

wurzel $\sqrt{\quad}$ 1 · 89

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

**Herausgegeben vom Jugendobjekt Studien-
vorbereitung-Studienwerbung der Sektion
Mathematik an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena**

**23. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M**

Inhaltsverzeichnis 2

Inhaltsverzeichnis 88

Aufgaben zur gegenseitigen Lage von Ebenen und Körpern Dr. Rainer Dörr	2
Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras Frank Heinrich	13
Problem des Lucas Dr. Michael Fothe, Prof. Dr. sc. Immo O. Kerner	18
Lösungshinweise bzw. Lösungsangaben zu den „Aufgaben zur gegenseitigen Lage von Ebenen und Körpern“ Dr. Rainer Dörr	24
Nachträge zur „Lehre von Gerade und Ungerade“ Dieter Bauke	29
Lösungen der 28. IMO (nach Jörg Jahnel)	34
Allgemeine magische Quadrate und Produkte Frank Heinrich	41
Das Verfahren von Graeffe zur näherungsweise Berechnung der Nullstellen von Polynomen (von Dr. Kurt Stallknecht)	50
Feuerbach und die merkwürdigen Punkte (I) Prof. Dr. E. Hertel, Katrin Tschirpke	57
Das HORNER-NEWTON-Verfahren Dr. J. Komusiewicz	66
Feuerbach und die merkwürdigen Punkte (II) Prof. Dr. E. Hertel, Katrin Tschirpke	74

Hat Matthias wirklich die besseren Chancen? Doz.Dr.H.Englisch	82
Einfache Pflasterungen mit Rechtecken C.Müller	98
Kooperation mit dem VEB Maxhütte Jens Dittmann	105
Maria-Pussi Stefan Posselt	109
Einführung in die Assembler-Programmierung (I) Dr.Joachim Puhl	122
Einführung in die sphärische Trigonometrie (I) Prof.Schlosser	135
Einführung in die sphärische Trigonometrie (II) Prof.Schlosser	147
Analogon zum Satz des Pythagoras Jörg Strehmann, Frank Bielig	162
Einführung in die Assembler-Programmierung (II) Dr.Joachim Puhl	170
Crofton's Seillienensatz (I) Dr.S.Nagel	178
Einführung in die Assembler-Programmierung (III) Dr.Joachim Puhl	184

Auswertung der Wurzel-Preisaufgaben 1987/88

Beim Lösen der im Schuljahr 87/88 (d.h. von Heft 9/87 bis Heft 7/8/88) veröffentlichten Preisaufgaben erzielten folgende 8 Einsender die besten Ergebnisse:

Harald L i e s k e	Eisenach	61 Punkte
Jürgen S c h e f t e r	Reichwalde	61 Punkte
Thilo K u e s s n e r	Greifswald	51 Punkte
Jochen W e t z e l	Sömmerda	45 Punkte
Christian K l i e s e n e r	Jena	42 Punkte
Henrik H o l k e	Leipzig	38 Punkte
Gerald S c h m i d t	Stendal	37 Punkte
Petra K u c k u k	Berlin	34 Punkte

Den oben genannten gratulieren wir recht herzlich. Ein Dankeschön gilt auch allen anderen, die sich an das Lösen der Preisaufgaben gewagt haben. Für das nächste Jahr hoffen wir auf einen weiteren Aufwärtstrend in den Einsendungen und wünschen dazu allen Lesern viel Erfolg.

Für alle Leser, die sich am Preisaufgaben-Wettbewerb beteiligen wollen, hier noch einmal die ausführlichen Lösungsbedingungen:

Die Lösungen sind - jede Lösung auf ein gesondertes Blatt, versehen mit Name und Adresse - unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgaben" an uns zu senden. Alle Aussagen sind stets zu beweisen. Unbewiesen verwendete Tatsachen, die über den Schulstoff hinausgehen, sind anzugeben. Der Lösungsweg (einschließlich Nebenrechnungen u.ä.) muß deutlich erkennbar sein.

Für vollständige Lösungen erhält der Einsender die für die Aufgabe angegebene Punktzahl. Am Ende des Schuljahres versenden wir an alle Einsender, die mindestens 10 Punkte erreichten, einen Buchscheck im Werte von 0,50 M je Punkt. Einsendern mit weniger als 10 Punkten werden diese Punkte für das nächste Schuljahr gutgeschrieben.

U 1 Найдите отношение сторон прямоугольного треугольника, если известно, что одна половина гипотенузы (от вершины до середины гипотенузы) видна из центра вписанной окружности под прямым углом.



U 2 Man zeige, daß für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ und $k \geq 2$ die Zahl n^k als Summe von n aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen dargestellt werden kann.



U 3 Es sei ABCD ein konvexes Viereck mit der Fläche F .

Man zeige: $s \leq \frac{1}{2}(\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD})$



U 4 Man löse die Gleichungen



a) $3^x + 1 = 2^y$

b) $3^x - 1 = 2^y$

in natürlichen Zahlen.

U 5 Der Inkreis des Dreiecks ABC berühre die Seiten AB, BC, AC in den Punkten M, N bzw. P.



Es gelte $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$

Man beweise, daß das Dreieck ABC dann gleichseitig ist.

U 6 Auf dem Graphen der Funktion $y = x^2$ liegen die Punkte A (a, a^2) und B (b, b^2) , wobei $a < b$. Man finde denjenigen Punkt M (m, m^2) mit $a < m < b$, für welchen die Summe der Flächen der Segmente, die vom Graphen und den Strecken AM bzw. BM gebildet werden, minimal ist.



Die Funktion $f(x) = [x]$

Bekanntlich gibt es zu jeder reellen Zahl x genau eine ganze Zahl g mit der Eigenschaft $g \leq x < g+1$. Die durch die Vorgabe von x eindeutig bestimmte ganze Zahl g heißt das größte Ganze von x und wird mit dem von GAUSS eingeführten Symbol $[x]$ bezeichnet. Die so für alle reellen Zahlen definierte Funktion $f(x) = [x]$ ist insbesondere für die Zahlentheorie von Bedeutung. Leider geben die meisten mathematischen Nachschlagewerke keine oder nur unbefriedigend Auskunft über ihre Eigenschaften und Anwendungen. Die Autoren möchten mit der vorliegenden Abhandlung diese Lücke schließen helfen.

Einen ersten Eindruck von der Funktion $f(x) = [x]$ vermittelt ihr in Abb. 1 dargestellter treppenförmiger Graph. Er setzt sich aus zur Abszissenachse parallelen halboffenen Strecken der Länge 1 zusammen. Der jeweils linke Endpunkt der Strecken gehört dem Graphen an, nicht jedoch der jeweils rechte.

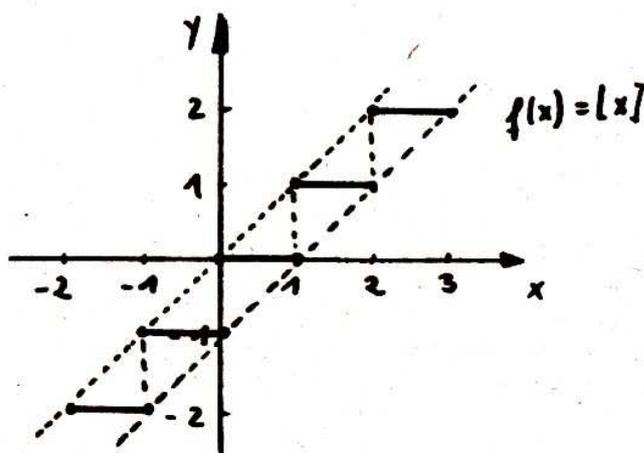


Abb. 1

Eine nahe Verwandte der betrachteten Funktion ist $f(x) = \{x\} := x - [x]$, deren Funktionswerte dem gebrochenen Teil von x entsprechen. Sie ist periodisch mit der Periodenlänge 1 und beschränkt. Ihr Graph erinnert an eine Säge.

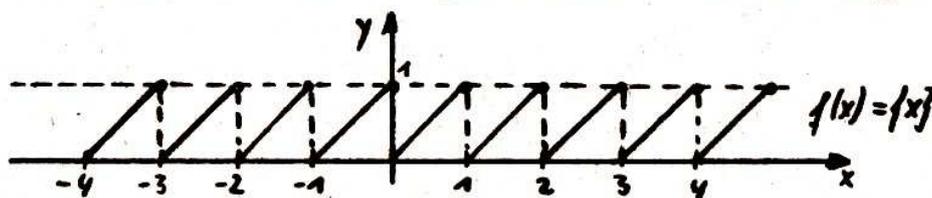


Abb. 2

1. Elementare Eigenschaften des Symboles $[x]$

Der Satz 1 stellt die einfachsten und am häufigsten benötigten Eigenschaften des Symboles $[x]$ vor.

S a t z 1:

- (1) Ist k ganzzahlig, so gilt $[x+k] = [x]+k$.
 (2) Ist x nicht ganzzahlig, so gilt $[-x] = -[x]-1$.
 (3) Ist k eine positive ganze Zahl, so gilt

$$\left[\frac{x}{k} \right] = \left[\frac{[x]}{k} \right].$$

- (4) $[x_1] + [x_2] + \dots + [x_n] \leq [x_1+x_2+\dots+x_n]$.

Beweis: Die Behauptung (1) folgt unmittelbar aus der Definition des Symboles $[x]$. Für alle reellen Zahlen x ist $[x] \leq x < [x]+1$ und somit $[x]+k \leq x+k < [x]+k+1$. Wegen der Ganzzahligkeit von $[x]+k$ ergibt sich $[x+k] = [x]+k$, also (1).

Um (2) zu bestätigen, kann man sich der bereits bewiesenen Eigenschaft (1) bedienen. Ist $x \notin \mathbb{Z}$ und folglich von der Gestalt $x=[x]+r$ mit $0 < r < 1$, erhält man nach (1)

$$[-x] = [-[x]-r] = -[x]+[-r].$$

Wegen $-1 < -r < 0$ gilt $[-r] = -1$ und somit (2).

Etwas mehr Mühe bereitet der Beweis von (3). Ist $k > 0$ und t eine beliebige reelle Zahl, so gilt mit $[t] \leq t < [t]+1$ auch

$$k[t] \leq kt < k[t]+k.$$

Ersetzt man in dieser Ungleichung t durch $\frac{[x]}{k}$, folgt

$$k \left[\frac{[x]}{k} \right] \leq [x] < k \left[\frac{[x]}{k} \right] + k.$$

Wie man bemerkt, werden nach dieser Substitution ausschließlich ganze Zahlen miteinander verglichen. Da aber für beliebige ganze Zahlen a und b mit $a < b$ stets auch $a+1 \leq b$ richtig ist, ergibt sich weiter

$$k \left[\frac{[x]}{k} \right] \leq [x] < [x]+1 \leq k \left[\frac{[x]}{k} \right] + k.$$

Beachtet man nun $[x] \leq x < [x]+1$, erhält man hieraus nach Division durch $k > 0$

$$\left[\frac{[x]}{k} \right] \leq \frac{x}{k} < \left[\frac{[x]}{k} \right] + 1.$$

Diese Ungleichung liefert wegen der Ganzzahligkeit von $\left[\frac{[x]}{k} \right]$ die behauptete Gleichheit (3).

Den Beweis von (4) kann man leicht mittels vollständiger Induktion führen. Für $n=1$ ist die Aussage (4) trivial. Angenommen, die Behauptung ist für $n = m \geq 1$ und beliebige reelle Zahlen x_1, x_2, \dots, x_m wahr.

$$\sum_{k=1}^m [x_k] \leq \left[\sum_{k=1}^m x_k \right]$$

Aus dieser Induktionsannahme und $[t] \leq t$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} [x_k] &= \sum_{k=1}^m [x_k] + [x_{m+1}] \leq \left[\sum_{k=1}^m x_k \right] + [x_{m+1}] \\ &= \left[\sum_{k=1}^m x_k \right] + [x_{m+1}] \leq \left[\sum_{k=1}^m x_k + x_{m+1} \right] = \left[\sum_{k=1}^{m+1} x_k \right], \end{aligned}$$

also die Allgemeingültigkeit von (4) für $n = m+1$. Damit ist auch die letzte Behauptung des Satzes 1 bewiesen.

2. Die HERMITESche Formel

Nunmehr soll das größte Ganze des Vielfachen einer reellen Zahl näher untersucht werden. Mit den bisherigen Kenntnissen ist mit Ausnahme einiger Spezialfälle für $[nx]$ und positivem ganzzahligem n lediglich die grobe Abschätzung $n[x] \leq [nx] \leq nx$ gesichert. Genauere Auskunft über $[nx]$ gibt die HERMITESche Formel.

Satz 2: Für alle $x \in \mathbb{R}$ und beliebige positive ganze Zahlen n gilt

$$(5) \quad [nx] = \sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n} \right].$$

Beweis: Setzt man $x = [x] + r$ mit $0 \leq r < 1$, so liefert (1) wegen der Ganzzahligkeit von $n[x]$ für die linke Seite von (5)

$$[nx] = [n[x] + nr] = n[x] + [nr].$$

Für die rechte Seite von (5) gewinnt man analog zunächst

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n} \right] &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[[x] + r + \frac{k}{n} \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \left([x] + \left[r + \frac{k}{n} \right] \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [x] + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{nr+k}{n} \right] = n[x] + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{nr+k}{n} \right] \end{aligned}$$

und weiter durch die Anwendung von (3) in Verbindung mit (1)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n} \right] = n[x] + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{[nr] + k}{n} \right].$$

Da wegen $n \geq 1$, $0 \leq r < 1$ und $0 \leq k \leq n-1$ stets

$$0 \leq \left[\frac{[nr] + k}{n} \right] \leq \left[\frac{2(n-1)}{n} \right] = \left[2 - \frac{2}{n} \right] \leq 1$$

gilt, sind die Summanden der erhaltenen Restsumme nur der Werte 0 und 1 fähig. Die ersteren sind für den Wert dieser Restsumme bedeutungslos. Es sind genau die Summanden, für welche $[nr] + k < n$ ist. Somit erhält man schließlich

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[x + \frac{k}{n} \right] = n[x] + \sum_{k=n-[nr]}^{n-1} 1 = n[x] + [nr]$$

und die Bestätigung der Formel (5).

3. Das Reziprozitätsgesetz von EISENSTEIN

Zuerst einmal bedarf der Begriff des Reziprozitätsgesetzes einer Erläuterung. Es sei $T(a,b)$ ein für a und b definierter Term, wobei a und b einem gewissen Grundbereich entnommen sind. Ist dann auch $T(b,a)$ definiert, so heißt ein gesetzmäßiger Zusammenhang zwischen den Termen $T(a,b)$ und $T(b,a)$ ein Reziprozitätsgesetz. Solche Reziprozitätsgesetze sind bereits aus dem Schulunterricht bekannt. Beispielsweise gilt für positive reelle Zahlen a und b die einfache Beziehung

$$\log \frac{a}{b} + \log \frac{b}{a} = 0,$$

das Reziprozitätsgesetz der Logarithmusfunktion. Ein Reziprozitätsgesetz für das größte Ganze ist der folgende Satz von EISENSTEIN.

Satz 3: Es seien a und b beliebige ungerade ganze Zahlen mit $a \geq 3$, $b \geq 3$ und $\text{ggT}(a,b) = 1$. Dann gilt

$$(6) \quad \sum_{k=1}^{\frac{a-1}{2}} \left[\frac{bk}{a} \right] + \sum_{l=1}^{\frac{b-1}{2}} \left[\frac{al}{b} \right] = \frac{(a-1)(b-1)}{4}.$$

Beweis: Für jedes geordnete Paar (k,l) der Summationsindizes soll im weiteren die ihm entsprechende Differenz $bk-al$ etwas näher betrachtet werden. Überdies sei zur Abkürzung

$$S(a,b) := \sum_{k=1}^{\frac{a-1}{2}} \left[\frac{bk}{a} \right]$$

vereinbart. Die zweite auf der linken Seite von (6) stehende Summe ist dann offensichtlich $S(b,a)$.

Zunächst bemerkt man, daß keine der Differenzen $bk-al$ verschwindet. Denn wäre $bk-al = 0$ und somit $al=bk$, müßte $a|bk$ (a teilt bk) gelten. Da jedoch $\text{ggT}(a,b) = 1$ und $a \neq 1$ vorausgesetzt sind, würde dies $a|k$ erfordern. Das ist aber wegen

$$0 < 1 \leq k \leq \frac{a-1}{2} < a$$

unmöglich. Demnach gilt stets $bk-al \neq 0$.

Nun soll die Anzahl der positiven Differenzen $bk-al$ ermittelt werden. Denkt man sich k fest gewählt, so ist genau dann $bk-al > 0$, wenn l der Bedingung $1 < \frac{bk}{a}$ genügt. Wegen $\frac{bk}{a} \notin \mathbb{Z}$ darf l mithin von 1 bis $\left[\frac{bk}{a} \right]$ variieren. Zu jedem festen k gibt es folglich exakt $\left[\frac{bk}{a} \right]$ positive Differenzen $bk-al$. Also existieren insgesamt genau $S(a,b)$ Zahlenpaare (k,l) mit $bk-al > 0$.

Die Bestimmung der Anzahl der negativen Differenzen $bk-al$ bereitet jetzt keine Mühe mehr. Vertauscht man nämlich in den vorstehenden Überlegungen a mit b und damit zwangsläufig auch k mit l , behalten alle Schlußfolgerungen ihre Richtigkeit. $S(b,a)$ gibt demzufolge die Anzahl der positiven Differenzen $al-bk$ an, also die Anzahl aller Zahlenpaare (k,l) mit $bk-al < 0$.

Zusammenfassend erhält man, daß $S(a,b) + S(b,a)$ mit der Gesamtzahl der geordneten Paare (k,l) übereinstimmt. Demnach ist

$$S(a,b) + S(b,a) = \frac{(a-1)(b-1)}{4}$$

und (6) vollständig bewiesen.

4. Einige zahlentheoretische Anwendungen

Aus der Fülle der verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten des größten Ganzen kann an dieser Stelle nur ein bescheidenes Angebot realisiert werden. Die Auswahl beschränkt sich auf einige typische Beispiele unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades aus der Zahlentheorie, dem Hauptanwendungsgebiet.

Zu den häufigsten und gleichzeitig einfachsten Anwendungen gehört das Umformen endlicher Summen etwa der Gestalt

$$\sum_{1 \leq k, l \leq x} f(k)g(l),$$

wobei über alle geordneten Paare (k, l) natürlicher Zahlen mit $1 \leq k, l \leq x$ zu summieren ist.

Satz 4: Sind f und g zwei für natürliche Zahlen definierte Funktionen, so ist für beliebige reelle $x \geq 1$ stets

$$(7) \quad \sum_{1 \leq k, l \leq x} f(k)g(l) = \sum_{k=1}^{[x]} f(k) \sum_{l=1}^{[\frac{x}{k}]} g(l).$$

Beweis: Aus der Summationsbedingung $1 \leq k, l \leq x$ und $k, l \geq 1$ folgt, daß k alle natürlichen Zahlen des Intervalles $[1, x]$ durchläuft, l für jedes dieser k diejenigen des Intervalles $[1, \frac{x}{k}]$.

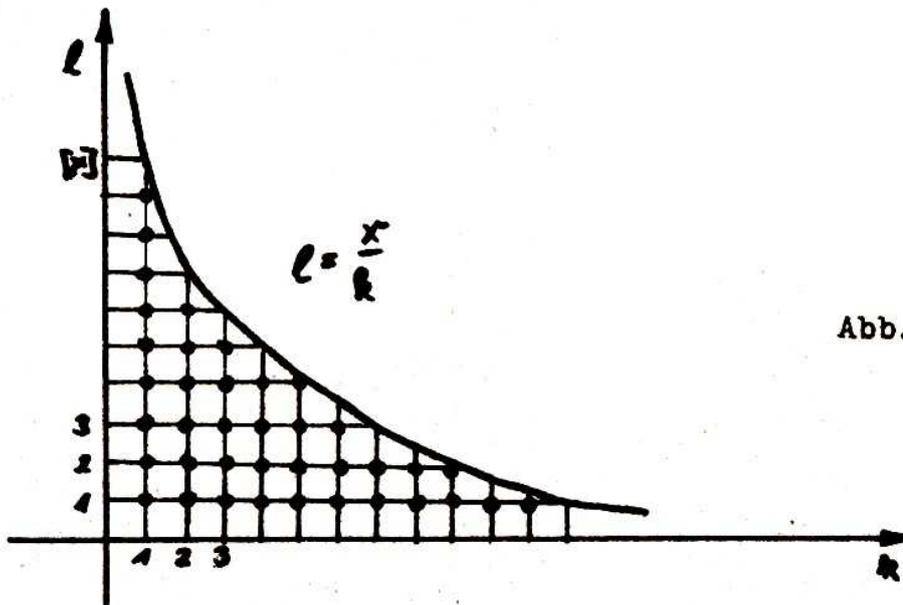


Abb. 3

Dies gestattet auch eine in Abb. 3 wiedergegebene geometrische Interpretation. Es ist über alle Gitterpunkte (Punkte mit ganzzahligen Koordinaten) des 1. Quadranten zu summieren, die auf oder unterhalb der Hyperbel $l = \frac{x}{k}$ liegen. Dabei bleiben die Gitterpunkte auf den Koordinatenachsen unberücksichtigt. Läßt man vorerst k konstant und nur l laufen, was anschaulich einer Summation parallel zur l -Achse entspräche, erhält man zunächst

$$f(k) \sum_{l=1}^{\left[\frac{x}{k} \right]} g(l).$$

Die anschließend noch auszuführende Summation über k beweist die behauptete Umformung (7).

Dieses Verfahren läßt sich ohne Schwierigkeiten auch auf Summen übertragen, deren Summationsbedingung ein anderes Aussehen besitzt. Es seien beispielhaft $1 \leq kl^2 \leq x$, $0 \leq k^2+l^2 \leq x$ oder $0 \leq \sqrt{k} + \sqrt{l} \leq x$ genannt. Die Herleitung analoger Formeln zu (7) sei allerdings dem Leser als Übung überlassen.

Eine schulbezogene Anwendung des größten Ganzen betrifft die Berechnung der Ziffern einer in der Skale $g > 1$ darzustellenden natürlichen Zahl m , d. h. der durch

$$m = (c_n \dots c_1 c_0)_g := c_n g^n + \dots + c_1 g + c_0$$

und $0 \leq c_k < g$ für alle $k=0,1,\dots,n$ eindeutig bestimmten ganzen Zahlen c_k .

Dr. Lothar Schnabel (Bereich Theoretische Mathematik)
 Christian Sonntag (Spezialschule CARL ZEISS, Klasse 11a)
 Peter Stenzel (Spezialschule CARL ZEISS, Klasse 11a)

(Fortsetzung folgt)

Crofton's Seilliniensatz (Teil II)

5. Schnitt mit zwei konvexen Polygonen

Zuerst betrachten wir zwei konvexe Polygone P und Q , die gemeinsame Punkte haben sollen (siehe Bild 9).

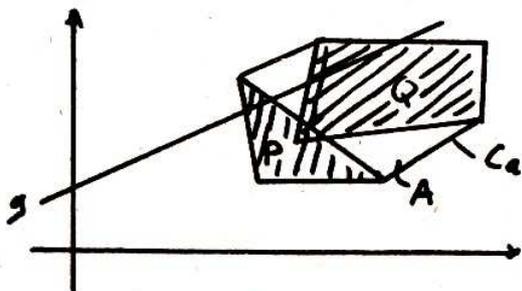


Bild 9.

Zu den Geraden, die sowohl P als auch Q schneiden, gehören offensichtlich auch Geraden, die nicht den Durchschnitt $P \cap Q$ der beiden Polygone treffen (vgl. g in Bild 9).

Mit $U(P)$ bzw. $U(Q)$ bezeichnen wir die Umfänge beider Polygone. Wir denken uns um P und Q ein Seil straff gespannt und nennen die entstehende Linie die äußere Seillinie C_a , deren Länge L_a sei.

Folgende Maßzahlen benötigen wir:

$\bar{\mu}(P)$... für die Menge der Geraden, die P aber nicht Q treffen,

$\bar{\mu}(Q)$... für die Menge der Geraden, die Q aber nicht P treffen und

$\bar{\mu}(P, Q)$.. für die Menge der Geraden, die sowohl P als auch Q treffen.

Wir erinnern uns daran, daß wir mit $\mu(P)$ und $\mu(Q)$ die Anzahl aller Geraden, die P bzw. Q treffen, bezeichnet haben. Für das von der äußeren Seillinie C_a begrenzte konvexe Polygon A bezeichne $\mu(A)$ die Maßzahl der Geraden, die A schneiden und es ist $\mu(A) = L_a$.

Nun überlegen wir uns, daß

- jede Gerade durch P entweder nur P und nicht Q oder aber sowohl P als auch Q trifft,
- jede Gerade durch Q entweder nur Q und nicht P oder sowohl P als auch Q schneidet und
- jede Gerade durch A entweder nur P oder nur Q oder beide Mengen trifft.

Mit den oben bezeichneten Größen $\bar{\mu}(P)$, $\bar{\mu}(Q)$ und $\bar{\mu}(P, Q)$ schreiben wir das in Form des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\bar{\mu}(P) + \bar{\mu}(P, Q) = \mu(P) = U(P)$$

$$\bar{\mu}(Q) + \bar{\mu}(P, Q) = \mu(Q) = U(Q)$$

$$\bar{\mu}(P) + \bar{\mu}(Q) + \bar{\mu}(P, Q) = \mu(A) = L_a$$

Daraus erhalten wir

$$\bar{\mu}(P, Q) = U(P) + U(Q) - L_a.$$

Die Maßzahl für alle Geraden, die sowohl P als auch Q schneiden, ist also durch die Umfänge der Polygone und die Länge der äußeren

ren Seillinie bestimmt.

Über die Länge der Seillinie geht die Lage der Polygone zueinander mit ein.

Dieses Ergebnis werden wir für konvexe Polygone P und Q , die keine gemeinsamen Punkte haben, benutzen (siehe Bild 10).

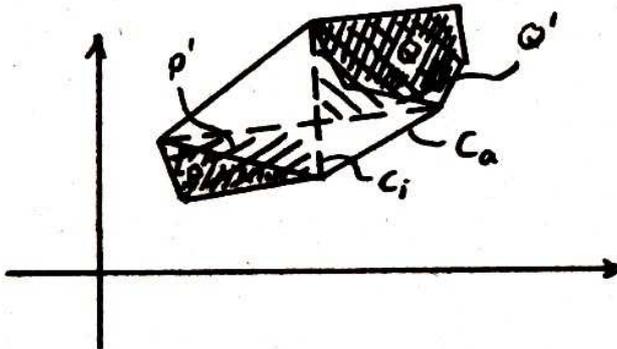


Bild 10.

Zuerst betrachten wir außer der äußeren noch die innere Seillinie C_1 , die man sich durch ein straff um P und Q gespanntes und gekreuztes Seil vorstellen kann.

Die Länge der inneren Seillinie sei L_1 .

Es entstehen zwei Polygone P' und Q' , die nur den Kreuzungspunkt von C_1 gemeinsam haben (siehe Bild 10).

Für alle Geraden, die sowohl P' als auch Q' treffen, wobei P' und Q' gemeinsame Punkte haben, wissen wir von oben

$$\bar{\mu}(P', Q') = U(P') + U(Q') - L_a.$$

Da die Ränder von P' und Q' gerade die innere Seillinie sind, gilt

$$U(P') + U(Q') = L_1.$$

Damit erhalten wir die Formel

$$\bar{\mu}(P', Q') = L_1 - L_a.$$

Anhand von Bild 10 machen wir uns klar, daß fast alle Geraden, die sowohl P' als auch Q' schneiden, auch P und Q treffen.

Ausgenommen davon sind Geraden, die nur durch den Kreuzungspunkt der inneren Seillinie gehen, diese erhalten aber nach unserer Festlegung im 3. Abschnitt sowieso nur die Maßzahl 0.

Ergebnis:

Eine Maßzahl für die Menge aller Geraden, die sowohl ein konvexes Polygon P als auch ein zu P disjunktes konvexes Polygon Q schneiden, ist die Differenz aus der Länge der inneren Seillinie (L_i) und der der äußeren Seillinie (L_a).

Diese Formel ist ein Spezialfall des (für beliebige konvexe Gebiete von Crofton und für zwei oder mehrere konvexe Polygone von Silvester) als Seilliniensatz bekannten Resultates aus der Integralgeometrie.

Das Ergebnis hängt wesentlich von der Festlegung der Maßzahl für Geraden, die eine Strecke schneiden, in Abschnitt 2 ab.

Der armenische Mathematiker R.V. Ambartzumjan hat auch für andere Festlegungen und mehrere Polygone im Rahmen der kombinatorischen Integralgeometrie dazu Formeln entwickelt.

6. Trefferwahrscheinlichkeit einer Geraden mit zwei Polygonen

Am Anfang haben wir nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Gerade durch P auch Q trifft, gefragt. Vor der Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit müssen wir uns zuerst klar machen, daß wir im Gegensatz etwa zum Würfeln oder dem Werfen einer Münze nicht endlich viele mögliche Ereignisse vorliegen haben. Wir können also nicht die Wahrscheinlichkeit als Quotient aus der Anzahl der für unser Problem günstigen Fälle durch die Anzahl der möglichen Fälle ausdrücken. Zur Berechnung von sogenannten geometrischen Wahrscheinlichkeiten (das sind z. B. Wahrscheinlichkeiten dafür, daß ein zufällig in einen Kreis vom Radius R geworfener Punkt in einen darin enthaltenen Kreis mit dem Radius r fällt, bzw. die beim Buffonschen Nadelproblem oder dem Bertrand'schen Paradoxon auftretenden Wahrscheinlichkeiten, vgl. dazu WURZEL Nr. 5 und 6/1982 sowie 2 von 1984) dividiert man eine geeignete Maßzahl für die günstigen Fälle durch eine Maßzahl für die möglichen Fälle (z. B. Flächeninhalt des kleinen Kreises durch den des großen Kreises).

In unserem Fall setzen wir für alle möglichen Fälle $U(P)$. Das sind all die Situationen, in denen g das Polygon P überhaupt trifft.

Günstig im Sinne der Aufgabenstellung sind die Fälle, in denen

die Gerade dann auch noch Q schneidet, wofür wir im 5. Abschnitt $L_i - L_a$ berechnet haben.

Also können wir die gesamte Wahrscheinlichkeit mit

$$\frac{L_i - L_a}{U(P)}$$

durch die Längen der Seillinien und den Umfang von P ausdrücken. Diese Wahrscheinlichkeit hängt ebenfalls ab von der im 3. Abschnitt festgelegten Maßzahl für die Menge der Geraden, die eine Strecke schneiden. Die dort gewählte Festlegung paßt zu der anschaulichen Vorstellung, daß alle Geraden als gleichberechtigt betrachtet werden, und in der Integralgeometrie kommt dem sogenannten bewegungsinvarianten Geradenmaß, das unseren Überlegungen zugrunde liegt, eine besondere Rolle zu.

Dr. S. Nagel
Sektion Mathematik
Bereich Kybernetik

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung“

Leiter: Stefan Posselt

Chefredakteur: Eckhard Stein

Redaktion: C. Dahms, S. Krieg, R. Fötsch, N. Patzschke

Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900

Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.

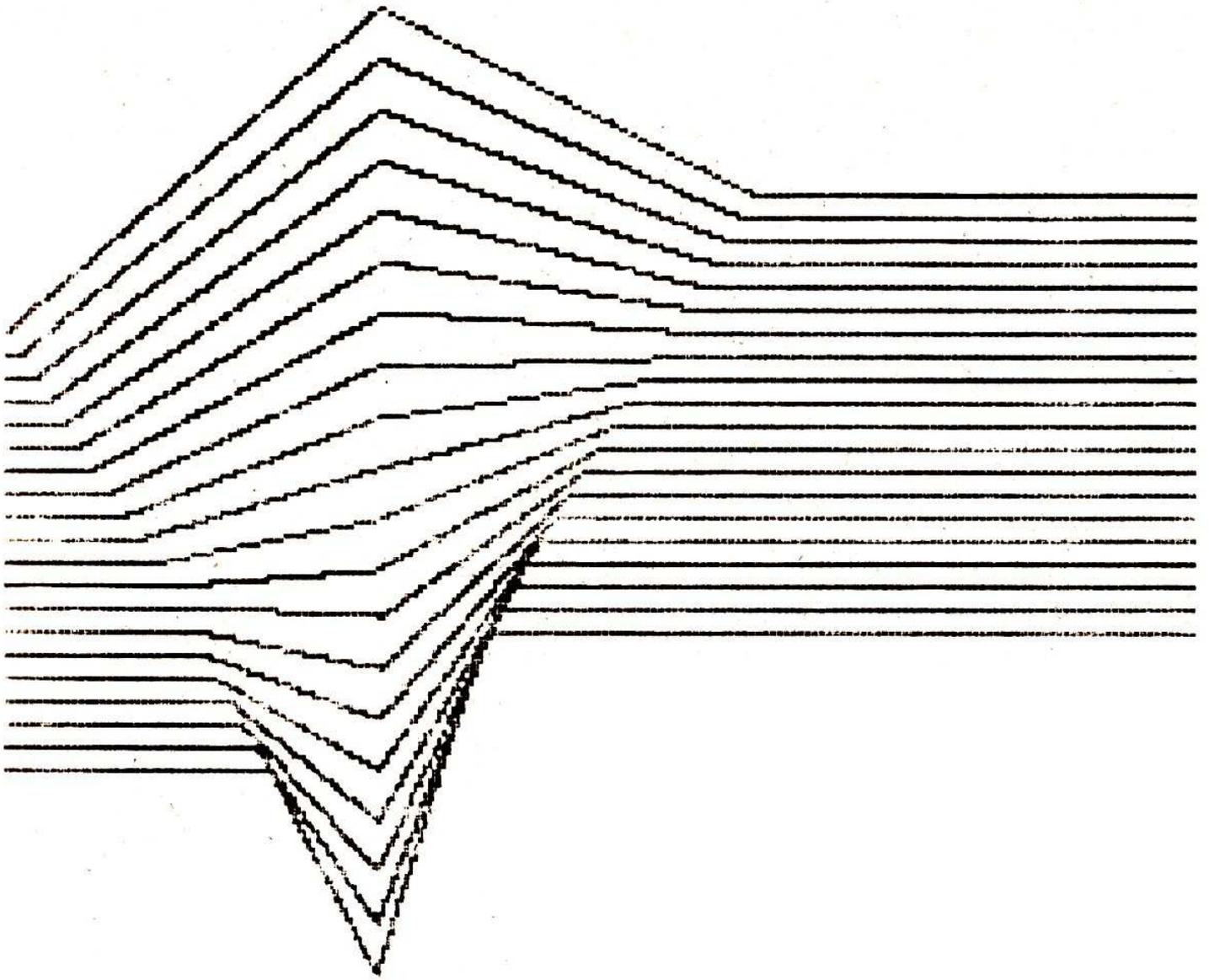
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Titelbild: M. Torke

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	23 (1989) 1	S. 1–16
----------------	--------	------	-------------	---------



wurzel $\sqrt{\quad}$ 2 · 89

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

**Herausgegeben vom Jugendobjekt Studien-
vorbereitung-Studienwerbung der Sektion
Mathematik an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena**

**23. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M**

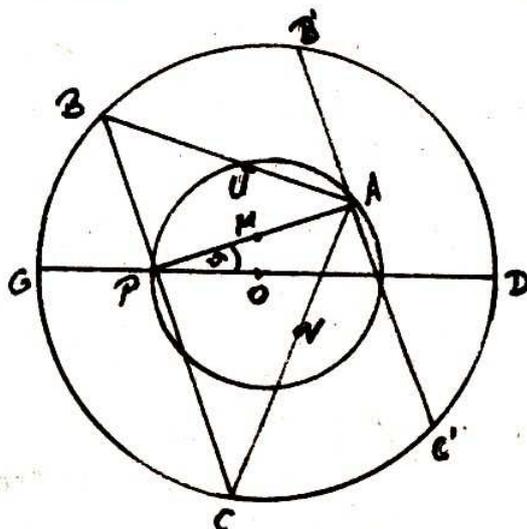
29. Internationale Mathematikolympiade 1988 in Canberra (Aufgaben und Lösungen des ersten Tages)

1. Man betrachte in einer Ebene zwei Kreise mit den Radien R und r ($R > r$) mit dem gleichen Mittelpunkt. Es sei P ein fester Punkt auf dem kleineren Kreis und B ein variabler Punkt auf dem größeren Kreis. Die Gerade BP schneide den größeren Kreis ein zweites Mal in C . Die Senkrechte l auf BP in P schneide den kleineren Kreis erneut in A (falls l eine Tangente in P ist, dann ist $A=P$).

(I) Man bestimme die Menge aller Werte von

$$BC^2 + CA^2 + AB^2.$$

(II) Man bestimme den geometrischen Ort aller Mittelpunkte von AB . (Kreis \equiv Kreislinie)



Lösung:

Sei $\sphericalangle OPA = \sphericalangle$, $GD =$ dem Durchmesser durch P , M der Mittelpunkt von PA und N der von BC .

Dann gelten:

$$\begin{aligned} S &= BC^2 + CA^2 + AB^2 \\ &= (BP+PC)^2 + PC^2 + PA^2 + BP^2 + PA^2 \\ &= 2(PA^2 + PB^2 + PC^2 + BP \cdot PC) \end{aligned} \quad (1)$$

$$PA = 2r \cos \sphericalangle$$

$$BP = BN - PN = \sqrt{R^2 - r^2 \cos^2 \sphericalangle} - r \sin \sphericalangle$$

$$PC = PN+NC = PN+BN = \sqrt{R^2-r^2 \cos^2 \varphi} + r \sin \varphi$$

$$BP \cdot PC = GP \cdot PD = R^2 - r^2$$

Durch Einsetzen in (1) erhält man

$$S = 2 [4r^2 \cos^2 \varphi + 2(R^2 - r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) + R^2 - r^2]$$

$$= 6R^2 + 2r^2$$

Die Summe ist konstant und somit unabhängig von φ .

Die Parallele zu BC durch A schneide den größeren Kreis in den Punkten B' und C', die Eckpunkte der Rechtecke BPAB' und CPAC' darstellen. Der Mittelpunkt U der Diagonale BA ist ebenso der Mittelpunkt der Diagonale PB' und damit gilt $\overrightarrow{PU} = \frac{1}{2} \overrightarrow{PB'}$. Analog gilt $\overrightarrow{PV} = \frac{1}{2} \overrightarrow{PC'}$.

Da B' und C' denselben Kreis (O,R) beschreiben und U und V eindeutig sind, ist der geometrische Ort aller Mittelpunkte von AB das Bild des Kreises (O,R) unter einer Stauchung $H(P; \frac{1}{2})$.

2. Sei n eine positive ganze Zahl; es seien $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ Teilmengen einer Menge B und es gelte:
- Jede Menge A_i enthält genau 2n Elemente.
 - Für alle Indizes i und j ($1 \leq i < j \leq 2n+1$) enthält die Menge $A_i \cap A_j$ genau ein Element.
 - Jedes Element von B gehört zu mindestens zwei der Mengen A_i .

Für welche Werte n kann man für gegebene Menge B und ihre Teilmengen $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ mit den Eigenschaften (a), (b) und (c) jedem Element von B eine der Zahlen 0 oder 1 so zuordnen, daß genau n Elementen jeder Menge A_i die Zahl 0 zugeordnet wird?

Lösung:

Wir beweisen, daß so eine Zuordnung genau dann möglich ist, wenn n gerade ist.

1. Zu Beginn zeigen wir, daß die Bedingungen (a) - (c) eine stärkere Version von (c) implizieren:

(c*) Jedes Element von B gehört exakt zu zwei der Mengen A_i .

Beweis: Es gilt $A_j = \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{2n+1} (A_i \cap A_j)$ für $j=1, \dots, 2n+1$ (*)

Die Beziehung "z" ist trivial, die umgekehrte Beziehung folgt aus (c).

Angenommen, es existiere im Widerspruch zu (c*) ein $a \in A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Wegen (b) enthält jede Menge $(A_1 \cap A_i)$ genau ein Element. Somit würde A_1 wegen (*) im Widerspruch zu (a) maximal $2n-1$ Elemente enthalten.

2. Als nächstes zeigen wir:

Ist die Zuordnung der Nullen und Einsen zu den Elementen von B in der geforderten Art und Weise möglich, muß n eine gerade Zahl darstellen.

Beweis: Wir definieren eine $2n \times 2n$ Matrix wie folgt:

An die Stelle der Matrix, die der Zeile i und der Spalte j entspricht, schreiben wir die Zahl, die dem (eindeutigen) Element von $A_i \cap A_j$ zugeordnet ist (für $i \neq j$) bzw. die Zahl, die dem (eindeutigen) Element von $A_i \cap A_{2n+1}$ zugeordnet ist (für $i=j$). Wegen der Voraussetzung und (c*) enthält jede Zeile n Nullen und somit die ganze Matrix $2n^2$ Nullen. Da die Matrix bezüglich der Hauptdiagonale symmetrisch ist, muß die Anzahl der Nullen auf der Hauptdiagonale ebenfalls gerade sein. Aber die Zahlen auf der Hauptdiagonale sind die Zahlen, die den Elementen von A_{2n+1} zugeordnet sind. Die Anzahl der Nullen ist somit n und gerade.

3. Zum Schluß zeigen wir, daß für ein gerades n eine entsprechende Zuordnung von Nullen und Einsen möglich ist. Sei T eine Matrix, definiert durch

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und für $n=2k$ sei U eine $2n \times 2n$ -Matrix, definiert durch

$$U = \begin{pmatrix} T & T & \dots & T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T & T & \dots & T \end{pmatrix}$$

k-mal

Dann gibt U, interpretiert wie in 2., eine gewünschte Zuordnung.

3. Es sei f eine Funktion mit dem Definitionsbereich $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Es gelte:

$$f(1) = 1, \quad f(3) = 3,$$

und für alle $n \in N$

$$\begin{aligned} f(2n) &= f(n), \\ f(4n+1) &= 2f(2n+1) - f(n), \\ f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n). \end{aligned}$$

Man bestimme die Anzahl aller Elemente $n \in N$ mit $n \leq 1988$ und $f(n) = n$.

Lösung:

Durch einfaches Ausrechnen erhalten wir folgende Funktionswerte:

$$\begin{array}{l} n: 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 17 \ \dots \\ f(n): 1 \ 1 \ 3 \ 1 \ 5 \ 3 \ 7 \ 1 \ 9 \ 5 \ 13 \ 3 \ 11 \ 7 \ 15 \ 1 \ 17 \ \dots \end{array}$$

Dabei zeigt sich für die vorliegenden Werte, daß folgende Beziehungen gelten: $f(2^k) = 1$, $f(2^k - 1) = 2^k - 1$, $f(2^k + 1) = 2^{k+1}$, welches eine Verbindung mit der Binärdarstellung der Zahlen nahelegt.

Behauptung: $f(n)$ entspricht der Zahl, die man durch Rückwärtslesen ihrer Binärdarstellung (wobei führende Nullen ignoriert werden) erhält.

Beweis (durch Induktion):

Da $f(2n) = f(n)$ gilt, genügt es, nur ungerade Zahlen zu betrachten.

Für $n = 4m + 1$ gilt folgende Summendarstellung mit $a_j \in \{0, 1\}$ und $a_0 = 1$, $a_1 = 0$: $4m + 1 = \sum_{j=0}^k a_j 2^j$, woraus folgende Dar-

stellungen abgeleitet werden können:

$$m = \sum_{j=2}^k a_j 2^{j-2}$$

$$2m+1 = 1 + \sum_{j=1}^k a_j 2^{j-1}$$

Nach der Behauptung gilt weiterhin:

$$f(2m+1) = 2^{k-1} + \sum_{j=2}^k a_j 2^{k-1-(j-1)} = 2^{k-1} + \sum_{j=2}^k a_j 2^{k-j}$$

$$f(m) = \sum_{j=2}^k a_j 2^{k-j}$$

$$f(4m+1) = \sum_{j=0}^k a_j 2^{k-j}$$

Durch einfaches Ausrechnen kann dann die Beziehung

$$f(4m+1) = 2f(2m+1) - f(m)$$

verifiziert werden.

Für $n = 4m+3$ gilt folgende Summendarstellung mit $a_0 = a_1 = 1$: $4m+3 = \sum_{j=0}^k a_j 2^j$, woraus wiederum folgt:

$$m = \sum_{j=2}^k a_j 2^{j-2}$$

$$2m+1 = 1 + \sum_{j=2}^k a_j 2^{j-1}.$$

Analog dem vorigen Fall läßt sich die Beziehung

$$f(4m+3) = 3f(2m+1) - 2f(m)$$

nachprüfen, womit die Behauptung bewiesen wäre.

Somit müssen wir nur noch die Anzahl natürlicher Zahlen bestimmen, die kleiner 1989 sind und deren Binärdarstellung ein Palindrom bildet.

Nun ist die Anzahl $2m$ -stelliger binärer Palindrome gleich der Anzahl $(2m-1)$ -stelliger binärer Palindrome, nämlich gleich 2^{m-1} .

Es gilt $2^{10} < 1988 < 2^{11}$. Die Anzahl von Palindromen < 2048 beträgt $1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 4 + 8 + 8 + 16 + 16 + 32 = 94$. Da $1988 = (11111000100)_2$ und außerdem nur zwei 11-stellige Palindrome größer 1988 existieren, ist die gesuchte Anzahl gleich 92.

Preisaufgaben

V 7 Пусть t_a, t_b, t_c - длины медиан треугольника ABC. Докажите, что

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 \geq \frac{3}{4} \sqrt{abc} (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}),$$

если a, b, c - стороны ABC.

Для каких треугольников достигается знак равенства?

V 8 Man löse das Gleichungssystem

$$\begin{cases} |x + y - 4| = 5 \\ |x - 3| + |y - 1| = 3 \end{cases}$$

V 9 Die Gleichung $x^4 + ax^3 + bx + c = 0$ habe 4 reelle Lösungen. Man zeige, daß $ab < 0$ gilt.

V10 Die Zahlen a, b, c liegen im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ und es gelte

$$\begin{cases} \cos a = a \\ \sin \cos b = b \\ \cos \sin c = c \end{cases}$$

Man ordne a, b, c ihrer Größe nach.

V11 Gegeben sei ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ und eine Menge von Intervallen $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n]$, welche im Inneren von $[a, b]$ liegen. Für jeden Punkt $x \in [a, b]$ sei die Anzahl der Intervalle $[a_i, b_i]$ mit $x \in [a_i, b_i]$ ungerade.

Man beweise, daß n ungerade ist.

V12 Welche reellen Zahlen x, y, z erfüllen die Gleichungen

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ xy + xz + yz = 11 \\ xyz = 6 \end{cases} ?$$

Einsendeschluß 1. 5. 1989

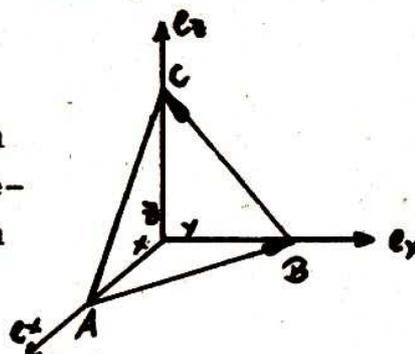
Bemerkung zu „Analogen zum Satz des Pythagoras“

In dieser Arbeit waren leider sinnentstellende Druckfehler enthalten (die Bezeichnung der Größen auf Seite 162 stimmte nicht

mit der auf den Seiten 163-164 überein), so daß wir die uns von Herrn Müller aus Vielau zugesandte kurze Lösung zu dieser Aufgabe veröffentlichen möchten:

Ausgehend von den paarweise aufeinander senkrecht stehenden und ein Rechtssystem bildenden Einheitsvektoren e_x, e_y, e_z betrachten wir die das Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt A_4 aufspannenden Vektoren

$\vec{SA} = xe_x, \vec{SB} = ye_y, \vec{SC} = ze_z$ und weiterhin die Vektoren $\vec{AB} = -xe_x + ye_y$ und $\vec{BC} = -ye_y + ze_z$ (vgl. Skizze). Dann ergibt sich bei Beachtung der Distributivität und der für die Multiplikation der Basisvektoren geltenden Regeln



$$A_4 = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{BC}| = \frac{1}{2} |xye_z + xze_y + yze_x|$$

und somit

$$A_4^2 = \left(\frac{xy}{2}\right)^2 + \left(\frac{yz}{2}\right)^2 + \left(\frac{zx}{2}\right)^2, \text{ w.z.b.w. .}$$

Satz 5: Ist $m = (c_n \dots c_1 c_0)_g$, so berechnen sich die Ziffern c_k ($0 \leq k \leq n$) nach der Formel

$$(8) \quad c_k = \left[\frac{m}{g^k} \right] - g \left[\frac{m}{g^{k+1}} \right].$$

Beweis: Dividiert man die Gleichung $m = c_n g^n + \dots + c_1 g + c_0$ durch g^k ($0 \leq k \leq n$), erhält man

$$\frac{m}{g^k} = a_k + r_k$$

mit

$$a_k := c_n g^{n-k} + \dots + c_{k+1} g + c_k \quad \text{und} \quad r_k := \frac{c_{k-1}}{g} + \dots + \frac{c_1}{g^{k-1}} + \frac{c_0}{g}.$$

Da im Positionssystem mit der Skale g die Ziffern nur die Werte $0, 1, \dots, g-1$ annehmen können, gilt für r_k die Abschätzung

$$0 \leq r_k \leq \frac{g-1}{g} + \dots + \frac{g-1}{g^{k-1}} + \frac{g-1}{g^k} = 1 - \frac{1}{g^k} < 1.$$

Mit Rücksicht auf die Ganzzahligkeit von a_k ist also

$$\left[\frac{m}{g^k} \right] = a_k.$$

Die Betrachtungen bleiben auch für $k > n$ richtig und sinnvoll, setzt man in diesem Falle $a_k = 0$. Man denke sich etwa in der Dar-

stellung $(c_n \dots c_1 c_0)$ von m hinreichend viele bedeutungslose Ziffern σ links hinzugefügt. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \left[\frac{m}{g^k} \right] - g \left[\frac{m}{g^{k+1}} \right] &= a_k - g a_{k+1} \\ &= c_n g^{n-k} + \dots + c_{k+1} g + c_k - g(c_n g^{n-k-1} + \dots + c_{k+2} g + c_{k+1}) = c_k \end{aligned}$$

für alle $k < n$ und

$$\left[\frac{m}{g^n} \right] - g \left[\frac{m}{g^{k+1}} \right] = a_n - g a_{n+1} = c_n - \sigma = c_n.$$

Die letzten beiden Anwendungen beschäftigen sich mit Teilbarkeitseigenschaften von Fakultäten.

Satz 6: Gegeben sei die natürliche Zahl $m \geq 1$. Der maximale Exponent n , mit welchem eine Primzahl p in $m!$ enthalten ist, ist

$$(9) \quad n = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{m}{p^k} \right].$$

Beweis: Da p Primzahl ist, genügt es, die Teilbarkeit der Faktoren $1, 2, \dots, m$ von $m!$ durch p^k ($k \geq 1$) zu diskutieren. In der Folge der von Null verschiedenen natürlichen Zahlen sind $p^k, 2p^k, 3p^k, \dots$ und nur diese durch p^k teilbar. Gehören k_0 dieser Vielfachen von p^k der Menge $\{1, 2, \dots, m\}$ der betrachteten Faktoren an, so gilt $k_0 p^k \leq m < (k_0 + 1)p^k$, also

$$k_0 \leq \frac{m}{p^k} < k_0 + 1.$$

Das bedeutet aber, daß es in der Menge $\{1, 2, \dots, m\}$ genau $k_0 = \left[\frac{m}{p^k} \right]$ durch p^k teilbare Zahlen gibt. Sie sollen zur Menge M_k zusammengefaßt werden. Bezeichnet $|M_k|$ die Anzahl ihrer Elemente und p^K die höchste Potenz von p , die in einem der Faktoren $1, 2, \dots, m$ enthalten ist, dann folgt

$$\sum_{k=1}^K |M_k| = \sum_{k=1}^K \left[\frac{m}{p^k} \right].$$

Im Falle $p > m$ sind wegen $K = \sigma$ beide Summen als leere Summen ($= \sigma$) zu verstehen. Leer sind auch die Mengen M_k und $\left[\frac{m}{p^k} \right] = \sigma$ für $k > K$. Die obigen endlichen Summen können demnach formal als unendliche Reihen geschrieben werden.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |M_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{m}{p^k} \right]$$

Ihr Wert ist der gesuchte Exponent n , da jeder betrachtete Faktor von $m!$, der ein Vielfaches von p^1 , aber nicht von p^{1+1} ist, bei der Summation genau 1-mal gezählt wird, nämlich als Element der Mengen M_1, M_2, \dots, M_1 . Damit ist (9) bewiesen.

Nachträglich sei noch bemerkt, daß wegen $0! = 1$ die Behauptung (9) trivialerweise auch für $m=0$ richtig ist, nicht jedoch der geführte Beweis.

Der Satz 6 bildet das Fundament vieler weiterer Sätze. Einer der interessantesten ist der folgende Satz von LANDAU.

Satz 7: Es bezeichne $\eta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ein geordnetes n -tupel reeller Zahlen, $\varrho = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ein solches natürlicher Zahlen. Ferner sei

$$A_i(\eta) := a_{1i}y_1 + a_{2i}y_2 + \dots + a_{ni}y_n$$

$$B_i(\eta) := b_{1i}y_1 + b_{2i}y_2 + \dots + b_{ni}y_n$$

($1 \leq i \leq m$), wobei die Koeffizienten $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}$ und $b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{ni}$ natürlich vorausgesetzt werden. Dann ist der Quotient

$$(10) \quad \frac{A_1(\varrho)! A_2(\varrho)! \dots A_m(\varrho)!}{B_1(\varrho)! B_2(\varrho)! \dots B_m(\varrho)!}$$

für alle ϱ ganzzahlig und nur dann, wenn die Ungleichung

$$(11) \quad \sum_{i=1}^m [A_i(\eta)] \geq \sum_{i=1}^m [B_i(\eta)]$$

für alle η mit $y_1, y_2, \dots, y_n \in [0, 1]$ Gültigkeit besitzt.

Beweis: Im ersten Teil des Beweises soll gezeigt werden, daß die Bedingung (11) für die Ganzzahligkeit von (10) hinreichend ist. Sei also (11) erfüllt und $\varrho = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ein beliebiges n -tupel natürlicher Zahlen. Ist p eine willkürlich gewählte Primzahl und

$$\frac{x_q}{p^k} = \left[\frac{x_q}{p^k} \right] + r_{qk}, \quad 0 \leq r_{qk} < 1$$

für alle $q=1, 2, \dots, n$ und $k \geq 1$, erhält man zunächst

$$\frac{A_i(\varphi)}{p^k} = \sum_{q=1}^n a_{qi} \left[\frac{x_q}{p^k} \right] + \sum_{q=1}^n a_{qi} r_{qk}$$

und

$$\frac{B_i(\varphi)}{p^k} = \sum_{q=1}^n b_{qi} \left[\frac{x_q}{p^k} \right] + \sum_{q=1}^n b_{qi} r_{qk}.$$

Aus (11) folgt mit $y_1 = \dots = y_{q-1} = y_{q+1} = \dots = y_n = 0$ und $y_q = 1$ wegen der Ganzzahligkeit der Koeffizienten einerseits

$$\sum_{i=1}^m a_{qi} \geq \sum_{i=1}^m b_{qi}$$

mit $\eta = (r_{1k}, r_{2k}, \dots, r_{nk})$ andererseits

$$\sum_{i=1}^m \left[\sum_{q=1}^n a_{qi} r_{qk} \right] \geq \sum_{i=1}^m \left[\sum_{q=1}^n b_{qi} r_{qk} \right].$$

Diese Teilergebnisse liefern in Verbindung mit (1)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \left[\frac{A_i(\varphi)}{p^k} \right] &= \sum_{i=1}^m \sum_{q=1}^n a_{qi} \left[\frac{x_q}{p^k} \right] + \sum_{i=1}^m \left[\sum_{q=1}^n a_{qi} r_{qk} \right] \\ &= \sum_{q=1}^n \left[\frac{x_q}{p^k} \right] \sum_{i=1}^m a_{qi} + \sum_{i=1}^m \left[\sum_{q=1}^n a_{qi} r_{qk} \right] \\ &\geq \sum_{q=1}^n \left[\frac{x_q}{p^k} \right] \sum_{i=1}^m b_{qi} + \sum_{i=1}^m \left[\sum_{q=1}^n b_{qi} r_{qk} \right] \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{q=1}^n b_{qi} \left[\frac{x_q}{p^k} \right] + \sum_{i=1}^m \left[\sum_{q=1}^n b_{qi} r_{qk} \right] \\ &= \sum_{i=1}^m \left[\frac{B_i(\varphi)}{p^k} \right] \end{aligned}$$

und somit

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_i(\varphi)}{p^k} \right] \geq \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{B_i(\varphi)}{p^k} \right].$$

Demzufolge ist nach Satz 6 eine beliebige Primzahl im Zähler von (10) mindestens ebenso oft wie im Nenner enthalten. Mit hin muß (10) ganzzahlig sein.

Nun wäre noch zu beweisen, daß (11) für die behauptete Ganzzahligkeit von (10) auch notwendig ist. Der Beweis soll indirekt geführt werden. Angenommen, es gibt ein n -tupel

$\eta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ mit $y_1, y_2, \dots, y_n \in [0, 1]$, für welches

$$\sum_{i=1}^m [A_i(\eta)] < \sum_{i=1}^m [B_i(\eta)]$$

gilt. Diesem η kann nun in eindeutiger Weise durch die Vorschrift

$$x_q := [py_q] + 1$$

ein n -tupel $\epsilon = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ natürlicher Zahlen zugeordnet werden, wobei p eine hinreichend groß gewählte Primzahl bedeutet. Mit M_1 werde das Maximum aller Koeffizienten a_{qi} und b_{qi} bezeichnet, mit M_2 das Maximum aller Differenzen $A_i(\epsilon) - [A_i(\eta)]$ und $B_i(\epsilon) - [B_i(\eta)]$.

Nach der Definition des größten Ganzen genügt M_2 der Ungleichung $0 \leq M_2 < 1$. Schließlich werde noch

$$p > 2nM_1 \quad \text{und} \quad p > \frac{nM_1}{1-M_2}$$

für die Wahl der Primzahl p vereinbart, was wegen der Existenz unendlich vieler Primzahlen möglich ist.

Unter diesen Voraussetzungen erhält man bei gleichzeitiger Beachtung von $py_q < x_q \leq py_q + 1 < 2p$ für das konstruierte n -tupel ϵ

$$0 \leq \left[\frac{A_i(\epsilon)}{p^k} \right] \leq \left[\frac{A_i(\epsilon)}{p^2} \right] \leq \left[\frac{2nM_1}{p} \right] = 0$$

für alle $k \geq 2$ und in Verbindung mit (1)

$$\begin{aligned} [A_i(\eta)] &\leq \left[\frac{A_i(\epsilon)}{p} \right] \leq \left[A_i(\eta) + \frac{nM_1}{p} \right] \leq [A_i(\eta)] + M_2 + \frac{nM_1}{p} \\ &= [A_i(\eta)] + \left[M_2 + \frac{nM_1}{p} \right] = [A_i(\eta)]. \end{aligned}$$

Diese beiden Abschätzungen bleiben richtig, wenn man $A_i(\epsilon)$ durch $B_i(\epsilon)$ und $A_i(\eta)$ durch $B_i(\eta)$ ersetzt. Also gilt mit Rücksicht auf die Annahme

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_i(\epsilon)}{p^k} \right] = \sum_{i=1}^m [A_i(\eta)] < \sum_{i=1}^m [B_i(\eta)] = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{B_i(\epsilon)}{p^k} \right].$$

Das bedeutet aber, daß (10) für das konstruierte n -tupel nicht ganzzahlig ist, da die Primzahl p nach Satz 6 im Nenner in einer höheren Potenz als im Zähler enthalten ist. Soll folglich (10) für alle n -tupel natürlicher Zahlen ganzzahlig

sein, ist die Erfüllung von (11) eine notwendige Voraussetzung.

Übungsaufgaben

(1) Man beweise, daß der Term

$$\frac{(2x_1)!(2x_2)!}{x_1!x_2!(x_1+x_2)!}$$

für jede Belegung $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ ganzzahlige Werte liefert.

(2) In Verallgemeinerung der Aufgabe (1) bestätige man die Ganzzahligkeit von

$$\frac{(ax_1)!(ax_2)!}{x_1!x_2!(x_1+x_2)!}^{a-1}$$

für alle $a, x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ und $a \geq 1$.

(3) Man zeige, daß $x_1!x_2!(2x_1+x_2)!(x_1+2x_2)!$ für beliebige natürliche x_1 und x_2 stets ein Teiler von $(4x_1)!(4x_2)!$ ist.

(4) Man beweise für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right] = \left[\sqrt{4n+2} \right].$$

Dr. Lothar Schnabel (Bereich Theoretische Mathematik)

Christian Sonntag (Spezialschule Carl Zeiss)

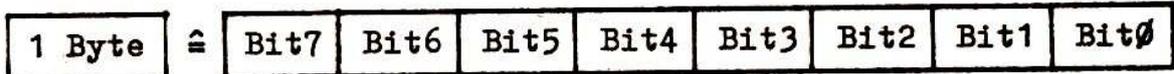
Peter Stenzel (Spezialschule Carl Zeiss)

Einführung in die Assembler-Programmierung

(Fortsetzung aus 7/8-88, 11-88 und 12-88)

9. Bit-Befehle

Wie schon bekannt, werden 8 Bits zu einem Byte zusammengefaßt und entsprechend der Skizze numeriert:



Bits aus beliebigen Registern können wahlweise gesetzt (Signalzustand "1") oder rückgesetzt (Signalzustand "0") werden.

SET b,r ordnet dem Bit b des Registers r (entspr. (HL)) den Zustand "1" zu.

SET b,(HL)

RES b,r ordnet dem Bit b des Registers r (entspr. (HL)) den Zustand "0" zu.

RES b,(HL)

Befehlscode:

r	A	B	C	D	E	H	L	(HL)
SET 0,r	CBC7	CBC0	CBC1	CBC2	CBC3	CBC4	CBC5	CBC6
SET 1,r	CBCF	CBC8	CBC9	CBCA	CBCB	CBCC	CBCD	CBCE
SET 2,r	CBD7	CBD0	CBD1	CBD2	CBD3	CBD4	CBD5	CBD6
SET 3,r	CBDF	CBD8	CBD9	CBDA	CBDB	CBDC	CBDD	CBDE
SET 4,r	CBE7	CBE0	CBE1	CBE2	CBE3	CBE4	CBE5	CBE6
SET 5,r	CBEF	CBE8	CBE9	CBEA	CBEB	CBEC	CBED	CBEE
SET 6,r	CBF7	CBF0	CBF1	CBF2	CBF3	CBF4	CBF5	CBF6
SET 7,r	CBFF	CBF8	CBF9	CBFA	CBFB	CBFC	CBFD	CBFE
RES 0,r	CB87	CB80	CB81	CB82	CB83	CB84	CB85	CB86
RES 1,r	CB8F	CB88	CB89	CB8A	CB8B	CB8C	CB8D	CB8E
RES 2,r	CB97	CB90	CB91	CB92	CB93	CB94	CB95	CB96
RES 3,r	CB9F	CB98	CB99	CB9A	CB9B	CB9C	CB9D	CB9E
RES 4,r	CBA7	CBA0	CBA1	CBA2	CBA3	CBA4	CBA5	CBA6
RES 5,r	CBAF	CBA8	CBA9	CBAA	CBAB	CBAC	CBAD	CBAE
RES 6,r	CBB7	CBB0	CBB1	CBB2	CBB3	CBB4	CBB5	CBB6
RES 7,r	CBBF	CBB8	CBB9	CBBA	CBBB	CBBC	CBBD	CBBE

8. Programm

ADRESSE	MASCHINENCODE	MARKEN	ASSEMBLERCODE	BEMERKUNGEN
0000	3E F0		LD A, F0H	A mit F0H laden
02	CB C7		SET 0, A	Bit0 setzen
04	CB BF		RES 7, A	Bit7 rücksetzen
06	32 01 00		LD(0001H), A	nach Zelle 1 lad.
09	C9		RET	

Bei der Programmabarbeitung wird zunächst F0H $\hat{=}$ 1111:0000 in den Akkumulator geladen und anschließend Bit0 gesetzt und Bit7 rückgesetzt, so daß im Akkumulator 0111:0001 $\hat{=}$ 71H steht. Diese Zahl wird dann in die Speicherzelle 1 geladen. Man überzeuge sich von der Richtigkeit der Überlegungen durch CALL0 : ?PEEK(1). Es wird 71H = 113 (dez.) ausgegeben.

10. Logische Operationen

Zwischen Akkumulator und Registerinhalten können logische Operationen durchgeführt werden. Die Verknüpfung erfolgt bitweise und das Ergebnis steht im A-Register.

AND r	bewirkt $A \leftarrow A \wedge r$, wobei die entsprechenden Bits durch ein logisches UND verknüpft werden.
OR r	bewirkt $A \leftarrow A \vee r$, wobei die entsprechenden Bits durch ein logisches ODER verknüpft werden.
XOR r	bewirkt $A \leftarrow A \oplus r$, wobei die entsprechenden Bits durch ein EXKLUSIV-ODER verknüpft werden.

In entsprechender Weise wirken die Befehle:

AND (HL)	OR (HL)	XOR (HL)
AND N	OR N	XOR N

Beispiel für logische Operationen

AND	OR	XOR	
01010101	01010101	01010101	Inhalt des Akkumulators
11000110	11000110	11000110	Inhalt des Registers r
01000100	11010111	10010011	Ergebnis der logischen Operation im Akkumulator

Operationscode:

AND A	A7
AND B	A0
AND C	A1
AND D	A2
AND E	A3
AND H	A4
AND L	A5
AND (HL)	A6
AND N	E6

OR A	B7
OR B	B0
OR C	B1
OR D	B2
OR E	B3
OR H	B4
OR L	B5
OR (HL)	B6
OR N	F6

XOR A	AF
XOR B	A8
XOR C	A9
XOR D	AA
XOR E	AB
XOR H	AC
XOR L	AD
XOR (HL)	AE
XOR N	EE

Fortsetzung folgt

Dr. Joachim Puhl
Sektion Mathematik
Bereich Analysis

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung“

Leiter: Stefan Posselt

Chefredakteur: Eckhard Stein

Redaktion: C. Dahms, S. Krieg, R. Fötsch, N. Patzschke

Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900

Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.

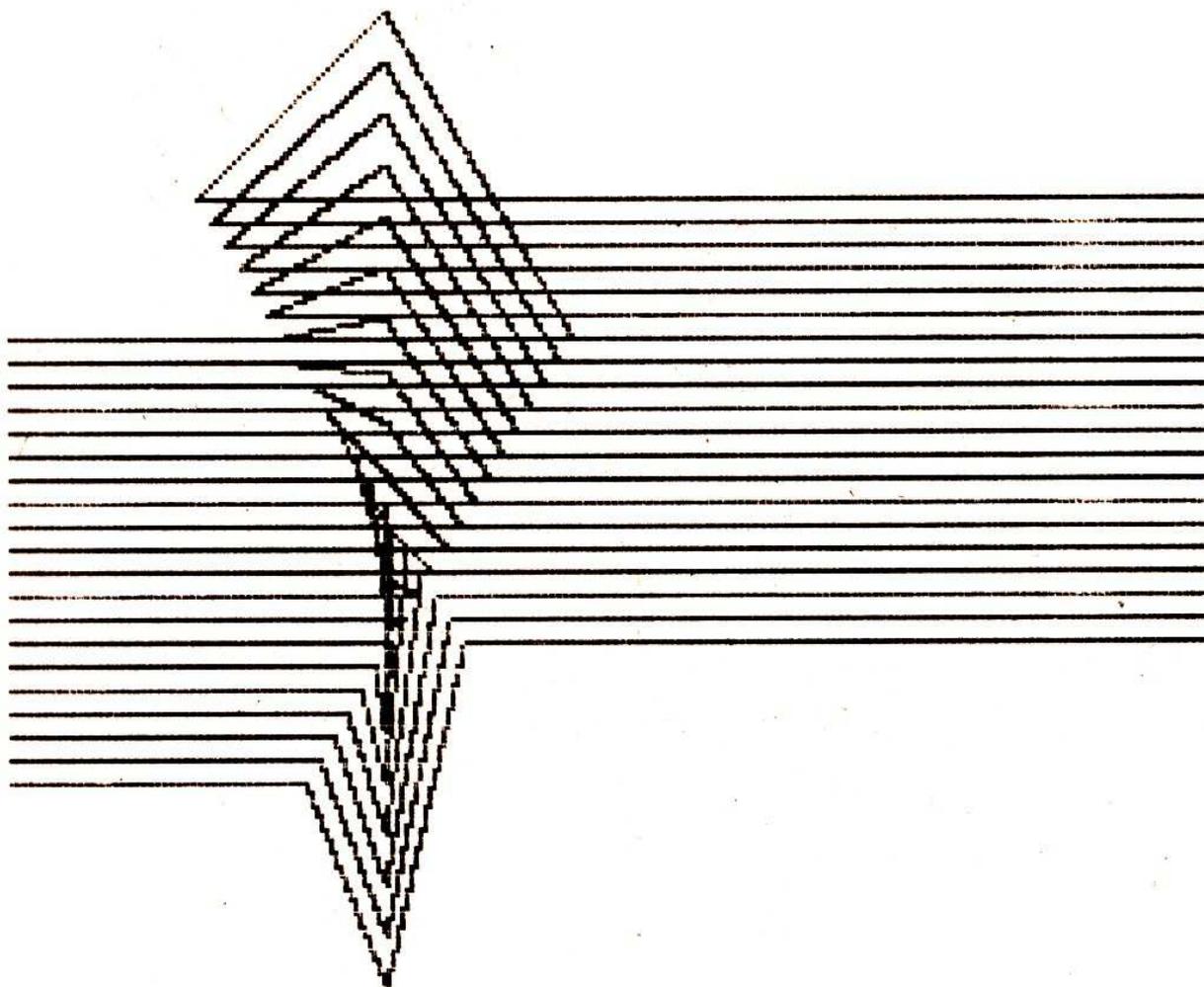
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Titelbild: M. Torke

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	23 (1989) 2	S. 17–32
----------------	--------	------	-------------	----------



wurzel $\sqrt{3 \cdot 89}$

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

**Herausgegeben vom Jugendobjekt Studien-
vorbereitung-Studienwerbung der Sektion
Mathematik an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena**

**23. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M**

Algorithmengrundstrukturen

In alpha 5/1988 werden "Algorithmengrundstrukturen und ihre Notationsformen" dargestellt (verbal, grafisch als Programmablaufplan und Struktogramm, BASIC-Programm).

Zwischen den Grundstrukturen existieren verschiedene interessante Zusammenhänge, so zwischen den verschiedenen Wiederholungsanweisungen.

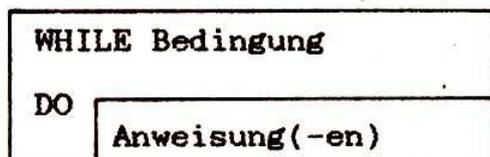
Im folgenden wollen wir eine "Übersetzungsvorschrift" erarbeiten, mit deren Hilfe ein Zyklus mit Anfangsbedingung durch einen Zyklus mit Endbedingung ersetzt werden kann.

Wir erinnern uns an wesentliche Unterschiede zwischen diesen Wiederholungsanweisungen:

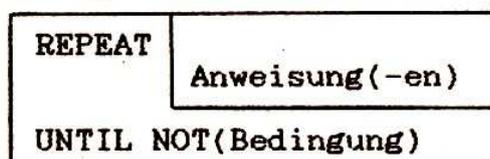
Unterschied	Zyklus mit Anfangsbedingung (Solangeschleife, WHILE-Anweisung)	Zyklus mit Endbedingung (Wiederholschleife, REPEAT-Anweisung)
Nr. 1	Die Wiederholung der Anweisung(-en) erfolgt, bis die Bedingung den Wahrheitswert FALSCH (FALSE) besitzt.	WAHR (TRUE)
Nr. 2	Die Bedingung wird am Anfang der Wiederholungsanweisung überprüft.	Ende

Beide Unterschiede sind bei der Übersetzung zu berücksichtigen.

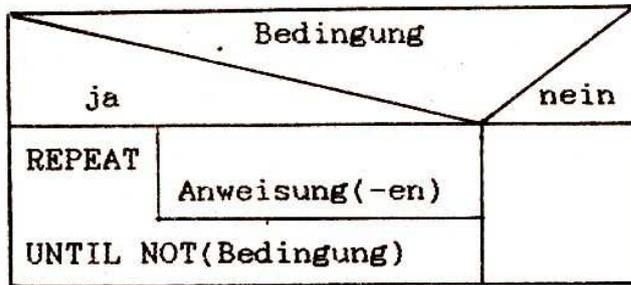
Struktogramm A: Zyklus mit Anfangsbedingung



Struktogramm B: Berücksichtigung des Unterschieds Nr. 1

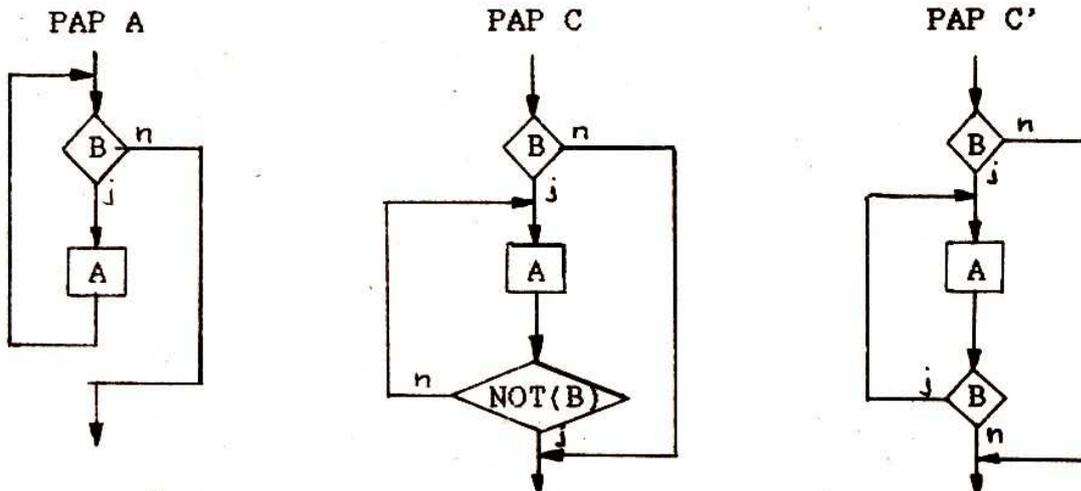


Struktogramm C: Berücksichtigung der Unterschiede Nr. 1 und 2



Im Struktogramm C sind eine einseitige Auswahl und ein Zyklus mit Endbedingung geschachtelt.

Die Äquivalenz der Struktogramme A und C läßt sich sehr gut mit Hilfe von Programmablaufplänen (PAPs) zeigen. Beide Struktogramme werden in PAPs überführt:



PAP C' ergibt sich aus C durch Überführen der Bedingung NOT(B) in B und gleichzeitigem Vertauschen der Ausgänge j und n. Die Äquivalenz der PAPs A und C' ist sofort ersichtlich.

Mit dem folgenden Beispiel wird die Übersetzung von WHILE- in REPEAT-Anweisung demonstriert. Die gewählte Programmiersprache ist Turbo-Pascal (Version 3) auf einem robotron Personalcomputer 1715.

Das Programm berechnet Glieder der FIBONACCI-Zahlenfolge. Definition der Zahlenfolge:

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

```
PROGRAM Variante_1;
VAR a, b, c: real;

BEGIN
  clrscr;
  a := 0.0;  b := 1.0;
  write(a : 20 : 0, b : 20 : 0);
```

```
  WHILE a < 1.0E10 DO
    BEGIN
      c := a + b;
      write(c : 20 : 0);
      a := b;  b := c
    END
```

```
END.
```

```
PROGRAM Variante_2;
VAR a, b, c: real;

BEGIN
  clrscr;
  a := 0.0;  b := 1.0;
  write(a : 20 : 0, b : 20 : 0);
```

```
  IF a < 1.0E10 THEN
    REPEAT
      c := a + b;
      write(c : 20 : 0);
      a := b;  b := c
    UNTIL NOT(a < 1.0E10)
```

```
END.
```

```
PROGRAM Variante_3;
VAR a, b, c: real;

BEGIN
  clrscr;
  a := 0.0;  b := 1.0;
  write(a : 20 : 0, b : 20 : 0);
```

```
  REPEAT
    c := a + b;
    write(c : 20 : 0);
    a := b;  b := c
  UNTIL a >= 1.0E10
```

```
END.
```

Variante 1: Der Zyklus wird als WHILE-Anweisung notiert.

Variante 2: Die WHILE-Anweisung wurde in eine REPEAT-Anweisung übersetzt.

Variante 3: Dieses Programm entsteht aus der Programmvariante 2, indem die IF-Anweisung herausgenommen wird (da in jedem Fall $a < 1.0E10$ erfüllt ist) und die Bedingung $\text{NOT}(a < 1.0E10)$ zu $a \geq 1.0E10$ vereinfacht wird.

Dem interessierten Leser empfehlen wir, andere Zusammenhänge zwischen den Algorithmengrundstrukturen aufzuspüren.

Literatur:

Alfred Schilling, Wolfgang Töpfer: Informatik. Lehrbuch für das strukturierte Programmieren. Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1988

Aufgaben und Lösungen der 29. IMO in Canberra (2. Tag)

4. Man zeige, daß die Menge aller reellen Zahlen x , die der Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

genügen, eine Vereinigung von disjunkten Intervallen ist, wobei die Summe aller Intervalllängen 1988 beträgt.

Lösung:

Durch Umstellen der gegebenen Ungleichung erhält man

$$P(x) = 5 \prod_{j=1}^{70} (x-j) - 4 \sum_{k=1}^{70} k \prod_{j \neq k} (x-j) \leq 0.$$

Wenn man nun die linke Seite der Ungleichung als Funktion in x auffaßt, wird klar, daß die Menge in der Aufgabenstellung eine Vereinigung von Intervallen der Form $(i, x_i]$, $i=1,2,\dots,70$ ist, wobei die Beziehung $i < x_i < i+1 < x_{i+1}$ für $i=1,2,\dots,69$ erfüllt ist und die x_i die Wurzeln des Polynoms $P(x)$ darstellen.

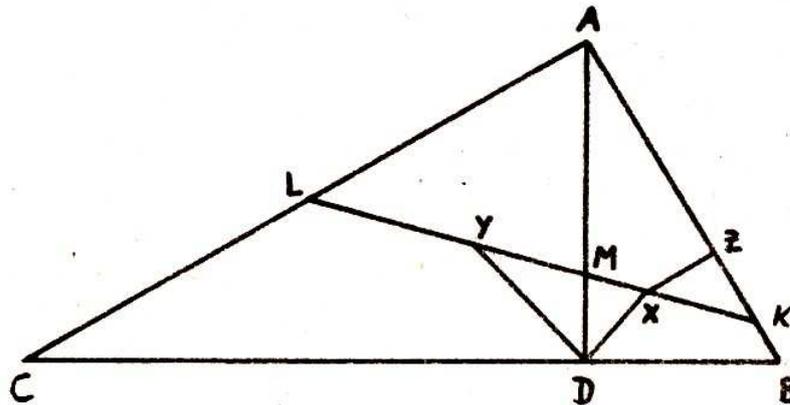
Nach dem Wurzelsatz von Vieta ist die Summe der Wurzeln gleich $\sum_{j=1}^{70} j + (4/5) \sum_{k=1}^{70} k$.

Somit ist die Summe aller Intervalllängen gleich

$$\sum_{i=1}^{70} (x_i - i) = (4/5) \sum_{k=1}^{70} k = 1988.$$

5. Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse BC ; der Fußpunkt der Höhe auf BC sei D . Die Verbindungsgerade der Inkreismittelpunkte der Dreiecke ABD und ACD schneidet die Seiten AB , AC in den Punkten K bzw. L . Es seien S und T der Flächeninhalt von ABC bzw. AKL . Zeige, daß $S \geq 2T$ ist.

Fig. 1



Lösung:

Seien X und Y die Mittelpunkte der Inkreise der Dreiecke ABD und ADC, r der Inradius des Dreiecks ABC, r_1 der des Dreiecks ABD, r_2 der des Dreiecks ADC und s der halbe Umfang des Dreiecks ABC. Dann gilt

$$S = rs = \frac{bc}{2} . \tag{1}$$

Ferner sind die Dreiecke ABD und CBA ähnlich, so daß

$$r_1 = \frac{rc}{a} . \tag{2}$$

Analog gilt

$$r_2 = \frac{rb}{a} . \tag{3}$$

XY schneide AD in M, dann ist $\sphericalangle XDM = 45^\circ$ und

$$DX = r_1 \sqrt{2} = \sqrt{2} \frac{rc}{a} . \tag{4}$$

Analog ist

$$DY = \sqrt{2} \frac{rb}{a} , \tag{5}$$

wobei DX senkrecht zu DY steht. Aus (4) und (5) folgt

$\triangle XDY \sim \triangle BAC$ und damit $\sphericalangle DYK = \sphericalangle BCA$ und $\sphericalangle DXL = \sphericalangle CBA$.

Wenn man das Viereck DYKB betrachtet, ist es jetzt einfach zu sehen, daß $\sphericalangle BKY = 135^\circ$ und somit $\triangle LAK$ gleichschenkelig ist ($\sphericalangle CLB = 135^\circ$).

Sei Z der Fußpunkt der Senkrechten von X auf AB, dann gilt

$$XZ = r_1 = ZK = \frac{rc}{a} = \frac{(s-a)c}{a} \tag{6}$$

($r=s-a$ ist eine bekannte Eigenschaft eines rechtwinkligen Dreiecks).

Indem wir die Ähnlichkeit von $\triangle ABC$ und $\triangle DBA$ ausnutzen, erhalten wir

$$AZ = \frac{(s-c)c}{a} \quad (7)$$

($s-c$ ist die Länge vom Punkt C zum Fußpunkt des Lotes, welches vom Mittelpunkt des Inkreises von $\triangle ABC$ auf BC gefällt wurde).

Aus (6) und (7) erhalten wir

$$AK = \frac{c(2s-a-c)}{a} = \frac{bc}{a} \quad \text{und} \quad T = \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{a}\right)^2 \quad (8)$$

($AK = AZ + r_1$).

Aus (1) und (8) folgt $\frac{S}{T} = \frac{a^2}{bc}$. Wegen $a^2 = b^2 + c^2$ und $b^2 + c^2 \geq 2bc$ ergibt sich schließlich

$$\frac{S}{T} \geq 2.$$

6. Es seien a und b positive ganze Zahlen, so daß $ab+1$ ein Teiler von a^2+b^2 ist.

Man zeige, daß $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist.

Lösung:

Wir setzen $\frac{a^2+b^2}{ab+1} = q \in \mathbb{N}$ und erhalten $a^2+b^2 = qab + q$.

Da a und b in der Gleichung symmetrisch auftreten, können wir o.B.d.A. $a \leq b$ annehmen. Dann gilt:

$$qa - a < b \leq qa.$$

Beweis der linken Ungleichung:

$$qab < qab+q = a^2+b^2 \leq ab+b^2 \quad \Rightarrow \quad qab < ab+b^2$$

$$\Rightarrow \quad qa < a+b \quad \Rightarrow \quad qa-a < b$$

Beweis der rechten Ungleichung:

Angenommen, es gelte $b > qa$. Dann existiert ein $c \in \mathbb{N}$, so daß $b = qa+c$. Wegen $a^2+b^2 = qab+q$ folgt

$$a^2+(qa+c)^2 = qa(qa+c)+q$$

$$\Rightarrow a^2+q^2a^2+2qac+c^2 = q^2a^2+qac+q$$

$$\Rightarrow a^2+qac+c^2 = q$$

$$\Rightarrow q \leq qac < a^2+qac+c^2 = q$$

$$\Rightarrow q < q \quad \Rightarrow \quad \text{Widerspruch.}$$

Somit gilt $b \leq qa$.

Aus $qa - a < b \leq qa$ erhalten wir $b = qa - r$ mit $0 \leq r < a$, $r \in \mathbb{N}_0$.

Wegen $a^2 + b^2 = qab + q$ gilt:

$$a^2 + (qa - r)^2 = qa(qa - r) + q$$

$$\Rightarrow a^2 + q^2 a^2 - 2ar + r^2 = q^2 a^2 - qar + q$$

$$\Rightarrow a^2 + r^2 = qar + q = q(ar + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + r^2}{ar + 1} = q.$$

Wenn ein Paar (a, b) die Gleichung $\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = q$ erfüllt, gilt das automatisch auch für das Paar (r, a) . Nun gilt aber die Beziehung $0 \leq r < a \leq b$, so daß die erste Komponente von (r, a) kleiner als die erste Komponente von (a, b) ist. Da es keine unendlich streng monoton fallende Folge positiver ganzer Zahlen gibt, erhalten wir Paare mit immer kleiner werdender erster Komponente, bis $r = 0$ erreicht ist.

Aus $\frac{a^2 + r^2}{ar + 1} = q$ und $r = 0$ ergibt sich dann $q = a^2$.

Somit stellt q ein Quadrat dar.

Bemerkung: Ein solches Lösungspaar wäre z.B. $(2, 8)$.

Preisaufgaben

V 13 Докажите, что для любого треугольника проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного одной стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна по длине третьей стороне!

2

V 14 Ein Würfel mit Seitenlänge a werde um 80° um eine Gerade gedreht, die die Mittelpunkte zweier paralleler Kanten, welche nicht auf einer Seitenfläche liegen, verbindet. Man bestimme das Volumen des Durchschnitts des Ausgangswürfels mit dem gedrehten Würfel!

2

V 15 Man zeige für alle reellen x und alle natürlichen Zahlen n, m , $n+m > 0$ die Ungleichung

1

$$\sin^m x \cdot \cos^n x \leq \sqrt{\frac{m^m \cdot n^n}{(m+n)^{(m+n)}}$$

V 16 Gegeben seien drei Zahlen a, b, c . Die Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$

seien folgendermaßen definiert: $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c,$

$$a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + c_n}{2}, \quad c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n > 0.$$

Man beweise, daß alle drei Folgen den gleichen Grenzwert haben und bestimme diesen!

V 17 Man finde den größten Wert des Ausdrucks $|\cos x| + |\cos 2x|$

für reelle x .

V 18 Welche Zahl ist größer: $2^{(3^{(2^3)})}$ oder $3^{(2^{(3^2)})}$?

Einsendeschluß: 1. 6. 1989

Einführung in die Assemblerprogrammierung (Fortsetzung)

9. Programm (Das Ausblenden von Bits)

ADRESSE	MASCHINENCODE	MARKE	ASSEMBLERCODES	BEMERKUNGEN
0000	CD 6F C9		CALL C96FH	Parameter an DE
03	3E 07		LD A, 07H	A mit 07H laden
05	A3		AND E	Ausbl.d.Bits 3-7
06	47		LD B,A	Vorb.Param.-Ausg.
07	AF		XOR A	A 00 setzen
08	CD B1 D0		CALL D0 B1H	Param.-Überg.an
0B	C9		RET	BASIC

Das Programm wird über $USR(X)$ aufgerufen (DOKE 772, 0 nicht vergessen!) Da der Inhalt des E-Registers mit $07H \cong \boxed{0000:0111}$ durch ein logisches UND verknüpft wird, werden Bit3 bis Bit7 Null gesetzt (ausgeblendet), während Bit0 bis Bit2 erhalten bleiben. Nach $?USR(X)$ wird der Rest, den $INT(X)$ bei Division durch 8 läßt, ausgegeben ($X \geq 0!$).

Bemerkung: XOR A leistet das gleiche wie LD A, 00H, man spart aber ein Befehlsbyte.

11. Arithmetische Befehle

Arithmetische Befehle werden im Prozessor über logische Verknüpfungen realisiert. Wie das genau funktioniert, kann an dieser Stelle nicht näher beschrieben werden. Arithmetische 8-Bit-Befehle können zwischen Akkumulator und einem Registerinhalt gebildet werden, wobei das Ergebnis wieder im Akkumulator steht.

Bei 16-Bit-Befehlen übernimmt das HL-Register die Rolle des Akkumulators.

ADD r	bewirkt $A \leftarrow A + r$
SUB r	bewirkt $A \leftarrow A - r$
ADD HL,rr	bewirkt $HL \leftarrow HL + rr$

Entsprechend wirken die Befehle:

ADD (HL)	SUB (HL)
ADD N	SUB N

Operationscode:

ADD A	87	SUB A	97	ADD HL,BC	09
ADD B	80	SUB B	90	ADD HL,DE	19
ADD C	81	SUB C	91	ADD HL,HL	29
ADD D	82	SUB D	92	ADD HL,SP	39
ADD E	83	SUB E	93		
ADD H	84	SUB H	94		
ADD L	85	SUB L	95		
ADD (HL)	86	SUB (HL)	96		
ADD N	C6	SUB N	D6		

10. Programm

ADRESSE	MASCHINENCODE	MARKEN	ASSEMBLERCODE	BEMERKUNGEN
0000	CD 6F C9		CALL C96FH	Parameter an DE
03	21 64 00		LD HL,0064H	HL mit 100 (dez.) laden
06	19		ADD HL,DE	HL und DE addier.
07	7C		LD A,H	} Vorbereitung } der Ausgabe
08	45		LD B,L	
09	CD B1 D0		CALL D0 B1H	Übergabe an BASIC
0C	C9		RET	

Nach DOKE 772,0 kann das Programm über ?USR(X) aufgerufen werden. Es wird X+100 (dez.) ausgegeben (X ganzzahlig!).

12. Das Z-Flag

So wie in der Schifffahrt durch Flaggen Signale gegeben werden, benutzt auch der Prozessor Flags (Flaggen), um Signalzustände zu speichern. In Abhängigkeit der Flags können Programmverzweigungen durchgeführt werden. Der Prozessor arbeitet mit mehreren Flags. Wir stellen zunächst das Z-Flag vor.

Das Zero-Flag (Null-Flagge) - abgekürzt als Z-Flag bezeichnet - wird bei fast allen arithmetischen oder logischen Operationen gesetzt, wenn deren Ergebnis Null ist.

Das Z-Flag wird nicht gesetzt bei INCrr, DEC rr, ADD HL,rr.

Ziemlich alle Operationen, bei denen der Programmzähler verändert wird, kann man auch vom Zustand des Z-Flags abhängig machen.

JP Z,NN	CA	bewirkt JP NN, wenn Z-Flag gesetzt
JP NZ,NN	C2	bewirkt JP NN, wenn Z-Flag nicht gesetzt
CALL Z,NN	CC	bewirkt CALL NN, wenn Z-Flag gesetzt
CALL NZ,NN	C4	bewirkt CALL NN, wenn Z-Flag nicht gesetzt
RET Z	C8	bewirkt RET, wenn Z-Flag gesetzt
RET NZ	C0	bewirkt RET, wenn Z-Flag nicht gesetzt

Ist die Bedingung nicht erfüllt, wird die Anweisung nicht beachtet und der nächste Befehl abgearbeitet. Mit unserem Kenntnisstand ist es jetzt schon möglich, eine schnelle Bildschirm-lösch-Routine zu programmieren. Dazu werden wir einfach den Bildpunktspeicher (Pixel-RAM), der sich im IRM im Bereich 8000H - A800H befindet, löschen.

Wir erinnern daran, daß, wenn auf den IRM zugegriffen wird, dieser erst zugeschaltet und vor der Rückkehr wieder abgeschaltet werden muß (vgl. Vorbemerkungen zum 6. Programm).

11. Programm (schnelles Bildschirmlöschen)

ADRESSE	MASCHINENCODE	MARKEN	ASSEMBLER	BEMERKUNGEN
0000	CD 18 F0		CALL F018H	IRM ein
03	21 00 28		LD HL,2800H	Länge d. Bildpkt.-speichers nach HL (Zähler)
06	01 00 80		LD BC,8000H	Anfangsadr. Bildpkt.-speicher nach BC
09	AF	LOOP	XOR A	A ← 00
0A	02		LD (BC),A	Speicherz. löschen
0B	2B		DEC HL	Zähler um 1 verring.
0C	03		INC BC	nächste Adresse
0D	7C		LD A,H	} Test, ob } Zähler = 0
0E	B5		OR L	
0F	C2 09 00		JP NZ, LOOP	Sprung nach LOOP, wenn Z-Flag nicht gesetzt
12	CD 1B F0		CALL F01BH	IRM aus
15	C9		RET	

Nach Aufruf des Programms durch CALL 0 wird der Bildschirm schnell gelöscht.

Bemerkung zum Programm: Das HL-Doppelregister dient als Zähler, in dem die Länge des Bildpunktspeichers geladen wird. Sein Inhalt wird in einer Schleife (loop) solange verringert, bis er Null ist. Dabei wird jedesmal eine weitere Zelle des Bildpunktspeichers gelöscht. Da DEC HL keine Wirkung auf das Z-Flag hat, muß andersweitig getestet werden, ob das HL-Registerpaar 0 erreicht hat. Zu diesem Zweck wird H nach A geladen und mit einem logischen ODER mit L verknüpft. Das Z-Flag wird gesetzt, wenn das Ergebnis 0 ergibt, was nur möglich ist, wenn das H- und L-Register beide gleichzeitig 0 sind.

Ein weiterer wichtiger Befehl, der das Z-Flag beeinflusst, ist der Vergleichs-Befehl (compare).

CP r

Der Inhalt des Akkumulators wird mit dem Inhalt des Registers r (bzw. entsprechend mit der Speicherzelle (HL)) verglichen. Der Vergleich erfolgt durch Bildung und Bewertung der Differenz A-r, die aber nicht in den Akkumulator geladen wird. Bei Gleichheit von A und r wird das Z-Flag gesetzt, sonst rückgesetzt.

Operationscode:

CP A	BF
CP B	B8
CP C	B9
CP D	BA
CP E	BB

CP H	BC
CP L	BD
CP (HL)	BE
CP N	FE

12. Programm

ADRESSE	MASCHINENCODE	MARKE	ASSEMBLERCODE	BEMERKUNGEN
0000	CD 18 F0		CALL F018H	IRM ein
03	CD 03 F0	TASTE	CALL F003H	Aufruf PV 1
06	04		DEFB	UP-Tastaturabfrage
07	CD 03 F0		CALL F003H	Aufruf PV 1
0A	00		DEFB	UP-Zeichenausgabe
0B	FE 03		CP 03H	BREAK-Taste?
0D	C2 03 00		JP NZ, TASTE	
10	CD 1B F0		CALL F01BH	IRM aus
13	C9		RET	

Nach Aufruf des Programms mit CALL 0 kann auf dem Bildschirm beliebig geschrieben und der Cursor frei gewegt werden. Noch einige ergänzende Erläuterungen. Bei Aufruf des Unterprogramm "Tastaturabfrage" mit dem Def.-Byte 04 wartet der Computer bis eine Taste gedrückt wird und übergibt den Tastencode der gedrückten Taste am A-Register. Anschließend wird das entsprechende Zeichen auf dem Bildschirm ausgegeben bzw. Steuerbefehle ausgeführt (vgl. 6. Programm). Die BREAK-Taste hat den Code 03. Durch CP 03H wird getestet, ob die BREAK-Taste gedrückt wurde und ggf. der Rücksprung eingeleitet.

Wie in Abschnitt 9 beschrieben, können in den Registern einzelne Bits verändert werden. Es gibt aber auch die Möglichkeit, zu testen, ob ein bestimmtes Bit eines Registers gesetzt oder nicht gesetzt ist. Bei diesen Spitzeldiensten hilft ebenfalls das Z-Flag.

BIT b,r	kontrolliert Bit b des Registers r (bzw. die Speicherzelle, deren Adresse in HL steht). Das Z-Flag wird gesetzt, wenn Bit b des Registers r den Signalzustand 0 aufweist, andernfalls wird es nicht gesetzt.
BIT b,(HL)	

Befehlscode:

r	A	B	C	D	E	H	L	(HL)
BIT 0,r	CB47	CB40	CB41	CB42	CB43	CB44	CB45	CB46
BIT 1,r	CB4F	CB48	CB49	CB4A	CB4B	CB4C	CB4D	CB4E
BIT 2,r	CB57	CB50	CB51	CB52	CB53	CB54	CB55	CB56
BIT 3,r	CB5F	CB58	CB59	CB5A	CB5B	CB5D	CB5D	CB5E
BIT 4,r	CB67	CB60	CB61	CB62	CB63	CB64	CB65	CB66
BIT 5,r	CB6F	CB68	CB69	CB6A	CB6B	CB6C	CB6D	CB6E
BIT 6,r	CB77	CB70	CB71	CB72	CB73	CB74	CB75	CB76
BIT 7,r	CB7F	CB78	CB79	CB7A	CB7B	CB7C	CB7D	CB7E

Zur Speicherung der Flags dient ein weiteres Register, das sogenannte F-Register. Das Z-Flag steckt im Bit 6 vom F-Register. Das F-Register bildet mit dem Akkumulator ein weiteres Registerpaar AF. Konsequenterweise gibt es auch die Befehle

PUSH AF	F5
---------	----

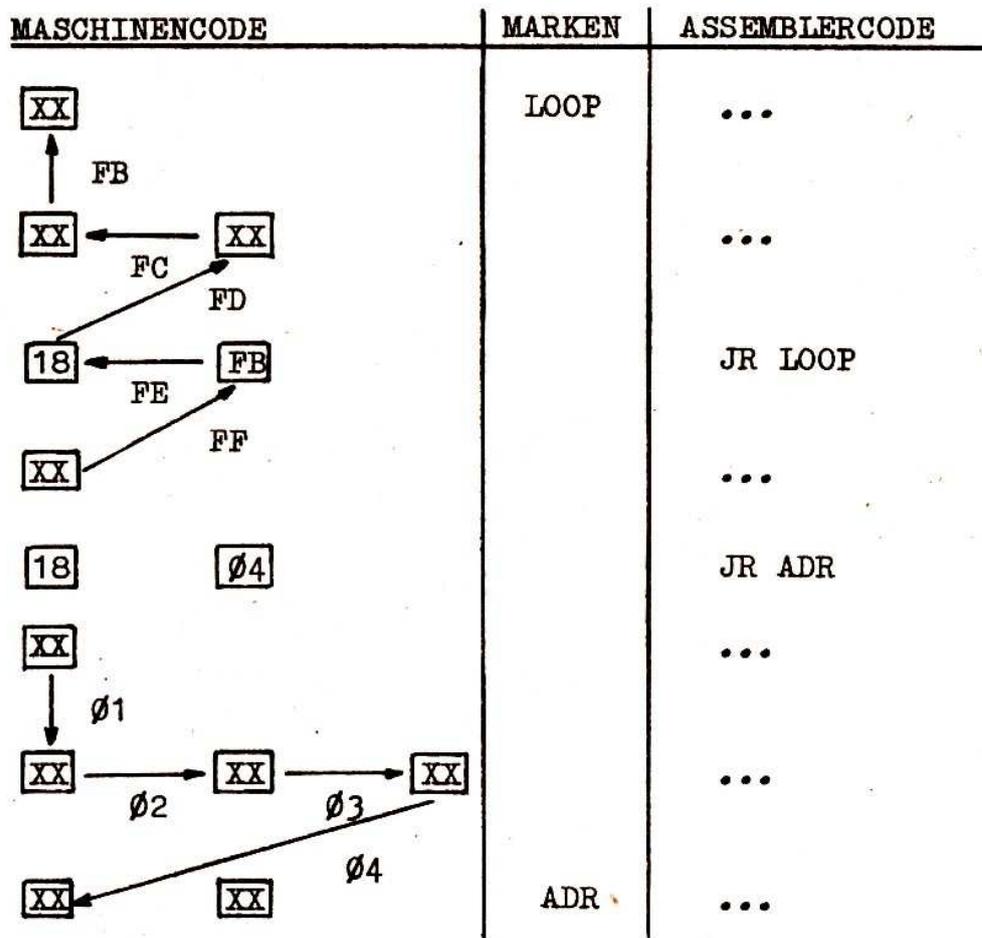
POP AF	F1
--------	----

13. Der relative Sprung

Bekanntlich wird bei absoluten Sprüngen die Zieladresse durch 2 Adress-Bytes angegeben. Einen Nachteil hat das natürlich. Man kann Maschinenprogramme, die absolute Sprünge enthalten, nicht verschieben, ohne auch die Sprungadresse ändern zu müssen. Dieser Nachteil wird durch die Möglichkeit des relativen Sprungs beseitigt. Bei relativen Sprüngen wird statt der Zieladresse nur die relative Sprungweite angegeben, die dem Prozessor vorschreibt, um wieviel Bytes im Programm (vom nächsten Befehl aus gezählt) vor- oder zurückgesprungen werden soll. Der Assemblercode für den relativen Sprung ist JR N

JR N	18
------	----

Bei Vorwärtssprüngen muß man von 01H - 7FH aufwärts und bei Rückwärtssprüngen entsprechend von FFH - 80H abwärts zählen.

Illustration der Sprungberechnung

Es gibt auch relative Sprünge, die vom Zustand des Z-Flags abhängen.

JR Z,N	28
--------	----

≅ JR N, wenn Z-Flag gesetzt.

JR NZ,N	2Ø
---------	----

≅ JR N, wenn Z-Flag nicht gesetzt.

Als Anwendungsbeispiel wollen wir nur unser Beispiel 11 (schnelles CLS) durch den Einsatz von relativen Sprüngen etwas abändern.

Programm 11a

ADRESSE	MASCHINENCODE	MARKEN	ASSEMBLERCODE	BEMERKUNGEN
ØE	B5	⋮	OR L	
ØF	2Ø F8		JR NZ, LOOP	
11	CD 1B FØ		CALL FØ1BH	
14	C9		RET	

Dieses Programm kann jetzt ohne Änderung beliebig verschoben werden. Außerdem spart man sogar noch ein Byte Speicherplatz.

Fortsetzung folgt

Dr. Joachim Puhl
Sektion Mathematik
Bereich Analysis

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung“

Leiter: Stefan Posselt

Chefredakteur: Eckhard Stein

Redaktion: C. Dahms, S. Krieg, R. Fötsch, N. Patzschke

Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900

Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.

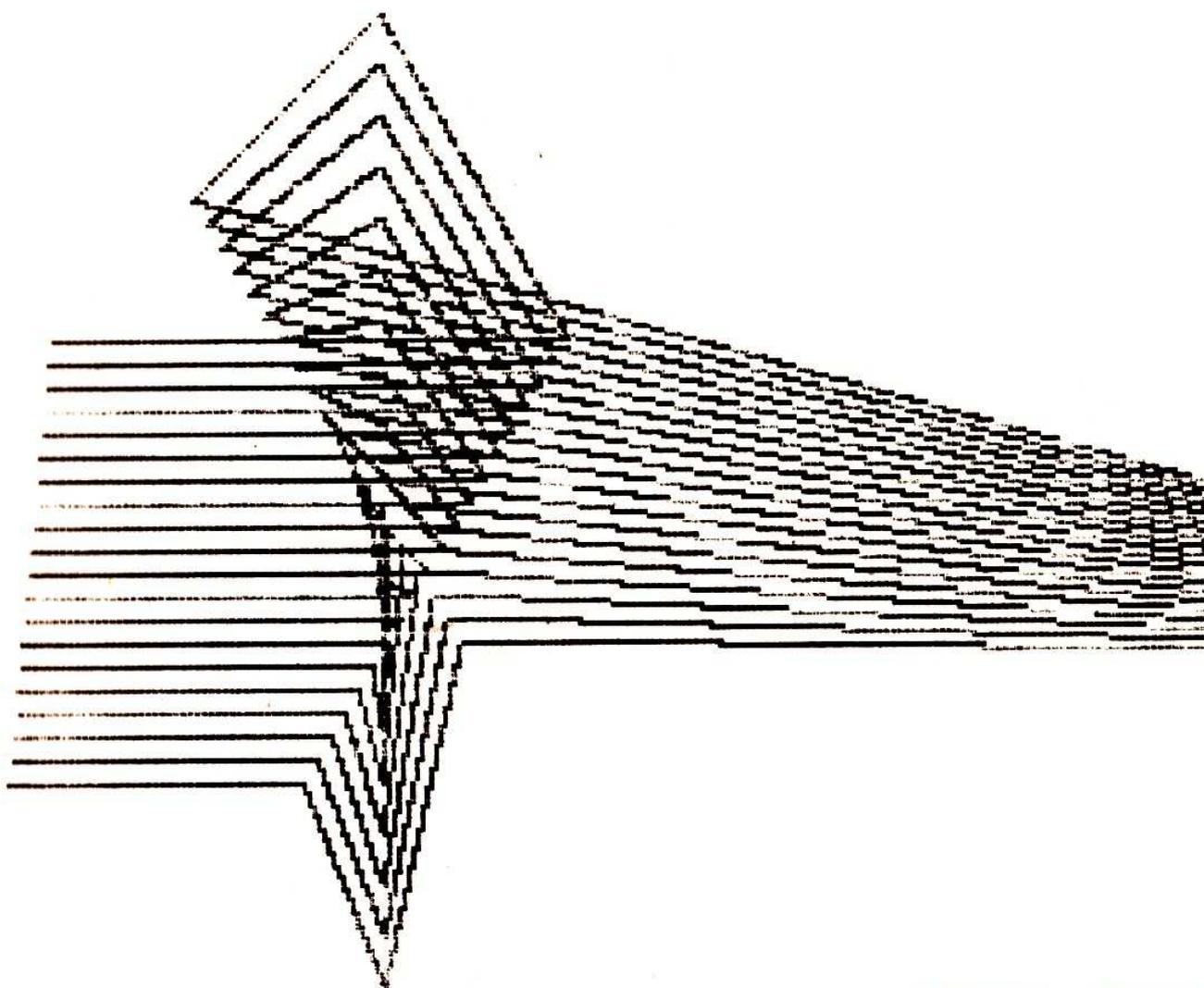
Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Titelbild: M. Torke

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	23 (1989) 3	S. 33–48
----------------	--------	------	-------------	----------



wurzel $\sqrt{4 \cdot 89}$

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

**Herausgegeben vom Jugendobjekt Studien-
vorbereitung-Studienwerbung der Sektion
Mathematik an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena**

**23. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M**

Information zum Ideenwettstreit „Kreativ mit Algorithmen“

Im Oktober 1988 riefen die beiden von der AdW der DDR herausgegebenen Zeitschriften "spectrum" und "Wissenschaft und Fortschritt" zu einem Ideenwettstreit auf. Dieser zielt darauf, den Umgang mit dem Computer zu initiieren oder zu vertiefen sowie seine Anwendung auch auf derzeit noch ausgefallene Sachverhalte - wie künstlerische Betätigung, anspruchsvolle Spiele und das Ausknobeln origineller Problemlösungsvarianten - zu fördern.

Neuartige Lösungen können, wie sich in der Vergangenheit mehrfach gezeigt hat, große Wirkungen auslösen.

Jury und Redaktionen wünschten sich, daß der Wettbewerb die Leser anregen möge, sich mit folgenden Problemkreisen näher zu befassen:

- . Neue kreative Ideen für den Umgang mit dem Computer;
- . hocheffektive Algorithmen zur Lösung bekannter Probleme sowie
- . interessante Fragen, die einer rechentechnischen Lösung bedürfen.

Bedingungen:

Inhaltlich sind Probleme und Lösungen in keiner Weise eingeschränkt. Sie können sowohl numerischer, graphischer als auch künstlerisch-ästhetischer Natur sein (Bild, Ton, Text) - nur Originalität ist gefragt, die kreative, neue tragende Idee!

Nicht bearbeiten wird die Jury reine Aktionsspiele, die betont auf die manuelle Reaktion des Menschen angelegt sind. Kommerzielle und zu umfangreiche Programmsysteme können ebenfalls nicht in den Wettbewerb einbezogen werden.

Die Einsendungen an die Redaktionen sollten aus drei Teilen bestehen:

- einer inhaltlichen Beschreibung (maximal fünf Schreibmaschinenseiten);
- einer Programmdokumentation (maximal 300 Programmzeilen), bevorzugt in PASCAL oder C, evtl. BASIC);

- einem maschinenlesbaren Beleg des Beispielprogramms zur Erprobung (Diskette oder Kassette).

Eingesandte Unterlagen bleiben materiell und urheberrechtlich Eigentum des Einsenders. Die Einsendungen werden umgehend bestätigt. Die Jury entscheidet innerhalb von drei Monaten über Annahme oder Nichtannahme zum Wettbewerb, gleichzeitig erhalten die Einsender ihre Unterlagen zurück. Im Oktober 1989 werden die besten Ergebnisse prämiert. In der Zwischenzeit können interessante Lösungen in "spectrum" und "Wissenschaft und Fortschritt" veröffentlicht werden, um einen regen und kreativen Meinungsaustausch zu Informatikproblemen zu erreichen.

Jedermann ist berechtigt zur freiwilligen Teilnahme. Vom Einsender sind folgende Angaben zur Person erforderlich: Name, Alter, Beruf, Adresse; außerdem eine verbindliche Erklärung, daß der Inhalt der Einsendung sein geistiges Eigentum ist und Rechte anderer nicht bestehen. Wünschenswert ist ein Literaturverzeichnis zu ähnlichen Inhalten. In (1) und (2) sind Beispiele für zu lösende Aufgaben genannt; in (3) werden die Teilnahmebedingungen (hinsichtlich Programmiersprachen usw.) noch präzisiert.

Auf Programmangebote, Lösungsvarianten und neue, interessante Probleme freuen sich die Redaktionen "spectrum" und "Wissenschaft und Fortschritt" sowie die Jury.

Anschriften:

Redaktion spectrum, AdW der DDR,
O.-Nuschke-Str. 22/23, PSF 1298, Berlin, 1086

Redaktion Wiss. und Fortschritt,
Leipziger Str. 3-4, Berlin, 1086

Literatur

- (1) Kreativ mit Algorithmen. In: Wiss. Fortschr. - Berlin 38 (1988) 10. - S. 264
- (2) Kreativ mit Algorithmen. In: spectrum. Berlin 19 (1989) 3
- (3) Neues zu "Kreativ mit Algorithmen". In: Wiss. Fortschr. - Berlin 39 (1989) 3

Das Gauß'sche Pentagramma Mirificum (von Frank Heinrich)

Dieser Beitrag verlangt vom Leser einige grundlegende Kenntnisse vom Aufbau der sphärischen Geometrie und Trigonometrie, jedoch werden notwendige Stellen besonders erläutert.

Eine gewichtige Rolle in der sphärischen Geometrie spielen die rechtwinkligen Dreiecke. Sie können nach der Anzahl der rechten Winkel einfach, doppelt oder dreifach rechtwinklig auftreten. Im folgenden werden wir von einem einfach rechtwinkligen, nicht orthogenen entarteten sphärischen Dreieck D_0 mit spitzen Seiten ($< \frac{\pi}{2}$) ausgehen.

Definition 1: Das Dreieck ABC mit den Seiten

$AB = c < \frac{\pi}{2}$, $AC = b < \frac{\pi}{2}$; $BC = a < \frac{\pi}{2}$ und den Winkeln
 $\sphericalangle(ABC) = \beta < \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle(CAB) = \alpha < \frac{\pi}{2}$ und $\sphericalangle(BCA) = \gamma = \frac{\pi}{2}$
 heißt einfach rechtwinkliges sphärisches Dreieck mit spitzen Seiten.

Im weiteren soll bei dieser Art von Dreiecken nur von Dreieck gesprochen werden. Setzt man den Sinussatz, den Seitenkosinussatz und den Winkelkosinussatz als bewiesene Sätze der sphärischen Trigonometrie voraus und wendet sie auf das Dreieck D_0 an, dann gewinnt man eine bemerkenswerte allgemeine Formel bei 2 beliebig gegebenen Dreiecksgrößen zur Berechnung der restlichen 3 Größen der anderen Dreieckselemente im besagten Dreieck. Diese, auf den englischen Hobbymathematiker LORD NAPIER (Neper) zurückzuführende Regel läßt sich in folgender Weise darstellen (vgl. Abb. 1).

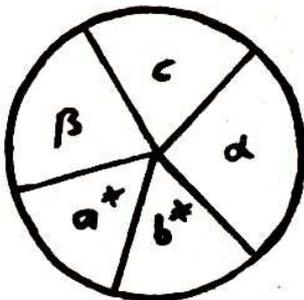


Abb. 1

Zerlegt man einen Kreis in 5 Sektoren und schreibt dort die ausgezeichneten Dreieckselemente (Seiten, Innenwinkel) von D_0 ein, wobei die Katheten a und b durch ihre Komplemente ersetzt werden ($a^* = \frac{\pi}{2} - a$, $b^* = \frac{\pi}{2} - b$), dann berechnet sich der Kosinus eines Elementes eines Sektors als das Produkt der Kotangenten der Elemente der anliegenden Sektoren sowie als das Produkt der Sinus der Elemente der nichtanliegenden Sektoren.

Eine interessante geometrische Interpretation dieses Sachverhaltes liefert nachfolgende Betrachtung. Zunächst sei die Relation Nachbardreieck definiert.

Definition 2: Vorgelegt sei ein Ausgangsdreieck

$D_0 := ABC$. Verlängert man die Hypotenuse c und die Kathete b über A um ihr jeweiliges Komplement zu $\frac{\pi}{2}$ bis zu den Punkten B' bzw. C' , so heißt das Dreieck $D_1 := AB'C'$ Nachbardreieck zu D_0 bezüglich der Ecke A . (Abb. 2)

Über die Beschaffenheit eines Nachbardreiecks gibt folgender Satz Auskunft:

Satz 1: Das Nachbardreieck ist gleichfalls ein Vertreter der Dreiecke gemäß Definition 1.

Beweis: Durch die Komplementärbeziehungen $\overline{AC} + \overline{AC'} = \frac{\pi}{2}$ und $\overline{AB} + \overline{AB'} = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich, daß $\overline{AB'}$ und $\overline{AC'} < \frac{\pi}{2}$ und somit spitze Seiten sind. Beide Seiten schließen einen Winkel der Größe α ein, da dieser Winkel Scheitelwinkel zu α im Ausgangsdreieck ist. In der sphärischen Geometrie gilt der Satz von der Polaren:

Satz 2: Die Polaren aller Punkte einer Geraden gehen durch einen Punkt, den Pol dieser Geraden. Der Pol hat von der Geraden einen Abstand von $\frac{\pi}{2}$.

In Abb. 2 ist B Pol zu $\overline{B'C'}$ und somit ist die Größe des Winkels $\sphericalangle BC'B' = \frac{\pi}{2}$ und die Größe von $\sphericalangle BB'C = \frac{\pi}{2}$. Analog ist C' Pol zu \overline{BC} , so daß der Winkel $\sphericalangle BC'C$ genau so groß wie die Seite \overline{BC} ist. So hat der Winkel $\sphericalangle B'C'C$ die Größe $\frac{\pi}{2}$ - Größe $\sphericalangle BC'C = \frac{\pi}{2}$ - Größe von $\overline{BC} = \frac{\pi}{2} - a = a^*$.

Die Größe der Seite $\overline{B'C'} = \beta^*$ läßt sich in gleicher Weise zeigen.

Damit erfüllen alle 5 ausgezeichneten Stücke die Kriterien der Definition 1.

Wählt man nun D_0 als Ausgangsdreieck, so läßt sich durch fort-

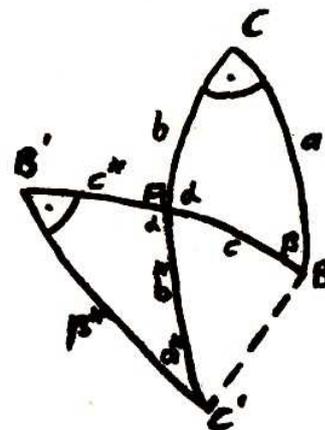


Abb. 2

laufende Konstruktion von Nachbardreiecken in eine Richtung eine geschlossene Kette von 5 Dreiecken erzeugen, wobei die Besonderheit darauf liegt, daß D_0 Nachbardreieck von seinem 4. Nachbardreieck ist und sich die Nachbardreiecke auf der Sphäre plazieren lassen (Abb. 3).

Es ist nun zu zeigen, daß sich die Kette der Nachbardreiecke derart schließt, daß die Hypotenusen der Dreiecke ein sphärisches konvexes Fünfeck begrenzen.

Im Sinne eines indirekten Beweises nehmen wir an, daß die Dreieckskette bei einem Punkt A beginnt und bei einem Punkt $E \neq A$ endet. Somit ist A Pol zur Hypotenuse in D_2 wie gleichzeitig E

der Pol wäre. Infolge der rechten Winkel in D_1 und D_3 und der entsprechenden Nachbardreiecks-konstruktion sind die Abstände von den Scheiteln zu A und E genau $\frac{\pi}{2}$. Daher würde es zu einer Geraden 2 Pole geben, was nicht möglich ist. Folglich gilt: $A = E$.

Damit ist auch das sphärische Fünfeck eindeutig bestimmt. Auf den Nachweis der Konvexität soll hier verzichtet werden. Dieses Sternenfünfeck erhielt nach C.F. Gauss den Namen "Pentagramma Mirificum" (wunderbares Fünfeck).

Es existieren eine Reihe weiterer interessanter Eigenschaften dieser Figur, wovon hier einige thesenhaft genannt werden sollen. Es bleibt dem interessierten Leser überlassen, sich in der angegebenen Literatur tiefgründiger mit dieser Problematik zu beschäftigen.

- Die Länge aller Diagonalen im Fünfeck a, b^*, β, d, a^* besitzen eine Länge von $\frac{\pi}{2}$.
- Die Innenwinkel dieses Fünfecks sind sämtlich stumpfe Winkel.
- Die Pentagrammafigur kann erweitert werden, indem man die

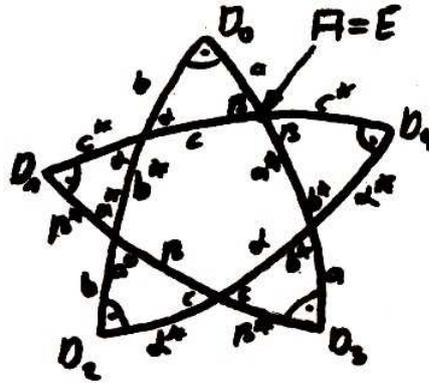


Abb. 3

Katheten aller 5 Dreiecke um ihr jeweiliges Komplement über den rechten Winkel hinaus verlängert. Dabei schneiden sich jeweils die am weitesten voneinander entfernt liegenden Katheten zweier benachbarter Dreiecke und es entstehen 5 sphärische konvexe Vierecke mit 3 rechten und einem stumpfen Innenwinkel sowie 4 spitzen Seiten. Diese Figuren werden als Stumpfecke bezeichnet.

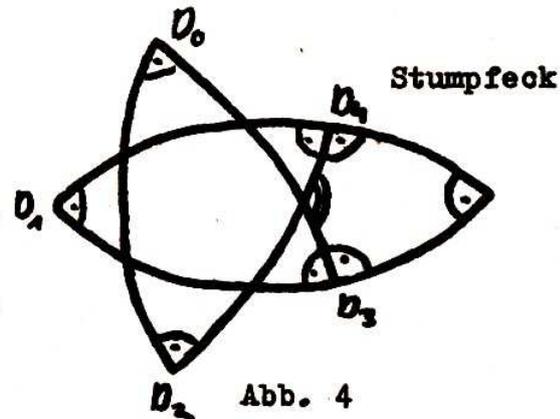


Abb. 4

- Es existieren nun bemerkenswerte Zuordnungsmöglichkeiten des Fünfecks, der Dreiecke und der Stumpfecke untereinander. Jede der 11 Teilfiguren enthält die 5 Stücke des Ausgangsdreiecks in anderer Form und Anordnung. Man nennt sie komplementäre Figuren. Sie lassen sich durch Konstruktion wie auch rechnerisch auseinander herleiten.
- Ähnliche Pentagrammafiguren existieren in höher- und niederdimensionalen Räumen der sphärischen Geometrie.
- Gleichfalls existieren in hyperbolischen Räumen Analogons zu diesem Figurenkomplex.

Auf folgende weiterführende Literatur sei verwiesen:

- /1/ Böhm, J.; Hertel, E.; Polyedergeometrie in n-dimensionalen Räumen konstanter Krümmung. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980.
- /2/ Roeser, E.; Die nichteuklidischen Geometrien und ihre Beziehungen untereinander. R. Oldenburg, München 1957.
- /3/ Heinrich, F.; Die sphärische-elliptische sowie die hyperbolische Pentagrammafigur der Ebene und ihre Beziehungen untereinander. Diplomarbeit zur Erlangung des akademischen Grades Diplomlehrer, Jena 1984.
- /4/ Kipper, G.; Verallgemeinerte Pentagrammafiguren in der hyperbolischen Geometrie für die Dimensionen 2 und 3. Dissertation, Jena 1984.

Preisaufgaben

V 19 Durch einen inneren Punkt eines beliebigen Tetraeders werden Parallelen zu den Kanten des Tetraeders gelegt. Im Schnitt mit den Seitenflächen entstehen so 6 Strecken. Man zeige, daß die Summe der Verhältnisse jeder dieser Strecken zu der entsprechenden parallelen Kante genau 3 ist!

V 20 Man beweise, daß für $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ und $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n > 0$ gilt:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$$

V 21 Kann man in die Ebene eine unendliche Menge von gleichartigen Kreisen so legen, daß eine beliebige Gerade nicht mehr als zwei Kreise schneidet?

V 22 Man zeige, daß für alle ganzen Zahlen n und alle reellen Zahlen x die Ungleichung $|\sin x \cdot n/2| \cdot |\sin x|$ erfüllt ist!

V 23 Für eine Zahlenfolge $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sei bekannt, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n) = 0$. Man berechne $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (Existiert der Limes?)!

V 24 На плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой, и около каждой написано число. Известно, что если прямая проходит через две или более отмеченных точек, то сумма всех чисел, написанных около этих точек, равна нулю. Докажите, что всех числа равны нулю.

Einsendeschluß: 1. 7. 1989

Nachtrag zu: Problem des Lucas

In /5/ wurden Aussagen zu dem Problem des Lucas - auch bekannt unter dem Namen "Türme von Hanoi" - gemacht. In diesem Artikel wollen wir dazu Interessantes ergänzen, unter anderem auch die Lösungen zu den Aufgaben, die den Lesern angeboten wurden. Zur besseren Lesbarkeit geben wir zuerst die Programme aus /5/ wieder.

1. Turbo-Pascal-Programm

```
PROGRAM Tuerme_von_Hanoi;
VAR n, Anzahl: integer;

{$A-}
PROCEDURE Hanoi(k, a, b: integer);
BEGIN
  IF k >= 1 THEN
    BEGIN
      Hanoi(k - 1, a, 6 - a - b);
      write(k : 3, ':', a, '=>', b);
      Anzahl := Anzahl + 1;
      Hanoi(k - 1, 6 - a - b, b)
    END
  END;
{$A+}

BEGIN
  clrscr;
  write('Anzahl der Scheiben: ');
  readln(n);
  Anzahl := 0;
  writeln('Bewegungen der einzelnen Scheiben:');
  writeln('Scheibe : von => nach');
  Hanoi(n, 1, 2);
  writeln;
  writeln('Anzahl der Bewegungen: ', Anzahl)
END.
```

2. BASIC-Programm

```
10 CLS
20 INPUT "Anzahl der Scheiben:";K : PRINT
30 DIM R(K,3)
40 A=1 : B=2 : H=0
50 IF K<>0 THEN GOSUB 100 : ELSE GOSUB 200
60 IF K<>0 OR H<>0 THEN 50
70 END
80 !-----
100 REM Stapeln
110 H=H+1
120 R(H,1)=K : R(H,2)=A : R(H,3)=B
130 K=K-1 : B=6-A-B
140 RETURN
150 !-----
200 REM Entstapeln
210 K=R(H,1) : A=R(H,2) : B=R(H,3)
220 H=H-1
230 PRINT K;";";A;";";B
240 K=K-1 : A=6-A-B
250 RETURN
```

3. Bei der Simulation rekursiver Prozeduren mit BASIC kann man sich noch konsequenter als in dem vorgestellten Programm an der Struktur der in PASCAL notierten Originalprozedur orientieren. Im BASIC-Programm werden neue Parameter in den Zeilen 130 bzw. 240 über die globalen Variablen B bzw. A ermittelt. Es wird also nicht nur "gestapelt" bzw. "entstapelt", wie in den Zeilen 100 bzw. 200 angemerkt, sondern es erfolgen auch Berechnungen. Strebt man eine direkte Simulation rekursiver Prozeduraufrufe einschließlich der erforderlichen Parametervermittlungen von der rufenden an die gerufene Prozedur an, so muß man durchgängig nur mit (simulierten) lokalen Variablen arbeiten. Gestapelt werden müssen alle Werte, die "man" nach der Rückkehr wieder vorfinden muß, also Parameter und lokale Größen. (Die Rückkehradressen werden automatisch gestapelt.) In Anlehnung an die eingeführten Bezeichnungen im BASIC-Programm für KC 85 und KC 87 ergibt sich in völliger Analogie zur Pascal-Prozedur:

```

80 REM --- UP ---
90 IF R(H,1)=0 THEN H=H-1 : RETURN
100 R(H+1,1)=R(H,1)-1 : ! Parameter 1: K-1
110 R(H+1,2)=R(H,2) : ! Parameter 2: A
120 R(H+1,3)=6-R(H,2)-R(H,3) : ! Parameter 3: 6-A-B
130 H=H+1 : ! neue Umgebung - dynamisch
140 GOSUB 80 : ! rekursiver Aufruf
150 PRINT R(H,1);";";R(H,2);"==>";R(H,3)
160 R(H+1,1)=R(H,1)-1 : ! Kommentare wie oben
170 R(H+1,2)=6-R(H,2)-R(H,3)
180 R(H+1,3)=R(H,3)
190 H=H+1
200 GOSUB 80
210 H=H-1
220 RETURN

```

Das Hauptprogramm kann fast kopiert werden:

```

10 CLS
20 INPUT "Anzahl der Scheiben: ";K : PRINT
30 DIM R(K,3)
40 A=1 : B=2 : H=0
50 R(H,1)=K : R(H,2)=A : R(H,3)=B : ! Parameteruebergabe
60 GOSUB 80 : ! 1. Aufruf der Prozedur
70 END

```

Die rekursive Struktur bleibt deutlich sichtbar erhalten, Parameterstapelung und -entstapelung ranken sich als "Zusatzmaßnahmen" um Aufruf bzw. Rückkehr. Dieser "Ersatzmechanismus" für nicht vorhandene Möglichkeiten mit BASIC ist so auch auf andere rekursive Problemlösungen übertragbar.

Das hier vorgestellte Programm läßt sich nun noch weiter verbessern, wenn man beachtet, daß es sich beim ersten Aufruf um einen echt rekursiven, beim zweiten aber um eine endständige Rekursion handelt. Bei letzterer - auch last line oder tail recursion genannt - werden Variablenwerte der rufenden Prozedur nach Rückkehr aus der gerufenen nicht mehr benötigt. Wozu sollen sie also aufgehoben (gestapelt) werden? Tatsächlich können diese Werte durch die zu übergebenden Parameter ersetzt werden, also ohne Bereitstellung einer zusätzlichen Umgebung.

Man verwende also besser

```
160 R(H,1)=R(H,1)-1
170 R(H,2)=6-R(H,2)-R(H,3)
```

und lösche die Zeilen 190 (Stapeln), 210 (Entstapeln) und Zeile 180. Durch diese Maßnahmen gewinnt man Rechenzeit.

Bei Verallgemeinerung auf beliebige endständig-rekursive Problemlösungen beachte man, daß bei rekursiven Funktionen u.U. auf lokale Größen der einzelnen Niveaus zurückgegriffen wird. Einen solchen Fall findet man in $\text{fak}(n+1) := n * \text{fak}(n)$, wo n trotz endständigen Aufrufs nicht verloren gehen darf.

4. Der Aufwand zum Stapeln und Entstapeln reduziert sich durch Eliminieren der Prozeduraufrufe mit dem Parameter $k=0$ auf etwa die Hälfte. Diese Veränderung im Pascal-Programm ist leicht zu realisieren.
5. Mit jeder um 1 gewachsenen Scheibenanzahl n verdoppelt sich die Rechenzeit t .
Es gilt recht genau

$$t \sim 2^n,$$

was wegen der Beziehung für die Zuganzahl z

$$z = 2^n - 1$$

nicht unerwartet ist.

Diese Beziehung läßt sich durch vollständige Induktion beweisen.

Die Problemgröße steht im Exponent. Derartige Algorithmen sind gefährlich. Der Aufwand nimmt schnell gigantisch zu. Für $n=64$ ergibt sich die Riesenzahl $2^{\text{hoch } 64} - 1$. Selbst wenn ein Rechner für eine Bewegung nur eine Mikrosekunde benötigte, würde die gesamte Aktion fast 600 000 Jahre in Anspruch nehmen.

6. Für die Konstruktion iterativer Programme verraten wir die folgenden Ideen, die sich aus der rekursiven Lösung herleiten lassen.

1. Idee:

Man wende die beiden folgenden Regeln wechselweise an, um zum Ziel zu gelangen!

- (a) Lege die kleinste Scheibe eins weiter (entweder immer mathematisch positiv oder immer mathematisch negativ)!
- (b) Lege eine andere Scheibe!

Die Kürze von Regel (b) verblüfft ein wenig. Man kann sich aber leicht davon überzeugen, daß in beliebiger Stellung nach dem Ziehen der kleinsten Scheibe (gemäß Regel (a)) nur ein Zug (gemäß Regel (b)) möglich ist. Regel (a) läßt übrigens zu, daß einer der beiden Nichtstartplätze der Zielplatz ist, ohne diesen zu Beginn des Spieles festgelegt zu haben. Dies folgt aus der Freiheit, mit der man sich für eine (dann aber beizubehaltene) Drehrichtung entscheiden kann.

2. Idee:

Schreibe bei n Scheiben alle n -stelligen Dualzahlen der Größe nach auf. Beispiel ($n = 4$):

Scheibe Nr.:	4	3	2	1
Drehsinn:	l	r	l	r

	0	0	0	0
	0	0	0	1
	0	0	1	0
	0	0	1	1
	0	1	0	0
	0	1	0	1
	0	1	1	0
	0	1	1	1
	1	0	0	0
	1	0	0	1
	1	0	1	0
	1	0	1	1
	1	1	0	0
	1	1	0	1
	1	1	1	0
	1	1	1	1

Es wird in jeder dieser Zahlen die erste 1 - von der Einerstelle her gesehen - markiert. Jeder Stelle der Dualzahl wird eine Scheibe mit einer bestimmten Drehrichtung fest zugeordnet. Die markierten Einsen geben die Reihenfolge der Bewegungen an.

Nach diesen Ideen lassen sich Programme entwickeln, in denen keine rekursive Prozedur enthalten ist. Die Wiederholung wird durch FOR-, WHILE- oder REPEAT-Anweisung realisiert.

7. Andere Programmiersprachen eignen sich ebenfalls sehr gut zur Lösung des Problems. Hier ein Programm in micro-PROLOG:

```
((HANOI X) (bewege X 1 2 3))

((bewege 0 X Y Z) /)
((bewege X Y Z x)
 (SUM y 1 X)
 (bewege y Y x Z)
 (PP bewege Scheibe X von Y nach Z)
 (bewege y x Z Y))
```

Der "Programmstart" erfolgt mit dem Versuch, die Zielklausel (goal) ?((HANOI n)) für ein konkretes n zu beweisen.

Zur gestellten Aufgabe (Erarbeiten eines iterativen Programms) erhielten wir bis zum 15. April 1988 einige Einsendungen. Die Darstellungen von Guido Vollbeding, Mathematikstudent an der Martin-Luther-Universität Halle/Wittenberg, sind als besonders gelungen zu bezeichnen. Das Programm in micro-PROLOG stammt aus seiner Zeitschrift. Vier Einsendern wurde ein Büchergutschein zugesandt.

Die Gutscheine wurden vom VEB Mikroelektronik "Karl Marx" Erfurt zur Verfügung gestellt.

Literatur:

- /1/ Barron, D.W.: Rekursive Techniken in der Programmierung. Leipzig 1971
- /2/ Bauer, F.L., Goos, G.: Informatik. Eine einführende Übersicht. 2 Teile. 3. Aufl. Berlin (W), Heidelberg, New York 1982/84
- /3/ Budach, L., Antelmann, H.: Labyrinth. wissenschaft und fortschritt 26 (1976) 5, S. 206-209
- /4/ Dewdney, A.K.: Das Yin und Yang der Informatik. Spektrum der Wissenschaft, Sonderheft "Computer-Kurzweil" 1987, S. 123-128
- /5/ Fothe, M., Kerner, I.O: Problem des Lucas. wurzel 2/88, S. 18-23
- /6/ Fothe, M.: 80 Programme in Turbo-Pascal. iir, Inform. Inf. Rep., Sonderausgabe No. 1. Berlin 1988
- /7/ Thiele, R.: Die gefesselte Zeit. Leipzig, Jena, Berlin 1984
- /8/ Wagenknecht, C.: REKURSION - was, wie, wozu? Kleinstrechner-TIPS Heft 7, 1987, S. 4-11
- /9/ Wagenknecht, C.: Rekursion mit BASIC. Wiss. Zeitschrift PH Dresden. 20. Jg. 1986, Math.-naturwiss. Reihe, S. 39-44

Autoren:

Dr. Michael Fothe

Spezialschule mathematisch-natur-
wissenschaftlich-technischer
Richtung Erfurt
Vilniuser Str. 18
Erfurt, 5 0 6 2

Dr. Christian Wagenknecht

Pädagogische Hochschule Dresden
Karl-Friedrich-Wilhelm-Wander
Sektion Mathematik
Wigardstr. 17
Dresden, 8 0 6 0

Aufgaben der Bezirksolympiade Klasse 11/12

- 1) Man ermittle alle diejenigen aus je drei Gliedern bestehenden Folgen (a_1, a_2, a_3) und (b_1, b_2, b_3) , die mit zwei geeigneten von Null verschiedenen reellen Zahlen p, r sowie $q=5$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

(1) Es gilt $a_1 = \frac{1}{p}, a_2 = \frac{1}{q}, a_3 = \frac{1}{r}$.

(2) Es gilt $b_1 = \frac{1}{a_1}, b_2 = \frac{1}{a_1 \cdot a_2}, b_3 = \frac{1}{a_2 \cdot a_3}$.

(3) Die Folge (a_1, a_2, a_3) ist eine arithmetische Folge.

(4) Die Folge (b_1, b_2, b_3) ist eine arithmetische Folge.

- 2) Gegeben seien ein Punkt A in einer Ebene e sowie eine Länge a.

Man ermittle die Menge aller derjenigen Punkte C in e, zu denen es jeweils Punkte B und D so gibt, daß ABCD ein Parallelogramm mit $\overline{AB} = a$ und $\overline{AC} = \overline{BD} : \overline{AD}$ ist.

- 3A) Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, zu jedem $i=1, \dots, n$ eine natürliche Zahl a_i so anzugeben, daß die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

(1) Für alle i mit $1 \leq i \leq n$ gilt $0 \leq a_i \leq \frac{1}{2}(n-1) \cdot n$.

(2) Keine zwei unter den Differenzen $a_j - a_i$, die man für alle i, j mit $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ und $i \neq j$ bilden kann, sind einander gleich.

- 3B) Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ sei die folgende Forderung betrachtet: Man soll $2n$ Gegenstände so in n (genügend große) Behälter verteilen, daß die nachstehenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jeder Behälter enthält mindestens einen der Gegenstände.

(2) Jeder Behälter enthält höchstens n der Gegenstände.

(3) Es ist nicht möglich, die n Behälter so in zwei getrennten (genügend großen) Räumen unterzubringen, daß dabei in jeden der beiden Räume n der Gegenstände gelangen.

- a) Geben Sie für $n=3$ eine Verteilung von 6 Gegenständen in 3 Behälter an, und weisen Sie nach, daß die von Ihnen angegebene Verteilung die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!
- b) Beweisen Sie, daß es genau dann möglich ist, die Forderung zu erfüllen, wenn n eine ungerade Zahl ist!
- c) Ermitteln Sie für jedes ungerade $n \geq 3$ alle Verteilungen der geforderten Art!

- 4) Man untersuche, ob es 21 paarweise verschiedene ganze Zahlen sowie eine Reihenfolge

$$a_1, a_2, \dots, a_{21} \quad (*)$$

dieser Zahlen so gibt, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Für je vier in der Reihenfolge (*) unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen ergibt sich eine negative Summe dieser vier Zahlen.
- (2) Die Summe aller 21 Zahlen a_1, \dots, a_{21} beträgt 1989.

- 5) Beweisen Sie den folgenden Satz!

Wenn (x_n) eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen ist, die für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Ungleichung

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + \dots + \frac{x_{n^2}}{n} \leq 1$$

erfüllt, dann erfüllt sie auch für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Ungleichung

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots + \frac{x_n}{n} \leq 3.$$

- 6) Es sei d eine gegebene Streckenlänge. Ferner sei M die Menge aller derjenigen Pyramiden $ABCS$, die den folgenden Bedingungen genügen:

- (1) Das Dreieck ABC ist gleichseitig.
- (2) Das Lot von S auf die Ebene durch A, B, C hat den Schwerpunkt des Dreiecks ABC als Fußpunkt.
- (3) Der Abstand zwischen den Kanten AS und BC beträgt d .

Untersuchen Sie, ob es in der Menge M eine Pyramide mit kleinstem Volumen gibt! Ist das der Fall, so ermitteln Sie in Abhängigkeit von d dieses kleinstmögliche Volumen!

Hinweis: Unter dem Abstand zwischen zwei Strecken UV und XY , von denen UV auf einer Geraden g und XY auf einer zu g windschiefen Geraden h liegt, versteht man die Länge der Strecke GH , wo G auf g , H auf h liegt und GH sowohl g als auch h senkrecht schneidet. Diese Erklärung gilt für den Fall, daß derartige Punkte G , H sogar den Strecken UV bzw. XY angehören.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung“

Leiter: Stefan Posselt

Chefredakteur: Eckhard Stein

Redaktion: C. Dahms, S. Krieg, R. Fötsch, N. Patzschke

Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900

Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.

Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

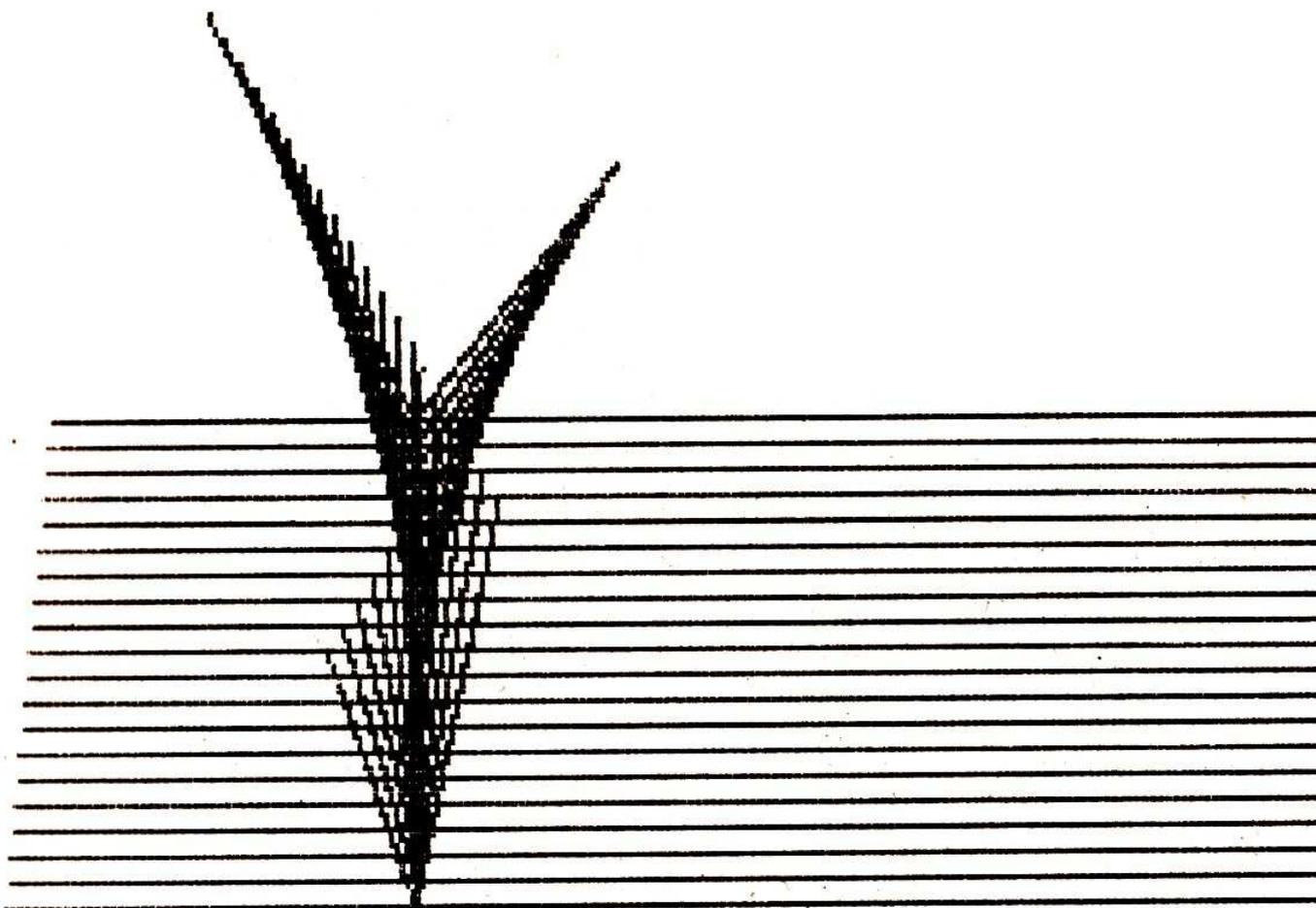
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 8. 3. 1989

Titelbild: M. Torke

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	23 (1989) 4	S. 49–64
----------------	--------	------	-------------	----------



wurzel $\sqrt{5 \cdot 89}$

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

**Herausgegeben vom Jugendobjekt Studien-
vorbereitung-Studienwerbung der Sektion
Mathematik an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena**

**23. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M**

Umkehrung der Problemsituation bei Aufgaben zur darstellenden Geometrie

1. Einleitende Bemerkungen

In der darstellenden Geometrie treten bei allen komplexen Konstruktionsaufgaben immer wieder Teilkonstruktionen gleicher Art auf, die als **G r u n d a u f g a b e n** bezeichnet werden. Teilweise werden in der Fachliteratur auch schwierigere Konstruktionen noch dazu gerechnet.

Im Unterricht der POS werden bei der Behandlung der Ein- und Zweitafelprojektion drei Grundaufgaben als sicher zu beherrschende Verfahrenskennntnisse vermittelt.

Grundaufgabe 1:

Bestimmen der wahren Länge einer Strecke, d. h. des Abstandes zweier Punkte im Raum bei gegebenem Bild

Grundaufgabe 2:

Bestimmen der wahren Größe und Gestalt einer ebenen Figur

Grundaufgabe 3:

Bestimmen des Neigungswinkels einer Geraden bzw. einer Ebene gegen die Bildebene

In dem Beitrag "Aufgaben zur gegenseitigen Lage von Ebenen und Körpern" (WURZEL Nr. 1/88) wurde dargelegt, wie beim Lösen komplexer Konstruktionsaufgaben die erforderlichen Voraussetzungen zur Anwendung der in Form von Grundaufgaben vermittelten Verfahrenskennntnisse geschaffen werden können. Mit diesem Beitrag sollen die Gedanken zur Lösung komplexer Konstruktionsaufgaben fortgeführt werden.

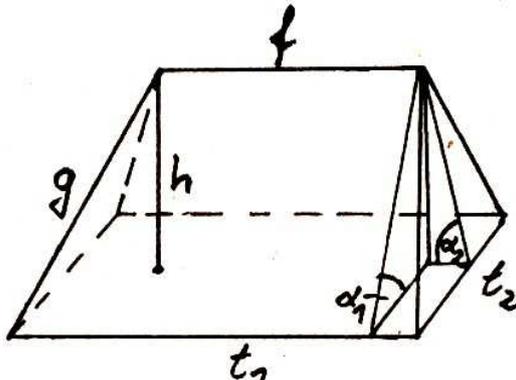
In der Praxis treten zu ein und demselben mathematischen Sachverhalt Aufgabenstellungen auf, bei denen unterschiedliche, gewissermaßen entgegengesetzte Problemsituationen bestehen. Werden zum Beispiel bestimmte Bedingungen und das Ziel einer Aufgabe miteinander vertauscht, so entsteht eine neue Aufgabe mit umgekehrter Problemsituation.

Es wirft sich die Frage auf, ob das bei der vorhergehenden Aufgabe genutzte Lösungsprinzip - also die genannten Grundaufgaben - auch auf die Aufgabe übertragen werden kann, die den entgegenge-

setzten Gedankengang fordert.

2. Beispielhafte Erläuterung der Umkehrung der Problemsituation in einer Aufgabenstellung

Als Beispiel soll die konstruktive Bestimmung einzelner Größen an einem Walmdach dienen, welches eine rechteckige Fläche überdeckt (siehe Schrägbild).



t_1, t_2 - Traufkanten

f - First

g - Grat (Dachkanten, die schräg nach oben verlaufen)

h - Höhe des Firstes über Traufkantenebene

a_1, a_2 - Neigungswinkel der Dachebenen

Folgende Aufgabe läßt sich als Problemsituation A formulieren:

Aufgabe 1:

Die Traufkanten haben eine Länge von 13,20 m und 5,40 m.

Der Dachfirst ist 7,80 m lang und liegt 2,60 m höher als die Traufkanten.

Bestimmen Sie durch Konstruktion die Länge des Grates und die Neigungswinkel der Dachflächen!

(Maßstab ist selbst festzulegen)

Werden jetzt bestimmte Bedingungen mit dem Ziel der Aufgabe 1 vertauscht, so entstehen neue Aufgabenstellung.

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Die Traufkanten haben eine Länge von 13,20 m und 5,40 m.

Alle Dachebenen sind gegen die Ebene der Traufkanten um 45° geneigt.

Die Länge der vier Grate beträgt jeweils 4,80 m und die dreiseitigen Dachflächen sind um 60° gegen die Ebene der Traufkanten geneigt.

Ermitteln Sie durch Konstruktion die Länge des Dachfirstes und seine Höhe über den Traufkanten! (Maßstab ist selbst festzuleg.)

Bei den Aufgaben 2 und 3 handelt es sich um umgekehrte Problemsituationen zur Aufgabe 1, die zur Unterscheidung von der Problemsituation A mit B_1 und B_2 bezeichnet werden sollen.

In einer Tabelle sei die Umkehrung der Problemsituation A in die Problemsituation B_1 und B_2 nochmals verdeutlicht.

Problemsituation	Gegeben:	Gesucht:
^A (Aufgabe 1)	t_1, t_2, f, h	α_1, α_2, g
^{B₁} (Aufgabe 2)	$t_1, t_2, \alpha_1, \alpha_2$	f, h
^{B₂} (Aufgabe 3)	t_1, t_2, α_2, g	f, h

Wie aus der Tabelle zu ersehen ist, wurden immer nur einzelne Bedingungen in der Aufgabe mit dem Ziel der Aufgabe vertauscht und nicht generell Gegebenes und Gesuchtes gegeneinander ausgetauscht. Auf diese Weise lassen sich bei Umkehrung der Problemsituation auch eindeutig lösbar erzeugen.

Bei unserem Sachverhalt könnten also genauso auch die gegebenen Bedingungen t_1 und t_2 der Aufgabe 1 zum gesuchten Gegenstand, dem Ziel der neuen Aufgabe, gemacht werden, so daß zwei weitere umgekehrte Problemsituationen B_3 und B_4 entstehen.

^{B₃} (Aufgabe 4)	α_1, α_2, f, h	t_1, t_2
^{B₄} (Aufgabe 5)	α_2, g, f, h	t_1, t_2

Aufgabe 4

Aufgabe 5

Der Dachfirst ist 7,80 m lang und liegt 2,60 m höher als die Traufkanten.

Alle Dachflächen sind gegen die Ebene der Traufkanten um 45° geneigt.

Die Länge der vier Grate beträgt jeweils 4,80 m und die dreiseitigen Dachflächen sind um 60° gegen die Ebene der Traufkanten geneigt.

Ermitteln Sie durch Konstruktion die Länge der Traufkanten! (Maßstab ist selbst festzulegen)

Die Analyse der zur Lösung der Aufgabe 1 erforderlichen Schritte ergibt, daß die drei eingangs angeführten Grundaufgaben genutzt werden können. Konkret wird bei der Problemsituation A gefordert:

- Bestimmen der wahren Länge einer Strecke (Dachgrat),
- Bestimmen des Neigungswinkels einer Ebene (Dachebene).

Dagegen kehren sich bei den Aufgaben 2 bis 5 (umgekehrte Problemsituationen B_1 bis B_4) zum Teil die zur Lösung erforderlichen Schritte um. Es sind Teilkonstruktionen erforderlich wie

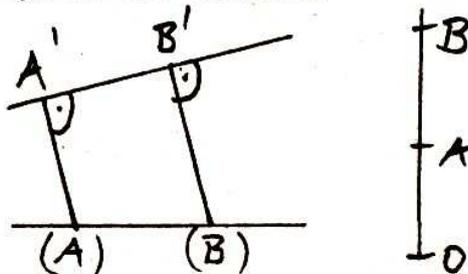
- Abtragen einer Strecke auf einer Geraden in allgemeiner Lage, d. h. Bestimmen der Bildstrecke bei vorgegebener Originalstrecke,
- Übertragen einer ebenen Figur in eine Ebene allgemeiner Lage,
- Konstruktion einer Geraden bzw. einer Ebene mit gegebenem Neigungswinkel.

Damit wird ersichtlich, daß der Umfang der in der POS vermittelten Grundaufgaben zur Lösung komplexer Konstruktionsaufgaben zu erweitern ist. Zu wenigstens zählen die Umkehrungen der Grundaufgaben 1, 2 und 3 ebenfalls zu den Grundaufgaben der darstellenden Geometrie.

3. Umkehrung der ersten Grundaufgabe

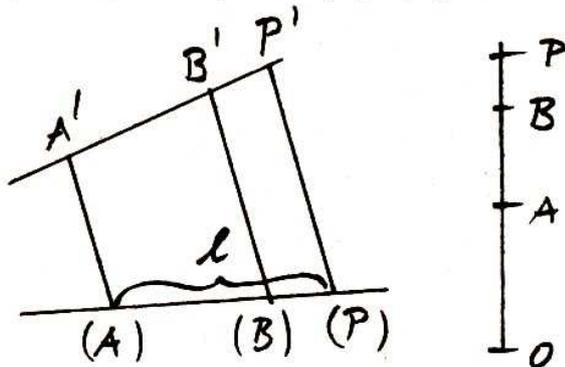
Eintafelprojektion

Die wahre Länge einer durch ihr Eintafelbild gegebenen Strecke wird durch U m k l a p p u n g in die Bildebene bestimmt, da Strecken, die parallel zur Bildebene liegen, in wahrer Länge abgebildet werden.



Auch die umgekehrte Aufgabe "Abtragen einer Strecke von gegebener Länge l auf einer Geraden" wird gleichfalls durch Umklappung in die Bildebene gelöst.

Ist zum Beispiel (A) (B) die Umklappung der Geraden AB, so wird



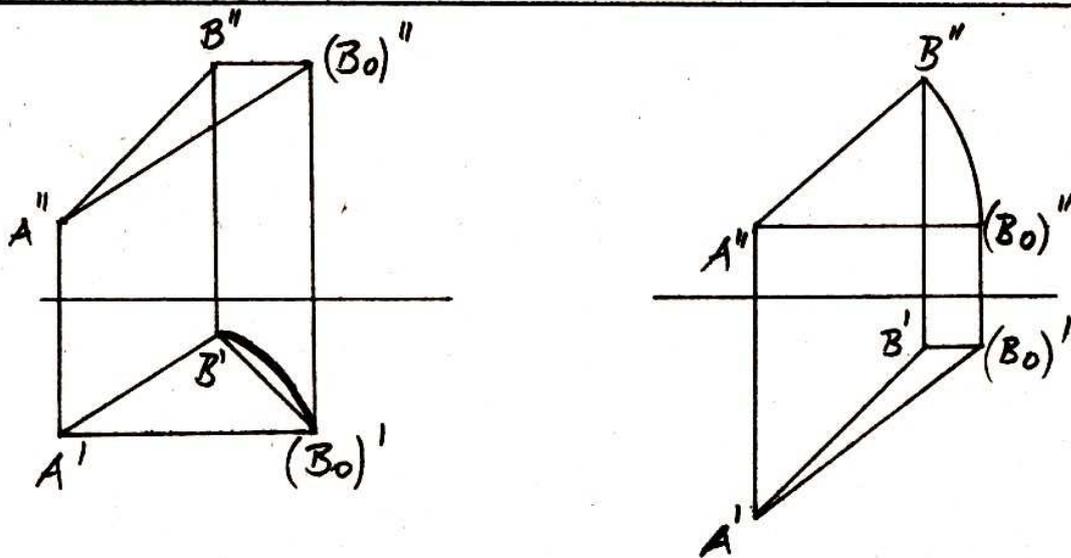
auf (A)(B) die Strecke der Länge l z. B. von (A) aus abgetragen und erhält (P). Die Parallele zu (A)A' bzw. (B)B' durch (P) ergibt den Bildpunkt P'. Der Höhenmaßstab kann dann entsprechend ergänzt werden.

Analog kann auch ein Punkt P von gegebener Höhe h auf einer gegebenen Geraden AB bestimmt werden. Man hat auf (A)(B) nur denjenigen Punkt (P) zu finden, dessen Abstand von A'B' gleich h ist. Der Fußpunkt P' des Lotes von (P) auf A'B' ist der gesuchte Bildpunkt.

Zweitafelproduktion

Auch hier kann die wahre Länge einer Strecke durch U m k l a p p u n g in eine Bildebene bestimmt werden.

Ein anderes Lösungsverfahren ist die M e t h o d e d e s P a r a l l e l d r e h e n s, bei der entweder das Bild der Strecke im Grundriß in eine frontale Lage, d. h. parallel zur Aufrißebene, oder das Bild der Strecke im Aufriß in eine horizontale Lage, d. h. parallel zur Grundrißebene, gedreht wird.

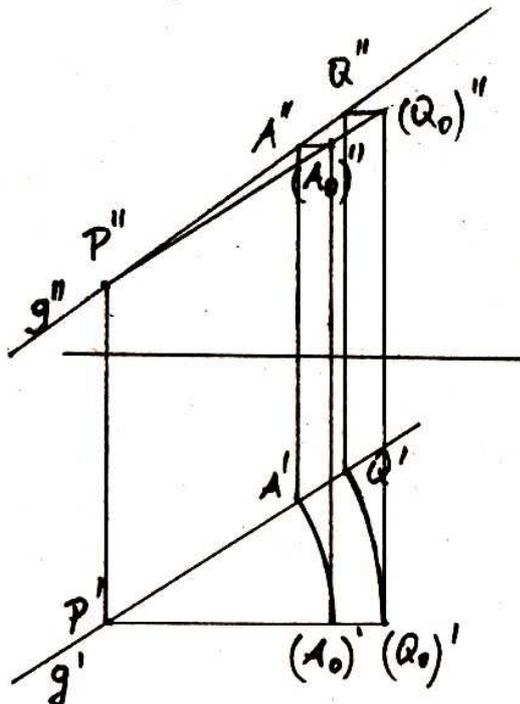


Im ersten Fall ändern sich die Höhen der Punkte über der Grundrißebene nicht, im zweiten Fall ändern sich die Abstände der Punkte zur Aufrißebene nicht.

Somit ist $\overline{A''(B_0)''} = \overline{AB}$ bzw. $\overline{A'(B_0)'} = \overline{AB}$.

Soll umgekehrt auf einer durch ihr Zweitafelbild gegebenen Geraden g von einem Punkt P aus in bestimmter Richtung eine Strecke der Länge l abgetragen werden, so kann das ebenfalls durch Paralleldrehen erfolgen.

Beim Paralleldrehen wird zunächst auf der Geraden zusätzlich zum Punkt P ein beliebiger Punkt Q gewählt und die Strecke \overline{PQ} wie oben parallel zu einer Rißebeue gedreht.



Im Bild wurde die Strecke \overline{PQ} parallel zur Aufrißebene gedreht. Darum kann auf $P''(Q_0)''$ von P'' aus die Strecke der Länge l abgetragen werden und erhält den Punkt $(A_0)''$ sowie $(A_0)'$.

Dann ist PQ_0 in die ursprüngliche Lage zurückzudrehen. $\overline{P'A'}$ und $\overline{P''A''}$ sind das Zweitafelbild der gegebenen Strecke.

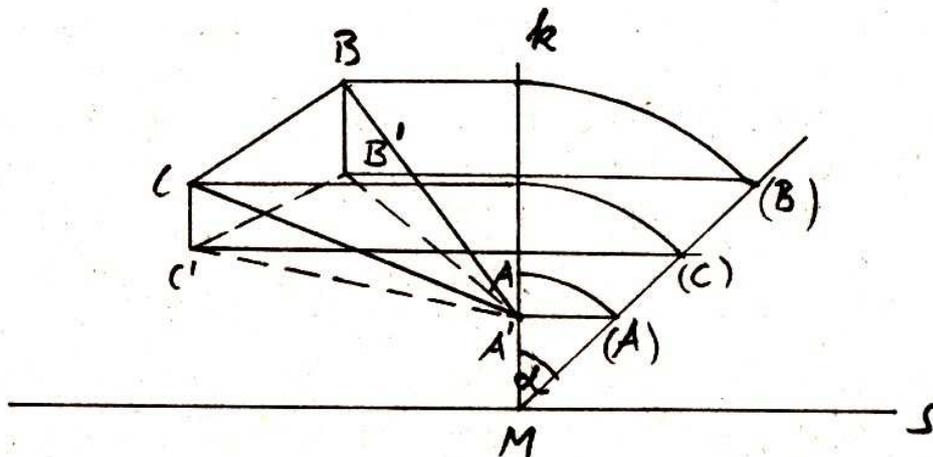
4. Umkehrung der zweiten Grundaufgabe

In dem Beitrag "Aufgaben zur gegenseitigen Lage von Ebenen und Körpern" (WURZEL Nr. 1/87) wurde bereits dargelegt, wie die wahre Größe und Gestalt einer ebenen Figur bei vorgegebenen Ein- bzw. Zweitafelbild zu bestimmen ist. Beim Übertragen einer vorgelegten ebenen Figur in eine Ebene allgemeiner Lage sind in den dort dargelegten Konstruktionen gewisse Umkehrungen anzubringen, auf die hier näher eingegangen werden soll.

Eintafelprojektion

Als Beispiel ist das Bild eines gegebenen Dreiecks ABC zu bestimmen, das auf einer Ebene mit vorgegebenem Neigungswinkel α zur Bildebene liegt.

Zunächst wird das Dreieck ABC selbst in die Bildebene gezeichnet. Wenn wie hier keine weiteren Forderungen zur Lage der ebenen Figur bestehen, kann die Ebene des Dreiecks ABC um eine beliebig gewählte Gerade s der Bildebene um den Neigungswinkel α aus der Bildebene herausgedreht werden.



Diese Drehung sei zunächst für den Punkt A beschrieben. Der Punkt A dreht sich um den Fußpunkt M des Lotes von A auf s mit dem Radius $r = \overline{AM}$. Da die Ebene dieses Kreises senkrecht zur Bildebene steht und s die Drehachse darstellt, erscheint sie im Bild als die zu s senkrechte Gerade k durch A.

Der oberhalb der Bildebene gelegene Kreisteil wird um k in die Bildebene umgelegt, so daß an k in M der Winkel α angetragen

werden kann. Somit gibt der Punkt (A) die Umlegung des Punktes A nach der Drehung an.

Der Fußpunkt des Lotes von (A) auf k ist das Bild A' .

Analog kann mit den anderen Eckpunkten des Dreiecks verfahren werden. Dabei kommt man mit dem einmaligen Antragen des Winkels α aus, was der Zeichnung zu entnehmen ist.

Zweitafelprojektion

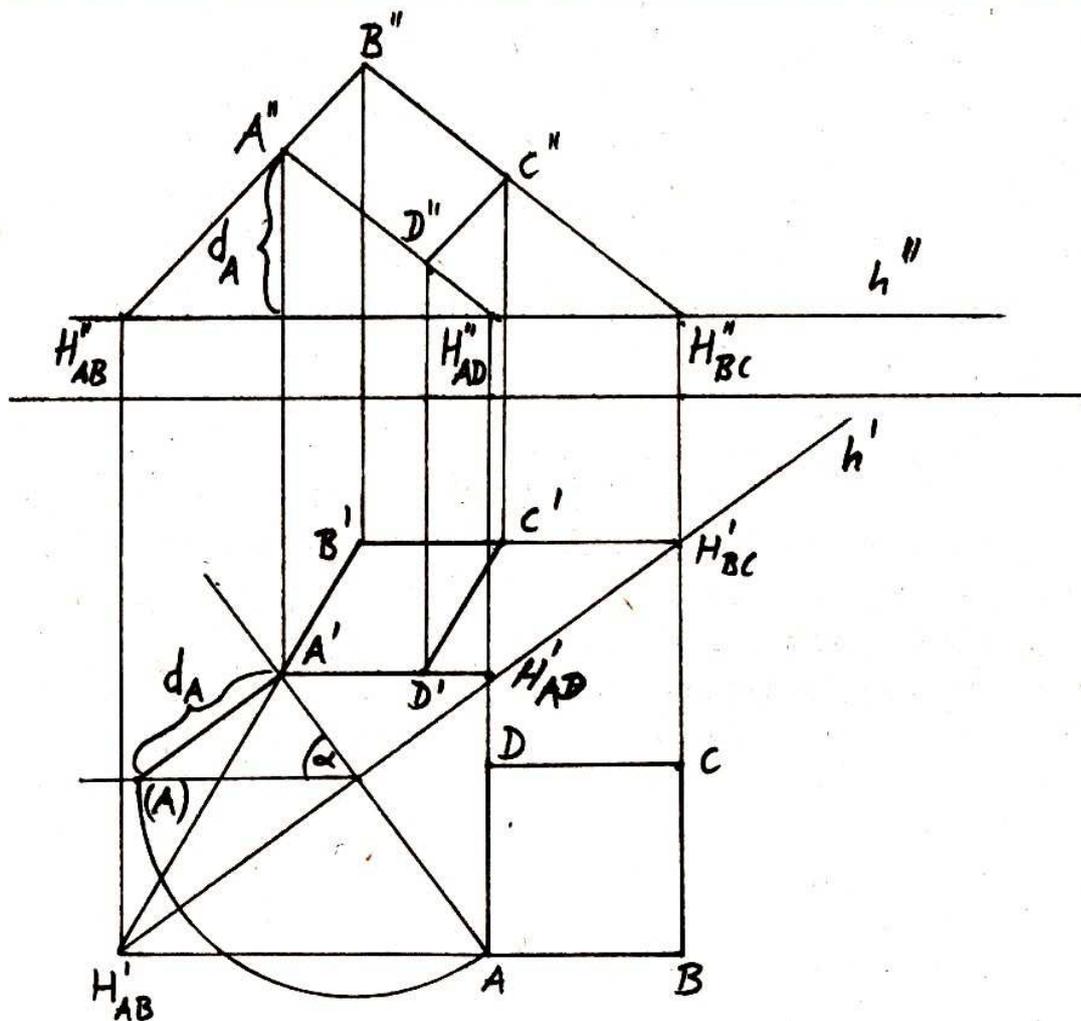
Für die folgende Konstruktion werden vornehmlich zwei Scharen von parallelen Geraden der Ebene benutzt.

Höhenlinien: Alle Geraden der Ebene, die parallel zur Grundrißebene liegen.
(Symbol h)

Falllinien: Alle Geraden der Ebene, die senkrecht zu den Höhenlinien der Ebene verlaufen.
(Symbol f)

Ist eine Ebene allgemeiner Lage durch ihren Neigungswinkel zur Grundrißebene und das Zweitafelbild einer Höhenlinie h gegeben, und soll in diese Ebene beispielsweise ein Quadrat ABCD gezeichnet werden, so ist genau wie bei der Bestimmung der wahren Größe und Gestalt einer ebenen Figur zunächst die gegebene Ebene um h so weit zu drehen, bis sie zur Grundrißebene parallel liegt. In die gedrehte Ebene kann dann das Vieleck, in diesem Fall das Quadrat ABCD, eingezeichnet werden. Danach wird die Ebene in die Ausgangslage zurückgedreht. Dazu sind die für den Punkt A des Quadrates demonstrierten Schritte erforderlich.

- (1) Lot von A auf h' entspricht dem Bild der Falllinie f'_A und ergibt den Fußpunkt F'_A der Falllinie auf h' .
- (2) Stützdreieck aus α an f'_A in F'_A und Abtragen von $\overline{F'_A A}$ auf dem freien Schenkel des Winkels ergibt die Höhe d_A des Punktes A über der Höhenlinie h .
- (3) Fußpunkt des Lotes von (A) auf f'_A ist der gesuchte Bildpunkt A' auf der Grundrißebene.
- (4) Ordnungslinie von A' in Aufrißebene und Abtragen der Strecke d_A von h'' aus ergibt Bildpunkt A'' auf der Aufrißebene.



Auf diese Weise ist die Konstruktion aller weiteren Bildpunkte der gegebenen Figur möglich.

Die anderen Bildpunkte des Quadrates können aber auch mittels der Schnittpunkte der Geraden, auf denen die Quadratseiten liegen, mit der Höhenlinie konstruiert werden, wie es für den Punkt D beschrieben werden soll.

- (1) Verlängerung des Quadratseite AD schneidet h' in H'_{AD} .
- (2) Bildpunkt D' ist der Schnittpunkt der Geraden durch A' und H'_{AD} mit dem Lot von D auf h' .
- (3) Übertragen des Schnittpunktes H'_{AD} in den Aufriß.
- (4) Schnittpunkt der Verbindungsgeraden $A''H''_{AD}$ mit der Ordnungslinie durch D' ergibt den Bildpunkt D'' .

Alles weitere ist aus der Abbildung zu ersehen.

Als Kontrollmittel können die Eigenschaften der zu übertragenden Figur genutzt werden, d. h. parallele Geraden bleiben auch im Bild parallel.

5. Umkehrung der dritten Grundaufgabe

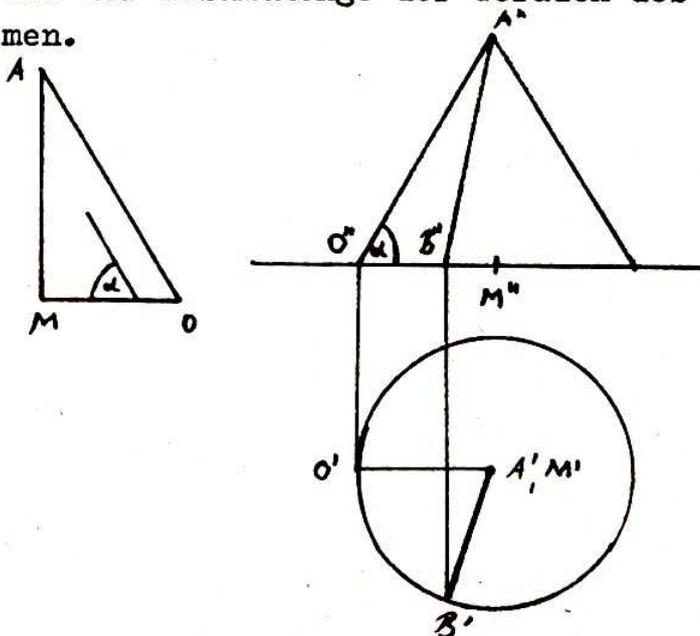
Die dritte Grundaufgabe steht in engem Zusammenhang mit der ersten bzw. zweiten Grundaufgabe. So wird bei der Bestimmung der wahren Länge einer Strecke bzw. der wahren Größe und Gestalt einer ebenen Figur meist der Neigungswinkel der Strecke bzw. der ebenen Figur zur Bildebene mitbestimmt.

Bei der Umkehrung dieser Grundaufgabe handelt es sich um die Konstruktion einer Geraden bzw. Ebene, die zu einer Bildebene eine gegebene Neigung besitzt.

Alle durch einen Punkt A legbaren Geraden, die die gleiche Neigung besitzen, bilden einen Kegelmantel, dessen Achse AA' senkrecht auf der Bildebene steht und dessen Mantellinien den gegebenen Neigungswinkel α mit der Bildebene einschließen.



Im praktischen Fall werden nur bestimmte erforderliche Geraden aus der Gesamtmenge der Geraden des Kegelmantels herausgenommen.

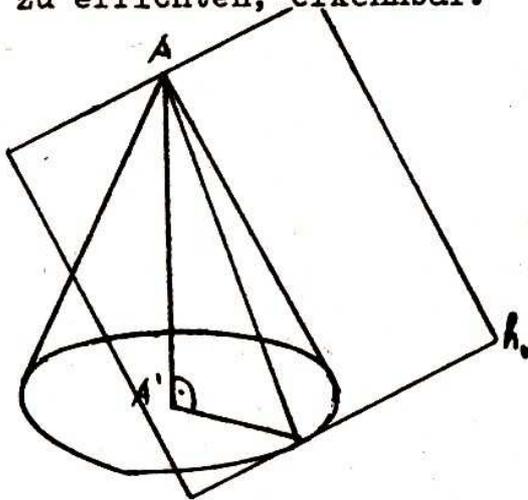


Die Konstruktion einer solchen Geraden AB kann der Darstellung im Zweitafelbild entnommen werden.

Der Kegelradius MO kann mittels einer Nebenkonstruktion aus der Höhe MA des Punktes A über der Grundrißebene und den Neigungswinkel ermittelt werden.

Die Bedeutung der Umkehrung der dritten Grundaufgabe wird eigentlich erst an der Aufgabe, eine Ebene mit bestimmter Nei-

gung zu errichten, erkennbar.

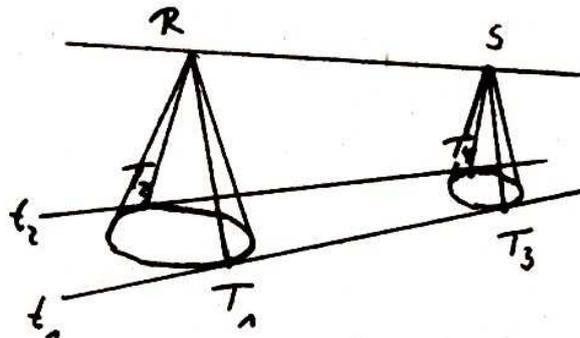


Ebenen, die eine Lösung dieser Aufgabe sind, stellen sich als Gesamtheit aller Tangentialebenen an den Kreiskegel dar, d. h. die nullte Höhenlinie h_0 der einzelnen Ebenen sind Tangenten an den Grundkreis des Kegels.

Um eine bestimmte Ebene davon herauszugreifen, muß die Aufgabe noch eine zusätzliche Forderung enthalten, z. B. daß die Ebene durch eine gegebene Gerade RS gehen soll.

Zur Lösung sind in R und S jeweils ein Kreiskegel zu errichten, deren Mantellinien den vorgegebenen Neigungswinkel mit der Bildebene einschließen.

Dann sind als nullte Höhenlinie h_0 der zwei möglichen Ebenen die Tangenten t_1 und t_2 an die beiden Grundkreise der Kegel zu konstruieren.

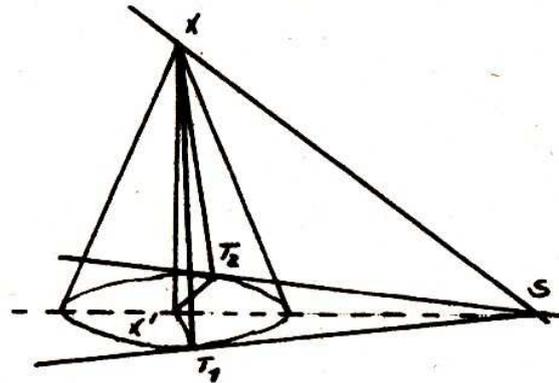
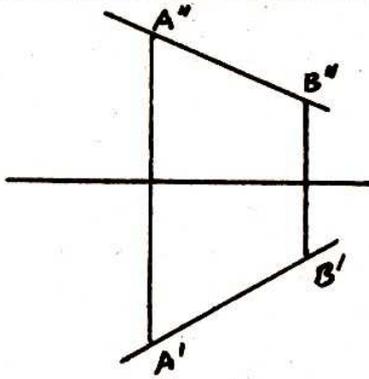


Die beiden gesuchten Ebenen sind dann durch die Geraden RS und t_1 bzw. RS und t_2 bestimmt. Sie wären auch durch die Gerade RS und die Mantellinien eines der beiden Kreiskegel bestimmt, die durch die Berührungspunkte T_1 und T_2 bzw. T_3 und T_4 der Tangenten an die Grundkreise gegeben sind.

Übungsaufgabe: Konstruieren Sie durch eine im Zweitafelbild gegebene Gerade AB die beiden Ebenen, die zur Bildebene um 45° geneigt sind.

Wenn, wie in der folgenden Abbildung zwei Ebenen durch eine Gerade XS der selben Neigung gelegt sind, so sind die Stützdreiecke $XX'T_1$ und $XX'T_2$ kongruent.

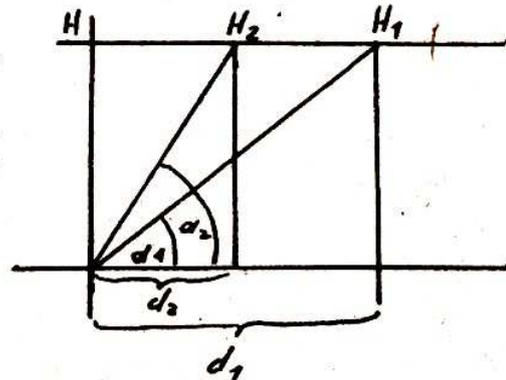
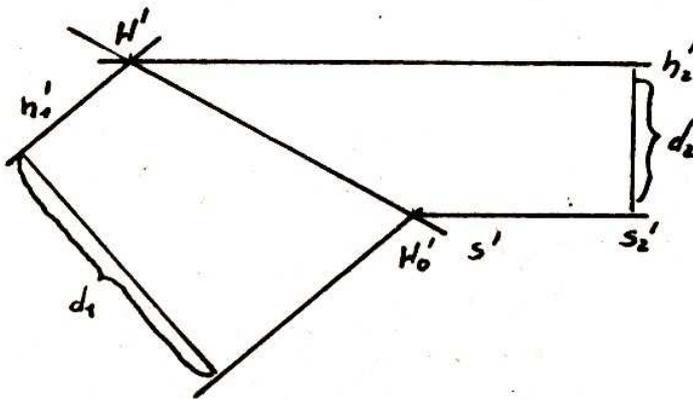
Es gilt $\overline{X'T_1} \cong \overline{X'T_2}$, d. h. X' liegt auf der Winkelhalbierenden



des Winkels $\angle T_1ST_2$ der nullten Höhenlinien der Ebenen, auch Spurgeraden genannt.

Also: Die Schnittgerade zweier Ebenen gleicher Neigung wird auf die Winkelhalbierende des Winkels ihrer Spurgeraden abgebildet.

Haben dagegen zwei Ebenen unterschiedliche Neigungswinkel α_1 und α_2 , so läßt sich die Schnittgerade S ebenfalls aus den gegebenen Spurgeraden S_1 und S_2 der Ebenen ermitteln.



Der Schnittpunkt H_0 der Spurgeraden liegt auf der Schnittgeraden S. Ein beliebiger weiterer Punkt H von S ergibt sich als Schnittpunkt der Höhenlinien h_1 und h_2 der beiden Ebenen, die den gleichen Abstand von der Bildebene haben.

In einer Nebenkonstruktion kann dann der Abstand d_1 bzw. d_2 der Bilder der Höhenlinien h_1' von S_1' bzw. h_2' von S_2' ermittelt werden. Die Parallele zu S_1' im Abstand d_1 ergibt h_1' und die Parallele zu S_2' im Abstand d_2 ergibt h_2' . Der Schnittpunkt von h_1' und h_2' entspricht dem Bildpunkt H' des als beliebig ausgewählten

weiteren Punktes H der gesuchten Schnittgeraden S .

Somit ist die Gerade H'_0H' das Bild S' von S .

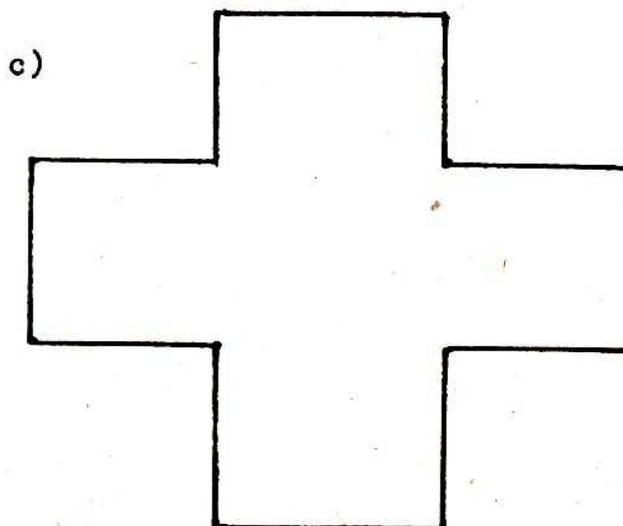
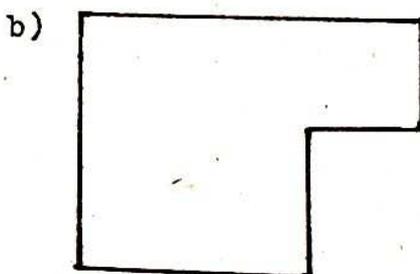
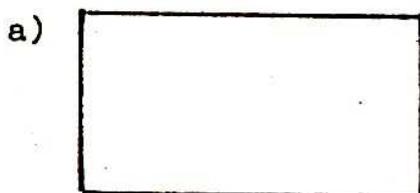
6. Aufgaben zur Dachausmittlung

Die bisher erörterten Erkenntnisse im Zusammenhang mit den Umkehrungen von Grundaufgaben sind bei bestimmten Aufgaben der Praxis von Nutzen, so auch bei den sogenannten Dachausmittlungen.

Unter der Dachausmittlung versteht man die Bestimmung der Schnittgeraden der Dachebenen, wenn die Neigungswinkel der einzelnen Dachflächen und die Bilder ihrer Traufkanten gegeben sind. Als Grundrißebene wird dabei die Ebene der Dachtraufen gewählt (Spurgeraden der einzelnen Dachebenen).

Übungsaufgabe:

Die folgenden Bilder stellen die Traufkanten von Überdachungen (Walmdächer) dar. Die Dachebenen haben alle die gleiche Neigung zur Traufkantenebene.



Ermitteln Sie die Schnittgeraden der einzelnen Dachebene, also die Grate und Firste!

7. Schlußbemerkung

Mit den drei in der POS vermittelten Grundaufgaben und den in diesem Beitrag behandelten Umkehrungen dieser Grundaufgaben sind die Mittel zur Bewältigung der im Abschnitt 2 vorgestellten Problemsituation A und den dazu angedeuteten möglichen Um-

kehrungen dieser Problemsituation bereitgestellt.

Der interessierte Leser mag nunmehr die zu den Problemsituationen formulierten fünf Aufgaben selbständig lösen.

Beim Lösen dieser Aufgaben wird man feststellen, daß umgekehrte Problemsituationen oft einer viel tieferen geistigen Durchdringung bedürfen als die vorher gelöste Aufgabe. Die Bearbeitung umgekehrter Problemsituationen fördert somit wesentlich die Könnensentwicklung. Darum sollte die Umkehrung einer Problemsituation zum Prinzip bei der selbständigen Auseinandersetzung mit mathematischen Disziplinen gemacht werden.

In der Literatur findet man nicht immer zu einem Problem auch gleichzeitig eine umgekehrte Problemsituation als Beispiel bzw. als zu lösende Aufgabe. Deshalb kann man sich mittels dem unter Abschnitt 2 am Beispiel angedeuteten Vorgehen selbst umgekehrte Problemsituationen angeben und nach den Mitteln zur Lösung suchen.

Dr. R. Dörr
Sektion Mathematik
Bereich Methodik

Preisaufgaben

V 25 Kann man die Menge aller endlichen Dezimalbrüche so in 3 Klassen einteilen, daß in jeder Klasse nicht zwei Zahlen mit Differenz 10^m (m eine ganze Zahl) liegen?



V 26 Ein Skatspiel (französisches Blatt - 32 Karten) werde gründlich gemischt und dann in zwei gleichgroße Stapel geteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß jeder Stapel genauso viele rote (Karo und Herz) wie schwarze (Kreuz und Pik) Karten enthält?



V 27 Man finde alle Paare reeller Zahlen (x, y) , welche das Ungleichungssystem



$$\log_{2-x}(2-y) > 0$$

$$\log_{4-y}(2x-2) > 0$$

erfüllen!

V 28 Christine, Katja und Johannes zeichnen ein Dreieck ABC. Dann konstruiert sich Christine ein Dreieck mit den Seitenlaengen $|AB|$, $|BC|$ und einem Winkel zwischen diesen Seiten, der um 60° größer ist als $\sphericalangle ABC$. Analog konstruieren sich Katja und Johannes neue Dreiecke, in dem sie $|AB|$, $|AC|$ und $\sphericalangle BAC$ bzw. $|BC|$, $|CA|$ und $\sphericalangle BCA$ zugrunde legen. Man zeige, daß bei allen drei neuen Dreiecken die dritten Seiten gleich groß sind.

V 29 Man löse für alle a die Gleichung $|x+3| - a|x-1| = 4$!
Für welche a hat die Gleichung genau 2 Lösungen?

V 30 Постройте треугольник ABC, если заданы его наименьший угол $\sphericalangle CAB$ и отрезки длины $d = |AB| - |BC|$ и $e = |AC| - |BC|$!

Einsendeschluß: 1. 9. 1989

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung“

Leiter: Stefan Posselt

Chefredakteur: Eckhard Stein

Redaktion: C. Dahms, S. Krieg, R. Fötsch, N. Patzschke

Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900

Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.

Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

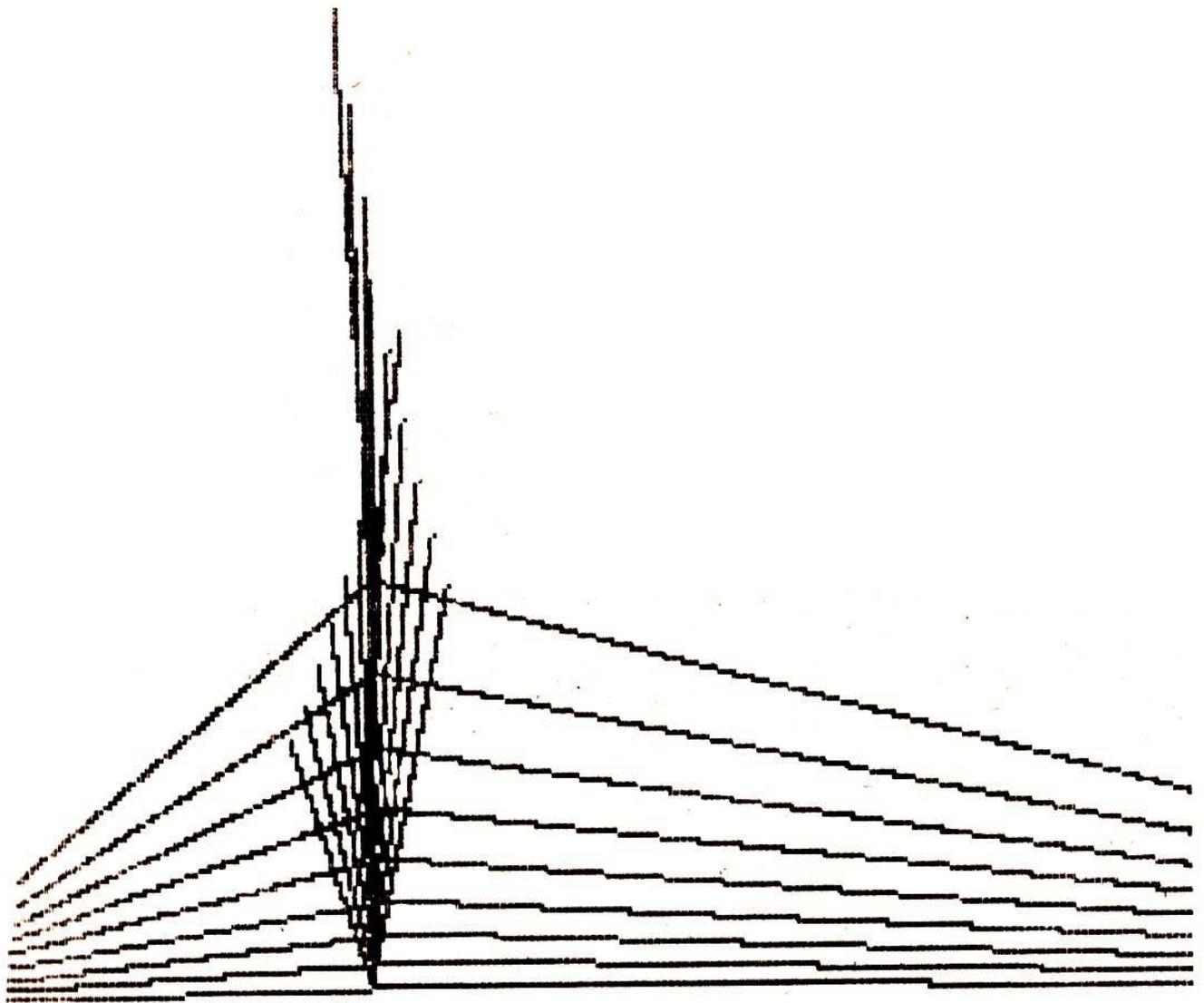
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 5. 4. 1989

Titelbild: M. Torke

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	23 (1989) 5	S. 65–80
----------------	--------	------	-------------	----------



wurzel $\sqrt{6 \cdot 89}$

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

**Herausgegeben vom Jugendobjekt Studien-
vorbereitung-Studienwerbung der Sektion
Mathematik an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena**

**23. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M**

Treffpunkt Mathelager

Ferien. Ein jedes Individuum, ob Schüler oder Student, freut sich darauf, weil es Entspannung vom täglichen Unterricht, Vorlesungen, Seminaren etc. heißt. Jedoch vom 7. - 17. Februar 89 trafen sich in der Lobensteiner Diesterweg Oberschule ca. 60 junge Leute, um ihre Ferien im Mathematik-Bezirkslager Gera (auch Mala genannt) zu verbringen. Das heißt täglich vier Stunden Mathematikunterricht. Trotzdem möchte wohl keiner der Teilnehmer dieses Lager missen, denn: Erstens bietet der Unterricht, welcher hauptsächlich von Studenten der Jenaer Friedrich-Schiller-Universität durchgeführt wird, die Grundlage, das fachliche Wissen im Spezialfach Mathematik zu erweitern. Zweitens herrscht im Mala eine sehr harmonische Atmosphäre, welche von einem abwechslungsreichen Freizeitangebot durchsetzt ist, so daß das Lagerleben wirklich Spaß macht.

Wenn auch die Mathematik uns in diesem Lager zusammenführt, so sind dennoch die unterschiedlichsten Interessen vertreten, welche dann auch vielfältig genutzt werden. So standen beispielsweise auf dem Programm: eine Wanderung nach Friesau, Besuch im Elektronikkabinett, eine Veranstaltung im Lobensteiner Pionierhaus, lagerinterne Turniere, wie Volleyball, Tischtennis, Skat, Schach und Maria-Pussi, Besuch in der Schuhfabrik und im Kino, Gesprächsrunde mit einem Förster, Einkehr im Eis-Cafe, Besichtigung des Lobensteiner Turms, Fasching und natürlich eine Abschluß-Disko. Die beiden zuletzt genannten Veranstaltungen wurden ausschließlich von den Schülern organisiert, wobei kulturell hochwertige Bestandteile nicht zu kurz kamen. Vom Gitarrensolo über "Was bin ich?" und lagerinterne Hitparade bis zum Dadaismus war alles dabei.

Aber auch der Unterricht forderte Schüler und Studenten heraus. Von Gruppentheorie über Wahrscheinlichkeitsrechnung, Logik, Reihen, Zahlentheorie, Kegelschnitte bis hin zur Informatik war auch hier, in den Klassenstufen verteilt, alles vertreten. Ist der Unterricht für die Schüler die Möglichkeit, bisher ungekannte Aspekte der Mathematik kennenzulernen, so ergibt sich

vor allem für die Lehrerstudenten (auch MaPhys genannt) die Chance, sich selbst zu testen. Dabei waren beiden Parteien gleichermaßen gefordert. In diesem Sinne wurde erstmals die demokratische Maßnahme eingeführt, daß am Ende des Lagers nicht nur die Lehrkräfte die Schüler schriftlich beurteilen, sondern auch umgekehrt diese Möglichkeit bestand.

Das Mala wird vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit organisiert. Durch das Jugendobjekt "Studienvorbereitung - Studienwerbung" der Friedrich-Schiller-Universität wird die Betreuung der Schüler abgesichert. An der Lagergestaltung selbst hat das FDJ-Aktiv des Bezirksklubs großen Anteil.

Zweimal jährlich finden diese 10-tätigen Lager statt. Die Teilnahme daran setzt die Mitgliedschaft im Bezirksklub Mathematik voraus, welche auf Delegierungen basiert, die jährlich durch den Bezirksschulrat neu erfolgen müssen.

Das Mala dient der Vorbereitung auf die Mathematikolympiaden im Kreis-, Bezirks- und DDR-Maßstab, aber auch zur Persönlichkeitsentwicklung der teilnehmenden Mädchen und Jungen.

In diesem Jahr hatten die Schüler der 7. - 11. Klassen gemeinsam mit ihren studentischen Betreuern gegen so manche organisatorische Schwierigkeit zu kämpfen. Wenn diese Probleme behoben sind, wird das Mathematiklager wieder ein vorbildliches Beispiel für sinnvolle Feriengestaltung sein.

Lars Kästner
Bezirksklub Mathematik Gera

Gibt es eine Teilbarkeitsregel für die 49?

Kann man im Kopf ausrechnen, welchen Rest

$x=1$ 0000000000 8887...69686869...8788 0000000000 1
 \downarrow 10 Ziffern \downarrow 84 Ziffern \downarrow 10 Ziffern \downarrow

bei Division durch 49 läßt? Beide Fragen lassen sich mit "ja" beantworten, oder sagen wir lieber vorsichtiger "Im Prinzip ja". In der Schulolympiade 1988 der 10. Klasse wurde in einer Aufgabe nach der Teilbarkeitsregel für 7 gefragt. Dem, der schon wußte, daß 1001 durch 7 teilbar ist, dürfte die Aufgabe nicht schwergefallen sein.

Aber die obige Aufgabe wird für die meisten viel komplizierter sein, weil sie die Methoden nicht kennen, mit denen man sich selbst Teilbarkeitsregeln herleiten kann. Bevor wir zu obiger Aufgabe zurückkehren, wollen wir uns deshalb ein paar solche Methoden aneignen.

Satz 1. Sei $p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot \dots \cdot p_m^{q_m}$ die Primzahlzerlegung einer natürlichen Zahl n . Dann ist die natürliche Zahl a genau dann durch n teilbar, wenn es für alle i mit $1 \leq i \leq m$ durch $p_i^{q_i}$ teilbar ist.

Bemerkung 1. Der Satz, der in dieser Form für unsere Anwendungen ausreicht, ist ein Spezialfall von folgender Aussage: a ist genau dann durch $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$ teilbar, wenn es durch das kleinste gemeinsame Vielfache von $\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ teilbar ist. Satz 1 besagt, daß wir nur Teilbarkeitsregeln für Potenzen von Primzahlen herleiten müssen.

Die Primzahlen 2 und 5 werden uns nicht weiter beschäftigen, denn für sie gilt wegen $2^q | 10^q$ ($a|b$ bedeutet: a ist ein Teiler von b) bzw. $5^q | 10^q$ der einfache Satz:

Satz 2. Die im Dezimalsystem dargestellte Zahl a läßt bei Division durch 2^q (bzw. 5^q) den gleichen Rest wie die aus den letzten q Ziffern von a gebildete Zahl.

Im weiteren sei p stets eine von 2 und 5 verschiedene Primzahl,

insbesondere ist p ungerade.

Ausgangspunkt wird für uns der kleine Fermatsche Satz sein:

Satz 3. $10^{(p-1) \cdot p^{q-1}}$ läßt bei Division durch p^q den Rest 1.

Beweis. Bei Division durch p^q treten genau $(p-1) \cdot p^{q-1}$ voneinander verschiedene nicht durch p teilbare Reste $r_1=1$, $r_2=2, \dots, r_{p-1}=p-1$, $r_p=p+1$, $r_{p+1}=p+2, \dots, r_{(p-1) \cdot 2}=2p-1$, $r_{(p-1) \cdot 2+1}=2p+1, \dots, r_{(p-1)(p^{q-1}-1)+1}=p^{q-p+1}$, $r_{(p-1)(p^{q-1}-1)+2}=p^{q-p+2}, \dots, r_{(p-1)p^{q-1}}=p^{q-1}$ auf. Multipliziert man zwei verschiedene solche Reste mit 10, so ergeben sich nach Division durch p^q wiederum zwei voneinander verschiedene Reste, die nicht durch p teilbar sind. Also erhält man bei Multiplikation aller $(p-1)p^{q-1}$ nicht durch p teilbaren Reste mit 10 und Division durch p^q wieder alle $(p-1)p^{q-1}$ Reste $r_1, r_2, \dots, r_{(p-1)p^{q-1}}$, wenn auch in einer anderen Reihenfolge. Folglich läßt das Produkt $(10r_1) \cdot (10r_2) \cdot \dots \cdot (10r_{(p-1)p^{q-1}})$ bei Division durch p^q den gleichen Rest wie $r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_{(p-1)p^{q-1}}$. Da keiner der Faktoren durch p teilbar ist, heißt das, daß $10^{(p-1)p^{q-1}}$ bei Division durch p^q den Rest 1 läßt.

Eine erste, noch etwas zu umständliche Teilbarkeitsregel kann aus Satz 3 gewonnen werden:

Folgerung 1. a läßt bei Division durch p^q den gleichen Rest wie die aus Gruppen der Länge $(p-1)p^{q-1}$ gebildete Quersumme. (Darunter verstehen wir die Summe aus der Zahl, die aus den letzten $(p-1)p^{q-1}$ Ziffern von a gebildet wird, und der Zahl, die aus den vorletzten $(p-1)p^{q-1}$ Ziffern gebildet wird, und der Zahl, die aus den drittletzten $(p-1)p^{q-1}$ Ziffern gebildet wird usw.)

Beispiel: Die Folgerung 1 hilft uns zwar nicht direkt bei unserem Ausgangsbeispiel weiter, aber zusammen mit Satz 3 kann man sie gut auf $x=10^{84+21}+1+10^{11}(888786\dots6868\dots8788)$ anwenden. 10^{84+21} läßt bei Division durch 49 wegen $(p-1)p^{q-1}=6 \cdot 7=42$ den gleichen Rest wie 10^{21} und $888786\dots6868\dots8788$ den gleichen

Rest wie $888786\dots6968+6869\dots8788=156\cdot(1+100+100^2+\dots+100^{20})$
 $=156\cdot(100^{21}-1)/(100-1)=156\cdot(10^{42}-1)/99$. Da $49|(10^{42}-1)$, muß
 nur noch der Rest von $10^{21}+1$ untersucht werden.

S a t z 4 . $10^{(p-1)p^{q-1}/2}$ läßt die Division durch p^q den
 Rest 1 oder -1.

Bemerkung 2: Da p ungerade ist, ist $(p-1)/2$ eine natürliche
 Zahl.

Beweis von Satz 4. Wir kürzen $y = 10^{(p-1)p^{q-1}/2}$ ab. Aus Satz 3
 folgt $p^q|(y^2-1)=(y-1)(y+1)$, also entweder $p^q|(y-1)$ oder
 $p^q|(y+1)$. Somit gelangen wir zu einer bequemeren Teilbarkeits-
 regel:

Folgerung 2: Je nachdem, ob $10^{(p-1)p^q/2}$ bei Division durch p^q
 den Rest 1 oder -1 läßt, läßt a bei Division durch p^q den glei-
 chen Rest wie die aus Gruppen der Länge $(p-1)p^q/2$ gebildete
 Quersumme bzw. alternierende Quersumme. (Diese alternierende
 Quersumme ist die Zahl, die aus den letzten $(p-1)p^q/2$ Ziffern
 gebildet wird, minus der Zahl, die aus den vorletzten $(p-1)p^q/2$
 Ziffern gebildet wird, plus der Zahl, die aus den drittletzten
 $(p-1)p^q/2$ Ziffern gebildet wird, minus ...).

Man kann nun notfalls im Kopf bestimmen, ob 10^{21} bei Division
 durch 49 den Rest 1 oder -1 läßt: 10^2 läßt den Rest 2;
 $10^{20} = (10^2)^{10}$ den gleichen Rest wie $2^{10} = 1024 = 980+44$, d.h.
 -5. Damit läßt 10^{21} den gleichen Rest wie $10\cdot(-5)$, d.h. -1.
 Auch wenn man diese Rechnungen, die zeigen, daß die Zahl x
 durch 49 teilbar ist, wirklich noch im Kopf ausführen kann, so
 wären diese Anstrengungen gar nicht vonnöten:

S a t z 5 . Läßt 10^b bei Division durch p^r den Rest 1 (bzw.
 -1), dann läßt 10^{bp^q} bei Division durch p^{r+q}
 ebenfalls den Rest 1 (bzw. -1).

Beispiel: $7/(10^3+1) \Rightarrow 49/(10^{21}+1)$.

Beweis zu Satz 5. Wir zeigen die Aussage mittels vollständiger
 Induktion. Für $q=0$ ist die Aussage gültig. Wir nehmen an, daß

sie für q richtig ist und beweisen sie dann für $q+1$:

Sei $p^{r+q} | (10^{bp^q} - 1)$. Die binomische Formel ergibt

$$10^{bp^{q+1}} - 1 = (10^{bp^q} - 1)(1 + 10^{bp^q} + \dots + 10^{(p-1)bp^q}) \quad (1)$$

wobei der 1. Faktor nach Induktionsannahme durch p^{r+q} teilbar ist. Jeder der p Summanden des 2. Faktors läßt bei Division durch p^{r+q} , also auch bei Division durch p , den Rest 1. Damit ist der 2. Faktor durch p teilbar und das Produkt durch p^{r+q+1} . Falls 10^{bp^q} bei Division durch p^{r+q} den Rest -1 läßt, so ersetze man in (1) 10^b durch (-10^b) .

Bemerkung 3: Die Teilbarkeitsregel in Folgerung 2 kommt zwar mit kürzeren Gruppen aus als die in Folgerung 1, ist aber nicht immer die optimale. Für $p=3$ und $p=7$ liefert uns Folgerung 2 die bekannten Teilbarkeitsregeln, aber schon für 9 verlangt Folgerung 2 unnötigerweise, daß man die Quersumme von Dreiergruppen bildet. Das liegt daran, daß nicht erst 10^3 , sondern schon 10, bei Division durch 9 den Rest 1 läßt. Aus Satz 5 lesen wir $3^{q+2} | (10^{3^q} - 1)$ ab, die Teilbarkeitsregel für 27 lautet also: a läßt bei Division durch 27 den gleichen Rest wie die aus Dreiergruppen gebildete Quersumme.

Gibt es aber wie bei der 9 eine noch einfachere Teilbarkeitsregel? Einfachste Gegenbeispiele zeigen, daß es für 27 keine einfachere Teilbarkeitsregel, die z.B. mit der gewöhnlichen Quersumme operiert, gibt.

Die Teilbarkeitsregel für 81 verlangt nach Satz 5 die Untersuchung der Quersumme aus Neunergruppen. Daß nicht schon Dreiergruppen reichen, zeigt eine Verschärfung von Satz 5:

Satz 6. Ist b der kleinste Exponent, so daß $p^r | (10^b - 1)$ (bzw. $10^b + 1$) gilt, und ist außerdem p^{r+1} kein Teiler von $10^b - 1$ (bzw. $10^b + 1$), so ist $s = bp^q$ der minimale Exponent, so daß $p^{r+q} | (10^s - 1)$ (bzw. $10^s + 1$) gilt. Außerdem ist dann p^{r+q+1} kein Teiler von $10^s - 1$ (bzw. $10^s + 1$).

Folgerung 3. Für $q = 2$ lautet das minimale b , mit $3^q | (10^b + 1)$ 3^{q-2} , und zwar gilt dann $3^q | (10^b - 1)$.

Folgerung 4. Das minimale b mit $7^q | (10^b + 1)$ ist $3 \cdot 7^{q-1}$, hier gilt $7^q | (10^b + 1)$.

Beweis von Satz 6. Wieder wenden wir die vollständige Induktion an, ausgehend von der Richtigkeit der Behauptung für $q=0$. Sei nun $s=bp^q$ der minimale Exponent mit $p^{r+q} | (10^s - 1)$. Weiterhin sei $p^{r+q+1} | (10^s - 1)$ nicht gültig. $t \leq p \cdot s$ sei der minimale Exponent mit $p^{r+q+1} | (10^t - 1)$. Als erstes zeigen wir, daß t ein Teiler von ps sein muß. Wäre t kein Teiler, so gibt es natürliche Zahlen k, l mit $k=ps-lt$ und $k < t$. 10^{k+lt} läßt bei Division durch 10^{r+q+1} den gleichen Rest wie 10^k , somit erhalten wir $p^{r+q+1} | (10^k - 1)$ im Widerspruch zur Minimalität von t .

t kann kein echter Teiler von b sein, sonst ließe ja 10^t bei Division durch p^{r+q+1} , also erst recht bei Division durch p^r , den Rest 1. Das stünde aber im Widerspruch zur Minimalität von b . Folglich gelangen wir zur Darstellung $t=c \cdot p$ mit $c \leq s$.

10^c läßt nach Satz 3 bei Division durch p den gleichen Rest wie 10^{cp} , d.h. 1. Sei $u \geq 1$ der maximale Exponent mit $p^u | (10^c - 1)$. Nach Satz 5 ist dann $p^{u+1} | (10^{cp} - 1)$. Als nächstes wird gezeigt, daß p^{u+2} kein Teiler von $10^{cp} - 1$ ist:

Die binomische Formel liefert

$$\begin{aligned} z &= 10^{cp} - 1 - p(10^c - 1) = (10^c - 1)[10^{c(p-1)} + 10^{c(p-2)} + \dots + 1 - p] = \\ &= (10^c - 1)[(10^{c(p-1)} - 1) + (10^{c(p-2)} - 1) + \dots + (10^c - 1)] = (10^c - 1)^2 \cdot \\ & \cdot [(10^{c(p-2)} + 10^{c(p-3)} + \dots + 1) + (10^{c(p-3)} + 10^{c(p-4)} + \dots + 1) + \dots + 1] \end{aligned}$$

In der letzten eckigen Klammer stehen $p(p-1)/2$ Summanden, die bei Division durch p den Rest 1 lassen. Damit ist die Summe selbst durch p teilbar. Somit ist z durch p^{2u+1} teilbar. Laut Voraussetzung ist $p(10^c - 1)$ durch p^{u+1} , aber nicht durch p^{u+2} teilbar. Folglich ist auch die Summe aus z und $p(10^c - 1)$, d.h. $10^{cp} - 1$, durch p^{u+1} , aber nicht durch p^{u+2} teilbar.

Andererseits wissen wir, daß $10^{cp} - 1$ den Teiler p^{r+q+1} besitzt, d.h. $u \geq r+q$. Somit ist $10^c - 1$ durch p^{r+q} teilbar; die Induktionsannahme über die Minimalität von s liefert $c=s$. Der erste Teil der Induktionsbehauptung, die Minimalität des Exponenten sp

in $p^{r+q+1} \mid (10^{sp}-1)$, ist damit bewiesen.

Aus $c=s$ und der Induktionsannahme erhält man $u=r+q$. Das bedeutet aber, daß auch der zweite Teil der Induktionsbehauptung garantiert ist, nämlich daß p^{r+q+2} kein Teiler von $10^{cp}-1$ ist.
qed.

Bemerkung 4: Generell will man für p^q solche Teilbarkeitsregeln, die mit minimaler Gruppenlänge auskommen. Satz 6 reduziert dieses Problem im wesentlichen auf die Frage nach dem minimalen Exponenten b mit $p \mid (10^b+1)$. Über dieses minimale b läßt sich relativ wenig aussagen:

Satz 7. a) Falls das minimale b gerade ist, gilt $p \mid (10^b+1)$.
b) Das minimale b ist ein Teiler von $(p-1)/2$.
c) Falls $p \mid (10^{(p-1)/2}+1)$ gilt, so ist $(p-1)/(2b)$ ungerade.

Beweis. a) Wäre für gerades b $p \mid (10^b-1)$, so fände man wie im Satz 4 $p \mid (10^{b/2}-1)$ oder $p \mid (10^{b/2}+1)$.

b) Nach Satz 4 läßt $10^{(p-1)/2}$ bei Division durch p den Rest 1 oder -1 . So, wie in Satz 6 bewiesen wurde, daß t ein Teiler von ps ist, zeigt man auch $b \mid (p-1)/2$.

c) Aus $p \mid (10^b+1)$ und der Geradzahligkeit von $(p-1)/(2b)$ würde $p \mid (10^{(p-1)/2}-1)$ folgen.

Unser abschließender Satz verlangt einen komplizierteren Beweis, der an einem solchen interessierte Leser sei auf Kapitel 5 des Buches "Zahlentheorie" von I.M. Winogradow (D VW Berlin, 1955) verwiesen.

Satz 8. $10^{(p-1)/2}$ läßt genau dann den Rest 1 bei Division durch p , falls p (im Dezimalsystem) auf 1 oder 9 endet und bei Division durch 8 den Rest 1 oder 7 läßt oder falls p auf 3 oder 7 endet und bei Division durch 8 den Rest 3 oder 5 läßt.

Folgerung 5. $13 \mid (10^6-1)$, nach Satz 7 ist das minimale b ein Teiler von 3. Da für alle $p > 1$ $b=1$ ausscheidet, ist tatsächlich $b=3$.

Folgerung 6. $17|(10^8+1)$; nach Satz 7c kann das minimale b kein echter Teiler von 8 sein.

Folgerung 7. $19|(10^9+1)$. Das minimale b kann nicht 3 sein, da 10^3+1 keine Primteiler größer als 13 besitzt. Damit ist $b=9$.

Folgerung 8. $23|(10^{11}+1)$. b ist 11, da 11 keine echten Teiler größer als 1 besitzt.

Folgerung 9. $29|(10^{14}+1)$. Nach Satz 7c scheidet $b=7$ aus. Da 101 nicht durch 29 teilbar ist, muß $b=14$ sein.

Folgerung 10. $31|(10^{15}-1)$. $10^3-1=27\cdot 37$ ist nicht durch 31 teilbar, bleibt noch 10^5-1 zu prüfen. Eine direkte Rechnung, die man auch im Kopf bewältigen kann (10^2 läßt bei Division durch 31 den Rest 7; 10^4 den gleichen Rest wie 49, d.h. 18, und 10^5 den gleichen Rest wie 180, d.h. -6), schließt auch $b=5$ aus. Damit ist $b=15$.

In Folgerung 10 wird 37 als nächste Primzahl mit $b=3$ schon erwähnt.

Probiert Euch deshalb an der Bestimmung der minimalen Exponenten für 41 und 47 aus.

Doz. Dr. H. Englisch
Sektion Mathematik
KMU Leipzig

Preisaufgaben

- V 31 На плоскости даны окружность и точки P, O на ней. Проведём через точки P, O и произвольную точку K плоскости окружность. Пусть M – точка пересечения касательной к этой окружности в точке K с прямой PO .
 Какое множество заполняют точки M ?



- V 32 Man zeige, daß das kleinste gemeinsame Vielfache der n natürlichen Zahlen $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ nicht kleiner als $n \cdot a_1$ ist.



- V 33 In einer Urne seien 3 schwarze und 7 weiße Kugeln, in einer weiteren Urne seien 6 schwarze und 4 weiße Kugeln. Aus beiden Urnen werde zufällig je eine Kugel genommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beide Kugeln die gleiche Farbe haben?



- V 34 Im Inneren eines Quadrates $ABCD$ liege ein Punkt P derart, daß $\overline{AP} : \overline{BP} : \overline{CP} = 1 : 2 : 3$.
 Man bestimme die Größe des Winkels $\sphericalangle APB$.



- V 35 Vereinfache



$$\cos 0 + \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \dots + \cos \frac{6\pi}{7} \quad !$$

- V 36 Man löse die Gleichung



$$\sin^2 x + \cos^2 3x = 1.$$

Einsendeschluß: 1. 10. 1989

Lösungen der Bezirksolympiade Klassen 11/12

- 1) I. Wenn die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind, so folgt:
Nach (1), (2) und wegen $q=5$ gilt

$$b_1=p, \quad b_2=5p, \quad b_3=5r.$$

Aus (4) folgt $b_2-b_1 = b_3-b_2$, also $b_1+b_3 = 2b_2$, $p+5r = 10p$,
 $5r = 9p.$ (5)

Aus (3) folgt $a_1+a_3 = 2a_2$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{2}{5}. \quad (6)$$

Aus (5) folgt $\frac{1}{p} = \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{r}$, und damit ergibt sich aus (6) und dann (5):

$$\frac{14}{5} \cdot \frac{1}{r} = \frac{2}{5},$$

$$r = 7,$$

$$p = \frac{35}{9}.$$

Damit erhält man aus (1) und (2), daß nur die Folgen

$$a_1 = \frac{9}{35}, \quad a_2 = \frac{1}{5}, \quad a_3 = \frac{1}{7} \quad \text{und} \quad (7)$$

$$b_1 = \frac{35}{9}, \quad b_2 = \frac{175}{9}, \quad b_3 = 35 \quad (8)$$

den Bedingungen der Aufgabe genügen können.

- II. Sie genügen diesen Bedingungen; denn sie erfüllen (2) sowie mit $p = \frac{35}{9}$, $q=5$, $r=7$ auch (1) und wegen

$$\frac{1}{5} - \frac{9}{35} = \frac{1}{7} - \frac{1}{5} = -\frac{2}{35} \quad \text{sowie} \quad \frac{175}{9} - \frac{35}{9} = 35 - \frac{175}{9} = \frac{140}{9}$$

sind auch (3) und (4) erfüllt.

Also genügen genau die in (7), (8) genannten Folgen den Bedingungen der Aufgabe.

- 2) I. Wenn es zu einem Punkt C ein Parallelogramm ABCD mit

$$\overline{AB} = a \quad (1)$$

und

$$\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{BD} : \overline{AD} \quad (2)$$

gibt, so folgt: Für $b = \overline{AD} = \overline{BC}$, $\varphi = \sphericalangle ABC$ gilt nach dem Kosinussatz sowie wegen $\sphericalangle BAD = 180^\circ - \varphi$ und

$$\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$$

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \varphi}, \quad (3)$$

$$\overline{BD} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \varphi}. \quad (4)$$

Hieraus und aus (2), also $\overline{AB} \cdot \overline{BD} = \overline{AD} \cdot \overline{AC}$, folgt

$$a \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \varphi} = b \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \varphi}, \quad (5)$$

$$a^4 + a^2 b^2 + 2a^3 b \cdot \cos \varphi = a^2 b^2 + b^4 - 2ab^3 \cdot \cos \varphi,$$

$$2ab \cdot (a^2 + b^2) \cdot \cos \varphi = b^4 - a^4,$$

$$2ab \cdot \cos \varphi = b^2 - a^2. \quad (6)$$

Damit ergibt sich aus (3)

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2 - (b^2 - a^2)},$$

$$\overline{AC} = a\sqrt{2}. \quad (7)$$

II. Wenn (7) für einen Punkt C gilt, so folgt: Da es eine Länge b mit

$$|b-a| < a\sqrt{2} < a+b \quad (8)$$

gibt (beispielsweise¹ ist $b=a$ eine solche Länge), gibt es ein Dreieck ABC, in dem außer (7) auch (1) und $\overline{BC}=b$ gilt. Ist darin $\sphericalangle ABC = \varphi$, so folgt nach dem Kosinussatz

$$2a^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \varphi,$$

also (6).

Für denjenigen Punkt D, mit dem ABCD ein Parallelogramm ist und daher (3) und (4) gelten, ergibt sich aus (6) wieder (5) und damit (2).

Mit I. und II. ist gezeigt: Zu einem Punkt C existiert genau dann ein Parallelogramm ABCD mit (1), (2), wenn (7) gilt.

¹ Die Menge aller b mit (8) ist das Intervall $a(\sqrt{2}-1) < b < a(\sqrt{2}+1)$. Diese genauere Aussage wird im obigen Zusammenhang nicht benötigt. Statt der obigen Verwendung eines beliebigen b mit (8) genügt es in II. z.B. auch, sogleich nur ($b=a$, d.h.) das Quadrat ABCD heranzuziehen.

Die gesuchte Menge aller derjenigen Punkte C in e , für die das zutrifft, ist folglich der in e liegende Kreis um A mit dem Radius $a\sqrt{2}$.

3A) I. Für $n=3$ werden die Bedingungen z.B. durch $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=3$ mit den Differenzen

$$0-1 = -1, \quad 0-3 = -3,$$

$$1-0 = 1, \quad 1-3 = -2,$$

$$3-0 = 3, \quad 3-1 = 2$$

erfüllt.

II. Für $n=4$ werden die Bedingungen z.B. durch $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=4$, $a_4=6$ mit den Differenzen

$$0-1 = -1, \quad 0-4 = -4, \quad 0-6 = -6,$$

$$1-0 = 1, \quad 1-4 = -3, \quad 1-6 = -5,$$

$$4-0 = 4, \quad 4-1 = 3, \quad 4-6 = -2,$$

$$6-0 = 6, \quad 6-1 = 5, \quad 6-4 = 2$$

erfüllt.

III. Angenommen nun, für ein $n \geq 5$ seien (1), (2) erfüllt durch natürliche Zahlen a_1, \dots, a_n . Dann folgt:

(3) Keine zwei der Zahlen a_1, \dots, a_n sind einander gleich.

Beweis: Wäre $a_j = a_k$ ($j \neq k$), so folgte mit einem von j und k verschiedenen i , daß $a_j - a_i = a_k - a_i$ wäre, was (2) widerspricht.

O.B.d.A. kann daher wegen (1) angenommen werden:

(4) Es gilt $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n \leq \frac{1}{2}(n-1) \cdot n$.

Weiter gilt

(5) Die Differenzen $a_j - a_i$, die für alle i, j mit $1 \leq i < j \leq n$ gebildet werden, sind die Zahlen $1, 2, \dots, \frac{1}{2}(n-1) \cdot n$ in geeigneter Reihenfolge, jede genau einmal.

Beweis: Nach (4) gilt $0 < a_j - a_i \leq \frac{1}{2}(n-1) \cdot n$ für jede dieser Differenzen. Nach (2) sind sie paarweise verschieden, also ist ihre Anzahl gleich der Anzahl der Paare (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$. Diese Anzahl ist aber bekanntlich gleich $\frac{1}{2}(n-1) \cdot n$; daher muß (5) gelten.

Insbesondere gilt:

(6) Die Differenzen $d_i = a_{i+1} - a_i$, die für alle $i=1, \dots, n-1$ gebildet werden, sind die Zahlen $1, 2, \dots, n-1$ in geeigneter Reihenfolge, jede genau einmal.

Beweis: Nach (4) ist die Summe dieser Differenzen

$$d_1 + \dots + d_{n-1} = a_n - a_1 \leq \frac{1}{2}(n-1) \cdot n,$$

nach (2) sind sie paarweise verschiedene natürliche Zahlen, nach (4) positiv.

Da aber bereits die Summe der Zahlen $1, 2, \dots, n-1$ bekanntlich $\frac{1}{2}(n-1) \cdot n$ beträgt, verbleibt nur die Möglichkeit (6).

Nun erhält man: Nach (6) gibt es unter den Indizes $1, \dots, n-1$ genau einen Index p mit $d_p = 1$. Ist ein Index r ($1 \leq r \leq n-1$) oberer oder unterer Nachbar von p , so muß $d_r = n-1$ sein; denn wäre für zwei einander benachbarte Indizes $i, i+1$ die eine der beiden Zahlen d_i, d_{i+1} gleich 1, die andere kleiner als $n-1$, so folgte

$$a_{i+2} - a_i = d_{i+1} + d_i < n,$$

womit wegen (6) ein Widerspruch gegen (2) vorläge.

Also muß p einer der beiden Indizes $1, n-1$ mit nur einem Nachbar sein, und für diesen Nachbarindex r muß $d_r = n-1$ gelten; d.h., es muß einer der beiden folgenden Fälle A, B vorliegen:

$$A: \text{ Es gilt } d_1 = 1, \quad d_2 = n-1.$$

$$B: \text{ Es gilt } d_{n-1} = 1, \quad d_{n-2} = n-1.$$

Ebenso erhält man: Es gibt genau einen Index q mit $d_q = 2$. Ist ein Index s oberer oder unterer Nachbar von q , so muß d_s eine der Zahlen $n-2, n-1$ sein. Wegen $n \geq 5$ sind diese beiden Zahlen von 1 und 2 verschieden. Also muß, falls q zwei Nachbarn hat, der eine von ihnen der bereits in den Fällen A, B festgestellte Index r sein, und für den anderen Nachbar s muß $d_s = n-2$ gelten. Hat q aber nur einen Nachbar s (d.h. gilt $q=n-1$ im Fall A bzw. $q=1$ im Fall B), so ist wegen $n \geq 5$ dieser Nachbar nicht der in den Fällen A, B festgestellte Index r ; also kann dann nur $d_s = n-2$ sein. Das heißt, es liegt jeweils für A bzw. B einer der folgenden Unterfälle A1, A2 bzw. B1, B2 vor:

A1: Es gilt $d_1 = 1$, $d_2 = n-1$, $d_3 = 2$, $d_4 = n-2$.

A2: Es gilt $d_1 = 1$, $d_2 = n-1$, $d_{n-1} = 2$, $d_{n-2} = n-2$.

B1: Es gilt $d_{n-1} = 1$, $d_{n-2} = n-1$, $d_{n-3} = 2$, $d_{n-4} = n-2$.

B2: Es gilt $d_{n-1} = 1$, $d_{n-2} = n-1$, $d_1 = 2$, $d_2 = n-2$.

Damit finden sich in jedem Fall vier Indizes der Form u , $u+1$, v , $v+1$ mit $u \neq v$, für die $d_u + d_{u+1} = n$, $d_v + d_{v+1} = n$, also $a_{u+2} - a_u = a_{v+2} - a_v$ gilt. Das widerspricht (2).

Die Annahme, für ein $n \geq 5$ seien (1), (2) erfüllbar, hat somit in jedem Fall auf einen Widerspruch geführt.

Mit I., II., III ist bewiesen: Die Bedingungen der Aufgabe werden genau von den beiden Zahlen $n=3$ und $n=4$ erfüllt.

Fortsetzung folgt!

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung“

Leiter: Stefan Posselt

Chefredakteur: Eckhard Stein

Redaktion: C. Dahms, S. Krieg, R. Fötsch, N. Patzschke

Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900

Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.

Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

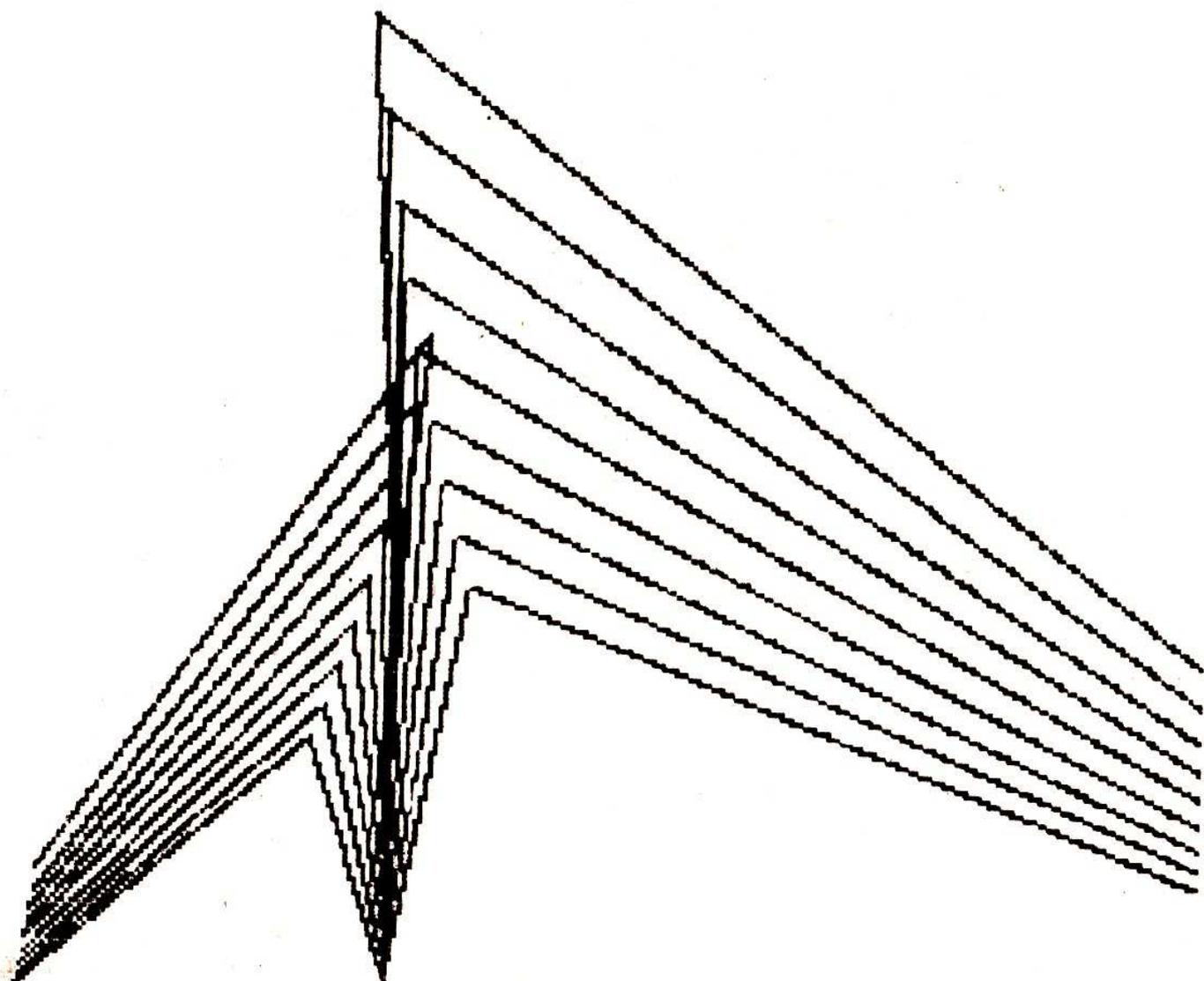
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Redaktionsschluß: 2. 5. 1989

Titelbild: M. Torke

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	23 (1989) 6	S. 81–96
----------------	--------	------	-------------	----------



wurzel $\sqrt{7/8 \cdot 89}$

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

**Herausgegeben vom Jugendobjekt Studien-
vorbereitung-Studienwerbung der Sektion
Mathematik an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena**

23. Jahrgang ISSN 0232-4539

Sonderpreis für DDR: 0,40 M

Eine Einführung in die Graphentheorie

1. Einleitende Bemerkungen

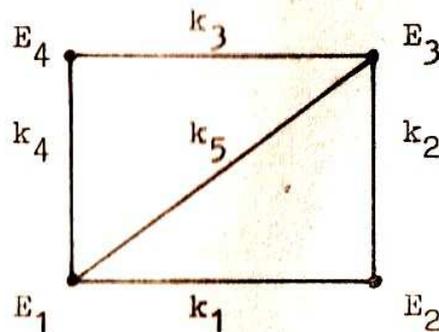
Mit dem nachfolgenden Beitrag wird versucht, den Leser in anschaulicher Weise in die Graphentheorie einzuführen, um sein Interesse für dieses Teilgebiet der Mathematik zu wecken. Es besteht nicht die Absicht, die Theorie der abstrakten Graphen ausführlich darzustellen. Das würde auch die Möglichkeiten einer derartigen Veröffentlichung in der WURZEL weit überschreiten. Neben der Besprechung einiger Beispiele erfolgt eine Beschränkung auf die Definition des abstrakten Graphen und auf einige Sätze über diesen Begriff. Die große Bedeutung der Graphentheorie dürfte darin bestehen, daß es mit ihrer Hilfe möglich ist, viele praktische Probleme mathematisch zu modellieren und zu lösen. Das soll am Beispiel des Fährmannsproblems und des Brückenproblems erläutert werden. Diese Beispiele machen gleichzeitig deutlich, daß ein sehr abstrakter mathematischer Begriff wie der Begriff des Graphen für die Anwendungen sehr nützlich sein kann.

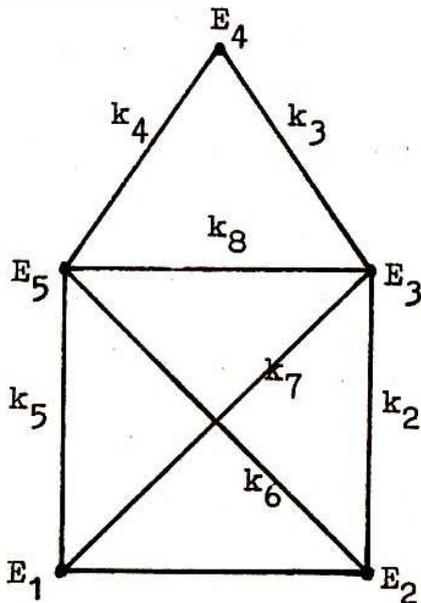
Im nachfolgenden stellen wir zunächst einige einfache Beispiele für Graphen vor.

2. Einfache Beispiele für Graphen

Beispiel (1)

Die Punkte E_1, E_2, E_3, E_4 heißen die Eckpunkte oder Knotenpunkte des Graphen, die Strecken k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 werden als Kanten bezeichnet.



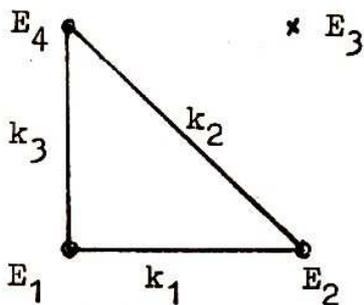
Beispiel (2)

Mengen E der Eckpunkte:

$$E = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$$

Mengen K der Kanten:

$$K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8\}$$

Beispiel (3)

Mengen E der Eckpunkte:

$$E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$$

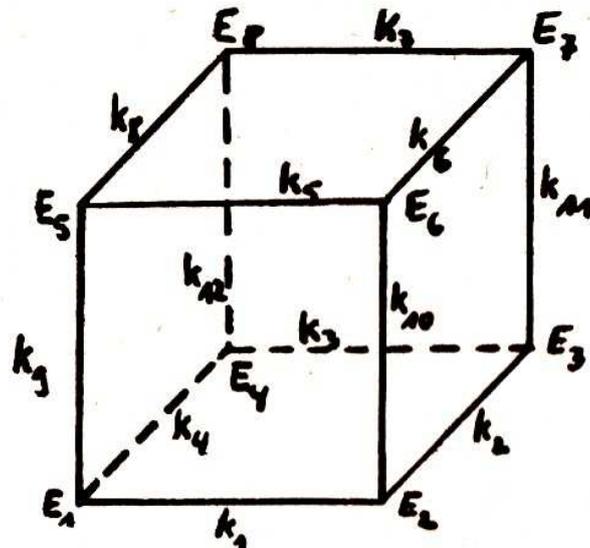
Mengen K der Kanten:

$$K = \{k_1, k_2, k_3\}$$

E_3 wird als ein isolierter Eckpunkt des Graphen bezeichnet, d.h. E_3 ist mit keinem anderen Eckpunkt durch eine Kante verbunden (man sagt: Dieser Eckpunkt inzidiert mit keiner einzigen Kante).

Beispiel (4)

Bei diesem Graphen besteht die Menge E der Eckpunkte aus 8 Elementen und die Menge K der Kanten aus 12 Elementen.



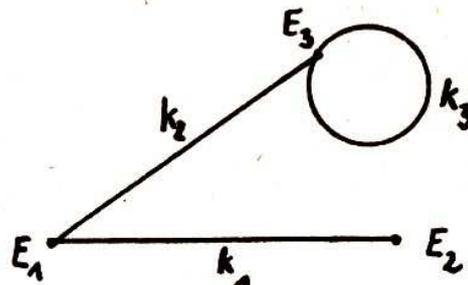
Beispiel (5)

Mengen E der Eckpunkte:

$$E = \{E_1, E_2, E_3\}$$

Mengen K der Kanten:

$$K = \{k_1, k_2, k_3\}$$

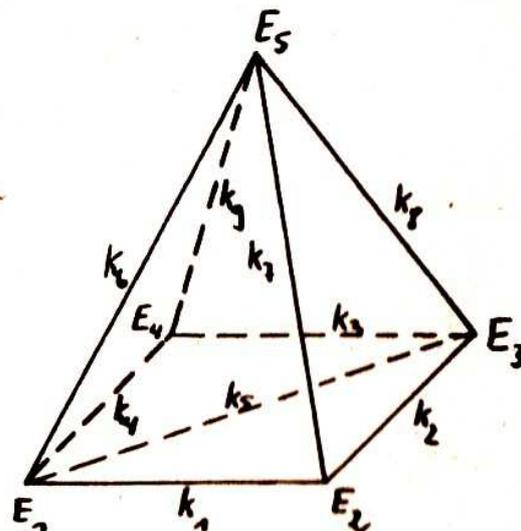


Die Kante k_2 heißt eine Schlinge des Graphen, d.h. sie inzidiert mit genau einem Eckpunkt (im vorliegenden Fall mit Eckpunkt E_3).

Beispiel (6)

Bei Beispiel (6) besteht die Menge E der Eckpunkte aus 5 Elementen und die Menge K der Kanten aus 9 Elementen.

Unter dem Grad eines beliebigen Eckpunktes E_i versteht man die Anzahl aller mit E_i inzidenten Kanten, d.h. die Anzahl derjenigen Kanten, die von E_i ausgehen bzw. in E_i einmünden. Dabei ist zu beachten, daß jede Schlinge doppelt gezählt wird. Da der Grad



der Eckpunkte eines Graphen bei den nachfolgenden Betrachtungen von besonderem Interesse ist, soll zunächst für die Beispiele (1) bis (6) eine Übersicht gegeben werden.

Beispiel (1)

Eckpunkt	Grad des Eckpunktes
E_1	3
E_2	2
E_3	3
E_4	2

Beispiel (2)

Eckpunkt	Grad
E_1	3
E_2	3
E_3	4
E_4	2
E_5	4

Beispiel (3)

Eckpunkt	Grad
E_1	2
E_2	2
E_3	0
E_4	2

Beispiel (4)

Eckpunkt	Grad
E_1	3
E_2	3
E_3	3
E_4	3
E_5	3
E_6	3
E_7	3
E_8	3

Beispiel (5)

Eckpunkt	Grad
E_1	2
E_2	1
E_3	3

Beispiel (6)

Eckpunkt	Grad
E_1	4
E_2	3
E_3	4
E_4	3
E_5	4

3. Zum Begriff des abstrakten Graphen

Ein Graph ist definiert, wenn gegeben sind:

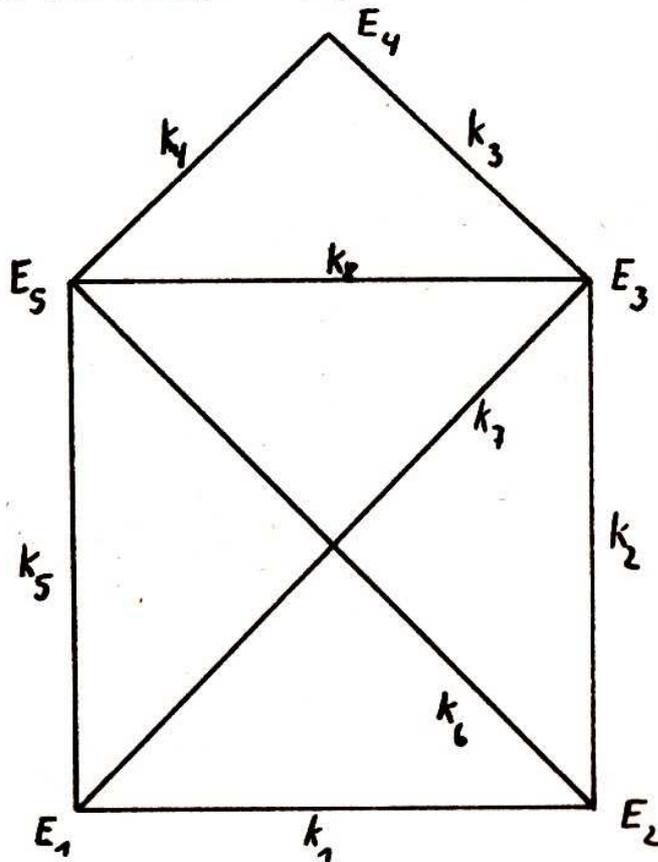
1. eine nicht leere Menge E (die Elemente von E heißen die Eckpunkte oder Knotenpunkte des Graphen).

2. eine zu E disjunkte nicht leere Menge K (die Elemente von K heißen die Kanten des Graphen) und
3. eine Inzidenzbeziehung, die für jeden Eckpunkt ausweist, mit welcher Kante er inzidiert, und umgekehrt für jede Kante festlegt, mit welchen Eckpunkten sie inzidiert. Überdies muß die Bedingung erfüllt sein, daß jede Kante mit mindestens einem, aber mit höchstens zwei Eckpunkten inzidiert.

Wie man sieht, sind Graphen ganz abstrakt definiert. Man kann jedoch jeden Graphen durch einen geometrischen Graphen veranschaulichen. Bei unseren Beispielen (1) bis (6) handelt es sich um derartige geometrische Graphen. Außerdem haben wir uns auf endliche Graphen beschränkt, d.h. sowohl die Eckpunktmenge E als auch die Kantenmenge K sind endliche Mengen.

4. Einige Begriffe und Sätze über Graphen

Zunächst sollen die Begriffe offener Kantenzug, geschlossener Kantenzug und Eulersche Linie erläutert werden. Zur Veranschaulichung wählen wir Beispiel (2).



Unter einem Kantenzug eines gegebenen Graphen versteht man eine geordnete Auswahl aus der Menge E der Eckpunkte und der Menge K der Kanten derart, daß mit einem Eckpunkt begonnen und auch wieder mit einem Eckpunkt geendet wird und immer Eckpunkte und Kanten abwechseln und stets aufeinanderfolgende Eckpunkte inzident sind. Das bedeutet für einen geometrischen Graphen, daß man die dem Kantenzug entsprechende Form von Eckpunkten und Verbindungslinien fortlaufend mit einem Bleistift "durchfahren" kann, ohne absetzen zu müssen. Die Folge $(E_1, k_1, E_2, k_2, E_3, k_3, E_5)$ ist beispielsweise ein Kantenzug. Er heißt offen, weil $E_1 \neq E_5$ ist. Dagegen ist $(E_1, k_1, E_2, k_2, E_3, k_7, E_1)$ ein geschlossener Kantenzug. Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn sich je zwei seiner Ecken durch einen Kantenzug verbinden lassen, wie das bei unserem Beispiel (2) der Fall ist. Einen Kantenzug mit lauter verschiedenen Kanten, wo also keine Kante doppelt durchlaufen wird, nennt man eine Kette. Insbesondere wird eine Kette als Eulersche Linie bezeichnet, wenn sie sämtliche Ecken und Kanten des Graphen enthält. So ist bei unserem Beispiel die Folge

$(E_1, k_7, E_3, k_2, E_2, k_1, E_1, k_5, E_5, k_4, E_4, k_3, E_3, k_8, E_5, k_6, E_2)$ eine derartige Eulersche Linie. Während meiner Schulzeit war es ein beliebtes Kinderspiel, die Figur (2) mit dem Bleistift "in einem Zug" zu erzeugen, ohne daß abgesetzt werden durfte. Die diesbezüglichen Bemühungen wurden durch die Worte "Wer das nicht kann, kriegt keinen Mann" bekleidet. In der Graphentheorie spielen die Eulerschen Linien eine besondere Rolle, denn bei vielen praktischen Problemen, die mit Hilfe eines Graphen modelliert werden, hängt die Lösbarkeit von der Existenz Eulerscher Linien ab (siehe z.B. Brückenproblem).

Nachfolgend sollen ohne Beweis die interessanten Sätze (A) und (B) angegeben werden.

Satz (A)

Ein endlicher Graph besitzt genau dann eine Eulersche Linie, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Der Graph ist zusammenhängend.
2. Der Graph hat entweder gar keinen Eckpunkt ungeraden Grades oder genau zwei.

Wendet man diesen Satz auf unsere Beispiele (1) bis (6) an, so ergibt sich:

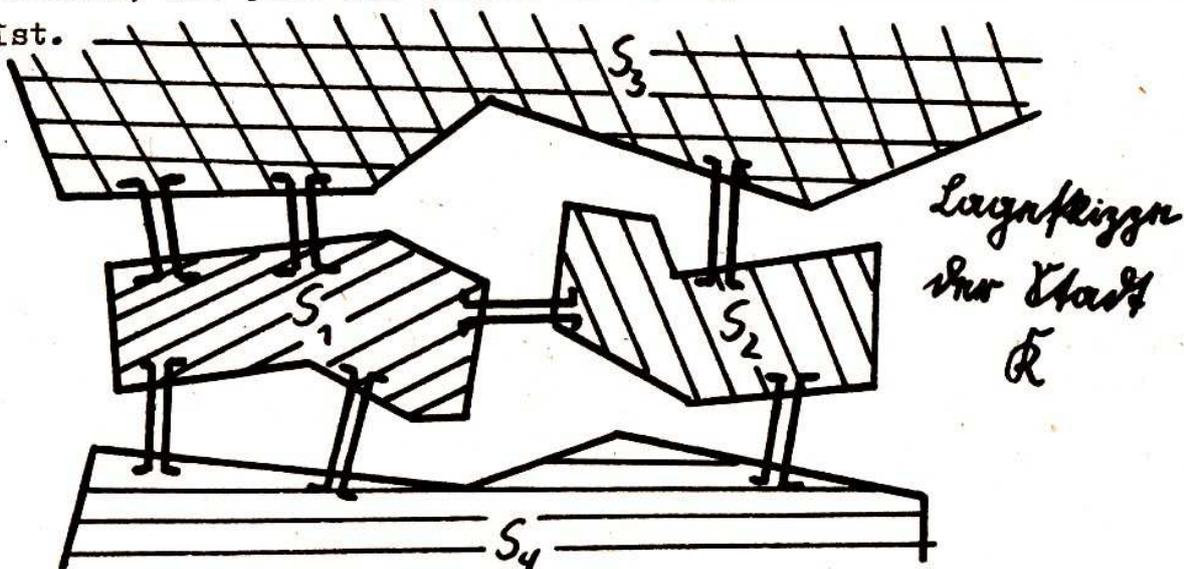
Beispiel	Existenz mindestens einer Eulerschen Linie
(1)	ja
(2)	ja
(3)	nein
(4)	nein
(5)	ja
(6)	ja

Satz (B)

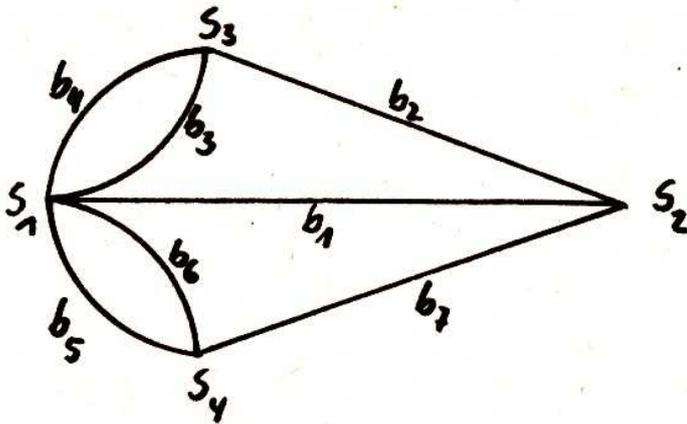
Es sei G ein zusammenhängender Graph mit genau $2n$ ($n \geq 1$) Eckpunkten ungeraden Grades. Dann gibt es n Ketten in G , so daß jede Kante genau einer dieser Ketten angehört. Eine geringere Anzahl von Ketten, die den Graphen in der angegebenen Weise überdecken, kann nicht gefunden werden.

5. Das Brückenproblem

Ein interessantes graphentheoretisches Problem, das in der mathematischen Literatur immer wieder auftaucht, ist das sogenannte Brückenproblem der Stadt K. Die Stadt besteht aus 4 Stadtteilen S_1 , S_2 , S_3 und S_4 , die durch 7 Brücken b_1 , b_2 , b_3 , b_4 , b_5 , b_6 und b_7 miteinander verbunden sind (siehe Skizze). Es besteht die Aufgabe, die Stadt K auf einer Route so zu durchwandern, daß jede der sieben Brücken genau einmal zu benutzen ist.



Als mathematisches Modell dieses Brückenproblems erhält man den folgenden Graphen:



Menge E der Eckpunkte: $E = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$

Menge K der Kanten: $K = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$

Eckpunkt	Grad
S_1	5
S_2	3
S_3	3
S_4	3

Da der Grad aller vier Eckpunkte eine ungerade Zahl ist, existiert nach Satz (A) keine Eulersche Linie, d.h. das Brückenproblem der Stadt K. ist unlösbar.

Bereits der Mathematiker Leonhard EULER (1707 - 1783), nach dem auch die Eulerschen Linien benannt sind, konnte 1736 nachweisen, daß es für das Brückenproblem der Stadt K. keine Lösung gibt.

6. Das Fährmannsproblem

Einem Fährmann sei die Aufgabe gestellt, mit möglichst wenig Fahrten einen Wolf (W), eine Ziege (Z) und einen Kohlkopf (K) an das andere Ufer eines Flusses zu bringen. Dabei sind folgende Bedingungen zu erfüllen:

1. Bei einer Fahrt darf immer nur eines der drei "Frachtgüter" mitgenommen werden (entweder der Wolf, oder die Ziege, oder der Kohlkopf).
2. Wolf und Ziege dürfen niemals unbewacht zusammenbleiben.
3. Ziege und Kohlkopf dürfen niemals unbewacht zusammenbleiben.

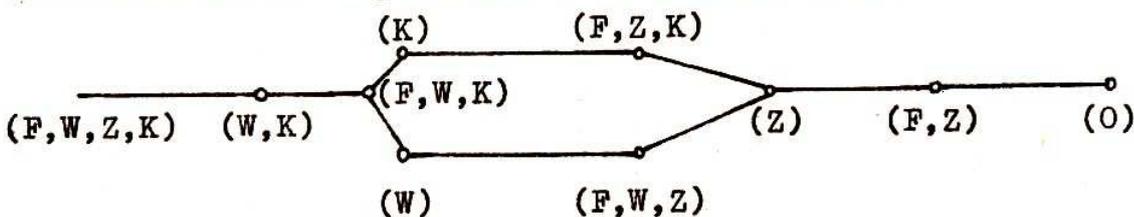
Um dieses Problem, das häufig als Scherzaufgabe gestellt wird, mathematisch zu modellieren, stellen wir zunächst alle erlaubten Kombinationen am Ausgangsufer zusammen:

(F,W,Z,K)	(F,W,Z)	(W,K)	(W)	(O)
	(F,W,K)	(F,Z)	(Z)	
	(F,Z,K)		(K)	

Man beachte dabei, daß z.B. die Kombination (F,W) nicht erlaubt ist, weil in diesem Falle am Zielufer die Ziege und der Kohlkopf ohne Aufsicht beisammen wären.

Diese 10 möglichen Kombinationen interpretieren wir als die Eckpunkte eines Graphen. Die Kanten dieses Graphen, d.h. die Verbindungen zwischen diesen Eckpunkten, muß man durch inhaltliche Überlegungen bestimmen. So müssen z.B. die Eckpunkte (F,W,Z,K) und (W,K) durch eine Kante miteinander verbunden werden, d.h. der Fährmann bringt zunächst die Ziege an das Zielufer (eine andere Möglichkeit gibt es nicht). Nach seiner Rückkehr befindet sich am Ausgangsufer die Kombination (F,W,K). Für die zweite Fahrt gibt es 2 Möglichkeiten. Entweder nimmt der Fährmann den Wolf mit und bringt die Ziege wieder zurück, oder er transportiert den Kohlkopf an das Zielufer und schafft auf der Rückfahrt die Ziege wieder zum Ausgangsufer.

Wir überlassen es dem Leser, diese Überlegungen fortzusetzen. Insgesamt erhält man den folgenden Graphen als ein mathematisches Modell des sogenannten Fährmannsproblems:



In diesem Falle besteht die Lösung des Problems darin, eine minimale Kette zu finden (d.h. eine Kette, die möglichst wenig Kanten enthält), wobei diese Kette von der Ausgangskombination (F,W,Z,K) zur Endkombination (O) führen muß. Wie man sieht, gibt es die beiden folgenden Minimallösungen:

(F,W,Z,K) → (W,K) → (F,W,K) → (K) → (F,Z,K) → (Z) → (F,Z) → (O)

(F,W,Z,K) → (W,K) → (F,W,K) → (W) → (F,W,Z) → (Z) → (F,Z) → (O)

Abschließend möchte ich die Hoffnung äußern, mit dem vorstehenden Beitrag einige Leser für eine weitergehende Beschäftigung mit der Graphentheorie interessiert zu haben.

Prof. G. Schlosser
Sektion Mathematik
Bereich Methodik

Lösungen zur Bezirksolympiade der Klassen 11/12 (Fortsetzung)

3B) a) Angabe einer Verteilung: In jeden der 3 Behälter gebe man genau 2 der Gegenstände.

Nachweis der Bedingungen: Wegen $2 \geq 1$ und $2 \leq 3$ sind (1) und (2) erfüllt. Ferner ist bei jeder Möglichkeit, die 3 Behälter in den zwei Räumen unterzubringen, in einem der beiden Räume eine größere Anzahl von Behältern als in dem anderen Raum, da die Anzahl 3 aller Behälter eine ungerade Zahl ist. Somit gilt bei jeder dieser Möglichkeiten auch, daß in einem der beiden Räume eine größere Anzahl von Gegenständen als in dem anderen Raum ist. Damit ist (3) erfüllt.

b) Durch die gleiche Beweisführung, angewandt auf beliebiges ungerades n statt 3, erhält man: Für jedes ungerade $n \geq 3$ kann die Forderung (mindestens) durch diejenige Verteilung erfüllt werden, bei der in jeden der n Behälter genau 2 Gegenstände gegeben werden.

Nun wird die folgende Hilfsaussage gezeigt:

Wenn die betrachtete Forderung für eine natürliche Zahl $n \geq 2$ dadurch erfüllt ist, daß jeweils für $i=1, \dots, n$ in den i -ten Behälter genau a_i Gegenstände gegeben werden, dann folgt, daß alle $a_i=2$ sein müssen.

Beweis: Die Behälter lassen sich so bezeichnen, daß

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq n \quad (4)$$

gilt (wobei die erste bzw. die letzte Ungleichung aus

(1) bzw. (2) folgt.

Wegen (4) und der Anzahl $2n > n$ der Gegenstände gibt es eine natürliche Zahl $k (\geq 2)$ mit

$$a_1 + \dots + a_{k-1} \leq n, \tag{5}$$

$$a_1 + \dots + a_{k-1} + a_k > n. \tag{6}$$

Würde in (5) das Gleichheitszeichen gelten, so erhielte man im Widerspruch zu (3) die Möglichkeit, in den einen Raum vermittels der Behälter $1, \dots, k-1$ genau n Gegenstände und folglich in den anderen Raum die übrigen Gegenstände zu bringen. Also gilt sogar

$$a_1 + \dots + a_{k-1} < n; \tag{7}$$

wegen $a_1 + \dots + a_{n-1} = 2n - a_n \geq n$ ist dabei $k < n$.

$$\tag{8}$$

Es werde nun

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2,$$

.....

$$s_{k-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1},$$

$$t_1 = n - a_n,$$

$$t_2 = n - a_n - a_{n-1},$$

.....

$$t_{n-k} = n - a_n - a_{n-1} - \dots - a_{k+1}$$

gesetzt. Wegen (1) sind alle s_i paarweise verschieden und alle t_j paarweise verschieden. Es ist aber auch jedes s_i von jedem t_j verschieden; denn aus $s_i = t_j$ würde

$$a_1 + \dots + a_i + a_n + \dots + a_{n-j+1} = n$$

und damit ein Widerspruch gegen (3) folgen.

Wegen (4), (6), (7) und der Gesamtzahl $2n$ der Gegenstände gilt

$$1 \leq s_i \leq n-1, \quad 1 \leq t_j \leq n-1 \quad \text{für alle } i \text{ bzw. } j. \tag{9}$$

Aus (9) für die $n-1$ paarweise verschiedenen Zahlen s_i, t_j folgt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Die Zahlen } s_1, \dots, s_{k-1}, t_1, \dots, t_{n-k} \text{ sind die} \\ \text{Zahlen } 1, \dots, n-1 \text{ in geeigneter Reihenfolge.} \end{array} \right\} \tag{10}$$

Wäre nun $a_1 = 1$, so könnten wegen $a_1 + \dots + a_n = 2n$ nicht

alle $a_2, \dots, a_n \leq 2$ sein, also müßte wegen (4) mindestens $a_n \geq 3$ sein. Daher wäre $t_1 \leq n-3$ und somit erst recht $t_j \leq n-3$ für alle j . Die beiden Zahlen $n-2$ und $n-1$ müßten wegen (10) also unter den s_i auftreten, was wegen $s_1 < \dots < s_{k-1}$ nur mit $s_{k-2} = n-2$ und $s_{k-1} = n-1$ möglich wäre. Das hätte aber $a_{k-1} = 1$, wegen (4) also $a_1 = \dots = a_{k-1} = 1$ zur Folge. Aus $s_{k-1} = n-1$ erhielte man somit $k-1 = n-1$ im Widerspruch zu (8).

Also muß $a_1 = 2$ gelten; nach (4) müssen alle $a_i \geq 2$ sein, und dies ist wegen $a_1 + \dots + a_n = 2n$ nur mit $a_1 = \dots = a_n = 2$ möglich. Damit ist die Hilfsaussage bewiesen.

Unter Verwendung der Hilfsaussage ergibt sich folgender Beweis dafür, daß die in der Aufgabe betrachtete Forderung für gerades n nicht erfüllt werden kann: Wäre es doch möglich, (1), (2), (3) zu erfüllen, so müßte nach der Hilfsaussage $a_1 = \dots = a_n = 2$ gelten. Dann aber könnte man, da n gerade ist, in jeden der beiden Räume $\frac{n}{2}$ Behälter und damit n Gegenstände bringen, was (3) widerspricht.

- c) Aus der Hilfsaussage folgt ferner, daß für jedes ungerade $n \geq 3$ die in b) zu Anfang nachgewiesene Möglichkeit, (1), (2), (3) durch $a_1 = \dots = a_n = 2$ zu erfüllen, die einzige ist.

- 4) Es gibt Zahlen und eine Reihenfolge der genannten Art. Um dies nachzuweisen, genügt es, ein Beispiel für (*) anzugeben und zu beweisen, daß es aus 21 paarweise verschiedenen ganzen Zahlen besteht, die (1) und (2) erfüllen.

Ein solches Beispiel bilden etwa die 21 Zahlen

1999, - 2001, 2000, - 2002, 2001, - 2003, 2002, - 2004,
 2003, - 2005, 2004, - 2006, 2005, - 2007, 2006, - 2008,
 2007, - 2009, 2008, - 2010, 2009

in dieser Reihenfolge.

Sie sind nämlich paarweise verschieden, und sie erfüllen auch (1) und (2). Dies kann durch Nachrechnen aller in Betracht zu ziehenden Einzelaussagen oder auch z.B. wie folgt bewiesen werden:

Mit $a=1999$ und $b=2001$ handelt es sich um die Zahlen

$$a, -b, a+1, -b-1, a+2, -b-2, \dots, a+9, -b-9, a+10. \quad (3)$$

Je vier aufeinanderfolgende von ihnen lauten mit geeignetem

$$n \text{ entweder } a+n, -b-n, a+n+1, -b-n-1 \quad (4)$$

$$\text{oder } -b-n, a+n+1, -b-n-1, a+n+2. \quad (5)$$

Deren Summe ist daher

$$\text{entweder } 2a - 2b = -4$$

$$\text{oder } 2a - 2b + 2 = -2;$$

damit ist (1) nachgewiesen. Die Summe aller 21 Zahlen in (3) beträgt

$$10 \cdot (a-b) + a + 10 = 10 \cdot (-2) + 2009 = 1989,$$

also ist auch (2) erfüllt.

Bemerkungen:

Eine Beschreibung, wie man z.B. aus dem Ansatz (3) zu Werten für a und b kommt, mit denen die Summen der Zahlen in (3), (4) bzw. (5) die geforderten Eigenschaften haben, ist zwar heuristisch nützlich, aber nicht zu einer logisch vollständigen Lösung der Aufgabe erforderlich.

Es gibt noch zahlreiche andere Beispiele (sogar unendlich viele), sowohl zu demselben Ansatz (3) als auch zu andersartigen Ansätzen wie etwa $a, a+1, a+2, -b, a+3, a+4, a+5, -b-1, \dots$ usw.

- 5) Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ gibt es (genau) eine natürliche Zahl k mit $k^2 \leq n < (k+1)^2$. Mit dieser Zahl gilt¹

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{1} + \dots + \frac{x_n}{n} &= \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} \\ &+ \frac{x_4}{4} + \frac{x_5}{5} + \frac{x_6}{6} + \frac{x_7}{7} + \frac{x_8}{8} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{x_{(k-1)^2}}{(k-1)^2} + \dots + \frac{x_{k^2-1}}{k^2-1} \\ &+ \frac{x_{k^2}}{k^2} + \dots + \frac{x_n}{n} \end{aligned}$$

¹ Für kleine Werte von n sind die oben folgenden Formeln in sinngemäßer Vereinfachung zu interpretieren.

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{1} \cdot (x_1 + x_2 + x_3) \\
 &+ \frac{1}{4} \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8) \\
 &+ \dots \\
 &+ \frac{1}{(k-1)^2} \cdot (x_{(k-1)}^2 + \dots + x_{k-1}^2) \\
 &+ \frac{1}{k^2} \cdot (x_k^2 + \dots + x_{(k+1)}^2)
 \end{aligned} \quad (1)$$

Wegen des monotonen Fallens, also

$$\begin{aligned}
 x_1 &\geq x_2 \geq x_3, \\
 x_4 &\geq x_5 \geq \dots \geq x_8, \\
 &\dots \\
 x_k &\geq \dots \geq x_{(k+1)},
 \end{aligned}$$

und wegen der Anzahlen

$$\begin{aligned}
 4 - 1 &= 3, \\
 9 - 4 &= 5, \\
 &\dots \\
 (k+1)^2 - k^2 &= 2k+1
 \end{aligned}$$

der in den Zeilen von (1) auftretenden Summanden folgt aus (1) weiter

$$\frac{x_1}{1} + \dots + \frac{x_n}{n} \leq \frac{3}{1} \cdot x_1 + \frac{5}{4} \cdot x_4 + \dots + \frac{2k+1}{k^2} \cdot x_k^2. \quad (2)$$

Für alle $i=1, \dots, k$ gilt nun

$$2i + 1 \leq 3i,$$

also

$$\frac{2i+1}{i^2} \leq \frac{3}{i}.$$

Damit folgt aus (2)

$$\frac{x_1}{1} + \dots + \frac{x_n}{n} \leq 3 \cdot \left(\frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \dots + \frac{x_k^2}{k} \right).$$

Wendet man auf der rechten Seite dieser Ungleichung die Voraussetzung des zu beweisenden Satzes mit $n=k$ an, so ergibt sich die Behauptung des zu beweisenden Satzes.

Bemerkung:

Der Satz gilt sogar mit $\dots \leq 2$ statt $\dots \leq 3$ in der Behauptung; dies ist schwieriger zu beweisen.

6) Für jede Pyramide aus M
 sei $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = x$
 gesetzt. Das gleichsei-
 tige Dreieck ABC hat
 den Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{4} x^2 \cdot \sqrt{3}. \quad (1)$$

Es sei AQ die auf BC
 senkrechte Höhe in die-
 sem Dreieck, zugleich
 die Seitenhalbierende
 von BC. Der Schwerpunkt
 des Dreiecks ABC sei M;
 er teilt AQ im Verhält-
 nis

$$\overline{AM} : \overline{MQ} = 2 : 1 \quad (2)$$

und ist zugleich der Um-
 kreismittelpunkt von ABC.

Nach Voraussetzung steht SM senkrecht auf BM und CM; daraus
 und aus $\overline{BM} = \overline{CM}$, $\overline{SM} = \overline{SM}$ folgt $\triangle BMS \cong \triangle CMS$ nach dem Kon-
 gruenzsatz sws.

Also¹ ist das Dreieck BCS gleichschenkelig mit $\overline{BS} = \overline{CS}$, und
 seine Seitenhalbierende SQ ist, zugleich Höhe. Somit sind AQ
 und SQ senkrecht auf BC, also ist BC senkrecht auf der Ebene
 durch A, Q, S und daher senkrecht auf allen Geraden dieser
 Ebene. Fällt man das Lot QP von Q auf AS, so gibt folglich
 \overline{PQ} den Abstand zwischen AS und BC an, die ABC und AQS
 spitzwinklige Dreiecke sind, also Q und P den Strecken CB
 bzw. AS angehören. Das heißt, es gilt

$$\overline{PQ} = d. \quad (3)$$

Man erhält dann

$$\overline{AQ} = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{3} \quad (\text{Höhe im Dreieck ABC}),$$

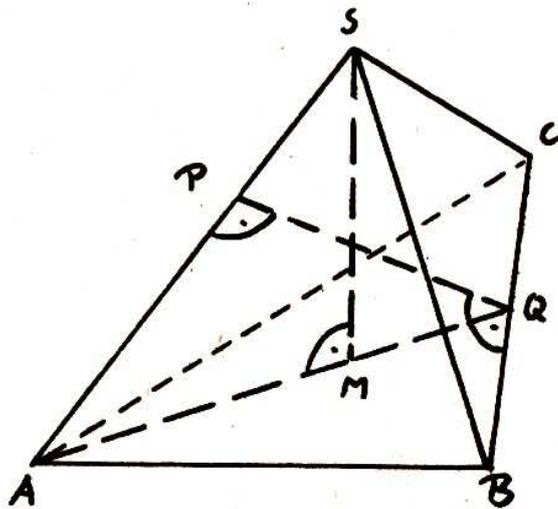


Abb.

¹ Die Gleichung $\overline{BS} = \overline{CS}$ kann auch als bekannter Sachverhalt über gerade Pyramiden zitiert werden ("gerade Pyramide" als "Pyramide mit Höhenfußpunkt = Umkreismittelpunkt der Grundfläche" verstanden).

$$\overline{AP} = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot x^2 - d^2} \quad (\text{Satz des Pythagoras für } \triangle APQ), \quad (4)$$

$$\overline{AM} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AQ} = \frac{x}{3} \cdot \sqrt{3} \quad (\text{nach (2)}). \quad (5)$$

Wegen $\triangle AMS \sim \triangle APQ$ (Übereinstimmung in den rechten Winkeln und im Winkel bei A) gilt

$$\overline{MS} : \overline{AM} = \overline{PQ} : \overline{AP}. \quad (6)$$

Aus (6) und (3), (4), (5) folgt

$$\overline{MS} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{PQ}}{\overline{AP}} = \frac{\frac{x}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot d}{\sqrt{\frac{3}{4} \cdot x^2 - d^2}} = \frac{2d \cdot x \sqrt{3}}{3 \cdot \sqrt{3x^2 - 4d^2}}.$$

Hiernach und nach (1) hat die Pyramide das Volumen, als Funktion von x :

$$f(x) = V = \frac{1}{3} \cdot F \cdot \overline{MS} = \frac{d \cdot x^3}{6 \cdot \sqrt{3x^2 - 4d^2}}. \quad (7)$$

Als Intervall für die Variable x ist $x > \frac{2d}{\sqrt{3}}$ zugrunde zu legen (wie sich wegen der Bedingung $3x^2 - 4d^2 > 0$ für den Radikanden im Nenner oder geometrisch aus $\overline{AQ} > \overline{PQ}$ im rechtwinkligen Dreieck APQ ergibt). In diesem Intervall gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{6} \cdot \frac{3x^2 \cdot \sqrt{3x^2 - 4d^2} - x^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x^2 - 4d^2}} \cdot 6x}{3x^2 - 4d^2} \\ &= \frac{d \cdot x^2 \cdot (x^2 - 2d^2)}{\sqrt{3x^2 - 4d^2} \cdot 3}. \end{aligned}$$

Daraus folgt: Im Intervall $\frac{2d}{\sqrt{3}} < x < d\sqrt{2}$ ist $f'(x) < 0$, für $x = d\sqrt{2}$ ist $f'(x) = 0$, im Intervall $x > d\sqrt{2}$ ist $f'(x) > 0$. Also ist V kleinstmöglich (genau) für $x = d\sqrt{2}$; dieses kleinstmögliche Volumen beträgt

$$f(d\sqrt{2}) = \frac{1}{3} d^3.$$

V37 На сторонах a, b, c, d вписанного в окружность четырёхугольника "наружу" построены прямоугольники размерами axc, bxd, cxa, dxb .



Докажите, что центры этих прямоугольников являются вершинами прямоугольника!

V38 Gegeben seien ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem und ein Würfel, von dem eine Raumdiagonale die Strecke zwischen $(0,0,0)$ und $(1,0,0)$ ist. Der Würfel rotiere nun um diese Raumdiagonale und werde dabei auf die x - z -Ebene projiziert. Die Menge derjenigen Punkte der x - z -Ebene, die von der Projektion des Würfels während der Rotation überstrichen wird, wird von 2 Funktionsgraphen $z = f_1(x)$ und $z = f_2(x)$ oben bzw. unten eingegrenzt. Welche Funktionen f_1, f_2 sind dies?



V39 Einem Quadrat wird ein Parallelogramm so umbeschrieben, daß auf jeder Seite des Parallelogramms genau eine Ecke des Quadrates liegt. Man beweise, daß die Senkrechten, die von den Ecken des Parallelogramms auf die Seiten des Quadrates gefällt werden, ein neues Quadrat bilden!



V40 Man finde für alle Parameter a, b die Lösungen von



$$x \cdot \sqrt{x} - y \cdot \sqrt{y} = a \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

$$x \cdot \sqrt{x} + y \cdot \sqrt{y} = b \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \quad !$$

V41 Wieviel Lösungen im Intervall $[-\pi, \pi]$ hat die Gleichung



$$3 \sin x + \sin 3x = 2a$$

in Abhängigkeit von Parameter a ?

V42 Man löse die Ungleichung



$$\log_2(x^2 + 2x) < 3 \quad !$$

Aufgaben der DDR-Olympiade (Klassenstufe 11/12)

1. Man ermittle alle reellen Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\x + 2y + 3z &= \sqrt{14}.\end{aligned}$$

2. Man untersuche, ob es zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ jeweils eine Funktion f gibt, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (1) Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen x definiert.
- (2) Es gibt eine reelle Zahl x mit $f(x) \neq 0$.
- (3) Wenn man Funktionen f_1, f_2, \dots, f_{n+1} durch die Festsetzungen definiert, für alle reellen x gelte

$$f_1(x) = f(x)$$

sowie

$$f_{k+1}(x) = f(f_k(x)) \quad \text{für } k=1, \dots, n,$$

dann gilt für alle reellen x die Gleichung

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) = f_{n+1}(x).$$

3. Man ermittle alle diejenigen konvexen Vielecke $P_1P_2 \dots P_n$, in deren Inneren ein Punkt x existiert, für den $\overline{P_1x}^2 + \overline{P_2x}^2 + \dots + \overline{P_nx}^2$ gleich dem doppelten Flächeninhalt von $P_1P_2 \dots P_n$ ist.

4. Um einen Tresor zu öffnen, ist eine unbekannte dreistellige Zahlenkombination (a_1, a_2, a_3) einzustellen, wobei die drei Zahlen unabhängig voneinander eingestellt werden können und für jede der drei Zahlen genau 8 Werte möglich sind. Infolge eines Defektes öffnet sich aber der Tresor bereits immer genau dann, wenn eine eingestellte Kombination (k_1, k_2, k_3) mindestens zwei der drei Bedingungen $k_i = a_i$ ($i=1, 2, 3$) erfüllt.

Man ermittle die kleinste Zahl N , für die es N Kombinations-

nen gibt, bei deren Durchprobieren der Tresor in jedem Fall (d.h. für jede unbekannte Kombination (a_1, a_2, a_3)) sich öffnen muß.

5. Für ein Tetraeder ABCD werde vorausgesetzt, daß der Mittelpunkt M der Umkugel des Tetraeders im Innern des Tetraeders liegt. Die Verbindungsgerade von M mit jeweils einer Tetraederecke A, B, C bzw. D schneide die Seitenfläche des Tetraeders, die der betreffenden Ecke gegenüberliegt, in A', B', C' bzw. D'. Der Radius der Umkugel sei r.

Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen stets

$$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} + \overline{DD'} \geq \frac{16}{3} r$$

folgt!

- 6A. Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 1$ und für je $n+2$ reelle Zahlen p, q, a_1, \dots, a_n , die

$$0 < p \leq a_i \leq q \quad (i=1, \dots, n) \quad (1)$$

erfüllen, gelten die beiden Ungleichungen

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right) \leq n^2 + \left[\frac{n^2}{4} \right] \cdot \left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}} \right)^2. \quad (2)$$

(Hinweis: Zu reellem x bezeichnet wie üblich $[x]$ die ganze Zahl $[x] = g$ mit $g \leq x < g+1$).

Man ermittle ferner zu gegebenen n, p, q mit $0 < p \leq q$ alle diejenigen a_i mit (1), für die in (2)

- zwischen der ersten und zweiten Zahl,
- zwischen der zweiten und dritten Zahl

das Gleichheitszeichen gilt.

- 6B. Man ermittle die größtmögliche Anzahl von Quadraten der Seitenlänge 1, die sich in ein gegebenes Quadrat der Seitenlänge 1,99 legen lassen, ohne über dessen Rand hinauszuragen und ohne sich gegenseitig zu überlappen.

Aufgaben der DDR-Olympiade (Klassenstufe 10)

1. Zeigen Sie, daß es genau eine natürliche Zahl n gibt, mit der $2^8 + 2^{11} + 2^n$ eine Quadratzahl ist!
2. Zeigen Sie, daß es ein Paar von Funktionen f, g gibt, für das folgende Aussagen gelten:
 - (1) Die Funktionen f und g sind für alle reellen Zahlen x definiert.
 - (2) Es ist $f(0) = 7$.
 - (3) Für jedes reelle x gilt $\frac{g(x) \cdot f(x+1)}{f(x)} = g(2x) + 1$.
- 3A. Man denke sich die natürlichen Zahlen, beginnend mit 41, so spiralförmig angeordnet, wie aus der Abbildung als Anfang einer solchen Anordnung zu erkennen ist:

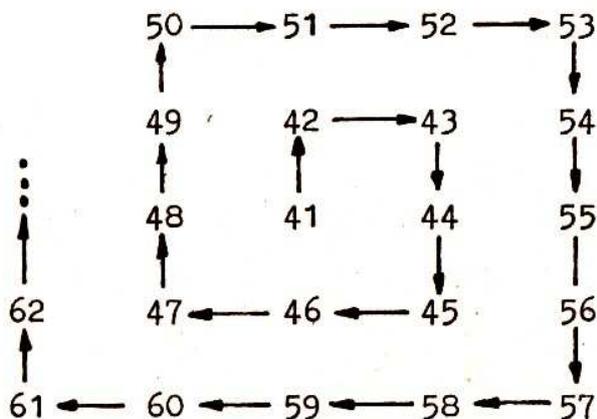


Abb.

Beweisen Sie, daß (bei dieser Anordnung) in der Diagonale, von der in der Abb. die Zahlen 61, 47, 41, 43, 53 auftreten, mindestens 30 Primzahlen stehen.

Fortsetzung folgt!

Assemblerprogrammierung (Schluß)

14. Der Schleifenbefehl

Wenn ein Programmteil mehrmals durchlaufen werden soll (vgl. Programm 11), so können wir das schon mit etwas Aufwand programmieren. Es gibt jedoch einen speziellen Befehl, der uns diese Arbeit erleichtert und das Programm etwas übersichtlicher macht. Es handelt sich um den 2-Byte-Befehl DJNZ (decrement and jump if not zero), der folgenderweise in ein Programm eingearbeitet wird.

```

                                LD B, Anzahl
LOOP                               ⋮
                                ⋮
                                DJNZ LOOP

```

Zu Beginn erhält das B-Register die Anzahl der Durchläufe zugewiesen. Am Schleifenende steht der Befehl DJNZ und realisiert zwei Aufgaben:

1. DEC B ohne Flag-Beeinflussung
2. JR N wenn $B \neq \emptyset$.

Ist der Durchlauf durch die Schleife beendet, wird der nächste Befehl abgearbeitet. Die relative Sprungweite ist wie beim relativen Sprungbefehl verschlüsselt.

Befehlscode:

DJNZ N	1 \emptyset
--------	---------------

Bevor wir den Schleifenbefehl in einem Programmbeispiel kennenlernen, werden noch zwei weitere Unterprogramme des Betriebssystems vorgestellt, die wieder über den Programmverteiler und Angabe der entsprechenden UP-Nummer aufgerufen werden.

Löschen eines Bildpunktes: UP-Nr.: 2F H
 Setzen eines Bildpunktes: UP-Nr.: 3 \emptyset H

Die Koordinaten des Bildpunktes werden dabei in speziellen Arbeitszellen des IRM übergeben.

x-Koordinate mit $\emptyset \leq x \leq 13FH$ steht in HOR= B7D3 H
 y-Koordinate mit $\emptyset \leq y \leq FF H$ steht in VERT= B7D5 H

In dem nun folgenden Beispiel soll ein Programm entwickelt werden, mit dessen Hilfe es möglich ist, schnell den Graph von Funktionen zu zeichnen bzw. wieder zu löschen. Die Funktionswerte müssen ab einem bestimmten Speicherbereich vorgegeben werden.

13. Programm

ADRESSE	MASCHINENCODE	MARKEN	ASSEMBLERCODE	BEMERKUNGEN
0000	CD 18 F0		CALL F018H	IRM ein
03	11 21 00		LD DE, 0021H	Anfangsadr. Funktion nach DE
06	21 20 00		LD HL, 0020H	erste x-Koord. nach HL
09	06 FF		LD B, FFH	Anz. Durchläufe nach B
0B	22 D3 B7	LOOP	LD (HOR), HL	x-Koordinate nach (HOR)
0E	1A		LD A, (DE)	Fkt.wert nach A
0F	32 D5 B7		LD (VERT), A	y-Koord. nach (VERT)
12	CD 03 F0		CALL F003H	} Bildpkt. setzen/ } löschen
15	30		DEFB	
16	13		INC DE	nächste Fkt.wert
17	2A D3 B7		LD HL, (HOR)	} nächste x-Ko- } ordinate
1A	23		INC HL	
1B	10 EE		DJNZ LOOP	nächste Schleife
1D	CD 1B F0		CALL F01BH	IRM aus
20	C9		RET	

Das Programm testen wir in folgender Weise. Zunächst stellen wir eine Funktion graphisch dar und speichern die Funktionswerte ab Speicherzelle 21H = 33 (dez.) ab.

```

10 FOR X=32 TO 287
20 Y=100 * SIN(X/50) + 128
30 PSET X,Y,7:POKE X+1,Y
40 NEXT

```

Nach Abarbeitung des Programms löschen wir durch CLS den Bildschirm und können uns durch CALL 0 überzeugen, daß blitzartig der Graph der Funktion erscheint. Um den Graph genauso schnell wieder zu löschen, führe man POKE 21,47:CALL 0 aus. (Durch das

Poken wird das Definition-Byte in Speicherzelle 15H = 21 (dez.) durch 2FH = 47 (dez.) ersetzt und damit das Unterprogramm Bildpunktlöschen wirksam.) Soll jetzt allerdings der Graph nochmals gezeichnet werden, muß zuvor POKE 21,48 eingegeben werden. (Warum?)

15. Das C-Flag

Das Carry-Flag (Übertrags-Flag) - abgekürzt als C-Flag bezeichnet - dient zur Kennzeichnung des Übertrags bei arithmetischen Operationen. Es wird gesetzt, wenn eine arithmetische Operation einen Übertrag vom höchstwertigen Bit bewirkt. Logische Operationen setzen das C-Flag zurück. Das C-Flag steckt im Bit 0 des F-Registers.

Analog zum Z-Flag kann man ziemlich alle Operationen, bei denen der Programmzähler verändert wird, auch vom Zustand des C-Flag abhängig machen.

Befehlscode

JP C,NN	DA	JP NN, falls C-Flag = 1
JP NC,NN	D2	JP NN, falls C-Flag = 0
JR C,N	38	JR N , falls C-Flag = 1
JR NC,N	30	JR N , falls C-Flag = 0
CALL C,NN	DC	CALL NN, falls C-Flag = 1
CALL NC,NN	D4	CALL NN, falls C-Flag = 0
RET C	D8	RET, falls C-Flag = 1
RET NC	D0	RET, falls C-Flag = 0

Weiterhin gibt es noch spezielle Arithmetikbefehle, die den Zustand des C-Flag berücksichtigen, nämlich:

ADC (add with carry) und SBC (subtract with carry).

Solche Befehle benötigt man, wenn größere Zahlen addiert bzw. subtrahiert werden sollen. Man muß dies "portionsweise" durchführen, wobei der Übertrag (carry) berücksichtigt werden muß. Die Wirkungsweise wird durch folgendes Schema erläutert:

ADC r	$A \leftarrow A+r+CY$
ADC (HL)	$A \leftarrow A + (HL) + CY$
ADC N	$A \leftarrow A + N+CY$
ADC HL,rr	$HL \leftarrow HL + rr + CY$
SBC r	$A \leftarrow A - r - CY$
SBC (HL)	$A \leftarrow A - (HL) - CY$
SBC N	$A \leftarrow A - N - CY$
SBC HL,rr	$HL \leftarrow HL - rr - CY$

Bemerkung: CY bezeichnet den Zustand des C-Flags.

Zum Beispiel könnte man den Befehl

ADD HL,DE

auch in der folgenden Art und Weise realisieren:

LD A,L

ADD E

LD L,A

LD A,H

ADC D

LD H,A

Operationscodes:

ADC A	8F
ADC B	88
ADC C	89
ADC D	8A
ADC E	8B
ADC H	8C
ADC L	8D
ADC (HL)	8E
ADC N	CE
ADC HL,BC	ED 4A
ADC HL,DE	ED 5A
ADC HL,HL	ED 6A

SBC A	9F
SBC B	98
SBC C	99
SBC D	9A
SBC E	9B
SBC H	9C
SBC L	9D
SBC (HL)	9E
SBC N	DE
SBC HL,BC	ED 42
SBC HL,DE	ED 52
SBC HL,HL	ED 62

Der Compare-Befehl beeinflusst ebenfalls das C-Flag. Wie schon

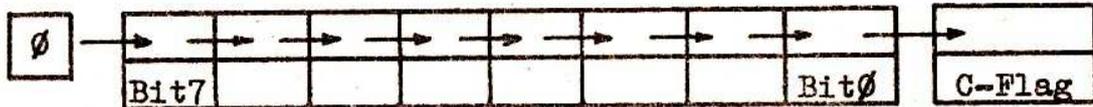
erwähnt, wird dabei die Differenz $A-r$ bewertet. Das C-Flag wird analog zum SUB r-Befehl gesetzt, d. h. falls $A < r$ wird das C-Flag gesetzt und für $A \geq r$ rückgesetzt.

Im 14. Programm des nächsten Abschnitts wird das C-Flag verwendet, um Zahlen zu vergleichen.

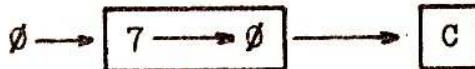
16. Schiebe- und Rotierbefehle

Bei den Schiebe- und Rotierbefehlen werden alle Bits des Operanden in einer noch näher zu erläuternden Weise verschoben. Die Wirkungsweise kann durch folgendes Schema verdeutlicht werden:

SRL r bewirkt eine Rechtsverschiebung (shift right logical)

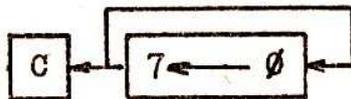


oder noch kürzer schematisiert:

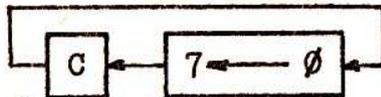


Die prinzipielle Wirkungsweise der restlichen Befehle geht aus der folgenden Übersicht hervor:

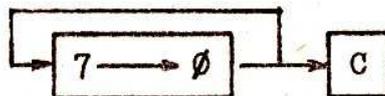
- RLC r Rotiere Operand r links kreisförmig
- RLCA Rotiere Akkumulator links kreisförmig



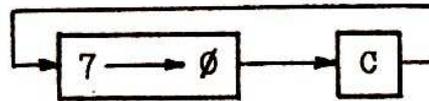
- RL r Rotiere Operand r links durch Carry-Flag
- RLA Rotiere Akkumulator links durch Carry-Flag



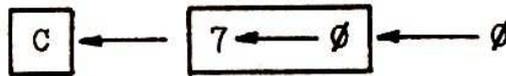
- RRC r Rotiere Operand r rechts kreisförmig
- RRCA Rotiere Akkumulator rechts kreisförmig



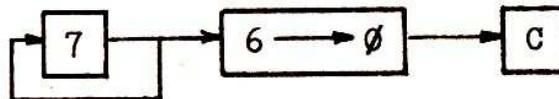
RR r Rotiere Operand r rechts durchs Carry-Flag
 RRA Rotiere Akkumulator rechts durchs Carry-Flag



SLA r schiebe Operand r links arithmetisch



SRA r schiebe Operand r rechts arithmetisch



Operationscodes:

r	A	B	C	D	E	H	L	(HL)
RLC r	CB07	CB00	CB01	CB02	CB03	CB04	CB05	CB06
RRC r	CB0F	CB08	CB09	CB0A	CB0B	CB0C	CB0D	CB0E
RL r	CB17	CB10	CB11	CB12	CB13	CB14	CB15	CB16
RR r	CB1F	CB18	CB19	CB1A	CB1B	CB1C	CB1D	CB1E
SLA r	CB27	CB20	CB21	CB22	CB23	CB24	CB25	CB26
SRA r	CB2F	CB28	CB29	CB2A	CB2B	CB2C	CB2D	CB2E
SRL r	CB3F	CB38	CB39	CB3A	CB3B	CB3C	CB3D	CB3E

RLCA	07
RRCA	0F
RLA	17
RRA	1F

Bemerkung: Zum Beispiel sind die Befehle RLCA und RLC A nicht identisch. Ihre Abarbeitungszeit und der Einfluß auf die Flags ist unterschiedlich. Das kann hier aber nicht näher erläutert werden, und wir verweisen auf entsprechende Literatur.

Schiebe- und Rotierbefehle werden u. a. bei Multiplikations- und Divisionsalgorithmen benötigt. Wir wollen hier den SRL A-Befehl anwenden, um den Inhalt des A-Registers als HEX-Zahl auszugeben. Bekanntlich findet im A-Register eine zweistellige HEX-Zahl Platz. Diese muß in 2 HEX-Zahlen aufgespalten und deren ASCII-Code ermittelt und anschließend ausgegeben werden.

14. Programm

ADRESSE	MASCHINENCODE	MARKEN	ASSEMBLERCODE	BEMERKUNGEN
0000	CD 18 F0	HEX	CALL F018H	IRM ein
03	F5		PUSH AF	A retten
04	CB 3F		SRL A	
06	CB 3F		SRL A	
08	CB 3F		SRL A	linke HEX-Ziffer nach A
0A	CB 3F		SRL A	
0C	CD 19 00		CALL ASCII	
0F	F1		POP AF	
10	E6 0F		AND 0F	rechte HEX-Ziffer nach A
12	CD 19 00		CALL ASCII	
15	CD 1B F0		CALL F01BH	IRM aus
18	C9		RET	
19	FE 0A	ASCII	CP 0A	HEX-Ziffer
1B	30 04		JR NC, SPRUNG	≥ 0AH?
1D	C6 30		ADD 30H	Berechnung ASCII- Code
1F	18 02		JR AUSGABE	
21	C6 37	SPRUNG	ADD 37H	Berechnung ASCII- Code
23	CD 03F0	AUSGABE	CALL F003H	Aufr. Progr.-Vert.
26	00		DEFB	UP Zeichenausg.
27	C9		RET	

0028	3A 00 01		LD A, (0100H)	Hilfsprogramm
2B	CD 00 00		CALL HEX	zum Test des Pro- gramms
2E	C9		RET	HEX

Bemerkung: Nachdem die linke bzw. die rechte HEX-Ziffer abge-
spalten wurde, wird im Unterprogramm ASCII der entsprechende
ASCII-Code ermittelt und das zugehörige Zeichen ausgegeben. Man
mache sich klar, daß der ASCII-Code

für $0H \leq X \leq 09H$ durch $X+30H$

und für $0AH \leq X \leq 0FH$ durch $X+37H$

berechnet wird.

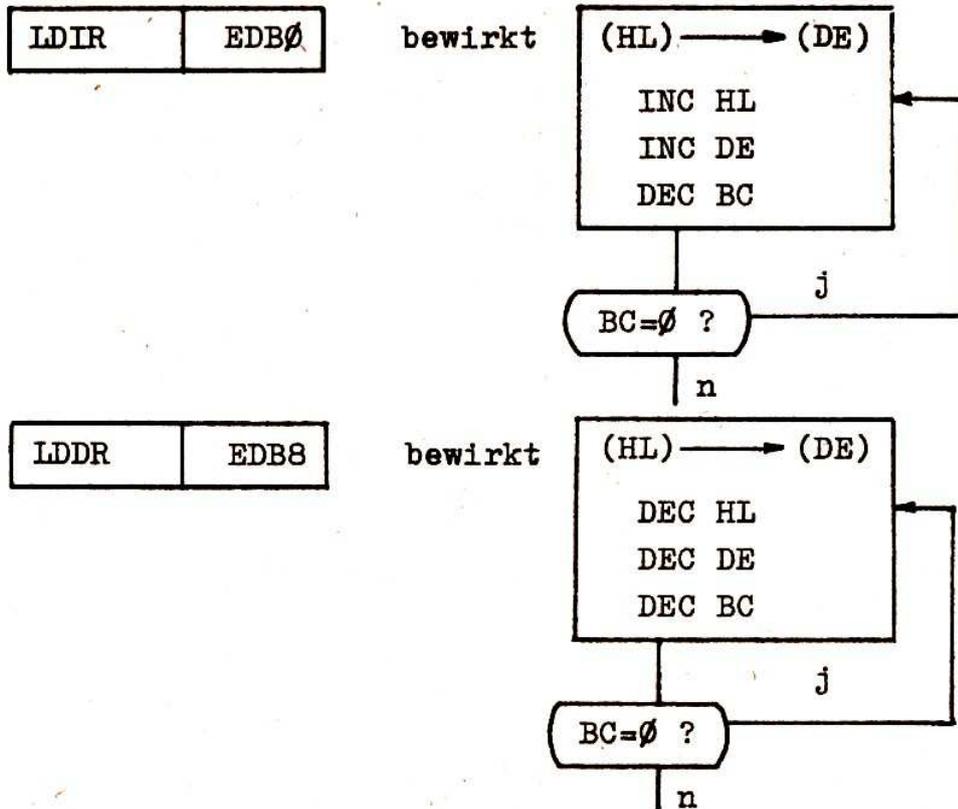
Von der Richtigkeit des Programmes HEX kann man sich durch das
zusätzliche BASIC-Programm

```
10 INPUT X:POKE 256,X: CALL*28: PRINT: GOTO 10
```

überzeugen. Die eingegebene Zahl $0 \leq X \leq 255$ wird in das A-Register geladen und anschließend durch das Programm HEX, die zugehörige HEX-Darstellung ausgegeben.

17. Blocktransfer

Blocktransferbefehle gestatten den Inhalt eines Speicherbereiches, dessen Anfangsadresse in HL und dessen Blocklänge (Anzahl der Zellen des Speicherbereiches) in BC steht, in einen Speicherbereich mit der Anfangsadresse, die in DE steht, zu speichern.



Wir wollen diesen Befehl nutzen, um den Bildschirminhalt (Pixel-RAM) in einen anderen Bereich zu kopieren. Später kann dann der ursprüngliche Inhalt wieder blitzschnell in den Pixel-RAM gelesen oder durch SAVE kann der Bildschirminhalt auch auf Kassette gespeichert werden.

15. Programm

ADRESSE	MASCHINENCODE	MARKEN	ASSEMBLERCODE	BEMERKUNGEN
0000	CD 18 F0		CALL F018H	IRM ein
03	21 00 80		LD HL,8000H	Beginn Pixel-RAM
06	01 00 28		LD BC,2800H	Länge Pixel-RAM
09	11 00 10		LD DE,1000H	Adr. neuer Speicherbereich
0C	00		NOP	für später reserv.
0D	ED B0		LDIR	Blocktransfer
0F	CD 1B F0		CALL F01BH	IRM aus
12	C9		RET	

Bemerkung: NOP - no operation mit dem Befehlscode 00 bewirkt nichts (keine Operation) und dient hier nur als Platzhalter.

Nach Aufruf von CALL 0 wird der Pixel-RAM nach 1000H-3800H kopiert und kann z. B. durch SAVE auf Kassette gespeichert werden. Um das gespeicherte Bild wieder einlesen zu können, mache man folgenden Trick:

Der Befehl

EX DE,HL	EB
----------	----

 vertauscht (exchange) die Inhalte der Register DE und HL. Ersetzt man NOP durch EX DE,HL, wird demnach der Speicherbereich ab 1000H in den Pixel-RAM gelesen. Man überprüfe, daß der alte Bildschirminhalt durch POKE 12,235:CALL 0 wieder eingelesen wird. (EBH = 235(dez.)!)

18. Abschließende Bemerkungen

An dieser Stelle wollen wir die Vorstellung weiterer Befehle abbrechen. Es sei erwähnt, daß es außer den Z- und C-Flag noch weitere Flags mit speziellen Aufgabenbereichen und auch Register (z. B. Index-Register IX, IY; einen Zweitregistersatz A', H', B', C', D', E', H', L') gibt, die teilweise nicht bedenkenlos manipuliert werden dürfen. Außerdem müßte auch noch der Einfluß der einzelnen Befehle auf die Flags bzw. die Abarbeitungsdauer eines Befehls angegeben werden. Unser Anliegen in der "WURZEL" konnte aber nur sein, eine Einführung zu geben, um die Lust zu wecken, sich ausführlicher mit dieser Problematik auseinanderzusetzen. Mit dem hier vorgestellten Befehlssatz lassen sich

schon erstaunlich viele Programm-Ideen verwirklichen.

Als weiterführende Literatur seien empfohlen:

Barthold/Bäurich: Mikroprozessoren - Mikroelektronische
Schaltkreise und ihre Anwendung (Teil I/II)
amateurreihe electronica 222/223 und
224/225

Kieser/Meder: Mikroprozessortechnik
Aufbau und Anwendung des Mikroprozessorsystems
U880
VEB Verlag Technik Berlin 1982

In der Zeitschrift "Mikroprozessortechnik" findet man häufig auch Programmieranregungen, die auf Maschinenprogrammen fußen. Unser Kenntnisstand gestattet, schon eine Vielzahl davon auch wirklich zu verstehen. Falls man größere Programme entwickeln will, sollte man sich die Arbeit durch das Assemblerprogramm EDAS erleichtern. Hierbei braucht nur ein Quellprogramm im Assemblercode entwickelt werden und der Rest wird automatisch erledigt. Eine einführende Beschreibung von EDAS (allerdings als MODUL) findet man in der Zeitschrift MP, Heft 8/87, S. 247/248.

Maschinenprogramm nutzt man normalerweise im Zusammenhang mit BASIC-Programmen. Doch wohin mit einem Maschinenprogramm?

Es gesondert einzulesen oder über eine DATA-READ-Anweisung einzupoken ist zu umständlich bzw. kostet zuviel Zeit. Es in Kommentarzeilen (REM) unterzubringen ist eine weitere Möglichkeit, die jedoch das Byte $\emptyset\emptyset$ ausschließt und in der Länge begrenzt ist. Hier nun unser einfacher Trick:

Nach Einschalten des KC85/2 (mit Modul) oder /3 gebe man folgende Programmzeile ein:

```
1 $\emptyset$  DOKE 863,ADR:POKE ADR-1:RUN
```

Dabei steht ADR für eine vorher festzulegende Adresse
 $\geq 42\emptyset H = 1\emptyset 56$ (dez.)

Nach RUN und anschließendem NEW ist die Startadresse des BASIC-Programmspeichers auf ADR verlegt. Der Speicherbereich $42\emptyset H - (ADR-2)$ kann beliebig für Maschinenprogramme genutzt werden. BASIC-Programme können nachgeladen oder neu entwickelt werden. Wird das BASIC-Programm durch CSAVE gerettet, wird auch automatisch der Bereich $4\emptyset 1H - ADR$, der das Maschinenprogramm enthält, übernommen. Das später wieder eingeladene Programm

braucht wie gewohnt nur durch RUN gestartet werden. Dann wird nämlich zunächst die Startadresse des BASIC-Programmspeichers auf ADR festgelegt und danach startet der Befehl RUN aus Programmzeile 1Ø das BASIC-Programm, das ab Adresse ADR steht. (Diese Überlegungen sind nur dann richtig, wenn die Startadresse des Programmspeichers 4Ø1H war, was aber nach dem Kaltstart des BASIC-Interpreters immer der Fall ist.)

Viel Spaß beim Experimentieren mit Maschinenprogrammen!

Dr. J. Puhl
Sektion Mathematik
Bereich Analysis

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung“

Leiter: Stefan Posselt

Chefredakteur: Eckhard Stein

Redaktion: C. Dahms, S. Krieg, R. Fötsch, N. Patzschke

Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900

Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.

Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

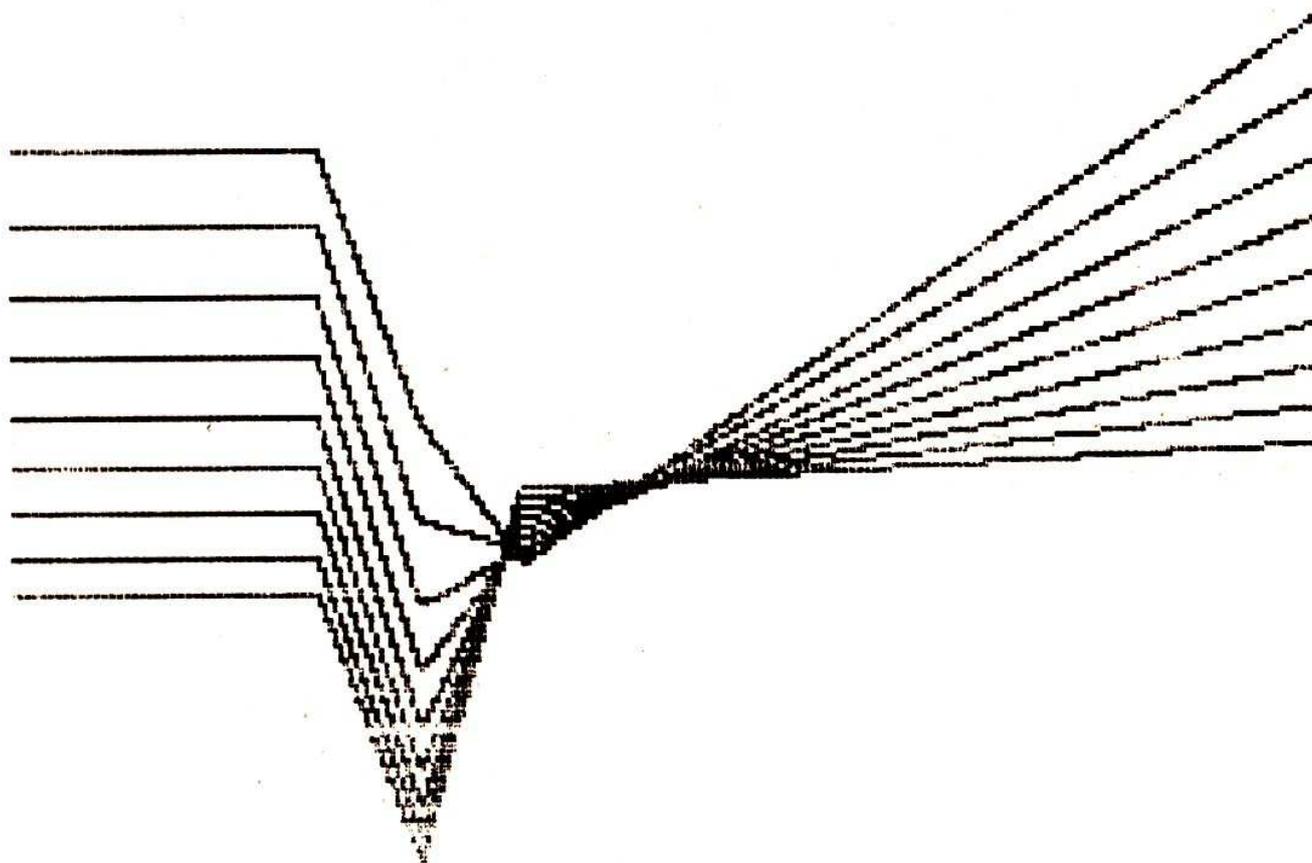
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Titelbild: M. Torke

Redaktionsschluß: 12. 6. 1989

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	23 (1989) 7/8	S. 97–128
----------------	--------	------	---------------	-----------



wurzel $\sqrt{9 \cdot 89}$

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

**Herausgegeben vom Jugendobjekt Studien-
vorbereitung-Studienwerbung der Sektion
Mathematik an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena**

**23. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M**

1. Internationale Informatikolympiade

Vom 16. bis 20. Mai 1989 fand in Pravetz (VR Bulgarien) die 1. Internationale Informatikolympiade statt.

Es beteiligten sich die folgenden 13 Länder: BRD, Bulgarien (2 Teams), China, CSSR, DDR, Griechenland, Jugoslawien, Kuba, Polen, Ungarn, UdSSR (3 Teams), Simbabwe und Vietnam.

Insgesamt starteten 46 Schüler. An dem Wettbewerb nahm ein Mädchen teil (aus Simbabwe). Der jüngste Teilnehmer war 13 (UdSSR, 40 Punkte!).

Der Wettbewerb fand am 17.5.89, 14.00 - 18.30 Uhr statt. Der Veranstalter stellte für jeden Schüler einen 16-Bit-Computer inländischer Produktion zur Verfügung (Pravez 16). Die Schüler hatten genügend Zeit, sich vor dem Wettbewerb mit der konkreten Technik vertraut zu machen. Vorwiegend wurde die Programmiersprache Turbo-Pascal verwendet, aber auch andere Sprachen (BASIC - China, C - einige Schüler aus der UdSSR). Die drei Teilnehmer aus der DDR nutzten das Programmiersystem Turbo-Pascal (V. 3 bzw. 5).

Die Aufgabe wurde am Vormittag des 17.5.89 von der Internationalen Jury, der alle Mannschaftsleiter angehörten, festgelegt. Es standen sechs Aufgaben zur Auswahl (Bulgarien - 4, China - 1, DDR - 1). In vier Wahlgängen wurde die chinesische Aufgabe ausgewählt.

Das Problem der chinesischen Kisten

Gegeben sind $2 \cdot N$ Kisten, die nebeneinander in einer Reihe stehen. Zwei benachbarte Kisten sind leer.

Genau $(N-1)$ Kisten enthalten jeweils das Symbol A und genau $(N-1)$ Kisten enthalten das Symbol B.

Beispiel für $N = 5$: A B B A _ _ A B A B

Die Austauschregel:

Der Inhalt von zwei benachbarten nicht-leeren Kisten kann in zwei leere Kisten gebracht werden. Dabei muß aber die Reihenfolge erhalten bleiben.

Das Ziel:

Es gilt, eine Konfiguration zu erzeugen, in der alle As links von allen Bs stehen. Dabei ist die Stellung der leeren Kisten ohne Bedeutung.

Problemstellung:

Schreibe ein Programm, das

1. eine Eingabe von der Tastatur entgegennimmt, und zwar den Anfangszustand, dargestellt als eine Folge von As, Bs und Nullen (für die leeren Kisten) und den Austausch modelliert,
2. für einen gegebenen Anfangszustand wenigstens einen Austauschplan findet, der das Ziel erreicht, oder die Nichterreichbarkeit feststellt. Die Ausgabe enthält den Anfangszustand, die Zwischenzustände nach jedem Schritt und den Endzustand,

3. einen Plan findet, der das Ziel mit einer minimalen Anzahl von Schritten erreicht.

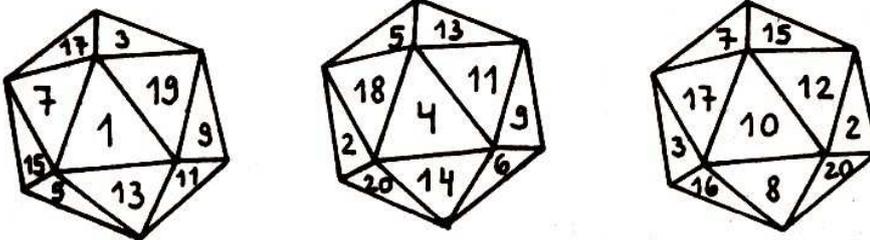
Die Ergebnisse:

Präsentiere wenigstens eine Lösung für das oben angegebene Beispiel.

Die Aufgabe der DDR soll ebenfalls wiedergegeben werden.

Ikosaeder

Gegeben ist ein regelmäßiges Polyeder mit 20 Seitenflächen (Ikosaeder). Die Seitenflächen erhalten die Nummern 1 bis 20.



Eine Reise über alle Seitenflächen des Ikosaeders darf nur über jeweils benachbarte Flächen erfolgen und jede Fläche ist genau einmal zu betreten.

Fall A: Zwei Flächen heißen benachbart, wenn sie eine gemeinsame Kante besitzen.

Fall B: Zwei Flächen heißen benachbart, wenn sie eine gemeinsame Kante oder einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Die Kosten K einer Reise werden durch das Skalarprodukt

$K = \sum_{i=1}^{20} i F_i$; erklärt. Dabei ist F_i die Nummer der im i -ten Schritt betretenen Fläche.

Gib für die Fälle A und B alle Reisen an, für die die Kosten minimal sind.

Anmerkungen:

a) Sollte es nicht möglich sein, exakte Lösungen zu ermitteln (Zeit- oder Speicherplatzkomplexität der Algorithmen), so sind Algorithmen zum Berechnen von Näherungslösungen zu realisieren.

b) Das beschriebene Ikosaeder wird industriell gefertigt.

Die Internationale Jury vergab 18 Medaillen.

	G	S	B
Bulgarien	2	2	
UdSSR	1	1	
BRD	1		1
DDR		2	
China			3
CSSR	1		
Ungarn	1		
Vietnam			1
Griechenland			1
Kuba			1

Die Maximalpunktzahl 100 wurde von Teodor Tonchev (Bulgarien) erreicht.

Ergebnisse der drei DDR-Teilnehmer:

Hartmut Schwetlick (Spezialschule Dresden, Kl. 12)	83 Punkte
Ulf Nieländer (Spezialschule Karl-Marx-Stadt, Kl. 11)	81 Punkte
Dirk Balfanz (Spezialschule Berlin, Kl. 12)	43 Punkte

H. Schwetlick und U. Nieländer bearbeiteten alle drei Teilprobleme. Teilproblem 3 wurde durch Breitensuche in einem Variantenbaum gelöst. Die Programme hätten mit Hilfe von Heuristiken hinsichtlich ihrer Effizienz verbessert werden können. D. Balfanz löste die Teilprobleme 1 und 2.

Die Auszeichnung der Sieger erfolgte am 19.5.89 im Kulturpalast in Pravetz durch offizielle Persönlichkeiten der VR Bulgarien und der UNESCO. Jeder Teilnehmer erhielt eine Teilnehmerurkunde und ein Souvenir. Besonders glücklich waren natürlich die Gewinner, die neben einer Urkunde schöne Beispiele der bulgarischen Glas Kunst mit nach Hause nehmen konnten. Die Gewinner einer Goldmedaille wurden am 20.5.89 den Teilnehmern der in Sofia tagenden 3. Konferenz "Children in the Information Age" vorgestellt.

Unsere drei Teilnehmer konnten sich nach zwei Vorbereitungslehrgängen, die an der Spezialschule Erfurt stattfanden, für die Mannschaft der DDR qualifizieren. Alle drei werden individuell durch Wissenschaftler betreut.

In den Vorbereitungslehrgängen wurden wir - und das soll nicht unerwähnt bleiben - mit Rechentechnik durch den VEB Mikroelektronik "Karl Marx" Erfurt und den VEB Robotron Büromaschinenwerk "Ernst Thälmann" Sömmerda gut unterstützt.

Wir vier werden uns gern an diese Woche in Bulgarien erinnern, die von den Veranstaltern inhaltlich und organisatorisch in hervorragender Weise vorbereitet und durchgeführt wurde und in der wir neue Freunde fanden.

Dr. Michael Fothe,
Leiter der DDR-Mannschaft
Spezialschule mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Richtung
Vilniuser Str. 18
Erfurt
5062

V43 Каждая сторона выпуклого четырёхугольника разделена на 8 равных частей. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены друг с другом, и полученные клетки раскрашены в шахматном порядке.

2

Докажите, что сумма площадей черных клеток равна сумме площадей белых клеток.

V44 Für welche Werte k besitzen die Gleichungen

$$x^3 + kx + 1 = 0 \quad \text{und} \quad x^4 + kx^2 + 1 = 0 \quad \text{eine gemeinsame Wurzel?}$$

Man finde für diese k die entsprechende Wurzel.

V45 Auf den Seiten BC, AC und AB des spitzwinkligen Dreiecks

ABC liegen die Punkte A_1, B_1 bzw. C_1 . Der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC falle mit dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks $A_1B_1C_1$ zusammen.

Man zeige, daß die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ ähnlich sind!

V46 Für eine gegebene Menge positiver Zahlen $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

schreibe man alle möglichen Summen dieser Zahlen auf, d.h. alle Zahlen einzeln, alle Summen zweier Summanden, alle Summen dreier Zahlen, ..., die Summe der n Zahlen.

Es ist zu beweisen, daß alle so aufgeschriebenen Summen so in n Gruppen aufgeteilt werden können, daß in jeder Gruppe das Verhältnis der größten Zahl zur kleinsten Zahl nicht größer als 2 ist.

V47 Man bestimme 2 Lösungen der Gleichung

$$3^x + 3^{x^2} = 2^x + 4^{x^2}$$

und zeige, daß es keine weiteren gibt!

V48 Man zerlege das Polynom $x^8 + 4x^2 + 4$ in Linearfaktoren!

1

Einsendeschluß: 1.12.1989

Zwei Möglichkeiten der Erzeugung bemerkenswerter Polyeder aus den Platonischen Körpern (Teil 1)

Die 5 Platonischen Körper stellen bekanntlich die einzigen regulären konvexen Körper im dreidimensionalen Euklidischen Raum dar. Dabei wollen wir ein konvexes Polyeder regulär nennen, wenn es nur von kongruenten konvexen regelmäßigen n -Ecken ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$) begrenzt wird und die Polyederecken zueinander kongruent sind.

In der Literatur ist vielfach der Zusammenhang der Zuordnung der Mittelpunkte der Seitenflächen eines Platonischen Körpers als Eckpunkte eines konvexen Polyeders zu finden, wobei diese Punkte durch Kanten verbunden sind. Dieser als Dualität bezeichnete Zusammenhang ordnet jeder Seitenfläche des Ausgangspolyeders einen Eckpunkt des entsprechenden dualen Körpers zu und umgekehrt.

Plat. Körper	Eckenanzahl(E)	Flächenanzahl(F)	Kantenanzahl(K)
reg. Tetraeder	4	4	6
reg. Oktaeder	6	8	12
reg. Hexaeder	8	6	12
reg. Ikosaeder	12	20	30
reg. Dodekaeder	20	12	30

Durch Vertauschen von E und F entsteht der jeweils duale Körper. Abb. 1 zeigt die Dualität zwischen dem reg. Hexaeder und dem regl. Oktaeder. Im folgenden sei infolge der Regelmäßigkeit dieser Figuren nur noch von Tetraeder, Hexaeder ... gesprochen. Es ist auch möglich, diese 5 Körper durch ein Symbol zu kennzeichnen, was die Flächenart des reg. n -Ecks der Flächen um eine Ecke angibt. Das kann für konvexe Polyeder nur getan werden, wenn

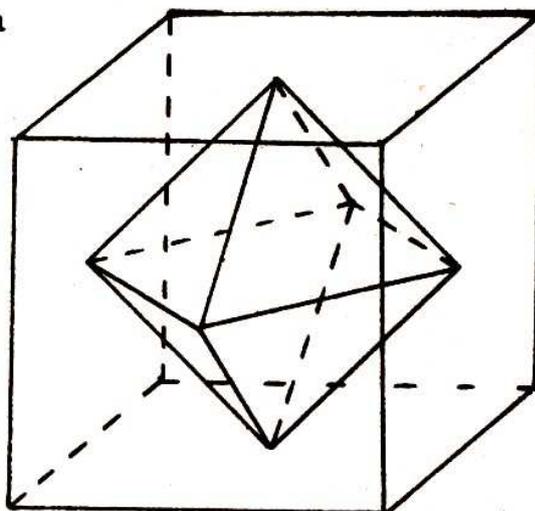


Abb. 1

die Ecken und Kanten kongruent sind.

Tetraeder (3,3,3), Hexaeder (4,4,4), Oktaeder (3,3,3,3),

Dodekaeder (5,5,5), Ikosaeder (3,3,3,3,3)

Es soll nun im folgenden die Frage geklärt werden, welche Polyeder entstehen, wenn die Kantenmittelpunkte der Platonischen Körper als Eckpunkte eines neuen konvexen Polyeders angesehen werden, in der Weise, daß in jeder Seitenfläche (also in jedem reg. n-Eck) eines solchen Körpers das einbeschriebene reg. n-Eck erzeugt wird, dessen Seiten folglich die Kanten des neu zu erzeugenden Körpers darstellen. Das ist die von uns betrachtete erste Konstruktionsmöglichkeit. Beginnen wir die Konstruktion mit dem Tetraeder. Zunächst läßt sich infolge der Ähnlichkeit zeigen, daß jedes, einem konvexen n-Eck einbeschriebene n-Eck, wobei die Eckpunkte des einbeschriebenen n-Ecks die Kantenmittelpunkte des Ausgangs-n-Ecks sind, diesem ähnlich ist und somit auch selbst regelmäßig. Damit sind diese erzeugten Flächen selbst reg. konvexe n-Ecke. Ausgehend von der Konstruktion wird jeder Kante ein Eckpunkt des neuen Körpers zugeordnet. Also ist, wenn E' die Eckenanzahl des neu entstehenden Polyeders ist, $E' = K$. Die Anzahl der Flächen des neu entstehenden Polyeders F' ergibt sich als Summe der Anzahl der Flächen F des ursprünglichen Polyeders und dessen Eckenanzahl E , da die Verbindung der Kantenmittelpunkte des Ausgangspolyeders an dessen Ecken jeweils einen ebenen Flächenschnitt durch die Ecke repräsentiert. Also ist $F' = F + E$. Die dadurch entstandenen Schnittflächen sind selbst regelmäßig, da ihre Seiten gleichfalls die Seiten der eben genannten einbeschriebenen reg. n-Ecke sind. Um schließlich die Anzahl der Ecken E' zu berechnen, gehen wir davon aus, daß für alle konvexen Polyeder der Eulersche Polyedersatz gilt und durch unser Konstruktionsprinzip entstehen selbst wieder konvexe Körper.

Eulerscher Polyedersatz: Für alle konvexen Polyeder gilt:

$$E + F - K = 2.$$

(Auf einen Beweis des Satzes sei an dieser Stelle verzichtet.)

Es gilt somit auch $E' + F' - K' = 2$ und $K' = E' + F' - 2$. Wir haben so eine Möglichkeit erhalten, E' , F' und K' des neu entstehenden

Körpers mittels einer rekursiven Vorschrift aus E, F und K zu ermitteln. Diese Beziehungen gelten nun bei den folgenden 5 Erzeugungen von Polyedern.

(1) Tetraeder als Ausgangspolyeder (Abb. 2)

Nach Anwenden der Gleichungen ergibt sich als neues Polyeder ein Körper mit $E'=6$, $F'=8$ und $K'=12$. Da sowohl die einbeschriebenen Flächen reg. Dreiecke sind und als "Schnittflächen" gleichfalls reg. Dreiecke entstehen, liegt ein konvexes Polyeder vor, dessen 8 Seitenflächen reg. Dreiecke sind und da an jeder Ecke 4 zusammenstoßen, haben wir nichts anderes als ein Oktaeder (3,3,3,3), also ein reg. Polyeder, gewonnen.

(2) Hexaeder als Ausgangspolyeder (Abb. 3)

Zunächst entstehen als Seitenflächen reg. Vierecke (Quadrate) und als zweite Flächenart ergeben sich reg. Dreiecke. Es liegt also ein Polyeder mit 2 reg. Flächenarten vor, deren Seiten folglich alle gleiche Länge besitzen. Die Ecken sind untereinander kongruent, da in jeder Ecke 2 reg. Dreiecke und 2 reg. Vierecke zusammentreffen. In Reihenfolge ihres Zusammenstoßens ist das Symbol (3,4,3,4) angebbar, da die damit verbundenen oben genannten Bedingungen erfüllt sind. Hierbei gilt $E'=12$, $F'=14$ und $K'=24$.

(3) Oktaeder als Ausgangspolyeder (Abb. 4)

Eine Art der Seitenflächen sind reg. Dreiecke, als zweite Flächenart erscheinen reg. Vierecke. Sie besitzen allesamt gleich lange Seiten und es ist zu sehen, daß die Ecken ebenfalls kongruent sind, daß in jeder Ecke erneut 2 reg. Dreiecke und 2 reg. Vierecke wie unter (2) beschrieben zusammenstoßen. Es handelt sich bei diesem erzeugten Körper um exakt das gleiche Polyeder wie aus (2), so daß sich die Größen für E' , F' , K' in gleicher Anzahl ergeben.

Ein Analogon zum Kosinussatz

Bekanntlich kann man den Lehrsatz des Pythagoras als Spezialfall des Kosinussatzes auffassen. Nun haben Frank Bielig und Jörg Strehmann in der WURZEL 11/88 ein räumliches Analogon zum Satz des Pythagoras angegeben. Es liegt daher nahe, nach einem räumlichen Analogon des Kosinussatzes zu suchen.

Bevor wir dies Analogon angeben, stellen wir einen Hilfssatz voran.

Hilfssatz:

Der Flächeninhalt des Bildes eines Dreiecks bei senkrechter Parallelprojektion auf eine andere Ebene ist gleich $A \cos \alpha$, wenn A sein Flächeninhalt und α der Neigungswinkel der Dreiecksebene gegenüber dieser anderen Ebene ist.

Beweisskizze:

Das Dreieck kann so gelegt werden, daß seine Grundseite parallel zu der Bildebene liegt. Die Grundseite bleibt daher bei der Projektion erhalten, während die zugehörige Höhe mit $\cos \alpha$ multipliziert wird.

Wir betrachten nun das Tetraeder ABCS. Wie in dem obigen Artikel sei A_1 der Flächeninhalt des Dreiecks ASC, A_2 der des Dreiecks BSC, A_3 der des Dreiecks ASB und A_4 der des Dreiecks ABC. Die von den nicht kollinearen Punkten X, Y, Z aufgespannte Ebene sei mit $\epsilon(X,Y,Z)$ bezeichnet. Die für den Kosinussatz benötigten Winkel seien wie folgt benannt:

α sei der Schnittwinkel von $\epsilon(B,S,C)$ mit $\epsilon(A,S,B)$

β sei der Schnittwinkel von $\epsilon(A,S,B)$ mit $\epsilon(A,S,C)$ und

γ sei der Schnittwinkel von $\epsilon(A,S,C)$ mit $\epsilon(B,S,C)$.

S a t z : Mit den obenstehenden Bezeichnungen ist

$$A_4^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - 2A_2A_3 \cos \alpha - 2A_1A_3 \cos \beta - 2A_2A_1 \cos \gamma.$$

Beweis:

Es seien σ , ξ und η die Winkel, die $\epsilon(A,B,C)$ mit $\epsilon(A,S,C)$, $\epsilon(B,S,C)$ bzw. $\epsilon(A,S,B)$ bildet. Nach dem Hilfssatz ist dann

$$A_4 = A_1 \cos \delta + A_2 \cos \zeta + A_3 \cos \eta,$$

$$A_1 = A_4 \cos \delta + A_2 \cos \gamma + A_3 \cos \beta,$$

$$A_2 = A_1 \cos \gamma + A_4 \cos \zeta + A_3 \cos \alpha,$$

$$A_3 = A_1 \cos \beta + A_2 \cos \alpha + A_4 \cos \eta,$$

wobei man z.B. die erste Gleichung dadurch erhält, daß man A_4 als "Summe" der Projektionen von A_1 , A_2 , A_3 auf A_4 auffaßt.

Durch Multiplikation der vier Gleichungen mit A_4 ; $-A_1$; $-A_2$ bzw. $-A_3$ und anschließender Addition entsteht mit

$$A_4^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 = -2A_2A_3 \cos \alpha - 2A_3A_1 \cos \beta - 2A_1A_2 \cos \gamma$$

die Behauptung.

Das erwähnte räumliche Analogon des Satzes von Pythagoras ergibt sich aus diesem Satz als Spezialfall für $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ unmittelbar.

Abschließend sei angemerkt, daß dieser Satz nicht neu ist. Er ist z.B. im Buch von H. Dörrie, Mathematische Miniaturen, Verlag F. Hirt, Breslau, 1943, S. 97f. enthalten. Der obige Beweis ist an die dortige Darstellung angelehnt.

Dr. W. Moldenhauer
PH Erfurt
Sektion MP

Aufgaben der DDR-Olympiade der Klassenstufe 10 (Fortsetzung)

3B. Über 13 sonst beliebige Punkte in einer Ebene werde vorausgesetzt, daß sich unter je drei dieser 13 Punkte stets zwei befinden, deren Abstand voneinander kleiner als 1 cm ist.

a) Man beweise, daß aus dieser Voraussetzung stets folgt:

Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres sieben der 13 Punkte enthält.

- b) Man untersuche, ob aus dieser Voraussetzung stets folgt: Es gibt einen Kreis vom Radius 1 cm, dessen Inneres acht der 13 Punkte enthält.

4. Beweisen Sie, daß für keine reelle Zahl x die Gleichung

$$x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 24x + 40 = 0$$

gilt!

5. In einer Ebene seien drei zueinander parallele Geraden g , h , k so gegeben, daß g und h voneinander den Abstand 8 cm haben und daß k im Abstand 5 cm von g in dem Streifen zwischen g und h verläuft. Man untersuche, ob ein gleichseitiges Dreieck ABC existiert, für das A auf g , B auf h und C auf k liegt.

Falls kein solches Dreieck existiert, so beweise man diese Aussage. Falls ein solches Dreieck existiert, so gebe man an, wie die Seitenlänge eines solchen Dreiecks rechnerisch oder konstruktiv erhalten werden kann, und beweise, daß ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der nach dieser Angabe erhaltenen Seitenlänge die geforderten Bedingungen (A auf g , B auf h , C auf k) erfüllt.

6. Beweisen Sie, daß zu jedem Quadrupel (a, b, c, d) positiver reeller Zahlen, für das $a + b + c = \frac{d}{2}\sqrt{3}$ gilt, ein Tripel (x, y, z) reeller Zahlen existiert, das die drei Gleichungen

$$\sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = d,$$

$$\sqrt{z^2 - b^2} + \sqrt{x^2 - b^2} = d,$$

$$\sqrt{x^2 - c^2} + \sqrt{y^2 - c^2} = d$$

erfüllt.

Über die Dichtezahlen von Einheitskreispackungen und Einheitskreisüberdeckungen in der euklidischen Ebene

1. Problemstellung

In diesem Artikel sollen einige Betrachtungen in der euklidischen Ebene E zu Einheitskreispackungen und Einheitskreisüberdeckungen angestellt werden.

Dabei verstehen wir hier unter einem Einheitskreis stets die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius 1.

Eine unendliche Menge $\{K_i\}$ von Einheitskreisen, deren Mittelpunkte sich an keiner Stelle der Ebene E häufen, heißt eine Einheitskreisanordnung in E . Einheitskreisanordnungen bezeichnen wir im weiteren stets mit α . Wir erklären nun zwei spezielle grundlegende Einheitskreisanordnungen:

1. Eine Einheitskreisanordnung α heißt genau dann eine Einheitskreispackung in der Ebene E , wenn jeder Punkt von E im Innern von höchstens einem Kreis aus α liegt.

2. Eine Einheitskreisanordnung α heißt genau dann eine Einheitskreisüberdeckung in der Ebene E , wenn jeder Punkt von E zu wenigstens einem Kreis aus α gehört.

Einheitskreispackungen bezeichnen wir mit \mathcal{P} und Einheitskreisüberdeckungen mit \mathcal{U} .

Im Bild 1a ist der Ausschnitt aus einer Einheitskreisanordnung, im Bild 1b der Ausschnitt aus einer Einheitskreispackung und im Bild 1c der Ausschnitt aus einer Einheitskreisüberdeckung dargestellt.

Wir können nach diesen Vorbereitungen nun den Begriff der Dichte einer Einheitskreisanordnung einführen. Dazu betrachten wir in der Ebene E eine Einheitskreisanordnung α und einen Punkt O . Um O legen wir einen Kreis $K(O, \rho)$ mit dem Radius ρ . Mit $n(\rho)$ wird die Anzahl der Einheitskreise von α bezeichnet, die ganz im Innern von $K(O, \rho)$ liegen. Im Bild 2 ist $n(\rho) = 8$. Wir betrachten den Quotienten
$$S(\alpha, \rho) := \frac{n(\rho) \cdot |K|}{|K(O, \rho)|},$$

den wir als Dichte von α in $K(O, \rho)$ bezeichnen. Dabei bezeichnet $|K|$ den Flächeninhalt eines Kreises aus α , also $|K| = \pi$, und $|K(O, \rho)|$ den Flächeninhalt von

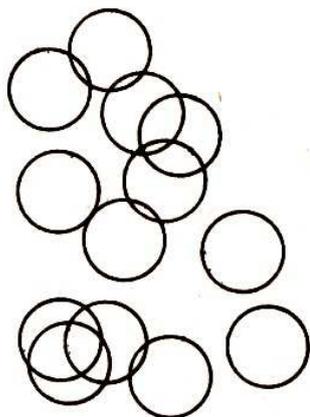


Bild 1a

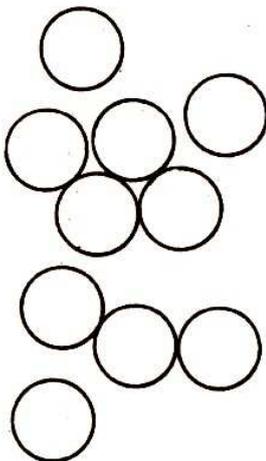


Bild 1b



Bild 1c

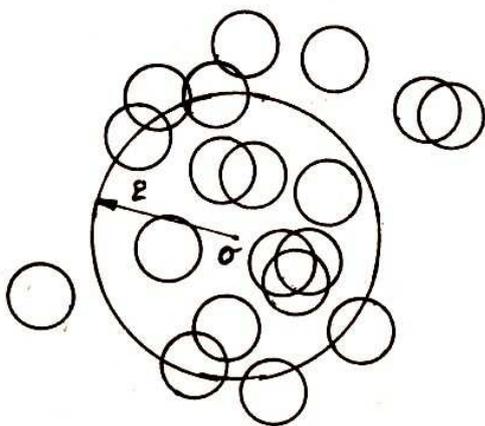


Bild 2

$K(0, \rho)$, also $|K(0, \rho)| = \pi \rho^2$.

Damit erhalten wir

$$\delta(\alpha, \rho) = \frac{n(\rho) \cdot |K|}{|K(0, \rho)|} = \frac{n(\rho)}{\rho^2}.$$

Stellen wir uns nun vor, daß ρ größer wird. Dann überdeckt $K(0, \rho)$ auch einen größeren Teil der Ebene E .

Wächst ρ über alle Grenzen, so wird $K(0, \rho)$ zur gesamten Ebene. Aus der Dichte $\delta(\alpha, \rho)$ der Einheitskreisanordnung α in $K(0, \rho)$ wird auf diese Weise

die Dichte der Einheitskreisanordnung α in der Ebene E .

Diesen Wert bezeichnen wir mit $\delta(\alpha)$. Mit Symbolen läßt sich dieser Grenzprozeß durch

$$\delta(\alpha) := \lim_{\rho \rightarrow \infty} \delta(\alpha, \rho) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{n(\rho)}{\rho^2}$$

ausdrücken.

Für die Dichte $\delta(\alpha)$ der Einheitskreisanordnung α in E läßt sich zeigen, daß dieser Wert von der Wahl des Punktes O in E unabhängig ist. Dies soll hier jedoch nicht geschehen.

Eine ausführliche Abhandlung hierzu ist in [1, S. 57ff] nachzulesen.

Wir betrachten im folgenden nur noch Einheitskreispackungen bzw. Einheitskreisüberdeckungen. Es bezeichnen $\delta(\mathcal{R})$ bzw. $\delta(\mathcal{U})$ die Dichten von \mathcal{R} bzw. \mathcal{U} in der Ebene E . Es ist sofort klar, daß

$$0 \leq \delta(\mathcal{R}) < 1 < \delta(\mathcal{U})$$

gilt.

Betrachten wir nun die Menge aller möglichen Einheitskreispackungen in E . Dann ist einer jeden dieser Einheitskreispackung genau ein Wert $\delta(\mathcal{R})$ zugeordnet.

Diese Menge $\{\delta(\mathcal{R})\}$ reeller Zahlen ist durch 0 nach unten und 1 nach oben beschränkt. Für eine solche Menge gibt es eine kleinste Zahl $\delta_{\max}(\mathcal{R})$, so daß für alle Einheitskreispackungen und deren Dichten die Abschätzung

$$\delta(\mathcal{R}) \leq \delta_{\max}(\mathcal{R})$$

gilt.

Analog existiert für die Menge $\{\delta(\mathcal{U})\}$ ein größter Wert $\delta_{\min}(\mathcal{U})$, so daß $\delta_{\min}(\mathcal{U}) \leq \delta(\mathcal{U})$ für jede Einheitskreisüberdeckung \mathcal{U} von E gilt.

Damit haben wir insgesamt für die Dichteabschätzungen die Ungleichungskette

$$0 \leq \delta(\mathcal{R}) \leq \delta_{\max}(\mathcal{R}) < 1 < \delta_{\min}(\mathcal{U}) \leq \delta(\mathcal{U})$$

erhalten.

Das Ziel dieser Arbeit besteht nun darin, die beiden Werte

$\delta_{\max}(\mathcal{R})$ und $\delta_{\min}(\mathcal{U})$ zu bestimmen und eventuell eine Einheitskreispackung \mathcal{R} mit $\delta(\mathcal{R}) = \delta_{\max}(\mathcal{R})$ und eine Einheitskreisüberdeckung \mathcal{U} mit $\delta(\mathcal{U}) = \delta_{\min}(\mathcal{U})$ zu finden.

Bevor wir uns diesen beiden Aufgaben zuwenden, wollen wir einen Begriff für Einheitskreisanordnungen einführen, der uns die Bestimmung der Werte $\delta_{\max}(\mathcal{R})$ und $\delta_{\min}(\mathcal{U})$ ermöglicht.

Dazu betrachten wir eine Einheitsanordnung \mathcal{A} und bezeichnen einen Kreis, in dessen Innerem kein Mittelpunkt eines Kreises aus \mathcal{A} liegt, der aber auf seinem Rand wenigstens drei dieser Mittelpunkte enthält, als einen Stützkreis von \mathcal{A} .

Im Bild 3a ist eine Einheitskreisanordnung gezeigt, in der zwei Stützkreise (schraffiert) eingezeichnet sind.

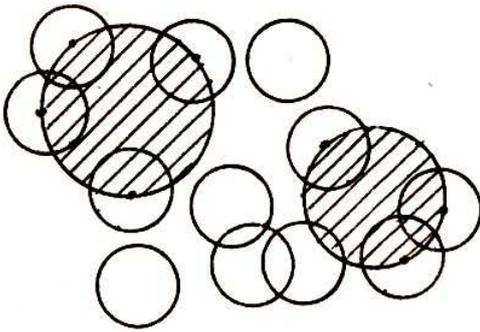


Bild 3a

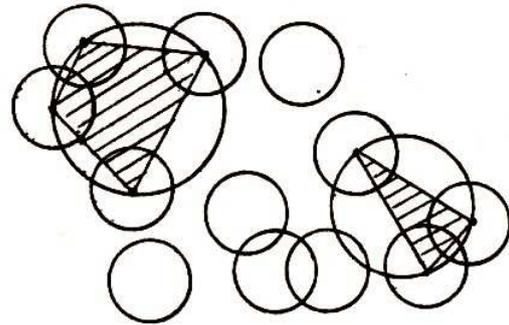


Bild 3b

Die Mittelpunkte der Einheitskreise aus α , die auf dem Rand eines Stützkreises von α liegen, bilden ein konvexes Polygon, welches als Stützpolygon bezeichnet wird. Im Bild 3b sind die beiden eingezeichneten Stützpolygone schraffiert.

Es ist klar, daß die Menge aller Stützpolygone, die zu einer Einheitskreisanordnung α gehören, eine Zerlegung \mathcal{Z} der Ebene E in Polygone bilden. Im Bild 4 ist ein Ausschnitt aus einer solchen Zerlegung gezeigt.

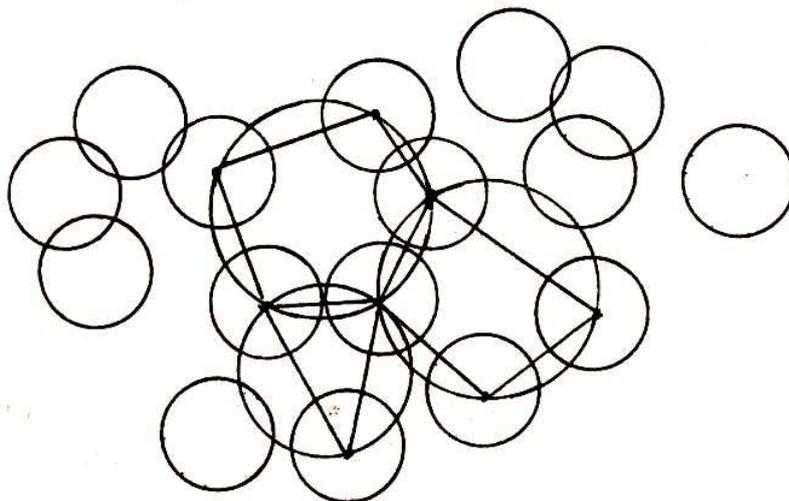


Bild 4

Nun wenden wir uns der angekündigten Bestimmung von $\delta_{\max}(\rho)$
 $\delta_{\min}(\rho)$ und den entsprechenden Kreisaneordnungen zu.

Fortsetzung folgt!

Dr. K. Kirchner
Dr. M. Schmitz
PH Erfurt
Sektion Mathematik/Physik

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung“

Leiter: Stefan Posselt

Chefredakteur: Eckhard Stein

Redaktion: C. Dahms, S. Krieg, R. Fötsch, N. Patzschke

Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900

Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.

Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

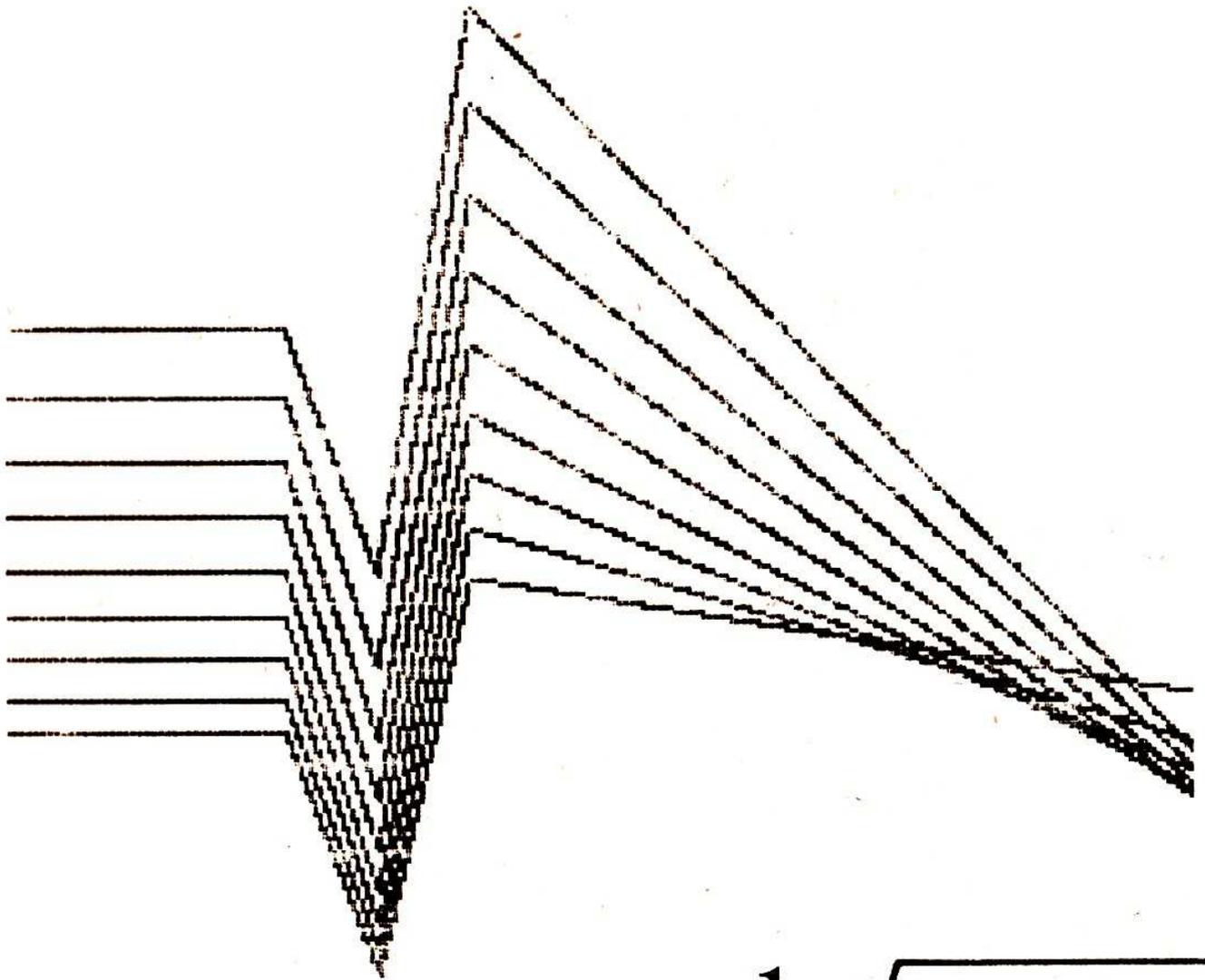
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Titelbild: M. Torke

Redaktionsschluß: 12. 6. 1989

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	23 (1989) 9	S. 129–144
----------------	--------	------	-------------	------------

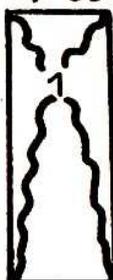


wurzel $\sqrt{10 \cdot 89}$

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

**Herausgegeben vom Jugendobjekt Studien-
vorbereitung-Studienwerbung der Sektion
Mathematik an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena**

**23. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M**



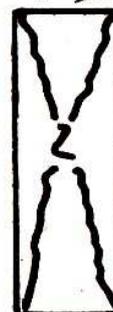
V 50. Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC так, что $BP : PQ : QC = 1:2:3$. Точка R делит сторону AC этого треугольника так, что $AR : RC = 1:2$. Чему равно отношение площади четырёхугольника PQST к площади треугольника ABC, где S и T точки пересечения прямой BQ с прямыми AQ и AP соответственно?



V 50 Man zeige, daß man den Einheitskreis nicht mit einer gewissen Anzahl Papierstreifen überdecken kann, deren Summe der Streifendicken kleiner als 1 ist!



V 51 Für welche natürlichen Zahlen m ist $31^m - 1$ durch $2^m - 1$ teilbar?



V 52 Einem Kreis seien 2 Dreiecke D_1 und D_2 einbeschrieben. Dabei liegen die Ecken des Dreiecks D_2 auf den Mitten der Kreisbögen, in welche das Dreieck D_1 den Kreis teilt. Man zeige, daß in dem Sechseck $D_1 \cap D_2$ die Diagonalen, die die gegenüberliegenden Ecken verbinden, zu den Seiten des Dreiecks D_1 parallel sind und sich in einem Punkt schneiden!



V 53 Man berechne $\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)$, falls $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$;

$$\frac{3}{2} \pi < \alpha < 2\pi !$$



V 54 Gesucht sind alle Lösungen (x, y, z) des Gleichungssystems

$$\cos x + \cos y + \cos z = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x + \sin y + \sin z = \frac{3}{2}$$

Einsendeschluß: 1.1.1990

Über die Dichtezahlen von Einheitskreispackungen und Einheitskreisüberdeckungen in der euklidischen Ebene (Fortsetzung)

2. Bestimmung der dichtesten Einheitskreispackung in der Ebene

\mathcal{R} sei eine Einheitskreispackung in der Ebene E . Wir sagen, \mathcal{R} ist eine ungesättigte Einheitskreispackung, wenn wir in E einen weiteren Einheitskreis so einlagern können, daß dieser Kreis mit keinem Kreis aus \mathcal{R} innere Punkte gemeinsam hat. Im Bild 5 ist ein Ausschnitt aus einer ungesättigten Einheitskreispackung \mathcal{R} gezeigt. Der zusätzlich einzulagernde Einheitskreis ist schraffiert gekennzeichnet.

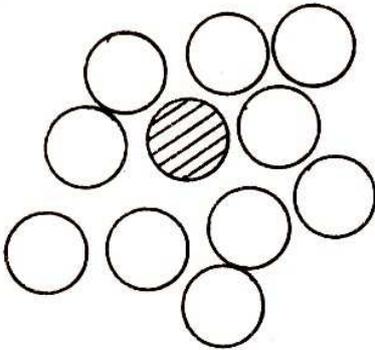


Bild 5

Ist eine Einheitskreispackung \mathcal{R} nicht ungesättigt, so nennen wir \mathcal{R} gesättigt.

Es ist sofort klar, daß wir uns bei der Bestimmung von $\sigma_{\max}(\mathcal{R})$ auf die Betrachtung der gesättigten Einheitskreispackungen beschränken können.

\mathcal{R} sei eine beliebige solche Einheitskreispackung. Weil \mathcal{R} eine gesättigte Einheitskreispackung ist, folgt unmittelbar, daß jeder Stützkreis von \mathcal{R} einen Radius kleiner

als 2 hat. Betrachten wir nun noch zu jedem Stützkreis das zugehörige Stützpolygon, so entsteht eine Zerlegung \mathcal{Z} der Ebene in Polygone, bei der die Polygone paarweise nur Randpunkte gemeinsam haben. Außerdem liegt kein Eckpunkt eines Polygons im Inneren einer Seite eines anderen Polygons und jeder Punkt der Ebene gehört zu mindestens einem solchen Polygon (siehe Bild 6). Damit ist eine Zerlegung der Ebene in Polygone entstanden, welche durch \mathcal{R} eindeutig bestimmt ist. Eine solche Zerlegung läßt sich durch das Einzeichnen von sich nicht schneidenden Diagonalen in eine Zerlegung der Ebene in Dreiecke verfeinern (siehe Bild 7).

Eine derartige Dreieckszerlegung hat ebenfalls die Eigenschaft, daß alle Eckpunkte der Dreiecke Mittelpunkte von Kreisen der Packung \mathcal{R} sind. Aus diesem Grund liegen in jedem Dreieck drei

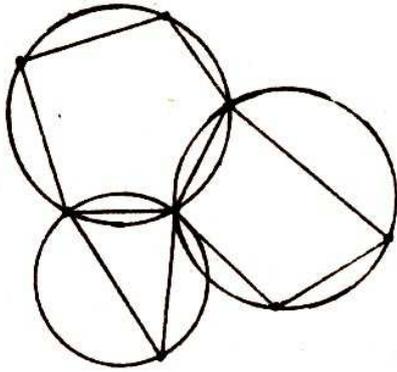


Bild 6

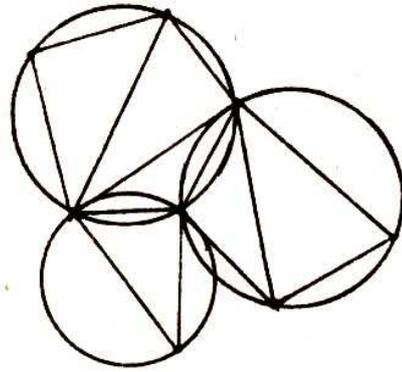


Bild 7

Kreissektoren von Kreisen aus \mathcal{P} , deren Inhaltsumme gleich dem Inhalt eines Halbkreises ist. Damit ist der Quotient aus der Summe der Kreissektoreninhalte, die innerhalb des Dreiecks ABC liegen, und seinem Inhalt $|ABC|$ eine nur von dem Flächeninhalt des Dreiecks abhängige Größe. Für diese Dichte errechnet man

$$\frac{\mathcal{P}}{2|ABC|}$$

. Sie wird für das kleinste Dreieck ABC_{\min} am größten und mit δ_0 bezeichnet, wobei ABC_{\min} ein Dreieck der Dreieckszerlegung ist. Betrachtet man jetzt wieder die gesamte Zerlegung der Ebene in Dreiecke, so ist anschaulich klar, daß $\delta(\mathcal{P}) \leq \delta_0$ für jede Packung \mathcal{P} gilt.

Folglich ist $\delta_{\max}(\mathcal{P}) \leq \delta_0$

Kann man nun eine Zerlegung der Ebene in Dreiecke so konstruieren, daß jedes Dreieck den kleinsten Flächeninhalt hat, dann ist $\delta(\mathcal{P}) = \delta_0 = \delta_{\max}(\mathcal{P})$.

Es ist nun die Aufgabe zu lösen, das kleinste unter allen Dreiecken einer solchen Zerlegung zu bestimmen. Gesucht ist damit das kleinste Dreieck, dessen Seitenlängen nicht kleiner als 2 sind und dessen Umkreisradius kleiner als 2 ist.

ABC sei ein Dreieck mit $2 \leq |AB| \leq |AC|$ und $2 \leq |AB| \leq |BC|$,

C' ein Punkt der gleichen Halbebene bzgl. $g(AB)$ wie C mit der Eigenschaft, daß ABC' gleichseitig ist (siehe Bild 8). Der Kreis $k_{C'}$ um C' schneidet die zu ihm kongruenten Kreise

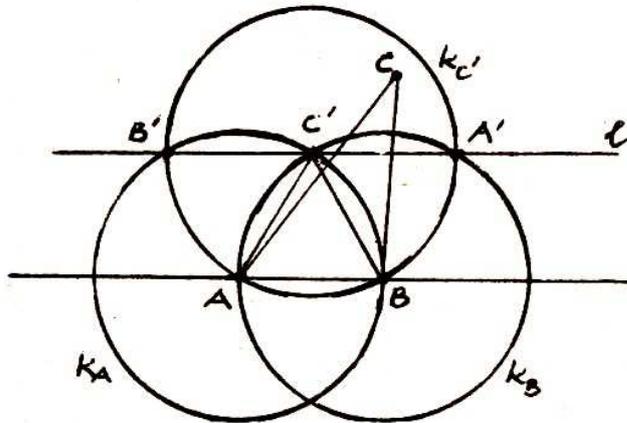


Bild 8

k_A und k_B um A und B mit dem Radius $|AB|$ neben A und B noch in den Punkten A' und B' . Die Parallele l zu $g(AB)$ durch C' verläuft durch diese Punkte A' und B' . Wegen $|AC| \geq |AB|$ und $|BC| \geq |AB|$ liegt C nicht im Inneren von k_A und k_B , jedoch im Inneren von k_C , weil der Umkreisradius von ABC kleiner als 2 ist. Damit liegt C auf oder oberhalb der Parallelen l und es gilt $|ABC| \geq |ABC'|$; wobei nur für $C \in l$, was $C = C'$ bedeutet, Gleichheit erreicht wird.

Mit $|AB| \geq 2$ folgt insgesamt $|ABC| \geq \sqrt{3}$.

Gleichheit wird nur dann erreicht, wenn ABC ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlängen 2 ist.

Für δ_0 errechnet man wegen $\delta_0 = \frac{\pi}{2 |ABC|_{\min}}$ den Wert

$$\delta_0 = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{12}} = \delta_{\max}(R).$$

Insgesamt gilt also für die Dichte $\delta(R)$ einer beliebigen Packung kongruenter Kreise in der Ebene die Aussage

$$\delta(R) \leq \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0,9068\dots \quad (1)$$

Gleichheit wird in (1) zum Beispiel erreicht, wenn alle Stützpolygone gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge 2 sind. Bild 9

zeigt einen Ausschnitt aus einer solchen sich über die gesamte Ebene erstreckenden Packung. Man kann sich überlegen, daß die im Bild 9 gezeigte Packung nicht die einzige mit $\delta(\rho) = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$ ist (siehe Bild 10).

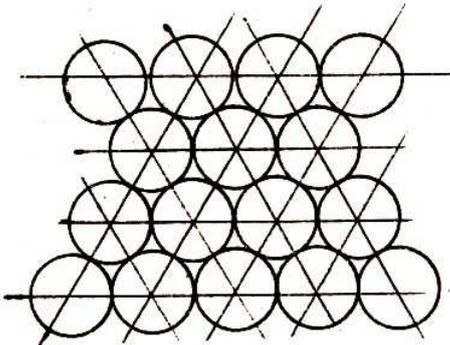


Bild 9

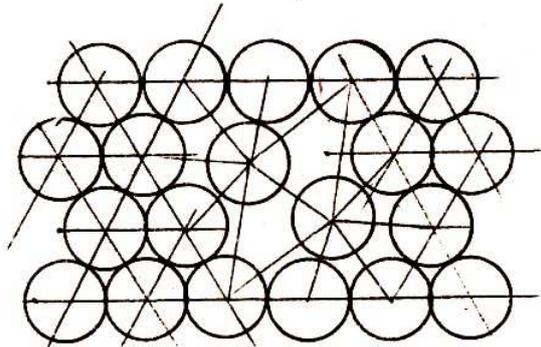


Bild 10

Damit haben wir die erste der beiden gestellten Aufgaben gelöst. Nun wenden wir uns der zweiten Aufgabe zu.

3. Bestimmung der dünnsten Einheitskreisüberdeckung der Ebene

\mathcal{U} sei eine Einheitskreisüberdeckung der Ebene und wir betrachten zu \mathcal{U} die Menge aller Stützkreise und zu jedem Stützkreis das zugehörige Stützpolygon. Auch hier bilden alle Stützpolygone eine Zerlegung \mathcal{Z} der Ebene in Polygone. Diese Zerlegung bzgl. \mathcal{U} ist eindeutig bestimmt.

Ein jedes Polygon einer solchen Zerlegung läßt sich durch Einzeichnen von sich nicht schneidenden Diagonalen in Dreiecke zerlegen, so daß eine Zerlegung der Ebene in Dreiecke entsteht (Bilder 11 und 12).

Eine derartige Dreieckezerlegung hat ebenfalls die Eigenschaft, daß alle Eckpunkte der Dreiecke Mittelpunkte von Kreisen der Überdeckung \mathcal{U} sind. Dann ist klar, daß jedes dieser Dreiecke durch die drei Kreise um die Dreieckspunkte überdeckt wird und folglich der Umkreisradius jedes solchen Dreiecks höchstens 1

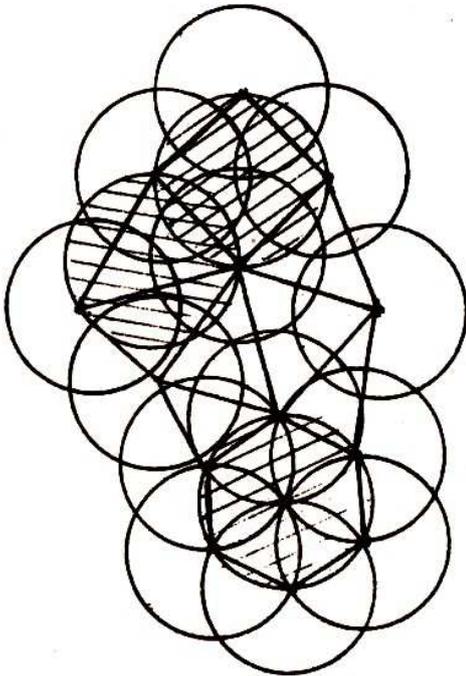


Bild 11

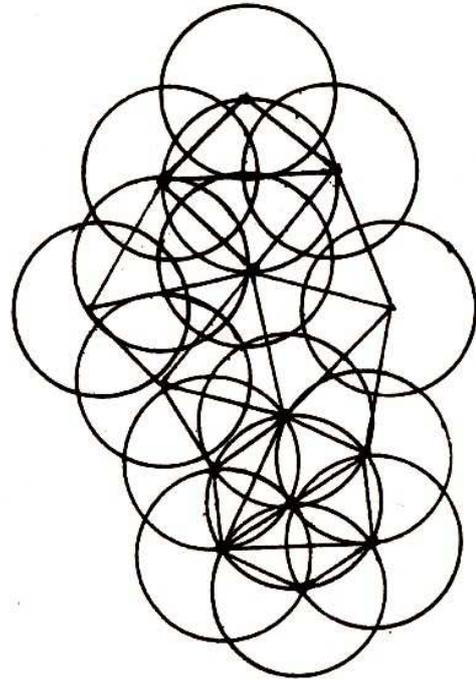


Bild 12

sein kann (Bild 13).

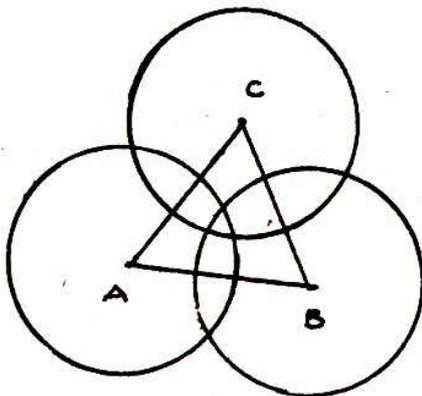


Bild 13

Diese Überlegungen führen uns darauf, den Quotienten $\frac{|S(A)| + |S(B)| + |S(C)|}{|ABC|}$ zu untersuchen. $|S(A)|$, $|S(B)|$,

$|S(C)|$ sind die Flächeninhalte der drei Einheitskreissektoren, die im Dreieck ABC liegen. Der Quotient gibt die Dichte $\delta(ABC)$

der Überdeckung des Dreiecks ABC durch die Einheitskreise um die Ecken an. Weil die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, ergänzen sich die genannten Kreissektoren zu einem halben Einheitskreis und es gilt $|S(A)| + |S(B)| + |S(C)| = \frac{1}{2}\pi$.

Damit erhalten wir

$$\bar{\delta}(ABC) = \frac{|S(A)| + |S(B)| + |S(C)|}{|ABC|} = \frac{\pi}{2|ABC|}.$$

Die Größe $\bar{\delta}(ABC)$ ist als Quotient eines halben Einheitskreisinhaltes und des Dreiecksinhaltes nur vom letzteren abhängig. Dabei darf der Umkreisradius des Dreiecks ABC nicht größer als 1 sein, da sonst keine Überdeckung mit Einheitskreisen in der beschriebenen Weise möglich ist. Da der kleinste Wert aller $\bar{\delta}(ABC)$ gesucht wird, muß $|ABC|$ möglichst groß sein. Dieser Fall kann nur für den Umkreisradius 1 eintreten. Folglich müssen wir das größte Dreieck ABC_{\max} bestimmen, das einem Einheitskreis einbeschrieben ist, um die kleinstmögliche Dichte $\bar{\delta}(ABC)$ zu erhalten. Dazu betrachten wir einen Kreis K vom Radius 1 und ein einbeschriebenes Dreieck ABC (Bild 14).

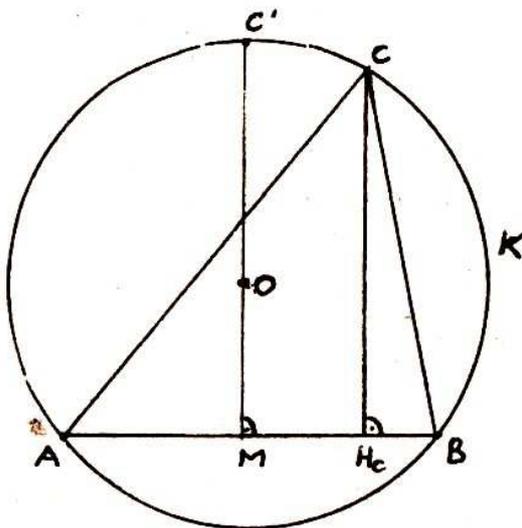


Bild 14

Wir können voraussetzen, daß alle drei Eckpunkte des Dreiecks auf dem Rand liegen, ansonsten ließe sich das Dreieck vergrößern. Nehmen wir nun an, daß das Dreieck nicht gleichseitig ist. Dann gibt es einen Eckpunkt (etwa C), von dem zwei Dreiecksseiten unterschiedlicher Länge ausgehen. Mit H_c bezeichnen wir den Lot-

fußpunkt des Lotes von C auf $g(AB)$. Wegen $|AC| \neq |BC|$ kann H_C nicht Mittelpunkt von AB sein. Errichten wir im Mittelpunkt M von AB die Senkrechte, so schneidet diese den Kreisbogen, auf dem auch C liegt in C' . Wegen $|MC'| > |H_C C|$ folgt $|ABC'| > |ABC|$. Damit ist das angenommene Dreieck ABC nicht das größte Dreieck in K . Wenn wir die Existenz eines solchen maximalen Dreiecks unbewiesen voraussetzen, dann muß das maximale Dreieck gleichseitig sein. Damit läßt sich nun ABC_{\max} leicht bestimmen. Weil sich im Dreieck die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilen, gilt $|OM| = \frac{1}{2}$, wobei O der Mittelpunkt des Umkreises ist (Bild 15).

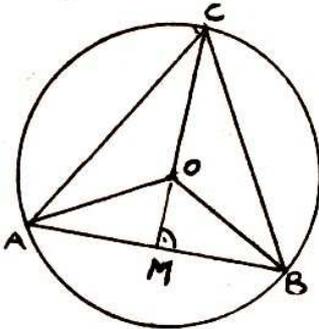


Bild 15

Im rechtwinkligen Dreieck AMC gilt nach dem Satz von Pythagoras die Beziehung $|AC|^2 = \left(\frac{|AC|}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$, woraus

$$|AC| = \sqrt{3} \quad (= |AB| = |BC|) \quad \text{folgt.}$$

Es ist $|ABC|_{\max} = \frac{1}{2} |AB| \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{3}$ und folglich ist

$$\delta(ABC_{\max}) = \frac{\pi}{2 \cdot \frac{3}{4} \sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{27}} = 1,2092\dots$$

Betrachten wir jetzt die Zerlegung der gesamten Ebene in Dreiecke, so ist anschaulich klar, daß für jede Überdeckung die Ungleichung

$$\delta(\mathcal{U}) \geq \delta(ABC_{\max}) = \frac{2\pi}{\sqrt{27}} = \delta_{\min}(\mathcal{U}) \quad (2)$$

zutrifft.

Da man eine Zerlegung der Ebene in gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge $\sqrt{3}$ konstruieren kann, wird tatsächlich auch der kleinste Dichtewert erreicht.

Im Bild 16 ist ein Ausschnitt aus einer Überdeckung der Ebene mit der Dichte $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$ dargestellt. Alle Stützpolygone sind gleichseitige Dreiecke.

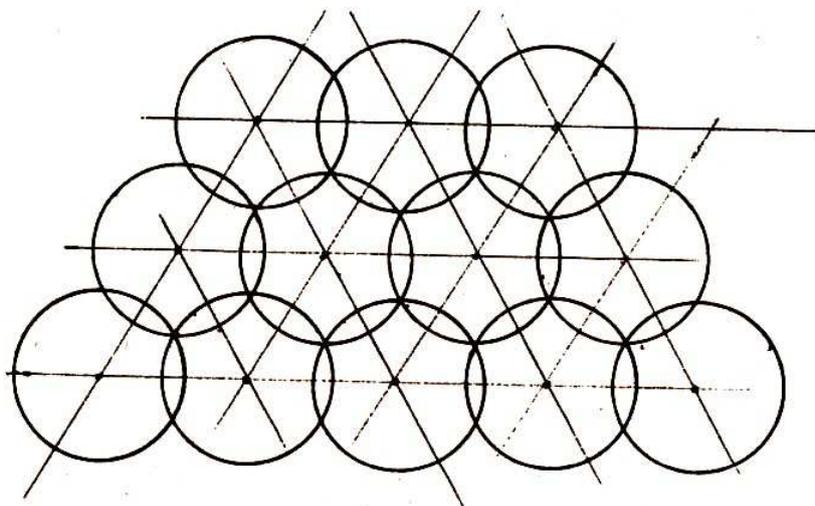


Bild 16

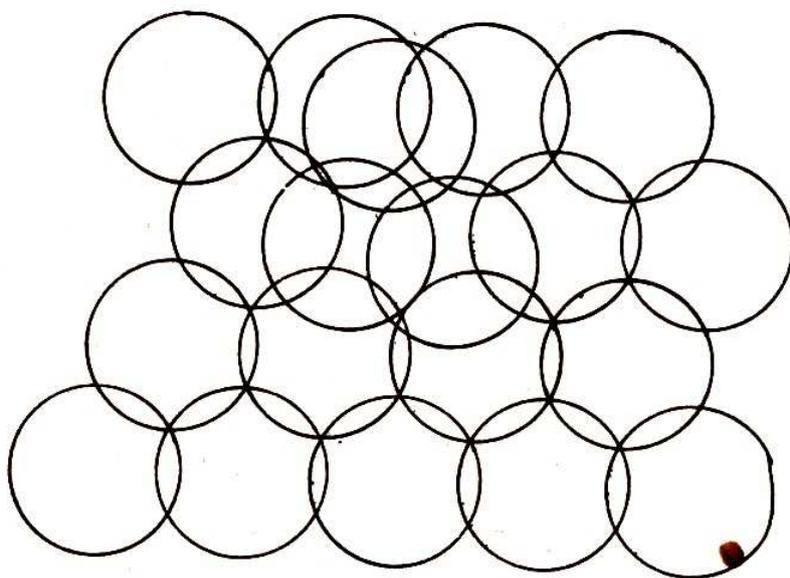


Bild 17

Natürlich ist die im Bild 16 vorgestellte Überdeckung nicht die einzige mögliche mit der Dichte $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$ (Bild 17 zeigt eine weitere.).

Damit ist auch die zweite gestellte Aufgabe gelöst. In beiden Aufgaben haben wir Einheitskreispackungen bzw. Einheitskreisüberdeckungen angeben können, denen wir den jeweiligen extremalen Dichtewert $\delta_{\max}(\rho)$ bzw. $\delta_{\min}(\tilde{u})$ zuordnen konnten.

Literatur:

1. L. Fejes Toth: Lagerungen in der Ebene auf die Kugel und im Raum, Springer, 1953

Dr. K. Kirchner
 Dr. M. Schmitz
 PH Erfurt
 Sektion Mathematik/Physik

Zwei Möglichkeiten der Erzeugung bemerkenswerter Polyeder aus den Platonischen Körpern (Fortsetzung)

- (4) Ikosaeder als Ausgangspolyeder (Abb. 5)

Durch die geschilderte Konstruktion entstehen aus den Seitenflächen des Ikosaeders gleichfalls reg. Dreiecke als eine Flächenart. Als zweite Flächenart erscheinen reg. Fünfecke. An einer Ecke des erzeugten Körpers stoßen in

Reihenfolge reg. Dreieck, reg. Fünfeck, reg. Dreieck, reg. Fünfeck aneinander, so daß der entstandene Körper durch das Symbol $(3,5,3,5)$ bezeichnet werden kann. Durch Anwenden unserer Vorschrift ergibt sich: $E'=30$, $F'=32$ und $K'=60$.

(5) Dokaeder als Ausgangspolyeder (Abb. 6)

Als Flächenarten entstehen reg. Dreiecke und reg. Fünfecke. Jede Ecke des neuen konvexen Polyeders wird durch je 2 reg. Dreiecke bzw. Fünfecke gebildet, die in gleicher Weise wie unter (4) angeordnet sind. Folglich läßt sich das Symbol $(3,5,3,5)$ zur Kennzeichnung des Körpers verwenden. Die Berechnung von E' , F' , K' aus E , F , K des Dodekaeders liefert $E'=30$, $F'=32$ und $K'=60$. Bei dem hier erzeugten Polyeder handelt es sich um den topologisch gleichen Körper, der aus dem Ikosaeder erzeugt wurde, was durch weitere Überlegungen bestätigt werden kann.

Die beiden erzeugten konvexen Polyeder $(3,4,3,4)$ und $(3,5,3,5)$ weisen Gemeinsamkeiten auf in der Form, daß ihre Flächen reg. n -Ecke sind (nicht kongruent, da ja 2 Flächenarten erscheinen) und ihre Polyederecken untereinander kongruent sind. Es sind 2 Vertreter der sogenannten Archimedischen Körper. Das sind

halbreguläre konvexe Körper mit regulären (aber nicht notwendigerweise kongruenten) n -Ecken als Seitenflächen und kongruenten Polyederecken.

Für das Polyeder $(3,4,3,4)$ findet man in der Fachliteratur häufig die Bezeichnung Kuboktaeder, während $(3,5,3,5)$ Ikosidodekaeder genannt wird. aus dieser Bezeichnung ist ebenfalls ersichtlich, daß $(3,4,3,4)$ sowohl aus dem Hexaeder als auch aus dem Oktaeder erzeugbar ist. Mittels unseres Konstruktions-

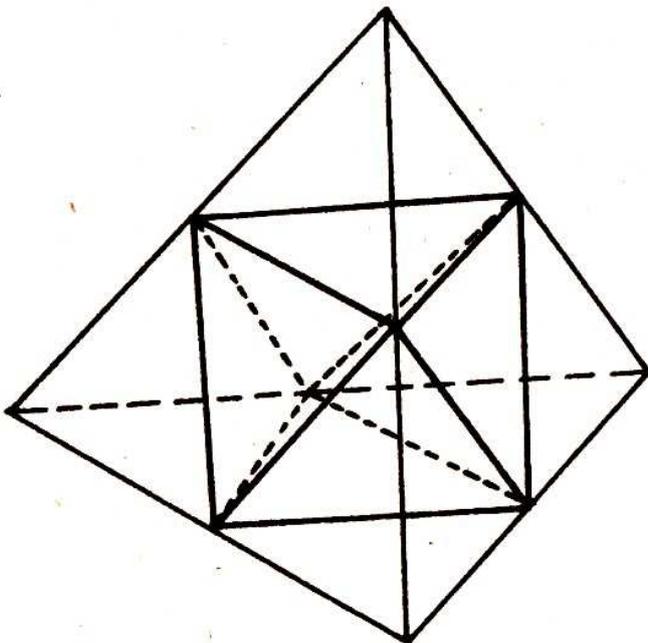


Abb. 2

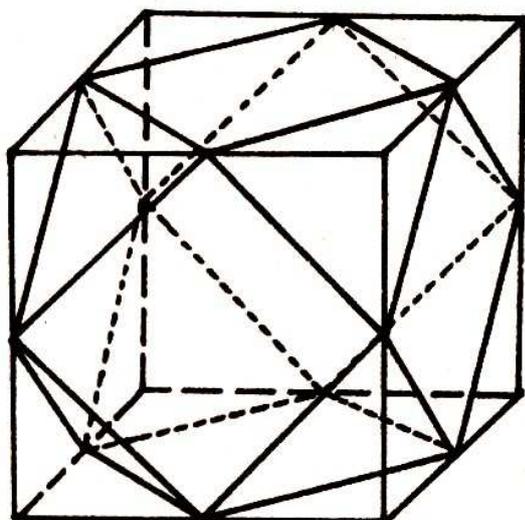


Abb. 3

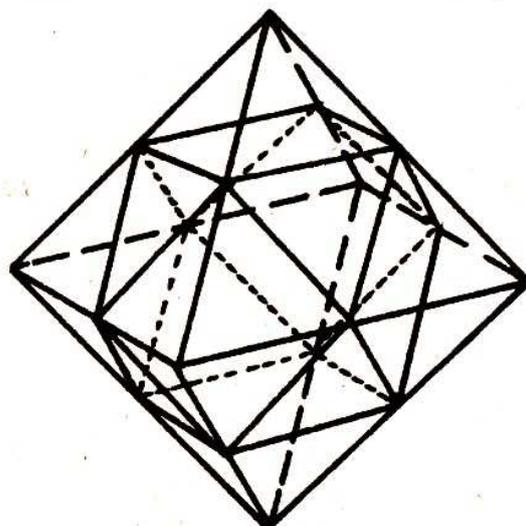


Abb. 4

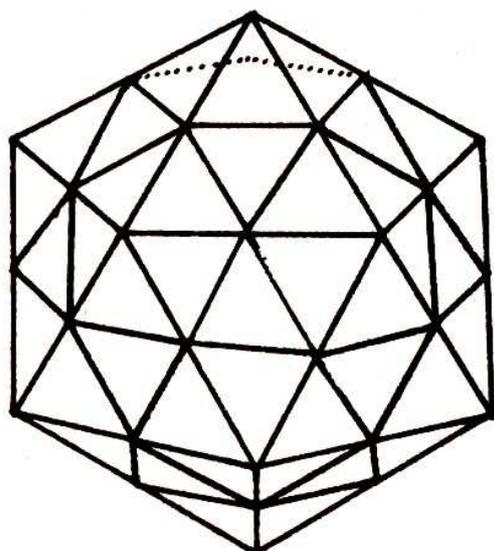


Abb. 5

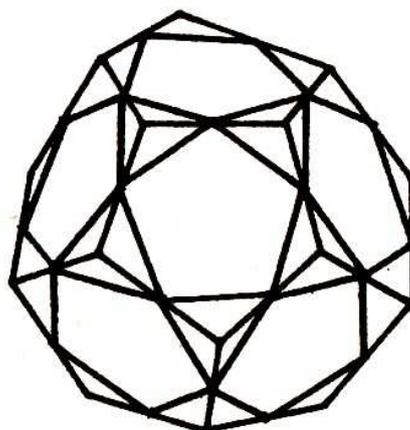


Abb. 6

prinzips ist $(3,5,3,5)$ aus Ikosaeder als auch Dodekaeder herstellbar.

Neben diesen beiden Polyedern existieren weitere 11 Archimedische Körper. Es gibt eine weitere Sorte halbrig. konvexer Körper, die als dual-archimedische Körper bezeichnet werden. Deren Flächen sind allesamt kongruent zueinander, während ihre Ecken regelmäßig (aber nicht notwendigerweise kongruent) sind. Sie können z.B. mittels Dualitätsbetrachtungen aus den Archimedischen Körpern erzeugt werden und umgekehrt.

Bisher haben wir festgestellt, daß mittels unseres ersten Konstruktionsprinzips aus den Platonischen Körpern selbst Platonische Körper oder Archimedische Körper erzeugt werden.

Untersuchen wir nun im folgenden, welche Körper entstehen, wenn die Konstruktion fortgesetzt und auf die beiden erhaltenen Polyeder $(3,4,3,4)$ bzw. $(3,5,3,5)$ angewendet wird. Um dabei die Anzahlen E' , F' , K' zu ermitteln, gelten weiterhin unsere bisher benutzten Vorschriften. Nehmen wir als Ausgangspolyeder $(3,4,3,4)$, erhalten wir als Resultat ein konvexes Polyeder mit 24 Ecken, 26 Flächen und 48 Kanten. Allerdings stellen wir nun fest, daß nicht alle entstandenen Kanten gleiche Länge besitzen. Da das Kuboktaeder 2 verschiedene Flächenarten besitzt, entstehen zunächst als Flächenarten reg. Dreiecke und reg. Vierecke. Die dritte Flächenart ist ein Viereck, dessen jeweils benachbarte Seiten die Seiten der reg. Dreiecke und die der reg. Vierecke sind. Bezeichnen wir die Länge einer Kante des Kuboktaeders mit a , so liefert eine elementare Rechnung die Seitenlänge der reg. Dreiecke mit $a/2$, während die Seitenlänge des reg. Vierecks $a/\sqrt{2}$ beträgt. Diese Größen stellen benachbarte Seiten der dritten Flächenart dar. Damit kann diese Flächenart kein Vertreter reg. n -Ecke sein. Die Anwendung unserer Konstruktion auf das Kuboktaeder liefert weder ein reg. noch halbreg. konvexes Polyeder, da die oben aufgeführten Bedingungen nicht erfüllt sind, obwohl die Ecken kongruent sind. Bezeichnet man diese Polyeder mit unserem bislang verwendeten Symbol, wäre die Bezeichnung $(3,\bar{4},4,\bar{4})$ möglich. Jedoch muß das Symbol deutlich von den bisherigen abgehoben werden, da $\bar{4}$ kein reg. n -Eck darstellt. Setzt man die Konstruktion der Verbindung der Kantenmittelpunkte weiter fort, entsteht aus $(3,\bar{4},4,\bar{4})$ ein konvexes Polyeder mit 48 Ecken, 50 Flächen und 96 Kanten, wobei allerdings schon 3 verschiedene Kantenlängen am erzeugten Polyeder auftreten und außerdem die Ecken nicht mehr alle kongruent sind. Ähnliche Aussagen treffen zu, wenn wir das Ikosidodekaeder als Ausgangspunkt der Konstruktion wählen. Es sei nur angemerkt, daß das Ergebnis ein konvexes Polyeder ist, welches durch $(3,\bar{4},5,\bar{4})$ beschrieben werden kann und 60 Ecken, 62 Flächen und 120 Kanten besitzt. Dieses ist gleichfalls we-

der reg. noch halbreg. Auch diese Konstruktion läßt sich fortsetzen.

Bei Kenntnis des Konstruktionsprinzips, seiner arithmetischen Beschreibung und Anwendung des Eulerschen Polyedersatzes lassen sich weitere Beziehungen ableiten. Für alle von uns erzeugten Polyeder gelten: $E'=K$, $F'=K+2$, $K'=2K$.

Diese Beziehungen erscheinen einfacher als die von uns benutzte rekursive Vorschrift, doch war es Sinn der Sache, anschaulich vorzugehen.

Für die Polyedererzeugung $(3,4,3,4)$ aus $(3,3,3,3)$ sowie die Erzeugung von konvexen Polyedern aus $(3,4,3,4)$ bzw. $(3,5,3,5)$ und der jeweils weitergeführten Konstruktion nach dem gleichen Prinzip besitzen weiterhin folgende Gleichungen Gültigkeit:
 $E' = 2E = 2F-4$, $F' = 2E+2 = 2F-2$, $K' = 4E = 4F-8$

Neben dem Eulerschen Polyedersatz sind das reg. Oktaeder, die halbreg. Kuboktaeder und Ikosidodekaeder und alle durch die Konstruktion daraus folgenden Körper weiterhin durch folgende Beziehungen ausgezeichnet:

$$E' = F'-2 = K'/2, \quad F' = E'+2 = K'/2+2, \quad K' = 2E' = 2F'-4$$

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß durch unsere erste Konstruktionsmöglichkeit aus den Platonischen Körpern selbst ein Platonischer Körper (Oktaeder) oder ein Archimedischer Körper (Kuboktaeder oder Ikosidodekaeder) entstehen kann. Bei weiterer Fortführung des Verfahrens erzeugt man konvexe, aber weder reg. noch halbreg. Polyeder, sondern bei jedem neu gewonnenen Polyeder "nimmt die Regularität weiter ab".

Frank Heinrich
 Sektion Mathematik
 Bereich Methodik

Berichtigung zu: „Gibt es eine Teilbarkeitsregel für die 49?“ (6/89)

In der Bemerkung 1 (S. 84) muß es heißen:

a kann nur dann durch $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$ teilbar sein, wenn es durch das k.g.V. von $\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ teilbar ist. Das Beispiel $a = 2$, $m = 2$, $n_1 = n_2 = 2$ zeigt, daß das Kriterium notwendig, aber nicht hinreichend ist.

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung“

Leiter: Stefan Posselt

Chefredakteur: Eckhard Stein

Redaktion: C. Dahms, S. Krieg, R. Fötsch, N. Patzschke

Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900

Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.

Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

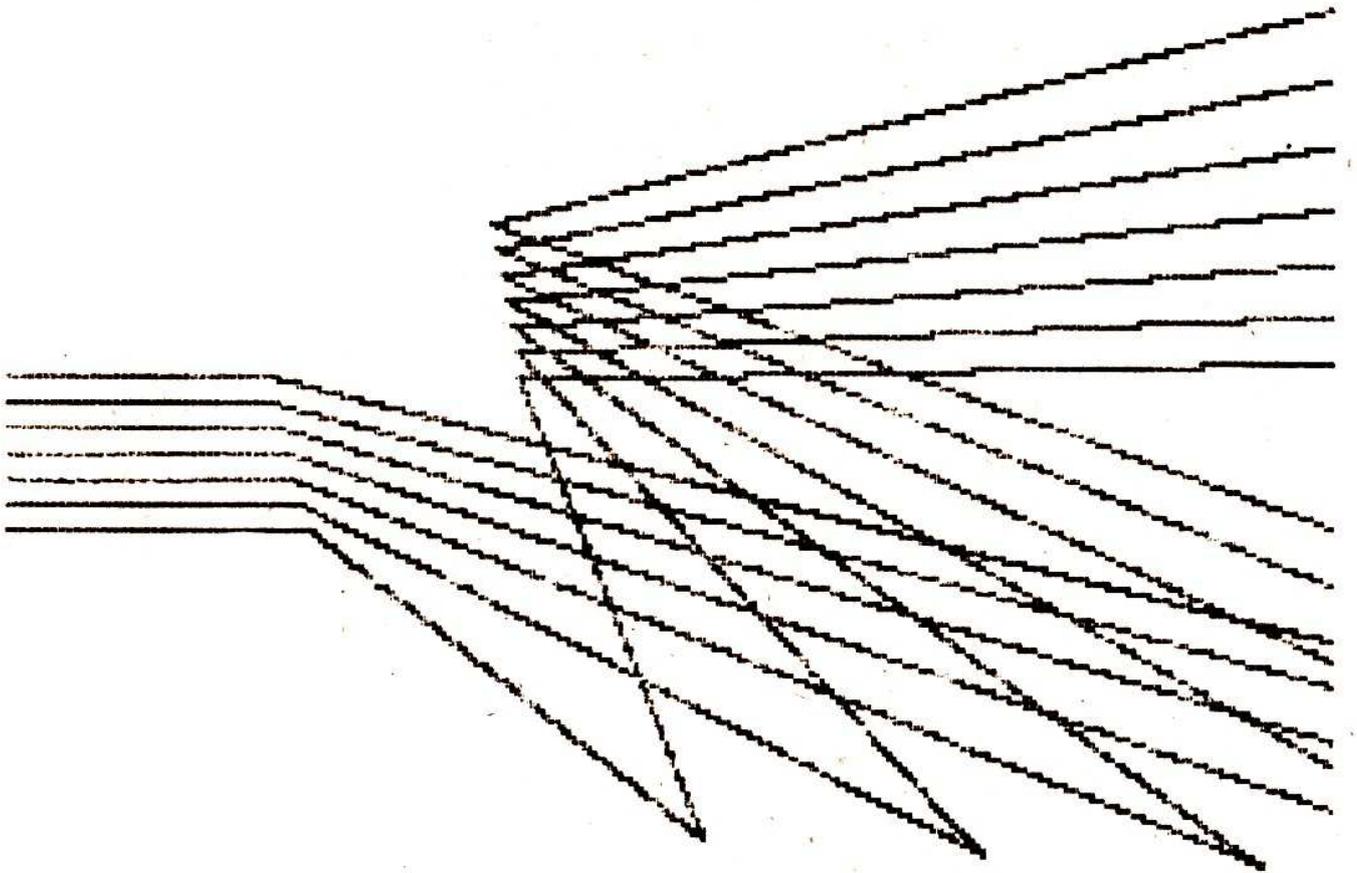
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Titelbild: M. Torke

Redaktionsschluß: 26. 6. 89

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	23 (1989) 10	S. 145–160
----------------	--------	------	--------------	------------



wurzel

11 · 89

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

**Herausgegeben vom Jugendobjekt Studien-
vorbereitung-Studienwerbung der Sektion
Mathematik an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena**

23. Jahrgang ISSN 0232-4539

Sonderpreis für DDR: 0,20 M

Über die Zykloide (Radkurven)

Der nachfolgende Beitrag soll in die Abschnitte
 Über die Parameterdarstellung einer Kurve,
 Weitere Beispiele,
 Die Zykloide (Radkurve) und
 Zum Zykloidenpendel

gegliedert werden. Er verfolgt das Ziel, den Leser für die Beschäftigung mit weiteren interessanten Kurven anzuregen.

1. Über die Parameterdarstellung einer Kurve

Im bisherigen Unterricht haben Sie die graphische Darstellung von Funktionen untersucht, die in der Regel durch eine Funktionsgleichung der Gestalt

$$(1) \quad y = f(x)$$

gegeben waren. In dieser Gleichung bezeichnet man bekanntlich x als die unabhängige Variable oder das Argument und y als die abhängige Variable oder den Funktionswert. Es muß die Bedingung erfüllt sein, daß jedem x genau ein y zugeordnet ist. Interpretiert man x und y als die Koordinaten eines Punktes in einem kartesischen Koordinatensystem, so erhält man die graphische Darstellung der betreffenden Funktion.

Die kartesischen Koordinaten x und y eines Punktes P können aber auch durch die beiden Gleichungen

$$(2) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad x(t) \text{ und } y(t) \text{ stetig,}$$

gegeben sein. In diesem Falle ist t die unabhängige Variable, x und y sind abhängige Variable.

Wir fordern, daß jedem t genau ein x und genau ein y zugeordnet ist. Wenn t von t_1 bis t_2 wächst, so durchläuft der Punkt P einen Kurvenbogen in einem bestimmten Durchlaufsinne.

Die Gleichungen (2) bezeichnet man als die Parameterdarstellung der betreffenden Kurven. Sie gehen im Sonderfall $x = x(t) = t$ über in $y = y(x)$, d.h. in die Funktionsgleichung (1). Die Möglichkeit der Parameterdarstellung einer beliebigen Kurve ergibt sich daraus, daß man sie als die Bahnlinie eines Punktes P betrachten kann. Die Koordinaten x und y von P sind in jedem Augenblick Funktionen der Zeit t , die als Parameter zu be-

trachten ist.

Als 1. Beispiel betrachten wir die Parameterdarstellung eines Kreises mit dem Mittelpunkt $M(a,b)$ und dem Radius r , die durch die beiden Gleichungen

$$(3) \quad x = x(t) = a + r \cos t, \quad y = y(t) = b + r \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

gegeben ist (a, b und r beliebig reell). Der Beweis ist sehr einfach, denn aus (3) folgt:

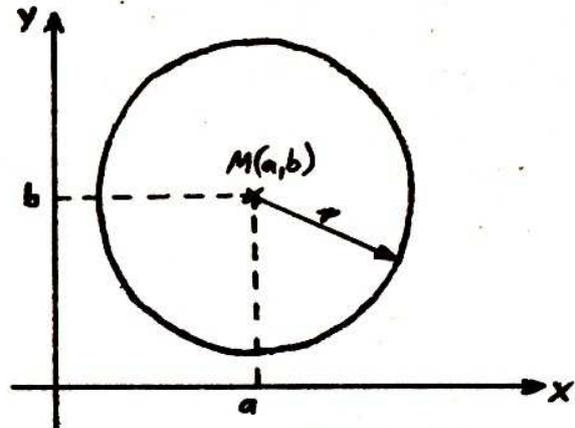
$$x - a = r \cos t, \quad y - b = r \sin t$$

$$(x-a)^2 = r^2 \cos^2 t, \quad (y-b)^2 = r^2 \sin^2 t$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Die letzte Gleichung kennen Sie aus der analytischen Geometrie als die Gleichung eines Kreises in allgemeiner Lage. Wenn sich der Kreis in Mittelpunktlage befindet ($a=b=0$) und überdies $r=1$ ist, so geht (3) über in



Skizze 1

$$(4) \quad x=x(t)=\cos t, \quad y=y(t)=\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

d.h. in die Definition der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis.

Die Vorteile der Parameterdarstellung sollen am Beispiel eines Kreises in Mittelpunktlage mit beliebigem Radius r erläutert werden, der durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{bzw.}$$

$$y = g(x) = \pm \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \leq x \leq +r$$

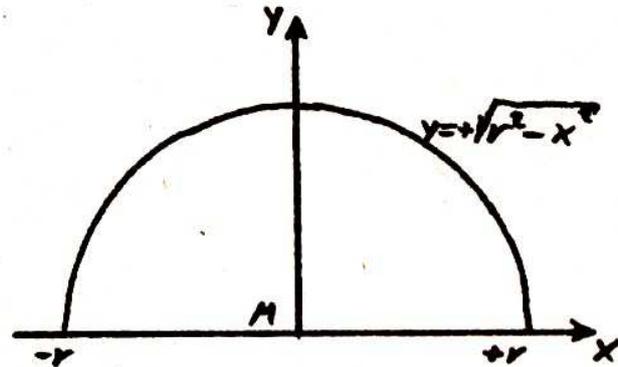
dargestellt wird. Betrachtet man die Funktion

$$y = f(x) = +\sqrt{r^2 - x^2} \quad (\text{nur positives Vorzeichen der Wurzel!}),$$

so erhält man als Bild dieser Funktion den oberhalb der x -Achse gelegenen Halbkreis. Die 1. Ableitung

$$y' = f'(x) = - \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

ist für $x = \pm r$ nicht definiert. Das kann man auch daran erkennen, daß die Tangenten an den Kreis in den Punkten $(+r, 0)$ und $(-r, 0)$ senkrecht zur x -Achse stehen und folglich ihr Neigungswinkel φ zur



Skizze 2

positiven Richtung der x -Achse 90° beträgt. Wegen $y' = \tan \varphi$ ist für $x = \pm r$ die 1. Ableitung nicht definiert. Diesen Singularitäten (Unstetigkeiten) der 1. Ableitung entsprechen jedoch keine geometrischen Singularitäten, denn der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ hat in jedem Kurvenpunkt eine Tangente.

In der Parameterdarstellung (2) einer Kurve ist keine der beiden Koordinaten x und y , die ja geometrisch völlig gleichberechtigt sind, bevorzugt.

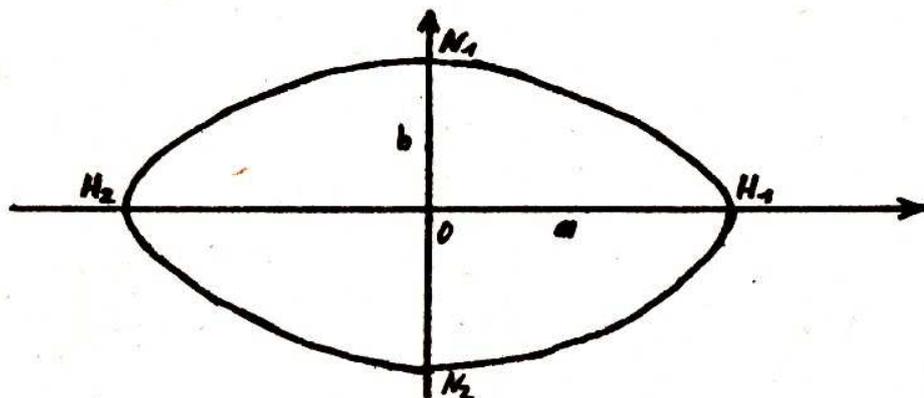
2. Weitere Beispiele

Im folgenden sollen noch 2 einfache Beispiele für die Parameterdarstellung einer Kurve angeführt werden.

- Die beiden Gleichungen

$$(5) \quad x = x(t) = a \cos t, \quad y = y(t) = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(a und b beliebig reelle mit $a > b$, $a > 0$, $b > 0$) sind die Parameterdarstellung einer Ellipse in Mittelpunktslage, wobei a die große Halbachse und b die kleine Halbachse ist. $H_1(a, 0)$ und $H_2(-a, 0)$ sind die Hauptscheitelpunkte, $N_1(0, b)$ und $N_2(0, -b)$ die Nebenscheitelpunkte. Wenn t von 0 bis 2π wächst, durchläuft der Punkt $P(x, y)$ die Ellipse im mathematisch positivem Sinn.



Skizze 3

Um das zu zeigen, leiten wir aus den Gleichungen (5) durch einfache Umformungen die Mittelpunktsleichung der Ellipse her:

$$\frac{x}{a} = \cos t, \quad \frac{y}{b} = \sin t$$

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t, \quad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Im Falle $a = b = 1$ gehen die Gleichungen (5) in die Gleichungen (4) über, d.h. in die Parameterdarstellung des Einheitskreises.

- Wir betrachten eine Gerade, die durch die beiden gegebenen Punkte $P_0(a, \alpha)$ und $P_1(a+b, \alpha+\beta)$ verläuft. Nach der Zweipunktgleichung unserer Geraden gilt dann:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}, \quad \text{d.h.}$$

$$\frac{y-\alpha}{x-a} = \frac{(\alpha+\beta)-\alpha}{(a+b)-a},$$

$$\frac{y-\alpha}{x-a} = \frac{\beta}{b}. \quad \text{Daraus folgt:}$$

$$y = f(x) = \frac{\beta}{b} x + \left(\alpha - \frac{a\beta}{b} \right)$$

$$= \frac{\beta}{b} x + \left(\frac{\alpha b - a\beta}{b} \right)$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß die beiden Gleichungen

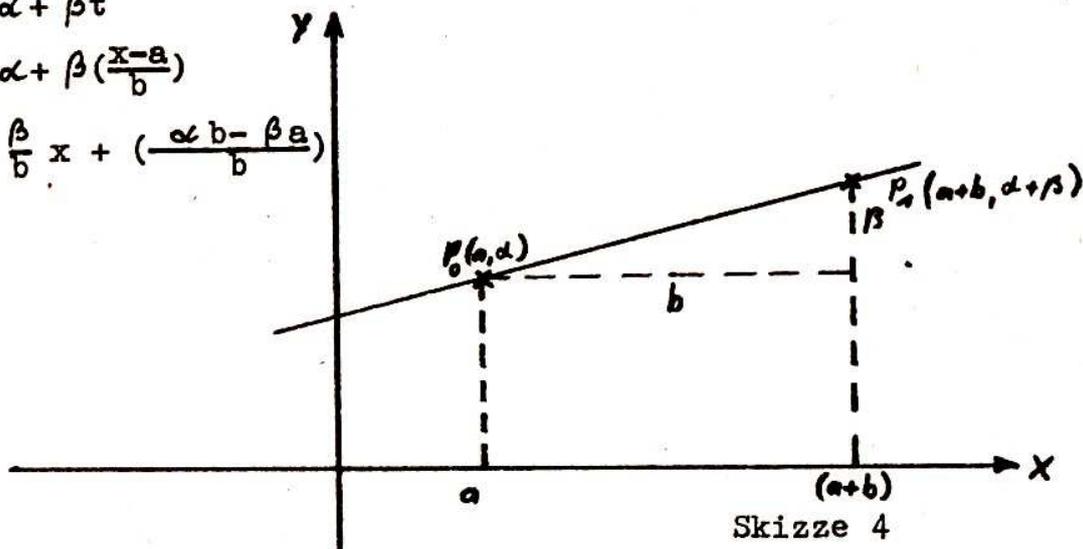
$$(6) \quad x=x(t)=a+bt, \quad y=y(t)=\alpha+\beta t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

die Parameterdarstellung der von den Punkten $P_0(a, \alpha)$ und $P_1(a+b, \alpha+\beta)$ begrenzten Strecke auf dieser Geraden sind:

$$y = \alpha + \beta t$$

$$= \alpha + \beta \left(\frac{x-a}{b} \right)$$

$$= \frac{\beta}{b} x + \left(\frac{\alpha b - \beta a}{b} \right)$$

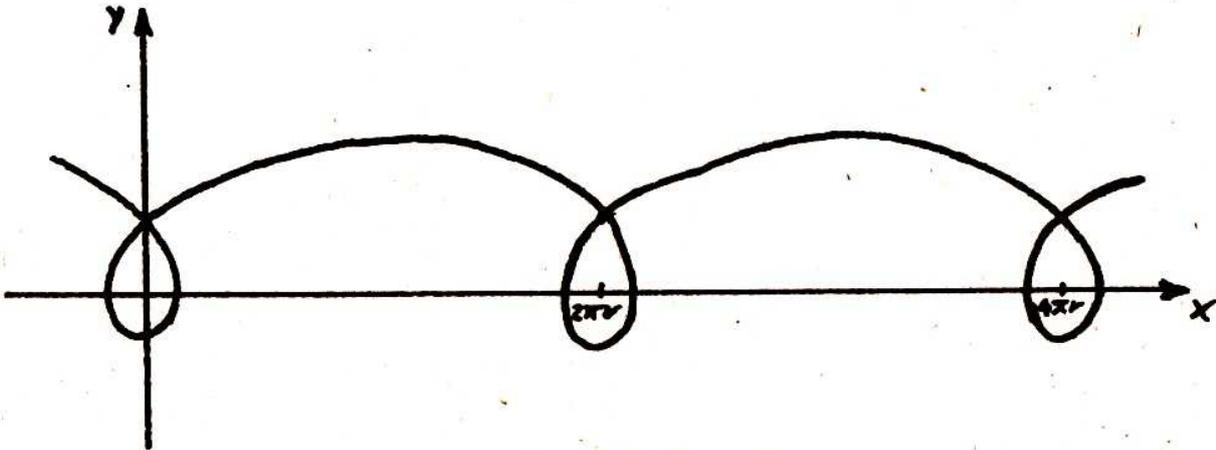


3. Die Zykloide (Radkurve)

Gegeben sei ein Kreis K mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r . Ein Punkt P sei fest mit dem Kreismittelpunkt M verbunden, wobei $\overline{PM} = a$ sein möge. Der Kreis K rolle (ohne zu gleiten) auf der x -Achse. Wir wollen untersuchen, welche Kurven der Punkt P dabei beschreibt, und welche Parameterdarstellung diese Kurve hat. Die Bezeichnung Radkurve ist darauf zurückzuführen, daß man sich ein auf einer Ebene rollendes Rad vorstellen kann und z.B. auf einer Speiche eine Marke befestigt ist. Um dem Leser die Vorstellung zu erleichtern, welche Kurve eine derartige Marke beschreibt, empfehlen wir, einen Kreis aus Pappe auf einem Lineal abrollen zu lassen. Mit etwas Geschick ist es möglich, die Kurve selbst zu zeichnen, indem man auf dem Pappkreis ein Loch anbringt und beim Abrollen einen Bleistift mitführt.

Allerdings ist die geschilderte Möglichkeit der Veranschaulichung eine wesentliche Einschränkung des Problems, nämlich die

Wenn t von 0 bis 2π wächst, liegt eine volle Kreisumdrehung vor. Dabei beschreibt der Punkt P einen Zykloidenbogen. Die Kurve insgesamt bezeichnet man als Zykloide mit Doppelpunkten. Sie hat folgendes Aussehen:



Skizze 7

Um die Parameterdarstellung dieser Kurve herzuleiten, beachten wir:

$$t : x_M = 2\pi : 2\pi r, \quad \text{d.h.} \quad x_M = rt \quad (\text{siehe Skizze 6})$$

$$\sin t = \frac{u}{a}, \quad \text{d.h.} \quad u = a \cdot \sin t$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_M - u \\ &= rt - a \sin t \end{aligned}$$

$$\cos t = \frac{v}{a}, \quad \text{d.h.} \quad v = a \cos t$$

$$\begin{aligned} y(t) &= y_M - v \\ &= r - a \cos t \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich für die Parameterdarstellung der Zykloide mit Doppelpunkten:

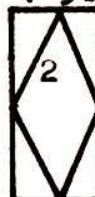
$$(6) \quad \begin{aligned} x(t) &= rt - a \sin t \\ y(t) &= r - a \cos t. \end{aligned}$$

Preisaufgaben

V 55 Про выпуклый четырёхугольник ABCD известно, что окружность с диаметром AB касается прямой CD. Докажите, что окружность с диаметром CD касается прямой AB тогда и только тогда, когда прямые BC и AD параллельны!



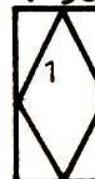
V 56 Unter welchen Bedingungen ist es möglich, in ein Dreieck ABC einen Rhombus CDEF so einzubeschreiben, daß D innerer Punkt von CA, E innerer Punkt von AB sowie F innerer Punkt von BC ist und sein Flächeninhalt gleich der Hälfte des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC ist?



V 57 Man beweise, daß für eine beliebige natürliche Zahl n der Wert des Polynoms $36n^4 + 48n^3 + 40n^2 + 16n + 5$ keine Primzahl ist!



V 58 Alle Glieder der Folge $x_n = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n$ lassen sich eindeutig in der Art $x_n = q_n + r_n \cdot \sqrt{2} + s_n \cdot \sqrt{3} + t_n \cdot \sqrt{6}$ darstellen, wobei q_n, r_n, s_n, t_n ganze Zahlen sind.



Man bestimme $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n/q_n), \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n/q_n), \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n/q_n)$!

V 59 In einem Kreis vom Radius R sei ein n-Eck der Fläche A einbeschrieben. Auf jeder Seite des n-Ecks wird ein Punkt ausgezeichnet. Man zeige, daß der Durchmesser des von den ausgezeichneten Punkten gebildeten n-Ecks nicht kleiner als $2A/R$ ist!



V 60 Für welche natürlichen Zahlen n ist



$$n^{n^{n^{n^n}}} - n^{n^{n^n}}$$

durch 100 teilbar?

Einsendeschluß: 1. 2. 1990

Zwei Möglichkeiten der Erzeugung bemerkenswerter Polyeder aus den Platonischen Körpern (Teil 2)

Als erste Möglichkeit der Erzeugung bemerkenswerter Polyeder aus den Platonischen Körpern wurden im ersten Teil Ausführungen gemacht, welche Körper entstehen, wenn die Kantenmittelpunkte der Platonischen Körper als Eckpunkte eines neuen konvexen Polyeders angesehen werden. Beim zweiten Konstruktionsprinzip wollen wir davon ausgehen, den Seitenflächen der Platonischen Körper gerade Pyramiden aufzusetzen. In welchem Zusammenhang diese Konstruktion zur ersten steht, werden wir später sehen. Die Art der entstehenden Körper ist dabei von der Höhe der Pyramiden abhängig.

Ist α der Flächenwinkel des Platonischen Körpers und β der Neigungswinkel der Pyramide, also der Winkel zwischen Grundfläche und Seitenfläche, so sollen folgende 3 Fälle untersucht werden:

- (a) $\alpha/2 + \beta > 90^\circ$;
- (b) $\alpha/2 + \beta < 90^\circ$;
- (c) $\alpha/2 + \beta = 90^\circ$.

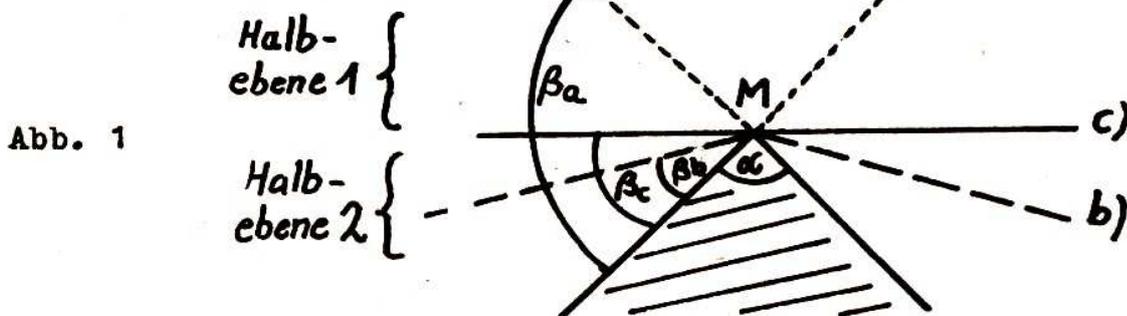


Abb. 1 stellt einen Ebenenschnitt durch einen Kantenmittelpunkt M der Kante k eines Platonischen Körpers dar, wobei die Ebene $\mathcal{E} \perp k$ steht. Da der Neigungswinkel einer Pyramide in unserem Fall kleiner als ein rechter Winkel sein muß, ergibt sich: $0 < \beta < 90^\circ$. Aus der Kenntnis der Größe der Flächenwinkel der Platonischen Körper folgt weiter $\alpha/2 < 90^\circ$. Diese beiden Bedingungen lassen so die 3 zu untersuchenden Fälle (a), (b), (c) zu. Diese 3 Fälle zeigen, wie 2 benachbarte Flächen des neu über eine Kante des Ausgangspolyeders entstehenden Körpers zueinander liegen.

Fall (a): Hier sei zunächst der Spezialfall $\alpha + \beta = 180^\circ$ ausgeschlossen.

Die ursprüngliche Kante bleibt Kante des neuen Polyeders. Die von M ausgehenden Halbgeraden entfernen sich vom Ausgangspolyeder in Richtung der aufgesetzten Pyramidenspitzen in Halbebene 1. Der entstehende Körper ist nicht konvex.

Fall (b): Die ursprüngliche Kante bleibt gleichfalls Kante des neuen Polyeders. Die von M verlaufenden Halbgeraden zur Pyramidenspitze verbleiben in Halbebene 2. Der entstehende Körper ist konvex.

Fall (c): Die ursprüngliche Kante stellt keine Kante des neuen Polyeders dar. Die von M ausgehenden Halbgeraden liegen in einer Ebene, so daß die Kante des Ausgangspolyeders innerhalb einer Seitenfläche des neuen Polyeders liegt. Diese 3 Fälle sind in Abb. 2 für das Hexaeder als Ausgangspolyeder dargestellt.

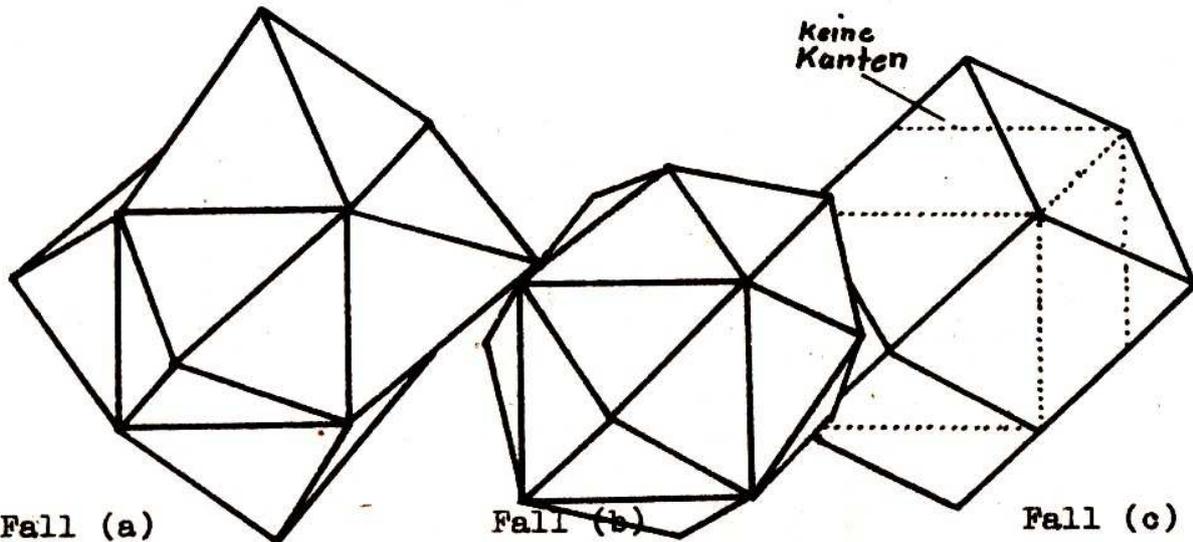


Abb. 2

Die Höhe h der aufgesetzten Pyramiden berechnet sich nun wie folgt.

Sei r der Inkreisradius einer Seitenfläche des betreffenden Platonischen Körpers als Ausgangspolyeder, dann gilt $h = r \cdot \tan \beta$. Körper der Art von Fall (c) entstehen, wenn in der Gleichung r durch die Kantenlänge a und β durch den Flächenwinkel α des

entsprechend regulären Körpers ersetzt werden, bei Aufsetzen von Pyramiden mit folgenden Höhen:

Ausgangskörper	Höhe
Tetraeder	$h = \frac{\tan(90^\circ - \alpha/2) \cdot a}{2\sqrt{3}}$
Hexaeder	$h = a/2$
Dodekaeder	$h = (\tan(90^\circ - \alpha/2) \cdot a \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}})/2$
Oktaeder	$h = \frac{\tan(90^\circ - \alpha/2) \cdot a}{2\sqrt{3}}$
Ikosaeder	$h = \frac{\tan(90^\circ - \alpha/2) \cdot a}{2\sqrt{3}}$

(Es kann natürlich $\tan(90^\circ - \alpha/2)$ durch $\cot \frac{\alpha}{2}$ ersetzt werden.)

Um nun Aussagen über die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten der Körper zu treffen, gehen wir vom Konstruktionsprinzip aus. Für die Eckenanzahl E' des entstehenden Körpers gilt offenbar, da durch das Aufsetzen der Pyramiden auf jeder Seitenfläche eine Ecke entsteht und die Ecken des Ausgangspolyeders selbst Ecken bleiben: $E' = F + E$.

Da jeder Kante des Platonischen Körpers einer Fläche des neuen Polyeders angehört, ist $F' = K$ und schließlich läßt sich die Kantenanzahl K' aus dem Eulerschen Polyedersatz berechnen. Da für das entstehende Polyeder $E' + F' - K' = 2$ gilt, so ist $K' = E' + F' - 2$. Bei Kenntnis von E , F , K der Platonischen Körper ergeben sich folgende Charakteristika der erzeugten Körper:

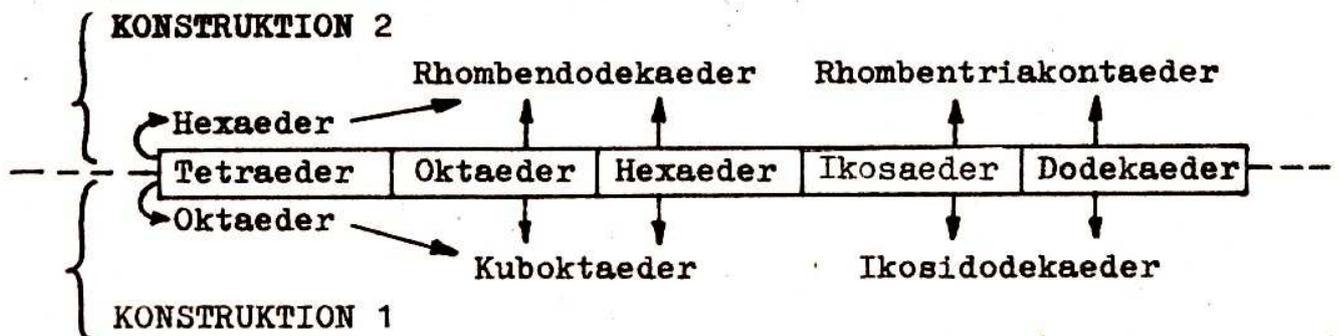
Ausgangspolyeder	erzeugter Körper	E'	F'	K'
Tetraeder		8	6	12
Hexaeder		14	12	24
Oktaeder		14	12	24
Ikosaeder		32	30	60
Dodekaeder		32	30	60

Es läßt sich zeigen, daß der aus dem reg. Tetraeder durch diese Konstruktion erzeugter Körper ein reg. Hexaeder ist. Insbesondere wird dieser Sachverhalt deutlich, wenn man einem Hexaeder ein Tetraeder einbeschreibt.

Aus dem Hexaeder und Oktaeder werden Körper erzeugt, deren Seitenflächen allesamt kongruent, aber nicht regelmäßig sind. Die n-Ecke sind Rhomben. Die Polyederecken sind regelmäßig, jedoch nicht kongruent. Das aus den beiden Platonischen Körpern Hexaeder und Oktaeder entstandene Polyeder erfüllt die Definition eines dual-archimedischen Körpers. Darunter versteht man konvexe Körper (vgl. Teil 1), deren Polyederecken regulär (nicht notwendig kongruent) sind und die kongruente (nicht notwendig regelmäßige) Flächen besitzen. Das somit entstandene halbreguläre Polyeder trägt die Bezeichnung Rhombendodekaeder. Ebenfalls handelt es sich um den topologisch gleichen Körper, der aus den Platonischen Körpern Dodekaeder und Ikosaeder erzeugt wird. Dieser dual-archimedische Körper trägt die Bezeichnung Rhombentriakontaeder.

Das Aufsetzen von geraden Pyramiden unter den Bedingungen von Fall (c) ist äquivalent dem Anlegen von Tangentialflächen an alle Kanten des Ausgangspolyeders, wobei der Kantenmittenkugelpolyradius des Ausgangskörpers senkrecht zur Tangentialebene steht. So läßt sich das bekannte Dualitätsprinzip hier in folgender Weise feststellen:

Bei unserer ersten Konstruktion wurde jeder Körperkante der Platonischen Körper ihr Kantenmittelpunkt zugeordnet bzw. erfolgte ein Abschneiden von Eckpyramiden durch die Kantenmittelpunkte; während in der zweiten Konstruktion die Körperkante ihrer beschriebenen Tangentialfläche zugeordnet wird bzw. gerade Pyramiden auf die Seitenflächen aufgesetzt werden mit entsprechend aufgeführten Bedingungen. Folgendes Schema faßt die Beziehungen der untersuchten Körper zusammen:



Aus den 5 Platonischen Körpern entstehen durch Anwenden der Konstruktion 1 selbst ein Platonischer Körper oder Archimedi-

scher Körper, durch Anwendung der Konstruktion 2 ebenfalls ein Platonischer Körper oder dual-archimedischer Körper. Durch Vertauschen von E und F gehen infolge des Dualitätsprinzips folgende Körper ineinander über:

Tetraeder \longleftrightarrow Tetraeder Oktaeder \longleftrightarrow Hexaeder
 Ikosaeder \longleftrightarrow Dodekaeder Rhombendodekaeder \longleftrightarrow Kuboktaeder
 Rhombentriakontaeder \longleftrightarrow Ikosidodekaeder

Gleichfalls infolge dieses Prinzips lassen die sich im letzten Abschnitt von Teil 1 dieser Abhandlung aufgeführten Gleichungen für die nach Konstruktion 2 hier aufgeführten Körper als richtig anerkennen, wenn E' mit F' vertauscht wird.

Kehren wir zu den beiden anderen Fällen zurück. Für Fall (a) und (b) lassen sich die Anzahlen der Ecken, Flächen und Kanten E', F', K' aus E, F, K wie folgt berechnen:

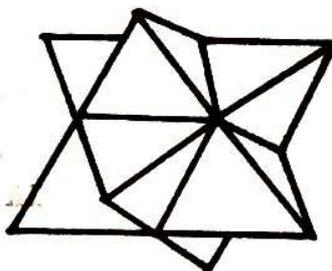
$E' = F + E$; $F' = F \cdot p$, wobei p die Seitenzahl der reg. n-Ecke des Ausgangspolyeders repräsentiert; $K' = K + F \cdot p$.

Als Flächen der neu entstehenden Polyeder treten gleichschenklige Dreiecke auf. Im Fall (a) sind bei entsprechender Wahl der Höhen der Pyramiden sogar gleichseitige Dreiecke möglich. Diesen Fall der entstehenden nichtkonvexen Körper wollen wir an dieser Stelle nicht so weit ausbreiten. Es sei jedoch auf eine Besonderheit hingewiesen. Sie tritt auf, wenn $\alpha + \beta = 180^\circ$ gilt. Diese Gleichung kann tatsächlich nur im Fall (a) realisiert werden, zu (b) und (c) bildet sie einen Widerspruch. Infolge der Größen der Flächenwinkel der reg. Polyeder und der Neigungswinkel der aufgesetzten Pyramiden, die ja kleiner als 90° sein müssen, gilt $\alpha > 90^\circ$. Von den 5 Platonischen Körpern erfüllen nur das Oktaeder, das Ikosaeder und das Dodekaeder diese Bedingung. Es entstehen gleichfalls nichtkonvexe Polyeder (Sternpolyeder), wobei die Seitenfläche der Pyramide und die entsprechende Seitenfläche des Ausgangspolyeders in einer Ebene liegen. In der Theorie der Sternpolyeder treten E, F, K dabei in modifizierter Form auf (vgl. Lit. 1).

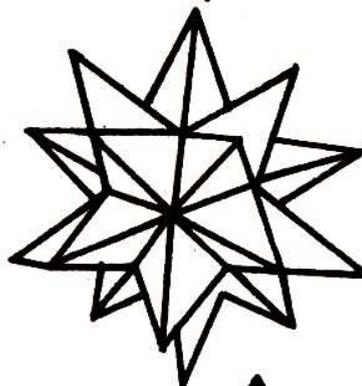
Abb. 3 zeigt die so entstandenen Polyeder.

Ausgangspolyedererzeugtes Sternpolyeder

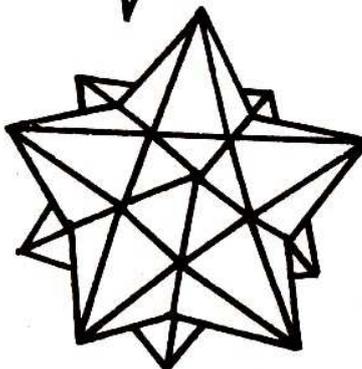
Oktaeder



Ikosaeder



Dodekaeder



Die im Fall (b) entstehenden konvexen Polyeder repräsentieren dual-archimedische Körper, die im folgenden aufgeführt sind.

<u>Ausgangspolyeder</u>	<u>E'</u>	<u>F'</u>	<u>K'</u>	<u>erzeugter Körper</u>
Tetraeder	8	12	18	Triakistetraeder
Hexaeder	14	24	36	Triakishexaeder
Oktaeder	14	24	36	Triakisoktaeder
Ikosaeder	32	60	90	Triakisikosaeder
Dodekaeder	32	60	90	Pentakisidodekaeder

Der zweite und dritte Körper bzw. vierte und fünfte Körper unterscheiden sich trotz gleicher Anzahl für E', F', K' in der Art der Polyederecken.

Es gibt nun weitere Möglichkeiten, verschiedene Beziehungen al-

ler hier vorgestellten Polyeder zu untersuchen und hoffen, dem interessierten Leser damit eine Anregung zu geben.

Literatur:

- /1/ Tiberiu Roman, Reguläre und halbreguläre Polyeder,
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1968.
- /2/ Hugo Steinhaus, Kaleidoskop der Mathematik,
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959.
- /3/ L. Fejes Toth, Reguläre Figuren,
B.G.Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1965.

Frank Heinrich
Sektion Mathematik
Bereich Methodik

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung“

Leiter: Stefan Posselt

Chefredakteur: Eckhard Stein

Redaktion: C. Dahms, S. Krieg, R. Fötsch, N. Patzschke

Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900

Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.

Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

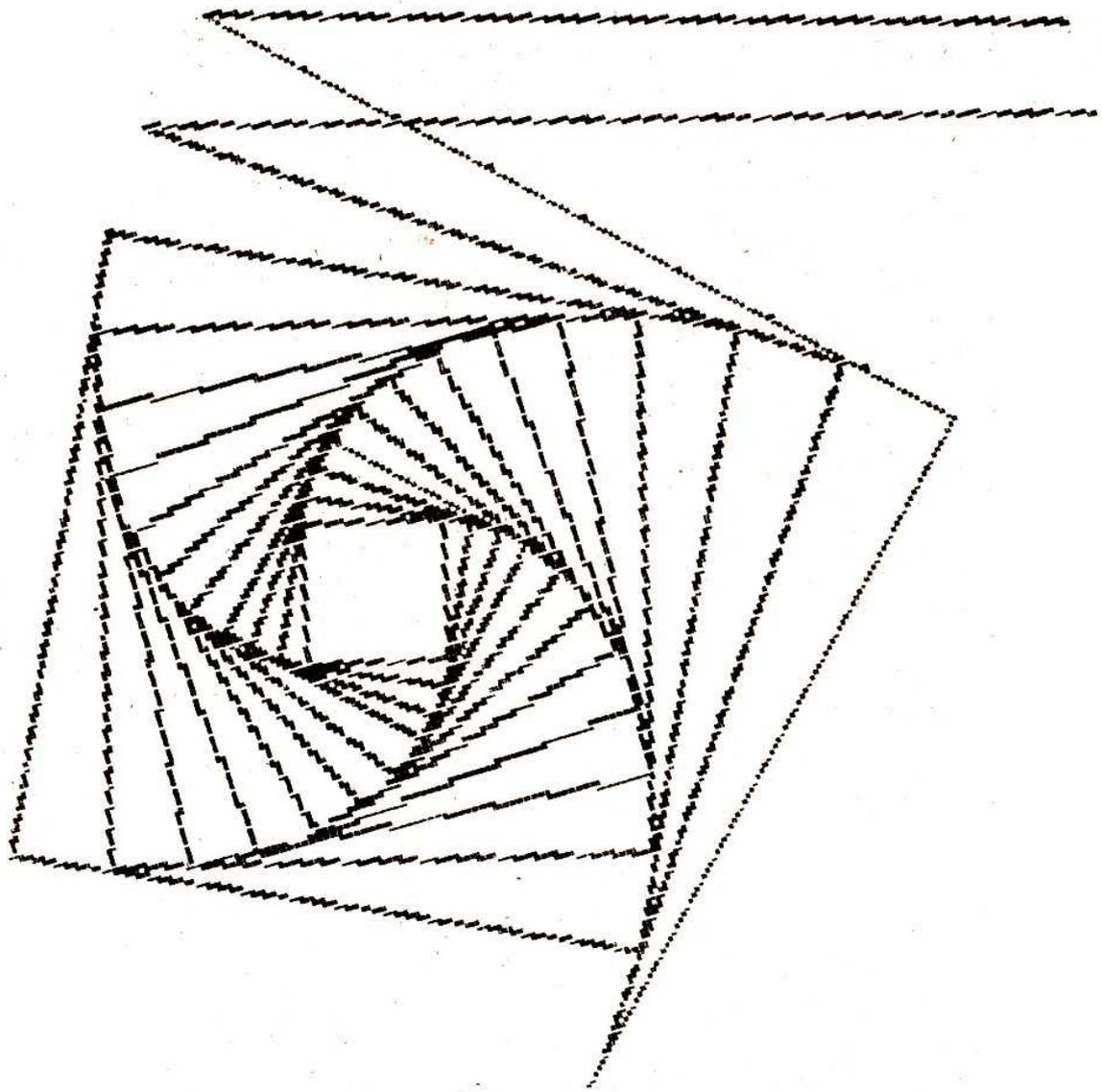
Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Titelbild: M. Torke

Redaktionsschluß: 4. 10. 1989

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	23 (1989) 11	S. 161–176
----------------	--------	------	--------------	------------



wurzel $\sqrt{12 \cdot 89}$

**zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen**

**Herausgegeben vom Jugendobjekt Studien-
vorbereitung-Studienwerbung der Sektion
Mathematik an der Friedrich-Schiller-
Universität Jena**

**23. Jahrgang ISSN 0232-4539
Sonderpreis für DDR: 0,20 M**

Was gibt es Neues vom Fermatschen Problem?

Im März 1988 wurden Mathematiker und interessierte Laien durch Pressemitteilungen (z.B. ND vom 26. 3. 1988) erstaunt, in denen ein Beweis der Fermatschen Vermutung durch den japanischen Mathematiker Y. Miyaoka angekündigt wurde. Dieser Beitrag ist ein Versuch, so elementar wie möglich über moderne Entwicklungen der Mathematik, die überraschende Anwendungen auf das Fermat-Problem, vorzustellen.

Die Bestimmung aller rechtwinkligen Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen, d.h., die Auffindung aller ganzzahligen Lösungen von $x^2 + y^2 = z^2$, ist ein schon im Altertum gelöstes zahlentheoretisches Problem (siehe etwa § 2 dieser Arbeit). Im Zusammenhang damit behauptete der französische Mathematiker und Kaufmann P. Fermat, er habe einen Beweis der Unlösbarkeit der Gleichung

$$x^n + y^n = z^n \quad (n \geq 3)$$

in ganzen Zahlen x , y und z mit $xyz \neq 0$. Er hat jedoch offenbar nie einen solchen Beweis aufgeschrieben. Man vermutet heute, zumal sich andere von Fermat "bewiesene" Behauptungen als falsch herausstellten, daß Fermat nie über einen korrekten Beweis seiner Behauptung verfügte. Bis heute scheiterten zahlreiche der exzellentesten Mathematiker bei dem Versuch, Fermats Behauptung zu beweisen.

Beim Versuch eines Beweises der Fermat-Vermutung kann man sich offenbar auf die Behandlung der Primzahlen $n \geq 3$ und des Falles $n=4$ einschränken. Für $n=3,4,5$ waren Eulers Bestrebungen erfolgreich. Im vergangenen Jahrhundert ordnete der Berliner Mathematiker E. Kummer das Problem in seine Theorie der Primidealzerlegung in Kreisteilungskörpern ein und konnte so für zahlreiche Exponenten n das Fermat-Problem lösen. Es ist jedoch bekannt, daß Kummers Methode für unendlich viele Primexponenten n nicht anwendbar ist. Durch Bestrebungen vieler Mathematiker konnte die Fermat-Vermutung für alle $n \leq 125.000$ gezeigt werden. Jedoch war bis vor kurzem unklar, ob es unendlich viele Primzahlen n gibt, für die Fermats Behauptung richtig ist.

Oft sind die bei solchen Teilerfolgen benutzten Beweismethoden nur auf das Fermat-Problem selbst anwendbar. Da dieses Problem jedoch eher eine Spielerei ist, sind auch interessante und tragfähige Beweisansätze nur dann von Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik als Ganzes, wenn sie die Vermutung in ein größeres theoretisches Umfeld einordnen. Eine solche Einordnung lag den Bemühungen von Euler und Kummer, nicht aber den meisten späteren Beweisversuchen zugrunde. Das änderte sich erst 1986, als der amerikanische Mathematiker G. Frey das Problem auf verschiedene seriöse Vermutungen der algebraischen Geometrie zurückführen konnte.

Der von Miyaoka angekündigte Beweis sollte auf diesem Ansatz von Frey und Ideen des Moskauer Mathematikers A.N. Parschin beruhen. Um den Leser nicht länger im Unklaren zu lassen, will ich jedoch gleich sagen, daß man mehrere ernsthafte und nicht ohne weiteres reparable Fehler in Miyaokas Überlegungen gefunden hat. Das Fermatsche Problem bleibt also nach wie vor ungelöst. Was aber sind nun die mathematischen Methoden, die den neuen Beweisversuchen zugrunde liegen?

1. Algebraische Kurven in der affinen Ebene

In unserer naiven (vor-Grothendieckschen) Betrachtungsweise ist die komplexe affine Ebene die Menge aller geordneten Paare (x,y) von komplexen Zahlen. Elemente (x,y) dieser Menge nennt man komplexe Punkte der affinen Ebene. Ein reeller (bzw. rationaler) Punkt der affinen Ebene ist ein komplexer Punkt, dessen Koordinaten (x,y) sogar reelle (bzw. rationale) Zahlen sind.

Da ihre Punkte durch zwei unabhängige Parameter gegeben werden, kann man die affine Ebene als ein im algebraischen Sinne zweidimensionales Gebilde auffassen. Wenn man den Koordinaten (x,y) noch eine nichttriviale Gleichung auferlegt, sollte durch Reduktion der Dimension um eins ein eindimensionales Gebilde - eine Kurve - entstehen. Diese Vorstellung liegt der folgenden (naiven) Definition zugrunde:

Definition: Eine algebraische Kurve C in der komplexen affinen Ebene ist die Lösungsmenge einer algebraischen Gleichung der Form

$$P(x,y) = 0, \quad (1)$$

wobei

$$P(x,y) = \sum_{\substack{i+j \leq N \\ i \geq 0; j \geq 0}} a_{ij} x^i y^j \quad (\exists (i,j) \text{ mit } i+j=n \text{ und } a_{ij} \neq 0) \quad (2)$$

ein Polynom vom Grade $N \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten a_{ij} ist. Die algebraische Kurve C heißt rational (bzw. reell), wenn die Koeffizienten a_{ij} des Polynoms P rationale (bzw. reelle) Zahlen sind. Der Grad N des Polynoms P heißt der Grad der Kurve C . Eine Lösung (x,y) der Gleichung (1) heißt komplexer (bzw. reeller oder rationaler) Punkt der Kurve C , wenn x und y komplexe (bzw. reelle oder rationale) Zahlen sind.

Beispiel: Für $n \geq 1$ definiert

$$x^n + y^n = 1 \quad (3)$$

eine rationale algebraische Kurve vom Grade n . Offenbar ist das Fermat-Problem äquivalent dazu, daß für $n \geq 3$ diese Kurve nur die beiden rationalen Punkte $(1,0)$ und $(0,1)$ hat. Deshalb nennt man die Kurve (3) auch die Fermat-Kurve n -ten Grades.

Die arithmetische algebraische Geometrie ist ein (etwa seit Anfang dieses Jahrhunderts bestehender) Zweig der algebraischen Geometrie, der sich mit der Untersuchung der rationalen Punkte auf algebraischen Kurven (oder allgemeiner auf algebraischen Mannigfaltigkeiten) befaßt. Wir wollen im Folgenden eines der elementar formulierbaren Ergebnisse dieser Theorie vorstellen, das zugleich eines der überraschendsten Resultate der Zahlentheorie überhaupt ist: den tiefliegenden Zusammenhang zwischen der topologischen Gestalt der Menge der komplexen Punkte einer rationalen algebraischen Kurve C und der Beschaffenheit der Menge ihrer rationalen Punkte.

Zunächst wollen wir uns auf reguläre algebraische Kurven C einschränken. Eine Kurve C heißt regulär, wenn man an jeden ihrer komplexen Punkte eine eindeutige Tangente legen kann:

Definition: C ist regulär, wenn für keinen komplexen Punkt (x,y) beide Ableitungen

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \sum_{i+j \leq N} i a_{ij} x^{i-1} y^j ,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \sum_{i+j \leq N} j a_{ij} x^i y^{j-1}$$

verschwinden. In diesem Fall ist die Gerade

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)(x,y)(\xi - x) + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y)(\eta - y)$$

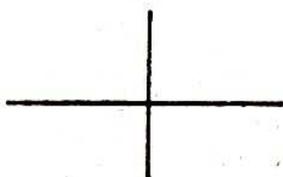
die Tangente an C im Punkt (x,y) .

Beispiel: Sei C die durch $P(x,y) = x^n + y^n - 1 = 0$ definierte Fermat-Kurve. Wenn die Ableitungen

$$\frac{\partial P}{\partial x} = nx^{n-1}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = ny^{n-1}$$

beide verschwinden, so ist $x=y=0$. Der Punkt $(0;0)$ liegt aber offenbar nicht auf der Kurve C . Also ist C regulär.

Ein Beispiel einer singulären (d.h., nicht regulären) Kurve ist die Kurve $xy=0$, die ihre einzige Singularität im Punkt $x=y=0$ hat. Die Grafik der reellen Punkte der Kurve in der Nähe des Nullpunktes



zeigt anschaulich, daß im Koordinatenursprung etwas "Besonderes" mit der Kurve passiert.

Der Leser sei aber gewarnt, daß die Singularitäten einer rationalen algebraischen Kurve keineswegs immer rationale oder reelle Punkte sein müssen. So hat die Kurve

$$y^2 = x^4 + 2x^2 + 1$$

Singularitäten in den Punkten $(x,y) = (\pm\sqrt{-1}, 0)$, aber kein rationaler Punkt ist singulär.

Wenn wir nun die komplexen Punkte unserer affinen Kurve C als topologisches Gebilde studieren wollten, so würden wir fest-

stellen, daß dieses Gebilde nicht in sich geschlossen ist (siehe unten). Der Grund besteht darin, daß Punkte im Unendlichen fehlen.

Definition: Sei C eine reguläre algebraische Kurve N -ten Grades, gegeben durch das Polynom P . Wir sagen, daß C im Unendlichen regulär ist, wenn auch die affinen Kurven

$$C_1: P_1(s, t) = s^N P(1/s, t/s) = 0$$

$$C_2: P_2(u, v) = v^N P(u/v, 1/v) = 0$$

regulär sind.

Ist dies der Fall, so kann man den komplexen Punkten von C Punkte im Unendlichen hinzufügen:

Definition: Die Riemannsche Fläche von C entsteht aus den Mengen der komplexen Punkte der Kurven C , C_1 , C_2 durch folgende Identifikationen:

1. Punkte (x, y) von C mit $x \neq 0$ und Punkte (s, t) von C_1 mit $s \neq 0$ werden durch $(x, y) \equiv (s, t) := (1/x, y/x)$ identifiziert.
2. Punkte (x, y) von C mit $y \neq 0$ und Punkte (u, v) von C_2 mit $v \neq 0$ werden durch $(x, y) \equiv (u, v) := (u/v, 1/v)$ identifiziert.
3. Punkte (s, t) von C_1 mit $t \neq 0$ und Punkte (u, v) von C_2 mit $u \neq 0$ werden durch $(s, t) \equiv (u, v) := (1/t, s/t)$ identifiziert.

Theorem (Riemann): Wenn C eine algebraische Kurve in der komplexen affinen Ebene ist, die regulär und im Unendlichen regulär ist, so gibt es eine ganzzahlige Invariante g (das Geschlecht von C), so daß die zu C gehörige Riemannsche Fläche folgende Gestalt hat:

$$g=0 \quad g=1 \quad \dots \quad g=n$$

Kugel Torus ... Kugel mit n Henkeln.

Wenn C vom Grade N ist, so ist das Geschlecht von C durch

$$g = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \quad (4)$$

gegeben.

Wenn wir nur die komplexen Punkte von C selbst betrachtet hätten, so würden in der Riemannschen Fläche endlich viele, im Unendlichen liegende Punkte fehlen. Die entstehende Fläche wäre also, wie oben erwähnt, nicht mehr in sich geschlossen. Die Punkte im Unendlichen auf der Riemannschen Fläche entsprechen Punkten von C_1 mit $s=0$ oder Punkten von C_2 mit $v=0$.

Offenbar kann man nicht jede natürliche Zahl g in der Form (4) darstellen. Man kann aber auch nicht jede algebraische Kurve in die affine Ebene einbetten. Wenn man auch Kurven in höherdimensionalen affinen Räumen betrachtet, so wird jede natürliche Zahl g als Geschlecht einer Kurve angenommen.

In den folgenden Abschnitten werden wir sehen, daß die qualitative Beschaffenheit der Menge der rationalen Punkte einer rationalen algebraischen Kurve C durch ihr Geschlecht g bestimmt ist. Wir untersuchen die drei Fälle $g=0$; $g=1$ und $g \geq 2$.

Fortsetzung folgt!

Dr. J. Franke, Bereich Analysis, Sektion Mathematik der Universität Jena und Bereich I, Karl-Weier-Straße, Institut für Mathematik, Berlin

Preisaufgaben

V61 Gegeben seien beliebige n Zahlen. Man zeige, daß man unter ihnen ein paar auswählen kann (unter Umständen auch nur eine einzige), so daß die Summe der ausgewählten Zahlen von der nächstgelegenen ganzen Zahl nicht weiter als $\frac{1}{n+1}$ entfernt ist!



V62 Пусть P и Q - середины сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$, M и N - середины диагоналей AC и BD . Докажите, что если прямые MN и PQ перпендикулярны, то $BC = AD$!

V63 Man finde die kleinste positive Zahl a , so daß für jedes quadratische Polynom $f(x)$ aus $|f(x)| \leq 1$ für $0 \leq x \leq 1$, folgt, daß $|f'(1)| \leq a$

V63 In einem gleichseitigen Dreieck bestimme man die Menge aller Punkte M mit der Eigenschaft, daß man aus den Loten von M auf die Seiten des Dreiecks wieder ein Dreieck konstruieren kann.

V64 Die Folge x_n sei folgendermaßen definiert:

$$x_1 = 2 \quad x_{n+1} = \frac{2+x_n}{1-x_n} \cdot 2$$

Man zeige, daß für alle n $x_n \neq 0$ und daß die Folge (x_n) nicht periodisch ist!

V65 Welche Lösungen hat das folgende Gleichungssystem in den reellen Zahlen?

$$\begin{aligned} 2x^2 - y^2 - 4x - 3y &= -2 \\ x^2 + 3y^2 - 2x - y &= 29 \end{aligned}$$

Wir bauen ein Unterprogramm

Die Begriffe "Hardware" und "Software" erfreuen sich inzwischen einer weiten Verbreitung. Während der erste den vergänglichen Körper eines Computers bezeichnet, steht der zweite für seine unsterbliche Seele oder - ernsthafter - für die Programme, die seine Intelligenz ausmachen und die Realisierung seiner technischen Gegebenheiten ermöglichen. Hierzu gehören beispielsweise Programme zur Textverarbeitung, für Graphikdarstellung, zur Dateiverwaltung, der BASIC-Interpreter usw., und selbstverständlich auch solche für alle möglichen oft wiederkehrenden Berechnungen. Bekannt sind sicher die Funktionsunterprogramme für Wurzel, Logarithmus u. ä. Nachfolgend sollen einige Überlegungen angestellt werden, die bei der Entwicklung solcher mathematischer Standardprogramme anzustellen sind. Denken wir uns also beispielsweise in die Rolle eines Mathematikers, der für einen vorgegebenen Rechnertyp ein Programm (oder Unterprogramm) erstellen soll, das eine quadratische Gleichung der Form

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

löst. Bei seinem Aufruf mögen die drei Programmvariablen A, B, C die Werte der entsprechenden Koeffizienten enthalten, bei der Rückkehr stehe in A entweder 0 oder 1; im zweiten Fall enthält B den Wert von x_1 und C den von x_2 . Bei Null in A blieb die Gleichung ungelöst und die Werte in B und C haben keine Bedeutung. Der Grund dafür kann ein Entarten zur linearen Gleichung (oder noch weiter) oder das Fehlen von reellen Lösungen sein, oder aber die Lösungen sind im Zahlenbereich des Rechners nicht darstellbar. Man kann das Unterprogramm natürlich auch so schreiben, daß diese Fälle durch geeignete Werte in A unterschieden werden und z. B. im Falle einer linearen Gleichung wenigstens deren Lösung in B steht; darauf sei der Kürze halber hier nicht eingegangen.

Welche Forderungen wären an ein solches Unterprogramm zu stellen? Die drei wichtigsten sind: Es muß schnell, genau und idiotensicher arbeiten. Schnelligkeit (ebenso wie geringer Speicherplatzbedarf) wird durch Ausnutzung der spezifischen techni-

schen Möglichkeiten des Rechners erreicht und führt zu stark vom Maschinentyp abhängigen Programmen. Bleibt man auf dem Niveau von BASIC, so kann man auch wenig allgemeines sagen, da wiederum die Spezifik des jeweiligen Interpreters eine Rolle spielt. Klammern wir also die Schnelligkeit des Programms aus der Betrachtung aus und bemerken nur, daß diese Forderung den anderen beiden widerspricht. Jedes Programm stellt also einen Kompromiß dar.

Was bedeutet "idiotensicher"? In der Technik bezeichnet das die Eigenschaft eines Gerätes, entweder beständig seinem nützlichen Zweck zu dienen oder überhaupt nichts zu machen (zumindest bei nicht allzu böswilligen Mißbrauch). Ein Küchenmesser ist sicher nicht idiotensicher, ein Haushaltsgerät, bei dem ein Schalter mit gleichem Kraftaufwand in beide Richtungen gedreht werden kann, beim Rückwärtsdrehen aber zerstört wird, ist es auch nicht. In unserem Falle geht es darum zu gewährleisten, daß das Unterprogramm in jedem Falle mit der Rückmeldung A=0 oder A=1 seine Arbeit beendet und nicht irregulär abstürzt. In vielen Rechnern führt z. B. Division durch Null zum Abbruch des laufenden Programms (bzw. bereits der Versuch ist strafbar!), und so etwas wollen wir um jeden Preis vermeiden, ohne dem uns unbekanntem künftigen Nutzer unseres Programmes Einschränkungen bezüglich der Koeffizienten aufzuerlegen. Dieser wird vermutlich das Unterprogramm mit Koeffizienten aufrufen, die in seinem Programm errechnet wurden, von denen er also möglicherweise nicht einmal die Größenordnung ahnt.

Gewisse Forderungen muß man zumeist jedoch formulieren. Im Falle von BASIC z. B. könnte man den Nutzer ersuchen, in seinem Hauptprogramm keine Variablenbezeichnungen mit zwei Buchstaben, von denen der erste ein "Q" ist, zu verwenden. Dann nutzt man im Unterprogramm Namen dieses Typs für die Hilfsgrößen. Ansonsten könnte der folgende Fehler geschehen:

Angenommen, wir wollen die Nullstellen der Gleichung

$$x^2 + (1+p^2)x - 4 = 0$$

für $p=1,2,\dots,100$ tabellieren; unser Unterprogramm beginne ab Zeile 1000. Schreibt man

```
10 FOR P=1 TO 100 : A=1 : B=1+P*P : C = -4
20 GOSUB 1000 : PRINT P, B, C : NEXT P,
```

so geht das nicht, wenn im Unterprogramm die naheliegende Anweisung

```
1000 P = B/A : ...
```

benutzt wird, denn damit ist dann die Laufvariable des Hauptprogramms zerstört.

Als letzte Vorbemerkung einigen wir uns über die Arithmetik unseres Rechners. Sei E die größte auf ihm darstellbare Zahl, beispielsweise $E=10^{99}$, und e die kleinste positive.

Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, daß $e=1/E$ ist.

Der Zahlenbereich umfaßt also den Abschnitt $-E$ bis E . Wenn $a = \frac{2}{3}E$ ist und $b = \frac{1}{2}E$, so führt $a+b$ oder $a \cdot b$ zu einem Fehler mit Abbruch der Rechnung, ebenso $3/e$. Die Aufgabe $e/3$ ergibt als Resultat Null ohne sonstige Probleme.

Nun kann's losgehen!

Die Variablen A , B und C seien beim Aufruf mit den Koeffizienten belegt; falls $A=0$ ist, so haben wir keine quadratische Gleichung und brauchen nicht zu rechnen:

```
1000 IF A=0 THEN RETURN.
```

Damit ist dieser Fall erledigt; nach der Rückkehr aus dem Unterprogramm ist $A=0$ (immer noch!) zum Zeichen dafür, daß die Gleichung nicht gelöst werden konnte. Künftig gilt nun stets $A \neq 0$.

Die naheliegende Transformation $p = \frac{B}{A}$, $q = \frac{C}{A}$ zu $x^2 + px + q = 0$ kommt für uns nicht in Betracht! Wenn nämlich $A = \frac{1}{3}$, $B=0$, $C=E$ wäre, so hätten wir bei der Berechnung von q den befürchteten Absturz, obwohl unsere Gleichung lösbar wäre:

$$0 < x_1 = -x_2 = \sqrt{3E} < E.$$

Es scheint günstig zu sein, den Fall $B \cdot C = 0$ gesondert zu betrachten:

```
1010 IF B ≠ 0 GOTO 1100.
```

In den unmittelbar folgenden Programmzeilen wird die Variante $B=0$ behandelt. Wenn $A \cdot C > 0$ ist, so hat die Gleichung keine Lö-

sung; aber wir dürfen das Produkt nicht einfach bilden, da dies zum Überschreiten des Zahlbereichs führen könnte. Bilden wir zwei Hilfsgrößen, die dasselbe Vorzeichen wie A und C haben, deren Produkt aber harmlos ist:

```
1030 QA = A/ABS(A): QC = C/ABS(C): IF QA*QC > 0 THEN
                                A=0: RETURN
```

Man hätte A und C auch für sich überprüfen können und mit vier Tests die möglichen Vorzeichenkombinationen abklären; dieser Weg hier scheint kürzer. Allerdings enthält er noch eine Fehlerquelle: bei C=0 ist QC nicht berechenbar! Also müssen wir noch etwas davorschieben:

```
1020 IF C=0 THEN A=1: RETURN.
```

Tatsächlich, bei B=C=0 ist $x_1=x_2=0$, und die beiden Nullen in den Koeffizienten lassen wir einfach als Resultat stehen.

Wir betrachten also nun den Fall $Ax^2 + C = 0$ mit $A \cdot C < 0$. Der Grenzfall ist $|A|=e$, $|C|=E$, dann gilt $x_1 = -x_2 = E$. Das Resultat ist also immer darstellbar und weitere Tests sind nicht erforderlich. Nur die Formel

$$x_1 = \sqrt{-\frac{C}{A}}$$

dürfen wir so nicht verwenden, da der zunächst zu berechnende Bruch möglicherweise E übersteigt. Statt dessen nehmen wir

```
1040 B = SQR(ABS(C))/SQR(ABS(A)): C = -B:A = 1: RETURN,
```

dabei kann nichts passieren.

Nun geht es ab Zeile 1100 weiter und wir können künftig $B \neq 0$ voraussetzen. Wenn C=0 ist, so wird $x_1 = -B/A$, und dieser Wert muß nicht darstellbar sein. Wie kann man das testen, ohne die Division auszuführen? Es gibt verschiedene Möglichkeiten, z.B. diese:

```
1100 QX = LN(ABS(A)): QY = LN(ABS(B))
1110 IF C=0 AND QX-QY > 227.956 THEN A=0: RETURN
1120 IF C=0 THEN B=-B/A: A=1: RETURN
```

Wir vergleichen also die sicher in üblichen Größenordnungen liegenden natürlichen Logarithmen von |A| und |B| (beide sind von Null verschieden!). Die Zahl 227.956 repräsentiert $\ln E = 99 \cdot \ln 10$. Wenn die Gleichung maschinell lösbar ist (Zeile 1120), so ist $x_2=0$, und das steht schon in C!

Nun sind wir glücklich beim allgemeinen Fall $A \cdot B \cdot C \neq 0$ angekommen. Die Lösungsformel lautet

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

und die formale Lösbarkeitsbedingung ist $B^2 \geq 4AC$. Diese ist nur bei $A \cdot C > 0$ kritisch. Analog zu Zeile 1030 prüft man

```
1130 QA=A/ABS(A):QB=B/ABS(B):QC=C/ABS(C):QZ=LN(QC*C)
```

```
1140 IF QA*QC > 0 AND 2*QY < QX+QZ+1.386294 THEN A=0: RETURN
```

Es ist $\ln 4 = 1.386\dots$. Die Lösbarkeitsbedingung gewährleistet künftig $1 \geq \frac{4AC}{B^2}$. In Abhängigkeit von den Parametern muß man die Lösungsformel verschieden formulieren; betrachten wir zunächst den Fall $4AC/B^2 \geq -2$. Diese Grenze ist etwas willkürlich, aber irgendeine muß man festsetzen.

```
1150 IF QX + QZ + 0.693147 > 2*QY GOTO 1200
```

Das Kriterium $\frac{4AC}{B^2} \geq -2$ wurde durch die wegen $\frac{4AC}{B^2} \leq 1$ äquivalente Ungleichung $2|A \cdot C| \leq B^2$ ersetzt, bei ihrer Nichterfüllung überspringen wir das nächste Programmstück, in dem dieser Fall behandelt wird. Aus der Lösungsformel klammern wir B aus und betrachten nur x_1 :

$$x_1 = -\frac{B}{2A} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4AC}{B^2}} \right]$$

Zunächst ist der zwischen -2 und 1 liegende Bruch unter der Wurzel zu berechnen. Möglich ist $A = C = E/2$, $B=E$, und bei der Schreibweise $4 * A * C / (B * B)$ wäre schon die erste Multiplikation nicht ausführbar. Die Variante $(4 / (B * B)) * A * C$ bricht bei $A=C=e$, $B=2e$ zusammen, da dann $B * B$ den Wert 0 liefert. Günstiger scheint $(A/B) * (C/B) * 4$ zu sein, aber betrachten wir $A=e$, $C=E$ und $B=3$, so wird die erste Klammer Null und das ist dann auch der Wert des Produkts im Unterschied zum richtigen Wert $4/9$! Natürlich kann ein Computer nicht exakt rechnen, aber das ist wohl doch zu großzügig! Es ist notwendig, im ersten Faktor die betragsgrößere der beiden Zahlen A und C zu verwenden. Wir nutzen Hilfsvariablen QV und QW :

```
1160 QV=A:QW=C: IF ABS(C) > ABS(A) THEN QV=C:QW=A
```

```
1170 QV=QV/B:QV=QV*QW:QV=QV/B:QV=4*QV
```

```
1180 QV=1+SQR(1+QV):QW=LN(QV)
```

Mit QW wurde bereits der Test auf Darstellbarkeit von x_1 vorbereitet:

```
1190 QW=QY+QW-QX-0.693147: IF QW > 227.956 THEN A=0: RETURN
```

Da in 1150 zu knapp geschätzt wurde, müssen wir nun die Zeilennummern verdichten. Ich erinnere daran, daß in 1130 die Vorzeichen von A, B und C in QA, QB und QC bereitgestellt wurden und $QW = \ln|x_1|$ gilt.

```
1193 A=1: B= -QB * QA * EXP(QW)
```

Damit ist x_1 berechnet. Für x_2 gilt eine analoge Lösungsformel, aber mit einer Differenz in der eckigen Klammer, also ist $|x_1| \leq |x_2|$, und wenn x_1 darstellbar ist, so ist es x_2 erst recht. Gemäß der VIETASchen Formel ist $Ax_1x_2 = C$, also

$$x_2 = \frac{C}{Ax_1} = \frac{-C}{A \cdot \text{sign}(A) \cdot \text{sign}(B) \cdot |x_1|} = - \frac{C \cdot \text{sign}(B)}{|Ax_1|}$$

$$= -\text{sign}(B) \cdot \text{sign}(C) \cdot \left| \frac{C}{Ax_1} \right|$$

Hierbei ist $\text{sign}(x)$ die Vorzeichenfunktion: $\text{sign}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$

Wir beenden also mit

```
1196 C = -QB * QC * EXP(QZ-QX-QW): RETURN
```

diese Variante, der verbleibende Rest besteht aus der Behandlung des Falles $\frac{4AC}{B^2} < -2$, dann ist $0 > \frac{B^2}{4AC} > -\frac{1}{2}$ und man setzt

$$x_1 = - \frac{B}{2A} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4AC}{B^2}} \right] = - \frac{B}{2A} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4|A \cdot C|}{B^2}} \right]$$

$$= - \frac{B}{2A} \left[1 + \frac{\sqrt{|A \cdot C|}}{|B|} \cdot \sqrt{4 + \frac{B^2}{|A \cdot C|}} \right]$$

Nehmen wir an, $\frac{\sqrt{|A \cdot C|}}{B}$ sei groß, z. B. mehr als 10^{20} , so kann man die 1 in der eckigen Klammer und den Bruch unter der letzten Wurzel weglassen (sie werden dann bei der maschinellen Addition sowieso ignoriert!), und es bleibt

$$x_1 = - \frac{\text{sign}(A \cdot B)}{2} \cdot \sqrt{\left| \frac{C}{A} \right|} \cdot \sqrt{4} = -\text{sign}(A \cdot B) \cdot \sqrt{\left| \frac{C}{A} \right|}$$

und $x_2 = -x_1$. Also testen wir $\ln|A| + \ln|C| - 2 \cdot \ln|B| < \ln 10^{40} = 92.103\dots$:

```
1200 IF QX+QZ-2*QY > 92.1034 THEN A=1:B=SQR(ABS(C))/
      /SQR(ABS(A)):C=-B: RETURN
```

Hierbei haben wir möglicherweise x_1 und x_2 gegenüber der Herleitung vertauscht und überdies ausgenutzt, daß die Lösungen in diesem Falle stets darstellbar sind. Nun wissen wir, daß

$0 \leq \frac{\sqrt{|A \cdot C|}}{|B|} \leq 10^{20}$ sein muß, können also schreiben:

```
1210 QV=A:QW=C: IF ABS(C) > ABS(A) THEN QV=C:QW=A
1220 QV=B/QV:QV=B*QV/QW+4:QV=SQR(QV)
1230 QV=(SQR(ABS(A))*SQR(ABS(C))/ABS(B))*QV+1
1240 QW=LN(QV):QV=QY-QX-0.693147+QW
1250 IF QV > 227.956 THEN A=0: RETURN
1260 A=1 : B = -QA * QB * EXP(QV)
1270 C= -QB * QC * EXP(QZ-QX-QV): RETURN
```

Das war's!

Gedanken und Erkenntnisse:

1. Wenn es solchen Aufwand macht, den Lehrstoff der 9. Klasse rechen-technisch umzusetzen, was soll dann erst mit der höheren Mathematik werden?
Glücklicherweise hängen mathematische und programmiertechnische Schwierigkeiten nicht so unmittelbar zusammen.
2. Vielleicht geht es einfacher und ohne Verlust an Sicherheit?
3. Das Programm ist noch lange nicht perfekt. Die Umwege über Logarithmus- und Exponentialfunktion machen die Resultate sicher nicht genauer (und auf jeden Fall langsamer!). In der Nähe der Grenzen des Zahlenbereichs wäre vielleicht ein Sicherheitsabstand angebracht usw.
4. Der aufmerksame Leser hat gewiß festgestellt, daß auf Rechenzeitbelange konsequent nicht geachtet wurde.
5. Man könnte sich auf den Standpunkt stellen, daß bei nicht-astronomischen Berechnungen Zahlen, die größer als z. B. 10^{20} sind (also noch weit von E entfernt!) weder als End- noch als Zwischenresultate auftreten dürfen. Das Programm läßt sich dann vereinfachen, indem man es auch bei Überschreiten dieser Grenze mit der Meldung "Gleichung nicht lösbar" abbrechen läßt.

Unterprogramm

6. Denkbar ist eine Variante, in der der Nutzer noch einen vierten Parameter $D=1,2$ oder 3 übergibt. Bei $D=1$ verspricht er gutartige Parameter (und trägt selbst das Risiko), das Unterprogramm arbeitet nur die Lösungsformel ab; bei $D=2$ untersucht das Unterprogramm nur die formale Lösbarkeit, achtet aber nicht auf Bereichsüberschreitung, und erst bei $D=3$ werden alle Register gezogen. So kann man bei sicher gutartigen Problemen Rechenzeit sparen.
7. Falls jemand das vorgeschlagene Programm in seine Programm-bibliothek übernehmen möchte, sollte er wenigstens prüfen, ob die hier gemachten Voraussetzungen für E und e gelten!

Dr. Werner Rosenheinrich
Bereich Numerik/Optimierung

Herausgeber: Jugendobjekt „Studienvorbereitung–Studienwerbung“

Leiter: Stefan Posselt

Chefredakteur: Eckhard Stein

Redaktion: C. Dahms, S. Krieg, R. Fötsch, N. Patzschke

Anschrift: WURZEL, Universitätshochhaus, Sektion Mathematik, Jena, 6900

Konto: Stadt- und Kreissparkasse Jena 4471-22-190012

Die Zeitschrift erscheint einmal im Monat. Preis: Einzelheft: 0,20 M.

Vierteljahresabonnement 0,60 M. Bestellungen nehmen alle Postämter entgegen.

Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 1633 des Presseamtes beim Vorsitzenden des Ministerrates der DDR. Abdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung der Redaktion.

Artikel-Nr. (EDV): 10932

Titelbild: M. Torke

Redaktionsschluß: 7. 11. 1989

ISSN 0232-4539	Wurzel	Jena	23 (1989) 12	S. 177–192
----------------	--------	------	--------------	------------