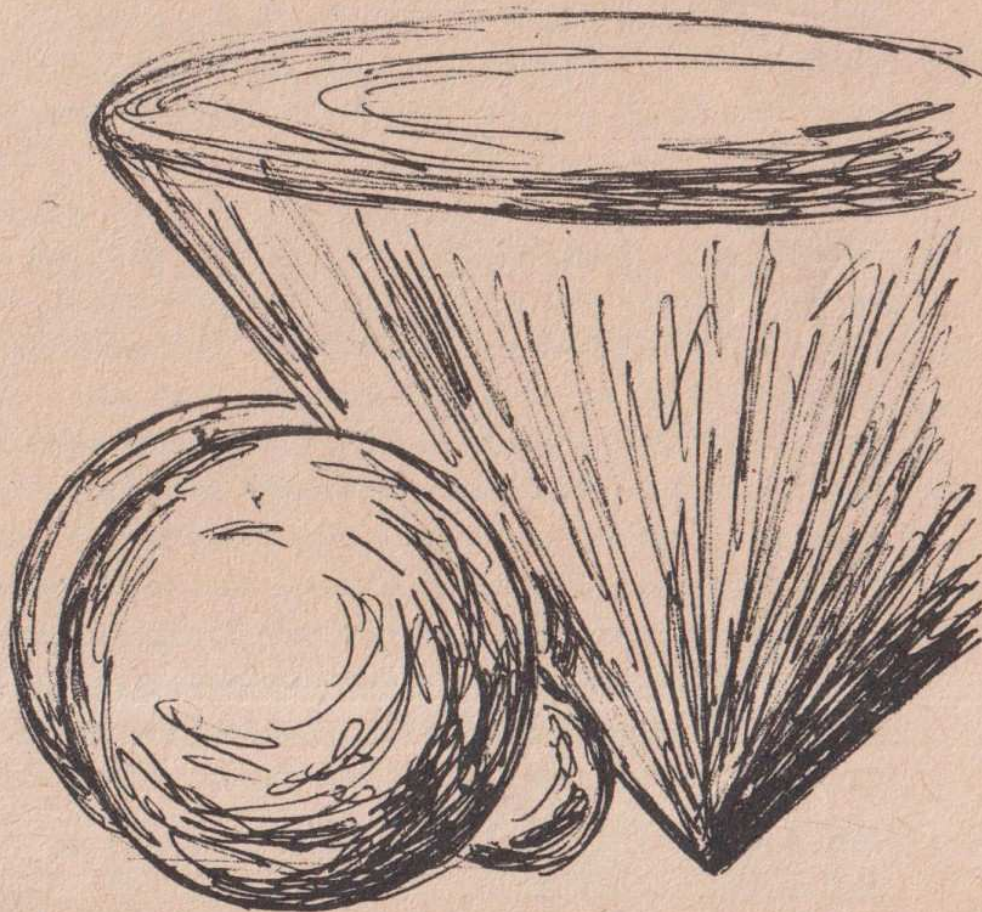




1

78

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-  
gendobjekt Studienvor-  
bereitung der Sektion  
Mathematik an der  
Friedrich-Schiller-Uni-  
versität Jena

12. Jahrgang  
Index 33 873  
Preis: 0,20 M



## Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung (I)

In der Natur gibt es Vorgänge, deren Ausgang ungewiß ist. Das heißt, wenn der Vorgang unter bestimmten Bedingungen abläuft, so kann man nicht mit Bestimmtheit vorhersagen, welches Ergebnis eintritt. Man sagt auch, daß der Vorgang zufällig abläuft. Ein einfaches Beispiel für einen solchen zufälligen Vorgang ist das Würfeln mit einem Würfel. Der Würfel wird in einen Würfelbecher gelegt, dieser wird mehr oder weniger stark geschüttelt, und zuletzt wird der Becher umgestülpt. Das Ergebnis eines solchen Vorgangs wird durch die Augenzahl bestimmt, die auf der Oberseite des Würfels zu sehen ist. Unter den oben beschriebenen Umständen ist es nun unmöglich, mit Bestimmtheit vorherzusagen, welches Ergebnis eintritt. Das bedeutet nicht, daß der Vorgang an sich zufällig ist, denn nach den Gesetzen der Mechanik läßt sich bei genauester Kenntnis der Umstände, unter denen das Würfeln stattfindet, das Ergebnis eindeutig vorhersagen. Es ist also hier die Unkenntnis eines Teils dieser Umstände, die uns zwingen, den Vorgang als zufällig zu betrachten.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich mit der mathematischen Beschreibung solcher zufälligen Vorgänge. Was mathematische Beschreibung ist, wird in folgendem klar werden.

### Das Elementarereignis

Als Elementarereignis bezeichnen wir ein mögliches Ergebnis des zufälligen Vorgangs. Beim Würfeln ist jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 ein Elementarereignis. Wir sagen auch: Die Menge der Elementarereignisse ist  $E = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ . Die erste und leichteste Aufgabe bei der mathematischen Beschreibung eines zufälligen Vorgangs ist die Bestimmung der Menge  $E$  der Elementarereignisse. Beim Würfeln hat die Menge  $E$  endlich viele Elemente.

Das muß nicht unbedingt der Fall sein. Wenn wir zum Beispiel die Brenndauer einer Glühlampe untersuchen (indem wir diese Brenndauer als zufällig ansehen), so kommen im Prinzip alle möglichen Zeiten in Betracht. Die Menge  $E$  enthält hier unendlich viele Elemente. Wir betrachten ein weiteres Beispiel. Das Ziehen der 6 Zahlen bei der Wettart "6 aus 49" ist ein zufälliger



Vorgang. (Von der Zusatzzahl sei hier einmal abgesehen.) Ein Elementarereignis ist hier jede Auswahl von 6 Zahlen aus 49 Zahlen. Die Reihenfolge, in der die Zahlen gezogen werden, spielt hier keine Rolle. Folglich können wir ein Elementarereignis durch eine Menge der folgenden Form kennzeichnen:

$e = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$  wobei die  $n_i$  ganze Zahlen sind und  $1 \leq n_i \leq 49$  gilt. Die Menge  $E$  besteht also aus Elementen der Form  $e$ . Diese Elemente  $e$  sind selbst auch wieder Mengen. Nach den Rechenregeln der Kombinatorik kann man ausrechnen, daß die Menge  $E$   $\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816$  Elemente hat.

### Das Ereignis

Wir kommen wieder auf das Beispiel des Würfels zurück. Man kann zum Beispiel beobachten, ob die Augenzahl kleiner oder gleich 3 ist. Das tritt ein, wenn das Ergebnis eine 1, eine 2 oder eine 3 ist. Anders ausgedrückt: Wenn wir das Ergebnis eines Würfelvorgangs mit  $e$  bezeichnen, so beobachtet man, ob  $e$  zur Menge  $A$  (mit  $A = \{1, 2, 3\}$ ) gehört. Man stellt also die Frage: Ist  $e \in A$ ? (lies: ist  $e$  Element von  $\{1, 2, 3\}$ ?). Wir stellen fest, daß die Menge  $A$  enthalten ist in der Menge  $E$ . Das soll nichts weiter bedeuten, als daß jedes Element von  $A$  auch ein Element von  $E$  ist. Man schreibt auch  $A \subseteq E$  (lies:  $A$  enthalten in  $E$ ). Zum Beispiel ist  $1 \in A$  und auch  $1 \in E$ .

### Definition:

Jede Menge  $A$ , die in  $E$  enthalten ist ( $A \subseteq E$ ), heißt ein Ereignis.

Wir sagen nun, daß bei einem zufälligen Vorgang das Ereignis  $A$  eingetreten ist, wenn das Ergebnis des zufälligen Vorgangs ein Element von  $A$  ist.

Mit dem Begriff "Ereignis" verbindet sich folgende Vorstellung: Man kann jeden beliebigen Tatbestand, den man an dem zufälligen Vorgang beobachten will, dadurch beobachten, daß man feststellt, ob das Ergebnis des zufälligen Vorgangs in einer bestimmten Menge  $A \subseteq E$  liegt. Wenn man zum Beispiel beobachten will, ob die Augenzahl beim Würfeln eine gerade Zahl ist, so beobachtet man, ob das Ergebnis in der Menge  $A = \{2, 4, 6\}$  liegt.

Die Elementarereignisse sind ebenfalls Ereignisse (im oben de-



finierten Sinn). Es gilt nämlich  $\{2\} \subseteq E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  oder  $\{5\} \subseteq E$ . Allgemein:  $\{n\} \subseteq E$  mit  $1 \leq n \leq 6$ .

W. Radeke

Wiss. Assistent im Bereich  
Wahrscheinlichkeitsrechnung

## Der Sieger von Palermo (I)

*Keiser*

Im Jahre 1225 wurde vom deutschen ~~König~~ Friedrich II in Palermo ein Wettstreit der Mathematiker organisiert, der Sieger hieß LEONARDO von PISA (1175 - 1250), der auch unter dem Namen LEONARDO FIBONACCI (FILIIUS BONACCIJ, der Sohn des BONACIO) bekannt wurde. FIBONACCI gebührt vorrangig der Verdienst, das indisch-arabische Zahlensystem in Europa bekanntgemacht zu haben. Sein im Jahre 1202 geschriebenes Buch "Liber abaci" beweist seine umfangreichen Kenntnisse der klassischen Mathematik der Antike. Eine im Jahre 1228 angefertigte Abschrift der "Liber abaci" blieb bis in unsere Zeit erhalten.

Die Zeit von etwa 1100 bis zur Mitte des 14. Jh. war in Europa die Blütezeit des Feudalismus. Im 12. Jh. wurden eine Reihe von Universitäten gegründet. Durch umfangreiche Übersetzungen wurden die grundlegenden wissenschaftlichen Arbeiten der Antike verbreitet. Diese Arbeiten wurden zum großen Teil durch die im 11. Jh. erfolgte Zerschlagung der Maurenherrschaft in Spanien zugänglich. Die maurischen Herrscher hatten in Spanien umfassende Bibliotheken anlegen lassen, besonders bekannt ist die unter Kalif Hakam II. im 10. Jh. in Córdoba gegründete Bibliothek mit über 400000 Bänden. So wurde die antike Wissenschaft vielfach auf dem Umweg über arabische Übersetzungen in Europa eingeführt, ein Übersetzungszentrum befand sich in Toledo. Mit der ökonomischen und politischen Entwicklung des Feudalismus erhielt die Entwicklung der Wissenschaften neue Impulse und Möglichkeiten. Auf mathematischem Gebiet sind dabei die Leistungen von FIBONACCI mit an erster Stelle zu würdigen.



## 1. Die Fibonaccischen Zahlen

Wir betrachten in diesem Artikel eine von FIBONACCI in seinem Buch "Liber abaci" erstmals aufgeführte berühmte Folge ganzer Zahlen. Er stieß auf diese Folge bei der Betrachtung der Vermehrung von Kaninchen. Hierzu nahm er an, daß Kaninchen beliebig lange leben und daß jedes Kaninchenpaar monatlich genau ein neues Paar wirft, welches nach zwei Monaten wiederum ein neues Paar wirft. Der Versuch beginnt mit einem neugeborenen Paar im ersten Monat. Im zweiten Monat wirft dieses Paar noch kein neues Paar. Im dritten Monat sind zwei Paare vorhanden, im vierten Monat 3 und im fünften Monat 5. Wir bezeichnen mit  $f_n$  die Anzahl der Kaninchenpaare im  $n$ -ten Monat.

| $n$   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  | 10 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| $f_n$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 |

Diese Folge  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$  wird in der Literatur unter dem Begriff "Fibonaccische Zahlen" geführt. Vier Jahrhunderte nach dem Erscheinen der "Liber abaci" sprach JOHANNES KEPLER (1571 - 1630) aus, was sicher auch FIBONACCI bereits bemerkt hatte:

Die Summe zweier aufeinanderfolgender Glieder dieser Folge ist gleich dem nächsten. Die Folge ist daher durch die Rekursionsformel

$$(1) \quad f_0=0, \quad f_1=1, \quad f_n+f_{n+1}=f_{n+2}$$

vollständig bestimmt.

Es ergibt sich nun die Frage nach einer expliziten Formel für diese Folge; eine derartige Formel wurde 1843 von J.P.M. BINET entdeckt. Wir werden diese Formel später in diesem Artikel angeben und beweisen. Doch zunächst sollen zwei Beispiele angegeben werden, welche auf die Fibonaccischen Zahlen führen.

Beispiel 1: Alle Zahlen von 1 bis  $n$  sollen so auf zwei Zeilen verteilt werden, daß nicht mehr als zwei aufeinanderfolgende Zahlen auf einer Zeile stehen. Die Zahlen 1, 2, 4, 5 können also z. B. nicht gemeinsam auf einer Zeile stehen, ebenso können die Zahlen 1, 2, 3 nicht gemeinsam auf einer Zeile stehen. Mit  $v(n)$  werde die Anzahl der möglichen Verteilungen angegeben. Da-



bei werden Verteilungen, die durch alleiniges Vertauschen der beiden Zeilen ineinander überführt werden können, als identisch angesehen. Ebenso ist die Reihenfolge der Zahlen auf den einzelnen Zeilen unwesentlich.

| n       | 1 | 2   | 3     | 4       | 5         |
|---------|---|-----|-------|---------|-----------|
| Zeile 1 | 1 | 1,2 | 1,2,3 | 1,2,3,4 | 1,2,3,4,5 |
| Zeile 2 |   | 2   | 3     | 2,3     | 1,2,3,4,5 |
| v(n)    | 1 | 2   | 3     | 5       | 8         |

Im Jahre 1960 bewies R. SCHNEIDERREIT die Identität

$$(2) \quad v(n) = f_{n+1}, \quad \text{für } n \geq 1.$$

Dabei ging er von einer allgemeineren Fragestellung aus: Die Zahlen von 1 bis  $n$  sollen so auf die zwei Zeilen verteilt werden, daß höchstens  $m$  aufeinanderfolgende Zahlen auf einer Zeile zugelassen sind. Zu einer Zahl  $m \geq 2$  sei dann  $v_m(n)$  die Anzahl der möglichen Verteilungen. Für  $v_m$  erhält man die Rekursionsformel

$$(3) \quad v_m(n) = 2^{n-1}, \quad \text{falls } 1 \leq n \leq m \quad \text{und für } n > m \text{ gilt}$$

$$v_m(n) = v_m(n-1) + v_m(n-2) + \dots + v_m(n-m).$$

Für den Spezialfall  $m=2$  ergibt sich hieraus  $v_2(n) = v(n) = f_{n+1}$ , für  $n \geq 1$ .

**Beispiel 2:** Die Buchstaben  $a$  und  $b$  werden in Wörtern aus diesen beiden Buchstaben entsprechend ersetzt durch  $B$  und  $AB$ . Die Buchstaben  $A$  und  $B$  werden durch  $b$  und  $ab$  entsprechend ersetzt. Diese Ersetzungsvereinbarungen sind kurz durch die Schreibweise

$$a \rightarrow B, \quad b \rightarrow AB, \quad A \rightarrow b, \quad B \rightarrow ab$$

zu symbolisieren. Wir beginnen nun mit dem Wort  $a$  und wenden hierauf fortlaufend diese Ersetzungsregeln an, wobei alternierend  $\{A, B\}$ -Worte und  $\{a, b\}$ -Worte erzeugt werden sollen. Zuerst wird  $a$  durch  $B$  ersetzt, dann  $B$  durch  $ab$ , dann  $ab$  durch  $BAB$ , dieses durch  $abbab$  usw.

$$a \rightarrow B \rightarrow ab \rightarrow BAB \rightarrow abbab \rightarrow BABABAB \rightarrow abbabbababbab \dots$$

Mit  $l(n)$  sei die Länge des an  $n$ -ter Stelle in dieser Reihenfolge



erzeugten Wortes bezeichnet. Die Länge von  $a$  und  $B$  ist jeweils 1, also gilt  $l(1) = l(2) = 1$ . Insgesamt folgt

$$(4) \quad l(n) = f_n, \quad \text{für } n \geq 1.$$

Bezeichnet  $B(n)$  die Anzahl der  $B$  oder  $b$  in dem an  $n$ -ter Stelle erzeugten Wort, so gilt

$$(5) \quad B(n) = f_{n-1}, \quad \text{für } n \geq 1.$$

Derartige Erzeugungen von Worten durch Buchstabenersetzungen sind z. B. geeignet, die Teilungsprozesse biologischer Zellen zu beschreiben. Das hier betrachtete Beispiel wurde 1973 von A. SALOMAA angegeben.

Bevor wir uns nun der genaueren Untersuchung der Fibonaccischen Zahlen zuwenden, sei der Leser auf ein sehr interessantes Büchlein verwiesen. 1971 erschien im VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin von dem Leningrader Professor N.N. WOROBJOW das Büchlein "Die Fibonaccischen Zahlen". In diesem findet der Leser Untersuchungen zum Gegenstand, die weit über die im vorliegenden Artikel geschilderten hinausgehen.

Dr. F. Kröger

Institut für Informatik der  
Techn. Universität München

## Preisaufgaben 1/78

K 1 Man löse das System

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \quad y > x^2 \\ x > y^2 \end{array}$$

K 2 Man löse die Gleichung

$$\textcircled{1} \quad \frac{\log(\sqrt{x+1}+1)}{\log \sqrt[3]{x-40}} = 3.$$



K 3 Man beweise die Gleichung

②  $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ = \cos 7^\circ.$

K 4 Man löse das Gleichungssystem

① 
$$\begin{aligned} x(x+y+z) &= a^2 \\ y(x+y+z) &= b^2 \\ z(x+y+z) &= c^2 \quad a > 0, b > 0, c > 0. \end{aligned}$$

K 5 Man bestimme die unendliche Summe

① 
$$S = 1 + 3q + 6q^2 + 10q^3 + 15q^4 + \dots + \frac{(n+2)(n+1)}{2} q^n + \dots$$
  
wobei  $0 \leq q < 1$ .

K 6 Доказать, что в прямоугольном треугольнике  $0,4 < \frac{r}{h_c} < 0,5$

②  
где  $h_c$  – высота треугольника, опущенная на гипотенузу,  
а  $r$  – радиус вписанной в треугольник окружности.

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben. Die Lösungen sind – jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders – unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Einsendeschluß: 01.03.1978

## Inhaltsverzeichnis 1977

| Heft |                                                      | Seite |
|------|------------------------------------------------------|-------|
| 1    | Einführung in die Theorie universeller Algebren (II) | 2     |
|      | Preisaufgaben J1, ..., J6                            | 6     |
|      | Lösungen der Preisaufgaben H42, H49, H52             | 10    |
|      | Georg Cantor – Begründer der Mengenlehre             | 11    |
| 2    | Sonderheft "10 Jahre WURZEL"                         |       |



|    |                                                              |     |
|----|--------------------------------------------------------------|-----|
| 3  | Primzahlen (I)                                               | 34  |
|    | XVI. Bezirksmathematikolympiade und Mathematiklager          | 37  |
|    | Unterhaltsame Logik, Sonderpreisaufgabe                      | 41  |
|    | Preisaufgaben J7, ..., J18                                   | 44  |
|    | Inhaltsverzeichnis 1976                                      | 45  |
|    | Lösungen der Preisaufgaben H58, H63                          | 46  |
| 4  | Primzahlen (II)                                              | 50  |
|    | Preisaufgaben J13, ..., J18                                  | 52  |
|    | Lösungen der Preisaufgaben H57, H65                          | 53  |
|    | Zum 200. Geburtstag von C. F. Gauß                           | 56  |
| 5  | Primzahlen (III)                                             | 66  |
|    | Die Entwicklung der Mathematik an der Universität Jena (I)   | 70  |
|    | Die 4. Jenaer Informationstage                               | 75  |
|    | Preisaufgaben J19, ..., J24                                  | 76  |
|    | Lösungen der Preisaufgaben H67, H59                          | 78  |
|    | FDJ-Studententage in Jena                                    | 79  |
| 6  | Schaltalgebra (I)                                            | 82  |
|    | XVI. OJM der DDR                                             | 87  |
|    | Preisaufgaben J25, ..., J30                                  | 89  |
|    | Entwicklung der Mathematik an der Universität Jena (II)      | 91  |
|    | Lösungen der Preisaufgaben H71, H68                          | 94  |
| 7  | Das Vierfarbenproblem                                        | 98  |
|    | Schaltalgebra (II)                                           | 102 |
|    | Preisaufgaben J31, ..., J36                                  | 107 |
|    | Die Entwicklung der Mathematik an der Universität Jena (III) | 109 |
|    | Lösung der Preisaufgabe H65                                  | 110 |
| 8  | Das Vierfarbentheorem                                        | 114 |
|    | Preisaufgaben J37, ..., J42                                  | 119 |
|    | Kreuzworträtsel                                              | 120 |
|    | Lösungen zu den Preisaufgaben J1, ..., J22 und J24           | 122 |
| 9  | Die Wurzel in Berlin                                         | 130 |
|    | Grenzwerte von Folgen und Funktionen                         | 131 |
|    | Der Widerstreit                                              | 133 |
|    | Preisaufgaben J43, ..., J47                                  | 138 |
|    | Lösung der Preisaufgaben J25, ..., J30                       | 139 |
| 10 | N.I. Lobatschewski                                           | 146 |
|    | Korridore und Labyrinth im Banachzentrum von Warschau (I)    | 149 |
|    | Preisaufgaben J48, ..., J54                                  | 153 |
|    | Lösung der Preisaufgabe J23                                  | 154 |
|    | Schaltalgebra (III)                                          | 156 |



|    |                                        |     |
|----|----------------------------------------|-----|
| 11 | Geschlossene Summation                 | 162 |
|    | Preisaufgaben J55,...,J60              | 167 |
|    | Korridore und Labyrinth (II)           | 168 |
|    | Lösungen der Preisaufgaben J31,...,J36 | 170 |
| 12 | Drehungen eines Würfels                | 178 |
|    | Preisaufgaben J61,...,J66              | 183 |
|    | Lösungen der Preisaufgaben J37,...,J42 | 184 |
|    | Die Entwicklung des Funktionsbegriffes | 189 |

## Scherz-Ecke

### Darf er sie küssen?

Ein junger Mann setzt im Bus und schaut zum Fenster hinaus. Da sieht er auf einmal seine Freundin. Sie geht gerade die Straße entlang, trifft einen anderen Mann, der sie freundlich begrüßt und ihr einen Kuß gibt. Der junge Mann ist darüber ganz aufgebracht und verärgert. Beim nächsten Wiedersehen mit seiner Freundin fragt er sie gleich als erstes, wer dieser (für ihn noch) fremde Mann war, der sie geküßt hat. Sie antwortet: "Dieses Mannes Mutter ist meiner Mutter Schwiegermutter." Daraufhin verzeiht er ihr. Warum?

### Glück im Rechnen:

Ein Mann kommt in ein Lotteriegeschäft und fragt, ob er das Los Nr. 48 haben könne. Er besteht darauf, nur diese Nummer oder gar kein Los kaufen zu wollen. Der Lotterieeinnehmer findet unter seinen noch vorhandenen Losen die Nr. 48. Nach vier Wochen kommt die Nr. 48 mit einem Hauptgewinn heraus.

"Wie haben Sie das nur ahnen können, Sie Glückskind?" fragt der Lotterieeinnehmer, "ich erinnere mich noch ganz genau, daß Sie unbedingt Nr. 48 haben wollten."

"Das ist doch einfach", erklärte der Gewinner, "ich habe drei Tage hintereinander nachts geträumt: 6 mal 7, 6 mal 7, 6 mal 7. Na, da habe ich mir gesagt: 6 mal 7 ist 48, das Los kaufst du dir."



Aufgabe J 43

$$\log_{\sin(-x)} \left( \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{3x}{2} \right) = 1$$

Aus der Definition des Logarithmus folgt, daß

$$\sin(-x) > 0$$

sein muß.

Speziell gilt:  $\sin(-x) \neq 0$ .

Daraus folgt aber  $x \neq k\pi$ ,  $k$  ganzzahlig. (1)

Indem wir die Definition des Logarithmus anwenden, können wir die Gleichung in folgender Weise umstellen:

$$\sin \frac{x}{2} + \sin \frac{3x}{2} = \sin(-x)$$

Für den Sinus gilt:

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x \\ \sin 3y &= 3 \sin y - 4 \sin^3 y \\ \sin 2y &= 2 \sin y \cos y. \end{aligned}$$

Wir setzen  $y = \frac{x}{2}$  und erhalten:

$$\sin y + 3 \sin y - 4 \sin^3 y = -2 \sin y \cos y.$$

Umgestellt ergibt sich:

$$2 \sin y (2 - 2 \sin^2 y + \cos y) = 0.$$

Wir untersuchen jetzt die möglichen Fälle:

1.  $\sin y = 0$   
 $y = k\pi$   
 $x = 2k\pi$ ,  $k$  ganzzahlig

Diese Lösung entfällt wegen der Bedingung (1).

2.  $2 - 2 \sin^2 y + \cos y = 0$   
 Es gilt:  $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$   
 $2 - 2(1 - \cos^2 y) + \cos y = 0$   
 $2 \cos^2 y + \cos y = 0$   
 $\cos y (2 \cos y + 1) = 0$

Es erfolgt nun wiederum eine Fallunterscheidung:

- 2.1.  $\cos y = 0$   
 $y = \frac{2k+1}{2} \pi$   
 $x = (2k+1)\pi$

Diese Lösung entfällt ebenfalls wegen (1).



$$2.2. \cos y = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{4}{3}\pi + 4k\pi, \quad k \text{ ganzzahlig}$$

Wir überprüfen jetzt die Bedingung  $\sin(-x) > 0$ :

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= \sin\left(-\frac{4}{3}\pi - 4k\pi\right) = -\sin\left(\frac{4}{3}\pi + 4k\pi\right) = \\ &= -\sin\frac{4}{3}\pi \cdot \cos 4k\pi - \sin 4k\pi \cdot \cos\frac{4}{3}\pi = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 1 - 0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} > 0. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Lösungen der Gleichung:

$$x = \frac{4}{3}\pi + 4k\pi, \quad k \text{ ganzzahlig.}$$

#### Aufgabe J 44

Da die Lösung dieser Aufgabe recht umfangreich und mit einigen Zeichnungen durchzuführen ist, möchten wir an dieser Stelle nur die Konstruktion der Berechnung anführen. Wir hoffen, daß dies ausreichend ist.

Zunächst zeigt man, daß das Dreieck ABC mit den Eckpunkten in den Berührungspunkten der Kugeln mit der Ebene P gleichschenkelig ist. Dies ist allein durch die Konstruktion der Aufgabe klar. Sind A und B die Punkte, in denen die beiden gleich großen Kugeln die Ebene berühren, so ist klar, daß der Winkel bei C gleich  $150^\circ$  sein muß. Weiterhin ist klar, daß die Spitze der Pyramide nur auf der Höhe  $h_C$  oder deren Verlängerung über C hinaus liegen kann; das folgt aus der Symmetrie. Indem man jetzt mehrere Schnitte durch die Konstruktion legt und Beziehungen zwischen Winkeln, Dreieckseiten, Radien und dem Abstand der Pyramiden- spitze von A, B und C mit Hilfe von Winkelfunktionen bzw. Strahlensätzen aufstellt, kann man berechnen, daß der Kosinus des Winkels zwischen der Mantellinie und der Ebene P gleich  $\frac{1}{7}$  ist. Diese Lösung ist unabhängig davon, ob die Pyramiden- spitze innerhalb oder außerhalb des Dreiecks ABC liegt.



**Aufgabe J 45**

Wir beweisen die Gleichung mit dem Prinzip der vollständigen Induktion.

Zunächst zeigen wir die Richtigkeit der Beziehung für  $n = 1$ .

$$1^5 = 1 = \frac{1}{12} 1^2 \cdot (1+1)^2 \cdot (2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 1) = \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 = 1.$$

Wir nehmen an, die Gleichung gelte für alle natürlichen Zahlen von 1 bis einschließlich  $(n-1)$ .

Demzufolge gilt:

$$\begin{aligned} 1^5 + \dots + (n-1)^5 &= \frac{1}{12} (n-1)^2 n^2 [2(n-1)^2 + 2(n-1) - 1] = \\ &= \frac{1}{12} (n^2 - 2n + 1) n^2 (2n^2 - 2n - 1) \\ &= \frac{1}{12} (2n^6 - 6n^5 + 5n^4 - n^2). \end{aligned}$$

Folglich gilt auch:

$$\begin{aligned} 1^5 + \dots + (n-1)^5 + n^5 &= \frac{1}{12} (2n^6 - 6n^5 + 5n^4 - n^2) + n^5 = \\ &= \frac{1}{12} (2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2). \end{aligned}$$

Andererseits gilt aber:

$$\frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2 + 2n - 1) = \frac{1}{12} (2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2),$$

womit nach dem Prinzip der vollständigen Induktion die Gleichung für beliebige natürliche Zahlen  $n$  bewiesen wäre.

**Aufgabe J 46**

$$-\sqrt{3-x} > x-2$$

Wie leicht zu sehen ist, muß stets gelten

$$3-x \geq 0.$$

Daraus folgt  $x \leq 3$ .

Wenn diese Bedingung nicht verletzt wird, die rechte Seite aber negativ wird, so ist die Ungleichung erfüllt. Wir untersuchen also den Fall  $x-2 \leq 0$ .

Wir erhalten somit Lösungen im Intervall

$$-\infty < x \leq 2.$$

Wir müssen jetzt noch den Fall  $x > 2$  untersuchen:

$$|3-x| > (x-2)^2.$$



Unter der Voraussetzung  $x \leq 3$ , die gemacht werden muß, gilt

$$|3-x| = 3-x.$$

$$3-x > x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 3x + 1 < 0$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 1 < 0$$

$$(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4} < 0$$

$$(x - \frac{3}{2})^2 < \frac{5}{4}$$

$$|x - \frac{3}{2}| < \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Wir müssen jetzt noch zwei Fälle unterscheiden:

$$1. \quad x - \frac{3}{2} \geq 0, \quad x \geq \frac{3}{2}$$

$$x - \frac{3}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$x < \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Daraus erhalten wir die Lösungsmenge  $\frac{3}{2} \leq x < \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$

$$2. \quad x - \frac{3}{2} < 0, \quad x < \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} - x < \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$-x < \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{3}{2}$$

$$x > \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Wir erhalten die Lösungsmenge:  $2 < x < \frac{3}{2}$ .

Zusammen ergibt sich die Lösungsmenge:

$$-\infty < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

#### Aufgabe J 47

Durch Auflösung der Klammern in der zweiten Gleichung erhält man

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 3xz + 3yz = 1$$

oder

$$(x+y+z)^2 + xy + xz + yz = 1.$$

Wenn man jetzt die erste Gleichung benutzt, nach der  $x+y+z = 2$ ,



so erhält man

$$xy + xz + yz = -3 \quad (1)$$

Die dritte Gleichung wird in folgender Weise umgeformt:

$$x(xy+xz) + y(yz+xy) + z(xz+yz) = -6.$$

Wenn man jetzt die Beziehung (1) benutzt, so erhält man

$$x(3+yz) + y(3+xz) + z(3+xy) = 6$$

oder durch Zusammenfassung und Division durch 3

$$x + y + z + xyz = 2.$$

Daraus folgt aber mit Hilfe der ersten Gleichung sofort

$$xyz = 0.$$

Wir erhalten somit ein neues Gleichungssystem

$$x + y + z = 2$$

$$xy+xz+yz = -3 \quad (2)$$

$$xyz = 0$$

Aus der letzten Gleichung folgt unmittelbar, daß mindestens eine Variable den Wert 0 annehmen muß.

Im ersten Fall betrachten wir das System für  $x=0$ .

Wir erhalten:  $x + z = 2$

$$yz = -3$$

Wir erhalten daraus die Lösungen

$$y = 3, z = -1 \quad \text{oder} \quad y = -1, z = 3.$$

Analog kann man das System (2) für  $y = 0$  und  $z = 0$  untersuchen.

Man erhält dann sechs Lösungen  $(x,y,z)$  des Systems (2):

$$(0, 3, -1) \quad (-1, 0, 3)$$

$$(0, -1, 3) \quad (3, -1, 0)$$

$$(3, 0, -1) \quad (-1, 3, 0)$$

Wie man leicht sieht, sind alle sechs Lösungen auch Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems, so daß dieses auch genau sechs Lösungen hat.

#### Aufgabe J 48

Aus der Aufgabenstellung ergibt sich unmittelbar, daß

$$p(a) = A$$

$$p(b) = B \quad (1)$$

$$p(c) = C.$$

Wenn wir  $p(x)$  durch  $(x-a)(x-b)(x-c)$  teilen, so erhalten wir die

## Beziehung

$$p(x) = (x-a)(x-b)(x-c) q(x) + r(x). \quad (2)$$

Es ist klar, daß  $r(x)$  ein Polynom höchstens zweiten Grades ist. Wir schreiben es in der Form

$$r(x) = lx^2 - mx + n \quad (3)$$

Wenn wir die Beziehungen (1) und (2) ausnutzen, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} la^2 + ma + n &= A \\ lb^2 + mb + n &= B \\ lc^2 + mc + n &= C \end{aligned} \quad (4)$$

Die Lösung dieses Systems lautet:

$$l = \frac{(A-B)(b-c) - (B-C)(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$m = \frac{(A-B)(b^2-c^2) - (B-C)(a^2-b^2)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$n = \frac{a^2(Bc-Cb) + a(Cb^2-Bc^2) + A(Bc^2-Cb^2)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

Somit erhalten wir für  $r(x)$ :

$$r(x) = A \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + B \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + C \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \quad (5)$$

Da (4) eindeutig lösbar ist, so ist (5) einzige Lösung.

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jörg Vogel

**Chefredakteur:** Hans-Joachim Hauschild

**Redaktion:** K. Bartholmé, G. Blume, R. Jeske, D. Meinhardt, V. Wedler

**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

**Konto:** Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt

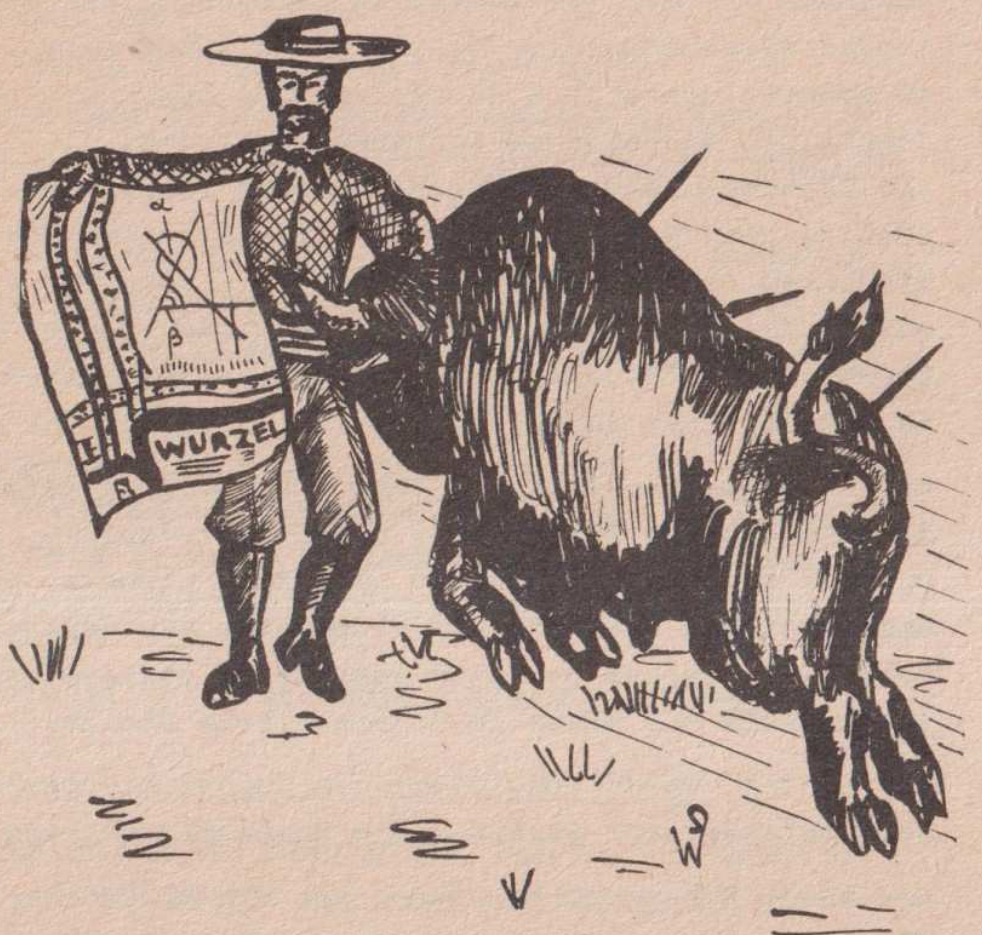
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement

0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932





2

78

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-  
gendobjekt Studienvor-  
bereitung der Sektion  
Mathematik an der  
Friedrich-Schiller-Uni-  
versität Jena

12. Jahrgang  
Index 33 873  
Preis: 0,20 M



## Die „Wurzel“ in Leipzig

Vom 14. bis 25. 11. 1977 fand in Leipzig auf dem Gelände der Technischen Messe die XX. Zentrale Messe der Meister von Morgen zusammen mit der VI. Zentralen Leistungsschau der Studenten und jungen Wissenschaftler statt. Auf der MMM waren etwa 20000 junge Neuerer durch ihre hervorragenden Lösungen von 1700 wissenschaftlich-technischen Aufgaben vertreten.

Als Höhepunkt des wissenschaftlichen Studentenwettstreites stellte die VI. Leistungsschau 1740 Arbeiten von nahezu 16000 Studenten und jungen Wissenschaftlern vor. 360 dieser Arbeiten wurden als Ausstellungsobjekte gestaltet, darunter auch unser Jugendobjekt "Studienvorbereitung". Alle anderen Arbeiten konnte man in einer dafür eingerichteten Bibliothek einsehen.

Unser Exponat bestand aus einer Ausstellungstafel; versehen mit den wichtigsten Fakten über unser Jugendobjekt, Fotografien unserer Mitarbeiter und des Redaktionszimmers, sowie aus einer umfangreichen Sammlung von Exemplaren der Zeitschrift "WURZEL" (von 1967 bis zur neuesten Ausgabe). Letztere verschenkten wir im Verlaufe der Messe an interessierte Besucher.

Unser Stand wurde vom Leiter des Jugendobjektes Jörg Vogel und dem Chefredakteur Hans-Joachim Hauschild betreut.

Der erste Höhepunkt der Messe war die Eröffnung, an der viele Mitglieder der Partei- und Staatsführung teilnahmen und Egon Krenz die Eröffnungsrede hielt. Während der Messe wurden in den dafür eingerichteten Konsultationspunkten eine Reihe von Vorträgen und Diskussionen mit führenden Persönlichkeiten aus Wissenschaft und Technik durchgeführt. Zum Beispiel bestand die Möglichkeit, einen sehr interessanten Vortrag von Prof. Manfred von Ardenne zu besuchen.

Auch an dem Stand unseres Jugendobjektes fand ein reger Erfahrungsaustausch statt. Viele Besucher informierten sich bei uns über das Jugendobjekt "Studienvorbereitung" und über die Zeitschrift "WURZEL".

Interessenten waren in erster Linie Schüler, die sich gern mit



Mathematik beschäftigen, aber auch Lehrer, Leiter von Mathematikzirkeln und nicht zuletzt Studenten, die in ähnlichen Jugendobjekten arbeiten.

Allerdings mußten wir bei dieser Gelegenheit feststellen, daß unsere "WURZEL" an vielen Schulen und manchen Universitäten noch relativ unbekannt ist.

Deshalb an dieser Stelle ein Appell an unsere Leser:

Wenn Euch unsere Zeitschrift gefällt, so versucht an Eurer Schule oder in Eurem Bekanntenkreis neue Leser für die "WURZEL" zu gewinnen!

Aus diesem Grunde waren wir sehr froh, daß am dritten Messetag unser Jörg in einem Rundfunkinterview mit dem Jugendjournal "HALLO" (am 16. 11. gesendet) das Jugendobjekt und die "WURZEL" vorstellen konnte.

Die besten Leistungen der VI. Zentralen Leistungsschau der Studenten und jungen Wissenschaftler wurden am 22. 11. 1977 bei einer Festveranstaltung im Neuen Rathaus Leipzig ausgezeichnet. Wir freuen uns, unseren Lesern mitteilen zu können, daß auch die Zeitschrift "WURZEL" dazu gehörte.

Unser Jugendobjekt erhielt für die Herausgabe der Zeitschrift "WURZEL" den

"Sonderpreis des Ministers für Volksbildung" .

Während der VI. Leistungsschau fand am 23. und 24. November 77 an der Karl-Marx-Universität die Zentrale wissenschaftliche Studentenkonzferenz "Mathematik und Praxis" statt, an der auch unser Mitarbeiter Klaus Bartholmé teilnahm. Diese Veranstaltung wurde von der Mathematischen Gesellschaft der DDR, vom Wissenschaftlichen Beirat für Mathematik beim Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen und vom Zentralrat der FDJ getragen. Mit der Teilnahme an dieser Konferenz ehrten die Mathematikstudenten der DDR den hervorragenden Wissenschaftler C.F. Gauss anlässlich seines 200. Geburtstages.

Das Ziel der Studentenkonzferenz war es, über die Praxiswirksamkeit der wissenschaftlichen Arbeit der Studenten Rechenschaft abzulegen und den Erfahrungsaustausch der Studenten untereinander zu pflegen. Dem Konferenzkomitee waren 70 der besten Arbeiten, die aus Betriebspraktika, Jahres- und Diplomarbeiten



und Dissertationen waren, vorgelegt worden. Diese Arbeiten wurden einem der vier Bereiche

- Grundstoffindustrie, Landwirtschaft, Verkehrswesen
- Weiterverarbeitende Industrie
- Technologie und Rationalisierung
- Naturwissenschaften

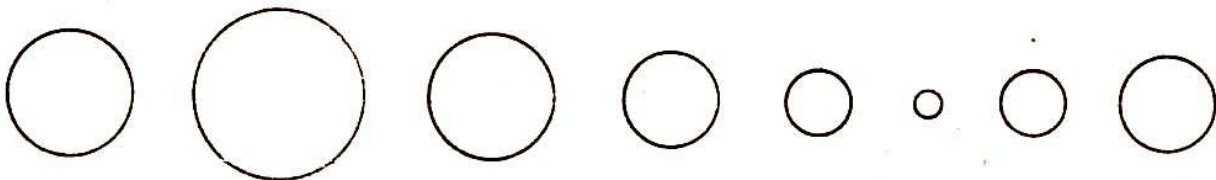
zugeordnet, von denen je ein Plenarvortrag ausgewählt wurde. Die Qualität der Arbeiten war jedoch zum Teil so hoch, daß es möglich gewesen wäre, noch wesentlich mehr Vorträge auf das Konferenzprogramm zu setzen. Leider ließ die beschränkte Zeit dies nicht zu.

Als Rahmenveranstaltungen dieser Studentenkonzferenz fanden ein Besuch der VI. Zentralen Leistungsschau der Studenten und jungen Wissenschaftler, Diskussionsrunden und Vorträge über die Entwicklung der Praxiswirksamkeit der Mathematik in der DDR sowie über das Leben und Wirken von C. F. Gauss statt.

Jörg Vogel

Hans-Joachim Hauschild

Klaus Bartholmé



## Der Sieger von Palermo (II)

### 2. Die Folge von LUCAS

Von É. LUCAS (1842 - 1891) wurde eine gewisse Folge  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  ganzer Zahlen untersucht, welche durch die Rekursionsformel

$$(6) \quad g_0=2, \quad g_1=1, \quad g_n+g_{n+1}=g_{n+2}$$

bestimmt ist. Auch hier wollen wir uns zunächst die ersten Folgenglieder errechnen.



| n     | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
|-------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|-----|
| $g_n$ | 2 | 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | 29 | 47 | 76 | 123 |

Der Leser kann sich unschwer von der Richtigkeit der Beziehung

$$(7) \quad g_n = f_{n-1} + f_{n+1}, \quad \text{für } n \geq 1$$

überzeugen. Der Beweis ist dabei mittels vollständiger Induktion zu führen. Wir zeigen hier die Identitäten

$$(8) \quad f_{2n} = f_n \cdot g_n, \quad \text{für } n \geq 0 \quad \text{und}$$

$$(9) \quad f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2, \quad \text{für } n \geq 0.$$

Für  $n=0,1$  sind (8) und (9) sofort einzusehen. Als Induktionsvoraussetzung gelte nun  $f_{2k-1} = f_k^2 + f_{k-1}^2$  und  $f_{2k} = f_k \cdot g_k$ . Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhalten wir unter Verwendung von (7)

$$\begin{aligned} f_{2k+1} &= f_{2k-1} + f_{2k} = f_k^2 + f_{k-1}^2 + f_k(f_{k-1} + f_{k+1}) \\ &= f_k^2 + f_{k-1}(f_{k-1} + f_k) + f_k f_{k+1} = f_k^2 + f_{k+1}(f_{k-1} + f_k) \\ &= f_{k+1}^2 + f_k^2, \end{aligned}$$

womit (9) bewiesen ist. Zum Nachweis von (8) werden die als Induktionsvoraussetzung geltenden Gleichungen  $f_{2k} = f_k g_k$  und  $f_{2k+1} = f_{k+1}^2 + f_k^2$  addiert, wir erhalten unter Beachtung von (7)

$$\begin{aligned} f_{2k+2} &= f_{2k} + f_{2k+1} = f_k^2 + f_k(f_{k-1} + f_{k+1}) + f_{k+1}^2 \\ &= f_k f_{k+1} + f_{k+1} f_{k+2} = f_{k+1} g_{k+1}, \end{aligned}$$

womit die Gültigkeit von (8) nachgewiesen ist.



### 3. Einige elementare Rechenregeln

Wie bereits mit den Identitäten (7), (8) und (9) angedeutet wurde, sind unter den Fibonaccischen Zahlen vielfältige Gesetzmäßigkeiten zu entdecken. Wir wollen uns hier in loser Folge mit einigen von ihnen befassen.

$$(10) \quad f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n, \quad \text{für } n \geq 1.$$

Für  $n=1$  gilt  $f_2 \cdot f_0 - f_1^2 = -1$ . Es werde nun die Identität  $f_{k+1} \cdot f_{k-1} - f_k^2 = (-1)^k$  vorausgesetzt. Wir erhalten zunächst  $f_k^2 - f_{k+1} \cdot f_{k-1} = (-1)^{k+1}$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1} &= (f_k^2 + f_k f_{k+1}) - (f_{k+1} f_{k-1} + f_k f_{k+1}) \\ &= f_k (f_k + f_{k+1}) - f_{k+1} (f_{k-1} + f_k) \\ &= f_k f_{k+2} - f_{k+1}^2, \end{aligned}$$

d. h., wir haben (10) bewiesen.

$$(11) \quad f_{n+m} = f_m \cdot f_{n-1} + f_{m+1} \cdot f_n, \quad \text{für } m \geq 0 \text{ und } n \geq 1.$$

Wir zeigen (11) durch Induktion nach  $m$ . Für  $m=0$  gilt  $f_n = f_0 \cdot f_{n-1} + f_1 \cdot f_n = f_n$ , für  $m=1$  haben wir  $f_{n+1} = f_1 \cdot f_{n-1} + f_2 \cdot f_n = f_{n-1} + f_n$ . Unsere Induktionsannahme seien nun die Identitäten  $f_{n+k} = f_k \cdot f_{n-1} + f_{k+1} \cdot f_n$  und  $f_{n+k+1} = f_{k+1} \cdot f_{n-1} + f_{k+2} \cdot f_n$ . Durch Addition beider Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} f_{n+k+2} &= f_{n+k} + f_{n+k+1} = (f_k + f_{k+1}) \cdot f_{n-1} + (f_{k+1} + f_{k+2}) \cdot f_n \\ &= f_{k+2} \cdot f_{n-1} + f_{k+3} \cdot f_n, \end{aligned}$$

womit (11) bewiesen ist. Setzen wir in (11) den Wert  $m=n+1$  ein, so erhalten wir  $f_{n+m} = f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1} \cdot f_n + f_{n+1} \cdot f_{n-1} = f_n^2 + f_{n+1}^2$ , also genau die Gleichung (9).

$$(12) \quad f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}, \quad \text{für } n \geq 0.$$

Diese Beziehung ist für  $n=0$  erfüllt. Es gelte nun  $f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_k^2 = f_k \cdot f_{k+1}$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 f_0^2 + f_1^2 + \dots + f_k^2 + f_{k+1}^2 &= f_k \cdot f_{k+1} + f_{k+1}^2 \\
 &= f_{k+1} (f_k + f_{k+1}) = f_{k+1} f_{k+2}
 \end{aligned}$$

und somit (12) bewiesen.

Die Beweise der folgenden Identitäten seien dem Leser überlassen.

$$(13) \quad f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1, \text{ für } n \geq 0.$$

$$(14) \quad f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}, \text{ für } n \geq 1.$$

$$(15) \quad f_0 + f_2 + f_4 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1, \text{ für } n \geq 0.$$

$$(16) \quad f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_3 f_4 + \dots + f_{2n-1} f_{2n} = f_{2n}^2, \text{ für } n \geq 1.$$

Dr. Klette  
Bereich Kybernetik  
der FSU Jena

## Preisaufgaben

K 7 Man löse die Gleichung

②  $1 - 2\sqrt{2} \cos^3 3x + \cos 6x = 0.$

K 8

② Im gleichseitigen Dreieck KLM schneidet die Winkelhalbierende des Winkels KLM die Seite  $\overline{KM}$  im Punkt N. Durch den Punkt N verläuft eine Gerade, die die Seite LM im Punkt A schneidet, wobei  $\overline{AM} = \overline{MN}$  ist. Es ist bekannt, daß  $\overline{LN} = a$  und  $\overline{KL} + \overline{KN} = 6$  ist. Gesucht ist die Länge der Strecke  $\overline{AL}$ .



K 9 Man löse die Ungleichung



$$\sqrt{\log_2 \frac{3-2x}{1-x}} < 1.$$

K 10 Man löse das Gleichungssystem



$$\begin{aligned}x + y + z &= a \\xy + yz + xz &= a^2 \\xyz &= a^3.\end{aligned}$$

K 11 Man berechne  $\tan \frac{x}{2}$ , wenn  $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{7}}{2}$   
und der Winkel  $x$  zwischen  $0^\circ$  und  $45^\circ$  liegt.K 12 Какое наибольшее значение может принимать модуль  
комплексного числа  $z$ , если

$$\left| z + \frac{1}{z} \right| = 1$$

Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben. Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden. Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

---

---

## Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung (II)

### Die Wahrscheinlichkeit

Wir stellen uns vor, daß wir einen zufälligen Vorgang beliebig oft unter gleichen Bedingungen ablaufen lassen können. Dabei beobachten wir jedesmal, ob ein gewisses Ereignis  $A$  eintritt oder nicht und notieren uns das. "1" soll bedeuten:  $A$  ist eingetreten, "0" soll bedeuten:  $A$  ist nicht eingetreten. Auf unserem Notizzettel entsteht bei der Beobachtung z. B. eine Folge der Form: 01010001101111000011111010... Sei  $n$  die Anzahl der Beobachtungen und  $k$  die Anzahl der Einsen bei  $n$  Beobachtungen. Die Zahl  $\frac{k}{n}$  heißt relative Häufigkeit des Ereignisses  $A$ . Wir berechnen nun nach jeder Beobachtung, d. h. für jedes  $n$ , die Zahl  $\frac{k}{n}$  und stellen fest, daß  $\frac{k}{n}$  um einen bestimmten Wert schwankt.

Jeder kann selbst nachprüfen, daß beim Würfeln die relative Häufigkeit des Ereignisses  $A = \{1\}$  um den Wert  $\frac{1}{6}$  schwankt. Das gleiche gilt auch für die Ereignisse  $A = \{2\}$ ,  $A = \{3\}$ , ...,  $A = \{6\}$ . Das bedeutet nicht, daß die relative Häufigkeit  $\frac{k}{n}$  exakt gleich  $\frac{1}{6}$  ist, sondern daß sie gleichmäßig um den Wert  $\frac{1}{6}$  schwankt. Wenn wir das Ereignis  $A = \{1, 2\}$  beobachten, so stellen wir fest, daß die relative Häufigkeit um den Wert  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  schwankt.

### Definition:

Als Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $A$  bezeichnen wir denjenigen Wert  $P(A)$ , um den die relative Häufigkeit schwankt.

Diese Definition ist nicht als exakte mathematische Definition zu verstehen. Sie soll uns nur vermitteln, was wir uns unter der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses vorzustellen haben.

Die Erfahrung zeigt, daß die Schwankungen der relativen Häufigkeit kleiner werden, wenn wir die Anzahl der Versuche erhöhen. Wir stellen nun folgende Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  fest:

- (1) Da  $\frac{k}{n}$  das Verhältnis der Anzahl der Einsen der Folge zur Gesamtzahl der Versuche ist, gilt  $0 \leq \frac{k}{n} \leq 1$ . Daher ist auch  $0 \leq P(A) \leq 1$ .



- (2) Wenn  $A = E$  ist, so besteht die notierte Folge nur aus Einsen. Weil in  $E$  alle möglichen Ergebnisse des zufälligen Vorgangs enthalten sind, liegt jedes Ergebnis in  $E$ . Also ist die relative Häufigkeit  $\frac{k}{n} = 1$ . Deshalb ist auch  $P(E) = 1$ . Wir bezeichnen das Ereignis  $E$  als das sichere Ereignis, es tritt immer ein.
- (3) Wenn wir beobachten, ob ein Ereignis  $A$  nicht eintritt, so beobachten wir damit wieder ein Ereignis, das wir mit  $\bar{A}$  bezeichnen. In  $\bar{A}$  sind alle diejenigen Elemente enthalten, die zwar in  $E$  liegen aber nicht in  $A$ . Wenn  $\frac{k}{n}$  die relative Häufigkeit von  $A$  ist, so ist  $\frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n}$  die relative Häufigkeit von  $\bar{A}$ . Es gilt daher:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- (4) Seien  $A$  und  $B$  zwei Ereignisse, die keine Elemente gemeinsam haben. Mengentheoretisch heißt das, daß  $A \cap B = \emptyset$  ist (lies:  $A$  geschnitten  $B$  ist gleich der leeren Menge. Die leere Menge ist diejenige Menge, die keine Elemente enthält.)

Wir beobachten nun das Ereignis  $A \cup B$  (lies:  $A$  vereinigt mit  $B$ ).  $A \cup B$  ist dasjenige Ereignis, das sowohl die Elemente von  $A$  als auch die Elemente von  $B$  enthält. Sei  $\frac{k}{n}$  die relative Häufigkeit des Ereignisses  $A$  und  $\frac{l}{n}$  die relative Häufigkeit von  $B$ . Dann ist die relative Häufigkeit von  $A \cup B$ :  $\frac{k+l}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n}$ . Das gilt nur unter der Bedingung  $A \cap B = \emptyset$ . Wenn nämlich das Ereignis  $A$  eintritt, so tritt  $B$  nicht ein und umgekehrt. Deshalb addieren sich die Anzahlen der Einsen  $k$  und  $l$ . Daraus ergibt sich nun: Wenn  $A \cap B = \emptyset$ , so gilt  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

Ein Beispiel für die Eigenschaft (4) sei hier gegeben:

Wir betrachten wieder unser Standardbeispiel, das Würfeln. Sei  $A = \{4\}$  und  $B = \{5\}$ . Dann gilt  $A \cap B = \emptyset$ , außerdem wissen wir  $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$ . Daraus können wir  $P(A \cup B)$  berechnen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Das Ergebnis stimmt mit unseren Beobachtungen überein, die wir beim Würfeln machen können.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich nun ganz allgemein mit solchen Funktionen  $P$  und den Mengen  $E$ .

Definition:

$P$  ist ein Verteilungsgesetz (oder Wahrscheinlichkeitsmaß) über der Menge  $E$ , wenn  $P$  jeder Teilmenge  $A \subseteq E$  eine reelle Zahl  $P(A)$  (lies  $P$  von  $A$ ) zuordnet und folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$(1) \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$(2) \quad P(E) = 1$$

$$(3) \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$(4) \quad \text{Falls } A \cap B = \emptyset, \text{ so gilt } P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Das sind genau die vier Eigenschaften, die wir aus der Deutung der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit hergeleitet haben. Die Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann man jetzt wie folgt formulieren:

Für einen zufälligen Vorgang sind die Menge  $E$  und das Verteilungsgesetz  $P$  zu bestimmen.  $P$  wird zum Beispiel aus der Bedingung bestimmt, daß für jedes Ereignis  $A$  die relative Häufigkeit um den Wert  $P(A)$  schwankt.

Behauptung (Beweis als Übungsaufgabe):

Wenn wir beim "Würfeln" festlegen, daß für jedes Ereignis der Form  $i$  gilt  $P(i) = \frac{1}{6}$  mit  $i = 1, \dots, 6$ , so kann man für jedes Ereignis  $A$  die Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  mit Hilfe der Bedingungen (1) bis (4) berechnen.

Zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung empfehlen wir folgendes Buch:

B. Gnedenko, A. Chintschin: "Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung" (Kleine Schülerbücherei).

Wolfgang Radecke  
Wiss. Assistent  
an der Sektion Mathematik  
der FSU Jena



## Lösungen

**Aufgabe J 49** (nach Thomas Gundermann, Weidhausen, Klasse 11)

$$1. \quad 0 \leq \arccos x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{für } 0 \leq x \leq 1$$

$$\text{sei } \arccos x = \alpha \quad \text{mit } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} x &= \cos \alpha \\ x^2 &= \cos^2 \alpha \\ 1-x^2 &= \sin^2 \alpha \\ \sin \alpha &= \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\alpha = \arcsin \sqrt{1-x^2}}}$$

$$2. \quad \frac{\pi}{2} \leq \arccos x \leq \pi \quad \text{für } -1 \leq x \leq 0$$

$$\text{sei } \arccos x = \alpha \quad \text{mit } \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 1-x^2 &= \sin^2 \alpha \\ \sin \alpha &= \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\alpha = \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}}}$$

wegen Bedingung (1)  
und Quadrantenbeziehungen

**Aufgabe J 50**

Zunächst setzen wir  $F(x,y) = x^2 - (9-y)x + y^2 - 9y + 15$ .

Es gilt  $F(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 9(x+y) + 15 = F(y,x)$ .

Wir zeigen jetzt, daß die Gleichung  $F(x,r)=0$  die Wurzeln  $s$  und  $t$  hat.

Dazu nehmen wir an, die Gleichung hat die Wurzeln  $s$  und  $\mu \neq t$ .

Es gilt also  $F(r,s) = F(s,r) = 0$  und  $F(r,t) = F(t,r) \neq 0$ .

Nach Voraussetzung der Aufgabe muß dann aber  $F(s,t) = F(t,s) = 0$  gelten. Folglich hat die Gleichung  $F(x,s) = 0$  die Wurzeln  $r$  und  $t$ . Nach dem Satz von Vieta müssen für  $F(x,r) = 0$  und  $F(x,s) = 0$  die Beziehungen  $s + \mu = 9 - r$  und  $9 - r = r + t$  gelten. Dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung  $\mu \neq t$ .

Da  $s$  und  $t$  Wurzeln der Gleichung  $F(x,r) = 0$  sind, und  $s \neq t$  gilt, muß die Diskriminante  $D = \frac{1}{4} (48 - (r-3)^2)$  echt größer als 0 sein. Da  $r < s < t$ , ist das Polynom  $F(x,r)$  in  $r$  positiv, d. h.

$F(r,r) > 0$ . Da  $r < s$  ist, liegt die Zahl  $r$  links von der Abszisse des Scheitels der Parabel  $F(x,r) = 0$ , d. h. links von  $\frac{s+t}{2}$ .

Aus diesen drei Ungleichungen erhält man die Behauptung der Aufgabe, daß  $-1 < r < 1$ .

**Aufgabe J 51** (nach Michael Bittner, Klasse 11)

$$\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} \log_5 x = -1 \quad x > 0$$

$$\log_x \sqrt{5x} \cdot \log_5^2 x = 1$$

$$\left(\frac{1}{2} \log_x 5 + \frac{1}{2}\right) \log_5^2 x = 1$$

Kettenregel

$$\frac{1}{2} \log_5 x + \frac{1}{2} \log_5^2 x = 1$$

$$\log_5 x + \log_5^2 x - 2 = 0$$

substituiere  $\log_5 x = y$

$$y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I. } y_1 = 1 & \log_5 x = 1 \\ \text{II. } y_2 = -2 & \log_5 x = -2 \end{array}$$

Aus I.  $\log_5 x = 1$

$$5^1 = x \quad \underline{x = 5}$$

Aus II.  $\log_5 x = -2$

$$5^{-2} = x \quad \underline{x = \frac{1}{25}}$$

Probe bestätigt  $x = \frac{1}{25}$  als Lösung.

**Aufgabe J 52** (nach Andreas Kasperek, 10. Klasse)

$$x^2 = a + (y-z)^2 \quad (1)$$

$$y^2 = b + (z-x)^2 \quad (2)$$

$$z^2 = c + (x-y)^2 \quad (3)$$

Aus (1) bis (3) folgt

$$x^2 - (y-z)^2 = a \quad (x+y-z)(x+z-y) = a$$

$$y^2 - (z-x)^2 = b \quad (y+z-x)(x+y-z) = b$$

$$z^2 - (x-y)^2 = c \quad (x+z-y)(y+z-x) = c$$



setze  $x+y-z=r$ ;  $x+z-y=s$  und  $y+z-x=t$   
somit gehen die Gleichungen über in

$$r \cdot s = a \quad (4)$$

$$r \cdot t = b \quad (5)$$

$$s \cdot t = c \quad (6)$$

Multipliziert man den Quotienten aus (4) und (5) mit (3)

$$\frac{rs}{rt} \cdot st = s^2 = \frac{a \cdot c}{b} \quad s = \sqrt{\frac{a \cdot c}{b}}$$

$$\text{analog erhält man} \quad r = \sqrt{\frac{ab}{c}}$$

$$t = \sqrt{\frac{bc}{a}}$$

es gilt aber weiter

$$x = \frac{r+s}{2}$$

$$y = \frac{r+t}{2}$$

$$z = \frac{s+t}{2}$$

damit lauten die Lösungen

$$x = \frac{\sqrt{\frac{a \cdot b}{c}} + \sqrt{\frac{a \cdot c}{b}}}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{\frac{a \cdot b}{c}} + \sqrt{\frac{b \cdot c}{a}}}{2}$$

$$z = \frac{\sqrt{\frac{a \cdot c}{b}} + \sqrt{\frac{b \cdot c}{a}}}{2}$$

**Aufgabe J 53** (nach Reinhard Mummelthey)

$$\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x > \frac{5}{8}$$

nach Umformung mit Hilfe der trigonometrischen Beziehungen

$$\cos^4 x - \cos^2 x > -\frac{1}{16}$$

Die Funktionen  $\cos^4 x$  und  $\cos^2 x$  haben jeweils die Periodenlänge  $\pi$ . Daher hat der Ausdruck  $(\cos^4 x - \cos^2 x)$  auch die Periodenlänge  $\pi$ . Nun sind zunächst die Stellen zu suchen, bei

denen

$$\cos^4 x - \cos^2 x + \frac{1}{16} > 0$$

ist.

$$\cos^2 x_1 > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$x_{11} > \arccos \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} + k_1 \pi$$

$$x_{12} < -\arccos \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} + k_2 \pi$$

$$\cos^2 x_2 > \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$x_{21} < \arccos \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}} + k_3 \pi$$

$$x_{22} > -\arccos \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}} + k_4 \pi$$

Man erhält

$$\arccos \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} + k\pi < x < \arccos \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}} + k\pi$$

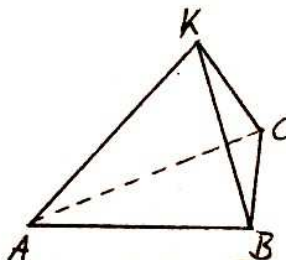
$$-\arccos \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}} + k\pi < x < -\arccos \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} + k\pi$$

als Lösungsmenge.

#### Aufgabe J 54

(nach Andras Kasperek)

Aus  $\overline{AB} = \overline{BC} = a$  und  $\overline{KB} = b$  folgt  
wegen  $\angle AKB = \angle BKC = \angle CKA = 90^\circ$   
auch  $\overline{AK} = \overline{CK} = \sqrt{a^2 - b^2}$  und  
 $\overline{AC} = \sqrt{2a^2 - 2b^2}$ .



Es sei  $R$  der Radius der einbeschriebenen Kugel der Pyramide  $ABCK$ . Dann gilt

$$\frac{1}{3} R (A_{ABC} + A_{ABK} + A_{BCK} + A_{ACK}) = V_{ABC} \quad (*)$$

Dabei gilt

$$V_{ABC} = \frac{1}{6} \overline{AK} \cdot \overline{CK} \cdot \overline{BK} = \frac{1}{6} (a^2 - b^2) b$$

$$A_{ABK} = A_{BCK} = \frac{1}{2} \overline{AK} \cdot \overline{BK} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2} b$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \overline{AK} \cdot \overline{CK} = \frac{1}{2} (a^2 - b^2)$$



$$\begin{aligned}
 A_{ABC} &= \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot h = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 - 2b^2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}
 \end{aligned}$$

Somit folgt aus (\*)

$$R = \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2} + 2b + \sqrt{a^2 - b^2}}$$

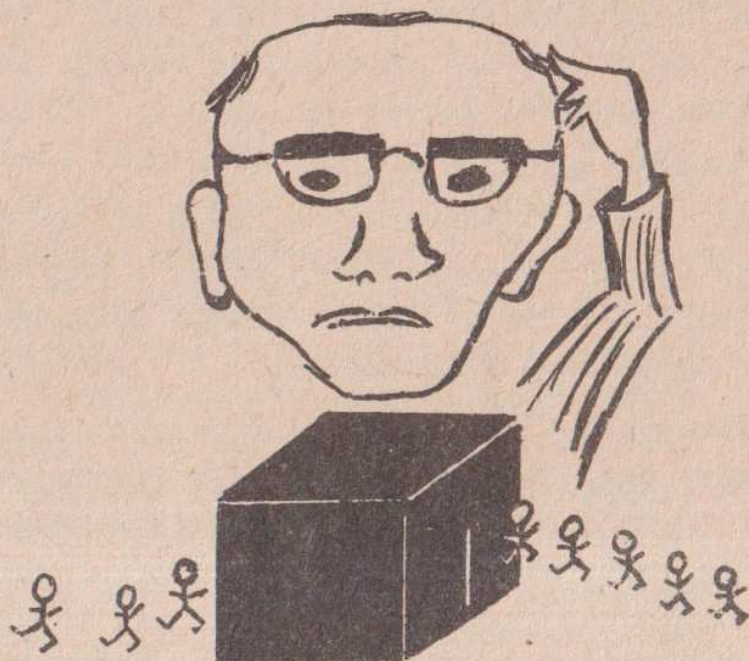
### Berichtigungen

1. Im Kreuzworträtsel (WURZEL 8/77, S. 120) muß 1. waagerecht richtig heißen: "erdnächster Punkt der Mondumlaufbahn" (Periselenium)
2. In der WURZEL 11/77 auf Seite 173 muß die Induktionsvoraussetzung (in der Lösung der Preisaufgabe J 34) lauten: "für ein  $k > 0$  gelte ..." oder einfach "für  $k > 0$  gelte ..." nicht aber, wie wir geschrieben hatten "Für alle  $k > 0$  gelte". Wir danken unserem aufmerksamen Leser E. Walter aus Greifswald für seine Zuschrift, in der er uns auf diesen Fehler aufmerksam machte.
3. Wir müssen unseren Lesern leider mitteilen, daß wir für die richtige Lösung der Preisaufgabe J 56 (WURZEL 11/77) nur einen Punkt vergeben. Das zu lösende Gleichungssystem wurde nämlich durch einen Druckfehler verändert. Und so wurde aus der ursprünglich schwierigen eine leichte Aufgabe. Alle Leser, die richtig erkannten, daß das in WURZEL 11/77 angegebene Gleichungssystem offenbar keine Lösung hat, erhalten dafür einen Punkt.

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jörg Vogel  
**Chefredakteur:** Hans-Joachim Hauschild  
**Redaktion:** K. Bartholmé, G. Blume, R. Jeske, D. Meinhardt, V. Wedler  
**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik  
**Konto:** Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt  
 Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.  
 Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.  
 Artikel-Nr. (EDV): 10932



Ein Mathematikprofessor steht vor einem leeren Hörsaal. Er beobachtet, daß 5 Studenten hineingehen, jedoch 8 Studenten herauskommen. Was denkt der Professor?



Antwort:

Wenn jetzt noch 3 hineingehen,  
ist der Raum wieder leer!

3

78

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

12. Jahrgang  
Index 33 873  
Preis: 0,20 M



## Der casus irreducibilis

Sich um eine Formel zu schlagen! Wo gibt's denn so etwas! Das gab's im Jahre 1540. Schüler des Rechenmeisters Tartaglia gingen auf solche eines gewissen Cardano los. Cardano hatte nämlich Tartaglias Formel veröffentlicht - entgegen der Abmachung. Dafür heißt sie nun Cardanosche Formel. Geheimhaltung ist eben so eine Sache!

Sei  $x^3 + px + q = 0$ . Dann gilt

$x = x_1 = u + v$  oder  $x = x_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v$  oder  $x = x_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v$ .  
 Dabei ist (\*)  $u = \sqrt[3]{-(q/2) + \sqrt{D}}$ ,  $v = \sqrt[3]{-(q/2) - \sqrt{D}}$ ,  
 $D = (q/2)^2 + (p/3)^3$ ,  $\varepsilon \neq 1$  dritte Einheitswurzel,  
 und schließlich wird verlangt:  $u \cdot v = -p/3$ .

(Natürlich ist dies nur das Endresultat der Tartagliaschen Überlegung. Begonnen hat sie mit dem Ansatz  $x=u+v$ ; die Schritte sind überall nachzulesen.) Die letzte Forderung deutet sich am besten, wenn wir  $p$  und  $q$  als reell voraussetzen. Wir erhalten durch einfache Rechnung aus (\*)  $u^3 v^3 = -(p/3)^3$ . Um  $uv = -p/3$  zu gewährleisten, müssen  $u$  und  $v$  also konjugiert komplex zueinander sein (speziell: wenn  $u$  reell, dann auch  $v$ ). Um die Sache noch einfacher zu machen: Wenn  $D \geq 0$  ist, dann haben wir bei (\*) unter den dritten Wurzeln immer reelle Radikanden. Wir wählen dann auch reelle Wurzeln für  $u$  und  $v$ , d. h. für  $D \geq 0$  nehmen wir  $u$  und  $v$  reell. Dann wird natürlich  $x_1$  reell,  $x_2$  und  $x_3$  aber zueinander konjugiert komplex. ( $z_1, z_2$  sind genau dann konjugiert komplex, wenn  $z_1 + z_2$  und  $z_1 \cdot z_2$  reell). Falls  $D > 0$ , so schneidet die Kurve  $y = x^3 + px + q$  die  $x$ -Achse also genau einmal, nämlich in  $x = x_1$ . Für  $D = 0$  haben wir zwei (reelle) Lösungen (eine einfache und eine sogenannte Doppelwurzel):  $x_1$  und  $x_2 = x_3 = (\varepsilon + \varepsilon^2)u = -u$  wegen  $u = v$ .

Übrig bleibt der Fall  $D < 0$ . Das ist der berühmte

**casus irreducibilis.**

Was für ein Name! In Latein getauchtes Unvermögen, etwas tun zu können: nämlich zu reduzieren! Der nicht reduzierbare Fall. Was soll dann da und wie soll reduziert werden? Das, was sich nun herausstellen wird, ist eigentlich genau so skandalös wie



die Prügelei um die gesamte Formel.

Wenn für  $D > 0$  die x-Achse einmal, für  $D = 0$  zweimal geschnitten bzw. berührt wird, dann bleibt für  $D < 0$ , also unseren ominösen Fall, nur übrig, daß die x-Achse dreimal geschnitten wird.

Aber das ist doch außerordentlich erfreulich! Warum sagt man dazu bloß so etwas "Negativ-Lateinisches"? Nun, der Skandal liegt eben gerade darin, daß das Erfreuliche zugleich das Mißliche ist.

Sehen wir uns doch einmal die Cardanosche Formel für  $D < 0$  an.

$\sqrt{D}$  ist dann imaginär. Somit können diesmal u und v keinesfalls reell gewählt werden. Dann aber müssen sie konjugiert echt komplex sein, wegen uv reell. Wie man leicht sieht, wird dann auch  $\xi u$  und  $\xi^2 v$  bzw.  $\xi^2 u$  und  $\xi v$  zueinander konjugiert, und für die Summen  $x_1, x_2, x_3$  gibt es sämtlich - wie verlangt - reelle Resultate. Na also! Klappt doch! Aber stellt sich nicht schon jetzt ein gewisses Unbehagen ein? Wir bekommen das Reellsein von  $x_1, x_2, x_3$  doch nur über die (konjugierte) Komplexität. Noch klarer zeigt sich diese Situation, wenn wir rationales - oder noch besser ganzzahliges p und q voraussetzen. Im Falle  $D \geq 0$  ist dann  $x_1$  reell und zwar in Form der Wurzelzusammensetzung

$$x_1 = \sqrt[3]{-(q/2) + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-(q/2) - \sqrt{D}}.$$

Wir wollen diejenigen Zahlen, die durch endlich oftmaliges Wurzelziehen und Anwendung der vier Grundrechenarten aus rationalen Zahlen entstehen, Reellwurzelzahlen (RWZ) nennen, wenn wir beim Radizieren nie den reellen Bereich verlassen, und - wenn letzteres nicht verlangt wird: Wurzelzahlen (WZ). Jede RWZ ist natürlich eine WZ, aber nicht jede WZ eine RWZ.

$x_1$  ist dann eine solche RWZ.

Ganz anders im Casus irreducibilis! Alle drei Lösungen sind zwar reell, aber nicht als RWZ dargestellt. Die Cardanosche Formel verläßt hier den reellen Bereich und stellt sämtliche drei Lösungen lediglich als WZ dar.

Eine Zeitlang waren sich die Mathematiker unschlüssig. Gewiß, die Cardanoformel hatte versagt, aber damit war ja noch keinesfalls bewiesen, daß die drei Zahlen wirklich keine RWZ waren. Vielleicht gab es andere Möglichkeiten, sie als RWZ darzustel-



len?

Aber alles Suchen in dieser Richtung blieb erfolglos. Schließlich bewies O. Hölder (1859 - 1937), daß es nicht geht, es sei denn, eine Lösung ist rational (dann aber kann man sie abspalten, und die übrigen beiden sind Lösungen einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten; also kein "echter" Fall).

Also ein wirklicher Casus irreducibilis: wir können uns nicht auf Reelle reduzieren, keine RWZ, nur WZ zu erreichen, obwohl die drei Zahlen reell sind.

Irgendwie ist das eine Blamage. Zum Zwecke der RWZ-Darstellung waren doch all diese Auflösungsformeln gerade gedacht! (Ein Funke Nützlichkeit glomm da noch, man glaubte, daß das "Auswurzeln" immer noch günstiger als andere Näherungsverfahren sei. Aber nicht einmal das stimmt.)

Es gibt also WZ, die reell sind, aber keine RWZ sind! Sie lassen sich nicht "reell" darstellen. Gibt es noch mehr davon als nur die vom "Cardano-Typ" (beim casus irreducibilis)?

Dazu müssen wir erst einmal das Wesen dieses Typs erkennen.  $u$  und  $v$  sind also konjugiert komplex (echt) und dritte Wurzeln von konjugiert komplexen Zahlen, nämlich  $-(q/2) + i\sqrt{|D|}$  und  $-(q/2) - i\sqrt{|D|}$ . Wenn wir es recht bedenken, so ist doch eigentlich die spezielle Gestalt dieser beiden Radikanden ohne Belang. Wir setzen:  $-(q/2) + \sqrt{D} = z$ ,  $\bar{z}$  zu  $z$  konjugiert. Wir müssen nur beachten, daß Real- und Imaginärteil von  $z$  RWZ sind und letzterer nicht Null. Dann ist  $\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\bar{z}}$  vom Cardanotyp, wenn wir die beiden Summanden konjugiert komplex wählen. Noch einfacher schreibt sich dies so:

Die Zahlen  $k = \sqrt[3]{z} + \overline{\sqrt[3]{z}} = \sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\bar{z}}$  sind vom Cardanotyp, falls  $z$  echt komplex,  $k$  irrational, sowie Real- und Imaginärteil von  $z$  RWZ sind.

Natürlich bieten sich statt der dritten Wurzel sofort die fünfte, siebente usw. Wurzel an (für zusammengesetzte Wurzelexponenten ist die Situation verwickelter):

Die Zahlen  $k = \sqrt[l]{z} + \sqrt[l]{\bar{z}}$  sind zwar reell, aber keine RWZ, falls  $k$  irrational,  $z$  echt komplex mit RWZ-Real- und Imaginärteil ist (1 ungerade Primzahl).



Nun können wir einen letzten Schlag gegen die Winkeldrittler führen. Es kommen ja immer noch Leute an, die behaupten, mit Zirkel und Lineal jeden Winkel exakt dritteln zu können. Das geht nachweislich aber nicht. Nur quadratische Gleichungen (oder Schachtelungen von solchen) erlauben Zirkel-Lineal-Lösungen.

Winkeldrittung führt aber auf eine kubische Gleichung:

$$\begin{aligned}\cos^3 3\varphi &= \cos^2 2\varphi \cos \varphi - \sin^2 2\varphi \sin \varphi \\ &= (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \cos \varphi - 2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \varphi \\ &= (2\cos^2 \varphi - 1) \cos \varphi - 2 \cos \varphi (1 - \cos^2 \varphi) \\ &= 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi.\end{aligned}$$

Mit  $3\varphi = \alpha$  ist also

$$\cos \alpha = 4 \cos^3(\varphi/3) - 3 \cos(\varphi/3)$$

oder, mit  $\cos(\alpha/3) = x$ :

$$x^3 - (3/4)x - (1/4)\cos \alpha = 0, \text{ d. h. } p = -(3/4), q = -(1/4)\cos \alpha$$

$$D = (q/2)^2 + (p/3)^3 = (\cos^2 \alpha - 1)/64 = -(\sin \alpha / 8)^2 < 0$$

(wenn  $\alpha \neq 0, \pi, 2\pi$ ; diese Winkel lassen sich natürlich leicht dritteln).

Also liegt hier wieder der Casus irreducibilis vor:  $\cos(\alpha/3)$  ist zwar WZ, aber keine RWZ (für  $\cos \alpha$  als RWZ; etwa  $\cos(\pi/6) = (1/2)\sqrt{3}$ ). Gäbe es nun ein Gerät, mit dem man beliebig dritte Wurzeln graphisch ziehen kann, so wäre eine Winkeldrittung noch immer nicht möglich, da eben  $\cos(\alpha/3)$  keine RWZ ist! Es ist also noch schlimmer als wir dachten!

Außer dem düsteren Kapitel Casus irreducibilis hält die Cardanoformel noch eine weitere unangenehme Überraschung für uns bereit: sie verschleiert die Rationalzahligkeit.

Nehmen wir etwa  $x^3 + x - 10 = 0$ . Dann ist  $x=2$  eine Lösung. Es ist  $p=1$ ,  $q=-10$ ,  $D=25+1/27$ ,  $D$  also irrational. Dann können  $u$  und  $v$  auch nur irrational sein. Würde man jetzt brav  $u$  und  $v$  über  $\sqrt{D}$  nach irgendeinem Näherungsverfahren für die Wurzel berechnen (Tabelle, Potenzreihe o. ä.), so bekäme man zwar (wegen erzwungenem Abbruch) immer etwas Rationales, aber doch nicht 2, sondern - wenn man keinen Fehler gemacht hat - bestenfalls eine Annäherung an 2.



Wir erkennen 2 nicht wieder. Die Cardanoformel verschleiert den Zahlencharakter. (Das tut natürlich erst recht die Ferrariformel.) Das ist ein echtes Manko.

Überblicken wir nun das gesamte Drama noch einmal! Seit der "gesammelten" Betrachtung von Gleichungen zweiten, dritten usw. Grades mit einer Unbekannten waren die Mathematiker darauf aus, diese "aufzulösen", d. h. die Lösungen mit Hilfe der vier Grundrechenarten und des "vernünftigen" Radizierens darzustellen. Dabei ergab sich, daß auch komplexe Lösungen möglich sind oder besser: daß die ganze Sache erst dann eine abgerundete Theorie ergibt, wenn man das "i" und damit die komplexen Zahlen einführt. Dennoch standen natürlich auch weiterhin die reellen Lösungen im Vordergrund. Zunächst glaubte man, sie nur durch Wurzeln vernünftig berechnen zu können, also anzunähern. Bald aber zeigte sich, daß es durchaus andere und bessere Näherungsverfahren (Potenzreihenentwicklung, Iteration u. dergl.) dafür gibt. Aber immer noch hielt man an der Sonderstellung der Wurzel fest. Man hatte das Zeichen ja schließlich erfunden, wozu hatte man es erfunden, wenn nicht dazu, dieses symbolisierte "r" von lateinisch "radix"? Tradition verpflichtet.

Die Gleichungen zweiten Grades, die quadratischen Gleichungen  $x^2+px+q=0$  mit der Auflösung  $x_{1/2}=-p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2-q}$  (hier wird nichts verschleiert und ist nichts irreduzibel) erweckten Hoffnungen, die in der Cardanoschen Formel für kubische und der Ferrarischen Formel für Gleichungen vierten Grades formal ihre Bestätigung fanden.

Dann aber, nach verzweifelten Versuchen, weiterzumachen, kam man zu der niederschmetternden Erkenntnis, daß damit dann auch schon alles zu Ende sei. Bis hierher und nicht weiter, kein "from here to eternity"! Abel und Galois wiesen unerbittlich nach, daß es ab Gleichungsgrad 5 keine Auflösungsformeln (von Wurzelcharakter) mehr gibt. (Das Ende solcher Hoffnungen zieht meist auch das Ende einer ganzen Mathematikergeneration, das Ende vieler veralteten Auffassungen nach sich; neue Denkweisen treten in den Vordergrund.)

Das war schon bitter genug. Hinzu kam aber nun noch, daß ein



beträchtlicher Teil der kubischen Gleichungen trotz Cardanoformel seine reellen Lösungen durchaus nicht durch reelle Wurzeln zu gewinnen erlaubt: der Casus irreducibilis. Man kann sich denken, daß für Gleichungen vierten Grades die Sache nicht besser, sondern eher noch schlimmer wird.

Das bedeutet aber, daß die Auflösungsformeln für kubische und quadratische Gleichungen in vielen Fällen als Näherungsverfahren effektiv versagen! Dazu kommt nun noch die oben betrachtete Rationalitätsverschleierung.

Aus einer Art Eitelkeit heraus waren die Mathematiker diesen Formeln nachgejagt, aus Spielerei, aus Ehrfurcht vor dem Wurzelzeichen und was sonst noch. Die Rechnung dafür präsentierte ihnen daraufhin prompt die Natur der Dinge, ab Grad 3. Praktisch sind Cardano- und Ferrariformel von nur sehr geringer Bedeutung. Eine späte Rache Tartaglias an Cardano!

Man mag von diesen Formeln halten was man will. Auf jeden Fall aber sind sie historische Zeugnisse, Wegmarken (oder soll man sagen: Stopzeichen?) in der Geschichte der Mathematik. Von ihnen aus ging eine neue Disziplin: die Gruppentheorie. Und die blüht und gedeiht bis auf den heutigen Tag.

Dr. K. Wohlrabe  
Berlin

---

## Mathematik im Alltag

Ein Mathematiker erhält die Aufgabe, Wasser zu kochen.

Er macht den Topf voll Wasser, stellt das Gas an und setzt den Topf mit Wasser auf den Herd.

Wie erfüllt aber der Mathematiker dieselbe Aufgabe, wenn der Topf schon voll Wasser ist?

Antwort:

Er schüttet das Wasser aus und sagt: "Damit ist die Aufgabe auf den vorigen Fall zurückgeführt."

---



## Der Sieger von Palermo (III)

### 4. Die BINETSche Formel

Wir kommen nun zur Angabe einer expliziten Formel für die Fibonacci-Folge. Hierfür erweist sich der folgende Ansatz als erfolgreich: Wir betrachten die Folge  $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$  als Lösungen der Gleichungen  $f_2 = f_1 + f_0, f_3 = f_2 + f_1, \dots, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \dots$ , d. h. es gilt  $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$  für  $n \geq 0$ . Hieraus folgt sofort

$$(17) \quad x^2 = x + 1,$$

die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$(18) \quad \tau = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \text{ und}$$

$$(19) \quad \hat{\tau} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

Für diese Werte sind folglich die Beziehungen  $\tau^2 = \tau + 1$ ,  $\hat{\tau}^2 = \hat{\tau} + 1$  und  $\tau \cdot \hat{\tau} = -1$  erfüllt. Im Jahre 1843 bewies nun J. P. M. BINET die folgende explizite Darstellung der Fibonaccischen Zahlen:

$$(20) \quad f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau^n - \hat{\tau}^n), \text{ für } n \geq 0.$$

Diese Identität ist als "Binetsche Formel" in die Literatur eingegangen. Teilweise wird diese Formel in der Literatur aber bereits MOIVRE zugeschrieben, der sie 1718 bewiesen haben soll.

Für  $n=0$  ergibt sich  $f_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} (1-1) = 0$ , für  $n=1$  gilt

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) = 1. \text{ Unsere Induktionsannahme seien nun}$$

$$\text{die Identitäten } f_k = \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau^k - \hat{\tau}^k) \text{ und } f_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau^{k-1} - \hat{\tau}^{k-1}).$$

Dann folgt

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau^k + \tau^{k-1} - \hat{\tau}^k - \hat{\tau}^{k-1})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau^{k-1}(\tau + 1) - \hat{\tau}^{k-1}(\hat{\tau} + 1))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau^{k-1} \cdot \tau^2 - \hat{\tau}^{k-1} \cdot \hat{\tau}^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau^{k+1} - \hat{\tau}^{k+1}),$$

womit die Binetsche Formel bewiesen ist. — Diese Formel ist

gut geeignet, bestimmte endliche Summen Fibonaccischer Zahlen auszurechnen. Es sei etwa der Wert der Summe  $f_3 + f_6 + f_9 + \dots + f_{3n}$  zu bestimmen. Gemäß (20) erhalten wir hierfür

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau^3 + \tau^6 + \dots + \tau^{3n} - \frac{\tau^3}{\tau^3} - \frac{\tau^6}{\tau^6} - \dots - \frac{\tau^{3n}}{\tau^{3n}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{\tau^{3n+3} - \tau^3}{2\tau} - \frac{\tau^{3n+3} - \tau^3}{2\tau} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\tau^{3n+2} - \tau^{3n+2}}{\sqrt{5}} - \frac{\tau^2 - \tau^2}{\sqrt{5}} \right) \\ &= \frac{1}{2} (f_{3n+2} - f_2) \end{aligned}$$

Wir haben also die Rechenregel

$$(21) \quad f_3 + f_6 + f_9 + \dots + f_{3n} = \frac{1}{2} (f_{3n+2} - f_2)$$

bewiesen. - Wir geben noch eine interessante Berechnung des Wertes von  $\tau^n$  an.

$$(22) \quad \tau^n = f_n \cdot \tau + f_{n-1}, \text{ für } n \geq 2.$$

Für  $n=2$  gilt  $\tau^2 = \tau + 1$ , für  $n=3$  haben wir  $\tau^3 = \tau \cdot \tau^2 = \tau(\tau + 1) = \tau^2 + \tau = \tau + 1 + \tau = 2\tau + 1$ . Es werden nun die Gleichungen

$\tau^k = f_k \cdot \tau + f_{k-1}$  und  $\tau^{k+1} = f_{k+1} \cdot \tau + f_k$  als Induktionsannahme verwendet. Durch Addition dieser Gleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \tau^k + \tau^{k+1} &= \tau^k(1 + \tau) = \tau^{k+2} \\ &= (f_k + f_{k+1}) \cdot \tau + (f_{k-1} + f_k) \\ &= f_{k+2} \cdot \tau + f_{k+1}, \end{aligned}$$

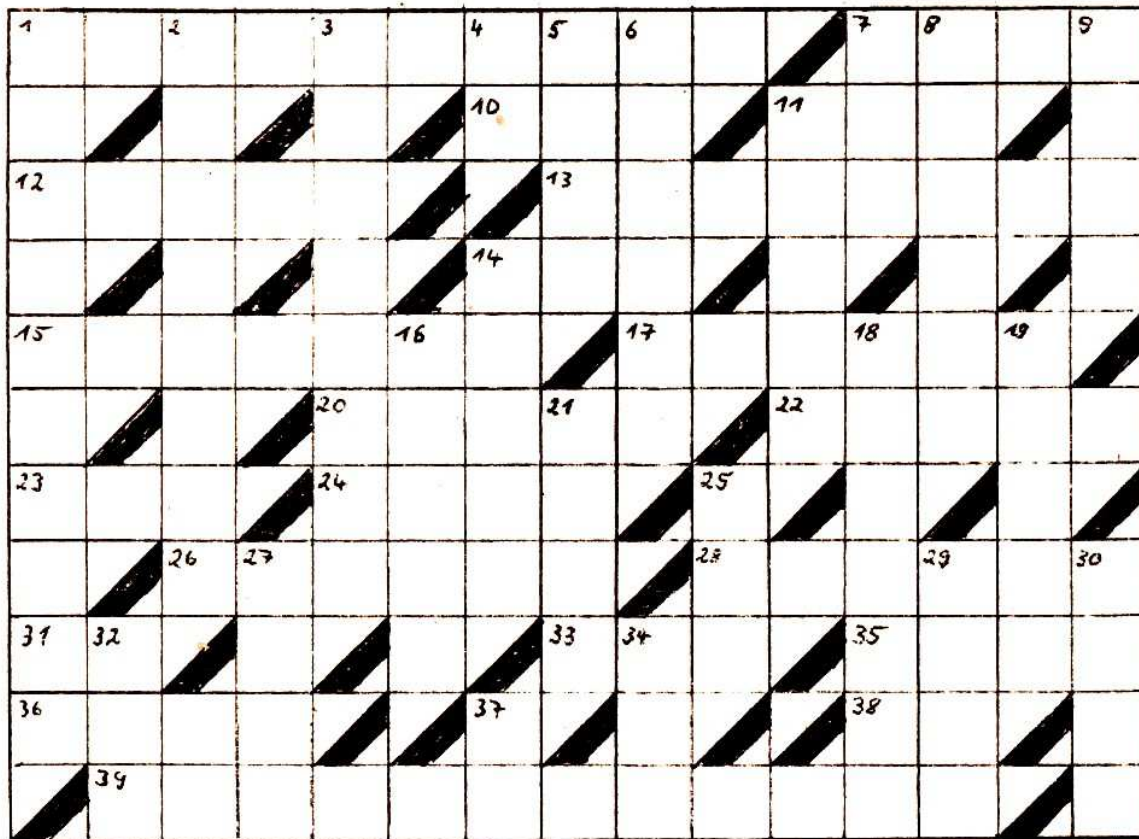
womit (22) bewiesen ist. - Der Nachweis der folgenden Beziehung sei dem Leser als Übung empfohlen.

$$(23) \quad \tau^{n-2} \leq f_n \leq \tau^{n-1}, \text{ für } n \geq 1.$$

Dr. Klette  
Bereich Kybernetik



## Kreuzwörterrätsel



## Auflösung des Kreuzwörterrätsels aus Wurzel 8/77

Waagerecht: 1. Periselenium 7. Er 9. orthogonal 13. ham  
 14. ab 15. Karl 16. Baer 18. Ti 19. or 20. Dakar  
 24. Ogis 26. Greens 27. Rad 29. Rudi 30. Al 31. Almagest  
 33. Sattler 34. Rest

Senkrecht: 1. Pythagoras 2. Rhomboid 3. Set 4. Erhard  
 5. eng 6. Unna 8. Ellipse 10. Ob 11. Oktaeder 12. Art  
 17. Ars 21. agrar 22. Krug 23. Reise 25. Gala 28. All  
 31. At 32. TS

w a a g e r e c h t :

1. Eigenschaft mancher Folgen
7. grüne Pflanze
10. Abschiedsgruß
11. weibliches Schwein
12. chemisches Element
13. Teilung (math.)
14. Lkw-Typ
15. berühmtes Orgelwerk von J.S.Bach
17. chemische Verbindung (Mehrz.)
20. Gebärde, Handbewegung
22. arabische Halbinsel
23. englisches Bier
24. Nebenfluß der Seine
26. Teil des Bruches
28. geordneter Haufen von Stückgut
31. Pronomen
33. Honigwein
35. Gestalt aus "Wallenstein"
36. Nebenfluß der Donau
38. landwirtschaftliches Produkt
39. Teil Europas

s e n k r e c h t :

1. von einem Motor angetriebenes Fahrzeug
2. Gestalt aus "Kleider machen Leute"
3. Gewürzpflanze
4. chemisches Symbol für Gallium
5. altisländische Sagensammlung
6. Nebenfluß der Oder
7. gasförmiger Stoff
8. zerfallenes Bauwerk
9. feiner Kies
11. Winkelfunktion
14. physikalische Größe
16. Zustand der Gesichtshaut
18. See in der SU bei Sotschi
19. Tätigkeit der Nagetiere
21. mathematischer Ausdruck
25. Teil des Baumes
27. italienische Insel
29. Schmerz, Not
30. Singstück
32. Typenbezeichnung eines sowj. Pkw
34. griechischer Buchstabe
37. sowj. Hubschraubertyp

**Die 3 Mäuse**

3 Mäuse gehen auf einer Geraden spazieren. Die erste Maus sagt:

"Ich bin die erste Maus. Hinter mir laufen 2 Mäuse und vor mir keine."

Die zweite Maus sagt:

"Ich bin die zweite Maus. Vor

?

mir läuft eine Maus und hinter mir läuft eine Maus."

Die dritte Maus sagt:

"Ich bin die dritte Maus. Vor mir laufen 2 Mäuse und hinter mir laufen auch 2 Mäuse."

Wie ist das zu erklären?



# Friedrich-Schiller-Universität Jena

## Zahlen und Fakten

1. Gegenwärtig studieren mehr als 4.500 Studenten an 18 Sektionen in 20 Ausbildungseinrichtungen.  $\frac{1}{3}$  davon sind Lehrerstudenten. 80 % der Studenten sind in Studentenwohnheimen untergebracht. 90 % der Studenten sind Stipendienempfänger, ca. 40 Studenten erhalten ein Sonderstipendium.
2. Höhepunkt der FDJ-Studententage im Studienjahr 1976/77 war das X. Karl-Marx-Seminar. Über 500 Studenten beteiligten sich in 27 Arbeitskreisen mit 141 schriftlichen Diskussionsbeiträgen.
3. Am diesjährigen Studentensommer beteiligten sich über 2000 Studenten, davon 35 Freunde an der Drushba-Trasse und 750 Studenten an der FDJ-Initiative Berlin. Im zentralen Jugendobjekt FDJ-Initiative Berlin wurde allein ein ökonomischer Nutzen von 2 Mio Mark erarbeitet. 560 FDJ-Studenten erfüllten im Jahre des Roten Oktober in 10 internationalen Studentenbrigaden und 3 internationalen Studentenlagern wichtige Aufgaben aus den Volkswirtschaftsplänen der Staaten der sozialistischen Gemeinschaft.
4. In der FDJ-Grundorganisation bestehen gegenwärtig konkrete Freundschaftsverträge zu den Leitungen der Jugendverbände an den Universitäten Minsk, Tbilissi, Pets und Presow.
5. Jährlich finden in Jena Informationstage statt. Im Studienjahr 1976/77 beteiligten sich ca. 1000 Studenten des O. Studienjahres. Ziel dieser Veranstaltung ist es, die künftigen Studenten auf ihr Studium vorzubereiten.

---

## Schlagfertig

Ein Junge raucht auf der Straße.

Da sagt eine Frau zu ihm:

"Na, wenn das Dein Vati wüßte,  
daß Du rauchst!"

Darauf antwortet der Kleine:

"Wenn das Ihr Gatte wüßte, daß  
Sie fremde Männer ansprechen!"

---

## Preisaufgaben

J 13 Man zeige, daß die Zahl  $3^{105} + 4^{105}$  durch 49 und 181 teilbar ist!

①

J 14 Man finde alle natürlichen Zahlen  $n$ , für die  $(x+1)^n - x^{n-1}$  durch  $x^2 + x + 1$  teilbar ist!

②

J 15 Man löse das Gleichungssystem

①

$$xy = x + y + z$$

$$xz = 2(x - y + z)$$

$$yz = 3(y - x + z) !$$

J 16 Man löse das Gleichungssystem

②

$$7^y \cdot \log_5 x = -2$$

$$4 \cdot 7^y + \log_5 x = 2 !$$

J 17 (Aufgabenvorschlag von Dittmar Kurtz, Friedrichsroda)

②

Gegeben seien die vier Seiten eines Sehnenvierecks  $a, b, c, d$ . Man zeige, daß das Sehnenviereck von allen Vierecken mit den Seitenlängen  $a, b, c, d$  das flächengrößte ist!

J 18 В усечённую правильную четырёхугольную пирамиду вписан шар радиусом  $r$ . Угол между боковой гранью и нижним основанием пирамиды равен  $\alpha$ . Вычислить объём усечённой пирамиды.

②

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.

Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Einsendeschluß: 30. 4. 1978



# Lösungen

## Aufgabe J 55

Der Flächeninhalt des Quadrates ist  $A_Q = \frac{18}{25}$ .

Für das Parallelogramm gilt:

$$A_P = \frac{1}{6} \sqrt{2} \cdot \sqrt{19} \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{6} \sqrt{2} \cdot \sqrt{19} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2} = \frac{1}{6} \sqrt{19}.$$

Offensichtlich gilt:

$$11875 > 11664$$

$$625 \cdot 19 > 324 \cdot 36$$

$$\frac{19}{36} > \frac{324}{625}$$

$$\frac{1}{6} \sqrt{19} > \frac{18}{25}$$

$$\underline{A_P > A_Q}$$

## Aufgabe J 56

Das angegebene Gleichungssystem besitzt keine Lösung.

## Aufgabe J 57

Aus der Gleichung (1) folgt für z

$$z = 2 - x - y, \text{ was in (2) eingesetzt wird.}$$

$$2xy - (2 - x - y)^2 = 4$$

$$\text{oder } x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$\text{oder } (x-2)^2 + (y-2)^2 = 0.$$

Die Summe von zwei nichtnegativen Größen (und das sind Quadrate) kann nur dann Null sein, wenn beide Größen Null sind. Es gilt also

$$x=2 \quad \text{und} \quad y=2.$$

Daraus folgt sofort  $z=-2$ .

Das System besitzt nur diese Lösung (2,2,-2).

## Aufgabe J 58

Die Gleichung  $2 \operatorname{ctg} 2x - 3 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$  kann äquivalent umgeformt werden in

$$3\left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \quad (1)$$

$$\text{oder } \frac{3 \sin x}{\sin 2x \sin 3x} = \frac{1}{\sin 2x \cos 2x} \quad (2)$$

Diese Gleichung kann nur für  $\sin 2x = 0$ ,  $\sin 3x \neq 0$  und  $\cos 2x \neq 0$  Lösungen haben. (3)

Für die  $x$ , die Lösung sind, gilt:

$$3 \sin x \cos 2x = \sin 3x \quad (4)$$

$$\text{oder } \sin x(3 - 4 \sin^2 x - 3 \cos 2x) = 0 \quad (5)$$

$$\text{oder } 2 \sin^3 x = 0 \quad (6)$$

Aus der letzten Gleichung folgt, daß die Gleichung in der Aufgabenstellung nur dann Lösungen haben kann, wenn für diese  $x$  gilt:  $\sin x = 0$ , was aber zu (3) im Widerspruch steht. Daraus folgt aber, daß die Gleichung im Bereich der reellen Zahlen keine Lösungen hat.

**Aufgabe J 59** (nach Kirsten Helbig, Frankfurt/O.)

$$\log_{1/3} \log_4(\sin x + 2\sqrt{2} \cos x) > 0 \quad (1)$$

Damit alle Logarithmen definiert sind, muß gelten:

$$\begin{aligned} \log_4(\sin x + 2\sqrt{2} \cos x) &> 0 \\ \sin x + 2\sqrt{2} \cos x &> 1 \end{aligned} \quad (2)$$

$\log_{1/3} z$  ist positiv, für  $0 < z < 1$ .

$$\begin{aligned} \log_4(\sin x + 2\sqrt{2} \cos x) &< 1 \\ \sin x + 2\sqrt{2} \cos x &< 4 \end{aligned} \quad (3)$$

Es gilt aber wegen  $\sin x \leq 1$  und  $\cos x \leq 1$ :

$$\sin x + 2\sqrt{2} \cos x \leq 1 + 2\sqrt{2} < 1 + 2\sqrt{\frac{9}{4}} = 4 \text{ für alle reellen } x.$$

Wir untersuchen also (2):

$$\begin{aligned} \sin x + 2\sqrt{2} \cos x &> 1 \\ 2\sqrt{2} \cos x &> 1 - \sin x \\ 2\sqrt{2} \sqrt{1 - \sin^2 x} &> 1 - \sin x \end{aligned}$$

Da alle Größen nichtnegativ sind, kann quadriert werden

$$8(1 - \sin^2 x) > 1 - 2 \sin x + \sin^2 x$$

$$9 \sin^2 x - 2 \sin x - 7 < 0$$

$$(\sin x - 1)\left(\sin x + \frac{7}{9}\right) < 0$$

$$-\frac{7}{9} < \sin x < 1$$



Folglich ist die Lösungsmenge

$$2k\pi - \arcsin \frac{7}{9} < x < (2k+1)\pi + \arcsin \frac{7}{9},$$

wobei  $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

**Aufgabe J 60** (nach Dittmar Kurtz, Friedrichsroda)

Nach dem Polynomischen Satz gilt

$$(1+x^2-x^3)^9 = \sum_{u_1+u_2+u_3=9} \frac{9!}{u_1!u_2!u_3!} 1^{u_1} \cdot x^{2u_2} (-x)^{3u_3},$$

wobei die Summe über alle Kombinationen von Zahlen  $u_1, u_2, u_3$  gebildet wird, deren Summe 9 beträgt. Von Interesse sind die Zahlen  $u_2, u_3$ , für die

$$2u_2 + 3u_3 = 8$$

gilt.

Es gibt genau zwei Möglichkeiten:

1.  $u_2=4, u_3=0$  ;  $u_1=5$
2.  $u_2=1, u_3=2$  ;  $u_1=6$

Für den Koeffizienten gilt:

$$1. \quad K_1 = \frac{9!}{4! 0! 5!} = 126$$

$$2. \quad K_2 = \frac{9!}{2! 1! 6!} = 252$$

$$\text{Insgesamt gilt: } K = K_1 + K_2 = 378$$

Auflösung: Die dritte Maus von Seite 43 lügt!

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jörg Vogel

**Chefredakteur:** Hans-Joachim Hauschild

**Redaktion:** K. Bartholmé, G. Blume, R. Jeske, D. Meinhardt, V. Wedler

**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

**Konto:** Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt

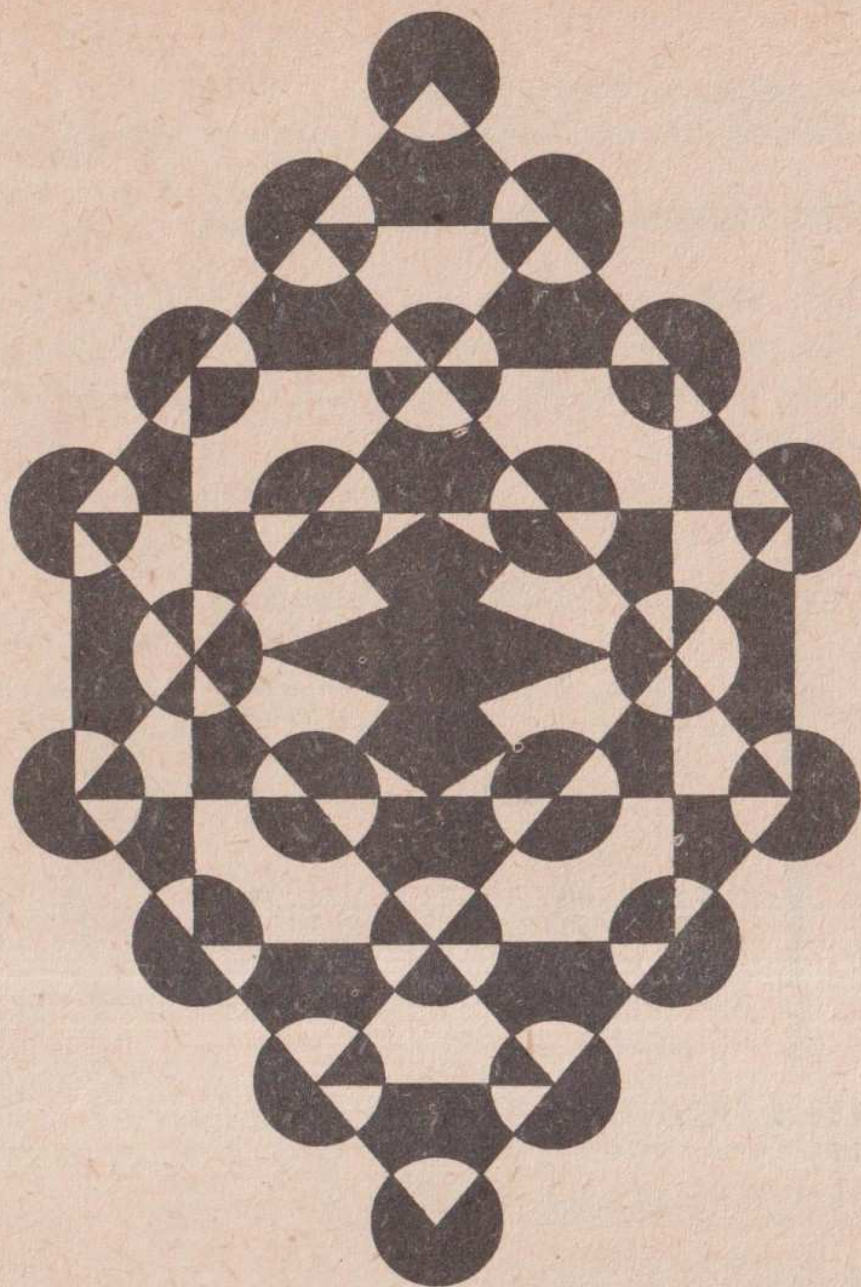
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement

0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932





4

78

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-  
gendobjekt Studenvor-  
bereitung der Sektion  
Mathematik an der  
Friedrich-Schiller-Uni-  
versität Jena

12. Jahrgang  
Index 33 873  
Preis: 0,20 M



## Die Jensensche Ungleichung

Viele Ungleichungen enthalten konvexe oder konkave Funktionen. Oftmals lassen sich diese mit Hilfe der Jensenschen Ungleichung leicht beweisen, während andere Beweise recht umständlich sein können.

Wir wollen deshalb die Jensensche Ungleichung näher kennenlernen.

### S a t z : (Jensensche Ungleichung)

Sei  $f$  eine auf einem beliebigen Intervall  $J$  konvexe (bzw. konkave) Funktion,  $x_1, \dots, x_n \in J$ ,  
 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, 1)$  mit  $\sum_{r=1}^n \alpha_r = 1$ .

Dann gilt  $\sum_{r=1}^n \alpha_r f(x_r) \geq f(\sum_{r=1}^n \alpha_r x_r)$ .

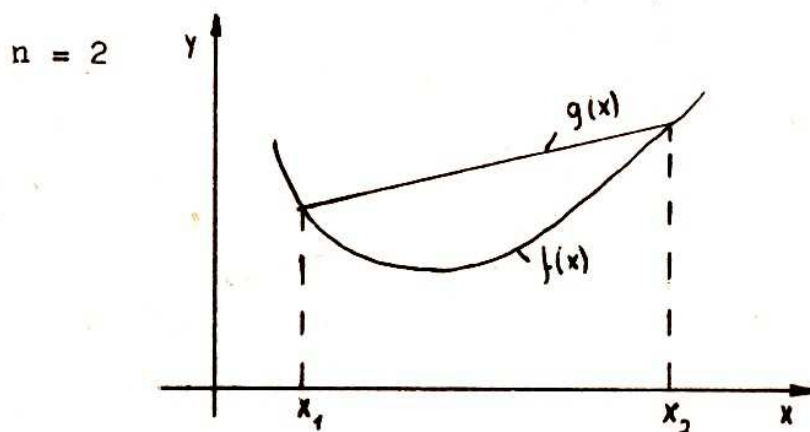
(bzw.  $\sum_{r=1}^n \alpha_r f(x_r) \leq f(\sum_{r=1}^n \alpha_r x_r)$ ).

Die Gleichheit tritt genau dann ein, wenn  $x_1 = \dots = x_n$  gilt.

### Beweis durch vollständige Induktion:

Wir führen hier den Beweis für den Fall, daß  $f$  konvex ist. Für konkave Funktionen verläuft er analog.

#### 1. Induktionsanfang:



Seien  $x_1, x_2 \in J$  und  $x_1 \neq x_2$ . Dann verläuft die Sehne  $g(x)$  zwischen den Punkten  $(x_1; f(x_1))$  und  $(x_2; f(x_2))$  "oberhalb" des Graphen der Funktion  $f(x)$ .

Es gilt also 
$$\frac{g(x)-f(x_1)}{x-x_1} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

(Gleichung der Gerade  $g(x)$ )

und  $g(x) > f(x)$  für alle  $x \in (x_1; x_2)$ .

(Wir wollen hier "konvex" im Sinne von "streng konvex" verstehen.)

Es folgt:

$$g(x) = \left(1 - \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right) f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) > f(x) \quad (1)$$

für alle  $x \in (x_1; x_2)$

Jetzt seien  $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$  mit  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ .

Wir setzen  $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ . Daraus folgt  $\alpha_1 = 1 - \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$  und

$$\alpha_2 = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Es muß  $x \in (x_1; x_2)$  gelten, so daß wir (1) anwenden können.

Es folgt  $\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) > f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$ .

Für  $x_1 = x_2$  folgt jedoch für  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

$$\begin{aligned} \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) &= \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_1) \\ &= f(x_1) = f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1) = f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), \end{aligned}$$

d. h. wenn  $x_1 = x_2$  (und nur dann!) gilt das Gleichheitszeichen.

### 2.1. Induktionsvoraussetzung:

Obiger Satz gelte für ein bestimmtes  $n$ . ( $n \geq 2$ )

### 2.2. Induktionsbehauptung:

Der Satz gilt auch für  $n+1$ .

### 2.3. Induktiver Beweis:

Es seien  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in J$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in (0,1)$

und  $\sum_{r=1}^{n+1} \alpha_r = 1$ .

Es gilt

$$\sum_{r=1}^{n+1} \alpha_r f(x_r) = (1 - \alpha_{n+1}) \sum_{r=1}^n \frac{\alpha_r}{1 - \alpha_{n+1}} f(x_r) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}).$$



Da offenbar  $\sum_{r=1}^n \frac{d_r}{1-d_{n+1}} = 1$  und  $\frac{d_r}{1-d_{n+1}} \in (0,1)$ , für  $r=1, \dots, n$ ,

folgt aus der Induktionsvoraussetzung, daß

$$\sum_{r=1}^{n+1} d_r f(x_r) \geq (1-d_{n+1}) f\left(\sum_{r=1}^n \frac{d_r}{1-d_{n+1}} x_r\right) + d_{n+1} f(x_{n+1}),$$

wobei die Gleichheit genau für  $x_1 = \dots = x_n$  gilt.

Im Induktionsanfang haben wir aber die Jensensche Ungleichung für  $n=2$  schon bewiesen, so daß der Ausdruck auf der rechten Seite

$$\geq f\left((1-d_{n+1}) \sum_{r=1}^n \frac{d_r}{1-d_{n+1}} x_r + d_{n+1} x_{n+1}\right) \geq f\left(\sum_{r=1}^{n+1} d_r x_r\right) \text{ wird,}$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn

$$x_{n+1} = \sum_{r=1}^n \frac{d_r}{1-d_{n+1}} x_r.$$

Insgesamt erhalten wir also:

$$\sum_{r=1}^{n+1} d_r f(x_r) \geq f\left(\sum_{r=1}^{n+1} d_r x_r\right).$$

Und die Gleichheit gilt genau dann, wenn  $x_1 = \dots = x_n = x_{n+1}$ . w.z.b.w.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist somit die Gültigkeit der Jensenschen Ungleichung für alle  $n \geq 2$  bewiesen.

Bei der Anwendung der Jensenschen Ungleichung kommt es vor allem auf die geschickte Wahl von  $f$  an.

Hier 2 Beispiele:

1.  $\alpha, \beta, \gamma$  seien die Winkel eines Dreiecks. Man beweise:

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3}{2} \sqrt{3}!$$

Wann gilt die Gleichheit?

Wir betrachten die Funktion  $f(x) = \sin x$  im Intervall  $(0, \pi)$ .

Sie ist dort konkav. Wegen  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$  gilt

$$\frac{1}{3} \sin \alpha + \frac{1}{3} \sin \beta + \frac{1}{3} \sin \gamma \leq \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

woraus sofort die zu beweisende Ungleichung folgt. Die Gleichheit gilt genau bei  $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ .

2.  $a_1, \dots, a_n$  seien positive Zahlen. Man beweise:

$$(1+a_1) \dots (1+a_n) \geq (1 + \sqrt[n]{a_1 \dots a_n})^n$$

Wann gilt die Gleichheit?

$f(x) = \ln(1+e^x)$  ist auf  $(-\infty, \infty)$  konvex, da  $f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$ .

Es folgt

$$\frac{1}{n} [\ln(1+e^{x_1}) + \dots + \ln(1+e^{x_n})] \geq \ln(1+e^{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}})$$

für beliebige  $x_1, \dots, x_n$ .

Wir wählen  $x_r = \ln a_r$  und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} [\ln(1+a_1) + \dots + \ln(1+a_n)] &\geq \ln(1 + \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}) \\ \ln[(1+a_1) \dots (1+a_n)] &\geq \ln(1 + \sqrt[n]{a_1 \dots a_n})^n. \end{aligned}$$

Da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, folgt

$$e^{\ln[(1+a_1) \dots (1+a_n)]} \geq e^{\ln(1 + \sqrt[n]{a_1 \dots a_n})^n}$$

$$(1+a_1) \dots (1+a_n) \geq (1 + \sqrt[n]{a_1 \dots a_n})^n$$

Die Gleichheit gilt genau bei  $x_1 = \dots = x_n$ , d.h. bei  $a_1 = \dots = a_n$ .

Harald Gottstein

Mathematikstudent 1. Stdj.

## Der Sieger von Palermo (IV)

### 5. Die Kettenbrüche von SIMSON

Von JOHANNES KEPLER (1571 - 1630) wurde eine weitere interessante Eigenschaft der Fibonaccischen Zahlen erstmals entdeckt. Er betrachtete die Quotienten  $f_{n+1}/f_n$ . Wir berechnen uns hierzu die ersten Werte dieser Folge:

| n             | 0        | 1 | 2 | 3   | 4   | 5   | 6     | 7      | 8      | 9      | 10     |
|---------------|----------|---|---|-----|-----|-----|-------|--------|--------|--------|--------|
| $f_{n+1}/f_n$ | $\infty$ | 1 | 2 | 1,5 | 1,6 | 1,6 | 1,625 | 1,6154 | 1,6190 | 1,6176 | 1,6182 |



Berechnen wir nun andererseits die Dezimaldarstellung des in (18) angegebenen Wertes von  $\tau$ , so erhalten wir

$$(24) \quad \tau = 1,61803398874989\dots$$

Allgemein gilt die wohl doch etwas überraschende Beziehung

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1}/f_n = \tau.$$

Von R. SIMSON (1687 - 1768) wurde hierfür ein interessanter Beweis angegeben, welcher eine weitere Eigenschaft der Fibonacci'schen Zahlen verwendet. Er betrachtete hierzu den unendlichen Kettenbruch

$$(26) \quad K = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Mit  $f_{n+1}/f_n$  ist nun jeweils gerade der  $n$ -te Näherungsbruch dieses unendlichen Kettenbruches  $K$  gegeben ( $n \geq 1$ ).

$$1, 1+1=2, 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}, 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} = \frac{5}{3}, \dots$$

Gemäß der Beziehung  $\tau^2 = \tau + 1$  erhalten wir für  $\tau$

$$(27) \quad \tau = 1 + \frac{1}{\tau}.$$

Durch iterierte Anwendung der Identität (27) folgt

$$\tau = 1 + \frac{1}{\tau} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\tau}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\tau}}} = \dots,$$

d. h., es gilt  $\tau = K$  und für  $n \rightarrow \infty$  wird  $K$  durch  $f_{n+1}/f_n$  immer besser angenähert.

Dr. Klette  
Bereich Kybernetik  
der Sektion Mathematik  
der FSU Jena

## Lösung der Sonderpreisaufgabe aus „Wurzel“ 3/77

Wir wiederholen zunächst die Aufgabenstellung:

1. Im Herbst des Jahres 1976 trafen sich drei Ehepaare zu einer großen Familienfeier.
2. Jeder der Ehemänner ist der Bruder einer Ehefrau und jede Ehefrau die Schwester eines Ehemannes (deswegen Familienfeier).
3. Karin ist genau 26 Wochen älter als ihr Ehemann, der im August geboren ist.
4. Die Schwester von Herrn Weiß ist mit dem Schwager von Karins Bruder verheiratet. Die Hochzeit fand an ihrem Geburtstag im Januar statt.
5. Gisela Weiß ist kleiner als Klaus Schwarz.
6. Die Schwester von Wolfgang ist jünger als Marita.
7. Rainer ist in diesem Jahr 24 Jahre alt geworden.

Wie heißt Frau Braun mit Vornamen?

### Lösung:

Wir fertigen folgende Tabelle an:

|         |         | Bruder: |   |         |         |    |   | Ehemann: |    |   |
|---------|---------|---------|---|---------|---------|----|---|----------|----|---|
| Vorname | N a m e |         |   | Vorname | N a m e |    |   | Vorname  |    |   |
|         | W       | S       | B |         | K       | Wo | R | W        | Wo | R |
| Karin   |         |         |   |         |         |    |   |          |    |   |
| Gisela  |         |         |   |         |         |    |   |          |    |   |
| Marita  |         |         |   |         |         |    |   |          |    |   |

W = Weiß

K = Klaus

S = Schwarz

Wo = Wolfgang

B = Braun

R = Rainer

In die freien Felder schreiben wir eine 1 ein, wenn die entsprechende Kombination zulässig ist, ansonsten eine Null.

Es gibt zwei Möglichkeiten:

- a) Karin Braun und b) Marita Braun. (nach 5. hat Gisela den Nachnamen Weiß)



Wir nehmen an, es gibt die erste Möglichkeit.

| Vorname | Name    |   |   | Bruder: |    |   |         |   |   | Ehemann: |    |   |
|---------|---------|---|---|---------|----|---|---------|---|---|----------|----|---|
|         | Vorname |   |   | Name    |    |   | Vorname |   |   | Name     |    |   |
|         | W       | S | B | K       | Wo | R | W       | S | B | K        | Wo | R |
| Karin   | 0       | 0 | 1 |         |    |   |         |   | 0 | 0        |    |   |
| Gisela  | 1       | 0 | 0 |         |    |   | 0       |   |   | 0        |    |   |
| Marita  | 0       | 1 | 0 |         |    |   |         | 0 |   | 1        | 0  | 0 |

Die Schwester von Herrn Weiß kann entweder Karin oder Marita sein. Marita scheidet aber aus, da in diesem Fall der Bruder von Karin Herr Schwarz wäre, und Marita Schwarz mit ihrem eigenen Bruder und nicht mit dessen Schwager verheiratet ist. Dies widerspricht aber der Bedingung 4. So erhalten wir also folgende Geschwisterpaare. Karin - Herr Weiß, Marita - Herr Braun und Gisela - Herr Schwarz.

| Vorname | Name    |   |   | Bruder: |    |   |         |   |   | Ehemann: |    |   |
|---------|---------|---|---|---------|----|---|---------|---|---|----------|----|---|
|         | Vorname |   |   | Name    |    |   | Vorname |   |   | Name     |    |   |
|         | W       | S | B | K       | Wo | R | W       | S | B | K        | Wo | R |
| Karin   | 0       | 0 | 1 | 0       |    |   | 1       | 0 | 0 | 0        |    |   |
| Gisela  | 1       | 0 | 0 | 1       | 0  | 0 | 0       | 1 | 0 | 0        |    |   |
| Marita  | 0       | 1 | 0 | 0       |    |   | 0       | 0 | 1 | 1        | 0  | 0 |

Wegen 6. ist Karin die Schwester von Wolfgang. Damit sind für Wolfgang die Nachnamen Braun und Schwarz nicht mehr möglich. Also hat Wolfgang den Nachnamen Weiß.

Jetzt können wir ohne Schwierigkeit die Tabelle vollständig ausfüllen.

| Vorname | Name    |   |   | Bruder: |    |   |         |   |   | Ehemann: |    |   |
|---------|---------|---|---|---------|----|---|---------|---|---|----------|----|---|
|         | Vorname |   |   | Name    |    |   | Vorname |   |   | Name     |    |   |
|         | W       | S | B | K       | Wo | R | W       | S | B | K        | Wo | R |
| Karin   | 0       | 0 | 1 | 0       | 1  | 0 | 1       | 0 | 0 | 0        | 0  | 1 |
| Gisela  | 1       | 0 | 0 | 1       | 0  | 0 | 0       | 1 | 0 | 0        | 1  | 0 |
| Marita  | 0       | 1 | 0 | 0       | 0  | 1 | 0       | 0 | 1 | 1        | 0  | 0 |

Wegen 3. und 7. und 1. ist Rainer Braun (Karins Mann) im August 1952 geboren. Karin ist aber auch die Schwester von Herrn Weiß und wegen 4. im Januar geboren. Andererseits ist Karin (wegen



3. und 7.) 26 Wochen vor dem Geburtstag ihres Mannes im August 1952 geboren. Nun ist aber 1952 ein Schaltjahr gewesen, so daß die Zeit vom 31. Januar bis zum 1. August 1952 genau 26 Wochen und 1 Tag ausmacht. (Der Leser zähle selbst nach:

$29+31+30+31+30+31+1 = 183 = 26 \cdot 7 + 1$ ) Also kann Karin auf Grund von Bedingung 3. gar nicht im Januar geboren sein.

Demzufolge führt die Annahme

a) Karin Braun

zum Widerspruch mit den Bedingungen 1. bis 7.

Damit ist nachgewiesen, daß nur

b) Marita Braun

die richtige Lösung sein kann.

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß die Annahme, Frau Braun hat den Vornamen Marita mit der Aufgabenstellung verträglich ist.

Dazu gebe ich folgende Tabelle an:

| Vorname | Bruder: |   |   | Ehemann:      |     |   |
|---------|---------|---|---|---------------|-----|---|
|         | N a m e |   |   | V o r n a m e |     |   |
|         | W       | S | B | K             | W o | R |
| Karin   | 0       | 1 | 0 | 0             | 1   | 0 |
| Marita  | 0       | 0 | 1 | 1             | 0   | 0 |
| Gisela  | 1       | 0 | 0 | 0             | 0   | 1 |

0) Die Kombination b) Marita Braun ist in ihr enthalten.

1) und 2) Der Leser möge sich selbst davon überzeugen, daß die Tabelle 1. und 2. befriedigt.

3) Karin Schwarz ist am 31. Januar eines Nichtschaltjahres und ihr Mann Klaus Schwarz am 1. August desselben Jahres geboren

4) Karin ist mit dem Schwager ihres Bruders verheiratet, was durchaus logisch ist.

Die Hochzeit fand am 31. Januar statt.

5) Obige Tabelle ergibt offenbar keinen Widerspruch zu 5.

6) Obige Tabelle schließt nicht aus, daß Karin Schwarz jünger ist als Marita Braun und Karin Schwarz die Schwester von Wolfgang Weiß ist.

7) Daß Rainer Braun 1976 24 Jahre alt wird, widerspricht keiner der bisherigen Aussagen 1) bis 6).

Antwort: Frau Braun heißt mit Vornamen M a r i t a .



# Preisaufgaben

K 19 (Aufgabenvorschlg: D. Kurtz)

2

Man finde alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 12x^3 - 18x + 5 = 0$$

$$x^6 - x^5 + 11x^4 + 2x^3 + x^2 + 11x - 3 = 0$$

K 20 Man finde das Maximum der Funktion

2

$f(x) = \lg^4_2 x + 12 \lg^2_2 x \cdot \lg_2 \frac{8}{x}$ , wenn gilt  $0 \leq x \leq 64$ .

K 21 Man löse das Gleichungssystem

1

$$100 \cdot 2^x = 5^y$$

$$\log_{\sqrt{2}}(2x+1) + \frac{4}{\log_{\frac{1}{y}} 4} = 0.$$

K 22 Man beweise

1

$$\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3}.$$

K 23 Man löse das Gleichungssystem

1

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}.$$

K 24 Даны две параллельные прямые и точка А между ними.

2

Найти стороны прямоугольного треугольника, вершина прямого угла которого лежит в точке А, а вершины острых углов – на заданных параллельных прямых, зная, что площадь треугольника равна заданной величине  $k^2$ .

Einsendeschluß: 31. 5. 1978

Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.

Die Lösungen sind – jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders – unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgaben" an uns zu senden.

---

## Verrückte Verwandtschaft

In einer Anstalt für psychisch Kranke erschien ein Mann und schilderte dem Arzt sein Schicksal:

"Meine Familienverhältnisse treiben mich an den Rand des Wahnsinns. Ich bin mit einer Witwe verheiratet, die eine erwachsene Tochter hat. Mein Vater verliebte sich in diese Tochter und heiratete sie. Damit wurde mein Vater mein Schwiegersohn und meine Stieftochter wurde meine Mutter, weil sie jetzt die Frau meines Vaters ist.

Da schenkte mir meine Frau einen Sohn. Er wurde der Schwager meines Vaters und mein Onkel, denn er ist ja der Bruder meiner Stiefmutter. Die Frau meines Vaters, meine Stieftochter also, bekam auch einen Sohn, der natürlich mein Bruder wurde und zugleich mein Enkel, da er ja der Sohn meiner Tochter ist. Meine Frau wurde somit meine Großmutter, denn sie ist ja jetzt die Mutter meiner Mutter. Ich bin somit nicht nur der Mann meiner Frau, sondern zugleich ihr Enkel. Und da der Mann meiner Großmutter mein Großvater ist, so bin ich damit mein eigener Großvater. Darüber komme ich nicht hinweg und deshalb bin ich hier."

---



## Lösungen

### Aufgabe J 61 (nach Ralf Becker, Wolmirstedt)

Es sei  $\frac{4}{17} - \sin^2 x = a$

$\frac{30}{17} + \cot x = b$

Damit die Ausgangsgleichung erfüllt ist, muß  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  gelten.

Für die Ausgangsgleichung erhält man

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$\Rightarrow a \cdot b = 0$$

I. Fall  $a = 0$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{4}{17} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{2}{\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \pm \arcsin \frac{2}{\sqrt{17}} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

II. Fall  $b = 0$

$$\Rightarrow \cot x = -\frac{30}{17}$$

$$\Rightarrow x_3 = -\arcsin \cot \frac{30}{17} + k\pi$$

Da für  $x_2$   $b < 0$  und  $x_3$   $a < 0$  wird, bleibt als Lösung

$$x_1 = \arcsin \frac{2}{\sqrt{17}} + k\pi$$

### Aufgabe J 62

Setzt man  $z = \frac{6x}{x^2 + g}$ , so folgt aus der Ungleichung:

$$\frac{1}{2}(z + \frac{1}{2})(z - \frac{a}{2}) \leq 0 \quad (1); \text{ aus der Gleichung:}$$

$$z = \frac{1}{9y} + \frac{1}{3}ay + \frac{a}{6} \quad (2).$$

$$y > 0 \quad (3).$$

Es gilt auch sicher  $|z| \leq 1 \quad (4)$

Im Falle  $0 < a \leq 2$  ist (1) für

$$-\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{a}{2} \quad \text{erfüllt.}$$

Im Fall  $a > 2$  unter Beachtung von (4) ist (1) für

$$-\frac{1}{2} \leq z \leq 1 \quad \text{erfüllt.}$$

Der kleinste Wert für  $z$  ergibt sich aus (2) unter Beachtung von

$$(3) \quad \text{für } y = \frac{1}{\sqrt{3a}} \text{ und beträgt } \frac{2\sqrt{3a}}{9} + \frac{a}{6}$$

Die Forderungen der Aufgabe sind erfüllt, wenn

$$\frac{a}{2} > \frac{2\sqrt{3a}}{9} + \frac{a}{6} \quad \text{für } 0 < a \leq 2 \quad \text{und}$$

$$1 > \frac{2\sqrt{3a}}{9} + \frac{a}{6} \quad \text{für } a > 2 \quad .$$

Daraus folgt

$$\underline{\underline{\frac{4}{3} < a < \frac{2}{3} (13 - 2\sqrt{22})}} \quad .$$

#### Aufgabe J 63 (nach R. Becker, Wolmirstedt)

Aus der Definition des Logarithmus folgt unmittelbar, daß

$$4-x > 0 \quad \text{und} \quad x+3 > 0$$

gelten muß, also  $-3 < x < 4$ .

Wegen  $\log_{\sqrt{3}} a = 2 \log_3 a$  kann die Gleichung umgeformt werden:

$$\begin{aligned} 2 \log_3 (4-x) &< 4 + 2 \log_3 (x+3) \\ \log_3 (4-x) &< 2 + \log_3 (x+3) \\ \log_3 (4-x) &< \log_3 9 + \log_3 (x+3) \\ \log_3 (4-x) &< \log_3 9 (x+3) \quad . \end{aligned}$$

Wegen der Eineindeutigkeit des Logarithmus folgt

$$\begin{aligned} 4-x &< 9 \cdot (x+3) \\ x &> -2,3 \quad . \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich also die Lösungsmenge:  $\underline{\underline{-2,3 < x < 4}}$ .

#### Aufgabe J 64 (nach Kirsten Helbig, Frankfurt/O.)

Mit  $a = 2 \frac{x-2y}{4}$  folgt aus der 1. Gleichung

$$\begin{aligned} a^2 + a - 20 &= 0 \\ a_{1/2} &= -\frac{1}{2} \pm \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Da  $a > 0$  (lt. Def.) folgt

$$\begin{aligned} a &= 4 \quad \text{und damit} \\ \frac{x-2y}{4} &= 2 \\ x &= 8 + 2y \quad . \end{aligned}$$



In die 2. Gleichung eingesetzt ergibt das:

$$2^{4+y} - 2^{-y} = 10.$$

Mit  $b = 2^y$  folgt hieraus:

$$16 \cdot b - \frac{1}{b} = 10 \quad \left| \cdot \frac{b}{16} \right.$$

$$b^2 - \frac{5}{8} b - \frac{1}{16} = 0$$

$$b_{1/2} = \frac{5}{16} \pm \frac{1}{16} \sqrt{41}$$

Wegen  $b > 0$  folgt weiter

$$b = \frac{1}{16} (5 + \sqrt{41}) \quad \text{und damit}$$

$$y = \log_2(5 + \sqrt{41}) - 4 \quad \text{und}$$

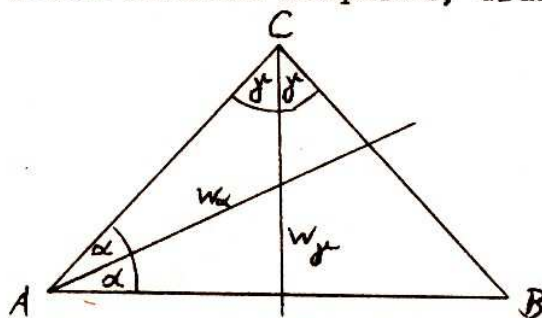
$$\underline{\underline{x = 2 \log_2(5 + \sqrt{41})}}$$

#### Aufgabe J 65

Wie leicht zu sehen ist, genügt es zu zeigen, daß die Fußpunkte der Lote auf die Seiten des Dreiecks auf einer Geraden liegen. Die Lösung der Aufgabe ist dann leicht mit Hilfe des Strahlensatzes auszuführen. Diese Fußpunkte liegen aber bekanntlich auf einer Geraden, der Simpsonschen Geraden. (Der Beweis dieses Satzes ist in der Fachliteratur zu finden.)

#### Aufgabe J 66

(nach Andreas Kasperek, Gräfenhainichen)



In einem Dreieck ABC sei  $\angle CAB = 2\alpha$  und  $\angle BCA = 2\delta$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\overline{AB} > \overline{BC}$ .

Wenn  $w_\delta$  die Halbierende des Winkels  $\angle BCA = 2\delta$  ist, gilt wegen dem Flächensatz (allgemein  $A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$ ):

$$\frac{1}{2} \overline{BC} \cdot w_\delta \cdot \sin \delta + \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot w_\delta \cdot \sin \delta = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{AC} \cdot \sin 2\delta$$

$$w_{\gamma} = \frac{2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC}}{\overline{BC} + \overline{AC}} \cdot \cos \gamma \quad (1)$$

Ebenso findet man

$$w_{\alpha} = \frac{2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB} + \overline{AC}} \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

Aus  $\overline{AB} > \overline{BC}$  folgt nunmehr stets

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{AC} \cdot \overline{AB} &> \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{AC} \cdot \overline{BC} \\ \overline{AB} (\overline{AC} + \overline{BC}) &> \overline{BC} (\overline{AB} + \overline{AC}) \\ \frac{2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB} + \overline{AC}} &> \frac{2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC}}{\overline{AC} + \overline{BC}} \end{aligned} \quad (3)$$

Da weiterhin in jedem Dreieck der größere Winkel gegenüber der größeren Seite liegt, gilt:

$$\alpha < \gamma < \frac{\pi}{2}$$

und somit

$$\cos \alpha > \cos \gamma \quad (4)$$

Es folgt aus (1), (2), (3) und (4)

$$w_{\alpha} > w_{\gamma}$$

Das heißt, zu der größeren Seite des Dreiecks gehört die kleinere Winkelhalbierende.

---

### Berichtigung

Beim Druck der WURZEL 1/78 traten in einigen Exemplaren zwei Fehler auf:

1. S. 7: falsche Verfasserangabe - richtig muß es heißen:

Dr. R. Klette  
Bereich Kybernetik  
der Sektion Mathematik  
der FSU Jena

2. S. 13 oben: Es fehlt die Überschrift: L ö s u n g e n.

Wir bitten alle unsere Leser, die solche Hefte erhalten haben, um Entschuldigung.

---



## Wie fängt ein Mathematiker einen Löwen in der Wüste?

Der Mathematiker muß zuerst definieren, was es heißt, einen Löwen gefangen zu haben.

### Definition:

Ich habe einen Löwen gefangen, wenn zwischen mir und dem Löwen überall Gitter ist.

Der Mathematiker setzt sich selbst in einen Käfig und hat somit entsprechend seiner Definition den Löwen gefangen.

Wenn der Mathematiker jedoch ein Spezialist in Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik ist, wird er wahrscheinlich eine noch elegantere Lösung finden.

Er stellt einen Käfig mit geöffneter Tür in die Wüste.

Dann hat das Ereignis "Im Käfig befindet sich ein Löwe" eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit.

Er braucht also nur zu warten, bis dieses Ereignis eintritt, und dann die Tür zu schließen.

Der Löwe ist gefangen.

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jörg Vogel

**Chefredakteur:** Hans-Joachim Hauschild

**Redaktion:** K. Bartholmé, G. Blume, R. Jeske, D. Meinhardt, V. Wedler

**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

**Konto:** Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt

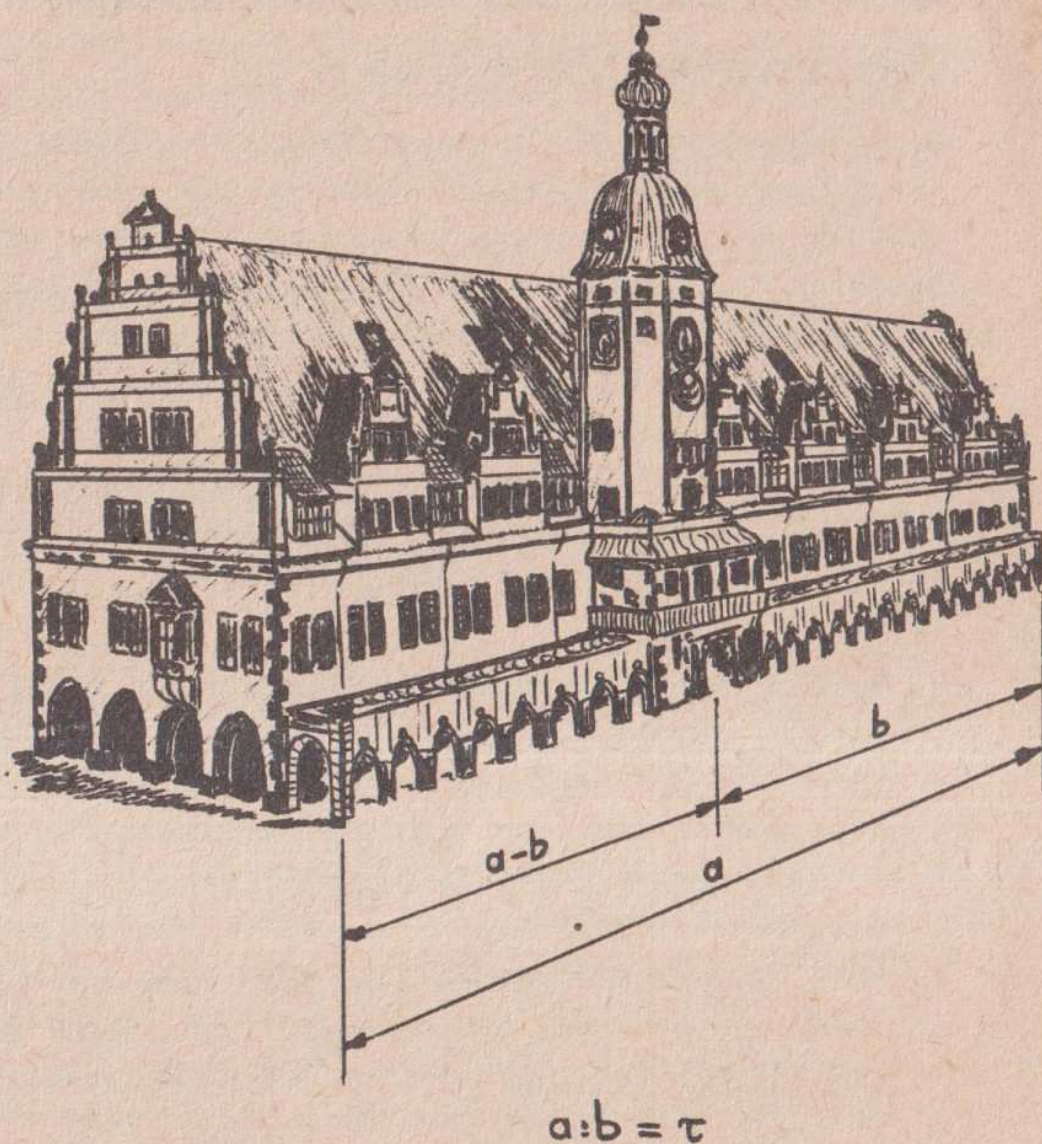
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement

0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV) : 10932





5

78

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-  
gendobjekt Studientvor-  
bereitung der Sektion  
Mathematik an der  
Friedrich-Schiller-Uni-  
versität Jena

12. Jahrgang  
Index 33 873  
Preis: 0,20 M



## Unterrichtsplan der Mathematiklager des Bezirkes Gera (Teil 1)

Der Unterrichtsplan, mit dem wir hier bekanntmachen wollen, entstand aus mehrjährigen Erfahrungen, die in Spezialistenlagern des Bezirkes Gera gesammelt wurden. Seit etwa einem Jahr bemühen sich die Studenten und Mitarbeiter der Friedrich-Schiller-Universität Jena, die jeweils die Betreuung der Schüler übernehmen, um seine Realisierung. Der Gedanke, diesen Plan in der WURZEL abzdrukken, ergab sich aus Anregungen, die wir zur VI. Zentralen Leistungsschau erhielten. Wir sind der Meinung, daß diese Veröffentlichung einem breiten Kreis von Lesern der WURZEL die unterschiedlichsten Anregungen und Hinweise geben kann.

1. Mathematisch interessierte Schüler (und z. B. auch NVA-Angehörige) erhalten einen Überblick über Gebiete, mit denen sie sich aufbauend auf dem Schulstoff beschäftigen können. Als Anfangsliteratur sind für sie besonders die Bücher aus der Mathematischen Schülerbibliothek und die Artikel aus alpha und WURZEL geeignet.

Dazu noch folgenden Hinweis: Erst wenn neben dem Studium der Theorie möglichst viele Aufgaben (aus der Literatur, aus Aufgabensammlungen, Olympiadeaufgaben) dazu gelöst werden, wird das erworbene Wissen dauerhaft und anwendungsfähig sein!

2. Manchem Lehrer und überhaupt jedem, der sich in der außerunterrichtlichen Arbeit der Förderung mathematischer Talente widmet, kann unsere Konzeption vielleicht ein inhaltliches Gerüst für die Beschäftigung mit einem bestimmten Stoffgebiet geben.
3. Wir hoffen und wünschen, daß wir mit jenen, die in anderen Bezirken Spezialistenlager durchführen oder sich auf andere Art der Bestenförderung von Schülern auf mathematischem Gebiet widmen, in einen Erfahrungsaustausch treten können. Hiermit wollen wir also gleichzeitig unsere Konzeption zur Diskussion stellen.

Der Unterrichtsplan wurde für die Klassenstufen 8, 9 und 10 aufgestellt, wobei jeweils etwa 40 Doppelstunden (90 min.) zugrundegelegt wurden. In der Klassenstufe 11/12 werden verschiedene etwas anspruchsvollere Spezialgebiete behandelt bzw. bestimmte Themen vorangegangener Klassenstufen erweitert und vertieft. Auf den folgenden Seiten ist der erste Teil des Planes abgedruckt; der zweite erscheint in der nächsten Nummer.

Bei den Literaturangaben bedeuten:

- /1/ B.G. Teubner VG Leipzig
- /2/ VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
- /3/ VEB Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin
- /4/ Fachbuchverlag Leipzig

Mit (MSB) sind Hefte aus der Mathematischen Schülerbibliothek gekennzeichnet.

#### Klasse 8 MENGENLEHRE

1. Der Mengenbegriff (von Cantor), Elementbeziehung, leere Menge, Beispiele
2. Mengenoperationen und -relationen
  - 2.1. Komplementärmenge und Teilmenge
  - 2.2. Vereinigung, Durchschnitt und Differenz  
(Beweis einiger Gesetze, Mengendiagramme, Beispiele)
3. Vereinigung und Durchschnitt mehrerer Mengen
4. Beispiel und Erläuterungen zum Problem der Antinomien der Mengenlehre

- Lit.: - Monjallon: Einführung in die moderne Mathematik /4/  
 - (MSB) Hasse: Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik  
           /1/ 1970  
 - (MSB) Wilenkin: Unterhaltsame Mengenlehre /1/  
 - Görke: Mengen, Relationen, Funktionen /3/, 1973  
 - Wurzel: 3/73 Mengen, die es gar nicht gibt  
           6,7,8/74 Mengen, Relationen, Funktionen  
           1/77 Georg Cantor - Begründer der Mengenlehre



Klasse 8 ÄQUIVALENZRELATIONEN

1. Das Kreuzprodukt von Mengen und seine Eigenschaften
2. Relationen als Teilmengen des Kreuzproduktes, ihre Eigenschaften und verschiedene Beispiele
3. Begriff der Äquivalenzrelation und ihre Beziehung zur Klasseneinteilung

Lit.: - siehe Mengenlehre

- "alpha" 4. Jhg. 1970 S. 128 Relationen (Teil 1)
- 5. Jhg. 1971 S. 6 (Teil 2), S. 38 (Teil 3)

Klasse 8 AUSSAGENLOGIK

1. Ausführliche Erläuterungen zum Gegenstand der Logik im allgemeinen und der formalen Logik im besonderen
2. Grundbegriffe der Logik
  - 2.1. Aussage, Aussageform (Beispiele), Satz der Zweiwertigkeit
  - 2.2. Klassische Aussagenverbindungen
  - 2.3. Definition der Wahrheitswertfunktion
  - 2.4. Untersuchung sämtl. Wahrheitswertfunktionen von zwei Variablen
  - 2.5. Begriff der Tautologie
3. Aufbau des klassischen zweiwertigen Aussagenkalküls
4. Die wichtigsten aussagenlogischen Identitäten

Lit.: - Segeth: Elementare Logik /2/ 1972

- siehe Literatur 2. und 4. zur Mengenlehre
- "alpha" 4. Jhg. 1970, S. 64 Mathematische Logik für Anfänger
- 4. Jhg. 1970, S.100 Achtung Kreuzung - Vorfahrt beachten
- WURZEL 3/77 Unterhaltsame Logik

Klasse 8 ZAHLENTHEORIE (I)

1. Teilbarkeitsbeziehungen
  - 1.1. Die Teilbarkeitsrelation und ihre Eigenschaften
  - 1.2. Beweis einiger Teilbarkeitsregeln

2. Primfaktorenzerlegung, spezielle Primzahlen
3. Größter gemeinsamer Teiler, Euklidischer Algorithmus, Anwendungen

- Lit.: - Holzer: Zahlentheorie Teil I /1/, 1958
- (MSB) Litzmann: Riesen und Zwerge im Zahlenbereich /1/ 1969
  - (MSB) Lehmann: Übungen für Junge Mathematiker I /1/ 1968
  - Kyloujnine: Primzahlzerlegung /2/ 1971
  - Worobjow: Teilbarkeitskriterien /2/ 1972
  - "alpha" 5. Jhg. 1971 S. 83 Die Teilbarkeit durch 7  
8. Jhg. 1974 S.106 Wir arbeiten mit Primfaktorzerlegungen (Teil 1)  
S.126 Teil 2
  - WURZEL 9/75 Primzahlen  
3,4, 5/77 Primzahlen

#### Klasse 8 ZAHLENKONGRUENZEN (Zahlentheorie II)

1. Begriff und Eigenschaften der Zahlenkongruenzen
2. Restklassen
  - 2.1. Bildung von Restklassen (Beispiele!) und vollständiges Restklassensystem
  - 2.2. Erklärung der Rechenoperationen mit Restklassen
  - 2.3. Kleiner Fermatscher Satz
3. Aufgaben über Primzahlzwillinge, Zahlenpotenzen, Teilbarkeitsregeln
4. Prime Restklassen und lineare Bestimmungskongruenzen (Aufgaben)

Lit.: siehe Zahlentheorie I

#### Klasse 8 ELEMENTARGEOMETRIE (Geometrie I)

1. Dreieckskonstruktionen
  - 1.1. Grundkonstruktionen
  - 1.2. Dreieckstransversalen, Schnittpunktsätze
  - 1.3. allgemeine Prinzipien beim Lösen geom. Konstruktionsaufgaben



- 1.4. Konstruktionen mittels Hilfsdreiecken
- 1.5. Konstruktionsaufgaben mit Seitenhalbierenden
- 1.6. Konstruktionsaufgaben, bei denen Strecken- oder Winkeldifferenzen und -summen gegeben sind
- 1.7. Aufgaben, die sich auf 1.4. bis 1.6. zurückführen lassen
- 1.8. Aufgaben über Inkreis, Ankreis, Umkreis
- 1.9. Viereckskonstruktionen, die sich auf Dreieckskonstruktionen zurückführen lassen
2. Bemerkenswerte Punkte und Linien des ebenen Dreiecks
  - 2.1. Eulersche Gerade
  - 2.2. Feuerbachscher Kreis
  - 2.3. weitere ähnl. Aussagen und Sätze (z. B. Miquelscher Satz)
3. Streckenteilung
4. verschiedene Konstruktions- und Berechnungsaufgaben am Kreis (z. B. Möndchen)

- Lit.: - (MSB) Grosche: Übungen für Junge Mathematiker II, /1/ 1969
- (MSB) Litzmann: Altes und Neues vom Kreis /1/ 1966
  - Donath: Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks /2/ 1969
  - (MSB) Hameister: Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene /1/ 1970
  - "alpha" 4 Jhg. 1970, S. 30, Wie löst man eine Konstruktionsaufgabe?
  - WURZEL 3,4,5/71 Über geometrische Konstruktionsaufgaben 9,10 /73 Geometrische Figuren

Klasse 8 GEOMETRISCHE BEWEISE (Geometrie II)

1. Aussagenlogische Grundlagen
2. Wesen des direkten Beweises, verschiedene Verfahren und heuristische Regeln an Beispielen
3. Logische Struktur des indirekten Beweises, typische Aufgaben
4. Umkehrung von Sätzen

- Lit.: siehe 3. und 4. zu Geometrie I
- Dubnow: Fehler in geometrischen Beweisen

---

**Klasse 8    ABBILDUNGEN    (Geometrie III)****1. Bewegungen (in der Ebene)****1.1. Translationen, Drehungen, Spiegelungen****1.2. Kongruenz ebener Figuren****1.3. Untersuchung spezieller Bewegungen (z. B. Schubspiegelung)****1.4. anschaulicher Aufbau der Ornamentgruppen der Ebene****2. Ähnlichkeitsabbildungen****2.1. Produkt zweier bzw. mehrerer zentrischer Streckungen****2.2. Produkt von zentrischen Streckungen und Bewegungen****Lit.: - Tóth: Reguläre Figuren /1/ 1965****- Görke: Mengen, Relationen, Funktionen /3/ 1973****- "alpha" 4. Jhg. 1970 S. 55 Ornamente (Teil 1)****S. 78 (Teil 2)****Jörg Vogel****Renate Oehmichen**

---

## **Der Sieger von Palermo (V)**

### **6. Der goldene Schnitt**

Wir wollen Gegenstände unseres täglichen Bedarfs, wie Streichholzschachteln, Bücher, Ansichtskarten u. a., einmal auf ihre Abmessungen hin untersuchen. Für eine Streichholzschachtel finden wir (in mm) etwa die Werte  $53 \times 37$ , für eine Ansichtskarte  $146 \times 104$ , für Meyers Neues Lexikon  $235 \times 166$ . Als entsprechende Quotienten erhält man  $53 : 37 \approx 1,43$ ,  $146 : 104 \approx 1,41$  und  $235 : 166 \approx 1,42$ . Diese Übereinstimmung der Verhältnisse von Länge und Breite ist nicht zufällig. Schon im Altertum war bekannt, daß die Teilung einer Strecke in einem bestimmten Verhältnis für das menschliche Auge als besonders wohlgefällig erscheint. Diese Teilung wurde als "Goldener Schnitt" (Sectio aurea) bezeichnet. Die Teilung einer Strecke  $a$  geschieht dabei



derart, daß die Länge ihres größeren Abschnittes  $b$  die mittlere Proportionale der Länge der ganzen Strecke  $a$  und des kleineren Abschnittes  $c = a - b$  ist.

$$(28) \quad a : b = b : (a - b)$$

Man spricht in diesem Falle auch von einer "stetigen Teilung" der Strecke  $a$ . Als positive Lösung für  $b$  erhält man aus (28)

$$(29) \quad b = \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1) = -a \cdot \tau,$$

woraus durch elementare Umformungen

$$(30) \quad \tau = \frac{a}{b}$$

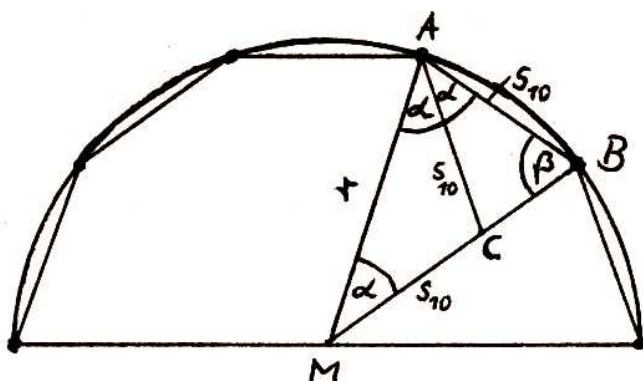
folgt. Derart gibt  $\tau$  das Verhältnis der gesamten Strecke und ihres größeren Abschnittes bei einer Teilung nach dem Goldenen Schnitt an. Der Buchstabe  $\tau$  kommt von dem griechischen Wort  $\tauομ\eta$ , welches "Schnitt" bedeutet. Die Lösung (29) der Gleichung (28) ist bereits im II. Buch der "Elemente" von EUKLID (ca. 365 - 300) enthalten.

Historisch spielte der Goldene Schnitt in der Kunst eine große Rolle. In der griechischen Baukunst der perikleischen Zeit (z. B. athenische Bauten aus den Jahren 450 - 430) tritt dies besonders klar hervor. Lange Zeit waren Künstler der Meinung, die ideale Schönheit von Figuren liege genau dann vor, wenn ihre Einzelteile zueinander in einem dem Goldenen Schnitt entsprechenden Verhältnis stehen. Das alte Leipziger Rathaus wird z. B. durch seinen Turm in diesem Verhältnis geteilt. Verschiedene idealistische Philosophen der Antike und des Mittelalters verwendeten die augenfällige Schönheit von Kunstwerken oder Gegenständen, bei denen Teilungen nach dem Goldenen Schnitt erfolgten, um hieraus ästhetische oder sogar philosophische Prinzipien abzuleiten. Mit ihren "Theorien" versuchten sie, Erscheinungen in Natur und Gesellschaft nicht nur zu beschreiben, sondern auch zu erklären. Eine solche Betrachtungsweise hat natürlich mit Wissenschaft nicht das geringste zu tun. Unter dem Einfluß einer solchen idealistischen Betrachtungsweise stand offenbar auch FRA LUCA PACIOLI (ca. 1445 - 1509), indem er in seinem 1509 veröffentlichten Buch "De divina proportionibus" über die

Zahl  $\tau$  nicht von den Eigenschaften dieser Zahl spricht, sondern von deren "Wirkungen". Unbeschadet dessen stellt dieses Buch eine große mathematische Leistung dar. Die Zeichnungen in diesem Buch fertigte PACIOLI nach Vorlagen seines Freundes LEONARDO DA VINCI (1452 - 1519) an. Wir werden im nächsten Abschnitt auf eine Aussage dieses Buches näher eingehen.

### 7. Das regelmäßige Zehneck

In seinem Buch spricht PACIOLI von "der siebenten unschätzbaren Wirkung" der Zahl  $\tau$ , die darin besteht, daß  $\tau$  Umkreisradius eines regelmäßigen Zehnecks der Seitenlänge 1 ist. Wir haben diese Eigenschaft der Zahl  $\tau$  nun im weiteren zu beweisen.



Für ein regelmäßiges konvexes Zehneck mit der Seitenlänge  $s_{10}=1$  sei mit  $r$  der Umkreisradius bezeichnet. Das Dreieck ABM ist gleichschenkelig und wir erhalten  $\alpha = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ . Die Basiswinkel  $\beta$  ergeben sich mithin zu  $\beta = \frac{1}{2} (180^\circ - 36^\circ) = 72^\circ$ . Mit der Winkelhalbierenden  $\overline{AC}$  entstehen zwei gleichschenkelige Dreiecke ABC und ACM. Es gilt also  $s_{10} = \overline{AB} = \overline{AC} = \overline{CM}$  und  $BC = r - s_{10}$ . Die Dreiecke ABC und ABM haben gleiche Winkel und sind somit ähnlich. Es gilt also  $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AM} : \overline{AB}$ , nach dem eben Errechneten also

$$(31) \quad s_{10} : (r - s_{10}) = r : s_{10}.$$

Wegen  $s_{10}=1$  folgt hieraus  $r^2 = r + 1$ , was nach (17) und (18) aber gerade  $r = \tau$  bedeutet.



Ohne speziell  $s_{10}=1$  zu setzen, folgt aus (31) allgemeiner

$$(32) \quad \tau = \frac{r}{s_{10}},$$

d. h., die Strecke  $r$  wird durch  $s_{10}$  und  $r-s_{10}$  gerade im Goldenen Schnitt geteilt.

### 8. Die Teilung einer Strecke im Goldenen Schnitt

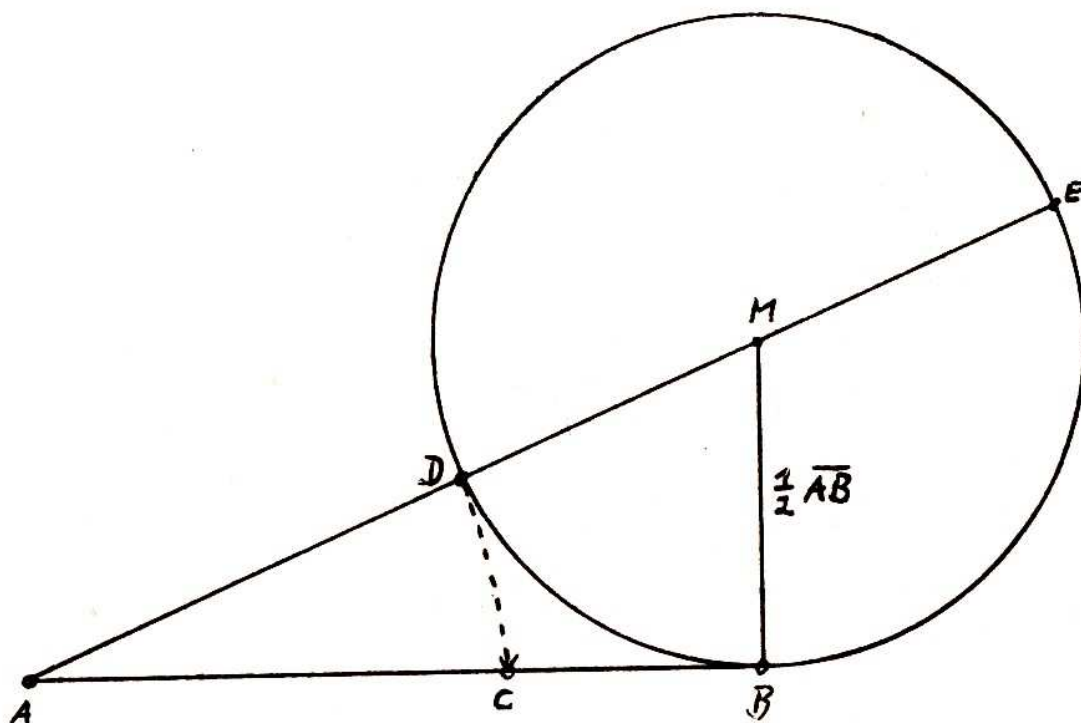
Wenden wir uns nun einer neuen Aufgabe zu. Eine vorgegebene Strecke  $\overline{AB}$  ist mit Zirkel und Lineal innen so zu teilen, daß der größere Teilabschnitt  $\overline{AC}$  die mittlere Proportionale zwischen dem kleineren und der gesamten Strecke wird, d. h., daß gilt

$$(33) \quad \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : (\overline{AB} - \overline{AC}).$$

Gemäß (28) und (30) ist dies dazu äquivalent, daß die Beziehung

$$(34) \quad \tau = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

erfüllt ist. - Hierzu führen wir folgende Konstruktion aus:



Der Sehnentangentensatz besagt, daß jede Tangente von einem Punkt an einen Kreis die mittlere Proportionale zu den durch den Kreis gebildeten zugehörigen Sekantenabschnitten ist. Wir erhalten somit

$$(35) \quad \overline{AB} : \overline{AE} = \overline{AD} : \overline{AB}.$$

Wegen  $\overline{AD} = \overline{AC}$  und  $\overline{AB} = \overline{DE}$  erhalten wir

$$(36) \quad \overline{AB} : (\overline{AE} - \overline{DE}) = \overline{AD} : (\overline{AB} - \overline{AC}),$$

woraus sofort

$$(37) \quad \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : (\overline{AB} - \overline{AC})$$

folgt, was aber gerade die Behauptung (33) war. - Für eine gegebene Strecke  $\overline{AB}$  ist also eine Strecke  $\overline{AC}$  zu konstruieren, welche gerade der Beziehung (34) genügt. Vergleichen wir nun (34) mit (32), so bedeutet dies, daß wir für einen gegebenen Umkreisradius  $r$  die Strecke  $s_{10}$  mit Zirkel und Lineal konstruieren können. Insgesamt ist damit eine Konstruktion regelmäßiger konvexer Zehnecke beschrieben. Man überlegt sich leicht, wie diese Konstruktion verwendet werden kann, um regelmäßige konvexe  $5 \cdot 2^n$ -Ecke ( $n \geq 0$ ) mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

**Dr. Klette**

**Bereich Mathem. Kybernetik**

### Die Probe

Einmal erhielt der englische Chemiker und Physiker Prof. Davy von einem ihm unbekannten Studenten namens Faraday einen Brief. Er schrieb dem Professor, daß er dessen Vorlesungen gehört habe und ihn bitte, in seinem Institut arbeiten zu dürfen. "Was soll ich ihm antworten?" fragte Davy seinen Assistenten. "Probieren Sie es mit ihm!" entgegnete dieser. "Tragen Sie ihm an, die Destillierkolben und Reagenzgläser zu reinigen. Wenn er einverstanden ist, kann aus ihm etwas werden!" Der Assistent hatte sich nicht geirrt.



## Preisaufgaben 5/78

K 25 Gegeben sei ein Dreieck ABC' mit den Innenwinkeln

$\alpha, \beta, \gamma$ . Man beweise:

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} \geq 3 \cdot \sqrt{3} - \frac{1 + \cos \gamma}{\sin \gamma}.$$

K 26 Es seien  $x_1, \dots, x_n > 1$ . Man beweise:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}}.$$

K 27 Es sind alle Primzahlen zu finden, für die  $14p^2 + 1$  eine Primzahl ist.

K 28 Man bestimme alle dreistelligen Zahlen, die durch 11 geteilt eine Zahl ergeben, die gleich der Summe der Quadrate der ursprünglichen Zahl ist.

K 29 Man finde alle Funktionen, die folgende Funktionalgleichung erfüllen:

$$a \cdot f(x-1) + b \cdot f(1-x) = cx, \text{ wobei } a, b \text{ rational, } |a| \neq |b|.$$

K 30 Около данного прямоугольника описать новый прямоугольник, который имел бы заданную площадь  $m^2$ .  
При каком  $m$  задача разрешима?

Einsendeschluß: 31. 7. 1978

### Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgaben angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkt erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben. Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.



## Die XVII. Olympiade Junger Mathematiker in der DDR

Die Jugendhochschule "Wilhelm Pieck" am Bogensee bei Bernau in der Woche vor Ostern - der traditionelle Ort und Zeitpunkt für die Durchführung der 4. Stufe der alljährlichen Mathematikolympiade. Die Schule ist wegen ihrer Größe, ihrer schönen Lage und ihrer Abgeschlossenheit als Austragungsort für diesen Wettbewerb besonders gut geeignet.

Die DDR-Olympiade, die ein Höhepunkt in der Olympiadebewegung ist, läßt sich gut vergleichen mit "der Spitze eines Eisberges". Tausende von Schülern der Klassenstufen 5 bis 12 hatten in den vorangegangenen Monaten an den Schul-, Kreis- und Bezirksolympiaden teilgenommen. Die Teilnahme wurde ihnen ermöglicht durch die aufopferungsvolle Arbeit ungezählter Lehrer in Arbeitsgemeinschaften, Korrespondenzzirkeln, Spezialistenlagern und schließlich bei der Organisierung und Durchführung der Olympiaden selbst. Gerade diesen Aspekt betonte Prof. Dr. Bausch, Leiter des Zentralen Olympiadekomitees, in seiner Eröffnungsrede.

Für die Klausuren, die Montag und Dienstag vormittag stattfanden, hatten sich 208 Schüler, darunter 16 Mädchen, qualifiziert. Unmittelbar vor Beginn der ersten Klausur gab Prof. Dr. Burosch, Vorsitzender der Jury, noch einige arbeitstechnische Hinweise, dann folgten viereinhalb Stunden angestrengter und konzentrierter Arbeit der Olympiadeteilnehmer. Sicher nicht minder anstrengend war am Nachmittag die Arbeit der Korrektoren. Es ist nicht leicht, sich in immer wieder neue Lösungsideen der Schüler einzuarbeiten und hierbei einen objektiven Bewertungsmaßstab einzuhalten.

Die Schüler hatten währenddessen die Gelegenheit, sich bei Tischtennis, Fußball oder kleineren Spaziergängen im Gelände der Hochschule zu erholen. Am Abend stand noch einmal die Mathematik im Mittelpunkt. Prof. Dr. Krötenheerdt hielt einen interessanten Vortrag "Über Kreis- und Kugelpackungen" - einem Gebiet aus der kombinatorischen Geometrie.



Am Dienstag nach der zweiten Klausur standen für die Olympiadeteilnehmer 2 Foren und ein Lichtbildervortrag auf dem Plan. So konnte man sich in einer Veranstaltung mit Klaus Ullrich, dem Leiter der Sportredaktion des ND, über die Sportpolitik der DDR unterhalten. In dem anderen Forum sprachen zwei Mitarbeiter des Ministeriums für Staatssicherheit über die Arbeit eines sozialistischen Kundschafters. Der Diavortrag von Dr. Lau, Tierpark Berlin, informierte über die Aufgabe der Tiergärten bei der Erhaltung vom Aussterben bedrohter Tierarten. Am Abend warteten die Schüler mit Spannung auf die Bekanntgabe der Ergebnisse ihrer Arbeit, die dann auch gegen Mitternacht erfolgte.

Mittwoch vormittag konnte noch das Wilhelm-Pieck-Kabinett der Jugendhochschule besichtigt werden bevor die Abreise nach Berlin erfolgte. Der Nachmittag wurde dann zu einer Stadtrundfahrt oder zu einem individuellen Stadtbummel in Berlin genutzt. Um 19.00 Uhr begann im Marx-Engels-Auditorium der Humboldt-Universität die feierliche Siegerehrung.

Mit einem 1. Preis konnten ausgezeichnet werden:

in Olympiadeklasse 10:

Axel F r ö h l i c h  
Spezialschule "Carl Friedrich Gauss"  
Frankfurt/Oder

Grit W e r n e r  
Humboldt-EOS, Magdeburg  
Schülerin der 9. Klasse

in Olympiadeklasse 11:

Bodo H e i s e  
Jurin-Gagarin-Oberschule, Görlitz  
Schüler der 8. Klasse

Steffen Z o p f  
EOS "Karl Marx", Leipzig  
Schüler der 10. Klasse

Bernd K r e u ß l e r  
Spezialschule für Mathematik/Physik,  
Humboldt-Universität Berlin

in Olympiadeklasse 12:

Thomas M a i w a l d

Spezialklasse für Mathematik/Physik/Technik,  
Techn. Hochschule Karl-Marx-Stadt

Peter D i t t r i c h

Spezialschule für Mathematik/Physik  
Humboldt-Universität Berlin

Es wurden 16 Schüler mit einem 2. Preis und 26 Schüler mit einem 3. Preis ausgezeichnet. (Die Namen der Preisträger und die Olympiadeaufgaben werden in der "alpha", Heft 4/78 bzw. 5/78 veröffentlicht.) 32 Schüler erhielten eine Anerkennungs-urkunde. Interessant ist, daß von den insgesamt 39 Frühstartern drei 1., zwei 2., sechs 3. Preise und drei Anerkennungsurkunden "errechnet" wurden. Der Schüler Friedemann Schuricht, 11. Klasse, Humboldt-EOS Leipzig, erhielt für die besonders elegante Lösung einer Aufgabe ein Diplom. 13 Schüler wurden als Kandidaten für die Mannschaft der DDR zur XX. Internationalen Mathematikolympiade nominiert.

**Jörg Vogel**

---

---

Der Mantel

Albert Einstein traf einen seiner Bekannten.

"Herr Einstein, Sie sollten sich unbedingt einen neuen Mantel kaufen!" riet ihm dieser.

"Weshalb denn?" entgegnete Einstein. "In dieser Stadt kennt mich doch keiner!"

Jahre später trafen sich beide wieder in derselben Stadt.

Einstein trug noch immer den alten Mantel. Der Bekannte riet dem Gelehrten erneut, sich einen neuen Mantel zu kaufen.

"Weshalb denn?" entgegnete Einstein. "Hier kennt mich doch jeder!"

---



Zum Titelbild

Die Teilung einer Strecke im Goldenen Schnitt, d. h. in zwei ungleiche Teile derart, daß die gesamte Strecke sich zum größeren Teil verhält, wie dieser zum kleineren, empfindet der Mensch als besonders harmonisch. Sie wurde deshalb immer wieder in der Kunst angewendet, vor allen in Kunstepochen, die der Proportionslehre viel Aufmerksamkeit schenkten. (Antike, Renaissance, Klassizismus)

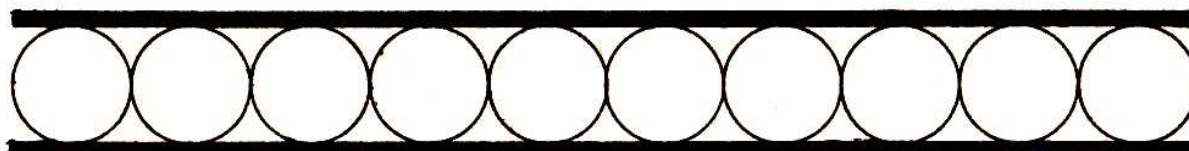
Unser Titelbild zeigt das Mitte des 16. Jahrhunderts von Hieronymus Lotter erbaute Alte Rathaus in Leipzig.

Der Turm steht nicht in der Mitte, sondern teilt die Vorderfront im Goldenen Schnitt. Durch diese asymmetrische Anordnung des Turmes wirkt der ganze Bau lebendiger, reizvoller und abwechslungsreicher.

---

"Unser Lehrer hat heute eine Fünf geschrieben!" triumphiert Florian. "Und worin?" fragt Florians Papa schadenfroh.

"In mein Mathematikarbeitsheft", antwortet der Knabe.



**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jörg Vogel  
**Chefredakteur:** Hans-Joachim Hauschild  
**Redaktion:** K. Bartholmé, G. Blume, R. Jeske, D. Meinhardt, V. Wedler  
**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik  
**Konto:** Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt  
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.  
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.  
Artikel-Nr. (EDV): 10932





6

78

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-  
gendobjekt Studienvor-  
bereitung der Sektion  
Mathematik an der  
Friedrich-Schiller-Uni-  
versität Jena

12. Jahrgang  
Index 33 873  
Preis: 0,20 M



# Zum Lösen von Beweisaufgaben I

## 1. Vorbemerkungen

Soll eine Aussage in den Rang eines Satzes innerhalb einer mathematischen Theorie erhoben werden, so ist es erforderlich, die Allgemeingültigkeit dieser Aussage zu zeigen. Dies geschieht durch einen Beweis. Dabei verstehen wir unter einem Beweis eine Folge von Schlüssen, mittels derer die in der Aussage formulierte Behauptung aus den Voraussetzungen dieser Aussage (und dazu zählen neben den unmittelbar in der betreffenden Aussage genannten Bedingungen auch bereits früher bewiesene Sätze, Axiome oder bekannte Definitionen) gefolgert wird. Gelingt es dabei, ausgehend von den als wahr angenommenen Voraussetzungen, zwingend von diesen über Zwischenfolgerungen auf die in der Aussage formulierte Behauptung zu schließen, so ist die Wahrheit der Aussage nachgewiesen. Unter einem zwingenden Schluß verstehen wir dabei das Gewinnen einer Aussage aus einer anderen, bekannten, wahren Aussage (der Prämisse) durch Verwenden von Schlußregeln, die so beschaffen sind, daß bei Wahrheit der Prämisse auch die neu gewonnene Aussage, die Folgerung (die Konklusion) wahr ist.

Solche häufig beim Beweisen angewendeten Schlußregeln sind z.B. der Schluß auf eine Implikation (wenn, so - Aussage), der Schluß aus einer Implikation, bekannt als Abtrennungsregel oder die Regel der Kontraposition. Diese, aber auch andere Schlußregeln basieren allgemein auf Sätzen der Logik, die uneingeschränkt beim Aufbau mathematischer Systeme Anwendung finden können. So ist zum Beispiel die Abtrennungsregel auf Grund der Bedeutung der Implikation plausibel. Sie besagt: Wenn man weiß, daß die Implikation  $V \rightarrow B$  (wenn V, so B) wahr ist und daß auch V wahr ist, dann kann man daraus auf die Wahrheit von B schließen. Auch die Regel der Kontraposition findet ihre Begründung in einer allgemeingültigen Aussage der Logik. Sie beinhaltet: Soll eine Aussage der Form " $V \rightarrow B$ " (wenn V, so B) bewiesen werden, so ist der Beweis auch erbracht, wenn man die Aussage  $\neg B \rightarrow \neg V$  (wenn "nicht B", so "nicht V") bewiesen hat. Sie beruht auf der Äquivalenz der Ausdrücke  $(p \rightarrow q)$  und  $(\neg q \rightarrow \neg p)$ .



## 2. Zur Bedeutung heuristischer Regeln für das Finden einer Beweisidee

Bevor wir nun daran gehen, verschiedene Methoden des Beweisens mathematischer Aussagen zu formulieren und bei der Erarbeitung spezieller Beweise zu betrachten, wollen wir noch einige Überlegungen anstellen, wie wir das Suchen nach einer Beweisidee steuern können, wollen wir uns ein System "heuristischer Regeln" schaffen, das uns unterstützt, jenes Wissen und jene Operationen zu aktualisieren und zu organisieren, die helfen können, eine Lösung zu finden.

So kann z. B. die Beachtung folgender Regeln wesentlich dazu beitragen, den Prozeß der Beweisführung zu unterstützen.

1. Das vollständige Verstehen der Aufgabenstellung ist Grundbedingung für die Lösung. Bemühe Dich deshalb, den Sinn des Lehrsatzes genau zu erfassen, bzw. überprüfe, ob die vorgegebene Aussage überhaupt einen Sinn hat! Verifiziere die Aussage in möglichst vielen Sonderfällen, um das Vertrauen in ihre Gültigkeit zu vertiefen!
2. Formuliere den zu beweisenden Satz in der "wenn, so-Form", da hieraus die Voraussetzungen und Behauptungen leichter zu erfassen sind! Überlege dabei: Läßt sich der Satz anders, besser, verständlicher formulieren? Läßt sich die Behauptung anders ausdrücken?
3. Hebe die Voraussetzungen und die Behauptung hervor! Untersuche, ob alle wesentlichen Begriffe, die in die Aufgabe eingehen, erfaßt wurden! Verschaffe Dir Klarheit über sie! Die Lösung einer Beweisaufgabe wird oftmals dadurch erleichtert, daß man die Voraussetzungen und die Behauptung in geeignete Teile zerlegt.
4. Versuche, wenn möglich, die Aussage in einer Zeichnung zu erfassen! Fertige die Zeichnung sorgfältig und übersichtlich an! Versuche dabei, Zusammenhänge deutlich zu machen, d. h. vorliegende Angaben so einzubeziehen, daß geometrische Grundfiguren entstehen!

Führe, wenn nötig, Hilfslinien ein! Dazu gibt die Analyse der in der Aufgabe verwendeten Begriffe oftmals wichtige Hinweise.



Beachte: Spiegele in der Zeichnung den Sachverhalt der Aufgabe adäquat wider! Vermeide Sonderfälle!

5. Untersuche die gegebenen und gesuchten Größen nach funktionalen Zusammenhängen!
6. Versuche Ähnlichkeiten zu anderen Beweisführungen (evtl. bei Sätzen mit gleichen charakteristischen Teilen) festzustellen, Analogien zu anderen Aufgabenstellungen zu entdecken und für die Beweisführung zu nutzen!

Untersuche, ob es Teilprobleme gibt, die auf die Lösung der Beweisaufgabe übertragen werden können!

Bei der Anwendung dieser heuristischen Regeln sollte Dir bewußt sein, daß

- man eine Allaussage beweist, indem man die Aussage für ein beliebiges Element des Variablengrundbereiches beweist;
- man eine Allaussage widerlegt, indem man ein Gegenbeispiel angibt;
- man eine Existenzaussage beweist, indem man ein Element aus dem Variablengrundbereich angibt, für das die Aussage zutrifft;
- man eine Existenzaussage mit Hilfe ihrer Negation widerlegt, wobei diese negierte Aussage dann häufig indirekt bewiesen wird.

Dr. Alfred Groß  
Bereich Methodik des  
Mathematikunterrichts

---

## Die Schlußfolgerung

Um die Wirkung des Alkohols zu demonstrieren, setzt der Biologielehrer in ein Glas  $H_2O$  und in ein Glas Alkohol je einen Regenwurm. Der Wurm im Alkohol verendet bald, der im Wasser tummelt sich munter weiter.

"Was könnt ihr daraus lernen?" fragt der Lehrer.

Fritzchen: "Wer Schnaps trinkt, kriegt keine Würmer!"

---

## Preisaufgaben

K 31 Man konstruiere ein Dreieck ABC, wenn folgende Stücke bekannt sind:

①

Seite  $c$ , Winkel  $\beta$ , Seitenhalbierende  $s_b$ .

K 32 Man konstruiere ein Viereck aus der Länge der Diagonalen, der Länge zweier gegenüberliegender Seiten und dem Winkel, den diese Seiten miteinander bilden.

①

K 33 Es sei  $[z]$  diejenige ganze Zahl, für die gilt  
 $[z] \leq z < [z] + 1$ .  
 Man ermittle alle reellen Zahlen  $z$ , für die gilt:

②

$$(1) \quad -10 \leq z \leq 2$$

$$(2) \quad [z^2] = [z]^2$$

K 34 Man ermittle alle geordneten Paare natürlicher Zahlen  $(x, y)$  mit  $x < y$  für die gilt:  $d = \frac{x+y}{2}$  ist eine zweistellige Zahl, und wenn man die Ziffern von  $d$  vertauscht, ergibt sich das geometrische Mittel  $e = \sqrt{x \cdot y}$  von  $x$  und  $y$ .

①

K 35 Man untersuche, ob es ein Polynom dritten Grades  $f(x)$  gibt, so daß  $f(0)=74$ ;  $f(1)=19$ ;  $f(2)=65$ ;  $f(3)=92$  gilt. Wenn ja, so ermittle man  $f(4)$  und  $f(5)$ .

①

K 36 Из двух точек прямой проведены по две касательные к окружности. В образованные углы с вершинами в этих точках вписаны окружности равного радиуса. Доказать, что их линия центров параллельна данной прямой.

①

Einsendeschluß: 31. 8. 78



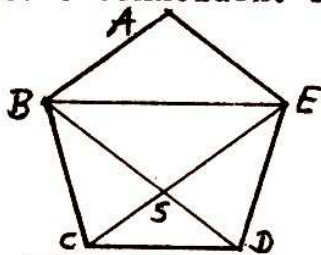
Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben. Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden. Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

## Der Sieger von Palermo (VI)

### 9. Das regelmäßige Fünfeck

In seinem 1963 erschienenen Buch "Unvergängliche Geometrie" zeigt H. S. M. COXETER, daß sich die Diagonalen im regelmäßigen Fünfeck nach dem Goldenen Schnitt teilen. Wir betrachten hierzu ein Fünfeck  $ABCDE$ . Die Diagonalen  $\overline{CE}$  und  $\overline{BD}$  mögen sich im Punkt  $S$  schneiden. Die Dreiecke  $BES$  und  $CDS$  sind gleich-



schenklig und einander ähnlich. (Man überlege sich, warum dies gilt!). Wir erhalten somit

$$(38) \quad \overline{BS} : \overline{SD} = \overline{BE} : \overline{CD}.$$

Da  $\overline{BS}$  und  $\overline{AE}$  Gegenseiten des Rhombus  $ABSE$  sind, gilt  $\overline{BS} = \overline{AE}$  und somit  $\overline{BS} = \overline{CD}$ . Ferner ist offenbar  $\overline{SD} = \overline{BE} - \overline{BS}$ , wir erhal-

ten damit

$$(39) \quad \overline{BS} : (\overline{BE} - \overline{BS}) = \overline{BE} : \overline{BS},$$

woraus die Beziehung

$$(40) \quad \tau = \frac{\overline{BE}}{\overline{BS}}$$

folgt. Wegen  $\overline{BE} = \overline{BD}$  wird also die Diagonale  $\overline{BD}$  durch die Strecken  $\overline{BS}$  und  $\overline{SD} = \overline{BD} - \overline{BS}$  im Goldenen Schnitt geteilt.

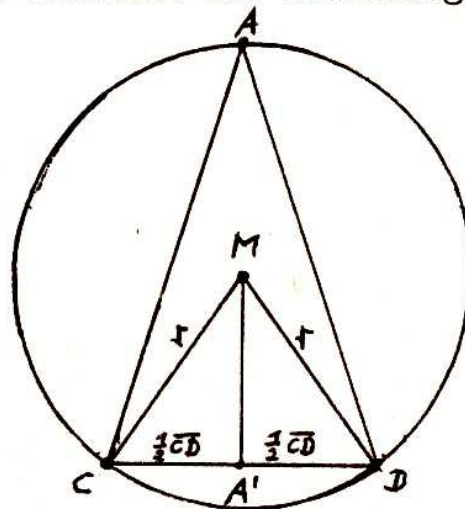
Anhand des regelmäßigen Fünfecks ist die Beziehung

$$(41) \quad \tau = 2 \cos \frac{\pi}{5}$$

abzuleiten. Hierzu betrachten wir das Fünfeck ABCDE mit der Seitenlänge 1. Gemäß (40) hat also eine jede Diagonale die Länge  $\tau$ . Wir verwenden ferner als Beweishilfe die folgende Gesetzmäßigkeit beim gleichschenkligen Dreieck ACD: Ist mit  $r$  der Umkreisradius des Dreiecks ACD gegeben, so gilt

$$(42) \quad 2r = \frac{\overline{CD}}{\sin \angle CAD} = \frac{\overline{AD}}{\sin \angle ACD} = \frac{\overline{AC}}{\sin \angle ADC}.$$

Wir beweisen also zunächst die Beziehung (42). Wegen der Gleichung



chung  $\angle CMD = 2 \cdot \angle CAD$  gilt

$$(43) \quad \angle CMA' = \angle A'MD = \angle CAD \text{ und}$$

$$(44) \quad r \cdot \sin \angle CAD = \overline{CA'} = \frac{1}{2} \overline{CD},$$

woraus  $2r = \frac{\overline{CD}}{\sin \angle CAD}$  folgt. Die restlichen zwei Identitäten in

(42) sind in analoger Weise zu zeigen.



Das Fünfeck ABCDE sollte die Seitenlänge 1 haben, es gilt also  $\overline{CD}=1$ . Schließlich sind  $\overline{AC}$  und  $\overline{AD}$  Diagonalen im Fünfeck ABCDE, woraus  $\overline{AC}=\overline{AD}=\tau$  folgt. Insgesamt erhalten wir aus (42) die Beziehung

$$(45) \quad \tau \cdot \sin \angle CAD = \sin \angle ACD.$$

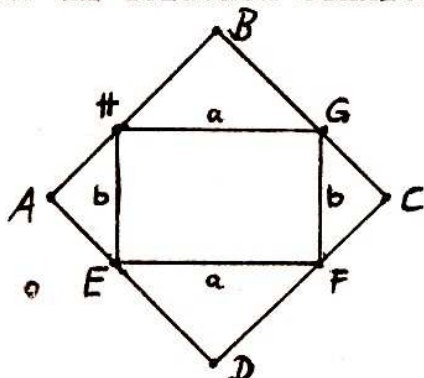
Nun ergibt sich weiterhin aus der Gleichung  $\angle ACD = \angle ADC = 2 \cdot \angle CAD$  sofort  $180^\circ = \pi = 5 \cdot \angle CAD$ , also

$$(46) \quad \angle CAD = \frac{\pi}{5} \quad \text{und} \quad \angle ACD = \frac{2\pi}{5}.$$

Aus (45) folgt somit  $\tau \cdot \sin \frac{\pi}{5} = \sin \frac{2\pi}{5} = 2 \cos \frac{\pi}{5} \cdot \sin \frac{\pi}{5}$ , womit (41) bewiesen ist.

#### 10. Eine Aufgabe für den Leser

Ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b soll ein "Goldenes Rechteck" heißen, falls die längere Seite a durch die kürzere Seite b im Goldenen Schnitt geteilt wird, d. h. es gilt  $\tau = \frac{a}{b}$ . Es ist zu zeigen, daß in jedes Quadrat ein Goldenes Rechteck derart einzuzeichnen ist, daß jede Ecke des Rechtecks eine Quadratseite im Goldenen Schnitt teilt.



$$\frac{\overline{EF}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \tau$$

Hierzu habe das Quadrat die Seitenlänge 1. Bestimmen Sie weiterhin die Seitenlängen a und b des Goldenen Rechtecks!

"Ich bin enttäuscht", sagt Fritzchen nach dem 1. Schultag, "so etwas nennt sich 1. Klasse, dabei stehen nur Holzbänke drin."

Aufgaben zum Artikel "Der Sieger von Palermo"

$$f_0=0, f_1=1, f_{n+2}=f_n+f_{n+1}, n \geq 0$$

Def.:  $m|n \stackrel{\text{Df}}{=} m$  ist Teiler von  $n$

$\text{ggT}(m,n)=a \stackrel{\text{Df}}{=} a$  ist größter gemeinsamer Teiler von  $m$  und  $n$

- Aufgabe 1:
- (1) Aus  $m|n$  folgt stets  $f_m|f_n$ .
  - (2) Es ist stets  $\text{ggT}(f_{n+1}, f_n) = 1$ .
  - (3)  $\text{ggT}(f_m, f_n) = f_{\text{ggT}(m,n)}$
  - (4) Aus  $f_m|f_n$  folgt stets  $m|n$ .
  - (5)  $2|f_n \iff 3|n$
  - (6)  $3|f_n \iff 4|n$
  - (7)  $4|f_n \iff 6|n$
  - (8)  $5|f_n \iff 5|n$
  - (9)  $7|f_n \iff 8|n$
  - (10)  $\forall m \exists i (1 \leq m^2 \ \& \ m|f_i)$

- Aufgabe 2:
- (1) Die Folge der letzten drei Ziffern der Fibonacci-Zahlen  $f_0, f_1, f_2, \dots$  ist periodisch.
  - (2) Zeigen Sie, daß unter den Zahlen  $f_0, \dots, f_{1.000.000}$  eine solche existiert, die auf drei Neunen endet.

Aufgabe 3: Im Geschlecht eines Einzellers gelten folgende Fortpflanzungsregeln:

- a) Jeder Einzeller hat einen oder zwei Nachfolger ("Söhne").
- b) Hat ein Einzeller zwei Nachfolger, so hat dieser Einzeller drei Nachfolger im zweiten Glied ("Enkel").
- c) Hat ein Einzeller einen Nachfolger, so hat dieser Einzeller zwei Nachfolger im zweiten Glied.



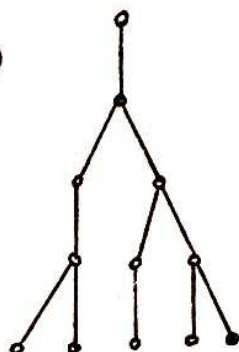
Zu Beginn verfügen wir über einen Einzeller. Geben Sie die Anzahl der Nachfolger dieses Einzellers im n-ten Glied an, wobei dieser Einzeller

(1) einen Nachfolger oder

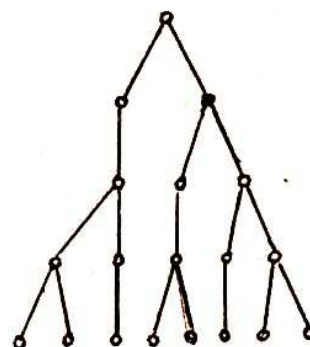
(2) zwei Nachfolger

haben soll.

Fall (1)



Fall (2)



Dr. Klette  
Bereich Mathematische  
Kybernetik

## Auflösung des Kreuzworträtsels aus Wurzel 3/78

### W a a g e r e c h t :

1..Konvergenz 7.Gras 10.Ade 11.Sau 12.Astat 13.Division  
14.MAS 15.Toccata 17.Säuren 20.Geste 22.Sinai 23. Ale  
24.Oise 26. Nenner 28.Stapel 31.Es 33.Met 35.Seni 36.Naab  
38.Ei 39.Skandinavien

### S e n k r e c h t :

1.Kraftwagen 2.Nettchen 3.Estragon 4.Ga 5.Edda 6.Neisse  
7.Gas 8.Ruine 9.Sand 11.Sinus 14.Masse 16.Teint 17.Rizasee  
19.Nagen 21.Term 25.Ast 27.Elba 29.Pein 30.Lied 32.SAS  
34.Eta 37.MI

## Lösungen

### Aufgabe K 1

Wie aus den Ungleichungen leicht zu erkennen ist, muß gelten

$$x > 0, \quad y > 0.$$

Es ergibt sich aus  $x > y^2$  sofort

$$\sqrt{x} > y, \text{ also}$$

ersichtlich  $x^2 < y < \sqrt{x}$ , hierbei muß aber wie sofort  
 $x < 1$  gelten.

Man erhält die Lösung also durch

$$x^2 < y < \sqrt{x}, \quad \text{wobei } 0 < x < 1 \text{ gilt.}$$

### Aufgabe K 2

Die Gleichung hat  $x = 48$  als einzige Lösung.

### Aufgabe K 3

Die Gleichung läßt sich durch mehrmalige Anwendung der Additionstheoreme und Doppelwinkelformeln für Sinus und Cosinus beweisen.

### Aufgabe K 4

Als Lösung ergibt sich

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$z = \pm \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

### Aufgabe K 5

Es gilt 
$$S = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dq^2} \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

also 
$$S = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dq^2} \frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^3}.$$



**Aufgabe K 6**

Die Lösung wird in WURZEL 8/78 veröffentlicht.

**Aufgabe K 7**

Die Gleichung besitzt die Lösungen:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{n \cdot \pi}{3}; \quad x_{2,3} = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3},$$

wobei k und n ganzzahlig sind.

**Aufgabe K 8**

Zunächst wird die Länge der Strecke  $\overline{LN}$  berechnet, es ergibt sich  $a = 2 \cdot \sqrt{3}$ . Für die Strecke  $\overline{AL}$  ergibt sich dann eine Länge von 2.

**Aufgabe K 9**

Aus der Ungleichung ergibt sich sofort

$$1 \leq \frac{3-2x}{1-x} < 2, \quad x \neq 1.$$

Für den Fall  $x < 1$  ergibt sich ein Widerspruch und für  $x > 1$  folgt  $x \geq 2$ ; also ergeben sich Lösungen für  $x \geq 2$ .

**Aufgabe K 10**

Wie viele Leser richtig erkannt haben, besitzt das Gleichungssystem keine reellen Lösungen, jedoch (was meist nicht beachtet wurde) komplexe Lösungen. Diese sind

$$(ia, -ia, a); (-ia, ia, a); (a, -ia, ia);$$

$$(-ia, a, ia); (ia, a, -ia); (a, ia, -ia).$$

**Aufgabe K 11**

Wenn man für  $\sin x$  bzw.  $\cos x$  die entsprechenden Ausdrücke in  $\tan \frac{x}{2}$  einsetzt, erhält man eine quadratische Gleichung in  $\tan \frac{x}{2}$ , deren eine Lösung jedoch nicht die Bedingung  $0^\circ \leq x \leq 45^\circ$  erfüllt. Als Lösung verbleibt  $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{7}-2}{3}$ .

**Aufgabe K 12**

Wenn man für  $z$  die Darstellung

$$z = r (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

wählt, ergibt sich mit  $\left| z + \frac{1}{z} \right| = \frac{|z^2 + 1|}{r} = 1$  eine biquadratische Gleichung in  $r$ , wobei sich als Parameter der Winkel darstellt; als maximaler Wert von  $r$  ergibt sich  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , was als Lösung gesucht wurde.

## Unterrichtsplan der Mathematik- lager des Bezirkes Gera (Teil 2)

### Klasse 9 GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

1. Lösen komplizierter Gleichungen und Ungleichungen durch vollständige Fallunterscheidung
2. Gleichungen und Ungleichungen mit Absolutbeträgen

Lit.: - Korowkin: Ungleichungen /2/ 1970  
 - (MSB) Kleinfeld: Übungen für Junge Mathematiker /1/1969  
 - "alpha" 8. Jhg. 1974 S. 108 Über Ungleichungen  
 - Wurzel 4/78 Jensensche Ungleichung

### Klasse 9 DIRICHLETSCHES SCHUBFACHPRINZIP

Erläuterung des Prinzips und verschiedene Aufgaben

Lit.: "alpha" 9. Jhg. 1975 S. 9 Der Dirichletsche Schubfachschluß

### Klasse 9 GRUPPENTHEORIE

1. Rolle der Gruppentheorie in der Mathematik
2. Aufbau des Gruppenbegriffs (Definition, Eigenschaften, Beispiele)
3. Permutationsgruppen und zyklische Gruppen
4. Untergruppen
5. Anschauliche Erläuterung und Bedeutung von Isomorphismen zw. Gruppen

Lit.: - Alexandroff: Einführung in die Gruppentheorie /2/  
 - Flachsmeyer, Prohaska: Algebra (Studienbücherei Mathem. für Lehrer Bd. 3) /2/ 1975  
 - WURZEL 5/74 Der Gruppenbegriff



Klasse 9 LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

1. Lineare Gleichungssysteme als Beschreibung praktischer Probleme, Möglichkeiten für die Gestalt des Gleichungssystems und seiner Lösungen
2. Verketteter Algorithmus (Gauß-Jordan)
3. Matrizenrechnung
  - 3.1. Darstellung lin. Gleichungssysteme mit Hilfe von Matrizen
  - 3.2. Rechenoperationen und Eigenschaften
  - 3.3. Reguläre und singuläre Matrizen, Inverse
  - 3.4. Gruppeneigenschaften von Matrizenstrukturen
4. Hauptsätze für lin. Gleichungssysteme (Rangkriterien)

Lit.: - (MSB) Drews: Lineare Gleichungssysteme und lineare Optimierungsaufgaben /2/ 1975  
- (MSB) Belkner: Matrizen /1/1970  
- Hilbert: Matrizenrechnung /3/ 1975  
- WURZEL 3,4/72 Lösen linearer Gleichungssysteme durch Elimination

Klasse 9 DETERMINANTEN

1. Begriff und Eigenschaften, Koeffizienten- und Zählerdeterminanten
  2. Berechnung, 2-, 3- und 4-reihiger Determinanten
  3. Determinanten n-ter Ordnung, Eigenschaften von Determinanten
- Lit.: - (MSB) Belkner: Determinanten /1/1970  
siehe Lit. Matrizenrechnung

Klasse 9 DIOPHANTISCHE GLEICHUNGEN (Zahlentheorie III)

1. Begriffsklärung
2. Lineare Gleichungen mit 2 Unbekannten
3. Lineare Gleichungen mit 3 Unbekannten
4. Diskussion der Lösung der Pythagoreischen Gleichung
5. Geometrische Bedeutung und graphische Darstellung
6. Systeme von diophantischen Gleichungen und ungelöste Probleme

- Lit.: - Gelfond: Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen /2/  
- "alpha" 6. Jhg. 1972, S. 110 Diophantische Gleichungen  
- WURZEL 2/72 Diophantische Gleichungen

#### Klasse 9 SCHALTALGEBRA

1. Schaltfunktionen und Reihen-Parallel-Schaltungen
2. Boolsche Funktionen (Beziehungen zu logischen Ausdrücken, Anzahl der Belegungen und Funktionen)
3. Reihen-Parallel-Schaltungen und Kanonische alternative Normalform, praktische Beispiele

- Lit.: - Segeth: Elementare Logik /2/ 1972  
- "alpha": 4. Jhg. 1970 S. 28 Einführung in die EDV  
(Teil 8)  
S. 56 Teil 9  
- WURZEL 12/67, 1/68 Aussagenlogik und Boolsche Funktionen  
9,10/71 Schaltungen aus log. Bauelementen  
6,7,10/77 Schaltalgebra

#### Klasse 9 DARSTELLENDGEOMETRIE (Geometrie IV)

1. Grundlagen und Grundkonstruktionen der Zweitafelprojektion
2. Durchdringung ebenflächig begrenzter Körper
3. Drehschnittverfahren
4. Schattenkonstruktionen

- Lit.: - Schröder: Darstellende Geometrie (Studienbücherei  
Mathem. für Lehrer) /2/ 1974  
- Fücke, Kirch, Nickel: Darstellende Geometrie /4/ 1970  
- Gimpel: Zur Methodik der darstellenden Geometrie /3/  
1973  
- "alpha": 4. Jhg. 1970 S. 98 Ein kleiner Dreh führt zum  
Ziel



- Lit.: - T6th: Reguläre Figuren /1/ 1965  
 - Roman: Reguläre und halbbreguläre Polyeder /2/ 1968  
 - "alpha": 5. Jhg. 1971, S. 106 Durch die Welt der Tetraeder  
 8. Jhg. 1974, S. 36 und 76 Weiter durch die Welt der Tetraeder  
 - WURZEL 7,8/67 Eulerscher Polyedersatz  
 3/76 Reguläre Polyeder

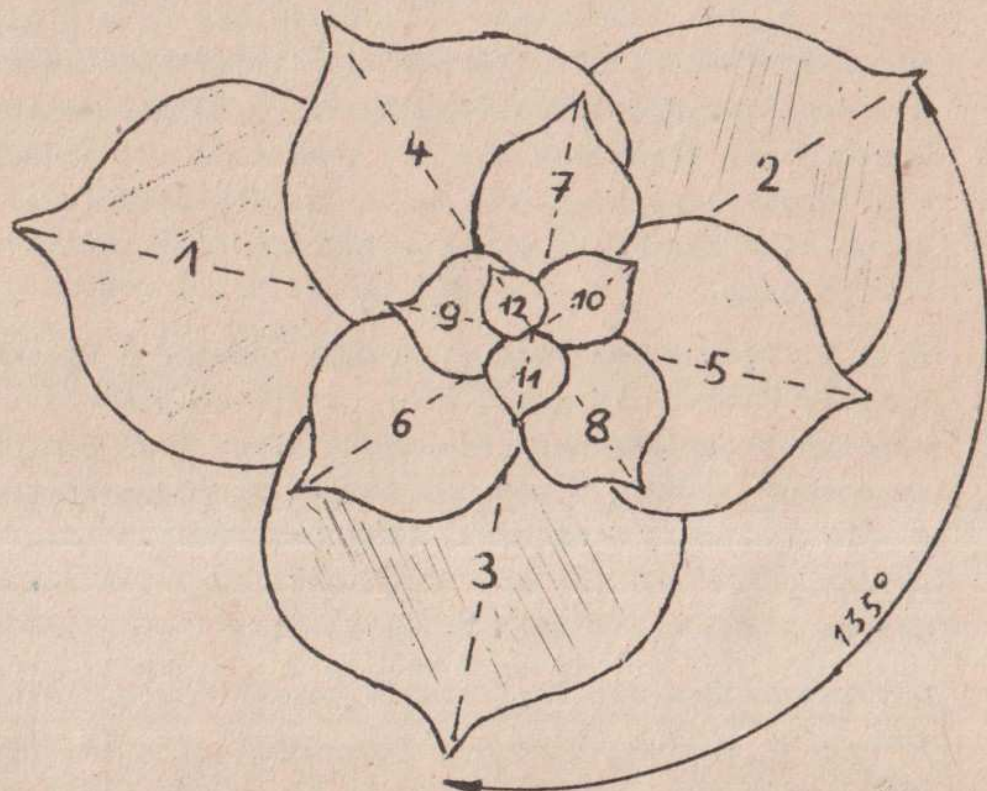
**Jörg Vogel**  
**Renate Oehmichen**

⦿"⦿"⦿"⦿"⦿"⦿"⦿"⦿

Eine amerikanische Journalistin fragte einmal Albert Einstein: "Welch ein Unterschied besteht zwischen der Zeit und der Ewigkeit?" "Mein Kind", antwortete Einstein gutmütig, "wenn ich die Zeit hätte, Ihnen diesen Unterschied zu erklären, würde eine Ewigkeit vergehen, bis Sie ihn verstehen würden."

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jörg Vogel  
**Chefredakteur:** Hans-Joachim Hauschild  
**Redaktion:** K. Bartholmé, G. Blume, R. Jeske, D. Meinhardt, V. Wedler  
**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik  
**Konto:** Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt  
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.  
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.  
Artikel-Nr. (EDV) : 10932





7

78

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-  
gendobjekt Studienvor-  
bereitung der Sektion  
Mathematik an der  
Friedrich-Schiller-Uni-  
versität Jena

12. Jahrgang  
Index 33 873  
Preis: 0,20 M



## Der Sieger von Palermo (VII)

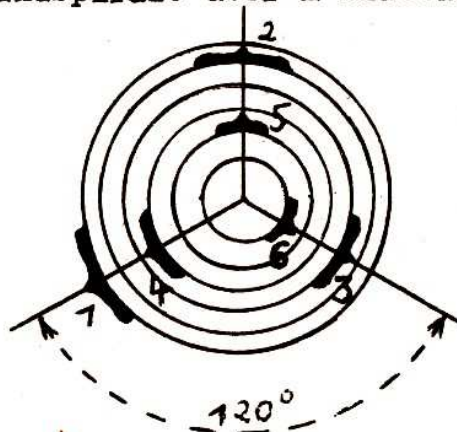
### 11. Phyllotaxis

Auf dem Titelblatt dieses Heftes ist eine Laubblattrosette des Mittleren Wegerichs (*Plantago media*) abgebildet. Die Blätter sind nach ihrer genetischen Reihenfolge an der Achse beziffert.

Es sei  $b_k$  das  $k$ -te Blatt in genetischer Reihenfolge. Bei dem Mittleren Wegerich ist jeweils der Blattansatzpunkt von  $b_{k+8}$  genau über dem Blattansatzpunkt von  $b_k$  an der Achse der Pflanze angeordnet. Verbinden wir die genetisch aufeinanderfolgenden Blattansatzpunkte an der Achse (Stiel, Stamm,...) der Pflanze durch eine Kurve, so erhalten wir die sogenannte Grundspirale der Pflanze.

Beim Mittleren Wegerich wird nach jeweils 3 Umdrehungen der Grundspirale wieder ein genau über dem Ausgangsblatt  $b_k$  liegendes Blatt erreicht; die Grundspirale läuft dabei über die 8 Blattansatzpunkte von  $b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_{k+8}$ . In der Biologie wird dieser Fall als  $\frac{3}{8}$ -Phyllotaxis bezeichnet. Das Wort "Phyllotaxis" kommt aus dem Griechischen und ist mit "Blattstellung, die Anordnung der Blätter am Stamm und ihre Lage zueinander" zu übersetzen.

Untersuchungen zur Phyllotaxis wurden durch die Spiral-Theorie von J. W. GOETHE (1749 - 1832) inspiriert. In einem 1904 erschienenen Buch des Mathematikers A. H. CHURCH (1865 - 1937) werden umfangreiche mathematische Betrachtungen durchgeführt, welche als Ausgangspunkt auf Gesetzmäßigkeiten bei Phyllotaxen zurückgreifen. Allgemein bezeichnet eine  $\frac{n}{m}$ -Phyllotaxis jenen Fall, daß nach  $n$  Umdrehungen der Grundspirale jeweils erstmalig wieder ein genau über dem Ausgangsblatt liegendes Blatt erreicht wird, wobei die Grundspirale über  $m$  Blattansatzpunkte verläuft.



Phyllotaxen können durch sogenannte Blattdiagramme veranschaulicht werden; nebenstehende Abbildung zeigt ein derartiges Blattdiagramm für eine  $\frac{1}{3}$ -Phyllotaxis.  $\frac{1}{2}$ -Phyllotaxis ist bei Ulme und Linde festzustellen, ferner ist diese besonders bei einkeimblätt-



rigen Pflanzen anzutreffen. Buche und Haselstrauch besitzen  $\frac{1}{3}$ -Phyllotaxis. Bei zweikeimblättrigen Pflanzen ist besonders  $\frac{2}{5}$ -Phyllotaxis verbreitet, Eiche und Aprikose besitzen eine derartige Phyllotaxis.  $\frac{3}{8}$ -Phyllotaxis liegt bei Pappel und Birne vor und  $\frac{5}{13}$ -Phyllotaxis bei Weide und Mandel.

Sehr viele Gewächse besitzen derartige  $\frac{f_n}{f_{n+2}}$ -Phyllotaxen. Diese Brüche  $\frac{f_n}{f_{n+2}}$  werden in der Biologie als "Hauptreihe" der Phyllotaxen bezeichnet. Diese Darstellung der Phyllotaxen durch Fibonaccische Zahlen ist gewiß überraschend. Wie sagte doch GOETHE im "Faust I":

"Und merk dir ein für allemal

Den wichtigsten von allen Sprüchen:

Es liegt dir kein Geheimnis in der Zahl,

Allein ein großes in den Brüchen."

Diese zu beobachtenden Brüche  $\frac{f_n}{f_{n+2}}$  stellen in der Tat jedoch kein "Wunder der Natur" dar, sondern sind in der Phyllogenese der Pflanzen entstanden. Ihre Bedeutung für die Pflanzen liegt darin, daß sich die Laubblätter gegenseitig möglichst wenig beschatten.

Wir wollen nun annehmen, daß der Winkel zwischen dem Blattansatzpunkt des Blattes  $b_k$  und dem Blattansatzpunkt von  $b_{k+1}$  für jeweils eine Pflanze konstant ist. Im allgemeinen ist diese Annahme auch zutreffend. Für den Mittleren Wegerich ist dieser Winkel gleich  $135^\circ$  (s. Titelbild), für eine Pflanze mit  $\frac{1}{3}$ -Phyllotaxis ist dieser Winkel gleich  $120^\circ$  (s. Abbildung). Im Falle  $\frac{f_n}{f_{n+2}}$ -Phyllotaxis haben wir derart einen eindeutig bestimmten Winkel  $\alpha_n$  definiert; es gilt

$$(47) \quad \alpha_n = \frac{f_n}{f_{n+2}} \cdot 2\pi, \text{ für } n \geq 1.$$

Wir betrachten im weiteren die Folge  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  dieser Winkel. Zunächst seien die ersten Glieder dieser Folge angegeben:

| n          | 1           | 2           | 3           | 4           | 5                    | 6                    |
|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|----------------------|----------------------|
| $\alpha_n$ | $180^\circ$ | $120^\circ$ | $144^\circ$ | $135^\circ$ | $138^\circ 27' 44''$ | $137^\circ 08' 34''$ |

Diese Folge  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  genügt folgenden Gesetzmäßigkeiten:

$$(48) \quad \alpha_{2n} < \alpha_{2n+2}; \quad (50) \quad \alpha_{2n} < \alpha_{2n+1} > \alpha_{2n+2} \text{ sowie}$$

$$(49) \quad \alpha_{2n+1} > \alpha_{2n+3}; \quad (51) \quad 120^\circ \leq \alpha_n \leq 180^\circ.$$



Die Aussagen (48), (49) und (50) können unter Verwendung von (10) aus Abschnitt 3 dieses Artikels bewiesen werden.

Hierbei erhält man sogar die schärferen Aussagen

$$f_{2n} f_{2n+4} = f_{2n+2}^2, \quad f_{2n+1} f_{2n+5} = f_{2n+3}^2,$$

$$f_{2n+1} f_{2n+2} = f_{2n} f_{2n+5} + 1 \quad \text{und} \quad f_{2n+2} f_{2n+3} = f_{2n+1} f_{2n+4} - 1.$$

Die Aussage (51) folgt sofort aus den Beziehungen (48), (49) und (5) sowie den Eigenschaften

$$2f_{2n} < f_{2n+2} \quad (\text{also ist } \alpha_{2n} \geq 120^\circ) \quad \text{und}$$

$$3f_{2n+1} > f_{2n+3} \quad (\text{also ist } \alpha_{2n+1} \leq 180^\circ).$$

Der ausführliche Beweis der Aussagen (48)...(51) sei dem Leser empfohlen.

Bekanntlich ist jede beschränkte monotone Folge reeller Zahlen auch konvergent. Wir werden im weiteren zeigen, daß die Folge

$\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$  konvergiert; doch zunächst erhalten wir, daß die Teilfolge  $\{\alpha_{2n}\}_{n=1}^\infty$  nach (48) und (51) monoton fallend und nach unten beschränkt ist und mithin konvergiert; die Teilfolge

$\{\alpha_{2n+1}\}_{n=0}^\infty$  konvergiert entsprechend gemäß (49) und (51). Wir werden nachweisen, daß beide Teilfolgen gegen denselben Limeswert konvergieren. Es gilt

$$(52) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 2\pi \cdot \tau^{-2} \approx 137^\circ 30' 28'',$$

d. h. in der Hauptreihe der Phyllotaxen nähert sich der Winkel zwischen genetisch aufeinanderfolgenden Blättern diesem Mittelwert  $\alpha = 137^\circ 30' 28''$  (welcher bis auf eine Sekunde genau bestimmt wurde).

Zum Nachweis von (52) können wir zunächst die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+2}} \cdot 2\pi = 2\pi \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+2}}$$

verwenden. Es genügt also, das Limesverhalten der Quotienten  $f_n/f_{n+2}$  zu untersuchen. Für diese Quotienten erhält man mittels

(23) unschwer die Abschätzung

$$(53) \quad \tau^{-3} \leq \frac{f_n}{f_{n+2}} \leq \tau^{-1}, \quad \text{für } n \geq 1.$$

Zur Analyse des Limesverhaltens dieser Quotienten ist diese Ab-

schätzung jedoch unzureichend. Wir verwenden die Binetsche Formel (20) und erhalten zunächst

$$\frac{f_n}{f_{n+2}} = \frac{\tau^n - \hat{\tau}^n}{\tau^{n+2} - \hat{\tau}^{n+2}}, \text{ für } n \geq 0.$$

Gemäß (22) und der entsprechend gültigen Aussagen

$$(22') \quad \hat{\tau}^n = f_n \cdot \hat{\tau} + f_{n-1}, \text{ für } n \geq 2$$

(Überprüfen Sie diese Gleichung!), folgt hieraus

$$\frac{f_n}{f_{n+2}} = \frac{f_n(\tau - \hat{\tau})}{f_n(\tau^3 - \hat{\tau}^3) + f_{n-1}(\tau^2 - \hat{\tau}^2)}, \text{ für } n \geq 2.$$

Ferner gilt  $\tau^2 - \hat{\tau}^2 = (\tau+1) - (\hat{\tau}+1) = \tau - \hat{\tau}$ ,  $\tau^3 - \hat{\tau}^3 = 2(\tau - \hat{\tau})$  und schließlich ist gemäß (25)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n-1}/f_n = \tau^{-1}$ . Insgesamt erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+2}} = \frac{\tau - \hat{\tau}}{2(\tau - \hat{\tau}) + \frac{1}{\tau}(\tau - \hat{\tau})} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\tau}} = \frac{\tau}{2\tau + 1} = \frac{\tau}{\tau^3} = \tau^{-2}.$$

Wir haben somit den Limes der Folge  $\left\{ \frac{f_n}{f_{n+2}} \right\}_{n=0}^{\infty}$  bestimmt, womit die Aussage (52) bewiesen ist.

Dr. Klette  
Bereich Kybernetik  
der Sektion Mathematik  
der FSU Jena

## Unterrichtsplan für Mathematiklager (III)

Klasse 10 KOMBINATORIK

1. Permutationen (Begriff, Eigenschaften, Aufgaben)
2. Herleitung der kombinatorischen Grundformeln  
Aufgaben

Lit.: - Flachsmeier: Kombinatorik /2/ 1969

- "alpha" 5. Jhg. 1971, S. 124 Geometrische Kombinatorik
- 5. Jhg. 1971, S. 128 Welche, wie viele Möglichkeiten gibt es? (Teil 1)
- 6. Jhg. 1972, S. 32 (Teil 2), S. 57 (Teil 3)
- WURZEL 7,8/70 Kombinatorik



Klasse 10 BINOMIALKOEFFIZIENTEN

1. Begriff, Eigenschaften, Beispiele
2. Spezielle Binomialkoeffizienten, Pascalsche Gleichung, Summendarstellungen
3. Anwendungen bei Berechnungen
4. Beweis von Sätzen über Teilbarkeit, Kongruenzen, Primzahlen

Lit.: siehe Kombinatorik

- "alpha" 6. Jhg. 1972, S. 25 Die Arithmetik der Binomialkoeffizienten (Teil 1)

S. 55 Teil 2

Klasse 10 WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

1. Formulierung einiger Grundaufgaben
2. Zufällige Ereignisse
3. Operationen mit zufälligen Ereignissen (Summe und Produkt, unvereinbare Ereignisse, Differenz, Komplement, vollst. Ereignissysteme)
4. Ereignisfeld (Begriff und Eigenschaften)
5. Der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff
  - 5.1. Definition (relative Häufigkeit), wichtige Eigenschaften
  - 5.2. Additionstheorem für unverträgliche Ereignisse
  - 5.3. bedingte Wahrscheinlichkeit, Rechenregeln
  - 5.4. unabhängige Ereignisse
  - 5.5. totale Wahrscheinlichkeit, Formel von Bayes
6. Geometrische Wahrscheinlichkeit

Lit.: - Gnedenko, Chintschin: Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung /2/

- (MSB) Maibaum: Wahrscheinlichkeitsrechnung /3/ 1971

- "alpha" 9. Jhg. 1975 S. 100 Zufall und Wahrscheinlichkeit (Teil 1)

S. 130 (Teil 2)

- WURZEL 12/72, 1/73 Gesetzmäßigkeiten des Zufalls  
12/75, 1/76 Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

- 1,2/78 Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung  
 6,7/76 Statistische Qualitätskontrolle  
 12/76 Bestimmung von  $\pi$  durch Nadelwurf

### Klasse 10 SPIEGELUNG AM KREIS (Geometrie VI)

1. Beweis des Sekantentangentensatzes
2. Spiegelung am Kreis
  - 2.1. Abbildungsvorschrift und Konstruktion
  - 2.2. Spezialfälle
  - 2.3. Spiegelung bel. Kreise, Geraden und geometrischer Figuren
3. Anwendung bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Lit.: - Böhm u. a.: Geometrie II (Studienbücherei Mathem. für  
 Lehrer Bd. 7) /2/ 1975

- "alpha": 7. Jhg. 1973, S. 52 Inversion od. Spiegelung  
 am Kreis

8. Jhg. 1974, S. 28 Der "Euclides Danicus"  
 von Hohn

- WURZEL 1,2,3/68 Spiegelung am Kreis

Jörg Vogel

Renate Oehmichen

## Zum Lösen von Beweisaufgaben II

### 3. Der direkte Beweis, seine Varianten "Synthese" und "Analyse"

#### 3.1. Die vollständige Analyse

Als erstes wollen wir uns mit der Methode der "vollständigen Analyse" beschäftigen und die typischen Schritte und Fragestellungen dieser Beweismethode kennenlernen, um sie dann an einem Beispiel anzuwenden.

1. Wir beginnen unsere Schlußkette mit der Behauptung B der Aussage und suchen eine hinreichende Bedingung  $F_1$  für die Behauptung. Wir suchen also eine Aussage  $F_1$ , aus der unter An-



wendung gültiger Schlußregeln die Behauptung B folgt, d. h. ein solches  $F_1$ , so daß B wahr ist, wenn  $F_1$  wahr ist.

2. Gehört  $F_1$  unmittelbar zu den Voraussetzungen der zu beweisenden Aussage, so ist der Beweis abgeschlossen. Ist dies nicht der Fall, wird das Verfahren in der gleichen Weise fortgesetzt, d. h. es wird eine hinreichende Bedingung für  $F_1$  ermittelt usw.
3. Die Beweisführung ist abgeschlossen, wenn eine so gefundene hinreichende Bedingung  $F_n$  zu den Voraussetzungen oder bereits bewiesenen Aussagen führt.

Die typische Fragestellung für dieses Vorgehen lautet: Gibt es eine Aussage  $F_{n+1}$ , aus der die Aussage  $F_n$  folgen könnte? Symbolisiert wäre diese Schlußkette dann z. B. so darstellbar:

$B \leftarrow F_1 \leftarrow F_2 \leftarrow \dots \leftarrow F_k \leftarrow F_{k+1} \leftarrow \dots \leftarrow F_n$  mit  $F_{k+1}$  hinreichende Bedingung für  $F_k$ .

Wenden wir uns nun der zu beweisenden Aussage zu!

**Satz:** Die geometrische Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} aq^{v-1}$  konvergiert genau dann, wenn  $|q| < 1$  ist. Die Summe der konvergenten geom. Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} aq^{v-1}$  ist  $s = \frac{a}{1-q}$ .

Die Gültigkeit einer "genau dann, wenn-Aussage" ist gezeigt, wenn neben der Wahrheit der "wenn, so-Formulierung" auch die der Umkehrung dieser Aussage nachgewiesen wurde. Da es uns bei unseren Betrachtungen insbesondere auf die verschiedenen Methoden beim Führen von Beweisen ankommt, wollen wir hier auf den Beweis der Umkehrung verzichten. Unsere zu beweisende Aussage lautet also:

Wenn eine geometrische Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} aq^{v-1}$  vorliegt und  $|q| < 1$  ist, so ist die Reihe konvergent und die Summe ist  $s = \frac{a}{1-q}$ .

Machen wir uns zunächst die Satzstruktur klar. Sie liegt uns in der Form  $V_1 \wedge V_2 \rightarrow B_1 \wedge B_2$  (wenn  $V_1$  und  $V_2$ , so  $B_1$  und  $B_2$ ) vor. Dabei bedingt die "und"-Verknüpfung der Behauptungen  $B_1$  und  $B_2$ , den Beweis in zwei Teilschritten zu führen.

Die Voraussetzungen sind:

$V_1$ :  $\sum_{v=1}^{\infty} aq^{v-1}$  ist geometrische Reihe

$V_2$ :  $|q| < 1$

Die Behauptungen lauten:

$B_1$ :  $\sum_{v=1}^{\infty} aq^{v-1}$  ist konvergent

$B_2$ : Die Summe der geometrischen Reihe ist  $s = \frac{a}{1-q}$ .

Als erstes wollen wir den Konvergenznachweis führen.

| Schlußkette               | Schluß                                                                                                         | Begründung                                                                         |
|---------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Behauptung B              | $\sum_{v=1}^{\infty} aq^{v-1}$ ist konvergent                                                                  |                                                                                    |
| $\uparrow$<br>$F_1$       | $\sum_{v=1}^{\infty} aq^{v-1}$ konvergiert, wenn<br>die Folge $(s_n) = (\sum_{v=1}^n aq^{v-1})$<br>konvergiert | Definition B 15<br>Lehrbuch Kl. 11<br>(siehe Anmerkung)                            |
| $\uparrow$<br>$F_2$       | Die Folge $(s_n)$ konvergiert,<br>wenn die Folge $(q^n)$ konvergiert                                           | 1. $(s_n) = (\sum_{v=1}^n aq^{v-1})$<br>$= (\frac{a}{1-q}(1-q^n))$<br>2. Satz B 14 |
| $\uparrow$<br>$F_3$       | Die Folge $(q^n)$ konvergiert,<br>wenn $ q  < 1$ ist                                                           | Satz B 12.2                                                                        |
| $\uparrow$<br>$V_2 = F_4$ | $ q  < 1$                                                                                                      | lt. Voraussetzung                                                                  |

Die Schlußkette führt zur Voraussetzung  $V_2$ . Da die  $F_{k+1}$  jeweils hinreichende Bedingung für die  $F_k$  bilden, ist damit der Beweis für die Konvergenz der Reihe für  $|q| < 1$  geführt.

Anmerkung: Um die Beweisführung übersichtlich zu gestalten, wurden in der jeweiligen Begründung stets nur die laufenden Nummern der Sätze und Definitionen angegeben, die sich in jedem Fall auf das Lehrbuch für die erweiterte Oberschule Klasse 11, Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1971, beziehen. Das gilt auch für alle folgenden Beweise.



Zum Summennachweis:

Um die eben angewandte Methode zu festigen, wollen wir zur Bestätigung der Summe noch einmal in gleicher Weise vorgehen wie oben. Es sei noch einmal die typische Problemstellung vorangestellt:

Eine Aussage  $F_k$  ist wahr, wenn es eine wahre Aussage  $F_{k+1}$  gibt, aus der  $F_k$  zwingend folgt.

| Schlußkette | Schluß                                                                                                                                                                   | Begründung                                                          |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| B<br>↑      | $s = \frac{a}{1-q}$ ist die Summe der geometrischen Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} aq^{v-1}$                                                                                 |                                                                     |
| $F_1$<br>↑  | $s = \frac{a}{1-q}$ ist Summe der geom. Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} aq^{v-1}$ , wenn $s = \frac{a}{1-q}$ Grenzwert der geom. Folge $(s_n) = (\sum_{v=1}^n aq^{v-1})$ ist. | Definition B 15                                                     |
| $F_2$<br>↑  | $s = \frac{a}{1-q}$ ist Grenzwert der Folge $(s_n) = (\sum_{v=1}^n aq^{v-1})$ , wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s = \frac{a}{1-q}$ ist.                          |                                                                     |
| $F_3$<br>↑  | $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1-q}$ , wenn $(q^n)$ eine Nullfolge ist.                                                                                     | 1. $s_n = \frac{a}{1-q}(1-q^n)$<br>für $q \neq 1$<br>2. Satz B 14.2 |
| $F_4$<br>↑  | $(q^n)$ ist eine Nullfolge, wenn $ q  < 1$ ist.                                                                                                                          | Satz 12.2                                                           |
| $V_2 = F_5$ | $ q  < 1$                                                                                                                                                                | lt. Voraussetzung                                                   |

Mit dem Erreichen von  $V_2$  als hinreichende Bedingung für  $F_4$  ist der Beweis abgeschlossen.

Dr. Alfred Groß  
Bereich Methodik des  
Mathematikunterrichts

## Preisaufgaben

K 37 Es sei  $n$  eine nat. Zahl, deren Quersumme gleich der Quersumme des fünffachen dieser Zahl ist. Man zeige, daß  $n$  durch 9 teilbar ist.

1

K 38 Gesucht sind alle natürlichen  $n$ , für die  $2^n - 1$  eine Quadratzahl ist.

2

K 39 Durch einen Punkt, der im Inneren eines gegebenen Winkels  $\alpha$ , mit  $0 \leq \alpha < \pi$  liegt, soll eine Gerade so gelegt werden, daß das entstehende Dreieck einen minimalen Flächeninhalt hat.

1

K 40 Drei Personen machen je zwei Aussagen. Es ist bekannt, daß eine Person zweimal lügt, eine Person zweimal die Wahrheit sagt und die dritte einmal lügt und einmal die Wahrheit sagt.

1

A: 1. Ich beging die Tat nicht.

2. B war es ebenfalls nicht.

B: 1. A war es nicht.

2. C war der Täter.

C: 1. Ich habe es nicht getan.

2. A tat es.

Wer war der Täter?

K 41 Man beweise:

1

$$\tan 7,5^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2.$$

K 42 Лодка спускает по течению реки на расстояние 10 км, а затем поднимается против течения на расстояние 6 км. Скорость течения реки равна 1 км/час. В каких пределах должна лежать собственная скорость лодки, чтобы вся поездка заняла от 3 до 4 часов.

2

Einsendeschluß

30. 9. 78



Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkt erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.

Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in einer Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Konstruktionen, Hilfslinien) muß deutlich erkennbar sein.

Prüfungsfragen

Als Student der Universität Göttingen legte Max Born bei dem Astronomen Karl Schwarzschild sein Examen ab. Zwischen ihnen kam es zu folgendem Dialog:

Schwarzschild: "Was tun Sie, wenn Sie eine Sternschnuppe sehen?"

Born: "Ich wünsche mir etwas."

Schwarzschild: "Gut, und was tun Sie dann?"

Born: "Dann schaue ich auf die Uhr, vermerke mir die Zeit, bestimme das Sternbild, aus dem die Sternschnuppe kam, die Richtung, wohin sie sich bewegte, die Länge der leuchtenden Flugbahn usw. Dann gehe ich nach Hause und berechne die angenäherte Flugbahn."

Der Professor stellte keine weiteren Fragen mehr. Er war mit den Antworten seines Prüflings zufrieden.

---.---.---.---.---

## Zu einer Aufgabe der Bezirksolympiade 1976

Bei der Bezirksolympiade 1976 lautete die Aufgabe 151236 B:  
Ein Polynom  $P(x)$  mit reellen Koeffizienten lasse bei der Division durch  $(x-p)$  den Rest  $r$  und bei Division durch  $(x-q)$  den Rest  $s$ . Welchen Rest läßt  $P(x)$  bei Division durch  $(x-p)(x-q)$  ( $p \neq q$ )? (Der Leser vergleiche bitte mit WURZEL-Preisaufgabe J 48, Wurzel 10/77, S. 154; Lösung in Wurzel 1/78, S. 15 f.)

Der Lösungsvorschlag der Aufgabenkommission beinhaltet folgenden Gedanken: Als Rest bei der Division von  $P(x)$  durch  $(x-p)(x-q)$  kann höchstens ein linearer Term auftreten, also gibt es ein Polynom  $P_1(x)$  mit

$$P(x) = (x-p)(x-q)P_1(x) + a_1x + a_0.$$

Ferner existieren Polynome  $P_2(x)$  und  $P_3(x)$  mit

$$P(x) = (x-p)P_2(x) + r = (x-q)P_3(x) + s.$$

Also ist  $P(p) = r = a_1p + a_0$  und  $P(q) = s = a_1q + a_0$  und wir können  $a_1$  und  $a_0$  als Lösung des Gleichungssystems bestimmen und erhalten:

$$a_1 = \frac{r-s}{p-q} \quad a_0 = \frac{ps-rq}{p-q}.$$

Mithin ist der zu bestimmende Rest

$$\frac{r-s}{p-q} x + \frac{ps-rq}{p-q}.$$

Wir wollen die analoge Fragestellung auf  $n$  Faktoren ausdehnen. Lasse  $P(x)$  bei der Division durch  $(x-p_i)$   $i=1,2,\dots,n$  die Reste  $r_i$ , wobei wir die  $p_i$  als paarweise verschieden voraussetzen wollen (1). Welchen Rest läßt  $P(x)$  bei der Division durch das Produkt der  $n$  Linearfaktoren?

Bei der Lösung gehen wir wie im Spezialfall  $n=2$  vor.

Es gibt Polynome  $P_i(x)$  mit  $P(x) = (x-p_i)P_i(x) + r_i$  und man erhält  $P(p_i) = r_i$  (2).  $P(x)$  läßt bei der Division durch das Produkt der  $n$  Linearfaktoren höchstens ein Restpolynom von  $(n-1)$ -tem Grad. Es gibt also ein Polynom  $R(x)$  mit  $P(x) = R(x)(x-p_1)\dots(x-p_n) + a_nx^{n-1} + \dots + a_2x + a_1$  mit noch unbekann-



ten Zahlen  $a_i$ . Infolge (2) erhalten wir ein Gleichungssystem zur Bestimmung dieser Zahlen.

$$\begin{array}{rcl} a_n p_1^{n-1} + \dots + a_2 p_1 + a_1 & = & r_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n p_n^{n-1} + \dots + a_2 p_n + a_n & = & r_n \end{array}$$

Als Lösung ergibt sich:

$$a_i = \frac{\begin{vmatrix} p_1^{n-1} & \dots & r_1 & \dots & p_1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_n^{n-1} & \dots & r_n & \dots & p_n & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_1^{n-1} & \dots & p_1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_n^{n-1} & \dots & p_n & 1 \end{vmatrix}} \quad (3)$$

nach der Cramerschen Regel. Beim Nenner handelt es sich um die Vandermondesche Determinante. Sie ist gleich dem Produkt  $(p_1 - p_2)(p_1 - p_3) \dots (p_1 - p_n)(p_2 - p_3) \dots (p_2 - p_n) \dots (p_{n-1} - p_n)$ , womit wir nachträglich den Sinn der Voraussetzung (1) erkennen. Unser verallgemeinertes Problem haben wir damit gelöst.  $P(x)$  läßt bei der Division durch das Produkt der  $n$  Linearfaktoren den Rest

$$a_n x^{n-1} + \dots + a_2 x + a_1,$$

wobei die  $a_i$  durch (3) bestimmt sind.

Als Literatur zur Cramerschen Regel und Vandermondeschen Determinante wird empfohlen:

Belkner, H., Determinanten, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1968

Kochendörffer, R., Determinanten und Matrizen, 5. Auflage, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1967

Abschließend sei bemerkt, daß es sich für jeden Schüler als vorteilhaft auswirkt, wenn er viele Aufgaben gründlich studiert hat. Vielleicht hat er dann auch einmal Glück, indem er bereits eine Aufgabe kennt. So sind beispielsweise in dem Buch von H. Dörrie, Mathematische Miniaturen, mindestens fünf Aufgaben enthalten, die auf vergangenen Olympiaden gestellt wurden.

**Dr. W. Moldenhauer**  
**Sektion Mathematik**  
**der WPU Rostock**

## Lösungen

### der Preisaufgaben aus „Wurzel“ 3/78

**K 13** Es gilt:  $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n})$   
 $= (a+b) \cdot R$

Speziell folgt also:

$$\begin{aligned} 3^{105} + 4^{105} &= (3^5)^{21} + (4^5)^{21} = (3^5 + 4^5) \cdot R_1 = \\ &= 1267 \cdot R_1 = 181 \cdot 7R_1 = 0 \pmod{181} \\ 3^{105} + 4^{105} &= (3^7)^{15} + (4^7)^{21} = (3^7 + 4^7) \cdot R_2 = \\ &= 18571 \cdot R_1 = 49 \cdot 379R_2 = 0 \pmod{49}. \end{aligned}$$

**K 14** Damit  $f(x) = x^2 + x + 1$  ein Teiler von  $g(x) = (x+1)^n - x^n - 1$  ist, muß gelten, daß jede Nullstelle von  $f$  auch Nullstelle von  $g$  ist. (1)

$$f(x) = 0 \quad x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot i = \cos \frac{\pi}{3} \pm i \cdot \sin \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

Wenn man diese Nullstellen von  $f$  in  $g$  einsetzt, erhält man unter der Bedingung (1) Beziehungen für  $n$ :

$$\sin \frac{n \cdot \pi}{3} - \sin \frac{2n \cdot \pi}{3} = 0 \quad (3)$$

$$\cos \frac{n \cdot \pi}{3} - \cos \frac{2n \cdot \pi}{3} = 1 \quad (4)$$

Aus diesen Beziehungen erhält man die Lösungsmenge:

$$n = 6k + 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

**K 15** Das Gleichungssystem hat genau 3 reelle Lösungen  
 $(0; 0; 0); (2, 2, 0);$

$$\left(\frac{1}{9} \sqrt[3]{379+108\sqrt{43}} + \sqrt[3]{379-108\sqrt{43}} + 19, 6 - \frac{3}{2}x, 5 - \frac{2}{x-2}\right)$$

**K 16** Durch Substitution  $a = 7^y$ ,  $b = \log_5 x$  erhält man  
 $a \cdot b = -2$

$$4a + b = 2$$

mit den Lösungen  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -\frac{1}{2}$ , wobei  $a_2$  wegen  $0 < 7^y$  entfällt.

Die Lösung ist also  $a = 1$ ,  $b = -2$  und damit  $x = \frac{1}{25}$ ,  $y = 0$ .



**K 17** Leider ist uns bei dieser Aufgabe ein Fehler unterlaufen. Wir haben nicht bemerkt, wurden jedoch von einigen Lesern darauf hingewiesen, daß die Lösung in der "Kleinen Enzyklopädie - Mathematik" S. 269 zu finden ist. Wir bitten um Entschuldigung.

**K 18** Man legt einen Schnitt so durch den Pyramidenstumpf, daß auf der Schnittebene vier Berührungspunkte von Pyramidenstumpf und Kugel liegen. Durch Ausnutzung von Winkelbeziehungen ergibt sich

$$V = \frac{8}{3} r^3 \cdot \frac{3 + \cos^2 d}{\sin^2 d} \quad (\text{oder Umformungen})$$

### Das Universallösungsmittel

Edison unterhielt sich mit jedem, der bei ihm im Laboratorium arbeiten wollte. Er fragte die Bewerber nach ihren Plänen und Absichten und interessierte sich besonders dafür, mit welchen Problemen sie sich beschäftigten.

"Ich habe eine großartige Idee!" erklärte ihm einst ein junger Mann. "Ich möchte ein Universallösungsmittel erfinden, eine Flüssigkeit, in der sich jeder beliebige Stoff auflöst. Ich glaube, mich auf dem richtigen Wege zu befinden, mir fehlt es nur noch an Geld und an den entsprechenden Möglichkeiten, diese Arbeit zu beenden."

"Ein Universallösungsmittel?" wunderte sich Edison.

"Und in welchem Gefäß wollen Sie es aufbewahren?"

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jörg Vogel

**Chefredakteur:** Hans-Joachim Hauschild

**Redaktion:** K. Bartholmé, G. Blume, R. Jeske, D. Meinhardt, V. Wedler

**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

**Konto:** Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement

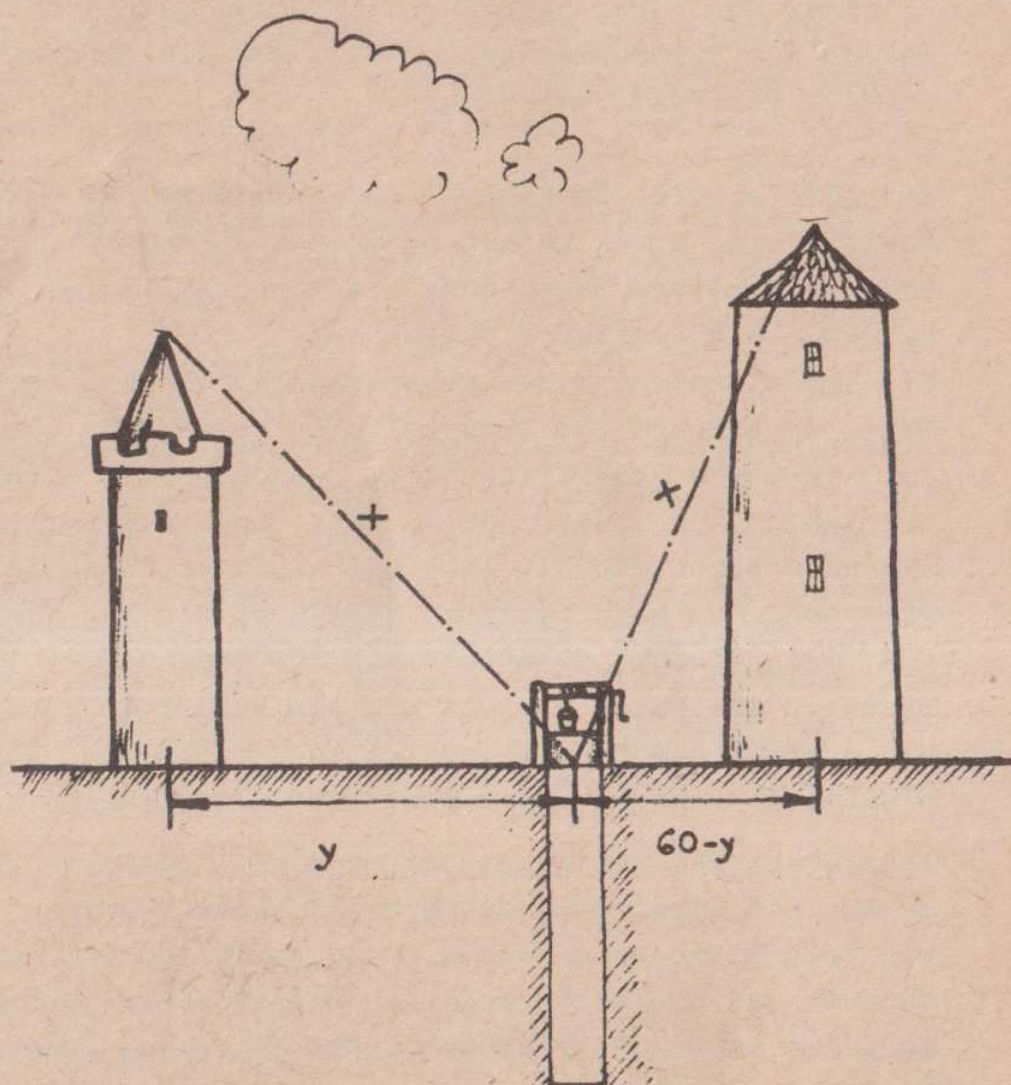
0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der

DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932





8 \ 9

78

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-  
gendobjekt Studenvor-  
bereitung der Sektion  
Mathematik an der  
Friedrich-Schiller-Uni-  
versität Jena

12. Jahrgang  
Index 33 873  
Preis: 0,20 M



## Primfaktorenzerlegung auf Computern (I)

In einer vorausgegangenen Artikelfolge (siehe WURZEL 3-5/77) wurden die Primzahlen vorgestellt und die Existenz einer kanonischen Primfaktorzerlegung

$$(1) \quad N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$$

für jede natürliche Zahl  $N$  bewiesen. Diese kanonische Zerlegung besitzt eine große Bedeutung in der Zahlentheorie. Das Problem ihrer effektiven Berechnung hat schon seit Eulers Zeiten eine Vielzahl von Mathematikern fasziniert.

Wie findet man zu einer gegebenen Zahl  $N$  ihre vollständige Primfaktorzerlegung? Vom theoretischen Standpunkt aus bietet das Problem keine Schwierigkeiten. Man berechnet eine Tabelle aller Primzahlen  $\leq \sqrt{N}$  oder schreibt ein Computerprogramm, das sie nacheinander bereitstellt. Auch auf heutigen Hochleistungsrechnern gibt es dafür kein besseres Verfahren als das Sieb des Eratosthenes. Anschließend ermittelt man für jede dieser Primzahlen durch Division mit Rest, wie oft sie als Faktor in  $N$  enthalten ist, und spaltet die höchste enthaltene Potenz ab. Ein zum Schluß verbleibender Faktor größer als 1 ist mit Sicherheit Primzahl.

Aber diese Methode gestattet es nicht, beliebig große  $N$  zu zerlegen, wie eine kurze Überschlagsrechnung zeigt. Wir nehmen an, ein Computerprogramm würde pro Sekunde 100 000 Primzahlen berechnen und die entsprechenden Divisionen ausführen (diese Schätzung ist recht optimistisch). Mit Hilfe der Näherungsformel

$\pi(x) \approx x/\ln x$  für die Anzahl der Primzahlen unterhalb  $x$  kann man ungefähr die Zeit berechnen, die eine Zerlegung von  $N$  schlimmstenfalls benötigt, nämlich  $\sqrt{N} (100000 \ln \sqrt{N})$  Sekunden. Daraus ergeben sich folgende ungünstigsten Rechenzeiten, etwa für den Nachweis des Primzahlcharakters einer Primzahl  $N$ :

|            |           |                   |                   |           |
|------------|-----------|-------------------|-------------------|-----------|
| $N <$      | $10^{16}$ | $7 \cdot 10^{19}$ | $5 \cdot 10^{22}$ | $10^{28}$ |
| Rechenzeit | 1 Minute  | 1 Stunde          | 1 Tag             | 1 Jahr    |

Aus diesem Grunde wurden verschiedene elegante und leistungsfähige Verfahren für die Primfaktorzerlegung von wesentlich größeren Zahlen entwickelt, die meisten davon erst in den letzten 10 Jahren. Sie machen das Durchprobieren der kleinen Primzahlen



als mögliche Teiler von  $N$  völlig überflüssig und zeigen, daß es eine ziemliche Verschwendung von Rechenzeit bedeutet. Trotzdem beginnt man heute noch die Zerlegung einer sehr großen Zahl  $N$  damit, daß man alle Primfaktoren  $\leq 10^6$  oder  $\leq 10^8$  aufsucht und abtrennt (das sind etwa 78 500 bzw. 5 760 000 Testdivisionen), weil das Auftreten solcher Faktoren sehr wahrscheinlich ist und die leistungsfähigeren Verfahren bei kleineren  $N$  natürlich schneller zum Ziel führen.

Das eigentliche Problem, die kanonische Primfaktorzerlegung (1) zu ermitteln, beginnt also dann, wenn  $N > 10^{16}$  und alle Primfaktoren von  $N$  größer als  $10^8$  sind. Zunächst führt man die Aufgabe auf folgende Teilaufgaben zurück:

- a) Teste, ob  $N$  Primzahl sein kann.
- b) Falls  $N$  zusammengesetzt ist, finde einen echten Teiler von  $N$ .
- c) Falls  $N$  Primzahl ist, beweise den Primzahlcharakter von  $N$ .

Mit dem Lösungsverfahren für die Aufgaben b) und c) gelangt man bis zur vollständigen Zerlegung von  $N$ , da jeder gefundene zusammengesetzte Teiler von  $N$  mit dem Verfahren zu b) solange weiter zerlegt werden kann, bis er in ein Produkt von Primfaktoren aufgespalten ist. Für diese muß man einzeln Aufgabe c) lösen, weil man sonst nicht sicher sein kann, die kanonische Zerlegung (1) gefunden zu haben.

Das Verfahren zu Aufgabe a) liefert der "kleine" Satz von Fermat:

Falls g.g.T.  $(a, N) = 1$  und  $a^{N-1} \not\equiv 1 \pmod{N}$ , dann ist  $N$  keine Primzahl.

In der Praxis wählt man eine kleine Primzahl  $a$  (etwa 2 oder 7 oder 13), die nicht in  $N$  enthalten sein darf, und rechnet den Rest, den  $a^{N-1}$  bei der Division durch  $N$  läßt, aus, ohne die riesige Zahl  $a^{N-1}$  selbst zu berechnen. Die Rechenzeit dieses Verfahrens kann selbst für unvorstellbar große  $N$  vernachlässigt werden. Ist der Rest von 1 verschieden, müssen wir Aufgabe b) lösen. Beträgt der Rest tatsächlich 1, können wir weitere Tests mit anderen Zahlen  $a$  durchführen, weil es zusammengesetzte Zahlen  $N$  gibt, die sich in einigen (oder auch allen) Tests wie Primzahlen verhalten. Diese Zahlen sind jedoch äußerst selten; sie werden erkannt und zerlegt, wenn man versucht, sie gemäß Aufgabe c) als Primzahlen nachzuweisen.



Mit Verfahren für Aufgabe b) werden wir uns später beschäftigen. Die Lösungsverfahren für Aufgabe c) sind theoretisch wesentlich komplizierter. Bisher gelingt es nur dann, eine Primzahl  $N$  als Primzahl nachzuweisen, wenn ein genügend großer Anteil der kanonischen Zerlegungen von  $N-1$ ,  $N+1$  und  $N^2+1$  bekannt ist, die kanonische Zerlegung einer dieser Zahlen genügt auch. Deshalb sind die Primzahlen  $N$ , für die man Aufgabe c) lösen kann, nur wenig größer als die zusammengesetzten Zahlen  $N$  ohne kleine Primfaktoren, für die man Aufgabe b) lösen kann. (Solche Rekorde wie die größte bekannte Primzahl  $2^{19937}-1$  oder der größte bekannte Primzahlzwillings  $76.3^{139} \pm 1$  sind Ausnahmen mit einer ganz speziellen algebraischen Struktur.)

Zum Abschluß noch einige historische Notizen. Soweit mir bekannt ist, lautet die größte Zahl ohne kleine Primfaktoren, die "von Hand", also ohne die Hilfe eines Computers zerlegt worden ist,

$$2^{67}-1 = 147\ 573\ 952\ 589\ 676\ 412\ 927 \\ = 193\ 707\ 721 \cdot 761\ 838\ 257\ 287.$$

Dieser Weltrekord stammt aus dem Jahre 1903 von dem Amerikaner F.N. Cole, der für das Ergebnis drei Jahre lang jeden Sonntag arbeitete. Das von ihm verwendete Verfahren war auch lange Zeit für den Computereinsatz gebräuchlich, aber nicht sehr leistungsfähig. So gab es bis zum Jahre 1970 kein Programm, das eine Zahl  $N$  mit mehr als 30 Dezimalziffern ( $N > 10^{30}$ ) zerlegen konnte, falls sie keinen Faktor unterhalb  $10^8$  besaß. Am 13. 9. 1970 gelang jedoch in Los Angeles nach dreimonatigen Vorarbeiten die sensationelle Zerlegung der 9stelligen Fermatzahl

$$2^{2^7} + 1 = 2^{128} + 1 = 59\ 649\ 589\ 127\ 497\ 217 \cdot \\ 5\ 704\ 689\ 200\ 685\ 129\ 054\ 721.$$

Beide Faktoren sind Primzahlen. Damit hatte eine 65-jährige Suche endlich Erfolg, denn es war seit 1905 bewiesen, daß diese Zahl keine Primzahl ist.

Heute liegt der Rekord der veröffentlichten Zerlegungen ohne Abspalten kleiner Faktoren bei der Zahl  $2^{149}-1$ . Sie besitzt 45 Ziffern und ist das Produkt zweier Primzahlen der Größenordnung  $8,6 \cdot 10^{19}$  und  $8,2 \cdot 10^{24}$ . Die verwendete Methode läßt jedoch keine bedeutende Steigerung mehr zu, da die benötigte Rechenzeit auf den schnellsten existierenden Computern für  $N \approx 10^{45}$  bereits



nach Stunden mißt.

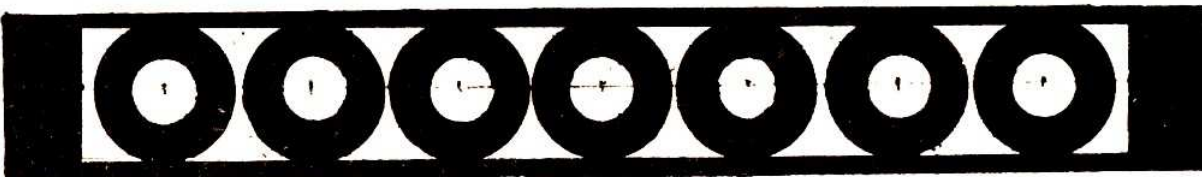
Es soll noch bemerkt werden, daß beispielsweise die Zahl  $2^{1020}-1$  mit 308 Dezimalziffern vollständig zerlegt werden konnte, weil man ihre algebraische Struktur ausnutzte und sie genügend viele relativ kleine Primfaktoren besitzt.

**Traugott Schulmeiß**

wiss. Assistent

im Forschungsbereich

Sektion Mathematik der FSU



## Zum Lösen von Beweisaufgaben III

### 3.2. Die unvollständige Analyse

Eine weitere Möglichkeit, eine Idee für den Beweis einer mathematischen Aussage zu finden, wollen wir uns an einem Beispiel aus der Vektorrechnung klarmachen.

Als Beweismethode verwenden wir dieses Mal die Methode der unvollständigen Analyse. Stellen wir auch hier zunächst die typischen Schritte und Fragestellungen zusammen.

1. Als Ausgangspunkt wählen wir wieder die Behauptung B. Von B ausgehend ziehen wir eine Folgerung  $F_1$ , die eine notwendige Bedingung zu B darstellt. Wir suchen also hierbei eine Aussage  $F_1$ , die sich zwingend aus der Behauptung B entwickeln läßt (Anwendung gültiger Schlußregeln), d. h. ein solches  $F_1$ , das wahr ist, wenn B wahr ist.
2. Ist die Aussage  $F_1$  entscheidbar bezüglich ihres Wahrheitsgehaltes, kann die Entwicklung hier abgebrochen werden. Ist  $F_1$  nicht entscheidbar, muß dieses Vorgehen bis zu einer entscheidbaren Folgerung  $F_n$  fortgesetzt werden, wobei die  $F_{k+1}$  jeweils den Charakter notwendiger Bedingungen zu den  $F_k$  haben sollen.



- 3.1. Ist die so gefundene Aussage  $F_n$  falsch, so ist die zu beweisende Aussage ebenfalls falsch.
- 3.2. Ist  $F_n$  wahr, so ist zu beachten, daß die  $F_{k+1}$  stets nur notwendige Bedingungen für die  $F_k$  darstellen. Es macht sich deshalb erforderlich, zu zeigen, daß die  $F_{k+1}$  nicht nur notwendige sondern auch hinreichende Bedingungen für die  $F_k$  sind, d. h., die Schlußkette muß beim Erreichen einer wahren Aussage  $F_n$  noch einmal in der umgekehrten Richtung bis zur Behauptung B durchlaufen werden. Erst wenn das realisierbar ist, ist auch dieser Beweis vollständig.

Die typische Fragestellung zum Ermitteln der Folgerungen lautet hierbei: Welche Aussage  $F_{k+1}$  läßt sich aus der Aussage  $F_k$  folgern. Die symbolisierte Darstellung dieses Vorgehens:

$$1. B \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow \dots F_k \longrightarrow F_{k+1} \longrightarrow \dots F_n \text{ (wahr)}$$

$$2. F_n \longrightarrow \dots F_{k+1} \longrightarrow F_k \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow B.$$

Wenden wir nun diese Beweismethode an einem Beispiel an.

Die Aussage lautet:

Sind  $a$  und  $b$  zwei beliebige Verschiebungen, so gilt

$$b - a = b + (-a)$$

Zunächst stellen wir die Bedingungen dieser Aussage zusammen:

Die Voraussetzungen sind:

1.  $a$  ist eine beliebige Verschiebung
2.  $b$  ist eine beliebige Verschiebung

Die Behauptung lautet:

$$b - a = b + (-a)$$

| Schlußkette           | Schluß                            | Begründung             |
|-----------------------|-----------------------------------|------------------------|
| Behauptung B          | $b - a = b + (-a)$                |                        |
| $\downarrow$<br>$F_1$ | Wenn gilt $b - a = b + (-a)$      |                        |
| $\downarrow$          | so gilt                           |                        |
| $\downarrow$          | $b - a + (-b) = b + (-a) + (-b)$  |                        |
| $F_2$                 | Wenn gilt                         | Identische Abbildung   |
| $\downarrow$          | $b - a + (-b) = b + (-a) + (-b),$ | Lehrbuch Kl. 11, S.167 |
| $\downarrow$          | so gilt $-a + 0 = 0 + (-a)$       |                        |

|       |                                                                                             |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| $F_3$ | Wenn gilt $-a + b = b + (-a)$ , Nullverschiebung<br>so gilt $-a = -a$ Lehrbuch Kl.11, S.167 |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------|

Mit  $F_3$  wird eine entscheidbare Aussage mit dem Wahrheitswert "wahr" erreicht.

Für die Rückwärtsentwicklung gilt dann

|           |                                                                       |                                           |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $F_3$     | Wenn gilt $-a = -a$ , Nullverschiebung<br>so gilt $-a + b = b + (-a)$ |                                           |
| ↓         |                                                                       |                                           |
| $F_2$     | Wenn gilt $F_3$ , so gilt<br>$-a + b + (-b) = b + (-a) + (-b)$        | 1. Ersetzung<br>$b = b + (-b)$            |
| ↓         |                                                                       | 2. Identische Abbildung                   |
| $B = F_1$ | Wenn gilt $F_2$ , so gilt<br>$b - a = b + (-a)$                       | Äquivalente Umformung<br>Kommutativgesetz |

### 3.3. Die Synthese

Nachdem wir mit diesen beiden Analyseformen Möglichkeiten des Findens einer Beweisidee kennengelernt haben, wollen wir uns nun der anspruchsvolleren Synthese widmen.

Auch hier wollen wir zunächst das typische Vorgehen beschreiben und dann diese Methode an einem Beispiel verfolgen.

1. Als Ausgangspunkt der Schlußfolge wählen wir die Voraussetzungen der zu beweisenden Aussage.
2. Aus den Voraussetzungen, die ergänzt werden dürfen durch alle bis zu diesem Entwicklungsstand der Theorie bekannten Definitionen, Axiome und Sätze, entwickeln wir eine Folgerung  $F_1$ , so daß die Voraussetzungen hinreichende Bedingungen für  $F_1$  darstellen, d. h., wir suchen eine Aussage  $F_1$ , die unter Anwendung gültiger Schlußregeln aus den Voraussetzungen folgt. Entspricht  $F_1$  bereits der Behauptung der Aussage, so ist der Beweis abgeschlossen.



3. Ist  $F_1$  nicht identisch mit der Behauptung, wird diese Aussage  $F_1$  nun ihrerseits als Voraussetzung und damit als hinreichende Bedingung für die Entwicklung einer neuen Folgerung  $F_2$  benutzt. Dieses Verfahren setzen wir so lange fort, bis aus einer Folgerung  $F_n$  die Behauptung  $B$  der zu beweisenden Aussage gewonnen werden kann.
4. Auf Grund der Tatsache, daß die  $F_k$  jeweils hinreichende Bedingung für die  $F_{k+1}$  darstellen und die Voraussetzungen als wahre Aussagen anerkannt werden, ist mit dem Erreichen von  $B$  der Beweis abgeschlossen. Als typische Fragestellung formulieren wir:

Welche Aussage  $F_{k+1}$  läßt sich aus der Aussage  $F_k$  gewinnen?

Wenden wir nun diese Methode auf einen speziellen Beweis an.

**Satz:** Sind  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergente Zahlenfolgen und ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , so konvergiert auch  $(a_n + b_n)$  und es ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ .

Die Voraussetzungen sind:

$V_1: (a_n); (b_n)$  konvergente Zahlenfolgen

$V_2: \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

$V_3: \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

Die Behauptungen lauten:

$B_1: (a_n + b_n)$  konvergiert.

$B_2: \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$

| Schlußkette       | Schluß                                                                                                                                                                             | Begründung                        |
|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| Voraussetzungen V | $V_1, V_2, V_3$                                                                                                                                                                    |                                   |
| ↓<br>$F_1$        | Wenn V, so gilt:<br>Bei jedem beliebigen<br>$\epsilon > 0$ gilt für fast alle<br>$n: a_n \in U_\epsilon(a)$ bzw.<br>$b_n \in U_\epsilon(b)$ mit $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$ . | Definition B 2<br>Lehrbuch Kl. 11 |

|                 |                                                                                                                                                                                                                          |                                                                        |
|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| $F_2$           | Wenn $F_1$ , so gilt:<br>Es gibt natürliche Zahlen $n_1$ und $n_2$ derart,<br>so daß für alle $n > n_1$<br>$a - \epsilon' < a_n < a + \epsilon'$ und<br>für alle $n > n_2$<br>$b - \epsilon' < b_n < b + \epsilon'$ ist. | Definition B 2<br>Lehrbuch Kl. 11                                      |
| $F_3$           | Wenn $F_2$ , so gilt:<br>Für alle $n > n^*$ ist<br>$a - \epsilon' < a_n < a + \epsilon'$ und<br>$b - \epsilon' < b_n < b + \epsilon'$                                                                                    | $n^*$ die größere<br>der Zahlen $n_1$<br>und $n_2$                     |
| $F_4$           | Wenn $F_3$ , so gilt:<br>$a+b-2\epsilon' < a_n+b_n < a+b+2\epsilon'$                                                                                                                                                     | Addition der Ungleichungen in $F_3$                                    |
| $F_5$           | Wenn $F_4$ , so gilt:<br>$a+b-\epsilon < a_n+b_n < a+b+\epsilon$                                                                                                                                                         | $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$ s. $F_1$                              |
| $F_6$           | Wenn $F_5$ , so gilt:<br>Bei beliebigem $\epsilon$ gilt für<br>fast alle $n$ :<br>$(a_n+b_n) \in U_\epsilon(a+b)$ .                                                                                                      | Definition B 2<br>Lehrbuch Kl. 11                                      |
| $B_1 = F_{7.1}$ | Wenn $F_6$ , so gilt:<br>Die Zahlenfolge $(a_n+b_n)$ ist<br>konvergent                                                                                                                                                   | Definition B 3<br>Lehrbuch Kl. 11<br>Definition B 2<br>Lehrbuch Kl. 11 |
| $B_2 = F_{7.2}$ | Die Zahlenfolge $(a_n+b_n)$ besitzt den Grenzwert $a+b$ .                                                                                                                                                                |                                                                        |

Diese Beweisführung macht uns noch einmal deutlich, daß bei Beweisführungen häufig eine Erweiterung der gegebenen Voraussetzungen durch Hinzufügen früher erarbeiteter Sätze und Definitionen erfolgen muß.



Durch das Erfüllen der Forderung, daß die  $F_k$  jeweils hinreichende Bedingungen für die  $F_{k+1}$  bilden, ist der Beweis mit dem Erreichen der Behauptung abgeschlossen, da die Voraussetzungen als wahr anerkannt werden.

Dr. Alfred Groß

Bereich Methodik des  
Mathematikunterrichts

## Der Sieger von Palermo (Schluß)

### 12. Einige Schlußbemerkungen

Wenn wir nun zum Ende dieses Artikels kommen, so bedeutet dies keineswegs, daß in diesem Artikel für Fibonacci-Zahlen "das Pulver bereits verschossen wurde". Das Ziel der WURZEL kann aber natürlich nicht sein, einen Gegenstand erschöpfend zu behandeln, der z. B. in den USA seit vielen Jahren in einer eigenständigen Zeitschrift - "The Fibonacci Quarterly" - umfassend (und sicher auch teilweise über das natürliche Interesse hinaus) behandelt wird.

Abschließend geben wir noch neun Aufgabenstellungen für Fibonacci-Zahlen an:

- 1) E.B. DYNKIN und W.A. USPENSKI führen in einem 1968 im VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften zu Berlin erschienenen Büchlein ("Aufgaben aus der Zahlentheorie") folgende interessante Eigenschaft an: Eine Folge  $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$  reeller Zahlen genüge der Rekursionsformel  $r_{n+2} = r_{n+1} + r_n$ , wobei  $r_0$  und  $r_1$  beliebige reelle Zahlen seien. Für  $n \geq 0$  gilt dann stets
 
$$r_{n+1} = f_n \cdot r_0 + f_{n+1} \cdot r_1 \quad .$$
 - Der Beweis kann durch vollständige

Induktion unschwer erbracht werden.

- 2) Auf J. L. LAGRANGE (1736-1813) geht folgende Aufgabenstellung zurück: Man zeige, daß die letzten Ziffern der Fibonacci-Zahlen periodisch wiederkehren! Wie groß ist die Länge der Periode? Zur Lösung dieser Aufgabe wird es günstig sein, die Fibonacci-Zahlen modulo 10 zu betrachten.
- 3) Dem Leser ist das PASCALSche Dreieck bekannt, welches die Ermittlung der Binomialkoeffizienten erleichtert:

|   |   |     |    |   |   |  |                      |
|---|---|-----|----|---|---|--|----------------------|
| 1 |   |     |    |   |   |  | $b_1 = 1$            |
| 1 | 1 |     |    |   |   |  | $b_2 = 1$            |
| 1 | 2 | 1   |    |   |   |  | $b_3 = 1+2 = 3$      |
| 1 | 3 | 3   | 1  |   |   |  | $b_4 = 1+3+1 = 5$    |
| 1 | 4 | 6   | 4  | 1 |   |  | $b_5 = 1+4+3 = 8$    |
| 1 | 5 | 10  | 10 | 5 | 1 |  | $b_6 = 1+5+6+1 = 13$ |
| 1 | 6 | ... |    |   |   |  | ...                  |

Es sei  $b_n$  die Summe aller Zahlen auf der jeweils  $n$ -ten Diagonale in diesem Dreieck ( $n-1$ ). Zeigen Sie, daß stets  $b_n = f_n$  ist! Der Beweis dieser Eigenschaft erfordert größere Mühe als die Beweise zu den ersten beiden Aufgaben. In der Schreibweise der Binomialkoeffizienten bedeutet diese Eigenschaft, daß

$$(54) \quad f_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots, \text{ für } n \geq 0.$$

- 4) Im Abschnitt 2 dieses Artikels wurde die Folge  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  von É. LUCAS behandelt. Beweisen Sie

$$(55) \quad g_n = \hat{\tau}^n + \hat{\tau}^n, \text{ für } n \geq 0.$$

- 5) Für die LUCAS-Zahlen  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  gilt

$$(56) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_{n+1}/g_n = \tau.$$

Zum Nachweis dieser Gleichung ist (55) gut zu verwenden.

- 6) Von L. CARLITZ wurden 1970 die Gleichungen

$$(57) \quad f_{2n} = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} f_s \text{ und } f_{2n} = \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} g_s \quad (n \geq 0)$$

bewiesen. Als Hinweis: Es ist  $\tau^{2n} = (\tau+1)^n$ .

- 7) Wir betrachten endliche Folgen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , wobei die Folgenglieder  $a_i$  entweder 0 oder 1 sind und in diesen Folgen auf eine 1 nicht unmittelbar wieder eine 1 folgen soll. Zum Bei-



spiel wären

0,0,0; 0,0,1; 0,1,0; 1,0,0; 1,0,1

alle derartigen Folgen der Länge 3. Es sei  $A_n$  die Anzahl aller derartigen Folgen der Länge  $n$ . Zeigen Sie, daß

$$(58) \quad A_n = f_{n+2}, \quad \text{für } n \geq 1.$$

Diese Aussage kann mit Hilfe von (2) bewiesen werden. - Wird für die betrachteten endlichen Folgen zusätzlich gefordert, daß das erste Element  $a_1$  und das letzte Element  $a_n$  nicht gleichzeitig 1 sein darf, so gilt für die Anzahl  $B_n$  aller derart eingeschränkten Folgen der Länge  $n$

$$(59) \quad B_n = g_n, \quad \text{für } n \geq 1.$$

Die Beziehungen (58) und (59) wurden 1958 von J. RIORDAN angegeben.

- 8) Die letzten beiden Aufgaben sind besonders schwer zu lösen. Für eine reelle Zahl  $x$  sei  $[x]$  die größte ganze Zahl  $\leq x$ .

Es gilt

$$(60) \quad \left[ \tau^k \cdot f_n + \frac{1}{2} \right] = f_{n+k}, \quad n \geq k \geq 1 \quad \text{und } n \geq 2.$$

Diese Aussage wurde 1972 von R. ANAYA und J. CRUMP bewiesen, L. CARLITZ bewies im selben Jahr eine entsprechende Aussage für die LUCAS-Zahlen:

$$(61) \quad \left[ \tau^k \cdot g_n + \frac{1}{2} \right] = g_{n+k}, \quad n \geq k + 2 \quad \text{und } k \geq 2.$$

- 9) Ebenfalls auf L. CARLITZ geht die folgende Aussage zurück:

$$(62) \quad f_{n-1}^4 + f_n^4 + f_{n+1}^4 = 2(2f_n^2 + (-1)^n)^2, \quad \text{für } n \geq 1.$$

Zu Beginn dieses Artikels wurde betont, daß wir aus der "Liber abaci" nur eine bestimmte Folge ganzer Zahlen als Ausgangspunkt unserer Betrachtungen wählen - nämlich die Fibonacci-Zahlen. Am Ende des Artikels angelangt, wollen wir noch einmal auf die historische Bedeutung dieses im Jahre 1202 geschriebenen Buches zurückblicken. Bereits die Folge der Fibonacci-Zahlen würde eine Erwähnung dieses Buches in Werken über die Geschichte der Mathematik rechtfertigen. Bemerkenswert ist ferner, daß in diesem Buche erstmals in Europa auch negative Lösungen von Gleichungen als Lösungen dieser anerkannt wurden. FIBONACCI war Leiter einer italienischen Handelsniederlassung in Nordafrika, negative Zahlen wurden von ihm als "Schulden" im kaufmännischen Rechnen be-



trachtet. Außerhalb Europas wurde die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division bereits durch den indischen Mathematiker BRAHMAGUPTA (geb. 598) auch für negative Zahlen erklärt. In Europa wurden noch lange Zeit nach FIBONACCI negative Zahlen als Lösungen mathematischer Probleme nicht anerkannt, z. B. spricht noch R. DESCARTES (1596-1650) bei negativen Gleichungslösungen von "falschen" Lösungen.

Wir schließen mit einem Zitat aus der "liber abaci":

"Zwen Thurm stehn uff einer ebene 60 eln von einander. Der ein ist 50 eln hoch. Der andern 40. Zwischen den zweyen Thurmen steht ein brunne, gleych veyt von den Spitzen der Thurmes. Ist die frag, wie fern steht der brunne unden von yedem Thurm?" - Auf dem Titelblatt dieses Heftes wird diese Aufgabe illustriert.

Dr. R. Klette

Bereich Mathematische

Kybernetik

Sektion Mathematik der FSU

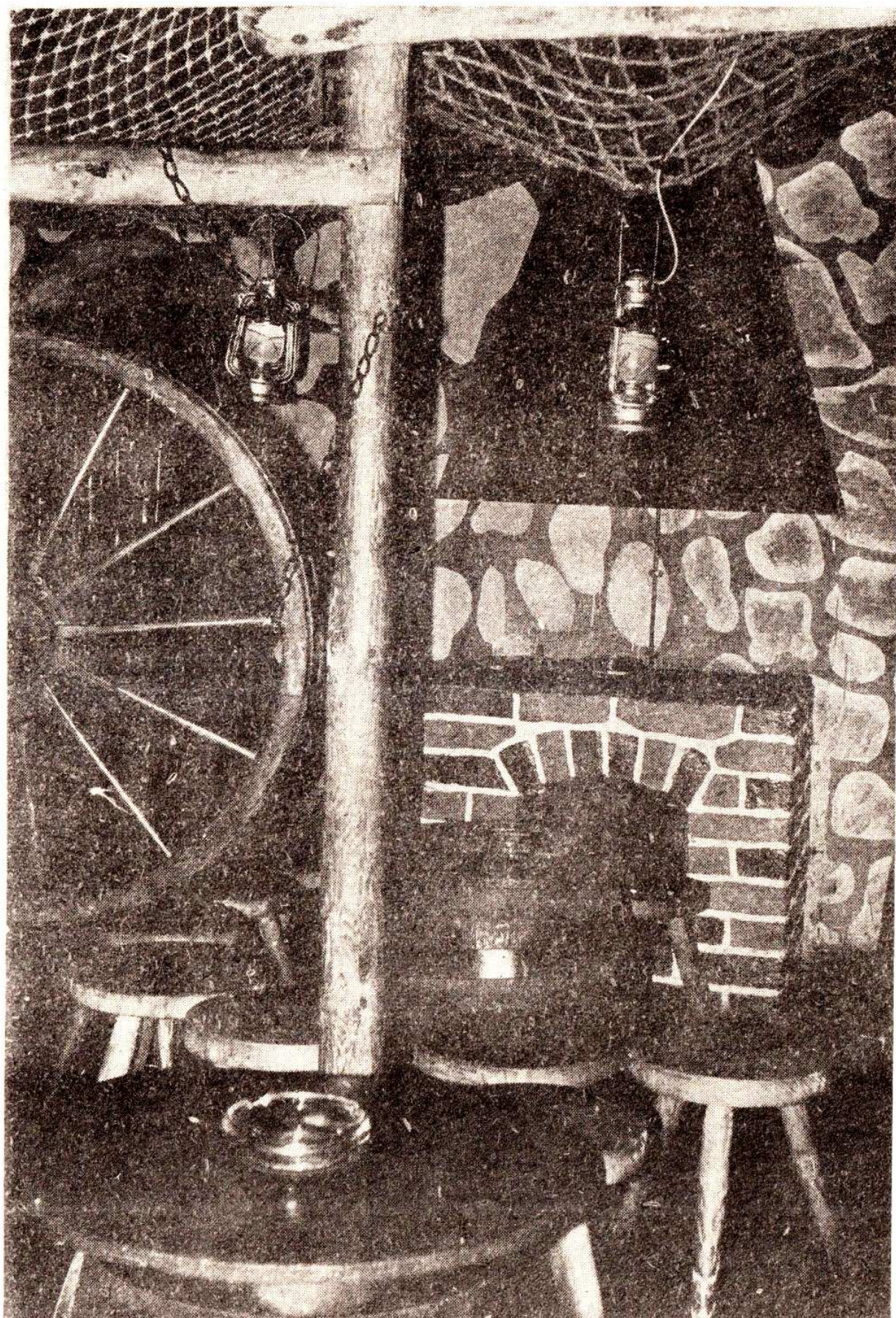
---

## Der FDJ-Studentenklub „Schmiede“ stellt sich vor

In diesem Artikel möchten wir die Leser der WURZEL - insbesondere die zukünftigen Studenten des Matrikels 1978 - mit einem Teil studentischen Lebens vertraut machen, der relativ wenig mit Mathematik zu tun hat. Wir wollen Euch informieren, welche zusätzlichen Möglichkeiten der Freizeitgestaltung für die Jenerer Studenten bestehen.

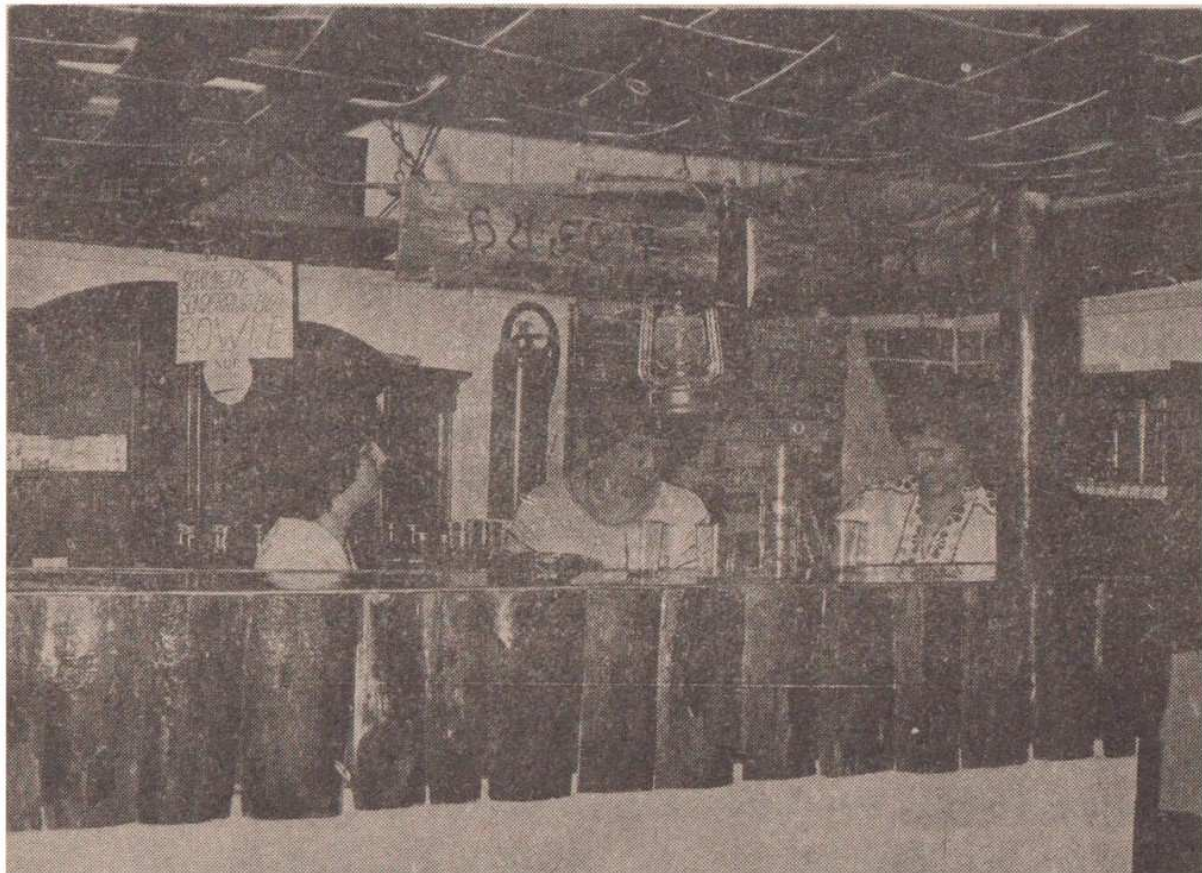
Wer möchte nicht nach einem anstrengenden Studientag etwas ausspannen, sich auf einem anderen Gebiet weiterbilden, über aktuelle Ereignisse diskutieren oder in gemütlicher Runde zusammensitzen! Wo kann man das besser machen, als in einem unserer FDJ-Studentenklubs, von denen es in Jena 7 gibt: der "Rosenkeller" und der "Medizinerklub" im Stadtzentrum, der "Club V" in Zwätzen, "Musik im Hörsaal (MiH)", "Theater auf dem Experimentiertisch", der Studentenclub im Wohnheim "Salvador Allende", und die "Schmiede" in Neulobeda. Den letztgenannten Klub möchten wir etwas näher vorstellen.







Es begann im Jahre 1970, als in Neulobeda im Block XI ein Wohnheim der Friedrich-Schiller-Universität eingerichtet wurde. In dieser Zeit waren die Möglichkeiten einer sinnvollen Freizeitgestaltung noch nicht so umfangreich wie jetzt. Deshalb entschloß sich 1971 eine Gruppe von Studenten in Neulobeda, einen Studentenklub aufzubauen. Die Sektionen Mathematik und Wirtschaftswissenschaften stellten finanzielle Mittel zur Verfügung und Dank dem selbstlosen Einsatz vieler Studenten und fleißiger Helfer konnte nach einjähriger Bauzeit der Klub termingerecht am 2. 11. 1972 übergeben werden. Jetzt, nach einem Zeitraum von über fünf Jahren, sind wir längst den Kinderschuhen entwachsen und zu einem nicht mehr wegzudenkenden Bestandteil des studentischen Lebens geworden.





Die "Schmiede-Besatzung" besteht aus etwa 30 Mitgliedern, die für alle den Klub betreffende Fragen entsprechend ihrer Funktion verantwortlich sind. Es sind Vorträge zu organisieren, die Gäste zu betreuen, die Klubräume in einem ordentlichen Zustand zu erhalten - alle diese Aufgaben werden ehrenamtlich von den Studenten bewältigt. Hier besteht die Möglichkeit, wertvolle gesellschaftliche Arbeit zu leisten. Arbeit, deren Ergebnis jedem Studenten sichtbar ist und von der auch unmittelbar jeder "profitieren" kann. Außerhalb unserer "Dienstzeit" gehen wir gemeinsam wandern, jährlich wird eine Clubausfahrt durchgeführt, selbst Silvester verbringen wir gemeinsam in fröhlicher Runde. Selbstverständlich läuft nicht alles reibungslos ab, es gibt Höhen und Tiefen. Aber wir wären ein schlechtes Kollektiv, wenn anstehende Probleme nicht diskutiert und gelöst würden! Für jeden Studenten besteht die Möglichkeit des aktiven Mitwirkens - vorausgesetzt, daß er studienmäßig keine Zugeständnisse machen muß, daß er bereit ist, sich gesellschaftlich zu engagieren und nicht zuletzt, daß er Freude an der Sache hat.

Wie sieht nun unser Programm aus? Wöchentlich finden bei uns etwa 2 - 3 Vorträge statt, die Themen sind recht breit gefächert, z. B.: "Großbritannien in der Krise", "Die sieben Wunder Jenas", "Der Weg zur DDR-eigenen Popmusik", "Jugendkriminalität" etc. Es werden Diskussionen zu aktuell-politischen Fragen durchgeführt. Beispielhaft dafür ist die Veranstaltungsreihe "Das Agitatorenkollektiv tagt" sowie der "Treffpunkt Leiter der Sektion Mathematik", wo u. a. zu Studienfragen Stellung genommen wird. Sehr bewährt hat sich die Zusammenarbeit zwischen "Schmiede" und URANIA. Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang die Tatsache, daß die "Schmiede" der erste Studentenklub der DDR war, der eine enge vertragliche Verbindung zur URANIA herstellte. Ein Beispiel, das Schule machte und von anderen übernommen wurde. Wir arbeiten auch mit anderen Klubs zusammen. So unterstützen wir beispielsweise die "Musik im Hörsaal" mit erheblichen finanziellen Mitteln. Nicht zuletzt möchten wir auch ein wenig die Geselligkeit pflegen und Stunden der Entspannung bieten. Wer möchte, kann am Bierabend seinen Skat spielen und wem das zu ruhig ist, der geht samstags zur Disco.

Desweiteren werden gesellschaftliche Höhepunkte, wie z. B. der 1. Mai und der 7. Oktober im Wohnbezirk Hermann-Duncker-Straße vom Wohnbezirkssausschuß und vom FDJ-Studentenklub "Schmiede" gemeinsam vorbereitet und feierlich begangen. Das traditionelle Rostbratwurstbraten, das Kinderfest und eine abschließende Tanzveranstaltung sind dabei selbstverständlich. Im Sommer steht das Wohnheim als internationales Studentenhotel zur Verfügung. Dabei übernimmt die "Schmiede" die gastronomische sowie einen Teil der kulturellen Betreuung. Wir werden alles tun, damit sich unsere Gäste aus den sozialistischen und kapitalistischen Staaten wohl fühlen. Schließlich lernen sie auch hier einen Teil der DDR kennen.

Wir wünschen unseren (zukünftigen) Kommilitonen recht erholsame Sommerferien und einen erfolgreichen Start im September. Die Jenaer Studenten werden bestimmt mit uns Bekanntschaft schließen - als gerngesehene Gäste oder vielleicht auch als aktive Mitstreiter.

**G. Studlik**

Anschrift: FDJ-Studentenklub "Schmiede"  
6902 Jena-Neulobeda  
Hermann-Duncker-Str. 6

Öffnungszeiten: Montag - Donnerstag 19.00 - 23.00 Uhr  
Samstag 19.00 - 24.00 Uhr



## XI. Karl-Marx-Seminar

Während der Studententage im Mai fand auch in diesem Jahr wieder das Karl-Marx-Seminar statt. Aus aktuellem Anlaß - am 11. Juni 1978 jährte sich zum 100. Mal der Tag des erstmaligen Erscheinens von Engels Schrift "Herrn Eugen Dührings Umwälzung der Wissenschaft" - beschäftigte sich das diesjährige Karl-Marx-Seminar mit aktuellen Fragen des Werkes "Anti-Dühring".

Ziel dieses Seminars ist die Vertiefung der Kenntnisse der FDJ'ler im Marxismus-Leninismus durch das Studium dieser Klassikerschrift und darauf basierend die Klärung von aktuellen Fragen in Politik und Ideologie.

Die Vorbereitung auf dieses Seminar begann bereits im September 1977. Während der Mitgliederversammlungen oder auch während der FDJ-Studienjahre wurde in den Seminargruppen lebhaft über die Entwürfe für die KMS-Beiträge diskutiert. So gelang es, alle Jugendfreunde in die Vorbereitung des Karl-Marx-Seminars einzubeziehen.

Endlich am 5. Mai 1978 war es dann soweit. Vormittags fand in der Aula der FSU die Plenartagung des XI. Karl-Marx-Seminars statt und am Nachmittag wurden in den Arbeitskreisen einzelne Probleme diskutiert.

An der Sektion Mathematik wurden zwei Arbeitskreise gebildet: Im Arbeitskreis A beschäftigte man sich mit dem Beitrag der Schrift "Anti-Dühring" zur theoretischen Ausarbeitung des Sozialismusbildes und die Bedeutung des "Anti-Dühring" als eine Anleitung für die offensive Auseinandersetzung mit bürgerlichen revisionistischen Angriffen gegen den Sozialismus/Kommunismus.

Es wurden etwa 10 Themen an Seminargruppen bzw. Studienjahre vergeben.

Der Arbeitskreis B untersuchte die Zusammenhänge zwischen Mathematik, Naturwissenschaften und Dialektik.

Im folgenden drucken wir einen KMS-Beitrag ab, von dem wir glauben, daß dessen Thema für den Leser vielleicht von Interesse ist. Die Autoren aus der Seminargruppe 1 des 4. Studienjahres Diplom-



Mathematiker versuchten, einige Gedanken zum Thema "Spielt die Mathematik eine Sonderrolle im System der Wissenschaften" darzulegen. Natürlich konnten in einem zwanzig-minütigen Vortrag nicht alle Fragen dieses vielseitigen Themas geklärt werden. Auch wollen die Autoren mit diesem Beitrag nicht den Anspruch erheben, eine endgültige und richtige Antwort auf diese Frage gefunden zu haben. Diese Arbeit sollte lediglich ein Diskussionsbeitrag sein und vielleicht ist er eine Anregung für den Leser, sich Gedanken zu diesem interessanten Problem zu machen.

## Beitrag zum Karl-Marx-Seminar 1978

Thema: Spielt die Mathematik eine Sonderrolle im System der Wissenschaften?

vorgelegt von: Seminargruppe 1 des 4. Studienjahres  
Diplom-Mathematiker

Jena, im April 1978

Wir haben uns mit der Frage beschäftigt: "Spielt die Mathematik eine Sonderrolle im System der Wissenschaften?"

Unser Beitrag kann aber dieses Problem nicht erschöpfend behandeln. Wir werden daher Stellung nehmen zu Ansichten, die an unserer Sektion bestehen. Zur Verwirklichung dieses Zieles führten wir eine Umfrage zu diesem Thema unter Studenten und Mitarbeitern der Sektion Mathematik durch. Es fiel auf, daß der größte Teil der Befragten die Frage nach der Sonderrolle der Mathematik im Prinzip bejaht, wobei jedoch unterschiedlichste Begründungen angeführt werden. Diesen wollen wir uns im folgenden zunächst zuwenden. Vorausgeschickt sei aber noch die Bemerkung, daß wir uns hier nur auf diejenigen Aussagen beschränken, die für unsere Argumentation von Relevanz sind.

Als eine der häufigsten Argumente für die Sonderrolle der Mathematik im System der Wissenschaften tritt die Auffassung auf, daß auf Grund des sehr hohen Abstraktionsgrades eine Loslösung der Mathematik von der objektiven **Realität** gegeben ist. Es wird gesagt, Gegenstand der Mathematik sind ideelle Dinge. Viele meinen, die Mathematik ist selbst lebensfähig, sie kann sozusagen ein



Eigenleben führen; nur aus inneren Impulsen heraus ist ihre Entwicklung mit Hilfe des menschlichen Verstandes möglich.

Oft wird zur Begründung einer Sonderrolle der Mathematik auch das folgende Argument angeführt. In der Mathematik wird das Wissen in reiner, absoluter Form gewonnen und dargestellt. Bei der mathematischen Forschung steht der Prozeß des reinen Denkens, der Erkenntnisgewinnung mit Hilfe von Logik, Verallgemeinerung, Deduktion usw. im Vordergrund und nach einer eventuellen Nutzbarmachung des gewonnenen Wissens wird nicht gefragt. Weiterhin tritt die Ansicht auf, die Aufgabe der Mathematik bestehe darin, logisches Denken zu lehren und dem Menschen Freude zu bereiten. Keiner ernsthaften Argumentation hält natürlich der Versuch stand, eine Sonderrolle aus der Tatsache abzuleiten, daß es besonders schwierig sei, die Mathematik in das System der Wissenschaften einzuordnen.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, daß einige Teilnehmer der Umfrage eine Sonderrolle der Mathematik verneinten, wobei allerdings keiner eine Begründung dazu abgeben konnte.

Im folgenden Abschnitt wollen wir nun einige der angeführten Auffassungen etwas näher beleuchten und sie in ihren weltanschaulichen Konsequenzen analysieren.

Auf welche Positionen führen diese Ansichten bei strenger Weiterverfolgung ihres Inhalts?

Schauen wir uns diesbezüglich die Meinungen noch einmal einzeln an:

So wurde z. B. der Standpunkt vertreten:

"Mathematik kann 'gemacht' werden, ohne materielle bzw. gesellschaftliche Dinge zu berücksichtigen."

Unserer Meinung nach bringt diese Äußerung eine ähnliche Position zum Ausdruck, wie sie A. Einstein 1921 mit folgenden Worten vertrat: "Die Geometrie handelt von Gegenständen, die mit den Worten Gerade, Punkt usw. bezeichnet werden. Irgendeine Kenntnis oder Anschauung wird von diesen Gegenständen nicht vorausgesetzt, sondern nur die Gültigkeit jener ebenfalls rein formal, d. h. losgelöst von jedem Anschauungs- und Erlebnisinhalt, aufzufassenden Axiome (von denen das genannte ein Beispiel ist). Die Axiome sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes."



Der sowjetische Mathematiker Gnedenko schätzte diesen Standpunkt folgendermaßen ein: "In den angeführten Zitaten begegnen wir der verbreiteten ideal. Ansicht, daß die mathematischen Begriffsbildungen unabhängig sind von der realen Welt, in der wir leben.

Der Mathematiker schafft aus seinem Kopf heraus eine neue Welt der Begriffe und Begriffsbeziehungen und - o Wunder - diese freigeschaffene Begriffswelt erweist sich als anwendbar in den Wissenschaften, die die Erscheinungen der realen Welt untersuchen."

Die Anwendbarkeit der Mathematik erscheint so natürlich als Zufall; die Ursachen der Anwendbarkeit bleiben ungeklärt.

Die angewandte Mathematik ist somit ein zufälliges Abfallprodukt der sogenannten "reinen" Mathematik. Nicht die Nutzung ihrer Resultate der gesellschaftlichen Praxis erscheint als Sinn der Mathematik, sondern die theoretische Mathematik selber, Mathematik gewissermaßen als Selbstzweck.

Eine weitere Aussage dazu möchten wir im folgenden behandeln. Auf die Frage "Welchen Sinn hat Mathematik?" äußerte sich ein Teilnehmer unserer Umfrage wie folgt:

"In der Hauptsache wohl den, daß es Menschen gibt, denen sie Freude bereitet." In einem anderen Teil seiner Ausführungen heißt es: "Außerdem ist der Teil der Mathematik, der nützlich ist, soweit man das überhaupt abgrenzen kann, sicher der geringste."

In gewisser Weise ähnelt dieser Standpunkt dem des englischen Mathematikers (Codefrey Harold) Hardy (7. 2. 1877 - 1. 12. 1947). Hardy gibt der Mathematik drei Attribute: ernsthaft, schön, harmlos. Hierbei bezieht sich "harmlos" auf die Anwendung der Mathematik in der Praxis. Der die Praxis beeinflussende Teil der Mathematik wird von Hardy als "triviale Mathematik" bezeichnet. Ein in der Praxis arbeitender Mathematiker übt nach Hardy eine langweilige und monotone Tätigkeit aus, die auf reiner mathematischer Technik beruht. Somit postuliert er im Prinzip eine Kluft zwischen der die Praxis beeinflussende Mathematik und der reinen Mathematik. Hardy spricht auch der "angewandten Mathematik" einen praktischen Nutzen ab. So wird seiner Meinung nach die Quantenmechanik und die Relativitätstheorie (als angewandte Mathematik) in absehbarer Zeit ebensowenig praktischen Nutzen haben wie die



### Zahlentheorie.

Ein solcher Standpunkt wertet also die Bedeutung der Mathematik für andere Wissenschaften wesentlich ab, im Prinzip negiert er sie sogar. Damit untergräbt man zum einen die Basis für die produktive Anwendung der Mathematik (wenn man von der Bedeutungslosigkeit überzeugt ist, fragt bzw. sucht man erst gar nicht nach einer solchen). Zum anderen propagiert man damit gleichzeitig "Mathematik um der Mathematik willen", und so deutet Hardy es auch in seiner Selbstbiografie an: Mathematik zur Schulung und Erbauung des menschlichen Geistes.

Bis jetzt haben wir nur Meinungen betrachtet, die die Anwendbarkeit der Mathematik in Frage stellten bzw. für bedeutungslos erklärten. Es gibt aber auch das andere Extrem. Wir stellen wiederum ein Zitat voran (Gnedenko 1954): "Mathematische Begriffsbildungen und Sätze spiegeln gewisse Seiten der realen Welt wider, sie gestatten, diese Welt zu erkennen und auf sie einzuwirken."

Zunächst einmal muß man dazu bemerken, daß damit das Bild von der Mathematik als Wissenschaft auf eine materialistische Grundlage gestellt wird. Allerdings läßt diese Aussage eine Interpretation zu, die, so finden wir, zu weit geht. Denn damit wird unserer Meinung nach jeder einzelne mathematische Satz in Beziehung zu einem außermathematischen Zusammenhang gesetzt. (Falls man zur realen Welt auch die Mathematik zählt, ist dieser Satz aussagelos. "Mathematik spiegelt Mathematik wider", das ist bereits erkannt.) D. h. das obige Zitat macht eine Existenzaussage. Wir sind jedoch der Auffassung, daß diese Abbildbarkeit der mathematischen Begriffe und Sätze im einzelnen nicht besteht. Nach unserer Ansicht läßt sich diese These nicht einmal für die Naturwissenschaften halten. Es ist doch so, daß nur eine ganze mathematische Theorie oder größere Teile davon in der Lage sind, einen Teil der objektiven Realität widerzuspiegeln. Betrachten wir als Beispiel die Quantenmechanik. Hier spielt der Begriff der Wellenfunktion eine fundamentale Rolle. Viele wesentliche Erscheinungen der Quantenmechanik lassen sich von ihm ableiten und theoretisch erklären. Jedoch gibt es zur Wellenfunktion keine entsprechende physikalisch-reale Erscheinung. Um mit den Worten unseres



Dozenten Prof. Triebel zu sprechen: "Es hat noch niemand eine Wellenfunktion je lebend gesehen". Einzig und allein den Eigenwerten des Hamiltonoperators kann eine reale quantenmechanische Erscheinung zugeordnet werden, nämlich die Energiezustände des entsprechenden quantenmechanischen Systems.

Im folgenden soll nun noch dargelegt werden, daß verschiedene der oben angeführten Meinungen auch erkenntnistheoretische Konsequenzen zulassen.

So kann die idealistische Auffassung von den mathematischen Begriffen und Aussagen als freie Schöpfung des menschlichen Geistes dazu führen, daß man die Mathematik vollständig abtrennt von der objektiven Realität und damit von ihren Erkenntnisquellen. Das bedeutet gleichzeitig eine Verabsolutierung der rationalen Seite des Erkenntnisprozesses, d. h. dem Denken wird eine primäre Stellung gegenüber der objektiven Realität eingeräumt. Diese Auffassungen haben aber auch für die Mathematik selbst Auswirkungen. Ihr geht dadurch ein großer Teil ihrer Triebkräfte verloren, nämlich die Aufgabenstellungen, die direkt aus der Praxis kommen. Die Mathematik wird isoliert von solchen Wissenschaften wie Physik, Chemie usw. Gleichzeitig schließt sich hieran natürlich die Frage an, welche Aufgabe Mathematik eigentlich hat. Die Antwort kann bei einem solchen Standpunkt nur lauten: Mathematik als Selbstzweck.

Mit dieser Analyse der Begründungen einer Sonderrolle der Mathematik wollten wir zeigen, wohin solche Anschauungen führen. Es sollte klar werden, daß man als Materialist eine Sonderrolle der Mathematik nicht aus solchen Argumenten ableiten kann.

Nach dieser bei weitem nicht umfassenden Zusammenstellung soll nun im folgenden die Auffassung der Verfasser entwickelt und erläutert werden. Es geht uns zunächst um die Problematik der Anwendbarkeit der Mathematik.

Die sowjetischen Wissenschaftler Gnedenko und Kaloujnine stellen dazu in ihrem bereits mehrfach zitierten Vortrag "Über den Kampf zwischen Materialismus und Idealismus in der Mathematik" fest: "Die Erklärung für die Anwendungsmöglichkeiten mathematischer Theorien liegt darin, daß diese Theorien direkt oder indirekt aus dem Studium der Wirklichkeit entstanden sind ...".



Die besten Argumente für diese Auffassung liefert ein Studium der tatsächlichen Entstehung der Grundbegriffe der Mathematik. Die Anzahl solcher Grundbegriffe ist recht gering. An dieser Stelle sei nur auf die Entstehung des Begriffes "Zahl" verwiesen. Hier liegt die Richtigkeit der Behauptung auf der Hand: der Begriff "Zahl" ist eine Abstraktion unmittelbar aus der Wirklichkeit.

Die Mathematik begann sich zu entwickeln, indem erste Zusammenhänge zwischen diesen Grundbegriffen aufgedeckt wurden. Diese hatten i. a. noch unmittelbaren Bezug zur Wirklichkeit. Ein Beispiel dafür sind die Formeln für die Flächenberechnung der einfachsten geometrischen Gebilde. Gleichzeitig entwickelte sich aber auch eine weitere Grundlage der Mathematik, die logischen Schlußregeln. Auch hier ist es relativ leicht möglich, die Entstehung der ursprünglichen Regeln aus der praktischen Tätigkeit des Menschen zu beweisen. (Beispiel: eine Aussage ist entweder wahr oder sie ist falsch. Dies führte zur Grundlage des Widerspruchsbeweises.)

Auf dieser Basis entwickelte sich die Mathematik weiter, indem sie zu neuen Abstraktionen aufstieg, angefangen vom Satz des Pythagoras bis hin zu Funktionenräumen und ähnlichem.

Entwickelten sich nun aber die mathematischen Theorien als völlig freie Schöpfungen des menschlichen Geistes?

Gegenwärtig ist es üblich, Mathematik streng deduktiv, d. h. durch Voranstellen eines Axiomensystems und hieraus vollständige Ableitung der Zusammenhänge, darzubieten. Dabei wird natürlich die Verbindung zur Praxis verschleiert. Diese Form der Darstellung hat oft eine besondere Aufgabe: z. B. bei der Geometrie die, daß sich keine umformulierten Axiome einschleichen. Eine weltanschauliche Position bezieht man erst, wenn man eine Aussage über das Zustandekommen des Axiomensystems selbst macht. Wir schließen uns in dieser Frage der Argumentation Gnedenkos und Kaloujnins an. Sie führen aus:

"Wir wollen aber nochmals betonen, daß die Willkür eines Axiomensystems ein trügerischer Schein ist ... Kein Mathematiker wird z. B. ein Axiomensystem ansetzen, was folgendermaßen beginnt: zwei Riemannsche Flächen sollen äquivalent sein, wenn sie mit gleicher Farbe angestrichen sind oder wenn sie durch eine elek-



trische Glühlampe beleuchtet sind ... Wenn irgend jemand eine solche Arbeit einreichen würde, so würde man den Verfasser natürlich nicht als Idealisten bezeichnen, sondern würde ihm empfehlen, sich einer psychiatrischen Untersuchung zu unterziehen. Geht man aber von dem idealistischen Grundsatz der freien Schöpfung mathematischer Objekte und ihrer Eigenschaften aus, so sieht man keinen triftigen Grund, warum man solche Tiraden nicht als ein Axiomensystem ansehen sollte. Man wird vielleicht sagen, die Farbe und die Beleuchtung wäre keine mathematische Kategorie. Doch was ist dann eine mathematische Kategorie? Wo bleibt die Freiheit, beliebige Eigenschaften unseren Objekten beizulegen? Man wird sich sagen, die Aussagen wären sinnlos. (Ja, natürlich sind sie sinnlos.) Doch wann sind mathematische Aussagen sinnvoll? Welche Beschränkungen muß man für das Aufstellung von Axiomensystemen berücksichtigen? Und nochmals. - wo bleibt die Freiheit?"

Ein Mathematiker arbeitet nicht an einem Stoff, den er sich nach Belieben ausgedacht hat, sondern wird mehr oder weniger durch seine Ausbildung, durch Kontakte mit anderen Mathematikern oder durch Anregungen aus der Praxis darauf geführt. Und von den Axiomensystemen bzw. Begriffen erweisen sich nur die als dauerhaft, die den Extrakt der Erkenntnisse derjenigen Eigenschaften enthalten, die sich in der mathematischen bzw. außermathematischen Praxis als richtig bewährt haben.

Einstein, Cantor usw., die in dieser Frage eine idealistische Position vertraten, entwickelten ihre Theorien nicht aus der Luft, sondern ausgehend von bereits vorhandenen Problemstellungen und Fakten. Ihre zweifelsohne bedeutenden mathematischen Erkenntnisse konnten sie aber nicht liefern, weil sie idealistische Ansichten hatten, sondern trotz dessen. Welche sind aber nun die Triebkräfte der Weiterentwicklung der Mathematik? Welchen Sinn hat Mathematik?

Die Aufgabe der Mathematik besteht für uns darin, Hilfsmittel in Wissenschaft und Technik zu sein, d. h. Probleme, die die Praxis stellt, zu lösen. Sie ist ein nicht ersetzbares Element des gesellschaftlichen Erkenntnisprozesses. Um diese Funktion erfüllen zu können, ist die Entwicklung neuer Methoden sowie umfassender, in sich geschlossener mathematischer Theorien notwendig. D. h.:



die Mathematik selbst muß sich weiterentwickeln, um den Anforderungen unserer Zeit gerecht zu werden. Die Aufgabe der Grundlagenforschung besteht also darin, gewissermaßen einen theoretischen Vorlauf zu schaffen, so den Horizont der Mathematik zu erweitern, um letztlich wieder auf die Praxis wirken zu können.

Das wohl prominenteste Beispiel für die Eigenentwicklung der Mathematik ist die hyperbolische Geometrie bzw. die Riemannsche Geometrie. Dies geschah ohne Anregung aus der Praxis allein aus innermathematischem Interesse. Gleichzeitig lieferte die Mathematik damit eine der Grundlagen für die Einsteinsche allgemeine Relativitätstheorie.

Für uns also ist die Mathematik eine Hilfswissenschaft, deren einzige Aufgabe es ist, anderen Wissenschaften zu helfen. Aber hieraus wollen wir keine Sonderrolle ableiten, denn die Mathematik gibt nicht nur, sondern ihr wird auch gegeben. Physik, Chemie, Biologie, Ökonomie sind unerschöpfliche Quellen mathematischer Problemstellungen, die die Entwicklung der Mathematik weiter vorantreiben.

Das oben Gesagte ist gleichzeitig Argumentation gegen den angekündigten Standpunkt der angewandten Mathematik als Anhängsel bzw. Abfallprodukt der reinen Mathematik. Um es noch einmal zu sagen: das eigentliche Ziel ist eine möglichst umfassende Anwendung der Mathematik. Diese ist aber ohne die sogenannte "reine" Mathematik nicht möglich. Beide Formen sind untrennbar. Da wir uns nun dem Ende unseres Vortrages nähern, wird es Zeit, die Frage, die über unserem Beitrag steht, zu beantworten.

Ist es für die Mathematik bzw. die Mathematiker überhaupt von Bedeutung, eine solche Frage aufzuwerfen? Die Frage haben wir in Auswertung unserer Umfrage bereits beantwortet. Viele Begründungen für eine Sonderrolle fußten auf idealistischen Positionen und diese gilt es zurückzuweisen. Idealistische Interpretationen des Wesens der Mathematik bildeten schon mehrfach die Grundlage für philosophisch einseitige und damit letztlich nicht haltbare Richtungen, wie z. B. die Systeme von Kant, Russell oder der sogenannten "Wiener Schule".

Jetzt könnte natürlich jemand sagen, daß dies noch nichts mit



der Mathematik selbst zu tun hat. Aber auch dafür können sich idealistische Positionen negativ auswirken. Von einem idealistischen Standpunkt aus, z. B. dem Hardys, ist es egal, in welche Richtung weitergeforscht wird bzw. wie das Forschungspotential eingesetzt wird. Mit einer solchen Haltung erscheint es z. B. durchaus als sinnvoll, hauptsächlich Wissenschaftler in Zahlentheorie auszubilden. Daß die tatsächliche Entwicklung ganz anders verläuft, wird z. B. an unserer **Sektion** deutlich. Wir sehen also, daß die Frage nach einer Sonderrolle der Mathematik im System der Wissenschaften durchaus von Bedeutung ist.

Bei der Beleuchtung der verschiedenen Fragen, die zu diesem Problem gehören, gewannen wir die Auffassung, daß man der Mathematik eine Sonderrolle nicht zusprechen kann. Sie hat wie alle anderen Wissenschaften einen festen Platz, man muß sagen *i h r e n* Platz im System der Wissenschaften. Die Mathematik hat ihren *s p e z i e l l e n* Aufgabenbereich und ihren *s p e z i e l l e n* Gegenstand, der sicher einen außergewöhnlichen Charakter hat und deshalb auch spezielle Methoden erfordert. Das berechtigt unserer Meinung nach aber auch noch nicht dazu, von einer Sonderrolle der Mathematik zu sprechen und sie damit aus dem System der Wissenschaften herauszuheben. Dafür spielen die Gemeinsamkeiten doch eine viel zu bedeutende Rolle.

Wie jede Wissenschaft erhält die Mathematik ihre Resultate aus der objektiven Realität durch einen sinnlichen und rationalen Prozeß der Erkenntnisgewinnung. Ihr Sinn besteht letztlich darin, ihren Beitrag zur Auseinandersetzung des Menschen mit der Natur zu liefern, wenn auch nur mittelbar über andere Wissenschaften.

Am Rande bemerkt, welche Auswirkungen hätte es für unsere Mathematikstudenten, wenn wir mit der tiefen Überzeugung der Sonderrolle der Mathematik die Universität verließen. In der Industrie kann der Mathematiker seiner Aufgabe nur in Zusammenarbeit mit anderen Wissenschaftlern gerecht werden. Da die Sonderrolle der Mathematik zumindest teilweise eine Sonderrolle des Mathematikers impliziert, ist eine solche Auffassung keine gute Ausgangsposition für die Arbeit in einem Kollektiv.

---



## Preisaufgaben

K 43 Man konstruiere eine Strecke mit der Länge  $\sqrt{7}$ .

2

K 44 Man finde alle Werte  $k$ , für die die Gleichung

1  $\frac{\lg(k \cdot x)}{\lg(x+1)} = 2$  genau eine Lösung hat!

K 45 Man löse das Gleichungssystem

1  $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{3}$

$xyz = 1!$

K 46 Für welche  $x, y$  mit  $x^4 + y^4 = 1$  nimmt  $x^9 + y^9$  sein Maximum an?

1

K 47 Man löse das System

2

$$\begin{aligned} \sin(y-3x) &= 2 \sin^3 x \\ \cos(y-3x) &= 2 \cos^3 x \end{aligned} !$$

K 48 Известно, что  $x_1, x_2, x_3$  — корни уравнения

1

$$x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0.$$

Составить новое уравнение, корнями которого были бы числа  $y_1 = x_2 x_3$ ,  $y_2 = x_3 x_1$ ,  $y_3 = x_1 x_2$ .

Einsendeschluß: 30. 11. 78

Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben. Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

---

In eigener Sache

In letzter Zeit erhielten wir mehrere Leserbriefe wie z. B. folgenden:

"Werte Redaktion ,Wurzel'!"

Die Hefte der Wurzel von Nr.8/77 ab sind sehr spät bei mir eingetroffen, so daß ich nicht in der Lage bin, die Termine für die Wurzelpreisaufgaben zu halten.

Ich bitte um Entschuldigung, daß ich für diese Hefte die Lösungen erst verspätet einsenden kann. Ich werde mich bemühen, sobald als möglich, die Einsendedenaten einzuhalten.

Ihr Leser Frank Eisenhaber"

In der Tat, es hat erhebliche Verspätungen gegeben.

Der krassste Fall war die Wurzel 8/77. Es war uns leider nicht möglich gewesen, die Arbeit der Redaktion Wurzel in den Sommerferien aufrechtzuerhalten, so daß wir das Manuskript erst Anfang September fertigstellen konnten. Nun muß man für den Druck einer Ausgabe der Wurzel etwa 4 Wochen veranschlagen und dann kommt noch die Zeit für den Vertrieb hinzu. Unser Leser Kirsten Helbig schrieb uns, daß er die Wurzel 8/77 am 16. 11. 77 - also genau einen Tag nach Einsendeschluß der Preisaufgaben 8/77 - erhalten hatte.

Nach der Wurzel 8/77 sind alle Ausgaben unserer Zeitschrift in dem Monat gedruckt worden, zu dem sie auch gehören. Wir haben unsere Hefte für den Eigenbedarf immer im richtigen Monat oder spätestens in der ersten Woche des nächstfolgenden von der Druckerei erhalten, und dementsprechend die Termine für den Einsendeschluß der Preisaufgaben festgelegt. Daß unsere Leser erheblich länger auf die Wurzel warten müssen und deshalb auch mehr "Bedenkzeit" brauchen, ist uns erst durch die oben genannten Leserbriefe klar geworden. Wir bedanken uns bei den Verfassern. Zur Beantwortung: Alle eingegangenen Lösungen sind korrigiert worden, auch die verspäteten.

Die Redaktion

---



## Lösung der Preisaufgabe K6

### Aufgabe K 6

(nach Ralf Becker, Wolmirstedt, Klasse 12)

Bekanntlich gilt für die Fläche eines Dreiecks

$$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a+b+c)$$

Hieraus folgt

$$(1) \quad \frac{r}{h_c} = \frac{c}{a+b+c} \quad .$$

Aus der Dreiecksungleichung  $a + b > c$  folgt:

$$\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{2c} = \frac{1}{2} \quad \text{und somit mit (1):}$$

$$(2) \quad \frac{r}{h_c} < \frac{1}{2} \quad .$$

Im rechtwinkligen Dreieck gilt

$$a+b = f(a) = a + \sqrt{c^2 - a^2} \quad .$$

Um das Maximum zu ermitteln, erhalte ich

$$f'(a) = 1 - \frac{a}{\sqrt{c^2 - a^2}}$$

$$f'(a) = 0 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - a^2} \quad a = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot c$$

$$f''\left(\frac{c}{2}\sqrt{2}\right) < 0 \Rightarrow \text{Maximum} \quad .$$

$$(a+b)_{\max} = f\left(\frac{c}{2}\sqrt{2}\right) = c\sqrt{2} \quad .$$

Es gilt somit:  $a+b+c \leq c(1 + \sqrt{2})$

$$\frac{c}{a+b+c} \geq \frac{c}{c(1 + \sqrt{2})} = \sqrt{2} - 1 > 0,4$$

Mit (1) folgt nun:

$$(3) \quad \frac{r}{h_c} > 0,4$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$0,4 < \frac{r}{h_c} < 0,5 \quad \text{w.z.b.w.}$$

=====



## Lösungen

### Aufgabe K 19

Das Gleichungssystem besitzt keine reellen Lösungen.

### Aufgabe K 20

Wie von den meisten Lesern richtig erkannt wurde, besitzt die Funktion im angegebenen Intervall keine Maxima, da sie für  $x=0$  nicht definiert ist. Gemeint war natürlich das Intervall  $1 \leq x \leq 64$ . Hier besitzt  $f(x)$  bei  $x=8$  ein Maximum.

### Aufgabe K 21

Durch Anwendung von Logarithmengesetzen wie  $\log_{(a^b)^c} = \frac{1}{b} \log_a c$  erhält man die Lösung

$$\left( \frac{2-\lg 5}{2\lg 5 - \lg 2} ; \frac{4-\lg 2}{2\lg 5 - \lg 2} \right) .$$

### Aufgabe K 22

Durch Ausnutzung von  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\text{und } \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\text{und } \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

erhält man die Beziehung

$$\tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 80^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \sqrt{3} .$$

### Aufgabe K 23

Aus (2) folgt  $xy = 3(x+y)$

und aus (1)  $(x+y)^3 = 12xy + 3xy(x+y)$

und somit die Gleichung

$$(x+y)^3 - 9(x+y)^2 - 36(x+y) = 0$$

$$(x+y) \left( (x+y) - \frac{9}{2} \right)^2 - \frac{225}{4} = 0 .$$



1. Fall:  $x = -y$   
Daraus folgt in (2)  $\frac{1}{-y} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ . Widerspruch.

2. Fall:  $x+y = 12$   
Daraus folgt die Lösung (6;6)

3. Fall:  $x+y = -3$   
Hieraus folgt die Lösung  $(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}; -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5})$ .

### Aufgabe K 24

Auf die Geraden wird durch A das Lot gefällt. Mit Hilfe des Sinussatzes und den Beziehungen in den entstandenen rechtwinkligen Dreiecken erhält man unter der Voraussetzung, daß der Abstand von A zu den Geraden a bzw. b ist, die Lösung:

$$\overline{AB}_{1/2} = \frac{2ka}{\sqrt{2k^2 \mp 2\sqrt{k^4 - a^2b^2}}}, \quad \overline{AC}_{1/2} = \frac{2kb}{\sqrt{2k^2 \pm 2\sqrt{k^4 - a^2b^2}}}$$

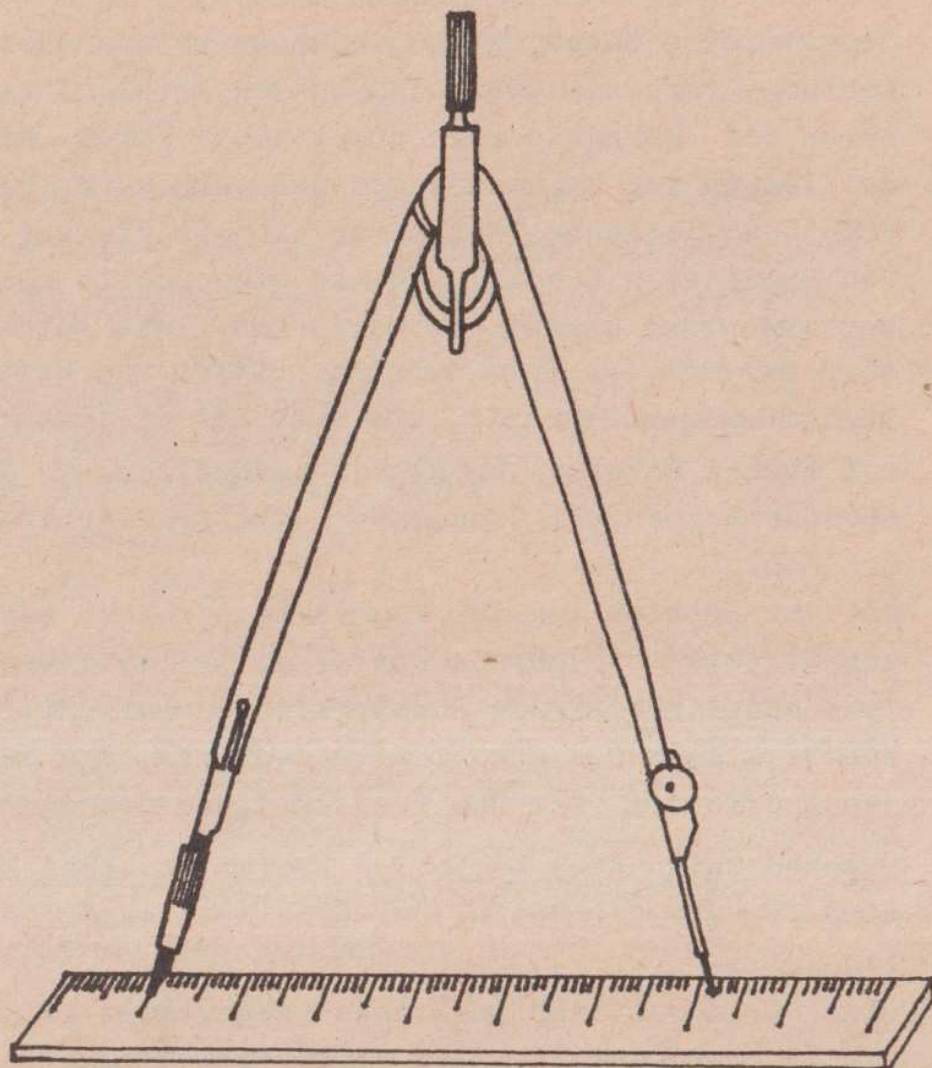
$$\overline{BC}_{1/2} = \frac{k}{ab} \sqrt{2k^2(a^2+b^2) \pm 2\sqrt{k^4 - a^2b^2}(a^2-b^2)},$$

wobei  $k^2 \geq a \cdot b$  gelten muß.



**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jörg Vogel  
**Chefredakteur:** Hans-Joachim Hauschild  
**Redaktion:** K. Bartholmé, G. Blume, H. Gottstein, H. Schwulow, D. Meinhardt, V. Wedler, G. Müller  
**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik  
**Konto:** Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt  
 Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.  
 Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.  
 Artikel-Nr. (EDV): 10932  
**Redaktionsschluß:** 14. 7. 1978





10

78

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-  
gendobjekt Studienvor-  
bereitung der Sektion  
Mathematik an der  
Friedrich-Schiller-Uni-  
versität Jena

12. Jahrgang  
Index 33 873  
Preis: 0,20 M



## Über geometrische Konstruktionsaufgaben

Geometrische Konstruktionsaufgaben reichen bis weit in das Altertum zurück. In den Anfängen der Entwicklung der Geometrie waren die Aufgaben rein praktischer Natur. Sie entstanden bei der Praxis der Feldmessungen und beim Gerätebau. Aber auch die rein künstlerische Tätigkeit, wie wir sie bei der Herstellung von Ornamenten finden, muß als eine Quelle geometrischer Aufgaben angesehen werden. So wurde der Kreis schon sehr früh als eine zweckmäßige Form erkannt. Hütten und Gefäße hatten einen kreisförmigen Grundriß, und auch das Speichenrad läßt sich schon auf frühen Entwicklungsstufen nachweisen. In diesem Zusammenhang, besonders aber bei Ornamenten, treffen wir die regelmäßige Kreisteilung.

Mit der Entwicklung der Geometrie zu einer selbständigen Wissenschaft (etwa 5. Jahrhundert v. d. Z.) tauchten aber auch abstraktere und schwierigere Konstruktionen auf. Hier ist z. B. die berühmte klassische Konstruktionsaufgabe, das Berührungsproblem des Apollonius (um 200 v. d. Z.), zu nennen:

Gegeben seien drei beliebige Kreise in einer Ebene. Gesucht wird ein vierter Kreis, der alle drei gegebenen Kreise berühren soll.

Eine sprichwörtlich gewordene Berühmtheit erlangte die "Quadratur des Kreises". Erst im Jahre 1882 gelang es F. Lindemann zu zeigen, daß die Zahl  $\pi$  transzendent und damit das uralte Problem, einen Kreis in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln, unlösbar ist.

Zwei weitere berühmte griechische Probleme sind die "Verdoppelung des Würfels" (das sogenannte Delische Problem) und die "Dreiteilung des Winkels". Genauer formuliert handelt es sich darum, die Kante eines Würfels zu konstruieren, dessen Volumen doppelt so groß ist wie das eines gegebenen Würfels, und einen beliebigen gegebenen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen.

Im engen Zusammenhang mit den Konstruktionsaufgaben stehen die Hilfsmittel, derer man sich zur Konstruktion bedient. Im Altertum waren das hauptsächlich Zirkel und Lineal. So können z. B.



die "Dreiteilung des Winkels" oder die "Verdopplung des Würfels" nicht mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden, diese Aufgaben sind aber z. B. mit Hilfe des Einschiebelineals lösbar.

Im Schulunterricht verwenden wir neben Zirkel und Lineal das Zeichendreieck, mit dem die Konstruktion von Parallelen und Senkrechten gestattet ist.

Das Suchen nach Lösungen wird bei vielen Aufgaben erleichtert, wenn man spezielle Methoden anwendet. Zu solchen Methoden, die je nach der gestellten Aufgabe mehr oder weniger gut geeignet sind, gehören

- die Methode der Bestimmungslinien,
- die Methode der Parallelverschiebung,
- die Methode der Drehung um einen Punkt,
- die Methode der Achsensymmetrie,
- die Methode der Ähnlichkeitslage.

Während die Methode der Bestimmungslinien und auch die Methode der Ähnlichkeitslage mehr oder weniger ausführlich im Geometrieunterricht unserer Schule behandelt werden, wird auf die übrigen Methoden nicht eingegangen. Im folgenden soll gezeigt werden, wie die Methode der Parallelverschiebung z. B. bei der Konstruktion von Dreiecken und Vierecken angewendet werden kann.

Zunächst einige allgemeine Bemerkungen zur

M e t h o d e   d e r   P a r a l l e l v e r s c h i e b u n g

Oft läßt sich aus der Planfigur der Konstruktionsweg nicht übersehen, da die gegebenen Stücke nicht "günstig" liegen, keine unmittelbare Beziehung zueinander haben. In solchen Fällen gelingt es manchmal, durch Parallelverschiebung einzelner Stücke die zu konstruierende Figur in eine solche umzuformen, die sich konstruieren läßt. Der Grund dafür liegt darin, daß man von dieser neuen Figur entweder mehr Stücke kennt oder zu ihrer Konstruktion weniger Stücke benötigt werden. Hat man diese Hilfsfigur konstruiert, dann gelingt es meist relativ leicht, zur gesuchten Figur zu gelangen. Oft genügt es, die zur vorgenommenen Parallelverschiebung inverse durchzuführen.

Wir wollen das Gesagte an einigen Beispielen erläutern.



Die Anwendung der Methode der Parallelverschiebung bei der Konstruktion von Dreiecken

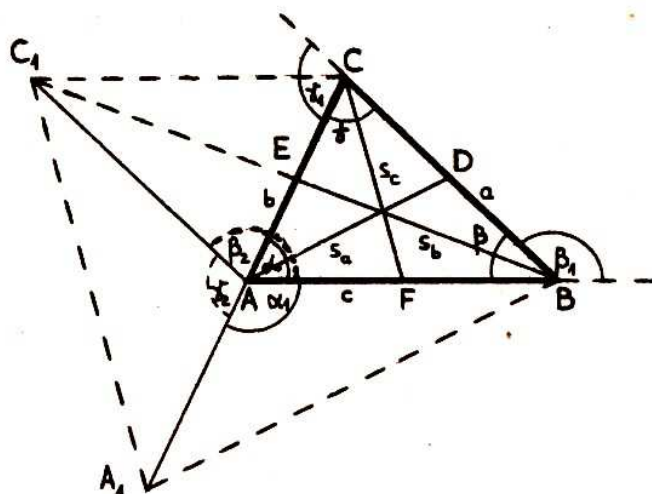


Abb. 1

$\overline{A_1A}$  sei das Bild von  $\overline{AC}$  bei der Verschiebung  $\overline{CA}$  und  $\overline{AC_1}$  das Bild von  $\overline{BC}$  bei der Verschiebung  $\overline{BA}$  (Abb. 1).

Es gilt:

$$\begin{aligned}\overline{A_1A} &\cong \overline{AC} \\ \overline{AC_1} &\cong \overline{BC}, \text{ d. h.}\end{aligned}$$

im Punkt A treffen alle Strecken zusammen, die entweder Seiten des Dreiecks ABC sind oder Strecken, die die gleiche Länge haben wie diese.

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \gamma_1 = \alpha + \beta \\ \beta_2 &= \beta_1 = \alpha + \gamma \\ \alpha_1 &= \beta + \gamma\end{aligned}$$

Der Punkt A ist gemeinsamer Scheitelpunkt von Winkeln, die entweder Außenwinkel des Dreiecks ABC sind ( $\alpha_1$ ) oder die gleiche Größe haben wie diese ( $\beta_2, \gamma_2$ ).

$$\begin{aligned}\overline{BC_1} &= 2\overline{BE} = 2s_b \\ \overline{C_1A_1} &= 2\overline{CF} = 2s_c \\ \overline{A_1B} &= 2\overline{AD} = 2s_a.\end{aligned}$$

Die Seitenlängen des Dreiecks  $A_1BC_1$  sind gleich den doppelten Längen der Seitenhalbierenden.

Die Seitenhalbierenden des Dreiecks  $A_1BC_1$  schneiden einander im Punkt A.





Es gilt:

$$\begin{aligned}\overline{CB_1} &\cong \overline{AB} \\ \overline{CD_1} &\cong \overline{AD}, \quad \text{d. h.}\end{aligned}$$

Im Punkt C treffen Strecken zusammen, die entweder Seiten des Vierecks ABCD sind oder Strecken, die die gleiche Länge haben wie Seiten dieses Vierecks.

$$\begin{aligned}\angle B_1CD_1 &\cong \angle BAD \\ \angle D_1CD &\cong \angle ADC \\ \angle BCB_1 &\cong \angle CBA, \quad \text{d. h.}\end{aligned}$$

Der Punkt C ist gemeinsamer Scheitelpunkt von Winkeln, die entweder Winkel des Vierecks sind oder die die gleiche Größe haben wie diese.

$$\begin{aligned}\overline{BB_1} &\cong \overline{AC} \\ \overline{DD_1} &\cong \overline{AC} \\ \overline{B_1D_1} &\cong \overline{BD}, \quad \text{d. h.}\end{aligned}$$

Das Viereck  $BB_1D_1D$  ist ein Parallelogramm und seine Seiten sind entweder Diagonalen des Vierecks ABCD oder Strecken, die die gleiche Länge haben wie die Diagonalen dieses Vierecks.

$$\begin{aligned}\angle BDD_1 &\cong \angle D_1B_1B \cong \angle BSC \\ \angle B_1BD &\cong \angle DD_1B_1 \cong \angle CSD, \quad \text{d. h.}\end{aligned}$$

Die Winkel des Parallelogramms  $BB_1D_1D$  haben die gleiche Größe wie die Winkel, die die Diagonalen des Vierecks ABCD miteinander bilden.

$$\begin{aligned}\angle B_1BC &\cong \angle ACB \\ \angle CDD_1 &\cong \angle DCA \\ \angle DD_1C &\cong \angle CAD \\ \angle CD_1B_1 &\cong \angle ADB \\ \angle D_1B_1C &\cong \angle DBA \\ \angle CB_1B &\cong \angle BAC, \quad \text{d. h.}\end{aligned}$$

Die Winkel, die die Strecken  $\overline{CB_1}$ ,  $\overline{CD_1}$ ,  $\overline{CD}$  und  $\overline{CB}$  mit den Seiten des Parallelogramms  $BB_1D_1D$  bilden, sind genau so groß wie Winkel zwischen den Seiten des Vierecks ABCD und dessen Diagonalen.

Im Parallelogramm  $BB_1D_1D$  finden wir also alle Stücke wieder, die bei der Konstruktion von Vierecken normalerweise gegeben

sind.

Die Methode der Verschiebung führt in der Regel dann zum Ziel, wenn sich unter den gegebenen Stücken die Diagonalen und die Winkel, die sie einschließen, befinden. In diesen Fällen läßt sich das Parallelogramm  $BB_1D_1D$  konstruieren und die Aufgabe wird auf die Bestimmung des Punktes  $C$  zurückgeführt.

Zur Übung geben wir einige Konstruktionsaufgaben zum Viereck.

- a) Es ist ein Parallelogramm aus den beiden Seiten und dem Winkel, den die Diagonalen miteinander bilden, zu konstruieren.
- b) Es ist ein Trapez aus den beiden Diagonalen, dem Winkel, den die Diagonalen miteinander bilden und einer Seite zu konstruieren.
- c) Es ist ein Viereck aus den beiden Diagonalen, zwei gegenüberliegenden Seiten und dem Winkel, den diese Seiten miteinander bilden, zu konstruieren.

**Dr. Lemnitzer**

**Bereich Methodik des  
Mathematikunterrichts**

---

## **Zum Lösen von Beweisaufgaben (Schluß)**

### 4. Der indirekte Beweis

Wenden wir uns jetzt einer Beweismethode zu, die unter der Bezeichnung "indirekter Beweis" bekannt ist. Bei der Darstellung der einzelnen Beweisschritte werden wir erkennen, daß auch diese Methode auf den Gesetzmäßigkeiten der Logik beruht.

Wir wollen uns auf eine der möglichen Varianten beschränken und zunächst wieder die typischen Schritte darlegen.



1. Soll eine Aussage der Struktur  $V \longrightarrow B$  (Wenn  $V$ , so  $B$ ) indirekt bewiesen werden, so bilden wir als erstes die Verneinung der Behauptung  $B$ . Wir wollen diese mit  $\neg B$  bezeichnen. Dabei sei an dieser Stelle noch einmal daran erinnert, daß die Voraussetzungen der Aussage durch alle bis zu diesem Zeitpunkt bekannten Sätze, Axiome, Definitionen ergänzt werden können.
2. Ausgehend von dieser Verneinung  $\neg B$  wird über Zwischenfolgerungen  $F_k$  eine Folgerung gesucht, die im Widerspruch zu den Voraussetzungen  $V$  (dazu gehören also auch schon bekannte Sätze usw.) stehen. Wir wollen diese Folgerung mit  $\neg V$  bezeichnen.
3. Gelingt eine solche Entwicklung, wobei die  $F_k$  jeweils hinreichende Bedingungen für die  $F_{k+1}$  bilden sollen, so ist mit der Schlußkette  $\neg B \longrightarrow \neg V$  auch die Aussage  $V \longrightarrow B$  bewiesen. Diese Schlußfolgerung beruht auf einer allgemeingültigen Aussage der Aussagenlogik, der Äquivalenz der Ausdrücke  $(p \longrightarrow q)$  und  $(\neg q \longrightarrow \neg p)$ .

Zeigen wir uns dieses Vorgehen wieder an einem Beispiel.

**S a t z :** Es sei  $M$  eine Menge natürlicher Zahlen mit den Eigenschaften:

1.  $0 \in M$

2. Wenn  $k \in M$ , so sei auch  $k+1 \in M$

Dann enthält  $M$  alle natürlichen Zahlen, d. h. es gilt  $M=N$ .

Die Voraussetzungen  $V$  sind:

$V_1$ :  $M$  sei eine Menge natürlicher Zahlen

$V_2$ :  $0 \in M$

$V_3$ : mit  $k \in M$  ist auch  $k+1 \in M$

Die Behauptung  $B$  lautet:

$B$ :  $M$  enthält alle natürlichen Zahlen,  $M=N$ .

Die vorliegende Satzstruktur ist hier:  $V_1 \wedge V_2 \wedge V_3 \rightarrow B$ .

Wir wollen noch eine Vorüberlegung anstellen, bevor wir den Beweis durchführen.

Der indirekte Beweis fordert, ausgehend von der Behauptung, einen Widerspruch zur Voraussetzung zu erzeugen. Da die Behauptung dieser Aussage in Abhängigkeit von drei Teilvoraussetzungen  $V_1$ ,  $V_2$  und  $V_3$  formuliert wurde, genügt es, zu einer dieser Voraussetzungen einen Widerspruch zu ermitteln.

| Schlußkette      | Schluß                                                                                                   | Begründung                                                        |
|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $\neg B$         | M enthält nicht alle natürlichen Zahlen, d. h., $M \neq N$                                               | Verneinung der Behauptung                                         |
| $\downarrow$     |                                                                                                          |                                                                   |
| $F_1$            | Wenn $\neg B$ , so gilt: Es gibt natürliche Zahlen, die nicht zu M gehören.                              |                                                                   |
| $\downarrow$     |                                                                                                          |                                                                   |
| $F_2$            | Wenn $F_1$ , so gilt: Es existiert zu M eine nichtleere Komplementärmenge $\bar{M}$ .                    |                                                                   |
| $\downarrow$     |                                                                                                          |                                                                   |
| $F_3$            | Wenn $F_2$ , so gilt: $\bar{M}$ besitzt ein kleinstes Element $\bar{m}$ .                                | Grundsatz A 6<br>Lehrbuch Kl. 11                                  |
| $\downarrow$     |                                                                                                          |                                                                   |
| $F_4$            | Wenn $F_3$ und $V_2$ , so gilt:<br>$\bar{m} \neq 0$                                                      |                                                                   |
| $\downarrow$     |                                                                                                          |                                                                   |
| $F_5$            | Wenn $F_4$ , so gilt: $\bar{m}$ besitzt einen unmittelbaren Vorgänger $\bar{m}-1$                        | Jede von 0 verschiedene natürliche Zahl besitzt genau einen Vorg. |
| $\downarrow$     |                                                                                                          |                                                                   |
| $F_6$            | Wenn $F_5$ , so gilt:<br>$\bar{m}-1$ liegt in M                                                          | $F_3$                                                             |
| $\downarrow$     |                                                                                                          |                                                                   |
| $F_7$            | Wenn $F_6$ , so gilt: $\bar{m}$ und $\bar{m}-1$ liegen in den zwei verschiedenen Mengen $\bar{M}$ und M. | $F_3$ und $F_6$                                                   |
| $\downarrow$     |                                                                                                          |                                                                   |
| $\neg V_3 = F_8$ | Wenn $F_7$ , so gilt "nicht $V_3$ " bzw. "nicht V".                                                      | $F_7$ Widerspruch zu $V_3$                                        |

Mit der Schlußkette  $\neg B \rightarrow \neg V_3$  d. h.  $\neg B \rightarrow \neg V$  gilt aber sofort auf Grund der Äquivalenz von  $(\neg B \rightarrow \neg V)$  und  $(V \rightarrow B)$  die Wahrheit der Aussage  $V \rightarrow B$ .



### 5. Eine Möglichkeit zum Beweisen einer Satzumkehrung

Die in 4. angewendete Regel der Kontraposition soll uns in einer letzten Betrachtung Anregung für eine interessante Beweisführung für die Umkehrungen von Sätzen bieten.

Eine Strukturbetrachtung soll uns die Grundidee dieser Beweisführung klarmachen.

Es sei uns ein Satz mit der Struktur  $S: V_1 \wedge V_2 \longrightarrow B$  (wenn  $V_1$  und  $V_2$ , so  $B$ ) und dessen Beweisablauf bekannt.

Unter den Umkehrungen dieses Satzes wollen wir folgende Strukturen verstehen:

$$\begin{aligned} U_1: & B \longrightarrow V_1 \wedge V_2 \\ U_2: & B \wedge V_2 \longrightarrow V_1 \\ U_3: & V_1 \wedge B \longrightarrow V_2 \end{aligned}$$

Soll nun eine Umkehrung solcher Struktur bewiesen werden, so wird das Finden einer Beweisidee oftmals dadurch erleichtert, daß man zu der zu beweisenden Umkehrung  $U_1$  eine solche Kontraposition bildet, die die gleiche Struktur wie der bereits bewiesene Satz  $S$  aufweist, d. h. in der die Teilaussagen  $V_1$ ,  $V_2$  und  $B$  in der gleichen Anordnung erscheinen wie in  $S$ , wenn auch zum Teil negiert.

Soll also z. B. die Umkehrung:  $U_2: B \wedge V_2 \longrightarrow V_1$  bewiesen werden, so wählen wir von den möglichen Kontrapositionen zu  $U_2$  diejenige aus, die die gleiche Struktur wie  $S$  besitzt, d. h. wir bilden die Kontraposition  $k_{U_2}: \neg V_1 \wedge V_2 \longrightarrow \neg B$ . Hierin sind die Teile  $V_1$ ,  $V_2$  und  $B$  in der gleichen Anordnung wie in  $S$  vorhanden. Ersetzen wir nun in dem bekannten Beweisablauf des Satzes  $S$  die Teilaussagen  $V_1$  und  $B$  durch ihre Negationen  $\neg V_1$  und  $\neg B$ , so erhalten wir den Beweis der Kontraposition  $k_{U_2}$  und auf Grund der Äquivalenz von  $k_{U_2}$  und  $U_2$  auch den Beweis der Umkehrung  $U_2$ .

Als Beispiel wollen wir uns noch einmal die unter 3.1. betrachtete Aufgabe vornehmen. Hier hatten wir aus einer "genau dann, wenn-Aussage" zunächst eine "wenn-so-Formulierung" entwickelt und diese mit Hilfe der Methode der vollständigen Analyse bewiesen. Die Umkehrung dieses Satzes wollen wir nun in der oben



beschriebenen Form beweisen.

Dazu schreiben wir uns den Satz nochmals heraus.

**Satz:** Wenn eine geometrische Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} aq^{v-1}$  vorliegt, und  $|q| < 1$  ist, so ist die Reihe konvergent.

Eine Strukturbetrachtung läßt uns die Struktur  $V_1 \wedge V_2 \rightarrow B$  erkennen.

Als Umkehrung gewinnen wir:

Wenn eine geometrische Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} aq^{v-1}$  vorliegt und diese konvergent ist, so ist  $|q| < 1$ .

Die Struktur der Umkehrung lautet also  $V_1 \wedge B \rightarrow V_2$ . Wir bilden hierzu die Kontraposition  $V_1 \wedge \neg V_2 \rightarrow \neg B$ , die die gleiche Anordnung der Teilaussagen  $V_1$ ,  $V_2$  und  $B$  aufweist, wie der Satz.

Wir finden also als Kontraposition der Umkehrung  $k_U$ :

"Wenn eine geometrische Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} aq^{v-1}$  vorliegt und  $|q|$  nicht kleiner ist als 1, so konvergiert die Reihe nicht".

Der Beweisablauf des Satzes ist uns aus 3.1. bekannt. Um das analoge Vorgehen beim Beweis der Kontraposition deutlich zu machen, wollen wir die beiden Beweisabläufe parallel darstellen.

Wir wählen als Beweismethode das synthetische Vorgehen.

Schlußkette | Beweisablauf des Satzes | Beweisablauf der Kontrapos.

|                                              | $ q  < 1$                                                                                            | $ q  = 1$ oder $ q  > 1$                                                                                   |
|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $V$<br>$\downarrow$<br>$F_1$<br>$\downarrow$ | Wenn $V$ , so ist die Folge $(q^n)$ ; $n \in \mathbb{N}$ konvergent.                                 | Wenn $V$ , so ist die Folge $(q^n)$ , $n \in \mathbb{N}$ nicht konvergent.                                 |
| $F_2$<br>$\downarrow$                        | Wenn $F_1$ , so ist die Folge $(S_n) = (\frac{a}{1-q}(1-q^n)) = (\sum_{v=1}^n aq^{v-1})$ konvergent. | Wenn $F_1$ , so ist die Folge $(S_n) = (\frac{a}{1-q}(1-q^n)) = (\sum_{v=1}^n aq^{v-1})$ nicht konvergent. |
| $B = F_3$                                    | Wenn $F_2$ , so ist die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} aq^{v-1}$ konvergent.                             | Wenn $F_2$ , so ist die Reihe $\sum_{v=1}^{\infty} aq^{v-1}$ nicht konvergent.                             |

Auf Grund der Äquivalenz der Umkehrung und ihrer Kontraposition ist mit dem Beweis der Kontraposition auch die Umkehrung bewie-



sen (und damit die "genau dann, wenn-Aussage" aus 3.1.). Mit diesen Überlegungen wollen wir unsere Betrachtung zum Beweisen mathematischer Aussagen abschließen.

**Dr. Alfred Groß**

**Bereich Methodik des  
Mathematikunterrichts**

---

### Seltsame Fracht

Der bekannte französische Chemiker und Physiker Louis-Josef Gay-Lussac beschäftigte sich vornehmlich mit Gasen. Als einer der ersten Gelehrten stieg er mit dem Luftballon auf, um in einer Höhe von mehr als 6000 m Luftproben für seine wissenschaftlichen Arbeiten zu entnehmen.

Eines Tages passierte Gay-Lussac folgende spaßige Geschichte: Für Versuchszwecke benötigte er eine Anzahl dünnwandiger Glasgefäße, die zur damaligen Zeit nur in Österreich-Ungarn hergestellt wurden. Der Auftrag des Wissenschaftlers wurde ausgeführt. Als die Sendung an der Grenze eintraf, berechneten jedoch die Zollbeamten für die eigenartigen Gefäße einen solch hohen Zoll, daß Gay-Lussac außerstande war, ihn zu bezahlen. Die Gläser mußten zurückgeschickt werden.

Da kam dem Franzosen ein Freund, der in solchen Dingen erfahrene Alexander von Humboldt, zu Hilfe. Dieser ließ sogleich alle zurückgegebenen Gefäße verkorken. Dann ließ er die Verschlüsse mit Siegellack überziehen und auf den Kisten folgende Aufschrift anbringen: "Deutsche Luft! Vorsichtig umgehen!"

Die so von einer Ware in ganz gewöhnliche Verpackung verwandelten Glasgefäße bereiteten den Zollbeamten nicht wenig Kopfzerbrechen, denn so sehr sie auch in ihren Vorschriften und Instruktionen wühlen mochten, sie konnten nirgends einen Absatz finden, der es zuließ, Luft mit Zoll zu belegen. Die wertvollen Gefäße kamen ungehindert über die Grenze, und Gay-Lussac konnte seine Experimente durchführen.

---

## Preisaufgaben

K 49 Man löse das Gleichungssystem

②

$$xy + yz + zx = 47$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$(z-x)(z-y) = 2.$$

K 50 Für welche Werte von a ist das Ungleichungssystem

①

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

für beliebiges x erfüllt?

K 51 Für welche n besitzt die Gleichung Lösungen

①

$$1 + \log_x \frac{4-x}{10} = (\log_{10} \log_{10} n - 1) \log_x 10$$

K 52 Man löse die Gleichung

①

$$(\sin x + \cos x) \sqrt{2} = \tan x + \cot x$$

K 53 Man berechne die Winkel des rechtwinkligen Dreiecks, von dem bekannt ist, daß die Radien von Umkreis und Inkreis im Verhältnis 5 : 2 stehen.

①

K 54 Правильная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через вершину основания и середины двух боковых ребер. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна к боковой грани.

②

Einsendeschluß: 31. 12. 1978



## Lösungen

Die Aufgaben K 25 und K 26 waren Aufgaben zum Artikel über die Jensensche Ungleichung.

### Aufgabe K 25

Wir setzen  $f(x) = \frac{1+\cos x}{\sin x}$   $0 < x < \pi$

$$f''(x) = \frac{(\cos x + 1)^2}{\sin^3 x} > 0 \quad \text{für } 0 < x < \pi$$

$\Rightarrow f(x)$  streng konvex.

Mit der Jensenschen Ungleichung folgt somit

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$$

$$\text{speziell: } f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \leq$$

$$\leq \frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)}{3} = \frac{1}{3} \left( \frac{1+\cos \gamma}{\sin \gamma} + \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha+\beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha+\beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \geq 3\sqrt{3} - \frac{1+\cos \gamma}{\sin \gamma} .$$

### Aufgabe K 26

Wir setzen  $f(a) = \frac{1}{1+e^a}$  für  $a > 0$ .

$$f''(a) = \frac{(e^a-1)e^a}{(1+e^a)^3} > 0 .$$

Also  $f(a)$  streng konvex.

Mit der Jensenschen Ungleichung folgt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+e^{a_i}} \geq \frac{1}{1+e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i}} .$$

Wir setzen  $x_i = e^{a_i} > 1$ , da  $a_i > 0$ , und erhalten

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}} .$$

|              |
|--------------|
| Aufgabe K 27 |
|--------------|

Da  $p$  eine Primzahl ist, sind genau die folgenden 3 Fälle möglich.

1. Fall:  $p = 3$  :  $14p^2 + 1 = 127$  Primzahl

2. Fall:  $p \equiv 1(3)$  :  $14p^2 + 1 \equiv 0(3)$  keine Primzahl

3. Fall:  $p \equiv 2(3)$  :  $14p^2 + 1 \equiv 0(3)$  keine Primzahl

Also hat die Aufgabe genau die Lösung  $p = 3$ .

|              |
|--------------|
| Aufgabe K 28 |
|--------------|

$$z = 100a + 10b + c$$

$$\frac{z}{11} = 9a + b + \frac{a-b+c}{11} = a^2 + b^2 + c^2$$

1. Fall:  $a-b+c = 0$   $a+c = b$

$$a_{1/2} = \frac{5-c}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{25-8c-3c^2}$$

$25-8c-3c^2$  muß Quadratzahl sein.

Dies gilt jedoch nur für  $c = 0$ .

Somit ist  $a=5$  und auch  $b=5$ ;  $a=0$  entfällt.

$z = 550$  ist Lösung.

2. Fall:  $a-b+c = 11$   $a+c = b+11$

$$a_{1/2} = \frac{16-c}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{14c-3c^2-6}$$

$14c-3c^2-6$  muß Quadratzahl sein, was nur für  $c=3$  erfüllt ist.

$$a_1=8, b=0$$

$$a_2=5, b=-3 \text{ entfällt.}$$

Also ist  $z = 803$  Lösung.

$z = 550$  und  $z = 803$  sind genau die Lösungen der Aufgabe.



Aufgabe K 29

$$a \cdot f(x-1) + b f(1-x) = cx$$

1.  $x = z + 1$

$$a \cdot f(z) + b f(-z) = c(z+1)$$

2.  $x = 1 - z$

$$b \cdot f(z) + a f(-z) = c(1-z)$$

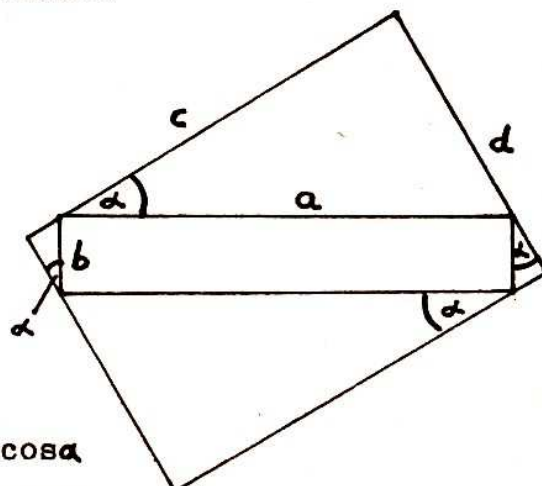
Aus 1. und 2. folgt

$$(a^2 - b^2) f(z) = a \cdot c \cdot z + b \cdot c \cdot z + ac - bc$$

$$f(z) = \frac{c}{a-b} \cdot z + \frac{c}{a+b}$$

Diese Funktion erfüllt die Funktionalgleichung und ist für alle  $z \in \mathbb{R}$  definiert.

Aufgabe K 30



$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$c = b \sin \alpha + a \cos \alpha$$

$$d = a \sin \alpha + b \cos \alpha$$

$$c \cdot d = m^2 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \sin 2\alpha + ab$$

Da  $0 < 2\alpha < \pi$ , gilt  $0 < \sin 2\alpha \leq 1$

$$\text{Somit gilt: } \sqrt{ab} < m \leq \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

$m$  kann alle Werte des Intervalls  $(\sqrt{ab}; \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2)}]$  annehmen.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jörg Vogel

Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild

Redaktion: K. Bartholmé, G. Blume, H. Gottstein, H. Schwulow, D. Meinhardt, V. Wedler, G. Müller

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt

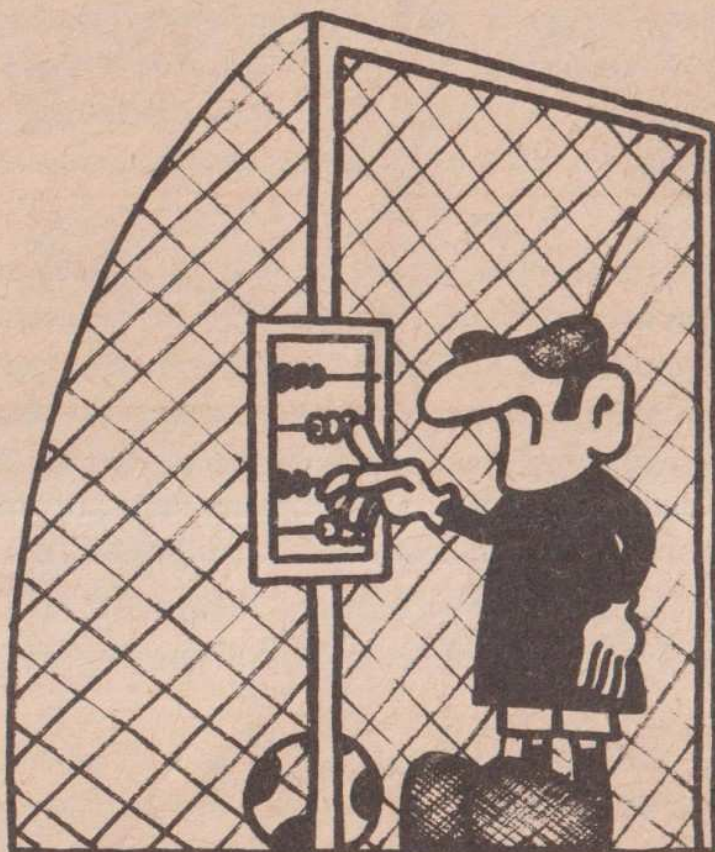
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 14. 7. 1978





11

78

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-  
gendobjekt Studienvor-  
bereitung der Sektion  
Mathematik an der  
Friedrich-Schiller-Uni-  
versität Jena

12. Jahrgang  
Index 33 873  
Preis: 0,20 M



# Ein Operatorenkalkül zur Lösung linearer Differenzengleichungen 1. Teil

0. Die Lösung vieler technischer Probleme führt auf sogenannte lineare Differenzengleichungen. So erfordert zum Beispiel die Berechnung der freien Biegeschwingungen eines beiderseitig eingespannten Trägers mit konstanter Biegesteifigkeit und konstanter Massebelegung, falls man den Träger in 9 Abschnitte gleicher Länge einteilt und  $v_n$  die Auslenkung im Teilpunkt  $n$  ist, die Lösung der linearen Differenzengleichung

$$v_{n-2} - 4v_{n-1} + 6v_n - 4v_{n+1} + v_{n+2} - \lambda v_n = 0$$

unter gewissen Zusatzbedingungen ( $\lambda$  ist eine Konstante, die von der Stablänge, der Biegesteifigkeit, der Massebelegung und der Eigenkreisfrequenz abhängt). Gerade die Einführung der modernen Rechentechnik hat den Nutzen diskreter Modelle in Physik und Technik besonders in den Vordergrund gerückt. Man vergleiche hierzu etwa die Ausführungen von Lothar Berg in dem Artikel "Mechanik ohne Differentialgleichungen - verwirklicht durch diskrete Modelle" in "Wissenschaft und Fortschritt" 4,78. In diesem Beitrag soll eine Methode erläutert werden, solche Gleichungen aufzulösen.

Eingangs einige Bemerkungen zu den verwendeten Abkürzungen. Die Schreibweise  $a := f$  soll andeuten, daß die Größe  $a$  durch  $f$  definiert wird,  $a \in M$  heißt, daß  $a$  ein Element der Menge  $M$  ist,  $A \vee B$  bedeutet, daß  $A$  oder  $B$  gilt (evtl. auch beides!),  $A \wedge B$  heißt, daß  $A$  und  $B$  gilt,  $A \Rightarrow B$  deutet an, daß man aus  $A$  die Gültigkeit von  $B$  folgern kann und  $A \Leftrightarrow B$ , daß zusätzlich aus  $B$  wieder  $A$  folgt, schließlich soll  $\forall X$  gleichbedeutend mit "für alle  $X$ " sein. Diejenigen Leser, die mit den Rechenregeln für komplexe Zahlen nicht vertraut sind, können sich statt dessen immer reelle Zahlen vorstellen, weil das für die Belange dieser Arbeit ausreicht. Durch Bemerkungen wie "man rechnet leicht nach" sind in den Text Übungsaufgaben eingestreut.

1. Wir betrachten die Menge  $F$  aller Funktionen, deren Definitionsbereich die Menge  $N_0$  der nichtnegativen ganzen Zahlen ist



und deren Wertebereich eine Teilmenge der Menge  $C$  der komplexen Zahlen ist. Die Elemente von  $F$  kann man dann offensichtlich als Zahlenfolgen schreiben:

$$a \in F \iff a = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n\}, \quad a_j \in C, \quad j \in N_0.$$

Zwei Elemente  $a$  und  $b$  aus  $F$  sollen genau dann gleich genannt werden, wenn  $a_n = b_n$  gilt für alle  $n \in N_0$ .

In  $F$  erklären wir eine Reihe von Rechenoperationen: Für  $\alpha \in C$ ,  $a, b \in F$  seien

$$(1.1) \quad a+b := \{a_n+b_n\}$$

$$(1.2) \quad \alpha a := \{\alpha a_n\}$$

$$(1.3) \quad ab := \left\{ \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right\} = \{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0\}.$$

Sie können leicht nachprüfen, daß man bei diesen Definitionen mit den Elementen von  $F$  wie mit ganzen Zahlen rechnen kann, d. h. daß die Addition und die Multiplikation kommutativ und assoziativ sind, und daß beide Operationen durch das distributive Gesetz miteinander verknüpft sind. Es gibt auch Elemente von  $F$ , die den Zahlen 0 bzw. 1 entsprechen, d. h. Elemente, die bei Addition bzw. Multiplikation keine Veränderung hervorrufen. Wir wollen sie vorerst mit  $n$  bzw.  $e$  bezeichnen.

$$n := \{0, 0, \dots, 0, \dots\}, \quad e := \{1, 0, 0, \dots, 0, \dots\}.$$

Offenbar gilt immer

$$a+n=a,$$

$$a.e=a$$

Auch die Subtraktion ist in  $F$  unbeschränkt ausführbar; denn als Lösung der Gleichung  $a+x=b$  erhält man offenbar

$x = \{b_n - a_n\} =: b-a$ . Eine Menge, in der obige Gesetzmäßigkeiten gelten, nennt man auch einen kommutativen Ring.

Wir erinnern an eine weitere Eigenschaft des Ringes  $Z$  der ganzen Zahlen: Ein Produkt ganzer Zahlen kann nur dann Null werden, wenn mindestens einer der Faktoren verschwindet. Diese Eigenschaft der Nullteilerfreiheit von  $Z$  überträgt sich auch auf  $F$ .

**Satz 1:**  $a, b \in F, \quad ab=n \implies a=n \vee b=n$

**Beweis:** Zum Beweis nehmen wir an, daß sowohl  $a$  als auch  $b$  nicht gleich  $n$  seien. Dann sei  $a_i$  die erste von Null verschiedene Komponente von  $a$  und  $b_j$  die erste von Null verschiedene



Komponente von  $b$ . Es gilt also

$$a = \{0, 0, \dots, 0, a_i, \dots\}, \quad b = \{0, 0, \dots, 0, b_j, \dots\} \quad \text{mit } a_i, b_j \neq 0.$$

Dann gilt für die  $(i+j)$ -te Komponente von  $ab$

$$(ab)_{i+j} = \sum_{k=0}^{i+j} a_k b_{i+j-k} = a_i b_j \neq 0.$$

Das ist ein Widerspruch zu der Annahme  $ab = n$ .

Solche nullteilerfreien Ringe bezeichnet man auch als Integritätsbereich. Diese Eigenschaft wäre nicht gültig gewesen, wenn man auch die Multiplikation von Elementen von  $F$  komponentenweise durchgeführt hätte, denn z. B. wäre dann

$$\{1, 0, 0, \dots\} \cdot \{0, 1, 0, \dots, 0, \dots\} = \{0, 0, \dots\} = n.$$

Anschließend betrachten wir die Teilmenge  $K$  der Elemente von  $F$ , die die Gestalt

$$a \in K \iff a = \{a, 0, 0, \dots\}$$

haben.

Offenbar sind Summe, Produkt und Differenz der Elemente von  $K$  wieder Elemente von  $K$ . Die Multiplikation eines Elementes von  $K$  mit einem Element von  $F$  liefert

$$\{a, 0, 0, \dots\} \cdot \{b_0, b_1, \dots\} = \{ab_0, ab_1, \dots\} = ab.$$

Deshalb kann man die Elemente von  $K$  mit den Elementen von  $C$  identifizieren; (man sagt  $C$  und  $K$  seien isomorph zueinander), und damit kann man die komplexen Zahlen als Elemente von  $F$  auffassen. Wegen

$$n = \{0, 0, 0, \dots, 0, \dots\}, \quad e = \{1, 0, 0, \dots, 0, \dots\}$$

schreiben wir deshalb in Zukunft einfach  $n=0$ ,  $e=1$ , wobei immer aus dem Zusammenhang zu entnehmen ist, ob es sich um eine Zahl oder ein Element von  $F$  handelt.

2. Im Bereich der ganzen Zahlen ist die Umkehrung der Multiplikation, d. h. die Division nicht unbeschränkt ausführbar. Das gibt Anlaß, von den ganzen Zahlen zu den rationalen Zahlen überzugehen. Einen analogen Prozeß kann man auch mit  $F$  durchführen, denn auch in  $F$  ist die Division nicht unbeschränkt ausführbar. Zum Beispiel gibt es kein  $x \in F$ , so daß

$$\{0, 1, 0, 0, \dots\} \cdot \{x_0, x_1, \dots\} = \{1, 0, 0, \dots\}$$

gilt, weil  $0 \cdot x_0 = 0$  gilt, die erste Komponente des Produktes



aber 1 werden soll. Falls die Division aber möglich ist, ist sie eindeutig bestimmt.

**Satz 2:** Die Lösung  $x$  der Gleichung  $bx=a$ ,  $a, b \in F$ ,  $b \neq 0$  ist in  $F$  (falls sie existiert) eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Der Beweis wird wieder indirekt geführt. Unter der Annahme, daß es zwei Lösungen  $x, y$  mit  $x \neq y$  gibt, schließt man sofort wegen  $bx=a$ ,  $by=a$ , daß  $bx-by=b(x-y)=0$  gilt und daraus erhält man wegen  $b \neq 0$  den Widerspruch  $x=y$ .

Jetzt kann man durch Übergang zu Brüchen mit Elementen aus  $F$  zu einem neuen Bereich kommen, in dem die Existenz der Lösung obiger Divisionsaufgabe gesichert ist. Mit diesen Quotienten rechnet man nach den Regeln der Bruchrechnung. Die Lösung der Gleichung  $bx=a$  lautet dann  $x=\frac{a}{b}$  (wobei immer  $b \neq 0$  sei). Die Einzelheiten sollen hier nicht ausgeführt werden, da sie völlig analog verlaufen, wie beim Übergang von den ganzen zu den rationalen Zahlen. Wir bezeichnen diesen neuen Bereich mit  $Q$ , seine Elemente heißen Operatoren.

$$Q = \left\{ x: x = \frac{a}{b}, a, b \in F, b \neq 0 \right\}.$$

In  $Q$  ist nun neben allen in  $F$  erfüllten Eigenschaften auch die Division immer ausführbar. Ein solcher Bereich heißt auch Körper und man sagt, man habe den Integritätsbereich  $F$  zum Quotientenkörper  $Q$  erweitert. Wie man den Ring  $Z$  der ganzen Zahlen als Teilmenge des Körpers der rationalen Zahlen auffassen kann, so kann man auch hier den Ring der Funktionen aus  $F$  als Teilmenge der Operatoren aus  $Q$  auffassen, nämlich als die Operatoren der Gestalt  $\frac{ac}{c}$ ,  $a, c \in F$ ,  $c \neq 0$ .

3. Wir betrachten jetzt einige wichtige Beispiele von Operatoren. Hierzu bilden wir das Produkt des Operators  $s = \{1, 1, \dots\}$  mit einem Element  $a = \{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\}$  aus  $F$ . Nach (1.3) gilt

$$(3.1) \quad s \cdot a = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k \right\}.$$

Deshalb bezeichnet man den Operator  $s$  auch als Summationsoperator. Sie rechnen sofort nach, daß

$$(3.2) \quad s^2 = \{n+1\} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad s^3 = \left\{ \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right\} = \{1, 3, 6, \dots\}$$

ist.



In Zukunft wollen wir Elemente von  $F$ , deren sämtliche Komponenten gleich einer festen komplexen Zahl  $a$  sind, mit  $\{a\}$  bezeichnen.<sup>1)</sup> So ist also  $s = \{1\}$  und es gilt z. B.  $sa = \{a\}$ . Weiterhin sei  $v = \{0, 1, 0, \dots\}$ . Dann gilt wieder nach (1.3) sofort

$$va = \{0, a_0, a_1, a_2, \dots\}.$$

Deshalb bezeichnet man  $v$  auch als Verschiebungsoperator. Offensichtlich gilt

$$(3.3) \quad v^n = \{\overbrace{0, 0, \dots, 0}^n, 1, 0, \dots\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Damit wird sofort

$$v^n a = \{\overbrace{0, 0, \dots, 0}^n, a_0, a_1, a_2, \dots\}.$$

Die beiden bisherigen Operatoren sind Elemente aus  $F$ . Schließlich wollen wir noch 2 Operatoren einführen, die nicht als Elemente von  $F$  aufgefaßt werden können. Wir erinnern daran, daß anfangs in Abschnitt 2 die Unlösbarkeit der Gleichung

$$vx = 1$$

in  $F$  gezeigt wurde. Deshalb ist  $x$  also ein "echter" Operator aus  $Q$ , den wir mit  $d$  bezeichnen. Wir schreiben

$$(3.4) \quad d = \frac{1}{v}.$$

Für unsere Anwendungen ist es zweckmäßig, statt  $d$  den Operator

$$(3.5) \quad q = d - 1$$

einzuführen. Offensichtlich gilt also wegen  $vs = \{0, 1, 1, \dots\} = s - 1$  auch  $\frac{1}{v} = 1 + \frac{1}{s-1}$

$$(3.5) \quad q = \frac{1}{v} - 1 = \frac{1}{s-1}.$$

$q$  heißt Differenzenoperator, denn es gilt der

Satz 3:

$$(3.6) \quad q \{a_n\} = \{\Delta a_n\} + (1+q)a_0$$

mit

$$(3.7) \quad \Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Zahl  $a_0$  heißt oft auch Anfangswert. Für  $a_0 = 0$  erhält man direkt den Operator aus  $F$ , dessen Komponenten die (ersten) Differenzen  $\Delta a_n$  des Ausgangsoperators  $a \in F$  sind.

Zum Beweis von Satz 3 beachten wir, daß

<sup>1)</sup> Man beachte

$\{a\} = \{a, a, a, \dots, a, \dots\}$ , aber  $\{a_n\} = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$

$$\{a_n\} = \left\{ \sum_{k=0}^n \Delta a_k \right\} - \{\Delta a_n\} + \{a_0\}$$

gilt, nach (3.1) also

$$\begin{aligned} \{a_n\} &= s \{\Delta a_n\} - \{\Delta a_n\} + \{a_0\} = (s-1) \{\Delta a_n\} + s a_0 \\ &= \frac{1}{q} \{\Delta a_n\} + \frac{1+q}{q} a_0 . \end{aligned}$$

Multiplikation mit  $q$  liefert das Ergebnis.

Statt der ersten Differenzen kann man auch zweite und höhere Differenzen bilden. Die zweiten Differenzen sind erklärt durch

$$\begin{aligned} (3.8) \quad \Delta^2 a_n &= \Delta(\Delta a_n) = \Delta(a_{n+1} - a_n) = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n \\ &= a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n . \end{aligned}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} q^2 \{a_n\} &= q(q \{a_n\}) = q \{\Delta a_n\} + (1+q) q a_0 \\ &= \Delta^2 \{a_n\} + (1+q) (q a_0 + \Delta a_0) , \end{aligned}$$

d. h. es gilt

Satz 4:

$$(3.9) \quad q^2 \{a_n\} = \Delta^2 \{a_n\} + (1+q) (q a_0 + \Delta a_0) .$$

Satz 3 erlaubt die Darstellung von Funktionen aus  $F$  mittels des Differenzenoperators  $q$ .

Wir geben einige Beispiele:

1. Nach Satz 3 ist für  $a \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} q \{(1+a)^n\} &= \{\Delta (1+a)^n\} + 1+q = \{(1+a)^{n+1} - (1+a)^n\} + 1+q \\ &= \{a(1+a)^n\} + 1+q , \end{aligned}$$

also

$$(q-a) \{(1+a)^n\} = 1+q$$

und damit

$$(3.10) \quad \{(1+a)^n\} = \frac{q+1}{q-a} , \quad a \in \mathbb{C} .$$



2. Wegen  $\frac{q+1}{q^2} = \frac{q+1}{q} \cdot \frac{1}{q} =$

wird nach (3.5) und (3.10)

$$\frac{q+1}{q^2} = (s-1) \{1\} = \{0, 1, 1, \dots\} \{1\} = \{n\}$$

nach Definition der Multiplikation. Also wird

(3.11)  $\frac{q+1}{q^2} = \{n\} \quad .$

3. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{q+1}{q^3} &= \frac{q+1}{q^2} \cdot \frac{1}{q} = (s-1) \{n\} = \left\{ \sum_{k=0}^n k-n \right\} \\ &= \left\{ \frac{n(n+1)}{2} - n \right\} = \left\{ \frac{n(n-1)}{2} \right\} \end{aligned}$$

wird

(3.12)  $\frac{q+1}{q^3} = \left\{ \frac{n(n-1)}{2} \right\}$

**Prof Dr. H.-J. Glaeske**  
**Bereich Analysis**  
**Sektion Mathematik**  
**der FSU Jena**

## Preisaufgaben

K 55 Man löse das Gleichungssystem



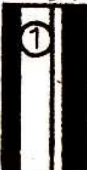
$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{3}{2} \\ x + xy + y &= 9 \end{aligned}$$

K 56 Man löse die Ungleichung



$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_3 x > 1$$

K 57 Es ist bekannt, daß  $x_1, x_2, x_3$  die Wurzeln der Gleichung  $x^3 - x^2 - 1 = 0$  sind. Man suche die Gleichung, deren Wurzeln  $y_1 = x_2 + x_3$ ,  $y_2 = x_3 + x_1$  und  $y_3 = x_1 + x_2$  sind.



K 58

②

In einem Kegel sei eine Kugel einbeschrieben. Die Oberfläche der Kugel verhält sich zur Grundfläche des Kegels wie 4:3. Gesucht ist der Winkel an der Spitze des Kegels.

K 59

①

Man löse das Gleichungssystem

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{2}}$$

$$\tan x \cdot \tan y = \frac{1}{3}.$$

K 60

②

Из всех треугольников с одинаковым основанием и одним и тем же углом при вершине найти треугольник с наибольшим периметром.

Einsendeschluss: 15.02.1979

### Lösungsbedingungen

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben. Die Lösungen sind – jede Lösung auf einem gesondertem Blatt, versehen mit Namen, Adresse und Klassenstufe des Absenders – unter dem Kennwort "WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden.

## Gibt es implizite Funktionen

### Gedanken zum Sprachgebrauch in der Mathematik

Normalerweise ist es das Bestreben der in der "Wurzel" veröffentlichten Beiträge, Begriffe klar und logisch einwandfrei einzuführen. Wer dies in diesem Artikel erwartet, wird wohl enttäuscht werden. Es geht mir nämlich eher darum, den Leser begrifflich etwas zu verwirren – um auf ein Entwicklungsproblem hinzuweisen, das der Überwindung bedarf. Es sei mir diese Ausnahme gestattet; das inhaltliche Problem ist zwar nicht so wichtig, aber ich hoffe, daß ich daran das Prinzipielle zeigen kann.



Beginnen wir zunächst mit einer populären Darlegung:

Funktionen können bekanntlich verschieden dargestellt werden - in Worten, tabellarisch, graphisch und mit Hilfe von Gleichungen. Bei den Gleichungen unterscheidet man zwischen zwei Formen, der impliziten und der expliziten. Implizit ("unentwickelt") heißt die Form, bei der zwei Variable auf einer Seite der Gleichung stehen, also z. B.  $x^2 + y^2 = 4$ . (Oder noch strenger betrachtet, wenn auf einer Seite Null steht, d. h.  $x^2 + y^2 - 4 = 0$ , was aber keinen großen Unterschied darstellt.) Explizit heißt dagegen die Form, bei der eine Variable isoliert steht, z. B.  $y = \sqrt{4 - x^2}$ .

Betrachten wir nun eine "exakte" Definition, die in verschiedenen Lehrbüchern (siehe Fichtenholz, Differential- und Integralrechnung, Band 1) und manchmal auch in Vorlesungen gegeben wird. (Die Bezeichnung "implizite Funktion" fand ich sogar in einem großen Fremdwörterbuch.)

**Definition:** Gegeben sei die Gleichung  $F(x,y) = 0$ , wobei  $F(x,y)$  ein Ausdruck ist, der beide Variable enthält. Existiert eine Funktion  $y = f(x)$ , die die Gleichung in eine Identität verwandelt, d. h.  $F(x, f(x)) \equiv 0$ , so heißt  $y = f(x)$  implizite Funktion. (Gefordert wird nur, daß die Funktion existiert - sie muß nicht unbedingt auch angegeben werden können.)

Angewendet auf das obige Beispiel schlußfolgern wir:

Zu der Gleichung  $x^2 + y^2 - 4 = 0$  existiert die Funktion  $y = \sqrt{4 - x^2}$ , die die Gleichung in eine Identität verwandelt,  $x^2 + (\sqrt{4 - x^2})^2 - 4 \equiv 0$ . Die Funktion heißt also implizit. Aber  $y$  steht doch isoliert, müßte man sie nicht besser als explizit bezeichnen? Weiter:  $y = -\sqrt{4 - x^2}$  ist ebenfalls eine implizite Funktion zu der gegebenen Gleichung. Also bestimmt die Gleichung gar nicht eindeutig eine Funktion?

Nun wird ja immer wieder betont, Definitionen können nicht wahr oder falsch sein. Dies bedeutet aber nicht, daß man über sie nicht streiten könne. Die aufgeführte Definition ist nämlich einfach sinnlos. Fichtenholz selbst schreibt eine Seite weiter, daß zwischen einer impliziten und einer expliziten Funktion eigentlich gar kein Unterschied besteht. Eine Funktion bleibt dieselbe, unabhängig von der Darstellung - sie ist nämlich de-



finiert als Menge geordneter Zahlenpaare (oder, was gleichbedeutend ist, als eindeutige Abbildung zweier Mengen).

Man muß unterscheiden zwischen der Funktion selbst und ihrer Darstellung in Gleichungsform. Verwirrend wirkt außerdem, daß mit der Schreibweise  $y = f(x)$  zum einen die Funktion selbst gemeint ist (ohne daß man sie unbedingt explizit ausdrücken kann), und zum anderen die explizite Darstellung betont wird, d. h. daß  $y$  isoliert steht.  $y = \sqrt{4 - x^2}$  ist strenggenommen nicht die Funktion selbst als mathematisches Objekt, sondern nur eine Gleichung, mit der eine Funktion definiert wird.

Es erweist sich somit, daß die oben als "populär" bezeichnete Darlegung wesentlich sinnvoller als die mehr wissenschaftlich anmutende Definition ist. Noch besser wäre folgende Sprechweise: Man bezeichnet nur Gleichungen als explizit oder implizit und unterscheidet dann, mit welcher Gleichungsform eine Funktion gegeben ist.  $x^2 + y^2 - 4 = 0$  wäre somit eine implizite Gleichung, die nur in der Umgebung bestimmter Punkte  $(x_0, y_0)$  eine Funktion definiert - ausgeschlossen werden die Punkte  $(-2, 0)$  und  $(2, 0)$ , in denen aber  $x$  als Funktion von  $y$  bestimmt ist.

Wir sehen, wie wichtig es ist, Begriffe exakt zu verwenden. Oft wird argumentiert - nicht ganz zu Unrecht -, daß sich die Begriffe so eingebürgert haben und nun nicht mehr verändert werden können. Auch internationale Bemühungen, Sprache und Symbolik der Mathematik zu vereinheitlichen, blieben ohne Erfolg. Gerade hier liegt aber die Aufgabe kommender Mathematikergenerationen, der Theoretiker ebenso wie der Dozenten. Steigendes Wissen verlangt Rationalisierung, Ökonomie im Denken und Sprechen. Und es lohnt sich im Sinne der Wissenschaftsentwicklung, auch über alte, eingebürgerte Begriffe nachzudenken - die Relativitätstheorie ist das wohl bekannteste Beispiel dafür. Damit soll nicht Umwälzung um jeden Preis befürwortet werden, aber sinnvolle Veränderung, wo es notwendig ist.

**Wolfgang Dick**  
**Student**  
**in Charkow**

---



## FDJ - Studentensommer 1978

Es ist seit Jahren zu einer guten Tradition geworden, daß sich die Studenten und die zukünftigen Studenten der Sektion Mathematik am FDJ-Studentensommer beteiligen. So waren in diesem Jahr wieder 170 Mathematik- und Lehrerstudenten in Betrieben und auf Baustellen im In- und Ausland im Einsatz. Sie arbeiteten während ihres 3-wöchigen Einsatzes an Schwerpunktaufgaben unserer Volkswirtschaft, so zum Beispiel im Rahmen der "Berlin-Initiative" der FDJ im Möbelkombinat unserer Hauptstadt, weiterhin im VEB Möbelkombinat Eisenberg, im Staatlichen Fortwirtschaftsbetrieb Schleiz sowie gemeinsam mit Studenten von Partneruniversitäten des sozialistischen Auslandes im Interlager "Drushba" in Gera.

Von unseren Jugendfreunden wurden hervorragende Produktionsleistungen vollbracht. So wurden zum Beispiel von den 60 Jugendfreunden unserer Sektion sowie der Sektion Physik im Möbelkombinat Berlin 440000 Mark erwirtschaftet, die 60 im Möbelkombinat Eisenberg arbeitenden Studenten erbrachten einen ökonomischen Nutzen von 232000 Mark.

Mehr als eintausend Mark konnten als Ausdruck der Verbundenheit mit den um ihre Freiheit kämpfenden Völkern auf das Solidaritätskonto überwiesen werden. Nicht zuletzt ist dies auch ein Resultat der guten politisch-ideologischen Arbeit, die in den Studentenbrigaden geleistet wurde.

Eine Auszeichnung für die besten Jugendfreunde unserer Sektion war die Teilnahme am Studentensommer von Partneruniversitäten in unseren sozialistischen Bruderländern. 10 Freunde konnten ihr "3. Semester" an der "Drushba-Trasse" verbringen. Acht Wochen Arbeit verschafften diesen Jugendfreunden einen interessanten Einblick in dieses gewaltige Integrationsvorhaben des RGW.

Das Leben im Studentensommer beschränkte sich jedoch nicht nur auf die Arbeit, sondern beinhaltete auch eine abwechslungsreiche Freizeitgestaltung innerhalb der Brigaden und mit den Angehörigen der Betriebe. Verschiedenste kulturell-sportliche Veranstaltungen sowie Exkursionen in die Umgebung der Einsatzorte gehör-



ten zum Programm. Den im Ausland tätigen Studenten war auf diese Weise die Möglichkeit gegeben, sich mit Land und Leuten bekannt zu machen.

Jürgen Salzmann

## Lösungen

### Aufgabe K 31

Zuerst zeichnet man sich am Punkt B der Seite c den Winkel  $\beta$  an und erhält die Gerade a. Man schlägt um B mit dem Radius  $s_b$  einen Kreisbogen. Man konstruiere sich durch den Mittelpunkt E der Seite c die Parallele zur Geraden a. Deren Schnittpunkt mit dem Kreisbogen sei D. Liegt D innerhalb des Winkels  $\beta$ , so zeichnet man eine Gerade b durch A und D, deren Schnittpunkt mit a sei C. Es gilt nach Strahlensatz  $\overline{AD} = \overline{DC}$  und außerdem nach der Konstruktion  $\overline{BD} = s_b$ . Somit ist  $\triangle ABC$  das gesuchte Dreieck. Gibt es innerhalb des Winkels  $\beta$  keinen solchen Schnittpunkt D, so ist ein Dreieck mit den gegebenen Größen nicht möglich.

### Aufgabe K 32

O. B. d. A. seien a, c,  $\varphi$  und die Diagonalen e, f bekannt. Zuerst wird die Strecke a mit den Punkten A und B gezeichnet und in B der Winkel  $\varphi$ . Auf der so erhaltenen Geraden g wird auf der Außenseite die Strecke c abgetragen, man erhält den Punkt B'. Es werden jetzt zwei Kreisbögen gezeichnet:

1. um A mit dem Radius e
2. um B' mit dem Radius f.

Existiert kein Schnittpunkt, so existiert auch kein Viereck mit den gegebenen Größen. Existiert ein Schnittpunkt, so wird er mit C bezeichnet. Durch C wird nun eine Parallele zu g und durch B eine Parallele zu  $\overline{B'C}$  gezeichnet, deren Schnittpunkt wird mit D bezeichnet.

Wie leicht zu prüfen ist, erfüllt das Viereck ABCD die Bedingungen der Aufgabe.



## Aufgabe K 33

Wir zerlegen  $z$ :  $z = x+y$ ;  $x \in G$

$$[z] = x \quad y \in [0,1)$$

$$[z^2] = [x^2 + 2xy + y^2] = x^2 + [2xy + y^2]$$

$$[z]^2 = x^2$$

Die Bedingung kann also nur erfüllt sein für

$$[2xy + y^2] = 0, \text{ oder } 0 \leq 2xy + y^2 < 1$$

$$1. \text{ Fall: } x < 0 \quad 2xy + y^2 \leq 0$$

$$2xy + y^2 = 0 \text{ für } y=0 \text{ oder } x = -\frac{y}{2} \text{ (entfällt)}$$

$$z \in \{-10, -9, \dots, -2, -1\} = M_1$$

$$2. \text{ Fall: } x \geq 0 \quad 2xy + y^2 \geq 0$$

$$\text{notwendige Bedingung: } 2xy + y^2 < 1$$

$$y^2 + 2xy - 1 < 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq y < -x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow x \leq z < \sqrt{x^2 + 1}$$

$$x=0 \quad 0 \leq z < \sqrt{1} = 1$$

$$x=1 \quad 1 \leq z < \sqrt{2}$$

$$x=2 \quad 2 \leq z$$

$\vdots$

Mit  $z \leq 2$  erhält man

$$z \in M_2 = [0, \sqrt{2}) \cup \{2\}.$$

Also erfüllen alle  $z \in M = M_1 \cup M_2$  die Bedingungen der Aufgabe.

## Aufgabe K 34

$$d = \frac{x+y}{2} = 10a+b$$

$$e = \sqrt{x \cdot y} = 10b+a$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } (x+y)^2 &= 4(10a+b)^2 \\ 4x \cdot y &= 4(10b+a)^2 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = 4 \cdot 9 \cdot 11(a-b)(a+b) \neq 0, \text{ da } x-y \neq 0.$$

Somit muß  $11(a-b)(a+b)$  eine Quadratzahl sein, also  $a+b=11$  und  $(a-b)$  Quadratzahl

1. Fall:  $a-b = 1, \quad a+b = 11$

$$a = 6$$

$$b = 5$$

$$d = 65$$

$$e = 56$$

2. Fall:  $a-b = 4, \quad a+b = 11$

keine Lösung

3. Fall:  $a-b = 9, \quad a+b = 11$

keine Lösung

$d=65, e=56$  bleibt als einzige Lösung.

Wir erhalten also das Gleichungssystem

$$\frac{x+y}{2} = 65$$

$$\sqrt{x \cdot y} = 56$$

Wir erhalten die Lösung

$$x_1 = 32, \quad y_1 = 98$$

$$x_2 = 98, \quad y_2 = 32 \quad (\text{entfällt wegen } x < y)$$

Die Lösung lautet also  $(32, 98)$ , was auch eine Probe bestätigt.

#### Aufgabe K 35

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$f(0) = a_0 = 74$$

$$f(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 19$$

$$f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 65$$

$$f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0 = 92$$

Das angegebene Gleichungssystem ist zu lösen. Es ergibt sich das Polynom

$$f(x) = -20x^3 + \frac{221}{2}x^2 - \frac{291}{2}x + 74$$

$$f(4) = -20$$

$$f(5) = -891$$



**Aufgabe K 36**

Es seien  $A_1$  und  $A_2$  die Punkte auf der Geraden;  $M$  der Mittelpunkt und  $R$  der Radius des Kreises. Nun seien  $M_1$ ,  $M_2$  die Mittelpunkte und  $r$  der Radius der beiden eingezeichneten Kreise.

Nach dem Strahlensatz gilt:

$$R : r = A_1 M : A_1 M_1$$

$$R : r = A_2 M : A_2 M_2$$

und somit  $A_1 M : A_1 M_1 = A_2 M : A_2 M_2$ .

Nach der Umkehrung des Strahlensatzes folgt die Parallelität von  $M_1 M_2$  und  $A_1 A_2$ .

---

Titelbild: von Wieslaw Fuglewicz (Wroclaw)  
entnommen aus: Polen 5/71

---

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jorg Vogel

Chefredakteur: Hans-Joachim Hauschild

Redaktion: K. Bartholmé, G. Blume, H. Gottstein, H. Schwulow, D. Meinhardt, V. Wedler, G. Müller

Anschrift: WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

Konto: Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

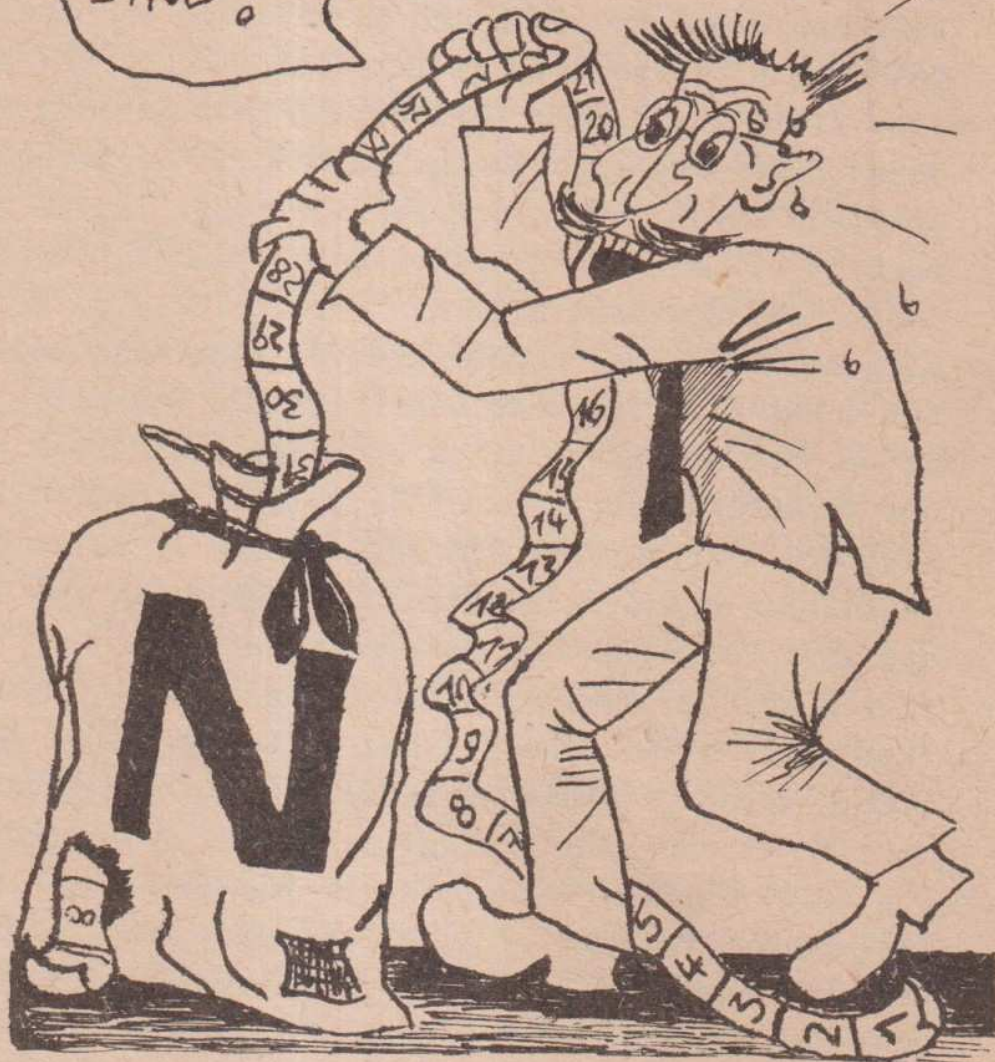
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 13. 10. 1978



JETZT WERDEN WIR  
JA SEHEN, OB ES  
WIRKLICH  $\infty$  VIELE  
SIND!



12

78

# WURZEL

zeitschrift für mathematik an  
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Ju-  
gendobjekt Studienvor-  
bereitung der Sektion  
Mathematik an der  
Friedrich-Schiller-Uni-  
versität Jena

12. Jahrgang  
Index 33 873  
Preis: 0,20 M



## Der Begriff des Unendlichen in Mathematik und Philosophie

Wenn man die Geschichte der Philosophie und die Geschichte der Mathematik betrachtet, so fällt einem auf, daß sich seit der Antike viele bedeutende Philosophen intensiv mit Mathematik beschäftigten und sich umgekehrt bedeutende Mathematiker der Philosophie zuwandten. Als Beispiele seien Plato, Aristoteles, Descartes, Leibniz, Kant, Bolzano, Cantor, Engels und Marx genannt. Die Ursachen hierfür liegen sicher u. a. in dem hohen Allgemeinheitsgrad beider Disziplinen. Bedeutsam ist aber auch der schwierige erkenntnistheoretische Charakter mathematischer Sätze. Vor allem die Frage nach dem Verhältnis von Mathematik und Wirklichkeit führt den Mathematiker auf philosophisches Gebiet und beschäftigte die Philosophen in allen Zeiten. Diese Frage ist die spezifische Form der Grundfrage der Philosophie, wie sie sich bezüglich der Mathematik stellt.

Dieses Problem gewinnt heute angesichts der Mathematisierung fast aller Wissenschaften und weiter Bereiche des gesellschaftlichen Lebens ständig an Bedeutung. In den letzten Jahren ist bei uns in der DDR, bedingt durch die objektiven Erfordernisse von Wissenschaft, Technik und Wirtschaft, das gesellschaftliche Ansehen der Mathematik merklich gewachsen. Tagungen des Zentralkomitees und Tageszeitungen beschäftigen sich mit der Entwicklung der Mathematik. Populäre Einführungen in verschiedene Bereiche der Mathematik sind in Massenaufgaben erschienen. Dagegen ist Literatur zu philosophischen Fragen der Mathematik in sehr geringem Maße vorhanden. In der Sowjetunion jedoch wird seit Ende der zwanziger Jahre kontinuierlich an philosophischen Problemen der Mathematik gearbeitet. Als Ergebnis davon erschienen zahlreiche Monographien, von denen speziell eine Arbeit von J.A. Petrov hier mit ausgewertet werden soll, deren deutsche Ausgabe 1971 beim Akademie-Verlag Berlin unter dem Titel "Logische Probleme der Realisierbarkeits- und Unendlichkeitsbegriffe" erschien.

Der Begriff des Unendlichen ist ein grundlegender und erkenntnis-



theoretisch besonders problematischer Begriff der Mathematik. Er tritt hier an sehr vielen Stellen auf, in seiner einfachsten Form in der Arithmetik der natürlichen Zahlen. Jedes Schulkind weiß, daß es zu einer natürlichen Zahl stets eine noch größere natürliche Zahl gibt. Zu dieser gibt es wieder eine größere, usw., ohne Ende. Es gibt also unendlich viele natürliche Zahlen. Sind  $a$  und  $b$  zwei voneinander verschiedene reelle Zahlen, so weiß man, daß zwischen ihnen eine von beiden verschiedene Zahl  $c$  liegt. Zwischen  $a$  und  $c$  gibt es auch wieder eine von beiden verschiedene Zahl usw. Man kann also davon sprechen, daß zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen stets unendlich viele Zahlen liegen. Die reellen Zahlen kann man sich durch Punkte einer Geraden veranschaulichen, etwa auf der  $x$ -Achse eines Koordinatensystems. Die gesamte Gerade besteht aus unendlich vielen Punkten, und zwischen je zwei verschiedenen Punkten gibt es auch unendlich viele. Entsprechend besteht auch eine Kreislinie und jede Begrenzungslinie einer geometrischen Figur aus unendlich vielen Punkten. Eine beliebige reelle Zahl, etwa die Zahl  $\pi$ , stellt selbst eine dialektische Einheit von Endlichem und Unendlichem dar. Als gegebene Zahl trägt sie den Charakter von etwas Endlichem. Andererseits ist sie nur in Form eines unendlichen Dezimalbruches darstellbar.

Wie kommt es nun, daß der Mensch den Begriff des Unendlichen begreift? Was sind die erkenntnistheoretischen Grundlagen dieses Begreifens? Bereits Friedrich Engels sagte hierzu: "Das mathematische Unendliche ist aus der Wirklichkeit entlehnt, wenn auch unbewußt, und kann daher auch nur aus der Wirklichkeit und nicht aus sich selbst, aus der mathematischen Abstraktion erklärt werden" (F. Engels: Dialektik der Natur. In: Marx/Engels, Werke Band 20, S. 534).

Es gibt verschiedene Formen der Abstraktion der Unendlichkeit, die alle in der Mathematik Verwendung finden. Die beiden wesentlichsten Abstraktionen sind die der potentiellen Unendlichkeit und der aktualen Unendlichkeit.

Ein Beispiel für den Begriff der potentiellen Unendlichkeit ist die unendliche Folge der natürlichen Zahlen  $0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ , die man durch aufeinanderfolgendes Hinzufügen jeweils einer 1 zur vorhergehenden Zahl erhält, wobei die Ausgangszahl 0 ist.



Man spricht von potentieller Unendlichkeit wegen des unmittelbaren Zusammenhangs mit der Abstraktion der potentiellen Realisierbarkeit. Diese besteht in der Annahme der folgenden idealisierten Bedingungen für den Aufbauprozeß gewisser Objekte:

1. Es wird angenommen, daß die Prozesse beim Aufbau von Objekten diskret sind, d. h. in einzelne genau voneinander unterscheidbare Schritte zerlegbar sind,
2. daß Regeln oder Algorithmen existieren, nach denen der Aufbau der Objekte schrittweise erfolgt und
3. daß der Aufbauprozeß unabhängig von den vorhandenen materiellen Bedingungen ist und daß eine beliebig große, jedoch endliche Anzahl von Schritten stets vollzogen werden kann.

Im Rahmen dieser Abstraktion kann man nicht davon sprechen, daß die Realisierung aller Schritte möglich ist. Diese Behauptung wäre widersprüchlich, denn wenn es für jeden Schritt einen darauffolgenden gibt, kann es keinen letzten Schritt geben.

Die erkenntnistheoretischen Grundlagen für das Begreifen der potentiellen Realisierbarkeit und der potentiellen Unendlichkeit liegen in der Auseinandersetzung des Menschen mit der Natur, insbesondere im Produktionsprozeß. Dabei werden bestimmte Handlungen ständig wiederholt. Diese wiederholten Tätigkeiten bilden letztlich die Grundlage für ein Begreifen einer Regel, deren wiederholte Anwendung immer wieder zu etwas Neuem führt, etwa der Regel der Konstruktion der natürlichen Zahlen.

Es ist klar, daß die Abstraktionen der potentiellen Realisierbarkeit und der potentiellen Unendlichkeit starke Idealisierungen realer Prozesse darstellen. Die Ergebnisse von Theorien, die von diesen Abstraktionen ausgehen, werden jedoch erfolgreich bei der Lösung praktischer Aufgaben benutzt. Das ist möglich, weil diese Lösung nur mit einer gewissen Genauigkeitsstufe durchgeführt wird. So ist z. B. die Berechnung des Verhältnisses von Umfang und Durchmesser eines Kreises, d. h. der Zahl  $\pi = 3,1415\dots$ , ein potentiell unendlicher Prozeß. Man kann dieses Verhältnis praktisch nur mit einer bestimmten Genauigkeitsstufe verwenden, indem man sich auf eine endliche Anzahl von Zeichen der Zahl  $\pi$  beschränkt. Genauso ist es mit allen Anwendungen der numerischen Mathematik und Rechentechnik. Ohne solche Bedingungen wäre eine praktische Verwendung der Abstraktion der potentiellen Unendlich-



keit unmöglich. Andererseits wären diese Anwendungen aber auch unmöglich, wenn ihnen nicht theoretische Untersuchungen vorausgingen, die vollständig auf der Abstraktion der potentiellen Unendlichkeit beruhen.

Da der Begriff der potentiellen Unendlichkeit auf einer Idealisierung der Realisierbarkeit beruht, kann er keine unmittelbare Abbildung derjenigen Prozesse sein, die sich in der Natur und im Denken vollziehen. In der Geschichte der Wissenschaft gibt es jedoch nicht wenige Versuche, den Prozessen der objektiven Realität genau den Charakter zuzuschreiben, den die mathematischen Vorstellungen von der potentiellen Unendlichkeit haben. Gerade dagegen haben sich die Klassiker der marxistischen Philosophie ständig gewandt. Engels widmete in seinem "Anti-Dühring" einen ganzen Abschnitt der Kritik Dührings in Bezug auf die Unendlichkeit.

In der objektiven Realität besitzen die Prozesse i. a. nicht einen solchen Charakter, der es gestatten würde, sie in voneinander verschiedene, streng unterscheidbare Schritte zu zerlegen. Engels spricht davon, daß derartige Vergrößerungen und Idealisierungen der realen Prozesse ein absolutes ideelles Erfordernis der Mathematik sind, jedoch ist das ideelle Bedürfnis des Mathematikers weit davon entfernt, ein Zwangsgesetz für die reale Welt zu sein. Der große Erkenntniswert solcher Vergrößerungen liegt gerade darin, daß sie es gestatten, die uns interessierenden Gesetzmäßigkeiten der realen Prozesse in "reiner" Form herauszuheben. Auf Grund der Vergrößerungen ist man nicht berechtigt, die realen Prozesse mit ihren ideellen Vorstellungen zu identifizieren, weil diese Vorstellungen nur angenäher-ten Charakter haben. Das Wissen um einen möglichen Fehler drückt gerade ein absolutes Moment der entsprechenden relativen Wahrheit aus.

Eine wichtige Rolle spielt die Abstraktion der potentiellen Realisierbarkeit für die Algorithmentheorie, die mathematische Logik, die Theorie der abstrakten Automaten und ähnliche Disziplinen, also in der theoretischen Kybernetik, die ihrerseits von Wichtigkeit für die technische Kybernetik und damit für unmittelbare praktische Anwendungen ist. Es geht hier im wesentlichen um konstruktive Objekte. Das sind solche, die durch ein effek-



tives, exaktes und vollständiges Aufbauverfahren im Sinne eines Algorithmus angegeben werden, also unter Zugrundelegung der Abstraktion der potentiellen Realisierbarkeit. Wird für ein Objekt mehr vorausgesetzt, ist es nicht konstruktiv. So ist z. B. die Menge der natürlichen Zahlen als Ganzes nicht konstruktiv, denn es existiert kein Algorithmus für den Aufbau dieses Objekts. Man spricht hier von aktueller Unendlichkeit.

Unter aktueller Unendlichkeit kann man eine aktual unendliche Menge verstehen, ohne sie jedoch als Ergebnis eines unendlichen Prozesses aufzufassen, ohne sie überhaupt mit irgendwelchen Prozessen in Zusammenhang zu bringen. Der aktuelle Charakter der Menge bedeutet in diesem Falle, daß von dem Erzeugungsprozeß aller Elemente, aus denen die gegebene Menge besteht, abstrahiert wird. Dies gibt die Möglichkeit, eine solche Menge als ein Objekt zu denken, das unmittelbar mit allen seinen Elementen gegeben ist.

In der allgemeinen Mengenlehre versteht man unter einer unendlichen Menge eine solche Menge  $M$ , die eine echte Teilmenge  $M_1$  derart enthält, daß zwischen  $M$  und  $M_1$  eine eindeutige Abbildung besteht, d. h.  $M$  und  $M_1$  sind äquivalent (gleichmächtig). So ist die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 unendlich, obwohl sie einen "Anfang", d. h. eine kleinste Zahl 0, und ein "Ende", d. h. eine größte Zahl 1, enthält. Diese Menge hat aktuellen Charakter, denn die zu ihr gehörenden Zahlen stellt man sich als unmittelbar und gleichzeitig gegeben vor. Eine Strecke ist die Menge aller Punkte einer Geraden zwischen zwei vorgegebenen Punkten. Auch diese Punkte stellt man sich alle unmittelbar und gleichzeitig gegeben vor, d. h. als aktual unendliche Menge. Eine reelle Funktion einer reellen Veränderlichen ist die Gesamtheit der reellen Zahlen mit den diesen jeweils zugeordneten Funktionswerten. In der Analysis beschäftigt man sich mit solchen Funktionen als fertigen Objekten, d. h. als aktual unendliche Mengen. Schließlich ist eine reelle Zahl selbst aktual unendlich, denn sie ist ja ein unendlicher Dezimalbruch, man stellt sich aber alle Ziffern als unmittelbar und gleichzeitig gegeben vor.

Durch die Definition der Unendlichkeit im Rahmen der Mengenlehre werden nur aktual unendliche Mengen erfaßt, und nicht konstruktiv unendliche Mengen, und es ist leicht zu sehen, daß der Auf-



bau aller Elemente solcher Mengen nicht mit einem effektiven Aufbauprozess verknüpft ist.

Beide hier diskutierten Abstraktionen der Unendlichkeit werden seit der Antike in der Mathematik verwendet. In welcher Beziehung stehen nun aber diese Abstraktionen zur realen Unendlichkeit, welches ist ihre adäquate Widerspiegelung? Die reale Unendlichkeit der Materie ist eine dialektische Einheit quantitativer und qualitativer Bestimmungen, von Kontinuität und Diskontinuität, von Unendlichem und Endlichem. Sie darf nicht als eine rein potentielle oder aktuelle Unendlichkeit aufgefaßt werden. (vgl. Philosophisches Wörterbuch, Leipzig 1969) Beide Abstraktionen spiegeln verschiedene Seiten der objektiven Realität wider, die sich in einer dialektischen Einheit befinden. Das ist der Grund dafür, daß Theorien, die die eine oder andere Abstraktion der Unendlichkeit verwenden, nur beschränkte Anwendungsbereiche haben. Insbesondere hängen die logischen Mittel, die jeweils verwendet werden dürfen, von diesen Anwendungsbereichen ab. Es gibt Aussagen, die in der klassischen Mathematik, in der die Abstraktion der aktuellen Unendlichkeit akzeptiert wird, als wahr gelten, während sie in der konstruktiven Mathematik, in der nur die Abstraktion der potentiellen Unendlichkeit zugelassen ist, falsch sind. Ein einfaches Beispiel ist folgende Aussage:

"Für beliebige reelle Zahlen  $x$  und  $y$  gilt:

es ist  $x = y$  oder es ist  $x \neq y$ ."

Diese Aussage ist in der klassischen Mathematik wahr (hier ist eine Aussage der Form " $p$  oder nicht  $p$ " immer wahr, Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten), aber in der konstruktiven Mathematik falsch. Haben wir etwa die reellen Zahlen  $x = 0,123521\dots$  und  $y = 0,123521\dots$ , so kann man unter Zugrundelegung der Abstraktion der aktuellen Unendlichkeit sagen, daß  $x = y$  oder  $x \neq y$  wahr ist. Dieses Urteil kann man aber unter Zugrundelegung der Abstraktion der potentiellen Unendlichkeit nicht aussprechen, da bei dem potentiell unendlichen Prozeß des ziffernweisen Vergleichs von  $x$  und  $y$  möglicherweise niemals der Zeitpunkt eintritt, zu dem man über  $x = y$  oder  $x \neq y$  entscheiden kann (falls beide Zahlen im aktuellen Sinne identisch sind). Man kann also



die Mittel der klassischen Logik in der konstruktiven Mathematik nur beschränkt verwenden, sonst treten Widersprüche auf.

Ein weiteres Beispiel ist der folgende Satz von Bolzano-Cauchy:

Wenn eine Funktion  $f$  in einem geschlossenen Intervall  $[a, b]$  definiert und stetig ist und an den Enden dieses Intervalls Werte mit verschiedenen Vorzeichen annimmt, so existiert ein Punkt  $c$ ,  $a < c < b$ , derart, daß  $f(c) = 0$  ist.

Für das Auffinden dieses Punktes  $c$  existiert kein Algorithmus, das Resultat ist nicht konstruktiv. Ähnliche Resultate gibt es sehr viele in der klassischen Mathematik. Vom konstruktiven Standpunkt aus kann man solche Resultate nicht als wahre Behauptungen akzeptieren, denn der Begriff der Wahrheit selbst wird hier mit der algorithmischen Berechenbarkeit verknüpft. Solche Resultate sind aber für die Mathematik nicht nutzlos. Wenn es auch keine allgemeine Methode zur algorithmischen Lösung des Problems von Bolzano-Cauchy gibt, so ist die nichtkonstruktive Lösung auf alle Fälle in heuristischer Hinsicht nützlich. In jedem konkreten Fall läßt sich der Punkt  $c$  mit  $f(c) = 0$ , zumindest annähernd, berechnen, und hierin liegt die große praktische Bedeutung dieses Satzes.

Nichtkonstruktive Methoden sind also für bestimmte Ziele und unter bestimmten Bedingungen ebenso berechtigt wie konstruktive Methoden.

Interessant ist nun, daß es auch umgekehrt Sätze gibt, die in der konstruktiven Mathematik wahr und in der klassischen Mathematik falsch sind. Diese Tatsache hat große erkenntnistheoretische Bedeutung. Sie zeigt, daß die Abstraktion der aktuellen Unendlichkeit und damit die klassische Mathematik von solchen Eigenschaften abstrahiert, von denen die konstruktive Mathematik nicht abstrahiert. Sie widerspiegelt zugleich eine allgemeine Gesetzmäßigkeit der marxistisch-leninistischen Erkenntnistheorie. Keine Abstraktion aus der objektiven Realität und somit auch keine Theorie kann alle Eigenschaften und Seiten der realen Objekte, mit denen sie sich beschäftigt, vollständig, in allen Einzelheiten widerspiegeln. Es treten dabei immer Vergröberungen, Vereinfachungen und Idealisierungen auf. Die Widerspiegelung der objektiven Realität in Form von Theorien muß beweglich sein.



Die Voraussetzungen, die sich auf die akzeptierten Idealisierungen beziehen, müssen möglichst allseitig berücksichtigt werden. Bei der Anwendung der Theorien können immer Widersprüche und Mängel auftreten, die eine Erweiterung der Theorien erforderlich machen. Dabei werden solche Annahmen fallen gelassen, die Faktoren ausdrücken, von denen die Theorie absehen kann und die zu den Widersprüchen führten, und durch neue Idealisierungen ersetzt, die gestatten, das interessierende Wesen eines Objektes besser herauszuarbeiten. Wenn jedoch das wesentlich wird, was sich außerhalb der Grenzen dieser Idealisierungen befindet, so sind neue Idealisierungen nötig und andere müssen fallen gelassen werden, usw. Bildlich ausgedrückt erhält man eine Entwicklung des Erkenntnisprozesses in der Form einer Spirale. Die Schwierigkeiten bei der Widerspiegelung der objektiven Realität und das Problem der Wahrheit der Theorien werden dabei nur im relativen Sinne gelöst, denn die neuen Idealisierungen sind mit neuen erkenntnistheoretischen Schwierigkeiten verbunden und stellen auch nur relative Wahrheiten dar. Eine absolute Lösung der Schwierigkeiten und Erreichung der absoluten Wahrheit ist auch wegen der Unbegrenztheit des Erkenntnisprozesses nicht möglich.

Dr. Gerhard Lischke  
Bereich Kybernetik

## Ein Operatorenkalkül zur Lösung Linearer Differenzengleichungen 2. Teil

4. Nach diesen Vorbereitungen wollen wir eine Anwendung unserer Sätze auf die Lösung linearer Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten geben. Diese kann man, wenn wir uns auf Gleichungen höchstens 2. Ordnung beschränken, in der Gestalt

$$\alpha_0 x_n + \alpha_1 x_{n+1} + \alpha_2 x_{n+2} = f_n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

oder in der Form

$$\beta_0 \Delta^2 x_n + \beta_1 \Delta x_n + \beta_2 x_n = f_n$$

schreiben, wobei  $x = \{x_n\}$  gesucht wird,  $f = \{f_n\}$  und die Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  als reelle oder komplexe Zahlen gegeben



seien. Eine Umrechnung beider Formen ineinander ist nach Definition der Differenzen leicht möglich. Nach Definition ist

$$(4.1) \quad x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$$

und mittels (3.8) ergibt sich

$$(4.2) \quad x_{n+2} = \Delta^2 x_n + 2\Delta x_n + x_n .$$

Das Lösungsschema solcher Differenzengleichungen sieht folgendermaßen aus:

- Überführung von (4.1) oder (4.2) in Funktionen von  $q$  unter Verwendung der Sätze 3 und 4 und eventueller Umrechnungsformeln für  $f$  als Operator in  $q$ .
- Auflösung der entstehenden linearen Gleichung nach den  $x_n$ .
- Rückübersetzung der  $x_n$  als "Funktionen von  $q$ " in "Funktionen von  $n$ ".

Wir betrachten jetzt einige Beispiele:

$$1. \quad \Delta x_n = n, \quad x_0 = a$$

Nach (3.6) folgt mit (3.11) und (3.12) und (3.5)

$$q \{x_n\} - (1+q)a = \{n\}$$

und daraus

$$\begin{aligned} \{x_n\} &= \frac{1}{q} \{n\} + \frac{1+q}{q} a = \frac{q+1}{q} + sa \\ &= \left\{ \frac{n(n-1)}{2} \right\} + \{a\} = \left\{ \frac{n(n-1)}{2} + a \right\} . \end{aligned}$$

Also wird die Lösung

$$x_n = \frac{n(n-1)}{2} + a .$$

Durch Einsetzen überzeugt man sich sofort davon, daß damit eine Lösung unserer Aufgabe gefunden wurde.

$$2. \quad \Delta^2 x_n = 0, \quad x_0 = 1, \quad \Delta x_0 = -1$$

Wieder liefern die Sätze 3,4 sofort

$$q^2 \{x_n\} = q(q+1) - (q+1)$$

und damit wegen (3.10), (3.11)

$$\{x_n\} = \frac{q+1}{q} \cdot \frac{q+1}{q^2} = \{1\} - \{n\} = \{1-n\} ,$$

also  $x_n = 1-n$ .

3.  $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0, \quad x_0=1, x_1=0$

Die Umschreibung mittels (4.1), (4.2) liefert die äquivalente Aufgabe

$$\Delta^2 \{x_n\} - 3\Delta x_n + 2x_n = 0, \quad x_0=1, \quad \Delta x_0 = -1.$$

Mit den Sätzen 3 und 4 erhalten wir also

$$q^2 \{x_n\} - (1+q)q + 1+q - 3q \{x_n\} + 3(1+q) + 2 \{x_n\} = 0$$

und das ergibt

$$\{x_n\} = (1+q) \frac{q}{q^2-3q+2} - (1+q) \frac{4}{q^2-3q+2}.$$

Nun ist  $\frac{q}{q^2-3q+2} = \frac{2}{q-2} - \frac{1}{q-1}$  und  $\frac{4}{q^2-3q+2} = \frac{4}{q-2} - \frac{4}{q-1}$

wie man leicht nachrechnet. Damit wird

$$\{x_n\} = \frac{2(q+1)}{q-2} - \frac{q+1}{q-1} - \frac{4(q+1)}{q-2} + \frac{4(q+1)}{q-1} = \frac{3(q+1)}{q-1} - \frac{2(q+1)}{q-2}.$$

Mit (3.10) liefert das sofort

$$\{x_n\} = \{3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n\}, \text{ also } x_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n.$$

4. Schließlich berechnen wir die Elemente der Folge der Fibonacci'schen Zahlen, denen ja eine längere Serie von "Wurzel"-Artikeln mit dem Titel "Der Sieger von Palermo" gewidmet war. Die definierende Differenzengleichung ist

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad x_0=0, \quad x_1=1, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Mittels (4.1) und (4.2) ergibt sich sofort

$$\Delta^2 x_n + \Delta x_n - x_n = 0, \quad x_0=0, \quad \Delta x_0=1.$$

Die Sätze 3 und 4 liefern

$$(q^2+q-1) \{x_n\} - (1+q) = 0.$$

Sind  $u, v$  die Wurzeln von  $q^2+q-1=0$ , so bestätigen sie gleich, daß

$$\{x_n\} = \frac{1+q}{u-v} \left[ \frac{1}{q-u} - \frac{1}{q-v} \right].$$

Mit (3.10) liefert das

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{(1+u)^n}{u-v} - \frac{(1+v)^n}{u-v} \right\}.$$

Setzt man  $\tau=1+u$ ,  $\hat{\tau}=1+v$ , so gilt nach dem Vietaschen Wurzelsatz wegen  $u+v=-1$  und  $uv=-1$ , daß  $\tau+\hat{\tau}=1$  und  $\tau\hat{\tau}=-1$ ,



d. h.  $\tau$  und  $\hat{\tau}$  sind Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Damit ergibt sich sofort  $\tau = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ,  $\hat{\tau} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$  und  $u - v = \tau - \hat{\tau} = \sqrt{5}$  und schließlich die aus dem Artikel (III) der oben genannten Serie ("Wurzel" 3/78) bekannte Binetsche Formel

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau^n - \hat{\tau}^n), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

5. Zum Schluß sei bemerkt, daß eine Übertragung unserer Betrachtungen auf Differenzengleichungen höherer Ordnung ohne weiteres möglich ist. Für die Anwendung des Verfahrens ist natürlich eine möglichst umfangreiche Übersetzungstabelle für "Funktionen von  $q$ " in "Funktionen von  $n$ " von großem Nutzen. Ihrem Tatendrang in dieser Richtung sind keine Grenzen gesetzt.

**Prof. Dr. Hans-Jürgen Glaeske**  
**Bereich Analysis**

## Preisaufgaben

K 61 Es ist zu zeigen, daß für alle  $n \geq 1$  die Zahl

$$5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$$

durch 19 teilbar ist.

K 62 Es ist zu zeigen, daß man aus 1000 gegebenen natürlichen

Zahlen stets solche Zahlen auswählen kann, deren Summe durch 1000 teilbar ist.

K 63 Man finde alle Lösungen  $x$  der folgenden Gleichung (in Abhängigkeit von  $a$ )

$$x = a - \sqrt{a^2 - x} \sqrt{x^2 + a^2}$$

K 64 Man beweise folgende Aussage:

Aus  $a \cdot \tan \alpha + b \cdot \tan \beta = (a+b) \tan \frac{\alpha + \beta}{2}$

folgt

$$a \cos \beta = b \cos \alpha.$$

K 65 Man zeige

①

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

K 66

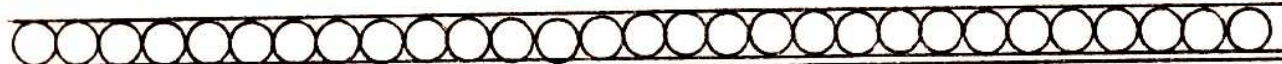
②

Доказать, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон четырёхугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырёхугольник – трапеция.

Einsendeschluß: 15. 3. 1978

Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben. Die Lösungen sind – jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse und Klassenstufe des Einsenders – unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgaben" an uns zu senden.

**Lösungen**

Aufgabe K 37

Eine Zahl  $n$  hinterläßt bei Division durch 9 den gleichen Rest wie ihre Quersumme  $q(n)$

$$n \equiv k \pmod{9} \iff q(n) \equiv k \pmod{9} \quad 0 \leq k \leq 8$$

Nach Aufgabenstellung gilt  $q(n) = q(5n)$

$$q(5n) \equiv k \pmod{9}, \text{ aber andererseits}$$

$$q(5n) \equiv 5k \pmod{9}$$

$$\text{Also } 5k \equiv k \pmod{9}$$

$$1. \text{ Fall: } k \neq 0$$

$$5 \equiv 1 \pmod{9} \quad \text{Widerspruch!}$$

$$2. \text{ Fall: } k = 0$$

$$n \equiv 0 \pmod{9}$$

Also ist  $n$  durch 9 teilbar, wenn  $n$  und  $5n$  die gleiche Quersumme besitzen.



Aufgabe K 38

Wir nehmen an,  $2^n - 1$  sei Quadratzahl

$$2^n - 1 = k^2$$

$$2^{n-2} = k^2 - 1 = (k+1)(k-1)$$

$$2^{n-1} - 1 = \frac{(k+1)(k-1)}{2}$$

$$1. \text{ Fall: } n = 1 \quad 2^1 - 1 = 1 = 1^2$$

$$2. \text{ Fall: } n > 1 \quad 2^{n-1} - 1 \equiv 1 \pmod{2}$$

$$\frac{(k+1)(k-1)}{2} \equiv 1 \pmod{2}$$

$$a) \quad k \equiv 0 \pmod{2}$$

$$(k+1)(k-1) \equiv 1 \pmod{2}$$

$$\frac{(k+1)(k-1)}{2} \notin \mathbb{N} \quad \text{entfällt}$$

$$b) \quad k \equiv 1 \pmod{2}$$

$$(k+1)(k-1) \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\frac{(k+1)(k-1)}{2} \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{Widerspruch!}$$

Daraus folgt, daß nur für  $n=1$   $2^n - 1$  eine Quadratzahl ist.

Aufgabe K 39

Im Falle  $\alpha = 0$  entartet das Dreieck, so daß wir diesen Fall nicht untersuchen werden.

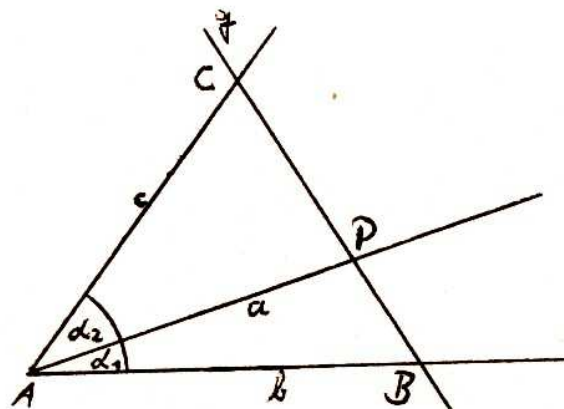
Durch Berechnung der Flächeninhalte der Dreiecke ergibt sich:

$$\frac{1}{2} b \cdot a \cdot \sin \alpha_1 + \frac{1}{2} c \cdot a \cdot \sin \alpha_2 =$$

$$\frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

Daraus folgt:

$$c = \frac{a \cdot b \cdot \sin \alpha_1}{b \cdot \sin \alpha - a \cdot \sin \alpha_2}$$



$$a = \overline{AP}$$

$$b = \overline{AB}$$

$$c = \overline{AC}$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

Für den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC ergibt sich:

$$A = f(b) = \frac{a \cdot b^2 \cdot \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha}{2(b \cdot \sin \alpha - a \cdot \sin \alpha_2)}, \quad b > 0$$

$f(b)$  nimmt sein Minimum für

$$b = 2a \cdot \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha}$$

an.

Der Flächeninhalt beträgt dann:

$$A = 2a^2 \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin \alpha}$$

Durch die Angabe von  $b$  ist die Gerade  $g$  eindeutig bestimmt.

#### Aufgabe K 40

Unter der Bedingung, daß A, B bzw. C der Täter war, stellt man eine Wahrheitstabelle für die Aussagen auf:

|       | Täter |   |   |
|-------|-------|---|---|
|       | A     | B | C |
| A: 1. | 0     | 1 | 1 |
| 2.    | 1     | 0 | 1 |
| B: 1. | 0     | 1 | 1 |
| 2.    | 0     | 0 | 1 |
| C: 1. | 1     | 1 | 0 |
| 2.    | 1     | 0 | 0 |

Wie leicht zu erkennen ist, sind die Bedingungen der Aufgabe nur dann erfüllt, wenn A der Täter war.

#### Aufgabe K 41

$$\begin{aligned} \tan 7,5^\circ &= \frac{\sin 7,5^\circ}{\cos 7,5^\circ} = \frac{2 \cdot \sin 37,5^\circ \cdot \sin 7,5^\circ}{2 \cdot \sin 37,5^\circ \cdot \cos 7,5^\circ} = \\ &= \frac{\cos 30^\circ - \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ + \sin 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}} = \end{aligned}$$



$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) =$$

$$\tan 7,5^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2$$

=====

**Aufgabe K 42**

Die Eigengeschwindigkeit des Bootes sei  $v_B$ .

Nach Aufgabenstellung gilt dann:

$$3 \text{ h} \leq \frac{10 \text{ km}}{v_B + 1 \text{ km/h}} + \frac{6 \text{ km}}{v_B - 1 \text{ km/h}} \leq 4 \text{ h}$$

Nach Umstellung ergibt sich:

$$4 \text{ km/h} \leq v_B \leq \frac{8 + \sqrt{61}}{3} \text{ km/h} \approx 5,3 \text{ km/h}$$

=====

## Mathematik im Alltag

Kundin: Gestern hatte ich meinen Sohn einkaufen geschickt.

Er sollte  $2\frac{1}{2}$  kg Äpfel kaufen. Als ich die Tüte zu Hause nachwog, waren nur 2 kg darin.

Verkäuferin: Vielleicht hätten Sie Ihren Sohn mal wiegen sollen!

**Herausgeber:** Jugendobjekt „Studienvorbereitung“, Leiter: Jörg Vogel

**Chefredakteur:** Hans-Joachim Hauschild

**Redaktion:** G. Blume, H. Gottstein, H. Schwulow, D. Meinhardt, V. Wedler, G. Müller

**Anschrift:** WURZEL, 69 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik

**Konto:** Postscheckkonto 180 45 beim Postscheckamt Erfurt

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M, Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 27. 10. 1978.