Mathematische Schüler-
zeitschrift

alpha

1

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967
Preis 0,50

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967
Heft 1

Anschrift der Redaktion:
Redaktion alpha · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541
Postscheckkonto: Berlin 132626

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 MDN, im Abonnement halbjährlich (3 Hefte) 1,50 MDN
Zu beziehen durch die Deutsche Post und den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: Deutsche Bücherei, Leipzig, Archiv (S. 15); J. Lehmann Leipzig (S. 3, 4, 5); Vignetten: H.-J. Jordan (Leipzig)

Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG, 701 Leipzig

Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik

Redaktionsschluß: 13. Dezember 1966

Inhalt

( )* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angeführten Klassenstufe geeignet

Liebe Schülerinnen und Schüler!

Vor Euch liegt die erste Ausgabe einer neuen Zeitschrift. Schon beim Durchblättern könnt Ihr feststellen, daß Euch diese mathematische Schülerzeitschrift helfen wird, Eure Leistungen im Mathematikunterricht zu verbessern. Sie gibt Euch interessante Anregungen für mathematische Knobeleien in Eurer Freizeit.

Die Zeitschrift wird Euch mit bedeutsamen Ergebnissen aus der Geschichte der Mathematik bekanntmachen, wichtige Einsichten über die Anwendung der Mathematik in der gesellschaftlichen Praxis vermitteln und regelmäßig über die Mathematik-Olympiaden der DDR und der anderen sozialistischen Länder berichten.

Die großen Erfolge der Werktätigen unserer Republik haben die Herausgabe der Zeitschrift ermöglicht.

Die Zeitschrift dient der Förderung der mathematisch Interessierten unter Euch, liebe Mädel und Jungen, und der Entwicklung eines breiten Interesses für die bedeutende und schöne Wissenschaft Mathematik. Damit wird ein großes Bedürfnis vieler Schülerinnen und Schüler, aber auch der Lehrer erfüllt, die schon lange den Wunsch nach einer eigenen mathematischen Schülerzeitschrift gehegt haben.

Möge die Zeitschrift „alpha" dem großen und schönen Ziel dienen, Euch zu hohen mathematischen Leistungen zu befähigen und dafür zu begeistern, Euer Wissen und Können mit ganzem Herzen für die Sache des Sozialismus einzusetzen.

In diesem Sinne wünsche ich Eurer neuen Zeitschrift viel Erfolg.

M. Honecker

(Margot Honecker)
Minister für Volksbildung

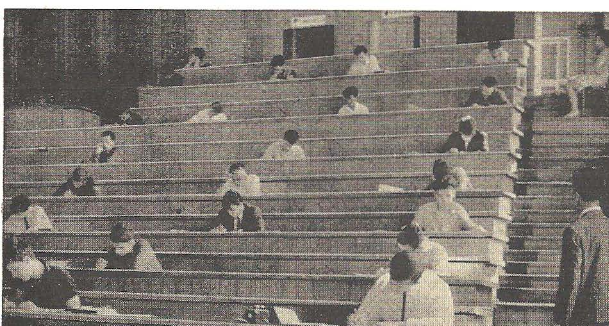
Heiße Tage in Sofia

Bericht über die VIII. Internationale Mathematikolympiade 1966

Am 1. Juli wurden Prof. Dr. habil. H.-J. Weinert, Delegationsleiter der deutschen Mannschaft, und ich als Pressebeauftragter des Verlags Volk und Wissen von Mitgliedern der Mathematischen Gesellschaft der Volksrepublik Bulgarien auf dem Flughafen in Sofia herzlich begrüßt.
Am gleichen Abend — die Mannschaftsleiter aller neun beteiligten Länder waren eingetroffen — konstituierte sich die Jury. Für ihre Mitglieder begann sofort die Arbeit. Aus 25 Aufgaben — die von den Mathematischen Gesellschaften der Länder eingereicht worden waren — mußten sechs für die beiden Klausuren ausgewählt und bis zu Beginn des Wettbewerbs in die jeweilige Landessprache übersetzt werden. Bestimmend für ihren Inhalt war ein hohes Niveau, um den jungen Talenten die Möglichkeit zu geben, ihre Kenntnisse zu zeigen. Sehr gewissenhaft mußte auch geprüft werden, ob die Aufgaben den Lehrplananforderungen des jeweiligen Landes entsprachen, um keine Mannschaft zu überfordern.
Vom 2. bis 4. Juli trafen die Mannschaften, bestehend aus je acht Schülern und einem Begleiter, in Sofia ein. Sie hatten nun noch zwei bis drei Tage Zeit, sich mit der neuen Umgebung vertraut zu machen, sich auf die bevorstehenden Klausuren einzustellen, landestypische Speisen zu versuchen. Gleich am ersten Morgen nach der Ankunft gab es zum Beispiel Tarator, kalt serviert, bestehend aus saurer Milch, Nüssen, Schnittlauch, Knoblauch und grünen Gurken. Einige Teilnehmer schüttelten den Kopf, auf die flache Metallschale deutend. Prompt brachte eines der stets freundlichen und flinken Mädchen noch eine Portion, denn in Bulgarien bedeutet Kopfschütteln: Ja, Kopfnicken dagegen: Nein. Lächelnd klärte die Dolmetscherin das Mißverständnis. Die Deutschen sind Kartoffel- und Butteresser. Die Bulgaren bevorzugen Reis und Mehlspeisen, richten mit Öl an. Ihre Art zu würzen, unterscheidet sich oft erheblich von der unseren. Am tapfersten und vorsichtigsten mußten die mongolischen Freunde sein, deren heimatlicher Speisezettel ganz anders aussieht als der bulgarische. Alle Wünsche wurden sofort respektiert, um zu sichern, daß jeder Schüler wohlauf und ausgeruht in die Klausuren gehen konnte.
Was trieben die Jugendlichen vor dem Wettbewerbszyklus? Mancher holte sein Steckschach, seine Rommé- oder Bridgekarten aus dem Gepäck. Partner fanden sich schnell. Andere lagen auf ihrem Bett und beschäftigten sich mit mathematischen Problemen, lasen Romane oder Zeitschriften. Die Ungarn spielten Fußball. Mitglieder der Delegationen aus der CSSR und der DDR waren bei 18° Wasser- und 30° Lufttemperatur im nahen Bad zu finden. Einer Einladung zu einer Stadtrundfahrt folgten die meisten.
Treue Begleiter und Helfer in allen Situationen waren die bulgarischen Dolmetscherinnen. Unsere Mannschaft wurde von Tanja Stojanova, die die deutsche Schule in Sofia besucht, betreut. In allen Fächern — außer Mathematik und Bulgarisch — wird dort im Unterricht deutsch gesprochen. Tanja unterhielt sich so perfekt, so akzentfrei, daß wir sie für ein deutsches Mädchen hielten. Kann es ein besseres Kompliment für Fleiß und Ausdauer beim Erlernen einer Fremdsprache geben? Im Gespräch erfuhren wir, daß sie in der letzten Schul- und Stadtolympiade jeweils die volle Punktzahl erreicht

hatte. Als „Fachkollegin“ wurde sie respektvoll und begeistert in das Kollektiv der deutschen Mannschaft aufgenommen. Sie verriet uns, daß sie Ingenieur werden wolle. Ihr Ziel sei, im 11. Schuljahr bis zur Landesolympiade vorzudringen.
Am 5. Juli wurde der Wettbewerb im großen Hörsaal der Kliment-Ochridski-Universität Sofia von Prof. Dr. Alipi Mathéev, dem „Vater der VIII. IMO“, eröffnet. Seine Begrüßungsansprache war kurz. Aus langjähriger Erfahrung wußte er um die Unruhe und Ungeduld der Schüler. Dann verteilten die Delegationsleiter die Umschläge, welche drei Aufgaben enthielten. Vier Stunden Zeit stand für die Lösung dieser Aufgaben zur Verfügung. Die meisten Teilnehmer atmeten nach harter Arbeit auf. Sie fanden die gestellten Probleme nicht so schwer wie die des vergangenen Jahres. Auch nach der zweiten Klausur änderten sie diese Meinung nicht.
Ich habe einige Schüler gefragt, wie ihnen während des Wettbewerbs zumute sei, denn der große Hörsaal (siehe Foto) biete doch eine andere Arbeitsatmosphäre als Schule, Arbeitsgemeinschaft oder Elternhaus. So lauteten einige Antworten: „Mich stört das überhaupt nicht.“ — „Ich halte mir zunächst die Ohren zu, um mich besser konzentrieren zu können.“ — „Ich benötige einige Zeit, mich einzuleben, dann geht's ganz gut.“ — „Ich brauche die Geräuschkulisse: Kritzeln der Federhalter, Rascheln des Papiers, Klopfen der Zeichendreiecke.“
Für Mannschaftsleiter und Begleiter begann sofort nach der ersten Klausur wieder harte Arbeit, die Etappe der Korrektur. Sie mußten sich in jede der sechs gestellten Aufgaben und die von den Schülern meist sehr unterschiedlich gebotenen Lösungswege einleben. Sie wägten ab, analysierten für die künftige Arbeit, fanden Bestätigung für richtige Vorbereitung (oder auch nicht), waren stolz auf elegante Lösungen ihrer Zöglinge, ärgerlich über Faselfehler, erwartungsvoll, ja neugierig, wie es wohl bei den anderen Mannschaften aussehen werde. Die Spannung löste sich erst dann, als mit den Koordinatoren alle Aufgaben noch einmal durchgesprochen waren. Bulgarische Wissenschaftler, jeder auf eine Aufgabe spezialisiert, überprüften die Aufgaben jedes Schülers, bestätigten die von den Delegationsleitern vorgeschlagenen Punkte oder nahmen in engem Einvernehmen noch Änderungen vor. Sie hatten ja einen Gesamtüberblick über die Leistungen der 72 Schüler, speziell für „ihre“ Aufgabe. Nach dreitägiger angespannter Korrektur und einer abschließenden fünfstündigen Aussprache legte die Jury 39 Preisträger fest (siehe Tabelle).

Wettbewerbsatmosphäre



Tirnowo: Mitglieder der Jury bei heiterem Wortwechsel

Für Delegationsleiter, Betreuer und Mannschaften begann nun eine unvergeßliche Rundfahrt durch die Volksrepublik Bulgarien. Gestartet wurde am Studentenkomplex, der Unterkunft der Mannschaften, dem Wohnheim hunderter bulgarischer und ausländischer Studenten. Originell ist sein Name: „Kilometerstein 4". Vier Kilometer vom Stadtzentrum Sofias entfernt, genau an dem genannten Kilometerstein, wurde der erste Spatenstich zu diesem modernen Wohn- und Studienheim getan. Kurz vor der Abfahrt war noch große Unruhe in den Mannschaften. Geschenke, Aufgaben, Städtebiographien, mathematische Literatur, Abzeichen wechselten ihre Besitzer. Die internationale Buchhandlung wurde förmlich gestürmt, als die ersten mit wertvoller

	I. IMO 1959				II. IMO 1960				III. IMO 1961			
Preise	1.	2.	3.	Dipl.	1.	2.	3.	Dipl.	1.	2.	3.	Dipl.
VR Bulgarien	—	—	—	1	—	—	1	2	—	—	—	1
ČSSR	1	—	—	4	1	1	2	2	—	—	1	3
DDR	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1	3
SFR Jugoslawien	nicht teilgenommen											
Mongolische VR	nicht teilgenommen											
VR Polen	—	—	—	1	nicht teilgenommen				1	—	—	6
SR Rumänien	1	2	2	1	1	1	1	1	—	1	1	4
UdSSR	—	—	1	2	nicht teilgenommen							
Ungarische VR	1	1	2	1	2	2	—	1	2	3	1	2

Freundschaftlicher Adressenaustausch

Beim Spaziergang am Schwarzen Meer

mathematischer Literatur ankamen. Jeder war heimisch geworden in Sofia. Die tiefsten Eindrücke hinterließen bei den Teilnehmern das Georgi-Dimitroff-Mausoleum, der Pionierpalast und die Gedächtniskirche „Alexander Newski".
Jeder freute sich, durch die Rundfahrt ein weiteres Stück Bulgarien kennenzulernen. Im Autobus war dann auch die beste Gelegenheit zum Gedankenaustausch. Sprachschwierigkeiten gab es kaum. Fast jeder Teilnehmer beherrschte neben seiner Muttersprache noch eine oder zwei Fremdsprachen. Alle Schüler der sowjetischen Mannschaft zum Beispiel sprachen Englisch (und zum Teil Deutsch), alle Rumänen perfekt Französisch, drei auch perfekt Deutsch. Unsere Schüler dagegen hatten Schwierigkeiten,

[1]) An der VII. IMO nahm auch die Republik Finnland teil. 1 Schüler erhielt 1 Diplom.

IV. IMO 1962			V. IMO 1963			VI. IMO 1964			VII. IMO 1965[1])				VIII. IMO 1966			
1.	2.	3.	1.	2.	3.	1.	2.	3.	1.	2.	3.	Dipl.	1.	2.	3.	Sond. preis
—	1	2	—	—	3	—	—	3	—	—	1	—	—	1	3	—
—	1	3	1	—	1	—	2	2	—	1	3	—	—	1	2	—
—	1	—	—	—	3	—	1	2	—	2	3	—	3	3	—	—
nicht teilgen.			1	2	1	—	1	1	—	—	2	—	—	2	1	—
nicht teilgenommen						—	—	1	—	—	—	1	—	—	—	1
—	1	3	—	—	2	1	1	3	—	1	3	1	1	4	1	—
—	3	3	1	1	3	—	2	3	—	4	3	1	1	1	2	—
2	2	2	4	3	1	3	1	3	5	2	—	—	5	1	1	—
2	3	2	—	5	3	3	1	1	3	2	2	2	3	2	1	—

ihre Russisch- und Englischkenntnisse so anzuwenden, daß ein einigermaßen flüssiges Gespräch zustande kam.
Viel zu schnell flogen an uns vorüber: das malerische Tirnovo, Gebirgszüge mit bizarren Bergrücken, bewaldete Hügel, bald abgelöst von fruchtbaren Ebenen. In Warna wurde Station gemacht, ein kühles Bad am „Goldenen Strand" genommen. Weiter ging es über Nessebar und Burgas zu der Stadt auf sieben Hügeln, Plovdiv. Etwas zerschlagen, doch reich an Erlebnissen und begeistert von zahlreichen Freundschaftstreffen, kehrten wir nach einer herrlichen Fahrt durch das Rila-Gebirge nach Sofia zurück. Unsere bulgarischen Freunde gaben mir noch einige Zahlen für mein Tagebuch, die ich Euch, liebe Leser, nicht vorenthalten möchte:

- Bulgarien steht in der Pro-Kopf-Erzeugung von Tomaten, Tabak, Sonnenblumensamen, Weintrauben und Äpfeln an einer der ersten Stellen in der Welt.
- Nahezu ein Fünftel der gesamten Anbaufläche des Landes wird künstlich berieselt. (1939 war es nicht einmal ein Dreißigstel.)
- Jährlich werden 300000 Tonnen Frischgemüse, 200000 Tonnen Tomaten, 292000 Tonnen frisches Obst, 70000 Tonnen Tabak ausgeführt.
- Das Verhältnis zwischen landwirtschaftlicher und industrieller Produktion beläuft sich auf 22 : 78.
- Aus 300000 Rosenblättern gewinnt man 1 g Rosenöl.

Die zahlreichen Großbaustellen zeigten uns den raschen Aufbau des Landes. Mit Stolz führten uns bulgarische Komsomolzen durch das mächtige Eisenhüttenkombinat Kremi Kovzi. Nicht unerwähnt lassen möchte ich die tiefen Eindrücke, die die Darstellung der bewegten Geschichte dieses Landes auf uns alle machte, sei es durch Besuch zahlreicher Denkmäler, Museen oder durch das leidenschaftliche Wort unserer bulgarischen Reisebegleiter. Politische, fachliche und persönliche Probleme waren stets eng miteinander verflochten und zeigten den Gleichklang der Meinungen der Delegationsleiter, Betreuer, Schüler und der uns bewirtenden Gastgeber. 1200 km lang war unsere Reise der Freundschaft.
Die deutsche Mannschaft hat bei der VIII. IMO gut abgeschnitten. Das ist der Erfolg jahrelanger konsequenter Arbeit, aber auch Verpflichtung, das Erreichte weiter auszubauen.

J. Lehmann

DDR-Mannschaft – VIII. IMO 1966

Peter Enskonatus, Berlin
1. Preis

Walter Liepe, Berlin
1. Preis

Josef Richardt, Deuna (Bezirk Erfurt)
1. Preis

Stefan Heinrich, Berlin
2. Preis

Reinhard Höppner, Prösen (Bezirk Cottbus)
2. Preis

Gert Siebert, Berlin
2. Preis

Konrad Schmüdgen, Gräfendorf (Bezirk Leipzig)

Ludwig Staiger, Jena (Bezirk Erfurt)

Wir lösen eine Aufgabe der VIII. IMO

R. Höppner und Dr. Bausch unmittelbar vor Beginn der ersten Klausur. „Ist die Formulierung der Aufgabe klar?"

Eine der sechs auf der Internationalen Mathematik-Olympiade 1966 in Sofia gestellten Aufgaben lautete:

Auf den Seiten AB, BC, CA des Dreiecks $\triangle$ ABC sei jeweils ein Punkt M, K bzw. L beliebig, aber verschieden von den Eckpunkten angenommen. Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt wenigstens eines der Dreiecke $\triangle$ LAM, $\triangle$ MBK, $\triangle$ KCL nicht größer als ein Viertel des Flächeninhaltes F des Dreiecks $\triangle$ ABC ist.

Die Aufgabe war von der VR Polen vorgeschlagen worden. Die richtige Lösung wurde mit 8 Punkten bewertet (von den insgesamt erreichbaren 40). Die 72 Teilnehmer der Olympiade erreichten im Durchschnitt 6,99 Punkte, die Durchschnittspunktzahl unserer Delegation betrug 7,38.

Die oben formulierte Aufgabe war sicher nicht die schwierigste der VIII. IMO. Wir wollen sie etwas eingehender betrachten, weil gerade sie sehr verschiedene Lösungsmöglichkeiten zuläßt und auch mit sehr elementaren Mitteln gelöst werden kann, so daß sie ganz gewiß auch von Schülern der niederen Klassenstufen zu bewältigen ist. Voraussetzung ist, daß man die gebräuchlichsten Formeln für den Flächeninhalt eines Dreiecks beherrscht und mit Ungleichungen umzugehen weiß. Wir haben für die Aufgabe vier verschiedene Beweismöglichkeiten ausgewählt. Der erste und der dritte Beweis sind sicherlich die einfachsten, wobei besonders der erste mit ganz elementaren Mitteln auskommt. Der vierte Beweis ist etwas umständlich, aber trotzdem originell, da er zu einem Extremwertproblem hinführt. Zusätzlich zu dem bereits genannten Stoff (Ungleichungen, Flächeninhalt des Dreiecks) wird für die einzelnen Beweise folgendes benötigt: Strahlensatz (erster Beweis), binomische Formel zweiten Grades (zweiter Beweis), geometrisches und arithmetisches Mittel (dritter Beweis), Extremwertbestimmung (vierter Beweis).

Erste Beweismöglichkeit: A′, B′ und C′ seien die Mitten der Seiten BC, CA und AB des Dreiecks $\triangle$ ABC.

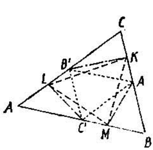


Abb. 1

Sind die Punkte K, L, M mit den Punkten A′, B′, C′ identisch, so ist die Behauptung der Aufgabe erfüllt, denn der Flächeninhalt jedes der Dreiecke $\triangle$ LAM, $\triangle$ MBK und $\triangle$ KCL beträgt dann $^1/_4$ F. Der Fall, daß der Flächeninhalt jedes der Dreiecke größer als $^1/_4$ F ist, kann, wenn überhaupt, offensichtlich nur dann eintreten, wenn $K \neq A'$, $L \neq B'$, $M \neq C'$ und die Anordnung der Punkte K, L und M bezüglich der Punkte A′, B′ und C′ jeweils dem gleichen Umlaufsinn entspricht (o. B. d. A. wählen wir diesen wie in Abb. 1). Es müssen also entweder die Bedingungen

$$\overline{AC'} < \overline{AM},\ \overline{BA'} < \overline{BK},\ \overline{CB'} < \overline{CL} \tag{1}$$

(siehe Abb. 1) oder die Bedingungen

$$\overline{AC'} > \overline{AM},\ \overline{BA'} > \overline{BK},\ \overline{CB'} > \overline{CL}$$

erfüllt sein. Wäre z. B. $\overline{AC'} < \overline{AM}$ und $\overline{BA'} > \overline{BK}$, so hätte das zur Folge, daß $F_{MBK} < F_{C'BA'} = {}^1/_4$ F. Würde in einer der Beziehungen Gleichheit eintreten, z. B. $\overline{AC'} = \overline{AM}$, so würde das, wenn die Flächeninhalte F_{MBK}; $F_{LAM} > {}^1/_4$ F sind, zu $\overline{BA'} < \overline{BK}$ und $\overline{CB'} > \overline{CL}$ führen. Das hieße jedoch, daß $F_{KCL} < {}^1/_4$ F ist. O. B. d. A. bleibt lediglich der Fall zu untersuchen, daß die Bedingungen (1) erfüllt sind. Betrachten wir nun den Flächeninhalt F_s des Sechsecks A′KB′LC′M. Dieser kann auf zwei verschiedene Arten ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} F_s &= F_{LMK} + F_{A'KM} + F_{B'LK} + F_{C'ML} \\ &= F_{A'B'C'} + F_{A'KB'} + F_{B'LC'} + F_{C'MA'}, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei $F_{A'B'C'} = {}^1/_4$ F ist. Vergleichen wir z. B. die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle$ A′KM und $\triangle$ A′KB mit der gemeinsamen Grundlinie A′K. Aus dem Strahlensatz folgt BC ∥ C′B′, also ist die Höhe des ersten Dreiecks kleiner als die des zweiten und somit $F_{A'KM} < F_{A'KB'}$. Analog gilt $F_{B'LK} < F_{B'LC'}$ und $F_{C'ML} < F_{C'MA'}$. Damit folgt aus (2) $F_{LMK} > {}^1/_4$ F, d. h.

$$F_{LAM} + F_{MBK} + F_{KCL} = {}^3/_4\ F. \tag{3}$$

Das aber bedeutet, da ja alle drei Summanden positiv sind, daß auch bei der hier betrachteten ungünstigsten Anordnung der Punkte K, L, M die Behauptung der Aufgabe erfüllt ist. Wegen (3) können wir übrigens die Behauptung sogar verschärfen: Entweder alle drei Dreiecke haben den Flächeninhalt ${}^1/_4$ F, oder es gibt unter ihnen wenigstens eins, dessen Flächeninhalt kleiner als ${}^1/_4$ F ist (diese Verschärfung folgt auch unmittelbar aus dem zweiten und vierten Beweis).

Zweite Beweismöglichkeit: Wir bezeichnen $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{KC} = k$, $\overline{LA} = l$, $\overline{MB} = m$, $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$ (siehe Abb. 2), wobei

$$0 < k < a, \quad 0 < l < b, \quad 0 < m < c, \quad 0^\circ < \alpha, \beta, \gamma < 180^\circ. \tag{4}$$

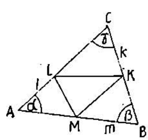


Abb. 2

Dann gilt

$$\left.\begin{aligned} F_{LAM} &= \frac{1}{2}\, l\,(c - m) \sin\alpha \\ F_{MBK} &= \frac{1}{2}\, m\,(a - k) \sin\beta \\ F_{KCL} &= \frac{1}{2}\, k\,(b - l) \sin\gamma \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$F = \frac{1}{2}\, bc \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\, ac \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\, ab \cdot \sin\gamma$$

und

$$F^3 = \frac{1}{8}\, a^2b^2c^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma\ (\neq 0)\,. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt

$$\frac{F_{LAM} \cdot F_{MBK} \cdot F_{KCL}}{F^3} = \frac{mkl\,(c - m)\,(a - k)\,(b - l)}{a^2\,b^2\,c^2}\,. \tag{7}$$

Offenbar ist

$$m^2 - cm + \frac{c^2}{4} = \left(m - \frac{c}{2}\right)^2 \geqq 0$$

d. h.
$$m\,(c - m) \leqq \frac{c^2}{4},$$

was zusammen mit (4) zu

$$0 < m\,(c - m) \leqq \frac{c^2}{4}$$

führt. Analog ist $0 < l\,(b - l) \leqq \frac{b^2}{4}$, $0 < k\,(a - k) \leqq \frac{a^2}{4}$.

Aus diesen Ungleichungen folgt

$$mkl\,(c - m)\,(a - k)\,(b - l) \leqq \frac{a^2\,b^2\,c^2}{4^3}.$$

Damit erhalten wir aus (7)

$$F_{LAM} \cdot F_{MBK} \cdot F_{KCL} \leqq \left(\frac{1}{4}\,F\right)^3,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Dritte Beweismöglichkeit: Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie im zweiten Beweis (siehe Abb. 2).
O. B. d. A. sei

$$\frac{m}{c} \leqq \frac{k}{a}.$$

Wegen $\frac{a-k}{a} > 0$ folgt hieraus $\frac{m}{c} \cdot \frac{a-k}{a} \leqq \frac{k}{a} \cdot \frac{a-k}{a}$. (8)

Da das geometrische Mittel zweier positiver Zahlen nicht größer als das arithmetische Mittel ist, gilt

$$\sqrt{\frac{k}{a} \cdot \frac{a-k}{a}} \leqq \frac{1}{2},$$

$$\frac{k}{a} \cdot \frac{a-k}{a} \leqq \frac{1}{4}.$$

Nach (8) ist also

$$\frac{m\,(a-k)}{c\,a} \leqq \frac{1}{4}$$

und (da $c\,a \cdot \sin\beta > 0$)

$$\frac{1}{2}\,m\,(a - k)\,\sin\beta \leqq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\,c \cdot a \cdot \sin\beta,$$

d. h.
$$F_{MBK} \leqq \frac{1}{4}\,F.$$

Vierte Beweismöglichkeit: Die Bezeichnungen sind wieder die gleichen wie in den vorangegangenen Beweisen (Abb. 2). Auf der Seite AB des Dreiecks ABC bzw. auf deren Verlängerungen wählen wir zwei Punkte R und S so aus, daß

$$F_{ARL} = F_{BKS} = \frac{1}{4}\,F. \tag{9}$$

Weiter existiert stets ein solches λ $(0 < \lambda < 4)$, daß

$$F_{CLK} = \frac{\lambda}{4} F\,. \tag{10}$$

Für $\lambda \leqq 1$ ist die Behauptung der Aufgabe offensichtlich erfüllt. Es sei deshalb $1 < \lambda < 4$. Erweist sich, daß dann

$$g + h \geqq c\,, \tag{11}$$

wobei $g = \overline{AR}$ und $h = \overline{BS}$, so ist die Behauptung für $1 < \lambda < 4$ ebenfalls erfüllt, denn dann ist der Flächeninhalt zumindest eines der Dreiecke $\triangle$ AML und $\triangle$ BKM nicht größer als $^1/_4$ F, weil mindestens eine der Ungleichungen $\overline{AM} \leqq g$ und $\overline{BM} \leqq h$ erfüllt ist.
Im weiteren beweisen wir die Ungleichung

$$g + h \geqq \frac{c}{2 - \sqrt{\lambda}}\,. \tag{12}$$

Für $1 < \lambda < 4$ folgt hieraus $g + h > c$, was sogar mehr als (11) aussagt.
Aus (9) und (10) erhalten wir

$$4\,gl = bc; \quad 4\,h\,(a - k) = ac; \quad 4\,k\,(b - l) = \lambda\,ab\,.$$

Diese Gleichungen ergeben für $g + h$ den Ausdruck

$$g + h = \frac{c}{4}\left(1 + \frac{\lambda a}{4k - \lambda a} + \frac{a}{a - k}\right)$$

(k und l sind von 0 und a bzw. b verschieden).
Die Summe $g + h$ betrachten wir als eine Funktion von k, die wir mit f (k) bezeichnen. Zur Bestimmung der Extremwerte dieser Funktion setzen wir $f'(k) = 0$ und finden $k^* = \frac{a}{2}\sqrt{\lambda}$ als einzige Lösung dieser Gleichung im betrachteten Bereich $0 < k < a$. Es läßt sich leicht nachprüfen, daß $f''(k^*) > 0$ ist, also liegt für $k = k^*$ ein Minimum der Funktion f (k) vor, wobei

$$f(k^*) = \frac{c}{2 - \sqrt{\lambda}}\,.$$

Da dies für $0 < k < a$ der einzige Extremwert der Funktion f (k) ist, gilt die Ungleichung (12).
Die erste Beweisidee stammt von einem Schüler der ungarischen Mannschaft; der zweite, dritte und vierte Beweis wurde entsprechend der Reihenfolge von unseren Schülern Walter Liepe, Stefan Heinrich und Reinhard Höppner geliefert.

H. Bausch

Mit der Verleihung des Nationalpreises III. Klasse für Wissenschaft und Technik wurden geehrt:

Für ihren Anteil an der Entwicklung der „Kleinen Enzyklopädie Mathematik" zu einem nach modernen methodischen Gesichtspunkten aufgebauten Wissensspeicher, der durch seine beispielhafte Darstellung mathematischer Kenntnisse ein international hoch anerkanntes Werk geworden ist.
Das Kollektiv „Kleine Enzyklopädie Mathematik"
die Herren Prof. Dr. phil. habil. Hans Reichardt, Berlin; Walter Gellert, Leipzig; Dr. rer. nat. Herbert Küstner, Leipzig; Herbert Kästner, Leipzig; Dr. päd. Manfred Hellwich, Leipzig.
Das Redaktionskollegium unserer Zeitschrift gratuliert dem Kollektiv und allen Mitarbeitern der „Kleinen Enzyklopädie Mathematik".

Mit Mengen fängt es an!

Teil 1

Wenn man schon einige Jahre die Schule besucht, dann erinnert man sich vielleicht gar nicht mehr daran, wie die Beschäftigung mit der Mathematik im ersten Schuljahr (und vielleicht auch schon davor) eigentlich angefangen hat. Wie haben wir die natürlichen Zahlen und das Rechnen mit ihnen kennengelernt? Die Antwort steht schon in der Überschrift: mit *Mengen* fing es an! Wir haben mit bunten Stäbchen gearbeitet, und zwar mit einer *Menge* von Stäbchen, oder mit Plättchen, und zwar wieder mit einer *Menge* von Plättchen, und auch im Lehrbuch waren verschiedene *Mengen* von Gegenständen abgebildet (Vögel, Autos, Kinder usw.). Seitdem haben wir immer wieder mit Mengen zu tun gehabt und werden ihnen auch in Zukunft noch häufig in der Mathematik begegnen. Der Begriff „Menge" ist ein *Grundbegriff* der Mathematik.
Aber auch im täglichen Leben gebraucht man häufig das Wort „Menge". Bedeutet es immer das gleiche? Das ist leider nicht der Fall! Wir wollen uns deshalb zuerst einmal klar werden, was wir in der Mathematik unter einer Menge zu verstehen haben.

1. Die Bedeutung des Wortes „Menge" in der Mathematik

Sehen wir uns einige Beispiele an:
(1) In Leipzig wohnen eine Menge Leute.
(2) Fred hatte in seiner Pioniergruppe wegen seines schlechten Betragens eine Menge Ärger.
(3) In Monikas neuem Buch sind eine Menge Bilder.
In diesen Beispielen denkt man bei dem Wort „Menge" gewöhnlich an „viel": In Leipzig wohnen *viele* Leute; Fred hatte *viel* Ärger; in dem Buch sind *viele* Bilder. In *dieser* Bedeutung wird das Wort „Menge" in der Mathematik aber gerade *nicht* benutzt. Wie also dann?
Wenn wir unsere Beispiele genauer betrachten, finden wir einen wichtigen Unterschied: Die Menge der Einwohner von Leipzig setzt sich aus lauter *Einzelpersonen* zusammen, jeder einzelne Einwohner *gehört* zu dieser Menge; auch die Menge der Bilder aus Monikas neuem Buch besteht aus *einzelnen* Bildern, die verschieden aussehen oder zumindest an verschiedenen Stellen des Buches zu finden sind. Wenn dagegen von „einer Menge Ärger" die Rede ist, dann können wir *keine* einzelnen „Ärgerteilchen" oder so etwas ähnliches finden, aus denen diese „Menge" bestehen könnte.
In der *Mathematik* versteht man nun unter dem Wort „Menge" immer eine *Zusammenfassung* (eine Gemeinschaft) *einzelner, unterscheidbarer* Dinge.
Die Einwohner von Leipzig bilden somit eine *Menge* im mathematischen Sinn — nicht, weil es *viele* sind, sondern weil diese Menge aus *einzelnen, unterscheidbaren Dingen* (nämlich Personen) besteht, die *zusammengehören.* Genauso ist es mit der Menge der Bilder in Monikas Buch. Freds Ärger dagegen bildet *keine* Menge im mathematischen Sinne.
Andere Mengen sind zum Beispiel:
(a) Die Menge der Bezirkshauptstädte der DDR.
(b) Die Menge aller sozialistischen Länder der Erde.
(c) Die Oberliga-Mannschaft des FC Karl-Marx-Stadt.

(d) Die Menge aller natürlichen Zahlen, die kleiner sind als 3. (Hier sehen wir noch einmal, daß das Wort „Menge“ in der Mathematik nichts mit „viel“ zu tun hat, denn zu der eben genannten Menge gehören nur die drei Zahlen 0, 1 und 2.)

Sicher kann jeder nun noch weitere Beispiele von Mengen finden.

Als Bezeichnungen für Mengen benutzt man gewöhnlich große Buchstaben: A, B, M, N, R usw. oder auch M_1, M_2 usw.

2. Elemente

Diejenigen Dinge, Lebewesen oder Begriffe, die zu einer Menge zusammengefaßt werden, nennt man die *Elemente* dieser Menge. Auch das Wort „Element“ wird — genau wie das Wort „Menge“ — noch in anderen Bedeutungen benutzt. In der Umgangssprache bezeichnet es manchmal sogar etwas Unerfreuliches: man spricht von „zweifelhaften Elementen“ oder gar von „kriminellen Elementen“. In der Mathematik bedeutet es dagegen nur das *Dazugehören*. So kann man zum Beispiel sagen:

„Gera gehört zur Menge der Bezirkshauptstädte der DDR.“

Oder auch:

„Gera ist ein Element der Menge der Bezirkshauptstädte der DDR.“

Diese Redeweisen sind allerdings ziemlich umständlich. Man kann sie sehr verkürzen, wenn wir die im Beispiel (a) angegebene Menge einmal mit A bezeichnen und außerdem für „gehört zu“ bzw. „ist Element von“ ein besonderes Zeichen einführen. Dann können wir schreiben:

Gera $\in$ A (gelesen: „Gera ist Element der Menge A“ oder noch kürzer „Gera ist Element von A“).

Bezeichnen wir die als Beispiel (b) genannte Menge mit B und die restlichen beiden mit C bzw. D, so können wir jetzt schreiben:

DDR $\in$ B; Dieter Erler $\in$ C; $1 \in$ D usw.

Überlegt selbst, welche Elemente noch zu den Mengen A, B, C, D gehören und wie man das aufschreiben könnte!

Will man nun aber ausdrücken, daß irgendein Element *nicht* zu einer gewissen Menge gehört, dann wird das Zeichen für „gehört zu“ bzw. „ist Element von“ einfach durchgestrichen. Das sieht so aus:

Weimar $\notin$ A; Frankreich $\notin$ B; Klaus Urbanczyk $\notin$ C; $5 \notin$ D usw.

Wir merken uns also ganz allgemein:

a $\in$ M bedeutet „a ist Element von M“ bzw. „a gehört zu M“;
a $\notin$ M bedeutet „a ist nicht Element von M“ bzw. „a gehört nicht zu M“.

3. Das Angeben von Mengen

Wenn wir eine bestimmte Menge angeben wollen, so können wir das auf zwei verschiedene Arten tun:

(1) Eine erste Möglichkeit wäre, die *Namen aller Elemente* aufzuschreiben, die zur Menge gehören sollen.

Bei unserem vorigen Beispiel (a) würde das etwa so aussehen:

A = {Rostock, Schwerin, Neubrandenburg, Potsdam, Magdeburg, Halle, Erfurt, Suhl, Gera, Leipzig, Karl-Marx-Stadt, Dresden, Frankfurt/Oder, Cottbus, Berlin}

Und das Beispiel (d) sähe so aus:

D = {0, 1, 2}

Dieses Verfahren wird natürlich immer unpraktischer, je mehr Elemente zu der betreffenden Menge gehören. Schon wenn man zum Beispiel die Menge aller Telefonanschlüsse in der Hauptstadt der DDR angeben will, muß man ein ziemlich dickes Buch vollschreiben.

(2) Die zweite Möglichkeit besteht darin, *Eigenschaften* bzw. *Merkmale* anzugeben, durch die die Elemente der Menge gekennzeichnet werden können. Jedes Ding, das diese Eigenschaften oder Merkmale besitzt, gehört dann zu der betreffenden Menge, und umgekehrt gehört jedes Ding, das diese Eigenschaften *nicht* besitzt, *nicht* zu der Menge.

Unsere Mengen A, B, C, D, die wir vorhin kennengelernt haben, sind *alle* in dieser Weise festgelegt worden: A durch die Eigenschaft, Bezirkshauptstadt der DDR zu sein; B durch die Eigenschaft, ein sozialistisches Land zu sein; usw.

Wir wollen in dieser Weise einmal noch andere Mengen angeben.

Sei E die Menge aller natürlichen Zahlen, die nicht größer als 30 sind und sich sowohl durch 2 als auch durch 3 ohne Rest teilen lassen.

Mit F wollen wir die Menge aller natürlichen Zahlen bezeichnen, die kleiner als 36 sind und die sich ohne Rest durch 6 teilen lassen.

Die Elemente beider Mengen können wir aufschreiben. Es ist

$E = \{0, 6, 12, 18, 24, 30\}$ und
$F = \{0, 6, 12, 18, 24, 30\}$.

Wie jeder sieht, enthält die Menge E genau dieselben Elemente wie die Menge F. Wir haben es also gar nicht mit *zwei* Mengen zu tun, sondern mit ein und derselben. Sie ist nur einmal so und einmal so festgelegt worden. Wir stellen also fest: $E = F$.

Allgemein bezeichnet man in der Mathematik Mengen M und N genau dann als *gleich*, wenn sie *dieselben Elemente* enthalten.

Sehen wir uns noch ein anderes Beispiel an:

U sei die Menge aller ungeraden Zahlen zwischen 10 und 20; P sei die Menge aller Primzahlen zwischen 10 und 20.

Jedes Element von P (jede solche Primzahl) ist zugleich auch eine ungerade Zahl, also Element von U. Trotzdem ist P *verschieden* von U, denn *nicht jedes* Element von U ist zugleich eine Primzahl. Wenn wir die Elemente der beiden Mengen aufschreiben, sehen wir:

$U = \{11, 13, 15, 17, 19\}$ und $P = \{11, 13, 17, 19\}$.
Es gilt also zwar $15 \in U$, aber $15 \notin P$. Also ist $U \neq P$.

4. Teilmengen

Bleiben wir noch ein Weilchen bei den zuletzt betrachteten Mengen U und P. Sie sind zwar nicht gleich, aber man kann doch auch nicht sagen, daß sie überhaupt nichts miteinander zu tun hätten. Immerhin gehört doch *jedes* Element von P auch zu U. Diesen Sachverhalt drückt man in der Mathematik durch die kurze Schreibweise $P \subset U$ aus — gelesen: „P ist eine echte *Teilmenge* von U" oder „P ist in U echt *enthalten*".

Warum redet man hier von einer *echten* Teilmenge? Gibt es denn auch *unechte* Teilmengen? Wir wollen es uns einmal überlegen!

Man bezeichnet eine Menge N genau dann als *Teilmenge* einer Menge M, wenn jedes Element von N auch zu M gehört.

Dabei kann nun aber zweierlei geschehen:

(1) Es kann sein, daß die Menge M *außer* den Elementen von N noch wenigstens *ein weiteres* Element enthält; d. h. zur Menge M gehört wenigstens ein Element, das *nicht* zu N gehört. Man nennt dann N eine *echte* Teilmenge von M und schreibt $N \subset M$.

Bei unseren Mengen U und P liegt dieser Fall vor: Jedes Element von P gehört auch zu U, aber in U gibt es wenigstens ein Element (nämlich die Zahl 15), das nicht zu P gehört.

(2) Es kann aber auch vorkommen, daß die Menge M *keine* weiteren Elemente enthält. Dann bezeichnet man N als *unechte* Teilmenge von M, denn dann ist ja $N = M$.

Wenn man nicht genau weiß, *welcher* der beiden Fälle vorliegt, nennt man N nur *Teilmenge* von M und schreibt dafür kurz: $N \subseteq M$. (Das Zeichen „$\subseteq$" deutet die beiden möglichen Fälle an: $N \subset M$ oder $N = M$.)
Man darf die Schreibweisen $N \subseteq M$ bzw. $N \subset M$ und $a \in M$ nicht verwechseln. Die Zeichen „$\subseteq$" bzw. „$\subset$" sagen etwas über Beziehungen zwischen *Mengen* aus, während das Zeichen „$\in$" die Zugehörigkeit eines *Elementes* zu einer Menge ausdrückt.
Wenn man irgendeine Menge gegeben hat, so kann man meistens recht verschiedenartige Teilmengen aus dieser gegebenen Menge herausgreifen. Betrachten wir zum Beispiel einmal die Menge der Schüler irgendeiner Klasse — jeder möge an seine eigene Klasse denken! *Teilmengen* dieser Menge sind: Die Menge der Mädchen in der Klasse; die Menge der Schwimmer; die Menge der Schüler, die in Mathematik eine Eins auf dem letzten Halbjahreszeugnis haben; die Menge der Thälmann-Pioniere in der Klasse; die Menge der Schüler in der Klasse, die schon einmal an Masern erkrankt waren; die Menge der Briefmarkensammler usw. Jeder möge noch weitere Beispiele suchen.
Manche der aufgezählten Teilmengen können wieder *unechte* Teilmengen sein — zum Beispiel die Menge der Thälmann-Pioniere, wenn *alle* Schüler Thälmann-Pioniere sind. Andere werden *echte* Teilmengen sein. Dabei können sogar merkwürdige Dinge vorkommen:
Vielleicht hat nur ein einziger Schüler in Mathematik eine Eins bekommen? Reden wir dann auch noch von einer Menge? In der Umgangssprache wohl sicher nicht, in der Mathematik aber ist es durchaus zulässig, daß eine Menge nur aus einem einzigen Element besteht.
Und was ist, wenn in der Klasse überhaupt kein Schüler Briefmarken sammelt? Dann gehören zu dieser Teilmenge *überhaupt keine* Elemente. Wo bleibt dann die „Menge der Briefmarkensammler der Klasse"? Wenn der Klassenlehrer die Absicht hatte, die Namen der Briefmarkensammler an die Tafel zu schreiben, dann wird die Tafel leer bleiben. „Macht nichts", sagt man in der Mathematik, „dann nennen wir diese Menge eben eine *leere Menge*".
Weil es aber nicht *mehrere verschiedene* leere Mengen gibt — wodurch sollten sie sich denn unterscheiden? — sondern nur *eine*, spricht man sogar von *der* leeren Menge und führt für sie ein besonderes Zeichen ein: $\emptyset$.
Die leere Menge kommt auch in mathematischen Zusammenhängen vor. Betrachten wir dazu noch zwei Beispiele:
T_1 sei die Menge aller echten Teiler der Zahl 12.
Es ist $T_1 = \{2, 3, 4, 6\}$.
T_2 sei die Menge aller echten Teiler der Zahl 13. Diese Menge ist *leer*, es ist $T_2 = \emptyset$.

Lassen wir es für diesmal genug sein! Beim nächstenmal werden wir mehr über Mengen erfahren; denn nicht nur die leere Menge ist interessant!

W. Walsch

Wußtest Du schon?

Cantor, Georg (3. 3. 1845 bis 6. 1. 1918). Wirkte in Halle. Schöpfer der Mengenlehre, ... Seine kühnen Ideen sind zunächst von vielen seiner Zeitgenossen abgelehnt worden. Erst die erfolgreiche Anwendung der Mengenlehre, die heute eine zentrale Stellung in der Mathematik einnimmt, brachte ihm die verdiente Anerkennung.

Aus: J. Naas, H. L. Schmid: Mathematisches Wörterbuch, Band I

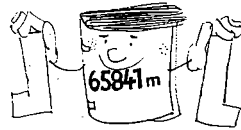
Eine Arbeitsgemeinschaft Mathematik erlebte die Deutsche Bücherei

Unsere Mitschüler waren erstaunt, daß wir als Arbeitsgemeinschaft Mathematik anläßlich der „Woche des Buches 1966“ die an der Grenze unseres Schulbezirks liegende Deutsche Bücherei (DB) besuchen wollten. Sie waren erfreut, als wir mit einem Stoß Material zurückkehrten. Ein Teil ist auf den nächsten beiden Seiten zusammengestellt. In unseren AG-Nachmittagen und natürlich auch im Unterricht werden wir nach und nach Zahlen und Fakten auswerten. Jeder Teilnehmer wird diese Exkursion in guter Erinnerung behalten.
Wir danken Herrn Bibliothekar S. Günther, der uns führte. Dabei erhielten wir einen Einblick in Entstehung, Geschichte und Arbeitsweise einer der größten Bibliotheken unseres Kontinents — besonders aufgezeigt am Fachgebiet Mathematik-Naturwissenschaften. Jeder spürte die umfassende Bedeutung der DB für Wissenschaft, Kultur, Industrie, Technik und Wirtschaft.
Jugendfreunde! Pioniere! Berichtet über Eure Erfahrungen in unserer Schülerzeitschrift! Welche Exkursionen habt Ihr durchgeführt? Wie habt Ihr sie ausgewertet? Sendet Zahlenmaterial und Aufgaben aus der Praxis ein! Zeigt, wie Ihr Forschungsaufträge im Fach Mathematik erfüllt habt!

Arbeitsgemeinschaft Mathematik
29. Oberschule Leipzig
Klassenstufe 6

Deutsche Bücherei, Leipzig

Die Deutsche Bücherei im Spiegel von Zahlen und Fakten



Das von 1914 bis 1916 errichtete Gebäude hat
120 m Frontlänge und in der Mittelachse
63 m Tiefe,
4148 m² bebaute Grundfläche und
76736 m³ umbauten Raum.

Der erste Erweiterungsbau an der Südostseite, errichtet von 1934 bis 1936, umfaßt
1036 m² bebaute Fläche mit
16636 m³ umbautem Raum.

Er wurde 1963 bis 1964 um fünf Magazingeschosse aufgestockt.
Der im Jahre 1959 begonnene zweite Erweiterungsbau an der Nordwestseite bedeckt eine Grundfläche von 1300 m². Diese Bauetappe gilt seit dem ersten Quartal 1963 als abgeschlossen.
Gesamtzahl der Plätze in den 4 Lesesälen: 495.
Anzahl der Angestellten der Deutschen Bücherei: 400, zuzüglich 19 Lehrlinge.
Für Erweiterungsbauten und die Modernisierung der technischen Anlagen — u. a. erfolgte der Einbau einer automatischen Büchertransportanlage und einer neuen Rohrpostanlage — stellte die Regierung der DDR bisher rund 8 Millionen MDN zur Verfügung.
Die 1965 beendeten Baumaßnahmen haben die Deutsche Bücherei in einen Stand versetzt, der sie mit zu den am modernsten eingerichteten Großbibliotheken in Europa zählen läßt.

● Unweit des Geländes der Technischen Messe in Leipzig steht die Deutsche Bücherei. Sie wurde im Jahre 1912 mit dem Ziel gegründet, das gesamte seit 1913 in Deutschland erscheinende Schrifttum wie Bücher, Broschüren, Zeitschriften und andere periodische Veröffentlichungen, Dissertationen[1]) und Habilitationsschriften[2]), kartographische Druckerzeugnisse und das im Ausland erscheinende deutschsprachige Schrifttum lückenlos zu sammeln. In späteren Jahren wurden in das Sammelgebiet noch alle im Ausland erscheinenden Übersetzungen deutschsprachiger Werke sowie die fremdsprachigen Werke über Deutschland und deutsche Persönlichkeiten, die Musikalien (Noten), Kunstblätter, die deutschen literarischen Schallplatten und die deutschen Patentschriften einbezogen.
Die DB bearbeitet die deutsche nationale Bibliographie[3]), sie gibt empfehlende Bibliographien und Fachbibliographien heraus und ist auf den Gebieten der Dokumentation und Information, der Auskunft und Beratung tätig. Dies alles gewinnt unschätzbare Bedeutung in unserer Gegenwart, da die Wechselbeziehungen zwischen wissenschaftlicher Forschung und industrieller Produktion immer stärker werden.

● Am 31. Dezember 1965 besaß die Deutsche Bücherei:
2816919 Bücher, Zeitschriften, Zeitungsbände, Atlanten, Musikalien;
375852 Hochschulschriften, Schulschriften;
731 Wiegendrucke;
34 Handschriften;
60672 Karten (Landkarten, Meßtischblätter, Wandkarten).

● Der Bestand von 3254208 Bänden nahm 65841 laufende Meter Stellfläche in Anspruch.

● Der Gesamtbestand der Deutschen Bücherei betrug Ende 1965 4680205 bibliographische Einheiten.

● Eine aufschlußreiche Statistik:

Jahr	Zugang an bibliographischen Einheiten	Eingetragene Benutzer
1925	55817	8740
1935	68571	6519
1949	44055	9200
1955	66106	19199
1965	100106	26163

● Die Zahl der laufend gehaltenen Zeitschriften beträgt etwa 25000 Titel, davon sind rund 5000 fremdsprachig.

Die Deutsche Bücherei verfügt über 41600 Bände der im Ausland erscheinenden Übersetzungen deutschsprachiger Werke sowie der fremdsprachigen Werke über Deutschland und Persönlichkeiten des deutschen Sprachgebiets.

● Die Abteilung Beschaffung und Zugang hat dafür zu sorgen, daß alle sammelpflichtigen Veröffentlichungen sofort nach ihrem Erscheinen erfaßt werden und in die Bibliothek gelangen. Sie unterhält Beziehungen zu etwa 35000 Verlagen, Gesellschaften, Vereinen, Parteien, amtlichen Stellen, Persönlichkeiten beider deutscher Staaten und Westberlins. Ferner steht sie mit rund 22500 ausländischen Verlagen, Bibliotheken, Institutionen, Persönlichkeiten in Verbindung.

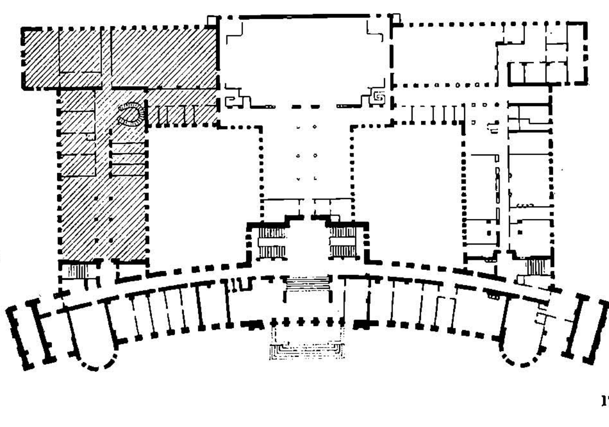
Eingänge an mathematischem Schrifttum	Titel an Buchveröffentlichungen	Zeitschriften
in 32 Jahren (1913 bis 7. 5. 1945)	6315	81
in 21 Jahren (8. 5. 1945 bis 15. 10. 1966)	7296	129

● Eine Auswahl der an die Deutsche Bücherei eingesandten und in das Fachgebiet Mathematik eingereihten Titel sollen zeigen, wie sich die Proportionen in einigen Sachgebieten verschoben haben.

Sachgebiet	alter Sachkatalog Eingang 1913 bis 1945	neuer Sachkatalog Eingang 1945 bis 1966
Mengenlehre	46	82
Logarithmen	130	86
Rechnen	500	258
Algebra	116	260
Gruppentheorie	69	182
Matrizen	16	87
Tensorrechnung	6	27
Planimetrie	32	18
Nomographie	41	71
Differentialgeom.	65	111
Wahrscheinlichkeitstheorie	68	194
Integralrechnung	67	158
mathem. Statistik	13	156

[1]) Dissertation: wissenschaftliche Abhandlung zur Erlangung des akademischen Doktorgrades.
[2]) Habilitationsschrift: wissenschaftliche Veröffentlichung eines angehenden Hochschullehrers.
[3]) Bibliographie: Literaturverzeichnis, das die Titel nach bestimmten Gesichtspunkten (regional, zeitlich, sachlich) zusammenfaßt.

Grundriß der Deutschen Bücherei



Международный конгресс математиков
International Congress of Mathematicians
Congrès International des Mathématiciens
Internationaler Mathematikerkongreß

Nach Amsterdam (1954), Edinburgh (1958) und Stockholm (1962) war in diesem Jahr Moskau zum Tagungsort für den ICM bestimmt worden, der vom 16. bis 26. August 1966 stattfand. Über 5000 Wissenschaftler aus etwa 50 Ländern, darunter auch eine starke Delegation aus der DDR, waren zusammengekommen, um über die neuesten Ergebnisse auf allen Teilgebieten der Mathematik zu berichten.
Die feierliche Eröffnung ebenso wie die Abschlußveranstaltung fanden im großen Kremlpalast statt. Für die wissenschaftlichen Veranstaltungen bot der Riesenkomplex der Lomonossow-Universität genügend Raum.
In 15 Sektionen, z. B. Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, Algebra, Zahlentheorie, Topologie, Geometrie, mehrere Sektionen der Analysis und angewandten Mathematik, Sektion Geschichtliche und pädagogische Fragen u. a., wurden Vorträge über spezielle Themen des jeweiligen Gebietes gehalten, wobei in jeder Sektion auch Wissenschaftler der DDR mit ihren Beiträgen vertreten waren. Darüber hinaus kamen in den Hauptvorträgen Wissenschaftler fast aller Teilgebiete der Mathematik zu Wort. Bei diesen Hauptvorträgen wurden nicht einzelne spezielle Teilergebnisse wie in den Sektionen vorgelegt, sondern der Vortragende gab jeweils einen Überblick über ein bestimmtes Thema, zeigte die Entwicklungstendenzen der letzten Jahre, die Forschungsergebnisse sowie die Ziele der weiteren Forschungsarbeit.
Es ist unmöglich, aus den rund 2000 Vorträgen, die in einer der vier Kongreßsprachen, Russisch, Englisch, Französisch und Deutsch, gehalten wurden, eine Auswahl zu treffen, die auch nur annähernd einen Eindruck von der Vielfalt der Themen vermittelt, zumal diese Themen meist mit den Mitteln der Schulmathematik nicht erfaßt werden können. Deshalb soll nur einiges zur Arbeit der Sektion „Geschichtliche und pädagogische Fragen“ gesagt werden. Neben Einzeldarstellungen über die Arbeiten großer Mathematiker wie Euklid, Leibniz, Euler, Hilbert u. a. konnte man Berichte über die Entwicklung einzelner Teilgebiete hören, z. B. über die Entstehungsgeschichte der abstrakten Gruppentheorie, sowie über die Entwicklung der Schulmathematik in den einzelnen Ländern. Schließlich berichteten viele Wissenschaftler über die Modernisierung des Mathematikunterrichts, z. B. über die Bedeutung der mathematischen Strukturen im Unterricht, sowie über Versuche und Ergebnisse in der schulischen und außerschulischen Arbeit.
Aber nicht nur in dieser Sektion, sondern auf dem gesamten Kongreß kam zum Ausdruck, welche Bedeutung der Ausbildung des Nachwuchses beigemessen wird, angefangen von den ersten Schritten in das Land der Mathematik, die die Kinder in den ersten Schuljahren tun, bis zur Ausbildung an Universitäten und Hochschulen. Eine bedeutende Rolle spielt dabei die außerschulische mathematische Weiterbildung, und es ist erfreulich, daß sich — besonders in der Sowjetunion — gerade die ganz Großen unter den Mathematikern, wie P. S. Alexandroff, A. N. Kolmogorow, E. B. Dynkin, I. S. Gelfand u. a., immer wieder bereit erklären, ihr großes Wissen und ihre Erfahrungen bei der Förderung der interessierten Schuljugend zur Verfügung zu stellen und durch Schaffung entsprechender Literatur oder durch Vorträge ein fundiertes Wissen und Freude an der Beschäftigung mit der Mathematik zu vermitteln.

D. Ziegler

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. Udo Pirl

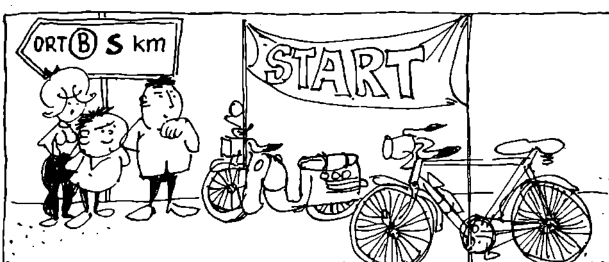
I. Mathematisches Institut der Humboldt-Universität zu Berlin
Leiter der Aufgabenkommission
des Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

1 Aufgabe

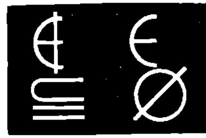
Die drei Freunde F_1, F_2, F_3 wollen möglichst schnell von dem Ort A zu dem s km entfernten Ort B kommen. Dazu steht ihnen ein Fahrrad und ein Moped zur Verfügung. Zur Präzisierung der Aufgabe werden noch folgende Angaben gemacht:

1. Die in km/h gemessenen „Reisegeschwindigkeiten“ von Fußgänger, Fahrrad und Moped, in dieser Reihenfolge mit v_1, v_2, v_3 bezeichnet, sind unabhängig davon, welcher der drei Freunde das jeweilige Fortbewegungsmittel benutzt und stehen in den Größenbeziehungen $v_1 < v_2 \leqq v_3$.
2. Keines der Fahrzeuge darf gleichzeitig mehr als einer Person zur Fortbewegung dienen.
3. Keiner der Freunde darf gleichzeitig beide Fahrzeuge fortbewegen.
4. Jedes der Fahrzeuge darf (braucht aber nicht) von dem jeweiligen Benutzer unterwegs verlassen werden (evtl. auch mehrere Male) und darf (braucht aber nicht) von einem Nachkommenden der drei Freunde zur Weiterfahrt benutzt werden.
5. Die beim „Umsteigen“ verlorengehende Zeit wird nicht berücksichtigt (sie wird gleich Null gesetzt).
6. Es darf gewartet, zurückgegangen oder auch zurückgefahren werden.
7. Es gibt keinen Weg von A nach B, der kürzer als s km ist, und es werden keine anderen Fortbewegungsmittel als die drei angegebenen benutzt. Unter diesen Bedingungen soll die kürzeste Zeit ermittelt werden, in der es dem zuletzt (bzw. den zuletzt) in B ankommenden der gleichzeitig in A startenden Freunde möglich ist, B zu erreichen.

Wer kann's?
Die Redaktion erwartet zahlreiche Lösungsvorschläge.



Aufgaben zu:



Mit Mengen fängt es an!

2 In welchen der folgenden Beispiele wird der Mengenbegriff im mathematischen Sinne gebraucht?
(1) Auf Straßen und Plätzen liegt eine Menge Schnee.
(2) Eine Menge von Räumfahrzeugen ist im Einsatz.
(3) Unsere Familie hat eine Menge Schlitten, meine Schwester hat einen, und ich habe einen.
(4) Wir rodelten und hatten eine Menge Spaß dabei.
3 Die Zahlenmenge $M = \{2, 4, 6, 10, 12\}$ besteht aus 5 Elementen. Schreibe den Inhalt folgender Sätze so kurz als möglich!
(1) Die Zahl 4 ist Element der Menge M.
(2) Die Zahl 8 gehört nicht zu M.
(3) 10 gehört zu M.
(4) Die Zahl 0 ist nicht Element der Menge M.
4 Gib die Menge aller geraden Primzahlen an!
5 Tritt bei den folgenden Mengen die leere Menge auf?
(1) Die Menge der natürlichen Monde der Erde.
(2) Die Menge der Kosmonauten, die auf einen Mondflug vorbereitet werden.
(3) Die Menge der Säugetiere, die 1966 auf dem Monde lebten.
(4) Die Menge der Gegenstände, die sich heute auf der Mondoberfläche befinden.
6 Q sei die Menge aller Quadrate; R sei die Menge aller Rechtecke mit gleichen Seiten.
Welche Beziehung besteht zwischen diesen beiden Mengen?
7 Schreibe sämtliche Teilmengen der Menge $N = \{c, m, u\}$ auf!

Zur Erweiterung und Vertiefung der im Mathematikunterricht und in der außerunterrichtlichen Arbeit gebotenen Stoffgebiete veröffentlichen wir in jedem Heft Aufgaben. Bei der Beschäftigung mit ihnen wünschen wir viel Freude und vor allem Erfolg. Im allgemeinen bringen wir die Lösungen der Aufgaben im nächsten Heft. Besonders geschickte Lösungen, die bei der Redaktion eingehen, veröffentlichen wir mit Namen und Schule der Einsender. Ihr könnt außerdem durch Einsenden von selbstausgedachten Aufgaben, von interessanten Aufgaben aus Eurer Unterrichtsarbeit, der gesellschaftlichen Praxis oder der Tätigkeit Eurer Arbeitsgemeinschaft Mitarbeiter unserer Zeitschrift werden. Wir freuen uns schon jetzt auf die Fülle von Ideen, die, zu Papier gebracht, auf unseren Schreibtisch flattern werden.

Wer löst mit?

alpha Wettbewerb

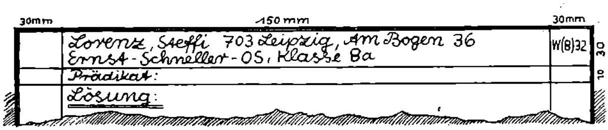
Für die Beteiligung am α-Wettbewerb gelten die folgenden Bedingungen:

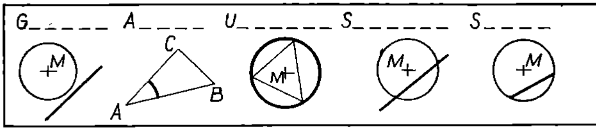
1. Am Wettbewerb können sich alle Schüler der 5. bis 10. Klasse beteiligen, auch dann, wenn diese Schüler eine Berufs- oder Volkshochschule besuchen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift, Schule und Schuljahr zu richten an:

   Redaktion alpha
   7027 Leipzig
   Postfach 14

3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein W (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer in Klammern, z. B. (7) vorgesetzt (d. h. für Klasse 7 geeignet).
4. Von dem Teilnehmer sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Nur dann erfolgt eine Bewertung.
5. Zur Erleichterung der Korrektur und aus technischen Gründen werden nur nach dem unten angegebenen Muster eingesandte Lösungen bearbeitet und bewertet. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 298 mm). Besonders freuen wir uns natürlich über saubere, übersichtliche Gestaltung.
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „vorbildlich gelöst" oder „gut gelöst". Wer keine Nachricht erhält, hat die Aufgabe unvollständig, teilweise, nicht gelöst oder die vorgegebene Form nicht beachtet.
7. Letzter Einsendetermin ist jeweils sechs Wochen nach Erscheinen des Heftes.
8. Zwischen dem 15. und 31. Januar 1968 sind alle im Jahre 1967 erworbenen Antwortkarten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eine Jury, deren Mitglieder wir im Heft 6/67 vorstellen werden, wertet diese Antwortkarten aus, übergibt die Namen der Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender der Redaktion zur Veröffentlichung.
9. Aussicht auf Preise und namentliche Veröffentlichung haben Teilnehmer, die im Laufe des Jahres 1967 Antwortkarten mit einem der beiden Prädikate erhalten haben. Anerkennung wird also der Teilnehmer finden, der regelmäßig, gewissenhaft und fleißig mitarbeitet.

Viel Erfolg wünscht
Redaktion alpha





5

8 Wenn Hans zu der Zahl, die sein Lebensalter in vollen Jahren angibt, noch 7 addiert, die erhaltene Summe mit 6 multipliziert, von diesem Produkt 24 subtrahiert und die Differenz schließlich durch 6 dividiert, so erhält er als Ergebnis seiner Rechnung die Zahl 16. Wie alt ist Hans?

9 Ein Schüler arbeitet im Mathematikunterricht mit zwei unterschiedlichen Zeichendreiecken; eines besitzt zwei spitze Winkel von je 45°, das andere dagegen zwei spitze Winkel von 60° und 30°.
Konstruiere mit Hilfe entsprechender Zeichendreiecke Winkel folgender Größe:

$$\alpha_1 = 75°, \alpha_2 = 15°, \alpha_3 = 165°, \alpha_4 = 105°!$$

10 Die beiden Ungleichungen $a < b$ und $b < c$ lassen sich als fortlaufende Ungleichung $a < b < c$ schreiben.
Stelle aus den Ungleichungen

$$z > x, v > x, y > v, z < v, x < y, z < y$$

eine fortlaufende Ungleichung her!

11 Eine Produktionsgenossenschaft des Handwerks besitzt zwei Kraftfahrzeuge vom Typ „Wartburg-Kombi". In einer bestimmten Woche legte das erste Auto genau die Strecke von 1200 km zurück, das zweite Auto dagegen legte genau 800 km zurück. Das zweite Auto verbrauchte dabei 36 l Kraftstoff weniger als das erste.
Wieviel Liter Kraftstoff verbrauchten beide Fahrzeuge zusammen, wenn wir annehmen, daß der Kraftstoffverbrauch beider Kraftwagen für jeden gefahrenen Kilometer der gleiche war?

W(5)12 Nach dem Abschluß eines Schulsportfestes vergleichen die Schüler Heinz, Werner, Uwe, Jürgen und Karl ihre erzielten Leistungen im Weitsprung; sie stellen dabei folgendes fest:
a) Heinz sprang weiter als Werner, jedoch nicht so weit wie Uwe;
b) zwei dieser Schüler erreichten die gleiche Sprungweite;
c) Jürgen, der nur 3,20 m schaffte, sprang nicht so weit wie Werner;
d) Heinz sprang genau um 20 cm weiter als Jürgen;
e) die Sprungweite von Karl war zwar um 5 cm kürzer als die von Uwe, jedoch um 10 cm länger als die von Werner.
Wie weit sprang jeder Schüler?

W(5)13 Die Klassen 5a und 5b einer Schule trugen untereinander ein Tischtennisturnier aus. Es waren folgende Spielregeln vereinbart worden: Jede Klasse wird durch seine vier stärksten Spieler vertreten. Es werden nur „Doppel" gespielt, das heißt, in jedem Spieltreten zwei Schüler der einen Klasse gegen zwei Schüler der anderen Klasse an.

a) Wieviel verschiedene Gruppierungen zu je zwei Spielern lassen sich aus den vier Spielern einer Klasse bilden?
b) Jedes „Doppel" der Klasse 5a spielte gegen jedes „Doppel" der Klasse 5b genau einmal einen Gewinnsatz, das heißt, ein unentschiedenes Spiel kam nicht vor. Wieviel Spiele hatte jeder Schüler der Klasse 5a zu bestreiten?
c) Für jedes gewonnene Spiel erhält die Siegermannschaft eine Gutschrift von zwei Punkten. Wie endete das Turnier, wenn die Klasse 5a zwei Spiele mehr gewonnen hat als die Klasse 5b?

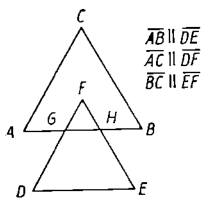
5

14 Bestimme die Mengen aller natürlichen Zahlen n, für die die Ungleichungen $342 < n < 356$ erfüllt sind und außerdem jeweils eine der folgenden Bedingungen gilt:
a) n ist eine gerade Zahl,
b) n ist Vielfaches von 3,
c) n ist durch 2 und durch 3 teilbar,
d) n ist durch 2, aber nicht durch 3 teilbar,
e) n ist durch 3, aber nicht durch 2 teilbar,
f) 20 ist Teiler von n,
g) n ist durch 25 teilbar,
h) n ist entweder durch 2 oder durch 3 teilbar,
i) 2 oder 3 sind Teiler von n,
k) n ist sowohl durch 3 als auch durch 4 teilbar!

15 Mit welchen Ziffern müssen die Leerstellen in 52□2□ belegt werden, damit die entstehende fünfstellige Zahl durch 36 teilbar wird? Wieviele Möglichkeiten gibt es?

16 An der ersten Etappe der diesjährigen Mathematik-Olympiade beteiligten sich insgesamt 216 Schüler einer bestimmten Schule. Vor einem Jahr beteiligten sich an der Mathematik-Olympiade schon doppelt so viel Schüler dieser Schule wie vor zwei Jahren. In diesem Jahr aber ist die Anzahl der Teilnehmer dreimal so groß wie im vorigen Jahr. Wieviel Schüler dieser Schule beteiligten sich an den Mathematik-Olympiaden in jedem der letzten drei Jahre?

17 In der nachstehenden Figur treten verschiedene Winkelpaare auf (Nebenwinkel, Scheitelwinkel, Stufenwinkel, Wechselwinkel und entgegengesetzt liegende Winkel). Es sind alle Winkelpaare zu ermitteln und unter Angabe ihrer Eigenschaften aufzuschreiben. Dabei berücksichtigen wir die Stufenwinkel, Wechselwinkel und entgegengesetzt liegenden Winkel, die an geschnittenen Parallelen auftreten.



Beispiel: $\sphericalangle$ AGD = $\sphericalangle$ FGH (Scheitelwinkel).

W(6)18 Axel gibt Bruno eine harte Nuß zu knacken; er sagt: „In meiner Klasse können genau 25 Schüler radfahren und genau 20 Schüler schwimmen. Jeder Schüler meiner Klasse übt mindestens eine dieser beiden Sportarten aus. Multipliziert man die Zahl der Schüler meiner Klasse mit 8, so erhält man als Produkt eine Zahl, deren Quersumme doppelt so groß ist wie die Quersumme der Zahl der Schüler. Außerdem ist dieses Produkt Vielfaches der Zahl 5.“
Bruno soll aus Axels Angaben folgendes ermitteln:
a) Wieviel Schüler umfaßt Axels Klasse?
b) Wieviel Schüler können nur radfahren, wieviel nur schwimmen?
c) Wieviel Schüler können sowohl radfahren als auch schwimmen?

W(6)19 Heinz, Gerd und Jochen haben sich in den Sommerferien in einem Zeltlager für Junge Pioniere kennengelernt. Einer von ihnen wohnt in Berlin, einer in Leipzig und einer in Rostock. Wir wissen von diesen drei Jungen:
a) nur Heinz und der Berliner können schwimmen;
b) genau zwei dieser Jungen Pioniere, und zwar Gerd und der Leipziger, sind Handballspieler;
c) Jochen, der einzige Fußballspieler von diesen drei Freunden, ist älter als der Leipziger;
d) keiner der Jungen, die schwimmen können, spielt Fußball;
e) der Fußballspieler ist nicht der älteste von den drei Jungen.
Wo wohnen die drei Jungen, und welche Sportarten betreiben sie? Ordne die drei Jungen nach ihrem Alter!

1*5	641*	4042 : 8* = 4*	*1* · 3*2
*17	−52*9	344	*2*5
+581*	− *42	602	3*2*
*846	777	602	*3*
			1*8*30

20 Eine sechsstellige natürliche Zahl beginnt mit der Ziffer 7. Diese erste Ziffer ist zu streichen und an das Ende der Zahl zu setzen. Die so erhaltene Zahl ist mit 10 zu multiplizieren. Das Produkt ist gleich dem Doppelten der ursprünglichen Zahl. Wie lautet die ursprüngliche Zahl? 7

21 Auf einer Geraden g sind zwanzig voneinander verschiedene Punkte gegeben. Durch je zwei dieser Punkte ist eine Strecke eindeutig festgelegt. Wieviel voneinander verschiedene Strecken dieser Art liegen auf der Geraden g?

22 Unter den rationalen Zahlen a, b, c sei genau eine positiv, genau eine negativ und genau eine gleich Null. Ferner sei

$$a = b^2(b^2 + c^2)\,.$$

Welche der drei Zahlen ist positiv, welche negativ und welche gleich Null?

23 Einem rechtwinkligen Dreieck soll ein Quadrat so einbeschrieben werden, daß zwei Seiten des Quadrates auf den Katheten und ein Eckpunkt des Quadrates auf der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks liegen. Führe die Konstruktion durch, und weise ihre Richtigkeit nach!

W(7)24 Zum Gruppenrat der 7. Klasse gehören Kurt, Herbert, Richard, Ilse und Lore. Von ihnen wissen wir:
a) Richard ist jünger als Herbert;
b) Lore ist älter als Kurt;
c) Ilse ist jünger als Richard;
d) Herbert wurde eher geboren als Lore;
e) Kurt ist jünger als Richard;
f) Ilse ist jünger als Herbert;
g) Lore ist älter als Richard;
h) Kurt ist älter als Ilse;
i) Ilse ist jünger als Lore;
k) Herbert ist älter als Kurt.
Ordne die Schüler nach ihrem Alter!
Welche der Angaben a) bis k) reichen bereits aus, um die Reihenfolge der Schüler nach ihrem Alter eindeutig festzulegen?

W(7)25 Wie kann man ein Rechteck mit den Seitenlängen 16 cm und 9 cm so in zwei Teilfiguren zerlegen, daß diese Teilfiguren zu einem Quadrat zusammengefügt werden können?

26 Zum fortlaufenden Numerieren der Seiten eines Buches benötigt man insgesamt 876 Ziffern. 8
Wieviel Seiten hat das Buch?
Wie oft tritt jede der Ziffern 0 bis 9 auf?

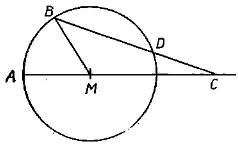
27 Dieter rechnet sehr schnell. Er multipliziert zwei zweistellige Zahlen, deren Zehner übereinstimmen und deren Einer die Summe 10 ergeben, im Kopf, z. B. $x = 83 \cdot 87$:

$$\begin{array}{l} 8 \cdot 9 = 72 \\ 3 \cdot 7 = 21 \\ \hline x = 7221\,. \end{array}$$

Die Allgemeingültigkeit dieses Rechenvorteiles soll mit Hilfe von Variablen nachgewiesen werden.

28 Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist dreimal so groß wie die Summe dieser Zahlen und sechsmal so groß wie ihre Differenz.
Wie lauten die beiden Zahlen?
Hat die Aufgabe nur eine Lösung?

29 Es seien k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und A ein Punkt auf der Peripherie des Kreises. Ferner sei C ein Punkt außerhalb des Kreises, und C liege auf der Geraden AM so, daß M zwischen A und C liegt. Eine durch den Punkt C gehende Gerade, die nicht durch M geht, schneide den Kreis in den Punkten B und D so, daß D zwischen B und C liegt und die Strecke $\overline{CD}$ ebenso lang wie der Radius des Kreises ist (vgl. die Abbildung).



Es ist zu beweisen, daß unter diesen Voraussetzungen der Winkel AMB dreimal so groß ist wie der Winkel ACB.

30 Durch die Endpunkte A und C eines Durchmessers eines Kreises k seien zwei Geraden gezogen, die einander parallel sind und den Kreis k in den weiteren Punkten B bzw. D schneiden. Es ist zu beweisen, daß die Gerade BD durch den Mittelpunkt des Kreises k geht.

31 Es sei ABCD ein konvexes Viereck, und es seien die Punkte E, F, G und H die Mitten der Seiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{BC}$ bzw. $\overline{CD}$ bzw. $\overline{DA}$.
Es ist zu beweisen, daß das Viereck EFGH ein Parallelogramm ist.

W(8)32 Es seien a, b, c, d rationale Zahlen, und es gelte

$$b \neq 0,\ d \neq 0,\ a \neq b,\ c \neq d\,.$$

Wenn dann $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

gilt, so gilt bekanntlich auch

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

Es ist zu beweisen, daß auch die Umkehrung dieser Aussage richtig ist, d. h. aus

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

folgt $\qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$

W(8)33 In den arabischen Erzählungen von den tausendundein Nächten, die vor vielen hundert Jahren gesammelt worden sind, finden wir in der 458. Nacht ein schönes Rätsel:
„Eine fliegende Taubenschar kam zu einem hohen Baume, und ein Teil von ihnen setzte sich auf den Baum, ein anderer darunter. Da sprachen die auf dem Baume zu denen, die unten waren: ‚Wenn eine von euch herauffliegt, so seid ihr ein Drittel von uns allen; und wenn eine von uns hinabfliegt, so werden wir euch an Zahl gleich sein.' "
Wieviel Tauben waren auf dem Baum, wieviel unter dem Baum?

9

34 In einem Ferienlager meldet Helga, die ihre Gruppe noch nicht genau kennt, daß 2 Jungen ihrer Gruppe fehlen. Der Lagerleiter meint, das könne nicht stimmen; denn er weiß, daß 27 Teilnehmer zur Gruppe gehören, und er hat festgestellt, daß 6 Jungen mehr anwesend sind als Mädchen.
Die Behauptung des Lagerleiters ist zu begründen.

35 Ein Küstenschutzboot unserer Volksmarine steuert bei einer Geschwindigkeit von 10 kn den Kurs N. Um 10.30 Uhr gibt es einem anderen Küstenschutzboot, das zu diesem Zeitpunkt sich in 10 sm Entfernung in Richtung O von ihm befindet, den Befehl, mit 20 kn Geschwindigkeit auf kürzestem Weg zu ihm zu stoßen.
Wann treffen die Boote zusammen?
Wieviel Seemeilen legt jedes Boot bis zum Zusammentreffen zurück?
Überprüfen Sie die rechnerischen Ergebnisse zeichnerisch!

36 Zeichnen Sie ein Quadrat, dessen Flächeninhalt gleich der Differenz der Flächeninhalte zweier Quadrate mit den Seitenlängen a und b ist!

37 Es ist zu beweisen, daß sich der Term $2a^2 + 2b^2$, wo a und b natürliche Zahlen sind, als Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen darstellen läßt.

W(9)38 Von dem Eckpunkt A eines Rhombus ABCD, dessen Winkel DAB stumpf ist, fällt man die Lote auf die gegenüberliegenden Seiten. Die Länge der Lote sei **x**, der Abstand ihrer Fußpunkte sei y.
Wie groß ist der Flächeninhalt des Rhombus?

W(9)39 Ein Gefäß enthält 300 g Alkohol und 500 g Wasser, ein anderes 100 g Wasser und 225 g Alkohol.
Wieviel Gramm Flüssigkeit muß man aus dem ersten Gefäß in das zweite Gefäß gießen, um in diesem Gefäß eine Mischung zu erhalten, die genau so viel Alkohol wie Wasser enthält?

40 Wenn jeder Teilnehmer eines Schachturniers genau eine Partie mit jedem der übrigen Teilnehmer spielt, so werden insgesamt 231 Partien gespielt. 10
Wieviel Teilnehmer hat das Turnier?

41 Ein Betrieb stellt zur Leipziger Messe als Reklamestück drei gleichgroße Würfel aus, die mit Hilfe einer Stange längs ihrer Raumdiagonale so übereinander gestellt werden, daß ein Eckpunkt eines Würfels mit einem Eckpunkt des benachbarten Würfels zusammenfällt.
Wie groß ist die Fläche, für die Farbe bereitgestellt werden muß, wenn alle Würfelflächen gestrichen werden sollen und die Gesamthöhe dieser Würfelmontage 6 m beträgt?

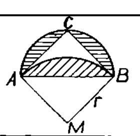
42 Man zerlege ein Parallelogramm ABCD durch Geraden, die von C ausgehen, in 8 paarweise einander flächengleiche Dreiecke.

43 Man ermittle alle reellen Lösungen der Ungleichung $\frac{2x-3}{1+5x} > 2$.

44 Man konstruiere ein Sehnenviereck aus a, b, c und e, wobei a, b und c die Längen dreier Seiten sind und e die Länge einer Diagonale des Sehnenvierecks ist.

W(10)45 Auf einem rechteckigen Zeichenblatt seien zwei Strecken gegeben, die auf der Geraden g bzw. h liegen; diese Geraden mögen einander schneiden, jedoch außerhalb des Zeichenblattes. Ferner sei auf dem Zeichenblatt ein Punkt P gegeben, der innerhalb des durch die Geraden g und h bestimmten Winkels liegt.
Es ist eine Strecke zu zeichnen, die auf der Verbindungsgeraden des Punktes P mit dem Schnittpunkt von g und h liegt.

W(10)46 Man beweise, daß die Zahl $z = 7^{2n} - 4^{2n}$ für jede natürliche Zahl n durch 33 teilbar ist.



Welche Beziehungen bestehen zwischen den Flächeninhalten der drei Kreisabschnitte?

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Kreisolympiade (7.12.1966)

Klassenstufe 5

1. In jeder von fünf Kisten befindet sich genau die gleiche Anzahl von Äpfeln. Entnimmt man jeder Kiste 60 Äpfel, bleiben in den Kisten insgesamt soviel Äpfel übrig, wie vorher in zwei Kisten waren.
Ermittle die Gesamtzahl aller Äpfel, die sich anfangs in den Kisten befanden!

2. Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:
Die Summe ihrer Ziffern beträgt 10. Vertauscht man ihre Ziffern und addiert zu dieser dadurch entstandenen Zahl die Zahl 2, so erhält man das Dreifache der ursprünglichen Zahl.

3. Die Zahl 97236 ist in sechs Summanden zu zerlegen. Der erste Summand ist gleich dem neunten Teil dieser Zahl, der zweite Summand ist doppelt so groß wie der erste, der dritte ist um 12792 kleiner als der zweite Summand, der vierte dreimal so groß wie der dritte und der fünfte ist ebenso groß wie der dritte Summand.
Wie lauten die sechs Summanden?

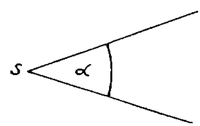
4. Hans nimmt am Training der Sektion Leichtathletik seiner Schulsportgemeinschaft teil. Eine der Übungen besteht in rhythmischem Gehen mit anschließendem Nachfedern im Stand. Die Länge der Übungsstrecke beträgt 30 m. Am Anfang und am Ende stehen Fahnenstangen. Hans legt die Strecke auf folgende Weise zurück:
Zwei Schritte vor, nachfedern, dann einen Schritt zurück, nachfedern, dann wieder zwei Schritte vor ... usf., bis er die zweite Fahnenstange erreicht.
Welches ist die genaue Anzahl von Schritten, die er unter den angegebenen Bedingungen insgesamt macht, wenn seine Schrittlänge genau 5 dm beträgt?

Klassenstufe 6

1. Eine Strecke von 20 m wird in drei Teilstrecken geteilt. Die erste Teilstrecke ist doppelt so lang wie die zweite, und die Länge der dritten Teilstrecke beträgt das Dreifache der Länge der ersten Teilstrecke.
Berechne die Längen der einzelnen Teilstrecken!

2. Gesucht ist die Menge aller natürlichen Zahlen a, die folgenden Bedingungen genügen:
(1) $100 < a < 1201$,
(2) a ist sowohl durch 3 als auch durch 4 als auch durch 5 teilbar,
(3) a ist nicht durch 8, nicht durch 9 und nicht durch 25 teilbar,
(4) a läßt bei der Division durch 11 einen Rest, der durch 2 teilbar ist.

3. Gegeben ist ein Winkel mit dem Gradmaß $\alpha = 36°$ (siehe Abb.).



Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal einen Winkel, dessen Gradmaß 99° beträgt!

4. Im Rahmen des Wiederaufbaus der Leipziger Innenstadt entstehen moderne Wohnkomplexe. Vor den Häusern werden Rasenflächen, Blumenbeete und Terrassen angelegt. Für eine der rechteckigen Terrassen werden genau 400 Sandsteinplatten verwendet. Die Platten bedecken lückenlos den Boden. Jede dieser Platten ist 60 cm lang und 40 cm breit. Die Länge dieser Terrasse beträgt 10 m.
Ermittle die Breite dieser Terrasse!

Klassenstufe 7

1. Gegeben sind eine Gerade g und ein nicht auf g liegender Punkt P.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal alle Geraden durch P, die mit g einen Winkel vom Gradmaß 60° bilden!

2. In den Kreis k mit dem Mittelpunkt M sei das nicht überschlagene Viereck ABCD so eingezeichnet, daß alle seine Seiten Sehnen des Kreises sind (Sehnenviereck).
Beweise, daß in jedem Sehnenviereck die Summe der Gradmaße je zweier gegenüberliegender Winkel 180° beträgt!

3. Jemand schreibt alle natürlichen Zahlen von 1 bis 5555 auf, jede genau einmal.
Berechne die Anzahl aller dabei geschriebenen Ziffern 9!

4. In einem zylindrischen Gefäß (gerader Kreiszylinder mit waagerechter Bodenfläche) befindet sich Wasser. Der Wasserspiegel steht bei $^3/_4$ der Höhe des Gefäßes. Nachdem genau $2^1/_2$ Liter Wasser aus diesem Gefäß ausgegossen wurden, steht der Wasserspiegel bei $^2/_5$ der Gefäßhöhe.
Welches Fassungsvermögen hat das Gefäß?

Klassenstufe 8

1. Klaus hat 7 Kugeln: 4 rote, 2 weiße und eine schwarze. Er soll sie in zwei Kästen A und B legen; in A drei, in B vier. Gib sämtliche möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen der Kugeln auf die zwei Kästen an!
(Die Reihenfolge, in der die Kugeln in den Kästen liegen, soll dabei nicht berücksichtigt werden.)

2. In der Ebene ε liege das Parallelogramm ABCD und die völlig außerhalb des Parallelogramms verlaufende Gerade g.
Beweise, daß die Summe der Entfernungen zweier gegenüberliegender Eckpunkte des Parallelogramms von der Geraden g gleich der Summe der Entfernungen der beiden anderen Eckpunkte von g ist!

3. 18% einer Zahl sind gleich 15% einer anderen Zahl.
Ermittle das Verhältnis der ersten zur zweiten dieser beiden Zahlen!

4. Beweise folgenden Satz:
Im Tangentenviereck ist die Summe der Längen je zweier gegenüberliegender Seiten gleich der Summe der Längen der beiden anderen Seiten.

Klassenstufe 9

1. Geben Sie vier verschiedene Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen an, so daß die Differenz der Quadrate der beiden Zahlen jedes Paares 105 beträgt!
(Je zwei Paare der Form (a, b) und (b, a) gelten dabei als nicht verschieden voneinander.)

2. Innerhalb des Kreises k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius von der Länge r liege der vom Mittelpunkt verschiedene Punkt P.
Konstruieren Sie unter allen Sehnen durch P die kürzeste!

3. Beweisen Sie den folgenden Satz:
Die Diagonalen des ebenen konvexen Vierecks ABCD schneiden einander genau dann rechtwinklig, wenn

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

gilt, wobei a, b, c und d die Seitenlängen des Vierecks sind.

4. Die Schülerinnen Brigitte, Christina, Dorothea, Eva, Inge und Monika und die Schüler Anton, Fred, Günter, Helmut, Jürgen und Kurt einer Laienspielgruppe wollen einen Tanz aufführen. Dabei wird zu Paaren getanzt.

(1) In keinem Paar soll der männliche Partner kleiner als der weibliche sein.

Außerdem haben einige Teilnehmer noch verschiedene Wünsche:

(2) Christina möchte nicht mit Anton tanzen, der kleiner als Brigitte ist.

(3) Jürgen möchte nur mit Dorothea oder Monika tanzen.

(4) Fred, der größer als Helmut, aber kleiner als Anton ist, möchte nur mit Eva oder Monika tanzen.

(5) Kurt, der weiß, daß Eva größer als Anton ist, versucht, eine Einteilung zu finden, die allen Wünschen gerecht wird.

Geben Sie alle Möglichkeiten der Zusammenstellung dieser Schüler zu Tanzpaaren an, die die genannten Wünsche erfüllt! Dabei soll angenommen werden, daß die nicht angegebenen Größen keine weiteren Einschränkungen, insbesondere keinen Widerspruch zu (1) und zu den genannten Wünschen ergeben.

Klassenstufe 10

1. Man ermittle alle reellen Zahlen a, für die eine der Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \frac{15}{4}x + a = 0$$

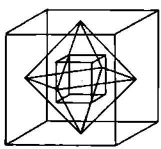
das Quadrat der anderen Wurzel ist!

2. Es sei $\frac{p}{q}$ ein unkürzbarer Bruch (p, q ganzzahlig und $q \neq 0$).

Man beweise, daß dann auch $\frac{q-p}{q}$ ein unkürzbarer Bruch ist!

3. Auf einem (ebenen) Zeichenblatt sind ein Punkt A und zwei nicht parallele Geraden g_1, g_2 gegeben, die nicht durch A gehen und deren Schnittpunkt S außerhalb des Zeichenblattes liegt.
Konstruieren Sie die Verbindungsgerade durch A und S, so daß die gesamte Konstruktion auf dem Zeichenblatt erfolgt!

4. Verbindet man bei einem Würfel die Mittelpunkte der Seitenflächen gradlinig miteinander, so erhält man die Kanten eines dem Würfel einbeschriebenen Oktaeders. Verfährt man in entsprechender Weise bei einem Oktaeder, so erhält man die Kanten eines Würfels.



a) Wie verhalten sich die Volumina von Würfel und einbeschriebenem Oktaeder zueinander?

b) Wie ist das Verhältnis der Volumina bei Oktaeder und einbeschriebenem Würfel?

c) Wie verhalten sich im ersten Fall die Inhalte der Oberflächen zueinander?

d) Wie ist das Verhältnis der Inhalte der Oberflächen im zweiten Fall?

Klassenstufe 11/12

1. Tag

1. Beweisen Sie folgenden Satz:
Sind α, β, γ die Gradmaße der Winkel eines beliebigen ebenen Dreiecks, so gilt stets
$\cot\alpha \cdot \cot\beta + \cot\beta \cdot \cot\gamma + \cot\gamma \cdot \cot\alpha = 1$.

2. In einer Ebene seien die vier Punkte P, Q, R, S, $P \neq Q$, $R \neq S$, PQ nicht senkrecht auf RS gegeben. Es ist zu zeigen, daß man dann stets vier Geraden p, q, r, s mit P auf p, Q auf q, R auf r und S auf s so konstruieren kann, daß ihre sämtlichen Schnittpunkte die Ecken eines Quadrates bilden!

3. Beweisen Sie folgende Behauptung:
Ist $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ durch 30 teilbar, dann ist auch $p = a_1^5 + a_2^5 + \ldots + a_n^5$ durch 30 teilbar.

($a_1, a_2, \ldots a_n$ seien n ganze Zahlen).

2. Tag

4. Es sei M der Mittelpunkt der Kugel K_1 und P sei ein Punkt außerhalb K_1. Ferner sei K_2 die Kugel mit dem Mittelpunkt P und dem Radius von der Länge $\overline{MP}$, und I_F sei der Flächeninhalt des innerhalb K_1 liegenden Teiles von K_2.
Beweisen Sie, daß I_F von der Lage des Punktes P unabhängig ist!

5. Es seien n, p, r, s natürliche Zahlen.
Ferner sei

$$u = \frac{(r + s \cdot \sqrt{p})^n + (r - s \cdot \sqrt{p})^n}{2}$$

$$v = \frac{(r + s \cdot \sqrt{p})^n - (r - s \cdot \sqrt{p})^n}{2 \cdot \sqrt{p}}$$

$t = r^2 - s^2p, \quad z = u^2 - t^n.$

Man beweise:

a) u und v sind natürliche Zahlen.

b) Die (somit ganze) Zahl z ist durch v^2 ohne Rest teilbar.

6. a) Geben Sie alle Tripel reeller Zahlen (x, y, z) an, die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x - y + 2z &= 2 \\ 8x + 5y + 3z &= 4 \end{aligned} \qquad (1)$$

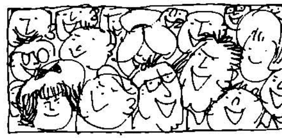
erfüllen!

b) Bilden Sie alle Gleichungssysteme, die sich von dem Gleichungssystem (1) in genau einem Koeffizienten unterscheiden und unendlich viele Lösungen besitzen!
(Als „Koeffizienten" seien hier sowohl die auf den „linken Seiten" stehenden „Vorzahlen" der Variablen als auch die „absoluten Glieder" auf den „rechten Seiten" bezeichnet.)
Geben Sie auch in diesen Fällen alle Tripel reeller Zahlen an, die die jeweiligen Gleichungssysteme erfüllen!

c) Bilden Sie ein Gleichungssystem, das sich von (1) in genau zwei Koeffizienten unterscheidet, das aber von keinem Tripel reeller Zahlen erfüllt wird!

In freien Stunden

alpha heiter



Aus den Silben

au-be-can-di-~~durch~~-c-~~ex~~-~~hek~~-~~in~~-~~kan~~-~~kel~~-kreis-lim-es-mit-ne-~~nent~~-~~punkt~~-~~po~~-ra-se-ser-ßen-te-~~tel~~-~~ter~~-~~to~~-~~tor~~-~~um~~-win

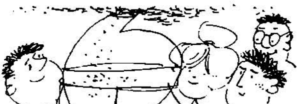
sollen 10 Wörter mit folgender Bedeutung gebildet werden, deren Anfangsbuchstaben, von oben nach unten gelesen, einen bekannten Mathematiker des Altertums ergeben:

1. Winkel am Dreieck
2. Halbmesser des Kreises
3. deutscher Mathematiker (Begründer der Mengenlehre)
4. Hohlmaß
5. einbeschriebener Kreis
6. Ort, der von allen Punkten des Kreisumfangs konstante Entfernung hat
7. Hochzahl
8. größte Sehne im Kreis
9. Begriff aus der Geometrie
10. einen Kreis schneidende Gerade

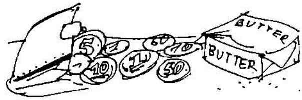
Eine Schule hat 731 Schüler. Im Januar 1966 stellt die Sekretärin fest, daß alle Monate des Jahres als Geburtsmonate vertreten sind. Wieviele Schüler gibt es dann mindestens, die am gleichen Tag Geburtstag haben? Wieviele Schüler kann es höchstens geben, die am gleichen Tag Geburtstag haben? (Kein Schüler hat am 29. Februar Geburtstag!)

$\frac{1}{5}$		$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{5}$		$\frac{4}{5}$

Trage die Zahlen 1, 3, 5, . . ., 17 so in die Felder des linken Quadrates ein, daß die Summe in jeder Zeile, Spalte und Diagonale stets 27 beträgt!
Ergänze die Felder des rechten Quadrates so, daß die Summe in jeder Zeile, Spalte und Diagonale stets $\frac{3}{2}$ beträgt!

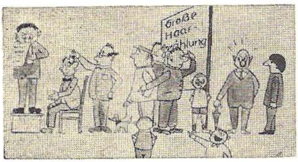


Im Chemieunterricht nehmen Klaus, Peter und Fritz von 320 g einer Substanz nacheinander je 25% von der jeweils in dem Gefäß vorhandenen Menge weg. Wieviel Gramm verbleiben im Gefäß?



Im Kopf zu lösen in 5 Sekunden!!!!

Ein Stück Markenbutter kostet 2,50 MDN. Wieviel muß man für 870 g zahlen?

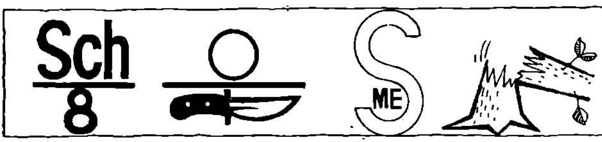


Aus: Moskauer Mathematikolympiade 1966

Ein Mensch hat auf dem Kopf nicht mehr als 150000 Haare. Es ist zu beweisen, daß in Moskau mindestens 40 Menschen leben, die die gleiche Zahl von Haaren auf dem Kopf haben.

Übersetzer: R. Höppner, Teiln. der VIII. IMO
Vignette: D. Medicke, EOS Elsterwerda, Kl. 10

Scherzfragen: Was bedeutet das?



Liebe Schülerin!
Lieber Schüler!

Nachdem Du nun die Bekanntschaft mit der neuen Schülerzeitschrift *alpha* gemacht hast, wirst Du Dir sicherlich eine Meinung über ihren Wert gebildet haben. Sollte „*Sie*“ Dir gefallen haben, bitten wir Dich, „*Sie*“ bei der Deutschen Post oder beim Buchhandel zu abonnieren. Falls Du schon ein Abonnement abgeschlossen hast, gib bitte diesen Bestellschein einem Deiner Mitschüler weiter. (Siehe Rückseite!)

Wir danken Dir für Deine Aufmerksamkeit.

Rumänien:
„100 Jahre metrisches Maßsystem"
55 Bani 1 Leu
Ausgabe: 5. September 1966
33 × 27 mm Querformat
Entwurf: V. Stoianov
Auflage: 500000

Am 20. Mai 1875 wurde zwischen 18 Staaten die Internationale Meterkonvention abgeschlossen. Sie gilt mit geringen Änderungen auch heute noch. 1964 gehörten ihr 36 Staaten an (nach Padelt/Laporte: Einheiten und Größenarten der Naturwissenschaften, VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1964, 10,80 MDN). Diese Staaten verpflichteten sich, ihr Meßwesen nach den in Paris beschlossenen Einheiten auszurichten. Besonders französische Wissenschaftler und Staatsmänner machten sich im 18. Jahrhundert um die Festlegung und Einführung des metrischen Maßsystems verdient. Rumänien gehört der Meterkonvention seit 1882 an und kann auf ein hundertjähriges Bestehen des metrischen Maßsystems in seinem Lande zurückblicken.

---

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift
Umfang: 32 Seiten.
erscheint sechsmal jährlich,
Einzelpreis –,50 MDN
Jahresabonnement (6 Hefte)
3,– MDN

Ich bestelle diese Zeitschrift laufend ab sofort über die Post

____
Name, Vorname

____
Postleitzahl, Wohnort

____
Straße, Hausnummer

DRUCKSACHE

An das Postamt

____

____

____

Sowjetisches Autorenkollektiv

Streifzüge durch die Mathematik

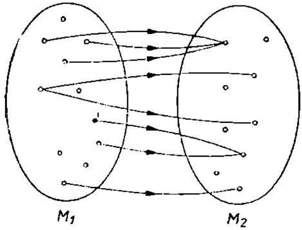
BAND 1

Urania-Verlag Leipzig/Jena/Berlin, 1965, MDN 12,—

„Mir ist die Mathematik ein Buch mit sieben Siegeln!“ Zuweilen begegnen wir noch solchen oder ähnlichen Äußerungen Lernender, die mit dem Fach Mathematik ihre Not haben. Es wäre freilich schlecht um die moderne Wissenschaft und Technik bestellt, wenn dieser Standpunkt allgemein verbreitet wäre. Die Mathematik durchdringt heute die ihr scheinbar entlegensten Gebiete. Welcher Uneingeweihte hätte vor einigen Jahren wohl vermutet, daß sie einst auch in der Biologie, in einigen Zweigen der Gesellschafts- und sogar in der Sprachwissenschaft angewendet würde?
Wissen wir eigentlich, was es mit den „sieben Siegeln“, von denen oben die Rede war, auf sich hat? Sind wir uns bewußt, daß in diesem Ausspruch mathematisches Wissen aus alten Zeiten verwurzelt ist? Die Autoren knüpfen an solche Fragen an und führen uns in die Welt der Zahlen und ihrer Geschichte, in den Bereich der Rechenfertigkeit und Näherungsrechnung bis zu den Grundproblemen, die im letzten Jahrhundert zur nichteuklidischen Geometrie führten.
Ist Kopfrechnen heute überflüssig? Was hat es mit dem Dualsystem auf sich, und welche Rolle spielt es bei den elektronischen Rechenmaschinen? Was ist ein Axiom? Solche und andere Fragen werden in interessantem und spannendem Zusammenhang aufgeworfen und beantwortet.
Hervorragende sowjetische Mathematiker haben sich für dieses Werk zu einem Autorenkollektiv zusammengefunden. Wir begegnen klangvollen Namen, die unter den Mathematikern in aller Welt bereits zum Begriff geworden sind. Die Autoren haben die große Kunst gemeistert, einfach und verständlich zu schreiben, selbst dort, wo sie Ausblicke auf kompliziertere Probleme geben. Dieser Band wird besonders das Bemühen unserer jungen Generation unterstützen, mit der Mathematik auf du und du zu stehen.

Und hier ist eine Aufgabe aus dem Buch:

Kann man 28 g irgendeines Stoffes auf einer Schalenwaage wiegen, wenn man nur Wägestücke zu 3 g und 5 g hat?



LILLY GÖRKE

Mengen Relationen Funktionen

Volk und Wissen Volkseigener Verlag 1967
304 Seiten, Bestell-Nr. 002504, MDN 11,80

Der gesellschaftliche Fortschritt verlangt einen dem modernen Stand von Wissenschaft und Technik angepaßten Mathematikunterricht. Das erfordert eine stärkere Herausarbeitung des mathematisch Wesentlichen und ein genügend ausbaufähiges Fundament, das von den Schülern sicher beherrscht wird. Hier kommt der Mengenlehre besondere Bedeutung zu.
Das erste Kapitel dieses Buches behandelt daher die Grundbegriffe der Mengenlehre. Neben Mengen sind Relationen, die ja selbst spezielle Mengen darstellen, für ein tieferes Eindringen in den Funktionsbegriff, in geometrische Abbildungen und in den Zahlenbegriff unerläßlich. Auf sie wird im zweiten Kapitel eingegangen. Im vierten Kapitel wird ein Abriß des mengentheoretischen und des axiomatischen Aufbaus des Bereichs der natürlichen Zahlen gegeben. Das Kapitel über unendliche Mengen steht an der Grenze des für den Unterricht Erforderlichen. Das Buch schließt mit Anwendungen von Mengen im Schulstoff.
Es ist besonders für Arbeitsgemeinschaftsleiter, Lehrer und talentierte Schüler (unter Anleitung Erwachsener) geeignet.

Aufgaben von Mathematikolympiaden in der UdSSR und in der ČSSR

Aus dem Russischen und Tschechischen übersetzt

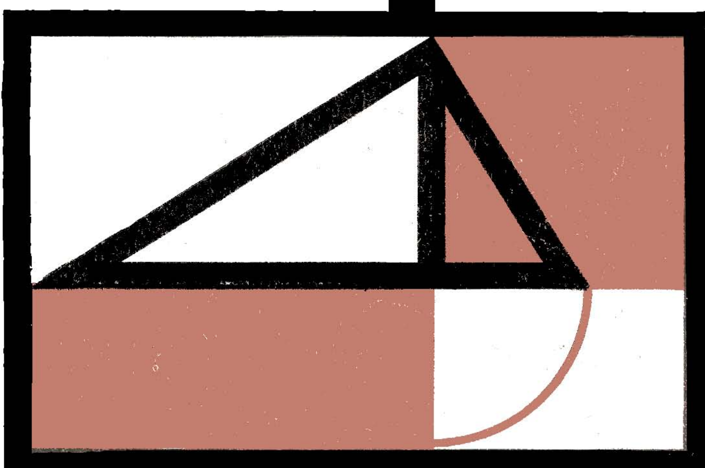
Herausgegeben von Prof. Dr. Udo Pirl

Volk und Wissen Volkseigener Verlag, 1965 · 292 Seiten, Bestell-Nr. 002106, MDN 8,20

Mit diesem Buch erhalten Schüler ab Klassenstufe 8 ein reichhaltiges Aufgabenmaterial, das zur Vorbereitung auf Olympiaden besonders geeignet ist, das darüber hinaus gute Vergleichsmöglichkeiten im Hinblick auf den Charakter und den Schwierigkeitsgrad der Olympiadeaufgaben in der UdSSR und in der ČSSR bietet. Für sämtliche Aufgaben werden ausführliche Lösungswege angegeben.

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



2

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967
Preis 0,50

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967 Heft 2

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541
Postscheckkonto: Berlin 132626

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 MDN, im Abonnement halbjährlich (3 Hefte) 1,50 MDN
Zu beziehen durch die Deutsche Post und den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: ADN (S. 33); Archiv Staatlich Math.-Phys. Salon, Dresden (S. 34); Archiv Karl-Sudhoff-Institut, Leipzig (S. 36); D. Harasim, Leipzig (S. 47); Vignetten: H.-J. Jordan (Leipzig)

Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG, 701 Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Redaktionsschluß: 11. 1. 1967

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angeführten Klassenstufe geeignet

Gottfried Wilhelm Leibniz als Mathematiker

Aus Anlaß des 250. Todestages

Am 14. November 1966 jährte sich zum 250. Male der Todestag von G. W. Leibniz. Die Wissenschaftsgeschichte nennt ihn den letzten wahrhaft umfassend gebildeten Gelehrten, der alle Wissenschaften seiner Zeit beherrschte. Heute ist die Spezialisierung der einzelnen Disziplinen so weit fortgeschritten, daß z. B. große Mathematiker selbst nur einen Teil des Gesamtgebäudes der Mathematik überblicken können.

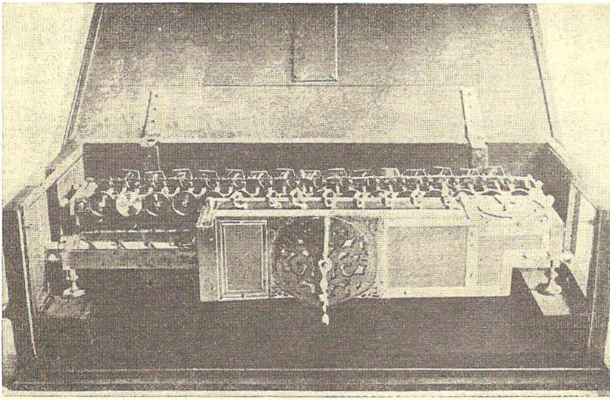
G. W. Leibniz wurde am 1. Juli 1646 als Sohn eines Professors der Rechte in Leipzig geboren. Der frühreife Knabe lernte ohne fremde Hilfe Latein und las bereits mit acht Jahren die römischen Klassiker aus der Bibliothek seines frühzeitig verstorbenen Vaters. Mit fünfzehn Jahren bezog er die Leipziger Universität. Er studierte Rechtswissenschaft und Philosophie, unterbrochen durch ein Semester Mathematik bei Erhard Weigel in Jena. Weigel kannte nicht die Probleme, an denen die führenden Mathematiker in England und Frankreich arbeiteten, und so konnte Leibniz bei ihm nicht viel lernen. Trotzdem erhielt in Jena der Traum seiner Kindheit neue Nahrung, mit Hilfe der Mathematik, insbesondere der Kombinatorik, neue Wahrheiten in allen Wissenschaften zu entdecken.

Kaum zwanzigjährig wollte er den Doktorgrad in Leipzig erwerben, wurde aber wegen seiner Jugend abgewiesen. Er ging deshalb nach Altdorf bei Nürnberg. Dort promovierte er mit so großem Erfolg, daß man ihm sofort eine Professur antrug. Er lehnte ab und trat wenig später in die Dienste des Fürsten Johann Phillipp von Schönborn. Eine entscheidende Wende in seinem Leben bedeutete der Auftrag des Fürsten, als Diplomat nach Paris zu gehen. Nun konnte er die deutschen Kleinstaaten, die auch wissenschaftlich durch den dreißigjährigen Krieg weit zurückgeworfen waren, endlich hinter sich lassen und sich in eines der damals größten wissenschaftlichen Zentren Europas begeben.

Als Leibniz 1672 nach Paris kommt, ist er seinen eigenen Worten nach ein Anfänger in der Mathematik. Er beschäftigt sich zunächst mit der Summation unendlicher Reihen, löst hier erneut ein von Christiaan Huygens bereits gelöstes Problem und wird mit diesem großen Mathematiker und Physiker näher bekannt.

Leibniz beschäftigte sich auch Zeit seines Lebens mit praktischen Dingen. So konstruierte er eine Rechenmaschine für alle vier Grundrechenoperationen. Er führte sie 1673 in einer Sitzung der Royal Society, der englischen königlichen Akademie (London) vor. Obwohl die Maschine unvollkommen war, wurde er durch Vermittlung H. Oldenburgs, des Sekretärs der Royal Society, als Mitglied aufgenommen.

Zwei große Problemkreise waren es in der Hauptsache, die die Größten der Mathematik des 17. Jahrhunderts beschäftigten, das Tangentenproblem und das Flächeninhaltsproblem. Das Tangentenproblem besteht darin, die Tangente an eine beliebig gestaltete glatte Kurve zu finden. Beim Flächeninhaltsproblem geht es darum, den Flächeninhalt eines krummlinig begrenzten Flächenstückes zu ermitteln. Hat man dafür eine allgemeine Methode, so ist man in der Lage, die Länge von Kurven, ferner Trägheitsmomente, Schwerpunkte und vieles andere mehr zu berechnen. Das Tangentenproblem ist die Grundaufgabe der Differentialrechnung, das Flächeninhaltsproblem die der Integralrechnung. Differentialrechnung, Reihenlehre, Integralrech-



Die von Leibniz konstruierte Rechenmaschine

nung und alle damit zusammenhängenden Gebiete faßt man unter dem Begriff „Infinitesimalrechnung" zusammen.

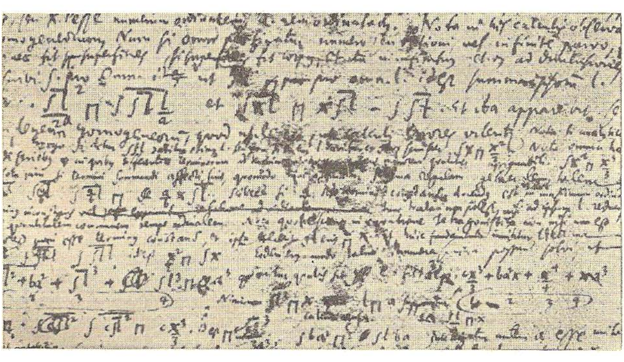
Leibniz studierte die infinitesimalen Methoden seiner Vorgänger sehr gründlich, machte bald neue Entdeckungen, z. B. die unendliche Reihe für π, und gehörte bereits ein Jahr später zu den führenden Mathematikern Europas. Inzwischen arbeitete er auch an seiner Rechenmaschine weiter, die er durch die Erfindung der Staffelwalze 1674 zum Funktionieren brachte. Die Staffelwalze ist heute noch das Grundelement der mechanischen und elektromechanischen Rechenmaschinen.

Er erkannte die Notwendigkeit, für die infinitesimale Mathematik eine allgemeine Methode zu finden. Nur Genies konnten sich vor Leibniz mit Problemen des Infinitesimalen befassen. Es gab keine umfassende Methode, keinen allgemeinen Kalkül mit geeigneten Bezeichnungen, in dem man hätte nach festen Rechenregeln rechnen und Ergebnisse erzielen können. Jedes Einzelproblem mußte vielmehr immer wieder neu durchdacht werden, wozu nur wenige in der Lage waren.

Im Herbst 1675 gelingt ihm die Erfindung des „Calculus", und damit war jener lang gesuchte allgemeine Kalkül zur Behandlung des Tangenten- und des Flächeninhaltsproblems gefunden. Auch die von Barrow, dem Lehrer Newtons, entdeckte Beziehung zwischen diesen beiden Grundproblemen, die wir heute den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung nennen, wurde in diesem neuen Kalkül erst richtig klar. Leibniz benutzte auf einem kleinen Zettel, der das Datum 29. Okt. 1675 trägt, das Differential- und das Integralzeichen zum ersten Male. Mit den Leibnizschen Bezeichnungen wurde die Infinitesimalrechnung von Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli, dem Marquise de l'Hospital, Euler und vielen anderen Mathematikern des 18. und 19. Jahrhunderts weiter ausgebaut. Die Infinitesimalrechnung hat sich zu einem riesigen Lehrgebäude der modernen Analysis entwickelt. Mit Hilfe der Analysis können sehr viele Aufgaben der Naturwissenschaften gelöst werden. Ob elektrische Schwingungen, ob das Wachsen von Bäumen oder Bakterien, das Schwappen von Wasser in einem Eimer, die Bewegung eines Pendels, der Lauf der Gestirne, der Flug von Raketen, der Bau der

Atome; all das und noch viel mehr kann mit den exakten Methoden der Analysis berechnet und erforscht werden.
Es dauerte einige Zeit, bis sich Leibniz' Ideen und Bezeichnungen allgemein durchgesetzt hatten. Zunächst fand er nicht die gebührende Anerkennung. Er konnte weder am Hof Ludwigs XIV. noch in der Akademie der Wissenschaften zu Paris festen Fuß fassen, auch die Hoffnung auf eine Professur an der Pariser Universität zerschlug sich. Nach dem Tode J. Phillipps von Schönborn blieben die Gelder aus Deutschland aus. Leibniz mußte sich um eine feste Stellung bemühen und nahm das Angebot des Herzogs von Hannover an, als Bibliothekar in seine Dienste zu treten.
Leibniz verließ sehr ungern Paris, jene Stadt, der er so viele geistige Anregungen verdankte. Er reiste über London und die Niederlande nach Hannover. Dort wurde er als Hofrat zu vielerlei Dingen herangezogen; er verwaltete die Bibliothek, erfüllte diplomatische Aufträge, beschäftige sich mit der Verbesserung des Steuer- und Gerichtswesens, führte Verhandlungen über die Vereinigung der christlichen Konfessionen und befaßte sich mit der Wasserregulierung in den Bergwerken des Harzes durch Windkraft. Daneben arbeitete er unermüdlich an seinen philosophischen und mathematischen Forschungen. Am meisten fehlte ihm in Hannover das Gespräch mit führenden Gelehrten seiner Zeit. Deshalb unterhielt er einen ausgedehnten Briefwechsel mit insgesamt 1063 Persönlichkeiten, mit Mathematikern, Philosophen, Ärzten, Sprachwissenschaftlern, Theologen, Historikern und anderen Fachleuten, mit Künstlern, Fürsten und Diplomaten. Unter seinen Korespondenten sind besonders zu nennen: die Gebrüder Bernoulli, Graf E. W. von Tschirnhaus, Isaac Newton, Huygens, Goldbach und de l'Hospital.
Leibniz legte in der neugegründeten Zeitschrift „Acta eruditorum" das Wesen seiner Infinitesimalrechnung dar und behandelte in einer Folge von Abhandlungen (ab 1682) mehrere Einzelprobleme, u. a. Quadraturen, das optische Brechungsgesetz, den freien Fall im zähen Medium. Die Lösung zahlreicher weiterer Einzelfragen hat er an andere Mathematiker brieflich mitgeteilt. Außerdem gingen vielerlei Anregungen für den weiteren Ausbau der Infinitesimalrechnung von ihm aus.
Am Hof war seine Stellung schlechter geworden, besonders nach dem Tod des alten Herzogs. Da erbot sich Leibniz, die Geschichte des Fürstenhauses der Welfen zu schreiben. Er unternahm eine große Reise über München, Wien nach Rom, Florenz

Handschrift von Leibniz, in der das Integralzeichen das erte Mal verwendet wird



und Venedig, um entsprechende Quellen zu studieren. Leibniz war der erste, der klar erkannte und sich danach richtete, daß am Anfang jeder historischen Arbeit ein gründliches Quellenstudium stehen muß. Er ist damit auch zum Begründer der exakten Geschichtswissenschaft geworden.

Aber die Welfengeschichte wird immer mehr zu einer Fessel für den universellen Gelehrten, der es einfach nicht fertig bringt, nur eine einzige Aufgabe, die ihn nicht sonderlich interessiert, zu bearbeiten. Außerdem wirft der Prioritätsstreit mit Newton um die Erfindung der Differential- und Integralrechnung Schatten auf sein auch von Krankheit gezeichnetes Alter. 1712 wird er von der Royal Society öffentlich des geistigen Diebstahls an Newtons Ideen beschuldigt. Heute ist auf Grund des Studiums der Briefe und anderer Quellen eindeutig nachgewiesen, daß Leibniz Newtons entscheidende Manuskripte nie gesehen hat, daß also Newton und Leibniz unabhängig voneinander die Differential- und Integralrechnung entdeckt haben. Trotz der tiefen Einsicht von Newton in das Wesen der Infinitesimalrechnung waren seine Bezeichnungen sehr viel weniger durchgebildet als die von Leibniz sorgfältig durchdachten Symbole, so daß die spätere Entwicklung auf dem Kontinent ausschließlich auf Leibniz fußt. Ja, es ist sogar zu bemerken, daß in England, wo man zunächst noch an Newtons Bezeichnungen festhielt, eine merkliche Stockung in der Entwicklung der infinitesimalen Mathematik gegenüber dem Kontinent eintrat.

In Leibniz' Hannoversche Zeit fallen auch seine Bemühungen, das wissenschaftliche Leben zu organisieren. Er gründete 1700 die Berliner Societät der Wissenschaften, aus der die heutige Deutsche Akademie der Wissenschaften hervorging und wurde ihr erster Präsident. Andere Pläne zur Gründung weiterer Akademien in Deutschland zerschlugen sich; dagegen konnte Leibniz noch wichtige Vorarbeiten zur Gründung einer Akademie in Petersburg leisten, wie überhaupt der russische Zar Peter der Große als einziger unter Europas Monarchen die volle Bedeutung von Leibniz erkannte.

In seinen letzten Lebensjahren in Hannover vereinsamte er immer mehr. Bei Hofe fiel er zunehmend in Ungnade, da es offensichtlich wurde, daß er die Welfengeschichte nie würde vollenden können. Am 14. November 1716 nahm ihm der Tod die Feder für immer aus der Hand. Leibniz, von dem der große französische Enzyklopädist D. Diderot sagte „Dieser Mann hat allein Deutschland soviel Ruhm gebracht wie Platon, Aristoteles und Archimedes zusammen Griechenland“, wurde nach dem Zeugnis eines Zeitgenossen nicht viel besser begraben als ein Straßenräuber. Nicht ein einziges Mitglied des Hofes war zur Beerdigung erschienen.

W. Purkert

Die Titelvignette zeigt die Gedenkmünze, die auf Beschluß des Ministerrates der DDR von der Deutschen Notenbank zu Ehren von G. W. Leibniz herausgegeben wurde

---

Mathematiker, die zur Zeit Leibniz' lebten

Erhard Weigel (1625 bis 1699)
Christian Huygens (1629 bis 1695)
Blaise Pascal (1623 bis 1662)
René Descartes (1596 bis 1650)
John Wallis (1616 bis 1703)
Jacob Bernoulli (1655 bis 1705)
Johann Bernoulli (1667 bis 1748)
Marquise de l'Hospital (1661 bis 1704)
Leonard Euler (1707 bis 1783)
Graf E. W. von Tschirnhaus (1651—1708)
Isaac Newton (1643 bis 1727)
Christian Goldbach (1690 bis 1764)

Beweise durch vollständige Induktion

1. Teil

Gilt für jede natürliche Zahl n $2^n > n$ **?**

In der Mathematik sind auf Schritt und Tritt Beweise zu führen: man schließt von richtigen Sätzen auf neue richtige Sätze. Oft stößt man dabei auf Sätze, in denen behauptet wird, daß eine Aussage für alle natürlichen Zahlen gilt. Beispielsweise ist „Für jede natürliche Zahl $n \geqq 3$ ist die Summe der Innenwinkel eines konvexen n-Eckes gleich $(n - 2) \cdot 180°$" eine solche Aussage. In diesem Beitrag wird eine Methode zum Beweis solcher Sätze erläutert.

I.

Wir wollen folgenden Satz betrachten: Das Quadrat von 2 ist größer als 2.
Unter Verwendung der bekannten mathematischen Zeichen kann dieser Satz auch kürzer ausgedrückt werden: $2^2 > 2$.
Ohne Schwierigkeiten werden wir feststellen, daß dieser Satz etwas richtiges aussagt. Wir brauchen nur das Quadrat von 2 auszurechnen und mit 2 zu vergleichen. Wir sagen: *Der Satz ist wahr.*
Als nächstes betrachten wir den Satz: Die dritte Potenz von 2 ist größer als 3, oder kurz: $2^3 > 3$.
Wieder brauchen wir 2^3 nur auszurechnen und mit 3 zu vergleichen ($2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $8 > 3$), um zu bestätigen, daß dieser Satz wahr ist.
Durch das gleiche Verfahren können wir auch *entscheiden*, ob $2^4 > 4$, $2^5 > 5$, $2^6 > 6$ usw. *wahr* oder *falsch* ist.
Wir finden, daß die Sätze $2^2 > 2$, $2^3 > 3$, $2^4 > 4$, $2^5 > 5$, usw. *wahr* sind. Für die natürliche Zahl 1 wollen wir noch den Satz $2^1 > 1$ und für die natürliche Zahl 0 den Satz $2^0 > 0$ hinzunehmen. Dabei meinen wir mit 2^1 die Zahl 2 und mit 2^0 die Zahl 1, d. h., wir legen die Bedeutung von 2^1 bzw. 2^0 fest durch $2^1 = 2$ und $2^0 = 1$. Damit gehört dann zu *jeder* natürlichen Zahl n die Ungleichung $2^n > n$.
Eine Tabelle macht uns das besonders deutlich:

natürliche Zahl	zugeordneter Satz
0	$2^0 > 0$
1	$2^1 > 1$
2	$2^2 > 2$
3	$2^3 > 3$
.	.
	.
	.

Wollen wir nun die Wahrheit aller dieser Sätze behaupten, so können wir einfacher sagen:

Für jede natürliche Zahl n gilt $2^n > n$.

Diese letzte Behauptung ist wahr, wenn der Satz für $n = 0$ wahr ist *und* wenn der Satz für $n = 1$ wahr ist *und* wenn der Satz für $n = 2$ wahr ist *und* wenn der Satz für $n = 3$ wahr ist usw. Dabei schreiben wir „usw." nicht etwa aus Bequemlichkeit, sondern weil es unmöglich ist, alle einzelnen Sätze aufzuschreiben. Wir schreiben „usw." weil jeder von uns weiß, wie die Aufzählung fortgesetzt werden muß. Ist nun für jede natürliche Zahl n tatsächlich $2^n > n$?
Die Antwort auf diese Frage fänden wir nicht, wenn wir das *für jede einzelne* natürliche Zahl durch Ausrechnen und Vergleichen überprüfen wollten, da unser Nachprüfen dann kein Ende haben würde. Würden wir den Satz für $n = 4$, $n = 5$ usw. bis $n = 100$ nachprüfen, so würden wir feststellen, daß er auch für diese natürlichen Zahlen gilt. Aber wir kennen dann die Gültigkeit des Satzes eben nur für die Zahlen, für die wir den Satz überprüft haben.
Andererseits wäre es leichtfertig, würden wir aus der Gültigkeit des Satzes für $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ ohne Nachprüfung schließen, daß der Satz für alle natürlichen Zahlen wahr ist.
Dazu wollen wir ein Beispiel angeben. L. Euler, ein bedeutender Mathematiker des 18. Jahrhunderts, hat folgende Summe untersucht:

$$n^2 + n + 41 .$$

Um uns bequemer auszudrücken, wollen wir die Summe mit $f(n)$ (lies: f von n) abkürzen:

$$f(n) = n^2 + n + 41.$$

Für $n = 0$ erhalten wir $f(0) = 0^2 + 0 + 41 = 41$,
für $n = 1$ ergibt sich $f(1) = 1^2 + 1 + 41 = 43$.
Wir setzen für n der Reihe nach die natürlichen Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ein. Wir stellen die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen.

n	$f(n)$
0	41
1	43
.	.
.	.
.	.

Wie schon für $n = 0$ und $n = 1$ erhalten wir auch für die weiteren natürlichen Zahlen bis 10 im Ergebnis stets Primzahlen. Aber wir dürfen daraus *nicht* den Schluß ziehen, daß $f(n)$ für *jede* natürliche Zahl eine Primzahl liefert. Zwar erhält man für die weiteren natürlichen Zahlen bis 39 ebenfalls Primzahlen, aber für $n = 40$ bekommen wir:

$$f(40) = 40^2 + 40 + 41.$$

Mit Hilfe einer binomischen Formel finden wir:

$$f(40) = 40^2 + 2 \cdot 40 + 1 = (40 + 1)^2 = 41^2.$$

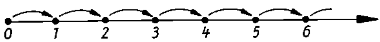
Eine Quadratzahl kann natürlich keine Primzahl sein.

II.

Durch Nachprüfen können wir auch die Gültigkeit des folgenden Satzes immer nur für *endlich viele* natürliche Zahlen feststellen: „Für jede natürliche Zahl $n \geqq 3$ ist die Summe der Innenwinkel eines konvexen n-Eckes gleich $(n - 2) \cdot 180°$."
Wie überzeugen wir uns nun von der Gültigkeit des Satzes für *alle* natürlichen Zahlen? Hier helfen uns die Eigenschaften der natürlichen Zahlen weiter.
Die Menge der natürlichen Zahlen ist die Menge der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, ... Da es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, können wir sie weder alle aufzählen noch auf-

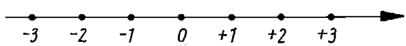
schreiben. Dennoch sind wir in der Lage, uns auf einfache Weise einen Überblick über alle natürlichen Zahlen zu verschaffen. Beginnen wir mit 0 und zählen immer um 1 weiter, so können wir zu *jeder* natürlichen Zahl gelangen, d. h., jede natürliche Zahl ist auf diese Weise erreichbar. Nennt uns jemand eine natürliche Zahl, so können wir, indem wir mit 0 beginnen und immer um 1 weiterzählen, bis zur genannten Zahl zählen. Auf *jede* natürliche Zahl *folgt* unmittelbar *eine bestimmte* natürliche Zahl, auf 0 folgt 1, auf 1 folgt 2 usw. (Abb. 1).

Abb. 1



Jede natürliche Zahl, *ausgenommen die Zahl* 0, hat einen *eindeutig bestimmten Vorgänger*. Die Zahl 0 hat *keine* natürliche Zahl als Vorgänger, d. h. sie folgt auf keine natürliche Zahl. 1 hat den Vorgänger 0, 2 hat den Vorgänger 1 usw.
Sind uns irgendwelche natürlichen Zahlen gegeben, so gibt es unter diesen stets eine *kleinste Zahl*. Z. B. ist von den Zahlen 247, 31776, 56, 321 offensichtlich 56 die kleinste Zahl. Von allen geraden natürlichen Zahlen ist 0 die kleinste. Von allen Primzahlen ist 2 die kleinste Zahl. Auch die Menge aller natürlichen Zahlen enthält eine kleinste Zahl, nämlich die Zahl 0.
Jede Menge von irgendwelchen natürlichen Zahlen enthält eine kleinste Zahl.
Diese und auch die vorher genannten Eigenschaften der natürlichen Zahlen wollen wir hier ohne Begründung als bekannt voraussetzen und aus ihnen eine Beweismethode gewinnen.
Zunächst aber werden wir uns noch davon überzeugen, daß die *genannten Eigenschaften nicht jeder Zahlenmenge zukommen.* Betrachten wir zum Beispiel die *Menge der ganzen Zahlen* $(0, +1, -1, +2, -2, \ldots)$, so hat dort auch die Zahl 0 einen Vorgänger, nämlich die Zahl -1. Auch enthält diese Menge keine kleinste Zahl. Das können wir uns leicht überlegen. Dazu betrachten wir die Zahlengerade mit den ganzen Zahlen (Abb. 2).

Abb. 2



Gäbe es eine kleinste ganze Zahl, so dürfte links von ihr keine ganze Zahl liegen. Aber links von jeder ganzen Zahl liegen sogar unendlich viele ganze Zahlen. Auch gibt es *Mengen von gebrochenen Zahlen,* die keine kleinste Zahl enthalten, z. B. die durch Brüche mit dem Zähler 1 dargestellten Zahlen:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

In der Reihenfolge, wie die gebrochenen Zahlen hier aufgeschrieben sind, folgt auf jede gebrochene Zahl eine noch kleinere gebrochene Zahl. Folglich kann keine von ihnen kleinste Zahl dieser Menge sein.
Bei den genannten Eigenschaften handelt es sich also um besondere Eigenschaften der natürlichen Zahlen. Wir stellen sie noch einmal zusammen:

Jede natürliche Zahl hat einen eindeutig bestimmten Nachfolger.
Jede natürliche Zahl, die verschieden von 0 ist, hat einen eindeutig bestimmten Vorgänger.
Die Zahl 0 hat keinen Vorgänger.
Jede Menge irgendwelcher natürlicher Zahlen enthält eine kleinste natürliche Zahl.

III.

Wir können nun das Beweisverfahren angeben und begründen.

Wollen wir einen Satz über alle natürlichen Zahlen beweisen, so brauchen wir *nur*

(1) zu zeigen: Der Satz ist für die Zahl 0 wahr, und

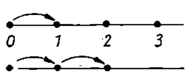
(2) zu zeigen: *Wenn* der Satz für eine beliebige natürliche Zahl wahr ist, *so* ist er auch für den Nachfolger dieser Zahl wahr.

Haben wir die Punkte (1) und (2) nachgewiesen, so können wir sicher sein, daß der Satz *für alle natürlichen Zahlen* gilt.

Das werden wir nun mit Hilfe der oben zusammengestellten Eigenschaften der natürlichen Zahlen begründen.

Wir nehmen dazu an, daß wir für einen Satz über natürliche Zahlen diese beiden Aussagen bewiesen haben. Wegen Punkt (2) wissen wir dann: *Falls* der Satz für eine beliebige natürliche Zahl gilt, *so* gilt er auch für die nachfolgende Zahl. Damit können wir natürlich nur etwas anfangen, wenn wir von einer bestimmten Zahl wissen, daß der Satz für sie gilt. Hier hilft uns Punkt (1) weiter; denn dieser sichert uns die Gültigkeit des Satzes für *die Zahl* 0. Wegen Punkt (2) gilt der Satz dann auch für die Zahl 1; denn (2) besagt: *Wenn* der Satz für die Zahl 0 gilt, *so* gilt er auch für den Nachfolger von 0. Nun gilt der Satz aber für 0, also gilt er auch für 1. *Da* der Satz nun auch *für* die *Zahl* 1 gilt, *so* gilt er (wieder nach Punkt (2)) *auch für die Zahl* 2 usw. (Abb. 3).

Abb. 3



Punkt (1) sichert uns eine Anfangszahl, für die der Satz gilt, und Punkt (2) besagt, daß sich die Gültigkeit des Satzes von einer Zahl auf die nachfolgende vererbt.

Wir sind aber wieder genötigt, „usw." zu gebrauchen. Könnte nicht doch an irgendeiner Stelle, vielleicht bei 1000000 oder bei einer noch größeren Zahl, das „Unglück" eintreten, daß der Satz dort nicht gilt?

Nehmen wir einmal an, *es gibt* solche natürlichen Zahlen, für die der Satz *nicht* gilt. Wie wir wissen, gibt es dann *unter diesen Zahlen* auch eine *kleinste Zahl*. Wir wollen sie m nennen. Also ist m die kleinste natürliche Zahl, für die der Satz nicht gilt, falsch ist. Die Zahl m kann nicht 0 sein; denn für 0 gilt der Satz wegen Punkt (1). Außer 0 hat aber jede natürliche Zahl einen *Vorgänger*. Also hat unsere kleinste Zahl m einen Vorgänger $m - 1$. *Für diesen Vorgänger* ist unser Satz aber *wahr*; denn die kleinste Zahl, für die der Satz nicht gilt, kommt ja erst danach. Aus Punkt (2) folgt aber: *Wenn* der Satz für $m - 1$ wahr ist, *so* ist er auch für den Nachfolger von $m - 1$ wahr. Dieser Nachfolger ist m. Nun ist der Satz für $m - 1$ tatsächlich wahr. Also ist er *auch für m wahr*. Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, er sei für m nicht wahr. Also muß die gemachte Annahme falsch sein!

Folglich kann es keine kleinste Zahl geben, für die der Satz nicht gilt, und deshalb kann es überhaupt *keine natürliche Zahl geben, für die der Satz nicht gilt*. Also gilt der Satz tatsächlich für alle natürlichen Zahlen.

Wir haben zur Begründung der Beweismethode von den im Abschnitt II genannten Eigenschaften der natürlichen Zahlen Gebrauch gemacht. Deshalb können wir mit dieser Methode auch *nur* Sätze wie beispielsweise: „Für jede natürliche Zahl $n \geqq 3$ ist die Summe der Innenwinkel eines konvexen n-Eckes gleich $(n - 2) \cdot 180°$" beweisen.

Die Beweismethode heißt *vollständige Induktion*[1]. Dabei nennt man Punkt (1) den *Induktionsanfang* und (2) den *Induktionsschritt*.

Im nächsten Heft werden einige Sätze durch vollständige Induktion bewiesen.

W. Stoye

[1] Das ist ein Fachausdruck der Mathematik, auf den hier nicht näher eingegangen werden kann.

Wir operieren mit Mengen

Teil 2

$M \subseteq G \quad V \cap Z = \{h, k, l\}$

$a \in \overline{M} \quad E \cup Z \quad S \cap E = \emptyset$

1. Die Bedeutung des Grundbereichs bei Mengenbildungen

Wie wir wissen, werden Mengen häufig dadurch gebildet, daß man Elemente zusammenfaßt, die irgendeine bestimmte *Eigenschaft* oder ein bestimmtes *Merkmal* gemeinsam haben. So können wir z. B. die Menge der Bezirkshauptstädte der DDR bilden — nennen wir sie hier einmal B oder die Menge der Thälmann-Pioniere einer Klasse — wir bezeichnen sie etwa mit P oder die Oberliga-Mannschaft des FC Karl-Marx-Stadt — diese Menge soll mit F bezeichnet werden usw.
Wäre es vielleicht auch möglich, eine Menge dadurch festzulegen, daß man angibt, welche Eigenschaft (welches Merkmal) ihre Elemente *nicht* haben sollen? Probieren wir es einmal an einem Beispiel! Wir wollen versuchen, eine Menge B^* zu bilden, deren Elemente *nicht* die Eigenschaft haben sollen, Bezirkshauptstadt der DDR zu sein. Überlegen wir uns, welche Elemente zu B^* gehören würden: Da fallen uns vielleicht Stralsund, Weißenfels und Senftenberg ein. Diese Städte sind keine Bezirkshauptstädte der DDR, sie würden also zu B^* gehören. Wären auch Warschau, Kairo oder Tokio Elemente von B^*? Anscheinend ja; denn auch sie sind keine Bezirkshauptstädte der DDR. Man könnte aber einwenden, daß Warschau, Kairo und Tokio gar nicht in der DDR liegen und deshalb vielleicht doch nicht zu B^* gezählt werden sollten? Wie ist es dann mit der Insel Rügen? Oder mit dem Müggelsee? Oder mit dem Leipziger Opernhaus? Weder Rügen noch der Müggelsee noch das Leipziger Opernhaus sind Bezirkshauptstädte der DDR, wir müßten also alle diese Dinge als Elemente von B^* ansehen. Aber viele werden dagegen schon protestieren und darauf hinweisen, daß dieser Weg ins Uferlose führt — schließlich würden so z. B. auch alle Leser von *alpha* zu B^* gehören usw. Es ist offenbar notwendig, bei der Bildung von B^* bestimmte Einschränkungen zu machen. Wir müssen genau abgrenzen, aus welchem *Grundbereich* die Elemente überhaupt nur entnommen werden sollen. Im vorliegenden Fall käme als Grundbereich am ehesten die Gesamtheit aller Städte der DDR in Frage. Dieser Grundbereich ist selbst eine Menge — wir wollen sie S nennen. Wenn wir *jetzt* — innerhalb unserer Grundmenge S — die Menge aller Elemente bilden, die *nicht* zu B gehören, so geraten wir nicht mehr in Schwierigkeiten: Stralsund, Weißenfels, Senftenberg und viele andere Städte der DDR gehören zu dieser Menge, Warschau, Kairo und Tokio dagegen *nicht*, weil diese Städte gar nicht dem gewählten Grundbereich angehören und dadurch sozusagen *außerhalb* unserer gegenwärtigen Betrachtungen liegen — von der Insel Rügen, dem Müggelsee und dem Leipziger Opernhaus ganz zu schweigen.
Unser Versuch, eine Menge durch Festlegung eines Merkmals anzugeben, das ihre Elemente *nicht* besitzen sollen, hat also erst Erfolg gehabt, nachdem wir uns auf einen klar abgegrenzten Grundbereich bezogen haben. Bei unseren sonstigen Mengenbildungen schien dagegen die Vorgabe einer Grundmenge nicht notwendig gewesen zu sein. Aber das *schien* eben nur so — in Wirklichkeit haben wir doch mehr oder weniger unbewußt an bestimmte Grundbereiche gedacht, sonst wären die von uns betrachteten Mengen unter Umständen gar nicht genau bestimmt gewesen. Nehmen wir z. B. die

Menge der Einwohner Leipzigs. Als Grundbereich denkt man dabei wohl an die Menge aller in der DDR lebenden Menschen. Wenn jemand aber in diesem Zusammenhang die Menge aller in der DDR existierenden warmblütigen Lebewesen als Grundbereich wählt, so gehören zur Menge der Einwohner Leipzigs nicht nur Menschen, sondern auch die dort lebenden Papageien, Meerschweinchen, Katzen usw.
Halten wir also fest: Bei *allen* Mengenbildungen geht man von bestimmten Grundbereichen aus. Allerdings wird die jeweilige Grundmenge nicht immer extra genannt — teils, weil es nicht unbedingt notwendig ist, teils, weil sie aus dem Zusammenhang heraus ersichtlich ist.

2. Komplementäre Mengen

Verfolgen wir nun unsere erste Fragestellung weiter! Wir hatten im Rahmen des Grundbereichs S die Menge B aller Bezirkshauptstädte betrachtet und daneben die Menge aller Elemente, die *nicht* Bezirkshauptstadt sind. Diese zweite Menge nennt man die zu B bezüglich des Grundbereichs S *komplementäre* Menge und bezeichnet sie mit $\overline{B}$. Ganz entsprechend können wir nun auch komplementäre Mengen zu P bzw. zu F bilden, sobald wir uns über den jeweiligen Grundbereich geeinigt haben. (Der Grundbereich kann natürlich unterschiedlich gewählt werden.) Am naheliegendsten wäre es, unter $\overline{P}$ die Menge der Schüler *unserer Klasse* zu verstehen, die *keine* Thälmannpioniere sind. Dann wäre der Grundbereich G die Menge aller Schüler dieser Klasse. Und $\overline{F}$? Als Grundbereich könnte man die Menge aller Oberligafußballer der DDR heranziehen. Zu $\overline{F}$ würden dann alle Oberligafußballspieler gehören, die *nicht* Mitglied des FC Karl-Marx-Stadt sind. Aber natürlich wäre auch ein anderer Grundbereich denkbar. Überlegt selbst, welche Möglichkeiten man noch ins Auge fassen könnte!
Fassen wir zusammen: Wir sind in unseren Beispielen immer von einer gewissen Grundmenge G und einer darin enthaltenen Menge M ausgegangen (d. h., es war $M \subseteq G$). Unter $\overline{M}$ verstanden wir dann die Menge aller Elemente aus G, die *nicht* zu M gehören, kurz:

$$a \in \overline{M} \text{ genau dann, wenn } a \notin M \text{ ist.}$$

$\overline{M}$ heißt die bezüglich G komplementäre Menge zu M oder kurz *Komplementärmenge* von M.
Zur Veranschaulichung von Zusammenhängen zwischen Mengen bedient man sich häufig einfacher ebener Figuren: Alle im Inneren eines geschlossenen Kurvenzuges liegenden Punkte werden als zur selben Punktmenge M gehörig aufgefaßt; ob man die Punkte des Randes zu M oder

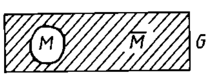


Abb. 1

zur Komplementärmenge $\overline{M}$ von M zählt, geht aus dem Zusammenhang hervor, oder man trifft eine Verabredung darüber. In Abb. 1 stellt die gesamte Rechtecksfläche eine Grundmenge G dar, die Kreisfläche veranschaulicht eine Menge M und der schraffierte Teil der Rechtecksfläche veranschaulicht die Menge $\overline{M}$. Die Randpunkte, d. h. die Punkte der Kreisperipherie, mögen hier zu M gehören.
Damit wir mit dem neuen Begriff noch etwas vertrauter werden, wollen wir einige einfache Beispiele untersuchen.
(1) Gegeben sei die Menge $Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ als Grundbereich und die Menge $A = \{2, 3, 5, 7\}$.
Wie jeder leicht finden wird, ist $\overline{A} = \{0, 1, 4, 6\}$.
(2) Als Grundbereich wählen wir nun die Menge N aller natürlichen Zahlen. (Bekanntlich gibt es unendlich viele natürliche Zahlen, wir können sie also nicht alle hinschrei-

ben.) Teilmengen von N sind die Menge G der geraden Zahlen und die Menge U der ungeraden Zahlen. Wir können feststellen: $\overline{G} = U$ oder auch $\overline{U} = G$.
(3) Wir nehmen als Grundbereich wieder die Menge N. Eine Teilmenge von N ist die Menge P aller Primzahlen, eine andere Teilmenge ist die Menge Z der zusammengesetzten Zahlen. Gilt hier $\overline{P} = Z$, d. h., ist jede natürliche Zahl, die keine Primzahl ist, eine zusammengesetzte Zahl? Das ist nicht der Fall! Die Zahlen 0 und 1 sind keine Primzahlen, sie gehören aber auch nicht zur Menge Z der zusammengesetzten Zahlen. Also ist $\overline{P} \neq Z$.
(4) Diesmal sei die Menge aller Dreiecke unser Grundbereich. Wir greifen die Menge aller *gleichseitigen* Dreiecke heraus und bezeichnen sie mit G. Was ist die Komplementärmenge zu G? Ist es die Menge aller *ungleichseitigen* Dreiecke? Nein, zu $\overline{G}$ gehören außer den ungleichseitigen Dreiecken auch alle gleichschenkligen, die nicht gleichseitig sind!
Die Beispiele zeigen, daß der Begriff der Komplementärmenge zwar im Grunde recht einfach ist, daß man manchmal aber doch aufpassen muß, um keine Elemente zu vergessen.

3. Vereinigung und Durchschnitt von Mengen

Für unsere folgenden Überlegungen denken wir uns als Grundbereich eine Schulklasse K gegeben. Die Elemente von K sind also Schüler, die wir durch den jeweiligen Anfangsbuchstaben ihres Familiennamens kennzeichnen wollen. (Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß jeder Buchstabe des Alphabets höchstens einmal als Anfang eines Familiennamens in der Klasse vorkommt.) Wir wollen annehmen, daß wir einige Teilmengen von K kennen: (1) Den Schachklub der Klasse: $S = \{a, b, c, d\}$. (2) Die Menge der Schüler, die am Englischunterricht teilnehmen: $E = \{e, f, g\}$. (3) Die Volleyballmannschaft: $V = \{c, d, h, i, k, l\}$. (4) Die Menge der Schüler, die an einem Zirkel im Fach Mathematik teilnehmen: $Z = \{e, f, g, h, k, l, m\}$.
Eines Tages gibt der Klassenlehrer bekannt: „Alle Schüler, die zum Schachklub oder zur Volleyballmannschaft gehören, treffen sich nach dem Unterricht im FDJ-Zimmer!" Welche Schüler sind damit gemeint? Sicher die Schüler a und b; denn sie gehören zum Schachklub, und ebenso die Schüler h, i, k und l; denn sie gehören zur Volleyballmannschaft. Wie steht es aber mit c und d? Diese Schüler müssen natürlich ebenfalls hingehen; denn sie gehören ja sogar zu *beiden* Mengen! Nach dem Unterricht versammelt sich also im FDJ-Zimmer eine Menge, die durch *Vereinigung* der beiden Mengen S und V entstanden ist. Man schreibt dafür $S \cup V$ (gelesen: „S vereinigt mit V" oder „Vereinigung von S und V"), und es ist in unserem Falle

$$S \cup V = \{a, b, c, d, h, i, k, l\}.$$

Wir merken uns allgemein: Ein Element x gehört zur *Vereinigungsmenge* der Mengen M und N genau dann, wenn x zu M *oder* zu N gehört. In kurzer Schreibweise:

$$x \in M \cup N \text{ genau dann, wenn } x \in M \textit{ oder } x \in N \text{ ist.}$$

In der Abbildung 2 ist die Vereinigung zweier Mengen veranschaulicht. Die Vereinigungsmenge ist schraffiert dargestellt.

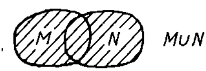


Abb. 2

An einem anderen Tag heißt es in unserer Klasse: „Alle Schüler, die zur Volleyballmannschaft und auch zum Mathematikzirkel gehören, melden sich beim Klassenlehrer!" Wer ist gemeint? Nur die Schüler h, k und l; denn nur diese gehören *sowohl* zur Volleyballmannschaft *als auch* zum Mathematikzirkel. Die Schüler h, k und l bilden ebenfalls eine Menge, die man den

Durchschnitt der Mengen V und Z nennt. Man schreibt dafür $V \cap Z$ (gelesen: „V geschnitten mit Z“ oder „Durchschnitt von V und Z“), und es ist also:

$$V \cap Z = \{h, k, l\}$$

Wir merken uns hier: Ein Element x gehört zum *Durchschnitt* der Mengen M und N genau dann, wenn x zu M *und* zu N gehört:

$x \in M \cap N$ genau dann, wenn $x \in M$ *und* $x \in N$ ist.

Abb. 3

In Abbildung 3 ist der Durchschnitt der Mengen M und N wieder schraffiert dargestellt.

Auch die Begriffe Durchschnitt und Vereinigung sind nicht sehr schwierig, das werden wir an den folgenden Beispielen, in denen wir mit unseren Mengen S, E, V und Z arbeiten wollen, gleich sehen.
Bilden wir einmal $S \cup E$ (d. h. die Menge der Schüler, die im Schachklub sind oder Englisch lernen). Wie jeder sicher leicht findet, ist $S \cup E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. (Dem entspricht die in Abbildung 4 dargestellte Situation. Die Vereinigungsmenge ist wieder schraffiert gezeichnet.)

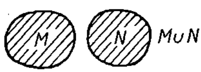


Abb. 4

Abb. 5

Was gibt $E \cup Z$? Ganz einfach: $E \cup Z = \{e, f, g, h, k, l, m\}$, d. h. $E \cup Z = Z$. Wie kommt das? Ihr habt es sicher schon gemerkt: E ist eine *Teilmenge* von Z, es kommt also beim Bilden der Vereinigungsmenge gar kein neues Element zu Z hinzu. (Siehe auch Abbildung 5!).
Nun betrachten wir den Durchschnitt von S und E (d. h. die Menge der Schüler, die im Schachklub sind und außerdem auch noch Englisch lernen). Wie wir feststellen müssen, gibt es solche Schüler in unserer Klasse gar nicht, der Durchschnitt der Mengen S und E ist also leer: $S \cap E = \emptyset$. (Siehe auch Abbildung 6!)
Wie steht es mit $E \cap Z$? Prüft selbst nach, daß $E \cap Z = E$ gilt! (In Abbildung 7 ist wieder eine entsprechende Situation dargestellt.)

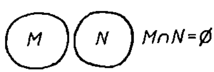


Abb. 6

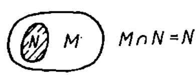


Abb. 7

Wir wollen das Bilden von Durchschnitten bzw. Vereinigungsmengen mit drei einfachen Beispielen aus der Mathematik abschließen:
(a) Die Ungleichung $x + 3 \leqq 8$ ist eine kurze Schreibweise für „$x + 3 < 8$ *oder* $x + 3 = 8$“. Die Menge X aller natürlichen Zahlen, die die Ungleichung $x + 3 \leqq 8$ erfüllen, ergibt sich somit als *Vereinigung* der Mengen $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (das sind die natürlichen Zahlen, die die Ungleichung $x + 3 < 8$ erfüllen) und $B = \{5\}$ (die natürliche Zahl, die die Gleichung $x + 3 = 8$ erfüllt).
Es gilt also $X = A \cup B = \{0,1,2,3,4,5\}$.
(b) Sei G die Menge aller geraden natürlichen Zahlen, D die Menge aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen. Dann ist $G \cap D$ die Menge aller durch 6 teilbaren natürlichen Zahlen — das sind nämlich diejenigen, die gerade *und* durch 3 teilbar sind.
(c) Sei R_1 die Menge aller Rechtecke und R_2 die Menge aller Rhomben. Dann ist $R_1 \cap R_2$ gleich der Menge Q aller Quadrate: $R_1 \cap R_2 = Q$.
Wer bis zum nächstenmal etwas üben will, kann das an Hand der vorhin betrachteten Mengen S, E, V und Z tun. Zum Beispiel wäre noch zu untersuchen:
$S \cup Z$, $E \cup V$, $S \cap Z$, $S \cap V$, $E \cap V$.

W. Walsch

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. Herbert Karl

Pädagogische Hochschule Potsdam, Institut für Mathematik
Leiter der Aufgabenkommission
des Zentralen Komitees der Olympiaden Junger Mathematiker der DDR

47 *Planetarische Lebewesen*

Als unsere Kosmonauten zum erstenmal einen fremden Planeten betreten hatten, fanden sie dort als höchstentwickelte Lebewesen vier Arten von käferartigen Tieren K_1, K_2, K_3, K_4 vor, die (in zunächst wenig übersichtlicher Weise) sämtlich mit Beinen, Flügeln und Fühlern ausgerüstet waren. Es zeigte sich aber bald, daß die Anzahl der genannten Gliedmaßen bei allen vier Arten nur einen der Werte 2, 4, 6 oder 8 hatte und daß es außerdem nicht zwei dieser Arten mit gleich viel Beinen oder gleich viel Flügeln oder gleich viel Fühlern gab. Weiterhin besaß die Art K_1 mehr Beine als die K_4, die Art K_2 mehr Flügel als die K_3, die Art K_3 mehr Fühler als die K_1, und schließlich zeigte sich noch, daß die Art K_2 als einzige mehr Beine als Flügel und die Art K_4 als einzige mehr Flügel als Fühler hatte.

Noch bevor weitere Angaben zur Erde gefunkt worden waren, konnte man hier schon eindeutig feststellen, mit wieviel Gliedmaßen die vier Arten der käferähnlichen Tiere jeweils ausgestattet waren. Wie verläuft eine systematische diesbezügliche Überlegung?

Erster bemannter Weltraumflug		Erster unbemannter Weltraumflug	
WOSTOK I		SPUTNIK I	
Oberst Juri Alexejewitsch Gagarin			
Geboren am 9. März 1934 in einem Dorf des Rayons Gshatsk (Gebiet Smolensk)			
Start:	12. 4. 1961 um 7.07 Uhr MEZ in Baikonur	Start:	4. 10. 1957
Landung:	14. 4. 1961 um 8.55 Uhr MEZ im Gebiet Saratow		
Perigäum:	181 Kilometer	Perigäum:	230 Kilometer
Apogäum:	327 Kilometer	Apogäum:	940 Kilometer
Bahnneigung:	65 Grad	Bahnneigung:	65,1 Grad
Umlaufzeit:	89,10 Minuten	Umlaufzeit:	96,17 Minuten
Umlaufmasse:	4725 kg	Umlaufmasse:	83,6 kg

alpha berichtet aus aller Welt

Moskau

Anläßlich des Internationalen Mathematikerkongresses 1966 wurde eine Sondermarke (6 Kopeken) herausgegeben. Sie zeigt ein Integral über der Erdkugel, das Symbol für eine unendliche Summe und das Symbol für die Vereinigungsmenge.

Widin (VR Bulgarien)

Zwei Mädchen nahmen an der VIII. Internationalen Mathematikolympiade in Sofia teil: eine mongolische Schülerin und Ljudmila Jordanova aus Bulgarien. Letztere erhielt einen 3. Preis. In Anerkennung ihrer guten Leistungen wurde sie vom Volksbildungsministerium ihres Landes zum Studium nach Moskau delegiert. Ihre hervorragenden Erfolge hat sie durch das Studium sowjetischer Olympiadeaufgaben und die Teilnahme an einem Korrespondentenzirkel der Universität Sofia, d. h. im kontinuierlichen Selbststudium, erzielt. Verbunden mit herzlichen Grüßen an die *alpha*-Leser übergab sie die folgende Aufgabe:

Es seien $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ positive ganze Zahlen. Dabei ist $a_k < 1000$; $(k = 1,2,\ldots,n)$ und das k.g.V. je zweier solcher Zahlen größer als 1000. Man beweise, daß

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2 \text{ ist.}$$

In eigener Sache

Am 4. April 1707 wurde Leonhard Euler in Basel geboren. In Heft 4 werden wir über Leben und Bedeutung dieses berühmten Wissenschaftlers berichten.

Bukarest

Vom 12. bis 17. September 1966 fand in Bukarest der vom Organisationskomitee der Balkanunion der Mathematiker einberufene III. Balkankongreß der Mathematiker statt. Mehr als 150 Mathematiker aus verschiedenen wissenschaftlichen Instituten Rumäniens, Bulgariens, Jugoslawiens, Griechenlands und der Türkei nahmen an der Arbeit dieses Kongresses teil. Akademiemitglied Octav Onicescu, Rumänien, hielt die feierliche Eröffnungsansprache. Darauf folgte der Vortrag von Prof. Gheorghe Mihoc, Präsident des Organisationskomitees und Rektor der Bukarester Universität. Er gab einen Überblick über die Zusammenarbeit von Mathematikern der Balkanländer seit der Gründung der Balkanunion. Er wies darauf hin, daß nach den ersten zwei Kongressen (1934: Athen; 1937: Bukarest) eine Reihe politischer und sozialer Veränderungen in den Staaten der Balkanhalbinsel die organisierte Zusammenarbeit der Wissenschaftler erschwerte. Aber aus den in der letzten Zeit sich immer rascher entwickelnden allseitigen Verbindungen zwischen den Völkern der Balkanländer, die sich für Frieden und gegenseitige Zusammenarbeit einsetzen, erwuchs von neuem die Notwendigkeit und Möglichkeit einer näheren Verbindung auch zwischen den Mathematikern dieser Länder.

Assja Peinerdjiewa, Universität Sofia

Budapest

Im November 1966 fand in der Ungarischen VR die erste Olympiade dieses Schuljahres statt. Teilnahmeberechtigt an dem sogenannten J.-Kürschàk-Memorial waren Schüler der Oberschulen und außerdem Jugendliche, die 1965 (oder später) das Abitur ablegten. Die Aufgaben lauteten:

1. Gibt es ein Fünfeck im Raum, dessen Seiten gleich lang sind und bei dem sich zwei benachbarte Seiten unter einem rechten Winkel schneiden?
2. Man beweise, daß in der Dezimalbruchentwicklung der Zahl $(5+\sqrt{26})^n$ die ersten n Ziffern nach dem Komma gleich sind, wenn n eine natürliche Zahl ist.
3. Gibt es zwei aus nichtnegativen ganzen Zahlen bestehende unendliche Mengen A und B, so daß jede nichtnegative ganze Zahl auf genau eine Weise als Summe einer zu A gehörigen und einer zu B gehörigen Zahl hergestellt werden kann?

I. Reiman, Universität Budapest

London

Am 13. Mai 1966 wurde die zweite englische Mathematikolympiade durchgeführt.

Effelder (Krs. Sonneberg)

Seit Jahren schneiden die Schüler der Oberschule Effelder gut bzw. sehr gut in den Mathematikolympiaden ab. Das ist der Erfolg langfristiger, systematischer außerunterrichtlicher Arbeit im Fach Mathematik. Der Mathematikfachlehrer Georg Scheler-Eckstein ist der Aktivste an seiner Schule. Seine umfassende Dokumentation „Drei Jahre planmäßige, außerunterrichtliche Förderung der Talente im Fach Mathematik (in den Klassen 3 bis 10) an einer Landschule“ und „Wandzeitungen“ geben Aufschluß über Inhalt, Formen und Methoden der Tätigkeit der Arbeitsgemeinschaften.

Moskau

Eine Aufgabe, die für die Gebietsolympiaden 1966 in der Sowjetunion empfohlen wurde: Разделить угол в 19° на 19 равных частей с помощью циркуля и линейки.

Leipzig

Pawel Kröger, Schüler eines 2. Schuljahres einer Leipziger Oberschule, erreichte mit 25 Punkten in der Kreisolympiade (d. i. Stadtolympiade) in Klassenstufe 7 einen hervorragenden 10. Platz (bei 150 teilnehmenden Schülern aus 59 Oberschulen). Er qualifizierte sich damit für die Bezirksolympiade und wurde in Klassenstufe 7 der Elfte von 25 Schülern.

Berlin

Vom 13. bis 18. Februar 1967 fand die Wissenschaftliche Jahrestagung der Mathematischen Gesellschaft der DDR statt. In der Sektion Unterricht und Ausbildung wurden Kurzvorträge zur Modernisierung des Mathematikunterrichts gehalten und Erfahrungsberichte über gute außerunterrichtliche Arbeit aus Annaberg-Buchholz, Dresden und Herzberg (Elster) geboten. Eine Aussprache ergab wertvolle Hinweise zur Ausbildung Technischer Rechner und Mathematisch-Technischer Assistenten.

New York

One problem from the Annual High School Contests of the Mathematical Association of America 1960: Two swimmers, at opposite ends of a 90-foot pool, start to swim the length of the pool, one at the rate of 3 feet per second, the other at 2 feet per second. They swim back and forth for 12 minutes. Allowing no loss of time at the turns, find the number of times they pass each other.

Wissen, wo ...

Eine Anleitung zum Selbststudium

Liebe Leser und Freunde von *alpha*! Ihr haltet nun Heft 2 der Schülerzeitschrift in der Hand. Sie ist eine der zahlreichen Veröffentlichungen, die eine Folge des Anwachsens des Wissens unserer modernen Gesellschaft ist. Das beweisen z. B. folgende Fakten:

- Die Anzahl der Veröffentlichungen hat sich in den letzten zehn Jahren verdoppelt.
- Zur Zeit sind zwei Millionen Wissenschaftler dabei, unsere Welt zu erforschen, das sind 90% aller Wissenschaftler, die bisher gelebt haben.
- Das Verhältnis der Anzahl der Zeitschriften von heute und der von 1900 ist 10 : 1.
- Die Suche nach optimalen Möglichkeiten der Speicherung und Selektierung (des Aussuchens) der Dokumente der wissenschaftlichen Erkenntnisse ist ein neues reiches Arbeitsgebiet für Wissenschaftler.

Die Lektüre unserer Schülerzeitschrift stellt deren Charakter entsprechend keinen bloßen Zeitvertreib dar. Mit ihr soll vielmehr in einer der wissenschaftlichen Arbeitsweise nahekommenden Art gearbeitet werden. Dabei werden Euch wie auch jedem Wissenschaftler unserer Tage neben den Problemen „wissen, was . .“ und „wissen, wie . . .“ auch das immer mehr an Bedeutung gewinnende „wissen, wo . . .“ (d. h. wo man z. B. Ausführungen zu einem bestimmten Thema findet) begegnen. Ihr werdet Euch in geeigneter Form einen Überblick über die in *alpha* veröffentlichten Beiträge verschaffen müssen. Das wird besonders deutlich, wenn Ihr Euch vergegenwärtigt, daß noch nicht jeder Beitrag zu jedem Zeitpunkt für jeden Leser verständlich ist. Zu einem späteren Zeitpunkt aber wird mancher nach früher erschienenen Artikeln suchen. Dann kann er seine Kartei — das scheint die geeignetste Form zu sein — durchsehen und schnell finden, was er sucht.

Es empfiehlt sich die Anlage einer Kartei (Format A 5) mit Leitkarten, die mit Buchstaben des Alphabets versehen sind. Ihr legt Euch eine Schlagwortübersicht an, die es erleichtert, herauszufinden, welchem Schlagwort ein Artikel zugeordnet wurde oder zuzuordnen ist. Der Vorschlag für die Einrichtung der einzelnen Karten ist in der Abbildung erläutert. Die Kartei sollte nach Empfang eines jeden neues Heftes vervollständigt werden. Sie kann auch für die Auswertung anderer Zeitschriften (andersfarbige Karteikarten) erweitert werden. Schließlich ist es auch möglich, sich eine entsprechende Kartei (A 6) für Aufgabenstellungen und Lösungen von Aufgaben, insbesondere Olympiadeaufgaben, einzurichten.

Wir wünschen Euch viel Erfolg und sind interessiert daran zu erfahren, was Ihr zu diesem Vorschlag meint.

H. Herzog/J. Lehmann

Mengenlehre

1/67	*Mit Mengen fängt es an!*	*W. Walsch*
1/67	*Aufgaben zur Mengenlehre*	*H. Lohse*
2/67	*Wir operieren mit Mengen!*	*W. Walsch*
2/67	*Lösungen zu Aufgaben aus der Mengenlehre*	*H. Lohse*

Schlagwortübersicht

A	*alpha* (Zeitschrift α)	K	*Kombinatorik*	R	*Rechenhilfsmittel*
	alpha-Wettbewerb		*Kryptarithmetik*		*Relationen*
	Ähnlichkeitslehre		*Kybernetik*	S	*Sport und Mathematik*
	Astronautik	L	*Literatur*		*Statistik*
B	*Berichte*		*Logarithmen*		*Stereometrie*
	Berufe		*Logik*	T	*Trigonometrie*
	Beweise	M	*Mathematikunterricht*	U	*Ungleichungen*
	Biographien		*Mengenlehre*		*Unterhaltung*
D	*Determinanten*	N	*Nomographie*	V	*Vektorrechnung*
F	*Fernsehen*		*Normung*	W	*Wahrscheinlichkeitsrechnung*
	Funktionen	O	*Olympiade-Aufgaben*		*Wandzeitung*
G	*Geschichte der Mathematik*		*Optimierung*	Z	*Zahlbereiche*
	Geometrie, analytische	P	*Philosophie*		*Zahlenfolgen*
	Geometrie, darstellende		*Planimetrie*		*Zahlentheorie*
	Gleichungen		*Potenzen*		*Zeitschriften*
	Gruppentheorie		*Programmierung*		*Ziffernsysteme*
I	*Infinitesimalrechnung*		*Prüfungen*		*Zirkel (Arbeitsgemeinschaften)*

Hand aufs Herz

Die Redaktion der Leipziger Volkszeitung stellte Studenten des ersten Studienjahrs der Karl-Marx-Universität folgende Frage: *Welche Probleme ergeben sich durch die Umstellung von der Oberschule zur Universität?*

Es ist wirklich eine Umstellung vom angeleiteten Arbeiten in der Oberschule zum selbständigen Arbeiten an der Universität. Jutta Topfstädt

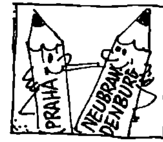
Nach den ersten Wochen weiß man kaum, wo man anfangen soll. Mir fällt es schwer, ohne Anleitung zu arbeiten. Irmtraud Henschke

Vorlesungen zu folgen, ist sehr anstrengend, und es kostet Mühe, immer aufzupassen und das Wichtigste zum Mitschreiben herauszufinden. Bärbel Storch

Es wird an der Universität bedeutend mehr verlangt als an der Oberschule, *schon zu wissen, wo etwas steht* und wie man die Literatur beschafft, scheint mir eine Kunst zu sein. Elke Binnewies

Ähnliche Probleme werden sich für jeden Schüler, der die Schule verläßt, ergeben. Wer schon in seiner Jugend selbständig lernt, wird sich in Lehre und Beruf schnell zurechtfinden und gut vorankommen. Die Werktätigen arbeiten nach einem fest umrissenen Zeit- und Organisationsplan. Der Arzt hat in seinem Schreibtisch eine Patientenkartei. In der Buchhaltung bewährt sich seit langem die Loseblatt-Ablage. In zahlreichen Betrieben geht man mehr und mehr zur Arbeit mit Lochkarten über. So sucht jeder seine vielfältige Tätigkeit durch moderne technische Hilfsmittel zu systematisieren und zu rationalisieren.
Und was tust Du, lieber junger Leser, um rechtzeitig diese Erfahrungswerte des praktischen Lebens zu nutzen?

Mathematischer Leistungsvergleich zwischen Praha und Neubrandenburg



Im Juni 1966 nahm ich an der Eröffnung eines mathematischen Leistungsvergleichs zwischen den Schülern der drei Spezialklassen Mathematik der erweiterten Oberschule Praha 2 und den Besten des Bezirksklubs Mathematik Neubrandenburg teil. Der Freundschaftsbesuch kam auf Vermittlung des Informationsbüros der ČSSR in Berlin zustande. 18 Schüler und vier Lehrer wurden mit vorbildlicher Gastfreundschaft aufgenommen. Die Neubrandenburger konnten in Klassenstufe 11/12 mithalten, in Klassenstufe 10 müssen sie noch tüchtig arbeiten, um an die Leistungen der Schüler aus Praha heranzukommen.

Mit Herrn Professor Emil Calda, einem der beiden Mathematiklehrer der EOS Praha 2, führte ich ein Gespräch, das sicher auch Euch interessieren wird:

Frage: Herr Professor (in der ČSSR werden alle Lehrer der erw. Oberschulen mit Professor angesprochen, d. Red.), wie kann man in der ČSSR Schüler einer erweiterten Oberschule werden?

Antwort: Jeder Schüler einer Abschlußklasse der Oberschule (9. Schuljahr) kann sich an einer erw. Oberschule bewerben. Er muß eine Aufnahmeprüfung in den Fächern Tschechisch (Diktat) und Mathematik machen. Das Abschneiden in diesen beiden Fächern entscheidet über Aufnahme oder Ablehnung.

Frage: Sie sind Klassenleiter einer Spezialklasse Mathematik. Wie kann man Schüler einer solchen werden? Gibt es für diese einen besonderen Lehrplan?

Antwort: Die Schüler, welche einen Aufnahmeantrag stellen, wissen, daß es in unserem Lande in Brno, Bratislava und Praha in jeder Klassenstufe je eine Spezialklasse gibt. Die etwa 36 Schüler, welche bei der Aufnahme im Fach Mathematik an unserer Schule am besten abschneiden, werden in diese Klasse übernommen. In der ersten und zweiten Klasse arbeiten wir nach dem gleichen Plan und mit der gleichen Stundenzahl wie alle Schüler des naturwissenschaftlichen Zuges der erw. Oberschulen der ČSSR. Da sehr gute Schüler in der Spezialklasse beisammensitzen, gelingt es uns natürlich, tiefer in die einzelnen Stoffgebiete vorzudringen. In der 3. Klasse (wir sagen 12. Klasse, d. Red.) haben wir auch den gleichen Plan, aber wöchentlich 8 Stunden Mathematik und 7 Stunden Physik, das sind je 3 Stunden mehr, als den Schülern anderer Klassen erteilt wird. In Aussicht ist gestellt, daß wir einen eigenen Lehrplan erhalten.

Frage: Was tun die Schüler der Spezialklassen außerhalb des Unterrichts zur Verbesserung und Vertiefung ihrer Kenntnisse?

Antwort: Die meisten nehmen an den einzelnen Stufen unserer Mathematik-Olympiaden teil. Wir schneiden meist gut ab. Einige Schüler unserer Schule drangen schon in die Endstufe (Landesolympiade) und sogar bis zu den Internationalen Olympiaden vor. Herr Prof. Dr. Vichin, Delegationsleiter der ČSSR-Mannschaft der letzten Internationalen Olympiaden, hat mit seinen Assistenten der Mathematisch-Physikalischen Fakultät der Karls-Universität an unserer Schule einen Klub eingerichtet, in dem die Besten unserer Stadt und Schule arbeiten können. Von meinen 36 Schülern nahmen 25 an der Mathematik-Olympiade und 11 an der Physik-Olympiade des Landes teil, einige an beiden Olympiaden. Viele unserer Schüler betreiben ein intensives Selbststudium. Sie beschäftigen sich vor allem mit der mathematischen

Literatur, die zur Vorbereitung auf Olympiaden und auf den Besuch unserer Fach- und Hochschulen herausgegeben wird.
Herr Professor Calda, wir wünschen Ihrer und der Neubrandenburger Mannschaft weiterhin viel Erfolg, einen kontinuierlichen Ausbau der geknüpften Beziehungen, vor allem aber Freude und Erholung beim Gegenbesuch Ihrer Mannschaft im Spezialistenlager des Bezirks Neubrandenburg im Seebad Ahlbeck. J. Lehmann

Aufgaben: *Aufnahmeprüfung an erweiterte Oberschulen der ČSSR, 1966*

1. Berechnen Sie

$$\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right)!$$

Setzen Sie $a = 2$ und $b = -1$ und weisen Sie für diesen Fall nach, daß Ihre Umformung richtig ist!
Welche Werte dürfen wir für a und b nicht einsetzen?

2. Lösen Sie die folgende Gleichung und führen Sie die Probe durch:

$$\frac{3}{4}(x-1)-\frac{2}{3}(2x-1)=2-\frac{5}{6}(x+1)!$$

3. Es sind eine Gerade a und ein Strahl b gegeben, dessen Anfangspunkt auf der Geraden a liegt und der mit der Geraden einen Winkel $\alpha = 75°$ bildet. Konstruieren Sie alle Kreise k, die den Radius $r = 2$ cm haben und sowohl die Gerade a als auch den Strahl b berühren!

4. Von k Traktoristen wurde eine Verpflichtung übernommen, wonach jeder von ihnen bei der Frühjahrsbestellung m ha Boden bearbeiten wird. Kurz vor dem Beginn der Arbeiten mußten zwei Traktoristen eine andere wichtige Aufgabe übernehmen. Die übrigen Traktoristen vereinbarten jedoch, den Anteil der ausfallenden Kollegen mit zu übernehmen. a) Wieviel Hektar mußte jetzt jeder von den übrigen Traktoristen bearbeiten? b) Um wieviel Hektar mußte jeder von ihnen seine ursprüngliche Verpflichtung erhöhen? Formulieren Sie den Lösungsweg!

5. Die Höhe einer Seitenfläche der geraden quadratischen Pyramide $ABCDE$ hat die Länge $h' = 12{,}6$ cm. Diese Höhe schließt mit der Ebene der Grundfläche der Pyramide den Winkel $\gamma = 60°$ ein. Wie groß ist das Volumen der Pyramide?

Aufgaben: *Wettbewerb Praha-Neubrandenburg, Juni 1966*

Klassenstufe 9 und 10:

1. Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen $n > 1$ gilt:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}<1.$$

2. Bestimmen Sie alle reellen Zahlen m, für die das folgende Gleichungssystem reelle Lösungen hat:

$$x-y=m(1+xy)$$
$$2+x+y+xy=0.$$

3. Es sind ein Quadrat $ABCD$, eine Gerade p und ein Punkt S gegeben. Konstruieren Sie eine Strecke $\overline{XY}$, die die folgenden Eigenschaften hat: Ihr Mittelpunkt ist der Punkt S, ihr Endpunkt X liegt auf dem Umfang des Quadrates $ABCD$ und ihr Endpunkt Y liegt auf der Geraden p. Diskutieren Sie die verschiedenen Möglichkeiten!

Zum Abschluß noch eine Aufgabe aus dem Wettbewerb der Klassenstufe 11/12:

1. Ein Gefäß, das die Form einer Halbkugel hat, ist bis zum Rand mit Wasser gefüllt. Neigt man das Gefäß um 30°, so fließen 11 l Wasser heraus. Wieviel Liter Wasser verbleiben im Gefäß?

Wer löst mit?

alpha Wettbewerb

5

48 Welche natürlichen Zahlen kannst du für a einsetzen, damit die Ungleichungen $48 < 8 \cdot a < 80$ erfüllt sind?
49 Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen: a) Die Differenz aus dem Zehner und dem Einer beträgt 4, wobei der Einer von Null verschieden sein soll; b) vertauscht man die Ziffern einer solchen Zahl, so erhält man eine neue zweistellige Zahl, die kleiner ist als der dritte Teil der ursprünglichen Zahl.
W(5)50 Hans und Günter, zwei begeisterte Briefmarkensammler, treffen sich, um Briefmarken, die sie doppelt besitzen, untereinander auszutauschen. Hans fragt Günter: „Wieviel Briefmarken hast du zum Tauschen mitgebracht?" Günter, ein kleiner Pfiffikus, antwortet: „Ich habe heute polnische, sowjetische und bulgarische Briefmarken zum Tausch anzubieten, es sind insgesamt dreißig Stück. Die Anzahl der sowjetischen Marken ist größer als die der polnischen, aber kleiner als die der bulgarische. Die Anzahl der bulgarische Marken dagegen ist größer als das Vierfache, aber kleiner als das Fünffache der Anzahl der sowjetischen Marken." Wieviel sowjetische Briefmarken hat Günter zum Tauschen mitgebracht? Welche Aussagen kannst du über die Anzahl der polnischen bzw. bulgarische Briefmarken machen?
W(5)51 Die dreißig Schüler einer fünften Klasse befinden sich mit ihrem Klassenlehrer auf einer zweitägigen Exkursion; sie übernachten in einer Jugendherberge. Am Morgen des zweiten Tages wird jeder Schüler gefragt, wieviel frische Brötchen er vom Bäcker haben möchte. Mehr als drei Schüler möchten keine Brötchen, da sie noch ausreichend Verpflegung besitzen. Ebenso viele Schüler wie die, welche auf Brötchen verzichten, möchten je vier Brötchen haben. Davon die doppelte Anzahl von Schülern bestellt je drei, nochmals die gleiche Anzahl von Schülern aber bestellt nur je ein Brötchen. Für den Rest der Schüler sollen je zwei und für den Klassenlehrer genau drei Brötchen mitgebracht werden. Wieviel Brötchen müssen gekauft werden, damit jeder Wunsch berücksichtigt wird und kein Brötchen übrig bleibt?

6

52 In einem Dreieck ABC betrage der Winkel α genau 58°, und die Seite a sei größer als die Seite c. Ordne die drei Dreieckseiten nach ihrer Größe, ohne das Dreieck zu konstruieren. Gib eine Begründung für dein Ergebnis an!
53 Welche von den nachstehend angeführten vier Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Die Antwort ist in jedem Falle zu begründen!
a) Jede durch 18 teilbare Zahl ist auch durch 9 teilbar.
b) Wenn eine Zahl durch 9 teilbar ist, so ist sie auch durch 18 teilbar.
c) Nicht alle Zahlen, die durch 12 teilbar sind, lassen sich auch durch 6 dividieren.
d) Es gibt Zahlen, die durch 24, aber nicht durch 8 teilbar sind.
W(6)54 Bestimme die Menge aller natürlichen Zahlen a, für die die folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden: a) $0 < a < 4000$; b) die Zahlen sind durch 4, durch 5 und auch durch 9 zugleich teilbar; c) 8, 25 und 27 sind nicht Teiler von a; d) subtrahiert man von den Zahlen a die Zahl 8, so ist diese Differenz durch 11 teilbar.
W(6)55 Die beiden Klassen 6a und 6b einer Schule hatten bei einem Leistungsvergleich dieselbe Mathematikarbeit geschrieben. Gerd wußte von seiner Klasse, der

6a, daß sie einen Zensurendurchschnitt von genau 2,6 erreicht hatte. Um zu erfahren, welche der beiden Klassen bessere Ergebnisse erzielte, befragte er seinen Freund Klaus, einen Schüler der Klasse 6b, nach dem Ergebnis der Arbeit in dessen Klasse. Klaus antwortete ihm: „Mehr als die Hälfte aller Schüler erhielt die Note ‚Drei'. Die Note ‚Vier' kam häufiger vor als die Note ‚Eins', aber nicht so oft wie die Note ‚Zwei'. Genau ein Neuntel der Gesamtzahl der Schüler meiner Klasse hat entweder eine ‚Eins' oder eine ‚Fünf' geschrieben. Die Note ‚Vier' haben doppelt soviel Schüler erhalten wie die Note ‚Eins'. Die Anzahl der Noten ‚Eins' war größer als das Doppelte, aber kleiner als das Vierfache der Anzahl der Noten ‚Fünf'. Alle 36 Schüler meiner Klasse haben die Klassenarbeit mitgeschrieben." Gerd freute sich daraufhin; denn seine Klasse hatte besser abgeschnitten. Weise nach, daß Gerd richtig gerechnet hatte!

7

56 In der Multiplikationsaufgabe $** \cdot 9* = ***$ ist jedes Sternchen durch eine Ziffer zu ersetzen, so daß eine richtig gelöste Aufgabe entsteht. Wieviel Möglichkeiten gibt es? Gib alle Möglichkeiten an!

57 Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks ABC beträgt 14 cm. Eine der Seiten des Dreiecks ist dreimal so lang wie eine andere Seite. Wie lang sind die Seiten des Dreiecks? Gibt es mehrere Lösungen dieser Aufgabe?

W(7)58 Gegeben sind drei Punkte B, C und D, die innere Punkte einer rechteckigen Zeichenfläche sind. Diese drei Punkte sind Eckpunkte eines Parallelogramms $ABCD$, dessen vierter Eckpunkt A außerhalb der Zeichenfläche liegt und somit für die Konstruktion des Parallelogramms unzugänglich ist. Es ist eine Strecke zu konstruieren, die auf der Winkelhalbierenden des Winkels BAD mit dem unzugänglichen Scheitelpunkt A liegt.

W(7) Löse eine der Aufgaben der Bezirksolympiade 1967 aus deiner oder einer höheren Klassenstufe!

8

59 Die sowjetische automatische Weltraumstation „Luna 10" hatte am 30. Mai 1966 zum letztenmal Funkverbindung mit einer sowjetischen Erdstation. Die Meßergebnisse wiesen aus, daß an diesem Tage die kleinste Entfernung dieses künstlichen Mondsatelliten zur Mondoberfläche 379 km, die größte dagegen 985 km betrug. Die Umlaufzeit von „Luna 10" um den Mond betrug 2 h 58 min 3 s. Es ist die mittlere Geschwindigkeit von „Luna 10" (in $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ und in $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$) bei einer annähernd kreisförmigen Bahn um den Mond zu berechnen. Der Durchmesser des Mondes beträgt angenähert 3476 km.

60 In einer Ebene sind $m \cdot n$ Punkte so angeordnet, wie es die Abbildung zeigt.

$$\begin{array}{cccccc}
\cdot P_{11} & \cdot P_{12} & \cdot P_{13} & \cdot P_{14} & \cdots & \cdot P_{1n} \\
\cdot P_{21} & \cdot P_{22} & \cdot P_{23} & \cdot P_{24} & \cdots & \cdot P_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot P_{m1} & \cdot P_{m2} & \cdot P_{m3} & \cdot P_{m4} & \cdots & \cdot P_{mn}
\end{array}$$

Durch je zwei dieser Punkte ist eine Strecke eindeutig festgelegt. Die Strecken $\overline{P_{ik}\,P_{mn}}$ und $\overline{P_{mn}\,P_{ik}}$ sind dabei als gleich anzusehen. Wieviel voneinander verschiedene Strecken sind durch die gegebenen Punkte bestimmt?

W(8)61 Denke dir eine (in dekadischer Darstellung) dreistellige natürliche Zahl, bei der der Hunderter um mindestens 2 größer als der Einer und der Einer größer als Null ist! Vertausche den Hunderter und den Einer miteinander und subtrahiere die so erhaltene Zahl von der gedachten Zahl! Addiere zu diesem Ergebnis diejenige Zahl, die du erhältst, wenn du in dem Ergebnis wieder den Hunderter mit dem Einer vertauschst! Du erhältst als Summe stets die Zahl 1089. Beweise das mit Hilfe von Variablen!

W(8) Löse eine der Aufgaben der Bezirksolympiade 1967 aus deiner oder einer höheren Klassenstufe!

9

62 Aus der „Coß“ von Christoph Rudolff (1525): Ich habe drei Zahlen, die sich wie 1 : 2 : 4 verhalten. Die Summe ihrer Quadrate ist 189. Wie heißen die Zahlen? Hat diese Aufgabe nur eine Lösung?

63 Man beweise den folgenden Satz: Wenn in einem spitzwinkligen Dreieck zwei Höhen dieses Dreiecks einander gleichlang sind, so ist das Dreieck gleichschenklig. Gilt dieser Satz auch für stumpfwinklige oder rechtwinklige Dreiecke? (Die Antwort ist zu begründen.)

W(9)64 Ein Bogen Papier, der die Form eines Rechteckes $ABCD$ hat, wird einmal so gefaltet, daß die Eckpunkte B und D aufeinander fallen. Das Rechteck habe die Seiten $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$ mit $a > b$. Die Faltgerade schneide die Seite $\overline{AB}$ in E und die Seite $\overline{CD}$ in F. a) Es soll die Länge k der Strecke $\overline{EF}$ berechnet werden. b) Wie verhält sich k zu der Länge d der Diagonale des Rechtecks?

W(9) Löse eine der Aufgaben der Bezirksolympiade 1967 aus deiner oder einer höheren Klassenstufe!

10

65 Man ermittle alle Lösungen der Gleichung

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7\ .$$

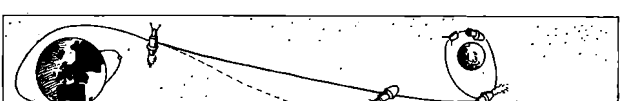
66 Das Objektiv der Fernsehkamera der sowjetischen automatischen Station „Luna 9“, mit der im Februar 1966 Aufnahmen von der Mondoberfläche gemacht wurden, befand sich in einer Höhe von 60 cm über der Mondoberfläche. a) Wie groß war die Sichtweite (in km) in dieser Höhe? b) Welcher Teil der Mondoberfläche (in km^2) konnte aus dieser Höhe überblickt werden? Dabei sollen etwaige Erhebungen auf der Mondoberfläche unberücksichtigt bleiben. Der Monddurchmesser beträgt 3476 km.

W(10)67 In einem Abteil eines Schnellzuges der Strecke Berlin-Stralsund sitzen drei Herren, die die Familiennamen Neumann, Müller bzw. Schulze tragen. Von diesen Fahrgästen ist uns bekannt: 1.) Einer von ihnen wohnt in Karl-Marx-Stadt, einer in Berlin und einer in Erfurt. 2.) Diese drei Reisenden haben ein unterschiedliches Hochschulstudium abgeschlossen, und zwar als Chemiker, Mathematiker bzw. Physiker. 3.) Ihre verschiedenen Reiseziele sind Stralsund, Greifswald und Schwedt. 4.) Der Physiker wohnt in Karl-Marx-Stadt. 5.) Der Fahrgast, der nach Stralsund fährt, ist 30 Jahre alt. 6.) Der Mathematiker ist bereits 43 Jahre alt. 7.) Das Lebensalter von Herrn Neumann beträgt 39 Jahre. 8.) Der Chemiker fährt nach Schwedt. 9.) Herr Schulze wohnt in Berlin.

Ermittele unter Angabe einer logischen Begründung den Familiennamen des Physikers!

P. Enskonatus, DDR-Teilnehmer an der VIII. IMO

W(10) Löse eine der Aufgaben der Bezirksolympiade 1967 aus deiner oder der Klassenstufe 11/12!



Lösungen

(Einige Lösungen werden erst in den folgenden Heften veröffentlicht.)

2 Im Beispiel (2) und im Beispiel (3).

3 $4 \in M$ $8 \notin M$ $10 \in M$ $0 \in M$

4 $P \{=\} 2$. Diese Menge besteht also aus einem Element, nämlich der Zahl 2.

5 Ja, die unter (3) angegebene Menge ist leer.

6 Die Beziehung der Gleichheit. $Q = R$.

7 $\{e, m, u\}$; $\{e, m\}$; $\{e, u\}$; $\{m, u\}$; $\{e\}$; $\{m\}$; $\{u\}$; $\emptyset$.
Es sind $2^3 = 8$ Teilmengen. Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

8 $(16 \cdot 6 + 24) : 6 - 7 = x$. Daher ist $x = 13$. Hans ist 13 Jahre alt.

9 Mit Hilfe folgender Gleichungen können wir die gesuchten Winkel leicht konstruieren:
$\alpha_1 = 45° + 30°$; $\alpha_2 = 45° - 30°$;
$\alpha_3 = 60° + 60° + 45°$ oder
$\alpha_3 = 90° + 30° + 45°$; $\alpha_4 = 60° + 45°$.

10 Aus $x < z$, $x < v$, $v < y$, $z < v$, $x < y$, $z < y$ folgt $x < z < v < y$.

11 Da das zweite Fahrzeug 400 km weniger als das erste zurücklegte, hätte es auf 400 km zurückgelegtem Weg 36 l Kraftstoff verbraucht, d. h. auf 100 km genau 9 l. Beide Fahrzeuge legten zusammen die Fahrstrecke von 2000 km zurück; sie verbrauchten also zusammen 180 l Kraftstoff.

14 Die Ungleichung allein betrachtet, wird von den Elementen der Menge
$\{343, 344, 345, \ldots, 353, 354, 355\}$ erfüllt.
Unter Beachtung der jeweils zusätzlich gestellten Bedingungen erhalten wir für:
a) $\{344, 346, 348, 350, 352, 354\}$; b) $\{345, 348, 351, 354\}$; c) $\{348, 354\}$; d) $\{344, 346, 350, 352\}$; e) $\{345, 351\}$; f) Es gibt keine Zahl, die die gestellten Beding. erfüllt, die Menge ist leer; g) $\{350\}$; h) $\{344, 345, 346, 350, 351, 352\}$; i) $\{344, 345, 346, 348, 350, 351, 352, 354\}$; k) $\{348\}$.

15 Eine Zahl ist durch 36 teilbar, wenn sie durch 4 und durch 9 teilbar ist. Aus $4 \mid 20$, $4 \mid 24$, $4 \mid 28$ folgt zunächst $52\square20$, $52\square24$, $52\square28$. Die Quersummen der noch unvollständigen Zahlen betragen (unter Auslassung der Leerstelle) 9, 13, 17. Also muß die erste Leerstelle mit 0 oder 9, die zweite mit 5, die dritte mit 1 belegt werden. Wir erhalten die Zahlen 52020, 52920, 52524, 52128.

16 Vor zwei Jahren beteiligten sich x Schüler, vor einem Jahr beteiligten sich $2x$ Schüler, in diesem Jahr beteiligten sich $6x$ Schüler. Es gilt $216 = 6x$, also $x = 36$. Vor zwei Jahren waren es nur 36, vor einem Jahr schon 72, in diesem Jahr aber 216 Teilnehmer.

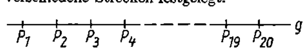
17 Scheitelwinkelpaare: $\sphericalangle AGF = \sphericalangle DGH$, $\sphericalangle AGD = \sphericalangle FGH$, $\sphericalangle GHF = \sphericalangle EHB$, $\sphericalangle GHE = \sphericalangle BHF$;
Nebenwinkelp.: $\sphericalangle AGF + \sphericalangle FGH = 180°$,
$\sphericalangle AGD + \sphericalangle AGF = 180°$,
$\sphericalangle AGD + \sphericalangle HGD = 180°$,
$\sphericalangle HGD + \sphericalangle HGF = 180°$,
$\sphericalangle GHF + \sphericalangle FHB = 180°$,
$\sphericalangle FHB + \sphericalangle BHE = 180°$,
$\sphericalangle BHE + \sphericalangle EHG = 180°$,
$\sphericalangle EHG + \sphericalangle GHF = 180°$;
Stufenwinkelpaare: $\sphericalangle GDE = \sphericalangle FGH$, $\sphericalangle DEH = \sphericalangle GHF$, $\sphericalangle CAG = \sphericalangle FGH$, $\sphericalangle HBC = \sphericalangle GHF$;
Wechselwinkelpaare: $\sphericalangle AGD = \sphericalangle GDE$, $\sphericalangle BHE = \sphericalangle DEH$, $\sphericalangle EHB = \sphericalangle HBC$, $\sphericalangle CAG = \sphericalangle AGD$;
Paare entgegengesetzt liegender Winkel: $\sphericalangle EDG + \sphericalangle HGD = 180°$, $\sphericalangle GHE + \sphericalangle DEH = 180°$, $\sphericalangle CAG + \sphericalangle AGF = 180°$, $\sphericalangle FHB + \sphericalangle HBC = 180°$.

20 Die ursprüngliche Zahl sei $7 \cdot 100000 + x$. Dann ist die neue Zahl $100 \cdot x + 70$.
Nach der Voraussetzung ist
$(7 \cdot 100000 + x)\, 2 = 100x + 70$.
Daraus folgt

$$1400000 + 2x = 100x + 70,$$
$$98x = 1399930,$$
$$x = \frac{1399930}{98} = 14285.$$

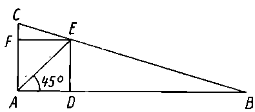
Die ursprüngliche Zahl ist also 714285. Streicht man die 7, hängt man sie hinten an und fügt noch die Ziffer 0 hinzu, so erhält man 1428570. Tatsächlich gilt
$714285 \cdot 2 = 1428570$.

21 Jeder Punkt P_i der Geraden g läßt sich mit den übrigen 19 Punkten verbinden; es entstehen so 19 Strecken. Insgesamt erhalten wir dann $20 \cdot 19$ Strecken, also 380 Strecken; dabei wurden alle Strecken doppelt gezählt, denn die Strecke $\overline{P_i P_k}$ ist gleich der Strecke $\overline{P_k P_i}$. Wir müssen unser Ergebnis also noch durch 2 dividieren. Durch die 20 Punkte werden auf der Geraden g genau 190 voneinander verschiedene Strecken festgelegt.



22 Auf Grund der Voraussetzung kann genau einer der folgenden Fälle eintreten:
1.) $a = 0$, 2.) $a < 0$, 3.) $a > 0$.
Zu 1. In diesem Falle wäre wegen $a = b^2(b^2 + c^2)$ auch $b = 0$, was der Voraussetzung widerspricht.
Zu 2. Dieser Fall ist wegen $b^2(b^2 + c^2) \geq 0$ nicht möglich.
Zu 3. Daher ist $a > 0$. Ferner ist $b \neq 0$, also $b < 0$. Daher ist $c = 0$.

25 Die Figur zeigt das gegebene rechtwinklige Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{BC}$. Die Gerade AE sei die Winkelhalbierende des rechten Winkels mit dem Scheitelpunkt A. E ist der Schnittpunkt dieser Winkelhalbierenden mit der Hypotenuse $\overline{BC}$. Jeder Punkt einer Winkelhalbierenden hat von den beiden Schenkeln des halbierten Winkels den gleichen Abstand. $\overline{ED}$ und $\overline{EF}$ seien die von E auf die Katheten gefällten Lote. Daher gilt $\sphericalangle AFE = \sphericalangle ADE = \sphericalangle FAD = 90°$ und damit auch $\sphericalangle FED = 90°$. Das Viereck $ADEF$ ist demnach ein Rechteck, in dem die benachbarten Seiten $\overline{FE}$ und $\overline{ED}$ gleich lang sind, d. h. das Viereck $ADEF$ ist ein Quadrat. Aus dieser Analyse ergibt sich die Konstruktion des Quadrates $ADEF$.



26 Man benötigt zum Numerieren der Seiten 1 bis 9 genau 9 Ziffern, der Seiten 10 bis 99 genau $90 \cdot 2 = 180$ Ziffern. Für die Buchseiten mit einer dreistelligen Zahl verbleiben uns noch $876 - 189 = 687$ Ziffern. Nun gilt $687 : 3 = 229$. Es verbleiben also noch 229 Seiten mit einer dreistelligen Zahl. Das Buch umfaßt demnach $99 + 229 = 328$ Seiten. Aus der nachstehenden Tabelle ist ersichtlich, wie oft die Ziffern 0 bis 9 beim Numerieren der Seiten auftreten.

Ziffer	Hunderter-stelle	Zehner-stelle	Einer-stelle	Insges.
0	—	30mal	32mal	62mal
1	100mal	40mal	33mal	173mal
2	100mal	39mal	33mal	172mal
3	29mal	30mal	33mal	92mal
4 bis 8	—	je 30mal	je 33mal	315mal
9	—	30mal	32mal	62mal
				876mal

27 Der erste Faktor sei gleich $10a + b$, wobei a und b natürliche Zahlen mit $1 \leqq a \leqq 9$ und $1 \leqq b \leqq 9$ sind. Dann ist der zweite Faktor gleich $10a + (10 - b)$, und man erhält

$$\begin{aligned}&(10a + b)\,(10a + 10 - b)\\ &= 100a^2 + 100a - 10ab + 10ab + 10b - b^2\\ &= 100a^2 + 100a + 10b - b^2\\ &= 100a\,(a + 1) + b\,(10 - b).\end{aligned}$$

Für unser Beispiel gilt

$$83 \cdot 87 = 100 \cdot 8 \cdot 9 + 3 \cdot 7 = 7221.$$

Man erhält also das Produkt, indem man den (gemeinsamen) Zehner mit dem um 1 vermehrten Zehner multipliziert und hinter dieses Ergebnis das Produkt der Einer schreibt. Ist das Produkt der Einer kleiner als 10, so muß noch die Ziffer 0 eingefügt werden, z. B. $83 \cdot 82 = 100 \cdot 8 \cdot 9 + 3 \cdot 2 = 7206$.

28 Die beiden zu bestimmenden natürlichen Zahlen seien mit x und y bezeichnet. Die in der Aufgabe gestellten Bedingungen führen zu dem folgenden Gleichungssystem:

$$\frac{xy}{3} = x + y, \qquad \frac{xy}{6} = x - y.$$

Durch Addition erhalten wir

$$\frac{xy}{3} + \frac{xy}{6} = x + y + x - y, \quad \frac{xy}{2} = 2x,$$

$$xy = 4x, \quad xy - 4x = 0, \quad x(y - 4) = 0.$$

Die Gleichung ist erfüllt, wenn $x = 0$ oder $y = 4$ ist.

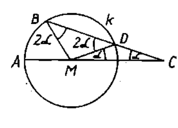
Wir belegen die erste Gleichung unseres Systems

a) mit $x = 0$ und erhalten $y = 0$,

b) mit $y = 4$ und erhalten $x = 12$.

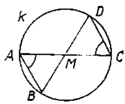
Die beiden geordneten Paare [0,0] und [12,4] erfüllen unser Gleichungssystem. Die Aufgabe hat also zwei Lösungen. Die Probe sei dem Leser überlassen.

29 Es sei $\sphericalangle ACB = \alpha$ und $\sphericalangle AMB = \delta$. Aus der Voraussetzung $\overline{MD} = \overline{CD}$ folgt, daß das Dreieck MCD gleichschenklig und damit $\sphericalangle DMC = \sphericalangle ACB = \alpha$ ist. $\sphericalangle MDB$ ist Außenwinkel des Dreiecks MCD, also $\sphericalangle MDB = 2\alpha$. Aus $\overline{BM} = \overline{DM} = r$ folgt, daß das Dreieck DBM gleichschenklig und damit $\sphericalangle MBD = \sphericalangle MDB = 2\alpha$ ist. $\sphericalangle AMB$ ist Außenwinkel des Dreiecks MCB, also $\sphericalangle AMB = \delta = 3\alpha$.



30 Es sei M der Mittelpunkt des Kreises k, und die Punkte A, M und C liegen auf einer Geraden. Dann folgt aus der Voraussetzung $AB \parallel CD$, daß $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle ACD$ als Wechselwinkel einander gleich sind. Ferner gilt $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = \overline{DM}$, also sind die gleichschenkligen Dreiecke ABM und CDM einander kongruent. Aus der Kongruenz der

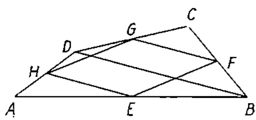
Dreiecke folgt $\sphericalangle AMB = \sphericalangle DMC$. Nun ist $\sphericalangle BMC$ Nebenwinkel zu $\sphericalangle AMB$. Aus $\sphericalangle AMB = \sphericalangle DMC$ folgt $\sphericalangle BMC + \sphericalangle DMC = 180°$. Die Punkte B, M und D liegen daher auf einer Geraden.



31 Wir ziehen die Diagonale $\overline{BD}$. Dann folgt aus der Umkehrung des Strahlensatzes: $FG \parallel BD$, $EH \parallel BD$, also $FG \parallel EH$.

Mit Hilfe der Diagonale $\overline{AC}$ beweist man analog $EF \parallel GH$.

Daher ist das Viereck $EFGH$ ein Parallelogramm.



34 Es seien x die Anzahl der anwesenden Jungen und y die Anzahl der anwesenden Mädchen. Dann ist, wie der Lagerleiter festgestellt hat, $x - y = 6$. Daher sind die Zahlen x und y entweder beide gerade oder beide ungerade. Wäre nun die Meldung von Helga richtig, so hätte die Gruppe $(x + 2) + y = (x + y) + 2$ Teilnehmer. Diese Zahl ist aber in jedem Falle eine gerade Zahl; denn die Summe zweier gerader Zahlen, aber auch die Summe zweier ungerader Zahlen ist stets eine gerade Zahl. Das steht im Widerspruch zur Voraussetzung, wonach 27 Teilnehmer zur Gruppe gehören. Helga irrt sich also; der Lagerleiter hatte recht.

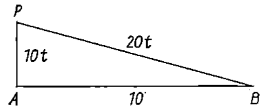
35 Es seien A und B die Standorte der beiden Boote um 10.30 Uhr und P der Treffpunkt nach t Stunden. Dann sind die Maßzahlen der Entfernungen (in Seemeilen) $\overline{AP} = 10t$, $\overline{BP} = 20t$, $\overline{AB} = 10$. Da das Dreieck ABP rechtwinklig ist, gilt

$$(20t)^2 = (10t)^2 + 10^2,$$
$$400t^2 = 100t^2 + 100,$$
$$300t^2 = 100, \quad t^2 = \frac{1}{3};$$

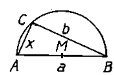
hieraus folgt wegen $t > 0$

$$t = \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0{,}577.$$

Die beiden Küstenschutzboote treffen sich nach 0,577 h (das sind 34 min 37 s), also um $11^{\text{h}}04^{\text{m}}37^{\text{s}}$. Das erste Boot legt dabei die Entfernung von $10 \cdot 0{,}577$ sm $= 5{,}77$ sm, das zweite Boot die Entfernung von $20 \cdot 0{,}577$ sm $= 11{,}54$ sm zurück.



36 Ist x die Länge des gesuchten Quadrates, so gilt $x^2 = a^2 - b^2$. Man zeichnet daher die Strecke $\overline{AB} = a$, konstruiert über $\overline{AB}$ den Thaleskreis und schlägt um B mit dem Radius b einen Kreis, der den Thaleskreis in C schneidet. Dann ist $\overline{AC} = x$ die Seite des gesuchten Quadrates.



37 Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $a \geqq b$ annehmen. Dann gilt

$$\begin{aligned} &2a^2 + 2b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 \\ &= (a + b)^2 + (a - b)^2. \end{aligned}$$

Der Term $2a^2 + 2b^2$ läßt sich also als Summe der Quadrate der beiden natürlichen Zahlen $a + b$ und $a - b$ darstellen.

40 Die Anzahl der Teilnehmer sei x. Da jeder Teilnehmer genau eine Partie mit jedem der übrigen $x - 1$ Teilnehmer spielt und da 231 Partien gespielt werden, gilt

$$\frac{x(x-1)}{2} = 231, \tag{1}$$

also $$x(x - 1) = 462. \tag{2}$$

Die quadratische Gleichung $x^2 - x - 462 = 0$ hat die beiden Lösungen

$$x_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 462} = \frac{1}{2} + \frac{43}{2} = 22$$

und $$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{43}{2} = -21,$$

von denen nur die Lösung $x_1 = 22$ den Voraussetzungen entspricht. Das Turnier hat daher 22 Teilnehmer.

Bemerkung: Noch schneller kommt man zu dem Ergebnis, wenn man berücksichtigt, daß wegen Gleichung (2) gilt

$$(x-1)^2 < x(x-1) = 462,$$

also $\quad x - 1 < 22$, d. h. $x < 23$;

$$x^2 > x(x-1) = 462,$$

also $\quad x > 21$.

Daraus folgt $x = 22$.

41 Es sei x die Maßzahl der Kantenlänge eines Würfels. Dann ist die Maßzahl der Länge einer Raumdiagonale dieses Würfels $x\sqrt{3}$, also die Maßzahl der Gesamthöhe der Würfelmontage $3x\sqrt{3}$. Nun ist nach Voraussetzung

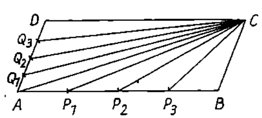
$$3x\sqrt{3} = 6, \text{ also } x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Daher ist die Maßzahl der Gesamtoberfläche der drei Würfel

$$A_o = 3 \cdot 6x^2 = 3 \cdot 6 \cdot \frac{4}{3} = 24.$$

Es muß also Farbe für die Fläche von 24 m² bereitgestellt werden.

42 Man teilt die Strecke $\overline{AB}$ in vier gleiche Teile mit den Teilpunkten P_1, P_2, P_3 und die Strecke $\overline{AD}$ in vier gleiche Teile mit den Teilpunkten Q_1, Q_2, Q_3. Man verbindet den Punkt C mit den Punkten Q_3, Q_2, Q_1, A, P_1, P_2, P_3 und erhält eine Zerlegung des Parallelogramms $ABCD$ in acht Teildreiecke, die einander paarweise flächengleich sind. Da nämlich die Teildreiecke ABC und ACD einander konguent sind, sind die Flächeninhalte dieser Dreiecke einander gleich und gleichen dem halben Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$.



Die Teildreiecke ACQ_1, Q_1CQ_2, Q_2CQ_3, Q_3CD sind paarweise einander flächengleich, da sie gleiche Grundlinien und gleiche Höhen besitzen. Die Summe ihrer Flächeninhalte ist gleich dem halben Flächeninhalt des Parallelogramms. Die gleichen Überlegungen treffen auch auf die restlichen vier Teildreiecke zu. Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist also achtmal so groß wie der Flächeninhalt jedes der acht Teildreiecke.

43 Ist x eine Lösung der Ungleichung

$$\frac{2x-3}{1+5x} > 2,$$

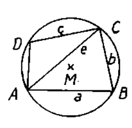
so gilt $\frac{2x-3}{1+5x} - 2 > 0$,

$$\frac{2x-3-2-10x}{1+5x} > 0,$$

$$\frac{-8x-5}{1+5x} > 0.$$

Der Term $\frac{-8x-5}{1+5x}$ soll also bei einer Belegung der Variablen x positiv werden; wir müssen daher zwei mögliche Fälle unterscheiden: a) $-8x-5 > 0$ und $1+5x > 0$, d. h. $x < -\frac{5}{8}$ und $x > -\frac{1}{5}$. Beide Ungleichungen sollen erfüllt werden; die Lösungsmenge ist leer, d. h., es existieren keine reellen Zahlen, die beide Bedingungen zugleich erfüllen. b) $-8x-5 < 0$ und $1+5x < 0$, d. h. $x > -\frac{5}{8}$ und $x < -\frac{1}{5}$. Beide Ungleichungen sollen erfüllt werden, d. h., genau diejenigen reellen Zahlen, für die $-\frac{5}{8} < x < -\frac{1}{5}$ gilt, erfüllten auch die geg. Ungleichung $\frac{2x-3}{1+5x} > 2$.

44 Von dem Sehnenviereck $ABCD$ sind gegeben die Längen der Seiten $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ und $\overline{CD} = c$ sowie die Länge der Diagonale $\overline{AC} = e$. Man konstruiert daher zunächst das Teildreieck ABC mit den Seitenlängen a, b und e, errichtet auf zwei Seiten die Mittelsenkrechten und erhält als ihren Schnittpunkt den Mittelpunkt M des Umkreises des Sehnenvierecks $ABCD$. Dann schlägt man um C einen Kreis mit dem Radius c, der den Umkreis (im allgemeinen) in zwei Punkten D und D' schneidet.



Die Sehnenvierecke $ABCD$ und $ABCD'$ haben die verlangten Eigenschaften.

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der Bezirksolympiade (21./22.1.1967)

Klassenstufe 7

1. Es seien a, b, c natürliche Zahlen, wobei a durch b und b durch c teilbar ist. Ermittle das kleinste gemeinschaftliche Vielfache und den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen a, b und c für $a \geqq 1$, $b \geqq 1$, $c \geqq 1$!

2. In einer alten Aufgabensammlung steht folgende Aufgabe: Ein Jagdhund verfolgt einen Fuchs, der ihm 54 Fuchsschritte voraus ist. Die Länge von 2 Hundeschritten ist genau gleich der Länge von 3 Fuchsschritten. Der Hund braucht zu 4 Schritten genauso lange Zeit wie der Fuchs zu 5 Schritten. Mit wieviel Schritten holt der Hund den Fuchs ein, wenn beide gleichzeitig in ein und derselben Richtung starten?

3. Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. Gesucht ist eine Parallele p zu BC, die folgende Eigenschaften hat:
(1) Sie schneidet die Strecken AB und AC.
(2) Sind D und E die Schnittpunkte von p mit AB bzw. mit AC, so ist $\overline{BD} + \overline{CE} = \overline{DE}$.
Beschreibe eine Konstruktion von p!
Untersuche, ob es stets genau eine solche Parallele p gibt!

4. Die Zahl $\frac{16}{15}$ soll in der Form $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n}$ dargestellt werden. Dabei sollen a, b, m, n natürliche Zahlen sein, für die die Brüche $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{n}$ unkürzbar und keine ganzen Zahlen sind.
Gib drei Beispiele einer solchen Darstellung, wobei
im 1. Beispiel $m = n$ und $a \neq b$ gilt,
im 2. Beispiel $a = b$ und $m \neq n$ gilt,
im 3. Beispiel $a = b$ und $m = n$ gilt!

5. Für jede zweistellige natürliche Zahl gilt der Satz: Addiert man zu der zweistelligen Zahl die Differenz aus der Anzahl ihrer Zehner und der Anzahl ihrer Einer, so erhält man eine durch 11 teilbare Zahl.
Beweise diesen Satz!

6. In einem gleichschenkligen Dreieck $\triangle ABC$ habe $\sphericalangle ACB$ ein Gradmaß von 120°.
Beweise, daß die Mittelsenkrechten der Seiten AC und BC die Seite AB in drei gleiche Teile teilen!

Klassenstufe 8

1. Die Kante eines Würfels habe die Länge $a_1 = 2$ cm, die eines anderen Würfels die Länge $a_2 = 6$ cm. Berechne das Verhältnis der Kantenlängen dieser zwei Würfel, das Verhältnis ihrer Oberflächeninhalte und das Verhältnis ihrer Rauminhalte!

2. Auf der Grundlinie BC eines gleichschenkligen Dreiecks $\triangle ABC$ seien zwei Punkte M_1 und M_2 gegeben. Durch M_1 und M_2 werden jeweils die Parallelen zu den Dreiecksseiten AB und AC gezogen. Die Parallelen durch M_1 schneiden AB in D und AC in E. Die Parallelen durch M_2 schneiden AB in F und AC in G.
Beweise, daß der Umfang des Parallelogramms M_1EAD gleich dem Umfang des Parallelogramms M_2GAF ist!

3. Gegeben seien 3000 g einer 7,2-prozentigen Lösung von Kochsalz in Wasser (d. h. in je 100 g der Lösung sind genau 7,2 g Kochsalz enthalten). Durch Sieden dieser Lösung verdampft so viel Wasser, daß genau 2400 g der eingedampften Lösung verbleiben.
Wieviel prozentig ist die so erhaltene Lösung?

4. Von 10 Koffern und 10 Schlüsseln ist bekannt, daß jeder Schlüssel zu genau einem Koffer paßt und zu jedem Koffer genau ein Schlüssel. Man weiß aber nicht, welcher Schlüssel zu welchem Koffer gehört. Jemand ermittelt dies durch Probieren, wobei jede Probe darin besteht, daß er für genau einen Koffer und genau einen Schlüssel feststellt, ob sie zusammenpassen oder nicht. Die Reihenfolge der Proben wird so gewählt, daß für jeden einzelnen Koffer, sobald einmal an ihm eine Probe durchgeführt wurde, dann

genau so viel Proben vorgenommen werden, bis der passende Schlüssel ermittelt ist.
Welches ist a) die kleinste, b) die größte Zahl von Proben, bei der es vorkommen kann, daß genau nach dieser Probenzahl zu jedem Koffer der richtige Schlüssel feststellbar ist?

5. In einer Ebene sind drei Geraden g_1, g_2, g_3 gegeben, von denen keine zwei einander parallel sind. Außerdem ist eine Länge s gegeben. Konstruiere einen Kreis, der von jeder der Geraden g_1, g_2, g_3 eine Strecke der Länge s abschneidet!

6. Man denke sich das Produkt aller derjenigen ungeraden Zahlen gebildet, die größer als 30 und kleiner als 50 sind. Beantworte, ohne es vollständig zu berechnen, folgende Fragen:

a) Welche Ziffer steht an der Einerstelle des Produkts?

b) Ist das Produkt eine 18-stellige Zahl?

Klassenstufe 9

1. Zwei Primzahlen p_1 und p_2 (mit $p_1 > p_2$) heißen Primzahlzwillinge, wenn $p_1 - p_2 = 2$ gilt.
Beweisen Sie, daß für alle Primzahlzwillinge p_1 und p_2, für die $p_2 > 3$ ist, stets die Summe $p_1 + p_2$ durch 12 teilbar ist!

2. Beweisen Sie die folgende Behauptung!
Sind bei einem (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeder $ABCD$ die Umfänge aller seiner vier Seitenflächen untereinander gleich, dann sind diese Flächen zueinander kongruent.

3. Beweisen Sie die folgende Behauptung!
In keinem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der Hypotenuse kleiner als das $\frac{1}{\sqrt{2}}$fache der Summe der Kathetenlängen.

4. Zeigen Sie, daß es unter allen Zahlen der Form $2p + 1$, wobei p eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt!

5. Auf dem Kreis k bewegen sich der Punkt A mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_1 und der Punkt B mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_2, wobei $v_1 \neq v_2$ ist. Bewegen sich beide Punkte im gleichen Umlaufsinn (etwa im Uhrzeigersinn), so überholt der Punkt A den Punkt B jeweils nach 56 min. Bewegen sich beide Punkte in verschiedenem Umlaufsinn, so begegnen sie einander jeweils nach 8 min. Dabei verringert bzw. vergrößert sich ihr auf der Kreislinie gemessener Abstand voneinander in je 24 s um 14 m.

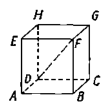
a) Wie lang ist der Kreisumfang?

b) Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 (in $\mathrm{m} \cdot \mathrm{min}^{-1}$)?

6. In einer Ebene sind ein Kreis k, eine Gerade g sowie ein Punkt A auf g gegeben.
Man konstruiere einen Kreis k', der erstens k berührt und zweitens g in A berührt! Man untersuche, wieviele solcher Kreise k' es bei den verschiedenen Lagemöglichkeiten von k, g und A geben kann!

Klassenstufe 10

1. Gegeben sei die Kantenlänge a eines Würfels $ABCDEFGH$.



Ermitteln Sie die Abstände der Eckpunkte A, B, C, G, H, E von der Diagonalen DF!

2. Zeigen Sie, daß für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c stets

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqq \frac{9}{a+b+c} \text{ gilt!}$$

3. Von sechs Orten A, B, C, D, E und F sind folgende Entfernungen voneinander (in km) bekannt:
$\overline{AB} = 30$, $\overline{AE} = 63$, $\overline{AF} = 50$, $\overline{BF} = 40$, $\overline{CD} = 49$, $\overline{CE} = 200$, $\overline{DF} = 38$.
Welche Entfernung haben B und D voneinander?

4. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen k, für die die Gleichung $x^2 + x + 3 = k(x^2 + 5)$ eine in x quadratische Gleichung ist, die

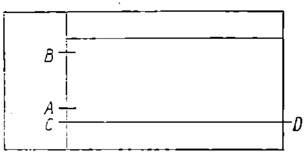
a) eine Doppellösung hat;

b) zwei voneinander verschiedene reelle Lösungen hat!

5. Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, die die folgende Ungleichung erfüllen!

$$\frac{1}{2} \lg (2x - 1) + \lg \sqrt{x - 9} > 1$$

6. Die Abbildung stellt den Grundriß eines Teiles eines Theaterraumes dar. AB ist die Bühnenbreite, CD die Flucht der Seitenlogen. Es sind alle Punkte P auf CD zu ermitteln,



von denen aus die Bühne unter dem größten Sehwinkel erscheint!
Unter dem Sehwinkel ist hier der Winkel $\sphericalangle APB$ zu verstehen.
Man setze gleiche Höhe der Bühne und der Seitenlogen über dem Erdboden voraus.
Die Abbildung ist lediglich eine Skizze, aus der keineswegs auf die Größenverhältnisse geschlossen werden darf.

Klassenstufe 11/12

1. In ein und derselben Ebene seien n-Punkte ($n \geqq 2$) so verteilt, daß es zu jedem von ihnen unter den übrigen nur einen nächstgelegenen gibt. Zu jedem dieser n Punkte werde der von ihm ausgehende und in dem ihm nächstgelegenen Punkt endende Vektor und nur dieser gezeichnet.
Man ermittle die größtmögliche Anzahl derjenigen unter diesen Vektoren, die dann in einem und demselben der n Punkte enden können!

2. Gegeben sei die Kantenlänge a eines Würfels. Eine seiner Seitenflächen sei das Quadrat $ABCD$, der Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche sei M.
Wie groß ist der Abstand zwischen den Geraden BC und AM?
(Unter dem Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden g, h versteht man die Länge derjenigen Strecke XY, die folgende Eigenschaften hat: X liegt auf g, Y liegt auf h, $XY \perp g$, $XY \perp h$.)

3. Es sind alle diejenigen reellen Zahlen x in den Intervallen $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ anzugeben, für die

$$f(x) = \sin x + \cos x + \tan x + \cot x$$

positiv ist, und alle diejenigen reellen Zahlen x, in denselben Intervallen, für die $f(x)$ negativ ist!
Gibt es einen kleinsten positiven Wert, den $f(x)$ in den obigen Intervallen annimmt, und wenn ja, welcher Wert ist dies?

4. Man ermittle alle und nur diejenigen reellen Zahlen x, die der Gleichung

$$\left[\frac{5+6x}{8}\right] = \frac{15x-7}{5} \text{ genügen!}$$

Dabei bedeutet $[a]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als a ist; z. B. ist

$$\left[\frac{13}{2}\right] = 6,\ [-6{,}5] = -7 \text{ und } [6] = 6.$$

5. Es seien n Schüler mit Nummern versehen und in der Reihenfolge $1, 2, \ldots, n$ nebeneinander aufgestellt. Ein Umordnungsbefehl bestehe darin, daß jeder entweder einmal seinen Platz mit einem anderen tauscht oder auf seinem Platz bleibt. Man gebe zwei Befehle an, durch deren Hintereinanderausführung die Anordnung $n, 1, 2, \ldots, n-1$ entsteht!

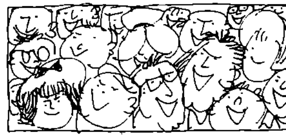
6. Die Zahl $\sin 10°$ genügt einer Gleichung dritten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten.
Man stelle diese (bis auf einen gemeinsamen Teiler aller Koeffizienten eindeutig bestimmte) Gleichung auf und ermittle ihre beiden anderen Wurzeln!

Aus dem Beschluß des Politbüros des ZK der SED und des Ministerrates der DDR vom 17. Dezember 1962

Die Förderung erfolgreicher Teilnehmer der mathematischen Olympiaden und anderer mathematisch befähigter Schüler ist eine gemeinsame Aufgabe der Schulen und Volksbildungsorgane, der Mathematischen Gesellschaft der DDR, der Wissenschaftler der Hoch- und Fachschulen, der wissenschaftlich-technischen Kader der Betriebe und Forschungsstätten sowie der gesellschaftlichen Organisationen.

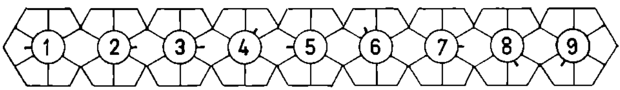
In freien Stunden

alpha heiter



Wortschatz im Sechseck

Neun Wörter sind im mathematisch positiven Sinn einzutragen. Sie sollen jeweils in dem Feld mit dem Strich beginnen.



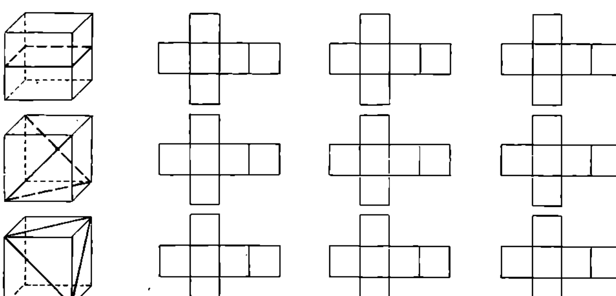
1. natürliche Zahl 2. griechischer Buchstabe 3. Astronom und Mathematiker 4. Zahl, die multipliziert werden soll 5. halber Durchmesser 6. Zeiteinheit 7. Kreisausschnitt 8. Lernkollektiv einer Schule 9. zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt.

Erst Buchstaben, dann Ziffern!

Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Ersetze die Buchstaben so durch Ziffern, daß in den Zeilen und Spalten richtige Ergebnisse entstehen. Wieviel verschiedene Lösungen hat die Aufgabe?

$$\begin{array}{ccccc} ed & + & ce & = & ga \\ - & & - & & - \\ bd & + & ba & = & cd \\ \hline fa & + & be & = & ee \end{array}$$

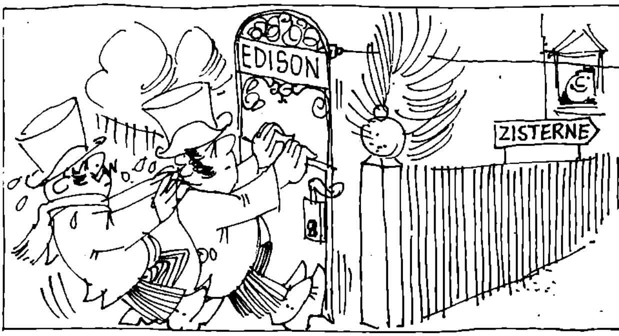
Nicht im Netz verfitzen



Tragt in die Würfelnetze (Abwicklungen) je drei verschiedene Möglichkeiten ein, wie die stark eingezeichneten Linien am Würfel in den Abwicklungen erscheinen können!

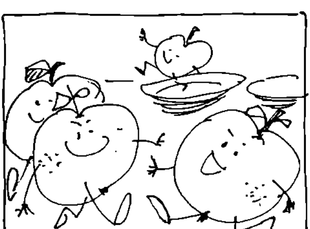
Die unvermutete Pointe

Edison (1847 bis 1931) hatte viel Sinn für geistreiche Späße. Seine zahlreichen Gäste wunderten sich oft, mit welcher Mühe sie das Gartentor vor seinem Haus aufmachen mußten. Schließlich sagte einer der Freunde zu dem großen Erfinder: „Ein solch technisches Genie wie du könnte doch ein Gartentor zustande bringen, das richtig funktioniert!“ Edison erwiderte lächelnd: „Mein Tor ist ganz vernünftig eingerichtet. Ich habe es an der Zisterne angeschlossen. Jeder, der zu mir kommt, pumpt mir 20 Liter Wasser in die Zisterne.“



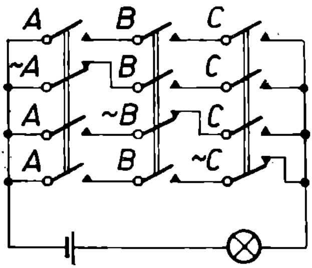
● Als Edison statt eines 20 l-Gefäßes ein 25 l-Gefäß verwendete, waren 12 Besucher weniger nötig, um die Zisterne zu füllen. Wir groß war das Fassungsvermögen der Zisterne?

● Angenommen, Edison hätte 3 Eingänge A, B und C gehabt und die Zisterne faßte 200 l. Tor A wäre mit einem Gefäß verbunden, das 20 l in die Zisterne pumpt, Tor B 25 l und Tor C 35 l. Welche Kombinationsmöglichkeiten gibt es dann, die leere Zisterne zu füllen? Es sollen auch die Varianten erfaßt werden, bei denen ein oder zwei Tore nicht benutzt werden.



Auf dem Tisch stehen 3 Schalen mit Äpfeln. Legt man aus der 1. Schale einen Apfel in die 2. Schale, dann aus der 2. Schale zwei Äpfel in die 3. Schale und schließlich aus der 3. Schale drei Äpfel in die 1. Schale, so sind in allen Schalen gleichviel Äpfel.
Wieviel Äpfel waren in jeder Schale?
Ist die Lösung eindeutig?
Welches ist die Mindestzahl von Äpfeln, damit das Experiment gelingt?
Löse das Problem allgemein!

Und wer sendet an die Redaktion heitere Vignetten, Rätsel, Anektoden aus dem Mathematikunterricht, der Arbeitsgemeinschaft, der Freizeit?



TAMÁS VARGA

Mathematische Logik für Anfänger

Aussagenlogik

Bücher für den Schüler

2. Auflage. 172 Seiten, m. Abb., Halbleinen
Bestell-Nr. 001604, 0,40 MDN

An Beispielen aus unserer Erfahrungswelt führt uns der bekannte ungarische Mathematiker auf heitere, unterhaltsame Art in die mathematische Logik ein. In diesem Band wird zunächst nur die Aussagenlogik behandelt. Das Buch wendet sich an Schüler ab der 10. Klasse. Es eignet sich vorzüglich zum Selbststudium, auch für talentierte Schüler niederer Klassenstufen.
Der Autor macht den Leser mit dem exakten logischen Schließen vertraut. Viel Wert wird auf eine gründliche Erläuterung der logischen Operationen (wie Implikation, Äquivalenz) gelegt. Auch Aussagenverbindungen werden an Hand von Wahrheitswertetafeln behandelt. Die Aufgaben dienen der Übung und Festigung, ein ausführlicher Lösungsteil der Kontrolle.

$$\boxed{(A \wedge B \wedge C) \vee (\sim A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \sim B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \sim C)}$$

A. A. KOLOSOW

Kreuz und quer durch die Mathematik

Bücher für den Schüler

204 Seiten, m. Abb., Halbleinen · Bestell-Nr. 08001, 6,75 MDN

In einer geschickten Auswahl werden Schüler, Jugendliche, aber auch Erwachsene mit verschiedenen mathematischen Disziplinen bekannt gemacht, die sämtlich wegen ihres Charakters und ihres logischen Aufbaus geeignet sind, das Interesse an der Mathematik zu wecken. Es werden lediglich elementare mathematische Kenntnisse vorausgesetzt. A. A. Kolosow versteht es meisterhaft, die Darlegungen durch Einblenden historischer Betrachtungen zu beleben. Zahlreiche Aufgaben mit Angabe der Lösungen ermöglichen es, sich im neuen Stoff zu üben und das erworbene Wissen zu kontrollieren.

VOLK UND WISSEN VOLKSEIGENER VERLAG BERLIN

ALFRÉD RÉNYI

Dialoge über Mathematik

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1967 · etwa MDN 9,80
Für Arbeitsgemeinschaftsleiter, Lehrer und talentierte Schüler (unter Anleitung Erwachsener)

Dieses Taschenbuch in Glanzbroschur erscheint im zweiten Halbjahr 1967. Die drei fingierten Dialoge — zwischen Sokrates und Hippokrates, zwischen Archimedes und Heron, Galilei und seiner Wirtin Niccolini — entstammen Vorträgen, die der weit über die Grenzen seines Landes hinaus bekannte Mathematiker in Ungarn und in den USA gehalten hat. Es geht ihm darum, Wesen und Bedeutung seines Fachgebiets zu verdeutlichen. Nachfolgend veröffentlichen wir eine Leseprobe aus dem Buch:

Die Sprache des Buches der Natur

Frau Niccolini: ... Danach ist das ganze Weltall so, wie ein mächtiges Uhrwerk, in dem sich die Räder vom kleinsten bis zum größten nach genauen Gesetzen bewegen.
Galilei: Diese wunderbaren Regelmäßigkeiten bilden nur ein Kapitel aus dem Buch der Natur. In der Natur gibt es aber auch reichlich Zufall, Unregelmäßigkeit, Unberechenbarkeit!
Frau Niccolini: Wie verstehen Sie das?
Galilei: Denken Sie nur an die neuen Sterne, die von Zeit zu Zeit, wie etwa vor 60 Jahren, unerwartet am Himmel erscheinen, einige Jahre immer glänzender strahlen, nachher ebenso unerwartet, wie sie kamen, im Nichts verschwinden. Denken Sie an die Sonnenflecken, die sich nahe der Oberfläche der Sonne um die Sonne drehen, sich einmal vergrößern, sich dann wieder vermindern, auftauchen, sich zusammenballen und wieder verschwinden. Das Weltall ähnelt nicht in allem einem Uhrwerk, in vieler Hinsicht gleicht es eher einer unberechenbaren, launischen Frau.
Frau Niccolini: Aus dem, was Sie sagen, scheint zu folgen, daß es im Buch der Natur auch Kapitel gibt, die nicht in der Sprache der Mathematik geschrieben sind, weil sie, wie Sie sagen, unberechenbar sind.
Galilei: Sie irren sich, Signora, aber Ihr Irrtum ist verständlich; denn die mathematische Beschreibung der zufälligen Erscheinungen steckt noch in den Kinderschuhen; trotzdem ist sie möglich, wie ich vor kurzem an einem einfachen Beispiel gezeigt habe.
Frau Niccolini: Erzählen Sie mir von diesem Beispiel!
Galilei: Es handelt sich um das Würfelspiel, dieses uralte und auch heute noch populäre Glücksspiel. Wenn wir mit einem Würfel würfeln, hängt es ganz vom Zufall ab, welche seiner Seiten nach oben zeigt. Wenn diese Seiten wie gewöhnlich mit 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Augen bezeichnet sind und wir nur einmal würfeln, können wir nur behaupten, daß die gewürfelte Zahl irgendeine dieser sechs Zahlen sein wird. Wenn wir aber oft würfeln, kann man gewisse Gesetzmäßigkeiten beobachten: schreiben wir die Augenzahlen auf, so werden alle sechs nahezu ebenso oft vorkommen. Noch interessanter ist es aber, wenn wir mit zwei Würfeln zugleich würfeln und die Augenzahlen beider Würfel addieren. Welche Regelmäßigkeiten darf man bezüglich dieser Summe erwarten?
Frau Niccolini: Es ist klar, daß als Summe jede Zahl zwischen 2 und 12 auftreten kann.
Galilei: Das ist wahr, aber diese 11 Möglichkeiten werden nicht gleich oft vorkommen. Die 7 wird am meisten vorkommen, ungefähr in $\frac{1}{6}$ aller Fälle, dann 6 und 8, beide in angenähert $\frac{5}{36}$ der Fälle, 5 und 9 in je $\frac{1}{9}$ der Fälle, während die Summe in $\frac{1}{12}$ aller

Fälle 4 bzw. 10 sein wird, in $\frac{1}{18}$ Fälle wird sie 3 bzw. 11 sein, während schließlich 2 und 12 nur in $\frac{1}{36}$ aller Fälle vorkommen werden.

Frau Niccolini: Das klingt ja sehr geheimnisvoll. Was ist der Grund dafür?

Galilei: Es ist sehr einfach zu erklären! Beispielsweise können wir 4 auf drei Arten als Summe werfen, erstens so, daß der erste Würfel 1, der zweite 3 zeigt; zweitens, daß der erste Würfel 3 und der zweite 1 zeigt und drittens so, daß beide Würfel 2 zeigen. Dagegen können wir 12 nur auf eine einzige Art als Summe bekommen, nur dann nämlich, wenn wir mit beiden Würfeln eine 6 werfen. Deshalb wird unter den Summen 4 dreimal so oft vorkommen wie 12.

Frau Niccolini: Einmal werde ich im Würfelspiel dieses Gesetz der Mathematik des Zufalls ausprobieren. Glauben Sie, daß ich dadurch, daß ich es kenne, viel gewinnen könnte?

Galilei: Ein Spiel ist dann gerecht, wenn die Regeln so aufgestellt sind, daß kein Spieler in einer besseren Lage ist. Wenn man die Regeln schlecht aufstellt, dann kann natürlich einer der Spieler viel gewinnen, wenn er lange genug spielt und wenn er genug Geld hat, um so lange zu spielen, bis die Gesetze des Zufalls zur Geltung kommen.

Frau Niccolini: Ich dachte nie, daß auch im Glücksspiel Mathematik verborgen ist. Wie nennt man diesen Zweig der Mathematik?

Galilei: Er ist so neu, daß er noch keinen Namen hat.

Frau Niccolini: Wie ist es möglich, daß man sich nicht früher damit beschäftigt hat?

Galilei: Die Mathematiker, die gewohnt sind, sich mit Regelmäßigkeiten, mit genauen Zusammenhängen zu beschäftigen, schreckten bis vor Kurzem davor zurück, sich mit dem Zufall zu befassen, weil es auf den ersten Blick so scheint, als ob für sie nichts zu holen wäre. Auch hier hat sich die Autorität des Aristoteles hemmend ausgewirkt, nach dessen Meinung der Gegenstand der Mathematik das Unveränderliche ist. Was aber kann Veränderlicher sein als der launenhafte Zufall! Selbst noch viel ältere Vorurteile haben hier mitgewirkt. Seit uralten Zeiten hat man in zufälligen Erscheinungen, wie dem Würfelspiel, dem Vogelflug, den unregelmäßigen Linien in der Leber von Opfertieren usw. den Willen Gottes zu sehen geglaubt und sie mit ehrfürchtigem Schaudern betrachtet; man empfand es beinahe als Gotteslästerung, wenn jemand diese zufälligen — also göttlichen — Erscheinungen mit dem menschlichen Verstand zu erforschen wagte. Aber der Mensch hat seinen Verstand dazu, daß er ihn benutzt.

Frau Niccolini: An der Mathematik — soweit ich sie von Ihnen gelernt habe, denn mehr kenne ich nicht davon — gefällt mir, daß sie imstande ist, die verwickeltsten Sachen einfach zu machen, daß im Glanze ihres Lichtes Dinge, die vorher undurchsichtig und unverständlich waren, kristallklar und deutlich werden.

Az "alpha" fiatal olvasóinak sok sikert kívánok matematikai tanulmányaikhoz. Rényi Alfréd

Ich wünsche den jungen Lesern von „alpha" viel Erfolg bei ihren mathematischen Studien.

Rényi Alfréd

Mathematisches Institut der Ungarischen Akademie der Wissenschaften

Mathematische Schüler-zeitschrift

alpha

3

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967
Preis 0,50

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967 Heft 3

Redaktionskollegium:
Prof. Dr.-Ing. G. Clemens (Leipzig); Prof. Dr. L. Görke (Berlin); J. Gronitz (Karl-Marx-Stadt); Dr. E. Hameister (Magdeburg); K. Hofmann (Berlin); Prof. Dr. H. Karl (Potsdam); OL K. Krüger (Bad Doberan); StR J. Lehmann (Leipzig); OL H. Lohse (Leipzig); NPT OStR Dr. R. Lüders (Berlin); H. Pätzold (Waren); Prof. Dr. U. Pirl (Berlin); Dr. E. Schröder (Dresden); StR G. Schulze (Herzberg/Elster); OL H. Schulze (Leipzig); W. Stoye (Berlin); D. Uhlich (Erfurt); Dr. W. Walsch (Halle); OStR Dr. H. Weiß (Berlin)

Aufgabengruppe:
NPT OStR Dr. R. Lüders (Berlin); OL Th. Scholl (Berlin); OL H. Schulze (Leipzig): Kl. 5 und 6; OL K. Krüger (Bad Doberan): Kl. 7 und 8; StR G. Schulze (Herzberg/Elster): Kl. 9 und 10

Gutachtergruppe:
NPT H. Kästner; R. Hofmann; OL H. Schulze (alle Leipzig)

Redaktion:
StR J. Lehmann, V. L. d. V. (Chefredakteur)

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14

Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541
Postscheckkonto: Berlin 132626

Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 MDN, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 MDN
Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden

Fotos: F. Weimer, Dresden (S. 78); J. Lehmann, Leipzig (S. 85, S. 88); Archiv Bezirksklub Jg. Mathematiker, Neubrandenbg. (S. 89); Vignetten: H.-J. Jordan, Lpzg. (S. 82, Umschl. IV)

Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG, 701 Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der Deutschen Demokratischen Republik
Redaktionsschluß: 1. 4. 1967

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angeführten Klassenstufe geeignet

Mathematischer Mannschaftswettbewerb

In allen Bereichen unseres gesellschaftlichen Lebens, ob in der Produktion, der Forschung oder der Verwaltung, gewinnt die sozialistische Gemeinschaftsarbeit mehr und mehr an Bedeutung. Deshalb orientieren die Sozialistische Einheitspartei Deutschlands und unsere Regierung in zunehmendem Maße auf eine kollektive Bearbeitung der immer komplizierter werdenden Probleme, eben weil der einzelne unter den Bedingungen der technischen Revolution kaum noch in der Lage ist, komplexe Aufgaben zu lösen. Kann die Schule diese objektiv notwendige Entwicklung unbeachtet lassen? Im Unterricht, im Zirkel oder in der Arbeitsgemeinschaft helfen sich die Schüler gegenseitig bei der Lösung schwieriger Probleme unter dem Motto:

Als Kollektiv sind wir stärker.

Wo der eine Schwächen aufweist, setzt der andere seine guten Kenntnisse zum Wohle der Gemeinschaft ein. Echter Erfahrungsaustausch bringt alle besser voran. Der Gebende wird sicherer, gewandter; der Nehmende gewinnt Selbstvertrauen und versucht, seine Leistungen zu verbessern. Wer seine Mitschüler gut beobachtet, wird schnell herausfinden, wer zum Beispiel in Geometrie stark, wer ein guter Rechner ist, wem das Denken leicht fällt, wer durch gute Lernergebnisse aus dem Kollektiv herausragt.
Das Bezirkskomitee Cottbus der Olympiaden Junger Mathematiker nutzte die genannten Erkenntnisse. Es empfahl, im Kreis Herzberg neben das System der Mathematikolympiaden, das als ja klassische Form eines Einzelwettbewerbs zu betrachten ist, einen Mannschaftswettbewerb durchzuführen.
Im Oktober 1966 war es so weit. Jeweils drei Schüler einer 10. Klasse einer Schule bildeten eine Mannschaft. Zum Wettbewerb traten insgesamt vierzehn Mannschaften an, aus dem Kreis Herzberg acht und aus den Nachbarkreisen Jessen, Liebenwerda und Luckau je zwei. Unter ihnen befanden sich auch sechs Mannschaften aus den erweiterten Oberschulen.
In vier Stunden waren von jeder Mannschaft zwei Aufgaben, jeweils in sechs Teilaufgaben untergliedert, zu lösen. Die Jury stellte die Teilaufgaben so, daß für die folgenden die vorhergehenden nicht unbedingt gelöst sein mußten. Überall wurde eifrig und gewissenhaft gearbeitet. In jeder Mannschaft übernahm ein Mädchen oder ein Junge die Rolle des Mannschaftskapitäns. Die Mannschaften wurden mit der neuen zum Teil ungewohnten Arbeitsweise sehr unterschiedlich fertig. Die Kollektive, die eine geschickte Arbeitsteilung vornahmen, waren im Vorteil. Im Durchschnitt wurde 15 Minuten beraten und dann mit der Lösung der Aufgaben begonnen. Einige „Kapitäne" verstanden es recht gut, jedes Mitglied der Mannschaft so einzusetzen, daß es in der Lage war, seinen Kenntnissen und Neigungen entsprechend zu arbeiten. Es zeigte sich deutlich: Die Fähigkeiten, straff zu planen, gezielt zu diskutieren, Anregungen geschickt aufzugreifen, zu verarbeiten und in das gemeinsame Vorhaben einzuplanen, entwickeln sich nicht im Selbstlauf, sondern müssen systematisch geübt werden. Eine vielseitige Sicherung der Ergebnisse will auch organisiert sein. Bei den Mannschaften, die das geschickt machten, traten kaum Fehler auf.
Jeder Schüler ging mit dem Gefühl nach Hause: „Heute habe ich etwas geschafft, zum Erfolg des Kollektivs beigetragen! Allerdings muß ich, um das nächste Mal noch besser

und rascher voranzukommen, verschiedene Stoffgebiete noch einmal gründlich durcharbeiten." Vielleicht können im Unterricht oder in der Arbeitsgemeinschaft ähnliche Wettbewerbe gestartet werden? Die guten Erfahrungen veranlaßten das Bezirkskomitee Cottbus, noch in diesem Jahre einen zweiten Mannschaftswettbewerb im Kreis Herzberg durchzuführen, allerdings mit Schülern der 8. Klassen. Diesem Beispiel sollen möglichst alle Kreise des Bezirks im November 1967 folgen. Im Rahmen der Bezirksolympiade Junger Mathematiker (Januar 1968) soll dann neben dem Einzelwettbewerb der erste Mannschaftswettbewerb des Bezirks durchgeführt werden.

M. Mäthner, G. Schulze

Den drei Schülern R. Glorius, W. Meyer und F.-J. Seybold aus der Klasse 10 B_2 der Erweiterten Oberschule Herzberg wurde zur Eröffnungsveranstaltung der Kreisolympiade die folgende Siegerurkunde im Auftrage des Bezirksschulrates Oberstudienrat Weidhase überreicht.

Liebe Jugendfreunde!

Erstmalig in der Deutschen Demokratischen Republik führten wir zwischen vier Kreisen unseres Bezirkes am 25. Oktober 1966 einen mathematischen Mannschaftswettbewerb durch. Ihr habt dabei durch Eure Leistungen gezeigt, daß sich das individuelle Wissen nach gemeinsamer Beratung und zweckmäßiger Arbeitsteilung gut in die Lösung einer komplexen Aufgabe einfügen läßt. Es wurde ein erstes Mal bestätigt, daß auch die Schulmathematik einen vorbereitenden Beitrag zur Durchsetzung der sozialistischen Gemeinschaftsarbeit in vielen Bereichen der gesellschaftlichen Praxis leisten kann. Eure Mannschaft aus der 10. Klasse der Erweiterten Oberschule Herzberg errang den 1. PLATZ.
Wir gratulieren zu diesem Ergebnis und wünschen für die weitere Arbeit innerhalb und außerhalb der Schule viel Freude und Erfolg.

Cottbus, den 5. 12. 1966 *Freundschaft!*

Aufgaben des Mannschaftswettbewerbs

1. Gegeben ist die Funktion mit dem analytischen Ausdruck

$$f(x) = x^2 + (a + 2)\,x + 2\,a + 1, \quad \text{wobei } a \text{ eine beliebige reelle Zahl ist.}$$

(1) Zeichnen Sie die Kurven der Funktion für $a_1 = 3$ und für $a_2 = -3$! Machen Sie Aussagen über die Nullstellen der beiden Funktionen!

(2) Für welche Werte von a liegt der Scheitel der Parabel auf der x-Achse? Zeichnen Sie die zu diesen a-Werten gehörenden Kurven!

(3) Für welche Werte von a existieren zwei reelle Nullstellen, für welche Werte von a existieren keine reellen Nullstellen des quadratischen Polynoms?

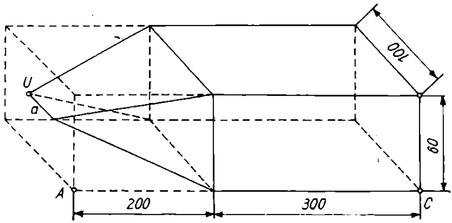
(4) Die Scheitelpunkte der Parabeln von (1) sind anzugeben. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes T der Verbindungsgeraden der Scheitelpunkte mit der x-Achse!

(5) Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks, dessen Ecken die Scheitelpunkte aus (4) und der Koordinatenursprung sind!

(6) Spiegeln Sie die durch $a_1 = 3$ beschriebene Parabel an der Geraden, die durch ihren Scheitel geht und parallel zur Abszissenachse ist. In welchen Punkten schneidet die gespiegelte Parabel die x-Achse, in welchem Punkte die y-Achse?

2. Die Skizze (nicht maßstabgerecht) zeigt einen Quader, der an einer Seite keilförmig angespitzt ist. a ist die Länge der Schneide des Keils. A, C und U bezeichnen drei Punkte.

(Maße in mm)



(1) Man berechne das Volumen des Körpers, wenn
1.1) $a = 10$; 1.2) $a = 4$; 1.3) $a = 0$ ist (Maße in Zentimetern)!

(2) Man gebe das Volumen V als Funktion von a an. Diese Funktion ist graphisch darzustellen.

(3) V_1 und V_2 bezeichnen die Maßzahlen der zu 1.1) bzw. 1.3) gehörenden Volumina. Um wieviel Prozent ist V_3 kleiner als V_1, um wieviel Prozent ist V_1 größer als V_3?

(4) Die Oberfläche O des Körpers ist als Funktion von a anzugeben.

(5) Die Länge von $\overline{UC}$ ist zu berechnen.

(6) Grundriß und Aufriß des Körpers sind für $a = 4$ zu zeichnen, wobei die langen Kanten parallel zur Grundrißebene verlaufen und mit der Bildachse einen Winkel von 45° bilden.

Keine Kraft macht den Menschen
so groß und weise
wie die Kraft der kollektiven, kameradschaftlichen Arbeit.

MAXIM GORKI

Anstatt den Studenten einen unverdaulichen Wust
von abstrakten Kenntnissen einzupauken,
muß echte Wissenschaftlichkeit
in der „Entfaltung des jugendlichen Geistes“,
der „Selbsttätigkeit des Denkens“, bestehen.

Aus ADOLPH DIESTERWEG
von H. Siebert

Tag des Lehrers 1967

Verdiente Lehrer des Volkes stellen Aufgaben für den alpha-Wettbewerb

Letzter Einsendetermin: 15. August

Adolph Diesterweg (1790 bis 1866)

W(5)68 Die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks sind drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Der Umfang dieses Dreiecks beträgt 42 cm. Wie lang ist jede der drei Seiten des Dreiecks? Begründe deine Antwort! Oberlehrer Hans Herzog, 22. OS Leipzig

W(6)69 Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC. Lege auf der Seite $\overline{BC}$ einen Punkt A', auf der Seite $\overline{CA}$ einen Punkt B' und auf der Seite $\overline{AB}$ einen Punkt C' so fest, daß die Strecken $\overline{BA'}$, $\overline{CB'}$ und $\overline{AC'}$ gleich lang sind! Beweise, daß das Dreieck $A'B'C'$ ebenfalls gleichseitig ist! Studienrat Johannes Lehmann, 29. OS Leipzig

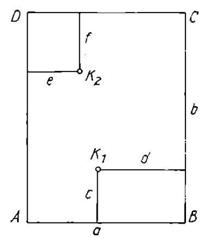
W(7)70 Zeichne in einen Kreis vom Radius $r = 3$ cm zunächst ein Quadrat so, daß die Eckpunkte des Quadrates auf der Kreislinie liegen! Konstruiere danach ein zweites Quadrat, dessen Seiten Tangenten an den Kreis sind! Berechne die Flächeninhalte beider Quadrate! In welchem Verhältnis stehen sie zueinander?

Studienrat Margarete Grattenauer, OS Altenwillershagen, Bez. Rostock

W(8)71 Einem gleichschenkligen Dreieck ABC, dessen Grundseite $\overline{AB}$ die Länge c und dessen Höhe $\overline{CM}$ die Länge h hat, ist ein Rechteck von möglichst großem Flächeninhalt so einzubeschreiben, daß eine Rechteckseite auf der Grundseite des Dreiecks liegt. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

Oberlehrer Erwin Wenzel, Rat des Bezirks Cottbus, Abteilung Volksbildung

W(9)72 Das Rechteck $ABCD$ mit den Seiten $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$ stellt die Spielfläche eines Billardtisches dar. Die Punkte K_1 und K_2 symbolisieren zwei auf der Spielfläche ruhende Kugeln, deren Abstände c, d, e und f von der Bande des Tisches bekannt sind. In welchem Punkt P von $\overline{BC}$ muß die Kugel K_1 auftreffen, um nach dem Berühren der Bande die Kugel K_2 zu treffen? Die Aufgabe ist a) zeichnerisch durch die Konstruktion des Punktes P zu lösen; b) numerisch durch Berechnung der Strecke $\overline{BP}$ zu lösen.



Oberstudienrat Karl-Heinz Lehmann, 8. OS, Berlin-Lichtenberg

W(10)73 Konstruiere aus den gegebenen Strecken a und b die Strecke

$$x = \sqrt[4]{a^4 + b^4} \;!$$ Beschreibe und begründe die Konstruktion!

Studienrat Dr. Walter Schramm, EOS A. v. Humboldt, Berlin-Köpenick

alpha-Wettbewerb [W(5) bis W(10)]

Die zweite Wettbewerbsaufgabe für jede Klassenstufe ist aus dem Beitrag: „Spezialistenlager Mathematik des Bezirks Neubrandenburg“ je nach Neigung auszuwählen, zu lösen und an die Redaktion einzusenden (siehe Seite 89).

Beweise durch vollständige Induktion

2. Teil*

Gilt für jede natürliche Zahl n
$2^n > n$?

Wir wollen nun einige Sätze durch vollständige Induktion beweisen.

a) Zunächst wenden wir uns dem anfangs erwähnten Satz zu:

Für jede natürliche Zahl n ist $2^n > n$.

Wir wissen nun, daß dieser Satz völlig bewiesen ist, wenn wir den Induktionsanfang und den Induktionsschritt ausgeführt haben.
(1) *Induktionsanfang:*
Für $n = 0$ erhält man die Behauptung $2^0 > 0$.
2^0 hatten wir anfangs durch $2^0 = 1$ erklärt. Da $1 > 0$ ist, ist der Satz für $n = 0$ wahr.
(2) *Induktionsschritt:*
Wir wollen noch einmal überlegen, was wir hier zu beweisen haben. Wir müssen zeigen: *Wenn* der Satz für eine beliebige natürliche Zahl wahr ist, *dann* ist er auch für die nachfolgende natürliche Zahl wahr. Sei m eine beliebige (d. h. irgendeine) natürliche Zahl. Wir nehmen an: Für die Zahl m gilt der Satz. Wir zeigen: Unter dieser Voraussetzung ist der Satz auch für $m + 1$ (dem Nachfolger von m) wahr, d. h.

$2^{m+1} > m + 1$ ist wahr.

Beweis: Wir nehmen also an, daß der betrachtete Satz für m richtig ist, d. h., $2^m > m$.

Sicher ist $\quad 2^m > m \qquad (1)$

$2^m \geqq 1. \qquad (2)$

Die linke Seite der Ungleichung (2) addieren wir zur linken Seite der Ungleichung (1). Ebenso verfahren wir mit den rechten Seiten. Dann bleibt die Ungleichung weiterhin richtig, und wir erhalten

$$2^m + 2^m > m + 1.$$

Nun ist aber $2^m + 2^m = 2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$. So erreichen wir schließlich unser Ziel:

$$2^{m+1} > m + 1.$$

Wir wollen nicht vergessen, daß wir von der Gültigkeit der Ungleichung $2^m > m$ ausgegangen sind. Wir haben also bewiesen: Wenn für irgendeine natürliche Zahl m die Ungleichung $2^m > m$ gilt, so gilt auch $2^{m+1} > m + 1$, d. h., dann gilt die Ungleichung auch für den Nachfolger von m. Damit ist außer dem Induktionsanfang auch der Induktionsschritt gezeigt. Folglich gilt der Satz für jede natürliche Zahl.

b) Eine Aufgabe der diesjährigen Mathematikolympiade für die 7. Klasse lautete: *In Rumänien gibt es Geldscheine zu 3 und zu 5 Lei. Beweise, daß jeder beliebige Geldbetrag in Lei, der größer als 7 Lei ist, unter alleiniger Verwendung von Drei- und Fünfleischeinen zusammengestellt werden kann, falls genügend viele dieser Geldscheine vorhanden sind.*

* Der erste Teil wurde im Heft 2 veröffentlicht (d. Red.).

Das ist ebenfalls ein Satz über natürliche Zahlen. Jedoch wird hier nur über alle natürlichen Zahlen, die *größer als 7* sind, etwas ausgesagt. Dennoch kann der Beweis mit vollständiger Induktion geführt werden. *Wir fangen statt bei* 0 *erst bei der Zahl* 8 *an.* Alles andere wird wie bisher ausgeführt.

Induktionsanfang: Wir müssen zeigen, daß der Satz für $n = 8$ gilt. Ein Geldbetrag von 8 Lei kann aber gerade aus einem Drei- und einem Fünfleischein zusammengestellt werden.

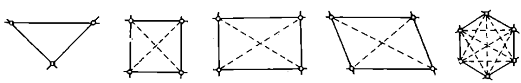
Induktionsschritt: Wir müssen zeigen: *Falls* ein Geldbetrag von m Lei aus Drei- und Fünfleischeinen zusammengestellt werden kann, *so* kann auch ein Geldbetrag von $m + 1$ Lei aus Drei- und Fünfleischeinen zusammengestellt werden. Dabei verlangen wir allerdings, daß $m > 7$ ist.
Sei also ein Geldbetrag von m Lei aus Drei- und Fünfleischeinen zusammengestellt. Wir müssen nun *zwei Fälle* unterscheiden.

1. Fall: In dieser Zusammenstellung kommt *ein Fünfleischein* vor.
2. Fall: In dieser Zusammenstellung kommt *kein Fünfleischein* vor.

Im 1. Fall ersetzen wir *einen Fünfleischein* durch *zwei Dreileischeine.* Dadurch wird der Gesamtbetrag von m Lei *um 1* Leu*) *erhöht.* Wir haben dann auch $m + 1$ Lei in der verlangten Art dargestellt. Im 2. Fall kommen in der Zusammenstellung mindestens drei Dreileischeine vor, denn m soll größer sein als 7, also mindestens 8. Für $m = 8$ kommt aber ein Fünfleischein vor. Folglich muß im 2. Fall m mindestens 9 sein. Wir nehmen nun *drei Dreileischeine* weg und ersetzen sie durch *zwei Fünfleischeine.* Dadurch *erhöht* sich der Gesamtbetrag *ebenfalls um 1* Leu. Wir erhalten auch in diesem Fall eine verlangte Zusammenstellung von $m + 1$ Lei. Damit ist der Beweis vollständig geführt.

c) Wir betrachten ein ebenes *konvexes n*-Eck, $n > 3$, (natürlich und im folgenden nur konvexe Vierecke). Das ist eine *geradlinig begrenzte Figur mit n Ecken,* deren *Diagonalen* alle im Innern der Figur verlaufen. Beispiele für solche Figuren sind Dreiecke, Quadrate, Rechtecke, Parallelogramme, regelmäßige Sechsecke (Abb. 1).

Abb. 1



Figuren der Art wie in Abb. 2 sind nicht konvex, da die Diagonale $\overline{P_1 P_3}$ nicht im Innern der Figur verläuft.
Aus dem Mathematikunterricht des 6. Schuljahres ist uns bekannt, daß *die Summe der Innenwinkel in jedem ebenen Dreieck 180° beträgt.*

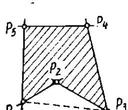


Abb. 2

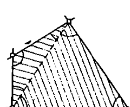


Abb. 3

Die Summe der Innenwinkel in Vierecken beträgt 360°; denn ein Viereck läßt sich durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen (Abb. 3). Dabei ist die Summe der Innenwinkel beider Dreiecke gerade gleich der Summe der Innenwinkel des Vierecks.

*) Es heißt: Der Leu, Plural: Lei (Währungseinheit der in SR Rumänien; grch $\to$ lat $\to$ rumän. ‚Löwe').

Anzahl der Ecken n	Winkelsumme $w(n)$
3	$1 \cdot 180^\circ$
4	$2 \cdot 180^\circ$
5	$3 \cdot 180^\circ$

Im Fünfeck beträgt die Summe der Innenwinkel 540°, wie man leicht durch Zerlegen des Fünfecks in entsprechende Dreiecke finden kann. In allen drei untersuchten Fällen erhalten wir für die Winkelsumme Vielfache von 180°.

Es liegt die Vermutung nahe, daß dieser Sachverhalt bei allen konvexen n-Ecken vorliegt, d. h., daß man die Summe der Innenwinkel erhält, wenn man 180° mit der um 2 verminderten Anzahl der Ecken multipliziert. Kürzen wir die Winkelsumme des n-Ecks mit $w(n)$ (lies: w von n) ab, so vermuten wir

$$w(n) = (n - 2) \cdot 180^\circ.$$

Wir sprechen hier ausdrücklich von *Vermutung*, da wir den Sachverhalt nur für $n = 3$, $n = 4$ und $n = 5$ überprüft haben. Wir werden nun durch vollständige Induktion beweisen, daß *dieser Satz für alle* $n \geqq 3$ (*für alle natürlichen Zahlen, die größer oder gleich 3 sind*) *richtig ist*. Dabei müssen wir wieder beachten, daß wir nicht bei 0, sondern erst bei 3 beginnen. Für $n = 0$, $n = 1$ und $n = 2$ ist der Satz nicht sinnvoll, da wir für eine Figur der oben besprochenen Art wenigstens drei Punkte benötigen.

Induktionsanfang: Wir haben uns schon davon überzeugt, daß der Satz für $n = 3$ (Dreieck) richtig ist:

$$w(3) = (3 - 2) \cdot 180^\circ = 180^\circ$$

Induktionsschritt: Wir gehen davon aus, daß der Satz für eine natürliche Zahl m, die größer als 2 ist, richtig sein möge und zeigen, daß er dann auch für den Nachfolger $m + 1$ dieser Zahl gilt. Sei ein $(m + 1)$-Eck gegeben. Die Eckpunkte der Figur denken wir uns in der Reihenfolge numeriert, in der sie durchlaufen werden, wenn man die Figur mit dem Finger nachzeichnet. Da es sich um $m + 1$ Eckpunkte handelt, erhalten wir $P_1, P_2, P_3 \ldots, P_{m-1}, P_m, P_{m+1}$ (Abb. 4).

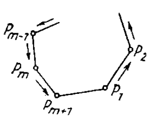


Abb. 4

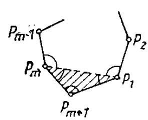


Abb. 5

Nun decken wir den Punkt P_{m+1} ab und verbinden P_m mit P_1 (Abb. 5). Wir erhalten so ein m-Eck. Nehmen wir jetzt den Punkt P_{m+1} wieder hinzu und betrachten das $(m + 1)$-Eck, so vergrößert sich die Winkelsumme der Figur gerade um die Winkelsumme des Dreiecks $\triangle P_m P_{m+1} P_1$, also um 180°. Infolgedessen ist

$$w(m + 1) = w(m) + 180^\circ,$$

in Worten ausgedrückt: Die Winkelsumme des $(m + 1)$-Ecks ist gleich der Winkelsumme des m-Ecks zuzüglich 180°. Für die Zahl m hatten wir den Satz als richtig vorausgesetzt, also

$$w(m) = (m - 2) \cdot 180^\circ.$$

Demzufolge ist

$$w(m + 1) = (m - 2) \cdot 180^\circ + 180^\circ,$$

also $$w(m + 1) = (m - 1) \cdot 180^\circ.$$

Unter der Voraussetzung, daß der Satz für m richtig ist, erhalten wir die Winkelsumme des $(m+1)$-Ecks, wenn wir 180° mit der um 2 verminderten Anzahl der Eckpunkte multiplizieren; denn

$$(m+1)-2=m-1.$$

Mit anderen Worten: Wenn der Satz für m richtig ist, so ist er auch für $m+1$ richtig. Damit ist der Beweis gelungen. Unser Satz gilt für alle natürlichen Zahlen, die größer als 2 sind.

d) Auf ähnliche Weise wie bei Beispiel c) gewinnt man auch *einen Satz über die Anzahl der Diagonalen im n-Eck*. Jeder Punkt des n-Ecks ist mit zwei weiteren Punkten des n-Ecks durch Seiten der Figur verbunden. Alle übrigen Verbindungsstrecken zwischen zwei Punkten des n-Ecks, die nicht Seiten sind, heißen *Diagonalen*.
Wir bezeichnen die Anzahl der Diagonalen des n-Ecks mit $d(n)$. Nun behaupten wir, daß für jede natürliche Zahl n, die größer als 2 ist,

$$d(n)=\frac{n(n-3)}{2} \text{ gilt.}$$

Im Dreieck ($n=3$) gibt es keine Diagonalen. Auch unsere Formel liefert

$$d(3)=\frac{3(3-3)}{2}=\frac{3\cdot 0}{2}=0.$$

Für $n=4$ (Viereck) liefert die Formel

$$d(4)=\frac{4(4-3)}{2}=\frac{4\cdot 1}{2}=2.$$

Tatsächlich gibt es im Viereck zwei Diagonalen.
Aufgabe: *Beweise durch vollständige Induktion, daß dieser Satz für alle $n \geqq 3$ richtig ist!*

e) Wir bilden *die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen*. Für $n=2$ bedeutet das: Wir addieren 1 und 3. Bezeichnen wir die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen mit $s(n)$, so ist also

$$s(2)=1+3; \quad s(2)=4$$

Weiter ist:

$$s(3)=1+3+5; \qquad s(5)=1+3+5+7+9;$$
$$s(4)=1+3+5+7; \qquad s(6)=1+3+5+7+9+11.$$

Rechnen wir die Summe jeweils aus, so erhalten wir:

Anzahl der ersten ungeraden natürlichen Zahlen n	Summe dieser Zahlen $s(n)$
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

Hier liegt die Vermutung nahe, daß die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen immer gleich n^2 ist, d. h. gleich dem Quadrat der Anzahl der Summanden.
Wir wollen diesen Satz nun für alle $n \geqq 2$ beweisen. Bevor wir zum Beweis kommen, wollen wir uns noch überlegen, wie die n-te ungerade Zahl aussieht.

n	die n-te ungerade natürliche Zahl
1	$1 = 2 \cdot 1 - 1$
2	$3 = 2 \cdot 2 - 1$
3	$5 = 2 \cdot 3 - 1$
4	$7 = 2 \cdot 4 - 1$
5	$9 = 2 \cdot 5 - 1$
6	$11 = 2 \cdot 6 - 1$
7	$13 = 2 \cdot 7 - 1$
.	.
.	.
.	.

Die erste ungerade natürliche Zahl ist die Zahl 1, die zweite ist die Zahl 3, die dritte ist die Zahl 5 usw. Ohne Schwierigkeiten läßt sich ebenfalls durch vollständige Induktion bestätigen, daß für jedes $n \geqq 1$ die n-te ungerade natürliche Zahl $2n - 1$ ist. Diesen Beweis möchten wir dem Leser überlassen. (Zu beachten ist dabei die Tatsache, daß sich zwei aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen jeweils um 2 unterscheiden.)
Nun kommen wir zum Beweis des Satzes über die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen:

Induktionsanfang: Für $n = 2$ ist der Satz wahr (siehe oben): $s(2) = 2^2 = 4$.
Induktionsschritt: Wir haben zu zeigen: Wenn der Satz für eine natürliche Zahl m gilt, so gilt er auch für die Zahl $m + 1$, mit anderen Worten: Wenn $s(m) = m^2$ ist, so ist $s(m+1) = (m+1)^2$. $s(m+1)$ ist die Summe der ersten $m + 1$ ungeraden natürlichen Zahlen. Die Summe der ersten m ungeraden Zahlen ist $s(m)$. Die $(m+1)$-te ungerade Zahl ist $2m + 1$.
Folglich ist $s(m+1) = s(m) + 2m + 1$.
Wir hatten vorausgesetzt, daß der Satz für m gilt. Also ist $s(m) = m^2$.

$$s(m+1) = m^2 + 2m + 1.$$

Wenden wir eine binomische Formel an, so erhalten wir

$$s(m+1) = (m+1)^2.$$ Damit ist der Beweis geführt.

W. Stoye

Aufgaben

74 Es ist die Summe S_n der folgenden Produkte zu ermitteln:

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1).$$

75 Es ist zu beweisen, daß für jede natürliche Zahl n gilt:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

76 Es ist zu beweisen, daß die Zahl $4^n + 15n - 1$ für alle natürlichen Zahlen bis $n \geqq 1$ durch 9 teilbar ist.
77 Es gibt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ Möglichkeiten, n Gegenstände in verschiedener Reihenfolge anzuordnen.
78 In der Zahlenfolge 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... erhält man (vom dritten Glied an) jede Zahl als Summe der beiden vorhergehenden. Es ist zu beweisen, daß jede vierte Zahl dieser Folge durch 3 teilbar ist.
79 Mit Hilfe der Wägestücke 1 g, 2 g, 4 g, ..., 2^ng kann man jede Masse von 1 g bis $(2^n - 1)$ g zusammenstellen.

Diese Aufgaben wurden aus folgenden Büchern entnommen, die weiteres Material zum Selbststudium enthalten: Sominski, J. S.: Die Methode der vollständigen Induktion. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften; Kolosow, A. A.: Kreuz und quer durch die Mathematik. Volk und Wissen Volkseigener Verlag; Autorenkollektiv: Algebra und Geometrie für Ingenieur- und Fachschulen. VEB Fachbuchverlag; Manuskriptdruck: Sammlung vorbereitender Aufgaben der allrussischen Olympiade Junger Mathematiker. (russ.).

Wir untersuchen Abbildungen

Teil 3*

$P = \{g, n, r, u\}$
$N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$M \cong N \quad G \subset N$

1. Beispiele für Abbildungen

Ich will zuerst einiges über einen Tag im Leben von sechs Schülern berichten, die miteinander befreundet sind. Sie heißen Achim, Bernd, Christine, Detlef, Elke und Frank. Diese Schüler erlebten an jenem Tag unter anderem folgendes:

(1) Im Mathematikunterricht fand eine Leistungskontrolle statt. Wie wir wissen, kann man dabei eine Eins, eine Zwei, eine Drei, eine Vier oder auch eine Fünf bekommen. Nun, Detlef bekam eine Drei, Achim und Elke eine Zwei und Christine eine Eins. Bernd und Frank wurden nicht geprüft.

(2) Im Sportunterricht wurde die Gründung einer Sportgemeinschaft beraten. Zur Auswahl standen die Sportarten Handball, Judo, Volleyball und Wasserball. Die Schüler sollten aufschreiben, welche dieser Sportarten sie gern betreiben würden. Unsere sechs Freunde entschieden sich so: Achim für Handball, Bernd für Handball und Volleyball, Christine für Handball, Detlef für Handball, Judo und Volleyball, Elke für Volleyball und Frank auch für Volleyball.

(3) Am Nachmittag gab es bei Frank eine Geburtstagsfeier, zu der unsere Freunde wieder beisammen waren. Sie konnten wählen, was sie trinken wollten: Kakao, Limonade, Milch, Selter, Tee oder Zitrone. Nachdem Franks Mutter alle befragt hatte, wußte sie: Achim möchte Limonade, Bernd ist für Kakao, Christine mag am liebsten Milch, Detlef bittet um Zitrone, Elke wünscht sich Tee und Frank will Selter.

(4) Im Laufe der Geburtstagsfeier wurde auch ein Pfänderspiel durchgeführt. Zum Schluß lagen folgende Gegenstände als Pfänder auf dem Tisch: ein Groschen, ein Notizbuch, ein Ring und eine Uhr. Dabei stammte von Detlef der Groschen und das Notizbuch, von Elke der Ring und von Frank die Uhr.

Was hat das alles mit *Abbildungen* zu tun? Nun, sehen wir uns die Erlebnisse (1) bis (4) einmal genauer an. Wir erkennen als erstes, daß verschiedene *Mengen* vorkommen: Da ist zunächst einmal die Menge der *Schüler*. Wir wollen sie mit S bezeichnen und die Schüler der Kürze wegen mit dem klein geschriebenen Anfangsbuchstaben ihres Namens. Wir haben also: $S = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dann tritt die Menge der *Zensuren* auf, die in der Schule gegeben werden können. Wir bezeichnen diese Menge mit Z und können dann schreiben: $Z = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ferner kommt eine Menge von *Sportarten* vor. Nennen wir diese Menge hier A. Wenn wir die Sportarten selbst wieder durch ihren Anfangsbuchstaben kennzeichnen, so haben wir: $A = \{h, j, v, w\}$. Außerdem spielt eine Menge von *Getränken* eine Rolle: $G = \{k, l, m, s, t, z\}$. Und schließlich muß noch die Menge der *Pfänder* genannt werden: $P = \{g, n, r, u\}$.

Wie wir weiter bemerken, kommen bei jeder der geschilderten Begebenheiten (1) bis (4) jeweils genau *zwei* Mengen vor, die außerdem immer irgendwie miteinander zusammenhängen: Elementen der *ersten* Menge — das ist jedesmal die Menge S — sind immer gewisse Elemente der *zweiten* Menge *zugeordnet*. Zum Beispiel ist Detlef durch die Leistungskontrolle die Zensur 3 zugeordnet worden, Christine entschied sich bei

* Der Lehrgang *Mengenlehre* begann mit Teil 1 in Heft 1 (S. 11) und Teil 2 (S. 41) (d. Red.).

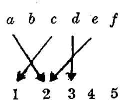
den Sportarten für Handball, Elke erhielt am Nachmittag wunschgemäß Tee zugeteilt usw. Man sagt in solchen und ähnlichen Fällen ganz allgemein, daß eine *Zuordnung* oder *Abbildung* vorliegt. (Das Wort „Abbildung“ wird hier in demselben Sinne gebraucht wie das Wort „Zuordnung“. Wir wollen also nicht an die Bedeutung denken, die das Wort „Abbildung“ in der Umgangssprache hat. Dort versteht man zum Beispiel eine Fotografie oder eine Zeichnung darunter. Für uns bedeutet „Abbildung“ aber dasselbe wie „Zuordnung“.)
Oft gibt man auch gleich mit an, welche Mengen bei der Abbildung vorkommen. Zu unserem Beispiel (1) würde man dann sagen, daß es eine *Abbildung aus S in Z* ist.
Halten wir also fest: Sind Mengen M und N gegeben, wobei Elementen aus M Elemente aus N zugeordnet sind, so sprechen wir von einer *Abbildung aus M in N.*

2. Darstellung von Abbildungen

Damit wir die in den Beispielen (1) bis (4) angegebenen Abbildungen etwas besser überblicken können, wollen wir überlegen, wie man sie übersichtlich darstellen könnte.

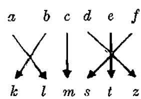
(a) Eine erste Möglichkeit besteht darin, die Elemente beider Mengen aufzuschreiben und durch Pfeile deutlich zu machen, welche Elemente der zweiten Menge Elementen der ersten Menge zugeordnet sind. Für unser Beispiel (1) könnte das so aussehen, wie es hier dargestellt ist. (Natürlich darf man die Buchstaben oder Zahlen auch anders anordnen.)
Entsprechend ergeben sich die Darstellungen für die Beispiele (2), (3) und (4):

Beispiel (1)

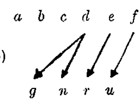


Beispiel (2)

Beispiel (4)



Beispiel (3)



Überprüft noch einmal an Hand des Textes, ob alle Pfeile richtig eingezeichnet sind! Man kann dabei jetzt auch von den Pfeildarstellungen ausgehen, etwa so: Beim Beispiel (2) führen von d aus Pfeile nach h, nach j und nach v. Das bedeutet, daß Detlef die Sportarten Handball, Judo und Volleyball zugeordnet sind, und das sind tatsächlich gerade die, die er gewählt hatte.
Die Darstellung mit Hilfe der Pfeile kann allerdings auch unübersichtlich werden, vor allem dann, wenn viele Pfeile gezeichnet werden müssen.

(b) Eine zweite Möglichkeit, unsere Abbildungen darzustellen, ist die Anlage einer Tabelle. In die linke Spalte schreiben wir die Elemente der ersten Menge, und neben jedes dieser Elemente schreiben wir die zugeordneten Elemente der zweiten Menge. Das sieht dann so aus:

Beispiel 1		Beispiel 2		Beispiel 3		Beispiel 4	
a	2	a	h	a	l	a	—
b	—	b	h, v	b	k	b	—
c	1	c	h	c	m	c	—
d	3	d	h, v, j	d	z	d	g, n
e	2	e	v	e	t	e	r
f	—	f	v	f	s	f	u

Es gibt zwar noch mehr Methoden, wie man Abbildungen darstellen kann, für uns reichen die beiden hier angegebenen Möglichkeiten aber vorläufig aus.

3. Eigenschaften von Abbildungen

Wir wollen unsere vier Beispiele nun noch etwas genauer untersuchen. Dabei stoßen wir auf interessante Unterschiede.

(a) Wenn wir unsere Pfeildarstellungen betrachten, so fällt auf, daß in den Beispielen (2) und (3) von *allen* Elementen der Menge S wenigstens ein Pfeil ausgeht. Man drückt diesen Sachverhalt sprachlich durch die Redeweise „Abbildung *von* S...“ aus. Bei den Beispielen (1) und (4) geht dagegen *nicht* von jedem Element der Menge S ein Pfeil aus. (Genau genommen gehen die Pfeile natürlich überhaupt nicht von *Elementen* von S aus – also von den Schülern – sondern von den *Zeichen* für diese Elemente, von den Buchstaben. Um uns nicht gar zu umständlich ausdrücken zu müssen, wollen wir es mit dieser Unterscheidung aber nicht so genau nehmen.)
Andererseits können wir feststellen, daß in den Beispielen (3) und (4) zu *allen* Elementen der Mengen G bzw. P wenigstens ein Pfeil hinweist. Hier sprechen wir von einer „Abbildung ... *auf* G“ bzw. „ ... *auf* P“. In den Beispielen (1) und (2) ist das *nicht* der Fall.
Wenn wir unsere Beispiele (1) bis (4) jetzt mit Hilfe der neuen Ausdrucksweise beschreiben wollen, so können wir sagen:
Beispiel (1) ist eine Abbildung *aus S in Z*;
Beispiel (2) ist eine Abbildung *von S in A*;
Beispiel (3) ist eine Abbildung *von S auf G*;
Beispiel (4) ist eine Abbildung *aus S auf P*.
Fassen wir zusammen:
Sind Elementen einer Menge M Elemente einer Menge N zugeordnet, so sprechen wir von einer *Abbildung aus M in N*.
Wenn man weiß, daß *allen* Elementen von M wenigstens ein Element von N zugeordnet ist, so kann man von einer Abbildung *von M* in N sprechen.
Weiß man, daß *alle* Elemente von N als zugeordnete Elemente bei der Abbildung vorkommen, so kann man von einer Abbildung aus M *auf* N sprechen.
(b) Sehen wir uns unsere Abbildungen nun noch von einem anderen Gesichtspunkt aus an.
In den Pfeildarstellungen der Beispiele (1) und (3) geht von jedem Element der Menge S *höchstens ein* Pfeil aus, in den Beispielen (2) und (4) gibt es dagegen Elemente in der Menge S, von denen *mehrere* Pfeile ausgehen.
In den Tabellen macht sich dieser Unterschied auch bemerkbar: Bei den Beispielen (1) und (3) steht neben jedem Element der Menge S *höchstens ein* zugeordnetes Element, bei den Beispielen (2) und (4) kommt es dagegen auch vor, daß neben einem Element der Menge S *mehrere* zugeordnete Elemente stehen.
Abbildungen der ersten Art nennt man *eindeutig*, Abbildungen der zweiten Art *nicht eindeutig*.
Ein besonderer Fall liegt beim Beispiel (3) vor. Dort geht in der Pfeildarstellung nicht nur von jedem Element der Menge S höchstens ein Pfeil aus, sondern es kommt auch bei jedem Element der Menge G höchstens ein Pfeil an. Eine solche Abbildung nennt man *eineindeutig* oder *umkehrbar eindeutig*. (Man spricht hier aus folgendem Grund von „umkehrbar eindeutig“: Wenn man alle Pfeile *umkehren* würde, so wäre die damit gegebene *neue* Abbildung ebenfalls eindeutig.)
Halten wir fest: Ist bei einer Abbildung aus M in N jedem Element von M *höchstens ein* Element von N zugeordnet, so nennt man die Abbildung *eindeutig*. Tritt darüber hinaus jedes Element von N *höchstens einmal* als zugeordnetes Element auf, so nennt man die Abbildung *umkehrbar eindeutig* oder *eineindeutig*.

4. Anwendungen des Abbildungsbegriffes

Durch die nähere Untersuchung der zu Beginn geschilderten Zuordnungen (1) bis (4) haben wir allerlei über Abbildungen erfahren. Wir wollen nun noch ein wenig sehen, was wir mit den neuen Begriffen anfangen können.

Da ist zunächst einmal festzuhalten, daß wir im täglichen Leben häufig mit Abbildungen zu tun haben:

Zum Beispiel ist jedem Schüler einer Klasse ein Wohnhaus zugeordnet (nämlich das Haus, in dem er wohnt). Diese Abbildung ist eindeutig (kein Schüler wohnt in zwei oder mehr Häusern zugleich), aber nicht immer umkehrbar eindeutig (es kann vorkommen, daß mehrere Schüler im gleichen Haus wohnen).

Eine andere Abbildung ist dadurch gegeben, daß Kraftfahrzeugen in der DDR ein polizeiliches Kennzeichen zugeordnet ist. Wir haben es hier mit einer *umkehrbar eindeutigen* Abbildung *aus* der Menge der Kraftfahrzeuge *in* die Menge der möglichen Kennzeichen zu tun; denn erstens gehört zu jedem Kraftfahrzeug *höchstens ein* Kennzeichen und kein Kennzeichen wird öfter als einmal vergeben, zweitens besitzen *nicht alle* Kraftfahrzeuge ein Kennzeichen, sondern nur die, die polizeilich zugelassen sind, und drittens sind vorläufig noch *nicht alle* Kennzeichen, die man aus zwei Buchstaben und vier Ziffern bilden kann, im Gebrauch. Sicher kann jeder selbst noch eine Fülle weiterer Abbildungen finden, die im täglichen Leben auftreten.

Von besonderer Bedeutung ist der Abbildungsbegriff aber innerhalb der Mathematik. Wir wollen uns das wenigstens an einem Beispiel noch ansehen.

Wie kann man eigentlich feststellen, ob zwei Mengen gleich viele Elemente besitzen? Das ist ganz einfach, wird mancher sagen, man zählt erst die Elemente der einen Menge und dann die Elemente der anderen Menge und stellt so fest, ob es gleich viele sind. Nun, wenn wir annehmen, daß beide Mengen nur *endlich* viele Elemente enthalten, sodaß man sie wirklich *zählen* kann, dann ist diese Methode im Prinzip anwendbar. Aber *muß* man denn überhaupt zählen?

Wenn man zum Beispiel wissen will, ob in einer Gesellschaft genau so viele Herren anwesend sind wie Damen, braucht man keine dieser beiden Mengen (nennen wir sie H und D) abzuzählen, sondern nur *alle* zum Tanzen aufzufordern. Dann versucht jeder Herr, eine Dame zu finden, und so entsteht eine *umkehrbar eindeutige* Abbildung aus H in D. Wenn dabei weder Herren noch Damen übrigbleiben — wenn also eine eineindeutige Abbildung *von H auf D* vorliegt — dann weiß man, daß H *genau so viele* Elemente enthält wie D. Man sagt dafür auch, H ist *gleichmächtig* zu D.

Wir können also festhalten: Mengen M und N sind genau dann gleichmächtig (geschrieben: $M \backsim N$), wenn es eine umkehrbar eindeutige Abbildung von M auf N gibt.

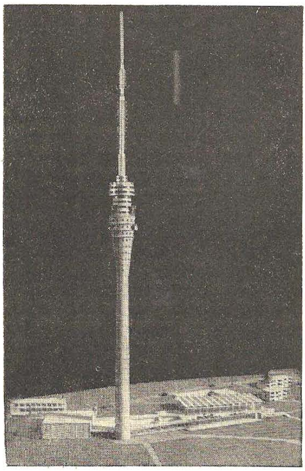
Solange wir nur endliche Mengen untersuchen, führt der Begriff *gleichmächtig* zu keinen Überraschungen. Das wird ganz anders, wenn die betrachteten Mengen *unendlich* viele Elemente besitzen. Sei zum Beispiel $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge aller natürlichen Zahlen und $G = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ die Menge aller geraden Zahlen. Wie jeder sofort sieht, gilt $G \subset N$ (G ist eine *echte* Teilmenge von N). Man könnte also meinen, daß G „weniger" Elemente enthält als N. Das ist aber nicht der Fall. Wenn wir jeder natürlichen Zahl ihr Produkt mit 2 zuordnen, so erhalten wir eine Abbildung, die durch die untenstehende Tabelle angedeutet wird. Wie wir sehen, ist diese Abbildung

0	1	2	3	4	...
0	2	4	6	8	...

erstens umkehrbar eindeutig, und zweitens wird *allen* natürlichen Zahlen eine gerade Zahl zugeordnet und alle geraden Zahlen treten als zugeordnete Elemente auf. Es liegt also eine *umkehrbar eindeutige Abbildung von N auf G* vor. Das heißt aber, daß N und G *gleichmächtig* sind.

W. Walsch

Schwankt der Fernsehturm?



Gegenwärtig werden zur Verbesserung der Fernsehübertragung in der DDR eine Reihe von Fernsehtürmen gebaut, die oft gleichzeitig als Aussichtspunkt mit in der Höhe eingebauter Gaststätte dienen. Bei solchen Bauwerken ist erfahrungsgemäß mit einer hohen Besucherzahl zu rechnen, so daß nicht nur im Hinblick auf die technischen Einrichtungen, sondern auch zum Schutz der Besucher die Standfestigkeit und Sicherheit des Bauwerkes ständig gewährleistet sein müssen. Dies wird natürlich durch die Konstruktion, die sorgfältige statische Berechnung mit entsprechender Sicherheit und die Wahl der Baustoffe erreicht. Erfüllt dann die Bauausführung die genau vorgeschriebenen Qualitätsanforderungen, so ist die Sicherheit des Bauwerkes nach menschlichem Ermessen gewährleistet. Trotzdem wirken auf jedes Bauwerk Kräfte ein, die zu einer Veränderung seiner Lage und Form führen können. Das sind bei hohen Türmen hauptsächlich das Eigengewicht, das zu Setzungen infolge Zusammendrückung des Baugrundes führt, die ungleichmäßige Erwärmung der Außenflächen durch Sonnenbestrahlung, wodurch eine verschiedene Ausdehnung der Sonnenseite gegenüber der Schattenseite erfolgt und damit eine Verbiegung des Turmes bewirkt, und schließlich der Winddruck, der bei starkem Wind und Sturm eine kurzperiodische Schwingung des Turmes verursacht. Es ist nun die Aufgabe des Vermessungsingenieurs, alle diese Veränderungen ihrer Größe nach zu bestimmen. Da es sich hierbei um relativ kleine Beträge (mm bzw. cm) handelt, sind die dazu erforderlichen Messungen mit größter Sorgfalt auszuführen.

Für die Bestimmung von Setzungen von Bauwerken gibt es hauptsächlich zwei Vermessungsverfahren:

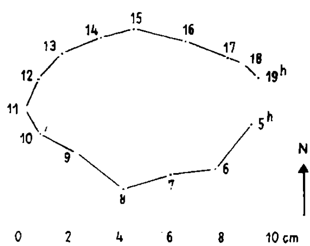
1. Das geodätische Präzisionsnivellement

Man braucht dazu ein Präzisionsnivellierinstrument auf Stativ und zwei Nivellierlatten mit Teilung auf Invarband. Aus den Ablesungen an den beiden im gleichen Abstand (bis 25 m) vom Instrument senkrecht aufgestellten Latten kann der Höhenunterschied der Lattenaufsetzpunkte auf etwa $\pm$ 0,2 mm genau ermittelt werden. Zur Feststellung von Setzungen werden mehrere Höhenbolzen etwa 40 cm über dem Erdboden in das Bauwerk einzementiert. Die Höhenunterschiede dieser Bolzen gegenüber einem unveränderlichen Höhenfestpunkt sind nach dem beschriebenen Verfahren zu bestimmen. Die Wiederholung der Messung in verschiedenen Zeitabständen führt zur Ermittlung der Größe der Setzungen.

2. Die Präzisionsschlauchwaage

Zur Bestimmung relativer Höhenveränderungen von Bauwerkspunkten, besonders im Inneren von Bauwerken, kann die Höhenmessung mit der Präzisionsschlauchwaage

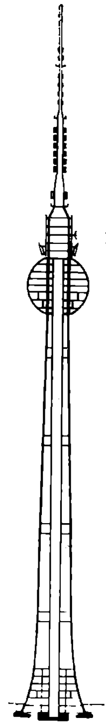
benutzt werden. Die Meßanordnung besteht aus zwei in etwa gleicher Höhe vertikal aufgehängten Glaszylindern, die durch einen 20 m bis 40 m langen Schlauch miteinander verbunden sind. Das System wird mit Wasser gefüllt, und nach dem Gesetz der kommunizierenden Röhren steht der Wasserspiegel in beiden Zylindern gleich hoch. Mittels einer auf die Wasseroberfläche aufsetzbaren Meßspitze mit elektrischer Anzeige kann der Höhenunterschied der beiden Aufhängepunkte der Zylinder auf $\pm$ 0,02 mm genau bestimmt werden. Das Verfahren ist demnach für besonders genaue Neigungsbestimmungen zu verwenden.
Beim Fernsehturm Dresden ergab sich bei einer Bauhöhe von 167 m des Betonschaftes eine Senkung am äußeren Turmfuß von rund 3 mm, während die inneren Fundamente eine gegenseitige relative Neigung von 0,8 mm nach der Hangseite zu zeigten.
Die senkrechte Stellung der Turmachse kann am besten mit einer Lotvorrichtung überprüft werden. Ein einfaches Schnurlot ist jedoch für solche Höhen zu ungenau. Man verwendet deshalb besser ein optisches Lot, z. B. das Präzisionszenitlot vom VEB Carl Zeiss Jena. Stellt man das Instrument im Inneren des Turmes im Zentrum auf, so kann man die Achse in 250 m Höhe mit einer Abweichung von $\pm$ 2 mm aus der Senkrechten angeben. Das Gerät wird deshalb auch zur Absteckung der Vertikalachse während des Baues benutzt. Da jedoch die Achse des Turmes nach seinem Ausbau meist nicht mehr zugänglich ist, wird für spätere Beobachtungen und zur Kontrolle der vorgenommenen Lotung sowie zur Ermittlung eventueller horizontaler Verschiebungen noch eine Bestimmung der Lage des Turmes von Punkten außerhalb des Bauwerkes aus durchgeführt. Dazu werden zweckmäßig etwa in den vier Haupthimmelsrichtungen feste Pfeiler einbetoniert, deren Entfernung das eineinhalb- bis zweifache der Turmhöhe betragen sollte. Auf der Pfeileroberfläche, die sich etwa 1,30 m über dem Boden befindet, wird eine Vorrichtung zur Zwangszentrierung eines Instrumentes für genaue Messung von Winkeln (Theodolit) angebracht. Unter Voraussetzung der Unveränderlichkeit dieser Festpunkte werden mit diesem Theodolit die Winkel zwischen feststehenden Orientierungszielpunkten und an der Außenseite des Turmes angebrachten speziellen Zielmarken gemessen. Verwendet man den Theodolit Theo 010 vom VEB Carl Zeiss Jena, so kann man diese Winkel auf $\pm 1''$ (Bogensekunde) genau messen und damit ebenfalls die Abweichung der Turmachse aus der Vertikalen bzw. auch eine Horizontalverschiebung oder eine Verdrillung des Turmes auf einige Millimeter genau ermitteln.
Um den Einfluß der Sonnenbestrahlung festzustellen, wurden am Fernsehturm Dresden bei einer Bauhöhe von 167 m am 17. 5. 1966 die Veränderungen der Turmachse von 5 Uhr morgens bis 19 Uhr abends zu jeder Stunde bestimmt. Es ergab sich die in der nebenstehenden Abbildung dargestellte ellipsenförmige Bewegung mit einer großen Halbachse von rund 10 cm. Die durch Windeinfluß bisher festgestellten Schwankungen sind geringer als erwartet und betragen bei mittlerer Windstärke etwa 4 cm mit einer Schwingungsdauer von einigen Sekunden. Es sind jedoch noch weitere Messungen bei größerer Windstärke auszuführen. Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß zwar geringe Veränderungen an solch hohen Stahlbetontürmen besonders durch Temperatureinfluß auftreten, von einer spürbaren Schwankung kann jedoch keine Rede sein.



Maßstab 1:2

W. Zill

Der Berliner Fernsehturm

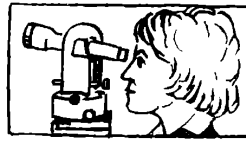

Prinzipdarstellung

Im Jahre 1965 wurde im Berliner Stadtzentrum in der Nähe des Alexanderplatzes mit dem Bau eines Fernseh- und UKW-Turmes begonnen. Er wird nach seiner Fertigstellung mit 361,5 m Höhe das höchste Bauwerk der DDR sein und als neues Wahrzeichen Berlins Zeugnis für den hohen Stand der technischen Entwicklung ablegen.
Die drei Hauptteile des Turmes sind das Fundament, der Stahlbetonschaft mit Turmkopf und der stählerne Antennenträger. Das Fundament besteht aus zwei Teilen, dem ringförmigen eigentlichen Fundament für den Turmmantel von etwa 21 m äußerem Radius, einer Breite von etwa 8,5 m und dem inneren Fundament für die Stahlkonstruktion des Aufzugschachtes. Der Radius des Schaftes beträgt an der Ansatzstelle etwa 16 m, in 24 m Höhe etwa 8,75 m und in 200 m Höhe etwa 4,25 m.
In seinem unteren Teil hat der Stahlbetonschaft die Form eines Rotationshyperboloids. Bis zur Höhe von etwa 24 m ist diese Gestalt deutlich ausgeprägt; mit zunehmender Höhe ähnelt sie mehr einem Kegelstumpf. Ab 200 m Höhe schließt sich ein zylindrischer Schaft an, um den eine Kugelkonstruktion (Turmkopf) von 32 m Durchmesser angebracht ist. Im unteren Teil der Kugel befindet sich das Turmcafé in einer Höhe von 207 m. Die Dicke des Stahlbetonmantels beträgt 50 cm bzw. 45 cm. Der 111,5 m hohe Antennenträger ist eine reine Stahlkonstruktion. Er besteht abwechselnd aus zylindrischen und konischen Teilen. Im Inneren des Turmes befindet sich die Stahlkonstruktion des Aufzugschachtes mit drei Fahrstühlen und einem Treppenaufgang. Zwischen Aufzugschacht und Betonmantel werden in Abständen von je 45 m Höhe Zwischenbühnen für die Wartung der Flugwarnbeleuchtung sowie im Turmfuß und Turmkopf mehrere Etagen mit Arbeitsräumen eingebaut. Die Einmeßarbeiten für die Lotrechtstellung des Turmschaftes einschließlich der Stahlkonstruktion werden von Ingenieuren des VEB Ingenieur-Vermessungswesen Groß-Berlin durchgeführt. Eventuell notwendig werdende Korrekturen zur festgestellten Abweichung von der Lotrechten erfolgen durch Ausrichten der Kletterschalung, die direkt über dem Kopf- mit dem Schachtgerüst in Verbindung steht.

W. Zill

Berufsbild

Vermessungsingenieur mit Hochschulstudium



Die Hauptaufgaben der Geodäsie (Vermessungskunde) sind die Bestimmung der Figur der Erde und ihres äußeren Gravitationsfeldes sowie die Vermessung und Abbildung der Erdoberfläche bzw. ihrer Teile.

Für die planmäßige Entwicklung der Volkswirtschaft sind die erforderlichen geodätischen Grundlagen rechtzeitig und mit der notwendigen Genauigkeit zu schaffen. Dazu gehört:

1. Die Schaffung und Erhaltung der staatlichen Lagenetze (trigonometrische Netze), Höhennetze (Nivellementsnetze) und gravimetrischen Netze (Bestimmung der Schwerkraft).

2. Die Herstellung und Laufendhaltung der staatlichen Kartenwerke (topographische und geographische Karten).

3. Die Herstellung von Karten und Plänen für alle Zwecke der Volkswirtschaft sowie die ingenieurgeodätischen Arbeiten (z. B. Vermessungsarbeiten bei der Errichtung von Bauwerken).

4. Die Durchführung von Forschungs- und Entwicklungsaufgaben, um den wissenschaftlichen Vorlauf der praktischen Arbeiten zu gewährleisten.

Die dazu notwendigen technischen Arbeiten werden von zwei Berufsgruppen durchgeführt, den Geodäten oder Vermessungsingenieuren, die Messungen im Gelände vornehmen, und den Kartographen, die Messungsergebnisse in Karten und Plänen darstellen und bis zum fertigen Druck bearbeiten. In beiden Berufsgruppen gibt es die Ausbildungsstufen: Facharbeiter, Fachschulingenieur und Hochschulingenieur. Die Ausbildung als Diplom-Ingenieur des Vermessungswesens erfolgt in einem 10-semestrigen Studium an der Technischen Universität Dresden in der Fachrichtung Geodäsie (Fakultät für Bauwesen). Nach erfolgreichem Abschluß des Studiums wird der Absolvent in Betrieben, Dienststellen und Einrichtungen für verantwortungsvolle leitende Tätigkeit bei der Durchführung geodätischer, photogrammetrischer und ingenieurgeodätischer Arbeiten sowie für die wissenschaftliche Tätigkeit und in der Lehre eingesetzt. Vor Beginn des Studiums ist eine einjährige praktische Arbeit in einem Betrieb des Vermessungswesens zu empfehlen, um die notwendigen Grundkenntnisse des Berufs zu erwerben. Wegen der umfangreichen Arbeiten im Außendienst ist ein guter Gesundheitszustand Voraussetzung für die Wahl des Berufes. Da im Innendienst ebenfalls eine Reihe von Arbeiten anfallen, ist der Beruf auch für Mädchen mit technischem Verständnis gut geeignet. Gute Leistungen werden besonders in den Fächern Mathematik, Physik und Geographie verlangt.

W. Zill

Eine Aufgabe von
Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens

Leiter des Lehrstuhls für Technische Mechanik und Statik
Prorektor für den wissenschaftlichen Nachwuchs
Hochschule für Bauwesen, Leipzig

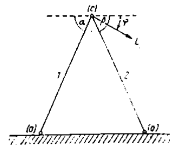


Abb. 1

80 Die beiden Stäbe 1 und 2 stützen das Lager (c). In (c) greift eine Kraft L (Zugkraft) an, deren Richtung zur Horizontalen durch den Winkel φ bestimmt ist (Abb. 1). Bei gegebener Größe von L und gegebenen Winkeln α und β sind diejenigen Stellungen der Last L gesucht, für die die Stützkraft S_1 im Stab 1

a) ein Maximum an Zugkraft,

b) gleich Null,

c) ein Maximum an Druckkraft ist.

Lösungshinweis: Man denke sich die Stäbe 1 und 2 durchschnitten und an den Schnittstellen die unbekannten Stabkräfte S_1 und S_2 angebracht. Diese Kräfte haben zu den Stabachsen parallele Richtungen und müssen mit L im Gleichgewicht stehen. Ein aus L, S_1 und S_2 gezeichnetes Krafteck muß daher für jede Lage von L geschlossen sein (Abb. 2).

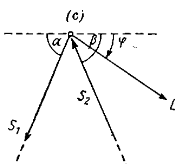
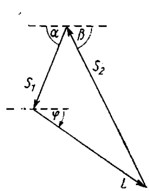


Abb. 2 Lageplan



Kräfteplan

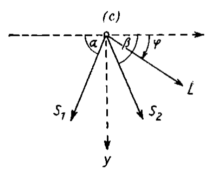


Abb. 3

Aus der Vielzahl der möglichen Kraftecke ist dasjenige zu bestimmen, bei dem bei gegebenem L und gegebenem Winkel $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ die Seite S_1 entweder ein Maximum hat oder gleich Null ist. (Im Krafteck entspricht die Länge der Seite AB dem Betrag der Kraft.) Die Richtung von S_1 (Zug oder Druck) wird aus dem Krafteck abgelesen (gleicher Umlaufsinn für alle Kräfte). Die Lösung kann analytisch oder rein geometrisch erfolgen. Eine weitere Lösungsmöglichkeit besteht in der unmittelbaren Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen $\sum K_x = 0$ und $\sum K_y = 0$ auf die Kräfte am Punkt (c). In diesem Falle müssen die unbekannten Kräfte unabhängig vom wirklichen Richtungssinn zunächst als Zugkräfte angenommen werden (Abb. 3). Ergibt die Rechnung eine Kraft mit negativem Vorzeichen, so ist die zugehörige Kraft eine Druckkraft.

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Aufgaben der DDR-Olympiade (29.3. bis 1.4.1967)

Klassenstufe 10

1. Man beweise: Sind m und n natürliche Zahlen, so ist die Zahl

$$m \cdot n \cdot (m^4 - n^4) \text{ durch 30 teilbar.}$$

2. Gegeben sei das Gradmaß des Neigungswinkels zwischen zwei Ebenen ε und ε_1. Gegeben sei ferner der Flächeninhalt I ($\triangle$ ABC) eines Dreiecks $\triangle$ ABC, das in der Ebene ε liegt. Die Fußpunkte der Lote von A, B, C auf ε_1 bilden ein (möglicherweise ausgeartetes) Dreieck $\triangle$ $A_1B_1C_1$. Wie groß ist dessen Flächeninhalt I_1 ($\triangle$ $A_1B_1C_1$)?

3. In einem Zirkel Junger Mathematiker wird folgende Aufgabe gestellt: Gegeben ist ein beliebiges Dreieck $\triangle$ ABC. Gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle$ PQR so, daß P innerer Punkt der Strecke BC, Q innerer Punkt der Strecke CA und R innerer Punkt der Strecke AB ist. Bei der Diskussion über diese Aufgabe werden verschiedene Meinungen geäußert: Anita glaubt, daß die Aufgabe nicht für jedes Dreieck $\triangle$ ABC lösbar ist. Berthold ist der Meinung, daß es für jedes Dreieck $\triangle$ ABC genau eine Lösung gibt. Claus nimmt an, für jedes Dreieck $\triangle$ ABC gelte folgendes: Es gibt beliebig viele Lösungen, und alle Dreiecke $\triangle$ PQR, die Lösung sind, sind einander kongruent. Dagmar meint zwar auch, für jedes Dreieck $\triangle$ ABC gebe es beliebig viele Lösungen; sie behauptet dann aber weiter: Es gibt wenigstens ein Dreieck $\triangle$ ABC mit der Eigenschaft, daß nicht alle Dreiecke $\triangle$ PQR, die als Lösung auftreten, einander kongruent sind. Untersuchen Sie diese Meinungen auf ihre Richtigkeit!

4. Gegeben sei ein Dreieck $\triangle$ ABC; wie üblich sei $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ und γ das Gradmaß des Winkels $\sphericalangle$ ABC. Konstruieren Sie ein Quadrat, dessen Flächeninhalt

$$2ab \cdot |\cos\gamma| \text{ beträgt!}$$

5. Es sei a eine beliebig gegebene reelle Zahl. Ermitteln Sie alle reellen x, die der Gleichung

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{2a+x} \text{ genügen!}$$

6. Geben Sie die Anzahl aller ganzzahligen Lösungen (x, y) der Ungleichung

$$|x| + |y| \leqq 100 \text{ an!}$$

Dabei gelten zwei Lösungen (x_1, y_1), (x_2, y_2) genau dann als gleich, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ ist. (Die Lösung (x, y) heißt ganzzahlig, wenn sowohl x als auch y ganzzahlig sind.)

Klassenstufe 11/12

1. In einer Ebene ε seien ein Quadrat $ABCD$ und ein in seinem Innern gelegener Punkt P gegeben. Ein Punkt Q durchlaufe alle Seiten des Quadrates.
Beschreiben Sie die Menge aller derjenigen Punkte R in ε, für die das Dreieck $\triangle$ PQR gleichseitig ist!

2. Es seien n eine natürliche Zahl. Eine Zahlenfolge werde kurz eine „F_n" genannt, wenn n untereinander verschiedene Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ existieren, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Jedes Glied der Folge ist eine der Zahlen $z_1, \ldots, z_n$.

(2) Jede der Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ kommt mindestens einmal in der Folge vor.
(3) Je zwei aufeinanderfolgende Glieder der Folge sind voneinander verschiedene Zahlen.
(4) Keine Teilfolge der Folge hat die Form $\{a, b, a, b\}$ mit $a \neq b$.

(Als Teilfolge einer gegebenen Folge $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ oder $\{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ bezeichnet man jede Folge der Form $\{x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \ldots\}$ oder $\{x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_t}\}$ mit natürlichen Zahlen $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$).
Beantworten Sie folgende Fragen: (a) Gibt es bei fest gegebenen n beliebig lange Folgen F_n? (b) Wenn Frage (a) zu verneinen ist: Welches ist die größtmögliche Anzahl von Gliedern, die (bei gegebenem n) eine F_n haben kann?

3. Man beweise folgenden Satz: Ist $n \geqq 2$ eine natürliche Zahl, sind $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen und wird $\sum_{i=1}^{n} a_i = s$ gesetzt, so gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s - a_i} \geqq \frac{n}{n-1}.$$

4. Gegeben ist eine natürliche Zahl $n \geqq 3$. Es sei $V = P_1 P_2 \ldots P_n$ ein ebenes regelmäßiges n-Eck.
Geben Sie die Anzahl aller stumpfwinkligen Dreiecke $\triangle\, P_k P_l P_m$ an (bei denen P_k, P_l, P_m Ecken von V sind) an!

5. Ermitteln Sie zu jeder natürlichen Zahl n die Anzahl $A\,(n)$ aller ganzzahligen nichtnegativen Lösungen der Gleichung $5\,x + 2\,y + z = 10\,n$!
(Die Lösung (x, y, z) heißt ganzzahlig nichtnegativ, wenn jede der Zahlen x, y, z ganzzahlig und nichtnegativ ist.)

6. Man beweise folgenden Satz:
Liegen die n paarweise voneinander verschiedenen Punkte P_i, $i = 1,2, \ldots n$; $n \geqq 2$, so im dreidimensionalen Raum, daß jeder von ihnen von ein und demselben Punkt Q einen kleineren Abstand hat als von jedem anderen der P_i, dann ist $n < 15$.

LOSUNG DER VI. OJM:

Zu Ehren des VII. Parteitages hohe mathematische Leistungen für unser sozialistisches Vaterland

Die Jury vergab 39 Preise, 2 Diplome für ausgezeichnete Lösung einer Aufgabe, 28 Anerkennungsurkunden für sehr gute Leistungen. An der OJM nahmen 20 Wissenschaftler und 60 bewährte Mathematikfachlehrer als Koordinatoren, Korrektoren oder Betreuer teil. Aus dem Programm: Feierlicher Fahnenappell in der Jugendhochschule „Wilhelm Pieck“, zwei Klausuren zu je vier Stunden (für je 3 Aufgaben), Sport, Aussprache mit Vertretern des Zentralrates der FDJ, vierstündige Diskussion mit Prof. Dr. Thiele (Jena) über Kybernetik und Berufsperspektive, Lichtbilder über die VIII. IMO, Besichtigung der Hauptstadt der DDR, Theaterbesuch: Tucholsky-Abend, Abschlußfeier in der Ernst-Wildangel-OS Berlin.

Teilnehmer (nach Schultyp)	Erw. Oberschulen	155
	Betriebsberufsschulen	35
	Spezialklassen	27
	Oberschulen	17
	Berufsschulen	4
	Volkshochschulen	1
	gesamt	239
	davon Mädchen	18
Teilnehmer (nach Klassen)	aus 7. Klassen	1
	aus 8. Klassen	4
	aus 9. Klassen	10
	aus 10. Klassen	95
	aus 11. Klassen	57
	aus 12. Klassen	72
	gesamt	239

Preisträger der VI. OJM

Erste Preise wurden vergeben:

In Olympiadeklasse 10 an:

Ingrid Schiemann,
EOS Cottbus

Gottfried Jetschke,
EOS Lichtenstein

Dieter Kupke,
EOS Spremberg

Andreas Felgenhauer,
EOS Zerbst (aus Kl. 9)

In Olympiadeklasse 11/12 an:

Jürgen Gärtner,
BBS Rafena-Werke,
Radeberg (1. Lj., Kl. 10)

Gert Siebert,
EOS H. Hertz, Berlin
(aus Kl. 12)

Stephan Heinrich,
EOS H. Hertz, Berlin
(aus Kl. 10)

Christoph Bandt,
EOS Greifswald
(aus Kl. 11)

Zweite Preise wurden vergeben:

In Olympiadeklasse 10 an: Hermann Haase (aus Kl. 8), OS Jarmen; Georg Bartholomäus, EOS F. L. Jahn, Greifswald; Bernd-Michael Friedrich, EOS F. Schiller, Weimar; Hartwig Eckner, EOS Dr. K. Duden, Schleiz; Marlen Müller, EOS Grimma; Ingolf Slota, EOS H. Hertz, Spezialkl., Berlin.

In Olympiadeklasse 11 an: Ulrich Zähle, ABF Halle, Spezialkl.

In Olympiadeklasse 12 an: Wolfgang Strübing ABF Halle, Spezialkl.; Ludwig Grader, BBS Leunawerke „Walter Ulbricht" (3. Lehrjahr).

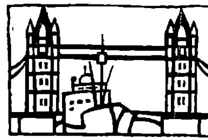
Dritte Preise wurden vergeben:

In Olympiadeklasse 10 an: Harald Englisch (aus Kl. 7), G. F. Leibniz-OS, Leipzig; Siegfried Krüger, OS Bandelow; Klaus-Detlef Kürsten, EOS Grimma; Harald Fischer, Spezial-OS VEB C. Zeiss, Jena; Claus Neumann, EOS E. Schneller, Meißen; Jürgen Bechstein, EOS J. W. v. Goethe, Meiningen; Manfred Krzikalla, Spezialschule f. Elektr., Frankfurt/Oder; Eberhard Richter, EOS MGO Schleusingen; Ralph Altmann, Bernd Martin, Manfred Zachb, alle EOS H. Hertz, Spezialkl., Berlin.

In Olympiadeklasse 11 an: Joachim Fritz, EOS Cottbus; Fred Nowack, EOS A. v. Humboldt, Erfurt; Wolfgang Kiefer, EOS Pößneck; Ludwig Arent, EOS F. Engels, Neubrandenburg; Wolfgang Burmeister (aus Kl. 8), 55. OS, Dresden; Uwe Köhler, Spezialklasse, TH Karl-Marx-Stadt.

In Olympiadeklasse 12 an: Werner Vogt, EOS Ilmenau; Reinhard Höppner, EOS Elsterwerda; Rainer Weber, EOS J. W. v. Goethe, Ilmenau; Hans-Peter Tuschik, Spezialkl. der Humboldt-Universität zu Berlin; Raimund Kosciolowicz, EOS H. Hertz, Spezialkl., Berlin; Michael Greiff (3. Lehrjahr), BBS Transformatoren- und Röntgenwerk Dresden.

Mathematische Wettbewerbe in England



In England gibt es keine Traditionen in mathematischen Wettbewerben, von Bemühungen kleinerer Interessengruppen abgesehen. Anläßlich einer Konferenz in Cambridge wurde im Jahre 1963 erstmals der Gedanke, einen nationalen Wettbewerb zu organisieren, geäußert. Hier sei nur erwähnt, daß zu diesem Zeitpunkt bereits die V. Internationale Mathematikolympiade der sozialistischen Länder durchgeführt wurde. Solche Länder wie Rumänien, Ungarn und die Sowjetunion konnten damals schon auf eine jahrzehntelange Förderung von Interesse und Talenten durch nationale Olympiaden zurückblicken.
Es ist in England sehr schwierig, von seiten der Regierung oder mathematischen Organisationen Unterstützung für Experimente zu erhalten, die noch im Anfangsstadium stehen. Mr. Watson, Keele-Universität, England, erhielt Kopien der Aufgaben, welche die Mathematischen Gesellschaften der Vereinigten Staaten von Amerika und der Südafrikanischen Union für Schulwettbewerbe in ihren Ländern verwendeten. Er leitete das Material aus eigener Initiative an Schulen weiter. Mit den Besten dieses Schulwettbewerbs wurde von einer Gruppe interessierter Mathematiklehrer 1965 die erste britische Olympiade durchgeführt (obere Altersgrenze: 17 Jahre). Dies erregte in der Presse, insbesondere in den technischen Zeitschriften, Aufmerksamkeit. Angeregt durch das wachsende öffentliche Interesse stieg die Anzahl der teilnehmenden Schulen von 109 im Jahre 1965 auf 252 im Jahre 1966. Am 13. Mai 1966 erhielten 64 Kandidaten, wiederum hervorgegangen aus der Schulstufe, die Aufgaben der zweiten britischen Mathematikolympiade, die wir nachfolgend veröffentlichen (reine Arbeitszeit: 180 Minuten). Der Minister für Erziehung überreichte Preise und Urkunden. Damit wurde privater Unternehmungsgeist und offizielle Anerkennung verbunden. Die ehrenamtlichen Organisatoren hoffen, daß sie in nächster Zukunft in der Lage sein werden, eine englische Mannschaft zur sowjetischen Olympiade senden zu können.
Das Zentrale Komitee für die Olympiaden Junger Mathematiker der DDR und die Redaktion *alpha* haben auf Wunsch interessierter englischer Wissenschaftler und Mathematiklehrer Material zur Anregung und zum Vergleich zur Verfügung gestellt.

Aufgaben der zweiten britischen Mathematikolympiade

1. Bestimmen Sie den kleinsten und größten Wert von

$$\frac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2} \text{ für reelle Werte von } x\,!$$

2. Geben Sie alle Vorzeichenkombinationen an, unter denen alle Lösungen der Gleichung

$$\mp\sqrt{(x-a)} \mp \sqrt{(x-b)} \mp \sqrt{(x-c)} = 0$$

reell sind, wobei a, b, c verschiedene reelle Zahlen sind!

3. Wo liegen alle Punkte der x-y-Ebene, die der Bedingung

$$y^2 = x^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \text{ genügen ?}$$

Ermitteln Sie die Wendepunkte der dadurch beschriebenene Kurve und ihr Verhalten, wenn x und y groß werden!

4. Die Punkte A, B, C, D sind aufeinanderfolgende Eckpunkte eines regelmäßigen Polygons und

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

Wieviel Seiten hat das Polygon?

5. Eine quadratische Schraubenmutter mit der Seite a wird mittels eines Schraubenschlüssels, dessen Querschnitt aus einem regelmäßigen Sechseck mit der Seite b besteht, gedreht. Stellen Sie fest, unter welchen Bedingungen für a und b das möglich ist!

6. Finden Sie das größte Intervall der Werte für x, für die der Ausdruck

$$y = \sqrt{(x-1)} + \sqrt{[x + 24 - 10\sqrt{(x-1)}]}$$

einen konstanten Wert hat, wobei $\sqrt{t}$ für $t \geqq 0$ definiert ist als die nichtnegative Zahl, deren Quadrat t ist!

7. Beweisen Sie, daß $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ nicht Terme ein und derselben arithmetischen Reihe sein können.

8. Die Seitenflächen eines Würfels sind mit sechs verschiedenen Farben so bemalt, daß jede Seite eine andere Farbe hat. Stellen Sie fest, wie viele Würfel von verschiedenem Aussehen auf diese Weise hergestellt werden können. Zeigen Sie ebenfalls, daß 1680 regelmäßige Oktaeder von verschiedenem Aussehen hergestellt werden können, indem die acht Seiten des regelmäßigen Oktaeders mit acht gegebenen Farben so bemalt werden, daß jede Seite eine andere Farbe aufweist!

9. Es seien α, β, γ die Winkel eines Dreiecks sind. Ermitteln Sie

a) den kleinsten möglichen Wert für

$$\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2},$$

b) den größten möglichen Wert für

$$\tan\frac{\alpha}{2} \tan\frac{\beta}{2} \tan\frac{\gamma}{2}\,!$$

10. 100 Studenten verschiedener Größe sind in 10 Reihen zu je 10 Gliedern aufgestellt. In jeder Reihe wird der größte Student ausgesucht, und der kleinste dieser großen Studenten erhält die Marke A. In jedem Glied wird der kleinste Student ausgesucht, und der größte dieser kleinen Studenten erhält die Marke B. Wenn A und B verschiedene Personen sind, ermitteln Sie, welcher von ihnen der größere ist und weshalb?

11. a) Beweisen Sie, daß unter 52 beliebigen gegebenen ganzen Zahlen stets zwei existieren, deren Summe oder Differenz durch 100 teilbar ist!

b) Beweisen Sie, daß unter 100 beliebigen gegebenen ganzen Zahlen, von denen keine durch 100 teilbar ist, zwei oder mehr gefunden werden können, deren Summe durch 100 teilbar ist!

5. Spezialistenlager Junger Mathematiker

Ostseebad Ahlbeck

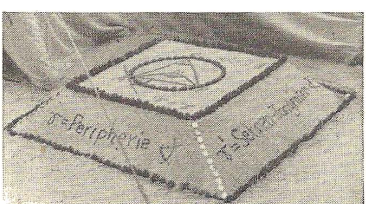
Bezirksklub Junger Mathematiker * Bezirk Neubrandenburg *

Telegramm (August 1966):

450 Junge Mathematiker der Kreisklubs des Bezirks Neubrandenburg für vierzehn Tage im Pionierlager *'Boleslav Bierut'* — täglich neben fröhlichem Strand- und Lagerleben ca. drei Stunden Mathe — 26 Lehrer als „Trainer" — Prof. Calda und 24 Schüler der EOS Praha 2 auf Gegenbesuch (siehe *alpha* 2/67) — englische Lehrerdelegation sowie Chefredakteur von *alpha* besichtigen unser Lager — Lichtbildervortrag über VIII. Internationale Mathematikolympiade — fröhliche Seefahrt zur Greifswalder Oie — übersenden Aufgaben des Lagerwettbewerbs —
beim Knobeln viel Spaß und
natürlich frohe Ferien — stop —

Siegerehrung: Lagerwettbewerb erfolgreich beendet!

Zeltgartenwettbewerb: Welche Zeltgemeinschaft baut das schönste mathematische Emblem?
1. Preis: eine Riesentorte!



alpha-Wettbewerb
[W (5) bis W (10)]
Die zweite Wettbewerbsaufgabe für jede Klassenstufe ist auf Seite 89 auszuwählen und an die Redaktion bis 15. August einzusenden (lt. Wettbewerbsbedingungen, siehe Heft 1/67).

Klasse 5:

W(5)81 Ein Gemüselöffel, ein Eßlöffel und eine Gabel wiegen insgesamt 240 p. Der Gemüselöffel und die Gabel wiegen zusammen dreimal soviel wie der Eßlöffel. Der Eßlöffel und die Gabel wiegen zusammen soviel wie der Gemüselöffel. Berechne das Gewicht des Gemüselöffels, des Eßlöffels und der Gabel!

W(5)82 Ein Tischler mußte eine quadratische Fläche von 144 cm² mit Holz verkleiden. Er verfügte über eine 16 cm lange und 9 cm breite Sperrholzplatte. Er zerschnitt diese Platte so in zwei Teile, daß mit ihnen die ganze quadratische Fläche lückenlos bedeckt werden konnte. Fertige eine Zeichnung an, aus der ersichtlich wird, wie der Tischler die Sperrholzplatte zerschnitten hatte!

W(5)83 Die Summe von acht ungeraden natürlichen Zahlen beträgt 20. Wieviel Lösungsmöglichkeiten gibt es, wenn unter diesen acht Zahlen auch gleiche Summanden vorkommen dürfen?

Klasse 6:

W(6)84 Eine 6. Klasse umfaßt genau 37 Schüler. Könnte behauptet werden, daß in einem Monat wenigstens vier Schüler dieser Klasse Geburtstag haben? Könnten es sogar fünf Schüler dieser Klasse sein?

W(6)85 Das unten angeführte Beispiel einer Multiplikation ist zu entschlüsseln! Dabei entspricht jedem Buchstaben eine Ziffer. Die gefundenen Ziffern sind, mit der kleinsten beginnend, der Größe nach zu ordnen. Wird dann jeder der geordneten Ziffern der entsprechende Buchstabe zugeordnet, so erhält man als Lösungswort einen Begriff aus der Arithmetik.

Beispiel:

```
TDA · URE
-----------
TDA
 UANS
   BEHA
-----------
 ANSHA
===========
```

W(6)86 Durch einen gegebenen Pkt. P, der innerer Pkt. eines gegebenen spitzen Winkels α ist, soll eine Gerade g so konstruiert werden, daß sie von den Schenkeln des Winkels gleiche Strecken abschneidet. (Beweis!)

Klasse 7:

W(7)87 Konstruiere ein Dreieck aus folg. Stücken: $a = 5$ cm, $h_c = 4$ cm, $s_b = 4{,}5$ cm!

W(7)88 Welcher der beiden Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$, in denen a und b von Null verschiedene natürliche Zahlen sind, liegt auf der Zahlengeraden näher an der Zahl 1, wenn $a < b$ gilt?

W(7)89 Eine Stenotypistin schreibt auf der Maschine ohne Zwischenräume die Folge der natürlichen Zahlen 12345678910111213... Welche Ziffer wird sie mit dem tausendsten Anschlag schreiben?

Klasse 8:

W(8)90 Konstruiere ein Dreieck aus $a = 5$ cm, $b + c = 8$ cm, $h_c = 4$ cm!

W(8)91 Welcher der beiden Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ liegt auf der Zahlengeraden näher an 1, wenn a und b von Null verschiedene ganze Zahlen sind und $a < b$ gilt?

W(8)92 Gegeben seien das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$ und sein Umkreis. Die Verlängerung der Höhe h_c schneidet den Kreis im Punkt D. Die Winkelhalbierende von α schneidet die Höhe in S. Beweise, daß das Dreieck ASD gleichschenklig ist!

Klasse 9:

W(9)93 Zeichne ein Dreieck ABC! Durch den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden zeichne man eine Parallele zu BC, die AC in M und AB in N schneidet. Beweise, daß $\overline{MN} = \overline{CM} + \overline{BN}$ ist!

W(9)94 Es ist zu beweisen, daß die Gleichung $\quad x^3 + px + q = 0$

keine ganzzahligen Wurzeln hat, wenn p und q ungerade Zahlen sind.

W(9)95 Diskutiere die Funktion

$$y = \frac{x}{|x|}\sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{|x^2 + x - 6|}}\ !$$

Klasse 10:

W(10)96 Bei welchen Werten des Koeffizienten p hat die Gleichung

$x^2 - px + 36 = 0$ Wurzeln x_1, x_2, die die Bedingungen $x_1^2 + x_2^2 = 153$ erfüllen?

W(10)97 In einem Rechteck mit den Seitenlängen a und b $(a < b)$ sind von zwei gegenüberliegenden Ecken aus auf den Seiten gleiche Strecken von der Länge x mit $x < a$ abzutragen. a) Beweise, daß bei beliebiger Wahl der Strecke x durch Verbindung der Endpunkte dieser Strecken stets ein Parallelogramm entsteht. b) Bei welchem Wert von x entsteht ein Rhombus? c) Welche Bedingungen müssen an a und b gestellt werden, damit unter den gegebenen Voraussetzungen ein Rhombus entstehen kann?

W(10)98 Beweise:

$$\log_{\frac{1}{a^n}} \frac{1}{x^2} = \log_a x\ !$$

Lösungen

W(5)12 Wir bezeichnen die Schüler mit dem großen Anfangsbuchstaben ihres Vornamens und ordnen sie nach den größer werdenden Sprungweiten. Aus den jeweiligen Angaben der Aufgabe folgt: a) W < H < U; c) J (3,20 m) < W < H < U; d) J (3,20 m) < W < H (3,40 m) < U; e) W < K < U.

Aus b) und e) ergeben sich nunmehr die folgenden Sprungweiten: Jürgen (3,20 m), Werner (3,30 m), Karl (3,40 m), Heinz (3,40 m), Uwe (3,45 m).

W(5)13 Die vier stärksten Schüler der Klasse 5a seien der Kürze wegen mit A, B, C und D bezeichnet. a) Es lassen sich genau sechs verschiedene Gruppierungen zu je zwei Spielern bilden, nämlich (A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D), (C, D). b) In diesen sechs „Doppel" kommt jeder Spieler genau dreimal vor. Da $3 \cdot 6 = 18$ gilt, hatte jeder Schüler der Klasse 5a genau 18 Spiele zu bestreiten. c) Da $6 \cdot 6 = 36$ gilt, sind insgesamt 36 Spiele ausgetragen worden; dafür wurden 72 Punkte verteilt. Die Klasse 5a hatte 4 Punkte mehr erkämpft als die Klasse 5b. Die Klasse 5a erreichte 38 Punkte, die Klasse 5b nur 34 Punkte. Das Punktverhältnis war 38 : 34.

W(6)18 Auf Grund der Voraussetzung hat die Klasse höchstens 45 Schüler und mindestens 25 Schüler. Damit ein Produkt durch 5 teilbar ist, muß es auf 0 oder 5 enden. Die Zahl der Schüler von Axels Klasse sei n.

Wir stellen folgende Tabelle auf:

n	$8 \cdot n$	Quersumme von n	Quersumme von $8 \cdot n$
5	40	5	4
10	80	1	8
15	120	6	3
20	160	2	7
25	200	7	2
30	240	3	6
35	280	8	10
40	320	4	5
45	360	9	9

Nur für $n = 30$ ist die Quersumme von $8\,n$ doppelt so groß wie die Quersumme von n.

Axels Klasse umfaßt genau 30 Schüler. Es können 10 Schüler nur radfahren und 5 Schüler nur schwimmen; 15 Schüler üben beide Sportarten aus.

W(6)19 Aus a) folgt: Heinz wohnt nicht in Berlin; er wohnt entweder in Leipzig oder in Rostock. Aus b) folgt: Gerd wohnt nicht in Leipzig; er wohnt entweder in Berlin oder in Rostock. Aus c) folgt: Jochen wohnt nicht in Leipzig; er wohnt entweder in Berlin oder in Rostock. Aus d) folgt: Jochen kann nicht schwimmen; also wohnt er nicht in Berlin.

Daraus ergeben sich folgende Schlußfolgerungen: Jochen wohnt in Rostock; Gerd wohnt in Berlin und Heinz in Leipzig. Durch ähnliche Überlegungen finden wir die übrigen Antworten. Heinz und Gerd können beide schwimmen; sie spielen beide Handball. Jochen spielt nur Fußball. Heinz ist jünger als Jochen; der wiederum jünger als Gerd.

W(7)24 Wir bezeichnen die Schüler zur Abkürzung mit K, H, R, I und L und schreiben R < H, wenn R jünger als H ist, usw. Dann gilt: a) R < H; b) K < L; c) I < R; d) L < H; e) K < R; f) I < H; g) R < L; h) I < K; i) I < L; k) K < H.

Aus h), e), g), und d) folgt I < K und K < R und R < L und L < H, und damit gilt auch I < K < R < L < H. Die vier Angaben h), e), g) und d) reichen bereits aus, um die Reihenfolge der Schüler nach ihrem Alter eindeutig angeben zu können. Mit dem jüngsten Schüler beginnend, erhalten wir die Reihenfolge: Ilse, Kurt, Richard, Lore, Herbert.

W(7)25 Bezeichnet man die Maßzahl der Seiten des gesuchten Quadrates mit x, so ist $x^2 = 16 \cdot 9 = 144$, also $x = 12$. Es liegt daher nahe, das gegebene Rechteck durch einen „treppenförmigen" Schnitt wie in Abb. 1 zu zerlegen. Nun nehmen wir eine Verschiebung der rechts liegenden Teilfigur in Richtung der Geraden $A'A$ so vor, daß der Punkt A' mit dem Punkt A zusammenfällt. Dann entsteht das in Abb. 2 dargestellte Quadrat.

Abb. 1

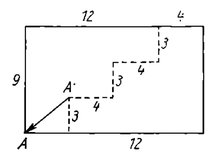
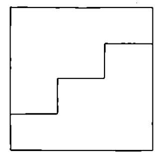


Abb. 2



W(8)32 Es sei $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$
mit $b \neq 0$, $d \neq 0$, $a \neq b$, $c \neq d$. (1)

Da $\frac{a-b}{a-b} = \frac{c-d}{c-d} = 1$ ist, gilt auch

$\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} + \frac{c-d}{c-d}$, also

$\frac{2a}{a-b} = \frac{2c}{c-d}$, $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$. (2)

Hieraus folgt, wenn $a \neq 0$ und $c \neq 0$ ist,

$\frac{a-b}{a} - \frac{a}{a} = \frac{c-d}{c} - \frac{c}{c}$, $\frac{-b}{a} = \frac{-d}{c}$,

also $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Ist aber $a = 0$, so ist wegen (2) auch $c = 0$, und es gilt wegen $b \neq 0$, $d \neq 0$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Bemerkung: Noch schneller kommt man zum Ziel, wenn man

$a + b = x$, $a - b = y$, $c + d = u$, $c - d = v$

setzt. Dann gilt wegen (1) $\frac{x}{y} = \frac{u}{v}$, also auch

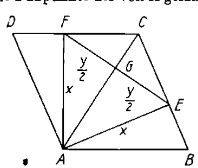
$\frac{x+y}{x-y} = \frac{u+v}{u-v}$, also auch

$\frac{a+b+a-b}{a+b-(a-b)} = \frac{c+d+c-d}{c+d-(c-d)}$, d. h.

$\frac{2a}{2b} = \frac{2c}{2d}$, also $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

W(8)33 Es seien x die Anzahl der Tauben auf dem Baum und y die Anzahl der Tauben unter dem Baum. Dann gilt $y - 1 = \frac{x+y}{3}$.
Ferner gilt $x - 1 = y + 1$, also $x = y + 2$.
Daraus folgt $(y-1)3 = y + 2 + y$,
$3y - 3 = 2y + 2$, $y = 5$.
Ferner ergibt sich $x = y + 2 = 7$.
7 Tauben waren auf dem Baum, 5 Tauben unter dem Baum. Die Probe bestätigt das Ergebnis: $5 - 1 = \frac{7+5}{3}$, $7 - 1 = 5 + 1$.

W(9)38 Es sei $ABCD$ der gegebene Rhombus. Die Fußpunkte der von A gefällten Lote



seien E und F. G sei der Schnittpunkt der Geraden AC und EF. Die Gerade AC ist Symmetrieachse, daher gilt $\overline{AE} = \overline{AF} = x$. Die Punkte E und F liegen symmetrisch bezüglich der Geraden AC; daher gilt $EF \perp AC$. Laut Voraussetzung gilt $\overline{EF} = y$. Unter Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes finden wir $\overline{AG} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 - y^2}$.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ACF und AGF folgt

$$\overline{AC} : x = x : \left(\frac{1}{2}\sqrt{4x^2 - y^2}\right),$$
$$\overline{AC} = \frac{2x^2}{\sqrt{4x^2 - y^2}}.$$

Nun können wir die Länge der Seite $\overline{AB}$ des Rhombus leicht berechnen, da auch die Dreiecke ABC und AEF einander ähnlich sind:

$$\overline{AB} : \overline{AC} = x : y$$
$$\overline{AB} = \frac{\overline{AC} \cdot x}{y} = \frac{2x^3}{y\sqrt{4x^2 - y^2}}.$$

Da die Höhe des Rhombus $ABCD$ die Länge x hat, erhält man den Flächeninhalt des Rhombus

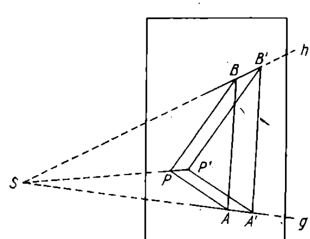
$$A = \overline{AB} \cdot x = \frac{2x^4}{y\sqrt{4x^2 - y^2}}.$$

W(9)39 Das erste Gefäß enthält 300 g Alkohol und 500 g Wasser; von der Flüssigkeitsmenge sind daher $\frac{3}{8}$ Alhokol und $\frac{5}{8}$ Wasser. Gießt man jetzt x Gramm Flüssigkeit, d. h. $\frac{3}{8}x$ Gramm Alkohol und $\frac{5}{8}x$ Gramm Wasser, in das zweite Gefäß, so soll dieses genau so viel Alkohol wie Wasser enthalten; es gilt also

$$225 + \frac{3}{8}x = 100 + \frac{5}{8}x$$
$$\frac{2}{8}x = 125 \quad x = 500$$

Man muß also 500 Gramm der Flüssigkeit aus dem ersten Gefäß in das zweite Gefäß gießen.

W(10)45 In der nebenstehenden Abbildung sei S der außerhalb des Zeichenblattes



liegende Schnittpunkt der Geraden g und h. A und B seien innere Punkte der auf g bzw. h liegenden Strecken. Nun liegt die Verbindungsstrecke zweier innerer Punkte des Zeichenblattes stets ganz im Innern des Zeichenblattes. Daher liegen die Strecken $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{AB}$ im Innern des Zeichenblattes. Wir wählen jetzt zwei weitere innere Punkte A' und B' der auf g bzw. h liegenden Strecken derart, daß $A'B' \parallel AB$ ist und die durch A' zu AP sowie durch B' zu BP gezogenen Parallelen einander in dem inneren Punkt P' des Zeichenblattes schneiden. Dann liegt eine Ähnlichkeitsabbildung des Dreiecks ABP auf das Dreieck $A'B'P'$ mit dem Ähnlichkeitszentrum S vor. Daher liegt die Strecke $\overline{PP'}$ auf der Geraden SP.

W(10)46 Es ist für jede natürliche Zahl n, die größer als Null ist,

$$\begin{aligned} z &= 7^{2n} - 4^{2n} = 49^n - 16^n \\ &= (49-16)(49^{n-1} + 49^{n-2}\cdot 16 \\ &\quad + \cdots + 16^{n-1}) \\ &= 33\,(49^{n-1} + 49^{n-2}\cdot 16 + \cdots \\ &\quad + 16^{n-1}). \end{aligned}$$

Daher ist die Zahl z durch 33 teilbar.
Für $n = 0$ ist $z = 7^0 - 4^0 = 1 - 1 = 0$ ebenfalls durch 33 teilbar.
Damit ist die Behauptung für alle natürlichen Zahlen n bewiesen.

1 Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. habil. U. Pirl: F_k erreiche bei irgendeiner Einteilung T_k Std., $k = 1, 2, 3$, nach dem gemeinsamen Start in A den Ort B. Für diese Einteilung sei $T' = \max\limits_{k=1,2,3} (T_k)$. Dann gilt

$$3\,T' \geqq T_1 + T_2 + T_3 \quad k = 1,2,3 \quad (1)$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn $T_1 = T_2 = T_3$ ist. Gleichzeitig ist $T_1 + T_2 + T_3$ die Summe der Zeiten, die bei dieser Einteilung Moped, Fahrrad und Fußgänger in Bewegung sind.
(Dabei wird 2., 3. und 5. der Voraussetzungen verwendet). Wegen $v_1 < v_2 \leqq v_3$ gilt daher

$$T_1 + T_2 + T_3 \geqq \frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2} + \frac{S}{v_3} \quad (2)$$

und das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn beide Fahrzeuge in B ankommen und sich alle drei Freunde stets vorwärts bewegen (vgl. die in 4. und 6. zugelassenen Möglichkeiten).
Um das einzusehen, beachte man, daß die Strecke mindestens einmal zu Fuß durchlaufen werden muß und diejenigen Teile dieser Strecke, die evtl. von einem der Fahrzeuge nicht durchfahren werden, an Stelle dessen zu Fuß zurückgelegt werden müssen.
Aus (1) und (2) folgt

$$T' \geqq \frac{S}{3}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right) \underset{\mathrm{df}}{=} T_0\,; \quad (3)$$

und das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn alle drei Freunde und beide Fahrzeuge gleichzeitig, und zwar T_0 Std. nach dem Start in A, in B ankommen und sich jeder der Freunde stets vorwärts bewegt. Unter Benutzung des harmonischen Mittels

$H = \dfrac{1}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}\right)}$ der drei Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 bedeutet (3), daß die drei Freunde nicht in kürzerer Zeit als $T_0 = \dfrac{S}{H}$ von A nach B gelangen können.
Jetzt sind zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden:

I. $v_2 \geqq H$, d. h., $\dfrac{1}{v_2} \leqq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2} + \dfrac{1}{v_3}\right)$,

d. h., $\dfrac{1}{v_2} \leqq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_3}\right)$:

v_2 ist nicht kleiner als das harmonische Mittel von v_1 und v_3.

II. $v_2 < H$, d. h., $\dfrac{1}{v_2} > \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2} + \dfrac{1}{v_3}\right)$,

d. h., $\dfrac{1}{v_2} > \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_3}\right)$:

v_2 ist kleiner als das harmonische Mittel von v_1 und v_3, insbesondere ist $v_2 < v_3$.

Im Fall I. ist $T_0 = \dfrac{S}{H}$ tatsächlich die gesuchte Minimalzeit. Um das zu beweisen, genügt es, eine Einteilung anzugeben, bei der alle drei Freunde T_0 Std. nach dem gemeinsamen Start in A den Ort B erreichen.

1. F_2 fährt zuerst t_{22} Std. mit dem Rad und läuft dann t_{21} Std. bis B, so daß

$$t_{22}v_2 + t_{21}v_2 = S \quad t_{22} + t_{21} = T_0$$

gilt, also

$$t_{22} = \frac{S - T_0 v_1}{v_2 - v_1} > 0,\; t_{21} = \frac{T_0 v_2 - S}{v_2 - v_1} \geqq 0 \text{ ist.}$$

Das ist unabhängig von dem Verhalten der beiden anderen sicher realisierbar.

2. F_1 läuft zuerst t_{11} Std. und fährt dann t_{13} Std. mit dem Moped bis B, so daß

$$\begin{aligned} t_{11}v_1 + t_{13}v_3 &= S \\ t_{11} + t_{13} &= T_0 \quad \text{gilt, also} \end{aligned}$$

$$t_{11} = \frac{T_0 v_3 - S}{v_3 - v_1} > 0, \quad t_{13} = \frac{S - T_0 v_1}{v_3 - v_1} > 0$$
ist.

Das ist realisierbar, wenn F_1 zur Zeit t_{11} an der betreffenden Stelle das Moped vorfindet.

3. F_3 fährt zuerst t_{33} Std. mit dem Moped, läuft dann t_{31} Std. und fährt danach das letzte Stück bis B in t_{32} Std. mit dem Rad, so daß

$$t_{33}v_3 + t_{31}v_1 + t_{32}v_2 = S$$
$$t_{33} + t_{31} + t_{32} = T_0$$
$$t_{32}v_2 = t_{21}v_1 \quad \text{gilt, also}$$

$$t_{33} = \frac{T_0 v_3 - S}{v_3 - v_1} \cdot \frac{v_1}{v_3} > 0,$$
$$t_{32} = \frac{T_0 v_2 - S}{v_2 - v_1} \cdot \frac{v_1}{v_2} \geqq 0,$$
$$t_{31} = \frac{S - T_0 v_1}{v_2 - v_1} \cdot \frac{v_2 v_3 - v_1^2}{v_3 - v_1} \cdot \frac{1}{v_1} > 0 \text{ ist.}$$

Das ist realisierbar, wenn F_3 zur Zeit $t_{33} + t_{31}$ an der betreffenden Stelle das Fahrrad vorfindet.
Wegen $v_1 < v_2$ ist $t_{32} \leqq t_{21}$ und daher $t_{33} + t_{31} = T_0 - t_{32} \geqq T_0 - t_{21} = t_{22}$, so daß F_3 das Fahrrad an der betreffenden Stelle vorfindet und sich, wie unter 3. beschrieben, verhalten kann. Wegen $v_1 < v_3$ ist $t_{33} < t_{11}$, so daß F_1 das Moped vorfindet und sich, wie unter 2. beschrieben, verhalten kann.
Dies ist nicht die einzige Möglichkeit für die Freunde, die Strecke AB in der Zeit T_0 zu bewältigen. Sie könnten das Verfahren zunächst für die Hälfte der Strecke AB durchführen, sich nach der Zeit $\frac{1}{2} T_0$ in der Mitte treffen und die zweite Hälfte nach irgendeiner Vertauschung ihrer Rollen mit dem gleichen Verfahren in der Zeit $\frac{1}{2} T_0$ zurücklegen. Auch kann die Strecke AB in 4,5 oder allgemein n gleiche Teile zerlegt und jeder von diesen in der Zeit $\frac{T_0}{n}$ bewältigt werden.
Daher gibt es sicher unendlich viele Realisierungen und es erscheint angebracht, noch eine Zusatzbedingung zu stellen, etwa von der Art, daß möglichst wenig „umgestiegen" wird. Diese Frage wird hier jedoch nicht weiter verfolgt.
Der Fall I ist für die Praxis der Regelfall; denn er tritt sicher ein, wenn die Fahrradgeschwindigkeit v_2 nicht unter dem doppelten der Fußgängergeschwindigkeit v_1 liegt. Dann gilt nämlich

$$\frac{1}{v_2} \leqq \frac{1}{2v_1} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3}\right).$$

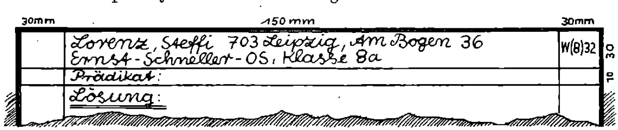
Und wer findet die Lösung für den Fall II?

alpha-Wettbewerb

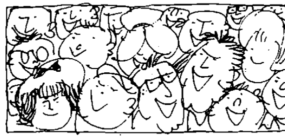
Um unseren neuen Lesern die Möglichkeit der Teinahme am Wettbewerb zu geben, wird der letze Einsendetermin für Lösungen zu Heft 2 auf 10. Juli 1967 festgelegt.

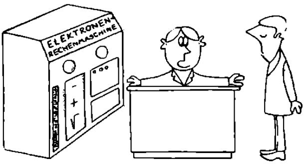
7. März	*Renate Beuth*, Fr.-Schiller-OS, Kl. 7d, Zeulenroda, ist die erste Einsenderin einer Lösung.
13. März	*Harald Englisch*, Leibniz-OS, Kl. 7c, Leipzig, sendet als erster Schüler richtige Lösungen zu allen Wettbewerbsaufgaben ab seiner Klassenst. bis Klassenst. 10 ein.
15. April	In der *OS Berlingerode* werden die Wettbewerbsaufgaben an der Schulwandzeitung veröffentlicht, um Interesse zu wecken und neue Leser zu werben.
20. April	*Harald Rudolph*, Comenius-Sch., Kl. 7a, Bitterfeld, sendet die erste Wettbewerbslösung zu Heft 2.
1. Mai	Sieben Arbeitsgemeinschaften u. zwei Klassen beteiligen sich als *Kollektiv* am *alpha*-Wettbewerb.
10. Mai	*Sabine Anders*, 14. OS Cottbus, Kl. 3c, sowie *Jörg Bergmann*, 1. OS Dresden, Kl. 4, sind unsere jüngsten Wettbewerbsteilnehmer.
10. Mai	Zu Heft 1 liegen 1235 Lösungen und zu Heft 2 150 Lösungen vor.

So muß der Kopf für jede Wettbewerbslösung aussehen!

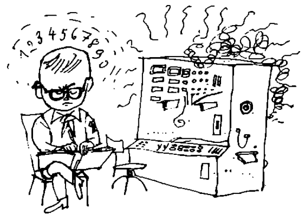


In freien Stunden
alpha heiter

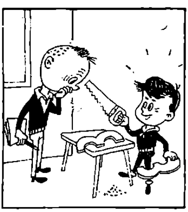




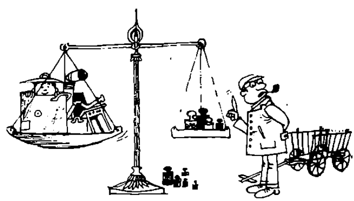
Wieviel ist 2 × 2, Kollege Kovács? — Ich weiß nicht, es ist Stromausfall!
Aus: „Ungarische Rundschau“



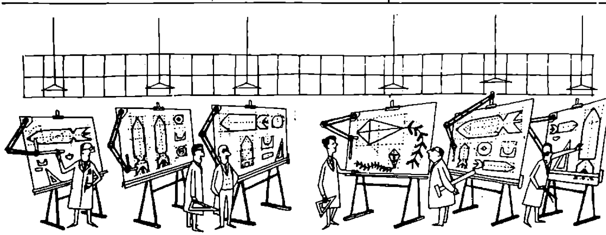
Der Sieger der Mathematikolympiade im Wettkampf mit einem Elektronengehirn
Aus: „Elternhaus und Schule“



„Na bitte, Langer, bei mir ist die Hälfte von 8 niemals 4.“
Zeichnung: Fritz Berger.
Aus: „Leipziger Volkszeitung“



„Wo bist du denn geblieben, Kleiner? Es sind 50 Kilo!“
Zeichnung: Vorderwerth.
Aus: „Die Trommel“



Tibor Kajan. Aus dem Buch: Circus Maximus. Eulenspiegelverlag Berlin

● 23. Schafarewitsch, T. R.: Über die Auflösung von Gleichungen höheren Grades. 2. Auflage. (ab Kl. 11).

≡ 24. Markuschewitsch, A. J., u. a.: Streifzüge durch die Mathematik, Bd. II. (ab Kl. 10).

● 25. Markuschewitsch, A. J.: Rekursive Folgen. (ab Kl. 12).

● 26. Dynkin, E. B., und W. A. Uspenski: Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2. Auflage. (ab Kl. 11).

≡ 27. Steinhaus, H.: Einhundert Probleme der Elementarmathematik. (ab Kl. 10), noch nicht erschienen.

✱ 28. Perelman, A. J.: Unterhaltsame Geometrie. (ab Kl. 7).

✱ 29. Perelman, J. J.: Unterhaltsame Algebra. (ab Kl. 7).

✱ 30. Kolosow, A. A.: Kreuz und quer durch die Mathematik. 2. Auflage. (ab Kl. 10).

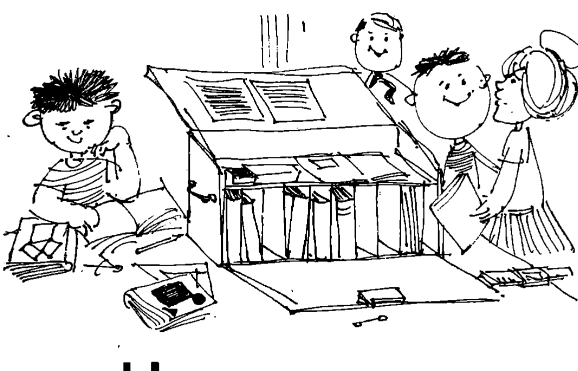
✱ 31. Teplow, L.: Grundriß der Kybernetik. (ab Kl. 10).

Die vor dem Autor angegebenen Symbole bedeuten:

● VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
✱ Volk und Wissen Volkseigener Verlag
■ B. G. Teubner Verlagsgesellschaft
≡ Urania-Verlag

Liebe Leser!

Ob im Ferienlager, dem Spezialistenlager Junger Mathematiker oder auf Urlaub mit den Eltern, das mathematische Kinder- und Jugendbuch kann Freund und Helfer sein. Nicht immer ist während der Schulzeit die Möglichkeit, sich intensiv mit speziellen Stoffgebieten zu beschäftigen. Nutzt die Erfahrungen Eurer Lehrer, Arbeitsgemeinschaftsleiter und Bibliothekare! Festigt und erweitert Eure im Unterricht erworbenen Kenntnisse und Fertigkeiten!

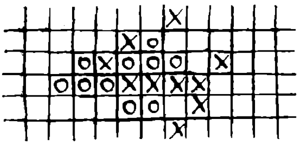


Die Redaktion alpha wünscht Euch frohe Ferien!

Index 31059

Kreuz oder Kreis?

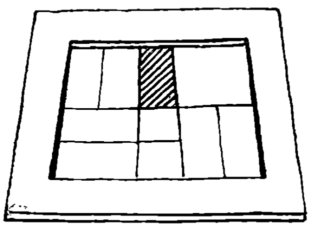
(sowjetisches Unterhaltungsspiel)



Zwei Spieler versuchen, auf kariertem Papier eine zusammenhängende Kette von vier Kästchen zu erreichen (waagerecht, senkrecht, oder diagonal). Jeder Spieler darf abwechselnd ein Kästchen markieren. Zur Unterscheidung genügt es, wenn ein Spieler ein Kreuz, der andere einen Kreis zeichnet. Sieger ist, wer zuerst eine Kette von vier Kästchen fertig hat. Die Abbildung zeigt eine Gewinnstellung für „Kreuz“.

Geschickt geschoben!

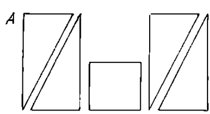
(ungarisches Unterhaltungsspiel)

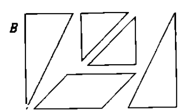


Schneidet die in der Abbildung dargestellten Quadrate und Rechtecke aus (starke Pappe, dünnes Sperrholz oder ähnliches).

Dann ordnet die Teile so, wie es die Abbildung vorschreibt. Das schraffierte Feld bleibt frei. Nur durch Schieben in der Ebene soll das rechts oben liegende Quadrat in die linke untere Ecke gelangen.

Damit das Schieben leichter geht, schneidet einen Rahmen aus Pappe oder Sperrholz. Wer schafft es in weniger als 33 Zügen? Als ein Zug gilt, wenn ein Teil bewegt wird.

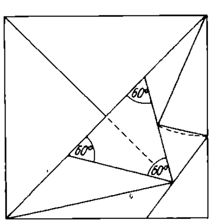




Schnell zusammensetzen!

Paust die Figuren von *A* und *B* auf Pappe und schneidet sie aus! Die fünf Stücke von *A* ergeben richtig zusammengesetzt ein Quadrat. Die fünf Stücke von *B* ergeben ebenfalls ein Quadrat.

(Einsender: H. Pätzold, Lehrer, OS Waren/Müritz)



Neun Dreiecke — ein Quadrat?

Zeichnet nach nebenst. Muster neun Dreiecke in das vorgegebene Quadrat ein! Sicher habt Ihr gemerkt, daß alle Dreiecksarten mindestens einmal vertreten sind. Ausgeschnitten und gemischt gebt Ihr die ebenen Figuren Euren Freunden. Wer wird alle Dreiecke zuerst zu einer quadratischen Fläche zusammengefügt haben?

(Einsender: 29. OS Leipzig)

Mathematische Schülerbücherei

Im Juni 1966 wurde die Arbeitsgemeinschaft Mathematische Schülerbücherei (MSB) gegründet. Diesem Kollektiv gehören Mitarbeiter von Verlagen, der Leiter der Literaturarbeitsgemeinschaft beim Ministerium für Kultur, Vertreter der Mathematischen Gesellschaft der DDR, der Jugendorganisationen, der Leiter der Zentralstelle für Kinder- und Jugendliteratur sowie in der Praxis stehende Mathematiklehrer an. Dieses Arbeitskollektiv ist für den Inhalt der MSB, für ihren Aufbau und ihre Weiterentwicklung verantwortlich. Leiter der MSB ist Dr. E. Hameister, Wiss. Mitarbeiter an der Technischen Hochschule Otto von Guericke, Magdeburg, Mitglied der Zentralen Staatlichen Kommission für Mathematik beim Ministerium für Volksbildung.
Auf vielfachen Wunsch veröffentlichen wir die auf Grund entsprechender Gutachten in die MSB aufgenommenen und veröffentlichten Bände. Sie sind durch eine Vignette, die einen lesenden Schüler darstellt, gekennzeichnet.

● 1. Alexandroff, P. S.: Einführung in die Gruppentheorie. 4. Auflage. (ab Kl. 10).

■ 2. Hasse, M.: Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik. 3. Auflage. (ab Kl. 12).

≡ 3. Markuschewitsch, A. I., u. a.: Streifzüge durch die Mathematik, Bd. I. (ab Kl. 10).

■ 4. Hameister, E.: Geometrische Konstruktionen und Beweise. 2. Auflage. (ab Kl. 7).

■ 5. Hameister, E.: Von Euklid bis Lobatschewski. Eine Einführung in die elementare nichteuklidische Geometrie. (ab Kl. 10), noch nicht erschienen.

■ 6. Lietzmann, W.: Der Pythagoreische Lehrsatz. 9. Auflage. (ab Kl. 8).

✱ 7. Varga, T.: Mathematische Logik für Anfänger. 3. Aufl. (Aussagenlogik), (ab Kl. 8).

● 8. Sominski, I. S.: Die Methode der vollständigen Induktion. 7. Auflage. (ab Kl. 9).

● 9. Korowkin, P. P.: Ungleichungen. 5. Auflage. (ab Kl. 9).

● 10. Gnedenko, B. W., und A. I. Chintschin: Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. 6. Auflage. (ab Kl. 9).

■ 11. Lietzmann, W.: Wo steckt der Fehler? 4. Auflage. (ab Kl. 8).

■ 12. Lietzmann, W.: Altes und Neues vom Kreis. 4. Auflage. (ab Kl. 7).

■ 13. Lietzmann, W.: Riesen und Zwerge im Zahlenreich. 7. Auflage. (ab Kl. 8).

■ 14. Miller, M.: Rechenvorteile. 3. Auflage. (ab Kl. 11).

● 15. Natanson, I. P.: Einfachste Maxima- und Minimaaufgaben. 3. Auflage. (ab Kl. 9).

● 16. Natanson, I. P.: Summierung unendlich kleiner Größen. (ab Kl. 11).

● 17. Dubnow, J. S.: Fehler in geometrischen Beweisen. 2. Auflage. (ab Kl. 10).

● 18. Dynkin, E. B., und W. A. Uspenski: Mehrfarbenprobleme. 2. Auflage. (ab Kl. 10).

● 19. Worobjew, N. N.: Die Fibonaccischen Zahlen. (ab Kl. 11).

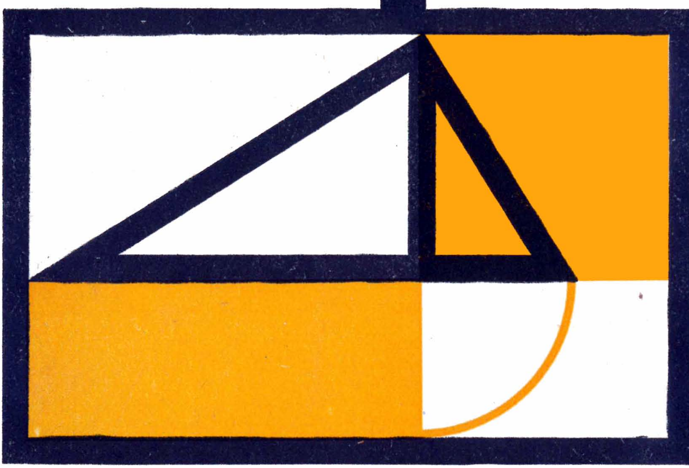
● 20. Dynkin, E. B., und W. A. Uspenski: Aufgaben aus der Zahlentheorie. 2. Auflage. (ab Kl. 11).

● 21. Kurosch, A. G.: Algebraische Gleichungen beliebigen Grades. 3. Auflage. (ab Kl. 12).

● 22. Gelfond, A. O.: Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen. 3. Auflage. (ab Kl. 11).

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift



4

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967
Preis 0,50

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967
Heft 4

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541
Postscheckkonto: Berlin 132626
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 MDN, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 MDN
Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden
Fotos: Archiv Karl-Sudhoff-Institut, Leipzig (S. 97); G. Monge, nach einer unbezeichneten Lithographie in Schneider, Lehrb. der darst. Geometrie, 1828 (S. 107); S. Meier, Dresden (S. 112), Vignetten: J. Görke, Berlin (S. 102 bis 105); H.-J. Jordan, Leipzig
Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG, 701 Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR

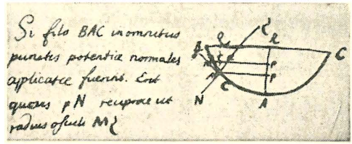
Redaktionsschluß: 1. 6. 1967

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angeführten Klassenstufe geeignet

Leonhard Euler

1707 bis 1783



Leonhard Euler wurde am 15. April 1707 in Basel geboren. Der Vater, ein hochgebildeter Mann, erteilte dem Sohn den ersten Unterricht, doch sehr bald schickte er ihn zu Johann Bernoulli in die mathematische Schule. Seine Söhne, Nikolaus und Daniel, folgten 1725 einem Ruf an die Petersburger Universität. Zwei Jahre später holten sie Euler in ihren Kreis. Obgleich die Regierungen, die einander nach dem Tode von PeterI. rasch ablösten, der Akademie wenig geneigt waren, konnte der *Mathematiker* Euler einigermaßen sicher vor mißtrauischen Machthabern leben. Dennoch folgte er 1741 gern einem Ruf an die Berliner Akademie.

Euler beschäftigte sich nicht nur mit theoretisch-mathematischen Problemen, sondern auch mit zahlreichen praktischen Dingen. Er hatte sich in Petersburg mit der Überprüfung von Waagen befaßt, ein Werk über den Schiffbau geschrieben, auf den Gebieten der Kriegswissenschaft, des Maschinenbaues und des Geldwesens gearbeitet. In Berlin oblag es ihm, den Bau des Finowkanals zu überwachen, Methoden zur Ausbeutung der Salzbergwerke anzugeben und Gutachten über die Wasserwerke zu Sanssouci, über Lotteriepläne und Finanzreformen anzufertigen. Im Laufe der Zeit verschlechterte sich infolge der Despotenwillkür und der Deutschenverachtung Friedrichs II. das Verhältnis zwischen Euler und ihm stark. Obwohl Euler jahrelang die Geschäfte des Akademiepräsidenten besorgt hatte, ernannte der König D'Alembert zum neuen Präsidenten. Diese kränkende Zurücksetzung konnte Euler nie verwinden. Er hegte den Wunsch, an die Petersburger Akademie zurückzukehren, einen Wunsch, den ihm Katharina II. im Jahre 1766 erfüllte.

Am 7. September 1783 nahm dem inzwischen völlig Erblindeten der Tod die Feder aus der Hand, mit der er noch am selben Tag anläßlich der Ballonfahrt von Montgolfier eine schwierige Rechnung (Integration) ausgeführt hatte. Es war Eulers Lebensaufgabe, die reine mathematische Theorie auf eine höhere Stufe zu heben, die Mathematik von ihrer Schwerfälligkeit zu befreien und zu jener Eleganz zu entwickeln, die eine fruchtbare Anwendung auf naturwissenschaftliche Fragen erlaubt. Euler machte die Mathematik durch zahlreiche Lehrbücher einem breiten Kreis interessierter Menschen zugänglich.

Insgesamt schrieb er 28 Bücher und 788 Abhandlungen. Er beschäftigte sich u. a. mit Zahlentheorie, mit unendlichen Reihen, entdeckte den Zusammenhang zwischen trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion und führte die uns heute geläufige Definition des Logarithmus sowie die Symbole e, π, i und $f(x)$ ein. Auf ihn gehen die Anfänge der Variationsrechnung zurück. Seine bedeutendste Leistung liegt auf dem Gebiet der Integralrechnung.

Er arbeitete darüber hinaus über Hydrostatik und -dynamik, führte die nach ihm benannten Bewegungsgleichungen ein. Auch in der Astronomie, der Optik und der Musik leistete Euler Hervorragendes.

H. Bernhardt

Vollständige Anleitung zur Algebra

Lehrbuch von L. Euler

Im Jahre 1770 gab Euler, der damals schon völlig erblindet war, ein leicht verständliches Lehrbuch der Algebra heraus. Dieses Lehrbuch erschien zunächst in russischer Sprache in Petersburg, dem heutigen Leningrad, und wurde in viele Sprachen übersetzt. Das Buch war mehr als hundert Jahre lang eines der beliebtesten und meistgelesenen Lehrbücher. Es enthält zahlreiche schöne Aufgaben, leichtere und schwerere. In einer etwas modernisierten Fassung geben wir hier einige wieder:

99 Ein Vater hinterläßt seinen drei Söhnen ein Vermögen von 1600 Talern. Nach seinem Testament soll der erste Sohn 200 Taler mehr erhalten als der zweite, der zweite aber 100 Taler mehr als der dritte. Wieviel Taler erhält jeder der drei Söhne? 5

100 Die Zahl 25 ist so in zwei Summanden zu zerlegen, daß der größere Summand 49 mal so groß wie der kleinere Summand ist. 6

101 Es wird eine Zahl gesucht, deren Hälfte mit ihrem Drittel multipliziert 24 ergibt. Hat diese Aufgabe mehrere Lösungen? 7

102 Zwei Bäuerinnen besitzen zusammen 100 Eier. Die erste sagt: „Wenn ich die Anzahl meiner Eier durch 8 teile, verbleibt ein Rest von 7." Da erwidert die zweite: „Wenn ich die Anzahl meiner Eier durch 10 teile, verbleibt auch ein Rest von 7." Wieviel Eier besitzt jede Bäuerin? Hat diese Aufgabe mehrere Lösungen? 8

103 Man suche zwei positive reelle Zahlen mit den folgenden Eigenschaften: Die Summe dieser beiden Zahlen ist gleich ihrem Produkt und außerdem gleich der Differenz der Quadrate dieser beiden Zahlen. 9

104 Ein Amtmann kauft Pferde und Ochsen für insgesamt 1770 Taler. Er zahlt für ein Pferd 31 Taler, für einen Ochsen aber 21 Taler. Wieviel Pferde und wieviel Ochsen sind es gewesen? Hat diese Aufgabe mehrere Lösungen? 10

Ausgewählt von Dr. R. Lüders

Für unsere Jungen Philatelisten wurden von Arbeitsgemeinschaftsleiter W. Unze, Sonderschuleinrichtung für Körperbehinderte, Leipzig, alle über L. Euler herausgegebenen Briefmarken zur Verfügung gestellt: DDR 1950, 1 Pf und 1957 10 Pf; Schweiz 1957, 5 Cent und 5 Cent; UdSSR 1957, 40 Kopeken; Lipsia-Katalog Nr. 98; 422; 651; 1944.

Wir lösen Aufgaben aus der Mengenlehre

$A = \{1;2\}$ $A \cap B = \{2\}$
$T_8 = \emptyset$ $(A \cup B) \cap C$

In den bisherigen Heften von „alpha“ haben wir allerlei über Mengen erfahren. Diesmal wollen wir keine neuen Dinge dazu lernen, sondern nur das anwenden, was wir schon wissen. Damit das aber nicht langweilig wird, kommen neben einfachen Aufgaben auch etwas schwierigere vor.

Aufgaben zum Thema „Teilmengen“

Wie uns schon bekannt ist, bezeichnen wir eine Menge N genau dann als Teilmenge von M (geschrieben $N \subseteq M$), wenn jedes Element von N auch zu M gehört.

● Die drei Freunde Alfred, Bernd und Christian treffen sich, um Tischtennis zu spielen. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür? (Es können ja immer nur *zwei* gegeneinander antreten!)

□ Wir haben die Menge $F = \{a; b; c\}$ gegeben. Es wird gefragt, wieviel verschiedene Teilmengen mit genau zwei Elementen man aus F herausgreifen kann. Das ist leicht anzugeben: $T_1 = \{a; b\}$, $T_2 = \{a; c\}$ und $T_3 = \{b; c\}$. Weitere Möglichkeiten gibt es offenbar nicht. Es sind also genau *drei* verschiedene Spielansetzungen möglich.

● Wieviel verschiedene Teilmengen kann man aus der eben betrachteten Menge F überhaupt herausgreifen?

□ Wie wir schon gesehen haben, gibt es *drei* verschiedene Teilmengen mit genau *zwei* Elementen. Außerdem müssen wir alle Teilmengen mit *einem* Element berücksichtigen: $T_4 = \{a\}$, $T_5 = \{b\}$ und $T_6 = \{c\}$. Das sind also auch drei. Dazu kommt die Menge F selbst (als unechte Teilmenge): $T_7 = F = \{a; b; c\}$. Bis jetzt haben wir also insgesamt *sieben* verschiedene Teilmengen von F. Das sind aber noch nicht alle, denn wir dürfen die *leere* Menge nicht vergessen! Sie ist Teilmenge *jeder* Menge, also auch Teilmenge von F: Die Bedingung, daß jedes Element der leeren Menge auch zu F gehört, ist auf jeden Fall erfüllt, denn zur leeren Menge gehören ja keine Elemente! Somit gilt: $T_8 = \emptyset$.
Wir können also aus der Menge F, die drei Elemente enthält, insgesamt *acht* verschiedene Teilmengen herausgreifen.

● Wieviel Teilmengen besitzt die Menge $A = \{1; 2\}$?

□ Wir geben alle Teilmengen an: $T_1 = \emptyset$, $T_2 = \{1\}$, $T_3 = \{2\}$, $T_4 = \{1; 2\}$. Es sind also insgesamt *vier*.

● Wieviel verschiedene Teilmengen besitzt die Menge $Z = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$?

□ Zur Menge Z gehören *zehn* Elemente. Um die Menge aller Teilmengen zu finden, müßten wir neben der leeren Menge und Z selbst alle Teilmengen mit genau einem Element, alle mit zwei Elementen, alle mit drei Elementen usw. bis zur Menge aller Teilmengen mit neun Elementen berücksichtigen. Das wäre eine sehr mühsame Arbeit, bei der man noch dazu leicht etwas übersehen könnte. Da ist es schon besser, wir versuchen einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Elemente einer endlichen Menge und der Anzahl ihrer Teilmengen zu finden, um unsere Aufgabe *rechnerisch* lösen zu können.

(a) Die leere Menge besitzt *null* Elemente und es ist *eine* Teilmenge vorhanden, nämlich die leere Menge selbst.
(b) Eine Menge B, die *ein* Element enthält, besitzt *zwei* Teilmengen: $T_1 = \emptyset$, $T_2 = B$.
(c) Mengen mit *zwei* bzw. *drei* Elementen haben wir schon untersucht — sie besitzen *vier* bzw. *acht* Teilmengen.

Bezeichnen wir die Anzahl der Elemente mit n und die Anzahl der Teilmengen mit t, so können wir bis jetzt folgende Tabelle aufstellen:

n	0	1	2	3
t	1	2	4	8

Das sieht so aus, als würde sich die Anzahl der Teilmengen jedesmal *verdoppeln*, wenn ein weiteres Element zur Menge dazu kommt. Überprüft einmal den Fall $n = 4$ — wer sorgfältig arbeitet, findet in der Tat 16 Teilmengen!
Für $n = 0$ bis $n = 4$ wissen wir also: $t = 2^n$. Ist das auch für $n = 10$ noch so? Wir können das aus unseren wenigen Beispielen nicht schließen. Mit mathematischen Hilfsmitteln, die im Unterricht erst in höheren Klassen behandelt werden, kann man aber *beweisen*, daß die Beziehung $t = 2^n$ für *jede* natürliche Zahl n gilt, also auch für $n = 10$. Unsere Menge Z hat also $2^{10} = 1024$ verschiedene Teilmengen! (Da hätten wir lange zu tun gehabt, um sie alle aufzuschreiben!)

Aufgaben zur Vereinigungs- und Durchschnittbildung

Wir erinnern uns, daß zur Vereinigung der Mengen M und N (geschrieben: $M \cup N$) genau die Elemente gehören, die in M oder in N liegen. Der Durchschnitt $M \cap N$ umfaßt dagegen genau jene Elemente, die *sowohl* zu M *als auch* zu N gehören.

● Gegeben sind die Mengen $A = \{2; 4; 8\}$, $B = \{1; 2; 3\}$ und $C = \{2; 3; 5; 7\}$. Es ist die Menge $(A \cup B) \cap C$ zu bestimmen.

□ Wir bilden zunächst $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 8\}$ und anschließend den Durchschnitt dieser Menge mit C. Es ergibt sich: $(A \cup B) \cap C = \{2; 3\}$.

● Es ist die Menge $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ zu bestimmen.

□ Es ist $A \cap C = \{2\}$ und $B \cap C = \{2; 3\}$. Die Vereinigung beider Mengen ergibt: $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{2; 3\}$.

Mancher wird jetzt vielleicht fragen, ob es Zufall ist, daß beide Aufgaben auf das gleiche Ergebnis führen. Nun, es ist *kein* Zufall, sondern es gilt *stets*
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
Es würde hier zu weit führen, einen *Beweis* für dieses Gesetz anzugeben. Jeder kann es sich aber anschaulich klar machen, wenn er A, B und C durch ebene Punktmengen darstellt, wie wir das früher schon einmal gemacht haben.

● Bestimme $(A \cap B) \cup C$!

□ $A \cap B = \{2\}$, $(A \cap B) \cup C = \{2; 3; 5; 7\}$.

● Bestimme $(A \cup C) \cap (B \cup C)$!

□ $A \cup C = \{2; 3; 4; 5; 7; 8\}$, $B \cup C = \{1; 2; 3; 5; 7\}$ und
$(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{2; 3; 5; 7\}$.

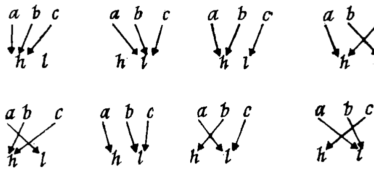
Auch die Übereinstimmung der Lösungen der letzten beiden Aufgaben ist *kein* Zufall! Es gilt nämlich *stets*: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Aufgaben zum Thema „Abbildungen“

Beim letzten Mal haben wir gelernt, wann wir von einer *Abbildung* sprechen können: Es mußten Mengen M und N vorliegen, wobei Elementen aus M Elemente aus N zugeordnet sind.

● Von den uns schon bekannten Freunden Alfred, Bernd und Christian wissen wir, daß jeder von ihnen in den Ferien genau eine Stadt besucht hat. Vor den Ferien hatten sie Halle oder Leipzig als mögliche Reiseziele angegeben. Wie kann es nun wirklich gewesen sein?

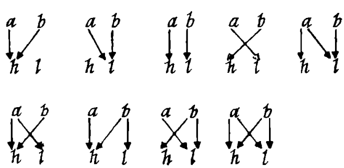
□ Gegeben sind also zwei Mengen, nämlich $F = \{a; b; c\}$ und $S = \{h; l\}$. Gefragt wird, welche *eindeutigen* Abbildungen *von* F in S möglich sind. Es ist nicht schwierig, alle Abbildungen dieser Art anzugeben. Man muß dazu nur bedenken, daß entweder alle drei Freunde in die gleiche Stadt gefahren sind oder daß zwei in der einen waren und einer in der anderen. So findet man folgende Fälle:



Es gibt also insgesamt *acht* Möglichkeiten.

● Welche Möglichkeiten (und wie viele) gibt es, wenn nur *zwei* unserer Freunde (Alfred und Bernd) verreist waren, wobei aber jeder von ihnen auch *beide* Städte besucht haben kann?

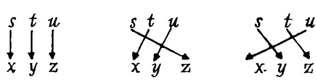
□ Wir haben jetzt die Mengen $F^* = \{a; b\}$ und $S = \{h; l\}$ gegeben. Die Aufgabe bedeutet, *alle* möglichen Abbildungen *von* F in S zu bestimmen. Bei systematischem Vorgehen findet man folgende Fälle:



Es gibt also *neun* Möglichkeiten.

● Zwei Schachmannschaften von je drei Spielern wollen einen Wettbewerb durchführen, bei dem jeder Spieler der einen Mannschaft gegen jeden Spieler der anderen Mannschaft genau einmal antreten muß. Wieviel Runden sind notwendig, wenn in jeder Runde drei Spiele ausgetragen werden?

□ Wir haben eine Menge $M_1 = \{s; t; u\}$ und eine Menge $M_2 = \{x; y; z\}$ gegeben. Gefragt wird in der Aufgabe nach der Anzahl aller umkehrbar eindeutigen Abbildungen von M_1 auf M_2, die man bilden kann, ohne daß eine Paarung (eine Spielansetzung) doppelt vorkommt. Folgende Abbildungen erfüllen diese Bedingungen:



Andere Möglichkeiten gibt es nicht. Es sind also drei Spielrunden notwendig.
Damit wollen wir es für diesmal genug sein lassen.

W. Walsch

Guter Mond, du gehst so stille...

Punkt, Punkt, Komma, Strich, fertig ist das Mondgesicht

Mit einer Art Mondgesicht wollen wir uns hier einige Scherze erlauben. Stellt euch das Gesicht in Abb. 1 auf einer nach allen Seiten gleichmäßig gespannten Gummihaut gezeichnet vor. Die Quadrate in dem unterlegten Netz mögen die Seitenlängen b haben. Zunächst bringen wir den Mond einmal zum Lachen. In Abb. 2 haben wir die Spannung der Gummihaut verändert. Das kann zum Beispiel dadurch geschehen, daß man die Hände rechts und links auf die Ränder aufsetzt und vorsichtig nach außen dehnt, und zwar mit den Daumenballen stärker als mit den Fingerspitzen. Der Mund, der vorher streng gerade war, ist jetzt leicht im Bogen nach oben gezogen, und auch die Nase hat

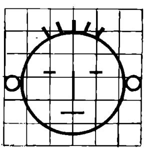


Abb. 1

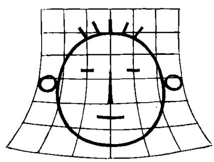


Abb. 2

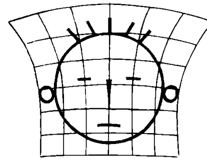


Abb. 3

ihre Form sichtlich geändert. In Abb. 3 macht der Mond ein trauriges Gesicht. Wir haben jetzt mit den Fingerspitzen stärker gedehnt als mit den Ballen. Die Mundwinkel sind nach unten gezogen, die Nase hat einen anderen Schwung bekommen. Würden wir in dieser Art weiter dehnen, so würden wir das Gesicht noch weinerlicher machen: Die äußeren Augen- und Mundwinkel würden noch weiter nach unten gezogen. Dabei muß man allerdings darauf achten, daß keine Falten entstehen und daß die Haut nicht reißt.[1] Das Gesicht wird sich dabei immer weiter verzerren. Immer aber behält der Mond seine Nase im Gesicht. Auch Augen, Mund, alle inneren Punkte der Gesichtsumrahmung sind nach der Dehnung wieder innere Punkte, wie nahe sie auch der Umrandung kommen mögen. Die Ohren bleiben am Rand angeheftet, und auch Haare braucht der Mond bei der Prozedur nicht zu lassen. Aus den Quadraten sind in Abb. 2 und 3 mehr oder weniger gekrümmte Kurvenvierecke geworden.
Jetzt denken wir uns die Haut in Abb. 1 zwischen zwei waagerechte Stäbe gespannt, den oberen Stab festgehalten und den unteren parallel nach unten bewegt. Dadurch spannen wir die Haut senkrecht zur Stabrichtung. Ihr wißt sicher, daß bei einer solchen

[1]) Wenn ihr den Versuch nachmachen wollt, müßt ihr weichen Gummi nehmen und ihn, um darauf zeichnen zu können, mit Talkum einpudern. Ein aufgeschnittener Luftballon ist dafür ungeeignet, da sich diese Gummihaut nicht als Ebene aufspannen läßt. Die Krümmungen in Abb. 2 und 3 sind leicht übertrieben, um die Wirkung besser sichtbar zu machen.

Dehnung jedes kleinste Masseteilchen um den gleichen Faktor in der Spannungsrichtung gedehnt wird. Wir haben es mit einer gleichmäßigen Dehnung nach einer Richtung, nämlich senkrecht zu einer gegebenen Achse, zu tun, mit einer sogenannten *axialen Streckung*. Bei genügender Spannung werden aus den Quadraten von Abb. 1 kongruente Rechtecke mit den Seiten b und $\frac{3}{2}\,b$. (Abb. 4) Jede Strecke, die parallel zur Achse verläuft, behält ihre Länge, während jede dazu senkrechte Strecke im Verhältnis 3:2 gedehnt wird. Das Kreisrund des Gesichts wird zu einer Ellipse, was für den, der die charakteristischen Eigenschaften einer Ellipse kennt, nicht schwer zu beweisen ist. Der Mond macht ein langes Gesicht dazu.

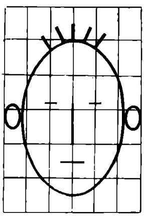


Abb. 4

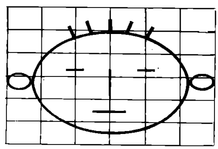


Abb. 5

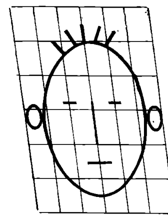


Abb. 6

Nun spannen wir, wieder von Abb. 1 ausgehend, die Haut in der dazu senkrechten Richtung, indem wir einen links angebrachten Stab festhalten und den rechten bewegen. (Abb. 5) Aus den Quadraten werden flache Rechtecke, aus dem Kreis eine liegende Ellipse, das Gesicht geht in die Breite.

Ihr erkennt aus den Abbildungen 4 und 5, daß aus den Strecken von Abb. 1 — im Gegensatz zu Abb. 2 und 3 — wieder geradlinige Strecken geworden sind, deren Länge sich allerdings teilweise geändert hat. Wir kommen später darauf zurück.

Jetzt gehen wir von Abb. 4 aus und schieben nach der axialen Streckung den unteren Stab in seiner Richtung nach rechts. (Abb. 6) Aus den Rechtecken sind Parallelogramme, aus dem Kreis ist eine schräg liegende Ellipse geworden. Der Mond macht ein schiefes Gesicht.

Schließlich kehren wir zu Abb. 1 zurück und verstärken diesmal die nach allen Seiten gleichmäßig wirkende Spannung (*Zentrische Streckung*, Abb. 7). Dabei sind aus den Quadraten wieder Quadrate geworden, die bei genügender Spannung die Seitenlänge $\frac{3}{2}\,b$ haben. Der Kreis ist zu einem Kreis mit größerem Radius geworden. Nasenlänge, Ohrenbreite, alle Strecken sind offenbar verlängert und haben dabei ihre Richtung beibehalten. Das Mondgesicht hat eine ganz regelmäßige Vergrößerung erfahren. Sein Ausdruck ist dabei gleich geblieben, wie bei der Vergrößerung einer Fotografie.

Um das ganze Geschehen mathematisch zu erfassen, gehen wir von Abb. 1 aus, denken uns aber jetzt die Gummihaut nach allen Richtungen hin ins Unendliche verlängert (d. h., ersetzt durch eine Ebene *ohne* Berandung). In der so veranschaulichten Ebene ist das Mondgesicht nur eine von unendlich vielen möglichen Figuren. Nun werden mit der ganzen Ebene die oben beschriebenen Verzerrungen vorgenommen, die wir als *geometrische Abbildungen der Ebene* bezeichnen. Bei jeder Abbildung stellen wir uns wieder die ganze Ebene vor. Jedesmal entspricht einem Punkt der Ebene genau ein Bildpunkt, in den er bei der Abbildung übergeht.

Wir bezeichnen den Mittelpunkt des Kreises, der in Abb. 1 den Gesichtsumriß darstellt, mit M. Er liegt etwa in der Mitte der Nase. Diesen Punkt M halten wir fest, während wir die Ebene gleichmäßig nach allen Richtungen hin dehnen. Das wird veranschaulicht durch Abb. 7. Wir denken sie so auf Abb. 1 gelegt, daß die zentrische Streckung von M aus deutlich wird. Der Bildpunkt von M fällt dabei wieder auf M; dies ist aber der einzige Punkt mit dieser Eigenschaft, der einzige *Fixpunkt*[2], wie man in der Geometrie sagt. Jede von M ausgehende Strecke wird auf das $m$fache gedehnt. Dabei ist m eine feste Zahl, in Abb. 7 ist $m = \frac{3}{2}$.

Auch jede beliebige Strecke, die auf einer durch M gehenden Geraden liegt, wird auf die $m$fache Länge gedehnt. Das könnt ihr leicht errechnen, wenn ihr untersucht, was mit den Abständen zwischen ihren Endpunkten und M geschieht. Wir wollen uns davon überzeugen, daß auch jede andere Strecke $\overline{AB}$[3], die auf keiner durch M gehenden Geraden liegt, wieder in eine Strecke übergeht und nicht etwa in ein gekrümmtes Kurvenstück wie in Abb. 2 oder 3. Dazu zeichnen wir $\overline{AB}$, wobei die Gerade AB nicht durch M geht, und konstruieren auf dem Strahl MA den Bildpunkt A' von A so, daß $|\overline{MA'}| : |\overline{MA}| = m$ ist. Durch A' zeichnen wir die Parallele zu AB und bringen sie mit dem Strahl MB zum Schnitt. Der neue Punkt heiße B'. (Abb. 8) Dann ist B' nach dem Strahlensatz (erster Teil) das Bild von B, denn es gilt

$$|\overline{MB'}| : |\overline{MB}| = |\overline{MA'}| : |\overline{MA}| = m.$$

Wo auch B auf der Geraden AB liegen mag, stets liegt sein Bild B' auf der Parallelen zu AB durch A'. Bei der zentrischen Streckung geht also jede Gerade wieder in eine Gerade über. Diese Eigenschaft der Abbildung bezeichnen wir als *Kollinearität*[4]. In unserem Fall wissen wir sogar noch mehr: Jede Gerade geht bei der Streckung entweder in sich selbst (wann?) oder in eine andere von gleicher Richtung über. Demnach bleibt auch die Größe jedes Winkels erhalten. Für eine beliebige Strecke $\overline{AB}$ und ihr Bild

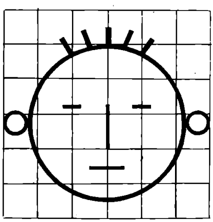


Abb. 7

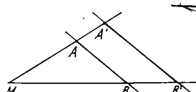


Abb. 8

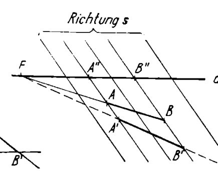


Abb. 9

$\overline{A'B'}$ gilt nach dem zweiten Teil des Strahlensatzes (vgl. Abb. 8): $|\overline{A'B'}| : |\overline{AB}| = |\overline{A'M}| : |\overline{AM}| = m$. Dabei ist m für jede beliebige Strecke dieselbe Zahl. Es handelt sich also wirklich um eine maßstabgerechte Vergrößerung. Diese geometrische Abbildung, bei der eine Streckung von einem festen Zentrum aus vorgenommen wurde, ist eine *Ähnlichkeitsabbildung*; bei ihr geht nämlich jede Figur in eine ähnliche, vergrößerte Figur über. Wir fassen zusammen: Bei einer zentrischen Streckung entspricht jedem

[2] Aus dem Lateinischen, von fixus = fest.

[3] Die durch die Punkte A und B bestimmte Gerade wird als AB geschrieben, die durch A und B begrenzte Strecke als $\overline{AB}$, ihre Länge als $|\overline{AB}|$.

[4] Aus dem Lateinischen von linea = Gerade.

Punkt genau ein Bildpunkt. Es gibt einen einzigen Fixpunkt, das Streckungszentrum M. Die Abbildung ist kollinear. Die Richtung einer Geraden wird bei der Streckung nicht verändert. Jede Strecke wird um denselben Faktor gedehnt, die Größe von Winkeln bleibt erhalten, jede Figur geht in eine ähnliche über.
Wir vergleichen jetzt Abb. 6 mit Abb. 1. In der durch Abb. 1 dargestellten Ebene denken wir uns eine Gerade a etwas oberhalb des Gesichts festgehalten und nach beiden Seiten von a aus in Richtung s der schrägen Parallelen eine Streckung vorgenommen. So können wir die in Abb. 6 dargestellte Verzerrung unter Ausschaltung von Abb. 4 direkt aus Abb. 1 erzeugen. Jeder Punkt von a bleibt bei der Dehnung an seinem Platz. Wir haben also diesmal eine ganze Gerade voller Fixpunkte. Jeder andere Punkt A hat sein Bild A' auf der durch A gehenden Schrägen (Geraden) der Richtung s. (Abb. 9) Nennen wir A'' den Schnittpunkt dieser Geraden mit a, so gilt: $|\overline{A'A''}| : |\overline{AA''}| = k$, wobei der Dehnungsfaktor k eine feste Zahl ist. Wir prüfen, ob diese Schrägdehnung auch kollinear ist. Jede Strecke, deren einer Endpunkt auf der Achse a liegt und die in die Richtung von s fällt, wird von a aus auf das $k$fache gedehnt. Daß das Gleiche mit jeder auf einer Schrägen der Richtung s liegenden Strecke geschieht, könnt ihr leicht einsehen, indem ihr die Abstände der Endpunkte von der Achse a untersucht. Sei nun $\overline{AB}$ eine beliebige, etwa die in Abb. 9 gezeichnete Strecke, F der Schnittpunkt der Geraden AB mit a; der Schnittpunkt des Strahls FA' mit der durch B gehenden Geraden der Richtung s sei B'. Wenn wir nachweisen können, daß $|\overline{B'B''}| : |\overline{BB''}| = k$ ist, dann ist B' das Bild von B bei der Schrägstreckung. Nun gilt nach dem zweiten Teil des Strahlensatzes:

$$\begin{aligned} |\overline{B'B''}| : |\overline{A'A''}| &= |\overline{FB''}| : |\overline{FA''}| \\ &= |\overline{BB''}| : |\overline{AA''}|, \text{ also auch} \\ |\overline{B'B''}| : |\overline{BB''}| &= |\overline{A'A''}| : |\overline{AA''}| = k. \end{aligned}$$

Mithin ist unsere Behauptung richtig. Sie bleibt es auch, wenn A und B auf verschiedenen Seiten von a liegen. Auf alle Fälle bewegt sich, wenn Punkt B auf der Geraden FA wandert, sein Bild B' auf der Geraden FA'. Die Schrägstreckung ist also auch kollinear. Allerdings bleibt jetzt nur bei gewissen Geraden (bei welchen?) die Richtung erhalten. Damit verändert sich natürlich auch im allgemeinen die Größe eines Winkels bei dieser Streckung, und das Bild einer Figur ist dieser keineswegs ähnlich.
Die in Abb. 4 und 5 dargestellten senkrechten axialen Streckungen sind Spezialfälle der soeben behandelten Streckung. Auch bei ihnen gibt es eine Gerade voller Fixpunkte, auch sie sind kollinear.

L. Görke

Aufgaben

● Führe mit Abb. 1 nacheinander die senkrechten axialen Streckungen der Abbildungen 4 und 5 aus! Was ergibt sich, wenn beide Male um denselben Faktor m gedehnt wird?

● Übertrage die zentrische Streckung sinngemäß von der Ebene auf den Raum! Zeige, daß das Bild einer beliebig gelegenen Kugel wieder eine Kugel ist!

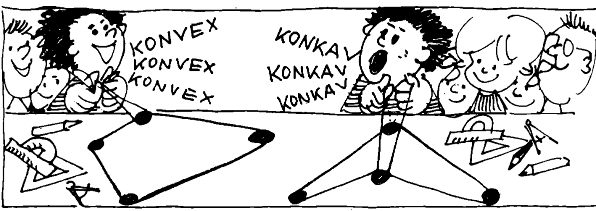
Eine Aufgabe von

Prof. Dr. habil. Lilly Görke

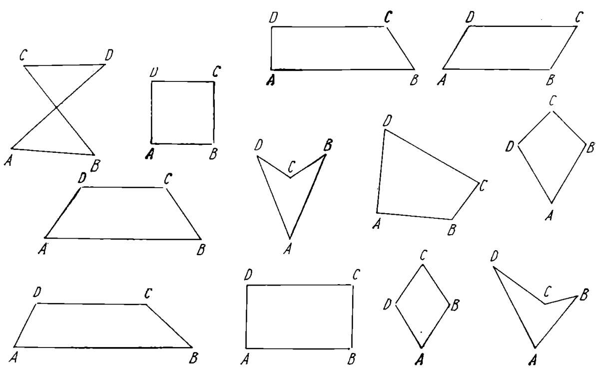
Pädagogische Fakultät
der Humboldt-Universität zu Berlin

105 Gegeben ist ein ebenes konvexes Viereck $P_1P_2P_3P_4$. Gibt es ein ebenes Viereck, das die Eckpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 zu Seitenmitten hat? Wenn ja, wieviele gibt es? Konstruiere ein solches Viereck!

(Nimm an, du hättest ein Viereck $ABCD$ gefunden, das P_1, P_2, P_3, P_4 als Seitenmitten hat. Stelle eine Probefigur her, indem du von einem beliebigen Viereck $ABCD$ ausgehst und die Seitenmitten P_1, P_2, P_3, P_4 verbindest! Welche notwendige Bedingung muß das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ erfüllen, damit die Aufgabe lösbar ist?)

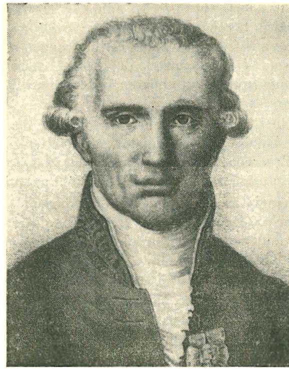


Arten von Vierecken



Gaspard Monge

1746 bis 1818



Zu den ältesten Wissenschaften, die der Mensch betreibt, gehört die Geometrie. In der Antike strebte bereits Euklid (um 300 v. u. Z.) in seinen berühmten „Elementen" eine exakte Grundlegung dieses Wissenszweiges an. Ein Teilgebiet der Geometrie hingegen, nämlich die *darstellende Geometrie*, erfuhr erst gegen Ende des 18. Jahrhunderts durch den Franzosen Gaspard Monge eine wissenschaftliche Fundierung und Durchbildung. Deshalb soll auch an den Anfang eines kurzen Lehrganges der *darstellenden Geometrie* ein historischer Rückblick auf das Leben dieses genialen französischen Mathematikers gestellt werden. Da Monge in einer politisch bewegten Zeit in Frankreich hohe öffentliche Ämter bekleidete und viel zum Fortschritt seines Landes in Wissenschaft, Technik und Militärwesen beitrug, ist sein Lebenslauf auch von allgemeinem Interesse.

Gaspard Monge wurde am 9. 5. 1746 in Beaune (Côte d'Or) in Frankreich als Sohn eines kleinen Handelsmannes und Scherenschleifers geboren. Bereits als Vierzehnjähriger erregte er mit einem von ihm gezeichneten Stadtplan seiner Vaterstadt die Bewunderung der Durchreisenden. Ein höherer Ingenieur-Offizier, dem man den von Gaspard gezeichneten Stadtplan vorgelegt hatte, machte Vater Monge den Vorschlag, seinen Sohn die Militärschule zu Mézières besuchen zu lassen. An dieser Schule wurden Ingenieur-Offiziere für die französische Armee ausgebildet. Trotz seiner überragenden Begabung kam der junge Monge nur an die der Schule angegliederte Hilfsanstalt, an der gute Praktiker vor allem zu untergeordneten Bauaufsehern für das Befestigungswesen herangebildet wurden. Die höhere Abteilung der Militärschule von Mézières blieb allein den Zöglingen von adliger Herkunft vorbehalten. Mit der genialen Behandlung einer Aufgabe aus der Befestigungskunst erregte Monge jedoch die Aufmerksamkeit des Kommandanten der Schule. Er wurde nun als Hilfslehrkraft an die höhere Abteilung der Schule berufen, wo er die angehenden Ingenieur-Offiziere mit zu unterrichten hatte. Diese Lehrtätigkeit regte ihn dazu an, die Grundlagen jenes Wissenszweiges exakt zu formulieren, der heute bei uns als *darstellende Geometrie* bezeichnet und gepflegt wird.

Monge löste das Problem der zeichnerischen Darstellung räumlicher Gebilde durch eine geschickte und übersichtliche Verknüpfung von zwei Bildern (Normalrissen) des darzustellenden Objektes. Diese beiden Bilder (Grund- und Aufriß) stehen in einer einfachen Lagebeziehung zueinander und ermöglichen die konstruktive Lösung vieler Problemstellungen aus der Praxis in einer Zeichenebene, was bis dahin vorwiegend mit rechnerischen und analytischen Methoden behandelt worden war.

Das von Monge eingeführte Verfahren der zugeordneten Normalrisse (Grund- und Aufrißverfahren) setzte sich im Militär- und Befestigungswesen schnell durch. Um vor Nachahmungen des Auslandes sicher zu sein, wurde es Monge von den vorgesetzten Militärstellen verboten, sein Verfahren zu veröffentlichen.

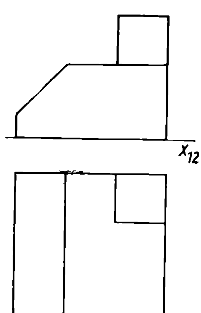
Dieser Befehl blieb 15 Jahre in Kraft. Erst 1794 durfte Monge — inzwischen nach Paris berufen — öffentliche Vorlesungen über die von ihm begründete *darstellende Geometrie* halten. Seine Entdeckungen und Begriffsbildungen faßte er in dem berühmten Werk „Géométrie descriptive“ zusammen. Bis zur Aufhebung des Verbotes hatte Monge auch auf anderen Gebieten der Mathematik bahnbrechende Entdeckungen gemacht.

Nach der französischen Revolution übernahm Monge hohe öffentliche Ämter. Er war zeitweise Marineminister, organisierte die Landesverteidigung und mobilisierte alle Reserven, um Frankreich in der Zeit der militärischen Bedrohung von ausländischen Industrien (z. B. Kanonenherstellung) und Rohstoffen (z. B. Salpetergewinnung) unabhängig zu machen. Große Verdienste erwarb er sich um die 1794 gegründete *École polytechnique*, die zum Vorbild für alle in der Folgezeit begründeten Technischen Hochschulen der Welt wurde. Der *darstellenden Geometrie* räumte er im Lehrprogramm einen wichtigen Platz ein.

Nach Napoleons Aufstieg wurde Monge dessen wissenschaftlicher Berater. In dieser Stellung scheute sich Monge jedoch nicht, dem Imperator wegen der Annahme des Kaisertitels und anderer mit seiner republikanischen Gesinnung unvereinbarer Maßnahmen die eigene Meinung schonungslos zu sagen. Schützend stellte sich Monge vor republikanisch gesinnte und gegen Napoleon rebellierende Studenten. So zahlte er auch für ärmere Studenten das wieder eingeführte Schulgeld von seinem Professorengehalt. Im Jahre 1809 zog sich Monge von seinem Lehramt zurück. Auf die Nachricht von Napoleons Niederlage in Rußland erlitt er einen Schlaganfall. Während der hunderttägigen Wiederherrschaft Napoleons erscheint Monge erneut als sein engster Mitarbeiter und Vertrauter. Der endgültige Sturz Napoleons bricht auch seine Lebenskraft. 1816 wird Monge aller seiner Ämter enthoben und politisch gemaßregelt. Darauf verfiel er in geistige Umnachtung und starb am 18. 7. 1818 in Paris.

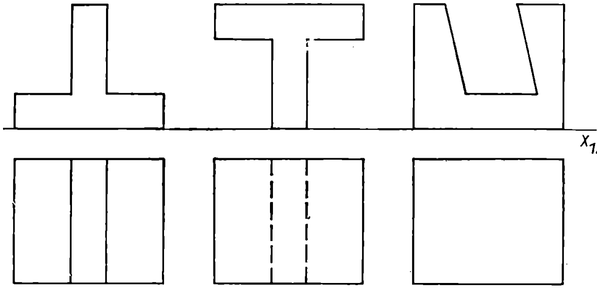
Die wissenschaftlichen Leistungen Monges, sein Wirken für den technischen Fortschritt und sein selbstloses Eintreten für Studenten gegen die Willkür des Imperators rechtfertigen, daß man dieses Mannes nach 150 Jahren noch in Achtung gedenkt. Wir wollen uns im folgenden an einfachen Beispielen mit dem Verfahren der zugeordneten Normalrisse (Grund- und Aufriß) vertraut machen.

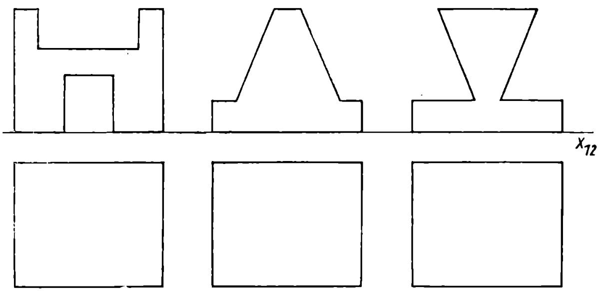
* Das im Grund- und Aufriß dargestellte Werkstück (siehe Abb.) wird von ebenen Flächen begrenzt, die senkrecht oder parallel zur Aufrißebene liegen. Fertige ein maßgerechtes Modell dieses Werkstückes aus Holz oder Knetmasse nach der vorliegenden Darstellung an!

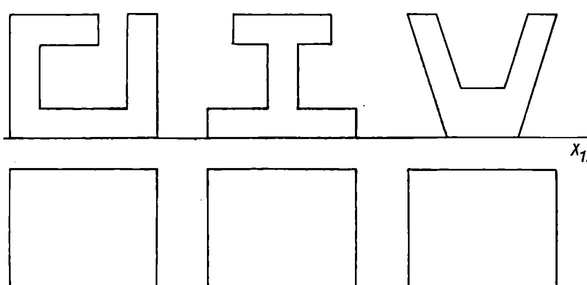


* Ergänze! Bei den Darstellungen auf Seite 109 handelt es sich um die Grund- und Aufrisse von neun ebenflächig begrenzten Werkstücken (Profilen). Oberhalb der Rißachse, die mit „x_{12}“ bezeichnet ist, liegen die Aufrisse der Profilstücke. Jedem dieser Aufrisse ist ein (noch unvollständiger) Grundriß des Werkstückes zugeordnet. In den ersten zwei Normalrissen handelt es sich um ein Stück eines T-Trägers. Beachte, daß alle im Grundriß sichtbaren Kanten durch ausgezogene und verdeckte Kanten durch gestrichelte Linien dargestellt sind! Vervollständige im Sinne der beiden ersten Beispiele für die restlichen sieben Werkstücke den Grundriß!

E. Schröder

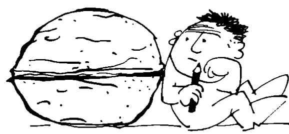

X_{12}


X_{12}


X_{12}

Wer löst mit?
alpha-Wettbewerb

letzter Einsendetermin 10. 10. 1967



W(5)106 Die Jungen Pioniere der Klassen 4, 5 und 6 einer Oberschule wetteifern miteinander um das höchste Sammelergebnis an gebrauchten Flaschen. Die Pioniere dieser drei Klassen haben insgesamt 1680 Flaschen gesammelt. Die Pioniere der Klasse 4 sammelten davon den vierten Teil. Die Pioniere der Klasse 5 dagegen sammelten 185 Flaschen weniger als das Doppelte der Anzahl Flaschen, die von den Pionieren der Klasse 4 zusammengetragen wurde. Die restlichen Flaschen wurden von den Pionieren der Klasse 6 gesammelt. Wieviel Flaschen sammelten die Jungen Pioniere jeder dieser drei Klassen? 5

W(6)107 Eine Turmuhr schlägt um 5 Uhr fünfmal und braucht zu diesen Schlägen 5 Sekunden Zeit. Wieviel Zeit braucht diese Uhr zu den 10 Schlägen um 10 Uhr? 6

W(7)108 Das Lehrbuch für Mathematik der Klasse 7 einer Oberschule unserer Republik umfaßt 196 Seiten. Die Zahlen für die ersten beiden Seiten und für die letzte Seite wurden nicht gedruckt. Wieviel Ziffern wurden zum Numerieren der übrigen Seiten verwendet? Wie oft wurde dabei die Ziffer 0 gedruckt? 7

W(8)109 In der alten persischen Erzählung „Die Geschichte Moradbaks", die in der Sammlung „Tausendundein Tag" enthalten ist, stellt ein Weiser einem jungen Mädchen die folgende Aufgabe und erwähnt dabei, daß solche Aufgaben von den indischen Philosophen gestellt werden: „Eine Frau geht in einen Garten, um Äpfel zu ernten. Der Garten hat vier Tore; jedes wird von einem Manne bewacht. Die Frau gibt dem Hüter des ersten Tores die Hälfte der gepflückten Äpfel; als sie beim zweiten anlangt, gibt sie dem zweiten Wächter die Hälfte der übriggebliebenen Äpfel; ebenso verfährt sie beim dritten; endlich teilt sie noch mit dem vierten, so daß ihr schließlich nur zehn Äpfel bleiben. Nun fragt man, wieviel Äpfel sie geerntet hat." 8

W(9)110 Bei den Schwimm-Europameisterschaften in Utrecht im August 1966 erhielten die folgenden sechs Länder insgesamt 23 Goldmedaillen: UdSSR, DDR, Niederlande, Frankreich, Großbritanien, Italien. Die beiden zuletzt genannten Länder erhielten die gleiche Anzahl von Goldmedaillen; von den übrigen vier Ländern erhielt jedes Land mehr Goldmedaillen als das in der Aufzählung folgende Land. Die UdSSR erhielt mehr Goldmedaillen als die übrigen fünf Länder zusammen. Wieviel Goldmedaillen erhielt jedes der sechs Länder? 9

W(10)111 Das Luxusfahrgastschiff „Ernst Thälmann" der Weißen Flotte Dresden legt die 8,6 km lange Strecke von Dresden-Pillnitz bis Pirna flußaufwärts in 55 min und flußabwärts in 30 min zurück. Es legt unterwegs nicht an. Wie groß ist die Schiffsgeschwindigkeit (in km/h) flußaufwärts bzw. flußabwärts? Wie groß ist die Strömungsgeschwindigkeit der Elbe? Wie groß wäre die Geschwindigkeit des Schiffes in ruhendem Gewässer? 10

alpha-Wettbewerb [W(5) bis W(10)]

Die zweite Wettbewerbsaufgabe für jede Klassenstufe ist aus dem Beitrag: Aufgaben der Mathematikolympiade Sofia, Schulstufe 1967 zu entnehmen: W(5)112, W(6)113, W(7)114, W(8)115, W(9)116, W(10)117. Dieses Schuljahr endet am 31. August. Jeder Teilnehmer löst erst ab Heft 5 die Aufgaben der Klassenstufe, die er ab September besucht. Die Redaktion wünscht allen Lesern ein erfolgreiches Schuljahr 1967/68.

Auf den Spuren Roald Amundsens

Mit halber Kraft tastet sich das Vermessungsschiff *MS Meteor* durch lautlos treibendes Eis. Plötzlich steigen spitze, steile Berge über den Eisfeldern empor. Zwischen den Berggruppen fließt das Eis des Inlandes bis zum Meere. Der Anblick dieser gebirgigen Küste regte die Holländer Barents und van Rijp im Jahre 1596 an, dieses Land Spitzbergen zu nennen. Es war aber schon den Wikingern als „Land der kalten Küste" (d. h. Svalbard; heutiger norwegischer Name) bekannt.

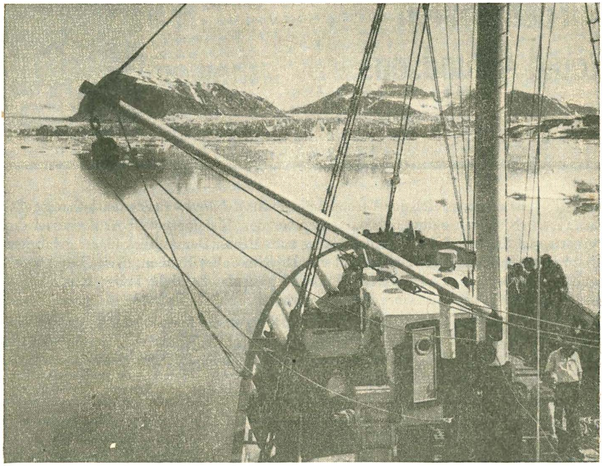
Es ist Frühling in der Arktis. Das warme Golfstromwasser umspült die Küste und verdrängt das Meereis. Am Rande der Gletscher, zwischen Schutt und Geröll, wachsen Gräser und Flechten, blüht der wetterharte arktische Mohn. Möwen, Schwalben, Enten und Gänse bevölkern die Fjorde.

Im Königsfjord an Land gegangen, entdecken wir als erstes einen Erinnerungsstein an den norwegischen Polarforscher Roald Amundsen. Im Jahre 1926 überflog Amundsen von Spitzbergen aus im Luftschiff das Nordpolarbecken und erforschte den kürzesten Luftweg von Nord-Europa nach Alaska. Heute führen zwei Flugrouten über den Nordpol.
Die Zeit der geographischen Entdeckungen ist jedoch zu Ende. Selbst die unzugänglichsten Teile der Polargebiete sind aus Flugzeugen und neuerdings aus Wettersatelliten erkundet. Unbekannt aber ist ihre physikalische Natur: das Wetter, das Klima, die Strahlenbrechung und Wellenausbreitung in den Atmosphärenschichten, die Vorstöße der Gletscher, das Abschmelzen der Inland- und Meereise, die Drift des Packeises, die Entstehung der Böden und vieles andere mehr.

Die Vermessungsfachleute haben dabei wichtige Aufgaben: sie vermessen das Gelände und zeichnen Karten. In die Karten tragen die Forscher ihre Beobachtungen ein. Sie messen auch den Stand der Gletscher und die Schnelligkeit ihrer Bewegung.

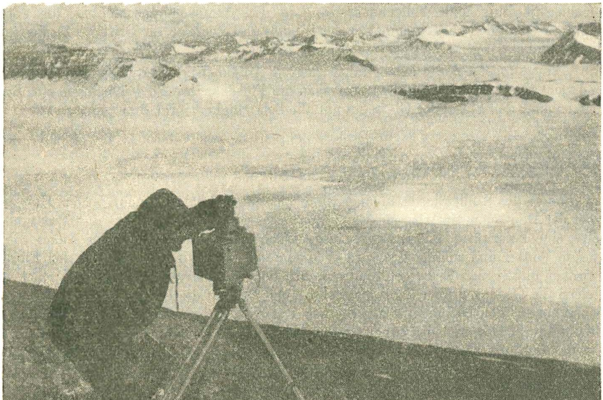
Ein Arbeitstag im Sommer

Im Inneren des Königsfjords, in einer wind- und eisgeschützten Bucht, ist das Hauptlager der Deutschen Spitzbergen-Expedition 1964/65 errichtet: Wohn- und Proviantzelte, eine Polarhütte, Kistenstapel; das seetüchtige Motorboot liegt vor Anker. Bei klarem Wetter und ruhiger See wird es losgemacht, und wir tuckern über den Fjord zwischen glitzernden Eisbergen hindurch. Mit den Meßinstrumenten auf dem Rücken steigen die Geodäten über Schotter, Schnee und Eis auf die Berge hinauf. Hier oben bauen sie aus den herumliegenden Steinen 1 m bis 2 m hohe Pyramiden, sogenannte Steinmänner. Das sind die trigonometrischen Punkte. Je drei von ihnen bilden ein Dreieck und alle zusammen ein Netz von Dreiecken, welches das Expeditionsgebiet überspannt. In diesen Dreiecken messen wir Winkel und Strecken und berechnen die Koordinaten der Netzpunkte und ihre Höhe über dem Meere in einem rechtwinklig-kartesischen Koordinatensystem (Sinussatz, Kosinussatz). Von diesen festen Punkten aus wird das Gelände fotografiert. Zu Hause werden aus den Fotoplatten die Berge und Gletscher, die Küstenlinien und die Inseln ausgemessen und daraus die Karte gezeich-



Vermessungsschiff *MS Meteor* vor der Westküste Spitzbergens

Geländeaufnahme mit Hilfe fotografischer Platten



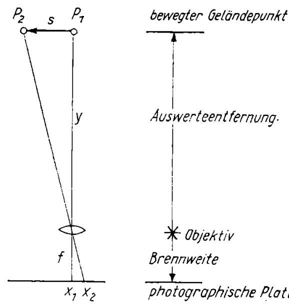
net. Um die Netzpunkte auf der Erdkugel nach geographischer Länge und Breite festzulegen, müssen wir noch astronomische Beobachtungen anstellen. Dazu brauchen wir Formeln aus der Geometrie gekrümmter Flächen.
Im Sommer ist es nördlich des Polarkreises Tag und Nacht hell, und bei gutem Wetter arbeiten wir 20 bis 30 Stunden hintereinander. Dann halten uns wieder Nebel und Stürme tagelang im Zelt gefangen.

Ein Arbeitstag im Winter

Ein Arbeitstag im Winter beginnt mit dem Wachsen der Skier, denn die Fjorde und Meerengen sind zugefroren und mit Schnee bedeckt. Leicht gleitet es sich über den ebenen Fjord, aber mühsam ist das Steigen an den tiefverschneiten Berghängen.
Von einem Sattel aus 300 m Höhe ist der Königsgletscher, ein Eisstrom von 5 km Breite, 20 km Länge und 100 m Dicke, gut zu übersehen. Zwei Meter am Tage bewegt er seine Eismassen der Küste zu. Diese Bewegung messen wir, indem wir den Gletscher mehrmals mit Hilfe einer Kamera mit Meßeinrichtung, einem sogenannten Phototheodoliten, fotografieren.
Ein beliebiger Geländepunkt P (z. B. die Spitze eines Eisturmes) erscheint zur Zeit t_1 auf der fotografischen Platte an der Stelle x_1, zur Zeit t_2 an der Stelle x_2. In der Zeit $t_2 - t_1 = \Delta t$ hat sich der Punkt P von P_1 nach P_2 um den Betrag s verschoben. Nach dem Strahlensatz ist

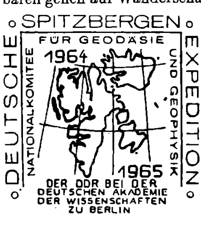
$$s = \frac{y \cdot \Delta x}{f},$$

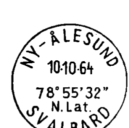
und wir können s berechnen, indem wir für den Zähler die Entfernung y aus der Karte, den Koordinatenunterschied Δx aus den Platten abgreifen und im Nenner die Brennweite des Objektivs f einsetzen. Noch vor 30 Jahren mußte jeder Meßwert bei großer Kälte und Sturm auf Papier oder Plasttäfelchen geschrieben werden. Heute speichert man die geographischen, geodätischen und geophysikalischen Informationen auf Fotoplatten, Filmen und Magnetbändern, die, in die Heimat zurückgekehrt, sofort in optische Auswerte- und elektronische Rechengeräte eingegeben werden können. Im Polarwinter ist es drei Monate lang Tag und Nacht dunkel, und nur im Mondschein und bei flackerndem Nordlicht können wir den Gletscher beobachten. Mit dem ersten Licht nach Sonnenaufgang kehren die Vögel zurück. Robben sonnen sich vor ihren Wasserlöchern; die Eisbären gehen auf Wanderschaft.



Prinzip der Geschwindigkeitsmessung an Gletschern

S. Meier





Mathematikolympiaden in Bulgarien

Seit 16 Jahren werden in der Volksrepublik Bulgarien Mathematikolympiaden durchgeführt. Bis 1963 nahmen die Schüler der 9. bis 11. Klassenstufe teil, seit 1964 die Schüler der Klassenstufen 5 bis 11. Der Wettbewerb umfaßt drei Etappen, die jeweils am 10. 1. bzw. am 20. 4. und am 20. 5. jeden Jahres abgeschlossen werden. An der ersten und zweiten Stufe (Schul- und Kreisolympiade) nehmen Schüler der 5. bis 11. Klassenstufe teil, an der dritten Stufe (Landesolympiade) nur die Schüler der 8. und 11. Klassenstufe. Die Aufgaben für die erste und zweite Stufe werden von den Sektionen der Mathematischen Gesellschaften der Kreise ausgearbeitet. Bis zur Auswahlprüfung für die IMO hatten sich 1964 auf Grund guten Abschneidens in den vorangegangenen Etappen 2 Schüler aus der Klassenstufe 9, 14 aus der Klassenstufe 10 und 34 aus der Klassenstufe 11 durchgekämpft. 18 von ihnen erhielten mehr als 50% der Punkte. Sie wurden in einem 12tägigen Kursus von Dozenten und Assistenten der Universität Sofia auf die Internationale Mathematikolympiade vorbereitet und die acht Besten nach harten Klausuren delegiert.
Jedes Jahr überreicht eine zentrale Kommission zur Vorbereitung der Olympiaden den Schulen Aufgaben bulgarischer und ausländischer Herkunft. Zu Ehren der VIII. IMO im Jahre 1966 in Sofia wurde allen Teilnehmern ein Vorausexemplar einer Aufgabensammlung als Geschenk überreicht. Die darin enthaltenen 1339 Olympiadeaufgaben können für die individuelle Arbeit sowie für das Training im Kollektiv der Schule oder in den Arbeitsgemeinschaften gut genutzt werden.
Abschließend sei eine Tabelle wiedergegeben, die zeigt, wie groß die Beteiligung an den Olympiaden in unserem Lande ist.

Übersicht über die Beteiligung an der 14. Olympiade der Volksrepublik Bulgarien (1964/65)

	Klassenstufen	Anzahl der teiln. Schüler	Anzahl der Schüler, die auf Grund guter Leistungen in eine höhere Stufe kamen
1. Stufe beendet bis 30. 1. 65 (Schulstufe)	5 bis 11	673646 d. s. etwa 90% aller Schüler der Kl. 5 bis 11	243141
2. Stufe beendet bis 20.4. 65 (Kreisstufe)	5 bis 11	219245	48025
3. Stufe beendet bis 20. 5. 65 (Landesolympiade)	8 und 11	14165	2052

Zur Auswahlprüfung für die IMO wurden 93 Schüler delegiert. Die acht Besten nahmen an der VII. IMO in Berlin teil.

S. Bodurow

Aufgaben der Mathematikolympiade Schulstufe, Sofia 1967

Mit der Veröffentlichung der Aufgaben wollen wir unseren Lesern zeigen, welche Anforderungen die Wissenschaftler und Mathematiklehrer Sofias an ihre Schüler stellen, die Aussicht haben werden, am Stadtausscheid teilnehmen zu können. Wir danken unseren Auslandskorrespondenten Assja Peinerdjiewa und Kostantin Petrov von der Universität Sofia für die Bereitstellung des Materials. Da unsere Leser auf Grund der verschiedenen Lehrplananforderungen beider Länder einen Teil der Aufgaben noch nicht lösen können, haben wir aus jedem Schuljahr *eine* Aufgabe für unseren Wettbewerb ausgewählt. (Die andere Wettbewerbsaufgabe findet ihr, liebe Leser, auf Seite 110.) Wir wollen damit einen konkreten Beitrag zur Vorbereitung auf die im September beginnende VII. Olympiade Junger Mathematiker der DDR — Schulstufe — geben und wünschen allen Teilnehmern dazu viel Erfolg und Freude, auch bei der Arbeit mit den nun folgenden bulgarischen Aufgaben:

Klassenstufe 5

1. Es ist zu berechnen:

$$\{1446984:231-[942690:201+(13104:234)\cdot 112-335\cdot 16]\}\cdot(10201:101)-16862.$$

Danach ist der Quotient aus dem Ergebnis und der kleinsten dreistelligen natürlichen Zahl, die größer als 100 und Vielfaches von 25 ist, zu ermitteln.

W(5)112 Alle Schüler einer 5. Klasse einer Schule in Sofia machten mit ihrem Klassenlehrer einen Ausflug. Auf dem Hinweg zum Ausflugsziel marschierten sie in Reihen mit je sechs, auf dem Rückweg dagegen in Reihen mit je vier Schülern. Hätte ein Schüler das Marschkommando übernommen, so wären die übrigen in Reihen mit je fünf Schülern marschiert. Wieviel Schüler gehören dieser Schulklasse an? Wir wissen, daß es weniger als 50 Schüler sind.

3. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$. Die Strecke, die einen Endpunkt der Basis mit der Mitte des Schenkels, der diesem Endpunkt gegenüberliegt, verbindet, teilt den Umfang des Dreiecks so in zwei Streckenzüge, daß der Streckenzug, der die Basis enthält, 11 cm und der andere Streckenzug 15 cm lang ist. Wie lang ist jeder Schenkel, wie lang ist die Basis dieses Dreiecks?

Klassenstufe 6

1. Es ist zu berechnen:

$$3{,}7+1\frac{1}{2}\left(0{,}2652:0{,}13-1\frac{17}{30}+0{,}06\right)\cdot\left[19{,}21-\left(4{,}26-\frac{5}{24}:\frac{25}{42}\right)\right].$$

Danach sind $\frac{15}{100}$ dieses Ergebnisses zu ermitteln.

W(6)113 Zur Herstellung von 1 kg Rosenöl benötigt man 0,5 t Rosenblüten; zur Herstellung von 1 l Parfüm braucht man zwei Tropfen Rosenöl. 25 Tropfen Rosenöl wiegen genau 0,001 kg. Wieviel Liter Parfüm lassen sich aus 0,8 t Rosenblüten herstellen?

3. In einer Werkstatt wurden aus einer rechteckigen Zinkblechplatte, die 240 mm lang und 150 mm breit war, an den vier Ecken je ein Quadrat von 40 mm Seitenlänge herausgeschnitten. Die verbliebenen Ränder wurden umgebogen und ohne Überlappung zusammengelötet, so daß ein oben offener quaderförmiger Kasten entstand. Wieviel Quadratzentimeter Zinkblech wurden nach Wegfall der herausgeschnittenen quadratischen Blechstücke zur Herstellung des Kastens benötigt? Wieviel Liter Flüssigkeit faßt dieser Behälter?

Klassenstufe 7

1. Der Ausdruck

$$z = 0{,}3a - \frac{1}{3} - b - \left(\frac{a}{3} + \frac{2}{3} - b\right) - \left\{4\frac{3}{5}c^2 - (201{,}75a^3 - 7) - \right.$$
$$\left. - \left[7 + \frac{a^3}{4} - (8{,}5c^2 + d)\right]\right\}$$

ist zunächst zu vereinfachen. Danach ist der Wert dieses Ausdrucks für $a = -0{,}1$, $c = 3\frac{1}{3}$ und $d = -1\frac{1}{9}$ zu berechnen.

2. Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC! Konstruiere danach die beiden Winkelhalbierenden der Außenwinkel dieses Dreiecks, deren Scheitelpunkte in A und B liegen! Der Schnittpunkt dieser Winkelhalbierenden sei D. Durch den Punkt D ist eine Parallele zu $\overline{AB}$ zu zeichnen; sie schneidet die verlängerten Dreieckseiten $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ in den Punkten M und N. Beweise, daß $\overline{MN} = \overline{AM} + \overline{BN}$ ist!

W(7)114 Zeichne ein stumpfwinkliges Dreieck ABC mit dem stumpfen Winkel α und den spitzen Winkeln β und γ! Konstruiere die Dreieckshöhen! Der Schnittpunkt der verlängerten Höhen sei D. Vergleiche die von den verlängerten Höhen gebildeten Winkel, deren Scheitelpunkt in D liegt, mit den Innenwinkeln des stumpfwinkligen Dreiecks ABC! Was stellst du fest? Versuche, deine Aussage zu beweisen.

Klassenstufe 8

W(8)115 In Sofia startete um 11 Uhr ein Passagierflugzeug zum Flug nach Varna. Eine halbe Stunde später startete vom gleichen Flughafen ein Militärflugzeug, das in Varna 5 Minuten früher als das Passagierflugzeug landete. Um wieviel Uhr landeten beide Flugzeuge jeweils in Varna, und wie groß waren ihre mittleren Geschwindigkeiten, wenn die Geschwindigkeit des Militärflugzeuges $2\frac{1}{2}$ mal so groß wie die des Passagierflugzeuges war? Die Entfernung von Sofia bis Varna beträgt 400 km Luftlinie. $\left(\text{Die Berechnung ist mit einer Genauigkeit von } \pm\frac{1}{10} \text{ Minute auszuführen.}\right)$

2. Der folgende Bruch ist so weit wie möglich zu kürzen:

$$\frac{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4}{x^4 - 3x^2 + 2x}.$$

Der gekürzte Bruch ist gleich Null zu setzen, und die so entstandene Gleichung ist zu lösen.

3. Gegeben ist ein Parallelogramm $ABCD$. Die Mitte M von $\overline{AB}$ ist mit D, die Mitte P von $\overline{CD}$ mit B zu verbinden. Es ist zu beweisen, daß diese Verbindungsstrecken die Diagonale $\overline{AC}$ in drei gleiche Teilstrecken zerlegen.

Klassenstufe 9

1. Der Ausdruck

$$z = \left(\frac{2a\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}} + \frac{a\sqrt{a}-x\sqrt{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}} - \sqrt{a\,x} \right) : \left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)$$

ist so weit wie möglich zu vereinfachen. Danach ist $a = \sqrt{0{,}25}$ und $x = 1 + \sqrt{3}$ zu setzen und z mit einer Genauigkeit von zwei Stellen nach dem Komma zu berechnen.

2. Es ist die Gleichung

$$\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+2}{x-2} + \frac{3-x}{x+3} + \frac{x+4}{4-x} = 0$$

mit anschließender Probe zu lösen.

W(9)116 Es ist zu beweisen, daß das Produkt aus den Maßzahlen zweier Dreiecksseiten gleich dem Produkt aus den Maßzahlen der zur dritten Seite gehörigen Höhe und des Durchmessers des Umkreises ist. Ferner ist die Konstruktion eines Dreiecks auszuführen und zu beschreiben, wenn zwei Seiten und der Durchmesser des Umkreises gegeben sind.

Klassenstufe 10

1. Es ist die folgende Identität nachzuweisen:

$$\frac{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = \frac{3\sqrt[3]{a\,b}}{a+b}\,.$$

Dabei sind a und b positive reelle Zahlen.

2. Es ist die folgende Summe zu berechnen:

$$S_n = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + \cdots + x_n{}^2.$$

Dabei stellen die $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ eine arithmetische Folge dar.

W(10)117 Es seien zwei Geraden g und h im Raume gegeben. Auf der Geraden g seien ferner zwei verschiedene Punkte A und B festgelegt. Die Punkte H und K seien die Projektionen der Punkte A und B auf die Gerade h.

a) Unter welchen Bedingungen fallen die Punkte H und K zusammen?

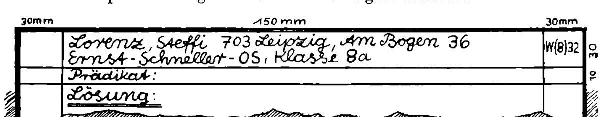
b) Unter welchen Bedingungen sind die Geraden AH und BK einander parallel?

c) Unter welchen Bedingungen fallen die Geraden AH und BK zusammen?

d) Wie ist die Lage des Punktes A auf der Geraden g zu wählen, damit AH im Punkt A auf g und im Punkt H auf h senkrecht steht, wenn die Fälle a), b) und c) nicht zutreffen!

e) Es sind die Längen der Strecken $\overline{BH}$, $\overline{AK}$ und $\overline{AB}$ zu berechnen, wenn $\overline{HK} = m$, $\overline{AH} = n$ und $\overline{BK} = p$ gilt und die Bedingung d) erfüllt ist.

So muß der Kopf der Lösung einer Wettbewerbsaufgabe aussehen!



VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu den Aufgaben der Kreisolympiade (Dezember 1966)

Klassenstufe 5

1.* Insgesamt waren genau 500 Äpfel vorhanden.

2. Die durch Vertauschung der Ziffern entstehende Zahl muß größer sein als die ursprüngliche Zahl, da sie gleich dem um 2 verminderten Dreifachen dieser Zahl sein soll. Bei der ursprünglichen Zahl ist also die Anzahl der Zehner kleiner als die der Einer. Man braucht daher unter Berücksichtigung der Bedingung, daß die Summe der beiden Anzahlen 10 beträgt, nur die Zahlen 19, 28, 37 und 46 in Betracht zu ziehen. Von ihnen erfüllt 28 und nur 28 die Bedingungen der Aufgabe.

3. *$10804 + 21608 + 8816 + 26448 + 8816 + 20744 = 97236$

4.* Hans legt die Übungsstrecke mit genau 176 Schritten zurück.

Klassenstufe 6

1.* Die Längen der einzelnen Teilstrecken sind $2\frac{2}{9}$ m, $4\frac{4}{9}$ m und $13\frac{1}{3}$ m.

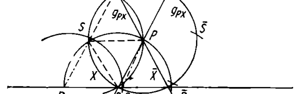
2. Wegen (2) ist a durch 60 teilbar. Es gilt daher $a = 60 \cdot b$, b ganz, und wegen (1) folgt $100 < 60b < 1201$. Somit muß b der Bedingung $1 < b < 21$ genügen. Wegen (3) kann b nicht durch 2, nicht durch 3 und nicht durch 5 und wegen (4) auch nicht durch 11 teilbar sein. Also kommen für den Faktor b nur noch die Zahlen 7; 13; 17 und 19 in Frage. Es sind daher die Zahlen 420; 780; 1020 und 1140 zu betrachten, die sämtlich (1), (2) und (3) erfüllen. Von ihnen genügen nur 420; 780 und 1020 der Bedingung (4). 420; 780; und 1020 sind die gesuchten Zahlen, und es gibt keine weiteren natürlichen Zahlen, die (1) bis (4) gleichzeitig erfüllen.

3. Der geforderte Winkel läßt sich aus einem rechten Winkel und einem Winkel vom Gradmaß 9° konstruieren. Der rechte Winkel wird nach Grundkonstruktion 2 (Lehrbuch Klasse 6) konstruiert. Dann halbiert man nach Grundkonstruktion 3 den gegebenen Winkel und halbiert einen der beiden so erhaltenen Winkel $\left(\text{Gradmaß } \frac{\alpha}{2} = 18°\right)$ noch einmal. Dadurch entsteht ein Winkel vom Gradmaß $\frac{\alpha}{4} = 9°$. Man addiert auf die im Lehrbuch Klasse 5 angegebene Weise den rechten Winkel und den Winkel von 9° und erhält, wie verlangt, einen Winkel von 99°.

4.* Die Breite der Terrasse beträgt 9,6 m.

Klassenstufe 7

1. Man wählt auf g einen beliebigen Punkt Q und schlägt um ihn mit $\overline{PQ}$ den Kreis k_1. Dieser schneidet g in zwei Punkten: R und R. Nun schlägt man um R und um P mit $\overline{PQ}$ die Kreise k_2 und k_3. Diese schneiden einander in Q und in einem Punkt $S \neq Q$ (andernfalls würden sie sich in Q berühren, also lägen R, P und Q auf derselben Geraden, d. h. P läge auf g, im Widerspruch zur Voraussetzung). Schlägt man nun mit $\overline{PQ}$ um S den Kreis k_4, so schneidet dieser k_3 in zwei Punkten: X und X', $X \neq X'$. Die Geraden g_{PX} und $g_{PX'}$ und nur diese genügen der Aufgabenstellung. (Der zweite Schnittpunkt R' von k_1 und g führt zwar zu anderen Punkten X und X', aber zu denselben Geraden).



Beweis: Laut Konstruktion ist das Dreieck $\Delta\, SXP$ gleichseitig. Außerdem ist $SP \parallel RQ$, weil $RQPS$ ein Rhombus ist. Die Gerade g_{PX} schneide g im Punkte P_1. Dann gilt (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen)

$\sphericalangle SPP_1 \cong \sphericalangle PP_1\bar{R}$ d. h. $\sphericalangle PP_1\bar{R}$ hat ein Gradmaß von 60°. Ebenso ist laut Konstruktion $X'P \parallel SX$. Die Gerade $g_{PX'}$ schneidet mithin g ebenfalls unter einem Winkel von 60°. Da es nur zwei Geraden durch P gibt, die mit g einen Winkel vom Gradmaß 60° bilden, sind damit alle derartigen Geraden gefunden.

2. Wir betrachten irgend zwei gegenüberliegende Winkel und bezeichnen ihre Gradmaße α und γ und ihre Scheitelpunkte mit A und C, so daß also α und γ die Gradmaße der Winkel $\sphericalangle DAB$ und $\sphericalangle BCD$ sind. Ferner seien β_1, β_2, δ_1 bzw. δ_2 die Gradmaße der Winkel $\sphericalangle ABM$, $\sphericalangle MBC$, $\sphericalangle CDM$ und $\sphericalangle MDA$.

Behauptung: $\alpha + \beta = 180°$

Beweis: Wir unterscheiden 3 Fälle.

Fall 1 (Der Punkt M liegt im Innern des Sehnenvierecks):

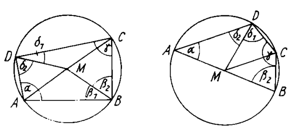
In den Dreiecken $\triangle ABM$, $\triangle BCM$, $\triangle CDM$ und $\triangle DAM$ sind die von M ausgehenden Seiten Radien des Kreises k. Diese Dreiecke sind daher gleichschenklig mit der Spitze M.

Daraus folgt: (1) $\beta_1 + \delta_2 = \alpha$ und

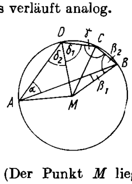
(2) $\beta_2 + \delta_1 = \gamma$.

Weiterhin gilt: (3) $\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta_1 + \delta_2 = 360°$. (Die Winkelsumme im Viereck $ABCD$ beträgt 360°). Aus (1), (2) und (3) folgt

$$\alpha + \gamma + \alpha + \gamma = 360°$$
$$\alpha + \gamma = 180° \text{ w. z. b. w.}$$



Fall 2 (Der Punkt M liegt auf dem Sehnenviereck): In diesem Fall ist entweder $\beta_1 = 0$ oder $\beta_2 = 0$ oder $\delta_1 = 0$ oder $\delta_2 = 0$. Der Beweis verläuft analog.



Fall 3 (Der Punkt M liegt außerhalb des Sehnenvierecks): In diesem Falle ist entweder β_1 durch $-\beta_1$ oder β_2 durch $-\beta_2$ oder δ_1 durch $-\delta_1$ oder δ_2 durch $-\delta_2$ zu ersetzen. Der Beweis verläuft analog Fall 1.

3.* Die Ziffer 9 wird insgesamt 1605 mal aufgeschrieben.

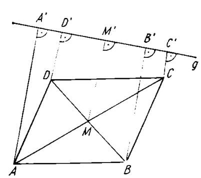
4.* Das Volumen des Gefäßes beträgt $\frac{20}{7} \cdot 2\frac{1}{2}$ Liter $= \frac{50}{7}$ Liter.

Klassenstufe 8

1.* Die Gesamtheit aller möglichen Verteilungen ist in dem folgenden Schema dargestellt (Dabei bedeuten: r — rote Kugel, s — schwarze Kugel, w — weiße Kugel):

	A	B
1.	$r\,r\,r$	$r\,s\,w\,w$
2.	$r\,r\,s$	$r\,r\,w\,w$
3.	$r\,r\,w$	$r\,r\,s\,w$
4.	$r\,s\,w$	$r\,r\,r\,w$
5.	$r\,w\,w$	$r\,r\,r\,s$
6.	$s\,w\,w$	$r\,r\,r\,r$

2. Aus den Voraussetzungen folgt, daß die Vierecke $CC'A'A$ und $BB'D'D$ Trapeze sind, die im Falle $g \perp AC$ oder $g \perp BD$ auch entartet sein können. Beide Trapeze haben die Mittellinie MM' gemeinsam. Die Länge dieser Mittellinie MM' ist nach einem bekannten Satz



(1) gleich dem arithmetischen Mittel der Längen der Strecken AA' und CC' und nach dem gleichen Satz

(2) gleich dem arithmetischen Mittel der Längen der Strecken BB' und DD'. Daraus folgt die Behauptung.

3. Ist x die erste Zahl und y die zweite, so gilt nach den Angaben die folgende Gleichung:

$$\frac{18 \cdot x}{100} = \frac{15 \cdot y}{100}$$

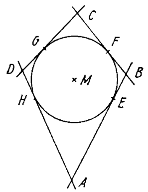
also $6x = 5y$. Daraus gewinnt man die Proportion $x:y = 5:6$.

Durch Rückschluß erkennt man, daß unter dieser Bedingung auch tatsächlich die Forderung erfüllt wird.

4. *Behauptung*: $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

Beweis: Die Berührungspunkte der Tangenten an den Kreis seien E, F, G und H. Weil die beiden Tangentenabschnitte von einem jeden Punkt außerhalb des Kreises an den

Kreis gleichlang sind, gilt: $\overline{AE} = \overline{AH}$, $\overline{BE} = \overline{BF}$, $\overline{CG} = \overline{CF}$, $\overline{DG} = \overline{DH}$.



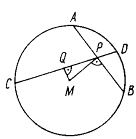
Daraus folgt: $\overline{AE} + \overline{BE} + \overline{CG} + \overline{DG} = \overline{AH} + \overline{BF} + \overline{CF} + \overline{DH}$ das heißt: $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$.

Klassenstufe 9

1.* Aus $105 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ $(a > b > 0; a, b$ ganzzahlig) folgt, daß die Zahlenpaare $\{53; 52\}$, $\{19; 16\}$, $\{13; 8\}$, $\{11; 4\}$ und nur diese Lösungen der Aufgabe sind.

2. *Konstruktion*: Man verbindet P mit dem Mittelpunkt M des Kreises und konstruiert die Senkrechte zu MP in P. Sie schneide die Kreislinie in den Punkten A und B. AB ist die gesuchte Sehne.

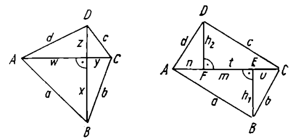
Beweis: Zum Nachweis, daß AB die kürzeste durch P verlaufende Sehne des Kreises ist, legen wir eine beliebige andere Sehne durch P. Sie schneide die Kreislinie in den Punkten C und D. Dann ist der Abstand der Sehne CD von M kleiner als $\overline{MP}$.



Beweis: Enthält CD den Punkt M, dann ist der Abstand der Strecke CD von M gleich Null. Enthält aber CD den Punkt M nicht, dann fällen wir das Lot von M auf CD und nennen seinen Fußpunkt Q. Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle MQP$ ist MP die Hypotenuse, und daher gilt $\overline{MQ} < \overline{MP}$. Nach dem Satz, daß von zwei Sehnen eines Kreises mit unterschiedlichen Abständen vom Mittelpunkt diejenige die kürzere ist, die den größeren Abstand vom Mittelpunkt hat, folgt $\overline{AB} < \overline{CD}$. Da CD (durch P) beliebig angenommen wurde, muß AB die kürzeste durch P verlaufende Sehne dieses Kreises sein. Da es stets genau eine Gerade durch M und P und zu ihr genau eine Senkrechte durch P gibt, ist die Konstruktion stets ausführbar und eindeutig.

3. Es ist zu beweisen, daß die Bedingung $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ notwendig und hinreichend ist. Also müßte gelten:

(1) Wenn $AC \perp DB$ ist, so ist $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. In der linken Figur gilt nach dem Satz des Pythagoras: $a^2 = x^2 + w^2$, $b^2 = x^2 + y^2$, $c^2 = z^2 + y^2$, $d^2 = w^2 + z^2$,



wobei x, w, z und y die Längen der Diagonalenabschnitte sind.
Daraus folgt:
$a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + w^2 + z^2 = b^2 + d^2$
Also gilt (1). Ferner müßte gelten:

(2) Wenn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ ist, so ist $AC \perp DB$. Man betrachtet das Viereck $ABCD$, in dem die Diagonale AC eingezeichnet ist. Von den Punkten B und D werden die Lote auf AC gefällt; ihre Fußpunkte seien E und F. Ferner sei $\overline{BE} = h_1$, $\overline{DF} = h_2$, $\overline{AF} = n$, $\overline{FC} = t$, $\overline{AE} = m$, $\overline{EC} = u$ (rechte Figur). Dann gilt: (3) $m + u = n + t$. Ferner gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras: $a^2 = m^2 + h_1^2$, $c^2 = t^2 + h_2^2$, $b^2 = u^2 + h_1^2$, $d^2 = n^2 + h_2^2$,
also nach Voraussetzung $a^2 + c^2 = h_1^2 + h_2^2 + m^2 + t^2 = h_1^2 + h_2^2 + u^2 + n^2 = b^2 + d^2$.

Daraus folgt: (4) $m^2 + t^2 = u^2 + n^2$ bzw. $m^2 - u^2 = n^2 - t^2$, oder $(m + u)(m - u) = (n + t)(n - t)$. Wegen (3) folgt (5) $m - u = n - t$.
Aus (3) und (5) erhält man schließlich $m = n$, das heißt, die Punkte E und F sind identisch, D, E $(= F)$ und B liegen auf derselben Geraden DB, die senkrecht zu AC verläuft. Der behauptete Satz ist also richtig.

4.* Es gibt genau zwei Möglichkeiten, und zwar die folgenden: (1) Fred und Monika, Jürgen und Dorothea, Anton und Inge, Helmut und Christina, Günter und Brigitte, Kurt und Eva.

(2) Fred und Monika, Jürgen und Dorothea, Anton und Inge, Helmut und Christina, Günter und Eva, Kurt und Brigitte.

Klassenstufe 10

1. Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung seien w und w^2. Dann gilt nach den Vietaschen Wurzelsätzen:

(1) $w^2 + w = \frac{15}{4}$ und (2) $w^2 \cdot w = a$.

Aus (1) folgt

$w_1 = \frac{3}{2}$ und $w_2 = -\frac{5}{2}$.

Wegen (2) ist

$a_1 = w_1{}^3 = \frac{27}{8}$ und $a_2 = w_2{}^3 = -\frac{125}{8}$.

Durch Einsetzen findet man, daß die ermittelten Werte tatsächlich den Bedingungen genügen:

$x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{27}{8} = 0$ hat die Wurzeln $x_1 = \frac{9}{4}$ u. $x_2 = \frac{3}{2}$, $x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{125}{8} = 0$ hat die Wurzeln $x_1 = \frac{25}{4}$ und $x_2 = -\frac{5}{2}$.

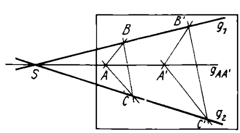
Die gestellte Bedingung wird von $a_1 = \frac{27}{8}$ und $a_2 = -\frac{125}{8}$ und nur von diesen erfüllt.

2. *Beweis*: (indirekt)

Angenommen, $\frac{q-p}{q}$ wäre durch c kürzbar (c ganz, $c \neq 0, \pm 1$), dann müßte gelten $q - p = c \cdot m$ (m ganzzahlig) und $q = c \cdot n$ (n ganzzahlig).

Daraus würde folgen $q = c\,(n - m)$. Dann wären q und p durch c teilbar, was der Voraussetzung widerspricht.

3. *Analyse*: Angenommen, ein Punkt $A'(\neq A)$ des Zeichenblattes liege auf AS. Man wähle B auf g_1, C auf g_2 so, daß A, B, C nicht auf derselben Geraden liegen. Die Parallelen durch A' zu AB bzw. AC schneiden g_1 bzw. g_2 in B' bzw. C'.



Folglich gilt nach dem Strahlensatz $\overline{SB}:\overline{SB'} = \overline{SA}:\overline{SA'} = \overline{SC}:\overline{SC'}$ und nach einer Umkehrung des Strahlensatzes $BC \parallel B'C'$. Daher kann die gesuchte Gerade nur diejenige sein, die sich durch folgende *Konstruktion* ergibt: Man wähle B auf g_1, C auf g_2 so, daß A, B, C nicht auf derselben Geraden liegen und zeichne eine beliebige (von BC verschiedene) Parallele zu BC. Sie schneide g_1 in B', g_2 in C'. Die Parallelen durch B' bzw. C' zu BA bzw. CA schneiden sich dann in einem Punkt A', und $g_{AA'}$, ist die gesuchte Gerade.

Beweis: Nach Konstruktion ist

$\overline{SC}:\overline{SC'} = \overline{BC}:\overline{B'C'}$ (Strahlensatz)

$= \overline{AC}:\overline{A'C'}$ (da $\triangle ABC \sim A'B'C'$),

nach einer Umkehrung des Strahlensatzes geht also $g_{AA'}$ durch S. *Diskussion*: Da BC nicht zu g_2 oder g_1 parallel ist, gilt dasselbe für die gezeichnete Parallele, also sind B', C' eindeutig bestimmt. Da BA, CA nicht parallel sind, gilt dasselbe für ihre Parallelen durch B' bzw. C', also ist auch A' eindeutig bestimmt. (Genauer: A', B', C' ergeben sich eindeutig aus dem jeweils vorangegangenen Teil der Konstruktion, der allerdings die Willkür der Wahlen von B, C, B', C' enthielt). Da schließlich die Parallele zu BC von BC verschieden gezeichnet war, ist $B' \neq B$; $C' \neq C$; also wird auch $A' \neq A$. Somit ist auch der letzte Konstruktionsschritt eindeutig ausführbar. (Die willkürliche Wahl von B, C kann im Endergebnis keinen Einfluß auf die Lage der Geraden $g_{AA'}$ haben; denn nach dem Beweis ist diese mit der Geraden g_{AS} identisch, also schon durch A, g_1, g_2 eindeutig bestimmt.) — Endlich kann durch geeignete Wahl von B, C und der Parallelen zu BC stets erreicht werden, daß B, C, B', C', A' auf dem Zeichenblatt liegen. Auf einen exakten Beweis hierzu, mit Hilfe der Voraussetzung, daß A, B, C innere Punkte des konvexen Zeichenblattes sind, muß hier verzichtet werden.

4.* Es gelten folgende Beziehungen:

a) $V_w : V_0 = 6:1$ b) $V_0 : V_w = 9:2$

c) $O_w : O_0 = 2\sqrt{3}:1$ d) $O_0 : O_w = 3\sqrt{3}:2$.

Hinweis: Bei den mit Sternchen versehenen Aufgaben wird nur das Ergebnis genannt. Die Aufgaben und ein Teil der Lösungen der Klassenstufe 11/12 veröffentlicht „Wissenschaft und Fortschritt". Dies geschieht in enger Zusammenarbeit und in Abgrenzung der Aufgaben beider Zeitschriften. In *alpha*, Heft 5/67, werden die Lösungen der Bezirks- und in *alpha*, *Heft* 6/67, die der DDR-Olympiade veröffentlicht.

Fernsehakademie
Mathematiksendereihe
Mathematik für die Praxis
September 1967 bis Juli 1968
20 Sendungen

Aus dem Programm: Das Rechnen mit allg. Zahlensymbolen; Das Rechnen mit Tabellen; Proportionalität und Ähnlichkeit; Rechenstab; Gleichungssysteme; Die graphische Lösung arithmetischer Aufgaben; Die Satzgruppe des Pythagoras; Flächenberechnung; Konstruktionen; Mathematische Grundlagen einiger Meßmethoden; Technisch wichtige Kurven.

Lösungen

(*Einige Lösungen werden erst in den folgenden Heften veröffentlicht*).

48 Aus $48 < 8 \cdot a$ folgt $a > 6$, denn $48 = 6 \cdot 8$; aus $8 \cdot a < 80$ folgt $a < 10$, denn $8 \cdot 10 = 80$.
Da die beiden Bedingungen $a > 6$ und $a < 10$ zugleich erfüllt sein müssen, kann a nur mit den Zahlen 7, 8 oder 9 belegt werden.

49 Der Lösungsweg wird aus der nachstehenden Tabelle ersichtlich; es sei a die Ziffer der Zehnerstelle und b die Ziffer der Einerstelle.

a	b	$10a + b$	$10b + a$	$3 \cdot (10b + a)$
5	1	51	15	45
6	2	62	26	78
7	3	73	37	111
8	4	84	48	144
9	5	95	59	177

Nur die Zahl 51 erfüllt die gestellten Bedingungen; es gilt $45 < 51$.

52 Es gilt der Satz: „In jedem unregelmäßigen Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten stets der größere Winkel gegenüber".
Aus $a > c$ und $\alpha = 58°$ folgt $\gamma < 58°$.
Aus $\beta + \gamma = 122°$ und $\gamma < 58°$ folgt $\beta > 64°$.
Aus $\gamma < \alpha < \beta$ folgt $\quad c < a < b$.

53 Die Aussage a) ist wahr. Wegen $18 = 2 \cdot 9$ gilt für alle natürlichen Zahlen n: wenn $18 | n$, so $9 | n$ und $2 | n$. Die Aussage b) ist falsch. Zum Beispiel ist $9 | 27$, aber nicht $2 | 27$.
Die Aussage c) ist falsch. Wegen $12 = 2 \cdot 6$ gilt: wenn $12 | n$, so stets auch $6 | n$. Die Aussage d) ist falsch. Wegen $24 = 3 \cdot 8$ gilt: wenn $24 | n$, so $8 | n$ und $3 | n$.

56 Wir bezeichnen den ersten Faktor mit $10a + b$ und den zweiten Faktor mit $90 + c$; dabei sind a, b, c natürliche Zahlen mit
$0 < a \leqq 9, \quad 0 \leqq b \leqq 9, \quad 0 \leqq c \leqq 9.$
Da das Produkt eine dreistellige Zahl ist, gilt

$$100 \leqq (10a + b)(90 + c) \leqq 999,$$
$$100 \leqq 900a + 90b + 10ac + bc \leqq 999.$$

Daher ist $a \leqq 1$, und wegen $a > 0$ muß $a = 1$ sein.
Also gilt $90b + 10c + bc \leqq 99$.
Hieraus folgt entweder $b = 0$ oder $b = 1$.
Aus $b = 0$ folgt $10c \leqq 99$, also

$$c = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \text{ oder } 9.$$

Aus $b = 1$ folgt $90 + 10c + c \leqq 99$,
$11c \leqq 9$, also $c = 0$
Wir erhalten also die Lösungen
$10 \cdot 90 = 900$, $10 \cdot 91 = 910$, $10 \cdot 92 = 920$, $\ldots$, $10 \cdot 99 = 990$, $11 \cdot 90 = 990$,
insgesamt also 11 Möglichkeiten.

57 Bezeichnet man die Länge der Basis des gleichschenkligen Dreiecks ABC mit c und die Länge eines jeden Schenkels mit a, so kann nur $a = 3c$ sein. Wäre nämlich $c = 3a$, so wäre $a + a < c$, was in diesem Dreieck nicht möglich ist. Man erhält die Gleichung

$$3c + 3c + c = 14 \text{ cm}, 7c = 14 \text{cm},$$
$$c = 2 \text{ cm und } a = 6 \text{ cm}.$$

Die Aufgabe hat also genau eine Lösung; die Seiten des Dreiecks sind 6 cm, 6 cm und 2 cm lang.

59 Die Maßzahl des Durchmessers (in km) der kreisförmig angenommenen Bahn beträgt

$$d = 3476 + 985 + 379 = 4840;$$

die Maßzahl der Bahnlänge ist dann

$$u = 4840\,\pi \approx 15200.$$

Da die Umlaufzeit 2 h 58 min 3 s, das sind 10683 s, betrug, erhält man für die Maßzahl der Geschwindigkeit (in $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$)

$$v = \frac{15200}{10683} \approx 1{,}42.$$

Die Geschwindigkeit des Satelliten betrug also
$1{,}42 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, d. s. rd. $5100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

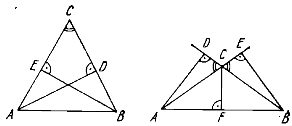
60 Jeder Punkt P_{ik} ($i = 1,2,3,\ldots, m$ und $k = 1,2,3,\ldots,n$) legt mit den übrigen Punkten genau $mn - 1$ Strecken fest. Wir erhalten demnach $mn\,(mn - 1)$ Strecken. Dabei wurden alle Strecken doppelt gezählt. Durch die gegebenen Punkte sind also
$\frac{1}{2}\, mn\,(mn - 1)$ Strecken bestimmt.

62 Ist die erste Zahl gleich x, so ist die zweite gleich $2x$ und die dritte gleich $4x$. Daher gilt

$$x^2 + (2x)^2 + (4x)^2 = 189,$$
$$x^2 + 4x^2 + 16x^2 = 189,$$
$$21x^2 = 189, \qquad x^2 = 9.$$

Diese Gleichung hat aber zwei reelle Lösungen, nämlich $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$.
Daher hat auch die Aufgabe genau zwei Lösungen; die Zahlentripel
(3, 6, 12) und (— 3, — 6, — 12)
erfüllen die Bedingungen der Aufgabe.

63 1. Es sei ABC ein *spitzwinkliges* Dreieck, und es seien die (im Innern des Dreiecks liegenden) Höhen $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ einander gleichlang.



Dann gilt wegen $\sphericalangle ADC = \sphericalangle CEB = 90°$ und
$\sphericalangle DCA = \sphericalangle BCE$
$\Delta ADC \cong \Delta CEB$.

Daraus folgt $\overline{AC} = \overline{BC}$, d. h. das Dreieck ABC ist gleichschenklig.

2. Es sei ABC ein *stumpfwinkliges* Dreieck. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß der Winkel BCA stumpf ist. Dann liegen die Höhen $\overline{AD}$ und $\overline{BE}$ außerhalb des Dreiecks und die Höhe $\overline{CF}$ innerhalb des Dreiecks.

2.1. Es sei nun $\overline{AD} = \overline{BE}$. Dann gilt wie oben wegen $\sphericalangle CDA = \sphericalangle BEC = 90°$ und $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ECB$ (Scheitelwinkel)
$\Delta ACD \cong \Delta CBE$.

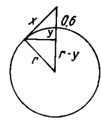
Daraus folgt $\overline{AC} = \overline{BC}$, d. h. das Dreieck ABC ist gleichschenklig.

2.2. Es sei $\overline{AD} = \overline{CF}$. Dann wäre wegen $\sphericalangle CDA = \sphericalangle AFC = 90°$ und $\overline{AC} = \overline{AC}$
$\Delta ACD \cong \Delta AFC$;
daraus folgt $\sphericalangle ACD = \sphericalangle CAF$,
also $CD \parallel AF$.
Das widerspricht aber der Voraussetzung, wonach ABC ein Dreieck ist und die Geraden BC und AB einander nicht parallel sein können. Aus demselben Grund kann auch der Fall $\overline{BE} = \overline{CF}$ nicht eintreten.

3. Es sei ABC ein *rechtwinkliges* Dreieck mit dem rechten Winkel BCA. Dann fallen die Punkte C, D, E zusammen. Im Falle $\overline{AD} = \overline{BE}$ erhält man wieder ein gleichschenkliges Dreieck. Ferner können die Fälle $\overline{AD} = \overline{CF}$ und $\overline{BE} = \overline{CF}$ nicht eintreten, was sich leicht wie unter 2.2 nachweisen läßt.

65 Setzt man $\log_{16} x = z$, so ist $16^z = x$,
also $4^{2z} = x$, d. h. $\log_4 x = 2z$.
ferner ist $2^{4z} = x$, d. h. $\log_2 x = 4z$.
Aus der Gleichung der Aufgabe folgt dann
$$z + 2z + 4z = 7, \quad 7z = 7,$$
$$z = 1, \text{ also } x = 16.$$
Setzt man $x = 16$ in die obige Gleichung ein, so erhält man $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x$
$= \log_{16} 16 + \log_4 16 + \log_2 16$
$= 1 + 2 + 4 = 7$.

66 Man erhält (siehe Abb.):
a) $x^2 = (r + 0{,}6)^2 - r^2 = 1{,}2r + 0{,}36$
$= 1{,}2 \cdot 1738000 + 0{,}36 \approx 2086000,$
$x \approx 1440.$



Die Sichtweite betrug rd. 1,4 km.
b) $(r - y)(r + 0{,}6) = r^2$,
$$y = r - \frac{r^2}{r + 0{,}6} = \frac{0{,}6\,r}{r + 0{,}6} \approx 0{,}6,$$
$$K = 2\pi ry \approx 2\pi \cdot 1738000 \cdot 0{,}6 \approx 6552000.$$
Die zu überblickende Fläche betrug rd. 6,6 km².

W(5)50 Günter habe zum Tauschen p polnische, s sowjetische und b bulgarische Briefmarken mitgebracht; wir stellen alle Möglichkeiten in einer Tabelle zusammen:

s	$4s$	$5s$	$4s < b < 5s$	p
1	4	5	nicht möglich	nicht möglich
2	8	10	9	19
3	12	15	13 oder 14	14 oder 13
4	16	20	17 oder 18 oder 19	9 oder 8 oder 7
5	20	25	21 oder 22 oder 23 oder 24	4 oder 3 oder 2 oder 1

Nur für $s = 5$ wird die Ungleichung $p < s$ erfüllt. Günter hat genau 5 sowjetische Briefmarken zum Tauschen mitgebracht. Für die übrigen Briefmarken gibt es vier Möglichkeiten: 21 bulgarische und 4 polnische oder 22 bulgarische und 3 polnische oder 23 bulgarische und 2 polnische oder 24 bulgarische und 1 polnische.

W(5)51 Die Anzahl der Schüler, die keine Brötchen bestellen, sei x, wobei $x > 3$ gilt. Weitere x Schüler bestellen je 4 Brötchen; $2 \cdot x$ Schüler bestellen je 3 und nochmals $2 \cdot x$ Schüler bestellen je 1 Brötchen. Es sei y die Anzahl der verbleibenden restlichen Schüler. Dann gilt $6 \cdot x + y = 30$. Für $x = 4$ erhalten wir $y = 6$. Für $x = 5$ erhalten wir $y = 0$; das steht im Widerspruch zur Aufgabe.
Es wurde folgende Bestellung aufgegeben:
4 Schüler bestellten keine Brötchen, 4 Schüler bestellten je 4, also zusammen 16 Bröt-

chen, 8 Schüler bestellten je 3, also zusammen 24 Brötchen, 8 Schüler bestellten je 1, also zusammen 8 Brötchen, 6 Schüler bestellten je 2, also zusammen 12 Brötchen, der Klassenlehrer bestellt 3 Brötchen. Es mußten insgesamt 63 frische Brötchen eingekauft werden.

W(6)54 Aus $b)$ folgt $180 \mid a$, denn $4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$. Also $0 < 180x < 4000$ für $x = 1,2,3,\ldots$

Aus $d)$ folgt

$11 \mid 180x - 8$; $\quad 11 \mid 4 \cdot 45x - 8$;

$11 \mid 4(45x - 2)$.

Damit das Produkt $4(45x - 2)$ durch 11 teilbar ist, muß der zweite Faktor $45x - 2$ durch 11 teilbar sein.

$11 \mid 45x - 2$; $\quad 11 \mid 44x + (x - 2)$.

Damit die Summe $44x + (x - 2)$ durch 11 teilbar ist, muß der zweite Summand $x - 2$ durch 11 teilbar sein. Aus $11 \mid x - 2$ folgt $x = 13, 24, 35, 46, \ldots$ Nur $x = 13$ erfüllt die Ungleichung $0 < 180x < 4000$. Weil $13 \cdot 180 = 2340$ und $2340 - 8 = 2332$, ist $a = 2332$. Nur die Zahl 2332 erfüllt die gestellten Bedingungen.

W(6)55 Wir nehmen an, von der Klasse 6*b* haben a Schüler die Note ‚Eins', b Schüler die Note ‚Zwei', c Schüler die Note ‚Drei', d Schüler die Note ‚Vier' und e Schüler die Note ‚Fünf' erhalten. Die Aussagen von Klaus lassen sich dann durch die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen ausdrücken:

a) $a + b + c + d + e = 36$; b) $c > 18$;
c) $a < d < b$; $\quad$ d) $a + e = 4$;
e) $2e < a < 4e$; $\quad$ f) $2a = d$.

Aus d) und e) folgt $a = 4$ und $e = 1$, und damit ist wegen f) $d = 6$. Die Gleichung a) und die Ungleichung b) und c) lassen sich dann vereinfachen; wir erhalten

a) $b + c = 26$; b) $c > 18$; c) $6 < b$

Aus a) und b) folgt $b < 8$. Aus $b > 6$ und $b < 8$ folgt $b = 7$. Da 36 Schüler anwesend waren, muß $c = 19$ sein.

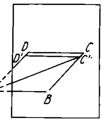
3 Schüler erhielten die Note ‚Eins', 7 die Note ‚Zwei', 19 die Note ‚Drei', 6 die Note ‚Vier' und 1 Schüler die Note ‚Fünf'. Der Klassendurchschnitt errechnet sich wie folgt:

$3 \cdot 1 = 3$, $\quad 19 \cdot 3 = 57$, $\quad 1 \cdot 5 = 5$.
$7 \cdot 2 = 14$, $\quad 6 \cdot 4 = 24$,

$3 + 14 + 57 + 24 + 5 = 103$;

$103 : 36 = 2{,}86\ldots$ Da 2,86 größer als 2,6 ist, hatte Gerd richtig gerechnet.

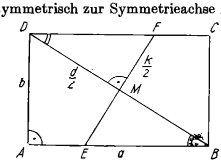
W(7)58 B, C und D seien die gegebenen inneren Punkte der rechteckigen Zeichenfläche. Wir verbinden C mit B und D. Wir wollen annehmen, daß $\overline{CD} < \overline{BC}$ sei. Wir tragen $\overline{CD}$ auf $\overline{BC}$ von B bis C' ab und ziehen durch C' eine Parallele zu $\overline{CD}$. Wir zeichnen dann durch D eine Parallele zu $\overline{BC}$. Der Schnittpunkt der gezeichneten Parallelen sei D'.



Nach Voraussetzung ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm. Aus $\overline{D'C'} \parallel \overline{DC}$ und $\overline{BC'} = \overline{DC} = \overline{D'C'}$ folgt, daß das Viereck $ABC'D'$ ein Rhombus ist. Im Rhombus halbiert eine Diagonale zwei Rhombuswinkel.
Da AC' Diagonale des Rhombus $ABC'D'$ ist, halbiert sie die Winkel $D'AB$ und $BC'D'$. Wir konstruieren die Winkelhalbierende des Winkels $BC'D'$; sie ist auch Winkelhalbierende des Winkels BAD.

W(8)61 Es sei $100a + 10b + c$ die gedachte Zahl mit $a - c \geqq 2$ und $c > 0$.
Subtrahiert man hiervon die Zahl $100c + 10b + a$, so erhält man
$100(a - c) + (c - a)$
$= 100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a)$.
Dabei gilt $0 < a - c - 1 < 8$ und $0 < 10 + c - a < 9$. Addiert man hierzu die Zahl $100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1)$, so erhält man die Summe
$100 \cdot 9 + 180 + 9 = 1089$.

W(9)64 Es sei M der Schnittpunkt der Geraden BD und EF. Die Punkte B und D liegen symmetrisch zur Symmetrieachse EF.



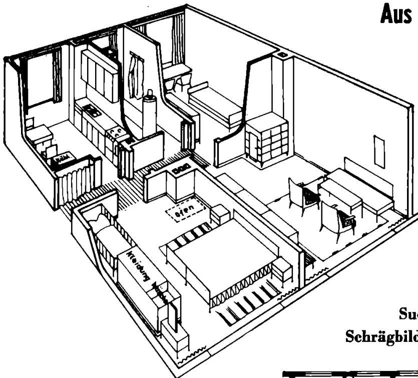
Daraus folgt $DB \perp EF$ und
$\overline{DM} = \overline{BM} = \frac{d}{2}$. Ferner gilt
$\overline{FM} : \overline{ME} = \overline{DM} : \overline{MB} = 1:1$, also
$\overline{FM} = \overline{ME} = \frac{k}{2}$.
Nun ist $\triangle FDM \sim \triangle DAB$; daher gilt
$\frac{k}{2} : \frac{d}{2} = b : a$, d. h., $k : d = b : a$
und $k = \frac{b}{a} d = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 + b^2}$.

alpha-Wettbewerb [W(10)98] -Berichtigung-
Beweise, daß für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen n und für alle positiven reellen Zahlen a und x mit $a \neq 1$ gilt:

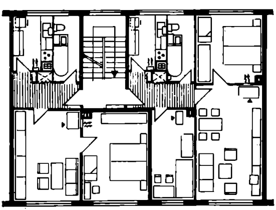
$$\log_{\frac{1}{a^n}} \frac{1}{x^n} = \log_a x \ !$$

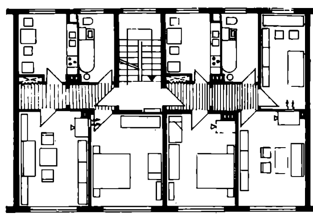
(letzter Einsendetermin: 10. 10. 1967)

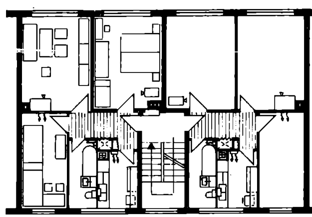
Aus der Vogelperspektive betrachtet



Suche zu dem vorgegebenen Schrägbild den richtigen Grundriß!



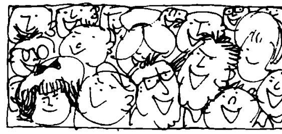




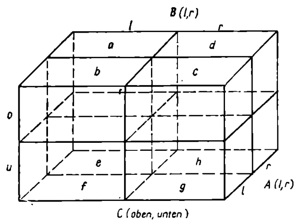
Durch die Vereinheitlichung des gesamten Bestell- und Abrechnungsverfahrens im Postzeitungsvertrieb wird die Deutsche Post ab 1. Juli 1967 das Bezugsgeld für diese Zeitschrift nicht mehr halbjährlich, sondern jeden 2. Monat kassieren.

Wir hoffen, daß unsere Leser dieser, von der Deutschen Post eingeleiteten Maßnahme Verständnis entgegenbringen.

In freien Stunden
alpha heiter



„Kleine Fische !“



Die Arbeitsgemeinschaft „Aquarien“ hat eine Zuchtanlage von acht Becken, die in der aus der Abbildung ersichtlichen Anordnung zusammengestellt ist. Alfred (A), Bertold (B) und Christian (C) betrachten zur gleichen Zeit die Anlage.

Alfred: „Ich sehe links ($b + c + f + g$) 13 Fische, rechts ($a + d + e + h$) 18 Fische!“

Bertold: „Ich sehe links ($a + b + e + f$) 17 und rechts ($c + g + d + h$) 14 Fische!“

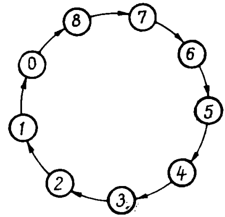
Christian: „Ich sehe oben ($a + b + c + d$) 16 Fische, unten ($e + f + g + h$) 15 Fische!“

Wieviel Fische befinden sich in jedem der Aquarien a, b, c, d, e, f, g, h? (Alfred und Christian betrachten die Anlage von verschiedenen Seiten, Bertold von oben!) Beachte, daß durch je zwei Becken hindurch gesehen wird!

Beantworte in drei Sekunden!

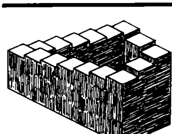
„Wieviel Finger hast du an einer Hand, an zwei Händen, an zehn Händen?“

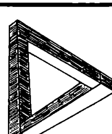
Dein Geburtstag — ein Geheimnis?



Schreibt euren Geburtstag auf und betrachtet ihn als Zahl (Bsp.: 12. 7. 1953 ergibt: 1271953)! Dann vertauscht ihr die Ziffern dieser Zahl beliebig. Nun subtrahiert ihr die kleinere Zahl von der größeren Zahl und vom Ergebnis bildet ihr die Quersumme. Jetzt denkt ihr euch eine Zahl von 0 bis 8 und subtrahiert die gedachte Zahl von eurer Quersumme. Ihr erhaltet eine Schlüsselzahl a. Jetzt zählt in Pfeilrichtung, bei Feld 8 beginnend (Feld 8 mitzählen!), soviel Felder, wie die Schlüsselzahl angibt! Ihr endet stets bei einem Feld, das die gedachte Zahl enthält!

Beispiel: Aus 12. 7. 1953 wird 1271953. Ziffern beliebig vertauschen: 2171395! Bilden der Differenz: 899442! Quersumme bilden: 36! Zahl zwischen 0 und 8 denken: 5 und von 36 subtrahieren: 31 (Schlüsselzahl)! Bei Feld 8 beginnend 31 Felder in Pfeilrichtung gezählt, endet ihr bei Feld 5, der gedachten Zahl! Wer kommt hinter das „Geheimnis“?



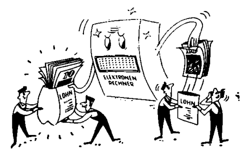


Man kann Objekte zeichnen, die es gar nicht gibt! Aus „Readers Digest“ 10/66, USA


„WAS ERHALTEN WIR, WENN WIR DIESES STÜCK FLEISCH IN 32 GLEICHE TEILE TEILEN?"
„GEHACKTES....!"
„GUTEN MORGEN - EIN BLICK AUF DIE UHR, ES IST GENAU 6.30 UHR - VERZEIHUNG 5.30 UHR - HALB FÜNF!"
„NOCH 10 km LUFTLINIE BIS ZUM ZIEL!"
„GIBT'S NICHT EINEN KÜRZEREN FELDWEG?"
AUFTRÄGE: alpha Abonnenten
„BITTE HALTE MAL EINEN MOMENT DIE KURVE, ICH HOLE EINE NEUE TAFEL!"
„...UND HIER HAST DU DIE PALME, AUF DIE DU KLETTERN WILLST, WENN MEINE AUFGABEN FALSCH SIND!"

Das Letzte

aus der Fachzeitschrift Rechentechnik



● Nicht schlecht staunten die städtischen Arbeiter der englischen Stadt Browley, als sie Mitte dieses Monats in ihre Lohntüten blickten: Ihre Entlohnung war über Nacht um ein Vielfaches erhöht worden. Ihre verständliche Freude war jedoch von kurzer Dauer. Eine geringfügige technische Panne, angeblich eine Schwankung der Stromstärke, hatte die mathematischen Fähigkeiten des Elektronenrechners, der die Lohnstreifen ausschreibt, stark eingeschränkt. Allerdings mußten die Arbeiter das Geld schweren Herzens zurückzahlen.

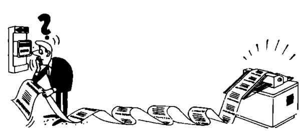
● Eine „elektronische Nase", die Brandgase riecht und jeden Brand schon in seinen Anfängen meldet, ist in der Schweiz entwickelt und als Alarmanlage eingesetzt worden. Sogenannte Melder sind mit dem „Gehirn", der Signalzentrale verbunden. Spricht ein Melder an, so wird das elektrische Signal unverzüglich in eine optische und eine akustische Alarmmeldung umgewandelt.

● Eine Aufforderung zum Schulbesuch erhielt dieser Tage Frau Sofie Madsen aus Lynge, die mit 104 Jahren die älteste Einwohnerin Dänemarks ist. Der Amtsschimmel hatte in ihrem Heimatort in einer Hollerith-Maschine gewiehert, die mit den Lochkarten der Einwohner gefüttert worden war und die schulpflichtigen Kinder „aussortieren" sollte. Weil die Maschine in der Alterssparte nur bis 99 „zählen" konnte, stufte sie die 104 Jahre alte Frau als Fünfjährige ein.

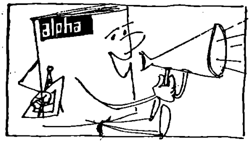
● Durchschnittlich 220000 bis 250000 Münzen — vom Pfennig bis zum Zweimarkstück — wandern täglich von den Verkehrsbetrieben der Stadt Dresden zum Münzzentrum der Deutschen Notenbank Dresden. Das Kleingeld aus den Zahlboxen der Straßenbahnen und Omnibusse der Elbestadt wird von den Verkehrsbetrieben ungezählt übergehen. Im Münzzentrum wird das Geld durch Saugvorrichtungen von alten Fahrscheinen gesäubert, sortiert, gezählt und nach der Gutschrift auf das Konto der Verkehrsbetriebe binnen wenigen Stunden wieder in Umlauf gebracht.

● Nachdem in einem amerikanischen Unternehmen die neueste elektronische Rechenmaschine aufgestellt worden war, befestigte man an der Wand in unmittelbarer Nähe einen Glaskasten. Darin befindet sich eine Handrechenmaschine, die viele Jahre hindurch ihren Dienst zuverlässig getan hatte. Und am Glaskasten liest man die Aufschrift: „Im Notfall Scheibe eindrücken."

● Ein Elektronenrechner, der in einem englischen Elektrizitätswerk die Abrechnungen ausführte, schickte an einen Stromabnehmer eine Rechnung über null Pfund Sterling. Der Kunde kümmerte sich nicht darum, warum auch. Daraufhin erhielt er vom Elektronenrechner die zweite und alsbald die dritte Mahnung mit der Forderung, den genannten Betrag einzuzahlen; andernfalls müßte der Strom gesperrt werden. Der Mann schickte nun einen Scheck über null Pfund Sterling und — erhielt vom Elektronenrechner die Quittung mit dem Vermerk „Besten Dank für Ihre Überweisung".



● Der Elektronenrechner IBM 7044 ist imstande, eine äußerst komplizierte Gleichung, für die ein Mensch 150 Jahre benötigen würde, in neun Sekunden zu lösen.



An unsere neuen Leser!

Seit Ende 1966 wurden in Kinder-, Jugend- und Fachzeitschriften sowie zahlreichen Tageszeitungen unsere Zeitschrift begrüßt und Einzelheiten unserer Arbeit dargelegt. Über 60000 Schüler, Arbeitsgemeinschaftsleiter und Lehrer haben bereits zugegriffen. Die Redaktion hat keine Mühe gescheut, neue Leser direkt über die Klassenleiter der Schulen zu gewinnen. Diese Werbung werden wir systematisch fortsetzen. Es ist dafür gesorgt, daß sich auch unsere neu hinzugekommenen Leser an dem *alpha*-Wettbewerb, der sich unerwarteten Zuspruchs erfreut, beteiligen können. Jeder, der mit löst, ist Mitarbeiter von *alpha*; und davon können wir nicht genug haben. Aus technischen Gründen sind wir leider nicht mehr in der Lage, die ersten Hefte nachzuliefern. Vielleicht werden Euch, liebe neue Leser, Eure Mitschüler ihre bereits erworbenen Exemplare zur Information zur Verfügung stellen? Allen sei zugerufen: Viel Freude bei der Arbeit mit *alpha* für Euch, für uns aber vor allem konkrete Vorschläge, ein Stoß Material und erforderlichenfalls auch Kritik zur weiteren Verbesserung unserer jungen Zeitschrift.

J. Lehmann

Chefredakteur

Für die Beteiligung am *alpha*-Wettbewerb gelten folgende Bedingungen:

1. Am Wettbewerb können sich alle Schüler der 5. bis 10. Klasse beteiligen, auch dann, wenn diese Schüler eine Berufs- oder Volkshochschule besuchen.
2. Einsendungen sind unter Angabe von Name, Vorname, Privatanschrift (Postleitzahl nicht vergessen!), Schule und Schuljahr zu richten an:
Redaktion *alpha* 7027 Leipzig Postfach 14
3. Alle Wettbewerbsaufgaben sind im System der Aufgaben fortlaufend numeriert. Der üblichen Nummer sind ein *W* (d. h. Wettbewerb) und eine Ziffer in Klammern, z. B. (7) vorgesetzt (d. h. für Klasse 7 geeignet).
4. Von dem Teilnehmer sind nur die Aufgaben seiner oder einer höheren Klassenstufe einzusenden. Nur dann erfolgt eine Bewertung.
5. Zur Erleichterung der Korrektur und aus technischen Gründen werden nur nach dem auf Seite 117 angegebenen Muster eingesandte Lösungen bearbeitet und bewertet. Für jede Lösung ist ein gesondertes Blatt zu verwenden, Format A 4 (210 mm × 298 mm) denn jede Aufgabe wird von einem anderen Experten korrigiert. Besonders freuen wir uns natürlich über saubere, übersichtliche Gestaltung.
6. Teilnehmer, die eine vorbildliche oder gute (d. h. vollständige und richtige) Lösung eingesandt haben, erhalten von der Redaktion eine Antwortkarte mit dem Prädikat „vorbildlich gelöst" oder „gut gelöst". Wer keine Nachricht erhält, hat die Aufgabe unvollständig, teilweise, nicht gelöst oder die vorgegebene Form nicht beachtet.
7. Letzter Einsendetermin wird jeweils bekanntgegeben.
8. Zwischen dem 15. und 31. Januar 1968 sind alle im Jahre 1967 erworbenen Antwortkarten geschlossen an die Redaktion einzusenden. Eine Jury, deren Mitglieder wir im Heft 6/67 vorstellen werden, wertet diese Antwortkarten aus, übergibt die Namen der Preisträger und die Namen der aktivsten Einsender der Redaktion zur Veröffentlichung.
9. Aussicht auf Preise und namentliche Veröffentlichung haben Teilnehmer, die im Laufe des Jahres 1967 Antwortkarten mit einem der beiden Prädikate erhalten haben. Anerkennung wird also der Teilnehmer finden, der regelmäßig, gewissenhaft und fleißig mitarbeitet.

Streifzüge durch die Mathematik

BAND 2

1. Auflage, 232 Seiten, 210 zweifarbige Zeichnungen, 16,7 cm × 24 cm, Leinen 12,— MDN

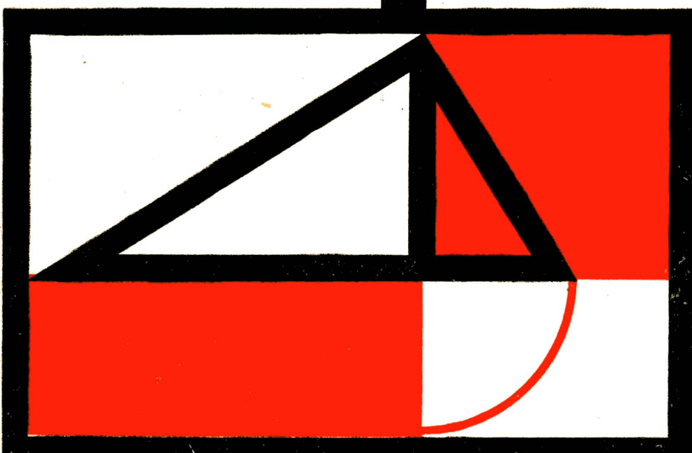
Aufgenommen in die „Mathematische Schülerbücherei“

Im November 1613 feierte der kaiserliche Mathematiker und Astronom am österreichischen Hof, Johannes Kepler (1571—1630), Hochzeit, zu der er einige Fässer Wein besorgte. Bei dem Kauf war Kepler sehr erstaunt, daß der Weinhändler den Rauminhalt der verschieden geformten Fässer auf ein und dieselbe Art bestimmte, und zwar maß er den Abstand des Spundlochs von der am weitesten entfernten Stelle des Faßbodens. Bei dieser Art der Messung wurde aber die Form des Fasses völlig unberücksichtigt gelassen! Kepler erkannte sofort, daß da ein interessantes mathematisches Problem vorlag. Er dachte darüber nach und fand Formeln nicht nur für das Volumen der verschiedenartigsten Körper, z. B. einer Zitrone, eines Apfels, einer Quitte und sogar eines türkischen Turbans. Für jeden dieser Körper ersann Kepler neue, zum Teil sehr scharfsinnige Methoden.

Wer die „Streifzüge“ liest, wird feststellen, mit welchen, im Grund genommen einfachen Methoden Kepler zum Ziele kam. Und das ist ja der Vorteil dieses Buches, daß es auch für Oberschüler ohne weiteres verständlich ist. Es hilft, den Schulstoff zu vertiefen. Durch die Beispiele aus der modernen Technik (Fallschirmsprung, Aufstieg von Raketen, automatische Regelung des Zugverkehrs) lernen sie dabei Begriffe kennen, die ihnen wahrscheinlich noch nicht so geläufig sind. Die lustigen, bunten Zeichnungen helfen mit, den Schein der „Unnahbarkeit“ von der Mathematik zu lösen.

Mathematische Schülerzeitschrift

alpha



5

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967
Preis 0,50

Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967 Heft 5

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 2005 41
Postscheckkonto: Berlin 132626
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 MDN, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 MDN
Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel. Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden
Fotos: Archiv Karl-Sudhoff-Institut, Leipzig (S. 129); Oberschule Kondrowo (S. 131); Zentralbild (S. 142, S. 143); Dr. W. Schramm, Berlin (S. 142, rechts unten); Bildred. Nowosti, Berlin (S. 145); Vignette nach W. Miroschin aus „Die Sowjetunion" S. (150)
Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG, 701 Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR
Redaktionsschluß: 1. 8. 1967

Inhalt

Dieses Heft wurde zu Ehren des Roten Oktober gestaltet.

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angeführten Klassenstufe geeignet

A. J. Chintschin

Am 18. November 1959 vollendete sich das Lebenswerk eines der bedeutendsten sowjetischen Mathematiker, Alexander Jakowlewitsch Chintschin. Mit seinen fundamentalen Untersuchungen auf dem Gebiet der Funktionentheorie, der Zahlentheorie und als Mitbegründer der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung trug er in hohem Maße dazu bei, daß die sowjetische Wissenschaft, insbesondere die Mathematik, Weltgeltung erlangte.
A. J. Chintschin wurde am 19. 7. 1894 in dem Dorf Kondrowo des Bezirkes Kalushskaja als Sohn eines Ingenieurs geboren. 1911 begann er sein Studium an der Physikalisch-Mathematischen Fakultät der Moskauer Universität, an der er sich bald dem Kreis junger Mathematiker um den bedeutenden Funktionentheoretiker N. N. Lusin anschloß.
1916, ein Jahr vor der Großen Sozialistischen Oktoberrevolution, beendete er das Studium, verblieb aber an der Universität, um eine Hochschullehrerlaufbahn einzuschlagen. Nach kurzer pädagogischer Tätigkeit an einem Moskauer Polytechnikum wurde Chintschin bereits 1919 Professor und Dekan der Physikalisch-Mathematischen Fakultät des Polytechnischen Instituts in Iwanowo-Wosnesensk, an dem ebenfalls eine Reihe hervorragende Gelehrte arbeiteten. Als 1922 die junge Sowjetmacht an der Moskauer Staatlichen Universität das wissenschaftliche Forschungsinstitut für Mathematik und Mechanik gründete, wurde Chintschin sofort wissenschaftlicher Mitarbeiter. Fünf Jahre später folgte dann seine Berufung zum Professor.
Zu dieser Zeit hatte Chintschin sein wissenschaftliches Interesse zwei für die Moskauer Universität neuen mathematischen Gebieten zugewandt: der Zahlentheorie, die er u. a. um neue Sätze der Maßtheorie der Kettenbrüche bereicherte, sowie der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zu tiefgreifenden Resultaten gelangte er vor allem in der Theorie der Grenzwertsätze sowie der Theorie der stationären Zufallsprozesse, für die er überhaupt erst die Grundlagen schuf, die von zahlreichen Wissenschaftlern in und außerhalb der UdSSR bis in die Gegenwart ausgebaut und weiterentwickelt worden sind und werden. Die Beschäftigung Chintschins mit stationären Prozessen war eng mit Problemen der Praxis verbunden; sie betrafen die Theorie der automatischen Telefonverbindungen und das Studium der zeitlichen Auslastung von Werkzeugmaschinen bei Bedienung mehrerer Maschinen des gleichen Typs durch einen Arbeiter. Diese Untersuchungen besaßen nicht nur theoretisches Interesse, sondern führten zu echten technischen Fortschritten.
Die Anwendung seiner wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden und Resultate auf die statistische Physik ermöglichte ihm auch hier bedeutende Beiträge.
A. J. Chintschin war Autor von etwa 150 wissenschaftlichen Publikationen in internationalen Zeitschriften, dazu treten wertvolle, teilweise in andere Sprachen über-

setzte Monographien, vortreffliche populärwissenschaftliche Darstellungen aus seinem Fachgebiet und nicht zuletzt Darlegungen zu Problemen der Organisation und Methoden des Mathematikunterrichts, denen er seit Beginn seiner Hochschullehrtätigkeit lebhaftes Interesse entgegenbrachte. 1939 wurde er korrespondierendes Mitglied der Akademie der Wissenschaften und 1944 Mitglied der Akademie der pädagogischen Wissenschaften der UdSSR. Seine Tätigkeit als Deputierter des Moskauer Stadtsowjets von 1939 an weist den Mathematiker Chintschin als einen am gesellschaftlichen Leben teilnehmenden Gelehrten aus.
Die Sowjetregierung schätzte seine wissenschaftlichen und gesellschaftlichen Verdienste hoch ein. Sie verlieh ihm den Staatspreis, den Leninorden und erkannte ihm zweimal den Rotbannerorden und andere ehrende Auszeichnungen zu.

H. Bernhardt

Wir empfehlen das soeben in siebenter Auflage erschienene Buch (in deutscher Sprache): Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung von B. W. Gnedenko und A. J. Chintschin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, MDN 4,50

● Ein mathematisches Werk guten Stils duldet keinerlei „Wasser", keinerlei ausschmückendes, die logische Spannung verminderndes Geschwätz, keine Abschweifungen. Die äußerste Knappheit, die „trockene" Strenge des Gedankens und seiner Darlegung stellen einen unabdingbaren Charakterzug des mathematischen Denkens dar. Dieser Zug ist nicht nur für eine mathematische, sondern auch für jede andere ernsthafte Überlegung sehr wertvoll; die lakonische Kürze, das Bestreben, nichts Überflüssiges zuzulassen, helfen sowohl dem Denkenden selbst als auch seinem Leser oder Hörer, sich völlig auf den gegebenen Gedankengang zu konzentrieren, ohne sich durch nebensächliche Vorstellungen ablenken und den unmittelbaren Kontakt mit der Grundlinie der Überlegung zu verlieren.

● Wer einmal die erhabene Freude der schöpferischen Leistung erfahren hat, wird niemals die Anstrengungen scheuen, um diese von neuem zu erleben. Keine Schwierigkeiten werden ihn aufhalten, die Kraft seines Elans und Strebens, sein Fleiß und die Ausdauer bei der Überwindung von Hindernissen werden mit jedem neuen Erfolg wachsen. Mißerfolgen, Fehlern, zeitweiligem Scheitern und Niederlagen aber wird er so begegnen lernen, wie es einem wahren Kämpfer gebührt — er wird ihretwegen nicht untätig, sondern schöpft in ihnen wie aus einer Quelle den Anreiz für immer neue und neue Anspannungen des Gedankens und des Willens.

A. J. Chintschin

Aus: Probleme des Mathematikunterrichts — Diskussionsbeiträge sowjetischer Wissenschaftler. Volk und Wissen, Nr. 002105, MDN 12,—

Aus der Jugend Chintchins

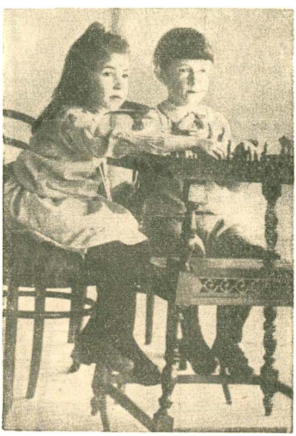
A. J. Chintschin wurde 1894 in der Stadt Kondrowo geboren. Sein Vater, J. G. Chintschin, leitete damals die Papierfabriken von Kondrowo und Troizkoje.
Schura (Rufname Chintschins, d. Red.) war ein lebhafter und geselliger Junge. Seine Altersgenossen achteten ihn. Er beteiligte sich gern an Unterhaltungen und war Initiator fröhlicher Spiele. Schura gründete eine Laienspielgruppe, deren Mitglieder gleichaltrige Kinder waren. Er schuf die Bühnenbilder und führte gern Regie. Oft improvisierte er Stücke. Später wurde die häusliche Laienspielgruppe in ein Liebhabertheater umgewandelt, das auf der Bühne der Schule von Kondrowo Stücke von Ostrowski, Tolstoi, Molière u. a. aufführte. Mit dem Erlös der Theatereinnahmen wurden für die Mitglieder des Liebhabertheaters Ausflüge nach Moskau unternommen, dort verschiedene Theater besucht und die Arbeit ihrer Darsteller studiert.

In seiner Jugend las Schura sehr viel. Er liebte Gedichte und schrieb selbst welche. Die besten wurden veröffentlicht. Bei ihm zeigte sich auch frühzeitig die Neigung zu pädagogischer Betätigung. So half er den Freundinnen seiner Schwester, wenn irgendeine in ihren Leistungen zurückblieb. Er spielte gern Schach. Schon sehr früh zeigten sich bei ihm außergewöhnliche mathematische Fähigkeiten. Seine Schwester erinnert sich an folgende Begebenheit: Als Schura 12 Jahre alt war, lernte er die Fahrpläne aller Züge aus den Kursbüchern Rußlands auswendig. Seine Lieblingsbeschäftigung bestand im Lösen von Bilderrätseln und mathematischen Scharaden. Bis 1905 ging Schura in das Realgymnasium der Stadt Kaluga, von 1906 bis 1907 besuchte er in Zürich (Schweiz) eine Privatschule, nach seiner Rückkehr ein Realgymnasium in Moskau. Mit 16 Jahren nahm Schura das Studium an der mathematischen Fakultät der Lomonossow-Universität auf. Mit 21 Jahren schloß er sein Studium ab und war bereits mit 25 Jahren Professor.

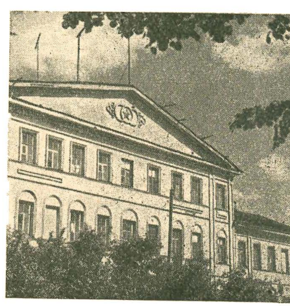
E. Muromzewa / A. Artisow

Schura mit seiner Schwester (1901)

Schura als Student (1914)



Schura mit seiner Schwester (1900)



Schule von Kondrowo

Mathematikolympiaden in der UdSSR

Anfang der dreißiger Jahre wirkte in der Leningrader Universität der erfahrene und energische Wissenschaftler Prof. Dr. B. N. Delone. Er war begeistert für die mathematische Forschungsarbeit. Bei seinen Hörern weckte er die Liebe zur Mathematik. Im Schuljahr 1933/34 wurde auf seine Initiative als erste in der Sowjetunion an der Leningrader Universität eine Stadtolympiade für Schüler ausgerichtet. Ein Jahr darauf begann die Moskauer Universität, Mathematikolympiaden durchzuführen. Seit dem Jahre 1946 haben sich dieser Form der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik viele Universitäten und pädagogische Hochschulen angeschlossen. Den Olympiaden ging jeweils eine umfassende Zirkeltätigkeit unter Anleitung von Aspiranten und den besten Studenten voraus. Daneben wurden Vorträge von Professoren und Mitgliedern der Akademien gehalten. Die Themen wählten die Zirkelleiter entsprechend den Interessen zusammen mit den Schülern aus.

Im Schuljahr 1959/60 führte der Minister für Volksbildung der RSFSR zusammen mit der Moskauer Universität die erste Mathematikolympiade mit den Siegern der verschiedenen Republiken durch. Diese Initiative hat wesentlich dazu beigetragen, daß in der Mehrzahl der Schulen der Sowjetunion Mathematikzirkel eingerichtet wurden.

Die Olympiaden werden in vier Etappen durchgeführt: Teilnehmer der *Schulstufe* sind Schüler der 5. bis 10. Klasse; in einigen Bezirken werden Schüler der 4. Klasse mit einbezogen. Der Inhalt und die Form der Schulwettbewerbe sind sehr verschieden (traditionelle Wettbewerbe durch Lösen von Aufgaben, lebendige theoretische Wettbewerbe oder mathematische Abende). Die Sieger der Schulolympiaden werden zur *Kreisolympiade* delegiert. Die aus ihr hervorgehenden Sieger der Klassen 7 bis 10 nehmen an den Bezirksolympiaden bzw. *Republikolympiaden* teil. Den Abschluß bildet die vierte Etappe, die *Allunionsolympiade* (siehe nächste Seite, d. Red.).

Außer diesem System der Olympiaden wird eine *Allunions-Fernolympiade* durchgeführt. Die Aufgaben werden in der zentralen Jugendzeitung *Komsomolskaja Prawda* und den lokalen Jugendzeitungen veröffentlicht. Die erfolgreichsten Teilnehmer können an den Bezirks- bzw. Republikolympiaden teilnehmen und sich somit auch für die Allunionsolympiade qualifizieren. Außerdem führt der Fernsehfunk seit einigen Jahren Mathematikolympiaden durch.

Vorsitzender der Jury der Allunionsolympiaden ist Prof. Dr. G. W. Tschelidse (Universität Tbilissi). Die Jury setzt sich aus Wissenschaftlern zahlreicher in der außerunterrichtlichen Arbeit aktiver Universitäten und Hochschulen zusammen. Ein Teil von ihnen war in der Jugend selbst begeisterter und erfolgreicher Teilnehmer der Mathematikolympiaden.

J. Petrakow

Aus einem Brief an die Red. *alpha*

Welche Wissenschaft ihr auch studiert, in welche Hochschule ihr auch eintretet, auf welchem Gebiet ihr auch arbeitet, überall braucht ihr mathematische Kenntnisse, wenn ihr auch nur die geringste Spur eures Wirkens hinterlassen wollt.

M. I. Kalinin

Allunionsolympiade Mathematik
Tbilissi 1967

In diesem Jahre fand die Allunionsolympiade Mathematik in Tbilissi, der Hauptstadt der Grusinischen SSR, statt. Sie ist gegenwärtig ein Teil der wissenschaftlichen Allunionsolympiaden, zu der noch Physik und Chemie gehören.

An der Mathematikolympiade nahmen 386 Sieger der Bezirks- und Republikolympiaden teil:

	Teilnehmer	davon Mädchen
8. Klasse:	70	9
9. Klasse:	117	15
10. Klasse:	189	19

Zehn Schüler aus der 7. Klasse beteiligten sich am Wettbewerb der 8. Klassen. Die Jury vergab zwei erste, drei zweite, elf dritte Preise und 124 Urkunden sowie Mathematik-Bibliotheken für die Sieger. Die Abschlußfeier fand im Sitzungssaal des Obersten Sowjets der Grusinischen SSR statt. Markanteste Gäste waren Akademiemitglied G. S. Dsozenugse, Vorsitzender des Obersten Sowjets der Grusinischen SSR, und T. W. Laschkaraschwili, Präsident der Akademie der Wissenschaften der Grusinischen SSR. Im Anschluß an den Wettbewerb unternahmen alle Teilnehmer eine Exkursion durch die gastgebende Republik und lernten ihre Sehenswürdigkeiten kennen.

J. Petrakow

Aus einem Brief an die Red. *alpha*

Задачи всесоюзной математической олимпиады школьников

Восьмой класс

1. В остроугольном треугольнике ABC высота AH, наибольшая из высот, равна медиане BM. Доказать, что угол ABC меньше 60°.

2. В некотором натуральном числе произвольно переставили цифры. Доказать, что сумма полученного числа с исходным не равна $\underbrace{999\ldots9}_{1967 \text{ цифр}}$.

3. Прожектор освещает угол 90°. Доказать, что расположенные в четырёх произвольных точках прожектора можно направить так, чтобы осветить всю плоскость.

4. Можно ли на окружности расположить числа 0,1,2,. . .9 так, чтобы любые два соседних отличались на 3,4 или 5?

5. Доказать, что существует число, делящееся на 5^{1000} и не содержащее в своей записи ни одного нуля.

Девятый класс

1. Можно ли на окружности расположить часла 1,2,3,. . .13 так, чтобы любые два соседних числа отличались на 3,4 или 5?

2. Смотри задачу 3 восьмого класса.

3. Цифры некоторого числа переставили и сложили полученное число с исходным. Доказать, что если сумма равна 10^{10}, то исходное число делилось на 10.

4. В треугольнике АВС высота СК равна медиане ВЕ и равна биссектрисе АД. Доказать, что треугольник АВС правильный.

5. Найти все пары целых чисел Х и У, удовлетворяющих уравнению:

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$$

Десятый класс

1. В последовательности целых положительных чисел каждый член, начиная с третьего, равен модулю разности двух предыдущих.
Какое наибольшее число членов может иметь такая последовательность, если каждый её член не превосходит 1967?

2. В каждой из восьми точек пространства стоит прожектор, который освещает октант (трёхгранный угол со взаимно-перпендикулярными рёбрами) с вершиной в этой точке. Доказать, что можно направить прожектора так, чтобы они осветили всё пространство.

3. «Король-Самоубийца». На шахматной доске размером 1000 $\times$ 1000 стоит чёрный король и 499 белых ладей. Доказать что при произвольном начальном расположении фигур король может стать под удар белой ладьи, как бы не играли белые. (Ходы делаются так же, как и в обычных шахматах).

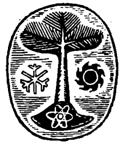
4. Три последовательные вершины ромба лежат, соответственно, на сторонах АВ, ВС, СД данного квадрата со стороной I. Найти площадь фигуры, которую заполняют четвёртые вершины таких ромбов.

5. Натуральное число К обладает таким свойством: если М делится на К, то и число, записываемое теми же цифрами, что и М, в обратном порядке, делится на К. Доказать, что К — делитель числа 99.

Sowjetische Städte, die in diesem Heft genannt werden:

1 Archangelsk
2 Astrachan
3 Bratsk
4 Charkow
5 Gorki
6 Irkutsk
7 Ishewsk
8 Iwanowo
9 Kaluga
10 Kiew
11 Kasan
12 Kondrowo
13 Krasnojarsk
14 Leningrad
15 Lwow
16 Moskau
17 Nowosibirsk
18 Rjasan
19 Saratow
20 Tartu
21 Tbilissi
22 Troizkoje
23 Ufa
24 Wladimir
25 Wladiwostok

НОВОСИБИРСК



Nowosibirsk
zählt zu den jungen Städten, die in erstaunlich raschem Tempo errichtet wurden. Moskau brauchte 750 Jahre, ehe es zu einer Millionenstadt wurde, New York 200 Jahre, Kiew 700 Jahre, aber Nowosibirsk nur 60 Jahre. Dieser Stadt wurde nach der Oktoberrevolution die Rolle eines großen Industriezentrums zugedacht. Waren mit der Aufschrift „Hergestellt in Nowosibirsk" werden nach mehr als 40 Ländern exportiert. Die Werktätigen dieser Stadt in der Taiga produzieren jetzt an einem Tage mehr als 1940 in einem Monat. Als W. J. Lenin im Jahre 1897 auf dem Wege in die Verbannung durch die Siedlung Nowonikljewsk kam, hatte sie 8000 Einwohner. Heute beherbergt Nowosibirsk 1,2 Millionen Menschen. Und wer noch mehr Zahlen wissen möchte: Hier gibt es u. a. 14 Hochschulen (mit 120000 Studenten), 170 Mittelschulen, 6 Theater, 500 Bibliotheken, 50 Forschungsinstitute.

Akademgorod — das Akademieviertel — liegt 40 Kilometer von Nowosibirsk entfernt und wurde vor sieben Jahren inmitten von Buchen-, Birken- und Kiefernwäldern errichtet. Es hat heute 35000 Einwohner und umfaßt 15 Institute. In ihnen sind 12 ordentliche Mitglieder der Akademie der Wissenschaften, 34 korrespondierende Mitglieder, 80 Doktoren, 700 Kandidaten der Wissenschaften und 6000 Wissenschaftler, Techniker und Ingenieure, insgesamt 14000 Menschen in Forschungs- und Produktionsstätten tätig. Das Durchschnittsalter der Wissenschaftler liegt bei 31 Jahren.

Matsch-Phys-Schkole ist die Internatsspezialschule für Mathematik, Physik und Chemie. Sie steht unter Leitung des Physikers Dr. habil. Bytschenkow, der hier 12 Stunden unterrichtet. Er wird von über 60 Hochschullehrern unterstützt. Fünf Tage in der Woche sind sie in ihren wissenschaftlichen Einrichtungen tätig, einen sechsten stehen sie für den Unterricht in der Schule zur Verfügung unter dem Motto: *Kein Wissenschaftler ohne Schüler.*
Das Lehrprogramm für diese Schule stellen die Wissenschaftler zusammen. Dabei steht der Unterricht in Mathematik und Physik an erster Stelle. Bei acht Wochenstunden in Physik (9. und 10. Klasse) werden beispielsweise zwei bis drei Vorlesungen gehalten. Die anderen Stunden sind Seminaren und Übungen (meist in den Labors der Institute der Akademie) vorbehalten. Nach jeder Vorlesung werden Aufgaben gestellt. Für einen Zeitraum von vier Wochen geben die Dozenten 30 bis 40 fakultative (freiwillige) Hausaufgaben aus. In Klassenarbeiten sind stets eine Reihe fakultativer Aufgaben eingebaut. Bei der Lösung aller Aufgaben kommt es besonders auf die Originalität und Eleganz an.
In dieser Spezialschule gibt es 30 Arbeitsgemeinschaften, u. a. Mathematische Logik, Kybernetik, Astronomie, Radiotechnik, experimentelle Hydromechanik, Kernphysik. Wer in einem Fach die Schuljahresprüfung nicht besteht, geht zurück an seine Heimatschule. Mit Recht werdet ihr, liebe Leser fragen, wie man Schüler dieser weit über die Grenzen der Sowjetunion bekannten Schule werden kann?

Sommerschule. Drei Wege gibt es, einer der rund 1000 Teilnehmer an dem von der Akademie in Nowosibirsk durchgeführten vierwöchigen Sommerlager zu werden: Der

Schulleiter schlägt einen Schüler vor, der sich im Unterricht und der außerunterrichtlichen Arbeit im Fach Mathematik und Physik besonders bewährt. Jeder Schüler kann sich am Fernstudium der Internatsspezialschule für Mathematik, Physik und Chemie beteiligen. Er erhält (siehe unten) einen Brief mit Aufgaben. Im April jedes Jahres werden die vom Direktor vorgeschlagenen bzw. erfolgreichsten Teilnehmer am Fernstudium in drei bis vier Orten Sibiriens zusammengefaßt. Wissenschaftler der Akademie lernen sie dabei persönlich kennen und führen mit ihnen eine schwierige, mündliche Olympiade durch, die den Charakter eines strengen Examens hat. Wer sich bewährt, erhält gleichberechtigt mit den Siegern der Rayonolympiaden Sibiriens eine Einladung nach Nowosibirsk. Die Jungen Mathematiker und Physiker (Alter: 12 bis 16 Jahre) hören während ihres Aufenthalts Vorlesungen, arbeiten in kleinen Zirkeln, in Seminaren und Altersgruppen unter Anleitung von Wissenschaftlern der Akademie. In ihrer Freizeit — es sind Sommerferien — tummeln sie sich in den herrlichen Wäldern am Strand des 216 km langen und 24 km breiten Ob-Meeres oder haben Gelegenheit, mit namhaften Persönlichkeiten zu sprechen. An jeweils fünf Tagen werden folgende Vorlesungen gehalten: 6 Stunden Mathematik, 6 Stunden Physik, 2 Stunden Chemie, 1 Stunde Biologie, dazu entsprechende Übungen. Nach harten Klausuren und allseitiger Bewährung während des Sommerlagers übernimmt die Internatsspezialschule die 250 bis 300 Besten.

W. Friedrich

Fernstudium für Schüler

Lieber Freund!

Wenn Sie den Wunsch haben, Ihre Kenntnisse in Mathematik und Physik zu vertiefen und interessante und komplizierte Aufgaben lösen lernen wollen, schlagen wir Ihnen vor, ein Fernstudium an der Internatsspezialschule der Nowosibirsker Universität aufzunehmen. Es gibt zwei Kurse: Für den ersten Kurs werden bevorzugt Schüler aufgenommen, die zur Zeit die 8. Klasse besuchen. Wir legen Ihnen die Aufgaben der Eignungsprüfung vor. Schüler, die in unsere Schule eintreten wollen, möchten die Ergebnisse dieser Aufgaben bis spätestens 11. 11. 1966 einsenden. Es ist nicht unbedingt notwendig, sämtliche Aufgaben zu lösen. Wählen Sie die Aufgaben aus, deren Lösungen Ihrer Meinung nach interessant, originell, elegant sind. Die Arbeit muß auf kariertem Papier in einem Heft angefertigt sein. Wir bitten, das Heft beim Einsenden nicht einzurollen.

Mathematikaufgaben

1. Es sei der Bruch $\frac{2x+3}{5x+7}$ gegeben. Für welche ganzzahligen x-Werte kann dieser Bruch gekürzt werden?

2. Gegeben sei ein Dreieck ABC. Die Längen der Seiten AB, BC und AC mögen 3 cm, 4 cm bzw. 4 cm betragen. Über der Seite AC sei ein Quadrat errichtet, dessen Mittelpunkt M mit dem Eckpunkt B verbunden werde. Man beweise, daß MB Winkelhalbierende des Winkels bei B ist.

3. Man löse die Gleichung

$$x + y + z = xyz$$

in ganzen Zahlen.

4. Von den Zahlen 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ... 98 99 100 sind 10 Ziffern so wegzustreichen, daß die übrigbleibende Zahl möglichst groß ist.

5. Man beweise, daß die Gleichung

$$15\,x^2 - 7\,y^2 = 9$$

keine ganzzahligen Lösungen besitzt.

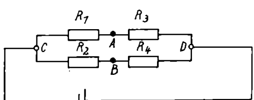
6. Man beweise, daß man von 52 Zahlen zwei so auswählen kann, daß entweder ihre Summe oder ihre Differenz durch 100 teilbar ist.

7. In einem Dreieck mögen die von ein und demselben Eckpunkt ausgehende Winkelhalbierende, Seitenhalbierende und Höhe den Winkel in vier gleiche Teile teilen. Man bestimme die Winkel des Dreiecks.

Physikaufgaben (Auswahl)

5. An welchem Widerstand der Schaltung (siehe Abb.) wird in einer Stunde die größte und an welchem die kleinste Wärmemenge freigesetzt? In welchem Verhältnis steht die eine zu der anderen?

Bekannt sei $R_1 = 1\,\Omega$ $R_3 = 10\,\Omega$
$R_2 = 2\,\Omega$ $R_4 = 20\,\Omega$



6. Wie groß ist die Spannung zwischen den Punkten A und B der Schaltung (vgl. die vorstehende Aufgabe), wenn bekannt ist, daß die Spannung an CD 10 V beträgt?

Mathematikprogramm (Entwurf)

9. Klasse, Internatsspezialschule, Nowosibirsk

I *Analysis*: (Thema 1) Elemente der Mengenlehre, Element und Menge, Untermengen, geordnete Mengen, Operationen mit Mengen. Prädikatenlogik. (2) Kombinatorik, Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Permutationen, Kombinationen, Variationen mit und ohne Wiederholungen. Alphabete und Wörter. Definition der Wahrscheinlichkeit und ihre Eigenschaften. Bedingte Wahrscheinlichkeit. (3) Reelle Zahlen, Koordinaten. Zahlenkongruenzen, Zahlenfolgen. Grenzwertberechnungen. Reihen von Zahlen und Funktionen. Begriff der Rechengenauigkeit. Arbeiten mit dem Rechenstab und der Rechenmaschine. (4) Funktionen und ihre graphische Darstellung. Die Tangente. Die Ableitung. Geschwindigkeit. Der Inhalt von durch Kurven begrenzter Flächen. Definition des Integrals, sein Zusammenhang mit der Ableitung. Ermitteln des Weg-Zeit-Zusammenhangs aus dem Geschw.-Zeit-Zusammenhang. Ableitungen und Integrale in Aufgaben der Physik, der Chemie und der Technik. (5) Trigonometrische Funktionen. Vektoren und ihre Projektionen. Addition von Vektoren, Multiplikation mit einem Skalar. Projektionen von Vektoren. Definition des Sinus und des Kosinus mit Hilfe der Projektion des Einheitsvektors. Grafische Darstellung des Sinus und Kosinus. Additionstheoreme und Folgerungen aus ihnen. Ableitungen von trig. Funktionen. Funktionen mit dem Argument $(ax + b)$. Gleichung der ungedämpften Pendelschwingungen. Begriff der „mittelbaren" Funktion. Ableitungen mittelbarer Funktionen. Inverse Funktion. Umkehrfunktionen der trig. Funktionen, ihre Ableitungen und die mit ihnen verbundenen einfachsten Integrale. Bestimmte und unbestimmte Integration. (6) Die Potenzfunktion, die logarithmische und die Exponentialfunktion. Integration und Differentiation von Potenzfunktionen mit ganzen und gebrochenen Exponenten. Eigenschaften der Logarithmen, Umkehrfunktionen. Ableitungen, Integrationen. Mittelbare Funktionen. Differentialgleichung der Exponentialfunktionen. Integration mittels Substitution.

II *Geometrie* (Thema 1) Koordinaten auf der Geraden und in der Ebene. Vektorrechnung. Die Zahlengerade. Der Abstand zweier Punkte. Streckenteilung in gegebenem Verhältnis. Vektoren: Addition und Subtraktion von Vektoren. Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar. Das Koordinatensystem in der Ebene. Vektoren in der Ebene. Projektion von Vektoren. Das skalare Produkt von Einheitsvektoren. Komponentendarstellung von Vektoren. Addition, Subtraktion und Multiplikation von Vektoren. Entfernung zwischen Punkten in der Ebene. (2) Metrische Verhältnisse für Dreiecke, Vielecke und Polyeder. (3) Polarkoordinatensystem. Umrechnung in kartesische Koordinaten. (4) Geraden und ihre Gleichungen. Zwei sich schneidende Geraden. Berechnung des Schnittwinkels zweier Geraden. Parallelität, Orthogonalität. Bestimmungsgleichungen zweiten und dritten Grades. Gleichung eines Geradenbüschels. Allgemeine Gleichung und Hessesche Normalform der Geraden. Entfernung eines Punktes von einer Geraden. Zusammenfassende Untersuchung der Gleichungen zweier Geraden. (5) Kurven zweiter Ordnung. Geometrische Eigenschaften der Kurven zweiter Ordnung: Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel. Die Ellipse als Projektion des Kreises. Tangentenprobleme.

Aufgaben aus Mathematiklehrbüchern der Estnischen SSR

5 **118** Zwei Kraftfahrer hatten den Auftrag, mit ihren Lastkraftwagen 170 t Konsumgüter vom Bahnhof ins Auslieferungslager zu transportieren. Der erste Fahrer, dessen Lkw jedes Mal mit 4 t Ware beladen wurde, machte zwanzig Fahrten. Wieviel Fahrten entfielen auf den zweiten Fahrer, wenn dessen Lkw stets mit 5 t Ware beladen wurde?

119 Ein Kolchos hatte auf zwei Feldern Kartoffeln angebaut. Vom ersten Feld wurden insgesamt 810 t, vom zweiten 640 t Kartoffeln geerntet. Auf dem ersten Feld wurde ein Durchschnittsertrag von 180 dt je ha, auf dem zweiten von 200 dt je ha erzielt. Welches von den beiden Feldern ist das größere? Um wieviel Hektar unterscheiden sich ihre Flächen?

120 Die Oberfläche eines hölzernen Quaders mit den Kantenlängen 3 dm, 4 dm und 5 dm wurde rot gefärbt. Dann wurde der Quader zu Würfeln von je 1 dm³ Rauminhalt zersägt. Ermittle, bei wieviel Würfeln drei, zwei bzw. nur eine quadratische Fläche gefärbt war! Bei wieviel Würfeln war die Oberfläche ungefärbt?

121 In einem rechtwinkligen Dreieck ist der eine spitze Winkel doppelt so groß wie der andere. Wie groß sind die Winkel dieses Dreiecks?

122 Berechne:

$107 \cdot \{700 - [96 : 2 - (45 + 27) : 9] \cdot 5 - 495\} - 135.$

6 **123** Einem Speiselokal wurde Fleisch zum Zubereiten der Gerichte in zwei Frischhaltebehältern angeliefert. Das Bruttogewicht des ersten Behälters betrug 12,5 kg, das Bruttogewicht des zweiten war um $\frac{3}{4}$ kg kleiner als das des ersten. Jeder Behälter wog leer $2\frac{3}{8}$ kg. Das Fleisch aus beiden Behältern reichte genau für zwei Tage zur Versorgung der Gäste. Am ersten Tag wurden vom Koch $9\frac{4}{5}$ kg Fleisch verbraucht. Wieviel kg Fleisch standen dem Koch am zweiten Tag zur Verfügung?

124 Ein Betrieb erzeugte $\frac{3}{200}$ der laut Plan vorgesehenen Waren nicht. Diese Planschulden beliefen sich auf den Betrag von 0,3 Millionen Rubeln. Für wieviele Rubel hätte der Betrieb Waren produziert, wenn der Plan erfüllt worden wäre?

125 Ein Zelt hat die Form einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Wieviel m² Stoff wurden zum Anfertigen des Zeltes benötigt, wenn die Grundseite einer Dreiecksbahn 3,8 m und ihre Höhe 2,8 m betragen? Das Zelt wurde ohne Leinwandboden gefertigt; der Stoffverschnitt und die Säume sollen unberücksichtigt bleiben.

126 Berechne!

$$\frac{4\frac{7}{8} \cdot 4\frac{4}{5}}{5\frac{1}{5} + 6\frac{1}{2}} + \frac{5\frac{5}{8} : 3\frac{3}{4}}{2\frac{1}{2} - 1\frac{3}{10}}$$

127 Ein zylindrisches Glasgefäß hat die lichte Weite von 2,82 dm. Es werden 12 l 7
Wasser in das Gefäß gefüllt. Ermittle die Höhe des Wasserspiegels über der Grundfläche des Gefäßes!

128 Der Umfang eines 4 m hohen kegelförmigen Schotterhaufens beträgt am Boden 25 m. Es soll eine sechs Meter breite Straße asphaltiert werden. Dazu benötigt man auf 100 m² Straßenfläche 3,5 t Schotter; ein Kubikmeter Schotter wiegt 1,8 t. Wieviel Meter Straßenlänge können mit dem vorrätigen Schotter asphaltiert werden?

129 In zwei Getreidespeichern lagerten zusammen p Tonnen Korn. Aus dem ersten Speicher wurden täglich a Tonnen, aus dem zweiten b Tonnen Korn entnommen. Nach t Tagen lagerten in beiden Speichern die gleichen Mengen Korn. Wieviel Tonnen Korn lagerten ursprünglich in jedem Speicher?

130 Die Spritzflüssigkeit zum Kalken von Obstbäumen enthält Kalk, Roggenmehl und Öl im Verhältnis 3 : 2 : 2. Wieviel kg muß man von jedem dieser Bestandteile verwenden, um 2,8 kg dieser Mischung herzustellen?

Wer löst mit?

alpha – Wettbewerb

*letzter Einsendetermin 30. 12. 1967**

Aufgaben aus sowjetischen Mathematiklehrbüchern

5

131 In einem Klassenraum sind sechs Lampen. Die Schüler, die den Raum verließen, vergaßen, das Licht auszuschalten, und es wurde erst nach 15 Minuten ausgeschaltet. Dieses Versäumnis kostete die Schule zwei Kopeken. Welche Mehrausgabe ergäbe sich im Monat (30 Tage), wenn in der Schule 210 solcher Lampen sind und diese täglich fünf Minuten unnötig brennen?

132 Wenn man alle Teiler einer gegebenen natürlichen Zahl der Größe nach mit 1 beginnend und mit der gegebenen Zahl endend anordnet, so ist das Produkt von Teilern, die gleich weit von den Enden entfernt sind, gleich der gegebenen Zahl. Überprüft das für die Zahl 84!

133 Um die Wassermenge zu bestimmen, die eine Quelle hergibt, stellen Touristen fest, daß eine Büchse mit zwei Liter Fassungsvermögen in vier Sekunden gefüllt war. Wieviel Liter Wasser gibt die Quelle in 24 Stunden?

134 Eine Eule vertilgt während eines Sommers etwa 1000 Feldmäuse. Diese Mäuse sind Feldschädlinge, denn durch eine Maus geht ungefähr 1 kg Korn verloren. Stelle fest, wieviel Korn in 15 Jahren von 80 Eulen erhalten wird?

W(5)135 Der Kremlhügel liegt 30 m, die Leninberge liegen 78 m über dem Spiegel der Moskwa. Die Höhe des höchsten Gebäudes auf dem Kremlhügel, des Glockenturms Iwan des Großen, der im Jahre 1600 erbaut wurde, beträgt 20 m mehr als das Doppelte der Höhe des Kremlhügels. Das höchste Gebäude auf den Leninbergen, die Moskauer Universität, ist dreimal so hoch wie der Glockenturm; sie wurde im Jahre 1953 gebaut. Wieviel Meter erheben sich beide Gebäude über dem Spiegel der Moskwa?

W(5)136 Aus Moskau und Saratow fahren gleichzeitig zwei Güterzüge einander entgegen. Der erste Zug legt 31 km in der Stunde zurück, der zweite 37 km in der Stunde. In welcher Entfernung voneinander befinden sich diese beiden Züge nach 9 Stunden, wenn bekannt ist, daß es von Moskau nach Saratow 892 km sind?

137 Eine Holzfällerbrigade stellte in drei Tagen 184 m³ Holz bereit. Dabei wurde von der Brigade der Tagesplan am ersten Tag mit 14 m³ übererfüllt; am zweiten Tag lag die Brigade mit 2 m³ unter der Planaufgabe, und am dritten Tag stellte sie 16 m³ über den Plan bereit. Wieviel m³ Holz mußte die Brigade täglich nach dem Plan bereitstellen?

138 Beweise, daß die Summe aus einer zweistelligen natürlichen Zahl und einer Zahl, die man durch Vertauschen der beiden Ziffern erhält, stets durch 11 teilbar ist.

139 Bestimme zwei Zahlen, deren Summe 132 ist, wobei $\frac{1}{5}$ der einen Zahl gleich $\frac{1}{6}$ der anderen ist!

140 Der Fernzug Moskau — Wladiwostok trifft 28 Tage nach seiner Abfahrt aus Moskau dort wieder ein; der Fernzug Moskau — Irkutsk trifft 16 Tage nach seiner Abfahrt wieder in Moskau ein; der Fernzug Moskau — Lwow kehrt in 12 Tagen wieder nach Moskau zurück. Am Dienstag fahren alle Züge in Moskau ab. Nach wieviel Tagen und an welchem Wochentag treffen sich alle wieder in Moskau?

W(6)141 Ein Fahrgastschiff der Linie Moskau—Astrachan—Moskau führt seine Fahrt in 16 Tagen durch. Für die Linie Moskau—Ufa—Moskau benötigt es 18 Tage. Nach wieviel Tagen können sich Fahrgastschiffe der beiden Linien, die gleichzeitig von Moskau abfahren, wieder in Moskau treffen? Wann begegnen sich die Fahrgastschiffe in Moskau, wenn sie am 15. April abfahren?

W(6)142 Ermittle diejenige gebrochene Zahl, welche gleich $\frac{4}{7}$ ist, und deren Differenz aus ihrem Nenner und ihrem Zähler 21 beträgt!

---

* Mit Heft 5 endet der *alpha*-Wettbewerb des Jahres 1967, d. Red.

7

143 Zwei Brigaden begannen gleichzeitig mit dem Bau eines Metrotunnels. Sie bewegten sich von zwei Punkten aus aufeinander zu, deren Entfernung 1695 m betrug. Im Verlaufe der ersten 25 Tage trieb die erste Brigade ihren Stollen im Durchschnitt täglich um 2,8 m vorwärts, die zweite Brigade um 2,6 m. Danach erhöhten beide Brigaden ihre Arbeitsproduktivität und begegneten sich 225 Tage nach Beginn der Arbeit, wobei die erste Brigade insgesamt 45 m mehr als die zweite zurückgelegt hatte. Um wieviel Meter (Prozent)* erhöhte jede Brigade durchschnittlich ihre Tagesleistung?

144 In einer Stadt-Mathematikolympiade wurden $\frac{7}{20}$ (35%)* der Teilnehmer der ersten Stufe zur zweiten zugelassen. $\frac{2}{9}$ aller Teilnehmer der zweiten Stufe wurde mit Preisen und Belobigungsurkunden ausgezeichnet. Den ersten Preis erhielt ein Schüler, einen zweiten Preis erhielten zwei Schüler, einen dritten Preisfünf Schüler, und zwanzig Schüler erhielten Belobigungsurkunden. Wieviel Schüler nahmen an der ersten Stufe teil?

145 Ein Wärmekraftwerk stellte sich von Donezkohle auf örtlich anfallende um. Die Donezkohle ist durch einen weiteren Transportweg teurer. Um den wievielten Teil (wieviel Prozent)* verringern sich die Kosten für das Brennmaterial, wenn 3 t Donezkohle so viel Wärme geben wie 7 t örtlich anfallende Kohle und die Kosten für Förderung und Transport des Brennmaterials sich wie 28 : 3 verhalten?

146 Eine Gruppe Geologen war 4 Tage und 14 Stunden unterwegs. Ein Drittel des Weges fuhren die Geologen mit dem Zug, ein weiteres Drittel des Weges legten sie mit dem Dampfer zurück und das letzte Drittel zu Pferde. Wie lange benutzten die Geologen die verschiedenen Beförderungsmittel, wenn die mittlere Geschwindigkeit der Pferde den achten Teil der Geschwindigkeit des Zuges und den vierten Teil der Dampfergeschwindigkeit betrug?

W(7)147 Pioniere sammelten 27,2 t Metallschrott. Ein Achtel (12,5%)* des gesamten Schrotts wurde mit 4 Rubel je Tonne taxiert. Der übrige Schrott wurde in zwei Teile aussortiert, deren Verhältnis 3 : 4 betrug und die mit 12,5 Rubel bzw. 15 Rubel je Tonne taxiert wurden. Wieviel war der ganze Schrott wert?

W(7)148 Der Minutenzeiger einer Uhr ist 2 cm lang, der Stundenzeiger 1,5 cm. Wievielmal so groß ist die Geschwindigkeit der Spitze des Minutenzeigers im Vergleich zur Geschwindigkeit der Spitze des Stundenzeigers?

149 Im Meer schwimmt ein Eisberg, bei dem das Volumen des aus dem Wasser herausragenden Teils 2000 m³ beträgt. Berechne angenähert das Volumen des gesamten Eisbergs, wenn die Dichte des Meerwassers $1{,}03\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und die Dichte des Eises $0{,}9\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ beträgt! 8

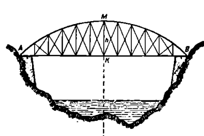
150 Ein vertikal aufgestellter zylindrischer Behälter, dessen Außendurchmesser 78 cm und dessen Gewicht 752 kp beträgt, hat am Boden eine kreisförmige Öffnung mit dem Durchmesser 36 cm. Der Behälter lastet mit seiner ganzen Bodenfläche auf einem Fundament. Es ist der Druck $\left(\text{in } \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}\right)$ zu berechnen, den der Behälter infolge seines Gewichtes auf das Fundament ausübt.

151 Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Winkel $\sphericalangle CAB = 30°$. Es ist zu beweisen, daß die Seite $\overline{BC}$ dieses Dreiecks ebenso lang ist wie der Radius r des Umkreises.

W(8)152 Zwei Bagger heben in 24 Tagen eine Baugrube für die auf einem Kolchos vorgesehene Elektrozentrale aus. Der erste Bagger könnte diese Arbeit allein eineinhalbmal so schnell ausführen wie der zweite Bagger allein. In wieviel Tagen könnte jeder Bagger diese Arbeit ausführen?

W(8)153 Die Geschwindigkeit der Fahrstühle in den Hochhäusern der Stadt Moskau ist zweimal so groß wie die Geschwindigkeit der Fahrstühle in gewöhnlichen Gebäuden. Deshalb ist die Fahrzeit bis zum zwanzigsten Stockwerk, das in einer Höhe von 81 m liegt, nur 5 Sekunden länger als bis zum achten Stockwerk eines gewöhnlichen Gebäudes, das in 33 m Höhe liegt. Berechne die Geschwindigkeit jedes Fahrstuhls!

154 Der Träger einer Brücke wird durch einen Kreisbogen AMB begrenzt, dessen 9

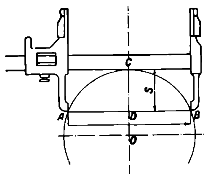


* Mitte des Schuljahres können die vorliegenden Aufgaben auch im Rahmen der Prozentrechnung noch einmal gerechnet und damit vertieft werden.

Höhe $\overline{MK} = h = 3$ m und dessen Radius $\overline{OM} = r = 8{,}5$ m beträgt. Die Spannweite $\overline{AB}$ der Brücke ist zu berechnen.

155 Einem Kreis sei ein gleichschenkliges Trapez so umschrieben, daß alle Trapezseiten den Kreis berühren. Es ist zu beweisen, daß dann die Maßzahl ϱ des Radius des Kreises die mittlere Proportionale zu den Maßzahlen a und b der halben Grundseiten des Trapezes ist: $a : \varrho = \varrho : b$.

156 Um den Durchmesser einer größeren Scheibe zu messen, wurde ein Meßschieber so eingestellt, wie es die beigefügte Abbildung zeigt. Die Länge der Meßschnäbel betrug $s = 25$ mm, der Abstand zwischen den Enden der Meßschnäbel $l = \overline{AB} = 200$ mm.

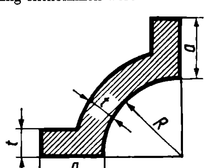


a) Der Durchmesser der Scheibe ist zu berechnen.

b) Es ist eine Formel aufzustellen, die die Abhängigkeit des Durchmessers von s und l angibt.

157 Ein Flugzeug fliegt von Moskau nach Kiew und kehrt sofort wieder zurück. Unter welchen Bedingungen wird der Hin- und Rückflug schneller zurückgelegt, bei Windstille oder bei einem mit konstanter Stärke in der Richtung Moskau—Kiew wehenden Wind?

W(9)158 Es ist angenähert der Flächeninhalt des Querschnitts sines Werkstückes zu bestimmen, dessen Maße der beigefügten Zeichnung entnommen werden können.



W(9)159 Gegeben sind ein gerader Kreiszylinder, ein gerader Kreiskegel und eine Kugel. Die Radien der Grundflächen des Zylinders und des Kegels und der Radius der Kugel sind gleich lang. Die Höhen des Zylinders und des Kegels sowie der Durchmesser der Kugel sind ebenfalls gleich lang. Es ist zu beweisen, daß unter diesen Bedingungen das Volumen des Zylinders gleich der Summe der Volumina des Kegels und der Kugel ist.

160 Das Motorschiff *Rakete* mit Unterwasserflügeln hat eine Geschwindigkeit, die um 50 km $\cdot$ h^{-1} größer ist als die Geschwindigkeit eines Dampfschiffes. Für eine Strecke von 210 km benötigt die *Rakete* 7,5 Stunden weniger als das Dampfschiff. Ermittle die Geschwindigkeit der *Rakete*!

161 Ohne Benutzung einer Tafel soll entschieden werden, welche der beiden folgenden Zahlen größer ist: $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ oder $\sqrt{6} + \sqrt{2}$.

162 Gegeben: $\sin\alpha + \cos\alpha = m$. Bestimme $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$!

163 Es ist zu beweisen, daß für alle Winkel α, für die $0 < \alpha < 90°$ und $\alpha \neq 45°$ ist, gilt

$$\frac{1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{1 + \cot^2\alpha}{1 - \cot^2\alpha}.$$

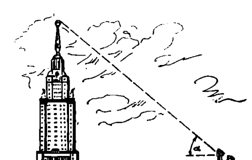
W(10)164 Für welche reellen Werte von a haben die Gleichungen

$$x^2 + ax + 1 = 0$$

und $$x^2 + x + a = 0$$

mindestens eine gemeinsame Lösung?

W(10)165 Um die Höhe des Turmes des Hauptgebäudes der Moskauer Staatlichen Lomonossow-Universität zu berechnen, be-



stimmt man mit einem Winkelmeßgerät aus der Entfernung a den Erhebungswinkel α (Abb.). Berechne den Näherungswert der zu bestimmenden Höhe, wenn die Höhe des Meßgerätes h ist

$(\alpha \approx 53°, \quad a \approx 180$ m, $\quad h \approx 1{,}2$ m)!

Zusammengestellt von Dr. R. Lüders und Th. Scholl (beide Berlin)

Aus der Sowjetunion berichtet

Leninpreis für Mathematik

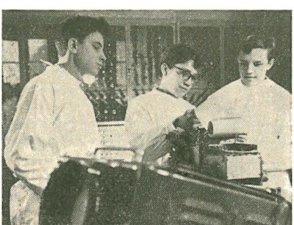
Drei sowjetische Mathematiker — Juri Shurawljow, Leg Lupanow und Sergej Jablonski — wurden für ihren Beitrag zur mathematischen Kybernetik mit dem Leninpreis 1966 ausgezeichnet. Ihre Arbeit ist von großer Bedeutung für die Volkswirtschaft. Zu den für mathematische Forschungsarbeiten im Jahre 1967 Ausgezeichneten gehört der 30jährige Doktor der Wissenschaften Juri Manin und der 29jährige Sergej Nowikow, korrespondierendes Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR.

Keplers Werke erscheinen in Leningrad

Die Werke des Astronomen Johannes Kepler (1571 bis 1630) sollen in Leningrad neu herausgegeben werden. Die zweibändige Ausgabe wird u. a. einige bisher nicht veröffentlichte Arbeiten Keplers über Mathematik und Himmelsmechanik enthalten. Ein wichtiges Hilfsmittel für die Herausgeber bilden 18 in Leder gebundene Folianten mit Manuskripten Keplers, die im Jahre 1774 von Katharina II. erworben wurden und sich heute im Archiv der Akademie der Wissenschaften in Leningrad befinden.

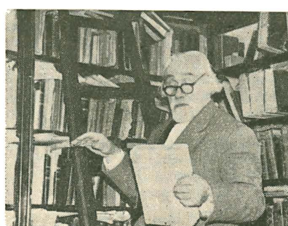
Aufgaben eines Nachhilfelehrers

verrichtet *Alfa* 5, eine von Wissenschaftlern der Polytechnischen Hochschule in Lwow entwickelte elektronische Anlage. Sie legt den Studenten Texte und Kontrollfragen vor und gibt nur nach Angabe der richtigen Antworten neuen Lehrstoff vor. War die Antwort der Studenten nicht zufriedenstellend, erläutert *Alfa* 5 die betreffende Frage. Die Maschine ist im sowjetischen Pavillon auf der Weltausstellung in Montreal zu sehen.



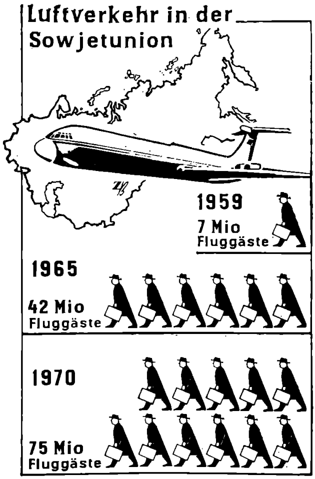
Schüler rechnen mit Elektronenmaschinen

Die 10. Mittelschule in Ishewsk bildet Junge Mathematiker aus. In der 10. Klasse lernen die Schüler mit Elektronenrechenmaschinen umzugehen. Nach Beendigung der Schule nahmen im Herbst 120 Schüler das Mathematikstudium auf. Unser Bild zeigt Schüler der 10. Klasse im Rechenzentrum der Schule.



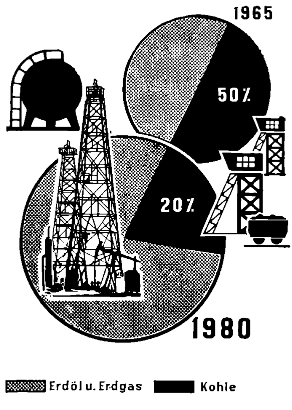
Prof. Dr. Andronow

ist ein Kampfgefährte Lenins. Er hat seine ganze Kraft eingesetzt, während und nach der Oktoberrevolution viele Gelehrte, insbesondere Mathematiker, für die Ideen der Revolution zu gewinnen. Unser Bild zeigt den Gelehrten in seiner in der Sowjetunion einmaligen Privatbibliothek, die rund 10000 mathematische Bücher umfaßt.

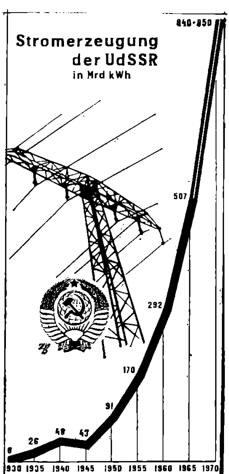


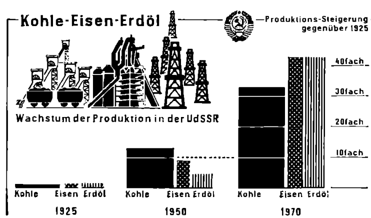
Erdöl-Gas-Kohle

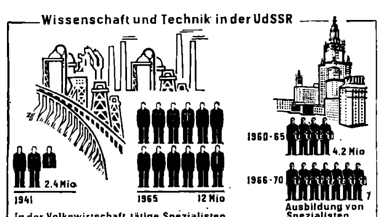
Brennstoffbilanz der UdSSR



Porträt in Zahlen







Erfahrungsaustausch mit sowjetischen Wissenschaftlern

Im Oktober 1965 weilte ich als Gast an der Hochschule für Ingenieure der Geodäsie, Photogrammetrie und Kartographie in Moskau zu einem Erfahrungsaustausch mit sowjetischen Fachkollegen. Dabei bildeten Forschungsaufgaben auf dem Gebiet der Angewandten Geodäsie (Ingenieurvermessung) den Schwerpunkt. Hier wiederum bewegten uns besondere Probleme der Talsperrenmeßtechnik.

Die *Talsperrenmeßtechnik* ist eine noch sehr junge, aber selbständige Fachdisziplin, die hauptsächlich von Vermessungsingenieuren, aber auch Bauingenieuren, vertreten wird. Eine Staumauer aus Beton verhält sich keineswegs starr, wie es zunächst vielleicht scheinen mag. Äußere Einflüsse wie z. B. unterschiedliche Temperaturen an Luft- und Wasserseite der Mauer infolge Sonneneinstrahlung, der horizontale Druck des angestauten Wassers gegen die Staumauer, ihr Eigengewicht und der vertikale Wasserdruck sowie felsmechanische Vorgänge im Gründungsbereich bewirken vielmehr Änderungen der räumlichen Lage der Staumauer sowie Verformung derselben. Je nach Größe und Typ der Mauer können diese Deformationen Größen zwischen einigen Millimetern bis zu ca. 6 cm . . . 8 cm annehmen, ohne daß die Mauer dadurch Schaden leiden muß. Die Deformationen sind teils elastisch, teils plastisch, wobei letztere besonders gefährlich sein können. Elastische Verformungen, vor allem Auslenkungen der Staumauerkrone zur Luft- und Wasserseite, treten meist in einem für die betreffende Staumauer typischen, langperiodischen (Jahreszeiten!) Verlauf in Erscheinung.

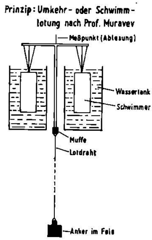
Die Aufgabe der Talsperrenmeßtechnik ist einmal in der Überwachung der Bauwerke zur Wahrung der öffentlichen Sicherheit zu sehen. Dazu vergleicht man mathematisch vorausermittelte Deformationsgrößen mit den aus Messungen erhaltenen, um Gefahren rechtzeitig zu erkennen. Weiterhin dienen die Messungsergebnisse der Überprüfung und Vereinfachung statischer Berechnungsverfahren, die von zahlreichen Annahmen und Vereinfachungen ausgehen müssen.

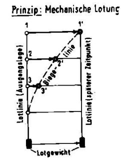
Um das Verhalten einer Staumauer (Kippung, Verschiebung, Durchbiegung, Verdrehung, Setzung) kontrollieren zu können, gelangen zahlreiche Messungsverfahren zur Anwendung. Dazu sind nach genauer Überlegung Meßpunkte auf Krone, am Fuß, auf der Luftseite und in den vertikalen Schächten und horizontalen Gängen im Mauerinnern angeordnet. Wir wollen uns kurz ein erstmalig in der Sowjetunion entwickeltes und in der Staumauer Bratsk erprobtes Verfahren anschauen, worüber mir ausführlich der Erfinder, Professor Muravev, berichtete.

Umkehrlotverfahren in der Staumauer Bratsk

Zur Ermittlung der Durchbiegung (Biegelinie) einer Staumauer verwendet man seit 40 Jahren die mechanische Lotung. In Kronennähe wird ein Draht befestigt, der in einem vertikalen Schacht hängt und am unteren Ende mit einem Gewicht von etwa 20 kp beschwert ist. Mit speziellen Ablesegeräten bestimmt man an den Meßpunkten die Abstände zum vertikalen Draht und ermittelt daraus die gesuchte Auslenkung der Punkte gegenüber der Ausgangslage der Lotlinie. Beim Umkehr- oder Schwimmlot erfolgen Messungen und Auswertungen in der eben beschriebenen Weise, nur wird ein anderes Prinzip zur Vertikalstellung der Lotlinie angewendet.

Am unteren Ende der Lotlinie, im Felsuntergrund, ist der Lotdraht im Bezugspunkt fest verankert. Das obere Drahtende ist mit einem Schwimmkörper verbunden, der sich in einem wassergefüllten Behälter unter der Auftriebswirkung in die Lotgerade durch den Bezugs-Ankerpunkt einstellt. Verschiebungen des Bauwerkes (Wassertank) gegenüber dem als unveränderlich angenommenen Bezugspunkt werden am Schwimmer abgelesen.

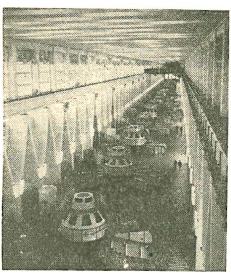


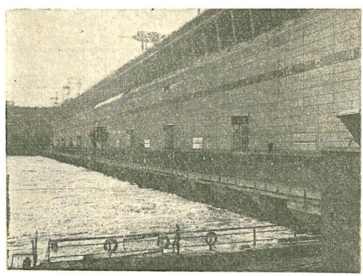


Der besondere Vorteil dieses Verfahrens ist, daß die Lotmessungen in der Mauer an einen Festpunkt, 20 m bis 50 m tief im Felsen, angeschlossen werden können.

Die kurzen Ausführungen lassen deutlich erkennen, wie wichtig die mathematisch-physikalische Ausbildung an unseren Oberschulen ist, um die erworbenen Kenntnisse im Beruf des Vermessungsingenieurs sicher anwenden zu können.

H. Werner





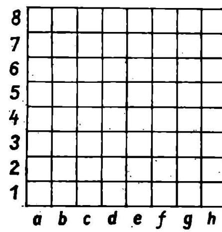
Mitten in der sibirischen Taiga, dort, wo sich noch vor elf Jahren die Bären tummelten, steht heute Bratsk, eine Großstadt mit 160000 Einwohnern. In ihrer Nähe befindet sich das zur Zeit größte Kraftwerk der Erde mit einer Kapazität von 4,5 Millionen kW. (Unsere Fotos zeigen das Maschinenhaus von außen sowie seine 20 Turbinen zu je 225000 kW, die ein Werk in Nowosibirsk lieferte.) Ein Staudamm von 5120 m Länge (davon 806 m Stahlbeton-Hochdamm), hinter dem ein künstliches Meer mit 12,2 Milliarden Kubikmetern Wasser liegt, sind seine technischen Merkmale. Bratsk verdrängte die Kraftwerkriesen an der Wolga und das amerikanische Grand Coulee auf die Plätze zwei, drei und vier. Bratsk ist das Glied einer Kette von Kraftwerken. Mit 5 Millionen kW und 6 Millionen kW wird vom 50. Jahr der Oktoberrevolution an das Kraftwerk von Krasnojarsk mit seinen 500000 kW Turbosätzen vorübergehend an die Weltspitze treten, bevor es von größeren sibirischen Brüdern verdrängt wird. — Im Jahre 1970 soll die Stromerzeugung der Sowjetunion 830 Milliarden Kilowattstunden betragen. In dieser Entwicklung nimmt die Energiewirtschaft Sibiriens einen hervorragenden Platz ein.

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. habil. N. Tschaikowski

Mechanische — Mathematische Fakultät
der Iwan-Franko-Universität Lwow

166 Die nebenstehende Zeichnung stellt ein Schachbrett dar. Es besitzt bekanntlich 64 Felder. Jedes Feld stellt ein Quadrat dar. Nun bilden z. B. die vier Felder (1, a), (1, b), (2, a), (2, b) oder die neun Felder (3, b), (3, c), (3, d), (4, b), (4, c), (4, d), (5, b) (5, c), (5, d) ebenfalls Quadrate, usw. Wieviel Quadrate dieser Art gibt es auf dem Schachbrett?



Russische Mathematiker / Naturwissenschaftler — durch die sowjetische Briefmarke gewürdigt


Nr. 2568
(Lipsia-Katalog)


1583


2911


1615


1964

Michail Wassiljewitsch Lomonossow
(geb. 19. 11. 1711 in Mischaninskaja, Gouvernement Archangelsk, gest. 15. 4. 1765 in Petersburg), begründete 1755 die erste russische Universität in Moskau; ein Denker und Forscher, der auf den verschiedenen Gebieten der Wissenschaft, besonders der Naturwissenschaften, neue Wege einschlug.

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski
(geb. 1. 12. 1792, gest. 24. 2. 1856), wirkte in Kasan. Bahnbrechende Untersuchungen zur nichteuklidischen Geometrie.

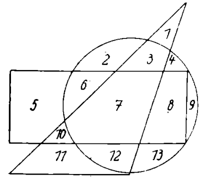
Konstantin Eduardowitsch Ziolkowski
(geb. 17. 9. 1857, gest. 19. 9. 1935). Während seiner Tätigkeit als Mathematik- und Physiklehrer in Kaluga legte er 1903 die Grundlagen der Theorie der Raketenbewegung und der wissenschaftlichen Astronautik.

Michail Wassiljewitsch Ostrogradski
(geb. 24. 9. 1801, gest. 1. 1. 1862), wirkte in Petersburg. Arbeitsgebiete: Integralrechnuug, Variationsrechnung, Theorie der Wärmeleitung, Elastomechanik.

Alexander Michailowitsch Ljapunow
(geb. 6. 6. 1857, gest. 3. 11. 1918), wirkte in Charkow und Petersburg. Richtungweisende Arbeiten zur Theorie der Differentialgleichungen und Hydrodynamik.

Zusammengestellt für Junge Philatelisten von Arbeitsgemeinschaftsleiter W. Unze, Sonderschule für Körperbehinderte, Leipzig.

Prof. Dr. habil. Lew Itelson empfiehlt:



Gut konzentrieren — gewissenhaft einprägen — umsichtig kombinieren — mathematisch denken

Welche Zahl (siehe Abbildung rechts oben) befindet sich

● in dem Gebiet, das sowohl dem Rechteck als auch dem Dreieck, jedoch nicht dem Kreis angehört;

● in derselben Figur oder denselben Figuren wie die Zahl 6. Wieviel Gebiete gibt es, der gleichzeitig zwei und nur zwei Figuren angehören?

Ohne Kommentar

1	2	4	8	16	..	64	
5	2	6	3	7	4	..	5
1	2	4	7	11	16	..	
3	4	6	10	..	34	66	

Sucht nach Synonymen!

Exponent — Verhältnis — Logarithmus — Tetraeder — Quotient — Konstante — Vierflächner — feststehender Wert — zweigliedriger Ausdruck

Richtige Aussage

Mit welchem Wort muß die folgende Aussage beginnen? ..... die vier Seiten eines Rechtecks gleichlang sind, ist es ein Quadrat.
obgleich — wenn — insofern — da — angenommen, daß

Ergänzt die folgenden Sätze!

● Eine allgemeine Beziehung, Regel oder ein allgemeines Prinzip heißt, in mathematischer Sprache ausgedrückt: ......

● Die Behauptung der Gleichheit zweier Ausdrücke wie z. B. $x + y = 5$ heißt: ......
Binom — Gleichung — Formel — Funktion — keines dieser Worte

■ Eine Größe, die im Verlauf derselben Untersuchung verschiedene Werte annehmen kann, heißt ....

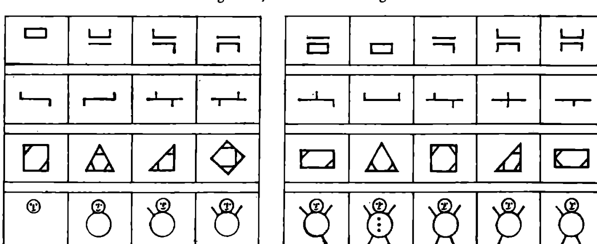
■ Das Verhältnis zweier Zahlen heißt ....
Koeffizient — Logarithmus — Quotient — Konstante — Variable — Resultat

Wenn die beiden ersten Aussagen wahr sind, so ist die dritte ......
wahr — falsch — unbestimmt

Franz ist jünger als Kurt.
Fritz ist jünger als Franz.
Kurt ist älter als Fritz.

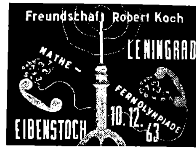
Es ist Beharrlichkeit nötig, um Mathematiker zu werden.
Kurt ist beharrlich.
Er wird ein guter Mathematiker.

Gib auf der rechten Seite eine Figur an, die die linke Folge fortsetzt!



↑ Lösung für dieses Beispiel ↑

Mathematischer Wettbewerb



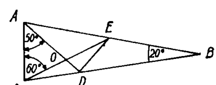
Oktober 1962 — Unsere Schule (OSI Eibenstock/Erzgeb.) hatte den Versuch unternommen, mit der 127. Schule in Leningrad in Erfahrungsaustausch über mathematische Probleme zu treten. Es war vereinbart worden, daß uns die sowjetischen Freunde in unseren Anstrengungen um die Verbesserung der Leistungen im Fach Mathematik durch Austausch von Aufgaben unterstützen. Höhepunkte dieser Arbeit sollten jährliche Fernolympiaden sein.
Obwohl in unserer Schule schon seit 1961 Zirkel und Kurse in Mathematik bestanden, war der Anfang nicht leicht. Die von Leningrad zur 1. Fernolympiade zwischen beiden Schulen gestellten Aufgaben verlangten hohes mathematisches Wissen und Können. Es wurde allen klar, daß nur eine noch bessere außerunterrichtliche und unterrichtliche Arbeit unsere kleinen Erfolge verbessern würde. Allein ein dritter und drei erste Plätze in den Kreisolympiaden Junger Mathematiker der DDR zeigen, daß wir vorangekommen sind.
Dieses Jahr stehen wir nun zum fünften Male im mathematischen Wettbewerb, der zu Ehren des 50. Jahrestages der Großen Sozialistischen Oktoberrevolution stattfindet und ein besonderer Höhepunkt werden soll.

W. Werner

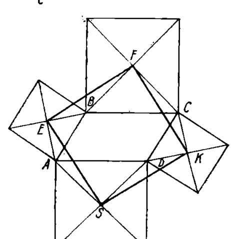
Ablauf der Wettbewerbe: Eröffnungsappell zu gleicher Zeit in beiden Schulen, anschließend Wettbewerb für die ca. 50 besten Jungen Mathematiker der Klassenstufen 5 bis 10 (Klausurdauer: 150 Minuten für 3 Aufgaben), Siegerehrung (Auszeichnung mit Urkunden und Preisen), Austausch der Wettbewerbsergebnisse; die Aufgaben werden im Wechsel von einer der beiden Schulen vorgeschlagen.

Задачи дла 7 класса

1. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине равен 20°. Из первой вершины угла при основании проведена прямая, отсекаюшая угол в 60° при основании. Из второй вершины угла при основании проведена прямая, образуюшая с основанием угол в 50°.
При продолжении, прямые пересекают равные стороны в точках Д и Е. При соединении точек Д и Е получаем треугольник ЕДО.
Найти углы треугольника.



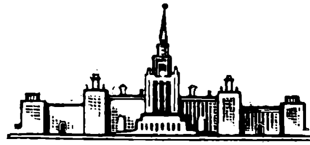
2. На сторонах параллелограмма построены квадраты. При соединении 4^x точек, образованных пересечением диагоналей квадратов, получается 4^x четырехугольник. Доказать, что это квадрат.



3. Разложить на множители:

$$X^4 - X^2(A^2+1) + A^2$$

Eine vorbildliche Jahresarbeit



Sehr geehrter Herr Chefredakteur!

Vielen Dank für Ihren Brief. Ich bin gern bereit, die von Ihnen an mich gerichteten Fragen zu beantworten:
Ich beschäftige mich schon seit langer Zeit außerschulisch mit mathematischen Problemen und war somit ständig auf der Suche nach neuen interessanten Aufgaben.
Bei der Internationalen Mathematikolympiade in Sofia (1966) bekamen wir von den sowjetischen Teilnehmern Aufgabensammlungen, die interessante und zum Teil schwierige Aufgaben enthielten. Da ich die russische Sprache gern habe, machte mir nicht nur das Lösen der Aufgaben, sondern auch das Übersetzen Freude. Anfangs habe ich oft ein mathematisches Wörterbuch zu Hilfe nehmen müssen, Später, als ich mir die im Text häufig vorkommenden Fachausdrücke eingeprägt hatte, ging das Übersetzen schneller. Wenn man regelmäßig alle neuen Vokabeln lernt, gelingt das Übersetzen bald ohne Wörterbuch. (Das würde ich jedem empfehlen!)
Die Lehrer unserer Schule baten mich nun, die Aufgaben und dazu von mir angefertigte Lösungen in einer Jahresarbeit zusammenzufassen. Hier habe ich besonders das mathematisch exakte Niederschreiben geübt.
In meiner Klasse haben noch drei weitere Schüler Jahresarbeiten geschrieben. Alle übersetzten Fachtexte aus dem Russischen. (Mathematikaufgaben aus der Analysis, Mathematikolympiade-Aufgaben, Physikolympiade-Aufgaben).
Die Auswertung der Übersetzungen ist meiner Ansicht nach noch nicht ausreichend. Zwar wurden einige Aufgaben im Mathematikzirkel besprochen; aber es gibt sicherlich noch viele, die sich für die Aufgaben interessieren.
Vielleicht ist es Ihnen aufgefallen, daß die Aufgabe 65 der Jahresarbeit fehlt. Mir ist zu dieser scheinbar so leichten Aufgabe bis heute noch kein elementarer Lösungsweg (ohne Differentialrechnung) eingefallen. Vielleicht findet ein Leser von *alpha* eine Lösung dazu? Ich würde mich freuen, diese zu erfahren.
Durch einen gegebenen Punkt innerhalb eines Winkels ist eine Gerade so zu legen, daß die durch die Schnittpunkte der Geraden mit den Schenkeln des Winkels begrenzte Strecke möglichst klein ist.
Vielleicht können Sie diese Aufgabe mit veröffentlichen!? . . .

Hochachtungsvoll

Ihr Reinhard Höppner

(EOS Elsterwerda)*

× Es ist zu beweisen, daß in einem gleichschenkligen Dreieck die Summe der Abstände eines Punktes der Basis von den Schenkeln konstant ist. **8**

× Vorhanden sind 13 Wägestücke, von denen jedes eine ganzzahlige Masse (in Gramm) hat. Es ist bekannt, daß man beliebige 12 von ihnen so auf die Schalen einer Waage legen kann — und zwar 6 auf jede Schale —, daß das Gleichgewicht eintritt. Es soll bewiesen werden, daß alle 13 Wägestücke dieselbe Masse haben.

× Es ist zu beweisen, daß für alle reellen Zahlen x, y, z gilt **9**

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq xy + yz + xz\,.$$

× Es ist zu beweisen, daß der Rest, der bei der Division einer Primzahl durch 30 entsteht, stets entweder gleich 1 oder wieder eine Primzahl ist.

× Es ist der folgende Satz zu beweisen: **10**
Wenn das Orthozentrum eines spitzwinkligen Dreiecks (d. i. der Schnittpunkt der drei Höhen) die drei Höhen in ein und demselben Verhältnis teilt, so ist das Dreieck gleichseitig.

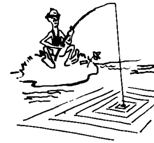
× Es ist zu beweisen, daß für alle natürlichen Zahlen, die größer als 1 sind, die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n < n^{\frac{n(n+1)}{2}}\,.$$

Auswahl der Aufgaben: Dr. R. Lüders

* R. Höppner war Teilnehmer der VIII. und IX. Internationalen Mathematikolympiade (d. Red.).

In freien Stunden
alpha heiter



Er denkt gradlinig

Knifflige Fragen

□ Welches Zeichen muß man zwischen die Zahlen 4 und 5 setzen, um eine Zahl zu erhalten, die größer als 4, aber kleiner als 5 ist?

□ In einer Familie sind 5 Söhne. Jeder Sohn hat eine Schwester. Wieviel Kinder sind im ganzen in der Familie?

□ Ein Balken wurde in drei Minuten in Stücke zu je $\frac{1}{2}$ m Länge zersägt, wobei jeder Schnitt 1 Minute dauerte. Wie lang war der Balken?

□ Aus zwei Zweien und einem Zeichen soll eine Zahl gebildet werden, die gleich $\frac{11}{5}$ ist.

P. J. Germanowitsch

Aus: Aufgaben für mathematische Schülerwettstreite, Verlag Volk und Wissen, Nr. 00042-2, MDN 1,25

○ Max schrieb auf einem Zettel die Zahl 86 und sagte zu Moritz: „Ohne irgendetwas zu schreiben, vergrößere diese Zahl um 12 und zeige mir die Antwort!“

○ Was ist größer: die Summe aller Ziffern oder ihr Produkt?

○ Es sind alle zehn Ziffern der Reihe nach geschrieben:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Welche Rechenzeichen muß man dazwischen setzen, um 100 zu erhalten?

○ Für die Numerierung der Seiten eines Wörterbuches verwendeten die Setzer 6869 Ziffern. Wieviel Seiten enthält das Buch?

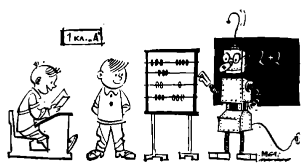
„Bum!“

Die Teilnehmer setzen sich in eine Runde und beginnen zu zählen: 1, 2, 3, 4, ... Wer eine Zahl erreicht, die entweder durch 7 teilbar ist oder 7 zur Endziffer hat, ruft: „Bum!“ und sein Nachbar zählt weiter. Wer sein „Bum!“ verpaßt, oder sein „Bum!“ nicht sofort herausplatzt, zahlt eine Strafe, gibt ein Pfand. Aber wir wünschen, daß ihr nicht nur eine sinnvolle Unterhaltung habt, sondern auch einmal nachdenkt:

○ Wievielmal wird sich das „Bum!“ beim Zählen bis 1000 wiederholen?

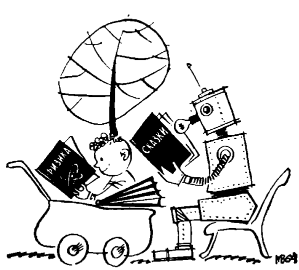
○ Wievielmal wird das „Bum!“ zweimal hintereinander auftreten?

Zusammengestellt von Prof. Dr. Tschaikowski, Lwow



Reportage aus der Zukunft

Aus: „Utschitelskaja gaseta“

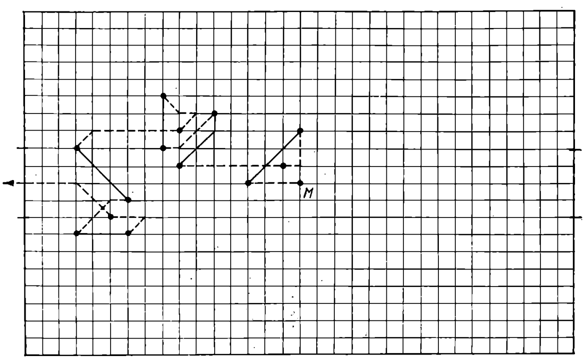


Aus: „Deutsche Lehrerzeitung“

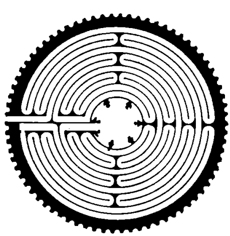
Football

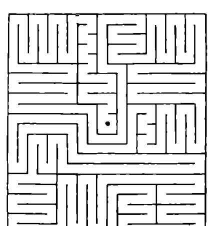
Günstige Spielfeldgröße: 32 Kästchen lang, 20 Kästchen breit, Tore 4 Kästchen breit. Jeder Spieler muß 3 Züge machen (ein Zug ist entweder eine Seitenlänge eines Kästchens oder eine Kästchendiagonale). Begonnen wird in der Mitte des Spielfeldes (M). Die Feldbegrenzung darf nicht berührt werden. Bereits gezogene Linien dürfen im Normalfall weder berührt noch gekreuzt werden. Gelingt es einem Spieler, an einem Gitterpunkt zu enden, von dem aus der Gegner, ohne die Regeln zu verletzen, nicht weiterspielen kann, darf er 6 Züge machen. Hierbei dürfen schon vorhandene Linien berührt oder gekreuzt werden. Sieger ist, wer die Torlinie seines Gegners überschreitet (Berühren zählt nicht als Tor!). Verwendet verschiedene Farben! Die Abbildung zeigt einen Sieg des Spielers, der mit gestrichelter Linie spielte.

(Unterhaltungsspiel,
von sowj. Teilnehmern an der VIII. IMO, Sofia 1966, vorgeführt)



Irrgärten





Lösungen: Komma (4,5); 6 Kinder; 2 m; 2,2; die Zahl 86 wird umgedreht, wir lesen 98 ab; das Produkt aller Ziffern ist Null. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9 = 100$; 1994 Seiten, $142 + 100 - 14 = 228$.

VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu den Aufgaben der Bezirksolympiade (21./22.1.1967)

Klassenstufe 7

1. *Lösungsweg* 1: (1) Sind p, q natürliche Zahlen $\geqq 1$, wobei p durch q teilbar ist, so ist p das kgV von p, q. (2) Bei gleichen Voraussetzungen ist q der ggT von p, q. (3) Das kgV von a, b, c ist das kgV von a und dem kgV von b, c. Also ist es nach (1) das kgV von a und b. Nochmals nach (1) folgt, daß es a ist. (4) Der ggT von a, b, c ist der ggT von c und dem ggT von a, b. Also ist er nach (2) der ggT von c und b. Nochmals nach (2) folgt, daß er c ist.

Lösungsweg 2: Es gilt (1) $a = bm$ mit ganzem m, (2) $b = cn$ mit ganzem n, also (3) $a = cnm$, und mn ist ganz. Aus $a = a \cdot 1$, (1), (3) folgt: a ist gemeinsames Vielfaches von a, b, c. Jedes gemeinsame Vielfache von a, b, c ist Vielfaches von a. Also ist a das kgV von a, b, c. Aus (3), (2), $c = c \cdot 1$ folgt: c ist gemeinsamer Teiler von a, b, c. Jeder Teiler von a, b, c ist Teiler von c. Also ist c der ggT von a, b, c.

2.* Die 54 Fuchsschritte holt der Hund mit 216 Hundeschritten auf.

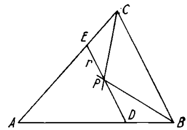
3. I. Angenommen, p sei eine Parallele der geforderten Art. Dann gibt es auf der Strecke DE einen Punkt P, so daß $\overline{BD} = \overline{DP}$ und $\overline{CE} = \overline{EP}$ gilt. Daraus folgt $\sphericalangle ABP \cong \sphericalangle DPB$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck) und $\sphericalangle DPB \cong \sphericalangle CBP$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen), also ist BP die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ABC$. Entsprechend folgt, daß CP die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$ ist. Daher kann eine Gerade p höchstens dann eine der gesuchten Parallelen sein, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten wird:

II. Man konstruiere die Winkelhalbierenden von $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle ACB$ und ziehe durch ihren Schnittpunkt P die Parallele p zu BC.

III. Ist eine Gerade p wie in II konstruiert, so ist sie eine gesuchte Parallele.

Beweis: Nach Konstruktion ist $\sphericalangle DBP \cong \sphericalangle CBP$ (da $\sphericalangle ABC$ durch BP halbiert wird) und $\sphericalangle CBP \cong \sphericalangle DPB$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen), also ist $\triangle BPD$ gleichschenklig, und zwar ist $\overline{BD} = \overline{DP}$. Ebenso folgt $\overline{CE} = \overline{EP}$ und daher $\overline{BD} + \overline{CE} = \overline{DE}$. Außerdem liegt P im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$, also schneidet p die Strecken AB und AC.

IV. Die Konstruktion II ist stets eindeutig durchführbar; denn die Winkelhalbierenden,



ihr Schnittpunkt P und die Parallele durch P zu BC existieren stets und sind eindeutig bestimmt. Nach III gibt es daher stets eine Parallele p der geforderten Art und nach I auch nur eine solche.

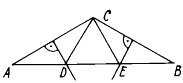
4. I.) $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$ kann z. B. mit $m = 15$, $a = 2$, $b = 14$ erreicht werden, wobei auch alle anderen Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind: $\frac{16}{15} = \frac{2}{15} + \frac{14}{15}$.

II.) $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{a}{n} = \frac{a(m+n)}{mn}$ kann z. B. mit $m = 3$, $n = 5$, $a = 2$ erreicht werden, wobei auch alle anderen Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind: $\frac{16}{15} = \frac{2}{3} + \frac{2}{5}$.

III.) $\frac{16}{15} = \frac{a}{m} + \frac{a}{m} = \frac{2a}{m}$ kann (zugleich mit den übrigen Bedingungen der Aufgabe nur) durch $m = 15$, $a = 8$ erreicht werden: $\frac{16}{15} = \frac{8}{15} + \frac{8}{15}$.

5. *Lösungsweg* 1: Die zweistellige Zahl ist darstellbar als $10a + b$ mit ganzen Zahlen a und b, für die $0 < a \leqq 9$ und $0 \leqq b \leqq 9$ gilt. Die Differenz aus der Anzahl ihrer Zehner und der Anzahl ihrer Einer ist daher $a - b$. Addiert man sie laut Aufgabe zu der zweistelligen Zahl, so erhält man:
$10a + b + a - b = 11a$; die erhaltene Zahl ist also durch 11 teilbar, w. z. b. w.
Lösungsweg 2: Laut Aufgabe werden zu der zweistelligen Zahl soviel Einer addiert, wie sie Zehner besitzt, und soviel Einer subtrahiert, wie sie Einer besitzt. Es entsteht daher eine zweistellige Zahl, bei der die Anzahl der Zehner gleich der der Einer ist. Alle derartigen Zahlen (11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99) sind durch 11 teilbar.

6. Die Basis des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle ABC$ muß AB sein, da das Dreieck sonst zwei Winkel von 120° hätte. Also ist
$\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle ABC$ (Gradmaß 30°). Die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten der Seiten AC und BC mit der Seite AB seien D bzw. E. Dann ist



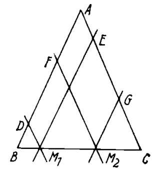
(1) $\overline{AD} = \overline{CD}$ (da D auf der Mittelsenkrechten von AC liegt), also $\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle BAC$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ACD) (Gradmaß 30). Daher hat der Winkel $\sphericalangle CDE$ ein Gradmaß von 60° (Außenwinkel im Dreieck $\triangle ACD$). Ebenso zeigt man
(2) $\overline{BE} = \overline{CE}$ und μ ($\sphericalangle CED$) $= 60°$. Also ist $\triangle CDE$ gleichseitig, und es folgt
(3) $\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{CE}$. Aus (1), (2), (3) folgt die Behauptung $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{BE}$.

Klassenstufe 8

1. Die Oberflächeninhalte der beiden Würfel seien O_1 bzw O_2, die Rauminhalte V_1 bzw. V_2. Dann gilt:

$a_1 : a_2 = 2 : 6 = 1 : 3$
$O_1 : O_2 = 6a_1^2 : 6a_2^2 : = 24 : 216 = 1 : 9$
$V_1 : V_2 = a_1^3 : a_2^3 = 8 : 216 = 1 : 27.$

2. Es gilt $\triangle DBM_1 \sim \triangle ABC$ (das folgt aus der Gleichheit von Stufenwinkeln an geschnittenen Parallelen). Also ist das Dreieck $\triangle M_1DB$ gleichschenklig und es gilt:
$\overline{BD} = \overline{M_1D}$. (1) Weiterhin gilt: (2)
$\overline{M_1E} = \overline{AD}$, da M_1EAD laut Konstruktion ein Parallelogramm ist. Aus (1) und (2) folgt, daß der halbe Umfang des Parallelogramms M_1EAD gleich der Länge des Schenkels AB ist. Entsprechend zeigt man, daß der halbe



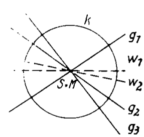
Umfang des Parallelogramms M_2GAF gleich der Länge des Schenkels AC ist. Da $\overline{AC} = \overline{AB}$ gilt, folgt, daß die Umfänge der betrachteten Parallelogramme gleich sind.

3.* Die Lösung ist 9prozentig.

4.* Die kleinste Probenzahl ist 9, die größte 45.

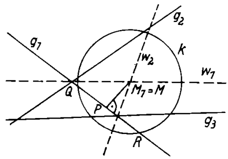
5. I. Angenommen, M sei der Mittelpunkt eines der gesuchten Kreise k. Die Sehnen, die k von g_1, g_2, g_3 abschneidet, sind dann gleich lang, also sind sie gleichweit von M entfernt. Daher liegt M auf einer Winkelhalbierenden w_1 von g_1, g_2 und auf einer Winkelhalbierenden w_2 von g_1, g_3.

a) Haben g_1, g_2, g_3 einen (und wegen ihrer Verschiedenheit dann auch nur einen) Punkt S gemeinsam, so gehen w_1 und w_2 durch S; außerdem ist $w_1 \neq w_2$; denn wäre $w_1 = w_2 = w$, so folgte $\sphericalangle (w, g_3) \cong \sphericalangle (g_1, w) \cong \sphericalangle (w, g_2)$, also $g_3 = g_2$, also $g_3 \parallel g_2$.
Somit ergibt sich $M = S$.



b) Haben g_1, g_2, g_3 keinen Punkt gemeinsam, so bilden sie nach Voraussetzung ein Dreieck D, und es folgt: M ist einer der 4 Schnittpunkte M_0, M_1, M_2, M_3 der Innen- und Außenwinkelhalbierenden von D.
Daher kann ein Kreis k höchstens dann die verlangte Eigenschaft haben, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten wird:

II. (a) Man schlage den Kreis k um S mit dem Radius von der Länge $\frac{s}{2}$. (b) Man wähle als M einen der 4 Punkte M_0, M_1, M_2, M_3. Von M fälle man das Lot MP auf g_1. Um P schlage man den Kreis mit dem Radius von der Länge $\frac{s}{2}$; er schneidet g_1 in zwei Punkten Q, R. Dann schlage man den Kreis k um M durch Q.



III. Ist ein Kreis k wie in II konstruiert, so hat er die verlangte Eigenschaft.
Beweis: Er schneidet von g_1 nach Konstruktion eine Strecke der Länge s ab und von g_2, g_3 je eine ebenso lange Strecke, da sein Mittelpunkt von g_1, g_2, g_3, gleichweit entfernt ist.
IV. Die Konstruktion II ergibt (a) genau einen Kreis, (b) genau 4 verschiedene Kreise. Nach III sind dies und nach I auch nur dies alle gesuchten.

6. a) Multipliziert man eine Zahl, die auf 5 endet, mit einer beliebigen ungeraden Zahl, so erhält man wieder eine Zahl, mit der Einerziffer 5. Das zu untersuchende Produkt enthält den Faktor 45, der auf 5 endet, und sonst nur ungerade Faktoren. Seine Einerziffer ist daher eine 5.
b) Man kann das Produkt in die Teilprodukte $31 \cdot 49$, $33 \cdot 47$, $35 \cdot 45$, $37 \cdot 43$ und $39 \cdot 41$ zerlegt denken. Jedes dieser Teilprodukte ist von der Form $(a - b)(a + b)$ mit $a = 40$ und $1 \leqq b \leqq 9$ und daher eine positive Zahl, die sicher kleiner als 2000 ist. Das gesamte Produkt ist also kleiner als 2000^5. Nun ist aber $2000^5 = 2000 \cdot 2000 \cdot 2000 \cdot 2000 \cdot 2000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 = 32 \cdot 1000000000000000$ eine 17-stellige Zahl. Daher kann das zu untersuchende Produkt keine 18stellige Zahl sein.

Klassenstufe 9

1. Laut Aufgabe gilt $p_1 = p_2 + 2$. Also gilt $p_1 + p_2 = p_2 + 2 + p_2 = 2p_2 + 2 = 2(p_2 + 1)$. Da jede Primzahl > 3 eine ungerade Zahl ist, ist $p_2 + 1$ gerade und $p_1 + p_2$ mithin durch 4 teilbar. Ferner sind p_2, $p_2 + 1$ und $p_2 + 2$ $(= p_1)$ drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen somit genau eine durch 3 teilbar ist. Da aber p_1 und p_2 Primzahlen größer als 3 sind, sind diese beiden Zahlen nicht durch 3 teilbar. Also ist $p_2 + 1$ durch 3 teilbar und damit $p_1 + p_2 = 2\ (p_2 + 1)$ durch 12 teilbar. Damit ist die Behauptung bewiesen.

2. Es seien $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AD} = x$ $\overline{BD} = y$, $\overline{CD} = z$ die Längen der Tetraederkanten. Dann gilt laut Aufgabe, wenn man den Umfang mit u bezeichnet:
(1) $a + b + c = u$ ($\triangle\ ABC$)
(2) $a + y + z = u$ ($\triangle\ DCB$)
(3) $x + b + z = u$ ($\triangle\ CDA$)
(4) $x + y + c = u$ ($\triangle\ BAD$).
Nach Addition dieser vier Gleichungen erhält man:
(5) $a + b + c + x + y + z = 2u$. Addiert man nun (1) und (2) und subtrahiert (5), so erhält man $a = x$. Entsprechend folgt aus (1), (3) und (5) $b = y$ und aus (1), (4) und (5) $c = z$.
Da die vier Dreiecke $\triangle\ ABC$, $\triangle\ DCB$, $\triangle\ CDA$ und $\triangle\ BAD$ mithin in ihren Seiten übereinstimmen, sind sie untereinander kongruent.

3. Für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck seien die Kathetenlängen mit a, b bezeichnet, die Hypotenusenlänge mit c. Dann ist $(a - b)^2$ als Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ, also gilt $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(a + b)^2 + \frac{1}{2}(a - b)^2 \geqq \frac{1}{2}(a + b)^2$. Wegen $c > 0$ und $a + b > 0$ folgt hieraus die Behauptung $c \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b)$.

4. Angenommen, p sei eine Primzahl, für die $2p + 1$ Kubikzahl ist. Dann gilt $2p + 1 = z^3$, wobei z eine natürliche Zahl ist.
Da $2p + 1$ ungerade ist, ist auch z ungerade. Es gilt daher $z = 2n + 1$ (n eine nicht negative ganze Zahl). Also gilt $2p + 1 = (2n + 1)^3 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1$ und damit $2p = 2n\ (4n^2 + 6n + 3)$ und $p = n\ (4n^2 + 6n + 3)$.
Da p Primzahl ist und der Faktor $4n^2 + 6n + 3$ eine natürliche Zahl größer als 2 ist, folgt für den anderen Faktor $n = 1$. Für $n = 1$ ist $p = 1 \cdot (4 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 3) = 13$ Primzahl und $2 \cdot 13 + 1 = 27$ tatsächlich Kubikzahl. Die einzige Primzahl p, für die $2p + 1$ Kubikzahl ist, ist daher die Zahl 13.

5. a) Nach den Bedingungen der Aufgabe gilt $v_1 > v_2$. Bei der Bewegung in verschiedenem Umlaufsinn erhält man die relative Geschwindigkeit von B bezüglich A durch Addition ihrer Geschwindigkeiten. Laut Aufgabe werden bei dieser relativen Geschwindigkeit jeweils 14 m in 24 s zurückgelegt, in 8 min also $\frac{14 \cdot 60 \cdot 8}{24}$ m $= 280$ m. Das ist die Länge des Kreisumfanges.

b) Nach dem Gesagten ist

$$v_1 + v_2 = \frac{14}{24}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 35\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}.$$

Bewegen sich die Punkte aber in gleichem Umlaufsinn, so erhält man die relative Geschwindigkeit von B bezüglich A durch Subtraktion der kleineren Geschwindigkeit v_2 von v_1. Laut Aufgabe und nach dem Ergebnis a) ist somit

$$v_1 - v_2 = \frac{280}{56}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}} = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}.$$

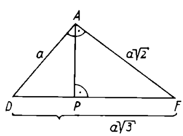
Die gesuchten Geschwindigkeiten betragen also

$$v_1 = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}} \text{ und } v_2 = 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}.$$

6. Auf diese Lösung muß aus Platzgründen verzichtet werden (d. Red.).

Klassenstufe 10

1. Die gesuchten Abstände sind sämtlich einander gleich, nämlich gleich der Länge der in einem Dreieck mit den Seiten von der Länge a, $a \cdot \sqrt{2}$, $a \cdot \sqrt{3}$ auf der letztgenannten Seite errichteten Höhe.



Wir betrachten ein solches Dreieck, etwa $\triangle ADF$. Es ist bei A rechtwinklig, da AD auf der Ebene ε_{ABEF} senkrecht steht. Die gesuchte Länge der Höhe AP ist daher, wie aus $\triangle ADP \sim \triangle DFA$ folgt,

$$h = \frac{a \cdot a \cdot \sqrt{2}}{a \cdot \sqrt{3}} = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{6}.$$

2. Wegen $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ gilt
$a(b-c)^2 + b(a-c)^2 + c(a-b)^2 \geqq 0$, d. h.
$ab^2 + ac^2 + a^2b + bc^2 + a^2c + b^2c - 6abc \geqq 0$.
Nach Addition von $9abc$ erhält man
$(bc + ac + ab)(a + b + c) \geqq 9abc$.
Durch Multiplikation mit der positiven Zahl $\frac{1}{abc(a+b+c)}$ folgt die Behauptung.

3. Es ist $\overline{EA} + \overline{AF} + \overline{FD} + \overline{DC}$
$= 63 + 50 + 38 + 49 = 200 = \overline{EC}$.
Daraus folgt, daß die Orte E, A, F, D, C in dieser Reihenfolge auf ein und derselben Geraden liegen. A, B, F sind die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem rechten Winkel $\sphericalangle ABF$. Dies folgt wegen $\overline{AB}^2 + \overline{BF}^2 = 30^2 + 40^2 = 50^2 = \overline{AF}^2$ aus der Umkehrung des Lehrsatzes des Pythagoras. Es sei Q der Fußpunkt des Lotes von B auf AF. Wegen $\triangle BFQ \sim \triangle AFB$ ist dann

$$\overline{BQ} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BF}}{\overline{AF}} = \frac{30 \cdot 40}{50} = 24 \text{ und}$$

$$\overline{QF} = \frac{\overline{BF}^2}{\overline{AF}} = \frac{40^2}{50} = 32. \text{ Also ist}$$

$$\overline{QD} = \overline{QF} + \overline{FD} = 32 + 38 = 70.$$

Schließlich erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle BQD$ nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$\overline{BD}^2 = \overline{BQ}^2 + \overline{QD}^2 = 24^2 + 70^2$$
$$= 4(12^2 + 35^2) = 4 \cdot 37^2 = 74^2$$

und damit $\overline{BD} = 74$. Die Entfernung von B nach D beträgt also 74 km.

4. Die gegebene Gleichung ist genau dann in x quadratisch, wenn $k \neq 1$ ist. Sie ist dann äquivalent mit der Gleichung

$$(1)\quad x^2 + \frac{1}{1-k}x + \frac{3-5k}{1-k} = 0.$$

Diese hat genau dann reelle Lösungen, wenn die folgenden Radikanden nicht negativ sind, und zwar die Lösungen

$$x_{1;2} = \frac{1}{2(k-1)} \pm \sqrt{\frac{1}{4(1-k)^2} - \frac{3-5k}{1-k}}$$
$$= \frac{1}{(2k-1)} \pm \sqrt{\frac{1-4(3-5k)(1-k)}{4(1-k)^2}}$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{-20k^2 + 32k - 11}}{2(k-1)} \quad *)$$

a) Die Gleichung (1) hat genau dann eine Doppellösung, wenn

$$-20k^2 + 32k - 11 = 0, \quad \text{das heißt,}$$
$$k^2 - \frac{8}{5}k + \frac{11}{20} = 0 \quad \text{ist.}$$

Das ist für $k = \frac{11}{10}$ und für $k = \frac{1}{2}$ und nur für diese k der Fall.

b) Für $k^2 - \frac{8}{5}k + \frac{11}{20} < 0$, $k \neq 1$, hat (1) zwei voneinander verschiedene reelle Wurzeln. Das ist der Fall für $\frac{1}{2} < k < 1$ und $1 < k < \frac{11}{10}$ und nur für diese k.

*) NB: Damit die letzte Gleichung richtig ist, hat man in ihr das Doppelvorzeichen passend zu wählen.

5. Nach der Definition der Wurzel und des Logarithmus existiert die linke Seite der gegebenen Ungleichung genau dann, wenn $x-9>0$ und $2x-1>0$ gilt. Dies ist genau für $x>9$ der Fall. Die gegebene Ungleichung ist dann äquivalent mit folgenden Ungleichungen

$$\frac{1}{2}\lg(2x-1)+\frac{1}{2}\lg(x-9)>1$$
$$\lg(2x-1)(x-9)>2$$
$$\lg(2x^2-19x+9)>\lg 100.$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn

$$(2x^2-19x+9)>100 \quad \text{d. h.,}$$
$$2x^2-19x-91>0 \quad \text{oder}$$
$$x^2-\frac{19}{2}x-\frac{91}{2}>0 \quad \text{gilt.}$$

Wegen $(x-13)\left(x+\frac{7}{2}\right)=x^2-\frac{19}{2}x-\frac{91}{2}$ ist die letzte Ungleichung äquivalent mit

$$(1)\quad (x-13)\left(x+\frac{7}{2}\right)>0.$$

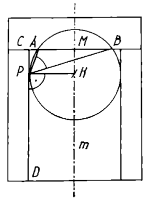
Da ein Produkt zweier reeller Zahlen genau dann positiv ist, wenn entweder beide Faktoren positiv oder beide Faktoren negativ sind, ist (1) genau dann erfüllt, wenn

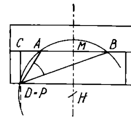
entweder (2) $x-13>0$ und $x+\frac{7}{2}>0$

oder (3) $x-13<0$ und $x+\frac{7}{2}<0$.

Aus (2) folgt $x>13$ und umgekehrt; aus (3) folgt $x<-\frac{7}{2}$ und umgekehrt. Davon ist wegen $x-9>0$ nur $x>13$ Lösung der gegebenen Ungleichung; diese ist somit für alle reellen Zahlen $x>13$ und nur für diese erfüllt.

6. Alle Winkel $\sphericalangle APB$ mit P auf CD können als Peripheriewinkel über der Sehne AB aufgefaßt werden. Die Mittelpunkte H_1 der entsprechenden Kreise liegen auf der Mittelsenkrechten m von AB. Da jeder Peripheriewinkel halb so groß ist wie der zugehörige Zentriwinkel, ist der Punkt H auf m zu finden, der (1) Mittelpunkt eines durch A und B gehenden und CD schneidenden oder berührenden Kreises ist und der (2) den unter diesen Umständen größten Zentriwinkel $\sphericalangle AHB$ ergibt. Der Winkel $\sphericalangle AHB$ ist um so größer, je kleiner die Länge r des Radius des CD berührenden oder schneidenden Kreises um H durch A und B ist. Wegen $r \geqq \overline{CM}$ (M sei der Mittelpunkt von AB) ist $\sphericalangle AHB$ genau dann am größten, wenn $r=\overline{CM}$ ist und wenn der zugehörige Kreis die Strecke CD berührt. In diesem Falle ist der gesuchte Punkt P der Berührungspunkt. Berührt





dieser Kreis aber die CD enthaltende Gerade außerhalb der Strecke CD, so ist r am kleinsten und damit $\sphericalangle AHB$ am größten, wenn H Mittelpunkt des Kreises durch A, B, D ist. In diesem Falle ist $P=D$. In beiden Fällen ist P eindeutig bestimmt.

Lösungen

Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. habil. U. Pirl:

1 Im Fall II. ist das eben erläuterte Verfahren nicht durchführbar: t_{21} würde negativ ausfallen. Das Fahrrad kann jetzt bei keiner Einteilung in der Zeit T_0 von A bis B gelangen, sondern frühestens nach $\frac{S}{v_2}$ ($>T_0$) Stunden in B ankommen.

Wir betrachten wieder eine beliebige Einteilung und setzen $T'=T_0+\delta$, dann ist $\delta>0$, weil jetzt in (3) nicht das Gleichheitszeichen stehen kann. Dabei gelange das Fahrrad bis zum Punkte C der Strecke AB. Die Länge der Strecke AC werde mit L bezeichnet. Dann gilt für die Summe der Zeiten, die die drei Freunde unterwegs sind

$$3(T_0+\delta)\geqq T_1+T_2+T_3$$
$$\geqq\frac{S}{v_1}+\frac{S}{v_3}+\frac{L}{v_2}+\frac{S-L}{v_1}; \qquad (4)$$

denn die nicht mit dem Fahrrad zurückgelegte Strecke CB der Länge $S-L$ muß mindestens zweimal zu Fuß bewältigt werden. Aus (3) und (4) ergibt sich

$$3\delta\geqq(S-L)\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right),\ \text{d. h.,}$$
$$S-L\leqq\frac{3\delta v_1 v_2}{v_2-v_1}. \qquad (5)$$

Derjenige, der in C vom Fahrrad steigt, braucht bis B noch mindestens $\frac{S-L}{v_3}$ Std.; denn er kann diese Strecke nicht schneller als mit Mopedgeschwindigkeit zurücklegen. Da er nicht früher als zur Zeit $\frac{L}{v_2}$ in C absteigen kann — das Fahrrad kann nicht eher in C sein — gilt

$$T_0 + \delta \geqq \frac{L}{v_2} + \frac{S-L}{v_3}$$
$$= \frac{S}{v_2} - (S-L)\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_3}\right). \qquad (6)$$

Aus (5) und (6) ergibt sich

$T_0 + \delta \geqq \frac{S}{v_2} - \frac{3\delta v_1 v_2}{v_2 - v_1}\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_3}\right)$ und hieraus

$$\delta \geqq \frac{v_3}{v_2} \cdot \frac{(S - T_0 v_2)(v_2 - v_1)}{v_2 v_3 + 2v_1 v_3 - 3v_1 v_2} \underset{\text{df.}}{\equiv} \delta_0 > 0. \quad (7)$$

Daß $\delta_0 > 0$ ist, erkennt man daraus, daß $S - T_0 v_2 > 0$ wegen $v_2 < H$ gilt und der Nenner wegen $v_1 < v_2 < v_3$ positiv ist. In (7) steht das Gleichheitszeichen genau dann, wenn es in (5) und (6) gleichzeitig steht.

Im Falle II. ist die gesuchte Minimalzeit $T_0 + \delta_0$. Um dies zu beweisen, genügt es wie im Falle I, eine Realisierung dieser Zeit anzugeben.

Ist $\delta = \delta_0$, so erhält man für L aus (6) und (7) mit dem Gleichheitszeichen den Wert L_0

$$L_0 = \frac{T_0 v_3 - S}{v_3 - v_2} v_2 + \delta_0 \frac{v_2 v_3}{v_3 - v_2} > 0$$

und aus (5) und (7), wenn dort die Gleichheitszeichen stehen,

$$L_0 = S - \frac{3\delta_0 v_1 v_2}{v_2 - v_1} < S.$$

Bezeichnet man noch mit C_0 denjenigen Punkt der Strecke AB, für den die Strecke AC_0 die Länge L_0 hat, so legt jeder der drei Freunde die Strecke AB in der Zeit $T_0 + \delta_0$ zurück, wenn folgendermaßen verfahren wird:

1. F_2 fährt von A bis C_0 mit dem Fahrrad und danach bis B mit dem Moped. Dabei legt er die Strecke AB wegen (6) und (7) mit den Gleichheitszeichen in der Zeit $T_0 + \delta_0$ zurück. Das Verfahren ist genau dann durchführbar, wenn er nach der Zeit $\frac{L_0}{v_2}$ in C_0 das Moped vorfindet.
2. F_3 fährt die erste Hälfte der Strecke AC_0 mit dem Moped und läuft dann bis B zu Fuß. Das ist unabhängig von den beiden anderen sicher durchführbar.
3. F_1 geht die erste Hälfte der Strecke AC_0 zu Fuß, fährt dann mit dem Moped bis C_0 und läuft das letzte Stück bis B zu Fuß. Dies ist durchführbar, da F_3 mit dem Moped die Mitte von AC_0 eher erreicht als F_1 zu Fuß.

F_1 und F_3 kommen dabei gleichzeitig in C_0 und zwar nach $\frac{L_0}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3}\right)$ Std. an. Das ist, weil der Fall II vorliegt, früher als F_2, so daß sich F_2 wie beschrieben verhalten kann. Für $L = L_0$ und $\delta = \delta_0$ stehen in (5) und (6) die Gleichheitszeichen, folglich stehen dann auch in (4) beide Gleichheitszeichen. Da das linke nur dann steht, wenn alle drei Freunde gleichzeitig in B ankommen, erreichen bei der angegebenen Einteilung alle drei B gleichzeitig. Dabei kommt auch das Moped in B an, während das Fahrrad an der Stelle C_0 stehen bleibt. Wegen (6) ist $\frac{S}{v_2} > T_0 + \delta_0$, so daß das Fahrrad nicht in der Zeit $T_0 + \delta_0$ von A bis B gelangen kann, d. h., wenn die Freunde möglichst schnell von A nach B kommen wollen, müssen sie das Fahrrad unterwegs stehen lassen.

Eine Realisierung des Falles II. wäre folgendermaßen denkbar: $v_1 = 15$ km/h (Langstreckenläufer), $v_2 = 20$ km/h, $v_3 = 50$ km/h. Dann ist

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3}\right) = \frac{10+3}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 10} = \frac{13}{300} < \frac{1}{20} = \frac{1}{v_2}.$$

47 Planetarische Lebewesen
Lösung der Aufgabe von Prof. Dr. H. Karl:

Der Schüler Hans Dietrich Gronau, EOS „Friedrich Engels", Klassenstufe 10, Neubrandenburg, sandte uns die vorbildliche Lösung zu der Aufgabe von Herrn Prof. Dr. H. Karl, die wir nachstehend original wiedergeben:

Zur Lösung führe ich folgende Bezeichnungen ein:

	$x_1 \triangleq a, b, c$ von K_1
a-Beine (Anzahl)	$x_2 \triangleq a, b, c$ von K_2
b-Flügel (Anzahl)	$x_3 \triangleq a, b, c$ von K_3
c-Fühler (Anzahl)	$x_4 \triangleq a, b, c$ von K_4

$\rightarrow a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_4 \quad b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_4$
$c_1 \neq c_2 \neq c_3 \neq c_4$
$a_1 > a_4;\ b_2 > b_3;\ c_3 > c_1$
$a_2 > b_2 \quad b_1 \geqq a_1 \quad b_3 \geqq a_3 \quad b_4 \geqq a_4 \quad (1)$
$b_4 > c_4 \quad c_1 \geqq b_1 \quad c_2 \geqq b_2 \quad c_3 \geqq b_3$

Aus den Ungleichungen von (1) folgt:

$c_3 > c_1 \geqq b_1 \geqq a_1 > a_4 \qquad (2)$
$a_2 > b_2 > b_3 \geqq a_3. \qquad (3)$

Aus (2) und (3) folgt, daß $b_4 = 8$, denn
$b_1 \neq b_2 \neq b_3 \neq b_4$ und
$b_1 < 8;\quad b_2 < 8;\quad b_3 < 8.$
$\rightarrow$ 1. Fall: $b_1 = 4 \qquad (4)$
$\rightarrow$ aus (4) und (3) folgt:
$b_2 = 6 \quad b_3 = 2 \rightarrow a_3 = 2$
aus (2) und (4) folgt: $a_1 = 4 \quad a_4 = 2.$
a_3 und a_4 stehen in Widerspruch.
$\rightarrow$ 2. Fall: $b_1 = 6 \qquad (5)$
$\rightarrow$ aus (5) und (3) folgt:
$b_2 = 4;\quad b_3 = 2;\quad a_3 = 2$
$\rightarrow$ aus (2) und (5) folgt: $c_1 = 6;\quad c_3 = 8$
aus (2) und (3) folgt:
$a_1 < c_3 \leqq 8;\ a_4 < a_1 < 8;\ a_3 < b_2 = 4$
$\rightarrow a_2 = 8;$ da $a_4 < a_1 \rightarrow a_1 = 6;\ a_4 = 4.$
Da $c_2 \geqq b_2$ (1) und $c_2 \neq c_1 \neq c_3 \rightarrow c_2 \leqq 4$
$b_2 = 4 \rightarrow c_2 = 4$
$c_4 = 2$

Es ergibt sich dann folgende Zusammenstellung:

K_1	Beine	6	Flügel	6	Fühler	6
K_2	„	8	„	4	„	4
K_3	„	2	„	2	„	8
K_4	„	4	„	8	„	2

Das Vergleichen dieser Lösungen mit den Aussagen bestätigt die Richtigkeit dieser Lösung.

Prof. Dr. H. Karl spricht dem „prächtigen Jungen“ für diese Leistung seine Anerkennung aus und schreibt an die Redaktion: „Die vorstehende Lösung ist in allen durchgeführten Schlüssen richtig und bedarf in dieser Hinsicht keiner Korrektur. Lediglich die formale Wiedergabe der in der Aufgabe formulierten Bedingungen ist nicht ganz einwandfrei, denn aus

$a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_4$ folgt noch nicht, daß auch die Ungleichungen $a_1 \neq a_3$, $a_2 \neq a_4$ und $a_1 \neq a_4$ gelten. Will man dies berichtigen, so kann entweder die zweite Ungleichungskette $a_2 \neq a_4 \neq a_1 \neq a_3$ hinzugefügt werden oder aber statt der beiden eine andere Art der Formulierung gewählt werden, z. B. folgende, die zugleich berücksichtigt, daß entsprechend mit den b- und c-Werten zu verfahren ist. Zur Lösung führt man zweckmäßig folgende Bezeichnungen ein: a_ν, b_ν bzw. c_ν seien die Anzahlen der Beine, Flügel bzw. Fühler der Käferart K_ν, $(\nu = 1, 2, 3, 4)$. Dann gilt auf Grund der Aufgabenstellung $a_\nu \neq a_\mu$, $b_\nu \neq b_\mu$ und $c_\nu \neq c_\mu$ für $\nu \neq \mu$, $(\nu, \mu = 1, 2, 3, 4)$. Die weiteren Bedingungen lauten dann $a_1 > a_4$, $b_2 > b_3$ usw. wie im Lösungstext.“

80 Lösung der Aufgabe von Prof. Dr.-Ing. habil. G. Clemens:

1. *Lösungsweg:* Die Anwendung des Sinussatzes auf das mit den Seiten S_1, S_2 und L gebildete Dreieck (Abb. 4) liefert

$$\frac{S_1}{L} = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(180 - (\alpha + \beta))} = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$S_1 = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot L.$$

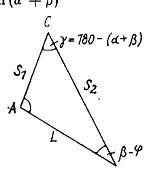


Abb. 4

Da nun $\sin(\alpha + \beta)$ von φ unabhängig ist, gilt

a) S_1 hat ein positives Maximum $S_1^{(1)}$, wenn $\sin(\beta - \varphi_1) = 1$

b) $S_1 = S_1^{(2)}$ ist gleich Null, wenn $\sin(\beta - \varphi_2) = 0$

c) S_1 hat ein negatives Maximum $S_1^{(3)}$, wenn $\sin(\beta - \varphi_3) = -1$, somit folgt aus

a) $\sin(\beta - \varphi_1) = 1$
die Bedingung $\beta - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, also $\varphi_1 = \beta - \frac{\pi}{2}$,

b$_1$) $\sin(\beta - \varphi_2) = 0$ die Bedingung $\beta - \varphi_2 = 0$, also $\varphi_2 = \beta$

b$_2$) $\sin(\beta - \bar{\varphi}_2) = 0$ die Bedingung $\beta - \bar{\varphi}_2 = \pi$, also $\bar{\varphi}_2 = \beta - \pi$

c) $\sin(\beta - \varphi_3) = -1$
die Bedingung $\beta - \varphi_3 = \frac{3}{2}\pi$,
also $\varphi_3 = \beta - \frac{3}{2}\pi$, das heißt,

a) S_1 erreicht als Zugkraft das Maximum, wenn L senkrecht auf dem Stab 2 steht und nach oben zeigt (Abb. 5a). Es ist dann

$$S_1^{(1)} = \frac{L}{\sin(\alpha + \beta)}$$

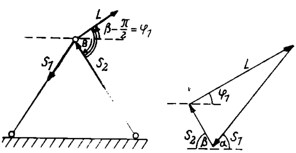


Abb. 5a Lageplan Kräfteplan

b) S_1 ist gleich Null, wenn L in die Richtung des Stabes 2 zeigt. Es gibt zwei um 180° verschiedene Lagen, einmal ist S_2 ein Druckstab (Abb. 5b$_1$) und einmal ist S_2 ein Zugstab (Abb. 5b$_2$).

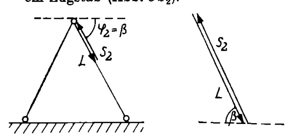


Abb. 5b$_1$ Lageplan Kräfteplan

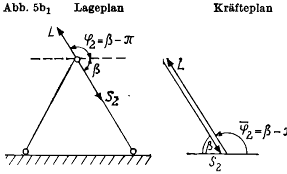


Abb. 5b$_2$ Lageplan Kräfteplan

c) S_1 erreicht als Druckkraft das Maximum, wenn L senkrecht auf dem Stab 2 steht und nach unten zeigt (Abb. 5c). Es ist dann

$$S_1^{(3)} = \frac{L}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

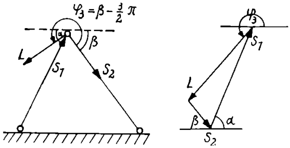


Abb. 5c **Lageplan** **Kräfteplan**

2. *Lösungsweg* (rein geometrische Lösung): In geometrischer Deutung verlangt die Aufgabe, ein Dreieck ABC (das Krafteck) zu zeichnen (Abb. 4), bei dem der Winkel $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ und die Seite $\overline{AB} = L$ gegeben sind und in dem eine der Seiten $\overline{AC} = S_1$ bzw. $\overline{BC} = S_2$ einen Extremwert annimmt. Zur Lösung wird der Peripheriewinkelsatz benutzt. Beachtet man, daß die größte Sehne eines Kreises der Durchmesser ist, so ist damit aus der Schar der unendlich vielen Dreiecke mit gegebenem γ und L dasjenige Dreieck bestimmt, das der Aufgabenstellung entspricht. Die Konstruktion der Seiten des Kraftecks ist in Abb. 6 durchgeführt.

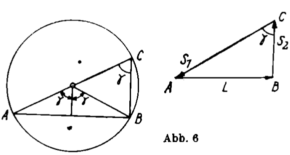


Abb. 6

3. *Lösungsweg:* Da die in Abb. 3 eingezeichneten Kräfte im Gleichgewicht stehen, gilt die Vektorgleichung

$$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{L} = 0,$$

der die beiden skalaren Gleichungen

$$-S_1 \cos\alpha + S_2 \cos\beta + L\cos\varphi = 0$$
$$S_1 \sin\alpha + S_2 \sin\beta + L\sin\varphi = 0$$

entsprechen.

Dieses System hat die Lösung

$$S_1 = \frac{-(\cos\alpha\sin\beta - \sin\varphi\cdot\cos\beta)}{-(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)}\cdot L = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha + \beta)}\cdot L$$

$$S_2 = \frac{\cos\alpha\sin\varphi + \sin\alpha\cos\varphi}{-(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)}\cdot L = -\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\alpha + \beta)}\cdot L$$

und liefert somit die schon auf dem ersten Lösungsweg gefundene Formel.

alpha - heiter (1/67)

Silbenrätsel: Außenwinkel, Radius, Cantor, Hektoliter, Inkreis, Mittelpunkt, Exponent, Durchmesser, Ebene, Sekante (Setzfehler: Li-mes statt lim-es) —*Archimedes.* — Es gibt mindestens 3 Schüler und höchstens 720 Schüler dieser Schule, die am gleichen Tag Geburtstag haben. $731 - 11 = 720$;
$730 : 365 = 2$ und $2 + 1 = 3$. —

3	17	7
13	9	5
11	1	15

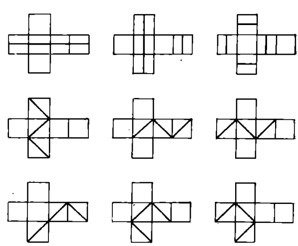
$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot 320 = 135$$

Im Gefäß bleiben 135 g der Substanz. — 250 g (ein Stück) Markenbutter kosten 2,50 MDN; für 870 g sind demnach 8,70 MDN zu zahlen. — Unter 150001 Menschen gibt es wenigstens zwei Personen, die die gleiche Anzahl von Kopfhaaren besitzen. Moskau hat über 6 Millionen Einwohner. $39 \cdot 150001 = 5850039$. Aus $5850039 < 6000000$ folgt die Richtigkeit der Behauptung. — Scherzfragen: Schachtel; Kreisdurchmesser; Summe; Stammbruch.

alpha - heiter (2/67)

Wortschatz im Sechseck: Sieben, Lambda, Kepler, Faktor, Radius, Minute, Sektor, Klasse, Winkel. — $a = 0$; $b = 1$; $c = 2$; $d = 4$; $e = 6$; $f = 5$; $g = 9$.
Nicht im Netz verfitzen:



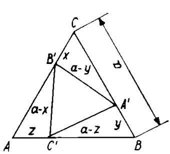
Die unvermutete Pointe: $20x = 25(x - 12)$; $x = 60$; $V = 1200$ Liter. — Folgende Kombinationen sind möglich: 10 (A); 0 (B); 0 (C) — 7; 1; 1 — 5; 4; 0 — 4; 2; 2 — 3; 0; 4 — 2; 5; 1 — 1; 3; 3 — 0; 8; 0 — 0; 1; 5 —

In der ersten Schale waren n Äpfel ($n = 1, 2, 3, 4, \ldots$); in der zweiten und dritten Schale lagen je $n + 3$ Äpfel. Die Aufgabe besitzt beliebig viele Lösungen. —

W(10)67 Aus 8) folgt: Nach Stralsund fährt entweder der Physiker oder der Mathematiker.
Aus 5) und 6) folgt: Der Physiker fährt nach Stralsund.
Zwischenergebnis: Der Chemiker fährt nach Schwedt, der Mathematiker nach Greifswald, der Physiker nach Stralsund.
Aus 5) folgt: Der Physiker ist 30 Jahre alt.
Aus 6) und 7) folgt: Herr Neumann ist Chemiker.
Zwischenergebnis: Der Chemiker ist 39 Jahre alt, der Mathematiker ist 43 Jahre alt, der Physiker ist 30 Jahre alt.
Aus 7) folgt: Der 39jährige Chemiker heißt Neumann.
Aus 4) und 9) folgt: Der Physiker heißt Müller.

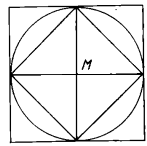
W(5)68 Die drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, welche die Maßzahlen der Seitenlängen des Dreiecks sind, lassen sich durch $n - 1$, n und $n + 1$ symbolisieren. Die Summe dieser drei Zahlen beträgt $3n$.
Aus $3n = 42$ folgt $n = 14$. Die Längen der Dreieckseiten sind demnach 13 cm, 14 cm und 15 cm.

W(6)69 Aus der Zeichnung ist folgendes zu entnehmen: $\triangle\, BA'C' \cong \triangle\, CB'A' \cong \triangle\, AC'B'$ (sws).



Jedes dieser Dreiecke besitzt einen Winkel von 60°; nach Konstruktion gilt $\overline{AC'} = \overline{BA'} = \overline{CB'}$; aus $\overline{AB'} = a - x$, $\overline{CA'} = a - y$ und $\overline{BC'} = a - z$ folgt wegen $x = y = z$, daß die Strecken $\overline{AB'}$, $\overline{CA'}$ und $\overline{BC'}$ ebenfalls gleich lang sind. Aus der Kongruenz dieser Dreiecke folgt $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'A'}$. Das Dreieck $A'B'C'$ ist somit ebenfalls gleichseitig.

W(7)70 Wir zeichnen einen Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = 3$ cm. Danach ziehen wir durch M zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser; ihre Schnittpunkte mit der Kreislinie sind die Eckpunkte

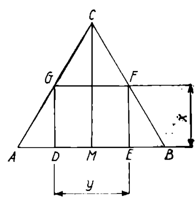


des ersten Quadrates. Durch jeden Eckpunkt zeichnen wir eine Gerade, die jeweils senkrecht zu einem bereits gezeichneten Durchmesser steht. Die Schnittpunkte dieser vier Geraden sind die Eckpunkte des zweiten Quadrates.

$A_1 = 4 \cdot \frac{3 \cdot 3}{2}\ \text{cm}^2 = 18\ \text{cm}^2$;

$A_2 = 6 \cdot 6\ \text{cm}^2 = 36\ \text{cm}^2$; $A_1 : A_2 = 1 : 2$.

W(8)71 Es sei $DEFG$ das einbeschriebene Rechteck mit den Seiten $\overline{EF} = \overline{GD} = x$ und $\overline{DE} = \overline{FG} = y$.



Dann folgt nach dem Strahlensatz

$$y : c = (h - x) : h,$$

also $\quad y = \frac{c\,(h - x)}{h}$. Für den Flächeninhalt des Rechtecks $DEFG$ gilt daher:

$$\begin{aligned} A = xy &= \frac{x\,c\,(h - x)}{h} = \frac{c}{h}\,[hx - x^2] \\ &= \frac{c}{h}\left[\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{4} + hx - x^2\right] \\ &= \frac{c}{h}\left[\frac{h^2}{4} - \left(\frac{h^2}{4} - h\,x + x^2\right)\right] \\ &= \frac{c}{h}\left[\frac{h^2}{4} - \left(\frac{h}{2} - x\right)^2\right] \leqq \frac{c}{h} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{c\,h}{4}. \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt hat also genau dann den größten Wert, wenn $\frac{h}{2} - x = 0$, d. h.

$x = \frac{h}{2}$ und $y = \frac{c}{2}$ ist.

Lebendige Mathematik

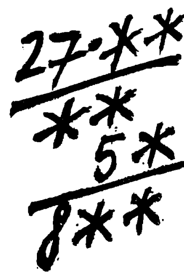
Auf den folgenden 2 Seiten stellen wir interessante Bücher aus der Sowjetunion vor, deren Inhalt für Euch und Euer Steckenpferd, die Mathematik, das richtige „Futter“ ist.

Schachno, K. U.

Sammlung von Aufgaben aus der Elementarmathematik mit erhöhter Schwierigkeit

(Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности.)

3., verb. Aufl. Minsk 1966. 478 Seiten mit 259 Abb.
Halbleinen. 4,75 MDN
Bestellnummer VII A-1688
In russischer Sprache.



Nagibin, F. F.

Mathematische Schatulle

(Математическая шкатулка.)

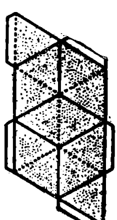
2. Aufl. Moskau 1961. 166 Seiten. Illustr.
Halbleinen. 1,55 MDN
Bestellnummer III-3344a
In russischer Sprache.

Poswjanski, A. D. u. N. N. Ryshow

Aufgabensammlung zur darstellenden Geometrie

(Сборник задач по начертательной геометрии.)

3. Aufl. Moskau 1966. 280 Seiten. Illustr.
Halbleinen. 2,55 MDN
Bestellnummer VII-A 1719
In russischer Sprache.



Ostrowski, A. I.

75 Aufgaben der Elementarmathematik — einfach, aber . . .

(75 задач по элементарной математике — простых, но . . . .)

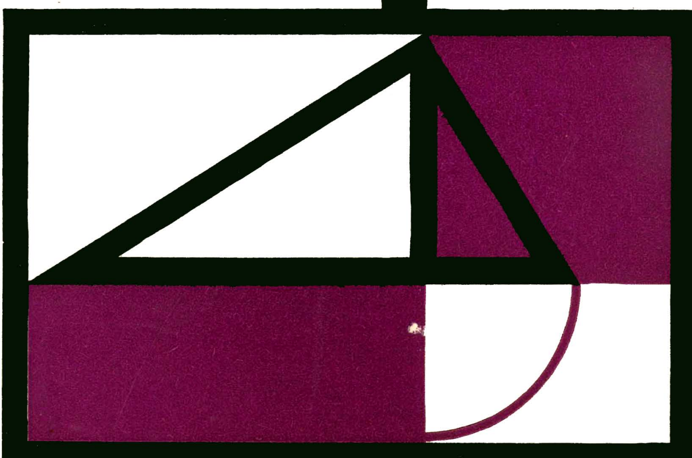
Moskau 1966. 132 Seiten. Illustr.
Broschiert. —,75 MDN
Bestellnummer VII A-1599
Die Formulierung der Aufgaben ist fast immer überaus einfach, aber sie sind interessant wegen der Originalität des Lösungsweges.
In russischer Sprache.

2. Дописать к 523 ... три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8 и 9.

Index 31059

Mathematische Schüler-zeitschrift

alpha



6

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967
Preis 0,50

alpha

Mathematische Schülerzeitschrift

Volk und Wissen
Volkseigener Verlag Berlin

1. Jahrgang 1967
Heft 6

Anschrift der Redaktion:
Redaktion *alpha* · 7027 Leipzig · Postfach 14
Anschrift des Verlags:
Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin · 108 Berlin · Lindenstraße 54a · Tel.: 200541
Postscheckkonto: Berlin 132626
Erscheinungsweise: zweimonatlich, Einzelheft 0,50 MDN, im Abonnement zweimonatlich (1 Heft) 0,50 MDN
Zu beziehen durch die Deutsche Post oder den Buchhandel, Bezug für Westdeutschland und Westberlin durch den Buchhandel, für das Ausland durch Deutscher Buch-Export und -Import GmbH, 701 Leipzig, Leninstraße 16
Für unverlangt eingesandte Manuskripte kann keine Haftung übernommen werden
Fotos: Zentralbild/Tass, Berlin (S. 162): Postkarten: Montenegroturist, Titograd (S. 165); H. Büchel, Tansania (S. 171); Archiv: Inst. f. Ernährung, Potsdam-Rehbrücke (S. 179); Archiv: OS Effelder (S. 192); Vignetten: Loff, Leipzig (III. Umschlagseite)
Satz und Druck: Buchdruckerei Frankenstein KG. 701 Leipzig
Veröffentlicht unter der Lizenz Nr. 1545 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR

Redaktionsschluß: 1. 10. 1967

Inhalt

* bedeutet: Artikel bzw. Aufgaben für Schüler ab der angeführten Klassenstufe geeignet

Als Diplommathematiker in Dubna

Das *Vereinigte Institut für Kernforschung* in Dubna wurde 1956 gegründet. Es wird von zehn sozialistischen Ländern Europas und Asiens gemeinsam betrieben. Wissenschaftler aus diesen Ländern arbeiten für kürzere oder längere Zeit in Dubna. Ein Teil des heutigen vereinigten Institutes bestand schon früher als sowjetisches Institut.

Das *Vereinigte Institut für Kernforschung* besteht aus einer Reihe von Laboratorien, z. B. dem Laboratorium für Hohe Energien, zu dem der große Beschleuniger für Protonen gehört, dem Laboratorium für Kernprobleme, dem Laboratorium für theoretische Physik, in dem ich arbeite, u. a. Dubna ist eine kleine Stadt, ungefähr 150 km nördlich von Moskau gelegen, genau dort, wo der bekannte Moskau-Kanal am Moskauer Meer endet und die Wolga das Moskauer Meer wieder verläßt. Da um die Stadt herum noch der Fluß Dubna fließt, der in die Wolga mündet, und andererseits unter dem Moskau-Kanal hindurchführt, könnte man auch sagen, daß Dubna auf einer Insel liegt.

Ein Teil der Stadt Dubna, in dem die Wissenschaftler und das technische Personal wohnen, der sogenannte Institutsteil der Stadt, ist erst mit dem Institut gebaut worden, mitten im Wald am Ufer der Wolga. Es wurde nur soviel Areal abgeholzt, wie unbedingt nötig war, um Platz für Häuser und Straßen zu schaffen. Kleinere asphaltierte Wege führen einfach zwischen den Bäumen hindurch, manchmal sogar um sie herum. Diese ideale Gestaltung des Wohngebietes und der künstlich errichtete Strand an der Wolga bieten in der Freizeit gute Erholungsmöglichkeiten. Die Laboratorien des Institutes liegen unmittelbar neben dem Wohngebiet, so daß man in fünf bis fünfundzwanzig Minuten zur Arbeitsstelle gelangt. Nur der große Beschleuniger liegt etwas tiefer im Wald, auch aus Sicherheitsgründen. Wir sind im Sommer 1966 nach Dubna gekommen. Meine Frau arbeitet als Physikerin im Institut. Unser kleiner Junge geht hier in die Tageskrippe und der große besuchte bisher den Kindergarten. Jetzt kommt er hier in die Schule. Natürlich wird überall nur Russisch gesprochen, so daß unsere Kinder diese Sprache nach einem Jahr schon gut beherrschen. Im letzten Jahr im Kindergarten lernen die Kinder übrigens auch schon Englisch. Ich habe von 1959 bis 1963 in Leipzig Mathematik studiert und dann dort auch promoviert (den Doktorgrad erworben). Hier arbeite ich als Mathematiker im Laboratorium für theoretische Physik. Gemeinsam mit einem sowjetischen Physiker habe ich ein Zimmer mit zwei Schreibtischen, einer Wandtafel und zwei Wandschränken. Die Arbeitszeit beginnt 8.45 Uhr. In den ersten Stunden am Vormittag beschäftigt man sich meistens mit Problemen, die man gerade in Arbeit hat. Wenn das Gehirn noch ausgeruht ist, ist die Wahrscheinlichkeit natürlich am größten, neue Lösungen zu finden. Dieser Teil der täglichen Arbeit kann als die eigentliche Forschungsarbeit bezeichnet werden, weil man da versucht, mit seinem Wissen neue Resultate zu erzielen. In unserem Arbeitskreis arbeiten wir mit an der Entwicklung einer Theorie, die die Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen erklärt. Zu den Elementarteilchen gehören die bekannten Bausteine des Atoms, das Proton, das Neutron und das Elektron, aber auch noch viele andere Teilchen, z. B. die sogenannten Mesonen oder Hyperonen. Obwohl schon viele wichtige Ergebnisse von Wissenschaftlern aus der ganzen Welt erzielt wurden, konnte noch keine vollständige *Theorie der Elementarteilchen* entwickelt werden. Vielleicht liegt es daran, daß erst noch geeignete mathematische Methoden entwickelt werden müssen. Sicher wird manch einer von euch jungen Lesern dieser Zeitschrift in wenigen Jahren als Mathematiker oder Physiker bei der Lösung dieser interessanten Probleme mitarbeiten.

Die zweite Tageshälfte nutzt man meistens dazu, sich weitere Kenntnisse anzueignen. In einer großen Bibliothek findet man die dazu geeignete Literatur. Benötigt man ein Buch, das noch nicht in Dubna ist, so braucht man es nur zu bestellen. Wöchentlich einmal werden diese Bücher aus den großen Bibliotheken Moskaus geholt. Täglich kommen mehrere neue Arbeiten von Wissenschaftlern aus der ganzen Welt in Dubna an, die dann in der Bibliothek ausliegen und die man natürlich aufmerksam verfolgen muß.

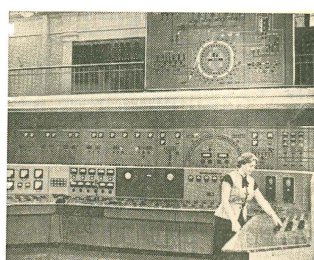
Ihr wißt ja selbst, wie schnell beim Lösen von Aufgaben die Zeit vergeht. Um deshalb an jedem Tag das nötige Pensum zu schaffen, muß man sich die Arbeit genau einteilen und mit größter Disziplin an die Arbeit gehen. Je gewissenhafter man sich schon von der Schule her gerade diese Arbeitsdisziplin antrainiert, desto mehr wird man dann als Wissenschaftler leisten können. Das ist genau so wie bei einem Leistungssportler.

Mehrere Male in der Woche kommen die Wissenschaftler in Gruppen in Seminaren zusammen. Sie berichten über ihre neuesten Forschungsergebnisse oder auch über Forschungsergebnisse anderer Wissenschaftler. Gesprochen wird dabei russisch. Außerdem kann man von Dubna aus einmal in der Woche bei einem der weltbekannten sowjetischen Mathematiker, die in Moskau arbeiten, Vorlesungen oder Seminare besuchen. Bisher habe ich wöchentlich an einem Seminar im Steklow-Institut, dem Mathematischen Institut der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, teilgenommen.

Ein- oder zweimal in der Woche ist abends Russischunterricht. Alles was man in russisch schon kann, ist einem sofort von Nutzen, ob im täglichen Leben, etwa beim Einkaufen, oder in den wissenschaftlichen Diskussionen. Alles was man noch nicht kann oder vergessen hat, muß man sich hier genau so mühevoll erlernen wie in der Schule. Gerade auch denjenigen, die einmal Mathematiker oder Physiker werden möchten, kann man nur raten, Fremdsprachen gründlich zu lernen, weil man später doch mit Wissenschaftlern aus vielen Ländern zusammenarbeiten muß. Das beginnt schon bei den Betreuern und Teilnehmern internationaler Mathematikolympiaden.

Soviel für heute aus Dubna, dem Zentrum der Kernforschung der sozialistischen Länder.

G. Laßner



Hauptgebäude und zentrale Schaltanlage des Synchrophasotrons

Heiße Tage in Cetinje

Bericht über die IX. Internationale Mathematikolympiade 1967

IX. IMO 3.-12. VII 1967 JUGOSLAVIJA

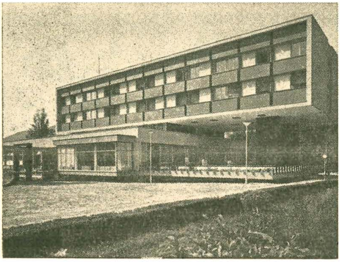
Wir hatten uns vierzehn Tage gemeinsam in Berlin intensiv auf den Wettbewerb vorbereitet. Nun wurden die acht Mitglieder der DDR-Mannschaft feierlich in Berlin-Schönefeld verabschiedet. Eine IL-18 der Interflug trug uns über Zagreb nach Beograd, der Hauptstadt der SFR Jugoslawien. Hier erwarteten uns Vertreter der DDR-Botschaft. Der vierstündige Aufenthalt wurde mit einer Stadtrundfahrt ausgefüllt. Der Blick von der alten Burg auf das Häusermeer und den Zusammenfluß von Save und Donau wird uns lange im Gedächtnis bleiben. In Cetinje — einer Kleinstadt von 11000 Einwohnern, in über 600 m Höhe gelegen — kamen wir lange nach Mitternacht an. Vom Flugplatz in Dubrovnik wurden wir mit einem Autobus abgeholt. Es war ein schönes Zeichen der Gastfreundschaft, daß wir nach fünfstündiger Fahrt im Hotel ein warmes Abendbrot erhielten. Zu unserer großen Freude wohnten wir in modernen Zweibettzimmern, jeweils mit kleinem Vorraum und Bad. Am nächsten Tag galt es, sich für den bevorstehenden Wettbewerb auszuruhen. Trotzdem fanden wir noch Zeit, uns in der von Karstgebirgen umgebenen ehemaligen Hauptstadt Montenegros umzusehen. Sie war zu Ehren der Olympiade mit Fahnen bunt geschmückt. Die Einwohner dieses idyllischen Städtchens hatten auf vielfältige Weise für eine rechte Stimmung für den Wettbewerb gesorgt, der am 5. und 6. Juli im Rathaus ausgetragen wurde. 99 Teilnehmer aus 13 Ländern wurden in je einer vierstündigen Klausur (an jedem der beiden Tage) vor drei wirklich schwere Aufgaben gestellt. Man mußte alle Kraft und alle Fähigkeiten einsetzen, um die „harten Nüsse“ zu knacken.

An den darauffolgenden Tagen wurden wir mit Autobussen zum herrlichen Strand der Adria gefahren. Während wir uns in den Wellen tummelten, Freundschaften mit den Jungen Mathematikern der Teilnehmerländer schlossen, eifrig mathematische Aufgaben und politische Probleme diskutierten, hatten Delegationsleiter und Betreuer oft bis in die Nacht hinein mit der Korrektur unserer Arbeiten zu tun. Erst nach der (zweistündigen) Abschlußsitzung der Jury konnten Betreuer und Mannschaften gemeinsame Fahrten durch das herrliche Montenegro und Dalmatien unternehmen. An einem Tage ging es durch ein Flußtal, manchmal dicht an Abhängen mehrerer hundert Meter hoher Berge entlang, zum Biograder See. An einem anderen Tage fuhren wir in den bekannten Badeort Dubrovnik, den einer der Olympiadeteilnehmer als ein *lebendiges Museum* bezeichnet hat. Man kann den Reiz und die Schönheit dieser alten, von starken Mauern umgebenen Adriastadt kaum beschreiben.

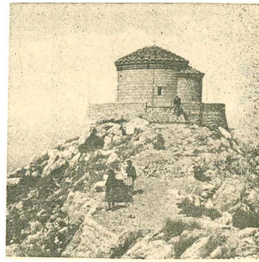
Am 12. Juli versammelten sich die Teilnehmer der IMO, unter denen eine überaus herzliche und freundschaftliche Atmosphäre herrschte, noch einmal zu einem Empfang, den der Volksbildungsminister der SFR Jugoslawiens gab. Bei der anschließenden Siegerehrung im Rathaus von Cetinje konnten wir die Urkunden entgegennehmen. Die Freude war groß, als wir drei erste, drei zweite und einen dritten Preis bekamen. Das war wohl Grund genug, am Abend beim *Ball der Jugend* fröhlich zu feiern.

Die Tage in Cetinje haben allen gut gefallen, auch den Schweden, Engländern, Franzosen und Italienern, die das erste Mal an der Olympiade teilnahmen. Sie haben versprochen, bei der X. IMO wieder dabei zu sein. So konnten bei der Abreise viele sagen: „Auf Wiedersehen in Moskau zur X. IMO!“

R. Höppner, EOS Elsterwerda



Cetinje, Hotel Park — Unterkunft für die Delegationsleitungen und einige Mannschaften (darunter die DDR-Mannschaft)



Der Berg Lovčen mit dem Grabmal von Njegoš — ein Ausflugsziel im bizarren Karstgebirge

Fakten - Fakten - Fakten - Fakten ...

Schirmherr der IX. IMO: Josip Broz Tito, Präsident der SFR Jugoslawien — Vorsitzender der Jury: Frau Prof. Ilič-Dajovič (Beograd), — Einziges Mädchen der IX. IMO: D. Staneva, VR Bulgarien — Durchführung eines Symposiums (wissenschaftliche Tagung) unter dem Thema: Probleme der Förderung mathematischen Nachwuchses — Einladung an weitere Länder für die X. IMO: Belgien, Dänemark, Finnland, Norwegen und Österreich — Auftrag der Jury an das Ministerium für Volksbildung der UdSSR: Ausarbeitung eines Entwurfs des Statuts der Internationalen Mathematikolympiaden

DDR-Mannschaft — IX. IMO 1967

Christoph Bandt EOS Greifswald (Kl. 11)	1. Preis
Stefan Heinrich EOS Heinrich Hertz, Berlin (Kl. 10)	1. Preis
Reinhard Höppner EOS Elsterwerda (Kl. 12)	1. Preis
Wolfgang Burmeister 55. OS Dresden (Kl. 8)	2. Preis
Gert Siebert EOS Heinrich Hertz, Berlin (Kl. 12)	2. Preis
Ulrich Zähle ABF Walter Ulbricht, Halle (Kl. 11)	2. Preis
Joachim Fritz EOS Cottbus (Kl. 11)	3. Preis
Werner Vogt EOS Ilmenau (Kl. 12)	

Urteil des Fachmannes

Allgemein ist zu den Aufgaben zu sagen, daß ihr Schwierigkeitsgrad beträchtlich über dem des Vorjahres lag. Erfreulicherweise ist man damit zum gewohnten Niveau der IMO zurückgekehrt. Ein höherer Schwierigkeitsgrad bietet zumindest zwei Vorteile: Erstens empfindet der Schüler eine größere Befriedigung, wenn er sich an schwierigen Aufgaben bewährt hat, und zweitens können die Leistungen der Schüler exakter beurteilt werden. Das führt letzten Endes zu einer gerechteren Verteilung der Preise. Da sicher angenommen werden kann, daß der Leistungsstand der diesjährigen Olympiadeteilnehmer im Durchschnitt nicht unter dem des Vorjahres lag, wird der höhere Schwierigkeitsgrad auch aus folgendem ersichtlich: Im diesem Jahr konnten nur 53% aller erreichbaren Punkte vergeben werden, während es im vorigen Jahr 75% waren. In diesem Jahr wurde nur fünfmal die volle Punktzahl (42 Punkte) erreicht, 1966 (bei nur 72 Teilnehmern) elfmal. Wir freuen uns besonders, daß zwei dieser fünf Schüler unserer Mannschaft angehörten. Wir können mit dem Abschneiden unserer Mannschaft sehr zufrieden sein. Auch in diesem Jahre mußten wir jedoch wieder feststellen, daß viele ganz elementare Fehler gemacht wurden. Insbesondere gab es diesmal Schwierigkeiten im Umgang mit einfachen Ungleichungen. Zum Teil sind diese Fehler mit Zeitnot zu erklären. In Zukunft muß außerdem noch mehr auf eine mathematisch einwandfreie und saubere Darstellung des Lösungsweges geachtet werden.

H. Bausch

Aufgaben

Erster Klausurtag

1. In einem Parallelogramm $ABCD$ sei $\overline{AB} = a$ die Länge der Seite AB, $\overline{AD} = 1$ die Länge der Seite AD und α das Maß des Winkels $\sphericalangle\, DAB$. Das Dreieck ABD sei spitzwinklig.
Man beweise: Die vier Kreise K_A, K_B, K_C, K_D vom Radius 1, deren Mittelpunkte die Eckpunkte A, B, C, D sind, überdecken das Parallelogramm dann und nur dann, wenn

$$a \leqq \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha \text{ gilt.}$$

(6 P., $\varnothing$ 3,59 P. $\triangleq$ 60 %)*

2. In einem Tetraeder habe genau eine Kante eine Länge, die größer als 1 ist. Man zeige, daß dann für das Volumen des Tetraeders $V \leqq \frac{1}{8}$ gilt. (7 P., $\varnothing$ 3,93 P. $\triangleq$ 56 %)*

3. Es seien k, m und n positive ganze Zahlen, wobei $m + k + 1$ eine Primzahl größer als $n + 1$ ist. Wir führen die Bezeichnung $c_s = s(s+1)$ ein. Man beweise, daß das Produkt

$$(c_{m+1} - c_k)(c_{m+2} - c_k)\cdots(c_{m+n} - c_k)$$

durch das Produkt $c_1 c_2 \cdots c_n$ teilbar ist.
(8 P., $\varnothing$ 3,03 P. $\triangleq$ 38 %)*

Zweiter Klausurtag

4. Es seien zwei spitzwinklige Dreiecke $A_0B_0C_0$ und $A'B'C'$ gegeben. Man konstruiere ein Dreieck ABC, welches dem Dreieck $A'B'C'$ ähnlich (wobei die Punkte A, B, C den Punkten A', B', C' in der angegebenen Reihenfolge entsprechen) und dem Dreieck $A_0B_0C_0$ umschrieben (wobei AB durch C_0, BC durch A_0 und CA durch B_0 verläuft) ist. Anschließend konstruiere man von allen Dreiecken dieser Art dasjenige mit dem größten Flächeninhalt.
(6 P., $\varnothing$ 4,14 P. $\triangleq$ 69 %)*

5. Man betrachte die Folge $\{c_n\}$

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_8 \\ c_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_8^2 \\ &\;\;\vdots \\ c_n &= a_1^n + a_2^n + \cdots + a_8^n \\ &\;\;\vdots \end{aligned}$$

wobei $a_1, \ldots, a_8$ reelle Zahlen sind, von denen wenigstens eine verschieden von 0 ist. Es sei bekannt, daß unendlich viele Glieder c_n dieser Folge gleich 0 sind. Unter dieser Voraussetzung bestimme man alle n, für die $c_n = 0$ gilt! (7 P., $\varnothing$ 3,13 P. $\triangleq$ 45 %)*

6. Bei einem Sportwettkampf wurden m Medaillen im Laufe von n Tagen ($n > 1$) verliehen. Am 1. Tage wurden 1 Medaille und $\frac{1}{7}$ der übrigen $m - 1$, am 2. Tage 2 Medaillen und $\frac{1}{7}$ des nun verbliebenen Restes verliehen usw. Schließlich wurden am $n$ten Tage gerade n Medaillen vergeben, ohne daß noch welche übrig blieben. Wieviel Tage dauerte der Wettkampf und wieviel Medaillen wurden insgesamt verliehen? (8 P., $\varnothing$ 4,48 P. 56 %)*

* bedeutet: erreichbare Punkte: 6; erreichte Durchschnittspunktzahl (in Bezug auf alle Teilnehmer): 3,59 (absolut), 60 (in Prozent)
(Die Lösungen dieser Aufgaben findet der interessierte Leser in Heft 1/68 der Zeitschrift „Mathematik in der Schule", d. Red.)

	VIII. IMO				IX. IMO					
Preise:	1. Pr.	2. Pr.	3. Pr.	Sonderpr.	1. Pr.	2. Pr.	3. Pr.	Diplom	Gesamtpktz.	+
VR Bulgarien	—	1	3	—	1	—	1	1	159	47,3
CSSR	—	1	2	—	—	1	3	—	159	47,3
DDR	3	3	—	—	3	3	1	—	257	76,5
Frankreich	nicht teilgen.				—	—	—	—	41	39,0++
Großbritannien	nicht teilgen.				1	2	4	1	231	68,8
Italien	nicht teilgen.				—	1	1	—	110	43,7+++
SFR Jugoslawien	—	2	1	—	—	—	3	—	136	40,5
Mongolische VR	—	—	—	1	—	—	1	—	87	25,9
VR Polen	1	4	1	—	—	—	1	—	101	30,1
SR Rumänien	1	1	2	—	1	1	4	—	214	63,7
Schweden	nicht teilgen.				—	—	2	—	135	40,2
UdSSR	5	1	1	—	3	3	2	1	275	81,8
Ungarische VR	3	2	1	—	2	3	3	—	251	74,7

+ Verhältnis der erreichten Punkte zu den erreichbaren (in Prozent)

++ Die französische Mannschaft bestand nur aus fünf Schülern. Diesen konnten wegen verspäteter Anreise nur die Aufgaben des zweiten Wettbewerbstages gestellt werden.

+++ Die italienische Mannschaft bestand nur aus sechs Schülern.

Darstellung von Punkt und Gerade in zugeordneten Normalrissen

In Heft 4 wurden einfachste Konstruktions- und Ergänzungsaufgaben in zugeordneten Normalrissen gestellt, ohne die theoretischen Grundlagen hierfür vorauszuschicken. Die Lösung dieser Aufgaben ist gewiß nicht schwer gefallen, weil die dargestellten Werkstücke anschaulich leicht vorstellbar sind. Um aber auch bei weniger anschaulichen Aufgaben nicht zu versagen, soll nun dargelegt werden, wie man zur zeichnerischen Darstellung eines räumlichen Gebildes mittels zweier in einer Ebene liegender Risse (Grund- und Aufriß) gelangt.
Man geht dazu von einer *horizontalen Bildebene* $\underline{\pi}_1$ und einer *vertikalen Bildebene* π_2 aus. Die beiden Bildebenen stehen also senkrecht aufeinander. Sie schneiden sich in einer waagerecht liegenden Geraden, die als *Rißachse* x_{12} bezeichnet wird. Die so eingeführten Bildebenen teilen den Raum in vier *Quadranten* ein. Im allgemeinen bringt man das darzustellende Objekt K in den ersten Quadranten; d. h. es liegt über $\underline{\pi}_1$ und vor π_2. Nun projiziert man K senkrecht auf $\underline{\pi}_1$ und senkrecht auf π_2. Die Projektionsstrahlen als *Abbildungsmittel* stehen also in beiden Fällen senkrecht (normal) auf den zugehörigen Bildebenen. Die Art der hier vorliegenden Abbildungen bezeichnet man deshalb auch als *Normalprojektion.* Da bei einer Normalprojektion die Projektionsstrahlen sämtlich untereinander parallel sind, ist sie ein Sonderfall der *Parallelprojektion.*
Nach diesem Vorgang erhält man zwei Bilder von K, nämlich den *Grundriß* $\underline{K}'$ in $\underline{\pi}_1$ und den *Aufriß* K'' in π_2. Durch Aufklappen der beiden Rißtafeln in die Zeichenebene bei festgehaltener Rißachse erhält man ein verebnetes Bildpaar von K, an dem sich nun mit Zirkel, Winkel und Lineal weitere Konstruktionen durchführen lassen. Um der natürlichen Anschauung entgegenzukommen, wird die Rißachse auch in der Zeichenebene waagerecht gelegt. Ferner fällt bei der für K vorausgesetzten Lage der Grundriß unter und der Aufriß über die Rißachse. (Bild 1)

Weiterhin ist hervorzuheben, daß nach dem Aufklappen der Bildebene in die Zeichenebene die Bilder P' und P'' eines Punktes P auf einer Senkrechten zur Rißachse x_{12} liegen. Man sagt: P' und P'' befinden sich in *Monge'scher Lage.* Die als Konstruktionshilfe unentbehrliche Verbindungsgerade von P' und P'' bezeichnet man als die zu P gehörige *Ordnungslinie.*

Die Entfernung von P'' bis zur Rißachse gibt den *ersten Tafelabstand* und die Entfernung von P' bis zur Rißachse den *zweiten Tafelabstand* von P an. Liegt P im ersten Quadranten, so erscheint in der Zeichenebene der Aufriß P'' von P oberhalb der Rißachse und der Grundriß P' von P unterhalb der Rißachse. Im Verlaufe einer Konstruktion kann es vorkommen, daß Punkte aus anderen Quadranten mit herangezogen werden müssen. Dann darf man sich nicht irritieren lassen, wenn z. B. einmal der Aufriß eines solchen Punktes in der Zeichenebene unterhalb der Rißachse und der Grundriß oberhalb der Rißachse liegen. Es muß stets Klarheit darüber bestehen, daß sich in der Zeichenebene zwei Bildebenen überdecken. Durch eine konsequente Bezeichnungsweise der Bildpunkte lassen sich Fehler weitgehend vermeiden.
Gibt man sich die Lage von zwei Punkten A und B durch ihre Grund- und Aufrisse vor, so lassen sich diese durch eine Gerade g miteinander verbinden. Auch von dieser Geraden g gibt es zwei Bilder, nämlich den Grundriß g' und den Aufriß g''. Mit Hilfe

zweier Pappstücke, die — aufeinander senkrecht gestellt — die Bildebenen $\underline{\pi}_1$ und π_2 darstellen, veranschauliche man sich die Lage von g bezüglich der Bildebenen gemäß den vorgegebenen Rissen. (Bild 2)

Für weitere Konstruktionsaufgaben sind zwei Punkte ausgezeichneter Lage der Geraden g von Bedeutung; dies sind die Schnittpunkte von g mit $\underline{\pi}_1$ und π_2. Man bezeichnet sie auch als *Spurpunkte* $\underline{G}_1$ bzw. G_2 von g. Um sie konstruktiv zu finden, muß man sich zunächst klar darüber sein, daß der Aufriß sämtlicher Punkte von $\underline{\pi}_1$ wie auch der Grundriß sämtlicher Punkte von π_2 in die Rißachse fällt. Im Schnittpunkt von g'' mit der Rißachse liegt also der Aufriß $\underline{G}_1''$ des Punktes $\underline{G}_1 = [g\,\underline{\pi}_1]$ (lies $\underline{G}_1$ ist gleich dem Schnittpunkt von g mit $\underline{\pi}_1$). (Bild 3) Der Grundriß des ersten Spurpunktes liegt im Schnittpunkt von g' mit der Ordnungslinie durch $\underline{G}_1''$. Völlig analog verfährt man bei Bestimmung des zweiten Spurpunktes G_2 von g. Im Schnittpunkt von g' mit der Rißachse liegt G_2. Der Aufriß von G'_2 liegt im Schnittpunkt von g'' mit der Ordnungslinie durch G'_2. Da der Aufriß von G_2 und auch der Grundriß von G_1 jeweils mit den Originalpunkten zusammenfallen, gilt $G_1 = G_1'$ und $G_2'' = G_2$.

E. Schröder

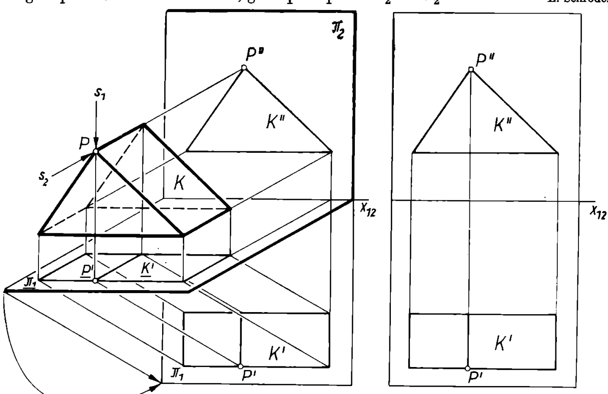
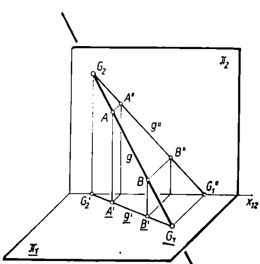


Bild 1



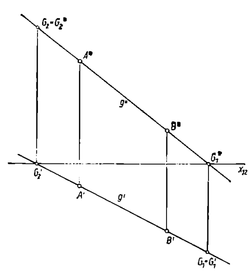


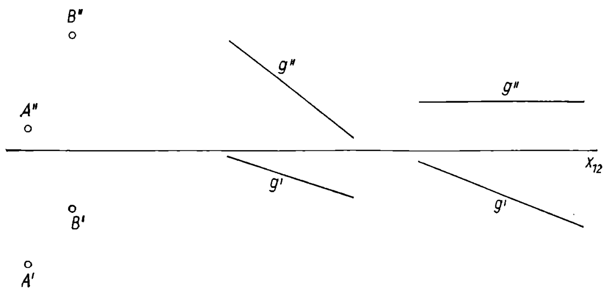
Bild 2 Darstellung der Bildebenen $\underline{\pi}_1$ und $\underline{\pi}_2$ sowie der Geraden g in einem Schrägriß

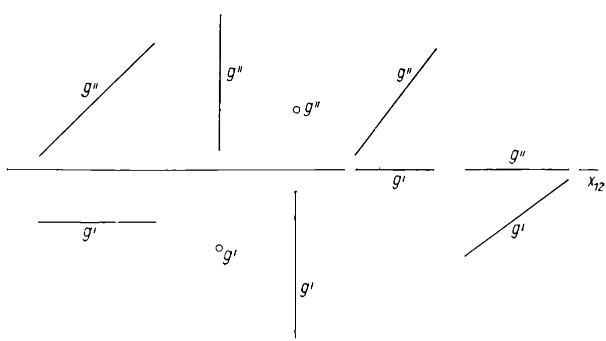
Bild 3 Darstellung der Geraden $g = [AB]$ in zugeordneten Normalrissen

Aufgaben zur Darstellenden Geometrie

... Zeichne Grund- und Aufriß der die Punkte A und B verbindenden Geraden g ein! Konstruiere den ersten und zweiten Spurpunkt von g!

... Konstruiere in den folgenden Bildern den ersten und zweiten Spurpunkt von g und bestimme Grund- und Aufriß jenes Punktes, für den der erste und zweite Tafelabstand gleich groß sind! Gib eine Erklärung für besondere Lösungen!

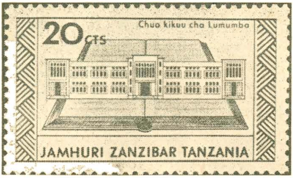




Als Mathematiklehrer in Tansania

Seit Januar 1967 bin ich als Fachlehrer für Mathematik und *General Science* am Lehrerbildungsinstitut in Sansibar tätig. Voraussichtlich wird sich mein Einsatz über drei Jahre erstrecken. Alle meine Kollegen aus der DDR, die in Sansibar oder Tansania Mainland unterrichten, sind Naturwissenschaftler bzw. Mathematiker. Diesen Fächern widmet man hier größte Aufmerksamkeit und greift gern auf die Kenntnisse und Erfahrungen unserer Lehrer zurück. Ausbildungsziel am *Teacher Training College* ist: Lehrer für die Klassen 1 bis 8 der sogenannten Primary Schools. Durch das Fach *General Science*, das erst seit Ende 1965 in den neu entworfenen Lehrplan aufgenommen wurde, erhalten die Lehrerstudenten Grundkenntnisse in allen naturwissenschaftlichen Fächern (im Überblick). Besonders betont werden die Fächer Biologie — entsprechend der Bedeutung dieses Faches für die Landwirtschaft als wichtigsten Wirtschaftszweig der Insel — Physik, Chemie, Mineralogie, Astronomie und physische Geographie.
Der Mathematikunterricht hier am Institut und in den Schulen ist noch nicht so modern gestaltet wie in der DDR. Auf Grund umfangreicher Versuche einer Gruppe interessierter Lehrer ist aber zu erwarten, daß man bereits im nächsten Schuljahr bestimmte Ergebnisse verallgemeinern und beispielsweise mengentheoretische Begriffsbildungen in den unteren Klassen der Schulen einführen wird, die dann schrittweise ausgebaut werden sollen. Wöchentlich führe ich (fakultativ) eine Mathematikstunde mit Olympiadeaufgaben oder mit Material aus *alpha* durch. 50 Prozent meiner Studenten beteiligen sich. Die Tätigkeit mathematischer Arbeitsgemeinschaften und die Durchführung von Leistungsvergleichen steckt noch in den Kinderschuhen. Wir können nicht sagen, daß unsere Arbeit einfach ist. Man muß sich zum Beispiel daran gewöhnen, ausschließlich englisch zu sprechen. Es erfordert besonders im Unterricht Konzentration. Aber die Freundlichkeit der Menschen, mit denen wir Umgang haben, läßt vieles überwinden. Es ist eine Tatsache, daß alle Afrikaner, mit denen wir zusammen kommen, sehr stolz auf ihre Sprache — Kiswaheli — sind. Es wird alles versucht, um ihr weiteste Verbreitung zu sichern.
Die klimatischen Bedingungen werden von den meisten von uns besser ertragen als ich erwartet hatte. Auch die harten tropischen Regenfälle während der Regenzeit haben uns nicht umgeworfen. Die Temperaturen ermöglichen immer das Baden im Indischen Ozean. Wenn es die Zeit erlaubt, machen wir Gebrauch davon. Sportlicher Ausgleich gehört zum Aufenthalt in den Tropen. Ich spiele nebenbei gern Tischtennis und finde auch unter den Studenten gute Gegner. Mit unseren sowjetischen Freunden vereinen uns auch sportliche Wettkämpfe (z. B. Volleyball, Schach und Tischtennis).
Bunt und abwechslungsreich, fremdartig und ungewöhnlich sind die Erlebnisse und die Eindrücke, die man immer wieder hat — aber das ist wohl nicht überraschend, wenn man sich vergegenwärtigt, daß man etwa 8000 Kilometer von zu Hause entfernt ist, jenseits des Äquators, daß man in den Tropen unter den dazugehörigen Bedingungen lebt. — Allen Lesern von *alpha* sende ich von hier viele herzliche Grüße. Ich wünsche ihnen Freude an ihrer Zeitschrift, Erfolge beim Lösen der mathematischen Probleme, weitere Fortschritte in der Beschäftigung mit unserem Fach.

H. Büchel



Marke Sansibars mit einem Bild vom Lumumba-College, der wohl bekanntesten Secondary School der Insel und einem geöffneten Buch — ein Motiv, das die Bedeutung der Volksbildung und des Lernens überhaupt für die Entwicklung des Landes zum Ausdruck bringt.

Die Fußballmannschaft des Teacher Training College; die Ausrüstung der Sportler ist ein Geschenk aus der DDR und hat bei der Übergabe große Freude hervorgerufen.

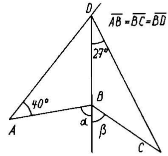
Vier Studenten des Autors bei Vorbereitungen auf die Mathematikprüfungen

Aufgaben

5 1. Eine rechteckige Rasenfläche, die 80 m lang und 32 m breit ist, wird von einem gepflasterten Gehweg umgeben, der überall 2 m breit ist. Berechne den Flächeninhalt der gepflasterten Fläche!

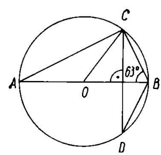
2. Das Produkt dreier natürlicher Zahlen ist gleich 6422. Zwei der Zahlen sind 19 und 26. Wie heißt die dritte Zahl?

3. Bestimme die Winkel α und β in der Skizze! 6
Beachte dabei, daß $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{BD}$ gilt.



4. Bestätige die Richtigkeit der Feststellung aus dem alten ägyptischen *Rechenbuch des Ahmes* (ungefähr 1800 v. d. Z.), daß $\frac{5}{21}$ gleich der Summe der Brüche $\frac{1}{7}, \frac{1}{14}, \frac{1}{42}$ und $\frac{2}{29}$ gleich der Summe der Brüche $\frac{1}{24}, \frac{1}{58}, \frac{1}{174}, \frac{1}{232}$ ist!

5. $\overline{AB}$ ist ein Durchmesser des Kreises mit 7
dem Mittelpunkt O; $\overline{CD}$ ist eine Sehne dieses Kreises, die senkrecht auf $\overline{AB}$ steht. Berechne die Winkel CAB, CDB und COB, wenn $\sphericalangle\, ABC = 63°$ beträgt!



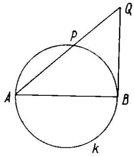
6. Ein Kollege des Autors, Mr. M. A. Bashraheil, ein begeisterter Pionier auf dem Gebiete der modernen Schulmathematik und Methodik, stellte die nachfolgende Aufgabe in seiner Sprache — Kiswaheli — zur Verfügung, um den Lesern einen Eindruck von ihr zu vermitteln:

Jahazi imetweka kwenda meli 10 *Kaskazini, halafu meli* 18 *Mashariki kwa mkato wa digirii* 45°, *halafu meli* 23 *Kusini.*
Kwa vipimo vya Scale, tafuta masafa ya jahazi ilipo na ilipoanza.

Die überarbeitete, unserem Sprachgebrauch angeglichene Übersetzung lautet:

Sportler segeln mit ihrem Boot vom Standort aus zunächst 10 Seemeilen nach Norden, danach 18 sm in südöstlicher Richtung und schließlich 23 sm nach Süden. Bestimme mit Hilfe einer maßstabgerechten Zeichnung die Entfernung des Bootes vom Standort!

8 7. Die Strecke $\overline{AB}$ ist ein Durchmesser, die Gerade BQ eine Tangente des Kreises k; die Punkte A, P und Q liegen auf einer Geraden.
a) Es ist der Kreis k, der durch A, P und B geht, zu konstruieren, wenn $\overline{BQ} = 3$ cm und $\overline{PQ} = 1$ cm gilt!



b) Die Längen der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AP}$ sind rechnerisch zu bestimmen!

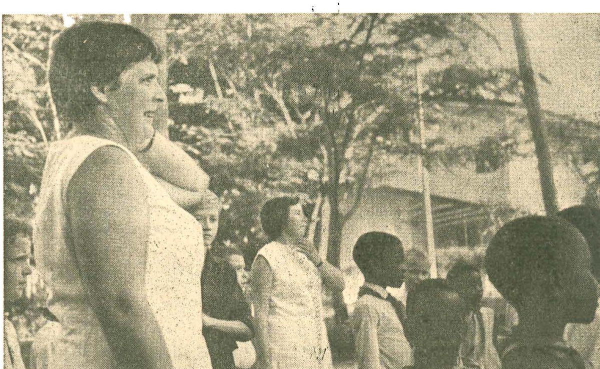
8. Konstruiere ein Dreieck ABC aus $AB = c = 6$ cm, $\sphericalangle CAB = \alpha = 48°$ und $\sphericalangle ABC = \beta = 56°$. Lege danach einen inneren Punkt P des Dreiecks ABC fest und verbinde ihn mit A, B und C. Schließlich sind ein innerer Punkt X der Strecke $\overline{AP}$, ein innerer Punkt Y der Strecke $\overline{BP}$ und ein innerer Punkt Z der Strecke $\overline{CP}$ so zu konstruieren, daß die fortlaufende Proportion $\overline{PX} : \overline{XA} = \overline{PY} : \overline{YB} = \overline{PZ} : \overline{ZC} = 1 : 2$ gilt. Die Punkte X, Y und Z legen ein Dreieck XYZ fest. Die Innenwinkel des Dreiecks ABC sind mit denen des Dreiecks XYZ zu vergleichen. Zu welcher Vermutung kommst du auf Grund des Vergleiches? Kannst du die Richtigkeit deiner Vermutung beweisen?

9. Welche Werte müssen a und b haben, da- 9
mit das Polynom $2x^3 - 5x^2 + ax + b$ sowohl durch $x - 2$ als auch durch $x + 1$ teilbar ist?

10. Gegeben ist ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt O und dem Durchmesser $\overline{AB}$; es seien ferner P und Q zwei voneinander verschiedene Punkte auf diesem Halbkreis. Die in P und Q auf $\overline{PQ}$ errichteten Lote schneiden den Durchmesser $\overline{AB}$ in den Punkten M bzw. N. Beweise, daß $\overline{OM} = \overline{ON}$ gilt!

11. Ermittle drei aufeinanderfolgende natür- 10
liche Zahlen mit der folgenden Eigenschaft: Das Quadrat der Summe dieser drei Zahlen ist um 484 größer als die Summe der Quadrate dieser Zahlen.

12. Gegeben ist eine regelmäßige dreiseitige Pyramide, deren Grundkante 6 cm und deren Höhe 10 cm beträgt. Eine Ebene schneidet die Seitenkanten $\overline{AS}$, $\overline{BS}$ bzw. $\overline{CS}$ der Pyramide in den Punkten P, Q bzw. R so, daß $\overline{AP} = 2$ cm, $\overline{BQ} = 3$ cm bzw. $\overline{CR} = 4$ cm gilt. Es ist die wahre Größe der Schnittfläche dieser Ebene mit der Pyramide zu konstruieren.



Kindertag 1967 in Sansibar — Die Schulleiterin begrüßt neben den 40 Schülern der Konsulatsschule der DDR auch afrikanische Pioniere, die zu Besuch weilten, Geschenke austauschten und gemeinsam mit deutschen Pionieren frohe Stunden bei Spiel, Gesang und Tanz verbrachten. (Foto: Christa Büchel, Ehefrau des Autors)

Einige Aufgaben über Folgen

aus den Schriften des Altertums

PASCAL „Dieser Gegenstand der Mathematik ist derart wichtig,
daß man es nicht versäumen darf,
diese Teile ein wenig interessanter zu gestalten."

Es hat einen eigentümlichen Reiz, Nachforschungen über die Anfänge der verschiedenen Gebiete der Mathematik und über die gesellschaftlichen Notwendigkeiten und Voraussetzungen zu ihrer Entwicklung zu betreiben. Stellen wir uns beispielsweise die Aufgabe, nach den Anfängen und dem Entstehungsort der *Lehre von den Folgen und Reihen* zu forschen, so müssen wir zur Beantwortung viele Seiten im Buch der Geschichte zurückschlagen, bis wir in die ältesten Epochen der Ägypter und Assyrer kommen.
Vor ungefähr siebzig Jahren fand der Engländer Rhind bei Ausgrabungen in Ägypten einen Papyrus, dessen Alter auf Grund der Form der Schriftzeichen auf etwa 4000 Jahre geschätzt wird. Die Entzifferung der altägyptischen Schriftzeichen, der Hieroglyphen, bereitete lange Zeit große Schwierigkeiten. Der *Papyrus Rhind,* wie dieses Schriftstück nun genannt wird, offenbarte sich bei seiner Entzifferung als das bisher älteste Rechenbuch der Welt. Es enthält eine Anzahl mathematischer Aufgaben, von denen einige auf die Kenntnis einzelner Folgen schließen lassen.
Sehen wir uns eine dieser Aufgaben näher an:
„Mag dir gesagt werden: Teile zehn Maß Gerste so unter zehn Menschen, daß der Unterschied zwischen jedem Menschen und seinem Nachbarn $\overline{8}$ $\left(\text{d. h. } \frac{1}{8}\right)$ Maß Gerste beträgt."
Zum besseren Verständnis wollen wir den Text dieser Aufgabe in unsere Ausdrucksweise bringen: „10 Maß Gerste sind unter 10 Personen derart zu teilen, daß die Anteile jeder Person den Gliedern einer arithmetischen Folge mit der Differenz $\frac{1}{8}$ Maß entsprechen."
Im erwähnten Papyrus werden neben dem Text der Aufgabe auch die Regeln zur Berechnung der Anteile für die erste und die letzte Person angegeben. In die heute gebräuchliche Formelsprache übertragen lautet diese Regel:

$$a_1 = \frac{S}{n} - \frac{d}{2}(n-1). \tag{1}$$

Wenn wir uns diese Formel näher ansehen, können wir feststellen, daß wir sie leicht durch einfache arithmetische Umformungen aus der bekannten Summenformel für die Glieder einer arithmetischen Folge erhalten.

$$S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n \qquad S = a_1 n + \frac{d}{2}(n-1)n$$

$$a_1 = \frac{S}{n} - \frac{d}{2}(n-1)$$

Haben wir aber erst den ersten der zehn Werte, so ist es mit Hilfe der Formel (1) leicht, auch die übrigen neun Werte $a_2, a_3, \ldots, a_{10}$ zu errechnen, denn dann ist:

$$a_2 = a_1 + d; \quad a_3 = a_2 + d; \quad \ldots; \quad a_{10} = a_9 + d; \quad \text{mit } d = -\frac{1}{8}.$$

Besonders müssen wir darüber erstaunt sein, wie die altägyptischen Mathematiker die Formel (1) ausdrückten. Sie kannten ja noch keine ausgearbeitete Theorie der Reihen, und auch der Umgang mit Formeln war ihnen fremd.
Über die Frage nach der Herleitung der Formel (1) geben die Werke zur Geschichte der Mathematik unterschiedliche Auskünfte. Offensichtlich scheint bei der ursprünglichen Lösung dieser Aufgabe die „Methode des systematischen Probierens“ eine große Rolle gespielt zu haben. Zumindest wird diese Ansicht von den Wissenschaftlern W. W. Babinina und M. J. Bygodskow vertreten. Es kann aber auch folgender Weg eingeschlagen worden sein, der mit seinen Überlegungen ebenfalls zur Lösung der aufgeworfenen Frage führt:
Wir gehen davon aus, daß erst einmal jede der zehn beteiligten Personen den gleichen Anteil a erhält:

$$a \qquad a \qquad a \qquad a \qquad a \qquad a \qquad a \qquad a \qquad a \qquad a.$$

Damit sich bei einem Vergleich der Anteile der ersten beiden Personen eine Differenz von $\frac{1}{8}$ Maß Gerste ergibt, kann man vom Anteil der zweiten Person $\frac{1}{16}$ Maß Gerste wegnehmen und zum Anteil der ersten hinzufügen:

$$a+\tfrac{1}{16} \qquad a-\tfrac{1}{16} \qquad a \qquad a \qquad a \qquad a \qquad a \qquad a \qquad a \qquad a.$$

Da aber die zweite Person $\frac{1}{8}$ Maß mehr haben soll als die dritte, muß man der dritten $2 \cdot \frac{1}{16}$ Maß fortnehmen. Nun gibt man $\frac{1}{16}$ Maß der zweiten Person, die damit wirklich $\frac{1}{8}$ Maß mehr hat als die dritte, und $\frac{1}{16}$ Maß der ersten Person, damit auch hier die Differenz von $\frac{1}{8}$ Maß zum Anteil der zweiten erhalten bleibt.

$$a+\tfrac{2}{16} \qquad a \qquad a-\tfrac{2}{16} \qquad a \qquad a \qquad a \qquad a \qquad a \qquad a \qquad a.$$

Führt man nun diese Überlegungen analog weiter, so kommt man zu der Verteilungsregel, die bereits den ägyptischen Mathematikern bekannt war und die durch die Formel (1) ausgedrückt wird:

$a+\frac{3}{16}$	$a+\frac{1}{16}$	$a-\frac{1}{16}$	$a-\frac{3}{16}$	a	a	a	a	a	a
$a+\frac{4}{16}$	$a+\frac{2}{16}$	a	$a-\frac{2}{16}$	$a-\frac{4}{16}$	a	a	a	a	a
$a+\frac{5}{16}$	$a+\frac{3}{16}$	$a+\frac{1}{16}$	$a-\frac{1}{16}$	$a-\frac{3}{16}$	$a-\frac{5}{16}$	a	a	a	a
$a+\frac{6}{16}$	$a+\frac{4}{16}$	$a+\frac{2}{16}$	a	$a-\frac{2}{16}$	$a-\frac{4}{16}$	$a-\frac{6}{16}$	a	a	a
$a+\frac{7}{16}$	$a+\frac{5}{16}$	$a+\frac{3}{16}$	$a+\frac{1}{16}$	$a-\frac{1}{16}$	$a-\frac{3}{16}$	$a-\frac{5}{16}$	$a-\frac{7}{16}$	a	a
$a+\frac{8}{16}$	$a+\frac{6}{16}$	$a+\frac{4}{16}$	$a+\frac{2}{16}$	a	$a-\frac{2}{16}$	$a-\frac{4}{16}$	$a-\frac{6}{16}$	$a-\frac{8}{16}$	a
$a+\frac{9}{16}$	$a+\frac{7}{16}$	$a+\frac{5}{16}$	$a+\frac{3}{16}$	$a+\frac{1}{16}$	$a-\frac{1}{16}$	$a-\frac{3}{16}$	$a-\frac{5}{16}$	$a-\frac{7}{16}$	$a-\frac{9}{16}$

Dies läßt sich auch folgendermaßen darstellen. Man teilt 10 Maß Gerste erst einmal in 10 gleiche Teile. Jeder erhält damit 1 Maß. Danach nimmt man von allen mit Ausnahme des ersten die Hälfte der verlangten Differenz (d. h. je $\frac{1}{16}$ Maß) und gibt dies dem ersten, der damit seinen Anteil erhalten hat. Nun nimmt man von allen mit Ausnahme der ersten zwei wiederum die Hälfte der Differenz (also erneut $\frac{1}{16}$ Maß) und gibt das dem zweiten, der damit ebenfalls seinen Anteil erhalten hat.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$1+\frac{9}{16}$	$1-\frac{1}{16}$	$1-\frac{1}{16}$	$1-\frac{1}{16}$	$1-\frac{1}{16}$	$1-\frac{1}{16}$	$1-\frac{1}{16}$	$1-\frac{1}{16}$	$1-\frac{1}{16}$	$1-\frac{1}{16}$
$1+\frac{9}{16}$	$1-\frac{1}{16}+\frac{8}{16}$	$1-\frac{2}{16}$	$1-\frac{2}{16}$	$1-\frac{2}{16}$	$1-\frac{2}{16}$	$1-\frac{2}{16}$	$1-\frac{2}{16}$	$1-\frac{2}{16}$	$1-\frac{2}{16}$

Wir wollen uns davon überzeugen, ob zwischen den Anteilen der ersten beiden Personen auch wirklich die geforderte Differenz von $\frac{1}{8}$ Maß besteht:

$$a_1 - a_2 = \left(1 + \frac{9}{16}\right) - \left(1 - \frac{1}{16} + \frac{8}{16}\right) = \frac{25 - 23}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

Setzt man nun die Aufteilung in der angeführten Reihenfolge fort, so erhält man den Anteil des Dritten:

$$a_3 = 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{7}{16} = 1 + \frac{5}{16}.$$

Die Differenz zwischen der zweiten und der dritten Person ist wiederum gleich $\frac{1}{8}$ Maß. Diesen Prozeß kann man entsprechend der angeführten Verteilung fortsetzen und erhält dann die bereits in der vorigen Aufstellung angegebenen Ergebnisse.
Wir können annehmen, daß dieses praktische Lösungsverfahren den ägyptischen Mathematikern bekannt war. In verallgemeinerter Form ging es dann sinngemäß nach Formel (1) in den *Papyrus Rhind* ein. Bei der Lösung derartiger Aufgaben wurde also zuerst ein Durchschnittsanteil berechnet $\left(\frac{S}{n} = 1 \text{ Maß}\right)$. Dann halbierte man die Differenz $\left(\frac{d}{2} = \frac{1}{16} \text{ Maß}\right)$, multiplizierte diese mit $n - 1$ und erhielt mit dem Produkt den Betrag, der zum Durchschnittsanteil hinzuzufügen bzw. abzuziehen war $\left(\frac{d}{2}(n-1)\right)$. Auf diese Weise erhielt man den ersten Anteil. Die weiteren Anteile errechnete man durch $a_1 + d = a_2$; $a_2 + d = a_3$ und so weiter $\left(d = -\frac{1}{8}\right)$.
Im *Papyrus Rhind* finden wir auch Aufgaben über geometrische Folgen. Einer Aufgabe zum Beispiel liegt die Folge der Potenzen mit der Basis 7 zugrunde: $7, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5, \ldots$ Interessant ist die Darstellung dieser Potenzen durch Hieroglyphen. Sie entsprechen der Reihe nach den Darstellungen für Haus, Katze, Maus, Gerste Maß. Hieraus können wir uns eine Entschlüsselung dieser Hieroglyphen wie folgt denken:

Jemand hat sieben Häuser. In jedem Haus gibt es sieben Katzen. Jede Katze verschlingt sieben Mäuse. Jede Maus frißt sieben Gerstenähren und jede Ähre ergibt, wenn man die Körner aussät, sieben Maß Gerste. Man ermittle die Summe aller Häuser, Katzen, Mäuse, Ähren und Maß Gerste.

In dem Papyrus werden zwei Lösungen für die Aufgabe angegeben. Erstens eine Lösung mit Hilfe der direkten Multiplikation und anschließender Addition der Glieder $(7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5)$ und zweitens eine Lösung durch Multiplikation der Zahl 2801 mit 7. Die Zahl 2801 erhält man als Ergebnis der Summierung von $1+7+7^2+7^3+7^4$.

Die allgemeine Summenformel für die Glieder einer geometrischen Folge haben die Ägypter anscheinend selbst für den einfachen Fall $b_1 = q$ noch nicht gekannt.
Diese Aufgabe über eine geometrische Reihe finden wir mit unwesentlichen textlichen Abänderungen in den alten Schriften verschiedener Völker, so auch in der altrussischen Literatur. Dort hat die Aufgabe etwa folgenden Wortlaut: „Es gibt sieben Greise. Jeder Greis hat sieben Stöcke. An jedem Stock sind sieben Äste. An jedem Ast hängen sieben Beutel. In jedem Beutel stecken sieben Spatzen. Jeder Spatz hat sieben Mägen. Wieviel Dinge sind das zusammen?"
Auch die Erforschung der in babylonischer Keilschrift geschriebenen Texte aus der Hammurapischen Epoche (XVIII. Jahrhundert v. u. Z.) ergab, daß schon im alten Babylon einige ökonomische und wissenschaftliche Probleme mit Hilfe arithmetischer und geometrischer Reihen gelöst wurden. ... Man fand Tontafeln mit Keilschrifttext und übersetzte sie aus dem Assyrischen in das Englische. In einem Text wurde dargelegt, wieviel Teile der Mondscheibe an jedem der 15 Tage vom Neumond bis zum Vollmond von der Sonne beleuchtet werden. Danach verläuft die Zunahme des beleuchteten Teiles der Mondscheibe in den ersten fünf Tagen gesetzmäßig nach einer geometrischen Folge mit dem Quotienten 2 und folgt dann in den darauffolgenden 10 Tagen den Gesetzen der arithmetischen Folge mit der Differenz 16. Hieraus können wir ersehen, mit welch großem Interesse die Babylonier die Astronomie betrieben haben.
Aus einer Reihe historischer Aufgaben über Folgen und Reihen können wir das Erstaunen der damaligen Menschen über das starke Anwachsen der Glieder einer geometrischen Folge, deren Quotient größer als 1 ist, erkennen. Besonders fiel ihnen dieses Anwachsen auf, wenn zwei Folgen, eine arithmetische und eine geometrische, nebeneinander untersucht wurden.
Wenden wir uns in diesem Zusammenhang der bekannten indischen Aufgabe über das Schachbrett zu. Nach einer Sage war der indische Prinz Siram über die Scharfsinnigkeit und über die Vielfalt der möglichen Stellungen des Schachspiels entzückt. Er rief den Erfinder, den Gelehrten Seta, zu sich und sagte zu ihm: „Ich will Dich, Seta, für das wunderbare Spiel, das Du erdacht hast, würdig belohnen. Ich bin reich genug, jeden Deiner Wünsche zu erfüllen." „O Gebieter", antwortete Seta, „befiel, mir für das erste Feld des Schachbrettes ein Weizenkorn zu übergeben; für das zweite Feld dann zwei Weizenkörner; für das dritte Feld vier Körner und für jedes weitere Feld doppelt soviel Körner wie für das vorangegangene." „Du sollst Deine Körner erhalten", erwiderte der Prinz, „aber wisse, daß Du eine meiner Freigebigkeit unwürdige Bitte getan hast. Mein Diener Stupai wird Dir Deine Säcke mit Weizen hinaustragen."
Am nächsten Tag erschien der Hofmathematiker beim Prinzen. „Wir haben die Menge des Kornes, die Seta zu erhalten hat, gewissenhaft ausgerechnet", sagte er zum Prinzen. „Diese Zahl ist aber derart groß, daß das Korn aus Euren Speichern nicht ausreicht, auch das aus allen Speichern Eures Kaiserreiches, ja nicht einmal das Korn, das auf der ganzen Erde geerntet wird."
Mit Erstaunen vernahm der Prinz die Worte des Gelehrten, „Nenne mir diese ungeheuerliche Zahl!" befahl er. „Sie lautet 18446744073709551615", entgegnete der Mathematiker.
Überprüfe diese Zahl, indem Du in die Formel $S = b\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$ für $b = 1$, $q = 2$ und $n = 64$ einsetzt!
Im alten Griechenland zur Zeit des Euklid und des Archimedes (3. Jahrh. v. u. Z.) beschäftigte man sich mit den Eigenschaften der Reihen und Folgen nicht nur zum Zwecke der Lösung praktischer Aufgaben, sondern darüber hinaus im Zusammenhang mit theoretischen Untersuchungen...

Dieser Artikel wurde — leicht gekürzt — dem Buch „Kreuz und quer durch die Mathematik" von A. A. Kolosow, Volk und Wissen Verlag, Berlin 1963, Best. Nr. 08001, MDN 6,75 entnommen.

In einem der nächsten Hefte wird der Leser (in Form einer modernen Betrachtungsweise) in die *Grundbegriffe elementarer Folgen* eingeführt, d. Red.

Ernährung und Leistungsfähigkeit

Auch der Mensch ist kein Perpetuum mobile, er kann ohne Energiezufuhr nicht leben!

Der euch vom Physikunterricht her bekannte *Satz von der Erhaltung der Energie* trifft auch auf den Menschen zu. Im Gegensatz zur Maschine braucht unser Organismus im Ruhezustand (Schlaf) zur Aufrechterhaltung seiner wichtigsten Funktionen, wie Atmung, Herztätigkeit usw., eine bestimmte Menge Energie. Diesen für den Ruhezustand benötigten Energiebedarf nennt man Grundumsatz. Jedem wird einleuchten, daß außer dieser Energiemenge zusätzliche Energie für die Arbeitsleistung notwendig ist, die je nach der zu verrichtenden Arbeit unterschiedlich hoch ist. Zur Verrichtung körperlicher Arbeit werden wesentlich mehr Kalorien* verbraucht als bei geistiger Tätigkeit. Eine Unterernährung ist für die körperliche und geistige Leistungsfähigkeit von großem Nachteil, doch darf uns das nicht zu der Annahme verleiten, daß eine erhöhte Kalorienzufuhr die Leistungsfähigkeit in jedem Fall steigert. Wird der Kalorienbedarf überschritten, so kommt es zu einer Ablagerung von Depotfett im Körper — zur Fettleibigkeit.
Folgende Aufstellung soll euch über den Energiebedarf verschiedener Alters- und Berufsgruppen Auskunft geben:

Altersgruppen	Kalorienbedarf
Kinder von 9 bis 12 Jahren	2500 kcal
Jugendliche von 12 bis 15 Jahren	
männlich	3000 kcal
weiblich	2600 kcal
Jugendliche von 15 bis 18 Jahren	
männlich	3200 bis 3600 kcal
weiblich	2600 bis 2800 kcal

Arbeitsschwere (Erwachsene)	
ohne körperliche Anstrengung	2000 bis 2400 kcal
bei mäßiger körperlicher Anstrengung	2500 bis 3000 kcal
Mittelschwer -und Schwerarbeiter	3000 bis 3600 kcal
Schwerstarbeiter	4200 kcal

Doch wollen wir bei unseren Ernährungsbetrachtungen das Kalorienproblem nicht in den Vordergrund stellen, sondern uns einem weitaus bedeutsameren Faktor, der richtigen und vollwertigen Ernährung, zuwenden. Bekanntlich hat ja die Ernährung nicht nur die Aufgabe, uns satt zu machen; vor allem muß sie unserem Körper sämtliche Stoffe zuführen, die er benötigt.

* Eine Kilokalorie (im Volksmund Kalorie genannt) ist die Einheit der Wärmemenge. Es ist die Wärmemenge (bzw. Energiemenge), die benötigt wird, um 1 Liter Wasser von 14,5 °C auf 15,5 °C zu erwärmen.
(1000 cal $\triangleq$ 1 kcal)

Was braucht unser Körper?

Eiweiß als wichtigster Vertreter der *Baustoffe* nimmt eine vorrangige Stellung ein, denn ohne Eiweiß ist jegliches Leben undenkbar. In der Jugend brauchen wir zum Aufbau unseres Körpers viel mehr Eiweiß als später zu seiner Erhaltung. Die tägliche Mindesteiweißmenge beträgt für Kinder und Jugendliche 2,0 g bis 1,5 g Eiweiß pro Kilogramm Körpergewicht. Etwa die Hälfte dieser Menge soll tierischen Ursprungs (Fleisch, Fisch, Milch), der Rest pflanzlicher Herkunft sein (Getreideerzeugnisse, Kartoffeln, Gemüse). Zur Sicherstellung des *Energiebedarfs* dienen hauptsächlich *Fette* und *Kohlenhydrate*, gelegentlich auch Eiweiße. Der Brennwert beträgt bei Fetten 9,3 kcal/g, bei Kohlenhydraten und Eiweißen 4,1 kcal/g. Wichtigster Kalorienlieferant ist das Fett, das in unserer Kost leider allzureichlich enthalten ist. Da das Körpergewicht bei älteren, aber auch jungen Menschen, heute zu hoch ist, ist es für uns wichtig, gerade mit dem Fett sparsam umzugehen. 1 Gramm Fett pro kg Körpergewicht ist durchaus ausreichend, keinesfalls sollten aber mehr als 30 kcal %** an Fett in der Tageskost enthalten sein. Den größten Anteil der gesamten Nahrungsaufnahme machen die Kohlenhydrate mit ca. 60 kcal % aus. Kohlenhydratträger, die viel Kalorien enthalten und leicht verdaulich sind, wie z. B. Traubenzucker, Honig, Schokolade, sind ideale Energiespender für sportliche Dauerleistungen, fördern jedoch bei reichlichem Genuß leider auch den Fettansatz. In diesem Zusammenhang möchte ich noch auf die weit verbreitete Unsitte hinweisen, Schleckereien (Süßigkeiten, Kuchen) zwischen den Mahlzeiten zu essen bzw. als Ersatz für eine Mahlzeit anzusehen. Das wollen wir doch besser bleibenlassen, denn diese kohlenhydratreichen Nahrungsmittel sind arm an Wirkstoffen. Reich an Wirkstoffen (Mineralstoffen, Spurenelementen und Vitaminen) und daher für die Ernährung günstiger sind Obst und Gemüse. Die Mineralstoffe sind teilweise (Calcium, Phosphor) auch am Aufbau unseres Organismus beteiligt, doch dienen sie darüber hinaus zur Regelung wichtiger Lebensvorgänge. So kommt ihnen, wie auch den Spurenelementen, als Wirkstoff eine große Bedeutung zu. Die Vitamine, die zu Recht als Schutzstoffe bezeichnet werden, sorgen für einen reibungslosen Stoffwechselablauf und garantieren dadurch eine optimale Leistungsfähigkeit. Außerdem stärken sie das Widerstandsvermögen unseres Körpers gegenüber Infektionskrankheiten. Eine aus reichende Versorgung mit Wirk- und Schutzstoffen ist besonders wichtig bei überdurchschnittlicher geistiger und körperlicher Belastung. Der Bedarf ist am sichersten durch eine abwechslungsreiche Kost, besonders aber durch reichlichen Verzehr von pflanzlichen Erzeugnissen, wie Gemüse, Obst und Vollkornprodukten, zu decken. Gleichzeitig wird damit der für die Verdauung so wichtige Rohfaserbedarf gedeckt, der einer Stuhlverstopfung entgegenwirkt. Eine richtige Zusammenstellung der Nahrung ist ausschlaggebend für die Erhaltung der Gesundheit, die Leistungsfähigkeit und das Wachstum.

Wie soll sich der Schüler, der ja überwiegend geistig beansprucht ist, ernähren?

1. Er muß genügend Eiweiß (1,5 bis 2,0 g Eiweiß pro kg Körpergewicht und Tag) aufnehmen. Der tägliche Genuß von einem halben Liter Milch trägt schon wesentlich dazu bei und ist eine der Grundforderungen, die gestellt wird.

2. Es dürfen nicht zu viel und nicht zu wenig Kalorien aufgenommen werden, d. h., wenn ihr lange Zeit auf der Schulbank sitzt, müßt ihr weniger essen, als wenn ihr in den Ferien herumtobt oder kleine Arbeiten verrichtet.

3. Vitamine und Mineralstoffe müssen immer reichlich zugeführt werden.

** kcal % gibt den prozentualen Anteil der gesamten Kalorienmenge an, z. B.: Eine Tageskost enthält 2000 kcal, 30 kcal % sind dann 600 kcal. Wollen wir wissen, wieviel g eines Nährstoffes diesen 600 kcal entsprechen, so dividieren wir die 600 durch den entsprechenden Brennwert. 30 kcal % Fett einer Kost mit insgesamt 2000 kcal entsprechen also 64,516 g Fett.

4. Die Kost soll leicht verdaulich und blähungsarm sein; darum hütet euch davor, z. B. vor der Mathematikolympiade ein kräftiges Hülsenfruchtgericht zu essen.

5. Ein altes Sprichwort sagt: *Ein voller Bauch studiert nicht gern!* Andrerseits ist aber bekannt, daß Hungergefühl die Konzentrationsfähigkeit ungünstig beeinflußt. Darum müssen wir der Verteilung der Mahlzeiten einige Beachtung schenken. Ein reichliches Frühstück belastet am wenigsten und erhält die Arbeitskraft für lange Zeit. Die Mittagsmahlzeit soll sich in normalen Grenzen bewegen, während sich eine knapp bemessene Abendmahlzeit etwa zwei Stunden vor dem Schlafengehen empfiehlt, um einen gesunden, erholsamen Schlaf zu gewährleisten. Um einen Leistungsabfall zwischen den Mahlzeiten sowie Ermüdungserscheinungen nach langandauernder geistiger Anstrengung zu vermeiden, empfiehlt es sich, Obst, Obstsäfte oder Milch, letztere ist besonders erfrischend, als Zwischenmahlzeit bei den Arbeitspausen einzunehmen.

6. Die Mahlzeiten sind in Ruhe einzunehmen, denn sie sollen nicht nur der Sättigung, sondern auch der Erholung dienen.

7. Nicht zu vergessen ist die körperliche Betätigung nach geistigen Anstrengungen zur Entspannung. Sie schafft den besten Ausgleich zum stundenlangen Stillsitzen.

W. Kraack

Aufgaben

5 1. Eine Tageskost enthält 2400 kcal. Wieviel Kalorien sind für die einzelnen Mahlzeiten zu veranschlagen, wenn zum
6 1. Frühstück 20 kcal% — 2. Frühstück 15 kcal% — Mittagessen 30 kcal% — Nachmittag 10 kcal% — Abendessen 25 kcal% gegeben werden sollen?

2. Eine Erhöhung des Kalorienverbrauches durch körperliche Arbeit führt zu einer Gewichtabnahme. Soll 1 kg abgenommen werden, so müssen 6000 kcal verbrannt werden.

a) Wieviel Stunden müßte man spazierengehen, um 1 kg an Gewicht abzunehmen (Verbrauch beim Spazierengehen 120 kcal pro Stunde)?

b) Wieviel Stunden müßte man schwimmen, um 1 kg an Gewicht abzunehmen (Verbrauch beim Schwimmen 200 kcal pro Stunde)?

7 3. Eine gesunde, optimale Ernährung soll die Grundnährstoffe in folgendem Verhältnis enthalten: Eiweiß 13 kcal%, Fett 27,5 kcal%, Kohlenhydrate 59,5 kcal%.
8 Wieviel g der Grundnährstoffe sind in einer Kost mit 2400 kcal enthalten? (Brennwerte: 1 g Eiweiß $\triangleq$ 4,1 kcal, 1 g Fett $\triangleq$ 9,3 kcal, 1 g Kohlenhydrate $\triangleq$ 4,1 kcal) Merke: Für Ernährungserhebungen werden nur *auf*gerundete Werte verwendet.

4. Der Kalorienbedarf eines Menschen beträgt 2500 kcal. Dieser wurde jedoch täglich um 15% überschritten und führte so zu einem Übergewicht. Nach wieviel Tagen hat die entsprechende Person 1 kg zugenommen, wenn 6000 kcal über den Bedarf (2500 kcal) zu einem Gewichtansatz von 1 kg führen?

5. a) Wieviel Kalorien sind in einer Kost ent-
halten, welche sich aus 82 g Eiweiß, 72 g Fett 9
und 302 g Kohlenhydrate zusammensetzt?
b) Wieviel kcal% der einzelnen Grundnähr-
stoffe sind in dieser Kost enthalten? 10

6. Der Eiweißbedarf beträgt für Kinder 1,8 g pro kg Körpergewicht.

a) Wieviel g Eiweiß müßte ein 35 kg schwerer Junge aufnehmen, um seinen Bedarf voll zu decken?

b) Wieviel der unten aufgeführten Nahrungsmittel müßte er essen, wenn er ausschließlich dadurch seinen Bedarf decken sollte?

1	Ei	7,0 g Eiweiß
1	Liter Milch	34,0 g Eiweiß
100 g	Quark	17,6 g Eiweiß
100 g	Vollkornbrot	8,1 g Eiweiß
100 g	Kartoffeln	2,0 g Eiweiß

7. Wie Alkohol durch seinen hohen Kaloriengehalt das Übergewicht fördern kann, zeigt folgende Aufgabe: 1 g Alkohol enthält 7,1 kcal. Wieviel Kalorien sind demnach in 75 g 47%igem Schnaps enthalten?

(Lösungen siehe S. 189)

Weiteres umfassendes Material findet der interessierte Leser in zahlreichen populärwissenschaftlichen und fachbetonten Neuerscheinungen wie z. B. in „Unser Haushalt“ (Verlag für die Frau, Leipzig, 1966, S. 629 bis 678). Jede Bücherei wird beraten und helfen können.

Eine Aufgabe von

Prof. Dr. rer. nat. habil. Siegfried Brehmer

Pädagogische Hochschule Potsdam
Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

Der berühmte Mathematiker *Gauß* hat in seinen grundlegenden Untersuchungen über gekrümmte Flächen im Raum gewisse Größen E, F, G sowie L, M, N eingeführt, die nach ihm als *Gaußsche Fundamentalgrößen* bezeichnet werden. Mit diesen Größen hat er unter anderem gezeigt, daß es auf jeder solchen Fläche zwei zueinander senkrechte Richtungen gibt, in denen die Fläche am stärksten gekrümmt ist. Hierbei spielen die folgenden Begriffsbildungen und Aufgaben eine Rolle, die eng mit der Lehre von den quadratischen Gleichungen verknüpft sind.
Sind A, B, C reelle Zahlen, so nennt man $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ eine *quadratische Form.* Gibt es vier reelle Zahlen P, Q, R, S, so daß

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = (Px + Qy)\ (Rx + Sy)$$

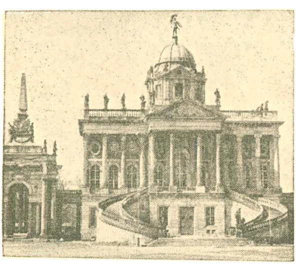
für alle reellen Zahlen x, y ist, so sagt man, die quadratische Form lasse sich (im Reellen) in *Linearfaktoren* zerlegen.

167 a: Welche Bedingungen müssen die Zahlen A, B, C erfüllen, damit die quadratische Form $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ in Linearfaktoren zerlegt werden kann?

Anleitung: Man klammere im Falle $A \neq 0$, $y \neq 0$ den Faktor Ay^2 aus, setze $x/y = z$ und beachte den Satz von der Zerlegung quadratischer Gleichungen in Linearfaktoren.

167 b: Es sei $Ex^2 + 2Fxy + Gy^2$ eine quadratische Form, die sich nicht in Linearfaktoren zerlegen läßt. Man zeige, daß sich dann die quadratischen Formen $(EG - F^2)x^2 + (2FM - EN - GL)xy + (LN - M^2)\ y^2$, sowie $(EM - FL)\ x^2 + (EN - GL)\ xy + (FN - GM)y^2$ bei beliebiger Wahl der reellen Zahlen L, M, N in Linearfaktoren zerlegen lassen.

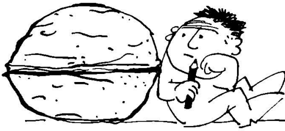
Anleitung: a) Man vergleiche die sich aus Aufgabe 167 a ergebende Bedingung für die beiden quadratischen Formen!
b) Man löse die Aufgabe zuerst im Spezialfall $F = 0$!
c) Im allgemeinen Fall drücke man M durch die Zahl $M' = M - \frac{FL}{E}$ aus!



Seit 1948 werden an der *Pädagogischen Hochschule Potsdam* Lehrer für die Schulen ausgebildet. Bisher haben 9413 Absolventen, darunter 5286 Fernstudenten, die Hochschule als Fachlehrer verlassen. Zur Zeit bereiten sich im Direktstudium 1764 Studenten auf den Lehrerberuf vor. Das Fach Mathematik studieren 213 Mädchen und 302 Jungen als Haupt- oder Nebenfach. (Das 2. Fach ist Physik oder Chemie.) 39 Professoren, 43 Dozenten, 317 Wissenschaftliche Mitarbeiter, 225 Technische Kräfte und 308 Verwaltungsangestellte betreuen die 9413 Studenten. Pro Student wurden im Jahre 1966 im Durchschnitt 6332 MDN ausgegeben. Der Haushaltplan der PH Potsdam belief sich im Jahre 1966 auf rund 19,8 Millionen MDN.

P. S. Den Status einer Hochschule und damit das Promotionsrecht erhielt am 1. September d. J. das bisherige, 1953 gegründete Pädagogische Institut „Karl Friedrich Wilhelm Wander“, Dresden.

Wer löst mit?



alpha – Wettbewerb

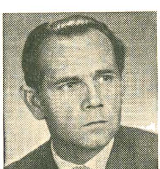
Mehrere tausend Lösungen sind zu unserem *alpha*-Wettbewerb eingegangen. Die Skala der Einsendungen reichte von der formalen Angabe des Ergebnisses über Antwortsatz bis hin zur sauberen, eleganten und ausführlichen Lösung. Wenn die Korrektoren vor unerwartet hohen Stößen von Arbeiten saßen, so schlug ihnen das Herz meist höher. Sie sahen den Fleiß und die Mühe, mit der ein Großteil der Leser die oft nicht einfachen Probleme, sei es allein oder im Kollektiv, bewältigte. Mit Heft 3 wurden die durch Nachauflagen sowie durch den Wunsch nach Verlängerung des Einsendetermins in der Redaktion entstandenen inhaltlichen wie technischen Fragen gelöst. In den Sommerferien konnten die ersten Antwortkarten ihren Weg zu den Einsendern nehmen. Mit Heft 5 wurde der Wettbewerb 1967 abgeschlossen. Am 5. Januar 1968 gehen die letzten Antwortkarten an die Teilnehmer, so daß jeder, der bis 31. 1. 68 seine bis dahin erhaltenen Karten geschlossen einsendet, von der Jury eingestuft wird. Die Namen der Preisträger und weiterer aktiver Teilnehmer veröffentlichen wir in Heft 2/68. Für das neue Jahr wünschen wir all unseren alten und neuen Lesern Freude und Erfolg beim zweiten *alpha*-Jahreswettbewerb.

Jury des alpha-Wettbewerbs

StR Johannes Lehmann
V. L. d. V. Chefredakteur
Fachlehrer f. Mathematik
29. OS. Leipzig
AG-Leiter Mathematik

NPT OStR Dr. Rolf Lüders
Fachlehrer f. Mathematik
Institut f. Lehrerbildung
Groß-Berlin

OL Theodor Scholl
Fachlehrer f. Mathematik
Hauptreferent im Ministerium
für Volksbildung Berlin



OL Harri Schulze Fachlehrer für Mathem.
62. OS Leipzig AG-Leiter Mathematik
an der Konsutationsschule
des Stadtbezirks Leipzig-Nordost

StR Gerhard Schulze Fachlehrer für Mathem.
EOS Herzberg/Elster
Fachberater f. Mathematik im Kreis Herzberg
Mitglied des Bezirksklubs
Junger Mathematiker Cottbus

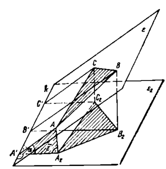
VI. Olympiade Junger Mathematiker der DDR

Lösungen zu den Aufgaben der DDR-Olympiade (29. 3. bis 1. 4. 1967)

Klassenstufe 10

1. Die zu untersuchende Zahl ist
$z = mn \cdot (m - n) \cdot (m + n) \cdot (m^2 + n^2)$.
(a) *Behauptung:* z ist durch 2 teilbar.
Beweis: Ist wenigstens eine der beiden Zahlen m, n gerade, so enthält z einen geraden Faktor, nämlich m oder n. Sind m, n beide ungerade, so enthält z den geraden Faktor $m - n$.
(b) *Behauptung:* z ist durch 3 teilbar.
Beweis: Ist eine der Zahlen m, n durch 3 teilbar, so auch z. Lassen m, n bei Division durch 3 denselben Rest, so ist $m - n$, also auch z, durch 3 teilbar. Läßt eine der Zahlen m, n bei Division durch 3 den Rest 1, die andere den Rest 2, so ist $m + n$, also auch z, durch 3 teilbar.
(c) *Behauptung:* z ist durch 5 teilbar.
Beweis: Ist eine der Zahlen m, n durch 5 teilbar, so auch z. Lassen m, n bei Division durch 5 denselben Rest, so ist $m - n$, also auch z durch 5 teilbar. Läßt eine der Zahlen m, n bei Division durch 5 den Rest 1, die andere den Rest 4, so ist $m + n$, also auch z, durch 5 teilbar; dasselbe gilt, wenn eine der Zahlen m, n den Rest 2, die andere den Rest 3 läßt. Läßt schließlich eine der Zahlen m, n bei Division durch 5 den Rest 1 oder 4, die andere den Rest 2 oder 3, so läßt das Quadrat der erstgenannten Zahl den Rest 1, das Quadrat der letztgenannten Zahl den Rest 4; also ist dann $m^2 + n^2$ und somit z durch 5 teilbar.
(d) *Behauptung:* z ist durch 30 teilbar.
Beweis: Wegen $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ und da 2, 3, 5 zu je zweien teilerfremd sind, folgt dies aus (a), (b), (c). Durch geeignete vorbereitende Umformungen lassen sich die Teilbarkeitsuntersuchungen vereinfachen.

2. Das Gradmaß des Neigungswinkels sei α genannt, der gegebene und gesuchte Flächeninhalt I ($\triangle$ ABC) bzw. I_1 ($\triangle$ $A_1B_1C_1$).
(a) Ist $\alpha = 0°$, so ist $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$, also $I(\triangle ABC) = I_1(\triangle A_1B_1C_1)$.
(b) Ist $\alpha = 90°$, so liegen A_1, B_1, C_1 in einer Geraden (nämlich in der Schnittgeraden von ε und ε_1), also ist $I_1(\triangle A_1B_1C_1) = 0$.
(c) Sei nun $0° < \alpha < 90°$. Ist ε_2 irgendeine zu ε_1 parallele Ebene und sind A_2, B_2, C_2 die Fußpunkte der Lote von A, B, C auf ε_2, so



12

ist $\triangle A_2B_2C_2 \cong \triangle A_1B_1C_1$, also hat $\triangle A_2B_2C_2$ ebenfalls den gesuchten Flächeninhalt $I_1(\triangle A_1B_1C_1)$. Durch geeignete Wahl von ε_2 kann man erreichen, daß die Schnittgerade k von ε und ε_2 außerhalb des Dreiecks $\triangle$ ABC verläuft (Abb.).
Die zu k senkrechte Ebene $\tilde{\varepsilon}$ durch A steht auf ε_2 senkrecht, enthält also A_2. Ist ferner A' ihr Schnittpunkt mit k, so ist $A \neq A'$, $A \neq A_2$, $A' \neq A_2$, $g_{AA'} \perp k$ und $g_{A_2A'} \perp k$, somit $\mu(\sphericalangle A_2A'A) = \alpha$ und $\mu(\sphericalangle A'A_2A) = 90°$, also $\overline{A'A_2} = \overline{A'A} \cdot \cos\alpha$. Entsprechendes gilt für B und C.
Daraus folgt für die Flächeninhalte f, f_2 der (möglicherweise ausgearteten) Trapeze $A'B'BA$, $A'B'B_2A_2$ die Beziehung

$$f_2 = \overline{A'B'} \cdot \frac{1}{2}(\overline{A'A_2} + \overline{B'B_2})$$
$$= \overline{A'B'} \cdot \frac{1}{2}(\overline{A'A} + \overline{B'B}) \cdot \cos\alpha = f \cdot \cos\alpha.$$

Entsprechendes gilt für die Trapeze $B'C'CB$, $B'C'C_2B_2$ und $C'A'AC$, $C'A'A_2C_2$.
Da sich nun $I(\triangle ABC)$ in der gleichen Weise vermittels Addition und Subtraktion aus den Flächeninh. der Trapeze $A'B'BA$, $B'C'CB$, $C'A'AC$ gewinnen läßt wie $I_1(\triangle A_1B_1C_1)$ aus den Flächeninh. der Trapeze $A'B'B_2A_2$, $B'C'C_2B_2$, $C'A'A_2C_2$, so folgt schließlich $I_1(\triangle A_1B_1C_1) = I(\triangle ABC) \cdot \cos\alpha$.
Die Ergebnisse (a), (b), (c) lassen sich auch zusammenfassen, daß $I_1(\triangle A_1B_1C_1) = I(\triangle ABC) \cdot \cos\alpha$ für jedes $(0° \leqq \alpha \leqq 90°)$ gilt.

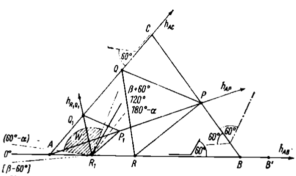
3. Wie üblich sei $\mu(\sphericalangle BAC) = \alpha$, $\mu(\sphericalangle ABC) = \beta$ genannt.

(I) Angenommen, $\triangle PQR$ sei eine Lösung der Aufgabe. Dann wähle man auf der Halbgeraden h_{AB} einen Punkt $R_1 \neq A$ beliebig und ziehe die Parallelen durch R_1 zu g_{RP} und zu g_{RQ}, die h_{AP} bzw. h_{AC} in P_1 bzw. in Q_1 schneiden. Es folgt

$$\overline{AP_1} : \overline{AP} = \overline{AR_1} : \overline{AR} = \overline{AQ_1} : \overline{AQ},$$

also $g_{P_1Q_1} \parallel g_{PQ}$; daher ist auch $\triangle P_1Q_1R_1$ gleichseitig. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
&0° < \mu(\sphericalangle ARQ)\\
&0° < \mu(\sphericalangle CQP) = \mu(\sphericalangle ARQ) + \alpha - 60°\\
&0° < \mu(\sphericalangle BPR) = \mu(\sphericalangle ARQ) + 60° - \beta\\
&0° < \mu(\sphericalangle BRP) = 120° - \mu(\sphericalangle ARQ)\\
&0° < \mu(\sphericalangle AQR) = 180° - \alpha - \mu(\sphericalangle ARQ)\\
&0° < \mu(\sphericalangle CPQ) = \beta + (120° - \mu(\sphericalangle ARQ)) - 60°,
\end{aligned} \tag{1}$$



woraus der Reihe nach folgt:

$$\begin{aligned}
0° &< \mu(\sphericalangle ARQ) < 120°\\
60° - \alpha &< \mu(\sphericalangle ARQ) < 180° - \alpha\\
\beta - 60° &< \mu(\sphericalangle ARQ) \sphericalangle \beta + 60°
\end{aligned} \tag{2}$$

Trägt man daher die nichtnegativen unter den Winkeln vom Gradmaß 0°, $60° - \alpha$, $\beta - 60°$; 120°, $180° - \alpha$, $\beta + 60°$ an h_{R_1A} an (und zwar nach derjenigen Seite hin, auf der C liegt), so liegt $h_{R_1Q_1}$ in dem Winkelraum W zwischen den zuletzt gezeichneten Schenkeln des größten der Winkel vom Gradmaß 0°, $60° - \alpha$, $\beta - 60°$ und des kleinsten der Winkel vom Gradmaß 120°, $180° - \alpha$, $\beta + 60°$. (Einfache Konstruktionsmöglichkeiten dieser Winkel sind in der Abb. angedeutet.)

(II) Wenn ein $\triangle PQR$ daher Lösung ist, so kann es nur ein solches sein, das durch folgende *Konstruktion* erhalten wird: Man wähle R_1 und konstruiere W wie in (I) beschrieben. Dann wähle man eine von R_1 ausgehende in W verlaufende Halbgerade. Schneidet sie h_{AC} in Q_1, so schlage man die Kreise um R_1 durch Q_1 und um Q_1 durch R_1. Derjenige ihrer Schnittpunkte, der nicht mit A in derselben durch $g_{R_1Q_1}$ bestimmten Halbebene liegt, sei P_1. Dann bringe man g_{AP_1} und g_{BC} zum Schnitt P und ziehe die Parallelen durch P zu $g_{P_1R_1}$ und zu $g_{P_1Q_1}$, die g_{AB} bzw. g_{AC} in R bzw. in Q schneiden.

(III) *Beweis* dafür, daß (II) auf eine Lösung führt: Nach Konstruktion ist $\triangle P_1Q_1R_1$ gleichseitig; ferner ist $g_{PQ} \parallel g_{P_1Q_1}$; $g_{PR} \parallel g_{P_1R_1}$; woraus $\overline{AQ} : \overline{AQ_1} = \overline{AP} : \overline{AP_1} = \overline{AR} : \overline{AR_1}$, also $g_{QR} \parallel g_{Q_1R_1}$ folgt, so daß auch $\triangle PQR$ gleichseitig ist. Nach Konstruktion liegen P auf g_{BC}, Q auf g_{AB}, R *auf* g_{AB}. Schließlich gilt (2); hieraus folgt (1)[1], und daraus ergibt sich, daß P, Q, R sogar innere Punkte der Strecken BC bzw. CA bzw. AB sind.

(IV) *Untersuchung von Existenz; Anzahl und Kongruenz der Lösungen:* Für jedes Dreieck $\triangle ABC$ gelten die neun Ungleichungen

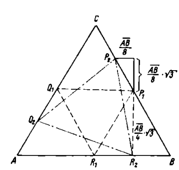
$$\left.\begin{matrix} 0° \\ 60° - \alpha \\ \beta - 60° \end{matrix}\right\} < \left\{\begin{matrix} 120° \\ 180° - \alpha \\ \beta + 60°. \end{matrix}\right.$$

Daraus folgt, daß W der Winkelraum eines (positiven) Winkels ist. Also gibt es beliebig viele Möglichkeiten zur Wahl der Richtung von $h_{R_1Q_1}$. Die weitere Konstruktion (II) ist dann stets (sogar eindeutig) ausführbar, da wieder aus (2) bzw. (1) folgt, daß keines der Geradenpaare, die gemäß (II) zum Schnitt zu bringen sind, ein Parallelpaar ist. Die entstehenden Dreiecke $\triangle PQR$ sind auch paarweise verschieden, da ihre Seiten RQ paarweise verschiedene Richtungen haben. Um zu zeigen, daß auch inkongruente Dreiecke $\triangle PQR$ auftreten können, genügt ein Beispiel: Man zeichne $\triangle ABC$ gleichseitig (Abb. 3) und wähle der Reihe nach P_1, Q_1, R_1; P_2, Q_2, R_2 als Mittelpunkt von BC, CA, AB; P_1C, Q_1A, R_1B. Dann wird

$$\overline{Q_1R_1} = \overline{R_1P_1} = \overline{P_1Q_1} = \frac{1}{2}\overline{AB} \text{ und}$$

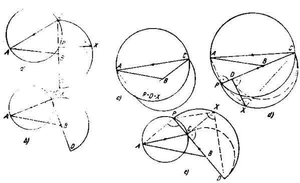
$$\overline{Q_2R_2} = \overline{R_2P_2} = \overline{P_2Q_2} = \overline{AB} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{8} \cdot \sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{4}\overline{AB} \cdot \sqrt{7}.$$

Die Meinung von Dagmar ist daher richtig; die anderen sind falsch.



[1] An dieser Stelle des Beweises muß man (1) teilweise anders formulieren. Solange man z. B. noch nicht aus der 5. Ungleichung von (1) geschlossen hat, daß B nicht zwischen A und R liegt, hat man die 2. Ungleichung von (1) in der Form $0° < \mu(\sphericalangle B'RP)$ zu schreiben mit einem auf h_{AB} gelegenen Punkt B', für den R zwischen A und B' liegt.

4. Man schlage den Kreis um B durch C; er schneidet g_{BC} in C und einem zweiten Punkt D (Abb.). Ferner schlage man den Kreis um den Mittelpunkt von AC durch C; er schneidet g_{BC} in C und einem Punkt P. Unter den drei Punkten C, P, D wähle man diejenigen beiden aus, zwischen denen der dritte liegt, schlage über der von ihnen gebildeten Strecke einen Halbkreis und bringe ihn zum Schnitt X mit der im dritten Punkt auf g_{BC} errichteten Senkrechten. (In den Fällen $P = C$ und $P = D$ setze man statt dessen sinngemäß $X = C$ bzw. $X = D$.) Dann hat das über CX errichtete Quadrat den geforderten Flächeninhalt (im Falle $P = C = X$ ist es zum Punkt entartet).



Beweis: Es wird $\overline{CP} = b \cdot |\cos\gamma|$ und $CX^2 = \overline{CD} \cdot CP = 2a \cdot b \cdot |\cos\gamma|$.

5. *1. Fall:* $a > 0$. Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl x, die der Gleichung genügt. Dann folgt $a + x - a = \sqrt{(2a + x)(a + x)}$, hieraus $x \geqq 0$ und $x^2 = 2a^2 + 3ax + x^2$, also $x = -\frac{2}{3}a < 0$. Dieser Widerspruch zeigt: Es gibt *keine reelle Zahl x*, die der Gleichung genügt.

2. Fall: $a = 0$. Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl x, die der Gleichung genügt. Dann folgt, da $\sqrt{0 + x}$ und $\frac{0^2}{0 + x}$ existieren, $x > 0$. Ist umgekehrt x irgendeine positive reelle Zahl, so gilt

$$\sqrt{0 + x} - \sqrt{\frac{0^2}{0 + x}} = \sqrt{x} = \sqrt{2 \cdot 0 + x},$$

d. h., die Gleichung ist erfüllt. Daher genügen *alle positiven reellen x und nur diese* der Gleichung.

3. Fall: $a < 0$. Angenommen, es gäbe eine reelle Zahl x, die der Gleichung genügt. Dann folgt $a + x + a = \sqrt{(2a + x)(a + x)}$;
$(2a + x)^2 = (2a + x)(a + x)$;
$(2a + x)a = 0$, wegen $a \neq 0$ also $x = -2a$.
Ist umgekehrt $x = -2a$, so ist $a + x = -a > 0$ und $2a + x = 0$, also gilt

$$\sqrt{a + x} - \sqrt{\frac{a^2}{a + x}} = \sqrt{-a} - \sqrt{-a} = 0$$

$= \sqrt{2a + x}$, d. h., die Gleichung ist erfüllt. Daher genügt *die Zahl $x = -2a$ und nur diese* der Gleichung.

6. 1. Die Menge $\mathfrak{M}$ aller ganzzahligen Lösungen $(x; y)$ mit $x > 0$, $y > 0$ ergibt sich durch folgende Aufzählung:

99 Zahlenpaare: $x = 1$; $y = 1, \ldots, 99$
98 Zahlenpaare: $x = 2$; $y = 1, \ldots, 98$
. . . .
2 Zahlenpaare: $x = 98$; $y = 1; 2$
1 Zahlenpaar: $x = 99$; $y = 1$

Die Anzahl dieser Zahlenpaare ist

$$1 + 2 + \cdots + 98 + 99 = \frac{1}{2} \cdot 99 \cdot 100$$

2. Die Mengen $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}'''$ aller ganzzahligen Lösungen $(x; y)$ mit $x < 0$, $y > 0$ bzw. $x > 0$, $y < 0$ bzw. $x < 0$, $y < 0$ können jeweils eindeutig auf $\mathfrak{M}$ abgebildet werden, indem man je ein Zahlenpaar (a, b) aus $\mathfrak{M}$ dem Zahlenpaar $(-a, b)$ bzw. $(a, -b)$ bzw. $(-a, -b)$ zuordnet.
3. Die Mengen $\mathfrak{N}$ aller ganzzahligen Lösungen $(x; y)$ mit $x = 0$, $y > 0$ enthält genau 100 Zahlenpaare: $x = 0$; $y = 1, \ldots, 100$.
4. Die Mengen $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$, $\mathfrak{N}'''$ aller ganzzahligen Lösungen $(x; y)$ mit $x = 0$, $y < 0$ bzw. $x > 0$, $y = 0$ bzw. $x < 0$, $y = 0$ können jeweils eindeutig auf $\mathfrak{N}$ abgebildet werden, indem man je ein Zahlenpaar $(0, c)$ aus $\mathfrak{N}$ dem Zahlenpaar $(0, -c)$ bzw. $(c, 0)$ bzw. $(-c, 0)$ zuordnet.
5. Die Menge $\mathfrak{P}$ aller ganzzahligen Lösungen $(x; y)$ mit $x = 0$, $y = 0$ enthält genau 1 Zahlenpaar: $x = 0$, $y = 0$.
6. Die Mengen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}'''$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$, $\mathfrak{N}'''$, $\mathfrak{P}$ sind zu je zweien elementfremd; ihre Vereinigungsmenge ist die Menge aller ganzzahligen Lösungen, deren Anzahl beträgt somit $2 \cdot 99 \cdot 100 + 4 \cdot 100 + 1 = 20201$.

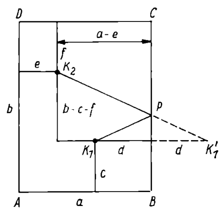
Die Aufgaben zur DDR-Olympiade befinden sich in *alpha*, Heft 3/67. Die Lösungen der Aufgaben der Klassenstufe 11/12 findet der interessierte Leser in der Zeitschrift *Mathematik in der Schule* (Heft 8/67, S. 618ff.), die sicher jeder Mathematikfachlehrer gern zur Verfügung stellt.

Allen Teilnehmern an der 3. Stufe (Bezirksolympiade am 21./22. 1. 1968) der VII. Olympiade Junger Mathematiker wünschen wir viel Erfolg. Die Aufgaben werden in Heft 2/68 und die Lösungen in Heft 5/68 veröffentlicht.

Redaktion *alpha*

Lösungen

W(9)72 Der Punkt K_1 ist an der Rechteckseite $\overline{BC}$ (Symmetrieachse) zu spiegeln; der Bildpunkt von K_1 sei K_1'. Die Strecke $\overline{K_2K_1'}$ schneidet die Rechteckseite $\overline{BC}$ im Punkte P. Der Streckenzug $\overline{K_1PK_2}$ stellt den Weg der Kugel K_1 dar. Auf Grund der Symmetrieverhältnisse ist der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel.



Aus der Abbildung wird ersichtlich:

$$x : (b - c - f) = d : (a - e + d)$$

(Anwendung des Strahlensatzes),

$$x = \frac{d\,(b - c - f)}{a - e + d}$$

$$\overline{BP} = c + x = c + \frac{d\,(b - c - f)}{a - e + d}$$

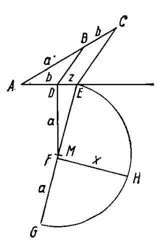
$$= \frac{c\,(a - e) + d\,(b - f)}{a - e + d}.$$

W(10)73 Es ist $x^2 = \sqrt{a^4 + b^4}$

$$= \sqrt{a^2\left(a^2 + \frac{b^4}{a^2}\right)},$$

$$x^2 = a\sqrt{a^2 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^2}.$$

Man konstruiert daher zunächst die Strecke $\overline{DE} = z = \frac{b^2}{a}$ unter Benutzung der Proportion $z : b = b : a$ (vgl. die Abb.). Dann konstruiert man die Strecke $\overline{EF} = \sqrt{a^2 + z^2}$ als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $\overline{DF} = a$ und $\overline{DE} = z$. Endlich erhält man die gesuchte Strecke $\overline{FH} = x$ als Höhe des rechtwinkligen Dreiecks GHE mit den Hypotenusenabschnitten $\overline{FG} = a$ und $\overline{EF} = \sqrt{a^2 + z^2}$.



74 Zunächst müssen wir eine Vermutung über die zu ermittelnde Summe S_n aufstellen. Wir rechnen einige Werte S_n aus. Dabei beginnen wir bei $n = 1$, wie es durch die Aufgabenstellung vorgegeben ist:

$$S_1 = 1 \cdot 2 = 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$$

$$S_2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3}$$

$$S_3 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 20 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3}.$$

Wir können also vermuten:

$$S_n = \frac{n\,(n + 1)\,(n + 2)}{3}.$$

Mit Hilfe der *Methode der vollständigen Induktion* zeigen wir, daß diese Vermutung wahr ist.

Induktionsanfang
Für $n = 1$ ist der Satz wahr (siehe oben).

Induktionsschritt
Wir haben zu zeigen: Wenn

$S_m = \frac{m\,(m + 1)\,(m + 2)}{3}$ ist, so ist

$$S_{m+1} = \frac{(m + 1)\,(m + 2)\,(m + 3)}{3}.$$

Nun ist aber $S_m = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + m\,(m + 1)$
und $S_{m+1} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + m\,(m + 1) + (m + 1)\,(m + 2)$,
also $S_{m+1} = S_m + (m + 1)\,(m + 2)$.
Wir haben aber vorausgesetzt, daß

$S_m = \frac{m\,(m + 1)\,(m + 2)}{3}$ ist, also ist

$$S_{m+1} = \frac{m\,(m + 1)\,(m + 2)}{3} + (m + 1)(m + 2)$$

$$= \frac{m\,(m + 1)\,(m + 2) + 3\,(m + 1)\,(m + 2)}{3}$$

$$S_m = \frac{(m + 1)\,(m + 2)\,(m + 3)}{3}.$$

Damit ist der Beweis geführt.

75 *Induktionsanfang*
Mit *alle natürlichen Zahlen* sind hier offenbar die natürlichen Zahlen $n \geqq 1$ gemeint. Für $n = 1$ ergibt sich $1 = 2 - 1$.
Der Satz ist also wahr für $n = 1$.

Induktionsschritt
Wir zeigen: Wenn $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{m-1} = 2^m - 1$ ist, so ist $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{m-1} + 2^m = 2^{m+1} - 1$.
Es ist aber $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{m-1} + 2^m = 2^m - 1 + 2^m = 2 \cdot 2^m - 1 = 2^{m+1} - 1$.
Also ist der Satz wahr.

76 *Induktionsanfang*
Der Satz ist für $n = 1$ wahr, denn $4^1 + 15 - 1 = 18$, und 18 ist durch 9 teilbar.
Induktionsschritt
Wir zeigen: Wenn $4^m + 15\,m - 1$ durch 9 teilbar ist, ist es auch $4^{m+1} + 15(m+1) - 1$. Dazu führen wir folgende Umformungen durch:

$$4^{m+1} + 15\,(m+1) - 1$$
$$= 4 \cdot 4^m + 4 \cdot 15\,m - 4 - 3 \cdot 15\,m + 18$$
(davon kann man sich durch Nachrechnen überzeugen)
$$= 4 \cdot (4^m + 15\,m - 1) - 45\,m + 18$$
$$= 4 \cdot (4^m + 15\,m - 1) - 9\,(5\,m - 2).$$

Der erste Summand ist durch 9 teilbar, denn wir hatten angenommen, daß $(4^m + 15\,m - 1)$ durch 9 teilbar ist. Vom zweiten Summanden ist es klar, daß er durch 9 teilbar ist. Dann ist aber die Summe durch 9 teilbar. Der Satz ist damit bewiesen.

77 *Induktionsanfang*
Wir müssen offenbar bei $n = 2$ beginnen. Zwei Gegenstände a und b kann man auf zwei Möglichkeiten (ab und ba) anordnen. Da $1 \cdot 2 = 2$ ist, ist der Satz für $n = 2$ wahr.
Induktionsschritt
Wir zeigen: Wenn man m Gegenstände in $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$ Möglichkeiten anordnen kann, so kann man $m + 1$ Gegenstände in $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m \cdot (m+1)$ Möglichkeiten anordnen.
Dazu kürzen wir, wie es in der Mathematik üblich ist, das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$ mit dem Symbol $m!$ (gelesen „m Fakultät") ab. Wir nehmen die $m!$ Möglichkeiten für m Gegenstände als gegeben an und nehmen eine dieser Anordnungen her. Wie können wir den $(m+1)$ten Gegenstand einordnen?
Offenbar so:
Vor dem 1. Gegenstand,
zwischen dem 1. und dem 2. Gegenstand,
zwischen dem 2. und dem 3. Gegenstand,
. . . .
zwischen dem $(m-1)$ten und dem m-ten Gegenstand,
nach dem m-ten Gegenstand.
Das sind zu dieser einen Anordnung von m Gegenständen $m + 1$ Anordnungen von $m+1$ Gegenständen. Da das für jede der $m!$ Anordnungen gilt, ist die Gesamtzahl also
$m!\,(m+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m\,(m+1) = (m+1)!$
Der Satz ist damit bewiesen.

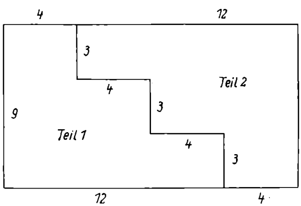
78 *Induktionsanfang*
Die Wahrheit des Satzes für die vierte Zahl ist ohne Rechnung zu sehen.
Induktionsschritt
Wir haben zu zeigen: Wenn die $4m$-te Zahl durch 3 teilbar ist, so ist es auch die $4(m+1)$-te Zahl. Wir nehmen also an, daß die $4m$-te Zahl durch 3 teilbar ist, dann können wir sie etwa $3k$ nennen. Die vorhergehende Zahl wollen wir x nennen. Dieser Teil der Folge sieht also so aus:
x, 3k, 3k + x, 6k + x, 9k + 2x, 15k + 3x.
Die $4(m+1)$te Zahl ist also 15k + 3x oder 3 (5k + x). Sie ist also auch durch 3 teilbar.

79 *Induktionsanfang*
Für $n = 1$ lautet der Satz: Mit den Wägestücken $1g$ und $2g$ kann man die Masse von $1g$ zusammenstellen. Das ist offenbar wahr.
Induktionsschritt
Wir haben zu zeigen: Wenn man mit den Wägestücken $1g, 2g, \ldots, 2^m g$ jede Masse von $1g$ bis $(2^m - 1)g$ zusammenstellen kann, kann man mit den Wägestücken $1g, 2g, \ldots, 2^{m+1}g$ jede Masse von $1g$ bis $(2^{m+1} - 1)g$ zusammenstellen.
Wir nehmen also an, daß man mit den Wägestücken $1g, 2g, \ldots 2^m g$ die Massen $1g, 2g, \ldots, (2^m - 1)g$ zusammenstellen kann. Nehmen wir das Wägestück 2^{m+1} dazu, so bleiben die Zusammenstellungen $1g, \ldots, (2^m - 1)g$ natürlich erhalten.
Ferner kann man zusammenstellen:
$2^m g$ durch das Wägestück $2^m g$
$(2^m + 1)g$ durch die Wägestücke $2^m g$ und $1g$
$(2^m + 2)g$ durch die Wägestücke $2^m g$ und $2g$,
und da wir nach Voraussetzung alle Massen von $1g$ bis $(2^m - 1)g$ zusammenstellen können, ohne das Wägestück $2^m g$ zu verwenden, kann man nun alle Massen von $(2^m + 1)g$ bis $(2^m + 2^m - 1)g$ zusammenstellen.
Es ist aber $2^m + 2^m - 1 = 2 \cdot 2^m - 1 = 2^{m+1} - 1$.
Also können wir nun alle Massen von $1g$ bis $(2^{m+1} - 1)g$ zusammenstellen. Aber bereits der Induktionsanfang läßt vermuten, daß wir mit unserer Aufgabe noch nicht alle Möglichkeiten ausschöpfen: Mit $1g$ und $2g$ kann man nicht nur $1g$, sondern auch $2g$ und $3g$ zusammenstellen, mit $1g$, $2g$ und $4g$ kann man offenbar $1g$, $2g$, $3g$, $4g$, $5g$, $6g$ und $7g$ zusammenstellen. Das gibt Veranlassung, den folgenden verschärften Satz zu vermuten:
Mit den Wägestücken $1g, 2g, 4g, \ldots 2^n g$ kann man jede Masse von $1g$ bis $(2^{m+1} - 1)g$ zusammenstellen. Der Beweis verläuft ähnlich wie oben, den *Induktionsanfang* haben wir bereits nachgerechnet.
Induktionsschritt
Wenn wir mit den Stücken $1g, 2g, 4g, \ldots,$

$2^m g$ alle Massen von $1g$ bis $(2^{m+1} - 1)g$ zusammenstellen können, so kann man durch Hinzufügen des Stückes $2^{m+1}\,g$ zusammenstellen: $2^{m+1}\,g$ selbst,
alle Massen von $(2^{m+1} + 1)g$ bis $(2^{m+1} + 2^{m+1} - 1)g = (2^{m+2} - 1)g$ durch die gleiche Überlegung wie oben.
Also ist auch dieser Satz bewiesen.

W(5)81 Der Eßlöffel wiege x Pond, dann wiegen der Gemüselöffel und die Gabel zusammen $3x$ Pond. Aus $3x + x = 240$ folgt $x = 60$, das heißt, der Eßlöffel wiegt 60 p. Die Gabel wiege y Pond; aus $y + 60 = 240:2$ folgt $y = 60$. Die Gabel wiegt ebenfalls 60 p, der Gemüselöffel wiegt dann 120 p.

W(5)82 Die Sperrholzplatte ist treppenförmig so in zwei Teile zu zerschneiden, wie es die Abbildung zeigt.



W(5)83 Es gibt genau die folgenden elf Möglichkeiten:

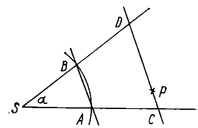
$1+1+1+1+1+1+1+13=20,$
$1+1+1+1+1+1+3+11=20,$
$1+1+1+1+1+1+5+\ 9=20,$
$1+1+1+1+1+1+7+\ 7=20,$
$1+1+1+1+1+3+5+\ 7=20,$
$1+1+1+1+1+3+3+\ 9=20,$
$1+1+1+1+1+5+5+\ 5=20,$
$1+1+1+1+3+3+5+\ 5=20,$
$1+1+1+1+3+3+3+\ 7=20,$
$1+1+1+3+3+3+3+\ 5=20,$
$1+1+3+3+3+3+3+\ 3=20.$

W(6)84 (1) Angenommen es gäbe keinen Monat, in dem wenigstens vier Schüler dieser Klasse Geburtstag haben, dann hätte die Klasse höchstens 36 Schüler ($3 \cdot 12 = 36$). Die Klasse umfaßt aber genau 37 Schüler. Also gibt es einen weiteren Schüler, der in einem der 12 Monate Geburtstag hat. Somit gibt es (mindestens) einen Monat, in dem 4 Schüler Geburtstag haben.
(2) Aus (1) ergibt sich, daß die zweite Behauptung falsch ist (Bem.: Die Klasse müßte mindestens 49 Schüler ($4 \cdot 12 + 1$) umfassen, wenn die Behauptung immer richtig sein soll.)

W(6)85 0123456789 Subtrahend

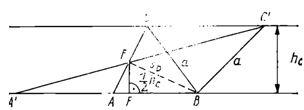
$$\begin{array}{r} 395 \cdot 147 \\ \hline 395 \\ 1580 \\ 2765 \\ \hline 58065 \end{array}$$

W(6)86 Es ist ein Kreis mit dem beliebigen Radius r um den Scheitel S des gegebenen spitzen Winkels α zu beschreiben; dieser Kreis schneide die Schenkel des Winkels α in den



Punkten A und B. Danach ist eine Parallele zur Geraden AB durch den gegebenen Punkt P zu konstruieren; sie schneide die Schenkel des Winkels α in den Punkten C und D. Es ist dann $\overline{SC} = \overline{SD}$.

W(7)87 Es ist zunächst ein rechter Winkel mit dem Scheitelpunkt F zu konstruieren; auf dessen einem freien Schenkel tragen wir $\frac{1}{2} h_c = 2$ cm von F bis E ab. Danach ist um E der Kreis mit dem Radius $s_b = 4{,}5$ cm zu zeichnen, der den anderen freien Schenkel des Rechten in B schneidet. Nun ist eine Parallele zu FB im Abstand $h_c = 4$ cm zu



zeichnen. Es ist schließlich um B der Kreis mit dem Radius $a = 5$ cm zu beschreiben; dieser Kreis schneidet die gezogene Parallele in den Punkten C und C'. Die durch die Punkte C und E bzw. C' und E zu ziehenden Geraden schneiden die verlängerte Strecke $\overline{BF}$ in den Punkten A bzw A'. Die Punkte C und C' sind ferner mit dem Punkte B zu verbinden. Als Lösung erhalten wir zwei Dreiecke, und zwar die Dreiecke ABC und $A'BC'$, die die Bedingungen erfüllen.

W(7)88 Aus $a < b$ folgt $\frac{a}{b} < 1 < \frac{b}{a}$.
Wir vergleichen
$1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$ mit $\frac{b}{a} - 1 = \frac{b-a}{a}$;

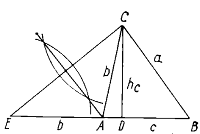
die Brüche $\frac{b-a}{b}$ und $\frac{b-a}{a}$ haben den gleichen Zähler; der Nenner b des ersten Bruches ist größer als der Nenner a des zweiten Bruches. Wegen $b > a$ gilt also $\frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{a}$; folglich liegt der Bruch $\frac{a}{b}$ auf der Zahlengeraden näher an der Zahl 1 als der Bruch $\frac{b}{a}$.

W(7)89 Es werden zum Tippen der Zahlen der Folge der natürlichen Zahlen

a) von 1 bis 9 genau 9 Anschläge,
b) von 10 bis 99 genau $2 \cdot 90 = 180$ Anschläge,
c) von 100 bis 369 genau $3 \cdot 270 = 810$ Anschläge gemacht.

Das sind insgesamt 999 Anschläge; mit dem tausendsten Anschlag wird die Ziffer 3 der Zahl 370 geschrieben.

W(8)90 Es sei ABC das verlangte Dreieck. Verlängert man die Strecke $\overline{BA}$ über A hinaus bis E, so daß $\overline{BE} = b + c$, d. h. $\overline{AE} = b$ wird, dann ist das Dreieck EAC gleichschenklig, und A liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{EC}$. Aus dieser Überlegung ergibt sich die folgende Konstruktion: Man zeichnet die Strecke $\overline{CD} = h_c$ und errichtet auf ihr in D die Senkrechte. Dann schlägt man um C den Kreis mit dem Radius a,



der die Senkrechte in B (bzw. B') schneidet. Man verlängert $\overline{BD}$ über D hinaus bis E, so daß $\overline{BE} = b + c$ wird (bzw. $\overline{DB'}$ über B' hinaus bis E', so daß $\overline{B'E'} = b + c$ wird). Man errichtet auf $\overline{EC}$ (bzw. $\overline{E'C}$) die Mittelsenkrechte, die die Gerade $\overline{BE}$ (bzw. $\overline{B'E'}$) in A (bzw. A') schneidet. Das Dreieck ABC entspricht den gestellten Bedingungen. Man erhält noch eine zweite Lösung, nämlich das in der Figur nicht gezeichnete Dreieck $A'B'C$, das einen stumpfen Winkel bei A' hat, so daß die Höhe $\overline{CD}$ außerhalb des Dreiecks liegt.

Bemerkung: Unser Leser *Volker Schwandt*, 8. Klasse der Oberschule Seebach, sandte eine schöne *rechnerische Lösung* der Aufgabe ein. Er bezeichnete die Maßzahl der Strecke $\overline{DB}$ mit x, die Maßzahl der Strecke $\overline{AD}$ mit y und erhielt mit Hilfe des Satzes des Pythagoras: $x^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$, $x = 3$. Ferner ist wegen $\overline{AC} = \overline{AE} = \overline{BE} - \overline{DB} - \overline{AD} = 8\text{ cm} - 3\text{ cm} - y\text{ cm} = (5 - y)\text{ cm}$
$(5-y)^2 = y^2 + 4^2$, also $25 - 10y + y^2 = y^2 + 16$, d. h., $10y = 9$, $y = 0{,}9$.
Daher wird $\overline{AB} = c = 3{,}9$ cm, $\overline{AC} = b = 4{,}1$ cm.

W(8)91 Da a und b von Null verschiedene ganze (also positive *oder* negative) Zahlen sind, muß man die folgenden drei Fälle unterscheiden:

1. Fall: a positiv, b positiv; $a < b$.
Dann gilt $1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{a} = \frac{b}{a} - 1$,
d. h., in diesem Falle liegt $\frac{a}{b}$ näher an 1, weil $\frac{a}{b} < \frac{b}{a}$.

2. Fall: a negativ, b negativ*; $a < b$,*
also $|b| < |a|$.
Dann gilt
$$1 - \frac{b}{a} = 1 - \frac{|b|}{|a|} = \frac{|a| - |b|}{|a|} < \frac{|a| - |b|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|} - 1 = \frac{a}{b} - 1,$$
d. h., in diesem Fall liegt $\frac{b}{a}$ näher an 1, weil $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$.

3. Fall: a negativ, b positiv, also $a < b$.
Dann gilt $1 - \frac{a}{b} = 1 + \frac{|a|}{|b|}$ und $1 - \frac{b}{a} = 1 + \frac{|b|}{|a|}$.
In diesem Falle liegt daher $\frac{a}{b}$ näher an 1, wenn $|a| < |b|$ ist.
Dagegen liegt $\frac{b}{a}$ näher an 1, wenn $|b| < |a|$ ist.

Zur *Erläuterung* geben wir noch *drei Beispiele:*

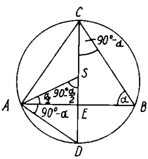
1. Fall: $a = 2$, $b = 3$; $2 < 3$.
Wegen $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 1$ liegt $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ näher an 1.

2. Fall: $a = -5$, $b = -4$; $-5 < -4$, $4 < 5$.
Wegen $1 - \frac{-4}{-5} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} < \frac{1}{4} = \frac{5-4}{4} = \frac{5}{4} - 1 = \frac{-5}{-4} - 1$
liegt $\frac{b}{a} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$ näher an 1 als $\frac{a}{b} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$.

3. Fall: $a = -5$, $b = 4$; $-5 < 4$.
Wegen $1 - \frac{a}{b} = 1 + \frac{5}{4} = 2{,}25$
und $1 - \frac{b}{a} = 1 + \frac{4}{5} = 1{,}8$

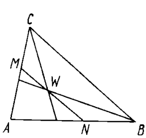
liegt in diesem Fall $\frac{b}{a} = -\frac{4}{5}$ näher an 1 als $\frac{a}{b} = -\frac{5}{4}$, was sich bereits aus $|b| = 4 < 5 < |a|$ ergibt.

W(8)92 Da nach Voraussetzung $\sphericalangle SAE = \frac{\alpha}{2}$ ist, folgt $\sphericalangle ASE = \sphericalangle ASD = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Ferner ist nach dem Peripheriewinkelsatz



$\sphericalangle BCD = 90° - \alpha = \sphericalangle EAD$, also
$\sphericalangle SAD = \sphericalangle SAE + \sphericalangle EAD$
$= \frac{\alpha}{2} + 90° - \alpha = 90° - \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle ASD.$
Daher ist das Dreieck ADS gleichschenklig, w. z. b. w.

W(9)93 Unser Leser *Bernd Oldenburger*, Klasse 8a der Pestalozzi-Oberschule Oschatz, sandte die folgende Lösung ein, die wir mit geringfügigen Veränderungen hier wiedergeben:
Aus $\sphericalangle CBW = \sphericalangle NBW$ (Winkelhalbierende) und $\sphericalangle CBW = \sphericalangle BWN$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) folgt $\sphericalangle NBW = \sphericalangle BWN$; das Dreieck BNW ist also gleichschenklig; es gilt $\overline{BN} = \overline{NW}$. (1)



Analog beweist man, daß auch $\overline{CM} = \overline{MW}$ gilt. (2)
Aus (1) und (2) folgt

$$\overline{CM} + \overline{BN} = \overline{MW} + \overline{NW} = \overline{MN},$$

w. z. b. w.

W(9)94 Angenommen, x_1 wäre eine ganzzahlige Wurzel der Gleichung $x^3 + px + q = 0$, wobei p und q ungerade ganze Zahlen sind, dann wäre $x_1{}^3 + px_1 + q = 0$. (1)
Wäre nun x_1 gerade, so wären $x_1{}^3$ und px_1 gerade, also $x_1{}^3 + px_1 + q$ ungerade, also verschieden von Null, was der Gleichung (1) widerspricht. Wäre x_1 ungerade, so wären $x_1{}^3$ und px_1 ungerade, also wieder $x_1{}^3 + px_1 + q$ ungerade, also verschieden von Null, was der Gleichung (1) widerspricht. Daher hat die gegebene Gleichung keine ganzzahlige Wurzel.

W(9)95 Die Funktion $y = \frac{x}{|x|}\sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{|x^2 + x - 6|}}$ ist nur für solche reellen x definiert, für die $x \neq 0$ und $x^2 + x - b > 0$ ist (da der Radikand nicht negativ sein darf). Nun ist

$$\begin{aligned} x^2 + x - 6 &= x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{25}{4} \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ &= \left(x + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right) \\ &= (x + 3)(x - 2) > 0 \end{aligned}$$

genau dann, wenn entweder $x < -3$ oder $x > 2$ ist.

Die vorliegende Funktion ist also definiert
a) für $x < -3$; in diesem Falle ist stets $y = -1\sqrt{1} = -1$,
b) für $x > 2$; in diesem Falle ist stets $y = 1\sqrt{1} = 1$.

W(10)96 Unser Leser *Elmar Busse*, Klasse 10k der Erweiterten Oberschule Heiligenstadt, hat diese Aufgabe wie folgt gelöst:
Aus $x_1 + x_2 = +p$ und $x_1 x_2 = 36$ sowie $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 153$
folgt wegen $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1{}^2 + x_2{}^2$

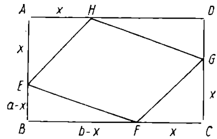
$$\begin{aligned} p^2 - 2 \cdot 36 &= 153, \\ p^2 &= 153 + 72 \\ &= 225, \end{aligned}$$

also entweder $p = 15$ oder $p = -15$.

Durch die Lösung der beiden quadratischen Gleichungen
$x^2 - 15x + 36 = 0$ mit $x_1 = 12$,
$x_2 = 3$ und $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 153$,
$x^2 + 15x + 36 = 0$ mit $x_1 = -3$,
$x_2 = -12$ und $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 153$

stellt dann *Elmar Busse* fest, daß für $p = 15$ und $p = -15$ tatsächlich die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

W(10)97 a) Es seien E, F, G, H die Endpunkte der auf den Seiten des Rechtecks $ABCD$ abgetragenen Strecken, so daß $\overline{AE} = \overline{AH} = \overline{CF} = \overline{CG} = x$ ist. Daraus folgt, daß die rechtwinkligen Dreiecke AEH und CGF einander kongruent sind, daß also $\overline{EH} = \overline{FG}$ ist. Aus der Kongruenz der Dreiecke BFE und DHG folgt ferner $\overline{EF} = \overline{HG}$. Daher ist das Viereck $EFGH$ ein Parallelogramm.



b) Dieses Parallelogramm ist genau dann ein Rhombus, wenn $\overline{EH} = \overline{EF}$ ist. Nun ist
$\overline{EH}^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$,
$\overline{EF}^2 = (a - x)^2 + (b - x)^2$,
also wegen $\overline{EH} = EF$

$$2x^2 = (a - x)^2 + (b - x)^2,$$
$$2x^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - 2bx + x^2,$$
$$2x(a + b) = a^2 + b^2,$$
$$x = \frac{a^2 + b^2}{2(a + b)}.$$

Das Viereck $EFGH$ ist also genau dann ein Rhombus, wenn $x = \frac{a^2 + b^2}{2(a + b)}$ ist.

c) Unter den gegebenen Voraussetzungen kann aber ein Rhombus nur dann entstehen, wenn
$x = \frac{a^2 + b^2}{2(a + b)} < a$, also $a^2 + b^2 < 2a^2 + 2ab$, d. h., $(b - a)^2 < 2a^2$, d. h., $b - a < a\sqrt{2}$ bzw. $b < a(1 + \sqrt{2})$ ist.

W(10)98 Unsere Leserin *Ingrid Sünderhauf*, Erweiterte Oberschule *Adolf Diesterweg*, Plauen, stellt mit Recht fest, daß die Gleichung

$$\log_{\frac{1}{a^n}} \frac{1}{x^2} = \log_a x \qquad (1)$$

nur dann erfüllt ist, wenn $n = 2$ ist.
Denn (1) gilt nur dann, wenn

$$\log_{a^n} x^2 = \log_a x = z,$$

also $(a^n)^z = x^2$ und $a^z = x$ ist; das ist aber nur für $n = 2$ der Fall.
Wir sprechen *Ingrid Sünderhauf* unsere Anerkennung dafür aus, daß sie die durch einen *Druckfehler* entstellte Aufg. *richtig* gelöst hat. Die Aufgabe selbst lautet richtig wie folgt (siehe auch Heft 4/67, S. 124):
Beweise, daß für alle von Null verschiedenen natürlichen Zahlen n und für alle positiven reellen Zahlen a und x mit $a \neq 1$ stets gilt:

$$\log_{\frac{1}{a^n}} \frac{1}{x^n} = \log_a x\ !$$

Der Beweis ist jetzt sehr einfach: Setzt man

$$\log_{\frac{1}{a^n}} \frac{1}{x^n} = z_1 \text{ und } \log_a x = z_2,$$

so wird

$$\left(\frac{1}{a^n}\right)^{z_1} = \frac{1}{x^n} \text{ und } a^{z_2} = x, \text{ also}$$
$a^{nz_1} = x^n$, d. h., $a^{z_1} = x$; daher ist $z_1 = z_2$, w. z. b. w.

Lösungen der Aufgaben von Euler

99 Wenn der dritte Sohn x Taler erhält, so erhält der zweite Sohn $x + 100$ Taler und der erste Sohn $x + 300$ Taler.
Daraus folgt

$$x + x + 100 + x + 300 = 1600,$$
$$3x + 400 = 1600,$$
$$3x = 1200,$$
$$x = 400.$$

Es erhalten also der dritte Sohn 400 Taler, der zweite Sohn 500 Taler und der erste Sohn 700 Taler, d. s. zusammen 1600 Taler.

100 Ist der kleinere Summand gleich x, so ist der größere Summand gleich $49x$, und wir erhalten

$$x + 49x = 25, \quad 50x = 25, \quad x = \frac{1}{2}.$$

Der kleinere Summand ist daher gleich $\frac{1}{2}$, der größere gleich $24\frac{1}{2}$.

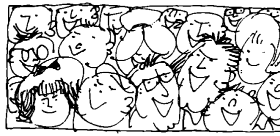
101 Wir bezeichnen die gesuchte Zahl mit x und erhalten $\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 24$, $x^2 = 144$.
Diese Gleichung hat aber zwei Lösungen, nämlich $x_1 = 12$ und $x_2 = -12$. Daher hat sowohl die Zahl 12 als auch die Zahl -12 die verlangte Eigenschaft.

Lösungen zu Aufgaben der Seite 178:

1. Für die einzelnen Mahlzeiten sind zu veranschlagen: 480 kcal, 360 kcal, 720 kcal, 240 kcal, 600 kcal. 2. Man müßte 50 Stunden spazierengehen oder 30 Stunden schwimmen. 3. In der Kost sind 76 g Eiweiß, 71 g Fett und 348 g Kohlehydrate enthalten. 4. Die entsprechende Person hat nach 16 Tagen 1 kg zugenommen. 5a. In der Kost sind 2244 kcal enthalten. 5b. In der Kost sind rund 15% Eiweiß, rund 30% Kohlehydrate enthalten. 6a. Der Junge müßte 63 g Eiweiß aufnehmen, um seinen Bedarf zu decken. 6b. Er müßte 9 Eier, 1,853 Liter Milch, 358 g Quark, 778 g Vollkornbrot oder 3150 g Kartoffeln essen. 7. In 75 g 47%igem Schnaps sind 250,3 kcal enthalten.

In freien Stunden

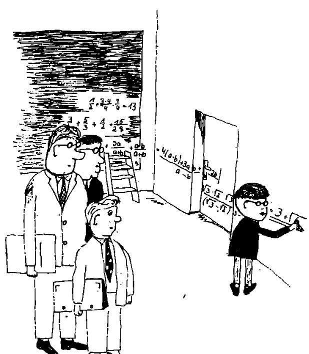
alpha heiter



Die 6 und die 8

Eine 6 und eine 8 stritten einmal um die Wette,
wer an Wert wohl und an Macht etwas mehr bekommen hätte.
Sprach die 8 voll Spöttelei: „Nun das wissen alle Leute,
daß ich ganz genau um 2 mehr als du seit je bedeute.
Zähle nur: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ich bitte,
du hältst zwischen 4 und mir, wie du hörst, genau die Mitte.“
„Lächerlich, du eitler Tropf,“ sagte drauf die 6 und stellte
sich ganz plötzlich auf den Kopf. „Weißt du jetzt, wieviel ich gelte?“
„Wie, du schweigst? Ei, sieh doch her, bin jetzt 9, du kecke Liese.
Ergo folglich um 1 mehr als die 8 — nach Adam Riese.
Mach mir's nach, du hast die Wahl. Sieh, du bleibst dieselbe immer.
Wenn du dich auch tausendmal auf den Kopf stellst, du wächst nimmer.“
Da, die 8 ließ ab vom Hohn, ging voll Kummer sachte in sich,
ob der klaren Subtraktion und der Wahrheit tief und binsig.
Und aus Kummer, Gram und Leid, die doch — ach! — so niederdrücken,
legte sie sich todbereit, bald zu sterben, auf den Rücken.
Kam ein Mathematiker, sprach zu ihr: „Ich bin erkenntlich,
schiebe deinen Kummer weg, ich erhöh dich zu unendlich.“

- Ein Platz, der die Form eines regelmäßigen Sechsecks hat, soll so mit Bäumen bepflanzt werden, daß auf jeder der sechs Seiten drei Bäume stehen. Wieviel Möglichkeiten gibt es? (Spiegelungen und Drehungen bleiben unberücksichtigt.)
- Zwanzig Äpfel sind so an zwei Kinder zu verteilen, daß ein Kind einen Apfel mehr erhält.
- An einem See sitzen fünf Angler. Im See sind 60 Karpfen. Wieviel Karpfen kann jeder Angler fangen?
- Welche Zahl gibt, durch ihren fünften Teil dividert, gerade 5?
- Ein Tortenboden soll mit drei Schnitten in acht Teile zerlegt werden!



„Wenn das noch nicht für eine ‚Eins‘ reicht, kann ich Ihnen ja noch etwas vorsingen ...“

Zeichnung: Wolfgang Testel, Kl. 9
Fritz-Reuter-OS, Waren/Müritz

Der Marsch durch die Wüste

Wieviel Gepäckträger muß ein Forscher, der einen sechstägigen Marsch durch die Wüste antreten will, bei sich haben, wenn jeder von ihnen nur einen Nahrungsvorrat und Wasser für vier Tage für eine Person mitführen kann?

Aus: K. A. Rupassow: „Mathematische Denkaufgaben", Verlag Volk und Wissen, Berlin 1965 Best.-Nr. 002103, MDN 1,60 (78 Aufgaben mit Lösungen)

△

Aus der Wandzeitungsarbeit der EOS Elsterwerda:
Werbung für mathematische Jugendliteratur

Auswahl: R. Höppner, Vignetten: D. Medicke

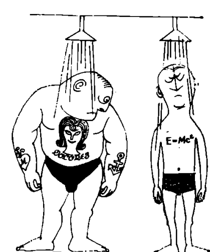
▽

Der Turm von Tampico

Auf dem Turm befinden sich drei Freunde A, B und C. Sie haben keine Möglichkeit, durch das Turminnere nach unten zu gelangen. Als Hilfsmittel stehen ihnen ein Seil, dessen Länge ungefähr der Turmhöhe entspricht, zwei Körbe und ein Stein mit dem Gewicht von 45 kp, zur Verfügung. Weiterhin können sie einen Balken so anbringen, daß man das Seil darüber nach unten lassen kann. Wie ist es ihnen mit diesen Hilfsmitteln möglich, in den am Seil befestigten Körben nach unten zu gleiten, wenn stets 5 kp Übergewicht notwendig sind, damit der schwerere Korb nach unten sinkt. Dabei wiegt A 50 kp, B 55 kp, und C 105 kp.

Nach: W. K. Schweikert: „Der Senor und die Punkte", VEB Hofmeister, Leipzig 1962, MDN 6,80 (Das unterhaltsame, im Erzählerstil geschriebene Buch kann in Büchereien ausgeliehen werden, d. Red.)

Zeichnung: Otto. Aus: „Freie Welt"



Zeichnung: joppy. Aus: „Wochenpost"

Mit diesem Foto wünschen Schüler der Zentralschule Effelder (Kreis Suhl) den Lesern von *alpha* ein frohes, gesundes und erfolgreiches Jahr

1968

Die Redaktion schließt sich diesen Wünschen an und dankt allen Mitarbeitern für ihre Hilfe beim Aufbau unserer jungen Schülerzeitschrift. Oberstudienrat Dr. R. Lüders, mit Oberlehrer Th. Scholl einer unserer Aktivsten, gibt mit dem nun folgenden Beitrag den Auftakt zum 2. Jahrgang:

Das Jahr 1968

Herr Schlottermann, ein sehr abergläubischer Herr, sagt am Silvesterabend des Jahres 1967 zu Herrn Windwebel: „Das Jahr 1968 wird für mich ein Unglücksjahr sein; denn es setzt sich ja aus lauter Zahlen 13 zusammen:

$$1968 = 13 \cdot 13 \cdot 13 - 13 \cdot 13 - 13 - 13 - 13 - 13 - 13 + 13 : 13 + 13 : 13 + 13 : 13 + 13 : 13 + 13 : 13.\text{“}$$

Darauf entgegnet Herr Windwebel: „Nein, das Jahr 1968 wird ein Glücksjahr sein; denn es läßt sich nur mit Hilfe der Zahl 7, die ja eine Glückszahl ist, schreiben:

$$1968 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 - 7 \cdot 7 \cdot 7 - 7 \cdot 7 - 7 \cdot 7 + 7 + 7 : 7.\text{“}$$

Herr Pfiffikus, der über einige mathematische Kenntnisse verfügt, bemerkt dazu: „Da sieht man einmal wieder, wohin der Aberglaube führt. Ihr beiden lebt wohl noch im Mittelalter und nicht im 20. Jahrhundert. Im übrigen läßt sich die Zahl 1968 wie auch jede andere natürliche Zahl mit Hilfe von beliebig vorgegebenen einander gleichen Zahlen schreiben; man benötigt nur noch außer diesen Zahlen die Operationszeichen für die Addition, die Subtraktion, die Multiplikation und die Division; wenn man will, kann man noch die Potenzschreibweise benutzen, z. B.:

$$1968 = 2^2 \cdot (2^{2^2} \cdot 2^{2^2} \cdot 2 - 2^{2^2} - 2^2),$$

$$1968 = 3 \cdot (3^3 \cdot 3^3 - 3^3 \cdot 3 + 3 + 3 + 3 : 3 + 3 : 3),$$

$$1968 = 4 \cdot (4^4 + 4^4 - 4 \cdot 4 - 4),$$

$$1968 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 - 5 - 5 : 5 - 5 : 5$$

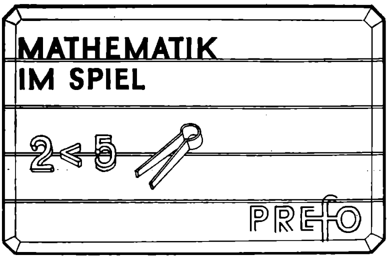
usw.

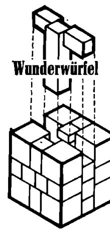
Im Zeitalter der elektronischen Rechenmaschinen würde ich aber lieber die Zahl 1968 in dualer Schreibweise darstellen:

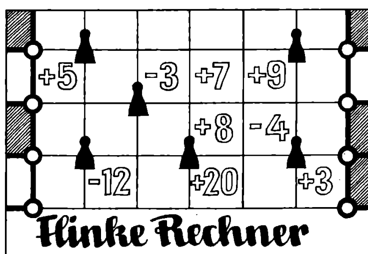
$$1968 \equiv \mathrm{L\,L\,L\,L\,O\,L\,L\,O\,O\,O\,O};$$

denn es gilt

$$1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 0 + 32 + 16 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1968.\text{“}$$







Die Arbeitsgemeinschaft Mathematik, 29. OS Leipzig (Klassenstufe 6/7), besitzt eine große Zahl selbst hergestellter oder gekaufter Gesellschaftsspiele, die Verbindung zur Mathematik schaffen. Sie haben nicht nur den AG-Teilnehmern, sondern auch in Gruppennachmittagen und im Familienkreis viel Freude gebracht. Hier zeigen wir (neben bereits in *alpha* vorgestellten selbstgebauten) einige gekaufte Spiele:

Spiele mit Zahlen: Unterhaltsames Quartettspiel. Hersteller: Helingsche Verlagsanstalt, Leipzig. Preis: 2,80 MDN

Mathematik im Spiel: Steckspiel, das Ziffern, mathematische Zeichen und Figuren enthält, die auf einer mit Nuten versehenen Plasteplatte angeordnet werden können. Hersteller: Prefo, Dresden. Preis: 5,45 MDN

Wunderwürfel: Nur mit Geduld, Konzentration und gutem räumlichem Vorstellungsvermögen wird es möglich sein, die einzelnen Holzteile (s. Skizze) zu einem Würfel zusammenzufügen. Hersteller: S. F. Fischer, Seiffen/Erzgeb. Preis: 2,00 MDN

Flinke Rechner: Würfelspiel mit einem Spielfeld und Plastesteinen (s. Skizze). Hersteller: Spiele-Fabrik, Karl-Marx-Stadt. Preis 3,45 MDN

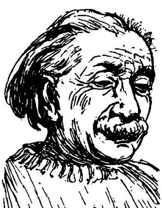
URANIA UNIVERSUM

WISSENSCHAFT
TECHNIK
KULTUR
SPORT
UNTERHALTUNG

BAND 13 · 512 Seiten · 48 Farbtafeln · 405 Abb. · MDN 15,—

In alle Bereiche unseres Lebens dringen heute Wissenschaft und Technik in immer stärkerem Maße ein. Überall bedienen wir uns ihrer, um die Arbeit zu erleichtern, um mehr zu produzieren, aber auch um unser Leben schöner zu gestalten. Oftmals wissen wir noch viel zu wenig von dieser immer rascher voranschreitenden Entwicklung.
Urania Universum, Band 13, will genau wie alle vorangegangenen auch dem jungen Menschen helfen, sein Allgemeinwissen zu erweitern. Es will durch fachspezifische Artikel zum Studium weiterer Literatur anregen, um vorhandene Spezialkenntnisse zu festigen oder neue zu erwerben.

Isaak Newton
(1643 bis 1727)



Albert Einstein
(1879 bis 1955)

Die Grundlagenwissenschaft Mathematik wird dem aufmerksamen Leser in fast allen Beiträgen begegnen, insbesondere in solchen wie: Information und Wissensspeicherung — Industrielle Elektronik — Moderne Meßverfahren — Laser — Mikro-Spektralanalyse — Spezielle und allgemeine Relativitätstheorie. (Ihre Begründer sind auf dieser Seite abgebildet.)

URANIA-VERLAG LEIPZIG · JENA · BERLIN

Index 31059