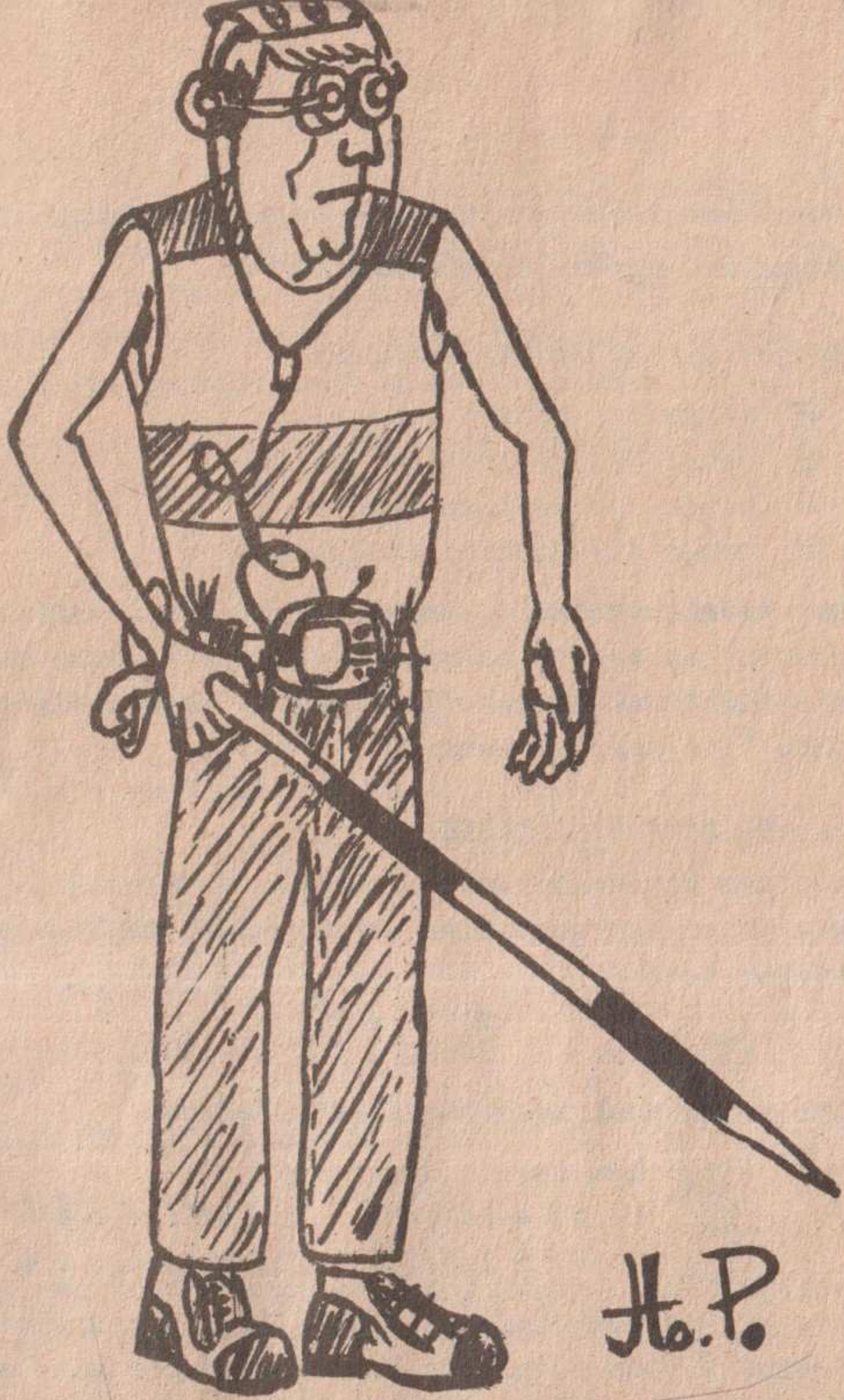


1
86

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
20. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Abstandsbegriffe für rationale Zahlen

Zuerst einige Vereinbarungen:

$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$ Menge der nichtnegativen Zahlen

Der Artikel enthält einige Aufgaben, an denen Ihr Euch überprüfen könnt. Die Aufgaben mit einer $^{\circ}$ sind für das Verständnis nicht maßgeblich. Ihr solltet aber zumindest die Aufgaben ohne $^{\circ}$ in Angriff nehmen.

1. Der absolute Betrag

Aus dem Mathematikunterricht der 7. Klasse ist Euch bekannt, was unter dem absoluten Betrag einer rationalen Zahl a zu verstehen ist:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Ihr kennt auch folgende Eigenschaften:

(B1) Aus $|a|=0$ folgt $a=0$
(B2) $|a.b| = |a|.|b|$ für alle $a,b \in \mathbb{Q}$
(B3) $|a+b| \leq |a|+|b|$ für alle $a,b \in \mathbb{Q}$

Die Eigenschaft (B3) wird auch "Dreiecksungleichung" genannt (warum?). Den absoluten Betrag kann man also als Funktion auffassen:

(B0) $|\ |: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, die den Eigenschaften (B1), (B2) und (B3) genügt ((B0) bedeutet dabei: $\mathbb{Q}$ ist Definitionsbereich von $|\ |$ und $\mathbb{R}_+$ ist Wertevorrat von $|\ |$).

Aus (B2) folgt sofort: $|1| = 1.$ (2)

2. Der p-adische Betrag

Nun kann man die Frage stellen, ob es weitere Funktionen (B0) gibt, für die die Eigenschaften (B1), (B2) und (B3) zutreffen. Diese Frage wurde erstmals von dem deutschen Mathematiker Kurt

HENSEL (1861 - 1941) gestellt. Sie kann tatsächlich positiv beantwortet werden. Im folgenden werden wir uns mit allen derartigen Funktionen bekanntmachen. Fortan bezeichnen wir den uns schon bekannten absoluten Betrag statt mit $|\ |$ nun mit $|\ |_\infty$.

Bezeichne mit p eine beliebige Primzahl. Jede rationale Zahl a läßt sich bekanntlich in der Form

(3) $$a = p^r \cdot \frac{m}{n}$$

darstellen, wobei n eine von 0 verschiedene natürliche Zahl und m und r ganze Zahlen sind; dabei teile p weder m noch n. Für $a \neq 0$ ist r eindeutig bestimmt und heißt die Ordnung von a bezüglich p: $r = \mathrm{ord}_p\, a$.

Falls $a = 0$ ist, setze symbolisch $\mathrm{ord}_p\, 0 = \infty$.

Beispiele: $\mathrm{ord}_3(-18) = 2$, $\mathrm{ord}_5\, 7 = 0$, $\mathrm{ord}_2 \frac{11}{80} = -4$.

Aufgabe 1 Bestimme $\mathrm{ord}_7(-\frac{700}{197})$

$\mathrm{ord}_2(128)$

$\mathrm{ord}_3(10^9)$

Aufgabe 2 Zeige, daß für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\mathrm{ord}_p(a.b) = \mathrm{ord}_p(a) + \mathrm{ord}_p(b)$$

Aufgabe 3 Überlege, warum die Aussage von Aufgabe 2 nicht gilt, falls p eine zusammengesetzte natürliche Zahl ist!

Aufgabe 4° Zeige: $\mathrm{ord}_p((p^n)!) = 1+p+p^2+\ldots+p^{n-1}$

Aufgabe 5° Sei $n = a_0+a_1p+a_2p^2+\ldots+a_sp^s$ mit $0 \leq a_i \leq p-1$. $S_n = \sum_{i=0}^{s} a_i$. Zeige:

$$\mathrm{ord}_p(n!) = \frac{n-S_n}{p-1}.$$

Mit Hilfe dieser Funktionen ord_p (für jede Primzahl p hat man ja eine, deshalb der Plural) definiert man folgende Abbildungen:

$$| \ |_p : \quad \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \qquad , \text{ wobei}$$

$$|a|_p = \begin{cases} p^{-\mathrm{ord}_p a} & \text{falls } a \neq 0 \\ 0 & \text{falls } a = 0 \end{cases}$$

Die Abbildungen $| \ |_p$ erfüllen (B1).

<u>Aufgabe 6</u> Für alle $a,b \in \mathbb{Q}$ gilt: $|a.b|_p = |a|_p \cdot |b|_p$.

Damit ist also auch Eigenschaft (B2) erfüllt. Auch (B3) gilt: In den Fällen $a = 0$ oder $b = 0$ oder $a+b = 0$ ist das offensichtlich. Sei jetzt also $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a+b \neq 0$. Dann ist $a = p^r \cdot \frac{m}{n}$ und $b = p^s \cdot \frac{u}{v}$ mit den schon genannten Bedingungen für r,m,n, desgl. für s,u,v. Bezeichne $t = \min\{r,s\}$, folglich $r-t \geq 0$, $s-t \geq 0$, $a+b = p^t \cdot \frac{p^{r-t}mv+p^{s-t}un}{nv} = p^t \cdot c$

Der Nenner von c ist nicht durch p teilbar (der Zähler allerdings kann im Falle $r = s = t$ durchaus durch p teilbar sein). Somit

$$\mathrm{ord}_p(a+b) \geq t = \min\{\mathrm{ord}_p\, a,\ \mathrm{ord}_p\, b\}, \text{ also}$$

$$|a+b|_p = p^{-\mathrm{ord}_p(a+b)} \leq p^{-t} = p^{-\min\{\mathrm{ord}_p a, \mathrm{ord}_p b\}}, \text{ also}$$

<u>(B4)</u> $|a+b|_p \leq \max\{|a|_p, |b|_p\}$

(Beachte: die Funktion $\varphi(x) = p^{-x}$ ist monoton fallend).

Weiter: $\max\{|a|_p, |b|_p\} \leq |a|_p + |b|_p$. Damit ist (B3) gezeigt. In Wirklichkeit haben wir mit (B4) sogar eine schärfere Ungleichung als (B3) nachgewiesen. Das wird noch von Bedeutung sein. Wir erhielten folgenden

<u>S a t z 1 :</u> Die Abbildungen $| \ |_p$ erfüllen die Bedingungen (B1), (B2), (B3) und (B4).

Eine <u>Definition</u>: Jede Abbildung $| \ | : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit den Eigenschaften (B1), (B2) und (B3) heißt <u>Bewertung</u> (oder Betrag) von $\mathbb{Q}$.

Die $| \ |_p$ werden als die <u>p-adischen Bewertungen</u> bezeichnet.

3. Einige interessante Eigenschaften der p-adischen Bewertungen

3.1. Der p-adische Abstand

So wie die Bewertung $| \ |_\infty$ von $\mathbb{Q}$ uns einen Abstand $d_\infty(a,b) = |a-b|_\infty$ auf der rationalen Zahlengeraden liefert, geben uns auch die p-adischen Bewertungen diese Möglichkeit: Seien $a,b \in \mathbb{Q}$, dann definiere durch $d_p(a,b) = |a-b|_p$ den sogenannten <u>p-adischen Abstand</u> von a nach b.

<u>Aufgabe 7</u>. Zeige, daß für $d = d_p$ und $d = d_\infty$ und für alle $a,b,c \in \mathbb{Q}$ folgende Eigenschaften gelten:

(M1) $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

(M2) $d(a,b) = d(b,a)$

(M3) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$

(Man sagt, das Paar $(\mathbb{Q},d)$ erfüllt die Axiome (M1), (M2), (M3) eines metrischen Raumes)

Alle denkbaren "vernünftigen" Anforderungen an einen Abstandsbegriff sind also erfüllt: a und b haben den Abstand 0 genau dann, wenn a = b ist; der Abstand von a zu b ist gleich dem Abstand von b zu a und es gilt die Dreiecksungleichung. Nichtsdestotrotz weicht der Abstandsbegriff d_p natürlich von dem gewohnten, d. h. von d_∞, ab. Zwei rationale Zahlen a und b liegen (im p-adischen Sinne) um so dichter beieinander, je größer der Exponent ist, mit dem p in die Differenz a-b eingeht. Zum Beispiel ist der 2-adische Abstand von 1 und $\frac{63}{64}$ recht groß: $d_2(1,\frac{62}{64}) = |\frac{1}{64}|_2 = |2^{-6}|_2 = 2^6 = 64$, während der 2-adische Abstand von $10^{10^{10}}$ und 1 ziemlich klein ist: $d_2(10^{10^{10}},1) = |10^{10^{10}}-1|_2 = 2^0 = 1$. Daran gilt es sich zu gewöhnen.

<u>Aufgabe 8</u> Berechne den p-adischen Abstand von a und b:

(i)	a=1	b=26	p=5
(ii)	a=1	b=26	p=3
(iii)	a=1	b=244	p=3
(iv)	a=1	$b=\frac{1}{244}$	p=3
(v)	$a=\frac{(9!)^2}{3^9}$	b=0	p=3

d. h. für alle $m \in \mathbb{N}$ gelte: $|m| \leq 1$. Wir wollen jetzt beweisen, daß (B4) erfüllt ist. Dazu nehme zuerst ein $a \in \mathbb{Q}$ mit $|a| \leq 1$. Dann gilt

$$|1+a|^n = |(1+a)^n| = \Big|\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j\Big| \leq \sum_{j=0}^{n} \Big|\binom{n}{j} a^j\Big| = \sum_{j=0}^{n} \Big|\binom{n}{j}\Big| \cdot |a|^j$$

$$|a| \leq 1 \Rightarrow |a|^j \leq 1.$$

Da die Binomialkoeffizienten natürlich sind, gilt:

$$\Big|\binom{n}{j}\Big| \leq 1, \text{ somit } \quad |1+a|^n \leq 1+1+\ldots+1 = n+1 \quad \text{sowie}$$

$$|1+a| \leq \sqrt[n]{n+1}.$$

Letzteres gilt für alle $n \in \mathbb{N}$! Nach Grenzübergang $\lim\limits_{n \to \infty}$ erhält man:

$$|1+a| = \lim_{n \to \infty} |1+a| \leq \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1.$$

Wir haben also gezeigt: aus $|a| \leq 1$ folgt $|1+a| \leq 1$, (4)
falls $|\;|$ das Axiom ($\neg$A) erfüllt. Der Rest ist jetzt einfach.
Wir haben zu zeigen unter der Voraussetzung ($\neg$A):

$$|a+b| \leq \max\{|a|, |b|\} \quad \text{für alle } a,b \in \mathbb{Q}\,.$$

Für $a = 0$ oder $b = 0$ ist alles klar, also sei jetzt $ab \neq 0$.
O.B.d.A. $|a| \geq |b|$, d. h. $\left|\frac{b}{a}\right| \leq 1$ nach (B2).

$\Rightarrow$ $|a+b| = |a| \cdot \left|1+\frac{b}{a}\right| \leq |a| \cdot 1$ nach (4), also (B4) ist erfüllt.
Wir haben also den

Satz 2: Für eine Bewertung der rationalen Zahlen sind die Axiome (B4) und ($\neg$A) gleichwertig.

3.3. Intervallmittelpunkte

Jetzt folgt die wohl exotischste Eigenschaft der p-adischen Bewertung auf $\mathbb{Q}$. Betrachte für $a \in \mathbb{Q}$, $r \in \mathbb{R}_+$ die Menge $D_p(a,r) := \{x \in \mathbb{Q} : |x-a|_p < r\}$, also die Menge aller Punkte der rationalen Zahlengeraden, die von a einen p-adischen Abstand haben, der kleiner als r ist, d. h. wir betrachten sozusagen das offene p-adische Intervall mit a als Mittelpunkt und r als Radius.

Sei nun $b \in D_p(a,r)$ ein beliebiger Punkt dieses Intervalls. Ich
(5) behaupte: $D_p(a,r) = D_p(b,r)$.
Das ist eine Mengengleichheit, wir haben also zwei Enthalten-

Aufgabe 9 Drücke mit Worten aus, worin der Sinn der Ungleichung $|a|_p \leq 1$ für $a \in \mathbb{Q}$ besteht!

Aufgabe 10° Sei $a \in \mathbb{Q}$. Dann gilt für nur endlich viele Primzahlen p: $|a|_p \neq 1$. Damit hat das Produkt $\prod_{p\text{-Primzahl}} |a|_p$ also nur endlich viele Faktoren.

Zeige: $|a|_\infty \cdot \prod_{p\text{-Primzahl}} |a|_p = 1$.

3.2. Das archimedische Axiom

Aus dem Unterricht wißt Ihr, daß die rationalen Zahlen bezüglich des absoluten Betrages das archimedische Axiom erfüllen:

(A') Für beliebige rationale Zahlen a und b mit $a \neq 0$ gilt: es existiert ein natürliches Vielfaches na von a, das b betragsmäßig übertrifft, d. h. $|na|_\infty > |b|_\infty$.

Das kann man auch so ausdrücken:

(A) Es existiert eine natürliche Zahl m mit $|m| > 1$.

Aufgabe 11 Zeige die Äquivalenz der Aussagen (A') und (A) für $|\ | = |\ |_\infty$.

Betrachte noch zusätzlich die Negation der Aussage (A):

($\neg$A) Für alle natürlichen Zahlen m gilt: $|m| \leq 1$.

Wenden wir uns in diesem Zusammenhang wieder den p-adischen Bewertungen zu. Sei $m = p^r \cdot q$ die Zerlegung (3) für m, bei der jetzt wegen m ganz $r \geq 0$ ist. Folglich $|m|_p = p^{-r} \leq 1$. Das gilt für alle Primzahlen p! Für alle p ist also ($\neg$A) erfüllt.
Aus diesen Gründen heißt $|\ |_\infty$ auch die archimedische Bewertung von $\mathbb{Q}$, während alle $|\ |_p$ als nichtarchimedisch bezeichnet werden.
Übrigens folgt aus (B4) auch ganz allgemein ($\neg$A):

$$|m| = |1+1+\ldots+1| \leq \max\{|m-1|, |1|\} \leq \ldots$$
$$\leq \max\{|1|, \ldots, |1|\} = 1, \quad \text{vgl. (2).}$$

Andersherum: Sei nun ($\neg$A) für eine Bewertung von $\mathbb{Q}$ erfüllt, seinsrelationen zu zeigen:

Beweis der Inklusion $\subseteq$:

$$|x-a|_p < r \Rightarrow |x-b|_p = |(x-a) + (a-b)|_p$$
$$\leq \max\{|x-a|_p, |a-b|_p\} \text{ nach (B4)}$$
$$< r, \text{ da } |x-a|_p < r \text{ und}$$
$$|a-b|_p = |b-a|_p < r.$$

Beweis der Inklusion $\supseteq$:

$$|x-b|_p < r \Rightarrow |x-a|_p = |(x-b) + (b-a)|_p$$
$$\leq \max\{|x-b|_p, |a-b|_p\} \text{ nach (B4)}$$
$$< r \qquad \text{(wie oben)}$$

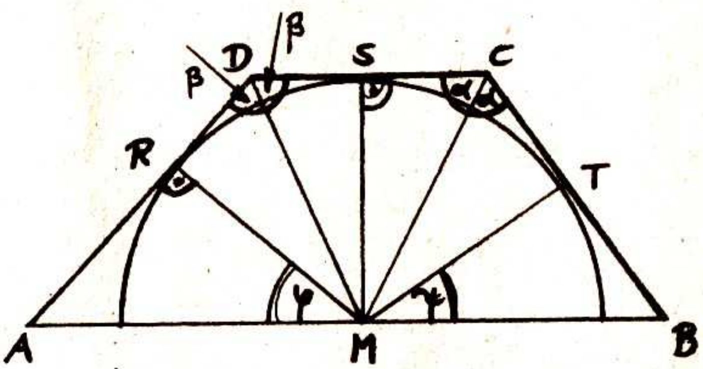
Die Gleichung (4) bedeutet: Jeder Punkt des Intervalls ist gleichzeitig sein Mittelpunkt! Fürwahr eine eigenartige Situation, die es angebracht sein läßt, bei der Arbeit mit p-adischen Abständen äußerste Vorsicht und auf keinen Fall Erfahrungen aus dem Umgang mit dem archimedischen Abstand $|\ |_\infty$ walten zu lassen!

Rainer Zerch, FSU
Bereich Theoretische Mathematik

Fortsetzung folgt

Lösungen IMO-Aufgaben

1. Aufgabe



Bezeichnung:

$\overline{MD} = \overline{MC} = r$

$\overline{AM} = x$

$\overline{BM} = y$

$\sphericalangle MDS = \beta, \sphericalangle MCS = \alpha$

$\sphericalangle AMR = \varphi = 2\alpha - 90^\circ$

(da $\sphericalangle MAR = 180^\circ - 2\alpha$ (Sehnenviereck))

$\sphericalangle BMT = \psi = 2\beta - 90^\circ$

(da $\sphericalangle MBT = 180^\circ - 2\beta$ (Sehnenviereck))

Dann gilt: $\sin(\varphi + \psi) = \sin(2\alpha + 2\beta - 180^\circ) = -\sin(2\alpha + 2\beta)$ (1)

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \cos(2\alpha - 90^\circ) = \cos(90^\circ - 2\alpha) = \\ &= \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos\psi &= \sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{DR} = r\cdot\cot\beta\,, & \overline{CT} = r\cdot\cot\alpha \\ \overline{AR} = r\cdot\tan\varphi\,, & \overline{BT} = r\cdot\tan\psi \\ x = \dfrac{r}{\cos\varphi}\,, & y = \dfrac{r}{\cos\psi} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Damit gilt nun

$$(\overline{AD}+\overline{BC})\cdot\frac{\cos\varphi\cdot\cos\psi}{r} = (\overline{DR}+\overline{AR}+\overline{CT}+\overline{BT})\,\frac{\cos\varphi\cdot\cos\psi}{r}$$

$$\overset{(3)}{=} (\cot\beta+\tan\varphi+\cot\alpha+\tan\psi)\cos\varphi\cdot\cos\psi$$

$$= \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\cos\varphi\cdot\cos\psi+\sin\varphi\cdot\cos\psi+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cos\varphi\cdot\cos\psi+\sin\psi\cdot\cos\varphi$$

$$= \sin(\varphi+\psi)+\frac{\cos\varphi\cdot\cos\psi}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\cdot\sin(\alpha+\beta)$$

$$\overset{(1)}{=} -\sin(2\alpha+2\beta)+4\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)$$

$$= -2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+4\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)$$

$$= 2\sin(\alpha+\beta)\cdot[2\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta]$$

$$= 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) \qquad [\text{da } \sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cdot\cos y].$$

$$= \sin 2\alpha+\sin 2\beta$$

$$\overset{(2)}{=} \cos\varphi+\cos\psi$$

$$\Rightarrow \overline{AD}+\overline{BC} = \frac{r}{\cos\varphi}+\frac{r}{\cos\psi} = x+y = \overline{AB} \quad \square$$

<u>2. Aufgabe</u>

$A(n,k)$ sei folgende Aussage

$M = \{1,\dots,n-1\}$ ist mit zwei Farben bewertet, so daß

(a) Für alle $i\in M$ gilt: i und $n-i$ haben dieselbe Farbe, und

(b) Für alle $i\in M\setminus\{k\}$ gilt: i und $|k-i|$ haben dieselbe Farbe.

Es ist zu zeigen:

(*) Für alle natürlichen Zahlen n,k mit ggT $(n,k)=1$ und $k<n$ gilt: $A(n,k) \longrightarrow$ Alle Elemente von M sind mit ein und derselben Farbe bewertet.

Wir beweisen mittels vollständiger Induktion.
Auf n und k kann man den Euklidschen Algorithmus zur Bestimmung des größten Teilers anwenden.

$$(**)\begin{cases} n = q_0\cdot k + r_0 & 0 < r_0 < k \\ k = q_1\cdot r_0 + r_1 & 0 < r_1 < r_0 \\ r_0 = q_2\cdot r_1 + r_2 & \vdots \\ \ldots & \\ r_{t-2} = q_t\cdot r_{t-1} + r_t & r_t = 1 \text{ laut Voraussetzung.} \end{cases}$$

Induktionsanfang: $t=1$, d. h. $n=q\cdot k+1$

Wegen (b) hat $k-1$ dieselbe Farbe wie 1, ebenso $2k-1$, $3k-1, \ldots$ $qk-1$, wegen (a) dann auch $n-(qk-1)=2$, wegen (b) $k-2$, $2k-2, \ldots$ $qk-2, 3, k-3, \ldots$, d. h. alle Elemente von M haben dieselbe Farbe.

Wir nehmen nun an, daß obige Behauptung (*) für alle Paare (n',k') gilt, für die der Euklidsche Algorithmus weniger als t Schritte benötigt.

Für das Paar (n,k) bestehe der Euklidsche Algorithmus (**) aus t Schritten.

1. Es gilt: $A(n,k) \longrightarrow A(k,r_0)$.

   Beweis: Sei $i \in \{1,2,\ldots,k-1\}\setminus\{r_0\}$ und $A(n,k)$ erfüllt. Dann haben $i, k+i, 2k+i, \ldots, q_0k+i$ die gleiche Farbe, falls $i < r_0$, mithin auch $|q_0k+i - q_0k+r_0| = |i-r_0|$. Analoges gilt für $i > r_0$. Die gleiche Farbe wie i hat auch $k-i$.

2. Laut Induktionsvoraussetzung folgt aus $A(k,r_0)$, da der Euklidsche Algorithmus für (k,r_0) einen Schritt weniger als der für (n,k) braucht, daß alle Zahlen aus $\{1,\ldots,k-1\}$ dieselbe Farbe haben.
   Mit Teilaussage (b) von $A(n,k)$ folgt, daß dann auch die Elemente von $\{k+1, k+2, \ldots, 2k-1, 2k+1, \ldots\}$ dieselbe Farbe haben.
   Mit (b) folgt, daß $k, 2k, \ldots, q_0k$ dieselbe Farbe wie r_0 haben, damit ist M einfarbig. $\square$

<u>3. Aufgabe</u>

<u>Hilfssatz 1:</u> Für alle $k \geq 0$ gilt $\binom{2^k}{m} \equiv \begin{cases} 1 & (2) \quad m=0,2^k \\ 0 & (2) \quad \text{sonst.} \end{cases}$

Beweis: $\binom{2^k}{0} = \binom{2^k}{2^k} = 1 \equiv 1(2)$

Sei jetzt $m \neq 0, 2^k$. $\binom{2^k}{m} = \dfrac{2^k(2^k-1)\ldots[2^k-(m-1)]}{1.2.\ \ldots\ .m}$

Mit $\exp_2(n) =_{df}$ Exponent von 2 in Primfaktorzerlegung von n ergibt sich: $\exp_2(i) < k$ für alle $1 \leq i \leq m$ (da $m < 2^k$)

$\Rightarrow \exp_2(i) = \exp_2(2^k - i)$ für alle $1 \leq i \leq m$

$$\Rightarrow \exp_2(2^k(2^k-1)\cdot\ldots\cdot[2^k-(m-1)] = \exp_2(2^k\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(m-1))$$
$$= k\cdot\exp_2(1\cdot\ldots\cdot(m-1))$$
$$> \exp_2(m)\cdot\exp_2(1\cdot\ldots\cdot(m-1)) = \exp_2(m!)$$

$$\Rightarrow 2 \mid \frac{2^k\cdot(2^k-1)\cdot\ldots\cdot[2^k-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m} \Rightarrow \binom{2^k}{m} \equiv 0 \quad (2).$$

Hilfssatz 2: Für alle $k \geq 1$ und alle $j_1,\ldots,j_l$ mit $2^k \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_l < 2^{k+1}$ gilt:

Falls $Q_{j_1}+\ldots+Q_{j_l} = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{j_l} x^{j_l} + a_{j_l+1} x^{j_l+1} + \ldots + a_{2^{k+1}-1} x^{2^{k+1}-1}$,

so ist für alle m mit $0 \leq m < 2^k$

$a_m \equiv a_{m+2^k}$ (2) und

$w(Q_{j_1}+\ldots+Q_{j_l}) = 2w(Q_{j_1-2^k}+\ldots+Q_{j_l-2^k})$.

Beweis: Sei $\binom{a}{b} =_{df} 0$ für $b > a \Rightarrow a_m = \sum_{q=1}^{l}\binom{j_q}{m}$ und für

$Q_{j_1-2^k}+\ldots+Q_{j_l-2^k} = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{2^k-1} x^{2^k-1}$ ebenso

$b_m = \sum_{q=1}^{l}\binom{j_q-2^k}{m}$.

Damit reicht es zu zeigen, daß für alle j mit $2^k \leq j < 2^{k+1}$ und für alle m mit $0 \leq m < 2^k$ gilt $\binom{j}{m} \equiv \binom{j}{m+2^k}$ (2) und $\binom{j}{m} \equiv \binom{j-2^k}{m}$ (2). Dazu vollständige Induktion:

I.A. $j = 2^k$. Dann ist wegen Hilfssatz 1

$\binom{2^k}{0} \equiv \binom{2^k}{2^k}$ und $\binom{2^k}{m} \equiv \binom{2^k}{m+2^k}$ (2) (wegen Definition) und $\binom{2^k}{m} \equiv \binom{0}{m}$ (2).

I. Schritt: $\binom{j+1}{m} = \binom{j}{m-1} + \binom{j}{m} \equiv \binom{j}{m-1+2^k} + \binom{j}{m+2^k} = \binom{j+1}{m+2^k}$ und

$$\binom{j+1}{m}=\binom{j}{m-1}+\binom{j}{m}\equiv\binom{j-2^k}{m-1}+\binom{j-2^k}{m}=\binom{j+1-2^k}{m} \quad \square$$

Zum Beweis der Aufgabe: (Induktion über die "Größe" von i_n)

I.A. $\quad i_n < 2$: Dann muß $n=2$, $i_1=0$, $i_2=1$ sein und es ist $w(Q_o+Q_1) = 1 = w(Q_o)$.

I.V. $\quad$ Die Aussage gilt für alle Folgen $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ mit $i_n < 2^k$.

I. Schritt: Sei $2^k \leq i_n < 2^{k+1}$ und l so, daß

$$0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_l < 2^k \leq i_{l+1} < i_{l+2} < \ldots < i_n < 2^{k+1}$$

1. Fall: $l=0$ d. h. $2^k \leq i_1 < \ldots < i_n < 2^{k+1}$

Dann gilt nach HS 2:

$$\begin{aligned} w(Q_{i_1}+\ldots+Q_{i_k}) &= 2\cdot w(Q_{i_1-2^k}+\ldots+Q_{i_k-2^k}) \\ &\geq 2\cdot w(Q_{i_1-2^k}) \quad \text{(nach I.V.)} \\ &= w(Q_{i_1}) \end{aligned}$$

2. Fall: $l > 0$

Nach I.V. ist dann $w(Q_{i_1}+\ldots+Q_{i_l}) \geq w(Q_{i_1})$.

Sei jetzt:

$$Q_{i_1}+\ldots+Q_{i_l} = b_o+b_1x+\ldots+b_{2^k-1}x^{2^k-1}$$

$$Q_{i_{l+1}}+\ldots+Q_{i_n} = a_o+a_1x+\ldots+a_{2^k-1}x^{2^k-1}+\ldots+a_{2^{k+1}-1}x^{2^{k+1}-1}$$

$$Q_{i_1}+\ldots+Q_{i_n} = c_o+c_1x+\ldots+c_{2^k-1}x^{2^k-1}+\ldots+c_{2^{k+1}-1}x^{2^{k+1}-1}$$

$\Rightarrow \quad c_i \equiv a_i+b_i \quad (2) \quad$ für $0 \leq i < 2^k$

und $\quad c_i \equiv a_i \quad (2) \quad$ für $2^k \leq i < 2^{k+1}$

$\quad c_i \equiv a_{i-2^k} \quad (2) \quad$ nach HS 2 bzw. $c_{i+2^k} \equiv a_i \quad (2)$ für $0 \leq i < 2^k$

$\Rightarrow$ Falls $b_i \equiv 1 \ (2)$ so ist $c_i \equiv 1 \ (2)$ oder $c_{i+2^k} \equiv 1 \ (2)$

$\Rightarrow kz\ \{i : c_i \equiv 1\ (2)\} \geq kz\ \{i : b_i \equiv 1\ (2)\}$

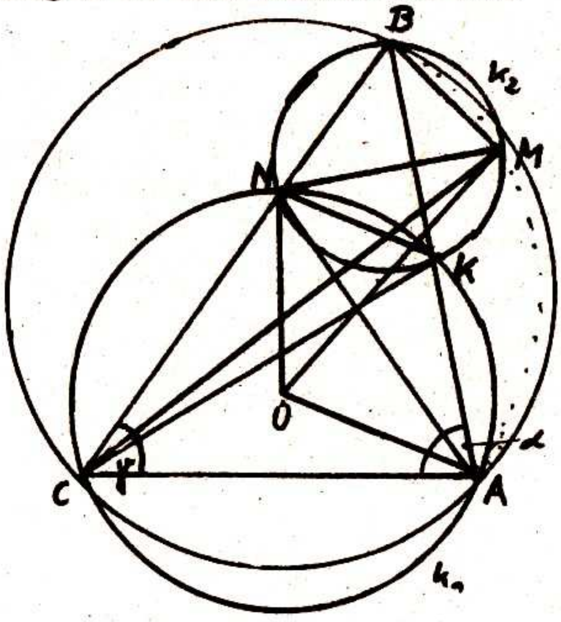
$\Rightarrow w(Q_{i_1} + \ldots + Q_{i_n}) \geq w(Q_{i_1} + \ldots + Q_{i_l}) \geq w(Q_{i_1})\ .\ \square$

5. Aufgabe

Sei o.B.d.A. $\gamma < \alpha$ ($\gamma = \sphericalangle ACB$, $\alpha = \sphericalangle CAB$) (für $\alpha = \beta$ ist B=M) $\Rightarrow$ $\gamma < 90^\circ$ und M liegt auf dem Bogen $\widehat{AB}$ des Umkreises von $\triangle$ ABC, auf dem C nicht liegt.

Bemerkung:

Für $\gamma > \alpha$ wird A und C und K und N vertauscht und der Beweis ändert sich nicht.



Es gilt nun:

$$\sphericalangle AON = 2\gamma \quad \text{(Zentri-Peripheriewinkelsatz)} \qquad (1)$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \sphericalangle OAN = \sphericalangle ANO = 90^\circ - \gamma \quad \text{(Winkelsumme im gleichschenkligen } \triangle OAN\text{)} \quad (> 0 \text{ wegen } \gamma < 90^\circ) \qquad (2)$$

$$\sphericalangle ANK = \sphericalangle ACK \quad \text{(Peripheriewinkel)} \qquad (3)$$

$$\sphericalangle KNM = \sphericalangle KBM = \sphericalangle ABM = \sphericalangle ACM \quad \text{(Peripheriewinkel)} \qquad (4)$$

$$\sphericalangle NAK = \sphericalangle NCK \quad \text{(Peripheriewinkel)} \qquad (5)$$

$$\sphericalangle BAM = \sphericalangle BCM = \sphericalangle KAM \quad \text{(Peripheriewinkel)} \qquad (6)$$

$$\sphericalangle AKN = 180^\circ - \gamma \quad \text{(Sehnenviereck)} \qquad (7)$$

$$\overset{(7)}{\Rightarrow} \quad \sphericalangle NMB = \sphericalangle NKB = \gamma \quad \text{(Peripheriewinkel, Nebenw.)} \qquad (8)$$

Damit folgt: $\sphericalangle ONM + \sphericalangle OAM = (\sphericalangle ONA + \sphericalangle ANK + \sphericalangle KNM) + (\sphericalangle OAN + \sphericalangle NAK + \sphericalangle KAM)$

$$\overset{(6)(5)(2)(3)(4)}{=} 90^\circ - \gamma + \sphericalangle ACK + \sphericalangle ACM + 90^\circ - \gamma + \sphericalangle NCK + \sphericalangle BCM$$

$$= 180^\circ - 2\gamma + \underbrace{(\sphericalangle ACK + \sphericalangle KCN)}_{\gamma} + \underbrace{(\sphericalangle ACM + \sphericalangle BCM)}_{\gamma}$$

$$= 180^\circ$$

$\Rightarrow$ $\square$ AMNO ist Sehnenviereck $\Rightarrow$ $\sphericalangle NMO = \sphericalangle OAN =$ (Peripheriew.) (9)

$\Rightarrow \sphericalangle OMB = \sphericalangle BMN + \sphericalangle NMO \overset{(8)}{=} \gamma + \sphericalangle NMO \overset{(9)}{=} \gamma + \sphericalangle OAN \overset{(2)}{=} \gamma + 90° - \gamma = 90°$

$\Rightarrow \sphericalangle OMB = 90°$. □

Preisaufgaben

S 1 Man löse das Gleichungssystem

2

$$\frac{x+y}{xy} + \frac{xy}{x+y} = a + \frac{1}{a} \qquad a,b \in R$$

$$\frac{x-y}{xy} + \frac{xy}{x-y} = b + \frac{1}{b}$$

in reellen Unbekannten x,y.

S 2 120 gleiche Kugeln werden zu einer dreiseitigen Pyramide
1 aufgeschichtet.
Aus wieviel Kugeln besteht die Grundfläche?

S 3 In eine Kiste wurden K Kisten gelegt. In jede von diesen
1 K Kisten wurden entweder wieder K Kisten gelegt oder überhaupt keine. Man finde die Anzahl der leeren Kisten, wenn die Anzahl der gefüllten gleich m ist.

S 4 Durch einen der Punkte des Bogens AB eines Kreises werden
1 zwei beliebige Geraden so gelegt, daß sie die Sehne in den Punkten D,E und den Kreis in den Punkten F und G schneiden. Bei welcher Lage des Punktes C besitzt das Viereck DEGF einen Umkreis?

S 5 Es sei $x+y+z = \frac{\pi}{2}k$. Für welche ganze Zahl k hängt die Summe
1 $\tan y \tan z + \tan z \tan x + \tan x \tan y$
nicht von x,y und z ab ($x,y,z \in R$).

S 6

2 Найти третью сторону треугольника,если даны две стороны его а и в и известно,что медианы,соответствующие этим сторонам,пересекаются под прямым углом.При каких условиях такой треугольник существует?

Einsendeschluß 10. 4. 86

Jahresinhaltsverzeichnis 1985

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein

Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M. Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redakationsschluß 12. 12. 85

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	20 (1986) 1	S. 1–16

WURZEL

2
86

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
20. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Berechnung mit beliebiger Genauigkeit

In vielfältigen Zusammenhängen ist es erforderlich, den Wert einer irrationalen Zahl, wie zum Beispiel $\sqrt{2}$, e oder auch π, mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen.
Dies ist theoretisch prinzipiell möglich, wenn eine Näherungsformel oder ein Algorithmus zur sukzessiven Approximation dieser Größe vorliegen. Mitunter gibt es sogar Formeln, die den gesuchten Wert exakt beschreiben - jedoch selbst auf unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche zurückgehen, wie zum Beispiel

$$\pi = 16 \text{ arc tan } (\frac{1}{5}) - 4 \text{ arc tan } (\frac{1}{239})$$

von J. Machin (1706). Folglich muß man auch in diesem Falle auf eine Reihenentwicklung, wie etwa

$$\text{arc tan } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

zurückgreifen, wobei diese Summe zwar mit beliebiger - aber doch endlicher - Genauigkeit berechnet werden kann. Und man kann abschätzen, welcher Fehler bei der n-ten Näherung

$$\text{arc tan } x \approx \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{x^{2i-1}}{2i-1} \quad \text{für } x_1 = \frac{1}{5},\ x_2 = \frac{1}{239}$$

entsteht. Für den Fehler f_n einer alternierenden Reihe gilt bekanntlich

$$f_n \leq |a_{n+1}| \text{ , d.h. } f_n \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1} .$$

Um nun π auf k Dezimalen genau zu berechnen, wähle man $z = k + s$ (s ... Schutzstellen wegen zusätzlichem Rundungsfehler), und nach einer kurzen Rechnung entsteht eine Forderung an n, die die gewünschte Genauigkeit garantiert:

$$\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leqslant 10^{-z}, \text{ mit } 0 < x < 1,\ n \in N_+$$

$$n > \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-z}{\lg x} + \underbrace{\frac{\lg(2n+1)}{\lg x}}_{\text{Betrag sehr klein; negativ}} - 1\right) \curvearrowright n > \frac{1}{2}\left(\frac{-z}{\lg x} - 1\right).$$

Falls nun $z = 24$ (π auf mindestens 20 Dezimalen genau), folgt

$n = 17$ für arc tan $(\frac{1}{5})$ und

$n = 5$ für arc tan $(\frac{1}{239})$.

Der Computer liefert folgendes Ergebnis:

$$\pi \approx 16 \cdot \sum_{i=1}^{17} (-1)^{i-1} \frac{0.2^{2i-1}}{2i-1} + 4 \cdot \sum_{i=1}^{5} (-1)^{i-1} \frac{(\frac{1}{239})^{2i-1}}{2i-1}$$

$\pi \approx 3.17507$,

ein Wert für π, der schon in der 2. Dezimale abweicht - also unbrauchbar ist. Übrigens sind die hier einfließenden Näherungen

arc tan $(\frac{1}{5}) \approx 0.197396$ was auf

arc tan$(\frac{1}{5}) \approx 0{,}2 - \frac{0{,}2^3}{3} + \frac{0{,}2^5}{5} - \frac{0{,}2^7}{7}$ bzw. bei

arc tan $(\frac{1}{239}) \approx 4.18408 \cdot 10^{-3}$ auf

$$\arctan\left(\frac{1}{239}\right) \approx \frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3}$$

hinausläuft.
Eine Vergrößerung von n bleibt ohne Einfluß auf das Ergebnis, denn die o.g. Näherungen sind in allen 6 gültigen Ziffern korrekt, wobei die letzte gerundet ist. Bei 8-stelliger Rechnung erhält man mit $\pi \approx 3.14159266$ einen weit besseren Wert. Dennoch scheint eine solche Berechnung mit <u>beliebiger</u> Genauigkeit nur <u>theoretisch</u> möglich zu sein!? - Nein!
Da aber bei jedem Computer die Anzahl der verarbeitbaren Stellen infolge der internen Zahlendarstellung als Wort mit begrenzter Länge endlich ist, muß ein "portionsweises" Verarbeiten von Zifferngruppen simuliert werden. Natürlich ist dies bei Verwendung eines einfachen elektronischen Taschenrechners nur sehr mühevoll möglich. Das Vorgehen betrachten wir am Beispiel der Berechnung von e auf 20 Stellen.
Bekanntlich gilt

$$e = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \ldots$$

und für die n-te Näherung

$$e \approx e_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = 1 + \frac{1}{1}(1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{3}(1 + \ldots + \frac{1}{n-1}(1 + \frac{1}{n})\ldots)))).$$

Aus dieser Umformung ist der Algorithmus zur Berechnung von e_n sofort ablesbar:

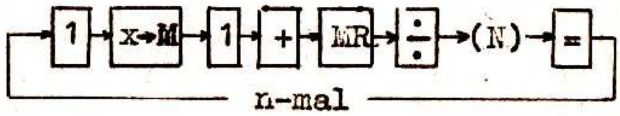
1. Lies den Wert für n ein.
2. Weise e den Wert 1 zu.
3. Solange n > 0 gilt
   weise e den Wert 1 + e/n zu;
   weise n den Wert n - 1 zu.
4. Drucke den Wert von e aus.

Zur Realisierung dieses Algorithmus verwendet man ein/einen

BASIC-Programm (für Z 9001)

```
1Ø INPUT N
2Ø E = 1
3Ø IF NOT (N > Ø) THEN 7Ø
4Ø E = 1 + E/N
5Ø N = N - 1
6Ø GOTO 3Ø
7Ø PRINT E
```

Tastenfolgeplan (für SR 1)



Wie nicht anders zu erwarten, erhalten wir beispielsweise

$e_5 = 2,71667$ bzw. $e_5 = 2,7166667$.

Um nun die "portionsweise" Berechnung von e auf 20 Stellen vorzubereiten, wählen wir n aus einer Abschätzung für den Formelfehler f_n.

$$f_n = e - e_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots$$

$$f_n < \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+2)} + \frac{1}{(n+2)!(n+2)} + \dots$$

Es ergibt sich eine unendliche geometrische Reihe mit

$q = \frac{1}{n+2}$ ($|q| < 1$), $a = \frac{1}{(n+1)!}$, d.h.

$$f_n < \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!} .$$

Wir verwenden daher $n = 21$, denn $f_{21} < 10^{-21}$, wobei natürlich die 20. Stelle nicht absolut sicher ist.

Gemäß des o.g. Algorithmus' wird in Schritt 3 bei jedem Zyklus der Wert von e durch den Wert von n dividiert, danach um 1 vergrößert und wiederum e als Wert zugewiesen. Gestartet wird mit

1, d.h.

$$1 = \underset{x_0}{1,}\ \underbrace{000}_{x_1}\ \underbrace{000}_{x_2}\ \underbrace{000}_{\ldots}\ 000\ 000\ 000\ \underbrace{000}\ \underbrace{000}_{x_8}$$

und es werden hier 8 Gruppen mit je einer Zahl bestehend aus (z. B.) 3 Ziffern gebildet und in einem Vektor (x_0, x_1, x_2, ..., x_8) gespeichert. Wir betrachten nun den 2. Zyklus, um die Division dieses Vektors durch n - 1 = 20 zu studieren:

$$1 + \frac{1}{21} = \underset{x_0}{1,}\ \underbrace{047}_{x_1}\ \underbrace{619}_{x_2}\ \underbrace{047}_{\ldots}\ 619\ 047\ 619\ \underbrace{047}\ \underbrace{619}_{x_8} \ldots$$

$$\begin{array}{lr}
1,\ 047\ \underbrace{619}_{x_2}\ 047\ 619\ 047\ 619\ 047\ 619 : 20 = 0, & \\
\underline{-\ 0} & \\
1\ \overbrace{047} \longrightarrow [1047 : 20] \longrightarrow & 052 \\
\underline{-\ 1\ 040} \longleftarrow 052 \cdot 20 & \\
7\ \ 619 \longleftarrow 10^3 \cdot ([1047:20] - 052 \cdot 20) + x_2 & 380 \\
\underline{-\ 7\ \ 600} & \\
19\ 047 & 952 \\
\underline{-\ 19\ 040} & \\
7\ 619 & 380 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Das Resultat e nach diesem 2. Zyklus heißt

$$1 + \frac{e}{20} = \underset{x_0}{1,}\ \underbrace{052}_{x_1}\ \underbrace{380}_{x_2}\ \underbrace{952}_{\ldots}\ 380\ 952\ 380\ \underbrace{952}\ \underbrace{380}_{x_8}$$

Ganz analog zur Rechnung im Dezimalsystem erfolgt hier die Division mit der Basis B = 1000 und das folgende BASIC-Programm ist naheliegend.

```
10  B = 1000 : X(0) = 1
20  FOR N = 21  TO 1  STEP -1
30      FOR J = 0  TO 8
40          Q = INT (X(J)/N)
50          R = X(J) - Q * N
60          X(J) = Q
70          X(J + 1) = X(J + 1) + B * R
80      NEXT J
90      X(0) = X(0) + 1
100 NEXT N
110 FOR  J = 0  TO 8
120      PRINT  X(J);
130 NEXT J
140 END
```

Etwa 6 Sekunden nach dem Start des Programmes (mit Z 9001) erhält man 2 718 281 828 459 045 235 359 357, was mit e = 2, 718 281 828 459 045 235 362 874 ... tatsächlich in 20 Stellen (359 ist noch zu runden auf 360) übereinstimmt.

Die an diesem Beispiel demonstrierte Idee der "portionsweisen" Verarbeitung von Zahlen mit beliebiger Stellenzahl läßt sich auf die ziffernweise Ausführung der Grundrechenarten übertragen. Dabei werden die Subtraktion nach Vorzeichenwechsel auf die Addition, die Multiplikation auf die Addition und die Division auf die Subtraktion zurückgeführt. Weitere Ausbaustufen sind natürlich möglich, obgleich eine bemerkenswerte Erhöhung der Rechenzeit eintritt.

Das im folgenden aufgelistete Grundprogramm für die Addition und Subtraktion zweier höchstens aus 12 Ziffern bestehenden Festkommazahlen wird relativ zu obigem Programm so umfangreich, da eben auch der 2. Operand eine 12-ziffrige Zahl sein kann, die portionsweise (hier B = 10) verarbeitet werden muß.

Nach den einzelnen Modulen des Programms sind kurze Kommentare eingefügt, die zum schnellen Verständnis des zugrundeliegenden Algorithmus beitragen sollen.

```
10   REM ADD. / SUB.  12-stell. Festkommazahlen
20   WINDOW: CLS
30   DIM W (13): DIM X(13): DIM Y(13)
40   REM HAUPTPROGRAMM
50   GOSUB 570
60   IF OP$ = "+"  THEN  S = 1: GOTO 80
70   IF OP$ = "-"  THEN  S = 2
80   ON  S  GOSUB 310, 250
90   GOSUB 950
100  END
```

10 - 100

Im Hauptprogramm werden die 3 zu verwendenden Vektoren dimensioniert (30), zur Eingabe des Terms aufgefordert (50) und zur entsprechenden Berechnung verzweigt (80) sowie die Ergebnisausgabe veranlaßt (90).

```
110  REM UP X(J): = W(J)
120  FOR  J = 1  TO 12
130       X(J) = W(J) * W(0)
140  NEXT J
150  X(13) = DP
160  X(0) = 0
170  RETURN

180  REM UP Y(J): = W(J)
190  FOR  J = 1  TO 12
200       Y(J) = W(J) * W(0)
210  NEXT J
220  Y(13) = DP
230  Y(0) = 0
240  RETURN
```

110 - 240

Gemäß w_o erfolgt die Belegung von x_i bzw. y_i (i = 1, ..., 12) (12Ø - 14Ø, 19Ø - 21Ø). Weiterhin gilt $x_o = y_o = 0$ (16Ø, 23Ø). Die 13. Vektorkomponente enthält die jeweilige Dezimalpunktinformation.

```
25Ø  REM UP Y(J): = - Y(J)
26Ø  FOR  J = 1  TO 12
27Ø       Y(J) = - Y(J)
28Ø  NEXT J
29Ø  GOSUB 31Ø
3ØØ  RETURN
```

25Ø - 3ØØ

Vor Ausführung der Subtraktion wird der 2. Operand ziffernweise negiert (26Ø - 28Ø). Danach kann ziffernweise addiert werden, doch vorher ist die Stellung des Dezimalpunktes zu berücksichtigen (29Ø).

```
31Ø  REM UP VERSCHIEBUNG FUER ADDITION
32Ø  IF NOT (X(13) > = Y(13))  THEN 45Ø
33Ø     V = X(13) - Y(13)
34Ø     IF V = Ø  THEN 44Ø
35Ø     Y(13) = X(13)
36Ø     J = 12
37Ø     IF NOT (J - V > Ø)  THEN 41Ø
38Ø        Y(J) = Y(J - V)
39Ø        J = J - 1
4ØØ     GOTO 37Ø
41Ø     FOR  K = 1  TO J
42Ø          Y(K) = Ø
43Ø     NEXT K
44Ø  GOTO 55Ø
```

```
45Ø       V = Y(13) - X(13)
46Ø       X(13) = Y(13)
47Ø       J = 12
48Ø       IF NOT (J - V > Ø)  THEN 52Ø
49Ø          X(J) = X(J - V)
5ØØ          J = J - 1
51Ø       GOTO 48Ø
52Ø       FOR K = 1  TO J
53Ø           X(K) = Ø
54Ø       NEXT K
55Ø    GOSUB 1Ø8Ø
56Ø    RETURN
```

31Ø - 56Ø

Entsprechend der Dezimalpunktstellung in den Operanden und relativ zueinander erfolgt stets eine ziffernweise Verschiebung "nach unten" (37Ø - 4ØØ, 48Ø - 51Ø), d. h. beide Operanden werden auf ein Format mit der (ursprünglich) größeren Dezimalpunktstellenzahl gebracht (35Ø, 46Ø). Natürlich muß "von oben" mit Null aufgefüllt (gelöscht) werden (41Ø - 43Ø, 52Ø - 54Ø). Bei der Verschiebung erfolgt keine Rundung, die Ziffern werden "abgeschnitten".

```
57Ø   REM UP EINGABE DES TERMS / OPERANDENVEKTOREN
58Ø   INPUT "?"; Z$
59Ø   Z1$ = "" : Z2$ = "" : OP$ = "" : VZ$ = " "
6ØØ   J = 1
61Ø   IF MID$ (Z$, J, 1) = CHR$ (32)  THEN 58Ø
62Ø   IF NOT (MID$ (Z$, J, 1) < > CHR$ (32))  THEN 66Ø
63Ø      Z1$ = Z1$ + MID$ (Z$, J, 1)
64Ø      J = J + 1
65Ø   GOTO 62Ø
66Ø   J = J + 1
67Ø   OP$ = MID$ (Z$, J, 1)
68Ø   IF NOT (OP$ = "+" OR OP$ = "-")  THEN 58Ø
69Ø   J = J + 1
```

```
7ØØ  IF NOT (MID$ (Z$, J, 1) = CHR$ (32))  THEN 58Ø
71Ø  J = J + 1
72Ø  Z2$ = MID$ (Z$, J)
73Ø  Z$ = Z1$ : GOSUB 76Ø : GOSUB 11Ø
74Ø  Z$ = Z2$ : GOSUB 76Ø : GOSUB 18Ø
75Ø  RETURN
```

57Ø - 75Ø

Die Eingabe des Terms erfolgt unmittelbar nach dem Fragezeichen. Zwischen Vorzeichen und Betrag der Zahl darf kein Leerzeichen stehen. Das Operationszeichen (+/-) wird von je einem Zwischenraum beidseitig umgeben. (Ganz bewußt existiert im Programm fast keine Eingabekontrolle.) Jeder Operand kann höohstens eine 12-stellige Festkommazahl sein. Die gesamte Eingabe wird in die beiden Operanden (62Ø - 65Ø, 72Ø) und den Operator (67Ø) aufgespalten.

```
76Ø  REM UP AUFBAU DER VEKTOREN
77Ø  IF LEN (Z$) < 13  THEN Z$ = Z$ + "."
78Ø  IF NOT (MID$ (Z$, 1, 1) = "-")  THEN 82Ø
79Ø     W(Ø) = - 1
8ØØ     Z$ = MID$ (Z$, 2)
81Ø  GOTO 84Ø
82Ø     W(Ø) = 1
83Ø     IF (MID$ (Z$, 1, 1) = "+")  THEN Z$ = MID$ (Z$, 2)
84Ø  J = 1
85Ø  IF NOT (MID$ (Z$, J, 1)<>CHR$ (46) AND J < 13) THEN 89Ø
86Ø     W(J) = VAL (MID$ (Z$, J, 1))
87Ø     J = J + 1
88Ø  GOTO 85Ø
89Ø  DP = J
9ØØ  IF DP = 13  THEN 94Ø
91Ø  FOR  K = J  TO 12
92Ø       W(K) = VAL (MID$ (Z$, K + 1, 1))
```

```
930  NEXT K
940  RETURN
```

760 - 940

Den Komponenten w_i (i = 1, ..., 12) werden die Ziffern des jeweiligen Operanden zugewiesen (840 - 880). Desweiteren gilt $w_0 = \begin{cases} 1, & \text{falls Operand positiv} \\ -1, & \text{falls Operand negativ} \end{cases}$, und DP $\in \{1, ..., 13\}$ zur Angabe der Dezimalpunktstellung.

```
 950 REM UP AUSGABE DES ERGEBNISSES
 960 PRINT VZ$;
 970 IF NOT (X(13) < > 1)  THEN 1020
 980     FOR  J = 1   TO X(13) - 1
 990          PRINT MID$ (STR $ (ABS (X(J))), 2);
1000     NEXT J
1010     IF X(13) = 14  THEN PRINT CHR$ (8); CHR$ (8);
         "0"; "." : GOTO 1070
1020     PRINT CHR$ (46);
1030     IF X(13) = 13  THEN 1070
1040     FOR  J = X(13)  TO 12
1050          PRINT MID$ (STR $ (ABS (X(J))), 2);
1060     NEXT J
1070 RETURN
```

950 - 1070

Die Ausgabe des Resultates erfolgt als 12(13)-stellige Festkommazahl. Das Vorzeichen "-" wird angegeben, kein Vorzeichen heißt "+".

```
1Ø8Ø  REM UP ADDITION / SUBTRAKTION
1Ø9Ø  FOR  J = 12  TO 1  STEP -1
11ØØ       X(J) = X(J) + Y(J)
111Ø       IF X(J) > 9  THEN
           X(J) = X(J) - 1Ø : X(J - 1) = X(J - 1) + 1
112Ø       IF X(J) < Ø  THEN
           X(J) = X(J) + 1Ø : X(J - 1) = X(J - 1) - 1
113Ø  NEXT J
114Ø  IF NOT (X(Ø) <> Ø)  THEN  127Ø
115Ø     IF NOT (X(Ø) = - 1)  THEN 121Ø
116Ø        FOR  J = 12  TO 1   STEP -1
117Ø             IF X(J) <> Ø  THEN
                 X(J) = X(J) - 1Ø : X(J - 1) = X(J - 1) + 1
118Ø        NEXT J
119Ø        VZ$ = "-"
12ØØ     GOTO  126Ø
121Ø        IF X(12) > = 5  THEN X(11) = X(11) + 1
122Ø        FOR  J = 12  TO 1   STEP -1
123Ø             X(J) = X(J - 1)
124Ø        NEXT J
125Ø     IF X(Ø) = 1  THEN  X(13) = X(13) + 1
126Ø     X(Ø) = Ø
127Ø  RETURN
```

1Ø8Ø - 127Ø

Es erfolgt eine ziffernweise Addition mit Übertragsberücksichtigung (1Ø9Ø - 113Ø). Dabei bestimmt x_o das Vorzeichen (119Ø). Für x_o = + 1 ist der Einfluß auf DP zu beachten (125Ø). In diesem Falle erfolgt außerdem eine Verschiebung nach unten, bei der die letzte Ziffer verloren geht. Es wird gerundet (121Ø). Dem Leser sei es überlassen, das hier angegebene Grundprogramm zu verbessern bzw. zu erweitern. Darüber hinaus kann das Programm als Unterprogramm zur Berechnung komplexerer Terme, aber auch zur Demonstration von Subtraktionsauslöschung verwendet werden. Viel Spaß beim Experimentieren!

Christian Wagenknecht

Preisaufgaben

S 07 2

Auf einer Parabel liegt das Punktepaar A,B. Gesucht wird das Paar paralleler Geraden $AA' \parallel BB'$, welches die Parabel bei dem Punktepaar A', B' so schneidet, daß gilt: $AA' : BB' = 3 : 1$.

S 08 2

Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis a und den Schenkeln b.
Man berechne das Verhältnis von In- und Umkreisradius.
(Lösung ohne Verwendung von Winkelfunktionen!)

S 09 1

Auf allen Feldern eines Schachfeldes liegen Würfel. Die Flächen der Würfel und die Felder des Schachbrettes sind kongruent. Genau eine Seite eines jeden Würfels sei schwarz angestrichen. Es wird gefordert, die Würfel aus beliebiger Ausgangslage so zu drehen, daß alle schwarzen Flächen nach oben zeigen. Dabei soll nicht jeder Würfel einzeln gedreht werden, sondern immer alle Würfel, die auf einer Linie bzw. einer Reihe liegen, gemeinsam.

S 10 1

Man zeige, daß die drei Produkte $(1-a)b$, $(1-b)c$, $(1-c)a$ gebildet aus den positiven Zahlen $a<1$, $b<1$, $c<1$, nicht gleichzeitig größer als $\frac{1}{4}$ sein können.

S 11 1

Man zeige, daß für beliebige positive Zahlen a,b,c,d die Ungleichung gilt:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \leq \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$$

S 12 1

Дана прямая СД и две точки А и В, не лежащие на ней. Найти на данной прямой точку М такую, что

$$\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMД .$$

Einsendeschluß: 10. 5. 1986

Lösungen IMO-Aufgaben (2)

4. Aufgabe

Sei $L =_{df} \{n : n \in \mathbb{N}^+, n = 2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot 5^{k_3} \cdot 7^{k_4} \cdot 11^{k_5} \cdot 13^{k_6} \cdot 17^{k_7} \cdot 19^{k_8} \cdot 23^{k_9}\}$.

Dann ist $M \subseteq L$ und $|M| = 1985$.

Def.: Für $n \in L$ heißt $\mathcal{C}^2(n) = (\bar{k}_1, \bar{k}_2, \ldots, \bar{k}_9)$ mit $\bar{k}_i \in \{0,1\}$ und $\bar{k}_i \equiv \bar{k}_i$ (2) (siehe Def. von L) die Zweiercharakteristik von n.

Für $n \in L$ heißt $\mathcal{C}^4(n) = (\bar{k}_1, \bar{k}_2, \ldots, \bar{k}_9)$ mit $\bar{k}_i \in \{0,1,2,3\}$ und $\bar{k}_i \equiv k$ (2) (siehe Def. von L) die Vierercharakteristik von n.

Bemerkung: $n \in L$ ist Quadratzahl $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}^2(n) = (0,0,\ldots,0)$

$n \in L$ ist vierte Potenz $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}^4(n) = (0,0,\ldots,0)$.

Hilfssatz: Sei $Q \subseteq L$ und $|Q| \geq 513$. Dann gibt es in Q zwei verschiedene Elemente, deren Produkt eine Quadratzahl ist.

Beweis: Da es genau $2^9 = 512$ verschiedene Zweiercharakteristiken gibt, und $|Q| > 2^9$ ist, gibt es in Q zwei Zahlen a_1 und b_1 mit $\mathcal{C}^2(a_1) = \mathcal{C}^2(b_1)$.

Dann ist $\mathcal{C}^2(a_1 b_1) = (0,0,\ldots,0)$, da $0+0 \equiv 0(2)$ und $1+1 \equiv 0(2)$.

Bemerkung: $\mathcal{C}^2(a \cdot b) = \mathcal{C}^2(a) + \mathcal{C}^2(b)$ (Addition der 9-Tupel komponentenweise)

$\Rightarrow$ $a_1 b_1 = c_1^2$ mit $c_1 \in \mathbb{N}^+$. $\square$

Zur Aufgabe: Nach Hilfssatz gibt es im M zwei Zahlen $a_1 \neq b_1$ mit $a_1 b_1 = c_1^2$, in $M \setminus \{a_1, b_1\}$ zwei verschiedene Zahlen a_2, b_2 mit $a_2 b_2 = c_2^2$, in $M \setminus \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ zwei Zahlen $a_3 \neq b_3$ mit $a_3 b_3 = c_3^2, \ldots,$ in $M \setminus \{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{512}, b_{512}\}$ zwei Zahlen $a_{513} \neq b_{513}$ mit $a_{513} \cdot b_{513} = c_{513}^2$

(da $|M \setminus \{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{512}, a_{513}\}| = 1985 - 1024 \geq 513$)

Wir betrachten jetzt die Vierercharakteristiken von c_i^2 $(c_i^2 \in L$, für alle $i=1,\ldots,513)$.

Sei $\mathcal{C}^4(c_i^2) = (\bar{k}_1^i, \bar{k}_2^i, \ldots, \bar{k}_9^i)$ $i=1,\ldots,513$

Da c_i^2 Quadratzahl, gilt für alle i und für alle j $\bar{k}_j^i \in \{0,2\}$

$\Rightarrow$ Es gibt genau $2^9 = 512$ verschiedene derartige Vierercharakteristiken

Da es 513 c_i^2 gibt, gibt es zwei c_i^2 mit gleichen Vierercharakteristiken. Seien dies $c_{i_o}^2$ und $c_{i_1}^2$ mit $\mathcal{C}^4(c_{i_o}^2) = \mathcal{C}^4(c_{i_1}^2)$.

Wegen $0+0 \equiv 0\ (4)$ und $2+2 \equiv 0\ (4)$ gilt nun

$$\mathcal{C}^4(c_{i_o}^2 \cdot c_{i_1}^2) = (0,0,\ldots,0),$$

d. h. $$c_{i_o}^2 \cdot c_{i_1}^2 = d^4 \text{ mit } d \in \mathbb{N}^+.$$

Damit ist aber

$$a_{i_o} \cdot b_{i_o} \cdot a_{i_1} \cdot b_{i_1} = d^4 \text{ mit } a_{i_o}, b_{i_o}, a_{i_1}, b_{i_1} \in M$$

und paarweise verschieden.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein

Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 3. 1. 1986

3
86

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
20. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

wohl sie teilweise eigenartig anmutende Eigenschaften besitzen, vollkommen gleichberechtigt neben den reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Mit ihrer Hilfe kann man dann verschiedene Probleme der Zahlentheorie erfolgreich angreifen. Dazu gehören in erster Linie Primzahlzerlegungen, Zerlegung von Polynomen in irreduzible Faktoren und diophantische Gleichungen höheren Grades mit einer oder mehreren Unbestimmten.

Rainer Zerch, FSU
Bereich Theoretische Mathematik

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein

Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 10. 2. 86

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	20 (1986) 3	S. 33–48

Die Lehre von Gerade und Ungerade

Zum ältesten Wissen der Menschheit gehört auch Wissen über Zahlen (natürliche Zahlen) in Form einfachster Zähl- und Rechenoperationen. Die Bildung von Zahlfolgen und die Untersuchung der Eigenschaften von Zahlensystemen finden wir schon auf ägyptischen Papyrusrollen und babylonischen Keilschrifttafeln, die 6000 Jahre alt sind. Eines der ältesten Gebiete solchen Zahlenwissens ist hierbei das Wissen über gerade und ungerade Zahlen. Dieses Wissen wurde von den griechischen Naturphilosophen zusammengefaßt und erweitert, es wurde zu einer mathematischen Theorie ausgebaut. Im Rahmen der pythagorischen Philosophie nahm die Lehre von Gerade und Ungerade einen wichtigen Platz ein. Gerade und Ungerade waren wesentliche Kategorien zur Beschreibung der Welt. Die Pythagoreer betrachteten die Zahlen als "das Wesen der Dinge und die Organisation des Universums überhaupt". Pythagoras (570-495 v. u.Z.) sagte: "Die Elemente der Zahl sind das Gerade und das Ungerade." (In dieser Philosophie erscheint das Gerade als das Begrenzte, das Weibliche, das Böse;das Ungerade dagegen als das Unbegrenzte, das Männliche, das Gute.) Im Gegensatz dazu steht der von Plato herrührende (428-347 v.u.Z.) heutige Sprachgebrauch: "Er ist geradlinig" (gut, wahr). "Eine krumme Tour", "eine unegale Sache" (schlecht, falsch). Plato charakterisiert die Arithmetik geradezu (Wortwahl!) als die Lehre von Gerade und Ungerade. Für ihn ist das Gerade das Bessere, Positive, Wahre.

In der Folgezeit wurde die Lehre von Gerade und Ungerade von allgemeineren mathematischen Instrumentarien (Proportionenlehre, Teilbarkeitslehre;vgl. den Abschnitt "vollkommene Zahlen") abgelöst. In den "Elementen" des Euklid (um 365-300 v. u.Z.) steht die Lehre von Gerade und Ungerade schon ziemlich ohne Zusammenhang zu den anderen mathematischen Teilgebieten.

1. Einfache Gesetzmäßigkeiten

Definition: Eine natürliche Zahl heißt gerade, wenn sie das Resultat des Verdoppelns einer natürlichen Zahl ist.

Folgerung: Alle Vielfachen von 2 sind gerade. D. h.: $2 \cdot a$ ist für beliebiges a eine gerade Zahl.

Definition: Eine natürliche Zahl heißt ungerade, wenn sie nicht Vielfaches von 2 ist.

Folgerung: Die ungeraden Zahlen ergeben sich durch Addition von 1 zu den geraden Zahlen. D. h.: $2 \cdot a+1$ ist für jedes natürliche a eine ungerade Zahl.

Bezeichnung: g sei stets eine gerade Zahl aus der Menge G der geraden Zahlen. u sei stets eine ungerade Zahl aus der Menge U der ungeraden Zahlen.

Die Menge N der natürlichen Zahlen zerfällt bezüglich der Eigenschaft "gerade" (bzw. "ungerade") in zwei Untermengen G und U, die kein Element gemeinsam haben (keine Zahl ist zugleich gerade und ungerade) und die zusammen die Menge der natürlichen Zahlen ergeben (jede Zahl ist entweder gerade oder ungerade). Dies bedeutet die Zerlegung der Menge N in zwei Klassen G und U. Schon Plato wußte, daß G und U gleichviele Zahlen enthalten (daß die Mengen gleichmächtig sind). Er sagte, daß die Hälfte der Zahlen gerade und die andere Hälfte ungerade ist.

Rechenregeln:

$g + g = g$	$g \cdot g = g$	$g - g = g$
$g + u = u$	$g \cdot u = g$	$g - u = u$
$u + g = u$	$u \cdot g = g$	$u - g = u$
$u + u = g$	$u \cdot u = u$	$u - u = g$

Die Beweise dieser Regeln erfolgen, indem u und g jeweils in der Form 2a, 2b,... als gerade Zahl und 2c+1, 2d+1,... als ungerade Zahl mit natürlichem a, b, c, d,... dargestellt werden.

Diese Regeln lassen sich auf eine beliebige Anzahl von Summanden bzw. Faktoren erweitern, dabei ist jeweils deren gerade oder ungerade Anzahl zu beachten. Diese Regeln finden wir in den "Elementen" des Euklid.

Exkurs

Man kann allein mit den geraden Zahlen G wie mit den natürlichen Zahlen rechnen. Dies ist möglich, weil

1. die Zuordnung einer beliebigen Zahl a zu einer geraden Zahl (nämlich 2a) umkehrbar eindeutig ist

und

2. die Operationen +,-,· bei Anwendung auf gerade Zahlen stets wieder gerade Zahlen liefern.

G läßt sich nun wieder in "Gerade Zahlen" G′(4,8,12,16,...) und "ungerade Zahlen" U′(2,6,10,14,...) einteilen. Mit G′ allein kann nun wieder wie in G gerechnet werden (da es die Vierfachen natürlicher Zahlen sind). Dies läßt sich beliebig fortsetzen, die ersten Elemente von G,G′,G″,... sind die Potenzen von 2.

(mit den ungeraden Zahlen gelingt dies nicht, weil schon $u + u \neq u$ ist.) In den Definitionen in den "Elementen" des Euklid wird diese Unterscheidung der Zahlen tatsächlich vollzogen ("gerademal gerade", "ungerademal gerade", "ungerademal ungerade") und einige diesbezügliche Sätze werden bewiesen.

Euklid bewies auch folgende, hier in modernerer Formulierung wiedergegebene Sätze:

Satz: Teilt eine ungerade Zahl eine gerade Zahl, so auch deren Hälfte.

Satz: Hat eine ungerade Zahl keinen gemeinsamen Teiler mit einer beliebigen Zahl, so auch nicht mit deren Doppeltem.

Satz: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ (1)

Beweisidee: Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion, wobei eine Eigenschaft benutzt wird, die nur den Potenzen von Zwei zukommt: $2^k+2^k = 2^{k+1}$. Dann schließt man wie folgt:

$$\begin{aligned} 1 &= 2^1-1 \\ 1+2^1 &= (2^1-1)+2^1 = 2^2-1 \\ 1+2^1+2^2 &= (2^2-1)+2^2 = 2^3-1 \end{aligned}$$

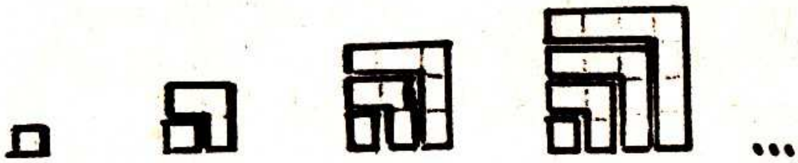
usw.

Wir werden auf diesen letzten Satz noch zurückkommen. Ein anderer bemerkenswerter Satz ist ebenfalls bei Euklid zu finden:

<u>Satz:</u> Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen $1+3+\ldots+(2n-1)$ ist eine Quadratzahl, nämlich n^2.

Der klassische Beweis verdeutlicht die Rolle der Eins und veranschaulicht die Benutzung der ungeraden Zahlen als "Gnomonzahlen" bei den Griechen. (Ein Gnomon ist ein Gerät zur Konstruktion Rechter Winkel:  mit gleichlangen Seiten.)

Beweis:



2. Ägyptisches Rechnen

In der ägyptischen Arithmetik begegnet uns eine der ältesten Formen des Zahlenrechnens. Im ägyptischen Zahlsystem, das für bestimmte Zahlen Individualzeichen besaß, wurden Addition und Subtraktion durch Aneinanderreihung der Zahlzeichen realisiert. Um die Multiplikation und Division zu meistern, wurden die "Rechenarten" Verdoppeln und Halbieren als Hauptrechenarten benutzt. Dazu wird der Divisor bzw. ein Faktor der Multiplikation in die Summe von Zweierpotenzen zerlegt. Satz (1) zeigt uns, daß jede Zahl der Form $2^{n+1}-1$ als Summe von Zweierpotenzen darstellbar ist: $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n$. Dies gelingt aber auch mit jeder anderen Zahl (Beweis: man nehme 2 als Basis des Zahlensystems). Allgemeinere Überlegungen sind im 1. Abschnitt (Exkurs) angedeutet.

Diese in einer Spalte aufgeschriebenen Zweierpotenzen erhalten daneben den entsprechenden Wert des zweiten Faktors bzw. Dividenden zugeordnet. Die Summation der entsprechenden Spaltenwerte (die Spalten sind in den Beispielen mit "&" gekennzeichnet) liefert das gesuchte Resultat. (Wir benutzen zur besseren Veranschaulichung die heutige Schreibweise der Zahlen.)

Bsp.: 13·18 =

1	13
2	26 &
4	52
8	104
16	208 &
18	234

Bsp.: 307·11 =

1	307 &
2	614 &
4	1228
8	2456 &
11	3377

Die ägyptischen Schreiber führten Divisionsaufgaben auf Lösungen zurück, in denen nur ganze Zahlen und Stammbrüche 1/n auftreten. Dazu benutzten sie umfangreiche Zerlegungstabellen, die auch die Darstellung 2/n = 1/n + 1/n vermeiden. Eine rationale Zahl (Quotient ganzer Zahlen) stellt so eine Rechenaufgabe und kein Resultat dar. Einzigste Ausnahme: 2/3.

Beispiele:

23:8 =

8	1
16	2 &
4	1/2 &
2	1/4 &
1	1/8 &
23	2+1/2+1/4+1/8

71:7 =

7	1
14	2 &
28	4
56	8 &
1	1/7 &
71	10+1/7

26:9 =

9	1
18	2 &
6	2/3 &
1+1/2	1/6 &
1/2	1/18 &
26	2+2/3+1/6+1/18

Es gehörte große Geschicklichkeit dazu, die richtige Zerlegung des Dividenden und des Divisors bzw. der Faktoren zu finden! Insbesondere ist eben das Wissen bemerkenswert, daß jede Zahl als Summe von Zweierpotenzen (mit bestimmten Faktoren) darstellbar ist. Dieses Wissen nutzen wir noch heute, z. B. in verschiedenen Ratespielen ("Ich denke mir eine Zahl zwischen 1 und 1000, erfrage sie mit höchstens 10 Fragen!") und besonders in der Dualarithmetik der elektronischen Datenverarbeitung. Alle Digitalrechner beruhen auf diesem Wissen.

Beispiele für Dualdarstellung: (d)

934:	1	0	13,5:	0,5	1
	2	1		1	1
	4	1		2	0
	8	0		4	1
	16	0		8	1
	32	1			
	64	0			
	128	1			
	256	1			
	512	1			

13,5 = 1101,1 (d)

934 = 1110100110 (d)

Diese Binärzahlen stellen eine schematische Form der Darstellung einer Zahl als Summe von Zweierpotenzen dar. Wird mit ihnen gerechnet, kommt die Beweisidee des Satzes (1) zur Geltung. (Die Binärarithmetik hat nur die zwei Ziffern 1 und 0, ihre Rechengesetze

0 + 0 = 0	0·0 = 0	0 - 0 = 0
0 + 1 = 1	0·1 = 0	0 - 1 = 1 §
1 + 0 = 1	1·0 = 0	1 - 0 = 1
1 + 1 = 0 §	1·1 = 1	1 - 1 = 0

(§ bedeutet, daß der Übertrag zu beachten ist).

(Vergleiche man mit den Rechenregeln des Abschnittes 1!)

Jede Zahl wird als Summe von Zweierpotenzen dargestellt und man rechnet mit den Werten der Position (1 oder 0) analog den ägyptischen Rechenmethoden. (1 bedeutet hier also zweierlei: Die Ziffer Eins des Dualsystems und die Kennzeichnung der Spalten analog dem "&" in den Beispielen für das ägyptische Rechnen. Die Nutzung dieser Doppelbedeutung erfolgt in der Datenverarbeitung.) Damit ist nicht ausgedrückt, daß die Ägypter eine besonders qualifizierte, d. h. übersichtliche und einfach zu handhabende Arithmetik hatten, sondern, daß wir in der Realisierung der Arithmetik auf EDVA auf technisch besonders einfach zu realisierende Möglichkeiten zurückgreifen.

3. Pythagoreische Zahlen

Ganzzahlige Lösungen der Gleichung $x^2+y^2 = z^2$ (2)
zu finden, gelang schon vor mehr als 6000 Jahren. Beispielsweise sind (3,4,5) und (5,12,13) zwei "klassische" Lösungstripel. Eine Lösung heißt Grundlösung, wenn x,y und z keinen gemeinsamen Teiler haben. (Wissen über Teilbarkeitseigenschaften soll hier als bekannt vorausgesetzt werden.) Mit einer Grundlösung (x,y,z) ist für jede natürliche Zahl t auch (tx,ty,tz) eine Lösung. Nun zeigen schon die obigen Beispiele, daß es verschiedene Grundlösungen gibt. Wie können sie gefunden werden? Dazu wird (2) umgeformt:

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z+y)(z-y).$$

Pythagoras setzte $z-y = 1$. (Der 1 kommt in der pythagoreischen Philosophie hervorragende Bedeutung zu. 1 ist die Einheit, der Ursprung aller Zahlen, 1 teilt die Geraden und die Ungeraden, 1 bildet die Differenz benachbarter Zahlen.) Mit $z-y = 1$ gilt dann: $z+y = x^2$. Außerdem sind z und y aufeinanderfolgende Zahlen (Differenz 1!) und somit ihre Summe z+y ungerade (vgl. Rechenregeln). Sei also $x = 2a+1$. Wegen $z = 1+y$ und $z+y = x^2$ folgt dann: $y = (x^2-1)/2$ und $z = (x^2-1)/2+1$. Also gilt:

$$x = 2a+1 \qquad y = ((2a+1)^2-1)/2$$
$$z = ((2a+1)^2+1)/2 \quad \text{(pythagoreische Lösung).}$$

Plato setzte $z-y = 2$, also die Differenz im Gegensatz zu Pythagoras geradzahlig an. (Platos Position ist vorn dargelegt. 2 ist die kleinste Differenz zwischen zwei geraden bzw. ungeraden Zahlen.) Mit $x^2 = 2(z+y)$ muß dann auch x geradzahlig sein: $x = 2b$.

Wegen $z = 2+y$ und $2(z+y) = x^2 = 4b^2$ ist dann:

$$x = 2b \qquad y = b^2-1$$
$$z = b^2+1 \quad \text{(platonische Lösung).}$$

(Multiplizieren wir die pythagoreische Lösung mit 2, so erhalten wir die platonische Lösung für ungerade b.) Bei Plato ist x stets gerade, bei Pythagoras stets ungerade.

Um alle Tripel zu erhalten, kann man den Weg gehen, alle Zahlen n als Differenz $z-y = n$ anzusetzen und die Lösungen zu berechnen. Wir wählen aber den Weg über Gerade-Ungerade zur Auffindung aller Grundtripel:

- Die Zahlen x,y und z dürfen, um ein Grundtripel zu bilden, keinen gemeinsamen Teiler haben. Insbesondere dürfen nicht zwei der drei Zahlen gerade sein, sonst wäre es auch die dritte. Es können aber auch die Zahlen x und y nicht beide ungerade sein. Denn sonst wäre z gerade ($z = 2z'$) und damit $z^2 = 4z'$ durch 4 teilbar. Für die Summe x^2+y^2 aber gilt, wenn $x = 2p+1$ und $y = 2q+1$ ungerade sind:

  $$x^2 + y^2 = 4(p^2+q^2 + p+ q)+ 2.$$

  Diese Zahl ist zwar gerade, aber nicht durch 4 teilbar! Also können nicht x und y zugleich ungerade sein. (x und y sind bei allen folgenden Überlegungen vertauschbar.)

- Der Ansatz $x^2 = (z+y)(z-y)$ soll uns nun zur allgemeinen Lösung für Grundtripel führen. Wir setzen $z+y = m, z-y = n$, also $z = (m+n)/2$ und $y = (m-n)/2$. Dann ist $x^2 = mn$. Da x ungerade sein soll, müssen m und n ungerade sein. m und n dürfen auch keine anderen gemeinsamen Teiler haben, da sonst y und z auch diesen Teiler hätten, sie sollen aber teilerfremd sein. Und das Produkt $m \cdot n$ soll eine Quadratzahl sein, dies ist (da m und n teilerfremd sind und $m < n$ ist) nur möglich, wenn m und n Quadratzahlen sind: $m = u^2$, $n = v^2$. Damit sind u und v teilerfremde ungerade Zahlen mit $u < v$ und alle Grundtripel sind gegeben:

  $$x = u \cdot v; \quad y = (u^2-v^2)/2; \quad z = (u^2+v^2)/2.$$

  Tatsächlich ist x stets ungerade, y gerade und z ungerade. Läßt man für u und v auch gemeinsame Teiler sowie $u \geq v$ zu, erhält man alle Lösungen der Gleichung (2). Dieses Resultat ist schon bei Euklid zu finden.

4. Nachweis irrationaler Zahlen

Neben den elementaren Darlegungen (vgl. Abschnitt 1) tritt uns hier die einzigste Anwendung der Lehre von Gerade und Ungerade in den "Elementen" Euklids entgegen: in dem Beweis, daß Seite, Diagonale eines Quadrats kein rationales Verhältnis zueinander haben (kein gemeinsames Maß haben, inkommensurabel sind). Dieses Beispiel stellt nicht die Entdeckung der Inkommensurabilität dar, ist aber ihr einfachster Fall.

<u>Satz:</u> Seite a und Diagonale d eines Quadrates haben kein gemeinsames Maß. (Andere Formulierung: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.)

<u>Beweis:</u> Für die Quadratdiagonale gilt nach dem pythagoreischen Satz: $d^2 = a^2+a^2 = 2a^2$. Seien a und d für die weitere Rechnung gekürzt, so daß sie <u>keinen gemeinsamen Teiler</u> mehr haben. Wir beweisen nun den Satz, indem wir zeigen, daß das Gegenteil falsch ist.

- Wegen $d^2 = 2a^2$ ist d^2 und damit auch d gerade. Da d und a teilerfremd sind, <u>ist a ungerade.</u>
- d ist gerade: $d = 2h$. Also ist $d^2 = 4h^2$ und wegen $d^2 = 2a^2$ gilt dann: $a^2 = 2h^2$. Damit ist a^2 und also auch <u>a gerade.</u>
- a soll gleichzeitig gerade und ungerade sein, das ist ein Widerspruch. Damit ist der Satz bewiesen: das Verhältnis d/a ist nicht rational, daher auch $\sqrt{2}$ nicht.

In der Antike hatten viele Mathematiker versucht, das "Delische Problem" zu lösen: Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge a. Man konstruiere einen Würfel, dessen Volumen doppelt so groß ist. Sei nun x die Kantenlänge des neuen Würfels. Der ursprüngliche Würfel hat das Volumen $V = a^3$. Der neue Würfel hat das Volumen $V_x = x^3$ und es soll gelten: $V_x = 2V_a$. Also gilt für x: $x^3 = 2a^3$, $x = \sqrt[3]{2}\cdot a$.

Analog dem obigen Satz kann man zeigen, daß auch $\sqrt[3]{2}$ irrational ist.

Die Entdeckung der Inkommensurabilität übte auf die Gelehrten des Altertums einen nachhaltigen Einfluß aus. Bis dahin hatte sich die ganze metrische Geometrie und die Ähnlichkeitslehre der Griechen auf die Arithmetik der rationalen Zahlen gestützt. Man hatte geglaubt, die rationalen Zahlen würden zum

Messen jeder beliebigen Größe ausreichen. Nun stellte sich aber heraus, daß dies nicht der Fall ist. Diese Entdeckung hatte sehr große Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik. Die Griechen stellten den Unterschied zwischen Algebra und Geometrie (Rechnen und Konstruieren) fest. Später gelang es ihnen, beide Disziplinen in der "geometrischen Algebra" zu vereinigen.

Fortsetzung folgt!

Dieter Banke, Gera

Lösungen

R 26 nach Gerd Heber, Erfurt, 19 Jahre

Es gilt die Ungleichung

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geqq |a \cdot b| .$$

Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i^2+b_i^2}{2}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (a_i^2+b_i^2)}{2} = 1,$$

ebenso ist

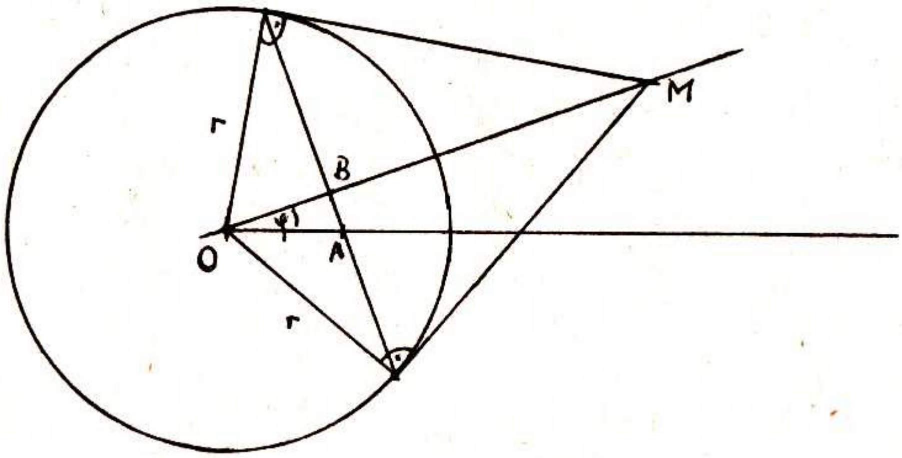
$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqq \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leqq \frac{\sum_{i=1}^{n} (a_i^2+b_i^2)}{2} = 1,$$

also gilt

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqq 1 .$$

R 27 'nach Steffen Großert, Berlin, Klasse 12

Skizze:



Wir beschreiben die Lage des Punktes M im Polarkoordinatensystem mit O als Anfangspunkt und OA als Achse. Es sei $|\overline{OA}| = a$, r der Radius des Kreises und R, φ die Koordinaten des Punktes M. Nach dem Kathetensatz gilt:

$$|\overline{OB}| \cdot |\overline{OM}| = |\overline{OC}|^2 \quad \text{d. h.}$$

$$a \cos \varphi \cdot R = r^2$$

Die Kurve der geometrischen Orte aller Punkte M in Polarkoordinaten lautet also:

$$R(\varphi) = \frac{r^2}{a \cos \varphi}$$

Transformation in kaartesische Koordinaten ergibt:

$$x = \frac{r^2}{a} = \text{const.}$$

Das ist eine Gerade, die im Abstand $\frac{r^2}{a}$ von O senkrecht auf der Achse OA steht.

Preisaufgaben

S 13 ② In einem Dreieck ABC werde durch den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Winkel $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCA$ eine Gerade g parallel zu BC gelegt. Den Schnittpunkt von g mit der Geraden durch AC bezeichnen wir mit M, den mit der Geraden durch AB mit N. Welche Beziehung besteht zwischen den Längen der Strecken $\overline{MC}$, $\overline{NB}$, $\overline{MN}$?

Man betrachte die Fälle:

a) Beide Winkelhalbierenden sind innere Winkelhalbierende;

b) Beide Winkelhalbierenden sind äußere Winkelhalbierende;

c) Eine ist innere Winkelhalbierende, die andere äußere.

Zur Erläuterung:

Die äußere Winkelhalbierende eines Winkels γ ist die normale Winkelhalbierende des Nebenwinkels von γ.

Die innere Winkelhalbierende eines Winkels ist die normale Winkelhalbierende.

S 14 ② In ein regelmäßiges n-Eck mit der Seitenlänge a werden n kongruente Kreise so einbeschrieben, daß jeder Kreis zwei Seiten und zwei der anderen einbeschriebenen Kreise berührt. Wie groß ist der Flächeninhalt des im Zentrum des n-Ecks entstehenden "Sterns"?

S 15 ① Man zeige, daß

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

S 16 ① In einem Wald vermehre sich die Menge des Holzes jährlich um p %. Im Winter eines jeden Jahres wird die Menge x abgeholzt.

Wie groß muß x sein, damit sich die Menge des Holzes in diesem Wald nach n Jahren auf das q-fache erhöht, wenn noch die Anfangsmenge an Holz a in dem Wald bekannt ist.

S 17 1

Für drei positive reelle Zahlen a,b,c gelte

$$\frac{\log_a r}{\log_c r} = \frac{\log_a r - \log_n r}{\log_b r - \log_c r} \quad \text{für irgend eine reelle Zahl } r > 0, r \neq 1.$$

Man zeige, daß daraus folgt: $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$.

S 18 2

Ребро правильного тетраэдра равно a.
Определить радус шага, поверхность которого касается всех ребер тетраедра.

Einsendeschluß: 10. 6. 86

Abstandsbegriffe für rationale Zahlen (Fortsetzung)

4. Gibt es weitere Bewertungen auf $\mathbb{Q}$?

Vorläufige Antwort: Ja. Denn:

1. Es gibt noch die triviale Bewertung:

$$|a|_0 = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \neq 0 \\ 0 & \text{falls } a = 0 \end{cases}$$

   Diese ist aber vollkommen uninteressant.

2. Mit jeder p-adischen Bewertung $|a|_p$ ist auch ihre λ-te Potenz $|a|_p^{\lambda}$ eine Bewertung, wobei $\lambda \in \mathbb{R}_+, \lambda \neq 0$ ist.

Aufgabe 12 a) Zeige die letzte Behauptung (Zeige (B1), (B2) und (B4), daraus folgt (B3))!

b) Für $|\,|_\infty$ gilt die entsprechende Behauptung für $0 < \lambda \leq 1$. Welche Bedingung ist für $\lambda > 1$ nicht erfüllt?

Aufgabe 13 Seien p,q verschiedene Primzahlen.

Beweise: Es existiert kein $\lambda \in \mathbb{R}_+, \lambda \neq 0$, so daß

$$\text{für alle } a \in \mathbb{Q} \qquad |a|_q = |a|_p^{\lambda}\,!$$

Die Bewertungen, die sich von einer gegebenen Bewertung nur durch einen festen Exponenten unterscheiden, geben uns keinerlei neue Information (d. h. die Abstände kann man wechselseitig berechnen, wenn man den einen kennt und den entsprechenden Exponenten). Also müssen wir unsere Frage aus der Überschrift modifizieren:
Gibt es Bewertungen von $\mathbb{Q}$, die sich nicht auf die eben angegebene Weise aus den p-adischen bzw. der archimedischen Bewertung gewinnen lassen? Die Antwort gibt uns ein Satz von A. OSTROWSKI:

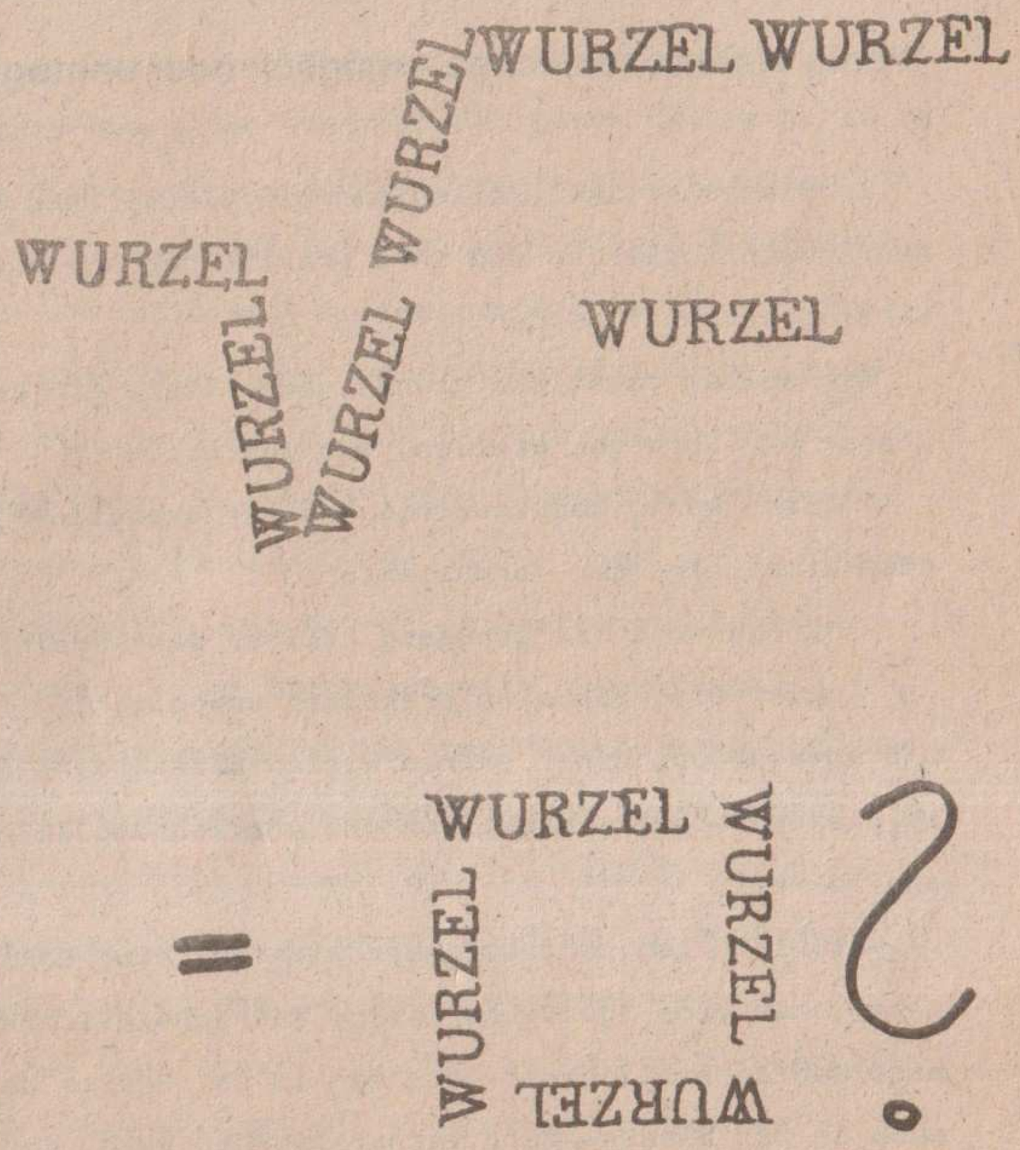
Satz 3: (i) Für jede archimedische Bewertung $|\;|$ von $\mathbb{Q}$ existiert ein λ mit $0 < \lambda \leq 1$, so daß für alle $a \in \mathbb{Q}$ $\quad |a| = |a|_{\infty}^{\lambda}$.

(ii) Für jede nichtarchimedische Bewertung $|\;|$ von $\mathbb{Q}$ existiert eine Primzahl p und ein $\lambda > 0$, so daß für alle $a \in \mathbb{Q}$: $|a| = |a|_p^{\lambda}$.

Der Beweis ist zwar mit Mitteln zu leisten, die Ihr aus dem Unterricht kennt, aber er würde doch den Rahmen dieses Artikels sprengen.

5. Nachbemerkungen

Die p-adischen Bewertungen spielen heute eine wichtige Rolle in der Mathematik. Ihr habt in der Schule gelernt, wie man durch Intervallschachtelungen die Menge der reellen Zahlen als Vervollständigung der Menge der rationalen Zahlen einführt. Nimmt man jedoch Intervalle, deren p-adische Länge gegen 0 konvergiert, so kann man durch derartige Schachtelungen ebenfalls Vervollständigungen von $\mathbb{Q}$ definieren, die sogenannten p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ (dabei muß man sich natürlich von der Veranschaulichung durch die Zahlengerade lösen, denn diese vermittelt uns ja nicht den p-adischen Abstandsbegriff). Ebenso wie auf $\mathbb{R}$ kann man auf $\mathbb{Q}_p$ Zahlenfolgen und -reihen betrachten, nach ihrer Konvergenz (bzgl. des p-adischen Abstandes!) fragen, Stetigkeitsuntersuchungen führen usw. Die p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ stehen dabei, ob-



4
86

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
20. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Wenig Wahrscheinliches – möglich oder unmöglich

In diesem Artikel sollen einmal "kleine" und "**sehr** kleine" Wahrscheinlichkeiten und ihre praktischen Konsequenzen etwas näher beleuchtet werden.

Wir wollen dabei die grundlegende These gleich an den Anfang unserer Ausführungen stellen, sie lautet:

"Sehr wenig Wahrscheinliches ist unmöglich",

oder etwas strenger formuliert:

"Ereignisse mit genügend kleiner Wahrscheinlichkeit treten nicht ein, sie sind praktisch unmöglich".

Die Anerkennung einer extrem kleinen Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bedeutet praktisch die Anerkennung seiner völligen Unmöglichkeit.

Natürlich ist es dabei ganz wichtig, eine Erklärung dafür zu geben, was eine "genügend kleine Wahrscheinlichkeit" ist, also eine Wahrscheinlichkeit, die man in der Praxis des Alltags und auch in der Wissenschaft vernachlässigen kann, ja vernünftigerweise sogar vernachlässigen muß. Es ist einleuchtend, daß man dafür, wann eine Wahrscheinlichkeit praktisch gleich Null ist bzw. als gleich Null angesehen werden kann und muß, keine allgemeingültige Abschätzung angeben kann, sondern daß diese eben von der betreffenden "Praxis" abhängig ist. So ist es ein großer Unterschied, ob man von zufälligen Ereignissen spricht, die eine konkrete Person betreffen oder **aber** einen beliebigen Menschen unseres Landes oder gar der ganzen Erde. In der "Welt" der Atome und Moleküle gelten wieder andere Maßstäbe usw. usf., man könnte noch eine Reihe von Beispielen aufzählen.

Vielleicht stört den einen oder anderen Leser dieses Artikels die Formulierung "vernachlässigen muß". Zweifellos kann man unter gewissen Annahmen auch für äußerst ausgefallene Ereignisse eine positive Wahrscheinlichkeit ausrechnen und damit bei formaler Betrachtung sagen, daß diese Ereignisse realisierbar seien. So ist es beispielsweise sehr leicht, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, im Tele-Lotto "5 aus 35" eine Glückssträhne von, sagen wir, 5 Volltreffern zu haben, oder dafür, daß gar der Hauskater (so man einen hat), wenn er mit seinen Pfoten "auf gut Glück" auf der Tastatur einer Schreibmaschine herumtrommelt, irgendeinen bestimmten Satz aus dem Märchen "Rotkäppchen und der Wolf" schreibt. Diese Wahrscheinlichkeiten sind exakt größer als Null, aber kein vernünftiger Mensch wird deshalb die eben genannten Ereignisse auf solch formaler Grundlage zu den tatsächlich möglichen zählen und mit ihrem Eintreten rechnen.

Wo zieht man nun die "Grenze", d. h., ab welcher Größenordnung sind Wahrscheinlichkeiten als gleich Null anzusehen?

Beginnen wir mit dem "persönlichen Bereich". Welche Wahrscheinlichkeiten halten wir alle für klein genug, sie in unseren Betrachtungen zu vernachlässigen? Der bekannte sowjetische Wissenschaftler A. KITAIGORODSKI nennt dafür die Größenordnung 10^{-6} (das bedeutet also, ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit etwa gleich einem Millionstel ist, kommt für uns praktisch nicht vor) und gibt hierfür u. a. die folgende plausible Motivierung: Ein Menschenleben währt durchschnittlich etwa 25 000 bis 30 000 Tage. Folglich liegt die Anzahl einfachster Dinge des Lebens, die wir immer wieder tun, in der Größenordnung von Millionen. Wenn man also die Wahrscheinlichkeit ein Millionstel in Betracht zieht, heißt das etwa dasselbe, als wenn wir jeder Geste, die wir in unserem Leben vollführen, eine Bedeutung beimessen wollten.

Wenn wir den "persönlichen Bereich" verlassen und es um einen beliebigen Bewohner der Erde geht, müssen die vernachlässigbaren Wahrscheinlichkeiten entsprechend kleiner sein. E. BOREL, ein berühmter französischer Mathematiker, der zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie einen großen Beitrag geleistet hat, schlägt für diese Grenze die Größenordnung 10^{-15} vor, also ein Milliardstel von einem Millionstel. (Diese Zahl ergibt sich einfach durch Division der genannten Größenordnung 10^{-6} durch die Weltbevölkerungszahl.)

Wir wollen nun zur Illustration noch einige Beispiele betrachten, denen allen ein sehr einfacher und sicher bereits vielen Lesern bekannter Verteilungstyp zugrunde liegt, nämlich die diskrete Gleichverteilung auf einer Grundmenge $\Omega = \{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$. In diesem Falle läßt sich die Wahrscheinlichkeit P(A) eines beliebigen zufälligen Ereignisses $A \subseteq \Omega$ sehr einfach wie folgt durch "Abzählen" berechnen. Es bezeichne für irgendeine Menge X mit endlich vielen Elementen Anz(X) die Anzahl dieser Elemente. Dann gilt

$$P(A) = \frac{\mathrm{Anz}(A)}{\mathrm{Anz}(\Omega)} = \frac{\mathrm{Anz}(A)}{n} . \tag{1}$$

Man sieht an der Formel (1) auch, warum man in diesem Falle von einer "Gleichverteilung" auf Ω spricht: Für jedes sogenannte "Elementarereignis" $\omega\in\Omega$ gilt

$$P(\{\omega\}) = \frac{\mathrm{Anz}(\{\omega\})}{n} = \frac{1}{n}, \tag{2}$$

diese einelementigen Mengen $\{\omega\}$ haben also alle die gleiche Wahrscheinlichkeit, die gleiche "Chance" des Eintretens.

Wohl das "Paradebeispiel" für eine diskrete Gleichverteilung liefert das Würfeln mit einem homogenen Würfel: die Gleichverteilung auf $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Wegen $\mathrm{Anz}(\Omega) = 6$ gilt für die Ereignisse $\{$es fällt die Augenzahl $k\} = \{k\}$ $(k\in\Omega)$

$$P(\{k\}) = \frac{1}{6}.$$

Zwei weitere zufällige Ereignisse sind beispielsweise

$A_1 := \{$es fällt eine gerade Zahl$\} = \{2,4,6\}$,

$A_2 := \{$es fällt eine Augenzahl größer als 4$\} = \{5,6\}$.

Formel (1) ergibt hierfür die Wahrscheinlichkeiten

$$P(A_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

und

$$P(A_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Das bedeutet, daß bei einer großen Anzahl von Würfen etwa die Hälfte davon eine gerade Augenzahl liefert, also im Mittel jeder zweite Wurf das Ereignis A_1 realisiert, das Ereignis A_2 hingegen im Mittel nur jeder dritte Wurf.

Es gibt nun eine ganze Reihe von Würfelspielen, die meisten davon begnügen sich nicht mit nur einem Würfel. Wir nehmen der Einfachheit halber und ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß die Würfel unterscheidbar seien (den Fall nicht unterscheidbarer Würfel kann man leicht auf diesen Fall zurückführen). Dabei ist es auch gleichgültig, ob wir einmal mit N Würfeln oder N-mal mit einem Würfel würfeln. Als Grundmenge wählen wir jetzt naturgemäß die folgende Menge von N-Tupeln,

$$\Omega = \{(\omega_1,\ldots,\omega_N) : \omega_i \in \{1,\ldots,6\},\ i \in \{1,\ldots,N\}\},$$

wobei $\omega_i = k$ bedeutet, daß der i-te Würfel die Augenzahl k anzeigt. Man sieht leicht, daß nun gilt

$$\mathrm{Anz}(\Omega) = 6^N.$$

Damit ist also die Wahrscheinlichkeit, eine vorgegebene Augenkombination (in einer bestimmten Reihenfolge) zu erhalten, gleich $\frac{1}{6^N}$.

Nehmen wir an, es kauft sich jemand einen Würfel und einen Würfelbecher, probiert beide gleich aus und erzählt dann, er habe 10-mal hintereinander eine Sechs geworfen. Was ist davon zu halten?

Schauen wir uns die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Ereignisses an: N = 10 ergibt $\mathrm{Anz}(\Omega) = 6^{10} = 60\,466\,176$ und folglich

$$P(\{(6,\ldots,6)\}) = \frac{1}{60466176} \approx 1{,}7\cdot 10^{-8}.$$

Das bedeutet eine "glatte" Unmöglichkeit. Selbst wenn ein Mensch (nennen wir ihn kurz "Herr M.") sein ganzes Leben lang (sagen wir 30 000 Tage) jeden Tag 1000 solche Serien der Länge 10 würfeln würde, würde ihm obiges Ereignis nicht unbedingt begegnen. Die Wahrscheinlichkeit, daß unter all diesen Serien die Serie (6,6,...,6) nicht mit dabei ist, beträgt immerhin noch etwa 0,6. Das können wir so interpretieren: Wenn wir annehmen, daß es

Herrn M. gelingt, viele seiner Freunde (er möge genügend haben) zu diesem lebenslangen Experiment zu gewinnen, so **werden im Mittel** nur etwa **immer zwei von fünf** das "Glück" haben, die gesuchte Serie zu erzielen.

Herr M. hat also entweder gelogen oder aber eine "Spezialanfertigung" von einem Würfel erworben.

Betrachten wir eine andere Situation. Herr M. hat mit seinem Würfel bereits 20mal gewürfelt und dabei keine einzige Sechs erhalten. Sollte er auf Grund dieser Tatsache seinen Würfel wegwerfen, weil er nun annimmt, daß dieser nicht **homogen ist** ?

Für $N = 20$ ist $\mathrm{Anz}(\Omega) = 6^{20}$. Das interessierende Ereignis $A = \{$unter 20 Würfen ist keine 6 gefallen$\}$ ist darstellbar als

$$A = \{(\omega_1,\dots,\omega_{20}) \in \Omega : \omega_i \in \{1,\dots,5\},\ i \in \{1,\dots,20\}\}$$

und folglich gilt

$$\mathrm{Anz}(A) = 5^{20},$$

so daß sich nach Formel (1)

$$P(A) = (\tfrac{5}{6})^{20} \approx 0{,}026$$

ergibt. Mit diesem Ereignis muß man also rechnen, es wird ja im Mittel etwa **bei** jeder vierzigsten solchen Serie eintreten.

Wir können nun die Frage stellen: Wie groß muß denn die Länge N einer Würfelserie sein, damit man das Fehlen einer bestimmten Augenzahl ausschließen kann?

Es sei

$$A_k^{(N)} := \{\text{unter } N \text{ Würfen ist die Augenzahl } k \text{ nicht vertreten}\}$$
$$= \{(\omega_1,\dots,\omega_N) \in \Omega : \omega_i \neq k,\ i \in \{1,\dots,N\}\}.$$

Folglich ist $Anz(A_k^{(N)}) = 5^N$ und gemäß Formel (1)

$$P(A_k^{(N)}) = (\tfrac{5}{6})^N.$$

N muß demnach so groß sein, daß gilt

$$(\tfrac{5}{6})^N \leq 10^{-6}, \qquad (3)$$

also

$$N(\lg 5 - \lg 6) \leq -6$$

und schließlich

$$N \geq \frac{6}{\lg 6 - \lg 5} \approx 75{,}8.$$

N = 76 ist die kleinste natürliche Zahl, die die Ungleichung (3) erfüllt. Erst in Serien der Länge dieser Größenordnung kann man das Fehlen einer bestimmten Augenzahl ausschließen.

Verweilen wir zum Abschluß unserer Betrachtungen noch etwas beim **Tele-Lotto** "5 aus 35". Wir können davon ausgehen, daß die 5 Zahlen "auf gut Glück" gezogen werden, also keine der möglichen fünfelementigen Teilmengen der Menge $\{1,...,35\}$ bevorzugt wird. Damit erhalten wir als Wahrscheinlichkeitsverteilung ebenfalls eine Gleichverteilung, und zwar auf der Menge aller dieser fünfelementigen Teilmengen von $\{1,...,35\}$. Wir bezeichnen die Grundmenge wieder mit Ω:

$$\Omega = \Big\{\{\omega_1,...,\omega_5\}: \omega_1,...,\omega_5 \in \{1,...,35\} \text{ und } \omega_1,...,\omega_5 \text{ paarweise verschieden}\Big\}.$$

Aus der Kombinatorik wissen wir, daß die Anzahl aller möglichen Auswahlen von k aus n Elementen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (Kombinationen von k aus n Elementen) gleich dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ist. Folglich ist

$Anz(\Omega) = \binom{35}{5} = 324\,632$. Wir wollen nun einige Gewinnwahrscheinlichkeiten für einen festen Tip $\{k_1,\ldots,k_5\}$ ausrechnen und betrachten dazu die folgenden Ereignisse:

$$
\begin{aligned}
B &:= \{\text{der Tip ist ein Fünfer}\}\\
&= \{\{\omega_1,\ldots,\omega_5\}\in\Omega : \{\omega_1,\ldots,\omega_5\} = \{k_1,\ldots,k_5\}\}\\
&= \{\{k_1,\ldots,k_5\}\},\\
C &:= \{\text{der Tip ist ein Vierer}\}\\
&= \{\{\omega_1,\ldots,\omega_5\}\in\Omega : \operatorname{Anz}(\{\omega_1,\ldots,\omega_5\}\cap\{k_1,\ldots,k_5\}) = 4\},\\
D &:= \{\text{der Tip ist ein Dreier}\}\\
&= \{\{\omega_1,\ldots,\omega_5\}\in\Omega : \operatorname{Anz}(\{\omega_1,\ldots,\omega_5\}\cap\{k_1,\ldots,k_5\}) = 3\}.
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich wieder nach Formel (1):

$$P(B) = \frac{1}{324\,632} \approx 3{,}1\cdot 10^{-6},$$

$$P(C) = \frac{\binom{5}{4}\binom{30}{1}}{324\,632} = \frac{150}{324\,632} \approx \frac{1}{2165} \approx 4{,}6\cdot 10^{-4},$$

$$P(D) = \frac{\binom{5}{3}\binom{30}{2}}{324\,632} = \frac{4350}{324\,632} \approx \frac{1}{74{,}6} \approx 0{,}0134.$$

Wenn man also pro Ziehung seinen Tip $\{k_1,\ldots,k_5\}$ ankreuzt, so gewinnt man, falls man hinreichend lange spielt, im Mittel alle 162 316 Wochen (es finden zwei Ziehungen pro Woche statt) oder ungefähr alle 3121 Jahre einen Fünfer. Ein Vierer wird sich im Mittel alle 1082 Wochen (das sind etwa 21 Jahre) einstellen, und mit einem Dreier kann man etwa alle 37,3 Wochen oder knapp jedes 3/4 Jahr rechnen.

Kein vernünftiger Mensch wird demnach mit dem Erzielen eines Fünfers im Tele-Lotto rechnen, denn die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Ereignisses liegt etwa in der Größenordnung eines Millionstel. Die weiter vorn angesprochene Glückssträhne (5 Fünfer hintereinander) ist erst recht völlig unmöglich. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von "nur" zwei Fünfern in Serie ist bereits $9{,}5 \cdot 10^{-12}$, dreimaliges Eintreten besitzt eine Wahrscheinlichkeit von etwa $3 \cdot 10^{-17}$ und fünfmaliges schließlich von rund $3 \cdot 10^{-28}$.

Der interessierte Leser mag als Übungsaufgabe die Gewinnwahrscheinlichkeiten in der Wettspielart „6 aus 49" ausrechnen und die Ergebnisse interpretieren.

Zum Schluß soll noch angemerkt werden, daß man in der Praxis natürlich auch oftmals Wahrscheinlichkeiten, die größer als ein Millionstel sind, nicht berücksichtigt. Zum einen wäre sonst nämlich das Leben, gelinde gesagt, ziemlich anstrengend, und zum anderen spielen dabei weitere Gesichtspunkte eine Rolle, deren Behandlung jedoch über den Rahmen dieses Artikels hinausgehen würde.

Dr. Roland Günther

Bereich Stochastik
der Sektion Mathematik
der FSU

Alles was relativ wahrscheinlich ist, ist wahrscheinlich falsch.

Blaise Pascal

Die Lehre von Gerade und Ungerade

1. Fortsetzung

5. Vollkommene Zahlen

Definition: Echter Teiler einer Zahl n ist eine Zahl, die n teilt und kleiner als n ist.

Definition: Eine Zahl heißt vollkommen, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist.

Beispiel: $6 = 1 + 2 + 3$
$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$

Auch 496 und 8128 waren den Griechen schon als vollkommene Zahlen bekannt.

Die Lehre von Gerade und Ungerade gipfelt bei Euklid in dem Satz:

Satz: Ist $2^{n+1}-1 = p$ eine Primzahl, so ist $2^n p$ vollkommen. (Wir sehen, daß hier auch Wissen über Primzahlen benötigt wird, welches wir hier voraussetzen.)

Beweis: Berechnen wir die Summe der echten Teiler von $2^n p$! Es sind:

$$1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}, 2^n$$

und

$$p, 2p, 4p, \ldots, 2^{n-1}p.$$

Dies sind alle echten Teiler, da p Primzahl ist. ($2^n p$ ist kein echter Teiler.) Summieren wir die echten Teiler, so ergibt sich unter Verwendung von Formel (1):

$$1+2+4+\ldots+2^n+p+2p+\ldots+2^{n-1}p = (2^{n+1}-1)+(2^n-1)p =$$
$$= 2^n p+((2^{n+1}-1)-p) = 2^n p.$$

Der Beweis hat scheinbar keinen Bezug mehr zu der Lehre von Gerade und Ungerade, er ist fast "modern", obwohl speziell auf diesen Satz "zugeschnitten". Aber man kann ihn und den notwendigen Satz (1) beweisen, indem man ausschließlich die Sätze über Gerade und Ungerade von Euklid (Abschnitt 1) benutzt.

Dieser Beweis war höchstwahrscheinlich vorhanden, ist aber verloren gegangen, da ihn Euklid durch einen anderen ersetzt hat. Die alte Lehre von Gerade und Ungerade wurde hier schon "modernisiert", indem Euklid Elemente der Teilbarkeitslehre und der "hochaktuellen" Proportionenlehre verwandte. Die endgültige Darstellung geht auf Euler (1707-1783) zurück, der das allgemeine Gesetz der Summe der Teiler einer Zahl entdeckte. Euler wies auch nach, daß jede gerade vollkommene Zahl die Form $2^n(2^{n+1}-1)$ mit $(2^{n+1}-1)$: Primzahl diese Form haben muß. Bemerkenswert ist auch, daß nur gerade vollkommene Zahlen bekannt sind; wenn es ungerade vollkommene Zahlen gibt, müssen sie jedenfalls größer als 10^{36} sein und weitere Bedingungen erfüllen.

6. Komplexe Zahlen

Die Lehre von Gerade und Ungerade berührte die rationalen und die irrationalen Zahlen. Es ist schon bemerkenswert, daß "alte", "einfache" Theorien immer aktuell sind. Schon darum ist es interessant, wie es um die Lehre von Gerade und Ungerade bestellt ist, wenn wir den Zahlenbereich auf die komplexen Zahlen erweitern.

Vereinbarung: $\sqrt{-1} = i$ heißt "imaginäre Einheit". Es gilt also: $i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$.

Definition: Eine Zahl $a+bi$, in der a und b ganze Zahlen sind, heißt ganze komplexe Zahl.

So, wie es bei den ganzen Zahlen zwei Einheiten gibt, nämlich +1 und -1, gibt es bei den komplexen Zahlen vier Einheiten: $+1, -1, +i, -i$. Solche Zahlen, die sich nur durch das "Vorzeichen" (durch eine Einheit als Faktor) unterscheiden, heißen assoziiert. Es sind also $a+bi, -a-bi, -b+ai, b-ai$ assoziierte Zahlen, sie unterscheiden sich nur durch das "Vorzeichen", nur um eine Einheit.

Worin besteht nun das Problem?

Satz: 2 ist im Bereich der ganzen komplexen Zahlen zerlegbar.

Beweis: 1+i und 1-i sind ganze komplexe Zahlen und es gilt:

$$(1+i)(1-i) = 1^2 + i - i - i^2 = 2.$$

(Analoges gilt für die assoziierten Elemente, z. B.: $(1+i)^2 = 2i$, d. h., daß das Produkt zweier Assoziierter von 1+i zu 2 assoziiert ist.)

Dies bedeutet aber, wir können nicht mehr eindeutig zwischen Gerade und Ungerade trennen, diese Begriffe lassen sich nicht einfach verallgemeinern. Wir gehen folgendermaßen vor:

Definition: Eine ganze komplexe Zahl a+bi heißt

gerade, wenn sie durch assoziierte von $(1+i)^2$, d. h. durch 2 teilbar ist;

halbgerade, wenn sie durch eine Assoziierte von 1+i teilbar, aber nicht gerade ist;

ungerade, wenn sie nicht durch Assoziierte von 1+i teilbar ist.

Wie sind nun die geraden, halbgeraden und ungeraden komplexen Zahlen zu charakterisieren? (Ohne Beachtung der Einheiten.)

1. gerade komplexe Zahl: a+bi ist gerade, (durch 2 teilbar), wenn a und b gerade natürliche Zahlen sind.

2. ungerade komplexe Zahl: (a+bi)/(1+i) darf nicht möglich sein. Es gilt:

$$\frac{(a+bi)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{a+bi-ai+b}{2} = \frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)i}{2}.$$

(a+b)/2 bzw. (b-a)/2 dürfen nicht ganzzahlig sein, d. h.: a+b bzw. a-b ist ungerade. Dies ist der Fall (vgl. Abschnitt 1), wenn eine der natürlichen Zahlen gerade und die andere ungerade ist.

3. halbgerade komplexe Zahl: $a+bi$ soll durch $1+i$, nicht aber durch 2 teilbar sein. Nach Punkt 2. muß dann $(a+b)/2 + (b-a)i/2$ ganz sein, also $a+b$ und $b-a$ gerade. Dies bedeutet, daß a und b beide gerade oder beide ungerade natürliche Zahlen sind. Das erstere liefert aber nach dem 1. Punkt gerade komplexe Zahlen, so daß hier also beide Zahlen ungerade sein müssen.

Alle Fälle zusammengefaßt, ergibt sich:

	a + bi	
a gerade b gerade	gerade	a+b gerade
a ungerade b ungerade	halbgerade	
a ungerade b gerade	ungerade	a+b ungerade
a gerade b ungerade		

Beispiel:
$8 + 12i$ ist gerade.
$7 + 12i$ ist ungerade.
$8 + 11i$ ist ungerade.
$7 + 11i$ ist halbgerade.

Wie wir an diesen Beispielen sehen, kann die Entscheidung leicht gefällt werden. Auch die Wahl Assoziierter ändert daran nichts.

Bemerkung: Die Angabe pythagoreischer Tripel (vgl. Abschnitt 3), welche die Gleichung $x^2+y^2 = z^n$ lösen, ist leicht möglich: Wähle eine komplexe Zahl $a+bi$ und berechne $(a+bi)^n = d+ei$. Dann ist eine Lösung: $x = |d|$, $y = |e|$, $z = a^2+b^2$.

Bemerkung: In anderen Zahlbereichen (Quaternionen u. a.) kommt man zu analogen Resultaten, wenn 2 in diesem Zahlbereich zerlegbar und damit keine Primzahl ist.

Fortsetzung folgt!

Dieter Banke, Gera

S 19 Es sei AB die Sehne eines Kreises K. Wir betrachten jetzt alle in K einbeschrieben Dreiecke, deren Grundseite AB ist und in jedem dieser Dreiecke den Schnittpunkt der Höhen. Man ermittle den geometrischen Ort aller dieser Punkte.

S 20 Innerhalb eines spitzen Winkels liege ein Punkt A. Es sei dann g die Gerade durch A, so daß der Flächeninhalt des von g und den Strahlen des Winkels eingeschlossenen Dreiecks minimal wird. Man zeige, daß A der Mittelpunkt der Strecke auf g ist, die durch die Schnittpunkte von g mit den Strahlen des Winkels begrenzt wird.

S 21 Man löse die Ungleichung

$$x^{(\log_a x)+1} > a^2 x \qquad (a > 1).$$

S 22 In einer Sachlotterie werden 8 Gegenstände verlost. Der erste Herantretende entnimmt aus der Urne 5 Lose. Wieviele Möglichkeiten hat er, diese 5 Lose zu entnehmen, so daß

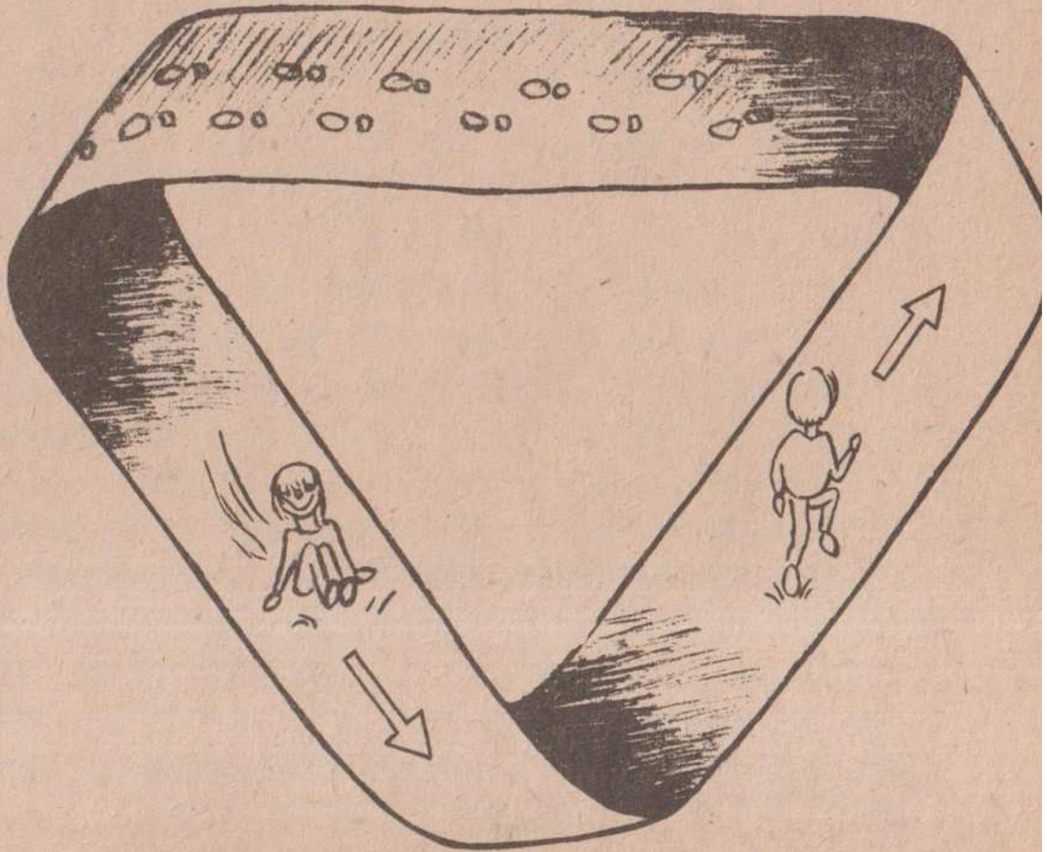
a) zwei der fünf Lose gewinnen,

b) mindestens zwei der fünf Lose gewinnen.

S 23 Man löse die Gleichung

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x.$$

S 24 Две автомашины выехали одновременно из одного пункта в одном и том же направлении.Одна машина идёт со скоростью 50 км/час, другая - 40км/час. Спустя полчаса из того же пункта в том же направлении выехала третья машина, которая обогнала первую машину на I,5 часа позже, чем вторую. Найти скорость третьей машины.



5
86

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
20. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Lieber Leser !!

WIR RUFEN DICH AUF ZUM WETTBEWERB UM DAS BESTE WURZELTITELBILD !

Wir haben uns das so gedacht :

Du schickst uns Deinen Vorschlag für ein Titelbild (Postkartenformat). Wir wählen die besten und phantasiereichsten aus. Diese werden veröffentlicht und prämiert.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein

Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 10. 3. 1986

Lineare Optimierung

Das Anliegen des Artikels besteht darin, den Leser mit einer Disziplin der angewandten Mathematik - der linearen Optimierung - bekanntzumachen.

Ziel dieser Disziplin ist die praktische Lösung einer gewissen Klasse von (oft ökonomischen) Aufgaben. Das mathematische Problem, das die uns interessierende Aufgabenklasse repräsentiert, wird im Abschnitt 2 angegeben. Eine universelle Lösungsmethode zur Behandlung des mathematischen Problems wird nicht entwikkelt. Allerdings wird ausführlich der Fall zweier Veränderlicher anhand ausgewählter Beispiele diskutiert (Abschnitt 3). Aufgrund der dabei gewonnenen Erkenntnisse werden Schlüsse für den allgemeinen Fall gezogen. Insbesondere werden Forderungen an eine universelle Lösungsmethode formuliert (Abschnitt 4). Es folgen im Abschnitt 5 historische Bemerkungen sowie ein kurzer Ausblick auf weitere Optimierungsprobleme.
Für die in den fünf Abschnitten behandelte Problematik erweist es sich als günstig, wenn Kenntnisse über lineare Gleichungs- und Ungleichungssysteme vorhanden sind.

1. Beispiele

Wir wollen zunächst einige einfache Beispiele linearer Optimierungsaufgaben betrachten.

Beispiel 1:

Ein Schiff, das in einem Hafen A vor Anker liegt, soll Güter transportieren. Transportziel ist der Hafen B. Das Schiff kann 8000 Tonnen Güter aufnehmen, wobei in A 2 verschiedene Güter (G_1, G_2) bereitstehen. Die Laderaumkapazität des Schiffes beträgt 10500 m^3. Zu jedem Gut G_j, $j=1,2$, ist bekannt: benötigter Laderaum R_j in m^3 pro Tonne, in A vorhandene Menge M_j und der Gewinn c_j in Mark pro transportierte Tonne von A nach B.
Die Zahlen für jedes Gut sind folgender Tabelle zu entnehmen:

	R_j (m^3/t)	M_j (t)	c_j (M/t)
G_1	1	4500	8
G_2	1.5	6000	9

Ferner soll von Gut G_1 nicht mehr als die doppelte Menge (in Tonnen) von Gut G_2 verladen werden.
Wie muß die Schiffsladung beschaffen sein, damit der Transportgewinn möglichst groß wird?

Beispiel 2:

In einer Betriebsabteilung werden vier Erzeugnisse (E_1,E_2,E_3,E_4) hergestellt, für die pro Stück ein Gewinn von 2, 3, 4 bzw. 6 Mark erzielt wird. Der Produktion sind Schranken gesetzt durch die vorhandenen Rohmaterialkapazitäten. Es werden zur Produktion der vier Erzeugnisse zwei Materialien (M_1,M_2) benötigt. Der Einsatz eines Materials M_i, i=1,2 (in Mengeneinheiten - ME), für die Produktion eines Erzeugnisses E_j, j=1,2,3,4, ist folgender Tabelle zu entnehmen:

	Einsatz in ME pro Stück E_1	E_2	E_3	E_4	vorhandene Materialkapazitäten in ME
M_1	0.5	1	1	2	80
M_2	0.5	1.5	2	1.5	210

Gesucht ist ein Produktionsplan, so daß maximaler Gewinn realisiert wird.

Beispiel 3:

In einem Betrieb wird in den folgenden Zeitabschnitten mindestens die danebenstehende Anzahl an Arbeitskräften (AK) benötigt:

2 - 6 Uhr	10 AK
6 - 10 Uhr	20 AK
10 - 14 Uhr	25 AK
14 - 18 Uhr	20 AK
18 - 22 Uhr	15 AK
22 - 2 Uhr	10 AK

Die Schichtdauer beträgt 8 Stunden. Schichtwechsel ist um 2, 6, 10, 14, 18 bzw. 22 Uhr. Wie sind die AK auf die Schichten zu verteilen, damit die Gesamtzahl eingesetzter AK minimal wird?

Beispiel 4:

Aus drei verschiedenen Gasarten G_j, $j=1,2,3$, mit dem jeweiligen Heizwert h_j (in kcal/m^3), Schwefelgehalt s_j (in g/m^3) und dem Preis c_j (in Mark/m^3) ist ein Gas zu mischen, das einen Heizwert von 1800 bis 2200 kcal/m^3 besitzt und nicht mehr als 3g Schwefel pro m^3 enthält. Außerdem soll dieses Gasgemisch möglichst billig sein.

Folgender Tabelle sind die Werte h_j, s_j, c_j, $j=1,2,3$, zu entnehmen:

	h_j (kcal/m^3)	s_j (g/m^3)	c_j (M/m^3)
G_1	1600	2.5	15
G_2	2400	3.2	30
G_3	2000	3.5	20

Beispiel 5: Klassisches Transportproblem

In m Betrieben $A_1,\ldots,A_m$ (z. B. Betriebe, die Zement herstellen) wird ein Produkt P (Zement) hergestellt, und zwar produziert jeder Betrieb A_i während einer fest vorgegebenen Zeit t_o a_i Mengeneinheiten (ME) des Produktes P. Weiterhin sind n Verbraucher $B_1,\ldots,B_n$ (z. B. Baustellen) bekannt, die das Produkt P in bestimmten Mengen b_j, $j=1,\ldots,n$ benötigen, und zwar während der gleichen Zeitdauer t_o. Dabei soll die Gesamterzeugung, ausgedrückt durch $\sum_{i=1}^{m} a_i$, gleich dem Gesamtverbrauch $\sum_{j=1}^{n} b_j$ sein. Ferner sind Zahlen c_{ij}, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$, bekannt. Jede Zahl c_{ij} gibt an, wieviel der Transport einer ME des Produktes P von A_i nach B_j kostet.

Gesucht ist ein Transportplan, der die Bedürfnisse aller Verbraucher B_j befriedigt. Außerdem sollen die entstehenden Transportkosten möglichst minimal werden.

Dr. Dathe

Fortsetzung folgt

7. Ein klassischer Beweis

Sei $H_n = 1+1/2+1/3+1/4+\ldots+1/n$ eine beliebige Partialsumme der Harmonischen Reihe.

Satz: H_n ist nie ganz für $n > 1$.

Erläuterung: Die Harmonische Reihe ist divergent, das heißt, mit wachsendem n wächst auch H_n über alle Grenzen. Allgemein gilt für unbeschränkt wachsendes n, daß sich

$$\sum_{m=1}^{n} 1/m - \ln n$$

einem bestimmten Wert C=0,577... nähert. Es gilt also $H_n \approx 0{,}577\ldots + \ln n$. H_n wächst also logarithmisch (sehr langsam). So ist $H_{1000} \approx 7,\ldots$ und $H_{1.000.000} \approx 14,\ldots$

H_n überschreitet jede natürliche Zahl, ist aber nie eine natürliche (ganze positive) Zahl. Das wollen wir beweisen.

Beweis: Wir werden zeigen, daß die reduzierte Bruchdarstellung (gekürzter Bruch) von H_n einen geraden Nenner und einen ungeraden Zähler hat. Damit ist 1 als Nenner der reduzierten Bruchdarstellung einer ganzen Zahl ausgeschlossen.

- Sei ein beliebiges $n \geq 2$ gegeben. Der Hauptnenner der Brüche $1/1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n$ sei h. h ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $1,2,3,\ldots,n$. Da 2 ein Nenner ist, ist 2 Faktor von h und damit h gerade.

- Es ist $1/1 = h/h$, $1/2 = (h/2)/h, \ldots, 1/n = (h/n)/h$.
Dann Gilt $H_n = 1/n \cdot (h+h/2+\ldots+h/n) = U/h$.
Dabei ist u eine ganze Zahl, da $1,\ldots,n$ den Hauptnenner (hier: Zähler) h teilen.

- Sei 2^k die höchste Potenz von 2, die in den Zahlen $1,\ldots,n$ vorkommt; also $1 < 2^k \leq n < 2^{k+1}$. Damit ist der Exponent von 2 in h genau k und der Summand $h/2^k$ von u ist ungerade.

- Die anderen Summanden von u, nämlich: $h, h/2, \ldots, h/(2^k-1)$, $h/(2^k+1), \ldots, h/n$ sind alle gerade. Denn die Nenner $1,2,\ldots,2^k-1$ sind alle kleiner als 2^k und damit höchstens durch 2^{k-1} teilbar und im Zähler verbleibt eine gerade Zahl.

Die Nenner $2^k+1,\ldots,n$ sind zwar größer als 2^k, aber kleiner als 2^{k+1}. Aber 2^k teilt die Zahlen $2^k+1,\ldots,2^k+m=n$ nicht. Damit bleiben die Zähler dieser Summen gerade.

- Die Summanden von u sind also alle gerade, bis auf den Summanden mit dem Nenner 2^k, der ungerade ist. Damit ist ihre Summe u ungerade.

- Da h gerade, u aber ungerade ist, stellt der Quotient $u/h=H_n$ nie eine ganze Zahl dar.

8. Schlußbemerkung

Die Lehre von Gerade und Ungerade ging schon in der Spätantike als Spezialfall in allgemeinere Methoden der Arithmetik (Proportionenlehre, Teilbarkeitslehre u. a.) auf. Sie zeigt sich noch in den Teilbarkeitsregeln für gerade Zahlen. Schon der Fakt, daß für Multiplikation und Division mit der 2 eigene Bezeichnungen existieren ("Verdoppeln" statt "Verzweifachen", "Halbieren",...), weist auf die Sonderstellung dieser Überlegungen hin. So gehört die Lehre von Gerade und Ungerade zum grundlegendsten Wissen und ist eine einfache und sichere Arbeitsmethode.

Als Schlußweise ist die Lehre von Gerade und Ungerade eng mit dem "Indirekten Beweis" (Beweis aus dem Gegenteil) verbunden. Dabei beweist man eine bestimmte Aussage, indem man zeigt, daß das Gegenteil nicht eintreten kann bzw. zu Widersprüchen führt (vgl. Abschnitte 4 und 7).

Daß die Lehre von Gerade und Ungerade auch als "Lehre von der Zahl 2 in der Mathematik" angesehen werden kann, wird insbesondere durch das 2. Kapitel nahegelegt. Tatsächlich zeigt sich aber, daß die Lehre von Gerade und Ungerade nicht überall gilt. Friedrich Engels (1820-1895) charakterisiert dieses Faktum so:

> " Die einzelne Zahl bekommt ihre Qualität schon im Zahlensystem und je nachdem dies... Alle Zahlengesetze hängen ab und sind bestimmt durch das angenommene System. In jedem System mit ungerader Grundzahl hört der Unterschied von graden und ungraden Zahlen auf,... Die Grundzahl bestimmt

also die Qualität nicht allein ihrer selbst, sondern auch aller anderen Zahlen. "

Eine Lehre von Gerade und Ungerade ist nur in Zahlensystemen mit geradzahliger Basiszahl möglich! (Bsp.: 10)

Im 2. Abschnitt sahen wir, daß jede Zahl als Summe von Zweierpotenzen darstellbar ist. Die Position der 1 bzw. 0 in der Dualdarstellung gibt an, welche Zweierpotenzen in die Summe eingehen, die die Zahl darstellt.

Im System zur Basis 3 gibt es die Ziffern 0,1 und 2.
Die Zahlen werden nun dargestellt:

Dezimal-Zahl	Drei-System
0	0
1	1
2	2
3	10
4	11
5	12
6	20
7	21
8	22
9	100
10	101
11	102
12	110
13	111
...	...

Die Regel, daß bei einer geraden Zahl die letzte Ziffer gerade ist, gilt nicht mehr!
Im System zu Basis 10 (dekadisches System, für das alle bisherigen Betrachtungen bzgl. Gerade und Ungerade galten) ist 4+8 = 12 (d. h. g+g = g), bei der Basis 3 jedoch gilt 11+22 = 110 (d. h. u+g = g). Unsere einfachsten Rechenregeln gelten nicht mehr!
Zahlensysteme mit ungerader Grundzahl sind deshalb historisch nicht so aktuell, weil in ihnen selbst die einfachsten Gesetz-

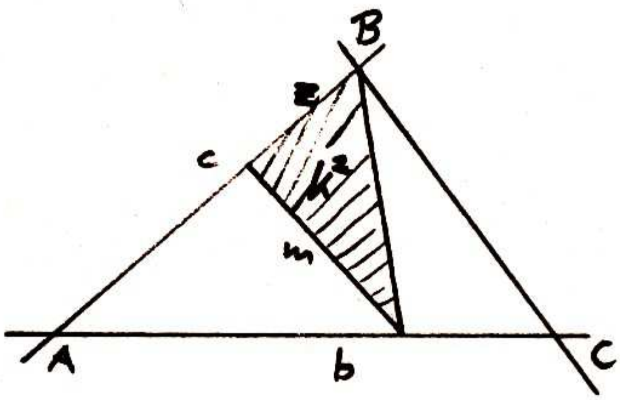
mäßigkeiten wie die Regeln des 1. Abschnitts nicht mehr gelten.

Die Relativität der Basiszahlen zeigt uns die Vielfalt der Mathematik, in der bestimmte Gesetzmäßigkeiten in bestimmten Bereichen gelten;die Lehre von Gerade und Ungerade bei gerader Grundzahl (Basis) ist ein Element davon.

Dieter Banke, Gera

Lösungen

R 31 nach Kay-Uwe Rosch, Eisleben, 18 Jahre, Soldat



$$\frac{m}{a} = \frac{c-z}{c}$$

$$A = \frac{1}{2}\, ac \sin\beta$$

$$k^2 = \frac{1}{2}\, mz \sin(\alpha-\beta)$$

$$\frac{k^2}{A} = V = \frac{mz}{ac} = \frac{1}{c^2} z^2 + \frac{1}{c} z$$

$$\frac{d(c)}{dz} = -\frac{2}{c^2} z + \frac{1}{c} \qquad \text{(2. Ableitung konstant } -\frac{2}{c^2}\text{)}$$

$$\frac{d(c)}{dz} = 0 \Longrightarrow z = \frac{c}{2}$$

$$\Longrightarrow V_{max} = \frac{1}{4}$$

$$\underline{\underline{\frac{k^2}{A} = \frac{1}{4}}}$$

Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn das vorgegebene k^2 höchstens $\frac{1}{4}$ A beträgt. Dann hat d. A. wegen $0 = z^2 - cz + c\,\frac{k^2}{A}$ genau zwei Lösungen; außer wenn $\frac{k^2}{A} = \frac{c}{4}$ ist, dann existiert genau 1.

(Sinonische Formel)

R 34 nach Carla Umlauf, Karl-Marx-Stadt

$$
\begin{aligned}
&1+2x+3x^2+\dots+(m+1)x^m = \\
&x^0+x^1+x^2+\dots+x^m + \\
&\quad x^1+x^2+\dots+x^m + \\
&\qquad x^2+\dots+x^m + \\
&\qquad\quad \vdots \\
&\qquad\quad +x^m \qquad =
\end{aligned}
$$

$$\sum_{k=0}^{m} x^k + \Big(\sum_{k=0}^{m} x^k - \sum_{k=0}^{0} x^k\Big) + \Big(\sum_{k=0}^{m} x^k - \sum_{k=0}^{1} x^k\Big) + \sum_{k=0}^{m} x^k - \sum_{k=0}^{2} x^k + \dots + \sum_{k=0}^{m} x^k - \sum_{k=0}^{m-1} x^k$$

$$= (m+1)\sum_{k=0}^{m} x^k - \sum_{k=0}^{0} x^k - \sum_{k=0}^{1} x^k - \sum_{k=0}^{2} x^k - \dots - \sum_{k=0}^{m-1} x^k$$

$$= (m+1)\,\frac{x^{m+1}-1}{x-1} - \left(\frac{x^m-1+x^{m-1}-1+\dots+x^3-1+x^2-1+x^1-1}{x-1}\right)$$

$$= (m+1)\,\frac{x^{m+1}-1}{x-1} - \left(\frac{x^1+x^2+\dots+x^m-m\cdot 1}{x-1}\right)$$

$$= (m+1)\,\frac{x^{m+1}-1}{x-1} + \frac{m}{x-1} - \left(\frac{\frac{x^{m+1}-1}{x-1}-1}{x-1}\right)$$ da x^0 nicht in enthalten

$$= \frac{(m+1)(x^{m+1}-1)+m-\frac{x^{m+1}-1}{x-1}+1}{x-1}$$

$$= \frac{\left(m+1-\frac{1}{x-1}\right)x^{m+1}-m-1+m+1+\frac{1}{x-1}}{x-1}$$

$$= \frac{\left(m+1-\frac{1}{x-1}\right)x^{m+1}+\frac{1}{x-1}}{x-1}$$ für $x \neq 1$

=====================

für $x=1$: $\sum = (m+1)+m+(m-1)+\dots+1$

$$= \frac{m+1}{2}\,(m+2)$$

Preisaufgaben

1. 2P Man zeige, daß eine beliebige Ebene, die durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten eines Tetraeders gelegt wurde, das Tetraeder in zwei volumengleiche Teile zerlegt.

2. 2P Man finde das Verhältnis des Flächeninhaltes eines Dreiecks ABC zu dem Flächeninhalt eines Dreieckes, dessen Seiten gleich den Seitenhalbierenden von ABC sind.

3. 1P Innerhalb eines spitzen Winkels werden nacheinander Kreise unbeschrieben, wobei jeder Kreis die beiden Schenkel und den vorhergehenden Kreis berührt. Man zeige, daß die Radien der Kreise eine geometrische Folge bilden und finde einen Zusammenhang zwischen der Größe des Winkels und dem Quotienten aus zwei benachbarten Gliedern der Folge.

4. 2P Man bestimme den geometrischen Ort aller Punkte, für die die Summe der Abstände von zwei gegebenen Geraden gleich einer gegebenen Länge a ist und betrachte dabei den Fall von sich schneidenden und parallelen Geraden.

5. 1P Man zeige:

$$1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} .$$

6. 1P Каждая вершина параллелограмма соединена с серединами двух противоположных сторон. Какую часть площади параллелограмма составляет площадь фигуры, ограниченной проведенными линиями?

Einsendeschluß 10. 8. 1986

Anwendung heuristischer Methoden

Teil 1: Mathematische Aufgaben

Heuristik ist ein alter Begriff, unter dem man so viel wie Kunst des Erfindens und Entdeckens verstand. Der bedeutende amerikanische Mathematiker Georg POLYA bezeichnet damit die Untersuchung der Mittel und Methoden des Aufgabenlösens.
Es gibt typische Herangehensweisen an Aufgaben, die die Chancen einer Lösung erhöhen. Dazu gehört, daß man sich gewisse Fragen stellt, wie etwa die folgenden. Kennt man eine verwandte Aufgabe?, kann man einen einfachen Fall lösen?, ist die vollständige Lösung auf die Lösung des einfachen Falls rückführbar? usw.
In seiner "Abhandlung über die Methode" stellte der Philosoph und Mathematiker René DESCARTES (1596-1650) eine Reihe von Regeln auf, die er für nützlich befand:
"14. Die erste Regel war, niemals etwas als wahr anzunehmen, was ich nicht schon klar als solches erkannte, d. h. alle Überstürzung und alle Vorurteile aufs sorgfältigste zu vermeiden und nichts mehr in meine Urteile aufzunehmen, als was sich so klar und distinkt meinem Geiste darbieten würde, daß ich keine Veranlassung haben würde, es in Zweifel zu ziehen.
15. Die zweite, jede der Schwierigkeiten, die ich untersuchen würde, in so viele Teile zu zerlegen, als nur möglich und als erforderlich sein würde, um sie in der besten Weise aufzulösen ...
20. Ich wage in der Tat zu behaupten, daß die genaue Beobachtung dieser wenigen von mir gewählten Vorschriften es mir so leicht machte, alle Fragen bis zu denen sich diese beiden Wissenschaften (Analysis und Algebra - L.G.) erstrecken, zu lösen, daß ich in zwei bis drei Monaten, die ich zu ihrer Untersuchung brauchte - da ich mit den einfachsten und allgemeinsten begonnen hatte und sodann jede Wahrheit, die ich fand, mir als Regel diente, andere zu finden - ich nicht nur mit mehreren zu Ende kam, die ich früher für recht schwierig gehalten hatte, sondern es mir auch gegen Ende schien, daß ich selbst in den mir unbekannten Problemen bestimmen könnte, durch welche Mittel und wie

weit es möglich wäre, sie zu lösen."

Wir wollen uns ein wenig mit einigen der wichtigsten heuristischen Prinzipien vertraut machen. Zu diesen zählen m. E. die Prinzipien der Verallgemeinerung, Spezialisierung und Analogiebildung, der Zerlegung und Verknüpfung, der Variation und Invarianz, der Umkehrung, sowie der Reduktion und Erweiterung.

Auf klassische Art und Weise führt Polya das Reduzieren oder Rückwärtsarbeiten an Hand der Berechnung des Volumens S eines geraden Pyramidenstumpfs mit quadratischer Grundfläche vor. Gegeben sind die Höhe h des Stumpfs, die Länge a einer Seite der Deckfläche und die Länge b einer Seite seiner Grundfläche. Seine ersten Fragen lauten "Was wollen wir?" und "Was haben wir?" Wir wollen S bestimmen und haben a,b und h. "Was ist die Unbekannte?" Das Volumen eines Pyramidenstumpfes. "Ein Pyramidenstumpf ist der Teil einer vollen Pyramide, der übrigbleibt, wenn wir von dieser durch eine zu ihrer Grundfläche parallele Ebene eine kleinere Pyramide abschneiden ... Wenn wir die Volumina dieser beiden Pyramiden, sagen wir B beziehungsweise A, kennten, könnten wir das Volumen des Pyramidenstumpfs bestimmen: $S = B - A$." Nun müssen wir zwei neue Unbekannte ermitteln. Es ist $A = a^2x/3$ und $B = b^2(x+h)/3$, wobei x die Höhe der kleineren Pyramide darstellt. Somit reduziert sich die Aufgabe auf die Bestimmung von x. Nach dem Strahlensatz ergibt sich schließlich $x/(x+h) = a/b$, woraus man x erhält.

Auf eine interessante Aufgabe, zu deren Lösung man gewöhnlich nur durch Rückwärtsarbeiten kommt, verweist H. KÖNIG in seiner Dissertation /1/: Der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC mit den Seiten a,b,c und dem Umkreisradius r beträgt $A = abc/4r$.

Es gibt ähnliche Formeln, z. B. $A = ab\sin\gamma/2$. Nach dem Prinzip der Drittengleichheit genügt es daher zu zeigen, daß $abc/4r = ab\sin\gamma/2$, also $c = 2r\sin\gamma$ gilt. Das ist nicht mehr schwer.

Man kann sich die Formel $A = abc/4r$ durch die Multiplikation der Gleichungen $A = ab\sin\ \ /2$ und $1 = c/2r\sin$ entstanden denken. Überhaupt ist das Verknüpfen von Gleichungen und Ungleichungen durch Multiplikation, Division, Addition und Subtraktion eine häufig nutzbringende Operation.

Die Variation der Daten erklärt Polya in /2/ an folgender einfachen Aufgabe. Man ziehe die gemeinsamen Tangenten an zwei gegebene Kreise. Die Aufgabe, von einem Punkt außerhalb eines Kreises die Tangente an diesen zu ziehen, ist ein Grenzfall davon. Deren Lösung führt sofort zu der der ursprünglichen Aufgabe.
Eine andere Form der Variation ist die Variation der Darstellung einer Aufgabe, etwa durch Umformulierung oder das Einzeichnen von Hilfslinien in eine vorgegebene Figur.
Die Ungleichung $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$ ist für alle reellen Zahlen x erfüllt. In jedem der beiden Fälle $\sin x > 0$ und $\sin x < 0$ läßt sich dieser Sachverhalt durch Verwendung einer Beziehung zwischen Sinus und Cosinus (Variation der Darstellung) im Wesentlichen auf die Monotonie der Sinusfunktion im Bereich $(-\pi/2, \pi/2)$ zurückzuführen.
Betrachten wir nun eine weitere Aufgabe.
Man ermittle alle stetigen Funktionen f, die die Funktionalgleichung $f(x+y)f(x-y) = f^2(x)-f^2(y)$ erfüllen und für die π die kleinste positive Nullstelle ist.
Durch die Zahl π kommt man darauf, an Winkelfunktionen zu denken. Man erkennt, daß $f(x) = c \sin x$ eine Lösung darstellt. Da man keine weitere findet, könnte man sich entscheiden, die Eindeutigkeit der Lösung nachweisen zu wollen. Den Beweis könnte man in zwei Teilbeweise zerlegen.
1. Für $0 \leq x \leq 2\pi$ gilt $f(x) = c \sin x$, $c \neq 0$.
2. Es gilt $f(x) = f(x+2\pi)$ für beliebiges x.
Der erste Teilbeweis gelingt am ehesten für $0, \pi/2, \pi/4, 3\pi/4$ und 2π. Dabei wird $c = f(\pi/2)$ gesetzt. Daraus leitet sich der Plan ab, $f(x) = c \sin x$ für $x = k\pi/2^n$, $k=1,2,\ldots,2^{n+1}-1$, durch vollständige Induktion über n zu beweisen. Wegen der Stetigkeit von f ergibt sich daraus das Erfülltsein der Funktionalgleichung für alle x zwischen 0 und 2π. Auf die Durchführung dieses Plans soll hier verzichtet werden.
Wenden wir uns der zweiten Teilaufgabe zu. Aus $f(x+2\pi)f(x) = f^2(x+\pi)-f^2(\pi) = f^2(x+2\pi) \geq 0$ sieht man, daß $f(x)$ und $f(x+2\pi)$ stets das gleiche Vorzeichen haben müssen. Da die Gleichheit zweier Terme dasselbe ist, wie deren Vorzeichen- und Betragsgleichheit, braucht nur noch $|f(x)| = |f(x+2\pi)|$ oder anders

$f^2(x) = f^2(x+2\pi)$ gezeigt zu werden. Es ist $f^2(x+2\pi)-f^2(x) = f(2x+2\pi)f(2\pi)$. Es genügt also zu zeigen $f(2\pi) = 0$. Das folgt aus $f^2(2\pi) = f^2(2\pi)-f^2(\pi) = f(3\pi)f(\pi) = 0$. q.e.d.

Bei analytischen Beweisen ist oft eine andere Zerlegung der Gleichheitsrelation, nämlich die in die "Größer-gleich"- und die "Kleiner-gleich"-Relation hilfreich.

Eine wohlbekannte Ungleichung ist die zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel (AGM-Ungleichung). Sie lautet $(a_1+a_2+\ldots+a_n)/n \geq (a_1a_2\ldots a_n)^{1/n}$, wobei $a_1,a_2,\ldots,a_n$ positive reelle Zahlen sind. Zu ihrem Beweis verwendet man eine modifizierte Variante der vollständigen Induktion, den sogenannten Cauchy-Trick. Aus der Gültigkeit der Formel für $n = k$ wird die Gültigkeit für $n = 2k$ und für $n = k-1$ bewiesen. Wir den Beweis nicht kennt, möge sich daran versuchen.

Kommen wir zur nächsten Aufgabe. Man beweise die Höldersche Ungleichung. Für positive reelle Zahlen a,b,p,q mit $1/p+1/q = 1$ gilt $ab \leq a^p/p + b^q/q$.
Es ist zu zeigen $ab \leq (qa^p+pb^q)/pq$ (1) oder
$ab \leq (qa^p+pb^q)/(p+q)$ (2) wegen $pq = p+q$. Die Ungleichung (2) wäre für beliebige $p,q \in N$ ein Spezialfall der Beziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel. Es erscheint daher aussichtsreich, die Ungleichung (2) auf die AGM-Ungleichung zurückzuführen.
Es gelte zunächst $p = r/s$ und $q = t/u$ mit $r,s,t,u \in N$. Dann ist zu zeigen $ab \leq (ts\cdot a^{r/s}+ru\cdot b^{t/u})/(ru+ts)$.
Tatsächlich gilt nach dem Satz über das AGM
$(ts\cdot a^{r/s}+ru\cdot b^{t/u})/(ru+ts) \geq (ab)^{rt/(ru+ts)}$.
Es ist aber $rt/(ru+ts) = 1$, wie man aus $pq = p+q$ leicht folgern kann. Somit ist die Behauptung für rationale p,q bewiesen.
Es seien nun p,q reell. Wegen $1/p + 1/q = 1$ und $p,q > 0$ muß $p,q > 1$ gelten. Dann existieren rationale Zahlenfolgen $\{p_i\}$ und $\{q_i\}$, mit $p_i > 1$ und $q_i = 1/(1-1/p_i) > 1$ für alle $i \in N$, die gegen p bzw. q konvergieren.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt nun}\quad ab &\leq \lim(a^{p_i}/p_i + b^{q_i}/q_i) \\ &= a^{\lim p_i}/\lim p_i + b^{\lim q_i}/\lim q_i \\ &= a^p/p + b^q/q. \end{aligned}$$

Dabei steht lim(.) jeweils für $\lim\limits_{i \to \infty}(.)$ q.e.d.

Begeben wir uns nun in die Gefilde der Geometrie.

Es sei ABCD ein Quadrat mit der unbekannten Seitenlänge a, in dem ein Punkt P liegt, der von A den Abstand 1, von B den Abstand 2 und von C den Abstand 3 hat. Man konstruiere das Quadrat.

Durch die Strecken $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ und $\overline{CP}$ wird das Quadrat in drei Teile zerlegt, die sich auch anders zusammenfügen lassen. Dabei ist ein Viereck besonders interessant, das man auch erhält, wenn das Dreieck BCD um 270° in Uhrzeigerrichtung gedreht wird. Es entsteht das Viereck AP'BP mit den Seitenlängen $\overline{AP} = 1$, $\overline{BP} = 2$, $\overline{BP'} = 2$, $\overline{AP'} = 3$. Entscheidend ist, daß gilt $\sphericalangle PBP' = \sphericalangle CBA = 90°$. Dadurch läßt sich zuerst das Dreieck P'BP nach sws und danach das Dreieck AP'P nach sss konstruieren. Dabei beachte man, daß $\overline{PP'}$ nach dem Satz des Pythagoras eine Länge von $2\sqrt{2}$ besitzt und folglich im Dreieck APP' die Dreiecksungleichungen erfüllt sind. Die Diagonale $\overline{AB}$ des somit vorhandenen Vierecks AP'BP hat die Länge s. Nun kann leicht auf die übliche Weise das Quadrat ABCD konstruiert werden.

Zu einer weiteren Lösung gelangt man durch Übergang zur umgekehrten Aufgabenstellung. Gegeben sei das Quadrat EFGH mit der Seitenlänge s. Gesucht ist ein Punkt Q im Innern, so daß $\overline{EQ}$, $\overline{FQ}$ und $\overline{GQ}$ im Verhältnis 1:2:3 stehen. Es gilt $\overline{EQ}:1 = e:a$, sofern Q eindeutig bestimmbar ist. Hat man $\overline{EQ}$, so erhält man a einfach durch zentrische Streckung. Die Bedingung $\overline{EQ}:\overline{FQ}:\overline{GQ} = 1:2:3$ läßt sich zerlegen in $\overline{EQ}:\overline{FQ} = 1:2$ und $\overline{FQ}:\overline{GQ} = 2:3$. Wir benötigen zuerst den geometrischen Ort aller Punkte R, die die erste Bedingung und dann denjenigen aller Punkte S, die die zweite Bedingung erfüllen. Der Durchschnitt beider Orte mit dem Innern von EFGH enthält alle in Frage kommenden Punkte Q.

Die geometrischen Orte der Punkte R und S sind zwei sogenannte Kreise des Apollonius. Derjenige Schnittpunkt der beiden Kreise, der innerhalb EFGH liegt, ist der gesuchte Punkt Q. Die verbleibende Aufgabe, die Mittelpunkte und Radien der Kreise des Apollonius (und eventuell auch noch die Koordinaten der Schnittpunkte, in einem geeignet gewählten Koordinatensystem) anzugeben, wird dem Leser überlassen.

Zum Schluß möchte ich noch ein Brettspiel vorstellen, das in der Sowjetunion unter dem Namen Kusi-kusi bekannt ist.
Auf a1 bis h1 werden die weißen und auf a8 bis h8 die schwarzen Steine aufgestellt. Alle Steine dürfen nur geradeaus, jedoch vorwärts und rückwärts, auch mehrere Schritte auf einmal, allerdings höchstens bis zum gegnerischen Stein gezogen werden. Verlierer ist, wer keinen Zug mehr ausführen kann, also "mit dem Rücken an die Wand" gedrückt wurde. Man finde eine Strategie, mit der Schwarz immer gewinnt. Schwarz muß bestrebt sein, eine bestimmte, zu Anfang bestehende, günstige Konstellation zu erhalten und gleichzeitig vorzumarschieren. Auf die richtige Idee kann man kommen, wenn man zuerst das Spiel mit je zwei Steinen analysiert und die dabei gefundene Gewinnstrategie auf das Spiel mit je 2n Steinen auf einem entsprechend großem Brett verallgemeinert.

Literaturverzeichnis:

/1/ König, H. (1973) Heuristik beim Lösen geometrischer Beweise, Dissertation, Halle

/2/ Polya, G. (1966-67) Vom Lösen mathematischer Aufgaben, Basel, Stuttgart

/3/ Descartes, R. (1980) Ausgewählte Schriften, Leipzig.

Lutz Gärtner, Wismar

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein

Anschrift: **WURZEL,** 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M. Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen. Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932
Redaktionsschluß: 7. 4. 1986

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	20 (1986) 5	S. 65–80

6

86

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
20. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Anwendung heuristischer Methoden

Teil 2 Schachaufgaben

Wie löst man Schachaufgaben? Einen Algorithmus hierfür gibt es nicht, wohl aber einige Tricks. In /1/ schreibt Dr. Karl-Heinz SIEHNDEL, daß es Hauptanliegen der böhmischen Problemschule ist, Probleme mit mindestens drei ökonomischen Mattbildern zu schaffen. "Hat man solche Mattbilder erkannt, ist es meist nicht schwierig, den Lösungsverlauf zu finden, der dazu hinführt." Diesen Tip wollen wir beherzigen, auch wenn es sich nicht um böhmische Probleme handelt. Er bedeutet, rückwärts zu arbeiten. "Manchmal kann der Leser daraus Nutzen ziehen, wenn er Schwarz anziehen läßt." Der Autor rät weiterhin, die Rolle der einzelnen Figuren zu überprüfen.
Vor Figurenopfern braucht man nicht unbedingt zurückzuschrekken, sondern hat diese in seine Überlegungen einzubeziehen. Auf mögliche Schachgebote, insbesondere Abzugschachs, ist zu achten. Diese werden oft, nach einer gewissen Vorbereitung, verwirklicht. Man kann auch versuchen, eine Mattdrohung zu finden, indem man sich erst einmal irgendeinen geeigneten Stein wegdenkt (Betrachtung einer ähnlichen Aufgabe). Außerdem sollte man untersuchen, welche Fluchtfelder dem schwarzen König zur Verfügung stehen. Hat man einen Kandidaten für den Schlüsselzug, so registriere man alle möglichen Antwortzüge. Findet man für einen davon keine Fortsetzung, die das Matt in der vorgegebenen Zahl von Zügen erzwingt, so verwerfe man den Zug nicht gleich, sondern probiere es mit einem anderen Antwortzug. Klappt es bei diesem, hat man wahrscheinlich schon die richtige Figur angefaßt.
Am besten ist es, wenn man zu Anfang versucht, eine Schachaufgabe ohne Benutzung der angegebenen Hinweise zu lösen. Manchmal wird durch diese nämlich, so wie im folgenden Fall, zu viel verraten.
Aufgabe 1: Matt in drei Zügen von Zdenek Libis, Lysice aus "Ceskoslovensky sach" 1984. Weiß: Kd5 Te6 La6 Sc8 Sd7 , Schwarz: Ka8 La7 Bb7 c5.
In der Berliner Zeitung vom 9./10. 3. 85 stand hierzu: "Der ge-

fällige weiße Schlüsselzug hat zur Folge, daß einem schwarzen Stein praktisch alle Züge zur Verfügung stehen, die auf Grund der Schachregeln für ihn möglich sind."
Zur nächsten Aufgabe sei jedoch so viel gesagt, daß sie in der BZ vom 9./10. 2. 85 unter der Überschrift "Das ignorierte Schach" erschien.

Aufgabe 2: Matt in drei Zügen von A. Bylewskij, Uljanowsk aus "Schachmatna Missl" 1984. Weiß: Kd2 Tf5 Lc2 Sg2 Bb3, Schwarz: Kd4 Bc4
Der Titel der Aufgabe weist darauf hin, daß Weiß im ersten Zug den König nicht wegrückt. Nach 1.Se3 droht 2.Td5 matt. Damit ist eventuell ein Mattbild gefunden. Jedoch darf der Springer nicht sofort nach e3 ziehen, da sonst 1...c3 ein Patt oder Springerverlust erzwingt. Daher ist anzunehmen, daß eine Variante 2.Se3 3.Td5 enthält. Der erste Zug wird wohl ein Läufer- oder Bauernzug sein. Wird zuerst der Läufer bewegt, so entzieht er sich einem Angriff durch 1...cb. Doch wohin? 1.Ld3 und 1.Le4 führen zum Läuferverlust. Den kann sich Weiß nicht leisten. 1.Ld1 gibt das wichtige Feld e4 frei, so daß das zu Beginn angestrebte Matt nicht zustandekommen kann. Also bleibt 1.Lb1 übrig. Nun ergibt sich die erste Mattkombination 1.Lb1 cb 2.Se3 b2 3.Td5 matt. Wie ist aber nach 1.Lb1 c3 weiterzuspielen? Es droht 2...c2, ein Zug, der alles verdirbt. Folglich muß 2.Kc2 erfolgen. Das zwingt Schwarz zu 2...Ke4. Nun greift der schwarze König den weißen Turm an, entblößt aber seinen Bauern. Durch 3.K:c3+ kontrolliert der weiße König das Feld d4 und führt gleichzeitig ein effektvolles Abzugschach herbei. Matt.
Als nächstes findet der Leser fünf Schachaufgaben vor, mit denen er sich, wenn er möchte, selbstandig auseinandersetzen kann Spätestens aus den sich anschließenden Kommentaren erfährt er dann, wie man auf die Lösung kommen kann.

Aufgabe 3: Matt in zwei Zügen von Wiktor Kitschigin, Perm aus "Ceskoslovensky sach" 1985. Weiß: Kh8 De1 Lb1 Sd6, Schwarz: Kh6 Lh5 Sg3 Sg5.

Aufgabe 4: Matt in zwei Zügen von Jens Künzelmann, Heidenau aus "Tribüne" 1985. Weiß: Kf8 Da3 Td3 La5 Sf7 Sg3, Schwarz:

Kf4 Tb1 Tc2 Lc6 Se7 Bb6 c5 c7 g4 g6.

Aufgabe 5: Matt in zwei Zügen von Kari Valtonen, Finnland aus "Belgisch Schaakbord" 1985. Weiß: Kb2 Dc1 Td1 Tf7 La3 Sf5 Sg5, Schwarz: Ke5 Ta6 Th3 Lh1 Lh2 Sg4 Bb5 d6 g3 g6 h5 h7.

Aufgabe 6: Matt in zwei Zügen von Siegfried Brüchner, Oranienburg aus "Berliner Zeitung" 1985. Weiß: Kh5 Db8 Lc4 Lg1 Se3 Sf7 Ba3 b2 e5 g3, Schwarz: Kd4 Td5 Ba6 a4 c5 e4 e6 g2.

Aufgabe 7: Matt in drei Zügen von Leonid I. Kubbel, UdSSR, I. Preis "Dresdner Anzeiger" 1928. Weiß: Kg2 Db2 Sd7 Bc2 g5 g6, Schwarz: Kc4 Sf2 Bc6 g3 g7.

Zu Aufgabe 3:
Wir gucken uns zuerst an, wie Weiß im ersten Zug Schach bieten könnte. Dafür kämen 1.Sf7 und 1.Sf5 in Frage. Beide Felder werden von Schwarz bewacht, dabei das Feld f7 nur einfach durch den Springer g5. Zieht Schwarz im ersten Zug den Springer g5 weg, so setzt 2.Sf7 matt. Der Springer g5 ist also in erweitertem Sinne gefesselt. Er darf also auch der weißen Dame nichts antun. Daher erscheint es möglich, daß die weiße Dame sich zuerst auf ein Feld stellen muß, auf dem sie vom schwarzen Springer g5 geschlagen werden kann. Die weiße Dame ist für den ersten Zug prädestiniert, da sie als einzige weiße Figur noch keine Funktion übernommen hat. Rückt Schwarz zuerst mit dem Läufer, so könnte die weiße Dame ungestraft den Bauern g6 schlagen und mit dem schwarzen König wäre es aus. Also sollte sich die weiße Dame so postieren, daß sie den Bauern g6 angreift. Demnach kommen erst einmal 1.De4, 1.De6 und 1.De8 in die engere Wahl. 1.De4 entfällt aber sofort wegen 1.S3:e4. 1.De6 fesselt zusätzlich den Bauern g6. Zieht nun Schwarz mit dem Springer g3, so kann Weiß durch 2.Sf5 matt setzen. Damit wäre auf alle "Abwehrmöglichkeiten" von Schwarz eine Antwort gefunden. Wie man leicht sieht, führt 1.De8 nicht zum Ziel.
Bei der Lösung dieser Schachaufgabe hat sich das Umkehrprinzip, in Form der Analyse der Konsequenzen der schwarzen Züge, bewährt.

Zu Aufgabe 4:

Der schwarze König verfügt über kein Fluchtfeld. Es kommt also wahrscheinlich darauf an, ihm im zweiten Zug Schach zu bieten. Durch welche Figur könnte das geschehen? Es bietet sich z. B. 2.Ld2+ an. Jedoch stört der schwarze Turm auf c2. Wie könnte er abgelenkt werden? Durch 1.D:c5! Schwarz hat aber noch eine andere Möglichkeit, die Dame auf c5 zu schlagen, nämlich durch den Bauern d6. Dann aber kann der weiße Läufer von c7 aus Schach matt bieten. Es bleibt noch zu untersuchen, was passiert, wenn Schwarz die weiße Dame nicht schlägt. Je nachdem, wie Schwarz zieht, kann die Dame auf d4, e3, e5 oder g5 matt setzen.

Zu Aufgabe 5:

Die Aufgabe stammt vom 1984er Weltmeister im Problemlösen. Wenn der weiße Springer f5 nicht da wäre, so könnte 1.Df4 matt setzen. Also fassen wir ins Auge, zuerst den Springer von f5 wegzuziehen. Schwarz verfügt über zwei Abwehrmöglichkeiten, 1...g2 und 1...Ta4. Durch 1...g2 wird der schwarze Läufer h1 ußer Gefecht gesetzt. Dem Turm d1 bietet sich somit das Feld d5 an, er müßte nur noch von einer anderen weißen Figur gedeckt werden und das Matt wäre unabwendbar. Daher empfielt sich 1.Se7. Auf 1...Ta4 erwidert Weiß 2.Sc6 matt oder 2.Ld6 matt. Ein Bauer statt des Läufers auf a3 - und dieses Dual wäre vermieden.

Zu Aufgabe 6:

Der Hauptplan 2.Sf5+ scheitert, wenn der weiße Läufer auf c4 dann ungedeckt ist. Der Vorplan muß also darin bestehen, den Läufer zu decken. Das kann nur durch 1.Sd6 oder 1.b3 geschehen. In beiden Fällen bekommt Schwarz ein neues Fluchtfeld. Nach 1.b3 Kc3 wäre Schwarz unmittelbarer Sorgen ledig. Durch 1.Sd6 wird gleichzeitig die weiße Dame aktiviert. Nach 1...T:d6 schlägt sie zurück und setzt matt. Ansonsten kann Schwarz noch 1...a5,1...Ke5 oder 1...T:e5+ spielen. Auf 1...a5 antwortet Weiß 2.Sb5 matt. 1...Ke5 hat 2.Sg4 matt und 1.T:e5+ 2.Sef5 matt zur Folge. Im letzten Fall darf der schwarze Turm den schachbietenden weißen Springer nicht wegnehmen, da zusätzlich der weiße Läufer auf g1 den schwarzen König ins Visier genommen hat.

Zu Aufgabe 7:
Bei Dr. Karl-Heinz Siehndel in /1/ heißt es: "Wegen des Ökonomieprinzips werden im Problemschach nur die unbedingt benötigten Steine verwendet. Jeder Figur auf dem Brett kommt eine bestimmte Funktion zu." Die Funktion der Bauern g5 und g6 kann es nur sein, die Felder f6 und f7 abzudecken. Also wird in einer Variante der schwarze König nach rechts oben abgetrieben und muß über d5 nach e6 wandern. Dort kann ihm durch den Springerzug nach f8 Schach geboten werden. Die Felder d6, e7, d5, e5, f5 müssen für ein Matt von der weißen Dame beherrscht werden, die dann folglich auf c5 stehen muß. Die Dame kann c5 im zweiten Zug erreichen, wenn sie vorher nach a3, b6 oder e5 zieht. 1.De5 entfällt wegen der vorherigen Überlegung. Probieren wir es mit 1.Db6. Man stößt jetzt leicht auf 1.Db6 Kd5 2.Dc5+ Ke6 3.Sf8 matt. Schwarz kann nach 1...Kd5 auch noch 2...Ke4 spielen. In diesem Fall ist 3.De5 matt die Lösung. Betrachten wir nun 1...Kc3. Durch diesen Zug wird 1.Db6 anscheinend widerlegt. 1.Da3 macht dagegen diese Antwort unmöglich. Da wir bereits wissen, daß der schwarze König nicht nach d5 gehen darf, bleiben noch 1...Kb5, 1....Kd4 sowie 1...Se4 und 1...Sd3 als Verteidigungsmöglichkeiten für Schwarz übrig. Nach 1...Kb5 ergibt sich 2.Dc5+ Ka4/Ka6 3. Sb6/Sb8 matt.
Auf 1...Kd4 folgt 2.Dc5+ Ke4 3.De5 matt. Die Drohung 2.Dd3+ wird durch den schwarzen Springer vereitelt. Zieht aber 1...Se4/Sd3, so läßt sie sich vielleicht wahr machen. Tatsächlich gelingt dies durch 2.Db3+ Kd4 3.Dd3/D:d3 matt. Die schwarzen Bauern dürfen nicht ziehen wegen der Drohung 2.Dc5+. Damit wäre das Schachproblem gelöst.

KUBBEL war einer der bedeutendsten sowjetischen Problemkomponisten der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Großen Wert legte er auf Mustermatts, das sind solche Mattstellungen, bei denen der schwarze König die benachbarten Felder jeweils aus nur einem einzigen Grunde nicht betreten darf.

Abschließend möchte ich noch ein eigenes Schachproblem stellen.

Aufgabe 8:
Matt in vier Zügen von Lutz Gärtner, Berlin, Urdruck.

Weiß: Kh2 Dd4 Tc7 Sc3 Sf3 Bh3, Schwarz: Ka7 Ta8 Tb6 Lg5 Sf4 Bb7 d2 e3.

Literaturverzeichnis:

/1/ Problemschach 407 Aufgaben und Studien, Gesamtredaktion Dr. Karl-Heinz Siehndel, Berlin 1985

Lutz Gärtner

Preisaufgaben

S 31 1

Man berechne x aus folgender Gleichung :

$$\frac{\sqrt{a+x}}{a} + \frac{\sqrt{a+x}}{x} = \sqrt{x} \quad .$$

S 32 2

Löse folgendes Gleichungssystem :

$$\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2$$
$$\log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2$$
$$\log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \quad .$$

S 33 1

Beweise : Wenn in einem Rhombus ein Winkel 30° beträgt, dann sind die Seiten proportional zu der Diagonalen.

S 34 1

Beweise, daß für die Seiten a, b, c eines beliebigen Dreiecks gilt :

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3 \quad .$$

S 35 1

Beweise : Wenn $\alpha + \beta + \gamma = n\pi$, dann gilt

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 1 = (-1)^n 2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \, .$$

S 36 2

В олин из дней в библиотеке побывало несколько читателей, которые приходили порознь, но из любых трёх читателей по крайней мере двое в тот день в библиотеке встретились. Доказать, что можно выбрать такие два момента, что любой из читателей, посетивших в тот день библиотеку, по крайней мере в один из этих моментов находился в ней.

Metrische Räume, Banachscher Fixpunktsatz

0. Motivierende Bemerkungen

Wie üblich bezeichnen wir mit $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen und mit $\mathbb{R}^n = \{(\xi_1,\dots,\xi_n) : \xi_i \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen. Sind zwei Punkte $x = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ und $y = (\eta_1,\dots,\eta_n)$ in $\mathbb{R}^n$ gegeben, so können wir die Frage nach dem Abstand dieser beiden Punkte stellen. Gehen wir von geometrischen Überlegungen im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ aus, kommt man leicht zu folgendem Ansatz

$$d_2(x,y) := \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2\right)^{1/2} . \tag{1}$$

Wir wollen nun einmal die Eigenschaften dieser Funktion d_2, die jedem Paar von Elementen des $\mathbb{R}^n$ eine reelle Zahl zuordnet, untersuchen. Es gilt

S a t z 1 : Für die in (1) definierte Funktion $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gelten die folgenden Eigenschaften:

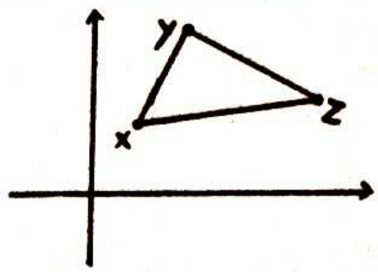
(a) $d_2(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$ und aus $d_2(x,y)=0$ folgt $x=y$.

(b) $d_2(x,y) = d_2(y,x) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$.

(c) $d_2(x,z) \leq d_2(x,y) + d_2(y,z) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$.

Den Beweis des Satzes überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe, wobei man in (c) die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung verwendet.

Wir wollen uns jedoch hier einmal veranschaulichen, welche Aussagen dieser Satz 1 beinhaltet. Die Eigenschaft (a) sagt gerade aus, daß der Abstand zweier Punkte stets nichtnegativ ist und nur dann 0 sein kann, wenn die Punkte x und y zusammenfallen. Die Aussage (b) beinhaltet die Symmetrie des Abstandes, d. h. der Abstand von x zu y ist der gleiche wie der von y zu x. Die Eigenschaft (c) werden wir uns einmal im $\mathbb{R}^2$ klarmachen.



Sie sagt aus, daß die Länge einer Dreiecksseite stets kleiner ist als die Summe der Länge der zwei anderen Seiten. Dies gilt auch im Fall eines ausgearteten Dreiecks (wenn die

Punkte auf einer Gerade liegen). Diese Ungleichung wird deshalb auch als <u>Dreiecksungleichung</u> bezeichnet.

1. Metrische Räume

Es ist ein typisches (induktives) Vorgehen der Mathematik, sich aus gegebenen Dingen die wesentlichen Eigenschaften herauszusuchen und diese als Axiome eines neuen Begriffes aufzufassen. Wir kommen also zu folgender Definition.

D e f i n i t i o n 1: Gegeben sei eine Menge M. Eine Funktion $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt <u>Abstand</u> (oder <u>Metrik</u>), wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(a) $d(x,y) \geqq 0 \quad \forall x,y \in M$ und aus $d(x,y)=0$ folgt $x=y$.

(b) $d(x,y) = d(x,y) \quad \forall x,y \in M$

(c) $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in M$.

Die Menge M mit der Metrik d bezeichnen wir als <u>metrischen Raum</u> und schreiben $[M,d]$.

Aus Satz 1 folgt, daß die in (1) definierte Funktion d_2 eine Metrik ist, und $[\mathbb{R}^n, d_2]$ zu einem metrischen Raum macht. Wir wollen aber noch einige weitere Beispiele metrischer Räume angeben.

<u>Beispiele:</u> 1. Wir betrachten wieder $M=\mathbb{R}^n$ und definieren

$$d_1(x,y) := \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i| \quad . \tag{2}$$

Die Eigenschaften (a) und (b) sind offensichtlich. Aus der Ungleichung $|a+b| \leqq |a| + |b|$ für reelle Zahlen folgt die Eigenschaft (c) ebenfalls leicht.

2. Mit $C[0,1]$ bezeichnen wir die Menge aller stetiger reeller Funktionen, die auf dem Intervall $[0,1]$ definiert sind. Wir definieren für $f,g \in C[0,1]$

$$d(f,g) := \max_{t \in [0,1]} |f(t)-g(t)| \quad . \tag{3}$$

Um in (a) zu zeigen, daß aus $d(f,g)=0$ stets $f=g$ folgt, müssen wir uns folgendes überlegen. Aus $d(f,g)=0$ ergibt sich $|f(t)-g(t)|=0$ für alle $t \in [0,1]$. D. h. $f(t) = g(t)$ für alle $t \in [0,1]$ und damit $f=g$. Die Dreiecksungleichung folgt wieder einfach aus der oben erwähnten Ungleichung für Beträge.

3. Als letztes Beispiel wollen wir noch eine etwas "eigenartige" Metrik betrachten. Sei M eine beliebige Menge. Für zwei Elemente $x,y \in M$ definieren wir

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x=y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases} \quad . \tag{4}$$

Die Metrik d wird als diskrete Metrik bezeichnet. Die Eigenschaft (a) ist durch die Definition erfüllt und (b) ist klar. Um (c) zu zeigen, müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Wenn $x=z$ ist, steht links 0 und die Dreiecksungleichung ist trivialerweise erfüllt. Ist $x \neq z$, so muß entweder $x \neq y$ oder $y \neq z$ sein, so daß (c) ebenfalls erfüllt ist.

2. Offene und abgeschlossene Mengen eines metrischen Raumes

Wir wollen zuerst den recht anschaulichen Begriff einer Kugel in $[M,d]$ definieren.

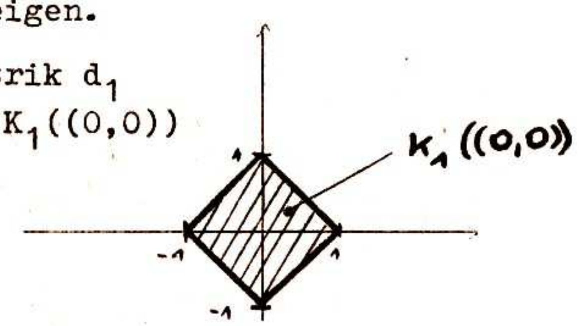
D e f i n i t i o n 2: Sei $[M,d]$ ein metrischer Raum, $x \in M$ und $r > 0$. Dann definieren wir durch

$$K_r(x) := \{ y \in M : d(x,y) < r \} \tag{5}$$

die Kugel mit dem Radius r um den Punkt x.

Daß wir mit der Anschauung jedoch leicht in Konflikt kommen, soll das folgende Beispiel zeigen.

Beispiel: Im $\mathbb{R}^2$ mit der Metrik d_1 aus (2) wollen wir die Kugel $K_1((0,0))$ zeichnen.



Eine wichtige Rolle spielt der folgende Begriff einer offenen Menge.

D e f i n i t i o n 3: Sei $[M,d]$ ein metrischer Raum und $G \subseteq M$. Die Menge G heißt offen, wenn zu jedem $z \in G$ ein Radius $\varepsilon > 0$ existiert, so daß $K_\varepsilon(z) \subseteq G$ gilt. Eine Menge $F \subseteq M$ heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement, d. h. $CF := \{ x \in M : x \notin F \}$ offen ist.

Wir wollen zuerst folgende Aussage formulieren.

S a t z 2: Für jedes $x \in M$ und jedes $r > 0$ ist die in (5) definierte Kugel $K_r(x)$ eine offene Menge.

Beweis: Sei $z \in K_r(x)$. D. h. $d(x,z) < r$ und wir setzen $\varepsilon = (r-d(x,z))$. Wir behaupten nun, daß $K_\varepsilon(z) \subseteq K_r(x)$ gilt. Sei dazu $y \in K_\varepsilon(z)$ und damit $d(z,y) < \varepsilon$. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < d(x,z) + r-d(x,z) = r$. Das bedeutet aber $y \in K_r(x)$.

Wir formulieren nun den folgenden Satz und überlassen den Beweis dem Leser als Übung.

S a t z 3: Für jedes $x \in M$ und jedes $r > 0$ ist die Menge

$$\overline{K_r(x)} := \{ y \in M : d(x,y) \leq r \} \qquad (6)$$

eine abgeschlossene Menge.

<u>Beispiele:</u> 1. Wir betrachten in $C[0,1]$ die in (3) eingeführte Metrik und wollen zeigen, daß $G = \{ f \in C[0,1] : f(t) > 0, \forall t \in [0,1] \}$ eine offene Menge ist. Sei dazu f eine beliebige Funktion aus G. Wir wissen, daß eine stetige Funktion über einem abgeschlossenen und beschränktem Intervall ihr Maximum und Minimum annimmt. Deshalb folgt $\min\limits_{t \in [0,1]} f(t) = f(t_0) > 0$.
Wir setzen $\varepsilon = f(t_0)$. Sei nun $g \in K_\varepsilon(f)$. Daraus folgt $\max\limits_{t \in [0,1]} |f(t)-g(t)| < f(t_0)$. Deshalb gilt $|f(t) - g(t)| < f(t_0) \leq f(t)$ für alle $t \in [0,1]$ und somit $g(t) > 0$ für alle $t \in [0,1]$, also $g \in G$.

2. Sei $[M,d]$ eine Menge M mit der diskreten Metrik. Dann gilt, daß jede Teilmenge zugleich offen und abgeschlossen ist. Dazu überlegt man sich leicht, daß für $r < 1$ die Beziehung $K_r(x) = \{x\}$ gilt.

3. Kompakte Mengen in metrischen Räumen

Ausgehend vom Begriff eines beschränkten Intervalls in $\mathbb{R}$ geben wir die folgende

D e f i n i t i o n 4: Sei $[M,d]$ ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt <u>beschränkt</u>, wenn es ein $c > 0$ gibt mit $d(x,y) \leq c$ für alle x und y aus A. Die kleinste aller möglichen Konstanten c wollen wir den <u>Durch-</u>

<u>messer der Menge</u> A nennen und ihn mit $\delta(A)$ bezeichnen.

S a t z 4: Für jedes $x \in M$ und $r > 0$ sind $K_r(x)$ und $\overline{K_r(x)}$ beschränkte Mengen mit $\delta(K_r(x)) \leqq \delta(\overline{K_r(x)}) \leqq 2r$.

Beweis: Für $y, z \in \overline{K_r(x)}$ folgt $d(y,z) \leqq d(y,x) + d(x,z) \leqq 2r$.
D. h. die Menge ist beschränkt und der Durchmesser ist nicht größer als 2r.

S a t z 5: Sind $A_1, \ldots, A_k$ beschränkte Teilmengen von M, so ist auch $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ beschränkt.

Beweis: O.B.d.A. sei $A_i \neq \emptyset$ für $i=1,\ldots,k$. Ist $a_i \in A_i$, so setzen wir $r := \max\limits_{i,j=1,\ldots,k} d(a_i, a_j)$. Weiterhin sei $\delta = \max\limits_{i=1,\ldots,k} \delta(A_i)$.
Man kann sich leicht davon überzeugen, daß dann $\delta(A_1 \cup \ldots \cup A_k) \leqq r + 2\delta$ gilt.

In $[\mathbb{R}^n, d_2]$ ist es für jedes $\varepsilon > 0$ stets möglich, eine beschränkte Menge durch endlich viele Kugeln mit einem Durchmesser kleiner ε zu überdecken. In beliebigen metrischen Räumen ist dies jedoch nicht möglich. Man veranschauliche sich das z. B. im diskreten metrischen Raum für $\varepsilon < 1$. Diese Überlegungen führen uns zur folgenden

D e f i n i t i o n 5: Sei $[M, d]$ ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt <u>präkompakt</u>, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ Elemente $x_1, \ldots, x_n \in M$ mit $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_\varepsilon(x_i)$ existieren.

Eine leichte Folgerung aus den Sätzen 4 und 5 ist, daß jede präkompakte Menge auch beschränkt ist. Die Umkehrung gilt nicht immer. Eine noch stärkere Eigenschaft ist die folgende.

D e f i n i t i o n 6: Sei $[M, d]$ ein metrischer Raum und A eine Teilmenge von M. Ein System $\mathfrak{G} = \{G_i\}_{i \in I}$ heißt <u>offene Überdeckung</u> von A, wenn für jedes i aus der Indexmenge I die Menge G_i offen ist und $A \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} G_i$ gilt. Die Menge A wollen wir <u>kompakt</u> nennen, wenn zu jeder offenen Überdeckung $\mathfrak{G}$ endlich viele Mengen $G_{i_1}, \ldots, G_{i_n}$ mit $A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} G_{i_j}$ existieren.

Wir wollen in $[\mathbb{R},d_1]$ ein Beispiel einer nichtkompakten Menge angeben.

<u>Beispiel:</u> In $[\mathbb{R},d_1]$ sei $A = (0,1)$ eine Teilmenge gegeben. Wir betrachten das System $\mathfrak{G} = \{G_i\}_{i=3}^{\infty}$ mit $G_i = (\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n})$.

Wie man leicht sieht, gilt $A = \bigcup_{i=3}^{\infty} G_i$. Nehmen wir an, daß A kompakt wäre, so gäbe es $i_1,\dots,i_n$ mit $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} G_{i_j}$.

Sei $i_k = \max\{i_1,\dots,i_n\}$, so gilt offensichtlich

$\bigcup_{j=1}^{n} G_{i_j} = G_{i_k} = (\frac{1}{i_k}, 1-\frac{1}{i_k}) \not\supseteq A$.

Wir können hier nicht auf alle Eigenschaften kompakter Mengen eingehen, wollen aber doch erwähnen, daß es ein zentraler Begriff der Analysis ist.

Als Übungsaufgabe überlege man sich den folgenden Satz.

S a t z 6: Jede kompakte Teilmenge A eines metrischen Raumes $[M,d]$ ist auch präkompakt.

<u>Hinweis:</u> Trivialerweise gilt für jedes $\varepsilon > 0$ die Beziehung

$$A \subseteq \bigcup_{x \in A} K_\varepsilon(x).$$

Die folgende Aussage zeigt, daß im obigen Beispiel das Intervall $(0,1)$ keine kompakte Menge sein konnte.

S a t z 7: In einem metrischen Raum $[M,d]$ ist eine kompakte Teilmenge A stets abgeschlossen.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß das Komplement von A offen ist. Sei $x \in CA$, d. h. $x \notin A$. Für jedes $y \in A$ bilden wir die Kugel $K_{1/2d(x,y)}(y)$ und erhalten eine offene Überdeckung von A durch das System $\mathfrak{G} = \{K_{1/2d(x,y)}(y)\}_{y \in A}$. Da A kompakt ist, finden wir Elemente $y_1,\dots,y_n \in A$ mit $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} K_{1/2d(x,y_j)}(y_j)$.

Bilden wir $\varepsilon := \frac{1}{2}\min\{d(x,y_1),\dots,d(x,y_n)\}$, so folgt $K_\varepsilon(x) \subseteq CA$. Denn gäbe es ein $z \in K_\varepsilon(x)$ und $z \in A$, so würde ein $k \in \{1,\dots,n\}$ mit $z \in K_{1/2d(x,y_k)}(y_k)$ existieren und die falsche Ungleichung $d(x,y_k) \leq d(x,z)+d(z,y_k) < \varepsilon + \frac{1}{2}d(x,y_k) \leq d(x,y_k)$ folgen. Damit ist gezeigt, daß CA offen, also A abgeschlossen ist.

4. Folgen in metrischen Räumen

Sei $[M,d]$ ein metrischer Raum. Ist für jede natürliche Zahl n ein Element $x_n \in M$ gegeben, so sprechen wir von einer Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in $[M,d]$. Es stellt sich natürlich sofort die Frage nach der Konvergenz von Folgen.

D e f i n i t i o n 7: Sind $[M,d]$ ein metrischer Raum, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in M und ein Element $x \in M$ gegeben. Die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ hat den Grenzwert x (wie üblich bezeichnet mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$), wenn folgendes gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n$ stets $d(x_n,x) < \varepsilon$ gilt.

Im Fall $[\mathbb{R}, d_1]$ erhalten wir die schon bekannte Definition der Grenzwerte von Zahlenfolgen. Von dort ist uns auch das Cauchysche Konvergenzprinzip bekannt, das Anlaß zur folgenden Definition gibt.

D e f i n i t i o n 8: Sei $[M,d]$ ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt Cauchyfolge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $n,m \geq n_\varepsilon$ stets $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ gilt.

Das Cauchysche Konvergenzprinzip sagt gerade aus, daß in $[\mathbb{R}, d_1]$ jede Cauchyfolge einen Grenzwert besitzt. In allgemeinen metrischen Räumen ist das nicht mehr richtig. Das führt uns zur Definition einer zusätzlichen Eigenschaft metrischer Räume.

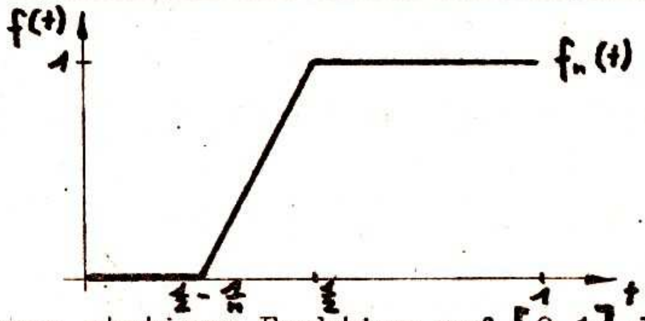
D e f i n i t i o n 9: Ein metrischer Raum $[M,d]$ heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in M einen Grenzwert in M besitzt.

Wir wollen ein Beispiel eines nicht vollständigen metrischen Raumes angeben.

Beispiele: 1. Wir betrachten $M = C[0,1]$. Jedoch mit einer anderen Metrik als in (3). Für zwei stetige Funktionen definieren wir

$$d_1(f,g) := \int_0^1 |f(t)-g(t)|\,dt. \tag{7}$$

Man überlege sich zuerst, daß d_1 eine Metrik auf M ist. Am schwierigsten ist hierbei die Eigenschaft (a) zu zeigen. Um zu zeigen, daß $[M, d_1]$ nicht vollständig ist, betrachten wir die folgenden Funktionen.



Da das bestimmte Integral einer stetigen Funktion auf $[0,1]$ der Fläche unter der Kurve zwischen den Werten t=0 und t=1 entspricht, erhalten wir durch geometrische Überlegungen für $n \leq m$

$$d_1(f_n, f_m) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2m} < \frac{1}{2n} .$$

Daraus sieht man sofort, daß $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge ist. Wir behaupten nun noch, daß die Folge in $C[0,1]$ keinen Grenzwert besitzt. Dazu zeigen wir, daß die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } \quad 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Grenzwert der Folge ist. Offensichtlich ist jedoch f(t) keine stetige Funktion, also $f \notin C[0,1]$. Wir haben

$$d_1(f_n, f) = \frac{1}{2n} .$$

Damit ist gezeigt, daß $[C[0,1], d_1]$ kein vollständiger metrischer Raum ist.

2. Betrachten wir wieder $M = C[0,1]$. Jetzt jedoch mit der in (3) eingeführten Metrik, so zeigt sich, daß $[C[0,1], d]$ ein vollständiger metrischer Raum ist. Sei dazu $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in $[M,d]$. So existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_ε mit

$$|f_n(S) - f_m(S)| \leq \max_{t \in [0,1]} |f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon \qquad (8)$$

für $n,m \geq n_\varepsilon$ und alle $S \in [0,1]$. Damit ist für jedes feste $S \in [0,1]$ die reelle Zahlenfolge $(f_n(S))_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge. Also existiert der Grenzwert $f(S) := \lim_{n \to \infty} f_n(S)$ für jedes $S \in [0,1]$. Nun müssen wir noch zeigen, daß f_n in der Metrik d gegen f konvergiert und $f \in C[0,1]$ gilt. Da die Ungleichung (8) für alle $m \geq n_\varepsilon$ gilt, folgt auch $\max_{S \in [0,1]} |f_n(S) - f(S)| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$. D. h. aber $d(f_n, f) < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$. Unter Verwendung der Tatsache, daß der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen wieder stetig ist, folgt auch $f \in C[0,1]$.

5. Abbildungen zwischen metrischen Räumen

Gegeben sind zwei metrische Räume $[M,d]$ und $[\hat{M},\hat{d}]$. Eine Abbildung T, die jedem Element $x \in M$ ein eindeutig bestimmtes Element $Tx \in \hat{M}$ zuordnet, wollen wir Abbildung zwischen $[M,d]$ und $[\hat{M},\hat{d}]$ nennen.

Als uns schon bekanntes Beispiel können wir $M = \hat{M} = \mathbb{R}$ und $d = \hat{d} = d_1$ betrachten. Dort kennen wir auch den Begriff der stetigen Funktion, den wir wie folgt auf metrische Räume ausdehnen wollen.

D e f i n i t i o n 10: Eine Abbildung T von $[M,d]$ in $[\hat{M},\hat{d}]$ heißt stetig in $x \in M$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß aus $d(x,y) < \delta$ stets $\hat{d}(Tx,Ty) < \varepsilon$ folgt. Die Abbildung T wollen wir stetig nennen, wenn sie in jedem $x \in M$ stetig ist.

Fortsetzung folgt!

Dr. R. Einde, FSU
Bereich Analysis

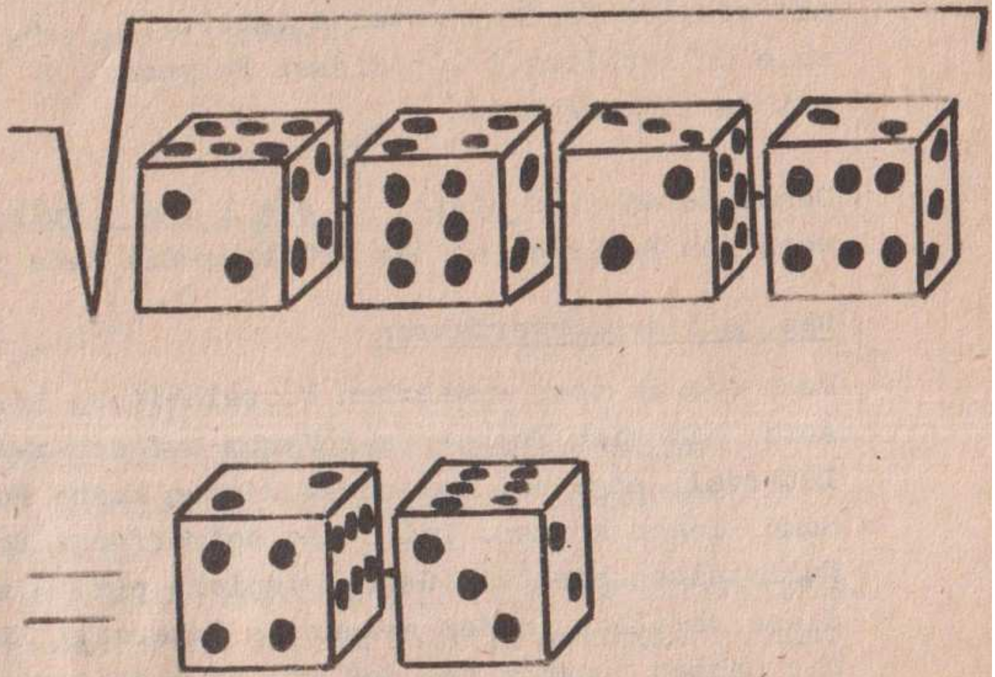
PS : Wir danken Jens K a n d z i o r a für die Idee des Titelbildes !!!

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein

Anschrift: WURZEL, 6900 Jena, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 12. 5. 1986



7/8
86

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
20. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,40 M

Nullstellen von Polynomen (2. Fortsetzung)

Die folgenden Ausführungen zur Berechnung reeller Polynom-Nullstellen schließen an den WURZEL-Beitrag "Nullstellen von Polynomen 1. Fortsetzung" im Heft 12/85 an. Sie setzen dessen Kenntnis jedoch nicht voraus.

Gegeben sei ein Polynom n-ten Grades der Gestalt

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \qquad a_0 \neq 0$$

mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$. Gesucht sind reelle Nullstellen $x = z$ dieses Polynoms, d. h. reelle Zahlen z mit der Eigenschaft

$$p(z) = 0.$$

Desweiteren sind stets r e e l l e Nullstellen gemeint, wenn von Nullstellen des Polynoms die Rede ist.

Das Halbierungsverfahren

Nach dem im oben erwähnten Wurzelbeitrag hergeleiteten Lehrsatz läßt sich für jedes Polynom auf der x-Achse ein endliches Intervall angeben, außerhalb dessen keine Nullstellen des Polynoms liegen können. Falls das betreffende Polynom überhaupt Nullstellen besitzt (Gegenbeispiel: $p(x) = x^2+1$), so müssen diese sämtlich in dem genannten Intervall liegen.
Wir nehmen nunmehr an, daß wir beim "Abtasten" dieses Intervalls, d. h. bei der Berechnung der Funktionswerte $p(x)$ für hinreichend viele x-Werte am Rande und im Inneren des Intervalls einen Wechsel des Vorzeichens von $p(x)$ festgestellt haben. Dies bedeutet, daß uns eine Stelle a und eine Stelle b bekannt sind, für die gilt

$$p(a) < 0 \qquad p(b) > 0.$$

Dann muß (mindestens) eine Nullstelle z von $p(x)$ zwischen a und b liegen. Siehe Fig. 1, wo $a < b$ ist; der Fall $a > b$ ist aber ebenso zugelassen.
Für das Folgende nehmen wir an, daß zwischen a und b g e n a u e i n e Nullstelle z liegt. Dies ist insofern keine wesentliche Einschränkung, als im Falle, daß mehrere Nullstellen zwischen a und b liegen, das im folgenden beschriebene Halbierungs-

verfahren v o n s e l b s t auf ein Intervall mit genau einer Nullstelle führt.

Wir halbieren nunmehr das durch a und b begrenzte Intervall, indem wir dessen Mittelpunkt

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

berechnen. Betrachten wir x_1 als " N ä h e r u n g s w e r t " von z, so ist sein "Fehler" $|x_1 - z|$ offensichtlich kleiner als die halbe Intervall-Länge $|b-a|$, d. h. es gilt

$$|x_1 - z| < S_1 \qquad S_1 = |b-a|/2.$$

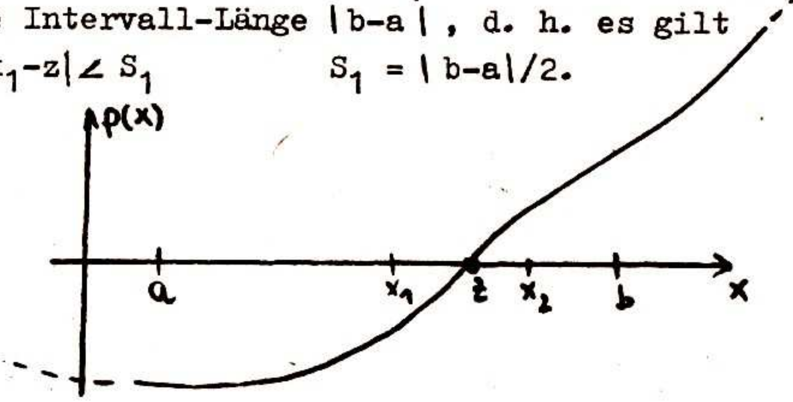


Fig. 1

Um einen Näherungswert x_2 mit einer halb so großen Fehlerschranke $S_2 = |b-a|/4$ zu erhalten, muß folgende Fallunterscheidung getroffen werden:
$p(x_1) > 0$ (Fall I); $p(x_1) < 0$ (Fall II); $p(x_1) = 0$ (Fall III).
Im Fall I liegt z zwischen a und x_1, im Fall II zwischen x_1 und b, im Fall III ist $x_1 = z$ und man hat die Nullstelle gefunden.
Die Wahl von x_2 erfolgt daher nach der Vorschrift

$$x_2 = (a+x_1)/2 \quad \text{(Fall I)} \quad \text{oder} \quad x_2 = (x_1+b)/2 \quad \text{(Fall II)}.$$

Durch Halbierung des von x_1 und x_2 begrenzten Intervalls ergibt sich x_3 mit der Fehlerschranke $S_3 = S_2/2$ usw.
Man hat auf diese Weise ein "Halbierungsverfahren" in Gang gesetzt, bei dem die Anzahl N der erforderlichen Halbierungen im voraus angegeben werden kann, um eine vorgeschriebene Genauigkeit ε zu erreichen. Um die Fehlerschranke S_N unter ε zu drücken, muß wegen $S_N = |b-a|/2^N$ die Anzahl N so groß gewählt werden, daß gilt

$$2^N > b-a/\varepsilon .$$

Soll die sukzessive Berechnung der Näherungswerte $x_1, x_2, \ldots$

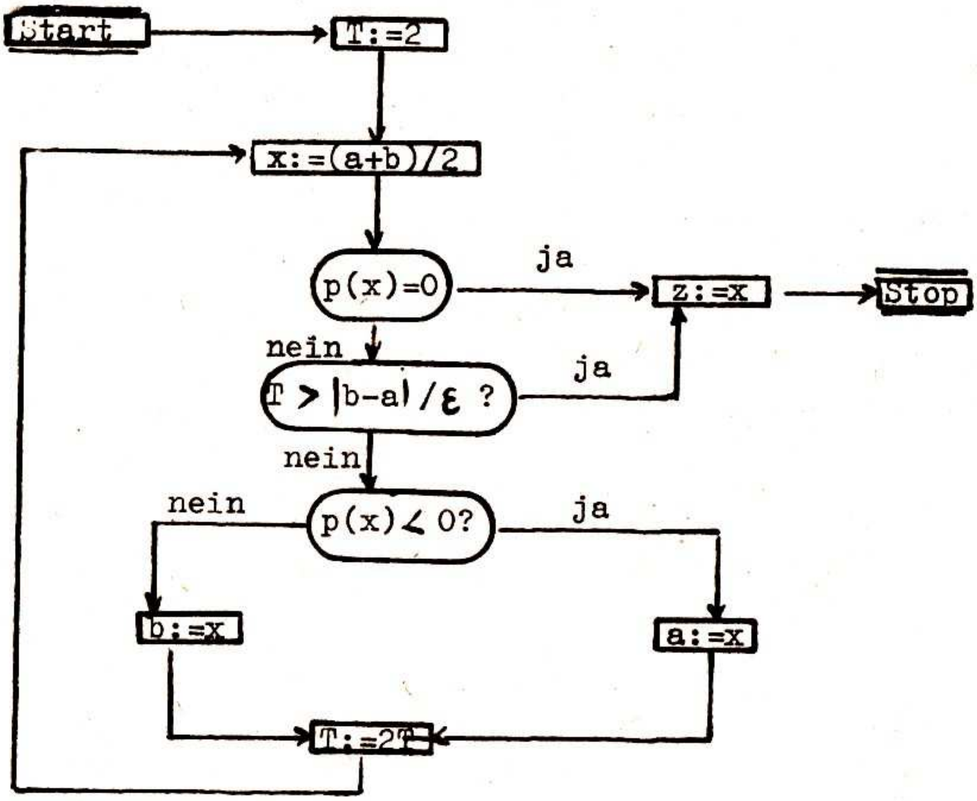
automatisch auf einem Computer erfolgen, so müssen die einzelnen Schritte zunächst in Form eines "Ablaufplans" ganz konkret festgelegt werden. Anhand eines solchen Planes wird dann anschließend ein Programm in einer für den Computer verständlichen Sprache angefertigt.
Für den menschlichen Rechner (z. B. unter Verwendung eines Taschenrechners) ist der Ablaufplan bereits ausreichend.

In den folgenden Ablaufplan wurde eine Testgröße T eingeführt, mit deren Hilfe die erreichte Genauigkeit festgestellt wird.

Ablaufplan des Halbierungsverfahrens
(Voraussetzung: $p(a) < 0$, $p(b) > 0$)

1. Setze $T = 2$
2. Berechne $x = (a+b)/2$
3. Falls gilt $p(x) = 0$, setze $z = x$ und beende das Verfahren. Andernfalls gehe weiter zu 4.
4. Falls gilt $T > |b-a|/\varepsilon$, akzeptiere x als Näherungswert für z. Andernfalls gehe weiter zu 5.
5. Falls gilt $p(x) < 0$, so erteile der Größe a den neuen Wert x, während b seinen alten Wert beibehält. Andernfalls erteile der Größe b den neuen Wert x, während a seinen alten Wert beibehält.
6. Verdopple den Wert der Testgröße T
7. Gehe zurück zu Schritt 2.

Um bei längeren Ablaufplänen die Übersichtlichkeit zu erhöhen, stellt man den Plan in Form eines "Flußdiagramms" dar; für unser Beispiel etwa in der folgenden Weise:



Hierbei haben wir das "Ergibt"-Zeichen := eingeführt. Es kann in Worten wie folgt erklärt werden: Der **zukünftige** Wert der **links** vom Zeichen stehenden Größe ist gleich dem **augenblicklichen** Wert der **rechts** vom Zeichen stehenden Größe.

Das Halbierungsverfahren ist nicht auf die Berechnung reeller Nullstellen von **Polynomen** beschränkt. Anstelle von p(x) kann eine beliebige **stetige Funktion** f(x) treten. Für Polynome besteht allerdings der Vorteil der leichten Berechenbarkeit seiner Funktionswerte und der Ermittlung eines einschließenden Intervalls $[a,b]$ mit Hilfe der Koeffizienten des Polynoms.

Da es sich beim obigen Verfahren durch das Zurückgehen von 7. zu 2. um die ständige Wiederholung ein und derselben Entscheidungs- und Rechenschritte handelt, spricht man von einem "**iterativen Verfahren**" oder auch "**Iterationsverfahren**" (iterum, lat. wiederum).

Eine wichtige praktische Anwendung von Verfahren zur Nullstellenbestimmung für Polynome ist die Berechnung der n-ten Wurzel aus einer positiven Zahl c als Nullstelle des Polynoms

$$p(x) = x^n - c \qquad c > 0.$$

Dieses Polynom besitzt genau e i n e positive Nullstelle, die bekanntlich zwischen 1 und c liegt.
Wir stellen uns als Zahlenbeispiel die Aufgabe, mit Hilfe des oben beschriebenen Halbierungsverfahrens die Quadratwurzel aus der Zahl Zwei zu berechnen, und zwar bis auf einen Fehler, der kleiner als $\varepsilon = 0{,}005$ sein soll.
Wählt man a=1, b=2, so ist die Testgröße T mit der Zahl $|b-a|/\varepsilon = 200$ zu vergleichen. Wegen $2^7 = 128$, $2^8 = 256$ sind also 8 Iterationsschritte auszuführen:

T	a	b	x=(a+b)/2	x^2-2
	1.0	2.0	1.5	positiv
$2^1 = 2$	1.0	1.5	1.25	negativ
$2^2 = 4$	1.25	1.5	1.375	negativ
$2^3 = 8$	1.375	1.5	1.4375	positiv
$2^4 = 16$	1.375	1.4375	1.40625	negativ
$2^5 = 32$	1.40625	1.4375	1.421875	positiv
$2^6 = 64$	1.40625	1.421875	1.4140625	negativ
$2^7 = 128$	1.4140625	1.421875	1.41796875	positiv
$2^8 = 256$	1.4140625	1.41796875		

2 läßt sich also einschließen in der Form

$$1.414 < \sqrt{2} < 1.418 \ ,$$

wofür man auch oft kürzer schreibt

$$\sqrt{2} = 1.416 \pm 0.002.$$

Meistens werden jedoch Näherungswerte durch endliche Dezimalbrüche dargestellt, wobei folgende Vereinbarung zugrundegelegt wird: Der Näherungswert ist richtig bis auf eine h a l b e E i n h e i t der letzten angegebenen Dezimale hinter dem Dezimalpunkt.
Die Schreibweise

$$\sqrt{2} = 1.41$$

ist also eine Kurzform für

$$\sqrt{2} = 1.41 \pm 0.005$$

Um die zuletzt angegebene Einschließung für $\sqrt{2}$ zu erhalten, müßte noch ein Halbierungsschritt durchgeführt werden.

Wie schon erwähnt, ist das Halbierungsverfahren sehr allgemein einsetzbar zur beliebig genauen Bestimmung der Nullstellen stetiger Funktionen. Es besitzt außerdem den Vorteil, daß man eine Einschließung für die gesuchte Zahl erhält.
Als Mangel kann lediglich die hohe Schrittzahl zur Erreichung einer vorgegebenen (noch nicht einmal allzu hohen) Genauigkeit ins Feld geführt werden. In einer weiteren Fortsetzung sollen "schnellere" Verfahren zur Nullstellenbestimmung bei Polynomen vorgestellt werden.

Prof. Wallisch, FSU

Eigenschaften metrischer Räume (1. Fortsetzung)

Eine Verschärfung des Stetigkeitsbegriffes gibt die folgende

Definition 11: Eine Abbildung T von $[M,d]$ in $[\hat{M},\hat{d}]$ erfüllt eine <u>Lipschitzbedingung</u>, wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt mit $d(Tx,Ty) \leq c\,d(x,y)$ für alle $x,y \in M$.
Kann man $c < 1$ wählen, so nennen wir T <u>kontrahierend</u>.

Man kann sich leicht überlegen, daß jede Abbildung, die eine Lipschitzbedingung erfüllt, auch stetig ist.
Betrachten wir nun eine Abbildung T, die $[M,d]$ in sich abbildet. Dann können wir die Frage stellen, ob Elemente $x \in M$ existieren, für die $Tx = x$ gilt. Wir wollen diese Elemente <u>Fixpunkte</u> der Abbildung T nennen.

Beispiele: 1. Nehmen wir im Fall $[M,d] = [\mathbb{R}^2,d_2]$ die Abbildung $T(\xi_1,\xi_2) = (\xi_2,\xi_1)$. Es ist leicht zu sehen, daß ein Punkt genau dann Fixpunkt ist, wenn $\xi_1 = \xi_2$ gilt.

2. Sei $M = C^\infty[0,1]$ die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen über $[0,1]$. Wir definieren für $f \in C^\infty[0,1]$ die Abbildung $Tf = \frac{df}{dt} = f'$. Wie wir wissen, gilt für $g(t) = ke^t$ $(k \in \mathbb{R})$ die Beziehung $g'(t) = g(t)$. D. h. die Funktionen ke^t sind Fixpunkte der Abbildung T. Man kann in der Theorie der Differentialgleichungen zeigen, daß damit alle Fixpunkte von T erfaßt sind.

Wie ist es nun möglich, einer Abbildung T von M in sich "anzusehen", ob sie Fixpunkte besitzt und diese zu bestimmen. Eine ganz wichtige Rolle spielt hierbei das folgende Theorem, welches auf den berühmten polnischen Mathematiker Stefan BANACH (1892-1945) zurückgeht.

T h e o r e m : (Banachscher Fixpunktsatz) Sei $[M,d]$ ein vollständiger metrischer Raum und T eine kontrahierende Abbildung von $[M,d]$ in sich. Dann besitzt T genau einen Fixpunkt.

Beweis: Der Beweis ist von selbständigem Interesse, da hierbei ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung des Fixpunktes angegeben wird. Wir werden darauf noch zurückkommen. Zuerst wollen wir zeigen, daß es nur einen Fixpunkt geben kann. Da T kontrahierend ist, gibt es ein $0 < c < 1$ mit $d(Tx,Ty) \leq cd(x,y)$ für alle $x,y \in M$. Würden zwei Fixpunkte x_1 und x_2 mit $Tx_1 = x_1$ und $Tx_2 = x_2$ und $x_1 \neq x_2$ existieren, so würde
$d(x_1,x_2) = d(Tx_1,Tx_2) \leq cd(x_1,x_2) < d(x_1,x_2)$ folgen, was nicht möglich ist.

Nun wollen wir die Existenz eines Fixpunktes zeigen. Dazu betrachten wir ein beliebiges Element $x_0 \in M$ und definieren induktiv die Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ durch $x_n = Tx_{n-1}$. Wir behaupten nun, daß diese Folge gegen einen (den) Fixpunkt konvergiert. Um die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ zu zeigen, genügt es zu überprüfen, ob $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchyfolge bildet. Es gilt

$d(x_{n+1},x_n) = d(Tx_n,Tx_{n-1}) \leq cd(x_n,x_{n-1}) \leq \ldots \leq c^n d(x_1,x_o)$.
Für $n \leq m$ gilt dann

$$\begin{aligned} d(x_m,x_n) &\leq d(x_m,x_{m-1})+\ldots+d(x_{n+1},x_n) \\ &\leq (c^m+c^{m-1}+\ldots+c^n)d(x_1,x_o) \qquad (9)\\ &\leq c^n(c^{m-n}+\ldots+c+1)d(x_1,x_o) \\ &\leq c^n \frac{1}{1-c} d(x_1,x_o). \end{aligned}$$

Da die Zahl $c < 1$ ist, wird die rechte Seite kleiner als jedes $\varepsilon>0$, sobald $n \geq n_\varepsilon$ und damit $m,n \geq n_\varepsilon$ ist. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ist also eine Cauchyfolge und da $[M,d]$ vollständig ist, existiert

da $z_1^2z_2^2 \geq a^2$ und somit $1 - \frac{a}{z_1z_2} \leq 1$ ist. Die Konstante c können wir also als $\frac{1}{2}$ wählen. Für beliebigen Startpunkt $x_o \in M$ konvergiert also $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, gebildet durch $x_n = Tx_{n-1}$ gegen die Zahl $\sqrt{a}$.
Nehmen wir z. B. $a=2$ und als Startwert $x_o=2$, so folgt:
$x_1 = \frac{1}{2}(2+\frac{2}{2}) = \frac{3}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}+\frac{4}{4}) = \frac{17}{12}$; $x_3 = \frac{1}{2}(\frac{17}{12}+\frac{24}{17}) = \frac{577}{408}$ usw.
Weiterhin wissen wir aus der Fehlerabschätzung

$$|x_n - \sqrt{2}| = \frac{c^n}{1-c}|x_1-x_o| = \frac{(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}.$$

Offensichtlich läßt sich dieses Verfahren gut programmieren.

2. Wir betrachten $M = C^{\infty}[0,\frac{1}{2}]$. Das war die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf $[0,\frac{1}{2}]$. Als Metrik nehmen wir wieder $d(f,g) = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)-g(t)|$. Wie wir in einem früheren Beispiel gezeigt haben, ist das ein vollständiger metrischer Raum. Wir suchen eine Funktion $f \in C^{\infty}[0,\frac{1}{2}]$, die die <u>Differentialgleichung</u> $f'(t) = f(t)$ und die <u>Anfangsbedingung</u> $f(0) = 1$ erfüllt. Unter Verwendung des bestimmten Riemannschen Integrals gilt dann

$$\int_0^t f'(S)dS = \int_0^t f(S)dS.$$

Mit $f(0) = 1$ folgt daraus

$$f(t) = \int_0^t f(S)dS + 1.$$

D. h. f ist ein Fixpunkt der Abbildung $Tg(t) = \int_0^t g(S)dS + 1$.
Offensichtlich bildet T den metrischen Raum M,d in sich ab.

$x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Um zu zeigen, daß x der gesuchte Fixpunkt ist, müssen wir $d(Tx,x)$ abschätzen. Es gilt

$$\begin{aligned} d(Tx,x) &\le d(Tx,Tx_n) + d(Tx_n,x_n) + d(x_n,x) \\ &\le cd(x,x_n) + d(x_{n+1},x_n) + d(x_n,x). \end{aligned} \qquad (10)$$

Da die Ungleichung (9) für alle $m \ge n$ gilt, folgt auch $d(x,x_n) \le \frac{c^n}{1-c} d(x_1,x_0)$ und damit in (10)

$$d(Tx,x) \le (c^{n+1}+c^n+c^n) \frac{1}{1-c} d(x_1,x_0).$$

Das wird wieder beliebig klein für genügend große n.
Das bedeutet $d(Tx,x) = 0$ und damit $Tx = x$. ∎

Aus dem Beweis des Theorems sieht man, daß man sich für beliebigen Startwert $x_0 \in M$ durch iterative Bildung von $x_n = Tx_{n-1}$ dem Fixpunkt beliebig gut annähern kann. Wir haben sogar eine Abschätzung für den Abstand von x_n zum Fixpunkt. Wie wir bereits im Beweis zeigten, gilt nämlich $d(x,x_n) = \frac{c^n}{1-c} d(x_1,x_0)$. Dieses Verfahren wird auch als Methode der <u>sukzessiven Approximation</u> bezeichnet.

<u>Beispiele:</u> 1. Gegeben ist eine positive Zahl a. Mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes wollen wir $\sqrt{a}$ approximieren. Zuerst müssen wir einen vollständigen metrischen Raum $[M,d]$ und eine Abbildung T angeben. Wir setzen $M = \{z \in \mathbb{R} : z \ge 0,\ z^2 \ge a\}$ und $d=d_1$. Wie man sich leicht überlegt, ist $[M,d]$ volständig. Die Abbildung T definieren wir durch $y = Tz := \frac{1}{2}(z+\frac{a}{z})$. Denn sei x ein Fixpunkt von T, so folgt $2x^2 = x^2+a$ oder $x^2=a$ und $x = \sqrt{a}$. Wir müssen noch zeigen, daß T wieder in M abbildet. Dazu muß $Tz \ge 0$ und $(Tz)^2 \ge a$ gelten. $Tz \ge 0$ ist trivial. Und

$$(Tz)^2 = \frac{1}{4}(z^2+2a+\frac{a^2}{z^2}) \ge \frac{1}{4}(2a+2a) = a.$$

Hierbei haben wir verwendet, daß $(z-\frac{a}{z})^2 = z^2-2a+\frac{a^2}{z^2} \ge 0$ ist.

Es bleibt noch übrig, zu überprüfen, ob T kontrahierend ist.
Es gilt

$$\begin{aligned} d(Tz_1,Tz_2) &= |Tz_1-Tz_2| = \left|\tfrac{1}{2}(z_1-z_2)+\tfrac{a}{2}\left(\tfrac{1}{z_1}-\tfrac{1}{z_2}\right)\right| \\ &= \left|\tfrac{1}{2}(z_1-z_2)+\tfrac{a}{2}\left(\tfrac{z_2-z_1}{z_1z_2}\right)\right| \\ &= \tfrac{1}{2}|z_1-z_2|\left|1-\tfrac{a}{z_1z_2}\right| \le \tfrac{1}{2} d(z_1,z_2), \end{aligned}$$

Ist T eine kontrahierende Abbildung? Es gilt

$$d(Tg_1,Tg_2) = \left| \int_0^t g_1(S)dS - \int_0^t g_2(S)dS \right| \leq \int_0^t g_1(S)-g_2(S)\, dS$$

$$\leq t \sup_{S\in[0,\frac{1}{2}]} | g_1(S)-g_2(S)| \leq \frac{1}{2}\, d(g_1,g_2).$$

Starten wir mit der Funktion $f_o(t) = 1$. Dann gilt $f_1(t) = t+1$; $f_2(t) = \frac{t^2}{2} + t + 1$ und allgemein

$f_n(t) = \frac{t^n}{n!} + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} +\ldots+ \frac{t^2}{2} + t + 1$. Wir erhalten auf diese Weise die <u>Taylorreihe</u> der Funktion $f(t) = e^t$.

Zum Schluß noch zwei

<u>Bemerkungen:</u> 1. Die Richtigkeit der Ungleichung $d(Tx,Ty) < d(x,y)$ für alle $x \neq y$ aus M liefert noch nicht die Existenz eines Fixpunktes. Man betrachte hierzu $M = [1,\infty)$, $d=d_1$ und $Tx = x+ \frac{1}{x}$.

2. Ist K eine kompakte Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes $[M,d]$ und T bildet K in sich ab, so folgt aus $d(Tx,Ty) < d(x,y)$ für alle $x \neq y$ aus K bereits die Existenz eines eindeutig bestimmten Fixpunktes. Dazu betrachtet man die stetige Funktion $\rho(x) := d(x,Tx)$ auf K. Verwenden wir, daß eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge ihr Minimum annimmt, folgt die Existenz eines $x^* \in K$ mit $\rho(x^*) = \min\{d(x,Tx) : x \in K\}$. Sei $Tx^* \neq x^*$; so folgt $d(Tx^*,T(Tx^*)) < d(x^*,Tx^*)$. D. h. $\rho(Tx^*) < (x^*)$. Das ist jedoch ein Widerspruch zu $\rho(x^*) = \min\{\rho(x) : x \in K\}$. D. h. x^* ist ein Fixpunkt. Die Eindeutigkeit folgt genau wie beim Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes. Wie man sieht, ist im Beispiel 1 die Menge $[1,\infty)$ nicht kompakt. Kann sie auch nicht sein, denn nach Satz 6 ist jede kompakte Menge präkompakt und also auch beschränkt. Das Intervall $[1,\infty)$ ist aber nicht beschränkt.

Dr. Linde, FSU

XXV. Olympiade Junger Mathematiker

Aufgaben Klassen 11/12

1. Zu einer Feier erschienen fünf Gäste. Der Gastgeber stellte fest, daß unter je drei von diesen Gästen stets zwei sind, die sich wechselseitig kennen, und zwei, die sich nicht kennen.

   Man beweise, daß der Gastgeber seine fünf Gäste so an einen runden Tisch setzen kann, daß an beiden Seiten jedes Gastes Bekannte dieses Gastes sitzen.

2. Es seien $q_1, q_2, \ldots, q_n$ $(n \geq 2)$ paarweise verschiedene Primzahlen.

   Man beweise, daß aus dieser Voraussetzung stets

$$\frac{q_1^3 + 1}{q_1^3 - 1} \cdot \frac{q_2^3 + 1}{q_2^3 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{q_n^3 + 1}{q_n^3 - 1} < \frac{36}{25}$$

   folgt.

3. Gibt es eine Funktion, die für alle reellen Zahlen definiert ist, reelle Funktionswerte hat und die folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt?

   (1) Für alle reellen Zahlen x und y gilt

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1+f(x)f(y)} .$$

   (2) Es gilt $f(1) = \frac{1}{2}$.

4. Es sei $A_1A_2A_3A_4$ ein Tetraeder mit gegebenen Kantenlängen $\overline{A_1A_2} = a$, $\overline{A_1A_3} = b$, $\overline{A_1A_4} = c$, $\overline{A_2A_3} = d$, $\overline{A_2A_4} = e$, $\overline{A_3A_4} = f$.

   Man untersuche, ob es einen Punkt P im Raum gibt, so daß die Summe s der Quadrate der Abstände des Punktes P von den Eckpunkten des Tetraeders einen kleinsten Wert annimmt. Falls das zutrifft, ermittle man jeweils zu gegebenen a, b, c, d, e, f diesen kleinsten Wert von s.

5. Es sei (p_n) die Folge der ihrer Größe nach geordneten Primzahlen, d. h., es sei $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7, \dots$
Man untersuche, ob es eine natürliche Zahl N derart gibt, daß für alle natürlichen Zahlen n mit $n > N$ die Ungleichung $p_n > 4n$ gilt.

6A. Eine im dekadischen Positionssystem dargestellte natürliche Zahl sei "Spiegelzahl" genannt, wenn ihre Ziffern symmetrisch aufgebaut sind, d. h., wenn die erste und die letzte, die zweite und die vorletzte usw. Ziffer übereinstimmt.
Zum Beispiel sind die Zahlen 358853, 27672, 44444 Spiegelzahlen.
Man untersuche, ob es zu jeder zweistelligen natürlichen Zahl a, deren letzte Ziffer von 0 verschieden ist, eine von 0 verschiedene Spiegelzahl gibt, die durch a teilbar ist.

6B. Für jedes Dreieck ABC bezeichne d die Länge des Inkreisdurchmessers, g die größte Seitenlänge und ε die Größe des kleinsten Winkels dieses Dreiecks ABC.

a) Man beweise: Es gibt eine Konstante K, so daß für jedes Dreieck ABC die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$\frac{1}{d} < \frac{K}{g \cdot \sin \varepsilon}. \qquad (1)$$

b) Unter allen Konstanten K, für die die in a) zu beweisende Aussage gilt, ermittle man die kleinste Konstante, falls diese existiert.

Lineare Optimierung (Fortsetzung)

3. Graphische Lösung linearer Optimierungsprobleme

Bisher wissen wir, wie das mathematische Modell eines linearen Optimierungsproblems aussieht (siehe (3') in Abschnitt 2). Außerdem wurde für einige typische Aufgaben zur linearen Optimierung das jeweilige mathematische Modell aufgestellt. (Es ist üblich, diesen Vorgang als mathematische Modellierung zu bezeichnen.)

Jetzt wollen wir uns mit der Lösung linearer Optimierungsprobleme beschäftigen, wobei in diesem Abschnitt der Fall zweier Veränderlicher behandelt wird. Zunächst wenden wir uns dem Beispiel 1 zu:

$$Z(x) = 8x_1 + 9x_2 \longrightarrow \max \qquad (4.0)$$

$$x_1 + x_2 \leq 8000 \qquad (4.1)$$

$$x_1 + 1.5x_2 \leq 10500 \qquad (4.2)$$

$$x_1 \leq 4500 \qquad (4.3)$$

$$x_2 \leq 6000 \qquad (4.4)$$

$$x_1 \geq 0 \qquad (4.5)$$

$$x_2 \geq 0 \qquad (4.6)$$

Der besseren Handhabung wegen werden Zielfunktion und Nebenbedingungen numeriert. Das Problem graphisch zu lösen bedeutet:

- Graphische Darstellung des zulässigen Lösungsbereiches (4.1) - (4.6)
- Suche einer optimalen Lösung bezüglich der Zielfunktion (4.0) auf möglichst einfache Art und Weise.

Wir stellen uns zunächst vor, daß die NB (4.1) - (4.6) in Form von Gleichungen vorliegen (für den allgemeinen Fall (3') sind sowohl Gleichungen als auch Ungleichungen als NB zugelassen). In einem geeignet gewählten Koordinatensystem kann zu jeder der Gleichungen die entsprechende Gerade konstruiert werden. Z. B. führt $x_1 + x_2 = 8000$ auf die Geradengleichung

$$x_2 = -x_1 + 8000. \qquad (4.1')$$

Die durch (4.1') festgelegte Gerade wollen wir mit g_1 bezeichnen. Die aus den NB (4.2) - (4.6) resultierenden Geraden seien $g_2, g_3, \dots, g_6$.

Damit ergibt sich das folgende Bild:

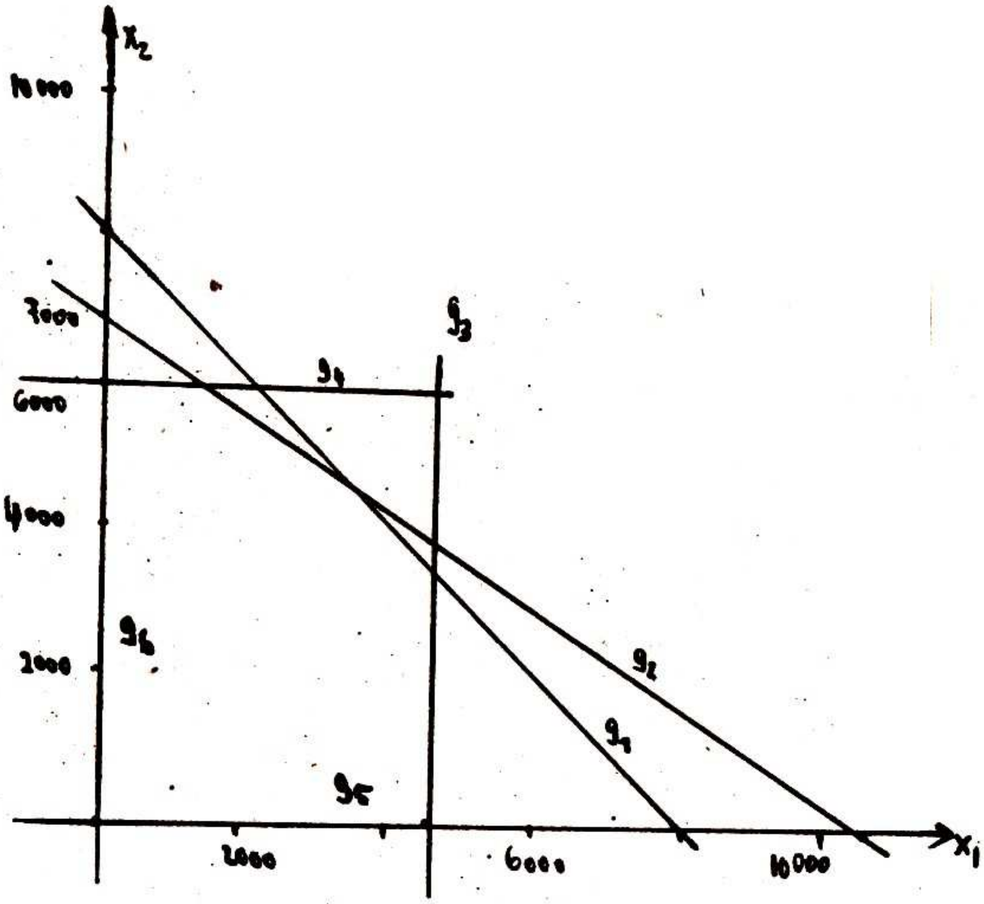


Bild 1

Zu bemerken ist, daß die Geraden g_5 bzw. g_6 mit der x_1-Achse bzw. x_2-Achse identisch sind. Nun sind aber alle NB in Form von Ungleichungen gegeben. Wir betrachten wieder (4.1):

Sei $M_1 = \{x=(x_1,x_2) : x_1+x_2 \leq 8000\}$.

Es ist leicht herauszufinden, daß in M_1 alle Vektoren $x = (x_1,x_2)$ liegen, die entweder auf der Geraden g_1 oder "unterhalb" von g_1 liegen. Wir wollen eine Menge $\hat{M} = \{x=(x_1,x_2) : a_1x_1 + a_2x_2 \leq b_1\}$ i.w. als abgeschlossene Halbebene (Halbraum) oder kurz Halbebene bezeichnen (a_1,a_2,b_1 sind beliebig aber fest gewählte reelle Zahlen).

Da sich der zulässige Lösungsbereich M von Beispiel 1 als Durchschnitt der durch (4.1) - (4.6) gegebenen Halbebenen $M_1,M_2,\dots,M_6$ ergibt, erhalten wir:

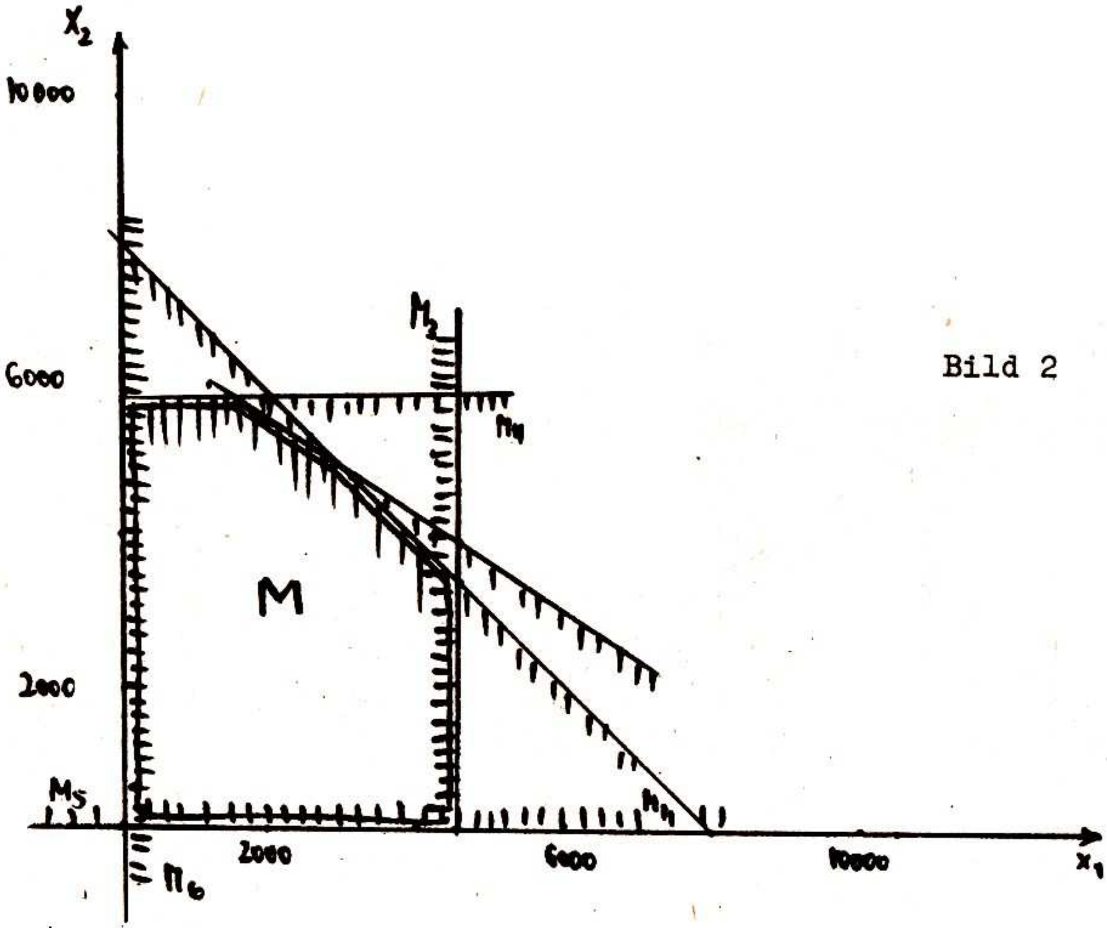


Bild 2

Wie leicht zu sehen ist, wird die Kontur des zulässigen Lösungsbereiches M durch die Geraden $g_1, \dots, g_6$ festgelegt.

In M ist nun eine solche Lösung x zu suchen, für die

$$Z(x^*) = Z^* = 8x_1^* + 9x_2^* - 8x_1 + 9x_2$$

für alle $x = (x_1, x_2) \in M$ gilt.

Dazu betrachten wir

$$Z(x) = 8x_1 + 9x_2 = c_o, \qquad (5)$$

für eine beliebig aber fest gewählte Zahl c_o.

Schreiben wir (5) als Geradengleichung auf, so ergibt sich

$$x_2 = -\frac{8}{9}x_1 + \frac{c_o}{9} .$$

Wird $c = c_o/9$ gesetzt, dann erhalten wir:

$$x_2 = -\frac{8}{9}x_1 + c . \qquad (6)$$

Bekanntlich ist $x = (0,c)$ der Schnittpunkt der durch (6)

festgelegten Geraden mit der x_2-Achse.
Da Beispiel 1 ein Maximumproblem ist, liefert die größte Zahl c, die durch eine zulässige Lösung $x = (x_1, x_2) \in M$ realisiert wird, eine optimale Lösung des Problems. Ein derartiges c kann wie folgt gefunden werden.
Zunächst wird die Gerade

$$x_2 = -\frac{8}{9}x_1 + c \qquad \text{mit } c = 0 \qquad \text{konstruiert.}$$

Diese Gerade enthält die zulässige Lösung $x = (0,0)$.
Durch Parallelverschiebung nach 'oben' ergibt sich eine Geradenschar mit größer werdendem c, wobei auf jede dieser Geraden zulässige Lösungen $x \in M$ liegen. Schließlich finden wir eine Gerade g^*, gegeben durch

$$x_2 = -\frac{8}{9}x_1 + c^* \qquad \text{mit}$$

$c^* = 69000/9$ und
$x^* = (x_1^*, x_2^*) = (3000, 5000) \in M$ als Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2. Jede noch so kleine weitere Verschiebung nach 'oben' würde zum Verlassen des zulässigen Lösungsbereiches M führen (siehe Bild 3).

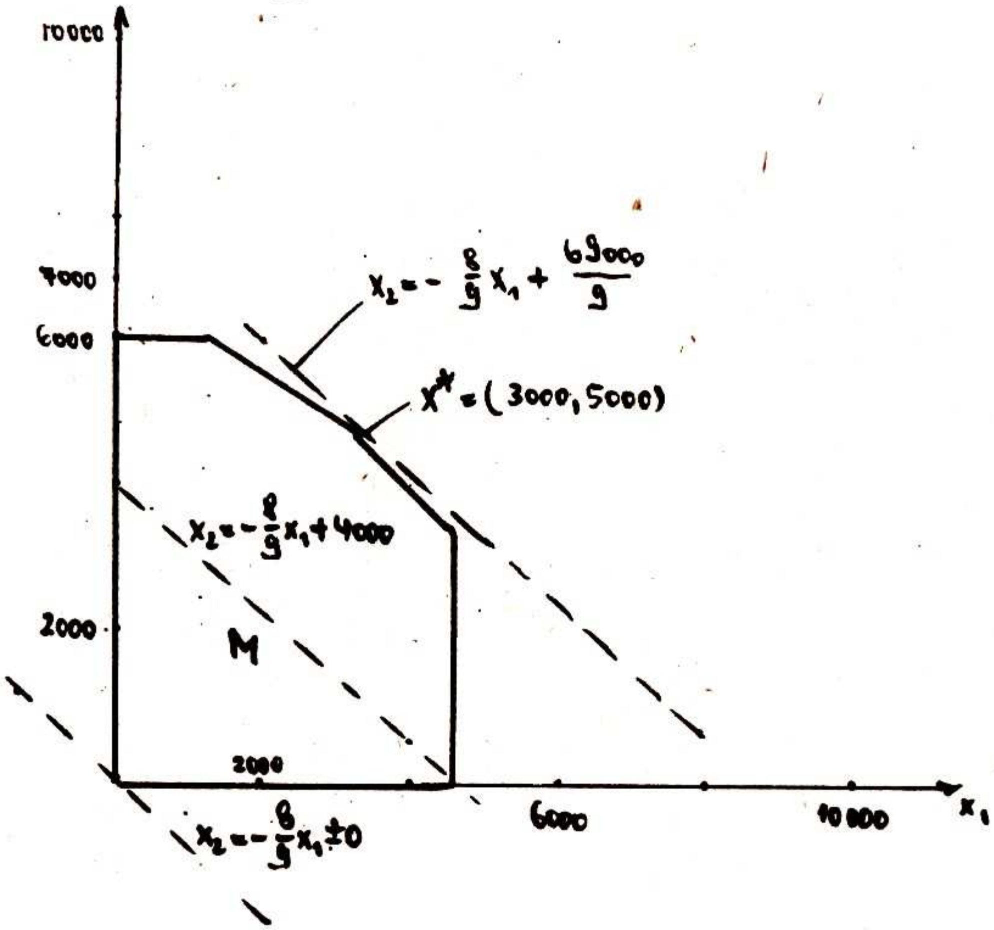


Bild 3

Die optimale Lösung x von Beispiel 1 ist somit gefunden. Das Schiff ist also mit 3000 t von Gut G_1 bzw. 5000 t von Gut G_2 zu beladen. Bei dieser Beladung wird der größte Transportgewinn erzielt und zwar 69000 M.

Wir wollen weitere einfache Beispiele betrachten:

$$Z(x) = 5x_1 - 3x_2 \longrightarrow \min \qquad (7.0)$$

$$x_2 - x_1 \leq -1 \qquad (7.1)$$

$$x_2 - x_1 \geq 1 \qquad (7.2)$$

$$x_1 \geq 0 \qquad (7.3)$$

$$x_2 \geq 0 \qquad (7.4)$$

Darstellung des zulässigen Lösungsbereiches:

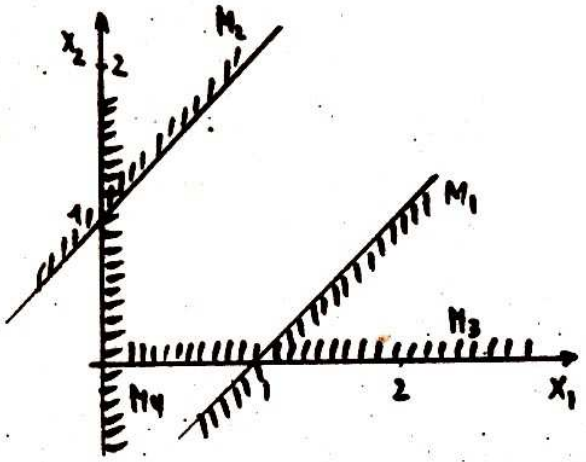


Bild 4

Offenbar gibt es keine zulässigen Lösungen.
Die Aufgabe ist damit nicht realisierbar.

$$Z(x) = x_1 + x_2 \longrightarrow \max \qquad (8.0)$$

$$x_2 - x_1 \geq -1 \qquad (8.1)$$

$$x_2 - x_1 \leq 1 \qquad (8.2)$$

$$x_1 \geq 0 \qquad (8.3)$$

$$x_2 \geq 0 \qquad (8.4)$$

Für den zulässigen Lösungsbereich erhalten wir:

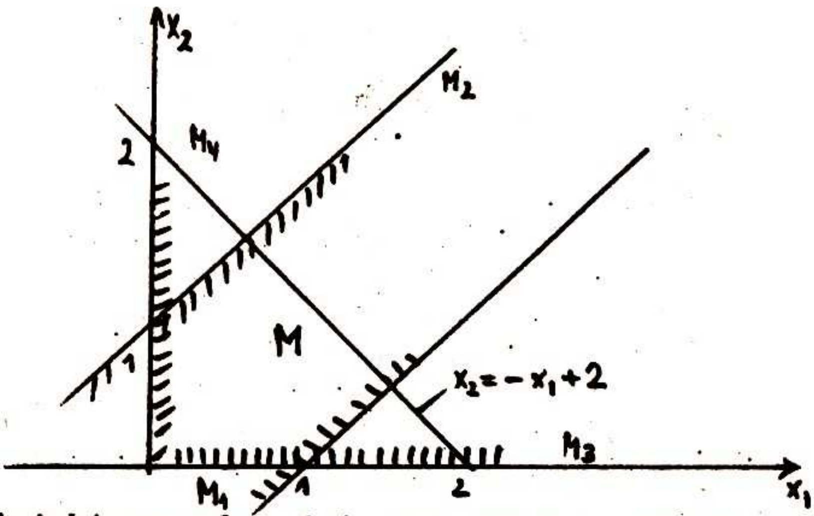


Bild 5

Wie leicht zu sehen ist, existieren zulässige Lösungen. Dennoch ist das Problem (8.0) - (8.4) nicht realisierbar. Es gibt kein x aus dem zulässigen Lösungsbereich mit $Z(x^*) \geq Z(x)$ für alle $x \in M$. Für jede beliebig aber fest vorgegebene Zahl $a > 0$, existiert ein $x \in M$ mit $Z(x) > a$ (z. B. ist $x=(a,a)$ zulässige Lösung mit $Z(x) = 2a > a$).
Zu bemerken ist, daß für die Zielfunktion $Z(x) = x_1+x_2 \longrightarrow \min$ über dem zulässigen Lösungsbereich (8.1) - (8.4) eine optimale Lösung zu finden ist.
Als letztes Beispiel betrachten wir:

$$Z(x) = x_1 + x_2 \longrightarrow \max \qquad (9.0)$$
$$2x_1 + x_2 \geq 2 \qquad (9.1)$$
$$x_1 + x_2 \leq 2 \qquad (9.2)$$
$$x_2 \geq 1 \qquad (9.3)$$
$$x_1 \geq 0 \qquad (9.4)$$

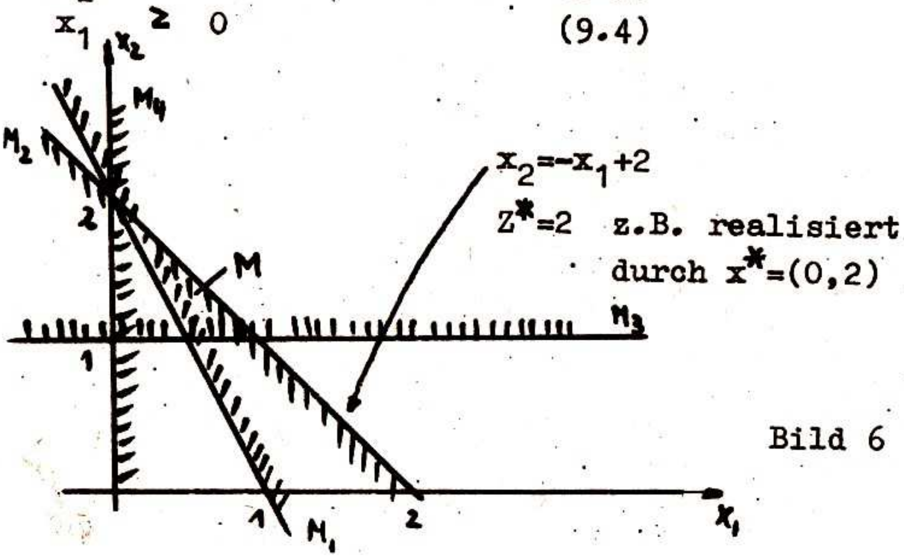


Bild 6

Dieses Problem ist realisierbar. Es gibt sogar unendlich viele optimale Lösungen (alle Lösungen, die auf der durch die Vektoren (0,2) und (1,1) festgelegten Strecke liegen).
Folgende einfache Aufgaben sollte nun jeder einmal versuchen zu lösen:
Gegeben sei der durch (9.1) - (9.4) festgelegte Lösungsbereich M.
Gesucht ist:

1. $\underset{x \in M}{Z(x) = x_1 + x_2} \longrightarrow \min$

2. $\underset{x \in M}{Z(x) = x_1 - x_2} \longrightarrow \min$

3. $\underset{x \in M}{Z(x) = x_1 - x_2} \longrightarrow \max$

Die bisherigen Ausführungen zusammengefaßt erhalten wir als Vorgehensweise bei der graphischen Lösung linearer Optimierungsprobleme:

1. Konstruktion des zulässigen Lösungsbereiches M (i. a. Durchschnitt von Geraden und Halbebenen)
2. Falls $M = \emptyset$, dann ist das Problem nicht realisierbar
3. Formulieren der Geradengleichung $c_1x_1 + c_2x_2 = c_o$ für ein geeignet gewähltes c_o (z. B. $c_o=0$)
4. Durch Parallelverschiebung ist entweder eine optimale Lösung zu ermitteln oder festzustellen, daß das Problem zwar zulässige Lösungen besitzt, aber nicht realisierbar ist.

Bemerkungen:

- Für die Zielfunktion $Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2$ kann o.B.d.A. angenommen werden, daß wenigstens eine der Zahlen c_1 bzw. c_2 von Null verschieden ist ($c_2 = 0$ gehört zur Gleichung $x_2 = -\frac{c_1}{c_2}x_1 + \frac{c_o}{c_2}$, $c_2 = 0$ führt zu $x_1 = \frac{c_o}{c_1}$, in diesem Fall erhalten wir eine Schar von zur x_2-Achse parallelen Geraden).
- Für NB der Form $a_1x_1 + a_2x_2 \leqq b_1$ (bzw. $a_1x_1 + a_2x_2 = b_1$) kann ebenfalls vorausgesetzt werden, daß wenigstens eine der Zahlen a_1 bzw. a_2 von Null verschieden ist.

- Die Richtung, in die verschoben wird, um eine optimale Lösung zu finden, hängt vom Aufgabentyp (Minimum- bzw. Maximumsuche) und vom Koeffizienten $-c_1/c_2$ (falls $c_2 = 0$) bzw. c_0/c_1 (falls $c_2 = 0$) ab.

Am Ende dieses Abschnitts sollen noch einmal alle Fälle angegeben werden, die bei der Behandlung linearer Optimierungsprobleme mit zwei Veränderlichen auftreten können:

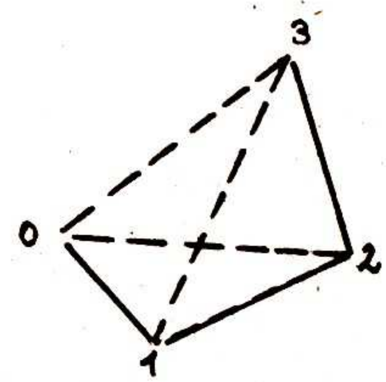
1. Es gibt keine zulässigen Lösungen.
2. Es gibt zwar zulässige Lösungen, aber das Problem ist nicht realisierbar.
3. Das Problem ist realisierbar. Dabei kann die optimale Lösung eindeutig bestimmt sein, oder es werden unendlich viele optimale Lösungen gefunden.

Im Falle der Realisierbarkeit eines Problems ist zu sehen, daß die optimale Lösung auf dem Rand des zulässigen Lösungsbereiches liegt. Mehr noch, falls ein Problem realisierbar ist (z. B. (4.0) - (4.6) oder (9.0) - (9.4)), dann gibt es wenigstens eine Ecke im zulässigen Lösungsbereich, die das Optimum

Dr. Dathe, FSU
Sektion Mathematik

Fortsetzung folgt!

Lösungen DDR-Olympiade



bekannt
nicht bekannt

Abb.

1. Die Plätze seien, rund um den Tisch in dieser Reihenfolge, 0, 1, 2, 3, 4.
   Nach Voraussetzung gibt es zwei miteinander bekannte Gäste; zwei solche setze man auf die Plätze 1 und 2. Unter den drei übrigen Gästen gibt es nach Voraussetzung (über diese beiden Gäste und Gast 1) muß Gast 1 einen der beiden kennen; einen solchen

keiner wäre mit 4 bekannt. Also ist der von 2 verschiedene Bekannte von 3 der Gast 4.

Ebenso folgt, daß 4 auch der von 1 verschiedene Bekannte von 0 ist.

2. Für jede natürliche Zahl $k = 2$ sei zur Abkürzung $a_k = \frac{k^3 + 1}{k^3 - 1}$ gesetzt.

Dann sind alle $a_k > 1$. Es genügt somit, Fälle mit $n \geqq 4$ zu betrachten, da man im Fall $n = 2$ oder $n = 3$ zwei bzw. eine weitere Primzahl wählen, damit das Produkt zu einem analog gebauten größeren aus 4 Faktoren ergänzen und dieses wie im folgenden abschätzen kann.

Ferner ist aus $a_k = 1 + \frac{2}{k^3-1}$ ersichtlich, daß die Folge der a_k monoton fallend ist: Aus $k = h$ folgt stets $a_k \leqq a_h$.

Nimmt man die n Primzahlen

$q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, \ldots, q_n$

o.B.d.A. der Größe nach geordnet an, so sind sie jeweils größer oder gleich den ersten n Primzahlen

$2, 3, 5, 7, 11, \ldots, p_n,$

und diese sind jeweils größer oder gleich den Zahlen

$2, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2n-1.$

Somit gilt

$$
\begin{aligned}
q_1 \geqq 2, \quad q_2 \geqq 3, \quad & q_3 \geqq 5, \\
& q_4 \geqq 7 > 6, \\
& q_5 \geqq 9 > 8, \\
& \ldots\ldots\ldots \\
& q_n = 2n-1 > 2n-2.
\end{aligned}
$$

Daher gilt für die zu untersuchende Zahl

$P = a_{q_1} \cdot a_{q_2} \cdot a_{q_3} \cdot a_{q_4} \cdot a_{q_5} \cdot \ldots \cdot a_{q_n}$

die Ungleichung

$$P^2 \leqq a_2^2 \cdot a_3^2 \cdot a_5^2 \cdot (a_6 \cdot a_7) \cdot (a_8 \cdot a_9) \cdot \ldots \cdot (a_{2N-2} \cdot a_{2N-1}). \qquad (1)$$

Weiterhin ist

$k^3 + 1 = (k+1)(k^2-k+1), \qquad k^3 - 1 = (k-1)(k^2+k+1)$

und darin $k^2+k+1 = (k+1)^2 - (k+1) + 1$; d. h., mit der Ab-

setze man auf Platz 0. Den anderen setze man auf Platz 3; er muß 2 kennen, da er 0 nicht kennt und da 0, 2 sich nicht kennen (wegen der Bekanntschaft von 0, 1 und 1, 2). Wegen der Bekanntschaft von 1, 2 und 2, 3 kennen sich 1, 3 nicht.
Somit gilt (Abbildung):
Es kennen sich: 0, 1; 1, 2; 2, 3;
es kennen sich nicht: 0, 2; 0, 3; 1, 3.
Der noch nicht plazierte Gast 4 kennt (mindestens) einen der Gäste 0, 3 (da diese sich nicht kennen). Ferner gilt:
Wenn sich 0, 4 kennen, so folgt:
Es kennen sich auch 0, 1, folglich kennen sich 1, 4 nicht und auch 1, 3 nicht, also kennen sich dann 3, 4.
Wenn sich 3, 4 kennen, so folgt:
Es kennen sich auch 2, 3, folglich kennen sich 2, 4 nicht und auch 0, 2 nicht, also kennen sich dann 0, 4.
Also kennt 4 sogar beide Gäste 0 und 3.
Die Sitzordnung 0, 1, 2, 3, 4 erfüllt somit alle Bedingungen der Aufgabe.

<u>2. Lösungsweg:</u>
Man beweist zuerst, daß jeder Gast höchstens zwei andere kennt: Würde ein Gast A drei andere Gäste B, C, D kennen, so wären je zwei von diesen mit A, also nicht miteinander bekannt, im Widerspruch zur Voraussetzung über B, C, D. Wegen der Symmetrie in den Voraussetzungen über Kennen und Nichtkennen folgt ebenso:
Jeder Gast kennt höchstens zwei andere nicht. Also kennt jeder Gast mindestens zwei andere.
Damit ist gezeigt: Jeder Gast kennt genau zwei andere. Somit ergibt sich folgendermaßen eine geforderte Sitzordnung: Man setze auf Platz 1 einen beliebigen Gast, auf Platz 0 und 2 die beiden Bekannten von 1. Da 0, 1 und 1, 2 sich kennen, kann der von 1 verschiedene Bekannte von 2 nicht 0 sein; er werde auf Platz 3 gesetzt, der Letzte auf Platz 4.
Da 1, 2 und 2, 3 sich kennen, kann der von 2 verschiedene Bekannte von 3 nicht 1 sein. Wäre er 0, so hätten die Gäste 0, 1, 2, 3 bereits unter sich jeder seine zwei Bekannten;

kürzung $b_k = k^2-k+1$ gilt

$$k^3 + 1 = (k+1).b_k, \qquad k^3 - 1 = (k-1).b_{k+1},$$

also gilt für jedes $N \geq 3$

$$a_2.a_3.a_4. \dots .a_{2N-2}.a_{2N-1} =$$

$$= \frac{3b_2}{b_3} . \frac{4b_3}{2b_4} . \frac{5b_4}{3b_5} . \dots . \frac{(2n-1)b_{2N-2}}{(2n-3)b_{2N-1}} . \frac{2N\ b_{2N-1}}{(2N-2)b_{2N}}$$

$$= \frac{N(2N-1)b_2}{b_{2N}} = \frac{3(2N^2-N)}{4N^2-2N+1} < \frac{3(2N^2-N)}{2(2N^2-N)} = \frac{3}{2}. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$p^2 < \frac{a_2.a_3.a_5}{a_4} . \frac{3}{2} = \frac{3b_2}{b_3} . \frac{4b_3}{2b_4} . \frac{6b_5}{4b_6} . \frac{3b_5}{5b_4} . \frac{3}{2} = \frac{81b_2b_5^2}{10b_4^2b_6}$$

$$= \frac{81.3.21^2}{10.13^2.31}$$

Also ist die behauptete Ungleichung bewiesen, sobald

$$\frac{81.3.21^2}{10.13^2.31} < \frac{36^2}{25^2}$$

gezeigt ist. Diese Ungleichung folgt, wenn man

$$5^3 . 3 . 21^2 < 2 . 4^2 . 13^2 . 31 \qquad (3)$$

bewiesen hat. Nun ist

einerseits $\quad 5^3.3.21^2 < 126.3.21^2 = 2.63.27.49 = 2.27.3087,$

andererseits $\quad 2.4^2.13^2.31 = 2.52^2.31 > 2.2700.31,$

womit (3) folgt und daher der geforderte Beweis erbracht ist.

3. Es gibt eine solche Funktion. Zum Beweis genügt es, sie anzugeben und (1), (2) für sie zu bestätigen:

$$f(x) = \frac{3^x-1}{3^x+1} \qquad (3)$$

ist für alle reellen Zahlen x definiert und erfüllt

$$\frac{f(x) + f(y)}{1+f(x).\ f(y)} = \frac{\frac{3^x-1}{3^x+1} + \frac{3^y-1}{3^y+1}}{1+ \frac{3^x-1}{3^x+1} . \frac{3^y-1}{3^y+1}}$$

$$= \frac{(3^x-1)(3^y+1) + (3^y-1)(3^x+1)}{(3^x+1)(3^y+1) + (3^x-1)(3^y-1)}$$

$$= \frac{2\cdot(3^x\cdot 3^y-1)}{2\cdot(3^x\cdot 3^y+1)} = f(x+y)$$

sowie $f(1) = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}$.

Heuristische Möglichkeiten, zu (3) zu gelangen, sind z.B. die folgenden A oder B:

A: Man schließt von (1) auf $f(2x) = \frac{2f(x)}{1+f(x)^2}$, erhält $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{4}{5}$, $f(4) = \frac{40}{41}$, $f(8) = \frac{3280}{3281}$, ...

und gewinnt daraus die Vermutung, daß die um 1 vermehrten doppelten Zähler und ebenso die um 1 verminderten doppelten Nenner die Folge 3, 9, 81, 6561, ... bilden, in der jedes Glied eine Potenz von 3, und zwar das Quadrat des vorhergehenden Gliedes ist. Man kann (muß aber nicht) diese Vermutung bestätigen:

Aus $f(x) = \frac{a}{a+1}$ folgt $f(2x) = \frac{2\cdot\frac{a}{a+1}}{1+(\frac{a}{a+1})^2} = \frac{2a(a+1)}{2a(a+1)+1}$, und zwischen

$2 \cdot a + 1$ und $2 \cdot 2a(a+1) + 1$ besteht die Beziehung

$2 \cdot 2a(a+1) + 1 = 4a^2 + 4a + 1 = (2\cdot a+1)^2$.

Somit hat man (3) für $x = 2^k$ $(k=0,1,2,3,\ldots)$ erhalten, kann (3) für alle reellen x vermuten und wie oben bestätigen.

B: Man schließt von (1) auf

$$1 + f(x+y) = \frac{(1+f(x))(1-f(y))}{1+f(x)f(y)}, \tag{4}$$

$$1 - f(x+y) = \frac{(1-f(x))(1-f(y))}{1+f(x)f(y)}. \tag{5}$$

Nun ist $f(x) \neq 1$ für alle reellen x; denn gäbe es ein x_0 mit $f(x_0) = 1$, so wäre

$$\frac{1}{2} = f(1) = f(x_0+1-x_0) = \frac{f(x_0)+f(1-x_0)}{1+f(x_0)f(1-x_0)} = \frac{1+f(1-x_0)}{1+f(1-x_0)} = 1.$$

(Diese Rechnung kann auch weggelassen werden, da ohnehin nur ein heuristischer Gedankengang genannt werden soll und da in der Aufgabenstellung keine Eindeutigkeits- bzw. Vollständigkeitsaussage verlangt wird; man braucht daher die Frage nicht zu untersuchen, ob man eine (1), (2) erfüllende Funktion aus-

schließt, wenn man nur Funktionen betrachtet, zu denen es kein x_0 mit $f(x_0) = 1$ gibt.)
Also kann man (4) durch (5) dividieren und erhält die Aussage, daß die durch

$$g(x) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)} \tag{6}$$

definierte Funktion g für alle reellen x, y die Gleichung

$$g(x+y) = g(x) \cdot g(y) \tag{7}$$

erfüllt.
Dies zusammen mit $g(1) = \frac{1 + 1/2}{1 - 1/2} = 3$ wird von $g(x) = 3^x$ erfüllt, und damit führt (6) auf den Ansatz (3), den man wie oben bestätigt.

4. In einem kartesischen Koordinatensystem seien x_i, y_i, z_i die Koordinaten des Punktes A_i $(i=1,2,3,4)$ und x, y, z die Koordinaten eines Punktes P im Raum. Dann ist

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=1}^{4} ((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2) \\ &= \sum_{i=1}^{4} (x^2+y^2+z^2-2(xx_i+yy_i+zz_i)+x_i^2+y_i^2+z_i^2) \\ &= 4x^2 - 2x \cdot \sum_{i=1}^{4} x_i + \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \\ &\quad + 4y^2 - 2y \cdot \sum_{i=1}^{4} y_i + \sum_{i=1}^{4} y_i^2 \\ &\quad + 4z^2 - 2z \cdot \sum_{i=1}^{4} z_i + \sum_{i=1}^{4} z_i^2 . \end{aligned} \tag{1}$$

Nun gilt

$$4x_2-2x \cdot \sum_{i=1}^{4} x_i + \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 4(x - \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^{4} x_i)^2 - \frac{1}{4} \cdot (\sum_{i=1}^{4} x_i)^2 + \sum_{i=1}^{4} x_i^2$$

und darin

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4} x_i^2 - \frac{1}{4} \cdot (\sum_{i=1}^{4} x_i)^2 &= \frac{1}{4}(3(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2) \\ &\quad - 2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sum_{i<j} (x_i-x_j)^2 . \end{aligned} \tag{2}$$

(Die Summation $\sum_{i<j}$ ist über die Indexpaare
$(i,j) = (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)$

zu erstrecken.)

Also ist

$$4x^2 - 2x \cdot \sum_{i=1}^{4} x_i + \sum_{i=1}^{4} x_i'^2 = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2,$$

und das Gleichheitszeichen gilt darin (genau) im Fall

$$x = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^{4} x_i.$$

Entsprechende Aussagen erhält man über die anderen Summanden in (1). Somit ergibt sich

$$s = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i<j} ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2)$$

und darin das Gleichheitszeichen (genau) im Fall

$$(x,y,z) = (\frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^{4} x_i, \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^{4} y_i, \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^{4} z_i). \qquad (3)$$

Damit ist bewiesen, daß es (genau)[1] einen Punkt P mit kleinstem Wert s gibt [redacted] daß dieser Wert

$s = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$ beträgt.

Möglich ist auch ein Beweisweg mit Hilfe der Differentialrechnung; dabei ist auf logisch vollständige Argumentation zu achten. Ein Beispiel für einen solchen Beweisweg ist: Es gibt eine genügend große abgeschlossene (Kugel-)Umgebung U des Tetraeders mit der Eigenschaft, daß zu jedem Punkt P außerhalb oder auf dem Rand von U ein Punkt im Innern von U

mit kleinerem Wert s existiert. Das nach dem Satz von Weierstraß in U existierende globale Minimum von s ist folglich sogar global bezüglich des ganzen Raumes, und es wird im Innern von U angenommen. Hierfür ist das Bestehen der Gleichungen

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \frac{\partial s}{\partial y} = 0, \frac{\partial s}{\partial z} = 0$$

eine notwendige Bedingung. Sie ist nur im Punkt (3) erfüllt. Damit ist bewiesen, daß s in diesem Punkt das gesuchte globale Minimum annimmt. Als Wert von s in diesem Punkt ergibt sich (4), da

$$\sum_{i=1}^{4} (\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4) - x_i)^2$$

---

1 Die Eindeutigkeitsaussage für P ist laut Aufgabenstellung hier nicht erforderlich.

$$= \frac{1}{16} \cdot \sum_{i=1}^{4} (x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 + 2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)$$

$$- 8x_i(x_1+x_2+x_3+x_4) + 16x_i^{\ 2})$$

$$= \frac{1}{16} \cdot (12 \cdot \sum_{i=1}^{4} x_i^{\ 2} - 8 \cdot \sum_{i<j} x_ix_j)$$

gleich (2) wird.

Bemerkung: Die mit 4 multiplizierte Gleichung (2) tritt bei einem der üblichen Beweise zur Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung $\mathfrak{v}^2\mathfrak{x}^2 - (\mathfrak{v}\mathfrak{x})^2 \geqq 0$ für $\mathfrak{v} = (v_1,v_2,v_3,v_4)=(1,1,1,1)$, $\mathfrak{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4)$ auf: Man formt dort die linke Seite in $\sum_{i<j} (v_jx_i-v_ix_j)$ um. Statt der obigen expliziten Rechnung ist auch ein entsprechendes Zitat zu akzeptieren.

5. Es gibt eine solche Zahl N. Eine Beweismöglichkeit hierfür ist die folgende:
Man beweist zunächst (Bemerkungen über Beweismöglichkeiten siehe unten) die Aussage: Unter den natürlichen Zahlen von 1 bis $2\cdot3\cdot5\cdot7 = 210$ gibt es nur 48 zu 210 teilerfremde Zahlen. Da für ganzzahlige k, q stets $210k + q$ genau dann zu 210 teilerfremd ist, wenn q dies ist, folgt: Unter den natürlichen Zahlen von $210k + 1$ bis $210k + 210$ gibt es nur 48 bis 210 teilerfremde Zahlen.
Wendet man dies mit $k=0,\dots,m-1$ an, so folgt für jede natürliche Zahl $m \geqq 1$: Unter den natürlichen Zahlen

$$1,2,\dots,210m \qquad (1)$$

gibt es nur 48m zu 210 teilerfremde Zahlen. Unter diesen ist die Nichtprimzahl 1; andererseits befinden sich unter den zu 210 nicht teilerfremden der Zahlen (1) keine Primzahlen außer 2,3,5,7. Also gilt:
Unter den Zahlen (1) befinden sich höchstens $(48m+3)$ Primzahlen.
Für alle ganzen Zahlen $m \geqq 1$ und r mit

$$1 \leqq r \leqq 48 \qquad (2)$$

gilt daher: Ist

$$n = 48m + 3 + r, \qquad (3)$$

so befindet sich die n-te Primzahl p_n nicht unter den Zahlen (1); d. h., es gilt

$p_n > 210m$.

Aus (2), (3) folgt andererseits $n \leqq 48m + 51$, also

$4n \leqq 192m + 204$.

Nun gibt es einen Wert m, von dem ab stets $210m \geqq 192m + 204$ ist; dies gilt nämlich, sobald man $18\,m \geqq 204$ erreicht hat, also (z. B.) für $m \geqq 12$. Damit (und weil für jedes $n > 48 \cdot 12+3$ ganze Zahlen $m \geqq 12$ und r mit (1) und (3) existieren) ist bewiesen:

Für alle $n > 48 \cdot 12 + 3$ gilt $p_n > 4n$.

Bemerkungen:

1. Die Anzahl der zu 210 teilerfremden unter den Zahlen 1,...,210 kann durch Auszählen nach Art des als "Sieb des Eratosthenes" bekannten Verfahrens gefunden werden (Streichen aller Vielfachen von 2,3,5,7). Dabei kann man sich auf die ungeraden Zahlen u mit $1 \leqq u \leqq 105$ beschränken, da jeweils $210 - u$ genau dann eine ungerade zu 210 teilerfremde Zahl ist, wenn u dies ist.

Man kann dieses Verfahren aber auch, anstatt es konkret durchzuführen, ausbauen zu einem - dann mit wenig Rechnung auskommenden - Beweis der Formel

$$\begin{aligned}(210) &- \left(\frac{210}{2} + \frac{210}{3} + \frac{210}{5} + \frac{210}{7}\right)\\ &+ \left(\frac{210}{2 \cdot 3} + \frac{210}{2 \cdot 5} + \frac{210}{2 \cdot 7} + \frac{210}{3 \cdot 5} + \frac{210}{3 \cdot 7} + \frac{210}{5 \cdot 7}\right)\\ &- \left(\frac{210}{2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{210}{2 \cdot 3 \cdot 7} + \frac{210}{2 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{210}{3 \cdot 5 \cdot 7}\right) + \left(\frac{210}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}\right)\end{aligned}$$

für die gesuchte Anzahl:

Jeweils der Summand $\frac{210}{p_i \cdots p_j}$ stellt die Anzahl aller durch $p_i \cdots p_j$ teilbaren der Zahlen 1,...,210 dar, und in den fünf Klammerausdrücken ist

jede durch keinen	der Primfaktoren 2,3,5,7 teilbare dieser Zahlen	genau 1, 0,0, 0,0 mal erfaßt,
jede durch genau einen		genau 1,-1,0, 0,0 mal erfaßt,
jede durch genau zwei		genau 1,-2,1, 0,0 mal erfaßt,
jede durch genau drei		genau 1,-3,3,-1,0 mal erfaßt,
jede durch genau vier		genau 1,-4,6,-4,1 mal erfaßt.

Statt eines solchen Beweises kann diese Formel, auch in der Darstellung $\varphi(210) = 210(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})$ der Eulerschen φ-Funktion, als bekannter Sachverhalt zitiert werden.

2. Ein so durchgeführter Beweis benötigt keine Kenntnisse weiterer Primzahlen außer 2, 3, 5, 7. Die dadurch erreichte Abschätzung einer gesuchten Zahl N, für die $n > N \Rightarrow p_n > 4n$ gilt, ist außerordentlich grob.
Durch Probieren kann man stattdessen zunächst
$p_h > 4h$ für $h = 31,\ldots,78$
bestätigen;[1] ferner kann man analog wie oben die Aussage erhalten, daß sich unter den Zahlen $p_h,\ldots,p_h+209$ höchstens 48 Primzahlen befinden. Für die genannten h gilt also
$p_{h+48} = p_h + 210 > 4h + 210 > 4(h+48)$.
Durch Wiederholung dieses Schlusses (vollständige Induktion) folgt $p_{h+48m} > 4(h+48)$ $(m=1,2,\ldots)$; also gilt
$p_n > 4n$ für alle $n > 30$.
Durch anderweite Auszählung zu Teilerfremdheitsaussagen läßt sich auch die "Schrittweite" 48 bzw. 210 in der Ungleichung $p_{h+48} = p_h + 210$ herabsetzen (vgl. die Reduktion auf 105 in Bemerkung 1). Gegebenenfalls kann man auch für konkrete Einzelwerte h eine schärfere Anfangs-Ungleichung $p_h > 4h+c$ mit $c > 0$ zur Einsparung von Rechenschritten nutzen.

6A. Es gibt für alle genannten a derartige Spiegelzahlen. Dies kann folgendermaßen bewiesen werden:
(1) Für jede natürliche Zahl k mit $3 \leq k \leq 99$, die nicht durch 2 und nicht durch 5 teilbar ist, gibt es eine natürliche Zahl m, so daß die mit m Ziffern 1 geschriebene Zahl
$A_m = 1 \ldots 11 = 10^{m-1} + \ldots + 10 + 1$
durch k teilbar ist. Angenommen nämlich, das wäre nicht der Fall. Dann gäbe es unter den k Zahlen $A_1, A_2, \ldots, A_k$ keine Zahl, die bei Division durch k den Rest 0 lassen würde, also müßten zwei dieser Zahlen, etwa A_i und A_j mit $i < j$, bei Division durch k denselben Rest lassen, und es wäre
$A_j - A_i = A_{j-i} \cdot 10^j$
durch k teilbar. Da k und 10^j teilerfremd sind, wäre somit auch A_{j-i} durch k teilbar, was der Annahme widerspricht.
(2) Aus diesem Grund gibt es für jedes in (1) genannte k auch zu jeder der Zahlen $k \cdot q$ $(q=1,2,\ldots,9)$ eine durch $k \cdot q$

1 Dagegen gilt $p_j < 4j$ für $j=1,\ldots,30$.

Tabelle: Kleinste Spiegelzahlen, die Vielfache sind

11 · 1 = 11	21 · 12 = 252	31 · 14 = 434	41 · 16 = 656	51 · 19 = 969
12 · 21 = 252	22 · 1 = 22	32 · 66 = 2112	42 · 6 = 252	52 · 13 = 676
13 · 38 = 494	23 · 7 = 161	33 · 1 = 33	43 · 23 = 989	53 · 4 = 212
14 · 18 = 252	24 · 29 = 696	34 · 8 = 272	44 · 1 = 44	54 · 518 = 27972
15 · 35 = 525	25 · 21 = 525	35 · 15 = 525	45 · 13 = 585	55 · 1 = 55
16 · 17 = 272	26 · 19 = 494	36 · 7 = 252	46 · 9 = 414	56 · 11 = 616
17 · 16 = 272	27 · 37 = 999	37 · 3 = 111	47 · 3 = 141	57 · 3 = 171
18 · 14 = 252	28 · 9 = 252	38 · 13 = 494	48 · 44 = 2112	58 · 4 = 232
19 · 9 = 171	29 · 8 = 232	39 · 15 = 585	49 · 7 = 343	59 · 13 = 767

61 · 442 = 26962	71 · 845 = 59995	81 · 12345679 = 999999999	91 · 11 = 1001
62 · 7 = 434	72 · 88 = 6336	82 · 8 = 656	92 · 9 = 828
63 · 4 = 252	73 · 4 = 292	83 · 9 = 747	93 · 55 = 5115
64 · 33 = 2112	74 · 3 = 222	84 · 3 = 252	94 · 3 = 282
65 · 9 = 585	75 · 7 = 525	85 · 7 = 595	95 · 55 = 5225
66 · 1 = 66	76 · 287 = 21812	86 · 337 = 28982	96 · 22 = 2112
67 · 11 = 737	77 · 1 = 77	87 · 8 = 696	97 · 55 = 5335
68 · 4 = 272	78 · 11 = 858	88 · 1 = 88	98 · 7 = 686
69 · 6 = 414	79 · 6 = 474	89 · 11 = 979	99 · 1 = 99

teilbare, von 0 verschiedene Spiegelzahl, nämlich $A_m \cdot q$ mit der in (1) genannten Zahl m.
Nun läßt sich jede zweistellige natürliche Zahl a, die nicht auf Null endet, in der Form
$a = 2^s \cdot 5^t \cdot k$ (s, t ganzzahlig; $0 \leq s \leq 6$; $0 \leq t \leq 2$; k wie in (1)) darstellen, wobei nicht gleichzeitig s und t von Null verschieden sind. Unter allen diesen Kombinationen von s und t ergeben genau die folgenden einen Wert $q = 2^s \cdot 5^t$, der großer ist als 9:
t=0, s=4,5,6; s=0, t=2.
Folglich ist für jede in Frage stehende Zahl a, mit Ausnahme der Vielfachen von 16 und 25, bewiesen, daß es zu a eine durch a teilbare, von 0 verschiedene Spiegelzahl gibt

Fortsetzung folgt!

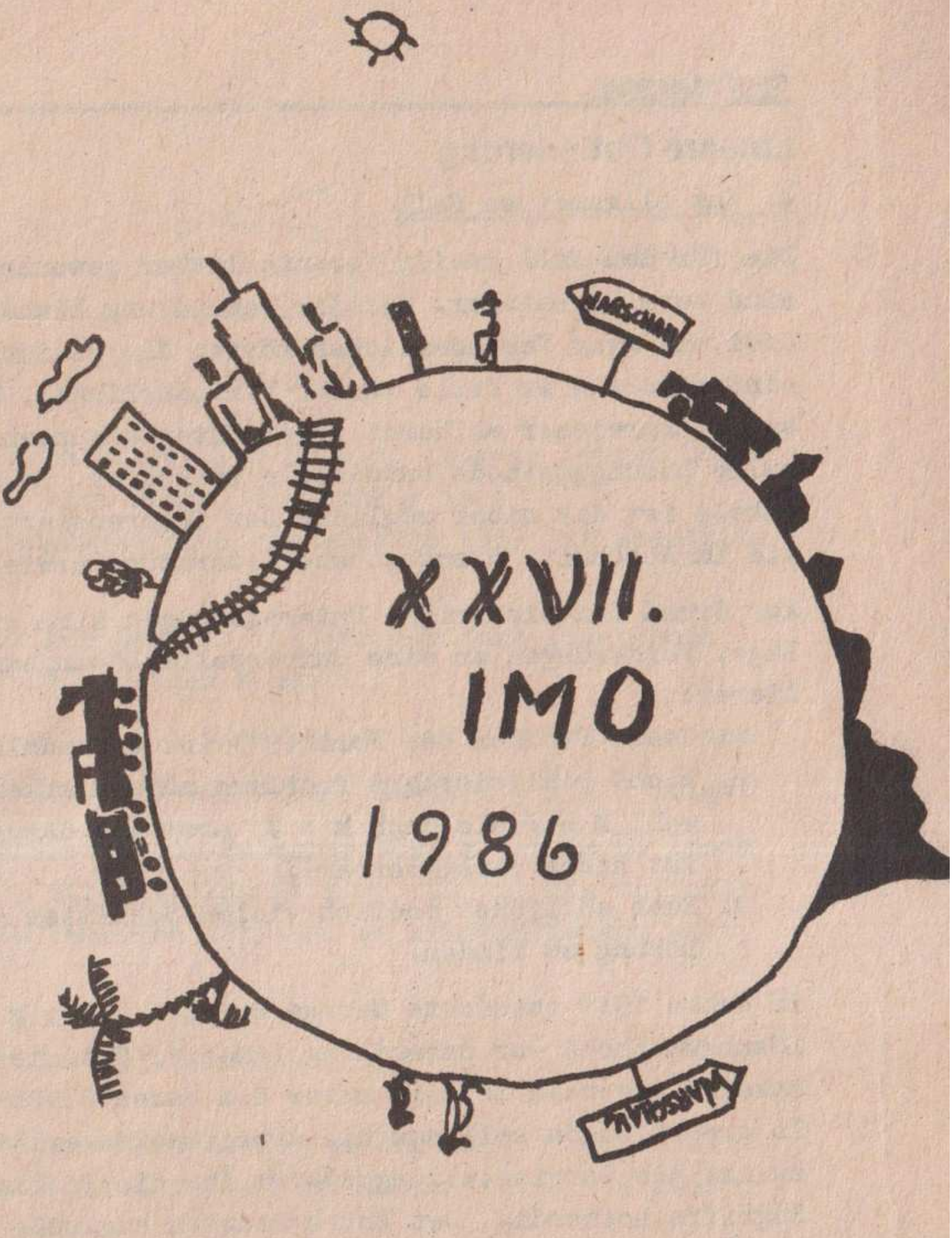
PS: Wir danken Jens K a n d z i o r a für die Idee des Titelbildes!

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung - Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein
Anschrift: **WURZEL**, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR.

Artikel-Nr. (EDV) 10932

Redaktionsschluß: 5. 7. 86

Titelbild: **J. Kandziora**



9
86

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
20. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Lineare Optimierung

4. Zum allgemeinen Fall

Die für den Fall zweier Veränderlicher gewonnenen Erkenntnisse sind verallgemeinbar. Bei der Behandlung linearer Probleme mit drei und mehr Veränderlichen können die gleichen Situationen eintreten wie im Falle zweier Veränderlicher. Allerdings bedarf es umfangreicher mathematischer Untersuchungen, um eine universelle Lösungsmethode entwickeln zu können. Im Rahmen dieses Artikels ist das nicht möglich. Der interessierte Leser sei auf die im Abschnitt 5 angegebene Literatur verwiesen.

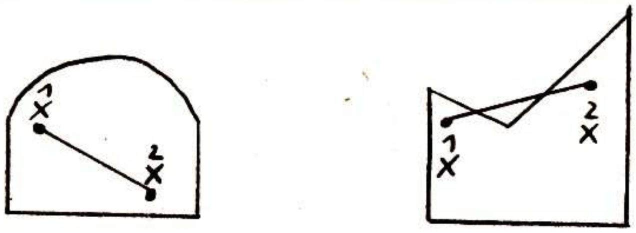
Auf Grund der bisherigen Untersuchungen sind wir aber in der Lage, Forderungen an eine universelle Lösungsmethode zu formulieren:

1. Jedes Problem der Form (3') ist behandelbar.
2. Nicht realisierbare Probleme müssen erkannt werden (sowohl $M = \emptyset$ als auch $M \neq \emptyset$, aber das dazugehörende Problem ist nicht realisierbar).
3. Nach möglichst endlich vielen Schritten ist eine optimale Lösung zu finden.

Im Jahre 1947 entdeckte George Bernard Dantzig eine universelle Lösungsmethode zur Behandlung linearer Optimierungsprobleme. Bekannt geworden ist sie unter dem Namen SIMPLEXMETHODE.
In groben Zügen soll nun die Arbeitsweise erläutert werden. Dazu ist die Bereitstellung zweier für die Problematik wichtiger Begriffe notwendig. Den Betrachtungen zugrunde gelegt wird der n-dimensionale reelle Vektorraum $\mathbb{R}^n$.

D e f i n i t i o n 1 : Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn aus $\overset{1}{x}, \overset{2}{x} \in K$ und $0 \leqq \lambda - 1$ stets
$$x = \lambda \overset{1}{x} + (1-\lambda)\overset{2}{x} \in K \text{ folgt.}$$

Wir wollen bemerken, daß für die Komponenten x_j von x gilt: $x_j = \lambda \overset{1}{x}_j + (1-\lambda)\overset{2}{x}_j$, $j=1,\dots,n$. Interpretieren wir Definition 1 geometrisch, so erhalten wir: Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist konvex, wenn für beliebig aber fest gewählte Elemente $\overset{1}{x}$, $\overset{2}{x}$ auch die Strecke, die $\overset{1}{x}$ und $\overset{2}{x}$ verbindet, vollständig in K liegt.



7.1 7.2

Bild 7

Offenbar handelt es sich bei 7.1 um eine konvexe Menge. Dagegen zeigt Abb. 7.2 eine Menge, die konkav ist.
Der zulässige Lösungsbereich M von Problem (3') ist ebenfalls konvex.

Ein weiterer wichtiger Begriff ist der der Ecke (oder auch Extremalpunkt) einer konvexen Menge K.

D e f i n i t i o n 2 : Ein Vektor $x \in K$ heißt Ecke, wenn aus $x = \frac{1}{2}(\overset{1}{x} + \overset{2}{x})$ und $\overset{1}{x}, \overset{2}{x} \in K$ stets $x = \overset{1}{x} = \overset{2}{x}$ folgt.

Geometrische Interpretation: Zu einer Ecke x ist keine (noch so kleine) Strecke mit Mittelpunkt x zu finden, die vollständig in K liegt. Zu bemerken ist, daß es konvexe Mengen gibt, die

- keine Ecken
- unendlich viele Ecken

besitzen.
Die zulässigen Lösungsbereiche der im Abschnitt 3 behandelten Probleme besitzen endlich viele bzw. keine ((7.1) - (7.4)) Ecken.
Es gilt nun der folgende

S a t z 1 : Der zulässige Lösungsbereich M von Problem (3') sei nicht leer. Dann besitzt M endlich viele Ecken.

Wenn bekannt ist, daß ein Problem der Form (3') optimale Lösungen besitzt, dann gilt

S a t z 2 : Das Problem (3') sei realisierbar. Dann gibt es eine Ecke x^* aus M mit
$Z(x^*) \leq Z(x)$ für alle $x \in M$.

Die Aussagen der Sätze 1 und 2 sind leicht überprüfbar an den im Abschnitt 3 behandelten Beispielen.

Vorausgesetzt, wir wüßten, daß ein Problem der Form (3') realisierbar ist. In diesem Falle wäre eine optimale Lösung in der Menge aller Ecken zu suchen. Hätten wir ferner eine Möglichkeit, alle Ecken von M zu berechnen, so läge nach endlich vielen Schritten eine optimale Lösung vor. Weiterhin wäre es wünschenswert, möglichst frühzeitig zu erkennen, wenn ein Problem nicht realisierbar ist.
Damit sind wir wieder bei den Forderungen an eine universelle Lösungsmethode angelangt.
Die Simplexmethode genügt diesen Anforderungen. Sie liefert nach endlich vielen Schritten entweder eine optimale Lösung oder die Aussage, daß das behandelte Problem nicht realisierbar ist. Wesentlich bei der Suche nach einer optimalen Lösung ist, daß von einer vorhandenen Ecke (falls diese nicht optimal ist) zu einer "benachbarten" mit besserem Zielfunktionswert übergegangen wird. Das Aufsuchen einer optimalen Lösung erfolgt also nach einer bestimmten Strategie.

Damit wäre der Grundgedanke der Simplexmethode dargestellt. Es ist aber noch ein langer Weg zurückzulegen, ehe wir in der Lage sind, konkrete Beispiele zu rechnen. Die Kenntnis einer Vielzahl von Details ist notwendig (z. B.: wann ist ein Element x aus dem zulässigen Lösungsbereich M von Problem (3') eine Ecke? Wie können Ecken berechnet werden?)
Aus Platzgründen muß auf eine vollständige Darstellung verzichtet werden. Dieser Abschnitt soll als Anregung dienen, sich ausführlich mit dem allgemeinen Fall zu beschäftigen.

5. Historische Bemerkungen und Literaturhinweise

Die bisherigen Untersuchungen haben angedeutet, auf welche mathematischen Theorien die lineare Optimierung u. a. aufbaut:

- Theorie linearer Gleichungs- bzw. Ungleichungssysteme
- Theorie konvexer Mengen

Ergebnisse hierzu sind schon seit langem bekannt. So beschäftigte sich der französische Mathematiker Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830) u. a. mit linearen Ungleichungssystemen. Die Formulierung und geometrische Lösung eines allgemeinen linearen Optimierungsproblems geht ebenfalls auf diesen Mathematiker zurück. Außerdem entwickelte er eine Lösungsmethode für lineare Ungleichungssysteme - die Eliminationsmethode. Die Entwicklung der Theorie konvexer Mengen ist mit Namen wie Hermann Brunn (1862 - 1939), Hermann Minkowski (1864 - 1909), Constantin Caratheodory (1873 - 1950) und Ernst Steinitz (1871 - 1928) verbunden.
Die im Abschnitt 4 zu findende Definition konvexer Mengen wurde erstmals in dieser Form von Ernst Steinitz im Jahre 1913 angegeben.

Ende der vierziger Jahre dieses Jahrhunderts ist der Zeitpunkt erreicht, von dem ab wir berechtigt sind, von der Theorie der linearen Optimierung zu sprechen. In erster Linie sind es ökonomisch-technische Probleme, die zur Entwicklung dieser mathematischen Disziplin der angewandten Mathematik führen. In diesem Zusammenhang sei auf die unter /1/ angegebene Literatur verwiesen, wo eine sehr umfangreiche und interessante Darstellung der Geschichte der linearen Optimierung erfolgt.
Für Anfänger auf diesem mathematischen Gebiet sind /2/ und /3/ zu empfehlen. Wer sich ausführlich mit linearer Optimierung befassen will, sollte sich mit /4/, /5/ und /6/ beschäftigen.
Vergessen wollen wir aber nicht, daß das lineare Optimierungsproblem (3') ein Spezialfall von Problem (3) ist.
Die lineare Optimierung zeichnet sich durch eine ausgereifte Theorie sowie in der Praxis bewährte Lösungsmethoden aus. Das Anwendungsspektrum scheint groß zu sein (siehe ausgewählte Beispiele in Abschnitt 1).

Allerdings ist die Großzahl von Problemen der Form (3) wesentlich komplizierterer Natur. Das betrifft sowohl die theoretische als auch praktische Behandlung. Eine Vorstellung davon soll zum Schluß das folgende Beispiel vermitteln. Das "Große Fermatsche Problem" läßt sich als folgendes Optimierungsproblem formulieren:

$$Z(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1^{x_4} + x_2^{x_4} - x_3^{x_4})^2 \rightarrow \min$$

$$x_j \geq 1, \quad j=1,2,3, \quad x_4 \geq 3,$$

$$x_j \text{ ganzzahlig}, \quad j=1,2,3,4.$$

Bisher ist keine mathematische Methode bekannt, die dieses Problem mit vertretbarem Zeitaufwand löst.

Literatur

/1/ Brentjes, S.: Untersuchungen zur Geschichte der linearen Optimierung (LO) von ihren Anfängen bis zur Konstituierung als selbständige mathematische Theorie - eine Studie zum Problem der Entstehung mathematischer Disziplinen im 20. Jahrhundert, Diss. A, TU Dresden, 1976.

/2/ Drews, K.-D.: Lineare Gleichungssysteme und lineare Optimierungsaufgaben, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.

/3/ Lehmann, E.: Lineare Optimierung für junge Mathematiker, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1970.

/4/ Piehler, J.: Einführung in die lineare Optimierung, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1966.

/5/ Vogel, W.: Lineares Optimieren, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1970.

/6/ Kreko, B.: Lehrbuch der linearen Optimierung, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1970.

Dr. Dathe, FSU
Sektion Mathematik

Preisaufgaben

S 43 ①

Die Mittelpunkte des Um- und Inkreises sowie eines Ankreises eines Dreiecks ABC seien gegeben. Man konstruiere das Dreieck.

S 44 ②

Durch einen beliebigen Punkt auf der Diagonale eines Würfels mit der Kantenlänge a wird senkrecht zu dieser Diagonale eine Ebene gelegt.

a) Welche Figur entsteht beim Schnitt dieser Ebene mit den Würfelflächen?

b) Wie groß sind die Längen der Strecken (in Abhängigkeit von a und von der Entfernung x der Schnittebene vom Mittelpunkt O des Würfels), die beim Schnitt der Ebene mit den Würfelflächen entstehen?

S 45 ①

Man löse die Ungleichung

$$4x^2 + 3^{\sqrt{x}+1} + x.3^{\sqrt{x}} < 2.x^2.3^{\sqrt{x}} + 2.x + 6\ .$$

S 46 ①

Man löse die Gleichung

$$4^{\sin^2 \pi x} + 4^{\cos^2 \pi x} = -8x^2 + 12|x| - 0{,}5\ .$$

S 47 ①

Man beweise die Ungleichung

$$\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}} > \frac{1}{4}$$

unter der Voraussetzung, daß der Zähler der linken Seite n und der Nenner n-1 Wurzelzeichen enthält!

S 48 ②

Три окружности кI, к2 и к3, лежащие в одной плоскости, попарно касаются друг друга в трёх различных точках. Соединим точку касания окружностей кI и к2 с двумя другими точками касания отрезками прямых. Доказать, что эти отрезки или их продолжения пересекают окружность к3 в точках, служащих противоположными концами одного и того же диаметра.

Internationale Mathematikolympiade

Die 27. Internationale Mathematikolympiade fand vom 5. Juli bis zum 15. Juli in Warschau statt. 210 Schüler aus 37 Ländern trafen sich, um ihre Kräfte auf mathematischem Gebiet zu messen.

An zwei Tagen hatten die Teilnehmer jeweils 4,5 Stunden Zeit, um je drei Aufgaben zu lösen. Neben der Möglichkeit, individuell die Stadt Warschau zu erleben, standen ein Besuch des alten Schlosses und der Geburtsstätte Frederyk Chopins auf dem Programm.

Die Mannschaft unserer Republik konnte ihre Leistungsfähigkeit unter Beweis stellen. Sechs Teilnehmer errangen Preise:

Jörg Jahnel, Spezialschule "Carl Zeiss", Jena ,11. Klasse
41 Punkte 1. Preis;

Mathias-Torsten Tok, Spezialklasse der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, 12. Klasse
31 Punkte 2. Preis;

Stefan Günter, EOS "Heinrich Hertz", Berlin, 11. Klasse
31 Punkte 2. Preis;

Ingo Warnke, Erweiterte Spezialoberschule "Georg Thiele", Kleinmachnow, 11. Klasse 26 Punkte 2. Preis;

Gunter Döge, Spezialschule "Friedrich Engels", Riesa, 11. Klasse
24 Punkte 3. Preis;

Harald Heidler, Spezialklasse der TechnischenHochschule Karl-Marx-Stadt, 12. Klasse
19 Punkte 3. Preis

Allen Preisträgern gratuliert die "Wurzel" recht herzlich!

Im Vergleich mit den Mannschaften anderer Länder ergibt sich folgendes Bild:

	Punkte insg.	1.Preise	2.Preise	3.Preise
1. USA	203	3	3	-
2. UdSSR	203	2	4	-
3. BRD	196	2	4	-
4. VR China	177	3	1	1

5. DDR	172	1	3	2
6. Rumänien	171	2	2	1

Kós Géza (Ungarn), Vladimir Roganow und Stanislaw Smirnow (beide UdSSR) erreichten volle Punktzahl (42 Punkte). Von den neun Teilnehmerinnen erhielten eine einen zweiten und zwei einen dritten Preis..
Die Aufgabe 3, von der DDR vorgeschlagen, erwies sich als die schwierigste. Wurden im Durchschnitt 44% der möglichen Punkte erreicht, so waren es hier nur 12%.

Die Redaktion bedankt sich bei Jörg Jahnel für die Bereitstellung der Information.

IMO-Aufgaben

1. Tag

1.Aufgabe:
Sei d eine positive ganze Zahl $\neq 2, 5, 13$.
Man zeige:
In der Menge $\{2, 5, 13, d\}$ gibt es zwei verschiedene Elemente a,b , für die ab-1 keine Quadratzahl ist.

2.Aufgabe:
In der Ebene ist ein Dreieck $A_1A_2A_3$ und ein Punkt P_8 gegeben. Wir setzen $A_s=A_{s-3}$ für alle s 4. Wir konstruieren die Folge $P_0, P_1, P_2, \ldots$ von Punkten, so daß P_{k+1} sich als Bild von P_k bei der Drehung um A_{k+1} um 120° im Uhrzeigersinn (mathematisch negativ) ergibt($k= 0, 1, 2, \ldots$).
Man zeige:
Wenn $P_{1986}= P_0$ ist, dann ist das Dreieck $A_1A_2A_3$ gleichseitig.

3.Aufgabe:
Den Eckpunkten eines regelmäßigen Fünfecks ist je eine ganze Zahl so zugeordnet, daß die Summe dieser fünf Zahlen positiv ist. Sind X,Y bzw. Z drei aufeinanderfolgende der fünf Punkte und x,y bzw. z die ihnen zugeordneten Zahlen, wobei $y < 0$ ist,

so ist die folgende Operation erlaubt: Die Zahlen x, y bzw. z werden in dieser Reihenfolge durch $x+y$, $-y$ bzw. $z+y$ ersetzt. Diese Operation wird so oft wiederholt, wie sich ein $y < 0$ findet. Man entscheide, ob man dabei stets nach endlich vielen Schritten abbrechen muß.

2. Tag

4. Aufgabe:

Es seien A,B zwei benachbarte Ecken eines regelmäßigen n-Ecks ($n \geq 5$) mit dem Mittelpunkt O. Es wird ein zu OAB kongruentes Dreieck XYZ zunächst mit dem Dreieck OAB zur Deckung gebracht und dann so bewegt, daß sich der Punkt X stets innerhalb des n-Ecks und die Punkte Y und Z stets auf den Seiten desselben befinden. Man bestimme alle möglichen Lagen, die X einnehmen kann, wenn Y und Z gemeinsam den Rand des n-Ecks durchlaufen.

5. Aufgabe:

Man bestimme alle Funktionen f, die auf der Menge $\mathbb{R}_0^+$ der nichtnegativen reellen Zahlen definiert sind, nur nichtnegative reelle Werte annehmen und die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

a) $f(x.f(y)).f(y) = f(x+y)$ für alle $x,y \in \mathbb{R}_0^+$

b) $f(2) = 0$

c) $f(x) \neq 0$ für $0 \quad x \quad 2$.

6. Aufgabe:

In der Ebene sei eine endliche Menge von Punkten gegeben, die bezüglich eines festen Koordinatensystems lauter ganzzahlige Koordinaten haben.

Man entscheide, ob es stets möglich ist, einige dieser Punkte rot und die übrigen dieser Punkte weiß zu färben, so daß sich für jede Gerade, die zu einer der Koordinatenachsen parallel verläuft, die Anzahl der auf ihr gelegenen roten Punkte von der Anzahl der auf ihr liegenden weißen Punkte um höchstens Eins unterscheidet.

Rechnen einmal ohne Taschenrechner

Der elektronische Rechner ist heute ein unentbehrliches Hilfsmittel für Theorie und Praxis. Bei Schülern, die bereits in ihrer Schulzeit einen Rechner besitzen und verwenden, besteht allerdings die Gefahr, alles nur mit Rechner zu berechnen und keine Rechenvorteile zu benützen, die sich aus einfachen mathematischen Beziehungen ergeben. Im folgenden sollen einige Rechenvorteile zusammengestellt werden, die man sich leicht einprägen kann. Sie sind bei vielstelligen Zahlen dem kleinen Taschenrechner sogar überlegen. Häufige Anwendung dieser Rechenvorteile trainiert das Gedächtnis und erhöht die Merkfähigkeit. Vielen werden die meisten Rechenregeln ja bekannt sein. Dieser Aufsatz soll auch die Schüler anregen, selbst weitere Rechenvorteile zu finden und zu verwenden.

Am bekanntesten sind die Anwendungen der binomischen Formeln:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Dazu wollen wir einige Beispiele anführen.

1. Es ist $(a+1)^2 = a^2 + a + (a+1)$
   Läßt sich a^2 leicht berechnen, so braucht man nur die aufeinanderfolgenden Zahlen a und a + 1 dazu geben, um $(a+1)^2$ zu bekommen. Einige Beispiele hierzu.
   $41^2 = 40^2 + 81 = 1681$ $\quad 101^2 = 100^2 + 201 = 10201$
   $26^2 = 25^2 + 51 = 676$ $\quad 60001^2 = 60000^2 + 120001 = 3600120001$

2. Es ist $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$, insbesondere
   $(a+1)^2 - (a-1)^2 = 4a$
   Hierzu wieder einige Beispiele.
   $41^2 - 39^2 = 4 \cdot 40 = 160$ $\quad 56^2 - 54^2 = 4 \cdot 55 = 220$
   $59^2 - 51^2 = 4 \cdot 55 \cdot 4 = 880$ $(a = 55,\ b = 4)$
   $90006^2 - 90004^2 = 4 \cdot 90005 = 360020$

3. Produkte der Form $(a+b)(a-b)$ lassen sich sehr leicht im Kopf berechnen. Es gilt ja: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
   Wieder einige Beispiele hierzu.
   $49 \cdot 51 = 50^2 - 1 = 2499$ $\quad 96 \cdot 94 = 95^2 - 1 = 9024$
   $1002 \cdot 998 = 1000^2 - 4 = 1000996$

Auch die allgemeine binomische Formel

$$(a=b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots \binom{n}{n} b^n$$

läßt sich bei günstigen Werten von a und b leicht für die Praxis verwenden. Wir wollen dazu wieder einige Aufgaben stellen. Jeder kann folgende Potenzen von 11 nachprüfen:

$$11^2 = 121$$
$$11^3 = 1331$$
$$11^4 = 14641$$

Der Beweis ist sehr einfach.

$$11^n = (10+1)^n = 10^n + \binom{n}{1} \cdot 10^{n-1} + \ldots\ldots \binom{n}{n} \cdot 1$$

Für n = 1, 2, 3, 4 ergeben sich oben stehende Werte, die man sich leicht einprägen kann. Höhere Potenzen, bei denen die Binomialkoeffizienten nicht immer einstellige Zahlen sind, sind nicht so einfach im Gedächtnis zu behalten.

Auf ähnliche Weise lassen sich auch folgende Potenzen berechnen:

$$101^2 = (100+1)^2 = 1\ 0\ 2\ 0\ 1$$
$$101^3 = (100+1)^3 = 1\ 0\ 3\ 0\ 3\ 0\ 1$$
$$101^4 = (100+1)^4 = 1\ 0\ 4\ 0\ 6\ 0\ 4\ 0\ 1$$
$$1001^2 = (1000+1)^2 = 1\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 1$$
$$1001^3 = (1000+1)^3 = 1\ 0\ 0\ 3\ 0\ 0\ 3\ 0\ 0\ 1$$
$$1001^4 = (1000+1)^4 = 1\ 0\ 0\ 4\ 0\ 0\ 6\ 0\ 0\ 4\ 0\ 0\ 1$$

oder $100001^2 = 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1$ u.s.w.

Der Leser kann selbst überprüfen, daß folgende Quadratzahlen leicht gefunden werden können:

$$111 \cdot 111 = 1\ 2\ 3\ 2\ 1$$
$$1111 \cdot 1111 = 1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 1$$

$11111 \cdot 11111 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1$ u.s.w. bis

$$111111111 \cdot 111111111 = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1$$

Haben die Zahlen mehr als 9 Ziffern, ist das Quadrat nicht mehr so einfach zu übersehen.

Zum Schluß wollen wir mit Hilfe der binomischen Formel $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ noch einige Folgen von Quadratzahlen herleiten, die durchaus im Gedächtnis behalten werden können.

Es sei $x = 3 \cdot (10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10 + 1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} x^2 &= (10-1)(10^n+10^{n-1}+\ldots+1)^2 \\ &= (10-1)(10^n+\ldots+1)(10^n+\ldots+1) \\ &= (10^{n+1}-1)(10^n+10^{n-1}+\ldots+1) \end{aligned}$$

Für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ u.s.w. erhalten wir die Werte

$x = 3, 33, 333, 3333$ u.s.w.

Wir bilden nun $(kx+1)^2 = k^2x^2 + 2kx + 1$ $k=1,2,3,$ u.s.w.

$$\begin{aligned} (kx+1)^2 &= k^2(10^{2n+1}+\ldots+10^{n+1})-k^2(10^n+10^{n-1}+\ldots+1) \\ &\quad + 6k(10^n+10^{n-1}+\ldots+1)+1 \\ &= k^2(10^{2n+1}+\ldots+10^{n+1})+(6k-k^2)(10^n+\ldots+10) \\ &\quad + 6k - k^2 + 1 \end{aligned}$$

Setzen wir $k = 1$, so erhalten wir

$$(x+1)^2 = 10^{2n+1} + 10^{2n} + \ldots + 10^{n+1}+5 \cdot (10^n+\ldots+10) + 6$$

Für $n = 0, 1, 2, 3$ u.s.w. erhalten wir die Folge der Quadratzahlen

$$\begin{aligned} 4^2 &= 16 \\ 34^2 &= 1156 \\ 334^2 &= 111556 \\ 3334^2 &= 11115556 \quad \text{u.s.w.} \end{aligned}$$

Diese Quadratzahlen lassen sich leicht im Gedächtnis behalten. Bei n Ziffern 3 kommt die Ziffer 1 (n+1) mal vor, die Ziffer 5 n mal und Endziffer ist immer 6.

Für $k = 2$ ist $(2x+1)^2=4(10^{2n+1}+\ldots+10^{n+1})+8(10^n+\ldots+10)+9$

Für $n = 0, 1, 2,\ldots n$ ergeben sich wieder Quadratzahlen, die man sich leicht einprägen kann:

$$\begin{aligned} 7^2 &= 49 \\ 67^2 &= 4489 \\ 667^2 &= 444889 \\ 6667^2 &= 44448889 \quad \text{u.s.w.} \end{aligned}$$

Bei n Ziffern 6 kommt die Ziffer 4 (n+1) mal vor, die Ziffer 8 n mal, Endziffer ist immer 9.

Auch für $k = 6$ ergeben sich Quadratzahlen, die sich mühelos einprägen lassen. Es ist in diesem Falle:

$$(6x+1)^2 = 36\left(10^{2n+1}+10^{2n} + \ldots + 10^{n+1}\right)+1$$

Für n = 0, 1, 2, ... lauten die Quadratzahlen:

$$19^2 = 361$$
$$199^2 = 39601$$
$$1999^2 = 3996001$$
$$19999^2 = 399960001 \quad \text{u.s.w.}$$

Die Gesetzmäßigkeit ist wohl zu erkennen. Die Zahlen beginnen mit der Ziffer 3 und enden mit der Ziffer 1. In der Mitte steht immer 6. Bei n Ziffern 9 stehen dazwischen (n-1) Ziffern 9 bzw. (n-1) Ziffern 0.

Für den Leser stellen wir noch einige Aufgaben.

Aufgabe 1. Berechnen Sie ohne Taschenrechner und Tabelle:

401^2 ; 96^2 ; 500001^2

Aufgabe 2. $69^2 - 61^2 =$; $209^2 - 191^2 =$

Aufgabe 3. $97 \cdot 93 =$; $2003 \cdot 1997 =$

Aufgabe 4. Warum führt der Wert k = 3 für $(kx+1)^2$ zu keinen leicht zu merkenden Quadratzahlen?

Aufgabe 5. Welche Quadratzahlen erhält man für k = 4 ?

Dr. B. Hanisch
Halle

Lösungen DDR-Olympiade (Fortsetzung)

Fortsetzung 6A.

Abschließend werden die verbleibenden Zahlen

a=16,32,48,64,96,25,75

untersucht:

(3) Die Zahlen 16, 32, 48, 96 sind Teiler von $2^6 \cdot 3 = 192$. Ferner ist 10^6 durch 2^6 teilbar, also ist auch $291 \cdot 10^6 + 192 = 291000192$ durch 2^6 teilbar. Außerdem hat diese Zahl die doppelte Quersumme wie die durch 3 teilbare Zahl 192 und ist folglich durch 3 teilbar. Somit ist sie durch $2^6 \cdot 3$ und damit durch jede der Zahlen 16,32,...,96 teilbar.

(4) Die Zahl 5775 ist nach der Teilbarkeitsregel für 25 (oder wegen $5775 = 57 \cdot 100 + 3 \cdot 25$) durch 25 teilbar. Außerdem hat sie die doppelte Quersumme wie die durch 3 teilbare Zahl 75 und ist folglich durch 3 teilbar. Somit ist sie auch durch 75 teilbar.

6B. I. Es sei ABC ein beliebiges Dreieck mit den (wie üblich bezeichneten) Seitenlängen a, b, c und Winkelgrößen α, β, γ.

O.B.d.A. sei

$$a \leqq b \leqq c \tag{2}$$

und folglich $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ vorausgesetzt. Damit gilt, unter Verwendung der Formel $F = s \cdot \varrho$,

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{2\varrho} = \frac{s}{2F} = \frac{\frac{1}{2}(a+b+c)}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha} = \frac{a+b+c}{2b} \cdot \frac{1}{g \cdot \sin\varepsilon},$$

wobei ϱ den Inkreisradius, F den Flächeninhalt und s die halbe Umfangslänge des Dreiecks ABC bezeichnen. Aus (2) und der Dreiecksungleichung folgt

$$\frac{a+b+c}{2b} < \frac{a+b\ +\ a+b}{2b} \leqq \frac{4b}{2b} = 2.$$

Somit gilt die in a) zu beweisende Aussage mit K = 2.

II. Behauptung: K = 2 ist die kleinste Konstante, für die die in a) zu beweisende Aussage gilt. Diese Behauptung ist (wegen des in I. Gezeigten) bewiesen, wenn noch gezeigt wird, daß es zu jeder positiven Zahl $K < 2$ ein Dreieck ABC mit $\frac{g \cdot \sin\varepsilon}{d} \geqq K$ gibt. Ein solches Dreieck erhält man z. B. folgendermaßen: Man wähle eine Winkelgröße α mit $0^\circ < \alpha \leqq 60^\circ$ und bilde ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit a = b und dieser Winkelgröße α. Es wird $\alpha = \beta = \gamma$;

also bleiben (2) und die anschließende Rechnung in I. gültig. Ferner wird

$$a = b = \frac{c}{2 \cdot \cos\alpha}$$

und damit

$$\frac{g \cdot \sin\varepsilon}{d} = \frac{a+b+c}{2b} = \frac{2b}{2b} + \frac{c}{2b} = 1 + \cos\alpha \; .$$

Insbesondere kann man wegen $K - 1 \quad 1$ so klein wählen, daß $\cos\alpha \geqq K - 1$ gilt. Damit wird dann, wie behauptet,

$$\frac{g \cdot \sin\varepsilon}{d} = K.$$

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß 10. 8. 1986

$$[[[A \cdot B] \cdot C] \cdot D]$$

$$[[A \cdot B] \cdot [C \cdot D]]$$

$$[[A \cdot [B \cdot C]] \cdot D]$$

$$[A \cdot [[B \cdot C] \cdot D]]$$

$$[A \cdot [B \cdot [C \cdot D]]]$$

10
86

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
20. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Die Anzahl der Produkte – ein kombinatorisches Problem

Um das Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ dreier reeller Zahlen x_1, x_2 und x_3 zu berechnen, sind zwei Multiplikationen von jeweils zwei Zahlen erforderlich. Für die Reihenfolge der Multiplikationen gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Man berechnet zuerst $(x_1 \cdot x_2)$ und dann $((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3)$.
2. Man berechnet zuerst $(x_2 \cdot x_3)$ und dann $(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3))$.

Aufgrund des Assoziativgesetzes der Multiplikation ist der Wert beider Produkte gleich und damit hat die Schreibweise $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ einen natürlichen Sinn.

Für 4 Faktoren x_1, x_2, x_3 und x_4 in dieser Reihenfolge gibt es bereits 5 mögliche Produkte:

$$(((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4)$$
$$((x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4))$$
$$((x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)) \cdot x_4)$$
$$(x_1 \cdot ((x_2 \cdot x_3) \cdot x_4))$$
$$(x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot x_4)))$$

(Alle diese Produkte liefern selbstverständlich wegen des Assoziativgesetzes wieder ein und denselben Wert.)

Wir wollen hier die folgende Frage beantworten:

Frage 1: Wieviele verschiedene Produkte von n Faktoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in dieser Reihenfolge gibt es?

Wir interessieren uns dabei nicht für den Wert $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, sondern sehen zwei Produkte als verschieden an, wenn die jeweils erforderlichen n-1 Multiplikationen je zweier Zahlen in verschiedener Reihenfolge ausgeführt werden, d. h. wir unterscheiden eben gerade zwischen $((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3)$ und $(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3))$.

Für die Lösung dieses Problems erweist es sich als zweckmäßig, eine scheinbar allgemeinere Frage zu beantworten.

Wir haben in der Frage 1 eine feste Reihenfolge der Faktoren $x_1, \ldots, x_n$ gefordert, nämlich $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$.
Auf diese Forderung verzichten wir jetzt.

Frage 2: Wieviele verschiedene Produkte – im obigen Sinne – von n Faktoren $x_1, \ldots, x_n$ in beliebiger Reihenfolge gibt es?

Es gibt einen offensichtlichen Zusammenhang zwischen den Antworten auf Frage 1 und 2.
Für die Reihenfolge der Faktoren $x_1,\dots,x_n$ gibt es bekanntlich genau n! Möglichkeiten, d. h. es gilt

(1) $\qquad A_1(n)\cdot n! = A_2(n),$

wenn A_i die Antwort auf Frage i ist (i=1,2).
Wenn eine der beiden Fragen beantwortet ist, dann ist also zugleich auch die andere beantwortet.
Wir wenden uns der Frage 2 zu.
Die Reihenfolge der Faktoren eines Produktes ist einfach durch die Anordnung von links nach rechts gegeben.
Die Reihenfolge der Ausführung der Multiplikationen je zweier Zahlen bestimmt in eineindeutiger Weise eine "korrekte" Klammerstruktur des Produktes, wobei jeder Multiplikation • genau ein Klammerpaar (•) entspricht.
Wir interessieren uns also für die Anzahl der verschiedenen Klammerstrukturen.
Wir wissen bereits $A_1(2) = 1$, $A_1(3) = 2$, $A_1(4) = 5$.
Also gilt $A_2(2) = 2$, $A_2(3) = 12$, $A_2(4) = 120$.
Wir geben jetzt eine geschlossene Formel für $A_2(n)$ an, die wir im folgenden durch vollst. Induktion beweisen wollen:

(2) $\qquad A_2(n) = n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot(2n-2) = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}$.

<u>Induktionsanfang:</u> Für die bereits berechneten Werte n=2 wie auch n=3 und n=4 ist (2) offensichtlich erfüllt.

<u>Induktionsschritt:</u> Wir setzen voraus, daß es für n=k genau $A_2(k) = \frac{(2k-2)!}{(k-1)!}$ verschiedene Produkte mit k Faktoren bei beliebiger Reihenfolge dieser k Faktoren und beliebiger Reihenfolge der erforderlichen k-1 Multiplikationen gibt.

Wir betrachten jetzt eines der $A_2(k)$ Produkte mit k Faktoren $x_1,\dots,x_k$. Wieviele Produkte mit k+1 Faktoren lassen sich aus diesem einen durch Hinzufügen eines weiteren Faktors x_{k+1} gewinnen?
Wir geben folgende zwei Methoden an:

(I): Für jeden Faktor x_i gibt es ein eindeutig bestimmtes Klammerpaar, so daß entweder $(x_i \cdot p)$ oder $(p \cdot x_i)$ in diesem Produkt enthalten ist. Dabei ist p entweder ein weiterer Faktor x_j oder das Produkt gewisser Faktoren. Im ersten Fall ersetzen wir $(x_i \cdot p)$ einmal durch $((x_{k+1} \cdot x_i) \cdot p)$ und zum anderen durch $((x_i \cdot x_{k+1}) \cdot p)$. Entsprechend im zweiten Fall $(p \cdot x_i)$ durch $(p \cdot (x_{k+1} \cdot x_i))$ und $(p \cdot (x_i \cdot x_{k+1}))$.

(II): Jedes der k-1 Klammerpaare $(p_1 \cdot p_2)$ (p_i steht wiederum für einen Faktor bzw. das Produkt gewisser der Faktoren x_j) ersetzen wir zum einen durch $(x_{k+1} \cdot (p_1 \cdot p_2))$ und zum anderen durch $((p_1 \cdot p_2) \cdot x_{k+1})$.

Das folgende Beispiel illustriert dies.
Wir gehen aus von $(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3))$.

Methode (I)

$((x_4 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3))$
$((x_1 \cdot x_4) \cdot (x_2 \cdot x_3))$

$(x_1 \cdot ((x_4 \cdot x_2) \cdot x_3))$
$(x_1 \cdot ((x_2 \cdot x_4) \cdot x_3))$

$(x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_4 \cdot x_3)))$
$(x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot x_4)))$

Methode (II)

$(x_4 \cdot (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)))$
$((x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)) \cdot x_4)$

$(x_1 \cdot (x_4 \cdot (x_2 \cdot x_3)))$
$(x_1 \cdot ((x_2 \cdot x_3) \cdot x_4))$

Aus dem ursprünglichen Produkt mit den k Faktoren $x_1, \ldots, x_k$ ergeben sich gemäß (I) 2k Produkte und gemäß (II) 2(k-1) Produkte mit den k+1 Faktoren $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$.
Wenn man zeigt:

(A) Alle Produkte, die auf diese Weise aus Produkten mit den k Faktoren $x_1, \ldots, x_k$ erzeugt werden, sind paarweise voneinander verschieden;

und

(B) Auf diese Weise kann jedes Produkt mit k+1 Faktoren $x_1, \ldots, x_{k+1}$ erzeugt werden,

dann ist die folgende Beziehung bewiesen:

$$A_2(k+1) = A_2(k) \cdot (2k+2(k-1)) = \frac{(2k-2)!}{(k-1)!} \cdot (2 \cdot (2k-1))$$
$$= \frac{(2k-2)!}{(k-1)!} \cdot \frac{(2k-1) \cdot 2k}{k} = \frac{(2k)!}{k!} .$$

Damit ist der Induktionsbeweis erbracht.
Es bleibt also, (A) und (B) zu zeigen.

Zu (A): Hier haben wir 2 Teile:

(A'): Alle Produkte, die aus ein und demselben Produkt mit k Faktoren hervorgehen, sind paarweise verschieden.

Für jedes Produkt, das gemäß (I) gebildet wird, steht x_{k+1} innerhalb eines ursprünglichen Klammerpaares $(x_i \cdot p)$ oder $(p \cdot x_i)$ links bzw. rechts vom Faktor x_i und wird mit diesem durch ein neues Klammerpaar verbunden und damit vom rechten bzw. linken Nachbarn getrennt.

Alle Produkte, die gemäß (II) entstehen, sind voneinander verschieden, da x_{k+1} jeweils links bzw. rechts von je einem der ursprünglichen Klammerpaare steht und mit diesem durch ein weiteres Klammerpaar verbunden wird.

Die Übereinstimmung eines dieser Produkte mit einem Produkt gemäß (I) ist ebenfalls nicht möglich, da hier x_{k+1} immer außerhalb eines ursprünglichen Klammerpaares steht und mit diesem aber verbunden ist (und damit von einem eventuell benachbarten Faktor x_i getrennt ist).

(A"): Die Übereinstimmung von Produkten, die aus verschiedenen Produkten mit k Faktoren hervorgegangen sind, ist nicht möglich.

Ist die Reihenfolge der ursprünglichen k Faktoren verschieden, dann ist sie das auch in den neuen Produkten mit k+1 Faktoren. Andernfalls unterscheiden sich die ursprünglichen Produkte aber wenigstens in der Klammerstruktur. D. h. in einem Produkt gibt es mindestens ein Klammerpaar, das es im anderen nicht gibt. Wir betrachten ein solches Paar kürzester Länge. Dieses Paar kann es aber auch nach dem Hinzufügen von x_{k+1} im anderen Produkt nicht geben.

Zu (B): Wir betrachten ein beliebiges Produkt p mit k+1 Faktoren. Der am weitesten rechts stehende sei x_i. Dazu gibt es ein eindeutig bestimmtes Paar $(p' \cdot x_i)$. Ist p' das Produkt von mehr als einem der ursprünglichen Faktoren, hat es also die Form $p' = (p_1 \cdot p_2)$, dann ist es aus einem mit k Faktoren gemäß (II) hervorgegangen. Ist p selbst einer der Faktoren x_j, dann gibt es ein weiteres Produkt p" mit $(p" \cdot (x_j \cdot x_i))$, d. h. p ist aus einem Produkt mit k Faktoren gemäß (I) hervorgegangen.

Damit ist die Formel (2) vollständig bewiesen:

$$A_2(n) = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} \qquad (n \geq 2).$$

Mit Hilfe der Formel (1) läßt sich damit auch unsere Ausgangsfrage 1 beantworten.

Es gilt:

$$A_1(n) = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,n!} = \frac{(2n-2)!}{n \cdot (n-1)! \cdot (n-1)!}$$

$$(3) \qquad A_1(n) = \frac{1}{n} \cdot \binom{2n-2}{n-1} \qquad (n \geq 2).$$

Dr. Jörg Vogel, FSU
Sektion Mathematik
Bereich Mathematische Kybernetik und Rechentechnik

Preisaufgaben

Lösungsbedingungen:

Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsender mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächtste Schuljahr gutgeschrieben. Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse, Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort " WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden. Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbeson dere, daß die in der Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Hilfslinien, ...) muß deutlich erkennbar sein.

S 55

Man finde alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x^2 + y^2 + u^2 = 1$$
$$x^3 + y^3 + u^3 = 1$$

S 56

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_k$ natürliche Zahlen. Man beweise, daß $(a_1^2+1)(a_2^2+1)\ldots(a_k^2+1)$ immer als Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen darstellbar ist.

S 57

Für welche ganzen Zahlen a, b, c gilt die Ungleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3a + 2b \quad ?$$

S 58

Man beweise die Ungleichung

$$\left(1 + \frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) > 5,$$

wenn α ein spitzer Winkel ist!

S 59

In der Ebene seien die Punkte A, B und C gegeben. Man konstruiere drei Kreise K_1, K_2 und K_3 so, daß sich die Kreise K_1 und K_2 im Punkt A berühren, die Kreise K_3 und K_1 in B und die Kreise K_2 und K_3 im Punkt C.

S 60

The vertices of a convex polygon with an odd number of sides are coloured in such a way that neighbouring vertices have different colours. Prove that the polygon can be dissected into triangles by non-intersecting diagonals with endpoints of different colours.

Einsendeschluß: 1. 2. 1987

Algebraische Zahlen

Unter einer algebraischen Gleichung vom Grade n versteht man eine Gleichung der Gestalt

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ und $a_0 \neq 0$. Eine reelle Zahl kann nun Lösung einer algebraischen Gleichung sein oder nicht. Genügt die reelle Zahl ξ einer algebraischen Gleichung, so heißt ξ eine algebraische Zahl. Anderenfalls wird ξ transzendent genannt. Somit lassen sich die reellen Zahlen in zwei große Klassen einteilen, in die Klasse der algebraischen und in die Klasse der transzendenten Zahlen. Die algebraischen Zahlen gestatten in einfacher Weise noch eine feinere Unterteilung.

Definition: Eine algebraische Zahl heißt genau dann vom Grade n, wenn sie einer algebraischen Gleichung n-ten Grades genügt, aber nicht Lösung einer algebraischen Gleichung niederen Grades ist.

Im weiteren möge A_n die Menge aller algebraischen Zahlen vom Grade n bezeichnen. Wie man leicht erkennt, ist A_1 mit der Menge Q der rationalen Zahlen identisch. Folglich enthalten $A_2, A_3, A_4, \dots$ ausnahmslos irrationale Zahlen. Der Nachweis der Existenz irrationaler Zahlen erfordert keine besonderen Anstrengungen (vgl. Lehrbuch Klasse9, WURZEL 1/84 und 12/84). Etwas mehr Mühe bereitet es schon, will man zeigen, daß keine der Mengen $A_2, A_3, A_4, \dots$ leer ist. Anliegen dieses Artikels soll es deshalb sein, $A_n \neq \emptyset$ für alle $n > 1$ zu bestätigen.

Zunächst ist es jedoch notwendig, zwei Hilfssätze über lineare Gleichungssysteme

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \qquad (1) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a_{kl} $(1 \leq k,l \leq n)$ bereitzustellen. Ist $a_{11} \neq 0$, so läßt sich (1) durch nachstehend beschriebenen Algorithmus in ein äquivalentes Gleichungssystem überführen.

Vom a_{11}-fachen der k-ten Gleichung wird das a_{k1}-fache der ersten Gleichung subtrahiert $(2 \leq k \leq n)$. (2)
Die so gewonnene Gleichung ist die k-te Gleichung des neuen Systems.

Das äquivalente Gleichungssystem besitzt dann das Aussehen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}\,x_n &= b'_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{n2}x_2 + \ldots + a'_{nn}\,x_n &= b'_n \end{aligned} \tag{3}$$

mit den ebenfalls ganzzahligen Koeffizienten $a'_{kl} = a_{11}a_{kl} - a_{k1}a_{1l}$ und $b'_k = a_{11}b_k - a_{k1}b_1$ $(2 \leq k,l \leq n)$.

Bei dieser Umformung werden gewisse Teilbarkeitseigenschaften der Koeffizienten vom Gleichungssystem (1) auf das Gleichungssystem (3) vererbt.

<u>Hilfssatz 1:</u> Gilt für eine Primzahl p $p \nmid a_{kk}$ und $p \mid a_{kl}$ für $k < l$ $(1 \leq k,l \leq n)$, so auch $p \nmid a'_{kk}$ und $p \mid a'_{kl}$ für $k < l$ $(2 \leq k,l \leq n)$.

<u>Beweis:</u>
Nach Voraussetzung gilt $p \nmid a_{11}$ und $p \mid a_{1l}$ für alle $l \geq 2$. Also ist $a'_{kl} = a_{11}a_{kl} - a_{k1}a_{1l}$ genau dann durch p teilbar, wenn a_{kl} diese Eigenschaft hat. Dies ist im Fall $k < l$ gewährleistet. Im Fall $k = l$ folgt hingegen wegen $p \nmid a_{kk}$ unmittelbar $p \nmid a'_{kk}$. Damit ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

<u>Hilfssatz 2:</u> Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 ist das Gleichungssystem (1) eindeutig lösbar.

<u>Beweis:</u>
Vermöge des Algorithmus (2) wurde aus (1) das äquivalente Gleichungssystem (3) gewonnen. Das um die erste Gleichung reduzierte "Restsystem"

$$\begin{array}{l} a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \ldots + a'_{nn}x_n = b'_n \end{array} \qquad (4)$$

besitzt nach Hilfssatz 1 dieselben charakteristischen Eigenschaften wie das Ausgangssystem (1). Auch der erste Koeffizient in der ersten Gleichung von (4) ist wegen $p \nmid a'_{22}$ von Null verschieden. Lediglich die Anzahl der Gleichungen und Variablen hat sich um eine Einheit verringert.

Aus der eindeutigen Lösbarkeit des so gefundenen "Restsystems" (4) würde aber sofort die Behauptung des Hilfssatzes 2 folgen, da sich die eliminierte Variable x_1 wegen $a_{11} \neq 0$ in eindeutiger Weise aus der Gleichung

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

in Abhängigkeit von $x_2, x_3, \ldots, x_n$ berechnen läßt. Es genügt demnach , statt des eigentlichen Gleichungssystems jeweils das in der geschilderten Weise erzeugte "Restsystem" zu betrachten, statt (1) also (4), statt (4) das "Restsystem" von (4), statt des "Restsystemes" von (4) das "Restsystem" des "Restsystemes" von (4) usw.

Nach n-1 Schritten erhält man schließlich ein "Restsystem", welches aus einer einzigen Gleichung besteht, einer Gleichung der Gestalt

$$cx_n = d.$$

Da nach Hilfssatz 1 (wiederholte Anwendung) $c \neq 0$ gilt, ist dieses letzt "Restsystem" eindeutig lösbar. Das beweist aber gleichzeitig die eindeutige Lösbarkeit seiner Vorgänger in der Folge der "Restsysteme" und die Behauptung des Hilfssatzes 2.

Der Hilfssatz 2 kann nunmehr genutzt werden, das eingangs genannte Anliegen der Untersuchung zu realisieren.

Um $A_n = \emptyset$ für alle $n > 1$ zu zeigen genügt es, für jede natürliche Zahl $n > 1$ eine algebraische Zahl $\xi \in A_n$ zu finden. Auskunft über die Existenz solcher Zahlen ξ gibt der folgende

S a t z : Ist p eine Primzahl, so ist $\xi = \sqrt[n]{p}$ eine algebraische Zahl vom Grade n.

Beweis: Da für die angegebene Zahl ξ die Gleichung $\xi^n - p = 0$ gilt, ist ξ eine algebraische Zahl höchstens n-ten Grades. Es bleibt noch zu zeigen, daß ξ eine algebraische Zahl mindestens n-ten Grades ist. Dieser Nachweis soll indirekt geführt werden.

Annahme: Die algebraische Zahl $\xi = \sqrt[n]{p}$ sei von geringerem Grade als n und genügt in dieser Eigenschaft der Gleichung

$$a_o\xi^{n-1} + a_1\xi^{n-2} + \dots + a_{n-2}\xi + a_{n-1} = 0, \tag{5}$$

deren ganzzahlige Koeffizienten $a_o, a_1, \dots, a_{n-1}$ nicht alle verschwinden.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf man überdies annehmen, daß wenigstens einer der nichtverschwindenden Koeffizienten nicht durch p teilbar ist. Sollten tatsächlich alle Koeffizienten den Teiler p besitzen, so gäbe es sicher eine natürliche Zahl $r \geqq 1$ und einen Koeffizienten a_k $(0 \leq k \leq n-1)$ mit

$$p^r | a_o, p^r | a_1, \dots, p^r | a_{n-1} \quad \text{und} \quad p^{r+1} \nmid a_k.$$

Nach der Division von (5) durch p^r, die an der Ganzzahligkeit der Koeffizienten nichts ändert, würde dann der bei ξ^{n-k-1} stehende Koeffizient eine nicht durch p teilbare Zahl sein. Es ist also gerechtfertigt, von vornherein die Existenz eines Koeffizienten a_k mit $p \nmid a_k$ anzunehmen. Sollte es mehrere Koeffizienten mit dieser Eigenschaft geben, so möge a_k derjenige unter ihnen sein, der den <u>größten</u> Index aufweist.

Trotz dieser Vereinbarung ist es sogar statthaft, k=0 zu setzen. Die Erlaubnis erhält man durch eine einfache Überlegung. Multipliziert man (5) mit ξ^k und beachtet $\xi^n = p$, so ergibt sich

$$a_0\xi^{n+k-1}+\dots+a_{k-1}\xi^{n}+a_k\xi^{n-1}+a_{k+1}\xi^{n-2}+\dots+a_{n-1}\xi^{k}=0$$

$$a_0p\xi^{k-1}+\dots+a_{k-1}p+a_k\xi^{n-1}+a_{k+1}\xi^{n-2}+\dots+a_{n-1}\xi^{k}=0,$$

und geordnet

$$a_k\xi^{n-1}+a_{k+1}\xi^{n-2}+\dots+a_{n-1}\xi^{k}+a_0p\xi^{k-1}+\dots+a_{k-1}p=0. \tag{6}$$

In dieser Gleichung sind mit Ausnahme von a_k alle Koeffizienten durch p teilbar, da entweder ihr Index k überschreitet oder der Faktor p explizit auftritt. Die Festlegung k=0 würde also nur verlangen, statt (5) gegebenenfalls die äquivalente Gleichung (6) zu verwenden und die Koeffizienten neu zu bezeichnen.

Im weiteren möge deshalb

$$p\nmid a_0 \quad \text{und} \quad p\mid a_1, p\mid a_2, \dots, p\mid a_{n-1}$$

gelten. Dann gibt es ganze Zahlen $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ mit

$$a_1=c_1p,\quad a_2=c_2p,\dots,a_{n-1}=c_{n-1}p$$

und

$$a_0\xi^{n-1}+c_1p\xi^{n-2}+\dots+c_{n-2}p\xi+c_{n-1}p=0. \tag{7}$$

Wenn man jetzt (7) der Reihe nach durch $1,\xi,\xi^2,\dots,\xi^{n-1}$ dividiert, erhält man mit Rücksicht auf $\xi^n=p$ und nach entsprechender Umordnung das System der n Gleichungen

$$\begin{array}{l}
a_0\xi^{n-1}+c_1p\xi^{n-2}+c_2p\xi^{n-3}+\dots+c_{n-2}p\xi+c_{n-1}p=0\\
c_{n-1}\xi^{n-1}+a_0\xi^{n-2}+c_1p\xi^{n-3}+\dots+c_{n-3}p\xi+c_{n-2}p=0\\
c_{n-2}\xi^{n-1}+c_{n-1}\xi^{n-2}+a_0\xi^{n-3}+\dots+c_{n-4}p\xi+c_{n-3}p=0\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
c_1\xi^{n-1}+c_2\xi^{n-2}+c_3\xi^{n-3}+\dots+c_{n-1}\xi+a_0=0.
\end{array}$$

Folglich ist das n-tupel $(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n)=(\xi^{n-1},\xi^{n-2},\dots,\xi,1)$ eine Lösung des Gleichungssystems (1) mit den speziellen Koeffizienten

$$a_{kl}=\begin{cases} a_0 & \text{für } k=l\\ c_{l-k}p & \text{für } k<l\\ c_{n+l-k} & \text{für } k>l\end{cases}$$

und $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$. Außer der bereits angegebenen Lösung besitzt dieses homogene Gleichungssystem andererseits die triviale Lösung $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, ist also nicht eindeutig lösbar. Da jedoch alle Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 erfüllt sind, führt die Annahme der Gleichung (5) somit zu einem Widerspruch. ξ ist demzufolge eine algebraische Zahl mindestens n-ten Grades und der Satz bewiesen.

Dr. Lothar Schnabel, FSU
Sektion Mathematik
Bereich Theoretische Mathematik

Lösungen IMO

Aufgabe 2

Ist Q ein Punkt der Ebene, so bezeichne dQ eine Drehung um diesen Punkt um einen Winkel von 120° in Uhrzeigersinn.
Die Hintereinanderausführung von dA_1 und dA_2 $dA_1.dA_2$ ist eine Drehung um einen Punkt A_3' um 120° entgegen dem Uhrzeigersinn.
Die Punkte A_1, A_2 und A_3' bilden dabei ein regelmäßiges Dreieck.
Die Hintereinanderausführung von $dA_1.dA_2 = dA_3'^{-1}$ und dA_3 ist

$$\begin{cases} \text{die identische Abbildung, falls } A_3 = A_3' \\ \text{eine Verschiebung sonst.} \end{cases}$$

Bilden A_1, A_2 und A_3 kein regelmäßiges Dreieck, so ist die Abbildung $dA_1.dA_2 \ldots dA_{1986}$ die 662(=1986:3)fache Hintereinanderausführung der Verschiebung $v = dA_1 dA_2 dA_3$
v und auch v^{662} besitzen als Verschiebungen keine Fixpunkte, d.h. $P_0 \neq P_{1986}$.

Aufgabe 3

Eine Menge von i ($1 \leq i \leq 4$) verschiedenen Eckpunkten des Fünfecks $\{X_1,\dots,X_i\}$ heißt Streifen der Länge i, wenn

(1) $i = 1$ oder

(2) für alle k mit $1 \leq k < i$ gilt

X_{k+1} ist Nachbar von X_k.

Sind $x_1,\dots,x_i$ die den Punkten des Streifens $S = \{X_1,\dots,X_i\}$ im bewerteten Fünfeck F zugeordneten Zahlen, so sei

wert $S(F) = x_1+\dots+x_i$.

Fakt: Wird die in der Aufgabe definierte Operation Ω auf das bewertete Fünfeck F angewandt ,wobei das bewertete Fünfeck F' entsteht, so gilt

min $\{$wert $S(F)$: S ist Streifen$\}$ = min $\{$wert $S(F')$: S ist Streifen$\}$. Beweis:

Die Operation werde im Punkt Y angewandt (Abb.).

1. $S \cap \{X,Y,Z\} = \emptyset$, dann ist wert $S(F)$ = wert $S(F')$, da sich die Bewertung keiner der Punkte aus S ändert.

2. $S \cap \{X,Y,Z\} = \{X\}$, es sei $S = \{X_1,\dots,X_i,X\}$

   Wert $S(F) = x_1+\dots+x_i+x$

   wert $S(F') = x_1+\dots+x_i+(x+y)$

Falls $i=3$,so ist $\{X_1,X_2,X_3,X,Y\}$ die Menge aller fünf Eckpunkte und somit min $\{$wert $S(F)\} \leq$ wert $\{Y\}(F) < 0 <$ wert $S(F')$.

Falls $i<3$, so ist $\{X_1,\dots,X,Y\}$ ein Streifen S' in F und

   wert $S(F')$ = wert $S'(F)$.

3. $S \cap \{X,Y,Z\} = \{Z\}$ analog zu 2..

4. $S \cap \{X,Y,Z\} = \{X,Y\}$

   Wert $S(F')$ = wert $(S-\{Y\})(F) = x_1+\dots+x_i+(x+y)+(-y)$

5. $S \cap \{Y,X,Z\} = \{Y,Z\}$ analog zu 4..

6. $S \cap \{X,Y,Z\} = \{X,Y,Z\}$

   Wert $S(F)$ = wert $S(F)$.

Damit gibt es für jeden Streifen S einen Streifen S' derart, daß wert $S(F') \geq$ wert $S'(F)$,das heißt der kleinste Wert eines Streifens in F' kann nicht kleiner sein als der kleinste Wert eines Streifens in F. Damit ist der Fakt bewiesen.

Punkte eines Streifens, von denen nur ein benachbarter Punkt zum Streifen gehört, wollen wir Randpunkte des Streifens nennen, ihre nicht im Streifen liegenden benachbarten Punkte Nachbarn des Streifens.

Es sei S ein extremer Streifen,d.h. wert S(F) = min$\{$wert S'(F): S' Streifen$\}$. Dann sind die beiden Nachbarn von S mit nicht-

negativen Zahlen bewertet, denn sonst könnte man durch Hinzunahme eines solchen Nachbarpunktes einen Streifen mit geringeren Wert finden.

Wird die Operation Ω auf einen solchen Punkt angewandt, der nicht Randpunkt eines extremen Streifens S in F ist, so ist S auch im entstehenden Fünfeck F' extremer Streifen (Fälle 1 und 6 im obigen Beweis, man beachte, daß Ω nicht auf Nachbarn von S angewandt werden kann.

Eine solche Anwendung auf Nichtrandpunkte eines extremen Streifens kann höchstens dreimal hintereinander erfolgen. Dies läßt sich mittels einer Fallunterscheidung nach der Länge des Streifens überprüfen. Wir betrachten hier nur den Fall,daß $\{Y\}$ ein extremer Streifen ist!

In diesem Fall sind wert X(F) und wert Z(F) nichtnegativ. Ist wert W(F) < 0, so bringt die Anwendung von Ω auf W:

wert W(F') = -wert W(F) , wert V(F') = wert V(F) +wert W(F)

Wert X(F') kann nicht negativ sein, sonst wäre wert$\{X,Y,W\}$ (F) $<$ wert$\{Y\}$(F) .

Ω kann erneut nur auf V angewandt werden ,dann muß aber wert V(F) + wert W(F) < 0 .Als Ergebnis F": wert W(F")= wert V(F) wert V(F") = -wert W(F) - wert V(F), wert Z(F") ≥ 0.

Falls wert V(F) negativ ,so kann eine letzte Anwendung auf W erfolgen ,man erhält: wert W(F"') = -wertV(F), wert V(F"') = - wert W(F), d.h. nur positive Werte.

Nach endlich vielen Schritten muß Ω somit auf einen Randpunkt eines extremen Streifens angewandt werden.Bei dieser Anwendung wird nun dieser extreme Streifen durch einen kürzeren ersetzt (Fälle 4,5) bzw. ,wenn S bereits Länge 1 hat, so verringert sich die Anzahl der extremen Streifen; gibt es nur noch einen extremen Streifen, so erhöht sich der Wert des Fünfecks

$$\min\{S(F)\} < \min\{S(F')\} .$$

Solange dieses Minimum negativ ist, kann man Ω anwenden, d,h. nach endlich vielen Schritten wird erreicht,daß min $\{S(F)\}$ nichtnegativ wird. Das tritt aber genau dann ein, wenn alle Punkte nichtnegativ bewertet sind.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 17. 9. 1986

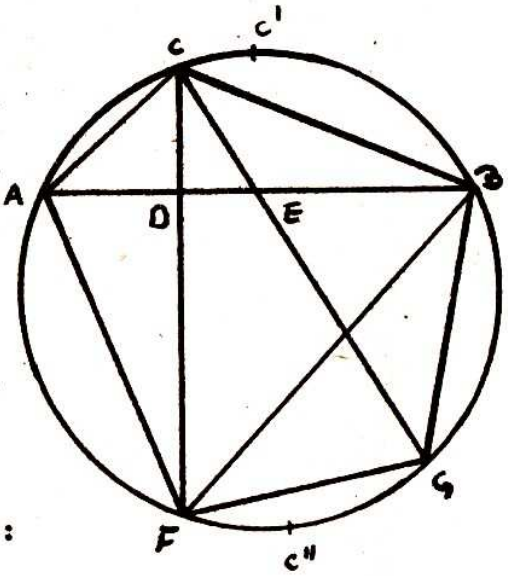
ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	20 (1986) 10	S. 145–160

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom Jugendobjekt Studienvorbereitung-Studienwerbung der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena
20. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M

S 4 nach Uta Boldt, Burg Stargard



Wenn DEGF einen Umkreis haben soll, ist es Sehnenviereck. Da auch □ FCBG Sehnenviereck und mit DEGF einen Innenwinkel gemeinsam hat, gilt

$\sphericalangle CFG + \sphericalangle CBG = \sphericalangle CFG + \sphericalangle DEG = 180^\circ$

$\underline{\underline{\sphericalangle CBG = \sphericalangle DEG}}$

Nach dem Außenwinkelsatz gilt:

$\sphericalangle DEG = \sphericalangle EBG + \sphericalangle EGB$

$= \sphericalangle EBG + \sphericalangle CBE$

$\underline{\underline{\sphericalangle EGB = \sphericalangle CBE}}$ (*)

Nach dem Sehnenperipheriewinkelsatz gilt:

$\sphericalangle CGB = \sphericalangle BAC$

und nach (*) $\underline{\underline{\sphericalangle ABC = \sphericalangle CAB}}$

$\Rightarrow$ DEGF besitzt einen Umkreis $\Leftrightarrow$ ABC ist gleichschenklig mit AB als Basis

$\Rightarrow$ C liegt auf $\overset{\frown}{AB}$ derart, daß $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$.

$\Rightarrow$ 2 mögliche Lösungen C' bzw. C".

S 12 nach Jürgen Schefter, Reichwalde

1. Fall: A, B liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden.

B' sei der an der Geraden gespiegelte Punkt B.

Aus der Skizze ist sofort ersichtlich:

g : Gerade durch CD

g_1: Gerade durch AB

g_2: Gerade durch AB'

Lösung: <u>1. Fall:</u> beide innere WH

$\sphericalangle$ ACB $= \gamma$

$\curvearrowright$ $\sphericalangle$ MCS $= \frac{\gamma}{2}$ (WH) und

$\sphericalangle$ CMS $= 180^\circ - \gamma$

(geschnittene Parallelen)

$\curvearrowright$ $\sphericalangle$ MSC $= \frac{\gamma}{2}$ (Winkelsumme $\triangle$ MSC $\to 180^\circ$)

$\curvearrowright$ $\sphericalangle$ MSC $=$ $\sphericalangle$ MCS

$\curvearrowright$ $\triangle$ MSC – gleichschenklig ($\overline{MS} = \overline{MC}$)

Analog folgt aus $\sphericalangle$ ABC $= \beta$:

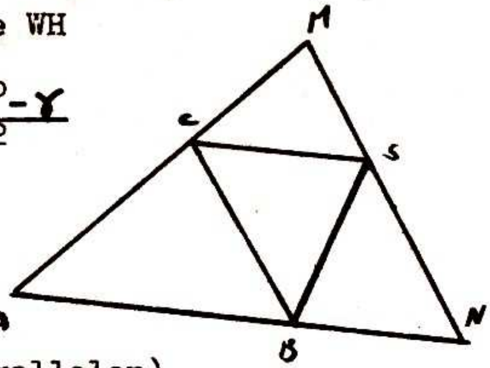
$\triangle$ SNB – gleichschenklig ($\overline{NS} = \overline{NB}$)

Dann ergibt sich:

$\overline{MS} + \overline{NS} = \overline{MN} = \overline{MC} + \overline{NB}$

============

<u>2. Fall:</u> beide äußere WH



$\sphericalangle$ ACB $= \gamma$

$\curvearrowright$ $\sphericalangle$ MCS $=$ $\sphericalangle$ BCS $= \frac{180^\circ - \gamma}{2}$

$= 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$

(äußere WH)

und

$\sphericalangle$ CMS $= \gamma$

(geschnittene Parallelen)

$\curvearrowright$ $\sphericalangle$ CSM $= 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ (Winkelsumme $\triangle$ CSM $\to 180^\circ$)

$\curvearrowright$ $\sphericalangle$ CSM $=$ $\sphericalangle$ MCS

$\curvearrowright$ $\triangle$ CSM – gleichschenklig ($\overline{CM} = \overline{SM}$)

Analog folgt für $\sphericalangle$ ABC $= \beta$:

$\triangle$ SNB – gleichschenklig ($\overline{NS} = \overline{NB}$)

Dann ergibt sich:

$\overline{MS} + \overline{NS} = \overline{MN} = \overline{MC} + \overline{NB}$

============

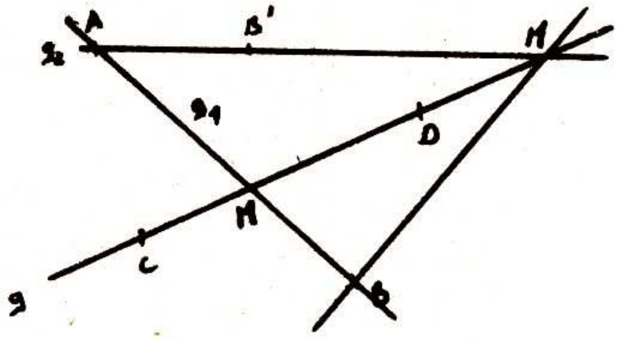
<u>3. Fall:</u> eine äußere, eine innere WH

$\sphericalangle$ ACB $= \gamma$

$\curvearrowright$ $\sphericalangle$ ACS $= \frac{180^\circ - \gamma}{2}$

$= 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$

(äußere WH)

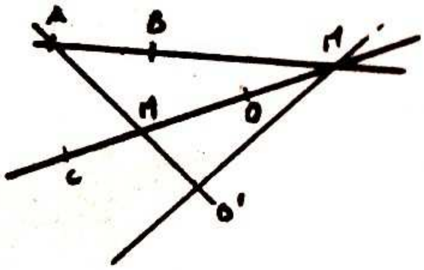


a) Liegt der Schnittpunkt S_1 von g und g_1 auf der Strecke $\overline{CD}$, so ist $S_1 = M$

b) Liegt der Schnittpunkt S_2 von g und g_2 außerhalb von $\overline{CD}$, so ist $S_2 = M$.

Je nachdem, ob keine, eine oder alle beide Bedingungen a) und b) erfüllt sind, gibt es keinen, einen oder 2 Punkte M.

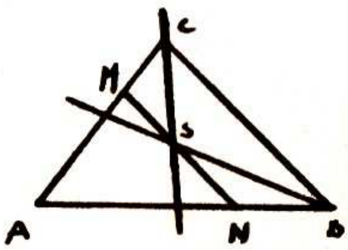
2. Fall: A, B liegen auf einer Seite der Geraden.
Verwendet man jetzt die Bezeichnungen
g_1: Gerade durch AB'
g_2: Gerade durch AB,
so gilt auch in diesem Fall a) und b).



S 13 nach Silke Umbreit, Ilmenau

geg.: - $\triangle$ ABC
- Winkelhalbierende (WH) von $\sphericalangle$ ABC und $\sphericalangle$ BCA $\cap$ S
- g $\parallel$ BC (g durch s)
- Schnittpkt. g/$\overline{AC}$ ≙ M
g/$\overline{AB}$ ≙ N

ges.: Bez.: $\overline{MN}$, $\overline{MC}$, $\overline{NB}$



und

$\sphericalangle$ CMS $= \gamma$ (geschnittene Parallelen)

$\curvearrowright$ $\sphericalangle$ MSC $= 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ (Winkelsumme $\triangle$ MSC $\rightarrow 180^\circ$)

$\curvearrowright$ $\sphericalangle$ MSC $= \sphericalangle$ ACS

$\curvearrowright$ $\triangle$ MSC - gleichschenklig ($\overline{MS} = \overline{MC}$)

$\sphericalangle$ ABC $= \beta$

$\curvearrowright$ $\sphericalangle$ NBS $= \frac{\beta}{2}$ (WH) und

$\sphericalangle$ NSB $= \frac{\beta}{2}$ ($\sphericalangle$ SBC $= \frac{\beta}{2}$, da WH $\curvearrowright$ geschnittene Parallelen)

$\curvearrowright$ $\sphericalangle$ NBS $= \sphericalangle$ NSB

$\curvearrowright$ $\triangle$ NBS - gleichschenklig ($\overline{NB} = \overline{NS}$)

Dann ergibt sich:

$$\left|\overline{SN} - \overline{SM}\right| = \underline{\underline{\overline{MN} = \left|\overline{NB} - \overline{MC}\right|}}$$

Sind die WH beide innere oder beide äußere, so gilt $\overline{MN} = \overline{NB} + \overline{MC}$. Ist eine WH innere und die andere äußere WH, so gilt $\overline{MN} = \left|\overline{NB} - \overline{MC}\right|$.

S 15 nach Jens Kandziora, Zehdenick

Lösung:

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} = s_n$$

Beweis durch vollständige Induktion:

1. Induktionsanfang: H(n) mit n=1

$$\frac{1}{6} = \frac{1\cdot4}{4\cdot2\cdot3} \qquad \text{wahre Aussage}$$

2. Induktionsschritt: H(k) $\Rightarrow$ H(k+1)

Induktionsvoraussetzung: $s_k = \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}$

Induktionsbehauptung: $s_{k+1} = \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}$

Beweis der Induktionsbehauptung:

$$s_k + a_{k+1} = s_{k+1} \quad \text{mit} \quad a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{k(k+3)^2+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)(k+1)(k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)} = \underline{\underline{\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)} = s_{k+1}}}$$

Da H(n) für n=1 richtig ist und da aus H(k) die Gültigkeit für H(k+1) folgt, ist diese Aussage wahr.

S 16 nach Karsten Sehger, Greiz

Anfangsmenge: a

Menge nach 1 Jahr: $a(1+ \frac{p}{100})$

Menge nach 1 Jahr und Abholzen: $a(1+ \frac{p}{100})-x$

Menge nach 2 Jahren: $\left[a(1+ \frac{p}{100})-x\right](1+ \frac{p}{100})$

Menge nach 2 Jahren und Abholzen: $\left[a(1+ \frac{p}{100})-x\right](1+\frac{p}{100})-x$

bzw.: $a(1+ \frac{p}{100})^2-x((1+ \frac{p}{100})^1+(1+ \frac{p}{100})^0)$

nach n Jahren: $a(1+ \frac{p}{100})^n-x\left[\sum_{i=0}^{n-1}(1+ \frac{p}{100})^i\right]$

$$qa = a(1+ \frac{p}{100})^n-x\left[\sum_{i=0}^{n-1}(1+ \frac{p}{100})^i\right]$$

$$\underline{\underline{x = \frac{a\left[(1+ \frac{p}{100})^n-q\right]}{\sum_{i=0}^{n-1}(1+ \frac{p}{100})^i}}}$$

&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&&

Wir danken Hans-Jürgen G ö r n e r für die Idee des Titelbildes !!!

S 17 nach Jürgen Schefter, Reichwalde

$$\frac{\log_a r}{\log_c r} = \frac{\log_n r - \log_b r}{\log_b r - \log_c r}$$

Wegen $\log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}$ folgt:

$$\frac{\ln r}{\ln a} : \frac{\ln r}{\ln c} = \left(\frac{\ln r}{\ln a} - \frac{\ln r}{\ln b}\right) : \left(\frac{\ln r}{\ln b} - \frac{\ln r}{\ln a}\right) \qquad \text{Da } r \neq 1:$$

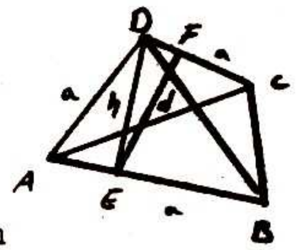
$$\frac{\ln c}{\ln a} = \frac{\ln b - \ln a}{\ln a \cdot \ln b} : \frac{\ln c - \ln b}{\ln b \cdot \ln c} = \frac{\ln b - \ln a}{\ln c - \ln b} \cdot \frac{\ln b \cdot \ln c}{\ln a \cdot \ln b}$$

$$1 = \frac{\ln b - \ln a}{\ln c - \ln b} = \frac{\ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{c}{b}}$$

$$\ln \frac{c}{b} = \ln \frac{b}{a}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \qquad \text{q.e.d.}$$

S 18 nach Guido Vollbeding, Haldensleben



Aus Symmetriegründen ist der Durchmesser d der Kugel gleich dem Abstand $\overline{EF}$ zweier gegenüberliegender Kanten, wobei E und F die Mittelpunkte der Kanten AB bzw. CD sind.
Folglich gilt (siehe Skizze) mit Hilfe des Satzes von Pythagoras

$$d^2 = h^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2-2\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2-\frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2},$$

$$d = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}a.$$

Der gesuchte Kugelradius beträgt $\frac{\sqrt{2}}{4}a$.

S 19 nach Harald Lieske, Eisenach

Bezeichnen wir mit H den Höhenschnittpunkt und mit H_B und H_A die entsprechenden zu h_a und h_b gehörigen Fußpunkte, so erhalten wir

$\sphericalangle CH_BH = \sphericalangle CH_AH = \frac{\pi}{2}$,

weiter

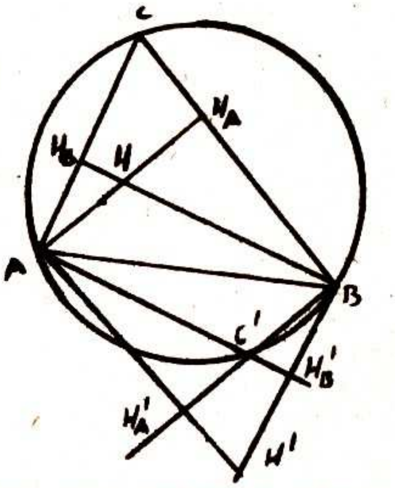
$\sphericalangle ACB = \text{const}$ (n.V.)

Damit

$\sphericalangle H_BHH_A = \text{const}$ (Winkelsumme)

und

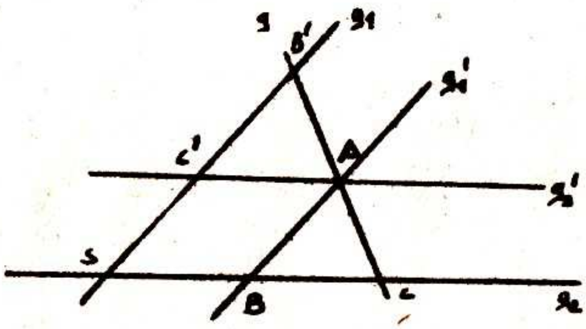
$\sphericalangle AHB = \text{const}$ (Scheitelwinkel)



Der geometrische Ort von H ist daher der Umkreis eines beliebigen Dreiecks $\triangle$ ABH.

Bemerkung: Aus $\sphericalangle ACB + \sphericalangle AHB = 180^\circ$ folgt $\sphericalangle AHB = \sphericalangle AC'B$ und daraus wiederum $\sphericalangle AHB + \sphericalangle AH'B = 180^\circ$, wenn man die aus Skizze ersichtliche Bezeichnung wählt. Der Umkreis von $\triangle$ AHB ist also dem von $\triangle$ ABC kongruent.

S 20 nach Harald Lieske, Eisenach



Es seien g_1 und g_2 die den Winkel einschließenden Strahlen, ferner seien g_1' und g_2' Strahlen mit

$g_1' \parallel g_1 \wedge A \in g_1'$;

$g_2' \parallel g_2 \wedge A \in g_2'$.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$g_2' \cap g_1 = C'$; $g_1' \cap g_2 = B$, $g \cap g_1 = B'$,

$g \cap g_2 = C$, $g_1 \cap g_2 = C$.

Offenbar ist der Flächeninhalt $A_\triangle$ des Dreiecks $\triangle$ SCB' nur vom Inhalt der Dreiecke $\triangle$ C'AB' und $\triangle$ BCA abhängig, d. h. es muß gelten

$$|C'A| \cdot h_{CA} + |BC| \cdot h_{BC} = A_\triangle \longrightarrow \min \qquad (*)$$

Nun ist aber

$$\triangle C'AB' \sim \triangle BCA$$

woraus

$$\frac{|C'A|}{h_{C'A}} = \frac{|BC|}{h_{BC}} . \qquad (**)$$

Betrachten wir ferner $h_{C'A}$ und $|BC|$ als voneinander abhängige Variablen, so erhalten wir mit (*) und (**) die Gleichung einer nach oben offenen Parabel, wenn wir noch $|BC| = x$ und $h_{C'A} = y$ setzen:

$$y = \frac{|C'A|}{x} h_{BC} \rightarrow |C'A| \cdot \frac{|C'A|}{x} h_{BC} + xh_{BC} = \overline{A}_{\diamond}$$

Das Extremum, das nach dem oben Gesagten ein absolutes Minimum sein muß, ermitteln wir aus der 1. Ableitung:

$$\overline{A}_{\diamond}' = -\frac{|C'A|^2}{x^2} h_{BC} + h_{BC} = 0$$

$$\rightarrow \quad x^2 - |C'A|^2 \rightarrow x = |C'A| .$$

Damit gilt in der Tat

$$|B'A| = |AC| . \qquad \text{q.e.d.}$$

S 21 nach Thilo Penzl, Karl-Marx-Stadt

$$x^{\log_a x+1} > a^2 x$$

Def.ber d. Log. $\rightarrow$ $x > 0$

Deshalb und wegen $a > 1$ ist der Logarithmus stets def.

$$x > 0: \iff x^{\log_a x} > a^2 \quad (>1)$$

$$\iff \log_a x^{\log_a x} > \log_a a^2$$

$$\iff \log_a x \log_a x > 2 \log_a a$$

$$\iff (\log_a x)^2 > 2$$

$$\iff |\log_a x|^2 > 2$$

$$\iff |\log_n x| > \sqrt{2}$$

1. Fall: $\log_a x \geq 0$ d. h. wegen $a > 1$ gilt $x \geq 1$ (1)

$$\Leftrightarrow \log_a x > \sqrt{2} = \log_a a \cdot \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_a x > \log_a a^{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x > a^{\sqrt{2}} \qquad (\text{da } a > 1)$$

Wegen $a > 1$ ist auch die Bedingung (1) erfüllt

$$\alpha_1 = (a^{\sqrt{2}}; \infty)$$

2. Fall: $\log_a x < 0$ d. h. wegen $a > 1$ gilt $0 < x < 1$

$$\Leftrightarrow -\log_a x > \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_a x < -\sqrt{2} = (-\sqrt{2}) \log_a a$$

$$\Leftrightarrow \log_a x < \log_a a^{-\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x < a^{-\sqrt{2}} \qquad (\text{da } a > 1)$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{a^{\sqrt{2}}}$$

Die rechte Seite ist wegen $a > 1$ kleiner als 1.

Somit ist $\alpha_2 = (0; \frac{1}{a^{\sqrt{2}}})$

$$\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2 = \left\{ (0; \frac{1}{a^{\sqrt{2}}}), (a^{\sqrt{2}}; \infty) \right\}$$

S 22 nach Thilo Penzl, Karl-Marx-Stadt

Bei dieser Aufgabe ist nicht die Anzahl der Gesamtlose angegeben. Somit sei diese gleich n.

a) Hier müssen aus den 8 Gewinnen genau 2 Gewinne und aus den n-8 Nieten 3 Nieten gezogen werden.
D. h. es gibt $\binom{8}{2} \cdot \binom{n-8}{3}$ Möglichkeiten.

b) Hier werden die Möglichkeitsanzahlen von genau 2,3,4 und 5 Gewinnen addiert.
Es werden genau i ($i \in N$; $2 \leq i \leq 5$) Gewinne gezogen.
D. h. aus den 8 Gewinnen müssen i ausgewählt werden.
Außerdem müssen aus den n-8 Nieten 5-i ausgewählt werden. Somit ist die Gesamtanzahl gleich $\sum_{i=2}^{5} \binom{8}{i} \cdot \binom{n-8}{5-i}$.

Preisaufgaben

S 61 ① Durch die Spitze eines geraden Kegels werde eine Ebene gelegt, welche die Basis des Kegels mit dem Winkel α an der Sehne AB der Länge a schneidet. Der kürzere Bogen über der Sehne entspreche dem Winkel β. Man berechne das Volumen des Kegels, wobei α, β, a bekannt sind.

S 62 ① In eine Kugel mit dem Radius R seien 8 gleiche Kugeln einbeschrieben. Jede von diesen berührt 3 der anderen einbeschriebenen Kugeln sowie die Oberfläche der Kugel mit dem Radius R. Man finde den Radius der einbeschriebenen Kugeln, wenn ihre Mittelpunkte die Eckpunkte eines Würfels sind.

S 63 ① Gegeben sei eine Kugel S und eine Gerade g. Man kann nun eine Ebene durch g legen, so daß beim Schnitt mit der Kugel auf der Ebene ein Kreis entsteht. Man ermittle den geometrischen Ort aller Mittelpunkte der so entstehenden Kreise und untersuche die Fälle, daß g S berührt, schneidet oder keinen Punkt mit S gemeinsam hat.

S 64 ① Für welche komplexen Zahlen a und b gibt es ein Polynom p(x) mit

$$(x^2+ax+b)\cdot p(x) = x^4-1 .$$

S 65 ① Man zeige, daß die quadratische Gleichung

$$a^2x^2 + (b^2+a^2-c^2)x + b^2 = 0$$

keine reellen Lösungen hat, wenn

$$a+b>c \quad \text{und} \quad |a-b|<c .$$

S 66 ① Найти геометрическое место проекций данной точки пространства на плоскости, проходящие через другую данную точку.

Quadratzerlegung in kleine Quadrate

Eine unter den Mathematikern lang diskutierte Frage war es, zu entscheiden, ob man ein Quadrat in kleinere, jedoch paarweise verschiedene Quadrate zerlegen kann. Lange Zeit schien es sogar unmöglich, ein sogenanntes "quadratiertes" Quadrat zu finden, zumal es für die analoge Fragestellung im Raum eine klare Antwort gibt.

1. Läßt sich ein Würfel in paarweise verschiedene kleinere Würfel zerlegen?

Die Antwort hierauf lautet NEIN, wobei die Begründung leicht verbal formuliert werden kann. Man nimmt an, es gibt eine solche Zerlegung des Würfels. Betrachtet man die Grundfläche des zerlegten Würfels, so wird dieses Quadrat durch die aufgesetzten Würfel in kleinere Quadrate zerlegt. Davon wähle man das kleinste Quadrat und betrachte den zugehörigen Würfel bzw. dessen obere Fläche. Da neben diesem Würfel nur größere Würfel Platz finden, muß diese Oberseite des kleinsten Grundflächenwürfels wiederum zerlegt werden in kleinere Quadrate. Betrachtet man auch davon wieder das kleinste und setzt die Überlegungen analog fort, so erkennt man, daß es keinen kleinsten Würfel in der Zerlegung des Ausgangswürfels geben kann. Das widerspricht jedoch der Annahme, daß ein Würfel in paarweise verschiedene Würfel zerlegt werden kann.

Kehren wir jedoch zurück zur Fragestellung in der Ebene. Aus ähnlichen Gründen wie im dreidimensionalen Fall kann man sich leicht vorstellen, daß bei Existenz einer Quadratzerlegung in unserem Sinne, das kleinste Quadrat hierbei nicht am Rand plaziert werden kann und natürlich nicht in einer Ecke. Um der Lösung des Problems näher zu kommen, ist es sinnvoll, sich mit der Zerlegung von Rechtecken in paarweise nichtkongruente Quadrate zu beschäftigen. Stößt man auf quadratierte Rechtecke, so kann man einerseits fragen, ob unter den verschiedenen Rechtecken ein Quadrat ist oder sich vielleicht aus den erhaltenen Rechtecken ein Quadrat zusammensetzen läßt.

Es ist sicher schnell einzusehen, daß eine Rechteckzerlegung mit 2, 3 oder 4 paarweise verschiedenen Quadraten nicht möglich

ist, weil ja das kleinste dieser Quadrate keinen Randkontakt haben darf. Es ist auch logisch, daß die Quadratseiten stets parallel zu den Rechteckseiten gelegt werden müssen.
Versuchen wir nun, uns stückweise der Lösung unseres Problems zu nähern.

2. Ist ein Rechteck in 5 paarweise verschiedene Quadrate zerlegbar?

Bis auf Decktransformationen des Rechtecks gibt es nur eine Möglichkeit, fünf Quadrate $Q_1,\ldots,Q_5$ zu einem Rechteck zusammenzuschließen. Dabei geht es uns immer zuerst um eine prinzipielle Lage, so daß die Quadrate in den folgenden Skizzen als Rechtecke angedeutet werden.

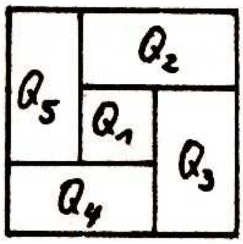


Abb. 1

Nun gilt jedoch sofort für die Seitenlängen a_i von Q_i:
$a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_2$, was wegen $a_2 > a_2$ ein Widerspruch ist.
Somit genügen fünf paarweise verschiedene Quadrate nicht zur Zerlegung eines Rechtecks.
Auch mit einem sechsten Quadrat Q_6, das von allen anderen verschieden ist, ist die Bildung eines Rechtecks nicht möglich.
Es reicht nicht aus, um eine eventuelle Lücke in Abbildung 1 zu schließen.

3. Ist es möglich, ein Rechteck in 7 paarweise verschiedene Quadrate zu zerlegen?

Da in Abbildung 1 nur zwei Quadrate ergänzt werden sollen, darf nur eine freie Ecke entstehen, die wir nun versuchen zu schließen. Es genügt dies für die Lagen von Abb. 2 und 3 zu diskutieren.

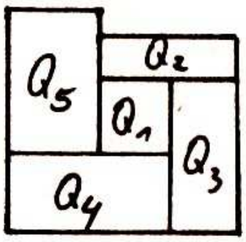


Abb. 2

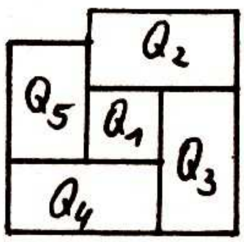


Abb. 3

Aus Abbildung 2 ist sofort ersichtlich, daß einerseits $a_5 > a_1+a_2$, d. h. $a_5 > a_2$ und andererseits gilt wie oben: $a_2 > a_3 > a_4 > a_5$, d. h. $a_2 > a_5$, was zusammen nicht möglich ist.
Damit bleibt die einzige Hoffnung, durch Hinzufügen von Q_6 und Q_7 in Abb. 3 eine Lösung zu finden, wie dies in Abb. 4 dargestellt ist.

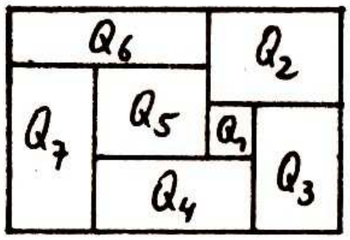


Abb. 4

Ablesbar sind dann folgende Gleichheiten:

(1) $a_2 = a_3+a_1$ (2) $a_3 = a_4+a_1$

(3) $a_4 = a_5+a_1$ (4) $a_7 = a_5+a_4$

(5) $a_6 = a_5+a_7$ (6) $a_5+a_6 = a_1+a_2$

Aus den ersten drei Gleichungen erhält man

(7) $a_2 = a_5+3a_1$ und aus der letzten Gleichung

(8) $a_2 = a_5+a_6-a_1$, was (9) $a_6 = 4a_1$ zur Folge hat.

Betrachtet man nun (4) bis (6), so ergibt sich

(10) $a_6 = 3a_5+a_1$, woraus sofort (11) $3a_5 = a_6-a_1$ folgt.
Setzt man in (11) die Aussage (9) ein, erhält man $a_5 = a_1$, was im Widerspruch zu einer möglichen Zerlegung des Rechtecks in paarweise verschiedene Quadrate steht.

4. Kann ein Rechteck in 8 paarweise verschiedene Quadrate zerlegt werden?

Nachdem wir festgestellt haben, daß 7 Quadrate für dieses Problem nicht ausreichen, ist es notwendig, sich ausgehend von Abbildung 1 klarzumachen, wie die anderen drei Quadrate angegliedert werden könnten.
Betrachten wir zuerst eine freie Ecke, wie dies in den Abbildungen 2 und 3 angedeutet ist, wobei wir uns aus obigen Gründen nur Bild 3 widmen müssen. Für die Anlagerung von Q_6 gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten: a) $a_6 < a_5$
b) $a_6 > a_5$

Dadurch sind jedoch Q_7 und Q_8 in ihrer Lage fest, wie in Abbildung 5 und 6 verdeutlicht.
Im ersten Fall ergibt sich zwangsläufig

(12) $a_7 < a_5 < a_4 < a_3 < a_2 < a_8$, im Gegensatz zum Bild ($a_7 > a_8$).
Auch bei Variante 2 erhält man einen Widerspruch, da $a_8 < a_7 < a_6 < a_2 = a_1+a_3$ und $a_8 = a_4+a_3$ wie aus der Zeichnung er-

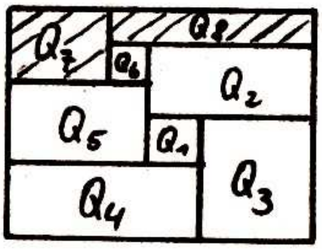


Abb. 5

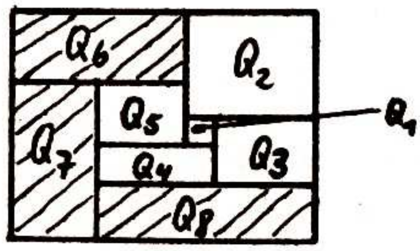


Abb. 6

sichtlich. Folglich ist $a_1+a_3 > a_4+a_3$ und somit $a_4 < a_1$ im Gegensatz zur Annahme, daß Q_1 das kleinste Quadrat ist.
Wählt man von Abbildung 1 ausgehend zwei freie Ecken aus, so müssen diese zwangsläufig benachbart sein, da sonst drei anzulagernde Quadrate keine Auffüllung zu einem Rechteck gestatten, wovon man sich leicht anhand von Abbildung 7 überzeugt.

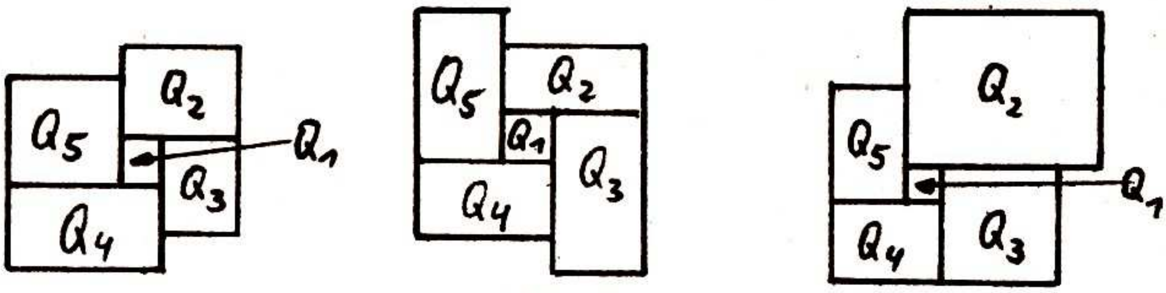


Abb. 7

Auch bei der Auswahl benachbarter Ecken lassen sich die ersten drei Varianten aus Abbildung 8 als unmöglich nachweisen, da bei Anlagerung dreier Quadrate entweder Lücken bleiben oder wenigstens zwei kongruente Quadrate auftreten.

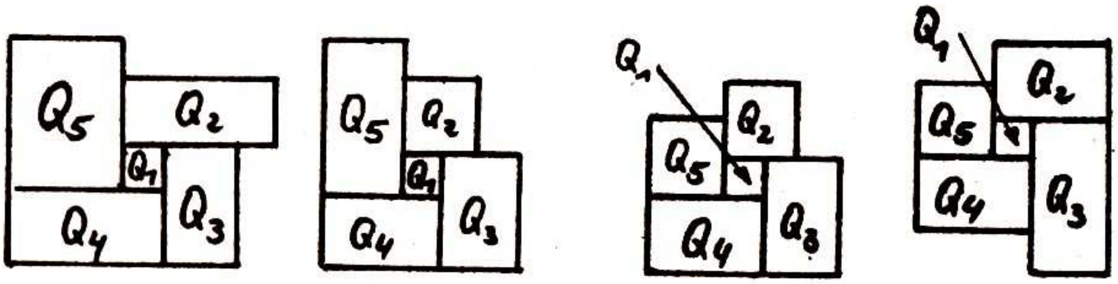


Abb. 8

Nur im vierten Bild der Abbildung 8 können drei weitere Quadrate so geschickt gelagert werden, daß sich prinzipiell ein Rechteck bauen läßt, wie in Abbildung 9 dargestellt.

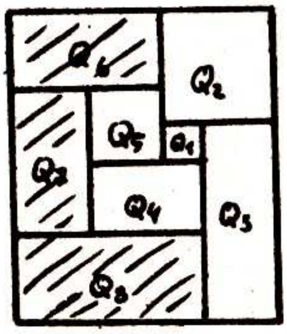


Abb. 9

Auch in diesem Fall ist schnell ein Widerspruch gezeigt. Aus der Zeichnung ersieht man:

(13) $a_2 = a_3+a_1$ (14) $a_3 = a_4+a_8+a_1$
(15) $a_6 = a_5+a_7$ (16) $a_4 = a_5+a_1$
(17) $a_8 = a_4+a_7$ (18) $a_7 = a_4+a_5$

Somit erhält man

$$
\begin{aligned}
a_2+a_1 &= a_3+2a_1 && \text{wegen(13)}\\
&= a_4+a_8+3a_1 && \text{wegen(14)}\\
&= a_5+a_4+a_7+4a_1 && \text{wegen(16) und (17)}\\
&= a_4+a_5+a_7+4a_1 && \\
&= a_5+a_6+5a_1 && \text{wegen(15) und (16)}
\end{aligned}
$$

und $a_2+a_1 > a_5+a_6$, was nicht mit Abbildung 9 in Einklang zu bringen ist ($a_5+a_6 = a_1+a_2$).
Damit ist gezeigt, auch Frage 4 muß negativ beantwortet werden.

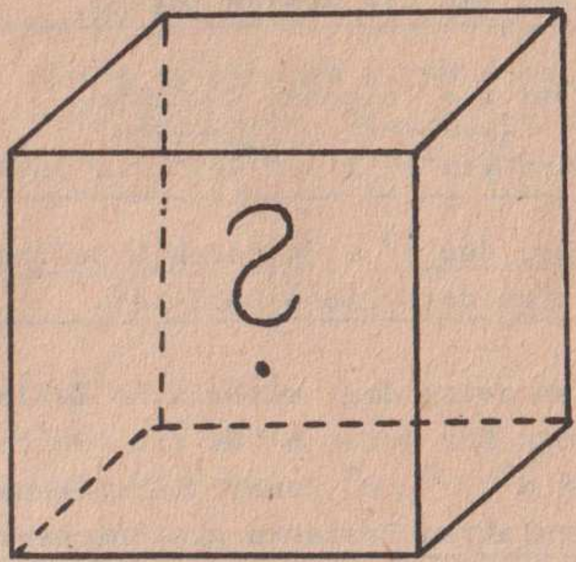
Fortsetzung folgt

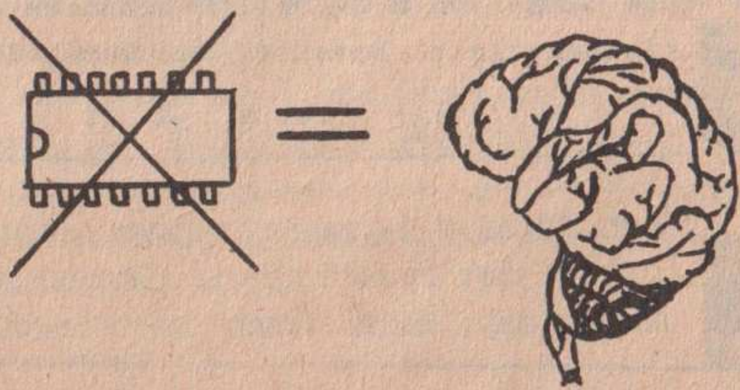
Karsten Müller, FSU

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 8. 10. 1986

5#INPUT#„VOLUMEN
EINES WÜRFELS"
15#PRINT# . . .





12
86

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

Herausgegeben vom
Jugendobjekt Studienvor
bereitung-Studienwerbun
der Sektion Mathematik
an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena
20. Jahrgang
ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR:
0,20 M

Preisaufgaben

S 67 ①
Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ habe rationale Koeffizienten. Eine Lösung der Gleichung sei $x = 1 + \sqrt{3}$. Man bestimme die zweite Lösung.

S 68 ②
Man löse die folgende Gleichung

$$\sqrt[3]{2 - x} = 1 - \sqrt{x - 1}$$

S 69 ①
Beweise, daß $n^3 + 5n$ durch 6 teilbar ist, wenn n eine beliebige natürliche Zahl ist.

S 70 ①
Gegeben seien drei natürliche Zahlen a, b, c. Beweise: Wenn man für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Dreieck mit den Seitenlängen a^n, b^n, c^n konstruieren kann, dann sind alle so konstruierten Dreiecke gleichschenklig.

S 71 ②
Die Summe von n natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sei kleiner als k. Beweise, daß dann gilt:

$$a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_n! < k!$$

S 72 ②
В правильную n-угольную присму вписан шар, касающийся всех граней призмы. Вокруг призмы также описан шар. Найти отношение объемов двух шаров.

Einsendeschluß: 1. 3. 87

Lösungsbedingungen:
Für jede vollständige Lösung erhält der Einsender die bei der entsprechenden Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir Büchergutscheine an alle Einsender, die im abgelaufenen Schuljahr mindestens 10 Punkte erreichten. Einsender mit weniger als 10 Punkten werden die in diesem Jahr erreichten Punkte für das nächtste Schuljahr gutgeschrieben.

Die Lösungen sind - jede Lösung auf einem gesonderten Blatt, versehen mit Name, Adresse, Klassenstufe des Einsenders - unter dem Kennwort " WURZEL-Preisaufgaben" an uns zu senden. Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Dies bedeutet insbesondere, daß die in der Lösung unbewiesen verwendeten Sachverhalte anzugeben sind. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen, Hilfslinien, ...) muß deutlich erkennbar sein.

Quadratzerlegung (Fortsetzung)

5. Gibt es eine Möglichkeit, ein Rechteck in 9 paarweise verschiedene Quadrate zu zerlegen?

Bei der Betrachtung von Abbildung 5 und dem anschließenden Größenvergleich fällt auf, daß die linke Ungleichung in (12) mit ausschlaggebend für das Nichtgelingen einer Rechteckzerlegung ist. Die Hinzunahme eines neunten Quadrates ermöglicht es, dies zu beheben, wie Abbildung 10 zeigt.

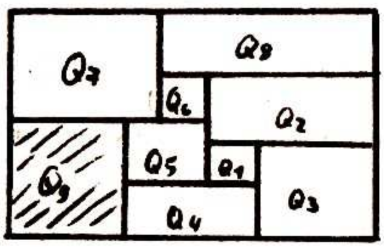


Abb. 10

Notieren wir zuerst wieder alle vorhandenen Gleichheiten, die aus der Zeichnung erkennbar sind:

(19) $a_2 = a_1+a_3$ (20) $a_3 = a_4+a_1$ (21) $a_4 = a_5+a_1$
(22) $a_7 = a_6+a_8$ (23) $a_8 = a_2+a_6$ (24) $a_9 = a_4+a_5$
(25) $a_5+a_6 = a_1+a_2$ (26) $a_6+a_7 = a_9+a_5$

Mit (19) bis (21) ergibt sich wie schon oben (27) $a_2 = 3a_1+a_5$ und aus (25) folgt (28) $a_2 = a_5+a_6-a_1$. Die letzten beiden Glei-

chungen liefern (29) $a_6 = 4a_1$.
Lößt man (25) nach a_5 auf und setzt (29) ein, so erhält man (30) $a_5 = a_2-3a_1$. a_5 ist jedoch wegen (26) gleich $a_6+a_7-a_9$, was nach Einsetzen von (22) und (24) die Gleichung (31) $a_5 = 2a_6+a_8-(a_4+a_5)$ liefert. Unter Berücksichtigung von (21) und (23) ergibt sich (32) $a_5 = 3a_6+a_2-(2a_5+a_1)$, woraus mit (29) $3a_5 = 11a_1+a_2$ folgert.
Unter Einbeziehung von (30) eröffnet sich danach aus der letzten Gleichung $3a_2-9a_1 = 11a_1+a_2$, das heißt (33) $a_2 = 10a_1$.
Die Gleichungen (19) - (24) erlauben nun die Darstellung aller anderen Quadratseiten a_3 bis a_9 als Vielfache von a_1, womit eine erste Lösung des Rechteckzerlegungsproblems gefunden ist:

$a_3 = 9a_1$, $a_4 = 8a_1$, $a_5 = 7a_1$, $a_7 = 18a_1$, $a_8 = 14a_1$, $a_9 =15a_1$, sowie $a_6 = 4a_1$ von oben (29).
Die konkrete Realisierung ist in Abbildung 11 gegeben:

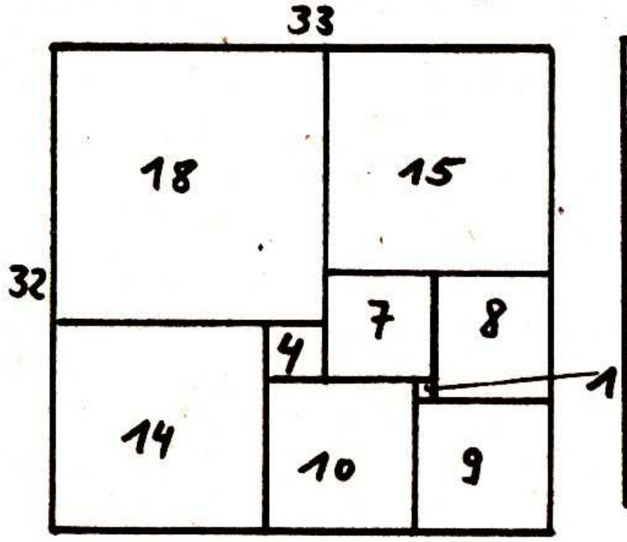


Abb. 11

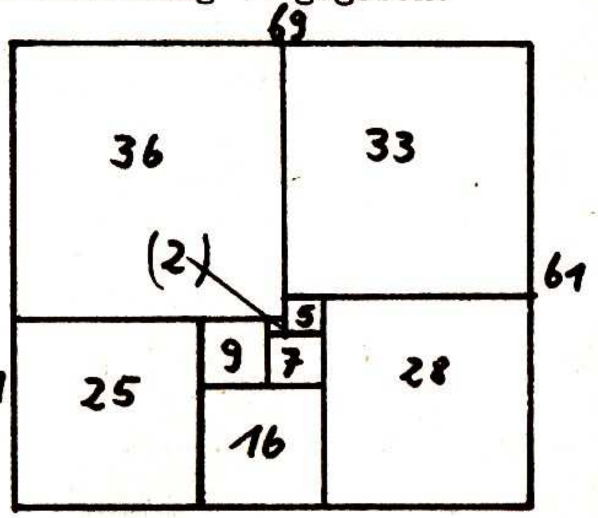


Abb. 12

Beim Mustern aller Möglichkeiten zur Anlagerung von vier weiteren Quadraten an Lücken, die bei der Konfiguration aus Abbildung 1 entstehen können, erhält man eine weitere von Abbildung 11 verschiedene Lösung. Dabei ist vom dritten Bild in Abbildung 7 auszugehen. Analoge Rechnungen wie im obigen Fall liefern die Verhältnisse der Quadratseitenlängen, wie sie in Abbildung 12 dargestellt sind. Die beiden gefundenen Lösungen sind die einzig möglichen im Fall von 9 Quadraten, wobei auf den exakten Nachweis dieser Behauptung hier verzichtet wird.

Ziel war es, eine Methode aufzuzeigen, die auch weitere Lösungen für 10 und mehr Quadrate ermöglicht. Leicht ist es andererseits, von einer vorhandenen Zerlegung eines Rechtecks in n paarweise verschiedene Quadrate zu einer Zerlegung mit a+1 paarweise verschiedenen Quadraten zu gelangen, indem man ein Quadrat der Seitenlänge einer Rechteckseite anlagert (in Abbildung 11 z. B. Q_{10} mit $a_{10} = 32$).

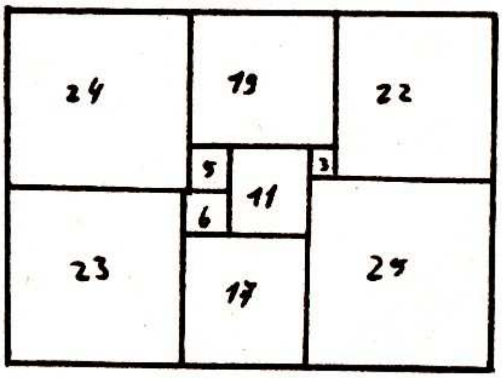


Abb. 13

Abbildung 13 zeigt eine der 10 möglichen Rechteckzerlegungen in 10 paarweise verschiedene Quadrate, die kein Randquadrat besitzen.
Die Ermittlung aller solcher Rechteckzerlegungen in paarweise verschiedene Quadrate wurde in den letzten 25 Jahren auch vermöge der Rechentechnik vorgenommen. So konnten alle Rechteckzerlegungen aufgelistet werden, in denen maximal 19 paarweise verschiedene Quadrate enthalten waren. Es zeigten sich zwei schöne Ergebnisse.

a) Unter all diesen Rechtecken war kein Quadrat zu finden. Das bedeutet auch, daß eine eventuell mögliche Quadratzerlegung in paarweise verschiedene Quadrate mindestens 20 Quadrate erfordert.
b) Unter den 408 existierenden Rechteckzerlegungen in 13 paarweise verschiedene Quadrate befinden sich zwei Möglichkeiten der Zerlegung ein und desselben Rechtecks, wobei alle 26 beteiligten Quadrate paarweise verschieden sind (vgl. Abbildung 4).

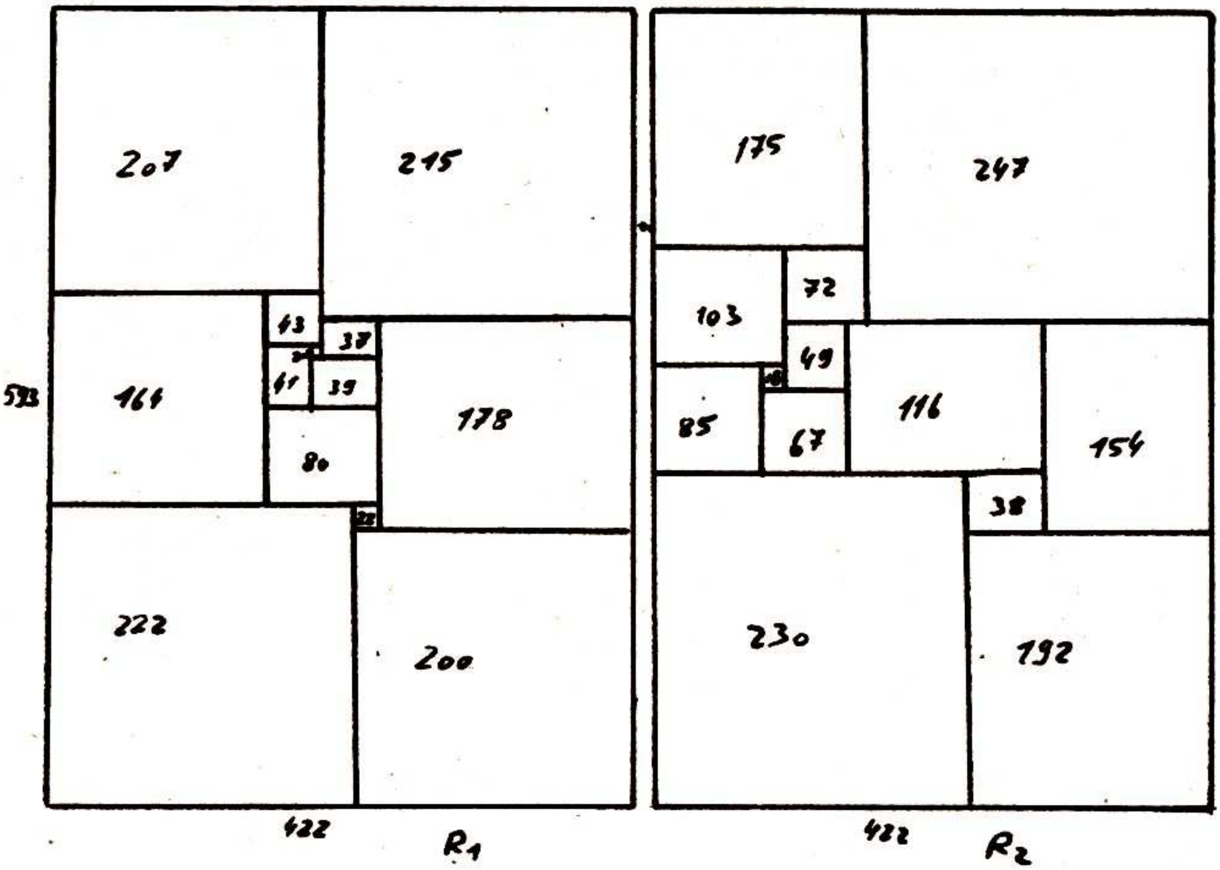


Abb. 14

Mit b) ist nun die Möglichkeit gegeben, ein Quadrat in paarweise verschiedene Quadrate zu zerlegen, wenn die ermittelten Rechtecke und zwei zusätzliche Quadrate wie in Abbildung 15 angeordnet wurden.

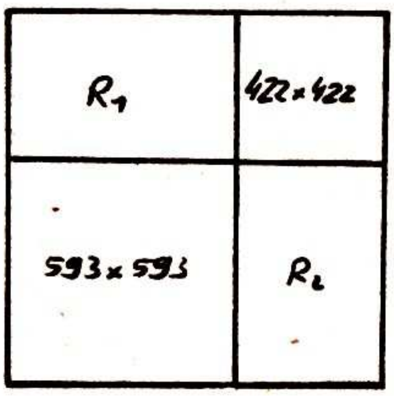


Abb. 15

Damit war die Frage nach Quadratierten Quadraten bejaht, doch die Problemstellung fand sofort eine Fortsetzung. Insbesondere niederländische Mathematiker beschäftigten sich nun damit, welche Minimalzahl M von Quadraten die Zerlegung eines Quadrates gestattet. Nach obigen Ergebnissen ist klar:

$$20 = M = 28.$$

Lange Zeit stand der "Weltrekord" bei M = 24. Die entsprechende Zerlegung zeigt Abbildung 16, wobei bemerkenswerter Weise links oben ein Teilrechteck der Größe 94 x 121 aus dreizehn Quadraten vorhanden ist.

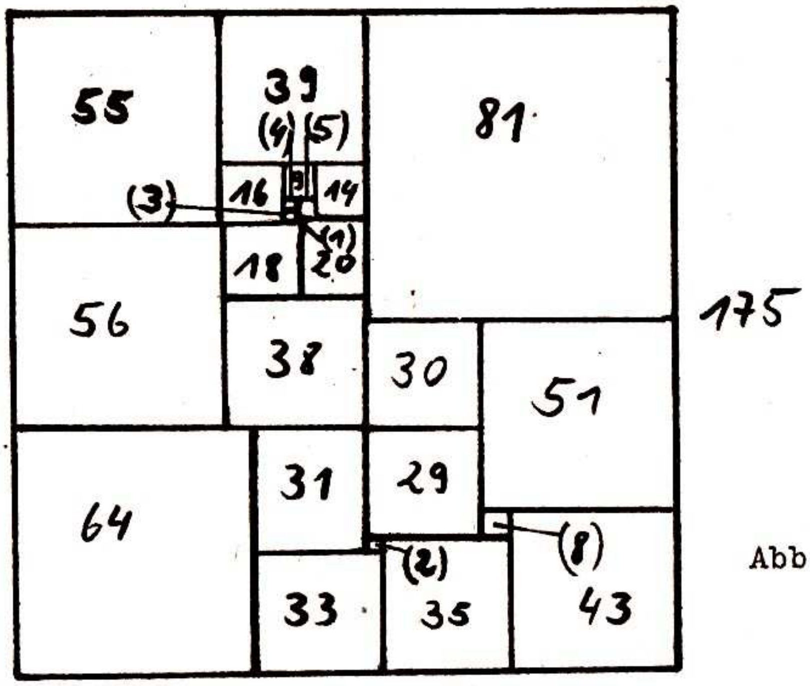


Abb. 16

Die endgültige Lösung lieferte der Holländer A.J.W. DJUWESTIN erst gegen Ende der siebziger Jahre natürlich mit Hilfe von Rechnern. Er bewies, daß die kleinste Anzahl von paarweise verschiedenen Quadraten, die ein Quadrat zerlegen können, 21 ist, indem er eine Lösung für 21 vorgab und zeigte, daß es mit weniger Quadraten nicht geht. Abbildung 17 verdeutlicht den nun ewigen "Rekord".

Die dortige Zerlegung weist noch die Eigenschaft auf, daß es kein echtes Teilrechteck gibt, welches durch zwei oder mehr Quadrate gebildet wird.

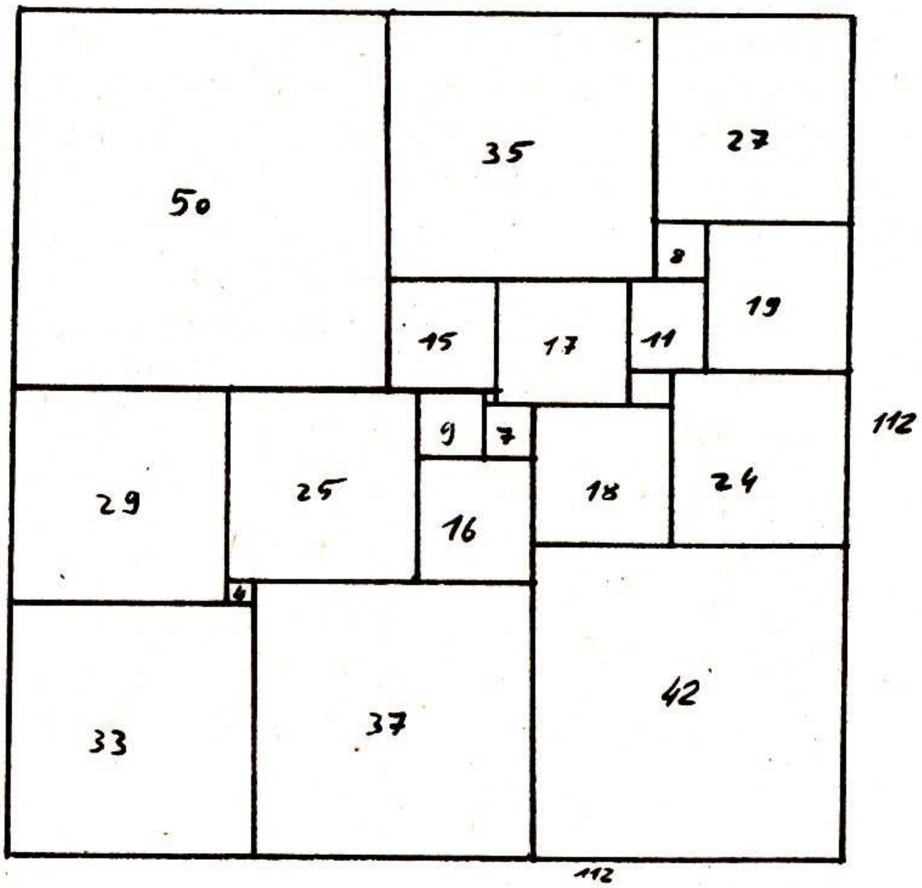


Abb. 17

Möglich sind ebenfalls Zerlegungen eines Quadrates in 25, 26, 27 bzw. 37 kleinere paarweise verschiedene Quadrate. Wäre man in der Lage, diese Folge fortzusetzen, um insgesamt für alle Anzahlen n zwischen 24 und 43 Zerlegungen eines Quadrates in n paarweise verschiedene Quadrate anzugeben, so hätte man sogar die Aussage, daß für jede natürliche Zahl n = 24 eine solche Zerlegung möglich ist. Das ist leicht einzusehen, denn man erhält ja aus jeder Zerlegung in m Teile eine Zerlegung in m+20 Quadrate, wenn man das kleinste vorhandene Quadrat in 21 noch kleinere zerlegt, so wie es Abbildung 17 zeigt. Diese Vermutung liegt nahe, wenn ein Beweis auch sicher äußerst kompliziert wäre.

Dr. K. Müller, FSU
Sektion Mathematik
Bereich Theoretische Mathematik

Lösungen

S 23 nach Pia Thieme, Gera

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\sin x \sin^2 x + \cos x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\, 2\sin x \cos x$$

$$\sin x - \sin x \cos^2 x + \cos x - \sin^2 x \cos x = 1 - \sin x \cdot \cos x$$

$$\sin x + \cos x - \sin x \cdot \cos x(\cos x + \sin x) = 1 - \sin x \cdot \cos x$$

$$(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = 1 - \sin x . \cos x$$

1. $1 - \sin x \cdot \cos x = 0$

$$1 = \sin x \cdot \cos x$$

$$2 = \sin 2x \quad \lightning \quad \text{zu } \sin 2x \leq 1$$

2. $1 - \sin x \cdot \cos x \neq 0$ Division

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\cos(x + \tfrac{\pi}{2}) + \cos x = 1 \quad \text{mit } \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$2\cos\frac{2x - \frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{-\frac{\pi}{2}}{2} = 1$$

$$\cos(x - \tfrac{\pi}{4})\cos(-\tfrac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(x - \tfrac{\pi}{4})\,\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(x - \tfrac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$x = \operatorname{arc}\cos\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 0 + 2k\pi \end{cases} \quad k \text{ ganz}$$

$$\text{alle } x = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ 0 + 2k\pi \end{cases} \quad \text{erfüllen die Gleichung.}$$

S 24 nach Harald Lieske, Eisenach

Zum Zeitpunkt hat Fahrzeug 3 den Weg $v_3t = s_3$ zurückgelegt, die anderen Fahrzeuge die Wege $s_1 = 25+50t$ bzw. $s_2 = 20+40t$. Zum Zeitpunkt t' ist Fahrzeugt 2 erreicht, zum Zeitpunkt $t'' = t'+1,5$ Fahrzeug 1. Damit erhalten wir

$$v_3t' = 40t'+20 \qquad v_3t'' = 50t''+25$$

$$t' = \frac{20}{v_3-40} \qquad t'' = \frac{25}{v_3-50}$$

$$\frac{20}{v_3-40} + 1,5 = \frac{25}{v_3-50}$$

$$v_3^2 - \frac{280}{3}v_3 + 2000 = 0$$

$$v_{31} = 60$$

$$v_{32} = 33\,\frac{1}{3}$$

Ein sinnvolles Ergebnis liefert nur v_{31}. Fahrzeug 3 bewegt sich mit 60 km/h.

S 34 nach Thomas Pigorsch, Eisleben

Aus den Dreiecksungleichungen $a+b>c$, $a+c>b$, $b+c>a$ folgt sofort $a+b-c>0$, $a+c-b>0$, $b+c-a>0$.
$(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)>0$, durch Umordnungen erhalte ich dann:

$$(ab+ac-a^2+b^2+bc-ab-bc-c^2+ac)(a+c-b)>0$$
$$(2ac-a^2+b^2-c^2)(a+c-b)>0$$
$$2a^2c+2ac^2-2abc-a^3-a^2c+a^2b+b^2c-b^3-ac^2-c^3+bc^2>0$$
$$a^2c+ac^2-2abc-a^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2-b^3-c^3>0$$
$$a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2)-2abc > a^3+b^3+c^3$$
$$a(b^2-2bc+b^2)+b(a^2-2ac+c^2)+c(a^2-2ab+b^2)+4abc > a^3+b^3+c^3$$
$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc > a^3+b^3+c^3$$

q.e.d.

S 33 nach Thilo Kuessner

Gegeben ist ein Rhombus ABCD mit $\sphericalangle BAD = 30^\circ$, $\overline{BD} = d_1$, $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = d_2$

Im Rhombus gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$.

Deshalb sind die Dreiecke ABC, ABD, ACD, BCD gleichschenklig und es gilt $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADB = 75^\circ$ und $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CDB = 75^\circ$ wegen $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DAB = 30^\circ$.

Nach dem Sinussatz gilt nun im ABD

$$(1) \quad \frac{a}{d_1} = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 30^\circ}$$

Weiterhin ist $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ und damit $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = 15^\circ$

Nach dem Sinussatz gilt nun im ABC

$$(2) \quad \frac{d_2}{a} = \frac{\sin 150^\circ}{\sin 15^\circ}$$

Es ist $\sin 75^\circ = \sin(45+30)^\circ = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$$= 1/4 \sqrt{2} (\sqrt{3} + 1)$$

$\sin 30^\circ = 1/2$

$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = 1/2$

$\sin 15^\circ = 1/2 \sin 30^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = 1/4 \sqrt{2} (\sqrt{3} - 1)$

Aus (1) und (2) folgt hiermit

$$\frac{a}{d_1} = \frac{1}{2} \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$$

$$\frac{d_2}{a} = \frac{1}{2} \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$$

und damit $a/d_1 = d_2/a$.

q.e.d.

Lösungen IMO

Aufgabe 1:

Nehmen wir an, es gibt ein d, so daß für alle $a,b \in \{2,5,13,d\}$ gilt: $ab-1$ ist Quadratzahl.

Dann gibt es Zahlen a,b, mit

$$2d-1 = a^2 \qquad (1)$$
$$5d-1 = b^2 \qquad (2)$$
$$13d-1 = c^2 \qquad (3)$$

1. Fall: $2 \mid d$; $d=2d_1$. Dann ist $a^2 \equiv -1 \bmod 4$.
Es gibt aber keine ganze Zahl a mit $a^2 \equiv -1 \bmod 4$. Wir erhalten einen Widerspruch.

2. Fall: $2 \nmid d$; $d = 2d_1+1$.
Aus (2), (3) folgt

(2') $10d_1+4 = b^2$, $2\ b$; $b = 2b_1$
(3') $26d_1+12 = c^2$, $2\ c$; $c = 2c_1$

Aus (2') und (3') ergibt sich durch Einsetzen

$$10d_1 + 4 = 4b_1^2$$
$$26d_1 + 12 = 4c_1^2 \quad \text{bzw.}$$

$$5d_1 + 2 = 2b_1^2$$
$$13d_1 + 5 = 2c_1^2 ,$$ durch Subtraktion der beiden Gleichungen

$$8d_1 + 4 = 2c_1^2 - 2b_1^2$$
$$4d_1 + 2 = c_1^2 - b_1^2$$
$$2 \equiv c_1^2 - b_1^2 \bmod 4.$$

Eine solche Kongruenzgleichung hat aber keine Lösung in ganzen Zahlen c_1, b_1, da nur 0,1 quadratische Reste modulo 4 sind, mithin nur $-1,0,1$.

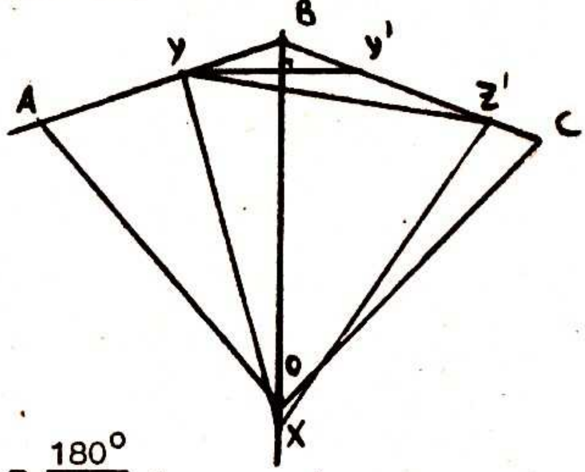
Aufgabe 4:

Liegt Y auf der n-Eckseite AB, so liegt Z auf einer der benachbarten Seiten.
Die Menge aller möglichen Lagen von X hat die gleichen Symmetrieeigenschaften wie das n-Eck.

Es genügt, alle Lagen von Y auf der Seite AB zu untersuchen, wobei Z auf der Seite BC liegen möge.

Behauptung: X liegt auf der Geraden OB.

Beweis: Es sei r der Umkreisradius des n-Ecks, S seine Seitenlänge.
Y, Z liegen auf dem Kreis mit Radius r um X. Y' sei das Spiegelbild von Y an der Geraden OB.
Y' liegt auf BC (Abb.)



$$\sphericalangle YY'Z = 90^\circ + \sphericalangle YBO$$
$$= 90^\circ + 80^\circ - \frac{180^\circ}{n} = 180^\circ - \frac{180^\circ}{n},$$

falls $\overline{YB} < \overline{BZ}$

$$\sphericalangle YY'Z = 90^\circ - \sphericalangle YBO = \frac{180^\circ}{n}, \text{ falls } \overline{BZ} < \overline{YB}.$$

Da $\sphericalangle YXZ = \frac{360^\circ}{n}$, liegt Y' nach der Umkehrung des Zentriwinkelsatzes auf dem Kreis um X mit Radius $r = XY$.
Damit liegt X auf der Mittelsenkrechten von YY', d. h. OB.

Behauptung: $r \leq \overline{BX} \leq \dfrac{r}{\cos \frac{180^\circ}{n}}$

$$\sphericalangle ABC = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

$$\sphericalangle YXZ = \frac{360^\circ}{n}$$

Damit gilt im Viereck YBZX $\quad \sphericalangle XYB + \sphericalangle BZX = 180^\circ$

Wenigstens einer dieser Winkel ist nicht kleiner als 90°.
O.B.d.A. sei dies $\sphericalangle XYB$.
Dann gilt $\quad \overline{YX} \leq \cos \sphericalangle YXB \cdot \overline{BX}$,
$\quad \overline{YX} \geq \overline{BX}$,
das bringt mit $\overline{YX} = r$ und $\sphericalangle YXB = \frac{180^\circ}{n}$ die behauptete Ungleichung.

Aufgabe 5:

Im Fall $x = y = 0$ ergibt sich

1. $f(0)\cdot f(0) = f(0)$, damit $f(0) = 1$

2. $x \geq 0, \quad y = 2$

   $f(x\, f(2))\, f(2) = f(x+2)$, damit

   $f(x+2) = 0$, d. h.

   $f(x) = 0$ für $x \geq 2$.

3. $0 < y < 2, \quad x = 2-y$

   $f((2-y)\cdot f(y))\cdot f(y) = f(2)$

   $f((2-y)\cdot f(y)) = 0$

   $(2-y)\cdot f(y) \geq 2$

   $$f(y) \geq \frac{2}{2-y} \quad \text{für alle } y \text{ mit } 0 < y < 2.$$

4. $0 < x+y < 2$

   Wegen 3 gilt

   $f(x) \geq \frac{2}{2-x} > 0,$

   $f(y) \geq \frac{2}{2-y} > 0,$

   $f(x+y) \geq \frac{2}{2-(x+y)} > 0.$

   Aus $f(x\cdot f(y)) = f(x+y) > 0$ folgt

   $f(x\cdot f(y)) \neq 0$

   $x\cdot f(y) < 2$

   $$f(y) < \frac{2}{x} \quad \text{für alle } x \text{ mit } 0 < x < 2-y$$

   $$f(y) \leq \inf_{0<x<2-y} \frac{2}{x} = \frac{2}{2-y}$$

   Die Ungleichungen aus 3. und 4. zusammen ergeben

   $$\frac{2}{2-y} \leq f(y) \leq \frac{2}{2-y}, \quad \text{d. h.}$$

   $$(*) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{2-x} & \text{falls } 0 \leq x < 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

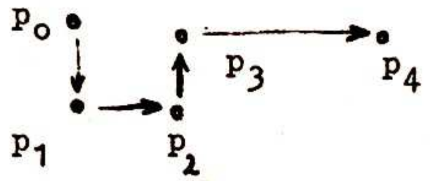
   Damit f die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, muß f obige Form (*) haben. Diese Funktion genügt auch allen Forderungen.

Aufgabe 6:

Wir betrachten Wege der folgenden Form auf der vorgegebenen Gitterpunktmenge:

Wenn ich horizontal zu einem Punkt gekommen bin, kann ich vertikal zum nächsten gehen und umgekehrt.

Beispiel:



Ein Zyklus ist ein Weg $p_0, p_1, \ldots, p_n$ mit $p_n = p_0$, $n \; 1$.

S a t z : Wenn in der Punktmenge kein Zyklus existiert, und wenn $w = p_0, p_1, \ldots, p_n$ ein Weg maximaler Länge ist, so ist der Punkt p_0 spalten- oder zeilenisoliert, d. h. es gibt keinen anderen Punkt der Gitterpunktmenge, der die gleiche Abszisse wie p_0 hat oder es gibt keinen, der die gleiche Ordinate wie p_0 hat.

Beweis: Angenommen, p_0 sei weder zeilen- noch spaltenisoliert und p_1 habe die gleiche Abszisse wie p_0. p sei ein von p_0 verschiedener Punkt mit gleicher Ordinate. Dann ist $p, p_0, p_1, \ldots, p_n$ entweder ein längerer Weg als $p_0, p_1, \ldots, p_n$ oder $p \in \{p_2, \ldots, p_n\}$, d. h. es existiert ein Zyklus.

Wir beweisen nun die Möglichkeit der Färbung mittels vollständiger Induktion.

Falls die Punktmenge aus höchstens zwei Punkten besteht, ist eine Färbung der gewünschten Art stets möglich.

Die Punktmenge enthalte $k > 2$ Punkte.

Enthält sie einen Zyklus, so färbe ich die Punkte des Zyklus abwechselnd mit rot und weiß.

Die restlichen Punkte kann ich nach Induktionsvoraussetzung färben.

Falls kein Zyklus existiert, so gibt es o.B.d.A. einen zeilenisolierten Punkt p_0. Die restlichen Punkte seien nach Induktionsvoraussetzung gefärbt.

Falls in der Spalte des Punktes p_0 die Anzahl der roten

$$\text{Punkte} \left\{\begin{array}{l}\text{gleich der}\\ \text{größer als die}\\ \text{kleiner als die}\end{array}\right. \text{Anzahl}$$

$$\text{der weißen Punkte ist, so färbe } p_o \left\{\begin{array}{l}\text{beliebig}\\ \text{weiß}\\ \text{rot}\end{array}\right.$$

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung – Studienwerbung"
Leiter: Harro Rosner
Chefredakteur: Thomas Gundermann
Redaktion: J. Dimler, S. Kratochwil, K. Tauscher, N. Patschke, O. Kotowski, E. Stein
Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900
Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012
Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.
Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 11. 11. 1986, 11.11 Uhr

Das Titelbild verdanken wir Lars Lehmann

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	20 (1986) 12	S. 177–192