
W.G. Scherwatow

Hyperbelfunktionen

Übersetzung: Gerhard Ränike
Kleine Ergänzungsreihe für Mathematik VIII
Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956
Abschrift und LaTeX-Satz: 2023

<https://mathematikalpha.de>

Aus dem Vorwort zur russischen Ausgabe

Das vorliegende Bändchen enthält eine elementare Darstellung der Theorie der sogenannten Hyperbelfunktionen, die sich in vielem ähnlich wie die gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen verhalten.

Auf Hyperbelfunktionen stößt man bei den verschiedenartigsten physikalischen und technischen Untersuchungen; äußerst wichtig sind sie in der Lobatschewskischen Geometrie, wo sie in allen Formeln der Dreiecksberechnung vorkommen [siehe etwa A.P. Norden, "Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie", Moskau 1953 (Übersetzung beim Deutschen Verlag der Wissenschaften in Vorbereitung)]; der Inhalt des IX. Kapitels dieses Buches stimmt ungefähr mit dem dieses Bändchens überein].

Ganz unabhängig von diesen Anwendungen ist aber die Theorie der Hyperbelfunktionen auch von großem Interesse für Schüler und Lehrer der Oberschule; die Analogie zwischen den hyperbolischen und den trigonometrischen Funktionen wirft nämlich ein neues Licht auf viele Fragen der Trigonometrie.

Das Bändchen umfasst drei Kapitel. Das erste behandelt die sogenannte hyperbolische Drehung sowie ihre Anwendung auf die Untersuchung der Eigenschaften der Hyperbel und ist auch an sich von Interesse.

Das wichtigste ist das zweite Kapitel, in dem die Elemente der Theorie der Hyperbelfunktionen dargelegt werden. Kapitel III behandelt den Zusammenhang zwischen Hyperbelfunktionen und Logarithmen (siehe auch Band X dieser Reihe: A. I. Markuschewitsch, "Flächeninhalte und Logarithmen").

Dem Leser dieses Bändchens sei noch empfohlen: B. N. Delaunay und D. A. Raikow, "Analytische Geometrie" I. Teil, Moskau-Leningrad 1948.

Dort findet sich umfangreiches Material, das sich an die Darlegungen des ersten Kapitels anschließt.

Das Bändchen ist für Teilnehmer und Leiter mathematischer Arbeitsgemeinschaften an Schulen gedacht; es kann aber auch bei der Arbeit an Hochschulen verwendet werden. Im dritten Kapitel sind die komplizierteren Abschnitte klein gedruckt, sie können von Schülern übergangen werden. Im übrigen wird beim Leser nicht mehr als der Stoff der Oberschule vorausgesetzt.

Der Verfasser dankt I. M. Jaglom aufrichtig für seine Mitarbeit und seine Hinweise bei der Niederschrift dieses Büchleins.

W. G. Scherwatow

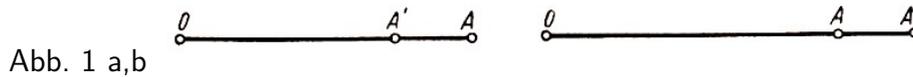
Inhaltsverzeichnis

1 Die hyperbolische Drehung	4
1.1 Streckung in Bezug auf eine Gerade	4
1.2 Die hyperbolische Drehung	9
1.3 Einige Eigenschaften der Hyperbel	12
2 Die Hyperbelfunktionen	17
2.1 Die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel	17
2.2 Definition und wichtigste Eigenschaften der Hyperbelfunktionen	18
2.3 Die Additionstheoreme	21
3 Der Zusammenhang mit den Logarithmen	26
3.1 Die geometrische Theorie der Logarithmen	26
3.2 Analytische Ausdrücke für die Hyperbelfunktionen	31
3.3 Die Eulerschen Formeln	35

1 Die hyperbolische Drehung

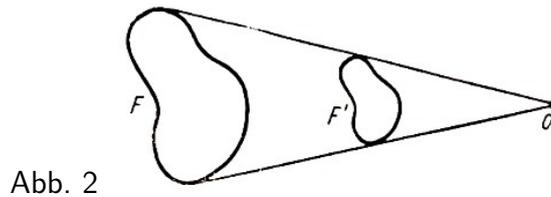
1.1 Streckung in Bezug auf eine Gerade

Bei der Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben wird oft die Streckung in Bezug auf einen Punkt verwendet (diese Transformation nennt man auch Homothetie oder Ähnlichkeitstransformation). Eine Ähnlichkeitstransformation in Bezug auf den Punkt O (das sogenannte Zentrum der Streckung) mit dem Streckungskoeffizienten k besteht darin, dass jeder Punkt A der Ebene in den Punkt A' auf dem Strahl OA übergeht, wobei $\frac{OA'}{OA} = k$ ist, d.h., es gilt $OA' = k \cdot OA$ (Abb. 1a,b).

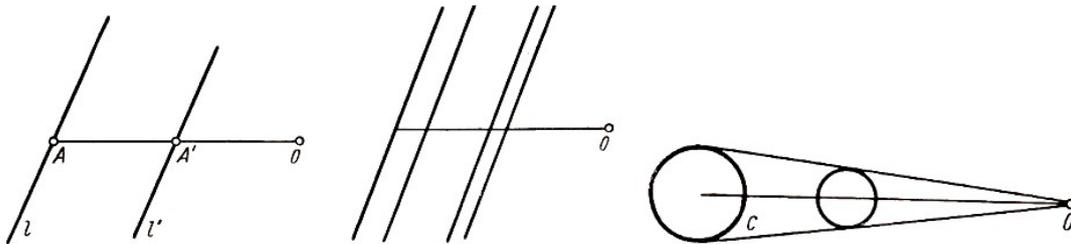


Ist der Streckungsfaktor k kleiner als 1, so ist $OA' < OA$ (Abb. 1a); man spricht hier gelegentlich von einer Stauchung bezüglich des Punktes O . Der Punkt O bleibt bei einer Ähnlichkeitstransformation mit O als Zentrum fest (ist Fixpunkt der Abbildung).

Jede Figur F geht bei einer Streckung bezüglich O in eine Figur F' über, die zu F (mit O als Ähnlichkeitszentrum und k als Ähnlichkeitskoeffizienten) ähnlich ist (Abb. 2).

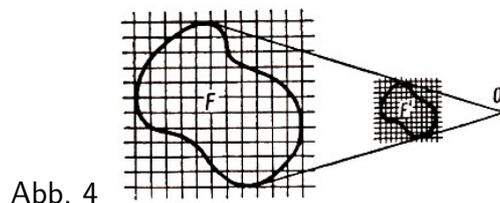


Ist $k < 1$, so wird die Figur kleiner, ist $k > 1$, so wird sie größer. Jede Gerade geht bei der Streckung bezüglich eines Punktes wieder in eine Gerade über (Abb. 3a); parallele Geraden gehen in parallele Geraden über (Abb. 3b). Ebenso geht jeder Kreis bei der Streckung bezüglich eines Punktes wieder in einen Kreis über (Abb. 3c).



Alle Strecken auf der Ebene werden bei der Streckung bezüglich eines Punktes in gleichen Verhältnis k verkleinert (oder vergrößert). Die Flächeninhalte aller Figuren werden ebenfalls im gleichen Verhältnis k^2 verkleinert (oder vergrößert).

Sei nämlich F eine ebene Figur, so bedecken wir die Ebene mit einem Netz aus kleinen Quadraten (Abb. 4).



Die Fläche F ist nun angenähert gleich der Anzahl der von der Randkurve eingeschlossenen Quadrate, multipliziert mit dem Flächeninhalt eines einzelnen Quadrats. Der Fehler ist um so kleiner, je kleiner die Quadrate des Netzes sind.

Wählen wir die Quadrate genügend klein, so lässt sich der Fehler kleiner als eine vorgegebene (beliebig kleine) Zahl σ machen. Bei einer Ähnlichkeitstransformation in Bezug auf einen Punkt geht das Quadratnetz in ein neues Quadratnetz über; die Figur F geht in F' über, die eben soviel Quadrate des neuen Netzes wie F vom ursprünglichen Netz einschließt (die Quadrate des neuen Netzes sind kleiner, wenn $k < 1$ ist, größer, wenn $k > 1$ ist).

Der Flächeninhalt von F' ist annähernd gleich der Anzahl der überdeckten Quadrate, multipliziert mit dem Flächeninhalt eines einzelnen Quadrates.

Nun ist der Flächeninhalt jedes neuen Quadrates gleich dem Flächeninhalt des ursprünglichen, multipliziert mit k^2 (da jede Seite des Quadrates mit k multipliziert wird). Der Flächeninhalt von F' ist somit gleich dem mit k^2 multiplizierten Flächeninhalt von F .

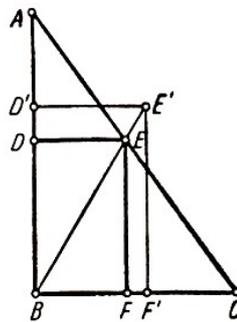


Abb. 5

Als Anwendungsbeispiel für eine Ähnlichkeitstransformation in Bezug auf einen Punkt wählen wir die folgende Konstruktionsaufgabe:

Man beschreibe einem gegebenen rechtwinkligen Dreieck ABC ein Rechteck $BDEF$ mit vorgeschriebenem Seitenverhältnis ein (Abb. 5).

Wir konstruieren zuerst ein beliebiges Rechteck $BD'E'F'$ mit gegebenem Seitenverhältnis so, dass die Ecken D' bzw. F' auf den Dreieckseiten AB bzw. BC liegen.

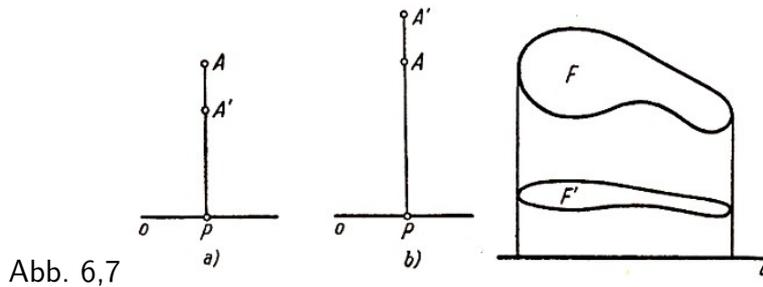
Wir bezeichnen mit E den Schnittpunkt von BE' mit AC . Man sieht sofort, dass eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Zentrum B und dem Ähnlichkeitskoeffizienten $k = \frac{BE}{BE'}$ das Rechteck $BD'E'F'$ in das gesuchte Rechteck $BDEF$ überführt. Damit kann man dieses Rechteck leicht konstruieren.¹

In der Geometrie ist es zuweilen zweckmäßig, eine andere Transformation anzuwenden, die Ähnlichkeitstransformation in Bezug auf eine Gerade.

Eine Streckung in Bezug auf die Gerade o , die sogenannte Achse der Streckung, mit dem Streckungskoeffizienten k besteht darin, dass jeder Punkt A der Ebene in einen Punkt A' übergeführt wird, der auf dem senkrecht auf o stehenden Strahl PA liegt. Dabei ist $\frac{PA'}{PA} = k$ bzw. $PA' = k \cdot PA$ (Abb. 6a, b).

Ist der Streckungskoeffizient k größer als 1, so ist $PA' > PA$ (Abb. 6b). Die Punkte der Geraden o ändern bei der Transformation ihre Lage nicht.

¹Analog kann man die Aufgabe auch dann lösen, wenn das Dreieck ABC nicht rechtwinklig ist; wir wollen uns aber damit nicht aufhalten.

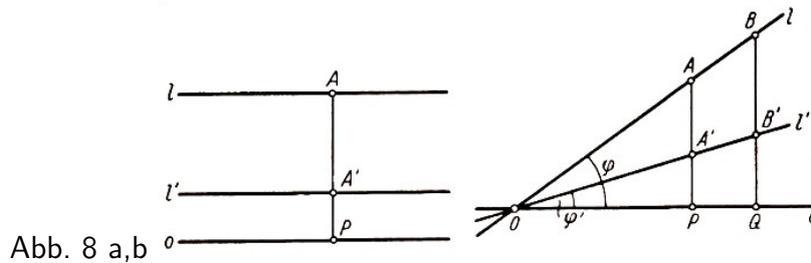


Bei der Streckung bezüglich einer Geraden geht eine Figur F in eine Figur F' über, die der Figur F nicht ähnlich ist (Abb. 7).

Die Streckung bezüglich einer Geraden hat eine Reihe von Eigenschaften, die denen der Streckung in Bezug auf einen Punkt entsprechen:

a) Bei der Streckung in Bezug auf eine Gerade geht jede Gerade wieder in eine Gerade über.

Ist nämlich die Gerade l parallel zu o und hat sie von o den Abstand d , so geht sie in eine Gerade l' über, die ebenfalls zu o parallel ist und von o den Abstand kd hat (Abb. 8a).



Es sei nun l nicht parallel zu o . Wir bezeichnen den Schnittpunkt von l und o mit O (Abb. 8b); dieser Punkt behält bei der Streckung bezüglich der Geraden o seine Lage bei. Ist A ein beliebiger von O verschiedener Punkt auf der Geraden l und A' der Punkt, in den A bei der Streckung bezüglich o übergeht, so gilt $PA' = k \cdot PA$.

Nun wählen wir auf l einen anderen Punkt B . Ist B' der Schnittpunkt des von B auf die Gerade o gefällten Lotes BQ mit der durch OA' gelegten Geraden, so ist $\frac{B'Q}{BQ} = \frac{A'P}{AP} = k$ (dies folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OQB und OPA bzw. OQB' und OPA'), d.h. $QB' = k \cdot QB$.

Hieraus folgt, dass bei einer Streckung bezüglich o der Punkt B in B' übergeht. Da B ein ganz beliebiger Punkt auf l war, geht diese Gerade bei der Streckung bezüglich o in die Gerade OA' über (die wir entsprechend mit l' bezeichnen).

b) Bei der Streckung bezüglich einer Geraden gehen parallele Geraden wieder in parallele Geraden über. Die Geraden l und m seien einander parallel, haben also keinen gemeinsamen Punkt. Dann haben auch die Geraden l' und m' , in die l und m transformiert werden, keinen gemeinsamen Punkt (einen solchen könnte man nur aus einem gemeinsamen Punkt der Geraden l und m erhalten); d. h., l' und m' sind ebenfalls parallel (Abb. 9))²

²Sind φ und φ' die von der Geraden l bzw. der transformierten Geraden l' mit der Streckungsachse o gebildeten Winkel, so liest man aus Abb. 8b leicht die Beziehungen

$$\tan \varphi' = \frac{PA'}{PO} = \frac{k \cdot PA}{PO} = k \frac{PA}{PO} = k \cdot \tan \varphi$$

ab. Hieraus folgt ebenfalls, dass parallele Geraden, die o unter gleichem Winkel φ schneiden, wieder in parallele Geraden übergehen (die o nun unter gleichem Winkel φ' schneiden).

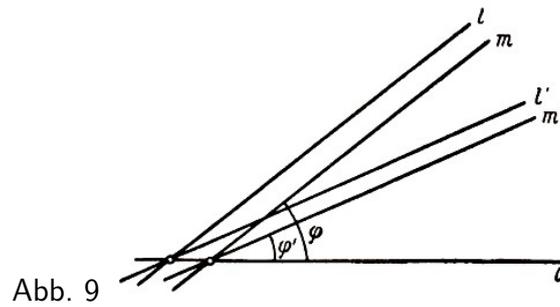


Abb. 9

c) Bei der Streckung bezüglich einer Geraden bleiben die Streckenverhältnisse auf einer Geraden erhalten.

Es ist nämlich $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ nach dem in der Anmerkung zitierten Satz³ (Abb. 10).

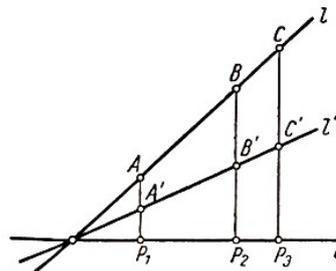


Abb. 10

d) Bei der Streckung bezüglich einer Geraden ändern sich die Flächeninhalte aller Figuren in konstantem Verhältnis (der Flächeninhalt ist mit dem Streckungsfaktor k zu multiplizieren).

Wir betrachten eine Figur F , die von einem Netz aus kleinen Quadraten überdeckt wird. Der Flächeninhalt von F ist dann ungefähr gleich der Anzahl der von F eingeschlossenen Quadrate, multipliziert mit dem Flächeninhalt eines Quadrates (Abb. 11).

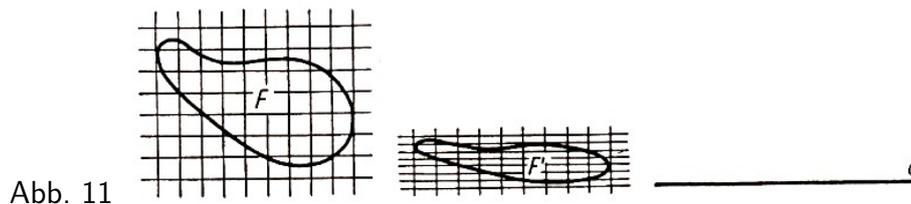


Abb. 11

Wir wollen annehmen, dass eine der das Quadratnetz bildenden Geradenscharen parallel zur Streckungsachse o ist. Bei der Streckung geht das Quadratnetz in ein Netz von einander gleichen Rechtecken über, wobei der Flächeninhalt eines einzelnen Rechtecks jeweils gleich dem k -fachen Flächeninhalt eines Quadrates ist (eine Quadratseite bleibt nämlich ungeändert, während die Länge der zweiten mit k multipliziert wird).

Die weiteren Überlegungen unterscheiden sich nicht von dem Beweis, der für das entsprechende Problem bei der Streckung bezüglich eines Punktes geführt wurde. Hier war der Flächeninhalt jeweils mit k^2 zu multiplizieren.⁴

Als Beispiel für die Streckung bezüglich einer Geraden bringen wir die Lösung der folgenden

³Vgl. die Aufgabe auf 8.3.

⁴Erster Strahlensatz: Werden die Schenkel eines Winkels von zwei Parallelen geschnitten, so ist das Streckenverhältnis auf dem einen Schenkel gleich dem entsprechenden auf dem anderen. - Anm. d. Red. d. deutschen Ausgabe.

Konstruktionsaufgabe⁵:

Es ist einem rechtwinkligen Dreieck ABC ein Rechteck $BFED$ mit A vorgegebenem Produkt seiner Seiten $BD \cdot BF = d^2$, d. h. mit vorgegebenem Flächeninhalt, einzubeschreiben (Abb. 12).

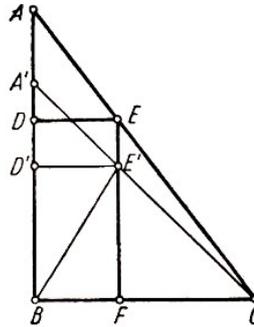


Abb. 12

Zur Lösung der Aufgabe strecken wir das Dreieck ABC bezüglich der Seite BC mit dem Koeffizienten $k = \frac{BC}{BA}$. Dabei geht dieses Dreieck in das gleichschenklige Dreieck $A'BC$ über, in dem $BA' = k \cdot BA = \frac{BC}{BA} \cdot BA = BC$ dessen Flächeninhalt gleich kS ist (mit S bezeichnen wir den Flächeninhalt des Dreiecks ABC).

Das Rechteck $BFED$ geht bei dieser Transformation in das Rechteck $BFE'D'$ über, dessen Flächeninhalt wegen der Eigenschaft d) gleich kd^2 ist. Nun müssen wir dem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck $A'BC$ das Rechteck $BFE'D'$ mit dem bekannten Flächeninhalt kd^2 einbeschreiben.

Dies ist nicht schwer, denn es ist

$$S_{BFE'D'} = S_{\triangle BCA'} - (S_{\triangle FCE'} + S_{\triangle A'D'E'})$$

und folglich

$$S_{\triangle FCE'} + S_{\triangle A'D'E'} = S_{\triangle BCA'} - S_{BFE'D'} = kS - kd^2$$

Nun ist andererseits

$$S_{\triangle FCE'} + S_{\triangle A'D'E'} = \frac{1}{2}FE'^2 + \frac{1}{2}D'E'^2 = \frac{1}{2}(FE'^2 + D'E'^2) = \frac{1}{2}BE'^2$$

(wir haben hier benutzt, dass das Dreieck $A'BC$ und folglich die ihm ähnlichen Dreiecke $A'D'E'$ und $E'FC$ gleichschenklige sind). Somit erhalten wir

$$\frac{1}{2}BE'^2 = kS - kd^2$$

Da wir nun die Länge der Strecke BE' kennen, können wir ohne Schwierigkeit den Punkt E' finden und damit unverzüglich das dem Dreieck $A'BC$ einbeschriebene Rechteck $BFE'D'$ sowie das dem Dreieck ABC einbeschriebene Rechteck $BFED$ konstruieren.

Je nach der Größe von d hat die Aufgabe zwei Lösungen, eine Lösung oder überhaupt keine Lösung.

Es ist keine geometrische Lösung dieser Abb. 13 Aufgabe bekannt, die nicht die Streckung bezüglich einer Geraden benutzt.⁶

⁵Man vergleiche diese Aufgabe mit der auf 8.3. - Anm. d. Red. d. deutschen Ausgabe.

⁶Analog kann man die Aufgabe auch dann lösen, wenn das Dreieck ABC nicht rechtwinklig ist; wir wollen uns damit aber nicht aufhalten.

Im Gegensatz zur Streckung bezüglich eines Punktes transformiert die Streckung bezüglich einer Geraden einen Kreis nicht wieder in einen Kreis, sondern in eine Ellipse (Abb. 13).

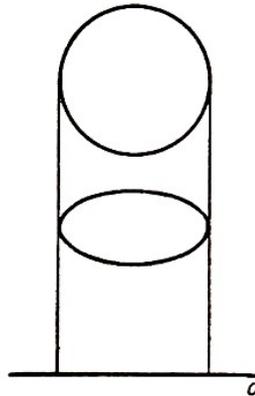


Abb. 13

Benutzt man die Eigenschaften a) bis d) der Transformation bezüglich einer Geraden, so kann man eine Reihe geometrischer Eigenschaften der Ellipse ableiten. Das geht jedoch über den Rahmen dieses Bändchens hinaus.

1.2 Die hyperbolische Drehung

Im folgenden wird die graphische Darstellung der umgekehrten Proportionalität eine Rolle spielen, d.h. eine Kurve, deren Gleichung durch

$$y = \frac{a}{x} \quad \text{oder} \quad xy = a$$

gegeben ist. Eine solche Kurve nennt man Hyperbel (Abb. 14).

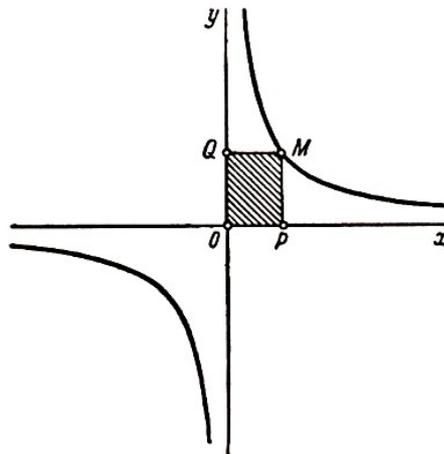


Abb. 14

Der absolute Betrag von y ist um so kleiner, je größer der absolute Betrag von x ist (und umgekehrt); gilt also $x \rightarrow \infty$, so folgt $y \rightarrow 0$, und für $y \rightarrow \infty$ strebt $x \rightarrow 0$.

Das heißt geometrisch, dass die Hyperbel den Koordinatenachsen beliebig nahe kommt, ohne sie jemals zu berühren (aus der Gleichung $xy = a$ folgt, dass weder x noch y irgendwann gleich Null sein können).

Eine Gerade, der sich eine Kurve unbegrenzt nähert, ohne sie jemals zu erreichen, bezeichnet man als Asymptote dieser Kurve. Die Koordinatenachsen sind somit die Asymptoten der Hyperbel. Die Hyperbel hat zwei Äste, die bei $a > 0$ im ersten (x und y positiv) und dritten (x

und y beide negativ) Quadranten des Koordinatensystems liegen.

Die Gleichung $xy = a$ hat eine einfache geometrische Bedeutung. Die Fläche des Rechtecks $MQOP$, das von den Koordinatenachsen und von den durch irgendeinen Punkt M der Hyperbel zu den Koordinatenachsen gezogenen Parallelen gebildet wird (Abb. 14), ist gleich a , d. h., sie hängt nicht von M ab. Da nämlich $OP = x$ und $PM = y$ ist, gilt

$$S_{MQOP} = OP \cdot PM = xy = a$$

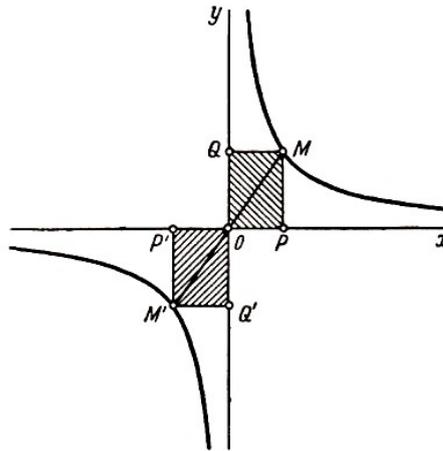


Abb. 15

Nennen wir das Rechteck $MQOP$ das Koordinatenrechteck des Punktes M , so kann man sagen, dass diese Hyperbel der geometrische Ort der Punkte ist, die im ersten und dritten Quadranten des Koordinatensystems liegen und deren Koordinatenrechtecke gleichen Flächeninhalt haben.

Die Hyperbel ist zentralsymmetrisch, d. h., sie hat einen Punkt als Symmetriezentrum: Die beiden Äste der Hyperbel liegen symmetrisch zum Koordinatenursprung O .

Der Beweis dafür ergibt sich daraus, dass zu O symmetrische Koordinatenrechtecke $MQOP$ und $M'Q'OP'$ (Abb. 15) den gleichen Flächeninhalt haben. Die Hyperbel besitzt auch zwei Symmetrieachsen, und zwar die Winkelhalbierenden aa und bb (Abb. 16), denn es haben die zu aa symmetrischen Koordinatenrechtecke $MQOP$ und $M_1Q_1OP_1$ gleichen Flächeninhalt. Ebenso haben die zu bb symmetrischen Koordinatenrechtecke $MQOP$ und $M_2Q_2OP_2$ gleichen Flächeninhalt.

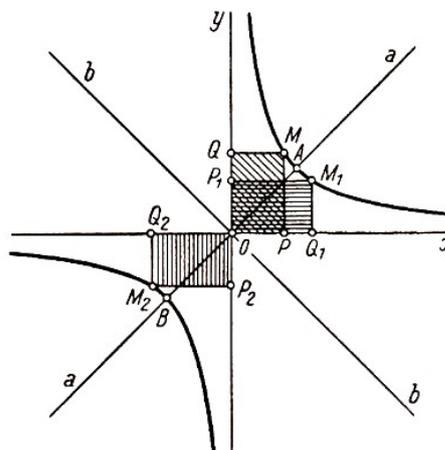


Abb. 16

Das Symmetriezentrum O und die Symmetrieachsen aa und bb nennt man oft einfach Zentrum und Achsen der Hyperbel. Die Punkte A und B , in denen die Hyperbel die Achse aa schneidet,

nennt man die Scheitel der Hyperbel.

Es sei uns nun die Hyperbel $xy = a$ gegeben. Führen wir eine Streckung der Ebene bezüglich der x -Achse mit dem Koeffizienten k aus, so geht dabei die Hyperbel $xy = a$ in die Hyperbel $xy = ak$ über, da die Abszisse x jedes Punktes unverändert bleibt, während die Ordinate in ky übergeht (Abb. 17).

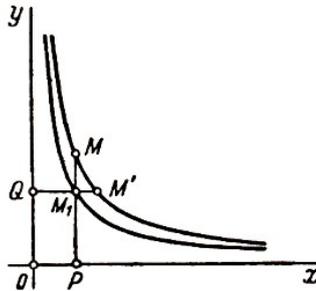


Abb. 17

Nun führen wir noch eine Streckung bezüglich der y -Achse mit dem Koeffizienten $\frac{1}{k}$ aus. Hierbei geht die Hyperbel $xy = ak$ in die Hyperbel $xy = \frac{ak}{k} = a$ über; bei dieser zweiten Streckung bleibt die Ordinate y eines beliebigen Punktes erhalten, während die Abszisse in $\frac{x}{k}$ übergeht. Wir sehen also:

Die aufeinanderfolgende Streckung der Ebene bezüglich der x -Achse mit dem Koeffizienten k und bezüglich der y -Achse mit dem Koeffizienten $\frac{1}{k}$ führt y die Hyperbel $xy = a$ wieder in sich selbst über.

Die aufeinanderfolgende Ausführung dieser beiden Streckungen liefert eine Transformation, die man als hyperbolische Drehung, bezeichnet.

Der Name "hyperbolische Drehung" hängt damit zusammen, dass bei dieser Transformation alle Hyperbelpunkte auf der Kurve "entlanggleiten"; in Abb. 17 geht der Punkt M zuerst in den Punkt M_1 über, danach geht M_1 in M' über.

Eine hyperbolische Drehung führt also einen Punkt M einer Hyperbel in den Punkt M' der gleichen Hyperbel über. Dieser Sachverhalt entspricht der Drehung eines Kreises - die Hyperbel "dreht" sich.

Die hyperbolische Drehung hat folgende Eigenschaften:

- a) Bei einer hyperbolischen Drehung gehen Geraden wieder in Geraden über [als Folge der Eigenschaft a) in Abschn. 1].
- b) Bei einer hyperbolischen Drehung gehen die Koordinatenachsen (die Asymptoten der Hyperbel) in sich selbst über, denn sie gehen bei jeder der beiden Streckungen, aus denen sich die hyperbolische Drehung zusammensetzt, in sich selbst über.
- c) Bei einer hyperbolischen Drehung gehen parallele Geraden wieder in parallele Geraden über [als Folge der Eigenschaft b) in Abschn. 1].
- d) Bei einer hyperbolischen Drehung bleiben die Streckenverhältnisse auf einer Geraden erhalten [als Folge der Eigenschaft c) in Abschn. 1].
- e) Bei einer hyperbolischen Drehung bleiben die Flächeninhalte von geometrischen Figuren erhalten, denn bei der ersten Streckung werden die Flächeninhalte aller Figuren mit k multipliziert, während sie bei der zweiten Streckung durch k dividiert werden [siehe Eigenschaft d) in Abschn. 1].

Es ist sehr wichtig festzustellen, dass man durch eine hyperbolische Drehung jeden Punkt einer Hyperbel in jeden anderen Hyperbelpunkt überführen kann. Die erste Streckung führt nämlich den Punkt (x, y) der Hyperbel $xy = a$ in den Punkt (x, yk) der Hyperbel $xy = ak$ über. Die zweite Streckung transformiert dann den Punkt (x, yk) der Hyperbel $xy = ak$ in den Punkt $(\frac{x}{k}, yk)$ der ursprünglichen Hyperbel $xy = a$ (Abb. 17).

Somit haben wir durch die hyperbolische Drehung den Punkt (x, y) in den Punkt $(\frac{x}{k}, yk)$ übergeführt. Hieraus folgt, dass man durch eine passende hyperbolische Drehung jeden Punkt (x, y) einer Hyperbel in einen beliebigen anderen Punkt (x_1, y_1) der gleichen Hyperbel überführen kann. Dazu braucht man k nur so zu wählen, dass $x_1 = \frac{x}{k}$, d.h. $k = \frac{x}{x_1}$ ist.

1.3 Einige Eigenschaften der Hyperbel

Unter Verwendung der hyperbolischen Drehung kann man eine Reihe interessanter geometrischer Eigenschaften der Hyperbel beweisen. Vorher werden wir jedoch festlegen, was wir Sehne bzw. Tangente einer Hyperbel nennen wollen.

Eine Gerade, die eine Hyperbel in zwei Punkten schneidet, nennt man Sekante dieser Hyperbel. Diejenige Strecke auf einer Sekante, deren Endpunkte Hyperbelpunkte sind, bezeichnet man als Sehne der Hyperbel. Bei einer Hyperbel gibt es zwei Arten von Sekanten (und Sehnen): Eine Sekante erster Art schneidet nur einen Ast der Hyperbel, während eine Sekante zweiter Art beide Äste schneidet (Abb. 18a).

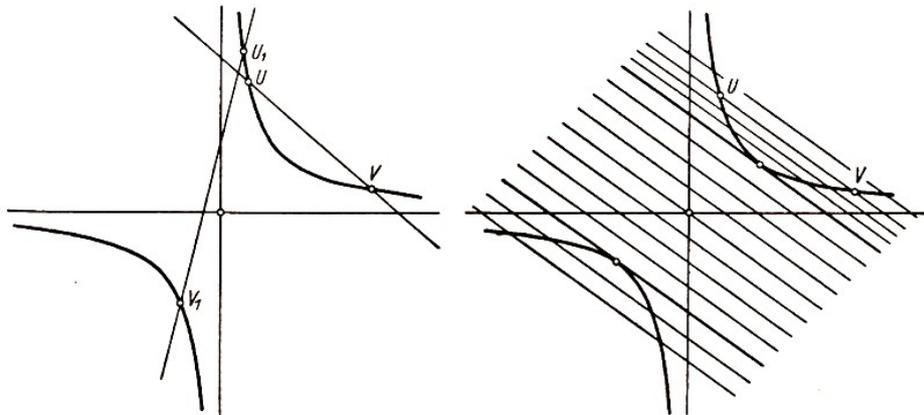


Abb. 18 a,b

Wir betrachten eine Sekante erster Art. Unter den Geraden, die dieser Sekante parallel sind, gibt es solche, die die Hyperbel in zwei Punkten schneiden, und andere, die die Hyperbel überhaupt nicht schneiden; schließlich existieren zwei Geraden, die mit der Hyperbel je einen Punkt gemeinsam haben (man bezeichnet sie als Tangenten an die Hyperbel⁷; Abb. 18b).

Bei einer hyperbolischen Drehung geht die Hyperbelsehne UV in eine neue Sehne $U'V'$ über, wobei die Punkte U' und V' auf einem Ast (auf verschiedenen Ästen) der Hyperbel liegen, wenn U und V Punkte eines Astes (verschiedener Äste) sind.

Die Punkte U und V gehen nämlich in die Punkte U' und V' über, wobei U' auf demselben Ast wie U liegt (Abb. 19).

⁷Man kann die Tangente an eine Hyperbel auch als eine Gerade definieren, die mit der Hyperbel genau einen Punkt gemeinsam hat und nicht parallel zu einer Asymptote verläuft (jede Gerade, die parallel zu einer Asymptote verläuft, hat zwar mit der Hyperbel einen Punkt gemeinsam, nämlich den Schnittpunkt, ist aber keine Tangente).

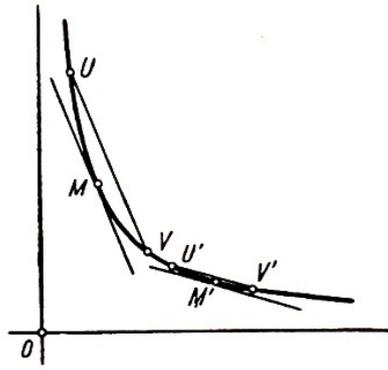


Abb. 19

Die Tangente an eine Hyperbel in einem Punkt M geht bei einer hyperbolischen Drehung, die M in M' überführt, in die Tangente im Punkt M' über (zum Beweis betrachten wir eine Sehne UV , die parallel zur Tangente im Punkt M verläuft).

Sie geht bei der hyperbolischen Drehung in die Sehne $U'V'$ über, während eine Gerade, die parallel zu UV ist und mit der Hyperbel genau den Punkt M gemeinsam hat, in eine Gerade übergeführt wird, die parallel zu $U'V'$ verläuft und mit der Hyperbel genau den Punkt M' gemeinsam hat (Abb. 19).

Wir kommen nun zum Beweis der Sätze über die Hyperbel.

1. Die von den Asymptoten eingeschlossene Strecke auf einer Hyperbeltangente wird durch den Berührungspunkt halbiert.

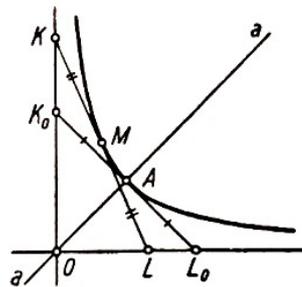


Abb. 20

Da die Winkelhalbierende aa des von den Koordinatenachsen eingeschlossenen Winkels Symmetrieachse der Hyperbel ist (Abb. 20), wird die Strecke K_0L_0 auf der durch den Punkt A gelegten Tangente im Punkt A halbiert: Die Abschnitte AK_0 und AL_0 gehen bei einer Spiegelung bezüglich der Achse aa ineinander über.

Es sei nun KL der Abschnitt der Hyperbeltangente durch einen beliebigen anderen Punkt M . Führen wir eine hyperbolische Drehung aus, die M auf A abbildet, so geht die Tangente im Punkt M in die Tangente im Punkt A über.

Weiterhin geht die Strecke KL in die Strecke K_0L_0 über [siehe die Eigenschaften a) und b) in Abschn. 2]. Da aber bei einer hyperbolischen Drehung der Mittelpunkt einer Strecke immer Mittelpunkt bleibt [siehe Eigenschaft d) in Abschn. 2], ist M auch wieder Mittelpunkt von KL , was zu beweisen war.

2. Der Flächeninhalt des von den Koordinatenachsen und der Tangente an die Hyperbel $xy = a$ gebildeten Dreiecks ist für alle Tangenten gleich.

Zum Beweis betrachten wir das Dreieck KOL , das von den Koordinatenachsen und der Tangente an die Hyperbel $xy = a$ gebildet wird (Abb. 20). Eine hyperbolische Drehung, die den Punkt M in den Punkt A überführt, transformiert das Dreieck KOL in das Dreieck K_0OL_0 ,

wobei K_0L_0 die Tangente an die Hyperbel im Punkt A ist. Hieraus erhalten wir infolge der Eigenschaft e) in Abschnitt 2

$$S_{\Delta KOL} = S_{\Delta K_0OL_0}$$

d.h., der Flächeninhalt des Dreiecks KOL hängt nicht von der Wahl des Punktes M ab, was zu beweisen war.

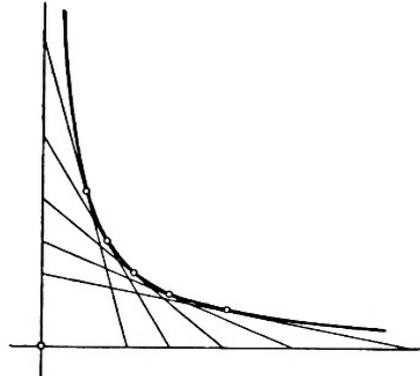


Abb. 21

Aus den Eigenschaften 1 und 2 folgt: Jeder Zweig der Hyperbel ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Strecken, die mit den Schenkeln eines gegebenen rechten Winkels Dreiecke gleicher Flächeninhalte bilden (Abb. 21).

3. Die Mittelpunkte paralleler Hyperbelsehnen liegen auf einer Geraden, die durch das Zentrum der Hyperbel geht.

Es sei UV eine Sehne der Hyperbel, S ihr Mittelpunkt, T der Schnittpunkt der Geraden OS mit der Hyperbel⁸ (Abb. 22a).

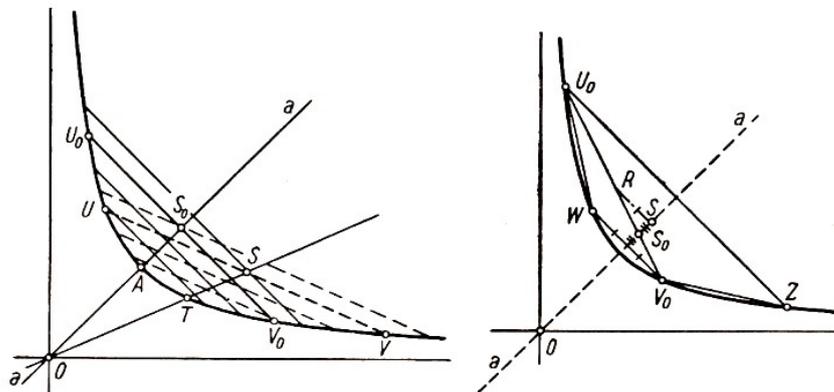


Abb. 22 a,b

Wir führen eine hyperbolische Drehung aus, indem wir den Punkt T in den Scheitelpunkt A transformieren. Dabei wird die Gerade OT in die Hyperbelachse aa transformiert, während die Sehne UV in die von dieser Achse halbierte Sehne U_0V_0 übergeht.

Das ist aber nur möglich, wenn $U_0V_0 \perp aa$ ist. Würde nämlich U_0V_0 nicht senkrecht auf aa stehen, so könnten wir die Lote U_0Z und V_0W auf die Achse aa fallen. Da aa die Symmetrieachse der Hyperbel ist, wird U_0ZV_0W ein gleichschenkliges Trapez mit eben dieser Symmetrieachse aa .

Nun kann aber die Symmetrieachse eines gleichschenkligen Trapezes die Diagonale nicht halbieren (da $V_0S_0 = S_0R < S_0U_0$ ist; Abb. 22b); wir kommen also zu einem Widerspruch.

⁸Wir beschränken uns hier darauf, dass UV eine Sehne erster Art ist, d.h., U und P liegen auf einem Ast (nur mit diesem Fall werden wir uns im weiteren zu beschäftigen haben). Wir überlassen es dem Leser, den Fall zu untersuchen, bei dem U und V auf verschiedenen Ästen der Hyperbel liegen.

Alle Sehnen, die parallel zu UV verlaufen, gehen in Sehnen über, die parallel U_0V_0 sind, d. h. senkrecht auf der Symmetrieachse aa der Hyperbel stehen; die Mittelpunkte aller dieser Sehnen liegen auf der Achse aa . Hieraus folgt, dass die Mittelpunkte aller Sehnen parallel zu UV auf der Geraden OT liegen, was zu beweisen war.

Jede Gerade durch das Zentrum der Hyperbel nennt man Durchmesser der Hyperbel (analog zum Durchmesser eines Kreises)⁹.

Der Hyperbeldurchmesser, der alle Sehnen einer Richtung halbiert, heißt konjugierter Durchmesser dieser Sehnen; umgekehrt nennt man die Sehnen Konjugierte des Durchmessers, durch den sie halbiert werden. Wir können also auch von den Radien einer Hyperbel sprechen, wenn wir darunter die Strecke vom Zentrum bis zum Schnittpunkt eines Hyperbeldurchmessers mit der Hyperbel verstehen (die Radien einer Hyperbel sind also den Radien eines Kreises entsprechend definiert).

Wir bemerken, dass der Kreis eine der Eigenschaft 3. der Hyperbel ähnliche Eigenschaft hat: Die Mittelpunkte paralleler Sehnen eines Kreises liegen auf einer Geraden, die durch den Kreismittelpunkt geht (nämlich auf dem Kreisdurchmesser, der senkrecht auf diesen Sehnen steht; Abb. 23).

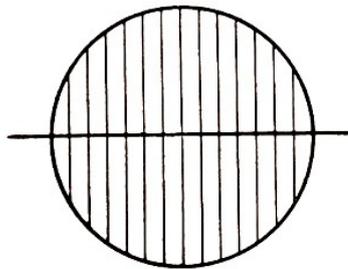


Abb. 23

4. Geraden, die parallel zu den Asymptoten durch die Endpunkte einer beliebigen Hyperbelsehne gehen, schneiden sich auf dem konjugierten Durchmesser dieser Sehne.

Es sei UV eine Hyperbelsehne, S ihr Mittelpunkt und T der Schnittpunkt der Geraden OS mit der Hyperbel (Abb. 24).

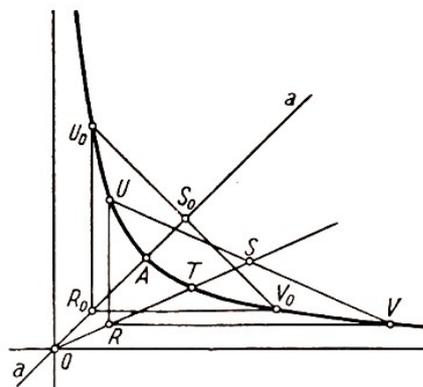


Abb. 24

Wir führen eine hyperbolische Drehung durch, die den Punkt T in den Scheitelpunkt A überführt; dabei wird UV in die Sehne U_0V_0 transformiert, die senkrecht auf aa steht [siehe den Beweis von Eigenschaft 3.].

⁹In der vorliegenden Broschüre bezeichnen wir nicht eine Strecke, sondern die ganze Gerade als Durchmesser.

Die Strecken UR und VR , die parallel zu den Asymptoten verlaufen, gehen in die wiederum den Asymptoten parallelen Strecken U_0R_0 und V_0R_0 über [siehe die Eigenschaften b) und c) in Abschn. 2].

Da aa Symmetrieachse der Hyperbel und Winkelhalbierende des von den Asymptoten gebildeten Winkels ist, liegt der Schnittpunkt R_0 von U_0R_0 und V_0R_0 auf aa . Hieraus folgt, dass der Schnittpunkt R von UR und VR auf dem Durchmesser OT liegt, was zu beweisen war.

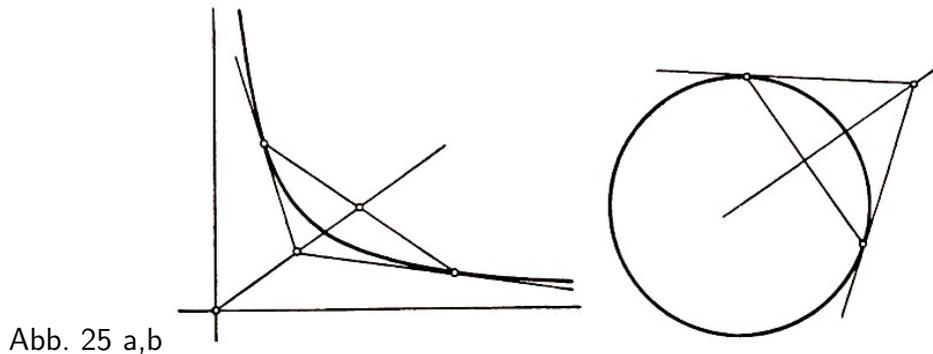


Abb. 25 a,b

5. Die an die Hyperbel in den Endpunkten einer Sehne gelegten Tangenten schneiden sich auf dem konjugierten Durchmesser dieser Sehne (Abb. 25a).

Der Beweis dieses Satzes entspricht vollkommen dem Beweis für die 4. Eigenschaft; wir überlassen ihn dem Leser.

Zu erwähnen wäre noch, dass auch der Kreis eine der Eigenschaft 5. entsprechende Eigenschaft hat: Die in den Endpunkten einer Sehne an einen Kreis gelegten Tangenten schneiden sich auf dem zu dieser Sehne senkrechten Durchmesser (Abb. 25b).

2 Die Hyperbelfunktionen

2.1 Die Mittelpunktsleichung der Hyperbel

Es seien x und y die Koordinaten eines Hyperbelpunktes M in einem Koordinatensystem, dessen Achsen die Asymptoten sind. Dann ist $xy = a$ die Hyperbelgleichung (Abb. 26).

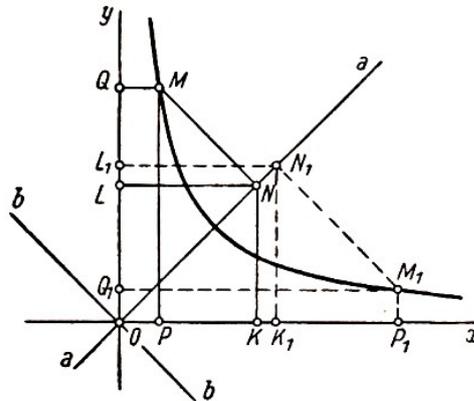


Abb. 26

Wir wählen nun die Hyperbelachsen aa und bb als neue Koordinatenachsen. Die Koordinaten des Punktes M im neuen Koordinatensystem bezeichnen wir mit X und Y . Wir wollen jetzt die alten Koordinaten x und y durch X und Y ausdrücken.

Die Projektion des Punktes M auf aa nennen wir N , die Projektionen von M und N auf die x - bzw. y -Achse nennen wir P , Q bzw. K , L (Abb. 26). Dann gilt

$$\begin{aligned} OP &= OK - PK = ON \cos 45^\circ - NM \cos 45^\circ \\ OQ &= OL + LQ = ON \cos 45^\circ + NM \cos 45^\circ \end{aligned}$$

(die Projektion einer Strecke auf die Gerade, die mit der Strecke einen Winkel von 45° einschließt, ist nämlich gleich der Länge dieser Strecke, multipliziert mit $\cos 45^\circ$).

Nun ist $OP = x$, $OQ = y$, $ON = X$ und $NM = Y$; wir erhalten also¹⁰

$$x = (X - Y) \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = (X + Y) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.1)$$

Wir setzen in die Formel $xy = a$ die für x und y erhaltenen Ausdrücke ein. Dies ergibt

$$(X^2 - Y^2) \frac{1}{2} = a \quad \text{oder} \quad X^2 - Y^2 = 2a$$

die Mittelpunktsleichung der Hyperbel.

Die Hyperbel

$$X^2 - Y^2 = 1$$

¹⁰Für den Punkt M_1 (Abb. 26) erhalten wir

$$\begin{aligned} x_1 &= OP_1 = OK_1 + K_1P_1 = ON_1 \cos 45^\circ + N_1M_1 \cos 45^\circ = X_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + (-Y_1) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_1 &= OQ_1 = OL_1 + Q_1L_1 = ON_1 \cos 45^\circ - N_1M_1 \cos 45^\circ = X_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - (-Y_1) \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

d.h. dieselben Formeln wie (2.1). Wir überlassen es dem Leser, sich davon zu überzeugen, dass diese Formeln auch für Punkte des zweiten Hyperbelastes gelten, der im dritten Quadranten des alten Koordinatensystems liegt (eine Tatsache übrigens, die wir im weiteren nicht benötigen werden).

nennt man Einheitshyperbel; ihre Gleichung entspricht der Gleichung des Einheitskreises (des Kreises mit dem Radius 1)¹¹:

$$X^2 + Y^2 = 1$$

Die Gleichung der Einheitshyperbel in dem Koordinatensystem, dessen Achsen gleichzeitig Asymptoten bilden (die sogenannte Asymptotengleichung), lautet

$$xy = \frac{1}{2}$$

(es ist nämlich $2a = 1$, also $a = \frac{1}{2}$).

2.2 Definition und wichtigste Eigenschaften der Hyperbelfunktionen

Wir kommen nun zur Theorie der Hyperbelfunktionen (oder auch der hyperbolischen Funktionen), die der Theorie der gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen (also der Kreisfunktionen) weitgehend entspricht.

Um die Analogie zwischen Kreis- und Hyperbelfunktionen hervorzuheben, werden wir die folgenden Ausführungen meist in zwei Spalten gliedern, links stehen die bekannten Tatsachen aus der Theorie der Kreisfunktionen, rechts werden wir die Theorie der hyperbolischen Funktionen darstellen.

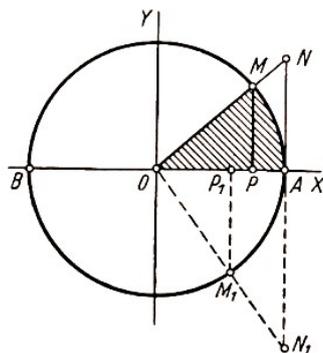


Abb. 27 a

Wir betrachten den Einheitskreis (Abb. 27a)

$$X^2 + Y^2 = 1$$

Als Winkel α (im Bogenmaß) zwischen den Radien OA und OM bezeichnet man die Zahl, die gleich der Länge des Bogens AM oder gleich dem doppelten Flächeninhalt des Sektors OAM ist, der von diesen Radien und dem zugehörigen Kreisbogen berandet wird.

Es ist eine wichtige Eigenschaft des Winkels α , dass er sich bei einer Drehung des Sektors

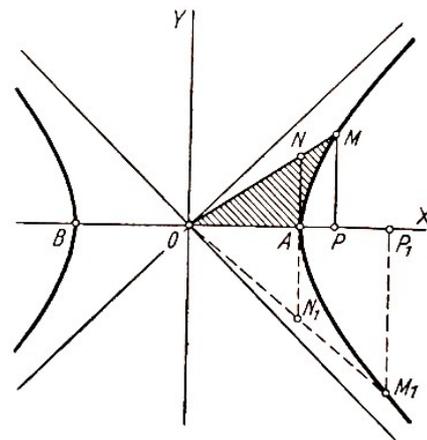


Abb. 27 b

Wir betrachten die Einheitshyperbel (Abb. 27b)

$$X^2 - Y^2 = 1$$

Als hyperbolischen Winkel t zwischen zwei Radien OA und OM der Hyperbel bezeichnet man die Zahl, die gleich dem doppelten Flächeninhalt des von diesen Radien und dem zugehörigen Hyperbelbogen begrenzten Sektors ist.

¹¹Es sei M ein Punkt auf der Peripherie des Einheitskreises, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt (Abb. 27a); X, Y seien die Koordinaten dieses Punktes. Aus dem Lehrsatz des Pythagoras folgt $OP^2 + PM^2 = OM^2$. Nun ist aber $OP = X, PM = Y, OM = 1$. Somit gilt für die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Kreisperipherie $X^2 + Y^2 = 1$.

AOM um O nicht ändert. Ebenso ändert sich der hyperbolische Winkel t bei einer hyperbolischen Drehung der Figur AOM nicht [siehe Eigenschaft e) in Kapitel I, Abschn. 2].

Wir fällen vom Punkt M des Kreises die Senkrechte MP auf den Durchmesser OA . Im Punkt A legen wir die Tangente an den Kreis und verlängern sie bis zum Schnitt mit dem Durchmesser OM im Punkt N .

Der Abschnitt PM der Senkrechten ist gleich dem Sinus, der Abschnitt OP des Durchmessers gleich dem Kosinus und der Abschnitt AN der Tangente gleich dem Tangens des Winkels α :

$$PM = \sin \alpha, OP = \cos \alpha, AN = \tan \alpha$$

Wir fällen vom Punkt M der Hyperbel die Senkrechte MP auf den Durchmesser OA (d.h. auf die Symmetrieachse der Hyperbel, die von der Hyperbel im Punkt A geschnitten wird). Im Punkt A legen wir die Tangente an die Hyperbel und verlängern sie bis zum Schnitt mit dem Durchmesser OM im Punkt N .

Der Abschnitt PM der Senkrechten ist gleich dem hyperbolischen Sinus, der Abschnitt OP des Durchmessers gleich dem hyperbolischen Kosinus und der Abschnitt AN der Tangente gleich dem hyperbolischen Tangens des hyperbolischen Winkels t :

$$PM = \sinh t, OP = \cosh t, AN = \tanh t$$

¹²Bekanntlich haben die trigonometrischen Winkelfunktionen die Periode 2π . Dagegen sind die Hyperbelfunktionen nicht periodisch.

Der hyperbolische Winkel t variiert zwischen 0 und ∞ . Um dies zu beweisen (d.h. um zu beweisen, dass die Fläche des Hyperbelsektors AOM beliebig groß wird), betrachten wir einen hyperbolischen Winkel AOM_1 , dessen Größe wir mit t_1 bezeichnen.

Wir führen eine hyperbolische Drehung aus, die A nach M_1 überführt, und nehmen weiter an, dass dabei M_1 nach M_2 , M_2 nach M_3 , M_3 nach M_4 gebracht wird, usw. (Abb. 28).

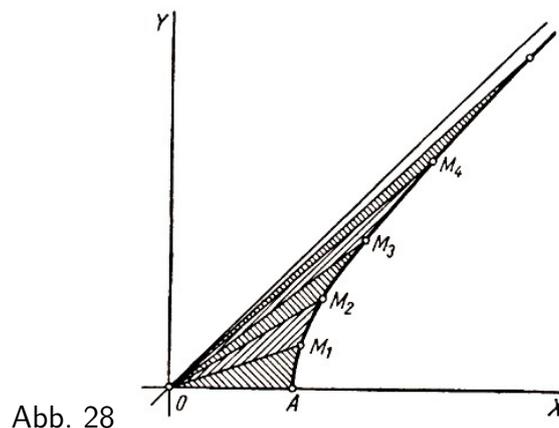


Abb. 28

Auf Grund der Eigenschaft e) in Kapitel I, Abschnitt 2, sind die Flächeninhalte der Hyperbelsektoren OAM_1 , M_1OM_2 , M_2OM_3 , M_3OM_4 , ... einander gleich, folglich sind die hyperbolischen Winkel AOM_1 , AOM_2 , AOM_3 , AOM_4 , ... entsprechend gleich t_1 , $2t_1$, $3t_1$, t_4 , ... Hieraus folgt, dass der hyperbolische Winkel beliebige große Werte annehmen kann.

Wenn t alle Werte von 0 bis ∞ durchläuft, so strebt $\sinh t$ von 0 gegen ∞ , $\cosh t$ von 1 gegen ∞ und $\tanh t$ von 0 gegen 1; das folgt aus der Definition der Hyperbelfunktionen (Abb. 27b).

¹²Im Originaltext werden die hyperbolischen Funktionen mit $\mathfrak{S}in$, $\mathfrak{C}os$, $\mathfrak{T}g$ gekennzeichnet.

Rechnet man analog zu den Kreisfunktionen den Winkel AOM_1 (Abb. 27b) negativ, setzt ihn also gleich $-t_1$, wobei t_1 die doppelte Fläche des Sektors AOM_1 ist, so erhält man

$$\begin{aligned} \sinh(-t_1) &= -M_1P_1 = -\sinh t_1, & \cosh(-t_1) &= OP_1 = \cosh t_1, \\ \tanh(-t_1) &= -N_1A = -\tanh t_1 \end{aligned}$$

In Abb. 29 sind die Hyperbelfunktionen graphisch dargestellt. Bemerkte sei noch, dass $\sinh 0 = \tanh 0 = \cosh 0$, aber $\cosh 0 = 1$ (analog zu $\sin 0 = \tan 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$).

Wir leiten nun die wichtigsten Beziehungen zwischen den Kreis- und Hyperbelfunktionen her.

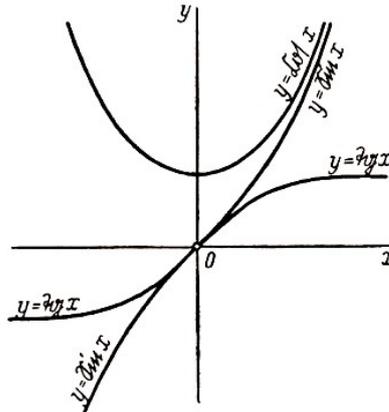


Abb. 29

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OMP und ONA (Abb. 27a) folgt $\frac{AN}{OA} = \frac{PM}{OP}$. Nun ist $\frac{AN}{OA} = \tan \alpha$ (wegen $OA = 1$), also

$$\frac{PM}{OP} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Somit erhalten wir

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (I)$$

Die Koordinaten eines Punktes M auf dem Kreis sind $OP = X$, $PM = Y$.

Die Gleichung des Einheitskreises ist $X^2 + Y^2 = 1$. Folglich gilt

$$OP^2 + PM^2 = 1$$

oder

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad (II)$$

Dividieren wir beide Seiten der Identität (II) zuerst durch $\cos^2 \alpha$ und dann durch $\sin^2 \alpha$, so erhalten wir die beiden Formeln

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (III)$$

$$\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (IV)$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OMP und ONA (Abb. 27b) folgt $\frac{AN}{OA} = \frac{PM}{OP}$. Nun ist $\frac{AN}{OA} = \tanh t$ (wegen $OA = 1$, der Punkt A hat die Ordinate $Y = 0$, d.h. es ist $OA^2 = X^2 + Y^2 = 1$), also

$$\frac{PM}{OP} = \frac{\sinh t}{\cosh t}$$

Somit erhalten wir

$$\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t} \quad (I)$$

Die Koordinaten eines Punktes M auf der Hyperbel sind $OP = X$, $PM = Y$.

Die Gleichung des Einheitskreises ist $X^2 - Y^2 = 1$. Folglich gilt

$$OP^2 - PM^2 = 1$$

oder

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \quad (II)$$

Dividieren wir beide Seiten der Identität (II) zuerst durch $\cosh^2 t$ und dann durch $\sinh^2 t$, so erhalten wir die beiden Formeln

$$1 - \tanh^2 t = \frac{1}{\cosh^2 t} \quad (III)$$

$$\frac{1}{\tanh^2 t} - 1 = \frac{1}{\sinh^2 t} \quad (IV)$$

2.3 Die Additionstheoreme

Wir leiten jetzt die Additionstheoreme für die Kreis- und Hyperbelfunktionen ab.

Eine Drehung um den Punkt O führe die Radien OA und OM eines Kreises (der Winkel AOM sei gleich α) in die Radien OA' und OM' über (Abb. 30a).

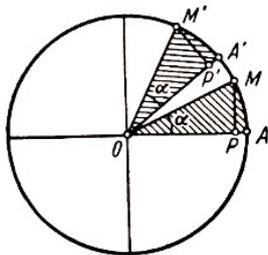


Abb. 30a

Die den Sinus und Kosinus des Winkels MOP darstellenden Strecken PM und OP gehen dabei in die Strecken $P'M'$ und OP' über. Offenbar steht $M'P'$ senkrecht auf dem Durchmesser OA' .

Da $PM' = PM$ und $OP' = OP$ ist (bei der Drehung ändern sich die Längen der Strecken nicht), haben wir mit $\sin \alpha = PM$ und $\cos \alpha = OP$ auch $\sin \alpha = P'M'$; $\cos \alpha = OP'$.

Eine hyperbolische Drehung führe die Radien OA und OM einer Hyperbel (der hyperbolische Winkel AOM sei gleich t) in die Radien OA' und OM' über (Abb. 30b).

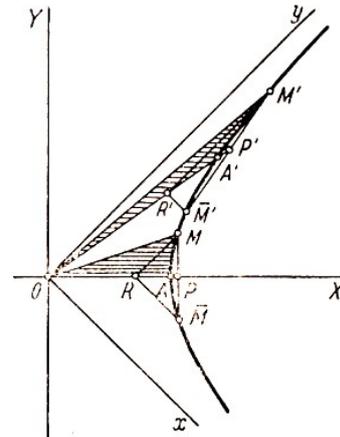


Abb. 30b

Die Strecken PM und OP , d.h. der (hyperbolische) Sinus und Kosinus des Winkels t , gehen dabei in die Strecken $P'M'$ und OP' über. Sind \bar{M} und \bar{M}' die zweiten Schnittpunkte von MP und $M'P'$ mit der Hyperbel, so ist $MP = P\bar{M}$ (da OA die Symmetrieachse der Hyperbel ist) und $M'P' = P'\bar{M}'$ [dies gilt wegen $MP = P\bar{M}$ infolge Eigenschaft d) in Kapitel I, Abschnitt 2]. Mit anderen Worten:

Die Sehnen $M\bar{M}$ und $M'\bar{M}'$ sind zu den entsprechenden Durchmessern OP und OP' konjugiert.

Die Gleichungen $\sinh t = MP$ und $\cosh t = OP$ können wir auch in der Form $\sinh t = \frac{PM}{OA}$ und $\cosh t = \frac{OP}{OA}$ schreiben (da $OA = 1$ ist. Es bleibt zu beweisen, dass auch

$$\sinh t = \frac{P'M'}{OA'}, \quad \cosh t = \frac{OP'}{OA'}$$

gilt.

Zum Beweis ziehen wir durch die Punkte M und \bar{M} , M' und \bar{M}' Geraden, die den Asymptoten parallel sind: $MR \parallel M'R' \parallel Oy$, $\bar{M}R \parallel \bar{M}'R' \parallel Ox$ (Abb. 30b).

Infolge der Eigenschaft 4. in Kapitel I, Abschn. 3, liegen die Punkte R und R' auf OA bzw. OA' . Wegen

$$\angle MR\overline{M} = \angle M'R'\overline{M}' = \angle yOx = 90^\circ$$

sind die Dreiecke $MR\overline{M}$ und $M'R'\overline{M}'$ rechtwinklig. Es sind P und P' die Mittelpunkte der Hypotenusen dieser Dreiecke.

Sie sind gleichzeitig Mittelpunkte der den Dreiecken umbeschriebenen Kreise. Folglich gilt

$$PM = \overline{M}P = RP, \quad P'M' = \overline{M}'P' = R'P'$$

Wir können also

$$\sinh t = \frac{RP}{OA}; \quad \cosh t = \frac{OP}{OA}$$

schreiben. Nun ist nach Eigenschaft d) in Kapitel I, Abschn. 2,

$$\frac{RP}{OA} = \frac{R'P'}{OA'}; \quad \frac{OP}{OA} = \frac{OP'}{OA'}$$

und folglich

$$\sinh t = \frac{R'P'}{OA'} = \frac{P'M'}{OA'}; \quad \cosh h = \frac{OP'}{OA'}$$

was zu beweisen war.

Es sei $\angle AOM = \alpha$, $\angle MOM' = \beta$ (Abb. 31a). Wir fällen von den Punkten M und M' die Lote MP und $M'Q$ auf OA , von M' das Lot $M'P'$ auf OM und von P' die Lote $P'D$ auf $M'Q$ und $P'K$ auf OA . Dann ist

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= PM, & \cos \alpha &= OP; \\ \sin \beta &= PM, & \cos \beta &= OP'; \\ \sin(\alpha + \beta) &= QM, & \cos(\alpha + \beta) &= OQ \end{aligned}$$

Die Dreiecke OMP und $OP'K$ sind ähnlich, denn beide sind rechtwinklig und stimmen noch in einem weiteren Winkel überein.

Wir wollen die hyperbolischen Winkel AOM und MOM' mit t bzw. u bezeichnen (Abb. 31b). Wir fällen von den Punkten M und M' die Lote MP und $M'Q$ auf OA .

Durch M' ziehen wir die zu OM konjugierte Sehne $M'\overline{M}'$ (siehe oben). $M'\overline{M}'$ schneidet OM im Punkt P' . Von Punkt P' fällen wir die Lote $P'D$ auf $M'Q$ und $P'K$ auf OA . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sinh t &= PM, & \cosh t &= OP \\ \sinh u &= \frac{P'M'}{OM}, & \cosh u &= \frac{OP'}{OM} \\ \sinh(t + u) &= QM', & \cosh(t + u) &= OQ \end{aligned}$$

Die Dreiecke OMP und $OP'K$ sind ähnlich, denn beide sind rechtwinklig und stimmen noch in einem weiteren Winkel überein.

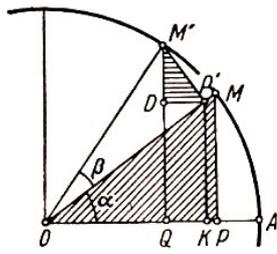


Abb. 31a

Die Dreiecke OMP und $M'P'D$ sind ebenfalls ähnlich, denn beide sind rechtwinklig, und überdies sind die Winkel MOP und $P'M'D$ als Winkel mit paarweise aufeinander senkrecht stehenden Schenkeln gleich.

Offenbar ist (Abb. 31a)

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= QM' = KP' + DM' \\ \cos(\alpha + \beta) &= OQ = OK - DP' \end{aligned}$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OMP und $OP'K$ folgt

$$\frac{KP'}{OP'} = \frac{PM}{OM}; \quad KP' = \frac{OP'}{OM} PM; \quad \frac{OK}{OP'} = \frac{OP}{OM}; \quad OK = \frac{OP'}{OM} OP$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OMP und $M'P'D$ folgt

$$\frac{DM'}{P'M'} = \frac{OP}{OM}; \quad DM' = \frac{P'M'}{OM} OP; \quad \frac{DP'}{P'M'} = \frac{PM}{OM}; \quad DP' = \frac{P'M'}{OM} PM$$

Berücksichtigen wir

$$\begin{aligned} PM &= \sin \alpha, & OP &= \cos \alpha \\ \frac{P'M'}{OM} &= \sin \beta, & \frac{OP'}{OM} &= \cos \beta \end{aligned}$$

so erhalten wir schließlich

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{V})$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{VI})$$

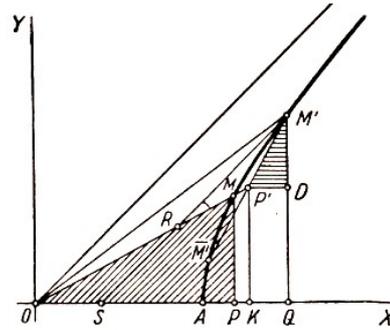


Abb. 31b

Die Dreiecke OMP und $M'P'D$ sind ebenfalls ähnlich, denn beide sind rechtwinklig, und es ist $\angle MOP = \angle P'M'D$. Es schneidet nämlich die Gerade $M'R$, die parallel zur Y -Achse verläuft, den Durchmesser, OM im Punkte R und die X -Achse im Punkt S .

Es ist $\angle QM'S = \angle QSM' = 45^\circ$. Weiterhin gilt $\angle P'M'R = \angle M'RP'$, da $P'M' = RP'$ ist (siehe oben). Nun ist

$$\begin{aligned} \angle MOP &= \angle M'SQ - \angle SRO \\ &= \angle M'SQ - \angle M'RP' \\ \angle P'M'D &= \angle SM'Q - \angle RM'P' \end{aligned}$$

folglich gilt $\angle MOP = \angle P'M'D$.

Offenbar ist (Abb. 31b)

$$\begin{aligned} \sinh(t + u) &= QM' = KP' + DM' \\ \cosh(t + u) &= OQ = OK + P'D \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir

$$\begin{aligned} PM &= \sinh t, & OP &= \cosh t \\ \frac{P'M'}{OM} &= \sinh u, & \frac{OP'}{OM} &= \cosh u \end{aligned}$$

so erhalten wir schließlich

$$\sinh(t + u) = \sinh t \cosh u + \cosh t \sinh u \quad (\text{V})$$

$$\cosh(t + u) = \cosh t \cosh u + \sinh t \sinh u \quad (\text{VI})$$

Aus den Formeln (V), (VII) und den Formeln (I), (II) des vorhergehenden Abschnitts kann man bereits alle übrigen Formeln der Trigonometrie herleiten. So erhalten wir zum Beispiel

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}\end{aligned}$$

Teilen wir Zähler und Nenner des rechts stehenden Bruches durch $\cos \alpha \cdot \cos \beta$, so erhalten wir

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad (\text{VII})$$

Ist $\beta = \alpha$, so gehen die Formeln (V), (VI) und (VII) in

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (\text{VIII})$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (\text{IX})$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad (\text{X})$$

über.

Aus den Formeln (V) und (VI) finden wir

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + \beta) \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \sin \beta$$

$$\cos \alpha = \cos(\alpha + \beta) \cos \beta + \sin(\alpha + \beta) \sin \beta$$

Diese Formeln gehen in

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{XI})$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{XII})$$

über, wenn wir in ihnen $\alpha + \beta$ durch α und α durch $\alpha - \beta$ ersetzen.

Dividieren wir die Formel (XI) durch den Ausdruck (XII), so erhalten wir

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \quad (\text{XIII})$$

Aus den Formeln (V), (VII) und den Formeln (I), (II) des vorhergehenden Abschnitts kann man bereits alle übrigen Formeln der hyperbolischen Trigonometrie herleiten. So erhalten wir zum Beispiel

$$\begin{aligned}\tanh(t + u) &= \frac{\sinh(t + u)}{\cosh(t + u)} \\ &= \frac{\sinh t \cdot \cosh u + \cosh t \cdot \sinh u}{\cosh t \cdot \cosh u + \sinh t \cdot \sinh u}\end{aligned}$$

Teilen wir Zähler und Nenner des rechts stehenden Bruches durch $\cosh t \cdot \cosh u$, so erhalten wir

$$\tanh(t + u) = \frac{\tanh t + \tanh u}{1 + \tanh t \tanh u} \quad (\text{VII})$$

Ist $u = t$, so gehen die Formeln (V), (VI) und (VII) in

$$\sinh 2t = 2 \sinh t \cdot \cosh t \quad (\text{VIII})$$

$$\cosh 2t = \cosh^2 t + \sinh^2 t \quad (\text{IX})$$

$$\tanh 2t = \frac{2 \tanh t}{1 + \tanh^2 t} \quad (\text{X})$$

über.

Aus den Formeln (V) und (VI) finden wir

$$\sinh t = \sinh(t + u) \cosh u - \cosh(t + u) \sinh u$$

$$\cosh t = \cosh(t + u) \cosh u - \sinh(t + u) \sinh u$$

Diese Formeln gehen in

$$\sinh(t - u) = \sinh t \cosh u - \cosh t \sinh u \quad (\text{XI})$$

$$\cosh(t - u) = \cosh t \cosh u - \sinh t \sinh u \quad (\text{XII})$$

über, wenn wir in ihnen $t + u$ durch t und t durch $t - u$ ersetzen.

Dividieren wir die Formel (XI) durch den Ausdruck (XII), so erhalten wir

$$\tanh(t - u) = \frac{\tanh t - \tanh u}{1 - \tanh t \tanh u} \quad (\text{XIII})$$

Wir drücken noch $\sin \alpha, \cos \alpha$ und $\tan \alpha$ durch den Tangens des halben Winkels aus. Aus den Formeln (VIII) bis (X) und (III) folgt

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= 2 \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \quad (\text{XIV})$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \\ &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} (1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}) \\ &= \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \quad (\text{XV})$$

und

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (\text{XVI})$$

Wir drücken noch $\sinh t, \cosh t$ und $\tanh t$ durch den (hyperbolischen) Tangens des halben Winkels aus. Aus den Formeln (VIII) bis (X) und (III) folgt

$$\begin{aligned} \sinh t &= 2 \sinh \frac{t}{2} \cosh \frac{t}{2} = 2 \frac{\sinh \frac{t}{2}}{\cosh \frac{t}{2}} \cosh^2 \frac{t}{2} \\ &= 2 \tanh \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\cosh^2 \frac{t}{2}} = \frac{2 \tanh \frac{t}{2}}{1 - \tanh^2 \frac{t}{2}} \end{aligned} \quad (\text{XIV})$$

$$\begin{aligned} \cosh t &= \cosh^2 \frac{t}{2} + \sinh^2 \frac{t}{2} \\ &= \cosh^2 \frac{t}{2} \left(1 + \frac{\sinh^2 \frac{t}{2}}{\cosh^2 \frac{t}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{\cosh^2 \frac{t}{2}} (1 + \tanh^2 \frac{t}{2}) = \frac{1 + \tanh^2 \frac{t}{2}}{1 - \tanh^2 \frac{t}{2}} \end{aligned} \quad (\text{XV})$$

und

$$\tanh \frac{t}{2} = \frac{2 \tanh \frac{t}{2}}{1 + \tanh^2 \frac{t}{2}} \quad (\text{XVI})$$

Es sei hier noch bemerkt, dass wir zum Beweis der Additionstheoreme für die Hyperbelfunktionen nicht die Symmetrieachse OA als Schenkel des hyperbolischen Winkels t zu nehmen brauchen. Fast genauso wie oben können wir die Formeln (V) und (VI) auch dann herleiten, wenn der Durchmesser OA eine ganz beliebige Lage einnimmt (Abb. 32).

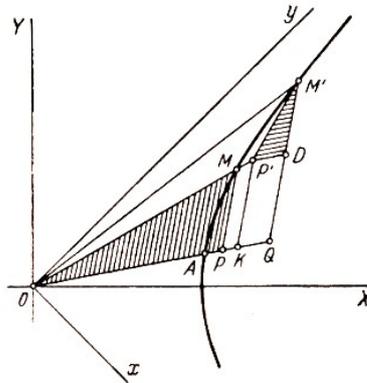


Abb. 32

Die (hyperbolischen) Winkel AOM und MOM' bezeichnen wir wieder mit t und u ; es ist MP und $M'Q$ konjugiert zu OA , $M'P'$ konjugiert zu OM und infolgedessen

$$\begin{aligned} \sinh t &= \frac{PM}{OA}, & \cosh t &= \frac{OP}{OA}, & \sinh u &= \frac{P'M'}{OM}, & \cosh u &= \frac{OP'}{OM} \\ \sinh(t+u) &= \frac{QM'}{OA}, & \cosh(t+u) &= \frac{OQ}{OA} \end{aligned}$$

woraus sich wie oben die Formeln (V) und (VI) ergeben.

3 Der Zusammenhang mit den Logarithmen

3.1 Die geometrische Theorie der Logarithmen

Wir betrachten die Hyperbel $xy = 1$ (Abb. 33).

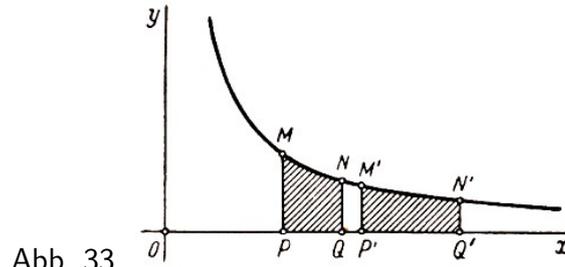


Abb. 33

Von zwei beliebigen Punkten M und N dieser Hyperbel fallen wir die Lote MP und NQ auf die x -Achse. Dabei entsteht ein krummliniges Trapez¹³ $PQNM$.

Der Flächeninhalt S_{PQNM} dieses Trapezes hängt von den Abszissen $OP = x_1$, und $OQ = x_2$ der Punkte M und N ab ($x_2 > x_1$). Diese Abhängigkeit wollen wir jetzt näher untersuchen, indem wir den Flächeninhalt von $PQNM$ berechnen.

Wir zeigen zuerst, dass die Fläche S_{PQNM} nur von dem Quotienten $\frac{x_2}{x_1}$ abhängt; d.h., wir zeigen, dass zwei krummlinige Trapeze $PQNM$ ($OP = x_1$, $OQ = x_2$) und $P'Q'N'M'$ ($OP' = x'_1$, $OQ' = x'_2$) gleichen Flächeninhalt haben, wenn

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x'_2}{x'_1}$$

gilt (Abb. 33).

Wir führen eine hyperbolische Drehung aus, die MP in $M'P'$ überführt. Infolge der Eigenschaft d) aus Kapitel I, Abschn. 2, geht Q in einen Punkt \bar{Q} über, für den $\frac{O\bar{Q}}{OP'} = \frac{OQ}{OP}$ ist, d.h., Q wird in Q' transformiert.

Das bedeutet, dass NQ in $N'Q'$ übergeht, d.h., es wird das krummlinige Trapez $PQNM$ in das krummlinige Trapez $P'Q'N'M'$ transformiert. Folglich ist gemäß Eigenschaft e) in Kapitel I, Abschn. 2, $S_{PQNM} = S_{P'Q'N'M'}$.

Wir sehen also, dass die Fläche S_{PQNM} nur vom Quotienten $\frac{x_2}{x_1} = z$ abhängt, also eine Funktion von z ist. Wir bezeichnen diese Funktion mit

$$S(z) = S_{PQNM} = S\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

Offenbar ist $S(z)$ gleich dem Flächeninhalt eines Trapezes, das von der Hyperbel, der Abszissenachse und den Geraden $x = 1$ und $x = z$ berandet wird ($\frac{z}{1} = z$).

Die Funktion $S(z)$ ist für jedes $z > 1$ definiert. Sie ist monoton wachsend (wenn $z_1 > z_2$, so ist auch $S(z_1) > S(z_2)$) und stetig (benachbarten Werten von z entsprechen benachbarte Werte von $S(z)$).

Natürlich ist $S(1) = 0$ (das Trapez entartet in eine Strecke). Für genügend große z wird

¹³Als krummliniges Trapez bezeichnen wir eine Figur, die von zwei Ordinaten (Abszissen), dem von diesen Ordinaten (Abszissen) begrenzten Abschnitt auf der Abszissen-(Ordinaten-)achse und einem Kurvenstück berandet wird.

$S(z)$ beliebig groß (der Beweis verläuft ganz entsprechend wie der Beweis dafür, dass der hyperbolische Winkel beliebig großer Werte fähig ist).

Hieraus folgt, dass eine Zahl $z > 1$ existiert, für die $S(z) = 1$ ist. Diese Zahl wird im weiteren Verlauf noch von Bedeutung sein; wir bezeichnen sie mit e . Es ist somit $S(e) = 1$ (Abb. 34).

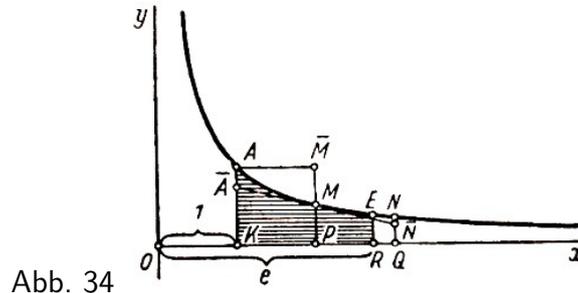


Abb. 34

Wir suchen jetzt also eine Formel für die Funktion $S(z)$. Zunächst zeigen wir, dass für zwei Zahlen z_1 und z_2 , die größer als 1 sind,

$$S(z_1) + S(z_2) = S(z_1 z_2)$$

gilt (für $z_1 = 1$ ist diese Formel offenbar richtig, da $S(1) = 0$ ist).

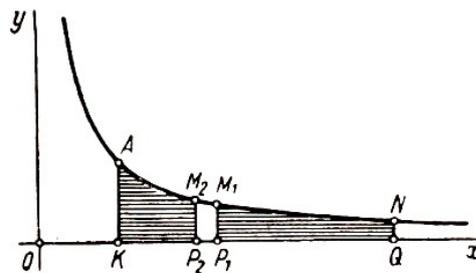


Abb. 35

Es sei $S(z_1)$ der Flächeninhalt des krummlinigen Trapezes KP_1M_1A , wobei $OK = 1$ und $OP_1 = z_1$ ist (Abb. 35), und $S(z_2)$ der Flächeninhalt des krummlinigen Trapezes KP_2M_2A (mit $OP_2 = z_2$) bzw. des ihm flächengleichen krummlinigen Trapezes P_1QNM_1 mit $OQ = z_1 z_2$, (denn es ist $\frac{OP_2}{OK} = \frac{z_2}{1}$; $\frac{OQ}{OP_1} = \frac{z_1 z_2}{z_1} = z_2$).

Hieraus folgt unmittelbar

$$S(z_1) + S(z_2) = S_{KP_1M_1A} + S_{P_1QNM_1} = S_{KQNA} = S(z_1 z_2)$$

was zu beweisen war.

Mit Hilfe dieser Bezeichnung können wir zeigen, dass für jede positive Zahl

$$S(z^\alpha) = \alpha S(z)$$

gilt. Wir betrachten einige Spezialfälle.

Ist $\alpha = n$ eine ganze Zahl, so erhalten wir

$$\begin{aligned} S(z^n) &= S(z \cdot z^{n-1}) = S(z) + S(z^{n-1}) = S(z) + S(z \cdot z^{n-2}) = 2S(z) + S(z^{n-2}) \\ &= 2S(z) + S(z \cdot z^{n-3}) = 3S(z) + S(z^{n-3}) = \dots = (n-2)S(z) + S(z^2) \\ &= (n-2)S(z) + S(z \cdot z) = nS(z) \end{aligned}$$

Ist $\alpha = \frac{1}{m}$, wobei m eine ganze Zahl ist, so erhalten wir nach dem eben Gezeigten

$$S(z) = S\left[\left(z^{\frac{1}{m}}\right)^m\right] = mS\left(z^{\frac{1}{m}}\right), \quad \text{d.h.} \quad S\left(z^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m}S(z)$$

Ist $\alpha = \frac{n}{m}$ rational, so folgt wieder aus dem Vorigen

$$S\left(z^{\frac{n}{m}}\right) = S\left[\left(z^{\frac{1}{m}}\right)^n\right] = nS\left(z^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{n}{m} \cdot S(z)$$

Ist schließlich α irrational, so wird z^α als Grenzwert der Zahlenfolge $z^{\frac{n_1}{m_1}}, z^{\frac{n_2}{m_2}}, \dots, z^{\frac{n_k}{m_k}}, \dots$ definiert, wobei die rationalen Brüche $\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}, \dots, \frac{n_k}{m_k}, \dots$ gegen α streben.

Da wir nun bewiesen haben, dass $S\left(z^{\frac{n_1}{m_1}}\right) = \frac{n_1}{m_1}S(z), \dots, S\left(z^{\frac{n_k}{m_k}}\right) = \frac{n_k}{m_k}S(z)$ ist, erhalten wir beim Grenzübergang auch hier die gleiche Formel¹⁴

$$S(z^\alpha) = \alpha S(z)$$

Es sei nun z eine beliebige Zahl größer 1. Dann ist offenbar $z = e^{\ln z}$, wobei $\ln z$ der natürliche Logarithmus der Zahl z ist, d.h. der Logarithmus der Zahl z zur Basis e . Da $e > 1$ und folglich $\ln z > 0$ ist, haben wir,

$$S(z) = S\left(e^{\ln z}\right) = \ln z \cdot S(e) = \ln z$$

(aus der Definition der Zahl e folgt $S(e) = 1$). So erhalten wir schließlich

$$S(z) = \ln z$$

Das ist die gesuchte Formel. Aus ihr folgt, dass der Flächeninhalt des von der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$, von der Abszissenachse und von den Geraden $x = x_1$ und $x = x_2$ ($x_2 > x_1$) gebildeten krummlinigen Trapezes $PQNM$ gleich $\ln \frac{x_2}{x_1}$ ist.

Wir wurden somit durch Flächeninhalte betreffende geometrische Überlegungen ganz unerwartet auf die Logarithmen geführt.

Dabei ist die Basis des Logarithmensystems gleich einer ganz bestimmten Zahl e . Sie durfte hier nicht beliebig gewählt werden, wie das bei der sonst üblichen Einführung der Logarithmen der Fall ist. Dieser Umstand erklärt, warum die Begründer der Logarithmen, Neper (auch Napier geschrieben) und Bürgi, unabhängig voneinander auf Logarithmen zu ein und derselben Basis e kamen (und nicht zur Basis 10, was doch anscheinend am einfachsten gewesen wäre).

Mit dieser "geometrischen" Definition der Logarithmen hängt es zusammen, dass die Logarithmen zur Basis e oft in mathematischen und physikalischen Problemen auftauchen, die auf den ersten Blick mit der logarithmischen Funktion nichts zu tun haben scheinen.¹⁵

Wir schätzen die Zahl e ab. Der Flächeninhalt $S(2)$ des krummlinigen Trapezes $KPMA$ ($OK = 1, OP = 2$) ist kleiner als der Flächeninhalt $KA \cdot KP = 1 \cdot 1 = 1$ des Rechteckes $KP\overline{MA}$ (Abb. 34); es ist also $S(2) < 1$.

Andererseits ist der Flächeninhalt $S(3)$ des krummlinigen Trapezes $KQNA$ ($OQ = 3$) größer als die Fläche $PM \cdot KQ = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ des Trapezes $KQ\overline{NA}$ (\overline{AN} ist die Tangente an die Hyperbel im Punkt M), also $S(3) > 1$. Aus der Ungleichung $S(2) < 1 < S(3)$ folgt¹⁶

$$2 < e < 3$$

Man kann die Zahl e noch genauer abschätzen. Wir betrachten das krummlinige Trapez $KPMA$, wobei $OK = 1$ und $OP = 1 + \frac{1}{n}$ ist (Abb. 36).

¹⁴Hierbei wird die Stetigkeit der Funktion $S(z)$ benutzt.

¹⁵Die Geschichte der Logarithmen behandelt das populärwissenschaftliche Buch von I. B. Apelson, Die Entstehung der Logarithmen, Moskau-Leningrad 1948. Siehe auch die Broschüre von A.I. Markuschewitsch, Flächeninhalte und Logarithmen. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955 (Übersetzung aus dem Russischen).

¹⁶Hierbei wurde beachtet, dass die Funktion $S(z)$ monoton wächst.

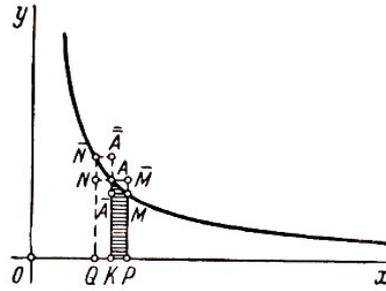


Abb. 36

Der Flächeninhalt dieses Trapezes ist, wie wir bewiesen haben, gleich $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$; er liegt zwischen den Flächeninhalten der Rechtecke $KP\bar{M}A$ und $KPMA$, d.h. zwischen $KA \cdot KP = 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ und $KP \cdot PM = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Also ist

$$\frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$$

Hieraus erhalten wir

$$1 > n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$1 < (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Aus der Ungleichung $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ folgt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Diese letzte Ungleichung erlaubt, e mit beliebiger Genauigkeit abzuschätzen. Wir brauchen n nur genügend groß zu wählen.

Setzen wir zum Beispiel $n = 100$ ein, so erhalten wir

$$2,704 < \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} < e < \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{101} < 2,732$$

woraus sich $e \approx 2,7$ ergibt.

Lässt man n in dem Quotienten $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{n}$ gegen ∞ gehen, so er man als Grenzwert 1. Zusammen mit der Ungleichung $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ folgt daraus

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (3.1)$$

Diese Formel wird oft zur Definition von e benutzt.

Wir fügen noch hinzu, dass die Formel (3.1) wie folgt verallgemeinert werden kann:

sowie

$$S_{KPM\bar{A}} = KP \cdot PM = \frac{a}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a}{n}} = \frac{a}{n} \cdot \frac{n}{n+a} = \frac{a}{n+a}$$

Hieraus folgt

$$\frac{a}{n} > \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right) > \frac{a}{n+a}$$

Weiter erhalten wir genau wie vorher

$$a > n \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right) = \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n$$

$$a < (n+a) \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right) = \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right)^{n+a}$$

d.h.

$$\ln \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n < a < \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right)^{n+a}$$

oder

$$\left(1 + \frac{a}{n} \right)^n < e^a < \left(1 + \frac{a}{n} \right)^{n+a}$$

Für $n \rightarrow \infty$ strebt der Quotient $\left(1 + \frac{a}{n} \right)^{n+a} : \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{a}{n} \right)^a$ gegen 1. Mit Hilfe der letzten Ungleichung folgt daraus die Formel (3.2).

Ganz analog kann man beweisen, dass Formel (8.2) auch für negative a richtig ist. In Abb. 36 sei $OQ = 1 - \frac{a}{n}$, wobei $a > 0$ ist. Es liegt dann $S_{QKAN} = \ln \frac{OK}{OQ} = \ln \frac{1}{1 - \frac{a}{n}} = -\ln \left(1 - \frac{a}{n} \right)$ zwischen $S_{QKAN} = 1 \cdot \frac{a}{n} = \frac{a}{n}$ und $S_{QKAN} = \frac{a}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{n}} = \frac{a}{n-a}$; hieraus folgt genau wie oben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n} \right)^n = e^{-a}$$

Wir wollen zum Schluss untersuchen, wie groß der Flächeninhalt des von einer beliebigen Hyperbel $xy = a$, der Abszissenachse und den Geraden $x = x_1, x = x_2$ gebildeten Trapezes $PQNM$ ist (Abb. 37).

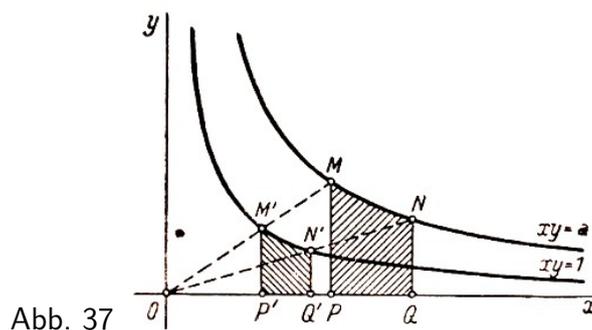


Abb. 37

Wir führen eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Koordinatenursprung als Zentrum aus, der Koeffizient sei $k = \frac{1}{\sqrt{a}}$. Dabei geht die Hyperbel $xy = a$ in die Hyperbel $xy = 1$ über (ein Punkt mit den Koordinaten x, y geht in einen Punkt mit den Koordinaten $\frac{1}{\sqrt{a}}x, \frac{1}{\sqrt{a}}y$ über, und aus der Kurve $xy = a$ wird $xy = 1$.)

Das krummlinige Trapez $PQNM$ wird in das krummlinige Trapez $P'Q'N'M'$ transformiert. Nun ist, wie wir schon wissen

$$S_{P'Q'N'M'} = \ln \left(\frac{OQ'}{OP'} \right)$$

andererseits gilt infolge der Eigenschaften einer Ähnlichkeitstransformation in Bezug auf einen Punkt

$$S_{P'Q'N'M'} = k^2 S_{PQNM} = \frac{1}{a} S_{PGNM} \quad , \quad \frac{OQ'}{OP'} = \frac{OQ}{OP} = \frac{x_2}{x_1}$$

Hieraus folgt

$$S_{PQNM} = a \ln \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$$

Speziell folgt, wenn $a = \log e \approx 0,43$, d.h. gleich dem dekadischen Logarithmus der Zahl e ist,

$$S_{PQNM} = \log e \cdot \ln \left(\frac{x_2}{x_1} \right) = \log > \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$$

(aus den Gleichungen $z = e^{\ln z} = (10^{\log e})^{\ln z} = 10^{\log e \cdot \ln z}$ und $z = 10^{\log z}$ folgt, dass $\log z = \log e \cdot \ln z$ ist). Somit kann der dekadische Logarithmus einer Zahl z als der Flächeninhalt des von der Hyperbel $xy = \log e \approx 0,43$, der Abszissenachse und den Geraden $x = 1$ und $x = z$ gebildeten krummlinigen Trapezes $KPMA$ definiert werden (analog zu Abb. 36, wenn darin $xy = \log e$ statt $xy = 1$ gezeichnet wäre und $OK = 1$, $OP = z$ gewählt würde).

Dies ist die "geometrische Definition der dekadischen Logarithmen".

3.2 Analytische Ausdrücke für die Hyperbelfunktionen

Wir betrachten jetzt wieder die Einheitshyperbel $X^2 - Y^2 = 1$.

Es sei M irgendein Punkt dieser Hyperbel und der hyperbolische Winkel AOM gleich t (Abb. 38).

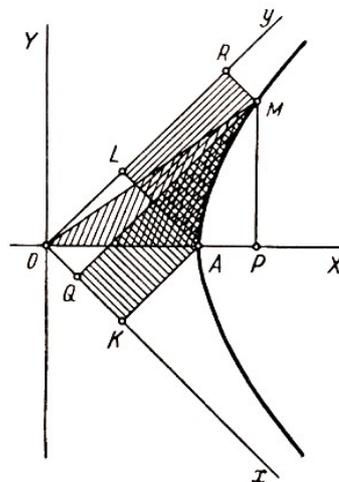


Abb. 38

Die Koordinaten der Punkte M und A in dem Koordinatensystem, dessen Achsen mit den Hyperbelachsen zusammenfallen, sind offenbar gleich $OP = \cosh t$, $PM = \sinh t$ und $OA = 1$; 0. Die Koordinaten dieser Punkte in dem System, dessen Achsen gleichzeitig die Asymptoten der Hyperbel sind, ergeben sich aus den Formeln (2.1), zu

$$OQ = (\cosh t - \sinh t) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad OR = (\cosh t + \sinh t) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

und

$$OK = (1 - 0) \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad OL = (1 + 0) \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Weiterhin sieht man leicht, dass die krummlinigen Trapeze $QKAM$ und $RLAM$ gleichen Flächeninhalt haben und dieser gleich dem Flächeninhalt des hyperbolischen Sektors OAM ist.

Nach der Definition der Hyperbel sind nämlich die Flächeninhalte der zu M bzw. A gehörigen Koordinatenrechtecke gleich, d.h., es ist $S_{OQMR} = S_{OKAL}$. Folglich gilt

$$S_{QKAM} = S_{QKAM} + S_{OQMR} - S_{OKAL} = S_{RLAM}$$

Andererseits ist $S_{\Delta MOQ} = S_{\Delta AOK}$ (wegen $S_{\Delta MOQ} = \frac{1}{2}S_{OQMR}$ und $S_{\Delta AOK} = \frac{1}{2}S_{OKAL}$). Hieraus erhalten wir

$$S_{QKAM} = S_{QKAM} + S_{\Delta MOQ} - S_{\Delta AOK} = S_{OAM}$$

Da nach der Definition des hyperbolischen Winkels $S_{OAM} = \frac{1}{2}t$ ist, ergibt sich

$$S_{QKAM} = S_{RLAM} = \frac{1}{2}t$$

Die Einheitshyperbel hat in dem Koordinatensystem, dessen Achsen mit den Asymptoten zusammenfallen, die Gleichung $xy = \frac{1}{2}$; somit ist (siehe den Schluss des vorigen Abschnitts)

$$S_{QKAM} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{OK}{OQ} \right) = \frac{1}{2} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{(\cosh t - \sinh t) \frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{2} \ln(\cosh t - \sinh t)$$

und demnach

$$\frac{1}{2}t = -\frac{1}{2} \ln(\cosh t - \sinh t) \quad , \quad -t = \ln(\cosh t - \sinh t) \quad (3.3)$$

Entsprechend gilt

$$S_{OAM} = S_{RLAM} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{OR}{OL} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{(\cosh t + \sinh t) \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \ln(\cosh t + \sinh t)$$

und hieraus schließen wir

$$t = \ln(\cosh t + \sinh t) \quad (3.4)$$

Die Formeln (3.3) und (3.4) liefern den Zusammenhang zwischen den Hyperbelfunktionen und den Logarithmen zur Basis e . Aus diesen Formeln erhalten wir

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad , \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad (3.5, 3.6)$$

Außerdem ist

$$\tanh t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \quad (3.7)$$

Das sind die analytischen Ausdrücke der Hyperbelfunktionen; durch sie werden diese Funktionen in der Oberschule gewöhnlich definiert. Aus obigen drei Ausdrücken lassen sich alle Formeln der hyperbolischen Trigonometrie sehr einfach herleiten.

So ist zum Beispiel

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = 1 \quad (I)$$

$$\begin{aligned} \cosh^2 t + \sinh^2 t &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} + \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} \\ &= \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = \cosh 2t \end{aligned} \quad (IX)$$

$$2 \sinh t - \cosh t = 2 \frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{(e^t - e^{-t})(e^t + e^{-t})}{2} = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} = \sinh 2t \quad (VIII)$$

$$\frac{2 \tanh \frac{t}{2}}{1 - \tanh^2 \frac{t}{2}} = \frac{2 \frac{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}}{1 - \left[\frac{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}\right]^2} = \frac{2 \left(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}\right) \left(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}\right)}{4} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh t \quad (XIV)$$

Analog ergeben sich auch die anderen Formeln.

Um aus den Formeln (3.5) und (3.6) weitere Schlüsse ziehen zu können, formen wir den Ausdruck (3.2) etwas um. Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n a}{1 n} + \frac{n(n-1) a^2}{2! n^2} + \frac{n(n-1)(n-2) a^3}{3! n^3} + \dots \\ &+ \frac{n(n-1)\dots[(n-(n-1))]}{n!} \frac{a^n}{n^n} = 1 + \frac{a}{1} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{a^2}{2!} \\ &+ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{a^3}{3!} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \frac{a^n}{n!} \\ &= 1 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \end{aligned}$$

mit

$$u_k = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{a^k}{k!}, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Wir brechen jetzt die Reihe $1 + u_1 + u_2 + \dots + u_k$ nach dem Glied u_k ab, d.h., wir vernachlässigen die Glieder $u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n$. Der dabei begangene Fehler beträgt

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_n$$

Nun folgt aus der Definition der Größen u_n

$$\begin{aligned} |u_k| &\leq \frac{|a|^k}{k!} \\ |u_{k+1}| &= \left(1 - \frac{k}{n}\right) \frac{|a|}{k+1} |u_k| < \frac{|a|}{k+1} |u_k| \\ |u_{k+2}| &= \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) \frac{|a|}{k+2} |u_{k+1}| < \frac{|a|}{k+1} |u_{k+1}| < \frac{|a|^2}{(k+1)^2} |u_k| \\ |u_{k+3}| &= \left(1 - \frac{k+2}{n}\right) \frac{|a|}{k+3} |u_{k+2}| < \frac{|a|}{k+1} |u_{k+2}| < \frac{|a|^3}{(k+1)^3} |u_k| \\ &\dots \end{aligned}$$

(die beiden senkrechten Striche sind die Zeichen für den absoluten Betrag einer Zahl). Der absolute Betrag der Summe

$$u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_n$$

ist also nicht größer als

$$\begin{aligned} & |u_k| \frac{|a|}{k+1} + |u_k| \frac{|a|^2}{(k+1)^2} + |u_k| \frac{|a|^3}{(k+1)^3} + \dots + |u_k| \frac{|a|^{n-k}}{(k+1)^{n-k}} \\ &= |u_k| \frac{|a|}{k+1} - \frac{|a|^{n-k+1}}{(k-1)^{n-k+1}} + \frac{|a|}{k+1} \end{aligned}$$

dabei wurde die Abschätzung

$$|u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_n| \leq |u_{k+1}| + |u_{k+2}| + \dots + |u_n|$$

mitverwendet. Wir setzen nun voraus, dass $k+1 > |a|$ ist (es soll n genügend groß sein, damit man k so wählen kann). In diesem Fall wird der letzte Ausdruck kleiner als

$$|u_k| \frac{\frac{|a|}{k+1}}{1 - \frac{|a|}{k+1}} = |u_k| \frac{|a|}{k+1 - |a|} \leq \frac{|a|^k}{k!} \frac{|a|}{k+1 - |a|}, \quad \text{da } u_k \leq \frac{|a|^k}{k!}$$

Wir machen somit, wenn wir $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ durch die Summe $1 + u_1 + u_2 + \dots + u_k$ ersetzen, einen Fehler, dessen absoluter Betrag den Wert $\frac{|a|^{k+1}}{k!(k+1-|a|)}$ nicht übersteigt. Für jedes $n > k$ gilt also

$$\left| \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n - (1 + u_1 + u_2 + \dots + u_k) \right| < \frac{|a|^{k+1}}{k!(k+1-|a|)}$$

Wir führen nunmehr den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ aus. Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

(Formel 3.2) und

$$u_1 = \frac{a}{1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_2 = \frac{a^2}{2!}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_3 = \frac{a^3}{3!}, \quad \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_k = \frac{a^k}{k!}$$

(siehe die Definition von u_k) erhalten wir

$$\left| e^a - \left(1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^k}{k!}\right) \right| < \frac{|a|^{k+1}}{k!(k+1-|a|)}$$

Wir zeigen nun, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a|^{k+1}}{k!(k+1-|a|)} = 0$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$\frac{|a|^{k+1}}{k!(k+1-|a|)} = V_k$$

Dann ist

$$\begin{aligned} V_{k+l} &= \frac{|a|^{k+l+1}}{(k+l)!(k+l+1-|a|)} = \frac{|a|^{k+l+1}}{k!(k+1-|a|)} \frac{k+1-|a|}{k+l+1-|a|} \cdot \frac{|a|^l}{(k+1)(k+2)\dots(k+l)} \\ &< V_k \cdot \frac{|a|^l}{(k+1)^l} \end{aligned}$$

(der Faktor $\frac{k+1-|a|}{k+l+1-|a|}$ ist kleiner als 1; wir brauchen ihn daher bei der Abschätzung nicht zu berücksichtigen; in dem Faktor $\frac{|a|^l}{(k+1)(k+2)\dots(k+l)}$ ersetzen wir alle Faktoren im Nenner durch $k+1$).

Wir hatten vorausgesetzt, dass $k+1 > |a|$ ist; d.h., der Quotient $\frac{|a|}{k+1} = \alpha$ ist kleiner als 1. Aus

$$V_{k+l} < V_k \alpha^l, \quad \alpha < 1$$

folgt, dass V_{k+l} für $l \rightarrow \infty$ gegen 0 geht oder

$$\lim_{l \rightarrow \infty} V_k = 0$$

Die Formel

$$\left| \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^k}{k!}\right) \right| < V_k$$

liefert schließlich

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| e^a - \left(1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^k}{k!}\right) \right| = 0$$

oder

$$e^a = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^k}{k!}\right)$$

Somit wird also e^a gleich der Summe einer unendlichen Reihe,

$$e^a = 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots \tag{3.8}$$

was wir zeigen wollten.

Setzen wir in Formel (3.8) $a = t$ bzw. $a = -t$, so liefert dies

$$e^t = 1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

$$e^{-t} = 1 - \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$$

Berücksichtigen wir noch die Formeln (3.5) und (3.6), so erhalten wir

$$\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \dots \tag{3.9}$$

$$\sinh t = \frac{t}{1} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \tag{3.10}$$

Mit Hilfe der Formeln (3.9) und (3.10) kann man die Werte von $\sinh t$ und $\cosh t$ (und demzufolge von $\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t}$ für jedes t mit beliebiger Genauigkeit berechnen; man muss nur hinreichend viele Glieder der entsprechenden unendlichen Reihe summieren.

Diese Formeln ermöglichen uns, Tabellen der Hyperbelfunktionen aufzustellen.

3.3 Die Eulerschen Formeln

Im Algebra-Unterricht der Schule wird nur die reelle Potenz einer Zahl definiert. Ausdrücke der Form 2^i oder e^{2-4i} sind noch nicht bekannt. Wir können die Potenz e^a mit komplexem Exponenten a aber jetzt durch die Formel (3.2) definieren:

$$e^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \tag{3.2}$$

Um diesen Grenzwert auszurechnen, benutzen wir die Moivresche Formel

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

Ist $a = \beta + i\alpha$ (β und α reell), so gilt

$$1 + \frac{a}{n} = \left(1 + \frac{\beta}{n}\right) + i \frac{\alpha}{n} = r_n (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$$

mit

$$r_n = \sqrt{\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{n^2}}, \quad \tan \varphi_n = \frac{\frac{\alpha}{n}}{1 + \frac{\beta}{n}}$$

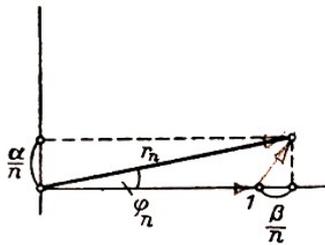


Abb. 39

Hieraus erhalten wir

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = r_n^n (\cos n\varphi_n + i \sin n\varphi_n)$$

und folglich

$$e^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = R (\cos \Phi + i \sin \Phi)$$

mit

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_n)^n, \quad \Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} (n\varphi_n)$$

Wir bestimmen nun R und Φ . Es ist

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{n^2}} \right)^n$$

Wir vergleichen diesen Ausdruck mit

$$e^\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2}{n^2}} \right)^n$$

(siehe Formel (3.2)) und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{R}{e^\beta} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{n^2}} \right)^n}{\left(\sqrt{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2}{n^2}} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{n^2}}{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2}{n^2}}} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{\frac{\alpha^2}{n^2}}{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2}{n^2}}} \right)^n \end{aligned}$$

Nun gilt für $\beta \geq 0$ und genügend große n

$$1 \leq \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^2 < \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

und folglich

$$\left(\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}\right)^n \geq \left(\sqrt{1 + \frac{\frac{\alpha^2}{n^2}}{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2}{n^2}}}\right)^n = \left(\sqrt{1 + \frac{\frac{\alpha^2}{n^2}}{\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^2}}\right)^n > \left(\sqrt{1 + \frac{4\alpha^2}{9n^2}}\right)^n \quad (3.11)$$

Wir müssen nur noch die Ausdrücke

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{2n}}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{4\alpha^2}{9n^2}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4\alpha^2}{9n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{2n}}$$

abschätzen. Dabei verwenden wir die Tatsache, dass für große n infolge Formel (3.2)

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{n^2} \approx e^{\alpha^2} \quad \text{und} \quad \left(1 + \frac{4\alpha^2}{9n^2}\right)^{n^2} \approx e^{\frac{4\alpha^2}{9}}$$

gilt. Da nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\alpha^2})^{\frac{1}{2n}} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\frac{4\alpha^2}{9}})^{\frac{1}{2n}} = 1$$

ist¹⁷, sind die beiden uns interessierenden Grenzwerte gleich 1. Für $\beta < 0$ und genügend große n ist

$$1 > \left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^2 > \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

und in der (3.11) entsprechenden Formel muss das entgegengesetzte Vorzeichen genommen werden. Im übrigen bleibt der Beweis derselbe.

Es ist also für jedes β

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{\frac{\alpha^2}{n^2}}{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2}{n^2}}}\right)^n = 1$$

Das bedeutet

$$\frac{R}{e^\beta} = 1 \quad , \quad R = e^\beta$$

Wir kommen jetzt zur Bestimmung von Φ . Es ist

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} (n\varphi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi_n}{\tan \varphi_n} \cdot n \tan \varphi_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi_n}{\tan \varphi_n} \cdot \frac{\alpha}{1 + \frac{\beta}{n}}\right)$$

¹⁷Dies folgt z.B. daraus, dass für jede Zahl a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a}{2n} = 0$$

und demzufolge $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{2n}} = 1$ gilt.

Nun geht φ_n für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 (weil dabei $\tan \varphi_n = \frac{\frac{\alpha}{n}}{1 + \frac{\beta}{n}} \rightarrow 0$).

Daher ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n}{\tan \varphi_n} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\tan \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\sin \varphi} \cos \varphi = 1$$

denn es gilt

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\sin \varphi} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\varphi \rightarrow 0} \cos \varphi = 1$$

Da aber außerdem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{1 + \frac{\beta}{n}} = \alpha$$

haben wir

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi_n}{\tan \varphi_n} \cdot \frac{\alpha}{1 + \frac{\beta}{n}} \right) = \alpha$$

Es ist demnach $R = e^\beta$ und $\Phi = \alpha$, also

$$e^{\beta+i\alpha} = e^\beta (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Wir können uns davon überzeugen, dass unsere Definition der Potenz e^a auch für komplexe a wirklich brauchbar ist. Diese Definition genügt nämlich den beiden Hauptforderungen, die man an sie auch von vornherein gestellt haben könnte:

1. Bei reellem a stimmt diese Definition mit der für reelle Exponenten gültigen überein (für reelle a hatten wir die Formel (3.2) bereits früher bewiesen).
2. Diese Definition erfüllt die wichtigste Rechenregel für Potenzen:

$$e^{a_1} \cdot e^{a_2} = e^{a_1+a_2}$$

Ist nämlich $a_1 = \beta_1 + i\alpha_1$ und $a_2 = \beta_2 + i\alpha_2$, so wird

$$\begin{aligned} e^{a_1} \cdot e^{a_2} &= e^{\beta_1+i\alpha_1} \cdot e^{\beta_2+i\alpha_2} = e^{\beta_1} (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) \cdot e^{\beta_2} (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) \\ &= e^{\beta_1} \cdot e^{\beta_2} \cdot (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) \\ &= e^{\beta_1+\beta_2} [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)] = e^{\beta_1+\beta_2+i(\alpha_1+\alpha_2)} = e^{a_1+a_2} \end{aligned}$$

Setzen wir in den oben erhaltenen Ausdruck für a die Werte $i\alpha$ bzw. $-i\alpha$ ein, so ergibt sich

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad , \quad e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha$$

Aus diesen beiden Formeln folgt sofort

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad , \quad \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \quad (3.5', 3.6')$$

demzufolge ist wegen $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$$\tan \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})} \quad (3.7')$$

Das sind die Eulerschen Formeln¹⁸. Sie zeigen den Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion.

¹⁸Der schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) war der bedeutendste Mathematiker des XVIII. Jahrhunderts. Er arbeitete in den Jahren 1727-1741 und 1766-1783 an der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg und von 1741-1766 an der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Aus den Formeln (3.5) und (3.6) kann man weitere Schlüsse ziehen. Setzen wir nämlich $a = i\alpha$ bzw. $a = -i\alpha$ in Formel (3.8) ein¹⁹, so erhalten wir

$$e^{i\alpha} = 1 + \frac{i\alpha}{1} - \frac{\alpha^2}{2!} - \frac{i\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{i\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^6}{6!} - \dots$$
$$e^{-i\alpha} = 1 - \frac{i\alpha}{1} - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{i\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{i\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots$$

Unter Berücksichtigung der Formeln (3.5') und (3.6') folgt hieraus

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots \quad (3.9')$$

$$\sin \alpha = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots \quad (3.10')$$

Die Formeln (3.9') und (3.10') gestatten, $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ (und folglich $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$) für jedes α mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen. Man braucht nur genügend viele Glieder der entsprechenden unendlichen Reihen zu berücksichtigen. Mit Hilfe dieser Formeln kann man Tabellen der trigonometrischen Funktionen aufstellen.

¹⁹Die Herleitung der Formel (3.8) aus Formel (3.2) bleibt auch für komplexe Werte von a richtig [es ist nur zu beachten, dass die senkrechten Striche den Modul (absoluten Betrag) einer komplexen Zahl kennzeichnen, d.h. die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate des Realteils und des (reellen) Koeffizienten des Imaginärteils].