nacheinander ausführen). Andererseits können wir auch die Zyklen (1) und (2) nach S_A bzw. S_B umformen (indem wir (1) und (2) von links mit S_A bzw. S_B multiplizieren und $S_A=S_M^\circ S_C^\circ S_M$ bzw. $S_B=S_M^\circ S_D^\circ S_M$ erhalten) und diese Ausdrücke in die linke Seite von (3) einsetzen.

Dann gilt:

$S_A^\circ S_B^\circ S_C^\circ S_D=(S_M^\circ S_C^\circ S_M)\circ(S_M^\circ S_D^\circ S_M)\circ S_C^\circ S_D$,

$=S_M^\circ S_C^\circ S_M^\circ S_M^\circ S_D^\circ S_M^\circ S_C^\circ S_D$

und mit $S_M^\circ S_M=i$ folgt

$S_A^\circ S_B^\circ S_C^\circ S_D=S_M^\circ S_C^\circ S_D^\circ S_M^\circ S_C^\circ S_D$. Kehren wir ein Produkt $S_M^\circ S_C^\circ S_D$ um, so folgt

$S_A^\circ S_B^\circ S_C^\circ S_D=S_M^\circ S_C^\circ S_D^\circ S_D^\circ S_C^\circ S_M$

und mit $S_D^\circ S_D=i$, $S_C^\circ S_C=i$ und $S_M^\circ S_M=i$ erhalten wir die Behauptung $S_A^\circ S_B^\circ S_C^\circ S_D=i$.

Setzen wir die linken Seiten der Voraussetzungen (1) und (2) gleich und multiplizieren diese Gleichung von rechts mit S_M, so erhalten wir $S_A^\circ S_M^\circ S_C=S_B^\circ S_M^\circ S_D$. Durch Multiplikation von rechts mit $S_D^\circ S_M^\circ S_B$ folgt

$S_A^\circ S_M^\circ S_C^\circ S_D^\circ S_M^\circ S_B=i$ und mit der Umkehrung des Produktes $S_C^\circ S_D^\circ S_M$ erhalten wir

$S_A^\circ S_D^\circ S_C^\circ S_B=i$. Kehren wir nun noch $S_D^\circ S_C^\circ S_B$ um, so folgt die Behauptung $S_A^\circ S_B^\circ S_C^\circ S_D=i$.

Es gibt also mehrere Beweise für denselben Satz.

Satz 2:

In jedem Dreieck ist die Verbindungsstrecke zweier Seitenmittelpunkte parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.

Voraussetzung: Gegeben ist ein Dreieck $P_1P_2P_3$. M_2 sei die Mitte der Seite P_2P_3 und M_3 die Mitte der Seite P_1P_3.

Es gilt also (1) $S_{P_1}^\circ S_{M_3}^\circ S_{P_3}^\circ S_{M_3}=i$ und

(2) $S_{P_2}^\circ S_{M_2}^\circ S_{P_3}^\circ S_{M_2}=i$.

Behauptung:

$S_{P_1}^\circ S_{P_2}=(S_{M_3}^\circ S_{M_2})\circ(S_{M_3}^\circ S_{M_2})=(S_{M_3}^\circ S_{M_2})^2$.

Beweis: Die Multiplikation von (1) mit S_{P_1} und (2) mit S_{P_2} von links ergibt $S_{P_1}=S_{M_3}^\circ S_{P_3}^\circ S_{M_3}$ und $S_{P_2}=S_{M_2}^\circ S_{P_3}^\circ S_{M_2}$.

Hieraus folgt $S_{P_1}^\circ S_{P_2}=S_{M_3}^\circ S_{P_3}^\circ S_{M_3}^\circ S_{M_2}^\circ S_{P_3}^\circ S_{M_2}$, und durch Umkehrung von $S_{M_3}^\circ S_{M_2}^\circ S_{P_3}$ erhalten wir die Behauptung

$$S_{P_1}^\circ S_{P_2}=S_{M_3}^\circ S_{M_2}^\circ S_{M_3}^\circ S_{M_2}.$$

Das Beweisverfahren mit Spiegelungszyklen läßt sich noch auf weitere Sätze der Elementargeometrie anwenden.

5. Lösen von Konstruktionsaufgaben mit Punktspiegelungen

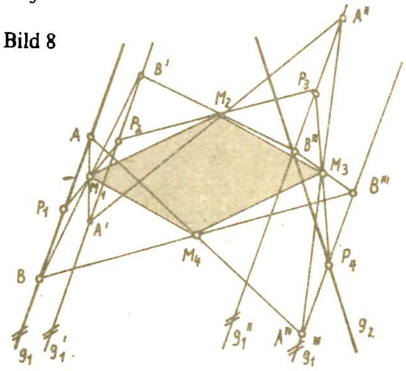
Viele Konstruktionsaufgaben der Geometrie lassen sich mit Hilfe von geometrischen Abbildungen einfach und elegant lösen. Wir wollen zwei Aufgaben betrachten, zu deren Lösung Punktspiegelungen und die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen genutzt werden sollen.

Aufgabe 1:

Konstruiere einen dreiseitigen Polygonzug $P_1P_2P_3P_4$, der auf einer Geraden g_1 beginnen, auf einer Geraden g_2 enden soll und von dem die Mitten M_1, M_2, M_3 seiner Seiten gegeben sind.

Analysis: Wollten wir eine Näherungskonstruktion finden, so könnten wir von einem beliebigen Punkt $A\in g_1$ ausgehen und über die Mitten M_1, M_2, M_3 den Polygonzug schrittweise konstruieren (vgl. Bild 8). Liegt dann der Endpunkt A''' des Polygonzuges auf g_2, so hätten wir eine Näherungslösung gefunden. Liegt der Endpunkt nicht auf g_2, so wählen wir einen weiteren Punkt $B\in g_1$ als Anfangspunkt und konstruieren einen zweiten Polygonzug über M_1, M_2, M_3. So kann man, wenn es überhaupt eine Lösung gibt, durch weitere Polygonzüge sukzessiv zu einer Näherungslösung gelangen. Diese Vorgehensweise liefert auch den Ansatz für eine exakte Lösung. Durch die zwei Punkte A, B ist die Gerade g_1 eindeutig bestimmt. Verfolgen wir die beiden Polygonzüge über M_1, M_2, M_3, so wird die Gerade g_1 durch die Spiegelung S_{M_1} in g_1', g_1' durch S_{M_2} in g_1'' und g_1'' durch S_{M_3} in g_1''' überführt.

Bild 8



Es gilt also

$S_{M_1}^\circ S_{M_2}^\circ S_{M_3}(g_1)=g'''$ mit $g_1\parallel g_1'\parallel g_1''\parallel g'''$. Der Schnittpunkt P_4 von $g_1'''\cap g_2=\{P_4\}$ ist der Endpunkt des gesuchten Polygonzuges. Nun können wir wegen der Gültigkeit des Dreispiegelungssatzes $S_{M_1}^\circ S_{M_2}^\circ S_{M_3}=S_{M_4}$ setzen, mit M_4 als viertem Parallelogrammpunkt, woraus $S_{M_4}(g_1)=g_1'''$ folgt.

Lösung: Wir konstruieren zu M_1, M_2, M_3 den vierten Parallelogrammpunkt M_4, so daß $S_{M_1}^\circ S_{M_2}=S_{M_4}^\circ S_{M_3}$ ist und spiegeln g_1 an M_4. Ist das Schnittresultat $g_1'''\cap g_2$ nicht die leere Menge, so haben wir wenigstens einen Endpunkt eines gesuchten Polygonzuges gefunden, der nun rückwärts konstruiert werden kann.

Determination: Die vorgelegte Aufgabe hat, je nach den Lagebeziehungen der gegebenen Stücke (g_1, g_2, M_1, M_2, M_3),

$$\left\{\begin{array}{l}\text{genau eine Lösung}\\ \text{keine Lösung}\\ \text{unendlich viele Lösungen}\end{array}\right\} \text{ wenn } g_1'''\cap g_2=\left\{\begin{array}{c}g_2\\ \varnothing\\ \{P_4\}\end{array}\right\} \text{ ist.}$$

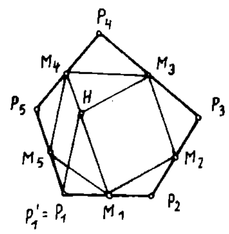
Diskutiere die Lösung der Aufgabe, wenn der Polygonzug viergliedrig ist! Beachte, daß die resultierende Abbildung von $S_{M_1}^\circ S_{M_2}^\circ S_{M_3}^\circ S_{M_4}$ eine Verschiebung oder die identische Abbildung ist.

Aufgabe 2:

Konstruiere ein Fünfeck, von dem die Seitenmittelpunkte M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 gegeben sind! M_1 sei Mitte von P_1P_2, M_2 Mitte von P_2P_3 usw.

Analysis: Wir nehmen an, das Fünfeck sei bereits konstruiert. Wendet man auf den Punkt P_1 das Spiegelungsprodukt $S_{M_1} \circ S_{M_2} \circ S_{M_3} \circ S_{M_4} \circ S_{M_5}$ an, so fällt sein Bild P_1' mit P_1 zusammen (Bild 9). P_1 ist somit Fixpunkt von $S_{M_1} \circ S_{M_2} \circ S_{M_3} \circ S_{M_4} \circ S_{M_5}$.

Bild 9



Andererseits ergibt sich durch zweimalige Anwendung des Dreispiegelungssatzes für Punktspiegelungen auf $S_{M_1} \circ S_{M_2} \circ S_{M_3} \circ S_{M_4} \circ S_{M_5}$ als Ergebnis eine Punktspiegelung. Weil jede Punktspiegelung genau einen Fixpunkt besitzt, gilt also $S_{M_1} \circ S_{M_2} \circ S_{M_3} \circ S_{M_4} \circ S_{M_5} = S_{P_1}$.

Konstruktion: Zur Konstruktion des Punktes P_1 als Anfangs- und Endpunkt eines geschlossenen Polygonzuges konstruieren wir zunächst einen Hilfspunkt H mit $S_H = S_{M_1} \circ S_{M_2} \circ S_{M_3}$ als Eckpunkt des Parallelogramms $M_1M_2M_3H$. Aus der Relation $S_H \circ S_{M_4} \circ S_{M_5} = S_{P_1}$ ergibt sich sofort P_1 als vierter Parallelogrammpunkt zu H, M_4, M_5.

Determination: Es gibt genau eine Lösung, denn P_1 ist bei fester Vorgabe von M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 nach den genannten Parallelogrammkonstruktionen eindeutig bestimmt.

6. Aufgaben

Zum Schluß unserer Betrachtungen über Punktspiegelungen fügen wir noch einige Konstruktions- und Beweisaufgaben an, deren Lösung durch kluge Anwendung der theoretischen Erkenntnisse zum tieferen Eindringen in dieses Teilgebiet der Abbildungsgeometrie beitragen wird und aufs neue Interesse und Freude an geometrischen Untersuchungen wecken soll.

6.1. Konstruiere einen n-seitigen Polygonzug ($n \geqq 2$), der auf einer Kurve k_1 beginnt, auf einer Kurve k_2 endet und von dem die Mitten M_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) gegeben sind! k_1 und k_2 können Kurven, wie z. B. Geraden, Kreise, Parabeln usw. oder auch Dreiecke, Vierecke und andere geometrische Figuren sein.

6.2. Konstruiere einen n-seitigen Polygonzug ($n \geqq 2$), der auf einem Kreis k (oder einer anderen geometrischen Figur) beginnt, auf k endet und von dem die Mitten M_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) bekannt sind!

6.3. Konstruiere ein n-Eck ($n \geqq 3$), von dem die Seitenmitten M_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) seiner Seiten P_iP_{i+1} mit $n + 1 = 1$ gegeben sind!

6.4. Es sind zwei Kreise k_1, k_2 gegeben, die sich in den beiden Punkten A und B schneiden sollen. Konstruiere eine Gerade g so durch A, daß beide Kreise gleichlange Sehnen herausschneiden!

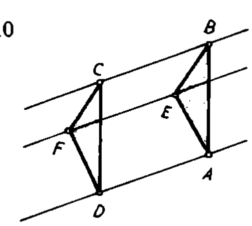
6.5. Beweise, daß das Produkt aus einer geraden (ungeraden) Anzahl von Punktspiegelungen stets eine Verschiebung (Punktspiegelung) ist! Die identische Abbildung soll eine spezielle Verschiebung sein.

6.6. Man beweise mit Spiegelungszyklen, daß sich in jedem Parallelogramm die Diagonalen halbieren.

6.7. Zeige durch Rechnen mit Punktspiegelungen, daß die Seitenmitten eines beliebigen Vierecks ein Parallelogramm bilden! Zeichne dazu auch in die Figuren von ungleichseitigen, konvexen, konkaven, überschlagenen und anderen Vierecken, wie Trapezen und Parallelogrammen, diese Parallelogramme ein!

6.8. Beweise den Satz: Wenn die beiden Vierecke *ABCD* und *BCFE* Parallelogramme sind, so ist auch das Viereck *AEFD* ein Parallelogramm (vgl. Bild 10)! Dies ist der kleine affine Satz von *Desargues*, und die Figur heißt kleine affine *Desargues*sche Figur.

Bild 10



E. Bohne

Eine Prüfungsfrage

Bei der Vorbereitung auf eine Veranstaltung des Bezirksklubs *Junger Mathematiker* Rostocks entstand folgende Fragestellung:

$2n$ (n gegebene natürliche Zahl) verschiedene Prüfungsfragen werden zu je zwei auf n Zettel geschrieben. Der Prüfling hat sich auf k Fragen vorbereitet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, daß er die Prüfung besteht, wenn dazu ausreicht, daß er die zwei Fragen eines Zettels oder eine Frage eines Zettels und die erste eines anderen Zettels beantworten kann? Zunächst einmal ist für $k = 0$ oder $k = 1$ sicher $p = 0$, denn der Prüfling muß zum Bestehen der Prüfung mindestens zwei Fragen beantworten können. Ist $k = 2n$, d. h., er beherrscht alle Fragen, so ist $p = 1$. Für $k = n$, also die Vorbereitung auf die Hälfte aller Fragen, erwarten wir $p = 0{,}5$. Wie geht man nun an die Lösung einer solchen Aufgabe heran?

Ein eifriger *alpha*-Leser erinnert sich sofort an den Artikel *Zufall und Wahrscheinlichkeit* aus den Heften 5 und 6 (1975). Wir überlegen uns zunächst, welches Ereignis uns interessiert.

Dazu definieren wir:
Sei A das Ereignis, daß der Prüfling auf die erste Frage des ersten Zettels antworten kann. B ... er kann auf die zweite Frage des ersten Zettels antworten. C ... er kann auf die erste Frage eines anderen Zettels antworten.
$A \cap (B/A)$ bedeutet dann, daß er auf beide Fragen des ersten Zettels antworten kann, $[A \cap (\bar{B}/A)] \cup [\bar{A} \cap (B/\bar{A})]$ – er kann auf genau eine Frage des ersten Zettels antworten. Wir suchen also die Wahrscheinlichkeit, mit der das Ereignis

$$[A \cap (B/A)] \cup \left\{ \{[A \cap (\bar{B}/A)] \cup [\bar{A} \cap (B/\bar{A})]\} \cap C \right\} \text{ eintritt.}$$

Wenn man aufmerksam den erwähnten Artikel gelesen hat, weiß man, daß man die Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnet:

$$p = p(A)p(B/A) + [p(A)p(\bar{B}/A) + p(\bar{A})p(B/\bar{A})]p(C) \qquad (1)$$

Wir bestimmen nun diese Werte. Damit A auftritt, haben wir k günstige Fälle und $2n$ mögliche. Also ist $p(A) = \frac{k}{2n}$. B/A tritt auf, nachdem der Kandidat bereits eine Frage richtig beantwortet hat. Also liegen nur noch $k - 1$ günstige und $2n - 1$ mögliche Fälle vor. Damit ist $p(B/A) = \frac{k-1}{2n-1}$. Hieraus ergibt sich sofort: $p(B/\bar{A}) = \frac{k}{2n-1}$, $p(\bar{A}) = \frac{2n-k}{2n}$ und $p(\bar{B}/A) = \frac{2n-k}{2n-1}$. Das Ereignis C tritt auf, wenn der Kandidat eine Frage des ersten Zettels richtig beantwortet hat, er die zweite dieses Zettels nicht beherrscht und deshalb einen anderen Zettel zieht. Er hat also eine gewußte Antwort verbraucht und antwortet auf die dritte Frage. Deshalb ist $p(C) = \frac{k-1}{2n-2}$. Setzen wir diese Ergebnisse in (1) ein und vereinfachen, so erhalten wir:

$$p = \frac{k(k-1)(3n-k-1)}{2n(2n-1)(n-1)}.$$

Überprüfen wir noch die eingangs angeführten Überlegungen für $k = 0$, $k = 1$, $k = 2n$ und $k = n$, so finden wir sie bestätigt. Unsere Aufgabe ist damit gelöst, und jeder kann sich nun die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen der Prüfung ausrechnen, vorausgesetzt, daß diese Prüfungsform vorliegt.

W. Moldenhauer

ARBEITS-
GEMEINSCHAFTEN
IM BLICKPUNKT

Mathematischer Schulwettbewerb im Kreis Delitzsch

Seit Jahren herrscht in den Oberschulen Rackwitz, Krostitz und Wölkau ein gutes mathematisches Klima. Durch rege außerunterrichtliche Tätigkeit haben wir Interesse geweckt, Schüler mit sehr guten Leistungen entdeckt und gefördert. Selbstverständlich spielt dabei die Teilnahme am *alpha*-Wettbewerb eine wichtige Rolle. Im Wettbewerbsjahr 1976/77 wurde eine große Zahl von Schülern mit dem *alpha*-Abzeichen ausgezeichnet.
Unsere besten *Jungen Mathematiker* beteiligen sich natürlich an den *Zentralen AG's* im Kreis Delitzsch, einige besuchen sogar die Veranstaltungen der *Mathematischen Schülergesellschaft* des Bezirkes Leipzig (MSG).
Zu den Höhepunkten des Schuljahres gehören die Schulolympiaden im Fach Mathematik, die wir für die Klassen 5 bis 10 als Qualifizierung für die Kreisolympiaden durchführen. Um unseren Schülern der Klassenstufen 3 und 4 die Möglichkeit der Bewährung zu geben, führen wir auch für sie besondere Veranstaltungen mit Olympiadecharakter durch. All diese Aktivitäten führten dazu, daß z. B. die Dr.-Theodor-Neubauer-Oberschule Rackwitz in den beiden letzten Jahren zur erfolgreichsten Schule des Kreises bei den Kreisolympiaden wurde.

Im April 1977 führten die OS Radefeld, Rackwitz, Krostitz und Wölkau ihren 2. mathematischen Schülervergleich durch. Dieser Wettbewerb ist ein Mannschaftswettbewerb. Jede Mannschaft besteht aus je einem Vertreter der Klassenstufen 4 bis 9. In einer Arbeitszeit von 60 Minuten sind möglichst viele der 15 gestellten Aufgaben zu lösen. Natürlich ist die gegenseitige Hilfe innerhalb eines Schülerkollektivs erwünscht, und der Mannschaftsleiter (Schüler der Klasse 9) hat eine besondere Verantwortung für die gute Zusammenarbeit aller Mannschaftsteilnehmer und damit auch für den Erfolg seines Kollektivs. Die Aufgaben wurden so angelegt, daß auf keinen Fall eine Mannschaft alle Aufgaben lösen konnte. Die Mannschaften mußten also eine Auswahl treffen entsprechend der Fähigkeiten, Fertigkeiten und Kenntnisse der einzelnen Teilnehmer. *E. Knauth*

Zur Vorbereitung der Schulolympiade 1978/79 (siehe *alpha*, Heft 4/77) veröffentlichen wir die Aufgaben des mathematischen Schulvergleichs:

▲1▲ Vergrößere das 34fache von 3715 um den achten Teil von 51400!

▲2▲ Wenn man eine gedachte Zahl verdoppelt und von diesem Produkt 6 subtrahiert, so erhält man 24.
Wie heißt die gedachte Zahl?

▲3▲ Verschiebe ein beliebiges Dreieck ABC um 5 cm und drehe es dann im positiven Drehsinn um 90°! Wähle selbst die Verschiebungsrichtung und den äußeren Drehpunkt!

▲4▲ Wie hoch muß ein Gefäß mit einer Grundfläche von $25\,\text{dm}^2$ mindestens sein, damit es 100 l fassen kann?

▲5▲ 1**·*1
5
1*0
**3*

Ersetze die Sternchen durch Ziffern so, daß eine vollständige Multiplikationsaufgabe entsteht!

▲6▲ Eine alte Knobelaufgabe lautet: Eine Flasche mit Korken kostet 1,10 M. Dabei kostet die Flasche genau 1,00 M mehr als der Korken.
Wieviel kosten die Flasche und der Korken einzeln?

▲7▲ 37**2
Ergänze so, daß eine sowohl durch 3 als auch durch 2 teilbare Zahl entsteht!
Gib mindestens drei Möglichkeiten an!

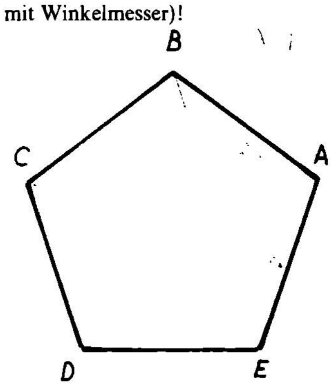
▲8▲ Wieviel natürliche Zahlen zwischen 0 und 300 sind sowohl durch 4 als auch durch 5 teilbar?

▲9▲ Eine Fläche von $1{,}60\,\text{m} \cdot 3\,\text{m}$ soll mit Natursteinen verkleidet werden, die eine rechteckige Form mit $a = 30$ cm und $b = 50$ cm besitzen.
a) Wieviel Steine sind dazu notwendig?
b) Skizziere *eine mögliche* Anordnung der Steine!

▲10▲ Jemand soll sich eine 5stellige Telefonnummer merken, die nur aus geraden

Ziffern besteht. Es ist weiterhin bekannt, daß die erste und die letzte Ziffer gleich sind. Außerdem sind die 2. und die 3. Ziffer gleich. Die vorletzte Ziffer sei die größte Ziffer und doppelt so groß wie die 3. Ziffer. Die erste Ziffer ist größer als die 2. Ziffer.
Wie lautet die gesuchte Telefonnummer?
Ist dies die einzige Möglichkeit?

▲11▲ Gegeben sei ein regelmäßiges Fünfeck. Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle EAB$ (nicht mit Winkelmesser)!



▲12▲ Merke dir eine beliebige Zahl! Addiere zu dieser Zahl 10. Dividiere diese Summe mit 2, und multipliziere den Quotienten mit 4! Vermindere das so erhaltene Ergebnis um 20, und du erhältst das Doppelte der Ausgangszahl!
a) Überprüfe die Richtigkeit dieser Aufgabe an einem Beispiel!
b) Beweise, daß diese Aufgabe für jede beliebige natürliche Zahl gültig ist!

▲13▲ Zwei Orte A und B seien 120 km voneinander entfernt. Gleichzeitig starten zwei Züge in entgegengesetzter Richtung. Der Zug von A nach B fährt mit einer Geschwindigkeit von $80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und der Zug von B nach A von $60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Nach welcher Zeit und in welcher Entfernung von A begegnen sich beide Züge?

▲14▲ Zwei natürliche Zahlen sollen sich wie 3 zu 7 verhalten. Die Summe dieser Zahlen heißt 110.
Wie heißen die beiden Zahlen?

▲15▲ Stelle die folgenden Angaben graphisch dar (A4-Blatt), so daß diese Darstellung z. B. für eine Wandzeitung verwendet werden könnte!

Soziale Herkunft der 500 Abgeordneten der Volkskammer in der 7. Wahlperiode (1976 bis 1980)

Arbeiter	268
Mitglieder von LPG, werktätige Einzelbauern, Gärtner, Fischer	53
Angestellte	105
Angehörige der Intelligenz	28
Selbständige Handwerker	31
Gewerbetreibende und freiberuflich Tätige	8
Sonstige	7

Schulolympiaden in der Sowjetunion

Liebe *alpha*-Freunde!

Heute stellen wir euch eine Auswahl von Aufgaben der *ersten Stufe der Schulolympiade* im Fach Mathematik des *Leningrader Stadtbezirks Petrodworez* vor. Dazu einige Hinweise:

In der Sowjetunion werden die Aufgaben der ersten Stufe der Schulolympiaden nicht wie bei uns zentral gestellt, sondern auf der Ebene einer Stadt oder eines Stadtbezirkes. Erst von der zweiten Stufe an gibt es zentrale Aufgabenstellungen. Wir geben die übersetzten Aufgaben in Originalfassung wieder, damit unsere Leser einen echten Eindruck vom Charakter der Aufgaben und ihrem Schwierigkeitsgrad erhalten. Dabei ist jedoch zu beachten, daß in der Sowjetunion nach anderen Lehrplänen als bei uns unterrichtet wird.
Nun wünschen wir viel Freude beim Lösen der Aufgaben.

Aufgaben

Klasse 5

▲1▲ Berechne den Wert des Terms
$0,85+10,5\cdot 2,04-(6,25\cdot 2+0,8:0,64):10-0,04848:0,24$!

▲2▲ Es sind alle durch 3 teilbaren zweistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die auf die Ziffer 0 enden.

▲3▲ Die Mutter hat für ihre Töchter Olga, Tanja und Mascha genau drei Bänder gekauft, und zwar ein rotes, ein blaues und ein grünes. Olga liebt die Farbe Rot nicht; sie möchte auch kein grünes Band. Mascha will kein rotes Band. Welche Farbe liebt jedes der drei Mädchen, wenn die Mutter Bänder entsprechend den Lieblingsfarben der Töchter gekauft hat?

▲4▲ Ein Vater ist gegenwärtig viermal so alt wie sein Sohn. Die Summe aus den Anzahlen ihrer Lebensalter (in ganzen Zahlen) beträgt 50.
Nach wieviel Jahren wird der Vater dreimal so alt sein wie der Sohn?

▲5▲ Frischgemähtes Gras hat einen Feuchtigkeitsgehalt von 60%; Heu hingegen hat einen Feuchtigkeitsgehalt von nur 20%. Wieviel Heu erhält man aus einer Tonne frischgemähten Grases?

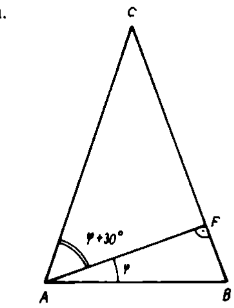
Klasse 6

▲1▲ Bestimme den Wert von x, der folgende Gleichung erfüllt:

$$\left[\left(6\frac{3}{7}-\frac{\frac{3}{4}x-2}{0,35}\right)\cdot 2,8-1\frac{3}{4}\right]:\frac{1}{20}=235.$$

▲2▲ Es sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die gleich dem Dreifachen ihrer Quersumme sind.

▲3▲ Die Höhe $\overline{AF}$ zum Schenkel $\overline{BC}$ des abgebildeten gleichschenkligen Dreiecks ABC mit der Basis $\overline{AB}$ teilt den Basiswinkel $\sphericalangle CAB$ so, daß der Winkel $\sphericalangle CAF$ um 30° größer ist als der Winkel $\sphericalangle BAF$.
Es sind die Größen der Innenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks ABC zu berechnen.



▲4▲ In einem Korb befinden sich insgesamt 35 Äpfel dreier Sorten.
Wieviel Äpfel muß jemand im Dunkeln diesem Korb entnehmen, um mit Sicherheit vier Äpfel der gleichen Sorte zu erhalten?

▲5▲ Junge Pioniere, die bei Pflegearbeiten in einem Kolchos mithalfen, sollten innerhalb von 10 Tagen ein Feld jäten. Da sie täglich 1 ha der Gesamtfläche mehr jäteten als laut Plan vorgesehen war, konnten sie ihre Arbeit zwei Tage früher beenden.
Wieviel Hektar Ackerfläche haben die Pioniere täglich gejätet?

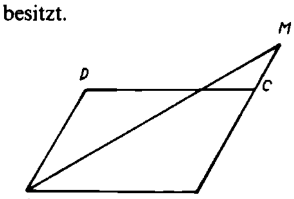
Klasse 7

▲1▲ Ermittle den Wert des nachstehenden Terms für natürliche Zahlen n!

$$\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3}.$$

▲2▲ Welchen Wert besitzt der Term $a(a+2)+c(c-2)-2ac$, wenn $a-c=7$ gilt?

▲3▲ Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle DAB$ des abgebildeten Parallelogramms $ABCD$ schneidet die über C hinaus verlängerte Seite $\overline{BC}$ in M so, daß $\overline{CM}$ die Länge 3 cm besitzt.



Es sind die Längen der Seiten des Parallelogramms zu bestimmen, wenn sein Umfang 36 cm beträgt.

▲4▲ Es ist zu beweisen, daß für beliebige reelle Zahlen x und y die Ungleichung $5x^2+4xy+y^2+2x+5>0$ erfüllt wird.

▲5▲ Es sind alle durch 45 teilbaren dreistelligen natürlichen Zahlen zu ermitteln, die folgende Eigenschaften haben:
Schreibt man die Ziffern einer solchen Zahl in umgekehrter Reihenfolge, subtrahiert man die so erhaltene Zahl von der ursprünglichen Zahl, so beträgt die Differenz 297.

Klasse 8

▲1▲ Ermittle die Lösungsmenge der nachstehenden Gleichung:

$$(x^2+x+1)(2x^2+2x-3)$$
$$=-3(1-x-x^2).$$

▲2▲ Wievielmal bilden der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr im Verlaufe von 24 Stunden einen rechten Winkel?

▲3▲ Es sind alle natürlichen Zahlen zu ermitteln, die folgende Eigenschaft haben:
Das Produkt aus einer solchen Zahl und 2,5 ist gleich der Summe aus allen dieser Zahl vorangehenden natürlichen Zahlen.

▲4▲ Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}=c=6$ cm und dem Basiswinkel $\sphericalangle CAB=\alpha=50°$.
Es ist die Länge der Winkelhalbierenden $\overline{AD}=w$ des Winkels $\sphericalangle CAB$ zu berechnen.

▲5▲ Eine Klasse mit 21 Schülern hat insgesamt 200 Nüsse erhalten.
Es ist zu beweisen, daß es stets mindestens zwei Schüler geben wird, die die gleiche Anzahl von Nüssen erhalten werden, wie immer die Nüsse auch an diese Schüler verteilt werden.

L. Dimenstein/Th. Scholl

Lösungen

Klasse 5

▲1▲ $0,85+10,5\cdot 2,04-(6,25\cdot 2$
$+0,8:0,64):10-0,04848:0,24$
$=0,85+21,42-(12,5+1,25):10-0,202$
$=22,27-1,375-0,202$
$=20,693$

▲2▲ Von den Zahlen 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 sind nur die Zahlen 30, 60 und 90 durch 3 teilbar.

▲3▲ Da Olga die Farbe Rot nicht liebt und auch kein grünes Band will, liebt Olga die Farbe Blau. Da Olga die Farbe Blau liebt und Mascha kein rotes Band will, liebt Mascha die Farbe Grün. Somit liebt Tanja die Farbe Rot.

▲4▲ Angenommen, der Sohn ist gegenwärtig n Jahre, der Vater also $4n$ Jahre alt; dann gilt

$$n+4n=50,\ 5n=50,\ n=10.$$

Gegenwärtig ist der Vater 40 Jahre, sein Sohn 10 Jahre alt. Aus $(10+x)\cdot 3=40+x$ folgt $30+3x=40+x$, $2x=10$, also $x=5$.
Nach fünf Jahren wird der Vater 45 Jahre, der Sohn 15 Jahre alt sein, der Vater also dreimal so alt wie sein Sohn sein.

▲5▲ $1000:100\% = y:(100-60)\%$,
also $y=400$;
$400:(100-20)\% = x:100\%$,
also $x=500$.
Aus einer Tonne frischgemähten Grases erhält man 500 kg, also eine halbe Tonne Heu.

Klasse 6

▲1▲

$$\left[\left(6\frac{3}{7}-\frac{\frac{3}{4}x-2}{0{,}35}\right)\cdot 2{,}8-1\frac{3}{4}\right]:\frac{1}{20}=235,$$

$$\left(\frac{45\cdot 14}{7\cdot 5}-6x\right)\cdot 20=235,$$

$$645-120x=235,$$

$$120x=410,$$

$$x=\frac{41}{12}=3\frac{5}{12}.$$

▲2▲ $10a+b=3\cdot(a+b)$ mit $1\leqq a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$; $7a=2b$, also $a=\frac{2b}{7}$.

Nur für $b=7$, also für $a=2$ wird diese Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen erfüllt. Es gibt genau eine solche Zahl, sie lautet 27.

▲3▲ Im rechtwinkligen Dreieck ABF gilt $\sphericalangle ABF=90°-\phi$. Aus $\sphericalangle CAB=\sphericalangle CBA$ folgt $2\phi+30°=90°-\phi$, also $\phi=20°$. Daraus folgt weiter $\sphericalangle CAB=\sphericalangle CBA=70°$ und $\sphericalangle ACB=180°-2\cdot 70°=40°$.

▲4▲ Entnimmt man dem Korb neun Äpfel, so könnte man im ungünstigsten Fall von jeder der drei Sorten je drei Äpfel haben. Um mit Sicherheit vier Äpfel der gleichen Sorte zu erhalten, müssen dem Korb mindestens zehn Äpfel entnommen werden.

▲5▲ Angenommen, laut Plan sollten täglich x Hektar gejätet werden; dann gilt

$$10x=8(x+1),$$

$$2x=8, \text{ also } x=4.$$

Die Pioniere haben täglich 5 Hektar Ackerfläche gejätet.

Klasse 7

▲1▲

$$\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3}=\frac{[8^n(8+1)]^2}{[4^{n-1}(4-1)]^3}$$

$$=\frac{8^{2n}\cdot 9^2}{4^{3(n-1)}\cdot 3^3}=\frac{2^{6n}\cdot 3^4}{2^{6n-6}\cdot 3^3}=2^6\cdot 3=192.$$

▲2▲ Aus $a=c+7$ und $a(a+2)+c(c-2)-2ac$ folgt durch Einsetzen

$$(c+7)(c+9)+c(c-2)-2c(c+7)$$

$$=(c+7)(c+9-2c)+c(c-2)$$

$$=(c+7)(9-c)+c(c-2)$$

$$=9c-c^2+63-7c+c^2-2c=63.$$

▲3▲ Es seien $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$ und $\sphericalangle DAB=\alpha$. Nun gilt $2(a+b)=36$ cm, also $a+b=18$ cm. Aus $\sphericalangle MAB=\frac{1}{2}\alpha$ und $\sphericalangle ABM=180°-\alpha$ folgt $\sphericalangle BMA=180°-(180°-\alpha)-\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}\alpha$; darum gilt $\overline{AB}=\overline{BM}$ bzw. $a=b+3$ cm.
Daraus folgt $a+b=2b+3\text{ cm}=18$ cm, also $b=7{,}5$ cm und $a=10{,}5$ cm.

▲4▲
$5x^2+4xy+y^2+2x+5>0$,
$4x^2+4xy+y^2+x^2+2x+1+4>0$,
$(2x+y)^2+(x+1)^2+4>0$.
Da das Quadrat jeder reellen Zahl positiv und somit alle Summanden positiv sind, gilt diese Ungleichung für beliebige reelle Zahlen x und y.

▲5▲
$z_1=100a+10b+c$,
$z_2=100c+10b+a$,
$z_1-z_2=99(a-c)=297$, $a-c=3$,
$a=c+3$.
Wegen $45=5\cdot 9$ muß z_1 durch 5 teilbar sein, also auf die Ziffer 0 oder 5 enden. Für $c_1=0$ gilt $a_1=3$; für $c_2=5$ gilt $a_2=8$. Die Quersumme $a+b+c$ von z_1 muß außerdem durch 9 teilbar sein. Nun gilt $q_1=a_1+b_1+c_1=3+b_1$, also $b_1=6$, $q_2=a_2+b_2+c_2=13+b_2$, also $b_2=5$.
$360-36=324\neq 297$; $855-558=297$.
Es gibt genau eine solche Zahl, sie lautet 855.

Klasse 8

▲1▲

$$(x^2+x+1)(2x^2+2x-3)=-3(1-x-x^2),$$

$$2x^4+2x^3-3x^2+2x^3+2x^2-3x+2x^2$$

$$+2x-3=-3+3x+3x^2$$

$$2x^4+4x^3-2x^2-4x=0,$$

$$x^4+2x^3-x^2-2x=0,$$

$$x^3(x+2)-x(x+2)=0,$$

$$(x+2)(x^3-x)=0,$$

$$x(x+2)(x^2-1)=0,$$

$$(x-1)\cdot x\cdot(x+1)(x+2)=0,$$

$$x_1=1;\ x_2=0;\ x_3=-1;\ x_4=-2.$$

▲2▲ In 1 h beschreibt der kleine Zeiger einen Winkel von 30°; in 1 min beschreibt der kleine Zeiger einen Winkel von 0,5°. In 1 min beschreibt der große Zeiger einen Winkel von 6°. Nun gilt $x(6°-0{,}5°)=90°$, also $x=16\frac{4}{11}$.
Nach $16\frac{4}{11}$ Minuten bilden beide Zeiger zum ersten Mal einen rechten Winkel, wenn beide Zeiger zuvor auf die Ziffer 12 zeigten.
$n\cdot 16\frac{4}{11}=24\cdot 60$, also $n=88$ (dabei wurden die gestreckten Winkel mitgezählt).
Im Verlaufe von 24 Stunden bilden der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr 44mal einen rechten Winkel.

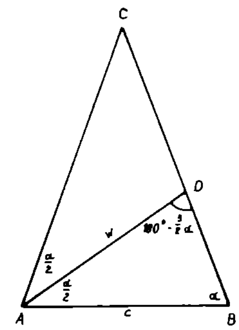
▲3▲ $1+2+3+\ldots+n=2{,}5(n+1)$,
$\frac{n(n+1)}{2}=2{,}5(n+1)$, also $n=5$.
Probe: $1+2+3+4+5=2{,}5\cdot 6$,
$15=15$.

▲4▲ Im Dreieck ABD gilt $\sphericalangle ADB=180°-\left(\alpha+\frac{1}{2}\alpha\right)=180°-\frac{3}{2}\alpha=105°$.
Nun gilt ferner

$$\frac{w}{c}=\frac{\sin 50°}{\sin 105°}=\frac{\sin 50°}{\sin 75°} \text{ bzw.}$$

$$w=\frac{6\cdot\sin 50°}{\sin 75°}\approx 4{,}76.$$

Die Länge der Winkelhalbierenden $\overline{AD}=w$ beträgt etwa 4,76 cm.



▲5▲ $0+1+2+3+\ldots+19=\frac{19\cdot 20}{2}=190$ und $200-190=10$.
Wenn von den 21 Schülern der erste keine, der zweite eine Nuß, der dritte zwei, und so fort, der 20. Schüler 19 Nüsse erhält, so bleiben 10 Nüsse übrig. Gleich wie diese restlichen Nüsse auch verteilt werden, es werden stets mindestens zwei Schüler die gleiche Anzahl von Nüssen erhalten.

„Löse eine Aufgabe für den lieben Papa, eine für die liebe Mama, ...!"

1. Vervollständige!

$1=3-3:3-3:3$
$2=$
$3=$
$4=3+33:33$
$5=$
$6=$
$7=(33-3):3-3$
$8=$
$9=$
$10=3+3+3+3:3$

2. Wer ist es?

„Es ist", sagte Kolja, „meiner Eltern Kind, aber weder mein Bruder noch meine Schwester. Errätst du, wer das ist, spendiert dir dieses Wesen ein leckeres Moroschnoje."

Pendel und Erdbeschleunigung

Ein Pendel ist ein Körper, der in einem festen Punkt oder in einer festen Achse drehbar aufgehängt ist und der unter der Wirkung der Schwerkraft Schwingungen um eine stabile Gleichgewichtslage ausführen kann.

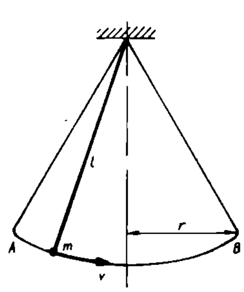
Die theoretische Behandlung der Schwingungen eines allgemeinen Pendels ist für einen Beitrag der Schülerzeitschrift *alpha* zu schwierig.

Hier können und sollen nur teilweise die Bewegungen eines speziellen, idealisierten Pendels, des sogenannten „mathematischen Pendels" betrachtet werden: Eine an einem masselosen Faden der Länge l aufgehängte punktförmige Masse m heißt mathematisches Pendel.

Natürlich gibt es keinen masselosen Faden und auch keine punktförmige Masse. In guter Näherung läßt sich ein „mathematisches Pendel" realisieren durch eine an einem Zwirnsfaden aufgehängte kleine Eisenkugel.

Auf ein solches Pendel sind in guter Näherung die folgenden theoretischen Betrachtungen zutreffend. Allerdings gilt die zu entwickelnde Theorie streng nur für ein reibungsfrei schwingendes Pendel. Da die zusätzliche Annahme der Reibungsfreiheit in der Praxis nicht erfüllt ist, wird ein reales Pendel, dem nicht fortwährend in geeigneter Weise Energie zugeführt wird, nicht unbegrenzt in der gleichen Weise weiterschwingen, sondern es wird langsam zur Ruhe kommen.

Ein „mathematisches Pendel" kann als spezielle Bewegungen gleichförmige Kreisbewegungen ausführen, wobei die Ebenen dieser Kreisbahnen waagerecht sind.



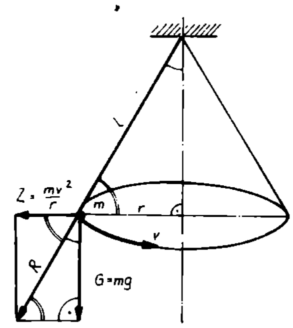
Da der Pendelfaden bei einer solchen Bewegung einen Kegelmantel durchwandert, heißt ein eine derartige Bewegung ausführendes Pendel ein *Kegelpendel*. Und die Theorie eines mathematischen Kegelpendels soll hier entwickelt werden!

Bei einem Kegelpendel bezeichnet man einen Umlauf der punktförmigen Masse m auf der Kreisbahn mit Radius r als Schwingung. Die Zeit, die zum Ausführen einer Schwingung benötigt wird, heißt Schwingungsdauer T. Da ein Kreis mit dem Radius r den Umfang $2\pi r$ hat, genügen die Geschwindigkeit v der Masse m, der Bahnradius r und die Schwingungsdauer T der Gleichung

$$v=\frac{2\pi r}{T}. \tag{1}$$

Auf die punktförmige Masse m wirkt in lotrechter Richtung die Erdanziehungskraft G. Diese ist um so größer, je größer die Masse m ist. Exakt gilt: G und m sind einander proportional. Der zugehörige Proportionalitätsfaktor wird Erdbeschleunigung g genannt. G, g und m genügen also der Gleichung $G=mg$.

Da die punktförmige Masse m eine gleichförmige Kreisbewegung mit dem Radius r und der Geschwindigkeit v ausführt, wirkt auf m noch eine zweite Kraft, die zu dieser Kreisbewegung gehörige, in radialer Richtung angreifende Zentrifugalkraft $Z=\frac{mv^2}{r}$.



Beide auf m wirkenden Kräfte lassen sich nach dem Satz vom Parallelogramm der Kräfte durch eine einzige resultierende Kraft R ersetzen.

Da die resultierende Kraft R durch den Faden auf die Pendelhalterung übertragen werden muß, muß R die Richtung des Fadens haben. Nach dem Satz des Pythagoras hat die zweite Kathete des in Bild 2 grauen rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten l und r die Länge

$$\sqrt{l^2-r^2}=l\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2}.$$

Da weiterhin die beiden in dieser Zeichnung grauen Dreiecke nach dem Hauptähnlichkeitssatz ähnlich sind, gilt für die Seiten dieser Dreiecke die Verhältnisgleichung

$$mg:\frac{mv^2}{r}=l\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2}:r.$$

Durch einfache Umformung folgt hieraus:

$$\frac{gr}{v^2}=\frac{l\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2}}{r}. \tag{2}$$

Durch Einsetzen von (1) in (2) und weitere einfache Umformungen ergibt sich:

$$\frac{gT^2}{4\pi^2 l}=\sqrt{l-\left(\frac{r}{l}\right)^2}. \tag{3}$$

Gemäß Formel (3) hängt die Schwingungsdauer T des mathematischen Kegelpendels ab von l, r und g; sie ist unabhängig von der Masse m. Ist r wesentlich kleiner als l, so läßt sich Formel (3) durch eine einfachere, für das folgende wichtige Näherungsformel ersetzen.

Ab jetzt wird angenommen, daß r und l der Ungleichung $r \leqq 0{,}01 \cdot l$ genügen. Diese Ungleichung ist z. B. für $l=2\,m$ erfüllt, falls $r \leqq 2$ cm gilt. Aus $r \leqq 0{,}01 \cdot l$ folgt $\left(\frac{r}{l}\right)^2 \leqq 0{,}01^2 = 0{,}0001$.

Hieraus ergibt sich weiterhin

$$0{,}9999 \leqq 1-\left(\frac{r}{l}\right)^2.$$

Wegen $0 < 1-\left(\frac{r}{l}\right)^2 < 1$ gilt ebenfalls

$$1-\left(\frac{r}{l}\right)^2 < \sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2} < 1$$

und damit schließlich

$$0{,}9999 < \sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2} < 1.$$

Auf Grund der letzten Ungleichung und mittels der Gesetze der Fehlerfortpflanzung ergibt sich:

Gilt für den Bahnradius eines mathematischen Kegelpendels $r \leqq 0{,}01 \cdot l$ und soll eine der Größen T, g und l des Pendels mit höchstens drei wesentlichen Dezimalstellen berechnet werden, so darf zur Berechnung die Formel

$$\frac{gT^2}{4\pi^2 l}=1 \text{ benutzt werden.} \tag{4}$$

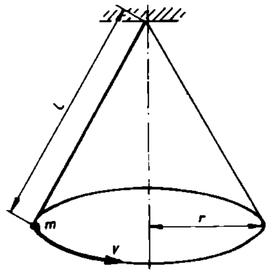
Daß die Näherungsformel (4) sogar für jede Bewegung eines mathematischen Pendels gilt, bei der sich die Masse m in waagerechter Richtung höchstens bis zu $0{,}01 \cdot l$ von der Ruhelage entfernt, wird folgender Versuch zeigen.

Versuch 1:

Laß ein Pendel, das in guter Näherung ein mathematisches Pendel darstellt, nacheinander in verschiedener Weise, jedoch stets so schwingen, daß sich der Pendelkörper in waagerechter Richtung höchstens bis zu $0{,}01 \cdot l$ von der Ruhelage entfernt!

Ermittle durch Messungen die zu diesen Bewegungen gehörigen Schwingungsdauern!

Eine andere spezielle Bewegung des mathematischen Pendels ist das Schwingen in einer lotrechten Ebene:



Zu einer Schwingung gehört das doppelte Durchlaufen des Kreisbogens $\widehat{AB}$ mit Radius l durch den Pendelkörper mit sich ändernder Geschwindigkeit. Sofern die Umkehrpunkte A und B von der Ruhelage einen waagerechten Abstand r haben, der der Ungleichung $r \leqq 0{,}01 \cdot l$ genügt, gilt auch für diese Pendelbewegung gemäß Versuch 1 die Formel (4) im oben genannten Sinn.
Die bisher erzielten Ergebnisse sollen nun angewandt werden.
Zunächst soll die Erdbeschleunigung g bestimmt werden. Zu diesem Zweck wird vorerst die Gleichung (4) nach g umgestellt:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \qquad (5)$$

Nunmehr wird folgender Versuch durchgeführt.

Versuch 2:

Baue ein Pendel (mit geeigneter Pendellänge), das in guter Näherung ein mathematisches Pendel darstellt! Miß seine Pendellänge! Versetze dieses Pendel in eine Bewegung, für die $r \leqq 0{,}01 \cdot l$ gilt!
Bestimme für diese Bewegung mittels Stoppuhr die Zeit, die für eine größere Anzahl von Schwingungen dieser Bewegung benötigt wird! Berechne die zugehörige Schwingungsdauer!
Berechne abschließend gemäß Formel (5) die Erdbeschleunigung!
Mit Versuch 2 ist es ohne weiteres möglich, die Erdbeschleunigung mit drei wesentlichen Dezimalstellen zu bestimmen.
Wird der Versuch 2 an verschiedenen Stellen der Erdoberfläche durchgeführt, so wird damit sogar die Änderung der Erdbeschleunigung mit der geographischen Breite erkannt.

Ort	geographische Breite	Erdbeschleunigung
Äquator	0°	$9{,}78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Potsdam	52,5°	$9{,}81274\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Pol	90°	$9{,}83\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Ursachen für das Ändern der Erdbeschleunigung mit der geographischen Breite sind die Rotation und die Abplattung der Erde. Nachdem die Erdbeschleunigung bestimmt ist, kann die Formel (4) zum Lösen der folgenden Aufgaben benutzt werden.

Versuch 3:

Berechne die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels für kleine Ausschläge mit der Pendellänge
a) 0,5 m und b) 1 m!
Überprüfe deine Ergebnisse durch ein Experiment!

Versuch 4:

Welche Pendellänge l hat ein mathematisches Pendel, das bei kleinen Ausschlägen die Schwingungsdauer $T = 1$ s hat? Überprüfe dein Ergebnis durch ein Experiment!

Versuch 5:

Wie groß ist $\frac{r}{l}$ für die spezielle Kreisbewegung eines mathematischen Kegelpendels, für die die Schwingungsdauer um 10% kleiner ist als die Schwingungsdauer des gleichen Pendels für Bewegungen mit kleinen Ausschlägen?
Überprüfe wiederum deine Rechnung durch ein Experiment!
Würde der Versuch 2 auch auf der Mondoberfläche durchgeführt werden, so würde man als Ergebnis finden, daß die Mondbeschleunigung nur $\frac{1}{6}$ der Erdbeschleunigung beträgt. Auf Grund dieser Mitteilung kann der Leser berechnen, wie die Schwingungsdauer eines Kegelpendels auf der Mondoberfläche gegenüber der eines Kegelpendels gleicher Pendellänge und gleichen Bahnradius auf der Erdoberfläche verändert ist.

W. Träger

Seltsame Produkte

ÚSTÍ NAD LABEM

1. Beim Multiplizieren zweier dreistelliger natürlicher Zahlen, z. B. 693 und 481, können wir zu einem merkwürdigen Produkt gelangen, in unserem Fall 333 333 (prüft nach!). Kann man diese Zahl auch als Produkt zweier anderer dreistelliger Faktoren darstellen?
Wir zerlegen die Zahl 333 333 in Primfaktoren und fassen diese auf alle möglichen Arten so in zwei Klassen zusammen, daß das Produkt der Primzahlen jeder Klasse eine dreistellige Zahl ist.
Es gilt $333333 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$.
Bilden wir die Klassen (3, 3, 7, 11) und (13, 37), so erhalten wir die ursprünglichen Faktoren $693 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$ und $481 = 13 \cdot 37$. Bilden wir jedoch die Klassen (11, 37) und (3, 3, 7, 13), so erhalten wir folgende Darstellung:

$$333333 = (11 \cdot 37) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13) = 407 \cdot 819.$$

Nehmen wir an, der Primfaktor 37 gehöre jeweils zur ersten Klasse. Dann darf das Produkt der anderen Primzahlen dieser Klasse höchstens $999 : 37 = 27$ betragen. Wir können also leicht alle ersten Klassen zusammenstellen:
(37, 3); (37, 7); (37, 11); (37, 13); (37, 3, 3); (37, 3, 7).
Nun brauchen wir nur noch zu prüfen, ob die zugehörigen zweiten Klassen auch dreistellige Zahlen ergeben.
Es ergibt sich folgende Zusammenstellung:

erste Klasse	zweite Klasse	Lösung
$3 \cdot 37$	$3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	–
$7 \cdot 37$	$3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$	–
$11 \cdot 37$	$3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$	$407 \cdot 819$
$13 \cdot 37$	$3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$	$481 \cdot 693$
$3 \cdot 3 \cdot 37$	$7 \cdot 11 \cdot 13$	–
$3 \cdot 7 \cdot 37$	$3 \cdot 11 \cdot 13$	$777 \cdot 429$

Aufgabe 1:

Schreibt folgende Zahlen als Produkt zweier dreistelliger Faktoren:
a) 555 555; b) 222 222; c) 777 777;
d) die größte fünfstellige natürliche Zahl!
2. Anstatt in zwei dreistellige Faktoren kann die Zerlegung in drei zweistellige verlangt werden.
Einer der zweistelligen Faktoren muß 37 sein, weil das Produkt von 37 mit jedem anderen Primfaktor von 333 333 dreistellig ist. Wir können annehmen, daß der zweite zweistellige Faktor den Primfaktor 13 enthält. Dann darf 11 aber nicht in diesem Faktor enthalten sein. 11 gehört also zum dritten zweistelligen Faktor. Wir kombinieren nun 11 und 13 mit den übrigen Primfaktoren so, daß zweistellige Produkte entstehen. Die einzige Kombination ist $7 \cdot 13$ und $3^2 \cdot 11$, so daß man $333333 = 37 \cdot (7 \cdot 13) \cdot (3^2 \cdot 11) = 37 \cdot 91 \cdot 99$ erhält.

Aufgabe 2:

Sucht alle möglichen Zerlegungen folgender Zahlen in Produkte aus drei zweistelligen Faktoren:
a) 444 444; b) die größte sechsstellige natürliche Zahl!

Aufgabe 3:

Sucht alle möglichen Zerlegungen von
a) 123 456 in ein Produkt aus zwei dreistelligen Faktoren;
b) 123 123 in ein Produkt aus drei zweistelligen Faktoren!

F. Dušek

Eigenschaften von Verknüpfungen

Teil 2

Gleichungen wie z. B. $x+3=y+3$ oder $x \cdot 12 = y \cdot 12$ liefern infolge äquivalenter Umformung jeweils $x=y$. Dieses „Streichen“ oder „Kürzen“ ist bei allen vier Grundrechenarten erlaubt; denn für alle reellen a, x und y gilt:

a) wenn $x+a=y+a$, so $x=y$;

b) wenn $x-a=y-a$ oder $a-x=a-y$, so $x=y$;

c) wenn $x \cdot a=y \cdot a$, so $x=y$ $(a\neq 0)$;

d) wenn $x:a=y:a$ $(a\neq 0)$ oder $a:x=a:y$ $(x\neq 0, y\neq 0, a\neq 0)$, so $x=y$.

Allgemein sagen wir, ein Verknüpfungsgebilde $(M, \circ)$ erfüllt die *Kürzungsregel*, wenn für alle $a, x, y \in M$

E_8: Wenn $x\circ a=y\circ a$ oder $a\circ x=a\circ y$, so $x=y$ gilt.

Auch diese Eigenschaft, die uns durch den ständigen Umgang mit den vier Grundrechenarten so vertraut ist, ist keineswegs selbstverständlich. So gilt sie z. B. in $(R^*, \circ_{11})$ mit $x\circ_{11}y=_{Df}|x-y|$ nicht: es ist $3\circ_{11}2=3\circ_{11}4$, aber $2\neq 4$. Wir betrachten das Verknüpfungsgebilde $(N\setminus\{0\}, \circ_6)$ mit $x\circ y=_{Df}x\uparrow y=x^y$. Wegen $1\uparrow 2=1\uparrow 3$, aber $2\neq 3$, versagt hier die Kürzungsregel ebenfalls. Sie läßt sich aber offensichtlich „reparieren“, indem wir den alleinigen „Störenfried“, die 1, aus der Trägermenge ausschließen. In der Tat gilt für alle von 0 und 1 verschiedenen natürlichen Zahlen a, x und y:

Wenn $x\uparrow a=y\uparrow a$ oder $a\uparrow x=a\uparrow y$, so $x=y$. Das Verknüpfungsgebilde $(N\setminus\{0, 1\}, \uparrow)$ erfüllt demnach die Kürzungsregel E_8.

Aufgabe 10:

a) Zeige, daß für das Verknüpfungsgebilde $(G, \circ_1)$ mit $x\circ_1 y=_{Df}2(x+y)$ die Kürzungsregel gilt!

b) Stelle fest, ob für die Verknüpfungsgebilde aus Aufgabe 1a) die Kürzungsregel erfüllt oder nicht erfüllt ist!

c) Begründe, warum auf die Mittelwert-Verknüpfungen die Kürzungsregel angewendet werden kann!

Aufgabe 11:

Wie lautet die Kontraposition der Kürzungsregel? (Sei $(M, \circ)$ ein Verknüpfungsgebilde, das die Kürzungsregel erfüllt:

Für alle x, y und $a\in M$ gilt:

Wenn $x\circ a=y\circ a$ oder $a\circ x=a\circ y$, so $x=y$.)

Sei $(M, \circ)$ ein Verknüpfungsgebilde; $a, b\in M$, beliebig.

Die Kürzungsregel läßt sich dann auch folgendermaßen interpretieren:

E_8: Wenn die Gleichungen $a\circ x=b$ oder $y\circ a=b$ Lösungen x bzw. y in M besitzen, so sind diese eindeutig.

Zum Beweis nehmen wir an, die Gleichung $a\circ x=b$ habe zwei Lösungen: x_1 und x_2. Dann gilt $a\circ x_1=b$ und $a\circ x_2=b$, d. h. aber $a\circ x_1 = a\circ x_2$. Wegen der Kürzungsregel erhalten wir die Einzigkeit $(x_1=x_2)$. Analog gehen wir im Falle $y\circ a=b$ vor.

Die Kürzungsregel sichert also die *Eindeutigkeit* von Lösungen (falls es überhaupt Lösungen gibt!). Über die *Existenz* solcher Lösungen trifft sie nämlich keine Aussage. So hat z. B. weder die Gleichung $3\circ_6 x=3\uparrow x=4$ noch die Gleichung $2\circ_1 x=1$ in der zugehörigen Trägermenge $N\setminus\{0, 1\}$ bzw. G eine Lösung. (Wir erinnern uns, daß sowohl für $\circ_6$ als auch für $\circ_1$ die Kürzungsregel zutrifft!)

Gilt in einem Verknüpfungsgebilde $(M, \circ)$:

E_9: Für alle $a, b\in M$ sind die Gleichungen $a\circ x=b$ und $y\circ a=b$ lösbar;

so nennen wir $(M, \circ)$ ein Verknüpfungsgebilde mit *Divisionsregel*. Diese Regel, die die (allerdings nicht notwendig eindeutige) Existenz von Lösungen der angegebenen Gleichungen garantiert, erinnert an die Division der Zahlen.

Zwei Beispiele, die dieser Regel nicht gehorchen, haben wir zuvor angegeben. Ein Verknüpfungsgebilde mit Divisionsregel ist $(R^*, \circ_{11})$ mit $x\circ_{11}y=_{Df}|x-y|$. ($|x-y|$ heißt Abstand oder Differenzbetrag von x und y.) Wegen der Kommutativität von $\circ_{11}$ genügt es, die Gleichung $a\circ_{11}x=b$ mit $a, b\in R^*$, beliebig, zu betrachten:

$$a\circ_{11}x=|a-x|=\begin{cases} a-x=b \text{ oder} \\ -(a-x)=b, \end{cases}$$

d. h., für alle $a, b\in R^*$ existieren damit Lösungen, nämlich $x_1=a-b$ und $x_2=b+a$. (Für $a\geq b$ ist die Lösung nicht eindeutig!)

Auch das arithmetische und geometrische Mittel über R bzw. P^+ erfüllen die Divisionsregel, das harmonische Mittel jedoch nicht. (Begründung?)

Aufgabe 12:

a) Überprüfe die naheliegende Vermutung, ob die Verknüpfungsgebilde $(P, +)$, $(P, -)$, $(P, \cdot)$ und $(P\setminus\{0\}, :)$ die Divisionsregel erfüllen!

b) Stelle fest, ob die Verknüpfungen aus Aufgabe 1a) die Divisionsregel erfüllen!

c) Überprüfe die Gültigkeit der Kürzungs- und Divisionsregel für die Verknüpfungsgebilde $(G, \circ_{13})$ und $(G, \circ_{14})$ aus Aufgabe 3a)!

d) Untersuche, welche der in *alpha* 4, 1977, genannten geometrischen Verknüpfungen die Kürzungs- oder Divisionsregel erfüllen!

e) Welche Verknüpfungsgebilde dieses Beitrages erfüllen die Kürzungs- *und* Divisionsregel?

Addieren wir zu einer Zahl x die 0, wird diese Zahl x „reproduziert“. Das gleiche trifft für die Multiplikation einer Zahl x mit 1 zu. Das heißt, für jede reelle Zahl x gilt

$$x+0=0+x=x \text{ und}$$
$$x\cdot 1=1\cdot x=x.$$

Allgemein definieren wir:

Ein Element n eines Verknüpfungsgebildes $(M, \circ)$ heißt *neutrales Element*, wenn für jedes $x\in M$

E_{10}: $x\circ n=n\circ x=x$ gilt.

Die 0 ist also neutrales Element bzgl. der Addition oder in $(P, +)$, die 1 analog bzgl. der Multiplikation oder in $(P, \cdot)$.

Besitzen auch andere Verknüpfungsgebilde ein neutrales Element?

$(P, -)$ und $(P\setminus\{0\}, :)$ besitzen kein neutrales Element.

Zwar gilt für jedes reelle x

$$x-0=x, \text{ nicht aber } 0-x=x.$$

(Analog $x:1=x$, nicht aber $1:x=x$.)

Ein Element n_r eines Verknüpfungsgebildes $(M, \circ)$ heißt *rechts-neutrales Element*, wenn für jedes $x\in M$

E_{11}: $x\circ n_r=x$ gilt.

(Analog wird n_l als *links-neutrales Element* durch $n_l\circ x=x$ für jedes $x\in M$ definiert (E_{12}).)

Die 0 und die 1 sind also bzgl. Subtraktion bzw. Division lediglich jeweils rechts-neutrales Element. Auch das Verknüpfungsgebilde $(N\setminus\{0\}, \uparrow)$ besitzt ein rechts-neutrales Element n_r:

Für jedes $x\in N\setminus\{0\}$ gilt nämlich $x\uparrow 1=x$. Die 1 ist nicht links-neutral: $1\uparrow x\neq x$ (für $x\neq 1$).

Ein Verknüpfungsgebilde mit einem linksneutralen Element n_l ist $(R^*, \circ_5)$:

Für jede gebrochene Zahl x gilt $0\circ_5 x=2\cdot 0+x=x$. Die 0 ist nicht rechts-neutral: $x\circ_5 0 = 2\cdot x+0=2x\neq x$ (für $x\neq 0$).

Aufgabe 13:

a) Zeige: Besitzt ein Verknüpfungsgebilde $(M, \circ)$ sowohl ein links-neutrales Element n_l als auch ein rechts-neutrales Element n_r, so existiert auch ein neutrales Element n.

b) Sei $(M, \circ)$ ein Verknüpfungsgebilde mit einem neutralen Element n. Beweise, daß dann in $(M, \circ)$ kein weiteres neutrales Element existieren kann!

c) Überprüfe die Eindeutigkeit gemäß b) im Hinblick auf einseitig-neutrale Elemente!

Während die Mittelwert-Verknüpfungen weder links-neutrale noch rechts-neutrale Elemente zulassen (Begründung?), haben mehrere Verknüpfungsgebilde aus Aufgabe 1a) jeweils ein neutrales Element. Zum Beispiel besitzt $(R^*, \circ_{11})$ mit $x\circ_{11}y=_{Df}|x-y|$ das neutrale Element $n=0$: $|x-0|=|0-x|=x$ für jedes $x\in R^*$.

Aufgabe 14:

Untersuche die Verknüpfungsgebilde aus Aufgabe 1a) im Hinblick auf die Existenz eines neutralen Elements bzw. einseitig-neutraler Elemente!

Es ist keineswegs ein Vorrecht der Zahlen 0 und 1, neutrales Element in einem Verknüpfungsgebilde zu sein. Betrachten wir nämlich das Verknüpfungsgebilde $(G, \circ_{12})$ mit $x \circ_{12} y =_{Df} x + y - 3$, so stoßen wir auf $n = 3: x \circ_{12} 3 = 3 \circ_{12} x = x + 3 - 3 = x$ für jedes $x \in G$.

Von der „Uhr-Addition" wissen wir, daß $n = 12$ das neutrale Element ist: Nach genau 12 Stunden, d. h. nach einer vollen Drehung, zeigt der (kleine) Zeiger wieder auf dieselbe Stelle! Für jedes $x \in M = \{1, 2, \ldots, 12\}$ gilt also

$$x + \odot 12 = 12 + \odot x = x.$$

In dem Verknüpfungsgebilde $(\mathfrak{P}(M), \cap)$ ist die Menge M das neutrale Element, in $(\mathfrak{P}(M), \cup)$ dagegen die leere Menge:

Für jedes $X \in \mathfrak{P}(M)$ gilt

1. $X \cap M = M \cap X = X$ und
2. $X \cup \varnothing = \varnothing \cup X = X$ – vgl. *alpha*, 4/1977, Aufgabe 12c, S. 96);

$X \in \mathfrak{P}(M)$ heißt nach Definition: $X \subseteq M$.

Multiplizieren wir eine Zahl x mit 0, wird diese Zahl x „aufgesaugt" oder „absorbiert": Für jede reelle Zahl x gilt

$$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0.$$

Allgemein definieren wir:

Ein Element a eines Verknüpfungsgebildes $(M, \circ)$ heißt *absorbierendes Element*, wenn für jedes $x \in M$

E_{13}: $a \circ x = x \circ a = a$ gilt.

Daß auch andere Zahlen als 0 diese Eigenschaft E_{13} besitzen können, zeigen die Verknüpfungsgebilde

$(N, \circ_7)$ mit $x \circ_7 y = x \sqcap y = \text{ggT}(x, y)$ bzw.

$(G, \circ_{10})$ mit $x \circ_{10} y = x + y + xy$. Im ersten Fall ist $a = 1$, im zweiten Fall $a = -1$ absorbierendes Element:

$1 \sqcap x = x \sqcap 1 = 1$ und $(-1) \circ_{10} x = x \circ_{10} (-1) = -1$.

Ein Element a_l eines Verknüpfungsgebildes $(M, \circ)$ heißt *links-absorbierendes Element*, wenn für jedes $x \in M$

E_{14}: $a_l \circ x = a_l$ gilt.

(Analog wird wieder a_r als *rechts-absorbierendes Element* durch $x \circ a_r = a_r$ für jedes $x \in M$ definiert (E_{15}).) Im Verknüpfungsgebilde $(N \setminus \{0\}, \circ_6)$ ist die 1 zwar links-absorbierend, nicht aber rechts-absorbierend!

Überlege dir, ob die Verknüpfungsgebilde $(\mathfrak{P}(M), \cap)$ und $(\mathfrak{P}(M), \cup)$ ein absorbierendes Element besitzen!

Aufgabe 15:

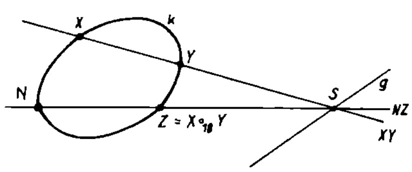
Untersuche, ob die Verknüpfungsgebilde $(G, \circ_{13})$ und $(G, \circ_{14})$ aus Aufgabe 3a) ein neutrales oder absorbierendes Element besitzen!

Aufgabe 16:

Beweise, daß das Verknüpfungsgebilde $(P^+, \circ_{17})$ mit $x \circ_{17} y =_{Df} x \uparrow \ln y = x^{\ln y}$ für alle $x, y \in P^+$ kommutativ, assoziativ und bisymmetrisch ist, ein neutrales Element n und ein absorbierendes Element a besitzt, aber weder die Divisions- noch die Kürzungsregel erfüllt!

Abschließend betrachten wir ein geometrisches Verknüpfungsgebilde mit einem neutralen Element. Sei dazu k ein Kegelschnitt in der Ebene ε; g eine Gerade in ε, die k meidet. Auf k wählen wir einen beliebigen Punkt N, den wir im folgenden fest lassen. Für beliebige Punkte $X, Y \in k$ definieren wir $X \circ_{18} Y$ als den Punkt $Z \in k$, so daß die Geraden XY, NZ und g einen gemeinsamen Schnittpunkt S besitzen. Für $NZ \nparallel NN$ sei $Z \nparallel N$.

Es gilt: $X \circ_{18} N = N \circ_{18} X = X$. Der Punkt N ist das neutrale Element.



Aufgabe 17:

Ermittle weitere Eigenschaften des Verknüpfungsgebildes $(k, \circ_{18})$!

Vergegenwärtigen wir uns noch einmal alle bisher betrachteten Verknüpfungsgebilde, so besitzen viele von ihnen z. T. sehr ähnliche Eigenschaften, obwohl ihre Verknüpfungsvorschriften kaum Gemeinsamkeiten erkennen lassen. Andererseits können gleiche Verknüpfungsvorschriften verschiedene Eigenschaften nach sich ziehen, wenn unterschiedliche Trägermengen zugrunde gelegt werden. Die hier untersuchten Eigenschaften E_1 bis E_{15} präzisieren damit unsere Vorstellungen und Kenntnisse in bezug auf Verknüpfungsgebilde ganz wesentlich.

I. Lehmann

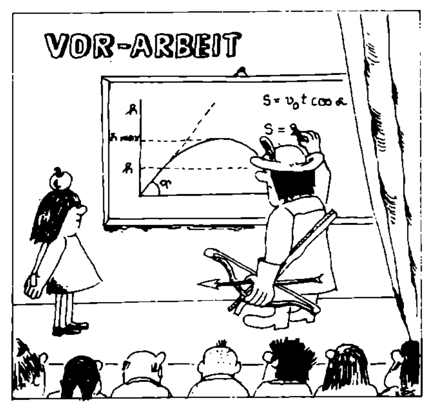
(Lösungen siehe Seite 71.)

Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. József Molnár

Loránd-Eötvös-Universität Budapest
Lehrstuhl Geometrie

▲1763▲ Für $i = 1, 2, 3$ sei $\triangle OTP_i$ ein rechtwinkliges Dreieck mit OP_i als Hypotenuse; dabei seien P_1, P_2, P_3 auf einem Strahl mit dem Anfangspunkt T so angeordnet, daß $\overline{TP_1} < \overline{TP_2} < \overline{TP_3}$ gilt. Ferner sei k ein Kreis um 0 mit beliebigem Radius. Es bezeichne jeweils $\Delta(P_iOP_j)$ den Flächeninhalt des Dreiecks P_iOP_j und $s(P_iOP_j)$ den Flächeninhalt desjenigen Sektors von k, der zum Zentriwinkel $\sphericalangle P_iOP_j$ gehört. Beweise, daß dann

$$\frac{s(P_1OP_2)}{\Delta(P_1OP_2)} > \frac{s(P_1OP_3)}{\Delta(P_1OP_3)} \text{ gilt!}$$



Das System Internationaler Einheiten (SI)

SI-Basiseinheiten/ Größe/Name	*Symbol*
Länge	l
Zeit	t
Masse	m
elektr. Stromstärke	I
thermodyn. Temperatur	T
Stoffmenge	n
Lichtstärke	I_v

Einheit/Name	*Symbol*
Meter	m
Sekunde	s
Kilogramm	kg
Ampere	A
Kelvin	K
Mol	mol
Candela	cd

Genormte Vorsatzzeichen für Vielfache oder Teile der SI-Einheiten

Vorsilbe	*Vorsatzzeichen*	*Zehnerpotenz*
Exa	E	10^{18}
Peta	P	10^{15}
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^{9}
Mega	M	10^{6}
Kilo	k	10^{3}
Hekto	h	10^{2}
Deka	da	10
Dezi	d	10^{-1}
Zenti	c	10^{-2}
Milli	m	10^{-3}
Mikro	µ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Piko	p	10^{-12}
Femto	f	10^{-15}
Atto	a	10^{-18}

Ein Stück Wissenschaftsgeschichte – Mathematik im alten Indien

Indien hat der Welt viele praktische Segnungen zuteil werden lassen: nachweisbar Reis, Baumwolle, Zuckerrohr, viele Gewürze, das Schachspiel und am wichtigsten von allem, das Dezimalsystem der Zahlenschreibweise – die Erfindung eines unbekannten indischen Mathematikers der frühchristlichen Ära.

Durch die Notwendigkeit, den freien Platz für ein Opfer genau festzulegen, entwickelten die Inder sehr früh ein einfaches System der Geometrie, doch auf dem Gebiet des praktischen Wissens verdankt die Welt Indien am meisten im Bereich der Mathematik, die sich zur Zeit des *Gupta-Reiches* (3. bis 5. Jh. u. Z.) hoch entwickelte und die fortgeschrittener war als in anderen Ländern des Altertums. Der Erfolg der indischen Mathematik beruhte hauptsächlich auf der Tatsache, daß die Inder eine klare Konzeption der abstrakten Zahl hatten, zum Unterschied von der numerischen Quantität von Objekten in der räumlichen Ausdehnung. Während die griechische mathematische Wissenschaft weitgehend auf Meßkunst und Geometrie basierte, ging man in Indien schon daran, mit Hilfe einer einfachen Zahlenbezeichnung Ansätze einer Algebra zu entwickeln, die kompliziertere Berechnungen erlaubte, als es den Griechen möglich war, und die zum Studium der Zahl an sich führte.

In den früheren Inschriften Indiens sind Daten und andere Zahlen in einer Schreibweise verzeichnet, die der der Römer, der Griechen und Hebräer nicht unähnlich war und mit gesonderten Symbolen für die Zehn und die Hundert operierte. Die früheste Inschrift, die das Datum in einem System von neun Zahlen und einer Null mit Stellenwertbezeichnung für die Zehn und Hundert wiedergibt, kommt aus Gujarat und datiert aus dem Jahre 595 u. Z. Bald danach hatte man das neue System in Syrien zur Kenntnis genommen, und es wurde bald auch z. B. in Vietnam verwendet. Offensichtlich war das System den Mathematikern schon einige Jahrhunderte lang bekannt, bevor es für Inschriften benutzt wurde, deren Schreiber dazu neigten, in ihren Methoden der Datenaufzeichnung konservativ zu sein; im modernen Europa wird das schwerfällige römische System manchmal immer noch für den gleichen Zweck benutzt. Der Name des Mathematikers, der das vereinfachte System, Zahlen zu schreiben, ersann, ist unbekannt; aber der früheste erhaltene mathematische Text – das anonyme „Bakhskali-Manuskript" (2. Jh. u. Z.) und das *Aryabhatiya* des *Aryabhata*, geschrieben 499 u. Z. – setzen es voraus.

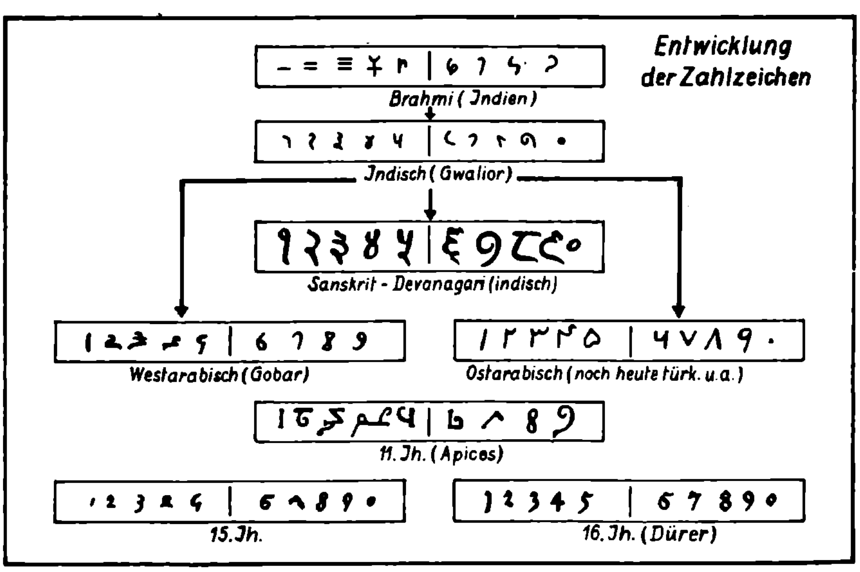
Lange glaubte man, das Dezimalsystem sei von den Arabern erfunden worden, doch dies ist gewiß nicht der Fall. Die Araber selbst nannten die Mathematik „die Indische (Kunst)" (hindisat), und es scheint, daß die Dezimalschreibung zusammen mit anderen indischen mathematischen Überlieferungen der mohammedanischen Welt entweder durch Kaufleute übermittelt wurde, die mit der Westküste Indiens Handel trieben oder durch die Araber, die im Jahre 712 u. Z. Sind eroberten.

Was die Welt Indien in dieser Hinsicht verdankt, kann nicht hoch genug eingeschätzt werden. Die meisten der großen Entdeckungen und Erfindungen, auf die man in Europa so stolz ist, wären ohne ein entwickeltes System der Mathematik undenkbar. Und dies wiederum wäre unmöglich gewesen, wenn Europa an das enge römische Zahlensystem gebunden geblieben wäre. Die Leistung des unbekannten indischen Mathematikers war, obwohl sie leichthin als selbstverständlich gilt, das Werk eines analytischen Geistes höchsten Ranges, dem viel mehr Ehre gebührt, als ihm bisher zuteil wurde.

Mittelalterliche indische Mathematiker, wie *Brahmagupta* (7. Jahrhundert), *Mahavira* (9. Jahrhundert) und *Bhaskara II* (12. Jahrhundert), machten verschiedene Entdeckungen, die in Europa bis zur Renaissance oder noch später unbekannt waren. Sie verstanden die Einführung positiver und negativer Mengen, entwickelten taugliche Systeme für das Ziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln und konnten quadratische und gewisse Arten von unbestimmten Gleichungen lösen. Für π gab *Aryabhata* den üblichen modernen Näherungswert von 3,1416 an, ausgedrückt in der Form des Bruches $\frac{62832}{20000}$. Dieser Wert von π, viel genauer als der der Griechen, wurde von späteren indischen Mathematikern auf neun Dezimalstellen verbessert. In der Trigonometrie, in der sphärischen Geometrie und Differentialrechnung, hauptsächlich in Verbindung mit der Astronomie, wurden mehrere Fortschritte erzielt. Die mathematischen Begriffe von „Null" (schunya) und „Unendlich", von klassischen Autoritäten immer nur unklar angewandt, wurden im mittelalterlichen Indien voll verstanden. Frühere Mathematiker hatten gelehrt, daß $\frac{x}{0} = x$ sei, aber *Bhaskara II* bewies, daß es unendlich ist. Er begründete auch mathematisch, was in der indischen Wissenschaft mindestens ein Jahrtausend früher erkannt wurde, daß das Unendliche, wie auch immer geteilt, unendlich bleibt.

H. K. Singh
(gekürzt, aus Urania 7/76)

Indische Mathematiker legten um 700 u. Z.
die Fundamente für unser modernes, auf dem Positionssystem
beruhenden dezimalen Zahlensystem



XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen

Kreisolympiade

Klassenstufe 5

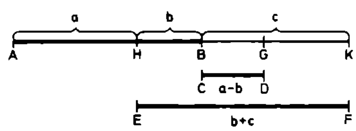
1. Für $1\ \mathrm{ha} = 10000\ \mathrm{m}^2$ sind $2\ \mathrm{dt} = 200000\ \mathrm{g}$ Saatgut üblich; folglich werden für je $1\ \mathrm{m}^2$ dann 20 g benötigt. Für $8\ \mathrm{m}^2$ wurden wegen $8 \cdot 20 = 160$ daher 160 g Saatgut genommen. Der Ernteertrag betrug wegen $15 \cdot 160 = 2400$ folglich $2400\ \mathrm{g} = 2{,}4\ \mathrm{kg}$.

2. Bezeichnet man die Anzahl der Vögel, die am Ende auf dem ersten Baum sitzen, mit x, dann sitzen auf dem zweiten Baum $2x$ Vögel, auf dem dritten $4x$ Vögel. Das sind zusammen $7x$ Vögel. Wegen $56:7=8$ müssen mithin zuletzt auf dem ersten Baum 8 Vögel, auf dem zweiten Baum 16 Vögel, auf dem dritten Baum 32 Vögel sitzen.
Auf dem ersten Baum saßen daher am Anfang 7 Vögel mehr als 8 Vögel, d.s. 15 Vögel. Auf dem zweiten Baum saßen zu Anfang noch nicht die später vom ersten Baum zugeflogenen 7 Vögel, dafür aber die dann zum dritten Baum geflogenen 5 Vögel; also waren es zu Anfang 2 Vögel weniger als 16 Vögel, d.s. 14 Vögel. Auf dem dritten Baum saßen am Anfang 5 Vögel weniger als 32 Vögel, d.s. 27 Vögel.

3. Die Anzahl der Parzellen der Größe $150\ \mathrm{m}^2$ ist eine der Zahlen von 0 bis 9. Für jede dieser Zahlen erhält man folgende Werte: Da der Flächeninhalt aller Parzellen $1710\ \mathrm{m}^2$ beträgt, gibt es folglich 3 Parzellen der Größe $150\ \mathrm{m}^2$ und 6 Parzellen der Größe $210\ \mathrm{m}^2$.

Anzahl	Flächeninhalt	Anzahl	Flächeninhalt	Flächeninhalt aller Parzellen
der Parzellen der Größe $150\ \mathrm{m}^2$		der Parzellen der Größe $210\ \mathrm{m}^2$		
0	$0\ \mathrm{m}^2$	9	$1890\ \mathrm{m}^2$	$1890\ \mathrm{m}^2$
1	$150\ \mathrm{m}^2$	8	$1680\ \mathrm{m}^2$	$1830\ \mathrm{m}^2$
2	$300\ \mathrm{m}^2$	7	$1470\ \mathrm{m}^2$	$1770\ \mathrm{m}^2$
3	$450\ \mathrm{m}^2$	6	$1260\ \mathrm{m}^2$	$1710\ \mathrm{m}^2$
4	$600\ \mathrm{m}^2$	5	$1050\ \mathrm{m}^2$	$1650\ \mathrm{m}^2$
5	$750\ \mathrm{m}^2$	4	$840\ \mathrm{m}^2$	$1590\ \mathrm{m}^2$
6	$900\ \mathrm{m}^2$	3	$630\ \mathrm{m}^2$	$1530\ \mathrm{m}^2$
7	$1050\ \mathrm{m}^2$	2	$420\ \mathrm{m}^2$	$1470\ \mathrm{m}^2$
8	$1200\ \mathrm{m}^2$	1	$210\ \mathrm{m}^2$	$1410\ \mathrm{m}^2$
9	$1350\ \mathrm{m}^2$	0	$0\ \mathrm{m}^2$	$1350\ \mathrm{m}^2$

4. Trägt man auf der Verlängerung von AB über B hinaus eine Strecke BG der Länge $\overline{BG} = \overline{CD}$ ab, so wird $\overline{AG} = \overline{AB} + \overline{BG} = \overline{AB} + \overline{CD} = (a+b) + (a-b) = 2a$. Konstruiert man den Mittelpunkt H der Strecke AG, so wird folglich $\overline{AH} = a$. Hiernach wird ferner $\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{AH} = (a+b) - a = b$. Konstruiert man daher auf der Verlängerung von HB über B hinaus einen Punkt K so, daß $\overline{HK} = \overline{EF}$ gilt, so ergibt sich $\overline{BK} = \overline{HK} - \overline{HB} = \overline{EF} - \overline{HB} = (b+c) - b = c$.



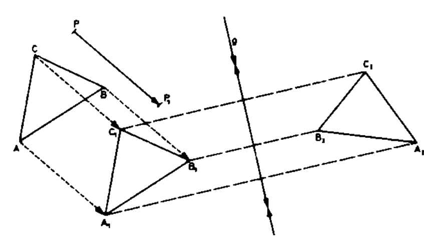
Klassenstufe 6

1. Am ersten Tag legte man $\frac{1}{3}$ und am dritten Tag $\frac{1}{4}$ der Gesamtstrecke zurück. Damit wurde wegen $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ an diesen beiden Tagen $\frac{7}{12}$ der gesamten Strecke bewältigt.
Die restlichen 150 km sind also genau $\frac{5}{12}$ der Gesamtstrecke. Wegen $150:5=30$ sind folglich 30 km genau $\frac{1}{12}$ der Gesamtstrecke; diese beträgt demnach $12 \cdot 30\ \mathrm{km} = 360\ \mathrm{km}$.

2. Da (2) falsch ist, belegte Elke weder den vorletzten, noch einen besseren Platz, sie wurde also Fünfte. Da (1) falsch ist, kam Christa unmittelbar vor Elke ins Ziel und wurde daher Vierte. Da (4) falsch ist, belegte Franziska den dritten Platz. Folglich verblieben der erste und zweite Platz für Doris und Gitta. Da (3) falsch ist, lief Doris nicht schneller als Gitta. Da ihre Zeit ferner nicht dieselbe war wie die Gittas, belegte sie folglich den zweiten Platz und Gitta den ersten.
Die tatsächliche Reihenfolge des Einlaufs lautet mithin: Gitta, Doris, Franziska, Christa, Elke.

3. Aus 36 Rohlingen ergeben sich zunächst 36 Einzelteile; die Abfallspäne von je 6 Rohlingen ergeben dann noch einen Rohling, d. h. aus den Abfallspänen von 36 Rohlingen kann man 6 neue Rohlinge anfertigen. Aus ihnen lassen sich noch einmal 6 Einzelteile herstellen. Die dabei anfallenden Späne ergeben einen weiteren Rohling. Fertigt man aus ihm wieder ein Einzelteil an, so fallen zwar wieder Späne an, diese lassen sich aber nicht mehr (nach Einschmelzen) zur Herstellung eines weiteren Rohlings verwenden. Also beträgt die gesuchte Anzahl von Einzelteilen $36+6+1=43$.

4.



Klassenstufe 7

1. Bernd saß neben Anja und Cathrin. Daher kann er wegen (1) nur Evas Bruder sein. Dirk saß zwischen Cathrin und Eva, kann also ebenfalls wegen (1) nur Anjas Bruder sein. Wegen (1) und (2) können Frank und Gerold weder Anjas noch Evas Brüder sein. Sie sind mithin Cathrins Brüder.

2. a) Es sei a eine beliebige natürliche Zahl. Dann gilt:
$a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4) = 5a+10$.
Es gilt der Satz: Wenn z ein Teiler sowohl von x als auch von y ist, so ist z auch ein Teiler der Summe $x+y$.
Nun ist 5 ein Teiler von $5a$, und 5 ist auch ein Teiler von 10.
Folglich gilt: $5 \mid 5a+10$, w.z.b.w.
b) Ein Gegenbeispiel zeigt, daß die Summe von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen nicht immer durch 6 teilbar ist:
Es gilt z. B.
$1+2+3+4+5+6=21;\ 6 \nmid 21$.
c) Für $n=7$ z. B. gilt:
$a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)+(a+5)+(a+6) = 7a+21$.
Nun gilt $7 \mid 7a$ und $7 \mid 21$,
daraus folgt: $7 \mid 7a+21$.
Eine natürliche Zahl, für die die Aussage wahr ist, ist somit z. B. $n=7$.

3. Wenn ein gleichschenkliges Dreieck die geforderte Eigenschaft hat und darin x die Größe eines Basiswinkels, y die Größe des Winkels an der Spitze sowie x' und y' die Größen der zu x bzw. y gehörenden Außenwinkel (Nebenwinkel) sind, so gilt eine der Gleichungen

(1) $x+x+x'=300°$,
(2) $x+x+y'=300°$,
(3) $x+y+x'=300°$,
(4) $x+y+y'=300°$.

Wegen $x'+x=180°$ bzw. $y'+y=180°$ folgt sowohl aus (1) als auch aus (4) jeweils $x=120° > 90°$ im Widerspruch dazu, daß x die Größe eines Basiswinkels ist.

Aus (2) erhält man, da nach dem Außenwinkelsatz $y'=2x$ gilt, $4x=300$ und damit $x=75°$, $y=30°$.

Wegen $x+x'=180°$ folgt aus (3) $y=120°$ und $x=30°$.

Als Möglichkeiten für die Größen der Innenwinkel dieses Dreiecks verbleiben mithin nur 75°; 75°; 30° oder 30°; 30°; 120°. Diese Größen erfüllen die Forderungen der Aufgabe; denn wegen $75°+75°+30°=180°$ bzw. $30°+30°+120°=180°$ sind sie Innenwinkelgrößen von Dreiecken, und im ersten Fall beträgt die Summe der Größen der beiden Innenwinkel und des Außenwinkels $75°+75°+(180°-30°)=75°+75°+150°=300°$, im zweiten Falle $30°+120°+(180°-30°)=30°+120°+150°=300°$.

4. Wenn eine vierstellige Zahl die geforderten Eigenschaften hat, so folgt zunächst, daß sie durch 4 teilbar ist, also (nach der Teilbarkeitsregel für 4) auch die zweistellige Zahl mit der Zifferndarstellung $\overline{7y}$. Von den Zahlen 70, ..., 79 sind nur 72 und 76 durch 4 teilbar, also verbleiben nur die Möglichkeiten $y=2$, $y=6$. Nun folgt weiter:

Ist $y=2$, so kommen für x auf Grund der Teilbarkeitsregel für 3 nur die Ziffern 0, 3, 6, 9 in Frage. Hiervon entfallen auf Grund der Teilbarkeitsregeln für 8 jedoch 3 und 9, da 372 und 972 nicht durch 8 teilbar sind.

Ist $y=6$, so kommen für x auf Grund der Teilbarkeitsregeln für 3 nur die Ziffern 2, 5 und 8 in Frage. Hiervon entfallen jedoch 2 und 8, da 276 und 876 nicht durch 8 teilbar sind.

Also können nur die Zahlen

9072, 9672 und 9576

die geforderten Eigenschaften haben.

Sie haben diese Eigenschaften; denn ihre Zifferndarstellung ist von der vorgeschriebenen Form, und sie sind durch 24 teilbar.

Klassenstufe 8

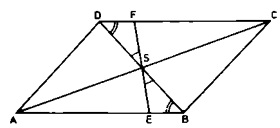
1. (1) Angenommen, Christoph hätte den Fingerhut, dann wäre Birgits Aussage falsch, im Widerspruch zu den Spielregeln. Deshalb hat Christoph den Fingerhut nicht.

(2) Angenommen, Birgit hätte den Fingerhut, dann wäre Anjas Aussage falsch, im Widerspruch zu den Spielregeln. Deshalb hat Birgit den Fingerhut auch nicht.

(3) Folglich kann höchstens Anja den Fingerhut haben. Tatsächlich ist dann Anjas Aussage falsch, und die Aussagen von Birgit und Christoph sind wahr.

Also steht eindeutig fest, daß Anja den Fingerhut an sich genommen hat.

2. Es seien $ABCD$ ein Parallelogramm, E ein Punkt auf der Seite AB und F ein Punkt auf der Seite CD, und zwar so gelegen, daß die Strecke EF durch den Schnittpunkt S der Diagonalen des Parallelogramms geht.



Fällt F mit D zusammen, dann ist FE gleich der Diagonalen BD des Parallelogramms $ABCD$. Folglich fällt danach auch E mit B zusammen, und es gilt $\overline{BS}=\overline{SD}$, da die Diagonalen im Parallelogramm einander halbieren. Falls $F \neq D$ ist, so ist auch $E \neq B$ (denn aus $E=B$ folgte wie eben auch $F=D$), und es gilt:

$\overline{\sphericalangle BSE} = \overline{\sphericalangle DSF}$ als Scheitelwinkel

an geschnittenen Parallelen.

$\overline{\sphericalangle EBS} = \overline{\sphericalangle FDS}$ als Wechselwinkel

Also gilt $\triangle SEB \cong \triangle DSF$, da diese Dreiecke in einer Seite und beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.

Daraus folgt $\overline{ES}=\overline{SF}$, d. h. die Strecke EF wird durch den Schnittpunkt S der Diagonalen halbiert.

3. Da A, B, C, D, E Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sind, liegen sie alle auf der Peripherie eines Kreises; dessen Mittelpunkt sei M. Verbindet man M mit den genannten Eckpunkten, so entstehen 5 kongruente Dreiecke AMB, BMC, CMD, DME, EMA. Die Summe ihrer Winkel mit dem Scheitel M bildet einen Vollwinkel, so daß jeder dieser Winkel $360°:5=72°$ beträgt. Da im Kreis jeder Peripheriewinkel halb so groß wie der Zentriwinkel über dem gleichen Bogen ist, gilt

$$\overline{\sphericalangle ADB}=\frac{1}{2}\,\overline{\sphericalangle AMB}=\frac{1}{2}\cdot 72°=36°.$$

4. Das Alter des Vaters ist eine Quadratzahl kleiner als 45, da das Alter von Vater und Mutter zusammen nicht 87 Jahre oder mehr betragen kann. Da der Vater die älteste der vier Personen ist, beträgt sein Alter mindestens ein Viertel von 87 Jahren, also ist es größer als 21.

Zwischen 21 und 45 liegen genau die Quadratzahlen 25 und 36.

Fall 1: Angenommen, das Alter des Vaters wäre 25 Jahre. Dann wären Fritz 5 Jahre, Dieter 10 Jahre und die Mutter 22 Jahre. Das Alter aller Familienangehörigen zusammen betrüge in diesem Fall nicht 87 Jahre. Also ist der Vater nicht 25 Jahre alt.

Fall 2: Angenommen, das Alter des Vaters beträgt 36 Jahre. Dann ist Fritz 6 Jahre, Dieter 12 Jahre und die Mutter 33 Jahre alt. Alle zusammen sind wegen $36+6+12+33=87$ mithin 87 Jahre alt, wie es verlangt war. Folglich treffen diese Altersangaben als einzige zu.

Klassenstufe 9

1. a) Ein Punkt hat genau dann die verlangten Eigenschaften, wenn für seine Koordinaten x, y sowohl die Gleichung $y=\frac{1}{2}x+n$ a's auch die Gleichung $y=2x$ gilt. Ist dies der Fall, so folgt $2x=\frac{1}{2}x+n$, $x=\frac{2}{3}n$, $y=\frac{4}{3}n$. Daher können nur diese Werte x, y die genannten Gleichungen erfüllen. Wegen $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}n+n=\frac{4}{3}n$ und $2\cdot\frac{2}{3}n=\frac{4}{3}n$ erfüllen sie in der Tat diese Gleichungen. Also hat (jeweils für ein n) genau der Punkt mit dem Koordinatenpaar $\left(\frac{2}{3}n, \frac{4}{3}n\right)$ die verlangten Eigenschaften.

b) Ein Punkt hat genau dann die verlangten Eigenschaften, wenn für seine Koordinaten x, y sowohl die Gleichung $y=mx+n$ als auch die Gleichung $y=2x$ gilt.

Ist $m=2$ und $n=0$, so trifft dies genau für alle Punkte der Geraden zu, die $y=2x$ als Gleichung hat.

Ist $m=2$ und $n \neq 0$, so gelten für kein Zahlenpaar (x, y) beide geforderten Gleichungen, also gibt es in diesem Fall keinen Punkt mit den verlangten Eigenschaften.

Ist $m \neq 2$, so gilt: Wenn x, y die geforderten Gleichungen erfüllen, so folgt $2x=mx+n$, $x=\frac{n}{2-m}$, $y=\frac{2n}{2-m}$. Daher können im Fall $m \neq 2$ nur diese Werte x, y die Gleichungen erfüllen. Wegen $m\cdot\frac{n}{2-m}+n=\frac{2n}{2-m}$ und $2\cdot\frac{n}{2-m}=\frac{2n}{2-m}$ erfüllen sie in der Tat diese Gleichungen. Also hat (jeweils für ein Paar (m, n) mit $m \neq 2$) genau der Punkt mit dem Koordinatenpaar $\left(\frac{n}{2-m}, \frac{2n}{2-m}\right)$ die verlangten Eigenschaften.

Natürlich kann a) auch als Spezialfall von b) gewonnen werden.

2. Es gilt z. B.

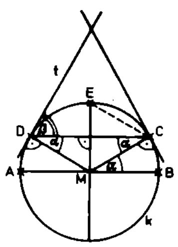
(1) $5\cdot 5+5 \quad =30$ und
(2) $5\cdot(5+5:5)=30$.

Da in (1) genau dreimal die Zahl 5 verwendet wird, läßt sich die Aussage für jedes ungerade n erfüllen, indem man z. B. auf der linken Seite von (1) $\frac{n-3}{2}$mal den Term $5-5$ addiert.

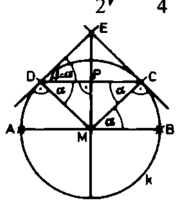
Da in (2) genau viermal die Zahl 5 verwendet wird, läßt sich die Bedingung für jedes gerade $n>2$ erfüllen, indem man z. B. auf der linken Seite von (2) $\frac{n-4}{2}$mal den Term $5-5$ addiert.

3. Bei jeder Lage von C, D (auf k, mit $ABCD$ konvex und $AB \parallel DC$) ist zunächst $\overline{\sphericalangle MDC}$

$= \overline{\sphericalangle MCD}$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)
$= \overline{\sphericalangle CMB}$ (Wechselwinkel an Parallelen)
$= \alpha$.
Da der Radius MD senkrecht auf der Tangente t steht, folgt hieraus $\alpha + \beta = 90°$. (1)
a) Daher gilt genau dann $2\alpha = \beta$, wenn $\alpha = 30°$ ist. Dies gilt genau dann, wenn durch Spiegelung von M an CD ein Punkt E entsteht, für den $\overline{\sphericalangle MCE} = 60°$ ist. Da bei dieser Spiegelung $\overline{MC} = \overline{EC}$ gilt, ist die genannte Bedingung genau dann erfüllt, wenn $\triangle MCE$ gleichseitig ist, d. h. genau dann, wenn E auf k liegt. Dies trifft genau dann zu, wenn der Abstand zwischen AB und DC gleich dem halben Radius von k, d. h. gleich $\frac{1}{4}\overline{AB}$ ist.



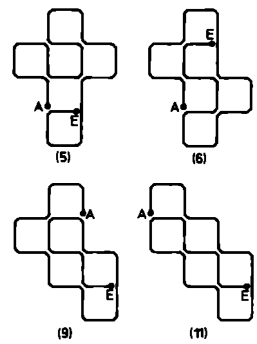
b) In (1) gilt genau dann $\alpha = \beta$, wenn $\alpha = 45°$ ist, d. h. genau dann, wenn $\triangle CDM$ ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit dem Radius r von k als Kathetenlänge ist. In diesem Dreieck ist die Länge der Höhe durch M gleich dem Abstand von AB zu CD. Wenn das Dreieck gleichschenklig-rechtwinklig ist, so ist nach dem Satz des Pythagoras $\overline{CD} = r \cdot \sqrt{2}$. Ferner zerlegt dann die Höhe MP das Dreieck in zwei gleichschenklig-rechtwinklige Teildreiecke, also ist die Höhenlänge $\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{2}$. Wird umgekehrt vorausgesetzt, daß AB und CD den Abstand $\overline{MP} = \frac{r}{2}\sqrt{2}$ voneinander haben, so ist nach dem Satz des Pythagoras
$\overline{CP} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \overline{MP}$, also $\overline{\sphericalangle MCP} = \overline{\sphericalangle CMP}$, d. h. $\alpha = 45°$.
Daher gilt genau dann $\alpha = \beta$, wenn CD von AB den Abstand $\frac{r}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\overline{AB}\sqrt{2}$ hat.



4. Soll ein Streckenzug zu einem Punkt hin und von ihm wieder weg führen, dann muß die Anzahl der in diesem Punkt zusammentreffenden Strecken eine gerade Zahl sein.
Ein Streckenzug der geforderten Art ist daher höchstens möglich, wenn die Figur nicht mehr als 2 Punkte enthält, in denen eine ungerade Anzahl von Strecken zusammentrifft.
Die Tabelle gibt an, wieviel Punkte, in denen genau drei Strecken zusammentreffen, bei jedem der Netze existieren.

Nr. des Netzes	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
Anzahl solcher Punkte	6	4	4	6	2	2	6	4	2	4	2

Daher lassen sich höchstens die Netze (5), (6), (9) und (11) in einem Zuge zeichnen. Die folgende Probe ergibt, daß dies auch tatsächlich möglich ist:
In der Abbildung sind Anfangs- und Endpunkte eines solchen Streckenzuges mit A und E bezeichnet, und ein möglicher Streckenzug ist jeweils dargestellt.



Klassenstufe 10

1. Wenn (1) und (2) für eine Länge d cm des Durchmessers von k_1 erfüllt sind, so haben k_2, k_3 und k_4 Durchmesser der Längen $(d+1)$ cm, $(d+2)$ cm bzw. $(d+3)$ cm, und es gilt
$\frac{\pi}{4}d^2 + \frac{\pi}{4}(d+1)^2 + \frac{\pi}{4}(d+2)^2 = \frac{\pi}{4}(d+3)^2$.
Hieraus erhält man $d^2 + d^2 + 2d + 1 + d^2 + 4d + 4 = d^2 + 6d + 9$, also $2d^2 = 4$ und wegen $d > 0$ daraus $d = \sqrt{2}$.
Daher kann nur die Länge $\sqrt{2}$ cm die Forderungen (1) und (2) erfüllen. Sie erfüllt sie tatsächlich; denn für diese Länge ergeben sich als Flächeninhalte der vier Kreise

$$A_1 = \frac{\pi}{4}(\sqrt{2})^2 \text{ cm}^2 \quad = \frac{\pi}{4} 2 \text{ cm}^2,$$
$$A_2 = \frac{\pi}{4}(\sqrt{2}+1)^2 \text{ cm}^2 = \frac{\pi}{4}(3 + 2 \cdot \sqrt{2}) \text{ cm}^2,$$
$$A_3 = \frac{\pi}{4}(\sqrt{2}+2)^2 \text{ cm}^2 = \frac{\pi}{4}(6 + 4 \cdot \sqrt{2}) \text{ cm}^2,$$
$$A_4 = \frac{\pi}{4}(\sqrt{2}+3)^2 \text{ cm}^2 = \frac{\pi}{4}(11 + 6 \cdot \sqrt{2}) \text{ cm}^2,$$

und hiermit gilt
$A_1 + A_2 + A_3 = A_4$

2. *1. Beweis:* (direkt)
B sei ein von A verschiedener Punkt auf g.
In dem Dreieck AMB liegt dann die Seite BM nach Voraussetzung einem rechten Winkel und damit dem größten Winkel des Dreiecks gegenüber. Es gilt also $\overline{BM} > \overline{AM}$. Da AM Radius von k ist, liegt B außerhalb des Kreises.
Die Gerade g hat also genau einen Punkt mit k gemeinsam.
Sie ist mithin Tangente des Kreises k.
2. Beweis: (indirekt)
Angenommen, die Gerade g, die mit dem Kreis k den Punkt A gemeinsam hat, wäre nicht Tangente von k.
Dann müßte g den Kreis in einem zweiten, von A verschiedenen Punkt – B genannt – schneiden. Da M wegen $AM \perp g$ nicht auf g läge, entstünde ein Dreieck AMB, und dieses wäre gleichschenklig ($\overline{AM} = \overline{BM} = r$).
Nach dem Satz über Basiswinkel gleichschenkliger Dreiecke ergäbe sich
$\overline{\sphericalangle MAB} = \overline{\sphericalangle MBA} =$ 90° und damit
$\overline{\sphericalangle MAB} + \overline{\sphericalangle MBA} = 180°$.
Das ist jedoch ein Widerspruch zum Dreiecksinnenwinkelsatz.
Die Annahme muß also falsch sein.
Die Gerade g ist folglich Tangente von k.

3. Der Term $\lg(x^2 + 7x - 30)$ ist genau dann definiert, wenn $x^2 + 7x - 30 > 0$ ist. Dazu sind der Reihe nach äquivalent

$$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 > 30 + \frac{49}{4},$$
$$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 > \frac{169}{4},$$
$$\sqrt{\left(x + \frac{7}{2}\right)^2} > \sqrt{\frac{169}{4}},$$
$$\left|x + \frac{7}{2}\right| > \frac{13}{2},$$
$$x + \frac{7}{2} > \frac{13}{2} \text{ oder } x + \frac{7}{2} < -\frac{13}{2}$$

und damit
$x > 3$ oder $x < -10$.
Daher ist die gesuchte Menge die Menge aller reellen Zahlen x, für die $x > 3$ oder $x < -10$ gilt.

4. 1) Angenommen, für eine einstellige Zahl Z wäre (1) erfüllt. Dann folgte $a_0 + a_0 = a_0$ und damit $a_0 = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.
2) Wenn eine zweistellige Zahl die Eigenschaft (1) hat, so folgt

$$a_1 + a_0 + a_1 a_0 = 10a_1 + a_0,$$
$$a_1 a_0 = 9a_1,$$

wegen $a_1 \neq 0$ also

$$a_0 = 9.$$

Daher kann eine zweistellige Zahl Z nur dann die Bedingung (1) erfüllen, wenn sie mit der Ziffer 9 endet. Für jede solche Zahl gilt in der Tat $a_1 + a_0 + a_1 a_0 = a_1 + 9 + 9a_1 = 10a_1 + 9 = 10a_1 + a_0$, also ist die Bedingung (1) erfüllt.
3) Angenommen, für eine dreistellige Zahl Z wäre (1) erfüllt. Dann folgte
$a_2 + a_1 + a_0 + a_2 a_1 a_0 = 100a_2 + 10a_1 + a_0$,
also $\quad a_2 a_1 a_0 = \quad 99a_2 + \quad 9a_1$, wegen $9 \geq a_0$ mithin $9a_1 a_2 \geq 99a_2 + 9a_1 \geq 99a_2$.
Hieraus ergäbe sich wegen $a_2 > 0$ der Widerspruch $a_1 \geq 11$. Damit erfüllen für $0 < Z < 1000$ genau die Zahlen 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89 und 99 die Bedingung (1).

Bezirksolympiade

Klassenstufe 7

1. Alle Zahlen, die durch 2 und durch 9 teilbar sind, sind auch durch $2 \cdot 9 = 18$ teilbar, da 2 und 9 teilerfremd sind. Die kleinste durch 18 teilbare Zahl in der Menge A ist 1512, die nächstgrößere erhält man durch Addition von 18, da es unter 18 aufeinanderfolgende natürlichen Zahlen nur eine durch 18 teilbare gibt. Dieses Verfahren läßt sich fortsetzen. Die vierundsechzigste dabei erhaltene Zahl (einschließlich der Zahl 1512 also insgesamt die fünfundsechzigste gewonnene Zahl) lautet $1512 + 64 \cdot 18 = 1512 + 1152 = 2664$. Da sie größer als 2560 ist, gibt es folglich in der Menge A nicht fünfundsechzig verschiedene durch 9 teilbare gerade Zahlen.

2. a) Das Gewicht einer Kugel der Sorte A ist gleich dem doppelten Gewicht einer Kugel der Sorte B. Eine Kugel der Sorte B hat das dreifache Gewicht einer Kugel der Sorte C, folglich hat eine Kugel der Sorte A das gleiche Gewicht wie 6 Kugeln der Sorte C. Eine Kugel der Sorte C hat das fünffache Gewicht einer Kugel der Sorte D, das Gewicht von 6 Kugeln der Sorte C ist daher gleich dem Gewicht von 30 Kugeln der Sorte D. Daraus ergibt sich, daß Uli 30 Kugeln der Sorte D in die eine Waagschale legen muß, wenn Gleichgewicht erreicht werden soll.

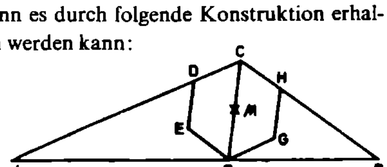
b) Das Gewicht von 5 Kugeln der Sorte D ist gleich dem Gewicht einer Kugel der Sorte C, daher haben 20 Kugeln der Sorte D das gleiche Gewicht wie 4 Kugeln der Sorte C. Das Gewicht von 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C ist mithin gleich dem Gewicht von 9 Kugeln der Sorte C.

Da drei Kugeln der Sorte C soviel wiegen wie eine Kugel der Sorte B, wiegen folglich 9 Kugeln der Sorte C soviel wie 3 Kugeln der Sorte B.

Uli muß also 3 Kugeln der Sorte B in die andere Waagschale legen, wenn sie 20 Kugeln der Sorte D und 5 Kugeln der Sorte C das Gleichgewicht halten sollen.

3. (I) Angenommen, ein Sechseck $CDEFGH$ erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Dann halbiert der Mittelpunkt M des Umkreises des Sechsecks $CDEFGH$ die Halbierende des Winkels $\sphericalangle BCA$, und die Dreiecke MCD, MDE, MEF, MFG, MGH und MHC sind sämtlich gleichseitig mit der Seitenlänge $\overline{CM}$.

(II) Daher entspricht ein Sechseck $CDEFGH$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(1) Man konstruiert die Halbierende des Winkels $\sphericalangle BCA$, ihr Schnittpunkt mit AB sei Punkt F.

(2) Man halbiert CF, der Halbierungspunkt sei M.

(3) Man beschreibt um C den Kreis mit dem Radius $\overline{MC}$, seine Schnittpunkte mit AC bzw. BC seien D bzw. H genannt.

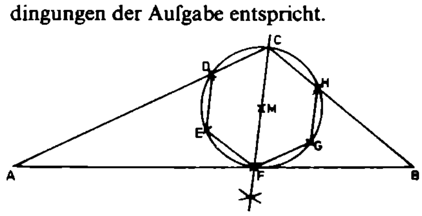
(4) Man beschreibt um M und F Kreise mit dem Radius $\overline{MC}$, ihre Schnittpunkte miteinander seien E und G genannt.

(III) Beweis, daß jedes so konstruierte Sechseck $CDEFGH$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion liegen die Punkte D, F, H in dieser Reihenfolge auf den Seiten AC, AB, BC. Ebenfalls nach Konstruktion ist $\overline{CD} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{HC} = \overline{CM}$.

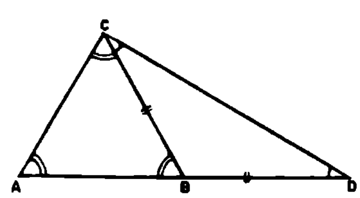
Da ferner nach Konstruktion M auf der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle DCH$ der Größe 120° liegt, $\triangle CDM$ also gleichseitig ist, und da nach Konstruktion $\triangle EFM$ ebenfalls gleichseitig ist, gilt $\overline{\sphericalangle CMD} = \overline{\sphericalangle FME} = 60°$. Hiernach und wegen $\overline{\sphericalangle FMC} = 180°$ ist $\overline{\sphericalangle EMD} = 60°$. Da das Dreieck EMD wegen $\overline{MD} = \overline{ME}$ gleichschenklig ist, gilt $\overline{\sphericalangle MED} = \overline{\sphericalangle MDE}$, diese Winkelgröße beträgt somit jeweils 60°, also ist $\overline{DE} = \overline{CM}$. Entsprechend ist $\overline{GH} = \overline{CM}$. Wegen $\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HC} = \overline{CM}$ sind die Dreiecke MCD, MDE, MEF, MFG, MGH und MHC sämtlich gleichseitig, und die Winkel $\sphericalangle CDE$, $\sphericalangle DEF$, $\sphericalangle EFG$, $\sphericalangle FGH$ und $\sphericalangle GHC$ haben sämtlich die Größe 120°.

(IV) Sämtliche Konstruktionsschritte sind eindeutig ausführbar, deshalb gibt es stets genau ein Sechseck $CDEFGH$, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.



4. Nach Voraussetzung gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$ und damit

$$\overline{\sphericalangle ABC} = \overline{\sphericalangle BCA} = \overline{\sphericalangle CAB} = 60°.$$



Der Außenwinkel $\sphericalangle CBD$ des Dreiecks ABC beträgt somit nach dem Außenwinkelsatz 120°.

Wegen $\overline{BC} = \overline{BD}$ ist $\triangle BDC$ gleichschenklig mit der Spitze in B.

Daher sowie wegen des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck ist

$$\overline{\sphericalangle DCB} = \overline{\sphericalangle BDC} = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°.$$

Daraus folgt, daß $\overline{\sphericalangle DCA} = \overline{\sphericalangle BCA} + \overline{\sphericalangle DCB} = 60° + 30° = 90°$ ist, w.z.b.w.

5. Angenommen, eine zweistellige Zahl erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Dann ist sie mindestens 10 und höchstens 99; folglich entsteht nach Vergrößerung um 230 eine Zahl, die mindestens 240 und höchstens 329 ist. Von diesen Zahlen haben nur 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258 und 259 eine 5 als Zehnerziffer.

Folglich können höchstens die Zahlen 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 die Bedingung (1) erfüllen. Sie erfüllen diese Bedingung, da durch das in (1) genannte Einfügen der Ziffer 5 die Zehnerziffer 2 durch die Ziffernfolge 25 ersetzt wird, wobei sich die Zahlen jeweils um 230 vergrößern.

Setzt man vor jede von ihnen die Ziffer 5, so erhält man die Zahlen 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528 und 529. Diese sind jeweils um 500 größer als die ursprüngliche Zahl. Daher ist eine so gebildete Zahl genau dann ein ganzzahliges Vielfaches der ursprünglichen Zahl, wenn auch 500 ein ganzzahliges Vielfaches von ihr ist. Das trifft unter den Zahlen, die (1) erfüllen, genau für die Zahlen 20 und 25 zu. Daher sind dies alle zweistelligen Zahlen, die beide Bedingungen erfüllen.

6. a) Da in jedem Quadrat die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, einander gleich lang sind und einander halbieren, liegen die Eckpunkte B und D erstens auf der Mittelsenkrechten von AC und zweitens auf dem Kreis mit dem Radius $\frac{\overline{AC}}{2}$ um den Mittelpunkt von AC.

Daher entspricht ein Quadrat $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

1. Wir zeichnen eine Strecke AC der Länge $\overline{AC} = 10{,}0$ cm und konstruieren ihre Mittelsenkrechte.

2. Wir beschreiben um den Mittelpunkt M der Strecke AC den Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}\overline{AC}$.

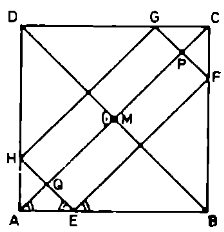
3. Schneidet der Kreis die Mittelsenkrechte in zwei Punkten, so seien diese B bzw. D genannt.

$ABCD$ ist das gesuchte Quadrat.

Beweis: Laut Konstruktion gilt $BD \perp AC$. Ferner gilt laut Konstruktion $\overline{AM} = \overline{CM} = \overline{BM} = \overline{DM}$.

Folglich sind nach dem Kongruenzsatz (*s*, *w*, *s*) die Dreiecke AMB, BMC, CMD und DMA zueinander kongruent. Also gilt: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$. Da die erwähnten Dreiecke ferner rechtwinklig-gleichschenklig mit der Spitze in M sind, sind ihre Basiswinkel je 45° groß. Da schließlich jeder der Winkel $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDA$, $\sphericalangle DAB$ gleich der Summe zweier dieser Basiswinkel ist, hat jeder von ihnen die Größe 90°. Folglich ist $ABCD$ ein Quadrat, und es hat die vorgeschriebene Diagonalenlänge.

b) Dem Quadrat $ABCD$ sei ein Rechteck $EFGH$ so einbeschrieben, wie es in der Aufgabenstellung angegeben ist.



$\overline{FG}$ schneide die Diagonale AC in P und HE die Diagonale AC in Q (siehe Bild). Da die Diagonale eines Quadrates als Symmetrieachse die Innenwinkel halbiert, gilt $\sphericalangle CAB = 45°$. Wegen $EF \parallel AC$ folgt $\sphericalangle CAB = \sphericalangle FEB = 45°$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und wegen $\sphericalangle FEH = 90°$ folgt $\sphericalangle HEA = 45°$. Somit ist das Dreieck AEQ wegen der gleichgroßen Basiswinkel gleichschenklig, und es gilt $\overline{AQ} = \overline{QE}$.

Analog gilt $\overline{AQ} = \overline{HQ}$, also $\overline{EH} = 2\overline{AQ}$. Entsprechend folgt $\overline{FG} = 2\overline{CP}$. Wegen $\overline{EH} = \overline{FG}$ folgt hieraus $\overline{AQ} = \overline{CP}$. Schließlich gilt wegen $EF \parallel QP$ und $EQ \parallel FP$ auch $\overline{EF} = \overline{QP}$.

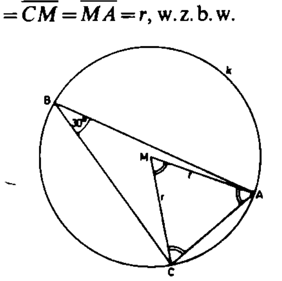
Für den Umfang u des Rechtecks $EFGH$ gilt folglich:

$u = 2(\overline{EF} + \overline{EH}) = 2(\overline{QP} + \overline{AQ} + \overline{CP}) = 2\overline{AC}$.

Der Umfang jedes derartigen Rechtecks $EFGH$ beträgt somit 20,0 cm.

Klassenstufe 8

1. Es sei M der Mittelpunkt und r der Radius von k. Der Winkel $\sphericalangle AMC$ hat nach dem Satz über Zentri- und Peripheriewinkel die Größe 60°. Hieraus, und da das Dreieck AMC wegen $\overline{AM} = \overline{MC} = r$ gleichschenklig ist, folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck $\sphericalangle MCA = \sphericalangle MAC = 60°$, d. h. das Dreieck AMC ist gleichseitig, und es ist $\overline{AC} = \overline{CM} = \overline{MA} = r$, w. z. b. w.

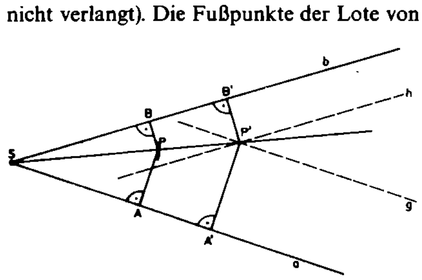


2. I. Es sei P ein Punkt, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Die Fußpunkte der Lote von P auf a bzw. b seien A bzw. B. Dann gilt $\overline{PA} = 2\overline{PB}$, d. h. $\overline{PA} : \overline{PB} = 2:1$.

Ist h eine beliebige Parallele zu b auf der Seite von b, auf der a liegt, so schneidet sie den Strahl aus S durch P in einem Punkt P' (ein Beweis dieser Aussage wird vom Schüler nicht verlangt). Die Fußpunkte der Lote von P' auf a bzw. b seien A' bzw. B'. Nach dem Strahlensatz gilt dann

$\overline{P'A'} : \overline{PA} = \overline{SP'} : \overline{SP}$ und $\overline{P'B'} : \overline{PB} = \overline{SP'} : \overline{SP}$, also $\overline{P'A'} : \overline{PA} = \overline{P'B'} : \overline{PB}$. Hieraus folgt $\overline{P'A'} : \overline{P'B'} = \overline{PA} : \overline{PB} = 2:1$.

Somit hat die Parallele g zu a durch P' doppelt so großen Abstand von a wie h von b. Diese Parallele g liegt auf der Seite von a, auf der b liegt.



II. Deshalb entspricht ein Punkt P nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

1. Man zieht eine beliebige Parallele h zu b auf der Seite von b, auf der a liegt.
2. Man konstruiert in doppelt so großem Abstand von a, wie ihn h von b hat, die Parallele g zu a auf der Seite von a, auf der b liegt. Schneiden sich g und h im Innern des gegebenen Winkels, so sei der Schnittpunkt P' genannt.
3. Um S beschreibt man einen Kreis mit einem Radius von 5,0 cm. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Strahl aus S durch P' sei P genannt.

III. Beweis, daß jeder so konstruierte Punkt P den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Die Fußpunkte der Lote von P auf a bzw. b seien A bzw. B; die Fußpunkte der Lote von P' auf a bzw. b seien A' bzw. B'. Nach Konstruktion gilt $\overline{P'A'} : \overline{PB} = \overline{SP'} : \overline{SP}$, also $\overline{P'A'} : \overline{PA} = \overline{P'B'} : \overline{PB}$. Hieraus folgt $\overline{PA} : \overline{PB} = \overline{P'A'} : \overline{P'B'} = 2:1$, also ist (1) erfüllt. Nach Konstruktion erfüllt P auch (2). Schließlich liegt P' (nach Konstruktion) und daher auch P im Innern des gegebenen Winkels.

IV. Die Konstruktionsschritte 1., 2. sind eindeutig ausführbar; die Geraden g und h schneiden sich, und zwar im Innern des gegebenen Winkels (ein Beweis dieser Aussage wird vom Schüler nicht verlangt). Hierauf ist auch Konstruktionsschritt 3 eindeutig ausführbar. Daher gibt es genau einen Punkt P, der alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

3. Angenommen, es gibt eine solche Darstellung; dann lautet sie

$$\frac{9}{91} = \frac{x}{7} - \frac{y}{13},$$

wobei x und y natürliche Zahlen mit

$0 < x < 7$

und $0 < y < 13$ sind.

Wegen $91 = 7 \cdot 13$ gilt daher

$$13x - 7y = 9, \; 7y = 13x - 9,$$
$$y = \frac{13x - 9}{7}.$$

Wir erhalten für $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

x	$13x$	$13x-9$
1	13	4
2	26	17
3	39	30
4	52	43
5	65	56
6	78	69

Von den in der dritten Spalte angegebenen Zahlen ist nur die Zahl 56 durch 7 teilbar. Wir erhalten also nur für $x = 5$ einen ganzzahligen Wert für y, und zwar

$$y = \frac{13x - 9}{7} = \frac{56}{7} = 8.$$

Somit kann nur die Darstellung

$$\frac{9}{91} = \frac{5}{7} - \frac{8}{13}$$ den Bedingungen

der Aufgabenstellung genügen.

Sie erfüllt diese Bedingung; denn $\frac{5}{7}$ und $\frac{8}{13}$ sind positive echte Brüche, und es gilt $\frac{5}{7} - \frac{8}{13} = \frac{65}{91} - \frac{56}{91} = \frac{9}{91}$.

Laut Aufgabentext erhält man aus dem Ansatz $\frac{9}{91} = \frac{x}{13} - \frac{y}{7}$ eine weitere Lösung:

$$\frac{9}{91} = \frac{5}{13} - \frac{2}{7}.$$

4. a) Die Anzahl der Pioniere, die je genau 13 kg sammelten, sei x. Nach (1) gehören dann genau $(x+1)$ Pioniere der Brigade A an, das Sammelergebnis dieser Brigade betrug $(13x + 6)$ Kilogramm. Die Anzahl der Pioniere, die je genau 10 kg sammelten, sei y. Nach (2) gehören dann genau $(y+1)$ Pioniere der Brigade B an, und das Sammelergebnis dieser Brigade betrug $(10y+5)$ Kilogramm.

Nach (3) gilt somit $13x + 6 = 10y + 5$,

also $$y = \frac{13x+1}{10}, \qquad (*)$$

$13x + 1$ ist durch 10 teilbar, folglich endet die (Zifferndarstellung der) Zahl $13x$ auf die Ziffer 9 und somit x auf die Ziffer 3.

Aus (4) folgt $100 < 2(13x + 6) < 600$

und daraus $44 < 13x < 294$.

Dies wird weder von $x = 3$ noch von $x = 23$ erfüllt, da hierfür $13x = 39$ bzw. $13x = 299$ gilt. Also ist $x = 13$. Nach (*) ergibt sich daraus $y = 17$.

Somit gehörten genau 14 Schüler der Brigade A und genau 18 der Brigade B an.

b) Brigade A sammelte $(13 \cdot 13 + 6)$ kg $= 175$ kg und Brigade B $(17 \cdot 10 + 5)$ kg $= 175$ kg, die gesamte Gruppe somit 350 kg Altpapier.

Wegen $350 \cdot 0{,}15$ M $= 52{,}50$ M konnte die Pioniergruppe genau 52,50 M auf das Solidaritätskonto überweisen.

5. Angenommen, es gibt drei derartige Primzahlen. Dann kann wegen $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$ die Primzahl P_1 nur eine der Zahlen 3, 5, 11 sein.

1. Fall: Es sei $P_1 = 3$, dann ist $P_2 + P_3 = 55$. (2) Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist nur dann ungerade, wenn ein Summand gerade, der andere aber ungerade ist. Deshalb, wegen $P_2 > P_3$ und weil 2 die einzige gerade Primzahl ist, kann höchstens $P_2 = 53$; $P_3 = 2$ die Lösung von (2) sein. Da diese beiden Zahlen Primzahlen sind, ist das Tripel [3; 53; 2] eine Lösung.

2. Fall: Es sei $P_1 = 5$, dann ist $P_2 + P_3 = 33$, (3) und analog wie im Fall 1 ist höchstens $P_2 = 31$; $P_3 = 2$ Lösung von (3). Da 31 und 2 Primzahlen sind, ist das Tripel [5; 31; 2] ebenfalls eine Lösung.

3. Fall: Es sei $P_1 = 11$, dann ist $P_2 + P_3 = 15$, (4) und analog zum Fall 1 ist höchstens $P_2 = 13$; $P_3 = 2$ Lösung von (4). Da 13 und 2 Primzahlen sind, erfüllt auch das Tripel [11; 13; 2] die Gleichung (1).

Somit sind genau die drei Tripel
[3; 53; 2], [5; 31; 2], [11; 13; 2] Lösung von (1).

6. Es seien folgende Bezeichnungen verwendet:

	Eichenplatte	Stahlplatte
Masse	m_E	m_S
Dichte	ϱ_E	ϱ_S
Volumen	V_E	V_S
Inhalt der Dreieckfläche	A_E	A_S
Dicke	h	h

Dann ist

(1) $m_E = A_E \cdot h \cdot \varrho_E$,

(2) $m_S = A_S \cdot h \cdot \varrho_S$,

sowie nach Voraussetzung

(3) $\varrho_E = \frac{1}{10}\varrho_S$ und

(4) $A_E = \frac{120}{100} A_S$.

Die Masse der Stahlplatte sei $x\%$ der Masse der Eichenplatte. Dann gilt

$$m_S = \frac{x}{100} m_E.$$

Folglich ist wegen (1), ..., (4):

$$x = \frac{m_S}{m_E} 100 = \frac{A_S \cdot h \cdot \varrho_S \cdot 100}{A_E \cdot h \cdot \varrho_E}$$

$$= \frac{A_S \cdot h \cdot \varrho_S \cdot 100}{\frac{120}{100} \cdot A_S \cdot h \cdot \frac{1}{10} - \varrho_S}$$

$$= \frac{10000}{12} = \frac{2500}{3} = 833\tfrac{1}{3}.$$

Die Masse der Stahlplatte ist um $\left(833\frac{1}{3} - 100\right)\% = 733\frac{1}{3}\%$ größer als die der Eichenplatte.

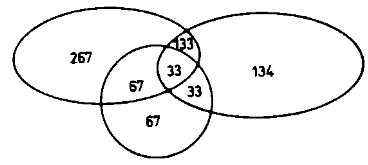
Klassenstufe 9

1. Wegen $1000:2=500$ gibt es 500 Zahlen in diesem Bereich, die durch 2 teilbar sind. Wegen $333 < 1000:3 < 334$ gibt es 333 Zahlen in diesem Bereich, die durch 3 teilbar sind.
Entsprechend erhält man
Eichenplatte.
wegen [1]) $1000:5=200$ genau 200 Zahlen, die durch 5, wegen [1]) $166 < 1000:6 < 167$ genau 166 Zahlen, die durch 2 und 3, wegen [1]) $1000:10=100$ genau 100 Zahlen, die durch 2 und 5, wegen [1]) $66 < 1000:15 < 67$ genau 66 Zahlen, die durch 3 und 5 und wegen [1]) $33 < 1000:30 < 34$ genau 33 Zahlen, die durch 2, 3 und 5 teilbar sind.

Daraus folgt:
Teilbar durch
2 und 3, aber nicht durch 5 sind $166-33 = 133$ Zahlen,
2 und 5, aber nicht durch 3 sind $100-33 = 67$ Zahlen,
3 und 5, aber nicht durch 2 sind $66-33 = 33$ Zahlen,
2, aber weder durch 3 noch durch 5 sind $500-(33+133+67)=267$ Zahlen,
3, aber weder durch 2 noch durch 5 sind $333-(33+133+33)=134$ Zahlen,
5, aber weder durch 2 noch durch 3 sind $200-(33+67+33)=67$ Zahlen.

Damit gibt es in diesem Bereich insgesamt $33+133+67+33+267+134+67=734$ Zahlen, die durch 2, 3 oder 5 teilbar sind. Also sind $1000-734=266$ Zahlen von 1 bis 1000 weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar.
Der Lösungsweg sei durch das Mengendiagramm zusätzlich veranschaulicht:

teilbar durch 2 teilbar durch 3



teilbar durch 5

1) Ausführung des Schlusses „Sind a, m natürliche Zahlen mit $a \leqq 1000:m < a+1$, so gibt es genau a Zahlen im Bereich von 1 bis 1000, die durch m teilbar sind": Wegen $am \leqq 1000 < (a+1)m$ ist die größte unter den durch m teilbaren Zahlen des Bereichs von 1 bis 1000 die Zahl am. Alle diese Zahlen sind folglich $1 \cdot m, 2 \cdot m, \ldots, a \cdot m$. Daher ist ihre Anzahl a.

2. Durch die Angaben über $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\sphericalangle ABC$ ist das Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt. Wie eine Konstruktion zeigt, haben die Kreise um A bzw. C mit 8 cm bzw. 11 cm als Radius genau zwei Schnittpunkte. Genau einer von ihnen liegt nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C wie B; dieser sei D genannt, der andere D^*. Die Konstruktion ergibt, daß $ABCD^*$ ein überschlagenes Viereck wird. Somit ist durch die Angaben über $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\sphericalangle ABC$ ein nicht überschlagenes Viereck $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig und daher auch sein Flächeninhalt eindeutig bestimmt.

(I) Angenommen nun, ein Rechteck $EFGH$ habe die Eigenschaften (1), (2), (3). Dann ist $AEFC$ nach (2), (3) ein Viereck mit rechten Winkeln bei A, E und F, also ein Rechteck. Die Seite EF ist somit parallel und gleichlang zur Strecke AC. Die Lote von B und D auf AC seien BB' bzw. DD'. Dann hat $ABCD$, nach (1) also auch $EFGH$, den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BB'} + \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{DD'} = \overline{AC} \cdot \frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'})$$

$$= \overline{EF} \cdot \frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'}).$$

Daraus folgt $\overline{EH} = \frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'})$.

Hiernach und wegen (2) hat A von E einen Abstand, der kleiner ist als $\frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'})$; ferner ist $E \neq A$ und liegt nach (3) auf der in A auf AC errichteten Senkrechten.

(II) Daher kann ein Punkt nur dann als Eckpunkt E eines Rechtecks $EFGH$ mit den Eigenschaften (1), (2), (3) auftreten, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(4) Man errichtet die Senkrechte s in A auf AC.

(5) Man fällt die Lote BB' und DD' von B bzw. D auf AC.

(6) Von A aus trägt man auf s nach beiden Seiten die Strecken AX_1 bzw. AX_2 der Länge $\frac{1}{2}\overline{BB'}$ ab und verlängert sie über X_1 bzw. X_2 hinaus um $\frac{1}{2}\overline{DD'}$ bis zu Y_1 bzw. Y_2.

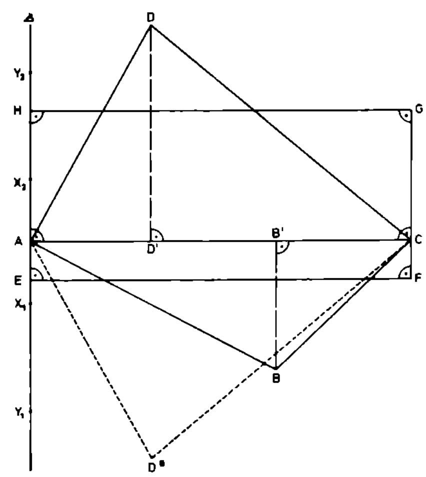
(7) Man wählt E auf der Strecke Y_1Y_2 verschieden von A, Y_1, Y_2 und sonst beliebig.

(III) Beweis, daß jeder so erhaltene Punkt E Eckpunkt eines Rechtecks $EFGH$ mit den Eigenschaften (1), (2), (3) ist:

Nach (5), (6), (7) ist $\overline{AE} < \frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'})$ und $E \neq A$. Daher gibt es auf der Verlängerung von EA über A hinaus einen Punkt H mit $\overline{EH} = \frac{1}{2}(\overline{BB'} + \overline{DD'})$. Die Parallelen durch E bzw. H zu AC schneiden die Parallele durch C zu s in F bzw. G. So entsteht ein Rechteck $EFGH$, das (2), (3) erfüllt. Darin ist $EFCA$ ein Rechteck, also gilt $\overline{EF} = \overline{AC}$. Damit hat $EFGH$ den Flächeninhalt

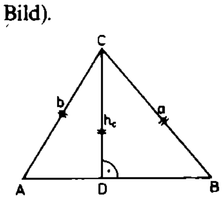
$$\overline{EF} \cdot \overline{EH} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BB'} + \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{DD'},$$

d. h. denselben Flächeninhalt wie $ABCD$ und erfüllt demnach (1).



3. Für die Lage des Punktes D sind nur die beiden folgenden Fälle möglich.

Fall 1: Punkt D liegt zwischen A und B (siehe Bild).



Ein Dreieck ABC mit dieser Eigenschaft, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht, kann wegen $h_c < a$ und $h_c < b$ durch Konstruktion der rechtwinkligen Teildreiecke CDA und CDB auf verschiedenen Seiten der Geraden durch C und D erhalten werden.
Für seinen Flächeninhalt I gilt

$$I = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{DB}) \cdot \overline{CD}.$$

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt nun:

$$\overline{AD} = \sqrt{b^2 - h_c^2}\ \text{cm} = \sqrt{169 - 144}\ \text{cm}$$
$$= \sqrt{25}\ \text{cm} = 5\ \text{cm}, \text{ sowie}$$

$\overline{DB}=\sqrt{a^2-h_c^2}\ \text{cm}=\sqrt{225-144}\ \text{cm}$

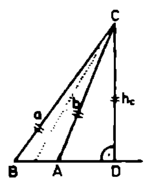
$=\sqrt{81}\ \text{cm}=9\ \text{cm}$ und somit

$$I=\frac{1}{2}(5+9)\cdot 12\ \text{cm}^2=84\ \text{cm}^2.$$

Fall 2: Punkt D liegt nicht zwischen A und B (siehe Bild). Da wiederum nach dem Lehrsatz des Pythagoras $\overline{BD}=\sqrt{a^2-h_c^2}\ \text{cm}=9\ \text{cm}$, sowie $\overline{AD}=\sqrt{b^2-h_c^2}\ \text{cm}=5\ \text{cm}$ und somit $\overline{BD}>\overline{AD}$ gilt, so entsteht auch für den vorliegenden Fall durch Konstruktion von Dreiecken CDA, CDB, diesmal aber auf derselben Seite der Geraden durch C und D, ein Dreieck ABC, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Für seinen Flächeninhalt I gilt

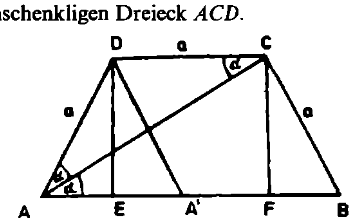
$$I=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\frac{1}{2}(\overline{BD}-\overline{AD})\cdot\overline{CD},$$

$$I=\frac{1}{2}(9-5)\cdot 12\ \text{cm}^2=24\ \text{cm}^2.$$



4. Es sei $\sphericalangle\overline{DAC}=\alpha$.

a) Dann ist $\sphericalangle\overline{DCA}=\alpha$, als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ACD.



Ferner gilt $\sphericalangle\overline{CAB}=\alpha$, da $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle ACD$ Wechselwinkel an Parallelen sind.

Folglich gilt $\sphericalangle\overline{DAC}=\sphericalangle\overline{CAB}$, also halbiert AC den Winkel $\sphericalangle DAB$.

b) Es seien E und F die Fußpunkte der von D bzw. C auf AB gefällten Lote. Wegen $\alpha=60°$ liegen E und F zwischen A und B. Spiegelt man AD an DE und ist A' der Bildpunkt von A bei dieser Spiegelung, so liegt A' wegen $DE\perp AB$ auf der Geraden durch A und B, und wegen $\sphericalangle\overline{DAA'}=\sphericalangle\overline{DA'A}=60°$ ist das Dreieck $AA'D$ gleichseitig.

Wegen $\overline{AE}=\overline{A'E}$ gilt $\overline{AE}=\frac{a}{2}$.

Entsprechend folgt $\overline{FB}=\frac{a}{2}$. Da $EFCD$ ein Rechteck ist, gilt $\overline{EF}=\overline{DC}=a$.

Somit ist $\overline{AB}=\frac{a}{2}+a+\frac{a}{2}=2a$.

5. Sei x die kleinste der vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen. Dann ist das um 1 vergrößerte Produkt der vier Zahlen die Zahl

$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=x^4+6x^3+11x^2+6x+1$ (1)

Ferner ist x^2+3x+1 eine natürliche Zahl, und diese hat das Quadrat $(x^2+3x+1)^2=x^4+6x^3+11x^2+6x+1$, also dieselbe Zahl wie in (1).

Damit ist die Behauptung bewiesen.

6. a) Nach Definition von d_2 ist $x_2\leqq d_2$; nach Definition von d_3 ist $x_3\leqq d_3$. Hiernach gilt $x_2+x_3\leqq d_2+d_3$; aus der Voraussetzung $x_1\leqq x_2+x_3$ folgt daher

$x_1\leqq d_2+d_3.$ (1)

Nach Definition von d_2 ist $y_2\leqq d_2$; nach Definition von d_3 ist $y_3\leqq d_3$. Hiernach gilt $y_2+y_3\leqq d_2+d_3$; aus der Voraussetzung $y_1\leqq y_2+y_3$ folgt daher

$y_1\leqq d_2+d_3.$ (2)

Nach seiner Definition ist d_1 eine der beiden Zahlen x_1, y_1. Daher ist d_1 die linke Seite in einer der beiden Ungleichungen (1), (2), und diese besagt somit $d_1\leqq d_2+d_3$, w.z.b.w.

b) Die in b) genannte Aussage gilt nicht. Zum Beweis genügt die Angabe eines Gegenbeispiels:

Es sei z.B. $x_1=2$; $x_2=1$ und $x_3=0$, sowie $y_1=0$; $y_2=2$ und $y_3=1$. Diese Zahlen erfüllen die Voraussetzungen

$$x_1\neq y_1,\ x_2\neq y_2,\ x_3\neq y_3.$$

Für sie ist ferner $d_1=2$, $d_2=2$ und $d_3=1$ laut Definition von d_i. Es gilt also $d_1\leqq d_2+d_3$, aber offensichtlich nicht

$$x_1\leqq x_2+x_3.$$

Klassenstufe 10

1. Es sei o.B.d.A. $a\leqq b$. Dann gilt

$\left.\begin{array}{l}(a+b)^n=(2b)^n\\(a+b)^n=2^nb^n\end{array}\right\}$, da a durch eine höchstens größere Zahl ersetzt wurde.

Ferner gilt (*)

$(a+b)^n\leqq 2^nb^n+2^na^n$, da auf der größeren Seite eine positive Zahl addiert wurde, also auch

$(a+b)^n\leqq 2^n(a^n+b^n)$, w.z.b.w.

(Ab (*) kann sogar $<$ geschrieben werden)

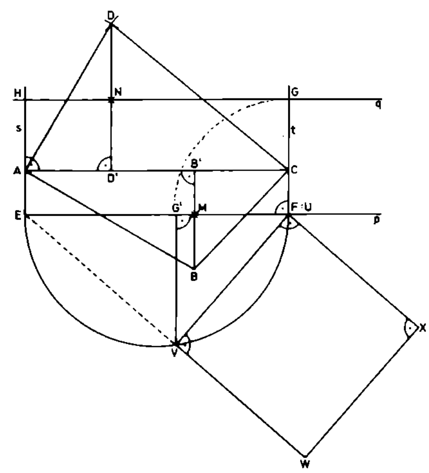
2. Durch die Angaben über $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\sphericalangle\overline{ABC}$ ist das Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt. Wie eine Konstruktion zeigt, haben die Kreise um A bzw. C mit 8 cm bzw. 11 cm als Radius genau zwei Schnittpunkte. Genau einer von ihnen liegt nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C wie B; dieser sei D genannt, der andere D^*. Die Konstruktion ergibt, daß $ABCD^*$ ein überschlagenes Viereck wird. Somit ist durch die Angaben über $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\sphericalangle\overline{ABC}$ ein nicht überschlagenes Viereck $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig und daher auch sein Flächeninhalt eindeutig bestimmt. Die Lote von B und D auf AC seien BB' bzw. DD'. Dann hat $ABCD$ den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BB'}+\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{DD'}=\overline{AC}\cdot\frac{1}{2}(\overline{BB'}+\overline{DD'}).$$

Daher hat ein Rechteck mit den Seitenlängen $\overline{AC}$ und $\frac{1}{2}(\overline{BB'}+\overline{DD'})$ denselben Flächeninhalt. Sind M, N die Mittelpunkte von BB' bzw. DD', so haben die Parallelen zu AC durch M bzw. N den Abstand $\frac{1}{2}(\overline{BB'}+\overline{DD'})$ voneinander. Daher entsteht durch diese Parallelen und durch die in A bzw. C auf AC errichteten Senkrechten ein Rechteck $EFGH$, das die genannten Längen als Seitenlängen hat.

Ist etwa $\overline{EF}>\overline{FG}$, liegt G' so auf EF, daß $\overline{FG'}=\overline{FG}$ gilt und ist EFV ein bei V rechtwinkliges Dreieck, für das VG' das Lot von V auf EF ist, so ist nach dem Kathetensatz $\overline{FV}^2=\overline{EF}\cdot\overline{FG'}=\overline{EF}\cdot\overline{FG}$, also ein über FV errichtetes Quadrat zu $EFGH$ flächeninhaltsgleich.

Daher führt (z.B.) die folgende Konstruktion zu der gesuchten Länge $\overline{UV}$:



(1) Man konstruiert die Parallelen p bzw. q durch die Mittelpunkte M bzw. N von BB' bzw. DD' zu AC.

(2) Man errichtet die Senkrechten s bzw. t in A bzw. C auf AC.

(3) Die Parallele p schneidet s bzw. t in E bzw. F; q schneidet s bzw. t in H bzw. G. Hierbei wird $EFGH$ ein Rechteck mit $\overline{EF}>\overline{FG}$.

(4) Der Kreis um F durch G schneidet EF in G'.

(5) Die Senkrechte in G' auf EF schneidet einen Halbkreis über EF in V.

(6) Man setze $F=U$. Die Strecke UV hat die geforderte Länge; ein über ihr errichtetes Quadrat $UVWX$ ist zu $ABCD$ flächeninhaltsgleich.

3. Es gilt $2-\sqrt{3}>0$, also ist $\lg(2-\sqrt{3})$ definiert. Ferner gilt

$$(2-\sqrt{3})^2=4-4\sqrt{3}+3$$
$$=7-4\sqrt{3},$$

also ist auch $7-4\sqrt{3}>0$ und folglich $\lg(7-4\sqrt{3})$ definiert. Ferner ist $2-\sqrt{3}\neq 1$, also $\lg(2-\sqrt{3})\neq 0$; somit wird durch den gegebenen Term eine Zahl z definiert, und für sie folgt außerdem

$$z=\frac{\lg(2-\sqrt{3})^2}{\lg(2-\sqrt{3})},\ \text{also}$$

$$z=\frac{2\lg(2-\sqrt{3})}{\lg(2-\sqrt{3})}=2.$$

Daher haben Jens und Dirk recht, Uwe und Peter haben nicht recht.

4. Angenommen, es gibt eine derartige Primzahl p, dann ist mit einer natürlichen Zahl z

$3p+4=z^2$, also
$3p=z^2-4$,
$3p=(z+2)(z-2)$.

Da $3p$ und $z+2$ positiv sind, ist auch $z-2$ eine positive ganze Zahl. Die einzigen Möglichkeiten, $3p$ in positiv ganzzahlige Faktoren zu zerlegen, bestehen aber darin, daß die Faktoren entweder 1 und $3p$ oder 3 und p lauten. Ferner haben $z+2$ und $z-2$ die Differenz 4 voneinander. Daher würde die Zerlegung mit 1 als Faktor auf 5 als zweiter Faktor führen und somit nicht auf einen Faktor der Form $3p$. Also bleibt nur die Möglichkeit, daß ein Faktor 3 und folglich der andere $p=7$ lautet. Tatsächlich erfüllt $p=7$ die Bedingung $3\cdot 7+4=25=5^2$. Die einzige Primzahl, die die gestellte Bedingung erfüllt, ist 7.

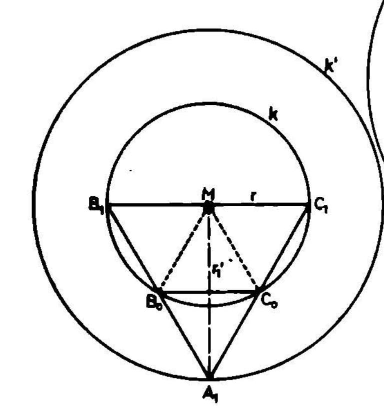
5. Die Anzahl der geraden unter den 101 ausgewählten Zahlen sei m. Dann ist $(101-m)$ die Anzahl der ungeraden unter den ausgewählten Zahlen. Dividiert man jede der m geraden Zahlen jeweils durch die höchste in ihr enthaltene Zweierpotenz, so erhält man als Quotienten m ungerade Zahlenangaben. Zusammen mit den zuvor genannten $101-m$ ungeraden Zahlen hat man somit eine Angabe von 101 ungeraden Zahlen. Da sich unter den natürlichen Zahlen von 1 bis 200 nur 100 ungerade befinden, müssen mindestens zwei der angegebenen 101 ungeraden Zahlen einander gleich sein. Die ausgewählten Zahlen, aus denen diese beiden übereinstimmenden ungeraden Zahlenangaben gewonnen wurden, unterscheiden sich daher in ihrer Primzerlegung nur um eine Potenz von 2. Die größere von beiden Zahlen ist mithin ein ganzzahliges Vielfaches der kleineren, was zu zeigen war.

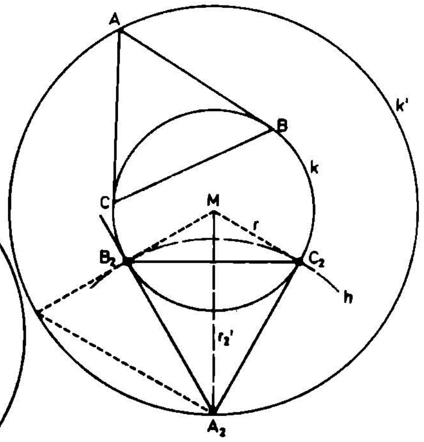
6. a) Der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC, das (1) erfüllt, ist genau dann maximal, wenn $\overline{BC}$ maximal ist. Nun gibt es im Kreis k Sehnen BC maximaler Länge, nämlich genau die Durchmesser. Also ist die Existenz von Dreiecken ABC, die (1) erfüllen und maximalen Flächeninhalt haben, bewiesen, wenn noch folgendes gezeigt ist: Wenn B_1C_1 ein Durchmesser von k ist, $A_1B_1C_1$ ein gleichseitiges Dreieck und k' der zu k konzentrische Kreis durch A_1 ist, so ist sein Radius r' größer als r. Dies trifft in der Tat zu; denn es folgt $\overline{B_1C_1}=2r$ und, wenn M den Mittelpunkt von k bezeichnet, $\overline{MA_1}=r\sqrt{3}$ als Höhenlänge im gleichseitigen Dreieck $A_1B_1C_1$. Zugleich ist damit dieser Wert $r'=r\sqrt{3}$ als einzig möglicher in a) genannter Wert für r' nachgewiesen, und als maximaler Flächeninhalt ergibt sich $F_1=\frac{1}{2}\overline{B_1C_1}\cdot\overline{MA_1}=r^2\sqrt{3}$.

b) Sind M, r'_1, $A_1B_1C_1$ wie in a), so schneiden die Geraden durch A_1 und B_1 bzw. C_1 den Kreis k jeweils noch ein zweites Mal, da sie einen Punkt außerhalb k mit je einem Punkt auf k verbinden und nicht auf MB_1 bzw. MC_1 senkrecht stehen. Der jeweils erhaltene zweite Schnittpunkt sei B_0 bzw. C_0. Bei Spiegelung an der Geraden durch A_1 und M geht B_1 in C_1 über, A_1 und k gehen in sich über, also geht B_0 in C_0 über.
Daher ist $\triangle A_1B_0C_0$ gleichschenklig mit $\overline{A_1B_0}=\overline{A_1C_0}$, wegen $\sphericalangle B_0A_1C_0=60°$ sogar gleichseitig, folglich erfüllt es (1) und ist außer $A_1B_1C_1$ das einzige Dreieck A_1BC, das (1) erfüllt. Weiter ist $\triangle MB_1B_0$ gleichschenklig mit $\overline{MB_1}=\overline{MB_0}$, wegen $\sphericalangle MB_1B_0=60°$ sogar gleichseitig; dasselbe gilt für $\triangle MC_1C_0$. Daher wird auch $\triangle MB_0C_0$ mit $\overline{MB_0}=\overline{MC_0}$ und $\sphericalangle B_0MC_0=60°$ gleichseitig, folglich ist $\overline{B_0C_0}=r$, und $\triangle A_1B_0C_0$ hat den (damit eindeutig bestimmten) Flächeninhalt $F_0=\frac{1}{4}r^2\sqrt{3}<F_1$.

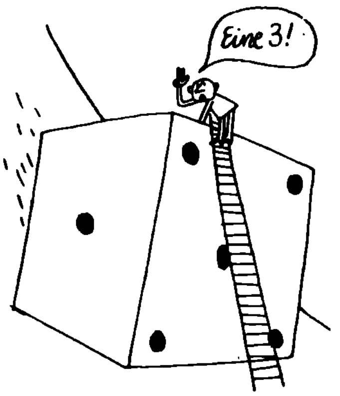
c) Für jeden überhaupt zu betrachtenden Wert von r' gilt:
Ist A_2 irgendein Punkt auf k' und ist ABC irgendein Dreieck, das (1) für dieses r' erfüllt, so geht dieses durch eine geeignete Drehung um M in ein Dreieck $A_2B_2C_2$ über, das ebenfalls (1) für dieses r' erfüllt. Daher hat ein Wert r' genau dann die in c) genannte Eigenschaft, wenn für einen einzigen Punkt A_2 auf k' alle Dreiecke $A_2B_2C_2$, die (1) für r' erfüllen, dieselbe Seitenlänge haben. Damit ist gleichwertig, daß es genau einen Kreis h um A_2 gibt, der k in zwei Punkten B_2, C_2 mit $\overline{B_2C_2}=\overline{A_2B_2}$ oder, wegen $\overline{A_2B_2}=\overline{A_2C_2}$ äquivalent hierzu, mit $\sphericalangle B_2A_2C_2=60°$ schneidet. Nun gehen k und jeder Kreis h um A_2 bei Spiegelung an der Geraden durch A_2 und M in sich über; daher ist die zuletzt genannte Forderung äquivalent mit $\sphericalangle MA_2B_2=30°$. Also hat r' genau dann die genannte Eigenschaft, wenn ein Strahl aus A_2, der mit A_2M einen Winkel von 30° bildet, mit dem Kreis k genau einen Punkt B_2 besitzt, d. h. Tangente an k ist. Hierfür ist notwendig und hinreichend, daß r' die Hypotenusenlänge in einem rechtwinkligen Dreieck ist, in dem eine Kathete r und der ihr gegenüberliegende Winkel 30° beträgt. Durch diese Forderung ist, wie behauptet, genau ein Wert r'_2 bestimmt, und zwar ergibt sich:
Spiegelt man ein solches Dreieck MA_2B_2 an der Geraden durch M und B_2, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck; folglich gilt $r'_2=\overline{MA_2}=2\overline{MB_2}=2r$. Die Höhenlänge $\overline{A_2B_2}=r\sqrt{3}$ dieses Dreiecks ist die Seitenlänge von $\triangle A_2B_2C_2$; folglich beträgt

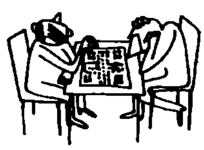
$$F_2=\frac{1}{4}\overline{AB}^2\sqrt{3}=\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}.$$

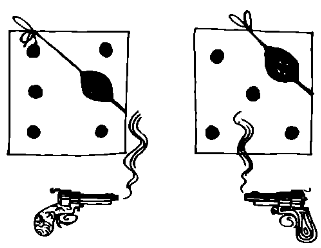




„Frühlingsanfang" (20./21. 3. 78) während der beiden Klausurtage der XVII. Olympiade Junger Mathematiker in der Jugendhochschule *Wilhelm Pieck*, Berlin-Bogensee (siehe S. 63)







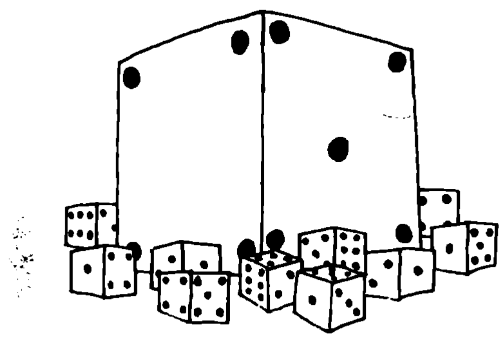
Auge um Auge ...

8

Karikaturen von Barbara Henniger

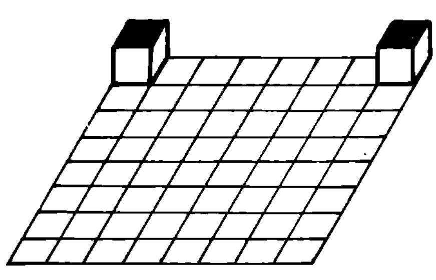
alpha-Spielmagazin

Würfeleien



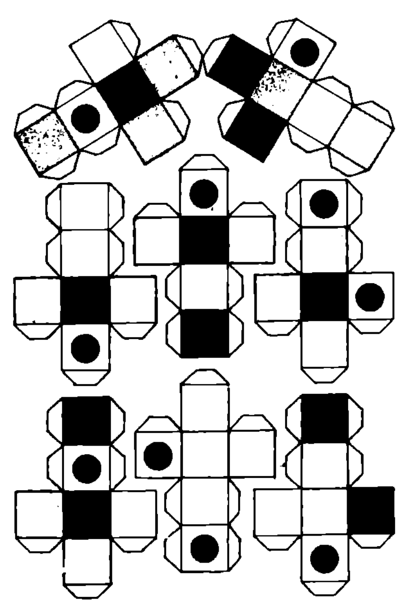
1

▲8▲ *John Harris* aus Santa Barbara (USA) fand ein Spiel, die „Reise des rollenden Würfels“. Um die „Reise“ durchführen zu können, markieren wir einen Würfel auf einer Seitenfläche farbig, etwa rot. Diesen Würfel bewegen wir von einem Feld des Schachbretts auf das angrenzende, indem wir ihn über eine Kante kippen. *Nun die Aufgabe:* Lege den Würfel auf die linke obere Ecke des Schachbretts, mit der grünen Seite nach oben! Bewege ihn durch Kippen von Feld zu Feld so über das Brett, daß er wieder mit der roten Seite nach oben auf dem rechten oberen Feld zu liegen kommt! Dabei darf jedes Feld des Brettes höchstens einmal berührt werden. Während seiner Reise von der einen zur anderen Ecke darf der Würfel niemals – so lautet die Spielregel – mit seiner grünen Seite nach oben liegen.



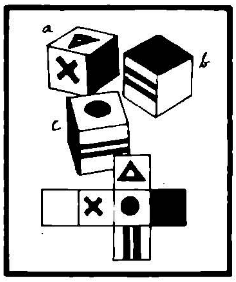
6

▲3▲ Die beiden *Frösi*-Mitarbeiter *D. Wilkendorf* und *O. Sperling* empfehlen: Schneide die acht Teile aus, und klebe sie zu einzelnen Würfeln zusammen (oder bastle sie selbst aus Zeichenkarton)! Die so entstandenen kleinen Würfel müssen um zu einem großen Würfel zusammengesetzt werden, wobei an den sichtbaren Seiten *in keinem Fall zwei gleiche Muster* aneinanderstoßen dürfen.

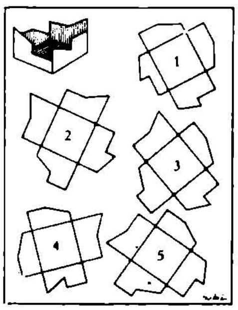


3

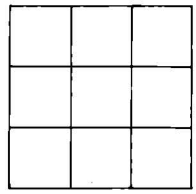
▲1▲ Einer der drei mit Buchstaben bezeichneten Würfel läßt sich aus dem darunter abgebildeten Netz herstellen. Welcher?



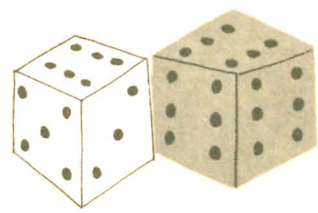
▲2▲ Durch eines der fünf Netze läßt sich die gezeichnete Basis zu einem Würfel ergänzen. Welches?



▲9▲ *Das magische Quadrat:* Unterteile ein Quadrat (auf der unteren Seite farbig) in neun Quadrate, wie es das Bild zeigt. Man kann nun das Papier an den dabei gezeichneten Linien entlang so aufschneiden, daß es sich (ebenfalls an diesen Linien) zu einem Würfel zusammenfalten läßt, der an der Außenseite völlig grün ist. Zu beachten ist, daß das Papierquadrat auch nach dem Aufschneiden noch ein einziges, zusammenhängendes Stück bilden muß, und daß es nur an den Aufteilungslinien gefaltet werden darf. Wer ist der schnellste Würfelkünstler?

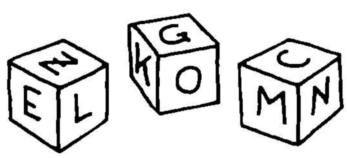


Lösungen zu diesem Ferienheft siehe S.72.



„Ich möchte keinem weh tun!"

▲4▲ Das „rätselhafte π" aus dem *Magazin* 11/77 empfiehlt ein hübsches Würfelspiel: Wir basteln uns drei Würfel mit insgesamt 18 verschiedenen Buchstaben (oder bekleben vorhandene Spielwürfel entsprechend). Dann wird gewürfelt. Wer aus den von ihm gewürfelten obenliegenden Buchstaben ein Wort bilden kann, erhält einen Punkt, danach würfelt der nächste.

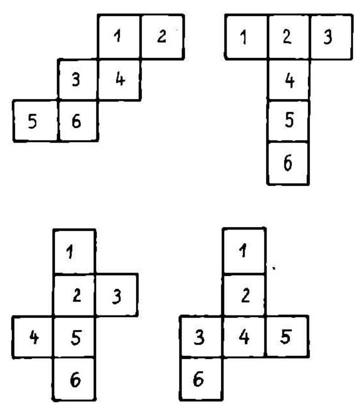


Bei diesem einfachen Spiel ergibt sich eine neue Aufgabe:

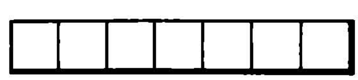
▲5▲ Die drei gezeigten Würfel (siehe oben) haben 18 verschiedene Buchstaben. Es wurde damit siebenmal gewürfelt, bei jedem Wurf ließ sich aus den obenliegenden Buchstaben ein Wort bilden. Es ergaben sich die Worte HUF, TOR, HAI, SAU, REH, NOT, BAR. Jetzt kannst du herausbekommen, welche sechs Buchstaben auf jedem Würfel standen. (Die Hälfte der Buchstaben ist großzügigerweise bereits eingetragen.)

1. Z E L . . .
2. O K G . . .
3. C M N . . .

▲6▲ Ein *Hexomino* ist eine Fläche, bestehend aus sechs Einheitsquadraten, die mit ihren Kanten verbunden sind. Es gibt elf Hexominos, die zu einem Würfel gefaltet werden können. Wer findet sie? Vier von ihnen seien verraten.



▲7▲ Ein interessantes Problem aus „Mathe mit Pfiff": Gegeben ist ein Streifen von 2 cm Breite und 14 cm Länge. Falte aus ihm einen Würfel mit einer Kantenlänge von 2 cm.



Preisträger

XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Einen ersten Preis erhielten:

Olympiadeklasse 10

Axel Fröhlich 1
Spezialschule „C. F. Gauß“,
Frankfurt (Oder) (Kl. 10)

Grit Werner 2
Humboldt-EOS Magdeburg (Kl. 9)

Olympiadeklasse 11

Bodo Heise 3
Juri-Gagarin-OS Görlitz (Kl. 8)

Steffen Zopf 4
EOS Karl Marx, Leipzig (Kl. 10)

Bernd Kreußler 5
Spezialschule f. Math./Physik der
Humboldt-Universität zu Berlin (Kl. 11)

Olympiadeklasse 12

Thomas Maiwald 6
Spezialklasse für Math./Physik/Technik,
TH Karl-Marx-Stadt (Kl. 12)

Peter Dittrich 7
Spezialschule f. Math./Physik der
Humboldt-Universität zu Berlin (Kl. 12)

Einen zweiten Preis erhielten:

In Olympiadeklasse 10: Andreas Kriegel, IV. OS Ernst Schneller, Hoyerswerda; Lutz Dietrich, EOS Prof. Dr. M. Schneider, Lichtenstein; Thomas Apel, Goethe-EOS Reichenbach; Steffen Ewald, EOS Ernst Schneller, Frankenberg; Andreas Goede, EOS Straußberg (aus Kl. 9); Detlef Horbach, EOS Friedrich Engels, Karl-Marx-Stadt (aus Kl. 9)

In Olympiadeklasse 11: Thomas Gundermann, EOS Hermann Pistor, Sonneberg; Arnd Leike und Andreas Kasparek, beide Spezialkl. Math./Physik der Martin-Luther-Universität Halle

In Olympiadeklasse 12: Uwe Reichel, Spezialschule phys.-techn. Richtung Friedrich Engels, Riesa; Bernd Mulansky und Klaus Schlegel, beide EOS Martin Andersen Nexö, Dresden; Ilja Schmelzer, ABF Walter Ulbricht, Halle; Ferdinand Börner, EOS Heinrich Hertz, Berlin; Ralf Becker, EOS Werner Seelenbinder, Zielitz; Uwe Schäfer, Spezialschule f. Math./Physik der Humboldt-Universität zu Berlin

Einen dritten Preis erhielten:

In Olympiadeklasse 10: Andreas Radtke, EOS Belzig; Torsten Flade, EOS Bertholt Brecht, Schwarzenberg; Stefan Müller-Pfeiffer, Spezialschule Carl Zeiss Jena (aus Kl. 9); Meik Hellmund, EOS Henflingoberschule, Meiningen; Erasmus Scholz, EOS Martin Andersen Nexö, Dresden; Olaf Gutschker, 1. EOS Dr. Theodor Neubauer, Cottbus; Thomas Bez, EOS Heinrich Hertz, Berlin; Frank Erdmann, EOS Geschw. Scholl, Zeitz; Bernd König, Thomas-EOS, Leipzig; Egbert Thümmel, BS NEG Nachrichtenelektronik, Greifswald; Michael Giesecke, EOS Martin Andersen Nexö, Dresden (aus Kl. 9); Ingmar Lötzsch, Georg-Friedrich-Händel-OS, Berlin (aus Kl. 9); Jens Galley, Otto-Winzer-OS, (aus Kl. 8) Rainer Jank, EOS Artur Becker, Suhl (aus Kl. 9)

In Olympiadeklasse 11: Uwe Szyszka, EOS Friedrich Engels, Neubrandenburg; Steffen Thiel und Holger Rücker, beide Spezialschule f. Math./Physik der Humboldt-Universität zu Berlin; Dietmar Berthold, EOS Julius Motteler, Crimmitschau; Ralf Hantusch und Frank Bauernöppel, beide EOS Heinrich Hertz, Berlin

In Olympiadeklasse 12: Hans-Dietmar Gröger, ABF Walter Ulbricht, Halle; Harro Rosner, EOS Heinrich Hertz, Berlin; Michael Handschug, Spezialkl. der TH Leuna-Merseburg; Frank Bergner, ABF Walter Ulbricht, Halle; Peter Bartenstein, EOS Geschw. Scholl, Hildburghausen; Klaus Sievert, EOS Friedrich Engels, Karl-Marx-Stadt

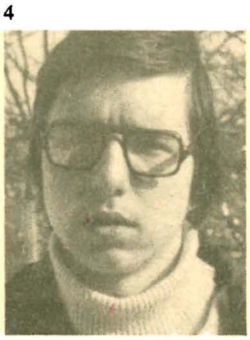
- Ein Diplom für eine besonders elegante Lösung der Aufgabe 5 (Kl. 12) erhielt Friedemann Schuricht, EOS Humboldt, Leipzig
- Weitere 33 Teilnehmer erhielten eine Anerkennungsurkunde für sehr gute Leistungen
- An der DDR-Olympiade nahmen bei insgesamt 208 Teilnehmern 16 Mädchen teil


1


2


Wettbewerbsatmosphäre

3


4


5


6


7


Ein Blick in die Praxis

Der *VEB Maschinen- und Apparatebau Grimma* projektiert, baut und montiert vor allen Dingen Erdöldestillationsanlagen. Die chemische Industrie erfährt gegenwärtig in allen Ländern einen großen Aufschwung. Besonders der Petrolchemie kommt große Bedeutung zu. Ein Hauptgrund dafür sind die vielseitigen Einsatzmöglichkeiten der Erdölprodukte.

Das Rohöl wird in der Erdöldestillationsanlage nach unterschiedlichen Siedebereichen und chemisch-physikalischen Eigenschaften zerlegt. Die Produkte gelangen entweder direkt zum Verbrauch, z. B. Kraftstoffe und Heizöle, oder dienen als Grundstoffe der Weiterverarbeitung zu anderen wichtigen Gütern.

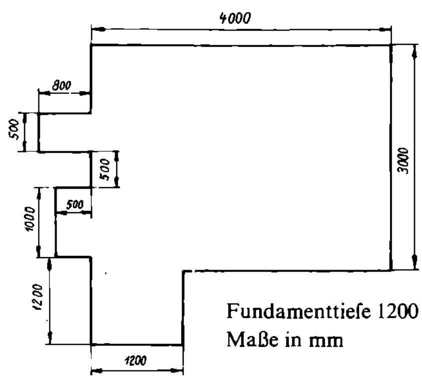
Eine Erläuterung der Anlage gibt in großen Zügen das beigelegte technologische Schema: Das Rohöl gelangt über Wärmeaustauscher in die Entsalzung. Nach erneutem Wärmeaustausch erfolgt in der Vorkolonne unter Druck die Abtrennung eines Leichtbenzin-Flüssiggasgemisches. Nach der Kondensation wird dieses Gemisch in Flüssiggas und Benzin getrennt. Das Sumpfprodukt der Vorkolonne gelangt über den Topofen in die atmosphärische Kolonne. Hier werden unterschiedliche Dieselkraftstoffe abgezogen, mit Wasserdampf gestrippt und nach Abgabe eines Teils ihrer Wärme ins Tanklager geleitet. Das Sumpfprodukt der atmosphärischen Kolonne wird nach Aufheizung im Vakuumofen in der Vakuumkolonne in vier Schmierölfraktionen und den Vakuumrückstand getrennt. Im Bitumenturm wird der Vakuumrückstand in Hochvakuumdestillat und Bitumen zerlegt.

Der Fachberater des Kreises Grimma, Herr *K.-D. Tschiche* und der Fachzirkel der Alfred-Frank-OS Grimma stellten gemeinsam mit den Lehrern der BBS Maschinen- und Apparatebau Grimma für die *alpha*-Leser, nach Klassenstufen geordnet, Aufgaben zusammen und wünschen viel Freude und Erfolg beim Lösen der Probleme aus der Praxis.

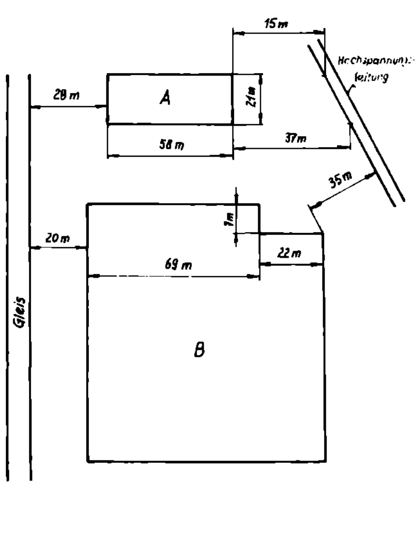
▲5▲ Zur Prüfung von Rohrbündelwärmeüberträgern werde in der Kesselschmiede ein Wasserkreislauf geschaffen. Der hierfür gebaute Behälter in Form eines Quaders hat folgende Abmessungen: Länge 6 m, Breite 2 m, Höhe 3,5 m. Für einen Prüfvorgang sollen 4200 l Wasser benötigt werden.
Nach wieviel Prüfvorgängen ist die gesamte Wassermenge umgelaufen:
a) bei vollem Behälter,
b) bei einer Wasserhöhe im Behälter von 2,5 m?

▲5▲ In einer Werkstatt mit den Abmessungen von 11 m Breite und 36 m Länge stehen 6 Maschinen. Die Maschinen und dazugehörigen Arbeiter benötigen jeweils einen Platz von 15 m^2; 5 m^2; 18 m^2; 60 m^2; 18 m^2 und 50 m^2. Der Platz für die Lagerung und Bereitstellung der Werkstücke an den Maschinen beträgt 16 m^2; 6 m^2; 17 m^2; 26 m^2; 15 m^2 und 20 m^2. Die restliche Fläche wird für Transportwege benötigt.
Wie breit können die Transportwege ausgeführt werden, wenn ihre gesamte Länge 48 m beträgt?

▲6▲ Berechne die Betonmenge in m^3 für das Fundament einer Karusselldrehmaschine, wenn das Fundament folgende Abmessungen hat:



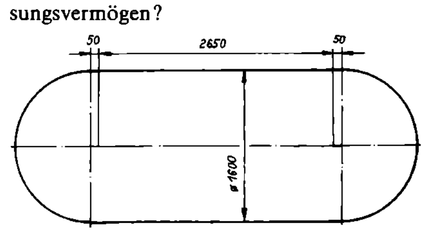
▲6▲ Die Entfernung zwischen dem vorhandenen Gebäude A und dem neu zu errichtenden Gebäude B soll möglichst klein sein. Das Gebäude B muß aber von der in der Nähe befindlichen Hochspannungsleitung und dem Gleis die in der Skizze angegebenen Mindestabstände haben. Die kürzeste Entfernung zwischen den beiden Gebäuden ist zeichnerisch zu ermitteln! (1 m ist als 1 cm zu zeichnen.)



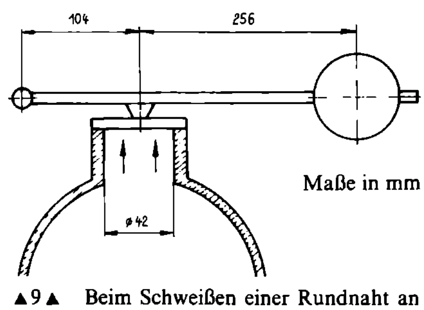
▲7▲ Ein Werkzeugstahl enthält: 0,9% Kohlenstoff, 2% Silizium, 0,2% Mangan, 0,015% Phosphor, 0,005% Schwefel und den Rest Eisen.
Wieviel Kilogramm von jedem Stoff sind in 18 kg Stahl enthalten?

▲7▲ Zum Anreißen von 165 Knotenblechen werden 2 Stunden 45 min gebraucht. Durch Verwendung einer Anreißschablone kann die Arbeitszeit um 90 min verkürzt werden.
a) Wie lange dauert das Anreißen eines Knotenbleches ohne Schablone?
b) Wie lange dauert das Anreißen eines Knotenbleches mit Schablone?
c) Wie groß ist die Steigerung der Arbeitsproduktivität?

▲8▲ Ein Behälter aus einem Hohlzylinder und 2 Halbkugelböden hat die in der Skizze angegebenen Abmessungen (Angabe in mm).
a) Wie groß ist das Fassungsvermögen des Behälters?
b) Wie groß ist die Oberfläche des Behälters?
c) Wie groß sind Durchmesser und Oberfläche eines Kugelbehälters mit gleichem Fassungsvermögen?

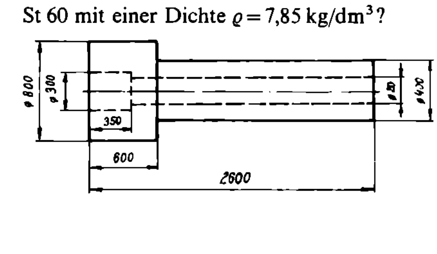


▲8▲ Wie groß muß das Belastungsgewicht des in der Skizze dargestellten Sicherheitsventils eines Dampfkessels sein, wenn es sich beim Überschreiten eines Dampfdrucks von 8 at öffnen soll?
Um welche Hebelart handelt es sich hier?

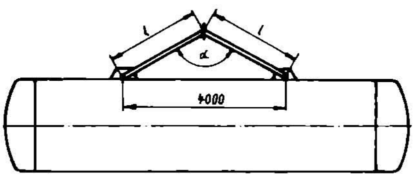


▲9▲ Beim Schweißen einer Rundnaht an einem Stahlbehälter von 1000 mm Durchmesser werden beim Schweißen von Hand 13 min mehr benötigt als mit der UP-Rundnahtschweißvorrichtung.
Mit welcher Schweißgeschwindigkeit wurde mit der Rundnahtschweißvorrichtung geschweißt, wenn bei der Handschweißung 0,2 m/min benötigt wird?

▲9▲ Welche Masse hat eine Hohlwelle aus St 60 mit einer Dichte $\varrho = 7{,}85$ kg/dm^3?



▲10/12▲ **Für den Transport von Rohrbündelwärmeüberträgern (RWÜ) mittels Kran sind an ihnen Tragösen angebracht. Der Abstand der Tragösen betrage 4000 mm. Der Winkel α zwischen den Seilen darf höchstens 120° betragen.**
Wie lang müssen die Seile mindestens sein? Welchen Winkel schließen die Seile ein, wenn die Seillänge $l = 3$ m beträgt?



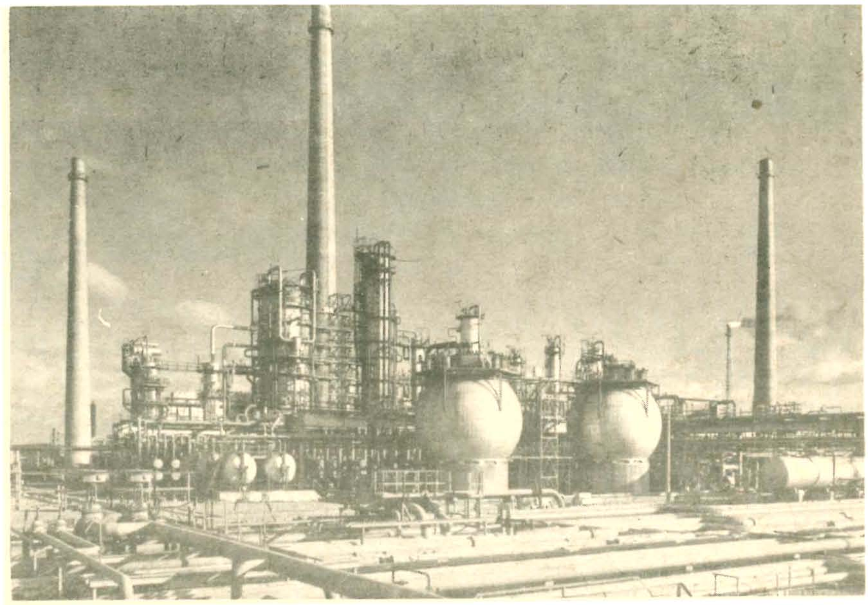
Maße in mm

▲10/12▲ Ein 1800 kp schweres Motorengehäuse soll mit Hilfe einer geneigten Ebene von 3,8 m Länge 1,3 m hoch gehoben werden. Die Reibungszahl beträgt 0,15.

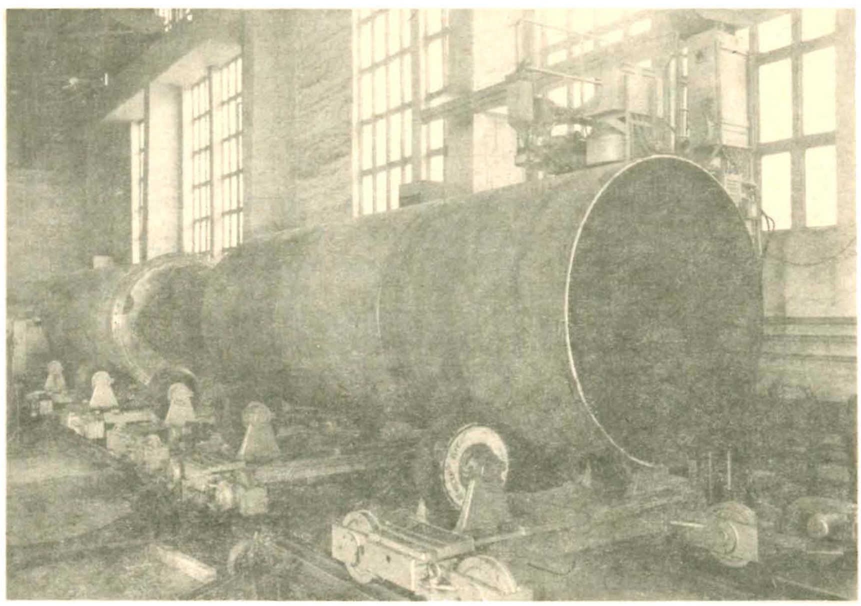
a) Welchen Winkel α bildet die „Rutsche" mit der Horizontalen?

b) Welche Kraft ist notwendig, um das Abrutschen des Gehäuses zu vermeiden?

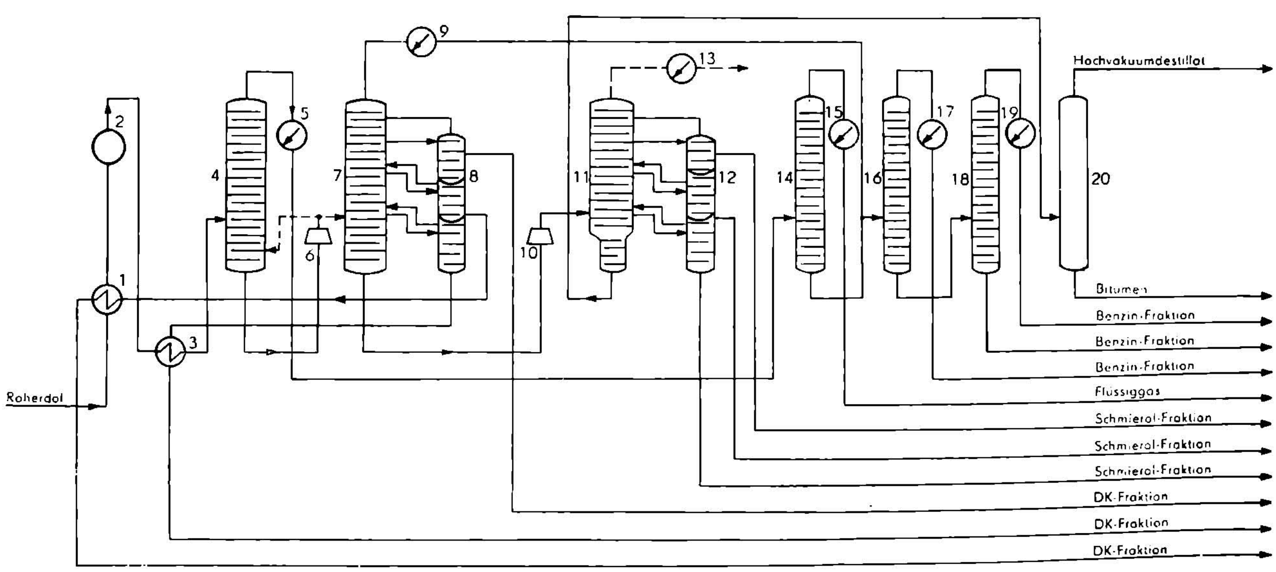
c) Welche Zugkraft muß aufgewendet werden, um den Körper aufwärts zu ziehen?



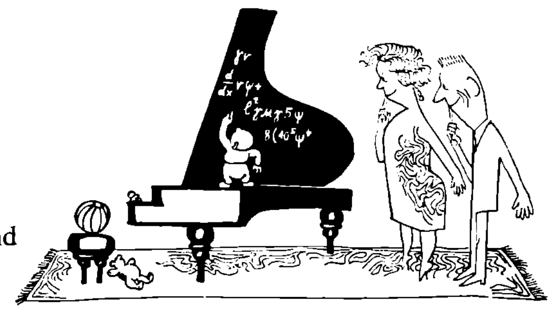
Im Auftrage des Kunden vom Betrieb projektierte, gelieferte und montierte Anlage.
Der Betrieb besitzt modernste Ausrüstungen.



1 Wärmeaustauscher
2 Entsalzer
3 Wärmeaustauscher
4 Vorkolonne
5 Kondensator
6 Topofen
7 atmosph. Kolonne
8 Strippkolonne
9 Kondensator
10 Vakuumofen
11 Vakuumkolonne
12 Strippkolonne
13 Kondensator
14 Stabilisation
15 Kondensator
16 Fraktionierkolonne
17 Kondensator
18 Fraktionierkolonne
19 Kondensator
20 Bitumenturm



In freien Stunden alpha heiter



Das Wunderkind

Eine Familienverwandtschaft

Jeder der Krausebrüder hat genau so viele Schwestern wie Brüder. Jede der Krauseschwestern hat zweimal soviel Brüder wie Schwestern.
Wieviel Jungen und wieviel Mädchen sind in dieser Familie? *Aus: Mathematical pie, London*

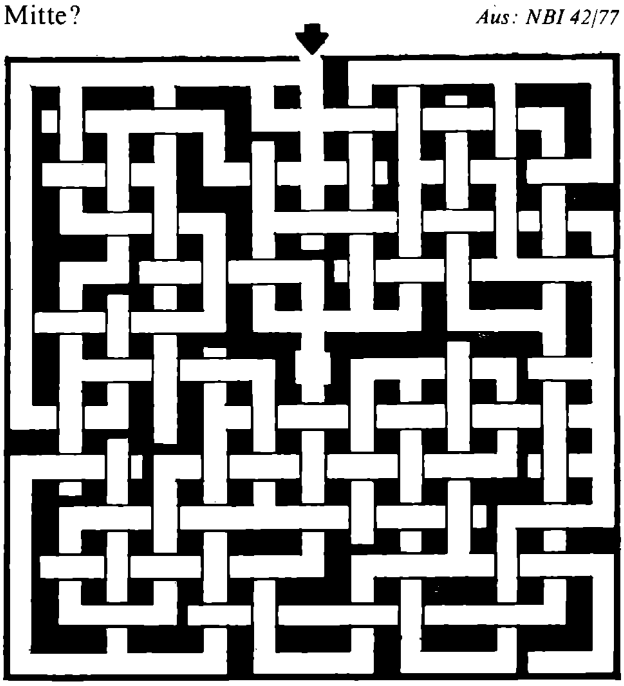
Darf er sie küssen?

Ein junger Mann sitzt im Bus und schaut zum Fenster hinaus. Da sieht er auf einmal seine Freundin. Sie geht gerade die Straße entlang, trifft einen anderen Mann, der sie freundlich begrüßt und ihr einen Kuß gibt. Der junge Mann ist darüber ganz aufgebracht und verärgert. Beim nächsten Wiedersehen mit seiner Freundin fragt er sie gleich als erstes, wer dieser (für ihn noch) fremde Mann war, der sie geküßt hat. Sie antwortet: „Dieses Mannes Mutter ist meiner Mutter Schwiegermutter.“ Daraufhin verzeiht er ihr. Warum?

Aus: Wurzel, 1/78, Jena

Drunter und drüber

Wer findet am schnellsten den Weg vom Eingang oben (siehe Pfeil) bis zum weißen Quadrat in der Mitte? *Aus: NBI 42/77*



Kombiniere und rechne!

Jedes Zeichen bedeutet eine Ziffer, gleiche Zeichen sind gleiche Ziffern. Setzt man die richtigen Ziffern für die Zeichen ein, so ergibt sich für die waagerechten und senkrechten Rechenaufgaben eine wahre Lösung.

Im Dezimalsystem

△⊘△⊠ − ○●□□ = □■○●
: + +
⧄○ · □■ = □□■⧄
■⧄ + ○●○● = ○●▲△

Im Oktalsystem

⊘▲□ − ●■⊘ = ■○○
: + +
○□ · △▲ = △▲□
⊘▲ + ●⧄● = ▲⧄○

Im Dualsystem

△□□ + △△□□ = △□□□□
+ : −
△□□ + △△□ = △□△□
△□□□ − △□ = △△□

Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald

Interessantes Produkt

Wenn man jeden in dem Wort EUKLID vorkommenden Buchstaben in geeigneter Weise durch genau eine der Ziffern 1, 2, 4, 5, 7, 8 ersetzt, entstehen Teilprodukte, deren Ziffern zyklisch vertauscht sind. Die bei dieser Multiplikationsaufgabe noch vorkommenden Ziffern 3 und 6 sind bereits eingesetzt.

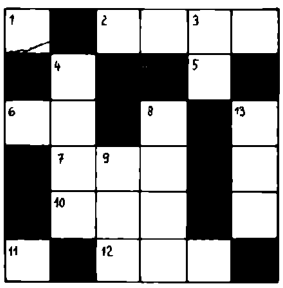
Oberstudienrat K.-H. Lehmann, VLdV, Berlin

E	U	K	L	I	D	·	K	6	U	I	E	3
		K	L	I	D	E	U					
			L	I	D	E	U	K				
				I	D	E	U	K	L			
					D	E	U	K	L	I		
						E	U	K	L	I	D	
							U	K	L	I	D	E
		3	D	D	L	D	I	3	3	6	U	E

Zahlenkreuzworträtsel

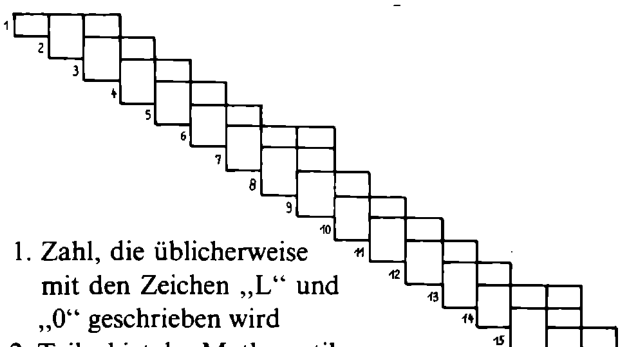
Waagerecht: 1. gerade Primzahl; 2. Geburtsjahr von Gauß; 6. Primzahl aus zwei anderen Primzahlen zusammengesetzt; 7. Vielfaches von 3. senkrecht; 9. Primzahl aus zwei ungeraden Primzahlen; 10. die zweite Quersumme beträgt 1; 11. 2. waagerecht ist durch 11. waagerecht teilbar; 12. Primzahl, zweite Quersumme beträgt 5.
Senkrecht: 3. eine zweistellige Zahl, deren Ziffern aus der gleichen Primzahl bestehen; 4. Geburtsjahr von Newton; 8. Zahl aus gleichen Ziffern; 9. Quadratzahl; 13. das Alter von Gauß im Jahr 1977.

Schüler Lutz Andrews, Rostock



Stufe um Stufe

In die Figur sind Wörter der unten angegebenen Bedeutung einzutragen, und zwar in jedes Feld eine Silbe. Die zweite Silbe des einen Wortes ist gleichzeitig erste Silbe des folgenden Wortes.



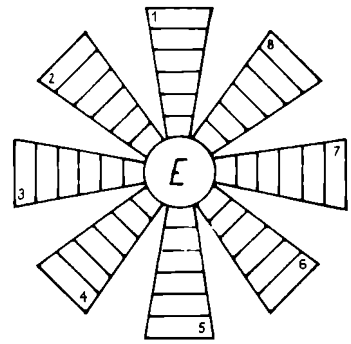
1. Zahl, die üblicherweise mit den Zeichen „L“ und „0“ geschrieben wird
2. Teilgebiet der Mathematik
3. unbegrenzte gerade Linie
4. Teil des Kreises
5. grafische Darstellung von Sachverhalten
6. soviel wie „nicht symmetrisch“
7. Verwandtschaft geometrischer Figuren
8. Gerät zur Längenmessung
9. lat. für „Begriff“
10. Einheit der Zeit
11. lat. für „Zahl“
12. Einheit der elektrischen Leistung
13. ital. Astronom, Physiker und Mathematiker
14. Zeichengerät
15. Eigenschaft bestimmter rationaler Zahlen

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

... und am Ende steht das „E“

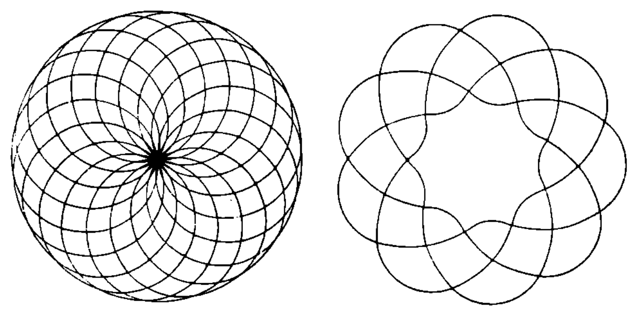
1. Ein Kegelschnitt
2. Begriff aus der Trigonometrie
3. Kurve der Differentialrechnung
4. Gerade, die einen Kreis in zwei Punkten schneidet
5. Kürzeste Verbindung zweier Punkte
6. Es existiert in jeder Gruppe und hat die Eigenschaft $a^{-1}\cdot a = a \cdot a^{-1} = e$
7. Französischer Mathematiker (1749 bis 1827)
8. Geordnete Übersicht

Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald

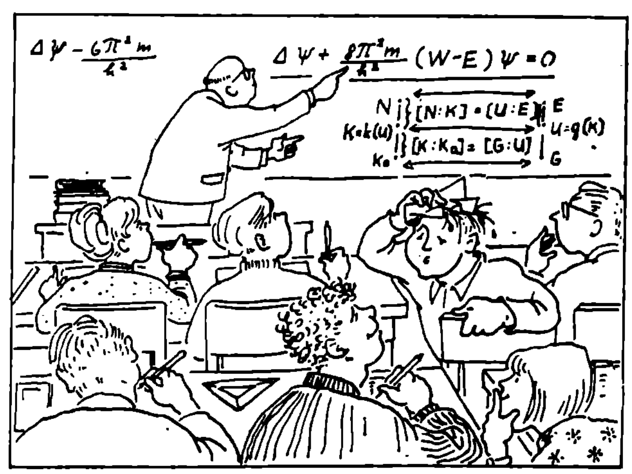


Schöne Kurven

R. E. Moritz, New York

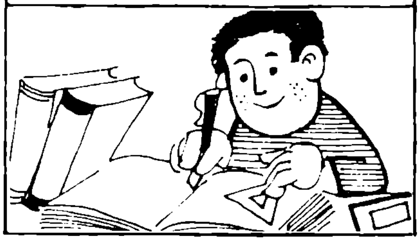


$p = \cos\frac{9}{10}\cdot\Theta$ $\qquad$ $p = \cos\frac{9}{4}\Theta + \frac{r}{3}$



Mann, und ich dachte immer,
Subbotnik das ist Knochenarbeit! *Monika Köpp, Leipzig*

Lösungen



Lösungen zum alpha-Wettbewerb, Heft 1/78:

Ma 5 ■1708 Angenommen, Bernd hat n Eier gefärbt; dann haben Anke $2n$, die Mutter $3n$ Eier gefärbt. Insgesamt wurden $6n$ Eier gefärbt. Nun gilt $25<6n<35$. Nur $n=5$ erfüllt diese Ungleichung. Somit haben die Mutter 15, Anke 10 und Bernd 5 Eier gefärbt.

Ma 5 ■1709 Die beiden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien n und $n+1$. Ihre Summe beträgt somit $2n+1$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}(2n+1)\cdot 23-343&=968,\\ (2n+1)\cdot 23&=1311,\\ 2n+1&=57,\\ 2n&=56,\\ n&=28.\end{aligned}$$

Es handelt sich um die Zahlen 28 und 29.

Probe:

$$\begin{aligned}28+29&=57,\\ 57\cdot 23&=1311,\\ 1311-343&=968.\end{aligned}$$

Ma 5 ■1710 Aus $128\cdot 2=256:8=32$ folgt, daß der Klasse 5b genau 32 Schüler angehören. Angenommen, zur Klasse 5c gehören x Schüler; dann gehören zur Klasse 5a genau $(x+1)$ Schüler; nun gilt

$$\begin{aligned}x+(x+1)&=440:8,\\ 2x+1&=55,\\ 2x&=54,\\ x&=27.\end{aligned}$$

Zur Klasse 5c gehören 27 Schüler, zur Klasse 5a hingegen 28 Schüler.

Ma 5 ■1711 Angenommen, im ersten Tank befanden sich ursprünglich x Tonnen Öl. Dann lagerten im zweiten Tank $(x-20)$ Tonnen Öl. Nun gilt

$$\begin{aligned}x+(x-20)&=500,\\ 2x-20&=500,\\ 2x&=520,\\ x&=260.\end{aligned}$$

Im ersten Tank befanden sich ursprünglich 260 t, im zweiten 240 t Öl. Nach der Reparatur befanden sich im zweiten Tank nur noch 260 t : 2 = 130 t Öl.

Aus 260 t + 130 t + 90 t = 480 t folgt, daß sich nach dem Auftanken im Öllager insgesamt 480 t Öl befanden.

Ma 5 ■1712 Aus $aabc-bac=def$ folgt $a=1$ und $f=0$. Aus $b1c-cbd=cbd$ folgt $b=5$ und $c=2$. Aus $115c-51c=de0$ folgt $d=6$ und $e=4$.

Aus $1152:gh4=g$ folgt $g=3$

Aus $3\cdot 256=k6h$ folgt $h=8$ und $k=7$.

Wir erhalten:

$$\begin{array}{ccccc}1152&-&512&=&640\\ :&&-&&+\\ 384&-&256&=&128\\ \hline 3&\cdot&256&=&768\end{array}$$

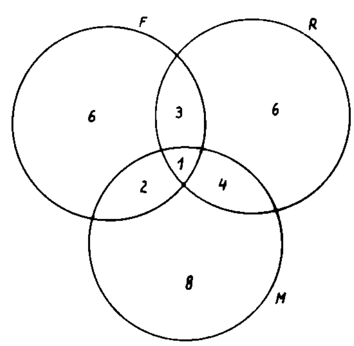
Ma 5 ■1713 Wir beginnen mit der zweiten Spalte von links. Aus $7+d=n$ und $13-d=n$ folgt $2n=20$, also $n=10$ und somit $d=3$. Die Zahlenfolge in der zweiten Spalte von links lautet von oben nach unten gelesen: 4, 7, 10, 13, 16.

1	4	7	10	13
3	7	11	15	19
5	10	15	20	25
7	13	19	25	31
9	16	23	30	37

Wir betrachten nun die erste Zeile. Aus $7-4=d$ folgt $d=3$. Die Zahlenfolge in der ersten Zeile lautet 1, 4, 7, 10, 13. Wir betrachten die dritte Zeile. Aus $10+3\cdot d=25$ folgt $3\cdot d=15$, also $d=5$. Die Zahlenfolge in der dritten Zeile lautet 5, 10, 15, 20, 25. Die restlichen Zahlenfolgen finden wir auf analogem Wege; sie sind der nachfolgenden Abbildung zu entnehmen.

Ma 6 ■1714 Die abgebildete graphische Darstellung veranschaulicht den vorliegenden Sachverhalt.

Nur der AG „Fotoamateure" gehören $(12-4-3+1)=6$ Schüler an; nur der AG „Radiobastler" gehören $(14-4-5+1)=6$ Schüler an; nur der AG „Musikfreunde" gehören $(15-5-3+1)=8$ Schüler an. Zu dieser Klasse gehören $(6+6+8+3+4+5-2)=30$ Schüler.



Ma 6 ■1715 Angenommen, im Korb befanden sich ursprünglich n Äpfel, dann gilt

$$\begin{aligned}n-6-\frac{n-6}{3}-6&=\frac{n}{2},\\ \frac{6n}{6}-2\cdot\frac{(n-6)}{6}-\frac{3n}{6}&=\frac{72}{6},\\ 6n-2n+12-3n&=72,\\ n&=60.\end{aligned}$$

Im Korb lagen ursprünglich 60 Äpfel.

Ma 6 ■1716 Zwischen dem ersten und dem zwölften Baum befinden sich 11 gleichlange Streckenabschnitte. Beim Erreichen des achten Baumes hat Hans sieben Streckenabschnitte zurückgelegt, deshalb hat Hans die gesamte Strecke in $\frac{8}{7}\,\mathrm{s}\cdot 11=\frac{88}{7}\,\mathrm{s}=12\frac{4}{7}\,\mathrm{s}$ zurückgelegt.

Analog dazu gilt:

Werner hat die gesamte Strecke in $\frac{7}{6}\,\mathrm{s}\cdot 11=\frac{77}{6}\,\mathrm{s}=12\frac{5}{6}\,\mathrm{s}$ zurückgelegt.

Hans hat den Lauf gewonnen, denn $12\frac{4}{7}\,\mathrm{s}$ sind weniger Zeit als $12\frac{5}{6}\,\mathrm{s}$.

Ma 6 ■1717 Aus $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$ und $\alpha+\beta=39°+84°=123°$ folgt $\gamma=57°$. Nach dem Außenwinkelsatz gilt nun

$$\sphericalangle DEF=\frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{3}\beta=26°+28°=54°,$$

$$\sphericalangle EFD=\frac{2}{3}\beta+\frac{1}{3}\gamma=56°+19°=75°,$$

$$\sphericalangle FDE=\frac{2}{3}\gamma+\frac{1}{3}\alpha=38°+13°=51°.$$

Ma 6 ■1718 Angenommen, dieser Klasse gehören n Schüler an. Dann erhielten $\frac{1}{3}\cdot n$ Schüler die Note 1, $\left(\frac{1}{3}\cdot n-6\right)$ Schüler die Note 2 und $\left(\frac{2}{3}\cdot n-6\right)$ Schüler die Note 3.

Nun gilt

$$\frac{1}{3}n+\left(\frac{1}{3}n-6\right)+\left(\frac{2}{3}n-6\right)+1=n,$$

$$\frac{4}{3}n-11=n,\quad \frac{1}{3}n=11,$$

$$n=33.$$

Der Klasse gehören 33 Schüler an. Es erhielten 11 Schüler die Note 1, 5 Schüler die Note 2, 16 Schüler die Note 3.

Ma 7 ■1719 Wegen $35=5\cdot 7$ könnte $b=5$ und $d=7$ oder $b=7$ und $d=5$ gelten. Wir nehmen eine Fallunterscheidung vor:

1) Es sei $b=5$ und $d=7$; dann gilt

$\frac{a}{5}-\frac{c}{7}=\frac{7a-5c}{35}$ und $7a-5c=3$,

also $5c=5a+2a-3$, $c=a+\frac{2a-3}{5}$.

Nur für $a=4$, also $c=5$ wird diese Gleichung erfüllt, und wir erhalten $\frac{4}{5}-\frac{5}{7}$. Diese Lösung entfällt, da b und c nicht verschieden voneinander sind.

2) Es sei $b=7$ und $d=5$; dann gilt

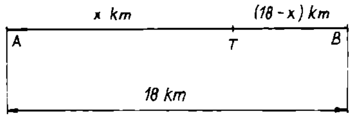
$\frac{a}{7}-\frac{c}{5}=\frac{5a-7c}{35}$ und $5a-7c=3$,

also $5a=5c+2c+3$, $a=c+\frac{2c+3}{5}$.

Nur für $c=1$ und somit $a=2$ oder für $c=6$ und somit $a=9$ wird diese Gleichung erfüllt. Für $a=9$ und $c=6$ erhalten wir $\frac{9}{7}-\frac{6}{5}$; diese Lösung entfällt, da es sich nicht um echte Brüche handelt.

Diese Aufgabe besitzt unter den einschränkenden Bedingungen genau eine Lösung; sie lautet $\frac{2}{7}-\frac{1}{5}=\frac{10-7}{35}=\frac{3}{35}$.

Ma 7 ■ Aus $s_1 = x$ km und $v_1 = 24 \text{ km} \cdot h^{-1}$ folgt $t_1 = \frac{x}{24}$ h. Aus $s_2 = (18-x)$ km und $v_2 = 24 \text{ km} \cdot h^{-1}$ folgt $t_2 = \frac{18-x}{24}$ h.

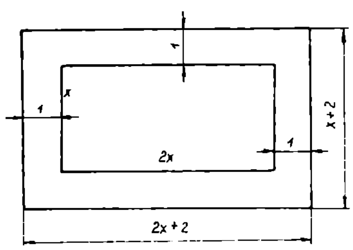


Nun gilt $t_1 = t_2 + \frac{1}{4}$ h, also

$$\frac{x}{24} = \frac{18-x}{24} + \frac{1}{4},$$
$$x = 18 - x + 6,$$
$$2x = 24,$$
$$x = 12.$$

Beide sind vom Ort A 12 km entfernt, wenn sie sich treffen.

Ma 7 ■1721 Der nachstehenden Zeichnung ist zu entnehmen, daß der Weg einen Flächeninhalt $A_W = (x+2)(2x+2) - x \cdot 2x$ hat.



Deshalb gilt

$$2(x+2)(x+1) - 2x^2 = 640 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$
$$(x+2)(x+1) - x^2 = 320 \cdot \frac{1}{4},$$
$$x^2 + x + 2x + 2 - x^2 = 80,$$
$$3x = 78,$$
$$x = 26.$$

Die rechteckige Rasenfläche ist 26 m breit und 52 m lang.

Ma 7 ■1722 Aus $\overline{AS} = \overline{BS} = r$ folgt $\sphericalangle SAB = \sphericalangle SBA = \frac{1}{2} \cdot (180° - 60°) = 60°$. Aus $AB \parallel CD$ folgt $\sphericalangle SAB = \sphericalangle SCD = 60°$ und $\sphericalangle SBA = \sphericalangle SDC = 60°$. Das Dreieck SDC ist somit gleichwinklig, also auch gleichseitig. Es sei $\overline{CS} = x$; dann gilt

$u_1 = u_2$

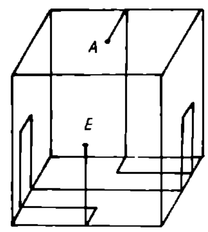
$3x = x + 2 \cdot (r - x) + b.$

Wegen $b = \frac{2\pi r}{6} = \frac{1}{3}\pi r$ erhalten wir durch Einsetzen

$$2x = 2 \cdot (r-x) + \frac{1}{3}\pi r,$$
$$6x = 6 \cdot (r-x) + \pi r,$$
$$6x = 6r - 6x + \pi r,$$
$$12x = r(6+\pi),$$
$$x = \frac{r}{12} \cdot (6+\pi) = \frac{12}{12} \cdot (6+\pi) \text{ cm} \approx 9{,}14 \text{ cm}.$$

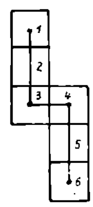
Ma 8 ■1723

a) Kantenmodell

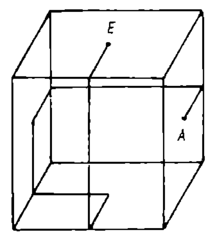


A: Anfang
B: Ende

b) Nicht die einzige Lösung!



c) Kantenmodell



A: Anfang
E: Ende

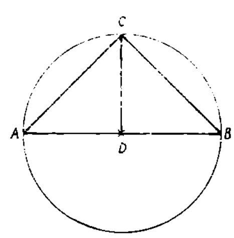
d) 5 cm lang

Ma 8 ■1724 Nach Aufgabenstellung gilt $\overline{DB} = \overline{DC} = 3$ cm.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$\overline{BC}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{DC}^2$$
$$\overline{BC} = \sqrt{18 \text{ cm}^2} = 3\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Der Umfang u des Dreiecks ABC beträgt

$$u = (6 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2})$$
$$= (6 + 6\sqrt{2}) \text{ cm}$$
$$\approx 14{,}48 \text{ cm}.$$



Den Flächeninhalt eines der beiden Kreissegmente erhält man, wenn man vom Flächeninhalt des Halbkreises den Flächeninhalt des Dreiecks ABC subtrahiert und diese Differenz durch 2 dividiert.

$$A_{Segm.} = (A_{Halbkreis} - A_{ABC}) : 2$$
$$= \left(\frac{\pi r^2}{2} - \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2}\right) : 2$$
$$= \left(\frac{9\pi}{9} - 9\right) : 2 \text{ cm}^2$$
$$\approx 2{,}57 \text{ cm}^2$$

Ma 8 ■1725 a) $2a + (2a+1) + (2a+2) + (2a+3) + (2a+4) = 10a + 10 = 10(a+1).$
$a \in N, a \geqq 0$
Jedes Vielfache von 10 endet mit der Ziffer 0.

b) $(2a+1) + (2a+2) + (2a+3) + (2a+4) + (2a+5) = 10a + 15 = 5(2a+3).$
$2a$ ist eine gerade, also $2a+3$ eine ungerade Zahl. Das Produkt aus 5 und einer ungeraden Zahl endet mit der Ziffer 5.
$10a + (10a+5) + (10a+10) + \ldots + (10a+45) = 100a + 225.$
$a \in N, a \geqq 0$
Der Summand $100a$ ist ein Vielfaches von 100; er endet also auf zwei Nullen. Die letzten beiden Ziffern der Summe $(100a + 225)$ lauten somit 25.

Ma 8 ■1726 Jeder Bruch der Klasse $\frac{1}{5}$ läßt sich in der Form $\frac{x}{5x}$ darstellen. ($x \in N$ und $x \neq 0$.) Die Summe aus Zähler und Nenner ist dann $6x$. Nun soll gelten $6x = n^2$ mit $10 \leqq n^2 < 100$ bzw. $4 \leqq n \leqq 9$.
Nur für $n = 6$ wird $6x = n^2$ erfüllt. Wir erhalten

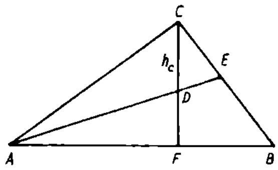
$$x = \frac{n^2}{6} = \frac{36}{6} = 6.$$

Der Bruch $\frac{x}{5x} = \frac{6}{5 \cdot 6} = \frac{6}{30}$ erfüllt als einziger die Bedingungen der Aufgabe.

Ma 9 ■1727 1) Wenn a eine gerade Zahl ist, so sind a^2 und a^4 gerade. Damit ist der Zähler gerade.
Wenn a eine ungerade Zahl ist, so sind $5a^2$ und a^4 ungerade.
Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade, d. h. der Zähler ist gerade.
In beiden Fällen ist der Zähler durch 2 teilbar.
2) Wenn b gerade ist, so sind $35b^3$, $7b$ und die Summe gerade, d. h. der Nenner ist gerade.
Wenn b ungerade ist, so sind b^3, $35b^3$ und auch $7b$ ungerade. Der Nenner ist dann wieder gerade (s. o.).
In beiden Fällen ist der Nenner durch 2 teilbar. Aus 1) und 2) folgt: Der Bruch ist durch 2 kürzbar.
Es ist nun noch zu zeigen, daß der Bruch auch stets durch 3 kürzbar ist.
1) a läßt bei Division durch 3 entweder den Rest 0, 1 oder 2.
1. Fall: Wenn a den Rest 0 läßt, so lassen a^2, $5a^2$, a^4 und auch $5a^2 + a^4$ den Rest 0.
2. Fall: Wenn a den Rest 1 läßt, so lassen a^2 und auch a^4 den Rest 1, $5a^2$ den Rest 2, also $5a^2 + a^4$ den Rest 0.
3. Fall: Wenn a den Rest 2 läßt, so lassen a^2 und auch a^4 den Rest 1, $5a^2$ den Rest 2, also $5a^2 + a^4$ den Rest 0;
d. h. in allen drei Fällen ist der Zähler durch 3 teilbar.
2) b läßt bei Division durch 3 entweder den Rest 0, 1 oder 2.
1. Fall: Wenn b den Rest 0 läßt, so lassen b^3, $35b^3$, $7b$ und auch $35b^3 + 7b$ den Rest 0.
2. Fall: Wenn b den Rest 1 läßt, so lassen b^3 den Rest 1, $35b^3$ den Rest 2, $7b$ den Rest 1, also $35b^3 + 7b$ den Rest 0.
3. Fall: Wenn b den Rest 2 läßt, so lassen b^3 den Rest 2, $35b^3$ den Rest 1, $7b$ den Rest 2,

also $35b^3+7b$ den Rest 0; d. h. in allen drei Fällen ist der Nenner durch 3 teilbar.
3) Wenn Zähler und Nenner stets durch 3 teilbar sind, ist der Bruch stets durch 3 kürzbar.
4) Wenn ein Bruch durch 2 und durch 3 kürzbar ist, so ist er durch 6 kürzbar, w. z. b. w.
Bemerkung: Schüler Ralph Ott löste die Aufgabe mit Hilfe von Zahlenkongruenzen! Wer kann das auch?

Ma 9 ▪1728 Nach Voraussetzung soll gelten $\overline{CD}=\overline{CE}$, also auch
$\sphericalangle CED = \sphericalangle CDE = \phi$. Ferner gilt
$\sphericalangle CDE = \sphericalangle ADF = \phi$ (Scheitelwinkel).
Im rechtwinkligen Dreieck AEC gilt $\sphericalangle CAE = 90° - \sphericalangle CEA = 90° - \phi$. Im rechtwinkligen Dreieck AFD gilt $\sphericalangle DAF = 90° - \sphericalangle ADF = 90° - \phi$. Folglich gilt $\sphericalangle CAE = \sphericalangle DAF$, d. h. AE halbiert den Winkel $\sphericalangle CAB$.

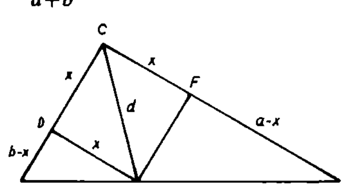


Ma 9 ▪1729 Bezeichnet man die der Größe nach geordneten Ziffern der dreistelligen Zahl mit a, b und c, so gilt:
$100a+10b+c-(100c+10b+a)=99a-99c$
$=99(a-c)$.
Daraus folgt, daß $x-y$ durch 99, 33, 11, 9 und 3 teilbar ist. Setzt man für a und c Ziffern ein, so ist $0 \leqq a-c \leqq 9$; d. h. es ergeben sich nur die Zahlen 891, 792, 693, 594, 495, 396, 297, 198, 99. Die Zahl heißt 495.

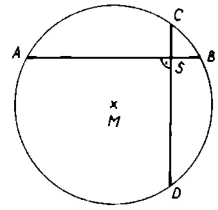
990	981	972	963	954	954 ...
− 99	−189	−279	−369	−459	−459
891	792	693	594	495	495

Ma 9 ▪1730 $\overline{CE}$ ist Diagonale des Quadrats $CDEF$. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle ACB$ mit der Hypotenuse c ist E. Die Lote von E auf a bzw. b schneiden a bzw. b in F bzw. D. Die Dreiecke AED und ABC sind ähnlich. Folglich gilt:

$$\frac{b-x}{x}=\frac{b}{a} \qquad A_{DEFC}=x^2$$
$$bx=ab-ax \qquad =\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$$
$$ax+bx=ab \qquad A=\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}$$
$$x(a+b)=ab \qquad u=4x$$
$$x=\frac{ab}{a+b}, \qquad u=\frac{4ab}{a+b},$$
$$d^2=2\cdot x^2$$
$$d=x\cdot\sqrt{2}$$
$$d=\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$

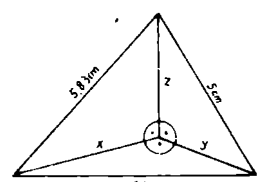


Ma 10/12 ▪1731 Es ist $\overline{BC}=5$ cm (nach Voraussetzung) und $\overline{CS}=4$ cm nach dem Satz des Pythagoras.



Nach dem Sehnensatz (Kl. Enzyklopädie Math., S. 205) ist $\overline{AS}\cdot\overline{BS}=\overline{CS}\cdot\overline{DS}$, also $8\cdot 3 = 4\cdot\overline{DS}$. Daraus folgt:
$\overline{DS}=6$ cm, $\overline{DC}=10$ cm. Im rechtwinkligen Dreieck ASD gilt nach dem Satz des Pythagoras $\overline{AD}=10$ cm; folglich ist $\overline{AD}=\overline{CD}$, w. z. b. w.
(Skizze nicht maßstäblich)

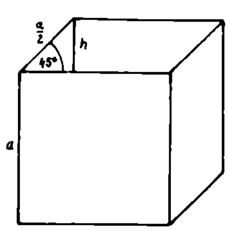
Ma 10/12 ▪1732 Die Skizze zeigt die Draufsicht des Tetraeders, bei der die Grundkanten in wahrer Länge abgebildet werden. Nach dem Satz des Pythagoras gilt
(1) $x^2+z^2=5{,}83^2$
(2) $x^2+y^2=6{,}4^2$
(3) $y^2+z^2=5^2$.
Aus (1)−(2) folgt
(4) $z^2-y^2=5{,}83^2-6{,}4^2$
Aus (3)+(4) folgt
(5) $2z^2=5{,}82^2-6{,}4^2+5^2$
Daraus folgt $z=3$ cm.
Durch Einsetzen ergibt sich $y=4$ cm und $x=5$ cm. Die Seitenkanten des Tetraeders sind 3 cm bzw. 4 cm bzw. 5 cm lang.



x, y, z seien die Längen der Seitenkanten

Ma 10/12 ▪1733 Für $x \geqq 1$ und $x<-4$ gilt $x^3 \leqq x^3+x^2-4x+4<(x+1)^3$. Das würde bedeuten, daß die gesuchte Kubikzahl zwischen den Kuben zweier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen liegt. Das ist aber unmöglich. Es bleibt nun nur noch das oben ausgeschlossene Intervall und die Möglichkeit $x^3=x^3+x^2-4x+4$ zu untersuchen. Als Lösungsmenge ergibt sich $L=\{-1, 2, -2\}$, d. h. nur für die ganzen Zahlen −1, 2, und −2 ist der Wert des Terms x^3+x^2-4x+4 eine Kubikzahl (jedesmal 8)!

Ma 10/12 ▪1734 Der Flächeninhalt der vorderen Quadratfläche beträgt a^2. Weiter sind



zwei Parallelogrammflächen dargestellt, die kongruent sind. Es gilt
$$\sin 45° = \frac{h}{\frac{a}{2}}, \text{ d. h. } h=\frac{a}{2}\cdot\sin 45°.$$
Für die zwei Parallelogrammflächen ergibt sich für den Flächeninhalt
$$A=2a\cdot\frac{a}{2}\cdot\sin 45°$$
$$A=a^2\cdot\sin 45°.$$
Insgesamt ist also die Fläche mit dem Inhalt
$$A\approx 0{,}707a^2+a^2$$
$$A\approx 1{,}707\,a^2$$
dargestellt. Der Inhalt der Würfeloberfläche beträgt $6a^2$. Die dargestellte Fläche ist etwa 28,4% der Würfeloberfläche. Für $\alpha=30°$ und $q=\frac{1}{3}$ ergibt sich durch analoge Berechnung etwa 22,2%.

Ph 6 ▪31 Geg.: a) $a=10{,}25$ cm (Länge)
$b=8{,}25$ m (Breite)
$c=5{,}5$ m (Höhe)
$\varrho=1{,}29\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
b) 1 Handwagen $\mathrel{\hat{=}}$ 150 kg Masse
Ges.: a) m (Masse der Luft)
b) n (Anzahl der Handwagen)
a) Die Masse m der Luft berechnet man nach der Formel
$$m=\varrho\cdot V. \qquad (1)$$
Dabei ist V das Volumen des Klassenzimmers, also eines Quaders. Dies findet man mit $V=a\cdot b\cdot c$. In (1) eingesetzt ergibt sich für die Masse
$m=\varrho\cdot a\cdot b\cdot c$
$m=1{,}29\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 10{,}25\text{ m}\cdot 8{,}25\text{ m}\cdot 5{,}5\text{ m}$
$m\approx 600$ kg
Die Luft hat eine Masse von 600 kg.
b) Die Anzahl der Handwagen ergibt sich aus
$n=600\text{ kg}:150\text{ kg}$
$n=4$
Man braucht also 4 Handwagen, um einen Körper gleicher Masse hinauszutransportieren.

Ph 7 ▪32

$\bar v_1=90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$	$\bar v_2=60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$
s_1	$s_2=2\cdot s_1$

A D B

$t_1+t_2=t_g$
$s_1+s_2=s_g$
Geg.: $\bar v_1=90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ $s_1=\frac{1}{3}s_g$ km
$\bar v_2=60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ $s_2=\frac{2}{3}s_g$ km
Ges.: v (Durchschnittsgeschwindigkeit von A nach B)
Die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar v$ von A nach B findet man nach der Formel
$$\bar v=\frac{s_g}{t_g}. \qquad (1)$$
Dabei ist s_g die gesamte Streckenlänge in km, t_g die gesamte Zeit in h. Diese Zeit t_g findet

man aus den Teilzeiten t_1 und t_2; denn es ist $s_1=\bar{v}_1\cdot t_1$ und $s_2=\bar{v}_2\cdot t_2$.

Also $t_1=\frac{s_1}{\bar{v}_1}$ und $t_2=\frac{s_2}{\bar{v}_2}$

$$t_1=\frac{s_g\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}}{3\cdot 90\,\mathrm{km}} \text{ und } t_2=\frac{2\cdot s_g\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}}{3\cdot 60\,\mathrm{km}}$$

$$t_1=\frac{s_g}{270}\,\mathrm{h} \quad \text{und } t_2=\frac{s_g}{90}\,\mathrm{h}.$$

Nun ist

$$t_g=t_1+t_2$$

$$t_g=\frac{s_g}{270}\,\mathrm{h}+\frac{s_g}{90}\,\mathrm{h}$$

$$t_g=\frac{4s_g}{270}\,\mathrm{h}. \qquad (2)$$

(2) in (1) eingesetzt ist dann

$$\bar{v}=\frac{s_g\,\mathrm{km}\cdot 270}{4\cdot s_g\mathrm{h}}$$

$$\bar{v}=67{,}5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Der Pkw fuhr mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $67{,}5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ von A nach B.

Ph8 ■33 Geg.: $d=37\,\mathrm{cm}=3{,}7\,\mathrm{dm}$

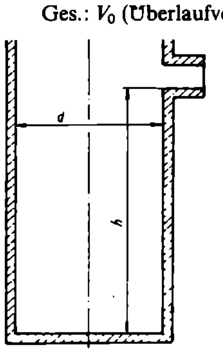
$h=93\,\mathrm{cm}=9{,}3\,\mathrm{dm}$

$\varrho_1=0{,}9990\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$

$\varrho_2=0{,}9777\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$

$\varrho_3=0{,}9982\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$

Ges.: V_0 (Überlaufvolumen)



Das Überlaufvolumen V_0 bei 20 °C läßt sich aus dem Überlaufvolumen $V_ü$ bei 70 °C berechnen, da die Masse m_1 des Wassers bei jeder Temperatur gleich groß ist. Es gilt demzufolge

$$m_1=V_0\cdot\varrho_3 \text{ und } m_1=V_ü\cdot\varrho_2. \qquad (1)$$

Dabei ist ϱ_3 die Dichte des Wassers bei 20 °C und ϱ_2 die Dichte bei 70 °C. Aus (1) folgt

$$V_0\cdot\varrho_3=V_ü\cdot\varrho_2$$

$$V_0=\frac{V_ü\cdot\varrho_2}{\varrho_3} \qquad (2)$$

Das Wasservolumen $V_ü$ bei 70 °C ergibt sich als Differenz aus dem Gesamtwasservolumen V_2 bei 70 °C mit der Dichte ϱ_2 und dem Gesamtwasservolumen V_1 bei 15 °C mit der Dichte ϱ_1. Auch hier ist die Masse m_2 des Wassers konstant. Es ist also

$$V_ü=V_2-V_1, \qquad (3)$$

und da $m_2=V_1\cdot\varrho_1$ und $m_2=V_2\cdot\varrho_2$ gilt, ist

$$V_1\cdot\varrho_1=V_2\cdot\varrho_2$$

$$V_2=\frac{V_1\cdot\varrho_1}{\varrho_2}. \qquad (4)$$

(4) in (3) eingesetzt, ergibt

$$V_ü=\frac{V_1\cdot\varrho_1}{\varrho_2}-V_1$$

$$V_ü=V_1\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}-1\right). \qquad (5)$$

Schließlich ist, (5) in (2) eingesetzt,

$$V_0=V_1\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}-1\right)\frac{\varrho_2}{\varrho_3}$$

$$V_0=V_1\left(\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_3}\right).$$

Nun ist

$$V_1=\frac{\pi d^2h}{4} \text{ (s. Abb.), also}$$

$$V_0=\frac{\pi d^2h(\varrho_1-\varrho_2)}{4\varrho_3}$$

$$V_0=\frac{3{,}14\cdot 3{,}7^2\,\mathrm{dm}^2\cdot 9{,}3\,\mathrm{dm}(0{,}9990-0{,}9777)}{4\cdot 0{,}9982}\;\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{dm}^3}{\mathrm{dm}^3\cdot\mathrm{kg}}$$

$$V_0=2{,}13\,\mathrm{dm}^3=2130\,\mathrm{cm}^3.$$

In dem Meßzylinder befinden sich 2130 cm³ Wasser.

Lösungen zu: Seltsame Produkte, S. 57

1. a) $777\cdot 715$;
b) $259\cdot 858$; $407\cdot 546$; $481\cdot 462$; $518\cdot 429$; $814\cdot 273$; $962\cdot 231$; $777\cdot 286$;
c) keine Lösung;
d) $369\cdot 271$; $123\cdot 813$.
2. a) $74\cdot 91\cdot 66$; $74\cdot 77\cdot 78$;
b) keine Lösung.
3. a) $192\cdot 643$;
b) $39\cdot 77\cdot 41$; $91\cdot 33\cdot 41$.

Lösungen zu:
Eigenschaften von Verknüpfungen, Teil 2,
S. 58

Aufgabe 10:

a) Sei $x\circ_1 a=y\circ_1 a$, d. h. $2x+2a=2y+2a$. Da für die Addition und Multiplikation die Kürzungsregel gilt, folgt $2x=2y$ und schließlich $x=y$. Wegen der Kommutativität von $\circ_1$ ist alles gezeigt.
b) $(R^*,\circ_5)$: ja (Beweis analog $\circ_1$);
$(N\setminus\{0\},\circ_6)$: nein (vgl. Ausführungen im Text);
$(N,\circ_7)$: nein ($4\sqcap 12=4\sqcap 8$, aber $12\neq 8$);
$(P^+\cup\{0\},\circ_8)$: ja (beachte die Trägermenge!);
$(R,\circ_9)$: nein ($2\circ_9 2=(-4)\circ_9 2$, aber $2\neq -4$);
$(G,\circ_{10})$: nein [$(-1)\circ_{10}3=(-1)\circ_{10}4$, aber $3\neq 4$)]
bei Ausschluß von -1 aus der Trägermenge ist die Kürzungsregel erfüllt;
$(R^*,\circ_{11})$: nein (vgl. Ausführungen im Text).
c) Analoges Vorgehen wie zu Aufgabe 10a); z. B. für
$\circ_2$: $x\circ_2 a=y\circ_2 a$, d. h. $\frac{x+a}{2}=\frac{y+a}{2}$,
d. h. $x+a=y+a$, d. h. $x=y$.

Aufgabe 11:

Für alle x, y und $a\in M$ gilt:
Wenn $x\neq y$, so $x\circ a\neq y\circ a$ und $a\circ x\neq a\circ y$.

Aufgabe 12: a)

$(P,+)$: $a+x=b$ hat die Lösung $x=b-a$;
$(P,-)$: $a-x=b$ hat die Lösung $x=a-b$,
$y-a=b$ hat die Lösung $y=b+a$;
$(P\setminus\{0\},:)$:
$a:x=b$ hat die Lösung $x=a:b$,
$y:a=b$ hat die Lösung $y=b\cdot a$;
$(P,\cdot)$ erfüllt die Divisionsregel nicht! Zum Beispiel hat die Gleichung $0\cdot x=1$ keine Lösung.
$(P\setminus\{0\},\cdot)$ erfüllt die Divisionsregel:
$a\cdot x=b$ hat die Lösung $x=b:a$.
b) Bis auf $\circ_{11}$ (vgl. die Ausführungen im Text) erfüllt keine dieser Verknüpfungen die Divisionsregel. Folgende Gleichungen haben z. B. keine Lösung:
$5\circ_5 x=8$, $3\circ_6 x=4$, $4\circ_7 x=5$,
$5\circ_8 x=4$, $0\circ_9 x=1$, $2\circ_{10}x=3$.
Allerdings würde $(R\setminus\{-1\},\circ_{10})$ die Divisionsregel erfüllen.
c) Im Verknüpfungsgebilde $(G,\circ_{13})$ mit $x\circ_{13}y =_{Df} x+y+c$ sind beide Regeln erfüllt:
Aus $x\circ_{13}a=y\circ_{13}a$ folgt $x+a+c=y+a+c$, so daß sich $x=y$ ergibt. Die Gleichung $x\circ_{13}a=b$ hat die Lösung $x=b-a-c$.
Im Verknüpfungsgebilde $(G,\circ_{14})$ mit $x\circ_{14}y =_{Df} x\cdot y\cdot c$ hingegen gilt lediglich die Kürzungsregel:
Aus $x\circ_{14}a=y\circ_{14}a$ folgt $x\cdot a\cdot c=y\cdot a\cdot c$, so daß sich wieder $x=y$ ergibt. Die Gleichung $x\circ_{14}a=b$ hingegen hat nur dann eine Lösung, wenn b ganzzahliges Vielfaches des Produktes $a\cdot c$ ist.
(Über $R^*\setminus\{0\}$ oder $R\setminus\{0\}$ z. B. wäre die Divisionsregel erfüllt.)
d) In den beiden Verknüpfungsgebilden mit $\varepsilon\setminus\{A\}$ als Trägermenge gilt weder die Divisions- noch die Kürzungsregel. In allen übrigen geometrischen Verknüpfungsgebilden ist die Divisionsregel erfüllt; die Kürzungsregel ebenfalls – mit Ausnahme der Verknüpfungsgebilde $(k,\circ_1)$, $(k,\circ_2)$ und $(e,\circ)$.
e) $(P,+)$, $(P,-)$, $(P\setminus\{0\},\cdot)$, $(P\setminus\{0\},:)$, $(R,\circ_2)$, $(P^+,\circ_3)$, $(R\setminus\{-1\},\circ_{10})$, $(G,\circ_{12})$ und $(G,\circ_{13})$.

Aufgabe 13:

a) 1. n_l ist links-neutrales Element von $(M,\circ)$,
2. n_r ist rechts-neutrales Element von $(M,\circ)$.
Dann gilt: $n_l \underset{2.}{=} n_l\circ n_r \underset{1.}{=} n_r$, d. h. $n_l=n_r=_{Df}n$.
b) Folgt unmittelbar aus a).
($n_1=n_1\circ n_2=n_2$, wobei n_1, n_2 neutrale Elemente seien.)
c) *1. Fall:* Existiert ein neutrales Element, so gibt es kein weiteres (auch kein weiteres einseitig-neutrales Element) – vgl. b).
2. Fall: Existiert wenigstens ein links-neutrales Element n_l und wenigstens ein rechts-neutrales Element n_r, so gibt es genau ein neutrales Element $n(=n_l=n_r)$ und es kann dann kein weiteres einseitig-neutrales Element geben – vgl. a).
3. Fall: In einem Verknüpfungsgebilde $(M,\circ)$ kann es jedoch entweder mehrere links-neutrale Elemente oder mehrere rechts-neutrale Elemente geben. Beispiel:

Über der Menge $M=\{1, 2, 3\}$ definieren wir die Verknüpfung $\circ$ durch $x \circ y =_{Df} y$ für alle $x, y \in M$. Jedes Element ist damit ein linksneutrales Element.

Aufgabe 14:

$(R^*, \circ_5)$: $n_l=0$; $(N\setminus\{0\}, \circ_6)$: $n_r=1$;
$(N, \circ_7)$: $n=0$; $(P^+ \cup \{0\}, \circ_8)$: $n=0$;
$(R, \circ_9)$: /; $(G, \circ_{10})$: $n=0$;
$(R^*, \circ_{11})$: $n=0$.

Aufgabe 15:

Das neutrale Element von $(G, \circ_{13})$ ist $n=c$: $c \circ_{13} x = x \circ_{13} c = x + c - c = x$ für alle ganzen x. $(G, \circ_{14})$ besitzt kein neutrales Element, auch kein einseitig-neutrales Element. (Wählen wir anstelle von G z. B. R^* als Trägermenge, wäre $n=1:c$ das neutrale Element.) In $(G, \circ_{14})$ ist $a=0$ absorbierendes Element.

Aufgabe 16:

Für alle x, y, z, u und $v \in P^+$ gilt:

1. $x \circ_{17} y = x^{\ln y} = (e^{\ln x})^{\ln y} = e^{\ln x \cdot \ln y} = e^{\ln y \cdot \ln x}$ $= (e^{\ln y})^{\ln x} = y^{\ln x} = y \circ_{17} x$;
2. $(x \circ_{17} y) \circ_{17} z = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln z \cdot \ln y} = x^{\ln(y^{\ln z})}$ $= x \circ_{17} (y \circ_{17} z)$;
3. $(x \circ_{17} y) \circ_{17} (u \circ_{17} v) = x^{\ln y \cdot \ln v \cdot \ln u} = x^{\ln u \cdot \ln v \cdot \ln y}$ $= (x \circ_{17} u) \circ_{17} (y \circ_{17} v)$;
4. $n=e$: $x \circ_{17} e = x^{\ln e} = x^1 = x$; $(e \circ_{17} x = e^{\ln x}$ $= x)$;
5. $a=1$: $x \circ_{17} 1 = x^{\ln 1} = x^0 = 1$; $(1 \circ_{17} x = 1^{\ln x}$ $= 1)$;
6. Die Gleichung $x \circ_{17} 1 = 2$ hat z. B. keine Lösung; andererseits gilt auch $3 \circ_{17} 1 = 4 \circ_{17} 1$, aber $3 \neq 4$.

Aufgabe 17:

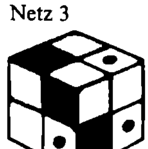
Das Verknüpfungsgebilde $(k, \circ_{18})$ ist kommutativ, assoziativ, bisymmetrisch; es erfüllt die Divisions- und die Kürzungsregel und besitzt das neutrale Element N.

Lösungen zu Würfeleien, S. 61

▲1▲ Würfel *b*

▲2▲ Netz 3

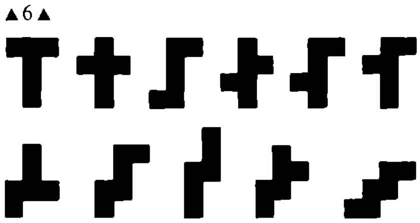
▲3▲



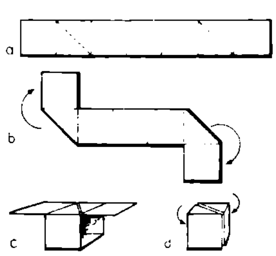
▲4▲

▲5▲ ZELTAF; OKGHBS; CMNRIU

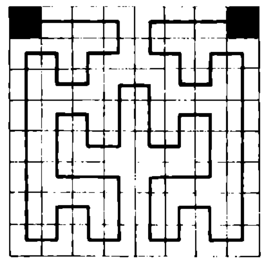
▲6▲



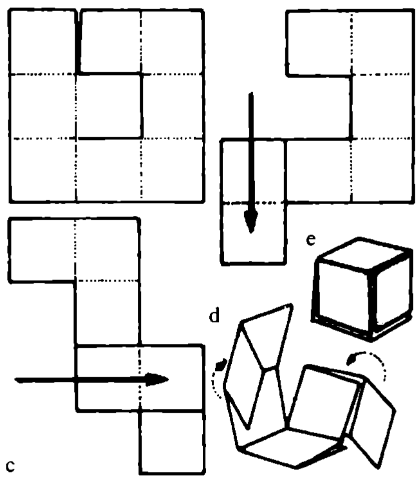
▲7▲



▲8▲



▲9▲



Lösungen zu alpha-heiter:

Eine Familienverwandtschaft

Wir führen die Überlegung elementar:

Junge → eine Schwester
ein Bruder → 2 Jungen
1 Mädchen
↓
Mädchen → zwei Brüder
eine Schwester Widerspruch!

Alsdann:

Junge → zwei Schwestern
↓ zwei Brüder
Mädchen → eine Schwester
zwei Brüder Widerspruch!

Schließlich:

Junge → drei Schwestern
↓ drei Brüder
Mädchen → zwei Schwestern
vier Brüder wahre Aussage!

In der Familie sind also vier Jungen und drei Mädchen!

Darf er sie küssen?

Es ist der Vater.

Kombiniere und rechne!

Im Dezimalsystem:

$$\begin{array}{ccccc} 3936 & - & 2511 & = & 1425 \\ : & & + & & + \\ 82 & \cdot & 14 & = & 1148 \\ \hline 48 & + & 2525 & = & 2573 \end{array}$$

Im Oktalsystem

$$\begin{array}{ccccc} 750 & - & 427 & = & 311 \\ : & & + & & + \\ 10 & \cdot & 25 & = & 250 \\ \hline 75 & + & 464 & = & 561 \end{array}$$

Probe durch Umrechnen ins Dezimalsystem ergibt:

$$\begin{array}{ccccc} 488 & - & 287 & = & 201 \\ : & & + & & + \\ 8 & \cdot & 21 & = & 168 \\ \hline 61 & + & 308 & = & 369 \end{array}$$

Im Dualsystem

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{LOO} & + & \mathrm{LLOO} & = & \mathrm{LOOOO} \\ + & & : & & - \\ \mathrm{LOO} & + & \mathrm{LLO} & = & \mathrm{LOLO} \\ \hline \mathrm{LOOO} & - & \mathrm{LO} & = & \mathrm{LLO} \end{array}$$

Umrechnen ins Dezimalsystem ergibt:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & + & 12 & = & 16 \\ + & & : & & - \\ 4 & + & 6 & = & 10 \\ \hline 8 & - & 2 & = & 6 \end{array}$$

Interessantes Produkt

E = 1, U = 4, K = 2, L = 8, I = 5, D = 7,

$$\begin{array}{r} 142857 \cdot 264513 \\ \hline 285714 \\ 857142 \\ 571428 \\ 714285 \\ 142857 \\ 428571 \\ \hline 37787533641 \end{array}$$

Zahlenkreuzworträtsel

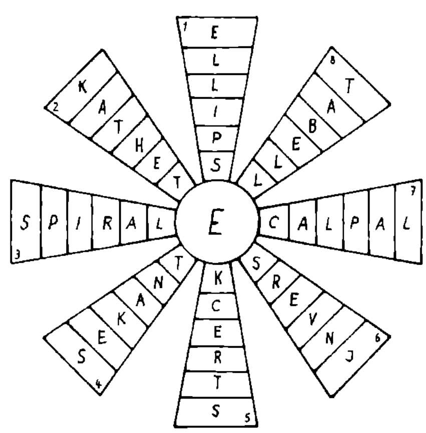
2	■	1	7	7	7
■	1	■	■	7	■
3	7	■	1	■	2
■	2	3	1	■	0
■	7	2	1	■	0
	■	4	1	9	■

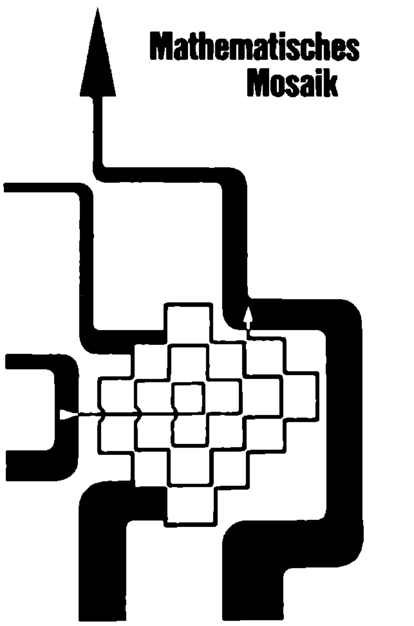
Stufe um Stufe

du
al zahl
ge bra
ra de...

Dualzahl, Algebra, Gerade, Radius, Diagramm, asymmetrisch, Symmetrie, Meterstab, Terminus, Minute, Numerus, Megawatt, Galilei, Lineal, negativ.

. . . und am Ende steht das „E"





Autorenkollektiv
Übersetzung aus dem Ungarischen
318 Seiten, zahlr. Abb. Preis 9,50 M
Bestell-Nr. 653 447 0

Urania-Verlag
Leipzig · Jena · Berlin

Aus dem Inhalt: Errate, an welche Zahl ich gedacht habe! – Mathematik auf dem Schachbrett – 1 Millimeter = 1 Kilometer – Können Sie fünfte Wurzeln im Kopf ziehen? – Spinne und Fliege – Mathematische Probleme des Toto-Lotto-Spiels – Zeitvertreib mit Zahlensystem – Die Königsberger Brücke – Das Jaltonsche Brett – Parkette, geometrisch betrachtet – Interessante Zahlen – Die Glücksspiele und die Wahrscheinlichkeitsrechnung – Wieviel Farben braucht man zur Färbung einer Landkarte? – Magische Quadrate – Knifflige Flächen – Das Ja-Nein-Spiel und die Informationstheorie

Leseprobe: **Zahlenraten**

Es sind außerordentlich viele Zahlenratespiele bekannt; zwei von ihnen wollen wir hier vorstellen.
a) Denke dir eine Zahl, multipliziere sie mit 6, subtrahiere 3 hiervon, nimm das Doppelte, addiere die Ziffern, die du erhalten hast, nimm das 3fache, addiere die Ziffern; wenn das Ergebnis mehrstellig ist, addiere auch hiervon die Ziffern und wiederhole das, bis du ein einstelliges Ergebnis bekommst, multipliziere diese Zahl mit 4 und addiere dazu 13. Wenn du richtig gerechnet hast, hast du 49 bekommen. Wir können die Wirkung dadurch steigern, daß wir vorher auf ein Blatt Papier das Endergebnis aufschreiben und es umgedreht niederlegen, um es zum Schluß emporzuheben: „Hier ist das Ergebnis!“
b) Schreibe eine Zahl nieder, schreibe mit denselben Ziffern, nur in anderer Reihenfolge, eine andere, und subtrahiere die kleinere von der größeren. Verfahre mit mehreren Zahlen auf diese Weise und sage die Endergebnisse an: 801, 17612, 2574, 295576, 19998.
Sieh deine Rechnung an, in der zweiten und vierten Subtraktion ist sicher ein Fehler!
Woher kann man das wissen, kennen wir doch nicht die Zahlen, die der Aufgerufene subtrahiert hat bzw. von denen die Rechnungen im Fall a) ausgegangen sind? In jedem Fall wird die Erklärung durch die „Neunerprobe“ gegeben, die der Leser im ersten Aufsatz kennengelernt hat. Hiernach bleibt bei der Division einer Zahl durch 9 ein ebenso großer Rest, wie sie die Summe ihrer Ziffern ergibt.
Dieser Sachverhalt wird auch zur Überprüfung von Rechnungen ausgenutzt, denn der Rest einer Summe, Differenz und eines Produkts bei der Division durch 9 ist ebensogroß wie derjenige der Summe, Differenz bzw. des Produkts der Reste der einzelnen Zahlen, und dasselbe gilt auch für das Potenzieren, denn Potenzieren ist wiederholte Multiplikation mit lauter gleichen Faktoren.
Auf Grund dessen können wir leicht den Divisionsrest des Ergebnisses einer Operation oder einer Reihe von Operationen aus den Resten der einzelnen Zahlen ausrechnen und den Rest des Endergebnisses bestimmen. Wenn die beiden nicht übereinstimmen, so ist in der Rechnung ein Fehler enthalten. (Ein Fehler ist allerdings auch dann möglich, wenn die Neunerprobe stimmt.)
Das unter Punkt 3a aufgeführte Spiel läßt sich demnach folgendermaßen verstehen: Bei der Multiplikation mit 6 haben wir eine durch 3 teilbare Zahl erhalten, und daran hat sich auch bei der Subtraktion von 3 und bei der Verdoppelung nichts geändert. (Diese Schritte sind übrigens für die Aufgabe unwesentlich.) Nach der Multiplikation mit 3 bekommen wir bereits ein Vielfaches von 9, wir gelangen also bei der wiederholten Addition der Ziffern zu einer einstelligen und durch 9 teilbaren Zahl. Solcher Art sind nur 9 und 0, da aber die Quersumme nicht 0 sein kann, kann das Ergebnis der Addition der Ziffern nur 9 sein. Das Ergebnis der weiteren Operationen kennen wir bereits, wir können somit dieses Ergebnis so umformen, wie wir es gerade wollen.
In Punkt 3b ergeben die beiden Glieder der Differenz bei der Division durch 9 denselben Rest, weil die Summe der Ziffern beide Male dieselbe ist (die beiden Zahlen bestehen stets aus denselben Ziffern); die Differenz ist also durch 9 teilbar, und somit muß auch ihre Quersumme durch 9 teilbar sein. Dies ist für das zweite und vierte Ergebnis nicht erfüllt, diese sind also sicher aus einer fehlerhaften Rechnung hervorgegangen.
Es ist jedoch zu bemerken, daß auch die drei übrigen Rechnungen falsch sein können, weil viele Rechenfehler möglich sind, durch die das Ergebnis um eine durch 9 teilbare Zahl abgeändert wird, und dann die Quersumme durch 9 teilbar bleibt.

Drei Bücher in deutscher Sprache aus dem ungarischen Verlag Akadémiai Kiadó, Budapest

1828

T. Varga
Mathematik I
Flußdiagramme – Lochkarten – Wahrscheinlichkeit
97 Seiten, zahlr. Abb., Pappband
Preis: etwa 20 M
Bestell-Nr. ISBN 963 05 0634 3, Bd. 1

Mathematik II
Raum und Ebene – Wahrscheinlichkeit – Logik und Kombinatorik
119 Seiten, zahlr. Abb., Pappband
Preis: etwa 20 M
Bestell-Nr. ISBN 963 05 0635 1

Gy. Bizám/J. Herczeg
Logik macht Spaß
85 Aufgaben
(Sammlung von Aufgaben im Rahmen der Logik, zu deren Lösung keine speziellen mathematischen Kenntnisse notwendig sind.)
391 Seiten, 300 Abb., Ganzleinen
Preis: etwa 40 M
Bestell-Nr. ISBN 963 05 0353 0

Das vorliegende Buch ist eine Aufgabensammlung. Es ist kein Lehrbuch der mathematischen Logik, sondern behandelt mathematische Probleme im Rahmen der Logik, zu deren Lösung keine mathematischen Vorkenntnisse notwendig sind. Die Aufgaben gehen immer von leichtverständlichen Alltagssituationen aus. Diese sind jedoch Träger eines mathematischen Gedankens, also nicht etwa Rätsel um ihrer selbst willen, sondern Probleme, bei deren Lösung der Leser einige allgemeine Wesenszüge der mathematischen Lösungswege und eine Menge gedanklicher Kunstgriffe kennenlernt, die in der Mathematik regelmäßig angewendet werden. Das Buch spricht einen großen Leserkreis an; 14jährige Schulkinder können so manches aus ihm lernen, und selbst Erwachsenen mit Hochschulbildung wird es Spaß bereiten, sich über einige Lösungen den Kopf zu zerbrechen.

Zu beziehen durch:
Ungarisches Informationszentrum,
108 Berlin, Rathausstraße

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

4

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
12. Jahrgang 1978
Preis 0,50 M
Index 31059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
AN (EDV) 128 – ISSN 0002-6395
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
Redaktionsschluß: 25. April 1978

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

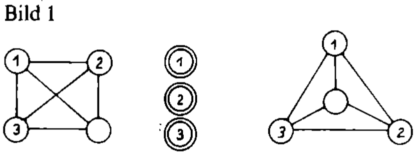
Kombinatorische Betrachtungen bei Schiebe-Spielen

Zur Behandlung der Permutation

Teil I

In Abwandlung der käuflichen Schiebefax-Spiele legen wir als „Spielfeld" einen Graphen zugrunde und spielen darauf gewisse Ein-Personen-Spiele. So seien etwa in dem nebenstehenden Spielfeld (Figur 1) auf die numerierten Felder 1, 2, 3 die 3 Spielsteine 1, 2, 3 in Übereinstimmung der Zahlen gesetzt. Ein Spielstein wird nun im ersten Zug längs einer der angegebenen Linien auf das freie Feld gezogen. Dann erfolgt der nächste Zug, indem wieder ein Spielstein auf das nach dem ersten Zug entstandene freie Feld gezogen wird.

Bild 1



Dieser zweite Zug soll dabei nicht sofort wieder den ersten Zug rückgängig machen. Man spiele in gleicher Weise weiter, bis das unnumerierte Feld erstmalig freigezogen werden kann. Damit sei eine Spielrunde abgeschlossen. Wir sehen, daß zu einer solchen minimalen Spielrunde 3 Züge erforderlich sind. Als Ergebnis einer Spielrunde hat sich aus der Ausgangsstellung, in der die Spielsteinnummern mit den Feldernummern übereinstimmen, eine neue Endstellung ergeben, in der die Feldnummer 1 mit dem Spielstein i, die Feldnummer 2 mit dem Spielstein j, die Feldnummer 3 mit dem Spielstein k besetzt ist. Eine erspielte Stellung ist also durch eine Abbildung $1 \to i$, $2 \to j$, $3 \to k$ gekennzeichnet – jeder Feldnummer wird die Spielsteinnummer, durch die das Feld belegt ist, zugeordnet.

Es handelt sich dabei um eine eineindeutige Abbildung, weil zwei verschiedenen Zahlen stets immer zwei verschiedene Zahlen entsprechen. Jede solche Abbildung P:

$\{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$

bedeutet eine Umordnung der Zahlen 1, 2, 3, daher heißen diese *Permutationen* (permutare, lat. = vertauschen).

(Auch die Abbildungen, die jede Spielsteinposition unverändert läßt, zählt man zu den Permutationen; sie heißt die *identische Permutation.*)

Interessierende Fragen sind dann beispielsweise:

1. Welche verschiedenen Endstellungen kann man aus der Ausgangsstellung durch Minimalrunden erreichen?
2. Wieviel und welche Minimalrunden muß man spielen, um eine vorgeschriebene Endstellung zu erreichen?

Zur Beantwortung dieser Fragen schauen wir uns zunächst ein Spielprotokoll an:

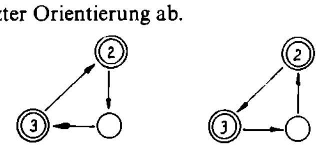
Ausgangs-stellung	1. Zug	2. Zug	3. Zug
$\downarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$	freies Feld 2	2. Feld 3	3. Feld 2
End-stellung	**Bemerkungen**		
$\downarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$	unveränderte Position 1		

Das gleiche Ergebnis könnte man auch noch gemäß dem folgenden Protokoll erhalten.

Ausgangs-stellung	1. Zug	2. Zug	3. Zug
$\downarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$	freies Feld 3	3. Feld 2	2. Feld 3
End-stellung	**Bemerkung**		
$\downarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$	unveränderte Position 1		

Diese beiden Runden unterscheiden sich für uns nur unwesentlich, denn beide bewegen die gleichen Steine (und zwar in die gleiche Endstellung), sie laufen eigentlich nur in entgegengesetzter Orientierung ab.

Bild 2



Eine wesentliche Feststellung ist hingegen, daß in der Minimalrunde genau ein Spielstein seine Position unverändert lassen muß. Eine Runde, in der alle 3 Spielsteine bewegt würden, müßte nämlich mehr als 3 Züge aufweisen, weil schon 3 Züge auf das Bewegen der drei Steine entfallen und noch mindestens einer zum Freiziehen des unnumerierten Feldes benötigt wird. Durch eine Minimalrunde vertauschen zwei Spielsteine gerade ihre Plätze!

Permutationen $P = \downarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ i & j & k & \dots & x\end{pmatrix}$ der Menge 1, 2, 3, ..., n, wo genau zwei Zahlen ihre Plätze vertauschen und alle übrigen unveränderte Positionen behalten, heißen *Transpositionen.*

Feststellung 1

In dem Schiebespiel des Bildes 1 wird durch eine Minimalrunde, bestehend aus 3 Zügen, aus der identischen Permutation $\downarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ eine Transposition als Endstellung erspielt, und jede Transposition ist durch eine Minimalrunde erspielbar.

Zur abkürzenden Angabe von Transpositionen innerhalb der Permutationen bedient man sich der folgenden Bezeichnungsweise (ij), d. h. i geht in j und j in i über und alles andere bleibt unverändert. Um die durch Permutationen vermittelten Abbildungen anschaulich verfolgen zu können, benutzt man zu ihrer Darstellung verschiedene Diagramme.

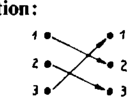
Es sind etwa folgende Typen zweckmäßig: *Leiterdiagramme, Zyklendiagramme, Kartendiagramme.*

Im Leiterdiagramm stellt man zwei Exemplare der zu permutierenden Menge einander gegenüber und zieht von den Punkten des ersten Exemplars Pfeile zu den zugehörigen Bildpunkten. Ein Pfeil bedeutet hier also kurzschriftlich „geht über in"! Die Eineindeutigkeit der Zuordnung ist gleichwertig mit der Tatsache, daß in keinem Punkt zwei Pfeile einmünden. Insgesamt hat ein Leiterdiagramm einer Permutation folgende charakteristische Besonderheiten:

1. Von jedem Punkt des ersten Exemplars geht genau ein Pfeil aus.
2. In jeden Punkt des zweiten Exemplars mündet genau ein Pfeil ein.

Beispiel für ein Leiterdiagramm einer Permutation:

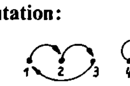
$P = \downarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$ Bild 3



Das Zyklendiagramm einer Permutation folgt dem gleichen Bildungsgesetz der Leiterdiagramme, nur daß sich alles in einem einzigen Exemplar der zu permutierenden Menge abspielt.

Beispiel für ein Zyklendiagramm einer Permutation:

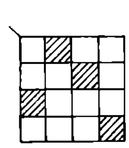
$P = \downarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$ Bild 4



Im Kartendiagramm einer Permutation markiert man in einer quadratischen „Karte" mit $n \cdot n$ Feldern fortschreitend von oben nach unten in jeder Zeile dasjenige Feld der Nummer, in die die Zeilennummer übergeht.

Beispiel für ein Kartendiagramm einer Permutation:

$P = \downarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$ Bild 5

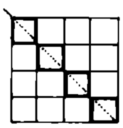


Die Eineindeutigkeit findet hier durch die Tatsache ihren Ausdruck, daß in jeder Zeile und jeder Spalte genau ein Feld markiert ist. (Zur besonderen Hervorhebung des Tabelleneingangs setzen wir ein Schwänzchen an die obere linke Ecke.)

An diesen drei Diagrammformen kann man gewisse Eigenschaften von Permutationen leicht ablesen. So beantworten sich folgende Fragen sofort:

Welche Elemente der zu permutierenden Menge sind bei der betrachteten Permutation *P Fixpunkte* (d. h., sie behalten ihren Platz)? Wie erkennt man Transpositionen an ihren Diagrammen? Man sieht, daß hierbei für das Kartendiagramm die sogenannte *Hauptdiagonale*, das sind die Felder, die in Verlängerung des Markierungsschwänzchens liegen, von Wichtigkeit ist.

Bild 6



In der Tabelle 1 haben wir in den drei ersten Spalten alle möglichen Permutationen der Menge $\{1, 2, 3\}$ und ihre Zyklendiagramme und Kartendiagramme *aufgelistet*. (Die beiden letzten Spalten der Tabelle sind dann, wie sich noch zeigen wird, für den Spielverlauf bedeutungsvoll.) Bei der ersten Permutation ist die gesamte Hauptdiagonale besetzt. Jeder Punkt (= Element) von $\{1, 2, 3\}$ ist Fixpunkt. Die drei folgenden Permutationen sind alle Transpositionen der Menge $\{1, 2, 3\}$. Diese Permutationen haben bezüglich der Hauptdiagonale einen spiegelsymmetrischen Aufbau. Die beiden restlichen Permutationen sind selbst keine Transpositionen, sie gehen aber aus einer Transposition durch eine nochmalige Transposition hervor.

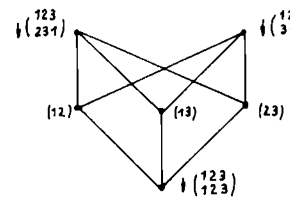
Damit ergibt sich also die

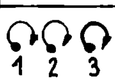
Feststellung 2

In dem Schiebespiel des Bildes 1 kann durch Minimalrunden, bestehend aus 3 Zügen, aus der identischen Permutation $\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ jede Permutation P der Menge $\{1, 2, 3\}$ erspielt werden. Die drei möglichen Transpositionen erhält man als Endstellung nach einer der möglichen Minimalrunden. Die restlichen zwei Permutationen erhält man nach zwei möglichen Minimalrunden.

Die Übergangsmöglichkeiten einer Spielendstellung in eine andere Spielendstellung kann man zweckmäßig durch einen Graphen veranschaulichen. Das ist in Bild 7 ausgeführt. Eine Verbindungslinie bedeutet dann also jeweils „Minimalrunde".

Bild 7



Permutation	Zyklendiagramm	Kartendiagramm	Produkt von Transpositionen minimaler Faktorenanzahl	Anzahl der Fixpunkte
$\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$			–	3
$\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$			(12)	1
$\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$			(13)	1
$\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$			(23)	1
$\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$			(13)(12) = (23)(13) = (12)(23)	0
$\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$			(12)(13) = (23)(12) = (13)(23)	0

Produkttafel für $(\gamma_3{}^\circ)$

•	(1)	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(1)	(1)	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(12)	(12)	(1)	(132)	(123)	(23)	(13)
(13)	(13)	(123)	(1)	(132)	(12)	(23)
(23)	(23)	(132)	(123)	(1)	(13)	(12)
(123)	(123)	(13)	(23)	(12)	(132)	(1)
(132)	(132)	(23)	(12)	(13)	(1)	(123)

•		Q	
		⋮	
P	....	$P \cdot Q$	

Wie kann man an dem Übergangsgraphen ablesen, durch welche Spielanweisung man in zwei Minimalrunden von der Ausgangsstellung $\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ zu der Endstellung $\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ gelangen kann? Der Graph sagt unmittelbar, daß man eine beliebige erste Spielrunde ausführen kann. Er sagt auch aus, wie man etwa in der ersten Runde zu spielen hat. Will man sich beispielsweise die Endstellung $(12) = \downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ in der ersten Runde erspielen, so hat man den Spielstein 3 unverändert zu lassen. Wie muß man nun aber mit der Stellung $(12) = \downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ weiterspielen, um in der nächsten Runde die gewünschte Endstellung $\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ zu erreichen? Man sieht, daß der Spielstein 1 schon an seinem gewünschten Platz steht. Man hat also diesen in der zweiten Spielrunde unverändert zu lassen, d. h., man führe noch die Transposition (23) aus.

Zur bequemen unmittelbaren Ablesemöglichkeit der auszuführenden Umstellungen schreiben wir beide Transpositionen in Form eines Produkts auf: (23)(12).

Die zuerst auszuführende Transposition steht dabei als rechter Faktor. Das ist die bei der Zusammensetzung von Abbildungen übliche Anordnung der Faktoren. Anstelle der Zusammensetzung von Abbildungen spricht man auch von dem *Produkt* von Abbildungen und in dem Spezialfall der Permutationen von dem *Produkt der Permutationen.*

Wir erläutern diese wichtige Begriffsbildung noch ein wenig. Es bezeichne γ_n die Menge aller Permutationen der Menge der ersten n natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Durch die Zusammensetzung oder Produktbildung von je zwei Permutationen $P, Q \in \gamma_n$ ist wieder eine Permutation

$$Q \circ P \in \gamma_n \text{ bestimmt.}$$

Es ist dabei $Q \circ P$ diejenige Permutation von $\{1, 2, \ldots, n\}$, die die Zahl i in die Zahl $Q(P(i))$ überführt.

Für die anschauliche Verfolgung der Zusammensetzung von Permutationen eignet sich besonders das Leiterdiagramm.

Beispiel für die Produktbildung von Permutationen:

$P=\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\quad Q=\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}\quad Q\circ P?$

Also ist $Q\circ P=\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$

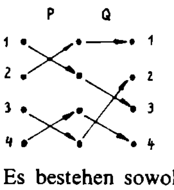
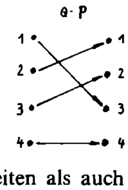


Bild 8



Es bestehen sowohl Ähnlichkeiten als auch Unterschiede zwischen der Produktbildung von Permutationen und der Produktbildung bei Zahlen. Die Gemeinsamkeit findet sich in der Gültigkeit des Assoziativgesetzes, der Existenz eines Einselementes und der Existenz von inversen Elementen. Ein wesentlicher Unterschied kommt darin zum Ausdruck, daß bei den Permutationen nicht allgemein die Kommutativität gilt. Berechnet man z. B. für die oben angegebenen P, Q noch das Produkt $P\circ Q$ mit umgekehrter Reihenfolge der Faktoren, so ergibt sich

$$P\circ Q=\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}\neq Q\circ P$$

Assoziativgesetz der Produktbildung von Permutationen:

In γ_n, der Menge aller Permutationen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$, gilt hinsichtlich der Produktbildung $\circ$ für je drei Permutationen $P, Q, R\in\gamma_n$

$$P\circ(Q\circ R)=(P\circ Q)\circ R.$$

Der Beweis dazu ist einfach! Wir bezeichnen mit S und T die beiden Permutationen $Q\circ R$ bzw. $P\circ Q$. Dann ist

$P\circ S=T\circ R$ zu zeigen.

Es sei $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$. Man bestimmt $(P\circ S)(i)$ und
$(T\circ R)(i)$. Es ist
$(P\circ S)(i)=P(S(i))=P(Q(R(i)))$ und
$(T\circ R)(i)=T(R(i))=P(Q(R(i)))$,
d. h. $P\circ S=T\circ R$.

Existenz eines *Einselementes:*

In γ_n gibt es für die Produktbildung $\circ$ genau eine Permutation I, so daß für alle $P\in\gamma_n$ gilt

$$P\circ I=I\circ P=P.$$

Dieses I ist die identische Permutation

$$I=\downarrow\begin{pmatrix}1&2&\ldots&n\\1&2&\ldots&n\end{pmatrix},$$

wo jedes Element von $\{1, 2, \ldots, n\}$ Fixpunkt ist.

Die Begründung ist wieder einfach. I hat offenbar die Eigenschaft, daß es bei der Produktbildung von links und rechts P überhaupt nicht verändert. Es muß dann zur vollen Bestätigung der Aussage noch gezeigt werden, daß nur I diese Eigenschaft haben kann. Es sei J eine Permutation aus γ_n, für die stets

$$P\circ J=J\circ P=P$$

für alle $P\in\gamma_n$ gilt.

Dann gilt dies speziell auch für $I\in\gamma_n$, d. h. es ist

$$I\circ J=J\circ I=I$$

und zum anderen auch

$$J\circ I=I\circ J=J,$$

da I jede andere Permutation unverändert läßt. Also ergibt sich $I=J$.

Existenz der *Inversen*

In γ_n gibt es für die Produktbildung $\circ$ zu jeder Permutation $P\in\gamma_n$ genau eine Permutation – die sogenannte inverse Permutation P^{-1} zu P, so daß

$$P\circ P^{-1}=P^{-1}\circ P=I$$

gilt. Die Bestätigung ist auch wieder einfach. Die zu $P=\downarrow\begin{pmatrix}1,&2,&\ldots&n\\i&j&&x\end{pmatrix}$ inverse Permutation ist $P^{-1}=\uparrow\begin{pmatrix}i&j&\ldots&x\\1&2&\ldots&n\end{pmatrix}$. Aus dem Leiter- und Zyklendiagramm ergibt sie sich gerade durch Umkehrung aller Pfeile, aus dem Kartendiagramm ergibt sie sich durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen. Im Bereich der von Null verschiedenen reellen Zahlen gibt es nur die beiden Zahlen $+1$ und -1, die bezüglich der Multiplikation zu sich selbst invers sind. Bei den Permutationen gibt es außer I noch die Transpositionen und auch noch weitere Permutationen, die zu sich selbst invers sind.

Feststellung 3

In dem Schiebespiel des Bildes 1 ist die Überführung der identischen Permutation $\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ durch die Aufeinanderfolge von Minimalrunden, bestehend aus 3 Zügen, gleichbedeutend mit der Darstellung von Permutationen als Produkte von Transpositionen mit minimaler Faktorenzahl (vgl. Tabelle 1).

Aus der Tabelle 1 kann man sich leicht die Produkttafel für die Permutationen aus γ_3 zusammenstellen. Als eine bequeme Abkürzung der Bezeichnung der Permutationen verwenden wir dabei für alle Permutationen die Zyklenschreibweise (vgl. Zyklendiagramm!)

$\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(1\ 2\ 3),\ \downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(1\ 3\ 2)$

und für die identische Permutation

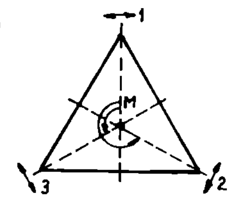
$\downarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=(1).$

Beispiel für die Berechnung eines Produktes unter Benutzung der Transpositionsdarstellung:

a) $(1\ 2)(123)=(12)(12)(23)=(12)^2(23)=(23)$.
b) $(123)(132)=(13)(12)(12)(13)$
$=(13)(12)^2(13)=(13)^2=(1)$
(Also ist
$(123)^{-1}=(132),\ (132)^{-1}=(123)$).

Wir erörtern nun noch einen Zusammenhang unseres Schiebespiels mit geometrischen Abbildungen. In dem Schiebespiel, wo unsere numerierten Felder die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind, bedeutet eine Minimalrunde eine Spiegelung an einer Mittellinie und die Hintereinanderfolge zweier Minimalrunden eine gewisse Drehung um den Dreiecksmittelpunkt. Wir haben damit folgende Entsprechung zwischen den Permutationen aus γ_3 und den sogenannten 6 Deckbewegungen eines gleichseitigen Dreiecks.

Bild 9



Deckbewegung	Permutation
Drehung D_1 um 0°	(1)
Drehung D_2 um 120°	(132)
Drehung D_3 um 240°	(123)
Spiegelung S_1	(23)
Spiegelung S_2	(13)
Spiegelung S_3	(12)

Der obigen Produkttafel für die Permutationen entspricht demzufolge eine Produkttafel für die Deckbewegungen eines gleichseitigen Dreiecks.

$\circ$	D_1	D_2	D_3	S_1	S_2	S_3
D_1	D_1	D_2	D_3	S_1	S_2	S_3
D_2	D_2	D_3	D_1	S_2	S_3	S_1
D_3	D_3	D_1	D_2	S_3	S_1	S_2
S_1	S_1	S_3	S_2	D_1	D_3	D_2
S_2	S_2	S_1	S_3	D_2	D_1	D_3
S_3	S_3	S_2	S_1	D_3	D_2	D_1

Produkttafel der Dreiecksdeckbewegungen

Für die Zusammensetzung der Deckbewegungen kann man aus deren Produkttafel somit ablesen:

Das Produkt zweier Drehungen ist wieder eine Drehung. Das Produkt von zwei Spiegelungen ist eine Drehung. Das Produkt von einer Drehung und einer Spiegelung ist eine Spiegelung. Noch mehr kann man aus der Produkttafel ablesen!

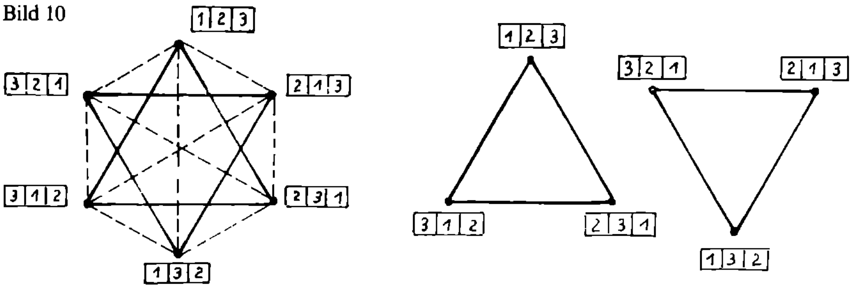
Die beiden oberen $3\cdot 3$ Quadrate und die beiden unteren $3\cdot 3$ Quadrate weisen unter Fortlassung der Buchstaben D und S folgende Anordnung auf:

$$\begin{matrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{matrix}\quad\text{bzw.}\quad\begin{matrix}1&3&2\\2&1&3\\3&2&1.\end{matrix}$$

In jeder Zeile und jeder Spalte steht hier wieder eine Anordnung – eine Permutation – der natürlichen Zahlen 1, 2, 3. Formal müßte

man eigentlich zwischen Permutation $P = \downarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ i & j & \dots & x\end{pmatrix}$ und ihrer Ergebniszeile $i\,j \dots x$ unterscheiden. Beide legen sich aber gegenseitig eindeutig fest, so daß man vielfach zwischen Permutation (Abbildung) und Anordnung (Ergebniszeile) doch keinen Unterschied macht.
Solche Anordnungen in $n \times n$ Quadraten, wo in jeder Zeile und jeder Spalte jede der Zahlen 1, 2, ..., n genau einmal auftritt, nennt man *lateinische* Quadrate
(vgl. hierzu etwa das Buch: Kombinatorik, Deutscher Verlag der Wissenschaften (1969); 3. Aufl. (1973), des Verfassers).
Wenn man bei einem lateinischen Quadrat Zeilen untereinander beliebig vertauscht, so entsteht immer wieder ein lateinisches Quadrat.
(Ein Gleiches gilt hinsichtlich der Spaltenvertauschung.) Ein lateinisches Quadrat der Ordnung n, d. h. mit $n \times n$ Feldern, bestimmt eine Menge $P, Q, \dots, Z$ von n Permutationen aus γ_n. (Jede Zeile des lateinischen Quadrates ist Ergebniszeile einer entsprechenden Permutation.) Eine Zeilenvertauschung im lateinischen Quadrat ändert nichts an der (ungeordneten) Menge der Permutationen. Welche n-elementigen Teilmengen aus γ_n kommen für die Bildung von lateinischen Quadraten der Ordnung n in Frage? Der Leser wird selbst mühelos die nachstehende Feststellung begründen können.
n Permutationen aus γ_n ergeben genau dann ein lateinisches Quadrat, wenn die Kartendiagramme dieser n Permutationen eine Überdeckung der $n \times n$ Felder bilden.
Eine beachtenswerte Bemerkung sei noch gemacht. Je zwei Kartendiagramme einer solchen Überdeckung sind dann notwendig *disjunkt*, d. h. sie überdecken kein Feld zweifach. (Denn jedes Kartendiagramm überdeckt n Felder, es müssen aber insgesamt n^2 Felder überdeckt werden!)

Bild 10



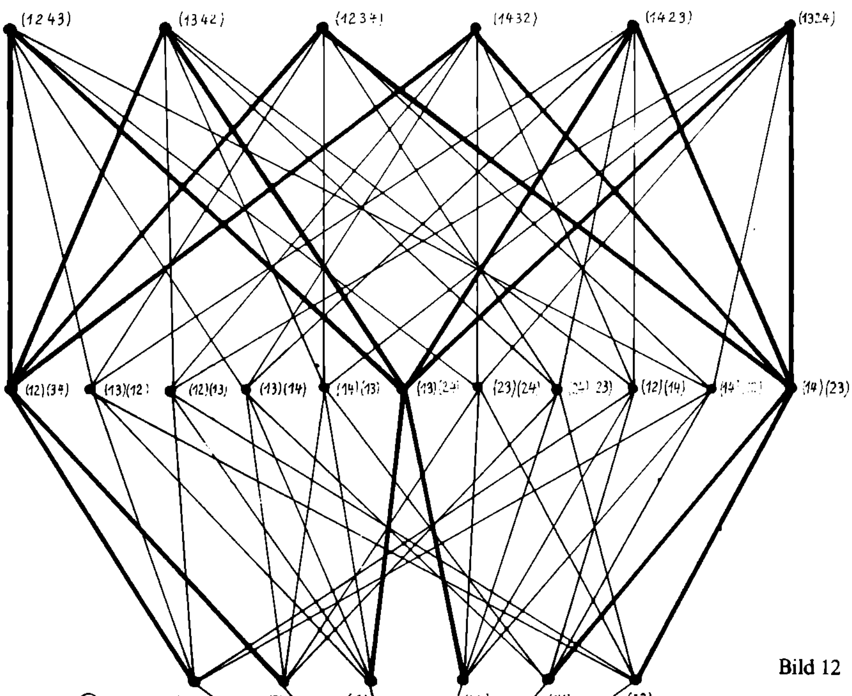


Bild 12

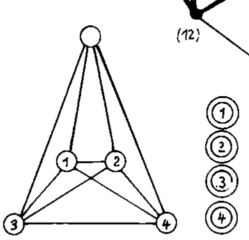


Bild 11

Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil. Kurt-R. Biermann

Akademie der Wissenschaften der DDR
Leiter der A.-v.-Humboldt-Forschungsstelle

▲1764▲ *Gauß* hat gelegentlich seine Aufzeichnungen verschlüsselt. So gab er in einer Aufstellung den Tag, an dem er den akademischen Grad eines Doktors erhielt, d. h. den 16. 7. 1799, durch die Zahl 8113 wieder. Das früheste Datum in jener Liste wird durch die Zahl 5343 kenntlich gemacht. Das war der Tag, an dem *Gauß* mit seinen Primzahlabzählungen begann; er war damals noch nicht 15 Jahre alt.
Welches Datum entspricht der Zahl 5343?

Für γ_3 zeigt Bild 10 den Disjunktheitsgraph. Zwei Permutationen sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie disjunkte Kartendiagramme haben.
In dem ersten Teil der Figur bedeuten die gestrichelten Kanten, daß die Permutationen keine disjunkte Kartendiagramme haben. Der gestrichelte Teilgraph ist also der Überschneidungsgraph der Permutationen in γ_3. Dieser Teilgraph ist hier mit dem in Bild 7 gezeigten Graphen gleichwertig. Aus dem Disjunktengraph folgt:
Es gibt nur zwei Klassen von lateinischen Quadraten der Ordnung 3. Dabei gehören zwei lateinische Quadrate genau dann zu ein und derselben Klasse, wenn sie sich durch Vertauschung von Zeilen ineinander überführen lassen.
Nun betrachten wir noch ein Schiebespiel, das auf 4er Permutationen führt.
Es gilt entsprechend folgende

Feststellung 4

In dem Schiebespiel des Bildes 11 wird durch eine Minimalrunde, bestehend aus 3 Zügen, aus der identischen Permutation $\downarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ eine Transposition als Endstellung erspielt, und jede Transposition aus γ_4 ist durch eine Minimalrunde erspielbar.
Eine Aufeinanderfolge von Minimalrunden ergibt auch hier alle möglichen Permutationen aus γ_4. (Hierzu vgl. man die Tabelle 2 und den Überführungsgraphen in Bild 12.)

J. Flachsmeyer

Die Tabelle 2 und Aufgaben zu diesem Beitrag veröffentlichen wir in Heft 5/78 (d. Red.).

Wir konstruieren unendlich viele irrationale Punkte

In den folgenden Betrachtungen wollen wir von der Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen (die wir mit den gebrochenen Zahlen identifizieren können) ausgehen.

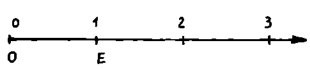
An einige Eigenschaften dieser Zahlen wollen wir uns zuerst erinnern:

– Die nichtnegativen rationalen Zahlen liegen überall dicht, d. h., zwischen zwei beliebigen gebrochenen (nichtnegativen rationalen) Zahlen liegt stets eine weitere gebrochene (nichtnegative rationale) Zahl.

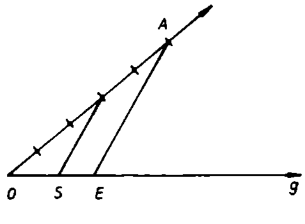
– Die Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen läßt sich so auf die Punkte eines Strahles abbilden, daß jeder Zahl genau ein Punkt des Strahles zugeordnet wird, wobei zwei voneinander verschiedenen nichtnegativen rationalen Zahlen zwei voneinander verschiedene Punkte entsprechen.

Auf die zuletzt genannte Eigenschaft wollen wir noch einmal kurz eingehen.

Hierzu betrachten wir einen Strahl g mit dem Anfangspunkt 0 und wählen auf ihm eine Einheitsstrecke $e=\overline{0E}$. Durch n-maliges Abtragen der Einheitsstrecke von 0 aus gelingt es, jeder natürlichen Zahl n genau einen Punkt des Strahles zuzuordnen (Bild 1). Wie finden wir den Punkt, der z. B. der rationalen Zahl $\frac{3}{5}$ zugeordnet werden soll?

Bild 1 

Wir konstruieren einen beliebigen von 0 ausgehenden weiteren Strahl h, wobei wir nur verlangen, daß er nicht in die durch 0 und E bestimmte Gerade fällt (Bild 2).

Bild 2 

Dann wählen wir uns eine Strecke beliebiger Länge und tragen sie von 0 aus auf unserem zweiten Strahl fünfmal ab. Wir erhalten eine Strecke $\overline{0A}$. Jetzt verbinden wir A mit E und ziehen durch den dritten Teilpunkt die Parallele zu $\overline{EA}$, sie schneide $\overline{0E}$ in S. Diesen Punkt ordnen wir der Zahl $\frac{3}{5}$ zu. Aus dem beschriebenen Verfahren kann man entnehmen, wie für eine beliebige nichtnegative rationale Zahl $\frac{m}{n}$ der ihr zuzuordnende Punkt auf unserem Strahl zu finden ist.

Ist P der Punkt, der der nichtnegativen Zahl $\frac{m}{n}$ entspricht, so ist die Zahl $\frac{m}{n}$ gleichzeitig die Maßzahl der Strecke $\overline{0P}$ in bezug auf die gewählte Einheitsstrecke $\bar{e}$.

Die den rationalen Zahlen zugeordneten Punkte wollen wir rationale Punkte unseres Strahles nennen.

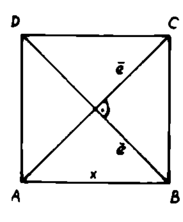
Daß die nichtnegativen rationalen Zahlen überall dicht liegen, besagt geometrisch, daß zwischen zwei rationalen Punkten (und ist ihr Abstand voneinander auch noch so klein) immer noch ein weiterer rationaler Punkt liegt.

Vertrauen wir unserer Anschauung, so kämen wir zu dem Schluß, daß wir bei unserer Zuordnung alle Punkte des Strahles verbraucht haben, jede Strecke hätte dann eine rationale Maßzahl. Im Unterricht der 7. Klasse wird nun aber eine Strecke konstruiert, die keine rationale Maßzahl haben kann.

Zu dieser Strecke kommt man auf folgendem Wege:

Man konstruiert ein Quadrat $ABCD$, dessen Diagonalen die Maßzahl 2 haben (Bild 3). Wenn x die Maßzahl der Quadratseite $\overline{AB}$ bezeichnet, so muß für den Flächeninhalt des Quadrates gelten:

$$x^2=4\frac{1\cdot 1}{2}=2.$$

Bild 3 

Wir wollen jetzt beweisen, daß x keine rationale Zahl sein kann, daß also die Strecke $\overline{AB}$ keine rationale Maßzahl besitzt. Hierzu nehmen wir an, daß x doch eine rationale Zahl ist. Weil wir dann $x=\frac{m}{n}$, m, n natürliche Zahlen, $n \neq 0$, setzen können, folgt $\frac{m^2}{n^2}=2$ oder $m^2=2n^2$.

Wir benutzen jetzt, daß sich jede natürliche Zahl eindeutig in Primfaktoren zerlegen läßt. So ist z. B. $168=2^3\cdot 3\cdot 7$.

Wenn eine beliebige natürliche Zahl p vorgelegt wird, so kann man sie daher stets in der Form $p=2^kp'$ darstellen, wobei p' eine ungerade Zahl bezeichnet. (In unserem Beispiel ist $168=2^3\cdot 21$.) Denken wir uns jetzt von den Zahlen m und n die Zweierpotenzen abgespalten. Es sei also $m=2^km'$, $n=2^ln'$, wobei m', n' ungerade natürliche Zahlen bezeichnen. Dann erhalten wir

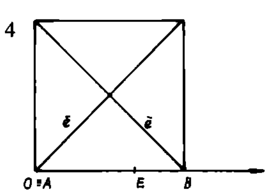
$$m^2=2^k2^km'^2=2^{2k}m'^2$$
$$n^2=2^l2^ln'^2=2^{2l}n'^2$$
$$2n^2=2\cdot 2^{2l}n'^2=2^{2l+1}n'^2.$$

Aus unserer Annahme, daß $m^2=2n^2$ gilt, würde also folgen, daß ein und dieselbe natürliche Zahl N (nämlich $N=2^{2k}m'^2$ und $N=2^{2l+1}n'^2$) den Faktor 2 einmal in gerader, zum anderen in ungerader Anzahl enthält. Dqs ist wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung einer natürlichen Zahl in Primfaktoren nicht möglich.

Wir haben also bewiesen:

1. Es gibt keine rationale Zahl, deren Quadrat 2 ist.
2. Die Strecke $\overline{AB}$ des Quadrates $ABCD$ kann keine rationale Maßzahl haben.

Tragen wir jetzt die Strecke $\overline{AB}$ auf unserem Zahlenstrahl von 0 aus ab, so kann ihr Endpunkt nicht mit einem rationalen Punkt unseres Strahles zusammenfallen (Bild 4). Obwohl die rationalen Punkte auf unserem Strahl dicht liegen, blieb Platz für einen nichtrationalen (irrationalen) Punkt. Nach diesem Ergebnis wird man fragen, ob es wohl noch mehr irrationale Punkte auf unserem Strahl gibt, und, was damit gleichbedeutend ist, ob man noch mehr Strecken finden kann, die keine rationale Maßzahl haben.

Bild 4 

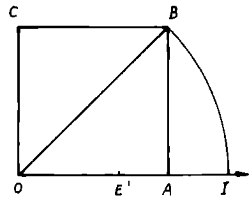
Wir wollen jetzt beweisen:

Zu jeder Strecke mit rationaler Maßzahl kann eine Strecke gefunden werden, die keine rationale Maßzahl hat, wobei zwei voneinander verschiedene Strecken mit rationalen Maßzahlen zwei voneinander verschiedenen Strecken entsprechen, die keine rationale Maßzahl besitzen.

Hierzu betrachten wir wieder unseren Strahl, auf dem wir uns alle rationalen Punkte eingezeichnet denken, dabei bezeichne $\overline{0E'}=\bar{e}'$ unsere Einheitsstrecke.

Wir greifen jetzt einen beliebigen rationalen Punkt A heraus, über $\overline{0A}$ konstruieren wir das Quadrat $0ABC$ (Bild 5). Nun zeigen wir:

Wie wir auch den rationalen Punkt A wählen, stets kann der Strecke $\overline{0B}$ keine rationale Maßzahl zugeordnet werden, tragen wir sie also von 0 aus auf unserem Strahl $0E'$ ab, so muß ihr Endpunkt einen irrationalen Punkt I treffen. Zum Beweis nehmen wir an, die Strecke $0B$ hat doch eine rationale Maßzahl, dann können wir sie als rationales Vielfaches der Strecke $\overline{0E'}=\overline{e'}$ darstellen.

Bild 5


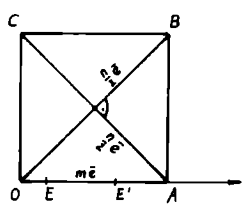
Wir können also schreiben $\overline{0B}=\frac{c}{d}\overline{e'}$, c, d natürliche Zahlen, $d\neq 0$. Weil nach Voraussetzung A ein rationaler Punkt ist, gilt auch $\overline{0A}=\frac{p}{q}\overline{e'}$, p, q natürliche Zahlen, $q\neq 0$. Dann ist aber auch $\overline{0A}=\frac{pd}{qd}\overline{e'}$, $\overline{0B}=\frac{cq}{dq}\overline{e'}$.

Wir teilen jetzt die Strecke $\overline{0E'}$ in qd. Teile und wähle

$$\bar{e}=\overline{0E}=\frac{1}{qd}\overline{0E'} \text{ als neue Einheit.}$$

Dann ist $\overline{0A}=\frac{pd}{qd}\overline{e'}=pd\bar{e}$, $\overline{0B}=\frac{cq}{dq}\overline{e'}=cq\bar{e}$.

In bezug auf unsere neue Einheit $\overline{0E}=\bar{e}$ haben unsere Strecken $\overline{0A}$ und $\overline{0B}$ dann sogar natürliche Maßzahlen.

Bild 6


Wir können daher $pd=m$, $cq=n$ setzen (Bild 6). Für den Flächeninhalt unseres Quadrates muß dann

$$m^2=4\cdot\frac{\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}}{2}, \text{ also } m^2=\frac{n^2}{2}$$

oder $\frac{m^2}{n^2}=2$ gelten.

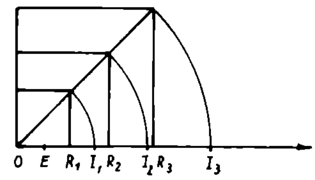
Aus unserer Annahme, daß die Strecke $\overline{0B}$ eine rationale Maßzahl hat, kommen wir zu dem Schluß, daß es eine rationale Zahl $\frac{m}{n}$ gibt, deren Quadrat 2 ist.

Wir haben aber schon bewiesen, daß es eine rationale Zahl mit dieser Eigenschaft nicht geben kann. Unsere Annahme, daß die Strecke $\overline{0B}$ eine rationale Maßzahl hat, ist also falsch.

Damit haben wir gefunden:

Es gibt unendlich viele Strecken, die keine rationale Maßzahl haben.

Für die Punkte unseres Strahles bedeutet das: Auf dem Strahl gibt es unendlich viele irrationale Punkte. In Bild 7 sind für drei rationale Punkte R_1, R_2, R_3 die ihnen entsprechenden irrationalen Punkte I_1, I_2, I_3 eingezeichnet. Hat man also nur die Menge der rationalen Zahlen zur Verfügung, so haben unendlich viele Strecken keine Maßzahl.

Bild 7


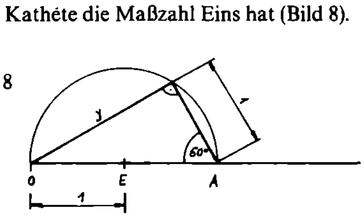
Das ist einer der Gründe, warum der Bereich der rationalen Zahlen zu einem ihn umfassenden Bereich erweitert wird. Diesen neuen Bereich, den man in der 9. Klasse näher kennenlernt, bezeichnet man als den Bereich der reellen Zahlen. Über diesen Bereich R soll hier nur gesagt werden:

Legt man eine Einheitsstrecke zugrunde, dann kann jeder Strecke genau eine nichtnegative Zahl aus R (ihre Maßzahl) zugeordnet werden, wobei zwei voneinander verschiedenen Strecken verschiedene Zahlen entsprechen, und umgekehrt entspricht jeder nichtnegativen Zahl aus R genau eine Strecke, deren Maßzahl gerade diese Zahl ist. Aus unserem oben erhaltenen Ergebnis können wir folgern, daß dieser Bereich unendlich viele nichtrationale (irrationale) Zahlen besitzen muß.

Jetzt erhebt sich die Frage:

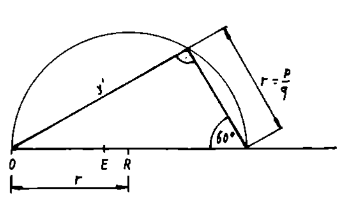
Haben wir bei unserem Verfahren alle irrationalen Punkte erfaßt, oder gibt es Strecken, denen zusätzlich zu den von uns gefundenen keine rationale Maßzahl zugeordnet werden kann? Um eine Antwort auf diese Frage zu finden, löse der Leser folgende Aufgabe:

Zeichne einem Halbkreis mit dem Radius Eins ein rechtwinkliges Dreieck ein, dessen eine Kathete die Maßzahl Eins hat (Bild 8).

Bild 8


a) Beweise, daß die Maßzahl y der Kathete $\overline{0B}$ keine rationale Zahl sein kann!

Hinweis: Nimm an, daß y doch rational ist, $y=\frac{m}{n}$, m, n von Null verschiedene natürliche Zahlen! Dann muß (wegen $y^2=3$) $m^2=3n^2$ sein. Spalte von den Zahlen m und n die Dreierpotenzen ab, und zeige, daß die zuletzt aufgestellte Gleichung nicht durch natürliche Zahlen erfüllt werden kann!

Bild 9


Betrachte jetzt einen beliebigen Halbkreis mit der einzigen Bedingung, daß sein Radius eine rationale Maßzahl r hat! Zeichne ihm ein rechtwinkliges Dreieck ein, dessen eine Kathete die Maßzahl r hat (Bild 9)! Beweise, daß die Maßzahl y' der anderen Kathete irrational ist!

Lösungsskizze: Angenommen $y'=\frac{m'}{n'}$, m', n' von Null verschiedene natürliche Zahlen. Dann folgt

$$\left(\frac{m'}{n'}\right)^2=3\left(\frac{p}{q}\right)^2, \quad (m, q)^2=3(pn')^2.$$

Daß die letzte Gleichung nicht durch natürliche Zahlen erfüllt werden kann, hast du schon gezeigt.

Der Leser hat hiermit gefunden, daß auch auf diesem Wege unendlich viele Strecken erhalten werden können, die keine rationale Maßzahl besitzen. Nun könnte es aber sein, daß die im ersten Verfahren erhaltenen unendlich vielen irrationalen Punkte unserer Zahlengeraden mit den unendlich vielen irrationalen Punkten, die das zweite Verfahren liefert, übereinstimmen. Daher wollen wir beweisen: Jede Strecke mit einer irrationalen Maßzahl, die uns das erste Verfahren liefert, ist von jeder Strecke mit irrationaler Maßzahl, die das zweite Verfahren ergibt, verschieden!

Wir bezeichnen die Menge der im ersten Verfahren konstruierten Strecken, die keine rationale Maßzahl haben, mit $\mathfrak{A}$, die Menge der Strecken, die nach dem zweiten Verfahren keine rationale Maßzahl haben, mit $\mathfrak{B}$.

Jetzt nehmen wir an, daß $\overline{0A}$ eine Strecke ist, die sowohl zur Menge $\mathfrak{A}$ als auch zur Menge $\mathfrak{B}$ gehört, j bezeichnet ihre Maßzahl. Dann muß auf Grund unserer Konstruktionsverfahren

$$j^2=2r^2 \text{ und } j^2=3r'^2 \text{ gelten,}$$

wobei r, r' von Null verschiedene rationale Zahlen bezeichnet. Daraus folgt

$$2r^2=3r'^2.$$

Nun setzen wir $r=\frac{p}{q}$, $r'=\frac{s}{t}$, p, q, s, t von Null verschiedene natürliche Zahlen. Dann folgt

$2\frac{p^2}{q^2}=3\frac{s^2}{t^2}$, also $2(pt)^2=3(sq)^2$, oder, wenn wir $pt=m$, $sq=n$ setzen,

$$2m^2=3n^2. \qquad (*)$$

Nun spalten wir von m und n die Zweier- und Dreierpotenzen ab, $m=2^j3^km'$, $n=2^c3^dn'$.

Jetzt setze der Leser die für m und n erhaltenen Ausdrücke in (*) ein und weise nach, daß es keine von Null verschiedenen natürlichen Zahlen m und n geben kann, die die Gleichung (*) erfüllen. Die Annahme, daß es eine Strecke mit irrationaler Maßzahl gibt, die sowohl zur Menge $\mathfrak{A}$ als auch zur Menge $\mathfrak{B}$ gehört, ist damit zum Widerspruch geführt.

Ob die Maßzahlen der Strecken, die zu den Mengen $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ gehören, jetzt alle irrationale Zahlen erschöpfen?

Wir werden zeigen, daß man durch einfache Konstruktionsverfahren wieder zu unendlich vielen irrationalen Zahlen kommen kann, dann wieder zu unendlich vielen irrationalen Zahlen und wieder und noch einmal und das so oft wir wollen.

Dann werden wir beweisen, daß auch nicht zwei von allen diesen irrationalen Zahlen gleich sind!

Betrachten wir noch einmal die bei unserem ersten Verfahren zuerst gefundene irrationale Zahl x. Dann ist jede Zahl $rx=x'$, r rational, $r\neq 0$, irrational.

Denn aus der Annahme, daß rx rational ist, also $rx=\frac{m}{n}$, folgt, daß $x=\frac{m}{nr}$ rational ist, und das widerspricht unserer Voraussetzung über x.

Ist $r_1\neq r_2$, so ist auch $r_1x\neq r_2x$, denn wäre $r_1x=r_2x$, so erhielten wir $(r_1-r_2)x=0$. Weil $x\neq 0$ ist, muß $r_1-r_2=0$ sein, also $r_1=r_2$ entgegen unserer Annahme.

Denken wir also in rx für r alle von Null verschiedenen rationalen Zahlen eingesetzt, so erhalten wir unendlich viele irrationale Zahlen. Für $r>0$ sind das gerade die Zahlen, die unser erstes Verfahren lieferte (siehe Bild 7).

Bezeichnet y die beim zweiten Verfahren zuerst konstruierte irrationale Zahl, so ist auch jede Zahl $y'=ry$, r rational, $r\neq 0$, irrational, und das sind wieder unendlich viele. Für $r>0$ erhalten wir die beim zweiten Verfahren konstruierten Zahlen (siehe Bild 8 und 9).

Wir wissen schon, daß die Beziehung $r_1x=r_2y$ dann und nur dann gelten kann, wenn $r_1=r_2=0$ ist (denn im anderen Falle gäbe es eine Strecke, die sowohl zur Menge $\mathfrak{A}$ als auch zur Menge $\mathfrak{B}$ gehört). Ausgehend von diesen Zahlen konstruieren wir jetzt leicht weitere irrationale Zahlen. Wählen wir z. B. eine von Null verschiedene rationale Zahl a_1 und betrachten alle Zahlen a_1+rx, $r\neq 0$, r rational, so ist jede dieser Zahlen irrational. Denn aus der Annahme, daß $a_1+rx=r'$ rational ist, folgt, daß $x=\frac{r'-a_1}{r}$ rational ist.

Beweise: Wenn $r_1\neq r_2$, r_1, r_2 rational, so ist $a_1+r_1x\neq a_1+r_2x$.

Denken wir also in a_1+rx für r alle von Null verschiedenen rationalen Zahlen eingesetzt, so erhalten wir wieder unendlich viele irrationale Zahlen, und jede dieser Zahlen ist verschieden von jeder der Zahlen rx!

Gäbe es nämlich von Null verschiedene rationale Zahlen r_1, r_2, so daß $a_1+r_1x=r_2x$ ist, so würde $a_1=(r_2-r_1)x$ folgen. Weil $a_1\neq 0$ und $x\neq 0$ ist, muß dann $r_2\neq r_1$, also $x=\frac{a_1}{r_2-r_1}$ sein. Weil nach Voraussetzung x irrational ist, kann die letzte Beziehung nicht gelten.

Wählen wir jetzt eine von Null und a_1 verschiedene rationale Zahl a_2 und denken in a_2+rx für r alle von Null verschiedenen rationalen Zahlen eingesetzt, so bekommen wir wieder unendlich viele irrationale Zahlen, und jede dieser irrationalen Zahlen ist verschieden von jeder der zuvor konstruierten unendlich vielen irrationalen Zahlen a_1+rx! Der Leser beweise die zuletzt aufgestellte Behauptung.

Wählen wir jetzt eine von Null und a_1 und a_2 verschiedene rationale Zahl a_3, so erhalten wir wieder, wenn wir in a_3+rx, $r\neq 0$, r rational, alle rationalen Zahlen eingesetzt denken, unendlich viele irrationale Zahlen, die von den bisher konstruierten verschieden sind. So kann man fortfahren.

Ausgehend von unserer beim zweiten Verfahren zuerst konstruierten irrationalen Zahl y kann man ebenso unendlich viele irrationale Zahlen a_1+ry ($a_1\neq 0$, $r\neq 0$, a_1; r rational, a_1 fest gewählt), dann unendlich viele irrationale Zahlen a_2+ry ($a_1\neq a_2$, $a_2\neq 0$, $r\neq 0$, a_2; r rational, a_2 fest gewählt) konstruieren und so fort. Dabei ist jede der Zahlen $a_\gamma+r_\gamma y$ von jeder der Zahlen $a_\mu+r_\mu x$ verschieden!

Denn aus der Annahme, daß es von Null verschiedene rationale Zahlen a_1, a_2, r_1, r_2 gibt, für die $a_1+r_1x=a_2+r_2y$ ist, folgt

$a_1-a_2=r_2y-r_1x$,

$(a_1-a_2)^2=r_2{}^2y^2+r_1{}^2x^2-2r_2r_1yx$.

Beachten wir, daß $x^2=2$ und $y^2=3$ ist, so folgt $yx=b$, b rational, und hieraus

$$yx\cdot x=bx,\ y=\frac{b}{2}x.$$

Nun ist $\frac{b}{2}x=x'$ eine auf Grund des ersten Verfahrens gewonnene irrationale Zahl. Wir haben aber schon bewiesen, daß jede beim ersten Verfahren konstruierte irrationale Zahl verschieden von jeder beim zweiten Verfahren erhaltenen irrationalen Zahl ist. Die Beziehung $y=x'$ liefert uns daher den gewünschten Widerspruch.

Daß es uns gelingen könnte, so viele irrationale Punkte auf dem Zahlenstrahl zu finden, hätte der Leser am Anfang unserer Betrachtungen wohl nicht vermutet. Das bisherige Ergebnis übersteigt ja auch unser anschauliches Vorstellungsvermögen. Greifen wir aber eine einzelne irrationale Zahl aus den von uns entdeckten heraus, so können wir den ihr entsprechenden irrationalen Punkt auf der Zahlengeraden leicht finden. (Konstruiere die zu $\frac{1}{3}+2x$, $3+\frac{3}{5}y$ gehörigen irrationalen Punkte!) Stellen wir uns jetzt die Frage, ob die durch unsere Konstruktionen gefundenen irrationalen Punkte des Zahlenstrahles alle irrationalen Punkte erfassen, so werden wir nach den bisherigen Ergebnissen gewiß mit der Antwort zögern.

Wir können tatsächlich, ausgehend von einem ähnlichen Verfahren, das zu den Zahlen x und y führte, eine weitere irrationale Zahl z finden und mit deren Hilfe sofort wieder unendlich viele irrationalen Zahlen konstruieren, die von allen bisher gefundenen verschieden sind. Der Leser versuche es!

Doch wie wir auch unsere weiteren Konstruktionsverfahren anlegen, eine irrationale Zahl erfassen wir bei diesem Vorgehen sicher nicht, es ist die uns aus der Schule bekannte irrationale Zahl π. Diese Behauptung wollen wir abschließend diskutieren.

Wir wissen schon, daß wir jede Strecke mit der irrationalen Maßzahl $a+bx$ bzw. $a+by$ (oder auch $a+bz$) konstruieren können, und zu dieser Konstruktion reichen die Zeichenhilfsmittel Zirkel und Lineal aus.

Wäre nun π eine irrationale Zahl, die unsere bisherigen Konstruktionsverfahren liefern, so gäbe es rationale Zahlen a_1 und b_1 oder a_1' und b_1' oder a_1'' und b_1'', so daß entweder $\pi=a_1+b_1x$ oder $\pi=a_1'+b_1'x$ (oder auch $\pi=a_1''+b_1''z$) ist. Nehmen wir an, daß die erste Beziehung gelte. Dann könnten wir, wieder nur unter Benutzung von Zirkel und Lineal, ein Rechteck konstruieren, daß den Flächeninhalt $\pi=a_1+b_1x$ hat (siehe Bild 10). Durch eine einfache Konstruktion (siehe Bild 11) gelänge es, ein dem Rechteck $ABCD$ flächengleiches Quadrat $DEFG$ zu konstruieren, und wieder kämen wir mit den Zeichenhilfsmitteln Zirkel und Lineal aus.

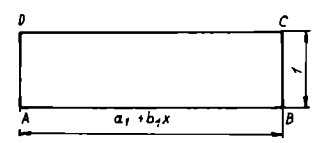


Bild 10

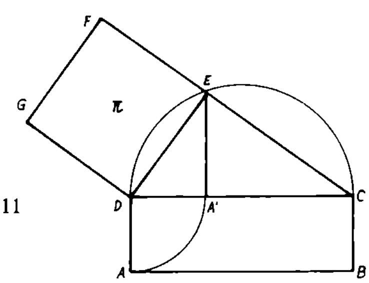


Bild 11

Unter der Annahme, daß die Strecke mit der nichtrationalen Maßzahl π eine der bereits oben erhaltenen Strecken ist, die keine rationale Maßzahl besitzen, kommen wir zu dem Ergebnis:

Man kann allein mit Benutzung der Zeichengeräte Zirkel und Lineal ein Quadrat konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich dem Flächeninhalt des Einheitskreises ist.

Der erst mit den Anfangsgründen der Mathematik vertraute Junge Mathematiker wird sich an diesem Ergebnis nicht stoßen. Daher sollen hier einige Worte zu dem berühmten mathematischen Problem, auf das wir hier gestoßen sind, gesagt werden.

Fast 2000 Jahre hindurch hat man sich um die Lösung folgender Aufgabe bemüht:

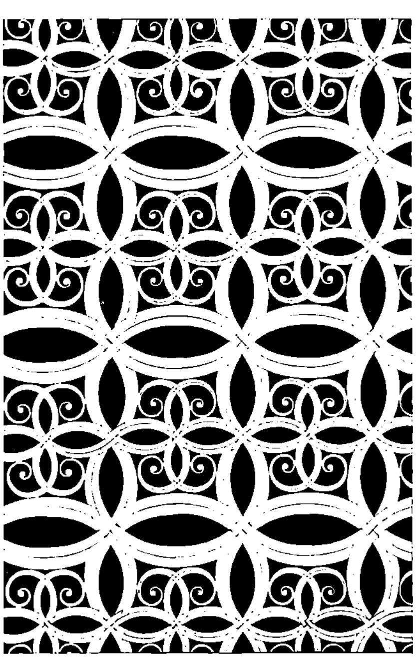
Zeichne nur unter Benutzung der Hilfsmittel Zirkel und Lineal ein Quadrat, das denselben Flächeninhalt hat wie der Einheitskreis!

Es handelt sich hier um das sogenannte Problem der „Quadratur des Kreises". So manch

einer hat diese Aufgabe zu lösen versucht, doch alle Bemühungen waren vergeblich. Selbst in der Umgangssprache fand dieses Problem seinen Niederschlag. So sagt man oft von einem, der sich ein nicht erreichbares Ziel gestellt hat: Der will die Quadratur des Kreises finden! Erst am Ende des vorigen Jahrhunderts konnte der Mathematiker Lindemann (1852 bis 1939) einen sehr allgemeinen Satz über die Zahl π beweisen, der als Spezialfall das folgende Ergebnis enthält:
Es ist nicht möglich, nur unter Benutzung von Zirkel und Lineal ein Quadrat zu konstruieren, dessen Flächeninhalt gleich dem Flächeninhalt des Einheitskreises ist.
Nun zurück zu unserer Fragestellung:
Aus der Annahme, daß die irrationale Zahl π Maßzahl einer Strecke unserer oben konstruierten Strecken ist, folgt, daß wir, ausgehend von der Einheitsstrecke, nur unter Benutzung von Zirkel und Lineal ein Quadrat konstruieren können, dessen Flächeninhalt gleich dem Flächeninhalt des Einheitskreises ist. Weil das aber nicht möglich ist, muß unsere Annahme falsch sein. Unsere Konstruktionsverfahren lieferten uns zwar unendlich viele irrationale Punkte auf unserem Zahlenstrahl, die Menge aller irrationalen Punkte haben wir aber nicht erschöpft. Durch die Untersuchungen von Georg Cantor (1845 bis 1918), dem Begründer der Mengenlehre, wurde deutlich, daß die oben konstruierte Teilmenge von irrationalen Zahlen im Vergleich zur Menge aller irrationalen Zahlen „arm" ist.

Gisela Vetter

Ornament *R. Boyd, New York*



Ein rationalisiertes Sieb zum Feststellen von Primzahlen
Teil I

1. Das Sieb des Eratosthenes

In dem vielseitigen Werk von C. F. Gauß nimmt die Zahlentheorie einen hervorragenden Platz ein, in deren Rahmen er die Verteilung der Primzahlen zu einem Hauptproblem erklärte. Im Unterricht kommt dies ziemlich kurz weg. Wenn die Primzahlen eingeführt werden, erfolgt ein Hinweis auf Eratosthenes (um 200 v. d. Z. in Alexandria), der durch sein „Sieb" eine Methode zur Feststellung aller Primzahlen im Zahlenraum bis R (R eine natürliche Zahl) angab.
Welche Schritte muß man gehen, um nach diesem „Sieb des Eratosthenes" im Zahlenraum, sagen wir bis $R=100$, die Primzahlen von den Faktor-Zahlen (oder kurz F-Zahlen) abzusondern, d. h., von solchen Zahlen, die man als Produkt zweier oder mehrerer Prim-Faktoren auffassen kann und die landläufig als „teilbare Zahlen" bezeichnet werden?

1. Man schreibt die natürlichen Zahlen des Zahlenraumes bis $R=100$ nach der Größe geordnet nieder: 1 2 3 ... 100.
2. Man streicht alle Vielfachen von 2, also 4 6 ... 100.
3. Man streicht alle Vielfachen der nächstgrößeren stehengebliebenen Zahl, nämlich der 3, soweit sie noch nicht gestrichen sind, also: 9 15 21 ... 99.
4. Man streicht alle Vielfachen der nunmehr nächstgrößeren stehengebliebenen Zahl, nämlich der 5, soweit sie noch nicht gestrichen sind, also: 25 35 55 65 85 95.
5. Mit der nunmehr nächstgrößeren stehengebliebenen Zahl verfahren wir entsprechend, nämlich mit der Zahl 7; also streichen wir: 49 77 91.

Fühlten wir uns jetzt versucht, diese Prozedur an der nunmehr nächstgrößeren stehengebliebenen Zahl, nämlich 11, vorzunehmen, so müßten wir zu unserer Überraschung feststellen, daß alle ihre Vielfachen im Zahlenraum bis $R=100$ (22 33 44 ... 99) bereits gestrichen sind, und zwar als Vielfache der kleineren Zahlen 2 3 5 und 7 (vergl. Tafel 1!). Jede in Tafel 1 gestrichene Zahl ist eine F-Zahl; unter ihr ist der kleinste ihrer Primfaktoren angegeben, als dessen Vielfaches die Zahl gestrichen wurde (z. B. wurde 30 $=2\cdot 3\cdot 5$ als Vielfaches von 2 gestrichen). Jede stehengebliebene Zahl (außer 1, auf deren Sonderstellung hier nicht eingegangen wird), ist eine Primzahl, nämlich:
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97,
fünfundzwanzig an der Zahl.

An Hand des Siebvorganges nach Eratosthenes machen wir uns einige Zahlenbeziehungen bewußt und fassen einige Begriffe genauer:

1. Die Menge der natürlichen Zahlen zerfällt in Primzahlen (hier als p-Zahlen bezeichnet) und Faktorenzahlen (hier als F-Zahlen bezeichnet).
2. Was im Sieb des Eratosthenes als „streichen" bezeichnet wird, heißt hier „löschen". Indem man eine Zahl löscht, weist man ihren Charakter als Vielfaches einer Primzahl p und damit als F-Zahl nach. Die betreffende Primzahl p heißt dann „Löschzahl".
3. Hiernach bezeichnen wir in dem oben angeführten Beispiel die Zahlen 2 3 5 und 7 als Löschzahlen für den Zahlenraum bis $R=100$. Löschzahlen sind immer Primzahlen. Wir sehen nun genauer an, wo die löschende Wirkung jeder einzelnen Primzahl p beginnt:

Löschzahl p	2	3	5	7
Kleinste durch p gelöschte Zahl (p^2!)	4	9	25	49

Die kleinste Zahl, bei der die löschende Wirkung einer Primzahl p wirksam wird, ist ihre zweite Potenz, also p^2. (1)
Zum Beweis betrachten wir ein Vielfaches px von p mit $px<p^2$. Aus $px<p^2$ folgt jedoch $x<p$, und px wurde bereits gelöscht als Vielfaches von x, falls x eine Primzahl ist, bzw. als Vielfaches seines kleinsten Primfaktors, falls x keine Primzahl ist. Daraus erklärt sich, daß bei der Anwendung des Siebverfahrens auf den Zahlenraum bis 100 die Zahl 11 als Löschzahl nicht mehr auftritt, denn ihre löschende Wirkung beginnt nach (1) erst bei $11^2=121$.
Aus (1) folgt auch:
Die Löschzahlen im Zahlenraum bis R sind genau diejenigen Primzahlen, die nicht größer sind als $\sqrt{R}$. (2)
Beweis: Die löschende Wirkung einer Primzahl $p>\sqrt{R}$ beginnt nach (1) erst bei $p^2>R$.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
			2		2		2	3	2		2		2	3	2		2		2
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
3	2		2	5	2	3	2		2		2	3	2	5	2		2	3	2
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
	2		2	3	2		2	7	2	3	2		2	5	2	3	2		2
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~	71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
	2	3	2	5	2		2	3	2		2		2	3	2	7	2		2
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
3	2		2	5	2	3	2		2	7	2	3	2	5	2		2	3	2

Tafel 1: Der Zahlenraum bis $R = 100$ nach dem Streichvorgang laut „Sieb des Eratosthenes"

2. Die Rolle der natürlichen Zahl 6

Die Feststellung von Primzahlen nach dem Siebverfahren wird um so komplizierter, je größer wir R wählen. Dies ist hauptsächlich darauf zurückzuführen, daß die Anzahl der Löschzahlen immer größer wird. Waren es bei $R = 100$ vier (2 3 5 7), so sind es bei $R = 1000$ schon 11 (2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31) und bei $R = 10000$ fünfundzwanzig (... 97).

Die nachfolgende Aussage (3) ermöglicht uns, bei den weiteren Untersuchungen die Löschzahlen 2 und 3 aus dem Spiele zu lassen und von vornherein aus dem Sieb zu werfen. Es gilt:

Jede Primzahl $p \geqq 5$ ist auf dem Zahlenstrahl einem n-fachen der natürlichen Zahl 6 benachbart (n eine natürliche Zahl). (3)

Beweis: Eine Primzahl sei $p \geqq 5$. Wo sie auf dem Zahlenstrahl liegt, bietet er folgendes Bild: ... $p-1$ p $p+1$ ...

Unter drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen befindet sich genau eine, die ein Vielfaches von 3 ist. Da p als Primzahl nicht durch 3 teilbar ist, kommt hierfür entweder $p-1$ oder $p+1$ in Frage. Als Primzahl ist p eine ungerade Zahl, ihre Nachbarzahlen $p-1$ und $p+1$ müssen demnach gerade Zahlen sein. Eine von ihnen ist, wie oben bewiesen, ein Vielfaches von 3; dieses ist demnach auch Vielfaches von 6, womit unsere Behauptung (3) bewiesen ist.

Da bei unseren weiteren Untersuchungen die Vielfachen von 6 eine gewichtige Rolle spielen werden, so geben wir ihnen eine Bezeichnung, nämlich *S-Zahlen (Symbol S)*.

Ihre Strukturformel lautet ganz einfach $S = 6n$ (n eine natürliche Zahl). (4)

Hier könnte die Frage aufgeworfen werden, ob eigentlich $p-1$ oder $p+1$ die S-Zahl ist. Nun kann das bald die eine, bald die andere sein, niemals beide zugleich. Angenommen, $p-1$ sei S-Zahl; dann gilt $p-1=6n$ und $p=6n+1$. Hier ist die Primzahl p um eine Einheit größer als die benachbarte S-Zahl, liegt also oberhalb von ihr und wird deshalb mit p_0 bezeichnet. Ihre Strukturformel lautet
$p_0 = 6n+1$. (5)

Entsprechend läßt sich für die unterhalb der S-Zahl gelegene Primzahl herleiten:
$p_u = 6n-1$. (6)

Die genaue Antwort auf die gestellte Frage haben wir eigentlich noch nicht gegeben, mindestens noch nicht begründet. Hierfür genügt ein Blick auf den Zahlenstrahl, am besten im Zahlenraum bis $R = 20$. Hier sind allen S-Zahlen nach unten und nach oben Primzahlen angelagert (... 5 6 7 ... 11 12 13 ... 17 18 19). An der Gruppierung ... 11 12 13 ... z. B. ersehen wir, daß sich für die Primzahl $p = 11$ die benachbarte S-Zahl durch $p+1$, für die Primzahl $p = 13$ durch $p-1$ darstellen läßt.

Hätten die Menschen in einem Entwicklungsstadium, wo sie noch nicht über die Zahl 20 hinaussahen, bereits „Primzahlforschung" betrieben, so wären sie in Versuchung gekommen, unseren Satz (3) umzukehren: Ist eine Zahl einer S-Zahl benachbart, dann ist sie eine Primzahl. Bei Weiterschreiten auf dem Zahlenstrahl hätte aber die Gruppierung ... 23 24 25 ... diese Umkehrung widerlegt. Dabei ist der S-Zahl 24 immerhin noch eine Primzahl benachbart; die S-Zahl 120 hat aber sowohl nach unten als auch nach oben als Nachbarn nur F-Zahlen.

Wir können also von unserem Satz (3) keine Umkehrung bilden, können aber seine Aussage noch treffender für unseren Zweck formulieren:

Nur bei Nachbarzahlen der S-Zahlen besteht die Möglichkeit (M), daß sie sich als Primzahlen erweisen. (7)

Diese Nachbarzahlen bezeichnen wir als M-Zahlen, und zwar als Mu-Zahlen, wenn sie unterhalb der S-Zahl liegen, als Mo-Zahlen, wenn sie oberhalb liegen.

Ordnet man die natürlichen Zahlen so an, wie dies in Tafel 2 für den Zahlenraum bis $R = 102$ vorgenommen worden ist, daß nämlich je sechs der Größe nach untereinander gesetzt werden, so enthält die erste waagerecht liegende Säule nur sämtliche Mo-Zahlen (Mo-Säule), die fünfte sämtliche Mu-Zahlen (Mu-Säule) und die sechste nur sämtliche S-Zahlen (S-Säule). Aber auch die zweite, die dritte und die vierte Säule sind in Hinsicht auf die Teilbarkeit durch 3 ähnliche Kategorien (g_u-Säule, D-Säule, g_o-Säule).

3. Die sechs Restklassen der natürlichen Zahlen bei Division durch 6

Wie aus den Erläuterungen zu Tafel 2 ersichtlich, zerfällt die Menge der natürlichen Zahlen in Hinsicht auf ihre Teilbarkeit durch 6 in sechs Kategorien, die man *Restklassen* nennt, da alle Zahlen einer solchen Restklasse bei Division durch 6 denselben Rest lassen. Zahlen aus der Restklasse „0" sind demnach die durch 6 teilbaren Zahlen, d. h. Zahlen der Gestalt $6n$ (n natürliche Zahl), wir nannten sie S-Zahlen.

Wir wissen schon, daß Primzahlen $\geqq 5$ nur unter den Nachbarn von S-Zahlen zu finden sind, d. h. bei Division durch 6 den Rest 1 (Mo-Zahlen) oder den Rest 5 (Mu-Zahlen) lassen. Sie haben die Gestalt $6n+1$ bzw. $6n+5$ (n natürliche Zahl). Die D-Zahlen sind solche der Form $6n+3$, d. h. ungerade, durch 3 teilbare Zahlen; ihre Nachbarzahlen g_u bzw. g_o sind dann gerade Zahlen der Gestalt $6n+2$ bzw. $6n+4$ (n natürliche Zahl).

Um rasch bestimmen zu können, welcher Restklasse eine natürliche Zahl angehört, kann man folgenden Satz benutzen:

Eine Zahl läßt bei Division durch 3 denselben Rest wie ihre Quersumme. (8)

F. Franke

(Fortsetzung und Schluß in Heft 5/78; d. Red.)

Tafel 2: Die sechs Restklassen der natürlichen Zahlen im Zahlenraum bis $R = 102$ bei Division durch 6, in waagerecht liegende Säulen gruppiert

Mo	(1)	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67	73	79	85	91	97
g_u	2	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92	98
D	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93	99
g_o	4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100
Mu	5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95	101
S	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102

Gute Grundkenntnisse gefragt

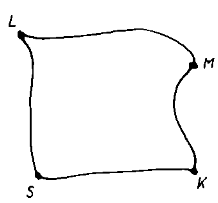
Klasse 5

▲1▲ Versuche, bei den folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen für die Variablen solche Zahlen einzusetzen, daß wahre Aussagen entstehen!

a) $x+x=0$ d) $0 : a>0$
b) $y+0=y$ e) $r-0=r$
c) $z \cdot 0=0$ f) $x \cdot x>x$

Untersuche jeweils, ob es auch mehrere Lösungen gibt!

▲2▲ Von Lichtendorf nach Kummersbach kann man mit dem Autobus über Müllerwitz oder über Siebenberg fahren. In beiden Fällen muß man umsteigen. Über Müllerwitz sind es 35 km, über Siebenberg 29 km. Hans möchte möglichst schnell von Lichtendorf nach Kummersbach kommen.



Könntest du ihm empfehlen, welche Buslinie er wählen soll?

▲3▲ Zeichne Rechtecke mit den folgenden Abmessungen der Seiten a und b; bestimme ihren Umfang und ihren Flächeninhalt!

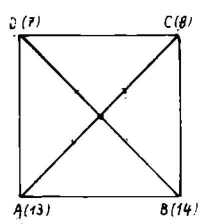
a (in cm)	5	5	5	11	10
b (in cm)	1	3	5	1	2
a (in cm)	8	6	12	36	18
b (in cm)	4	6	3	1	3

Entscheide dann, ob Steffen recht hat, wenn er behauptet:

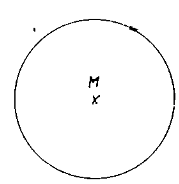
a) „Zwei Rechtecke mit gleichem Umfang haben stets den gleichen Flächeninhalt."
b) „Zwei Rechtecke mit gleichem Flächeninhalt haben stets den gleichen Umfang."
c) „Vergrößert man den Umfang eines Rechtecks, so wächst stets auch sein Flächeninhalt."
d) „Vergrößert man den Flächeninhalt eines Rechtecks, so wächst stets auch sein Umfang."
e) „Jedes Rechteck mit einem Flächeninhalt von $36\,\text{cm}^2$ hat einen Umfang von mindestens 24 cm."
f) „Zu jedem Rechteck läßt sich ein zweites angeben, das den gleichen Flächeninhalt, aber einen größeren Umfang als das erste besitzt."

▲4▲ a) Welcher der Dezimalbrüche 3,8; 3,7; 4,1; 4,3 liegt am dichtesten bei 4?
b) Kannst du einen Dezimalbruch nennen, der noch näher bei 4 liegt als die gegebenen?

▲5▲ Überlege! Wie groß kannst du jeweils den Drehwinkel wählen, damit die Figur bei Drehung um M wieder auf sich selbst abgebildet wird?



a)



b)

Überprüfe deine Antwort mit Transparentpapier!

▲6▲ Gegeben sei eine Gerade g. Zeichne eine Strecke (einen Strahl, eine Gerade, einen Kreis, ein Dreieck), die mit ihrem Spiegelbild bezüglich g

a) keinen Punkt,
b) nur einen Punkt,
c) mehr als einen Punkt und
d) alle Punkte gemeinsam hat! Versuche jeweils alle Fälle zu finden!

Klasse 6

▲1▲ Von zwei natürlichen Zahlen weiß man, daß mindestens eine von ihnen durch 4 teilbar ist.
Ist ihr Produkt (ihre Summe) auch durch 4 teilbar?

▲2▲ a) Versuche 30 so in zwei Summanden zu zerlegen, daß
– jeder durch 5 teilbar ist;
– genau einer durch 5 teilbar ist;
– keiner durch 5 teilbar ist!

b) Zerlege 49 so in zwei Summanden, daß
– beide gerade sind;
– genau einer gerade ist;
– keiner gerade ist!

c) Sind solche Zerlegungen immer möglich gewesen?

▲3▲ Versuche, für die folgenden Gleichungen Lösungen anzugeben (für die Variablen sind nur natürliche Zahlen zugelassen):

a) $\frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$; e) $\frac{a}{4}+\frac{7}{8}=\frac{1}{2}$;
b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4}$; f) $\frac{3}{2}+\frac{y}{4}=\frac{10}{5}$;
c) $\frac{4}{5}+\frac{x}{10}=\frac{1}{2}$; g) $\frac{1}{2}+\frac{z}{4}=\frac{2}{3}$;
d) $\frac{3}{5}+\frac{x}{y}=\frac{9}{10}$; h) $\frac{2}{3}+\frac{z}{9}=\frac{6}{9}$.

▲4▲ Bestimme die Flächeninhalte der Rechtecke R_1 bis R_3, für deren Seiten a und b folgende Meßwerte gefunden wurden!

	R_1	R_2	R_3
a	9 m	1,8 dm	35,5 cm
b	47 m	3,7 dm	8 cm

Runde die Ergebnisse sinnvoll!

▲5▲ Fülle folgende Tabelle aus!

a	b	$a \cdot b$	$a \cdot b<a$	$a \cdot b>a$
$\frac{1}{2}$		5	nein	ja
3			ja	
$\frac{3}{5}$			nein	nein
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$			
5	$\frac{5}{4}$			

▲6▲ Welche Aussagen sind wahr? Welche sind falsch?

a) Die Summe zweier Nebenwinkel beträgt 180°.
b) Scheitelwinkel sind kongruent.
c) Nebenwinkel sind nicht kongruent.
d) Es gibt kongruente Nebenwinkel.
e) Wenn zwei Winkel kongruent sind, dann sind es Nebenwinkel.
f) Wenn zwei Winkel kongruent sind, dann sind es Scheitelwinkel.
g) Wenn zwei Winkel nicht gleich groß sind, dann sind es keine Scheitelwinkel.
h) Wenn zwei Winkel nicht gleich groß sind, sind es Nebenwinkel.

Klasse 7

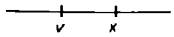
▲1▲ Überprüfe durch Überschlag, ob das folgende Ergebnis richtig sein kann (Rechenstabgenauigkeit):

a) $14{,}3 \cdot 435=622$
b) $338 : 192=1{,}98$
c) $0{,}645 : 0{,}405=15{,}9$

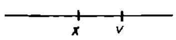
▲2▲ Welche der folgenden Aussagen sind falsch?

a) $|-13|=+13$ d) $-|-13|=+13$
b) $|-20|<+17$ e) $|-12|>-12$
c) $|-23|>-27$ f) $-|-1{,}7|=-1{,}7$

▲3▲ a) Wo liegt $|x|$?



b) Wo liegt 0?

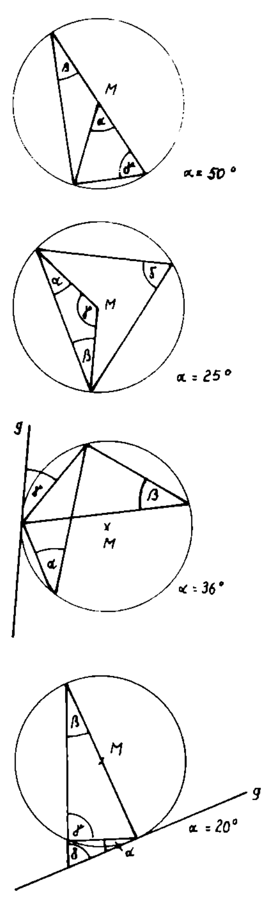


c) Wo liegt $-x$?

▲4▲ Fülle folgende Tabelle aus!

a	b	$a+b$	$a+b<a$	$a+b>a$
+3		+10	nein	ja
+1,2	−2			
+1,9			nein	nein
−7	−1,5			
−9,3	+10			

▲5▲ In den Teilfiguren der Abb. ist jeweils die Größe des Winkels α vorgegeben. Die Größe der übrigen gekennzeichneten Winkel ist zu bestimmen (mit Begründung), ohne sie zu messen.
(Die Gerade g sei jeweils Tangente an den betreffenden Kreis.)



Wann denkt es sich am besten?

Festgestellt wurde, daß sich Kopfarbeit am besten im Sitzen verrichten läßt. Im Stehen ist es unbequemer, wenn auch Ausnahmen die Regel beweisen. *Gogol*, *Hemingway* und *Balzac* arbeiteten des öfteren am Stehpult. Am wenigsten ist dafür Liegen geeignet. Sogar für passives Nachdenken ist diese Haltung nicht die beste.

Der russische Physiologe Prof. *Nikolai Wwedenski* von der Petersburger Universität formulierte die Hauptprinzipien für die Aufrechterhaltung einer großen Arbeitsfähigkeit und schöpferischen Aktivität des Gehirns wie folgt: Man soll sich allmählich in die geistige Tätigkeit hineinfinden, rhythmisch, folgerichtig und systematisch arbeiten, unbedingt richtige Erholung einlegen und sich der gesellschaftlichen Bedeutung der ausgeführten Arbeit bewußt sein.

Die Produktivität verschiedener Arten von Denkarbeit hat man graphisch dargestellt. Die Kurven sind freilich nur als annähernde Orientierungspunkte zu verstehen. Die größte Produktivität ist dienstags und mittwochs festgestellt worden, was für die meisten Beschäftigten gilt. In verschiedenen Ländern erhielt man z. B. bei der Untersuchung verschiedener Gruppen von Beschäftigten etwa gleiche Angaben über den biologischen Zyklus innerhalb von 24 Stunden. Laut Angaben tschechoslowakischer Forscher steigt die Arbeitsproduktivität zwischen 9 bis 10 und 11 bis 13 Uhr. In dieser Zeitspanne ist man am frischsten und arbeitsfähigsten. Dieselben Wissenschaftler nennen noch eine günstige Zeitspanne: von 16 bis 18 Uhr. Dann verringern sich schon Produktivität und Nutzeffekt der Tätigkeit. Die ungünstigste Zeit ist von 1 bis 3 Uhr nachts.

Nächtliche Kopfarbeit ist also nicht zu empfehlen.

Man sollte auch immer daran denken, alle zwei Stunden vom Schreibtisch weg eine Pause von 10 bis 15 Minuten einzulegen. „Ausruhen, ehe man ermüdet", rät der sowjetische Wissenschaftler Prof. W. *Lukjanow*.

Mit Problemen der Denktätigkeit beschäftigen sich heute nicht nur Physiologen, Psychologen und Hygieniker. In dieses noch nicht restlos erforschte Gebiet sind auch Designer, Funktechniker und Konstrukteure „eingedrungen". Sie entwickeln Gegenstände, welche die schöpferische Tätigkeit stimulieren: einen handlichen und haltbaren Füllfederhalter; Tinte in Farbtönen, die das Auge nicht ermüden; einen Tisch, an den man sich immer gern setzt. Und bloß keine Hast. Hast ist letztlich nichts anderes als eine Abart der Faulheit.

Aus: Sowjetskaja Moldawija

Ferienkalender für das Schuljahr 1978/79

Herbstferien:
Erster Ferientag: 14. Oktober 1978,
erster Unterrichtstag: 23. Oktober 1978

Ferien zum Jahreswechsel:
Erster Ferientag: 22. Dezember 1978,
erster Unterrichtstag: 3. Januar 1979

Winterferien:
Erster Ferientag: 3. Februar 1979,
erster Unterrichtstag: 26. Februar 1979

Unterrichtsfreie Tage:
14. April 1979, 28. April 1979,
30. April 1979

Frühjahrsferien:
Erster Ferientag: 12. Mai 1979,
erster Unterrichtstag: 21. Mai 1979

Unterrichtsfreie Tage:
31. Mai 1979, 1. Juni 1979,
2. Juni 1979

Sommerferien:
Erster Ferientag: 7. Juli 1979
erster Unterrichtstag: 3. September 1979

Die Staatsbank leistet Ersatz

Anfragen von Lesern beschäftigen sich häufig mit der Ersatzfähigkeit eines beschädigten Geldzeichens.

Die Staatsbank der DDR leistet Ersatz, wenn die Echtheit, die Gültigkeit und die Werthöhe des Geldzeichens festgestellt werden kann.
Bei Vorlage einer ganzen Banknote sowie der Vorlage von Teilen einer Banknote, die insgesamt nicht kleiner als drei Fünftel der ganzen Banknote sein dürfen, wird Ersatz in voller Werthöhe geleistet.
Werden nur Teile einer Banknote vorgelegt, die insgesamt ein Halb bis drei Fünftel der ganzen Banknote betragen, so wird der halbe Wert erstattet.
Für den Ersatz einer Banknote müssen als Mindestanforderungen der Echtheit je eine vollständige Angabe über den Nominalwert sowie Serien- und Nummernbezeichnung erkennbar sein.
Für eine abgenutzte oder beschädigte Münze wird Ersatz in voller Werthöhe geleistet.

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

1. Stufe (Schulolympiade) Aufgaben

Abgabetermin (beim Mathematiklehrer): 6. Oktober 1978

Achtung: Bis auf solche Fakten, die aus dem Schulunterricht oder den Arbeitsgemeinschaften bekannt sind, müssen alle verwendeten Aussagen präzise formuliert und bewiesen werden. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein. Die Gedankengänge und Schlüsse sind in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen darzulegen. Die Lösungen und Punktbewertungstabellen werden ab 6. Oktober 1978 veröffentlicht.

Anmerkung: $\overline{\sphericalangle ABC}$ bezeichnet im folgenden die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Ferner bezeichnet AB die Strecke mit den Endpunkten A und B, während $\overline{AB}$ die Länge der Strecke AB bedeutet.

Olympiadeklasse 5

1. Gerda, Peter und Renate sehen auf dem Tisch einen Teller mit Haselnüssen stehen. Sie wissen nicht, wieviel Nüsse es sind. Gerda meint: „Wenn man fünfmal nacheinander 19 Nüsse vom Teller wegnimmt, bleiben noch mehr als 5 Nüsse auf dem Teller zurück." Renate meint: „Wollte man aber fünfmal nacheinander 20 Nüsse von dem Teller wegnehmen, so würden die Nüsse dafür nicht ausreichen." Peter sagt: „Eine von euch beiden hat bestimmt recht." Nach dem Auszählen wurde festgestellt, daß Peter sich geirrt hatte. Wieviel Nüsse lagen insgesamt auf dem Teller?

2. Marie-Luise hat einen außen rot angestrichenen Würfel aus naturfarbenem Holz. Der Würfel hat 3 cm Kantenlänge. Marie-Luise denkt sich diesen Würfel in kleine Würfel von 1 cm Kantenlänge zerlegt.
a) Wie viele derartige kleine Würfel würden aus dem roten Würfel insgesamt entstehen?
Wie viele von den kleinen Würfeln hätten
b) drei rot angestrichene Seitenflächen,
c) zwei rot angestrichene Seitenflächen,
d) eine rot angestrichene Seitenfläche,
e) keine rot angestrichene Seitenfläche?
Als Lösung genügt die Angabe der in a) bis e) erfragten Anzahlen.
Eine Begründung wird nicht verlangt.

3. In die freien Felder des abgebildeten Rechtecks sind Zahlen so einzutragen, daß sie von links nach rechts gelesen und von oben nach unten gelesen immer kleiner werden und daß für jede Zeile und jede Spalte gilt: Alle Differenzen, die man in einer Zeile bzw. Spalte zwischen zwei unmittelbar neben- bzw. untereinanderstehenden Zahlen bilden kann, sind für diese Zeile bzw. Spalte gleich.

	31		
	26	20	
			8

Gib ferner für jede Zeile und jede Spalte diese Differenz an!
Der Lösungsweg ist zu beschreiben.

4. Auf einem Parkplatz stehen insgesamt 60 Personenkraftwagen der Typen „Trabant", „Wartburg", „Škoda" und „Wolga".
Die Anzahl der Wagen vom Typ „Trabant" ist doppelt so groß wie die Anzahl der Wagen der drei anderen Typen zusammengenommen. Außerdem gilt: Es stehen dreimal soviel Wagen vom Typ „Wartburg" wie von den Typen „Škoda" und „Wolga" zusammen auf dem Parkplatz und drei Wagen mehr vom Typ „Škoda" als vom Typ „Wolga".
Wieviel PKW jeden Typs stehen auf diesem Parkplatz?

Olympiadeklasse 6

1. In einem Stadtbezirk Leipzigs wurden 260 große Wohnungen renoviert. Bei einem Zehntel dieser Wohnungen hat jede Wohnung 55 m^2 Wohnfläche; bei einem Viertel der 260 Wohnungen hat jede Wohnung 67 m^2 Wohnfläche; jede andere der 260 Wohnungen hat 80 m^2 Wohnfläche.
Berechne die gesamte Wohnfläche dieser 260 renovierten Wohnungen!

2. Eine Zahl z soll in der Gestalt $z = {*}3{*}60$ geschrieben werden, wobei jeder Stern (*) so durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen ist, daß z die beiden folgenden Eigenschaften hat:
(1) $60000 < z < 100000$,
(2) z ist durch 9 teilbar.
Ermittle alle Zahlen z, die diesen Bedingungen genügen!

3. Fred, Gerd, Hans und Ingo sind Schüler der Klassen 6a, 6b, 7a, 7b, und zwar ist in jeder dieser Klassen einer der vier Schüler. In einem Gespräch, an dem nur Fred und die beiden Schüler der 7. Klasse beteiligt waren, stellt Hans fest, daß drei der vier Schüler nur je eine der Zeitschriften „alpha" und „technikus" lesen, nämlich Fred, Gerd und der Schüler der 6a. Der Schüler der 7b dagegen liest sowohl den „technikus" als auch die Zeitschrift „alpha".
Zu welcher Klasse gehört nach diesen Angaben jeder der vier Schüler, und welcher Schüler liest die beiden Zeitschriften „alpha" und „technikus"?

4. Drei Pioniere einer Schule, Klaus, Silvia und Frank, wurden zur Kreisolympiade Junger Mathematiker delegiert und errangen dort einen ersten, einen zweiten bzw. einen dritten Preis. Als später Rainer nach dem Abschneiden seiner Mitschüler gefragt wurde, sagte er: „Ich glaube, Silvia errang keinen ersten Preis, Klaus bekam keinen zweiten Preis, den erhielt nämlich Frank." Wie sich anschließend herausstellte, war unter den drei Aussagen Rainers genau eine wahr, die anderen beiden waren dagegen falsch.
Welcher von den drei genannten Pionieren erhielt den ersten, welcher den zweiten und welcher den dritten Preis?

Olympiadeklasse 7

1. Vier Schüler, Ernst, Franz, Karl und Martin, deren Familiennamen (möglicherweise in anderer Reihenfolge) Altmann, Müller, Neubert und Tauber lauten, trafen sich auf einer Geburtstagsfeier. Jeder von ihnen brachte für das Geburtstagskind genau ein Geschenk mit. Außerdem ist bekannt:
(1) Martin hatte Rosen, Altmann einen Kugelschreiber, Müller ein Buch und Karl eine Schachtel Pralinen mitgebracht.
(2) Als erster verabschiedete sich im Verlaufe des Abends Martin, als zweiter Neubert, danach Ernst und zuletzt Müller.
Wie heißen diese Schüler mit Vor- und Familiennamen?

2. Berechne

$$a = 1{,}25 : \frac{13}{12} \cdot \frac{91}{60},$$
$$b = 2{,}225 - \frac{5}{9} - \frac{5}{6},$$
$$c = \frac{32}{15} : \frac{14}{15} + 6\left(\frac{45}{56} - 0{,}375\right),$$
$$d = c - \frac{b}{a}$$

ohne Verwendung von Näherungswerten!

3. Wie alt ist Margit jetzt, wenn ihre Mutter jetzt 30 Jahre, ihre Großmutter jetzt 62 Jahre alt ist und nach einigen Jahren die Mutter

viermal sowie gleichzeitig die Großmutter achtmal so alt wie Margit sein werden?
(Es werden jeweils nur volle Lebensjahre berücksichtigt.)

4. Ermittle die kleinste Primzahl, die bei Division durch 5, 7 und 11 jeweils den Rest 1 läßt!

Olympiadeklasse 8

1. Die FDJler Arnim, Bertram, Christian, Dieter, Ernst und Fritz waren Teilnehmer an einem 400-m-Lauf. Keine zwei von ihnen liefen zur gleichen Zeit durchs Ziel.
Vorher waren folgende drei Voraussagen über das Ergebnis des Wettkampfes gemacht worden (jeder Teilnehmer wird mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens bezeichnet):

Platz	1.	2.	3.	4.	5.	6.
1. Voraussage	A	B	C	D	E	F
2. Voraussage	A	C	B	F	E	D
3. Voraussage	C	E	F	A	D	B

Nach Abschluß des Laufes zeigte sich, daß in der ersten Voraussage für genau drei Läufer die von ihnen erreichten Plätze richtig angegeben waren. Keine zwei dieser drei Plätze waren zueinander benachbart. Bei der zweiten Voraussage war für keinen Läufer der erreichte Platz richtig angegeben. Bei der dritten Voraussage war für einen Platz derjenige Läufer richtig angegeben, der diesen Platz erreichte.
Gib alle Möglichkeiten für die von den Läufern unter diesen Bedingungen erreichten Platzreihenfolgen an!

2. Über das Ergebnis einer Klassenarbeit ist folgendes bekannt:
Es nahmen daran mehr als 20 und weniger als 40 Schüler teil. Das arithmetische Mittel aller Zensuren, die die Schüler in dieser Klassenarbeit erreichten, betrug 2,3125. Kein Schüler erhielt bei dieser Arbeit die Note „5“. Die Anzahl der „Zweien“ war eine ungerade Zahl und größer als 12. Die Anzahl der „Dreien“ war genau so groß wie die der „Zweien“.
a) Ermittle die Anzahl der Schüler, die an dieser Klassenarbeit teilnahmen!
b) Wie viele von ihnen erhielten hierbei die Note „1“?

3. Gegeben sei eine dreiseitige Pyramide $ABCS$, deren Grundfläche ABC ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 4 cm bildet und deren Spitze S so gelegen ist, daß das Lot von S auf die Ebene durch A, B, C den Schwerpunkt F der Grundfläche als Fußpunkt besitzt und daß FS die Länge 6 cm hat. Diese Pyramide ist in einer Zweitafelprojektion darzustellen. Dabei wird gefordert, daß die Seitenfläche ABS in der Grundrißtafel liegt. Zu konstruieren ist die Abbildung nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal aus den gegebenen Streckenlängen 4 cm, 6 cm.
(Beschreibung und Begründung der Konstruktion wird nicht verlangt.)
(*Hinweis:* Man kann z. B. die geforderte Abbildung aus einer anderen Darstellung gewinnen, in der das gleichseitige Dreieck ABC in der Grundrißtafel liegt.)

4. Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse AB, dessen Innenwinkel $\sphericalangle CAB$ die Größe 60° hat.
Fälle von C das Lot CD auf AB, danach von D die Lote DE und DF auf AC bzw. BC sowie von F das Lot FH auf AB!
Weise nach, daß $\overline{HB} = \overline{HA} + \overline{AE}$ ist!

Olympiadeklasse 9

1. Aus einer quadratischen Papptafel von 8 dm Seitenlänge sollen 9 Würfelnetze, die nicht kongruent zueinander zu sein brauchen, ausgeschnitten werden. Aus jedem dieser Würfelnetze soll ein Würfel von 1 dm³ Rauminhalt gefaltet werden können. Zeigen Sie an einem Beispiel, daß es möglich ist, 9 derartige Netze auf einer solchen Tafel einzuzeichnen! Es genügt eine solche Zeichnung; Beschreibung und Begründung werden nicht verlangt.

2. Es seien a und b rationale Zahlen, für die folgendes gilt:
Vermindert man a um 10%, so erhält man 297. Vergrößert man b um 10%, so erhält man 297.
Wieviel Prozent von a beträgt dann b? (Angabe des Prozentsatzes auf zwei Dezimalstellen gerundet.)

3. In einem Zirkel Junger Mathematiker versuchen die Teilnehmer, folgende Aufgabe zu lösen:
Die Zahl 30 soll dargestellt werden, indem dazu genau eine einziffrige Zahl genau neunmal benutzt wird, wobei noch die Zeichen der Grundrechenoperationen und Klammern erlaubt sind und die Potenzschreibweise zulässig ist.
Zeigen Sie, daß das für jede der einziffrigen Zahlen 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 und 9 möglich ist! (Es genügt jeweils die Angabe eines Beispiels.)

4. Gegeben seien zwei Punkte A_0 und A_1. Ihr Abstand voneinander werde mit a bezeichnet. Man konstruiere die Eckpunkte eines Quadrats mit der Seitenlänge $3a$ unter alleiniger Benutzung eines Zirkels!

Olympiadeklasse 10

1. Das Bild zeigt vier zueinander paralleler Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, bei denen eine einheitliche Länge a für jedes $i = 1, 2, 3, 4$ als Abstand zwischen g_i und g_{i+1} auftritt, und weitere vier zu den g_i senkrechte Geraden h_1, h_2, h_3, h_4, bei denen a für jedes $i = 1, 2, 3, 4$ auch der Abstand zwischen h_i und h_{i+1} ist. Ferner zeigt das Bild eine Numerierung der entstehenden Schnittpunkte.

	h_1	h_2	h_3	h_4
g_1	1	2	3	4
g_2	5	6	7	8
g_3	9	10	11	12
g_4	13	14	15	16

a) Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Quadrate, die nur numerierte Punkte als Ecken und nur auf Geraden g_i oder h_i liegende Strecken als Seiten besitzen.
b) Man untersuche, ob es möglich ist, alle 16 numerierten Punkte so unter Verwendung der Farben Rot, Blau, Grün, Gelb zu färben (jeden numerierten Punkt mit genau einer dieser Farben), daß für die Ecken jedes in (*a*) genannten Quadrates alle vier Farben auftreten.

2. In einem Mathematikzirkel werden Aussagen zur Diskussion gestellt, die mit den Worten beginnen: „Wenn a und b zwei von 0 verschiedene reelle Zahlen sind, für die $a > b$ und $|a| < |b|$ gilt, dann ...“
Antje stellt als Fortsetzung zur Diskussion: „... ist a negativ.“ Bernd stellt als Fortsetzung zur Diskussion: „... sind a und b negativ.“ Cornelia stellt als Fortsetzung zur Diskussion: „... ist b negativ.“ Doris stellt als Fortsetzung zur Diskussion: „... braucht weder a noch b negativ zu sein.“
Man untersuche für jede dieser vier zur Diskussion gestellten Aussagen, ob sie wahr ist.

3. Klaus erfindet für Schüler der ersten Klasse folgendes Spiel:
Auf 30 Kärtchen sind die Zahlen von 1 bis 10 so aufgeschrieben, daß auf jedem Kärtchen genau eine Zahl steht und daß jede der Zahlen 1 bis 10 dabei genau dreimal vorkommt. Eine ausreichende Anzahl unbeschriebener Kärtchen wird in Reserve gehalten. Die 30 beschriebenen Kärtchen werden gemischt und verdeckt auf den Tisch gelegt. Der erste Spieler zieht zwei davon. Tragen beide die gleiche Zahl, so hat er ein „Paar“ und darf es aus dem Spiel herausnehmen und behalten. Sind die beiden Zahlen voneinander verschieden, so werden diese beiden Karten ebenfalls aus dem Spiel herausgenommen; dafür wird auf eine der Reservekarten die (positive) Differenz der beiden Karten geschrieben und diese Reservekarte unter die übrigen noch im Spiel befindlichen gemischt.
Dann verfährt der zweite und anschließend jeder weitere Spieler ebenso, solange sich noch mindestens 2 Kärtchen im Spiel befinden. Ist jedoch (nach dem Herausnehmen eines „Paares“ oder nach dem Hinzufügen einer Reservekarte) die Anzahl der im Spiel befindlichen Kärtchen kleiner als 2, so ist das Spiel beendet. (Der Spieler, der dann die meisten „Paare“ besitzt, hat gewonnen.)

Beweisen Sie, daß das Spiel stets damit enden muß, daß sich noch genau eine Karte im Spiel befindet!

4. Da sei ein Dreieck ABC
mit rechtem Winkel $\sphericalangle ACB$.
Der Inkreisradius sei ϱ.
(Man nennt ihn nun mal gerne so.)
Dann möge man das c noch kennen.
(Man kann's auch Hypotenusenlänge nennen.)
Nun gilt es, nur mit diesen Stücken
den Flächeninhalt auszudrücken.
Man muß sich nach Gesetzen richten,
(doch braucht man nicht dabei zu dichten.)

Olympiadeklassen 11/12

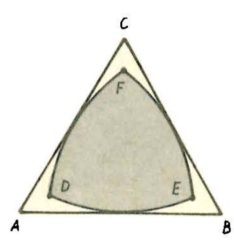
1. Bei der Mathematikolympiade treffen sich drei Schüler. „Ist euch schon aufgefallen", fragt einer von ihnen, ein Mädchen, „daß wir Lang, Dick und Dünn heißen und daß auch genau einer von uns außergewöhnlich lang, genau ein anderer beachtlich dick und der dritte erschreckend dünn ist?"
„Ja, tatsächlich", entgegnet darauf ein anderer, der dünne Schüler, „aber bei keinem von uns stimmen Name und die den jeweiligen Schüler charakterisierende Eigenschaft überein." „Da hast du völlig recht!" stimmt ihm der Schüler namens Lang zu.
Wie heißt hiernach der lange Schüler, wie der dicke und wie der dünne Schüler, wenn darüber hinaus vorausgesetzt wird, daß das Mädchen, das gefragt hat, nicht dick ist? Welche der charakterisierenden Eigenschaften und welchen Namen hat das Mädchen?

2. Man beweise, daß für jede natürliche Zahl $n \geq 5$ gilt:
Jedes Quadrat läßt sich in n Teilquadrate zerlegen. [Erklärung: Sind $Q, T_1, \ldots, T_n$ Quadrate (als Flächen, einschließlich ihrer Randpunkte betrachtet), so liegt genau dann eine Zerlegung von Q in $T_1, \ldots, T_n$ als Teilquadrate vor, wenn
(1) Q die Vereinigungsmenge der Mengen $T_1, \ldots, T_n$ ist und
(2) für $i \neq j$ der Durchschnitt von T_i mit T_j stets entweder keine Punkte oder nur solche Punkte enthält, die sowohl für T_i als auch für T_j Randpunkte sind.]

3. Man ermittle alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungsstem erfüllen:

$$x+\frac{1}{y}+\frac{y}{x}=3,$$
$$y=\frac{1}{x}+\frac{x}{y}=3.$$

4. Gegeben sei die Seitenlänge a eines gleichseitigen Dreiecks. Um jeden der Eckpunkte dieses Dreiecks werde derjenige Kreis konstruiert, der die gegenüberliegende Seite berührt. Je zwei dieser Kreise haben im Innern des Dreiecks genau einen Schnittpunkt. Je zwei dieser drei Schnittpunkte lassen sich durch einen Bogen eines der konstruierten Kreise miteinander verbinden, wobei jeder



dieser Bögen innerhalb der Dreiecksfläche liegt. Die drei Kreisbögen schließen ein Flächenstück ein. Man drücke den Inhalt dieses (schraffierten) Flächenstücks in der Form $z \cdot a^2$ aus (wobei man die Zahl z mit einer durch die Zahlentafel ermöglichten Genauigkeit angebe).

Ein Taschenbuch aus dem Kinderbuchverlag Berlin

Aus der Geschichte der Rechentechnik

136 Seiten, zahlreiche farbige Abb., von R. Platzer Preis 3,00 M
Für Leser von 10 Jahren an
Bestell-Nr. 629 771 9

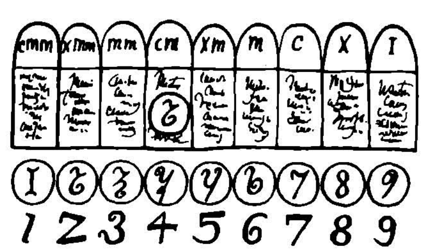
Aus dem Inhalt: Von den Anfängen der Rechenkunst – Wie die Mathematik Einzug hielt – Das älteste Rechengerät war die Hand – Auf dem Kerbholz stand die Summe – Womit die Bauern sich beim Rechnen halfen – Vom Rechnen in den Städten – Was ein Rechenknecht zu leisten hatte – Vom Zahlenschreiben – Arabische Ziffern aus Indien – Mit Maschinen wird es leichter – Der perfekte Rechenautomat – Lochkartentechnik – heute noch gebraucht – Was Elektroenergie und Elektronik vermögen – Aufbau und Arbeitsweise des Digitalrechners – Ein Traum wird Wirklichkeit

Leseprobe:

Kopfrechnen war die wichtigste Rechenart

Neben dem Rechnen mit dem Abakus galt das Kopfrechnen als wichtigste Rechenart. Hilfsmittel des Kopfrechnens war das Einmaleins, das in Rom schon die Kinder lernen mußten. Nach der Fähigkeit im Kopfrechnen wurde zum Beispiel die Klugheit eines Mannes eingeschätzt. Deshalb gaben sich die Römer gegenseitig knifflige Denkaufgaben auf, deren Lösung Wendigkeit beim Rechnen voraussetzte. Beliebt waren vor allem Mischungsaufgaben mit bekannten und unbekannten Mengen. Eine solche Aufgabe ist die von der Rinderherdenrechnung:
„Auf den Fluren weiden Rinder vierfach in Herden geteilt, jede Herde anders gefärbt.
Die erste ist milchweiß, die andere rabenschwarz, die dritte braun und die vierte scheckig.
Weiße Rinder weiden 12 insgesamt.
Die braunen Rinder sind den weißen gleich an der Zahl weniger dem vierten Teil der schwarzen Rinder.
Die Menge der schwarzen ist gleich dem dritten Teil der weißen, doppelt genommen.
Die scheckigen Rinder ergeben an Zahl die Hälfte der weißen, vermehrt um sämtliche schwarzen.
Sage mir genau die Zahl der Rinder, die du weiden siehst! Sage mir auch, wieviel es gibt von jeder Farbe!"
Die Lösung hieß: insgesamt 44 Rinder, davon 12 weiße, 10 braune, 8 schwarze und 14 scheckige.
Aus alten Überlieferungen wissen wir, daß zur Entwicklung mathematischen Könnens in den Ländern des Nordens vieles von den Römern übernommen wurde.

Abakus aus der Klosterschule von Laon (um 1000).



Zauberzahlen – Zahlenzauber

$$\begin{array}{r} 77^2 \\ \hline 49 \\ 4949 \\ 49 \\ \hline 5929 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 666^2 \\ \hline 36 \\ 3636 \\ 363636 \\ 3636 \\ 36 \\ \hline 443556 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 5555^2 \\ \hline 25 \\ 2525 \\ 252525 \\ 25252525 \\ 252525 \\ 2525 \\ 25 \\ \hline 30836025 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 37 = 111 \\ 6 \cdot 37 = 222 \\ 9 \cdot 37 = 333 \\ \vdots \end{array} \qquad \begin{array}{l} 9 \cdot 9 + 7 = 88 \\ 98 \cdot 9 + 6 = 888 \\ 987 \cdot 9 + 5 = 8888 \\ \vdots \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1 \cdot 8 + 1 = 9 \\ 12 \cdot 8 + 2 = 98 \\ 123 \cdot 8 + 3 = 987 \\ \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 12 \cdot 42 = 21 \cdot 24 \\ 102 \cdot 402 = 201 \cdot 204 \\ 1002 \cdot 4002 = 2001 \cdot 2004 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 24 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 2 + 4 \\ 369 = 3 \cdot 69 + 36 \cdot 9 - 3 \cdot 6 \cdot 9 \\ 1352 = 13 \cdot 52 + 13 \cdot 52 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1^2 = 1 \\ 11^2 = 121 \\ 111^2 = 12321 \\ 1111^2 = 1234321 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1^2 = 1 \\ (1+1)^2 = 1 + 2 + 1 \\ (1+1+1)^2 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1 \\ (1+1+1+1)^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 12345679 \cdot 9 = 111111111 \\ 12345679 \cdot 18 = 222222222 \\ 12345679 \cdot 27 = 333333333 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 143 \cdot 7 \cdot 111 = 111111 \\ 143 \cdot 7 \cdot 222 = 222222 \\ 143 \cdot 7 \cdot 333 = 333333 \end{array}$$

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{2+4}, \frac{4}{2+4+6}, \frac{5}{2+4+6+8}, \frac{6}{2+4+6+8+10}, \ldots$$

$$\frac{2}{3}, \frac{2+4}{3+5}, \frac{2+4+6}{3+5+7}, \frac{2+4+6+8}{3+5+7+9}, \frac{2+4+6+8+10}{3+5+7+9+11}, \ldots$$

$$\begin{array}{rcl} A^B &=& A \\ AA^B &=& ABA \\ AAA^B &=& ABCBA \\ AAAA^B &=& ABCDCBA \\ AAAAA^B &=& ABCDEDCBA \\ AAAAAA^B &=& ABCDEFEDCBA \end{array}$$

Die Buchstaben sind so durch Ziffern zu ersetzen, daß das Potenzieren zu einem richtigen Ergebnis führt. (Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern.)

Aufgaben aus Freundesland

20 Olympiadeaufgaben aus der Ungarischen Volksrepublik

▲1▲ Ein Schüler einer 8. Klasse arbeitete in Vorbereitung auf die nächste Mathematikschulolympiade eine bestimmte Anzahl von Mathematikaufgaben durch. Bei der Aufgabenkontrolle stellte sich heraus, daß die Anzahl der gelösten Aufgaben um 22 größer war als die Anzahl der nicht gelösten Aufgaben. Wenn man zur Anzahl der gelösten Aufgaben die dreifache Anzahl der nicht gelösten Aufgaben addiert, so erhält man eine natürliche Zahl, die kleiner als 60 ist. Addiert man dagegen zur Anzahl der gelösten Aufgaben den dritten Teil der Anzahl der nicht gelösten Aufgaben, so erhält man eine natürliche Zahl, die größer als 30 ist.
Wie viele Aufgaben hat dieser Schüler durchgearbeitet und wie viele davon gelöst?

▲2▲ Ein Schachmeister spielte gleichzeitig (simultan) gegen mehrere Schachspieler. In der ersten Stunde gewann er sieben Zwölftel aller Spiele; danach gewann er noch 80% der restlichen Spiele. In der ersten Stunde gewann er 12 Spiele mehr als in der Zeit danach.
Wie viele Schachpartien wurden insgesamt gespielt?

▲3▲ Die Gemeinden A und B und die Stadt C liegen in dieser Reihenfolge an einer Landstraße. Von B aus fährt ein Pferdefuhrwerk morgens um 6 Uhr mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nach C. Am gleichen Tag fährt von A aus ein Radfahrer um 7 Uhr mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $15\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nach C.
Wie viele Kilometer sind B und C voneinander entfernt, wenn die Entfernung zwischen den Gemeinden A und B genau 5 km beträgt und der Radfahrer in C 20 Minuten früher ankommt als das Pferdefuhrwerk? Zu welcher Uhrzeit und in welcher Entfernung von C überholt der Radfahrer das Pferdefuhrwerk?

▲4▲ Ein Schüler zeichnete ein Viereck an die Wandtafel. Hans behauptete, es sei ein Quadrat. Fritz meinte, es sei ein Trapez. Maria hielt das Viereck für einen Rhombus. Eva nannte das Viereck ein Parallelogramm. Der Lehrer stellte nach gründlicher Untersuchung des Vierecks fest, daß genau drei der vier Behauptungen richtig, genau eine falsch war.
Was für ein spezielles Viereck hat dieser Schüler an die Wandtafel gezeichnet?

▲5▲ Gegeben seien in einer Ebene drei nicht auf einer Geraden liegenden Punkte A, B und S. Es ist ein Dreieck ABC zu konstruieren, dessen Eckpunkte A und B mit den gegebenen Punkten A und B zusammenfallen und dessen drei Höhen sich im gegebenen Punkt S schneiden.

▲6▲ Die Diagonale $\overline{AC}$ eines gleichschenkligen Trapezes $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ halbiert den Winkel $\sphericalangle BAD$. Es ist zu beweisen, daß die Länge eines Schenkels dieses Trapezes gleich der Länge einer der beiden parallelen Seiten ist.

▲7▲ Andreas, Fritz und Hans spielen zusammen mit Murmeln. Zu Beginn des Spiels betrug das Verhältnis der Anzahlen ihrer Murmeln 2 : 3 : 5, nach Beendigung des Spiels hingegen 1 : 2 : 5. (Es ist stets die gleiche Reihenfolge zugrunde gelegt.) Einer der drei Jungen hatte zum Schluß zwei Murmeln an die anderen verloren.
Wie heißt dieser Junge mit Vornamen? Wie viele Murmeln gewannen bzw. verloren die beiden anderen Jungen im Verlaufe des Spieles?

▲8▲ An einem Handballturnier nahmen 12 Mannschaften teil. Jede dieser Mannschaften mußte gegen jede andere genau einmal spielen. Nachdem 54 Spiele ausgetragen waren, hatte jede Mannschaft noch gleich viele Spiele zu bestreiten. Wie oft mußte jede Mannschaft noch antreten?

▲9▲ Es ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ zu konstruieren, dessen eine Kathete 2 cm länger ist als dessen andere und in dem die Länge der Strecke zwischen dem Mittelpunkt M der Hypotenuse und dem Eckpunkt C genau 5 cm beträgt.

▲10▲ Zeichne ein stumpfwinkliges Dreieck ABC mit dem stumpfen Winkel $\sphericalangle CAB$, halbiere die Winkel $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle CBA$! Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden sei S. Ziehe durch S die Parallele zu AB! Der Schnittpunkt dieser Parallelen mit AC sei D, mit BC sei E. Es ist zu beweisen, daß die Länge der Strecke $\overline{DE}$ gleich der Summe aus den Längen der Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ ist.

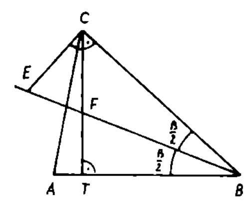
▲11▲ 18% der Ersparnisse von Albert ergeben denselben Geldbetrag wie 45% der Ersparnisse von Jürgen. Wenn Albert soviel Geld ausgibt, wie der vierte Teil der Ersparnisse von Jürgen ausmacht, dann verbleiben ihm noch 292,50 M von seinen Ersparnissen. Wieviel Mark hatte jeder dieser beiden Schüler gespart?

▲12▲ Eine Straßenbaubrigade erhielt den Auftrag, eine bestimmte Länge eines Fußgängerweges mit Zementplatten auszulegen. Hätte diese Brigade bei gleichbleibender Arbeitsintensität stündlich 20 m der vorgesehenen Weglänge mit Platten ausgelegt, dann wäre die Arbeit um 14 Uhr beendet worden. Werden stündlich nur 12 m Weglänge geschafft, wird die Arbeit erst um 18 Uhr beendet. Der Fußgängerweg wurde um 16 Uhr fertig.
Wieviel Meter Fußgängerweg wurden stündlich mit Platten ausgelegt?

▲13▲ In einem Ferienlager verbrachten insgesamt 138 Jungpioniere und Thälmann-Pioniere ihre Sommerferien. Eines Tages machten die Kinder einen Ausflug. Daran nahmen neunmal soviel Thälmann-Pioniere wie Jungpioniere teil. Im Lager verblieben zehnmal soviel Jungpioniere wie Thälmann-Pioniere.
Wieviel Jungpioniere und wieviel Thälmann-Pioniere nahmen nicht an diesem Ausflug teil?

▲14▲ Einem Kreis mit einem Durchmesser von 6 cm ist ein Rechteck einzubeschreiben, dessen Ecken auf der Peripherie des Kreises liegen und bei dem das Verhältnis der Längen der Seiten 3 : 4 beträgt.

▲15▲ In dem abgebildeten Dreieck ABC halbiert die Gerade BE den Winkel $\sphericalangle ABC$. Die Strecke $\overline{CT}$ ist die zur Seite $\overline{AB}$ gehörende Höhe.
Die Gerade CE steht senkrecht auf BC.
Es ist zu beweisen, daß das Dreieck EFC gleichschenklig ist.



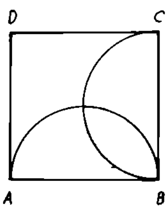
▲16▲ Wenn man die beiden Zahlen 313 und 390 durch die gleiche zweistellige natürliche Zahl dividiert, so erhält man den gleichen Rest.
Wie heißt der Divisor?

▲17▲ Ein Jagdkollektiv erlegte während einer Jagd Fasane, Hasen und Rebhühner. Die Anzahl der geschossenen Fasane verhält sich zur Anzahl der erlegten Hasen wie 7 : 15. Die Anzahl der erlegten Hasen verhält sich zur Anzahl der geschossenen Rebhühner wie 3 : 2. Die insgesamt erlegten Tiere hatten zusammen 186 Beine mehr als Köpfe.
Wie viele Fasane, Hasen bzw. Rebhühner wurden von diesem Jagdkollektiv erlegt?

▲18▲ Schüler machten einen Ausflug. Die Wanderstrecke ging zunächst bergauf; dabei wurde eine durchschnittliche Geschwindigkeit von $3\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erreicht. Die gleiche Weglänge wie bergauf ging es ins Tal hinunter mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $6\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Der Rest des Weges bis zum Ziel verlief in einer Ebene mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $4\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Wie weit war das Wanderziel vom Ausgangspunkt entfernt, wenn für Hin- und Rückweg insgesamt sechs Stunden benötigt wurden und auf dem Rückweg die gleichen Durchschnittsgeschwindigkeiten erreicht wurden?

▲19▲ Die abgebildete Figur stellt ein Quadrat $ABCD$ dar. Über den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ wurden Halbkreise konstruiert. Es ist zu berechnen, wieviel Prozent des Flächeninhalts des Quadrats der Flächeninhalt des Kreisbogenzweiecks (grau) beträgt!



▲20▲ Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ mit $\overline{AB}$ länger als $\overline{CD}$.
Es ist die Länge der Seite $\overline{CD}$ zu berechnen, wenn $\overline{AB} = 10$ cm gilt und die Verbindungsstrecke zwischen den Mittelpunkten der Diagonalen des Trapezes 3,5 cm lang ist.

Lösungen

▲1▲ Angenommen, der Schüler hat n Aufgaben gelöst, also $(n-22)$ Aufgaben nicht gelöst; dann gilt

$n+3(n-22)<60$ und $n+\frac{1}{3}(n-22)>30$,

$n+3n-66 \;<60$ und $n+\frac{1}{3}n-\frac{22}{3}>30$,

$4n<126$ und $\frac{4}{3}n>\frac{112}{3}$,

$n<31\frac{1}{2}$ und $n>28$,

$n\leqq 31$ und $n\geqq 29$.

Daraus folgt $n=29$ oder $n=30$ oder $n=31$, also $n-22=7$ oder $n-22=8$ oder $n-22=9$. Von diesen Zahlen ist nur 9 ein Vielfaches von 3. Deshalb existiert genau eine Lösung, nämlich $n=31$. Der Schüler hat 40 Mathematikaufgaben bearbeitet; davon hat er 31 Aufgaben gelöst, 9 Aufgaben nicht gelöst.

▲2▲ Angenommen, der Schachmeister hatte insgesamt n Spiele auszutragen. In der ersten Stunde gewann er $\frac{7}{12}\cdot n$ Spiele; in der Zeit danach gewann er noch $\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{12}\cdot n$ Spiele.

Nun gilt

$$\frac{7}{12}\cdot n=\frac{1}{3}\cdot n+12,$$
$$7n=4n+144,$$
$$3n=144,$$
$$n=\;48.$$

Insgesamt wurden 48 Schachpartien gespielt.

▲3▲ $v_r=15\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $s_r=x$ km, $t_r=\frac{x}{15}$ h;

$v_f=10\frac{\text{km}}{\text{h}}$, $s_f=(x-5)$ km, $t_f=\frac{x-5}{10}$ h.

Nun gilt

$$\frac{x-5}{10}=\frac{x}{15}+\frac{4}{3},$$
$$3(x-5)=2x+40,$$
$$x=55.$$

Also $\overline{AC}=55$ km und $\overline{BC}=50$ km.

Ferner gilt

$$s_r-5=s_f,$$
$$v_r\cdot t_r-5=v_f\cdot t_f,$$
$$15t_r-5=10(t_r+1),$$
$$5t_r=15,\text{ also } t_r=3.$$

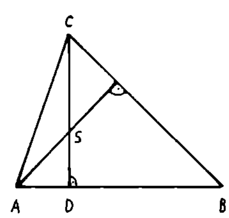
Nach 3 Stunden überholte der Radfahrer das Pferdefuhrwerk.

$s=v\cdot t=15\frac{\text{km}}{\text{h}}\cdot 3\text{ h}=45$ km.

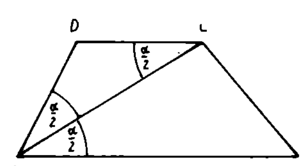
Der Radfahrer überholte das Pferdefuhrwerk 10 km vom Ort C entfernt.

▲4▲ Ein Rhombus ist zugleich ein Trapez bzw. ein Parallelogramm, aber kein Quadrat. Folglich handelt es sich bei dem Viereck um einen Rhombus.

▲5▲ Wir verbinden A mit B, zeichnen durch S die Senkrechte zu AB, ihr Schnittpunkt mit AB sei D. Wir zeichnen die Gerade AS. Wir zeichnen durch B die Senkrechte zu AS, ihr Schnittpunkt mit der Geraden DS ist der Punkt C. Wir verbinden A mit C.



▲6▲ Es gilt $\sphericalangle DAC=\sphericalangle BAC=\frac{1}{2}\alpha$ nach Voraussetzung. Ferner gilt $\sphericalangle DCA=\sphericalangle BAC=\frac{1}{2}\alpha$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Daraus folgt $\sphericalangle DAC=\sphericalangle DCA=\frac{1}{2}\alpha$. Somit gilt auch $\overline{AD}=\overline{CD}$.



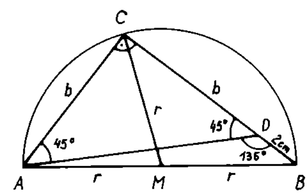
▲7▲ Angenommen, zu Beginn des Spieles hatten Andreas $2n$, Fritz $3n$ und Hans $5n$ Murmeln; das sind insgesamt $10n$ Murmeln. Angenommen, am Ende des Spieles hatten diese Jungen m, $2m$ und $5m$, also insgesamt $8m$ Murmeln. Aus $10n=8m$ folgt $n=4$ und $m=5$, da m und n natürliche Zahlen sein müssen. Daraus ergibt sich folgende Verteilung:

	Anzahl der Murmeln von Andreas	Fritz	Hans
Spielbeginn	8	12	20
Spielende	5	10	25

Während des Spiels hat Fritz zwei, Andreas drei Murmeln an Hans verloren.

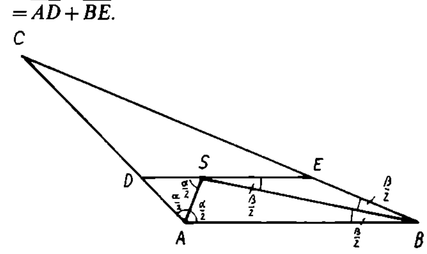
▲8▲ Insgesamt waren $\frac{12\cdot 11}{2}=66$ Spiele auszutragen. Aus $66-54=12$ folgt, daß noch 12 Spiele stattfinden müssen.
Somit hatte jede der 12 Mannschaften noch genau ein Spiel zu bestreiten.

▲9▲ Wegen $\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MC}=5$ cm gilt $\overline{AB}=10$ cm. Wir konstruieren zunächst das Teildreieck ABD aus $\overline{AB}=10$ cm, $\overline{BD}=2$ cm und Winkel $\sphericalangle ADB=135°$ (siehe abgebildete Planfigur). Der Thaleskreis über $\overline{AB}$ als Durchmesser schneidet BD in C.



▲10▲ Nach Voraussetzung gilt $\sphericalangle DAS=\sphericalangle BAS=\frac{1}{2}\alpha$ und $\sphericalangle EBS=\sphericalangle ABS=\frac{1}{2}\beta$.

Ferner gilt $\sphericalangle DSA=\sphericalangle BAS=\frac{1}{2}\alpha$ und $\sphericalangle ESB=\sphericalangle ABS=\frac{1}{2}\beta$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Daraus folgt $\sphericalangle DAS=\sphericalangle DSA$ und $\sphericalangle ESB=\sphericalangle EBS$. Folglich gilt $\overline{AD}=\overline{DS}$ und $\overline{BE}=\overline{SE}$, also $\overline{DE}=\overline{DS}+\overline{SE}=\overline{AD}+\overline{BE}$.

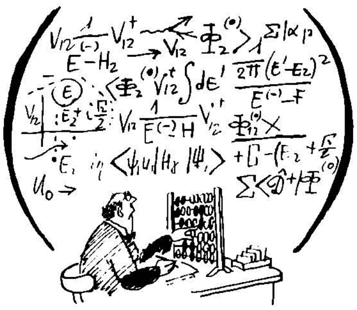


▲11▲ Angenommen, Albert hat a Mark und Jürgen b Mark gespart; dann gilt $\frac{18}{100}\cdot a=\frac{45}{100}\cdot b$, also $a=\frac{5}{2}\cdot b$. Aus $a-\frac{1}{4}b=292{,}5$ erhalten wir durch Einsetzen $\frac{5}{2}b-\frac{1}{4}b=292{,}5$, also $b=130$ und somit $a=325$

Albert hat 325 M, Jürgen 130 M gespart.

Fortsetzung auf Seite 96

In freien Stunden alpha heiter



Kombinationsspiel

Für dieses Spiel benötigt man nur Papier und Bleistift. Es geht darum, durch „Raten“ oder „Kombinieren“ eine Zahl zu bestimmen, die der Gegenspieler verdeckt notiert hat. Je nach dem gewünschten Schwierigkeitsgrad kann man drei- bis sechsstellige Zahlen verwenden. Es ist auch jede höhere Stellenzahl möglich, aber dann dauert das Spiel zu lange. Als Ziffern verwendet man entweder die Ziffern 1 bis 9 oder eine Teilmenge davon. Der Gegenspieler gibt bei jeder Entscheidung eine Bewertung. Wurde nur die richtige Ziffer getroffen, dann soll das durch einen senkrechten Strich markiert werden; stimmen Ziffer und Spalte überein, dann notiert er ein Pluszeichen. Am Beispiel:
Es wurde vereinbart, eine vierstellige Zahl und die Ziffern 1 bis 5 zu verwenden. Es wird folgendes Schema vorbereitet:

1	2	3	4	/ / /
4	3	2	1	/ / /
3	4	1	2	+ + +
3	1	4	2	+ / /
3	4	1	5	

Wir nehmen an, daß Spieler A die Zahl 3415 verdeckt notiert hat. B beginnt mit 1234 und trägt diese Zahl ein. Er erhält von A die Information: | | |. Daraus ersieht er, daß drei der vier Ziffern richtig sind, jedoch keine in der richtigen Spalte steht. B vertauscht nun und notiert 4321. Er bekommt von A die Information: | | |. Sein nächster Versuch sei 3412 mit der Bewertung: + + +. Um herauszufinden welche Ziffern in den richtigen Spalten standen, vertauscht B die 4 mit der 1. Er notiert 3142 und erhält die Information: + | |.
Daraus läßt sich nun schon eindeutig folgern, daß 4 und 1 die richtigen Ziffern in den richtigen Spalten waren und entweder die 3 oder die 2 durch 5 ersetzt werden muß. Wählt man für 2 die 5, ist man am Ziel, sonst ist mindestens ein weiterer Schritt notwendig. Nun kommt der andere Spieler an die Reihe.

Das Spiel wird wesentlich erschwert, wenn man mehr als 5 Ziffern zuläßt. Sieger ist, wer weniger Versuche benötigt.

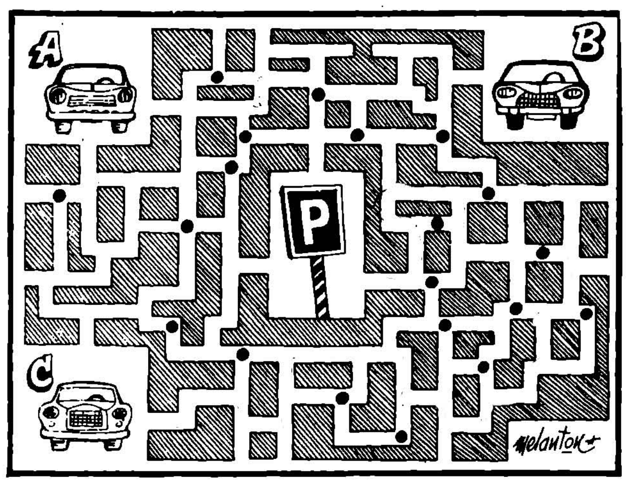
nach Lutz Kleber, Dresden
bearbeitet von OL H. Pätzold, Waren

Gradlinig

Alle Akten im Regal
schwärmten für das Lineal.
Und der Grund für so was Dummes:
Es tat niemals etwas Krummes!

Im Eiltempo

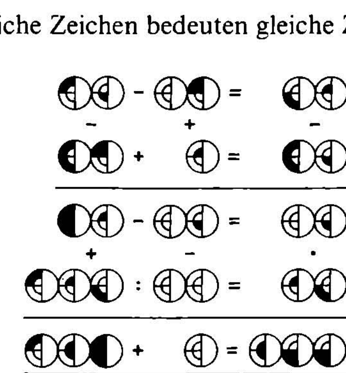
Welcher Wagen erreicht den Parkplatz?



aus: Troll 20/77

Kryptarithmetik

Gleiche Zeichen bedeuten gleiche Ziffern!



Silbenrätsel

Aus den folgenden Silben sind 17 Begriffe zu bilden. Die Anfangsbuchstaben nacheinander gelesen ergeben einen Begriff, durch den z. B. jedem geordneten Paar $[x, y]$ reeller Zahlen genau ein Punkt der Ebene zugeordnet werden kann.

an – che – di – di – dif – el – ex – fe – flä – fol – form – ge – gel – gen – ger – gra – in – ke – kreis – la – lip – lung – mal – man – na – nach – nor – nung – on – on – or – ord – ra – renz – satz – se – spie – stieg – tan – te – te – te – tel – ti – ti – trans – trem – us – wert – yard.

1. Rotationskörper
2. wird durch das Relationszeichen „<" bzw. „>" festgelegt
3. y-Achse
4. Halbmesser
5. Ergebnis der Subtraktion
6. höhere Rechenart
7. hat jede natürliche Zahl
8. wird z. B. durch m in der linearen Funktion $y = mx$ gebildet
9. Gerade, die einen Kreis berührt
10. Optimale Lösung
11. Wie nennt man die quadratische Gleichung: $x^2 + px + q = o$
12. beweisbare Aussage
13. engl. und nordamerik. Längenmaß (0,914 m)
14. eine Bewegung
15. Verschiebung
16. Kegelschnitt
17. Oberfläche, ohne Deck- und Grundfläche

Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald

Erster Schultag: „Nun Lieschen, wie alt bist du?"

aus: Pythagoras 1/74, Niederlande

Welcher Beruf?

INGE RUBIN, AUE
IMRE VURGU, SINGEN u. ESSEN
E. U. LING-HEUSCH, (1301) CHORIN
P. HEYSE, GORKI
EVA M. RASCHIG-BESSEN, (50) ERFURT
UTE I. STAMM-KINDT, ATHEN
PEER FABRII-CHARTE, KARTHAGO
CHE DARK, REIMS
C. O. GOTE, (8601) LEHN
BEN RICH, ZAUE

Lehrer D. Knape, Jessen

Tauschen und Schütteln

Vom Wort FREIZEIT ausgehend sind neue Begriffe zu bilden, indem jeweils drei Buchstaben entnommen und dafür drei neue eingesetzt werden. Durch Schütteln ergibt sich dann das zu suchende Wort. Das gefundene Wort ist jeweils Ausgangspunkt für das nächste. 1. Primzahl; 2. Vieleck (Mehrzahl); 3. Viereck; 4. Bürgermeister und Naturforscher in Magdeburg (1602 bis 1686); 5. Vieleck (Mehrzahl); 6. Primzahl; 7. Primzahl; 8. aus einer Vielzahl Ausgewähltes; 9. ausgezeichneter Punkt bestimmter geometrischer Gebilde; 10. orientierte Figur (Mehrzahl); 11. Seitenbezeichnung bestimmter Dreiecke.

Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

Wie heißt der Wissenschaftler?

di – e – ein – er – fisch – ge – go – gra – in – le – ler – me – nicht – no – o – o – ramm – ran – rönt – sau – stell – ster – stoff – tal – thi – u – xid – zeit

Aus vorstehenden Silben sind Wörter mit folgender Bedeutung zu bilden:

1. Bei der Behandlung des chemischen Gleichgewichts auftretende Größe, 2. Methode der Kristalluntersuchung, 3. Gruppe von Elementen, 4. Klasse organischer Verbindung, 5. Element, 6. Küpenfarbstoff, 7. Wissenschaftler der DDR, entwickelte ein Verfahren zur Verkokung von Braunkohle (Nationalpreis 1951), 8. anorganische Verbindung.

Die ersten und die letzten Buchstaben, beide von oben nach unten gelesen, ergeben den Namen eines englischen Physikers.

Prof. Dr. W. Renneberg †

Spruchweisheit

Wann ist die Freude am größten?
Wenn du das Gewünschte erreichst.

Thales von Milet

XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade) Aufgaben

Olympiadeklasse 10

1. In einer Ebene ε sind eine Gerade g und zwei Kreise k_1 und k_2 gegeben.
Konstruieren Sie ein Quadrat $ABCD$, dessen Eckpunkte A und C auf g liegen, dessen Eckpunkt B auf k_1 und dessen Eckpunkt D auf k_2 liegt! Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!
Stellen Sie fest, für welche Lagemöglichkeiten der gegebenen g, k_1, k_2 ein solches Quadrat existiert und für welche von diesen Lagemöglichkeiten es dann sogar eindeutig bestimmt ist!

2. Man ermittle alle rationalen Zahlen x, für die die Zahl

$$z = x^2 + x + 6$$

das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

Von den nachstehenden Aufgaben 3A und 3B ist genau eine auszuwählen und zu lösen!

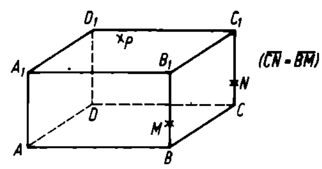
3A. Sind $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ natürliche Zahlen mit $0 \leqq a_i \leqq 3$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ und gilt
$z = a_n \cdot 4^n + a_{n-1} \cdot 4^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 4 + a_0$,
so sagt man, z sei im 4-adischen System durch die Ziffern a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 dargestellt, und schreibt kurz
$z = [a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0]_4$. Ist dabei $a_n \neq 0$, so heißt die (auf genau eine Weise derart darstellbare) Zahl z (im 4-adischen System) $(n+1)$stellig.
Wir bilden nun jeweils zu einer natürlichen Zahl $z \neq 0$, nachdem sie in dieser Weise dargestellt ist, die Zahl
$z' = a_n^2 + a_{n-1}^2 + \ldots + a_1^2 + a_0^2$.
Dieses Verfahren kann dann wiederholt werden; aus der Zahl z' erhält man, nachdem sie im 4-adischen System dargestellt wurde, in der angegebenen Weise die Zahl z'', aus dieser ebenso z''' usw. (Als Beispiel sei das Verfahren an der Zahl $z = 54$ erläutert:
Es ist $z = 3 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 2 = [312]_4$,
d. h. die Ziffern dieser Zahl sind 3, 1, 2. Also ist
$z' = 3^2 + 1^2 + 2^2 = 14 = 3 \cdot 4 + 2 = [32]_4$,
$z'' = 3^2 + 2^2 \quad = 13 = 3 \cdot 4 + 1 = [31]_4$
usw.
Bezeichnet man jeweils die Anwendung des Verfahrens durch einen Pfeil und läßt bei Darstellung im 4-adischen System die Klammern [ ] und die Angabe der Basis 4 fort, so kann man abgekürzt schreiben:

$$312 \to 32 \to 31 \text{ usw.)}$$

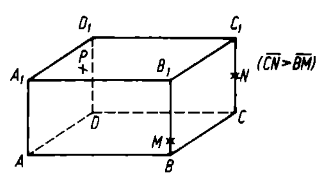
a) Beweisen Sie, daß für jede natürliche, im 4-adischen System dreistellige Zahl z die Zahl z' kleiner als z ist!
b) Beweisen Sie, daß man aus jeder natürlichen Zahl $z \neq 0$ bei genügend häufiger Wiederholung des oben angegebenen Verfahrens die Zahl 1 erhält!

3B. Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt ist dreimal ein Quader $ABCDA_1B_1C_1D_1$ in schräger Parallelprojektion dargestellt. Auf BB_1 liegt ein Punkt M, auf CC_1 ein Punkt N und im Innern der Rechtecksfläche $A_1B_1C_1D_1$ ein Punkt P.

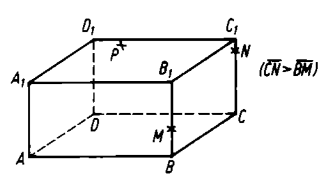
1. Fall



2. Fall



3. Fall



Konstruieren Sie auf dem beigefügten Arbeitsblatt (in der verwendeten perspektivischen Darstellung) für die angegebenen drei Lagen dieser Punkte jeweils die Schnittfigur, die sich als Schnitt des Quaders mit der Ebene ε durch M, N, P ergibt!
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

4. Gegeben seien zwei von einem Punkt C ausgehende Strahlen s und t, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
Ermitteln Sie die Menge der Umkreismittelpunkte aller derjenigen Dreiecke ABC, deren Ecken A und B auf s bzw. t liegen!

5. Beweisen Sie, daß der Term

$$\frac{\lg(5\sqrt{2}-7)}{\lg(3-2\sqrt{2})}$$

eine reelle Zahl definiert und daß diese rational ist!

6. Man ermittle alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2},$$
$$x^2 + y^2 = 6.$$

Olympiadeklasse 11/12

1. Sind f und g im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ stetige Funktionen, so seien Zahlen $d_1(f, g)$ und $d_2(f, g)$ wie folgt definiert:
$d_1(f, g) = \max |f(x) - g(x)|, \qquad x \in \{-1, 1\}$
$d_2(f, g)$ ist der in Flächeneinheiten eines rechtwinkligen Koordinatensystems ausgedrückte Inhalt derjenigen Fläche, die durch die Bilder der Funktionen f und g sowie die beiden Geraden $x = -1$ und $x = 1$ begrenzt wird. (Dabei werde der Inhalt jeder Teilfläche, unabhängig von ihrem Umlaufsinn, als positiv aufgefaßt.)
Es seien nun f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ und h die im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ durch $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (1-x)x^{k-1}$ und $h(x) = 1$ definierten Funktionen.
a) Man ermittle $\lim\limits_{n \to \infty} d_1(f_n, h)$, falls dieser Grenzwert existiert.
b) Man ermittle $\lim\limits_{n \to \infty} d_2(f_n, h)$, falls dieser Grenzwert existiert.

2. Es seien g und h die in der (zweielementigen) Menge $\{1, -1\}$ als Definitionsbereich durch $g(1) = 1, g(-1) = -1$: (1)
$h(1) = -1, h(-1) = 1$
definierten Funktion. (2)
Ferner seien $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ Funktionen, von denen einige gleich g und die übrigen gleich h sind.
Für diese Funktionen möge gelten:
$f_1(1) = -1, f_6(1) = f_7(1) = 1$: (3)
$f_3(f_4(1)) = -1$: (4)
$f_1(f_2(f_3(f_4(f_5(f_6(f_7(1))))))) = -1.$ (5)
Man beweise, daß in allen Fällen, in denen diese Bedingungen erfüllt sind, die Anzahl derjenigen f_i, die gleich g sind, die gleiche ist, und gebe diese Anzahl an.

3. a) Man gebe alle Möglichkeiten an, ein gegebenes Dreieck D in drei Dreiecke D_1, D_2, D_3 zu zerlegen. Die Zerlegungen sind danach zu unterscheiden, ob Eckpunkte der Teildreiecke im Innern oder auf dem Rand von vorkommenden Dreiecken oder Strecken liegen.
b) Man beweise: Ist ein Dreieck D in drei zueinander ähnliche Dreiecke D_1, D_2, D_3 zerlegbar, so ist es gleichschenklig oder rechtwinklig.

4. Definition: Es sei mit $d(X, Y)$ der Abstand zweier Punkte X, Y einer Punktmenge $\mathfrak{M}$ bezeichnet. Eine reelle Zahl d heißt Durchmesser von $\mathfrak{M}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für je zwei Punkte X, Y aus $\mathfrak{M}$ gilt $d(X, Y) \leqq d$.

(2) Es gibt Punkte P, Q aus $\mathfrak{M}$, für die $d(P, Q) = d$ ist.

Aufgabe: Man beweise:

a) Wenn eine Kreisfläche mit dem Durchmesser d von einem beliebigen Streckenzug, der die Kreislinie genau in einem Punkt M und einem Punkt N schneidet, in zwei Teile zerlegt wird, dann hat eine dieser Teilflächen (jeweils einschließlich ihres Randes verstanden) ebenfalls den Durchmesser d.

b) Wenn ein Kugelkörper mit dem Durchmesser d von einer ebenen Schnittfläche ε_1 in zwei Teilkörper und danach einer dieser Teilkörper durch eine ebene Schnittfläche ε_2 wieder in zwei Teilkörper zerlegt wird, dann hat bei jeder derartigen Zerlegung eines Kugelkörpers in drei Teilkörper wenigstens einer dieser Teilkörper (jeweils einschließlich seiner Begrenzungsflächen verstanden) ebenfalls den Durchmesser d.

5. Es sei $f_1, f_2, \ldots$ eine Folge von Funktionen, die für alle reellen Zahlen x definiert sind, und zwar durch

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 + 48},$$
$$f_{k+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_k(x)} \text{ für } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Man ermittle für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ alle reellen Zahlen x, die Lösung der Gleichung

$$f_n(x) = 2x \quad \text{sind.}$$

Von den nachstehenden Aufgaben 6A und 6B ist genau eine auszuwählen und zu lösen!

6A. Es sei n eine positive ganze Zahl. $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sei ein n-Tupel reeller Zahlen mit $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$.

Man untersuche, ob es zu diesen gegebenen $a_1, \ldots, a_n$ eine reelle Zahl x derart gibt, daß die Zahl

$$z = |x - a_1| + |x - a_2| + \ldots + |x - a_n|$$

möglichst klein ist.

Gibt es ein derartiges x, so bestimme man alle reellen Zahlen x mit dieser Eigenschaft und gebe den zugehörigen minimalen Wert von z an.

6B. a) Gegeben sei eine natürliche Zahl $n \geqq 2$. Es sei u der Umkreis eines regelmäßigen $2n$-Ecks $A_0A_1 \ldots a_{2n-1}$. Eine Menge aus drei Ecken A_i, A_j, A_k dieses $2n$-Ecks heiße „einseitig“, wenn es auf der Kreislinie u einen Halbkreisbogen h einschließlich seiner beiden Endpunkte gibt, der A_i, A_j und A_k enthält.

Man ermittle die Wahrscheinlichkeit w_n dafür, daß eine willkürlich gewählte Menge $M = \{A_i, A_j, A_k\}$ aus drei Ecken „einseitig“ ist.

b) Man ermittle den Grenzwert $\lim_{n \to \infty} w_n$, falls er existiert.

Hinweis: Ist m_n die Anzahl aller Mengen, die man aus je drei Ecken A_i, A_j, A_k des $2n$-Ecks bilden kann, und ist g_n die Anzahl aller „einseitigen“ unter ihnen, so ist die in a) gesuchte Wahrscheinlichkeit definiert als

$$w_n = \frac{g_n}{m_n}.$$

Lösungen

Lösungen zu Heft 1/78, Fortsetzung:

Ph 9 ■34 Geg.: $g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

1 min $\triangleq$ 120 Tropfen

Ges.: h (Höhe der Dachrinne)

Die Fallzeit des ersten Tropfens sei t Sekunden, dann ist die Fallzeit des nächsten Tropfens $\left(t - \frac{1}{2}\right)$ Sekunden, da bei 120 Tropfen in der Minute nach jeder halben Sekunde der nächste Tropfen fallen muß.

Um die Höhe h zu berechnen, gelten die beiden Formeln

$$h = \frac{g}{2} \cdot t^2 \text{ für den ersten Tropfen,} \quad (1)$$

$$\frac{h}{4} = \frac{g}{2} \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)^2$$

für den nächsten Tropfen. Folglich gilt:

$$4 \cdot \frac{g}{2} \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{g}{2} \cdot t^2$$
$$4 \cdot \frac{g}{2} \cdot \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) = \frac{g}{2} \cdot t^2$$
$$4t^2 - 4t + 1 = t^2$$
$$t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{1}{3} = 0.$$

Dann ist

$$t_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3}}$$

$$t_1 = 1\,[\text{s}] \quad (2)$$

$t_2 = \frac{1}{3}$ (entfällt, da es nicht den Bedingungen der Aufgabe entspricht)

(2) wird nun in (1) eingesetzt

$$h = \frac{g}{2} t^2$$
$$h = \frac{9{,}81\,\text{m}}{2 \cdot \text{s}^2} \cdot 1\,\text{s}^2$$
$$h \approx 5\,\text{m}$$

Damit befindet sich die Dachrinne in rund 5 m Höhe.

Ph 10/12 ■35

Geg.: a) $l = 2{,}55$ m

$d_1 = 10{,}08$ m

$g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (Fallbeschleunigung)

$\alpha = 15°$ (Auslenkungswinkel)

b) $i = 116$; $v = 3{,}87\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Ges.: a) v (Bahngeschwindigkeit)

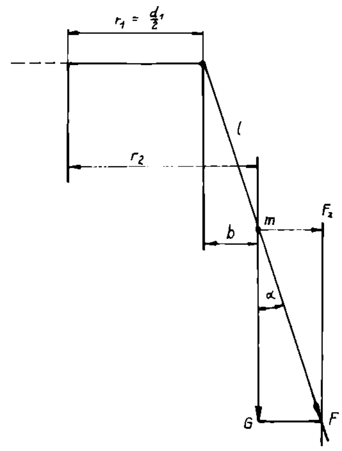
b) n_1 (Drehzahl des Antriebsmotors)

a) Die Berechnung der Geschwindigkeit der Sitze erfolgt mit Hilfe der Formel für die Zentrifugalkraft F_z

$$F_z = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$v^2 = \frac{F_z \cdot r}{m}. \quad (1)$$

Nun ist (s. Skizze) $\tan\alpha = \frac{F_z}{G}$.



$$F_z = \tan\alpha \cdot G. \quad (2)$$

Die Gewichtskraft G ist aber $G = m \cdot g$. Dies in (2) eingesetzt, ergibt

$$F_z = \tan\alpha \cdot m \cdot g. \quad (3)$$

Weiterhin muß noch der Bahnradius r berechnet werden. In der Skizze ist das r_2. Man findet (s. Skizze)

$$r_2 = r_1 + b \qquad b = l \cdot \sin\alpha$$
$$r_2 = r_1 + l \cdot \sin\alpha.$$

Also $r_2 = r = r_1 + l \cdot \sin\alpha$. (4)

Durch Einsetzen von (4) und (3) in (1) ergibt sich

$$v^2 = \frac{\tan\alpha \cdot m \cdot g \cdot (r_1 + l \cdot \sin\alpha)}{m}$$
$$v^2 = \tan\alpha \cdot g \cdot (r_1 + l \cdot \sin\alpha)$$
$$v^2 = 0{,}2679 \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (5{,}04 + 2{,}55 \cdot 0{,}2588)\,\text{m}$$
$$v^2 \approx 14{,}98\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$
$$v = \sqrt{14{,}98}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$v \approx 3{,}87\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Die Bahngeschwindigkeit der Sitze beträgt $3{,}87\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) Laut Anmerkung gilt $i = n_1 : n_2$, dabei ist n_1 die Motordrehzahl (Antrieb) und n_2 die Karusselldrehzahl (Abtrieb). Dann ist

$$n_1 = i \cdot n_2 \quad (5)$$

Die Drehzahl n_2 des Karussells findet man aus der Formel für die Drehzahl

$$v = d \cdot \pi \cdot n_2$$
$$n_2 = \frac{v}{d \cdot \pi}.$$

Nun ist nach (4) $d = 2r = 2(r_1 + l \cdot \sin\alpha)$, also

$$n_2 = \frac{v}{2(r_1 + l \cdot \sin\alpha) \cdot \pi}.$$

Nun wird n_2 in (5) eingesetzt, dann ergibt sich

$$n_1 = \frac{i \cdot v}{2(r_1 + l \cdot \sin\alpha) \cdot \pi}$$

$$n_1=\frac{116\cdot 3{,}87\,\mathrm{m}}{2(5{,}04+2{,}55\cdot 0{,}3588)\,\mathrm{m}\cdot 3{,}14\,\mathrm{s}}$$

$$n_1\approx 12\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$n_1=\frac{12\cdot 60}{\mathrm{min}}=720\,\frac{1}{\mathrm{min}}.$$

Die Drehzahl des Antriebsmotors beträgt $720\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$.

Ch 7 ■25 a) 3,4 g $\quad m$

$2\,Fe + O_2 \rightarrow 2\,FeO$

112 g $\quad$ 144 g

$$\frac{3{,}4\,\mathrm{g}}{112\,\mathrm{g}}=\frac{m}{144\,\mathrm{g}}$$

$$m=\frac{3{,}4\,\mathrm{g}\cdot 144\,\mathrm{g}}{112\,\mathrm{g}}=4{,}37\,\mathrm{g}$$

Aus 3,4 g Eisen entstehen 4,37 g Eisen(II)-Oxid

b) 3,4 g $\quad m$

$3\,Fe + 2\,O_2 \rightarrow Fe_3O_4$

168 g $\quad$ 232 g

$$m=\frac{3{,}4\,\mathrm{g}\cdot 232\,\mathrm{g}}{168\,\mathrm{g}}=4{,}68\,\mathrm{g}$$

Aus 3,4 g Eisen entstehen 4,68 g Eisen(II,III)-Oxid

c) 3,4 g $\quad m$

$4\,Fe + 3\,O_2 \rightarrow 2\,Fe_2O_3$

224 g $\quad$ 320 g

$$m=\frac{3{,}4\,\mathrm{g}\cdot 320\,\mathrm{g}}{224\,\mathrm{g}}=4{,}87\,\mathrm{g}$$

Aus 3,4 g Eisen entstehen 4,87 g Eisen(III)-Oxid.

Masse Eisen(II)-Oxid in g

Masse Eisen in g

Aus 5 g Eisen entstehen 6,4 g Eisen(II)-Oxid.

Aus 8 g Eisen entstehen 10,3 g Eisen(II)-Oxid.

Aus 9,5 g Eisen entstehen 12,3 g Eisen(II)-Oxid.

Ch 8 ■26

a) 2,4 kg $\quad m$

$Ca(OH)_2 + CO_2 \rightarrow CaCO_3 + H_2O$

74 g $\quad$ 44 g

$$m=\frac{2{,}4\,\mathrm{kg}\cdot 44\,\mathrm{g}}{74\,\mathrm{g}}=1{,}45\,\mathrm{kg}$$

10 kg Kalkmörtel müssen 1,45 kg Kohlendioxid aufnehmen.

b) 2,4 kg $\quad V$

$Ca(OH)_2 + CO_2 \rightarrow CaCO_3 + H_2O$

74 g $\quad$ 22,4 l

$$V=\frac{2{,}4\,\mathrm{kg}\cdot 22{,}4\,\mathrm{l}}{74\,\mathrm{g}}\approx 725\,\mathrm{l}$$

1,45 kg entsprechen 725 l Kohlendioxid.

c) 2,4 kg $\quad m$

$Ca(OH)_2 + CO_2 \rightarrow CaCO_3 + H_2O$

74 g $\quad$ 18 g

$$m=\frac{2{,}4\,\mathrm{kg}\cdot 18\,\mathrm{g}}{74\,\mathrm{g}}=0{,}584\,\mathrm{kg}$$

Es entstehen dabei 0,584 kg Wasser.

d) 0,7 g $\quad V$

$CaCO_3 + 2\,HCl \rightarrow CaCl_2 + H_2O + CO_2$

100 g $\quad$ 22,4 l

$$V=\frac{0{,}7\,\mathrm{g}\cdot 22{,}4\,\mathrm{l}}{100\,\mathrm{g}}=155{,}7\,\mathrm{ml}$$

$$\frac{v\cdot p}{T}=\frac{v_0\cdot p_0}{T_0}$$

$$V=\frac{v_0\cdot p_0\cdot T}{T_0\cdot p}$$

$V_0=155{,}7$ ml

$p_0=760$ Torr

$T_0=0\,°\mathrm{C}=273\,°\mathrm{K}$

$$V=\frac{155{,}7\,\mathrm{ml}\cdot 760\,\mathrm{Torr}\cdot 291\,°\mathrm{K}}{273\,°\mathrm{K}\cdot 745\,\mathrm{Torr}}$$

$V=169{,}3$ ml

Aus 0,7 g Kalziumkarbonat entstehen 169,3 ml trockenes Kohlendioxid bei 18 °C und 745 Torr.

Ch 9 ■27

a) $2\,C_2H_4 + O_2 \rightarrow 2\,CH_3CHO$

$2\,CH_3CHO + O_2 \rightarrow 2\,CH_3COOH$

50 g $\quad m$

C_2H_4 $\quad CH_3COOH$

28 g $\quad$ 60 g

$$m=\frac{50\,\mathrm{g}\cdot 60\,\mathrm{g}}{28\,\mathrm{g}}=107\,\mathrm{g}$$

Aus 50 g Äthen entstehen 107 g Äthansäure

b) 50 g $\quad m$

$C_2H_5OH + O_2 \rightarrow CH_3COOH + H_2O$

46 g $\quad$ 60 g

$$m=\frac{50\,\mathrm{g}\cdot 60\,\mathrm{g}}{46\,\mathrm{g}}=65\,\mathrm{g}$$

Aus 50 g Äthanol entstehen 65 g Äthansäure.

→ Variante a) liefert größere Ausbeute.

Ch 10/12 ■28

I $\;4\,FeS_2 + 11\,O_2 \rightarrow 2\,Fe_2O_3 + 8\,SO_2$

II $\;8\,SO_2 + 4\,O_2 \rightarrow 8\,SO_3$

III $\;8\,SO_3 + 8\,H_2O \rightarrow 8\,H_2SO_4$

$4\,FeS_2 \qquad 8\,H_2SO_4$

$FeS_2 \qquad 2\,H_2SO_4$

100 t Eisenkies enthalten 85 t reines Eisendisulfid. 8 t Eisenkies enthalten x t reines Eisendisulfid,

$$x=\frac{85\,\mathrm{t}\cdot 8\,\mathrm{t}}{100\,\mathrm{t}}=6{,}8\,\mathrm{t}$$

d. h., 6,8 t Eisendisulfid können zu Schwefelsäure umgesetzt werden.

Lösungen zum alpha-Wettbewerb,

Heft 2/78:

Ma 5 ■1736 Aus $63:3=21$ folgt, daß Joachim am ersten Tag nach Erhalt des Buches 21 Seiten durchlas. Aus $21\cdot 9=189$ folgt, daß das Buch 189 Seiten umfaßt.

Ma 5 ■1737 Angenommen, an den Leichtathletikwettbewerben waren n Frauen und somit $(n+526)$ Männer beteiligt; dann gilt

$$n+(n+526)=1314,$$
$$2n=788,$$
$$n=394.$$

Somit nahmen 394 weibliche und 920 männliche Leichtathleten an den Olympischen Sommerspielen 1976 in Montreal teil.

Ma 5 ■1738 Beide Freunde kauften zusammen drei Stück Streuselkuchen und drei Schweineohren. Sie hatten zusammen 1,29 M zu zahlen. Folglich kosten ein Stück Streuselkuchen und ein Schweineohr zusammen $1{,}29\,\mathrm{M}:3=0{,}43\,\mathrm{M}$. Da Mario für ein Stück Streuselkuchen und zwei Schweineohren 0,61 M zu zahlen hatte, kostet ein Schweineohr $0{,}61\,\mathrm{M}-0{,}43\,\mathrm{M}=0{,}18\,\mathrm{M}$. Somit beträgt der Preis für ein Stück Streuselkuchen $0{,}43\,\mathrm{M}-0{,}18\,\mathrm{M}=0{,}25\,\mathrm{M}$.

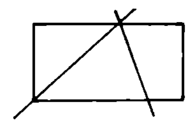
Ma 5 ■1739 Es sei n die gesuchte natürliche Zahl; dann gilt

$$2\cdot n+14=8\cdot(n-8),$$
$$2n+14=8n-64,$$
$$78=6n,$$
$$n=13.$$

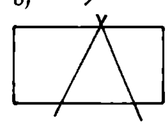
Die gesuchte natürliche Zahl lautet 13.

Ma 5 ■1740

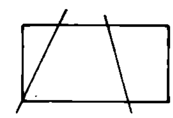
a)



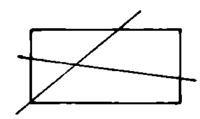
b)



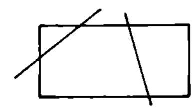
oder



c)



d)



Ma 5 ■1741 Angenommen, an den Sparer wurden n 100-Mark-Scheine ausgezahlt; dann erhielt er noch $2n$ 50-Mark-Scheine und $(2n+1)$ 20-Mark-Scheine. Nun gilt

$$100\cdot n+50\cdot 2n+20\cdot(2n+1)=500,$$
$$200\cdot n+20\cdot(2n+1)=500,$$
$$10\cdot n+(2n+1)=25,$$
$$12n=24,$$
$$n=2.$$

Der Sparer erhielt somit zwei 100-Mark-Scheine, vier 50-Mark-Scheine und fünf 20-Mark-Scheine ausgezahlt.

Ma 6 ■1742 Wegen $1+0=1$ und $9+9=18$ gilt für die Quersumme q der gesuchten zweistelligen natürlichen Zahlen $1\leqq q\leqq 18$. Es kommen also nur die Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 als Quersumme in Frage. Die folgende Tabelle enthält alle möglichen zu untersuchenden Fälle:

q	z	q	z	q	z
2	11	7	16	13	49
2	20	7	25	13	58
3	12	7	34	13	67
3	21	7	43	13	76
3	30	7	52	13	85
5	14	7	61	13	94
5	23	7	70	17	89
5	32	11	29	17	98
5	41	11	38		
5	50	11	47		
		11	56		
		11	65		
		11	74		
		11	83		
		11	92		

Wegen $2 \cdot 10 = 20$, $3 \cdot 4 = 12$, $3 \cdot 7 = 21$, $3 \cdot 10 = 30$, $5 \cdot 10 = 50$, $7 \cdot 10 = 70$ erfüllen nur die Zahlen 12, 20, 21, 30, 50, 70 die gestellten Bedingungen.

Ma 6 ■1743 Es seien α', β', γ' die Außenwinkel des Dreiecks ABC; dann gilt $\alpha' = \gamma' - 29^\circ$ und $\beta' = \gamma' - 49^\circ$.
Die Summe der Größen der Außenwinkel eines Dreiecks beträgt 360°. Somit gilt

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ,$$
$$(\gamma' - 29^\circ) + (\gamma' - 49^\circ) + \gamma' = 360^\circ,$$
$$3\gamma' - 78^\circ = 360^\circ,$$
$$3\gamma' = 438^\circ,$$
$$\gamma' = 146^\circ.$$

Ferner gilt $\gamma' = 180^\circ - \gamma' = 180^\circ - 146^\circ = 34^\circ$,
$\alpha = 180^\circ - \alpha' = 180^\circ - (\gamma' - 29^\circ)$
$= 180^\circ - (146^\circ - 29^\circ) = 63^\circ$,
$\beta = 180^\circ - \beta' = 180^\circ - (\gamma' - 49^\circ)$
$= 180^\circ - (146^\circ - 49^\circ) = 83^\circ$.
Die Innenwinkel des Dreiecks ABC haben die folgenden Größen:
$\alpha = 63^\circ$; $\beta = 83^\circ$; $\gamma = 34^\circ$.

Ma 6 ■1744 Angenommen, die ursprüngliche Fallhöhe betrug x Meter; nach dem ersten Aufprall sprang der Ball um $\frac{1}{3} \cdot x$ Meter, nach dem zweiten um $\frac{1}{9} \cdot x$ Meter wieder hoch. Nun gilt

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{9} = 1$$
$$\frac{2}{9} \cdot x = 1,$$
$$x = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Frank ließ den Ball aus einer Höhe von 4,5 m fallen.

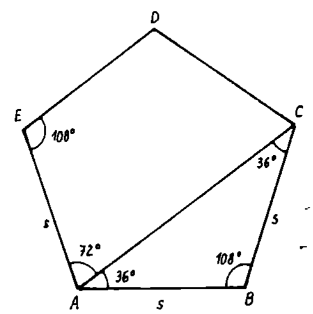
Ma 6 ■1745 a) Aus $x(x+y) = 41 = 1 \cdot 41$ folgt $x = 1$ oder $x = 41$, da 41 Primzahl ist. Für $x = 1$ erhalten wir $y = 40$. Für $x = 41$ erhalten wir $x + y = 1$, was nicht möglich ist.
b) Aus $x(x-y) = 41 = 1 \cdot 41$ folgt $x = 1$ oder $x = 41$. Für $x = 1$ erhalten wir $x - y = 1 - y = 41$, was nicht möglich ist. Für $x = 41$ erhalten wir $y = 40$.
c) Aus $x(y-x) = 41 = 1 \cdot 41$ folgt $x = 1$ oder $x = 41$. Für $x = 1$ erhalten wir $y = 42$. Für $x = 41$ erhalten wir $y = 42$. Folgende vier Zahlenpaare erfüllen die gegebenen Gleichungen:
(1; 40), (41; 40), (1; 42), (41; 42).
Es gilt
a) $1 \cdot (1 + 40) = 41$;
b) $41 \cdot (41 - 40) = 41$;
c) $41 \cdot (42 - 41) = 41$.

Ma 6 ■1746 Angenommen, die Enkeltochter sei n Jahre alt; dann ist ihre Großmutter $12n$ Jahre alt, und es gilt

$$n + 12n = 65,$$
$$13n = 65,$$
$$n = \frac{65}{13},$$
$$n = 5.$$

Die Großmutter ist somit 60 Jahre, ihre Enkeltochter 5 Jahre alt.

Ma 7 ■1747 Angenommen, es wurde die Diagonale $\overline{AC}$ gezeichnet. Wegen $\overline{AB} = \overline{BC} = s$ gilt $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAB$. Die Winkelsumme eines n-Ecks beträgt $(n-2) \cdot 180^\circ$. Die Größe des Winkels ABC beträgt somit $\frac{1}{5} \cdot (5-2) \cdot 180^\circ = 108^\circ$. Daraus folgt
$\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAB = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$, und somit $\sphericalangle EAC = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$. Die entgegengesetzt liegenden Winkel $\sphericalangle EAC = 72^\circ$ und $\sphericalangle AED = 108^\circ$ ergänzen sich zu 180°. Folglich gilt $AC \parallel ED$, d. h., die Diagonale $\overline{AC}$ verläuft parallel zur Fünfeckseite $\overline{DE}$.



Ma 7 ■1748 Angenommen, Hans hat x Flaschen Limonade und y Flaschen Cola, also $(25 - x - y)$ Flaschen Bier eingekauft, dann gilt

$$0{,}21x + 0{,}35y + 0{,}48 \cdot (25 - x - y) = 7{,}61,$$
$$21x + 35y + 48 \cdot (25 - x - y) = 761,$$
$$21x + 35y + 1200 - 48x - 48y = 761,$$
$$27x + 13y = 439,$$
$$27x = 432 + 7 - 13y,$$
$$x = 16 - \frac{13y - 7}{27}.$$

Nun müssen x und y natürliche Zahlen sein mit $1 \leqq x, y \leqq 23$. Nur für $y = 13$ und somit für $x = 10$ wird diese Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen erfüllt. Hans hat somit 10 Flaschen Limonade, 13 Flaschen Cola und 2 Flaschen Bier eingekauft.

Ma 7 ■1749 Die den drei Ziffern entsprechenden aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen seien n, $n+1$, $n+2$. Dann lautet die Quersumme der gegebenen dreistelligen Zahl $3n + 3 = 3 \cdot (n+1)$. Wegen $n + 2 \leqq 9$, also $n \leqq 7$, und wegen $9 \mid 3 \cdot (n+1)$ gilt $n = 2$ oder $n = 5$. Die zunächst zu untersuchenden Zahlen lauten somit
234, 243, 324, 342, 423, 432 bzw.
567, 576, 657, 675, 756, 765.
Nun gilt
$234 = 9 \cdot 26$; $567 = 9 \cdot 63$;
$243 = 9 \cdot 27$; $576 = 9 \cdot 64$;
$324 = 9 \cdot 36$; $657 = 9 \cdot 73$;
$342 = 9 \cdot 38$; $675 = 9 \cdot 75$;
$423 = 9 \cdot 47$; $756 = 9 \cdot 84$;
$432 = 9 \cdot 48$; $765 = 9 \cdot 85$.
Nur die Faktoren 47 und 73 sind Primzahlen. Diese Aufgabe besitzt zwei Lösungen. Die Zahlen 423 und 657 erfüllen die gestellten Bedingungen.

Ma 7 ■1750 Jede vierstellige natürliche Zahl läßt sich in der Form $z = 1000a + 100b + 10c + d$ darstellen. Ferner gilt $a + c = b + d$ bzw. $d = a + c - b$. Durch Einsetzen erhalten wir

$$z = 100a + 100b + 10c + a + c - b,$$
$$z = 1001a + 99b + 11c,$$
$$z = 11 \cdot (91a + 9b + c).$$

Somit ist z durch 11 teilbar.

Ma 8 ■1751 In $u^2 - 1 = (u-1)(u+1)$ sind beide Faktoren geradzahlig. Da von zwei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen genau eine durch 4 teilbar ist, ist $u^2 - 1$ durch 8 teilbar. Von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen $u-1$, u und $u+1$ ist genau eine durch 3 teilbar. Da das nach Voraussetzung u nicht ist, muß es entweder $u - 1$ oder $u + 1$ sein. Damit ist auch $u^2 - 1$ durch 3 teilbar.
Wenn die Zahl $u^2 - 1$ durch 8 und durch 3 teilbar ist, so ist sie durch 24 teilbar, w. z. b. w.

Ma 8 ■1752 Die Fassungsvermögen der drei Behälter seien a, b und c (in Litern). Dann gilt

$$a + b + c = 170 \quad (1)$$
$$a - b = \frac{2}{9}a \quad (2)$$
$$a - (b + c) = 10. \quad (3)$$

Nach äquivalenten Umformungen der Gleichungen (2) und (3) erhalten wir:

$$a + b + c = 170 \quad (1)$$
$$b = \frac{7}{9}a \quad (2)$$
$$a - b - 10 = c. \quad (3)$$

Setzt man (2) in (3) ein, so erhält man die Gleichung

$$a - \frac{7}{9}a - 10 = c \text{ bzw.}$$
$$\frac{2}{9}a - 10 = c. \quad (4)$$

Setzt man (2) und (4) in (1) ein, so erhält man die Gleichung

$$a + \frac{7}{9}a + \frac{2}{9}a - 10 = 170 \quad (5)$$
$$2a = 180$$
$$a = 90.$$

Daraus folgt durch Einsetzen in (2) $b = 70$ und durch Einsetzen in (3) $c = 10$. Die Behälter haben ein Fassungsvermögen von 90 Litern, 70 Litern bzw. 10 Litern.

Probe: 1. Die Summe der Fassungsvermögen beträgt 170 Liter.
2. Wenn man den Inhalt des ersten in den zweiten Behälter umfüllt, so bleiben von 90 Litern noch 20 Liter zurück, das ist $\frac{20}{90}$ bzw. $\frac{2}{9}$ des Inhalts.
3. Der Inhalt der letzten beiden Behälter beträgt 80 Liter. Füllt man diesen in den ersten Behälter, so fehlen noch 10 Liter, um ihn vollständig zu füllen.

Fortsetzung von Seite 89

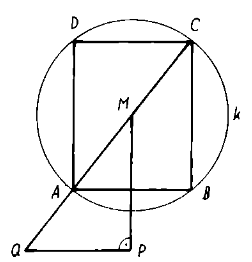
▲12▲ Angenommen, bis 14 Uhr sind x Stunden verstrichen; dann gilt $20x = 12(x+4)$, also $x=6$. Aus $6\,\mathrm{h} \cdot 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{h}} = 120\,\mathrm{m}$ folgt, daß der ganze mit Platten auszulegende Weg 120 m lang ist. Die Arbeit wurde aber erst in 8 Stunden geschafft (um 16 Uhr beendet); folglich legte diese Brigade pro Stunde 15 m des Weges mit Platten aus.

▲13▲ Angenommen, am Ausflug beteiligten sich x Jungpioniere, also $9x$ Thälmann-Pioniere. Im Lager verblieben y Thälmann-Pioniere, also $10y$ Jungpioniere. Nun gilt

$$x+9x+y+10y=138,$$
$$10x+11y=138,$$
$$10x=140-2-10y-y,$$
$$x=14-y-\frac{y+2}{10}.$$

Nur für $y=8$ und damit für $x=5$ wird diese Gleichung unter den einschränkenden Bedingungen erfüllt. Im Lager waren somit 8 Thälmann-Pioniere und 80 Jungpioniere verblieben, die nicht am Ausflug teilnahmen.

▲14▲ Wir zeichnen einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r=\frac{d}{2}=3\,\mathrm{cm}$.



Wir legen einen Punkt P fest, der 4 cm von M entfernt ist und verbinden P mit M. In P tragen wir an PM einen rechten Winkel an. Auf dem freien Schenkel dieses Rechten tragen wir eine Strecke von 3 cm von P bis Q ab. Wir zeichnen die Gerade QM, sie schneidet den Kreis k in den Punkten A und C. Die Parallele zu MP durch C schneidet k in B. Die Parallele zu BC durch A schneidet k in D.

▲15▲ Im rechtwinkligen Dreieck TBF gilt $\sphericalangle TFB = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. Ferner gilt $\sphericalangle TFB = \sphericalangle EFC = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ als Scheitelwinkel. Im rechtwinkligen Dreieck EBC gilt $\sphericalangle CEB = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. Daraus folgt $\sphericalangle CEF = \sphericalangle EFC$. Somit gilt auch $\overline{CE} = \overline{CF}$, d. h. Dreieck EFC ist gleichschenklig.

▲16▲ Aus $\frac{390}{x} = m+r$ und $\frac{313}{x} = n+r$ folgt durch Subtraktion $\frac{390}{x} - \frac{313}{x} = m-n$ bzw $\frac{77}{x} = m-n$. Nur bei $x=1$ oder $x=7$ oder $x=11$ wird $m-n$ ganzzahlig. Von diesen drei Zahlen ist aber nur 11 eine zweistellige natürliche Zahl. Der Divisor heißt so mit 11, und es gilt

$$390:11=35+\frac{5}{11} \text{ und } 313:11=28+\frac{5}{11}.$$

▲17▲ Es seien f, h und r die Anzahlen der erlegten Fasane, Hasen und Rebhühner. Aus $f:h=7:15$ und $h:r=3:2$ folgt $f:h:r=7:15:10$. Es sind somit insgesamt $7n+15n+10n=32n$ Tiere; sie haben insgesamt $(32n+186)$ Beine. Nun gilt

$$2\cdot 7n+4\cdot 15n+2\cdot 10n=32n+186,$$
$$62n=186,$$

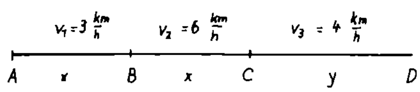
also $n=3$.

Es wurden 21 Fasane, 45 Hasen und 30 Rebhühner erlegt.

▲18▲ Wegen $t=\frac{s}{v}$ gilt

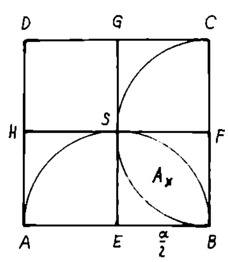
$$\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=3,$$
$$4x+2x+3y=36,$$
$$6x+3y=36,$$
$$2x+y=12.$$

Das Ausflugsziel war 12 km von der Schule entfernt.



▲19▲ Wir verbinden die Mittelpunkte E und G bzw. F und H der Seiten des Quadrates $ABCD$; die Verbindungsstrecken schneiden sich in S. Es sei $\overline{AB}=a$, also $\overline{EB}=\frac{a}{2}$. Dann gilt $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - A_x$, wobei A_x der Flächeninhalt des Kreisbogenzweiecks ist. Daraus folgt weiter

$$A_x = \frac{1}{8}\pi a^2 - \frac{1}{4}a^2 = a^2 \cdot \left(\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}\right).$$



Wir erhalten somit

$$A_x : A_q = \frac{1}{4}a^2\left(\frac{1}{2}\pi - 1\right) : a^2 \approx 0{,}14.$$

Der Flächeninhalt des Kreisbogenzweiecks beträgt rund 14% des Flächeninhalts des Quadrates $ABCD$.

▲20▲ Nach dem Strahlensatz gilt $\overline{EM_1}:\overline{CD}=\overline{AE}:\overline{AD}$ und $\overline{EM_2}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{DA}$ bzw.

$x:b=1:2$ und $(x+3{,}5):10=1:2$,

$$x=\frac{1}{2}\cdot b \text{ und } x=\frac{3}{2}.$$

Daraus folgt $\frac{1}{2}b=\frac{3}{2}$, also $b=3$.

Die Seite $\overline{CD}$ des Trapezes $ABCD$ ist 3 cm lang.

Lösungen zu: alpha-heiter 4/78

Im Eiltempo

Wagen C erreicht den Parkplatz.

Kryptarithmetik

86	−	34	=	52
−		+		−
14	+	2	=	16
72	−	36	=	36
+		−		·
825	:	33	=	25
897	+	3	=	900

Silbenrätsel

1. Kreiskegel
2. Ordnung
3. Ordinate
4. Radius
5. Differenz
6. Integration
7. Nachfolger
8. Anstieg
9. Tangente
10. Extremwert
11. Normalform
12. Satz
13. Yard
14. Spiegelung
15. Translation
16. Ellipse
17. Mantelfläche

Koordinatensystem

Welcher Beruf?

Bauingenieur; Vermessungsingenieur; Hochschulingenieur; Geophysiker; Vermessungsfacharbeiter; Mathematikstudentin; Kartographiefacharbeiter; Markscheider; Technologe; Bauzeichner.

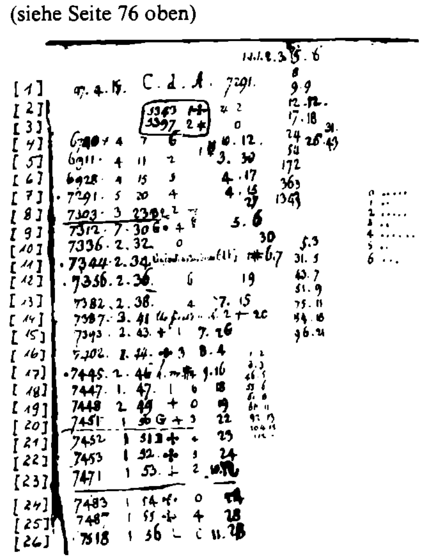
Tauschen und Schütteln

1. DREIZEHN, 2. DREIECKE, 3. RECHTECK, 4. GUERICKE, 5. NEUNECKE, 6. NEUNZEHN, 7. SIEBZEHN, 8. BEISPIEL, 9. SCHEITEL, 10. STRAHLEN, 11. SCHENKEL.

Wie heißt der Wissenschaftler?

1. Einstellzeit, 2. röntgenografisch, 3. Nichtmetalle, 4. Ester, 5. Sauerstoff, 6. Thioindigo, 7. Rammler, 8. Uranoxid – Ernest Rutherford

Aufzeichnungen des 14jährigen C. F. Gauß (siehe Seite 76 oben)



Ein Flächenbelegungsspiel

Dieses Spiel läßt sich in vielen Arten ausführen. Wir beschreiben eine mögliche Variante für ein rechteckiges Spielfeld. Auf das Spielfeld legen zwei Spieler A und B abwechselnd gewisse geometrische Figuren (wie z. B. Kreise, Rechtecke u. ä.). Die Position der gelegten Figuren darf nicht mehr geändert werden. Beim Legen der Figuren ist darauf zu achten, daß sie sich nicht überlappen. Wir nehmen an, daß ausreichend Figuren vorhanden sind, um das Spielfeld völlig zu überdecken. Damit ist klar, daß nach einer gewissen Zahl von Zügen das Spielfeld bedeckt ist, so daß keine andere Figur mehr Platz hat. Sieger soll derjenige Spieler sein, der die letzte Figur legen konnte. Gibt es hier einen Spieler, der sein en Sieg erzwingen kann? Hat die Form der Figuren Einfluß auf die Gewinnmöglichkeiten?

Wir untersuchen zunächst den Fall, daß A und B Dominosteine auf das Spielfeld legen. Es handelt sich also nur um eine Sorte von Figuren, nämlich Rechtecke. Wenn der erste Spieler A seinen ersten Dominostein so auf den Schnittpunkt S der Diagonalen des Spielbretts legt, daß eine Drehung des Bretts

Bild 1

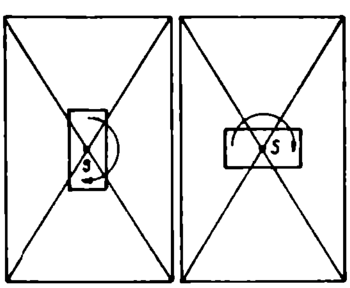
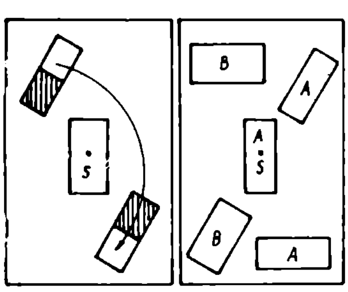


Bild 2



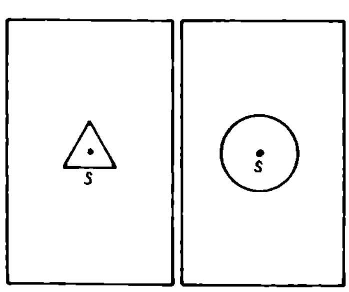
um den Punkt S um 180° den Stein mit sich zur Deckung bringt, so kann A gewinnen (Bild 1). A braucht dann, um auf einen Zug von B antworten zu können, in Gedanken das Brett um 180° zu drehen und seinen Stein auf die Stelle zu legen, auf die der von B zuletzt gelegte Stein gedreht wurde (Bild 2).

Wir wollen uns davon überzeugen, daß der Antwortzug von A auf diese Weise stets möglich ist, d. h. daß der entsprechende Platz noch nicht von gelegten Steinen überlappt wird. Zunächst halten wir fest, daß jedem Dominostein genau eine um 180° bezüglich S gedrehte Lage entspricht, und umgekehrt entspricht einer in Gedanken erhaltenen Lage eines gedrehten Steines genau ein Dominostein.

Der erste Antwortzug von A auf einen von B gelegten Dominostein ist auf jeden Fall möglich, da A seinen ersten Stein so legte, daß er durch Drehung um 180° (bezüglich S) in sich übergeht. Wenn B noch Platz für einen zweiten Dominostein findet, so muß auch der um 180° (bezüglich S) gedrehte Platz, den A belegen möchte, noch frei sein. Denn wäre dieser Platz durch einen Dominostein versperrt, so müßte sich auf dem um 180° (bezüglich S) gedrehten Spielfeld bereits ein Dominostein befinden. Folglich kann in diesem Fall B gar keinen Stein gelegt haben. Wir können mit dieser Argumentation fortfahren und zeigen so, daß jeder Zug von B durch A beantwortet werden kann. Da nach einer gewissen Zahl von Zügen keine Steine mehr auf das Brett passen, muß das Spiel für A siegreich enden, denn nach einem Antwortzug von A wird B keinen Stein mehr setzen können und verliert demzufolge.

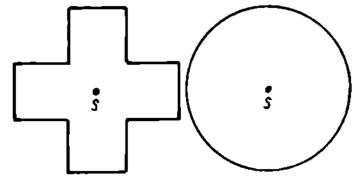
Nach diesen Überlegungen ist es einfach, auch andere Figuren zuzulassen. Wesentlich ist, daß der erste Stein so auf den Mittelpunkt des Spielfeldes gelegt werden muß, daß er bei Drehung des Spielfeldes um 180° (bezüglich S) in sich übergeht. Das ist natürlich eine Forderung an die Form der Figur. Dreiecke oder L-förmige Figuren u. ä. scheiden damit im Sinn unserer Strategie als Belegungsfiguren aus, Kreise (Münzen) sind zugelassen (Bild 3). Es ist sogar möglich, verschieden große Kreise zu legen oder auch Kreise und Rechtecke usw. gemeinsam zu benutzen. Treten verschiedene Figuren auf, so läßt sich unsere Taktik sicher anwenden, wenn A und B von jeder Sorte gleich viele Steine haben. Ausgenommen ist die Figur, die A zuerst

Bild 3



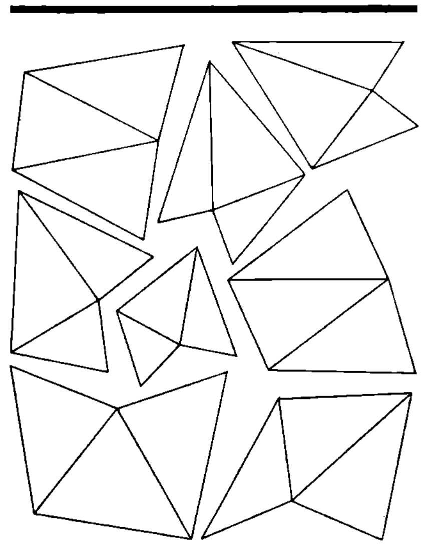
legt, weil A hier eventuell eine Figur mehr benötigt. Natürlich müssen auch hier wieder so viele Steine vorhanden sein, daß das Brett völlig bedeckt werden kann. Die Einschränkung, daß A und B von jeder Sorte gleich viele Steine haben, wobei der erste von A gelegte Stein ausgenommen ist, entfällt jedoch, wenn von jeder Sorte so viele Steine vorhanden sind, daß das Brett mit ihnen allein völlig bedeckt werden kann. Auch die Form des Bretts kann variiert werden (Bild 4).

Bild 4



Alle Spiele, die wir bisher untersucht haben, besaßen eine Gewinnstrategie für jeweils einen Spieler. Diese Strategie basierte auf einer paarweisen Anordnung des Spielablaufs. Damit ist genauer folgendes gemeint: Wenn ein Spieler X einen Zug ausführte, so antwortete der andere Spieler Y mit einem genau festgelegten Gegenzug, der das Spiel in eine für Y günstige Situation brachte, aus der schließlich zwangsläufig sein Sieg hervorging. Zug und Gegenzug bildeten ein Paar. In unserem eben beschriebenen Spiel sind Zug und Gegenzug durch den Platz und den um 180° gedrehten Platz bestimmt, in Lewthwaites Spiel durch den gleichen Dominostein festgelegt usw. Mitunter, wie bei diesem Spiel, ist erst nach dem ersten Zug eine paarweise Anordnung des Spielablaufs möglich.

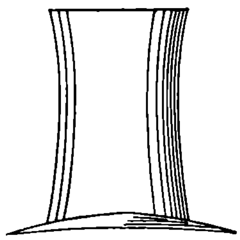
R. Thiele



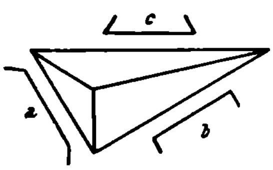
Man findet die Mantelflächen von 8 dreiseitigen Pyramiden gezeichnet. Aus den Pyramiden (von denen jede verwendet werden muß) läßt sich ein regelmäßiges Tetraeder zusammensetzen.

Aus der ungarischen Schülerzeitschrift Lapok 1/78

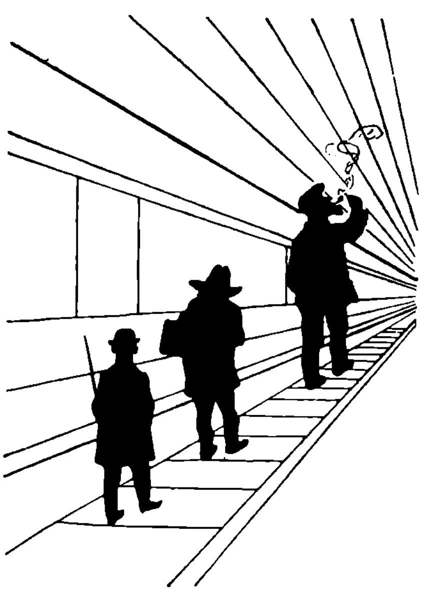
Optische Täuschungen



1. Ist der Zylinder ebenso hoch wie breit?



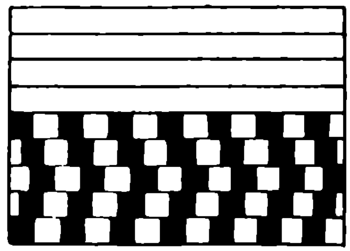
2. Vergleiche die Länge der drei Strecken *a*, *b* und *c*!



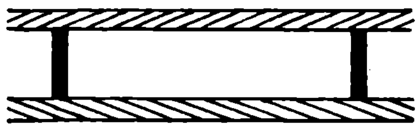
3. Diese Männer sind doch nicht gleich groß!

3388SSXXZZ

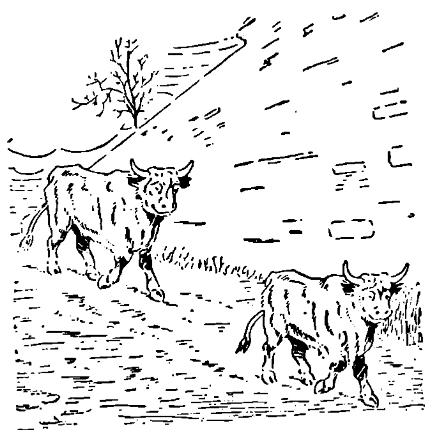
4. Sind die Lettern gleich hoch oder nicht?



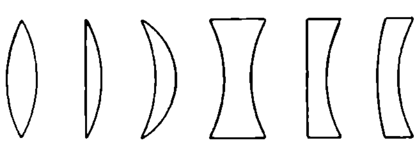
5. Der untere Teil scheint verdruckt und verworfen! Ist das so?
(Nein! Es sind nur abwechselnd weiße und schwarze Quadrate zwischen parallelen Linien vorhanden.)



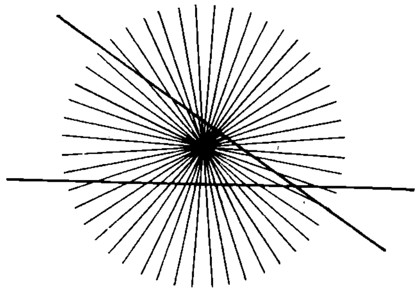
6. Konvergieren diese Balken oder sind sie parallel?



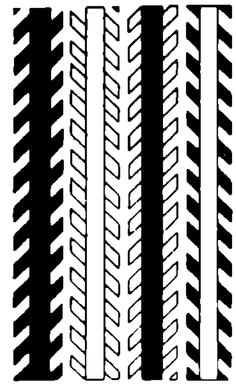
7. Welcher der beiden Ochsen ist größer?



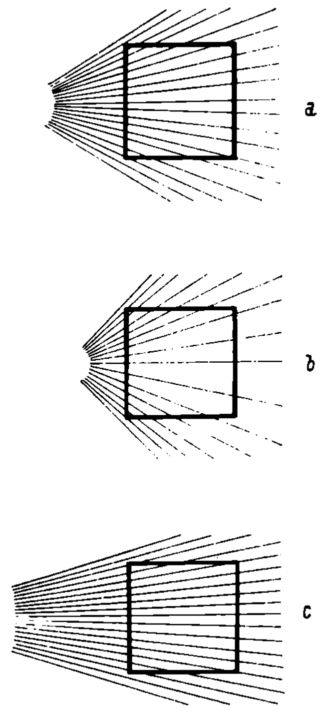
8. Werden die Linsen von links nach rechts größer oder nicht?



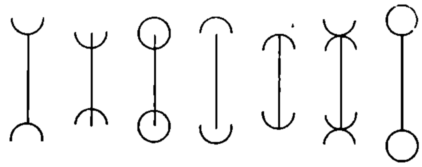
9. Verbogen oder nicht?



10. Sind die Balken parallel oder nicht?



11. Quadrat oder nicht, das ist hier die Frage!

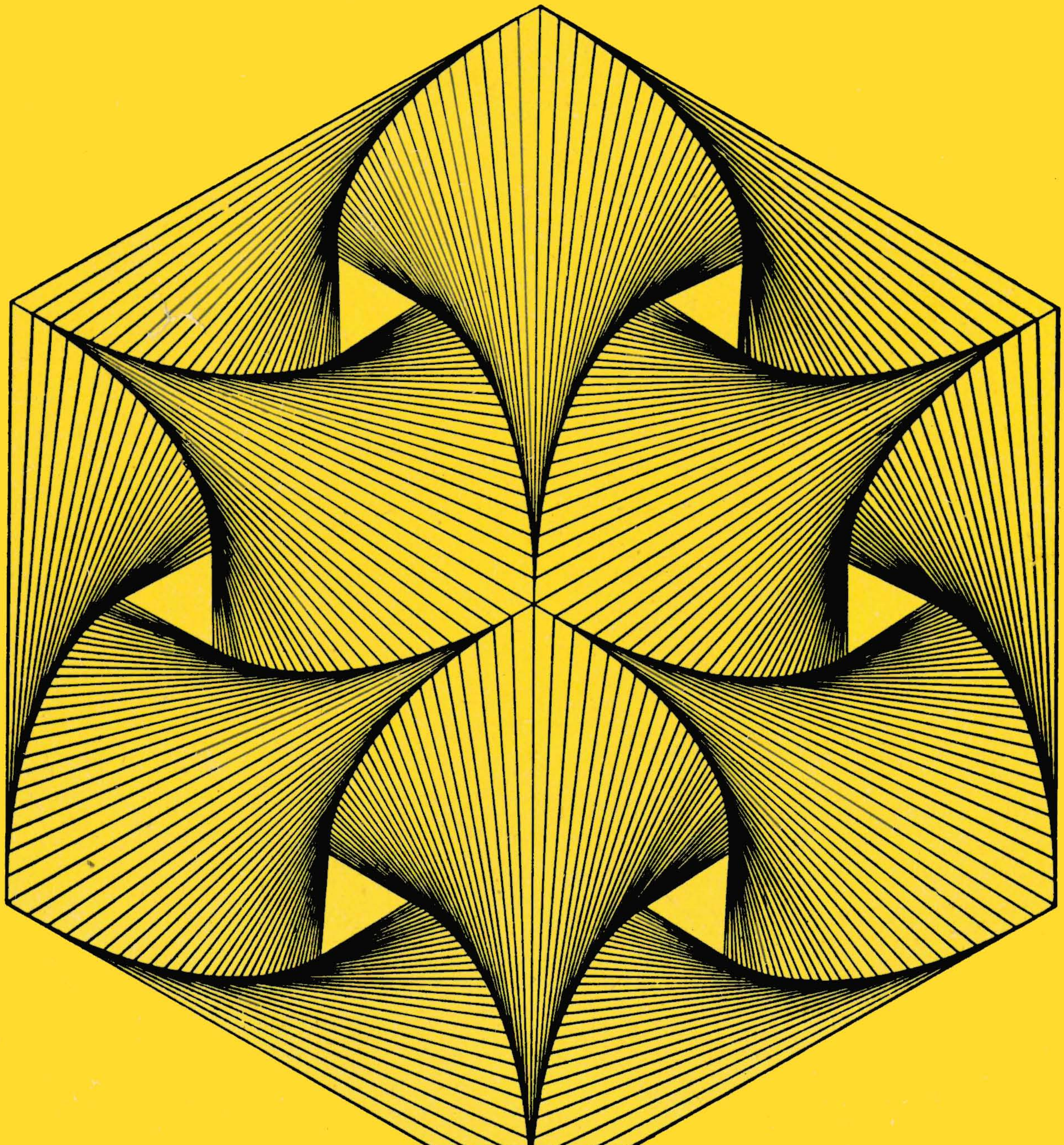


12. Vergleiche die Längen der Hauptlinien!

13. Vergleiche Masthöhe und Bootslänge!

Mathematische
Schülerzeitschrift

alpha



5

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
12. Jahrgang 1978
Preis 0,50 M
Index 31 059

Redaktion:
StR J. Lehmann, V.L.d.V (Chefredakteur)
Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.
Fotos: J. Roßmann, Rostock (S. 103); M. Vorbeck, Berlin (S. 108); E. Milatki, Moskau (S. 110); Postkarte, Foto A. Kříž, Děčín (S. 110); Eigenfoto J. Flachsmeyer, Greifswald (S. 113); Vignetten: J. Jordan, Leipzig (S. 116, S. 120, IV. U-Seite); Eigenfoto A. Skopetz, Jaroslawl (S. 110); Eigenfoto U. Reiche, Dresden (III. U-Seite)
Titelblatt: W. Fahr, Berlin
Typographie: H. Tracksdorf, Leipzig

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128 – ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 27. Juni 1978

alpha
Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Der Vierfarbensatz

Ein Fünffarbenspiel

Will man auf einer Landkarte die einzelnen Länder farbig kennzeichnen, so muß man zwei Länder mit einer gemeinsamen Grenze durch verschiedene Farben unterscheiden.
Im folgenden Fünffarbenspiel zeichnen zwei Spieler eine solche farbig markierte Landkarte. Man braucht ein Blatt weißes Papier und fünf Farbstifte verschiedener Farben, z. B. blau, grün, rot, braun und gelb. Der Spieler A zeichnet ein Land; der Spieler B färbt es und zeichnet ein neues Land; der Spieler A färbt es und zeichnet ein neues Land; usw. Wer zuerst eine fünfte Farbe benutzen muß, hat das Spiel verloren. Diese Spielregeln sind zu beachten:
1. Ein Land ist stets zusammenhängend, d. h., irgend zwei Punkte des Landes kann man durch einen Weg verbinden, der ganz innerhalb des Landes verläuft. (Es soll also keine Länder mit Exklaven geben.) (Bild 1)

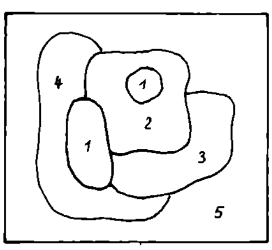


Bild 1
Landkarte mit fünf Ländern. Das Land 1 hat eine Exklave in 2. Es ist nicht zusammenhängend.

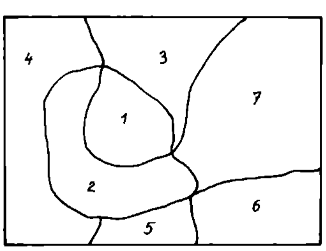


Bild 2
Landkarte mit fünf Ländern. Nachbarländer sind 1 und 3, 1 und 2, 2 und 4, 2 und 5, 2 und 7, 3 und 4, 3 und 7, 4 und 5, 5 und 6, 6 und 7. Die Länder 1 und 4, 1 und 7, 2 und 3, 2 und 6, 5 und 7 sind nicht benachbart!

2. Benachbarte Länder werden verschieden gefärbt. Unter benachbarten Ländern sind solche gemeint, die eine gemeinsame Grenze haben. Zwei Länder, die nur in einem einzigen Punkt oder in einer endlichen Anzahl von Punkten zusammentreffen, werden nicht als benachbart angesehen. (Bild 2)

Das Vierfarbenproblem

Daß wir uns im eben beschriebenen Spiel beim Färben der Landkarte auf vier Farben beschränken wollen, hat seinen Grund. Beim Färben von Landkarten (unter Beachtung der „Spielregeln" 1. und 2.) ist man nämlich bisher stets mit vier Farben ausgekommen. Die Karte in Bild 3 kann man mit 3 Farben färben.

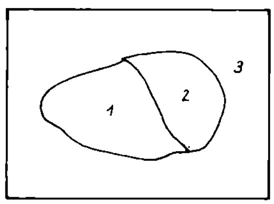
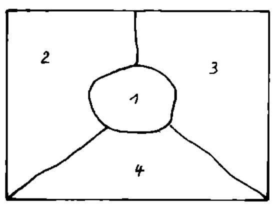
Bild 3


Bild 4


Auf der Karte des Bildes 4 ist jedes Land mit den übrigen drei benachbart, zur Färbung braucht man 4 Farben. Selbst kompliziertere Landkarten konnte man stets mit vier Farben färben. Daß die Färbung oft nicht leicht ist, erkennt man beim Spielen des Fünffarbenspiels. Angenommen wir haben vier Länder in der Karte des Bildes 5 bereits mit den Farben *a*, *b*, *c* gefärbt. Zum Färben der übrigen zwei Länder benötigen wir nun aber noch zwei, also insgesamt fünf Farben. Ist damit bewiesen, daß es Karten gibt, bei denen man nicht mit höchstens vier Farben auskommt? Nein! Die Karte des Bildes 5 läßt

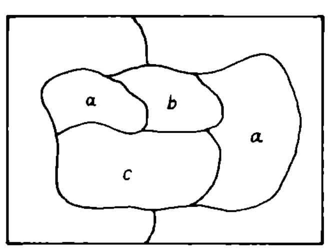
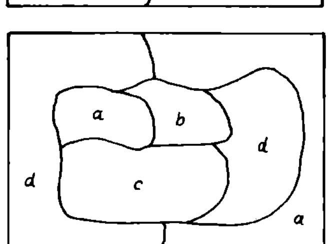
Bild 5


Bild 6


sich ja mit vier Farben färben, nur muß man die Farben geschickter verteilen. (Bild 6)
Das Vierfarbenproblem besteht nun darin, den Vierfarbensatz zu beweisen.
Vierfarbensatz: Bei der Färbung jeder Landkarte (unter Beachtung von 1. und 2.) kommt man mit vier Farben aus.

Über die Geschichte des Vierfarbenproblems

Weder in den alten Büchern der Kartographen, noch bei den Mathematikern wie *L. Euler* (1707 bis 1783) und *A. F. Möbius* (1790 bis 1868) finden sich Hinweise auf den Vierfarbensatz (obwohl es gelegentlich behauptet wird). Der Mathematikhistoriker *K. O. May* wies nach, daß das Vierfarbenproblem erstmals in einem Brief (vom 23. Oktober 1852) von *A. de Morgan* (1806 bis 1871), Mathematikprofessor an der Universität London, an seinen Freund *W. R. Hamilton* (1805 bis 1865), Mathematikprofessor an der Universität Dublin, erwähnt wurde. Einer seiner Studenten, *Frederick Guthrie*, hätte den Londoner Mathematiker darauf aufmerksam gemacht. Fast dreißig Jahre später machte der Cambridger Mathematikprofessor *A. Cayley* (1821 bis 1895) durch eine Anfrage auf der Sitzung der Londoner Mathematischen Gesellschaft vom 13. Juni 1878 und durch eine Veröffentlichung (im Jahre 1879) in einer Zeitschrift der *Königlichen Geographischen Gesellschaft* das Problem erst richtig bekannt. Kurz danach publizierten *A. B. Kempe* (1879) und *P. G. Tait* (1880) zwei „Beweise" für den Vierfarbensatz. Doch beide enthielten Fehler.
In einer kurzen Note an die *Royal Society* in Edinburgh im Jahre 1880 bemerkte der Physiker *Frederick Guthrie*, daß er durch seinen Bruder *Francis Guthrie* (der 1880 bereits Mathematikprofessor in Kapstadt war) vom Problem erfahren hatte und mit dessen Zustimmung seinen Lehrer *de Morgan* darauf hingewiesen hatte.
Guthrie und *de Morgan* kannten sicher die Landkarte in Bild 4, auf der jedes der vier Länder mit den übrigen drei benachbart ist. Da eine solche Landkarte nur mit vier Farben, nicht aber mit drei Farben färbbar ist, ist ein Dreifarbensatz sicher falsch. Drei Farben reichen nicht aus, um alle Landkarten zu färben.
De Morgan bewies, daß es unmöglich ist, fünf Länder so zu zeichnen, daß jedes von ihnen mit den übrigen vier benachbart ist. Diese Behauptung hatte bereits *Möbius* in der Form eines Märchens den Zuhörern seiner Vorlesung vom Jahre 1840 vorgelegt (nach *Tietze*): „Es war einmal im fernen Osten ein Fürst, der hatte fünf Söhne; diese sollten nach seinem Tode sein Reich erben. Die Teilung des Reiches in fünf Teile – so bestimmte er – dürfe aber nur so vorgenommen werden, daß jedes der fünf Teilreiche an jedes andere angrenze. Jeder der Söhne solle

ferner von seinem Regierungssitz zu dem eines jeden anderen eine Straße bauen und diese Straßen sollten – ohne Kreuzungen und überhaupt ohne das Gebiet eines dritten Bruders zu berühren, getrennt verlaufen. Nach dem Tode des Vaters bemühten sich die Brüder, eine Einteilung des Reiches zu finden, die seinem Wunsch entspräche. Aber alles Bemühen blieb vergeblich. Als nun schon mancher Tag über unablässigen Versuchen verstrichen war, wurde von einem Schreibkundigen am Hofe festgestellt, daß die gleiche Bestimmung schon in einem älteren Schriftstück des Verstorbenen sich fand, in dem nur von vier Söhnen die Rede war, da sie aus einer Zeit stammte lange vor der Geburt des wesentlich jüngeren fünften Sohnes. Und es ergab sich, daß dazumal dem Willen des Vaters leicht zu entsprechen gewesen wäre."

Aufgaben

▲1▲ Wie kann die Teilung des Reiches in vier Teile erfolgen? Zeichne die Hauptstädte und die Verbindungsstraßen!

▲2▲ Wieviel Verbindungsstraßen zwischen den Hauptstädten würde es bei einer Fünfteilung geben?

▲3▲ Beweise: Es ist unmöglich, fünf Punkte so in der Ebene zu zeichnen, daß man jeden von ihnen mit den übrigen durch Kurven verbinden kann, die sich nicht gegenseitig schneiden!

▲4▲ Beweise, daß die Teilung des Reiches in fünf gegenseitig benachbarte Teile unmöglich ist!

Sein Beweis der angegebenen *Möbiusschen Behauptung* stärkte *de Morgan* in seiner Ansicht, daß der Vierfarbensatz richtig sein könnte. Sein Nachweis, daß es nicht möglich ist, fünf Länder so zu zeichnen, daß jedes von ihnen mit den übrigen vier benachbart ist, ist jedoch kein Beweis des Vierfarbensatzes! (Warum?)

Aufgabe

▲5▲ Zeichne eine Landkarte (mit wenigstens 6 Ländern) mit folgenden zwei Eigenschaften:

a) Höchstens jeweils drei Länder liegen so, daß jedes von ihnen mit den übrigen zwei benachbart ist.

b) Beim Färben kommt man aber nicht mit drei Farben aus.

Im Jahre 1890 konnte *P. J. Heawood* beweisen, daß fünf Farben stets ausreichen, um jede Landkarte so zu färben, daß dabei benachbarte Länder niemals die gleiche Farbe haben. Der Vierfarbensatz wäre falsch, das Vierfarbenproblem also negativ entschieden, wenn man eine Karte finden könnte, bei der man nicht mit weniger als fünf Farben auskommt.

Zahlreiche Mathematiker beschäftigen sich mit dem Vierfarbenproblem. 1922 wies *Ph. Franklin* nach, daß eine Landkarte, zu deren Färbung fünf Farben notwendig sind, wenigstens 26 Länder enthalten muß, d. h., daß für die Färbung jeder Landkarte mit 25 oder weniger Ländern vier Farben ausreichen. Vierzig Jahre nach *Heawoods* Arbeit konnten *H. Rademacher* und *O. Toeplitz* in ihrem für Laien bestimmten Werk „Von Zahlen und Figuren" (1930) immer noch schreiben: Man hat „bisher noch keine, wenn auch noch so verwickelte Landkarte zeichnen können, bei der man nicht mit vier Farben im angegebenen Sinne ausgekommen wäre. Man hat aber ebensowenig zu beweisen vermocht, daß man bei jeder nur denkbaren Landkarte mit vier Farben auskommt. Wir stehen hier wieder vor einem der ganz einfachen und ohne alle mathematischen Kenntnisse zu begreifenden Probleme, die man in wenigen Minuten jedem Laien der Mathematik darlegen kann und die doch noch niemand gelöst hat."

Daß der Vierfarbensatz für alle Landkarten, die höchstens 35 Länder enthalten, richtig ist, zeigte 1940 *C. E. Winn.*

„Wenn ich so verwegen sein darf, eine Vermutung aufzustellen", schrieb 1959 *H. S. M. Coxeter*, „würde ich meinen, daß eine Karte, bei der man mindestens fünf Farben braucht, vielleicht doch möglich ist. Sie könnte aber in soviel Einzelflächen (womöglich Hunderttausende) aufgeteilt sein, daß kein Mensch die Geduld aufbrächte, all die Tests effektiv durchzuführen, die man brauchen würde, um die Möglichkeit einer Vierfarbenlösung definitiv auszuschließen." 1970 erkannten *O. Ore* und *J. Stemple*, daß der Vierfarbensatz für alle Landkarten mit höchstens 39 Ländern richtig ist. Im selben Jahr erhöhte *G. A. Donez* die Anzahl auf 44, 1974 *W. Stromquist* die Anzahl auf 51 und 1975 *J. Mayer* auf 96.

Endlich, 1976, gelang es den Mathematikern *Wolfgang Haken* und *Kenneth Appel* von der Universität von Illinois in Urbana (USA), mit Hilfe von Computern den Vierfarbensatz für alle Landkarten mit beliebig vielen Ländern zu bestätigen. In insgesamt 1200 Stunden haben drei verschiedene elektronische Rechenmaschinen über 12 Milliarden Ja-Nein-Entscheidungen durchgeführt. Einen derart langen Beweis, der nur mittels Computereinsatz zum Ziel führte, hat es in der Geschichte der Mathematik noch nicht gegeben.

Das Vierfarbenproblem ist damit gelöst. Ob es einen kurzen, computerunabhängigen Beweis des Vierfarbensatzes gibt, ist weiterhin ungewiß. Ob die neue Beweistechnik auch in anderen Zweigen der Mathematik entscheidende Fortschritte mit sich bringen könnte, wird sich zeigen.

Kempes Beweisidee

Auf den Landkarten, die wir betrachten, schließen wir zunächst das Vorkommen sogenannter mehrfach zusammenhängender Länder aus, das sind solche Länder, die in ihrem Innern weitere Länder vollständig enthalten, deren Begrenzung also in mehrere Teile zerfällt.

Bild 7a

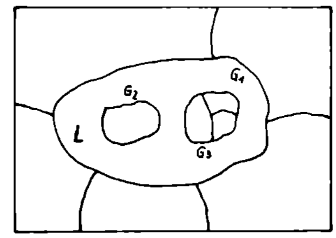


Bild 7b

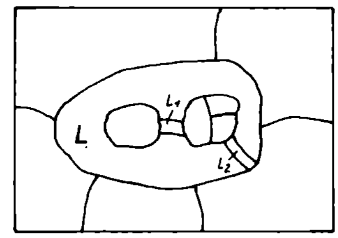


Bild 7a zeigt ein zweifach zusammenhängendes Land L, dessen Grenze aus den Teilstücken G_1, G_2, G_3 besteht. Wir fügen zwei Länder L_1 und L_2 hinzu (Bild 7b). Dann ist das neue L einfach zusammenhängend (die Begrenzung ist eine geschlossene sich nirgends schneidende Kurve). Ist die neue Karte zur Unterscheidung benachbarter Länder mit höchstens vier Farben färbbar, so auch die ursprüngliche, da durch die Länder L_1 und L_2 die Nachbarschaftsbeziehungen nicht zerstört werden.

Bild 8a

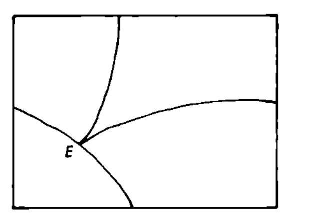
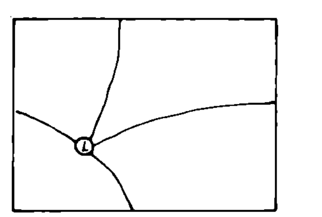


Bild 8b



Die Punkte, in denen sich die Begrenzungskurven der Länder treffen, nennen wir auch Ecken. Wir können annehmen, daß in jeder Ecke nur drei Grenzen zusammentreffen. Treffen in einer Ecke E mehr als drei Grenzen zusammen (Bild 8a), so sehen wir den Eckpunkt E als Grenzfall eines dehnbaren Kreises an, der ein kleines Land L umschließt. (Bild 8b.) Dies ändert die Nachbarschaft der übrigen Länder nicht und gibt uns Ecken der gewünschten Art. Gelingt es, die Karte mit dem Land L wie verlangt zu färben, so ist auch die ursprüngliche Karte mit höchstens vier Farben gefärbt.

Landkarten, in denen keines der Länder andere Länder vollständig enthält und sich in jedem Eckpunkt nicht mehr als drei Länder treffen, nannte *A. B. Kempe* normal. Ist der Vierfarbensatz für normale Landkarten bewiesen, so gilt er für alle Landkarten. Bei seinem Beweisversuch für den Vierfarbensatz (für normale Landkarten) benutzte *Kempe* (1879) die Methode des indirekten Beweises. Er nahm an, daß der Vierfarbensatz falsch ist (d. h., es wenigstens eine Landkarte gibt, deren Färbung fünf Farben erfordert). Aus dieser Annahme ergab sich ein Widerspruch. Folglich ist die Annahme falsch, also der Satz richtig.

Kempes Schlußweise läßt sich so zusammenfassen:

1. Gäbe es eine Landkarte, deren Färbung fünf Farben erfordert, so gäbe es auch eine solche normale Landkarte. Unter allen normalen Landkarten, deren Färbung fünf Farben erfordern, gibt es eine mit einer kleinsten Länderzahl. (Das heißt, jede normale Landkarte mit weniger Ländern ist mit vier oder weniger Farben färbbar.) Eine solche nennen wir eine *minimale fünf-färbbare normale Landkarte*.
2. Jede normale Landkarte enthält ein Land mit zwei, drei, vier oder fünf Nachbarländern. (Das heißt, es gibt keine normale Landkarte, in der jedes Land sechs oder mehr Nachbarländer hat.) (Bild 9)

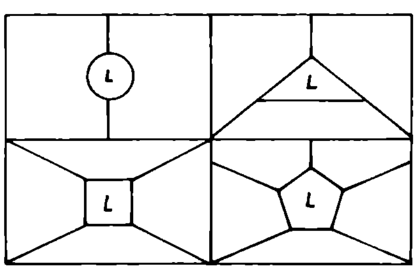


Bild 9

3. Hiernach hat auch eine minimale fünf-färbbare normale Landkarte *K* ein Land mit weniger als sechs Nachbarländern. Es werden nun folgende Fälle unterschieden:
a) *K* enthält ein Land mit zwei Nachbarn.
b) *K* enthält kein Land mit zwei Nachbarn, jedoch eines mit drei Nachbarn.
c) *K* enthält kein Land mit zwei oder drei Nachbarn, jedoch eines mit vier Nachbarn.
d) *K* enthält kein Land mit zwei, drei oder vier Nachbarn, also ein Land mit fünf Nachbarn.
4. Es wird in allen vier Fällen der Nachweis geführt, daß es jeweils eine normale Landkarte gibt, deren Färbung fünf Farben erfordert, die jedoch weniger Länder als *K* enthält. Dies widerspricht der Tatsache, daß *K* bereits eine minimale fünf-färbbare normale Landkarte ist. Wären diese vier Nachweise richtig, so wäre durch den sich ergebenden Widerspruch gezeigt, daß die Annahme, daß es eine Landkarte gibt, deren Färbung fünf Farben erfordert, falsch ist, d. h., der Vierfarbensatz wäre bewiesen. Der Nachweis in den Fällen a), b), c) ist bei *Kempe* völlig richtig. Doch der Nachweis im Fall d) ist falsch, was zuerst im Jahre 1890 von *P. J. Heawood* erkannt wurde.

Computerlösung des Vierfarbenproblems

Kempes Beweisidee ist auch die Grundidee des Beweises von *W. Haken* und *K. Appel.* In fast 100 Jahren entstand aus der Arbeit am Vierfarbenproblem die klassische Graphentheorie. Insbesondere wurde *Kempes* Methode zur Lösung des Problems verbessert. Aus *Kempes* indirekter Beweismethode wurde eine allgemeinere sogenannte *Reduktionsmethode.* Wesentliche und entscheidende Impulse zur Lösung des Problems sind dem Mathematiker *H. Heesch*, der sich über 40 Jahre mit dem Vierfarbenproblem beschäftigt hat, zu verdanken. *W. Haken* und *K. Appel* konnten Heeschs Methoden vervollkommnen und zusammen mit ihrer sogenannten *Vollständigkeitsmethode* unter Einsatz von Computern den Vierfarbensatz (Satz von Guthrie-Kempe-Heesch-Appel-Haken) beweisen.

(Eine anschauliche Beschreibung weiterer Einzelheiten des Beweises findet der interessierte Leser in der Zeitschrift „Wissenschaft und Fortschritt" 1978, Heft 3, März 1978.)

H. Pieper

Eine Aufgabe von Prof. Dr. sc. Zalman Alexandrowitsch Skopetz

Lehrstuhlleiter an der Päd. Hochschule „K. D. Uschinski", Jaroslawl

▲1765▲ 1. Eine bekannte Textaufgabe lautet:

Herr Müller fuhr mit dem E-Zug $\left(66\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ bis zur nächsten Station, warf eine Karte in den Briefkasten und lief sofort dem Gleis entlang zurück nach Hause mit der Geschwindigkeit $6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Der Nachbar machte dieselbe Reise mit einem Fahrrad, hin und zurück; er fuhr gleichzeitig ab, als Herr Müller abfuhr, und kehrte auch gleichzeitig zurück. Wie groß war die Geschwindigkeit des Fahrrads?

Lösungen auf Seite 116

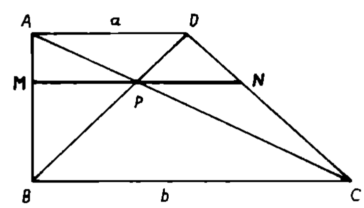
2. Um die Aufgabe richtig zu lösen, muß man verstehen, was „mittlere Geschwindigkeit" heißt (siehe Lösung S. 116); diese kann man als *harmonisches Mittel* berechnen.

Beispiel: Es seien $a=3$ und $b=6$; das harmonische Mittel x findet man laut Gleichung $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$; daraus folgt $x=4$. Seien n positive Größen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegeben, dann findet man das harmonische Mittel x aus

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)$$

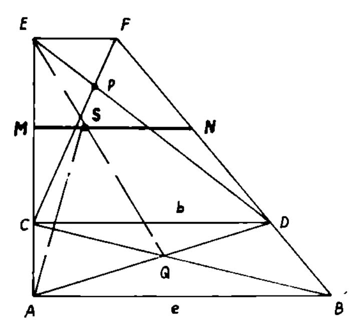
oder $$x=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

3. Das harmonische Mittel zweier Strecken a und b kann man auch konstruieren. In einem beliebigen Trapez $ABCD$ $(\overline{AD}\parallel\overline{BC}$, s. Bild 1) sei $\overline{AD}=a$ cm, $\overline{BC}=b$ cm. Die Strecke $\overline{MN}$ verläuft über den Diagonalenschnittpunkt P und $\overline{MN}\parallel\overline{AD}$. Es ist ganz leicht zu beweisen, daß $x=\overline{MN}$ der Gleichung $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ genügt; also ist die Strecke $\overline{MN}=x$ das harmonische Mittel zwischen a und b.



4. Um ein harmonisches Mittel dreier Strecken a, b, c zu finden, zeichne man die drei gegebenen Strecken einander parallel so, daß die Punkte A, C, E bzw. B, D, F auf einer Geraden liegen (s. Bild 2). Dann konstruiere man:

(1) den Schnittpunkt P von Geraden CF und ED;
(2) den Schnittpunkt Q von Geraden BC und AD;
(3) den Schnittpunkt S von Geraden AP und EQ;
(4) die Strecke $\overline{MN}\parallel\overline{AB}$ durch den Punkt S $(M\in\overline{AE}, N\in\overline{BF})$.



Satz: Die Strecke $x=\overline{MN}$ ist ein harmonisches Mittel der drei Strecken a, b, c.

Der unter 4. genannte Satz wurde von Prof. *Z. A. Skopetz* gefunden und heißt **Satz von Skopetz**.

Er rechnete, wie andere atmen

Leonard Euler, der berühmteste Mathematiker des 18. Jahrhunderts

Im Herbst 1726 ging bei der Pariser Akademie eine Bewerbungsschrift um einen von ihr ausgesetzten Preis ein. Es handelte sich um eine damals hochaktuelle Aufgabe: Gefragt war nach denjenigen Stellen, an denen am zweckmäßigsten die Masten im Schiff einzusetzen seien, nach der günstigsten Anzahl und Höhe der Masten. Nach gründlicher Prüfung erhielt diese Einsendung zwar nicht den Preis, wohl aber die nächsthöhere Auszeichnung, eine lobende Anerkennung („Accessit"). Der Verfasser war ein neunzehnjähriger angehender Gelehrter namens *Leonhard Euler* aus Basel. Er hat übrigens später durch seine Preisschriften allein von der Pariser Akademie rund 30000 Livres, etwa 300000 Mark in heutiger Kaufkraft, erhalten.

Man prüft den Pudding, indem man ihn ißt

Der junge *Euler* hatte noch nie ein Seeschiff auch nur von weitem gesehen. Er hielt es für ratsam, seiner mathematisch-theoretischen Abhandlung hinzuzufügen: „Ich habe es nicht für erforderlich erachtet, diese meine Theorie durch ein Experiment zu bestätigen, weil sie ganz und gar aus den gesichertsten und unangreifbarsten Prinzipien der Mechanik hergeleitet ist. Ein Zweifel, ob sie wahr und in der Praxis anwendbar sei, kann daher überhaupt nicht auftauchen."

In einem 130 Jahre später in Leningrad aufgefundenen Konzept *Eulers* liest es sich allerdings anders. Hier bekannte er nämlich, daß er mit einem selbst angefertigten Schiffsmodell Versuche in ruhigem Wasser angestellt hätte... Bei allem Zutrauen in seinen Kalkül hatte er also doch vorsichtshalber nach dem von *Friedrich Engels* gern zitierten englischen Sprichwort gehandelt: „Man prüft den Pudding, indem man ihn ißt."

Schon 1727 erreichte *Euler* ein Ruf nach Petersburg an die dortige Akademie der Wissenschaften. Am 26. April schiffte er sich in Travemünde auf einem nach Reval abgehenden Frachter ein. Erst am 24. Mai traf er nach beschwerlicher Reise, schwerem Sturm und heftiger Seekrankheit in Petersburg ein, 50 Tage nach seinem Aufbruch von Basel und 29 Tage nach dem Verlassen Lübecks. Ja, es war damals noch nicht so einfach, nach Reval oder Petersburg zu gelangen, wie man heute nach Tallinn oder Leningrad reist.

In Petersburg faßte *Euler* rasch festen Fuß, und schon 1731 wurde er, 24jährig, Professor. Mit vollem Recht konnte er bereits damals von sich sagen: „Was die Mathematik anbelangt, so glaube ich, daß die Zahl derer, welche es weiter oder nur so weit als ich gebracht haben, in ganz Europa sehr klein ist."

1741 folgte *Euler* einer vorteilhaft erscheinenden Berufung nach Berlin, an dessen Akademie er bald Direktor der Mathematischen Klasse wurde. Die in Petersburg verbrachten Jahre vergaß er nicht. 1749 erklärte er: „Alles, was wir sind, schulden wir den vorteilhaften Umständen, worin wir uns in der Petersburger Akademie befunden haben."

Friedrich II. als Kaderpolitiker

Seine Berühmtheit wuchs von Jahr zu Jahr. Aber der Preußenkönig Friedrich II. wußte die Bedeutung dieses Mannes nur sehr begrenzt zu würdigen. Selbst ohne jedes Verständnis für die höhere Mathematik, sah er in ihm in dieser Zeit der Aufklärung, in der die Höfe um den „Besitz" ausgezeichneter Gelehrter wetteiferten, zwar eine Zierde „seiner" Akademie, aber es ging ihm doch die Einsicht dafür ab, worin denn eigentlich *Eulers* Genialität bestand. So schrieb er seinem Bruder:

„Ich dachte mir schon, daß Deine Unterhaltung mit Herrn Euler Dich nicht erbauen würde. Seine Epigramme bestehen in Berechnungen neuer Kurven, irgendwelcher Kegelschnitte oder astronomischer Messungen. Unter den Gelehrten gibt es solche gewaltigen Rechner, Kommentatoren, Übersetzer und Kompilatoren, die in der Republik der Wissenschaften nützlich, aber sonst alles andere als glänzend sind. Man verwendet sie wie die dorischen Säulen in der Baukunst. Sie gehören in den Unterstock, als Träger des ganzen Bauwerks und der korinthischen Säulen, die seine Zierde bilden."

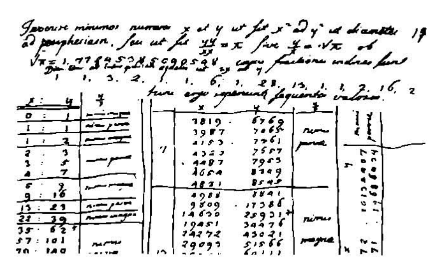
Solche „korinthischen Säulen" waren für den König Männer mit „Esprit", Meister im geistreichen Geplauder, meist ohne sonderliche Tiefe. Hiermit konnte nun *Euler* freilich nicht dienen. Die Folge war, daß ihm die Präsidentschaft der Akademie, auf die er sich begründete Hoffnung machte, vorenthalten wurde. Auch fühlte er sich in seinem schweizerischen Freiheitsbegriff durch die ständigen despotischen Eingriffe des Königs in das akademische Leben gekränkt. Allmählich fing er daher an, seine Rückkehr nach Petersburg vorzubereiten. 1766 verließ er dann mit seiner Familie Berlin, um an der alten Stätte seiner Wirksamkeit wieder tätig zu werden.

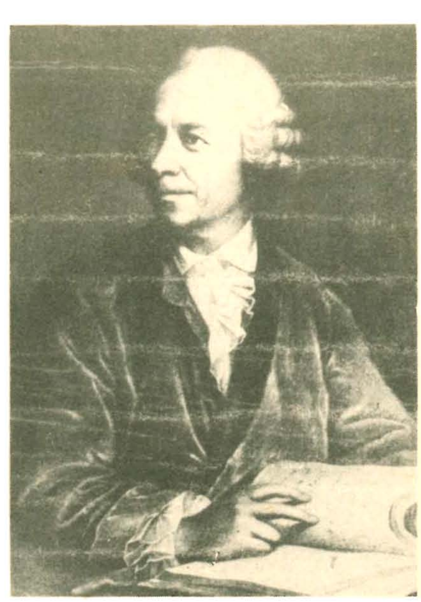
Pionier der deutsch-russischen Zusammenarbeit

Die Beziehungen zu Petersburg hat *Euler* in den 25 Jahren seiner Arbeit in Berlin nie abgebrochen. Zwar beeinträchtigte der Siebenjährige Krieg 1756/63 die Verbindung zeitweise beträchtlich, aber sie hörte praktisch niemals ganz auf.

Sein kurz nach dem Eintreffen in Berlin gegebenes Versprechen, er werde auch von hier aus mit allen Kräften die Interessen der Petersburger Akademie fördern, hat *Euler* eingelöst. Seine umfangreiche Korrespondenz mit maßgeblichen Mitgliedern und Mitarbeitern der Akademie in Petersburg legt ein beredtes Zeugnis dafür ab. *Euler* arbeitete von Berlin aus weiter an den Schriften der russischen Akademie mit und stellte ihr neben zahlreichen Abhandlungen und Rezensionen

Berechnung von $\sqrt{\pi}$ aus der Kettenbruchentwicklung (undatierte Notiz Eulers)





auch große Werke zur Veröffentlichung zur Verfügung. Seine Produktivität war so gewaltig, daß es beide Akademien in Berlin und in Petersburg nicht schafften, alles, was aus seiner Feder hervorging, zu drucken. Er diskutierte in seinen Briefen an die Freunde in Rußland wissenschaftliche Fragen auf den Gebieten der Mathematik, Astronomie, Mechanik, Physik, Chemie, Geographie, Kartographie und machte sie so mit seinem Erkenntnisstand vertraut. Er nahm Einfluß auf die Stellung von Preisaufgaben, die damals eine entscheidende Rolle bei der zielgerichteten Förderung des wissenschaftlichen Fortschritts spielten, indem er Themen vorschlug und bei der Beurteilung der eingegangenen Preisschriften mitwirkte. Er bemühte sich um die Erfüllung von Wünschen nach Literatur und wissenschaftlichen Geräten. Er empfahl talentierte Nachwuchskräfte.

Besonders hervorhebenswert sind seine Aktivitäten zur Ausbildung junger russischer Wissenschaftler. 1743/44 nahm er den späteren Akademiepräsidenten *K. G. Rasumowski* bei sich in Berlin auf und unterrichtete ihn privat. Ihm folgten 1752/56 der Mathematiker *S. K. Kotelnikow*, 1754 der Mathematiker *M. Sofronow*, 1754/56 der Astronom und spätere Vizepräsident *S. J. Rumowski*. In diesem Zusammenhang ist auch die Ermutigung zu nennen, die *Euler* in seinen Briefen den physikalischen und chemischen Arbeiten des genialen *M. W. Lomonossow* zuteil werden ließ. Umgekehrt hielt *Euler*, nach Petersburg zurückgekehrt, seine Beziehungen zur Berliner Akademie aufrecht und ließ sie nicht das entgelten, was er dem König von Preußen gegenüber fühlte. So ist es vollauf begründet, daß 1957, als die Akademien der Wissenschaften der DDR und der UdSSR gemeinsam in Festveranstaltungen und in Gedenkschriften des 250. Geburtstages *Leonhard Eulers* (15. 4. 1707 bis 18. 9. 1783) gedachten, an den hervorragenden Platz erinnert wurde, den er in den Traditionen freundschaftlicher Zusammenarbeit zwischen den Wissenschaftlern der DDR und der UdSSR einnimmt.

Unglaubliche Fruchtbarkeit

Leonhard Euler war wohl der produktivste Mathematiker, den es je gegeben hat. Und oft ist die Frage gestellt worden, wie seine schier unglaubliche Fruchtbarkeit eigentlich zu erklären ist.

Nun, man hat mit Recht gesagt, daß *Euler* rechnete, so, wie andere atmen. Seine großartige Begabung wurde ergänzt durch unermüdlichen Fleiß, durch ein phänomenales Gedächtnis und durch einen sicheren Blick für die Anwendung der Mathematik in der Praxis. Hinzu kam noch eine ungewöhnliche Konzentrationsfähigkeit. „Ein Kind auf den Knien, eine Katze auf dem Rücken, so schrieb er seine unsterblichen Werke", hat ein Zeitgenosse, der ihn gut kannte, überliefert. Obwohl *Euler* in seinen letzten Lebensjahren in Petersburg nahezu blind und taub war, blieb er ohne Unterlaß tätig. Mit dem letzten Rest der ihm verbliebenen schwachen Sehkraft schrieb er die Formeln mit großen Lettern auf eine auf dem Tisch liegende Schiefertafel und diktierte den Text aus seinem Erinnerungsvermögen.

Als *Euler* 1783 ruhmgekrönt starb, hatte er ein weiteres Versprechen erfüllt: der Petersburger Akademie so viele Abhandlungen zu hinterlassen, daß sie zu ihrem Druck noch 20 Jahre benötigen werde. Dieser Zeitraum reichte bei weitem nicht aus. Auch heute ist die Gesamtausgabe seiner Werke, die in Basel erscheint, erst zu rund 90 Prozent publiziert.

Euler hinterließ ein Werk, das 72 Bände im Lexikonformat mit über 30000 Druckseiten füllen wird. Hinzu kommen mehrere Tausend Seiten Manuskripte und Entwürfe, Notizbücher mit über 3000 Seiten und ein Briefwechsel, von dem in der genannten Gesamtausgabe ein Band vorliegt und der etwa 12 Bände mit über 7000 Druckseiten in Anspruch nehmen wird. Das Zentrale Archiv der Akademie der Wissenschaften der DDR und das Hugenottenmuseum in Berlin bergen viele aussagekräftige Belege für *Eulers* Leben und Wirken in dem Vierteljahrhundert, das er hier verbracht hat. Diese archivalischen Schätze ergänzen den Hauptteil seines Nachlasses, der sich im Leningrader Archiv der Akademie der Wissenschaften der UdSSR befindet. *Leonhard Eulers* Lehrbücher der Differential- und der Integralrechnung sowie seine „Vollständige Anleitung zur Algebra" haben mehrere Generationen von Wissenschaftlern und Technikern in die Mathematik eingeführt. Das Eulersche Additionstheorem der elliptischen Integrale ist auch in unserer Zeit für die Analysis von Bedeutung, die Euler-Lagrangesche Differentialgleichungen für Physiker, die Eulersche Funktion, das Eulersche Kriterium oder die Eulersche Produktdarstellung für die Zahlentheoretiker.

An die 50 Sätze, Formeln, Funktionen, Gleichungen und andere mathematische Begriffe sind noch heute mit *Eulers* Namen verbunden; das mathematische Instrumentarium der Praktiker auf vielerlei Gebieten trägt wie vor 200 Jahren in wesentlichen Teilen Eulersche Züge.

Die Pflege, Erschließung und schöpferische Aneignung seines Erbes verbinden Wissenschaftshistoriker der UdSSR und der DDR in freundschaftlichem Zusammenwirken.

Kurt Reinhard
aus: Magazin 3/78

VEB Fachbuchverlag Leipzig 1978
131 Seiten, 10 Bilder, 12 cm × 19 cm,
Broschur (Glanzfolie) Preis DDR: 4,80 M
Bestell-Nr. 546 350 0

Mit diesem Büchlein erhält der Leser keine Bedienungsanleitung, sondern einen Ratgeber, in dem erläutert wird, wie man seinen Taschenrechner sinnvoll einsetzen kann. An Hand vieler Beispiele wird vorgeführt, wie die einzelnen Aufgabentypen optimal gelöst werden können. Besonderes Augenmerk wird der erreichbaren Rechengenauigkeit gewidmet. Da alle Betrachtungen weitgehend rechnerunabhängig durchgeführt werden, wendet sich die Broschüre an die Besitzer sowohl ganz einfacher als auch komplizierter Typen mit Sondertasten und Speichern.

Leserkreis: Lehrer und Schüler an allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen und Berufsschulen, Lehrkräfte und Studenten an Fach-, Ingenieur- und Ingenieurhochschulen sowie Hochschulen, Techniker, Ingenieure, Besitzer von Taschenrechnern.

Das Buch steht in den Bibliotheken und Büchereien zur Verfügung.

Aus dem Inhalt: Vom Abakus zum elektronischen Taschenrechner – Der Aufbau elektronischer Taschenrechner – Zur Rechengenauigkeit elektronischer Taschenrechner – Das Rechnen mit elektronischen Taschenrechnern – Anhang: Gebräuchliche Bezeichnungen auf elektronischen Taschenrechnern, einige wichtige Formeln, Zusammenstellung einiger Näherungsformeln mit Angabe von Fehlerschranken, wichtige Konstanten – Sachwortverzeichnis

ARBEITSGEMEINSCHAFTEN IM BLICKPUNKT

Nacheifernswertes

Anläßlich seines zehnjährigen Bestehens führte der *Bezirksklub Junger Mathematiker* des Bezirkes Cottbus im Jahre 1977 ein einwöchiges Spezialistenlager in der Kreisstadt Herzberg/Elster durch. Das Programm war sehr vielseitig. Neben der Beschäftigung mit der Mathematik, die im Vordergrund stand, gab es interessante und abwechslungsreiche Veranstaltungen. So nahm z. B. der Chefredakteur der mathematischen Schülerzeitschrift *alpha* anläßlich des 200. Geburtstages des bedeutendsten und schöpferischsten Mathematikers seiner Zeit, *Carl Friedrich Gauß*, eine Ehrung durch einen Vortrag über diesen Wissenschaftler vor. Dr. *Paulin* von der Humboldt-Universität Berlin und Dr. *Küchler* von der Technischen Universität Dresden trugen Interessantes aus ihrer Tätigkeit als Mathematiker vor. Auf einer Festveranstaltung würdigten der Stellvertreter des Bezirksschulrates und der Leiter des *Bezirksklubs Junger Mathematiker* die Leistungen und Verdienste sowohl der Schüler als auch der Pädagogen. Höhepunkte dieser erlebnisreichen Tage waren für die Teilnehmer des Spezialistenlagers Fahrten nach Torgau und Potsdam.

Das Besondere dieses Lehrgangs bestand darin, daß jedes Klubmitglied (Schüler verschiedener Klassenstufen) aufgerufen worden war, eine eigene Aufgabe bzw. eine veränderte oder erweiterte aus angegebener Quelle stammende Aufgabe einzureichen. Die Preisträger dieses Aufgabenwettbewerbs trugen ihre Aufgabe selbst vor und stellten ihren Lösungsvorschlag zur Diskussion. Aus der Fülle der eingegangenen Aufgaben wollen wir nun einige vorstellen.

Aufgabe des Schülers Wolfram Würbel, EOS Forst, Klasse 11:

Man beweise, daß die Zahl $z=3^{8n+3}+22\cdot 3^{4n+1}+7$ für alle natürlichen Zahlen n durch 100 teilbar ist.

Lösung:

Aus $z=3^{8n+3}+22\cdot 3^{4n+1}+7$ folgt durch äquivalente Umformungen

$z=3^{8n+3}+3^{4n+1}+21\cdot 3^{4n+1}+7,$

$z=3^{4n+1}(3^{4n+2}+1)+7(3^{4n+2}+1),$

$z=3\cdot 81^n(9\cdot 81^n+1)+7(9\cdot 81^n+1),$

$z=(9\cdot 81^n+1)(3\cdot 81^n+7).$

Für jede natürliche Zahl n endet 81^n auf die Ziffer 1.

Somit endet das Produkt $9\cdot 81^n$ auf die Ziffer 9, und die Summe $9\cdot 81^n+1$ endet auf die Ziffer 0.

Somit endet das Produkt $3\cdot 81^n$ auf die Ziffer 3, und die Summe $3\cdot 81^n+7$ endet auf die Ziffer 0.

Folglich ist das Produkt $z=(9\cdot 81^n+1)(3\cdot 81^n+7)$ für alle natürlichen Zahlen n durch $10\cdot 10$, also durch 100 teilbar.

Aufgabe des Schülers Olaf Gutschker, 1. EOS Cottbus, Kl. 9:

Gegeben seien zwei Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ mit den Längen a und b und $a \neq b$. Es ist eine Strecke der Länge

$$x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

zu konstruieren, ohne die im Höhensatz für rechtwinklige Dreiecke formulierte Eigenschaft zu nutzen.

Lösung:

Wir zeichnen ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Katheten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ die Längen a und b haben. Die Länge der Hypotenuse $\overline{AB}$ ist dann $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

Wir halbieren die Strecke $\overline{AB}$; der Halbierungspunkt sei M. Die Länge der Strecke $\overline{AM}$ ist dann $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$.

Wir zeichnen um M mit dem Radius $\overline{AM}$ den Kreis k (Thaleskreis) und konstruieren die Senkrechte zu AB durch M, die den Kreis k in N schneiden möge, und wir verbinden A mit N.

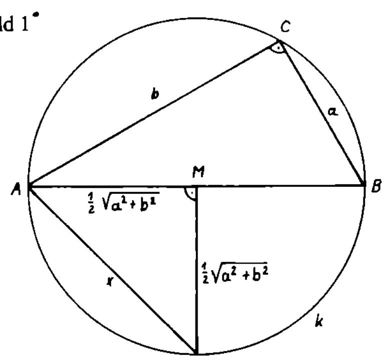
Wegen $\overline{AM}=\overline{MN}$ und $\sphericalangle AMN=90°$ gilt im rechtwinkligen Dreieck ANM somit

$\overline{AN}^2=\overline{AM}^2+\overline{MN}^2=2\cdot\overline{AM}^2$ bzw.

$x^2=2\cdot\frac{1}{4}\cdot(a^2+b^2)$, also

$$x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Bild 1*



Aufgabe des Schülers Jörg Hortig, 19. OS Cottbus, Kl. 9b:

Für welche natürlichen Zahlen $n \geq 1$ wird die Gleichung $10\cdot(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$ $=3\cdot(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)$ erfüllt?

Lösung:

Wegen $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ $=\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)(2n+1)$ und

$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ gilt

$10\cdot\frac{1}{6}\cdot n(n+1)(2n+1)=3\cdot\frac{1}{4}\cdot n^2(n+1)^2,$

$\frac{5}{3}\cdot(2n+1)=\frac{3}{4}\cdot n(n+1),$

$20(2n+1)=9n(n+1),$

$40n+20=9n^2+9n,$

$9n^2-31n-20=0,$

$n^2-\frac{31}{9}\cdot n-\frac{20}{9}=0,$

$n_{1,2}=\frac{31}{18}\pm\frac{41}{18}$, also $n_1=4$ und $n_2=-\frac{5}{9}$ (entfällt, da keine natürliche Zahl).

Nur die natürliche Zahl 4 erfüllt die gegebene Gleichung. Probe:

$10\cdot(1^2+2^2+3^2+4^2)=3\cdot(1^3+2^3+3^3+4^3),$

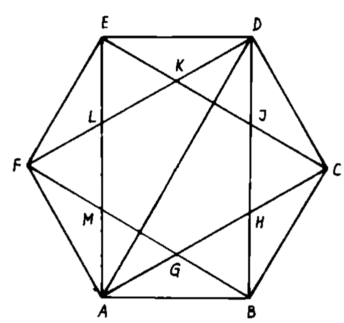
$10\cdot(1+4+9+16)=3\cdot(1+8+27+64),$

$10\cdot 30=3\cdot 100=300.$

Aufgabe des Schülers Jens-Uwe Schlüßler, EOS „Artur Becker" Cottbus, Klasse 9/3:

Gegeben sei ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$. Durch die Schnittpunkte G, H, J, K, L, M der Diagonalen $\overline{AC}$, $\overline{AE}$, $\overline{BD}$, $\overline{BF}$, $\overline{CE}$, $\overline{DF}$ wird ein Sechseck $GHJKLM$ festgelegt. Es ist der Quotient aus den Flächeninhalten dieser beiden Sechsecke zu bestimmen.

Bild 2



Lösung:

Figuren, die bei einer ebenen Drehung um einen Winkel α um einen Punkt P zur Deckung gebracht werden können, heißen radialsymmetrisch. Alle regelmäßigen Vielecke haben diese Eigenschaft. Beim regelmäßigen Sechseck beträgt die Größe dieses Drehwinkels 60°. Bei Drehung des regelmäßigen Sechsecks $ABCDEF$ um den Mittelpunkt M seines Umkreises um den Winkel $\phi=60°$ wird die Figur mit sich selbst zur Deckung gebracht. Deshalb ist das Sechseck $GHJKLM$ ebenfalls regelmäßig. Wegen $\sphericalangle DEF=120°$ und $\sphericalangle KEL=60°$ gilt $\sphericalangle FEL=(120°-60°):2$ $=30°$. Ferner gilt $\sphericalangle EFL=\sphericalangle FEL=30°$ und somit $\sphericalangle ELF=120°$. Es sei $\overline{EF}=s$ und $\overline{EJ}=x$, dann gilt

$$\frac{x}{s}=\frac{\sin 30°}{\sin 120°}=\frac{\sin 30°}{\sin 60°}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Die Flächeninhalte ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten. Deshalb gilt wegen $\overline{EL}=\overline{LK}=x$

$$\frac{A_x}{A_s}=\frac{x^2}{s^2}=\frac{1}{3}.$$

Der Flächeninhalt des Sechsecks $ABCDEF$ ist dreimal so groß wie der Flächeninhalt des Sechsecks $GHJKLM$.

Aufgabe des Schülers Roland Kaschner, EOS Lauchhammer, Kl. 12:

In einem Park mit ebenem Gelände befindet sich eine Skulptur mit der Höhe h_2, die auf einem Sockel mit der Höhe h_1 steht. In welcher Entfernung e vom Fußpunkt des Sockels muß ein Betrachter mit der Augenhöhe h_3 stehen, damit er die Skulptur unter maximalem Blickwinkel sieht?

a) Es ist e durch h_1, h_2 und h_3 auszudrükken!

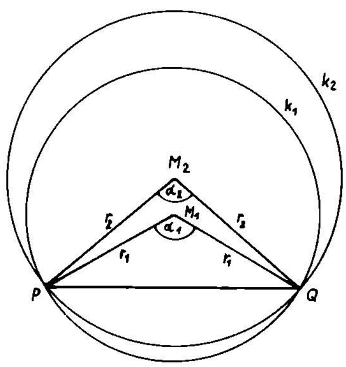
b) Welche Größe hat der maximale Blickwinkel ϕ, wenn $h_1=2{,}00$ m, $h_2=1{,}80$ m und $h_3=1{,}60$ m betragen?

Lösung:

Für den Umkreis k des Dreiecks CDE ist der Winkel $\sphericalangle CED=\phi$ Peripheriewinkel über der konstanten Sehne $\overline{CD}$. Der Winkel ϕ ist dann am größten, wenn der Kreis k die Parallele zu AB durch E zur Tangente hat.

Begründung: Durch die Endpunkte P und Q einer konstanten Strecke $\overline{PQ}$ lassen sich beliebig viele Kreise konstruieren. Mit wachsendem Radius nimmt der zugehörige Zentriwinkel ab.

Bild 3



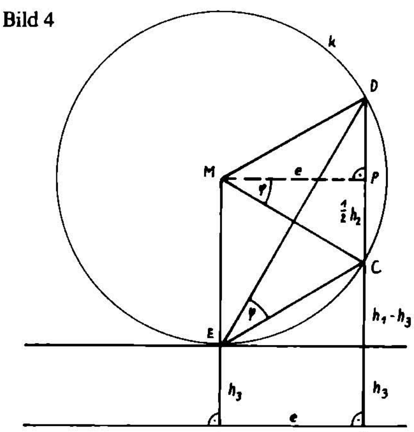
Der Punkt E muß auf der Parallelen zu AB im Abstand h_3 wegen der konstanten Augenhöhe liegen. Zu jedem Punkt E auf dieser Parallelen, der nicht auf der Geraden CD liegt, existiert ein Kreis, der durch C, D und E geht. Von diesen Kreisen besitzt derjenige Kreis den kleinsten Radius, der die Parallele zu AB durch E zur Tangente hat. Alle übrigen Kreise durch die Punkte C, D und E würden diese Parallele in zwei Punkten schneiden; sie hätten damit einen größeren Radius und demzufolge einen kleineren zugehörigen Zentriwinkel.

Nun gilt $\overline{ME}=\overline{MC}=\frac{1}{2}\cdot h_2+h_1-h_3$.

Im rechtwinkligen Dreieck MCP gilt somit

$$e^2=\left(\frac{1}{2}\cdot h_2+h_1-h_3\right)^2-\left(\frac{1}{2}\cdot h_2\right)^2,$$

Bild 4



$$e^2=\frac{1}{4}h_2{}^2+h_2(h_1-h_3)+(h_1-h_3)^2-\frac{1}{4}h_2{}^2,$$

$$e^2=(h_1-h_3)(h_2+h_1-h_3),$$

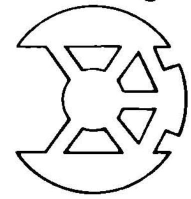
$$e=\sqrt{(h_1-h_3)(h_1+h_2-h_3)}.$$

Wegen $\sphericalangle CED=\sphericalangle CMP=\phi$ gilt ferner

$$\sin\phi=\frac{h_2}{2r}=\frac{h_2}{h_2+2h_1-2h_3}=\frac{9}{13},$$

also $\phi\approx 43{,}8°$.

XI ISTAM'78 beograd



4. april

Vom 31.3. bis 3.4.78 fand in Beograd anläßlich des Studententages an der Naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät der Universität ein Wettbewerb von Mathematikstudenten verschiedener Universitäten statt (XI. Savezno i IV. Internacionalno studentske takmicenije is matematike = XI. ISTAM = XI. Nationaler und IV. Internationaler Studentenwettbewerb in Mathematik). Es beteiligten sich hieran 16 Mannschaften von sieben jugoslawischen Universitäten sowie von Universitäten in Budapest, Szeged, Prag, Wien und erstmalig eine Mannschaft aus der DDR, nämlich von der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock. Die Vertretungen setzten sich jeweils aus drei Studenten und einem Betreuer zusammen. Die Rostocker Universität war vertreten durch Prof. Dr. Engel als Delegationsleiter sowie die Studenten des 2. Studienjahres Konrad Engel, Uwe Lämmel, Jürgen Roßmann. Die Studenten des 1. und 2. Studienjahres hatten in vier Stunden vier Aufgaben aus der Analysis, analytischen Geometrie und Algebra zu lösen, während

sich die Studenten der höheren Studienjahre mit Problemen (teilweise nach Wahl) aus den Gebieten Funktionalanalysis, Programmierung, Gew. Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Höhere Algebra, Topologie und Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigen mußten.

In der Mannschaftswertung belegte unsere Vertretung hinter den Vertretungen aus Budapest, Wien, Prag I und Ljubljana den 5. Platz, wobei Konrad Engel mit einem 4. Platz in der Einzelwertung (von 31 Teilnehmern) an dieser Plazierung den größten Anteil hatte. Nach der Klausur am 1.4. verlebten die Teilnehmer noch zwei erlebnisreiche Tage in der Hauptstadt der SFR Jugoslawien.

Zum Abschluß äußerten die Veranstalter, die Studenten der Beograder Naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät, den Wunsch, im nächsten Jahr wieder eine Mannschaft der DDR zum Wettbewerb begrüßen zu können.

J. Roßmann

Im Emblem der XI. ISTAM – als Skizze das Königsberger Brückenproblem

Ein rationalisiertes Sieb zum Feststellen von Primzahlen
Teil 2

Beweis: Ist a_0 die Einerziffer der Zahl a, a_1 ihre Zehnerziffer, a_2 ihre Hunderterziffer usw., so läßt sie sich darstellen als

$$a = a_0 + 10 \cdot a_1 + 10^2 \cdot a_2 + \ldots + 10^n \cdot a_n$$
$$= (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (9a_1 + 99a_2 + \ldots + [10^n - 1]a_n).$$

In der ersten Klammer steht nun die Quersumme von a, und die in der zweiten Klammer stehende Zahl ist gewiß durch 3 teilbar. Daraus ergibt sich folgende Übersicht:

	Die Quersumme von a läßt bei Division durch 3		
	den Rest 0	den Rest 1	den Rest 2
a gerade	S-Zahl	g_0-Zahl	g_u-Zahl
a ungerade	D-Zahl	Mo-Zahl	Mu-Zahl

Diese Tabelle kann man zur Vorbereitung des Siebens in einem Bereich großer natürlicher Zahlen benutzen, z. B. im Zahlenraum von 72000 bis 74000.

4. Das Rechnen mit Restklassen

Wir wollen die Klassen aller natürlichen Zahlen, die bei Division durch 6 den Rest a lassen, kurz mit $[a]$ bezeichnen. Die sechs Restklassen, in die die Menge der natürlichen Zahlen bei Division durch 6 zerfällt, sind dann [0], [1], [2], [3], [4], [5]. Das sind gerade diejenigen Klassen, die wir früher (in dieser Reihenfolge) S-Zahlen, Mo-Zahlen, g_u-Zahlen, D-Zahlen, g_0-Zahlen bzw. Mu-Zahlen genannt haben.

Nun zeigen wir:

In welcher Restklasse die Summe zweier natürlicher Zahlen liegt, hängt nur davon ab, aus welchen Restklassen die Summanden stammen. (9)

Beweis: Ist $6m+r$ irgendeine Zahl aus der Restklasse $[r]$, $6n+s$ irgendeine Zahl aus der Restklasse $[s]$ $(0 \leqq r \leqq 5,\ 0 \leqq s \leqq 5)$, so liegt ihre Summe $6(m+n)+(r+s)$ stets in der Restklasse $[r+s]$, falls $r+s<6$, bzw. in der Restklasse $[r+s-6]$, falls $r+s \geqq 6$, denn dann gilt $6(m+n)+(r+s) = 6(m+n\,1)+(r+s-6)$.

Die Beziehung (9) gestattet, von einer Addition der Restklassen zu sprechen, für die man folgende Additionstafel berechnet.

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]

Tafel 3: Additionstafel der Restklassen

Aus dieser Tafel liest man z. B. ab: $[1]+[4] = [5]$, was in der früheren Sprechweise bedeutet: Addiert man zu einer Mo-Zahl eine g_0-Zahl, so ist die Summe stets eine Mu-Zahl. Oder, da eine g_0-Zahl stets das Doppelte einer Mu-Zahl ist ($[4]=2[5]$): Die Summe aus einer Mo-Zahl und dem Doppelten einer Mu-Zahl ist stets eine Mu-Zahl.

Aufgabe 1

Das Wievielfache einer Mu-Zahl muß man zu einer D-Zahl addieren, um als Summe eine Mu-Zahl zu erhalten? (das Vierfache)

Aufgabe 2

Das Wievielfache einer Mo-Zahl muß man von einer S-Zahl subtrahieren, um als Differenz eine Mo-Zahl zu erhalten? (das Fünffache)

Für die Multiplikation können wir einen zu (9) gleichartigen Satz aussprechen.

Aufgabe 3

Formuliere und beweise einen zu (9) analogen Satz über die Multiplikation von Restklassen! Stelle eine Multiplikationstafel auf!

Für unsere Untersuchungen ist folgende Beziehung wichtig:

Das Quadrat einer Primzahl ist stets eine Mo-Zahl. (10)

Beweis: Alle Primzahlen sind Mu- bzw. Mo-Zahlen, d. h. gehören den Restklassen [1] bzw. [5] an, und es gilt nach Aufgabe 3: $[1]^2 = [1]$ und $[5]^2 = [1]$.

5. Das Löschen auf der Mo- und der Mu-Säule

Laut (7) brauchen wir uns bei der Suche nach Primzahlen nur noch auf der Mo- und der Mu-Säule hin und her zu bewegen. So lassen wir die übrigen vier Restklassen ganz aus dem Spiele. Damit werden die Primzahlen 2 und 3 automatisch ihrer Löschfunktion enthoben, weil ihre n-fachen nur auf der g_0-, g_u-, D- oder S-Säule liegen können. Somit löschen im Zahlenraum bis $R=100$ laut (2) nur noch die Primzahlen 5 und 7, und laut (1) beginnt deren Löschwirkung bei $5^2=25$ bzw. bei $7^2=49$. Beide Quadrate liegen laut (1) auf der Mo-Säule.

Wie aus Tafel 4 ersichtlich, bilden die Zahlen jeder Säule eine arithmetische Folge mit der Differenz $d=6$. Gelöschte Zahlen sind gestrichen; die Löschzahl ist daruntergesetzt. Gelöscht sind entsprechend unserer Vorüberlegung auf der Mo-Säule $5^2=25$ und $7^2=49$, dazu die größeren n-fachen von 5 (nämlich 55 und 85) und von 7 (nämlich 91), auf der Mu-Säule nur n-fache, die größer als die jeweiligen Quadrate der Löschzahlen sind (nämlich 35 65 95; 77).

Wir sehen den Löschvorgang auf der Mo-Säule ein wenig genauer an. Für $p=5$ war uns mit $p^2=25$ eine Anfangszahl gegeben. Gehen wir von ihr 5 Schritte – also p Schritte – aufwärts, treffen wir auf die nächste durch $p=5$ gelöschte Zahl, nämlich auf 55, und auf die übernächste, nämlich auf 85, nach wiederum $p=5$ Schritten. Für $p=7$ sind es von $p^2=49$ bis zur nächstgrößeren durch $p=7$ gelöschten Zahl, nämlich bis zur 91, wiederum $p=7$ Schritte.

Von einer durch p gelöschten Zahl bis zur nächstgrößeren durch p gelöschten Zahl muß man auf einer Säule p Schritte gehen. (11)

Beweis: Wurde mittels der Primzahl p eine Zahl der Mo-Säule gelöscht und ist p selbst eine Mo-Zahl, so hat man nach dem kleinsten positiven Vielfachen xp von p zu fragen, das zur gelöschten Mo-Zahl addiert wiederum eine Mo-Zahl ergibt. Da die Mo-Säule genau alle Zahlen der Restklasse [1] enthält, ist also die kleinste positive Lösung der Gleichung

$x[1]+[1]=[1]$ zu bestimmen, man erhält $x=6$.

Für die anderen Fälle, in denen p eine Mu-Zahl ist bzw. die Mu-Säule betrachtet wird, ergeben sich nach denselben Überlegungen die Gleichungen $x[5]+[1]=[1]$; $x[1]+[5]=[5]$ bzw. $x[5]+[5]=[5]$, deren kleinste positive Lösung stets $x=6$ ist. Das bedeutet: Der Abstand zweier auf derselben Säule durch p gelöschter Zahlen ist $6p$, und da die Säulen arithmetische Folgen mit der Differenz 6 sind, trifft man – von einer durch p gelöschten Zahl ausgehend – nach p Schritten auf die nächste durch p zu löschende Zahl.

Mo	(1)	7	13	19	~~25~~	31	37	43	~~49~~	~~55~~	61	67	73	79	~~85~~	~~91~~	97
					5				7	5					5	7	
Mu	5	11	17	23	29	~~35~~	41	47	53	59	~~65~~	71	~~77~~	83	89	~~95~~	
						5					5		7			5	

Tafel 4: Die *Mo*- und die *Mu*-Säule im Zahlenraum bis $R = 100$ nach der Löschung

6. Die Brückenzahl *b*

Da laut (1) und (10) sämtliche Primzahlen p ihren Löschprozeß mit p^2 auf der *Mo*-Säule beginnen, erhebt sich die Frage:

Welche Zahl auf der *Mu*-Säule ist die kleinste durch p gelöschte Zahl? Wir versuchen, von unserem Ausgangspunkt p^2, einer *Mo*-Zahl, die Brücke zu schlagen, um auf der *Mu*-Säule ebenfalls eine Anfangszahl für den Löschvorgang zu finden, die wir als Brückenzahl b bezeichnen.

Wir müssen also die kleinste positive Lösung der Gleichung $[1]+x[1]=[5]$ bzw. $[1]+y[5]=[5]$ bestimmen, je nachdem ob die Löschzahl p der Restklasse $[1]$ bzw. $[5]$ angehört.

Man erhält $x=4$ und $y=2$; das besagt:

Die erste auf der Mu-Säule durch die Primzahl p gelöschte Zahl ist $b_0=p^2+4p$, falls p aus der Restklasse $[1]$ ist (d. h. eine p_0-Zahl ist), und ist $b_u=b^2+2p$, falls p aus der Restklasse $[5]$ (d. h. eine p_u-Zahl) ist. (12)

7. Vorausbestimmung der zu erwartenden Anzahl von Primzahlen im Zahlenraum von 1 bis *R* (im Beispiel: $R = 200$)

Die Anordnung der Zahlen in *M*-Säulen und der auf ihnen ablaufende relativ einfache Löschrhythmus, dessen Wesen hauptsächlich durch (1), (10), (11) und (12) aufgezeigt ist, setzt uns instand, die Anzahl der Primzahlen $p \geqq 5$ im Zahlenraum bis R vorauszubestimmen, d. h. bevor wir sie im einzelnen ermitteln.

Dazu bedarf es folgender Schritte:

1. Bestimmung der Löschzahlen laut (2)
Im Beispiel ist $\sqrt{R}=\sqrt{200}\approx 14$; Löschzahlen sind somit 5 7 11 13.

2. Bestimmung der Anzahl A_s der *S*-Zahlen
Auf dem Zahlenstrahl treffen wir nach jeweils sechs Schritte f auf eine *S*-Zahl. Danach ist die Anzahl A_s der *S*-Zahlen gleich dem ganzen Anteil des Quotienten $\frac{R}{6}$.

3. Bestimmung der Anzahl A_m der *M*-Zahlen
Sie beträgt hier 66, da jeder *S*-Zahl ober- und unterwärts eine *M*-Zahl angelagert ist. Allgemein ist $A_m=2A_s$, falls $\frac{R}{6}>s$, und $A_m=2A_s-1$, falls $\frac{R}{6}=s$.

4. Bestimmung der Anzahl der Löschungen (Anschläge)
Wenn wir die Löschungen mit der Schreibmaschine ausführen, können wir dafür den anschaulicheren Ausdruck „Anschläge" verwenden.

4.1. Anzahl der Anschläge auf der *Mo*-Säule
Die kleinste Zahl, die durch die Primzahl p auf der *Mo*-Säule gelöscht wird, ist – laut (1) und (10) – p^2. Bis zum nächsten Anschlag geht man – laut 11 – p Schritte. Da wir auf einer arithmetischen Folge mit der Differenz $d=6$ vorwärtsschreiten, umfaßt der Raum von einem Anschlag zum anderen $6p$ natürliche Zahlen, die nicht auf der Säule verzeichneten eingerechnet. Danach zerfällt der Raum von p^2 bis R in $\left[\frac{R-p^2}{6p}\right]$ solcher Anschlagsräume, an deren oberem Ende ein Anschlag liegt $\left(\text{dabei bezeichnet } \left[\frac{R-p^2}{6p}\right] \text{ den ganzen Anteil des Quotienten } \frac{R-p^2}{6p}\right)$. Der Anschlag für p^2 liegt aber am unteren Ende eines solchen Anschlagraumes und ist deshalb in der Formel noch nicht berücksichtigt. Die tatsächliche durch p bewirkte Anzahl der Anschläge A_0 auf der *Mo*-Säule ist

$$A_0=\left[\frac{R-p^2}{6p}\right]+1. \qquad (13)$$

Beispielsweise bewirkt die Primzahl $p=7$ auf der *Mo*-Säule im Zahlenraum bis $R=200$

$$A_0=\frac{200-49}{42}+1=3+1=4 \text{ Anschläge}$$

(nämlich: 49 91 133 175).

4.2. Anzahl der Anschläge auf der *Mu*-Säule
Da auf der *Mu*-Säule die kleinste durch eine Primzahl p gelöschte Zahl die Brückenzahl b ist, so müssen wir – laut (12) – bei p_0- und bei p_u-Zahlen unterschiedlich verfahren. Unter Zugrundelegung der Überlegungen für (13) erhalten wir für die Anzahl A_{uo} (A_{uu}) der durch p_o (p_u) auf der *Mu*-Säule bewirkten Anschläge:

$$A_{uo}=\left[\frac{R-(p_o{}^2+4p_o)}{6p}\right]+1$$

$$A_{uu}=\left[\frac{R-(p_u{}^2+2p_u)}{6p}\right]+1. \qquad (14)$$

4.3. Berechnung der Anzahl der Anschläge durch die einzelnen Löschzahlen (im Zahlenraum bis $R=200$):

$p_u=$ 5 (laut 13) $\left[\frac{200-25}{30}\right]+1=6$

(laut 14) $\left[\frac{200-35}{30}\right]+1=6$

$p_o=$ 7 (laut 13 siehe oben!) 4

(laut 14) $\left[\frac{200-77}{42}\right]+1=3$

$p_u=11$ (laut 13) $\left[\frac{200-121}{66}\right]+1=2$

(laut 14) $\left[\frac{200-143}{66}\right]+1=1$

$p_o=13$ (laut 13) $\left[\frac{200-169}{78}\right]+1=1$

(laut 14 kein Anschlag, da $b>R$)

Gesamtzahl der Anschläge $\underline{\underline{23}}$.

Man ist jetzt versucht, als Anzahl der Primzahlen die Differenz zwischen der Anzahl der *M*-Zahlen und der Anzahl der Anschläge anzunehmen. Jedoch wurde die *Mo*-Zahl 175 zweimal angeschlagen, nämlich als n-faches von 5 und von 7. Dies sieht fast wie ein belangloser, leicht zu korrigierender Schönheitsfehler aus, ist aber ein Vorgang von außerordentlicher Wichtigkeit: 7 „begegnet" 5. Im Zahlenraum bis $R=100$ findet keine solche „Begegnung" statt, im Zahlenraum bis $R=200$ diese einzige, und mit wachsendem R nimmt die Anzahl der Begegnungen erstens zu, und zweitens wird der Vorgang komplizierter, indem Mehrfachbegegnungen stattfinden (wie z. B. bei der Märchenzahl 1001 $=7\cdot 11\cdot 13$). Die Anzahl G der gelöschten Zahlen ist also nicht gleich der Anzahl der Anschläge, sondern sie ist die Differenz zwischen der Anzahl A der Anschläge und der Anzahl B der Begegnungen:

$$G=A-B \qquad (15)$$

und die Anzahl A_p der Primzahlen die Differenz zwischen der Anzahl A_m der *M*-Zahlen und der Anzahl G der gelöschten Zahlen:

$$A_p=A_m-G=A_m-(A-B)$$
$$=A_m+B-A. \qquad (16)$$

Unter Einsetzung der oben errechneten Zahlen ergibt dies für den Zahlenraum bis $R=200$:

$$A_p=66+1-23=44.$$

Im Zahlenraum bis $R=200$ sind 44 Primzahlen $p\geqq 5$ zu erwarten.

8. Das Löschen im Zahlenraum bis $R = 200$ bei Darstellung der *M*-Zahlen als Punkte

Wenn man die *M*-Zahlen durch Punkte darstellt, wie dies aus Tafel 5 zu ersehen ist, so spart man Zeit, kommt mit kleineren Darstellungsräumen aus und schneidet die Anordnung besser auf das Anschlagen durch Mechanismen (wie z. B. durch die Schreibmaschinentaste) zu. Diese Vorteile werden um so wirksamer, je größer R ist. (Hiervon kann man sich an Hand von Tafel 7 überzeugen.)

Wegen der Rolle der natürlichen Zahl 6 ist es zweckmäßig, für die Kolonnen- und Zeilenköpfe *S*-Zahlen zu verwenden.

9. Hinweise zum Verständnis der Tafel 7

Wer sich mit der Handhabung der Tafel 5 vertraut gemacht hat, müßte imstande sein, die Tafel 7 zu lesen. Beide sind nach den gleichen Gesichtspunkten aufgebaut, jedoch geht in Tafel 7 alles sozusagen in größerem Maßstab vor sich. Aus Raummangel sind unter den Anschlägen keine Löschzahlen angegeben; für die Symbole q und b kann man sie der Tafel 6 entnehmen.

Tafel 7: Das Sieb bis $R = 10000$ (genauer bis $R_2 = 10080$)

	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360	
Mo	1 5	1 5	1 5	1 5	1 5	1 5	1 5	1 5	1 5	1 5	1 5	1 5	
Mu	5 9	5 9	5 9	5 9	5 9	5 9	5 9	5 9	5 9	5 9	5 9	5 9	
Mo	1...q	...q!	....!	!...!	q.!.!	...q!	.!..!	.!..!	.!!!!	...q!	!..!!	..!.!	
Mu	5....	b....	!.b..	!...!	!..b.	!!...	!..!!	!b...	!....	!.!.!	!..b!	!!...	360
Mo	q...!	!.!.!	.!..!	!..!!	!.!.!	!!.q!	..!!!	..!!!	....!	.!.!!	.!.!!	.!!.!	
Mu	!!!..	!.!!.	!.b..	!..!.	!.!..	!.!!!	!!...	b!...	!!.!!	!....	!!..!	!.!!.	720
Mo	!...!	..!.!	!.!!!	.!..!	q!..!	!..!!	!.!.!	!.!!!	q.!!!	..!.!	.!..!	.!..!	
Mu	!!!.!	!.!.!	!!.!.	!..!.	!!..!	!..!b	!.!!.	!...!	!...!	!!!..	!.!!.	!.!!!	1080
Mo	!..!!	!...!	!!.!.	.!!!!	.!.!!	..!.!	!!!.!	...!!	..!!!	!!!q!	.!!.!	!!..!	
Mu	b....	!!!!!	!.!.!	!...!	!!...	!!!!.	!!...	!..!.	!!!!!	!...!	!!!!.	!!...	1440
Mo	!...!	.!..!	!!!!!	.!..!	!.!.!	!.!.!	..!!!	!...!	q!..!	!!.!!	....!	!...!	
Mu	!.!!!	!....	!.b.!	!!!..	!.!.!	!....	!!.!!	!!.!!	!!.!.	!.!.!	!!!b!	!!.!!	1800
Mo	.!!!!	.!!q!	....!	!!!!!	!!.!!	.!!!!	!...!	..!.!	!!.!!	!!..!	!!.!!	...!!	
Mu	!.!.!	!!.!!	!..!.	!...!	!.!!.	!!!..	!!..!	!b.!.	!!!..	!..!.	!.!!.	!.!.!	2160
Mo	.!!.!	!!.q!	.!!.!	.!!.!	...!!	.!!!!	..!!!	....!	!!!!!	!.!!!	!..!!	!!.!.	
Mu	!!!!!	!!..!	!!..!	!!..!	!!!b.	!!!..	!..!!	!.!..	!...!	!..!.	!!.!!	!!!!!	2520
Mo	.!!.!	..!!!	!!.!.	!.!!!	!.!.!	....!	!...!	.!!.!	!.!!!	...q!	!!.!!	..!!!	
Mu	!.!..	!!!!.	!.!!.	!.!.!	!!..!	!!...	!.!!.	!.!.!	!!.!.	!.!!.	!!..!	!.!!.	2880
Mo	!.!!!	!.!!!	!!!!!	.!!!!	.!!.!	!.!.!	..!.!	!!!.!	.!!!!	!!..!	..!!!	!.!.!	
Mu	!!...	b!.!.	!!...	!!!!.	!.!.!	!.!!!	!!!..	!!!!.	!!.!!	!!.!!	!.!..	!.!!!	3240
Mo	!!..!	.!!!!	....!	.!.!!	.!.!!	.!!!!	!!.!!	!...!	q!!.!	..!.!	..!.!	.!.!!	
Mu	!..!!	!!!!.	!!!..	!!.!.	!.!!.	!!.!!	!!!!.	!..!!	!.!!!	!!...	!!.!!	!.!.b	3600
Mo	!..!!	...!!	!!.!!	..!.!	q...!	!!!.!	!..!!	!!.!!	!..!!	!.!.!	!.!.!	.!.!!	
Mu	!!..!	!!!!.	!..!!	!.!!.	!!!!!	!..!.	!!..!	!.!.!	!.!.!	!.!!!	!....	!!.!!	3960
Mo	!.!!!	!!.!!	..!!!	..!!!	!!..!	.!!.!	!!..!	!.!!!	.!!.!	.!.!!	.!.!!	!.!!!	
Mu	b!!!.	!....	!!!!.	!!!..	!.!!!	!!...	!!.!!	!!!!!	!..!.	!.!..	!.!..	!!!!!	4320
Mo	!.!.!	!..!!	!!!!!	!!.!.	..!!!	!!.q!	!...!	!!!.!	..!!!	...!!	!!!.!	...!!	
Mu	!!.!.	!!!.!	!..!.	!.!!!	!...!	!.!.!	!!..!	!!.!!	!!!.!	!!!!!	!!...	!!!..	4680
Mo	!!!!!	!!..!	!!!.!	!!..!	.!.!!	.!!!!	.!!!!	!!..!	!!.!!	..!.!	!...!	.!.!!	
Mu	!.!.!	!.!.!	!.b!!	!!...	!!.!!	!!!!!	!.!..	!!!!.	!...!	!!..!	!!!..	!.!!.	5040
Mo	q!!.!	!.!!!	....!	!!!!!	!.!.!	!.!.!	!..!!	!!!!!	.!!!!	!!.q!	!.!!!	!!!!!	
Mu	!.!!!	!..!.	!!!!!	!!..!	!.!b.	!!!!!	!..!.	!.!..	!!...	!!!.!	!.!!!	!....	5400
Mo	!...!	....!	!!!.!	!!.!!	..!!!	!...!	.!!!!	!!.!!	....!	!!..!	.!!!!	!...!	
Mu	!!.!!	!.!!!	!...!	!..!.	!.!!!	!.!!.	!.!!!	!b!!.	!..!.	!!!.!	!..!!	!.!!!	5760
Mo	!!!.!	.!!!!	..!.!	..!.!	.!!!!	!!.!!	!!.!!	!!!!!	!.!!!	!..!!	!...!	.!!!!	
Mu	!!!.!	!...!	!!!..	!..!.	!!..!	!!.!.	!!!!!	!..!!	!.!!.	!!..!	!!!!.	!.!.!	6120
Mo	.!.!!	.!.!!	!!!.!	..!.!	q.!!!	..!!!	.!!!!	!..!!	....!	!.!!!	..!!!	.!!.!	
Mu	!.!.!	!!!.!	!!..!	!.!!!	!!...	!!.!.	!....	!!!..	!!!..	!!!!!	!!!!.	!!!.!	6480
Mo	.!!!!	!!!.!	!..!!	..!!!	!.!.!	!.!!!	!...!	.!..!	!!.!!	!!.!!	.!.!!	!!..!	
Mu	!.!!!	!.!!!	!.b..	!.!!.	!!!!!	!!!..	!!!!.	!.!!.	!!.!!	!.!!.	!.!.!	!!..!	6840
Mo	.!!!!	.!.q!	!.!!!	!!!.!	..!!!	..!!!	!.!.!	!.!.!	!!!!!	!!!.!	!!!.!	!.!!!	
Mu	!!...	!!!!.	!..!!	!!.!.	!...!	!.!..	!!!.!	b!!!.	!!!..	!..!!	!.!!!	!!..!	7200
Mo	!...!	!..!!	!!!!!	!.!.!	.!.!!	.!!.!	!..!.	..!!!	!!!.!	!.!.!	!.!!!	!.!.!	
Mu	!.!!.	!!..!	!!!.!	!!.!!	!.!!.	!!!!!	!!!!!	!!!.!	!..!!	!..!.	!!...	!..!.	7560
Mo	.!.!!	.!.!!	.!!.!	!!!.!	..!.!	!..!!	.!..!	!!!.!	!!!!!	!!!!!	!...!	!!!!!	
Mu	!!...	!!.!!	!!!..	!!!.!	!.!.!	!!.!!	!!..!	!!!.!	!....	!..!.	!!..!	!..!.	7920
Mo	q..!!	.!.!!	!!.!!	..!!!	!!..!	!!!.!	.!!!!	!!!!!	..!.!	.!!.!	.!.!!	!!..!	
Mu	!!.!.	!!!!!	!!!!.	!!!!.	!!!!.	!...b	!...!	!!.!!	!.!!!	!!!!.	!...!	!!!.!	8280
Mo	!..!!	..!.!	!!.!!	!..!.	!!!.!	.!.!!	..!!!	!!!!!	..!.!	!!.!!	.!..!	!!..!	
Mu	!..!!	!!!!!	!!!..	!!.!!	!!!..	!!.!!	!!!!!	!.!.!	!!..!	!!!.!	!!.!.	!!.!!	8640
Mo	..!!!	!.!.!	!...!	..!.!	.!!.!	!!.!!	.!!.!	!!.!!	!..!!	!!..!	.!!!!	.!!!!	
Mu	!!!..	!.!..	!!!!!	!...!	!!!.!	!!!!.	!..!.	!..!!	!!!!!	!!!.!	!.!..	!!!!.	9000
Mo	...!!	!!..!	!.!!!	.!..!	!..!!	..!!!	..!.!	!!!!!	.!!!!	!..!!	!!!.!	!...!	
Mu	!.!!.	!.!!.	!!!!!	!!.!!	!!.!!	!.!.!	!!!..	!..!.	!!.!!	!.!.!	!.!.!	!.!!!	9360
Mo	!!!!!	...q!	!!..!	.!.!!	!!!!!	.!!!!	!.!!!	!!!!!	.!..!	.!..!	.!!.!	!.!!!	
Mu	!..!!	!!!..	!..!!	!....	!..!!	!.!..	!.!!!	!!.!!	!!!..	!!!!!	!!.!.	!!!!.	9720
Mo	.!..!	!!!.!	..!!!	..!.!	!!!.!	.!.!!	..!!!	.!!.!	!..!!	!!!.!	!!!.!	!!!.!	
Mu	!!!..	!!.!!	!.b.!	!!!..	!..!!	!!.!!	!!!..	!.!!!	!!!!!	!!.!!	!!.!!	!..!.	10080

	K 0	K 30	K 60	K 90
Mo	1 5	1 5	1 5	
Mu	5 9	5 9	5 9	$Zw=0$
Mo	1 *q* 5	. *q* ! 7 5	. ! 5	
Mu	5 .	*b* . 5	! *b* . 5 7	$Zw=90$
Mo	! ! 7 5	*q* ! ! 11 7 5	. *q* ! 13 5	
Mu	! ! 5 7	! *b* . 5 11	! ! . 5 7	$Zw=180$
Mo	. ! ! 11 5	. ! ! 7 5	. ! ! ! ! 13 11 7 5	
Mu	! ! ! 5 7 11	! *b* . 5 13	! . 5	$Zw=270$

Tafel 5: Die als Punkte dargestellten *M*-Zahlen im Zahlenraum bis $R=270$ nach der Löschung

Zahlenzeichen:
q als Quadrat gelöschte Zahl
b als Brückenzahl gelöschte Zahl
! sonstige gelöschte Zahl
. stehengebliebener Punkt: Primzahl

Ablesen von Zahlen (an einem Beispiel erläutert):
Welche Zahl ist in der zweiten *Mu*-Zeile durch *b* (mit unterlegter 11) dargestellt?
Hierzu sind jeweils vier Summanden zu addieren:

1. Summand:
   Kolonnenzahl *K*, links von *b* — 30
2. Summand:
   Einerwert unter *K* 30, *Mu*-Zeile — 5
3. Summand:
   $6x$ (x Anzahl der Zahlenzeichen zwischen *b* und Kolonnenlinie *K* 30) $=6\cdot 3$ — 18
4. Summand: Zeilenwert *Zw* über *b* — 90

$b=143$

Unter den gelöschten Zahlen sind die Löschzahlen angegeben:
143 wurde durch 11 gelöscht.
Als Primzahlen im Zahlenraum bis $R=200$ liest man ab:

Mo 7 13 19 31 37 43 61 67 73 79 97 103 109 127 139 151 157 163 181 193 199
Mu 5 11 17 23 29 41 47 53 59 71 83 89 101 107 113 131 137 149 167 173 179 191 197

Wie vorausbestimmt: 44 an der Zahl.

Tafel 7 soll einen Eindruck davon vermitteln, daß es nach der hier angegebenen Methode verhältnismäßig leicht ist, mit mechanischen Mitteln oder auch durch Streichen mit der Hand in ziemlich kurzer Zeit auf engem Raum die Primzahlen eines größeren Zahlenraumes auszusondern.

Zum Schluß eine Aufgabe, die noch einen Fingerzeig zur Handhabung der Tafel 7 gibt: Ist $Mo=6733$ eine Primzahl?

Lösung: Man sucht den nächstkleineren Zeilenwert *Zw*: 6480
Man addiert die Kolonnenzahl *K*, die möglichst nahe an *Mo* heran-, aber nicht darüber hinausführt: + 240
6720

Auf der *Mo*-Zeile unter der gewählten Zeilenwertlinie 6480 steht rechts von der gewählten Kolonnenlinie 240 die gelöschte Zahl 6721 und zwei Schritt nach rechts als Punkt: 6733 – eine Primzahl.

F. Franke

Tafel 6: Die Löschzahlen für Tafel 7 nebst ihren Quadraten und Brückenzahlen

p	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
q	25	49	121	169	289	361	529	841	961	1369	1681	1849
b	35	77	143	221	323	437	575	899	1085	1517	1763	2021
p	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	
q	2209	2809	3481	3721	4489	5041	5329	6241	6889	7921	9409	
b	2303	2915	3599	3965	4757	5183	5621	6557	7055	8099	9797	

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Wir stellen heute erneut Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vor, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen unseren aktiven Teilnehmern am *alpha*-Wettbewerb weitere Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.

In Heft 5/1977 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:

Ma 5 ■1650 Hans kaufte 3 Buntstifte und 4 Hefte und mußte dafür insgesamt 1,08 M bezahlen. Erwin kaufte 7 Buntstifte und 6 Hefte der gleichen Preislage und mußte dafür 2,12 M bezahlen. Wieviel kostete ein Buntstift bzw. ein Heft?

In Heft 1/1978 veröffentlichten wir dazu folgende Lösung:

Von beiden Jungen wurden zusammen $3+7=10$ Buntstifte und $4+6=10$ Hefte für einen Gesamtbetrag von $1{,}08\text{ M}+2{,}12\text{ M}=3{,}20\text{ M}=320$ Pf. gekauft. Folglich kosteten 1 Buntstift und 1 Heft zusammen 32 Pf. Für 3 Buntstifte und 3 Hefte wären insgesamt $3\cdot 32$ Pf. $=96$ Pf. zu zahlen. Da 3 Buntstifte und 4 Hefte zusammen 108 Pf. kosten, beträgt der Preis für 1 Heft 108 Pf. – 96 Pf. = 12 Pf. Der Preis für einen Buntstift beträgt demnach 32 Pf. – 12 Pf. = 20 Pf.

Wir stellen nun die Lösung der Schülerin *Kerstin Kantiem* aus Berlin vor, die Schülerin einer 5. Klasse der Erich-Weinert-Oberschule ist. Kerstin löste diese Aufgabe wie folgt:

(1) 3 Buntstifte und 4 Hefte kosten zusammen 1,08 M.
(2) 6 Buntstifte und 8 Hefte kosten zusammen 2,16 M.
Aus (1) und (2) folgt
(3) 9 Buntstifte und 12 Hefte kosten zusammen 3,24 M.
(4) 7 Buntstifte und 6 Hefte kosten zusammen 2,12 M.
(5) 14 Buntstifte und 12 Hefte kosten zusammen 4,24 M.
Aus (3) und (5) folgt:
(6) 5 Buntstifte kosten 4,24 M – 3,24 M = 1,00 M; also kostet ein Buntstift 0,20 M.
Aus (1) und (6) folgt:
4 Hefte kosten $1{,}08\text{ M}-3\cdot 0{,}20\text{ M}=0{,}48\text{ M}$; also kostet ein Heft 0,12 M.

Kerstin gebührt Lob für das folgerichtige Schließen; diese Lösung stellt eine ausgezeichnete Denkleistung dar.

Wer löst mit?

alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 11. Januar 1979

Mathematik

Ma 5 ▪1766 Von einem Schüler, der am *alpha*-Wettbewerb teilnahm und im letzten Jahr mehr als 20, aber weniger als 30 Antwortkarten erhielt, wissen wir folgendes:
Der 12. Teil der Anzahl der Antwortkarten trug das Prädikat „Sehr gut gelöst", der zweite Teil „Gut gelöst", der 6. Teil „Gelöst". Die restlichen Antwortkarten trugen den Vermerk „Nicht gelöst". Wieviel Antwortkarten erhielt dieser Schüler? Wie viele Karten trugen jeweils eines der genannten Prädikate?

Schüler Andreas Kardos, Köthen

Ma 5 ▪1767 In einer Gemeinde wurde eine Bibliothek mit einem Bestand von 360 Büchern eröffnet. Bereits nach drei Tagen hatten viele Leser Bücher ausgeliehen. Genau die Hälfte dieser Leser hatte je Person zwei Bücher, die restlichen Leser je Person nur ein Buch ausgeliehen. Wieviel interessierte Leser gab es am dritten Tag nach der Eröffnung der Bibliothek in dieser Gemeinde, wenn nur noch der dritte Teil des Buchbestandes vorhanden war?

Schülerin Birgitt Weyh, Fambach

Ma 5 ▪1768 Von den drei Geschwistern Birgit, Frank und Petra wissen wir folgendes: Im Jahre 1976 waren Petra und Frank zusammen 28 Jahre alt (in ganzen Zahlen); Frank und Birgit waren zusammen 26 Jahre alt; Petra und Birgit waren zusammen 32 Jahre alt. Wie alt war jedes dieser drei Geschwister im Jahre 1976?

Schüler Frank Creutzburg, Gransee

Ma 5 ▪1769 Hans ist sechs Jahre jünger als sein Freund Peter. Addiert man das gegenwärtige Lebensalter von Hans und Peter (in ganzen Zahlen), so erhält man das Lebensalter des Vaters von Hans. Zusammen sind alle drei Personen gegenwärtig 76 Jahre alt. Wie alt ist jede dieser drei Personen gegenwärtig?

Schülerin Annette Pitzschk, Halle-Neustadt

Ma 5 ▪1770 Ulrike sammelt Briefmarken. Sie besitzt zur Zeit mehr als 450, aber weniger als 460 Briefmarken. Der dritte Teil der Anzahl aller Briefmarken sind Marken mit Blumenmotiven, der vierte Teil Marken mit Tiermotiven. Die restlichen Briefmarken sind zum Tauschen vorgesehen. Wie viele Briefmarken besitzt Ulrike gegenwärtig? Wie viele davon sind zum Tauschen vorgesehen?

Schülerin Katrin Rupp, Neubrandenburg

Ma 5 ▪1771 Den Klassen 5a, 5b und 5c einer Schule gehören insgesamt 81 Schüler an. In jeder der Klassen 5a und 5b sind zwei Mädchen mehr als Jungen. In der Klasse 5c ist ein Mädchen weniger als Jungen. In diesen drei Klassen sind gleichviel Jungen.
a) Wieviel Schüler gehören jeder dieser drei Klassen an?
b) Wieviel Jungen und wieviel Mädchen gehören jeder dieser Klassen an?

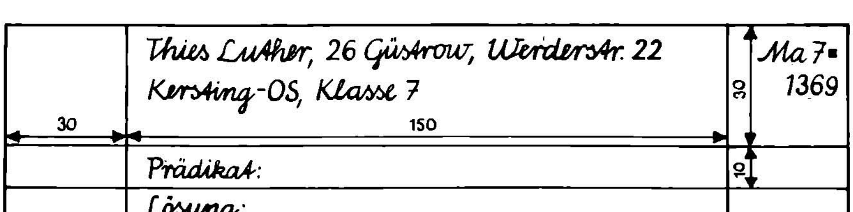
StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

Ma 6 ▪1772 Addiert man zu einer zweistelligen natürlichen Zahl ihre Quersumme und multipliziert man diese Summe mit 5, so erhält man 150. Um welche Zahl handelt es sich?

Schüler Sven Tarun, Berlin

Ma 6 ▪1773 Die Schüler der Klassen 6a und 6b einer Schule hatten eine Mathematikarbeit geschrieben. Der achte Teil der Schüler erhielt die Note 1, der dritte Teil die Note 2, die Hälfte der Schüler die Note 3, drei Schüler die Note 4, kein Schüler die Note 5. Wieviel Schüler gehören jeder dieser beiden Klassen an, wenn alle Schüler an der Mathematikarbeit teilgenommen haben und der Klasse 6a zwei Schüler mehr angehören als der Klasse 6b?

Schülerin Heike Taschenberger, AG Math. POS Deutschenbora



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1978/79 läuft von Heft 5/78 bis Heft 2/79. Zwischen dem 1. und 10. September 1979 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/78 bis 2/79 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/79 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten – richtig gelöst – (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/78 bis 2/79) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1978/79 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

Ma 6 ▪1774 Peter wurde von seinem Vater gefragt, wieviel Punkte er bei der XVI. *Olympiade Junger Mathematiker der DDR* (Bezirksolympiade) erreicht habe und welchen Platz er damit belegt habe. Scherzhaft antwortete Peter: „Addiert man zu der von mir erreichten Platzziffer, die der kleinsten Primzahl entspricht, die von mir erreichte Punktzahl, dividiert man diese Summe durch 5, multipliziert man den so erhaltenen Quotienten mit 46, so erhält man das Zehnfache der von mir erzielten Punktzahl." Wieviel Punkte hatte Peter erreicht? *Schüler Jörg Schmidt, Neubrandenburg, Kl. 7*

Ma 6 ▪1775 Ein Großvater hatte seinen drei Enkeln einen Korb mit Nüssen mitgebracht, die sie sich ehrlich teilen sollten. Hans, der allein im Hause war, nahm sich als erster seinen Anteil; er entnahm dem Korb den dritten Teil der Anzahl der Nüsse. Bernd, der nicht wußte, daß Hans sich schon bedient hatte, nahm von den verbliebenen Nüssen den dritten Teil. Elke, die nicht wußte, daß Hans und Bernd dem Korb schon Nüsse entnommen hatten, nahm als letzte von den verbliebenen Nüssen ebenfalls den dritten Teil. Danach waren noch 16 Nüsse im Korb. Wieviel Nüsse hat jeder von ihnen dem Korb entnommen? *Schüler Uwe Winkler, Großenhain*

Ma 6 ▪1776 Von drei Lehrern einer Schule mit den Familiennamen Taubert, Weber und Müller, welche jeweils genau zwei der Fächer Biologie, Mathematik, Geographie, Geschichte, Russisch bzw. Englisch unterrichten, ist folgendes bekannt:

(1) Der Geographielehrer und der Russischlehrer sind Nachbarn.

(2) Herr Müller ist der jüngste dieser drei Lehrer.

(3) Herr Taubert hat den gleichen Schulweg wie der Biologie- und der Russischlehrer.

(4) Der Biologielehrer ist älter als der Mathematiklehrer.

(5) In der Freizeit spielen Herr Müller, der Englischlehrer und der Mathematiklehrer Fußball.

Welche Fächer unterrichtet jeder dieser drei Lehrer? *Schülerin Astrid Wruck, Rostock*

Ma 7 ▪1777 Die in dekadischer Darstellung aufgeschriebene achtstellige natürliche Zahl $z=\overline{xyyyyyyx}$ mit $x>y$ sei durch 18 teilbar. Gib alle Zahlen an, die diese Bedingungen erfüllen! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 7 ▪1778 Die Variablen a, b, c des Terms $\frac{a\cdot(c-b)}{b-a}$ sollen mit den Zahlen 13, 15 bzw. 20 so belegt werden, daß der Wert des Terms gleich einer positiven ganzen Zahl ist. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 7 ▪1779 Es ist ein Rhombus $ABCD$ zu konstruieren aus der Länge der Seite $\overline{AB}=a=5{,}5$ cm und aus der Summe der Längen der beiden Diagonalen $\overline{AC}+\overline{BD}=e+f=14$ cm. Die Konstruktion ist zu begründen. *Schüler A. und R. Beckmann, POS „Ernst Thälmann", Steinbach-Hallenberg, Kl. 8b*

Ma 7 ▪1780 Gesucht sind alle dreistelligen, aus verschiedenen Ziffern bestehenden natürlichen Zahlen, die in dekadischer Darstellung die Form $z=\overline{abc}$ haben und folgende Eigenschaften besitzen:

a) Ihre Quersumme ist eine gerade Zahl.

b) Die Differenz aus den Zahlen, die den ersten beiden Ziffern entsprechen, ist dreimal so groß wie die Differenz aus den Zahlen, die den letzten beiden Ziffern entsprechen. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 8 ▪1781 Das Produkt aus dem Vorgänger und dem Nachfolger einer natürlichen Zahl n sei 2208. Ermittle n! *Andreas Fittke, Berlin, H.-Hertz-OS, Kl. 10*

Ma 8 ▪1782 Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen, deren um 1 vermindertes Quadrat eine Primzahl ist! *Andreas Fittke, Berlin, H.-Hertz-OS, Kl. 10*

Ma 8 ▪1783 Es seien a_1, a_2, b_1 und b_2 positive reelle Zahlen.
Man beweise, daß stets gilt:

(1) $(a_1b_1+a_2b_2)^2 \leqq (a_1+a_2)(a_1b_1^2+a_2b_2^2)$ und

(2) $(a_1b_1-a_2b_2)^2 \geqq (a_1-a_2)(a_1b_1^2-a_2b_2^2)$.

Sh. B. Linkowski, Fachlehrer f. Math., Moskau

Ma 8 ▪1784 Zwei Nachbarn wollen ein bisher gemeinsam genutztes Grundstück halbieren. Das Grundstück besitzt die Form eines rechtwinkligen Trapezes mit den Längen der parallelen Seiten $a=150$ m und $c=120$ m. Die Länge der anderen dem rechten Winkel anliegenden Seite beträgt $d=40$ m. Der Zaun soll parallel zu den zwei parallelen Seiten verlaufen.

a) Wie lang ist der Zaun?

b) Wie groß ist der Abstand des Zaunes von der Seite $\overline{AB}$? *Ing. K.-H. Gora, Lohsa*

Ma 9 ▪1785 Ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basislänge x cm hat einen Flächeninhalt von 15 cm². Die Höhe von der Spitze auf die Basis ist 1 cm kürzer als diese. Wie breit muß ein Rechteck gleichen Flächeninhalts sein, wenn es x cm lang ist? Wie lang ist die Basis des Dreiecks ABC? *Fr.*

Ma 9 ▪1786 Wie lang ist der Radius des Umkreises eines Dreiecks ABC, wenn die Länge der Seite $\overline{AB}$ 5 cm und die Größe des Winkels $\sphericalangle ACB$ 80° betragen? *Fr.*

Ma 9 ▪1787 Bei einer Ferienwanderung werden von den Schülern einer Klasse Getränke gekauft, und zwar Cola zu 35 Pfennig und Limonade zu 25 Pfennig je Flasche. Der Gesamtpreis beträgt genau 10 Mark. Es müssen aber außerdem noch 9 Mark Flaschenpfand (je Flasche 0,30 M) bezahlt werden. Wieviel Flaschen von jeder Sorte wurden gekauft? *Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald*

Ma 9 ▪1788 Es sei ein rechtwinkliges x-y-Koordinatensystem gegeben. Ermitteln Sie graphisch die Menge aller Punkte der x-y-Ebene, die folgenden Bedingungen genügen:

(1) $-x+y<0$ und

(2) $\frac{y}{4}<-x$ und

(3) $-y>1$!

Dipl.-Lehrer Ing. D. Völzke, Greifswald

Ma 10/12 ▪1789 Man ermittle die Lösungsmenge der Gleichung

$$(2x+2)^{\sqrt[x]{2x+2}}=64$$

im Bereich der reellen Zahlen! *Schüler André Schlosser, Klingenthal, Kl. 9*

Ma 10/12 ▪1790 In welchem Verhältnis stehen der Flächeninhalt eines regelmäßigen n-Ecks zum Flächeninhalt seines Inkreises? *Andreas Fittke, Berlin, EOS H. Hertz, Kl. 10*

Ma 10/12 ▪1791 Man ermittle drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, die folgenden Bedingungen genügen sollen:
Das Quadrat der größten Zahl ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Zahlen. *Schüler Volker Leutheuser, Sonneberg, Kl. 8*

Ma 10/12 ▪1792 Gegeben sei ein Dreieck ABC mit folgenden Seitenlängen:

Seite	Länge
$\overline{AB}$	$c=7$ cm
$\overline{BC}$	$a=5$ cm
$\overline{AC}$	$b=6$ cm.

Es ist die Länge s_c der Seitenhalbierenden $\overline{CM}$ des Dreiecks ABC durch die Längen a, b, c der Dreiecksseiten auszudrücken und zu berechnen. (M ist Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$.) *Sch.*

Physik

Ph 6 ▪41 Das Volumen eines quaderförmigen Eisenstückes soll durch einen Versuch bestimmt werden. Man gießt dazu Wasser in einen Meßzylinder, so daß der Körper voll eintauchen kann, und liest an der Skale den Wasserstand vor und nach dem Eintauchen ab. Er betrage vorher 95 ml und nachher 116,5 ml.

a) Welches Volumen ermittelt man aus diesem Versuch?

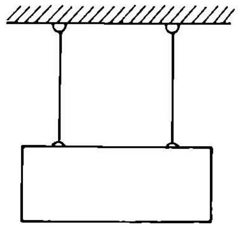
b) Zur Kontrolle des Ergebnisses werden jetzt mit dem Metermaß die Kantenlängen des Quaders gemessen (19 mm, 27 mm, 43 mm) und das Volumen berechnet.

c) Um wieviel mm³ unterscheiden sich die beiden Ergebnisse, und welches ist genauer?

Ph 7 ▪42 Ein 96 kp schweres Transparent hängt in der auf dem Bild angegebenen Lage an zwei Seilen.

a) Welche Kräfte F_1 und F_2 treten an den beiden Seilen auf? Trage sie durch Pfeile im geeigneten Maßstab ein!

b) Bestimme durch Zeichnung die Gegenkräfte G_1 und G_2, die an den Befestigungen an der Decke auftreten!

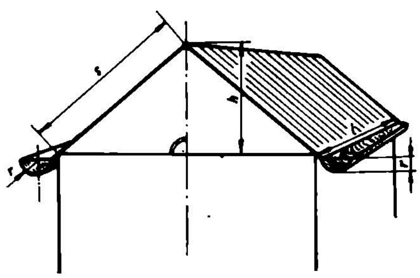


Ph 8 ▪43 100 g Wasser mit einer Temperatur von 25 °C und 250 g Wasser mit einer Temperatur von 40 °C werden gemischt. Dabei nimmt das kältere Wasser nur 80% der abgegebenen Wärme auf. Berechne unter diesen Bedingungen die Mischtemperatur!

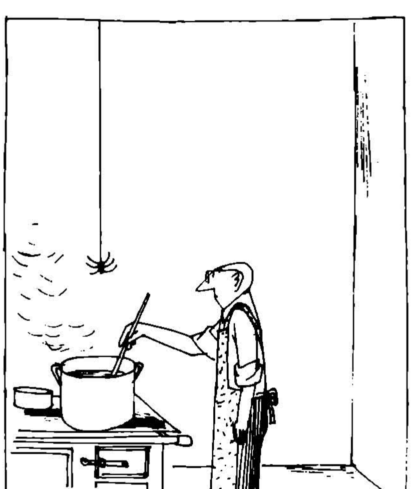
Schüler Jürgen Gräfenstein, 14. OS Dresden, (Kl. 9)

Ph 9 ▪44 Auf ein Dach vom skizzierten Querschnitt fällt Regen mit einer Menge von 1 mm pro Stunde. Das Dach habe eine Länge von $l = 18$ m.

$s = 6{,}25$ m; $h = 3{,}75$ m; $r = 6{,}00$ m.

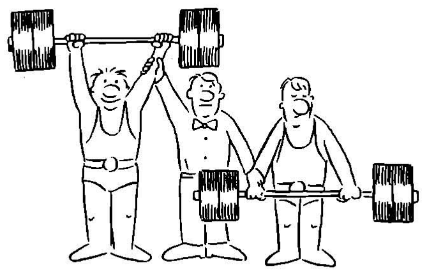


a) Wieviel Regenwasser wird vom Dach aufgefangen, wenn die Dauer des Regens 90 Minuten beträgt und vorausgesetzt wird, daß der Regen senkrecht fällt?



b) Nach welcher Zeit würden die beiden Dachrinnen überlaufen, wenn die darin befindlichen Abflußöffnungen verschlossen sind?

Ing. A. Körner, Leipzig



Ph 10/12 ▪45 In welcher Höhe über der Erdoberfläche muß sich ein Fernseh-Satellit befinden, damit er stets über derselben Stelle der Erde steht?

Anmerkung: Benutzen Sie dazu eines der Keplerschen Gesetze und als Vergleichskörper den Mond! Dieser hat eine Umlaufzeit von etwa 27,33 Tagen und einen mittleren Bahnradius von 384000 km.

A. Schatz, Leipzig

Chemie

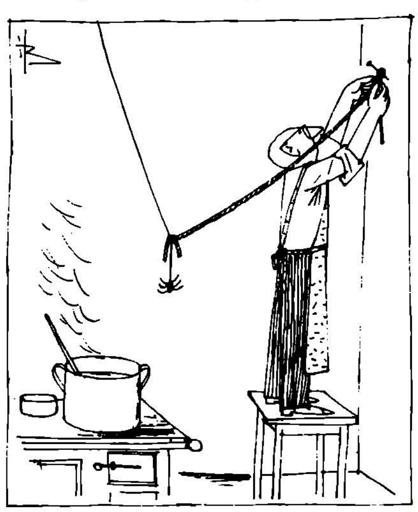
Ch 7 ▪33 In einem Chemiebetrieb sollen täglich 1500 kg Schwefel aus Schwefelkies gewonnen werden. Im Labor wurde ermittelt, daß in 500 mg Schwefelkies 180 mg Schwefel enthalten sind.

a) Wieviel Kilogramm Schwefelkies müssen dem Betrieb täglich für die Produktion zur Verfügung stehen?

b) Wieviel Kilogramm Schwefelkies muß der Betrieb monatlich erhalten, wenn täglich gearbeitet wird (1 Monat = 30 Tage)?

c) Die produzierte Tagesmenge Schwefelkies entspricht wieviel Prozent der Monatsproduktion?

Ch 8 ▪34 14 Kilogramm Seifenspiritus sollen aus 54 Teilen Öl, 66 Teilen Kalilauge, 278 Teilen Spiritus und 158 Teilen Wasser hergestellt werden. Wieviel Kilogramm werden von jedem Stoff benötigt?



Ch 9 ▪35 Methan ist zu 35% im Stadtgas enthalten. 7 ml dieses Methangases sollen mit 50% Luftüberschuß verbrannt werden. Wieviel Milliliter Luft werden zur Verbrennung benötigt, wenn der Sauerstoffgehalt der Luft $\frac{1}{5}$ des Volumens beträgt?

Ch 10 ▪36 Kalziumkarbid ist ein wichtiger Ausgangsstoff zur Herstellung organischer Verbindungen auf Kohlebasis. In einem Karbidofen werden Branntkalk und Koks umgesetzt. Berechnen Sie

a) die Masse an Branntkalk, die für die Erzeugung von 300 t Kalziumkarbid eingesetzt werden muß,

b) den täglichen Verbrauch an Elektroenergie (kWh) eines solchen Karbidofens, wenn für die Erzeugung von einem Mol Kalziumkarbid 0,13 kWh erforderlich sind,

c) die Masse Äthanol, die aus 2 kg Kalziumkarbid gewonnen werden kann! (Die Herstellung von Äthanol verläuft über die Zwischenprodukte Äthin und Äthanal.)

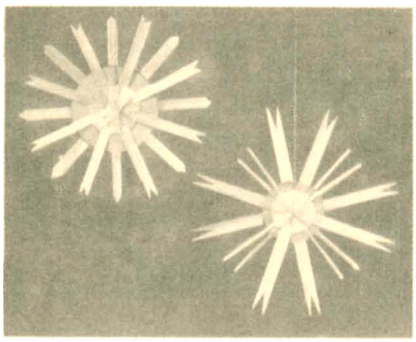
Ein Ausflug

An einem Mittwoch in den Winterferien 1978 fuhr unsere AG Mathematik als *Auszeichnung für sehr gute Arbeit* in die ČSSR. Nach mehrstündiger Busfahrt kamen wir in der Stadt Liberec an. Von dort aus ging es zu Fuß zu unserem Ziel, dem Ještěd. Eine Seilbahn brachte uns hinauf zu dem kegelförmigen, 1012 Meter hohen Bergmassiv. Von hier aus hatten wir einen herrlichen Blick über die tiefverschneiten Wälder und Abhänge. Im modernen Restaurant, das gleichzeitig Hotel und Rundfunk- sowie Fernsehstation ist, sorgten wir für unser leibliches Wohl. Den Rückweg legten wir zu Fuß zurück und hatten noch Zeit, uns die schöne Kreisstadt anzuschauen.

Bärbel Hänig, AG Mathematik der OS Burkau

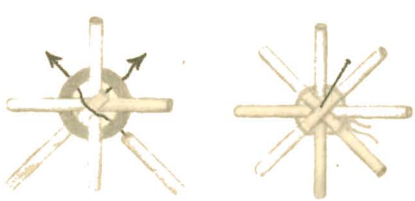
Bunte Basteleien

Geflochtener Strohstern



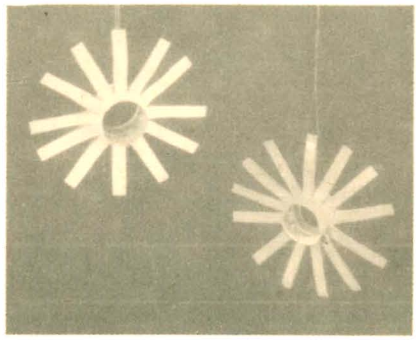
Das Stroh für Sterne muß stets eingeweicht und z. T. geplättet werden. Aus beiderseitig buntem Papier werden ein Ring und dazu 4, 6 oder 8 Halme von gleicher Länge geschnitten. Zwei gekreuzte Halme werden über den Ring gelegt und die nächsten dazwischen geflochten (siehe Bild). Zuletzt wird ein Aufhänger am Ring befestigt. Durch verschiedene Größe der Ringe, Länge und Breite der Halme sind viele Abwandlungen möglich. Ihr könnt diese Technik schnell erlernen, denn der Ring gibt den Halmen sofort Halt.

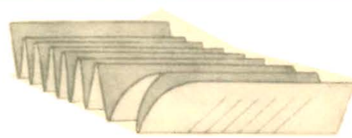
Gebundener Strohstern



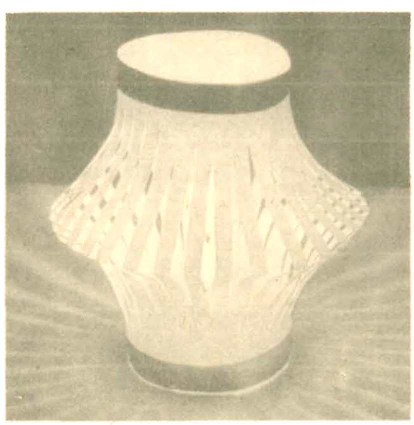
Die einfache Grundform ist Ausgangspunkt für viele Sterne, an ihr übt man das richtige Binden. Von vier gleichlangen Halmstücken werden zwei rechtwinklig gekreuzt, die beiden anderen auf Lücke darübergelegt (siehe Bild). Anfänger können mit einer Stecknadel die Halme leicht zusammenspießen. Nun wird ein dünner Faden um die acht Enden geflochten, verknotet und zum Aufhänger geschlungen. Der Stern hält, wenn die Halme richtig gelegt sind, nach einer Umbindung, er kann aber zur Zierde noch öfter und verschiedenfarbig umwickelt werden. Zum Schluß beschneidet ihr die Zacken gleichmäßig.

Einfacher Strahlenstern aus Papier





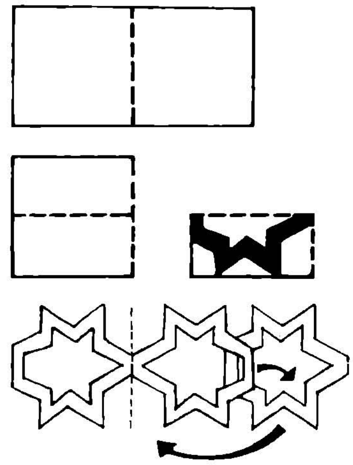
Ein etwa 6 cm × 6 cm großes Stück beiderseitig buntes Papier oder Bastlerfolie wird in der Mitte gefaltet und vom Bruch her bis etwa 6 mm zum Rand gleichmäßig wie ein Kamm eingeschnitten, auseinandergefaltet und zur Rundung geklebt (siehe Bild). Die kleinen Randmuffen werden vorsichtig zusammengeschoben. Dabei entsteht ein Stern, dessen Strahlen an den Spitzen von innen leicht aneinandergeklebt werden.
Ebenso wird die Kerzenhülle (siehe Bild) gearbeitet. Sie entsteht aus einem Streifen Karton oder starkem Papier von etwa 20 cm × 13 cm. Die Ränder bleiben 1,5 cm breit und werden zur Versteifung nochmals mit einem schmalen Streifen umklebt.



Faltschnitt
mit unterlegtem Velourpapier, als Tischkarte geeignet

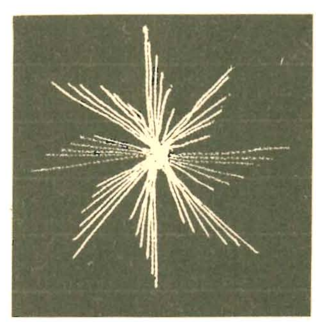
Sternenkette

Wir falten Buntpapierrechtecke zweimal und malen uns Schablonen, die wir dann später auseinanderfalten. Zum Schluß stecken wir einen Stern in den anderen.



Scherenschnitt
als Baumschmuck oder mit unterlegtem Transparentpapier als Fensterschmuck geeignet.

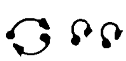
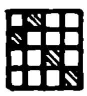
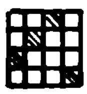
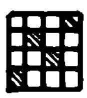
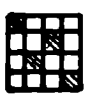
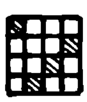
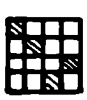
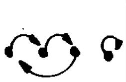
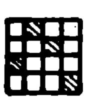
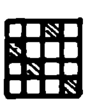
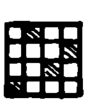
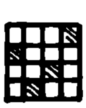
Stern
mit buntem Garn auf Velourpapier gestickt und auf eine Einladungskarte aufgeklebt



Und wer durch diese Seite Lust bekommen hat, noch mehr zu basteln, der greife zu dem Buch:
Hertha Kürth
Geschickte Hände
Basteln für Fest und Spiel
Rudolf Arnold Verlag Leipzig
Bestell-Nr. 792041 0 *DDR 4,50 M*

Kombinatorische Betrachtungen bei Schiebe-Spielen

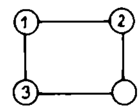
Teil 2

Permutation	Zyklendiagramm	Kartendiagramm	Produkt von Transpositionen minimaler Faktorenanzahl	Anzahl der Fixpunkte
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$	 1 2 3 4			4
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$			(12)	2
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$			(13)	2
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}$			(14)	2
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$			(23)	2
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$			(24)	2
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$			(34)	2
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$			(13) (12) = (23) (13) = (12) (23) = (123)	1
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$			(12) (13) = (23) (12) = (13) (23) = (132)	1
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$			(14) (12) = (24) (14) = (12) (24) = (124)	1
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$			(12) (14) = (24) (12) = (14) (24) = (142)	1

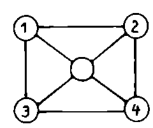
Wir veröffentlichen nun acht Aufgaben zum Teil 1 unseres Beitrages und wünschen den Lesern beim Lösen viel Erfolg!

Aufgaben

▲1▲ Welche 3er Permutationen sind auf dem in Bild 13 dargestellten Schiebespiel erspielbar? Aus wieviel Zügen besteht eine Minimalrunde? Welchen Deckbewegungen eines gleichseitigen Dreiecks entsprechen die erspielbaren Permutationen?



▲2▲ Welche der Permutationen sind auf dem in Bild 14 dargestellten Schiebespiel durch eine Minimalrunde erspielbar?
Aus wieviel Zügen besteht eine Minimalrunde? Ist jede Transposition aus S_4 erspielbar? Wie sieht der Überführungsgraph aus?



▲3▲ Welche Deckbewegungen eines Quadrates gibt es, und wie lauten die ihnen entsprechenden 4er Permutationen?

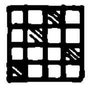
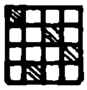
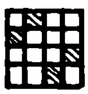
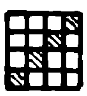
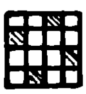
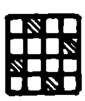
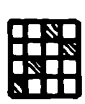
▲4▲ Wie lautet die Produkttafel der 4 Drehungen eines Quadrates? Daraus leite man 6 verschiedene Klassen von lateinischen Quadraten der Ordnung 4 ab!

▲5▲ Kann man jede 4er Permutation mit einer Deckbewegung eines Tetraeders in Verbindung bringen? Welche Bedeutung haben dabei die Spiegelungen an gewissen Ebenen für die Darstellung von Transpositionen?

▲6▲ Auf dem in Bild 11 dargestellten Graphen spiele man gemäß der folgenden Spielregel: Eine Spielrunde besteht aus 6 Zügen, jeder Stein soll dabei geführt werden, und das unnumerierte Feld werde stets möglichst rasch freigezogen. Welche Permutationen sind erspielbar? Welchen Deckbewegungen eines Tetraeders entsprechen diese Permutationen? Wie sieht der Überführungsgraph aus? Kann man aus den entsprechenden Permutationen ein lateinisches Quadrat bilden?

▲7▲ Gibt es ein Schiebespiel, auf dem nur die 4er Permutationen, die den Drehungen eines Quadrates entsprechen, erspielbar sind?

▲8▲ Jede Permutation $P \in S_n$ ist als Produkt von elementefremden Zyklen darstellbar! (Was hat diese Aussage mit dem Zyklendiagramm einer Permutation zu tun?)

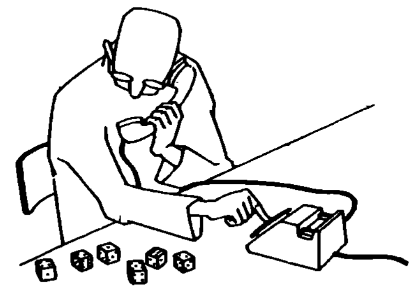
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$			(14) (13) = (34) (14) = (13) (34) = (134)	1
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$			(13) (14) = (14) (34) = (34) (13) = (143)	1
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$			(24) (23) = (34) (24) = (23) (34) = (234)	1
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$			(23) (24) = (24) (34) = (34) (23) = (243)	1
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$			(34) (12) = (12) (34)	0
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$			(24) (13) = (13) (24)	0
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$			(23) (14) = (14) (23)	0.
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$			(12) (14) (13) = (12) (34) (14) = (12) (13) (34) = (13) (24) (23) = (13) (34) (24) = (13) (23) (34) = (14) (13) (24) = (14) (24) (13) = (23) (12) (34) = (23) (34) (12) = (24) (13) (23) = (24) (23) (12) = (24) (12) (13) = (34) (12) (14) = (34) (14) (24) = (34) (24) (12) = (1342)	0
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$			Alle Produkte von (1342) – jedoch mit umgekehrter Reihenfolge der Faktoren! Also (13) (14) (12) = (14) (34) (12) = ... = (1243)	0
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$			(12) (13) (14) = (12) (34) (13) = (12) (14) (34) = (13) (14) (23) = (13) (23) (14) = (14) (23) (24) = (14) (24) (34) = (14) (34) (23) = (23) (12) (14) = (23) (14) (24) = (23) (24) (12) = (24) (12) (34) = (24) (34) (12) = (34) (12) (13) = (34) (13) (23) = (34) (23) (12) = (1432)	0
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$			Alle Produkte von (1432) – jedoch mit umgekehrter Reihenfolge der Faktoren! Also (14) (13) (12) = (13) (34) (12) = ... = (1234)	0
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$			(12) (24) (13) = (12) (13) (24) = (13) (24) (34) = (13) (23) (24) = (13) (34) (23) = (14) (23) (12) = (14) (12) (13) = (14) (13) (23) = (23) (14) (12) = (23) (24) (14) = (23) (12) (24) = (24) (14) (13) = (24) (34) (14) = (24) (13) (34) = (34) (23) (14) = (34) (14) (23) = (1324)	0
$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$			Alle Produkte von (1324) – jedoch mit umgekehrter Reihenfolge der Faktoren! Also (13) (24) (12) = (24) (13) (12) = ... = (1423)	0

Jeder Zyklus ist als Produkt von Transpositionen darstellbar, damit ist jede Permutation als Produkt von Transpositionen darstellbar. In welchen Fällen ist diese Darstellung eindeutig?

J. Flachsmeyer

Aus Platzgründen veröffentlichen wir zu unserem Teil 1 (Heft 4/78) die dort angeführte Tabelle 2.

In freien Stunden alpha heiter



Aus dem alten Rom

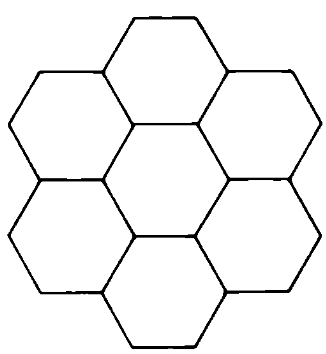
Im alten Rom wurde die Klugheit eines Mannes auch nach seiner Fähigkeit im Kopfrechnen eingeschätzt. Deshalb gaben sich die Römer gegenseitig knifflige Denkaufgaben auf. Hier eine Rinderherdenrechnung:

Auf den Fluren weiden Rinder
vierfach in Herden geteilt,
jede Herde anders gefärbt.
Die erste mildweiß, die andere rabenschwarz,
die dritte braun und die vierte scheckig.

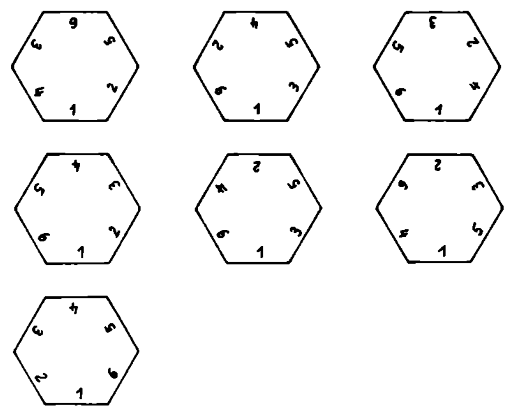
Weiße Rinder weiden 12 insgesamt.
Die braunen Rinder sind den weißen gleich an der Zahl weniger dem vierten Teil der schwarzen Rinder.
Die Menge der schwarzen ist gleich dem dritten Teil der weißen, doppelt genommen.
Die scheckigen Rinder ergeben an Zahl die Hälfte der weißen, vermehrt um sämtliche schwarzen.
Sage mir genau die Zahl der Rinder, die du weiden siehst! Sage mir auch, wieviel es gibt von jeder Farbe!

Sieben–Sechs

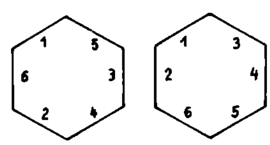
Die Arbeitsgemeinschaft *alpha* der Otto-Drews-Oberschule, Greifswald, sandte folgendes Spiel (aus Plaste).



Spielanleitung: Lege die sieben Sechsecke so auf das Spielfeld, daß sich gleiche Zahlen berühren.
Bei der Zahlenanordnung, wie sie hier vorliegt, ist die veröffentlichte Lösung möglich. Wer findet eine andere Lösung? Um das Spiel noch variabler zu machen,



können noch andere Sechsecke angefertigt werden, die eine andere Zahlenverteilung haben, z. B.

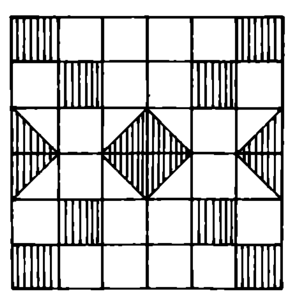


u.s.f.

Nun viel Spaß mit *Sieben–Sechs!*

Auf einen Blick

Wie verhält sich der Flächeninhalt der schraffierten zur nichtschraffierten Fläche?



Wie viele Fische?

Einem Angler wurde folgende Frage gestellt: „Wie viele Fische hast du heute gefangen?“ Er antwortete: „Ich habe dreimal soviel Fische wie gestern gefangen; das sind 10 Fische mehr als gestern.“ Wie viele Fische hat der Angler an jedem dieser beiden Tage gefangen?

Starker Kraftwagenverkehr

Uwe stand am Wohnzimmerfenster und zählte in gleichen Zeitabständen alle PKW und LKW, die am Haus vorbeifuhren. Er zählte stets viermal soviel PKW wie LKW.

a) Wie viele PKW bzw. LKW fuhren am Haus in dieser Zeit vorbei, wenn Uwe jeweils (wie aus der abgebildeten Tabelle ersichtlich) wie folgt gezählt hat?

PKW	8	12					16	
LKW	2		4	25	9	32		10

b) Wie viele PKW und LKW wären es, wenn Uwe insgesamt 55 Kraftfahrzeuge gezählt hätte?

Buchstaben-Mosaik

Die Buchstaben sind so durch Ziffern zu ersetzen, daß das Potenzieren zu einem richtigen Ergebnis führt. Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

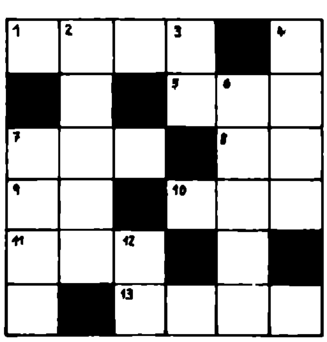
Oberlehrer Ing. K. Koch, Schmalkalden

$$A^{\alpha} = B$$
$$AA^{\alpha} = EDCB$$
$$AAA^{\alpha} = EEDCCB$$
$$AAAA^{\alpha} = EEEDCCCB$$
$$AAAAA^{\alpha} = EEEEDCCCCB$$
$$BBBBB^{\alpha} = BBBBCDDDDE$$
$$BBBB^{\alpha} = BBBCDDDE$$
$$BBB^{\alpha} = BBCDDE$$
$$BB^{\alpha} = BCDE$$
$$B^{\alpha} = CE$$

Kreuzzahlrätsel

Waagerecht:

1. Eine vierstellige Zahl, die erste und dritte Ziffer ergeben sich aus 9. waagerecht.
5. Der Durchschnitt von vier Zahlen ist 57. Drei Zahlen heißen 1, 2, 3. Wie heißt die fehlende Zahl?
7. Das Produkt aller geraden Zahlen kleiner als 10.
8. abc, wenn gilt: $2a+3=13$, $\frac{1}{4}b+2=3$ und $3c-5=1$.
9. Der Wert von $2x^2+6x+10$, wenn x die letzte Ziffer von 1. waagerecht ist.
10. Die einzige Quadratzahl zwischen 900 und 1000.
11. Die Angabe der Nordostrichtung bei positivem Drehsinn von der Ostrichtung.
13. Die Summe aller Kubikzahlen von 1 bis einschließlich 1000.



Senkrecht:

2. $2^2(10^2+7^2)^2$.
3. Die Anzahl der Jahre von 2704 Wochen.
4. Berechne $\frac{413 \cdot 9 + 1087}{4}$!
6. Die Summe der Rauminhalte zweier Quader mit den Seitenmaßen 32, 32, 18 bzw. 15, 18, 23.
7. Der Umfang eines Kreises, dessen Radius 6,215 m beträgt (Verwende $\pi = \frac{355}{113}$!)
12. Flächeninhalt des Trapezes mit den Grundseiten 2,861 bzw. 1,379 und der Höhe 2,5.

Aus: Math. Pie, London

Resultat stets 30

Es gilt

$$(1+1)^{1+1+1+1+1} - 1 - 1 = 30$$

.
.
.

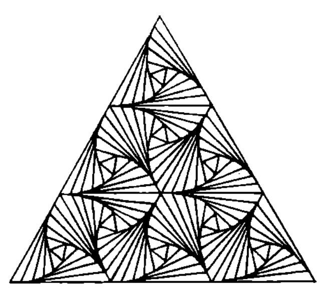
$$9+9+9+\frac{9}{9}+\frac{9}{9}+\frac{9}{9} = 30!$$

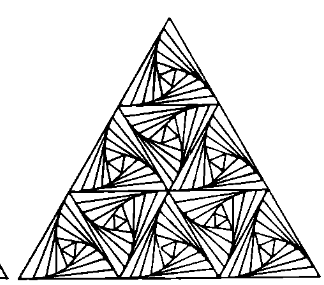
Wer findet die entsprechenden Gleichungen von neun Zweien, Dreien, ..., Achten?

Kryptarithmetik

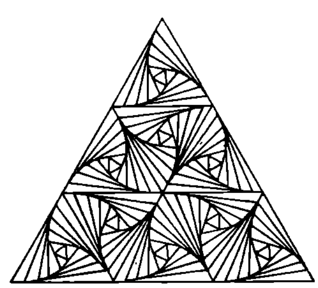
Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, die gesucht sind. Vorher sind die vier arithmetischen Zeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$ an Stelle des Sternchens (*) einzusetzen, wenn man weiß, daß jedes Zeichen nur einmal vorkommt.

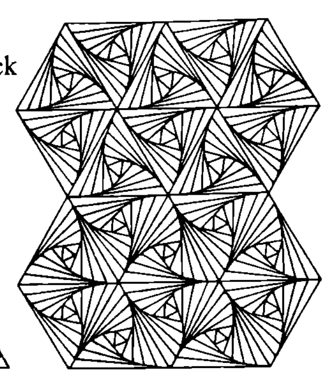
(1)	aab*c = adde	(2)	adde*c = ccc
(3)	ccc*f = fff	(4)	fff*g = fhd





Curves of pursuit aus Math. Pie (74/75), Warwick

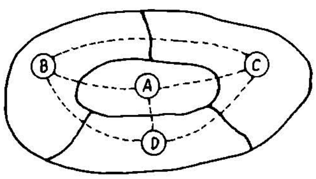




Lösungen

Lösungen zu: Der Vierfarbensatz

▲1▲

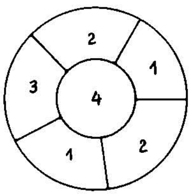


▲2▲ Zehn. Bezeichnet man die Hauptstädte mit A, B, C, D, E, so wären das die Straßen AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.

▲3▲ Angenommen, die fünf Punkte A, B, C, D, E wären einander durch sich gegenseitig nicht schneidende Kurven verbunden. Drei Verbindungskurven bilden stets zusammen eine geschlossene Kurve, z. B. die Kurven AB, BC, AC. Da die Kurve DE die übrigen Kurven nicht schneidet, liegen D und E beide innerhalb oder beide außerhalb der geschlossenen Kurve ABC. Man verbinde nun D mit A, B und C. Man erhält geschlossene Kurven ABD, ACD und BCD. Liegt nun E z. B. innerhalb von ABD, so kann es keine Kurve geben, die E mit C verbindet und keine der übrigen Kurven schneidet. Bei anderer Lage von E gilt Entsprechendes.

▲4▲ Folgt aus dem in Aufgabe 3 Bewiesenen.

▲5▲ Ungarn mit seinen Nachbarn ČSSR, UdSSR, Rumänien, Jugoslawien, Österreich.



Lösung zu:
Eine Aufgabe von Prof. Dr. Skopetz

▲1765a▲ Aufgabe und Lösung nach *A. Halameisär*, Moskau: Nehmen wir an, die Strecke bis zur nächsten Station sei 66 km. Dann fährt Herr Müller *hin* genau eine Stunde, läuft *zurück* 11 Stunden, insgesamt 12 Stunden, während er 66 km + 66 km = 132 km zurücklegt; der Nachbar mit dem Fahrrad hat auch 132 km in 12 Stunden zurückgelegt, also mit einer Geschwindigkeit

$$132:12 = 11\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right).$$

Allgemein, wenn die Strecke S km beträgt:

$$V_{mittl} = S_{ges} : T_{ges} = \frac{2S}{\frac{S}{V_1}+\frac{S}{V_2}} = \frac{2S}{\frac{S}{66}+\frac{S}{6}} = 11\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right).$$

▲1765b▲ Lösung nach *Prof. Skopetz*

Betrachten wir zuerst das Dreieck EDQ und die Transversale $\overline{AP}$ (Bild 3). Laut *Satz des Menelaos* schneidet die Transversale die Seiten des Dreiecks so, daß das Produkt der Verhältnisse den Wert -1 hat, d. h.:

$$\frac{\overline{EP}}{\overline{PD}}\cdot\frac{\overline{DA}}{\overline{AQ}}\cdot\frac{\overline{QS}}{\overline{SE}} = -1.$$

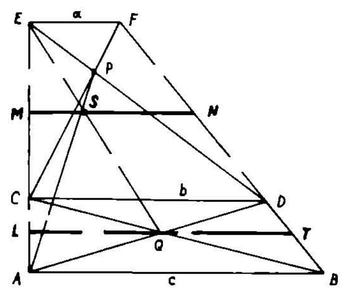
Laut Ähnlichkeit, $\frac{\overline{EP}}{\overline{PD}} = \frac{a}{b}$; $\frac{\overline{DA}}{\overline{AQ}} = \frac{b+c}{c}$,

also gilt:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b+c}{c}\cdot\frac{\overline{QS}}{\overline{SE}} = -1 \text{ oder } \frac{\overline{ES}}{\overline{SQ}} = \frac{a(b+c)}{bc}.$$

Man zeichne nun eine Strecke $\overline{LT} \parallel \overline{AB}$ ($L \in \overline{AE}$, $T \in \overline{FB}$, $Q \in \overline{LT}$). Wie schon erwähnt, ist $\overline{LT}$ das harmonische Mittel zwischen b und c, also:

$$\frac{1}{\overline{LT}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \text{ oder } \overline{LT} = \frac{2bc}{b+c}.$$



Offensichtlich

$$MN = \frac{a + \frac{\overline{ES}}{\overline{SQ}}\cdot\overline{LT}}{1+\frac{\overline{ES}}{\overline{SQ}}} \text{ oder, nach der Substitution,}$$

$$MN = \frac{a + \frac{a(b+c)}{bc}\cdot\frac{2bc}{b+c}}{1+\frac{a(b+c)}{bc}} = \frac{3abc}{ab+ac+bc}$$

und schließlich $\frac{1}{\overline{MN}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, w.z.b.w.

Z. A. Skopetz

Der sowjetische Geometer Prof. Dr. sc. *Z. A. Skopetz* (geb. 1917), ist Autor bzw. Mitverfasser verschiedener Lehr- und Hilfsbücher zur Geometrie, Autorenkollektivleiter der modernen Schulbücher *Geometrie 9 und 10*. Viele Schüler von Prof. Dr. sc. *Skopetz* sind bei mehreren pädagogischen und technischen Hochschulen als Dozenten tätig, einige davon sind selbst schon bekannte Gelehrte und Lehrstuhlleiter. *A. Halameisär*

Lösungen zu:
aufgepaßt – nachgedacht – mitgemacht

Kunstliebhaber

Bild 2, an der Seite D aufgehängt.

Magisches Quadrat

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

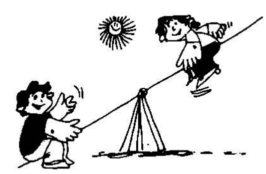
Auf der Wippe

Es seien a, b, h die Maßzahlen des Körpergewichts von Alfred, Bernd, Heinz; dann gilt $a<h$ und $b<a$. Daraus folgt $b<a<h$.

a) Heinz ist am schwersten.

b) Ja.

c)



Bernd Heinz

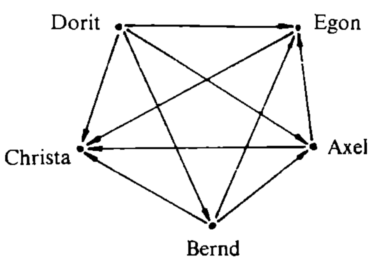
Kombiniere!

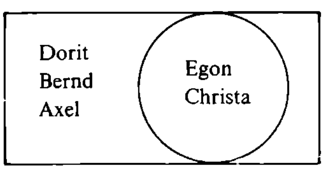
	1 M	2 M	5 M
3 M	3	0	0
	1	1	0
4 M	4	0	0
	2	1	0
5 M	5	0	0
	3	1	0
	1	2	0
	0	0	1
6 M	6	0	0
	4	1	0
	2	2	0
	1	0	5
7 M	7	0	0
	5	1	0
	3	2	0
	2	0	1
	1	3	0
	0	1	1
8 M	8	0	0
	6	1	0
	4	2	0
	3	0	1
	2	3	0
	1	1	1
	0	4	0
9 M	9	0	0
	7	1	0
	5	2	0
	4	0	1
	3	3	0
	2	1	1
	1	4	0
	0	2	1
10 M	10	0	0
	8	1	0
	6	2	0
	5	0	1
	4	3	0
	3	1	1
	2	4	0
	1	2	1
	0	0	2

	11	0	0
	9	1	0
	7	2	0
	6	0	1
11 M	5	3	0
	4	1	1
	3	4	0
	2	2	1
	1	5	0
	1	0	2
	0	3	1

Kinder unter sich

Es seien a, b, c, d, e die (ganzen) Zahlen, die das Lebensalter von Axel, Bernd, Christa, Dorit, Egon angeben; dann gilt $d<b<a<e<c$. Daraus folgt weiter $d<a$, $d<c$, $d<e$, $b<c$, $b<e$, $a<c$; diese sechs Ungleichungen sind durch fehlende Pfeile zu ergänzen.





Negativ – positiv

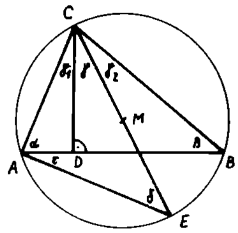
Positiv 2 gehört zum abgebildeten Negativ.

Zahlenfolgen

1. Jede folgende Zahl ist um 6 größer als die vorangehende. Die Zahl 25 gehört nicht in die Folge.
2. Jede folgende Zahl beträgt die Hälfte der vorangehenden. Die Zahl 6 gehört nicht in die Folge.
3. Jede Zahl beträgt das Dreifache der vorangehenden. Die Zahl 0,9 gehört nicht in die Folge.
4. Die Folge entsteht, indem der Folge nach die Zahlen 8, dann 9, dann 10, dann 11 addiert werden. Die Zahl 34 gehört nicht zur Folge.
5. Die Folge entsteht, indem der Reihe nach die Zahlen 5, dann 4, dann 3, dann 2, dann 1 subtrahiert werden. Die Zahl 2 gehört nicht in die Folge.
6. Die Folge entsteht, indem man jeweils den Zähler um 4 vergrößert, den Nenner aber halbiert. Die Zahl $\frac{9}{12}$ gehört nicht zur Folge.

Lösungen zu den Aufgaben des alpha-Wettbewerbs, Heft 2/78
Fortsetzung:

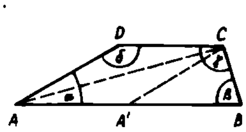
Ma 8 ■1753 Zur Veranschaulichung diene die folgende Skizze:



Behauptung: $\gamma_1 = \gamma_2$

1. Wenn $\alpha = \beta$, so ist das Dreieck ABC gleichschenklig. Die Geraden CM und CD fallen dann zusammen. Folglich gilt $\gamma_1 = \gamma_2$.
2. Es sei $\alpha \neq \beta$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gelte $\alpha > \beta$. Dann gilt
$\varepsilon = \gamma_2$
(Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{BE}$)
$\varepsilon + \alpha = 90°$ (Satz des Thales)
Folglich gilt $\gamma_2 + \alpha = 90°$.
$\alpha + \gamma_1 = 90°$ (Winkelsumme im Dreieck)
Folglich gilt $\gamma_1 = \gamma_2$, w.z.b.w.

Ma 8 ■1754 a) $10\alpha = 360°$; $\alpha = 36°$; $\beta = 72°$; $\gamma = 108°$, $\delta = 144°$
b) $ABCD$ ist ein Trapez. Es gilt: $\alpha + \delta = \gamma + \beta = 180°$.
c) Dreieck ACD ist gleichschenklig. Da $\delta = 144°$, gilt für die Größe jedes Basiswinkels 18°.
Also $\sphericalangle DAC = \frac{1}{2}\alpha$.
d) Es gilt $180° - 72° - 18° = 90°$ für die Größe des Winkels $\sphericalangle BCA$.
e) Zeichnet man durch C die Parallele zu $\overline{AD}$, die $\overline{AB}$ in A' schneidet, so ist das Viereck $AA'CD$ ein Parallelogramm, und es gilt $\overline{A'C} \cong \overline{AD}$. Im Dreieck $A'BC$ ist die Größe Winkels $\sphericalangle A'BC$ gleich $\beta = 2\alpha$. Aus $\alpha < \beta$ folgt, daß $\overline{BC}$ kürzer ist als $\overline{AD}$.
f) Dreieck $A'BC$ ist gleichschenklig.
Begründung: Die Winkel $\sphericalangle CA'B$ und $\sphericalangle A'CD$ haben jeweils die Größe α, der Winkel $\sphericalangle BCD$ die Größe 3α, folglich hat der Winkel $\sphericalangle A'CB$ die Größe $3\alpha - \alpha = 2\alpha$. Da auch der Winkel $\sphericalangle A'BC$ die Größe 2α hat folgt, daß $\overline{A'C} \cong \overline{A'B} \cong \overline{AD}$ ist. Wegen $\overline{AA'} \cong \overline{AD}$ folgt:
$\overline{AB}$ ist doppelt so lang wie $\overline{AD}$.
Skizze:



Ma 9 ■1755 Nach dem Distributivgesetz der Multiplikation bezüglich der Addition im Bereich der reellen Zahlen gilt
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geqq ab + ac + ad + ae$.
Wegen der Monotonie der Subtraktion in P gilt
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - ab - ac - ad - ae \geqq 0$.
Nach dem Kommutativgesetz der Addition in P gilt
$b^2 - ab + c^2 - ac + d^2 - ad + e^2 - ae + a^2 \geqq 0$.
Wegen $a^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$ kann man weiter umformen zu

$$\left(b^2 - ab + \frac{a^2}{4}\right) + \left(c^2 - ac + \frac{a^2}{4}\right) + \left(d^2 - ad + \frac{a^2}{4}\right) + \left(e^2 - ae + \frac{a^2}{4}\right) \geqq 0.$$

Die in den Klammern stehenden Summen lassen sich wie folgt in Produkte umformen (binomische Formeln):

$$\left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(e - \frac{a}{2}\right)^2 \geqq 0$$

Da das Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ sein kann und da alle Umformungen äquivalente Umformungen sind, ist die Gültigkeit der Ungleichung für alle reellen a, b, c, d, e bewiesen.

Ma 9 ■1756 Es handelt sich hier um eine arithmetische Folge 1. Ordnung mit 25 Gliedern. Das erste Glied ist 800, das letzte 2504. Die Summe aller Glieder kann mit der Formel

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

berechnet werden, wobei n die Anzahl der Glieder, a_1 das Anfangsglied und a_n das Endglied bedeuten. Es gilt also

$$s_{25} = \frac{25}{2}(800 + 2504)$$
$$s_{25} = 25 \cdot 1652$$
$$s_{25} = 41\,300$$

Das Stadion verfügt über 41 300 Sitzplätze.

Ma 9 ■1757 Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, $\log_4 12$ sei eine rationale Zahl. Dann müßte sie sich in der Form $\log_4 12 = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in N$ und $b \neq 0$ darstellen lassen. Dann gilt

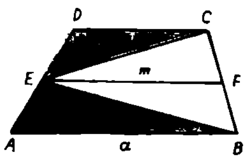
$$4^{\frac{a}{b}} = 12$$
$$4^a = 12^b.$$

Das bedeutet: Es gibt eine Zahl, die sowohl als Vierer- wie auch als Zwölferpotenz darstellbar ist.
Da 12^b für alle $b \in N$ durch 3 teilbar ist und 4^a für kein $a \in N$ durch 3 teilbar ist, haben wir unsere Annahme zum Widerspruch geführt. Es gilt nun das Gegenteil der Annahme, d. h., $\log_4 12$ ist keine rationale Zahl, w.z.b.w.
2. Möglichkeit:

$$4^a = 12^b$$
$$4^a = (4 \cdot 3)^b$$
$$4^a = 4^b \cdot 3^b$$
$$4^{a-b} = 3^b$$
$$2^{2(a-b)} = 3^b$$

Alle Potenzen von 3 sind ungerade; alle Potenzen von 2 sind gerade. Deshalb gilt
$2^{2(a-b)} \neq 3^b$ für $a \neq b$.

Ma9 ■1758 Man zeichnet durch E eine Parallele zu $\overline{AB}$, die $\overline{BC}$ in F schneidet.
Es seien m die Länge der Strecke $\overline{EF}$, a die Länge von $\overline{AB}$ und c die Länge von $\overline{DC}$. Dann gilt $m=\frac{a+c}{2}$ (Mittellinie des Trapezes). Für den Flächeninhalt A_1 des Dreiecks ECD gilt dann $A_1=\frac{c\cdot h}{4}$ (h sei die Länge der Höhe des Trapezes). Für den Flächeninhalt A_2 des Dreiecks ABE gilt $A_2=\frac{a\cdot h}{4}$, und für den Flächeninhalt A des Dreiecks EBC gilt $A=\frac{(a+c)\cdot h}{4}$.
Nach der Behauptung $A_1+A_2=A$ müßte gelten: $\frac{c\cdot h}{4}+\frac{a\cdot h}{4}=\frac{(a+c)\cdot h}{4}$.
Wie man sieht, ist das der Fall, w.z.b.w.



Ma 10/12 ■1759 a) Für den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ gilt: $A_1=a\cdot b$. Für den Flächeninhalt des über einer der Diagonalen des Rechtecks errichteten Quadrats gilt: $A_2=a^2+b^2$ (Satz des Pythagoras). Es wird behauptet, daß gilt:

$$a^2+b^2\geqq 2ab.$$

Durch äquivalente Umformung erhält man $(a-b)^2\geqq 0$, und das gilt für alle reellen Zahlen a und b, q.e.d.
b) Es soll also gelten: $a^2+b^2=3ab$ bzw. $a^2-3ab+b^2=0$. Löst man diese quadratische Gleichung nach a auf, so erhält man

$$a_{1,2}=\frac{3}{2}b\pm\sqrt{\frac{9}{4}b^2-b^2}$$

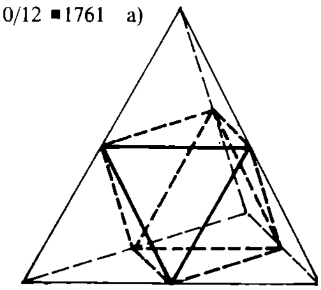
und nach weiterer Umformung

$$a_{1,2}=\frac{1}{2}b(3\pm\sqrt{5}).$$

Setzt man für b eine beliebige reelle (positive) Zahl ein, z. B. 2, so erhält man mit $a_1=\frac{1}{2}b(3+\sqrt{5})$ und $a_2=\frac{1}{2}b(3-\sqrt{5})$ stets Lösungen der Gleichung $a^2+b^2=3ab$.
Für $b=2$ ergibt sich $a_1=3+\sqrt{5}$ bzw. $a_2=3-\sqrt{5}$.
Hat z. B. die Rechteckseite a die Maßzahl $3+\sqrt{5}$ und die Rechteckseite b die Maßzahl 2, so werden die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

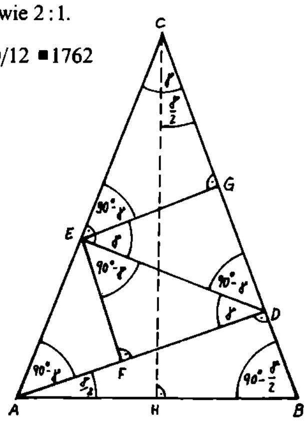
Ma 10/12 ■1760 Voraussetzung: Es gilt
$\tan(\alpha+\beta)=\cot(\alpha+\beta)$
Behauptung: Es gilt dann
$\cos(\alpha+2\beta)=\sin\alpha$
Beweis: Aus der Voraussetzung folgt
$\alpha+\beta=45°+180°\cdot k$ $(k\in G)$, d. h.
$\beta=45°+180°\cdot k-\alpha$ $(k\in G)$.
Nun ist $\cos(\alpha+2\beta)$
$=\cos(\alpha+\beta+\beta)$
$=\cos(\alpha+45°+180°\cdot k-\alpha+45°+180°\cdot k-\alpha)$
$=\cos(90°+360°\cdot k-\alpha)$
$=\cos(90°-\alpha)$
$=\sin\alpha$, q.e.d.
Die meisten Löser haben bemerkt, daß sich hier ein Druckfehler in die Aufgabe eingeschlichen hatte.
Es mußte richtig heißen:
$\tan(\alpha+\beta)=\cot(\alpha+\beta)$.

Ma 10/12 ■1761 a)



b) Es ist ein Achtflächner. Der Körper hat 8 Flächen, 6 Ecken und 12 Kanten.
$(8+6-12=2$; Eulerscher Polyedersatz!)
c) Es sei s_1 die Länge der Kante des regelmäßigen Tetraeders, und es sei s_2 die Kantenlänge des einbeschriebenen Achtflächners. Dann gilt $s_1:s_2=2:1$.
Der Tetraeder mit der Kantenlänge a hat das Volumen $V=\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$. Der Achtflächner „schneidet" vier kleine Tetraeder ab, die je die Kantenlänge $\frac{a}{2}$ haben, also das Volumen $V=\frac{a^3}{96}\sqrt{2}$; die vier Tetraeder haben deshalb das Volumen $V=\frac{a^3}{24}\sqrt{2}$. Dieses gleiche Volumen bleibt für den Achtflächner noch übrig. Demzufolge verhalten sich beide Volumina wie 2 : 1.

Ma 10/12 ■1762



(Skizze nicht maßstabgerecht)
$\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; $\frac{\gamma}{2}=19{,}48°$; $\gamma=38{,}86°$.
$\overline{AB}:\overline{BD}=\overline{BC}:\overline{HB}=6:2=3$;
$\overline{BD}=\frac{1}{3}\overline{AB}=\frac{4}{3}$ cm.
$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2-\overline{BD}^2=16-\frac{16}{9}$;
$\overline{AD}=\frac{8}{3}\sqrt{2}$ cm $=3{,}77$ cm
$\sin(90°-\gamma)=\overline{ED}:\overline{AD}$; $\overline{ED}=3{,}77$ cm $\cdot\sin 51{,}14°$; $\overline{ED}=2{,}94$ cm.
$\cos\gamma=\overline{FD}:\overline{ED}$; $\overline{FD}=2{,}29$ cm.
$\tan\gamma=\overline{EF}:\overline{FD}$; $\overline{EF}=1{,}85$ cm.
Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt
$A_1=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CH}}{2}$; $A_1=\frac{4\cdot 5{,}66}{2}$ cm²;
$A_1=11{,}32$ cm².
Der Flächeninhalt des Rechtecks $FDGE$ beträgt
$A_2=\overline{EF}\cdot\overline{FD}$; $A_2=1{,}85$ cm $\cdot$ 2,29 cm;
$A_2=4{,}21$ cm².
Das Rechteck $FDGE$ nimmt etwa 37,2% des Flächeninhalts des Dreiecks ABC ein
$\left(p=\frac{4{,}21\cdot 100}{11{,}32};\ p=37{,}2\%\right)$
Alle Zahlen sind Näherungswerte!

Aus Platzgründen veröffentlichen wir zu den Aufgaben des Physik- und Chemiewettbewerbs des Heftes 2/78 nur die Antwortsätze:

Ph6 ■36 Die Schneehöhe beträgt rund 8,3 cm.

Ph7 ■37 Für einen Lasthub von 30 cm sind 80 Pumpenhube erforderlich.

Ph8 ■38 In der Aufgabe wurden versehentlich neben die Abbildung die Werte für s, h und r nicht eingefügt. Wir veröffentlichen diese Aufgabe nochmals im Wettbewerb des Heftes 5/78, d. Red. (siehe S. 110).

Ph9 ■39 Die Steighöhe des Ballons beträgt rund 600 m.

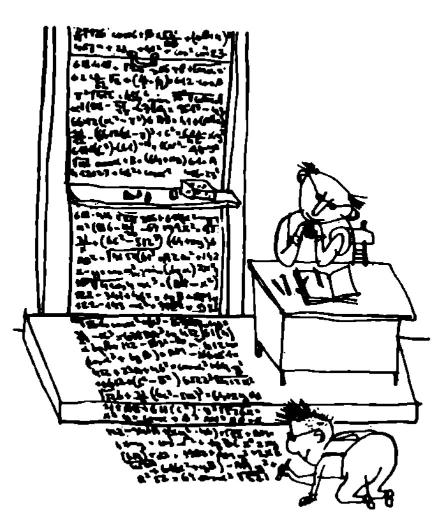
Ph 10/12 ■40 Aus einem Kubikmeter Wasser könnte man bei dem angenommenen Reaktionszyklus $2{,}75\cdot 10^9$ kcal Energie gewinnen.

Ch7 ■29 226 t Roheisen enthalten noch 7910 bis 9040 kg Kohlenstoff.

Ch8 ■30 Beim Brennen von 2 t Kalkstein erhält man 0,77 t Kohlendioxid.

Ch9 ■31 Es entstehen bei der Reaktion 8,8 g Natriumchlorid und 27 g Wasser, 17,3 g Natriumphenolat und 27 g Wasser, 12,3 g Natriumazetat und 27 g Wasser.

Ch 10/12 ■32 Superphosphat enthält 28% Phosphorpentoxid.



XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

4. Stufe (DDR-Olympiade)

Olympiadeklasse 10

1. I. Analysis: Angenommen, es existiert ein Quadrat *ABCD*, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann ist nach den Eigenschaften des Quadrates die Gerade g eine seiner Symmetrieachsen, und die nicht auf g liegenden Eckpunkte B und D liegen bezüglich g symmetrisch. Demzufolge liegt D sowohl auf k_2 als auch auf dem Kreis k_1', der durch Spiegelung von k_1 an g entsteht. Ferner ist der Schnittpunkt E von g und BD der Diagonalenschnittpunkt des Quadrates *ABCD*, der von allen vier Eckpunkten gleichweit entfernt ist. Daraus ergibt sich:
Wenn ein Quadrat *ABCD* den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kann es durch folgende Konstruktion erhalten werden:
II. Konstruktion: (1) Man spiegelt k_1 an g; das Bild sei k_1'.

Bild 1

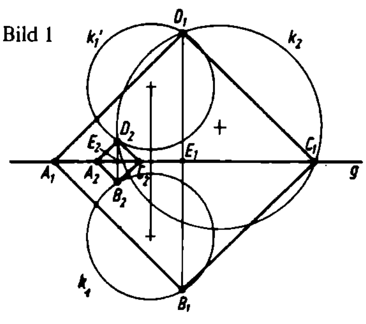


Bild 2

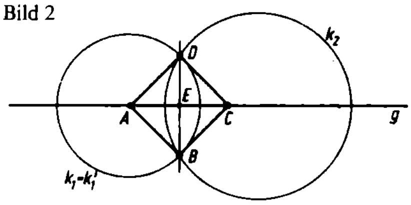
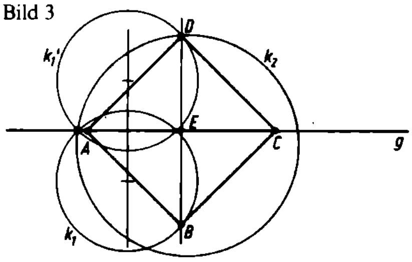


Bild 3



(2) Wenn k_1' und k_2 einen gemeinsamen, nicht auf g liegenden Punkt besitzen, so werde ein solcher mit D bezeichnet.
(3) Man spiegelt D an g, der Bildpunkt sei B.

Bild 4

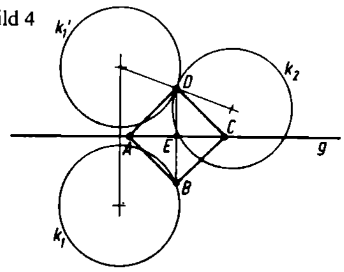


Bild 5

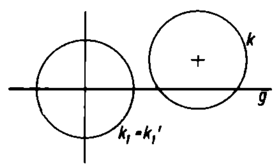


Bild 6

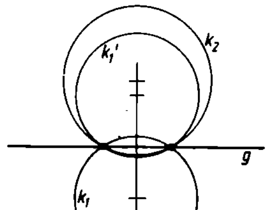
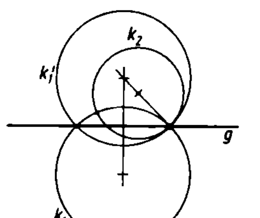


Bild 7



(4) Die Gerade g schneidet als Mittelsenkrechte die Strecke BD in deren Mittelpunkt E. Von E aus trägt man auf g nach jeder Seite eine Strecke der Länge $\overline{EB} = \frac{\overline{BD}}{2}$ ab. Die so konstruierten Punkte seien mit A bzw. C bezeichnet.

III. Beweis: Die unter II. beschriebene Konstruktion führt stets zu einem Quadrat der geforderten Art:
A, C liegen auf g. Wegen der geforderten Eigenschaft von D liegt D auf k_2 und B als Spiegelungspunkt auf k_1. Wegen $\overline{DE} = \overline{EB} = \overline{EC} = \overline{EA} \neq 0$ und $DB \perp AC$ ist *ABCD* ein Quadrat.

IV. Determination: Entsprechend der Lage von k_1, k_2 und g zueinander können folgende Fälle unterschieden werden:
1. k_1' und k_2 haben keinen Punkt gemeinsam.
2. k_1' und k_2 haben genau einen Punkt gemeinsam.
2.1. der auf g liegt,
2.2. der nicht auf g liegt.
3. k_1' und k_2 haben genau zwei Punkte gemeinsam,
3.1. die beide nicht auf g und nicht symmetrisch zu g liegen,
3.2. die beide nicht auf g, aber symmetrisch zu g liegen,
3.3. von denen genau einer auf g liegt,
3.4. die beide auf g liegen.
4. k_1' und k_2 fallen zusammen.
A) Im Fall 4. gibt es unendlich viele Quadrate, die den Bedingungen genügen.
B) Im Fall 3.1. gibt es genau zwei Quadrate der verlangten Art (Bild 1).
C) In den Fällen 2.2., 3.2., 3.3. gibt es genau ein den angegebenen Bedingungen genügendes Quadrat (Bild 2, 3, 4).
D) In den Fällen 1., 2.1., 3.4. gibt es kein Quadrat, das die Bedingungen erfüllt (Bild 5, 6, 7).
Die Fallunterscheidung ist vollständig, die Fälle schließen einander aus. Also gilt:
Genau in den unter A), B) und C) genannten Fällen existiert ein solches Quadrat, dessen Existenz genau in den unter C) genannten Fällen eindeutig bestimmt ist.

Bemerkungen: Entgegen den Erwartungen erwies sich die Aufgabe für alle Teilnehmer als schwer. Keinem einzigen Schüler gelang es, die volle Zahl von 7 Punkten für diese Aufgabe zu erreichen. Auch 6 Punkte konnten nur an einen einzigen Schüler vergeben werden. Annähernd die Hälfte der 93 Teilnehmer fand keinen Zugang zu dieser Aufgabe.
Die Hauptschwierigkeit dieser Aufgabe bestand offensichtlich in der ungewohnt großen Zahl von Fällen, die von den Schülern zu unterscheiden waren. Eine relativ große Zahl der Teilnehmer verwendete zwar die konstruktive Grundidee der Spiegelung des Kreises k_1 an der Geraden g, alle Teilnehmer aber waren nicht imstande, eine übersichtlich geordnete und vollständige Determination vorzunehmen. Insbesondere wurde die mögliche Lage von Schnittpunkten der Kreise k_1' und k_2 auf der Geraden g bzw. symmetrisch bezüglich g nicht gesondert untersucht. Diese gesonderte Untersuchung erforderte keinerlei zusätzliche mathematische Mittel. Die Unvollständigkeit der Lösungen muß also auf nicht ausreichend entwickeltes geometrisches Vorstellungsvermögen, aber auch auf eine gewisse Oberflächlichkeit bei der Lösung derartiger Aufgaben zurückgeführt werden.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl	45	7	4	3	11	22	1	0

Dipl.-Math. Bernd Noack, Berlin

(Die Lösungen zu den weiteren 6 Aufgaben siehe Heft 6/78, d. Red.)

Lösungen zu alpha-heiter:

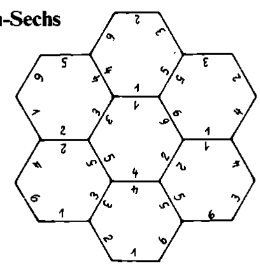
Aus dem alten Rom

Die weißen Rinder seien w, die braunen Rinder b, die schwarzen Rinder s, und die scheckigen k:

$$w = 12 \qquad w = 12$$
$$b = 12 - \frac{s}{4} \qquad b = 10$$
$$s = \frac{12}{3} \cdot 2 \qquad s = 8$$
$$k = \frac{12}{2} + s \qquad k = 14$$

Auf den Fluren weiden 44 Rinder, davon 12 weiße, 10 braune, 8 schwarze und 14 scheckige.

Sieben-Sechs



Auf einen Blick

Wegen der Symmetrie ist das Verhältnis am einfachsten aus einem Viertel berechenbar: 3 schraffierte – 6 weiße Felder $\rightarrow 3:6 = 1:2$.

Wie viele Fische?

Angenommen, der Angler hatte gestern n Fische, heute also $3 \cdot n$ Fische gefangen; dann gilt

$3 \cdot n = n + 10$.

Nur für $n = 5$ wird diese Gleichung erfüllt. Gestern fing der Angler fünf, heute 15 Fische.

Starker Kraftwagenverkehr

a)

PKW	8	12	16	100	36	128	16	40
LKW	2	3	4	25	9	32	4	10

b) Es seien n LKW, also $4 \cdot n$ PKW, insgesamt also $5 \cdot n$ Kraftfahrzeuge von Uwe gezählt worden; dann gilt $5 \cdot n = 55$, also $n = 11$. Es waren 11 LKW und 44 PKW.

Buchstaben-Mosaik

Die erste Gleichung hat zwei Lösungen:

1. $A = 2$; $\alpha = 3$; $B = 8$, also $2^3 = 8$
2. $A = 3$; $\alpha = 2$; $B = 9$, also $3^2 = 9$

Wegen $B^\alpha = CE$ (letzte Gleichung) entfällt die erste Lösung der ersten Gleichung, denn 8^3 ist nicht zweistellig.

Somit gilt: $A = 3$; $\alpha = 2$;

$$
\begin{aligned}
B = \quad 3^2 &= 9\\
33^2 &= 1089\\
333^2 &= 110889\\
3333^2 &= 11108889\\
33333^2 &= 1111088889\\
99999^2 &= 9999800001\\
9999^2 &= 99980001\\
999^2 &= 998001\\
99^2 &= 9801\\
9^2 &= 81
\end{aligned}
$$

Kreuzzahlrätsel

9	8	0	5	■	1
■	8	■	2	2	2
3	8	4	■	4	0
9	0	■	9	6	1
0	4	5	■	4	■
5	■	3	0	2	5

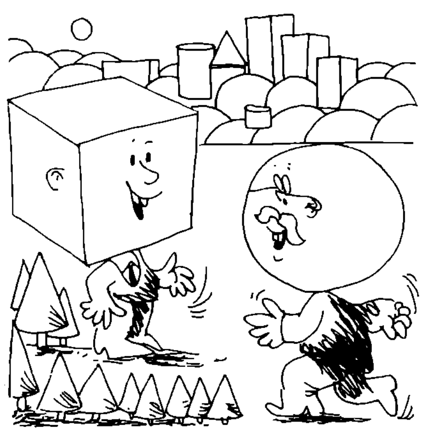
Resultat stets 30

$$
\begin{aligned}
&(2+2+2)^2 - 2 - 2 - 2 + 2 - 2\\
&= 3^3 + 3 + 3 - 3 + 3 - 3 + 3 - 3\\
&= 4 \cdot 4\left(\frac{4+4}{4}\right) - \frac{4}{4} - \frac{4}{4}\\
&= 5 \cdot 5 + 5 + 5 - 5 + 5 - 5 + 5 - 5\\
&= 6 \cdot 6 - 6 + 6 - 6 + 6 - 6 + 6 - 6\\
&= 7 + 7 + 7 + 7 + \frac{7+7}{7} + 7 - 7\\
&= 8 + 8 + 8 + 8 - \frac{8+8}{8} + 8 - 8 = 30
\end{aligned}
$$

Kryptarithmetik

(1) $112 \cdot 9 = 1008$
(2) $1008 - 9 = 999$
(3) $999 : 3 = 333$
(4) $333 + 7 = 340$

Begegnung vom Kreis und Würfel



Herr Kreis trifft beim Spazierengehn
Herrn Würfel wohl nur aus Versehn.
Obgleich man sich nicht sonders mag,
sagt man doch höflich „Guten Tag",
denn einer ist gerundet nur,
der andre kantig von Statur.

Jedoch Herr Kreis fühlt mit Instinkt,
daß ein Gespräch sie näher bringt.
Er meint Herrn Würfel zugewendet:
„Wie sind die Menschen doch verblendet!
Sie plagen unter Geistesqualen
mit Zirkeln sich und Linealen.
Mit Scharfsinn und sehr viel Probieren
woll'n sie die Strecke konstruieren,
die auf 'ner G'raden dann entsteht,
wenn ich mich einmal abgedreht. –
Vom Zirkel, dem ich dank' mein Leben,
wird nie mein Umfang preisgegeben!

Dann gibt es ganz besondre Gecken,
die suchen auf mir sieben Ecken
zu einem Vieleck, regulär,
doch gibt auch dies kein Zirkel her.
Ein Gauß entdeckt' auch für die Blinden
'ne Regel, daß hier nichts zu finden;
sie forschen jedoch ungetrübt
nach Konstruktionen, die's nicht gibt.

Manch Schlauer sucht dann noch sein Glück.
Er nimmt von mir ein Bogenstück
und meint dann ohne viel Verweilen,
man könnt' es in drei Stücke teilen,
mit Zirkel, klassisch-konstruktiv;
doch geht auch dieser Zauber schief.
Er nennt sich Winkeltrisektierer
und ist doch nur ein Bleistiftschmierer.

Ein andrer, der sonst nichts erklommen,
glaubt, meinem Inhalt beizukommen,
mit Zirkel und Lineal exakt,
doch bleibt auch dies ein leerer Akt.
Er meint, Axiome umzuwerfen
und fällt der Mitwelt auf die Nerven.
Vom Schicksal ist es mir beschieden,
daß ich 'ne Falle bin für Nieten!"

Herr Würfel nickt verständnisvoll
und klagt ihm ohne jeden Groll:
„Auch mir wird übel mitgespielt,
so lang der Mensch auf Erden wühlt.
Mal bin ich Sinnbild dieser Erde,
dann trag ich Säulen ohn' Beschwerde.

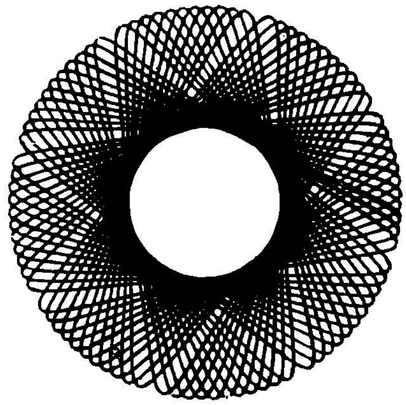
Man brennt mir Augen in die Seiten
und läßt im Glücksspiel mich entscheiden.
Zu Delos dient' ich als Altar,
man brachte Opfer auf mir dar.
Den Göttern schien ich nicht genehm.
Sie stellten daher ein Problem.

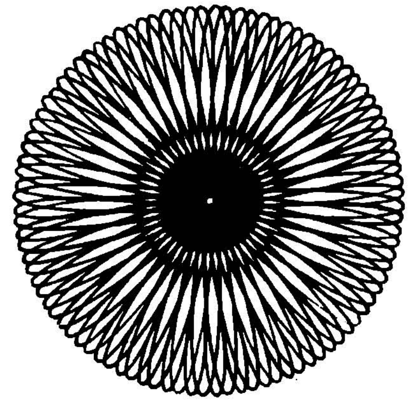
Orakelhaft stand da verkoppelt,
daß man den Inhalt mir verdoppelt,
beschränkt auf Zirkel und Lineal. –
Dies macht uns beide kongenial!
Vergebens sucht seit alten Zeiten
der Mensch die Maße dieser Seiten.
Als Früchte all' der Geistesmühn
entstanden viele Theorien.
Manch kluger Kopf hat zwar erkannt,
daß man auf irrealem Land.
Doch finden sich stets neue Gimpel,
für die die Frage völlig simpel
und ohne Wissen lösbar scheint. –
Sie sehen nun, was uns vereint!"

Der Kantige hat durch den Runden
'nen kleinen Trost für sich gefunden.
Nachdem die Herren so erkannt,
daß sie sich geistig eng verwandt,
vom Phänotypus zwar verschieden,
hab'n künftig sich nicht mehr gemieden.

Dr. sc. nat. Eberhard Schröder, TU Dresden

Rosetten-Graphik

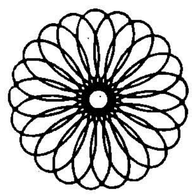


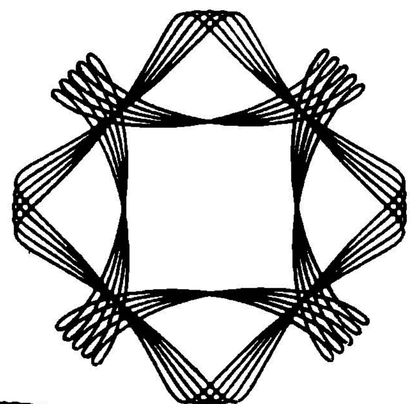


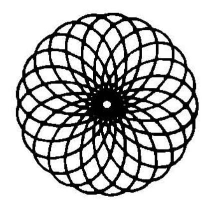
Uta Reiche aus Dresden (Klassenstufe 8) sandte uns ein Foto, das sie bei unterhaltsamem Spiel mit dem Spirographen *Inspiro* aus der ČSSR zeigt. Gleichzeitig sandte sie uns Hinweise zur Handhabung des Gerätes (das auch selbst gebaut werden kann):

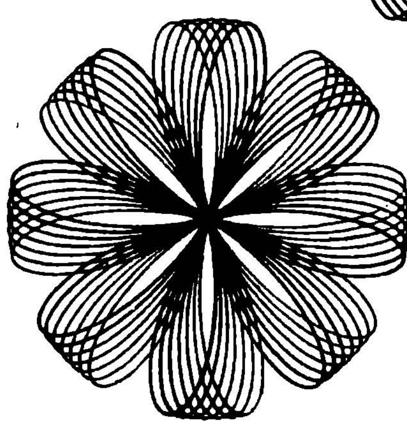
Auf einer glatten Unterlage werden mit Hilfe von Reißzwecken ein Blatt Papier und dasjenige Zahnrad befestigt, das beim Zeichnen feststehen soll. Nun wird das Laufrad so angesetzt, daß seine Zähne in die des feststehenden Rades eingreifen.

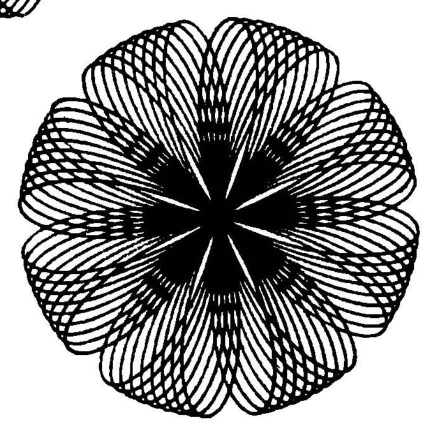
Dann wird die Spitze eines Stiftes durch die gewünschte Bohrung des Laufrades gesteckt und dieses das feststehende Rad entlang geführt. Schöne Zeichnungen ergeben sich, wenn das Laufrad des feststehenden Rades entlang oder zwischen mehreren festen Rädern geführt wird. Durch die Verwendung unterschiedlicher Laufräder oder verschiedener Bohrungen ergeben sich viele Kombinationsmöglichkeiten. Ich habe für die *alpha*-Leser einige schöne Spirographenbilder mitgeschickt.

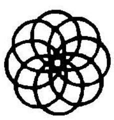


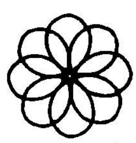


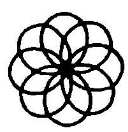


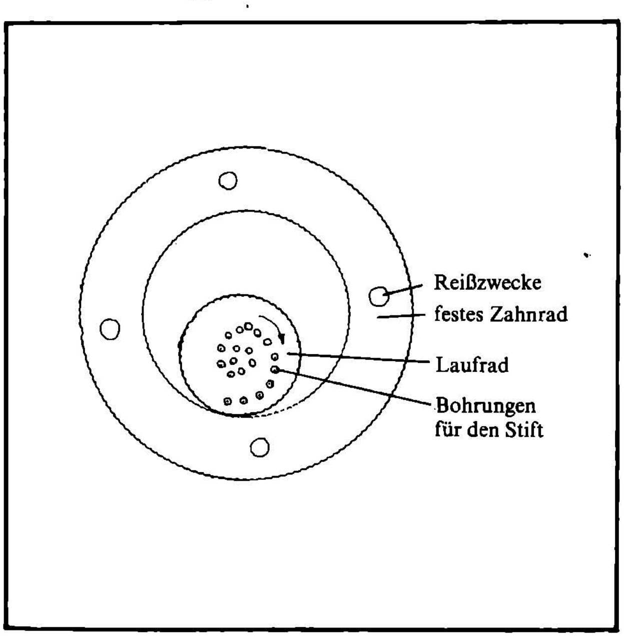






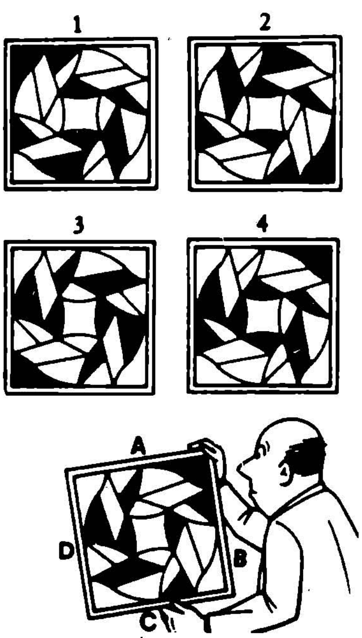






Für Kunstliebhaber

Ein Kunstliebhaber erstand auf einer Ausstellung ein abstraktes Gemälde. Es ist eines der gezeigten vier.
Welches ist es, und mit welcher Seite (*A*, *B*, *C* oder *D*) wurde es aufgehängt?



Magisches Quadrat

Setze die Zahlen 1 bis 25 so in das Quadrat ein, daß in jeder Reihe, Spalte und Diagonale die gleiche Summe erscheint!
(17 Zahlen sind bereits eingesetzt.)

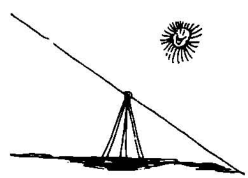
	16		22	15
20	8	21		2
	25	13	1	
24	12		18	6
11			10	23

Auf der Wippe

Wenn die drei Schüler Bernd, Alfred und Heinz auf der Wippe sitzen, dann sieht es wie folgt aus:

Heinz Alfred

Bernd Alfred



a) Wer ist am schwersten von den drei Jungen?
b) Ist Heinz schwerer als Bernd?
c) Wo müßten Heinz und Bernd auf der abgebildeten Wippe sitzen, damit diese Stellung der Wippe erreicht wird?

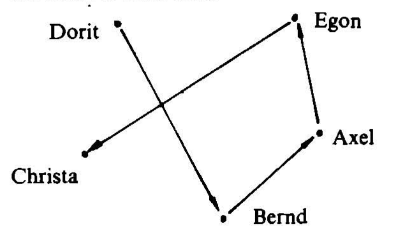
Kombiniere!

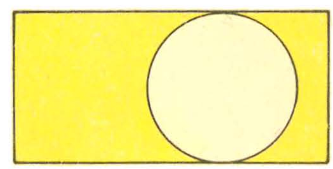
Wir haben Münzen im Werte von 1 M, 2 M und 5 M in ausreichender Menge zur Verfügung. Wie viele Münzen jeder Art benötigt man, um die in der Tabelle angeführten Geldbeträge bilden zu können?

	1 M	2 M	5 M
2 M	2 0	0 1	0 0
3 M			
4 M			
5 M			
6 M			
7 M			
8 M			
9 M			
10 M			
11 M			

Kinder unter sich

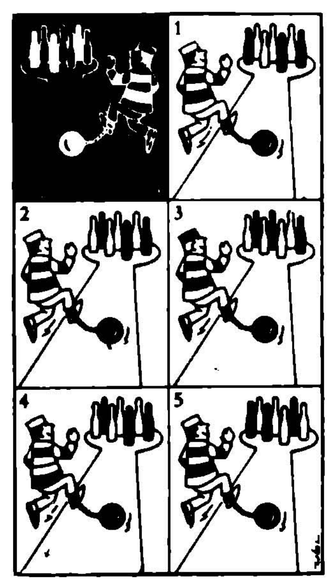
Jeder Pfeil zeigt in dem Bild auf den Namen eines älteren Kindes.
a) Zeichne die noch fehlenden Pfeile ein!
b) Schreibe die Namen der fünf Kinder in das abgebildete rechteckige Feld! Im Kreis sollen die Namen derjenigen Kinder stehen, die älter als Axel sind.





Negativ – positiv

Welches der fünf Positive gehört zum abgebildeten Negativ?



Zahlenfolgen

Die Zahlenfolgen 1 bis 6 enthalten jeweils eine Zahl, die nicht in die Folge gehört. Wer findet sie?

1	7	13	19	22	25	31
2	16	8	6	4	2	1
3	0,3	0,6	0,9	2,7	8,1	24,3
4	7	15	24	33	34	45
5	18	13	9	6	4	2
6	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{17}{2}$

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha

6

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag
Berlin
12. Jahrgang 1978
Preis 0,50 M
Index 31 059

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 20430.
Veröffentlicht unter Lizenznummer 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik.
Postscheckkonto: Berlin 132626. Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 1,50 M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M, im Abonnement zweimonatlich 1,– M, Sonderpreis für die DDR 0,50 M.
Bestellungen werden in der DDR vom Buchhandel und der Deutschen Post entgegengenommen.
Der Bezug für die Bundesrepublik Deutschland und Berlin(West) erfolgt über den Buchhandel; für das sozialistische Ausland über das jeweilige Postzeitungsvertriebsamt und für alle übrigen Länder über: Buchexport Volkseigener Außenhandelsbetrieb der DDR 701 Leipzig, Leninstr. 16.

Fotos: PH Güstrow (S. 131); J. Lehmann, Leipzig (S. 132); PH Dresden, Just (S. 135); *Vignetten:* H. Teske Leipzig (S. 135, 137); S. 127: *Gesucht und gefunden bei:* „Lapok“ und „Füles“, Budapest; „Frösi“ und „NBI“, beide Berlin; Dr. Thiele, BSB B. G. Teubner (Funktionen),
Titelblätter: W. Fahr, Berlin (nach Motivauswahl von J. Lehmann, Leipzig)
Typographie: H. Tracksdorf

Gesamtherstellung: INTERDRUCK
Graphischer Großbetrieb Leipzig – III/18/97
AN (EDV) 128 – ISSN 0002-6395
Redaktionsschluß: 11. August 1978

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben ab der angegebenen Klassenstufe geeignet

Lineare Optimierung

Teil 1

Eine Klasse hat sich verpflichtet, für einen Solidaritätsbasar zu basteln. Es ist zu überlegen, welche und wie viele Gegenstände in der zur Verfügung stehenden Zeit mit den vorhandenen Mitteln, wie Bast, Karton, Leinen, Modelliermasse, angefertigt werden können, um einen möglichst hohen Erlös dafür auf dem Basar zu erzielen. Das lateinische Wort „Optimum" bedeutet „das Beste", „das Günstigste". Im vorliegenden Beispiel ist der Erlös für die selbstgebastelten Gegenstände zu optimieren. Dabei sind gewisse Nebenbedingungen zu beachten. Es steht nur eine begrenzte Zeit zur Verfügung und mehr, als man an vorhandenen Materialien besitzt, kann man sicher nicht verarbeiten.

In der Praxis sind für die Lösung von Problemen oft viele Möglichkeiten gegeben, die ihrerseits aber verschiedene Zeiten, unterschiedliche Kosten und unterschiedlichen Materialeinsatz erfordern. Die Frage nach der bestmöglichen Lösung der Probleme ist im Rahmen der Rationalisierung von technischen und ökonomischen Prozessen von großer Bedeutung. Der größtmögliche oder maximale bzw. der kleinstmögliche oder minimale Wert einer Funktion ist unter Einhaltung gegebener Nebenbedingungen zu ermitteln.

Es seien einige praktische Aufgabenstellungen genannt, die im Rahmen dieses Beitrages allerdings nicht gelöst werden können, die aber dennoch die Problemstellung sowie die Aktualität des Stoffgebietes deutlich machen:

– Aus verschiedenen in bestimmter Menge zur Verfügung stehenden Gasen mit unterschiedlichem Schwefelgehalt und unterschiedlichem Heizwert soll eine Heizgasmischung hergestellt werden, deren Kosten minimal sind. Nebenbedingungen: Der Schwefelgehalt darf eine bestimmte Grenze nicht überschreiten. Der Heizwert der Mischung muß zwischen zwei gegebenen Grenzen liegen, um einerseits eine Entzündbarkeit des Gemisches zu garantieren und andererseits eine Explosionsgefahr zu vermeiden. Außerdem stellen die vorhandenen Mengen der gegebenen Gase eine Kapazitätsbeschränkung dar.

– Bei plötzlich einsetzendem Frost oder Schneefall sollen die Hauptverkehrsstraßen eines Kreises in kürzester Zeit eisfrei gemacht werden. Wo sind Laugedepots für das Betanken der Sprühfahrzeuge anzulegen?

– Großbaustellen mehrerer Neubaugebiete sollen in kürzester Zeit mit Platten von mehreren Plattenwerken beliefert werden. Wo sind diese Plattenwerke einzurichten?

– Minimierung der Liegezeiten der Schiffe im Überseehafen.

– Maximierung der Produktion von Konsumgütern eines Betriebes.

– Maximierung der Auslastung bestimmter Maschinensätze in einem Großbetrieb.

– Minimierung der Wartezeiten im Fernsprechverkehr.

Der Leser möge für die letztgenannten Beispiele selbst Nebenbedingungen angeben.

Mathematische Methoden, welche das Optimum (Maximum oder Minimum) einer linearen Funktion unter gegebenen linearen Nebenbedingungen zu ermitteln gestatten, werden unter dem Begriff „lineare Optimierung" zusammengefaßt. Die Methode der linearen Optimierung wurde erstmals an der Leningrader Universität von L. W. Kantorowitsch im Jahre 1939 vorgestellt.

Die mathematische Bearbeitung eines praktischen Problems erfordert die Umsetzung des jeweiligen Sachverhalts in eine mathematische Aufgabenstellung. Dem ökonomischen oder technischen Modell wird ein mathematisches Modell zugeordnet. Dieses umfaßt neben der linearen Funktion, deren Extremum ermittelt werden soll, eine Menge von Randbedingungen in Form von linearen Ungleichungen und Gleichungen.

Zur Wiederholung geben wir einige Beispiele für das Rechnen mit linearen Ungleichungen an:

B 1 $x+3 \leqq 3x-7$.

Durch Addition mit dem Term $(7-x)$ erhält man $10 \leqq 2x$. Nach Division mit 2 folgt $5 \leqq x$ oder $x \geqq 5$. Die Lösungsmenge der Ungleichung ist die Menge aller reellen Zahlen, die nicht kleiner als 5 sind: $L=\{x : x \in [5, \infty]\}$. Die grafische Darstellung dieser Lösungsmenge ist in Bild 1 gegeben.

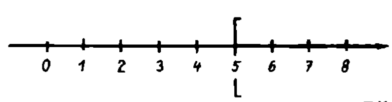


Bild 1

B 2 (I) $x+3 \leqq 3x-7$
(II) $5x-1 \leqq 7+4x$
(III) $1 \geqq 2-x$

Zu ermitteln sind alle reellen Zahlen x, die sowohl die Ungleichung (I), als auch die Ungleichung (II), als auch die Ungleichung (III) erfüllen. Die Lösungsmenge der Ungleichung (I) ist gegeben durch $x \geqq 5$ (vgl. Beispiel B 1).
(II): Nach Addition mit dem Term $(1-4x)$ folgt: $x \leqq 8$.
(III): Nach Addition mit $(x-1)$ erhält man: $x \geqq 1$. Es erfüllen alle diejenigen reellen Zahlen x jede der gegebenen Ungleichungen, die sowohl nicht kleiner als 5, als auch nicht größer als 8 sind: $5 \leqq x \leqq 8$. Oder ausführlich: $L=\{x : x \in [5, 8]\}$. Die grafische Darstellung ist in Bild 2 angegeben.

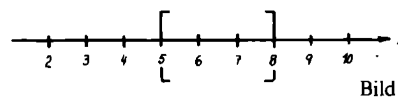


Bild 2

Dem Leser wird empfohlen, die folgenden Ungleichungen bzw. Systeme von Ungleichungen zu lösen. Die Lösungen werden im Beitrag II zu diesem Stoffgebiet im Heft 1/79 angegeben.

1. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \geqq \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}$
2. $1 - x \geqq 2x - 1$
3. $7x + 3 \leqq 2x + 13$
   $x - 2 \geqq 3x - 10$
   $x + 1 \leqq 2x + 2$
4. $5x - 2 \leqq 12 - 2x$
   $1 - 7x \leqq 2x + 3$
   $4x + 1 \leqq x + 12$
   $x + 12 \leqq 6x + 2$
   $2x - 2 \leqq 5x - 3$

In der Klasse 8 werden lineare Funktionen behandelt. Das Bild einer Funktion $y=mx+n$ ist eine Gerade g, welche die Ordinatenachse im Punkt $(0; n)$ schneidet und deren Anstieg m ist (Bild 3). Die Lösungsmenge der Gleichung $y=mx+n$ ist die Menge aller Paare (x, y) mit $y=mx+n$, ihre grafische Darstellung ist die Punktmenge der Geraden g. Die Lösungsmenge der Ungleichung $y \leqq mx+n$ ist gegeben durch alle Paare (x, y), für die $y \leqq mx+n$ gilt. Die grafische Darstellung dieser Lösungsmenge ist gleich der Menge aller Punkte $P(x; y)$ des Koordinatensystems, für die $y \leqq mx+n$ gilt, das sind alle Punkte auf und unterhalb der Geraden g bzw. alle Punkte der in Bild 3 schraffierten Halbebene.

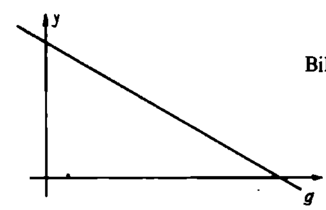


Bild 3

B 3 $2x+3y \leqq 6$.

Durch Subtraktion von $2x$ und anschließender Division durch 3 erhält man: $y \leqq -\frac{2}{3}x+2$.

Dieser Ungleichung wird die Funktion $y=-\frac{2}{3}x+2$ und dieser die Gerade g des Bildes 4 zugeordnet. Die Lösungsmenge der gegebenen Ungleichung ist durch Schraffur gekennzeichnet.

Der Lösungsbereich eines Systems von linearen Ungleichungen mit zwei Variablen ist gleich der Menge aller Punkte $P(x; y)$, die jeder der durch die einzelnen Lösungsmengen gegebenen Halbebenen angehören.

B 4 (I) $x + y \leqq 10$
(II) $x + 2y \leqq 16$
(III) $4x + y \leqq 28$
(IV) $x \geqq 2$
(V) $y \geqq 0$

Den Ungleichungen werden lineare Funktionen und diesen Geraden g_i $(i=1, 2, \ldots, 5)$ zugeordnet: $g_1: y=-x+10$, $g_2: y=-\frac{1}{2}x+8$, $g_3: y=-4x+28$, $g_4: x=2$, $g_5: y=0$. Die Gerade g_4 ist die Parallele zur Ordinatenachse im Abstand 2, die Gerade g_5 ist die Abszissenachse.

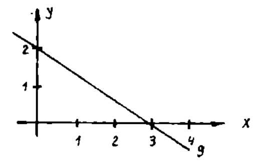


Bild 4

In Bild 5 sind die Lösungsmengen der Ungleichungen als Halbebenen durch Schraffur gekennzeichnet. Alle Punkte des konvexen Fünfecks mit den Eckpunkten (2; 0), (7; 0), (6; 4), (4; 6), (2; 7) einschließlich der Randpunkte – und nur diese – erfüllen jede der gegebenen Ungleichungen; sie stellen die Lösungsmenge des gegebenen Systems linearer Ungleichungen dar.

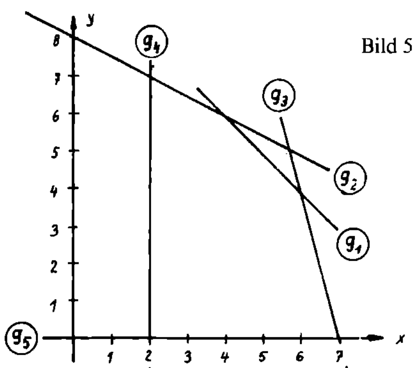


Bild 5

Dem Leser wird empfohlen, die Lösungsmengen folgender Systeme linearer Ungleichungen grafisch zu ermitteln. Die Lösungen werden im Beitrag II im Heft 1/79 angegeben.

5. $$\begin{aligned} -3x+2y&\leqq 6\\ y&\geqq 3\\ x+2y&\leqq 14\\ x+y&\leqq 9 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} -x+y&\geqq 4\\ x+y&\leqq 4\\ 3x+y&\geqq 12 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} 2x+y&\leqq 19\\ x+2y&\geqq 6\\ -3x+y&\leqq -4\\ x+y&\leqq 12\\ -x+3y&\leqq 12\\ x-2y&\geqq 2 \end{aligned}$$

Systeme linearer Ungleichungen treten als Nebenbedingungen bei Aufgaben der linearen Optimierung auf. Dies soll an dem soeben bearbeiteten Beispiel B 4 gezeigt werden. Wir nehmen das folgende vereinfachte Problem an:

B 4a Ein Betrieb plant die zusätzliche Produktion zweier Erzeugnisse E_1 und E_2, weil drei Maschinensätze M_i $(i=1, 2, 3)$ nicht voll ausgelastet sind. Für die Herstellung eines Erzeugnisses E_1 werden an den Maschinensätzen M_1 und M_2 je eine Stunde, am Maschinensatz M_3 vier Stunden Bearbeitungszeit benötigt. Für die Herstellung eines Erzeugnisses E_2 werden an den Maschinensätzen M_1 und M_3 je eine Stunde, am Maschinensatz M_2 zwei Stunden benötigt. In einem bestimmten Zeitraum stehen am Maschinensatz M_1 10 Stunden, am Maschinensatz M_2 16 Stunden und am Maschinensatz M_3 28 Stunden zur Verfügung. Wie viele Erzeugnisse E_1 und E_2 können im betrachteten Zeitraum zusätzlich hergestellt werden, wenn außerdem gefordert wird, daß mindestens zwei Erzeugnisse der Sorte E_1 gefertigt werden sollen?

Die Anzahlen der zu produzierenden Erzeugnisse E_1 und E_2 seien x bzw. y. Da für jedes der Erzeugnisse am Maschinensatz M_1 je eine Stunde benötigt wird und da im betrachteten Zeitraum nicht mehr als 10 freie Maschinenstunden am Maschinensatz M_1 zur Verfügung stehen, gilt die Ungleichung (I): $x+y\leqq 10$.

Mehr als 10 Stunden darf die zusätzliche Produktion am Maschinensatz M_1 nicht in Anspruch nehmen. Analog gilt bezüglich der Maschinensätze M_2 und M_3:

(II): $x+2y\leqq 16$, (III): $4x+y\leqq 28$.

Die zusätzliche Bedingung, daß mindestens zwei Erzeugnisse E_1 produziert werden sollen, läßt sich durch die Ungleichung (IV): $x\geqq 2$ angeben. In der Aufgabenstellung ist eine weitere Nebenbedingung enthalten: Von den Erzeugnissen E_2 wird entweder eine bestimmte Anzahl hergestellt oder es wird auf die Produktion dieses Erzeugnisses verzichtet. Dieser Bedingung entspricht die Ungleichung (V): $y\geqq 0$. Damit ist das System linearer Ungleichungen des Beispiels B 4 dem System aller Nebenbedingungen der Aufgabe B 4a zugeordnet. Jeder Punkt des Lösungsbereiches (Bild 5) mit ganzzahligen Koordinaten x und y stellt ein zulässiges Produktionsprogramm dar. Die Menge aller möglichen Produktionsprogramme unter Beachtung aller gegebenen Nebenbedingungen ist gegeben durch die Menge aller Gitterpunkte – das sind Punkte mit ganzzahligen Koordinaten x und y – des Lösungsbereiches. Zum Beispiel könnten von den Erzeugnissen E_1 und E_2 je 4 Stück im betrachteten Zeitraum hergestellt werden. Von den 54 zur Verfügung stehenden Maschinenstunden würden 40 für die Bearbeitung verbraucht. Auch das Paar $(x, y)=(5, 5)$ stellt ein zulässiges Produktionsprogramm dar, die freie Kapazität am Maschinensatz M_1 würde voll verbraucht, an den Maschinensätzen M_2 und M_3 würden eine bzw. drei Stunden frei bleiben.

Von allen möglichen Produktionsprogrammen soll dasjenige realisiert werden, das die freien Maschinenstunden maximal auslastet. Unter Einbeziehung dieser Zielstellung ist die Aufgabe B 4a zu einem Problem der linearen Optimierung geworden:

Wie viele Erzeugnisse E_1 und E_2 müssen im betrachteten Zeitraum produziert werden, wenn die Auslastung der Maschinensätze M_i $(i=1, 2, 3)$ unter Beachtung der gegebenen Nebenbedingungen maximal (optimal) werden soll?

Für ein Erzeugnis E_1 werden insgesamt 6, für ein Erzeugnis E_2 insgesamt 4 Stunden an den drei Maschinensätzen benötigt, für x Erzeugnisse E_1 und y Erzeugnisse E_2 also $6x+4y$ Stunden. Diese Stundenzahl $z=6x+4y$ soll maximal werden. Die lineare Funktion $z=6x+4y$ heißt Zielfunktion, sie stellt mit dem Ungleichungssystem der Aufgabe B 4 das mathematische Modell der erweiterten Aufgabe B 4a dar.

Man geht aus von dem sogenannten Nullprogramm, in dem keines der Erzeugnisse produziert wird und setzt $z=0$. Man erhält aus $0=6x+4y$ die Spur der Zielfunktion $y=-\frac{3}{2}x$, eine Gerade g_s, die durch $0(0;0)$ geht. Sezt man in der Zielfunktion für z der Reihe nach $z=1, 2, 3, \ldots$ ein, so erhält man die zur Spur parallelen Geraden

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4},\ y=-\frac{3}{2}x+\frac{2}{4},\ y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}\ldots$$

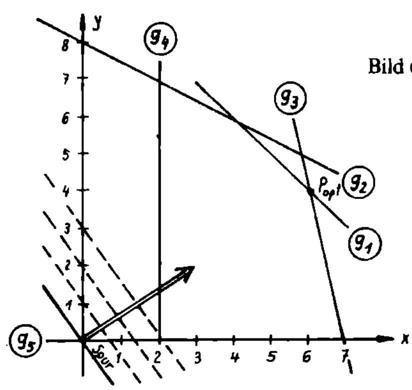


Bild 6

Das Problem der Aufgabenstellung ist nun gleichbedeutend mit der Frage nach derjenigen Parallelen zur Spur der Zielfunktion mit größtmöglichem Abstand von der Spur, die mindestens einen Punkt des Lösungsbereiches enthält.

Grafische Lösung der Aufgabe: Durch maximale Parallelverschiebung der Spurgeraden erhält man die durch den Punkt $P(6;4)$ gehende Parallele. Dieser Punkt stellt das Optimum dar: $P_{opt}(6;4)$. Unter den gegebenen Nebenbedingungen müssen 6 Erzeugnisse E_1 und 4 Erzeugnisse E_2 hergestellt werden, wenn der Maschinenzeitfond maximal ausgelastet werden soll. Die an den Maschinensätzen M_1 und M_3 zur Verfügung stehenden Stunden werden voll verbraucht. Am Maschinensatz M_2 bleiben 2 Stunden ungenutzt. Insgesamt werden 52 der zur Verfügung stehenden 54 Stunden an den Maschinensätzen bei der zusätzlichen Produktion der Erzeugnisse E_1 und E_2 genutzt, das sind etwa 96,3%.

Im nächsten Beitrag wird ein wichtiger Sonderfall einer Aufgabe der linearen Optimierung behandelt.

E. Lehmann

Zum 6. Mal: Mathematikolympiade der Gehörlosenschulen der DDR

Am 3. Juni dieses Jahres führten die Gehörlosenschulen der DDR ihre *VI. Mathematikolympiade* in Güstrow durch. An diesem Wettstreit beteiligten sich – wie jedes Jahr – alle Gehörlosenschulen unserer Republik mit je einer Schülermannschaft, bestehend aus je einem Schüler der Klassenstufen 2 bis 10. In einer dreistündigen Klausur löste jeder Teilnehmer die ihm gestellten Aufgaben. Während der Korrekturen am Nachmittag führten die *Jungen Mathematiker* eine Busfahrt nach Warnemünde durch. Am Abend fand dieser nun schon traditionelle Wettbewerb mit einer Siegerehrung seinen Abschluß:

Die drei besten Mannschaften kamen aus Güstrow (1. Platz), Halberstadt (2. Platz) und Leipzig (3. Platz).

Einen ersten Platz erreichten: Marcel Remus, Halberstadt (Kl. 2); Sabine Heinicke, Halberstadt (Kl. 3); Uta Lippold, Leipzig (Kl. 4); Steffen Knuth, Güstrow (Kl. 5); Hans Syforth, Erfurt (Kl. 6); Christine Mäusel, Erfurt (Kl. 7); Bernd Nestler, Leipzig (Kl. 8); Ralph Beyer, Güstrow (Kl. 9); Andreas Pour, Leipzig (Kl. 10).

Mathematikfachzirkelleiter F. Harloff, Güstrow

Zwei Sondermarken wurden dem 200. Jahrestag der Gründung der ersten staatlichen Bildungseinrichtung für Gehörlose durch *Samuel Heinicke* gewidmet.

Das Motiv des 20-Pf-Wertes ist das Porträt von *Samuel Heinicke* (1727 bis 1790) und im Hintergrund die Silhouette der Stadt Leipzig um das Jahr 1880. Auf der zweiten Marke zu 25 Pf finden wir die ersten drei Buchstaben des *Daktyalphabetes* (Fingeralphabet) und daneben einen sprechenden und daktylierenden Schüler mit einer elektro-akustischen Hörhilfe, symbolisierend die Bildung Gehörloser in der Gegenwart.

200 Jahre Gehörlosenbildung

Samuel-Heinicke-Schule/Leipzig

Die Ernst-Thälmann-Oberschule Roßlau berichtet

Seit über drei Jahren besteht an der Ernst-Thälmann-OS Roßlau eine mathematische Arbeitsgemeinschaft, der Schüler von der 5. bis 9. Klasse angehören.

Regelmäßig lösen wir *alpha*-Aufgaben und beteiligen uns auch am Wettbewerb der *alpha*.

Vor zwei Jahren schloß die AG einen Patenschaftsvertrag mit einem elektronischen Rechenzentrum in Roßlau ab. Die Schüler der 8. und 9. Klassen wurden mit dem Aufbau und der Wirkungsweise eines Computers bekannt gemacht. In diesem Jahr erarbeiteten wir ein Programm zur Lösung von quadratischen Gleichungen. Zum Abschluß durften alle selbst an den Rechenmaschinen arbeiten. Diese Arbeit gab uns einen Einblick in die interessante Tätigkeit der Mitarbeiter des elektronischen Rechenzentrums. Erstmalig beteiligte sich die AG Mathematik an der diesjährigen Gruppen- und Schulmesse der ETOS Roßlau. Da an unserer Schule noch einige Lehrmittel für den Mathematikunterricht fehlen, beschlossen wir, dem abzuhelfen. Einige Schüler fertigten aus stabilem Material geometrische Körper an, so z. B. ein Schwalbenschwanzprisma, u. a. insgesamt 20 Körper. Dazu passend zeichneten andere AG-Teilnehmer Folien für den Polylux.

Eine FDJlerin der 9. Klasse beschäftigte sich besonders mit der linearen Funktion und Gleichungssystemen mit zwei Variablen und stellt zwischen beiden den Zusammenhang her. Zu diesem Komplex erarbeitete die Schülerin eine wertvolle Dokumentation, die zur Kreismesse delegiert wird. Insgesamt beträgt der Wert der MMM-Objekte unserer AG ungefähr 700 M.

Zur Ausgestaltung unseres Mathematikkabinetts gehört die regelmäßige Anfertigung von Wandzeitungen. In diesen mathematischen Wandzeitungen werden entweder Lösungsverfahren, Prüfungsaufgaben, geometrische Beweise oder Biographien bekannter Mathematiker veranschaulicht.

Eine Exkursion führte uns Ende 1977 in das Zentrum „Organisation und Datenverarbeitung Bauwesen Berlin". Hier konnten wir Erfahrungen im Bereich der angewandten Mathematik und Datenverarbeitung sammeln.

Ein Ziel unserer Arbeitsgemeinschaft ist es auch, die zukünftigen Schüler der 10. Klassen, die unserer AG angehören, gut auf die Abschlußprüfung im Fach Mathematik 1979 vorzubereiten.

AG Mathematik, OS Roßlau

Mathematik und MMM

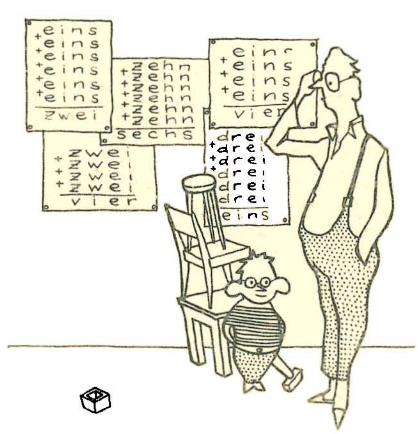
Die beiden 9. Klassen der Clara-Zetkin-Oberschule Groitzsch besuchten im November 1977 die *Zentrale Messe der Meister von morgen* in Leipzig. Neben einer Vielzahl von Eindrücken über diese Leistungsschau der Jugend unserer Republik brachten die Schüler auch viel Zahlenmaterial mit nach Hause. Aus ihm entstand eine Mappe mit Aufgaben für einen aktuellen praxisbezogenen Mathematikunterricht und eine interessante außerunterrichtliche Tätigkeit. Sie enthält u. a. Probleme über Materialeinsparung, Steigerung der Arbeitsproduktivität, statistisches Material über die Entwicklung unserer Volkswirtschaft.

Welche Klasse oder AG kann von ähnlichen Initiativen berichten?

Kryptarithmetik

Jeder Buchstabe bedeutet eine Ziffer, gleiche Buchstaben sind gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern (selbstverständlich kann für die verschiedenen Rätsel die Bedeutung von Buchstaben verschieden sein). Gefällt euch meine lustige Zeichnung?

Architekt A. W. Radunsky, Moskau



Albert Einstein

1879 bis 1955

1. Eine vollendete Physik

Es war etwa um das Geburtsjahr *Albert Einsteins*, als der sich zur Wahl eines Studienfaches anschickende Max Planck von einem Hochschullehrer die Auskunft erhielt, daß die Physik hochentwickelt, ja nahezu voll ausgereift sei und bald ihre endgültige Form angenommen haben werde. Zwar wurde hinzugefügt, es gäbe vielleicht noch ein Stäubchen in dem einen oder anderen Winkel, aber alles in allem nähere sich die Physik der Vollendung, wie sie die Geometrie schon seit Jahrtausenden besitze. Diese Meinung war keine persönliche Sicht irgendeines Physikers des letzten Viertels des vorigen Jahrhunderts, sondern eine allgemein vertretene Ansicht – obwohl gerade der Vergleich mit der Geometrie geeignet gewesen wäre, den schwachen Punkt der Argumentation aufzuzeigen. Am scheinbar sonnigen Himmel der Geometrie entwickelte sich das Wölkchen Parallelenaxiom zu einem klärenden Gewitter (vgl. *alpha* 2/77, Seite 31). Der am Ende des 18. Jahrhunderts stagnierenden Mathematik (weil zu sehr mit mechanischen und astronomischen Methoden gleichgesetzt) wurden durch Gauß und andere Mathematiker des 19. Jahrhunderts fruchtbare Gebiete erschlossen. Und mit der mechanistischen Physikauffassung des ausgehenden 19. Jahrhunderts verhielt es sich ähnlich. Einstein und Planck waren Bahnbrecher neuer physikalischer Ansichten, die der Physik des neuen Jahrhunderts ihren Stempel aufprägten. Das Plancksche Strahlungsgesetz und seine Quantenauffassung, die Einsteinsche Gleichung „Energie gleich Masse mal Quadrat der Lichtgeschwindigkeit ($E = mc^2$)“ und Einsteins revolutionierende Vorstellungen von Raum und Zeit lassen sich aus der Geschichte der Physik nicht mehr wegdenken.

2. Die Faszination der Relativitätstheorie

Wie kaum ein anderer Wissenschaftler ist Einstein populär geworden; von den insgesamt 27 Nobelpreisträgern der Berliner Universität ist er zweifelsohne der berühmteste und bekannteste. Einer seiner Kollegen bemerkte, daß neben den Sehenswürdigkeiten der Stadt wie das Brandenburger Tor, Reinhardts Theatervorstellungen usw. häufig auch Einstein auf dem Programm der Touristen stand. Zur Vorlesungszeit strömte alles in den Ostflügel des Hauptgebäudes der Universität, wo er las und mitunter bei zu gefülltem Hörsaal eine Pause einlegte, damit sich alle die entfernen können, die ihn nun gesehen hatten und sich für das weitere nicht mehr interessierten. Dann blieb in der Regel nur eine Handvoll Studenten zurück. Wenn wir bedenken, daß C. W. Röntgen über die Relativitätstheorie folgendes schrieb: „Mir will es noch nicht in den Kopf hinein, daß man so ganz abstrakte Betrachtungen und Begriffe gebrauchen muß, um Naturerscheinungen zu erklären“, so stellt sich die Frage, weshalb Einstein mit dieser Theorie so bekannt wurde. Zumal er sich selbst über die Relativitätstheorie so äußerte: „Warum schwatzen die Leute immer nur von meiner Relativitätstheorie? Ich habe doch noch andere brauchbare Sachen gemacht, vielleicht sogar noch bessere.“ Sicher werden die erbitterten Kontroversen zwischen Einsteinanhängern und seinen wissenschaftlichen Gegnern (meist nicht theoretisch eingestellte Experimentalphysiker) dem Empfinden der unruhigen und unsicheren Nachkriegszeit des ersten Weltkrieges entgegengekommen sein, aber es ist gewiß auch ein Teil echten Erkenntnisdrangs beteiligt gewesen, der möglicherweise in diesen wirren Jahren mit neuen Gedanken über Raum und Zeit zu einem festen Halt führen sollte. Die praktischen Auswirkungen der Theorie lagen damals weitab vom täglichen Leben, so daß die Faszination der Relativitätstheorie besonders auffällig ist.

3. Jugend und Schule

Um viele große Männer ranken sich immer wieder Geschichten, die symbolhaft ihre Leistungen erklären, wenn etwa wie bei Newton der Fall eines Apfels zur Gravitationstheorie oder Diracs negative Zahl von Kokosnüssen in einer diophantischen Aufgabe zur sogenannten Diracschen „Unterwelt“ geführt haben sollen. Gegen die Legende vom Apfel protestierte bereits Gauß lebhaft und energisch, Dirac selbst wies die Urheberschaft für die negative Lösung zurück. Die folgenden Begebenheiten haben auf den jungen Einstein einen tiefen Einruck gemacht und sind durch ihn selbst verbürgt. Die Tatsache, daß sich die Kompaßnadel stets auf einen bestimmten Punkt einstellt, zeigte ihm deutlich, daß etwas hinter dem „leeren“ Raum stecken mußte. Der alte Einstein wird hier vom Feld sprechen. Die Sicherheit, mit der die Mathematik ihre Aussagen bewies, faszinierte ihn zuerst an dem Satz, daß sich die drei Höhen jedes Dreiecks stets in einem Punkt schneiden (vgl. *alpha* 2/77, Seite 31). Später, als er die tiefgründige Frage nach der Gültigkeit mathematischer Erkenntnis in der Außenwelt (objektive Realität) stellt, bemerkt er: „Denn es kann nicht wunder nehmen, daß man zu übereinstimmenden

1870–1871	*Deutsch-französischer Krieg*
1879	*Glühlampe (Edison)*
1879	*Einstein geboren*
1883	*Mengenlehre (Cantor)*
1887	*elektrische Wellen (Hertz)*
1885	*Einstein verläßt die Schule u. geht nach Mailand zu den Eltern, fällt durch die Aufnahmeprüfung der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich (ETH)*
1896	*Abitur nachgeholt, Studium an der ETH Zürich*
1900	*Wirkungsquantum (Planck)*
1900	*Einstein schließt das Studium mit einem Diplom ab*
1902–1909	*Tätigkeit im Berner Patentamt*
1905	*Promotion (Molekulartheorie), lichtelektrischer Effekt, spezielle Relativitätstheorie*
1908	*Privatdozent in Bern*
1909	*Professor in Zürich*
1909	*Peary erreicht den Nordpol*
1911	*Professor an der Deutschen Universität Prag*
1913	*Mitglied der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften*
1914	*Direktor des Kaiser-Wilhelm-Instituts*
1914–1918	*erster Weltkrieg*
1914–1932	*Einstein in Berlin*
1916	*Allgemeine Relativitätstheorie*
1917	*Große Sozialistische Oktoberrevolution*
1918	*Novemberrevolution in Deutschland, KPD gegründet*
1919	*Experimentelle Bestätigung für die Relativitätstheorie durch Lichtablenkung*
1921–1925	*Reisen und Gastvorlesungen (USA, England, Asien, Holland, Südamerika, erster deutscher Wissenschaftler in Frankreich nach dem ersten Weltkrieg)*
1922	*Nobelpreis*
1925	*Begründung der Quantenmechanik (Heisenberg, Born)*
1927	*Unschärferelation (Heisenberg)*
1930–1932	*Vorlesungen während des Wintersemesters in Pasadena (USA)*
1933	*faschistische Diktatur in Deutschland*
1933	*Einstein kehrt aus den USA nicht zurück, Austritt aus der Akademie*
1938	*Uranspaltung (Hahn, Straßmann; Meitner)*
1939–1945	*zweiter Weltkrieg*
1940	*Brief Einsteins an Roosevelt für Atomforschung*
1942	*Kernreaktor in Chicago*
1945	*Atombombenabwürfe in Japan, Gründung der UNO*
1948	*Kybernetik (Wiener)*
1949	*allgemeine Feldtheorie Einsteins*
1949	*DDR gegründet*
1955	*Einstein gestorben*

logischen Folgerungen kommt, wenn man sich über die fundamentalen Sätze (Axiome) sowie Methoden geeinigt hat, vermittels welcher aus diesen fundamentalen Sätzen andere Sätze abgeleitet werden sollen." Sein selbständiges Denken, dem Autoritätsgläubigkeit völlig fremd war, führte zu Schwierigkeiten in der Schule. Er sagte, daß man den unterwürfigen Untertan produziere. Einstein wird oft als Beispiel für einen Schüler – von Mathematik und Physik abgesehen – mit schlechten Leistungen gewählt, um zu zeigen, daß auch solche Schüler große Leistungen vollbringen können. Der Vergleich hinkt aber, wie in allen diesen Fällen (z. B. bei E. Galois, der durch die Aufnahmeprüfung für die Hochschule fiel), denn er läßt die Tatsache unberücksichtigt, daß Einstein sein ganzes Denken auf physikalische Probleme konzentrierte, womit andere Zweige hintenangestellt wurden. Er ist in dieser Hinsicht nicht mit Gauß vergleichbar, der ebenfalls in der Jugend über tiefliegende Dinge nachdachte, aber auch in den Sprachen brillierte. Einstein deshalb aber fehlende Sprachbegabung nachzusagen, wäre übereilt, und seine letzten 20 und englischsprachigen Jahre widerlegen dies zumindest. Das Gymnasium verließ er mit 16 Jahren, ohne einen Abschluß zu haben. Deshalb bewarb er sich später an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich (ETH), wo man ohne Abitur nach einer Aufnahmeprüfung studieren konnte – und fiel durch, da er in den Sprachen und Biologie unzureichende Kenntnisse hatte. Er mußte das Reifezeugnis an einer Schweizer Kantonschule nachmachen, in der ein modernerer Geist als in Deutschland herrschte, was auf das Wirken Pestalozzis zurückzuführen war. Von seinen Schulerfahrungen berichtete er: „Die Lehrer in der Elementarschule kamen mir wie Feldwebel vor und die Lehrer im Gymnasium wie Leutnants."

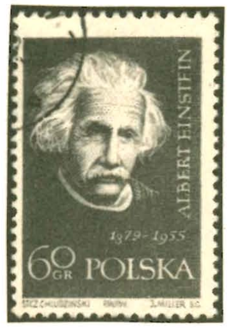
4. Einsteins Verhältnis zur Mathematik

Scherzhaft soll Einstein die Mathematik als einzige perfekte Methode charakterisiert haben, sich selbst an der Nase herumzuführen. Er wies wiederholt darauf hin, daß man eine Sache mathematisch formal zwar beherrschen könne, deshalb ihren Sinn aber noch nicht erfaßt zu haben braucht. Die Hauptsache ist ihm der Inhalt, nicht die Mathematik, und er verweist darauf, daß ein Wissenschaftler nicht in Formeln denkt. Jede physikalische Idee muß sich auch klar und prägnant mit Worten ausdrücken lassen. („Seitdem die Mathematiker über meine Relativitätstheorie hergefallen sind, verstehe ich sie selbst nicht mehr.") Hier zeigten sich Einsteins kritische Einstellung zum Formalismus und seine Bemühungen um das Inhaltliche. Die scherzhafte Charakterisierung der Mathematik von oben zeigt uns aus dieser Sicht, daß er natürlich die Hilfe und Sicherheit eines Rechenverfahrens zu schätzen wußte. Einstein, der als Lehrer ausgebildet worden war, hat elementare Mathematik nur wenig unterrichtet – jedoch, wie seine Schüler berichten, auf unkonventionelle und spannende Art: die Unbekannte x wurde etwa so lange gejagt, bis ihr kein Ausweg blieb. Einstein war zwar kein guter Rechner (wie etwa Gauß), aber ein bedeutender und schöpferischer Mathematiker.

5. Leben und Werk

Von 1896 bis 1900 studierte Einstein an der ETH Zürich Mathematik und Physik und schloß sein Studium mit einem Diplom ab. Nach zwei Jahren ohne feste Anstellung zog er für sieben Jahre in das Berner Patentamt ein. Er promovierte 1905 über ein Thema aus der Molekularphysik, hielt 1908 die ersten Vorlesungen, wurde 1909 Professor für Theoretische Physik an der Universität Zürich, erhielt einen Ruf an die Deutsche Universität in Prag und kehrte nach drei Semestern wieder nach Zürich zurück. 1913 wurde er Mitglied der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften, 1914 Direktor des Kaiser-Wilhelm-Instituts in Berlin, mit der Möglichkeit, an der Berliner Universität Vorlesungen zu halten. 1922 wurde ihm der Nobelpreis für Physik verliehen. Zu Beginn der 30er Jahre hielt er Gastvorlesungen während des Winters im sonnigen Kalifornien (USA). Er erkannte bald die drohende politische Entwicklung in Deutschland und kehrte deshalb 1933 nicht dorthin zurück, wobei er, um den Machthabern vorauszukommen, seinen Austritt aus der Berliner Akademie erklärte. Das faschistische Ministerium für Wissenschaft gab sich damit nicht zufrieden und inszenierte ein peinliches Ausschlußverfahren. Bis an sein Lebensende 1955 wirkte Einstein, wie viele emigrierte Naturwissenschaftler, am Institute for Advanced Study in Princeton (USA).

Zu Unrecht wird Einstein häufig nur als Begründer der Relativitätstheorie gewürdigt, denn er hat weitere hervorragende Leistungen auf den Gebieten der Physik hinterlassen. Die statistische Deutung der Wärmelehre Boltzmanns gilt streng nur für unendlich viele Teilchen. Die damals (1915) noch angezweifelte Atomistik lehrt aber, daß jedes System nur endlich, wenn auch sehr, sehr viele Teilchen enthält. Aus der endlichen Anzahl der Teilchen erklärte Einstein theoretisch die Unstimmigkeit, die zwischen der statistischen Deutung und der Realität bestand, und erbrachte so ein starkes Argument für die Atomistik. Eine großartige Leistung stellt auch seine Lichttheorie (Licht als Strahl von Lichtquanten) dar, die die Wellen- und Korpuskulartheorie auf höherer Stufe vereint. Einsteins Auftreten war stets bescheiden, auch auf dem Höhepunkt seines Weltruhms. Bezeichnend für ihn war sein Gerechtigkeitssinn. „Wenn es sich um Wahrheit und Gerechtigkeit handelt, gibt es nicht die Unterscheidung zwischen kleinen und großen Problemen. Wer es in kleinen Dingen mit der Wahrheit nicht ernst nimmt, dem kann man auch in großen Dingen nicht vertrauen." Sein Eintreten für den Frieden erfolgte ungeachtet der daraus folgenden Schwierigkeiten. In dem allgemeinen Hurra-Patriotismus des ersten Weltkrieges, in dem selbst hervorragende deutsche Wissenschaftler behaupteten, daß ohne den deutschen Militarismus die deutsche Kultur hinweggefegt worden wäre, gehörte Einstein zu den Gründern eines Bundes, aus dem später die Deutsche Liga für Menschenrechte hervorging. Seinem aufrechten Verhalten während des Krieges ist z. B. die Einladung als erster deutscher Wissenschaftler nach 1918 nach Frankreich zu verdanken. In seiner Sorge um den Frieden fragte er 1932 den berühmten Psychiater Freud um die psychologischen Gründe für die sozialen Probleme und Gefahren. Nach den Atombombenabwürfen über Japan, in deren Geschichte Einstein tragisch verstrickt war, erkannte Einstein die gesellschaftlichen Ursachen. 1932 hatte er bereits darauf hingewiesen, daß das Schweigen der Wissenschaftler es mit ermöglicht hatte, unverantwortliche Elemente an die Macht kommen zu lassen. Seine Befürchtungen, daß in Nazi-Deutschland Atomwaffen hergestellt werden könnten, ließen ihn in einem Brief an den amerikanischen Präsidenten Roosevelt den Bau von Atomwaffen befürworten. Die militärisch sinnlosen Atombombenexplosionen trafen ihn zutiefst, und er setzte sich forthin mit seiner ganzen Kraft gegen den Atomtod ein. Die Erkenntnis, daß die drohende Selbstvernichtung nicht durch einzelne, sondern nur durch die Gesellschaft zu verhindern ist, versuchte Einstein in aufopferungsvoller Tätigkeit zu verwirklichen. *R. Thiele*



FLOCKE
+FLOCKE
SCHNEE

Es ist Winter

Vor dem Fenster tanzen die Schneeflocken. Wie sind sie gestaltet? Was geschieht mit ihnen?

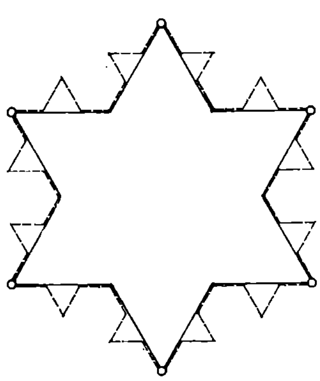
Wenn eine Schneeflocke zu fliegen beginnt, hat sie die Gestalt eines regelmäßigen Sternsechsecks. Nehmen wir an, daß auf ihrem Wege in jeder Sekunde aus dem mittleren Drittel jedes Geradenstückes ihrer äußeren Begrenzung ein gleichseitiges Dreieck aus der Flocke herauswächst. Zuerst wachsen demzufolge 12 kleine Dreiecke aus den Zacken des Sternes (siehe Bild 1). Am Ende der 1. Sekunde hat die Fläche 48 gleiche Seiten, dann springen diese auseinander, so daß weitere 24 gleichseitige Dreiecke hinzukommen. Und so geht es weiter, solange die Flocke fliegt. Plötzlich erhebt sich Wind, ergreift die Flocken und trägt sie weit, weit weg, ins Endlose. Wie werden sie aussehen, wenn sie dort ankommen? Was für ein Schnee fällt im Endlosen? Wird es für die Flocken eine Grenzlinie, eine Fläche geben, und werden sie überhaupt einen Umfang haben?

Sehen wir uns das an! Wenn die Flocken Flächengebilde sind, wenn es das Unendliche gibt und wenn das Gewicht einer gerade entstandenen Schneeflocke $s_0 = 1p$ beträgt, so wird es am Ende der 1. Sekunde $1+\frac{1}{9}p$ betragen, am Ende der n-ten Sekunde aber

$$\frac{s_n}{p} = 1+\frac{1}{9}+\frac{4}{81}+\ldots+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{3}{4}\sum_0^n\left(\frac{4}{9}\right)^i$$

$$= \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\,\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{9}} = 1{,}2-\frac{1}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

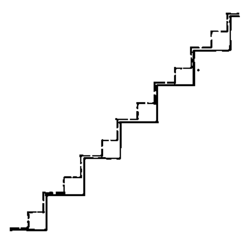
Bild 1



Wenn also die Flocke ins Unendliche wächst, so geht ihr Gewicht gegen $1{,}2\,p$. Was aber wird aus ihrem Umfang? Wenn er zu Beginn $k_0 = 1$ cm beträgt, so ist er nach der 1. Sekunde $k_1 = \frac{4}{3}$ cm, am Ende der n-ten Sekunde $k_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ cm. Das Problem ist, daß der Grenzwert davon unendlich groß ist. Irgendwo müssen wir uns geirrt haben. Wieso haben wir geglaubt, daß im Unendlichen der Umfang der Flocke gleich dem Grenzwert ihres Umfanges ist?

Was ist, wenn der Wind unsere Treppe verweht und ihr dabei auch Kanten, dem Bild 2 entsprechend, zu wachsen beginnen? Unterwegs bleibt dabei die Länge der Treppe unverändert, aber im Unendlichen verringert sie sich plötzlich auf den $\sqrt{2}$ten Teil. Außerdem, wieso haben wir geglaubt, daß die Schneeflocken im Unendlichen einen Umfang hätten? Woher wissen wir überhaupt, daß es dort Schneeflocken gibt?

Bild 2



Wir müssen den Leser beruhigen, wenigstens, was die zweite Hälfte der Frage betrifft. Die Schneeflocke „im Unendlichen" existiert wirklich, sogar in einer ausreichend einfachen Bedeutung: Man kann ihre Grenze umkehrbar eindeutig und (in beiden Richtungen) stetig auf eine Kreislinie abbilden, ihr Inneres aber auf eine Kreisfläche (hier genügt ein beliebiger Kreis). Der Beweis dafür ist nicht zu kompliziert, aber die Erklärung der benutzten Fachausdrücke (und schon ihre Aufzählung) würde zu lange dauern. Begnügen wir uns damit, daß die Behauptung wahr ist, was wir so auszudrücken pflegen, daß die Grenze einer Kreislinie homeomorph ist, die Schneeflocke selbst aber der Kreisfläche. Wenn wir eine große elastische Gummiplatte haben, dann können wir sie der Schneeflocke genau anpassen, ohne daß die Gummiplatte irgendwo getrennt oder zusammengeklebt werden müßte. Kehren wir zum Umfang der Schneeflocke zurück!

Ist ein Punkt Spitze irgendeiner Zacke, dann ist er auch Spitze aller weiteren. Das bedeutet aber gerade, daß die Spitzenpunkte der Zacken Punkte der Begrenzung der Schneeflocke „im Unendlichen" werden. Und weil der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten die Gerade ist, so ist der Umfang der Schneeflocke mit Sicherheit größer, als wenn wir aus den Punkten des Umfangs bestimmte herausnehmen und sie (der Reihe nach) durch Geradenstücke miteinander verbinden. Deshalb ist der Umfang der Schneeflocke sicher größer als der Umfang einer beliebigen Zacke, also größer oder gleich dem $\sup\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n\right)$. Diese Zahl aber gibt es nicht, so daß wir erhalten haben, daß den Schneeflocken kein Umfang zukommt. Schneeflocken haben also eine wirklich interessante Eigenschaft: Sie haben eine endliche Fläche, aber keinen Umfang. (Umgekehrt ist das nicht möglich: Eine einem Kreis homeomorphe Figur hat immer eine Fläche.)

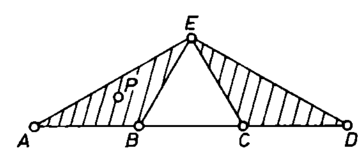
Die Schneeflockenkurve zeigte der amerikanische Mathematiker *F. Kasner* 1901 zum ersten Male. Er konstruierte die Kurve, weil er mit ihrer Hilfe eine stetige, aber nirgends differenzierbare Funktion zeigen konnte.

Daß die Begrenzung der Schneeflocke stetig ist, wissen wir schon. Wir sehen ein, daß man in keinem ihrer Punkte eine Tangente anlegen kann. Wir sind daran gewöhnt, daß man gerade dann in einem Punkt keine Tangente anlegen kann, wenn dort eine „Spitze" ist. In diesem Sinne hat die Schneeflockenkurve überall eine Spitze.

Eine in ihrem Punkt P an die Kurve angelegte Tangente kann man auch als den Grenzwert der Geraden PQ definieren, wenn der Punkt Q sich dem Punkt P auf der Kurve nähert. Deshalb wird, wenn der Punkt Q dem Punkt P „genügend nahe ist", der Winkel zwischen PQ und der Tangente kleiner als sagen wir 10°, und wenn man auf diese Weise zwei Punkte Q_1 und Q_2 auswählt, der Winkel zwischen PQ_1 und PQ_2 kleiner als 20°. Können wir nun Punkte Q_1 und Q_2 beliebig nahe bei P finden, so daß der Winkel zwischen PQ_1 und PQ_2 mindestens 30° beträgt, so haben wir bewiesen, daß man im Punkt P die Tangente nicht anlegen kann. Das werden wir tun.

Es seien also auf der Begrenzung der Schneeflocke ein Punkt P und irgendeine kleine Entfernung gegeben. Wir wollen, daß die Abstände PQ_1 und PQ_2 kleiner als diese Entfernung seien, der Winkel zwischen den Geraden aber größer als 30°. Betrachten wir eine solche Zacke, bei der die Seite kleiner als die vorgegebene Entfernung ist. Es ist leicht zu sehen, daß, wenn wir über jede Seite die in Bild 3 gezeigten schraffierten Dreiecke anfügen, die gesamte weitere Zacke in den schraffierten Teil oder auf seine Grenzen fällt,

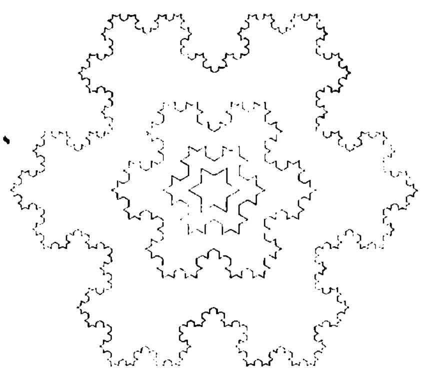
Bild 3



so daß diese Punkte Grenzen sind, der Punkt P auch. Andererseits sind die Punkte A, B, C, D und E Punkte auf der Begrenzung der Schneeflocke, die Strecken PA, PB, PC und PE sind alle kleiner als die Seite AD, also auch kleiner als die gegebene Entfernung. Schließlich werden die Winkel zwischen der Geraden PA und PB bzw. (von der Lage des Punktes P

abhängig) PC und PE mindestens 30°. Die unendlichen Schneeflocken sind ein bißchen stachlig, aber das hindert die dort lebenden Kinder nicht daran, sich mit gut gemachten Schneebällen Schlachten zu liefern.

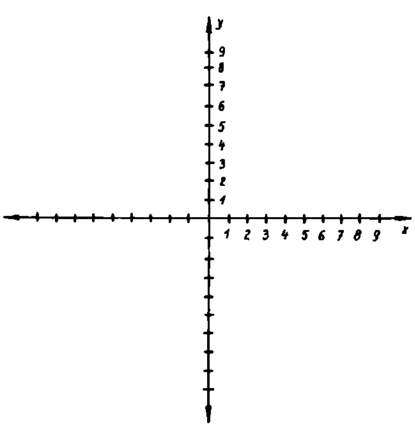
László Csirmaz



(Diesen Beitrag übernahmen wir aus unserer ungarischen Schwesternzeitschrift *Középiskolai Matematikai Lapok*, Dezemberheft 1977.)

Winterliche Knobeleien

▲1▲ Zeichne die Punkte $P_1(0, -4)$, $P_2(4, -8)$, $P_3(4, -3)$, $P_4(10, 0)$, $P_5(4, 3)$, $P_6(4, 8)$, $P_7(0, 4)$, $P_8(-4, 8)$, $P_9(-4, 3)$, $P_{10}(-10, 0)$, $P_{11}(-4, -3)$, $P_{12}(-4, -8)$ und verbinde sie in der Reihenfolge $P_1P_2P_3 \ldots P_{11}P_{12}P_1$!



▲2▲ Zeichne die Funktion

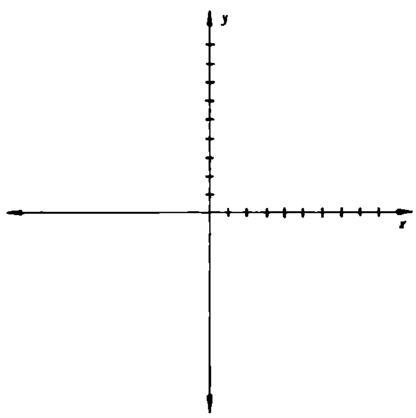
$$y_1 = \frac{3}{5}(x+8) \qquad \text{für } -8 \leq x \leq -3$$

$$y_2 = \frac{5}{3}x - 8 \qquad -3 \leq x \leq 0$$

$$y_3 = \frac{11}{3}(x+7)+7 \qquad -7 \leq x \leq -\frac{11}{2}$$

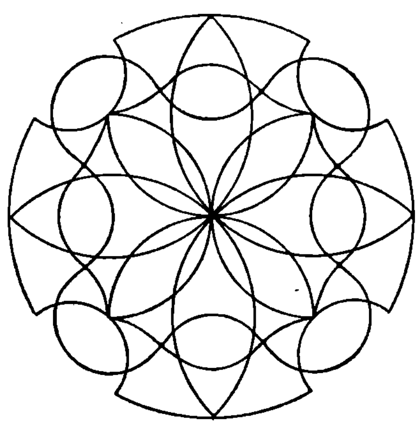
$$y_4 = \frac{3}{11}(x+7)+7 \qquad -7 \leq x \leq -\frac{3}{2}$$

und spiegle sie an der y- und x-Achse! Verfahre mit den Spiegelbildern entsprechend!



▲3▲ Unser Leser *Hans Dadenschier* aus Wittenberg sandte uns das als Überschrift gestaltete Kryptogramm. Wer findet dazu die Lösungen?

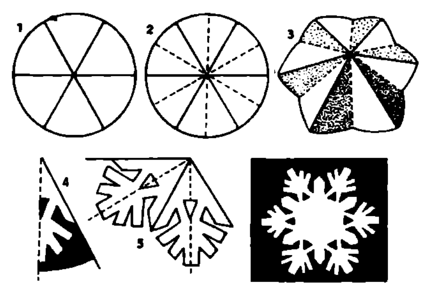
▲4▲ Zeichnet das Bäumchen und den Stern jeweils in einem Zug! Wer schafft es am schnellsten?



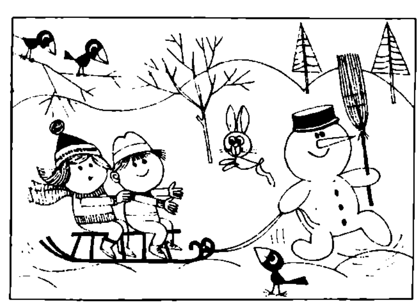
▲5▲ Unterteile das winterliche Feld so durch drei Geraden, daß zu jedem Weihnachtsmann ein Tannenbaum gehört!

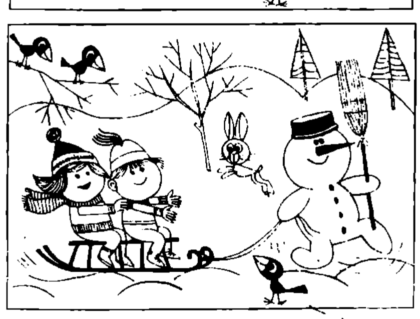
▲6▲ Sicher macht es euch Spaß, aus dünnem Zeichenpapier ein paar Schneeflocken herzustellen.

Schlagt mit dem Zirkel einen Kreis, und übertragt dessen Radius sechsmal auf den Kreisumfang! Verbindet die gegenüberliegenden Punkte miteinander (1)! Ihr erhaltet drei Linien, die den Kreis in sechs Abschnitte teilen. Schneidet nun den Kreis aus, falzt ihn an den Linien! Faltet den Kreis wieder auf, dreht ihn um, und halbiert die durch das Falten gebildeten Abschnitte durch nochmaliges Falzen (2)! Der Kreis ist dann ziehharmonikaartig in zwölf Abschnitte aufgeteilt (3). Legt jeweils zwei dieser Abschnitte übereinander, und zeichnet auf den oberen ein Muster, ähnlich dem auf dem Bild 4! Schneidet die auf dem Bild schwarz markierten Flächen aus! Das übrigbleibende Muster dient dann als Schablone für die nächsten Kreisabschnitte, die nach und nach ebenso ausgeschnitten werden.



▲7▲ Der lustige ungarische Zeichner hat – wenn man beide Bilder betrachtet und vergleicht – 12 Veränderungen vorgenommen. Wer findet sie?

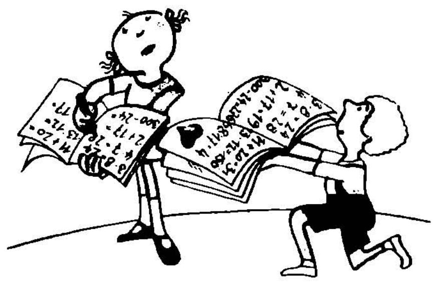




(Lösungen: siehe Heft 1/79, d. Red.)

Wer löst mit?

alpha -Wettbewerb



Letzter Einsendetermin: 8. März 1979

Mathematik

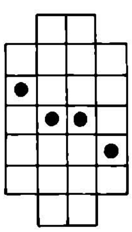
Ma 5 ▪[illegible] Die Sternchen in

$$****-***=112$$

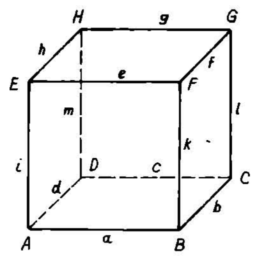
sind so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Subtraktionsaufgabe entsteht. Dabei soll sowohl der Subtrahend als auch der Minuend nur aus Ziffern für ungerade Zahlen bestehen. *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 5 ▪1794 Steffen stellt folgendes fest: Innerhalb von 15 Minuten und 30 Sekunden passierten insgesamt 60 Fahrzeuge eine Brükke, und zwar Autos und Fahrräder. Steffen rechnete und fand heraus, daß genau 200 Räder über die Brücke rollten.
Wieviel Autos und wieviel Fahrräder waren es? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 5 ▪1795 Das Bild zeigt den in quadratische Felder eingeteilten Grundriß eines Gartens mit vier Apfelbäumen. Vier Familien wollen sich den Garten so teilen, daß jede Familie eine gleich große, zusammenhängende Fläche mit einem Apfelbaum erhält. Zeichne mindestens drei mögliche Aufteilungen auf kariertes Papier! *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*



Ma 5 ▪1796 Ein Käfer krabbelt entlang der Kante eines Würfels. Er beginnt im Eckpunkt A und gelangt auf dem kürzesten Wege zum Eckpunkt G des Würfels. Gib an, welche und wie viele Möglichkeiten der Käfer zum Krabbeln hat! (Die Kanten des Würfels sind mit kleinen Buchstaben bezeichnet.)



StR H.-J. Kerber, Neustrelitz

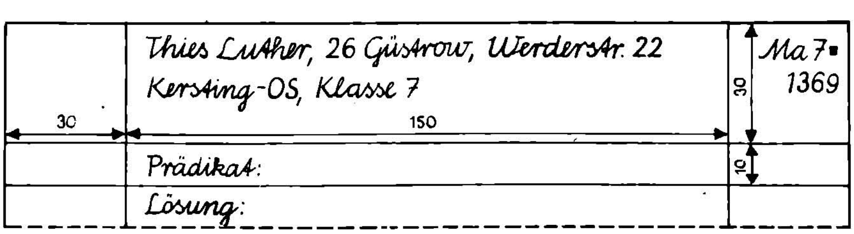
Ma 5 ▪1797 Hans, sein Bruder Jürgen und seine Schwester Erika haben fleißig Pilze gesammelt. Beim Vergleichen ihrer Sammelergebnisse stellt sich heraus, daß Jürgen 5 Pilze weniger als die doppelte Anzahl der von Hans gesammelten Pilze hat. Erika hat 20 Pilze weniger als die dreifache Anzahl der von Hans gesammelten Pilze. Zusammen haben alle drei Geschwister mehr als 90, aber weniger als 100 Pilze gesammelt. Wieviel Pilze hat jeder gefunden? *Sch.*

Ma 5 ▪1798 In das abgebildete Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern, für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gerechnet sind.

$$\begin{array}{ccccc} aa & \cdot & bc & = & ade \\ + & & \cdot & & - \\ fg & + & h & = & bja \\ \hline bbf & + & eh & = & bdk \end{array}$$

nach der sowj. Schülerzeitschrift „Quant"

Ma 6 ▪1799 Eine Mutter fragt ihren Sohn: „Wieviel Schüler gehören deiner Klasse an?" Der Sohn antwortet: „Wenn du alle Primzahlen, die kleiner als 100 sind, addierst, diese Summe mit 3 multiplizierst, das Produkt durch 10 dividierst, zum Quotienten 12 addierst, die so erhaltene Summe noch durch 10



Wettbewerbsbedingungen

1. Am Wettbewerb können sich alle *alpha*-Leser beteiligen.

2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr (bei Erwachsenen Alter und Beruf) zu richten an

Redaktion alpha
7027 Leipzig, Postfach 14.

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgabe fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer ist ein Ma (Mathematik), Ph (Physik) oder Ch (Chemie) und eine Ziffer, z. B. 7, vorgesetzt (d. h. für 7. Klasse geeignet).

4. Von den Teilnehmern sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Schüler der Klassenstufen 11/12 und Erwachsene lösen die Aufgaben, welche mit Ma 10/12, Ph 10/12 oder Ch 10/12 gekennzeichnet sind.

5. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A4 (210 mm × 297 mm) (siehe Muster), denn jede Aufgabe wird für sich, d. h. in einem Zug, korrigiert.

6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung (nicht nur Antwortsatz oder Ergebnis) eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „sehr gut gelöst", „gut gelöst" oder „gelöst". Schüler, welche nur einen Schlußsatz zu einer Aufgabe einsenden, die vorgegebene Form nicht beachten, unübersichtlich oder unsauber arbeiten, erhalten eine rote Karte mit dem Vermerk „nicht gelöst".

Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben. Der Jahreswettbewerb 1978/79 läuft von Heft 5/78 bis Heft 2/79. Zwischen dem 1. und 10. September 1979 sind alle durch Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/78 bis 2/79 erworbenen Karten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eingesandte Antwortkarten werden nur dann zurückgesandt, wenn ein Rückumschlag mit ausreichender Frankatur beiliegt.
Die Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender werden in Heft 6/79 veröffentlicht. Wer mindestens 10 Antwortkarten – richtig gelöst – (durch die Beteiligung an den Wettbewerben der Hefte 5/78 bis 2/79) erhalten hat und diese einsendet, erhält eine Anerkennungsurkunde und ein Abzeichen (in grüner Farbe). Schüler, die bereits zwei Anerkennungsurkunden besitzen und diese mit den Antwortkarten des Wettbewerbs 1978/79 einsenden, erhalten das *alpha*-Abzeichen in Gold (und die Urkunden zurück). Wir bitten darauf zu achten, daß alle Postsendungen richtig frankiert sind und daß die Postleitzahl des Absenders nicht vergessen wird.

Redaktion *alpha*

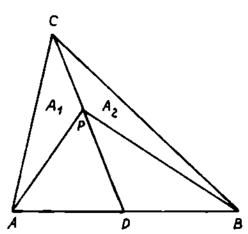
dividierst, dann erhältst du als Ergebnis die Anzahl der Schüler meiner Klasse." Wie viele Schüler sind es?

Schüler Steffen Frigge, Herzberg, Kl. 6

Ma 6 ▪1800 In einer Klasse, der mehr als 20, aber weniger als 40 Schüler angehören, wurde eine Klassenarbeit in Mathematik geschrieben, an der alle Schüler teilnahmen. Der 9. Teil der Anzahl der Schüler erhielt die Note 1, der 3. Teil die Note 2, der 6. Teil die Note 4; kein Schüler erhielt die Note 5. Wieviel Schüler erhielten die Note 3?

Schülerin Gabriele Müller, Schönwalde, Kl. 6

Ma 6 ▪1801 Das Bild stellt ein Dreieck ABC dar. Der Mittelpunkt D der Seite $\overline{AB}$ wurde mit C verbunden. Der Innere Punkt P der Strecke $\overline{CD}$ wurde mit A und B verbunden. Vergleiche die Flächeninhalte A_1 und A_2 der Dreiecke $\triangle APC$ und $\triangle BCP$. *Sch.*



Ma 6 ▪1802 Nachdem in einer Werkküche der Preis für ein Mittagessen von 0,80 M um 10 Pf gesenkt wurde, konnten bei gleichbleibender Tageseinnahme 200 Portionen Essen mehr ausgegeben werden. Wieviel Portionen Essen wurden nach dieser Preissenkung täglich ausgegeben?

Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma 6 ▪1803 Im Jahre 1978 ist Olaf acht Jahre älter als sein dreijähriger Bruder Richard; er stellt fest, daß im gleichen Jahre seine Mutter und sein Bruder zusammen genau so alt sind wie sein Vater (in ganzen Zahlen). Alle vier Familienmitglieder sind zusammen 77 Jahre alt. Wie alt ist jedes Mitglied dieser Familie im Jahre 1978?

Schülerin Sabine Jals, Schlagsdorf, Kl. 7

Ma 7 ▪1804 Das Motorschiff „Bummi" der Weißen Flotte in Berlin hat sechsmal soviel Innen- wie Außenplätze. Würde dieses Schiff über zwei Innen- und sechs Außenplätze mehr verfügen, dann wären viermal soviel Innen- wie Außenplätze vorhanden. Wie viele Personen finden auf diesem Schiff einen Sitzplatz?

Schüler Andreas Fittke, Berlin

Ma 7 ▪1805 Ein Sessellift besteht aus 140 Sesseln. Je zwei aufeinanderfolgende Sessel haben den gleichen Abstand. Alle Sessel sind fortlaufend von 1 bis 140 numeriert, d. h., auf Sessel Nr. 140 folgt Sessel Nr. 1. Ein Beobachter im Talgrund stellt zu einem bestimmten Zeitpunkt fest, daß sich die Sessel mit den Nummern 19 und 99 gegenüberstehen, d. h., daß sie die gleiche Entfernung von jeder der beiden Stationen des Sessellifts haben. Welche Nummern besitzen die Sessel, die sich zum Zeitpunkt dieser Beobachtung in den beiden Stationen des Sessellifts befinden?

Schülerin Brigitte Rotter, Dresden, Kl. 5

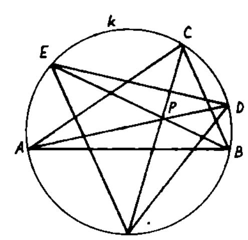
Ma 7 ▪1806 In den Endausscheid der Fußballmeisterschaft einer Oberschule kamen die Mannschaften der Klassen 9b, 10a und 10b. Es war vereinbart worden, daß jede dieser drei Mannschaften gegen jede der übrigen genau ein Spiel auszutragen hatte. Für ein gewonnenes Spiel wurden an die Siegermannschaft 2 Punkte, für ein unentschiedenes Spiel an jede der beiden Mannschaften je 1 Punkt vergeben. Nach Austragung der Spiele gab es folgenden Stand:

Klasse	Punkteverhältnis	Torverhältnis
9b	2:2	3:1
10a	3:1	3:2
10b	1:3	2:5

Es ist das Torverhältnis jedes der ausgetragenen Spiele zu ermitteln.

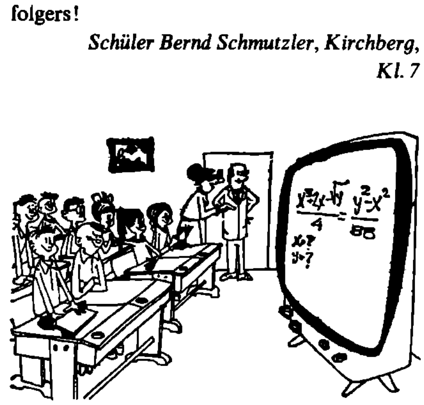
Schüler Volker Schulz, Nauen, Kl. 10

Ma 7 ▪1807 Die abgebildete Figur stellt ein Dreieck ABC mit seinem Umkreis k dar. Im Innern dieses Dreiecks wurde ein Punkt P derart konstruiert, daß $\sphericalangle APB = 60° + \gamma$, $\sphericalangle BPC = 60° + \alpha$ und $\sphericalangle CPA = 60° + \beta$ gilt. Die Gerade AP schneidet k in D, die Gerade BP schneidet k in E, die Gerade CP schneidet k in F. Es ist zu beweisen, daß das Dreieck DEF gleichseitig ist. *Sch.*



Ma 8 ▪1808 Beweise, daß das doppelte Produkt aus einer beliebigen natürlichen Zahl und ihrem Nachfolger um 1 kleiner ist als die Summe aus der Quadratzahl dieser natürlichen Zahl und der Quadratzahl ihres Nachfolgers!

Schüler Bernd Schmutzler, Kirchberg, Kl. 7



„Jetzt werden sie bestimmt zur Tafel sehen."

Ma 8 ▪1809 Gesucht sind zwei verschiedene natürliche Zahlen, die folgenden Bedingungen genügen:

a) Das geometrische Mittel dieser Zahlen ist um 4 größer als die kleinere der beiden Zahlen.

b) Das arithmetische Mittel dieser Zahlen ist um 6 kleiner als die größere der beiden Zahlen. *Schülerin Birgit Arndt, Loitz, Kl. 8*

Ma 8 ▪1810 Man konstruiere ein Dreieck ABC aus $a + b = 7$ cm; $c = 4$ cm und $\beta = 30°$ und begründe die Konstruktion!

Dr. W. Moldenhauer, Universität Rostock

Ma 8 ▪1811 Man denke sich einen Würfelschnitt derart, daß die Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck ist, dessen Seiten die Diagonalen je einer Quadratfläche des Würfels sind.

a) Man zeichne den Würfel mit Schnitt in einer Schrägbilddarstellung!

b) Man konstruiere die Netze beider Teilkörper!

c) Wie heißt der kleinere der beiden Teilkörper? *StR H.-J. Kerber, Neustrelitz*

Ma 9 ▪1812 Man untersuche, ob die Zahl $3^{8192} - 1$ eine Primzahl ist! Man gebe drei Zahlen an, die Teiler von $z = 3^{8192} - 1$ sind, falls z keine Primzahl ist!

Jörg Hartmann, Annaberg, Kl. 12e

Ma 9 ▪1813 Ein Mädchen wird gefragt, wieviel Geschwister es habe. Darauf antwortet das Mädchen: „Die Anzahl der zu unserer Familie gehörenden Kinder ist gleich dem ganzzahligen Lebensalter des Jüngsten. Der Altersunterschied zwischen den Geschwistern beträgt stets genau zwei Jahre. Addiert man die Zahlen, die das Lebensalter eines jeden Kindes angeben, so erhält man als Summe eine Zahl, die gleich dem neunfachen Lebensalter des Jüngsten ist. Wie viele Kinder gehören zu dieser Familie, und wie alt ist jedes Kind?

Schüler Klaus Mohnke, Lübbenau, Kl. 7a

Ma 9 ▪1814 Die Seite $\overline{AB}$ eines Dreiecks ABC sei 6 cm, die Seitenhalbierende s_c sei 3 cm lang, und der Winkel $\sphericalangle CAB$ habe eine Größe von 30°. Wie lang ist die Seite $\overline{AC}$ dieses Dreiecks? *Schüler Holger Friedrich, Karl-Marx-Stadt, Kl. 7*

Ma 9 ▪1815 Zum Abschluß des Jahres 1978 folgendes Problem: Eine gerade Pyramide mit rechteckiger Grundfläche hat das Volumen $V = 1978$ cm³. Der halbe Grundflächenumfang ist 66 cm, die Höhe der Pyramide 6 cm lang. Wie lang sind die Grundkanten?

Mathematikfachlehrer W. Förg, Schwaz, Österreich

Ma 10/12 ▪1816 Schreibt man die einzelnen Ziffern einer beliebigen zweistelligen natürlichen Zahl noch zweimal in der vorgegebenen Reihenfolge dahinter, so erhält man eine sechsstellige Zahl. Man beweise, daß diese sechsstellige Zahl stets durch 273 teilbar ist!

Schüler Andreas Fittke, Berlin, Kl. 10

Ma 10/12 ■1817 Gesucht sind alle reellen Zahlen x, die die Gleichung

$$\frac{\lg(91-x^3)}{\lg(7-x)}=3 \text{ erfüllen!}$$

Schülerin Birgit Arndt, Loitz, Kl. 8

Ma 10/12 ■1818 Man beweise, daß für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq 1$ die Ungleichung

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}-1$$

erfüllt ist!

Mathematikfachlehrer Sh. B. Linkowski, Moskau

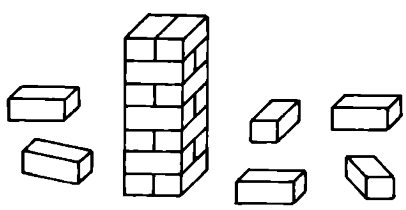
Ma 10/12 ■1819 Der Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 30 cm, sein Flächeninhalt 30 cm². Wie lang sind die Seiten des Dreiecks?

Dipl.-Lehrer f. Math./Phys., Renate und Manfred Kutschauk, Deutschenbora

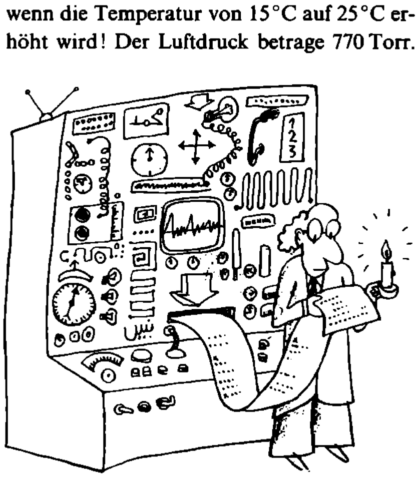
Physik

Ph 6 ■46 Bei einer Wanderung möchte Peter die Wandergeschwindigkeit feststellen. Aus diesem Grund mißt er die eigene Schrittlänge; sie beträgt 65 cm. Weiterhin stellt Peter fest, daß er in jeder Minute 80 Schritte macht. Wie groß ist Peters Wandergeschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$?

Ph 7 ■47 Jens will 20 Ziegelsteine von je 6,5 cm Höhe und 3,5 kp Gewicht zu je zwei aufeinanderschichten. Berechne die Hubarbeit, die Jens insgesamt verrichten muß!



Ph 8 ■48 Ein Klassenzimmer ist 6 m breit, 8,5 m lang und 3,5 m hoch. Berechne das Volumen der Luft, die aus dem Zimmer strömt, wenn die Temperatur von 15 °C auf 25 °C erhöht wird! Der Luftdruck betrage 770 Torr.



Ph 9 ■49 Auf einem Rangierbahnhof werden vom Ablaufberg ablaufende Güterwagen je nach Erfordernis durch sogenannte „Hemmschuhe" abgebremst. Auf welchem horizontalem Weg wird ein zweiachsiger Güterwagen mit einer Gesamtmasse von 35 Tonnen unter einer Geschwindigkeit von $6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ mittels eines Hemmschuhes zum Stehen gebracht, wenn folgende Koeffizienten der gleitenden Reibung angesetzt werden:

- zwischen Hemmschuh und Schiene $\mu_1 = 0{,}16$
- zwischen Rad und Schiene $\mu_2 = 0{,}10$?

Anmerkung: Beachten Sie, daß bei Eisenbahnwagen die Räder starr auf den Achsen befestigt sind! Die Achsen seien durch die Gesamtmasse gleichmäßig belastet.

Ph 10/12 ■50 Zwei technische Widerstände ergeben bei Reihenschaltung einen Gesamtwiderstand von 10 Ohm und bei Parallelschaltung einen Gesamtwiderstand von 1,6 Ohm. Wie groß sind die beiden Einzelwiderstände?

Math./Phys.-Fachlehrer K. Meier, Osternienburg

Chemie

Ch 7 ■37 In unserer chemischen Industrie wird Natronlauge nach dem Diaphragmaverfahren hergestellt. Für die Herstellung 1 t Natronlauge werden 1730 kg Natriumchlorid benötigt.

1 t Natriumchlorid kostet 6,50 M. Durch besseres Eindampfen der Diaphragmalauge wurde erreicht, daß nur noch 1710 kg Natriumchlorid pro Tonne Natronlauge eingesetzt werden müssen.

a) Wieviel Tonnen Natronlauge können bei einer monatlichen Planauflage von 1000 t auf Grund der Materialeinsparung über den Plan hinaus produziert werden?

b) Um wieviel Mark erhöht sich im Monat das Brigadekonto der Chemiefacharbeiter, wenn 20 % der Materialeinsparung auf das Konto gebucht werden?

Ch 8 ■38 Kalziniertes Soda ist für die DDR ein wichtiger Exportartikel. Wieviel Tonnen Soda wurden im Jahre 1977 exportiert, wenn zur Herstellung für Exportsoda 92500 t Natriumchlorid verarbeitet wurden und eine Planerfüllung von 107 % erreicht wurde?

Ch 9 ■39 Äthanol läßt sich aus Äthan oder Äthen herstellen.

a) Wieviel Kubikmeter Äthen werden zur Herstellung von 50 t Äthanol durch katalytische Wasseranlagerung benötigt?

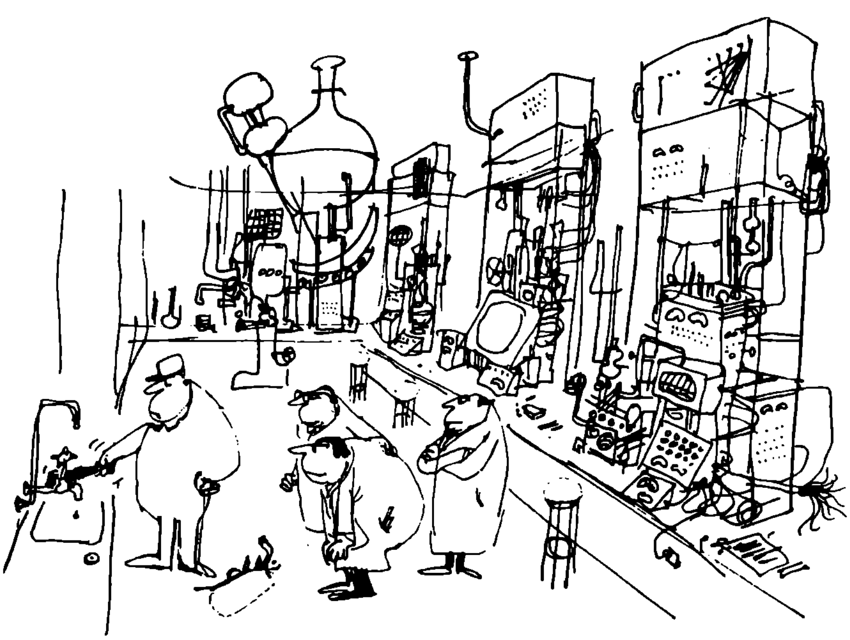
b) Äthan wird zu Monobromäthan bromiert und dann mit Silberhydroxid umgesetzt. Wieviel Liter 40%iges Äthanol mit der Dichte $\varrho = 0{,}81\ \text{g}\cdot\text{ml}^{-1}$ lassen sich aus 245 g Äthan herstellen?

Ch 10/12 ■40 Ammoniak wird im VEB Leuna-Werke *Walter Ulbricht* durch Synthese aus den Elementen bei einer Temperatur von 450 °C und einem Druck von 250 at im Beisein eines Katalysators hergestellt.

a) Berechnen Sie, wieviel Kubikmeter Ammoniak aus 120 m³, 200 m³ und 930 m³ Stickstoff im Normalzustand entstehen!

b) Wieviel Kubikmeter Ammoniak entstehen unter den gegebenen Bedingungen?

c) Wieviel Gramm Ammoniumchlorid kann man aus den gebildeten Volumina Ammoniak im Normalzustand herstellen?

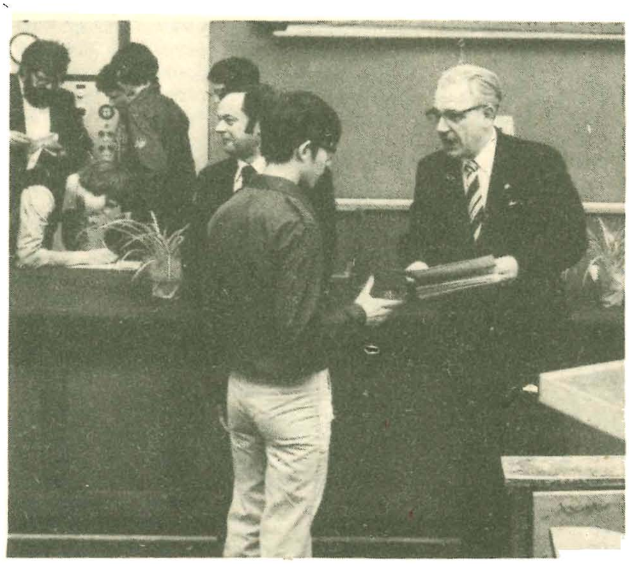


VI. Güstrower Physikwettbewerb

Vom 20. 2. bis 24. 2. 1978 fand in der Pädagogischen Hochschule *Liselotte Herrmann* Güstrow der VI. Physikwettbewerb statt. Es nahmen daran 50 Schüler der Klassen 9 bis 12 aus Erweiterten Oberschulen der DDR teil, die besten unter den 340, die versucht hatten, die Aufgaben der Auswahlklausur zu lösen.
Während des Wettbewerbs mußten die Teilnehmer 4 theoretische und eine experimentelle Aufgabe bearbeiten. Sie konnten dabei maximal 60 Punkte erreichen, 10 für jede theoretische, 20 für die experimentelle Aufgabe.

Folgende Preisträger konnten ermittelt werden:
Einen ersten Preis und den Preis für den besten Teilnehmer erhielt Stefan Müller-Pfeiffer, Kl. 9, EOS Carl Zeiss, Jena.
Erste Preise erhielten: Andreas Förster, Kl. 10, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin; Stefan Kasper, Kl. 12, EOS *Karl Marx*, Leipzig; Michael Heinrich, Kl. 11, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin.
Zweiter Preis und Sonderpreis für die originellste experimentelle Arbeit: Jörg Alscher, Kl. 12, Spezialklasse der Humboldt-Universität Berlin.
Einen zweiten Preis erhielten: Jürgen Gräfenstein, Kl. 10, EOS *Martin Andersen Nexö*, Dresden; Peter Wüstner, Kl. 10, EOS *Karl Marx*, Leipzig; Axel Fröhlich, Kl. 10, EOS *C. F. Gauß*, Frankfurt (Oder); Frank Marlow, Kl. 11, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin; Andreas Berger, Kl. 12, Martin-Luther-Universität Halle, Spezialklasse; Stefan Schuster, Kl. 11, EOS *Ernst Schneller*, Meißen; Andreas Prause, Kl. 12, EOS *Max Planck*, Berlin; Thomas Richter, Kl. 12, EOS *Carl Zeiss*, Jena; Ingo Stiebritz, Kl. 11, EOS *Carl Zeiss*, Jena.
Einen dritten Preis erhielten: Erasmus Scholz, Kl. 10, EOS *Martin Andersen Nexö*, Dresden; Ingo Will, Kl. 12, ABF Halle; Andreas Chrobok, Kl. 11, Martin-Luther-Universität Halle, Spezialklassen; Rainer Gutsche, Kl. 11, TH Karl-Marx-Stadt, Spezialklassen; Peter Hartmann, Kl. 10, EOS Greiz; Konrad Thürmer, Kl. 10, EOS *Heinrich Hertz*, Berlin; Carsten Zander, Kl. 10, EOS Eilenburg.
Den Sonderpreis für den besten weiblichen Teilnehmer erhielt Kerstin Gommel, Kl. 10, EOS *Carl Zeiss*, Jena.
Die Preisverleihung wurde vom Leiter des Wettbewerbs Prof. Dr. Wendt, im Beisein des Hauptreferenten für Physik im Ministerium für Volksbildung H. Schmidt, vorgenommen.

B. Träger/U. Walta



Auszeichnung der Besten durch Prof. Dr. Wendt.

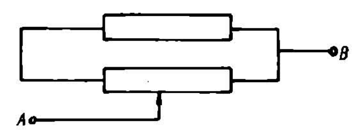
Aufgaben der Klassenstufe 9/10

Theoretische Aufgaben

1. Es ist bekannt, daß die Bahnebene von Satelliten fest im Raum steht.
a) Geben Sie eine ausführliche Erklärung für diese Erscheinung!
b) Wie groß ist der Winkel, um den sich die Erde bei einem Satellitenumlauf dreht?
c) Geben Sie die Bedingungen dafür an, daß der Satellit sich genau auf einer Kreisbahn bewegt!
d) Unter welchen Bedingungen kann der Satellit von der Erde aus immer an der gleichen Stelle beobachtet werden?

2. Ein mit $1\,000\ m^3$ Wasserstoff gefüllter Ballon schwebt bei Normaldruck in Bodennähe. Wie groß ist an diesem Tag die Lufttemperatur?
Als Masse der völlig leeren zusammengefalteten Hülle und des Korbes mit Inhalt wurden bei gleichen Temperatur- und Druckverhältnissen wie beim Start 1 100 kg ermittelt. Es wurde eine Balkenwaage mit Wägestücken von vernachlässigbarem Volumen benutzt.
Unter Normalbedingungen beträgt die Dichte der Luft $1{,}293\ kg/m^3$, die des Wasserstoffs $0{,}0899\ kg/m^3$.

3. Von zwei Widerständen mit je $R = 100\ \Omega$ ist einer mit einem Gleitkontakt versehen (Skizze). Geben Sie an, an welcher Stelle der Gleitkontakt stehen muß, damit der Gesamtwiderstand zwischen A und B $32\ \Omega$ beträgt!



4. Ein Lichtstrahl wird nacheinander an zwei ebenen Spiegeln reflektiert. Er verläuft in einer zur Schnittgeraden zwischen den beiden Spiegelebenen senkrechten Ebene.
Unter welchen Bedingungen verläuft der Strahl nach der zweiten Reflexion senkrecht zum einfallenden Strahl?

Experimentelle Aufgaben

Klassenstufen 9/10 und 11/12

1. Bestimmen Sie die Brechzahlen (Übergang Luft–Flüssigkeit) für Äthanol und Toluol! Ihnen stehen zur Verfügung: Vorratsgefäße mit Äthanol und Toluol, eine Küvette, ein Glasstab, ein Lineal, Zahlentafel.
Zeichnen Sie eine Skizze zur Versuchsanordnung, und erläutern Sie das angewandte Meßverfahren! Alle Meßgrößen sind mehrmals zu bestimmen (Mittelwertsbildung und Fehlerabschätzung!).

2. Theoretische Aufgabe:
Gegeben sei eine Mischung aus Äthanol und Toluol. Wie kann man mit Hilfe der in Aufgabe 1 genannten Hilfsmittel das Mischungsverhältnis der beiden Substanzen ermitteln? Welche Voraussetzungen müssen für die Anwendbarkeit Ihres Verfahrens erfüllt sein?

Hinweis für Kl. 9/10:
a) Die Brechzahl ist definiert durch

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

b) Es gilt für ein rechtwinkliges Dreieck:

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}.$$

Auf die Veröffentlichung der theoretischen Aufgabe für Kl. 11/12 müssen wir aus Platzgründen verzichten.

Eine Aufgabe von Prof. Dr. rer. nat. habil.
Wolfgang Schäfer

Direktor der Sektion Mathematik und Rechentechnik der Technischen Hochschule Leipzig

▲1820▲ Es ist zu zeigen, daß sin 10° irrational ist.

Hinweis: Man kann zum Beispiel durch Anwendung von Additionstheoremen, von $\sin 30° = \frac{1}{2}$ ausgehend, eine Gleichung für $x = \sin 10°$ erhalten.

Kurzbiographie

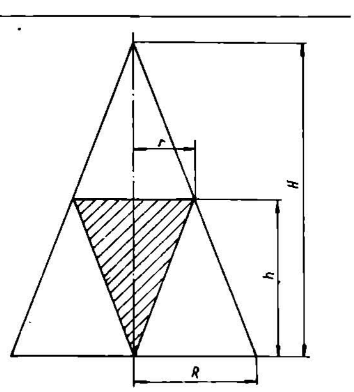
Geboren 1931 in Halle, Beruf des Vaters: Schlosser, Beruf der Mutter: Weißnäherin, Besuch der Volksschule (1938 bis 1942) und der Mittelschule (1942 bis 1948), Lehre als Maurer in Leuna, Abitur an der ABF *Walter Ulbricht* in Halle, Mathematikstudium an der *Martin-Luther-Universität* in Halle (1953 bis 1957), Abschluß als Diplom-Mathematiker, Promotion 1964, Habilitation 1967, Arbeit als Wissenschaftler an der TH Karl-Marx-Stadt, TH Leuna-Merseburg, im VEB Petrolchemischen Kombinat Schwedt, als Dozent an der Universität Greifswald und an der Ingenieurhochschule Leipzig, ordentl. Professor (1971) an der IH Leipig, jetzt Direktor der Sektion Mathematik und Rechentechnik an der TH Leipzig.

Eine Aufgabe von Dozent Dr.-Ing.
Rolf Thiele

Technische Hochschule Leipzig
Sektion Ingnieurbau

▲1821▲ Einem geraden Kegel mit dem Radius R und der Höhe H sei ein zweiter Kegel so eingefügt, daß seine Spitze mit dem Mittelpunkt des Grundkreises und die Achsen beider Kegel zusammenfallen. Der Grundkreis des 2. Kegels berühre den Mantel des 1. Kegels vollständig.

Welche Abmessungen T und h sind dem 2. Kegel zu geben, damit sein Volumen möglichst groß wird?



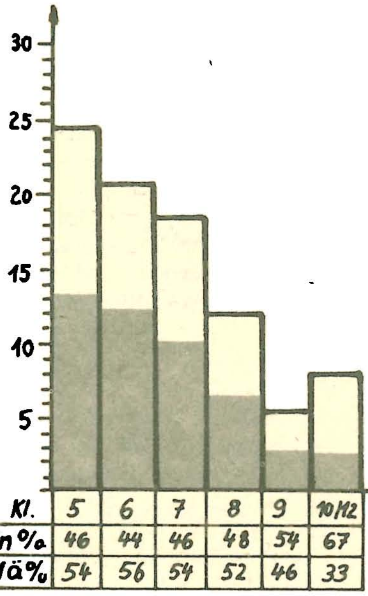
alpha-Wettbewerb 1977/78

Preisträger

Johannes Wien, Manuela Winges, beide Bad Liebenstein; Marei Hellmann, Bad Salzungen; Dirk Grabner, Karin Gröger, Kerstin Kantiem, Holger Neye, alle Berlin; Holger Schick, Jörg Berger, Gerd Rakowski, alle Bernsbach; Beate Weber, Bernburg; Thomas Streich, Brandenburg; Susanne Below, Burg Stargard; O. Sasse, Frank Techen, Karsten Mittag, alle Cottbus; Andreas Mann, Cunersdorf; Wolfgang Tenor, Dessau; AG Math. der N.-Ostrowski-OS, Diedorf; Mario Dette, Dingelstädt; Julius Clausnitzer, Horst Schulze, beide Dresden; Ralf Arnold, Claudia Pleyer, beide Eisenach; Jens Wackernagel, Falkenberg; Kathrin Danz, Floh; Anett Forberg, Freiberg; Matthias Bär, Freital; Dietmar Schmiedl, Olaf Liebegott, beide Friedeburg; Torsten Knause, Gossa; Raik Langlotz, Grabkow; Susanne Dimsat, Frigga Rudolph, Karl-Jürgen Bär, Antje Kilian, alle Greußen; Babett Maulhardt, Großbodungen; Cordelia Krippner, Hammerbrücke; Heidrun Schmidt, Hoyerswerda; Antje Rudolph, Kämmeritz; Steffen Herpich, Kamsdorf; Felix Baitalowitsch, Kasan (UdSSR); Tanja Mittag, Jens Siewert, Eske Röhrich, Mathias Womacka, Cornelia Unger, alle Karl-Marx-Stadt; Martina Albrecht, Anita Meyer, beide Kieselbach; Bernd Schmutzler, Kirchberg; André Schlosser, Klingenthal; Thoralf Blättermann, Könnern; Jens-Uwe Eigenwillig, Lauchhammer; Matthias Heller, Lauscha; Petra Seibt, Lauscha-Ernstthal; AG Math. (Kl. 6b) W.-Pieck-OS Lichte; Sybille und Claudia Seifert, Lichtenberg; Heike Pietzsch, Kathy Kranz, Kerstin Villwock, alle Löderburg; Doris Grünler, Lössau; Klaus Mohnke, Lübbenau; Andreas Herrmann, Ludwigsfelde; Torsten Schulz, Merseburg; Jörg Schmidt, Heidi Teidga, beide Neubrandenburg; Gabriele Kohnert, Simone Pahl, beide Neuenhofe; Irene Hesse, Niederorschel; Sandra Niedlich, Oberschönau; AG Math. (Kl. 9/10) EOS R. Fetscher, Pirna; Torsten Kühn, Potsdam-Babelsberg; Ullrich Klinzing, Roßdorf; Lutz Andrews, Gitta Schöne, Grit Maciejewski, alle Rostock; Evelyn Neumann, Rotta; Andrea Teschendorf, Rüdnitz; Bodo Bricks, Saalfeld; Sabine Recknagel, Silke Fischer, Theresa Häfner, alle Steinbach-Hallenberg; Steffen Weber, Tiefenort; Marena Pannier, Uthausen; Silke Raßmann, Ray Langlotz, beide Unterbreizbach; Tom Boyhs, Vietlübbe; Evelin Beyer, Wegefahrt; Karsten Busse, Wittenberg; Guido Köhnke, Marion Reek, beide Wittstock; Jörg Wenzel, Zeulenroda; Holger Alex, Birgit Erdmann, Heide Hilse, alle Zittau

Vorbildliche Leistungen

Andreas Gedat, Bad Liebenstein; Thomas Strobel, Michael Grünberg, beide Berlin; Peter Strempel, Cottbus; Jürgen Anders, Dahlewitz; Ruth Backhaus, Gabi Stöber, Astrid Kullmann, Petra Bülow, alle Dingelstädt; Brigitte Rotter, Kathrin Wustmann, Werner Kirsch, alle Dresden; Astrid Kafka, Eisleben; Katrin Burgmann, Ralf Fünfziger, beide Friedeburg; Jens Franke, Gera; Jan-Martin Hertzsch, Geringswalde; Hagen Haberland, Greifswald; Ingolf Hentzsche, Gremmin; Matthias Hunger, Grimma; Helen Stock, Großbodungen; Andreas Löffler, Halle-Neustadt; Astrid May, Hausen; Anja Kusserow, Haynrode; Gabriele Missal, Insel; Silvia Kriesche, Klausa; Manuela Hellbach, Lauscha; Ralf Laue, Thoralf Hönicke, beide Leipzig; Angela Tautenhahn, Lichtenstein; Hartmut Uschmann, Loburg; Michael Simang, Mittelherwigsdorf; Birgit Polley, Mühlhausen; Mario Marinitsch, Neubrandenburg; Ines Birkefeld, Niederorschel; Kristian Lauritzen, Reichenberg; Jürgen Schmalisch, Reuden; Kirstin Trägener, Rietz; Gunter Siebenhaar, Conny Steube, beide Roßdorf; Peter Krause, Rostock; Karsten Geißler, St. Egidien; Ingolf Erdmann, Torsten Günzel, beide Sebnitz; Heike Hader, Schlotheim; Ralf-Birger Häfner, Corina Kaiser, Ines Nothnagel, alle Steinbach-Hallenberg; Cordula Gottwald, Stendal; Joachim Krug, Tiefenort; Sylvia Feige, Weißwasser; Bettina Wolff, Wittstock; Thomas Reinke, Wolgast; Thomas Andermann, Jens Fache, beide Altenburg; Sascha Beyer, Beetzendorf; Udo Bellack, Berlin; Iris Hoffmann, Brielow; Uwe Schüzte, Camin; Kristina Roeke, Cottbus; Ulf Fache, Culitzsch; Britta Böttcher, Damsdorf; Birgit Rahn, Dresden; Una Heinecke, Gabriele Wehrsdorfer, Britta Burkert, alle Eisenberg; Axel Siebert, Eisenhüttenstadt; Elvira Stallbohm, Eldena; Jörg Klingohr, Erfurt; Kathrin Naumann, Glauchau; Holger Stoffel, Grabow; Ulrike Brandenburg, Greifswald; Jörn Wintsche, Grimma; Volker Winkler, Görlitz; Frank Thümmler, Horka; Claudia Bock, Jeßnitz; Ricarda Ramm, Karl-Marx-Stadt; Judith Kühn, Kreuzebra; Susann Schaede, Jesua Dietze, Corinna Mathdorff, alle Klietz; Kathrin Schiemann, Klinge; Ulrike Otto, Lauscha; Falk Hübner, Landsberg; Andreas Helbig, Langenleuba; Vera Wilhelm, Gunter Fucke, Petra Polster, alle Leipzig; Heike Scherf, Leisnig; Antje Peter, Lichtenstein; Steffen Haschke, Mittelherwigsdorf; Uwe Weßollek, Neundorf; Anett Ludwig, Niederorla; Thomas Heidrich, Oberlungwitz; Antje Gerlach, Parchim; Reinhard Kaufmann, Peißen; Gudrun Zirnstein, Pirna; Jörg Stark, Plauen; Karola Klitsch, Scharlibbe; Heike Beutel, Schönfeld; Wilfried Möbius, Schwerin; Anne Willroth, Stadtlengsfeld; Brigitta Müller, Teterow; Thomas Harz, Weimar; Beate Hentschke, Weißwasser; Ralf Malinowski, Wendorf; Katrin Krüger, Wildau; Frank Truckenbrodt, Wolfen; Sonja Güssow, Wollin, Jörg Angelmann, Wittenberg; Kerstin Jung, Wöbbelin; Ralf Wiegand, Unterbreizbach; Marion Vogt, Uthausen; Birgit Vogel, Reuden; Mathias Eipert, Petra Zander, beide Wittstock; Simone Marks, Astrid Schunck, Bärbel Biendarra, Heike Arnold, Sabine Rindermann, alle Dingelstädt; Rainer Schwäblein, Anette Usbeck, Thomas Werner, Stefan Kührt, Sabine Dziatzko, Katrin Pfannschmidt, Sabine Marr, Petra Marr, Elfi Recknagel, Gabi Knebel, Ramona Holland-Nell, Markus Heckert, Frank Pfannschmidt, Claudia Döll, Pirka Godau, Petra Preiß, Steffi Bahner, Dirk Walther, alle Steinbach-Hallenberg; Sylke Pohl, Rostock; Thomas Stoffel, Grabow; Mario Köppeh, Berlin; Frank-Michael Wegner, Greifswald; Uta Melchior, Neuruppin; Uta Heiland, Breitenbach; Peter Meng, Röblingen; Antje Schlosser, Klingenthal; Michael Kaufhold, Hüpstedt; Frank Siebert, Halle; Heike Klötzer, Bernsbach; Uwe Schulze, Pirna; Christine Zieger, Neudietendorf; Ralph Lukoschus, Neubrandenburg; Jenny Pelzer, Lübar; Stefan Große, Halle; Silke Vogel, Klietz; Urte Tauer, Seegrehna; Torsten Steinborn, Klietz; Heike Nagel, Seegrehna; Thomas Schunke, Neubrandenburg; Christine Kirsch, Dresden; Martin Forberger, Feldberg; Astrid Werther, Nordhausen; Kerstin Singer, Herlasgrün; Frank Schwarzer, Leipzig; Ines Hoffmann, Weißwasser; Detlef Ritter, Jena-Lobeda; Bianka Zeh, Heinersgrün; Anke Markgraf; Sybille Kerner, Bad Salzungen; Hartmut Beyer, Sondershausen; Beate Dziabel, Calbe; Detlef Conrad, Braunsbedra; Heike Wöstenberg, Templin; Thomas Markert, Sondershausen; Gerd Eckstein, Mehltheuer; Bernd Mehnert, Dresden; Grit Bauer, Hohenstein-E.; Jens-Uwe Otto, Rohr; Grit Knebel, Dresden; Elke Haase, Kreuzebra

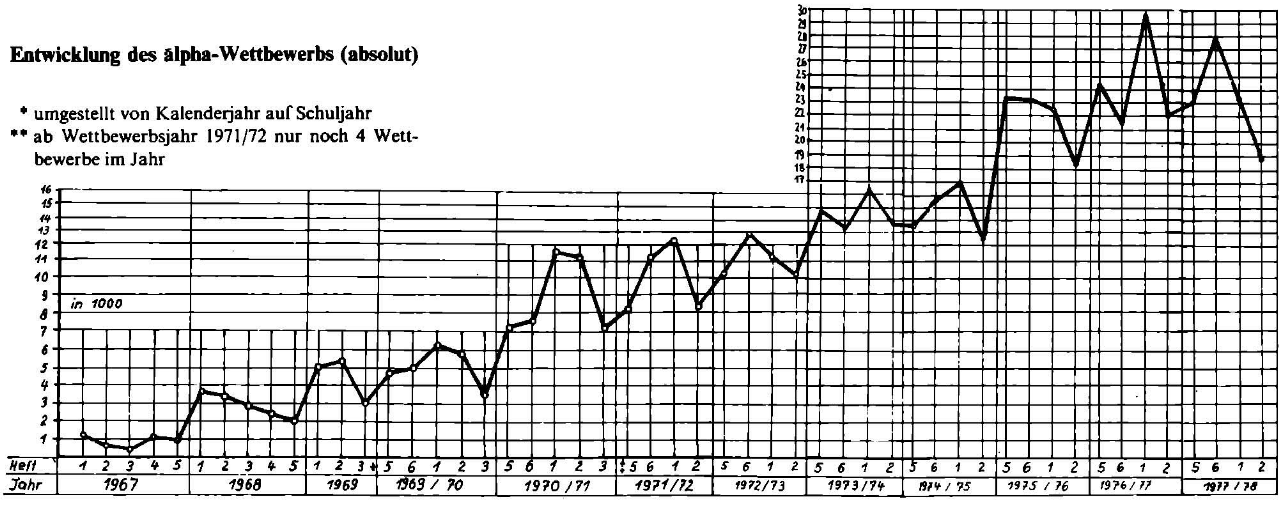


Kollektive Beteiligung

P.-Neruda-OS Ahlbeck; OS Fritz Weineck, Alsleben; Haus der JP Altenburg; OS II Altentreptow; Walter-Ulbricht-OS Altwigshagen; Karl-Marx-Schule Anklam; OS Asbach; OS Bad Bibra; OS Bad Gottleuba; R.-Schwarz-OS Bad Liebenstein; O.-Grotewohl-OS III, M.-Poser-OS, OS V, alle Bad Salzungen; Zentrale OS Bärenklau; *alpha*-Zirkel OS Bahratal; H.-Warnke-OS Bergwitz; AG Math. 20. OS, Botschafterschule der ARÄ, beide Berlin; OS Fr. Mehring, V.-Tereschkowa-OS, beide Bernburg; OS Bernterode; OS Birkungen; OS Cl. Zetkin, Bischofferode; Mat.-Kreiszirkel Kl. 6, Bischofswerda; Max-Planck-EOS, OS W. Pieck, beide Bleicherode; OS Fr. Weineck, Blumberg; OS Bockau; K.-Marx-OS Borna; OS Brandshagen; AG Math. OS Bregenstedt; AG Math. OS Brehme; OS Breitenworbis; OS W. Seelenbinder, Breitungen; P.-Neruda-OS Britz; M.-Poser-OS Bürgel; TOS Büttstedt; OS AG Math. Burkau; W.-Estel-OS Buttlar; H.-Grundig-OS Cossebaude; Klub Jg. Math., Station Jg. Naturf., beide Cottbus; OS Deuna; OS Deutschenbora; N.-Ostrowski-OS Diedorf; OS K. Kollwitz, OS Makarenko, beide Dingelstädt; AG Math. Diesdorf; OS K. Bürger, Dobbertin; K.-Marx-OS Mathe-Club, Döbeln; M.-Curie-OS AG Jg. Math., Dohna; OS K. Niederkirchner Dreilützow; OS 24. u. 112. AG Jg. Math., 73. OS H. Rothbarth, 82 OS. S. Rädel AG Math., P.-Gruner-OS, alle Dresden; OS Dubna (UdSSR); OS Ebersbrunn; Fr.-Wolf-OS Ebersdorf; OS Effelder; OS Ehrenberg; OS Eilsleben; 9. OS Geschw. Scholl, Eisenach; OS Empfertshausen; H.-Joachim-OS Espenhain; A.-Wedding-OS Falkenberg; OS Fambach; OS Frauensee; OS *alpha*-Club Friedeburg; OS Fr. Reuter, Friedland; B.-Brecht-OS Floh; OS V. H. Günther, Fürstenwalde; R.-Arnstadt-OS Geisa; E.-Hartsch-OS Gersdorf; OS Gerstungen; J.-Brinckmann-OS Goldberg; Kreisklub Jg. Math. Gräfenhainichen; 10. OS O. Drews, Karl-Krull-OS, beide Greifswald; OS J. Gagarin, OS H. Beimler, beide Greußen; OS Cl. Zetkin, Groitzsch; OS Großbodungen; Haus d. JP AG Math. Großenhain; OS Groß Köris; Lessingschule Großpostwitz; Pestalozzi-OS Großschönau; J.-Gagarin-OS Fachzirkel Math. Grünhain; Friedens-OS Guben; Th.-Müntzer-OS Gumpelstadt; OS Gutenswegen; Diesterwegschule Halle; Kreisst. Jg. Naturf. u. Techniker Hagenow-Land; OS Hammerbrücke; OS Haynrode; Schule der DSF Heiligengrabe; P.-Schreier-OS Hennigsdorf; OS Th. Müntzer, Hermannsdorf; EOS E. Weinert Herzberg; Goethe-OS Hohenleipisch; OS Hundeshagen; OS Ivenack; Fr.-Engels-Schule Kaltennordheim; OS A. Becker Kamsdorf; Clara-Zetkin-OS Kandelin; H.-Beimler-OS Karbow; P.-Tschaikowski-OS, E.-Thälmann-OS, OS Borna, Pionierhaus J. Gagarin, alle Karl-Marx-Stadt; Th.-Neubauer-Schule Kieselbach; Bruno-Tesch-OS Klausdorf; EOS, OS G. Eisler, beide Kleinmachnow; OS Könitz; Station Jg. Naturf. u. Techn. Köthen; OS Küllstedt; AG Jg. Math. Kuhfelde; R.-Breitscheid-OS *alpha*-Club Latdorf; Schulkombinat Lauscha-Ernstthal; R.-Teichmüller-OS Leimbach; K.-Liebknecht-OS, Dr.-Salvador-Allende-OS, EOS Karl Marx, alle Leinefelde; Stat. Jg. Naturf. u. Techniker Juri Gagarin, Leisnig; W.-Pieck-OS Lichte; OS Liebstadt; E.-Schneller-OS Löbnitz; OS W. Wallstab, Löderburg; R.-Neddermeyer-OS Löwenberg; OS *alpha*-Club Lössau; Th.-Neubauer-OS Meiningen; OS J. Gagarin Merkers; J.-Gagarin-OS AG Math., Merseburg; OS Zirkel Jg. Math. Mittelherwigsdorf; OS Mittel-Springstille; OS Naundorf; TOS Neuenhofe; OS Neukloster; Dr.-Th.-Neubauer-OS Niederorschel; OS J. Gagarin, EOS W. v. Humboldt, beide Nordhausen; Pestalozzi-OS Oberlungwitz; OS E. Weinert Oberschönau; OS Oechsen; OS Olbersdorf; Comeniusschule Oranienburg; OS Osternienburg; G.-Dimitroff-OS Parchim; Goethe-OS, Stat. Jg. Naturf. u. Techn. Kreisklub Math., beide Parchim; OS Dr. Th. Neubauer Pfaffschwende; EOS R. Tetscher, Math.-Zirkel Pirna; Makarenko-OS Plessa; OS 16 Potsdam; E.-Rietschel-OS Pulsnitz; OS Quitzöbel; Dr.-Th.-Neubauer-OS Rackwitz; Cl.-Zetkin-OS Raschau; Geschw.-Scholl-Schule Rathenow; OS AG Math. Rehna; Juri-Gagarin-OS Ribnitz; Spezialschule Riesa; Tagesschule, Ziolkowski-OS, beide Roßdorf; Haus d. JP, 34. OS M. Reichpietsch, beide Rostock; *alpha*-Club Rotta; OS S. Kosmodemjanskaja Rotterode; OS Rüdnitz; OS Rüsseina; OS II Saalfeld; alpha-Club Sachsendorf; W.-Pieck-OS Sangerhausen; T.-Bunke-OS Sanitz; H.-Matern-OS Schernberg; M.-Gorki-OS Schkölen; J.-G.-Seume-OS, EOS G. Dimitroff, OS Karl Marx, OS H. Danz, alle Schmalkalden; OS Schmölln; Haus d. JP W. Sonneberg Schönebeck; E.-Schneller-OS Schöneiche; O.-Nagel-OS AG Math. Schönewalde; Schule der DSF Schorssow; Haus d. JP E. Schneller, Schwedt; K.-Liebknecht-OS Schwerin; E.-Thälmann-OS Sebnitz; Fr.-Reuter-OS Siedenbollentin; OS J. R. Becher, Pionierhaus, beide Sondershausen; OS A. Becker, Spremberg; OS Stadtlengsfeld; OS E. Thälmann Steinbach-Hallenberg; Haus d. JP Klub Jg. Math., W.-Heinze-OS, O.-Grotewohl-OS, alle Stralsund; 12. OS Dr. R. Sorge, Kreis-AG 11. OS A. S. Schumawzow, beide Suhl; EOS Karl Marx, H.-Rieke-Schule, beide Tangerhütte; OS Teistungen; OS K. Niederkirchner Teterow; Fr.-Mehring-OS Tiefenort; OS *alpha*-Club Timmenrode; OS Töplitz; Pestalozzi-Schule Torgelow; E.-Thälmann-OS AG Math. Trebsen; OS W. Pieck Trusetal; H.-Beimler-OS Unterbreizbach; OS J. G. Seume Vacha; OS Viernau; OS Vitte; EOS J. Fucik Waldheim; Goetheschule Waren; OS Weilar; E.-Thälmann-OS, Sprachheil-OS, beide Weimar; OS Weißenborn; OS Wellmitz; Goethe-OS Welzow; OS Wernshausen; J.-Harder-OS Wesenberg; OS Westerengel; Cl.-Zetkin-OS Wiehe; alpha-Kollektiv der OS Wingerode; OS IV, E.-Thälmann-OS, beide Wittstock; Goethe-OS Wittenberg; OS H. Heine, Wörmlitz; H.-Beimler-Schule, Station Jg. Naturf. u. Techn., beide Wolfen; OS Th. Müntzer, Wulfen; H.-Eisler-OS Wusterhusen; OS Zahna; Fr.-Schiller-OS, Lutherschule, Schule d. VEB Kombinat Zentronik, alle Zella-Mehlis; 1. OS, Prof.-Dr.-W.-Du-Bois-OS, EOS, Pestalozzi-OS, alle Zittau; OS Zschornewitz; OS AG Math. Zschortau

Entwicklung des alpha-Wettbewerbs (absolut)

* umgestellt von Kalenderjahr auf Schuljahr
** ab Wettbewerbsjahr 1971/72 nur noch 4 Wettbewerbe im Jahr



10 Jahre Jugendobjekt „Klub Junger Mathematiker“ Dresden

Da seit nunmehr 10 Jahren Studenten der Sektion Mathematik/Geographie der Pädagogischen Hochschule *Karl Friedrich Wilhelm Wander* Dresden mathematisch interessierte und befähigte Schüler Dresdner Oberschulen in den Arbeitsgemeinschaften des Klubs Junger Mathematiker fördern und durch den Wechsel der Studenten alle zwei Jahre ein einheitliches Arbeitsmaterial entwickelt werden mußte, sind aus den Erfahrungen der Zirkelarbeit in den vergangenen Jahren im Auftrage des Pionierpalastes Dresden im Studentenwettstreit „Hilfen für die Planung der Arbeitsgemeinschaftsstunden der Klassen 5 bis 8“ entstanden.
Aus der 343 Seiten umfassenden Broschüre haben wir einen Komplex für unsere *alpha*-Leser ausgewählt. Wir geben vier Aufgabenblätter wieder zum Thema
Aussagen – Aussageformen – Wahrheitswerte.

▲1▲ In der folgenden Tabelle sind Terme, Gleichungen und Ungleichungen gegeben. Berechne die Terme bei beliebiger Wahl des Grundbereichs der Variablen! Belege die Variablen in den Gleichungen und Ungleichungen so, daß wahre Aussagen entstehen!

	Terme, Gleichungen, Ungleichungen
1.	$2(a+3)$
2.	$2a=2b$
3.	$x+y=x-y$
4.	$2x=3x-7$
5.	$a+3a<7(a+b)$
6.	$3a(b+a)+7ab$
7.	$13+71$
8.	$11=13(0+1)$

	Wer findet eine richtige Antwort?
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	

▲2▲ Was sind Aussagen und was sind Aussageformen? Bestimme den Wahrheitswert der Aussagen!
Beachte: Aussagen sind sinnvolle sprachliche Gebilde, die entweder wahr oder falsch sind. *Aussageformen* sind sprachliche Gebilde, die mindestens eine freie Variable enthalten und zu einer Aussage werden, wenn man die auftretenden Variablen durch Elemente des Grundbereichs ersetzt.

1. Er ist 1,43 m groß.
2. Meißen ist eine Stadt im Bezirk Dresden.
3. Jedes Viereck ist ein Quadrat.
4. Das Dreifache einer Zahl ist gleich dem Fünffachen dieser Zahl.
5. Die Zahl 2 erfüllt die Gleichung $5y=3y$.
6. Die beiden Geraden sind parallel.

	Aussageform (AF) oder Aussage (A)?	Wahrheitswert der Aussage W (wahr) oder F (falsch)
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		

▲3▲ Bilde die Negation, und bestimme den Wahrheitswert von Aussage und Negation!

	Aussage
1.	29 ist eine Primzahl.
2.	5 ist größer als 9.
3.	Alle durch 10 teilbaren Zahlen sind gerade.
4.	Es gibt rechtwinklige Dreiecke.
5.	$25+31=65$

	W/F?	Negation	W/F?
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

▲4▲ Stelle fest, ob die in der folgenden Tabelle genannten Ausdrücke Aussagen (A) oder Aussageformen (AF) sind! Ermittle weiter von den Aussagen, ob es sich um Einzelaussagen (e), Allaussagen (a) oder um Existenzaussagen (ex) handelt, und bestimme ihren Wahrheitswert (ww)! Gib von den Aussageformen an, ob sie erfüllbar (er) oder nicht erfüllbar (n er) sind!
Hinweis: Orientiere dich an der nach der Tabelle folgenden Übersicht!

	Ausdruck
1.	25 ist eine gerade Zahl.
2.	$a+1=a$
3.	Es gibt Figuren, die sich durch eine Gerade in zwei symmetrische Teilfiguren zerlegen lassen.
4.	Die Ungleichung $4+m<5$ hat im Bereich der natürlichen Zahlen genau eine Lösung.
5.	Für jede natürliche Zahl a gilt: $a\cdot 0=0$
6.	$xy=yx$
7.	$(t+4)\cdot 2<12$
8.	Zu natürlichen Zahlen a und b gibt es genau eine natürliche Zahl x, die das Produkt der Zahlen a und b ist.
9.	$25-13<12$
10.	Es gibt keine natürliche Zahl x, für die gilt: $x+x=x\cdot x$.
11.	Nicht für alle natürlichen Zahlen a gilt: a hat einen Vorgänger.

	A		AF
	e/a/ex?	ww	er n er
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			
9.			
10.			
11.			

Arten von Aussagen

1. *Einzelaussage*

z. B. „$3+2=7$" F

Überprüfung der Richtigkeit dieser Aussage.

2. *Existenzaussage*

Variablenbindung durch
„Es gibt ein ...", z. B.
„Es gibt Primzahlen, die kleiner als 10 sind." W
Beweisnotwendigkeit!
Beweis der Wahrheit dieser Aussage durch Angabe (wenigstens) eines Beispiels.

↓

Eindeutigkeitsaussage

Variablenbindung durch
„Es gibt genau ein ...", z. B.
„Es gibt genau eine gerade Primzahl." W
Beweis der Wahrheit dieser Aussage durch Angabe dieses einen Elements.

3. *Allaussage*

Variablenbindung durch
„Für alle ... gilt: ...", z. B.
„Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt:
$a+b=b+a$." W
Beweisnotwendigkeit!
Die Angabe eines oder mehrerer Beispiele genügt für den Beweis der Aussage nicht.
Es muß ein direkter Beweis geführt werden.

Aussageformen heißen

erfüllbar,
wenn sie durch mindestens eine Belegung aus dem Variablengrundbereich in eine wahre Aussage übergehen.

nicht erfüllbar,
wenn sie durch keine Belegung aus dem Variablengrundbereich in eine wahre Aussage überführt werden können.

Erfüllbare Aussageformen heißen

allgemeingültig,
wenn sie für *alle* Elemente des Variablengrundbereichs erfüllbar sind.

nicht allgemeingültig,
wenn sie für mindestens ein Element des Variablengrundbereichs erfüllbar sind.

Beispiele: Der Variablengrundbereich sei die Menge der natürlichen Zahlen.

$a \cdot b = b \cdot a$

$2x+3=5$
Für $x=1$ erfüllbar.

$2x+3=0$
Für kein $x \in N$ erfüllbar.

Unterscheide Aussageform und Term!

Werden in einem mathematischen Ausdruck nur Konstante, Variable, Operations- und technische Zeichen verwendet, so nennt man den Ausdruck einen *Term*. Zum Beispiel ist $2(x+5)-x$ ein Term. Werden jedoch auch Relationszeichen (z. B. $=$, $<$, $>$) verwendet, so heißt dieser Ausdruck *Aussageform*. Zum Beispiel ist $2(x+5)-x=9$ eine Aussageform.

A. Hilbert

(Die Lösungen veröffentlichen wir aus Platzgründen in Heft 1/79, d. Red.)

Entwurf des Abzeichens für die Teilnehmer im Klub.

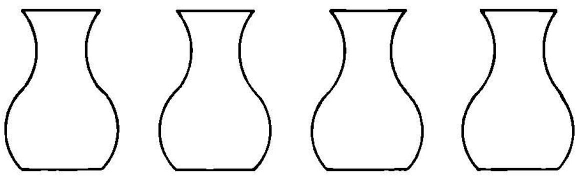
Klubteilnehmer bei aktiver Arbeit unter Anleitung einer Studentin.

In freien Stunden alpha heiter

Endlich Ferien!
W. Malachow, Moskau

Seltsame Vasen

Wenn man jede der Vasen durch zwei Schnitte in drei Teile zerlegt, und zwar jede Vase in gleicher Weise, so lassen sich die 12 Teile zu einem Quadrat zusammenlegen. Aber wie? *aus: „Füles", Budapest*



Freudiges Wiedersehen

Ein Fahrgast erblickt aus der fahrenden Straßenbahn seinen Freund, der entgegengesetzt zur Fahrtrichtung die Straße entlanggeht. Nach einer Minute steigt er aus und läuft zurück, um den Freund zu treffen. Er läuft doppelt so schnell wie der Freund, aber nur mit dem vierten Teil der Geschwindigkeit der Straßenbahn. Nach insgesamt wieviel Minuten holt er den Freund ein? *P. J. Germanowitsch, Moskau*

Verschwundener Wein

Ein Mann hatte 24 Flaschen Wein, die er in der gezeigten Weise im Keller anordnete. Er erinnert sich, daß das Muster symmetrisch war und daß längs jeder Seite des quadratischen Kellers neun Flaschen standen. Seine Frau trank einige dieser Flaschen und ordnete den Rest in einer solchen Weise um, daß der Mann von der Umordnung nichts merkte, da weiterhin alle ursprünglichen Bedingungen erfüllt waren. Wie sah das neue Muster aus? Wieviel Flaschen hat die Frau getrunken?

3	3	3
3		3
3	3	3

aus: Math. Pie, London

Griechischer Denksport

□ = △ + ○ (○ = 60)

○ + □ = △ + △ + △ + △ + △

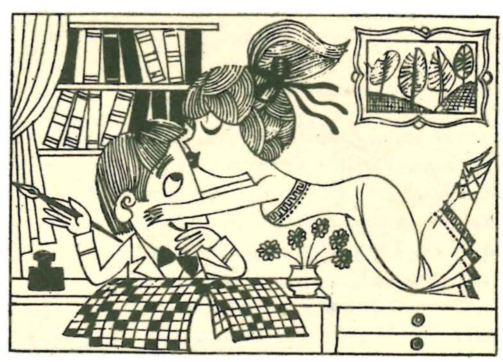
▭ = □ + △

aus: Eukleides, Athen

Der Kuß der Muse

Der so geküßte Rätselredakteur wird ein fabelhaftes Rätsel schreiben. Man lasse sich auf gleiche Weise anregen und finde so die 12 Einzelheiten, in denen die beiden Zeichnungen voneinander abweichen.

aus: „Füles", Budapest



Ein schwieriges Problem

Wie lauten die folgenden fünf Aufgaben, wenn für die jeweils angegebenen Sternchen (*) die Ziffern 0 bis 9 eingesetzt werden. Jede dieser Ziffern darf jedoch in jeder der Aufgaben nur einmal auftreten.

(1) $*** + *** = ****$

(2) $**** - *** = ***$

(3) $**** \cdot * = *****$

(4) $***** : **** = *$

(5) $\dfrac{**}{* \cdot * - *} = \dfrac{* + *}{\sqrt[*]{*^{*}}}$

aus: Archimedes, Beograd

Ein Rätselredakteur in Aktion

Man bilde aus den folgenden Silben 12 Wörter, deren erste Buchstaben von oben nach unten gelesen den Namen eines Mathematikers nennen.

aus – bi – bus – e – be – eu – ga – gen – hann – in – jo – ka – kel – kreis – ler – lich – mann – me – na – ne – nom – o – rhom – sen – sum – tan – te – ten – the – tür – wid – win.

1. Mathematiker des 15. Jahrhunderts
2. ihre Summe beträgt bei jedem Dreieck 360°
3. Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks
4. letzter Buchstabe des griechischen Alphabets
5. zweigliedriger Ausdruck der Form $a + b$ oder $a - b$
6. Ergebnis der Addition
7. eine Gerade, die eine Fläche (z. B. Kreis) in einem ihrer Punkte berührt.
8. Mathematiker von 1707 bis 1783
9. Linie, die die Seiten eines Vielecks berührt
10. Bezeichnung für die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4...
11. Grundbegriff der Geometrie
12. Vierecksart

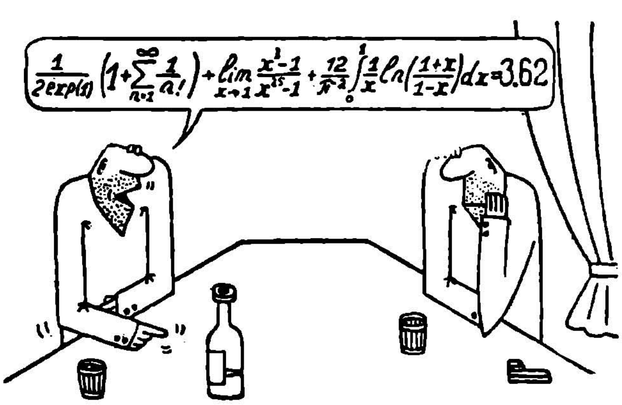
K. Hacker, 31. OS Dresden (Kl. 8)

Abschied von 1978

$$\begin{array}{c} 8 \\ 7 \\ 9 \\ 8+7+9+1+9+7+8 \\ 9 \\ 7 \\ 8 \\ \hline 19+78 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 9-9+9 \\ 7-7+7-7+7 \\ 8-8+8-8+8-8+8 \\ = \\ \hline 1+9+7+8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1+9+7+8 \\ +1+9+7+8 \\ +1+9+7+8 \\ \hline 19+7\cdot 8 \end{array}$$

aus: PM, Köln



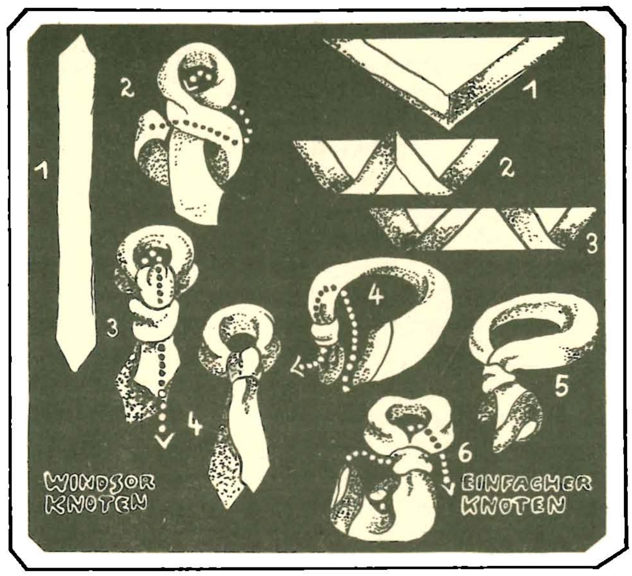
Ein ernst zu nehmender Hinweis!

W. Wassiljew, Moskau

Wie binde ich einen Krawattenknoten?

Es gibt viele Möglichkeiten, Binder, Schal oder Tuch zu knoten. Bei der Wahl des Knotens sollte man aber stets beachten, daß die jeweilige Kragenform auch einen besonderen Knoten erfordert. So passen zum Hemdkragen mit kurzen Ecken am besten breite Krawatten oder Schals in den Längen 100 cm bis 120 cm. Geeignet ist dafür der Windsor-Knoten (1). Der einfache Knoten (2), gebunden aus Viereck- oder Dreiecktüchern, sieht dagegen besonders schick zu Kragen mit langen und spitzen Ecken aus.

Ch. Moschke, Reichenau



„Mutti, hast du ein Lösungsmittel im Haus?“ fragt Peter. „Ja, wozu brauchst du es?“ fragt die Mutter. „Ach, ich habe solche Schwierigkeiten bei meinen Mathe-Aufgaben.“

Marleen Schöne, Dresden

Archimedes, eine Minute!
Was soll diese Schmiererei?

aus: Rir, Frankreich

XVIII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben und Lösungen der Kreisolympiade (15. 11. 1978)

Olympiadeklasse 5

1. Die Gleise der BAM werden nach ihrer Fertigstellung eine Gesamtlänge von 3200 km haben. Je 1 m Gleis entsprechen 2 m Schiene. Wieviel Tonnen Stahl werden für die Schienen der BAM insgesamt benötigt, wenn man für je 1 m Schiene 65 kg Stahl braucht?

Lösung: Wegen $3200 \cdot 2 = 6400$ werden insgesamt 6400 km Schienen benötigt. Wegen $6400\,\text{km} = 6400000\,\text{m}$ und $6400000 \cdot 65 = 416000000$ werden insgesamt $416000000\,\text{kg} = 416000\,\text{t}$ Stahl für diese Schienen benötigt.

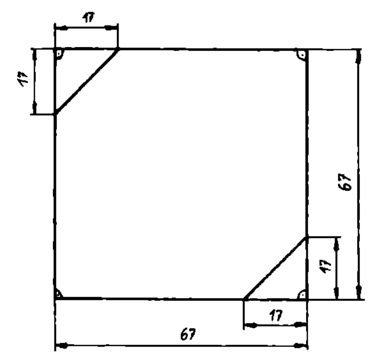
2. Marie-Luise möchte eine zweistellige natürliche Zahl z angeben, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) gleichzeitig erfüllt:
(1) Die Zahl z ist nicht durch 10 teilbar.
(2) Vergrößert man die Einerziffer der Zahl z um 4, so erhält man die Zehnerziffer von z.
(3) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, dann erhält man eine Zahl, deren Dreifaches kleiner als 100 ist.
Ermittle alle Zahlen z, die die genannten Bedingungen erfüllen!

Lösung: Wenn eine Zahl z die genannten Bedingungen erfüllt, so gilt: Die Einerziffer ist nach (1) nicht 0 und nach (2) so beschaffen, daß aus ihr nach Vergrößerung um 4 ein Ergebnis kleiner oder gleich 9 entsteht.
Daher ist die Einerziffer eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, und für z verbleiben höchstens die Möglichkeiten 51, 62, 73, 84, 95. Durch Vertauschen der Ziffern entsteht jeweils 15, 26, 37, 48, 59, und das Dreifache dieser Zahlen ist jeweils 45, 78, 111, 144, 177. Daher können wegen (3) nur die Zahlen 51 und 62 alle Bedingungen erfüllen. Die für diese Zahlen durchgeführten Rechnungen zeigen, daß diese Zahlen die Bedingungen (1), (2) und (3) auch tatsächlich erfüllen.

3. Vier Kooperative Abteilungen Pflanzenproduktion (KAP), die mit A, B, C und D bezeichnet sein sollen, besitzen zusammen 92 Traktoren. Wenn B zur besseren Nutzung drei ihrer Traktoren an A und vier ihrer Traktoren an D weitergibt, dann verfügen alle vier KAP über die gleiche Anzahl von Traktoren.
Wie viele Traktoren besaß ursprünglich jede der vier KAP?

Lösung: Wegen $92 : 4 = 23$ verfügt nach dem Ausleihen jede der vier KAP über 23 Traktoren. Da C weder einen Traktor erhielt, noch einen Traktor abgab, besaß sie auch ursprünglich genau 23 Traktoren. A besaß 3 Traktoren weniger als 23, also 20 Traktoren. D besaß 4 Traktoren weniger als 23, also 19 Traktoren. B besaß 7 Traktoren mehr als 23, also 30 Traktoren.

4. Die abgebildete schraffierte Fläche entsteht, indem von einer quadratischen Fläche zwei (gleichgroße) dreieckige Flächen abgeschnitten werden.



Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist der Flächeninhalt der schraffierten Fläche (in cm^2) zu berechnen.

Lösung: Wegen $67^2 = 4489$ beträgt der Flächeninhalt des abgebildeten Quadrats $4489\,\text{mm}^2$. Die beiden Dreiecke lassen sich zu einem Viereck ergänzen, das vier gleichlange Seiten und zwei rechte Winkel enthält, also ein Quadrat ist. Wegen $17^2 = 289$ beträgt der Flächeninhalt dieses Quadrats $289\,\text{mm}^2$. Wegen $4489 - 289 = 4200$ und $4200\,\text{mm}^2 = 42\,\text{cm}^2$ hat die schraffierte Fläche den Flächeninhalt $42\,\text{cm}^2$.

Olympiadeklasse 6

1. a) Die Multispektralkamera MKF-6 von Sojus-22 fotografierte bei jeder Aufnahme ein rechteckiges Gebiet von 115 km Breite und 165 km Länge.
Berechne den Flächeninhalt eines solchen Gebietes!
b) Während der 83. Erdumkreisung am 20. September 1976 überflog Sojus 22 die DDR in Richtung von Eisenach nach Pasewalk. Auf einer Landkarte im Maßstab 1 : 700000 hat die dabei überflogene Strecke eine Länge von 65 cm.
Wie lang ist diese Strecke in Wirklichkeit? (Angabe in km) (Rechnung ohne Berücksichtigung der Erdkrümmung)

Lösung: a) Wegen $115 \cdot 165 = 18975$ beträgt der Flächeninhalt eines solchen Gebietes $18975\,\text{km}^2$.
b) Wegen $700000 \cdot 65 = 45500000$ ist die Strecke in Wirklichkeit $45500000\,\text{cm} = 455$ km lang.

2. Ermittle alle zweistelligen Zahlen z, die die folgenden Bedingungen (1), (2) gleichzeitig erfüllen:
(1) Die Einerziffer von z ist um 1 kleiner als die Zehnerziffer von z.
(2) Vertauscht man die Ziffern von z miteinander, so erhält man eine zweistellige Primzahl.

Lösung: Wenn z eine Zahl mit den geforderten Eigenschaften ist, so hat z nach (2) nicht 0 als Einerziffer, also ist die Einerziffer eine der Ziffern 1, ..., 9. Da nach (1) die Zehnerziffer um 1 größer ist, entfällt 9 als Einerziffer, und es verbleiben wegen (1) für die zweistelligen Zahlen z nur die Möglichkeiten 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98.
Von ihnen entfallen 21, 43, 65 und 87, da aus ihnen bei Ziffernvertauschung je eine gerade zweistellige Zahl, also keine Primzahl entsteht. Ferner entfällt die Zahl 54, aus der die durch 5 teilbare zweistellige Zahl 45 entsteht. Daher können nur die Zahlen 32, 76 und 98 alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Tatsächlich sind sie zweistellig und erfüllen (1), und sie erfüllen auch (2), da 23, 67 und 89 zweistellige Primzahlen sind. Die gesuchten Zahlen lauten folglich 32, 76 und 98.

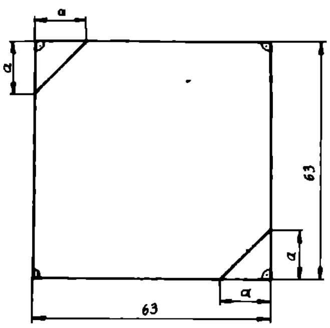
3. In einer Verkaufsstelle wird ein Artikel in drei verschiedenen Ausführungen angeboten, wobei die Ausführungen unterschiedlich im Preis sind.
Beate kauft von jeder Ausführung dieses Artikels ein Stück und bezahlt insgesamt 10,50 M. Hätte sie drei Stück von der billigsten Ausführung gekauft, dann hätte sie 0,75 M gespart. Hätte sie dagegen drei Stück von der teuersten Ausführung gekauft, dann hätte sie 0,75 M mehr bezahlen müssen.
Wieviel kostet jede der drei Ausführungen dieses Artikels?

Lösung: Wegen $1050 - 75 = 975$ und $975 : 3 = 325$ kostet die billigste Ausführung des Artikels 3,25 M.
Wegen $1050 + 75 = 1125$ und $1125 : 3 = 375$ kostet die teuerste Ausführung des Artikels 3,75 M.
Wegen $1050 - 325 - 375 = 350$ kostet die dritte Sorte 3,50 M.

4. Die abgebildete schraffierte Fläche ist $38\,\text{cm}^2$ groß. Sie ist aus einer quadratischen Fläche entstanden, von der zwei (gleich

große) dreieckige Flächen abgeschnitten wurden.

Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist die Seitenlänge a der Dreiecke (in mm) zu berechnen.



Lösung: Wegen $63^2 = 3969$ hat das abgebildete Quadrat den Flächeninhalt $3969\ \text{mm}^2$. Wegen $38\ \text{cm}^2 = 3800\ \text{mm}^2$ und $3969 - 3800 = 169$ haben die beiden Dreieckflächen zusammen den Flächeninhalt $169\ \text{mm}^2$. Da die beiden Dreiecke gleich groß und rechtwinklig-gleichschenklig sind, ergänzen sie sich zu einem Quadrat. Dieses Quadrat hat einen Flächeninhalt von $169\ \text{mm}^2$ und daher die Seitenlänge $a = 13$ mm. Die Seitenlänge a der genannten Dreiecke beträgt 13 mm.

Olympiadeklasse 7

1. An einer Schule unterrichteten die drei Lehrer Schulze, Ufer und Krause in den Fächern Deutsch, Russisch, Geschichte, Mathematik, Physik und Biologie. Es sei folgendes bekannt:

(1) Jeder dieser drei Lehrer unterrichtet in genau zwei dieser sechs Fächer, und jedes dieser sechs Fächer wird von genau einem dieser drei Lehrer unterrichtet.

(2) Sowohl der Lehrer für Biologie als auch der Lehrer für Physik sind älter als Herr Schulze.

(3) In ihrer Freizeit spielen der Lehrer für Russisch, der Lehrer für Mathematik und Herr Schulze gern Skat. Dabei gewinnt Herr Krause öfter als der Lehrer für Biologie und der Lehrer für Russisch.

Weise nach, daß man aus diesen Angaben die Verteilung der drei Lehrer auf die Fächer eindeutig ermitteln kann, und gib diese Verteilung an!

Lösung: Wir bezeichnen die Namen der Lehrer abkürzend mit S, U bzw. K, die der Fächer mit d, r, g, m, p bzw. b. Dabei bedeute S = d, daß Schulze das Fach Deutsch unterrichtet; S ≠ b bedeute, daß Schulze nicht im Fach Biologie unterrichtet; usw.

Aus (1) und (2) folgt S ≠ b und S ≠ p; aus dem ersten Teil von (3) folgt analog S ≠ r und S ≠ m. Wegen (1) muß daher S = d und S = g gelten. Ebenfalls wegen (1) gilt K ≠ d und K ≠ g, und da aus dem zweiten Teil von (3) die Beziehungen K ≠ b und K ≠ r folgen, gilt wegen (1) mithin K = m und K = p. Ebenfalls wegen (1) folgt schließlich U = r und U = b.

Damit ist gezeigt, daß auf Grund der Angaben nur folgende Verteilung möglich ist: Herr Schulze unterrichtet Deutsch und Geschichte, Herr Ufer unterrichtet Russisch und Biologie, Herr Krause unterrichtet Mathematik und Physik.

(Folgende Tabelle veranschaulicht den Lösungsweg. Dabei bedeute „(2)-nein" im Feld S/b, daß Schulze wegen (2) nicht in Biologie unterrichtet; usw.)

	d	r	g	m	p	b
S	ja	(3a)-nein	ja	(3a)-nein	(2)-nein	(2)-nein
U	(1)-nein	ja	(1)-nein	(1)-nein	(1)-nein	ja
K	(1)-nein	(3b)-nein	(1)-nein	ja	ja	(3b)-nein

2. Von einem Bruch wird gefordert, daß er die beiden folgenden Eigenschaften (1), (2) hat.

Ermittle alle Brüche, die diese Forderung erfüllen!

(1) Der Bruch stellt die gleiche gebrochene Zahl dar wie 0,4.

(2) Die Summe aus dem Zähler und dem Nenner dieses Bruches ist eine zweistellige Quadratzahl.

Lösung: Angenommen, es gibt einen solchen Bruch $\frac{p}{q}$ mit natürlichen Zahlen p, q und $q \neq 0$.

Wegen (1) gilt dann $\frac{p}{q} = \frac{2}{5}$. Daraus folgt $p = 2n$ und $q = 5n$ (mit $n \in N$, $n \neq 0$), also $p + q = 7n$, was mit $7 \mid p + q$ gleichbedeutend ist. Da die Zahl 49 die einzige durch 7 teilbare zweistellige Quadratzahl ist, kann wegen (2) nur $p + q = 49$ und somit $n = 7$, $p = 14$, $q = 35$ gelten.

Wenn es also einen Bruch mit den geforderten Eigenschaften gibt, dann kann dies nur der Bruch $\frac{14}{35}$ sein.

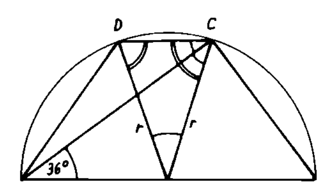
Tatsächlich erfüllt $\frac{14}{35}$ beide Bedingungen; denn es gilt $\frac{14}{35} = 0{,}4$ und $14 + 35 = 49 = 7^2$.

Also hat genau der Bruch $\frac{14}{35}$ die geforderten Eigenschaften.

3. In einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ so gelegen, daß die Eckpunkte A, B, C, D auf der Peripherie des Kreises k liegen und AB Durchmesser von k ist.

Außerdem sei $\sphericalangle MAC = 36°$.

Beweise, daß dann $\sphericalangle CMD = 36°$ ist!



Lösung: Nach Voraussetzung ist das Dreieck AMC gleichschenklig mit $\overline{AM} = \overline{MC} = r$, also gilt $\sphericalangle MAC = \sphericalangle ACM = 36°$. (1)

Da $\sphericalangle DCA$ und $\sphericalangle MAC$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind, gilt

$\sphericalangle DCA = \sphericalangle MAC = 36°$. (2)

Aus (1) und (2) folgt

$$\sphericalangle DCA + \sphericalangle ACM = \sphericalangle DCM = 72°. \quad (3)$$

Weiterhin ist nach Voraussetzung das Dreieck MCD gleichschenklig mit $\overline{MD} = \overline{MC} = r$; hiernach und wegen (3) gilt

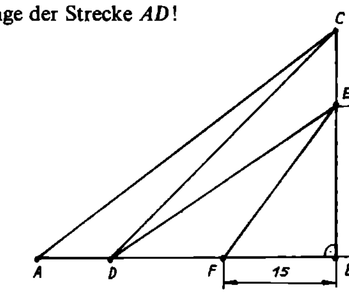
$$\sphericalangle MDC = \sphericalangle DCM = 72°.$$

Daraus folgt $\sphericalangle CMD = 36°$, w. z. b. w.

4. Über sechs Punkte A, B, C, D, E, F wird folgendes vorausgesetzt: $\triangle ABC$ ist ein rechtwinkliges Dreieck mit B als Scheitel des rechten Winkels. D ist ein (innerer) Punkt der Strecke AB; E ist ein (innerer) Punkt der Strecke BC; F ist ein (innerer) Punkt der Strecke DB. Die Dreiecke ADC, DEC, DFE und FBE sind sämtlich einander flächeninhaltsgleich.

Ferner gilt $\overline{FB} = 15$ cm und $\overline{BE} = 20$ cm.

Ermittle unter diesen Voraussetzungen die Länge der Strecke AD!



Lösung: Für den Flächeninhalt A_1 des Dreiecks FBE gilt laut Voraussetzung und nach der Inhaltsformel für Dreiecke

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20\ \text{cm}^2 = 150\ \text{cm}^2$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks DBE beträgt laut Voraussetzung $2 \cdot A_1$, so daß für $\overline{BD}$ folgt:

$\frac{1}{2}\overline{BD} \cdot \overline{BE} = 300\ \text{cm}^2$, d. h. $\overline{BD} = 30$ cm.

Der Flächeninhalt des Dreiecks DBC beträgt laut Voraussetzung $3 \cdot A_1$, so daß für $\overline{BC}$ folgt

$\frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{BD} = 450\ \text{cm}^2$, d. h. $\overline{BC} = 30$ cm.

Analog folgt für $\overline{AB}$:

$\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 600\ \text{cm}^2$, $\overline{AB} = 40$ cm

und somit $\overline{AD} = \overline{AB} - \overline{BD} = 40\ \text{cm} - 30\ \text{cm} = 10$ cm.

Die Länge der Strecke $\overline{AD}$ beträgt 10 cm.

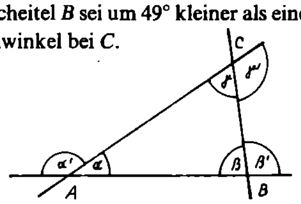
Olympiadeklasse 8

1. Über vier Schüler mit den Vornamen Alfred, Benno, Detlev, Egon und den Nachnamen Ampler, Baumbach, Dürer, Erbe werden folgende Angaben gemacht:

(1) Egon ist jünger als Benno, aber älter als Alfred.
(2) Detlev ist älter als Alfred, aber jünger als Benno.
(3) Der Schüler Dürer ist älter als der Schüler Erbe, aber jünger als der Schüler Ampler.
(4) Der Schüler Baumbach ist älter als der Schüler Dürer, aber jünger als Benno.
(5) Genau einer dieser vier Schüler hat einen Vornamen, der mit dem gleichen Buchstaben beginnt wie sein Familienname. Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutige Antworten auf die folgenden Fragen (a), (b) beweisen lassen! Wenn dies der Fall ist, ermittle die Antworten!
(a) Wie heißen die vier Schüler mit Vor- und Familiennamen?
(b) Wie lautet die Reihenfolge der Schüler nach ihrem Alter, beginnend mit dem jüngsten Schüler?

Lösung: Das Alter der vier Schüler Alfred, Benno, Detlev und Egon sei in dieser Reihenfolge mit a, b, d, e bezeichnet; das Alter der Schüler Ampler, Baumbach, Dürer, Erbe sei in dieser Reihenfolge mit A, B, D, E bezeichnet.
Wenn die Angaben (1) bis (5) zutreffen, so folgt:
aus (1): $a<e<b$, aus (2): $a<d<b$,
aus (3): $E<D<A$, aus (4): $D<B<b$.
Aus (1) und (2) folgt, daß Alfred der jüngste, Benno der älteste ist.
Aus (3) und (4) folgt, daß Erbe der jüngste, Dürer der zweitjüngste ist.
Der jüngste Schüler heißt folglich Alfred Erbe. Da ferner Benno der älteste Schüler ist und er nicht Erbe oder Dürer und wegen (4) nicht Baumbach heißen kann, muß er Ampler heißen.
Aus (5) folgt nunmehr: Ein Schüler heißt Detlev Dürer. Somit heißt der vierte Schüler Egon Baumbach. Daher können nur die Namen Alfred Erbe, Detlev Dürer, Egon Baumbach und Benno Ampler, in dieser Reihenfolge aufgezählt, die Fragen (a), (b) in Übereinstimmung mit den Angaben (1) bis (5) beantworten.
Umgekehrt zeigt sich: Wenn diese Aufzählung die Namen und die Reihenfolge der Schüler nach ihrem Alter angibt, so treffen die Angaben (1) bis (5) zu. Also sind mit dieser Aufzählung die eindeutigen Antworten auf die Fragen (a), (b) ermittelt.

2. Man ermittle die Größen der Innenwinkel eines Dreiecks ABC, auf dessen Außenwinkel folgende Aussage zutrifft:
Einer der Außenwinkel mit dem Scheitel A sei um 16° größer, einer der Außenwinkel mit dem Scheitel B sei um 49° kleiner als einer der Außenwinkel bei C.

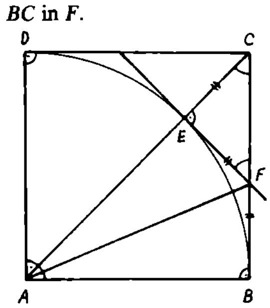


Lösung: Werden die Größen der Innen- bzw. Außenwinkel des Dreiecks ABC bei A mit α bzw. α', bei B mit β bzw. β' und bei C mit γ bzw. γ' bezeichnet, so sind die zwischen ihnen einerseits allgemein gültigen und andererseits vorausgesetzten Beziehungen beschrieben durch
$\alpha'=180°-\alpha=\gamma'+16°=180°-\gamma+16°$ und
$\beta'=180°-\beta=\gamma'-49°=180°-\gamma-49°$,
woraus folgt:
$\alpha=\gamma-16°$ und
$\beta=\gamma+49°$, und mit Hilfe des Satzes über die (Innen)Winkelsumme im Dreieck:
$\alpha+\beta+\gamma=180°=3\gamma+33°$.
Daraus erhält man
$\gamma=49°, \alpha=49°-16°=33°$
und $\beta=49°+49°=98°$.
Tatsächlich existiert wegen $49°+33°+98°=180°$ ein solches Dreieck ABC, und es besitzt außerdem Außenwinkel folgender Größen:
bei C mit $\gamma'=180°-49°=131°$,
bei A mit $\alpha'=180°-33°=147°=131°+16°=\gamma'+16°$ und
bei B mit $\beta'=180°-98°=82°=131°-49°=\gamma'-49°$.

3. Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen mit folgender Eigenschaft:
Addiert man 2 zu der gesuchten Zahl, so erhält man das Dreifache derjenigen Zahl, die durch Vertauschen der Ziffern der Ausgangszahl entsteht.

Lösung: Angenommen, es gibt eine derartige Zahl. Dann hat sie die Form $10x+y$, wobei x und y natürliche Zahlen mit $x, y \leqq 9$ sind. Für diese gilt:
$$10x+y+2=3(10y+x),$$
$$\text{somit } y=\frac{7x+2}{29}.$$
Da y eine natürliche Zahl ist, ist $7x+2$ ein Vielfaches von 29. Wegen $0 \leqq x \leqq 9$ ist $2 \leqq 7x+2 \leqq 65$; deshalb kommen nur die Fälle $7x+2=29$ und $7x+2=58$ in Frage.
$7x+2=29$ ist nicht in natürlichen Zahlen lösbar.
Aus $7x+2=58$ folgt $x=8$; für y erhält man dann 2. Also kann höchstens die Zahl 82 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Sie erfüllt sie tatsächlich; denn es gilt $82+2=84=3\cdot 28$.

4. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Mit $\overline{AB}$ als Radius sei um A ein Kreis gezeichnet. Dieser schneide die Diagonale AC in E. Die in E an den Kreis gelegte Tangente schneide die Seite BC in F.



Beweise, daß die Strecken CE, EF und FB gleich lang sind!

Lösung: (1) Der Winkel $\sphericalangle BCA$ ist 45° groß; denn die Diagonale halbiert den rechten Winkel bei C.
(2) Der Winkel $\sphericalangle CEF$ ist 90° groß, denn Berührungsradius und Tangente stehen senkrecht aufeinander.
(3) Aus den Aussagen (1) und (2) ergibt sich: Der Winkel $\sphericalangle EFC$ ist 45° groß, und aus den Aussagen (1) und (3) folgt $\overline{EF}=\overline{EC}$. Ferner gilt $\triangle AFE \cong \triangle AFB$ (Übereinstimmung in AF, in $\overline{AE}=\overline{AB}$ und in $\sphericalangle AEF=\sphericalangle ABF$, wobei diese Winkel 90° betragen, also jeweils der längsten Dreieckseite gegenüberliegen). Daher ist $\overline{FB}=\overline{FE}=\overline{BC}$, w. z. b. w.

Olympiadeklasse 9

1. Eine Familie fährt mit der Straßenbahn. Der Vater zieht an der Zahlbox vier Fahrscheine, die durch sechsstellige Zahlen fortlaufend numeriert sind.
Der jüngste Sohn meint: „Gleichgültig, wie die erste der vier Zahlen lautet, eine unter diesen Zahlen muß eine durch 4 teilbare Quersumme haben." Der ältere Sohn behauptet dagegen, daß unter vier aufeinanderfolgenden sechsstelligen Zahlen nicht notwendig eine Zahl vorkommen muß, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.
Wer von beiden hat recht?

Lösung: Es kommt z. B. unter den sechsstelligen Zahlen
100008,
100009,
100010 und
100011
keine Zahl vor, deren Quersumme durch 4 teilbar ist. Also hat der ältere Sohn recht.

2. In einer Wiederholungsstunde über Zahlbereiche werden u. a. folgende Aussagen gemacht:
(1) Das Produkt zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
(2) Die Summe zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.
(3) Die Summe einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets eine irrationale Zahl.
Man entscheide von jeder dieser Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist!

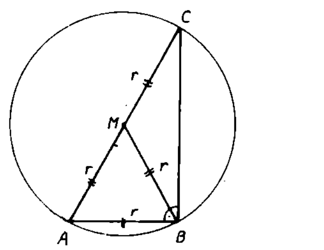
Lösung: Zu (1): Die Zahlen $\sqrt{2}$ und die von ihr verschiedene Zahl $\sqrt{8}$ sind irrational, ihr Produkt $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4$ ist dagegen rational. Aussage (1) ist also falsch.
Zu (2): $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ sind verschieden irrationale Zahlen. Ihre Summe ist 0. Das ist eine rationale Zahl. Aussage (2) ist also falsch.
Zu (3): Angenommen, es gäbe eine rationale Zahl r und eine irrationale Zahl x, deren

Summe eine rationale Zahl wäre. Dann gäbe es ganze Zahlen a, b, c, d mit $b \neq 0, d \neq 0$ und

$$r=\frac{a}{b}, r+x=\frac{c}{d}.$$

Daraus ergäbe sich $x=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{bc-ad}{bd}$, also der Widerspruch, daß x rational wäre. Damit ist bewiesen, daß Aussage (3) wahr ist. (Zum Beweis von (3) kann auch statt der rechnerischen Umformung von $x=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$ als Satz zitiert werden, daß die Differenz zweier rationaler Zahlen stets wieder eine rationale Zahl ist.)

3. Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei B und $\sphericalangle BAC = 60°$ ist die Länge r des Umkreisradius gegeben. Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt dieses Dreiecks sowie die Länge der auf seiner Hypotenuse senkrecht stehenden Höhe!



Lösung: Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegt B auf dem Halbkreis über AC. Sei M der Mittelpunkt von AC, dann ist der Kreis um M mit dem Radius $\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MC}=r$ der Umkreis des Dreiecks ABC. Damit gilt $\overline{AC}=2r$.
Das gleichschenklige Dreieck ABM hat laut Voraussetzung einen Winkel mit der Größe 60°, ist also gleichseitig.
Daraus folgt $\overline{AB}=r$. Nach dem Satz des Pythagoras erhält man $\overline{CB}=r\sqrt{3}$.
Damit gilt für den Umfang $u=3r+r\sqrt{3}=r(3+\sqrt{3})$ und für den Flächeninhalt

$$I=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}r^2\cdot\sqrt{3}.$$

Da der Flächeninhalt auch nach der Formel $I=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot h=r\cdot h$, mit h als Länge der Höhe auf der Hypotenuse AC berechnet werden kann, folgt

$$h=\frac{I}{r}=\frac{1}{2}r\sqrt{3}.$$

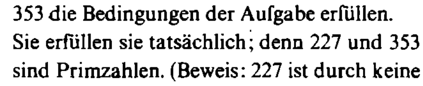
4. Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, die die folgenden Eigenschaften (1) bis (4) haben:

(1) z ist eine Primzahl.
(2) Jede Ziffer von z stellt eine Primzahl dar.
(3) Die Quersumme z' von z ist eine zweistellige Primzahl.
(4) Die Quersumme z'' von z' ist eine Primzahl.

Lösung: Angenommen, eine dreistellige Zahl z hat die Eigenschaften (1) bis (4).
Wegen (2) können dann in ihr nur folgende Zahlen als Ziffer vorkommen: 2, 3, 5 und 7. Davon können wegen (1) die Zahlen 2 und 5 nicht als Endziffern auftreten. Also endet z auf eine Ziffer 3 oder 7.
Da die Quersumme z' eine zweistellige Primzahl ist, die als Summe von drei Summanden gebildet wird, von denen keiner größer als 7 ist, kann z' nur eine der Zahlen 11; 13; oder 17; 19 sein. Von ihnen hat nur $z'=11$ eine Primzahl, nämlich die Zahl 2, als Quersumme.
Also gilt $z'=11$.
Sei nun die letzte Ziffer von z die Zahl 7. Dann muß die Summe der durch die beiden ersten Ziffern dargestellten Zahlen 4 betragen. Von den möglichen Zerlegungen der Zahl vier in zwei natürliche Zahlen als Summanden (nämlich $0+4$; $1+3$; $2+2$; $3+1$ und $4+0$) erfüllt nur $2+2$ die Bedingung (2). Damit erhält man $z=227$.
Sei nun 3 die letzte Ziffer von z. Dann muß die Summe der durch die ersten beiden Ziffern von z dargestellten Zahlen 8 betragen. Von den möglichen Zerlegungen der Zahl 8 in zwei natürliche Zahlen als Summanden (nämlich $0+8$; $1+7$; $2+6$; $3+5$; $4+4$; $5+3$; $6+2$; $7+1$; $8+0$) erfüllen nur $3+5$ und $5+3$ die Bedingung (2). Das führt auf die Zahlen $z=353$ und $z=533$. Wegen $533=13\cdot 14$ erfüllt die Zahl 533 nicht die Bedingung (1).
Also können höchstens die Zahlen 227 und 353 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.
Sie erfüllen sie tatsächlich; denn 227 und 353 sind Primzahlen. (Beweis: 227 ist durch keine Primzahl $p<17$ teilbar, und es gilt $17^2>227$, 353 ist durch keine Primzahl $p<19$ teilbar, und es gilt $19^2>353$.)
Ihre Ziffern 2, 2, 7 bzw. 3, 5, 3 sind ebenfalls Primzahlen. Das gilt auch für ihre Quersumme 11. Schließlich ist die Quersumme 2 von 11 eine Primzahl, wie es gefordert war.

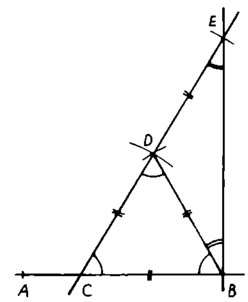
Olympiadeklasse 10

1. Auf einer Geraden sollen sechs Punkte A, B, C, D, E und F so angeordnet werden, daß $\overline{AB}=10$ cm; $\overline{BC}=6$ cm; $\overline{BE}=11$ cm; $\overline{CD}=2$ cm; $\overline{FD}=3$ cm; $\overline{AF}=3$ cm und $\overline{DE}=7$ cm gilt
Untersuchen Sie, ob das möglich ist und in welcher Reihenfolge die Punkte bei jeder derartigen Möglichkeit angeordnet sind! (Dabei ist von den zwei zueinander entgegengesetzten Anordnungsmöglichkeiten einer gesuchten Reihenfolge nur eine anzugeben.)



Lösung: Angenommen, eine Anordnung von Punkten $A, \ldots, F$ erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Die Gerade, auf der die Punkte liegen, werde als Zahlengerade mit der Einheit 1 cm aufgefaßt.
Wegen $\overline{BE}=11$ cm kann dabei erreicht werden, daß die Punkte B bzw. E den Zahlen 0 bzw. 11 entsprechen. Dann entspricht C wegen $\overline{BC}=6$ cm der Zahl 6 oder der Zahl -6, weiterhin D wegen $\overline{DE}=7$ cm der Zahl 4 oder der Zahl 18. Hiernach kann aber $\overline{CD}=2$ cm nur erfüllt werden, wenn C der Zahl 6 und D der Zahl 4 entspricht. Nun folgt weiter: Wegen $\overline{AB}=10$ cm entspricht A der Zahl 10 oder der Zahl -10; wegen $\overline{FD}=3$ cm entspricht F der Zahl 1 oder der Zahl 7. $\overline{AF}=3$ cm kann aber danach nur erfüllt werden, wenn A der Zahl 10 und F der Zahl 7 entspricht. Also können nur bei der Anordnung im Bild die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sein.
In der Tat erfüllt diese Anordnung (als einzige) alle gestellten Bedingungen. Die gesuchte Reihenfolge lautet: B, D, C, F, A, E. (Laut Aufgabentext ist E, A, F, C, D, B als Ergebnis ebenfalls richtig.)

2. Um auf einer gegebenen Strecke AB im Punkt B die Senkrechte zu errichten, führt Roland folgende Konstruktion aus:
Er wählt zwischen A und B einen Punkt C. Sodann zeichnet er um B und C Kreise mit dem Radius $\overline{BC}$. Einen der Schnittpunkte dieser Kreise nennt er D.
Schließlich zeichnet er die Gerade durch C und D und trägt darauf von D aus auf der Verlängerung von CD eine Strecke der Länge $\overline{CD}$ ab. Ihren zweiten Endpunkt nennt er E. Nun behauptet er, die Gerade durch B und E sei die gesuchte Senkrechte.



Lösung: Variante I
Wegen $\overline{CD}=\overline{BD}=\overline{BC}$ ist das Dreieck CBD gleichseitig.
Damit gilt $\sphericalangle CBD = \sphericalangle BDC = 60°$.
Ferner ist wegen $\overline{DE}$ $(=\overline{CD})$ $=\overline{BD}$ das Dreieck BED gleichschenklig, und es gilt $\sphericalangle DBE = \sphericalangle BED$ (als Basiswinkel).
Nach einem Satz über Außenwinkel eines Dreiecks folgt ferner
$\sphericalangle BDC = \sphericalangle DBE + \sphericalangle BED$.
Daraus erhält man $\sphericalangle DBE = 30°$.
Damit ist $\sphericalangle CBE = \sphericalangle CBD + \sphericalangle DBE = 60° + 30° = 90°$.
Also ist BE Senkrechte zu AB in B.
Variante II
Nach Konstruktion gilt $\overline{DC}=\overline{DE}=\overline{DB}$. Also liegt B auf dem Halbkreis über CE, und $\sphericalangle CBE$ ist nach der Umkehrung des Satzes von Thales ein rechter Winkel.

3. Beweisen Sie, daß die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen nicht durch 3 teilbar ist!

Lösung: Variante I

Die erste der beiden Zahlen sei a. Dann ist die andere $a+1$, und für die Summe s ihrer Quadrate gilt

$$s=a^2+(a+1)^2$$
$$=2a^2+2a+1=2a(a+1)+1.$$

Jede natürliche Zahl läßt bei Division durch 3 einen der Reste 0, 1 oder 2.

Fall 1: a ist durch 3 teilbar. Dann ist auch $2a(a+1)$ durch 3 teilbar, und s läßt bei Division durch 3 den Rest 1.

Fall 2: a läßt bei Division durch 3 den Rest 2. Dann ist $a+1$ durch 3 teilbar, damit auch $2a(a+1)$, und somit läßt s bei Division durch 3 den Rest 1.

Fall 3: a läßt bei Division durch 3 den Rest 1. Dann ist es mit einer natürlichen Zahl n in der Form $3n+1$ darstellbar. Man erhält mithin

$$s=2(3n+1)\cdot(3n+2)+1,$$
$$=2(9n^2+9n+2)+1,$$
$$=18n^2+18n+5,$$

und $18n^2+18n$ ist durch 3 teilbar, während 5 und somit auch s bei Division durch 3 den Rest 2 läßt.

Damit ist die Behauptung in jedem der möglichen Fälle bewiesen.

Variante II

Die zu betrachtende Summe ist $s=a^2+(a+1)^2$ mit natürlichem a (s. Variante I, Anfang). Jede natürliche Zahl ist modulo 3 einer der Zahlen 0, 1, 2 kongruent.

Ist $a\equiv 0(3)$, so ist $a+1\equiv 1(3)$,
$(a+1)^2\equiv 1(3)$, also $s\equiv 1(3)$.
Ist $a\equiv 1(3)$, so ist $a+1\equiv 2(3)$,
$(a+1)^2\equiv 1(3)$, also $s\equiv 2(3)$.
Ist $a\equiv 2(3)$, so ist $a+1\equiv 0(3)$,
$(a+1)^2\equiv 0(3)$, also $s\equiv 1(3)$.

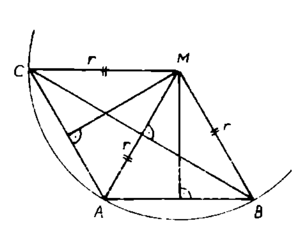
Variante III

Die zu betrachtende Summe ist
$s=a^2+(a+1)^2$. Jede natürliche Zahl a läßt sich in der Form $a=3n+r$ mit natürlichen Zahlen n, r schreiben, wobei $0\leqq r\leqq 2$ gilt. Durch Einsetzen erhält man:

$$s=(3n+r)^2+(3n+r)^2+2(3n+r)+1,$$
$$=18n^2+12nr+6n+2r^2+2r+1.$$

Da die ersten drei Summanden durch 3 teilbar sind, ist s nur dann durch 3 teilbar, wenn der Term $2r^2+2r+1$ dies ist. Setzt man 0, 1 bzw. 2 für r in diesen Term ein, so erhält man als Wert des Terms 1, 5 bzw. 13. Da dieser Wert in keinem der Fälle durch 3 teilbar ist, ist es auch s nicht.

4. Von einem Dreieck ABC mit $\sphericalangle CAB=\alpha=120°$ und $\sphericalangle BCA=\gamma=30°$ ist die Länge r des Umkreisradius bekannt.
Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt dieses Dreiecks!



Lösung: Nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck gilt $\sphericalangle ABC=\beta=30°$, und damit $\overline{AB}=\overline{AC}$. (1)

Ist M der Mittelpunkt des Umkreises von $\triangle ABC$, so gilt

$$\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}=r. \qquad (2)$$

Wegen (1) und (2) geht die Mittelsenkrechte von BC durch A und durch M, und sie ist in dem gleichschenkligen Dreieck ABC die Winkelhalbierende von $\sphericalangle CAB$. Also hat in dem gleichschenkligen Dreieck ABM ein Winkel die Größe 60°, folglich ist das Dreieck gleichseitig. Dasselbe gilt für $\triangle ACM$. Somit ist $CABM$ ein Rhombus der Seitenlänge r. Seine Diagonale BC steht auf der Diagonalen AM senkrecht und wird von ihr halbiert, also ist $\overline{BC}$ die doppelte Höhenlänge eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge r. Daher hat das Dreieck ABC den Umfang

$$\overline{CA}+\overline{AB}+\overline{BC}=r+r+2\frac{r}{2}\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})r.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist gleich dem halben Flächeninhalt des Rhombus $CABM$, also gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks ABM; er beträgt somit

$$\frac{r^2}{4}\sqrt{3}.$$

Olympiadeklasse 11/12

1. Man untersuche, ob es reelle Zahlen b, c, d so gibt, daß durch

$$a_n=\frac{n+b}{cn+d}\ (n=1, 2, 3, \ldots)$$

eine Zahlenfolge definiert ist, für die $a_1=\frac{1}{3}$, $a_2=\frac{3}{8}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}$ gilt. Wenn es derartige b, c, d gibt, so stelle man fest, ob sie durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind, und gebe sie in diesem Fall an.

2. Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x, für die durch $k=\frac{x}{x^2-5x+7}$ eine ganze Zahl k definiert ist.

3. Gegeben seien zwei von einem Punkt S ausgehende Strahlen s, t, die einen Winkel einschließen, für dessen Größe α die Ungleichung $0°<\alpha<180°$ gilt. Gegeben sei ferner ein Punkt P im Innern dieses Winkels. Ist g eine Gerade durch P, die s und t schneidet und nicht durch S geht, so bezeichne A bzw. B ihren Schnittpunkt mit s bzw. t.

Man beweise, daß es unter allen diesen Geraden g genau eine gibt, für die das Dreieck SAB einen möglichst kleinen Flächeninhalt hat. Man beschreibe eine Konstruktion dieser Geraden.

4. Thomas stellt Jürgen folgende Aufgabe:

(1) In meiner Klasse betätigen sich genau 15 Schüler im außerschulischen Sport, und zwar kommen nur die Sportarten Fußball, Schwimmen, Turnen bzw. Leichtathletik vor.

(2) Jede der genannten Sportarten wird von mindestens einem Schüler betrieben.

(3) Kein Schüler betreibt mehr als zwei dieser Sportarten.

(4) Jeder Schüler, der Schwimmen oder Leichtathletik betreibt, betätigt sich auch in einer zweiten Sportart.

(5) Genau 3 Schüler betreiben sowohl Fußball als auch Schwimmen, genau 2 Schüler sowohl Schwimmen als auch Leichtathletik; kein Schüler betreibt sowohl Fußball als auch Turnen.

(6) Die Anzahl der „Fußballer" ist größer als die Anzahl der „Schwimmer", diese wiederum ist größer als die Anzahl der „Turner" und diese größer als die Anzahl der „Leichtathleten".

(7) Die Anzahl der „Fußballer" ist gleich der Summe der Anzahl der „Turner" und der „Leichtathleten".

In (6) und (7) bezeichnet „Fußballer", „Schwimmer" usw. jeweils einen Schüler, der die betreffende Sportart (allein oder neben einer zweiten Sportart) betreibt.

Gib die Anzahl der „Fußballer", der „Schwimmer", der „Turner" und der „Leichtathleten" in meiner Klasse an!

Nach einiger Überlegung sagt Jürgen, daß diese Aufgabe nicht eindeutig lösbar sei.

Man ermittle alle Lösungen dieser Aufgabe.

Auf die Lösungen zu den Aufgaben 1 bis 4 der Olympiadeklasse 11/12 müssen wir aus Platzgründen verzichten.

Lösungen

XVII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen der Aufgaben der DDR-Olympiade (Fortsetzung)

2. Lösung entsprechend dem Vorschlag der Aufgabenkommission:

Angenommen, eine rationale Zahl x habe die verlangte Eigenschaft. Dann gibt es ganze zueinander teilerfremde Zahlen p, q mit $q>0$ und $x=\frac{p}{q}$ sowie eine natürliche Zahl n mit

$$\frac{p^2}{q^2}+\frac{p}{q}+6=n^2.$$

Daraus folgt $p^2=q(-p-6q+n^2q)$. Also ist p^2 durch q teilbar. Wäre q durch eine Primzahl teilbar, so müßte diese folglich in p^2 und damit in p enthalten sein, im Widerspruch zur

Teilerfremdheit von p und q. Daher ist $q=1$, und es gilt:

$p^2+p+6=n^2$.

$\left(p+\frac{1}{2}\right)^2=n^2-\frac{23}{4}$.

$$23=4n^2-(2p+1)^2$$
$$=(2n-2p-1)(2n+2p+1).$$

Damit ist die Primzahl 23 in zwei ganzzahlige Faktoren zerlegt, deren Summe eine nichtnegative Zahl, nämlich $4n$, ist. Folglich scheidet von den beiden einzigen ganzzahligen Zerlegungen $23=1\cdot 23=(-1)(-23)$ die zweite aus, und es gilt

entweder

$2n-2p-1=1$, $2n+2p+1=23$

oder

$2n-2p-1=23$, $2n+2p+1=1$.

Im ersten Fall folgt $n-p=1$, $n+p=11$ und daraus $p=5$, im zweiten folgt $n-p=12$, $n+p=0$ und daraus $p=-6$.

Folglich können nur die Zahlen $x=5$ und $x=-6$ die geforderten Eigenschaften haben. Tatsächlich ist sowohl $25+5+6=36$ als auch $36-6+6=36$ das Quadrat einer natürlichen Zahl.

3A. Es sei z eine im 4-adischen Zahlensystem mindestens dreistellige Zahl. Dann ist

$z=\sum_{i=0}^{n} a_i 4^i$ und $z'=\sum_{i=0}^{n} a_i^2$

mit $n\geqq 2$, $0\leqq a_i\leqq 3$ für $i=0, 1, \ldots, n$ und $a_n\neq 0$, woraus

$z-z'=(\sum_{i=1}^{n} a_i(4^i-a_i))-a_0(a_0-1)$

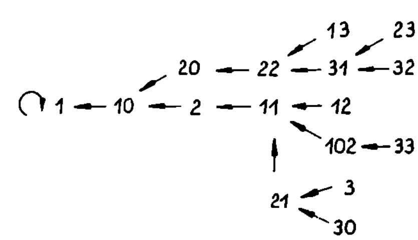
folgt. Da $a_0(a_0-1)\leqq 6$, $a_i(4^i-a_i)\geqq 0$ für $i=1, 2, \ldots, (n-1)$ und $a_n(4^n-a_n)\geqq 4^2-a_n\geqq 16-3=13$ ist, gilt $z-z'>0$.

Somit entsteht bei wiederholter Anwendung des genannten Verfahrens eine Zahlenfolge, deren Glieder, solange sie mindestens dreistellig bleiben, ständig kleiner werden. Somit muß schließlich eine ein- oder zweistellige Zahl auftreten. (Damit ist auch die Teilbehauptung a) bewiesen.)

Nun sind sämtliche ein- bzw. zweistellige Zahlen im 4-adischen System dargestellten Zahlen ($\neq 0$), wobei jeweils die Basis 4 aus Gründen der Vereinfachung fortgelassen sei:

1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33. (1)

Nun gilt, wenn in abgekürzter Schreibweise die Gewinnung von z' aus z jeweils durch $z\to z'$ dargestellt wird:



Hier treten alle Zahlen aus (1) auf, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

Bemerkungen: Diese Wahlaufgabe wurde von 72 der 93 Teilnehmer gewählt (etwa 75%). Im Schwierigkeitsgrad erscheint sie angemessen. Einige Fehlschlüsse traten gehäuft auf. Sie seien hier kurz genannt.

1. Falsche Induktion:

Sei $z_n=[a_na_{n-1}\ldots a_1a_0]_4$,

$z'_n=a_0^2+a_1^2+\ldots+a_n^2$ und $z_n>z'_n$.

Dann gilt

$z_{n+1}=[a_{n+1}a_n\ldots a_1a_0]_4>z'_{n+1}$

$=a_0^2+a_1^2+\ldots+a_{n+1}^2$.

Dabei wurde nicht beachtet, daß bei z_n $a_n\neq 0$ gelten muß, dies aber nicht bei z_{n+1} gelten muß.

2. Sei z eine Zahl im 4-adischen Zahlensystem mit der Stellenzahl größer als zwei. Dann wurde zunächst richtig $z>z'$ aber dann falsch $z'>z''\ldots$ geschlossen, woraus dann gefolgert wird, daß die 1 notwendigerweise erreicht wird.

3. Es wurde geschlußfolgert, daß nach endlich vielen Schritten eine zweistellige Zahl entsteht und nicht, wie es richtig wäre, eine „höchstens" zweistellige Zahl.

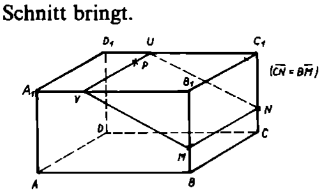
Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl	2	3	5	10	6	6	21	12	7

Dr. W. Harnau,
W.-Pieck-Universität Rostock

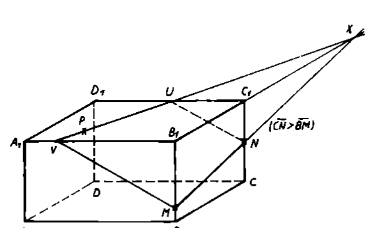
3B. Lösung entsprechend dem Vorschlag der Aufgabenkommission:

Für den 1. Fall ist insbesondere folgender grundlegender Satz der räumlichen Geometrie von Bedeutung: (*i*) *Liegen eine Gerade g und ein Punkt P in einer Ebene ε und ist h die Parallele zu g durch P, so liegt auch h in ε.* Aus der Voraussetzung $\overline{CN}=\overline{BM}$ folgt zunächst $MN\parallel B_1C_1$. Die Parallele h zu B_1C_1 durch P liegt nach (*i*) in der Ebene ε A_1, B_1, C_1, D_1) und auch in der Ebene ε M, N, P) wegen $MN\parallel h$; sie ist also die Schnittgerade dieser beiden Ebenen.

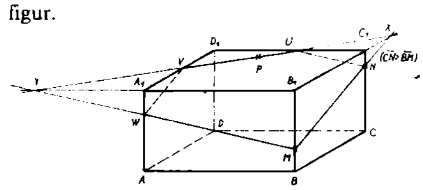
Da bei der Parallelprojektion – die ja der Kavalierperspektive zugrundeliegt – parallele Geraden wieder in solche übergehen, erhält man in der vorliegenden Kavaliersperspektive selbst die Schnittfigur $MNUV$ (siehe Bild 1), indem man die Parallele zu MN durch P mit den Strecken C_1D_1 und A_1B_1 zum Schnitt bringt.



Im 2. Fall ist $MN\nparallel B_1C_1$ wegen $\overline{CN}>\overline{BM}$; da diese Geraden in einer gemeinsamen Ebene liegen, schneiden sie sich in einem Punkt X. Die Gerade PX ist nun offensichtlich der Schnitt der Ebene ε (A_1, B_1, C_1, D_1) mit ε (M, N, P). Diese Schnittgerade kann in der Darstellung selbst konstruiert werden (siehe Bild 2); sie schneidet auf Grund der Lage von P die Kanten C_1D_1 und A_1B_1 in Punkten U und V. Damit ist $MNUV$ die gesuchte Schnittfigur.



Im 3. Fall kann zunächst in gleicher Weise verfahren werden. Die Gerade PX schneidet zwar auch hier die Kante C_1D_1 in einem Punkt U, aber nur die Verlängerung der Strecke A_1B_1 über A_1 hinaus in einem Punkt Y (siehe Bild 3); folglich schneidet PX die Kante A_1D_1 in einem Punkt V. Die Gerade YM schneidet schließlich die Kante AA_1 in einem Punkt W. Damit ist jetzt das Fünfeck $MNUVW$ die gesuchte Schnittfigur.



Bemerkungen: Seit mehreren Jahren wurde den Schülern wieder einmal eine Aufgabe aus der darstellenden Geometrie gestellt. Nur etwa 20% der Teilnehmer griffen zu dieser Wahlaufgabe. Die vorgelegten Lösungen zeigen, daß die Schwierigkeiten an mangelhaften Kenntnissen der elementaren Beziehungen (insbesondere der Lage) im Raum liegen. Trotz einer Reihe verschiedener und ideenreicher Ansätze und Lösungswege (auf die an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden kann) konnten deshalb nur relativ wenige der 8 Punkte erzielt werden (siehe Ergebnisspiegel). Es wurde u. a. die Meinung vertreten, daß im Falle 2 und 3 verschiedene Ebenen durch MN zueinander parallele Schnittgeraden auf der Ebene ε (A_1, B_1, C_1, D_1) erzeugen.

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl	3	5	2	1	1	4	1	3	1

Dr. E. Quaisser, Päd. Hochschule
„Karl Liebknecht" Potsdam

4. Sei s' die Gerade, die auf s in C senkrecht steht und t' die Gerade, die auf t in C senkrecht steht. s' zerlegt die Ebene ε, die von s und t aufgespannt wird, in die Halbebene $\varepsilon_s(1)$ und $\varepsilon_s(2)$, wobei $\varepsilon_s(1)$ die Halbebene ist, in der sich s befindet. Analog erhalten wir $\varepsilon_t(1)$ und $\varepsilon_t(2)$, wobei in $\varepsilon_t(1)$ t liege.

Behauptung: $L=\varepsilon_s(1)\cap\varepsilon_t(1)$ ist die gesuchte Menge.

Beweis: Ist P Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC mit $A\in s$ und $B\in t$, so ist P der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von CA und CB, also zweier Geraden, die sich in L schneiden, da die Mittelsenkrechten in $\varepsilon_s(1)$ bzw. $\varepsilon_t(1)$ liegen.

Liegt P in L, so liegen die Fußpunkte Q bzw. R der Lote von P auf die Geraden, die s und t enthalten, auf s bzw. t selbst und sind von C verschieden. Wir verlängern die Strecken $\overline{CQ}$ und $\overline{CR}$ um ihre eigene Länge über Q bzw. R

hinaus. Wir erhalten die Punkte A und B, die ebenfalls auf s bzw. t liegen und zusammen mit C ein Dreieck bilden. Nach Konstruktion gilt $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$, da $\overline{PQ}$ und $\overline{PR}$ auf den Mittelsenkrechten von CA bzw. CB liegen. Damit gehört P der gesuchten Menge an.

Bemerkungen: 1. Viele Schüler betrachteten äquivalente Fragestellungen: a) Gesucht ist die Menge aller Punkte P, von denen man auf s und t das Lot fällen kann.
b) Gesucht ist die Menge aller Kreismittelpunkte P, so daß der Kreis um P durch C geht und s und t noch einmal schneidet.
2. 60 bis 70% der Schüler haben nur die Menge L konstruiert, aber nicht gezeigt, daß alle in L enthaltenen Punkte auch tatsächlich den geforderten Bedingungen genügen. Dies liegt evtl. daran, daß den Schülern die Begriffe notwendig und hinreichend im Zusammenhang mit geometrischen Ortsaufgaben nicht genügend vertraut sind.
3. Sehr viele Schüler hatten Schwierigkeiten bei der Formulierung der Lagebeziehungen. Der logisch klare Aufbau der Lösung war oft nicht gegeben. Es wurden verschwommene geometrische Begriffsbildungen benutzt (z. B. bei den Begriffen Strecke, Gerade, Strahl).
4. Die Begriffe Vereinigung und Durchschnitt wurden von einigen Schülern verwechselt.
5. Die Aufgabe war angemessen. Nur drei Schüler erkannten die Problematik nicht.

Punkte	nicht bearbeitet	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl	3	9	5	20	23	8	11	14

Dr. rer. nat. W. Moldenhauer, W.-Pieck-Universität Rostock

Fortsetzung
(Aufgaben 5 und 6 s. Heft 1/79)

Eine Aufgabe – verschiedene Lösungen

Heute stellen wir wieder Lösungsvarianten zu Wettbewerbsaufgaben vor, die bei uns eingegangen sind. Sie mögen allen Teilnehmern am *alpha*-Wettbewerb Anregungen zum Lösen von Aufgaben geben.
In Heft 5/1977 veröffentlichten wir folgende Aufgabe:
Ma 6 ▪ 1660 Zu ermitteln sind alle zweistelligen natürlichen Zahlen mit der Quersumme 10, die folgende Bedingungen erfüllen: Vergrößert man die der vorderen Ziffer entsprechende Zahl um 4 und vermindert man die der hinteren Ziffer entsprechende Zahl um 2, dann erhält man das Dreifache der Ausgangszahl. Wie viele Zahlen mit dieser Eigenschaft gibt es?
In Heft 1/1978 veröffentlichten wir dazu eine Lösung:
Die zu ermittelnden zweistelligen natürlichen Zahlen lassen sich durch $10a+b$ darstellen; dabei gilt die Einschränkung $1\leqq a\leqq 5$ und $2\leqq b\leqq 9$. Alle möglichen Fälle sind in der folgenden Tabelle erfaßt:

a	b	$a+4$	$b-2$
1	9	5	7
2	8	6	6
3	7	7	5
4	6	8	4
5	5	9	3

Nur für $a=1$ und $b=9$ existiert eine Lösung, und es gilt $19\cdot 3=57$.

Wir stellen nun die Lösung von *Martin Bismark* aus Dresden, Schüler einer 6. Klasse der Dr.-Richard-Sorge-OS, vor. Martin löste diese Aufgabe wie folgt:
Die gesuchte zweistellige natürliche Zahl sei $x=10a+b$. Die der vorderen Ziffer entsprechende Zahl wird genau dann um 4 vergrößert, wenn man zu x noch 40 addiert. Die der hinteren Ziffer entsprechende Zahl wird genau dann um 2 vermindert, wenn man von x noch 2 subtrahiert. Daraus folgt
$x+40-2=3\cdot x$,
$x+38=3x$,
$2x=38$,
$x=19$.
Die zu ermittelnde Zahl heißt 19, und es gilt $3\cdot 19=57$.

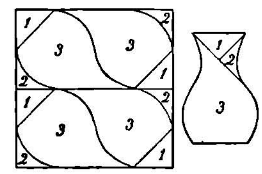
Wir stellen nun die Lösung von *Birgit Wittwer* aus Dresden, Schülerin der Klasse 6c der 108. Oberschule, vor. Birgit löste diese Aufgabe wie folgt:
Die zweistellige natürliche Zahl läßt sich durch $10a+b$ darstellen; nun gilt
$3\cdot(10a+b)=10\cdot(a+4)+(b-2)$,
$30a+3b=10a+40+b-2$,
$20a+2b=38$,
$10a+b=19$.
Nur $a=1$ und $b=9$ erfüllen wegen $1\leqq a\leqq 9$ und $0\leqq b\leqq 9$ diese Gleichung. Die gesuchte Zahl lautet 19.

Wir stellen nun die Lösung von *Frank Mangold* aus Unterschönau, Schüler der Kl. 6 der POS „Erich Weinert", vor. Frank löste diese Aufgabe wie folgt:
Die gesuchte Zahl läßt sich darstellen durch $z_1=10a+b$. Ferner soll gelten
$z_2=10\cdot(a+4)+(b-2)=10a+b+38$.
Weiterhin gilt
$3\cdot z_1=z_2$, also
$3\cdot(10a+b)=10a+b+38$,
$30a+3b=10a+b+38$,
$20a+2b=38$,
$10a+b=19$. (1)
Aus der Bedingung $a+b=10$ für die Quersumme folgt
$b=10-a$. (2)
Setzen wir (2) in (1) ein, so erhalten wir
$10a+(10-a)=19$,
$9a=9$,
$a=1$.
Daraus folgt weiter $b=10-a=10-9=9$.
Die gesuchte Zahl heißt 19.

J. Lehmann/Th. Scholl

Lösungen zu alpha-heiter 6/78:

Seltsame Vasen



Freudiges Wiedersehen

Die Entfernung, die der spazierengehende Freund in einer Minute zurücklegt, sei eine Einheit. Dann entspricht die Entfernung, die der Fahrgast zurücklegt, 2 Einheiten. Die Entfernung, die die Straßenbahn in einer Minute zurücklegt, entspricht 8 Einheiten. Als der Fahrgast aussteigt, besteht eine Entfernung von 8 + 1 Einheiten. Die Entfernung verkürzt sich dann je Minute um 2 – 1 = 1 Einheit. Folglich holt er den Freund in 9 Minuten ein.

Verschwundener Wein

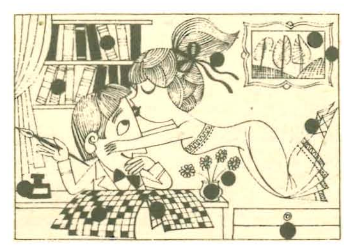
Die Frau setzte in jede Ecke vier Flaschen und 1 Flasche in die Mitte jeder Seite. Jetzt waren nur noch 20 Flaschen da. Die Frau hatte also vier Flaschen getrunken.

4	1	4
1		1
4	1	4

Griechischer Denksport

$90=30+60$;
$60+90=30+30+30+30+30$;
$120=90+30$

Der Kuß der Muse



Ein schwieriges Problem

(1) $849+753=1602$;
(2) $1089-432=657$;
(3) $7039\cdot 4=28156$;
(4) $27504:9168=3$;
(5) $\frac{50}{4\cdot 7-8}=\frac{9+1}{\sqrt[3]{2^6}}$

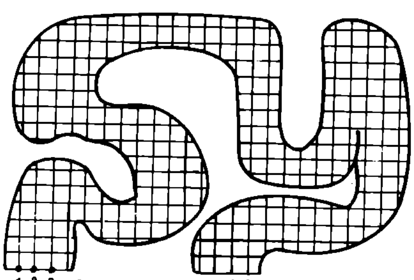
Ein Rätselredakteur in Aktion

1. Johann Widmann, 2. Außenwinkel, 3. Katheten, 4. Omega, 5. Binom, 6. Summe, 7. Tangente, 8. Euler, 9. Inkreis, 10. natürlich, 11. Ebene, 12. Rhombus.
Der Name des Mathematikers ist Jakob Steiner.

Das „mathematische Autorennen“

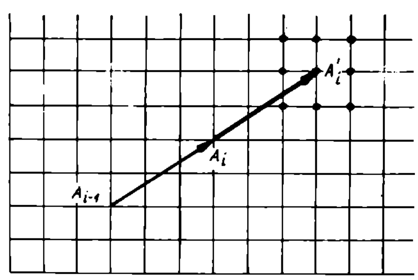
Ich möchte den Lesern der *alpha* ein unter ungarischen Schülern sehr beliebtes Spiel für 2 bis 3 Personen vorstellen:
Das *mathematische Autorennen.* (Ein ähnliches Spiel war Gegenstand der Aufgabe 1 für die 9. Klasse in der ersten Stufe der XVI. Olympiade *Junger Mathematiker* der DDR.)
Vor Beginn des Spiels legen die Spieler die *Rennbahn* auf quadratisch kariertem Papier fest (Bild 1). Die Schwierigkeit dieser Bahn kann der Erfahrung der Spieler angepaßt werden. Durch Auslosen werden die Startplätze bestimmt. Das Rennen erfolgt in einzelnen *Zügen* von *Gitterpunkt* zu *Gitterpunkt.* Sieger ist, wer die Ziellinie unter Beachtung der Spielregeln als erster erreicht.

Bild 1



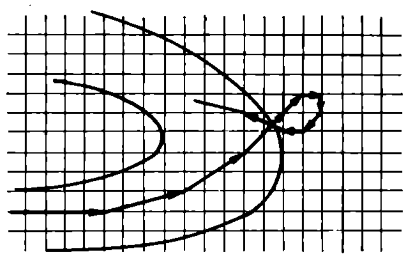
Spielregeln:
(1) Die Spieler *fahren* abwechselnd.
(2) Der erste *Zug* führt vom Startpunkt A_0 zu einem unmittelbar benachbarten Gitterpunkt.
(3) Wenn bereits ein Zug $A_{i-1} \to A_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ausgeführt wurde, so wählt man den nächsten Zug $A_i \to A_{i+1}$ nach folgender Vorschrift aus: (Bild 2)

Bild 2



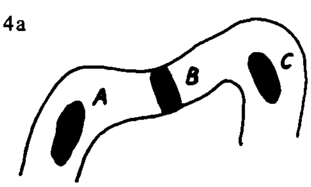
a) Man verlängert die Strecke $\overline{A_{i-1}A_i}$ über A_i hinaus um sich selbst und erhält einen Punkt A'_i.
b) Man wählt entweder A'_i oder einen der acht Gitterpunkte, die A'_i unmittelbar benachbart sind, als Punkt A_{i+1}.
(4) Hat ein Spieler unter Beachtung der Regel (3) angehalten $(A_{i+1} = A_i)$, so fährt er wieder wie beim Start neu an (Regel (2)).
(5) Zwei Spieler dürfen nie gleichzeitig auf demselben Punkt stehen. Es ist aber gestattet, auf der Spur eines Mitspielers zu fahren.
(6) Wenn ein Spieler aus einer Kurve *herausgetragen* wurde, so muß er *umlenken* und in unmittelbarer Nähe der Stelle, an der er die *Leitplanke* durchfahren hat, auf die Rennbahn zurückkehren (siehe Bild 3).

Bild 3



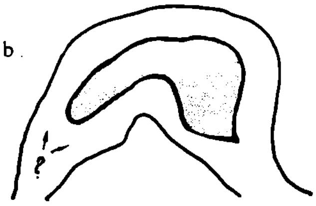
Nach einigen *Probefahrten* wird man merken, daß es gar nicht so leicht ist, immer *die Kurve zu kriegen* und auf der Bahn zu bleiben. Wie im Straßenverkehr ist es also notwendig, vorausschauend zu fahren.
Man kann das Spiel durch Eintragen von *Ölflecken* auf der Fahrbahn (siehe Bild 4a) erschweren. Die dort befindlichen Gitterpunkte dürfen nicht Endpunkt eines Zuges sein.

Bild 4a



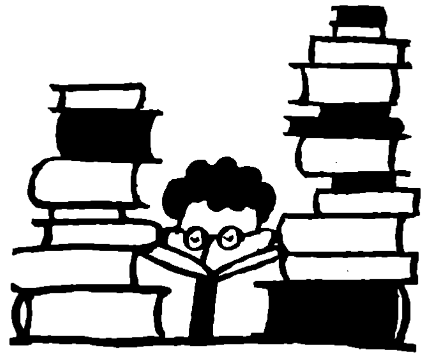
Um die Schwierigkeit des Spiels weiter zu erhöhen, kann man auch Verzweigungen der Rennbahn vorsehen (siehe Bild 4b).

Bild 4b



Es ist wichtig, die Rennbahn erst unmittelbar vor Spielbeginn festzulegen, da ja sonst die Spieler ihre Route vorplanen könnten.
Es gilt aucn als unfair, einen Mitspieler aus seiner Spur herauszudrängen. Ich wünsche viel Vergnügen bei diesem Spiel!

László Schmidt, Budapest



Nikiforowski, Wiktor A., und Leon Freiman

Wegbereiter der neuen Mathematik

Übersetzung aus dem Russischen
Bestell-Nr. 546 411 6
VEB Fachbuchverlag Leipzig 1978
Etwa 230 Seiten mit 37 Bildern,
12,5 cm × 20 cm, Broschur
etwa 5,50 M

In diesem populärwissenschaftlichen Buch wird ein bedeutender Abschnitt aus der Geschichte der Mathematik beschrieben: die erste Hälfte des 17. Jahrhunderts, in der die Grundlage zur analytischen Geometrie und zur Infinitesimalrechnung gelegt wurden. Vier große Männer stehen im Mittelpunkt des Geschehens: *Descartes, Fermat, Torricelli, de Roberval.* Ihre wissenschaftlichen Ergebnisse werden im Zusammenhang mit den gesellschaftlichen Verhältnissen jener Zeit allgemeinverständlich dargestellt. *Leserkreis:* alle an populärwissenschaftlichen Darstellungen Interessierten, Oberschüler, Studenten an Fachschulen, Lehrer, Mathematiker.

M. Rehm

Strecke, Kreis, Zylinder

Mein kleines Lexikon
Kinderbuchverlag Berlin
80 Seiten, zahlreiche vierfarb. Illustr.
Preis 5,80 M
Bestell-Nr. 629 770 0

Das Buch bietet die Möglichkeit, sich über elementare geometrische Begriffe zu informieren, bereits erworbenes Wissen wieder aufzufrischen, zu vertiefen und zu erweitern und sich auch mit geometrischen Zusammenhängen vertraut zu machen.
Viele Stichwörter des Buches greifen Schönheit und Spaß mathematischer Sachverhalte auf, immer wird der Leser zur Selbständigkeit angeregt, zum Basteln und zum Knobeln.

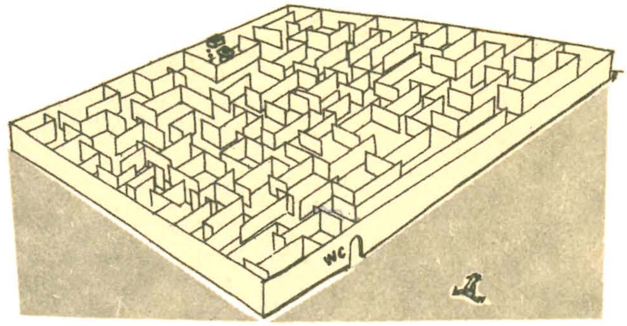
G. Fanghänel/H. Vockenberg

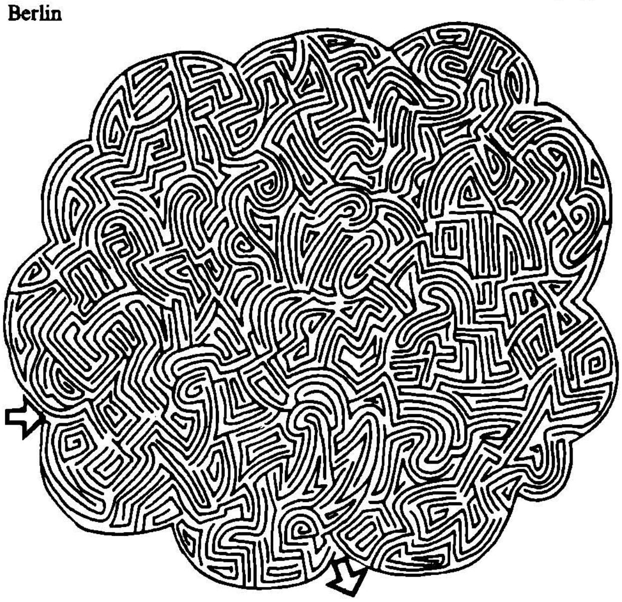
Arbeiten mit Mengen

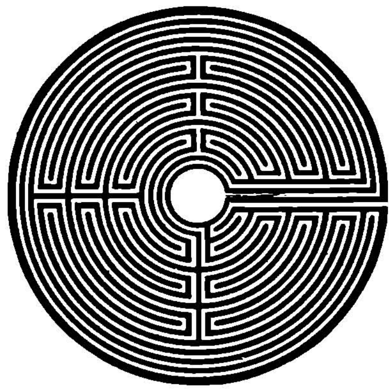
Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin
152 Seiten, zahlr. Abb. Preis 3,50 M
Geeignet für Arbeitsgemeinschaften
der Klassen 9 und 10
Bestell-Nr. 707 053 2

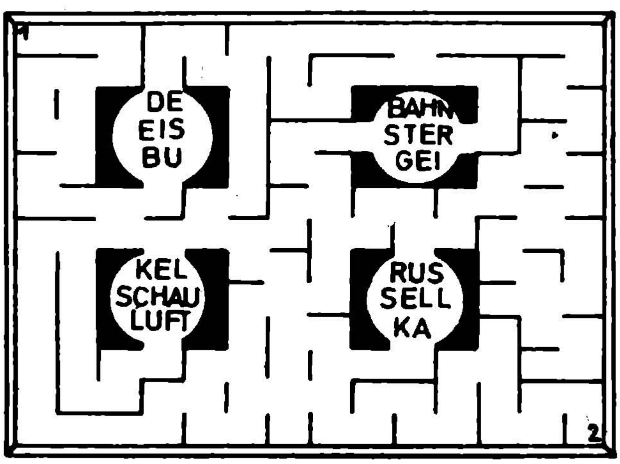
Labyrinthe

Gesucht und gefunden in Tschajan, Moskau; „Füles“, Budapest; Math. i. School, London; „Jesch“, Beograd; „NBI“, „Eulenspiegel“ Berlin









In der Stadt ist ein kleiner Jahrmarkt aufgebaut worden. Roland will den Platz von Anfang bis Ende (von 1 nach 2) durchlaufen und dabei alle Stände und Kinderbelustigungen besuchen, ohne einen Weg zweimal zu gehen oder einen zu kreuzen. Wenn ihr die Silben in den Kreisen ordnet, wißt ihr, was es auf dem Markt zu sehen gibt.