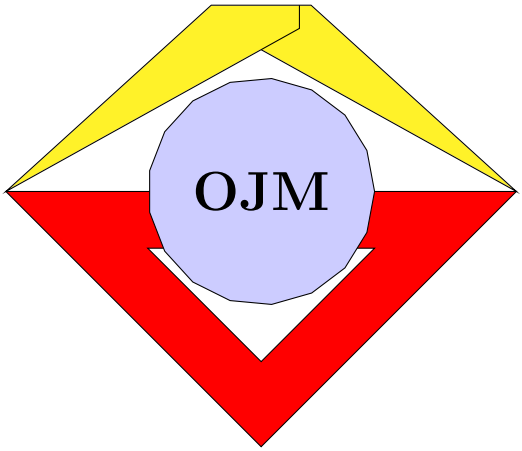
Thema: Geometrie
Aufgaben und Lösungen
der I. bis IV. Runde
der Klassenstufen 5 bis 12
der Mathematik-Olympiaden
von 1960 bis 1994



Zentrales Komitee für die
Olympiaden Junger Mathematiker

unter Nutzung von Manuela Kugels
`https://www.olympiade-mathematik.de/`

zusammengestellt von Steffen Polster
`https://mathematikalpha.de`
Chemnitz, 2019/22

bearbeitet von Christian Hercher
Flensburg, 2022

I Klasse 5

I.1 Abstände, Flächen, Volumina berechnen

Runde 1

Aufgabe V00501:
Die Umzäunung eines quadratischen Gartens wird erneuert. Sie kostet 992,00 DM. Ein Meter Zaun wird mit 4,00 DM berechnet.
Berechne die Fläche dieses Gartens und verwandle das Ergebnis in Hektar.

Lösung von Steffen Polster:
Der Umfang u des Quadrates bei Seitenlänge a ist $u = 4a$. Da $\frac{992}{4} = 248$ m Zaun verbaut wurden, ist $a = 62$ m.
Für den Flächeninhalt wird $A = a^2 = 62^2 = 3844$ m^2, d. h. rund 0,38 ha.

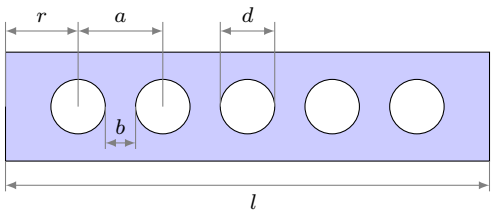
Aufgabe V00505:
Wie viel Zündhölzer (5 cm lang, 2 mm breit und 2 mm hoch) lassen sich in einem Würfel von 1 m Kantenlänge unterbringen?

Lösung von Steffen Polster:
Ein Zündholz hat ein Volumen von $V = 50 \cdot 2 \cdot = 200$ mm^3 $= 0{,}2$ cm^3. Das Würfelvolumen ist $V_W = 1000000$ cm^3. Damit passen $\frac{1000000}{0{,}2} = 5000000$ Zündhölzer in den Würfel.

Aufgabe 010512:
Im Werkunterricht sollen Reagenzglasständer für je 5 Reagenzgläser hergestellt werden. Das obere Brettchen ist 160 mm lang.
Es soll 5 Bohrungen von je 18 mm Durchmesser erhalten. Der Abstand der ersten bzw. letzten Lochmitte von den Brettchenenden beträgt je 24 mm. Alle Bohrungen sollen untereinander gleichen Abstand haben.

a) Wie groß ist der Abstand von Lochmitte zu Lochmitte?
b) Wie groß sind die Zwischenräume zwischen den Bohrlochrändern?

Lösung von Steffen Polster:



Für die gegebenen Größen (siehe Abbildung) wird: Länge des Brettchens $l = 160$ mm, Durchmesser eines Lochs $d = 18$ mm und als Abstand zwischen den Randbohrungen und dem Rand $r = 24$ mm.
Gesucht sind der Abstand zwischen zwei Lochmitten a und der Abstand zwischen zwei Bohrungen b.

a) Da links und rechts der Abstand r auftritt, verbleiben für die vier Abstände zwischen den Bohrungen $l - 2r$ und somit $a = \frac{1}{4}(l - 2r) = 28$ mm.
Der Abstand von Lochmitte zu Lochmitte beträgt 28 mm.

b) Da eine Bohrung einen Radius $\frac{d}{2}$ wird ebenso $b = a - 2\frac{1}{2}d = 10$ mm.
Der Zwischenraum zwischen zwei Bohrungen beträgt 10 mm.

Aufgabe 040513:
Der Schulgarten einer Stadtschule hat einen Flächeninhalt von 0,15 ha. Der Garten wird in 9 Parzellen aufgeteilt, die einen Flächeninhalt von je 150 m^2 bzw. 200 m^2 besitzen.
Wie viel Parzellen von jeder der beiden Größen befinden sich im Garten?

Lösung von Steffen Polster:
Die Fläche 0,15 ha sind 1500 m^2. Im Garten befinden sich 6 Parzellen zu je 150 m^2 und 3 Parzellen zu je 200 m^2. Es ist $6 \cdot 150 + 3 \cdot 200 = 1500$.

Anmerkung: Das Gleichungssystem $x + y = 9$, $150x + 200y = 1500$ ist normalerweise in der 5. Klasse nicht lösbar. Wahrscheinlich soll durch Probieren gelöst werden.

Aufgabe 040514:
In Mücheln (Geiseltal, Bezirk Halle) wurde die längste Eisenbahnbrücke der DDR fertiggestellt. Sie besteht aus 7 gleichen Brückenbögen.
Für einen Brückenbogen wurden 147 m^3 Beton verwendet. 1 m^3 Beton hat eine Masse von 24 dt.
Wie viel Tonnen Beton wurden für den Brückenbau benötigt? (Runde auf ganze Tonnen!)

Lösung von Steffen Polster:
7 (Bögen) $\cdot$ 147 m^3 $\cdot$ 24 $\frac{dt}{m^3}$ = 24696 dt. Es werden insgesamt rund 2470 Tonnen Beton benötigt.

Aufgabe 080514:
Fünf Flächen eines Würfels von 3 cm Kantenlänge werden rot angestrichen, die sechste Fläche bleibt ohne Anstrich. Danach wird dieser Würfel in genau 27 Würfel von je 1 cm Kantenlänge zersägt.
Wie viel dieser kleinen Würfel haben 0; 1; 2; 3 bzw. 4 rot angestrichene Flächen?

Anleitung: Du kannst dir auch zur Veranschaulichung einen Würfel von 3 cm Kantenlänge basteln. Zerlege jede Fläche in Quadratzentimeter!

Lösung von Steffen Polster:
Nur die Würfel, die bis zur farbigen Außenseiten des großen Würfels reichen, haben eine farbige Fläche, d. h. der kleine Würfel im Inneren hat keinen Anstrich, ebenso der mittlere Würfel der sechsten Fläche.

Eine Farbfläche haben die mittleren Würfel der farbigen Seitenflächen und die 4 Würfel der sechsten Fläche, die in der Mitte der 4 Kanten liegen. Insgesamt 9 Würfel.

Zwei Farbflächen haben die mittleren Kantenwürfel die von beiden farbigen Seitenflächen des großen Würfels begrenzt sind, insgesamt 8. Die 4 Eckenwürfel der sechsten Fläche sind auch auf zwei Seiten farbig. In der Summe sind die 12 Würfel mit zwei farbigen Flächen.

Da es keinen keinen Würfel mit 4 farbigen Seiten gibt, verbleiben für kleine Würfel mit 3 angestrichen Seiten als Anzahl 27 - 2 - 9 - 12 = 4.

Es gibt somit kleine Würfel mit 2 mal 0, 9 mal 1, 12 mal 2, 4 mal 3 und 0 mal 4 angestrichenen Seiten.

Aufgabe 090514:
Im Werkunterricht fertigen Schüler Bauklötze an, die die Form von Quadern besitzen, und zwar sind bei jedem Bauklotz je drei in verschiedenen Richtungen verlaufende Seitenkanten 55 mm, 55 mm und 70 mm lang.
Zur besseren Aufbewahrung werden diese Bauklötze in quaderförmige Baukästen (mit Schiebedeckel) gepackt, deren Innenmaße (in den drei Richtungen der Seitenkanten gemessen) 0,33 m, 2,2 dm und 21 cm betragen.

Berechne die größtmögliche Anzahl von Bauklötzen, die in sechs dieser Baukästen eingeschichtet werden können!

Lösung von Steffen Polster:
Das Volumen des Kasten zur Aufbewahrung der Bauklötze ist

$$V_{\text{Box}} = 33\ \text{cm} \cdot 22\ \text{cm} \cdot 21\ \text{cm} = 15246\ \text{cm}^3$$

Das Volumen eines Bauklotzes beträgt:

$$V_{\text{Bauklotz}} = 5{,}5\ \text{cm} \cdot 5{,}5\ \text{cm} \cdot 7\ \text{cm} = 211{,}75\ \text{cm}^3$$

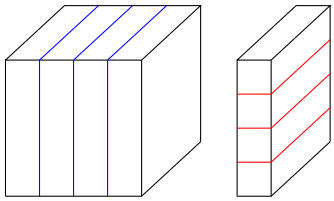
Damit passen theoretisch $15246 : 211{,}75 = 72$ Bauklötze in den Aufbewahrungskasten.

Es ist zu allerdings zu prüfen, ob die Bauklötze lückenlos in den Kasten eingefügt werden können.
Mit den Kantenlängen 55 mm und 55 mm können auf die Grundfläche des Kastens in der Länge $6 \cdot 5{,}5\text{cm} = 33\text{cm}$ und in der Breite von $4 \cdot 5{,}5\text{cm} = 22\text{cm}$ alle Lücken gefüllt werden. Auf der Grundfläche liegen somit $6 \times 4 = 24$ Bauklötze.
Da nun die Höhe des Kastens 21 cm beträgt und ein Bauklotz 7 cm Höhe besitzt, können 3 Schichten Bauklötze eingefügt werden, d. h. insgesamt 72 Bauklötze.

Aufgabe 130512:
Karl soll einen Würfel der Kantenlänge 4 cm aus Knetmasse, ohne ihn zu verformen, so zerteilen, dass am Ende nur Würfel von je 1 cm Kantenlänge entstehen.

a) Ermittle die Anzahl der Würfel (der geforderten Art), die auf diese Weise entstehen!
b) Stelle fest, wie viel Schnitte Karl dabei insgesamt ausführen muss, wenn ein Schnitt niemals mehr als einen der vorher vorhandenen Körper zerteilen darf, d. h., wenn das Schneiden „im Paket“ nicht gestattet ist!

Lösung von Steffen Polster:
a) Das Volumen des großen Würfels beträgt $4\text{cm} \cdot 4\text{cm} \cdot 4\text{cm} = 64\text{cm}^3$, das Volumen eines kleinen Würfels $1\ \text{cm}^3$. Damit ergeben sich 64 kleine Würfel.



b) Zuerst schneidet man den Würfel längs der blauen Linien und erhält mit drei Schnitten 4 Quader mit den Abmessungen 1 cm × 4 cm × 4 cm.
Danach schneidet man jeden dieser Quader mit je 3 Schnitten, insgesamt 12 Schnitte, längs der roten Linien und erhält insgesamt 16 Quader der Abmessung 1 cm × 4 cm × 1 cm.
Jeder dieser 16 Quader wird mit je 3 Schnitten, insgesamt 48 Schnitte, zum Abschluss in je 4 Würfel der gewünschten Größe zerschnitten.
Insgesamt benötigt man damit $4 + 12 + 48 = 63$ Schnitte.

Aufgabe 140512:
Ein Quader von der Länge $a = 1{,}50$ m, der Breite b und der Höhe c hat eine Grundfläche von 12600 cm^2 und ein Volumen von 1323 dm^3.
Ermittle b und c (in Zentimetern)!

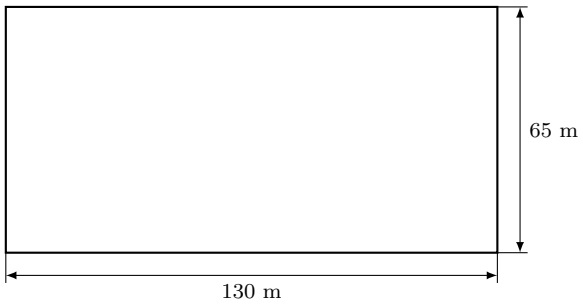
Lösung von Steffen Polster:
Aus der Gleichung der Grundfläche $A_G = a \cdot b$ wird $b = \frac{A_G}{a} = 84$ cm.
Da für das Volumen $V = A_G \cdot c$ gilt, folgt $c = \frac{V}{A_G} = 105$ cm.

Aufgabe 160514:
Ein rechteckiger Spielplatz wird eingezäunt. Die Gesamtlänge des Zaunes beträgt 390 m; die langen Seiten des Rechtecks sind doppelt so lang wie die kurzen.

a) Ermittle die Seitenlängen des Spielplatzes!
b) Zeichne den Spielplatz (Konstruktion des Rechtecks) im Maßstab 1 : 1000!

Lösung von Steffen Polster:
Die kurze Seite sei a m lang und damit die lange Seite $b = 2a$ m lang. Für den Umfang des Rechtecks wird $u = 2a + 2b = 2a + 2 \cdot 2a = 6a = 390$ m. Damit ist $a = 65$.

a) Die kurzen Seiten des Spielplatzes sind 65 m und die langen Seiten sind 130 m lang.



b) In der Zeichnung im Maßstab 1 : 1000 muss das Rechteck 13 cm breit und 6,5 cm hoch sein.

Aufgabe 180512:
Marie-Luise hat einen außen rot angestrichenen Würfel aus naturfarbenem Holz. Der Würfel hat 3 cm Kantenlänge. Marie-Luise denkt sich diesen Würfel in kleine Würfel von 1 cm Kantenlänge zerlegt.

a) Wie viele derartige kleine Würfel würden aus dem roten Würfel insgesamt entstehen?
b) Wie viele von den kleinen Würfeln hätten drei rot angestrichene Seitenflächen,
c) zwei rot angestrichene Seitenflächen,
d) eine rot angestrichene Seitenfläche,
e) keine rot angestrichene Seitenfläche?

Als Lösung genügt die Angabe der in a) bis e) erfragten Anzahlen. Eine Begründung wird nicht verlangt.

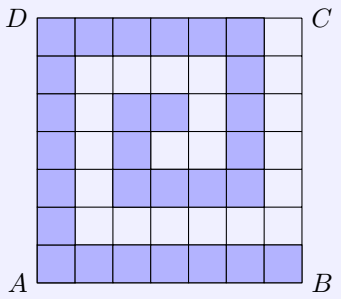
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) 27 Würfel,
b) 8 Würfel,

c) 12 Würfel,
d) 6 Würfel,
e) l Würfel

Aufgabe 190514:
Wie viele Streichhölzer würden sich insgesamt in einem hohlen Würfel unterbringen lassen, dessen Kantenlänge, innen im Hohlraum gemessen, 1 m beträgt?
Wir wollen dabei annehmen, dass jedes Streichholz genau 5 cm lang, 2 mm breit und 2 mm hoch ist. Die Verdickung am Streichholzkopf und andere Unregelmäßigkeiten sollen bei dieser Aufgabe nicht berücksichtigt werden.

Lösung von Steffen Polster:
Ein Streichholz hat ein Volumen von $V = 50 \cdot 2 \cdot 2 = 200\ \text{mm}^3 = 0{,}2\ \text{cm}^3$. Das Würfelvolumen ist $V_W = 1000000\ \text{cm}^3$. Damit passen $\frac{1000000}{0{,}2} = 5000000$ Streichhölzer in den Würfel.

Aufgabe 210511:

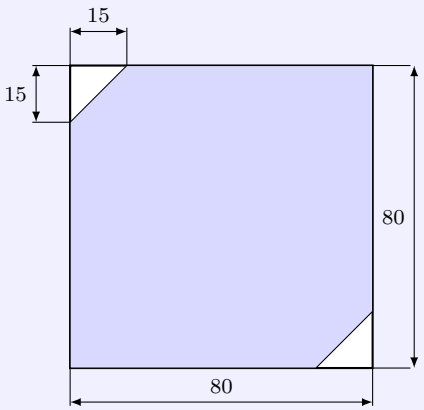


Ein Quadrat $ABCD$ mit 14 cm Seitenlänge ist in 7 mal 7 gleichgroße Teilquadrate zerlegt. Aus einigen dieser Teilquadrate ist ein Streifenzug so zusammengestellt, wie die Abbildung zeigt. Der Streifenzug ist farbig hervorgehoben.
Berechne den Umfang und den Flächeninhalt dieses Streifenzuges!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $14 : 7 = 2$ hat jedes der Teilquadrate die Seitenlange 2 cm. Der Umfang des Streifenzuges besteht aus je 3 Seiten seines Anfangs- bzw. Endquadrates sowie je 2 Seiten seiner übrigen 26 Quadrate. Wegen $2 \cdot 26 = 52$, $3 + 3 + 52 = 58$ beträgt sein Umfang also das 58 fache der Seitenlänge eines Teilquadrates; wegen $58 \cdot 2 = 116$ sind das 116 cm.

Jedes der 28 Quadrate des Streifenzuges hat wegen $2 \cdot 2 = 4$ den Flächeninhalt 4 cm^2. Folglich beträgt wegen $28 \cdot 4 = 112$ der Flächeninhalt des Streifenzuges 112 cm^2.

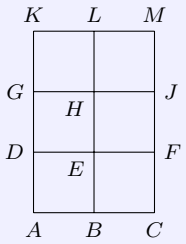
Aufgabe 240513:



Die farbige Fläche in der Abbildung entsteht aus einem Quadrat, von dem vier gleichgroße Dreiecke abgeschnitten werden.
Berechne aus den in Millimeter angegebenen Maßen den Flächeninhalt der farbigen Fläche in Quadratzentimeter!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $80 \cdot 80 = 6400$ beträgt der Flächeninhalt des Quadrates 6400 mm^2.
Die vier abgeschnittenen Dreiecke ergänzen sich paarweise zu insgesamt zwei Quadraten mit einer Seitenlänge von je 15 mm. Wegen $15 \cdot 15 = 225$ beträgt der Flächeninhalt eines solchen Quadrates 225 mm^2.
Wegen $6400 - 225 - 225 = 5950$ beträgt der Flächeninhalt der farbigen Fläche also 5950 mm^2, das sind 59,5 cm^2.

Aufgabe 270513:

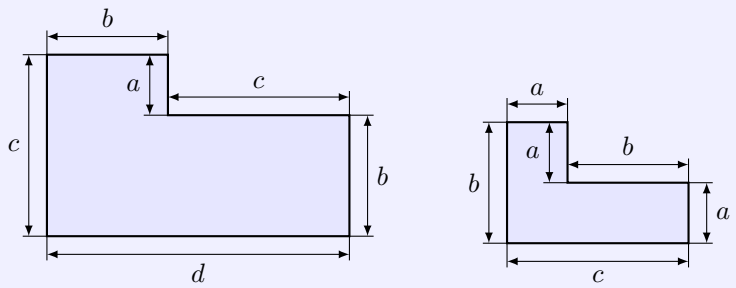


Die Abbildung zeigt ein Rechteck $ACMK$, das aus sechs kleinen Quadraten zusammengesetzt ist. Man kann in der Abbildung außer diesem Rechteck noch weitere Rechtecke finden, die sich aus solchen kleinen Quadraten zusammensetzen und die selbst keine Quadrate sind. Zum Beispiel ist $DFJG$ ein derartiges Rechteck.
Nenne alle derartigen Rechtecke außer $ACMK$!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Alle derartigen Rechtecke sind $ABHG$, $ABLK$, $ACFD$, $BCJH$, $BCML$, $DELK$, $DFJG$, $EFML$, $GJMK$

Runde 2

Aufgabe 020524:
Die Abbildung zeigt zwei verschieden große Flächen. ($a = 2$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm, $d = 10$ cm)



a) Wie oft ist die kleine Fläche in der großen enthalten?
b) Weise die Richtigkeit dieser Behauptung durch eine Zeichnung nach!

Lösung von Steffen Polster:
a) Der Flächeninhalt der kleinen Fläche ergibt sich als Differenz der Flächeninhalte eines Rechtecks mit den Seitenlängen b und c, von dem rechts oben ein Rechteck mit den Maßen a und b herausgeschnitten wurde:

$$A_{klein} = bc - ab = 4 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} - 2 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 16 \text{ cm}^2$$

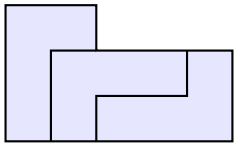
Für die große Fläche wird aus einem Rechteck mit den Seiten c und d ein Rechteck mit den Seiten a und c entfernt.

$$Agroß = cd - ac = 6 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} - 2 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 48 \text{ cm}^2$$

Damit passt die kleine Fläche in die große mit

$$\frac{A_{groß}}{A_{klein}} = \frac{48 \text{ cm}^2}{16 \text{ cm}^2} = 3$$

genau 3 mal hinein, wie auch die Abbildung zur Teilaufgabe b) zeigt.

b) 

Aufgabe 020525:
Trage auf einer Geraden nacheinander die Strecken $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm und $CD = 4$ cm ab! Wie groß ist die Entfernung zwischen den Mitten der Strecken AB und CD? Begründe deine Antwort durch Rechnung!

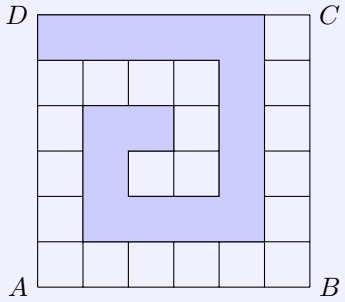
Lösung von Steffen Polster:



Die Entfernung zwischen M_{AB} und M_{CD} ergibt sich aus der Länge der Strecke BC und jeweils der Hälfte der Strecken AB und CD, d. h.

$$M_{AB}M_{CD} = 0{,}5 \cdot AB + BC + 0{,}5 \cdot CD = 0{,}5 \cdot 3cm + 5cm + 0{,}5 \cdot 4cm = 8{,}5cm$$

Aufgabe 040522:

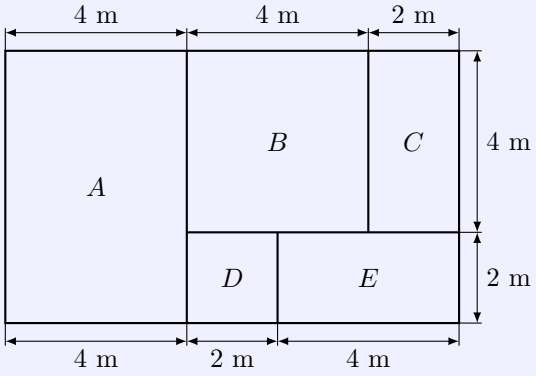


Teile die Seiten eines Quadrats in sechs gleiche Teile und ziehe von dem Mittelpunkt M aus den aus der Abbildung ersichtlichen blauen Streifenzug. Eine Seite des Quadrats hat eine Länge von 12 cm.

Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Streifens!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jedes kleine Quadrat hat eine Seitenlänge von 2 cm. Der Umfang besteht aus 32 Seitenlängen, die Fläche aus 15 Teilquadraten.
Der Umfang beträgt 64 cm, der Flächeninhalt 60 cm^2.

Aufgabe 120524:

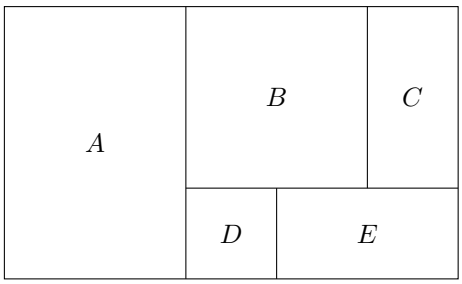


Die Abbildung stellt den Grundriss einer Wohnung mit den Räumen A, B, C, D, E dar.

a) Zeichne den Grundriss dieser Wohnung im Maßstab 1:100!
b) Die Fußböden der Räume A und B sollen gestrichen, die der Räume C, D und E mit einem Fußbodenbelag ausgelegt werden.

Ermittle den Flächeninhalt der Fußböden der einzelnen Räume und gib die Anzahl der zu streichenden und die der auszulegenden Quadratmeter an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Bei dem angegebenen Maßstab 1 : 100 entspricht 1 cm auf der Zeichnung 1 m in der Wirklichkeit. Daher ergibt sich folgende Zeichnung:

b) Der Grundriss lässt sich in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise in Quadrate von je 1 cm Kantenlänge, also von 1 cm^2 Flächeninhalt, einteilen.
Wegen des Maßstabes 1 : 100 entspricht jedem solchen Quadrat in der Wirklichkeit ein Quadrat mit der Kantenlänge 1 m, also mit dem Flächeninhalt 1 m^2.

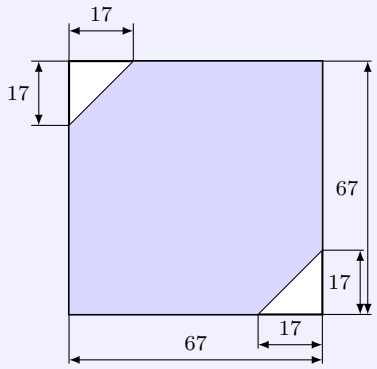
Die Fußböden der Räume haben folgenden Flächeninhalt:
Raum A: 24 m^2, Raum B: 16 m^2, Raum C: 8 m^2, Raum D: 4 m^2, Raum E: 8 m^2.

Zu streichen sind insgesamt 40 m^2 Fußbodenfläche. Auszulegen sind 20 m^2 Fußbodenfläohe.

Aufgabe 170521:
Im Schulgarten steckten Schüler auf einem 8 m^2 großen Beet als Saatgut Erbsen, und zwar ebenso dicht, wie dies auf großen Flächen üblich ist. Der Ernteertrag dieses Beetes betrug das Fünfzehnfache des Saatgutes.
Wie viel kg Erbsen ernteten die Schüler von diesem Beet, wenn für eine 1 ha große Fläche 2 dt Erbsen als Saatgut üblich sind?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für 1 ha : 10000 m^2 sind 2 dt = 200000 g Saatgut üblich; folglich werden für je 1 m^2 dann 20 g benötigt.
Für 8 m^2 wurden wegen $8 \cdot 20 = 160$ daher 160 g Saatgut genommen.
Der Ernteertrag betrug wegen $15 \cdot 160 = 2400$ folglich 2400 g = 2,4 kg.

Aufgabe 180524:



Die abgebildete farbige Fläche entsteht, indem von einer quadratischen Fläche zwei (gleichgroße) dreieckige Flächen abgeschnitten werden.

Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist der Flächeninhalt der farbigen Fläche (in cm^2) zu berechnen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $67^2 = 4489$ beträgt der Flächeninhalt des abgebildeten Quadrats 4489 mm^2.
Die beiden Dreiecke lassen sich zu einem Viereck ergänzen, das vier gleichlange Seiten und zwei rechte Winkel enthält, also ein Quadrat ist. Wegen $17^2 = 289$ beträgt der Flächeninhalt dieses Quadrats 289 mm^2.

Wegen 4489 - 289 = 4200 und 4200 mm^2 = 42 cm^2 hat die farbige Fläche den Flächeninhalt 42 cm^2.

Aufgabe 200523:
Fritz will auf einer Geraden vier Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge angeordnet zeichnen. Dabei sollen folgende Bedingungen erfüllt werden:

(1) Die Länge der Strecke AD soll 15 cm betragen.
(2) Die Strecke BC soll um 3 cm länger sein als die Strecke AB.
(3) Die Strecke CD soll doppelt so lang sein wie die Strecke AC.
Untersuche, ob diese Bedingungen erfüllbar sind! Wenn dies der Fall ist, so ermittle alle diejenigen Längenangaben für die Strecken AB, BC und CD, durch die diese Bedingungen erfüllt werden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Wenn die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind und dabei $AB = x$ cm gilt, dann folgt aus (2) $BC = (x + 3)$ cm, also

$$AC = AB + BC = xcm + (x + 3)cm = (2x + 3)cm$$

Wegen (3) gilt dann $CD = 2AC = 2(2x + 3)cm = (4x + 6)cm$ und damit

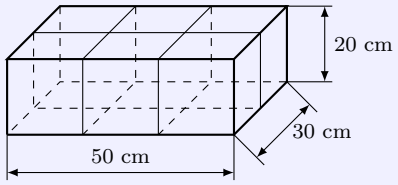
$$AD = AC + CD + (2x + 3)cm + (4x + 6)cm = (6x + 9)cm$$

Wegen (1) folgt nun $6x + 9 = 15$, also $6x = 6$ und mithin $x = 1$.
Daher können die gestellten Bedingungen nur dann erfüllt werden, wenn $AB = 1$ cm und folglich (wegen (2) und (3)) $BC = 4$ cm und $CD = 10$ cm gilt.

(II) Dass durch diese Längenangaben die gestellten Bedingungen tatsächlich erfüllt werden, zeigt folgende Probe:

Wegen $AD = AB + BC + CD = 1cm + 4cm + 10cm = 15$ cm ist Bedingung (1) erfüllt.
Die Strecke BC ist um 3 cm länger als die Strecke AB, also ist auch Bedingung (2) erfüllt.
Wegen $AC = AB + BC = 5$ cm ist die Strecke CD doppelt so lang wie die Strecke AC, und somit ist auch Bedingung (3) erfüllt.

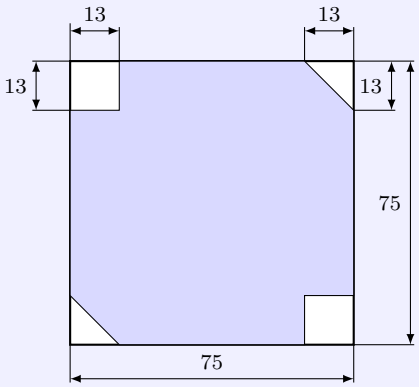
Aufgabe 220522:



Das Bild zeigt ein 50 cm langes, 30 cm breites und 20 cm hohes verschnürtes Paket. Die Schnur wurde möglichst sparsam verwendet, also von Knoten zu Knoten überall nur einfach gelegt. Zum Verknoten wurden noch zusätzlich 10 cm Schnur gebraucht.
Wie viel Zentimeter Schnur wurden daher zum Verschnüren dieses Paketes insgesamt verwendet?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $2 \cdot 50 + 4 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 10 = 100 + 120 + 120 + 10 = 350$ wurden 350 cm Schnur verwendet.

Aufgabe 240523:



Die abgebildete farbige Fläche entsteht aus einem Quadrat, indem man von ihm zwei gleichgroße Dreiecke und zwei gleichgroße Quadrate abschneidet.
Berechne aus den in Millimeter angegebenen Längen den in Quadratzentimeter gemessenen Flächeninhalt der farbigen Fläche!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $75^2 = 5625$ beträgt der Flächeninhalt des ursprünglichen Quadrates 5625 mm^2.
Die beiden abgeschnittenen Dreiecke lassen sich zu einem Quadrat zusammensetzen, das die gleiche Seitenlänge wie die beiden abgeschnittenen Quadrate hat. Wegen $13^2 = 169$ beträgt der Flächeninhalt eines solchen Quadrates 169 mm^2.

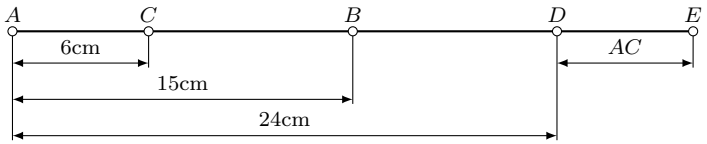
Wegen $5625 - 3 \cdot 169 = 5118$ beträgt der Flächeninhalt der farbigen Fläche daher 5118 mm^2, das sind 51,18 cm^2.

Aufgabe 260523:
Zeichne eine Strecke AB der Länge 15 cm! Auf dem Strahl, der den Ausgangspunkt A hat und durch B geht, sollen nun zwei weitere Punkte C und D so eingezeichnet werden, dass $4 \cdot AC = AD$ und $CB = BD$ gilt.
Wie groß sind dafür AC und AD zu wählen?
Erkläre, wie man zur Berechnung dieser beiden Längen AC und AD kommen kann, und zeichne dann die Punkte C und D!

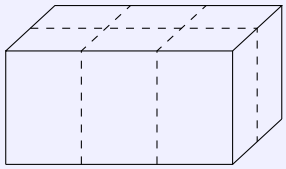
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus der Forderung $4 \cdot AC = AD$ folgt, dass C auf dem genannten Strahl näher bei A liegen muss als D. Wegen der Forderung $CB = BD$ muss B der Mittelpunkt der Strecke CD sein.
Verlängert man AD über D hinaus nochmals um die Länge AC bis zu einem Punkt E, so ist folglich B auch der Mittelpunkt der Strecke AE. Wegen $AB = 15$ cm ergibt sich somit $AE = 30$ cm. Andererseits folgt

$$AE = AD + DE = 4 \cdot AC + AC = 5 \cdot AC$$

Wegen $30 : 5 = 6$ und $4 \cdot 6 = 24$ muss daher $AC = 6$ cm und $AD = 24$ cm gewählt werden.



Aufgabe 280522:
Das in der Abbildung abgebildete Paket ist von links nach rechts 45 cm lang, von vorn nach hinten 30 cm breit, und es ist 25 cm hoch.
Es soll in der dargestellten Weise (gestrichelte Linie) mit Klebeband verklebt werden. Für das Überlappen von End- und Anfangsstücken sind zusätzlich insgesamt 10 cm Klebeband vorgesehen.
Wie viel Zentimeter Klebeband werden demnach insgesamt gebraucht? Wie viel Meter sind das?



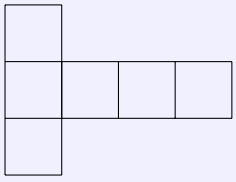
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $2 \cdot 45 = 90$ benötigt man in Längsrichtung 90 cm Klebeband, wegen $4 \cdot 30 = 120$ in Breitenrichtung 120 cm und wegen $6 \cdot 25 = 150$ in Höhenrichtung 150 cm, wenn sich die Klebestreifen nicht überlappen. Wegen $90 + 120 + 150 = 360$ benötigt man unter Berücksichtigung der für die Überlappung der Klebestreifen benötigten 10 cm Klebeband insgesamt 370 cm Klebeband. Das sind 3,70 m.

I.II Figuren zerlegen/ zeichnen

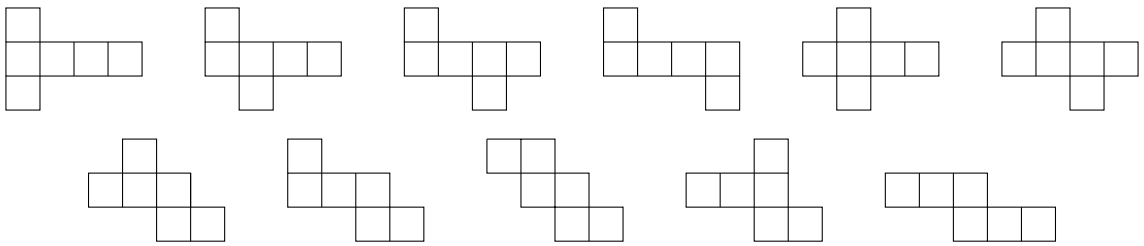
Runde 1

Aufgabe 010515:

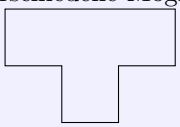
Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels. Es gibt noch andere Möglichkeiten, das Netz eines Würfels zu zeichnen.
Versuche, 5 andere Würfelnetze zu finden, und zeichne sie möglichst genau (Kantenlänge $a = 2$ cm)!



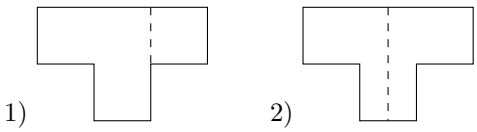
Lösung von Steffen Polster:
Es existieren elf verschiedene inkongruente Netze des Würfels, von denen außer dem in der Aufgabenstellung fünf andere zu wählen sind:



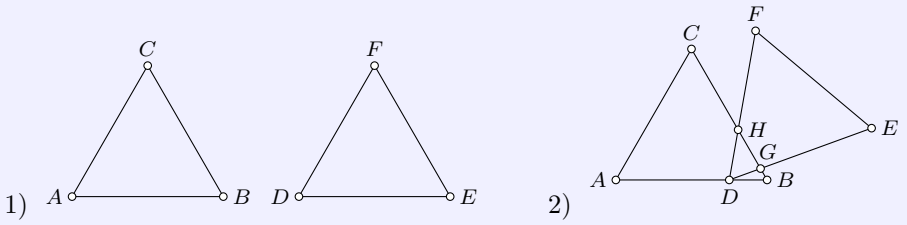
Aufgabe 020516:
Wer kann die Figur mit einem Scherenschnitt so zerschneiden, dass die Teile zu einem Quadrat zusammengelegt werden können? Wer findet dazu zwei völlig verschiedene Möglichkeiten?



Lösung von Steffen Polster:
Mögliche Schnitte sind:

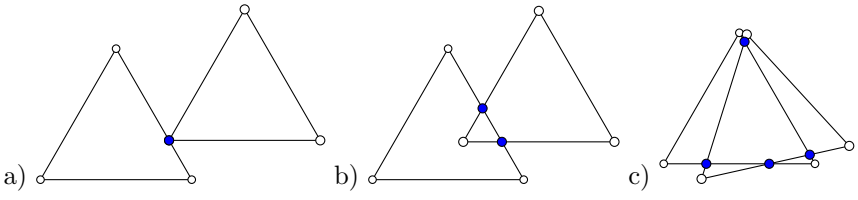


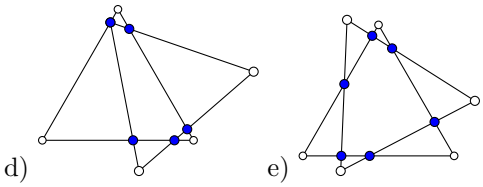
Aufgabe 030516:
Gegeben seien die beiden unter 1) abgebildeten Dreiecke. Sie haben dabei keinen Punkt gemeinsam. Wenn sie dagegen so liegen wie auf der Abbildung 2), haben sie genau drei Punkte, nämlich D, G und H, gemeinsam.



Wie können die Dreiecke liegen, wenn sie genau
a) einen Punkt, b) zwei Punkte, c) vier Punkte, d) fünf Punkte, e) sechs Punkte gemeinsam haben sollen?
Zeichne die Dreiecke in diesen verschiedenen Lagen!

Lösung von Steffen Polster:



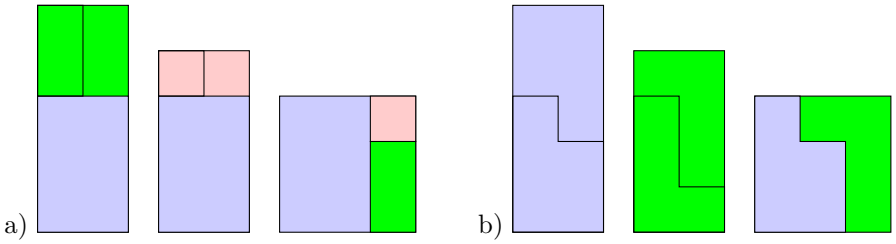


Aufgaben der I. Runde 1963 gelöst von Steffen Polster

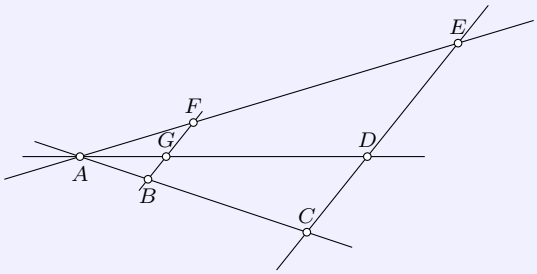
Aufgabe 040515:
Gegeben seien ein Rechteck von 120 mm Länge und 60 mm Breite und ein zweites von 150 mm Länge und 60 mm Breite.

a) Zerlege die beiden Rechtecke so, dass beim Zusammenfügen aller Teile zwei gleichgroße Quadrate entstehen!
b) Ist es möglich, jedes Rechteck nur in zwei Teile zu zerlegen und dennoch zwei gleichgroße Quadrate zusammenfügen zu können?
Fertige zu a) und b) je eine Zeichnung an!

Lösung von Steffen Polster:



Aufgabe 090513:



Die Abbildung zeigt genau 7 Punkte A, B, C, D, E, F, G und genau 5 Geraden, von denen eine durch A, B, C, eine durch A, F, E, eine durch A, G, D, eine durch B, G, F und eine durch C, D, E geht. Außerdem gilt $BF \parallel CE$.

Wir wollen sagen $\left\{\begin{array}{l}\text{eine Strecke}\\ \text{ein Dreieck}\\ \text{ein Trapez}\end{array}\right\}$ gehört der Zeichnung an; wenn $\left\{\begin{array}{l}\text{ihre Endpunkte zwei}\\ \text{seine Eckpunkte drei}\\ \text{seine Eckpunkte vier}\end{array}\right\}$ der Punkte A, B, C, D, E, F, G sind und wenn $\left\{\begin{array}{l}\text{die Strecke}\\ \text{alle Seiten des Dreiecks}\\ \text{alle Seiten des Trapezes}\end{array}\right\}$ schon vollständig gezeichnet in der Abbildung $\left\{\begin{array}{l}\text{vorkommt.}\\ \text{vorkommen.}\\ \text{vorkommen.}\end{array}\right\}$

Beispiele: Die Strecke AB, das Dreieck $\triangle ABF$ „gehören der Zeichnung an“. Die Strecke BD „gehört der Zeichnung“ nicht „an“, auch nicht die Strecke, die den Mittelpunkt von AB mit B verbindet, auch nicht das Dreieck $\triangle ABD$.

Gib alle Strecken, Dreiecke und Trapeze an, die „der Zeichnung angehören“!

Lösung von Steffen Polster:
Die „zur Zeichnung gehörenden“ Strecken sind: AB, AC, AG, AD, AF, AE, BC, BG, BF, CD, CE, GF, GD, DE, FE.

Die „zur Zeichnung gehörenden“ Dreiecke sind: $\triangle ABG$, $\triangle ABF$, $\triangle AGF$, $\triangle ACD$, $\triangle ADE$, $\triangle ACE$.

Die „zur Zeichnung gehörenden“ Trapeze sind: $BCDG$, $BCEF$, $GDEF$.

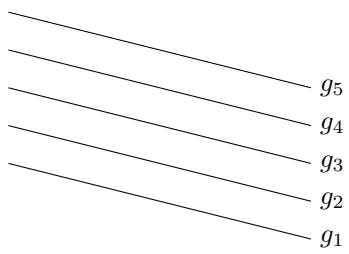
Aufgabe 110513:
Zeichne 5 Geraden g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 so, dass sie

a) keinen gemeinsamen Punkt,
b) genau einen Schnittpunkt,
c) genau vier Schnittpunkte,
d) genau fünf Schnittpunkte,
e) genau sechs Schnittpunkte,
f) genau sieben Schnittpunkte,
g) genau acht Schnittpunkte,
h) genau neun Schnittpunkte,
i) genau zehn Schnittpunkte

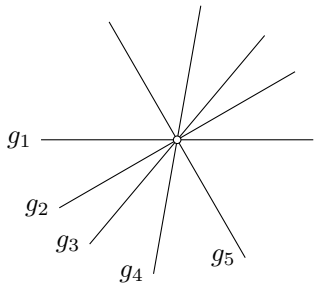
miteinander haben!

Als Lösung gilt eine jeweilige Zeichnung ohne Begründung. Parallele Geraden sind als solche zu kennzeichnen (z. B. $g_1 \parallel g_2$).

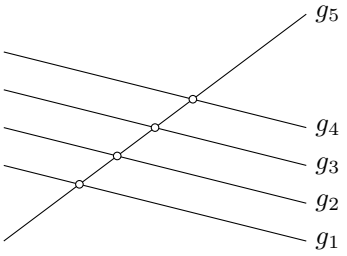
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



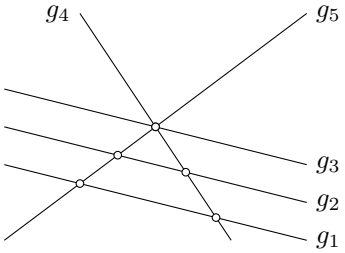
a) $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3 \parallel g_4 \parallel g_5$



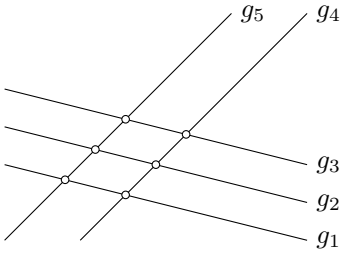
b)



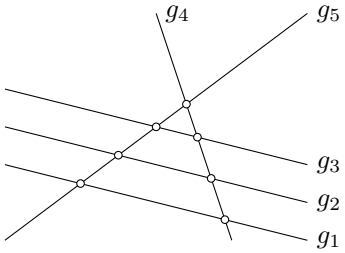
c) $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3 \parallel g_4$



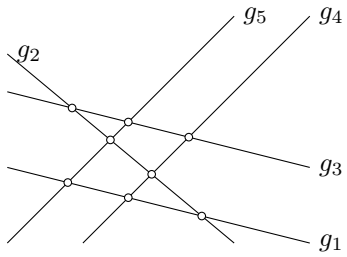
d) $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$



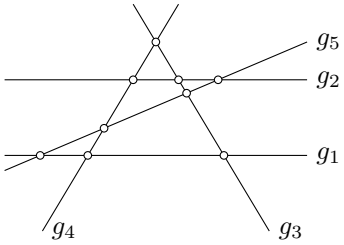
e) $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3, g_4 \parallel g_5$



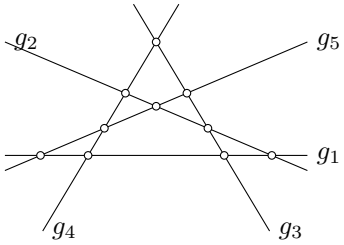
f) $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$



g) $g_1 \parallel g_3, g_4 \parallel g_5$



h) $g_1 \parallel g_2$



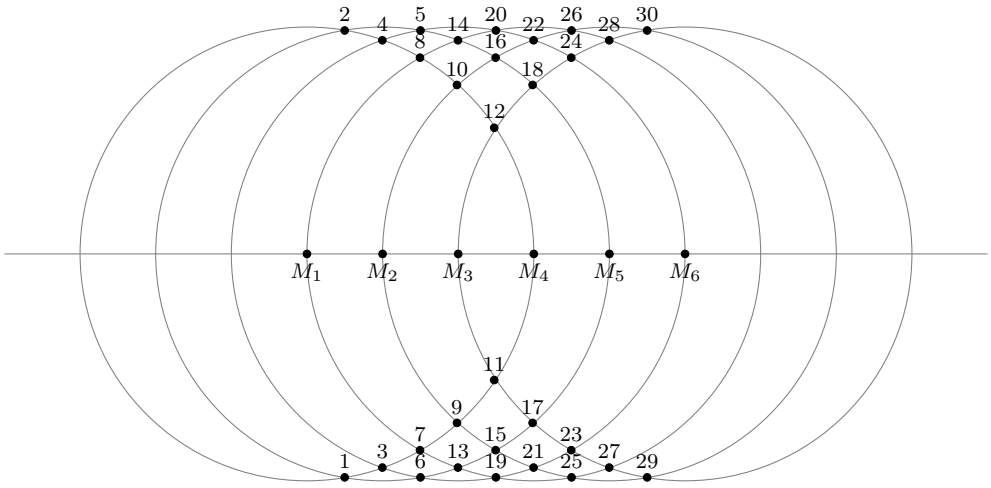
i)

Aufgabe 130511:
a) Ermittle die größte Anzahl von Schnittpunkten, die 6 voneinander verschiedene gleichgroße Kreise insgesamt miteinander haben können! Dabei sind als Schnittpunkte jeweils die Schnittpunkte zweier Kreise zu verstehen.

b) Zeichne ein Beispiel, bei dem 6 Kreise die unter a) ermittelte größte Anzahl von Schnittpunkten miteinander haben und die Kreismittelpunkte überdies alle auf einer und derselben Geraden liegen! Wähle als Radius $r = 3$ cm und nummeriere die Schnittpunkte.

Lösung von Steffen Polster:
a) Zwei Kreise können sich höchstens in 2 Punkten schneiden. Die größtmögliche Anzahl von Schnittpunkten der sechs Kreise entsteht, wenn jeder Kreis jeden der anderen fünf anderen zweimal schneidet. Die scheinbare Schnittpunktzahl $6 \cdot 5 = 60$ muss aber noch durch 2 geteilt werden, da bei diesem Produkt jeder Schnittpunkt zweimal gezählt wurde. Damit gibt es höchstens 30 Schnittpunkte.

b) Die Mittelpunkte der sechs Kreise müssen voneinander einen Abstand kleiner als 2 mal den Radius $r = 3$ cm haben, da sie nur so sich paarweise in jeweils zwei Punkten schneiden können.
Ein mögliches Beispiel ist:

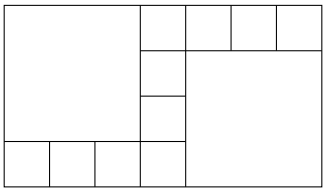


Aufgabe 220514:
Ein Rechteck mit den Seitenlängen 4 cm und 7 cm soll in Quadrate zerlegt werden. Zwei dieser Quadrate sollen die Seitenlänge 3 cm haben. Die anderen Quadrate sollen dann noch so groß wie möglich sein.

a) Zeichne eine Zerlegung, von der du vermutest, dass sie die geforderten Eigenschaft hat!

Wie viel Quadrate (außer den beiden der Seitenlänge 3 cm) kommen in deiner Zeichnung insgesamt vor?
b) Beweise, dass in jeder Zerlegung der geforderten Art diese anderen Quadrate alle dieselbe Seitenlänge haben müssen!
Wie groß ist sie? Wie kann man die Anzahl dieser Quadrate auch rechnerisch finden, ohne sie zu zeichnen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



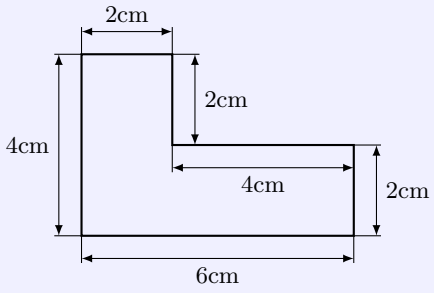
a) Eine Zerlegung liegt z. B. in der Abbildung vor. Außer den beiden Quadraten der Seitenlänge 3 cm kommen 10 Quadrate vor.

b) Da $2 \cdot 3 > 4$ ist, können die beiden Quadrate der Seitenlänge 3 cm nicht in Richtung der Rechteckseiten zu 4 cm nebeneinander liegen, sondern nur in Richtung der Rechteckseiten zu 7 cm. Wegen $4 - 3 = 1$ und $7 - 2 \cdot 3 = 1$ bleibt dann neben diesen Quadraten in beiden Richtungen genau 1 cm Platz. Also müssen die anderen Quadrate, da sie möglichst groß sein sollen, alle die Seitenlänge 1 cm haben.

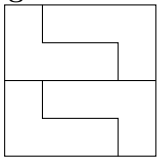
Wegen $4 \cdot 7 = 28$ beträgt der Flächeninhalt des Rechtecks 28 cm^2.
Wegen $3 \cdot 3 = 9$ hat jedes der großen Quadrate den Flächeninhalt 9 cm^2, beide zusammen haben also den Flächeninhalt 18 cm^2. Für die Quadrate von je 1 cm Seitenlänge verbleibt somit der Flächeninhalt $28cm^2 - 18cm^2 = 10cm^2$.
Da jedes dieser Quadrate den Flächeninhalt 1 cm^2 hat, sind es genau 10 solcher Quadrate.

Aufgabe 240511:

Aus Flächenstücken wie in der Abbildung kann man eine Quadratfläche zusammensetzen, deren Seitenlänge 8 cm beträgt.
Wie viele solcher Flächenstücke sind hierzu erforderlich?
Weise die Richtigkeit deiner Antwort durch eine Zeichnung nach!

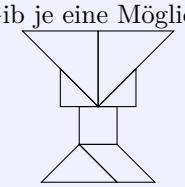


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

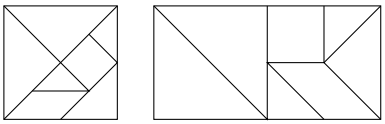


Es sind vier Flächenstücke erforderlich.
Eine Zeichnung der geforderten Art zeigt die Abbildung.

Aufgabe 250511:
Die Teilflächen der dargestellten Figur lassen sich
a) zu einer Quadratfläche und
b) zu einer Rechteckfläche, die keine Quadratfläche ist, zusammensetzen.
Gib je eine Möglichkeit dafür an!



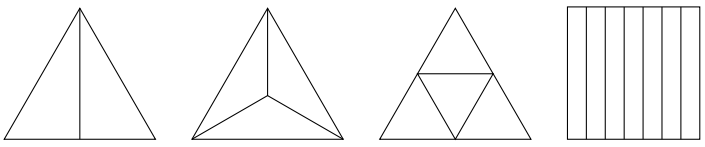
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

Eine mögliche Lösung ist 

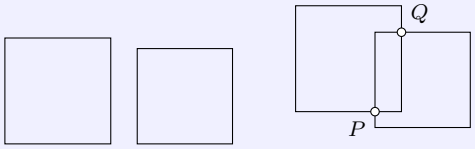
Aufgabe 300511:
Die folgenden Figuren sollen jeweils in gleichgroße Teile zerlegt werden, d. h. in Teile, die alle denselben Flächeninhalt haben.

a) Zeichne ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 5 cm und zeichne darin ein, wie es in zwei gleich große Teile zerlegt werden kann!
b) Zeichne ein weiteres gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 5 cm und seine Zerlegung in drei gleich große Teile!
c) Zeichne für ein weiteres solches Dreieck eine Zerlegung in vier gleich große Teile!
d) Zeichne ein Quadrat der Seitenlänge 7 cm und eine Zerlegung dieses Quadrates in sieben gleich große Teile!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Abbildungen a bis d. Es gibt noch andere Lösungsmöglichkeiten.

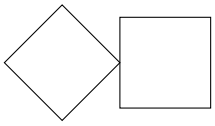
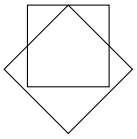
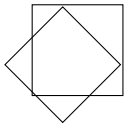
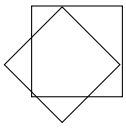
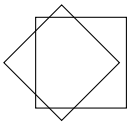
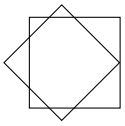


Aufgabe 320511:
Gegeben seien zwei unterschiedlich große Quadrate, wie sie hier dargestellt sind:

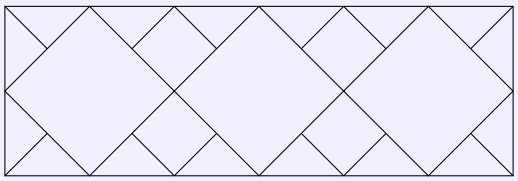


Bei der linken Abbildung haben sie keinen gemeinsamen Punkt, bei der rechten genau zwei, nämlich P und Q. Wie können die Quadrate liegen, wenn sie genau
(a) einen Punkt
(b) drei Punkte
(c) vier Punkte
(d) fünf Punkte
(e) sechs Punkte
(f) sieben Punkte
gemeinsam haben sollen? Zeichne die Quadrate in diesen verschiedenen Lagen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

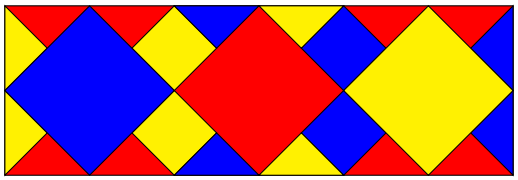
a)  b)  c)  d)  e)  f) 

Aufgabe 330513:



Kann man die Felder der Abbildung so mit den Farben Blau, Rot, Gelb färben, dass jede Farbe eine gleichgroße Gesamtfläche bedeckt wie jede andere Farbe und dass niemals zwei Farben längs einer Strecke zusammenstoßen?
Wenn das möglich ist, stelle eine solche Färbung her! Eine Begründung wird nicht verlangt.

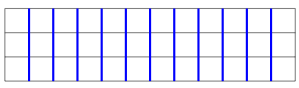
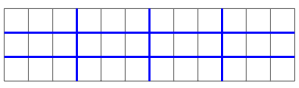
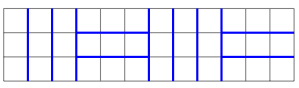
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt eine Färbung der geforderten Art.



Runde 2

Aufgabe 010524:
Aus einem Holzbrettchen von der Länge $a = 60$ cm und der Breite $b = 15$ cm sollen 12 kleine Brettchen von der Größe 5 cm mal 15 cm ausgesägt werden. Lutz bemüht sich, mit möglichst wenig Sägeschnitten auszukommen.
Wie viel Schnitte muss er mindestens durchführen? (Das Sägen „im Paket“ soll dabei nicht gestattet sein.) Wie viel Zentimeter beträgt der Sägeweg?

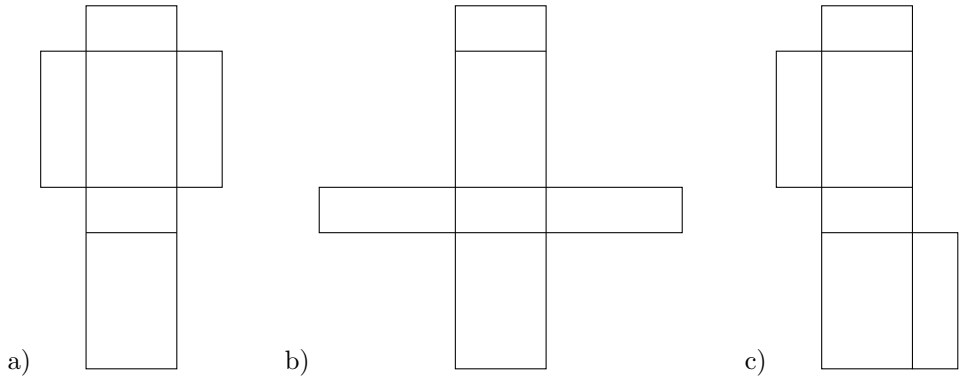
Lösung von Steffen Polster:

a)  b)  c) 

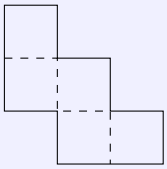
Lutz kann auf drei verschiedene Arten die Schnitte ausführen.
In Bild a) sägt er 11 mal vertikal, womit 12 kleine Brettchen entstehen. Er benötigt 11 Schnitte.
Im Bild b) schneidet er zweimal horizontal und anschließend 9 mal vertikal, d. h. wieder 11 Schnitte. Das gleiche Ergebnis erhält er, wenn er dreimal vertikal und danach 8 mal horizontal durchsägt.
Im dritten Bild c) zersägt er das Brett mit 3 Schnitten und 4 kleinere Bretter der Größe 15 cm $\times$ 15 cm und anschließend jedes Teilbrett zweimal, je nach Bedarf waagerecht oder senkrecht.
In allen drei Fällen benötigt er 11 Schnitte. Der gesamte Sägeweg ist bei a) $11 \cdot 15$ cm $= 165$ cm. Auch in den anderen zwei Fällen muss er 165 cm lang schneiden.

Aufgabe 030525:
Zeichne drei verschiedene Körpernetze für einen Quader mit den Kantenlängen $a = 3$ cm (Länge), $b = 2$ cm (Breite) und $c = 1$ cm (Höhe)!

Lösung von Steffen Polster:
Drei mögliche Netze des Quaders zeigt die Abbildung. Es sind weitere möglich:



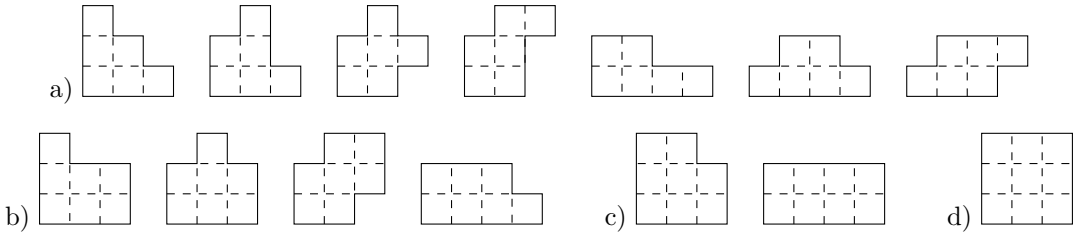
Aufgabe 230522:
Mit 12 gleichlangen Hölzchen sollen Begrenzungen von Flächen gelegt werden. Es sind jedesmal alle 12 Hölzchen für eine Fläche zu verwenden. Außerdem dürfen benachbarte Hölzchen nur gestreckte oder rechte Winkel bilden. Die Abbildung zeigt als Beispiel eine solche Fläche, die einen Inhalt von 5 Flächeneinheiten besitzt.



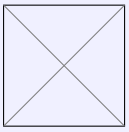
(Als Flächeneinheit gilt der Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge eines Hölzchens.) Zeichne jeweils eine solche Fläche mit einem Flächeninhalt von

a) 6 Flächeneinheiten,
b) 7 Flächeneinheiten,
c) 8 Flächeneinheiten,
d) 9 Flächeneinheiten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Einige mögliche Lösungen zeigt nachstehende Abbildung:

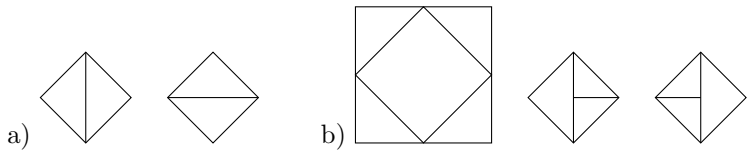


Aufgabe 300521:
a) Die Abbildung zeigt eine Zerlegung eines Quadrates durch geradlinige Schnitte in vier Teilfiguren.
Gib an, wie sich aus diesen Teilfiguren zwei einander gleichgroße Quadrate zusammensetzen lassen! Als Lösung genügt eine Zeichnung der beiden neu zusammengesetzten Quadrate.



b) Stelle fest, ob man ein Quadrat durch geradlinige Schnitte so in sechs Teilfiguren zerlegen kann, dass sich aus ihnen zwei einander gleichgroße Quadrate zusammensetzen lassen!
Wenn eine solche Zerlegung möglich ist, genügt es als Lösung, eine solche Zerlegung und die beiden neu zusammengesetzten Quadrate zu zeichnen.

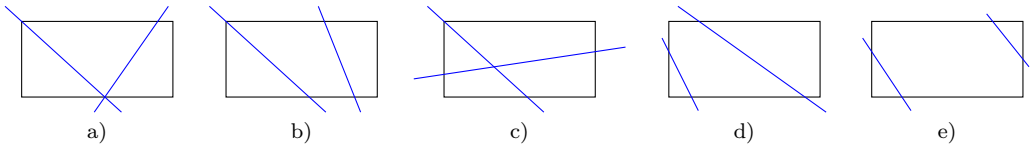
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildungen a, b zeigen jeweils Zeichnungen der geforderten Art. Es gibt noch mehrere andere Möglichkeiten.



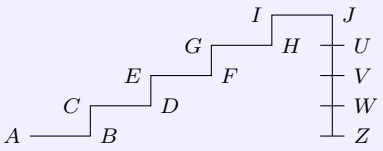
Aufgabe 320523:
Zeichne fünf Rechtecke! Zu jedem dieser Rechtecke sollen dann zwei Geraden gezeichnet werden, die den Rand des Rechtecks schneiden und dabei das betreffende Rechteck in folgende Figuren zerlegen:

a) Zwei Dreiecke und ein Viereck.
b) Ein Dreieck und zwei Vierecke.
c) Ein Dreieck und drei Vierecke.
d) Ein Dreieck, ein Viereck und ein Fünfeck.
e) Zwei Dreiecke und ein Sechseck.
Führe diese Zeichnungen aus! Begründungen werden nicht verlangt

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt für a) bis e) je ein Beispiel, wie die Geraden liegen können.

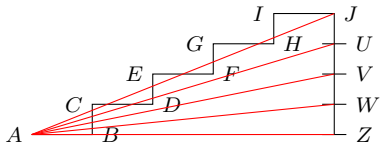


Aufgabe 330523:
Die Abbildung zeigt eine treppenartig aufsteigende Linie $ABCDEFGHIJ$ und eine abwärtsgehende Strecke JZ.
Alle Winkel bei B, C, D, E, F, G, H, I, J sind rechte Winkel.
Die Strecken BC, DE, FG, HI haben einander gleiche Länge, doppelt so lang sind AB, CD, EF, GH, IJ, und viermal so lang ist JZ.
Diese Strecke ist in vier gleichlange Strecken JU, UV, VW, WZ zerlegt.



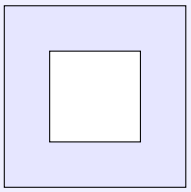
a) Konstruiere eine derartige Figur $ABCDEFGHIJUVWZ$!
b) Finde dann durch Konstruktion die Anzahl der Schnittpunkte, die beim Schnitt der Treppenlinie $ABCDEFGHIJ$
(1) mit der Strecke AJ zwischen A und J,
(2) mit der Strecke AU zwischen A und U,
(3) mit der Strecke AV zwischen A und V,
(4) mit der Strecke AW zwischen A und W
vorkommen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Die Abbildung zeigt die zu konstruierende Figur; zusätzlich wurden die Strecken AJ, AU, AV, AW konstruiert.
Als gesuchte Anzahlen von Schnittpunkten sind daran ersichtlich: b) 7, c) 3, d) 1, e) 1.

Aufgabe 340522:



Die Abbildung zeigt eine ringförmige Fläche. Sie wird von einem Quadrat der Seitenlänge 4 cm und einem Quadrat der Seitenlänge 2 cm eingeschlossen.
Beide Quadrate haben denselben Mittelpunkt, jede Seite des kleinen Quadrats ist zu einer Seite des großen Quadrates parallel.
Nun sollen mehrere Geraden gezeichnet werden, so dass sie, genügend verlängert, die ringförmige Fläche in Teilflächen zerlegen. Die Teilflächen einer Zerlegung sollen einander gleiche Größe und gleiche Form haben. Folgende Anzahlen sollen erreicht werden:

Aufgabe	Anzahl der Geraden	Anzahl der entstehenden Teilflächen
(a)	2	4
(b)	3	6
(c)	4	8
(d)	6	12

Fertige zu jeder der Aufgaben (a), (b), (c), (d) eine Zeichnung an!
Zu zwei der Aufgaben (a), (b), (c), (d) fertige noch je eine weitere Zeichnung an, in der die Teilflächen von anderer Gestalt sind als in den vorigen Zeichnungen!
Eine Begründung oder Beschreibung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt Zeichnungen der geforderten Art.

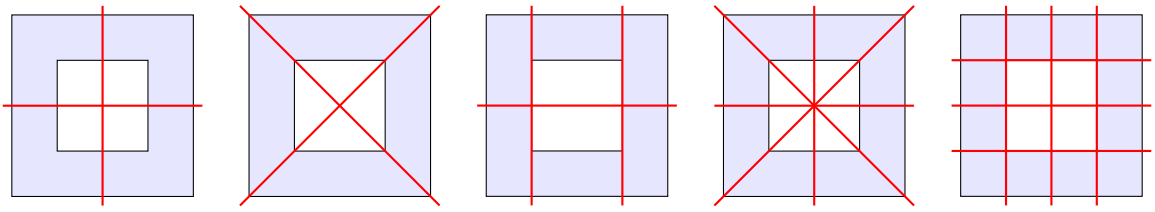


Abbildung a_1 Abbildung a_2 Abbildung b Abbildung c Abbildung d

I.III Konstruktionen, Kongruenz-Abbildungen

Runde 1

Aufgabe 100511:

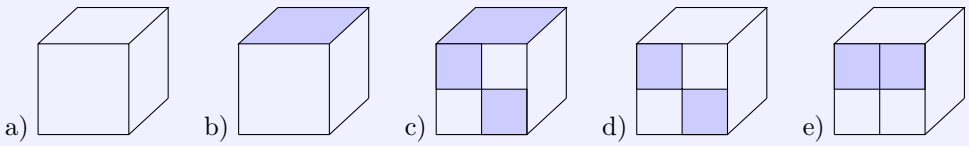


Abbildung 1

Die Abbildung 1 zeigt unter a) bis e) von fünf Würfeln je ein Schrägbild.

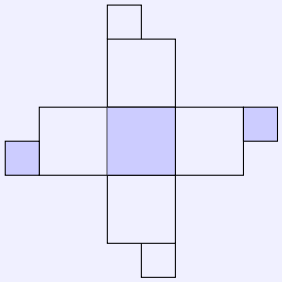


Abbildung 2

Die Abbildung 2 zeigt ein Netz, aus dem genau ein Würfel hergestellt werden kann, wenn die Seite mit den gefärbten Flächen nach außen kommen soll.
Beantworte für jedes der fünf Schrägbilder die Frage, ob es den aus dem abgebildeten Netz (Abbildung 2) hergestellten Würfel darstellen kann oder nicht!
(In den Fällen, in denen die Antwort „Ja“ lautet, genügt die Angabe dieser Antwort. In den Fällen, in denen die Antwort „Nein“ lautet, ist sie zu begründen.)

Lösung von Steffen Polster:
Würfel a) ist keine Lösung sein, da jede Ecke, die nicht an eine aus vier kleinen Quadraten bestehende Seitenfläche stößt, die komplett farbige Quadratseite berührt.

Würfel b) kann aus dem Würfelnetz hergestellt werden.

Würfel c) ist keine Lösung sein. Die Fläche mit den kleinen Quadraten stößt nicht an die Fläche, die vollständig farbig ist.

Würfel d) kann aus dem Würfelnetz hergestellt werden.

Würfel e) kann keine Lösung sein, da die kleinen farbigen Quadrate nicht nebeneinander liegen. Sie berühren sich nur an einer Ecke.

Aufgabe 160512:
Auf einer Geraden g sollen fünf Punkte A, B, C, D, E in dieser Reihenfolge angeordnet sein und folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die Strecke AE hat die Länge $AE = 18$ cm.
(2) Die Strecke AD ist 2 cm kürzer als die Strecke AE.
(3) Die Strecke CD hat die Länge $CD = 5$ cm.
(4) Die Strecke AB ist 3 cm länger als die Strecke CE.

a) Konstruiere fünf derartige Punkte A, B, C, D, E!
b) Ermittle die Längen der Strecken AD, AB, BC!

Als Lösung genügt:
a) eine Konstruktion ohne Beschreibung und
b) die Ermittlung der Streckenlängen AD, AB, BC aus den Bedingungen (1) bis (4).

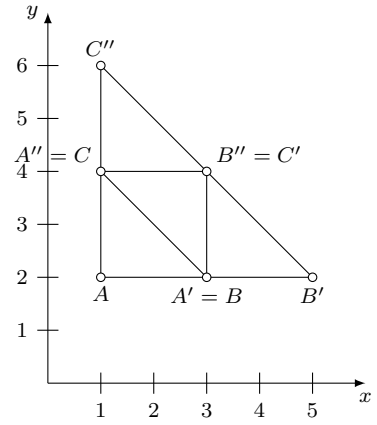
Lösung von Steffen Polster:
Aus (2) und (1) wird $AD = 16$ cm und somit mit (3) $AC = 11$ cm.
Weiterhin ist $CE = AE - AC = 18$ cm -11 cm $= 7$ cm und damit mit (4) $AB = 10$ cm.
Für die Streckenlängen folgt somit:
$AD = 16$ cm, $AB = 10$ cm, $BC = AC - AB = 11$ cm -10 cm $= 1$ cm.

Konstruktion:



Aufgabe 290514:
a) Zeichne in einem Koordinatensystem (Einheit 1 cm) ein Dreieck ABC mit $A(1;2)$, $B(3;2)$, $C(1;4)$!
b) Wähle $\overrightarrow{AB}$ als Verschiebungspfeil und zeichne das bei dieser Verschiebung aus dem Dreieck ABC entstehende Bild $A'B'C'$ in dasselbe Koordinatensystem!
c) Zeichne dazu noch das bei der Verschiebung $\overrightarrow{AC'}$ entstehende Bild $A''B''C''$ des Dreiecks $A'B'C'$!
d) Welche Dreiecke und welche Parallelogramme sind mit ihren vollständigen Seitenkanten in der nun entstandenen Gesamtfigur insgesamt enthalten? Zähle diese Dreiecke und Parallelogramme wie üblich durch Angabe ihrer Eckpunkte auf!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

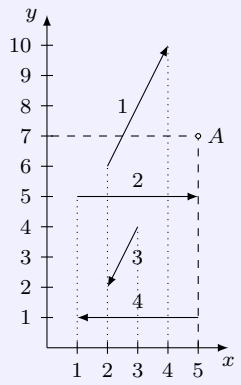


a) bis c) siehe Abbildung.

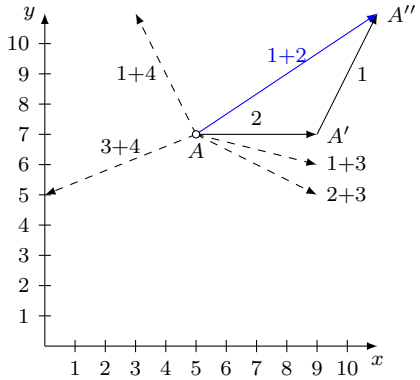
d) In der Gesamtfigur sind insgesamt die Dreiecke ABC, $AB'C''$, $A'B'C'$, $A'B''C$, $A''B''C''$ und die Parallelogramme $ABB''A''$, $A'B'B''A''$, $A'C'C''A''$ mit ihren vollständigen Seitenkanten enthalten.

Aufgabe 310513:

Die Abbildung zeigt einen Punkt A und vier Verschiebungspfeile 1, 2, 3, 4.
Verschiebt man den Punkt nacheinander mit zwei dieser Verschiebungspfeile, so erhält man einen Punkt A''.
Stelle fest, welche zwei Verschiebungspfeile Du nehmen musst, damit A'' möglichst weit von A entfernt ist!
Eine Begründung wird nicht verlangt.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

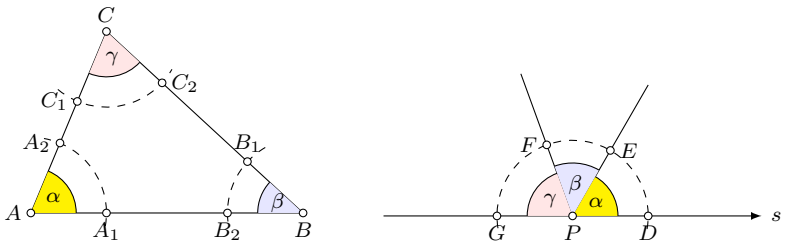


Der Punkt A'' ist dann am weitesten von A entfernt, wenn man auf A die Verschiebungspfeile 2 und 1 (bzw. 1 und 2) anwendet.

Runde 2

Aufgabe 010525:
Zeichne ein beliebiges Dreieck und nenne seine Winkel α, β und γ!
Konstruiere mit Zirkel und Lineal außerhalb des Dreiecks den Winkel $\alpha + \beta + \gamma$! Wie groß ist der konstruierte Winkel vermutlich?

Lösung von Steffen Polster:

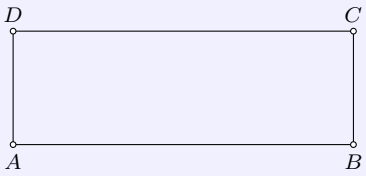


Die linke Abbildung zeigt das Dreieck ABC mit den Innenwinkeln α, β und γ. Zur Konstruktion der Summe der Winkel $\alpha + \beta + \gamma$ wählt man einen beliebigen Punkt P und von diesem aus einen Strahl s. (rechte Abbildung)

Um die Punkte A, B und C des Dreiecks und den Punkt P zeichnet man Kreisbögen mit gleichem Radius. Die Schnittpunkte der Kreisbögen mit den Dreiecksseiten seien A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 und C_2. Der Schnittpunkt des Kreisbogens mit dem Strahl s sei D.

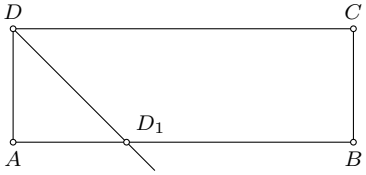
Die Zirkelspannen A_1A_2, B_1B_2 und C_1C_2 trägt man nacheinander, beginnend bei D, auf dem Kreisbogen um P ab und erhält die Schnittpunkte E, F und G. Verbindet man G mit P, so ist der Winkel $\angle DPG$ die Summe der Innenwinkel des Dreiecks. Man sieht, dass D, P und G auf einer Geraden liegen. Der Winkel $\alpha + \beta + \gamma$ ist also ein gestreckter Winkel und beträgt somit 180°.

Aufgabe 070523:



Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ (siehe Abbildung) mit folgenden Seitenlängen: $AB = 6$ cm und $BC = 2$ cm.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das rechtwinklige Dreieck $\triangle DAD_1$, bei dem der Punkt D_1 auf der Seite AB liegt und der Winkel $\angle D_1DA$ eine Größe von 45° hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da der Winkel $\angle CDA$ ein rechter ist, ist der gesuchte Winkel $\angle D_1DA$ die Hälfte dieses Winkels.
Man halbiert daher den Winkel $\angle CDA$. Die Winkelhalbierende schneidet wegen $AD_1 = AD < AB$ die Seite AB im Punkt D_1. Das Dreieck $\triangle DAD_1$ ist das gesuchte.



Alternativ-Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da der Winkel $\angle CDA$ ein rechter ist, ist der gesuchte Winkel $\angle D_1DA$ die Hälfte dieses Winkels.
Jede Diagonale eines Quadrate halbiert zwei gegenüberliegende Winkel des Quadrate.

Man konstruiert nun das Quadrat DAD_1D_2, indem man von A auf AB die Strecke AD_1 mit $AD = AD_1$ und von D auf DC die Strecke DD_2 mit $AD = AD_2$ abträgt, und verbindet D mit D_1.
Dann ist DD_1 Diagonale des Quadrats DAD_1D_2 und der Winkel $\angle D_1DA$ ist 45° groß. Das Dreieck $\triangle DAD_1$ ist daher das gesuchte.

Aufgabe 090523:

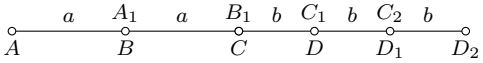


Gegeben seien drei Strecken mit den Längen a, b und c (siehe Abbildung).
Konstruiere eine Strecke mit der Länge $2 \cdot (2a + 3b - c)$!
Bei der Konstruktion darf die Maßeinteilung des Lineals nicht benutzt werden. Eine Konstruktionsbeschreibung ist nicht verlangt.

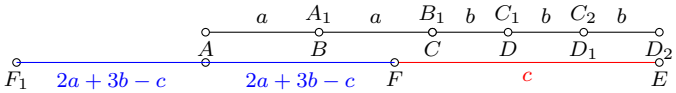
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Konstruktion von Strecken der Längen $2a$ und $3b$



Konstruktion einer Strecke der Länge $2a + 3b$

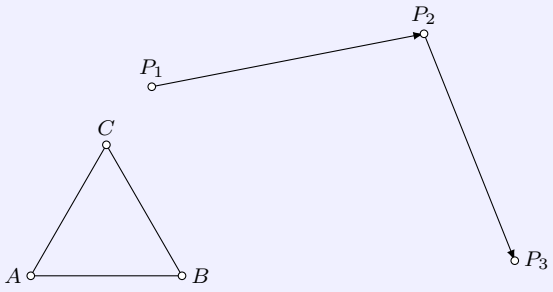


Konstruktion der Strecken der Länge $2a + 3b - c$ und $2(2a + 3b - c)$



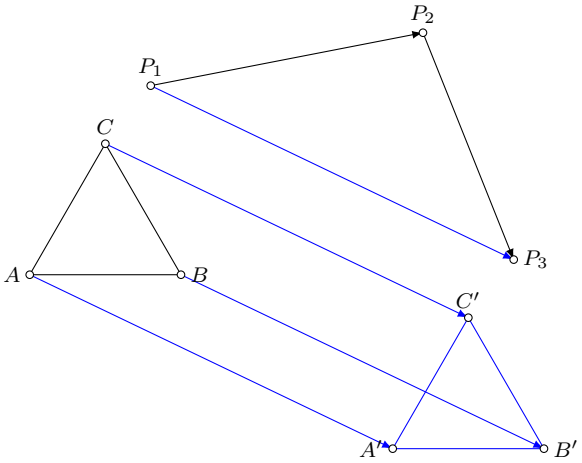
Die Strecke $\overline{FF_1}$ ist die gesuchte.

Aufgabe 100521:

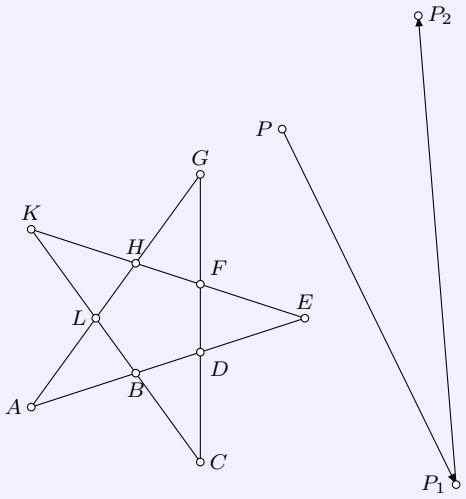


Auf der Abbildung sind ein Dreieck $\triangle ABC$ und zwei Verschiebungspfeile $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_2P_3}$ abgebildet.
Mit dem Dreieck $\triangle ABC$ sollen nacheinander die Verschiebungen ausgeführt werden, die durch die Verschiebungspfeile $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_2P_3}$ gegeben sind.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dabei entstehende Dreieck $\triangle A_2B_2C_2$!
(Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zwei Verschiebungen können zu einer Verschiebung zusammengefasst werden, indem der Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_3}$ gebildet wird.
Zu diesem Verschiebungspfeil werden die Parallelen durch die Punkte A, B und C konstruiert. Der Abstand P_1P_3 wird auf die Parallelen zu dem Verschiebungspfeil in den jeweiligen Punkten A, B und C abgetragen.



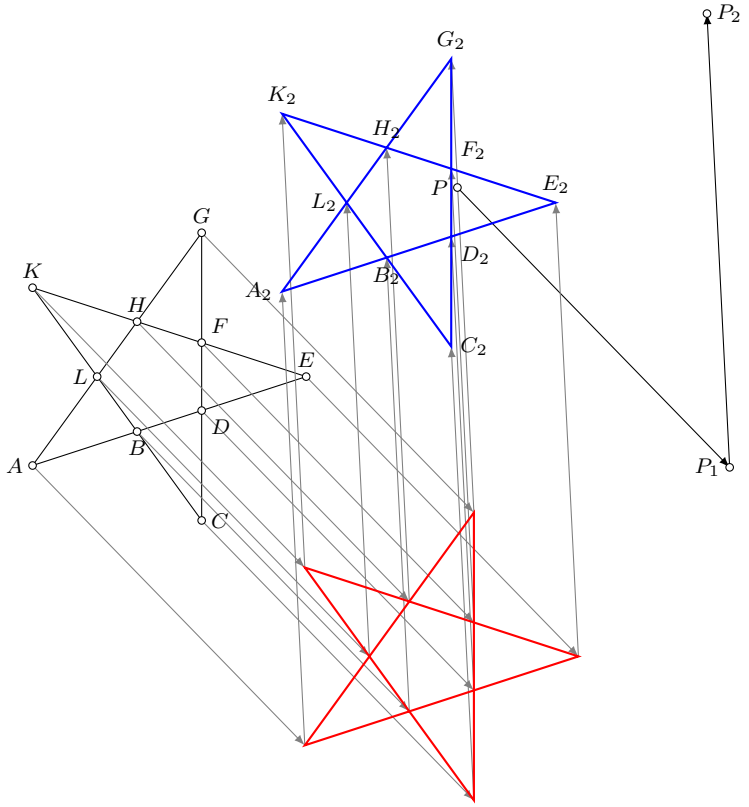
Aufgabe 110521:



Auf der Abbildung sind eine Sternfigur $ABCDEFGHKL$ und zwei Verschiebungspfeile $\overrightarrow{PP_1}$ und $\overrightarrow{P_1P_2}$ abgebildet.
Auf die Sternfigur sollen nacheinander die Verschiebungen $\overrightarrow{PP_1}$ und $\overrightarrow{P_1P_2}$ angewendet werden.

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck die dabei entstehende Sternfigur $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2K_2L_2$!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

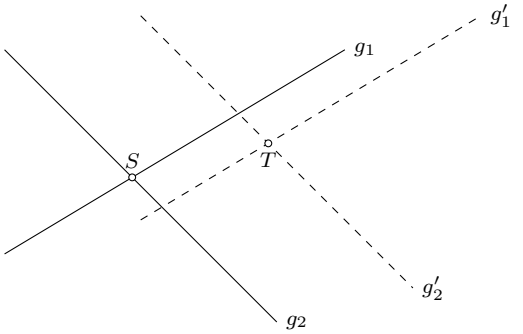
Lösung von Steffen Polster:



Aufgabe 130522:
Zeichne zwei Geraden g_1 und g_2, die einander in einem Punkte S schneiden! Wähle einen Punkt T, der auf keiner der beiden Geraden liegt!
Konstruiere die bei der Verschiebung ST entstehenden Bilder g_1' und g_2' der beiden Geraden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

Als vollständige Lösung gilt jede Zeichnung mit einer möglichen Lage der beiden Geraden g_1, g_2, der Punkte S und T sowie der beiden Bildgeraden $g_1 \parallel g_1'$ und $g_2 \parallel g_2'$ die einander im Punkte T schneiden.

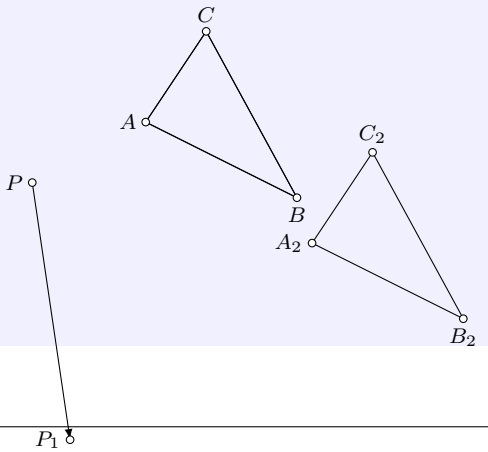


Aufgabe 140521:

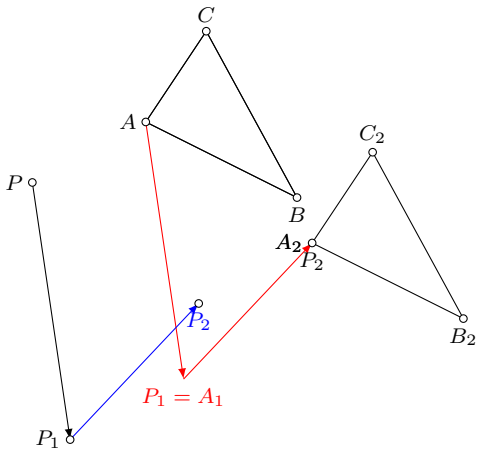
Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet.

Das Dreieck $A_2B_2C_2$ ist dadurch entstanden, dass auf das Dreieck ABC zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$, und dann eine zweite Verschiebung angewendet wurde.

Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck denjenigen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$, der diese zweite Verschiebung angibt!
~~Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.~~



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Als Lösung gilt jede einwandfreie Zeichnung, in der (1. Lösungsweg) für mindestens einen der Punkte A, B, C sein Bild A_1, B_1 bzw. C_1 bei der Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann gleichsinnig parallel und gleichlang zu $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ bzw. $\overrightarrow{C_1C_2}$ der gesuchte Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$ oder

(2. Lösungsweg) gleichsinnig parallel und gleichlang zu einem der Verschiebungspfeile $\overrightarrow{AA_2}$, $\overrightarrow{BB_2}$ bzw. $\overrightarrow{CC_2}$ der Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_2}$ und dann durch Verbindung von P_1 mit P_2 der gesuchte Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$ konstruiert wurde.

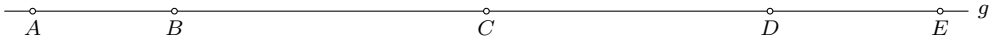
Aufgabe 150524:
Gegeben sei eine Gerade g und auf ihr ein Punkt A.
Konstruiere auf dieser Geraden g vier weitere Punkte B, C, D, E, die in dieser Reihenfolge auf derselben von A ausgehenden Halbgeraden liegen und für die folgendes zutrifft:

(1) Die Strecke AB ist 2,5 cm lang.
(2) Die Strecke BC ist um 0,3 dm länger als die Strecke AB.
(3) Die Strecke CE ist genauso lang wie die Summe der Strecken AB und BC.
(4) Die Strecke DE ist um 50 mm kürzer als die Strecke CE.

Beschreibe die Konstruktion, und ermittle die Länge der Strecke AD (in cm)!

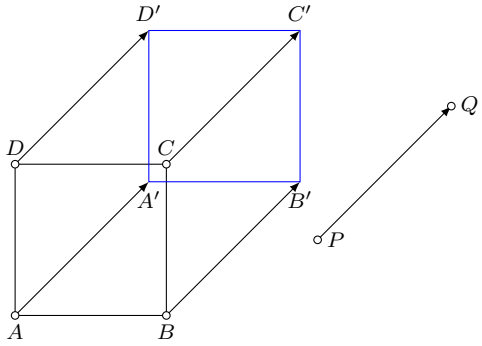
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir tragen zunächst von A aus auf g mit dem Zirkel eine Strecke von 2,5 cm Länge ab. Ihr anderer Endpunkt sei 3.
Dann tragen wir wegen 0,3 dm = 3 cm und 2,5 cm + 3 cm = 5,5 cm von B aus auf der Halbgeraden von g, auf der A nicht liegt, eine Strecke von 5,5 cm Länge ab und nennen ihren anderen Endpunkt C.

Wegen 2,5 cm + 5,5 cm = 8 cm tragen wir nun von C aus auf der Halbgeraden von g, auf der B nicht liegt, eine Strecke von 8 cm Länge ab und nennen ihren anderen Endpunkt E.
Da D laut Aufgabe zwischen C und E liegt, tragen wir schließlich wegen 50 mm = 5 cm und 8 cm - 5 cm = 3 cm von E aus auf derselben Halbgeraden von g, auf der C liegt, eine Strecke von 3 cm Länge ab und nennen ihren anderen Endpunkt D.
Wegen 2,5 cm + 5,5 cm + 8 cm - 3 cm = 13 cm hat die Strecke AD eine Länge von 13 cm.



Aufgabe 160523:
Zeichne ein Quadrat $ABCD$ mit $AB = 4$ cm!
Zeichne dann einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$, der 5 cm lang ist und parallel zur Geraden durch A und C in Richtung von A nach C verläuft!
Konstruiere das Bild $A'B'C'D'$ des Quadrates $ABCD$ bei der Verschiebung $\overrightarrow{PQ}$!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

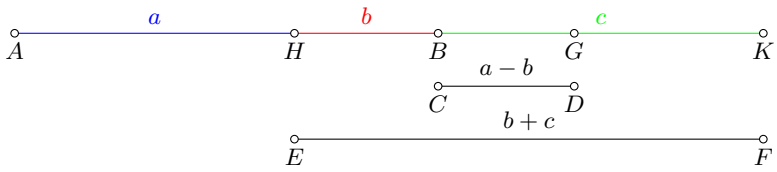


Aufgabe 170524:
Drei vorgegebene Strecken AB, CD, EF und drei Strecken gesuchter Längen a, b, c sollen die folgenden Eigenschaften haben:

$AB = a + b = 5{,}6$ cm; $CD = a - b = 1{,}8$ cm; $EF = b + c = 6{,}2$ cm.

Zeichne drei derartige Strecken AB, CD, EF, und ermittle aus ihnen durch eine Konstruktion (nur mit Zirkel und Lineal) die gesuchten Längen a, b und c!
Begründe, warum deine Konstruktion die gesuchten Längen a, b, c ergibt, wenn sie die geforderten Eigenschaften haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Trägt man auf der Verlängerung von AB über B hinaus eine Strecke BG der Länge $BG = CD$ ab, so wird

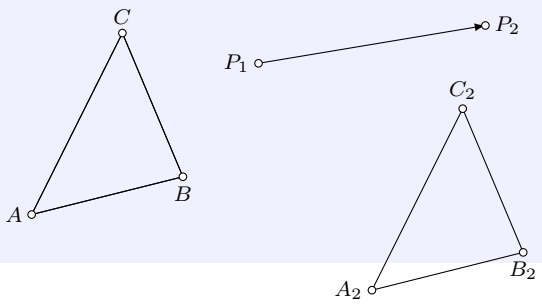
$$AG = AB + BG = AB + CD = (a + b) + (a - b) = 2a$$

Konstruiert man den Mittelpunkt H der Strecke AG, so wird folglich $AH = a$.
Hiernach wird ferner $HB = AB - AH = (a + b) - a = b$.
Konstruiert man daher auf der Verlängerung von HB über B hinaus einen Punkt K so, dass $HK = EF$ gilt, so ergibt sich

$$BK = HK - HB = EF - HB = (b + c) - b = c$$

Aufgabe 190523:
Auf diesem Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_2}$ sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet. Gesucht ist ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ mit folgender Eigenschaft:

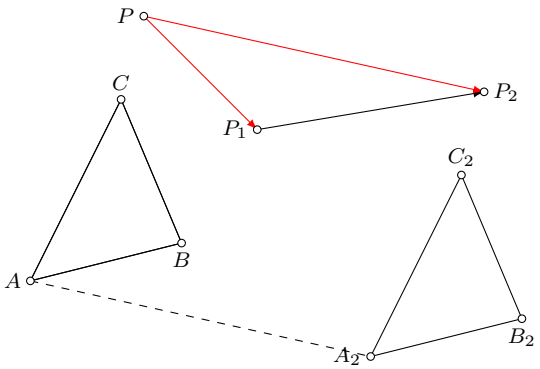
Wendet man auf das Dreieck ABC zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann die Verschiebung $\overrightarrow{P_1P_2}$ an, so entsteht das Dreieck $A_2B_2C_2$.



Konstruiere einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ mit dieser Eigenschaft!

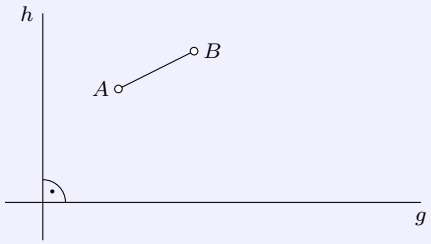
Verwende dabei nur Lineal (ohne Benutzung der Millimetereinteilung), Zirkel und (nur zum Konstruieren von Parallelen) Zeichendreieck! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beispiel einer als Lösung möglichen Konstruktion:



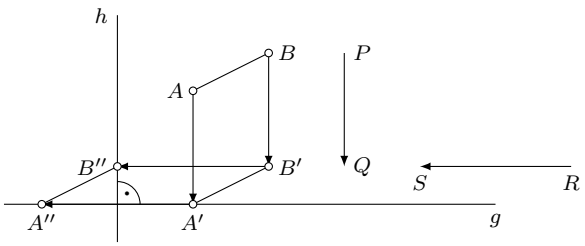
Aufgabe 210524:
Auf dem Arbeitsblatt sind zwei Geraden g, h und eine Strecke AB gegeben. Konstruiere einen Verschiebungspfeil PQ parallel zu h und danach einen Verschiebungspfeil RS parallel zu g, und zwar so, dass folgendes gilt:

Wenn man die Strecke AB durch die Verschiebung PQ in die Strecke $A'B'$ überführt und diese danach durch die Verschiebung RS in die Strecke $A''B''$, so liegt A'' auf g und B'' auf h.



Eine Beschreibung und Begründung der Konstruktion wird nicht verlangt.

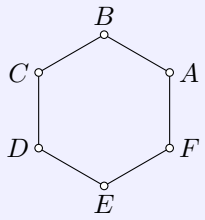
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



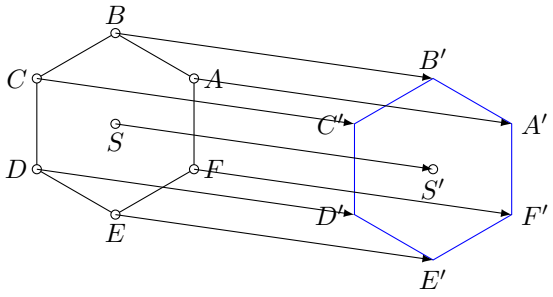
Aufgabe 230524:
In der nachstehenden Abbildung sind ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ und ein Punkt S' gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen AD, BE und CF des Sechsecks sei S.

Wir betrachten diejenige Verschiebung, bei der S den Bildpunkt S' hat.

Konstruiere den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{SS'}$ und das Bild $A'B'C'D'E'F'$ des Sechsecks $ABCDEF$ bei dieser Verschiebung!



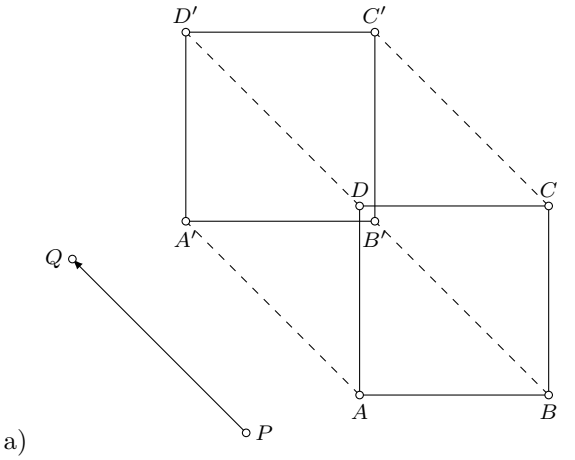
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



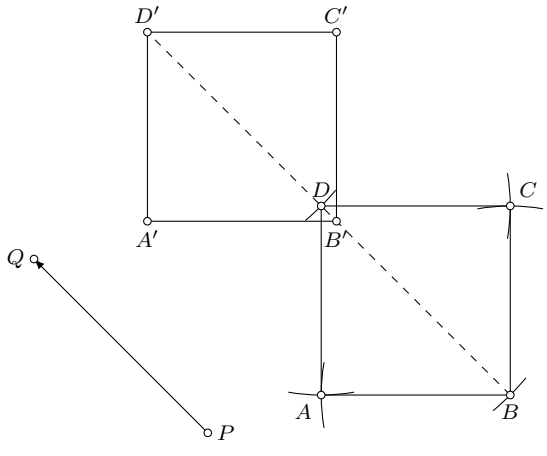
Aufgabe 250524:
Zeichne ein Quadrat $A'B'C'D'$ mit $A'B' = 5{,}0$ cm! Zeichne dann einen Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$, der 6,5 cm lang ist und parallel zur Geraden durch B' und D' in Richtung von B' nach D' verläuft!

Es soll nun zum Bild $A'B'C'D'$ bei dieser Verschiebung das Original $ABCD$ ermittelt werden. Bei der Lösung dieser Aufgabe darf die mm-Skala des Lineals nicht mehr verwendet werden.
a) Löse die genannte Aufgabe so, dass außer Zirkel und Lineal auch das Zeichendreieck zum Ziehen von Parallelen durch die Punkte A', B', C' und D' benutzt wird!
b) Löse (in einer neuen Zeichnung) die Aufgabe nur mit Zirkel und Lineal und so, dass weder die Gerade durch A und A' noch die Gerade durch C und C' gezeichnet wird!
Eine Begründung und Konstruktionsbeschreibungen werden nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a)



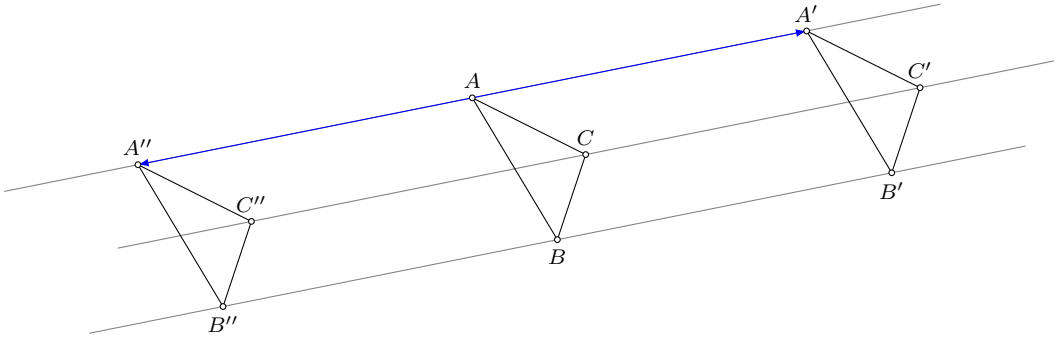
b)

Aufgabe 280523:
a) Zeichne eine Gerade g und ein Dreieck ABC, dessen Eckpunkt C auf g liegt, während A und B nicht auf g liegen, sondern sich auf verschiedenen Seiten der Geraden g befinden!

b) Von einer Verschiebung wird verlangt, dass bei ihr die Gerade g sich selbst als Bild hat und dass die Verschiebungsweite 6 cm beträgt.
Wie viele solcher Verschiebungen gibt es insgesamt?
Zeichne zu jeder dieser Verschiebungen einen Verschiebungspfeil!

c) Konstruiere das Bild des Dreiecks ABC bei jeder der in b) genannten Verschiebungen!

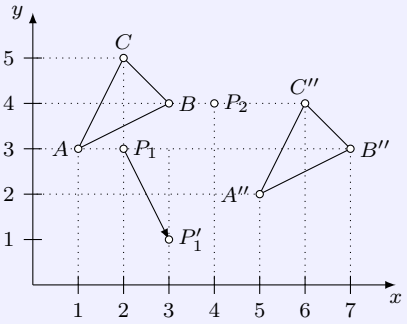
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



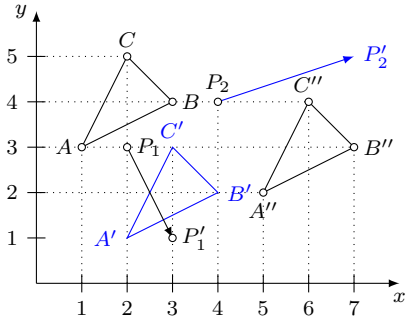
a) Die Abbildung zeigt ein Beispiel der geforderten Zeichnung von g und $\triangle ABC$.
b) Es gibt genau zwei solcher Verschiebungen. Verschiebungspfeile hierzu sind in der Abbildung gezeichnet.
c) Die Bilder $A'B'C'$ und $A''B''C''$ des Dreiecks ABC bei den beiden in b) genannten Verschiebungen sind ebenfalls in der Abbildung konstruiert.

Aufgabe 310522:

In der Abbildung sind gegeben: Zwei Dreiecke ABC und $A''B''C''$, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_1'}$ sowie ein Punkt P_2.
a) Konstruiere das Bild $A'B'C'$ des Dreiecks ABC bei der Verschiebung mit dem Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_1P_1'}$!
b) Konstruiere den bei P_2 beginnenden Verschiebungspfeil $\overrightarrow{P_2P_2'}$ derjenigen Verschiebung, bei der $A'B'C'$ das Bild $A''B''C''$ hat!
Eine Beschreibung der Konstruktionen wird nicht verlangt.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Abbildung zeigt eine verlangte Konstruktion.
Die zu konstruierenden Punkte A', B', C', P_2' sind eindeutig bestimmt, für die Wahl von Hilfslinien gibt es verschiedene Möglichkeiten.

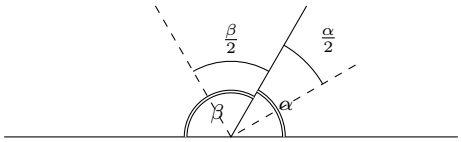
II Klasse 6

II.1 Dreiecke, Geraden, Winkel

I Runde 1

Aufgabe 010616:
Zeichne zwei Nebenwinkel und konstruiere ihre Winkelhalbierenden.
Was für einen Winkel bilden die Winkelhalbierenden? Begründe deine Antwort!

Lösung von Steffen Polster:



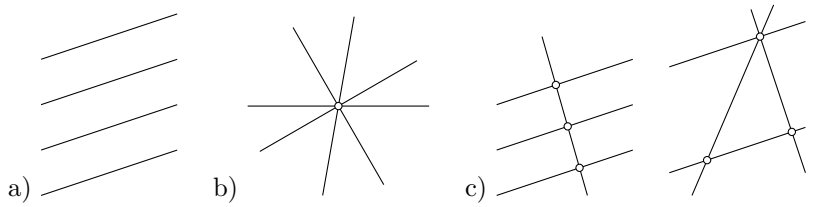
α und β seien die zwei Nebenwinkel mit $\alpha + \beta = 180°$.
Die Winkel zwischen den Winkelhalbierenden und einem gemeinsamen Schenkel sind somit $\frac{\alpha}{2}$ bzw. $\frac{\beta}{2}$.
Der Winkel zwischen den zwei Winkelhalbierenden ist damit

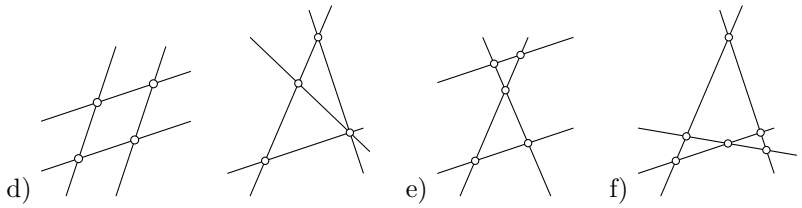
$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = 90°$$

d. h. sie bilden einen rechten Winkel.

Aufgabe 020615:
In einer Ebene sollen vier Geraden so gezeichnet werden, dass genau
a) kein Schnittpunkt,
b) 1 Schnittpunkt,
c) 3 Schnittpunkte (zwei Möglichkeiten),
d) 4 Schnittpunkte (zwei Möglichkeiten),
e) 5 Schnittpunkte,
f) 6 Schnittpunkte entstehen!
Wie müssen die Geraden zueinander liegen? Zeichne!

Lösung von Steffen Polster:
Die Geraden müssen für a) zueinander parallel sein, bei b) sich alle in einem Punkt schneiden.
Die Bedingung c) wird erfüllt, wenn entweder drei zueinander parallele Geraden von der vierten Geraden geschnitten werden oder wenn ein Dreieck von der vierten in einem Eckpunkt berührt wird.
Für die Aufgabe d) können je zwei paarweise parallele Geraden vorliegen oder ein Dreieck von der letzten Gerade in einem Eckpunkt und der gegenüberliegenden Seite geschnitten werden.
Für Bedingung e) müssen zwei Geraden parallel zueinander sein und bei f) dürfen keine der Geraden zueinander parallel sein.





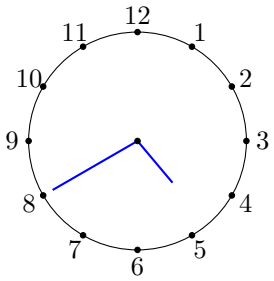
Aufgabe 040613:
Eine 6. Klasse stellte verschiedenartige Pappdreiecke her. Die Schüler wollten diese Dreiecke im Mathematischen Kabinett ihrer Schule in einem Schränkchen aufbewahren, das neun Fächer enthielt. Jeweils drei Fächer hatten die Schüler für die gleichseitigen Dreiecke, für die nur gleichschenkligen Dreiecke (d. h. für die nicht gleichseitigen) und für die ungleichschenkligen Dreiecke vorgesehen. Innerhalb dieser Gruppen sollten die Figuren nämlich noch in spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke unterteilt werden.

Überprüfe, ob die Anzahl der Fächer richtig gewählt war!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da es keine rechtwinkligen oder stumpfwinkligen Dreiecke gibt, die gleichseitig sind, bleiben 2 Fächer unbenutzt. Die Anzahl der Fächer hätte also 7 betragen müssen.

Aufgabe 080612:
Berechne die Größe des kleineren der beiden Winkel, die der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr um 16 Uhr 40 Minuten miteinander bilden!

Lösung von Steffen Polster:



Der große Zeiger steht auf der 8. Der kleine Zeiger steht zwischen der 4 und 5.
In 60 Minuten bewegt sich der kleine Zeiger jeweils 30°. Zum Zeitpunkt 16:40 Uhr ist er somit $\frac{40}{60} \cdot 30° = 20°$ von der 4 in Richtung 5 gewandert, bzw. er steht noch 10° vor der 5.

Der Winkel zwischen der 5 und der 8 ist ein rechter Winkel, da zwischen zwei Stundenangaben jeweils 30° liegen.
Damit ist der Winkel zwischen dem großen und dem kleinen Zeiger $90° + 10° = 100°$.

Aufgabe 260613:
Die Verbindungsstraßen dreier Orte A, B, C bilden ein Dreieck. In der Mitte der Verbindungsstraße von B nach C liegt ein weiterer Ort D. Von A über B nach C beträgt die Entfernung 25 km, von B über C nach A dagegen 27 km und von C über A nach B schließlich 28 km.
Eine Pioniergruppe wandert auf den genannten Straßen auf kürzestem Wege vom Ort A zum Ort D.

a) Über welchen der beiden Orte B oder C läuft die Pioniergruppe?
Begründe deine Entscheidung!
b) Wie viel Zeit spart sie gegenüber dem längeren der beiden möglichen Wege von A nach D ein, wenn sie stündlich 4 km zurücklegt?
c) Wie lang ist der von ihr insgesamt zurückgelegte Weg?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wegen $AB + BC = 25$ km und $AC + BC = 27$ km ist AC um 2 km länger als AB. Damit ist wegen

$CD = BD$ eine Wanderung von A über C nach D um 2 km länger als eine Wanderung von A über B nach D.
Weil die Pioniergruppe den kürzeren der beiden Wege wählte, läuft sie über den Ort B.

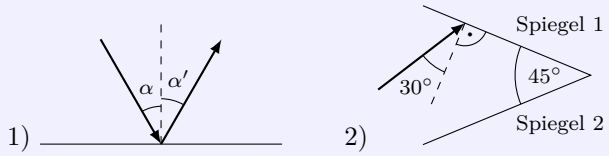
b) Nach den Überlegungen zu a) spart die Pioniergruppe auf dem kürzeren Wege von A nach D gegenüber dem längeren Wege 2 km ein. Wenn sie stündlich 4 km zurücklegt, benötigt sie für 2 km eine halbe Stunde. Sie spart damit bei einer Wanderung von A nach D auf dem kürzeren Wege gegenüber einer auf dem längeren Wege $\frac{1}{2}$ Stunde ein.

c) Würde man hintereinander von A über B nach C, dann von C über A nach B und dann von B über C nach A laufen, so würde man zweimal den Umfang des Dreiecks ABC durchlaufen und wegen 25 + 28 + 27 = 80 insgesamt 80 km zurücklegen.

Folglich ist wegen 80 : 2 = 40 der Umfang des Dreiecks ABC gleich 40 km. Subtrahiert man von ihm $AC + BC = 27$ km, so verbleibt $AB = 40$ km - 27 km = 13 km.
Subtrahiert man vom Umfang aber $AC + AB = 28$ km, so verbleibt $BC = 40$ km - 28 km = 12 km. Daher ist $BD = 12$ km : 2 = 6 km. Der gesuchte Weg beträgt folglich $AB + BD = 13$ km + 6 km = 19 km.

II Runde 2

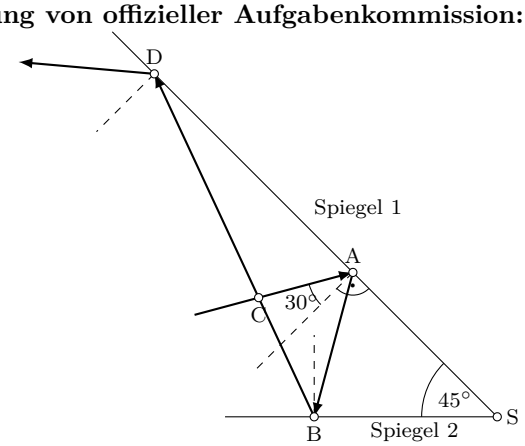
Aufgabe 030622:



Fällt ein Lichtstrahl auf einen ebenen Spiegel, so wird er so reflektiert, dass der Einfallswinkel α und der Reflexionswinkel α' gleich groß sind (siehe Abbildung).

a) Konstruiere den Verlauf eines Lichtstrahls, der auf den in der Abbildung 2) dargestellten Winkelspiegel unter einem Einfallswinkel von 30° fällt!
b) Welchen Winkel bildet der auf den Spiegel 1 einfallende Strahl mit dem vom Spiegel 2 reflektierten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Die folgende Zeichnung stellt den Verlauf des Lichtstrahles dar. Eine weitere Reflexion tritt nicht auf, da der bei D reflektierte Lichtstrahl nicht mehr auf den Spiegel 2 trifft. Die kann man wie folgt beweisen:

Der Einfallswinkel bei A beträgt 30°, also auch der Reflexionswinkel, und damit ist der Winkel $\angle BAS = 60°$. Nun ergibt sich nach Innenwinkelsummensatz im Dreieck $\triangle BAS$ für den Winkel $\angle ABS$:

$$\angle ABS = 180° - 45° - 60° = 75°$$

Der Einfallswinkel ergibt sich als Ergänzung zu 90°, also ist der Winkel $\angle ABC = 2 \cdot 15° = 30°$ als Summe von Einfalls- und Reflexionswinkel. Im Dreieck $\triangle BSD$ gilt dann:

$$\angle BDS = 180° - \angle ASB - \angle ABS - \angle ABC = 180° - 45° - 75° - 30° = 30°$$

Damit beträgt auch $\beta = 30°$. Dieser Winkel ist kleiner als $\angle BSD$, weshalb der letzte Lichtstrahl den Spiegel 1 nicht mehr treffen wird.

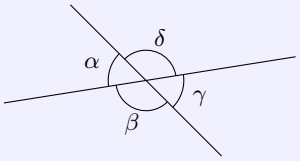
b) Gesucht ist Winkel $\angle BCA$. Nach dem Innenwinkelsummensatz im Dreieck $\triangle ABC$ ergibt sich:

$$\angle BCA = 180° - \angle BAC - \angle ABC = 180° - 2 \cdot 30° - 30° = 90°$$

Der gesuchte Winkel ist also ein rechter Winkel.

Aufgabe 040622:

Beim Schnitt zweier Geraden entstehen die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (Abbildung).
Wie groß sind diese Winkel, wenn die ersten drei von ihnen die Winkelsumme 234° haben?

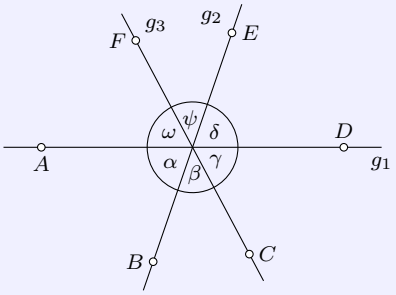


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Über den Vollwinkel wird $\delta = 126°$. Mit den Beziehungen über Scheitel- und Nebenwinkel folgt dann $\alpha = 54°$, $\beta = 126°$, $\gamma = 54°$.

Aufgabe 050622:

Die drei Geraden g_1, g_2 und g_3 schneiden einander im Punkt M. Dabei entstehen Winkel mit den Maßen α, β, γ, δ, ψ und ω (siehe Abbildung).

Wie groß sind diese 6 Winkelmaße, wenn
(1) $\gamma + \delta + \psi + \omega = 252°$ und
(2) α dreimal so groß wie β ist?

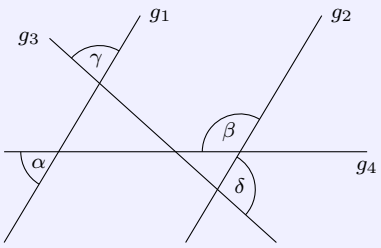


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt: $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \psi + \omega = 360°$
und wegen (1) $\alpha + \beta = 108°$ also wegen (2) $4\beta = 108°$, d. h. $\beta = 27°$ und daher wegen (2) $\alpha = 81°$.

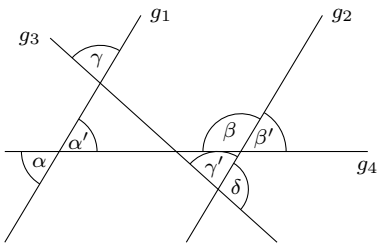
Weiter sind Scheitelwinkel, d. h. $\delta = \alpha = 81°$ und $\psi = \beta = 27°$. Nach der Nebenwinkelbeziehung wird $(\alpha + \beta) + \gamma = 180°$ und somit $\gamma = \omega = 72°$.

Aufgabe 070621:

Die Geraden g_1, g_2, g_3 und g_4 schneiden einander in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise. Von den Größen α, β, γ und δ der dadurch entstehenden Winkel sei $\alpha = 50°$, $\beta = 130°$ und $\gamma = 70°$.
Ermittle δ!



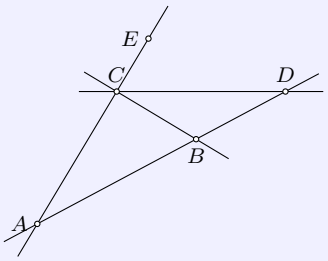
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es gilt mit den Bezeichnungen in der Abbildung
$\alpha = \alpha'$ als Scheitelwinkelpaar
$\beta + \beta' = 180°$ als Nebenwinkelpaar mithin $\beta' = 180° - \beta = 50°$, also $\beta' = \alpha$. Daraus folgt $g_1 \parallel g_2$.

Nun ist ferner: $\gamma = \gamma'$ als Stufenwinkelpaar an geschnittenen Parallelen und $\gamma' + \delta = 180°$ als Nebenwinkel.
Damit wird $\delta = 180° - \gamma' = 110°$.

Aufgabe 090623:



Die Abbildung zeigt drei verschiedene Geraden durch einen Punkt C und eine vierte Gerade, die nicht durch C geht.
Diese möge die drei erstgenannten Geraden in den Punkten A, B bzw. D schneiden, wobei B zwischen A und D liegen möge, Punkt E liege auf der Geraden durch A und C so, dass C zwischen A und E liegt.
Ferner gelte $\angle ECD \cong \angle ABC$.

Beweise, dass $\angle BCD \cong \angle BAC$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Summe der Winkel $\angle ACB$ und $\angle ECD$ wird von $\angle BCD$ zu 180° ergänzt.
Die nach Voraussetzung ihr gleiche Summe der Winkel $\angle ACB$ und $\angle ABC$ wird von $\angle BAC$ zu 180° ergänzt (Winkelsumme im Dreieck $\triangle ABC$). Daraus folgt die Behauptung $\angle BCD \cong \angle BAC$.

Aufgabe 190621:
Gegeben seien zwei einander schneidende Geraden. Die Größen dreier der dabei entstehenden vier Schnittwinkel haben die Summe 226°.
Ermittle die Größe jedes einzelnen dieser vier Schnittwinkel!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Größen aller vier Schnittwinkel haben die Summe 360°. Hiernach und wegen 360 - 226 = 134 hat einer der Schnittwinkel die Größe 134°.
Von den übrigen ist einer der Scheitelwinkel dieses Winkels, hat also ebenfalls die Größe 134°. Die anderen beiden sind jeweils Nebenwinkel des zuerst genannten Winkels. Wegen 180 - 134 = 46 hat daher jeder von ihnen die Größe 46°.
Die gesuchten Größen sind mithin: 131°, 46°, 131° und 46°.

II.II Vier-, Vielecke

I Runde 1

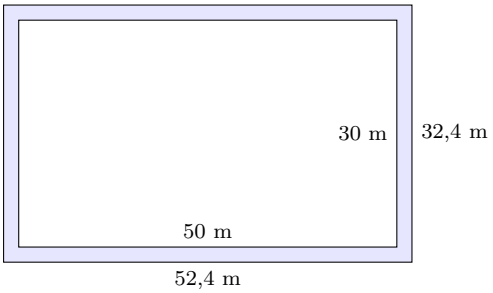
Aufgabe V00603:
Um ein Schwimmbad mit der Beckengröße 50 m mal 30 m wird ein 1,20 m breiter Weg mit Zementplatten ausgelegt.
Wie viel Platten sind erforderlich, wenn die Maße der Platten 30 cm mal 30 cm betragen?

Lösung von Steffen Polster:

Die auszulegende Fläche ist die Differenz der zwei Rechtecke (siehe Abildung). Damit wird für den Flächeninhalt

$$F = 52{,}4 \text{ m} \cdot 32{,}4 \text{ m} - 50 \text{ m} \cdot 30 \text{ m} = 197{,}76 \text{ m}^2$$

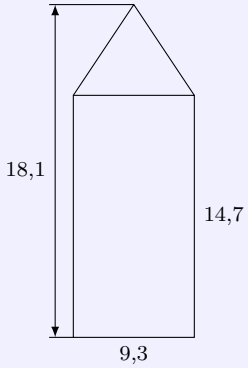
Ein Platte hat den Flächeninhalt $0{,}3 \text{ m} \cdot 0{,}3 \text{ m} = 0{,}09 \text{ m}^2$. Damit benötigt man $\frac{197{,}76}{0{,}9} = 2197{,}3 \approx 2200$ Platten.



Aufgabe V00609:

In Leipzig werden viele Häuser neu verputzt! Das Verputzen einer Giebelwand kostet ohne Arbeitslohn 131,17 DM.
Berechne die zu verputzende Fläche aus der Abbildung und die Kosten für 1 m^2 Kalkanstrich!

Hinweis: Maßzahlen in der Abbildung in Meter.



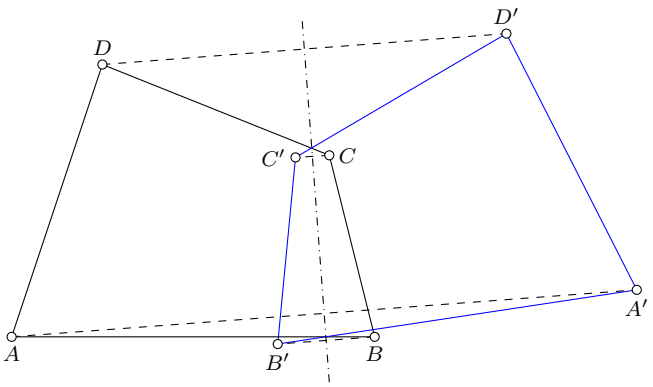
Lösung von Steffen Polster:
Die Giebelwand setzt sich aus einem Rechteck und einem Dreieck (Höhe = 18,1 - 14,7 = 3,4 m) zusammen. Für den Flächeninhalt ergibt sich somit

$$F = 9{,}3 \cdot 14{,}7 + \frac{1}{2} \cdot 9{,}3 \cdot 3{,}4 = 152{,}52 \text{ m}^2$$

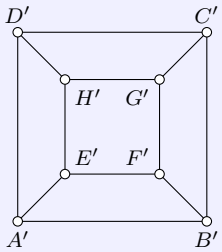
Die zu verputzende Fläche hat einen Inhalt von 152,5 m^2. 1 m^2 Putz kostet damit $\frac{131{,}17}{152{,}52} = 0{,}86$ DM.

Aufgabe V00610:
Zeichne ein beliebiges Viereck und eine Symmetrieachse, die das Viereck schneidet!
Konstruiere das zum ersten Viereck symmetrische!

Lösung von Steffen Polster:



Aufgabe 040616:



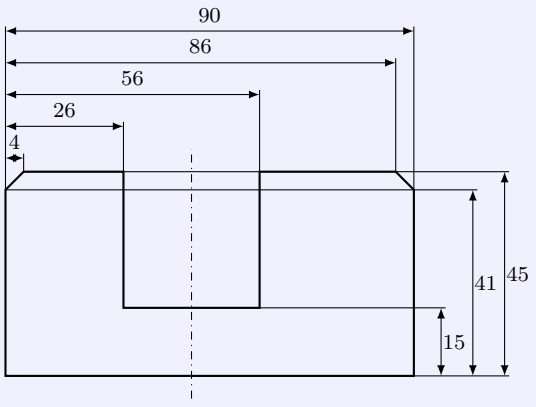
Die abgebildete Figur ist der Grundriss eines ebenflächig begrenzten Körpers.
Die Bilder seiner Eckpunkte A, B, C, D, E, F, G, H sind mit A', B', C', D', E', F', G', H' bezeichnet. Das Quadrat $ABCD$ liegt auf der Grundrissebene; das Quadrat $EFGH$ liegt parallel zur Grundrissebene im Abstand von 4 cm.
Die Seite AB ist 5 cm, die Seite EF 3 cm lang.

Um welchen Körper handelt es sich? Baue ein Modell dieses Körpers! Das Material kannst du selbst wählen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es handelt sich um einen Pyramidenstumpf.

Aufgabe 060611:

Berechne den Flächeninhalt der abgebildeten Figur! Runde das Ergebnis auf volle Quadratzentimeter! (Die Maßeinheit aller angegebenen Maßzahlen ist Millimeter.)



Lösung von Steffen Polster:
Aus einem Rechteck mit den Maßen 90 mm und 45 mm werden in der Mitte ein Quadrat der Seitenlänge

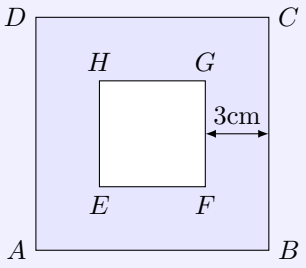
30 mm und an den oberen Ecken zwei rechtwinklige Dreiecke (Katheten je 4 mm) herausgeschnitten. Daraus ergibt sich:

$$A = 45 \cdot 90 - 30 \cdot 30 - 2 \cdot \frac{4 \cdot 4}{2} = 3134 \text{ mm}^2$$

Der Flächeninhalt der Figur beträgt rund 31 cm^2.

Aufgabe 070612:

Die Abbildung stellt zwei Quadrate $ABCD$, $EFGH$ dar. Sie sind so gelegen, dass die vier Diagonalen AC, BD, EG und FH einander in genau einem Punkt schneiden, und dass $AB \parallel EF$ gilt.
Die Differenz der Flächeninhalte der beiden Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ beträgt 96 cm^2.
Berechne die Längen der Strecken BC und GH!



Lösung von Steffen Polster:
Für die Seiten gilt $a = AB = BC = CD = DA$ sowie $b = EF = FG = GH = HE$ und nach Aufgabenstellung $a = b + 6$ cm.

Die Differenz der Flächeninhalte der zwei Quadrate ist somit (Angaben in cm^2):

$$A_{\text{groß}} - A_{\text{klein}} = a^2 - b^2 = (b+6)^2 - b^2 = b^2 + 12b + 36 - b^2 = 12b + 36 = 96$$

Daraus folgt sofort, dass $b = 5$ cm ist und $a = b + 6 = 11$ cm ist.

Aufgabe 080611:
a) Die Summe der Inhalte einer Rechteckfläche und einer Quadratfläche beträgt 3000 m^2. Die Quadratseite und eine Rechteckseite haben eine Länge von je 30 m.

a) Wie lang ist die andere Rechteckseite?
b) Zeichne beide Flächen im Maßstab 1 : 2000!

Lösung von Steffen Polster:
a sei die Länge der Quadratseiten, b die bekannte und c die gesuchte Rechteckseite. Dann gilt (Angabe in Metern bzw. Quadratmetern):

$$A_Q + A_R = a^2 + b \cdot c \Rightarrow 3000 = 30^2 + 30 \cdot c \Rightarrow c = 70$$

Die unbekannte Rechteckseite ist 70 m lang.



b) siehe Abbildung. Die Quadratseite mit 30 m Länge muss in der Abbildung 3000 cm : 2000 = 1,5 cm groß sein.

Aufgabe 120613:
In einem Raum mit einer rechteckigen Bodenfläche von 11 m Breite und 36 m Länge stehen 6 Maschinen mit Standflächen von folgendem Flächeninhalt:

Maschine A: 15 ^{2}	Maschine D: 60 m^2
Maschine B: 5 m^2	Maschine E: 18 m^2
Maschine C: 18 m^2	Maschine F: 50 m^2

Für die Lagerung und Bereitstellung der zu bearbeitenden Werkstücke werden an den Maschinen weitere Flächen mit folgendem Flächeninhalt benötigt:

An der Maschine A: 14 m^2	An der Maschine D: 21 m^2
An der Maschine B: 6 m^2	An der Maschine E: 13 m^2
An der Maschine C: 15 m^2	An der Maschine F: 17 m^2

Die restliche Bodenfläche soll für Transportwege genutzt werden.

a) Berechne (in m^2) den Flächeninhalt der Bodenfläche, die für Transportwege zur Verfügung steht!

b) Wir nehmen an, dass die Anordnung der Maschinen und der Lagerplätze es gestattet, die Transportwege aus Rechteckflächen von gleicher Breite zusammenzusetzen. Die Summe der Längen dieser Rechteckflächen wollen wir dann als „Gesamtlänge der Transportwege“ bezeichnen.
Wie breit sind diese Transportwege, wenn sie eine Gesamtlänge von 48 m besitzen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der Flächeninhalt der Standfläche für die Maschinen beträgt 166 m^2, derjenige der Fläche für die Lagerung der Werkstücke 86 m^2, der Flächeninhalt der gesamten Bodenfläche wegen $11 \cdot 36 = 396$ insgesamt 396 m^2.
Mithin verbleiben wegen $396 - 166 - 86 = 144$ für die Transportwege 144 m^2.

b) Die Breite der Transportwege betrage x m. Dann gilt $48 \cdot x = 144$, woraus man $x = 144 : 48$, also $x = 3$ erhält. Dann beträgt die gesuchte Breite 3 m.

Aufgabe 130612:
Für die „Galerie der Freundschaft“ ist ein rechteckiges Bild mit den Seitenlängen 18 cm und 12 cm durch einen rechteckigen Rahmen von 3 cm Breite aus Zeichenkarton eingerahmt worden.
Ermittle den Flächeninhalt dieses Rahmens!

Lösung von Steffen Polster:
Der Flächeninhalt des Bildes ist $12 \cdot 18 = 216 cm^2$. Der Flächeninhalt von Rahmen und Bild wird

$$(12 + 2 \cdot 3) \cdot (18 + 2 \cdot 3) = 18 \cdot 24 = 432 \text{ cm}^2$$

Damit ist die Rahmenfläche gleich 432 cm^2 - 216 cm^2 = 216 cm^2.

Aufgabe 180611:
In einem Stadtbezirk Leipzigs wurden 260 große Wohnungen renoviert.
Bei einem Zehntel dieser Wohnungen hat jede Wohnung 55 m^2 Wohnfläche; bei einem Viertel der 260 Wohnungen hat jede Wohnung 67 m^2 Wohnfläche; jede andere der 260 Wohnungen hat 80 m^2 Wohnfläche.
Berechne die gesamte Wohnfläche dieser 260 renovierten Wohnungen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein Zehntel der 260 Wohnungen sind 26 Wohnungen; denn es gilt $260 : 10 = 26$.
Ein Viertel der 260 Wohnungen sind 65 Wohnungen; denn es gilt $260 : 4 = 65$.
Die restlichen Wohnungen sind 169 Wohnungen; denn es gilt $260 - 26 - 65 = 169$.

Die Wohnfläche der zuerst genannten 26 Wohnungen beträgt 1430 m^2; denn es gilt $26 \cdot 55 = 1430$.
Die Wohnfläche der danach genannten 65 Wohnungen beträgt 4355 m^2; denn es gilt $65 \cdot 67 = 4355$.
Die Wohnfläche der restlichen 169 Wohnungen beträgt 13520 m^2; denn es gilt $169 \cdot 80 = 13520$.
Die gesamte Wohnfläche der 260 Wohnungen beträgt 19305 m^2; denn es gilt $1430 + 4355 + 13520 = 19305$.

Aufgabe 210611:
Von einem Rechteck sind folgende Eigenschaften bekannt:
Wenn seine beiden Seitenlängen in Metern gemessen werden, so ergeben sich natürliche Zahlen als Maßzahlen. Die Differenz der beiden Seitenlängen beträgt 20 m. Der Umfang des Rechtecks beträgt 60 m.

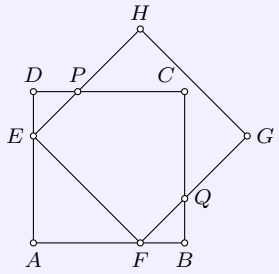
a) Welchen Flächeninhalt hat dieses Rechteck?
b) Welche Längen erhalten seine beiden Seiten im Maßstab 1 : 250?
Zeichne das Rechteck in diesem Maßstab!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Verringert man die größere Seitenlänge des Rechtecks um 20 m, so verringert sich sein Umfang um 40 m, erreicht also den Wert 20 m. Andererseits entsteht dabei ein Quadrat.
Wegen $20 : 4 = 5$ beträgt seine Seitenlänge 5 m; dies ist zugleich die Länge der kleineren Seite des ursprünglichen Rechtecks. Die Länge seiner größeren Seite beträgt somit 25 m. Wegen $5 \cdot 25 = 125$ beträgt sein Flächeninhalt 125 m^2.

b) Im Maßstab 1 : 250 wird wegen 5 m = 500 cm und $500 : 250 = 2$ die kleinere Seitenlänge durch die Seitenlänge 2 cm wiedergegeben. Wegen 25 m = 2500 cm und $2500 : 250 = 10$ wird die größere Seitenlänge durch die Länge 10 cm wiedergegeben.



Aufgabe 230613:

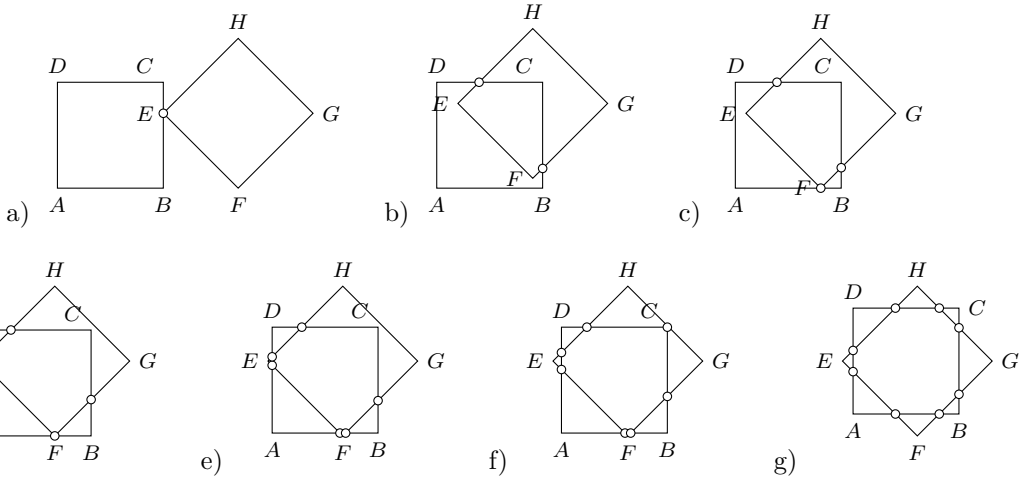


Im Bild sind zwei gleichgroße Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ gezeichnet, die genau vier Randpunkte (E, F, P und Q) gemeinsam haben. Zeichne zwei gleichgroße Quadrate $ABCD$ und $EFGH$, die so liegen, dass sie

a) genau einen Punkt, b) genau zwei Punkte,
c) genau drei Punkte, d) genau fünf Punkte,
e) genau sechs Punkte, f) genau sieben Punkte,
g) genau acht Punkte

gemeinsam haben! Eine Begründung wird nicht verlangt.

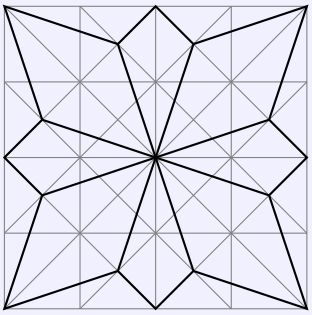
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



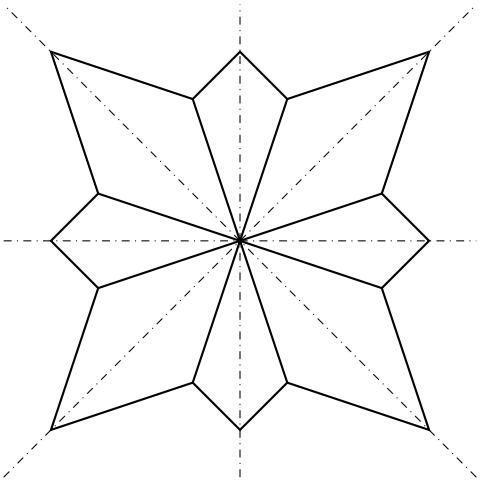
Die Abbildungen (a) bis (g) zeigen je eine Möglichkeit für die zu konstruierenden Quadrate.

Aufgabe 250614:

In dem Bild ist - auf einem (mit dünnen Linien gezeichneten) Hintergrund von Quadraten und ihren Diagonalen - mit dicken Linien ein Ornament gezeichnet.
Überprüfe mit durchsichtigem Papier (oder Folie), ob das Ornament axialsymmetrisch ist!
Überprüfe ferner, ob es Drehungen gibt, bei denen das Ornament sich selbst als Bild hat!
Ist beides der Fall, so nenne
a) die Anzahl aller Symmetrieachsen des Ornaments,
b) alle diejenigen Drehungen, bei denen das Ornament sich selbst als Bild hat!
Zu Aufgabe a) zeichne auch das Ornament und alle seine Symmetrieachsen!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

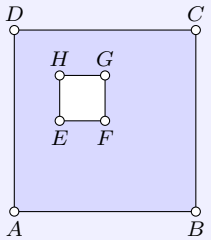


Die Überprüfung ergibt, dass das Ornament sowohl axialsymmetrisch als auch drehsymmetrisch ist.
a) Das Ornament hat genau vier Symmetrieachsen (siehe Abbildung).

b) Das Ornament hat genau bei den Drehungen um seinen Mittelpunkt um 90°, 180° und 270° sich selber als Bild, außerdem natürlich bei der Drehung um 0° (d. h. bei derjenigen Drehung, bei der jeder Punkt der Ebene sich selbst als Bild hat).

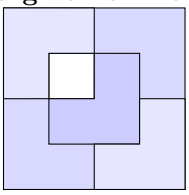
Aufgabe 260611:

In ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 8 cm ist ein Quadrat $EFGH$ mit der Seitenlänge 2 cm so eingezeichnet, wie es das Bild zeigt.
HG und DC sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander. EH und AD sind zueinander parallele Strecken mit dem Abstand 2 cm voneinander.



a) Berechne den Flächeninhalt der im Bild gefärbten Fläche!
b) Die gefärbte Fläche soll in fünf Teile zerlegt werden. Diese Teile sollen so gestaltet sein, dass man je zwei von ihnen durch Drehen oder Verschieben miteinander zur Deckung bringen kann.
Zeichne eine solche Aufteilung der gefärbten Fläche!

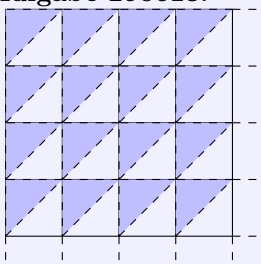
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Die Quadrate $ABCD$ und $EFGH$ haben wegen $8 \cdot 8 = 64$ und $2 \cdot 2 = 4$ die Flächeninhalte 64 cm^2 bzw. 4 cm^2. Somit besitzt die schraffierte Fläche wegen $64 - 4 = 60$ den Flächeninhalt 60 cm^2.

b) Die Abbildung zeigt eine mögliche Lösung der Aufgabe.

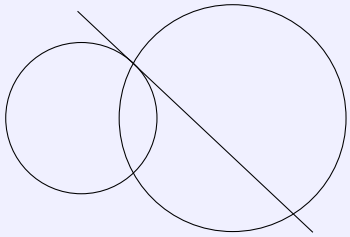
Aufgabe 290613:



Ein rechteckiger Fußboden, der 3,6 m lang und 2,7 m breit ist, soll mit zwei Sorten gleichgroßer, aber verschiedenfarbiger dreieckiger Teppichfliesen so ausgelegt werden, dass ein Muster entsteht, wie es durch Fortsetzen des Musters des Bildes zu erhalten ist.
Je zwei solcher dreieckigen Fliesen einer Farbe sollen durch einmaliges Zerschneiden einer quadratischen Fliese mit der Seitenlänge 30 cm hergestellt werden.
Wie viele quadratische Teppichfliesen werden von jeder der beiden Sorten insgesamt benötigt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen 3,6m = 360cm, 2,7m = 270cm, $360 : 30 = 12$, $270 : 30 = 9$ und $12 \cdot 9 = 108$ lässt sich der Fußboden mit insgesamt 108 quadratischen Fliesen auslegen.
Das bleibt auch so, wenn man diese Fliesen zerschneidet und zu dem gewünschten Muster umordnet. Da dieses Muster die Fliesen beider Farben in einander gleichen Mengen enthält, werden von jeder der beiden Sorten quadratischer Teppichfliesen wegen $108 : 2 = 54$ insgesamt je 54 Stück benötigt.

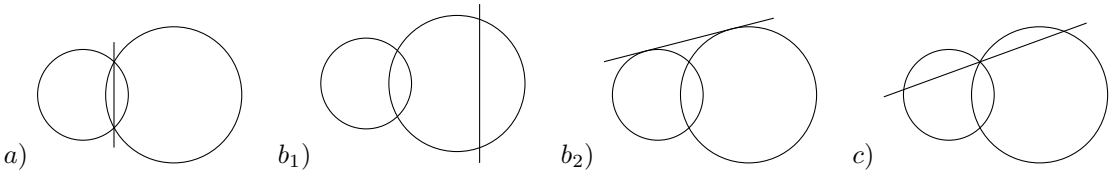
Aufgabe 330613:
Karin zeichnet zwei Kreise, die sich in zwei verschiedenen Punkten schneiden. Dann zeichnet sie eine Gerade und zählt an der entstandenen Figur,



1. wie viele Punkte es gibt, die als gemeinsamer Punkt (Schnitt- oder Berührungspunkt) von mindestens zwei der drei gezeichneten Linien vorkommen,
2. wie viele Gebiete es gibt, die von Teilen der Linien vollständig eingeschlossen werden und in ihrem Innern frei von anderen Linienteilen sind.

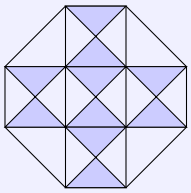
Die Abbildung zeigt als Beispiel eine Figur mit 3 Punkten und 4 Gebieten.
Zeichne Figuren mit
a) 2 Punkten, 4 Gebieten; b) 4 Punkten, 4 Gebieten; c) 4 Punkten, 5 Gebieten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt Beispiele für Zeichnungen der geforderten Art.

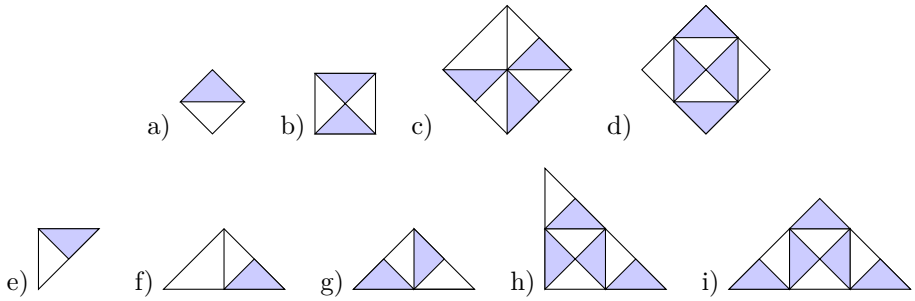


Aufgabe 340612:

Das Fliesenmuster in der Abbildung wurde aus 14 weißen und 10 gemusterten dreieckigen Fliesen zusammengesetzt. Man kann darin mehrere Quadrate und Dreiecke finden, die jeweils aus mehr als einer Fliese zusammengesetzt sind.
Wie viele solcher Quadrate lassen sich insgesamt finden?



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt genau 4 Quadrate aus je zwei Fliesen, 5 Quadrate aus je vier Fliesen, 4 Quadrate aus je sieben Fliesen, 1 Quadrat aus acht Fliesen (siehe die Beispiele Abb. a, b, c, d), also insgesamt 14 Quadrate der gesuchten Art.



Es gibt genau 20 Dreiecke aus je zwei Fliesen, 8 Dreiecke aus je drei Fliesen, 8 Dreiecke aus je vier Fliesen, 4 Dreiecke aus je acht Fliesen, 4 Dreiecke aus je neun Fliesen (siehe die Beispiele Abb. e, f, g, h, i), also insgesamt 44 Dreiecke der gesuchten Art.

II Runden 2 & 3

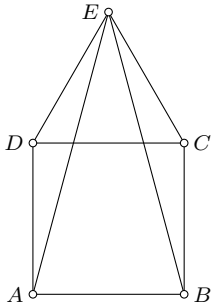
Aufgabe 060624:
Im Rahmen des Wiederaufbaus der Leipziger Innenstadt entstehen moderne Wohnkomplexe. Vor den Häusern werden Rasenflächen, Blumenbeete und Terrassen angelegt.
Für eine der rechteckigen Terrassen werden genau 400 Sandsteinplatten verwendet. Die Platten bedecken lückenlos den Boden. Jede dieser Platten ist 60 cm lang und 40 cm breit. Die Länge dieser Terrasse beträgt 10 m.
Ermittle die Breite dieser Terrasse!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Flächeninhalt jeder dieser Platten beträgt $60 \cdot 40\ \text{cm}^2 = 2400\ \text{cm}^2$.
Daher bedecken 400 solche Platten eine Fläche von $400 \cdot 2400\ \text{cm}^2 = 960000\ \text{cm}^2 = 96\ \text{m}^2$.
Die Terrassenfläche ist rechteckig, ihr Flächeninhalt mithin gleich dem Produkt aus ihrer Länge und ihrer Breite. Die unbekannte Breite betrage b Meter, dann gilt $10b = 96$, woraus man $b = 9{,}6$ erhält.
Die Breite der Terrasse beträgt also 9,6 m.

Aufgabe 080623:
Über der Seite CD eines Quadrates $ABCD$ mit $AB = 4$ cm ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle DCE$ so zu konstruieren, dass das Quadrat und das Dreieck die Seite CD gemeinsam haben.
Der Punkt E des Dreiecks $\triangle DCE$ sei dabei außerhalb des Quadrates $ABCD$ gelegen. Verbinde E mit A und mit B!
Berechne die Größe des Winkels $\angle AEB$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Im Dreieck $\triangle AED$ gilt: (siehe Abbildung) $AD = DE$ (nach Konstruktion)

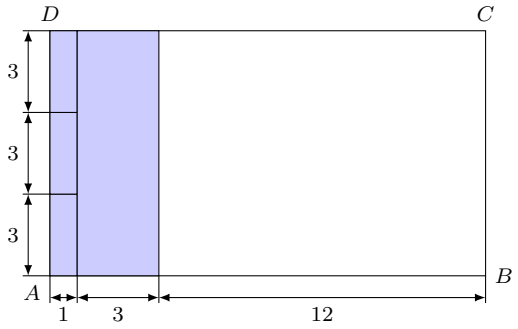
(1) Daraus folgt $\angle DAE = \angle AED$ (als Basiswinkel). Ferner ist:
(2) $\angle EDA = \angle EDC + \angle CDA = 150°$; ($\angle ABC$ bezeichnet die Größe des Winkels $\angle ABC$) denn $\angle EDC = 60°$ (Winkel im gleichseitigen Dreieck) und $\angle CDE = 90°$ (Winkel im Quadrat).

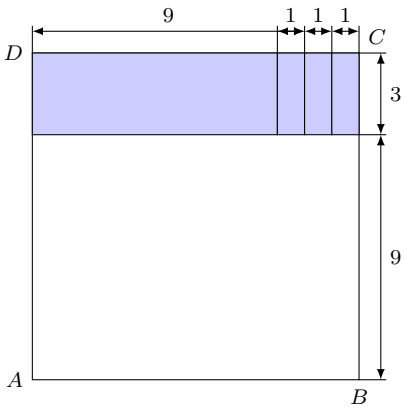


Aus (1), (2) und $\angle AED + \angle EDA + \angle DAE = 180°$ (nach Winkelsummensatz) folgt $\angle AED = 15°$.
Entsprechend ist $\angle BEC = 15°$, also $\angle AEB = \angle DEC - \angle AED - \angle BEC = 30°$.

Aufgabe 100624:
Die Fläche des Rechtecks $ABCD$ mit den Seitenlängen $a = 16$ cm, $b = 9$ cm ist so in fünf Rechtecksflächen zu zerlegen, dass sich diese zu einer Quadratfläche zusammensetzen lassen, wobei sämtliche Teilrechtecke verwendet werden sollen und die gesamte Fläche des Quadrats lückenlos und ohne Überlappungen von den Flächen dieser Teilrechtecke ausgefüllt werden soll.
Gib eine Möglichkeit hierfür an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

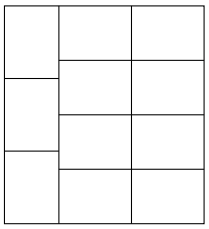




Alle Maßangaben in cm.
Das Rechteck $ABCD$ hat laut Aufgabe einen Flächeninhalt von $9\text{cm} \cdot 16\text{cm} = 144\text{cm}^2$.
Da das Quadrat den gleichen Flächeninhalt haben muss, und da 12 die einzige natürliche Zahl ist, deren Quadratzahl 144 beträgt, so muss seine Seite 12 cm lang sein.

Aufgabe 130621:
Eine rechteckige Glasscheibe ist 24 cm lang und 22 cm breit. Daraus sollen rechteckige Scheiben von 8 cm Länge und 6 cm Breite geschnitten werden.
Welches ist die größte Anzahl derartiger Scheiben, die man dabei erhalten kann?
Stelle eine Möglichkeit, diese größte Anzahl zu gewinnen, in einer Zeichnung im Maßstab 1 : 2 dar!

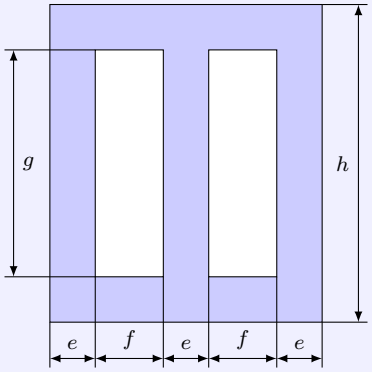
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die gesamte Glasscheibe hat wegen $24 \cdot 22 = 528$ einen Flächeninhalt von 528 cm^2. Jede der kleinen Glasscheiben hat wegen $6 \cdot 8 = 48$ einen Flächeninhalt von 48 cm^2.
Wegen $528 : 48 = 11$ lassen sich also höchstens 11 derartige kleine Scheiben aus der großen schneiden.

Dass dies auch tatsächlich möglich ist, zeigt die Abbildung.

Aufgabe 150624:



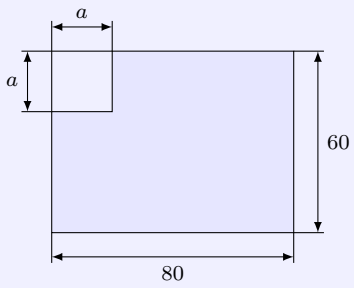
Berechne den Inhalt A der gefärbten Fläche der in der Abbildung dargestellten Figur (die Maße sind der Abbildung zu entnehmen)

a) für $e = 10$ mm, $f = 15$ mm, $g = 50$ mm, $h = 70$ mm,
b) allgemein, indem du eine Formel für A herleitest, in der nur die Variablen e, f, g, h auftreten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die gefärbte Fläche kann man sich dadurch entstanden denken, dass aus einem Rechteck R zwei Rechtecke S und T herausgeschnitten wurden, wobei wegen $10 + 15 + 10 + 15 + 10 = 60$ das Rechteck R die Seitenlängen 60 mm und 70 mm hat und jedes der Rechtecke S, T die Seitenlängen 15 mm und 50 mm.
Daher ergeben sich für R, S, T wegen $60 \cdot 70 = 4200$ bzw. $15 \cdot 50 = 750$ die Flächeninhalte 4200 mm^2 bzw. 750 mm^2 bzw. 750 mm^2.
Somit hat wegen $4200 - 750 - 750 = 2700$ die gefärbte Fläche den Flächeninhalt $A = 2700$ mm^2.

b) Die Seitenlängen von R sind $(3e + 2f)$ und h, die Seitenlängen von jedem der Rechtecke S, T sind f und g. Daher hat R den Flächeninhalt $(3e + 2f)h$, und jedes der Rechtecke S, T hat den Flächeninhalt $f \cdot g$.
Also ist $A = (3e + 2f)h - 2fg$.

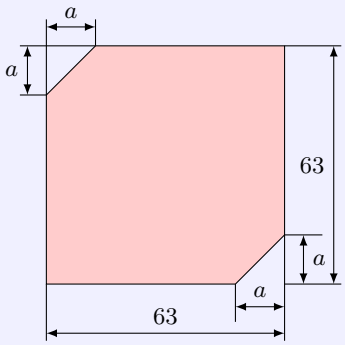
Aufgabe 160623:



Die abgebildete farbige Fläche besteht aus einer Rechteckfläche, aus der eine quadratische Fläche herausgeschnitten wurde.
Die farbige Fläche hat einen Flächeninhalt von 44 cm^2.
Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist die Seitenlänge a (in mm) des herausgeschnittenen Quadrats zu berechnen.

Lösung von Steffen Polster:
Wegen $80 \cdot 60 = 4800$ beträgt der Flächeninhalt des großen Rechtecks 4 800 mm^2 = 48 cm^2.
Für den Flächeninhalt des herausgeschnittenen Quadrats verbleiben wegen $48 - 44 = 4$ somit 4 cm^2. Also beträgt seine Seitenlänge $a = 2$ cm, da 2 die einzige natürliche Zahl ist, die mit sich selbst multipliziert 4 ergibt.
Die Seitenlänge a des herausgeschnittenen Quadrats beträgt somit $a = 20$ mm.

Aufgabe 180624:



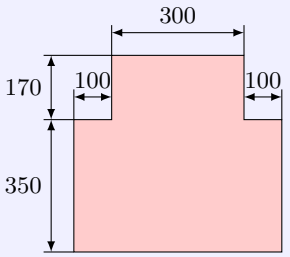
Die abgebildete farbige Fläche ist 38 cm^2 groß. Sie ist aus einer quadratischen Fläche entstanden, von der zwei (gleichgroße) dreieckige Flächen abgeschnitten wurden.

Aus den in der Abbildung angegebenen Maßen (in mm) ist die Seitenlänge a der Dreiecke (in mm) zu berechnen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $63^2 = 3969$ hat das abgebildete Quadrat den Flächeninhalt 3969 mm^2. Wegen 38 cm^2 = 3800 mm^2 und 3969 - 3800 = 169 haben die beiden Dreieckflächen zusammen den Flächeninhalt 169 mm^2.

Da die beiden Dreiecke gleich groß und rechtwinklig-gleichschenklig sind, ergänzen sie sich zu einem Quadrat. Dieses Quadrat hat einen Flächeninhalt von 169 mm^2 und daher die Seitenlänge $a = 13$ mm.
Die Seitenlänge a der genannten Dreiecke beträgt 13 mm.

Aufgabe 220621:
Die Abbildung zeigt den Grundriss eines Zimmers. Alle Maße sind in Zentimeter angegeben.
Das Zimmer ist 280 cm hoch. In diesem Zimmer ist ein alter Tapetenbelag von den Wänden und von der Decke zu entfernen. Danach sind Wände und Decke mit Makulatur zu streichen und zu tapezieren.



Errechne für diese Arbeiten mit Hilfe der folgenden Tabelle die insgesamt erforderlichen Lohnkosten!
Dabei ist jede Wand vollständig zu berücksichtigen, auch wenn Fenster und Türen vorhanden sind. (Es wird also angenommen, dass sich die Einsparung an Fläche wieder durch den komplizierten Arbeitsaufwand ausgleicht.) Das Ergebnis ist auf vollen Markbetrag zu runden.

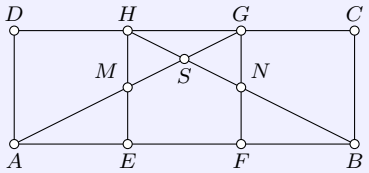
Leistung	Lohnkosten pro m^2
Alte Tapezierung entfernen	28 Pf
Makulatur streichen	26 Pf
Wandtapezierung	83 Pf
Deckentapezierung	112 Pf

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Folgende Wandfläche A_W ist zu bearbeiten:

$$A_W = (350 + 170 + 100 + 350 + 550 + 350 + 100 + 170) \cdot 280cm^2 = 599200cm^2$$

das sind 59,92 m^2, also rund 60 m^2.
Die Lohnkosten L_W für die Bearbeitung der Wandfläche A_W betragen somit rund $L_W = 60 \cdot (28+26+83)$ Pf = 8220 Pf, das sind 82,20 M. Folgende Deckenfläche A_D ist zu bearbeiten: $A_D = (350 \cdot 550 + 170 \cdot 350) =$ 252000 cm^2, das sind 25,2 m^2, also rund 25 m^2. Die Lohnkosten L_D für die Bearbeitung der Deckenfläche A_D betragen somit, mit analoger Rechnung, rund 41,83 M.
Die gesamten Lohnkosten L betragen daher $L = 124{,}03$ M, das sind rund 124 M.

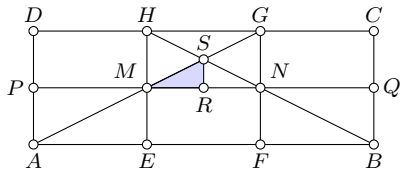
Aufgabe 230622:
Die abgebildete Figur $ABCD$ (siehe Abbildung) stellt ein Rechteck dar, das sich aus den drei gleichgroßen Quadraten $AEHD$, $EFGH$ und $FBCG$ zusammensetzt. Die Strecke AG schneidet die Strecke EH in deren Mittelpunkt M, die Strecke BH schneidet die Strecke FG in deren Mittelpunkt N.
Der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ beträgt 48 Flächeneinheiten.



Ermittle
a) den Flächeninhalt des Dreiecks SGH,
b) den Flächeninhalt des Dreiecks ABS,
c) den Flächeninhalt den Vierecks $ASHD$!

Hinweis: Zur Herleitung darfst du den Satz verwenden, dass jedes Rechteck durch seine Diagonalen in vier gleich große Dreiecke zerlegt wird.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen 48 : 3 = 16 beträgt der Flächeninhalt jedes der drei Quadrate genau 16 Flächeneinheiten.



Die Gerade durch M und N schneide die Strecke AD in P und die Strecke BC in Q. Der Abbildung ist dann zu entnehmen:

Da M der Mittelpunkt von EH und N der Mittelpunkt von FG ist, ist $MNGH$ ein Rechteck, das halb so groß ist wie das Quadrat $EFGH$. Sein Flächeninhalt beträgt daher 8 Flächeneinheiten.

Ganz entsprechend werden auch die anderen beiden Quadrate durch die Gerade durch P und Q jeweils in zwei Rechtecke mit je 8 Flächeneinheiten Inhalt zerlegt.

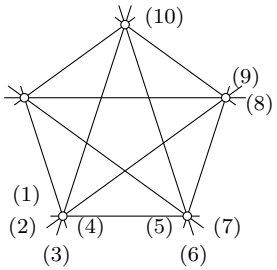
a) Die Diagonalen MG und NH zerlegen das Rechteck $MNGH$ in vier inhaltsgleiche Teildreiecke. Jedes von ihnen, und folglich auch das Dreieck SGH, hat einen Inhalt von 2 Flächeneinheiten.
b) Der Flächeninhalt des Dreiecks ABS ist gleich der Summe der Flächeninhalte der (untereinander gleich großen) Dreiecke AEM und FBN, des Rechtecks $EFNM$ sowie des Dreiecks MNS.
Die Dreiecke AEM und FBN sind jeweils halb so groß wie das Rechteck $EFMN$, ihr Inhalt beträgt daher jeweils 4 Flächeneinheiten. Wegen $2 \cdot 4 + 8 + 2 = 18$ beträgt daher der Flächeninhalt des Dreiecks ABS 18 Flächeneinheiten.

c) Der Flächeninhalt des Vierecks $ASHD$ ist gleich der Summe der Flächeninhalte des Dreiecks AMP, des Rechtecks $PMHD$ und des Dreiecks MSH. Wegen $4 + 8 + 2 = 14$ beträgt daher der Flächeninhalt des Vierecks $ASHD$ 14 Flächeneinheiten.

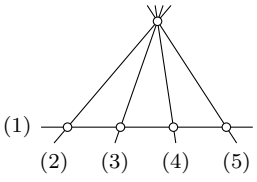
Aufgabe 230624:
Fünf voneinander verschiedene Punkte einer Ebene sollen durch Geraden miteinander verbunden werden. Dabei sollen stets alle möglichen Verbindungsgeraden gezeichnet werden.

Uwe behauptet: Die fünf Punkte können so liegen, dass es genau zehn verschiedene Verbindungsgeraden gibt.
Norbert behauptet: Die fünf Punkte können aber auch so liegen, dass es nur fünf Verbindungsgeraden gibt.
Fritz behauptet: Die fünf Punkte können sogar so liegen, dass es nur eine einzige Verbindungsgerade gibt.
a) Zeige durch Zeichnung von je einem Beispiel, dass alle drei Aussagen wahr sind!
b) Untersuche, ob bei entsprechender Lage der fünf Punkte auch noch andere Anzahlen verschiedener Verbindungsgeraden vorkommen können, und zeichne auch dafür Beispiele!

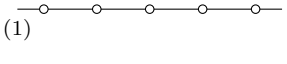
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Folgende Beispiele zeigen, dass alle drei Aussagen wahr sind:



10 Verbindungsgeraden

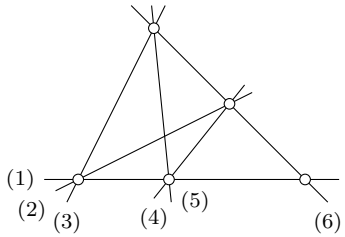


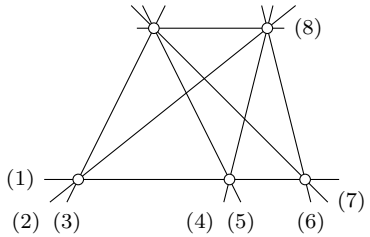
5 Verbindungsgeraden



1 Verbindungsgerade

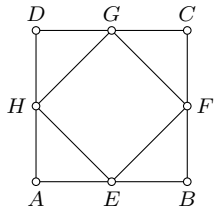
b) Folgende beiden Beispiele zeigen, dass die fünf Punkte auch so liegen können, dass es genau 6 bzw. genau 8 verschiedene Verbindungsgeraden gibt:





Aufgabe 250623:
Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 14 cm. Die Punkte E, F, G und H seien die Mittelpunkte der Quadratseiten. Dabei liege E auf AB, F auf BC, G auf CD, H auf DA.
a) Konstruiere dieses Quadrat und verbinde die Mittelpunkte E und F, F und G, G und H sowie H und E durch Strecken!
b) Ermittle den Flächeninhalt der Fläche $EFGH$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



b) Die Strecken EG und FH zerlegen das Quadrat $ABCD$ in vier inhaltsgleiche Quadrate. Jedes dieser Quadrate wird durch die eingezeichnete Diagonale in zwei (gleichschenklig-rechtwinklige) inhaltsgleiche Dreiecke zerlegt.

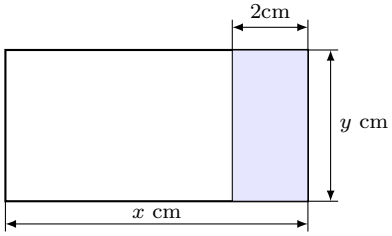
Das Quadrat $ABCD$ ist aus acht solchen Dreiecken zusammengesetzt, die Fläche $EFGH$ aus vier solchen Dreiecken; ihr Flächeninhalt ist daher halb so groß wie der von $ABCD$. Wegen $14 \cdot 14 = 196$ hat $ABCD$ den Flächeninhalt 196cm^2.
Wegen $196 : 2 = 98$ hat somit $EFGH$ den Flächeninhalt 98cm^2.

Aufgabe 280623:
Rolf zeichnet ein Rechteck. Er verkleinert dann dessen größere Seitenlänge um 2 cm und stellt fest:

Dabei entsteht ein zweites Rechteck, dessen Flächeninhalt um 8 cm^2 kleiner ist als der Flächeninhalt des ersten Rechtecks.
Ferner vergrößert er beide Seitenlängen des ersten Rechtecks um je 1 cm und stellt fest:

Dabei entsteht ein drittes Rechteck, dessen Flächeninhalt um 13 cm^2 größer ist als der Flächeninhalt des ersten Rechtecks.
Weise nach, dass sich allein aus Rolfs Feststellungen die beiden Seitenlängen des ersten Rechtecks ermitteln lassen!
Gib diese Seitenlängen an!

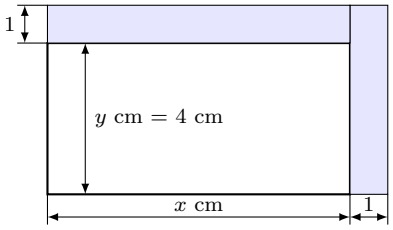
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Das Verkleinern der größeren Seitenlänge des ersten Rechtecks kann erfolgen, indem ein Teilrechteck abgeschnitten wird, dessen eine Seitenlänge 2 cm und dessen Flächeninhalt 8 cm^2 beträgt.
Wegen $8 : 2 = 4$ beträgt seine andere Seitenlänge 4 cm. Sie ist zugleich die kleinere Seitenlänge des ersten Rechtecks; diese ist damit eindeutig ermittelt.

Das Vergrößern beider Seitenlängen des ersten Rechtecks kann erfolgen, indem zwei Teilrechtecke hinzugefügt werden, eines mit der Seitenlänge 1 cm und (wegen $4 + 1 = 5$) 5 cm, also einem Flächeninhalt von 5 cm^2, das andere mit einer Seitenlänge 1 cm und (wegen 13 - 5 = 8) dem Flächeninhalt 8 cm^2.

Wegen $8 : 1 = 8$ beträgt seine andere Seitenlänge 8 cm. Sie ist zugleich die größere Seitenlänge des ersten Rechtecks; auch diese ist damit eindeutig ermittelt.

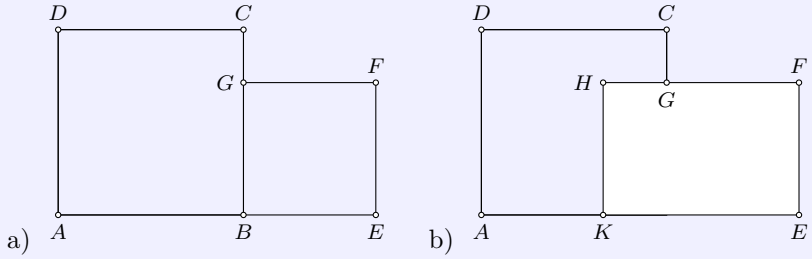


In der Abbildung hat jede farbige Flächen den Flächeninhalt 13 cm^2.

Somit lässt sich eindeutig ermitteln: Die Seitenlängen des ersten Rechtecks betragen 4 cm und 8 cm.

Aufgabe 340622:
Die Gärten von Familie Kniffel und Familie Knobel haben jeweils die Form eines Quadrates und grenzen so aneinander, wie die Abbildung a zeigt.
Die Fläche von Kniffels Garten beträgt 1225 Quadratmeter, die von Knobels Garten 625 Quadratmeter.

a) Welche Breite AD bzw. EF haben die Gärten?
b) Familie Kniffel gibt Familie Knobel ein Stück ihres Gartens ab. Danach haben beide Gärten gleichgroße Fläche. Wie groß ist diese?
c) Abbildung b zeigt die neue Aufteilung. Um welche Länge GH ist Knobels Garten länger geworden?



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Wegen $35 \cdot 35 = 1225$ hat ein Quadrat mit der Seitenlänge 35 m den Flächeninhalt 1225 Quadratmeter. Also ist die Breite von Kniffels Garten $AD = 35$ m. Aus $25 \cdot 25 = 625$ folgt ebenso $EF = 25$ m.

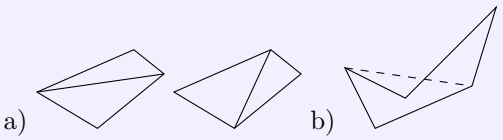
(b) Wegen $1225 + 625 = 1850$ haben beide Gärten zusammen 1850 Quadratmeter. Nach der Aufteilung in zwei gleichgroße Flächen hat jede von ihnen wegen $1850 : 2 = 925$ somit 925 Quadratmeter.

(c) In dem Rechteck $KEFH$ mit diesem Flächeninhalt und der Seitenlänge $EF = 25$ m ist wegen $925 : 25 = 37$ die andere Seitenlänge $FH = 37$ m.
Damit ergibt sich $GH = FH - FG = 37\text{m} - 25\text{m} = 12\text{m}$.

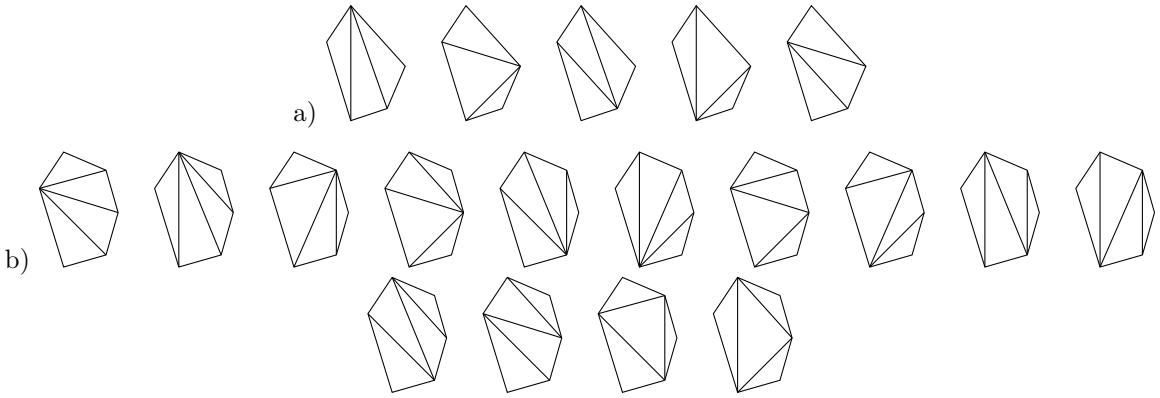
Aufgabe 340631:
Jedes konvexe Vieleck lässt sich in Dreiecke zerlegen, deren Eckpunkte zugleich Eckpunkte des Vielecks sind. Bei einem Viereck beispielsweise findet man dafür genau 2 Möglichkeiten (siehe Abbildung a). Skizziere für ein selbstgewähltes

a) konvexes Fünfeck b) konvexes Sechseck
alle Zerlegungen dieser Art!

Hinweis: Ein Vieleck wird genau dann konvex genannt, wenn alle seine Diagonalen ganz der Fläche des Vielecks angehören. Ein Beispiel für ein Vieleck, das nicht konvex ist, zeigt Abbildung b.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildungen a, b zeigen Zeichnungen der verlangten Art.

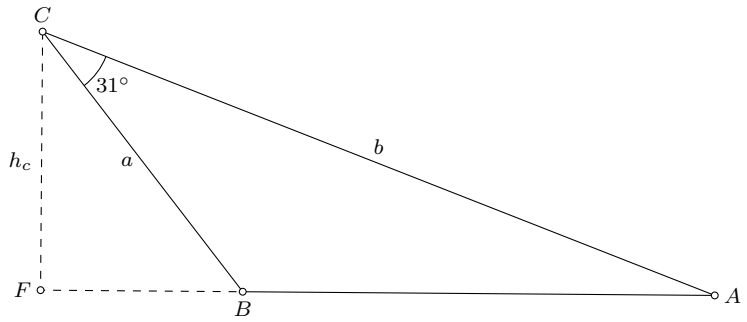


II.III Konstruktionen

I Runde 1

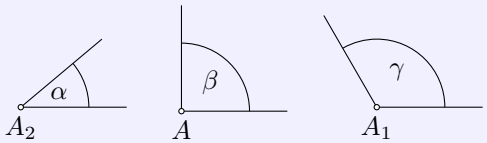
Aufgabe V00608:
Konstruiere ein Dreieck aus: $a = 4{,}8$ cm, $b = 10{,}6$ cm und $\gamma = 31°$.
Konstruiere die Höhe h_c mit dem Zirkel! Miss die anderen Stücke!

Lösung von Steffen Polster:

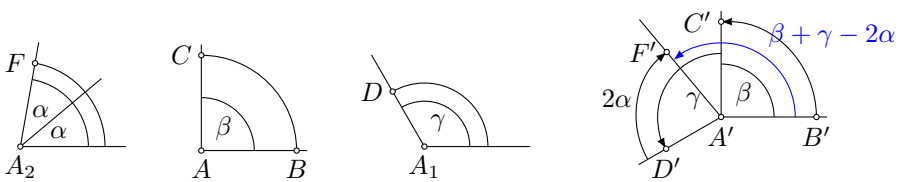


Messung: $c \approx 6{,}9$ cm; $\alpha \approx 21°$; $\beta \approx 128°$; $h_c \approx 3{,}8$ cm

Aufgabe 050613:
Gegeben sind die Winkel α, β und γ (siehe Abbildung)
a) Konstruiere den Winkel $\beta + \gamma - 2\alpha$ mit Zirkel und Lineal!
b) Beschreibe die Konstruktion!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) siehe Abbildung



b) Konstruktionsbeschreibung:
Ich zeichne einen Strahl mit dem Anfangspunkt A'. Dann schlage ich um den in der Abb. gegebenen Punkt A und um A' je einen Kreisbogen mit dem gleichen Radius.
Der Kreisbogen um A schneidet die Schenkel des Winkels β in den Punkten B und C. Der Kreisbogen um A' schneidet den Strahl im Punkt B'.
Dann schlage ich um B' mit BC als Radius einen Kreisbogen, der den Kreisbogen durch B' in C' schneidet. Ich verbinde A' mit C'.
Dann ist $\angle B'A'C'$ der verlangte Winkel β.

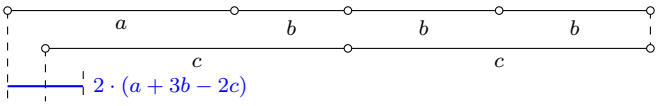
Nun trage ich in der gleichen Weise im Punkt A' an $A'C'$ entgegen dem Uhrzeigersinn den Winkel γ an. Dabei erhalte ich (siehe Abbildung) den Punkt D'.
Schließlich trage ich in A' an $A'D'$ im Uhrzeigersinn den Winkel 2α an (der Winkel 2α wurde vorher in der für den Winkel $(\beta + \gamma)$ beschriebenen Weise konstruiert). Das ergibt den Punkt F'.
Der Winkel $\angle B'A'F'$ ist der verlangte Winkel $(\beta + \gamma - 2\alpha)$.

Aufgabe 060613:



Gegeben sind drei Strecken mit den Längen a, b und c (siehe Abbildung).
Konstruiere eine Strecke mit der Länge $2 \cdot (a + 3b - 2c)$!
Anmerkung: Bei der Konstruktion darf die Maßeinteilung des Lineals nicht benutzt werden. Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

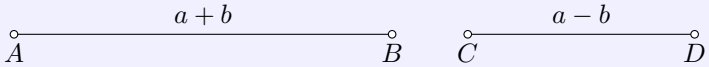
Lösung von Steffen Polster:



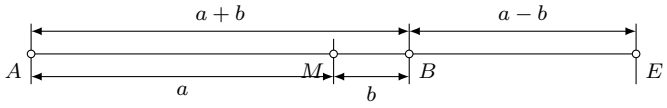
Auf einer Geraden wird die Strecke AB abgetragen und an diese nacheinander dreimal die Strecke CD. Vom erreichten Endpunkt wird die Strecke EF zweimal in entgegengesetzter Richtung abgetragen.

Die entstehende Strecke zwischen dem Startpunkt und dem jetzt erreichten Punkt ist dann $a + 3b - 2c$ lang. Diese Strecke wird verdoppelt werden und hat die gesuchte Länge (in der Abbildung blau).

Aufgabe 110612:
Von den beiden abgebildeten Strecken AB und CD hat die erste die Länge $a+b$, die zweite die Länge $a - b$.
Konstruiere unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal eine Strecke der Länge a und eine Strecke der Länge b! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!



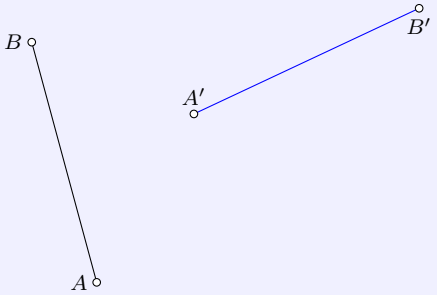
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Konstruktionsbeschreibung:
(1) Wir zeichnen die Strecke AB.
(2) Wir verlängern die Strecke AB über B hinaus um (eine Strecke der gleichen Länge wie) CD.
(3) Ist E der Endpunkt dieser Verlängerung, so halbieren wir die Strecke AE. Der Mittelpunkt von AE sei M genannt. Dann ist AM eine Strecke der Länge a und MB eine Strecke der Länge b.



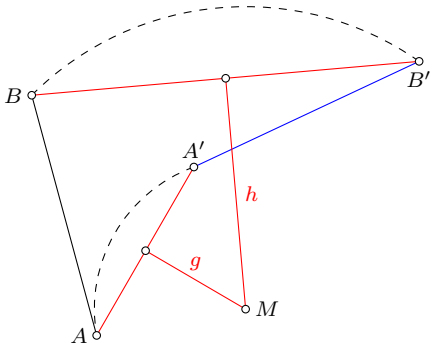
Begründung: Nach Konstruktion hat AE die Länge $a+b+a-b=2a$. Daher hat AM die Länge a sowie MB die Länge $a+b-a=b$.

Aufgabe 310612:

a) Begründe, dass jede Drehung, die einen gegebenen Punkt A in einen anderen gegeben Punkt A' überführt, ihren Drehpunkt M auf der Mittelsenkrechten von AA' haben muss!
b) Die Abbildung zeigt zwei einander gleichlange Strecken AB und $A'B'$.
Konstruiere den Drehpunkt M derjenigen Drehung, bei der A in A' und B in B' übergeht, also die Strecke AB das Bild $A'B'$ hat!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

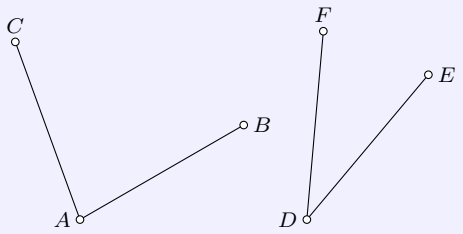


a) Wenn M der Drehpunkt einer Drehung ist, die A in A' überführt, so gilt $MA=MA'$. (1)
Daraus folgt, dass M auf der Mittelsenkrechten von AA' liegen muss, da dies für alle Punkte M gilt, die (1) erfüllen.

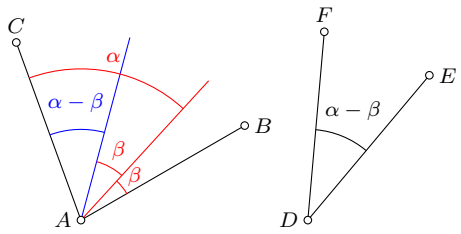
b) Die Abbildung zeigt eine geforderte Konstruktion.
g und h sind die Mittelsenkrechten von AA' bzw. BB', ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt M. Zur Kontrolle kann man überprüfen, dass im Kreis um M durch A die Radien MA, MA' einen gleichgroßen Winkel bilden wie MB, MB' im Kreis um M durch B.

Aufgabe 320613:

Gegeben seien zwei Winkel BAC und EDF mit den Maßen $\alpha+\beta$ bzw. $\alpha-\beta$ (siehe Abbildung).
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal zwei Winkel mit den Maßen α und β.
Beschreibe, wie du die Konstruktion gefunden hast.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

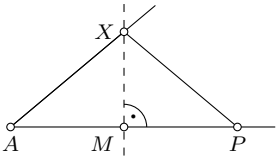


Wenn man die Winkelmaße $\alpha + \beta$ und $\alpha - \beta$ addiert bzw. subtrahiert, so erhält man 2α bzw. 2β. Entsprechend kann man durch Antragen des Winkels mit dem Maß $\alpha - \beta$ an den Strahl AB^+ bzw. AC^+ Winkel mit den Maßen 2α bzw. 2β zeichnen. Diese Winkel kann man halbieren und so je einen Winkel mit den Maßen α bzw. β erhalten.

II Runde 2

Aufgabe 010624:
Zeichne einen beliebigen Winkel und nenne seinen Scheitelpunkt A! Wähle auf einem der beiden Schenkel einen beliebigen Punkt und nenne ihn P!
Konstruiere nun auf dem anderen Schenkel einen Punkt X so, dass $PX = AX$ ist! Begründe die Konstruktion!

Lösung von Steffen Polster:



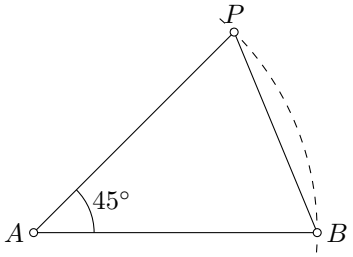
Alle Punkte, die von A und P den gleichen Abstand haben, liegen auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$.
Konstruiert man diese Mittelsenkrechte, so schneidet sie den zweiten Schenkel des Winkels im gesuchten Punkt X.

Aufgabe 020625:
Zeichne eine Strecke $AB = 5$ cm! Trage in A an AB den Winkel $\alpha = 45°$ an!
Gesucht ist auf dem Schenkel, auf dem nicht der Punkt B liegt, ein Punkt P mit folgender Eigenschaft:

Verbindet man P und B, dann soll $\angle ABP = \angle APB$ sein.
Wie kann man diesen Punkt P konstruieren?

Lösung von Steffen Polster:

Die Punkte A, B und P bilden ein Dreieck, bei dem die zwei Winkel bei B und P gleich groß sind. Das Dreieck $\triangle ABP$ ist also gleichschenklig, die Basis ist BP und die Schenkel sind $AB = AP$. Damit findet man den Punkt P, indem man die Strecke $\overline{AB} = 5$ cm auf dem zweiten Schenkel abträgt.

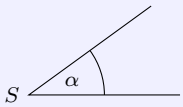


Aufgabe 030623:
Gegeben seien zwei Punkte A und B, deren Abstand 10 cm beträgt. Du hast als Hilfsmittel nur ein Lineal von 8 cm Länge (ohne Zentimetereinteilung) und einen Zirkel zur Verfügung.
Zeichne die Gerade, die durch A und B geht, und begründe die Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man schlägt um A und um B Kreise mit gleichem Radius, der etwas größer als 5 cm sein muss.

Die beiden Schnittpunkte dieser Kreise werden durch das Lineal miteinander verbunden und die so entstandene Strecke mit Zirkel und Lineal halbiert. Dann ist der Halbierungspunkt auch der Mittelpunkt der Strecke AB, und diese lässt sich nunmehr mit dem Lineal zeichnen.

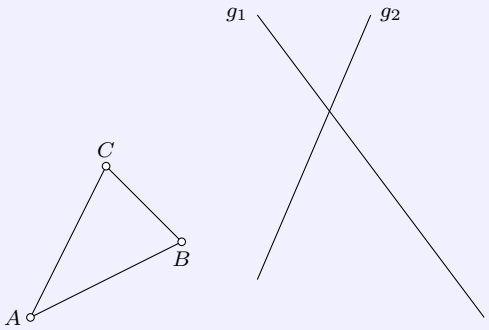
Aufgabe 060623:
Gegeben ist ein Winkel mit dem Gradmaß $\alpha = 36°$ (siehe Abbildung).
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal einen Winkel, dessen Gradmaß 99° beträgt!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der geforderte Winkel lässt sich als Summe aus einem rechten Winkel und einem Winkel vom Gradmaß 9° konstruieren.
Der rechte Winkel wird wie üblich konstruiert. Dann halbiert man den gegebenen Winkel und halbiert einen der beiden so erhaltenen Winkel (Gradmaß $\frac{\alpha}{2} = 18°$) noch einmal. Dadurch entsteht ein Winkel vom Gradmaß $\frac{\alpha}{4} = 9°$.

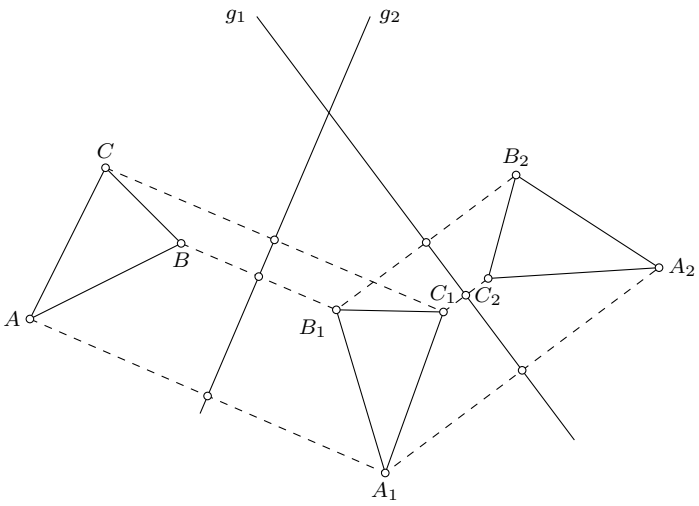
Man addiert auf die im Lehrbuch Klasse 5 angegebene Weise den rechten Winkel und den Winkel von 9° und erhält, wie verlangt, einen Winkel von 99°.

Aufgabe 100621:
Die Abbildung zeigt ein Dreieck $\triangle ABC$ und zwei Geraden g_1 und g_2. Das Dreieck $\triangle ABC$ soll nacheinander an den Geraden g_1 und g_2 gespiegelt werden.



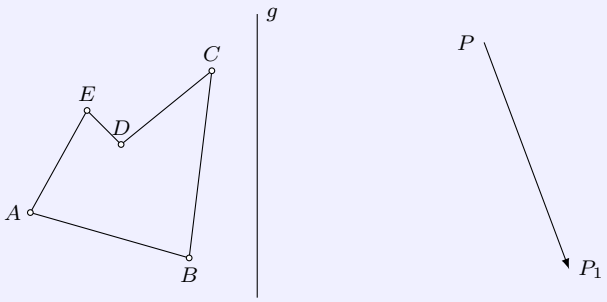
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dabei entstehende Dreieck $\triangle A_2B_2C_2$!
(Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

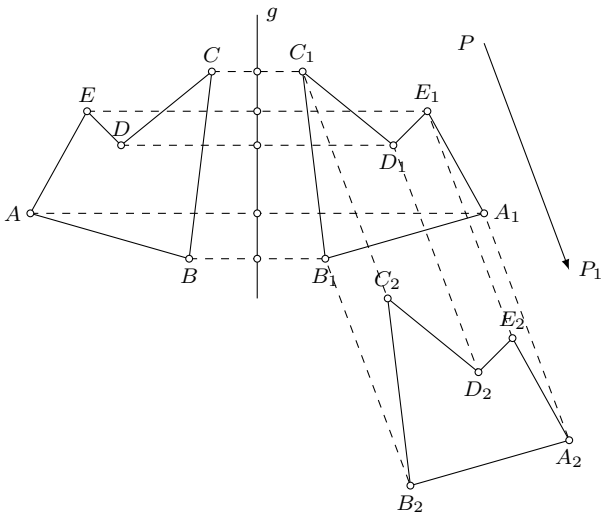


Aufgabe 110621:
Das auf der untenstehenden Zeichnung abgebildete Fünfeck $ABCDE$ soll an der Geraden g gespiegelt werden. Auf das so entstandene Fünfeck $A_1B_1C_1D_1E_1$ ist anschließend die Verschiebung anzuwenden, die durch den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$ gegeben ist.

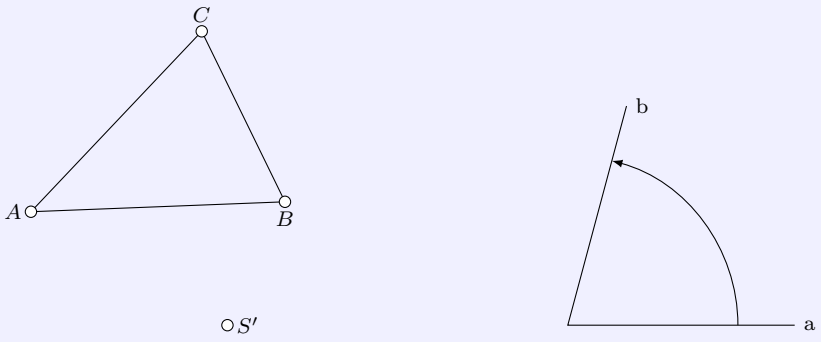
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck auf dem Arbeitsblatt das dadurch entstehende Fünfeck $A_2B_2C_2D_2E_2$! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



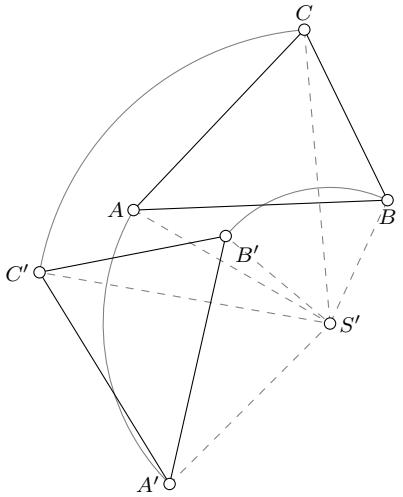
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



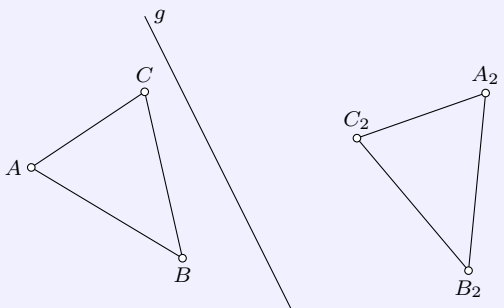
Aufgabe 120621:
Das abgebildete Dreieck ABC ist um den Drehpunkt S um den Drehwinkel $\angle(a, b)$ im angegebenen Drehsinn zu drehen. Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal das dadurch entstehende Dreieck $A'B'C'$! Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

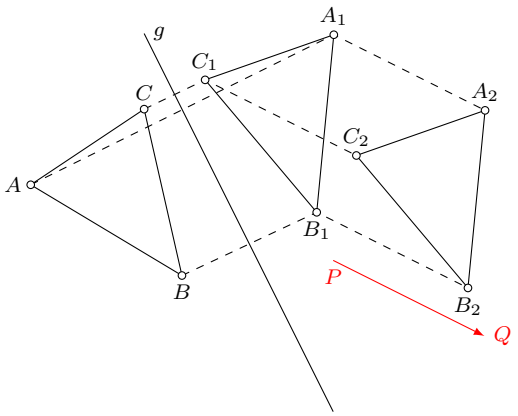


Aufgabe 140621:
Auf dem beiliegenden Arbeitsblatt sind ein Dreieck ABC und ein Dreieck $A_2B_2C_2$, ein Punkt P sowie eine Gerade g abgebildet.



Das Dreieck $A_2B_2C_2$ ist aus dem Dreieck ABC durch folgende Konstruktionen entstanden:
Zunächst wurde $\triangle ABC$ an g gespiegelt, wobei ein Dreieck $A_1B_1C_1$ entstand. Danach wurde auf $\triangle A_1B_1C_1$ eine solche Verschiebung angewendet, dass $\triangle A_2B_2C_2$ als Bild des Dreiecks $A_1B_1C_1$ entstand.
Konstruiere unter Verwendung von Zirkel, Lineal und Zeichendreieck den Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$ dieser auf $\triangle A_1B_1C_1$ anzuwendenden Verschiebung. Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

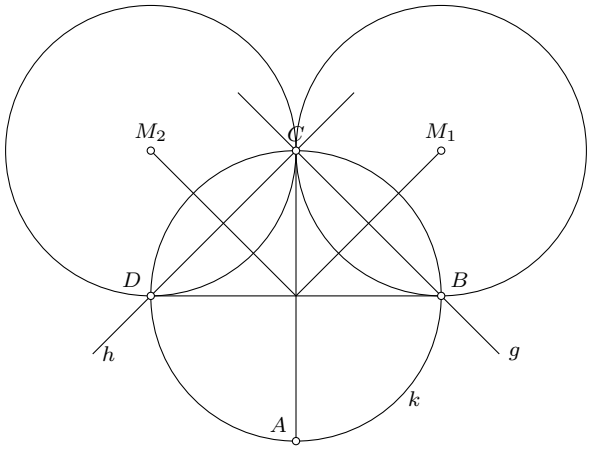
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



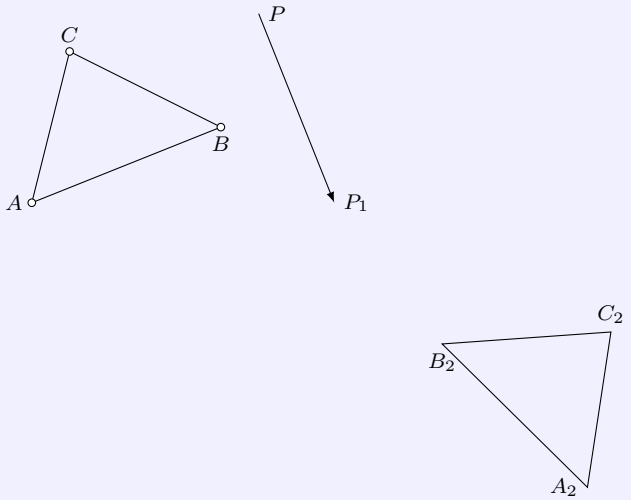
Als Lösung gilt jede (einwandfreie) Zeichnung, in der für mindestens einen der Punkte A_1, B_1 bzw. C_1 bei der Spiegelung an g und dann gleichsinnig parallel und gleichlang zu $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$ bzw. $\overrightarrow{C_1C_2}$ der gesuchte Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PQ}$ konstruiert wurde.

Aufgabe 150623:
Zeichne einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und einem Durchmesser von 6,4 cm!
Trage in diesen Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser ein und bezeichne ihre auf k liegenden vier Endpunkte der Reihe nach entgegen dem Uhrzeigersinn mit A, B, C, D!
Die Gerade durch B und C sei g, die Gerade durch C und D sei h. Spiegele den Kreis k an g und nenne den Mittelpunkt des gespiegelten Kreises M_1!
Spiegele den Kreis k an h und nenne den Mittelpunkt des gespiegelten Kreises M_2!
Als Lösung gilt die ausgeführte Konstruktion ohne Beschreibung.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

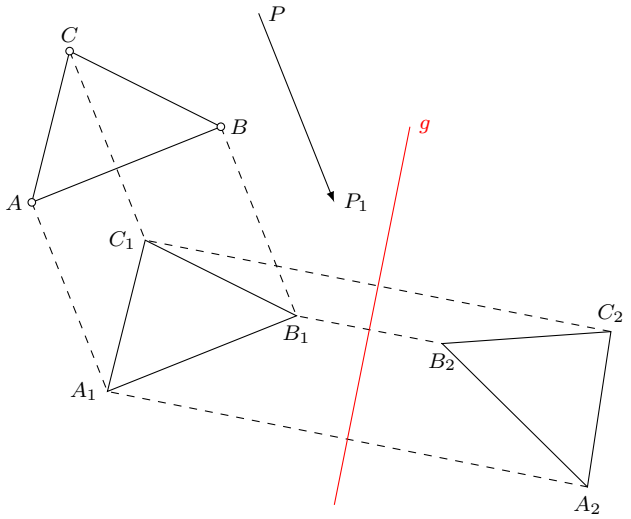


Aufgabe 170624:



Auf der Abbildung sind ein Dreieck ABC, ein Verschiebungspfeil $\overrightarrow{PP_1}$, sowie ein Dreieck $A_2B_2C_2$ abgebildet.
Gesucht ist eine Gerade g mit folgender Eigenschaft:
Wendet man auf das Dreieck ABC zuerst die Verschiebung $\overrightarrow{PP_1}$ und dann die Spiegelung an der Geraden g an, so entsteht das Dreieck $A_2B_2C_2$.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal eine Gerade g mit dieser Eigenschaft!
Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.

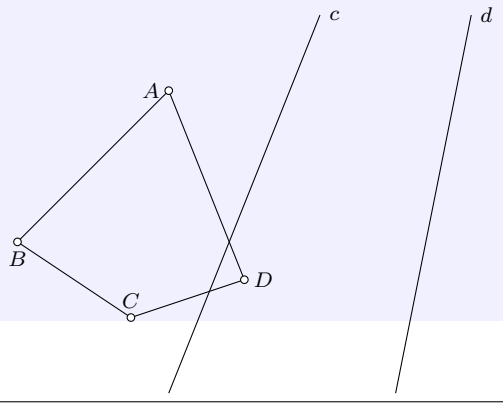
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



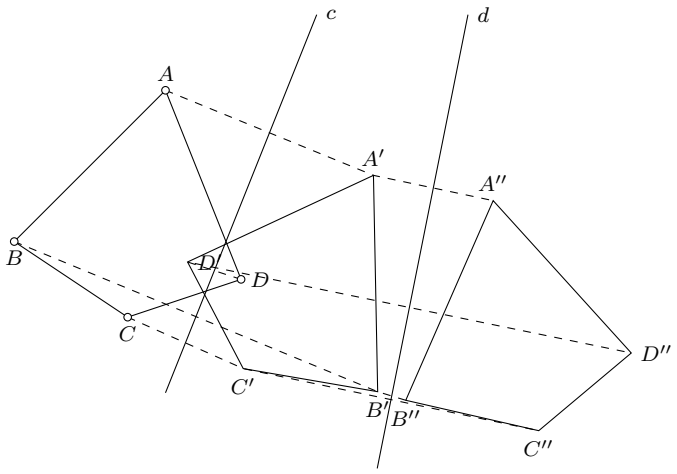
Aufgabe 210624:

Spiegele die Figur $ABCD$ auf dem Arbeitsblatt nacheinander an den gegebenen Geraden c und d!

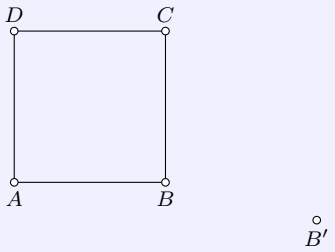
Eine Beschreibung der Konstruktion ist nicht erforderlich.



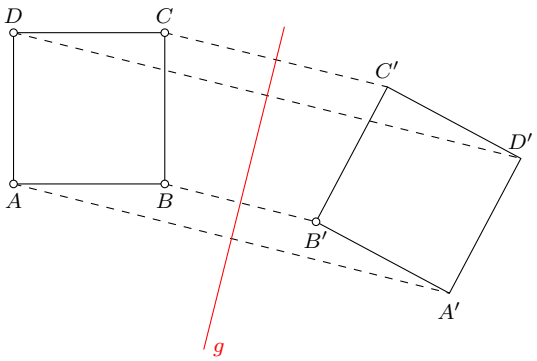
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



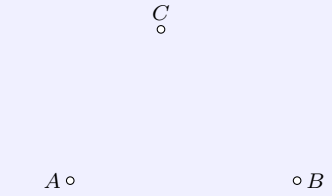
Aufgabe 220622:
Der Punkt B' auf dem Arbeitsblatt sei das Bild von B bei der Spiegelung an einer Geraden g. Konstruiere diese Gerade g und die Bilder A', C', D' der Punkte A, C, D bei der Spiegelung an g! Eine Beschreibung und Begründung der Konstruktion wird nicht verlangt.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

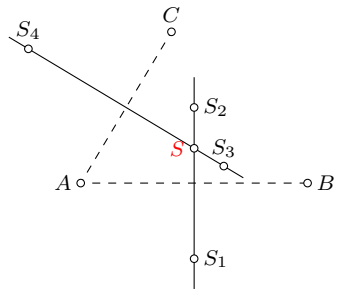


Aufgabe 260623:



Es seien A, B, C die drei in der Abbildung gegebenen Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
a) Konstruiere (mindestens) zwei Punkte S_1 und S_2, für die $S_1A = S_1B$ und $S_2A = S_2B$ gilt!
b) Es gibt genau einen Punkt S, der von A, B und C gleich weit entfernt ist. Konstruiere diesen Punkt S!
c) Begründe, warum der Punkt S bei deiner Konstruktion die geforderten Bedingungen erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Eine mögliche Konstruktion ist die folgende (siehe Abbildung):
Wir zeichnen um A und um B je einen Kreis mit dem gleichen Radius r, der größer als $\frac{1}{2}AB$ und sonst beliebig gewählt wird. Die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 dieser beiden Kreise erfüllen die Bedingung $S_1A = S_1B$ und $S_2A = S_2B$.

b) In entsprechender Weise konstruieren wir für die Punkte A und C zwei Punkte S_3, und S_4, für die $S_3A = S_3C$ und $S_4A = S_4C$ gilt. Der Schnittpunkt S der Geraden durch S_1, S_2 und der Geraden durch S_3, S_4 erfüllt die geforderten Bedingungen.

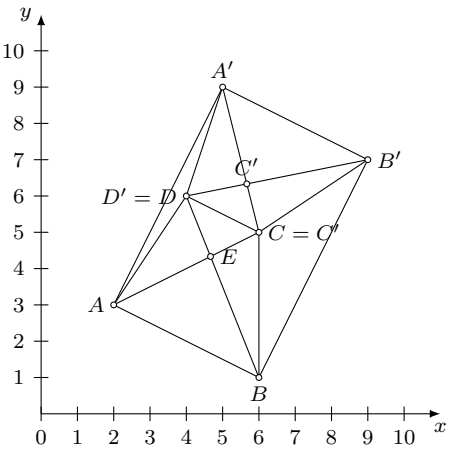
c) Nach Konstruktion ist die Gerade durch S_1, S_2 Symmetrieachse zu A, B, wobei alle ihre Punkte ebenso weit von A wie von B entfernt sind.
Ferner ist die Gerade durch S_3, S_4 Symmetrieachse zu A, C, wobei alle ihre Punkte ebenso weit von A wie von C entfernt sind.
Nach Konstruktion ist S ein Punkt beider Symmetrieachsen. Deshalb gilt für ihn: $S_A = S_B$ und $S_A = S_C$ und damit auch $S_B = S_C$, d. h., S ist von A, B und C gleich weit entfernt.

Aufgabe 290622:
a) Zeichne in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm) die Punkte $A(2;3)$, $B(6;1)$, $C(6;5)$ und $D(4;6)$ ein! Verbinde die Punkte A, B, C und D so miteinander, dass ein Viereck entsteht! Verbinde dann in diesem Viereck den Punkt A mit dem Punkt C und den Punkt B mit D! Bezeichne den Schnittpunkt der Strecken AC und BD mit E!

b) Spiegele die erhaltene Figur an der Geraden durch C und D! Verbinde anschließend noch den Punkt A mit seinem Bildpunkt A' und den Punkt B mit seinem Bildpunkt B'!

c) Die insgesamt erhaltene Figur soll längs ihrer Strecke so durchlaufen werden, dass jede Strecke genau einmal in einem solchen Weg vorkommt.
Wähle einen geeigneten Anfangspunkt und schreibe einen derartigen Weg auf!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a,b)

c) Ein möglicher Weg ist: $D, A, B, E, D, C, E, A, A', D, E', B', C, E', A', B', B, C$.

Aufgabe 300621:
a) Zeichne in ein Koordinatensystem das Quadrat $ABCD$ mit den Eckpunkten

$$A(1;1), \quad B(5;1), \quad C(5;5), \quad D(1;5)$$

und das Quadrat $PQRS$ mit den Eckpunkten

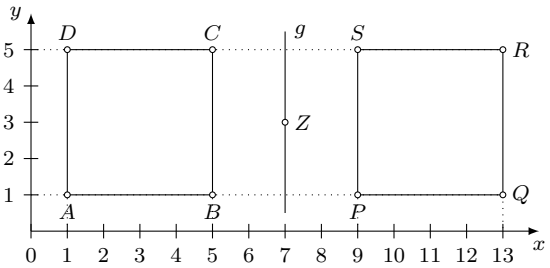
$$P(9;1), \quad Q(13;1), \quad R(13;5), \quad S(9;5)$$

ein!
b) Gibt es eine Spiegelung und auch eine Drehung, bei der das Quadrat $PQRS$ das Bild des Quadrates $ABCD$ ist?
Wenn dies der Fall ist, gib die Koordinaten des Drehzentrums und die Größe des Drehwinkels an! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Hinweis: Wenn das Quadrat $PQRS$ das Bild des Quadrates $ABCD$ ist, so braucht die Reihenfolge P, Q, R, S nicht die Reihenfolge der Bildpunkte A, B, C, D zu sein.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Die Abbildung zeigt die in ein Koordinatensystem eingezeichneten Quadrate.
b) Die Abbildung zeigt auch die Spiegelgerade g und eine Konstruktion dieser Geraden.
c) Das Drehzentrum ist $Z(7;3)$, der Drehwinkel beträgt 180°.

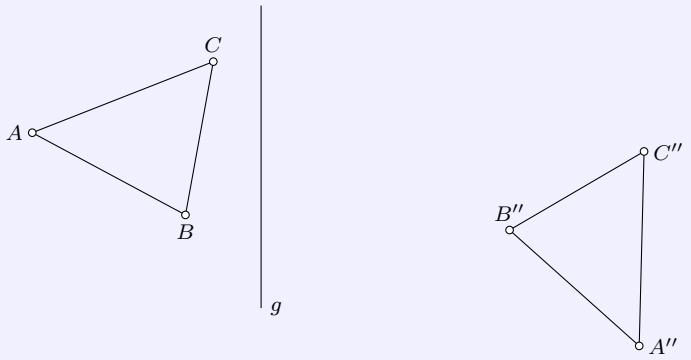


Aufgabe 310624:
Auf dem Arbeitsblatt befinden sich zwei Dreiecke ABC, $A''B''C''$ und eine Gerade g. Zu konstruieren ist

1. das Bild $A'B'C'$ von ABC bei der Spiegelung an g,
2. der Drehpunkt M derjenigen Drehung, die $A'B'C'$ in $A''B''C''$ überführt.

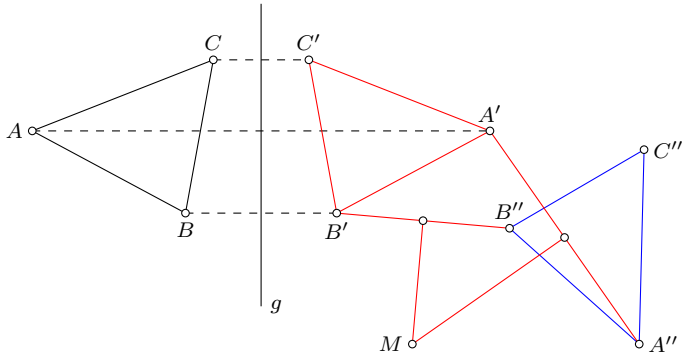
a) Fertige auf dem Arbeitsblatt eine Konstruktionszeichnung an, die alle benötigten Hilfslinien enthält!

b) Beschreibe deine Konstruktion! Eine Begründung wird nicht verlangt.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt eine Konstruktion. Sie kann folgendermaßen beschrieben werden:

(1) Man konstruiert die Lote AA_1, BB_1, CC_1 von A, B, C auf g und verlängert sie über A_1, B_1 bzw. C_1 hinaus um ihre eigene Länge bis A', B', C'.
(2) Man konstruiert die Mittelsenkrechten m_1, m_2 von $A'A''$ bzw. bzw. $B'B''$ und ihren Schnittpunkt M.



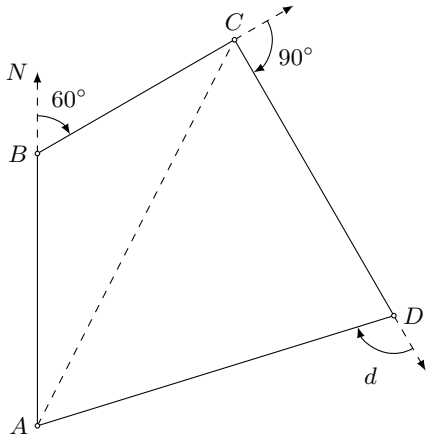
Aufgabe 320623:
Bei einem Geländespiel erhält eine Pfadfindergruppe folgenden Auftrag:

- Geht vom Ausgangspunkt A aus 600 m geradlinig nach Norden! Dort befindet sich ein Aussichtsturm (Punkt B).
- Ändert nun euren Kurs um 60° in nordöstliche Richtung! Nach 500 m erreicht ihr eine alte Scheune (Punkt C).
- Geht jetzt im rechten Winkel in etwa südöstliche Richtung um 700 m weiter! Dort ist eine hohle Eiche (Punkt D). Von ihr aus sollt ihr wieder nach A zurückfinden.

a) Um wie viel Grad muss die Pfadfindergruppe in D den Kurs ändern, um geradlinig nach A zu gelangen?
b) Wie lang ist die Strecke von A nach D?
c) Ein Mitglied der Gruppe will bereits von C aus nach A zurückkehren. Wie weit ist A von C entfernt?

Fertige zur Beantwortung dieser Fragen eine Zeichnung an (auf weißem, nicht kariertem oder liniertem Papier; in geeigneter Verkleinerung); entnehme die gesuchten Angaben mit Zeichengenauigkeit!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildung zeigt eine Darstellung, bei der 100 m verkleinert als 1 cm wiedergegeben werden. An einer solchen Zeichnung kann man mit Zeichengenauigkeit (etwa auf 1° genau bzw. etwa auf 1 mm genau, d. h. für die Wegstrecken etwa auf 10 m genau) ablesen:
a) In D muss der Kurs um $\delta \approx 103°$ (in etwa südwestliche Richtung) geändert werden.
b) Die Strecke von D nach A ist etwa 820 m lang.
c) Der Punkt A ist von C etwa 950 m entfernt.



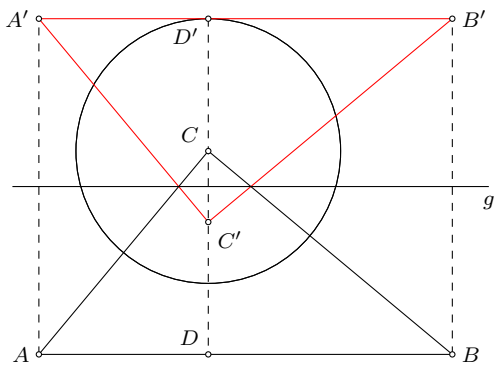
Aufgabe 330623:
Konstruiere ein rechtwinkligen Dreieck ABC mit $AC = 5$ cm, $BC = 6$ cm und dem rechten Winkel bei C!
Konstruiere weiter den Kreis k um C mit dem Radius 2,5 cm!
Nun soll eine Gerade g so gelegt werden, dass folgende Bedingung erfüllt wird:

Wenn man das Dreieck ABC an g spiegelt und dabei das Dreieck $A'B'C'$ erhält, so hat der Kreis k genau 3 gemeinsame Punkte (Schnitt- oder Berührungspunkte) mit diesem Dreieck, d. h. mit der Linie, die sich aus den drei Strecken $A'B'$, $B'C'$ und $C'A'$ zusammensetzt.

Konstruiere eine solche Gerade g und überprüfe durch Konstruktion des durch Spiegelung entstehenden Dreiecks $A'B'C'$, ob die Bedingung erfüllt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In Abbildung ist eine mögliche Lösungen gezeigt.

Die dort jeweils verwendete Gerade g kann nach folgender Beschreibung konstruiert werden:
a) Man konstruiert das Lot von C auf AB. Ist D sein Fußpunkt, so verlängert man DC über C hinaus bis zum Schnitt D' mit k.
Dann konstruiert man g als die Mittelsenkrechte von DD'.



II.IV Raumgeometrie

I Runde 1

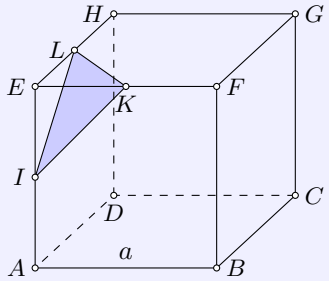
Aufgabe 050614:
In einem Betrieb sollen 1600 Pakete, die je 1,6 dm lang, 7 cm breit und 45 mm hoch sind (Außenmaße), zum Versand gebracht werden.
Arbeiter wollen sie in Kisten von 64 cm Länge, 0,28 m Breite und 1,8 dm Höhe (Innenmaße) einschichten.

Welches ist die kleinste Anzahl von Kisten, die ausreicht, um alle diese Pakete gleichzeitig zu versenden?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir können in jede der Kisten 64 Pakete einpacken, wenn wir die Pakete so hineinlegen, dass ihre längsten Kanten parallel der längsten Kistenkante und ihre zweitlängsten Kanten parallel der zweitlängsten Kistenkante liegen. In diesem Fall erhalten wir 4 übereinanderliegende Schichten von je 16 Paketen.

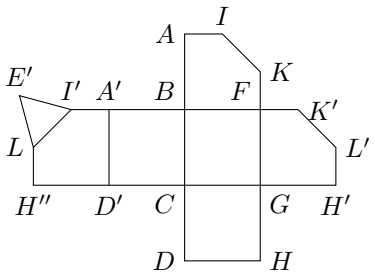
Mit 25 so gepackten Kisten kommen wir aus; denn die Anzahl der in ihnen liegenden Pakete beträgt $25 \cdot 64 = 1600$.
Die Summe der Volumina der Innenräume aller 25 Kisten beträgt genau soviel wie die Summe der Volumina der Pakete. Da weniger als 25 Kisten ein kleineres Volumen als das hier ermittelte haben, ist 25 die kleinste Anzahl von Kisten, die ausreicht, um 1600 Pakete der in der Aufgabe angegebenen Größe gleichzeitig zu versenden.

Aufgabe 090611:



Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abbildung) und der Kantenlänge $a = 4$ cm. Von ihm werde durch einen ebenen Schnitt durch die Punkte I, K, L eine Ecke abgeschnitten, wobei I der Mittelpunkt von AE, K der Mittelpunkt von EF und L der Mittelpunkt von EH ist.
Zeichne ein Netz des Restkörpers und bezeichne die Eckpunkte!

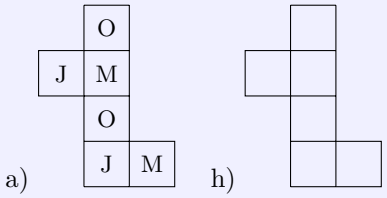
Lösung von Steffen Polster:
Ein mögliches Netz:



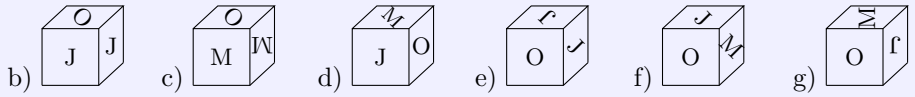
Aufgabe 220611:
In einem Aquarium hat der Hohlraum, der mit Wasser gefüllt werden könnte, die Gestalt eines Würfels von 60 cm Kantenlänge. Dieser Hohlwürfel soll aber nur bis zu einer Höhe von 10 cm unter seinem oberen Rand gefüllt werden.
Wie viel Eimer Wasser sind dafür insgesamt erforderlich, wenn jeder Eimer 9 Liter fasst?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $60 - 10 = 50$ hat der mit Wasser zu füllende Teil des Aquariums die Gestalt eines Quaders vom Volumen $60\text{cm} \cdot 60\text{cm} \cdot 50\text{cm} = 180000\text{cm}^3 = 180\text{dm}^3$.
Da 1 Liter Wasser ein Volumen von 1 dm^3 hat, sind folglich 180 Liter Wasser einzufüllen. Wegen $180 : 9 = 20$ sind das genau 20 Eimer Wasser.

Aufgabe 220612:
Die sechs quadratischen Flächen der Oberfläche eines Würfels sind so mit den Buchstaben O, J, M beschriftet, wie es das Würfelnetz in Bild a) zeigt. (Der Buchstabe O gelte dabei als kreisförmig.)



a) Welche der in den Bildern b) bis g) abgebildeten Würfel könnten aus diesem Netz hergestellt worden sein?
Für welche Würfel ist dies nicht möglich? (Als Lösung genügt jeweils die Angabe, ob Herstellbarkeit vorliegt, ohne Begründung.)



b) In das Würfelnetz des Bildes h) sollen die Buchstaben O, J, M so eingetragen werden, dass sich aus dem Netz ein Würfel mit den folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) herstellen lässt:

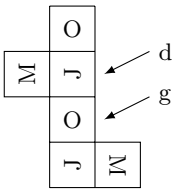
(1) Je zwei gegenüberliegende Seitenflächen des Würfels tragen denselben Buchstaben.
(2) Der Würfel lässt sich so drehen, dass Bild d) entsteht.
(3) Der Würfel lässt sich so drehen, dass Bild g) entsteht.

Als Lösung ist eine mögliche Eintragung anzugeben, ohne Begründung, aber mit der Kennzeichnung einer Fläche, die J enthält und in Bild d) sichtbar sein soll, sowie einer Fläche, die O enthält und in Bild g) sichtbar sein soll.

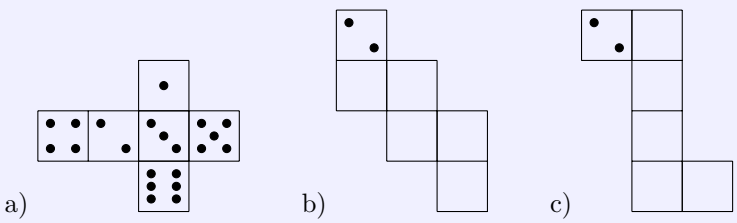
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Die Würfel in den Abbildungen c), e), f) lassen sich aus dem Netz in Abbildung a) herstellen, die Würfel in den Abbildungen b), d), g) nicht.

b) Eine mögliche Eintragung zeigt die Abbildung.

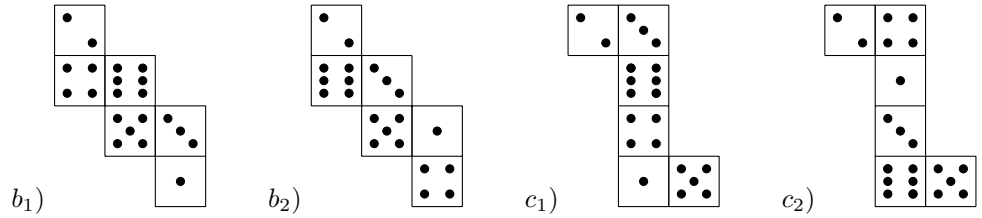


Aufgabe 230611:
Die Bilder a) bis c) zeigen drei Würfelnetze.



Wie können die Punkte auf dem Würfelnetz b) und auf dem Netz c) verteilt werden, damit der gleiche Würfel entsteht wie aus dem Netz a)?
Gib je ein Beispiel für b) und c) an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es gibt genau die in der Abbildung angegebenen Möglichkeiten. Von ihnen ist zu b) und c) je eine anzugeben.
Man kann auch Lösungen zulassen, in denen die Punkte auf den Flächen des Würfels zwar dieselben Zahlen darstellen, aber anders angeordnet sind, z. B.  .

Aufgabe 240613:
Wenn man einen Würfel auf einen Tisch stellt, so dass er nirgends seitlich über die Tischplatte hinausragt, so sind von seinen sechs Flächen genau fünf sichtbar.
Ebenso kann man einen kleineren Würfel so auf einen größeren stellen, dass von den sechs Flächen des kleineren Würfels genau fünf sichtbar sind, während die sechste vollständig auf dem größeren Würfel aufliegt, ohne seitlich über ihn hinauszuragen.

In dieser Art sollen drei Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 20$ cm, $a_2 = 10$ cm, $a_3 = 4$ cm der Größe nach so übereinander gestellt werden, dass der größte Würfel zuunterst auf der Tischplatte steht.
Wie groß ist dann die Summe der Flächeninhalte aller sichtbaren Flächenteile der drei Würfel?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sichtbar sind von jedem der drei Würfel erstens die vier Seitenflächen (der Mantel). Sie haben die Flächeninhalte

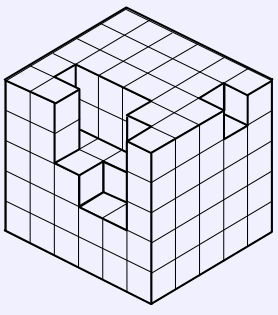
$$A_1 = 4 \cdot a_1^2 = 1600 \text{ cm}^2, \qquad A_2 = 4 \cdot a_2^2 = 400 \text{ cm}^2, \qquad A_3 = 4 \cdot a_3^2 = 64 \text{ cm}^2$$

Sichtbare Flächenteile sind zweitens Teile der Deckflächen der drei Würfel.
Die Flächeninhalte dieser Flächenteile ergeben zusammen den Flächeninhalt der Deckfläche des größten Würfels, also $A_D = a_1^2 = 400$ cm^2. Weitere sichtbare Flächenteile kommen nicht vor.
Für die Summe der Flächeninhalte aller sichtbaren Flächenteile gilt daher

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_D = 2464 \text{ cm}^2$$

Aufgabe 280612:

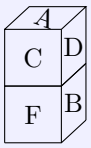
Ein großer Quader wurde in kleine, untereinander gleich große Würfel zerlegt. Wie in der Abbildung ersichtlich, wurden dann einige kleine Würfel herausgenommen. Von denjenigen kleinen Würfeln, die in der Abbildung nicht zu sehen sind, wurde aber keiner weggenommen.
Wie viele der kleinen Würfel enthält dann der in der Abbildung gezeigte Restkörper insgesamt noch?
Beschreibe, wie du die gesuchte Anzahl gefunden hast!

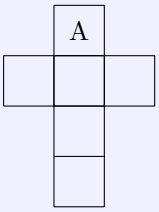


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die gesuchte Anzahl der kleinen Würfel beträgt 135; man kann sie durch folgende Überlegung finden:

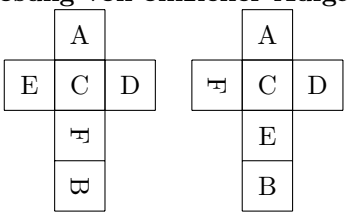
Der große Quader bestand ursprünglich wegen $6 \cdot 5 \cdot 5 = 150$ aus genau 150 kleinen Würfeln. Aus ihm wurden genau 15 kleine Würfel herausgenommen, nämlich
genau 8 aus der vordersten Schicht,
genau 6 aus der zweiten Schicht von vorn,
genau 1 aus der vierten Schicht von vorn.
Wegen $150 - 15 = 135$ enthält der Restkörper somit genau 135 kleine Würfel.

Aufgabe 300611:
Das Bild a) zeigt zwei gleiche, mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F in gleicher Anordnung beschriftete Würfel.
Man soll die Beschriftung des Würfelnetzes im Bild b) so ergänzen, dass zwei Würfel, die mit je einem solchen Netz hergestellt werden, sich zum Bild a) zusammenstellen lassen.
Gib zwei verschiedene Ergänzungsmöglichkeiten an!
Gib zu beiden Ergänzungsmöglichkeiten an, welche Fläche des unteren Würfels dann als Grundfläche gewählt werden muss!

a) 

b) 

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Abbildung zeigt zwei Ergänzungsmöglichkeiten der geforderten Art.
Bei beiden muss als Grundfläche des unteren Würfels die als E beschriftete Fläche gewählt werden.

II Runde 2

Aufgabe 130622:
Vier undurchsichtige Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 24$ cm, $a_2 = 12$ cm, $a_3 = 6$ cm und $a_4 = 3$ cm sollen so übereinander auf eine undurchsichtige Tischplatte gestellt werden, dass der größte zuunterst, darauf der nächstgrößte usw., schließlich der kleinste Würfel zuoberst steht, wobei jeder der Würfel vollständig auf der Deckfläche des unter ihm stehenden (bzw. auf der Tischplatte) ruht (d. h. ohne über diese Fläche hinauszuragen).
Ermittle von diesen Würfeln den Gesamtflächeninhalt derjenigen Oberflächenteile, die sichtbar (d. h. nicht verdeckt) sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jeder der Würfel hat genau 6 Flächen. Von ihnen ist bei jedem die Fläche, auf der er steht, nicht sichtbar. Außerdem verdeckt der zweitgrößte Würfel mit seiner Standfläche einen gleichgroßen Teil der obersten Fläche des größten Würfels. Entsprechendes gilt für den drittgrößten und für den kleinsten der vier Würfel. Weitere nicht sichtbare Teilflächen kommen nicht vor.

Daher erhält man den gesuchten Gesamtflächeninhalt, indem man von der Summe der Flächeninhalte von jeweils 5 Flächen der vier Würfel die Summe der Flächeninhalte je einer Fläche des zweitgrößten, des drittgrößten und des kleinsten Würfels subtrahiert.
Wegen $5 \cdot (242 + 122 + 62 + 32) - (122 + 62 + 32) = 3636$ beträgt der gesuchte Gesamtflächeninhalt der sichtbaren Oberflächenteile der vier Würfel 3636 cm^2.

III Klasse 7

III.1 Dreiecke

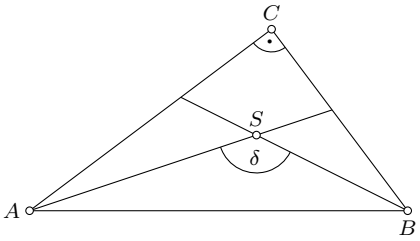
I Runde 1

Aufgabe 020713:
Es ist zu beweisen, dass ein Dreieck, in dem zwei Höhen gleich lang sind, stets gleichschenklig ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In einem Dreieck berechnet sich der Flächeninhalt zu $A = \frac{g \cdot h}{2}$, wobei g eine Grundseite und h die zugehörige Höhe sind.
Für zwei verschiedene Höhen h_1 und h_2 mit $h = h_1 = h_2$ ist dann $A = \frac{g_1 \cdot h}{2} = \frac{g_2 \cdot h}{2}$, womit sofort $g_1 = g_2$ folgt. Das Dreieck ist gleichschenklig.

Aufgabe 060712:
In dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit dem rechten Winkel bei C sei S der Schnittpunkt der beiden Halbierenden der spitzen Winkel.
Ermittle das Gradmaß δ des Winkels $\angle ASB$, den diese Winkelhalbierenden miteinander bilden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



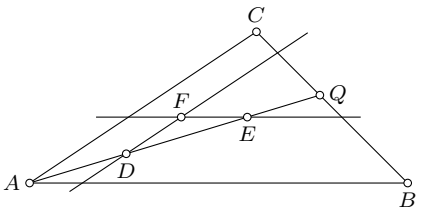
Das Gradmaß des Schnittwinkels $\angle ASB$ sei δ. Die Gradmaße der spitzen Winkel $\angle CAB$ und $\angle ABC$ seien α bzw. β. Nach dem Winkelsummensatz gilt im Dreieck $\triangle ABS$:

$$\delta = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$$

Da im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ $\alpha + \beta = 90^\circ$ ist, folgt $\delta = 135^\circ$.

Aufgabe 090712:
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Darin sei die Halbierende des Innenwinkels bei A enthaltende Gerade eingezeichnet. Außerdem seien eine parallele Gerade zur Seite AB und eine parallele Gerade zur Seite AC derart eingezeichnet, dass diese sich im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$, aber nicht auf der Winkelhalbierenden schneiden.
Beweise, dass die Schnittpunkte der drei eingezeichneten Geraden die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks bilden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



In der Abbildung sei p_1 die Halbierende des Innenwinkels bei A, p_2 eine Parallele zu AB und p_3 eine Parallele zu AC. Der Schnittpunkt von p_1, mit BC sei Q, der von p_1 mit p_2 sei E, der von p_1 mit p_3 sei D und der von p_2 mit p_3 sei F.

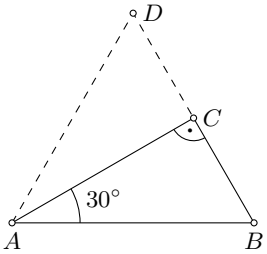
Da p_2, p_3 als Parallelen zu zwei Dreieckseiten nicht zueinander parallel sind und da p_1 als Halbierende eines Innenwinkels zu keiner Seite des Dreiecks parallel ist, existieren diese Schnittpunkte.
Nun liegt nach Voraussetzung F entweder (1. Fall) im Innern des Dreiecks $\triangle AQC$ oder (2. Fall) im Innern des Dreiecks $\triangle ABQ$.

Im 1. Fall gilt $\angle CAD = \angle FDE$ (als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen) und $\angle DAB = \angle FED$ (als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen).

Im 2. Fall gilt entsprechend $\angle DAB = \angle FED$ und $\angle CAD = \angle FDE$.
(Anmerkung: Man kann auch den 2. Fall, statt ihn gesondert zu diskutieren, durch Umbenennung auf den 1. Fall zurückführen.)
Da laut Aufgabe $\angle CAD = \angle DAB$ gilt, ist mithin in jedem Fall auch $\angle FDE = \angle FED$. Das Dreieck $\triangle FED$ ist also gleichschenklig.

Aufgabe 110712:
Beweise folgenden Satz:
Enthält ein rechtwinkliges Dreieck einen Winkel von 30°, so ist seine Hypotenuse (längste Seite) doppelt so lang wie seine kürzeste Kathete (kürzeste Seite)!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck der geforderten Art, wobei C Scheitel des rechten Winkels und A Scheitel des Winkels von 30° sei.
Dann ist AB die Hypotenuse und BC kürzeste Kathete, da der Winkel $\angle BAC$ kleiner ist als $\angle ABC$, wie aus dem Winkelsummensatz hervorgeht. Wegen des Winkelsummensatzes hat der Innenwinkel bei B eine Größe von 60°.

Verlängert man die Strecke BC über C hinaus um BC bis zum Punkt D, dann gilt $\triangle ACD = \triangle ACB$ (sws). Daher hat der Winkel $\angle DAC$ eine Größe von 30°. Das Dreieck $\triangle ABD$ ist mithin gleichseitig, und es gilt $AB = 2 \cdot BC$.

Aufgabe 110713:
Günther zeichnet ein Dreieck $\triangle ABC$ und stellt fest:
Die Maßzahl des in Zentimetern gemessenen Umfangs u seines Dreiecks $\triangle ABC$ ist eine Primzahl.
Ferner gilt $BC = a = 6$ cm, $AC = b = 2$ cm.
Ermittle $AB = c$ und u!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus der Dreiecksungleichung folgt für das Dreieck $\triangle ABC$: $c < a + b$ und $c > a - b$. Daraus folgt laut Aufgabe 4 cm $< c <$ 8 cm.
Da die Maßzahl des Umfangs u eine Primzahl sein soll und die Maßzahlen von a und b ganze Zahlen sind, muss auch die Maßzahl von c eine ganze Zahl z sein, für die $4 < z < 8$ gilt. Also kann z nur 5, 6 oder 7

sein.

Es sei $z = 5$. Dann ist $u = a + b + c = 13$ cm, und 13 ist eine Primzahl.
Es sei $z = 6$. Dann ist $u = 14$ cm.
Es sei $z = 7$. Dann ist $u = 15$ cm.
In den letzten beiden Fällen ist die Maßzahl von u keine Primzahl. Also ist $c = 5$ cm, $u = 13$ cm die einzige Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 130713:
Der Umfang u eines gleichschenkligen Dreiecks soll 24 cm betragen; eine der Seiten dieses Dreiecks soll $2\frac{1}{2}$ mal so lang sein wie eine andere seiner Seiten.
Untersuche, ob es eine Möglichkeit gibt, die Seitenlängen eines Dreiecks so anzugeben, dass diese Bedingungen erfüllt sind! Untersuche, ob es genau eine solche Möglichkeit gibt! Wenn dies der Fall ist, so ermittle die zugehörigen Seitenlängen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn die Länge c der Basis und die Länge a eines Schenkels eines gleichschenkligen Dreiecks die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, so ist $c = \frac{5}{2}a$ oder $a = \frac{5}{2}c$. Wäre $c = \frac{5}{2}a$, so wäre $a + a < \frac{5}{2}a - c$, im Widerspruch zur Dreiecksungleichung
Wenn $a = \frac{5}{2}c$ ist, so folgt $\frac{5}{2}c + \frac{5}{2} + c = 24$ cm, also $6c = 24$ cm, woraus man $c = 4$ cm und $a = 10$ cm erhält.

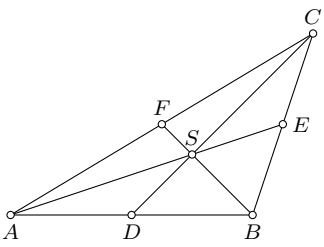
Daher können nur $a = 10$ cm und $c = 4$ cm die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Sie genügen ihnen tatsächlich, da sie die Dreiecksungleichungen sowie die übrigen Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 140714:
Beweise folgende Sätze:
a) Wenn S der Schnittpunkt der drei Seitenhalbierenden eines Dreiecks ABC ist, dann haben die Dreiecke ABS, BCS und CAS den gleichen Flächeninhalt.
b) Wenn S ein Punkt im Innern eines Dreiecks ABC ist, für den die Dreiecke ABS, BCS und CAS den gleichen Flächeninhalt haben, dann ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es sei D der Mittelpunkt der Seite AB eines Dreiecks ABC. Dann sind die Dreiecke ADC und DBC inhaltsgleich, da sie in der Länge der Seiten AD, DB und in der zugehörigen Höhe übereinstimmen.

Diese Dreiecke haben die Seite CD gemeinsam; folglich stimmen sie auch in den Längen der (dieser Seite) zugehörigen Höhen überein, d. h., A hat denselben Abstand von der Geraden durch C und D wie B. Also stimmen die Dreiecke CAS, BCS in der Seite CS und in den Längen der zugehörigen Höhen überein und sind mithin inhaltsgleich.

Analog beweist man, dass die Dreiecke ABS und BCS inhaltsgleich sind. Daher haben die Dreiecke ABS, BCS und CAS den gleichen Flächeninhalt.



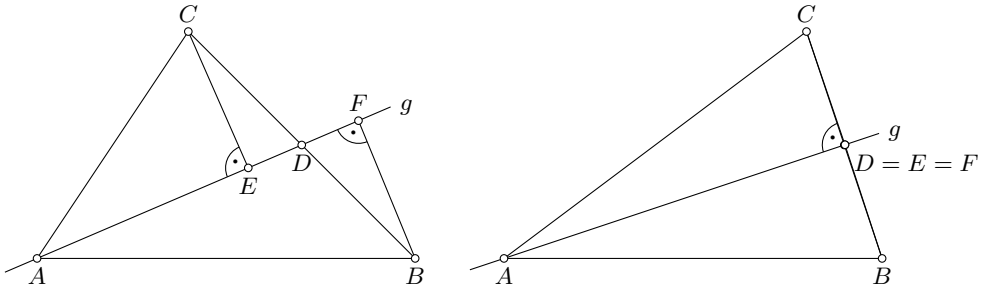
b) Es sei D der Schnittpunkt des Strahles aus C durch S mit AB. Da die inhaltsgleichen Dreiecke CAS und BCS die Seite CS gemeinsam haben, stimmen sie in den Längen der (dieser Seite) zugehörigen Höhen überein, d. h., A hat denselben Abstand von der Geraden durch C und S wie B. Also stimmen die Dreiecke ADC und DBC in der Seite CD und in den Längen der zugehörigen Höhen überein und sind mithin inhaltsgleich.

Da sie dieselbe Höhe auf den Seiten AD bzw. DB haben, sind folglich diese Seiten gleich lang. Somit ist CD die Seitenhalbierende durch C im Dreieck ABC.

Analog beweist man, dass, wenn F der Schnittpunkt des Strahls aus B durch S mit AC ist, BF die Seitenhalbierende durch B im Dreieck ABC ist. Daher ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im Dreieck ABC.

Aufgabe 170712:
Gegeben sei ein Dreieck ABC. Es sei g die Gerade durch den Punkt A und den Mittelpunkt D der Seite BC.
Beweise, dass dann die Punkte B und C den gleichen Abstand von der Geraden g haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

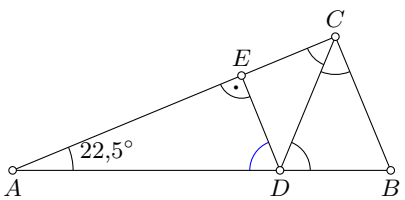


Das Lot von C bzw. von B auf g sei CE bzw. BF (siehe Abbildung). Ist BC nicht senkrecht auf g, so sind E und F von D verschieden, und es entstehen zwei Dreiecke CDE und BDF. Diese stimmen in den Seitenlängen CD, BD, den Größen der anliegenden Winkel $\angle CDE$ und $\angle BDF$ (Scheitelwinkel) und denen der gegenüberliegenden (rechten) Winkel $\angle CED$, $\angle BFD$ überein. Also gilt $\triangle CDE = \triangle BFD$, und daraus folgt $CE = BF$.

Ist BC senkrecht auf g, so fallen E und F mit D zusammen, woraus $CE = CD = BD = BF$ folgt. Somit sind in jedem Falle die Abstände BF und CE der Punkte B und C von g einander gleich.

Aufgabe 190713:
Es sei $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck; C sei der Scheitel des rechten Winkels. Die Halbierende dieses Winkels schneide die Seite AB in D. Der Fußpunkt des Lotes von D auf AC sei E.
Beweise hierfür die folgende Aussage:
Wenn $\angle CAB = 22{,}5°$ ist, dann gilt $\angle ADE = \angle CDB$!

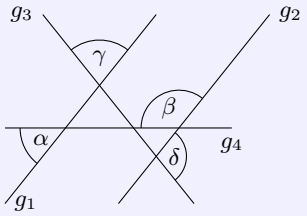
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



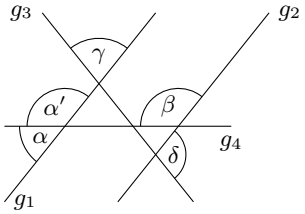
Aus $\angle EAD = \angle CAB = 22{,}5°$ und $\angle AED = 90°$ folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck $\angle ADE = 180° - 90° - 22{,}5° = 67{,}5°$.
Aus $\angle CAB = 22,5°$ und $\angle ACB = 90°$ folgt ebenso $\angle ABC = 67,5°$. Ferner ist nach Voraussetzung $\angle BCD = 90°2 = 45°$; hieraus und aus $\angle DBC = \angle ABC = 67,5°$ folgt wiederum nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck: $\angle CDB = 180° - 67,5° - 45° = 67,5°$.
Damit ist der geforderte Beweis geführt.

Aufgabe 200713:

Vier Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 mögen sich so schneiden, wie es aus dem Bild ersichtlich ist. Für die Größen α, β, γ der dort angegebenen Winkel gelte $\alpha = 50°$, $\beta = 130°$, $\gamma = 70°$.
Ermittle aus diesen gegebenen Größen die Winkelgröße δ!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

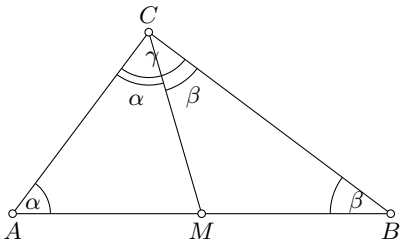


Mit der aus der Abbildung ersichtlichen Bezeichnung der Winkelgrößen gilt $\alpha' = 180° - \alpha$ als Nebenwinkel, also $\alpha' = 180° - 50° = 130° = \beta$. Da α' und β die Größen von Stufenwinkeln an den geschnittenen Geraden g_1, und g_2 sind, gilt laut Umkehrung des Stufenwinkelsatzes $g_1 \parallel g_2$. Ferner sind δ und γ die Größen von entgegengesetzt liegenden Winkeln an den geschnittenen Geraden g_1 und g_2. Da diese Geraden parallel sind, gilt

$$\delta + \gamma = 180° \Rightarrow \delta = 180° - \gamma = 180° - 70° = 110°$$

Aufgabe 200714:
Beweise folgenden Satz:
Ist M der Mittelpunkt der Seite AB eines Dreiecks ABC und gilt $AM = BM = CM$, so ist das Dreieck ABC rechtwinklig.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$. Nach Voraussetzung ist M der Mittelpunkt von AB, daher ist auch $\angle CAM = \alpha$ und $\angle MBC = \beta$.

Wegen $MA = MC$ ist das Dreieck ACM gleichschenklig mit $\angle ACM = \alpha$, wegen $MB = MC$ ist auch das Dreieck BCM gleichschenklig mit $\angle BCM = \beta$. Daher ist $\alpha + \beta = \gamma$.
Andererseits ist nach dem Winkelsummensatz $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Daraus folgt $2\gamma = 180°$, also $\gamma = 90°$.

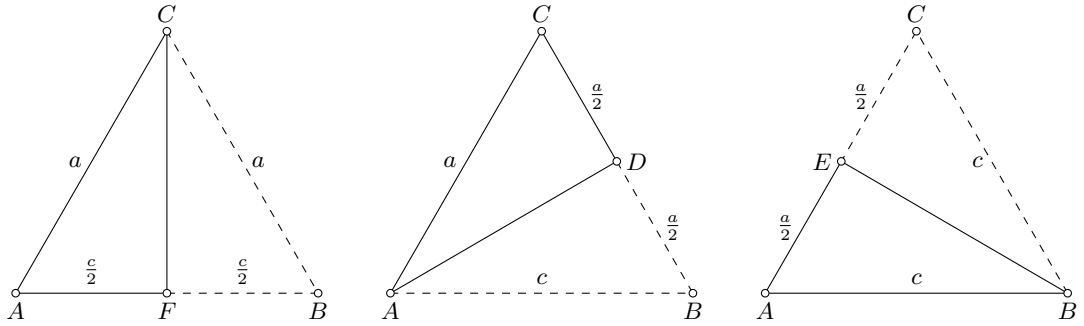
Aufgabe 280714:
Im Mathematikunterricht stellt der Lehrer die Aufgabe, die Seitenlängen eines gleichschenkligen Dreiecks ABC mit $AC = BC$ zu ermitteln, wenn vorausgesetzt wird, dass eine der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks den Dreiecksumfang derart teilt, dass der eine Teil 12 cm und der andere 9 cm beträgt. Dazu äußern sich einzelne Schüler folgendermaßen:

Achim: „Die Aufgabe hat keine Lösung, denn die Seitenhalbierende eines gleichschenkligen Dreiecks ist Symmetrieachse und kann somit den Umfang nur in zwei gleich große Teile zerlegen."
Birgit: „Es gibt bis auf Kongruenz genau ein Dreieck, das die Forderungen der Aufgabenstellung erfüllt."
Claudia: „Die Aufgabe hat bis auf Kongruenz genau zwei (zueinander nicht kongruente) Lösungen."
Dorit: „Da man in ein Dreieck drei Seitenhalbierende einzeichnen kann, hat die Aufgabe mindestens drei zueinander nicht kongruente Lösungen."

Untersuche, wer von den vier Schülern recht hat, und begründe deine Feststellungen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn AD, BE und CF die Seitenhalbierenden eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit $AC = BC = a$; $AB = c$ sind, so gilt:
Die Teile, in die CF den Umfang teilt, haben die Längen $a + \frac{c}{2}$ und $a + \frac{c}{2}$. (1) (Siehe Abbildung a)

Ferner haben sowohl die Teile, in die AD den Umfang teilt, als auch die Teile, in die BE den Umfang teilt, die Längen $c + \frac{a}{2}$ und $a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a$. (2) (Siehe Abbildungen b und c)
Die Längen (1) sind einander gleich, können also nicht 12 cm und 9 cm betragen; daher kann die Forderung der Aufgabe nicht mit der Seitenhalbierenden CF erfüllt werden!



Dafür, dass die Längen (2), wie gefordert, 12 cm und 9 cm betragen, gibt es nur die beiden folgenden Möglichkeiten:

I. Es ist $\frac{3}{2}a = 12$ cm und $c + \frac{a}{2} = 9$ cm. Dann folgt $a = 8$ cm und $c = 5$ cm.

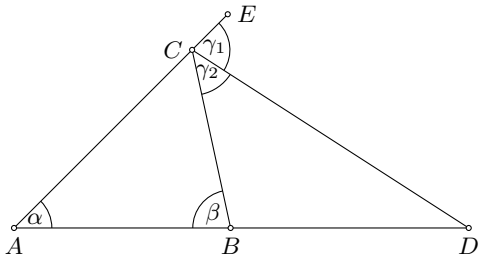
II. Es ist $\frac{3}{2}a = 9$ cm und $c + \frac{a}{2} = 12$ cm. Dann folgt $a = 6$ cm und $c = 9$ cm.

Ein Dreieck ABC mit den in I. genannten Längen $AC = BC = 8$ cm, $AB = 5$ cm gibt es, da die Summe je zweier Seiten größer ist als jeweils die dritte Seite. Ein Dreieck ABC mit den in II. genannten Längen $AC = BC = 6$ cm, $AB = 9$ cm gibt es (aus demselben Grund) ebenfalls.

Wegen der Verschiedenheit ihrer Seitenlängen sind die beiden genannten Dreiecke auch nicht zueinander kongruent. Damit ist bewiesen: Achim, Birgit und Dorit haben nicht recht; Claudia hat recht.

Aufgabe 300713:
Von drei Geraden wird vorausgesetzt, dass sie durch einen Punkt C gehen. Von einer vierten Geraden wird vorausgesetzt, dass sie nicht durch C geht und die drei anderen Geraden in Punkten A, B, D schneidet, wobei B zwischen A und D liegt. Auf der Geraden durch A und C liege ein Punkt E so, dass C zwischen A und E liegt. Weiter wird vorausgesetzt, dass die Winkel $\angle ECD$ und $\angle ABC$ einander gleich groß sind.
a) Zeichne vier Geraden und dazu Punkte A, B, C, D, E so, dass diese Voraussetzungen erfüllt sind!
b) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die Winkel $\angle BCD$ und $\angle BAC$ einander gleich groß sein müssen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

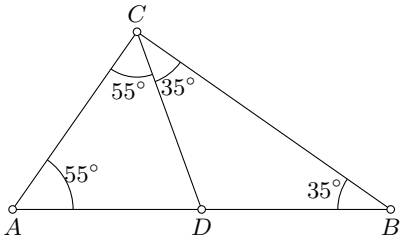


a) Die Abbildung zeigt vier Geraden und dazu Punkte A, B, C, D, E der geforderten Art.

b) Mit den Bezeichnungen $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ECD = \gamma_1$, $\angle BCD = \gamma_2$ gilt nach Voraussetzung $\gamma_1 = \beta$ (1).
Nach dem Außenwinkelsatz für das Dreieck ABC gilt ferner $\angle BCE = \alpha + \beta$, d. h. $\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha + \beta$ (2)
Aus den Gleichungen (2) und (1) folgt durch Subtraktion $\gamma_2 = \alpha$.

Aufgabe 320714:
In einem Dreieck ABC sei D der Mittelpunkt der Seite AB. Die Strecken AD und CD seien einander gleichlang, die Größe des Innenwinkels $\angle BCD$ im Teildreieck BCD betrage 35°.
Ermittle aus diesen Angaben die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Voraussetzung ist $AD = BD = CD$ und (1) $\angle BCD = 35°$. (2) Da das Dreieck BCD wegen (1) gleichschenklig ist, folgt nach dem Basiswinkelsatz und (2) auch $\angle DBC = 35°$, d. h. (3) $\angle ABC = 35°$. (4)



Aus (2) und (3) folgt nach dem Außenwinkelsatz $\angle ADC = 70°$. (5) Wegen (1) ist auch das Dreieck ACD gleichschenklig; nach dem Basiswinkelsatz gilt also $\angle CAD = \angle ACD$.
Hiermit und mit (5) folgt aus dem Innenwinkelsatz

$$\angle CAD = \angle ACD = \frac{1}{2}(180° - 70°) = 55° \tag{6}$$

d. h., es gilt einerseits $\angle CAB = 55°$, (7) andererseits folgt aus (6) und (2)

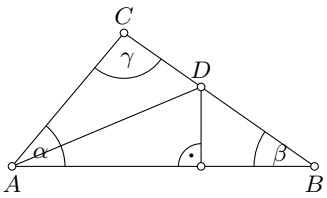
$$\angle ACB = \angle ACD + \angle BCD = 55° + 35° = 90° \tag{8}$$

Mit (4), (7), (8) sind die gesuchten Innenwinkelgrößen ermittelt.

Aufgabe 340712:
Von einem Dreieck ABC wird gefordert: Die Winkelhalbierende durch A und die Mittelsenkrechte von AB schneiden sich in einem Punkt D, der auf der Seite BC liegt.

a) Welche Größe muss der Winkel $\angle ACB$ in einem Dreieck haben, das diese Forderung erfüllt und in dem der Winkel $\angle ABC$ die Größe 35° hat? Zeichne ein solches Dreieck!
b) Zeichne ein Dreieck, das ebenfalls die obengenannte Forderung erfüllt und in dem der Winkel $\angle ABC$ die Größe 50° hat!
c) Gibt es ein Dreieck, das ebenfalls die obengenannte Forderung erfüllt und in dem der Winkel $\angle ABC$ die Größe 60° hat?

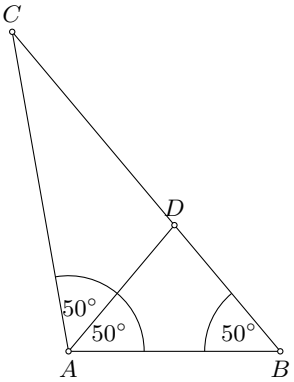
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Für die Innenwinkelgrößen $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$ gilt: Da D ein Punkt der Mittelsenkrechten von AB ist, gilt $DA = DB$. Nach dem Basiswinkelsatz für Dreieck ABD folgt $\angle BAD = \angle ABD = \beta = 35°$.

Da AD den Innenwinkel bei A halbiert, folgt $\alpha = 2 \cdot \angle BAD = 2\beta = 70°$. Damit ergibt sich aus dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 75°$.

b) Die rechte Abbildung zeigt ein gesuchtes Dreieck.



c) Wenn es ein Dreieck der genannten Art gäbe, so würde wie in a) folgen, dass $\alpha = 2\beta = 120°$ wäre.
Damit wäre $\alpha + \beta + \gamma > \alpha + \beta = 120° + 60° = 180°$ im Widerspruch zum Innenwinkelsatz.

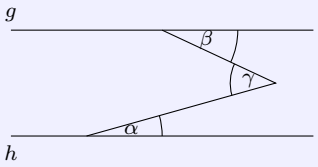
II Runde 2

Aufgabe 020724:
Wie viel verschiedene spitze Außenwinkel kann ein Dreieck höchstens haben?
Begründe deine Antwort!

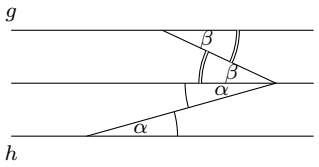
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein Außenwinkel ist so groß wie die Summe der nicht anliegenden Innenwinkel.
Nehmen wir an, ein Außenwinkel sei spitz. Dann müssen die beiden entsprechenden Innenwinkel zusammen kleiner als 90° sein. Das bedeutet, dass der dritte Innenwinkel größer als 90° ist (Innenwinkelsumme). Dieser geht als Summand in die beiden anderen Außenwinkel ein, so dass diese beiden größer als 90° sind. Demzufolge besitzt ein Dreieck höchstens einen spitzen Außenwinkel.

Aufgabe 030724:

Gegeben sei die in der Abbildung dargestellte Figur ($g \parallel h$). Die Winkel α und β seien bekannt.
Wie groß ist der Winkel γ? Beweise deine Behauptung!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Behauptung: $\gamma = \alpha + \beta$



Beweis: (siehe Abbildung) Man zeichne eine Parallele zu g und h durch den Scheitelpunkt von γ. Diese teilt γ in zwei Teilwinkel. Nach dem Wechselwinkelsatz ist der obere genauso groß wie β, der untere wie α. Zusammen gilt also: $\gamma = \alpha + \beta$.

Aufgabe 040723:
In einem Dreieck seien die Maßzahlen der Längen aller Seiten ganzzahlig, gerade und untereinander verschieden. Bekannt ist $a = 6$ cm und $b = 4$ cm.
Berechne den Umfang des Dreiecks!

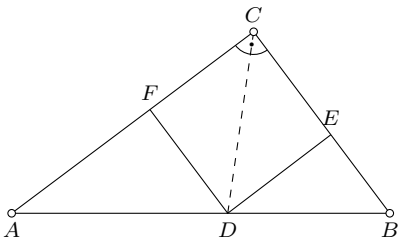
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach den genannten Bedingungen und wegen $c < a + b$ und $c > a - b$ (Dreiecksungleichungen) kann c nur 8 cm lang sein.
Damit wird für den Umfang $u = a + b + c = 4 + 6 + 8 = 18$ cm.

Aufgabe 050722:
Untersuche, ob in einem Dreieck zwei Winkelhalbierende aufeinander senkrecht stehen können!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gäbe ein Dreieck $\triangle ABC$, in dem sich die Winkelhalbierenden w_α und w_β im Punkte S unter einem rechten Winkel schneiden.
Dann ergäbe sich aus dem Dreieck $\triangle ASB$, dass die Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ zusammen 90° und damit α und β zusammen 180° betragen müssten, d. h., zwei Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$ würden parallel verlaufen, was unmöglich ist. Es gibt also kein Dreieck dieser Art.

Aufgabe 070721:
Einem gegebenen rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C ist ein Quadrat so einzuschreiben, dass der rechte Winkel des Dreiecks zum Quadratwinkel wird und der ihm gegenüberliegende Eckpunkt des Quadrates auf der Hypotenuse AB des Dreiecks liegt.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Bedingungen ein Quadrat eindeutig bestimmt ist!

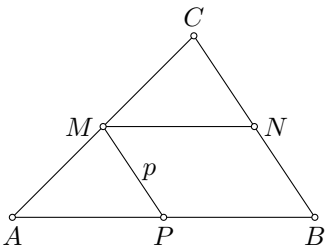
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Jede Diagonale eines Quadrates halbiert zwei gegenüberliegende Winkel des Quadrats. Deshalb konstruiert man die Winkelhalbierende des rechten Winkels $\angle ACB$. Sie schneidet die Seite AB im Punkt D. Dann ist die Strecke CD eine Diagonale des gesuchten Quadrats. Die Parallelen durch D zu AC und CB schneiden CB in E und AC in F. $DECF$ ist das gesuchte Quadrat.

Aufgabe 070723:
Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. M sei der Mittelpunkt der Seite AC. Die Parallele zu der Seite AB durch den Punkt M schneide die Seite BC im Punkt N.
Beweise, dass N der Mittelpunkt der Seite BC ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Parallele p zu BC durch M schneide AB in P. Dass diese Parallele p die Strecke AB tatsächlich schneidet, folgt so:
Durch p wird die Ebene, in der $\triangle ABC$ liegt, in zwei Halbebenen zerlegt, in deren einer die Gerade durch B und C verläuft und in deren anderer A liegt, weil sonst AC nicht von p geschnitten würde. Daher schneidet p auch die Strecke AB.



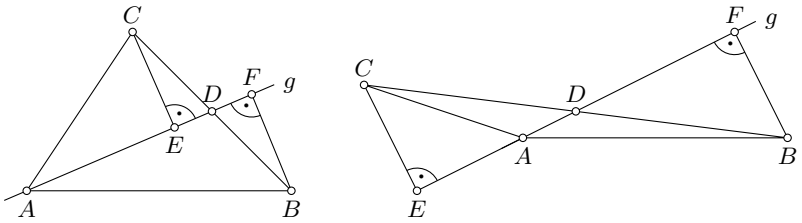
Dann gilt:
(1) $\angle ABC = \angle MNC = \angle APM$, $\angle CAB = \angle CMN$ (als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen)
(2) $\triangle APM = \triangle MNC$ (nach dem Kongruenzsatz sww). Daraus folgt: $MP = CN$.
(3) Viereck $BNMP$ ist ein Parallelogramm (nach Konstruktion). Aus (2) und (3) folgt die Behauptung.

Aufgabe 090722:
Wir wollen eine Ecke eines Dreiecks „ausgezeichnet“ nennen, wenn bei dieser Ecke Innen- und Außenwinkel einander gleich sind.
Ermittle die größtmögliche Anzahl „ausgezeichneter“ Ecken, die in einem Dreieck auftreten können!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da die Summe je eines Innenwinkels und eines zugehörigen Außenwinkels 180° beträgt, ist eine Ecke genau dann „ausgezeichnet“, wenn der Innenwinkel bei dieser Ecke 90° beträgt.
Nun gibt es Dreiecke mit genau einem rechten Innenwinkel, aber es gibt keine Dreiecke mit mehr als einem solchen. Daher ist die einzige und mithin auch größte mögliche Anzahl 1.

Aufgabe 090724:
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Es sei g die Gerade durch den Punkt A und den Mittelpunkt der Seite BC.
Beweise, dass dann die Punkte B und C von der Geraden g den gleichen Abstand haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Mittelpunkt der Seite BC sei D, das Lot von C bzw. von B auf g sei CE bzw. BF. Fällt E mit D zusammen, dann fällt auch F mit D zusammen, und es gilt $AD \perp CB$ und damit wegen $CE = CD$ und $BF = BD$ auch $CE = BF$. Fällt E nicht mit D zusammen, so fällt auch F nicht mit D zusammen.

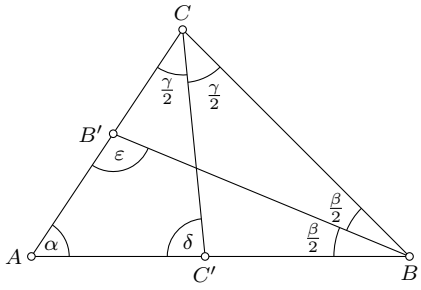


Dann stimmen die Dreiecke $\triangle CDE$ und $\triangle BDF$ in den Seitenlängen CD, BD, den Größen der anliegenden Winkel $\angle CDE$, $\angle BDF$ (Scheitelwinkel) und denen der gegenüberliegenden (rechten) Winkel $\angle CED$, $\angle BFD$ überein.
Also gilt $\triangle CDE = \triangle BFD$, und daraus folgt $CE = BF$.

Aufgabe 100722:
In einem Dreieck $\triangle ABC$ seien die Größe der Innenwinkel wie üblich mit α, β, γ bezeichnet, wobei $\alpha = 60°$ sei. BB' sei die Halbierende des Winkels $\angle ABC$ und CC' die des Winkels $\angle ACB$; jede von ihnen schneidet die ihrem Winkel gegenüberliegende Dreieckseite in einem inneren Punkt (B' bzw. C').

Ferner seien die Größen der Winkel $\angle AB'B$ bzw. $\angle AC'C$ mit ε bzw. δ bezeichnet.
Beweise, dass für jedes derartige Dreieck $\varepsilon + \delta = 180°$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Laut Voraussetzung gilt $\alpha = 60°$. Dann gilt unter Benutzung des Winkelsummensatzes ($\triangle ABC$)

$$\beta + \gamma = 180° - 60° = 120°$$

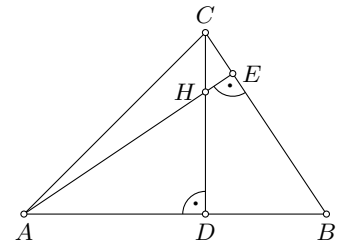
Nach dem Außenwinkelsatz gilt ferner:

$$\varepsilon = \gamma + \frac{\beta}{2} \qquad (\triangle B'BC) \qquad ; \qquad \delta = \beta + \frac{\gamma}{2} \qquad (\triangle C'BC)$$

Daraus folgt $\quad \varepsilon + \delta = \frac{3}{2}(\beta + \gamma) = \frac{3}{2}120° = 180°$

Aufgabe 110723:
Beweise folgenden Satz:
In jedem spitzwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ hat jeweils einer der Schnittwinkel je zweier Höhen die gleiche Größe wie der Innenwinkel an derjenigen Ecke, von der keine der beiden Höhen ausgeht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



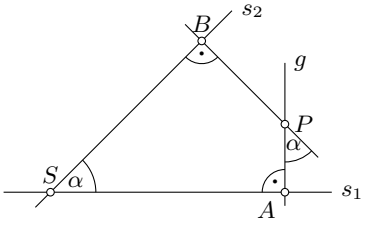
Weil $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck ist, liegt der Höhenschnittpunkt im Innern des Dreiecks. Er sei mit H bezeichnet.

Es seien ferner zwei Höhen des Dreiecks ausgewählt; die Bezeichnung lässt sich dann so wählen, dass dies die von C bzw. A ausgehenden Höhen sind. Ihre Fußpunkte auf AB bzw. BC seien D bzw. E genannt.

Dann gilt: $\angle ADC = \angle AEB$ als rechte Winkel und $\angle HAD = \angle EAD$ (H liegt auf AE). Folglich gilt wegen des Winkelsummensatzes (in $\triangle ADH$ bzw. $\triangle BEA$) $\angle AHD = \angle ABE$.

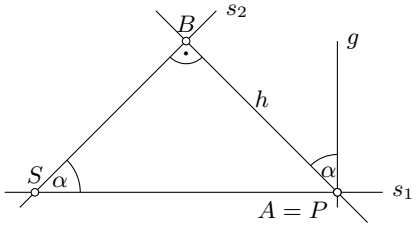
Aufgabe 130723:
Gegeben sei ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S und der Größe α ($0° < \alpha < 180°$). Beweise folgenden Satz:
Schneidet eine Gerade g den einen und eine andere Gerade h den anderen Schenkel des gegebenen Winkels jeweils unter einem Winkel von 90°, jedoch nicht in S, so hat einer der von g und h gebildeten Schnittwinkel die Größe α. (Fallunterscheidung)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei A der Schnittpunkt von g mit dem einen Schenkel s_1 des gegebenen Winkels, und es sei B der Schnittpunkt von h mit dem anderen Schenkel s_2 des gegebenen Winkels, derart, dass sich g, s_1 in A und ebenso h, s_2 in B jeweils unter 90° schneiden. Dann ist $g \nparallel h$. Folglich existiert ein Schnittpunkt P von g und h. Nun unterscheiden wir folgende Fälle:



Fall 1: P liegt innerhalb des gegebenen Winkels.

Dann ist $SAPB$ ein konvexes Viereck. Folglich gilt nach dem Satz über die Winkelsumme im Viereck sowie wegen $\angle SBP = \angle SAP = 90°$; $\angle BPA = 180° - \angle ASB = 180° - \alpha$, und demnach hat jeder seiner Nebenwinkel, also einer der Schnittwinkel von g und h, die Größe α.

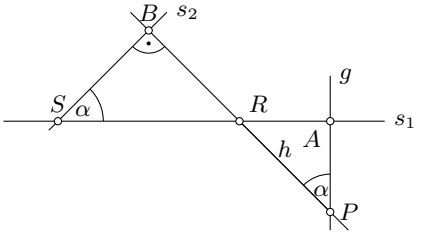


Fall 2: P fällt mit einem der Punkte A, B zusammen, etwa mit A.

Dann wird der rechte Winkel, den g mit s_1, bildet, durch h in zwei Winkel zerlegt, deren einer die Größe $\angle SAB = 180° - \alpha$ hat (nach dem Winkelsummensatz im Dreieck). Folglich hat der andere, der einer der Schnittwinkel von g mit h ist, die Größe α.

Fall 3: P liegt außerhalb des gegebenen Winkels.

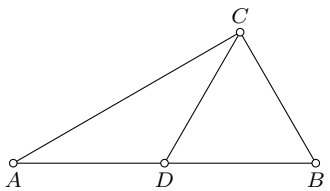
O. B. d. A. liege P nicht auf derselben Seite von s_1 wie B. Der Schnittpunkt von h mit s_1 sei R.



Dann gilt: $\angle SRB = 180° - \alpha$ (Winkelsummensatz im Dreieck) sowie $\angle SRB = \angle PRA$ (Scheitelwinkel) und damit $\angle RPA = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$. Da es keine weiteren Fälle gibt, ist der Satz damit bewiesen.

Aufgabe 140722:
Beweise folgende Aussage:
Wenn ein Dreieck ABC die Eigenschaft hat, dass für den Mittelpunkt D der Seite AB die Gleichung (1) $DB = BC = CD$ gilt, so ist das Dreieck rechtwinklig!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



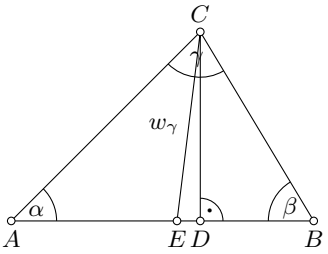
Wegen (1) ist das Dreieck DBC gleichseitig. Jeder seiner Innenwinkel ist mithin 60° groß.
Aus (1) folgt ferner, da D der Mittelpunkt von AB ist, $AD(= DB) = CD$. Also ist $\triangle ADC$ gleichschenklig.

Als Nebenwinkel des Winkels $\angle BDC$ hat der Winkel $\angle ADC$ eine Größe von 120°.

Folglich hat der Winkel $\angle ACD$ als einer der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ADC eine Größe von 30°.
Da die Größe des Winkels $\angle ACB$ gleich der Summe der Größen der Winkel $\angle BCD$ und $\angle ACD$ ist, beträgt diese $60° + 30° = 90°$; das Dreieck ABC ist also rechtwinklig.

Aufgabe 150723:
In einem spitzwinkligen Dreieck ABC sei CD die Höhe auf AB und CE die Winkelhalbierende von $\angle ACB$.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\angle DCE = \frac{1}{2}|\angle ABC - \angle CAB|$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



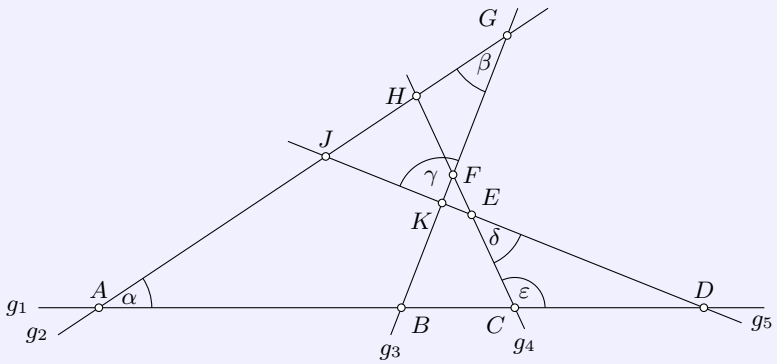
Die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC bei A, B, C seien α, β, γ. Da $\triangle ABC$ bei A spitzwinklig ist, bilden A, D, C ein bei D rechtwinkliges Dreieck mit α als Größe des Innenwinkels bei A. Daher gilt $\angle ACD = 90° - \alpha$.

Da D und E auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegen, gilt folglich

$$\angle DCE = |\angle ACD - \angle ACE| = |90° - \alpha - \frac{\gamma}{2}| = \frac{1}{2}|\beta - \alpha|$$

Bemerkung: Wie vorstehende Lösung zeigt, braucht man nur die Voraussetzung, dass $\angle CAB$ spitz ist. Da sich dies eventuell durch Vertauschung der Bezeichnung von A mit B (die an Voraussetzungen und Behauptung sonst nichts ändert) stets erreichen lässt, gilt der Satz sogar für beliebige Dreiecke.

Aufgabe 160724:



Es seien g_1, g_2, g_3, g_4 und g_5 fünf Geraden, die einander wie im Bild angegeben paarweise in den voneinander verschiedenen Punkten A, B, C, D, E, F, G, H, J und K schneiden. Gegeben seien die Größen der Winkel $\angle BAJ, \angle HGF, \angle FKJ$ und $\angle DEC$ in dieser Reihenfolge α, β, γ und δ genannt. Ermittle die Größe ε des Winkels $\angle DCE$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Winkel $\angle DBG$ hat als Außenwinkel des Dreiecks ABG die Größe $\alpha + \beta$. Als Scheitelwinkel von $\angle FKJ$ hat $\angle BKD$ die Größe γ. Mit Hilfe des Satzes über die Summe der Innenwinkel im Dreieck ergibt sich die Größe des Winkels $\angle CDE$ im Dreieck BDK zu $180° - \alpha - \beta - \gamma$. Mit Hilfe des gleichen Satzes, angewandt auf das Dreieck CDE erhält man für die Größe ε des Winkels $\angle DCE$:

$$\varepsilon = 180° - (180° - \alpha - \beta - \gamma + \delta) = 180° - 180° + \alpha + \beta + \gamma - \delta = \alpha + \beta + \gamma - \delta$$

Aufgabe 170723:
Von einem gleichschenkligen Dreieck sei nur bekannt, dass die Summe der Größen zweier Innenwinkel und eines Außenwinkels genau 300° beträgt. Dagegen sei nicht vorgeschrieben, welche der genannten Innenwinkel Basiswinkel sind und ob der genannte Außenwinkel zu einem dieser Innenwinkel gehört oder nicht.
Ermittle alle Möglichkeiten für die Größen der drei Innenwinkel dieses Dreiecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn ein gleichschenkliges Dreieck die geforderte Eigenschaft hat und darin x die Größe eines Basiswinkels, y die Größe des Winkels an der Spitze sowie x' und y' die Größen der zu x bzw. y gehörenden Außenwinkel (Nebenwinkel) sind, so gilt eine der Gleichungen

$$x + x + x' = 300^\circ \qquad (1) \qquad x + x + y' = 300^\circ \qquad (2)$$
$$x + y + x' = 300^\circ \qquad (3) \qquad x + y + y' = 300^\circ \qquad (4)$$

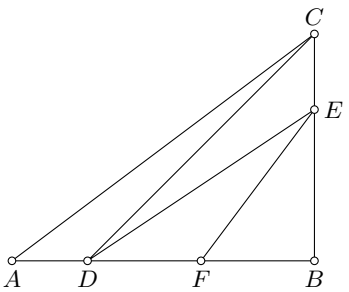
Wegen $x' + x = 180^\circ$ bzw. $y' + y = 180^\circ$ folgt sowohl aus (1) als auch aus (4) jeweils $x = 120^\circ > 90^\circ$ im Widerspruch dazu, dass x die Größe eines Basiswinkels ist.

Aus (2) erhält man, da nach dem Außenwinkelsatz $y' = 2x$ gilt, $4x = 300^\circ$ und damit $x = 75^\circ$, $y = 30^\circ$.
Wegen $x + x' = 180^\circ$ folgt aus (3) $y = 120^\circ$ und $x = 30^\circ$.
Als Möglichkeiten für die Größen der Innenwinkel dieses Dreiecks verbleiben mithin nur 75°; 75°; 30° oder 30°; 30°; 120°.

Diese Größen erfüllen die Forderungen der Aufgabe; denn wegen $75^\circ + 75^\circ + 30^\circ = 180^\circ$ bzw. $30^\circ + 30^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ sind sie Innenwinkelgrößen von Dreiecken, und im ersten Fall beträgt die Summe der Größen der beiden Innenwinkel und des Außenwinkels $75^\circ 75^\circ + (180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ + 75^\circ + 150^\circ = 300^\circ$, im zweiten Falle $30^\circ + 120^\circ + (180^\circ - 30^\circ) = 30^\circ + 120^\circ + 150^\circ = 300^\circ$.

Aufgabe 180724:
Über sechs Punkte A, B, C, D, E, F wird folgendes vorausgesetzt:
$\triangle ABC$ ist ein rechtwinkliges Dreieck mit B als Scheitel des rechten Winkels. D ist ein (innerer) Punkt der Strecke AB, E ist ein (innerer) Punkt der Strecke BC, F ist ein (innerer) Punkt der Strecke DB.
Die Dreiecke ADC, DEC, DFE und FBE sind sämtlich einander flächeninhaltsgleich. Ferner gilt $FB = 15$ cm und $BE = 20$ cm.
Ermittle unter diesen Voraussetzungen die Länge der Strecke AD!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für den Flächeninhalt A_1 des Dreiecks FBE gilt laut Voraussetzung und nach der Inhaltsformel für Dreiecke

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 \text{ cm}^2 = 150 \text{ cm}^2$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks DBE beträgt laut Voraussetzung $2 \cdot A_1$, so dass für BD folgt:

$$\frac{1}{2} BD \cdot BE = 300 \text{ cm}^2, \text{ d. h. } BD = 30 \text{ cm}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks DBC beträgt laut Voraussetzung

$$\frac{1}{2} BC \cdot BD = 450 \text{ cm}^2, \text{ d. h. } BC = 30 \text{ cm}.$$

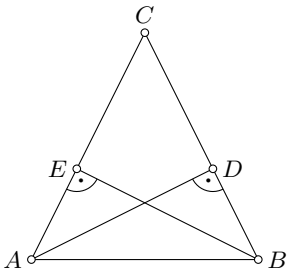
Analog folgt für AB:

$$\frac{1}{2} AB \cdot BC = 600 \text{ cm}^2, \text{ d. h. } AB = 40 \text{ cm}.$$

und somit $AD = AB - BD = 40$ cm - 30 cm = 10 cm. Die Länge der Strecke AD beträgt 10 cm.

Aufgabe 200724:
a) Beweise den folgenden Satz:
Wenn ein spitzwinkliges Dreieck ABC gleichschenklig mit $AC = BC$ ist, dann haben die von A und B ausgehenden Höhen gleiche Länge.
b) Beweise die folgende Umkehrung dieses Satzes: Wenn in einem spitzwinkligen Dreieck ABC die von A und B ausgehenden Höhen gleiche Länge haben, dann ist das Dreieck ABC gleichschenklig mit $AC = BC$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

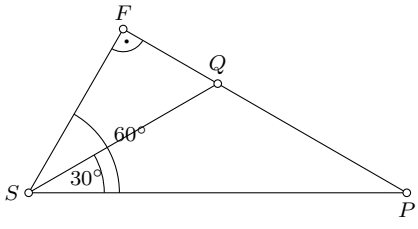


a) Wenn ein spitzwinkliges Dreieck ABC gleichschenklig mit $AC = BC$ ist, so folgt für die Höhen AD und BE, dass $\angle BAE = \angle ABD$ gilt, da diese Winkel mit den einander gleichgroßen Basiswinkeln $\angle BAC$ bzw. $\angle ABC$ übereinstimmen; denn wegen der Spitzwinkligkeit des Dreiecks ABC liegt der Höhenfußpunkt D zwischen B und C und der Höhenfußpunkt E zwischen A und C.
Ferner gilt $\angle AEB = \angle BDA = 90°$ und $AB = BA$. Daher sind die Dreiecke ABE und BAD nach dem Kongruenzsatz (sww) kongruent, woraus $BE = AD$ folgt.

b) Wenn für die Höhen AD und BE eines spitzwinkligen Dreiecks ABC $BE = AD$ gilt, so folgt:
Es gilt $\angle AEB = \angle BDA = 90°$ und $AB = BA$.
Ferner liegen die Winkel $\angle AEB$ bzw. $\angle BDA$ als rechte Winkel jeweils den größten Seiten in den Dreiecken ABE bzw. BAD gegenüber. Daher sind die Dreiecke ABE und ABD nach dem Kongruenzsatz (ssw) kongruent, woraus $\angle BAE = \angle ABD$ folgt.
Diese Winkel stimmen wiederum mit den Winkeln $\angle BAC$ bzw. $\angle ABC$ überein, also ist das Dreieck ABC wegen der gleichgroßen Innenwinkel bei A und B gleichschenklig mit $AB = BC$ ist.

Aufgabe 210722:
Gegeben sei ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S und der Größe 60°. Auf einem seiner Schenkel liege ein Punkt P. Von P sei das Lot auf den anderen Schenkel gefällt. Der Schnittpunkt dieses Lotes mit der Halbierenden des gegebenen Winkels heiße Q.
Beweise, dass Q auf der Mittelsenkrechten der Strecke SP liegt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Fußpunkt des Lotes von P auf den anderen Schenkel sei F. Nach Voraussetzung ist $\angle FSP = 60°$ und $\angle PFS = 90°$; wegen des Winkelsummensatzes, angewandt auf das Dreieck SPF, folgt $\angle SPF = 30°$. Außerdem ist nach Voraussetzung $\angle QSP = 30°$; also ist das Dreieck SPQ gleichschenklig mit $SQ = PQ$.
Folglich ist Q ein Punkt der Mittelsenkrechten von SP.

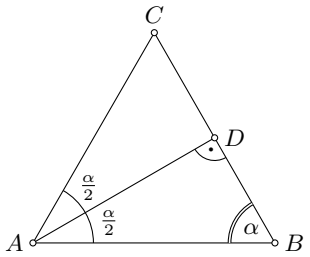
Aufgabe 220722:
In einer Diskussion über Dreiecke ABC wird für diese vorausgesetzt:

(1) Es gilt $AC = BC$
(2) Die Halbierende des Winkels $\angle BAC$ steht senkrecht auf BC.

In dieser Diskussion behauptet Ursel: „Dann muss das Dreieck ABC rechtwinklig sein."
Vera behauptet: „Nein, dann muss es gleichseitig sein."
Werner behauptet: „Nein, dann braucht das Dreieck ABC weder rechtwinklig noch gleichseitig zu sein."

Untersuche für jede dieser drei Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Ist $\angle BAC = \alpha$, so folgt aus (1), dass auch (3) $\angle ABC = \alpha$ gilt (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck).
Ist ferner D der Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$, so folgt aus (2) und (3), dass $\frac{\alpha}{2} + \alpha + 90° = 180°$ gilt (Winkelsumme im Dreieck ABD).

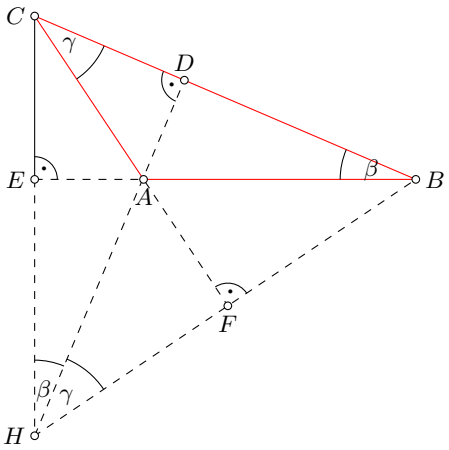
Daher ist $\frac{3}{2} \cdot \alpha = 90°$, also $\angle BAC = \alpha = 60°$, nach (3) daher auch $\angle ABC = 60°$.

Mithin ist das Dreieck ABC gleichseitig und somit nicht rechtwinklig. Folglich ist Veras Behauptung wahr, Ursels und Werners Behauptungen sind falsch.

Andere Beweismöglichkeit:
Aus (2) folgt $\angle BAD = \angle CAD$, $\angle ADB = \angle ADC = 90°$. Hiernach und wegen $AD = AD$ gilt $\triangle ABD = \triangle ACD$ (wsw), also $AB = AC$. Daher und nach (1) ist das Dreieck ABC gleichseitig.

Aufgabe 250723:
Es sei ABC ein Dreieck mit $\angle BAC = \alpha > 90°$. Ferner sei H der Schnittpunkt der Geraden, auf denen die Höhen dieses Dreiecks liegen.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\angle BHC = \angle ABC + \angle ACB$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien D, E bzw. F die Fußpunkte der zu A, B bzw. C gehörenden Höhen, ferner sei $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$.
Da das Dreieck ABC bei A stumpfwinklig ist, also bei B und C spitze Innenwinkel hat, liegt D auf der Seite BC, während E, F und H außerhalb des Dreiecks liegen (siehe Abbildung).

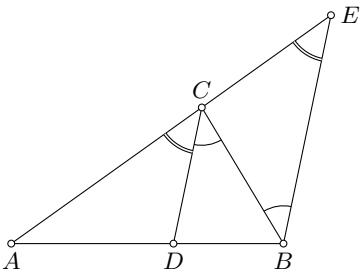


Hiernach gilt in den Dreiecken $\triangle BDH$ und $\triangle CFB$ $\angle HBD = \angle FBC$. Ferner ist, da D und F Höhenfußpunkte sind, $\angle CDH = \angle CFB = 90°$.
Folglich stimmen die Dreiecke CDH und CFB in zwei Innenwinkeln überein; nach dem Innenwinkelsatz gilt daher auch $\angle DHB = \angle FCB = \gamma$. (1)

Analog beweist man durch Betrachtung der Dreiecke CDH und BEC $\angle DHC = \angle EBC = \beta$ (2)
Schließlich gilt wegen der Lage von D zwischen B und C die Gleichung $\angle BHC = \angle DHC + \angle DHB = \beta + \gamma$.

Aufgabe 280722:
Es sei ABC ein Dreieck, darin sei CD die Winkelhalbierende von $\angle ACB$. Die Parallele durch B zu CD schneide die Verlängerung von AC über C hinaus in einem Punkt E.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets das Dreieck BEC gleichschenklig ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

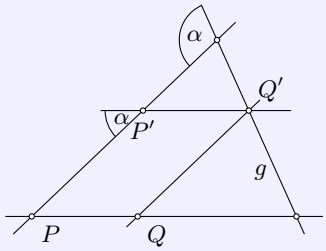


$\angle CBE = \angle BCD$ ($CD \parallel BE$ und Wechselwinkelsatz). (1)
$\angle BCD = \angle ACD$ (Halbierung $\angle ACB$ durch CD) (2)
$\angle ACD = \angle CEB$ ($CD \parallel BE$ und Stufenwinkelsatz). (3)
$\angle CBE = \angle CEB$ (aus (1), (2) und (3)). (4)

Nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes ist somit das Dreieck BEC (mit $BC = EC$) gleichseitig.

Aufgabe 290723:

Das Bild zeigt zwei Punkte P, Q und ihre Bildpunkte P', Q' bei einer Verschiebung. Durch Q' ist eine Gerade g gelegt. Ferner seien α und β die Größen der im Bild gekennzeichneten Winkel.
Ermittle eine Größenangabe für γ, ausgedrückt durch α und β!

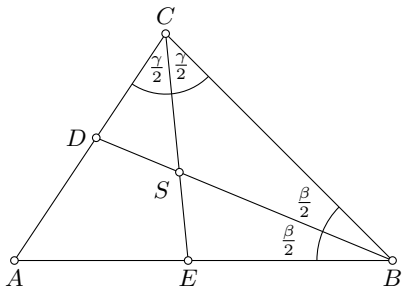


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist S der Scheitel des gekennzeichneten Winkels der Größe β, so $\angle SP'Q'$ ist der Scheitelwinkel des gekennzeichneten Winkels der Größe α. Daher ist auch $\angle SP'Q' = \alpha$.
Nach den Eigenschaften jeder Verschiebung ist die Gerade durch P', Q' parallel zur Geraden durch P, Q. Daher gilt nach dem Stufenwinkelsatz $\angle P'Q'S = \gamma$. Aus dem Außenwinkelsatz, angewandt auf Dreieck $P'Q'S$, folgt daher $\alpha + \gamma = \beta$ und somit $\gamma = \beta - \alpha$.

Aufgabe 300724:
In einem Dreieck ABC seien BD bzw. CE die Winkelhalbierenden der Innenwinkel $\angle ABC$ bzw. $\angle ACB$, und S sei der Schnittpunkt von BD mit CE.

a) Beweise: Wird ferner vorausgesetzt, dass der Innenwinkel $\angle BAC$ die Größe $\alpha = 60°$ hat, so folgt, dass dann auch stets der Winkel $\angle BSE$ die Größe 60° hat!
b) Ermittle eine Formel, mit der sich zu beliebig vorgegebener Größe α des Innenwinkels $\angle BAC$ die Größe des Winkels $\angle BSE$ ergibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Für $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$ gilt nach Voraussetzung $\angle CBS = \angle CBD = \frac{\beta}{2}$, $\angle BCS = \angle BCE = \frac{\gamma}{2}$. Nach den Außenwinkelsatz für $\triangle BCS$ folgt hieraus

$$\angle BSE = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$$

Nach dem Innenwinkelsatz für $\triangle ABC$ ist $\beta + \gamma = 180° - \alpha = 120°$; damit ergibt sich $\angle BSE = 60°$.

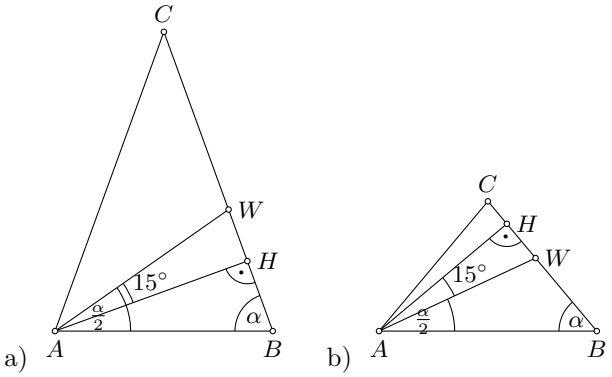
b) Diese Herleitung bleibt bis einschließlich zur Formel $\beta + \gamma = 180° - \alpha$ für beliebig vorgegebenes α gültig; damit erhält man als gesuchte Formel

$$\angle BSE = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

Aufgabe 330724:
Für jedes Dreieck ABC bezeichne H den Fußpunkt der auf BC senkrechten Höhe und W den Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden durch A.

a) Welche Größe muss der Basiswinkel $\angle BAC$ eines gleichschenkligen Dreiecks ABC mit $AC = BC$ haben, bei dem die Punkte H und W miteinander zusammenfallen?
b) Welche Größe muss der Winkel $\angle WAH$ in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $AC = BC$ haben, in dem ein Basiswinkel $\angle BAC$ die Größe 70° hat?
c) Ermittle alle diejenigen Werte, die als Größe des Basiswinkels $\angle BAC$ in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $AC = BC$ möglich sind, bei dem der Winkel $\angle WAH$ die Größe 15° hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Aus der Voraussetzung $H = W$ folgt, dass das Dreieck ABC auch mit $AB = AC$ gleichschenklig, wegen der Voraussetzung $AC = BC$ also sogar gleichseitig ist. Daher gilt $\angle BAC = 60°$.



b) Siehe Abbildung a): Da AW den Winkel $\angle BAC$ halbiert, folgt $\angle BAW = 35°$. (1)

Nach dem Basiswinkelsatz ist auch $\angle ABC = 70°$; nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABH ist ferner $\angle BAH = 90° - \angle ABH = 20°$. (2)
Der Winkel $\angle ABC$ ist kleiner als 90°, also liegt H auf derselben Seite von AB wie W. Daher folgt aus (1) und (2) $\angle WAH = 35° - 20° = 15°$.

c) Wenn ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC = BC$ und $\angle WAH = 15°$ ist, so folgt: Da der Basiswinkel $\angle ABC$ kleiner als 90° ist, liegt H auf derselben Seite von AB wie W, also entweder auf der Strecke BW oder auf ihrer Verlängerung über W hinaus (siehe Abbildungen a bzw. b).
In diesen beiden Fällen folgt mit dem oberen bzw. unteren Vorzeichen $\angle BAH = \angle BAW \mp \angle WAH$, mit $\alpha = \angle BAC$ also

$$\angle BAH = \frac{\alpha}{2} \mp 15° \tag{3}$$

Somit besagt der Innenwinkelsatz für Dreieck ABH

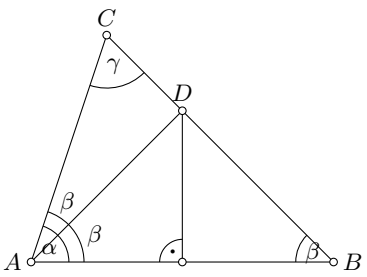
$$\left(\frac{\alpha}{2} \mp 15°\right) + \alpha = 90° \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 60° \pm 10° \tag{4,5}$$

In der Tat gibt es sowohl für $\alpha = 70°$ als auch für $\alpha = 50°$ gleichschenklige Dreiecke mit α als Basiswinkelgröße (da in beiden Fällen $\alpha < 90°$ ist); für diese Dreiecke gilt (4), also (3) und damit $\angle WAH = 15°$. Damit ist gezeigt, dass genau die beiden Werte 70° und 50° als Basiswinkelgröße in einem Dreieck der in c) genannten Art möglich sind.

Aufgabe 340723:
In den Dreiecken ABC seien wie üblich die Größen der Innenwinkel bei A, B und C mit α, β bzw. γ bezeichnet. Ferner werde vorausgesetzt, dass die Mittelsenkrechte der Seite AB und die durch A gehende Winkelhalbierende sich in einem Punkt D schneiden, der auf der Seite BC liegt.

a) Leite eine Formel her, nach der in jedem Dreieck, das diese Voraussetzung erfüllt, γ von β abhängt! Für welche Werte von β gibt es ein Dreieck, das die genannten Voraussetzung erfüllt; für welche Werte von β gibt es kein solches Dreieck?
b) Ermittle alle diejenigen Werte von β, für die ein Dreieck, das die genannte Voraussetzung erfüllt, rechtwinklig ist!
c) Ermittle alle diejenigen Werte von β, für die ein Dreieck, das die genannte Voraussetzung erfüllt, gleichschenklig ist!

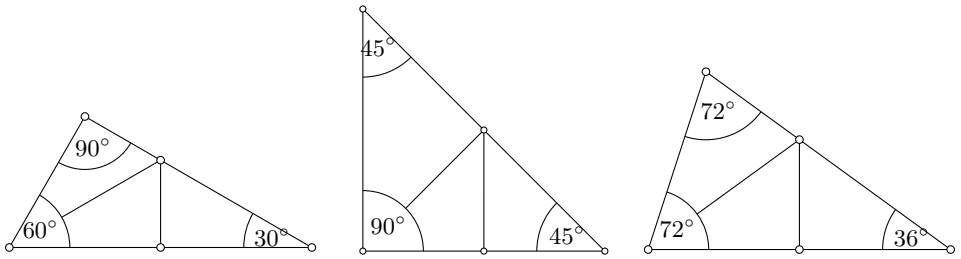
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) (siehe Abbildung) Da D auf der Mittelsenkrechten von AB liegt, gilt $AD = BD$. Nach dem Basiswinkelsatz für Dreieck ABD folgt daraus $\angle BAD = \angle ABD = \beta$.
Da AD Winkelhalbierende ist, folgt weiter $a = 2\beta$ (1) und damit nach dem Innenwinkelsatz die gesuchte Formel $\gamma = 180° - 3\beta$. (2)

Weiterhin folgt
I. Für alle $\beta \geq 60°$ gibt es kein Dreieck der geforderten Art; denn gäbe es ein solches, so müsste, wie eben gezeigt wurde, (2) gelten. Das ist nicht möglich, da sich ein Wert $\gamma \leq 0$ ergäbe.

II. Für alle positiven $\beta < 60°$ gibt es dagegen ein Dreieck der geforderten Art.
Denn wählt man zu einem solchen β die Werte α und γ aus (1) und (2), so hat man drei positive Winkelgrößen α, β, γ mit $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Es gibt daher ein Dreieck ABC mit diesen Innenwinkelgrößen. Ist darin AD Winkelhalbierende, so ist das Dreieck ABD nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes gleichschenklig, also liegt D auch auf der Mittelsenkrechten von AB.



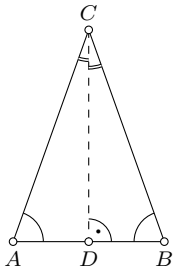
b) Mit $\beta = 90°$ kann ein Dreieck, das die in der Aufgabe genannte Voraussetzung erfüllt, nicht rechtwinklig sein; denn für diesen Wert β gibt es nach a) I. kein solches Dreieck.
Dagegen gibt es ein solches Dreieck, das mit $\alpha = 90°$ rechtwinklig ist; denn gemäß (1) kann man $\beta = 45°$ wählen und dann wie in a) II. vorgehen. Ebenso ist $\gamma = 90°$ gemäß (2) mit $\beta = 30°$ erreichbar.
Die in (b) gesuchten Werte sind also genau $\beta = 30°$ und $\beta = 45°$.

c) Mit $\alpha = \beta$ kann ein Dreieck, das die in der Aufgabe genannte Voraussetzung erfüllt, nicht gleichschenklig sein; denn nach (1) ergäbe sich $2\beta = \beta$, also $\beta = 0$ und damit kein Dreieck.
Dagegen ist $\beta = \gamma$ gemäß (2) mit $\beta = 180° - 3\beta$, also $\beta = 45°$ erreichbar, ebenso $\alpha = \gamma$ gemäß (1) und (2) mit $2\beta = 180° - 3\beta$, also $\beta = 36°$. Die in (c) gesuchten Werte sind folglich genau $\beta = 45°$ und $\beta = 36°$.

III Runde 3

Aufgabe 010734:
Es ist zu beweisen, dass die von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf dessen Grundseite gefällte Höhe gleichzeitig Winkel- und Seitenhalbierende ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



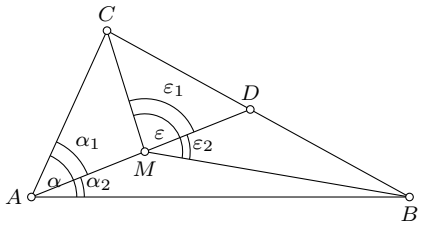
Beweis:
Die Höhe CD bildet mit der Grundseite AB einen rechten Winkel, die Schenkel $AC = BC$ und die Basiswinkel $\angle BAC = \angle ABC$ sind nach Voraussetzung gleich. Daher sind die beiden Teildreiecke ADC und BDC, die durch die Höhe entstehen, nach dem Kongruenzsatz SWW deckungsgleich.
Daraus folgt, dass die beiden Winkel $\angle ACD$ und $\angle BCD$ bzw. Strecken AD und BD gleich groß sind; was genau bei einer Halbierung der Fall ist. CD ist damit zugleich Winkel- und Seitenhalbierende.

Aufgabe 020734:
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Inhalt F_1. Verbinde den Punkt A mit dem Mittelpunkt E der Seite a und verlängere die Strecke über E hinaus um sich selbst. Der Endpunkt sei D; der Inhalt des Dreiecks ADC sei F_2.
Berechne das Verhältnis $F_1 : F_2$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn man die Konstruktion durchführt, stellt man fest, dass die Dreiecke ACE und BDE kongruent sind.
Es gilt nämlich $BE = CE$ (E ist der Mittelpunkt von a), $AE = ED$ (Verlängerung von AE um sich selbst) und $\angle AEC = \angle DEB$ (Scheitelwinkel). Damit sind die beiden Dreiecke flächengleich; durch das Hinzunehmen der Fläche des Dreiecks ABE folgt $F_1 : F_2 = 1$.

Aufgabe 050733:
Der Punkt M liege im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$.
Beweise, dass für jeden solchen Punkt M $\varepsilon > \alpha$ gilt, wenn ε ($< 180°$) das Maß des Winkels $\angle BMC$ und α das Maß des Winkels $\angle BAC$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Gerade durch A und M schneide die Seite CB im Punkt D. D liegt zwischen C und B. Das Maß des Winkels $\angle CMD$ sei ε_1, das des Winkels $\angle CAM$ sei α_1, das des Winkels $\angle DMB$ sei ε_2 und das des Winkels $\angle MAB$ sei α_2. Dann gilt

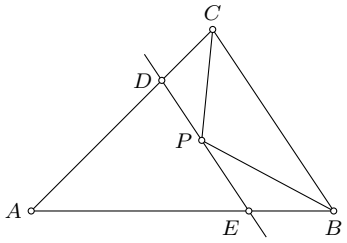
(1) $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha; \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$
(2) $\varepsilon_1 > \alpha_1$ (nach dem Außenwinkelsatz)
(3) $\varepsilon_2 > \alpha_2$ (nach dem Außenwinkelsatz)

und folglich wegen (2) und (3)

(4) $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > \alpha_1 + \alpha_2$ und wegen (1) und (4)
(5) $\varepsilon > \alpha$

Aufgabe 060733:
Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. Gesucht ist eine Parallele p zu BC, die folgende Eigenschaften hat:
(1) Sie schneidet die Strecken AB und AC.
(2) Sind D und E die Schnittpunkte von p mit AB bzw. mit AC, so ist $BD + CE = DE$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Angenommen, p sei eine gesuchte Parallele.
Dann gibt es auf der Strecke DE einen Punkt P, so dass $BD = DP$ und $CE = EP$ gilt. Daraus folgt

$\angle ABP = \angle DPB$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck) und
$\angle DPB = \angle CBP$ (Wechsel-Kinkel an geschnittenen Parallelen),
also ist BP die Winkelhalbierende von $\angle ABC$. Entsprechend folgt, dass CP die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ ist. Daher kann eine Gerade p höchstens dann eine der gesuchten Parallelen sei wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten wird:

II. Man konstruiere die Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ und $\angle ACB$ und ziehe durch ihren Schnittpunkt P die Parallele p zu BC.

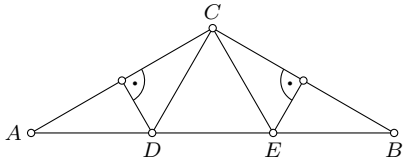
III. Ist eine Gerade p wie in II konstruiert, so ist sie eine gesuchte Parallele.
Beweis: Nach Konstruktion ist
$\angle DBP = \angle CBP$ (da $\angle ABC$ durch BP halbiert wird) und
$\angle CBP = \angle DPB$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen),
also ist $\triangle BPD$ gleichschenklig, und zwar ist $BD = DP$. Ebenso folgt $CE = EP$ und daher $BD + CE = DE$.

Außerdem liegt P im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$, also schneidet p die Strecken AB und AC.

IV. Die Konstruktion II ist stets eindeutig durchführbar; denn die Winkelhalbierenden, ihr Schnittpunkt P und die Parallele durch P zu BC existieren stets eindeutig. Nach III gibt es daher stets eine gesuchte Parallele p und nach I auch nur eine solche.

Aufgabe 060736:
In einem gleichschenkligen Dreieck $\triangle ABC$ habe der Winkel $\angle ACB$ ein Gradmaß von 120°.
Beweise, dass die Mittelsenkrechten der Seiten AC und BC die Seite AB in drei gleiche Teile teilen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Basis des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle ABC$ muss AB sein, da das Dreieck sonst zwei Winkel von 120° hätte. Also ist $\angle BAC = \angle ABC$ (Gradmaß 30°).
Die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten der Seiten AC und BC mit der Seite AB seien D bzw. E. Dann ist

(1) $AD = CD$ (da D auf der Mittelsenkrechten von AC liegt), also $\angle ACD = \angle BAC$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ACD) (Gradmaß 30°). Daher hat der Winkel $\angle CDE$ ein Gradmaß von 60° (Außenwinkel im Dreieck $\triangle ACD$). Ebenso zeigt man

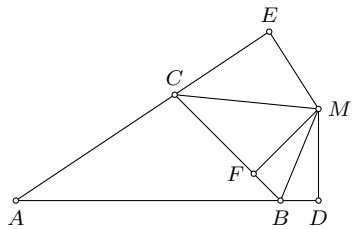
(2) $BE = CE$ und $\angle CED = 60°$. Also ist $\triangle CDE$ gleichseitig, und es folgt

(3) $CD = DE = CE$.

Aus (1), (2), (3) folgt die Behauptung $AD = DE = BE$.

Aufgabe 070732:
Beweise folgende Behauptung!
Halbiert man die beiden der Seite BC anliegenden Außenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$ und fällt vom Schnittpunkt M der Halbierenden auf die Seiten des Dreiecks oder ihre Verlängerungen die Lote MD, ME und MF, so gilt $MD = ME = MF$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Dreiecke $\triangle CFM$ und $\triangle CME$ sind kongruent; denn sie stimmen in der Seite CM und in 2 Winkeln laut Konstruktion überein.
Daher gilt $ME = MF$.
Ebenso sind die Dreiecke $\triangle MFB$ und $\triangle MDB$ kongruent, woraus $MF = MD$ folgt. Mithin gilt $MD = ME = MF$.

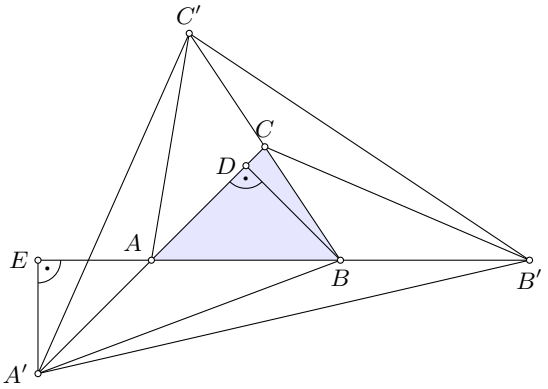
Aufgabe 070736:
Auf den Verlängerungen der Seiten AB, BC und CA des Dreiecks $\triangle ABC$ werden über die Punkte B bzw. C bzw. A hinaus Strecken mit den Längen $BB' = AB$, $CC' = BC$ und $AA' = CA$, abgetragen. Es ist zu beweisen, dass der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ siebenmal so groß ist wie der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zum Beweis verwendet man den Satz, dass Dreiecke flächengleich sind, wenn sie in einer Seite und der zugehörigen Höhe übereinstimmen.

Behauptung: Es ist $I_{\triangle A'B'C'} = 7 \cdot I_{ABC}$, wenn $I_{\triangle A'B'C'}$ den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ und I_{ABC} den des Dreiecks $\triangle ABC$ bezeichnet.

Beweis: Es seien D der Fußpunkt des Lotes von B auf $A'C$ (bzw. die Verlängerung dieser Strecke) und E der Fußpunkt des Lotes von A' auf AB' (bzw. die Verlängerung). Dann gilt:
$\triangle ABC$ ist flächengleich $\triangle AA'B$; denn es gilt $AC = AA'$ und $BD = BD$ (als gemeinsame Höhe).
$\triangle BAA'$ ist flächengleich $\triangle B'BA'$; denn BA' ist Seitenhalbierende im Dreieck $\triangle B'AA'$, und es gilt:

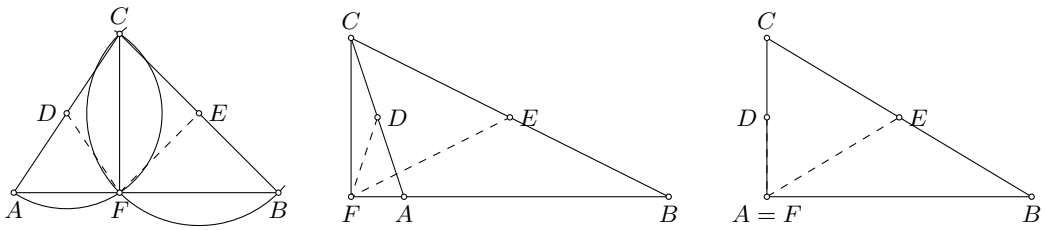
$BA = B'B$ sowie $A'E = A'E$. Daraus folgt, dass $\triangle B'BA'$ auch flächengleich $\triangle ABC$ ist. Entsprechend beweist man, dass die Dreiecke $\triangle A'AC'$, $\triangle ACC'$, $\triangle C'CB'$ und $\triangle CBB'$ alle flächengleich dem Dreieck $\triangle ABC$ sind.



Das Dreieck $\triangle ABC$ liegt ganz im Innern des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ (die Winkel $\angle A'CC'$, $\angle B'BC'$ und $\angle B'AA'$ sind als Außenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$ sämtlich kleiner 180°).
Daher erhält man den Flächeninhalt $I_{\triangle A'B'C'}$, indem man den Flächeninhalt der sieben zu $\triangle ABC$ flächengleichen Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle AA'B$, $\triangle B'BA'$, $\triangle A'AC'$, $\triangle ACC'$, $\triangle C'CB'$ und $\triangle CBB'$ addiert.
Mithin gilt: $I_{\triangle A'B'C'} = 7 \cdot I_{ABC}$.

Aufgabe 080733:
Beweise folgenden Satz!
Fällt man von einem Eckpunkt eines Dreiecks $\triangle ABC$ das Lot auf die gegenüberliegende Seite oder ihre Verlängerung und verbindet den Fußpunkt des Lotes mit den Seitenmitten der anderen beiden Seiten, so ist die Summe der Längen dieser Verbindungsstrecken gleich der halben Summe der Längen der beiden Seiten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei o. B. d. A. der Punkt C der Eckpunkt, von dem aus das Lot auf die Gerade durch A und B gefällt wird. Der Fußpunkt des Lotes sei F, der Mittelpunkt von AC sei D, der von BC sei E.

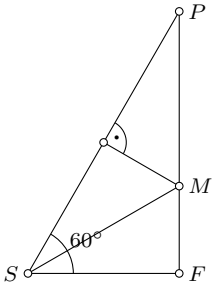
Dann sind die Dreiecke $\triangle AFC$ und $\triangle CFB$ rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei F (eventuell ist eines dieser Dreiecke ausgeartet, falls nämlich bei A bzw. B ein rechter Winkel liegt. Die Betrachtungen gelten aber auch in diesem Falle, da dann $A = F$ bzw. $B = F$ ist) und die Punkte A, F, C bzw. C, F, B liegen nach Umkehrung des Lehrsatzes des Thales auf dem Kreis mit dem Durchmesser AC bzw. BC.

Da D Mittelpunkt von AC bzw. E Mittelpunkt von BC ist, ist $AD = DC = DF$ bzw. $CE = BE = EF$ als Radien in den Thaleskreisen. Mithin gilt

$$DF + EF = AD + EB = \frac{1}{2}(AC + BC)$$

Aufgabe 100732:
Gegeben sei ein Winkel der Größe 60° mit dem Scheitelpunkt S. Ferner sei $P \neq S$ ein beliebiger, auf einem der Schenkel des Winkels gelegener Punkt. Der Fußpunkt des Lotes von P auf den anderen Schenkel des Winkels sei F.
Beweise, dass sich die Halbierende des Winkels $\angle PSF$ und die Strecke PF in einem Punkte schneiden, der auf der Mittelsenkrechten von PS liegt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da F eindeutig bestimmt ist, ist F auf Grund der Voraussetzungen von P und S verschieden. Daher sind P, S, F die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem rechten Winkel bei F.

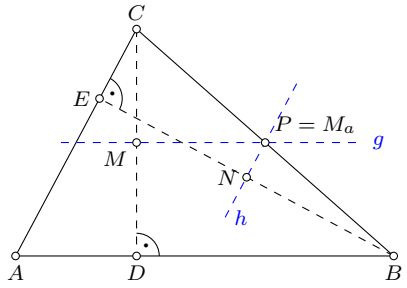
Dann schneidet bekanntlich die Halbierende des Winkels $\angle PSF$ die Strecke PF in einem Punkt, der mit M bezeichnet werde. Dabei hat der Winkel $\angle MSP$ eine Größe von 30°.

Außerdem hat der Winkel $\angle SPF$ als Komplementwinkel des Winkels $\angle PSF$ eine Größe von 30° (Winkelsumme im Dreieck $\triangle PSF$).

Daher ist $\triangle PSM$ gleichschenklig mit $PM = MS$. Infolgedessen liegt M auf der Mittelsenkrechten von PS.

Aufgabe 120736:
Beweise den folgenden Satz:
Für jedes Dreieck $\triangle ABC$ gilt: Zieht man bei zwei beliebigen Höhen dieses Dreiecks jeweils durch deren Mittelpunkt die Parallele zu der zur Höhe gehörenden Dreieckseite, so schneiden sich diese Parallelen in einem Punkt, der auf der dritten Dreieckseite liegt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die zwei im Satz genannten Höhen seien o. B. d. A. die zu AB und AC gehörenden. Ihre Fußpunkte seien D bzw. E, ihre Mittelpunkte M bzw. N.

Die genannten Parallelen, g parallel zu AB durch M bzw. h parallel zu AC durch N, sind nicht parallel zueinander (da AB nicht zu AC parallel ist), sie schneiden sich daher in genau einem Punkte.
Nun schneidet g den Strahl aus B durch C (da M und C auf derselben Seite der Geraden durch A und B liegen) in einem Punkt P.

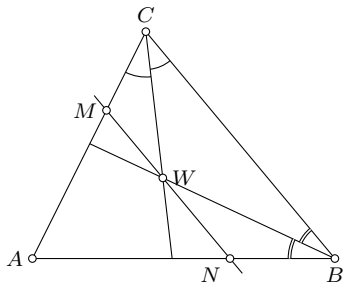
Ist F der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$, so haben die Dreiecke $\triangle ABM$ und $\triangle ABP$ jeweils den Flächeninhalt $\frac{1}{2}F$; denn diese drei Dreiecke stimmen in der Seite AB überein, und die zugehörige Höhe hat im ersten Dreieck die Länge CD, in den beiden anderen Dreiecken jeweils die Länge $MD = \frac{1}{2}CD$.

Da nun die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABP$ in der zur Seite BC bzw. zur Seite BP gehörenden Höhe übereinstimmen, folgt unter Berücksichtigung der Aussagen über ihren Flächeninhalt $BP = \frac{1}{2}BC$. Also schneidet g die Strecke BC in ihrem Mittelpunkt M_a.

Analog beweist man, dass auch h die Strecke BC in M_a schneidet. Daher ist M_a ein gemeinsamer Punkt von g und h, folglich ihr Schnittpunkt, und da M_a auf BC liegt, ist hiermit die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 130735:
Gegeben sei ein Dreieck ABC; der Schnittpunkt seiner Winkelhalbierenden sei W. Die Parallele durch W zu BC schneide AC in M und AB in N.
Beweise: $CM + BN = MN$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

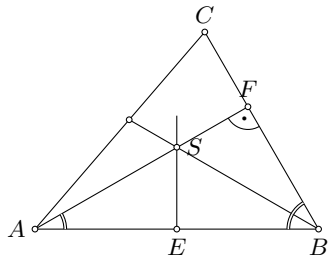


Aus $\angle CBW = \angle WBN$ (laut Voraussetzung) und $\angle CBW = \angle NBW$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) folgt $\angle WBN = \angle NWB$. Deshalb ist das Dreieck BNW gleichschenklig mit der Spitze N, und es gilt $BN = NW$. (1) Analog beweist man $CM = MW$. (2)

Aus (1) und (2) folgt $CM + BN = MW + NW$, also $CM + BN = MN$.

Aufgabe 140736:
Claudia erzählt ihrer Freundin Sabine, sie habe ein Dreieck ABC gezeichnet, in dem die Höhe auf BC genau durch den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB und der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ geht.
Sabine behauptet, allein aus diesen Angaben könne man, ohne die Zeichnung zu sehen, eindeutig die Größe des Winkels $\angle ABC$ ermitteln.
Untersuche, ob Sabines Behauptung richtig ist! Wenn dies der Fall ist, ermittle die Größe von $\angle ABC$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

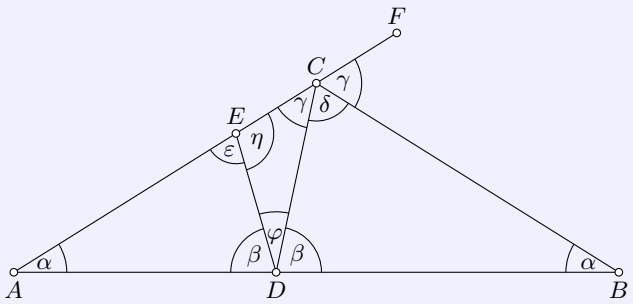


Sei S der genannte Schnittpunkt, E der Mittelpunkt der Seite AB und F Fußpunkt der Höhe auf BC.
Weil die Gerade durch B und S den Winkel $\angle ABC$ halbiert, gilt dann $\angle FBS = \angle SBA$. (1)
Da S außerdem auf der Mittelsenkrechten von AB liegt, sind A, B, S die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks mit $AS = BS$, und deshalb ist $\angle SAB = \angle SBA$. (2)
Aus (1) und (2) folgt: $\angle FBS = \angle SAB = \angle SBA$. (3)

Weiter sind A, B, F die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks. Die Summe der Größe der in (3) genannten untereinander gleich großen Winkel beträgt somit nach dem Winkelsummensatz 90°. Jeder von ihnen hat daher die Größe 30°. Sabines Behauptung ist also richtig. Die Größe des Winkels $\angle ABC$ beträgt 60°.

Aufgabe 150732:

In der abgebildeten Figur gelte:
$\angle ABC = \angle BAC = \alpha$,
$\angle ADE = \angle BDC = \beta$,
$\angle ACD = \angle BCF = \gamma$,
$\angle BCD = \delta$, $\angle AED = \varepsilon$,
$\angle CED = \eta$, $\angle EDC = \psi$.
Es sei $\delta = 70°$.
Ermittle $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \eta$, und ψ!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die drei Winkel mit dem Scheitelpunkt C bilden zusammen einen gestreckten Winkel. Folglich gilt

$$2\gamma + 70° = 180° \Rightarrow \gamma = 55°$$

Der Winkel $\angle BCF$ ist Außenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks ABC. Also gilt nach dem Außenwinkelsatz

$$\gamma = 2\alpha \quad ; \quad \alpha = \frac{\gamma}{2} = 27{,}5°$$

Nun gilt nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck, angewandt auf $\triangle BDC$:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \beta = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 27{,}5° - 70° = 82{,}5°$$

Die drei Winkel mit dem Scheitelpunkt D bilden ebenfalls einen gestreckten Winkel. Also gilt

$$2\beta + \psi = 180° \Rightarrow \psi = 180° - 2\beta = 180° - 2 \cdot 82{,}5° = 15°$$

Nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck, angewandt auf $\triangle ECD$ gilt:

$$\eta + \gamma + \psi = 180° \Rightarrow \eta = 180° - \gamma - \psi = 180° - 55° - 15° = 110°$$

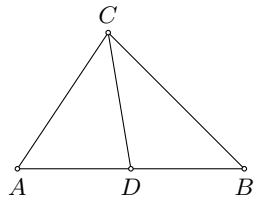
und damit nach dem Satz über Nebenwinkel

$$\varepsilon = 180° - 110° = 70°$$

Damit sind die Winkelgrößen $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \eta$ und ψ ermittelt.

Aufgabe 160732:
Beweise den folgenden Satz:
In jedem Dreieck ist die Länge jeder Seitenhalbierenden kleiner als der halbe Umfang des Dreiecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



O. B. d. A. werde in dem beliebigen Dreieck ABC die Seitenhalbierende CD der Seite AB betrachtet (siehe Abbildung). Es ist zu beweisen, dass

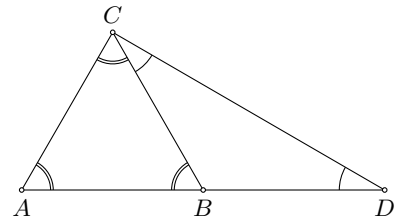
$$DC < \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$$

gilt. Nach der Dreiecksungleichung gilt im Dreieck ADC: $DC < AD + AC$ und im Dreieck DBC: $DC < DB + BC$. Durch Addition beider Ungleichungen erhält man mit $AD + DB = AB$:

$$2 \cdot DC < AD + AC + DB + BC \Rightarrow DC < \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$$

Aufgabe 170734:
Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege der Punkt D so, dass $BD = AB$ ist.
Beweise, dass dann $\angle DCA = 90°$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung gilt $AB = BC = AC$ und damit $\angle ABC = \angle BCA = \angle CAB = 60°$.
Der Außenwinkel $\angle CBD$ des Dreiecks ABC beträgt somit nach dem Außenwinkelsatz 120°.
Wegen $BC = BD$ ist $\triangle BDC$ gleichschenklig mit der Spitze in B. Daher sowie wegen des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck ist

$$\angle DCB = \angle BDC = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$$

Daraus folgt, dass

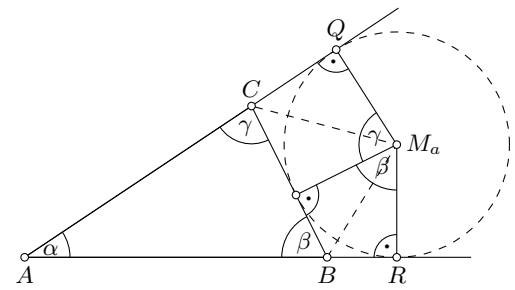
$$\angle DCA = \angle BCA + \angle DCB = 60° + 30° = 90°$$

Aufgabe 180732:
Definition: Berührt ein Kreis k eine Seite s eines Dreiecks D und Verlängerungen der beiden anderen Seiten von D, so heißt k „Ankreis des Dreiecks D (an die Seite s)“.

Aufgabe: Beweise folgenden Satz:
„Ist k Ankreis eines Dreiecks ABC an die Seite BC und ist M_a der Mittelpunkt von k, so hängt die Größe des Winkels $\angle BM_aC$ nur von der Größe α des Winkels $\angle CAB$ ab.“

Zum Beweis ermittle eine Formel für die Größe des Winkels $\angle BM_aC$ in Abhängigkeit von α!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es seien β, γ die Größen von $\angle ABC$ bzw. $\angle BCA$. Die Berührungspunkte von k mit den Verlängerungen von AC bzw. AB seien Q bzw. R.
Dann gilt für die Nebenwinkel von $\angle ABC$ bzw. $\angle ACB$: $\angle CBR = 180° - \beta$ und $\angle BCQ = 180° - \gamma$.
Da M_a als Mittelpunkt eines Kreises, der beide Schenkel des Winkels $\angle CBR$ berührt, auf der Halbierenden dieses Winkels liegt, gilt: $\angle CBM_a = 90° - \frac{\beta}{2}$. Entsprechend gilt $\angle BCM_a = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

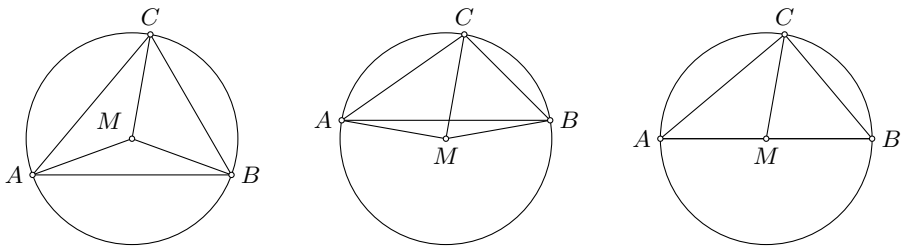
Daraus folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel, angewandt auf das Dreieck BM_aC:

$$\angle BM_aC = 180° - \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$$

Nach dem gleichen Satz, angewandt auf das Dreieck ABC, gilt: $\beta + \gamma = 180° - \alpha$, also $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$, woraus dann $\angle BM_aC = 90° - \frac{\alpha}{2}$ folgt.

Aufgabe 180735:
In einem Dreieck ABC sei u die Länge des Umfangs, und r sei die Länge des Umkreisradius. Beweise, dass dann die Ungleichung $r > \frac{u}{6}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC. Wir unterscheiden nun die folgenden beiden Fälle:

(a) M liegt im Innern oder außerhalb des Dreiecks ABC;
(b) M liegt auf einer der drei Seiten des Dreiecks ABC.

Im Falle (a) sind ABM, BCM und ACM nichtentartete Dreiecke. Wegen $MA = MB = MC = r$ gilt daher nach der Dreiecksungleichung stets

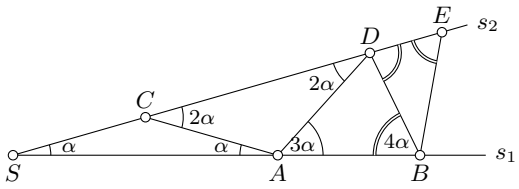
$$2r = MA + MB > AB \tag{1}$$
$$2r = MA + MC > AC \tag{2}$$
$$2r = MB + MC > BC \tag{3}$$

Durch Addition erhält man daraus (4) $6r > AB + AC + BC = u$, also $r > \frac{u}{6}$ Im Falle (b) entartet genau eines der drei betrachteten Dreiecke zu einer Strecke; an die Stelle genau einer der drei Ungleichungen tritt daher die entsprechende Gleichung. Auch in diesem Falle erhält man aus dieser Gleichung und den beiden restlichen Ungleichungen durch Addition die Ungleichung (4). Da mit (a), (b) eine vollständige Fallunterscheidung getroffen wurde, ist damit der geforderte Beweis erbracht.

Aufgabe 200733:
Es sei S der Scheitel eines spitzen Winkels, dessen Schenkel mit s_1 und s_2 bezeichnet seien. Es werde vorausgesetzt, dass auf dem Strahl s_1 zwei voneinander und von S verschiedene Punkte A, B liegen und dass auf dem Strahl s_2 drei voneinander und von S verschiedene Punkte C, D, E liegen, wobei folgendes gilt:

Die Punkte S, A, B sind auf s_1 in dieser Reihenfolge angeordnet; die Punkte S, C, D, E sind auf s_2 in dieser Reihenfolge angeordnet; es ist $SC = CA = AD = DB = BE$ und $SB = SE$.
Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\angle BSE$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



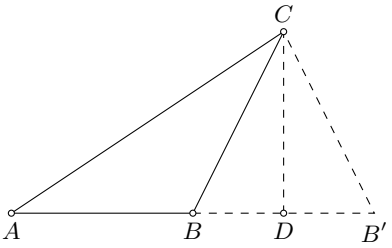
Aus den Voraussetzungen folgt
$\angle CAS = \angle ASC = \alpha$ da $\triangle ACS$ gleichschenklig mit $AC = CS$ ist,
$\angle ACD = \angle CAS + \angle ASC = 2\alpha$ Außenwinkel des Dreiecks ACS,
$\angle ADC = \angle ACD = 2\alpha$ da $\triangle ACD$ gleichschenklig mit $AC = AD$ ist,
$\angle BAD = \angle ADC + \angle ASC = 3\alpha$ Außenwinkel des Dreiecks ADS,
$\angle ABD = \angle DAB = 3\alpha$ da $\triangle ABD$ gleichschenklig mit $AD = BD$ ist,
$\angle BDE = \angle ABD + \angle ASC = 4\alpha$ Außenwinkel des Dreiecks BDS,
$\angle BED = \angle BDE = 4\alpha$ da $\triangle BDE$ gleichschenklig mit $BD = BE$ ist,
$\angle EBS = \angle BED = 4\alpha$ da $\triangle BES$ gleichschenklig mit $BS = ES$ ist,
sowie aus der Winkelsumme im Dreieck BES:

$$\alpha + 4\alpha + 4\alpha = \angle BSE + \angle BED + \angle EBS = 180^\circ \qquad \text{und damit} \quad \alpha = 20^\circ$$

Aufgabe 230736:
Von einem Dreieck ABC wird folgendes vorausgesetzt:
Der Innenwinkel $\angle ABC$ ist größer als 90°.
Ist D der Fußpunkt des von C auf die Gerade durch A und B gefällten Lotes, so gilt $2 \cdot BD = AB = BC$.

Beweise, dass durch diese Voraussetzungen die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC eindeutig bestimmt sind! Ermittle diese Winkelgrößen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Größe des Winkels $\angle BAC$ sei mit α bezeichnet. Wegen $AB = BC$ gilt $\angle ACB = \angle BAC = \alpha$, nach dem Außenwinkelsatz hat also der Nebenwinkel des Winkels $\angle ABC$ die Größe 2α.
Da $\angle ABC > 90^\circ$ ist, also der Lotfußpunkt D auf der Verlängerung von AB liegt, ist somit $\angle DBC = 2\alpha$ gezeigt.

Wenn nun B bei der Spiegelung an der Geraden durch C und D den Bildpunkt B' hat, so ist $BB' = 2BD = BC = B'C$, also ist das Dreieck $BB'C$ gleichseitig und daher $2\alpha = \angle DBC = \angle B'BC = 60^\circ$.
Damit ist der verlangte Beweis geführt, und die gesuchten Winkelgrößen sind ermittelt.

Aufgabe 240734:
Beweise folgenden Satz!
Wenn in einem Dreieck a und b die Längen zweier Seiten sowie h_a und h_b die Längen der zugehörigen Höhen sind, dann gilt $a : b = h_b : h_a$.

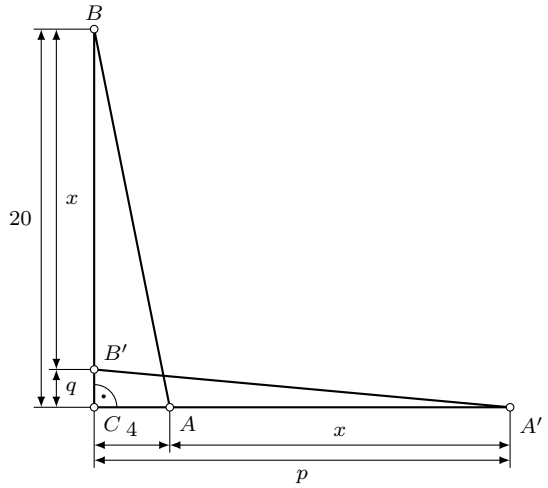
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jedes Dreieck gilt mit den genannten Bezeichnungen, dass der Flächeninhalt F des Dreiecks sowohl die Gleichung $F = \frac{1}{2}a \cdot h_a$ als auch die Gleichung $F = \frac{1}{2}b \cdot h_b$ erfüllt. Daher gilt $a \cdot h_a = b \cdot h_b$, also $a : b = h_b : h_a$.

Aufgabe 250732:
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels und mit $CA = 4$ cm, $CB = 20$ cm.
Von einer natürlichen Zahl x wird gefordert, dass sie die folgenden Bedingungen (1) und (2) erfüllt:

a) Die Strecke CB kann um x cm verkürzt werden; d. h. zwischen C und B liegt ein Punkt B' mit $CB' = CB - x$ cm.
b) Wenn zugleich die Strecke CA über A hinaus um x cm bis zu einem Punkt A' verlängert wird, dann beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks $A'B'C$ genau 55% des Flächeninhalts des Dreiecks ABC.

Untersuche, ob es genau eine natürliche Zahl x gibt, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt! Wenn das der Fall ist, so ermittle diese Zahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Im Dreieck ABC ist wegen $CA \perp CB$ die eine dieser beiden Seiten gleichzeitig die zur anderen zugehörige Höhe. Also hat das Dreieck ABC den Flächeninhalt

$$J = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 20cm^2 = 40cm^2 \qquad (3)$$

Ist $A'B'C$ ein Dreieck wie in (1), (2) beschrieben, so ist es ebenfalls bei C rechtwinklig und hat daher den Flächeninhalt

$$J' = \frac{1}{2} \cdot CA' \cdot CB' \qquad (4)$$

weiterhin gilt für $CA' = p$ cm und $CB' = q$ cm, dass p und q natürliche Zahlen mit $p = 4 + x$, $q = 20 - x$ (5) sind.

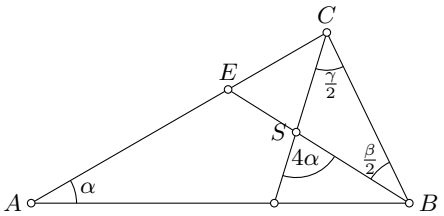
Dabei ist aus (3), (4) ersichtlich, dass die Bedingungen (1) und (2) genau dann erfüllt werden, wenn außer (5) auch

$$J' = \frac{55}{100}J \qquad \text{d. h.} \qquad p \cdot q = 44$$

gilt. Die einzigen Zerlegungen von 44 in ein Produkt zweier natürlicher Zahlen sind aber $44 = 1 \cdot 44 = 2 \cdot 22 = 4 \cdot 11$.
Aus (5) folgt nun $p + q = 24$ und $p > 4$, so dass für (5) nur die Möglichkeit $p = 22$, $q = 2$ und damit, nochmals nach (5), $x = 18$ verbleibt.
Da hiermit in der Tat (5) und (6) gelten, ist bewiesen:
Es gibt genau eine natürliche Zahl x, die (1) und (2) erfüllt, nämlich $x = 18$.

Aufgabe 270735:
In einem Dreieck ABC seien CD und BE die Winkelhalbierenden von $\angle ACB$ bzw. $\angle ABC$. Der Schnittpunkt dieser Strecken CD, BE sei S. Wie üblich bezeichne α die Größe des Winkels $\angle BAC$. Vorausgesetzt werde nun, dass der Winkel $\angle BSD$ die Größe 4α hat.
Weise nach, dass durch diese Voraussetzung die Winkelgröße α eindeutig bestimmt ist, und ermittle α!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



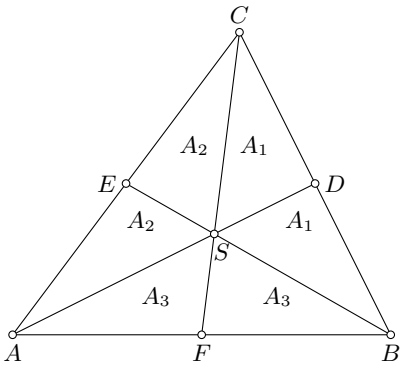
Mit den Bezeichnungen $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$ folgt aus dem Außenwinkelsatz für Dreieck BCS und aus der Voraussetzung

$$4\alpha = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \qquad , \qquad 8\alpha = \beta + \gamma$$

Ferner ist nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC $\beta + \gamma = 180° - \alpha$. Somit folgt $8\alpha = 180° - \alpha$, $9\alpha = 180°$; damit ergibt sich, dass durch die Voraussetzung eindeutig bestimmt ist: $\alpha = 20°$.

Aufgabe 270736:
In einem Dreieck ABC seien AD, BE und CF die drei Seitenhalbierenden. Sie gehen bekanntlich durch einen gemeinsamen Punkt S.
Beweise, dass für jedes Dreieck mit diesen Bezeichnungen die Aussage gilt:
Alle sechs Dreiecke BDS, DCS, CES, EAS, AFS, FBS haben denselben Flächeninhalt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



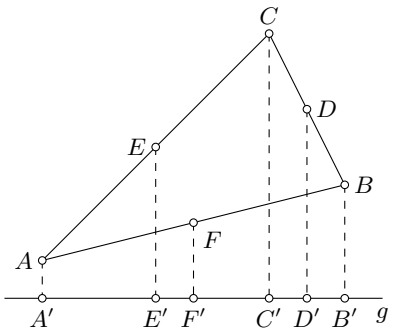
Wegen $BD = DC$ und der gemeinsamen zu diesen Seiten gehörenden Höhe haben die Dreiecke BDS und DCS einander gleichen Flächeninhalt; dieser sei mit A_1 bezeichnet.
Ebenso haben CES und EAS einander gleichen Flächeninhalt A_2 sowie AFS und FBS einander gleichen Flächeninhalt A_3.

Wegen $AF = FB$ und der gemeinsamen zu diesen Seiten gehörenden Höhe haben die Dreiecke AFC und FBC einander gleichen Flächeninhalt, also gilt $A_3 + 2A_2 = A_3 + 2A_1$. Daraus folgt $A_1 = A_2$. Ebenso ergibt sich $A_1 = A_3$.
Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 280735:
Beweise, dass für jedes Dreieck ABC folgende Aussage gilt:
Wenn D, E, F in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten BC, CA, AB sind und wenn A', B', C', D', E', F' die Fußpunkte der Lote von A, B, C, D, E, F auf eine Gerade g sind, die ganz außerhalb des Dreiecks ABC verläuft und auf keiner der verlängerten Seiten BC, CA, AB senkrecht steht, dann gilt stets

$$AA' + BB' + CC' = DD' + EE' + FF'$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

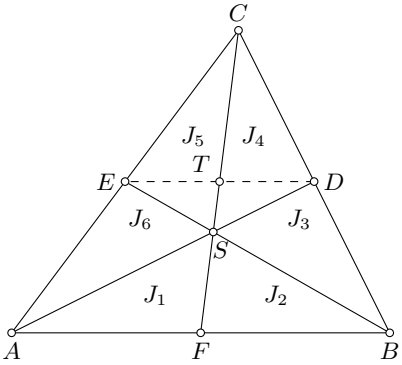


Nach Voraussetzung sind BB', CC' und DD' senkrecht zu g, also zueinander parallel, und D ist der Mittelpunkt von BC. Da die Gerade durch B und C auf g nicht senkrecht steht, ist die Gerade, in der das Lot BB' liegt, auch verschieden von der Geraden, in der CC' liegt.
Also ist $B'BCC'$ ein Trapez, und DD' ist seine Mittellinie.
Nach dem Satz über die Länge der Mittellinie gilt folglich $DD' = \frac{1}{2}(BB' + CC')$. Entsprechend erhält man auch
$EE' = \frac{1}{2}(CC' + AA')$, $FF' = \frac{1}{2}(AA' + BB')$.
Durch (Ausmultiplizieren der Klammern und) Addieren dieser drei Gleichungen erhält man die Behauptung

$$DD' + EE' + FF' = AA' + BB' + CC'$$

Aufgabe 310735:
Ist ABC ein beliebiges Dreieck, so sei S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden AD und BE, ferner bezeichne F_1 den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und F_2 den Flächeninhalt des (nicht konvexen) Fünfecks $ABDSE$.
Ermittle für jedes Dreieck ABC das Verhältnis $F_1 : F_2$ dieser beiden Flächeninhalte!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



In jedem Dreieck ABC haben die drei Seitenhalbierenden AD, BE und CF einen gemeinsamen Schnittpunkt S. Die Flächeninhalte der Dreiecke AFS, FBS, BDS, DCS, CES und EAS seien J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 bzw. J_6.
Wegen $AF = FB$ und der gemeinsamen Ecke S von AFS, FBS gilt $J_1 = J_2$. Entsprechend folgt, dass $J_3 = J_4$ und $J_5 = J_6$ gelten.

Wegen $AF = FB$ und der gemeinsamen Ecke C von AFC, FBC gilt

$$J_1 + J_6 + J_5 = J_2 + J_3 + J_4$$

Hieraus und aus den vorangehenden Gleichungen folgt

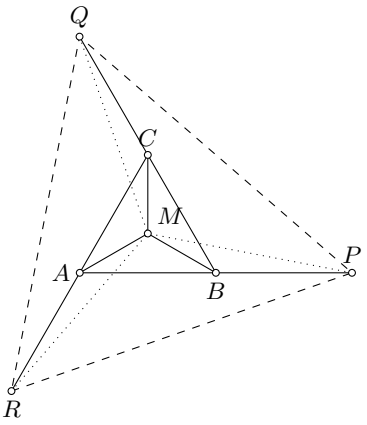
$$J1 + 2 \cdot J_6 = J_1 + 2 \cdot J_3$$

und daraus $J_6 = J_3$. Entsprechend folgt (z. B.) $J_2 = J_5$. Also gilt insgesamt $J1 = J2 = J3 = J4 = J5 = J6$, d. h.

$$F_1 : F_2 = (6J_1) : (4J_1) = 3 : 2$$

Aufgabe 320733:
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck, sein Umkreismittelpunkt sei M. Auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege ein Punkt P derart, dass $BP = 2$ cm gilt. Auf der Verlängerung von BC über C hinaus liege ein Punkt Q mit $CQ = 2$ cm, und auf der Verlängerung von CA über A hinaus liege ein Punkt R mit $AR = 2$ cm.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen, unabhängig von der Seitenlänge des Dreiecks ABC, stets die beiden folgenden Aussagen a) und b) gelten!
a) Das Dreieck PQR ist gleichseitig.
b) Es ist $MP = MQ = MR$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



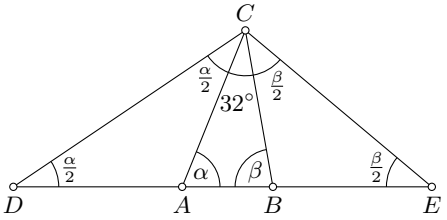
a) Aus der Lage von P, Q, R auf den genannten Verlängerungen und aus den Voraussetzungen $AB = BC = CA$, (1) $BP = CQ = AR$ (2) folgt auch $AP = BQ = CR$. (3)
Die Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck ABC betragen 60°, für ihre Nebenwinkel gilt daher $\angle PAR = \angle QBP = \angle RCQ = 120°$. (4)
Aus (2), (3), (4) folgt nach dem Kongruenzsatz sws $\triangle APR = \triangle BQP = \triangle CRQ$ und damit $RP = PQ = QR$.

b) Im gleichseitigen Dreieck ABC ist der Umkreismittelpunkt M zugleich Inkreismittelpunkt, d. h., AM, BM und CM halbieren die Innenwinkel des Dreiecks, also gilt $\angle MAP = \angle MBQ = \angle MCR = 30°$.

Daraus und aus (4) ergibt sich $\angle MAR = \angle MBP = \angle MCQ = 150°$. (5)
Aus (2),(5) und $MA = MB = MC$ (Radien des Umkreises) folgt nach dem Kongruenzsatz sws $\triangle MAR = \triangle MBP = \triangle MCQ$ und damit die Behauptung $MR = MP = MQ$.

Aufgabe 320735:
Es sei ABC ein Dreieck, in dem der Innenwinkel $\angle ACB$ die Größe 32° hat. Auf der Verlängerung von BA über A hinaus liege ein Punkt D derart, dass $AD = AC$ gilt; auf der Verlängerung von AB über B hinaus liege ein Punkt E derart, dass $BE = BC$ gilt.
Beweise, dass durch diese Voraussetzungen, unabhängig von den sonstigen Eigenschaften des Dreiecks ABC, die Größe des Winkels $\angle DCE$ eindeutig bestimmt ist; ermittle diese Winkelgröße!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



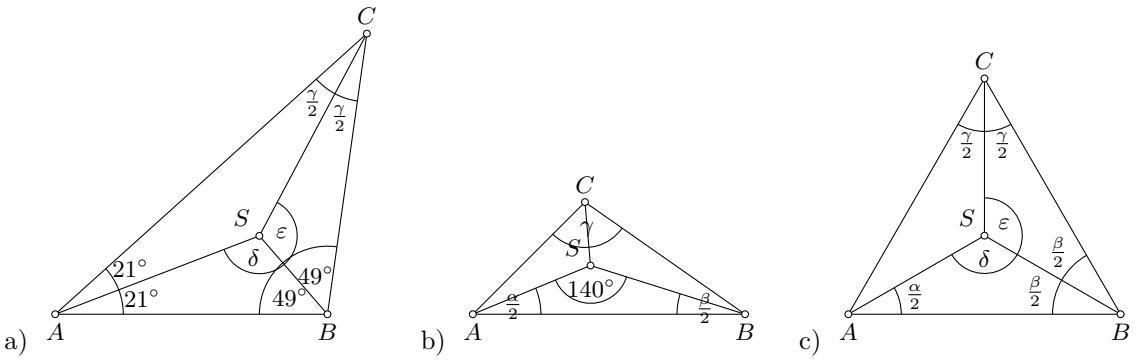
Im Dreieck ABC seien α bzw. β die Größen der Innenwinkel bei A bzw. B. Das Dreieck ACD ist mit $AD = AC$ gleichschenklig, nach dem Basiswinkelsatz und dem Außenwinkelsatz gilt daher $\angle ACD = \angle ADC = \frac{\alpha}{2}$. Ebenso folgt $\angle BCE = \angle BEC = \frac{\beta}{2}$. Folglich ist

$$\angle DCE = \angle ACB + \angle ACD + \angle BCE = 32° + \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC ist aber $\alpha + \beta = 180° - 32° = 148°$. Damit ist gezeigt, dass durch die Voraussetzungen die Winkelgröße $\angle DCE = 32° + \frac{148°}{2} = 32° + 74° = 106°$ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 330733:
Für jedes Dreieck ABC bezeichne S den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Ferner seien wie üblich mit α, β bzw. γ die Größen der Innenwinkel $\angle BAC$, $\angle CBA$ bzw. $\angle ACB$ bezeichnet.
a) Wie groß sind die Winkel $\angle ASB$ und $\angle BSC$ in einem Dreieck ABC, in dem $\alpha = 42°$ und $\beta = 98°$ gilt?
b) Ermittle γ in jedem Dreieck ABC, in dem $\angle ASB$ die Größe 140° hat!
c) Beweise, dass jedes Dreieck ABC, in dem $\angle ASB$ und $\angle BSC$ einander gleich groß sind, gleichschenklig ist! Gib auch an, welche zwei Dreiecksseiten in jedem solchen Dreieck einander gleich lang sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Mit den Bezeichnungen $\delta = \angle ASB$, $\rho = \angle BSC$ gilt:

a) Wegen $\frac{\alpha}{2} = 21°$, $\frac{\beta}{2} = 49°$ und nach dem Innenwinkelsatz für das Dreieck ABS ist $21° + 49° + \delta = 180°$, also $\delta = 110°$.
Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC ist $42° + 98° + \gamma = 180°$, also $\gamma = 40°$; wegen $\frac{\beta}{2} = 49°$, $\frac{\gamma}{2} = 20°$ und nach dem Innenwinkelsatz für das Dreieck BCS ist $49° + 20° + \varepsilon = 180°$, also $\varepsilon = 111°$.

b) Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABS ist

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 140° = 180°$$

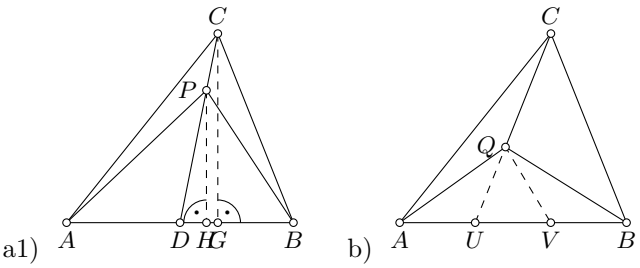
also $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 40°$, $\alpha + \beta = 80°$.
Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABC folgt damit weiter $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 100°$.

c) Nach dem Innenwinkelsatz für die Dreiecke ABS und BCS gilt $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \delta = 180°$ und $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \varepsilon = 180°$.
Wegen der Voraussetzung $\delta = \varepsilon$ folgt daher $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$, also $\alpha = \gamma$.
Nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes ist folglich das Dreieck ABC gleichschenklig mit $AB = BC$.

Aufgabe 330736:
a) Zeichne ein Dreieck ABC und den Mittelpunkt D der Seite AB! Wähle auf der Strecke DC einen Punkt P zwischen D und C! Zeichne dann die Strecken AP und BP!
Untersuche für jedes Dreieck ABC (mit D als Mittelpunkt der Seite AB) und für jeden (auf DC gelegenen) Punkt P, ob eines der beiden Dreiecke ACP, BCP größeren Flächeninhalt hat als das andere oder ob sie einander gleichgroßen Flächeninhalt haben!

b) Für jedes Dreieck ABC gibt es in seinem Inneren genau einen Punkt Q, mit dem die Bedingung erfüllt wird, dass die Flächeninhalte der Dreiecke ACQ, BCQ und ABQ sich wie $1 : 2 : 3$ verhalten. (Dies darf im folgenden ohne Beweis verwendet werden.)
Beschreibe, wie zu jedem Dreieck ABC ein Punkt Q gefunden werden kann, und beweise, dass die genannte Bedingung stets mit diesem - nach deiner Beschreibung gefundenen - Punkt Q erfüllt wird!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für jedes Dreieck ABC mit D als Mittelpunkt der Seite AB und für jeden auf DC gelegenen Punkt P gilt:
Die Dreiecke ACD und BCD haben senkrecht zu AD bzw. BD dieselbe Höhe, nämlich das Lot CG von C auf AB. Wegen $AD = BD$ haben sie also einander gleichgroßen Flächeninhalt. Ebenso haben ADP und BDP wegen gleicher Höhe PH und $AD = BD$ einander gleichgroßen Flächeninhalt.
Durch Subtraktion ergibt sich somit: Die beiden Dreiecke ACP, BCP haben einander gleichgroßen Flächeninhalt.



b) Man teilt die Strecke AB durch zwei Punkte U, V in drei gleichlange Strecken AU, UV, VB. Dann wählt man Q als den Mittelpunkt der Strecke CU.
Hiernach haben die drei Dreiecke AUQ, UVQ, VBQ das Lot von Q auf AB als gemeinsame Höhe auf AU, UV bzw. VB und daher wegen $AU = UV = VB$ einander gleichgroßen Flächeninhalt.
Wird dieser mit J bezeichnet, so hat also das Dreieck ABQ den Flächeninhalt $3J$.

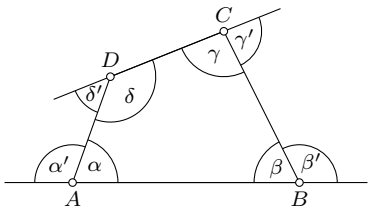
Ferner haben die Dreiecke AUQ und ACQ das Lot von A auf CU als gemeinsame Höhe auf UQ bzw. CQ und daher wegen $UQ = CQ$ einander gleichgroßen Flächeninhalt; d. h., das Dreieck ACQ hat ebenfalls den Flächeninhalt J.
Entsprechend haben die Dreiecke BUQ und BCQ einander gleichgroßen Flächeninhalt; d. h., das Dreieck BCQ hat den Flächeninhalt $2J$. Wird also der Punkt Q nach der gegebenen Beschreibung gefunden, so erfüllt er die Bedingung, dass die Flächeninhalte der Dreiecke ACQ, BCQ, ABQ sich wie $1 : 2 : 3$ verhalten.

III.II Vier-, Vielecke

I Runde 1

Aufgabe V10716:
Zeichne ein beliebiges Viereck und an jeder seiner Ecken einen Außenwinkel. Weise - ohne zu messen - nach, wie groß die Summe dieser 4 Außenwinkel stets ist!

Lösung von Steffen Polster:



Die Summe der vier Innenwinkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und der vier Außenwinkel $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ beträgt 720°, da vier gestreckte Winkel addiert werden.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 720°$$

Da die Innenwinkelsumme im Viereck gleich 360° beträgt, ergibt sich

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 720° - \alpha - \beta - \gamma - \delta = 720° - 360° = 360°$$

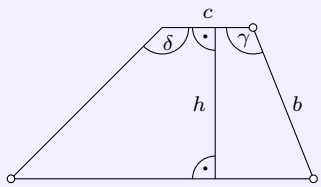
Die Summe der vier Außenwinkel des Vierecks beträgt 360°.

Aufgabe 020711:
In Berlin werden beim Aufbau des Stadtzentrums die neuen Wohnhäuser in der Karl-Marx-Allee mit Fliesen verkleidet. Eine Fliese hat folgende Abmessungen: Länge l = 29,5 cm, Breite b = 12,0 cm.

a) Berechne die Fläche einer Fliese!
b) Wie viel Fliesen benötigt man für eine Fläche von 10,62 m Breite und 11,16 m Länge? Die Fliesen dürfen dabei nicht zerteilt werden. Die Fugen bleiben unberücksichtigt.

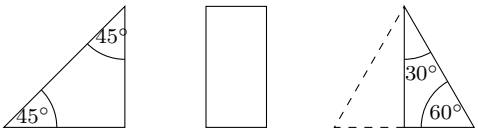
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Fläche einer Fliese ist $b \cdot l = 29{,}5\text{ cm} \cdot 12{,}0\text{ cm} = 354\text{ cm}^2$.
b) Damit man die Fliesen nicht zu zerteilen braucht, muss man die Fliesen der Länge nach aneinander legen, um die Breite der Wand aufzufüllen. Dann benötigt man $93 \cdot 36 = 3348$ Fliesen.

Aufgabe 020712:



Gabriele hat im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion das abgebildete Werkstück hergestellt. Rolf will feststellen, ob sie in der Lage ist, mit Hilfe der von ihm ermittelten Maße, die auf der Abbildung sichtbare Fläche zu berechnen.
Wie groß ist die Fläche?
b = 60 mm , c = 34 mm , h = 52 mm , $\gamma = 120°$, $\delta = 135°$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Teilfigur I Teilfigur II Teilfigur III

$$F_I = \frac{52\text{ mm} \cdot 52\text{ mm}}{2} = 1352\text{ mm}^2$$
$$F_{II} = 34\text{ mm} \cdot 52\text{ mm} = 1768\text{ mm}^2$$
$$F_{III} = \frac{30\text{ mm} \cdot 52\text{ mm}}{2} = 780\text{ mm}^2$$
$$F = F_I + F_{II} + F_{III} = 3900\text{ mm}^2$$

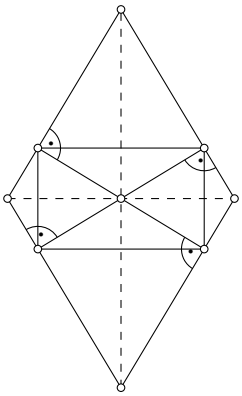
Aufgabe 030711:
Ein rechteckiges Kartoffelfeld ist 250 m breit und 315 m lang. Der Reihenabstand in der Breite beträgt 62,5 cm. Auf beiden Seiten bleibt ein halber Reihenabstand frei. Der Staudenabstand in der Länge ist 35 cm.
Auch hier bleibt beiderseits ein halber Staudenabstand frei. Um den Gesamtertrag des Feldes annähernd zu ermitteln, wird eine Diagonalprobe entnommen, d. h., es werden 100 von den auf einer Diagonalen liegenden Stauden gerodet. Dabei erbrachten diese Stauden 65,4 kg Kartoffeln.
Wie hoch ist voraussichtlich der Gesamtertrag?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt 400 Reihen zu je 900 Stauden. Die 360000 Stauden ergeben einen voraussichtlichen Gesamtertrag von 235 t Kartoffeln.

Aufgabe 030714:
Von dem Mittelpunkt eines Rhombus werden die Lote auf die Seiten gefällt.
a) Beweise, dass die Fußpunkte der Lote auf den Ecken eines Rechtecks liegen!
b) In welchem Fall liegen sie auf den Ecken eines Quadrats? (Begründung!)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Beweis:

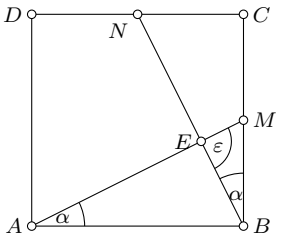
Im Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander und halbieren einander. Außerdem sind alle Seiten gleich lang. Demzufolge sind die vier Dreiecke, in die ein Rhombus durch seine Diagonalen geteilt wird, kongruent. Daraus folgt, dass die vier Lote, die gleichzeitig die Höhe je eines der vier Dreiecke sind, gleich lang sind.
Weiterhin liegen je zwei Lote auf einer Geraden. Damit sind die Diagonalen des Lotfußpunktvierecks gleich lang und halbieren einander; es ist also ein Rechteck.



b) Wenn der Rhombus selbst ein Quadrat ist, bilden je zwei benachbarte Lote rechte Winkel. Ein Rechteck, in dem die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, ist ein Quadrat.

Aufgabe 040715:
In einem Quadrat $ABCD$ sind M und N die Mitten der Seiten BC bzw. CD.
Es ist zu beweisen, dass die Strecken AM und BN aufeinander senkrecht stehen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

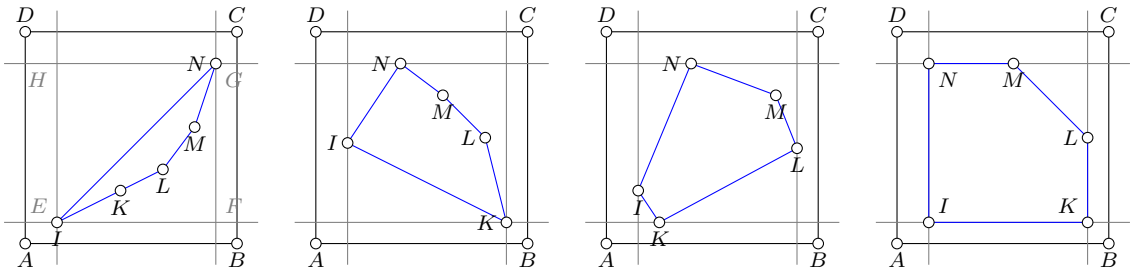


Die Dreiecke ABM und BNC sind kongruent (SWS). Daraus folgt:

$$\varepsilon = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$$

Aufgabe 050712:
Innerhalb eines Quadrats liegt ein konvexes Fünfeck.
Es ist zu beweisen, dass der Umfang eines derartigen Fünfecks stets kleiner ist als der Umfang des Quadrats.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



$ABCD$ sei das gegebene Quadrat, $IKLMN$ das gegebene Fünfeck (siehe Abbildungen).
Man verschiebt die Gerade durch AB parallel, bis sie zum ersten Mal durch einen Punkt des Fünfecks verläuft, aber nicht ins Innere des Fünfecks eintritt. Entsprechend verfährt man mit den Geraden durch BC, CD und AD.
Die vier so erhaltenen Geraden schneiden einander in den Punkten E, F, G und H, die Eckpunkte eines Rechtecks sind, das ganz im Innern von $ABCD$ liegt und daher einen kleineren Umfang als das Quadrat hat (jede Rechteckseite ist kürzer als die Quadratseite).
Von den Eckpunkten des Fünfecks liegen nun mindestens zwei auf dem Rande des Rechtecks. Man errichtet über jeder Fünfeckseite, die nicht auf dem Rande des Rechtecks liegt, je ein rechtwinkliges Dreieck mit folgenden Eigenschaften:

a) Die Fünfeckseite ist Hypotenuse,
b) die Katheten liegen parallel zu den Rechteckseiten (bzw. liegen auf den Rechteckseiten),
c) die Dreiecksfläche liegt außerhalb des Fünfecks.

Da das Fünfeck konvex ist, ist die Konstruktion derartiger Dreiecke stets möglich. Je zwei so konstruierte rechtwinklige Dreiecke haben dabei höchstens einen Eckpunkt gemeinsam. Die Summe der Längen aller Katheten dieser Dreiecke und der auf dem Rande des Rechtecks liegenden Fünfeckseiten ist, wie man leicht einsieht, gleich dem Umfang des Rechtecks $EFGH$ (siehe Abbildung).

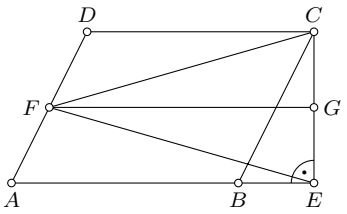
Da höchstens vier Seiten des Fünfecks $IKLMN$ auf dem Rande des Rechtecks $EFGH$ liegen können, lässt sich stets mindestens ein solches rechtwinkliges Dreieck konstruieren. Nach der Dreiecksungleichung ist aber die Länge seiner Hypotenuse kleiner als die Summe der Längen seiner Katheten.
Mithin ist der Umfang des Fünfecks $IKLMN$ kleiner als der des Rechtecks $EFGH$, und damit erst recht kleiner als der Umfang des Quadrats $ABCD$.

Aufgabe 070712:
Untersuche, ob man ein konvexes Sechseck zeichnen kann, bei dem genau vier Innenwinkel spitz sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das ist nicht möglich.
Beweis: Angenommen, vier Innenwinkel wären spitz, dann wäre deren Summe kleiner als 360° und - da die Winkelsumme im Sechseck 720° beträgt - die Summe der beiden übrigen größer als 360°. Das ist aber unmöglich, weil in jedem konvexen Vieleck jeder Innenwinkel kleiner als 180° ist.

Aufgabe 070714:
In einem Parallelogramm $ABCD$ sei $\angle DAB$ ein spitzer Winkel. Vom Punkt C wird das Lot auf die Gerade g_{AB} gefällt, sein Fußpunkt sei E. Man verbinde E mit dem Mittelpunkt F der Seite AD.
Beweise: Der Winkel $\angle EFD$ ist doppelt so groß wie der Winkel $\angle BEF$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Voraussetzung: Es gilt $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $\angle BEC$ ist ein rechter Winkel; $AF = FD$.

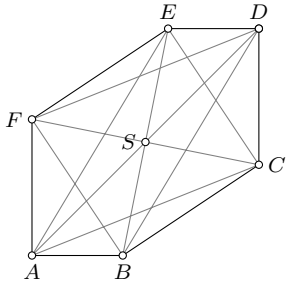
Behauptung: Der Winkel $\angle EFC$ ist doppelt so groß wie $\angle BEF$.

Beweis: Da der Winkel $\angle DAB$ spitz ist, fällt Punkt E weder mit A noch mit B zusammen. Die Parallele zu AB durch F halbiert das Lot CE im Punkt G und steht senkrecht auf CE, d. h. F liegt auf der Mittelsenkrechten der Punkte C und E.
Dann ist das Dreieck $\triangle EFC$ gleichschenklig mit $EF = FC$, und FG ist Winkelhalbierende in diesem Dreieck. Es ist also $\angle EFC$ doppelt so groß wie $\angle EFG$.

Nun gilt $\angle BEF = \angle EFG$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Daraus folgt, dass $\angle EFC$ auch doppelt so groß wie $\angle BEF$ ist.

Aufgabe 080713:
Gegeben sei ein konvexes Sechseck, bei dem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel verlaufen und gleich lang sind.
Zeichne alle Diagonalen ein, und beweise, dass es einen von den Eckpunkten des Sechsecks verschiedenen Punkt gibt, in dem sich genau drei Diagonalen schneiden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

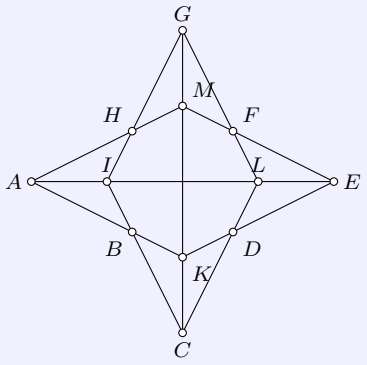


Wir verwenden den Satz: Die Diagonalen im Parallelogramm halbieren einander.

Die Strecken BE und AD sind Diagonalen im Parallelogramm $ABDE$ und schneiden sich in S. Punkt S ist Mittelpunkt der Diagonalen BE und AD.
Im Parallelogramm $ACDF$ ist AD ebenfalls Diagonale, und S ist ebenfalls Mittelpunkt der Diagonalen AD und CF. Also ist Punkt S Mittelpunkt der drei Diagonalen AD, BE und CF und damit gemeinsamer Punkt dieser Diagonalen.

Die übrigen Diagonalen gehen nicht durch S, da jede von ihnen in einem der Parallelogramme $ABDE$, $ACDF$, $BCEF$ Seite ist, während S in jedem dieser Parallelogramme Mittelpunkt ist. Also gehen genau drei Diagonalen durch S.

Aufgabe 080714:



Die in der Abbildung dargestellte Sternfigur wird durch zwei kongruente Rhomben mit ihren Diagonalen gebildet. Die Diagonalenlängen sollen im Verhältnis $2:1$ stehen, so dass die Strecken AE und CG durch die Punkte I, S, L bzw. M, S, K in je vier gleiche Abschnitte geteilt werden.
Vergleiche den Flächeninhalt des Achtecks $ABCDEFGH$ mit dem des Achtecks $IBKDLFMH$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Dreiecke $\triangle SMF$ und $\triangle MGF$ sind flächengleich (gleich lange Grundlinie und gleich lange Höhe). Das gilt auch für die Dreiecke $\triangle SLF$ und $\triangle LEF$, für $\triangle SLD$ und $\triangle LED$ usw.
Daraus folgt, dass der Flächeninhalt des Achtecks $ABCDEFGH$ doppelt so groß ist wie der des Achtecks $IBKDLFMH$.

Aufgabe 100714:
$ABCD$ sei in der üblichen Bezeichnungsweise ein Rechteck, und es gelte $AB \geq BC$. A_1 sei der Fußpunkt des Lotes von A auf die Diagonale DB. A_2 sei der Schnittpunkt der Halbierenden des Winkels $\angle DAB$ mit DB, C_2 sei der Schnittpunkt der Halbierenden des Winkels $\angle BCD$ mit DB, und C_1 sei der Fußpunkt des Lotes von C auf DB.

Man beweise, dass unter diesen Bedingungen $\angle A_1AA_2 \cong \angle A_2AC \cong \angle ACC_2 \cong \angle C_2CC_1$ gilt.
Dabei sind folgende Fälle zu betrachten: a) $AB = BC$, b) $AB > BC$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei M der Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks $ABCD$. Ferner sei $\angle ABD = \alpha$, $\angle ADB = \beta$ gesetzt.

a) Im Fall $AB = BC$ ist $ABCD$ ein Quadrat. Also stehen die Diagonalen AC und BD aufeinander senkrecht; ferner halbiert die Diagonale AC den Winkel $\angle DAB$ und den Winkel $\angle BCD$. Daraus folgt $A_1 = A_2 = M = C_2 = C_1$, also haben alle vier in der Behauptung genannten Winkel die Größe $0°$.

b) Im Fall $AB > BC$ erhält man zunächst aus
(1) $\triangle BAD = \triangle ABC = \triangle DCB = \triangle CDA$ (s,w,s) die Gleichungen
(2) $\alpha = \angle ABD = \angle BAC = \angle CDB = \angle DCA$
(3) $\beta = \angle ADB = \angle BCA = \angle CBD = \angle DAC$.
Weiter gilt
(4) $\alpha + \beta = 90°$, da die in (1) genannten Dreiecke (bei A bzw. B bzw. C bzw. D) rechtwinklig sind.

Ferner ist in jedem dieser Dreiecke diejenige Seite, die einem der in (2) auftretenden Winkel gegenüberliegt, kleiner als diejenige Seite, die einem der in (3) auftretenden Winkel gegenüberliegt; also gilt
(5) $\alpha < \beta$.
Aus (4) und (5) folgt $2\alpha < \alpha + \beta = 90°$, also
(6) $\alpha < 45°$.

Da auch die Dreiecke $\triangle AA_1D$ und $\triangle CC_1B$ bei A_1 bzw. C_1 rechtwinklig sind, folgt aus (3) und (4)
(7) $\angle DAA_1 = \angle BCC_1 = \alpha$
Nach (7), (2) und der Definition von A_2 und C_2 folgt nun $\angle A_1AA_2 = 45° - \alpha$ und $\angle A_2AC = 45° - \alpha$.

Analog gilt $\angle ACC_2 = 45° - \alpha$ und $\angle C_2CC_1 = 45° - \alpha$ und demzufolge

$$\angle A_1AA_2 \cong \angle A_2AC \cong \angle ACC_2 \cong \angle C_2CC_1$$

Aufgabe 120713:
Beweise den folgenden Satz:
Stehen in einem gleichschenkligen Trapez $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ $(AD = BC)$ die Diagonalen AC und BD senkrecht aufeinander, dann ist die Länge der Mittellinie dieses Trapezes gleich der Länge seiner Höhe!

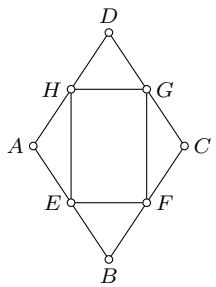
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In dem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ sei E der Schnittpunkt von AC mit BD. Ferner sei F der Fußpunkt des von E auf AB und G der Fußpunkt des von E auf CD gefällten Lotes. Dann ist FG eine Höhe des Trapezes.

Wegen $AB = AB$, $\angle BAD = \angle ABC$, $AD = BC$ gilt $\triangle ABD = \triangle ABC$ (sws) also $\angle BAC = \angle ABD$.
Folglich ist $\triangle AEB$ gleichschenklig mit $AE = EB$ und daher EF Seitenhalbierende in diesem Dreieck. Da sich AC und BD in E rechtwinklig schneiden, hat der Basiswinkel $\angle EAB$ in diesem Dreieck eine Größe von 45°. Daher ist auch $\triangle AEF$ gleichschenklig-rechtwinklig mit $EF = AF = \frac{1}{2}AB$.
Analog gilt im Dreieck $\triangle EGD$ $EG = DG = \frac{1}{2}DC$. Daher beträgt die Länge der Mittellinie des Trapezes $ABCD$

$$\frac{1}{2}(AB + DC) = EF + EG = FG$$

Aufgabe 130712:
Beweise den folgenden Satz:
Ist $ABCD$ ein Rhombus und sind E, F, G, H in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA, so ist das Viereck $EFGH$ ein Rechteck!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



In dem Rhombus $ABCD$ gilt, da E, F, G, H die Mittelpunkte seiner Seiten sind:

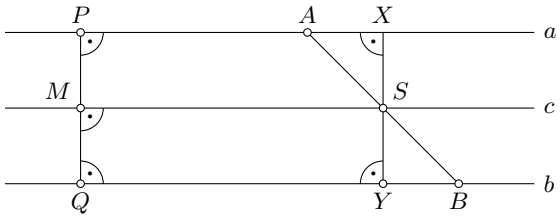
$$AE = EB = BF = FC = CG = GD = DH = HA \quad (1)$$

Ferner gilt: $\angle HAE = \angle FCG$ sowie $\angle EBF = \angle GDH$ (2)
Aus (1) und (2) folgt $\triangle HAE = \triangle FCG$ sowie $\triangle EBF = \triangle GDH$ (sws) (3)
Aus (3) folgt $EH = FG$ sowie $EF = HG$, daher ist $EFGH$ ein Parallelogramm.

Nun gilt $\angle EAH + \angle HDG = 180°$ sowie $\angle AEH = \angle AHE = \frac{1}{2}(180° - \angle EAH)$ und $\angle DGH = \angle DHG = \frac{1}{2}(180° - \angle HDG)$.
Folglich gilt $\angle AHE + \angle DGH = \frac{1}{2}(360° - 180°) = 90°$ und somit $\angle EHG = 180° - 90° = 90°$; daher ist $EFGH$ ein Rechteck.

Aufgabe 160713:
Es seien a und b zwei zueinander parallele Geraden. A und P seien Punkte auf a, ferner seien B und Q Punkte auf b. Dabei gelte $PQ \perp a$. Der Mittelpunkt von PQ sei M, und es sei c die Parallele zu a durch M.
Beweise folgenden Satz: Ist S der Schnittpunkt von c mit AB, so gilt $AS = BS$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



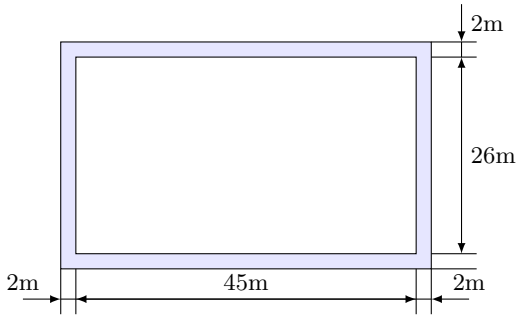
Der Schnittpunkt von AB mit c sei S. Die Senkrechte zu c durch S schneide a in X und b in Y.
Ist $S = M$, so gilt $X = P$, $Y = Q$, also $XS = YS$. Ist $S \neq M$, so sind $MSXP$ und $MSYQ$ Rechtecke, also gilt ebenfalls $XS = PM = QM = YS$.

Ist $A = X$, so gilt $B = Y$, also die Behauptung $AS = BS$. Ist $A \neq X$, so sind die Dreiecke AXS und BYS nach (sww) kongruent; denn es gilt: $XS = YS$; $\angle XSA = \angle YSB$ (Scheitelwinkel); $\angle AXS = \angle BYS = 90°$. Also gilt auch in diesem Fall $AS = BS$.

Aufgabe 210711:
Die FDJler einer Schule haben sich vorgenommen, das Gelände ihrer Schule umzugestalten. Dabei soll eine rechteckige Rasenfläche von 45 m Länge und 26 m Breite mit einem Weg von 2 m Breite umgeben werden.
Der Weg soll außerhalb der Rasenfläche verlaufen und ringsum an sie angrenzen. Die Fläche, die von dem Rasen und dem Weg zusammen eingenommen wird, soll insgesamt wieder die Gestalt eines Rechtecks haben.

a) Berechne den Flächeninhalt des vorgesehenen Weges!
b) Wie viel Gehwegplatten müssen auf diesem Weg insgesamt ausgelegt werden, wenn er vollständig von Gehwegplatten bedeckt werden soll und wenn man für jeden Quadratmeter des Weges genau 16 Platten benötigt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Der Flächeninhalt des Weges ergibt sich, wenn man den Flächeninhalt des Rasens von dem Flächeninhalt des Rechtecks subtrahiert, den Weg und Rasen zusammen einnehmen. Dessen Seitenlängen sind jeweils um 4 m länger als die Seitenlängen 45 m bzw. 26 m des Rasens; sie betragen also 49 m bzw. 30 m.

Daher beträgt der gesuchte Flächeninhalt 49 m · 30 m - 45 m · 26 m = 1470 m^2 - 1170 m^2 = 300 m^2.

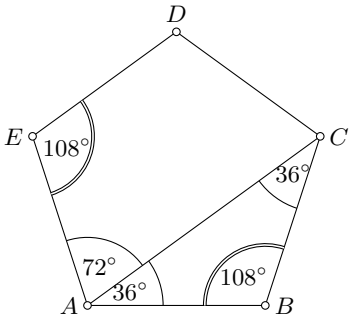
Andere Lösungsmöglichkeiten ergeben sich, wenn man die Fläche des Weges aus Teilflächen zusammensetzt. Die in der Abbildung dargestellte Zusammensetzung z. B. führt auf $2 \cdot 49\ \text{m} \cdot 2\ \text{m} + 2 \cdot 26\ \text{m} \cdot 2\ \text{m} = 196\ \text{m}^2 + 104\ \text{m}^2 = 300\ \text{m}^2$.

b) Wegen $300 \cdot 16 = 4800$ sind insgesamt 4800 Platten erforderlich.

Aufgabe 210714:
In einem regelmäßigen Fünfeck $ABCDE$ wird eine beliebige Diagonale gezeichnet. Beweise, dass diese Diagonale zu einer der Seiten des Fünfecks parallel ist!
Hinweis: Ein Fünfeck heißt genau dann regelmäßig, wenn alle seine Seiten zueinander gleichlang und alle seine Innenwinkel zueinander gleichgroß sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
1. Lösungsweg:
Die Bezeichnung der Ecken des Fünfecks kann so gewählt werden, dass AC die zu betrachtende Diagonale ist. Da die Winkelsumme im n-Eck stets $(n-2)\cdot 180°$ beträgt, hat jeder der Innenwinkel des Fünfecks $ABCDE$ (siehe Abbildung) die Größe

$$\frac{1}{5}\cdot(5-2)\cdot 180° = 108°$$



Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit $AB = BC$. Daher gilt $\angle BAC = \angle BCA$, nach dem Innenwinkelsatz also $\angle BAC = \angle BCA = 12(180° - 108°) = 36°$.
Daraus folgt $\angle CAE = 108° - 36° = 72°$.
Also ergänzen sich $\angle CAE$ und $\angle AED$ zu 180°. Da sie (für die Gerade durch A, E, die von AC und ED geschnitten wird) entgegengesetzt liegende Winkel sind, folgt hieraus $AC \parallel ED$.

2. Lösungsweg:
Die Innenwinkel des Fünfecks bei E und D sind einander gleichgroß, d. h. es gilt (1) $\angle AED = \angle CDE$. Ebenso ist $\angle BAE = \angle BCD$. Wegen $AB = BC$ gilt ferner $\angle BAC = \angle BCA$. Daraus folgt durch Subtraktion (2) $\angle CAE = \angle ACD$.
Ferner beträgt im Viereck $ACDE$ die Innenwinkelsumme 360°. Hieraus und aus (1), (2) folgt

$$360° = \angle CAE + \angle ACD + \angle CDE + \angle AED = 2\angle CAE + 2\angle AED$$

Daher gilt $\angle CAE + \angle AED = 180°$. Wie im 1. Lösungsweg folgt hieraus $AC \parallel ED$.

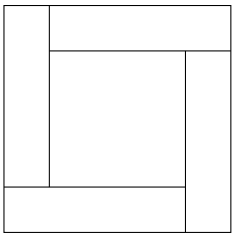
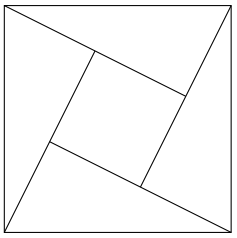
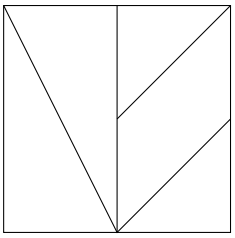
Aufgabe 220711:
Gegeben seien

a) ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm und vier Rechtecke mit jeweils einer Länge von 4 cm und einer Breite von 1 cm,
b) ein Quadrat mit der Seitenlänge 3 cm und vier rechtwinklige Dreiecke mit $a_1 = 6$ cm und $b_1 = 3$ cm,
c) zwei rechtwinklige Dreiecke mit $a_1 = 6$ cm und $b_1 = 3$ cm, zwei rechtwinklige Dreiecke mit $a_2 = b_2 = 3$ cm sowie ein Parallelogramm mit $g = h_g = 3$ cm und $\alpha = 45°$.

Dabei seien a_1 und b_1 bzw. a_2 und b_2 die Längen derjenigen Dreiecksseiten, die den rechten Winkel einschließen; g sei die Länge einer Seite des Parallelogramms und h_g die Länge der auf dieser Seite senkrecht stehenden Höhe sowie α die Größe eines Innenwinkels des Parallelogramms.

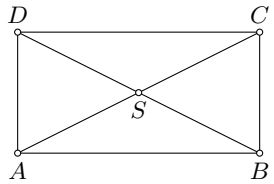
Lege die bei a), b) und c) genannten fünf geometrischen Figuren jeweils so, dass sie eine Quadratfläche vollständig bedecken, ohne sich gegenseitig ganz oder teilweise zu überlagern und ohne über die bedeckte Quadratfläche irgendwo hinauszuragen!
Als Lösung genügt für jede der Aufgaben a), b), c) eine Zeichnung.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a)  b)  c) 

Aufgabe 230713:
Es sei $ABCD$ ein Rechteck, dessen Diagonalen einander im Punkt S schneiden. Der Winkel $\angle ASB$ habe die Größe 120°.
Ermittle die Diagonalenlängen AC und BD in Abhängigkeit von der Seitenlänge BC!

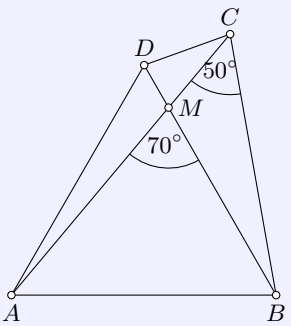
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da im Rechteck die Diagonalen gleichlang sind und einander halbieren, gilt
(1) $AS = BS = CS = DS$



Das Dreieck BCS ist somit gleichschenklig, demnach gilt
(2) $\angle CBS = \angle BCS$
Nach dem Innenwinkelsatz gilt daher
(3) $\angle CBS + \angle BCS + 60° = 180°$
Aus (2) und (3) folgt $\angle CBS = \angle BCS = 60°$, also ist das Dreieck BCS gleichseitig, und es gilt
(4) $BC = BS$.
Wegen $2BS = BD$ ist $BD = 2BC$. Aus (1) und (4) folgt $AC = BD = 2BC$.

Aufgabe 250713:

Die Schüler Gerd und Uwe diskutieren über folgende Forderungen, die an ein konvexes Viereck $ABCD$ gestellt werden (siehe Abbildung).
Es soll $AB = BC = AD$ gelten, und wenn M der Schnittpunkt der beiden Diagonalen AC und BD ist, so soll der Winkel $\angle BMA$ die Größe 70° und der Winkel $\angle BCM$ die Größe 50° haben.
Gerd behauptet, dass durch diese Forderungen die Größe des Winkels $\angle DAM$ eindeutig bestimmt ist.



Uwe vertritt die Meinung, dass es konvexe Vierecke gibt, die diese Forderungen erfüllen, aber unterschiedliche Größen des Winkels $\angle DAM$ aufweisen. Wer hat recht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In jedem konvexen Viereck $ABCD$, das die Forderungen erfüllt, gelten für die Winkelgrößen

$$\angle BAC = \angle BAM = \alpha, \quad \angle ABD = \angle ABM = \beta, \quad \angle ADB = \angle ADM = \gamma, \quad \angle DAM = \angle DAC = \phi$$

folgende Aussagen:
Da $\angle BAC$ und $\angle BCA$ $(= \angle BCM)$ Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ABC sind, ist $\alpha = 50°$.
Nach dem Innenwinkelsatz, angewandt auf das Dreieck ABM, folgt daher $\beta = 180° - 70° - \alpha = 60°$. Da $\angle ADB$ und $\angle ABD$ Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ABD sind, ist $\gamma = \beta = 60°$.

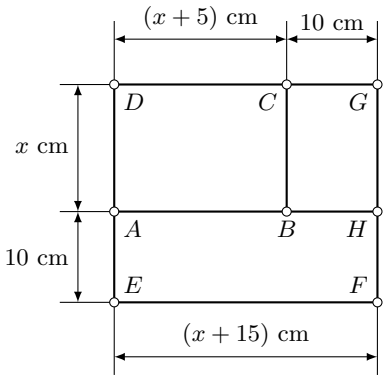
Nach dem Außenwinkelsatz, angewandt auf das Dreieck ADM, folgt $\gamma + \phi = 70°$, also $\phi = 70° - \gamma = 10°$.
Diese Winkelgröße ist somit durch die Forderungen eindeutig bestimmt; Gerd hat recht, Uwe nicht.

Aufgabe 250714:
Von einem Rechteck ist bekannt:

(1) Die beiden längeren Seiten des Rechtecks sind jeweils 5 cm länger als die kürzeren.
(2) Wenn man jede Seite des Rechtecke um 10 cm verlängert, wird der Flächeninhalt des Rechtecks um 430 cm^2 größer.

Ermittle die Seitenlängen des ursprünglichen Rechtecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



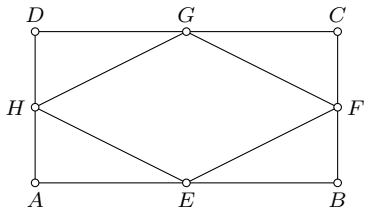
$ABCD$ sei ein Rechteck, das (1) erfüllt, und es gelte $AD = BC = x$ cm sowie $AB = DC = (x + 5)$ cm. $EFGD$ sei ein Rechteck, dessen Seiten jeweils 10 cm länger als die des Rechtecks $ABCD$ sind (siehe Abbildung). Dann gilt

$$ED = FG = (x + 10)cm \qquad \text{und} \qquad EF = DG = AH = (x + 15)cm$$

Der Flächeninhaltszuwachs lässt sich als Summe der Flächeninhalte der Rechtecke $AEFH$ und $BHGC$ darstellen, und es gilt wegen (2): $10 \cdot (x + 15) + 10 \cdot x = 430$.
Formt man die linke Seite der Gleichung mit Hilfe des Distributivgesetzes um, so folgt $10x + 150 + 10x = 430$. Wegen $10x + 10x = 20x$ folgt weiter $x = 14$. Die gesuchten Seitenlängen betragen daher 14 cm und 19 cm.

Aufgabe 260714:
Ein Junger Mathematiker zeichnet ein Rechteck und halbiert die Seiten. Er vermutet, dass die vier Seitenmittelpunkte Eckpunkte eines Rhombus sind.
Untersuche, ob diese Vermutung für jedes Rechteck wahr ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



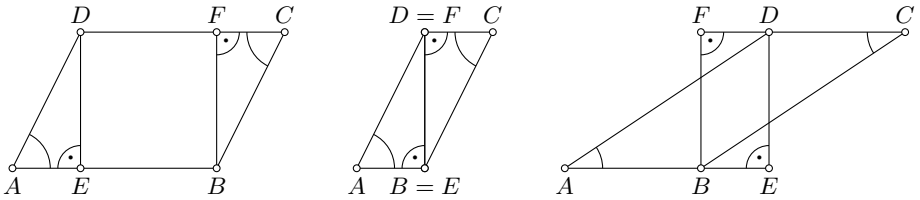
Die Eckpunkte des Rechtecks seien A, B, C, D, die Mittelpunkte der Seiten E, F, G, H (siehe Abbildung).

Da gegenüberliegende Seiten des Rechtecks einander gleichlang sind und da alle Seiten des Rechtecks halbiert werden, gilt: $AE = EB = DG = GCundAH = HD = BF = FC$
Außerdem sind alle Innenwinkel des Rechtecks $ABCD$ gleich groß. Demzufolge sind die Dreiecke HAE, EBT, FCG und GDH nach (sws) kongruent.

Nach den Eigenschaften kongruenter Dreiecke folgt: $HE = EF = FG = GH$, also sind alle Seiten des Vierecks $EFGH$ gleichlang, somit ist es ein Rhombus.

Aufgabe 280713:
a) Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$, in dem der Winkel $\angle DAB$ ein spitzer Winkel ist!
Konstruiere das Lot von D auf die Gerade durch A und B; den Fußpunkt dieses Lotes bezeichne mit E! Konstruiere das Lot von B auf die Gerade durch C und D; den Fußpunkt dieses Lotes bezeichne mit F!
b) Beweise, dass in jedem solchen Parallelogramm $ABCD$ für die so konstruierten Punkte E, F $\triangle AED \cong \triangle CFB$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) In den Abbildungen sind drei Beispiele einer geforderten Zeichnung angegeben.

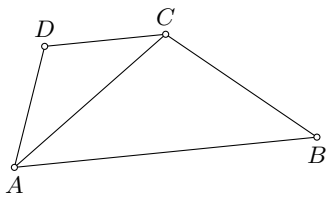


b) Für jedes solche Parallelogramm $ABCD$ und die konstruierten Punkte E, F gilt
$AD = CB$ (Gegenseiten im Parallelogramm) (1)
$\angle AED = \angle CFB$ (Lote, nach Konstruktion) (2)
$\angle DAE = \angle BCF$ (gegenüberliegende Winkel im Parallelogramm) (3)

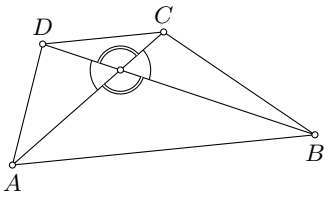
Aus (1), (2), (3) folgt: Die Dreiecke AED und CFB stimmen in einer Seite und zwei Winkeln überein, nach dem Innenwinkelsatz also auch im dritten Winkel. Daher folgt aus den Kongruenzsatz (wsw): $\triangle AED \cong \triangle CFB$.

Aufgabe 290714:
Bei der Wiederholung des Innenwinkelsatzes für konvexe Vierecke geraten Anja und Klaus in einen Streit: Klaus behauptet:
„Zerlegt man ein beliebiges konvexes Viereck $ABCD$ durch Einzeichnen der Diagonalen AC in die beiden Teildreiecke ABC und ADC, dann beträgt die Innenwinkelsumme jedes dieser Teildreiecke $180°$. Folglich muss im Viereck $ABCD$ die Innenwinkelsumme $2 \cdot 180° = 360°$ betragen.“
Anja entgegnet: „Zeichnet man aber noch die zweite Diagonale BD ein, dann erhält man vier Teildreiecke. Die Innenwinkelsumme von $ABCD$ muss folglich $4 \cdot 180° = 720°$ betragen.“
Untersuche, welcher der beiden Schüler recht hat! Begründe deine Entscheidung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Klaus hat recht. Wie die erste Abbildung zeigt, sind sämtliche Innenwinkel der Dreiecke ABC und ADC auch Innenwinkel bzw. Teile von Innenwinkeln des Vierecks $ABCD$.
Außerdem gibt es keine Innenwinkel bzw. Teile von Innenwinkeln dieses Vierecks, die nicht Innenwinkel der genannten Dreiecke sind.

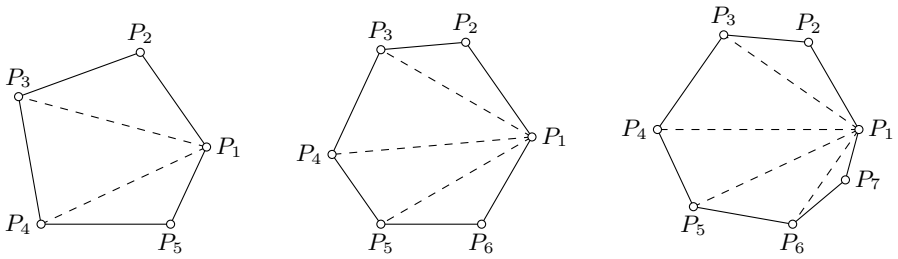


Anja hat dagegen nicht recht, wie die zweite Abbildung zeigt, liegen nämlich vier der Innenwinkel der durch die beiden Diagonalen entstandenen Dreiecke innerhalb des Vierecks $ABCD$ und bilden zusammen einen Vollwinkel. Folglich hätte Anja von den erhaltenen 720° noch 360° subtrahieren müssen, was als Innenwinkelsumme dann die von Klaus ermittelten 360° ergeben hätte.

Aufgabe 300714:
In jedem Dreieck beträgt bekanntlich die Innenwinkelsumme 180° in jedem Viereck 360°.
a) Zeichne je ein Fünfeck, ein Sechseck und ein Siebeneck! Miss die Innenwinkel und berechne jeweils die Innenwinkelsumme! Was vermutest du?
b) Beweise deine Vermutung für jedes Fünfeck, Sechseck und Siebeneck!
c) Versuche eine Formel zu finden und zu beweisen, die für jede natürliche Zahl $n > 3$ die Innenwinkelsumme in jedem n-Eck angibt!

Hinweis: In dieser Aufgabe werden alle n-Ecke als konvex vorausgesetzt, d. h. als n-Ecke, in denen kein Innenwinkel größer als 180° ist. Außerdem wird in dieser Aufgabe vorausgesetzt, dass kein Innenwinkel gleich 180° ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Die erste Abbildung soll ein Fünfeck mit den Innenwinkelgrößen 120°, 130°, 80°, 120°, 90°, ein Sechseck mit den Innenwinkelgrößen 110°, 120°, 140°, 130°, 110°, 110° und ein Siebeneck mit den Innenwinkelgrößen 130°, 120°, 140°, 120°, 140°, 120°, 130° zeigen.

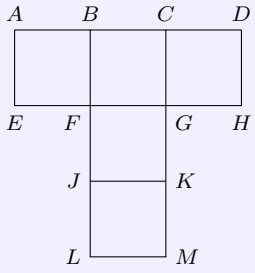
Vermutung: In jedem Fünfeck, Sechseck bzw. Siebeneck beträgt die Innenwinkelsumme 540°, 720° bzw. 900°.

b) Jedes Fünfeck, Sechseck bzw. Siebeneck lässt sich wie in Abbildung in drei, vier bzw. fünf Teildreiecke zerlegen, wobei durch Addition der Innenwinkelsummen dieser Teildreiecke die Innenwinkelsumme des betreffenden Fünf-, Sechs- bzw. Siebenecks entsteht. Daher beträgt diese Innenwinkelsumme $3 \cdot 180° = 540°$ bzw. $4 \cdot 180° = 720°$ bzw. $5 \cdot 180° = 900°$.

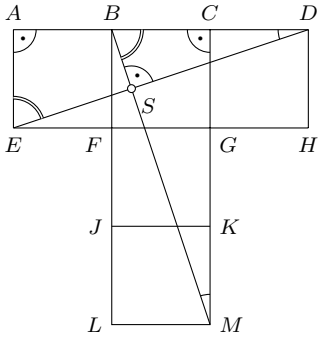
c) Jedes n-Eck $P_1P_2P_3...P_{n-1}P_n$ wird durch die Diagonalen P_1P_3, ..., P_1P_{n-1} in die $n-2$ Teildreiecke $P_1P_2P_3$, $P_1P_3P_4$, ..., $P_1P_{n-1}P_n$ zerlegt. Durch Addition der Innenwinkelsumme dieser Teildreiecke entsteht die Innenwinkelsumme des n-Ecks. Diese beträgt daher $(n-2)\cdot 180°$.

Aufgabe 310713:
Aus fünf einander kongruenten Quadraten werde eine T-förmige Figur zusammengesetzt. Die Eckpunkte der Quadrate seien wie in der Abbildung bezeichnet.

a) Zeichne eine solche Figur mit $AB = 2$ cm und darin die Strecken BM und DE; ihren Schnittpunkt bezeichne mit S und stelle eine Vermutung über die Größe des Winkels $\angle BSD$ auf!
b) Beweise diese Vermutung!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



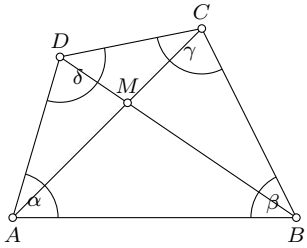
a) Zeichnung: siehe Abbildung; Vermutung: $\angle BSD = 90°$.

b) Beweis:
Es gilt: $EA = BC$ Seitenlänge kongruenter Quadrate, $AD = CM$ Dreifaches dieser Seitenlänge, $\angle EAD = \angle BCM = 90°$.
Nach dem Kongruenzsatz (sws) gilt also $\triangle EAD = \triangle BCM$ und daher $\angle AED = \angle CBM$. (1)
Wegen $\angle EAD = 90°$ gilt ferner $\angle EAD + \angle EDA = 90°$ (Winkelsumme im Dreieck AED). (2)
Aus (1) und (2) folgt wegen $\angle CBM = \angle DBS$ und $\angle EDA = \angle SDB$ auch $\angle DBS + \angle SDB = 90°$. Wegen der Winkelsumme im Dreieck BSD folgt hieraus $\angle BSD = 90°$.

II Runde 2

Aufgabe V10724:
Beweise folgende Behauptung!
Wenn in einem Viereck die Diagonalen gleich lang sind und einander halbieren, dann sind alle Winkel des Vierecks gleich groß.

Lösung von Steffen Polster:



Voraussetzung: $AC = BD$, $AM = MC$, $BM = MD$

Behauptung: $\alpha = \beta = \gamma = \delta$

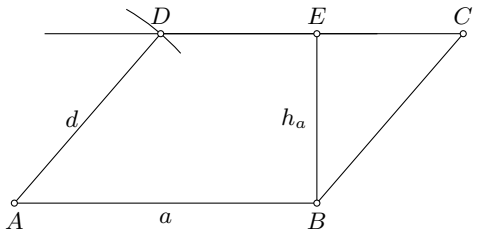
Beweis: Die Dreiecke ABM und DMC sind gleichschenklig und einander kongruent nach SWS, daher $\angle MAB = \angle ABM = \angle MCD = \angle CDM$.
Dasselbe trifft für die Dreiecke DAM und MBC zu. Daher $\angle DAM = \angle MDA = \angle MBC = \angle BCM$. Da

$$\alpha = \angle DAM + \angle MAB \qquad \beta = \angle ABM + \angle MBC$$
$$\gamma = \angle MCD + \angle BCM \qquad \delta = \angle CDM + \angle MDA$$

gilt, folgt daraus $\alpha = \beta = \gamma = \delta$.
Da die Winkelsumme im Viereck 360° beträgt und laut Aufgabe die Diagonalen einander halbieren, ist jeder der vier Winkel ein Rechter, das Viereck also ein Rechteck.

Aufgabe V10725:
Konstruiere ein Parallelogramm $ABCD$, von dem du weißt: $AB = a = 5{,}0$ cm, $AD = d = 3{,}7$ cm, $F = 14$ cm^2.
Wie viel
a) Parallelogramme
b) Rechtecke
c) Quadrate
gibt es insgesamt, die mit $ABCD$ in a und F übereinstimmen?

Lösung von Steffen Polster:



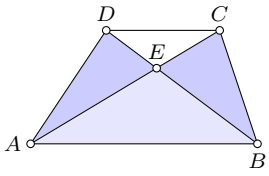
Gegeben sind $AB = a = 5$ cm, $AD = d = 3{,}7$ cm und $F = 14$ cm^2. Für die Konstruktion wird h_a über $\frac{F}{a} = h_a = 2{,}8$ cm ermittelt.

Konstruktion: Man zeichne die Seite AB. Im Abstand von h_a konstruiere man eine Parallele zu AB durch einen Punkt E mit $BE = h_a$.
Ein Kreisbogen um A mit dem Radius $AD = d$ schneidet die Parallele in einem Punkt D. Der Punkt C ergibt sich durch Parallelverschiebung von AD durch B.
$ABCD$ ist ein Parallelogramm, dass der Aufgabenstellung entspricht.

Durch Nachdenken über die Bestimmungsstücke von Parallelogramm, Rechteck und Quadrat kommt man zu dem Schluss:
a) Es gibt beliebig viele Parallelogramme, die mit $ABCD$ in a und F übereinstimmen.
b) Es gibt genau ein Rechteck, dass mit $ABCD$ in a und F übereinstimmt.
c) Es gibt kein Quadrat, dass mit $ABCD$ in a und F übereinstimmt.

Aufgabe 010723:
Es ist zu beweisen, dass in einem beliebigen Trapez die Dreiecke, die aus den Diagonalenabschnitten und den Schenkeln des Trapezes gebildet werden, flächengleich sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Beweis:
Seien die Eckpunkte des Trapezes A, B, C und D, wobei $AB \parallel CD$ gelte. Dann sind die Dreiecke ABC und ABD flächengleich, da sie die Grundseite AB und die Höhe (d. h. den Abstand der parallelen Seiten) gemeinsam haben. Beide Dreiecke enthalten das Dreieck ABE, wobei E der Diagonalenschnittpunkt sei.

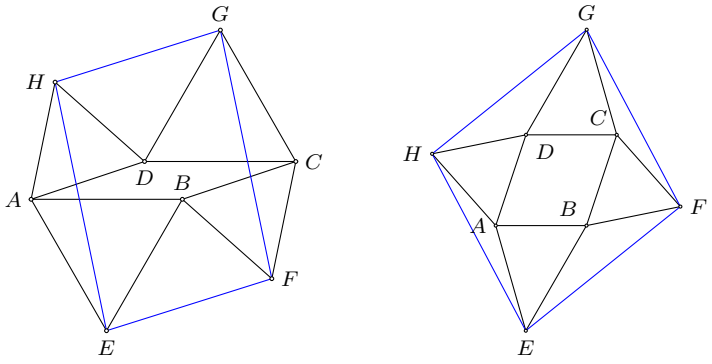
Wenn man von den Flächen von ABC bzw. ABD jeweils die Fläche von ABE wegnimmt, müssen die übrig bleibenden Flächen von AED und BEC auch gleich groß sein. Diese sind aber genau die beiden Dreiecke, deren Flächengleichheit zu zeigen ist.

Aufgabe 040724:
Über den Seiten eines Parallelogramms $ABCD$ werden die gleichseitigen Dreiecke ABE, BCF, CDG und ADH so errichtet, dass die Dreiecksflächen außerhalb des Parallelogramms liegen.
Es ist zu beweisen, dass E, F, G und H die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn seine gegenüberliegenden Seiten gleiche Längen besitzen.

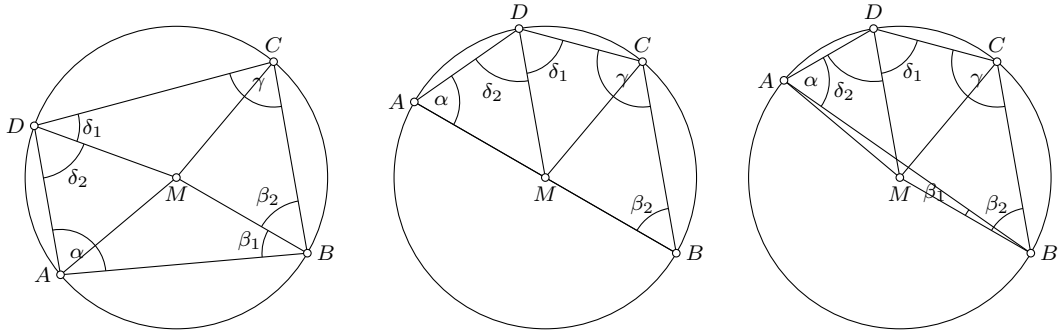
1. Möglichkeit
Man kann die Längengleichheit gegenüberliegender Seiten des Vierecks $EFGH$ dadurch beweisen, dass die gesamte Figur bei einer Drehung um den Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD um 180° mit sich zur Deckung kommt.

2. Möglichkeit
Man zeigt die Längengleichheit gegenüberliegender Seiten im Viereck $EFGH$ etwa nach dem Kongruenzsatz SWS, angewendet auf die Dreieckspaare EFB, GHD und CGF, AEH. (Fallunterscheidung nötig!) Die Punkte A und C können auch auf den Seiten HE bzw. GF liegen.



Aufgabe 060722:
In den Kreis k mit dem Mittelpunkt M sei das nicht überschlagene Viereck $ABCD$ so eingezeichnet, dass alle seine Seiten Sehnen des Kreises sind (Sehnenviereck).
Beweise, dass in jedem Sehnenviereck die Summe der Gradmaße je zweier gegenüberliegender Winkel 180° beträgt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir betrachten irgend zwei gegenüberliegende Winkel und bezeichnen ihre Gradmaße mit α und γ und ihre Scheitelpunkte mit A und C, so dass also α und γ die Gradmaße der Winkel $\angle DAB$ und $\angle BCD$ sind.
Ferner seien β_1, β_2, δ_1, bzw. δ_2 die Gradmaße der Winkel $\angle ABM$, $\angle MBC$, $\angle CDM$ und $\angle MDA$.



Behauptung: $\alpha + \gamma = 180°$
Beweis: Wir unterscheiden 3 Fälle.
Fall 1: Punkt M liegt im Innern des Sehnenvierecks:
In den Dreiecken $\triangle ABM, \triangle BCM, \triangle CDM$ und $\triangle DAM$ sind die von M ausgehenden Seiten Radien des Kreises k. Diese Dreiecke sind daher gleichschenklig mit der Spitze M. Daraus folgt:

$$(1) \quad \beta_1 + \delta_2 = \alpha$$
$$(2) \quad \beta_2 + \delta_1 = \gamma$$

Weiterhin gilt:

$$(3) \quad \alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta_1 + \delta_2 = 360°$$

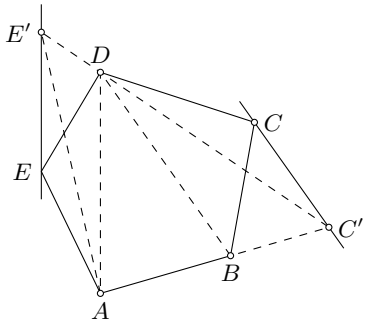
als Winkelsumme im Viereck $ABCD$.
Aus (1), (2) und (3) folgt $\alpha + \gamma + \alpha + \gamma = 360°$ und damit $\alpha + \gamma = 180°$.

Fall 2: Punkt M liegt auf dem Rande des Sehnenvierecks:
In diesem Fall ist entweder $\beta_1 = 0$ oder $\beta_2 = 0$ oder $\delta_1 = 0$ oder $\delta_2 = 0$. Der Beweis verläuft analog.

Fall 3: Punkt M liegt außerhalb des Sehnenvierecks:
In diese Falle ist entweder β_1 durch $-\beta_1$ oder β_2 durch $-\beta_2$ oder δ_1 durch $-\delta_1$ oder δ_2 durch $-\delta_2$ oder zu ersetzen.
Der Beweis verläuft analog Fall 1.

Aufgabe 080724:
Ein beliebig vorgegebenes konvexes Fünfeck $ABCDE$ ist unter Beibehaltung des Eckpunktes A zeichnerisch in ein flächengleiches Dreieck zu verwandeln.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Das Fünfeck $ABCDE$ lässt sich in die Teildreiecke $\triangle ADE$, $\triangle ABD$ und $\triangle BCD$ zerlegen. Man zieht durch C zu DB die Parallele und verlängert AB über B hinaus bis zum Schnitt mit dieser Parallelen. Der Schnittpunkt sei C'.

Dann ist das Dreieck $\triangle BC'D$ flächeninhaltsgleich dem Dreieck $\triangle BCD$; denn es stimmt in den Längen der Grundseite und der zugehörigen Höhe mit diesem überein.
Nun zieht man durch E die Parallele zu AD und verlängert $C'D$ über D hinaus bis zum Schnittpunkt E' mit dieser. Das Dreieck $\triangle ADE'$ ist dann aus dem gleichen Grunde wie oben flächeninhaltsgleich dem Dreieck $\triangle ADE$.
Daher ist das aus den Teildreiecken $\triangle ADE'$, $\triangle ABD$ und $\triangle BC'D$ bestehende Dreieck $\triangle AC'E'$ flächeninhaltsgleich dem Fünfeck $ABCDE$.

Aufgabe 120722:
Beweise den folgenden Satz:
Wenn in einem konvexen Viereck $ABCD$ die Mittelpunkte beider Diagonalen zusammenfallen, d. h. die Diagonalen einander halbieren, so ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In dem Viereck $ABCD$ sei E der gemeinsame Mittelpunkt der beiden Diagonalen AC und BD. Dann gilt nach Voraussetzung: $AE = EC$ sowie $BE = ED$.

Nun gilt weiter: $\angle AEB = \angle DEC$ und $\angle AED = \angle BEC$ als Scheitelwinkel. Daraus folgt: $\triangle AEB = \triangle DEC$ und $\triangle AED = \triangle BEC$ (je sws).

Folglich gilt: $\angle EAB = \angle ECD$ (1) sowie $\angle EAD = \angle ECB$ (2).
Aus (1) folgt: $AB \parallel DC$
aus (2) folgt: $AD \parallel BC$, Umkehrung des Satzes über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. d. h., $ABCD$ ist ein Parallelogramm.

Aufgabe 150721:
a) Ein Stück Land habe die Form eines Rechtecks, dessen eine Seitenlänge die andere um 75 m übertrifft und dessen Umfang insgesamt 650 m beträgt.
Ermittle die Seitenlängen und den Flächeninhalt (in Hektar) dieses Landstücks!

b) Auf der ganzen Fläche des genannten Landstücks sollen Obstbäume derart gepflanzt werden, dass die Bäume in jeweils zu den Rechteckseiten parallelen Reihen stehen, also nicht etwa „auf Lücke“ gesetzt sind, und der Abstand von Baum zu nächststehendem Baum und der von einer Randseite zum nächststehenden Baum jeweils 5 m beträgt.
Ermittle die genaue Anzahl von Bäumen, die unter den angegebenen Bedingungen gepflanzt werden können!

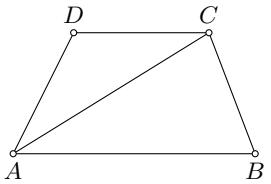
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn die Angaben für ein Rechteck zutreffen, dann ergibt sich der Umfang als Summe aus dem Vierfachen der kleineren Seitenlänge und dem Doppelten von 75 m. Das Vierfache der kleineren Seitenlänge beträgt somit 650 m - 150 m = 500 m, die kleinere Seitenlänge also 125 m, die größere 200 m.
Der Flächeninhalt eines derartigen Rechtecks beträgt $125 \cdot 200$ m^2 = 25000 m^2 = 2,5 ha.

b) Parallel zur größeren Rechteckseite können nach den Bedingungen der Aufgabe $\frac{125}{5} - 1 = 24$ und parallel zur kleineren $\frac{200}{5} - 1 = 39$ Bäume gepflanzt werden. Die gesuchte Anzahl der Bäume beträgt somit $24 \cdot 39 = 936$.

Aufgabe 190722:
a) Beweise folgenden Satz!
Wenn in einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ die Gleichung $CD = AD$ (1) gilt, dann gilt die folgende Aussage (2): Die Diagonale AC halbiert den Innenwinkel $\angle BAD$. (2)

b) Beweise auch die folgende Umkehrung!
Wenn in einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ die Aussage (2) gilt, dann gilt die Gleichung (1).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Wegen $AB \parallel CD$ sind $\angle ACD$ und $\angle CAB$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, folglich gilt: $\angle ACD = \angle CAB$ (3).

Wegen (1) ist das Dreieck ACD gleichschenklig mit AC als Basis; seine Basiswinkel sind gleichgroß, also gilt: $\angle ACD = \angle CAD$ (4). Aus (3) und (4) folgt $\angle CAB = \angle CAD$.

b) Aus $AB \parallel CD$ folgt wie eben (3). Wegen (2) gilt $\angle CAB = \angle CAD$ (5). Aus (3) und (5) folgt (4), also ist das Dreieck ACD gleichschenklig mit AC als Basis; d. h., es gilt (1).

Aufgabe 210721:
a) Ein rechteckiges Flurstück ist durch einen Weg in zwei rechteckige Felder geteilt. Die Länge des Flurstücks, parallel zu diesem Weg gemessen, beträgt 105 m. Die Breite des ersten Teilfeldes beträgt 270 m, die des zweiten Teilfeldes 180 m. Der Weg ist 3 m breit.
Ermittle den Flächeninhalt des ersten Teilfeldes und den des zweiten Teilfeldes!

b) Das gesamte Flurstück wird nun zu einem großen Feld zusammengelegt, indem der Weg mit umgepflügt wird.
Ermittle den Flächeninhalt des so entstehenden großen Feldes!

c) Ermittle, wie viel Meter Draht für einen elektrischen Weidezaun gebraucht werden, wenn dieses Gesamtfeld vollständig mit zwei Drähten umspannt werden soll! Dabei sollen Durchhang und Befestigung des Drahtes dadurch berücksichtigt werden, dass der doppelte Umfang um ein Hundertstel erhöht wird.
(Es ist auf volle Meter zu runden.)

Hinweis zu a) und b): Die Flächeninhalte sind in Hektar anzugeben, auf zwei Dezimalstellen gerundet.

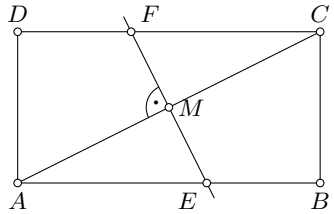
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Das erste Teilfeld hat die Länge 105 m und die Breite 270 m, wegen $105 \cdot 270 = 28350$ also den Flächeninhalt 28350 m^2, d. h. in der angegebenen Weise gerundet 2,84 ha.
Das zweite Teilfeld hat die Länge 105 m und die Breite 180 m, wegen $105 \cdot 180 = 18900$ also den Flächeninhalt 18900 m^2, d. h. 1,89 ha.

b) Das gesamte Flurstück hat die Länge 105 m und wegen $270 + 3 + 180 = 453$ die Breite 453 m, wegen $105 \cdot 453 = 47565$ also den Flächeninhalt 47565 m^2, d. h. gerundet 4,76 ha.

c) Das gesamte Flurstück hat wegen $2 \cdot (105 + 453) = 2 \cdot 558 = 1116$ den Umfang 1116 m. Für den Zaun werden wegen $2 \cdot 1116 = 2232$ und wegen $2232 : 100 = 22{,}32$ sowie $2232 + 22{,}32 = 2254{,}32$ daher gerundet 2254 m Draht gebraucht.

Aufgabe 230722:
Es sei $ABCD$ ein Rechteck; der Mittelpunkt der Diagonale AC sei M. Die Mittelsenkrechte auf AC schneide die Gerade durch A und B in E und die Gerade durch C und D in F.
Beweise, dass dann die Dreiecke AEM und CFM kongruent sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

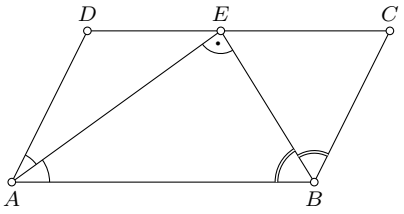


Es gilt:
(1) $AM = MC$; denn M ist laut Voraussetzung der Mittelpunkt der Strecke AC.
(2) $\angle FMC = \angle AME = 90°$; denn die Gerade durch F und E ist laut Voraussetzung die Mittelsenkrechte der Strecke AC und steht somit senkrecht auf AC.
(3) $AB \parallel CD$; da $ABCD$ laut Voraussetzung ein Rechteck ist.
(4) $\angle MAE = \angle MCF$; da diese Winkel Wechselwinkel sind, die wegen (3) an geschnittenen Parallelen liegen.

Aus (1), (2) und (4) folgt nach dem Kongruenzsatz wsw, dass die Dreiecke AEM und CEM kongruent sind.

Aufgabe 230724:
Von einem Parallelogramm $ABCD$ wird vorausgesetzt, dass die Halbierenden der Winkel $\angle DAB$ und $\angle ABC$ einander in einem Punkt E schneiden, der auf der Strecke CD zwischen C und D liegt. Ferner wird vorausgesetzt, dass die Strecken AE und BE die Längen 7 cm bzw. 5 cm haben.
Ermittle aus diesen Voraussetzungen den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Das Dreieck ABE und das Parallelogramm $ABCD$ stimmen in der Seite AB und in der zugehörigen Höhe überein.
Deshalb ist der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$ doppelt so groß wie der des Dreiecks ABE.

Da im Parallelogramm die Summe der Größen benachbarter Winkel 180° beträgt, ist die Summe der Winkel $\angle EAB$ und $\angle ABE$ gleich 90°, das Dreieck ABE ist also rechtwinklig mit E als Scheitel des rechten Winkels.
Folglich beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks ABE wegen $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 = 17{,}5$ mithin 17,5 cm^2 und der des Parallelogramms $ABCD$ daher 35 cm^2.

Aufgabe 240722:
Ein Garten von rechteckiger Gestalt ist genau 13 m länger als breit. Um ihn vollständig zu umzäunen, benötigt man genau 92 m Zaun.

a) Berechne den Flächeninhalt des Gartens!

b) Der Garten soll vollständig in Beete und Wege aufgeteilt werden, wobei folgende Bedingungen zu erfüllen sind:
Jedes Beet hat die Gestalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 3 m und 1 m. Zwischen je zwei benachbarten Beeten und zwischen dem Zaun und den Beeten ist überall ein 25 cm breiter Weg angelegt.
Untersuche, ob es eine Aufteilung des Gartens gibt, bei der diese Bedingungen erfüllt sind! Wenn das der Fall ist, so ermittle für eine solche Aufteilung die Anzahl der Beete!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Sind a und b die in Metern angegebene Länge bzw. Breite des Gartens, so gilt $a = 13 + b$ (1) sowie, weil der halbe Umfang 92 m : 2 = 46 m beträgt, $a + b = 46$. (2)

Setzt man a aus (1) in (2) ein, so folgt $13 + 2b = 46$, d. h. $b = 16{,}5$ und damit aus (1) $a = 29{,}5$.
Der Flächeninhalt des Gartens beträgt folglich 16,5 m · 29,5 m = 486,75 m^2.

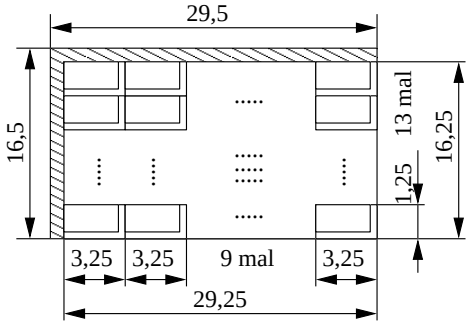
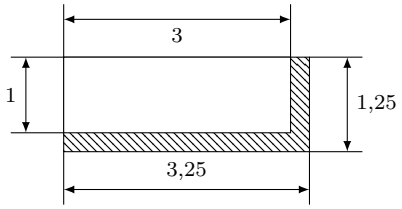


Abbildung a (nicht maßstabsgetreu)

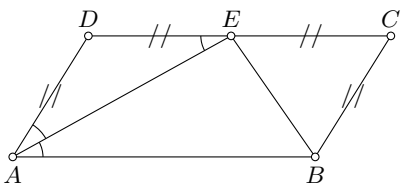
b) Legt man zunächst längs zweier benachbarter Seiten des Gartens einen Weg von 25 cm Breite an (in Abbildung a schraffiert), so verbleibt ein Rechteck von 29,25 m Länge und 16,25 m Breite.



Wenn man dieses Rechteck in Teilrechtecke mit den Seitenlängen 3,25 m und 1,25 m aufteilen kann (Abbildung b), so erhält man eine Anordnung von Beeten, die den geforderten Bedingungen genügt.
Eine Möglichkeit hierzu zeigt Abbildung a, wie sich wegen 29,25 : 3,25 = 9 und 16,25 : 1,25 > 13 bestätigen lässt. Bei dieser Aufteilung ist die Anzahl der Beete $9 \cdot 13 = 117$.

Aufgabe 240723:
Von einem Parallelogramm $ABCD$ wird vorausgesetzt, dass der Schnittpunkt E der beiden Winkelhalbierenden von $\angle BAD$ und $\angle CBA$ auf der Seite CD liegt.
Beweise, dass unter dieser Voraussetzung E stets der Mittelpunkt der Seite CD ist!

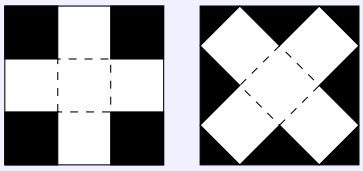
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da im Parallelogramm $ABCD$ die gegenüberliegenden Seiten AB und CD zueinander parallel sind und da E auf CD liegt, gilt nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen $\angle BAE = \angle DEA$.

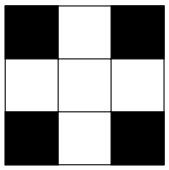
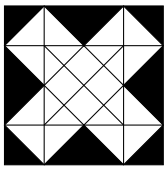
Da AE nach Voraussetzung den Winkel $\angle BAD$ halbiert, gilt $\angle BAE = \angle EAD$. Daher folgt $\angle DEA = \angle EAD$.
Nach der Umkehrung des Satzes über die Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken folgt hieraus $AD = ED$. Analog erhält man $BC = EC$.
Da nach Voraussetzung AD und BC gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms sind, gilt $AD = BC$. Also ist $ED = EC$.
Da E nach Voraussetzung auch auf der Seite CD liegt, ist damit E als Mittelpunkt von CD nachgewiesen.

Aufgabe 240724:
Aus einem quadratischen Stück Blech der Seitenlänge a soll ein oben offener würfelförmiger Kasten hergestellt werden. Für das Netz zum Herstellen eines solchen Kastens werden die beiden Varianten in dem Bild zur Diskussion gestellt.
Beide Netze sind so angeordnet, dass die Diagonalen des gegebenen Quadrates jeweils Symmetrieachsen des Netzes sind.



Ermittle in Abhängigkeit von a die Größe des Abfalls (im Bild schwarz) bei beiden Varianten! Wenn bei einer Variante ein kleinerer Abfall entsteht, so gib diese Variante an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

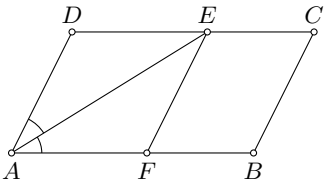
a)  b) 

Variante 1:
Die Quadratfläche kann in genau 9 kongruente Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{a}{3}$ aufgeteilt werden (Abbildung a); davon sind 4 Quadrate Abfall, die restlichen 5 bilden das Netz zum Herstellen des Kastens. Folglich beträgt hier der Abfall $\frac{4}{9}a^2$.

Variante 2:
Die Quadratfläche kann in genau 32 kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit der Schenkellänge $\frac{a}{4}$ aufgeteilt werden (z. B. wie in Abbildung b); davon sind 12 Dreiecke Abfall, die restlichen 20 bilden das Netz zum Herstellen des Kastens. Der Abfall beträgt $\frac{3}{8}a^2$.
Vergleich: Wegen $4 \cdot 8 > 3 \cdot 9$ gilt $\frac{4}{9} > \frac{3}{8}$. Folglich ist der Abfall bei Variante 2 kleiner als bei Variante 1.

Aufgabe 260723:
Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$. Die Halbierende des Winkels $\angle DAB$ schneide die Seite CD in einem inneren Punkt E. Die Parallele durch E zu AD schneide AB in F.
Beweise, dass das Viereck $AFED$ ein Rhombus ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung ist $AB \parallel CD$ und $FE \parallel AD$, somit ist das Viereck $AFED$ ein Parallelogramm mit $AF = DE$ und $AD = EF$.
Da der Winkel $\angle DAF$ durch AE halbiert wird, gilt $\angle DAE = \angle EAF$. Außerdem sind die Winkel $\angle EAF$ und $\angle AED$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen und somit gleichgroß.
Damit gilt $\angle DAE = \angle EAF = \angle AED$, und das Dreieck AED ist nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes gleichschenklig mit $AD = DE$. Also ist $AF = DE = AD = EF$, d. h., das Parallelogramm $AFED$ hat vier gleichlange Seiten und ist damit ein Rhombus.

Aufgabe 280723:
Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$, das folgende Bedingungen erfüllt:
(1) Die Längen der Seiten AB und CD verhalten sich wie $5 : 4$.
(2) Die Mittellinie des Trapezes hat eine Länge von 5,4 cm.
(3) Die Höhe des Trapezes ist halb so groß wie die Länge der Seite AB.
Untersuche, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ eindeutig bestimmt ist. Ist dies der Fall, dann gib den Flächeninhalt des Trapezes in Quadratzentimetern an!

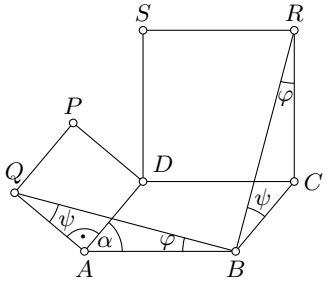
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen (1) gilt $AB : CD = 5 : 4$, also $CD = \frac{4}{5}AB$. (4)
Da die Länge der Mittellinie im Trapez gleich der Hälfte der Summe der Längen der beiden parallelen Seiten ist, gilt wegen (2) $\frac{1}{2}(AB + CD) = 5{,}4$ cm. Hieraus und aus (4) folgt

$$\frac{1}{2}(AB + \frac{4}{5}AB) = 5{,}4 \text{ cm} \Rightarrow AB = 6 \text{ cm}$$

Nach (3) folgt hieraus: Die Höhenlänge des Trapezes beträgt 3 cm. Daraus und aus (2) ergibt sich nach der Formel für den Flächeninhalt des Trapezes, dass dieser (wegen $5{,}4 \cdot 3 = 16{,}2$) durch die Angaben (1) bis (3) eindeutig bestimmt ist; er beträgt 16,2 cm^2.

Aufgabe 310723:
a) Zeichne ein Parallelogramm $ABCD$, in dem die Seitenlängen $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm betragen und der Winkel $\angle BAD$ die Größe $\alpha = 50°$ hat!
Errichte über den Seiten AD und DC die Quadrate $ADPQ$ und $DCRS$ so, dass diese Quadratflächen vollständig außerhalb der Parallelogrammfläche liegen!
b) Beweise, dass für jedes Parallelogramm $ABCD$, bei dem $\angle BAD$ kleiner als 90° ist, nach dem Konstruieren solcher Quadrate die Strecken BQ und BR einander gleichlang sind und aufeinander senkrecht stehen!

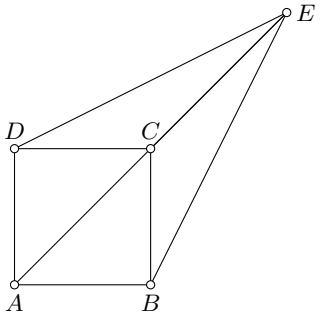
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Abbildung zeigt eine geforderte Zeichnung.



b) Nach Voraussetzung gilt $AB = DC$ (Gegenseiten im Parallelogramm $ABCD$) $= CR$ (Seiten im Quadrat $DCRS$) (1) und $AQ = DA$ (Seiten im Quadrat $ADPQ$) $= CB$ (Gegenseiten im Parallelogramm $ABCD$). (2)
Für $\angle BAD = \alpha < 90°$ gelten die Gleichungen $\angle ABC = 180° - \alpha$ (3) und $\angle BCD = \alpha$ (Winkel im Parallelogramm), wegen $\angle QAD = \angle DCR = 90°$ (Winkel in Quadraten) also $\angle QAB = \angle BCR = 90° + \alpha$. (4)
Aus (1), (2), (4) folgt nach dem Kongruenzsatz sws $\angle ABQ = \angle CRB$, also $BQ = RB$, (5) $\angle ABQ = \angle CRB = \varphi$, (6) $\angle AQB = \angle CBR = \psi$. (7)
Nach (4), (6), (7) folgt aus dem Innenwinkelsatz $\alpha + \varphi + \psi = 90°$; (8) aus (3), (6), (7) und (8) folgt $\angle QBR = 180° - \alpha - \varphi - \psi = 90$. (9) Mit dem Nachweis von (5) und (9) ist der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 320722:
$ABCD$ sei ein Quadrat, sein Flächeninhalt betrage 25 cm^2. Ein Punkt E liege so auf der Verlängerung der Diagonalen AC über C hinaus, dass die Strecke AE doppelt so lang wie die Strecke AC ist. Ermittle unter diesen Voraussetzungen den Flächeninhalt des Vierecks $ABED$!

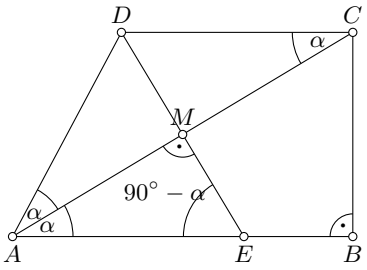
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Dreiecke AED und ACD haben D als gemeinsame Ecke, die der Seite AE bzw. der (in AE enthaltenen) Seite AC gegenüberliegt; sie haben also dieselbe zu diesen Seiten senkrechte Höhe.
Daher und wegen $AE = 2 \cdot AC$ hat AED doppelt so großen Flächeninhalt wie ACD. Ebenso (mit B statt D) folgt: AEB hat doppelt so großen Flächeninhalt wie ACB.
Damit erhält man: Der Flächeninhalt von $ABED$ ist das Zweifache des Flächeninhaltes von $ABCD$; somit beträgt er 50 cm^2.

Aufgabe 320723:
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei B und mit $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm. Die Mittelsenkrechte von AC schneide AC in M und AB in E.
a) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Winkel $\angle MEA$ und $\angle MCB$ einander gleichgroß sind!
b) Ein Punkt D liege so auf der Geraden durch E und M, dass AC den Winkel $\angle DAB$ halbiert. Beweise, dass das Viereck $ABCD$ dann ein Trapez sein muss!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Mit $\angle BAC = \alpha$ gilt wegen $AM \perp ME$ bzw. $AB \perp BC$ nach dem Innenwinkelsatz, auf die Dreiecke AME bzw. ABC angewandt, $\angle MEA = \angle MCB = 90° - \alpha$.

b) Da AC den Winkel $\angle DAB$ halbiert, ist $\angle DAC = \angle BAC$.
Da ferner D auf der Mittelsenkrechten von AC liegt, gilt $AD = CD$. Nach dem Basiswinkelsatz ist also $\angle DCA = \angle DAC$.
Somit gilt $\angle BAC = \angle DCA$, und nach der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes folgt $AB \parallel DC$. Damit ist $ABCD$ als ein Trapez nachgewiesen.

III Runde 3

Aufgabe 020735:
Gegeben ist ein Trapez $ABCD$ und innerhalb des Trapezes ein Kreis, der alle 4 Seiten berührt. Sein Mittelpunkt ist M.
Beweise, dass der Winkel AMD und der Winkel BMC rechte Winkel sind!

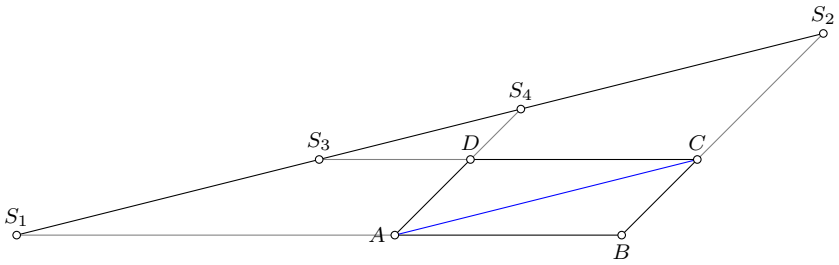
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Trapezinnenwinkel am gleichen Schenkel sind zusammen je 180°. Die Strecken von M zu den Eckpunkten sind die Winkelhalbierenden der Innenwinkel. Daher gilt

$$\angle MDA + \angle DAM = \frac{\alpha + \delta}{2} = 90°$$

Nach dem Innenwinkelsatz für das Dreieck AMD folgt, dass der gesuchte Winkel ebenfalls 90° groß ist. Ebenso gilt das Gesagte am anderen Schenkel des Trapezes.

Aufgabe 030735:
Zeichne ein Parallelogramm und eine außerhalb des Parallelogramms liegende Gerade, die zu einer der Diagonalen des Parallelogramms parallel ist! Verlängere die Seiten des Parallelogramms so, dass sie die Gerade schneiden!
Beweise, dass die beiden von den Verlängerungen je zweier Parallelseiten auf der Geraden begrenzten Abschnitte gleich groß sind!

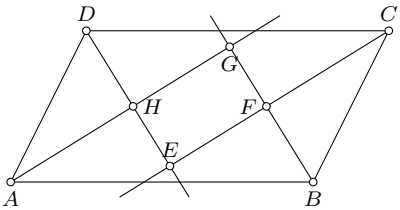
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die beiden Abschnitte sind zur selben Diagonalen parallel und als Parallelogrammseiten auch genau so lang wie diese Diagonalen, also sind sie auch untereinander gleich lang.
In der Darstellung gilt z. B. $S_1S_3 = AC = S_4S_2$.

Aufgabe 040732:
Zeichne ein nicht gleichseitiges Parallelogramm, und beweise, dass die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden dieses Parallelogramms die Eckpunkte eines Rechteckes sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



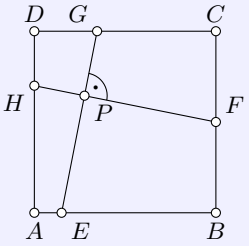
Entsprechend der Aufgabenstellung muss der Beweis nur für das gezeichnete Parallelogramm geführt werden. Wir betrachten als Beispiel den abgebildeten Fall und wählen von den verschiedenen Beweismöglichkeiten, bei denen auch Drehungen und Parallelverschiebungen verwendet werden können, die folgende:
Es gilt $\angle EDC = \angle ABG = \angle BIC$ und damit $EH \parallel FG$. Entsprechend beweist man $HG \parallel EF$. Also ist $EFGH$ ein Parallelogramm.
Bezeichnet R einen rechten Winkel, so gilt

$$\angle AGB = 2R - \frac{1}{2}\angle DAB - \frac{1}{2}(2R - \angle DAB) = R$$

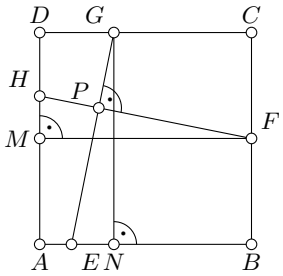
Das Parallelogramm $EFGH$ ist daher ein Rechteck.

Aufgabe 040734:

Durch einen Punkt P im Inneren eines Quadrates $ABCD$ werden zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden so gelegt, dass jede Gerade zwei gegenüberliegende Seiten des Quadrates schneidet (siehe Abbildung).
Beweise, dass die beiden Strecken EG und HF gleich lang sind!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Wir legen durch F die Parallele zu AB und durch G die Parallele zu BC.
Es entstehen die Punkte M und N (siehe Abbildung). Dann gilt $NG = MF$; $\angle MFH = \angle NGE$ wegen $MF \perp NG$, $HF \perp EG$. Daraus folgt die Kongruenz der Dreiecke $\triangle ENG$ und $\triangle HMF$.
Also gilt: $EG = HF$.

Aufgabe 050735:
In dem Trapez $ABCD$ sei $AB \parallel DC$. Ferner gelte $AD = DC = CB$.
Beweise, dass die Diagonale AC den Winkel $\angle DAB$ halbiert!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sei $\angle BAD := \alpha$. Dann ist auch $\angle ABC = \alpha$, da $AD = BC$ und damit das Trapez gleichschenklig ist. Daraus ergibt sich analog: $\angle ADC = \angle BCD = 180° - \alpha$.
Nun gilt, dass das Dreieck $\triangle ACD$ gleichschenklig ist, da $AD = CD$. Mit $\angle CAD = \angle ACD := \beta$ gilt in diesem Dreieck:

$$\angle CAD + \angle ACD + \angle ADC = 180° \quad \text{Innenwinkelsummensatz im Dreieck}$$

also $\beta = \frac{\alpha}{2}$. Damit halbiert β den Winkel α oder anders: die Diagonale AC halbiert den Winkel $\angle DAB$.

Aufgabe 070731:
Die Seiten eines Sechsecks, bei dem keine Seite zu einer anderen parallel verläuft, werden über die Eckpunkte hinaus verlängert.
Wie viel neue Schnittpunkte können dabei höchstens entstehen?

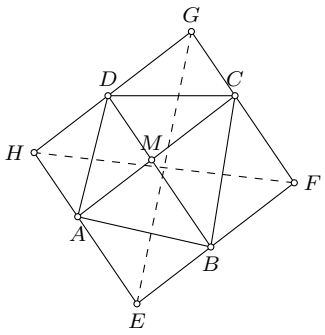
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Lösung läuft auf die Frage hinaus: „Wie viel Schnittpunkte können 6 Geraden maximal haben, wenn keine von ihnen zu einer anderen parallel verläuft?“ Dabei ist am Schluss die Anzahl der Eckpunkte des Sechsecks zu subtrahieren.

Jede Gerade kann mit den übrigen 5 Geraden höchstens 5 Schnittpunkte haben. Bei 6 Geraden erhält man also höchstens $6 \cdot \frac{5}{2} = 15$ Schnittpunkte, da zu jedem Schnittpunkt in diesem Falle genau 2 Geraden

gehören. Da die Ecken des Sechsecks 6 dieser Schnittpunkte darstellen, können also höchstens 9 neue Schnittpunkte entstehen.

Aufgabe 090733:
Beweise folgenden Satz!
Ist $ABCD$ ein konvexes Viereck, so ist seine Fläche inhaltsgleich der Fläche jedes Dreiecks, bei dem zwei Seiten gleichlang den Diagonalen des Vierecks sind und als Winkel einen der Schnittwinkel der Diagonalen einschließen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



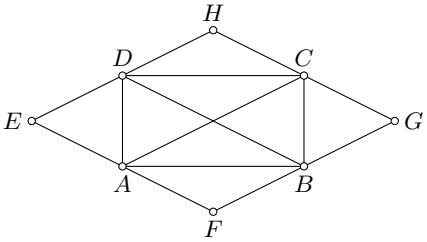
Es sei M der Schnittpunkt der Diagonalen. Man zieht die Parallelen zu den Diagonalen durch die Punkte A, B, C und D. Sie mögen sich in den Punkten E, F, G, H schneiden.
Dann ist $EFGH$ laut Konstruktion ein Parallelogramm, dessen Fläche bei geeigneter Wahl der Bezeichnungen E, F, G, H aus den Flächen der vier Parallelogramme $AMDH$, $BMAE$, $CMBF$ und $DMCG$ zusammengesetzt ist.

Da diese Teilparallelogramme durch die Strecken AB, BC, CD und DA halbiert werden, ist der Flächeninhalt des Parallelogramms $EFGH$ doppelt so groß wie der des Vierecks $ABCD$.

Daher ist der Flächeninhalt jedes Dreiecks, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht und folglich einem der Dreiecke $\triangle EFG$, $\triangle EFH$ kongruent ist, jeweils gleich dem des Vierecks $ABCD$.

Aufgabe 090735:
Beweise folgenden Satz!
Zieht man durch jeden Eckpunkt eines Rechtecks die Parallele zu derjenigen Diagonale, auf der der betreffende Eckpunkt nicht liegt, so bilden die Schnittpunkte dieser vier Parallelen die Ecken eines Rhombus.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Voraussetzung: $ABCD$ ist ein Rechteck, E, F, G, H sind so gelegen, dass A auf EF, B auf FG, C auf GH, D auf HE liegt und $FG \parallel AC \parallel EH$ sowie $EF \parallel DB \parallel HG$ gilt.

Behauptung: $EFGH$ ist ein Rhombus.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $EFBD$ ein Parallelogramm, also gilt $EF = DB$. Ebenso erhält man: $HG = DB$, $FG = AC$, $EH = AC$.

Da im Rechteck $ABCD$ ferner $AC = DB$ gilt, folgt aus den vorigen Gleichungen $EH = FG = HG = EH$ und damit die Behauptung.

Aufgabe 110733:
Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a. Auf BC liege ein Punkt P_1 derart, dass $BP_1 = P_1C$ gilt, auf CD liege ein Punkt P_2 mit $P_2D = 3CP_2$ und auf DA liege ein Punkt P_3 mit $P_3A = 3DP_3$.

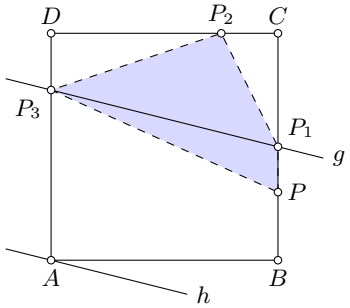
Ein Punkt P wandere auf Seiten des Quadrates von P_1 über B und A nach P_3.

Es sei nun A_Q der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ und A_V der des Vielecks $PP_1P_2P_3$.
Ermittle sämtliche Lagen von P, für die das Verhältnis $A_Q : A_V$

a) am größten,
b) am kleinsten ist!

Berechne das Verhältnis für jeden der beiden Fälle!
Dabei sei auch zugelassen, dass P mit P_1 bzw. P_3 zusammenfällt, falls hierbei eines der gesuchten Verhältnisse auftritt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Laut Aufgabe gilt:

$$AB = BC = CD = DA = a \quad ; \quad BP_1 = P_1C = \frac{a}{2}$$

$$CP_2 = DP_3 = \frac{a}{4} \quad ; \quad AP_3 = P_2D = \frac{3a}{4}$$

Das Vieleck $PP_1P_2P_3$ hat genau dann den kleinsten Flächeninhalt, wenn das Dreieck $\triangle P_1PP_3$ (zur Strecke P_1P_3 entartet ist und damit) den kleinsten möglichen Flächeninhalt 0 hat.
Dies tritt genau dann ein, wenn $P = P_1$ oder $P = P_3$ gilt. In diesem Falle ist der Flächeninhalt des Vielecks $PP_1P_2P_3$ gleich dem des Dreiecks $\triangle P_1P_2P_3$.

Der Flächeninhalt des Vielecks $PP_1P_2P_3$ ist genau dann am größten, wenn der des Dreiecks $\triangle PP_1P_3$ am größten ist, weil die Dreiecke auf verschiedenen Seiten der Geraden g liegen. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Punkt P den größten Abstand von P_1P_3 hat.
Zieht man durch A die Parallele h zu der Geraden g durch P_1 und P_3, dann erkennt man, dass unter allen möglichen Lagen des Punktes P dieser genau im Falle $P = A$ den größten Abstand von der fest vorgegebenen Seite P_1P_3 hat; denn für alle anderen Lagen des Punktes P liegt dieser im Innern des von g und h begrenzten Parallelenstreifens oder auf g, weil P_3A nach Voraussetzung größer als P_1B ist.

a) Den Flächeninhalt AD des Dreiecks $\triangle P_1P_2P_3$ erhält man, wenn man vom Flächeninhalt A_Q des Quadrates $ABCD$ die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle P_2P_1C$ und $\triangle P_3P_2D$ sowie den Flächeninhalt des Trapezes P_1P_3AB subtrahiert. Es gilt daher

$$A_D = a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{a}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{4} \right) \cdot a = a^2 - \frac{a^2}{16} - \frac{3a^2}{32} - \frac{5a^2}{8} = \frac{7a^2}{32}$$

Das gesuchte Verhältnis der Flächeninhalte beträgt in diesem Falle, wegen $A_Q = a^2$ und $A_V = A_D$

$$A_D : A_Q = \frac{7a^2}{32} : a^2 = 7 : 32$$

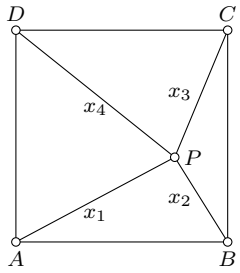
b) Entsprechend kann der Flächeninhalt A_V des Vierecks $P_1P_2P_3A$ ermittelt werden:

$$A_v = a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{4} \cdot \frac{a}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a = a^2 - \frac{a^2}{16} - \frac{3a^2}{32} - \frac{a^2}{4} = \frac{19a^2}{32}$$

Das gesuchte größte Verhältnis der Flächeninhalte beträgt also $A_V : A_Q = 19 : 32$.

Aufgabe 110735:
Beweise den folgenden Satz:
Ist P ein Punkt, der im Innern oder auf dem Rande eines Quadrates $ABCD$ liegt, so ist die Summe der Längen der Verbindungsstrecken von P mit den vier Eckpunkten A, B, C, D größer als die doppelte Länge einer Quadratseite!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $AB = BC = CD = DA = a$. Ferner sei P ein Punkt der Quadratfläche, und es gelte: $AP = x_1, BP = x_2, CP = x_3, DP = x_4$.
Dann gilt unter Benutzung der Dreiecksungleichung:

$$(1) \quad x_1 + x_2 \geq a \quad , \quad (2) \quad x_2 + x_3 \geq a,$$
$$(3) \quad x_3 + x_4 \geq a \quad , \quad (4) \quad x_4 + x_1 \geq a.$$

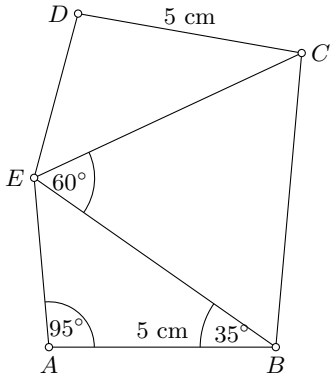
Dabei gilt in (1), in (2), in (3) bzw. in (4) das Gleichheitszeichen nur dann, wenn P auf AB, auf BC, auf CD bzw. auf DA liegt. Da dies bei keiner Lage von P für alle vier Seiten AB, BC, CD, DA gleichzeitig zutrifft, gilt bei keiner Lage von P in allen vier Beziehungen (1), (2), (3), (4) das Gleichheitszeichen.
Somit ergibt sich stets $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 > 4a$ und daher $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > 2a$

Aufgabe 120733:
Konstruiere ein konvexes Fünfeck $ABCDE$, das folgende Eigenschaften hat:

(1) $AB = CD = 5$ cm,
(2) $\angle EAB = \angle ABC = 95°$,
(3) $BC = CE = BE$,
(4) $AE = ED$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Bedingungen (1) bis (4) ein konvexes Fünfeck $ABCDE$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, $ABCDE$ sei ein Fünfeck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Dann ist $\triangle BCE$ gleichseitig, also gilt $\angle CBE = 60°$. Ferner liegen A und C nicht auf derselben Seite der Geraden durch die Punkte B und E, da $ABCDE$ konvex ist. Daher gilt:

$$\angle ABE = \angle ABC - \angle CBE = 95° - 60° = 35°$$

(II) Daher erfüllt ein Fünfeck $ABCDE$ nur dann die Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(a) Wir konstruieren ein Dreieck $\triangle ABE$ aus $AB = 5$ cm, $\angle EAB = 95°$ und $\angle ABE = 35°$.
(b) Wir schlagen die Kreise um B und E mit dem Radius BE. Schneiden sie sich in einem Punkt, der nicht auf derselben Seite der Geraden durch B und E wie A liegt, so sei dieser C genannt.
(c) Wir schlagen den Kreis um C mit dem Radius 5 cm und den Kreis um E mit dem Radius AE. Schneiden sie sich in einem nicht auf derselben Seite der Geraden durch C und E wie B liegenden Punkt, so sei dieser D genannt.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Fünfeck $ABCDE$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion ist $AB = CD = 5$ cm, $BC = CE = BE$, $AB = DE$, also sind (1), (3), (4) erfüllt. Ferner ist $\angle EAB = 95°$, $\angle ABE = 35°$, und, da $\triangle BCE$ gleichseitig ist, $\angle CBE = \angle BCE = \angle BEC = 60°$. Da A und C auf verschiedenen Seiten der Geraden durch B und E liegen, gilt

$$\angle ABC = \angle ABE + \angle CBE = 35° + 60° = 95°$$

also ist auch (2) erfüllt, und es gilt

$$\angle AEB = 180° - 95° - 35° = 50°$$

Weiterhin ist $\triangle DCE = \triangle ABE$ (sss), also $\angle EDC = 95°$, $\angle DCE = 35°$ und $\angle DEC = 50°$.
Da ferner B und D auf verschiedenen Seiten der Geraden durch C und E liegen, gilt

$$\angle BCD = \angle BCE + \angle DCE = 60° + 35° = 95°$$

Schließlich gilt:

$$\angle AED = \angle AEB + \angle BEC + \angle DEC = 50° + 60° + 50° = 160°$$

Also hat $ABCDE$ an allen fünf Ecken Innenwinkel, deren jeder kleiner als 180° ist, ist somit konvex.

(IV) Konstruktionsschritt (a) ist wegen $95° + 35° < 180°$ nach dem Kriterium wsw bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.
Ebenso ist Konstruktionsschritt (b) aus bekannten Gründen eindeutig ausführbar, d. h., es existiert genau ein solcher Schnittpunkt C.
Schließlich ist auch Konstruktionsschritt (c) aus bekannten Gründen eindeutig ausführbar. Das Fünfeck $ABCDE$ ist somit durch die Bedingungen (1) bis (4) bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 150733:
Untersuche, ob sich in der Ebene fünf (paarweise) verschiedene Geraden so zeichnen lassen, dass sie genau drei Schnittpunkte miteinander haben, d. h., ob es in einer Ebene 5 (paarweise) verschiedene Geraden p, q, r, s, t und 3 (paarweise) verschiedene Punkte A, B, C so gibt, dass jeder der Punkte A, B, C der Schnittpunkt (mindestens) zweier der Geraden p, q, r, s, t ist und dass jeder Schnittpunkt (mindestens) zweier dieser Geraden einer der Punkte A, B, C ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Behauptung: Es gibt keine 5 Geraden und 3 Punkte, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Beweis: Angenommen, es gäbe 5 derartige Geraden p, q, r, s, t und 3 derartige Punkte A, B, C. Dann lassen sich 2 Fälle unterscheiden:

a) Die Punkte A, B, C liegen auf einer und derselben Geraden (etwa p).
b) Die Punkte A, B, C liegen nicht auf einer und derselben Geraden.

Fall a) Es geht laut Aufgabe noch (mindestens) je eine weitere der genannten Geraden durch A bzw. B bzw. C. Da kein weiterer Schnittpunkt auftreten soll, müssen diese 3 Geraden (etwa q, r, s) zueinander parallel sein. Jede weitere (fünfte) Gerade durch einen der Punkte A, B, C ist nun zu q, r und s nicht parallel und erzeugt daher (mindestens) einen weiteren (vierten) Schnittpunkt, entgegen der Annahme.

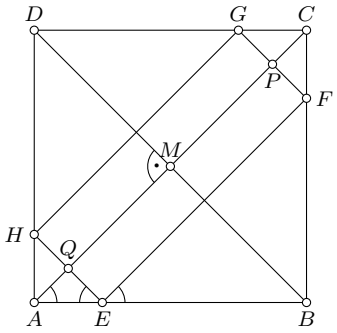
Fall b) Es können entweder die A, B, C enthaltenden Geraden (etwa p, q, r) jede genau einen dieser Punkte enthalten und zueinander parallel sein, dann liefert bereits jede vierte Gerade, die durch einen der Punkte A, B, C verläuft, (mindestens) einen weiteren Schnittpunkt, da sie zu p, q, r nicht parallel ist, oder (mindestens) eine der Geraden (etwa p) enthält zwei der Punkte A, B, C (etwa A, B).

Dann kann von den (mindestens) zwei Geraden, die sich im dritten der Punkte (C) schneiden, nur die eine (q) außer durch C auch noch durch einen der Punkte A, B (etwa A) verlaufen und die andere (r) entweder zu p parallel sein oder durch C und B verlaufen, da andernfalls ein weiterer Schnittpunkt entstünde.

Das heißt, es lassen sich durch C höchstens drei Geraden (q, r, s) unter den Bedingungen der Aufgabe legen, wenn p durch A und B verläuft. Jede weitere Gerade (t) durch einen der Punkte A, B ist stets zu (mindestens) drei der Geraden p, q, r, s nicht parallel und liefert daher (mindestens) einen weiteren Schnittpunkt, entgegen der Annahme. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 170736:
In einem Quadrat $ABCD$ habe die Diagonale AC eine Länge von 10,0 cm.
a) Konstruiere ein solches Quadrat! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
b) Ein Rechteck $EFGH$ heißt dann dem Quadrat $ABCD$ einbeschrieben, wenn bei geeigneter Bezeichnung E auf AB, F auf BC, G auf CD und H auf DA liegt. Dabei gilt $EF \parallel AC$.
Ermittle für jedes derartige Rechteck $EFGH$ seinen Umfang!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Da in jedem Quadrat die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, einander gleich lang sind und einander halbieren, liegen die Eckpunkte B und D erstens auf der Mittelsenkrechten von AC und zweitens auf dem Kreis mit dem Radius $\frac{AC}{2}$ um den Mittelpunkt von AC.
Daher entspricht ein Quadrat $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

1. Wir zeichnen eine Strecke AC der Länge $AC = 10{,}0$ cm und konstruieren ihre Mittelsenkrechte.
2. Wir beschreiben um den Mittelpunkt M der Strecke AC den Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}AC$.
3. Schneidet der Kreis die Mittelsenkrechte in zwei Punkten, so seien diese B bzw. D genannt. $ABCD$ ist das gesuchte Quadrat.

Beweis: Laut Konstruktion gilt $BD \perp AC$. Ferner gilt laut Konstruktion $AM = CM = BM = DM$. Folglich sind nach dem Kongruenzsatz (sws) die Dreiecke AMB, BMC, CMD und DMA zueinander kongruent. Also gilt: $AB = BC = CD = DA$.
Da die erwähnten Dreiecke ferner rechtwinklig-gleichschenklig mit der Spitze in M sind, sind ihre Basiswinkel je 45° groß. Da schließlich jeder der Winkel $\angle ABC, \angle BCD, \angle CDA, \angle DAB$ gleich der Summe zweier dieser Basiswinkel ist, hat jeder von ihnen die Größe 90°. Folglich ist $ABCD$ ein Quadrat, und es hat die vorgeschriebene Diagonalenlänge.

b) Dem Quadrat $ABCD$ sei ein Rechteck $EFGH$ so einbeschrieben, wie es in der Aufgabenstellung angegeben ist. FG schneide die Diagonale AC in P und HE die Diagonale AC in Q. Da die Diagonale eines Quadrates als Symmetrieachse die Innenwinkel halbiert, gilt $\angle CAB = 45°$.
Wegen $EF \parallel AC$ folgt $\angle CAB = \angle FEB = 45°$ als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und wegen $\angle FEH = 90°$ folgt $\angle HEA = 45°$. Somit ist das Dreieck AEQ wegen der gleichgroßen Basiswinkel gleichschenklig, und es gilt $AQ = QE$.
Analog gilt $AQ = HQ$, also $EH = 2AQ$. Entsprechend folgt $FG = 2CP$. Wegen $EH = FG$ folgt hieraus $AQ = CP$. Schließlich gilt wegen $EF \parallel QP$ und $EQ \parallel FP$ auch $EF = QP$.

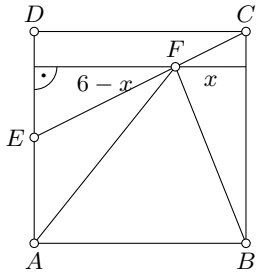
Für den Umfang u des Rechtecks $EFGH$ gilt folglich:

$$u = 2(EF + EH) = 2(QP + AQ + CP) = 2AC$$

Der Umfang jedes derartigen Rechtecks $EFGH$ beträgt somit 20,0 cm.

Aufgabe 190736:
Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm und E der Mittelpunkt der Seite AD. Auf CE sei ein Punkt F so gelegen, dass die Flächen der Dreiecke AFE und BCF inhaltsgleich sind.
Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks ABF!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Das Lot von F auf CB habe die Länge x cm, das Lot von F auf AD hat dann die Länge $(6-x)$ cm. Da die Flächeninhalte der Dreiecke AFE und BCF gleich sind und E Mittelpunkt von AD ist, gilt

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(6-x)=\frac{1}{2}\cdot 6x \qquad \text{also} \qquad x=2$$

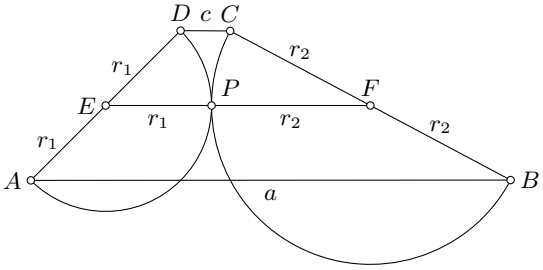
folgt.
Für die Flächeninhalte A_{ABF}, A_{ECD}, A_{BCF}, A_{ABCD} der Dreiecke ABF, ECD, BCF bzw. des Quadrates $ABCD$ gilt

$$A_{ABF}=A_{ABCD}-A_{ECD}-2A_{BCF} \qquad A_{ABCD}=36\text{ cm}^2$$
$$A_{ECD}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\text{ cm}^2=9\text{ cm}^2 \qquad A_{BCF}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6\text{ cm}^2=6\text{ cm}^2$$

Folglich ist $A_{ABF}=15\text{ cm}^2$.

Aufgabe 200735:
Von einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ wird vorausgesetzt, dass sich die beiden Kreise, die die Seiten AD bzw. BC des Trapezes als Durchmesser haben, von außen berühren.
Beweise aus dieser Voraussetzung, dass die Summe der Längen der Seiten AB und CD gleich der Summe der Längen der Seiten AD und BC ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Mittelpunkte der genannten Kreise seien E bzw. F, ihre Radien r_1 bzw. r_2. Da EF die Mittellinie des Trapezes ist, gilt $EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$.
Ferner ist EF die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier sich von außen berührender Kreise mit den Radien r_1, r_2, also gilt $EF=r_1+r_2$. Daraus folgt $AB+CD=2\cdot EF=2(r1+r2)$.
Andererseits haben die Durchmesser AD bzw. BC der genannten Kreise die Längen $AD=2r_1$, $BC=2r_2$.

Somit gilt $AD+BC=2r_1+2r_2=2(r_1+r_2)=AB+CD$.

Aufgabe 210731:
In einer Mathematikstunde zeichnet der Lehrer genau zehn Vierecke an die Wandtafel und fordert die Schüler auf, Aussagen über diese zu treffen. Er erhält folgende Antworten:

Axel: „An der Tafel befinden sich mindestens zwei Quadrate.“
Beate: „An der Tafel sind genau doppelt so viele Rechtecke wie Quadrate.“
Christa: „An der Tafel ist genau ein Parallelogramm.“
Detlev: „An der Tafel sind genau doppelt so viele Trapeze wie Rechtecke.“

Der Lehrer teilt danach der Klasse mit, dass genau eine dieser vier Aussagen falsch war.

a) Von wem kam die falsche Aussage?
b) Ermittle für die einzelnen Arten von Vierecken jeweils die Anzahl der Vierecke dieser Art an der Tafel, soweit diese Anzahl aus den vorliegenden Angaben hervorgeht!
c) Skizziere, wie nach diesen Angaben das Tafelbild ausgesehen haben könnte!

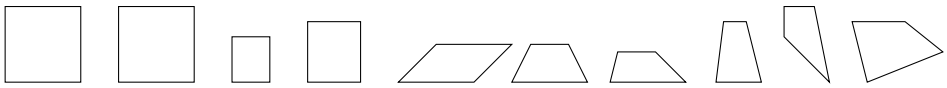
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Angenommen, die Aussage von Axel wäre falsch.
Dann befände sich an der Wandtafel entweder kein oder genau ein Quadrat; ferner wären dann die anderen drei Aussagen wahr. In dem Fall, dass kein Quadrat an der Tafel wäre, folgte: Nach den wahren Aussagen von Beate und Detlev wäre kein Trapez an der Tafel, nach der Aussage von Christa aber ein Parallelogramm. Das ist ein Widerspruch, da jedes Parallelogramm ein Trapez ist.

In dem Fall, dass genau ein Quadrat an der Tafel wäre, folgte:
Nach der Aussage von Beate wären zwei Rechtecke an der Tafel, nach der Aussage von Christa aber nur ein Parallelogramm. Das ist ein Widerspruch, da jedes Rechteck ein Parallelogramm ist.

Also ist Axels Aussage wahr; es befinden sich mindestens zwei Quadrate an der Tafel.
Daher und weil jedes Quadrat ein Parallelogramm ist, ist Christas Aussage falsch. Die Aussagen von Beate und Detlev sind somit wahr.

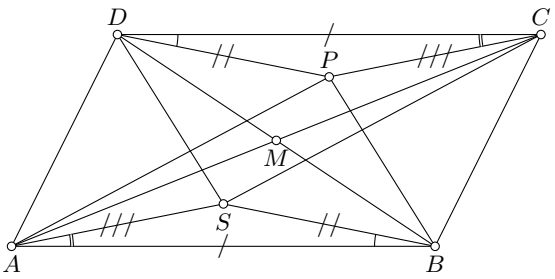
b) Wären mindestens drei Quadrate an der Tafel, so wären folglich mindestens zwölf Trapeze an der Tafel. Das ist ein Widerspruch, da nur zehn Vierecke gezeichnet wurden.
Daher waren genau zwei Quadrate an der Tafel. Hiernach waren genau vier Rechtecke an der Tafel. Da jedes Quadrat ein Rechteck ist, waren es also außer den zwei Quadraten noch genau zwei Rechtecke, die nicht Quadrate waren. Ferner waren genau acht Trapeze an der Tafel. Da jedes Rechteck ein Trapez ist, waren es also außer den vier Rechtecken noch genau vier Trapeze, die nicht Rechtecke waren. Schließlich waren somit von den zehn Vierecken außer den acht Trapezen genau zwei Vierecke, die nicht Trapeze waren.

c) Ein mögliches Tafelbild für diese Mathematikstunde ist:



Aufgabe 210735:
Es sei $ABCD$ ein beliebiges Parallelogramm, und es sei P ein beliebiger Punkt im Innern dieses Parallelogramms, der nicht auf einer seiner Diagonalen liegt. Ferner sei S der Schnittpunkt der Parallelen durch B zu PD und durch D zu PB.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen das Viereck $ASCP$ stets ein Parallelogramm ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Das Viereck $DSBP$ ist auf Grund der Voraussetzungen ein Parallelogramm, und es gilt deshalb $SB = DP$, $SB \parallel DP$.
Aus $AB \parallel CD$ und $SB \parallel DP$ folgt $\angle SBA = \angle PDC$.
Wegen $AB = CD$ und $SB = DP$ und $\angle SBA = \angle PDC$ gilt (nach wsw) $\triangle ABS = \triangle CDP$. Aus der Kongruenz dieser Dreiecke folgt $AS = CP$.

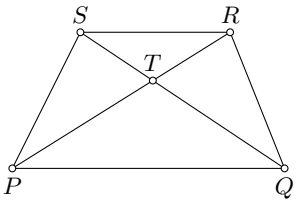
In analoger Weise lässt sich $AP = CS$ nachweisen. Folglich ist das Viereck $ASCP$ ein Parallelogramm.

2. Lösungsweg:

M sei Diagonalenschnittpunkt im Parallelogramm $ABCD$. Dann ist, da die Diagonalen im Parallelogramm einander halbieren, M auch Diagonalenschnittpunkt im Parallelogramm $DSBP$. Mithin ist M gemeinsamer Halbierungspunkt von AC und SP, und $ASCP$ ist daher ein Viereck, in dem die Diagonalen einander halbieren, also ein Parallelogramm.

Aufgabe 220735:
Beweise folgenden Satz!
Wenn $PQRS$ ein Trapez mit $PQ \parallel SR$ ist und wenn T der Schnittpunkt der Diagonalen PR und QS ist, dann haben die Dreiecke PST und QRT einander gleichen Flächeninhalt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Wegen $PQ \parallel SR$ haben die Dreiecke PQS und PQR zu ihrer gemeinsamen Seite PQ als Grundlinie gleichlange Höhen. Also haben sie einander gleichen Flächeninhalt.
Subtrahiert man von ihm den Flächeninhalt des Dreiecks PQT, so ergibt sich, dass die Dreiecke PST und QRT einander gleichen Flächeninhalt haben.

Aufgabe 230732:
Beweise, dass jedes Viereck $ABCD$, in dem die Innenwinkel $\angle ABC$, $\angle BCD$ und $\angle CDA$ die Größen 2α, 3α bzw. 4α haben (wo α die Größe des Innenwinkels $\angle DAB$ bezeichnet), ein Trapez ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach dem Satz über die Innenwinkelsumme im Viereck gilt für jedes Viereck mit den genannten Innenwinkelgrößen

$$\alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 360^\circ$$

Daraus folgt

$$\angle DAB + \angle CDA = \alpha + 4\alpha = 180^\circ$$

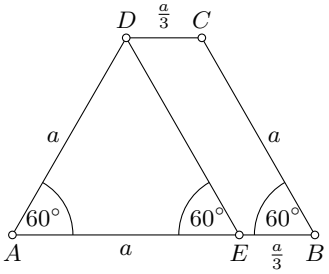
Nach der Umkehrung des Satzes über entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen gilt somit $AB \parallel DC$, also ist $ABCD$ ein Trapez.

Aufgabe 240736:
Ein Viereck $ABCD$ habe folgende Eigenschaften:

(1) $AB \parallel DC$ und $AD \nparallel BC$,
(2) $AD = BC = 3 \cdot DC = a$, wobei a eine gegebene Länge ist,
(3) $\angle BAD = 60^\circ$.

Ermittle den Umfang u dieses Vierecks in Abhängigkeit von a!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Wegen (1) und (2) ist $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez. Wegen (3) gilt daher
(4) $\angle CBA = 60°$.
Die Parallele zu BC durch D schneide AB in E. Da Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen gleichgroß sind, folgt hieraus und aus (4)
(5) $\angle DEA = 60°$.
Hieraus und aus (3) (sowie dem Winkelsummensatz) folgt dann, dass das Dreieck AED gleichseitig ist. Wegen (2) gilt daher
(6) AE = AD = a.
Da $BC \parallel ED$ und wegen (1) auch $EB \parallel DC$ gilt, ist $EBCD$ ein Parallelogramm. Hieraus und aus (2) folgt dann
(7) $EB = DC = \frac{a}{3}$.
Für den Umfang u des Vierecks $ABCD$ gilt daher

$$u = AE + EB + BC + CD + DA = a + \frac{a}{3} + a + \frac{a}{3} + a = \frac{11}{3}a$$

Aufgabe 250733:
Für ein Viereck $ABCD$ werden die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) gefordert:

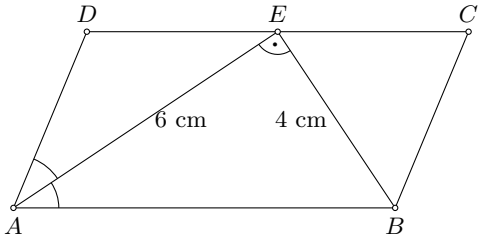
(1) $ABCD$ ist ein Parallelogramm.
(2) Die Winkelhalbierenden von $\angle BAD$ und $\angle ABC$ schneiden sich in einem Punkt E, der auf der Geraden durch C und D liegt.
(3) Es gilt $AE = 6{,}0$ cm und $BE = 4{,}0$ cm.

a) Beweise, dass jedes Viereck $ABCD$, das diese Bedingungen erfüllt, aus den gegebenen Längen 6,0 cm und 4,0 cm konstruiert werden kann!
b) Beschreibe eine solche Konstruktion!
c) Beweise, dass jedes Viereck $ABCD$, das nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für jedes Viereck $ABCD$, das (zusammen mit einem Punkt E) die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, gilt:

Nach (1), also $BC \parallel AD$, ist $\angle BAD + \angle ABC = 180°$. Nach (2) ergibt sich durch Halbieren $\angle BAE + \angle ABE = 90°$; hieraus folgt nach dem Innenwinkelsatz, dass $\angle AEB$ ein rechter Winkel ist.
Nach (3) liegen A und B so auf seinen Schenkeln, dass $EA = 6{,}0$ cm und $EB = 4{,}0$ cm gilt. Nach (1) ist die Gerade p durch C und D eine Parallele zu AB; nach (2) geht sie durch E.
Auf dieser Geraden p liegt D; ferner liegt D nach (2) auf dem Schenkel AD des Winkels $\angle BAD$, der doppelt so groß ist wie $\angle BAE$.
Auch C liegt auf der Geraden p; ferner liegt C nach (1) auch auf der Parallelen q durch B zu AD.

Damit ist bewiesen, dass jedes Viereck $ABCD$, das (1), (2), (3) erfüllt, nach der folgenden Beschreibung konstruiert werden kann:



b) (I) Man konstruiert einen rechten Winkel mit dem Scheitel E.
(II) Von E aus trägt man auf einem Schenkel dieses Winkels die Strecke EA der Länge 6,0 cm und auf dem anderen Schenkel die Strecke EB der Länge 4,0 cm ab.
(III) Man konstruiert die Parallele p durch E zu AB.
(IV) In A trägt man an AE nach derjenigen Seite, auf der B nicht liegt, den Winkel der Größe $\angle BAE$ ab und bezeichnet den Schnittpunkt von seinem freien Schenkel und von p mit D.

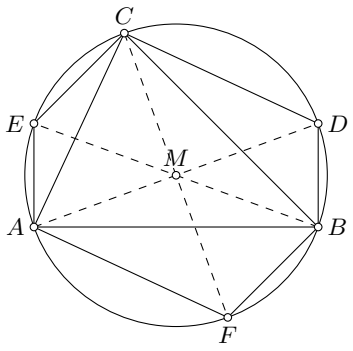
(V) Man konstruiert die Parallele q durch B zu AD und bezeichnet den Schnittpunkt von p und von q mit C.

c) Für jedes Viereck $ABCD$, das nach dieser Beschreibung konstruiert wird, gilt:

Nach (III) und (V) ist $DC \parallel AB$ und $BC \parallel AD$, also (1) erfüllt. Nach (V) und (IV) ist p die Gerade durch C und D, auf ihr liegt E; durch E geht nach (IV) die Winkelhalbierende von $\angle BAD$.
Nach (I) und dem Innenwinkelsatz ist ferner $\angle BAE + \angle ABE = 90°$; nach (IV) folgt hieraus durch Verdoppeln $\angle BAD + 2 \cdot \angle ABE = 180°$.
Andererseits folgt aus $BC \parallel AD$: $\angle BAD + \angle ABC = 180°$. Also ist $2 \cdot \angle ABE = \angle ABC$; somit geht auch die Winkelhalbierende von $\angle ABC$ durch E, folglich ist (2) erfüllt. Nach (II) ist auch (3) erfüllt.

Aufgabe 260733:
Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck; sein Umkreis k habe den Mittelpunkt M. Der Strahl aus A durch M schneide k in D, der Strahl aus B durch M schneide k in E, der Strahl aus C durch M schneide k in F.
Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte des Sechsecks $AFBDCE$ und des Dreiecks ABC!

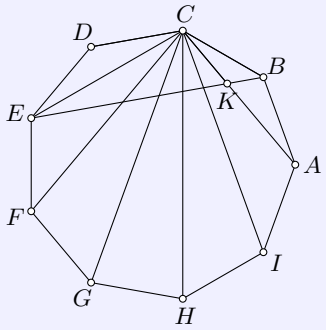
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da die Dreiecke MFA und MCA in den Seitenlängen MF, MC (Radien von k) und in der Länge der zugehörigen Höhe (Lot von A auf den Durchmesser FC) übereinstimmen, gilt mit der Bezeichnung: Ist PQR ein Vieleck, so bezeichnet $J(PQR)$ seinen Flächeninhalt: $J(MFA) = J(MCA)$.

Entsprechend erhält man $J(MCD) = J(MCA)$, $J(MFB) = J(MCB)$, $J(MCE) = J(MCB)$, $J(MDB) = J(MAB)$, $J(MAE) = J(MAB)$.
Durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich $J(AFBDCE) = 2 \cdot J(ABC)$. Das gesuchte Verhältnis beträgt folglich 2:1.

Aufgabe 290732:



Gegeben sei ein regelmäßiges Neuneck $ABCDEFGHI$.

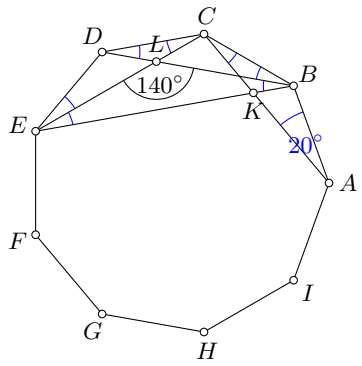
a) Ermittle die Anzahl aller Diagonalen dieses Neunecks!
b) Ermittle die Größe eines Innenwinkels dieses Neunecks!
c) Es sei K der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BE. Ermittle die Größe des Winkels $\angle CKE$!

Hinweis: Ein Neuneck heißt genau dann regelmäßig, wenn alle seine Seiten dieselbe Länge und alle seine Innenwinkel dieselbe Größe haben.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Von jeder Ecke des Neunecks gehen genau sechs Diagonalen aus. Addiert man diese (für jede der neun Ecken gebildeten) Anzahlen 6, so hat man in dem entstehenden Ergebnis $9 \cdot 6 = 54$ jede Diagonale genau zweimal erfasst. Also beträgt die Anzahl aller Diagonalen des Neunecks 27.

b) Durch die sechs von einer Ecke ausgehenden Diagonalen wird das Neuneck in genau sieben Dreiecke zerlegt. In jedem dieser Dreiecke beträgt die Summe seiner Innenwinkel 180°.
Addiert man alle Innenwinkel in diesen Dreiecken, so ergibt sich die Summe aller Innenwinkel des Neunecks; diese Summe beträgt folglich $7 \cdot 180°$. Da alle neun Innenwinkel des Neunecks dieselbe Größe haben,

hat jeder dieser Innenwinkel die Größe $\frac{7 \cdot 180^\circ}{9} = 140^\circ$.



c) Aus $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = 140^\circ$ (1) und $AB = BC = CD = DE$ folgt nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz

$$\angle CAB = \angle ACB = \angle DBC = \angle BDC = \angle ECD = \angle CED = 20^\circ \quad (2)$$

sowie nach dem Kongruenzsatz sws $\triangle BCD = \triangle CDE$, also $BD = CE$. (3)

Ist L der Schnittpunkt von BD mit CE, so folgt ferner aus (2) nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes $CL = DL$. Hieraus und aus (3) ergibt sich $BL = EL$. (4)

Nach dem Scheitelwinkelsatz und dem Innenwinkelsatz sowie wegen (2) ist $\angle BLE = \angle CLD = 180^\circ - 2 \cdot 20^\circ = 140^\circ$ Hieraus und aus (4) folgt nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz $\angle BEL = \angle EBL = 20^\circ$. (5)

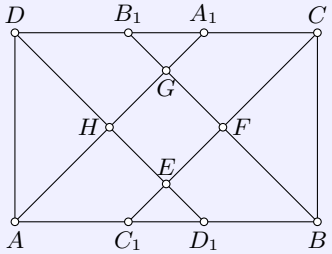
Aus (1) und (2) folgt ferner $\angle KCE = 140^\circ - 2 \cdot 20^\circ = 100^\circ$; daraus und aus (5) ergibt sich nach dem Innenwinkelsatz die gesuchte Winkelgröße $\angle CKE = 180^\circ - 100^\circ - 20^\circ = 60^\circ$.

Aufgabe 300735:

Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlinien $AB = a$ und $BC = b$, und es sei $a > b$. Auf AB seien Punkte C_1 und D_1 sowie auf CD die Punkte A_1 und B_1 derart eingezeichnet, dass die Strecken AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 jeweils Winkelhalbierende eines Innenwinkels von $ABCD$ sind.

Die Schnittpunkte E, F, G, H dieser Winkelhalbierenden miteinander seien wie in der Abbildung bezeichnet.

Ermittle den Flächeninhalt I des Vierecks $EFGH$, wenn außerdem vorausgesetzt wird, dass $a = 8$ cm und $b = 5$ cm gilt!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

Da AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, die rechten Winkel bei A, B, C bzw. D halbieren, folgt:

Die Dreiecke $AA_1D, BB_1C, CC_1B, ADD_1$ haben jeweils zwei Innenwinkel der Größen 90°, 45°. Also hat auch jeweils der dritte Innenwinkel die Größe 45°; die Dreiecke sind gleichschenklig-rechtwinklig mit der Kathetenlänge b.

Somit sind AD_1A_1D und C_1BCB_1 Quadrate der Seitenlänge b. Da ihre Diagonalen einander gleichlang sind und sich gegenseitig halbieren, folgt $AH = A1H = BF = B1F = CF = C1F = DH = D1H$.

Ferner sind ADH, BCF sowie C_1D_1E und A_1B_1G Dreiecke mit zwei Innenwinkeln von je 45°, also ebenfalls gleichschenklig-rechtwinklig.

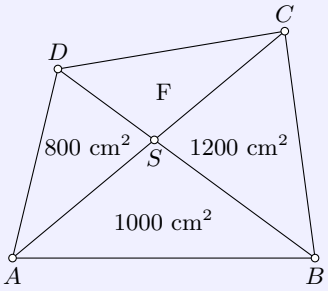
Dabei ist $C_1D_1 = AB - BD_1 = a - 2(a - b) = 2b - a$, und die gleiche Länge hat A_1B_1; folglich ist $C_1E = D_1E = A_1G = B_1G$. Also ist $EFGH$ ein Viereck mit vier Innenwinkeln von 90° und mit $HE = HG = FE = FG$. d. h. ein Quadrat.

Seine Diagonalenlänge beträgt $d = HF = AC_1 = a - b = 3$ cm, da AH und C_1F einander gleichlang und parallel sind, also AC_1FH ein Parallelogramm ist. Da im Quadrat $EFGH$ die Diagonalen gleichlang und senkrecht zueinander sind und einander halbieren, hat in jedem der beiden Dreiecke HFE, HFG die zu HF senkrechte Höhe die Länge $\frac{d}{2}$. Die Summe der Flächeninhalte dieser beiden Dreiecke, d. h. der gesuchte Flächeninhalt von $EFGH$, beträgt folglich

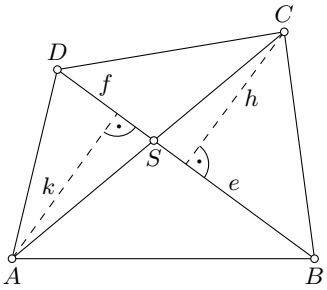
$$I = \frac{1}{2}d^2 = 4{,}5cm^2$$

Aufgabe 320732:

Es sei $ABCD$ ein Viereck, dessen Diagonalen AC und BD sich in einem Punkt S schneiden. Ferner sei vorausgesetzt, dass die Dreiecke ABS, DAS und BCS die Flächeninhalte 1000 cm^2, 800 cm^2 bzw. 1200 cm^2 haben, so wie dies in der Abbildung angegeben ist.
Weise nach, dass durch diese Voraussetzung der Flächeninhalt F des Dreiecks CDS eindeutig bestimmt ist, und ermittle diesen Flächeninhalt!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



In den Dreiecken BCS bzw. DAS seien e bzw. f die Längen der Seiten BS bzw. DS, und h bzw. k seien die Längen der auf diesen Seiten senkrechten Höhen.
Dann sind k und h auch in den Dreiecken ABS bzw. CDS die Längen der zu den Seiten BS bzw. DS senkrechten Höhen. Also sind die vorausgesetzten Flächeninhalte bzw. der gesuchte Flächeninhalt

$$\frac{e \cdot k}{2} = 1000cm^2, \quad \frac{f \cdot k}{2} = 800cm^2, \quad \frac{e \cdot h}{2} = 1200cm^2, \quad \frac{f \cdot h}{2} = F$$

Daraus folgt

$$f : e = 800 : 1000 = 4 : 5, \qquad f = \frac{4e}{5}$$

d. h., durch die Voraussetzungen ist eindeutig bestimmt

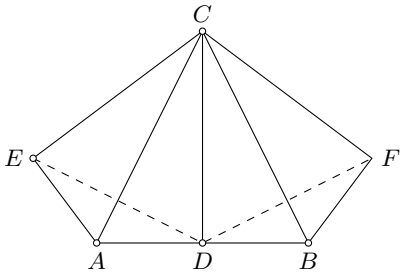
$$F = \frac{4e \cdot h}{5 \cdot 2} = \frac{4}{5} \cdot 1200cm^2 = 960cm^2$$

Aufgabe 340733:
Ist ABC ein Dreieck, das nicht stumpfwinklig ist, so bezeichne D den Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe; E sei der Bildpunkt von D bei der Spiegelung an AC, und F sei der Bildpunkt von D bei der Spiegelung an BC.

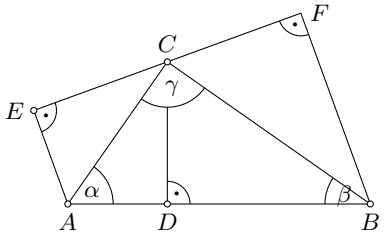
a) Wie groß ist der Flächeninhalt und der Umfang des Fünfecks $ABFCE$, wenn $AB = 7$ cm und $CD = 4$ cm vorausgesetzt wird.
b) Wie groß ist der Winkel $\angle ACB$, wenn -anders als in a)- vorausgesetzt wird, dass es eine Gerade gibt, auf der die drei Punkte E, C und F liegen?
Beweise auch, dass aus dieser Voraussetzung folgt, dass das Viereck $ABFE$ ein Trapez ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a)



b)



(a) Da bei Spiegelung jeder Punkt der Geraden, an der gespiegelt wird, fest bleibt und jedes Dreieck in ein kongruentes Dreieck übergeht, gilt $\triangle ACE = \triangle ACD$ und $\triangle BCF = \triangle BCD$ (siehe Abbildung a).

Daher ist der Flächeninhalt von $ABFCE$ doppelt so groß wie der von ABC. Dieser beträgt nach Voraussetzung 1 $2AB \cdot CD = 14$ cm^2, also hat $ABFCE$ den Flächeninhalt 28 cm^2.
Ferner folgt $AE = AD$ und $BF = BD$, also $AE + BF = AB$, sowie $CE = CF = CD$. Damit ergibt sich für den Umfang von $ABFCE$ der Wert $2 \cdot AB + 2CD = 22$ cm.

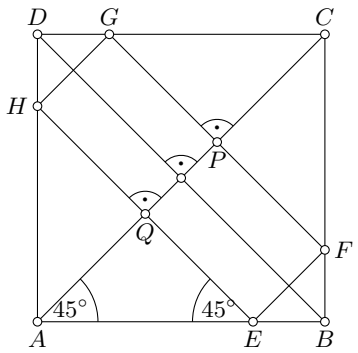
(b) Mit den Bezeichnungen $\angle BAC = \alpha$ und $\angle ABC = \beta$ gilt nach dem Innenwinkelsatz für die Dreiecke ADC und BDC sowie wegen der Spiegelungen $\angle ACE = \angle ACD = 90° - \alpha$ und $\angle BCF = \angle BCD = 90° - \beta$.
Für $\angle ACB = \gamma$ gilt wegen der Voraussetzung $\angle ECF = 180°$ (siehe Abbildung b) daher $90° - \alpha + \gamma + 90° - \beta = 180°$.
Wegen $180° - \alpha - \beta = \gamma$ (Innenwinkelsatz für das Dreieck ABC) folgt $2\gamma = 180°$, also $\gamma = 90°$. Ferner sind wegen $\triangle ACE = \triangle ACD$ und $\triangle BCF = \triangle BCD$, also $\angle AEC = \angle BFC = 90°$ die Strecken AE und BF beide auf EF senkrecht und somit zueinander parallel. Damit ist $ABFE$ als Trapez nachgewiesen.

Aufgabe 340736:
Jemand konstruiert ein Quadrat $ABCD$ mit der Diagonalenlänge $AC = 10$ cm. Dann wählt er auf der Seite AB einen beliebigen Punkt E und konstruiert den Schnittpunkt F von BC mit der Parallelen durch E zu AC, den Schnittpunkt G von CD mit der Parallelen durch F zu BD sowie den Schnittpunkt H von AD mit der Parallelen durch G zu AC.

a) Beweise, dass jedes so zu konstruierende Viereck $EFGH$ ein Rechteck ist!
b) Ermittle für jedes so zu konstruierende Viereck den Umfang!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Da die Diagonalen des Quadrates aufeinander senkrecht stehen, gilt wegen $FG \parallel BD$ auch $FG \perp AC$ (siehe Abbildung).
Da die Diagonalen die Innenwinkel des Quadrates halbieren, gilt für den Schnittpunkt P von FG mit AC ferner $\angle FCP = \angle GCP$. Damit folgt nach dem Kongruenzsatz sww, dass $\triangle FCP = \triangle GCP$, also $FC = GC$ gilt.
Wegen $BC = DC$ folgt dann auch $BF = DG$. Damit und mit entsprechenden Schlussfolgerungen aus $EF \parallel AC$ und $HG \parallel AC$ erhält man $EB = BF = HD = DG$; hiernach und wegen $\angle EBF = \angle HDG = 90°$ ist $\triangle EBF = \triangle HDG$, also $EF = HG$.

Also sind im Viereck $EFGH$ die Seiten EF und HG einander gleichlang und parallel, daher ist es ein Parallelogramm. Da außerdem FG auf AC und damit auch auf EF senkrecht steht, ist $EFGH$ als Rechteck nachgewiesen.



b) Für den Schnittpunkt Q von EH mit AC ist wegen $EF \parallel AC$ auch $EFPQ$ ein Rechteck, also gilt $EF = QP$ und $EQ = FP$. Damit und mit $\angle AQE = \angle CPF = \angle CPG = 90°$ sowie $\angle AEQ = \angle CFP = \angle CGP = 45°$ erweisen sich AEQ, CFP und CGP als zueinander kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke, und es ergibt sich $AQ = CP = FP = GP$.

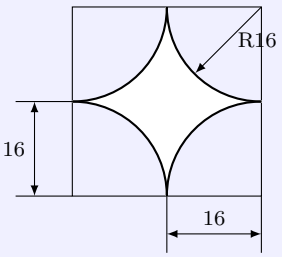
Insgesamt hat man nun $EF + FP + GP = QP + AQ + CP = AC$; d. h., der halbe Umfang des Rechtecks $EFGH$ ist gleich der Länge von AC, der Umfang beträgt also für jedes derartige Rechteck 20 cm.

III.III Kreise

I Runde 1

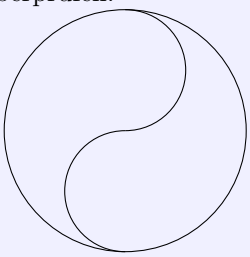
Aufgabe V00710:

Berechne die Fläche des in der Abbildung dargestellten Stanzteiles in Quadratzentimetern.

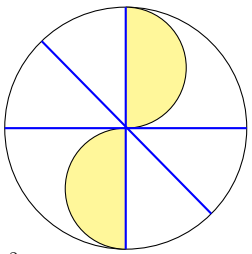


Lösung von Steffen Polster:
Von einem Quadrat der Kantenlänge 32 mm wird ein Vollkreis des Radius 16 mm angezogen, d. h. $A = 32^2 - \pi \cdot 16^2 \approx 220$ mm^2.

Aufgabe V00713:
Wie kann man die nachstehende, nur aus Kreisbögen bestehende Figur durch 3 Geraden in 8 flächengleiche Teile zerlegen?
Die Richtigkeit der Konstruktion ist durch Berechnung der Teilflächen zu überprüfen.



Lösung von Steffen Polster:
Die 3 Geraden müssen wie in der nachfolgenden Abbildung eingezeichnet werden:



Es ist noch zu zeigen, dass die zwei kleinen Halbkreise den Viertelkreis des großen Kreises halbieren. Hat der große Kreis den Radius r, so hat jeder Viertelkreis einen Flächeninhalt $\frac{\pi}{4}r^2$.

Ein gelber Halbkreis hat dann den Radius $\frac{r}{2}$ und somit den Flächeninhalt $\frac{1}{2}\pi\frac{r^2}{4}$, d. h. er halbiert den Viertelkreis. Alle 8 Teilflächen haben somit den gleichen Flächeninhalt.

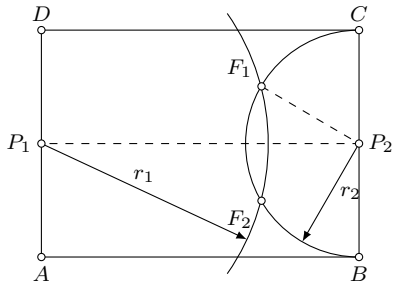
Aufgabe 100711:
Bei einem Sportfest soll zwischen jungen Pionieren und FDJlern ein Wettlauf nach folgenden Regeln ausgetragen werden:

Auf den Mittelpunkt einer der kürzeren Seiten eines rechteckigen Spielfeldes (50 m × 70 m) stellt sich ein FDJler, auf den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite ein Pionier. Beide sollen auf ein Kommando auf dem kürzesten Wege von ihren Startplätzen zu der gleichen, auf dem Spielfeld aufgestellten Fahne laufen.

Zu diesem Zweck soll die Fahne, wenn die beiden Läufer auf ihren Startplätzen stehen, so aufgestellt werden, dass sie von dem FDJler 50 m, von dem Pionier 25 m entfernt ist.

Gib die Anzahl aller Möglichkeiten an, die Fahne gemäß den Bedingungen auf dem Spielfeld aufzustellen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



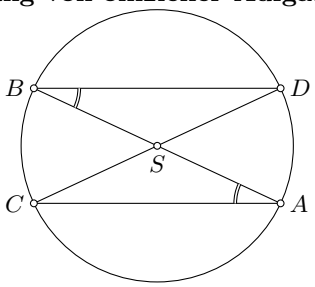
Die Eckpunkte des Spielfeldes seien so mit A, B, C, D und die Standorte der Läufer so mit P_1 (für den FDJ-ler) und P_2 (für den Pionier) bezeichnet, wie es die Abbildung angibt. Dann gilt:
$AB = CD = P_1P_2 = 70$ m ; $AD = BC = 50$ m ; $AP_1 = P_1D = BP_2 = P_2C = 25$ m.

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist ein Punkt genau dann einer der gesuchten Standorte der Fahne, wenn er
1. auf dem Kreis mit dem Radius $r_1 = 50$ m um P_1,
2. auf dem Kreis mit dem Radius $r_2 = 25$ m um P_2 und
3. innerhalb des Rechtecks $ABCD$ liegt.

Wegen $r_1 > r_2$ und $r_1 - r_2 < P_1P_2 < r_1 + r_2$ gibt es genau 2 Punkte, die beide Kreise gemeinsam haben. Diese Punkte seien F_1 und F_2 genannt.
Wegen $r_1 < P_1P_2$ liegen F_1 und F_2 auf derselben Seite der Geraden durch B und C wie P_1. Der auf derselben Seite liegende Halbkreis um P_2 mit dem Radius r_2 liegt wegen $BP_2 = P_2C = r_2$ ganz auf dem Spielfeld. Infolgedessen liegen auch F_1 und F_2 auf dem Spielfeld.
Es gibt mithin genau diese 2 Punkte als Möglichkeiten, die Fahne gemäß den Bedingungen der Aufgabe aufzustellen.

Aufgabe 150713:
Gegeben seien zwei Geraden g_1 und g_2, die einander in genau einem Punkt S schneiden. Um S als Mittelpunkt sei ein Kreis geschlagen, er schneide g_1 in A und B sowie g_2 in C und D.
Beweise, dass die Strecken AC und BD gleich lang und parallel sind, dass also $AC = BD$ und $AC \parallel BD$ gilt!

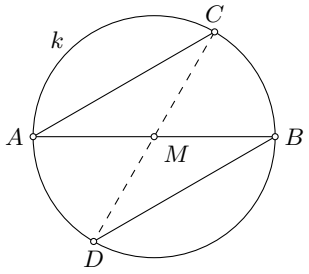
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Dreiecke ASC und BSD sind kongruent nach sws; denn es gilt:
(1) $AS = BS = CS = DS$
(2) $\angle ASC = \angle BSD$ als Scheitelwinkel.
Folglich gilt $AC = BD$ sowie $\angle CAS = \angle DBS$. Nach der Umkehrung des Satzes über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen folgt daraus $AC \parallel BD$.

Aufgabe 220714:
Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Ferner sei AB ein Durchmesser von k. Durch A sei eine von AB verschiedene Sehne AC, durch B die zu AC parallele Sehne BD gezogen.
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen die Kongruenz der Dreiecke ACM und BDM folgt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da M der Mittelpunkt von k und damit auch der Mittelpunkt des Durchmessers AB ist, gilt (1) $AM = BM$.
Wegen $AC \parallel BD$ (und da M auf AB liegt) gilt nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen (2) $\angle CAM = \angle DBM$.

Da Radien eines Kreises stets gleich lang sind, sind die Dreiecke AMC, BMD gleichschenklig mit AC bzw. BD als Basis. Nach dem Satz über die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck folgt daher $\angle CAM = \angle ACM$ und $\angle DBM = \angle BDM$. Zusammen mit (2) ergibt sich somit (3) $\angle ACM = \angle BDM$.

Aus (1), (2), (3) folgt nach dem Kongruenzsatz (sww), dass die Dreiecke ACM und BDM kongruent sind.

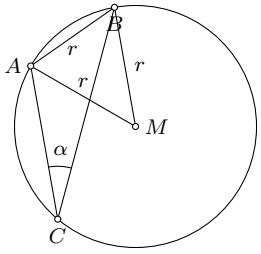
Hinweis: Der Kongruenzsatz (sws) führt nicht ohne weiteres zum Ziel, weil man $\angle AMC = \angle BMD$ als Gleichheit von Scheitelwinkeln erst erhalten kann, wenn man zur Verfügung hat, dass M auf CD liegt. Das müsste aber erst aus den Voraussetzungen hergeleitet werden.

Der Kongruenzsatz (ssw) führt ebenfalls nicht ohne weiteres zum Ziel, weil er nur anwendbar ist, wenn $\angle CAM$ der größeren Seite gegenüberliegt, was nicht der Fall sein muss.

II Runde 2

Aufgabe 050724:
In einen Kreis vom Radius r sind zwei Sehnen mit einem gemeinsamen Endpunkt so eingezeichnet, dass sie einen Winkel mit dem Winkelmaß $\alpha = 30°$ bilden.
Wie groß ist die Entfernung der beiden anderen Sehnenendpunkte voneinander?

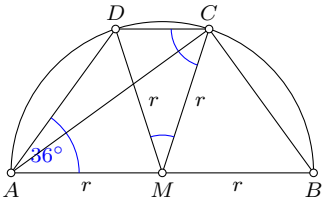
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der gemeinsame Endpunkt der Sehnen sei C, die anderen beiden Endpunkte seien A bzw. B. M sei der Mittelpunkt des Kreises (siehe Abbildung)
Dann sind $\angle BCA$ und $\angle BMA$ Peripherie- bzw. Zentriwinkel über dem gleichen Bogen oder über zueinander komplementären Bogen. Da nach Voraussetzung $\angle BCA$ das Winkelmaß $\alpha = 30°$ hat, hat $\angle BMA$ ein Winkelmaß von $60°$.
Folglich ist das gleichschenklige Dreieck $\triangle BMA$ gleichwinklig und damit gleichseitig; also ist $AB = r$.

Aufgabe 180723:
In einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ so gelegen, dass die Eckpunkte A, B, C, D auf der Peripherie des Kreises k liegen und AB Durchmesser von k ist. Außerdem sei $\angle MAC = 36°$.
Beweise, dass dann $\angle CMD = 36°$ ist!

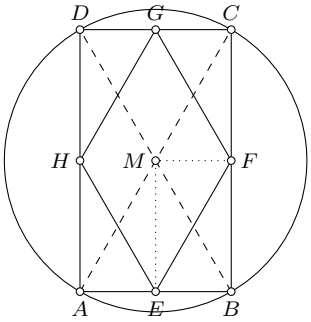
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung ist das Dreieck AMC gleichschenklig mit $AM = MC = r$, also gilt $\angle MAC = \angle ACM = 36°$. (1)
Da $\angle DCA$ und $\angle MAC$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind, gilt $\angle DCA = \angle MAC = 36°$. (2)
Aus (1) und (2) folgt $\angle DCA + \angle ACM = \angle DCM = 72°$. (3)
Weiterhin ist nach Voraussetzung das Dreieck MCD gleichschenklig mit $MD = MC = r$; hiernach und wegen (3) gilt $\angle MDC = \angle DCM = 72°$. Daraus folgt $\angle CMD = 36°$.

Aufgabe 220723:
Auf einer Kreislinie k seien vier Punkte A, B, C, D so gelegen, dass $ABCD$ ein Rechteck ist. Der Radius des Kreises k sei r genannt, die Mittelpunkte der Strecken AB, BC, CD und DA seien in dieser Reihenfolge mit E, F, G bzw. H bezeichnet.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen der Umfang des Vierecks $EFGH$ stets $4r$ betragen muss!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

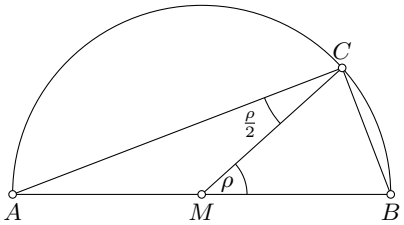


Der Mittelpunkt von k sei M. Im gleichschenkligen Dreieck ABM (mit $AM = BM = r$) ist die Seitenhalbierende ME zugleich Höhe, also gilt $\angle MEB = 90°$. Entsprechend folgt $\angle MFB = 90°$.
Da ferner nach Voraussetzung auch $\angle EBF = \angle ABC = 90°$ ist, ist $EBFM$ ein Rechteck. In ihm sind die Diagonalen gleichlang, also gilt $EF = MB = r$. Entsprechend ergibt sich $FG = r$, $GH = r$ und $HE = r$.
Damit ist die Behauptung $EF + FG + GH + HE = 4r$ bewiesen.

Aufgabe 270724:
Es sei AB der Durchmesser eines Kreises, der Mittelpunkt des Kreises sei M, ferner sei C ein Punkt, der so auf dem Kreis liegt, dass der Winkel $\angle BMC$

(a) die Größe 42°,
(b) eine beliebig vorgegebene Größe ρ mit $0° < \rho < 180°$ hat.
Ermittle jeweils aus diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\angle ACM$ und die des Winkels $\angle ACB$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(b) Aus den Voraussetzungen folgt: $MA = MC$ (Radien des Kreises), also $\angle ACM = \angle CAM$ (Basiswinkel im Dreieck ACM).
Hieraus und aus $\angle ACM + \angle CAM = \rho$ (Außenwinkelsatz für Dreieck ACM) folgt $\angle ACM = \frac{\rho}{2}$. (1)
Aus den Voraussetzungen folgt ferner $MB = MC$ (Radien des Kreises), also $\angle BCM = \angle CBM$ (Basiswinkel im Dreieck BCM). Hieraus und aus $\angle BCM + \angle CBM = 180° - \rho$ (Innenwinkelsatz für Dreieck BCM) folgt $\angle BCM = 90° - \frac{\rho}{2}$.
Daraus und aus (1) ergibt sich durch Addition $\angle ACB = 90°$. (2) Mit (1) und (2) sind die gesuchten Winkelgrößen ermittelt.

(a) Die Lösung zu (a) kann (mit der ebenso ausgeführten Herleitung oder) durch Einsatz von $\rho = 42°$ gefunden werden. Es ergibt sich $\angle ACM = 21°$ und $\angle ACB = 90°$.

Andere Lösungsmöglichkeiten:
Statt des Außenwinkelsatzes für Dreieck ACM kann der Innenwinkelsatz unter Verwendung von $\angle ACM = 180° - \rho$ (Nebenwinkel) herangezogen werden, ebenso statt des Innenwinkelsatzes für Dreieck BCM der Außenwinkelsatz.

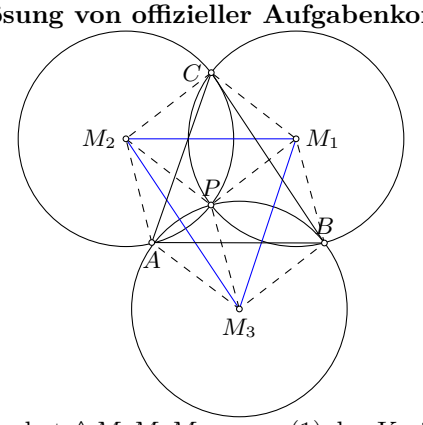
III Runde 3

Aufgabe 190732:
Von drei Kreisen k_1, k_2, k_3 mit dem gleichen Radius r, aber verschiedenen Mittelpunkten M_1, M_2, M_3 werde vorausgesetzt:

k_2 und k_3 schneiden einander in einem Punkt P und einem Punkt $A \neq P$.
k_3 und k_1 schneiden einander in P und einem Punkt $B \neq P$.
k_1 und k_2 schneiden einander in P und einem Punkt $C \neq P$.

Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt: Der Umkreis des Dreiecks ABC hat r als Radius!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung gilt

$$PM_1 = PM_2 = PM_3 = AM_2 = AM_3 = BM_3 = \\ = BM_1 = CM_1 = CM_2 = r \qquad (1)$$

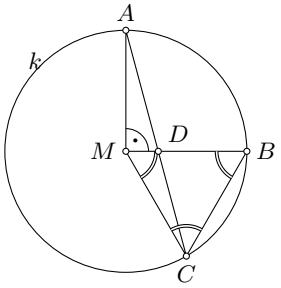
Daher sind PM_2AM_3, PM_3BM_1, PM_1CM_2 Rhomben. Also gilt $BM_3 \parallel M_1P \parallel CM_2$, $CM_1 \parallel M_2P \parallel AM_3$, $AM_2 \parallel M_3P \parallel BM_1$.
Hiernach und wegen (1) sind BCM_2M_3, CAM_3M_1, ABM_1M_2 Parallelogramme, also gilt $BC = M_2M_3$, $CA = M_3M_1$, $AB = M_1M_2$. Folglich ist $\triangle ABC = \triangle M_1M_2M_3$ (Kongruenzsatz sss).
Nun hat $\triangle M_1M_2M_3$ wegen (1) den Kreis um P mit r als Umkreis. Also hat das zu $\triangle M_1M_2M_3$ kongruente Dreieck ABC ebenfalls r als Umkreisradius.

Aufgabe 210734:
Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M. Auf k liegen die Punkte A und B derart, dass der Winkel $\angle BMA$ ein rechter ist. Weiterhin sei ein Punkt C durch folgende Bedingungen festgelegt:

(1) C liegt auf k.
(2) Es gilt $MB = BC$.
(3) Die Gerade durch A und C schneidet die Strecke MB in einem Punkt D.

Ermittle aus diesen Angaben die Größe des Winkels $\angle CDB$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da B und C auf k liegen, gilt $MB = MC$; nach Voraussetzung ist aber auch $MB = BC$. Somit ist das Dreieck MCB gleichseitig, jeder seiner Innenwinkel beträgt mithin 60°.
Läge C auf dem von A nach B führenden Viertelkreisbogen von k, so würde die Gerade durch A und C die Strecke MB nicht schneiden. Also liegt C außerhalb dieses Viertelkreisbogens, und es gilt $\angle AMC = 90° + 60° = 150°$.
Da A und C auf k liegen, das Dreieck AMC also mit $MA = MC$ gleichschenklig ist, gilt $\angle MAC = \angle MCA$. Hieraus folgt nach dem Innenwinkelsatz $\angle MAC = \angle MCA = 12(180° - 150°) = 15°$.

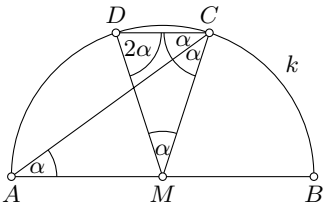
Somit ergibt sich nach dem Außenwinkelsatz, angewandt auf das Dreieck MCD

$$\angle CDB = \angle CMD + \angle MCD = 60° + 15° = 75°$$

Andere Lösungsmöglichkeiten: Man kann auch $\angle CDB = \angle MDA$ (Scheitelwinkel), $\angle MDA = 90° - 15°$ (Innenwinkel im Dreieck ADM) verwenden.

Aufgabe 220736:
Von fünf Punkten A, B, C, D, M wird folgendes vorausgesetzt:
M ist der Mittelpunkt der Stecke AB; die vier Punkte B, C, D, A liegen in dieser Reihenfolge auf einem Halbkreis über AB; es gilt $AB \parallel DC$; die Winkel $\angle BAC$ und $\angle CMD$ sind einander gleich groß.
Zeige, dass durch diese Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\angle BAC$ eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Winkelgröße!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

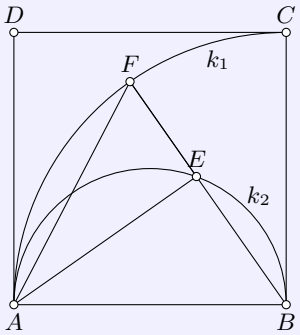


Aus den Voraussetzungen folgt $\angle ACD = \angle BAC = \alpha$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) und $\angle ACM = \angle BAC = \alpha$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ACM),
also $\angle DCM = 2\alpha$ und daher auch $\angle CDM = 2\alpha$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck CDM).

Hieraus und aus $\angle CMD = \alpha$ ergibt sich nach dem Winkelsummensatz, angewandt auf das Dreieck CDM, $5\alpha = 180°$, also $\alpha = 36°$.

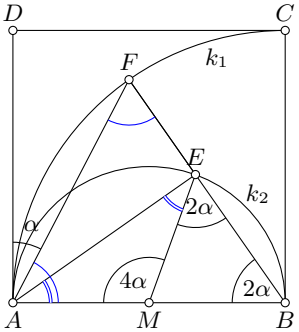
Aufgabe 250736:

Es sei $ABCD$ ein Quadrat. Der im Innern von $ABCD$ gelegene Viertelkreisbogen um B mit dem Radius AB sei k_1, der im Innern von $ABCD$ gelegene Halbkreis mit AB als Durchmesser sei k_2.
Ein von B ausgehender Strahl schneide k_2 in einem Punkt E und k_1 in einem Punkt F.
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets $\angle DAF = \angle EAF$ folgt!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a)



Es sei M der Mittelpunkt von AB, ferner sei $\angle DAF = \alpha$ (Abbildung a).
Da $ABCD$ ein Quadrat ist, gilt $\angle BAD = 90°$, also $\angle BAF = 90° - \alpha$. (1)
Da A und F auf k_1 liegen, gilt $AB = FB$. Nach dem Basiswinkelsatz folgt somit $\angle AFB = \angle BAF = 90° - \alpha$. (2)
Aus (1), (2) und dem Innenwinkelsatz (angewendet auf das Dreieck ABF) folgt $\angle FBA = 2\alpha$. (3)
Da B und E auf k_2 liegen, gilt $BM = EM$ und somit nach dem Basiswinkelsatz $\angle MEB = \angle EBM = \angle FBA = 2\alpha$. (4)

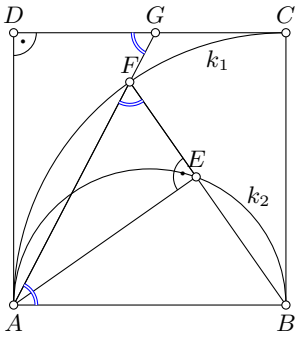
Aus (3), (4) und dem Außenwinkelsatz (angewendet auf das Dreieck BEM) folgt $\angle EMA = 4\alpha$. (5)
Da A und E auf k_2 liegen, gilt $AM = EM$ und somit $\angle MAE = \angle AEM$.
Aus (5) und dem Innenwinkelsatz (angewendet auf das Dreieck AME) folgt daher

$$\angle MAE = \angle AEM = \frac{1}{2}(180° - \angle EMA) = 90° - 2\alpha \tag{6}$$

Somit ergibt sich aus (1) und (6)

$$\angle EAF = \angle BAF - \angle MAE = 90° - \alpha - (90° - 2\alpha) = \alpha$$

b)



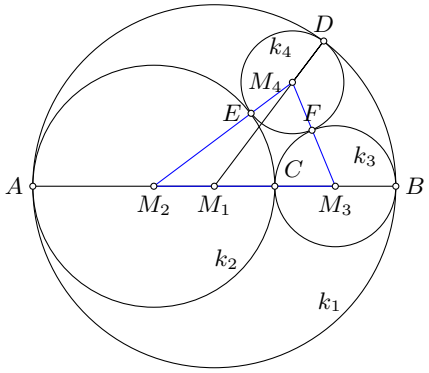
2. Lösungsweg:
Die Verlängerung von AF schneide CD in G (Abbildung b). Dann folgt (Wechselwinkel):
$\angle AGD = \angle BAG = \angle BAF = \angle BFA$ (7) (Basiswinkel im Dreieck ABF mit BA = BF.) Ferner folgt $\angle GDA = 90° = \angle AEB$ (Thalesatz) = $\angle AEF$ (Nebenwinkel) (8)
Aus (7) und (8) folgt nach dem Innenwinkelsatz, angewendet auf die Dreiecke AGD und AFE, $\angle EAF = \angle DAG = \angle DAF$.

Aufgabe 310736:
Von vier Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4 und ihren Mittelpunkten M_1, M_2, M_3, M_4 seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

(1) Es gibt eine Gerade, auf der die drei Punkte M_1, M_2 und M_3 liegen.
(2) Jeder der drei Kreise k_2, k_3 und k_4 berührt den Kreis k_1 von innen.
(3) Je zwei der Kreise k_2, k_3 und k_4 berühren sich gegenseitig von außen.

a) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets das Dreieck $M_1M_2M_4$ einen ebenso großen Umfang u wie das Dreieck $M_1M_3M_4$ hat!
b) Die Radien von k_1, k_2, k_3, k_4 seien r_1, r_2, r_3, r_4.
Zeige, dass eine Vorgabe solcher Radien stets ausreicht, um daraus u zu ermitteln! Drücke u durch möglichst wenig vorzugebende Radien aus!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die in (1) genannte Gerade schneidet, da sie durch M_1 geht, den Kreis k_1 in einem Durchmesser.
Nach (2) liegen die Berührungspunkte A bzw. B, die k_1 mit k_2, bzw. mit k_3 hat, auf den Verlängerungen von M_1M_2, bzw. M_1M_3 über M_2 bzw. M_3 hinaus, sind also die Endpunkte dieses Durchmessers. Sie sind voneinander verschieden, da andernfalls einer der Kreise k_2, k_3 den anderen von innen berühren müsste.
Nach (2) und (3) gilt: Der Berührungspunkt D von k_4 mit k_1 liegt auf der Verlängerung von M_1M_4 über M_4 hinaus, die Berührungspunkte E, F von k_2 bzw. k_3 liegen zwischen M_2 und M_4 bzw. zwischen M_3

und M_4.

a) Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} u &= M_1M_4 + M_4M_2 + M_2M_1 && (4)\\ &= M_1M_4 + M_4E + M_2E + M_2M_1 = M_1M_4 + M_4E + M_2A + M_2M_1 = M_1M_4 + M_4E + M_1A && (5)\\ &= M_1M_4 + M_4F + M_1B = M_1M_4 + M_4F + M_3B + M_3M_1 = M_1M_4 + M_4F + M_3F + M_3M_1\\ &= M_1M_4 + M_4M_3 + M_3M_1 \end{aligned}$$

b) Mit (5) gilt

$$u = M_1M_4 + M_4E + M_1A = M_1M_4 + M_4D + M_1A = M_1D + M_1A = 2 \cdot r_1$$

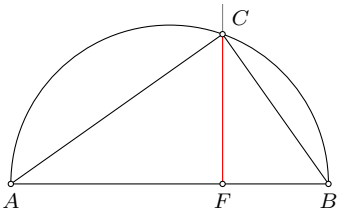
III.IV Konstruktionen

I Runde 1

Aufgabe V00711:
Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse (längste Seite) $c = 6$ cm beträgt und in dem der Fußpunkt der Höhe h_c vom Punkt B aus einen Abstand von 2 cm hat! Miss die Höhe h_c!

Lösung von Steffen Polster:

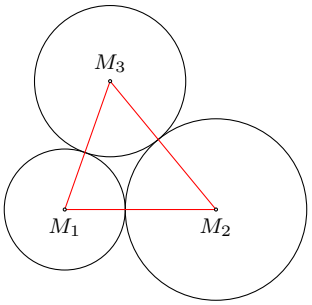
Höhe $h_c \approx 2{,}8$ cm



Aufgabe V00712:
Zwei Kreise mit dem Durchmesser $d_1 = 4$ cm und $d_2 = 6$ cm berühren einander von außen. Konstruiere einen dritten Kreis mit $d_3 = 5$ cm so, dass er die beiden ersten Kreise von außen berührt! Begründe kurz die Konstruktion! Führe die Konstruktion auf unliniertem Papier aus!

Lösung von Steffen Polster:

Berühren sich die drei Kreise paarweise, so bilden deren Mittelpunkte M_1, M_2 und M_3 ein Dreieck mit den Seitenlängen $r_1 + r_2$, $r_1 + r_3$ und $r_2 + r_3$, wobei die r_i die Radien der Kreise sind.
Dieses Dreieck wird entsprechend des Kongruenzsatzes SSS konstruiert.

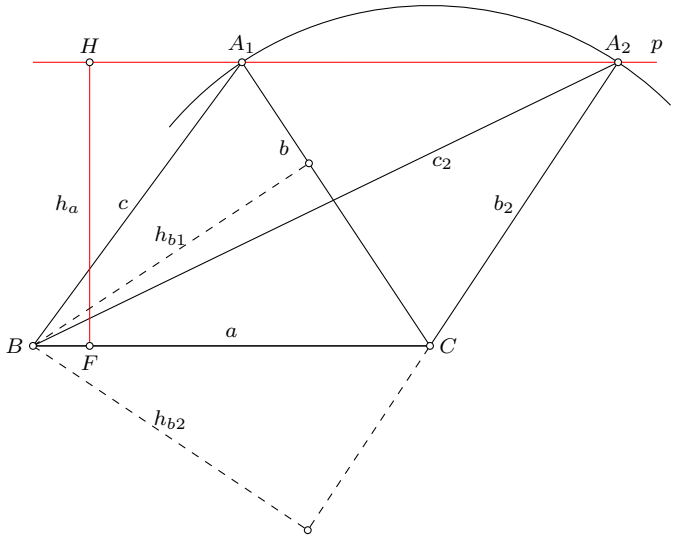


Aufgabe V10715:
Konstruiere ein Dreieck aus: $a = 7$ cm, $b = 6$ cm, $h_a = 5$ cm!
Wie groß ist h_b? (Messung und Berechnung!)
Wie viel verschiedene Dreiecke kann man mit den gegebenen Stücken konstruieren? (Konstruktion ausführen!)

Lösung von Steffen Polster:
Konstruktion:
1. Man zeichne die Strecke BC der Länge a.
2. In einem beliebigen Punkt F auf BC errichte man eine Senkrechte. Auf dieser Senkrechten sei H ein Punkt im Abstand h_a von F.
3. Durch H konstruiere man die Parallele p zu BC.
4. Ein Kreis um C mit dem Radius b schneidet dann die Parallele p in zwei Punkten. Diese Punkte sind A und A_2.
5. Die zueinander nicht kongruenten Dreiecke ABC und A_2BC sind dann die gesuchten Lösungen der Aufgabenstellung.

Messung der zwei Höhen h_{b1} und h_{b2} ergibt jeweils ≈ 6 cm. Die Berechnung ergibt

$$A = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b \qquad \rightarrow \qquad h_b = \frac{a \cdot h_a}{b} = \frac{35}{6} \text{ cm}$$



Aufgabe 010715:
Kann man ein Parallelogramm eindeutig konstruieren, wenn gegeben sind:
a) zwei benachbarte Seiten,
b) eine Seite und zwei anliegende Winkel,
c) beide Diagonalen,
d) eine Diagonale und die von den Diagonalen eingeschlossenen Winkel,
e) eine Diagonale und die zwei Winkel, in die der entsprechende Winkel des Parallelogramms von der Diagonalen geteilt wird?
Durch wie viel Stücke wird ein Parallelogramm eindeutig bestimmt? Nenne 3 Beispiele!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Nein, da man z. B. sowohl ein Rechteck daraus konstruieren kann wie auch ein Parallelogramm mit beliebigem Winkel zwischen den gegebenen Seiten.

b) Nein, da die Länge der anderen Seite noch frei wählbar ist.

c) Nein, da der Winkel zwischen den beiden Diagonalen noch frei wählbar ist.

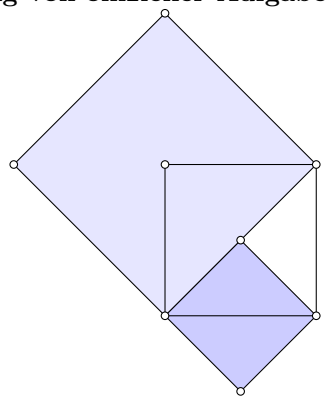
d) Nein, da die Länge der zweiten Diagonale noch frei wählbar ist.

e) Ja. Konstruktion: Länge der Diagonalen auf einer Geraden abtragen, an beiden Endpunkten die gegebenen Winkel antragen (Wechselwinkel). Die Seiten des Parallelogramms liegen auf den so entstandenen Schenkeln.

Ein Parallelogramm wird durch drei Stücke eindeutig bestimmt, wenn diese nicht durch Beziehungen wie z. B. dem Stufen- oder Wechselwinkelsatz in Verbindung stehen.
Man kann sich ein Parallelogramm als zwei aneinander gelegte kongruente Dreiecke vorstellen. Jede Angabe von Stücken, die ein Dreieck eindeutig festlegt, erzeugt damit auch ein Parallelogramm.

Aufgabe 010716:
Konstruiere ein beliebiges Quadrat! Konstruiere dann
a) ein Quadrat mit der doppelten Fläche,
b) ein Quadrat mit der halben Fläche
des Ausgangsquadrates! Begründe die Konstruktion!

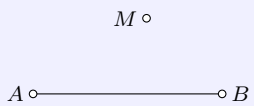
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für das neue Quadrat in a) nehme man die Diagonale des ersten als Kantenlänge (im Bild das hellere Quadrat), in b) nehme man die Hälfte der Diagonale (das dunklere Quadrat).

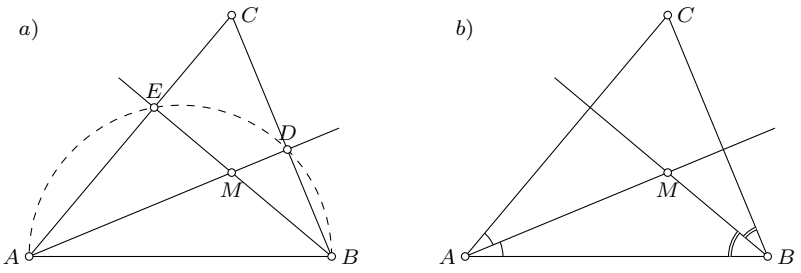
Beweis zu a):
Wenn man das neue Quadrat direkt an die Diagonale des alten konstruiert, sieht man, dass die überdeckte Hälfte des alten Quadrates genau einem Viertel des neuen entspricht.
Bei b) tauschen das alte und das neue Quadrat die Rollen.

Aufgabe 020714:



Gegeben ist eine Strecke AB und außerhalb von ihr ein Punkt M.
a) Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem AB eine Seite und M der Schnittpunkt der Höhen ist!
b) Konstruiere ein Dreieck ABC, in dem AB eine Seite und M der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist! Beschreibe die Konstruktionen und begründe sie!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Zuerst zeichnet man die Geraden AM und BM ein. Auf diesen liegen die Höhen h_a und h_b des Dreiecks. Dann fällt man von A und B aus das Lot auf die jeweils andere Gerade. Da die Lote senkrecht zu den Höhen stehen und je ein Eckpunkt des Dreiecks auf ihnen liegt, sind sie die beiden anderen Seiten.
Ihr Schnittpunkt ist der Punkt C.



b) Man beginnt mit denselben Geraden. Dann trägt man aber die Winkel $\angle MAB$ und $\angle MBA$ nochmals in A und B an, so dass man die vollen Winkel des Dreiecks an diesen Eckpunkten erhält.
Damit hat man die zwei fehlenden Seiten und deren Schnittpunkt als dritten Eckpunkt C.

Aufgabe 040713:
Bei geometrischen Übungen im Freien hat Brigitte die Aufgabe, einen im Gelände gegebenen Winkel von 80° auf ein anderes Geländestück zu übertragen. Als Hilfsmittel stehen ihr einige Fluchtstäbe und eine 20 m lange Schnur zur Verfügung.
Brigitte findet zwei Lösungswege.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Man verknüpft die Seilenden miteinander, legt diesen Knoten auf den Scheitelpunkt des vorgegebenen Winkels und spannt mit dem Seil mit Hilfe der Fluchtstäbe ein Dreieck auf, so dass zwei seiner Seiten auf den Schenkeln des Winkels liegen. Die beiden restlichen Eckpunkte des Dreiecks werden durch Knoten markiert.
An der gewünschten Stelle lässt sich dann mit drei Fluchtstäben und dem Seil ein kongruentes Dreieck aufspannen und damit der Winkel übertragen.

b) Man schlägt mit einem Teil des Seiles (etwa der Hälfte, da der Winkel größer als 60° ist) um den Scheitelpunkt des vorgegebenen Winkels einen Kreisbogen, der die Schenkel des Winkels in zwei Punkten schneidet, und überträgt einen Kreisbogen, der einen gleichgroßen Radius hat, an die gewünschte Stelle.
Dann markiert man auf dem Seil die Länge der zwischen den Schenkeln des Winkels liegenden Sehne und überträgt diese analog der bekannten geometrischen Grundkonstruktionen ebenfalls an die gewünschte Stelle.

Anmerkung: In beiden Fällen wird folglich ein Dreieck aus drei Seiten konstruiert.

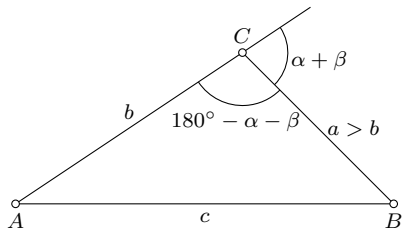
Aufgabe 060714:
Zwischen den Schenkeln s_1 und s_2 eines spitzen Winkels liegt der Punkt P. Der Scheitelpunkt des Winkels sei S.
Man konstruiere auf s_1 und s_2 die Punkte X, für die die Länge der Strecke XS gleich der Länge der Strecke XP ist, für die also $XS = XP$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man verbindet den Scheitelpunkt S des gegebenen Winkels mit dem Punkt P und konstruiert zur Strecke PS die Symmetrieachse s.
Die Schnittpunkte X_1 und X_2 von s mit s_1 und s_2 sind die gesuchten Punkte; denn weil sie Punkte von s sind, gilt für sie $X_1S = X_1P$ bzw. $X_2S = X_2P$.

Da alle übrigen Punkte von s_1 und s_2 nicht auf s liegen, kann für sie die oben genannte Beziehung nicht gelten. Die Punkte X_1 und X_2 sind also die einzigen, die den Bedingungen der Aufgabe genügen. Sie existieren für jeden spitzen Winkel und sind stets eindeutig bestimmt.

Aufgabe 110714:
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus b, c (mit $c > b$) und $\alpha + \beta$! Dabei sind b die Länge der Seite AC, c die der Seite AB, α die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die des Winkels $\angle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke stets ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es laut Aufgabenstellung konstruiert werden soll. Dann hat der Winkel $\angle BCA$ wegen des Winkelsummensatzes im Dreieck eine Größe von $180° - (\alpha + \beta)$.
Mithin lässt sich die Aufgabe auf eine Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und einem einer der beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel zurückführen.



(II) Infolgedessen kann ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir zeichnen eine Strecke AC der Länge b.
(2) Wir zeichnen einen Winkel der Größe $\alpha+\beta$ und zu ihm einen Nebenwinkel, dessen Größe somit $180° - (\alpha + \beta)$ beträgt.
(3) Wir tragen in C an AC einen Winkel der Größe $180°-(\alpha+\beta)$ an.

(4) Wir schlagen den Kreis k um A mit c. Schneidet er den freien Schenkel s (zu dem C nicht mit hinzugerechnet werde) des beim Konstruktionsschritt (3) angetragenen Winkels, so sei einer der entstehenden Schnittpunkte B genannt.

(III) Der Beweis, dass je drei so gewonnene Punkte A, B, C die Ecken eines Dreiecks $\triangle ABC$ bilden, das allen Bedingungen der Aufgabe entspricht, folgt unmittelbar aus dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck und aus (II).

(IV) Es sei angenommen, dass die gegebenen Größen die (trivialen) Bedingungen $b > 0$; $c > 0$; $0° < (\alpha + \beta) < 180°$ erfüllen. Dann sind die Konstruktionsschritte (II) (1), (2), (3) stets (bis auf Kongruenz) eindeutig ausführbar.
Wegen $c > b$ schneidet der Kreis k (siehe (II) (4)) den freien Schenkel s in genau einem Punkt. Daher existiert (bis auf Kongruenz) genau ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Aufgabe 120714:
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Ein Punkt C_1 soll folgende Eigenschaften haben:

(1) Das Dreieck $\triangle ABC_1$ ist flächengleich zu dem Dreieck $\triangle ABC$,
(2) $AC = AC_1$.
(3) $C \neq C_1$.

a) Gib eine Konstruktion an, durch die man alle Punkte C_1 erhalten kann, die die Eigenschaften (1), (2), (3) besitzen!
b) Untersuche, wie die Anzahl der Punkte C_1 mit den Eigenschaften (1), (2), (3) von Eigenschaften des gegebenen Dreiecks $\triangle ABC$ abhängt! (Fallunterscheidung)

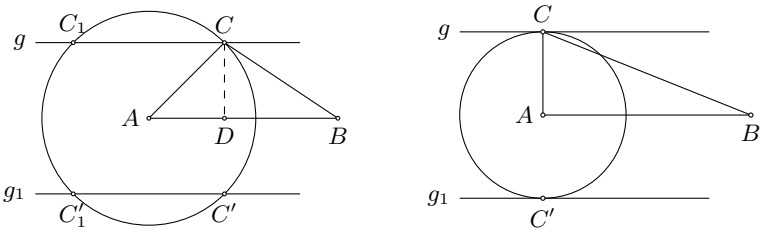
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, ein Punkt C_1 habe die Eigenschaften (1), (2), (3). Dann gilt:
Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABC_1$ haben die Seite AB gemeinsam. Wegen (1) stimmen sie daher auch in der zu dieser Seite gehörenden Höhenlänge überein. Folglich liegt der Punkt C_1 auf einer der Parallelen

zu AB, die denselben Abstand von AB haben wie Punkt C. Wegen (2) liegt C_1 ferner auf dem Kreis mit dem Radius AC um A.

(II) Daraus ergibt sich, dass ein Punkt C_1 nur dann die Eigenschaften (1), (2), (3) hat, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Wir zeichnen die Parallele g zu AB durch C und die von g verschiedene Parallele g_1 zu AB, die denselben Abstand von AB hat wie g. Wir schlagen um A mit dem Radius AC den Kreis k. Schneidet oder berührt er g oder g_1 noch in einem von C verschiedenen Punkt, so sei dieser C_1 genannt.

(III) Der Beweis, dass jeder so konstruierte Punkt C_1 den Bedingungen (1) bis (3) entspricht, folgt aus (II) sowie daraus, dass die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABC_1$ in der zur (gemeinsamen) Seite gehörenden Höhenlänge übereinstimmen.



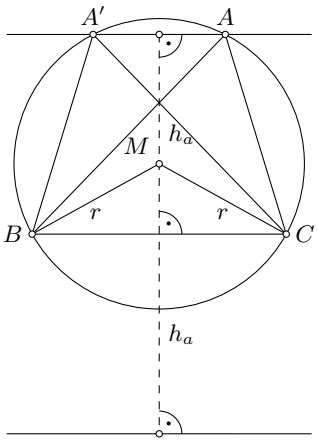
(IV) Es sei D der Fußpunkt des von C auf die Gerade durch A und B gefällten Lotes. Nun unterscheiden wir folgende zwei Fälle:

1. Fall: Ist $\triangle ABC$ bei A nicht rechtwinklig, so ist $D \neq A$, also $\triangle ADC$ ein bei D rechtwinkliges Dreieck und darin AC die längste Seite (Hypotenuse), DC eine der anderen Seiten (Kathete), also $DC < AC$.
Der Abstand, den g und g_1 von AB und folglich von A haben, ist also kleiner als der Radius von k. Daher schneidet k jede der Parallelen g, g_1 in genau zwei Punkten. Von den so entstehenden vier Schnittpunkten ist genau einer C. Die gesuchte Anzahl der Punkte C_1, die (1), (2), (3) erfüllen, beträgt daher 3.

2. Fall: Ist $\triangle ABC$ bei A rechtwinklig, so ist $D = A$, also $DC = AC$. Der Abstand, den g und g_1 von AB und folglich von A haben, ist also gleich dem Radius von k. Daher berührt k jede der Parallelen g, g_1 in genau einem Punkt. Von den so entstehenden zwei Berührungspunkten ist genau einer C.
Die gesuchte Zahl der Punkte C_1, die (1), (2), (3) erfüllen, beträgt daher 1.

Aufgabe 140713:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r = 3{,}2$ cm, $a = 5{,}6$ cm und $h_a = 4{,}4$ cm!
Dabei sei r die Länge des Umkreisradius, a die Länge der Seite BC und h_a die Länge der zur Seite BC gehörenden Höhe des Dreiecks.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist, wobei die anzufertigende Zeichnung mit verwendet werden darf!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll. M sei der Umkreismittelpunkt des Dreiecks.



Dann haben die Seiten BC, BM, CM des Teildreiecks BCM die Längen a, r, r. Der Punkt A liegt erstens auf dem Kreis um M mit r und zweitens auf einer Parallelen zu BC im Abstand h_a.

(II) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck BCM, in dem die Seiten BC, BM, CM die Längen a, r, r haben.
(2) Man schlägt den Kreis um M mit dem Radius r.
(3) Man konstruiert die beiden Parallelen zu BC im Abstand h_a. Schneidet eine von ihnen den in (2) konstruierten Kreis, so sei A einer der Schnittpunkte.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

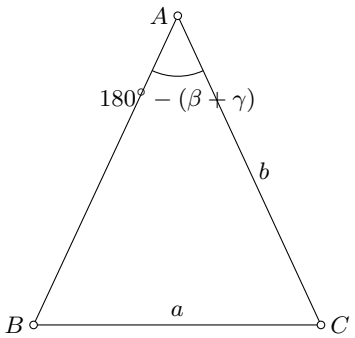
Laut Konstruktion hat die Seite BC des Dreiecks ABC die Länge a. Ferner haben BM, CM und AM die Länge r, also ist r die Länge des Umkreisradius von $\triangle ABC$. Schließlich hat A von der Geraden durch B und C den Abstand h_a, wie es verlangt war.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist wegen $2r > a$ bis auf Kongruenz eindeutig. Konstruktionsschritt (2) ist eindeutig.
(3) liefert zunächst eindeutig die beiden Parallelen zu BC im Abstand h_a. Bei den gegebenen Werten von r, a und h hat - wie man sieht - von diesen Parallelen genau die auf der gleichen Seite der Geraden durch B und C wie M liegende Parallele Schnittpunkte mit dem Kreis um M mit r, und zwar genau zwei.

Diese beiden Punkte liegen symmetrisch zu der Mittelsenkrechten von BC. Daher sind die beiden hiermit erhaltenen Dreiecke zueinander kongruent. Das Dreieck ABC ist mithin durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 170713:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 9{,}7$ cm, $b = 7{,}6$ cm und $\beta + \gamma = 115°$!
Dabei sei a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC, β die Größe des Winkels $\angle ABC$ und γ die des Winkels $\angle ACB$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, hat der $\angle BAC$ die Größe $180° - (\beta + \gamma)$. Daher sind im Dreieck ABC die Längen zweier Seiten und die Größe eines Winkels bekannt, der einer der beiden Seiten gegenüberliegt. Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(II) (1) Wir zeichnen eine Strecke AC der Länge b.
(2) Wir tragen in A an AC einen Winkel der Größe $180° - (\beta + \gamma)$ an.
(3) Wir zeichnen den Kreis um C mit a. Schneidet er den freien Schenkel des nach (2) angetragenen Winkels, so sei ein Schnittpunkt B genannt.

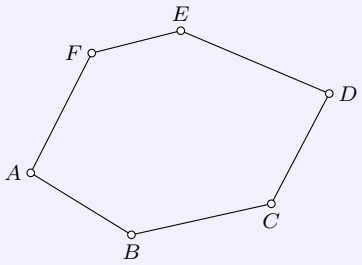
(III) Jedes so erhaltene Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion ist $BC = a$, $AC = b$ und nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck $\angle ABC + \angle BCA = \beta + \gamma$.

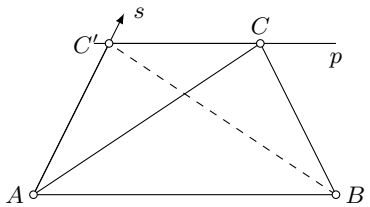
(IV) Wegen $a > b$ ist die Konstruktion nach dem Kriterium ssw bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.

Aufgabe 310714:
a) Konstruiere ein beliebiges Dreieck ABC und einen beliebigen von A ausgehenden Strahl s, der die Gerade durch A, B nach derjenigen Seite hin verlässt, auf der auch C liegt!
Konstruiere nun denjenigen auf dem Strahl s liegenden Punkt C', für den das Dreieck ABC' denselben Flächeninhalt wie das Dreieck ABC hat!

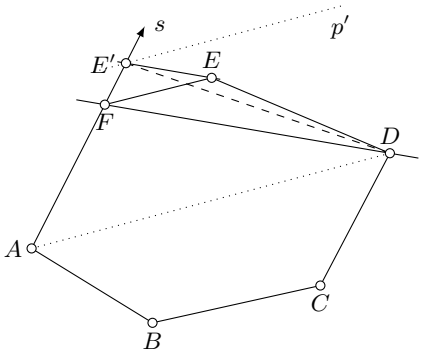
b) Konstruiere zu einem beliebigen Sechseck $ABCDEF$, wie die Abbildung zeigt, einen Punkt E', für den $ABCDE'$ ein Fünfeck ist, das denselben Flächeninhalt wie das Sechseck $ABCDEF$ hat!
Beschreibe Deine Konstruktion und weise nach, dass ein nach Deiner Beschreibung konstruierter Punkt E' diese Bedingungen erfüllt!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Die Abbildung zeigt eine geforderte Konstruktion.



b) Konstruktion:
Beschreibung: Man konstruiert die Parallele p durch E zu FD und ihren Schnittpunkt E' mit der Verlängerung s von AF über F hinaus.a) Die Abbildung zeigt eine geforderte Konstruktion.

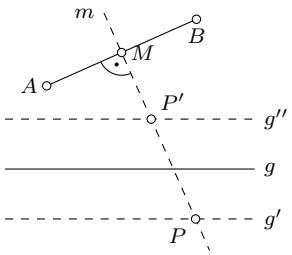
Beweis:
Es wird bewiesen, dass $ABCDE'$ ein zu $ABCDEF$ flächengleiches Fünfeck ist.
Da E' auf der Verlängerung von AF liegt, ist $ABCDE'$ ein Fünfeck. Da nach Konstruktion ferner $E'E \parallel FD$ gilt, haben in den Dreiecken FDE' und FDE die zu FD senkrechten Höhen einander gleiche Länge. Also haben die Dreiecke FDE' und FDE einander gleichen Flächeninhalt.

Addiert man hierzu den Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDF$, so folgt die behauptete Flächengleichheit von $ABCDE'$ mit $ABCDEF$.

II Runde 2

Aufgabe 010724:
In einer Ebene sind eine Gerade g und zwei Punkte A und B gegeben, die nicht auf g liegen. Konstruiere alle Punkte P, die von g jeweils 3 cm Abstand haben und für die $AP = BP$ ist! Begründe die Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

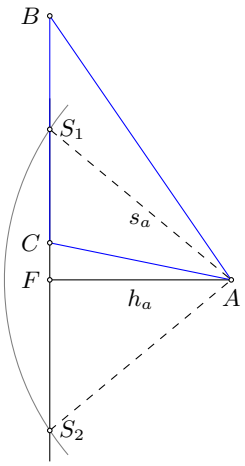


Konstruktion:
Man errichte die Mittelsenkrechte m zur Strecke AB, um alle Punkte mit $AP = BP$ zu erhalten. Dann konstruiere man die Parallelen g' und g'' auf beiden Seiten zu g im Abstand von 3 cm.
Die Schnittpunkte von m mit g' bzw. g'' sind die beiden gesuchten Punkte P bzw. P'.

Beweis:
Sei M der Mittelpunkt der Strecke AB. Dann gilt $AMP \cong BMP$ nach Kongruenzsatz SWS. Außerdem haben alle Punkte auf g' und g'' denselben geforderten Abstand zur Geraden g. Die Schnittpunkte P und P' erfüllen somit beide Forderungen der Aufgabenstellung.

Aufgabe 020725:
Konstruiere ein Dreieck aus $a = 5$ cm, $h_a = 4$ cm und der Seitenhalbierenden (Mittellinie) $s_a = 6$ cm!
Beschreibe die Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

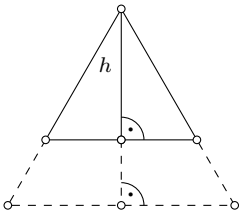


Man beginne mit einer Geraden, auf der man h_a abtrage und einen Endpunkt mit A bezeichne. Um diesen Punkt A zeichne man einen Kreis mit s_a als Radius, im anderen Endpunkt errichte man die Senkrechte. Auf dieser Senkrechten wird die Seite a liegen, ihr Schnittpunkt mit dem Kreis (einen auswählen, da es zwei gibt!) ist der Mittelpunkt der Seite a.

Von diesem Punkt aus kann man zu beiden Seiten je die Hälfte von a abtragen und erhält so die Punkte B und C und damit das Dreieck.

Aufgabe 030722:
Konstruiere nur mit Zirkel und Lineal ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe $h = 4$ cm!
Beschreibe und begründe die Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

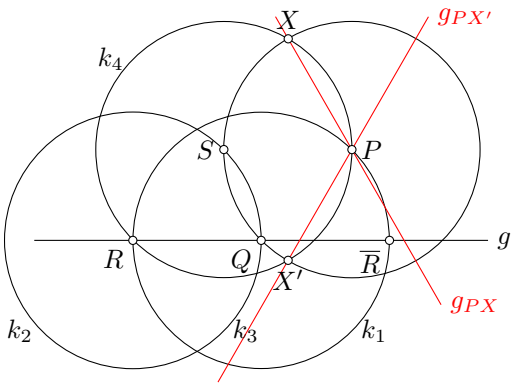


Konstruktion: (siehe Abbildung) Man konstruiere zuerst ein beliebiges gleichseitiges Dreieck (gestrichelt dargestellt).
In diesem errichte man eine der Höhen. Auf der (ggf. verlängerten) Höhe trägt man 4 cm vom Eckpunkt des Dreiecks aus ab; dies ist eine der Höhen h des gesuchten Dreiecks.
Im erhaltenen Endpunkt von h errichtet man die Senkrechte zu h; so erhält man die dritte Seite des gesuchten Dreiecks (durchgezogen dargestellt).

Diese Konstruktion erfüllt die Aufgabenstellung, da alle gleichseitigen Dreiecke zueinander ähnlich sind.

Aufgabe 060721:
Gegeben sind eine Gerade g und ein nicht auf g liegender Punkt P.
Konstruiere unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal alle Geraden durch P, die mit g einen Winkel vom Gradmaß 60° bilden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Man wählt auf g einen beliebigen Punkt Q und schlägt um ihn mit PQ den Kreis k_1. Dieser schneidet g in zwei Punkten: R und $\overline{R}$.
Nun schlägt man um R und um P mit PQ die Kreise k_2 und k_3. Diese schneiden einander in Q und in einem Punkt $S \neq Q$ (andernfalls würden sie sich in Q berühren, also lägen R, P und Q auf derselben Geraden, d. h., P läge auf g, im Widerspruch zur Voraussetzung).

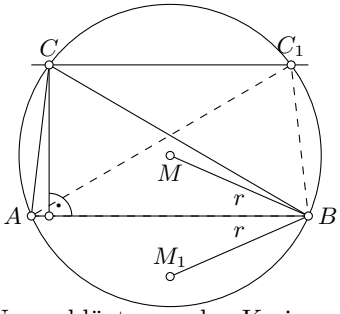
Schlägt man nun mit PQ um S den Kreis k_4, so schneidet dieser k_3 in zwei Punkten: X und X', $X \neq X'$. Die Geraden g_{PX} und $g_{PX'}$ und nur diese genügen der Aufgabenstellung. (Der zweite Schnittpunkt $\overline{R}$ von k_1 und g führt zwar zu anderen Punkten X und X', aber zu denselben Geraden).

Beweis: Laut Konstruktion ist das Dreieck $\triangle SXP$ gleichseitig. Außerdem ist $SP \parallel RQ$ (als Seiten in dem Rhombus $RQPS$). Die Gerade g_{XP} schneide g im Punkte P_1.
Dann gilt (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) $\angle SPP_1 = \angle PP_1\overline{R}$ d. h. $\angle PP_1\overline{R}$ hat ein Gradmaß von 60°. Ebenso ist laut Konstruktion $X'P \parallel SX$.

Die Gerade $g_{PX'}$ schneidet mithin g ebenfalls unter einem Winkel von 60°. Da es nur zwei Geraden durch P gibt, die mit g einen Winkel vom Gradmaß 60° bilden, sind damit alle derartigen Geraden gefunden.

Aufgabe 080723:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r = 3$ cm, $c = 5{,}5$ cm und $h_c = 3$ cm!
Dabei sei r die Länge des Umkreisradius, c die Länge der Seite AB und h_c die Länge der zur Seite AB gehörenden Höhe des Dreiecks.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll; M sei der Umkreismittelpunkt des Dreiecks. Dann liegt der Punkt C auf dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$ im Abstand h_c von AB.



(II) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen kann, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

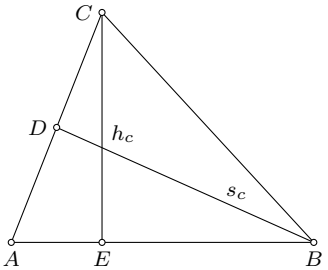
Man zeichnet AB und schlägt um A und B die Kreise mit dem Radius der Länge r. Einer ihrer Schnittpunkte sei M, der andere M_1 genannt.

Nun schlägt man den Kreis um M mit r. Dann konstruiert man die beiden Parallelen zu AB im Abstand h_c. Wegen $h_c = r$ und $c < 2r$ schneidet diejenige Parallele, die mit M_1 auf der gleichen Seite der durch A und B gehenden Geraden liegt, den Kreis um M durch A nicht. Die andere Parallele schneidet diesen Kreis in zwei Punkten, C und C_1.
Die Dreiecke $\triangle ABC$ bzw. $\triangle ABC_1$ entsprechen den Bedingungen.

(III) Der Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ tatsächlich den Bedingungen der Aufgabe entspricht, ergibt sich leicht aus (II).

Aufgabe 100724:
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $\alpha = 70°$, $s_b = 7$ cm, $h_c = 5$ cm!
Dabei sei α die Größe des Winkels $\angle BAC$, s_b sei die Länge der Seitenhalbierenden der Seite AC und h_c die Länge der Höhe des Dreiecks, die auf der Geraden durch A und B senkrecht steht.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Analyse:
Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll.
Der Mittelpunkt von AC sei D, der Fußpunkt der auf der Geraden durch A und B senkrechten Höhe sei E. Dann liegt E wegen $\alpha < 90°$ auf dem von A ausgehenden Strahl durch B, und es lässt sich das Teildreieck $\triangle AEC$ aus h_c, α und dem rechten Winkel $\angle AEC$ konstruieren. Punkt B liegt erstens auf dem von A ausgehenden Strahl durch E und zweitens auf dem Kreis mit s_b um D.

II. Konstruktionsbeschreibung:
Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(1) Wir konstruieren das Dreieck $\triangle AEC$ aus h_c, α und dem rechten Winkel $\angle AEC$.
(2) Wir konstruieren den Mittelpunkt D der Strecke AC.

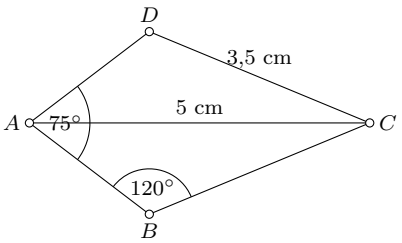
(3) Wir konstruieren den von A ausgehenden Strahl durch E.
(4) Wir schlagen um D mit s_b den Kreis. Schneidet er den Strahl AE, so sei B einer der Schnittpunkte.

III. Beweis, dass jedes auf diese Weise konstruierbare Dreieck $\triangle ABC$ tatsächlich den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Nach Konstruktion ist $DB = s_b$, $CE = h_c$, und der Winkel $\angle CAB$ hat die Größe α. Ferner ist D der Mittelpunkt, also BD die Seitenhalbierende von AC. Schließlich ist nach Konstruktion $CE \perp AB$, also CE auf AB und damit die auf der Geraden durch A und B senkrechte Höhe.

IV. Eindeutigkeitsnachweis:
Wegen $\alpha < 90°$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach dem Kriterium sww eindeutig. Ferner ist (2) stets eindeutig möglich, ebenso (3), da wegen (1) $A \neq E$ ist.
Schließlich ist auch (4) nach sww eindeutig möglich, da für die gegebenen Größen α und h_c die Strecke DA kleiner als s_b ausfällt.
Folglich ist die gesamte Konstruktion mit den gegebenen Stücken eindeutig.

Aufgabe 110724:
Konstruiere ein konvexes Viereck $ABCD$ aus $BC = 3{,}5$ cm; $CD = 3{,}5$ cm; $AC = 5$ cm; $\angle DAB = 75°$ und $\angle ABC = 120°$!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein konvexes Viereck eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $ABCD$ sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Dann ist das Dreieck $\triangle ABC$ aus den Seiten AC, BC und dem der größeren Seite AC gegenüberliegenden Winkel $\angle ABC$ zu konstruieren.
Punkt D muss nun erstens auf dem freien Schenkel eines Winkels der Größe $\angle BAD$ und zweitens auf dem Kreis um C mit dem Radius CD liegen. Ferner liegen, da das Viereck konvex ist, B und D auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und C.



(II) Daraus ergibt sich, dass ein Viereck $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $AC = 5$ cm, $BC = 3{,}5$ cm und $\angle ABC = 120°$.
(2) Man trägt in A an AB einen Winkel der Größe $75°$ so an, dass sein freier Schenkel nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegt wie B.

(3) Man schlägt den Kreis um C mit $CD = 3{,}5$ cm. Schneidet er den freien Schenkel des in (2) konstruierten Winkels, so sei einer der Schnittpunkte D genannt.

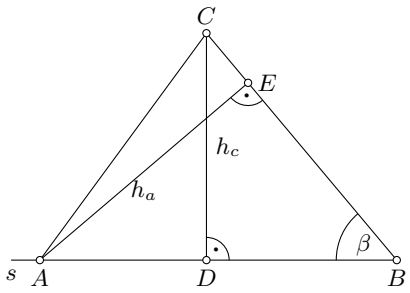
(III) Der Beweis, dass bei je 4 so konstruierten Punkten A, B, C, Ddie vorgeschriebenen Streckenlängen und Winkelgrößen auftreten, ergibt sich unmittelbar aus (II) und der Umkehrung der Schlüsse in (I).
Ferner folgt aus (II), dass $\angle DAB + \angle ABC = 195° > 180°$ ist, so dass keiner der Winkel $\angle BCD$, $\angle CDA$ die Größe $180°$ erreichen oder überschreiten kann.
Daher bilden A, B, C, D die Ecken eines konvexen Vierecks.

(IV) Die Konstruktion des Dreiecks $\triangle ABC$ ist wegen $AC > BC$ und, weil $\angle ABC$ der Seite AC gegenüberliegt, nach dem Kriterium (ssw) stets bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.
Der Kreis um C mit CD schneidet den freien Schenkel des nach (2) konstruierten Winkels von $75°$ bei den vorgegebenen Werten in genau zwei Punkten D_1 und D_2. Man erhält also (bis auf Kongruenz) zwei Vierecke $ABCD_1$ und $ABCD_2$, die beide den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Die beiden Vierecke sind nicht kongruent, da sie verschiedenen Flächeninhalt haben.

Aufgabe 120724:
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $h_a = 6$ cm, $h_c = 5$ cm und $\beta = 50°$!
Dabei seien h_a die Länge der Dreieckshöhe, die auf BC senkrecht steht, h_c die Länge der auf AB senkrecht stehenden Dreieckshöhe und β die Größe des gegebenen Winkels $\angle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach der Aufgabenstellung konstruiert werden soll. Der Fußpunkt der von C auf die Gerade durch A und B gefällten Höhe sei D. Dann gilt für das Dreieck $\triangle BCD$ wegen $\beta < 90°$: $\angle DBC = \beta$, $\angle BDC = 90°$ und $CD = h_c$.

Punkt A liegt
1. auf dem Strahl s aus B durch D und
2. auf einer Parallelen zu BC im Abstand h_a, und zwar auf derselben Seite von BC wie D, weil A auf dem Strahl s liegt.

(II) Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren das Dreieck $\triangle BCD$ aus den Winkeln $\angle DBC$, $\angle BDC$ und der Seite CD, deren Größen β, $90°$ bzw. h_c sind.
(2) Wir zeichnen den Strahl s aus B durch D.
(3) Wir ziehen im Abstand h_a die Parallele zu BC, die auf der gleichen Seite von BC liegt wie D. Schneidet sie den Strahl s, so sei dieser Schnittpunkt A genannt.

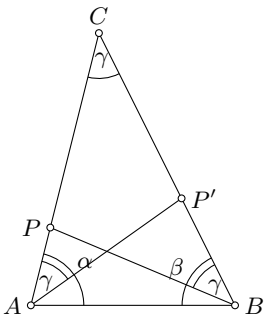
(III) Beweis, dass jedes auf diese Weise konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ tatsächlich allen Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion hat der Winkel $\angle ABC$ dieselbe Größe wie der Winkel $\angle DBC$, und dieser hat die Größe β, ferner ist $CD = h_c$, und die Strecke CD steht senkrecht auf AB. Schließlich hat nach Konstruktion der Punkt A von BC den Abstand h_a.

(IV) Wegen $\beta < 90°$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach dem Kriterium (sww) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ferner sind nach Ausführung von (1) die Schritte (2) und (3) eindeutig ausführbar, und da BC nicht parallel BD ist, existiert dann auch eindeutig der Schnittpunkt A, wobei man bei verschiedenen Ausführungen von (1) zu kongruenten Dreiecken $\triangle ABC$ gelangt.
Das Dreieck $\triangle ABC$ ist mithin durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 130724:
Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck, in dem die Größe γ des Innenwinkels BCA kleiner ist als jede der Größen der beiden anderen Innenwinkel.
Konstruiere alle Punkte P auf den Seiten AC und BC, so dass $\angle BPA = 2\gamma$ gilt!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion; ermittle die Anzahl der Punkte P mit der verlangten Eigenschaft!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, ein Punkt P auf AC habe die verlangte Eigenschaft. Nach dem Außenwinkelsatz für $\triangle BCP$ folgt dann $\angle CBP = \angle BPA - \angle BCP = \gamma$.

(II) Daher entspricht ein Punkt P auf AC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

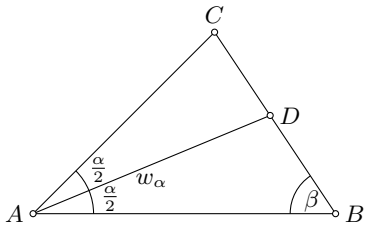
(1) Man trägt in B an BC nach der Seite der Geraden durch B und C, auf der A liegt, den Winkel der Größe γ an.
(2) Schneidet sein freier Schenkel die Seite AC, so sei P der Schnittpunkt.

(III) Beweis, dass jeder so konstruierte Punkt P den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach Konstruktion (2) liegt P auf AC. Ferner ist nach dem Außenwinkelsatz und nach Konstruktion (1) auch $\angle BPA = \angle BCP + \angle CBP = 2\gamma$.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist stets eindeutig ausführbar. Wegen $\gamma < \beta$ hat der freie Schenkel des in (1) konstruierten Winkels gemeinsame Punkte mit dem Innern des Dreiecks ABC und schneidet die Seite AC zwischen A und C;
Konstruktionsschritt (2) ergibt folglich genau einen Punkt P auf AC, der die verlangte Eigenschaft hat.
Vertauscht man in den Überlegungen (I) bis (IV) überall A mit B, so erhält man: Es gibt genau einen (weiteren) Punkt P' auf BC, der die verlangte Eigenschaft hat. Somit gibt es stets genau 2 derartige Punkte.

Aufgabe 140723:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $\alpha = 60°$, $\beta = 35°$ und $w_\alpha = 5{,}5$ cm!
Dabei seien α bzw. β die Größen der Winkel $\angle BAC$ bzw. $\angle ABC$ und w_α die Länge der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle BAC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es laut Aufgabenstellung konstruiert werden soll.
AD sei die Winkelhalbierende von $\angle BAC$, wobei D auf BC liegt. Dann sind von dem Teildreieck ABD die Stücke $AD = w_\alpha$, $\angle BAD = \frac{\alpha}{2}$ und $\angle ABD = \beta$ bekannt.
Punkt C liegt erstens auf dem freien Schenkel des in A an AB nach derselben Seite der Geraden durch A und B wie D angetragenen Winkels der Größe α und zweitens auf dem Strahl aus B durch D.
Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(II) (1) Wir konstruieren das DreieckABD aus $AD = 5{,}5$ cm, $\angle BAD = 30°$ und $\angle ABD = 35°$.
(2) Wir tragen in A an AB einen Winkel der Größe 60° nach derselben Seite der Geraden durch A und B an, auf der D liegt.
(3) Wir zeichnen den Strahl aus B durch D. Schneidet er den freien Schenkel des in (2) konstruierten Winkels, so sei dieser Schnittpunkt C genannt.

(III) Jedes so konstruierte Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

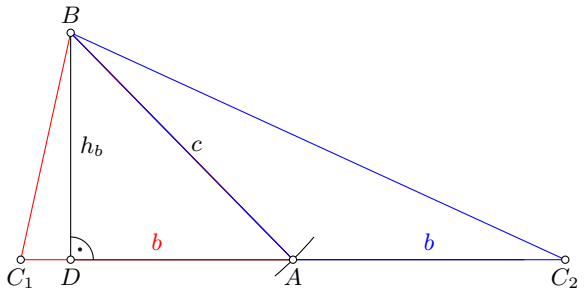
Beweis: Nach Konstruktion hat der Winkel $\angle BAC$ die Größe 60°. Ebenso hat nach Konstruktion der Winkel $\angle ABC$ die Größe 35°. Schließlich ist nach Konstruktion AD Halbierende des Winkels $\angle BAC$ und hat die Länge 5,5 cm.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso sind die Konstruktionsschritte (2) und (3) eindeutig ausführbar.
Da sowohl $\angle BAC$ als auch $\angle ABD$ spitze Winkel sind, gibt es genau einen Schnittpunkt C. Mithin ist $\triangle ABC$ durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 150724:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b = 6$ cm, $h_b = 5$ cm, $c = 7$ cm!
Dabei sei b die Länge der Seite AC, c die der Seite AB und h_b die der auf der Geraden durch A und C senkrechten Höhe.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Der Fußpunkt des von B auf die Gerade durch A und C gefällten Lotes sei D. Dann gilt $BA = c$, $h_b = BD$, und es ist $A \neq D$, wegen $c \neq h_b$ ist folglich ABD ein Dreieck.

In ihm sind c, h_b Seitenlängen, und es enthält den rechten Winkel $\angle BDA$. Punkt C liegt erstens auf der Geraden durch A und D und zweitens auf dem Kreis um A mit b. Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(II) (1) Wir konstruieren das Teildreieck ABD aus $AB = c$, $BD = h_b$, und dem rechten Winkel $\angle BDA$.
(2) Wir zeichnen die Gerade durch D und A.
(3) Wir zeichnen den Kreis um A mit b. Schneidet er die Gerade durch D und A, so sei C einer der Schnittpunkte.

(III) Jedes so erhaltene Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

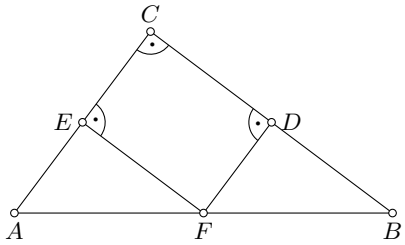
Beweis: Nach Konstruktion ist $AC = b$, $AB = c$, $BD = h_b$, und BD die auf der Geraden durch A und C senkrechte Höhe.

(IV) Wegen $h_b < c$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach (ssw) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, da der gegebene rechte Winkel der größeren Seite gegenüberliegt.
Konstruktionsschritt (2) ist stets eindeutig ausführbar, da sich wegen $h_b < c$ bei (1) $D \neq A$ ergeben hatte.
Schließlich ergibt (3) stets zwei verschiedene Punkte C_1 und C_2. Da nun der wegen $h_b < c$ spitze Winkel $\angle DAB$ in dem einen der beiden Dreiecke ABC_1, ABC_2 als Innenwinkel, in dem anderen als Außenwinkel bei A auftritt, so ist das eine dieser Dreiecke bei A spitzwinklig, das andere bei A stumpfwinklig; folglich

sind diese beiden Dreiecke nicht kongruent. Durch die gegebenen Stücke ist ein Dreieck mithin nicht, auch nicht bis auf Kongruenz, eindeutig bestimmt.

Aufgabe 160723:
Konstruiere aus $a = 5{,}0$ cm und $b = 7{,}0$ cm ein Dreieck ABC, bei dem die Mittelsenkrechten der Seiten BC und AC aufeinander senkrecht stehen! Dabei seien a bzw. b die Längen der Seiten BC bzw. AC.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Aufgabenstellung ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Angenommen, es gäbe ein Dreieck ABC, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Der Mittelpunkt der Seite BC sei D, der von AC sei E. Der Schnittpunkt der senkrecht aufeinanderstehenden Mittelsenkrechten miteinander sei mit F bezeichnet.
Wegen des Winkelsummensatzes, angewandt auf das Viereck $DCEF$, folgt mithin, dass $\angle ECD (= \angle ACB)$ ein rechter Winkel ist. Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man konstruiert einen rechten Winkel, dessen Scheitel C genannt sei.
(2) Auf dem einen seiner Schenkel trägt man von C aus eine Strecke der Länge 5,0 cm ab, deren zweiter Endpunkt B genannt sei, auf dem anderen Schenkel trägt man von C aus eine Strecke der Länge 7,0 cm ab, deren zweiter Endpunkt A genannt sei.

III. Jedes so konstruierte Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion haben BC bzw. AC die Länge 5,0 cm bzw. 7,0 cm. Die Mittelsenkrechte von BC ist, da auch AC senkrecht auf BC steht, parallel zu AC. Also ist sie senkrecht zur Mittelsenkrechten von AC.

IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind stets bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Also gibt es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck ABC der geforderten Art.

Aufgabe 260724:



Zu zwei gegebenen Streckenlängen PQ und RS (siehe Abbildung) gibt es zwei weitere Streckenlängen a und b, die die Bedingungen

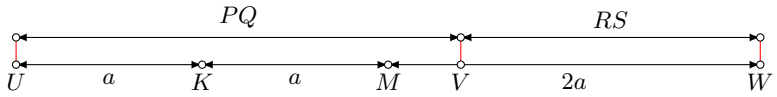
(1) $PQ = 2a + b$,
(2) $RS = 2a - b$

erfüllen und durch diese Bedingungen eindeutig festgelegt sind.
Sie sollen auf zwei verschiedene Weisen ermittelt werden:
(a) Übertrage PQ und RS auf ein Zeichenblatt und konstruiere (ohne Verwendung einer Längenskala) aus diesen gegebenen Längen die gesuchten a und b! Beschreibe deine Konstruktion! Begründe, warum

die Aufgabe (1) und (2) zu erfüllen, durch deine Konstruktion gelöst wird!

(b) Ermittle a und b rechnerisch, wenn die gegebenen Längen $PQ = 9{,}8$ cm und $RS = 6{,}6$ cm betragen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) I. Konstruktion:



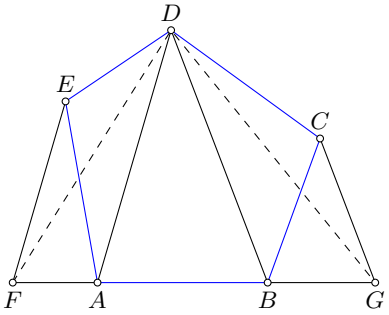
II. Beschreibung:
1. Man konstruiert eine Strecke UV der Länge $UV = PQ$.
2. Man verlängert UV über V hinaus um RS bis zum Punkt W.
3. Man konstruiert den Mittelpunkt M der Strecke UW.
4. Man konstruiert den Mittelpunkt K der Strecke UM.
Dann sind $UK = a$ und $MV = b$ die gesuchten Längen.

III. Begründung:
Für die so konstruierten Längen gilt: Nach 4. ist $UM = 2 \cdot UK = 2a$; hieraus und aus 1. folgt $PQ = UV = UM + MV = 2a + b$, d. h., (1) ist erfüllt.
Nach 3. ist ferner $MW = UM = 2a$; hieraus und aus 2. folgt $RS = VW = MW - MV = 2a - b$, d. h., (2) ist erfüllt.

(b) Aus (1) und (2), d. h. $2a + b = 9{,}8$ cm (3) und $2a - b = 6{,}6$ cm, (4) folgt durch Addition $4a = 16{,}4$ cm, also $a = 4{,}1$ cm. Hieraus und aus (3) folgt $b = 9{,}8$ cm$-8{,}2$ cm $= 1{,}6$ cm.

Aufgabe 310724:
a) Konstruiere ein Fünfeck $ABCDE$, in dem die Seitenlängen $AB = 50$ mm, $BC = 45$ mm, $AE = 54$ mm betragen und die Innenwinkel $\angle BAE$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle AED$ in dieser Reihenfolge die Größen $\alpha = 100°$, $\beta = 110°$, $\gamma = 106°$, $\rho = 114°$ haben!
b) Konstruiere nun zwei Punkte F und G, die so auf der Geraden durch A und B liegen, dass das Dreieck FGD denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$ hat!
Beschreibe deine Konstruktion der Punkte F und G! Beweise, dass von den nach deiner Beschreibung konstruierten Punkten die geforderten Bedingungen erfüllt werden!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Abbildung enthält ein zu konstruierendes Fünfeck $ABCDE$.

b) Die Abbildung enthält auch eine Konstruktion zweier Punkte F, G.
Beschreibung dieser Konstruktion:
(1) Man konstruiert die Parallele durch E zu AD; sie schneidet die Gerade durch A und B in F. (2) Man konstruiert die Parallele durch C zu BD; sie schneidet die Gerade durch A und B in G.

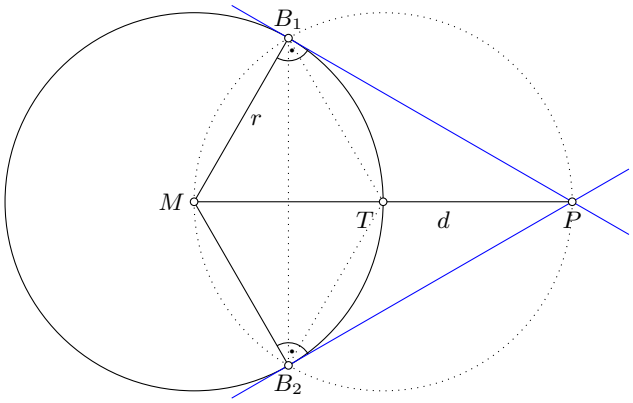
Beweis, dass für die so auf der Geraden durch A und B konstruierten Punkte F, G das Dreieck FGD denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$ hat:
Nach (1) gilt $EF \parallel AD$. Daher haben in den Dreiecken ADE und ADF die zu AD senkrechten Höhen dieselbe Länge. Also haben diese Dreiecke einander gleichen Flächeninhalt. Ebenso folgt aus (2), dass die Dreiecke BDC und BDG einander gleichen Flächeninhalt haben. Damit ergibt sich

$$A(FGD) = A(ABD) + A(ADF) + A(BDG) = A(ABD) + A(ADE) + A(BDC) = A(ABCDE)$$

III Runde 3

Aufgabe V10735:
Zeichne einen Kreis um M mit dem Durchmesser $d = 5$ cm. Konstruiere von einem Punkt P aus, dessen Abstand von M ebenfalls 5 cm beträgt, die Tangenten an den Kreis!
Bestimme die Größe des Winkels, den die beiden Tangenten miteinander bilden! Beweise, dass dieser Winkel stets so groß ist, wenn $MP = d$ ist!

Lösung von Steffen Polster:



O. B. d. A. liege P wie in der Zeichnung gezeigt.
Die Berührungspunkte der Tangenten liegen dann auf dem Thaleskreis um den Mittelpunkt T der Strecke MP, da die Winkel zwischen den Berührradien und den Tangenten rechte Winkel sein müssen.

Konstruktion:
1. Man zeichnet den Kreis um M und die Strecke MP, die man in T halbiert.
2. Der Kreis um T mit dem Radius TP ist dann der Thaleskreis über MP und schneidet den Kreis um M in den zwei Berührungspunkten B_1 und B_2.
3. Die Geraden durch P und B_1 bzw. P und B_2 sind die gesuchten Tangenten von P an den Kreis.

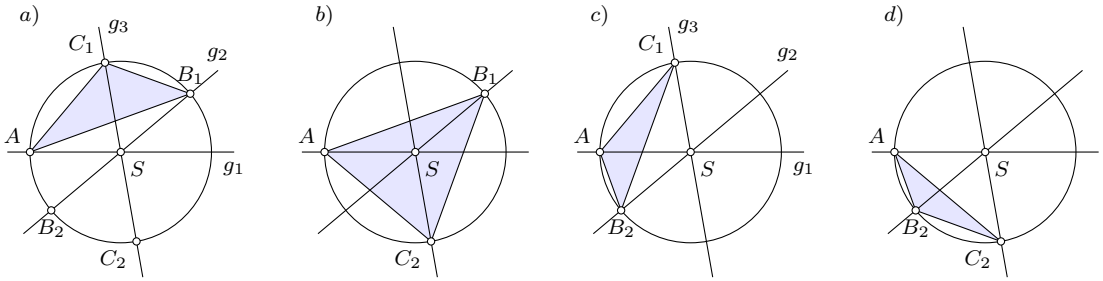
Da die zwei Kreise um M und T gleiche Radien haben, sind sie spiegelsymmetrisch zur Gerade durch ihre zwei Schnittpunkte B_1 und B_2. Damit ist das Dreieck MTB_1 gleichseitig und der Winkel $\angle B_1TM = 60°$. $\angle B_1TM$ ist aber Außenwinkel des Dreiecks PTB_1, das auf Grund von $TB_1 = TP = \frac{d}{2}$ gleichschenklig ist. Der Innenwinkel $\angle B_1PM$ ist somit als Basiswinkel halb so groß, wie der Außenwinkel $\angle B_1TM$, d. h. es gilt $\angle B_1PM = 30°$.

Die zwei Dreiecke $\triangle MPB_1$ und $\triangle MPB_2$ sind nach Kongruenzsatz SSW zueinander kongruent. Zum einen sind die Seiten $MB_1 = MB = 2$ und $MP = MP$ gleich groß, zum anderen liegt der größere Winkel (der rechte Winkel) der größeren Seite gegenüber.
Damit ist auch $\angle B_2PM = 30°$ und der Schnittwinkel der Tangenten gleich 60°.

Da in dieser Herleitung die relative Lage von P zu M nicht benötigt wird, ist dieser Winkel für alle P mit $MP = d$ gleich groß.

Aufgabe 010733:
In einer Ebene sind drei einander in einem Punkte S schneidende Geraden g_1, g_2 und g_3 sowie auf g_1 der Punkt A gegeben.
Konstruiere ein Dreieck, das A als Eckpunkt und den Schnittpunkt S als Umkreismittelpunkt hat und bei dem B auf g_2 und C auf g_3 oder umgekehrt liegen! Wie viel verschiedene Dreiecke lassen sich so konstruieren?

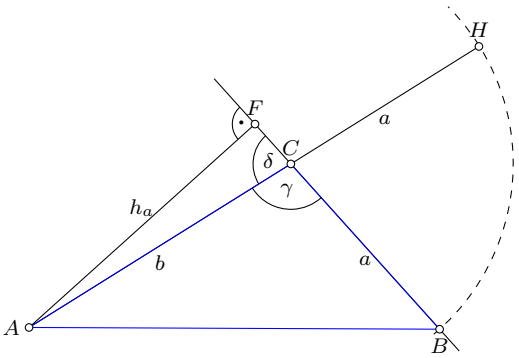
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Konstruktion:
Es wird ein Kreis mit dem Mittelpunkt S und dem Radius SA gezogen, der die beiden anderen Geraden g_2 und g_3 in den Punkten B_1, B_2 bzw. C_1, C_2 trifft (Bild a).
Damit gilt jeweils $SA = SB_i = SC_j$, $(i, j = 1, 2)$ und S ist tatsächlich der Umkreismittelpunkt aller möglichen Dreiecke AB_iC_j.
Da die Geraden den Kreis jeweils zweimal schneiden, gibt es für B und C jeweils zwei Möglichkeiten, insgesamt kann man sie zu vier $(= 2 \cdot 2)$ Dreiecken AB_1C_1, AB_1C_2 (Bild b), AB_2C_1 (Bild c) und AB_2C_2 (Bild d) kombinieren.

Aufgabe 020736:
Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Summe s der Seiten a und b (mit $BC = a$ und $AC = b$), die Größe des Winkels $\angle ACB$ und die Länge h_a der von A auf die Gerade durch B und C gefällten Höhe gegeben sind: $s = 7$ cm, $h_a = 4$ cm, $\gamma = 100°$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

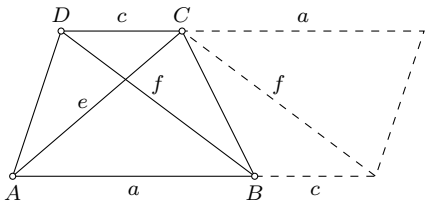


Zuerst überlege man sich, dass die Höhe h_a außerhalb des gesuchten Dreiecks liegen muss, weil es stumpfwinklig ist. Dann legt man eine Gerade (auf der später die Seite a liegt) und auf ihr den Punkt F beliebig fest. In F errichtet man eine Senkrechte, auf der man h_a abträgt; ihr Endpunkt wird A.

Nun kann man nutzen, dass man den Winkel γ kennt: Man kennt gleichzeitig δ (gestreckter Winkel: $\gamma + \delta = 180°$) und $\angle FAC$ (nach Innenwinkelsatz).
In A konstruiert man an AF einen Winkel von 10°, auf dem erhaltenen Schenkel trägt man $s = a + b$ ab; der Endpunkt sei H und der Schnittpunkt mit der ersten Geraden sei C.
Damit hat man aus den gegeben Stücken das Hilfsdreieck ACF erhalten, dessen Eckpunkt C die Seitensumme s in $b = AC$ und $a = CH$ teilt. Die Strecke CH überträgt man dann auf die Gerade, auf der die Seite a liegen muss; es entsteht der Punkt B. Damit kennt man das gesuchte Dreieck.

Aufgabe 030736:
Gegeben seien die parallelen Seiten $a = 8$ cm und $c = 4$ cm eines Trapezes sowie seine Diagonalen $e = 8$ cm und $f = 6$ cm.
a) Konstruiere dieses Trapez!
b) Begründe die Konstruktion!

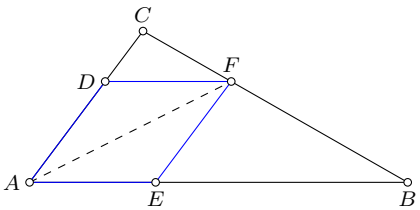
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



b) Man denke sich an das Trapez ein kongruentes Trapez so angefügt, dass beide zusammen ein Parallelogramm mit $(a + c)$ als Parallelseiten bilden. Es lässt sich dann aus $(a + c)$, e und f ein Teildreieck konstruieren.
Die Konstruktion des vierten Trapezpunktes lässt sich nun mit Hilfe einer Diagonalen und auf einer Trapezseite durchführen.

Aufgabe 040736:
Gegeben ist das Dreieck ABC. Es soll ein Rhombus so konstruiert werden, dass einer seiner Eckpunkte mit A zusammenfällt und die drei übrigen Eckpunkte jeweils auf einer Dreiecksseite liegen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

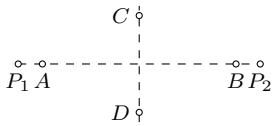


Wir denken uns die Aufgabe gelöst und betrachten den Rhombus $AEFD$. Die Diagonale AF halbiert den Winkel $\angle DAE$ und damit auch den Winkel $\angle CAB$.
Weiterhin gilt $AE = EF = FD = DA$ sowie $AE \parallel DF$ und $AD \parallel EF$.

Konstruktionsbeschreibung:
Wir zeichnen die Winkelhalbierenden des Winkels $\angle CAB$, ihren Schnittpunkt mit BC nennen wir F. Durch F konstruieren wir Parallelen zu den Dreiecksseiten AB bzw. AC.
Die Schnittpunkte mit den Dreiecksseiten AB und AC werden E bzw. D genannt. Das Viereck $AEFD$ ist somit ein Parallelogramm und wegen $\angle DAF = \angle FAE$ ein Rhombus.

Aufgabe 050732:
Gegeben sind die voneinander verschiedenen Punkte A und B.
a) Konstruiere unter alleiniger Verwendung des Zirkels einen Punkt P, der auf der gleichen Geraden wie A und B liegt!
b) Beschreibe und begründe die Konstruktion!
Anmerkung: Die Konstruktionsbeschreibung soll kurz gehalten sein. Bei der Konstruktion von Dreiecken genügt die Angabe von Seiten und Winkeln, aus denen sich das Dreieck konstruieren lässt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

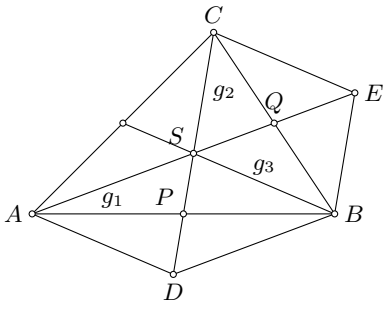


b) Für die Beschreibung und Begründung:
Die Länge der Strecke AB sei a. Man schlägt um A und B Kreisbögen mit dem gleichen Radius von der Länge $r > \frac{a}{2}$. Die beiden Schnittpunkte dieser Kreisbögen seien C und D, die Länge der Strecke CD sei b. Nun schlägt man um C und D Kreisbögen mit dem gleichen Radius $r_1 > \frac{b}{2}$.
Die entstehenden Schnittpunkte P_1 und P_2 liegen auf der Geraden durch A und B und sind, falls $r_1 \neq r$ ist, von A und B verschieden.

Beweis: Die Gerade durch C und D ist auf Grund der Konstruktion Symmetrieachse zu der Strecke AB. Aus demselben Grund ist die Gerade durch A und B Symmetrieachse zu der Strecke CD.
Da laut Konstruktion $CP_1 = DP_1$ und $CP_2 = DP_2$ gilt, liegen P_1 und P_2 auf der die Punkte A und B enthaltenden Symmetrieachse der Strecke CD.

Aufgabe 080735:
Gegeben seien in einer Ebene drei Geraden g_1, g_2 und g_3, die sich in einem Punkt S schneiden mögen, sowie ein Punkt $A \neq S$ auf der Geraden g_1.
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$, in dem die Seitenhalbierenden s_a, s_b und s_c auf g_1, g_2 bzw. g_3 liegen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Angenommen, es gibt ein Dreieck $\triangle ABC$ (siehe Abbildung), das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Der Mittelpunkt von AB sei P, der Mittelpunkt von BC sei Q. Dann liegt P auf der Seitenhalbierenden s_c und damit auf g_2 und Q auf s_a und damit auf g_1.

Verlängert man nun SP bzw. SQ über P bzw. Q hinaus um sich selbst (die so entstehenden Punkte seien D und E), so sind die Vierecke $ADBS$ bzw. $BECS$ Parallelogramme, da sich ihre Diagonalen halbieren.

II. Ein Dreieck $\triangle ABC$ kann daher nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Man zieht durch A die Parallele zu g_3. Sie schneide g_2 im Punkt D. Dann halbiert man SD (Halbierungspunkt sei P) und zieht die Gerade durch A und P. Sie schneide g_3 im Punkt B.
Nun zieht man durch B die Parallele zu g_2, die g_1 in E schneide. Man halbiert SE (Halbierungspunkt sei Q) und zieht die Gerade durch P und Q, die g_2 in C schneide.

III. Wenn sich das Dreieck $\triangle ABC$ so konstruieren lässt, dann entspricht es den Bedingungen.

Beweis: Laut Konstruktion sind die Dreiecke $\triangle ADP$ und $\triangle BSP$ sowie $\triangle BEQ$ und $\triangle CSQ$ kongruent, denn sie stimmen in einer Seite und den Winkeln überein.
Also sind die Vierecke $ADBS$ und $BECS$ Parallelogramme, und es gilt $AP = PB$ sowie $BQ = QC$. Daher sind CP und AQ Seitenhalbierende im Dreieck $\triangle ABC$. Ihr Schnittpunkt S muss auch auf der dritten Seitenhalbierenden liegen, die damit auf g_3 liegt.

IV. Die Konstruktion ist stets ausführbar und eindeutig. Denn von den Geraden g_1, g_2, g_3 sind keine zwei parallel, so dass also die Schnittpunkte D, B, E und C stets existieren und eindeutig bestimmt sind.
Da weder B noch C mit S zusammenfällt, kann weder B (als Punkt von g_3) noch C (als Punkt von g_2) mit dem Punkt A von g_1 zusammenfallen.

Aufgabe 090736:
Konstruiere einen Rhombus $ABCD$ aus $\angle BAD = 110°$ und $AC + BD = 15$ cm!
Anmerkung: $\angle BAD$ bezeichnet die Größe des Winkels $\angle BAD$.

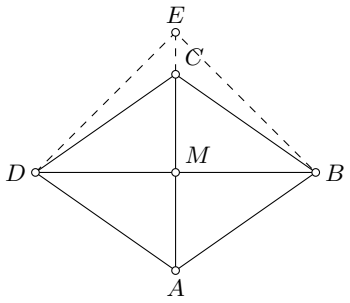
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Rhombus, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht. M sei sein Mittelpunkt. Dann ist AM die Winkelhalbierende von $\angle BAD$, ferner gilt $AM \perp BD$ sowie $MB = MD$. Schließlich ist

$$AM + MB = \frac{1}{2}(AC + BD)$$

Der Punkt E sei so auf der Verlängerung von AM über M hinaus gelegen, dass $ME = MB$ ist. Dann ist $\triangle MBE$ gleichschenklig-rechtwinklig, also, $\angle MEB = 45°$. Ebenso ist auch $\angle MED = 45°$.

II. Daraus folgt, dass ein Rhombus nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man zeichnet einen Winkel von 110°, dessen Scheitel A genannt sei, und seine Winkelhalbierende.



(2) Auf ihr trägt man von A aus eine Strecke von 7,5 cm Länge ab. Der zweite Endpunkt dieser Strecke sei E genannt.
(3) An den von E durch A gehenden Strahl trägt man in E nach beiden Seiten Winkel von 45° an. Schneiden ihre freien Schenkel die Schenkel der unter (1) genannten Winkel, so seien die Schnittpunkte B und D.

(4) Schneidet der Kreis um D mit dem Radius AD den von A durch E gehenden Strahl außer in A in einem weiteren Punkt, so sei dieser C genannt.

III. Beweis, dass diese Konstruktion zu einem Rhombus der gesuchten Art führt:
Nach Konstruktion wird $\triangle AEB = \triangle AED$ (wsw), also $AB = AD$. Hieraus folgt, wenn M der Schnittpunkt von AE und BD ist, $\triangle AMB = \triangle AMD$ (sws), also $\angle BMA = \angle DMA = 90°$.
Demnach gilt $\triangle DMA = \triangle DMC$ (ssw; $AD > MD$), also $AD = CD$, $AM = CM$ und somit schließlich $\triangle AMB = \triangle CMB$ (sws), $AB = CB$. Daher ist ABCD ein Rhombus.
In diesem gilt nach Konstruktion $\angle BAD = 110°$. Ferner ist $\angle BME = 90°$ und nach Konstruktion $\angle BEM = 45°$, also $\triangle MBE$ gleichschenklig-rechtwinklig mit $BM = EM$. Somit auch

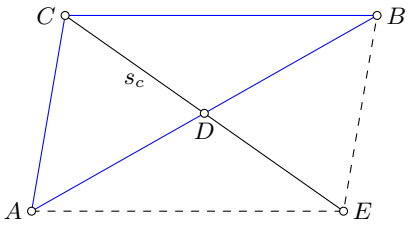
$$AC + BD = 2(AM + BM) = 2(AM + EM) = 2 \cdot AE = 15 \text{ cm}$$

wie verlangt.

IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2) sind (bis auf Kongruenz) eindeutig durchführbar. Dasselbe gilt für (3), da $\frac{110°}{2} < 90°$ ist.

Aufgabe 100736:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 5{,}5$ cm; $b = 3{,}5$ cm; $s_c = 3$ cm!
Dabei bedeuten a, b die Längen der Seiten BC bzw. AC und $CD = s_c$ die Länge der Seitenhalbierenden der Seite AB.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob sich mit den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Analyse:
Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, wie es nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll.
Der Mittelpunkt von AB sei D; der Punkt E sei derjenige auf dem Strahl CD gelegene von C verschiedene Punkt, für den $CD = DE$ gilt. Dann ist $AEBC$ ein Parallelogramm, da sich AB und CE gegenseitig halbieren. Also ist $AE = CB = a$.



II. Konstruktionsbeschreibung:
Daher kann ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann der Aufgabenstellung entsprechen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir zeichnen die Strecke CD der Länge s_c,
(2) Wir zeichnen den Strahl CD.
(3) Wir schlagen den Kreis um D mit $CD = s_c$; der von C verschiedene Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Strahl CD sei E.
(4) Wir schlagen um C und E die Kreise mit den Radien b bzw. a. Ist A einer ihrer Schnittpunkte, so zeichnen wir den Strahl AD.
(5) Wir schlagen den Kreis um D mit AD; der von A verschiedene Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Strahl AD sei B.

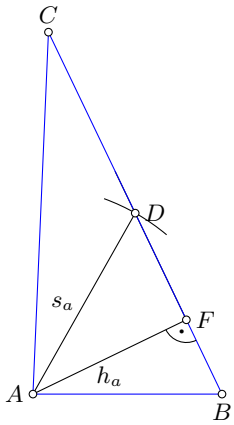
III. Beweis, dass ein so konstruiertes Dreieck der Aufgabenstellung entspricht:

Nach Konstruktion ist $AC = b$. Ferner ist $AD = DB$, also CD Seitenhalbierende, und ihre Länge ist nach Konstruktion $CD = s_c$.
Schließlich ist $AEBC$ ein Parallelogramm, da sich die Diagonalen AB und CE gegenseitig halbieren. Also ist $CB = AE = a$.

IV. Konstruktion:
Wegen $a - b < 2s_c < a + b$ sind alle Konstruktionsschritte durchführbar, also gibt es ein Dreieck, das der Aufgabenstellung entspricht. Dieses ist bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt, da der einzige möglicherweise mehrdeutige Konstruktionsschritt (4) dann zu zwei zu der Geraden durch C und E symmetrischen und damit kongruenten Figuren führt.

Aufgabe 110736:
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $c = 5$ cm, $h_a = 4{,}5$ cm, $s_a = 5{,}5$ cm!
Dabei sei c die Länge der Seite AB, h_a die Länge der Höhe des Dreiecks, die auf der Geraden durch B und C senkrecht steht, und s_a die Länge der Seitenhalbierenden der Seite BC.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Der Fußpunkt der Höhe durch A auf die Gerade durch B und C sei F, der Mittelpunkt von BC sei D.
Dann werde das Teildreieck $\triangle ABF$ aus h_a, c und dem rechten Winkel $\angle AFB$ konstruiert.
Punkt D liegt erstens auf dem Kreis mit s_a um A und zweitens auf der Geraden durch F und B.



(II) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren ein Dreieck $\triangle ABF$ mit einem rechten Winkel $\angle AFB$ und Seiten AB, AF der Länge c bzw. h_a.
(2) Wir ziehen die Gerade durch F und B.
(3) Wir schlagen einen Kreis um A mit s_a. Schneidet er die Gerade durch F und B, so sei D einer der Schnittpunkte.
(4) Wir schlagen den Kreis um D mit BD. Schneidet er die Gerade durch B und F außer in B noch in einem zweiten Punkt, so sei dieser C genannt.

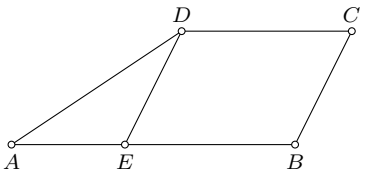
(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Nach Konstruktion ist $AB = c$, AF die auf der Geraden durch B und C senkrechte Höhe mit $AF = h_a$ und D der Mittelpunkt von BC; ferner gilt $AD = s_a$.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist im (hier vorliegenden) Falle $h_a < c$ bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, Konstruktionsschritt (2) ebenfalls.
Wegen $s_a > h_a$ ergibt (3) genau zwei Schnittpunkte, die D_1 und D_2 genannt seien. Da nicht B, sondern F Mittelpunkt der Strecke D_1D_2 ist, ist $BD_1 \neq BD_2$.

Somit ergibt (4) genau zwei verschiedene Schnittpunkte, die C_1 und C_2 genannt seien. Wegen $BD_1 \neq BD_2$ ist auch $BC_1 \neq BC_2$. Es existieren folglich zwei Dreiecke $\triangle ABC_1$ und $\triangle ABC_2$, die beide die gleiche entsprechende Höhenlänge, aber verschiedene Längen der zugehörigen Grundseiten haben. Daher haben sie verschiedenen Flächeninhalt, sind also zueinander nicht kongruent. Infolgedessen existieren bis auf Kongruenz genau zwei verschiedene Dreiecke, die beide allen Bedingungen der Aufgabe genügen.

Aufgabe 130733:
Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus $a - c = 3$ cm, $b = 4$ cm, $d = 6$ cm, $e = 9$ cm!
Dabei bedeuten a, b, c und d in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten AB, BC, CD, DA und e die Länge der Diagonalen AC.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Trapez bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, $ABCD$ sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Punkt E liege zwischen A und B auf AB, und es gelte $AE = a - c$. Dann ist $AB - CD = c$ und $EBCD$ ist ein Parallelogramm. Nun lässt sich $\triangle AED$ aus AE, ED $(= BC)$ und DA konstruieren. Punkt C liegt erstens auf der Parallelen durch D zu AE und zweitens auf dem Kreis um A mit dem Radius e.

Ferner liegt C auf derselben Seite der Geraden durch A und D wie E. Punkt P liegt erstens auf dem Strahl aus A durch E und zweitens auf der Parallelen durch C zu ED.

(II) Daher entspricht ein Trapez $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren ein Dreieck AED aus $AE = 3$ cm, $ED = 4$ cm und $AD = 6$ cm.
(2) Wir ziehen durch D die Parallele zu AE.
(3) Wir schlagen um A mit dem Radius e einen Kreis. Schneidet er die in (2) gezogene Parallele in einem Punkte, der auf derselben Seite der Geraden durch A und D liegt wie E, so sei dieser C genannt.
(4) Wir zeichnen den Strahl aus A durch E.
(5) Wir ziehen durch C die Parallele zu ED. Schneidet sie den in (4) gezeichneten Strahl, so sei dieser Schnittpunkt B genannt.

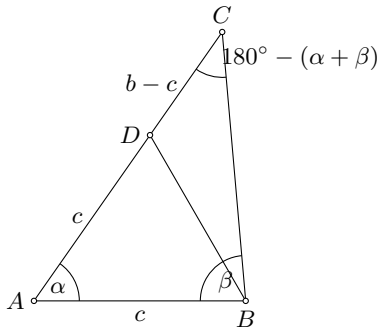
(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Trapez $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe genügt:

Nach Konstruktion ist $AD = d$. Weiter ist nach Konstruktion $AC = e$. Da $EBCD$ nach Konstruktion ein Parallelogramm ist, gilt schließlich $BC(= ED) = b$ und, da E zwischen A und B liegt, auch $AB - DC(= AB - EB = AE) = a - c$.

(IV) Mit den gegebenen Größen ist Konstruktionsschritt (1) bis auf Kongruenz nach dem Kriterium (s,s,s) eindeutig ausführbar.
Ebenso ist (2) eindeutig ausführbar. Konstruktionsschritt (3) liefert wegen $AC > AD$ zwei Schnittpunkte, von denen genau einer auf derselben Seite von AD liegt wie E. Schließlich sind auch (4) und (5) eindeutig ausführbar.
Daher ist ein Trapez $ABCD$ durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 140733:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b - c = 3$ cm, $\alpha = 55°$ und $\beta = 85°$!
Dabei seien b bzw. c die Längen der Seiten AC bzw. AB, α die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die des Winkels $\angle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Dann ist $b > c$. Daher gibt es einen Punkt D auf AC, für den $AD = c$, also $DC = b - c$ gilt. Sodann ist nach dem Winkelsummensatz

$$\angle ACB = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

Ferner ist $\triangle ABD$ gleichschenklig mit $AB = AD = c$, also gilt $\angle ABD = \angle ADB$.

Wegen $\angle ABD + \angle ADB + \alpha = 180^\circ$ folgt hieraus

$$\angle ABD = \angle ADB = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$$

Daher gilt

$$\angle CDB = 180^\circ - 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$$

Punkt A liegt erstens auf dem Strahl aus C durch D und zweitens auf dem freien Schenkel des in B an CB nach der Seite der Geraden durch B und C, auf der D liegt, angetragenen Winkels der Größe β.
Daraus folgt, dass ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügt, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(II) (1) Man konstruiert ein Dreieck BDC, in dem die Seite DC die Länge $b - c$, der Winkel $\angle CDB$ die Größe $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ und der Winkel $\angle DCB$ die Größe $180^\circ - (\alpha + \beta)$ haben.
(2) Man zeichnet den Strahl aus C durch D.
(3) Man trägt in B an BC nach der Seite der Geraden durch B und C, auf der D liegt, einen Winkel der Größe β an.
(4) Schneidet sein freier Schenkel den in (2) gezeichneten Strahl in einem Punkt außerhalb von CD, so sei dieser A genannt.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion hat $\angle ABC$ die verlangte Größe β. Ferner hat $\angle BAC$ nach dem Winkelsummensatz und nach Konstruktion die Größe

$$180^\circ - \angle ABC - \angle DCB = 180^\circ - \beta - (180^\circ - \alpha - \beta) = \alpha$$

Weiterhin ist nach Konstruktion $\angle ADB = 180^\circ - \angle CDB = 180^\circ - (90^\circ + \frac{\alpha}{2}) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ und somit

$$\angle ABD = 180^\circ - \angle BAD - \angle ADB = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \angle ADB$$

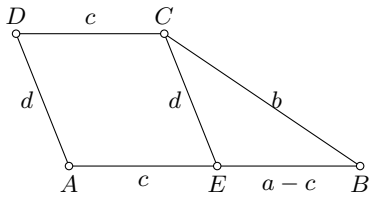
Also ist $\triangle ABD$ gleichschenklig mit $AB = AD$, und somit gilt auch, wie verlangt, $AC - AB = AC - AD = CD = b - c$.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, da für die gegebenen Größen α, β die Beziehung $180^\circ - \alpha - \beta > 0$ und $(90^\circ + \frac{\alpha}{2}) + (180^\circ - \alpha - \beta) < 180^\circ$ gelten.
Danach sind die Konstruktionsschritte (2) und (3) eindeutig ausführbar, und wegen $(180^\circ - \alpha - \beta) + \beta < 180^\circ$ und $90^\circ + \frac{\alpha}{2} > \alpha$ auch Konstruktionsschritt (4). Durch die gegebenen Stücke ist ein Dreieck mithin bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 160736:
Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ aus $a = 9{,}1$ cm, $b = 6{,}3$ cm, $c = 6{,}7$ cm und $d = 5{,}0$ cm!
Dabei sei a die Länge der Seite AB, b die der Seite BC, c die der Seite CD und d die der Seite AD.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Trapez bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht (siehe Abbildung).

Dann ist $a > c$. Daher schneidet die Parallele zu AD durch C die Seite AB in einem inneren Punkte E, für den $AE = c$, also $EB = a - c$ gilt.
Daraus folgt, dass ein Trapez $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



II. (1) Wir konstruieren das Teildreieck EBC aus $EB = a - c$, $BC = b$ und $EC = d$.
(2) Wir verlängern BE über E um c und erhalten A,
(3) Wir zeichnen die Parallele zu AB durch C.
(4) Wir zeichnen die Parallele zu CE durch A.

Der Schnittpunkt der beiden Parallelen aus (3) und (4) sei D genannt.

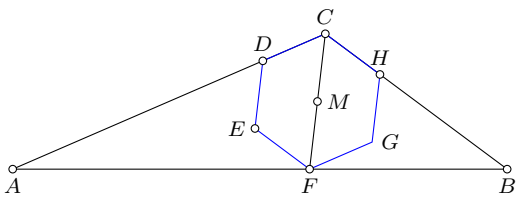
III. Jedes so erhaltene Viereck $ABCD$ entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Das Viereck $AECD$ ist ein Parallelogramm, also gilt $CD = AE = c$ und $AD = EC = d$, und $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$. Nach Konstruktion ist $AB = BE + EA = a - c + c = a = 9{,}1$ cm, $BC = b = 6{,}3$ cm, $CD = AE = c = 6{,}7$ cm und $AD = EC = d = 5{,}0$ cm.

IV. Konstruktionsschritt (1) ist nach dem Kriterium (sss) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, weil jede der drei Seitenlängen $a - c = 2{,}4$ cm, $b = 6{,}3$ cm und $d = 5{,}0$ cm kleiner als die Summe der beiden anderen ist.
Die Konstruktionsschritte (2), (3) und (4) sind danach stets eindeutig ausführbar. Mithin existiert bis auf Kongruenz genau ein Trapez $ABCD$ der geforderten Art.

Aufgabe 170733:
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $AC = 9{,}0$ cm, $BC = 6{,}0$ cm und $\angle BCA = 120°$.
Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck $CDEFGH$ derart, dass D auf AC, F auf AB und H auf BC liegen!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob es genau ein Sechseck $CDEFGH$ gibt, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, ein Sechseck $CDEFGH$ erfülle die Bedingungen der Aufgabe.
Dann halbiert der Mittelpunkt M des Umkreises des Sechsecks $CDEFGH$ die Halbierende des Winkels $\angle BCA$, und die Dreiecke MCD, MDE, MEF, MFG, MGH und MHC sind sämtlich gleichseitig mit der Seitenlänge CM.

(II) Daher entspricht ein Sechseck $CDEFGH$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert die Halbierende des Winkels $\angle BCA$, ihr Schnittpunkt mit AB sei Punkt F.
(2) Man halbiert CF, der Halbierungspunkt sei M.
(3) Man beschreibt um C den Kreis mit dem Radius MC, seine Schnittpunkte mit AC bzw. BC seien D bzw. H genannt.

(4) Man beschreibt um M und F Kreise mit dem Radius MC, ihre Schnittpunkte miteinander seien E und G genannt.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Sechseck $CDEFGH$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach Konstruktion liegen die Punkte D, F, H in dieser Reihenfolge auf den Seiten AC, AB, BC.
Ebenfalls nach Konstruktion ist $CD = EF = FG = HC = CM$.
Da ferner nach Konstruktion M auf der Halbierenden des Winkels $\angle DCH$ der Größe 120° liegt, $\triangle CDM$ also gleichseitig ist, und da nach Konstruktion $\triangle EFM$ ebenfalls gleichseitig ist, gilt $\angle CMD = \angle FME = 60°$.

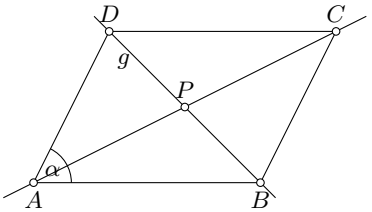
Hiernach und wegen $\angle FMC = 180°$ ist $\angle EMD = 60°$. Da das Dreieck EMD wegen $MD = ME$ gleichschenklig ist, gilt $\angle MED = \angle MDE$, diese Winkelgröße beträgt somit jeweils 60°, also ist $DE = CM$.
Entsprechend ist $GH = CM$. Wegen $CD = DE = EF = FG = GH = HC = CM$ sind die Dreiecke MCD, MDE, MEF, MFG, MGH und MHC sämtlich gleichseitig, und die Winkel $\angle CDE$, $\angle DEF$, $\angle EFG$, $\angle FGH$ und $\angle GHC$ haben sämtlich die Größe 120°.

(IV) Sämtliche Konstruktionsschritte sind eindeutig ausführbar, deshalb gibt es stets genau ein Sechseck $CDEFGH$, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.

Aufgabe 180733:
Gegeben seien ein Winkel, dessen Größe kleiner als 180° ist, und ein Punkt P im Innern dieses Winkels. Der Scheitel des Winkels sei A.
Konstruiere eine Gerade g, die durch den Punkt P geht und die die Schenkel des Winkels so in Punkten $B \neq A$ bzw. $D \neq A$ schneidet, dass P der Mittelpunkt von BD ist!
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Stelle fest, ob es genau eine Gerade gibt, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, es gibt eine Gerade g, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.
Dann schneidet sie die Schenkel des gegebenen Winkels in Punkten, die mit B bzw. D bezeichnet sind, und es ist ferner P Mittelpunkt von BD. Der Scheitelpunkt des Winkels sei A.

Dann gibt es genau einen Punkt C auf dem Strahl von A durch P, so dass P Mittelpunkt der Strecke AC ist. Daher halbieren sich die Strecken BD und AC, d. h., das Viereck $ABCD$ ist ein Parallelogramm. Folglich kann eine Gerade g nur dann alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



II. (1) Man zeichnet vom Scheitelpunkt A des gegebenen Winkels einen Strahl durch P, auf dem man von A aus eine Strecke der Länge $2AP$ abträgt. Ihr anderer Endpunkt sei C genannt.
(2) Durch C zieht man die Parallelen zu den Schenkeln des gegebenen Winkels. Ihre Schnittpunkte mit den jeweils anderen Schenkeln seien B bzw. D.
(3) Man zeichnet die Gerade g durch B und D.

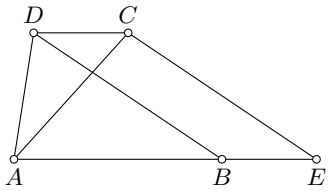
III. Jede so konstruierte Gerade g erfüllt alle Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion gilt $AD \parallel BC$ und $AB \parallel CD$ sowie $AP = PC$. Folglich ist das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm und P der Mittelpunkt seiner Diagonalen AC. Daher geht auch die andere Diagonale BD durch P und wird von P halbiert.

IV. Da die Konstruktionsschritte (1) bis (3) stets eindeutig ausführbar sind, gibt es genau eine Gerade der geforderten Art.

Aufgabe 190733:
Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus $a = 5{,}5$ cm, $c = 2{,}5$ cm, $e = 4{,}5$ cm, $f = 6{,}0$ cm! Dabei seien a bzw. c die Längen der Seiten AB bzw. CD; e bzw. f die Längen der Diagonalen AC bzw. BD.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion!
Untersuche, ob $ABCD$ durch die gegebenen Längen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, $ABCD$ habe die verlangten Eigenschaften.
Dann schneidet die Parallele durch C zu BD die Verlängerung von AB über B hinaus in einem Punkt E, für den $BE \parallel DC$ und $BD \parallel EC$ gilt. Also ist $BECD$ ein Parallelogramm; daher gilt $EC = BD$ und $BE = DC$.
Somit hat $\triangle AEC$ die Seitenlängen $AC = e$, $EC = f$ und $AE = AB + BE = a + c$.



II. Daher entspricht $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

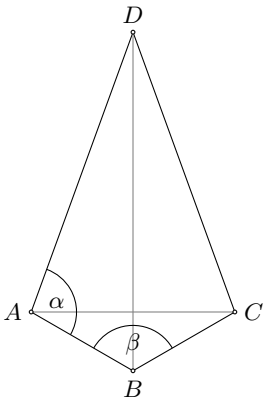
(1) Man konstruiert eine Strecke AB der Länge a.
(2) Man verlängert AB über B hinaus um c; der erhaltene Endpunkt sei E.
(3) Man konstruiert den Kreis um A mit e und den Kreis um E mit f. Schneiden sie sich, so sei C einer ihrer Schnittpunkte.
(4) Man konstruiert die Parallele durch C zu AB und die Parallele durch B auf EC. Schneiden sie sich, so sei D ihr Schnittpunkt.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach (4) ist $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$. Nach (1) und (3) ist $AB = a$ und $AC = e$. Nach (2) und (3) ist ferner $BE = c$, $BC = f$, und da $BECD$ nach (4) ein Parallelogramm ist, folgt auch $DC = BE = c$ und $BD = EC = f$.

IV. Da für die gegebenen a, c, e, f je zwei der Längen $e, f, a + c$ eine größere Summe als die dritte dieser Längen haben, ergibt sich bei den Konstruktionsschritten (1) bis (3) ein bis auf Kongruenz eindeutig bestimmtes Dreieck AEC; insbesondere wird $AB \nparallel EC$. Hiernach ist auch Konstruktionsschritt (4) eindeutig ausführbar. Daher ist $ABCD$ durch die gegebenen Längen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 210733:
Konstruiere ein Drachenviereck $ABCD$ aus $a = 3{,}1$ cm, $\alpha = 100°$ und $\beta = 120°$! Dabei bezeichne a die Länge $AB = BC$; ferner bezeichne α die Größe des Winkels $\angle BAD$ und β die Größe des Winkels $\angle ABC$. Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Drachenviereck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Drachenviereck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht (siehe Abbildung). Im Teildreieck ABC sind dann die Seitenlängen AB, BC und die Größe des eingeschlossenen Winkels $\angle ABC$ gegeben. Ferner ist BD Spiegelachse des Drachenvierecks $ABCD$, und es gilt $\angle BAD = \angle BCD = \alpha$.
(Wegen $\alpha < 180°$, $\beta < 180°$ hat $ABCD$ weder bei B noch bei C eine einspringende Ecke. Also liegt D auf derselben Seite der Geraden durch A, B wie C und auf derselben Seite der Geraden durch B, C wie A.)

Daraus folgt, dass ein Drachenviereck $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man konstruiere ein Dreieck ABC aus den Seitenlängen $AB = BC = a$ und der Winkelgröße $\angle ABC = \beta$.
(2) In A bzw. C trage man an AB bzw. BC jeweils einen Winkel der Größe α an (jeweils nach derjenigen Seite von AB bzw. BC, auf der der Punkt C bzw. A liegt). Ist D Schnittpunkt der freien Schenkel dieser beiden Winkel, so ist damit ein Viereck $ABCD$ konstruiert.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

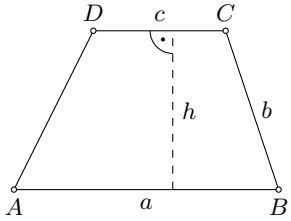
Nach (1) gilt $AB = BC$. Nach (2) ist $\angle BAD = \angle BCD = 120°$ jeweils in den Dreiecken BAD bzw. BCD der größte Innenwinkel, liegt also der größten Seite gegenüber. Hiernach und wegen $BD = BD$ sind die Dreiecke BAD und BCD nach (ssw) kongruent, also ist $AD = CD$. Daher ist $ABCD$ ein Drachenviereck.

In ihm haben AB, BC und $\angle ABC$ nach (1) sowie $\angle BAD$ nach (2) die verlangten Größen.

IV. Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Danach ist Konstruktionsschritt (2) eindeutig ausführbar und ergibt auch wegen $\beta + 2\alpha < 360°$ einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt D.
Daher ist durch die gegebenen Stücke ein Drachenviereck $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 220733:
Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ aus $a = 5{,}0$ cm, $b = 3{,}5$ cm, $c = 2{,}5$ cm und $h = 3{,}0$ cm!
Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die der Seite BC, c die der Seite CD und h der Abstand der beiden parallelen Seiten AB und DC voneinander.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Längen ein Trapez $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Wenn $ABCD$ ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften ist, so folgt:

Es gilt $AB = a$. Ferner ist die Gerade durch C, D parallel zur Geraden durch A, B und hat von ihr den Abstand h. Weiterhin gilt $BC = b$. Schließlich ist $CD = c$, und D liegt auf derselben Seite der Geraden durch B, C wie A.

II. Daher ist $ABCD$ nur dann ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften, wenn A, B, C und D durch folgende Konstruktion erhalten werden können:

(1) Man konstruiert eine Strecke AB der Länge a.

(2) Man konstruiert eine Parallele p zu AB im Abstand h.
(3) Man konstruiert den Kreis k um B mit dem Radius b und bezeichnet einen Schnittpunkt von p und k mit C.
(4) Man konstruiert den Kreis k' um C mit dem Radius c und bezeichnet denjenigen Schnittpunkt von p und k', der auf derselben Seite der Geraden durch B, C wie A liegt, mit D.

III. Beweis, dass für so konstruierte A, B, C, D stets $ABCD$ ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften ist:

Nach (2), (3), (4) ist $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel DC$, in dem AB und DC den Abstand h voneinander haben; nach (1) ist $AB = a$, nach (3) ist $BC = b$, und nach (4) ist $CD = c$.

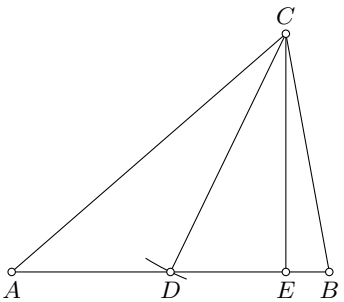
IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.
Wegen $b > h$ ist Konstruktionsschritt (3) ausführbar und ergibt zwei verschiedene Schnittpunkte C_1, C_2 von p und k (siehe Abbildung). Danach ist Konstruktionsschritt (4) jeweils eindeutig ausführbar, ergibt also zu C_1, genau einen Punkt D_1 und zu C_2 genau einen Punkt D_2.

Bei (3) entsteht wegen $b > h$ ein gleichschenkliges Dreieck BC_1C_2, dessen Basiswinkel bei C_1 und C_2 folglich spitze Winkel sind. Wählt man die Bezeichnungen wie in der Abbildung (C_1 auf derselben Seite der Geraden durch B, C_2 wie A), so gilt also $\angle BC_1D_1 > \angle BC_1C_2 = \angle BC_2C_1 = \angle BC_2D_2$; daher sind die Trapeze ABC_1D_1 und ABC_2D_2 nicht kongruent.
Also ist ein Trapez $ABCD$ durch die gegebenen Längen nicht bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 230733:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $c = 6$ cm, $h_c = 4{,}5$ cm und $s_c = 5$ cm!
Dabei sei c die Länge der Seite AB, h_c die Länge der auf AB senkrechten Höhe und s_c die Länge der Seitenhalbierenden von AB.
Beschreibe deine Konstruktion! Leite deine Konstruktionsbeschreibung aus den Bedingungen der Aufgabenstellung her!
Beweise, dass ein Dreieck ABC, wenn es nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die verlangten Eigenschaften hat! (Eine Diskussion der Ausführbarkeit und Eindeutigkeit der Konstruktionsschritte wird nicht gefordert.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Dreieck ABC die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt, so folgt:
Die auf AB senkrechte Höhe CE hat die Länge $h_c = 4{,}5$ cm, und die Punkte A und B liegen auf der in E auf CE errichteten Senkrechten g. Der Mittelpunkt D der Seite AB liegt auch auf dieser Geraden g, und A und B haben von D den Abstand $\frac{c}{2}$. Außerdem hat D von C den Abstand $s_c = 5$ cm.

II. Damit ist hergeleitet, dass ein Dreieck ABC, wenn es die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt, nach folgender Konstruktionsbeschreibung erhalten werden kann:



(1) Man konstruiert eine Strecke CE der Länge h_c.
(2) Man errichtet die Senkrechte g in E auf CE.
(3) Man konstruiert den Kreis k um C mit s_c und bezeichnet einen Schnittpunkt von k und g mit D.
(4) Man konstruiert den Kreis k' um D mit $\frac{c}{2}$ und bezeichnet die Schnittpunkte von k' und g mit A und B.

Beweis, dass ein Dreieck ABC, wenn es nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die verlangten Eigenschaften hat:

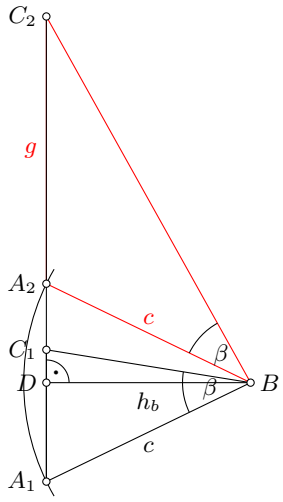
Nach Konstruktionsschritt (4) ist $AD = DB = \frac{c}{2}$, also einerseits $AB = c$, andererseits CD die Seitenhalbierende von AB. Nach Konstruktionsschritt (3) gilt für sie $CD = s_c$.

Ferner ist CE nach Konstruktionsschritt (2) die auf AB senkrechte Höhe, und nach Konstruktionsschritt (1) gilt für sie $CE = h_c$.

Aufgabe 240733:
Konstruiere zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke ABC, die folgende Bedingungen erfüllen:

Die Seite AB hat die Länge $c = 5$ cm, die auf der Geraden durch A und C senkrechte Höhe des Dreiecks ABC hat die Länge $h_b = 4{,}5$ cm, der Winkel $\angle ABC$ hat die Größe $\beta = 35°$.
Gefordert wird eine Zeichnung (Konstruktion der beiden Dreiecke) und eine Konstruktionsbeschreibung hierzu. (Eine Begründung wird nicht verlangt.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

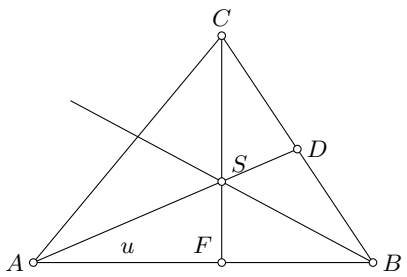


Konstruktionsbeschreibung:
(1) Konstruktion einer Strecke DB der Länge h_b.
(2) Konstruktion der Senkrechten g in D auf DB.
(3) Konstruktion des Kreises k um B mit c; er schneidet g in zwei Punkten A_1, A_2.
(4) Antragen eines Winkels der Größe β in B an BA_1; sein zweiter Schenkel schneidet g in C_1.
(5) Antragen des Winkels der Größe β in B an BA_2 in gleichem Drehsinn wie der in (4) konstruierte Winkel. Der zweite Schenkel des in (5) konstruierten Winkels schneidet g in C_2.
A_1BC_1 und A_2BC_2 sind zwei Dreiecke der geforderten Art.

Bemerkung: In Konstruktionsschritt (4) hat man zwei Möglichkeiten des Antragens. Eine ist in der Abbildung dargestellt; die andere entsteht (bis auf die Bezeichnung) durch Spiegelung beider Dreiecke A_1BC_1, A_2BC_2 an der Geraden durch B und D.

Aufgabe 260735:
Bekanntlich haben in jedem gleichseitigen Dreieck die drei Seitenhalbierenden, die zugleich auch die drei Winkelhalbierenden und die drei Höhen sind, einen gemeinsamen Schnittpunkt.
Gibt es Dreiecke ABC, die nicht gleichseitig sind und bei denen wenigstens die Seitenhalbierende von BC, die Winkelhalbierende von $\angle ABC$ und die zur Seite AB senkrechte Höhe einen gemeinsamen Schnittpunkt haben?
Wenn es solche Dreiecke gibt, so konstruiere ein derartiges Dreieck und beschreibe deine Konstruktion! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es gibt derartige Dreiecke. Eine Konstruktion eines solchen Dreiecks ist z. B. die folgende:

(1) Man konstruiert eine beliebige Strecke BC und ihren Mittelpunkt D.
(2) In B trägt man an BC einen beliebigen spitzen Winkel an, dessen Größe von 60° verschieden ist; der zweite Schenkel dieses Winkels sei u.
(3) Man fällt das Lot von C auf u; der Lotfußpunkt sei F.
(4) Man konstruiert die Winkelhalbierende von $\angle CBF$; sie schneidet CF in einem Punkt S.
(5) Man konstruiert die Gerade durch D und S; sie schneidet u in A.

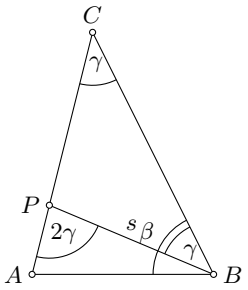
1) Der genannte Schnittpunkt A existiert (bei jeder Wahlmöglichkeit in (1) und (2)); denn der in (4) konstruierte Punkt S liegt zwischen u und der Parallelen durch D zu u, weil die Konstruktion auf $BD = DC$, aber $FS < SC$ führt.

Aufgabe 270733:
Gegeben sei ein Dreieck ABC, in dem die Größe γ des Winkels $\angle ACB$ kleiner ist als die Größe β des Winkels $\angle ABC$. Gefordert seien die folgenden von einem Punkt P zu erfüllenden Bedingungen (1) und (2):

(1) P liegt auf der Strecke AC.
(2) Der Winkel $\angle APB$ hat die Größe 2γ.

a) Beschreibe hierzu eine Konstruktion; zeige, dass sie zu jedem Dreieck ABC mit $\gamma < \beta$ genau einen Punkt P liefert und dass die beiden folgenden Aussagen b) und c) gelten!
b) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, dann wird er durch die beschriebene Konstruktion erhalten.
c) Wenn ein Punkt P durch die beschriebene Konstruktion erhalten wird, dann erfüllt er die Bedingungen (1) und (2).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(a) Man trägt in B an BC denjenigen Winkel der Größe γ an, dessen zweiter Schenkel s auf derselben Seite der Geraden durch B und C liegt wie A.
Für jedes Dreieck ABC mit $\gamma < \beta$ gilt: Da der Strahl s von B aus in das Innere des Dreiecks geht, schneidet er die Strecke AC in genau einem Punkt P.

(b) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so folgt: Nach (1) liegt P auf AC, also auf derselben Seite der Geraden durch B und C wie A, es gilt $\angle PCB = \angle ACB = \gamma$, und BCP ist ein Dreieck, für das nach den Außenwinkelsatz und nach (2)

$$\angle CBP = \angle APB - \angle PCB = 2\gamma - \gamma = \gamma$$

gilt. Also liegt P auf AC und auf dem zweiten Schenkel s des nach der Konstruktionsbeschreibung an BC angetragenen Winkels der Größe γ.

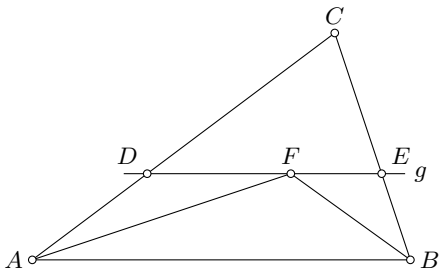
(c) Wenn ein Punkt P durch die beschriebene Konstruktion erhalten wird, so folgt: P liegt auf AC, erfüllt also (1), und es gilt $\angle PCB = \angle ACB = \gamma$. Ferner folgt nach dem Außenwinkelsatz und nach Konstruktion $\angle APB = \angle PCB + \angle CBP = \gamma + \gamma = 2\gamma$, also ist auch (2) erfüllt.

Aufgabe 280733:
Gegeben sei ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck ABC. Gesucht ist eine Gerade g, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Die Gerade g ist parallel zu AB, sie schneidet die Seite AC in einem Punkt D und die Seite BC in einem Punkt E.
(2) Für diese Punkte gilt $AD + BE = DE$.

I. Zeige, dass eine Gerade g, wenn sie die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, zu dem Dreieck konstruiert werden kann!
II. Beschreibe eine solche Konstruktion!
III. Zeige, dass eine Gerade g, wenn sie nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1) und (2) erfüllt!
IV. Konstruiere ein beliebiges spitzwinkliges, nicht gleichschenkliges Dreieck ABC und zu diesem nach deiner Beschreibung auch g!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Analyse:
Wenn eine Gerade g die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so folgt:
Nach (2) gibt es auf der Strecke DE einen Punkt F, für den $DF = AD$ und $EF = BE$ (3) gilt. Aus (3) folgt nach dem Basiswinkelsatz
$\angle DAF = \angle DFA$ und $\angle EBF = \angle EFB$; (4)
wegen (1) gilt nach dem Wechselwinkelsatz
$\angle DFA = \angle FAB$ und $\angle EFB = \angle ABF$; (5)
Aus (4) und (5) folgt: AF halbiert den Winkel $\angle BAC$, und BF halbiert den Winkel $\angle ABC$. Damit und wegen (1) ist gezeigt, dass eine Gerade g, wenn sie (1) und (2) erfüllt, nach folgender Beschreibung konstruiert werden kann:



II. Konstruktionsbeschreibung:
1. Man konstruiert die Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ und $\angle ABC$ und ihren Schnittpunkt F.
2. Man konstruiert die Parallele g durch F zu AB.

III. Beweis:
Wenn eine Gerade g nach dieser Beschreibung konstruiert wird, so folgt:
Nach Konstruktionsschritt 2. erfüllt die Gerade g die Bedingung (1).

Nach Konstruktionsschritt 1. gilt für ihre Schnittpunkte D, E mit AC bzw. BC ferner $\angle DAF = \angle FAB$ und $\angle EBF = \angle ABF$; (6) nach Konstruktionsschritt 2. und dem Wechselwinkelsatz gilt $\angle FAB = \angle DFA$ und $\angle ABF = \angle EFB$. (7)

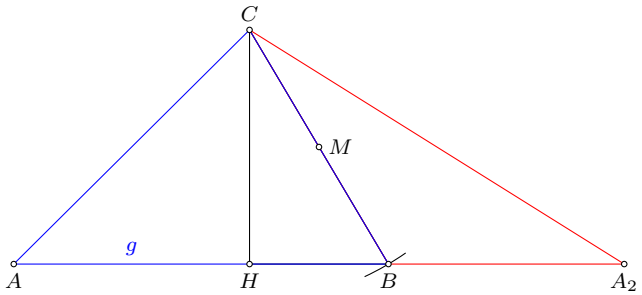
Aus (6) und (7) folgt nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes $AD = DF$ und $BE = EF$, also ist mit $AD + BE = DF + EF = DE$auch die Bedingung (2) erfüllt.

IV. Konstruktion: siehe Abbildung

Aufgabe 290733:
Von einem Dreieck ABC wird gefordert, dass $a = 5{,}0$ cm, $s_a = 6{,}0$ cm und $h_c = 4{,}3$ cm gilt, wobei a die Länge der Seite BC, s_a die Länge der Seitenhalbierenden der Seite BC und h_c die Länge der auf AB senkrechten Höhe des Dreiecks ist.

a) Beweise: Wenn ein Dreieck diese Forderungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Längen 5,0 cm, 6,0 cm und 4,3 cm konstruiert werden!
b) Beschreibe eine solche Konstruktion und fertige eine Konstruktionszeichnung an!
c) Beweise: Wenn ein Dreieck nach der Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Forderungen!
d) Stelle fest, ob durch diese Forderungen ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Analyse:
Wenn ein Dreieck die Forderungen erfüllt, so folgt:
Ist H der Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe, so ist $CH = h_c = 4{,}3$ cm, und die Gerade durch A und B steht auf CH senkrecht und geht durch H. Ferner ist $BC = a = 5{,}0$ cm, also liegt B auf dem Kreis um C mit dem Radius 5,0 cm.
Ist M der Mittelpunkt der Strecke BC, so ist $AM = s_a = 6{,}0$ cm, also liegt A auf dem Kreis um M mit dem Radius 6,0 cm; ferner liegt A auf der Geraden durch A und B.
Damit ist bewiesen, dass das Dreieck durch folgende Konstruktion aus den gegebenen Längen erhalten werden kann:



b) Konstruktionsbeschreibung:
(1) Man konstruiert eine Strecke CH der Länge 4,3 cm.
(2) Man errichtet die Senkrechte g in H auf CH.
(3) Man konstruiert den Kreis k_1 um C mit dem Radius 5,0 cm. Er schneidet die Gerade g in zwei Punkten; man wählt einen beliebigen von ihnen aus und bezeichnet ihn mit B.
(4) Man konstruiert den Mittelpunkt M der Strecke BC.
(5) Man konstruiert den Kreis k_2 um M mit dem Radius 6,0 cm. Er schneidet die Gerade g in zwei Punkten A_1, A_2; einen von ihnen wählt man als A.

c) Beweis:
Wenn ein Dreieck ABC nach dieser Beschreibung konstruiert wird, dann folgt:

Nach (3) ist $CB = a = 5{,}0$ cm. Nach (2) und (5) stehen CH und die Gerade durch A und B senkrecht aufeinander, also ist CH die auf AB senkrechte Höhe; nach (1) hat sie die Länge $CH = hc = 4{,}3$ cm. Nach (4) und (5) ist (für jede Wahlmöglichkeit von A_1 oder A_2 als A) AM die Seitenhalbierende der Seite BC; nach (5) hat sie die Länge $AM = s_a = 6{,}0$ cm. Also erfüllt jedes so konstruierte Dreieck ABC die gestellten Forderungen.

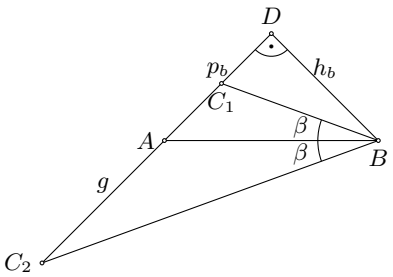
d) Konstruktion:
Für die in (1), (3), (5) erhaltenen Punkte B, A_1, A_2, H gilt:
B liegt zwischen A_1 und A_2, und es ist $B \neq H$. Daher haben die beiden Dreiecke A_1BC, A_2BC bei B Innenwinkel, die Nebenwinkel voneinander und verschieden von 90° sind. Also ist $\angle A1BC \neq \angle A2BC$. Daher sind die Dreiecke A_1BC und A_2BC nicht zueinander kongruent. Damit ist bewiesen: Durch die Forderungen ist ein Dreieck ABC nicht bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 300733:
Aus zwei gegebenen Längen $h_b = 4{,}0$ cm und $p_b = 4{,}0$ cm sowie einer gegebenen Winkelgröße $\beta = 20°$ soll ein Dreieck ABC konstruiert werden. Wenn dabei D den Fußpunkt der auf AC senkrechten Höhe D bezeichnet, so wird gefordert:

(1) Es gilt $BD = h_b$.
(2) Es gilt $AD = p_b$.
(3) Der Winkel $\angle ABC$ hat die Größe β.

a) Beweise: Wenn ein Dreieck ABC die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Stücken h_b, p_b, β konstruiert werden;
b) Beschreibe eine solche Konstruktion!
c) Beweise: Wenn ein Dreieck ABC nach deiner Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (1), (2) und (3).
d) Stelle fest, ob ein Dreieck durch die Bedingungen (1), (2) und (3) bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Wenn ein Dreieck ABC mit der auf AC senkrechten Höhe BD die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, dann ist ABD ein bei D rechtwinkliges Dreieck mit gegebenen Kathetenlängen BD, AD. Der Punkt C liegt so auf der Geraden durch A und D, dass BC mit BA einen Winkel der Größe β bildet.
Also kann ABC nach folgender Beschreibung konstruiert werden (siehe Abbildung):

b) 1. Man konstruiert einen rechten Winkel und trägt von seinem Scheitel D aus auf seinen Schenkeln die Strecken DB bzw. DA der Längen $h_b = 4{,}0$ cm bzw. $p_b = 4{,}0$ cm ab.
2. Man trägt in B an BA einen Winkel der Größe $\beta = 20°$ an und bringt seinen zweiten Schenkel zum Schnitt C mit der Geraden g durch A und D.

c) Wenn ein Dreieck ABC nach dieser Beschreibung konstruiert wird, dann ist BD nach 1. (und 2.) die auf g (also auf AC) senkrechte Höhe, und es gilt (1) sowie (2). Nach 2. wird auch (3) erfüllt.

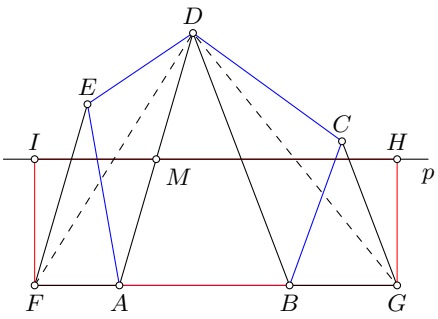
d) Der nach 2. zu konstruierende Winkel kann nach beiden Seiten von BA angetragen werden. Je nachdem, ob sein zweiter Schenkel auf derselben Seite von BA wie D liegt oder nicht, erhält man als C einen Punkt C_1 bzw. $C2$.
Wegen $\angle BAC1 < 90°$ und $\angle BAC2 > 90°$ sind die Dreiecke ABC_1, und ABC_2, nicht zueinander kongruent. Also ist ABC durch die Bedingungen (1), (2), (3) nicht bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 310733:
Zu einem gegebenen konvexen Fünfeck $ABCDE$ soll ein Rechteck $FGHJ$ konstruiert werden, das denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$ hat.

a) Beschreibe eine Konstruktion, die mit jedem konvexen Fünfeck $ABCDE$ durchführbar ist und vier Punkte F, G, H, J ergibt!
b) Beweise, dass für jedes konvexe Fünfeck $ABCDE$ die nach deiner Beschreibung konstruierten Punkte die Ecken eines Rechtecks $FGHJ$ sind, das denselben Flächeninhalt wie $ABCDE$ hat!
c) Führe an einem von dir gewählten Fünfeck $ABCDE$ die von dir beschriebene Konstruktion durch!

Hinweis: Ein Fünfeck ist genau dann konvex, wenn es nicht überschlagen ist (d. h. außer den Ecken keine gemeinsamen Punkte zweier Seiten aufweist) und wenn kein Innenwinkel des Fünfecks größer als 180° ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Konstruktionsbeschreibung:
(1) Man konstruiert die Parallele durch E zu AD, sie schneidet die Gerade durch A, B in einem Punkt F.
(2) Man konstruiert die Parallele durch C zu BD, sie schneidet die Gerade durch A, B in einem Punkt G.
(3) Man konstruiert den Mittelpunkt M von AD und die Parallele P durch M zu FG.
(4) Man konstruiert die Senkrechten zu FG durch F und durch G, sie schneiden p in je einem Punkt J bzw. H.

b) Werden F, G, H, J nach dieser Beschreibung konstruiert, so folgt: Nach den Konstruktionsschritten (3), (4) ist $FGHJ$ ein Rechteck.
Ferner hat nach (1), (2) das Dreieck FGD denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$. Dies kann folgendermaßen bewiesen werden:

Nach (1) haben F und E gleichen Abstand von AD, also ist das Dreieck ADF flächeninhaltsgleich zum Dreieck ADE.

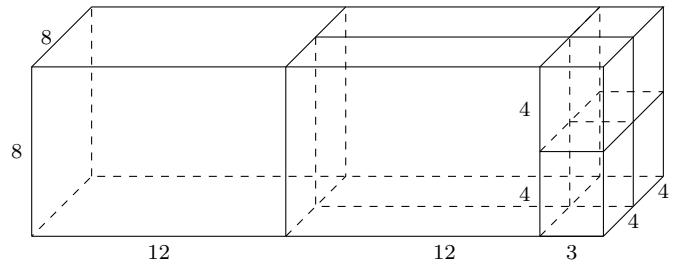
Nach (2) ist ebenso BDG flächeninhaltsgleich zu BDC. Addiert man noch den Flächeninhalt von ABD, so folgt die behauptete Flächeninhaltsgleichheit von FGD mit $ABCDE$.
Nach (3) und dem Strahlensatz hat M halb so großen Abstand von FG wie D; daher hat das Rechteck $FGHJ$ denselben Flächeninhalt wie das Dreieck FGD und folglich auch wie $ABCDE$.

III.V Raumgeometrie

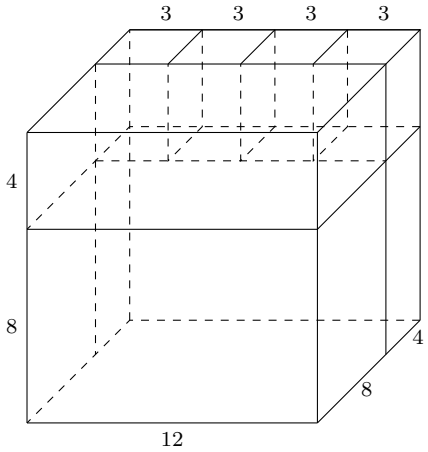
I Runde 1

Aufgabe 040716:
Gegeben ist ein quaderförmiger Holzklotz mit den Kanten von der Länge $a = 8$ cm, $b = 8$ cm und $c = 27$ cm.
Durch möglichst wenig ebene Schnitte mit einer Säge sind Teilkörper herzustellen, so dass sich diese zu einem Würfel zusammensetzen lassen.
Fertige eine Skizze des Quaders an, aus der der Verlauf der Schnitte ersichtlich ist, und eine Skizze des Würfels, die die Lage der Teilkörper zeigt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Quader hat ein Volumen von $V = 8 \cdot 8 \cdot 27\ \text{cm}^3 = 1728\ \text{cm}^3$. Damit muss der Würfel bei gleichem Volumen eine Kantenlänge von 12 cm haben, da gilt: $1728\ \text{cm}^3 = (12\ \text{cm})^3$.



Aufgabe 140712:
Auf einer horizontalen Ebene steht ein oben offener quaderförmiger Kasten mit den inneren Grundkantenlängen 5 cm und 4 cm, der bis zu einer Höhe von 7 cm mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Über dem Flüssigkeitsspiegel befindet sich ein Würfel mit 2 cm Kantenlänge derart, dass seine untere Fläche den Flüssigkeitsspiegel berührt.

Dabei werde der Flüssigkeitsspiegel stets als horizontale Ebene angenommen, und es werde vorausgesetzt, dass eine Würfelfläche stets parallel zum Flüssigkeitsspiegel ist. Ferner soll die Adhäsion nicht berücksichtigt werden. Der Würfel wird nun soweit gesenkt, bis seine Deckfläche mit dem Flüssigkeitsspiegel in derselben Ebene liegt.

Ermittle, um wie viel Zentimeter er zu diesem Zweck insgesamt gesenkt werden muss!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Würfel hat ein Volumen von 8 cm^3. Diese 8 cm^3 sind, wenn er gemäß den Bedingungen der Aufgabe gesenkt ist, gleich dem Inhalt eines Quaders Q oberhalb des ursprünglichen Flüssigkeitsquaders und mit gleicher Grundfläche wie dieser.

Da die Grundfläche einen Inhalt von 20 cm^2 hat, hat Q die Höhenlänge $\frac{8}{20}$ cm = 0,4 cm. Nach den Bedingungen der Aufgabe ist der Würfel so weit gesenkt worden, dass seine Deckfläche mit der obersten Fläche von Q in derselben Ebene liegt, d. h. um insgesamt $(2 - 0{,}4)$ cm = 1,6 cm.

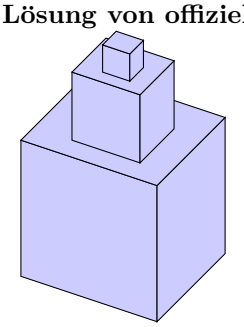
Aufgabe 320712:
Kathrins Aquarium hat die Form eines oben offenen Quaders. Es ist 80 cm lang, 40 cm breit und 42 cm hoch. Der Wasserspiegel befindet sich 7 cm vom oberen Rand entfernt.
Untersuche, ob man zusätzlich noch 10 Liter Wasser in dieses Aquarium gießen kann, ohne dass es überläuft!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In das Aquarium passt oberhalb des Wasserspiegels noch ein Quader von 80 cm Länge, 40 cm Breite und 7 cm Höhe, also vom Volumen $80 \cdot 40 \cdot 7cm^3 = 22400cm^3 = 22{,}4$ l.
Da dies mehr als 10 Liter sind, kann man 10 Liter in das Aquarium gießen, ohne dass es überläuft.

II Runde 2

Aufgabe 010725:
Wenn man einen Würfel auf den Tisch stellt, dann sind von seinen 6 Flächen nur noch 5 Flächen sichtbar. Nun sollen drei Würfel mit den Kantenlängen $a_1 = 20$ cm, $a_2 = 10$ cm und $a_3 = 4$ cm der Größe nach übereinandergestellt werden. Der größte Würfel steht zuunterst auf der Tischplatte. Die Mittelpunkte der Würfel stehen genau übereinander.
Wie groß ist die gesamte sichtbare Fläche aller drei Würfel?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(siehe Abbildung) Von jedem Würfel sind fünf Seitenflächen zu sehen (alle außer der Unterseite), abzüglich der überdeckten Oberseiten der beiden unteren Würfel (die ihrerseits so groß sind wie die Unterseiten der darauf gestellten Würfel).
Die sichtbare Fläche beträgt also

$$5a_1^2 + 5a_2^2 + 5a_3^2 - a_2^2 - a_3^2 = 5a_1^2 + 4a_2^2 + 4a_3^2 = 2464 \text{ cm}^2$$

Aufgabe 250722:
Ein Quader habe das Volumen $V_1 = 0{,}216$ dm^3, die Kanten seiner Grundfläche seien 12 cm bzw. 60 mm lang.

Von einem zweiten Quader sei bekannt, dass er die gleiche Höhe wie der erste Quader hat und dass die längere Kante seiner Grundfläche noch um 2 cm länger ist als die längere Kante der Grundfläche des ersten Quaders und die kürzere noch um 10 mm kürzer ist als die kürzere des ersten Quaders. Berechne die Differenz der Oberflächeninhalte der beiden Quader und gib sie in Quadratzentimetern an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für den ersten Quader gilt:
Seine längere Grundkante beträgt $a_1 = 12$ cm, seine kürzere Grundkante $b_1 = 6$ cm. Sein Volumen ist $V_1 = 216$ cm^3; wegen $216 : (12 \cdot 6) = 3$ beträgt seine Höhe daher $h_1 = 3$ cm.

Für den zweiten Quader gilt:
Seine längere Grundkante beträgt $a_2 = 14$ cm, seine kürzere Grundkante $b_2 = 5$ cm und seine Höhe $h_2 = h_1 = 3$ cm.

Der Oberflächeninhalt des ersten Quaders beträgt somit

$$A_1 = 2 \cdot (12 \cdot 6cm^2 + 12 \cdot 3cm^2 + 3 \cdot 6cm^2) = 252cm^2$$

Der Oberflächeninhalt des zweiten Quaders beträgt

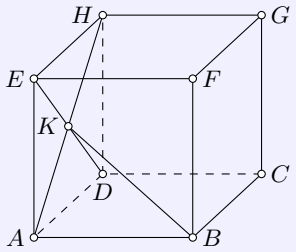
$$A_2 = 2 \cdot (14 \cdot 5cm^2 + 14 \cdot 3cm^2 + 5 \cdot 3cm^2) = 254cm^2$$

Die Differenz der Oberflächeninhalte der beiden Quader beträgt somit 2 cm^2.

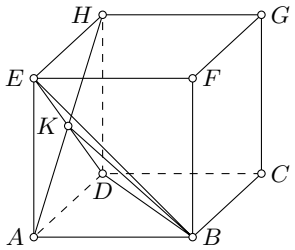
III Runde 3

Aufgabe 150735:

Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G und H. K sei der Schnittpunkt der Flächendiagonalen AH und DE.
Beweise: Es gilt $DE \perp BK$!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

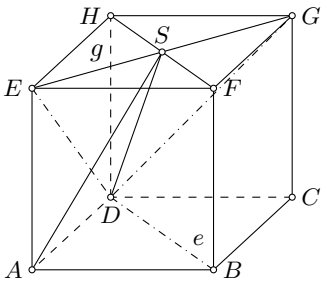


Das Dreieck EBD ist gleichseitig; denn seine Seiten sind Diagonalen kongruenter Quadrate. Da in jedem Quadrat die Diagonalen einander halbieren, ist K Mittelpunkt der Seite ED und folglich BK Seitenhalbierende im Dreieck EBD.
Im gleichseitigen Dreieck fallen Höhe und Seitenhalbierende, die von ein und derselben Ecke ausgehen, zusammen.
Somit gilt tatsächlich $DE \perp BK$.

Aufgabe 260736:
Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$; dabei sei $EFGH$ eine Seitenfläche des Würfels; der Schnittpunkt ihrer Diagonalen EG und FH sei S.

a) Beweise, dass der Winkel $\angle ESA$ kein rechter Winkel ist!
b) Beweise, dass der Winkel $\angle DSE$ ein rechter Winkel ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(a) Da $ABCDEFGH$ ein Würfel ist, steht die Kante AE auf der Fläche $EFGH$ senkrecht. Da die Strecke SE in dieser Fläche liegt, steht AE auch auf SE senkrecht.
Folglich ist ASE ein Dreieck, das bei E einen rechten Winkel hat. Nach dem Innenwinkelsatz folgt hieraus, dass der Winkel $\angle ESA$ kleiner als ein rechter Winkel ist.

(b) Da $ABCDEFGH$ ein Würfel ist, sind die Flächendiagonalen ED, DG und GE einander gleichlang (als Diagonalen der zueinander kongruenten Quadrate $ADHE$, $DCGH$ bzw. $EFGH$).
Da S der Schnittpunkt der Diagonalen des Quadrates $EFGH$ ist, wird die Diagonale EG von S halbiert. Also ist DEG ein gleichseitiges Dreieck, und darin ist DS eine Seitenhalbierende. Somit ist DS auch Höhe in diesem Dreieck; d. h., DS steht senkrecht auf EG. Damit ist bewiesen, dass $\angle DSE$ ein rechter Winkel ist.

Andere Lösunqsmöglichkeit:
Man wendet die folgenden beiden Sätze an, in denen g eine Gerade durch einen Punkt S bedeutet und e eine Ebene durch S bedeutet:

(1) Wenn g auf e senkrecht steht, so steht g auf allen und nur denjenigen Geraden durch S senkrecht, die in e liegen.
(2) Wenn g auf zwei verschiedenen in e liegenden Geraden durch S senkrecht steht, so steht g auf e senkrecht.

Auf der Ebene durch E, F, G, H stehen die Kanten BF und DH und daher auch die zu ihnen parallele Gerade durch S senkrecht. Nach Satz (1) steht diese Gerade also auch auf der Geraden g durch E, G senkrecht.

Auch die Gerade durch F und H steht auf g senkrecht (Diagonalen im Quadrat $EFGH$).
Nach Satz (2) stehen somit g und die Ebene e durch B, F, H, D aufeinander senkrecht. Daraus folgt nach Satz (1):
(b) Da DS in e liegt, steht DS auf EG senkrecht.
(a) Da AS nicht in e liegt, steht AS nicht auf EG senkrecht.

Aufgabe 280731:
Das Volumen eines Würfels w_1 ist achtmal so groß wie das Volumen eines Würfels w_2.
Wäre das Volumen von w_2 um genau 9 cm^3 kleiner, so wäre es gleich einem Zwölftel des Volumens von w_1.
Ermittle aus diesen Angaben die Kantenlängen a_1 und a_2 der beiden Würfel w_1 und w_2!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach den Angaben gilt für die Volumina a_1^3 und a_2^3 von w_1 bzw. w_2

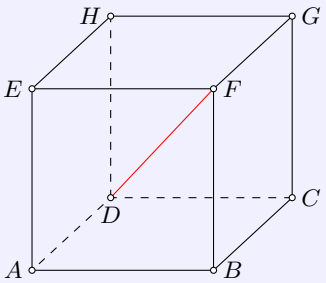
$$a_1^3 = 8a_2^3 \quad (1) \qquad ; \qquad a_2^3 - 9cm^3 = \frac{a_1^3}{12} \quad (2)$$

Aus (2) folgt $12a_2^3 - 108\ \text{cm}^3 = a_1^3$, hieraus und aus (1) folgt

$$12a_2^3 - 108\ \text{cm}^3 = 8a_2^3 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 3\ \text{cm} \quad (3)$$

Daraus und aus (1) ergibt sich $a_1^3 = 8 \cdot 27\ \text{cm}^3$, $a_1 = 6$ cm. (4)
Mit (3) und (4) sind die gesuchten Kantenlängen ermittelt.

Aufgabe 300736:



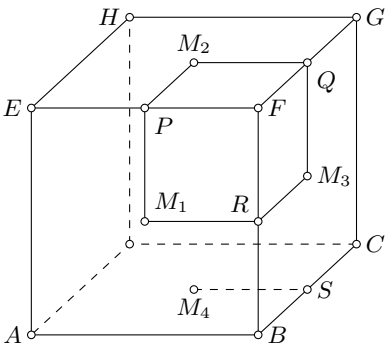
Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel.
Beweise, dass die Abstände der Punkte A, B, C, E, G und H von der Raumdiagonalen DF sämtlich einander gleich sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Dreiecke ADF, BFD, CDF, EFD, GFD und HDF werden jeweils durch die Raumdiagonale DF, je eine Körperkante (AD, BF, CD, EF, GF bzw. HD) und je eine Flächendiagonale (AF, BD, CF, ED, GD bzw. HF) des Würfels begrenzt. Sie stimmen also in ihren drei Seitenlängen überein und sind folglich nach (sss) sämtlich zueinander kongruent.
In jedem dieser Dreiecke ist der betreffende Abstand die Länge der Höhe auf der längsten Seite; demzufolge sind diese Abstände sämtlich einander gleich.

Aufgabe 340735:
In einer Arbeitsgemeinschaft sprechen Alexandra und Daniel über Eigenschaften von Würfeln.

Alexandra sagt: „Für je drei Seitenflächen eines Würfels, die eine gemeinsame Ecke haben, gilt: Die Mittelpunkte dieser drei Seitenflächen sind die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks.“
Daniel sagt: „Für je drei Seitenflächen eines Würfels, die keine gemeinsame Ecke haben, gilt: Die Mittelpunkte dieser drei Seitenflächen sind die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks.“
Beweise, dass beide Aussagen wahr sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für jede Seitenfläche eines Würfels der Kantenlänge a gilt (wie etwa mit den Bezeichnungen der Seitenfläche $ABFE$ in der Abbildung ausgedrückt sei): Die Verbindungsstrecke des Quadratmittelpunktes M_1 mit dem Mittelpunkt P der Strecke EF ist parallel zu BF, also senkrecht auf allen Geraden in der Ebene des Quadrates $EFGH$, und es gilt $M_1P = \frac{a}{2}$.

Wendet man auch die entsprechenden Aussagen für M_2P an, so folgt: Das Dreieck M_1PM_2, ist mit $M_1P = M_2P = \frac{a}{2}$ gleichschenklig und bei P rechtwinklig. Entsprechendes gilt für die Dreiecke M_1RM_3 und M_2QM_3.
Daraus folgt Alexandras Aussage $M_1M_2 = M_1M_3 = M_2M_3$.
Ferner folgt $\angle M_2M_3Q = \angle M_4M_3S = 45°$ und damit Daniels Aussage $\angle M_2M_3M_4 = 180° - 2 \cdot 45° = 90°$.

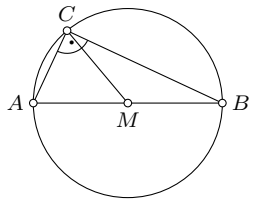
IV Klasse 8

IV.I Dreiecke

I Runde 1

Aufgabe 020815:
Beweise folgenden Satz:
Liegt der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks auf einer seiner Seiten, so ist das Dreieck rechtwinklig!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



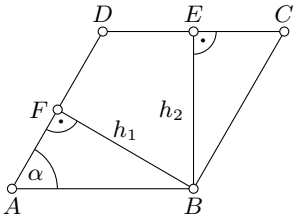
Der Umkreismittelpunkt hat zu den drei Eckpunkten des Dreiecks den gleichen Abstand. Daher ist er – wenn er auf einer der Seiten liegt – Mittelpunkt dieser Seite; umgekehrt ist diese Seite dann Durchmesser des Kreises.

Der Winkel am verbleibenden Eckpunkt ist dann nach dem Satz des Thales ein rechter Winkel.

Aufgabe 040812:
Es ist zu beweisen, dass die Höhen in einem Rhombus gleichlang sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Dreiecke ABF und BCE sind kongruent nach WSW:

$$\begin{aligned}
\angle BAF &\simeq \angle BCE \text{ (gegenüberliegende Winkel im Rhombus)}\\
\overline{AB} &\simeq \overline{BC} \quad \text{(Seiten im Rhombus)}\\
\angle ABF &\simeq \angle CBE \text{ (da bereits ein gleicher Winkel und ein rechter Winkel in den Dreiecken vorhanden ist, muss auch der dritte Winkel übereinstimmen)}
\end{aligned}$$



Damit sind auch die restlichen Stücke in den beiden Dreiecken kongruent, insbesondere $h_1 = h_2$.

Aufgabe 040815:
Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Wenn in einem Dreieck eine Seitenhalbierende halb so lang wie die zugehörige Seite ist, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach den Voraussetzungen des Satzes liegen die Eckpunkte des Dreiecks auf dem Thaleskreis über $\overline{AB}$, falls a_c die Seitenhalbierende ist.

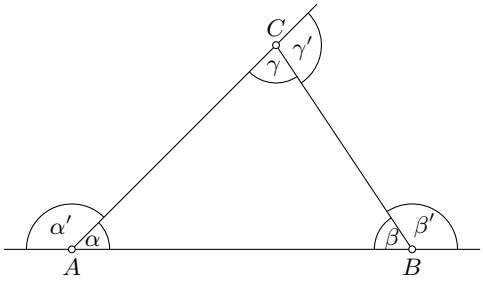
Aufgabe 050814:
Offenbar ist folgender Satz richtig:

Ist das Dreieck ABC gleichseitig, so ist die Summe je zweier seiner Außenwinkel doppelt so groß wie die Summe der ihnen anliegenden Innenwinkel.

Untersuche, ob der Satz umkehrbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Umkehrung des Satzes ist: „Ist in einem Dreieck ABC die Summe je zweier seiner Außenwinkel doppelt so groß wie die Summe der ihnen anliegenden Innenwinkel, dann ist das Dreieck ABC gleichseitig."

Hilfssatz: „Ist die Summe zweier Außenwinkel eines Dreiecks gleich der Summe der ihnen anliegenden Innenwinkel, so beträgt der dritte Innenwinkel 60°."



Beweis: Die beiden Außenwinkel, auf die die Voraussetzung zutrifft, seien o. B. d. A. α' und β', die zu ihnen anliegenden Innenwinkel des Dreiecks seien α und β, der dritte Innenwinkel sei γ, der dritte Außenwinkel γ' (siehe Abbildung).

Dann gilt nach Voraussetzung:

$$\alpha' + \beta' = 2(\alpha + \beta).$$

Außerdem gilt nach dem Satz, dass jeder Außenwinkel eines Dreiecke gleich der Summe der ihm nicht anliegenden Innenwinkel ist:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 2(\alpha + \beta + \gamma)$$

Damit folgt: $\gamma' = 2\gamma$, womit, da die Summe zweier Nebenwinkel 180° beträgt, sofort $\gamma = 60°$ folgt.
Wendet man den Hilfssatz auf jeden Innenwinkel des Dreiecks ABC an, ergibt sich die Behauptung.

Aufgabe 060814:
In der Ebene ε liegen zwei voneinander verschiedene Punkte P_1 und P_2 und zwei voneinander verschiedene Geraden g_1 und g_2.

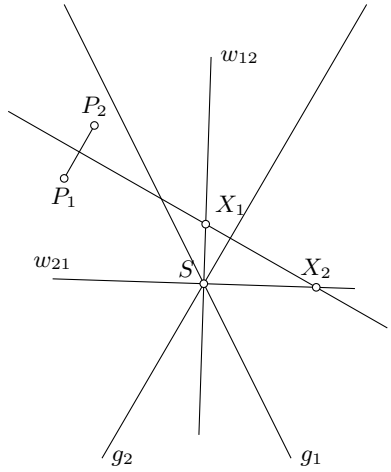
Ermittle alle Punkte X mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\overline{XP_1} = \overline{XP_2}$

(2) Die Abstände des Punktes X von g_1 bzw. g_2 sind einander gleich.

Hinweis: Beachte die verschiedenen Fälle!

Lösung von Manuela Kugel:



1. Fall:
Die Geraden g_1 und g_2 schneiden einander im Punkt S. Dann liegen die gesuchten Punkte X wegen (1) auf der Symmetrieachse s_{12}, zu P_1P_2 und wegen (2) auf einer der beiden Halbierenden w_{12} bzw. w_{21} der Schnittwinkel von g_1 und g_2. Für die Lage von s_{12} sind folgende Fälle zu unterscheiden:

Fall 1.1: Es sei $s_{12} \parallel w_{12}$ oder $s_{12} \parallel w_{21}$.

Dann gibt es für $g_{12} \neq w_{12}$ bzw. für $s_{12} \neq w_{21}$ jeweils genau einen derartigen Punkt X, nämlich den Schnittpunkt von s_{12} mit w_{21} bzw. den Schnittpunkt von s_{12} mit w_{12}.
Für $s_{12} = w_{12}$ bzw. $s_{12} = w_{21}$ erfüllen alle Punkte von w_{12} bzw. von w_{21} und nur diese die Bedingungen (1) und (2).

Fall 1.2: Es sei s_{12} zu keiner der beiden Winkelhalbierenden parallel.

Dann schneidet s_{12} entweder beide Winkelhalbierenden im Punkt S, und genau S erfüllt (1) und (2), oder s_{12} hat mit w_{12} den Punkt X_1 und mit w_{21} den Punkt X_2 gemeinsam ($X_1 \neq X_2$), wobei X_1 und X_2 und nur diese Punkte die Bedingungen (1) und (2) erfüllen.

2. Fall:
Die Geraden g_1 und g_2 sind zueinander parallel. Die gesuchten Punkte X liegen dann wegen (1) auf der Symmetrieachse s_{12} zu P_1P_2 und wegen (2) auf der Mittelparallelen m_{12} zu g_1 und g_2. Verläuft s_{12} nicht parallel zu m_{12}, so gibt es genau einen Punkt X, den Schnittpunkt von s_{12} und m_{12}, der (1) und (2) erfüllt. Für $s_{12} \parallel m_{12}$ erfüllen alle Punkte der Mittelparallelen und nur diese (1) und (2), falls $s_{12} = m_{12}$ gilt. Andernfalls gibt es keinen derartigen Punkt.

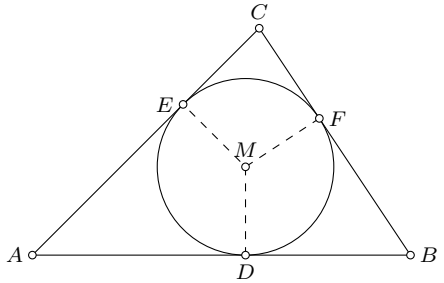
Aufgabe 100813:
Es sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck, und es sei D der Berührungspunkt des Inkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ mit der Seite AB.

Beweise: Die Länge der Strecke AD ist gleich der Differenz aus dem halben Umfang des Dreiecks und der Länge der Seite BC.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei E der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite AC, F der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite BC.
Dann gilt $AD = AE$, $BD = BF$, $CE = CF$ je als Tangentenabschnitte von einem Punkt außerhalb des Kreises an den Kreis.

Der Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ ist also:

$$AB + BC + AC = 2AD + 2CF + 2BF$$



Daraus folgt:

$$AD = \frac{AB + BC + AC}{2} - (CF + BF)$$

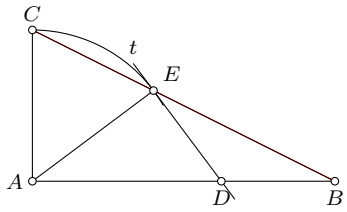
Da $BF + CF = BC$ ist, folgt

$$AD = \frac{AB + BC + AC}{2} - BC$$

Aufgabe 110813:
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit A als Scheitel des rechten Winkels und mit $\overline{AC} < \overline{AB}$ (1). Der Kreis um A mit $\overline{AC}$ schneidet BC außer in C noch in einem Punkt E, wobei E wegen (1) zwischen C und B liegt. Die im Punkt E an den genannten Kreis gelegte Tangente schneidet AB in einem Punkt D, der zwischen A und B liegt.

Beweise, dass $\overline{ED} = \overline{DB}$ gilt!

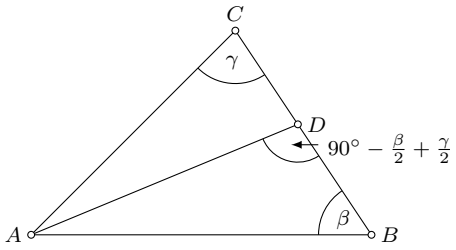
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Dreieck $\triangle AEC$ ist laut Konstruktion gleichschenklig mit $AC = AE$. Folglich sind die Winkel $\angle ACE$ und $\angle AEC$ als Basiswinkel gleich groß.



Der Winkel $\angle ACE$ wird vom Winkel $\angle ABC$ und der Winkel $\angle AEC$ vom Winkel $\angle BED$ jeweils zu einem rechten Winkel ergänzt. Daher sind auch $\angle ABC$ und $\angle BED$ gleich groß, also ist $\triangle DBE$ gleichschenklig, und es gilt: $ED = DB$, w. z. b. w.

Aufgabe 150813:
Man beweise: Wenn in einem Dreieck ABC für die Größen β, γ der Winkel $\angle ABC$, $\angle BCA$ und für einen Punkt D auf der Seite BC der Winkel $\angle BDA$ die Größe $90° + \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}$ hat, so liegt D auf der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Wegen der Winkelsumme 180° im Dreieck ABD hat $\angle BAD$ die Größe

$$180° - \beta - (90° + \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}) = 90° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$$

Wegen der Winkelsumme 180° im Dreieck ABC hat $\angle BAC$ die Größe $180° - \beta - \gamma$, er ist also doppelt so groß wie $\angle BAD$, w. z. b. w.

Aufgabe 170814:
Jens behauptet, es sei möglich, jedes beliebige Dreieck ABC in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen. Uwe dagegen meint, dass nur für spezielle Dreiecke eine derartige Zerlegung möglich sei.

Untersuche, wer von den beiden recht hat!

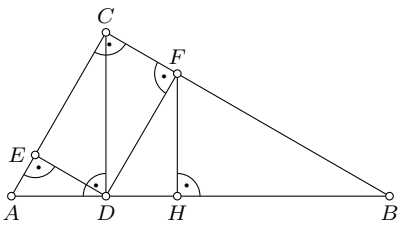
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn es ein Dreieck ABC gibt, das sich in zwei kongruente Dreiecke zerlegen lässt, so geschieht dies durch ein Stück einer Geraden (zerlegende Strecke); denn sonst entstünden Teilstücke, deren Begrenzung entweder nicht nur geradlinig wäre oder mehr als drei Ecken aufwiese. Die zerlegende Strecke muss von einer der Ecken A, B, C ausgehen, da sonst das Dreieck ABC in ein Dreieck und ein Viereck zerlegt würde.

O. B. d. A. gehe die zerlegende Strecke von A aus, ihr anderer auf BC gelegener Endpunkt sei F. Dann ist jeder der Winkel $\angle CAF$ und $\angle ACF$ kleiner als $\angle AFB$, da nach dem Außenwinkelsatz ihre Summe so groß wie $\angle AFB$ ist.
Folglich sind die Dreiecke ABF und ACF höchstens dann kongruent, wenn $\angle AFB$ genau so groß ist wie der dritte Winkel $\angle AFC$ des Dreiecks ACF; d. h. wenn jeder von ihnen 90° beträgt, da sie Nebenwinkel sind. Dann sind AB und AC als Hypotenusen in kongruenten rechtwinkligen Dreiecken gleichlang, also ist das Dreieck ABC gleichschenklig.
Somit hat Uwe recht; denn eine Zerlegung in zwei kongruente Dreiecke ist nur bei gleichschenkligen Dreiecken möglich.

Aufgabe 180814:
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse AB, dessen Innenwinkel $\angle CAB$ die Größe 60° hat.
Fälle von C aus das Lot CD auf AB, danach von D aus die Lote DE und DF auf AC bzw. BC sowie von F das Lot FH auf AB!

Weise nach, dass $\overline{HB} = \overline{HA} + \overline{AE}$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Dreiecke ABC, ACD, ADE, DFH sind rechtwinklig (bei C, D, E bzw. H) und haben je einen Innenwinkel der Größe 60° (bei A bzw. D). Daher gilt



$$AC = \frac{1}{2}AB, \quad AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{4}AB$$

$$AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{8}AB, \quad DH = \frac{1}{2}DF$$

Ferner ist $CDEF$ ein Rechteck, also gilt $DF = CE = AC - AE = \frac{3}{8}AB$ und somit $DH = \frac{3}{16}AB$. Daraus folgt einerseits

$$HB = AB - AD - DH = \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{16}\right) AB = \frac{9}{16}AB$$

andererseits

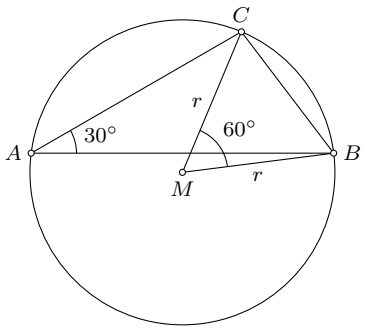
$$HA + AE = AD + DH + AE = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8}\right) AB = \frac{9}{16}AB$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Aufgabe 270813:
Es sei ABC ein Dreieck, bei dem der Innenwinkel $\angle BAC$ die Größe 30° hat.

Beweise, dass unter dieser Voraussetzung die Länge der Seite BC gleich der Länge des Umkreisradius dieses Dreiecks ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Sei M der Mittelpunkt und r der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC. Dann gilt nach dem Zentriwinkel-Peripheriewinkel-Satz $\angle BMC = 2 \cdot \angle BAC$.
Wegen $\angle BAC = 30°$ (nach Voraussetzung) folgt hieraus $\angle BMC = 60°$. (1)

Aus $MB = MC = r$ (als Radien eines Kreises) folgt nach dem Basiswinkelsatz $\angle CBM = \angle MCB$. (2)
Wendet man den Innenwinkelsatz auf das Dreieck BCM an, dann folgt aus (1) und (2)

$$\angle CBM + \angle MCB + 60° = 180° \quad ; \quad 2\angle CBM = 120° \quad ; \quad \angle CBM = \angle MCB = 60° \qquad (3)$$

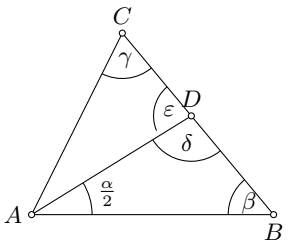
Aus (1) und (3) folgt dann, dass das Dreieck BCM gleichseitig ist. Folglich gilt: $BC = MB = r$. w. z. b. w.

II Runde 2

Aufgabe 050822:
In dem Dreieck $\triangle ABC$ mit den Winkelmaßen α, β und γ sei die Winkelhalbierende w_α eingezeichnet. Sie schneide die Seite BC in D. Die Winkel $\angle ADB$ und $\angle ADC$ haben die Maße δ bzw. ε.

Beweise, dass $\delta - \varepsilon = \gamma - \beta$ ist!

Lösung von Manuela Kugel:



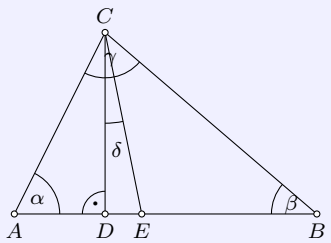
Nach dem Satz vom Außenwinkel gilt (siehe Abbildung):

$$\begin{aligned} \delta &= \gamma + \frac{\alpha}{2} \\ \varepsilon &= \beta + \frac{\alpha}{2} \\ \delta - \varepsilon &= \gamma - \beta \end{aligned}$$

Aufgabe 080823:

Beweise folgenden Satz:

Der Winkel zwischen einer Höhe und der zugehörigen (d. h. vom gleichen Eckpunkt ausgehenden) Winkelhalbierenden eines jeden Dreiecks $\triangle ABC$ ist halb so groß wie der Betrag der Differenz der beiden anderen Innenwinkel des Dreiecks.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei o. B. d. A. die Höhe CD und die Winkelhalbierende CE des Dreiecks $\triangle ABC$ betrachtet. Der Winkel zwischen beiden habe die Größe δ, die Dreieckswinkel mögen die Größen α, β, γ haben.

Ist $\alpha = \beta$, so fallen CD und CE zusammen, also ist dann $\delta = 0°$ und die Behauptung daher richtig.

Sein nun $\alpha \neq \beta$, etwa $\alpha > \beta$. Dann liegt E zwischen D und B. Da E auch zwischen A und B liegt, folgt $\angle DEC \cong \angle AEC$, d. h. $90° - \delta = 180° - (\alpha + \frac{\gamma}{2}$, also

$$\delta = \alpha + \frac{\gamma}{2} - 90° = \alpha + \frac{1}{2}(180° - \alpha - \beta) - 90° = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Aufgabe 090824:
Beweise folgenden Satz:

> In jedem Dreieck $\triangle ABC$ teilt jede Halbierende eines Innenwinkels dessen Gegenseite im Verhältnis der beiden anderen Seiten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Voraussetzung: Dreieck mit Winkelhalbierender
Behauptung: Winkelhalbierende teilt gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden anderen Seiten

Beweis: O. B. d. A. werde die Winkelhalbierende in C betrachtet, damit gilt $\gamma_1 = \gamma_2$ (1). Zu zeigen bleibt hier $a_1 : a_2 = c_1 : c_2$.
Der Sinus von zwei sich zu 180^o ergänzenden Winkeln (Nebenwinkel) ist gleich groß. Deshalb gilt:

$$\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2 \tag{2}$$

Wegen des Sinussatzes gilt: $\sin \alpha : \sin \gamma = a : c$. Daher gilt nun ebenfalls:

$$\sin \alpha_1 : \sin \gamma_1 = a_1 : c_1 \qquad (3) \qquad \text{und} \qquad \sin \alpha_2 : \sin \gamma_2 = a_2 : c_2 \qquad (4)$$

Mit (3), (4), (1) und (2) gilt:

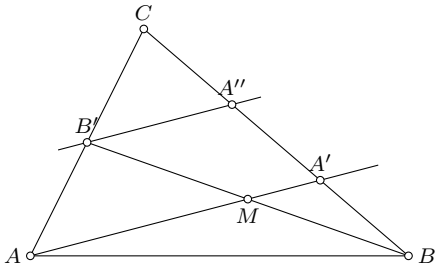
$$a_1 : a_2 = (\sin \alpha_1 \cdot \sin \gamma_2 \cdot c_1) : (\sin \gamma_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot c_2) = c_1 : c_2$$

Aufgabe 100822:
In einem Dreieck $\triangle ABC$ sei B' der Mittelpunkt der Seite AC und M der Mittelpunkt der Strecke BB'. Die Gerade durch A und M schneidet BC in einem Punkt, der A' genannt sei.

Man beweise, dass $\overline{BC} = 3 \cdot \overline{BA'}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabe gilt: $AB' = B'C$ und $MB' = BM$.
Die Parallele durch B' zu AA' ist für das Dreieck $\triangle AA'C$ eine Mittelparallele. Sie schneidet BC in einem Punkt, der zwischen A' und C liegt und A'' genannt sei. Dann gilt nach einem der Strahlensätze

$$BA' : A'A'' = BM : MB' = 1 : 1 \tag{1}$$
$$A'A'' : A''C = AB' : B'C = 1 : 1 \tag{2}$$

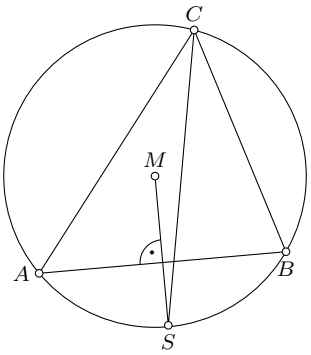


Aus (1) und (2) folgt $BA' = A'A'' = A''C$ und daraus $BC = 3BA'$, w. z. b. w.

Aufgabe 110823:
Beweise, dass für jedes Dreieck $\triangle ABC$ der folgende Satz gilt:

Ist S der von C verschiedene Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch C mit dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$, dann liegt S auf der Mittelsenkrechten von AB.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Mittelpunkt des Umkreises sei M. Nach dem Satz über Zentriwinkel und Peripheriewinkel folgt: $\angle AMS \cong \angle SMB$ und, da M Mittelpunkt des Umkreises ist, $AM = SM = BM$.
Daher gilt: $\triangle AMS \cong \triangle SMB$ (sws), woraus $AS = SB$ folgt. Infolgedessen liegt S auf der Mittelsenkrechten von AB.

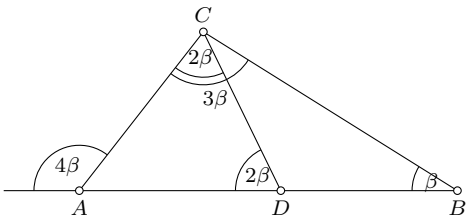
Aufgabe 140823:
Gegeben sei ein Dreieck ABC, das folgender Bedingung genügt:

Die Größe des Winkels $\angle ABC$ beträgt ein Viertel der Größe des Außenwinkels bei A.

a) Stelle fest, ob es auf AB einen Punkt D gibt, für den $\overline{AD} = \overline{AC}$ gilt!

b) Beweise, dass für jeden derartigen Punkt $\overline{DB} = \overline{DC}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $\angle ABC = \beta$, Dann hat der Außenwinkel bei A laut Aufgabe die Größe 4β. Nach dem Satz über den Außenwinkel am Dreieck beträgt die Größe des Winkels $\angle ACB$ somit 3β, also gilt $\angle ACB > \angle ABC$.

Daraus folgt, da im Dreieck dem größeren von zwei Winkeln jeweils die längere Seite gegenüberliegt, $AB > AC$.

Daher gibt es auf AB einen Punkt D, für den $AD = AC$ gilt. Mithin sind A, D, C die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks. Daraus und aus dem Außenwinkelsatz folgt $\angle ADC = \angle ACD = 2\beta$.

Schließlich erhält man für jeden Punkt D der genannten Art

$$\angle DCB = \angle ACB - \angle ACD = 3\beta - 2\beta = \beta = \angle DBC$$

also ist $\triangle CDB$ gleichschenklig mit $DB = DC$, w. z. b. w.

Aufgabe 180822:
Man ermittle die Größen der Innenwinkel eines Dreiecks ABC, auf dessen Außenwinkel folgende Aussage zutrifft:

Einer der Außenwinkel mit dem Scheitel A sei um 16° größer, einer der Außenwinkel mit dem Scheitel B sei um 49° kleiner als einer der Außenwinkel bei C.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Werden die Größen der Innen- bzw. Außenwinkel des Dreiecks ABC bei A mit α bzw. α', bei B mit β bzw. β' und bei C mit γ bzw. γ' bezeichnet, so sind die zwischen ihnen einerseits allgemein gültigen und andererseits vorausgesetzten Beziehungen beschrieben durch

$$\alpha' = 180° - \alpha = \gamma' + 16° = 180° - \gamma + 16°$$
$$\beta' = 180° - \beta = \gamma' - 49° = 180° - \gamma - 49°$$

woraus folgt: $\alpha = \gamma - 16°$ und $\beta = \gamma + 49°$, und mit Hilfe des Satzes über die Innenwinkelsumme im Dreieck: $\alpha + \beta + \gamma = 180° = 3\gamma + 33°$.
Daraus erhält man $\gamma = 49°, \alpha = 49° - 16° = 33°$ und $\beta = 49° + 49° = 98°$.
Tatsächlich existiert wegen $49° + 33° + 98° = 180°$ ein solches Dreieck ABC, und es besitzt außerdem Außenwinkel folgender Größen:

bei C mit $\gamma' = 180° - 49° = 131°$,
bei A mit $\alpha' = 180° - 33° = 147° = 131° + 16° = \gamma' + 216°$ und
bei B mit $\beta' = 180° - 98° = 82° = 131° - 49° = \gamma' - 49°$.

Aufgabe 200824:
Von einem Dreieck ABC und einer Geraden g werde vorausgesetzt:

(1) Es gilt $\overline{AB} = \overline{AC}$.

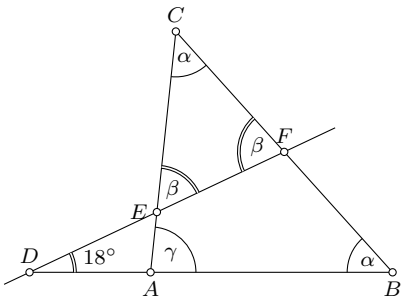
(2) Die Gerade g schneidet die Strecke BC in einem Punkt F, die Strecke AC in einem Punkt E und die Verlängerung der Strecke BA über A hinaus in einem Punkt D.

(3) Es gilt $\overline{CE} = \overline{CF}$.

(4) Der Winkel $\angle EDA$ hat die Größe 18°.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\angle ABC$, die Größe β des Winkels $\angle EFC$ sowie die Größe γ des Winkels $\angle CAB$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Da der Winkel $\angle DFC$ Außenwinkel des Dreiecks DBF ist, gilt $\beta + \alpha = 18°$.

(II) Im Dreieck EFC gilt, da es gleichschenklig mit $CE = CF$ ist, $\angle CEF = \angle EFC = \beta$, mithin nach dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck, angewandt auf das Dreieck EFC, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, und wegen (I)

$$\alpha + \alpha + 18° + \alpha + 18° = 180°$$

woraus man $\alpha = 48°$ erhält.

(III) Aus $\alpha = 48°$ und $\beta = \alpha + 18°$ folgt $\beta = 66°$.

(IV) Im Dreieck ABC ist nun nach dem Satz über die Winkelsumme $\gamma = 180° - 2\alpha$ mithin $\gamma = 84°$.

Aufgabe 210823:

a) Beweise folgenden Satz:

Wenn ein Dreieck ABC gleichseitig ist, dann ist die Summe irgend zweier zu verschiedenen Ecken gehörender Außenwinkel stets doppelt so groß wie die Summe der zugehörenden Innenwinkel.

b) Untersuche, ob auch die folgende Umkehrung des in a) genannten Satzes gilt: Wenn in einem Dreieck ABC die Summe irgend zweier zu verschiedenen Ecken gehörender Außenwinkel stets doppelt so groß ist wie die Summe der zugehörigen Innenwinkel, dann ist das Dreieck ABC gleichseitig.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist, dann beträgt jeder Innenwinkel 60°, jeder Außenwinkel also $180° - 60° = 120°$. Die Summe der zu zwei Ecken gehörenden Außenwinkel beträgt mithin 240°, die Summe der zu diesen Ecken gehörenden Innenwinkel beträgt 120°. Da 240° das Doppelte von 120° ist, ist hiermit der geforderte Beweis geführt.

b) Die zu den Ecken A,B,C gehörenden Innenwinkelgrößen seien α, β bzw. γ; die zugehörigen Außenwinkelgrößen sind dann $180° - \alpha$, $180° - \beta$ bzw. $180° - \gamma$.
In der zu untersuchenden Umkehrung besagt die Voraussetzung daher, dass die drei Gleichungen

$$(180° - \alpha) + (180° - \beta) = 2(\alpha + \beta) \quad (1)$$
$$(180° - \beta) + (180° - \gamma) = 2(\beta + \gamma) \quad (2)$$
$$(180° - \gamma) + (180° - \alpha) = 2(\gamma + \alpha) \quad (3)$$

gelten. Aus (1) folgt $360° - \alpha - \beta = 2\alpha + 2\beta$, also $3\alpha + 3\beta = 360°$ und daher (und aus (2) und (3) ebenso)

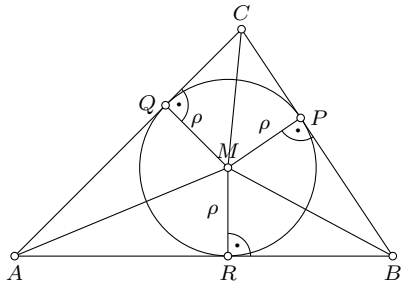
$$\alpha + \beta = 120° \quad ; \quad \beta + \gamma = 120° \quad ; \quad \gamma + \alpha = 120° \quad (4,5,6)$$

Aus (4) und (5) folgt $\alpha = \gamma$ (7), aus (5) und (6) folgt $\alpha = \beta$ (8).
Mit (7) und (8) ist aber die Aussage gewonnen, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist. Damit ist bewiesen, dass auch die zu untersuchende Umkehrung gilt.

Aufgabe 220823:
Beweise die folgende Aussage!

Wenn F der Flächeninhalt, u der Umfang und ρ der Inkreisradius eines Dreiecks sind, dann gilt $\rho = \frac{2F}{u}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Sein Inkreis habe den Mittelpunkt M und berühre die Seiten BC, CA bzw. AB in P, Q bzw. R.



Dann ist $BC + CA + AB = u$ und $MP = MQ = MR = \rho$. Ferner gilt nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius $MP \perp BC$, $MQ \perp CA$, $MR \perp AB$. Die Dreiecke BCM, CAM bzw. ABM haben folglich die Flächeninhalte

$$\frac{1}{2}BC \cdot MP, \qquad \frac{1}{2}CA \cdot MQ, \qquad \frac{1}{2}AB \cdot MR$$

Andererseits ist die Summe dieser Flächeninhalte gleich F; daher gilt

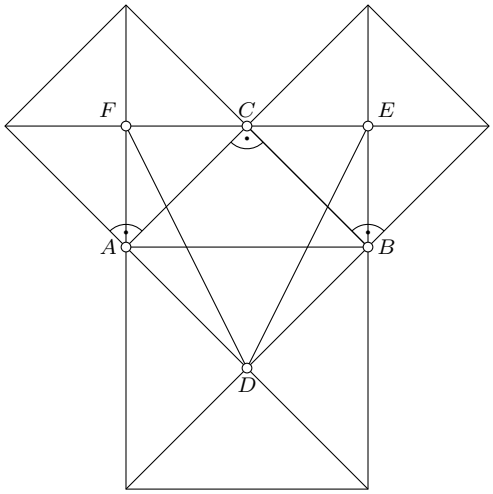
$$F = \frac{1}{2}BC \cdot \rho + \frac{1}{2}CA \cdot \rho + \frac{1}{2}AB \cdot \rho = \frac{1}{2}u \cdot \rho$$

Hieraus folgt die zu beweisende Gleichung $\rho = \frac{2F}{u}$.

Aufgabe 230824:
Es sei ABC ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Über den Seiten AB, BC und AC seien Quadrate nach außen errichtet. Die Diagonalenschnittpunkte dieser Quadrate seien in dieser Reihenfolge mit D, B und F bezeichnet.

Beweise, dass der Flächeninhalt A_D des Dreiecks DEF gleich dem Flächeninhalt A_Q eines der Quadrate über AC bzw. BC ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $\angle BCE = \angle ACF = 45°$ und $\angle ACB = 90°$ ist $\angle ECF = 180°$, also liegt C auf EF.
Wegen $\angle BAC = \angle CAF = 45°$, also $\angle BAF = 90°$ und da in den Quadraten über AC und BC die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, also $\angle AFC = \angle CEB = 90°$ gilt, ist $ABEF$ ein Rechteck, somit gilt $AB \parallel EF$ und $AB = EF$.



Das Viereck $ADBC$ ist ein Quadrat, da es sich aus den beiden kongruenten rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecken ABC und ABD zusammensetzt. Es ist den Quadraten über AC bzw. BC kongruent. Sein Flächeninhalt ist $A_Q = \frac{1}{2}AB \cdot CD$; denn je eine Hälfte von CD ist in den Dreiecken ABC bzw. ABD die zu AB gehörende Höhe.

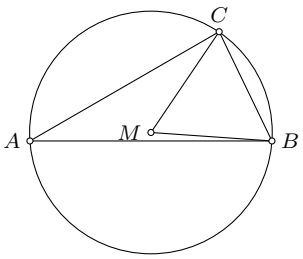
Die Diagonale CD des Quadrats $ADBC$ steht auf AB und folglich auch auf FE senkrecht. Daher hat das Dreieck DEF den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}FE \cdot CD = \frac{1}{2}AB \cdot CD = A_Q$$

Aufgabe 240822:
Es sei ABC ein Dreieck; die Größe des Winkels $\angle BAC$ betrage 30°.

Beweise, dass unter dieser Voraussetzung die Länge der Seite BC gleich dem Umkreisradius r des Dreiecks ABC ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC sei M, der Umkreisradius sei r. Im Umkreis ist $\angle BAC$ Peripheriewinkel über der Sehne BC und $\angle BMC$ der zugehörige Zentriwinkel. Daher hat $\angle BMC$ nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz die Größe $2 \cdot 30° = 60°$; nach dem Innenwinkelsatz, angewandt auf $\triangle BCM$, gilt also

$$\angle BMC + \angle MCB = 120° \tag{1}$$

Ferner ist wegen $CM = BM = r$ das Dreieck BCM gleichschenklig mit

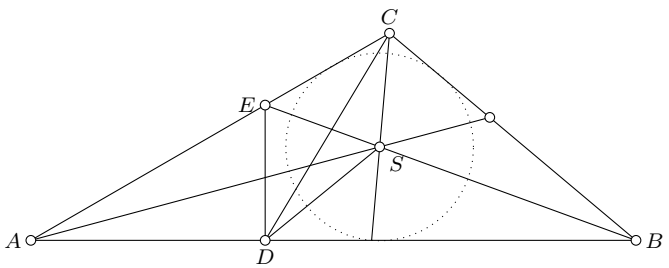
$$\angle MBC = \angle MCB \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $\angle MBC = \angle MCB = 60°$, also ist $\triangle BCM$ sogar gleichseitig, womit $BC = r$ bewiesen ist.

Aufgabe 310823:
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C. Der Winkel $\angle BAC$ habe die Größe $\alpha = 30°$. Der Mittelpunkt der Seite AB sei D, der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC sei S.

Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen $\overline{CS} = \overline{DS}$ folgt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Aus $\angle ACB = 90°$ und $\angle BAC = 30°$ folgt nach dem Innenwinkelsatz $\angle ABC = 60°$. (1)

Nach der Umkehrung des Thalessatzes liegt C auf einem Halbkreis über AB, also ist $DB = DC$ und daher nach dem Basiswinkelsatz $\angle DCB = \angle DBC$. (2)

Nach (1),(2) (und $\angle ABC = \angle DBC$) ist BCD ein gleichseitiges Dreieck. Darin ist die Gerade durch B und S, die den Winkel $\angle DBC$ halbiert, zugleich die Mittelsenkrechte der Seite CD. Also erfüllt S, wie jeder Punkt dieser Mittelsenkrechten, die Bedingung $CS = DS$. w. z. b. w.

Aufgabe 330824:
Für jedes Dreieck ABC bezeichne H den Fußpunkt der auf BC senkrechten Höhe und W den Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden durch A.

a) Welche Größe muss der Winkel $\angle WAH$ in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ haben, in dem der Innenwinkel $\angle ACB$ die Größe 48° hat?

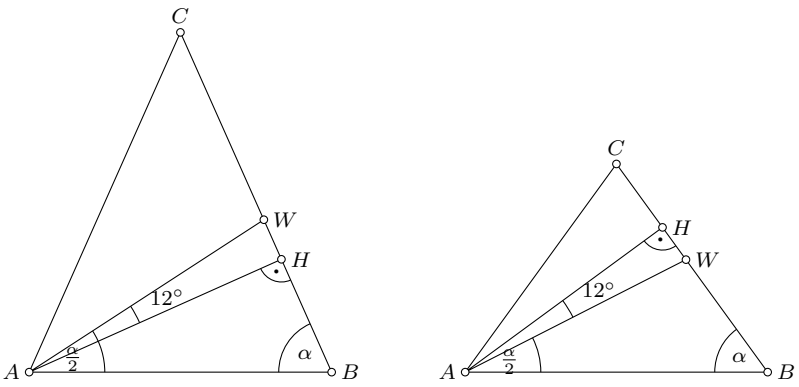
b),c) Gibt es gleichschenklige Dreiecke ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$, bei denen der Winkel $\angle WAH$

b) die Größe 12°,

c) die Größe 60°

hat? Ermittle jeweils alle diejenigen Werte, die als Größe des Basiswinkels $\angle BAC$ in einem derartigen Dreieck möglich sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz gilt (linke Abbildung)

$$2 \cdot \angle BAC + \angle ACB = 180° \qquad \text{also} \qquad \angle BAC = 90° - \frac{1}{2}\angle ACB = 90° - 24° = 66°$$

Da AW den Winkel $\angle BAC$ halbiert, gilt $\angle BAW = 33°$. (1)
Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABH ist

$$\angle BAH = 90° - \angle ABH = 90° - 66° = 24° \tag{2}$$

Der Winkel $\angle ABC$ ist kleiner als 90°, also liegt H auf derselben Seite von AB wie W. Daher folgt aus (1) und (2) $\angle WAH = 33° - 24° = 9°$.

b) Wenn ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC = BC$ und $\angle WAH = 12°$ ist, so folgt:
Da der Basiswinkel $\angle ABC$ kleiner als 90° ist, liegt H auf derselben Seite von AB wie W, also entweder auf der Strecke BW (linke Abbildung) oder auf ihrer Verlängerung über W hinaus (rechte Abbildung). In diesen beiden Fällen folgt mit dem oberen bzw. unteren Vorzeichen

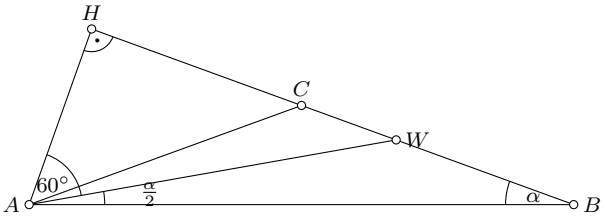
$$\angle BAH = \angle BAW + \angle WAR \quad \text{mit } \alpha = \angle BAC \quad \text{also } \angle BAH = \frac{\alpha}{2} \mp 12° \tag{3}$$

Somit besagt der Innenwinkelsatz für Dreieck ABH

$$\left(\frac{\alpha}{2} \mp 12^\circ\right) + \alpha = 90^\circ \tag{4}$$
$$\frac{3}{2}\alpha = 90^\circ \pm 12^\circ$$
$$\alpha = 60^\circ \pm 8^\circ$$

In der Tat gibt es sowohl für $\alpha = 68^\circ$ als auch für $\alpha = 52^\circ$ gleichschenklige Dreiecke mit α als Basiswinkelgröße (da in beiden Fällen $\alpha < 90^\circ$ ist); für diese Dreiecke gilt (4), also (3) und damit $\angle WAH = 12^\circ$.

c) Die gleiche Schlussweise wie in b) führt auf $\alpha = 60^\circ \pm 40^\circ$.
Von diesen beiden Werten scheidet $\alpha = 100^\circ$ aus, da ein Basiswinkel nicht größer als 90° sein kann. Dagegen gibt es für $\alpha = 20^\circ$ gleichschenklige Dreiecke mit α als Basiswinkelgröße.
Für diese Dreiecke gilt $\angle HAB = 70^\circ$ und $\angle HAW = 60^\circ$.



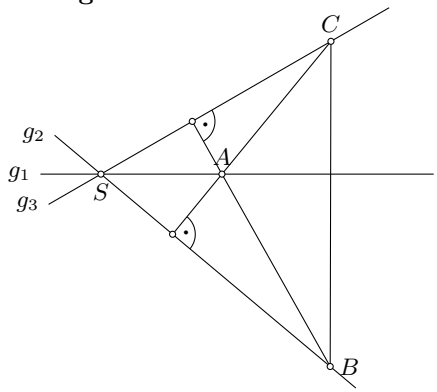
Damit ist gezeigt: Es gibt Dreiecke wie in c) genannt; als Basiswinkelgröße $\alpha = \angle BAC$ solcher Dreiecke ist genau der Wert $\alpha = 20^\circ$ möglich.

III Runden 3 & 4

Aufgabe 020836:
a) Gegeben sind drei Geraden g_1, g_2 und g_3, von denen keine auf einer anderen senkrecht steht. Sie schneiden einander im Punkt S. Auf g_1 liegt ein weiterer Punkt A. Gesucht ist das Dreieck ABC, in dem die Höhen auf den Geraden liegen.

b) Untersuche sämtliche Fälle, bei denen 2 Geraden aufeinander senkrecht stehen und der Punkt A auf einer dieser Geraden oder auf der dritten liegt!

Lösung von Carsten Balleier:



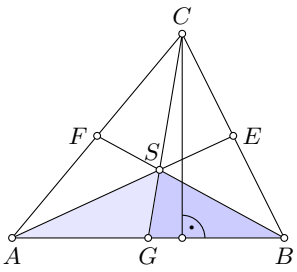
a) Man fällt die Lote von A auf g_2 und g_3. Diese verlängert man, so dass sie g_3 bzw. g_2 schneiden. Diese Schnittpunkte sind die anderen beiden Eckpunkte des Dreiecks.

b) Hier geht man ebenso vor. Falls A auf einer der beiden senkrecht zueinander stehenden Geraden liegt, ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck. Liegt A aber auf der dritten Geraden, entsteht überhaupt kein Dreieck.

Aufgabe 030833:
Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC und seine Seitenhalbierenden! Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden sei S. Er ist gleichzeitig gemeinsamer Eckpunkt für die sechs Dreiecke, in die das Dreieck ABC durch die Seitenhalbierenden zerlegt wird.

Beweise, dass diese sechs Dreiecke sämtlich untereinander flächengleich sind!

Lösung von Carsten Balleier:



Beweis: (Bild) Zuerst wird gezeigt, dass je zwei kleine Dreiecke, die an einer Seite des großen Dreiecks anliegen, den gleichen Flächeninhalt haben.
Dazu betrachte man z. B. AB: Die Dreiecke AGS und GBS (im Bild gekennzeichnet) haben eine Höhe gemeinsam, nämlich das Lot von S auf die Strecke AB. Außerdem gilt $AG = GB$ (nach Konstruktion der Seitenhalbierenden), d. h., dass die zur gemeinsamen Höhe gehörenden Grundseiten gleich lang sind.
Es folgt: $[AGS] = [GBS]$. Gleichermaßen lässt sich $[BES] = [ECS]$ und $[CFS] = [FAS]$ beweisen.
Nun muss gezeigt werden, dass $[GBS] = [BES]$ und die dazu analogen Beziehungen gelten. Dazu kann man wie folgt vorgehen:

Aus der Konstruktion folgt $[ABE] = [AEC]$. Das ist jedoch gleich bedeutend mit

$$[AGS] + [GBS] + [BES] = [FAS] + [CFS] + [ECS]$$

Setzt man das im ersten Teil erhaltene Resultat ein, erhält man $2[AGS] + [BES] = 2[FAS] + [BES]$, womit $[AGS] = [FAS]$ klar wird.

Jetzt kann man aus $[GCA] = [BCG]$ auch $[FAS] = [BES]$ beweisen, so dass tatsächlich alle sechs Dreiecke untereinander flächengleich sind. □

Anmerkung: Der zweite Teil kann auch unter Verwendung der Tatsache, dass S die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2 : 1$ teilt, durchgeführt werden.
Dann bekommt man als Zwischenschritt $[ABS] = 2[BES]$. Umgekehrt ist es möglich, die Gültigkeit der $2 : 1$-Teilung aus der Flächengleichheit herzuleiten.

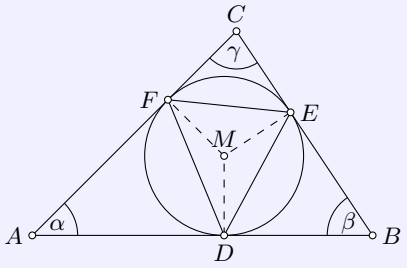
Aufgabe 050832:
Ermittle alle in der Ebene des Dreiecks ABC gelegenen Punkte D, die mit den Eckpunkten A und B des Dreiecks ABC ein Dreieck bilden, dessen Flächeninhalt halb so groß ist wie der des Dreiecks ABC.

Lösung von Eckart Keller:
Die zur Seite AB gehörige Höhe CE des Dreiecks $\triangle ABC$ habe die Länge h_c, die Seite AB habe die Länge c. Dann beträgt der Flächeninhalt F des Dreiecks $\triangle ABC$: $F = \frac{1}{2}c \cdot h_c$.

Da die geforderten Dreiecke in der Seite AB mit dem Dreieck $\triangle ABC$ übereinstimmen, haben sie genau dann einen halb so großen Flächeninhalt, wenn die Länge der zu AB gehörigen Höhe bei diesen Dreiecken $\frac{h_c}{2}$ beträgt.
Das ist offensichtlich für alle Dreiecke $\triangle ABD$ der Fall, bei denen der Punkt D auf einer der beiden zu AB im Abstand $\frac{h_c}{2}$ gezogenen Parallelen liegt, und nur für diese. In jedem anderen Falle ist nämlich der Abstand des Punktes D von der Geraden durch A und B größer oder kleiner als $\frac{h_c}{2}$.

Die gesuchte Menge ist also die Menge aller Punkte der beiden im Abstand $\frac{h_c}{2}$ zu AB gezogenen Parallelen.

Aufgabe 050834:



Der Inkreis k des Dreiecks ABC habe mit den Dreiecksseiten AB, BC und CA die Berührungspunkte D, E und F (siehe Abbildung). Die Winkel des Dreiecks ABC haben die Maße α, β, und γ.

Ermittle die Maße der Winkel $\angle DEF$, $\angle EFD$ und $\angle FDE$ des Dreiecks DEF!

Lösung von Eckart Keller:
Bezeichnet man den Mittelpunkt des Inkreises mit M, dann gilt: $\triangle CFM \cong \triangle CME$, da sie in 2 Seiten und dem rechten Winkel übereinstimmen.

Folglich gilt: $\overline{CF} = \overline{CE}$ und damit $CM \perp EF$, (1)

und wegen (1) und $ME \perp EG$ auch $\angle MEF \cong \angle MFE \cong \angle MCE$. (2)

Entsprechend erhält man $\angle MED \cong \angle MDE \cong \angle MBE$ (3)

und $\angle MDF \cong \angle MFD \cong \angle MAF$. (4)

Das Maß des Winkels $\angle MCE$ ist $\frac{\gamma}{2}$, das des Winkels $\angle MBE$ ist $\frac{\beta}{2}$ und das des Winkels $\angle MAF$ ist $\frac{\alpha}{2}$, da CM bzw. BM bzw. AM die Winkelhalbierenden des Dreiecks $\triangle ABC$ sind. Bezeichnet man das Maß den Winkels $\angle DEF$ mit δ, das des Winkels $\angle EFD$ mit ε und das des Winkels $\angle FDE$ mit η, dann gilt wegen (2) und (3) $\delta = \frac{\gamma+\beta}{2}$, wegen (2) und (4) $\varepsilon = \frac{\gamma+\alpha}{2}$ und wegen (3) und (4) $\eta = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Aufgabe 080831:
Beweise folgenden Satz: Jedes Dreieck $\triangle ABC$ lässt sich in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es genügt zu beweisen, dass in jedem Dreieck wenigstens ein Höhenfußpunkt zwischen den beiden Eckpunkten einer Dreiecksseite liegt. Das trifft auf den Fußpunkt der vom Scheitelpunkt eines größten Dreieckswinkels auf die gegenüberliegende Seite gefällten Höhe zu.

Beweis:

(1) Ein größter Winkel des Dreiecks $\triangle ABC$ liege o.B.d.A bei C.

Der Fußpunkt des von diesem Punkt auf die Gerade g durch A und B gefällten Lotes sei D.

(2) Wir nehmen (o.B.d.A) an, D liege auf g außerhalb der Seite AB auf der anderen Seite von B bezüglich A oder in A.

Dann ist der Winkel $\angle BAC$ als Außenwinkel im Dreieck $\triangle DCA$ oder als rechter Winkel $\angle BDC$ nicht spitz.

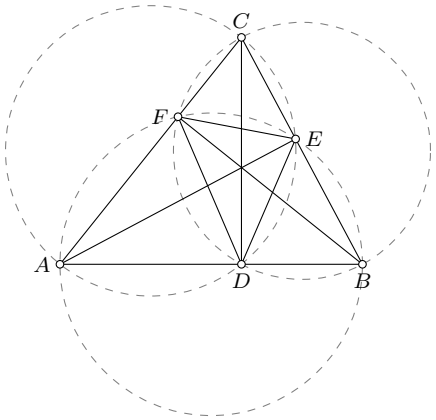
Wegen (1) kann aber keiner dieser Winkel größer als 60° sein. Damit ist ein Widerspruch erreicht. Annahme (2) ist folglich falsch. w. z. b. w.

Aufgabe 100836:
Beweise den folgenden Satz:

Sind D, E, F die Fußpunkte der Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$, dann halbieren die Höhen des Dreiecks $\triangle ABC$ die Innenwinkel des Dreiecks $\angle DEF$!

(Da der Beweis für alle drei Winkel analog verläuft, genügt es, ihn für den Winkel $\angle EFD$ zu führen.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



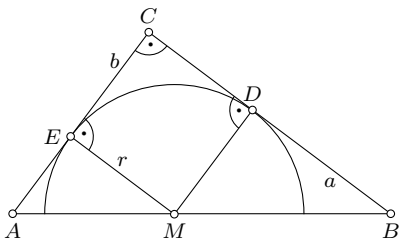
Die Fußpunkte der die Punkte A, B bzw. C enthaltenden Höhen des spitzwinkligen Dreiecks ABC seien mit E, F bzw. D in dieser Reihenfolge bezeichnet.
Jeder der Punkte E, F, D liegt nach der Umkehrung des Lehrsatzes des Thales auf zwei der drei Kreise, die je eine der Dreiecksseiten als Durchmesser haben. Sie sind innere Punkte der Strecken BC, AC bzw. AB, da $\triangle ABC$ spitzwinklig ist. Der Strahl FB verläuft folglich im Innern des Winkels $\angle EFD$.

Nun gilt $\angle AEB \cong \angle BDC$ (rechte Winkel), $\angle ABE \cong \angle DBC$ und mithin wegen des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck $\angle BAE \cong \angle BCD$. (1)
Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt:
$\angle BAE \cong \angle BFE$ (Bogen $\overset{\frown}{BE}$) sowie $\angle BCD \cong \angle BFC$ (Bogen $\overset{\frown}{BD}$). Hieraus sowie aus (1) folgt $\angle BFE \cong \angle BFD$, d. h. BF halbiert $\angle EFD$.

Aufgabe 130835:
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ und $\overline{\angle ACB} = 90°$. Ein Halbkreis über einer Teilstrecke von AB sei so gelegen, dass die Seiten BC und AC auf Tangenten an diesem Halbkreis liegen und dieser BC und AC berührt.

Beweise, dass für seinen Radius r dann $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Mittelpunkt des Halbkreises sei M, die Seite BC berühre den Halbkreis in D, die Seite AC berühre ihn in E. Dann gilt:

$MD = r$ und $MD \parallel AC$ (rechte Winkel bei D bzw. C) und $ME = r$ und $ME \parallel BC$ (rechte Winkel bei E bzw. C). Folglich ist $MDCE$ ein Quadrat mit der Seitenlänge r. Nach dem Strahlensatz gilt nun:

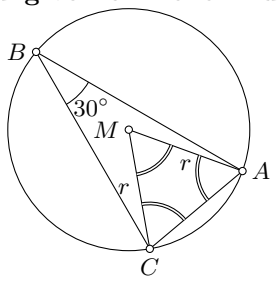
$$\frac{a}{r} = \frac{b}{b-r} \qquad \text{also} \qquad ab = br + ar$$

Daraus erhält man durch Division mit abr: $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, w. z. b. w.

Aufgabe 170831:
Es ist zu beweisen:

Wenn der Winkel $\angle CBA$ eines Dreiecks ABC die Größe 30° hat, dann hat die Seite AC des Dreiecks ABC die gleiche Länge wie der Radius des Umkreises k dieses Dreiecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei M der Mittelpunkt und r der Radius von k.
Der Winkel $\angle AMC$ hat nach dem Satz über Zentri- und Peripheriewinkel die Größe 60°. Hieraus, und da das Dreieck AMC wegen $AM = MC = r$ gleichschenklig ist, folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck $\angle MCA = \angle MAC = 60°$, d. h., das Dreieck AMC ist gleichseitig, und es ist $AC = CM = MA = r$, w. z. b. w.

Aufgabe 180831:
Im Inneren eines spitzwinkligen Dreiecks ABC, dessen Innenwinkel die Größen α, β, γ haben, sei ein Punkt P so gelegen, dass $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ gilt. Die Größen der Winkel $\angle PAB$, $\angle PAB$ bzw. $\angle PAC$ seien mit δ, ε bzw. η bezeichnet.

a) Berechne δ, ε und η für den Fall, dass $\alpha = 70°$ und $\beta = 80°$ gilt!

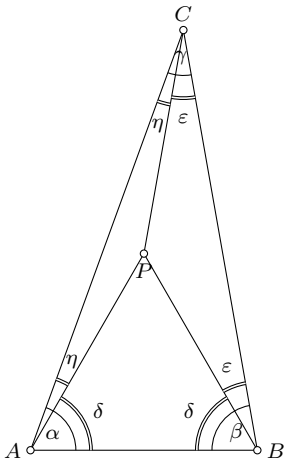
b) Ermittle eine Formel für δ in Abhängigkeit von α, β und γ, ebenso eine Formel für ε und eine Formel für η!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Nach dem Satz über die Innenwinkelsumme, angewandt auf das Dreieck ABC, gilt $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 30°$. Folglich gilt

$$\delta = \frac{1}{2}(70° + 80° - 30°) = 60° \qquad ; \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}(80° + 30° - 70°) = 20°$$

$$\eta = \frac{1}{2}(30° + 70° - 80°) = 10°$$



b) Da die Dreiecke ABP, BCP und CAP nach Voraussetzung gleichschenklig sind, gilt laut Basiswinkelsatz

$$\angle PBA = \angle PAB = \delta \qquad , \qquad \angle PCB = \angle PBC = \varepsilon$$

$$\angle PAC = \angle PCA = \eta$$

Da P im Inneren des Dreiecks liegt, folgt hieraus

$$\alpha = \delta + \eta \qquad , \qquad \beta = \delta + \varepsilon \qquad , \qquad \gamma = \varepsilon + \eta$$

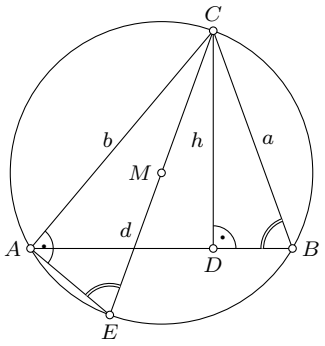
also $\alpha + \beta - \gamma = 2\delta$,

$$\delta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) \qquad , \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha) \qquad , \qquad \eta = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha - \beta)$$

Aufgabe 180836:
Es sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck, d die Länge des Durchmessers seines Umkreises, a bzw. b die Längen der Seiten BC bzw. AC und schließlich h die Länge der auf AB senkrecht stehenden Höhe.

Beweise, dass dann stets $d = \frac{a \cdot b}{h}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei M der Mittelpunkt des Umkreises, D der Fußpunkt der auf AB senkrecht stehenden Höhe und E der Schnittpunkt der Verlängerung von CM über M hinaus mit dem Kreis k.



Da $\triangle ABC$ spitzwinklig ist, liegt D zwischen A und B, und E ist von A und B verschieden. Die Dreiecke CBD und CEA sind einander ähnlich, da sie in den rechten Winkeln $\angle CDB$ und $\angle CAE$ (Satz des Thales) sowie in den Winkeln $\angle ABC$ und $\angle CEA$ (Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen) übereinstimmen.

Ähnliche Dreiecke stimmen in den Verhältnissen gleichliegender Seiten überein, deshalb ist $d : a = b : h$, also $d = \frac{a \cdot b}{h}$.

Aufgabe 200835:
Zwei Strahlen s_1 und s_2, die von einem Punkt S ausgehen und miteinander einen rechten Winkel bilden, mögen von zwei zueinander parallelen Geraden g und h geschnitten werden. Die Gerade g schneide s_1 in A und s_2 in C, die Gerade h schneide s_1 in B und s_2 in D. Ferner gelte $\overline{SB} = 5$ cm, und der Flächeninhalt des Dreiecks SAC betrage genau 36% des Flächeninhalts des Dreiecks SBD.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Länge der Strecke SA!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Flächeninhalt des Dreiecks SBD beträgt $\frac{SB \cdot SD}{2} = \frac{5\text{cm} \cdot SD}{2}$.
Der Flächeninhalt des Dreiecks SAC beträgt $\frac{SA \cdot SC}{2}$.

Nach Voraussetzung sind das 36 % des Flächeninhalts des Dreiecks SBD. Daher gilt

$$SA \cdot SC = \frac{36}{100} \cdot SD \cdot 5\text{cm} \tag{1}$$

Nun gilt nach einem Teil des Strahlensatzes $SC : SD = SA : 5$ cm, also

$$SC = \frac{SA \cdot SD}{5\text{cm}} \tag{2}$$

Setzt man SC aus (2) in (1) ein, so erhält man

$$\frac{SA^2 \cdot SD}{5\text{cm}} = \frac{36}{100} \cdot SD \cdot 5\text{cm}$$

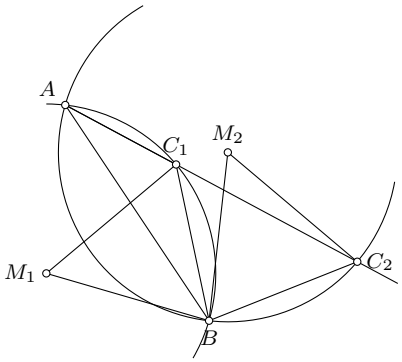
und daraus $SA^2 = 9\ \text{cm}^2$ und mithin $SA = 3$ cm.

Aufgabe 200836:
Von zwei Dreiecken ABC_1 und ABC_2 werden die folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) vorausgesetzt:

$$(1)\quad \overline{\angle C_1AB} = \overline{\angle C_2AB} \quad ; \quad (2)\quad \overline{BC_1} = \overline{BC_2} \quad ; \quad (3)\quad \overline{AC_1} < \overline{AC_2}$$

Beweise aus dieser Voraussetzung, dass die Umkreise der Dreiecke ABC_1 und ABC_2 gleiche Radien haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC_1 sei M_1, der des Dreiecks ABC_2 sei M_2. Die Winkel $\angle C_1AB$ und $\angle C_2AB$ sind jeweils Peripheriewinkel in den Umkreisen.



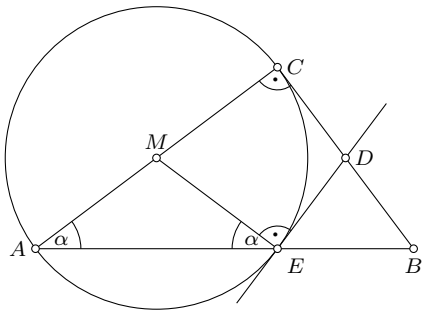
Wegen (1) sind sie gleichgroß; die zugehörigen Zentriwinkel $\angle C_1M_1E$ und $\angle C_2M_2B$ sind daher nach dem Satz über Zentri- und Peripheriewinkel ebenfalls gleichgroß.

Da die Dreiecke C_1M_1D und C_2M_2B beide gleichschenklig sind, in der Größe des Winkels an der Spitze und damit auch in der Größe ihrer Basiswinkel übereinstimmen, sind sie wegen (2) nach dem Kongruenzsatz wsw kongruent.
Folglich gilt $M_1B = M_2B$, d. h. die Radien der beiden Umkreise sind einander gleich, w. z. b. w.

Aufgabe 210832:
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Der Mittelpunkt der Seite AC sei M. Der Kreis k um M durch A schneide die Seite AB außer in A auch in E. Die Tangente an k in E schneide die Seite BC in D.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen das Dreieck BDE gleichschenklig ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Größe des Winkels $\angle CAB$ sei mit α bezeichnet. Das Dreieck AEM ist wegen $AM = EM$ gleichschenklig, und es gilt $\angle AEM = \alpha$. Der Winkel $\angle MED$ ist ein rechter Winkel, da die Tangente stets senkrecht auf dem Berührungsradius steht. Mithin ist

$$\angle DEB = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$$

Im Dreieck ABC ist wegen des Winkelsummensatzes $\angle ABC = 90° - \alpha$. Da also $\angle ABC = \angle DEB$ ist, und beide Winkel Innenwinkel des Dreiecks EBD sind, ist dieses gleichschenklig, w. z. b. w.

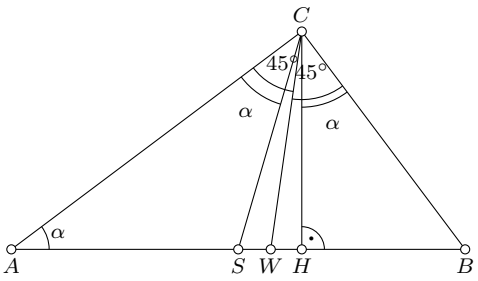
Alternativ-Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

Aus $ME = MC$ und $\angle MCD = \angle MED = 90°$ folgt: $MECD$ ist ein Drachenviereck, also gilt $ED = DC$ sowie $CE \perp MD$.
Da nach dem Satz von Thales, angewandt auf das Dreieck AEC, auch $CE \perp AE$ gilt, folgt $MD \parallel AB$. Hieraus und aus $AM = MC$ erhält man nach dem Strahlensatz $BD = DC$. Damit ist $ED = BD$ gezeigt.

Aufgabe 240834:
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. In diesem Dreieck sei CS die Seitenhalbierende von AB, CW die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ und CH die Höhe auf AB.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{\angle SCW} = \overline{\angle WCH}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei o. B. d. A. $BC \leq AC$, also $\alpha = \angle BAC \leq \angle ABC = 90° - \alpha$ (Winkelsumme im Dreieck ABC) und daher $\alpha \leq 45°$.
Dann ist $\angle BCH = 90° - \angle ABC$ (Winkelsumme im Dreieck BCH), also $\angle BCH = \alpha$.



Ferner liegt C nach der Umkehrung des Thalessatzes auf dem Kreis mit AB als Durchmesser. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist S; daher gilt $AS = CS$ und folglich $\angle ACS = \angle CAS = \alpha$ (Basiswinkel im Dreieck ACS).

Weiterhin ist $\angle ACW = \angle BCW = 45°$, da CW Winkelhalbierende von $\angle ACB$ ist. Aus den somit gezeigten Beziehungen

$$\angle ACS = \alpha \leq 45° = \angle ACW$$

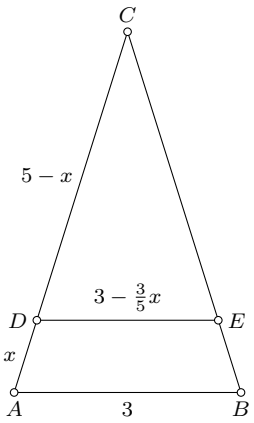
$$\angle BCH = \alpha \leq 45° = \angle BCW$$

folgt $\angle SCW = 45° - \alpha = \angle HCW$, w. z. b. w.

Aufgabe 240835:
Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB; deren Länge sei 3 cm, der Umfang des Dreiecks betrage 13 cm. Eine Parallele zu AB schneide die Strecke AC in einem Punkt D zwischen A und C sowie die Strecke BC in einem Punkt E. Der Umfang des Vierecks $ABED$ betrage 7,4 cm.

Beweise, dass durch diese Voraussetzungen die Länge der Strecke AD eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Länge!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung gilt $AC = BC$ und $AC + BC + AB = 13$ cm sowie $AB = 3$ cm. Hieraus folgt $2 \cdot AC + 3$ cm $= 13$ cm, also $AC = 5$ cm.

Wegen $AC = BC$ gilt $\angle CAB = \angle CBA$. Da nach Voraussetzung $DE \parallel AB$ gilt (und D auf AC sowie E auf BC liegt), ist $ABED$ ein gleichschenkliges Trapez.
Hieraus folgt: Ist $AD = x$ cm die gesuchte Länge, so ist auch $BE = AD = x$ cm, und es gilt $CD = (5 - x)$ cm.

Wegen $DE \parallel AB$ folgt nach dem Strahlensatz $DE : AB = CD : CA$. Hieraus erhält man

$$DE = \frac{3(5-x)}{5}\text{cm} = \left(3 - \frac{3}{5}x\right)\text{cm}$$

Nach Voraussetzung gilt ferner $AB + BE + DE + AD = 7{,}4$ cm, also

$$3 + x + \left(3 - \frac{3}{5}x\right) + x = 7{,}4 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1$$

Damit ist gezeigt, dass durch die Voraussetzungen die Länge der Strecke AD eindeutig bestimmt ist; sie beträgt $AD = 1$ cm.

Aufgabe 260835:
Beweise folgende Sätze:

I) Wenn ABC ein Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist, dann ist die Seitenhalbierende von AB zugleich auch Winkelhalbierende von $\angle ACB$.

II) Wenn in einem Dreieck ABC die Seitenhalbierende von AB zugleich auch Winkelhalbierende von $\angle ACB$ ist dann gilt $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

(I) Wenn $\overline{AC} = \overline{BC}$ (1) gilt und CD die Seitenhalbierende von AB ist, d. h. D (auf AB liegt und) $\overline{AD} = \overline{BD}$ (2) erfüllt, so folgt aus (1), (2) und $\overline{CD} = \overline{DC}$ (3) nach dem Kongruenzsatz sss, dass $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ und damit $\overline{\angle ACD} = \overline{\angle BCD}$ gilt. Also ist CD auch die Winkelhalbierende von $\angle ACB$, w. z. b. w.

(Man kann auch CD als Winkelhalbierende voraussetzen und dann aus $\overline{\angle ACD} = \overline{\angle BCD}$, (1), (3) mit dem Kongruenzsatz sws auf (2) schließen.)

(II) In einem Dreieck ABC sei die Strecke CD (mit D auf AB) sowohl Seitenhalbierende als auch Winkelhalbierende; d. h. es werde $\overline{AD} = \overline{BD}$ (4) und $\overline{\angle ACD} = \overline{\angle BCD}$ (5) vorausgesetzt.

Es sei E derjenige Punkt, für den D der Mittelpunkt von CE ist. Dann halbieren in dem Viereck $AEBC$ die Diagonalen einander gegenseitig, also ist es ein Parallelogramm.

Daher gilt $\overline{AC} = \overline{BE}$ (6) und $\overline{\angle ACD} = \overline{\angle BED}$ (7) (Wechselwinkel an den geschnittenen Parallelen AC, BE).

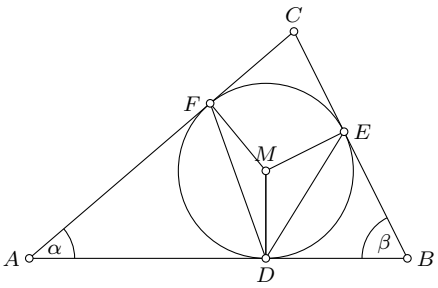
Aus (5) und (7) folgt $\overline{\angle BCD} = \overline{\angle BED}$ und daraus nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes $\overline{BC} = \overline{BE}$ (8). Aus (6) und (8) folgt $\overline{AC} = \overline{BC}$, w. z. b. w.

Aufgabe 280835:
Es sei ABC ein Dreieck, α sei die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die Größe des Winkels $\angle ABC$. Der Inkreis des Dreiecks berühre die Seite AB in D, die Seite BC in E und die Seite AC in F.

Ermittle die Größe des Winkels $\angle FDE$ in Abhängigkeit von α und β!

Hinweis: Der Inkreis eines Dreiecks ist derjenige Kreis, der alle drei Seiten des Dreiecks von innen berührt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Bezeichnet man den Mittelpunkt des Inkreises mit M, so sind DM und FM Radien. Die Geraden durch A und B bzw. durch A und C sind Tangenten an den Inkreis. Da Tangente und Berührungsradius aufeinander senkrecht stehen, gilt

$$\angle ADM = \angle AFM = 90^\circ \tag{1}$$

Nach dem Satz über die Summe der Innenwinkelgrößen im Viereck gilt für das Viereck $ADMF$:

$$\angle BAC + \angle ADM + \angle DMF + \angle AFM = 360^\circ$$

Unter Verwendung von (1) und nach Definition von α folgt daraus

$$\angle DMF = 180^\circ - \alpha \tag{2}$$

Durch analoge Oberlegungen im Viereck $DBEM$ erhält man

$$\angle DME = 180^\circ - \beta \tag{3}$$

Für die Größe des gesuchten Winkels $\angle FED$ gilt

$$\angle FDE = \angle MDF + \angle MDE \tag{4}$$

Der Winkel $\angle MDF$ ist Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks DMF; wegen (2) gilt somit

$$\angle MDF = \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

Analog folgt aus (3): $\angle MDE = \frac{\beta}{2}$. Somit erhält man aus (4): $\angle FDE = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

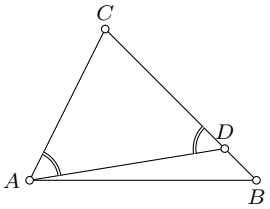
Aufgabe 300835:

a) Beweise den folgenden Satz:

In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten stets auch der größere Winkel gegenüber.

b) Gib an, ob die Umkehrung dieses Satzes gilt, und beweise die Richtigkeit deiner Angabe!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) In einem Dreieck ABC sei $BC > AC$ vorausgesetzt.
Dann gibt es zwischen B und C einen Punkt D mit $AC = DC$ (siehe Abbildung). Für ihn, gilt



$$\angle CAB > \angle CAD \tag{1}$$

Ferner folgt nach dem Basiswinkelsatz

$$\angle CAD = \angle ADC \tag{2}$$

und nach dem Außenwinkelsatz

$$\angle ADC = \angle ABC + \angle BAD > \angle ABC \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt $\angle CAB > \angle ABC$, w. z. b. w.

(b) Die Umkehrung lautet: In jedem Dreieck liegt dem größeren von zwei Winkeln stets auch die größere Seite gegenüber.

Auch diese Umkehrung gilt. Beweis:
In einem Dreieck ABC sei

$$\angle CAB > \angle ABC \tag{4}$$

vorausgesetzt. Wäre dann $BC = AC$, so folgte nach dem Basiswinkelsatz $\angle CAB = \angle ABC$; wäre $BC < AC$, so folgte nach dem unter (a) bewiesenen Satz $\angle CAB < \angle ABC$; beides im Widerspruch zu (4). Damit ist bewiesen, dass aus (4) stets $BC > AC$ folgt.

Aufgabe 310836:
Von einem Dreieck ABC sind gegeben:

Die Seitenlänge $a = \overline{BC} = 845$ cm die Länge $h_a = \overline{AE} = 840$ cm der auf BC senkrechten Höhe und die Länge $h_c = \overline{CD} = 780$ cm der auf AB senkrechten Höhe.

Berechne für jedes Dreieck ABC, bei dem diese Längen auftreten, die Seitenlängen $c = \overline{AB}$ und $b = \overline{AC}$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt $a \cdot h_a = c \cdot h_c$; dies folgt aus den Gleichungen des Flächeninhalts von ABC ist (oder auch aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BCD, BAE). Somit ergibt sich

$$c = \frac{a \cdot h_a}{h_c} = 910 \text{ cm}$$

Wegen $\angle BDC = 90°$ folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$BD = \sqrt{a^2 - h_c^2} = 325 \text{ cm}$$

Je nachdem, ob D zwischen $A = A_1$ und B liegt oder B zwischen $A = A_2$ und D, erhält man weiter

$$A_1D = c - BD = 585 \text{ cm} \qquad \text{bzw.} \qquad A_2D = c + BD = 1235 \text{ cm}$$

Als gesuchte Seitenlänge b erhält man damit im 1.Fall

$$b_1 = A_1C = \sqrt{A_1D^2 + h_c^2} = 975 \text{ cm}$$

und im 2. Fall

$$b_2 = A_2C = \sqrt{A_2D^2 + h_c^2} = 1460{,}69 \text{ cm}$$

Aufgabe 320833:
Beweise die beiden folgenden Aussagen (a) und (b) für jedes spitzwinkliges Dreieck ABC mit einem im Innern des Dreiecks gelegenen Punkt P! Dabei seien folgende Bezeichnungen verwendet:

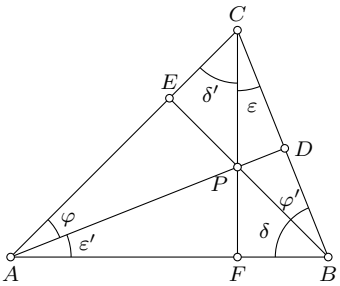
Winkel	Größe
$\angle PBA$	δ
$\angle PCA$	δ'

Winkel	Größe
$\angle PCB$	ε
$\angle PAB$	ε'

Winkel	Größe
$\angle PAC$	φ
$\angle PBC$	φ'

a) Wenn $\delta = \delta$ und $\varepsilon = \varepsilon'$ und $\varphi = \varphi'$ gelten, dann ist P der Höhenschnittpunkt des Dreieck ABC.
b) Wenn P der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist dann gelten die Gleichungen $\delta = \delta'$ und $\varepsilon = \varepsilon'$ und $\varphi = \varphi'$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Verlängerung von AP schneide BC in D, die Verlängerung von BP schneide CA in E, die Verlängerung von CP schneide AB in F (siehe Abbildung).

(a) Aus dem Außenwinkelsatz, angewandt auf die Dreiecke BFC und AFC, sowie aus den vorausgesetzten Gleichungen folgt

$$\angle AFC = \delta + \varphi' + \varepsilon = \delta' + \varphi + \varepsilon' = \angle BFC$$

Ferner gilt, da $\angle AFC$, $\angle BFC$ Nebenwinkel voneinander sind, $\angle AFC + \angle BFC = 180°$; daher folgt $\angle AFC = \angle BFC = 90°$, also ist CF im Dreieck ABC die zu AB senkrechte Höhe. Entsprechend folgt, dass AD und BE die anderen Höhen sind und damit P der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist.

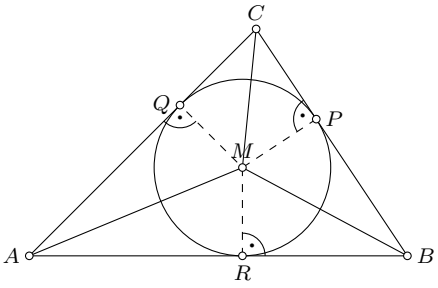
(b) Die Dreiecke ABE und ACF stimmen in ihrem Innenwinkel bei A überein, ferner ist nach Voraussetzung $\angle AEB = \angle AFC = 90°$. Daher folgt nach dem Innenwinkelsatz: Es gilt auch $\delta = \delta'$.
Entsprechend folgen die anderen behaupteten Gleichungen.

Aufgabe 320835:
Beweise, dass für jedes Dreieck ABC die folgende Aussage gilt!

Das Verhältnis des Flächeninhalts des Dreiecks ABC zum Flächeninhalt seines Inkreises ist gleich dem Verhältnis des Umfangs des Dreiecks ABC zum Umfang seines Inkreises.

Hinweis: Als Inkreis eines Dreiecks bezeichnet man denjenigen Kreis, der alle drei Seiten dieses Dreiecks von Innen berührt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Seitenlängen des Dreiecks seien mit $a = BC$, $b = CA$ und $c = AB$ bezeichnet, der Inkreis habe den Mittelpunkt M, er berühre die Seiten BC, CA, AB in P, Q bzw. R (siehe Abbildung).

Der Radius des Inkreises ist dann $r = MP = MQ = MR$, ferner gilt $MP \perp BC$, $MQ \perp CA$, $MR \perp AB$. Daher haben die Dreiecke BCM, CAM, ABM die Flächeninhalte

$$F_1 = \frac{1}{2}ar, \qquad F_2 = \frac{1}{2}br, \qquad F_3 = \frac{1}{2}cr$$

Da M im Innern des Dreiecks ABC liegt, hat dieses somit den Flächeninhalt

$$F_D = F_1 + F_2 + F_3 = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

der Inkreis hat den Flächeninhalt $F_K = \pi r^2$. Diese Flächeninhalte bilden also das Verhältnis

$$F_D : F_K = (a+b+c) : (2\pi r)$$

Damit ist die zu beweisende Aussage gezeigt; denn $a+b+c$ ist der Umfang des Dreiecks, und $2\pi r$ ist der Umfang des Inkreises.

Aufgabe 330833:
Zu jedem Dreieck ABC seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

Die Gerade durch A und B sei u,
die Gerade durch B und C sei v,
die Gerade durch C und A sei w,
bei der Spiegelung an v gehe u in die Gerade p über, bei der Spiegelung an w gehe u in die Gerade q über.

Wie üblich seien die Größen der Innenwinkel $\angle BAC$ und $\angle ABC$ mit α bzw. β bezeichnet. Für die folgenden Aufgaben werde stets $\alpha = 55°$ vorausgesetzt.

a) Unter welchem Winkel schneiden die Geraden p und q einander, wenn $\beta = 75°$ ist?

b) Wie groß muss β sein, damit p und q aufeinander senkrecht stehen?

c) Gib einen Wert β so an, dass sich p und q als zueinander parallel nachweisen lassen!

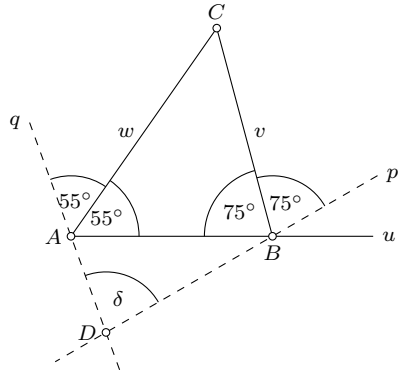
d),e) Stelle eine Zeichnung her, in der p und q einander in einem Punkt schneiden, der auf der selben Seite der Geraden u liegt wie C; wähle dabei das Dreieck ABC

d) mit spitzen Innenwinkel bei B.

e) mit stumpfen Innenwinkel bei B.

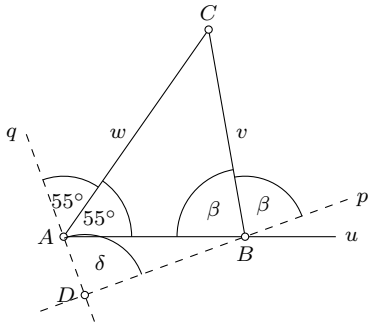
(Zu d) und e) wird keine Begründung verlangt.)

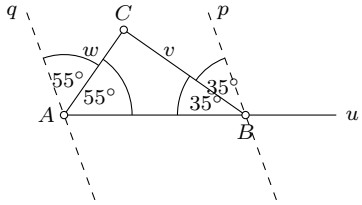
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



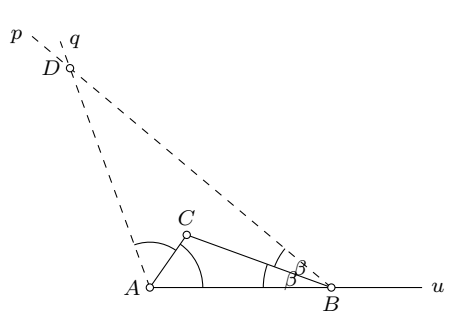
a) Man erhält p, indem man an die Strecke BC im Punkt B nach derjenigen Seite, auf der A nicht liegt, nochmals den Winkel der Größe $\beta = 75°$ anträgt.
Entsprechend erhält man q durch nochmaliges Antragen von 55° an AC (siehe Abbildung).
Für den Schnittpunkt D von p und q gilt damit $\angle ABD = 180° - 2 \cdot 75° = 30°$ und $\angle BAD = 180° - 2 \cdot 55° = 70°$.
Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ABD folgt: p und q schneiden sich unter einem Winkel der Größe $\delta = \angle ADB = 180° - 30° - 70° = 80°$.

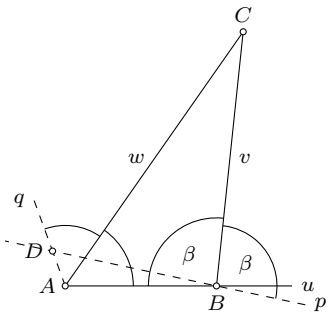
b) Wie in a) ergibt sich $\angle ABD = 180° - 2\beta$, $\angle BAD = 70°$, also $\delta = 180° - (180° - 2\beta) - 70°$ (siehe 2. Abbildung).
Da nun $\delta = 90°$ gefordert wird, folgt $2\beta = 90° + 70°$, also $\beta = 80°$.





c) Für $\beta = 35°$ bilden p und q jeweils nach der Seite hin, auf der C liegt, mit u Winkel der Größe $2 \cdot 35°$ bzw. $2 \cdot 55°$ (siehe 3. Abbildung). Da diese sich zu 180° ergänzen, sind p und q für den genannten Wert $\beta = 35°$ als zueinander parallel nachgewiesen.
d),e) Die Abbildungen zeigen je eine Zeichnung der verlangten Art.





Aufgabe 330836:

a) Berechne die Seitenlänge $b = \overline{AC}$ eines Dreiecks ABC, von dem die Seitenlänge $c = \overline{AB} = 6$ cm, die Länge $h_c = \overline{CH_c} = 5$ cm der auf AB senkrechten Höhe und die Länge $h_b = \overline{BH_b} = 2$ cm der auf AC senkrechten Höhe gegeben sind!

b) Beweise, dass es kein Dreieck ABC gibt, in dem die drei Höhenlängen $h_a = 4$ cm (Länge der auf BC senkrechten Höhe), $h_b = 2$ cm und $h_c = 5$ cm vorkommen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Für den Flächeninhalt F des Dreiecks ABC gilt

$$F = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c \qquad \text{also} \qquad b = \frac{c \cdot h_c}{h_b} = 15 \text{ cm}$$

b) Angenommen, es gäbe ein solches Dreieck. Für seinen Flächeninhalt F müsste dann

$$F = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c \qquad \text{also}$$

$$a = \frac{2F}{4 \text{ cm}} \qquad ; \qquad b = \frac{2F}{2 \text{ cm}} \qquad ; \qquad c = \frac{2F}{5 \text{ cm}}$$

gelten. Daraus folgte

$$a + c = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\frac{2F}{1 \text{ cm}} = \frac{9}{20} \cdot \frac{2F}{1 \text{ cm}} < \frac{2F}{2 \text{ cm}} = b$$

im Widerspruch zur Dreiecksungleichung. Damit ist die eingangs gemachte Annahme als falsch nachgewiesen.

Aufgabe 330845:
Für jedes rechtwinklige Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C bezeichne D den Schnittpunkt von AB mit der Winkelhalbierenden durch C. Der Abstand, den der Punkt D von einer der beiden Katheten hat, werde mit t bezeichnet. Die Längen der Katheten seien a und b.

Beweise, dass für jedes rechtwinklige Dreieck mit diesen Bezeichnungen die Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jedes rechtwinklige Dreieck gilt mit den eingeführten Bezeichnungen:
Jeder Punkt der Winkelhalbierenden des rechten Winkels, also auch der Punkt D, hat gleichgroße Abstände zu den beiden Katheten. Daher haben die beiden Dreiecke BCD und ACD die Flächeninhalt $\frac{1}{2}a \cdot t$ bzw. $\frac{1}{2}b \cdot t$.

Aus diesen beiden Dreiecken ist das Dreieck ABC zusammengesetzt. Da es rechtwinklig ist, also die Höhe auf einer Kathete die andere Kathete ist, ist sein Flächeninhalt $\frac{1}{2}a \cdot b$. Daher gilt $a \cdot t + b \cdot t = a \cdot b$; Division durch $a \cdot b \cdot t$ ergibt, wie behauptet

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t}$$

Aufgabe 340836:

a) Beweise, dass für jedes Dreieck die folgende Aussage gilt!

Sind a und b zwei seiner Seitenlängen, so ist sein Flächeninhalt nicht größer als $\frac{a \cdot b}{2}$.

b) Beweise, dass für jedes Viereck $ABCD$ die folgende Aussage gilt!

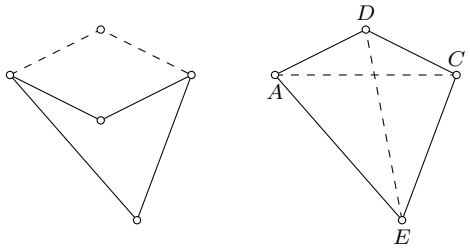
Sind $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ und $d = \overline{DA}$ seine Seitenlängen, so ist sein Flächeninhalt nicht größer als

$$\frac{(a+c) \cdot (b+d)}{4}.$$

Hinweis: Beachte, dass die zu beweisenden Aussagen sich auch auf stumpfwinklige Dreiecke und auch auf Vierecke mit einer einspringenden Ecke beziehen! (Sogenannte „überschlagene“ Vierecke, bei denen zwei Gegenseiten einander schneiden, sollen allerdings nicht zugelassen werden.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Es sei ABC ein beliebiges Dreieck; die auf BC senkrechte Höhe habe den Fußpunkt D. Für $a = BC$, $b = AC$, $h = AD$ und den Flächeninhalt F des Dreiecks ABC gilt dann:
Ist $D = C$, so ist $h = b$; ist aber $D \neq C$ so ist ACD ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei D, also gilt dann $h < b$ (siehe Abbildung).
Damit folgt in jedem Fall $F = \frac{a \cdot h}{2} \leq \frac{a \cdot b}{2}$, w. z. b. w.

(b) Zu jedem Viereck mit einer einspringenden Ecke gibt es ein Viereck ohne einspringende Ecken, das dieselben Seitenlängen wie das ursprüngliche Viereck hat (siehe Abbildung); es hat größeren Flächeninhalt als das ursprüngliche.



Daher genügt es, zum Beweis ein Viereck $ABCD$ ohne einspringende Ecken vorauszusetzen. Für den Flächeninhalt F des Vierecks $ABCD$ und die Flächeninhalte F_1, F_2, F_3, F_4 der Dreiecke ABC, BCD, CDA, DAB gilt $F = F_1 + F_3 = F_2 + F_4$ sowie nach (a)

$$F_1 \leq \frac{ab}{2} \quad , \quad F_2 \leq \frac{bc}{2} \quad , \quad F_3 \leq \frac{cd}{2} \quad , \quad F_4 \leq \frac{da}{2}$$

Daraus folgt

$$2F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \geq \frac{ab}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{cd}{2} + \frac{da}{2}$$

also

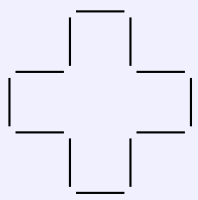
$$F \leq \frac{(a+c)(b+d)}{4}$$

w. z. b. w.

IV.II Vier-, Vielecke

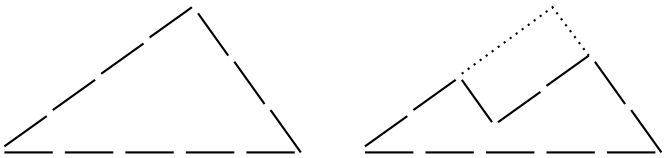
I Runde 1

Aufgabe V00807:



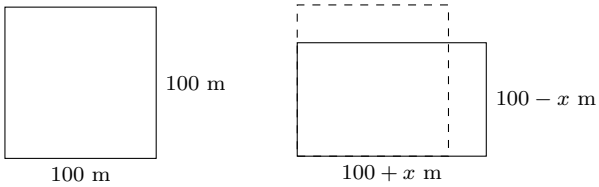
Zwölf Streichhölzchen, in der abgebildeten Form aufgelegt, schließen eine Fläche von fünf Quadraten ein, deren Seitenkante einer Streichholzlänge entspricht.
Die Streichhölzer sind so umzulegen, dass eine Fläche entsteht, die nur vier Quadraten mit gleicher Kantenlänge entspricht!
(Streichhölzer innerhalb der verlangten neuen Figur dürfen nicht gelegt werden!)

Lösung von Steffen Polster:
Legt man die Streichhölzer wie im linken Bild um, so entsteht ein Dreieck mit der Fläche $F = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ Einheiten. Verschiebt man 3 Streichhölzer wie im rechten Bild, ergibt sich $F = 6 - 2 = 4$ Einheiten, d. h. die gesuchte Figur.



Aufgabe V00809:
Für die Einzäunung eines Stückes Weideland, das Rechteckform erhalten soll, stehen der LPG Neues Leben 400 m Weidezaun zur Verfügung.
Auf einer Arbeitsbesprechung wird der Vorschlag gemacht, die Seiten des Rechtecks von möglichst gleicher Länge zu wählen, da das Quadrat von allen Rechtecken mit gleichem Umfang den größten Flächeninhalt hat.
Versuche, diese Behauptung zu beweisen! Wie steht es mit dem Flächeninhalt, wenn die Weide kreisförmig angelegt werden würde?

Lösung von Steffen Polster:



Wird mit den 400 m Zaun ein Quadrat abgegrenzt, so hat jede Quadratseite die Länge 100 m und damit das Quadrat den Flächeninhalt $F_Q = 100^2 = 10000$ m^2.

Um ein Rechteck zu umzäunen, das kein Quadrat ist, müssen zwei Seiten des Quadrates um x verlängert und zwei Seiten um x verkürzt werden. (rechte Abbildung)

Der Flächeninhalt des Rechtecks ist damit $F_R = (100 - x) \cdot (100 + x) = 10000 - x^2$ m^2. Für jedes $x > 0$ ist dieser Wert aber kleiner, d. h. $F_R < F_Q$, was zu zeigen war.

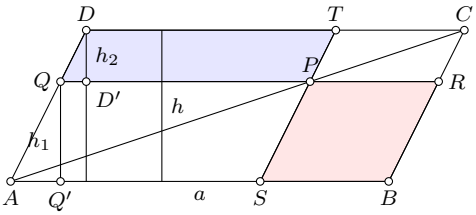
Wird ein Kreis umzäunt, so ergibt sich bei 400 m Umfang ein Radius $r = \frac{400m}{2\pi}$ und somit eine Fläche von $F_K = \pi \left(\frac{400m}{2\pi}\right)^2 \approx 12700$ m^2. Damit ist der Inhalt einer Kreisfläche größer als der Inhalt eines Quadrates mit dem gleichen Umfang.

Aufgabe V00811:
Zeichne ein Parallelogramm und in ihm eine Diagonale.
Wähle auf der Diagonalen einen beliebigen Punkt und ziehe durch ihn die Parallelen zu den Parallelogrammseiten. Dadurch entstehen vier kleine Parallelogramme.
Vergleiche die Flächen der beiden Parallelogramme, die nicht von der Diagonale geschnitten werden und beweise das Ergebnis des Vergleichs!

Lösung von Steffen Polster:
Das Parallelogramm $ABCD$ habe die Grundseite a und die Höhe h. Das blaue und das rote Parallelogramm sind zu vergleichen.
Wenn P die Diagonale AB im Verhältnis x teilt, d. h.

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}} = x$$

so ist die Strecke nach Strahlensatz $\overline{QP} = x \cdot \overline{AB} = x \cdot a$.
Daraus folgt für $\overline{PR} = \overline{SB} = (1-x) \cdot a$.



Ebenso nach Strahlensatz folgt für die Höhen $h_1 = x \cdot h$ und $h_2 = (1-x) \cdot h$. Für die Flächen der zwei Teilparallelogramme wird

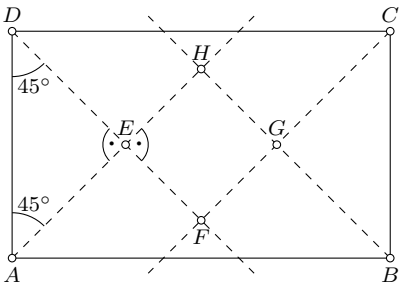
$$F_{SBRP} = (1-x)a \cdot xh \qquad ; \qquad F_{QPTD} = xa \cdot (1-x)h$$

Die Flächeninhalte beider Parallelogramm sind unabhängig von der Lage von P gleich, ihr Verhältnis ist 1:1.

Aufgabe V00812:
Beweise, dass die vier Winkelhalbierenden eines Rechtecks ein Quadrat begrenzen!

Lösung von Steffen Polster:
Anmerkung: Die Aufgabenstellung ist nicht exakt. Da jedes Quadrat ein Rechteck ist, bei dem sich die Winkelhalbierenden im Quadratmittelpunkt schneiden und kein Viereck bilden, muss vorausgesetzt, dass das Rechteck kein Quadrat ist.

Da die Innenwinkel eines Rechtecks rechte Winkel sind, bilden die Winkelhalbierenden die gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke AED, ABH, BCG und CDF. Das Viereck $EFGH$ besitzt damit 4 rechte Innenwinkel und ist damit Rechteck.



Außerdem liegen dann E und G auf der waagerechten Mittellinie des Rechtecks sowie F und H auf der senkrechten. (Symmetrie des Rechtecks)

Beide Mittellinien stehen senkrecht zueinander, wodurch die Diagonalen ebenfalls senkrecht zueinander stehen. Ein Viereck mit rechten Innenwinkeln und senkrecht aufeinander stehenden Diagonalen ist ein Quadrat. w. z. b. w.

Aufgabe 020813:
Im Berliner Stadtzentrum wird das neue Hotel Berolina gebaut. Es ist an der Vorderfront mit 286 Außenwandplatten verkleidet. Für jedes der zehn Obergeschosse werden 26 nebeneinanderliegende Platten benötigt.
Die beiden äußeren Platten haben eine Fläche von je 6,73 m^2, alle anderen 24 Platten eines Geschosses eine Fläche von je 6,37 m^2. Die Plattenhöhe beträgt 2,74 m.

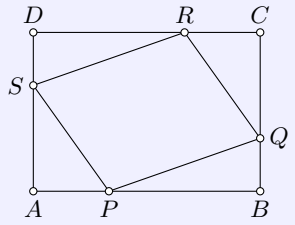
Den oberen Abschluss der Fassade bilden als Verkleidung des Dachgeschosses ebenfalls 26 Platten. Von diesen Platten haben die äußeren eine Fläche von je 3,73 m^2. Die Höhe aller dieser Platten beträgt 1,52 m.

Es sind zu berechnen: a) die Höhe der Fassade, b) die Länge der Fassade!

Anmerkung: Zwischen je zwei Platten verbleibt stets eine Fuge von 5 cm Breite. Zur Höhe ist außerdem noch die der Empfangshalle mit 10 m hinzuzufügen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Fassade ist $10m + 10 \cdot 2{,}74m + 1{,}52m + 10 \cdot 0{,}05m = 39{,}42m$ hoch.
Ihre Länge beträgt $2 \cdot (6{,}73 : 2{,}74)m + 24 \cdot (6{,}37 : 2{,}74)m + 25 \cdot 0{,}05m \approx 61{,}85m$.

Aufgabe 020816:



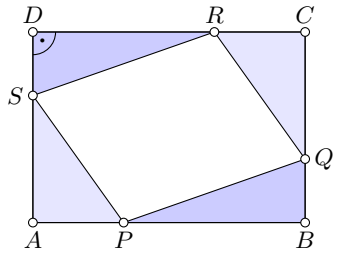
Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$, dessen Seiten wie in der Abbildung sämtlich im Verhältnis 1 : 2 geteilt seien. Wir nennen die Teilpunkte P, Q, R, S und verbinden sie fortlaufend miteinander.

a) Führe diese Konstruktion für das Rechteck mit den Seiten $AB =$ 10 cm und $BC = 7$ cm durch!

b) Was für ein Viereck ist das Viereck $PQRS$? (Beweis!)

c) Wie verhält sich der Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ zu dem des Rechtecks $ABCD$? Gilt das Ergebnis auch für andere derartig geteilte Rechtecke? (Begründung!)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Siehe nebenstehendes Bild (nicht maßstabsgerecht).

b) *Behauptung:* $PQRS$ ist ein Parallelogramm.

Beweis: Wegen $AB = CD$, $BC = DA$ und gleicher Teilungsverhältnisse auf den Seiten gilt $AS = CQ$, $AP = CR$, $BP = DR$ sowie $BQ = DS$. Nach Kongruenzsatz SWS ist $\triangle APS \cong \triangle CRQ$ und $\triangle BQP \cong \triangle DSR$. Also ist $PQ = RS$, $QR = SP$ und somit $PQRS$ ein Parallelogramm. □

c) Mit $a \equiv AB = CD$ und $b \equiv BC = DA$ ist $[APS] = [CRQ] = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{2b}{3} = \frac{1}{9}ab$ sowie $[BQP] = [DSR] = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{1}{9}ab$, mithin

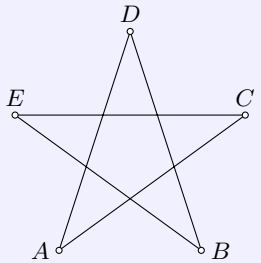
$$[PQRS] = [ABCD] - ([APS] + [CRQ] + [BQP] + [DSR]) = ab - \frac{4}{9}ab = \frac{5}{9}ab.$$

Das Verhältnis der Flächeninhalte beträgt somit stets $\frac{5}{9}$, unabhängig von den konkreten Abmessungen des Rechtecks.

Aufgabe 080811:

Die Abbildung zeigt einen fünfstrahligen Stern, bei dem die Punkte A, B, C, D, E Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sind.

Ermittle die Größe des Winkels $\angle ACE$!

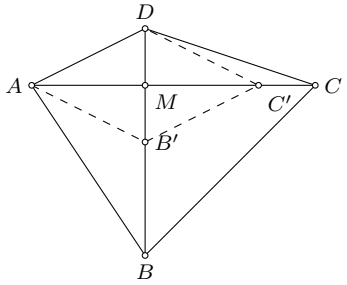


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei M der Umkreismittelpunkt des Fünfecks $ABCDE$. Der Winkel $\angle ACE$ ist ein Peripheriewinkel zum Zentriwinkel $\angle AME$ und deshalb halb so groß wie dieser.
Weil das Fünfeck regelmäßig ist, ist dieser Zentriwinkel 72° groß. Also hat der Winkel $\angle ACE$ eine Größe von 36°.

Aufgabe 090813:
a) Beweise folgenden Satz:
Wenn in einem (nicht überschlagenen) ebenen Viereck alle Seiten gleichlang sind (Rhombus), dann stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

b) Untersuche, ob der Satz umkehrbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Voraussetzung: $ABCD$ sei ein ebenes Viereck mit $AB = BC = CD = DA$.
Behauptung: $AC \perp DB$.
Beweis:
Wegen $AB = CB$ liegt B auf der Mittelsenkrechten von AC, wegen $AD = CD$ ebenso auch D. Daher ist die Gerade durch B und D die Mittelsenkrechte von AC, insbesondere gilt also $BD \perp AC$.

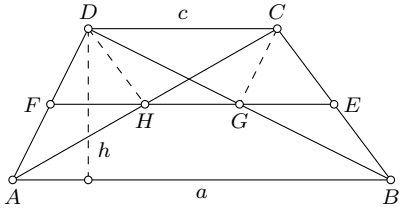


b) Die formale Umkehrung lautet: Wenn in einem Viereck die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, dann sind alle Seiten gleichlang (Rhombus).
Die formale Umkehrung ist kein (wahrer) Lehrsatz, wie z. B. das folgendermaßen gebildete Viereck ABCD zeigt (siehe Abbildung). Es sei $AB'C'D$ ein Rhombus mit dem Mittelpunkt M. Ferner sei B ein von B' verschiedener Punkt auf dem von M durch B' gehenden Strahl. Schließlich sei C irgendein Punkt auf dem von M durch C' gehenden Strahl.
Dann ist $ABCD$ ein Viereck, in dem die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen; aber es gilt $AB \neq AD$. Denn wäre $AB = AD$, so folgte $\triangle ABM \cong \triangle ADM$ (ssw mit rechtem, also der größten Seite gegenüberliegendem Winkel), also $MB = MD = MB'$ im Widerspruch zu $B \neq B'$.

Aufgabe 130814:
In einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $\overline{AB} > \overline{CD}$ seien $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = c$ und der Abstand h der Parallelseiten gegeben. Die Diagonalen AC bzw. BD schneiden die Mittelparallele FE des Trapezes in H bzw. G.

Ermittle den Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABGH$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABGH$ ist gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt des Trapezes $ABEF$ und der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AHF und BEG.

Nun ist der Flächeninhalt des Dreiecks CDA gleich dem des Dreiecks CDB, nämlich gleich $\frac{c \cdot h}{2}$. Der Flächeninhalt des Dreiecks CDH ist gleich dem des Dreiecks CDG, nämlich halb so groß wie der des

Dreiecks CDA, also gleich $\frac{c \cdot h}{4}$.

Genau so groß ist dann aber auch der Flächeninhalt jedes der Dreiecke DAH und BCG.
Schließlich ist der Flächeninhalt des Dreiecks AHF und ebenso der des Dreiecks BEG (wegen $AF = FD$ bzw. $BE = EC$) halb so groß wie der des Dreiecks DAH, also gleich $\frac{c \cdot h}{8}$.
Der Flächeninhalt des Trapezes $ABEF$ beträgt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a+c}{2}+a\right)\cdot\frac{h}{2}=\frac{h}{8}(3a+c)$$

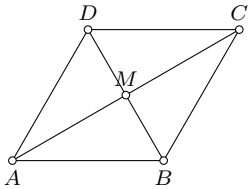
Folglich erhält man für den Flächeninhalt des Trapezes $ABGH$

$$A_T=\frac{h}{8}(3a+c)-2\cdot\frac{c\cdot h}{8}=\frac{h}{8}(3a-c)$$

Aufgabe 210813:
a) Beweise den folgenden Satz:
Wenn alle vier Seiten eines Vierecks dieselbe Länge haben, dann stehen die Diagonalen des Vierecke aufeinander senkrecht.

b) Formuliere die Umkehrung dieses Satzes und untersuche, ob sie auch gilt!

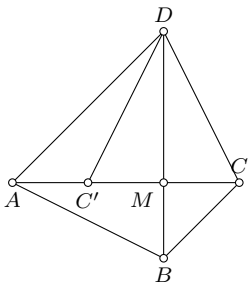
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Zu beweisen ist: Wenn $ABCD$ ein Viereck ist mit $AB = BC = CD = DA$, dann folgt $AC \perp BD$.



Beweis: Es sei M der Mittelpunkt von AC. Dann ist BM Seitenhalbierende in dem gleichschenkligen Dreieck ABC, also auch Höhe, d. h., es gilt $AC \perp BM$. Ebenso folgt $AC \perp DM$. Daher enthält die Senkrechte in M auf AC beide Strecken BM und DM, d. h., es gilt $AC \perp BD$.

b) Die Umkehrung lautet: Wenn die Diagonalen eines Vierecks aufeinander senkrecht stehen, dann haben alle vier Seiten des Vierecks gleiche Länge.

Diese Umkehrung gilt nicht, wie z. B. ein folgendermaßen zu erhaltendes Viereck zeigt:



Auf einer Geraden g wähle man drei Punkte A,M,C in dieser Reihenfolge mit $AM > MC$. Auf der Senkrechten in M auf AC wähle man zwei Punkte B,D (so, dass M zwischen B und D liegt).
Dann ist $ABCD$ ein Viereck mit $AC \perp BD$. Wegen $AM > MC$ gilt aber $DA > DC$.

Aufgabe 230814:

a) Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 12$ cm.

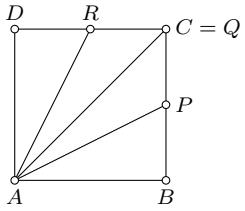
Gesucht sind drei Punkte F, Q, R, die so auf der Berandung dieses Quadrates liegen, dass die Strecken AP, AQ, AR das Quadrat in vier flächengleiche Teile zerlegen.

Gib solche Punkte P, Q, R an und weise nach, dass sie die geforderte Eigenschaft haben!

b) Ermittle entsprechend zwei Punkte S, T auf der Berandung des Quadrats $ABCD$, so dass die Strecken AS, AT dieses Quadrat in drei flächengleiche Teile zerlegen!

c) Untersuche die Möglichkeit einer entsprechenden Zerlegung eines Quadrats (mit der Seitenlänge a) in n flächengleiche Teile!

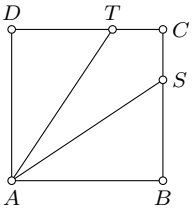
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Sei P der Mittelpunkt der Seite BC, sei Q gleich dem Eckpunkt C und sei R der Mittelpunkt der Seite CD des Quadrats $ABCD$. Dann gilt $BP = PQ = QR = RD$.



Da die Dreiecke BPA und PQA (wegen $\angle ABP = \angle ABQ = 90°$) die Höhe AB gemeinsam haben, da die Dreiecke QRA und RDA die Höhe AD gemeinsam haben und da $AB = AD$ (Seitenlängen eines Quadrats) gilt, stimmen die genannten vier Dreiecke in der Länge einer Grundseite und der Länge der zugehörigen Höhe überein und sind daher inhaltsgleich.

Damit ist nachgewiesen, dass die angegebenen Punkte P, Q, R die geforderte Eigenschaft haben.

b) Sei S derjenige Punkt auf der Strecke BC, für den $BS = 8$ cm gilt. Sei T derjenige Punkt auf der Strecke CD, für den $TD = 8$ cm gilt.



Wegen $AB = AD = 12$ cm haben dann die beiden rechtwinkligen Dreiecke BSA und TDA den gleichen Flächeninhalt von 48 cm^2. Der Inhalt des Quadrate $ABCD$ ist wegen $AB = 12$ cm gleich 144 cm^2.

Wegen $144 - 2 \cdot 48 = 48$ hat daher die Fläche $ASCT$ den gleichen Inhalt wie jedes der beiden Dreiecke ABS und ATD. Damit ist nachgewiesen, dass S und T die geforderte Eigenschaft haben.

c) Wir unterscheiden die beiden Fälle, dass n eine gerade bzw. eine ungerade natürliche Zahl ist.

c1) Sei $n = 2k$ mit $k = 1,2,3,....$

Wir zerlegen die Seite BC und die Seite CD des Quadrats $ABCD$ (mit der Seitenlänge a) durch die Punkte P_1,P_2, ..., P_{k-1} bzw. R_1,R_2, ..., R_{k-1} jeweils in k kongruente Teilstrecken mit der gemeinsamen Länge $\frac{a}{k}$.

Verbindet man A mit diesen Punkten sowie mit C, dann wird $ABCD$ in $2k$ Teildreiecke zerlegt. Genau k von diesen Teildreiecken haben die Höhe AB gemeinsam, die restlichen k Teildreiecke haben die Höhe AD gemeinsam; ferner gilt $AB = AD$.
Folglich stimmen alle diese $2k$ Teildreiecke in der Länge einer Grundseite sowie in der Länge der zugehörigen Höhe überein und sind somit inhaltsgleich.

Damit ist gezeigt, dass auf diese Weise eine Zerlegung des Quadrate in $2k$ flächengleiche Teile gefunden wurde.

c2) Sei $n = 2k + 1$ mit $k = 1,2,3,...$.
Wir wählen auf der Seite BC die Punkte S_1,S_2, ..., S_k so, dass

$$AS_1 = S_1S_2 = ... = S_{k-1}S_k = \frac{2a}{2k+1} \qquad \text{und} \qquad S_kC = \frac{a}{2k+1}$$

gilt. Dies ist wegen $BC = a$ und

$$k \cdot \frac{2a}{2k+1} + \frac{a}{2k+1} = \frac{(2k+1)a}{2k+1} = a$$

möglich. Analog wählen wir auf der Seite DC die Punkte T_1,T_2,...; T_k so, dass $T_kC = \frac{a}{2k+1}$ gilt.

Verbindet man A mit diesen Punkten, dann wird $ABCD$ in $2k$ Teildreiecke und das Viereck AS_kCT_k zerlegt.
Wie oben kann man zeigen, dass diese $2k$ Dreiecke inhaltsgleich sind. Laut Inhaltsformel beträgt dieser gemeinsame Inhalt

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{2k+1} \cdot a = \frac{a^2}{2k+1}$$

Da die Summe der Inhalte der $2k$ Dreiecke und des Vierecks gleich dem Inhalt des Quadrats sein muss, erhält man für den Inhalt des Vierecks

$$A_{\square} = a^2 - 2k \cdot \frac{a^2}{2k+1} = \frac{a^2}{2k+1}$$

Damit ist gezeigt, dass auch das Viereck AS_kCT_k den gleichen Inhalt hat wie jedes der $2k$ Dreiecke und dass daher auf diese Weise eine Zerlegung des Quadrats in $2k + 1$ flächengleiche Teile gefunden wurde.

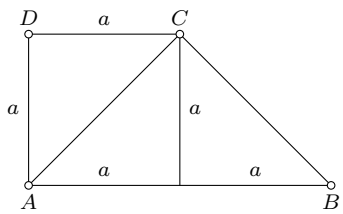
Aufgabe 240814:
Aus drei kongruenten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken mit gegebener Schenkellänge a lässt sich ein Trapez zusammensetzen.

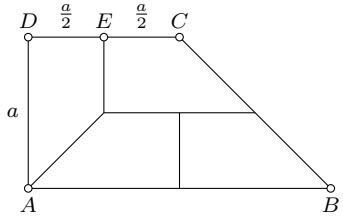
a) Zeichne ein solches Trapez!

b) Ein derartiges Trapez lässt sich in vier untereinander kongruente Trapeze zerlegen. Zeichne eine solche Zerlegung!

c) Ermittle die Länge der Parallelseiten, die Länge der Höhe und den Flächeninhalt eines dieser Teiltrapeze in Abhängigkeit von a!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Mögliche Lösungen zu (a) und (b) zeigt die Abbildung:





(c) Jedes der drei gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke mit der Schenkellänge a hat den Flächeninhalt $\frac{1}{a}a^2$. Das aus diesen drei Dreiecken zusammengesetzte Trapez hat folglich den Flächeninhalt $\frac{3}{2}a^2$.

Jedes der vier (untereinander kongruenten, also auch flächengleichen) Teiltrapeze hat demnach den Flächeninhalt $\frac{3}{8}a^2$.
Ist $ABCD$ wie in der rechten Abbildung das zusammengesetzte Trapez und E der Mittelpunkt von CD, so sind DA und EC jeweils eine Parallelseite in einem der Teiltrapeze, und DE ist die Höhe in einem Teiltrapez.
Daher sind die gesuchten Längen dar Parallelseiten $DA = a$ und $EC = \frac{a}{2}$ und die gesuchte Länge der Höhe ist $DE = \frac{a}{2}$.

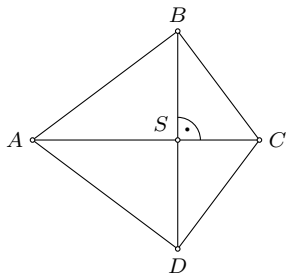
Der gesuchte Flächeninhalt F kann auch aus diesen Längen gefunden werden:

$$F = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{a}{2} = \frac{3}{8}a^2$$

Aufgabe 300812:
Im Mathematikunterricht wird zur Berechnung des Flächeninhalts eines Drachenvierecks folgende Formel benutzt: $A = \frac{e \cdot f}{2}$. Dabei bedeuten e bzw. f die Längen der beiden Diagonalen des Drachenvierecks.

Rolf behauptet, dass diese Formel für jedes Viereck gilt, dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen. Hat er recht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für jedes Viereck $ABCD$, dessen Diagonalen AC und BD senkrecht aufeinander stehen und die Längen $AC = e$, $BD = f$ haben, gilt:
Die Diagonale AC wird durch ihren Schnittpunkt S mit BD in zwei Teilstrecken AS und CS zerlegt. Sie sind in den Dreiecken BDA bzw. BDC jeweils die zur Grundlinie BD senkrechten Höhen.
Der Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$ ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke BDA und BDC. Daher beträgt er

$$\frac{1}{2} \cdot BD \cdot AS + \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CS = \frac{1}{2}BD(AS + CS) = \frac{1}{2}ef$$

Rolf hat mithin recht.

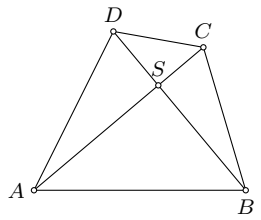
Aufgabe 320813:
Es sei $ABCD$ ein Viereck, dessen Innenwinkel sämtlich kleiner als 180° sind.

Beweise, dass in jedem solchen Viereck die Summe der Längen der Diagonalen AC und BD stets

a) kleiner als der Umfang des Vierecks $ABCD$, aber

b) größer als der halbe Umfang des Vierecks $ABCD$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Nach der Dreiecksungleichung, angewandt auf die Dreiecke ABC, BCD, CDA und DAB (siehe Abbildung), gilt

$$AC < AB + BC \quad , BD < BC + CD \quad , AC < CD + DA \quad , BD < DA + AB$$

Durch Addition dieser vier Ungleichungen folgt

$$2AC + 2BD < 2AB + 2BC + 2CD + 2DA$$

und daraus die zu beweisende Ungleichung

$$AC + BD < AB + BC + CD + DA$$

b) Ist S der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks, so folgt aus der Dreiecksungleichung, angewandt auf die Dreiecke ABS, BCS, CDS und DAS

$$AS + BS > AB \quad , \quad BS + CS > BC \quad , \quad CS + DS > CD \quad , \quad DS + AS > DA$$

Durch Addition dieser vier Ungleichungen folgt

$$2AS + 2CS + 2BS + 2DS > AB + BC + CD + DA$$

Wegen $AS + CS = AC$ und $BS + DS = BD$ ergibt sich damit die zu beweisende Ungleichung

$$AC + BD > \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$$

II Runde 2

Aufgabe 020829:
Folgende Behauptung ist zu beweisen:

Die Mittelpunkte der Quadrate, die über den Seiten eines beliebigen Parallelogramms so errichtet worden sind, dass die Quadrate außerhalb des Parallelogramms liegen, bilden fortlaufend miteinander verbunden ein Quadrat.

(Hier genügt es nicht, nur die Zeichnung anzufertigen, das ist kein Beweis! Es müssen die Eigenschaften eines Quadrates nachgewiesen werden. Die Eigenschaften sind: alle Seiten sind gleich lang, alle Winkel sind 90° groß.)

Lösung von Carsten Balleier:
Man bezeichne die Mittelpunkte über den Seiten a, b, c und d in dieser Reihenfolge mit M_a, M_b, M_c und M_d. Dann kann man die Kongruenz von z. B. Dreieck AM_aM_d und BM_aM_b zeigen.

Es gilt

$AM_a = BM_a$ (halbe Diagonalen im gleichen Quadrat),

$AM_d = BM_b$ (halbe Diagonalen in kongruenten Quadraten, da gegenüberliegende Parallelogrammseiten gleich lang sind) und

$\angle M_aAM_d = \angle M_aBM_b$.

Letzteres sieht man, indem man diese Winkel durch Teilwinkel ausdrückt, d. h. $\angle M_aAM_d = 2{\cdot}45° + \angle DAC$ und $\angle M_aBM_b = 2 \cdot 45° + (90° - \angle ABC)$. Da aber im Parallelogramm benachbarte Winkel zusammen 90° groß sind, sind letztere Ausdrücke gleich.

Aus der bewiesenen Kongruenz folgt $M_aM_d = M_aM_b$ und $\angle AM_aM_d = \angle BM_aM_b$.

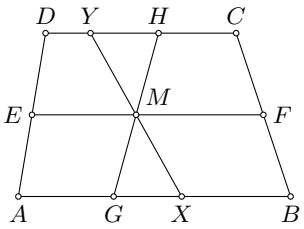
Mit der zweiten Aussage gilt $\angle M_dM_aM_b = \angle AM_aB = 90°$.

Da man diesen Beweis analog für alle anderen Seitenpaare und Winkel des Vierecks $M_aM_bM_cM_d$ durchführen kann, sind alle Seiten gleich und Winkel 90° groß. □

Aufgabe 030824:
Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD. X sei irgend ein Punkt der Strecke $\overline{AB}$ und Y ein Punkt der Strecke $\overline{CD}$.

Beweise, dass die Strecke $\overline{XY}$ stets von der Mittellinie des Trapezes halbiert wird!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Schnittpunkt der Strecke XY mit der Mittellinie EF sei M. Man ziehe durch M die Parallele zu AD. Diese schneide AB in G und CD in H.

Nun wird die Kongruenz der Dreiecke $\triangle GMX$ und $\triangle HYM$ nachgewiesen:

$\angle MGX = \angle MHY$; Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen
$\angle GMX = \angle HMY$; Scheitelwinkel, und $\overline{MG} = \overline{MH}$

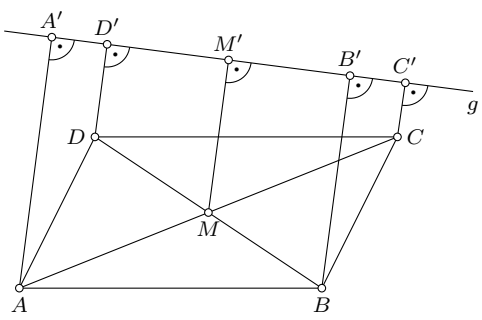
$\overline{MG} = \overline{MH}$ folgt aus der Tatsache, dass die Vierecke $AGME$ und $EMHD$ Parallelogramme sind mit einer gleichen Seite EM und $AE = ED$, da die Mittellinie die Trapezseite halbiert.

Wenn nun die beiden Dreiecke $\triangle GMX$ und $\triangle HYM$ kongruent sind, so sind auch ihre Seiten MX und MY gleich lang.

Aufgabe 060822:
In der Ebene ε liege das Parallelogramm $ABCD$ und die völlig außerhalb des Parallelogramme verlaufende Gerade g.

Beweise, dass die Summe der Entfernungen zweier gegenüberliegender Eckpunkte des Parallelogramms von der Geraden g gleich der Summe der Entfernungen der beiden anderen Eckpunkte von g ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Aus den Voraussetzungen folgt, dass die Vierecke $CC'A'A$ und $BB'D'D$ Trapeze sind, die im Falle $g \perp AC$ oder $g \perp BD$ auch entartet sein können. Beide Trapeze haben die Mittellinie MM' gemeinsam. Die Länge dieser Mittellinie MM' ist nach einem bekannten Satz

(1) gleich dem arithmetischen Mittel der Längen der Strecken AA' und CC' und nach dem gleichen Satz

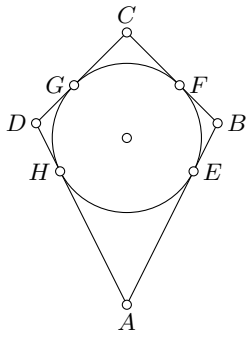
(2) gleich dem arithmetischen Mittel der Längen der Strecken BB' und DD'. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 060824:
Beweise folgenden Satz:

Im Tangentenviereck ist die Summe der Längen je zweier gegenüberliegender Seiten gleich der Summe der Längen der beiden anderen Seiten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

Behauptung: $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$



Beweis:
Die Berührungspunkte an den Kreis seien E, F, G und H. Weil die beiden Tangentenabschnitte von einem jeden Punkt außerhalb des Kreises an den Kreis gleichlang sind, gilt:

$$\overline{AE} = \overline{AH} \qquad \overline{BE} = \overline{BF} \qquad \overline{CG} = \overline{CF} \qquad \overline{DG} = \overline{DH}.$$

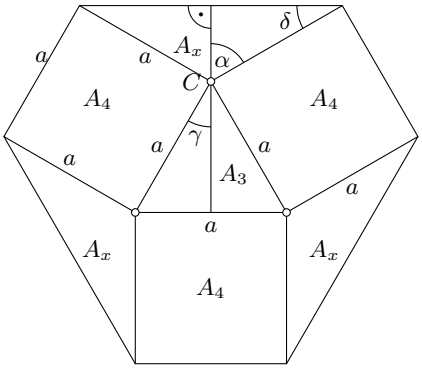
Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \overline{AE} + \overline{BE} + \overline{CG} + \overline{DG} &= \overline{AH} + \overline{BF} + \overline{CF} + \overline{DH}, \qquad \text{d. h.} \\ \overline{AB} + \overline{CD} &= \overline{BC} + \overline{AD}. \end{aligned}$$

Aufgabe 070821:
Errichtet man auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecke die Quadrate nach außen, so bilden die äußeren Eckpunkte der Quadrate die Ecken eines konvexen Sechsecks. Wir bezeichnen den Flächeninhalt des Dreiecke mit A_3; den jedes der Quadrate mit A_4 und den des Sechsecks mit A_6.

Gesucht sind ganze Zahlen n und m so, dass die Gleichung $A_6 = nA_3 + mA_4$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



In der nebenstehenden Zeichnung sieht man, dass sich der Flächeninhalt des Sechsecks A_6 wie folgt zusammensetzt (der Flächeninhalt A_x bezeichnet dabei die Fläche des Dreiecks zwischen den Quadraten wie in der Zeichnung ersichtlich):

$$A_6 = A_3 + 3 \cdot A_4 + 3 \cdot A_x \tag{1}$$

Die rot eingezeichneten Linien teilen die Dreiecke A_3 und A_x in sämtlich zueinander kongruente Dreiecke mit einem rechten Winkel, einer Hypotenuse der Größe a und einem weiteren gleichgroßen Winkel γ. Letzteres kann wie folgt begründet werden: um den Punkt C setzt sich der Vollwinkel ($= 360°$) aus zwei Winkeln zu je $90°$ (in den Quadraten) sowie je zwei Winkel $\gamma = 30°$ und α zusammen, d. h. $\alpha + \gamma = 90°$ bzw. in dem Dreieck mit α gilt demzufolge $\delta = \gamma$.

Damit und mit der Flächeninhaltsformel eines gleichseitigen Dreiecks gilt:

$$A_3 = A_x = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \tag{2}$$

Ferner gilt für das Quadrat:

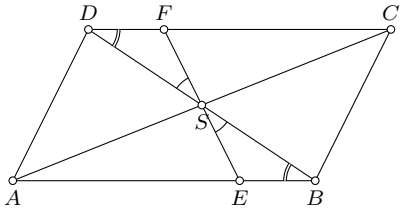
$$A_4 = a^2 \tag{3}$$

Mit (2) und (3) in (1) eingesetzt ergibt sich: $A_6 = 4 \cdot A_3 + 3 \cdot A_4$ woraus sich $n = 4$ und $m = 3$ als mögliche Lösung zeigt.

Aufgabe 170822:
Beweise folgenden Satz:

Jede Strecke, die zwei Punkte paralleler Seiten eines Parallelogramms miteinander verbindet und durch den Schnittpunkt der Diagonalen geht, wird von diesem Schnittpunkt halbiert.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



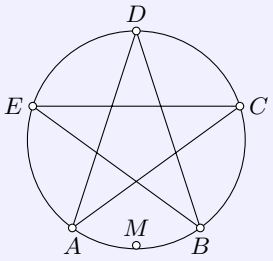
Es seien $ABCD$ ein Parallelogramm, E ein Punkt auf der Seite AB und F ein Punkt auf der Seite CD, und zwar so gelegen, dass die Strecke EF durch den Schnittpunkt S der Diagonalen des Parallelogramms geht.

Fällt F mit D zusammen, dann ist FE gleich der Diagonalen BD des Parallelogramms $ABCD$. Folglich fällt danach auch E mit B zusammen, und es gilt $BS = SD$, da die Diagonalen im Parallelogramm einander halbieren.
Falls $F \neq D$ ist, so ist auch $E \neq B$ (denn aus $E = B$ folgte wie eben auch $F = D$), und es gilt:

$\angle BSE = \angle DSF$ als Scheitelwinkel und $\angle EBS = \angle FDS$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.
Also gilt: $\triangle SEB \cong \triangle DSF$, da diese Dreiecke in einer Seite und beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.
Daraus folgt $ES = SF$, d. h., die Strecke EF wird durch den Schnittpunkt S der Diagonalen halbiert.

Aufgabe 170823:
Die Abbildung zeigt einen fünfstrahligen Stern, dessen Spitzen A, B, C, D, E Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sind.

Ermittle die Größe des Winkels $\angle ADB$!



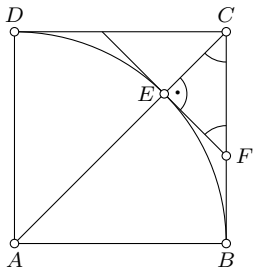
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da A, B, C, D, E Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sind, liegen sie alle auf der Peripherie eines Kreises; dessen Mittelpunkt sei M.
Verbindet man M mit den genannten Eckpunkten, so entstehen 5 kongruente Dreiecke AMB, BMC, CMD, DME, EMA. Die Summe ihrer Winkel mit dem Scheitel M bildet einen Vollwinkel, so dass jeder dieser Winkel $360° : 5 = 72°$ beträgt.
Da im Kreis jeder Peripheriewinkel halb so groß wie der Zentriwinkel über dem gleichen Bogen ist, gilt

$$\angle ADB = \frac{1}{2}\angle AMB = \frac{1}{2} \cdot 72° = 36°$$

Aufgabe 180824:
Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Mit $\overline{AB}$ als Radius sei um A ein Kreis gezeichnet. Dieser schneide die Diagonale AC in E. Die in E an den Kreis gelegte Tangente schneide die Seite BC in F.

Beweise, dass die Strecken CE, EF und FB gleich lang sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



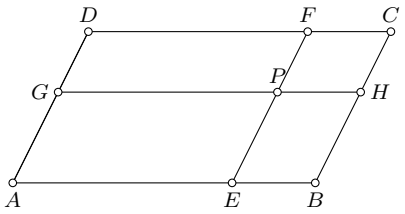
(1) Der Winkel $\angle BCA$ ist 45° groß; denn die Diagonale halbiert den rechten Winkel bei C.
(2) Der Winkel $\angle CEF$ ist 90° groß; denn Berührungsradius und Tangente stehen senkrecht aufeinander.
(3) Aus den Aussagen (1) und (2) ergibt sich: Der Winkel $\angle EFC$ ist 45° groß, und aus den Aussagen (1) und (3) folgt $EF = EC$.

Ferner gilt $\triangle AFE \cong \triangle AFB$ (Übereinstimmung in AF, in $AE = AB$ und in $\angle AEF < \angle ABF$, wobei diese Winkel 90° betragen, also jeweils der längsten Dreiecksseite gegenüberliegen). Daher ist $FB = FE = EC$, w. z. b. w.

Aufgabe 190823:
In einem Parallelogramm $ABCD$ sei P ein beliebiger Punkt auf der Diagonalen AC ($P \neq A$, $P \neq C$). Die Parallele durch P zu AB schneide BC in H und AD in G; die Parallele durch P zu BC schneide AB in E und CD in F.

Beweise, dass die beiden Parallelogramme $EBHP$ und $GPFD$ den gleichen Flächeninhalt haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Jede Diagonale eines Parallelogramms zerlegt dieses in zwei kongruente und somit flächeninhaltsgleiche Dreiecke. Wendet man dies auf die Parallelogramme $ABCD$, $AEPG$ und $PHCF$ an, so erhält man:

Die Dreiecke ABC und CDA haben denselben Flächeninhalt; dieser sei A_1 genannt. Die Dreiecke AEP und PGA haben denselben Flächeninhalt; dieser sei A_2 genannt. Die Dreiecke PHC und CFP haben denselben Flächeninhalt; dieser sei A_3 genannt.
Daher ergibt sich, dass sowohl das Parallelogramm $EBHP$ als auch das Parallelogramm $GPFD$ den Flächeninhalt $A_1 - A_2 - A_3$ haben. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

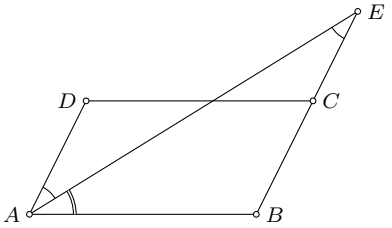
Aufgabe 220824:
Von einem Parallelogramm werden die folgenden Eigenschaften (1) und (2) gefordert:

(1) Der Umfang des Parallelogramms beträgt 36 cm.

(2) Die Halbierende des Winkels $\angle BAD$ schneidet die Verlängerung der Seite BC über C hinaus in einem Punkt E, für den $\overline{CE} = 3$ cm gilt.

Beweise, dass die Seitenlängen $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$ des Parallelogramms durch die Forderungen (1), (2) eindeutig bestimmt sind! Ermittle diese Seitenlängen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Wenn ein Parallelogramm $ABCD$ die Eigenschaften (1) und (2) hat, so folgt:
Da AE nach (2) Halbierende des Winkels $\angle BAD$ ist, gilt

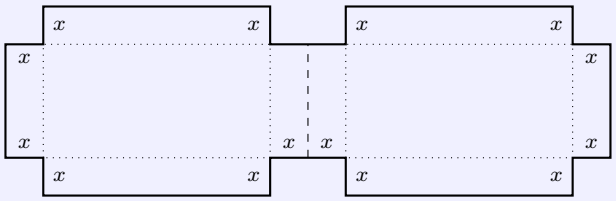
$$\angle BAE = \angle EAD \tag{3}$$

Ferner sind $\angle EAD$ und $\angle BEA$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, also ist

$$\angle EAD = \angle BEA \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt $\angle BAE = \angle BEA$; also ist das Dreieck ABE gleichschenklig mit $BE = AB = a$. Aus (2) folgt somit $a = BE = BC + CE = b + 3$ cm, d. h. $a - b = 3$ cm. (5)
Wegen der gleichen Länge der Gegenseiten im Parallelogramm ist nach (1) mithin $a + b = 18$ cm. (6)
Aus (5) und (6) folgt durch Addition $2a = 21$ cm, also $a = 10{,}5$ cm und damit aus (5) $b = (10{,}5 - 3)$ cm $= 7{,}5$ cm.
Somit ist bewiesen, dass durch (1), (2) die Seitenlängen a,b eindeutig bestimmt sind. Sie betragen $a = 10{,}5$ cm, $b = 7{,}5$ cm.

Aufgabe 240824:
Eine Blechtafel hat die in der Abbildung ersichtliche Gestalt, wobei a, b und x gegebene Längen sind. Die Tafel soll längs der gestrichelten Linie in zwei Teile zerlegt werden, und aus jedem Teil soll dann ein oben offener quaderförmiger Kasten der Höhe x hergestellt werden.



1. Berechne das Volumen eines solchen Kastens, wenn $a = 360$ mm, $b = 120$ mm, $x = 25$ mm gegeben sind!
2. Ermittle das Volumen eines solchen Kastens, dargestellt in Abhängigkeit von Variablen a, b und x, die (wegen ihrer Bedeutung als Längen) nur positive Werte annehmen können!

3. Es seien beliebige positive Werte a und b fest vorgegeben.

Ermittle in Abhängigkeit von diesen a, b alle diejenigen Werte für die Variable x, mit denen es möglich wird, Kästen der genannten Art herzustellen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

1. Jedes der beiden Teile hat eine Gestalt, die aus einem Rechteck der Seitenlängen $\frac{a}{2} = 180$ mm, b = 120 mm entsteht, indem an allen vier Ecken Quadrate der Seitenlänge $x = 25$ mm herausgeschnitten sind.

   Ein daraus hergestellter oben offener quaderförmiger Kasten der Höhe $x = 25$ mm hat als Grundfläche ein Rechteck der Seitenlängen $\frac{a}{2} - 2x = 130$ mm, $b - 2x = 70$ mm. Daher ist sein Volumen

   $$V = 130\text{mm} \cdot 70\text{mm} \cdot 25\text{mm} = 227500\text{mm}^3$$

2. Mit gleicher Begründung wie in 1. ergibt sich $V = \left(\frac{a}{2} - 2x\right) \cdot (b - 2x) \cdot x$.

3. Als Längenangabe muss x positiv sein. Ferner wird ein Herstellen der genannten Kästen genau dann möglich, wenn auch $\frac{a}{2} - 2x$ und $b - 2x$ als Längenangaben (nämlich für Kantenlängen eines Kastens) positiv sind, d. h. genau dann, wenn außer der Ungleichung $x > 0$ auch die Ungleichungen

   $$\frac{a}{2} - 2x > 0 \qquad \text{und} \qquad b - 2x > 0$$

   gelten. Diese sind äquivalent mit $x < \frac{a}{4}$ und $x < \frac{b}{2}$

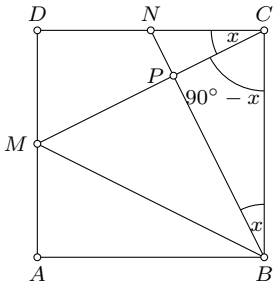
   Die gesuchten Werte sind also alle diejenigen positiven Werte x, die kleiner sind als die kleinere der beiden Längenangaben $\frac{a}{4}$, $\frac{b}{2}$.

Aufgabe 280823:
In einer Arbeitsgemeinschaft wird über folgende Figur diskutiert: Es sei $ABCD$ ein Quadrat; die Mittelpunkte der Seiten AD bzw. CD seien M bzw. N, der Schnittpunkt der Strecken CM und BN sei P.

a) Simone misst den Winkel $\angle BPM$ und stellt fest, dass die Strecken CM und BN aufeinander senkrecht stehen!
b) Frank misst von den Dreiecken ABM und BPM Seiten- und Höhenlängen und stellt fest, dass diese beiden Dreiecke nicht einander flächeninhaltsgleich sind.

Untersuche, ohne an einer Figur Messungen durchzuführen, für jede der beiden Feststellungen, ob sie für jedes Quadrat wahr ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Für jedes Quadrat $ABCD$ mit den genannten M, N, P gilt $BC = CD$ (Seitenlängen des Quadrates), $CN = DM$ (halbe Seitenlängen des Quadrates), $\angle BCN = \angle CDM$ (Innenwinkel des Quadrates), also $\triangle CBN \cong \triangle DCM$ (Kongruenzsatz sws) und daher $\angle NBC = \angle MCD$.
Die Größe dieser Winkel sei mit x bezeichnet. Somit gilt $\angle BCM = 90° - x$, und aus dem Innenwinkelsatz für $\triangle BCP$ folgt

$$\angle CPB = 180° - x - (90° - x) = 180° - x - 90° + x = 90°$$

Also stehen die Strecken CM und BN senkrecht aufeinander.
b) Analog zu a) kann man $\triangle ABM \cong \triangle DCM$ zeigen. Die Dreiecks ABM, DCM und CBN haben somit den gleichen Flächeninhalt, dieser sei mit F bezeichnet. Ist a die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$, so gilt $F = \frac{1}{4}a^2$.

Die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke DCM und CBN beträgt $\frac{1}{2}a^2$. Der Flächeninhalt des Fünfecks $DCBPM$ ist jedoch kleiner als $\frac{1}{2}a^2$, da sich die genannten Dreiecke im Dreieck NCP überlappen.

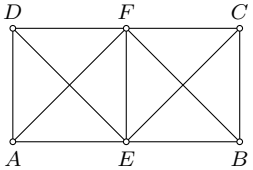
Somit ist die Quadratrestfläche $ABPM$ größer als $\frac{1}{2}a^2$. Hieraus und wegen (1) folgt, dass der Flächeninhalt des Dreiecks BPM größer als $\frac{1}{4}a^2$ sein muss.
Demzufolge sind die beiden Dreiecke ABM und BPM nicht einander flächengleich.

Aufgabe 300822:
Ein Rechteck, dessen Seitenlängen sich wie 1 : 2 zueinander verhalten, soll in acht einander kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden.

a) Zeichne und beschreibe eine solche Zerlegung! Begründe, warum die nach deiner Beschreibung entstehenden acht Dreiecke gleichschenklig-rechtwinklig und einander kongruent sind!

b) Ermittle die Länge eines Schenkels dieser Dreiecke in Abhängigkeit von der kleineren der beiden Seitenlängen des Rechtecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Abbildung zeigt für ein Rechteck $ABCD$ eine mögliche Zerlegung der geforderten Art.



Beschreibung: Sind E, F die Mittelpunkte von AB bzw. CD, so entsteht die Zerlegung, indem die Strecken EF, AF, DE, BF und CE gezeichnet werden.

Begründung: Da $ABCD$ ein Rechteck ist und E, F die Strecken AB bzw. CD halbieren, folgt aus der Voraussetzung $AD : AB = 1 : 2$.
Die Strecken AE und DF sind gleichlang und parallel zueinander, die Strecken AE und AD sind gleichlang und senkrecht zueinander; also ist $AEFD$ ein Quadrat.
Ebenso folgt: $EBCF$ ist ein Quadrat. Jedes dieser Quadrate wird durch die eingezeichneten Diagonalen in vier Dreiecke zerlegt.

Da in jedem Quadrat die Diagonalen gleichlang und senkrecht zueinander sind und einander halbieren, sind alle acht entstandenen Dreiecke gleichschenklig-rechtwinklig mit einander gleichen Kathetenlängen, also auch einander kongruent.

b) In Abhängigkeit von $a = AD$ hat das Quadrat $AEFD$ den Flächeninhalt a^2. Jedes seiner vier einander (kongruenten, also) flächeninhaltsgleichen Teildreiecke hat folglich den Flächeninhalt $\frac{1}{4}a^2$.

Ist x die gesuchte Kathetenlänge dieser Dreiecke. so ist andererseits der Flächeninhalt gleich $\frac{1}{2}x^2$. Daher gilt

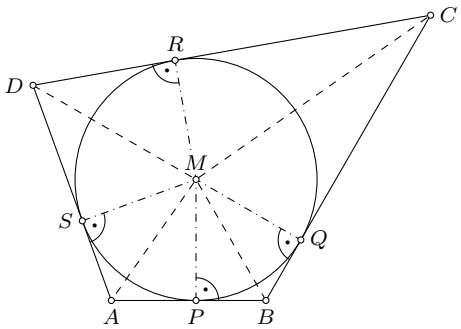
$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{4}a^2 \qquad ; \qquad x\sqrt{\frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$$

Aufgabe 320823:
Es sei $ABCD$ ein Tangentenviereck, sein Umfang sei u, der Radius seines Inkreises sei r.

Zeige, dass bereits durch die alleinige Vorgabe von u und r der Flächeninhalt von $ABCD$ eindeutig bestimmt ist; ermittle diesen Flächeninhalt in Abhängigkeit von u und r!

Hinweis: Ein Viereck $ABCD$ ist genau dann ein Tangentenviereck, wenn es einen Kreis enthält, der jede Seite von $ABCD$ In einem Punkt zwischen den Endpunkten dieser Seite berührt. Dieser Kreis heißt dann der Inkreis von $ABCD$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung berührt ein Kreis k die Seiten AB,BC,CD,DA in Punkten P,Q,R bzw. S. Ist M der Mittelpunkt von k, so ist jeweils MP, MQ, MR bzw. MS senkrecht auf AB, BC, CD bzw. DA.

Mit $r = MP = MQ = MR = MS$ ist folglich jeweils $\frac{1}{2}AB \cdot r$, $\frac{1}{2}BC \cdot r$, $\frac{1}{2}CD \cdot r$. bzw. $\frac{1}{2}DA \cdot r$ der Flächeninhalt von ABM, BCM, CDM bzw. DAM.

Daraus folgt: Der Flächeninhalt F von $ABCD$ beträgt

$$F = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r + \frac{1}{2}CD \cdot r + \frac{1}{2}DA \cdot r = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA) \cdot r = \frac{1}{2}u \cdot r$$

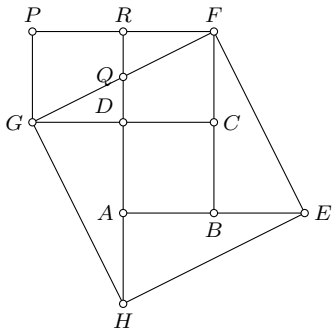
und ist so durch u und r eindeutig bestimmt.

Aufgabe 330823:
Es sei $ABCD$ ein Quadrat, seine Seitenlänge sei a. Die Seite AB werde über B hinaus um die Länge a bis E verlängert, die Seite BC über C hinaus um die Länge a bis F, die Seite CD über D hinaus um a bis G, die Seite DA über A hinaus um a bis H.

a) Beweise aus diesen Voraussetzungen, dass $EFGH$ ein Quadrat ist!

b) Wie oft ist der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ in dem Flächeninhalt von $EFGH$ enthalten?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Nach den Voraussetzungen ist $BE = a = CF$, $BF = 2a = CG$, ferner (als Nebenwinkel von Innenwinkeln des Quadrates $ABCD$) $\angle EBF = 90° = \angle FCG$. (1)
Damit folgt nach dem Kongruenzsatz sws $\triangle BEF \cong \triangle CFG$, also $EF = FG$ (2) und $\angle EFB = \angle FGC$. (3)
Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck CFG sowie nach (1) ist ferner (siehe Abbildung) $\angle FGC + \angle CFG = 90°$; hieraus und aus (3) folgt $\angle EFB + \angle CFG = 90°$, d. h. $\angle EFG = 90°$. (4)

Entsprechend zu (2) und (4) beweist man, dass im Viereck $EFGH$ alle Seiten einander gleiche Länge und alle Winkel die Größe 90° haben. Also ist es ein Quadrat.

b) Es sei P derjenige Punkt, für den $GCFP$ ein Rechteck ist. Die Verlängerung von AD über D hinaus schneide GF in Q und PF in R.
Dann sind $DCFR$ und $GDRP$ zwei Quadrate mit gleicher Seitenlänge a wie $ABCD$. In den Dreiecken GDQ und FRQ sind gleichgroße Winkel bei D, R (rechte Winkel) und Q (Scheitelwinkel), daher und wegen $GD = FR$ sind sie nach Kongruenzsatz sww einander kongruent.

Fügt man sie an das Viereck $DCFQ$ an, so folgt:
Das Dreieck GCF hat denselben Flächeninhalt wie das Quadrat $DCFR$, also auch wie $ABCD$. Entsprechendes gilt für die Dreiecke HDG, EAH, FBE. Also ist der Flächeninhalt von $ABCD$ genau 5 mal in dem von $EFGH$ enthalten.

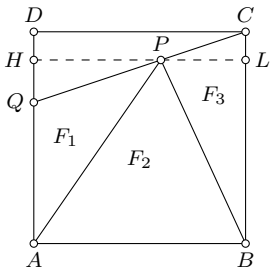
Aufgabe 340824:
Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $\overline{AB} = 6$ cm. Auf der Seite AD sei Q derjenige Punkt, für den $\overline{AQ} = 4$ cm gilt. Für jeden Punkt P, der auf der Strecke QC liegt, bezeichne L den Fußpunkt des von P auf BC gefällten Lotes; ferner bezeichnen F_1, F_2 bzw. F_3 in dieser Reihenfolge den Flächeninhalt des Dreiecks APQ, des Dreiecks ABP bzw. des Dreiecks BCP.

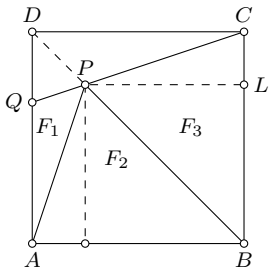
a) Ermittle die Länge der Strecke PL und den Flächeninhalt F_1, wenn vorausgesetzt wird, dass P so auf QC gewählt wurde, dass $F_3 = 7{,}5cm^2$ gilt!

b) Ermittle die Länge der Strecke PL und den Flächeninhalt F_2, wenn vorausgesetzt wird, dass P so auf QC gewählt wurde, dass $F_1 = F_3$ gilt!

c) Beschreibe und begründe, wie man P so auf QC konstruieren kann, dass $F_2 = F_3$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:





(a) (Siehe linke Abbildung) Wegen $PL \perp BC$ ist $F_3 = \frac{1}{2}BC \cdot PL$, also $PL = 2F_3 : BC = 2{,}5$ cm.
Verlängert man LP über P hinaus bis zum Schnitt H mit AD, so ist $ABLH$ ein Rechteck, also gilt $LH = 6$ cm , $PH = 3{,}5$ cm; ferner ist PH die auf AQ senkrechte Höhe des Dreiecks APQ, also gilt $F_1 = \frac{1}{2}AQ \cdot PH = 7$ cm^2.

(b) Wegen $F_1 = \frac{1}{2}AQ \cdot PH$, $F_3 = \frac{1}{2}BC \cdot PL$ (1) und $\frac{1}{2}AQ = 2$ cm, $\frac{1}{2}BC = 3$ cm sowie der Voraussetzung $F_1 = F_3$, gilt $2 \cdot PH = 3 \cdot PL$, also $PH = \frac{3}{2}PL$.
Hieraus und aus $PH + PL = 6$ cm folgt $(\frac{3}{2} + 1) \cdot PL = 6$ cm, also $PL = 6 : \frac{5}{3} = 2{,}4$ cm.

Nach (1) und (2) ist dann $F_3 = 7{,}2$ cm^2, also auch $F_1 = 7{,}2$ cm^2. Ferner hat das Dreieck CDQ den Flächeninhalt $\frac{1}{2}CD \cdot DQ = 6$ cm^2. Damit erhält man $F_2 = (36 - 2 \cdot 7{,}2 - 6) = 15{,}6$ cm^2.

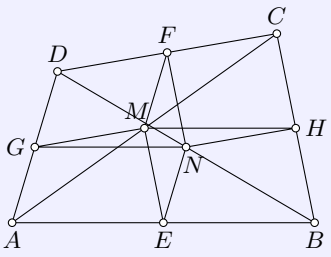
(c) Die Bedingung $F_2 = F_3$ wird wegen $AB = BC$ dann erfüllt, wenn die Dreiecke ABP und BCP in den Längen der auf AB bzw. BC senkrechten Höhen übereinstimmen, d. h. wenn P auf der Winkelhalbierenden des von AB und BC gebildeten Winkels liegt. Das ist die Diagonale BD.
Damit ist begründet: Die geforderte Bedingung wird erfüllt, wenn man P als Schnittpunkt der Strecken CQ und BD konstruiert (siehe rechte Abbildung).

III Runden 3 & 4

Aufgabe 040836:

Es ist folgender Satz zu beweisen:

In einem konvexen Viereck $ABCD$ seien keine zwei Seiten parallel. Dann sind die Mittelpunkte E, F bzw. G, H zweier Gegenseiten und die Mittelpunkte M, N der Diagonalen die Eckpunkte eines Parallelogrammes.



Lösung von Manuela Kugel:
Der Beweis stützt sich auf den Satz: „In einem Dreieck verläuft die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Seiten parallel zur dritten Dreiecksseite."

Behauptung: $\overline{GN} \parallel \overline{MH}$ und $\overline{GM} \parallel \overline{NH}$

Voraussetzung: E, F, G und H sind die Mittelpunkte der 4 Seiten des Vierecks. M und N sind die Mittelpunkte der beiden Diagonalen.

Beweis:
$\overline{GN} \parallel \overline{AB}$ im Dreieck ABD; $\overline{MH} \parallel \overline{AB}$ im im Dreieck ABC; folglich: $\overline{GN} \parallel \overline{MH}$

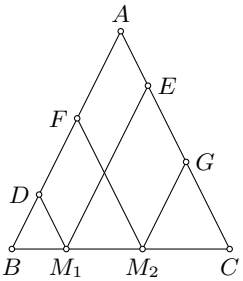
$\overline{GM} \parallel \overline{DC}$ im Dreieck ADC; $\overline{NH} \parallel \overline{DC}$ im im Dreieck BDC; folglich: $\overline{GM} \parallel \overline{NH}$

Da im Viereck $GNHM$ die Gegenseiten zueinander parallel sind, handelt es sich um ein Parallelogramm.

Aufgabe 060832:
Auf der Grundlinie BC eines gleichschenkligen Dreiecks $\triangle ABC$ seien von zwei Punkte M_1 und M_2 gegeben. Durch M_1 und M_2 werden jeweils die Parallelen zu den Dreiecksseiten AB und AC gezogen. Die Parallelen durch M_1 schneiden AB in D und AC in E, die Parallelen durch M_2 die Seite AB in F und AC in G.

Beweise, dass der Umfang des Parallelogramms M_1EAD gleich dem Umfang des Parallelogramms M_2GAF ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es gilt $\triangle DBM_1 \sim \triangle ABC$ (das folgt aus der Gleichheit von Stufenwinkeln an geschnittenen Parallelen). Also ist das Dreieck $\triangle M_1DB$ gleichschenklig, und es gilt:

$$\overline{BD} = \overline{M_1D} \tag{1}$$

Weiterhin gilt:

$$\overline{M_1E} = \overline{AD}, \tag{2}$$

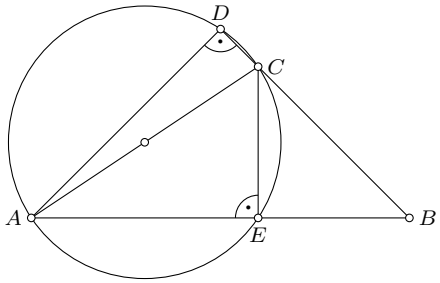
da M_1EAD laut Konstruktion ein Parallelogramm ist.

Aus (1) und (2) folgt, dass der halbe Umfang des Parallelogramms M_1EAD gleich der Länge des Schenkels AB ist.

Entsprechend zeigt man, dass der halbe Umfang des Parallelogramms M_2GAF gleich der Länge des Schenkels AC ist. Da $\overline{AC} = \overline{AB}$ gilt, folgt, dass die Umfänge der betrachteten Parallelogramme gleich sind.

Aufgabe 070835:
Beweise:
Zwei Eckpunkte eines beliebigen Dreiecks $\triangle ABC$ sowie die Fußpunkte der durch diese Ecken gehenden Höhen bestimmen ein Sehnenviereck, d. h. ein Viereck, dessen Eckpunkte auf demselben Kreis liegen, dessen Seiten also Sehnen dieses Kreises sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



In dem Dreieck $\triangle ABC$ seien o. B. d. A. A und C die in der Aufgabe genannten Eckpunkte und D und E die zugehörigen Höhenfußpunkte. Da A, E, C nicht auf derselben Geraden liegen, gibt es genau einen Kreis durch diese drei Punkte. Nach der Umkehrung des Satzes des Thales ist wegen des rechten Winkels bei E die Seite AC ein Durchmesser des Kreises, und es liegen auf diesem Kreis die Eckpunkte aller rechtwinkligen Dreiecke, die AC zur Hypotenuse haben, mithin auch der Punkt D.
Folglich ist das Viereck AECD ein Sehnenviereck.

Aufgabe 090832:
Über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ seien ähnliche Vielecke V_a, V_b, V_c konstruiert, und zwar so, dass die Dreiecksseiten BC, AC, AB jeweils einander entsprechende Seiten von V_a, V_b

bzw. V_c sind.

Beweise: Der Flächeninhalt des Vielecks über der Hypotenuse ist gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Vielecke über den Katheten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
2. Wie üblich sei $BC = a, AC = b, AB = c$ gesetzt, AB sei die Hypotenuse von $\triangle ABC$.
Die Flächeninhalte von V_a, V_b, V_c seien F_a, F_b bzw. F_c genannt. Da nun BC und AB in den ähnlichen Vielecken V_a, V_c einander entsprechende Seiten sind, gilt

$$F_a : F_c = a^2 : c^2, \qquad \text{also} \qquad F_a = \frac{a^2}{c^2} F_c$$

Ebenso erhält man $F_b = \frac{b^2}{c^2} F_c$.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt $a^2 + b^2 = c^2$. Durch Multiplikation mit $\frac{F_c}{c^2}$ folgt hieraus

$$\frac{a^2}{c^2} \cdot F_c + \frac{b^2}{c^2} \cdot F_c = F_c$$

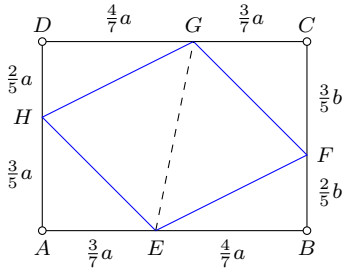
d. h. $F_a + F_b = F_c$, w. z. b. w.

Aufgabe 110836:
Einem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$, $a > b$, sei ein Parallelogramm $EFGH$ so einbeschrieben, dass die Seiten DA und BC des Rechtecks von Eckpunkten des Parallelogramms im Verhältnis $2 : 3$ oder $3 : 2$, die Seiten AB und CD im Verhältnis $3 : 4$ oder $4 : 3$ geteilt werden und E auf AB, F auf BC, G auf CD, H auf DA liegen.

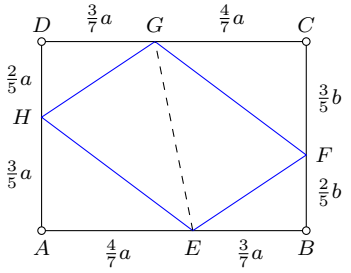
Stelle fest, ob dies auf eine oder mehrere Weisen möglich ist! Ermittle in jedem der möglichen Fälle das Verhältnis der Flächeninhalte von Rechteck und Parallelogramm zueinander!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabe ist $EFGH$ ein Parallelogramm. Daraus folgt: $HE = GF$, $HG = EF$, $\angle HEG \cong \angle FGE$ und $\angle AEG \cong \angle CGE$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.
Also gilt: $\angle AEH \cong \angle CGF$. Mithin ist $\triangle AEH \cong \triangle CGF$ (sww). Analog lässt sich zeigen, dass $\triangle BEF \cong \triangle DGH$ gilt.

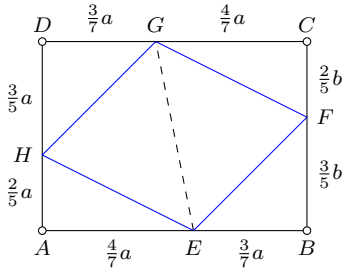
Folglich gilt: $AE = CG$, $BE = DG$, $AH = CF$, $DH = BF$, und es gibt genau die folgenden 4 Möglichkeiten, einem Rechteck $ABCD$ ein Parallelogramm $EFGH$ in der geforderten Weise einzubeschreiben (siehe Abbildungen).
Dabei kann man Figur 3 durch eine Spiegelung der Figur 1 und Figur 4 durch eine Spiegelung der Figur 2 an der Mittelsenkrechten zu AB gewinnen. Es sind daher die folgenden beiden Fälle zu betrachten:



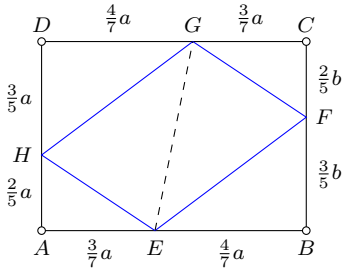
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4

Fall 1:
Es sei $DH : HA = BF : FC = 2 : 3$ und $AE : EB = CG : GD = 3 : 4$.
Dann ist der Flächeninhalt A_P des Parallelogramms $EFGH$ gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt A_R des Rechtecks $ABCD$ und der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle AEH$, $\triangle EBF$, $\triangle FCG$ und $\triangle GDH$. Also gilt

$$\begin{aligned} A_P &= ab - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{3}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}a\cdot\frac{2}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{3}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}a\cdot\frac{2}{5}b\right) \\ &= ab - \left(\frac{9}{35}ab + \frac{8}{35}ab\right) = \frac{18}{35}ab \end{aligned}$$

Daraus folgt $A_R : A_P = 35 : 18$.

Fall 2:
Es sei $DH : HA = BF : FC = 2 : 3$ und $AE : EB = CG : GD = 4 : 3$.
Analog wie im Fall 1 erhält man dann

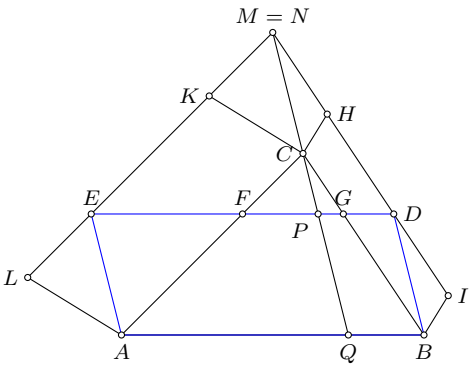
$$A_P = ab - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}a\cdot\frac{3}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{2}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}a\cdot\frac{3}{5}b + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}a\cdot\frac{2}{5}b\right) = ab - \left(\frac{12}{35}ab + \frac{6}{35}ab\right) = \frac{17}{35}ab$$

Daraus folgt $A_R : A_P = 35 : 17$.

Aufgabe 120833:
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$. Über der Seite AB sei ein Parallelogramm $ABDE$ so errichtet, dass dessen Seite DE mit auf derselben Seite der Geraden durch A und B liegt, dass dabei aber die Punkte D und A nicht auf derselben Seite der Geraden durch B und C liegen und dass außerdem die Punkte E und B nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegen. Ferner seien über den Seiten BC und AC je ein Parallelogramm $CBIH$ bzw. $ACKL$ derart errichtet, dass D auf der Geraden durch I und H sowie E auf der Geraden durch K und L liegt.

Beweise, dass dann der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABDE$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $BIHC$ und $CKLA$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

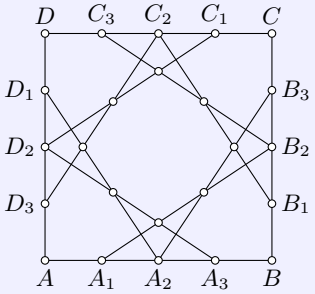


Falls benötigt, werden die Parallelogramme $BIHC$ und $CKLA$ wie folgt in flächeninhaltsgleiche Parallelogramme verwandelt:
Man zieht durch C die Parallele zu den parallelen Parallelogrammseiten BD und EA. Ihre Schnittpunkte mit ED bzw. AB seien P bzw. Q genannt. Die Gerade durch K und L schneide die genannte Parallele durch C in einem Punkt M, die Gerade durch I und H schneide sie in einem Punkt N.

Dann sind $ACME$ und $CBDN$ ebenfalls Parallelogramme, und es gilt $EA = MC$ sowie $BD = NC$, woraus wegen $EA = BD$ folgt, dass $M = N$ ist.

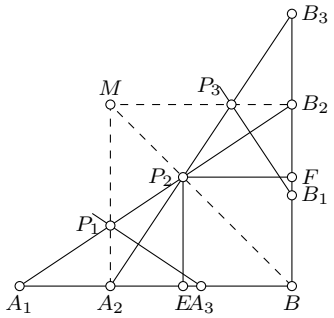
Als Parallelogramme mit gleicher Grundseite und gleicher zugehöriger Höhe sind nun folgende Parallelogramme paarweise inhaltsgleich: einerseits $ACKL$, $ACME$ und $AQPE$, andererseits $BIHC$, $BDMC$ und $BDPQ$.
Da der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABDE$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $AQPE$ und $BDPQ$ ist, ist er mithin auch gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $ACKL$ und $BIHC$, w. z. b. w.

Aufgabe 130833:
In einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a werde die Seite AB durch die Punkte A_1, A_2, A_3, die Seite BC durch die Punkte B_1, B_2, B_3, die Seite CD durch C_1, C_2, C_3 und DA durch die Punkte D_1, D_2, D_3 jeweils in 4 gleichlange Teilstrecken geteilt. Ferner seien die Strecken A_1B_2, A_2B_3, B_1C_2, B_2C_3, C_1D_2, C_2D_3, D_1A_2 und D_2A_3 eingezeichnet. Von den Schnittpunkten dieser Strecken miteinander seien die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 wie in der Abbildung bezeichnet.



Berechne den Flächeninhalt des Achtecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ in Abhängigkeit von a!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man kann den Flächeninhalt A_n des Achtecks berechnen, indem man vom Flächeninhalt des Quadrats $ABCD$ den vierfachen Flächeninhalt des Sechsecks $A_2BB_2P_3P_2P_1$ subtrahiert.
Die Fußpunkte der Lote von P_2 auf AB bzw. BC seien E bzw. F. Dann ist $EBFP_2$ ein Quadrat.



Bezeichnet man seine Seitenlänge mit x, so gilt nach einem Teil des Strahlensatzes

$$\frac{3}{4}a : \frac{a}{2} = \left(\frac{3}{4}a - x\right) : x$$

woraus man $\frac{3}{2}x = \frac{3}{4}a - x$ und mithin $\frac{5}{2}x = \frac{3}{4}a$ bzw. $x = \frac{3}{10}a$ erhält.

Setzt man weiter $P_1A_2 = y$, so gilt nach dem Strahlensatz

$$\frac{3}{4}a : \frac{a}{2} = \frac{1}{4}a : y \qquad \text{also} \qquad \frac{3}{2}y = \frac{1}{4}a \qquad \text{bzw.} \qquad y = \frac{1}{6}a$$

Folglich gilt für den Flächeninhalt A_8 des Achtecks

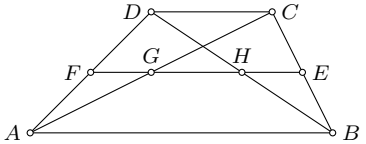
$$A_8 = a^2 - 4\frac{\frac{1}{6}a + \frac{3}{10}a}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}a - \frac{3}{10}a\right) \cdot 2 + \frac{9}{100}a^2 = a^2 - \frac{28}{75}a^2 - \frac{9}{25}a^2 = \frac{4}{15}a^2$$

Der gesuchte Flächeninhalt des Achtecks beträgt $\frac{4}{15}a^2$.

Aufgabe 140835:
Beweise folgenden Satz:

Verbindet man die Mittelpunkte der Diagonalen eines Trapezes, so erhält man eine (evtl. zu einem Punkt ausgeartete) Strecke, deren Länge halb so groß ist wie die Differenz der Längen der zwei parallelen Seiten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es seien A, B, C und D Eckpunkte des Trapezes, und es sei $AB \parallel CD$. Weiterhin seien E der Mittelpunkt der Seite BC, F der Mittelpunkt der Seite AD sowie G der Mittelpunkt der Diagonalen AC und H der Mittelpunkt der Diagonalen BD. Dann liegen nach der Umkehrung eines Teiles des Strahlensatzes und dem Satz über die Mittelparallele im Trapez $ABCD$ die Punkte G und H auf FE. Man wähle die Bezeichnung so, dass $AB \geq CD$ ist.

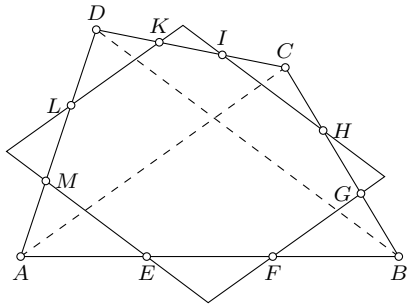
Behauptung: $GH = \frac{1}{2}(AB - CD)$
Beweis:
Aus dem Satz, dass in jedem Dreieck die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Seiten parallel zur dritten verläuft und halb so lang wie diese ist, oder nach der Umkehrung eines Teiles des Strahlensatzes folgt (1) $FH = \frac{1}{2}AB$ sowie (2) $FG = \frac{1}{2}CD$. Aus (1) und (2) folgt $FH - FG = \frac{1}{2}/AB - CD)$.

Aufgabe 150835:
Es ist zu beweisen: Wenn in einem konvexen Viereck $ABCD$

auf der Seite AB Punkte E und F so zwischen A und B liegen, dass $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ gilt, und
auf der Seite BC Punkte G und H so zwischen B und C Liegen, dass $\overline{BG} = \overline{GH} = \overline{HC}$ gilt, und
auf der Seite CD Punkte I und K so zwischen C und D liegen, dass $\overline{CI} = \overline{IK} = \overline{KD}$ gilt, und
auf der Seite DA Punkte L und M so zwischen D und A liegen, dass $\overline{DL} = \overline{LM} = \overline{MA}$ gilt,

so sind die Geraden durch M, E und I, H sowie die durch F, G und K, L jeweils parallel zueinander.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung gilt: $AM : AD = 1 : 3 = AE : AB$.
Daraus folgt nach der Umkehrung des 1. Teiles des Strahlensatzes $ME \parallel DB$. Ebenso folgt $IH \parallel DB$, also gilt $ME \parallel IH$.

Da ferner $ABCD$ konvex ist, liegt C und folglich auch IH außerhalb von $\triangle ABD$, während ME innerhalb $\triangle ABD$ liegt. Also sind die Gerade durch M, E und die Gerade durch I, H zwei voneinander verschiedene Parallelen. Die gleiche Aussage ergibt sich für die Gerade durch F, G und die Gerade durch L, K. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 150836:
Für ein Viereck $ABCD$ sei gefordert, dass die Summe der Längen der beiden Diagonalen AC und BD 11 cm beträgt, dass die Seite AB die Länge $a = 6$ cm und die Seite AD die Länge $d = 1$ cm haben soll.

Ermittle eine Länge x und eine Länge y so, dass für den Umfang u jedes Vierecks, das den angegebenen Forderungen genügt, die Ungleichung $x \leq u \leq y$ gilt, wobei das Gleichheitszeichen jeweils genau dann gilt, wenn das Viereck $ABCD$ zu einer Strecke entartet, d. h., wenn die Punkte A, B, C, D auf ein

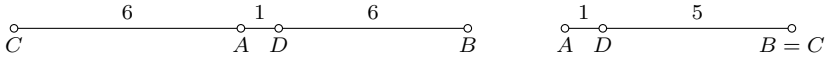
und derselben Geraden liegen!

Hinweis: $ABCD$ kann auch nicht-konvex sein. Ferner können beim Entartungsfall auch Punkte zusammenfallen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei $BC = b$, $CD = c$, $AC = e$, $BD = f$. Nach der Dreiecksungleichung, angewandt auf die Dreiecke ABD, ABC und ACD, gilt (alle Längenangaben in Zentimeter)

$$5 < f < 7 \tag{1}$$
$$6 - e < b < 6 + e \tag{2}$$
$$e - 1 < c < e + 1 \tag{3}$$

Aus (1) und $e + f = 11$ folgt $4 < e < 6$ (4). Aus (2), (3) und (4) folgt $5 < b + c < 2e + 7 < 19$. Hieraus und aus $u = b + c + 7$ folgt $12 < u < 26$. Wie die Abbildung zeigt, treten diese Längen $x = 12$ (cm) und $y = 26$ (cm) im Entartungsfall tatsächlich auf, sind daher die gesuchten Längen. Daher gilt $12 \leq u \leq 26$.



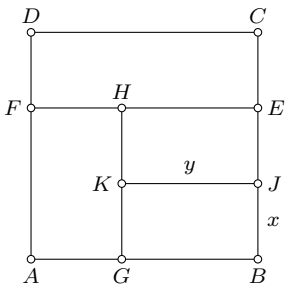
Aufgabe 190833:
Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a.

Eine Parallele zu AB schneide die Seiten BC und AD in den Punkten E bzw. F, eine Parallele zu BC schneide AB und EF in den Punkten G bzw. H, und eine Parallele zu AB schneide die Strecken BE und GH in den Punkten J bzw. K.

a) Ermittle den Umfang des Rechtecks $KJEH$ in Abhängigkeit von a unter der Bedingung, dass die Rechtecke $AGHF$, $GBJK$, $KJEH$ und $FECD$ untereinander flächeninhaltsgleich sind!

b) Ermittle den Flächeninhalt des Rechtecks $KJEH$ in Abhängigkeit von a unter der Bedingung, dass die Rechtecke $AGHF$, $GBJK$, $KJEH$ und $FECD$ untereinander umfangsgleich sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Nach Voraussetzung hat jedes der vier genannten Rechtecke den Flächeninhalt $\frac{a^2}{4}$. Daraus folgt

$$DP = \frac{a^2}{4} : CD = \frac{a}{4} \quad ; \quad AF = \frac{3}{4}a$$
$$FH = \frac{a^2}{4} : AF = \frac{a^2}{4} : \frac{3}{4}a = \frac{a}{3} \quad ; \quad EH = \frac{2}{3}a$$
$$EJ = \frac{a^2}{4} : EH = \frac{a^2}{4} : \frac{2}{3}a = \frac{3}{8}a$$

Also ist der gesuchte Umfang $2EH = 2EJ = \frac{4a}{3} + \frac{3a}{4} = \frac{3}{8}a$.

b) Wir setzen $BJ = x$, $KJ = y$. Da die Rechtecke $GBJK$ und $KJEH$ umfangsgleich sind, ist $2(x + y) = 2(JE + y)$, also $JE = x$.
Da $AGHF$, $GBJK$ und $FECD$ umfangsgleich sind, ist die Summe der halben Umfänge von $AGHF$ und $GBJK$ gleich dem Umfang von $FECD$, also $FA + AG + GB + BJ = 2(CD + CE)$, d. h.

$$3x + a = 2(a + a - 2x)$$

Daraus folgt $x = \frac{3}{7}a$. Da $AGHF$ und $GBJK$ umfangsgleich sind, gilt $FA + AG = GB + BJ$, d. h.

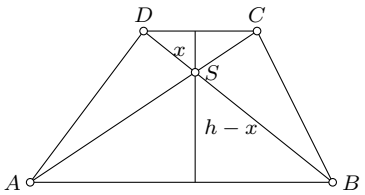
$$\frac{6}{7}a + a - y = y + \frac{3}{7}a$$

Daraus folgt $y = \frac{5}{7}a$. Also ist der gesuchte Flächeninhalt $xy = \frac{15}{49}a^2$.

Aufgabe 210834:
Von einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, dessen Diagonalenschnittpunkt S genannt sei, wird vorausgesetzt, dass $\overline{AB} = 2{,}5$ cm gilt.

Untersuche, ob bereits durch diese Voraussetzung das Verhältnis des Flächeninhaltes des Dreiecks ABS zu dem des Trapezes $ABCD$ eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, so ermittle dieses Verhältnis!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$; sein Diagonalenschnittpunkt sei S. Der Abstand zwischen den Parallelen AB und CD betrage h, der Abstand des Punktes S von CD sei x. Dann ist $h - x$ sein Abstand von AB. Nach dem Strahlensatz gilt

$$x : (h - x) = SC : SA = CD : AB = 1 : 2, \qquad \text{also} \qquad 2x = h - x \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{3}h$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABS beträgt

$$\frac{1}{2}AB \cdot (h - x) = \frac{1}{2}AB \cdot \frac{2}{3}h = \frac{1}{3}AB \cdot h$$

der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ beträgt

$$\frac{1}{2}(AB + CD) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}AB \cdot h = \frac{3}{4}AB \cdot h$$

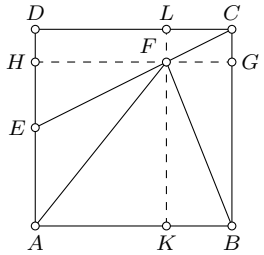
Daher ist das gesuchte Verhältnis eindeutig bestimmt; es beträgt $\frac{1}{3} : \frac{3}{4} = 4 : 9$.

Aufgabe 230832:
Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a. Der Mittelpunkt der Seite AD sei E. Auf der Strecke CE sei F derjenige Punkt, für den $\overline{CF} : \overline{FE} = 1 : 2$ gilt.

a) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Flächeninhalte der Dreiecke BCF und AEF einander gleich sind!

b) Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks ABF in Abhängigkeit von a!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Die Parallele durch F zu DC schneide AD in H und BC in G. Da sie auf BC und AD senkrecht steht, ist FG bzw. FH im Dreieck BCF bzw. AEF die zu BC bzw. AE senkrechte Höhe.

Für die Flächeninhalte $J(BCD)$, $J(AEP)$ dieser Dreiecke gilt also

$$J(BCF) = \frac{1}{2}BC \cdot FG \quad ; \quad J(AEF) = \frac{1}{2}AE \cdot FH \tag{1}$$

Wegen $BC \parallel AD$ folgt ferner nach dem Strahlensatz $FG : FH = FC : CE = 1 : 2$, also $FG = \frac{1}{2}FH$ (2).

Da E der Mittelpunkt von AD ist und $BC = AD$ ist, gilt

$$BC = 2 \cdot AE \tag{3}$$

Aus (1),(2),(3) folgt $J(BCF) = J(AEF)$, w. z. b. w.

b) Aus $FE = 2 \cdot CF$ (und $CF + FE = CE$) folgt $CF = \frac{1}{3}CE$.
Die Parallele durch F zu BC schneide AB in K und DC in L. Nach dem Strahlensatz gilt dann

$$FL : ED = CF : CE = 1 : 3$$

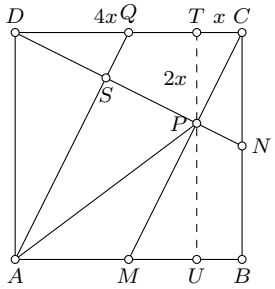
also $FL = \frac{1}{3}ED = \frac{1}{6}a$. Daher hat im Dreieck ABF die auf AB senkrechte Höhe die Länge $KF = KL - FL = \frac{5}{6}a$. Folglich hat das Dreieck ABF den Flächeninhalt

$$J(ABF) = \frac{1}{2}AB \cdot KF = \frac{5}{12}a^2$$

Aufgabe 280832:
Beweise den folgenden Satz!

Wenn $ABCD$ ein Quadrat ist, M der Mittelpunkt von AB, N der Mittelpunkt von BC und P der Schnittpunkt der Strecken CM und DN ist, dann gilt $\overline{AD} = \overline{AP}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung gilt $BC = CD$ (Quadratseiten), $BM = BN$ (halbe Quadratseiten), $\angle CBM = \angle DCN =) = °$. Nach dem Kongruenzsatz sws ist folglich $\triangle BCM \cong \triangle CDN$ und somit $\angle BCM = \angle CDN = \angle CDP$. (1)

Wegen $\angle BCM + \angle PCD = 90°$ gilt daher auch $\angle CDP + \angle PCD = 90°$. Daraus folgt nach dem Innenwinkelsatz $\angle CPD = 90°$, d. h. $CM \perp DN$. (2)

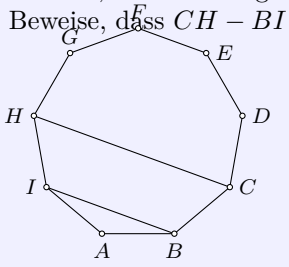
Es sei Q der Mittelpunkt von CD und S der Schnittpunkt der Strecken AQ und DN. Dann gilt: $DA = BC$ (Quadratseiten), $DQ = BM$ (halbe Quadratseiten), $\angle ADQ = \angle CBM = 90°$.
Nach dem Kongruenzsatz sws ist folglich $\triangle DAQ \cong \triangle BCM$ und somit $AQ = CM$. Ferner ist $AM = CQ$ (halbe Quadratseiten); also ist $AMCQ$ ein Parallelogramm. Somit gilt $AQ \parallel CM$. (3)
Wegen (2) ergibt sich daher $AQ \perp DN$, d. h. $\angle ASD = \angle ASP = 90°$ (4)

Aus (3) folgt nach dem Strahlensatz $DS : SP = DQ : QC = 1 : 1$, also $DS = PS$. (5)

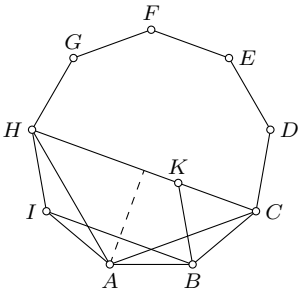
Aus (4), (5) und $AS = AS$ folgt nach dem Kongruenzsatz sws $\triangle ADS \cong \triangle APS$ und damit $AD = AP$, w. z. b. w.

Aufgabe 330832:
Die Abbildung zeigt ein regelmäßiges Neuneck $ABCDEFGHI$, d. h. ein Neuneck, bei dem alle Seiten dieselbe Länge und alle Innenwinkel dieselbe Größe haben.

a) Beweise, dass die Diagonalen BI und CH zueinander parallel sind!
b) Beweise, dass $CH - BI = BC$ gilt!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Nach Voraussetzung ist $AB = BC = AI = IH$ (1); ferner gilt für die Innenwinkel im regelmäßigen Neuneck $\angle ABC = \angle AIH = \angle IAB = 14°$. (2)

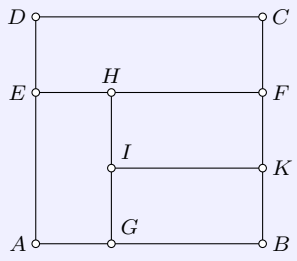
Aus (1) und (2) folgt $\triangle ABC \cong \triangle AIH$ also $\angle BAC = \angle IAH$ (3) und $CA = HA$.
Im somit gleichschenkligen Dreieck CHA ist die Höhe auf CH zugleich Winkelhalbierende von $\angle CAH$. Wegen (3) halbiert sie auch $\angle BAI$ und ist daher auch im gleichschenkligen Dreieck BIA die Höhe auf BI.

Da BI und CH also auf derselben Geraden senkrecht stehen, sind sie zueinander parallel.

b) Für den Schnittpunkt K von CH mit der Parallelen durch B zu IH gilt:
Im Parallelogramm $IBKH$ ist $KH = BI$ (4) und $BK = IH$, nach (1) also auch $BK = BC$. (5)
Nach dem Innenwinkelsatz für das gleichschenklige Dreieck BIA gilt wegen (2) ferner $\angle BIA = \frac{1}{2}(180° - 140°) = 20°$, also nochmals wegen (2) $\angle BIH = 140° - 20° = 120°$.
Als Gegenwinkel im Parallelogramm $IBKH$ hat dann auch $\angle BKH$ die Größe 120°, somit gilt $\angle BKC = 60°$. (6)

Nach (5) und (6) ist das Dreieck BCK gleichseitig. Damit und wegen (4) ergibt sich $BC = CK = CH - KH = CH - BI$, w. z. b. w.

Aufgabe 330842:



Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a. Eine Parallele zu AB schneide die Seiten AD und BC in E bzw. F, eine Parallele zu AD schneide die Strecke AB und EF in G bzw. H, eine Parallele zu AB schneide die Strecken GH und BC in I bzw. K (siehe Abbildung).

a) Außer diesen Voraussetzungen soll die Bedingung erfüllt werden, dass die vier Rechtecke $EFCD$, $AGHE$, $GBKI$ und $IKFH$ untereinander flächengleich sind.
Ermittle unter dieser Bedingung den Umfang des Rechtecks $IKFH$ in Abhängigkeit von a!
b) Anstelle der in a) genannten Bedingung soll nun die Bedingung erfüllt werden, dass die vier Rechtecke $EFCD$, $AGHE$, $GBKI$, $IKFH$ untereinander umfangsgleich sind.
Ermittle unter dieser Bedingung den Flächeninhalt des Rechtecks $IKFH$ in Abhängigkeit von a!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wegen der zu erfüllenden Bedingung hat jedes der vier Rechtecke $EFCD$, $AGHE$, $GBKI$, $IKFH$ den Flächeninhalt $\frac{1}{4}a^2$. Daraus folgt

$$ED = \frac{1}{4}a^2 : a = \frac{1}{4}a \quad ; \quad AE = a - \frac{1}{4}a = \frac{3}{4}a \quad ; \quad AG = \frac{1}{4}a^2 : \frac{3}{4}a = \frac{1}{3}a$$

$$GB = IK = a - \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a \quad ; \quad GI = IH = \frac{1}{4}a^2 : \frac{2}{3}a = \frac{3}{8}a$$

Der Umfang des Rechtecks $IKFH$ beträgt somit $2 \cdot (IK + IH) = \frac{25}{12}a$.

b) Für die Längen $ED = FC = x$ und $AG = y$ folgt aus der Umfangsgleichheit von $EFCD$ mit $AGHI$, dass $2 \cdot (a + x) = 2 \cdot (y + a - x)$, also $y = 2x$ gilt.
Wegen der Umfangsgleichheit von $GBKI$ mit $IKFH$ ist ferner $2 \cdot (IK + BK) = 2 \cdot (IK + KF)$, also $BK = KF = \frac{1}{2}(a - x)$.

Die Umfangsgleichheit von $EFCD$ mit $GBKI$ ergibt daher die Gleichung

$$2 \cdot (a + x) = 2 \cdot \left(a - y + \frac{1}{2}(a - x)\right) \qquad \text{also} \qquad 7x = a$$

Somit erhält man $x = \frac{1}{7}a$, $y = \frac{2}{7}a$, $IK = a - y = \frac{5}{7}a$, $KF = \frac{1}{2}1(a - x) = \frac{3}{7}a$; das Rechteck $IKFH$ hat den Flächeninhalt $IK \cdot KF = \frac{15}{49}a^2$.

Aufgabe 340833:
Für vier Punkte A, B, C, D in einer Ebene werde vorausgesetzt:

$$\overline{AB} = 6 \text{ cm}, \qquad \overline{AD} = 1 \text{ cm und} \qquad \overline{AB} + \overline{BD} = 11 \text{ cm}. \qquad (*)$$

Gesucht werden zwei Längenangaben x und y so, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

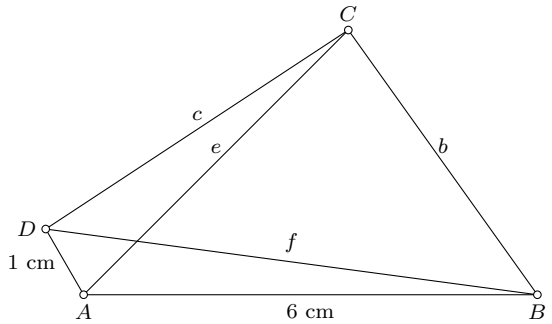
(1) Für je vier Punkte, die die Voraussetzung (*) erfüllen, gilt stets $x \le \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} \le y$.

(2) Wenn außer (*) auch $x = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$ gilt, liegen A, B, C, D auf einer gemeinsamen Geraden.

(3) Wenn außer (*) auch $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = y$ gilt, liegen A, B, C, D auf einer gemeinsamen Geraden.

Nenne zwei Längen x, y und beweise, dass sie diese Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für je vier Punkte A, B, C, D, die die genannten Voraussetzungen erfüllen, gilt mit den Bezeichnungen b, c, e, f für die Maßzahlen der in cm gemessenen Längen BC, CD, AC bzw. BD (siehe Abbildung)



Nach der Dreiecksungleichung für Dreieck ABD ist $5 \le f \le 7$ (1,1')
Nach der Dreiecksungleichung für Dreieck ABC ist $6 - e \le b \le 6 + e$ (2,2')
Nach der Dreiecksungleichung für Dreieck ACD ist $c - 1 \le e \le c + 1$ (3,3')

Nach der Dreiecksungleichung für Dreieck BCD ist $b - c \leq f \leq b + c$ (2,2')

Aus (1',1) und der Voraussetzung $AC + BD = 11$ cm, d. h. $e + f = 11$, (5) folgt $4 < e < 6$. (6,6')
Aus (2) und (3') folgt $5 \leq b + c$, aus (2'), (3) und (6') folgt $b + c \leq 2e + 7 \leq 19$. (7)
Die somit gefundenen Ungleichungen $5 \leq b + c \leq 19$ besagen wegen $AB = 6$ cm, $AD = 1$ cm: Für je vier Punkte A, B, C, D, die die Voraussetzungen (*) erfüllen, gilt

$$12cm \leq AB + BC + CD + DA \leq 26cm$$

Wenn speziell 12 cm $= AB + BC + CD + DA$, also $b + c = 5$ gilt, so folgt nach (4'): Es gilt $f \leq 5$, nach (5) also $e \geq 6$. Zusammen mit (6') und nochmals (5) besagt dies $e = 6$, $f = 5$.
Damit hat man aus $AB = 6$ cm , $AD = 1$ cm, $f = 5$ bzw. aus $b + c = f$ die Schlussfolgerungen, dass D auf der Strecke AB, C auf der Strecke BD liegen muss.

Daraus folgt: A, B, C, D liegen auf einer gemeinsamen Geraden; es folgt sogar $B = C$.

Wenn aber speziell $AB + BC + CD + DA = 26$ cm, also $b + c = 19$ gilt, so folgt aus (7), dass $b + c = 2e + 7 = 19$, also $e = 6$ gilt. Nach (5) folgt $f = 5$.
Aus (4) erhält man damit $2b \leq b + c + f = 19 + 5$, also $b \leq 12$; aus (3) erhält man $b + c \leq b + e + 1$, also $19 \leq b + 7$, $12 < b$. Es folgt $b = 12$ und $c = 7$.

Damit hat man aus $AB = 6$ cm, $b = 12$, $e = 6$ bzw. aus $b = 12$, $c = 7$, $f = 5$ die Schlussfolgerungen, dass A auf der Strecke BC, D auf der Strecke BC liegen muss.
Daraus folgt: A, B, C, D liegen auf einer gemeinsamen Geraden.

Die Bedingungen (1), (2) und (3) werden also von den Längen $x = 12$ cm und $y = 26$ cm erfüllt.

Aufgabe 340835:
Auf dem Rand eines Quadrates $ABCD$ mit gegebener Seitenlänge a seien P_1, P_2, P_3 die folgenden Punkte: Es liege P_1 so auf BC, dass $\overline{BP_1} = \overline{P_1C}$ gilt, P_2 so auf CD, dass $\overline{P_2D} = 3 \cdot \overline{CP_2}$ gilt, P_3 so auf DA, dass $\overline{P_3A} = 3 \cdot \overline{DP_3}$.

Ein Punkt X bewegt sich auf den Strecken P_1B, BA, AP_3 von P_1 nach P_3. Gesucht sind auf diesem Weg (einschließlich seines Anfangs- und Endpunktes) alle diejenigen Punkte X, für die der Flächeninhalt des Vierecks $XP_1P_2P_3$

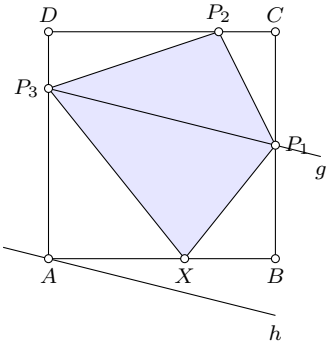
a) möglichst klein,

b) möglichst groß ist.

Finde alle diese Punkte und berechne für jeden von ihnen auch jeweils den Flächeninhalt des Vierecks $XP_1P_2P_3$!

Hinweis: Für ein Viereck wird in dieser Aufgabe auch zugelassen, dass es „zum Dreieck entartet“, wenn nämlich zwei seiner Eckpunkte miteinander zusammenfallen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Das Viereck $XP_1P_2P_3$ setzt sich zusammen aus dem Dreieck XP_1P_3 und dem Dreieck $P_1P_2P_3$ bzw. es ist in den Fällen $X = P_1, X = P_3$ gleich dem letztgenannten Dreieck.
Daher ist sein Flächeninhalt genau in diesen beiden Fällen möglichst klein; und möglichst groß ist er genau dann, wenn der Flächeninhalt des Dreiecks XP_1P_3 möglichst groß ist.

Das ist genau dann der Fall, wenn der Abstand des Punktes X von der durch P_1 und P_3, gelegten Geraden g möglichst groß ist. Dies gilt genau für $X = A$.

Beweis (siehe Abbildung):
Die Parallele h durch A zu g hat wegen $P_3A > P_1B$ mit dem Quadrat $ABCD$, also auch mit dem gesamten Weg des Punktes X nur den Punkt A gemeinsam. Alle Punkte dieses Weges außer A liegen folglich in dem von g und h eingeschlossenen Parallelstreifen, näher an g als der Punkt A. Damit sind die in (a) und (b) gesuchten Punkte X gefunden.

Wegen $CD = a$ und $P_1C = \frac{1}{2}a$, $P_3D = \frac{1}{4}a$ hat das Trapez P_1CDP_3 den Flächeninhalt

$$F(P_1CDP_3) = a \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a\right) = \frac{3}{8}a^2$$

da außerdem $P_2C = \frac{1}{4}a$ und $P_2D = \frac{3}{4}a$ gilt, ist weiter

$$F(P_1CP_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{4}a = \frac{1}{16}a^2$$
$$F(P_2DP_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}a \cdot \frac{1}{4}a = \frac{3}{32}a^2$$

für die zu (a) gefundenen Punkte $X = P_1$ und $X = P_3$ ergibt sich damit als Flächeninhalt von $XP_1P_2P_3$

$$F(P_1P_2P_3) = F(P_1CDP_3) – F(P_1CP_2) – F(P_2DP_3) = \frac{7}{32}a^2$$

Mit $AB = a$ und $BP_1 = \frac{1}{2}a$ erhält man $F(ABP_1) = \frac{1}{4}a^2$ und damit für den zu (b) gefundenen Punkt $X = A$ als Flächeninhalt von $XP_1P_2P_3$:

$$F(P_1P_2P_3) = F(ABCD) - F(P_1CP_2) – F(P_2DP_3) - F(ABP_1) = \frac{19}{32}a^2$$

IV.III Kreise

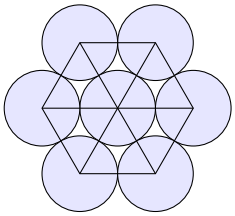
I Runde 1

Aufgabe 010815:
Bei einem mehradrigen Kabel werden Adern gleichen Durchmessers um eine Mittelader vom gleichen Durchmesser so angeordnet, dass sie einander berühren.

a) Wie viel Adern braucht man?

b) Beweise diese Behauptung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

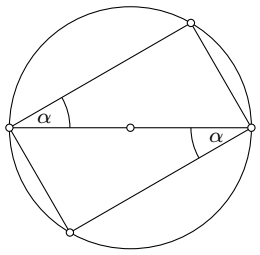


Um einen Kreis können genau sechs Kreise gleichen Durchmessers so angeordnet werden, dass sie sich gegenseitig berühren.
Die Kreismittelpunkte der äußeren Kreise liegen dann auf den Eckpunkten eines regelmäßigen Sechsecks. Man benötigt mit der Mittelader genau 7 Adern.

Aufgabe 030815:
In einem Kreis werden durch die Endpunkte eines Durchmessers parallele Sehnen gezogen.

Beweise, dass diese Sehnen stets gleichlang sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



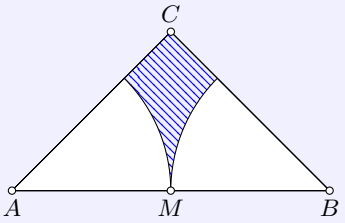
Beweis: Zusätzlich zur beschriebenen Konstruktion kann man noch die beiden Sehnen ziehen, die den Durchmesser und je eine Sehne zu einem Dreieck vervollständigt. Dann reicht es zu beweisen, dass beide Dreiecke kongruent sind.

Die beiden ursprünglichen Sehnen und der Durchmesser bilden Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen (α).

Nach dem Satz des Thales sind die beiden Dreiecke rechtwinklig; und sie haben eine Seite, den Durchmesser, gemeinsam. Aus Kongruenzsatz WSW folgt, dass beide Dreiecke kongruent und damit beide Sehnen gleich lang sind. □

Aufgabe 060811:
In dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit $\overline{AB} = c = 7$ cm und $\angle ACB = \gamma = 90°$ seien um die Punkte A und B Kreisbögen mit einem Radius von der Länge $\frac{7}{2}$ cm geschlagen (siehe Abbildung).

Ermittle den Inhalt I_F der in der Abbildung schraffiert gezeichneten Fläche!



Lösung von Manuela Kugel:
Bezeichnet man den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ mit I_{F_1}, die Flächeninhalte der im Innern des Dreiecks gelegenen Kreisausschnitte mit I_{F_2} und I_{F_3}, dann gilt für den gesuchten Flächeninhalt I_F:

$$I_F = I_{F_1} - (I_{F_2} + I_{F_3})$$

Bezeichnet M den Mittelpunkt von AB, so hat das Dreieck $\triangle ABC$ die Höhe MC, ihre Länge beträgt $\frac{7}{2}$ cm. Daher gilt für I_{F_1}:

$$I_{F_1} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \frac{7}{2}\text{cm}^2 = \frac{49}{4}\text{cm}^2$$

Die beiden Kreisausschnitte mit den Flächeninhalten I_{F_2} und I_{F_3} lassen sich zu einem Viertelkreis zusammenlegen. Also gilt $I_{F_2} + I_{F_3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{49}{4}\pi\text{cm}^2$. Mithin gilt für I_F:

$$I_F = I_{F_1} - (I_{F_2} + I_{F_3}) = \frac{49}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\ \text{cm}^2 \approx 2{,}63\text{cm}^2$$

Der Flächeninhalt der in der Abbildung schraffiert gezeichneten Fläche beträgt also $I_F \approx 2{,}63\text{cm}^2$.

Aufgabe 080812:



Die Abbildung zeigt die 400 m lange Laufstrecke auf der Innenbahn eines Stadions. Die Laufstrecke werde idealisiert dargestellt durch zwei Halbkreise und die je 90 m langen Seiten eines Rechtecks. Bei einem 10000-m-Lauf beobachten wir, dass ein Läufer während einer ganzen Runde nicht innen, sondern weiter außen auf der 2. Bahn, und zwar stets 1 m von der gezeichneten Laufstrecke entfernt, läuft.

Wie viel Meter mehr als 400 m legt er während dieser Runde zurück?

Anmerkung: Setze für π die Zahl $\frac{22}{7}$, und runde die Ergebnisangabe auf volle Meter!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Im Folgenden werden die Maßzahl des Kreisumfanges, die Maßzahl des Kreisdurchmessers und die Maßzahl des zurückgelegten Weges mit u, d bzw. s bezeichnet. Dann gilt

$$u = 400 - 180 = 220 \tag{1}$$

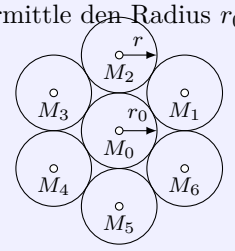
Wegen $d = \frac{u}{\pi}$ ist $d \approx \frac{220 \cdot 7}{22} = 70$.
Ferner besteht die 2. Bahn aus zwei zu den Halbkreisen der 1. Bahn jeweils konzentrischen Halbkreisen von um 1 m größerem Radius sowie aus zwei Strecken von je 90 m Länge. Also gilt

$$s = 72 \cdot \pi + 2 \cdot 90 \qquad ; \qquad s \approx 226 + 180 = 406 \tag{2}$$

Der Läufer legt daher während dieser Runde etwa 6 m mehr zurück.

Aufgabe 090812:
Gegeben seien in der Ebene ein Kreis k_0 und 6 Kreise vom Radius r, deren jeder in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise genau zwei von ihnen und außerdem den Kreis k_0 von außen berührt.

Ermittle den Radius r_0 des Kreises k_0!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, M_0 sei der Mittelpunkt und r der Radius eines Kreises k_0, zu dem 6 Kreise der gesuchten Art existieren; deren Mittelpunkte seien $M_1, M_2, ..., M_6$. Dann entstehen 6 kongruente gleichschenklige Dreiecke

$$\triangle M_1M_0M_2, \quad \triangle M_2M_0M_3, \quad ... \quad \triangle M_6M_0M_1 \tag{1}$$

also wird $\angle M_1M_0M_2 \cong \angle M_2M_0M_3 \cong ... \cong \angle M_6M_0M_1$, und da die Summe dieser Winkel 360° beträgt, hat jeder von ihnen eine Größe von 60°. Die Dreiecke (1) sind somit gleichseitig, und es folgt $r_0 + r = 2r$, also $r_0 = r$.

Umgekehrt sind für $r_0 = r$ die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt. Denn wählt man $M_0, M_1, ..., M_6$ so, dass $\triangle M_1M_0M_2$, $\triangle M_2M_0M_3$, ... $\triangle M_5M_0M_6$ gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $2r$ sind, so wird $\triangle M_6M_0M_1$ gleichschenklig, mit $\angle M_6M_0M_1 = 360° - 5 \cdot 60°$, also ebenfalls gleichseitig.
Daher berühren sich die Kreise um $M_0, M_1, ..., M_6$ mit dem Radius r in der vorgeschriebenen Weise.

Aufgabe 140813:
Gegeben sei ein Kreis k_1 mit dem Radius r_1 und dem Mittelpunkt M. Um M ist ein Kreis k_2 derart zu zeichnen, dass die zwischen k_1 und k_2 gelegene Kreisringfläche einen dreimal so großen Inhalt hat wie die Fläche des Kreises k_1.

Berechne den Radius r_2 des Kreises k_2!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Flächeninhalt A_1 der Kreisfläche des Kreises k_1 beträgt $A_1 = \pi r_1^2$, der Inhalt A_R einer Kreisringfläche zwischen k_1 und einem Kreis k_2 mit dem Radius r_2 und dem Mittelpunkt M ist

$$A_R = \pi(r_2^2 - r_1^2)$$

Daher ist die in der Aufgabenstellung geforderte Bedingung genau dann erfüllt, wenn $3\pi r_1^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit $4r_1^2 = r_2^2$ und dies wegen $r_1 > 0, r_2 > 0$ mit $2r_1 = r_2$.

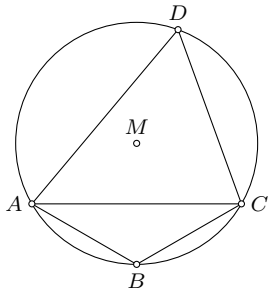
Der Kreis k_2 hat somit genau dann die geforderte Eigenschaft, wenn sein Radius doppelt so groß ist wie der des Kreises k_1.

Aufgabe 140814:
Für zwei Sehnen AB und BC ($A \neq C$) eines Kreises k gelte $\overline{AB} = \overline{BC}$. D sei ein beliebiger Punkt von k, der auf der anderen Seite der Geraden durch A und C liegt wie B.

Es ist zu beweisen, dass die Gerade durch D und B den Winkel $\angle ADC$ halbiert!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Um den Peripheriewinkelsatz anwenden zu können, beweisen wir zunächst, dass D und C auf demselben von A und B begrenzten Bogen von k liegen.

Würden D und C auf verschiedenen von A und B begrenzten Bögen von k liegen, dann müsste die Sehne AB die Sehne DC schneiden. Nun liegen laut Aufgabe D und B auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und C. Wegen $A \neq C$ liegen daher auch DC und AB auf verschiedenen Seiten dieser Geraden und können sich mithin nicht schneiden.



Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt nun

$$(1) \quad \angle ADB = \angle ACB \qquad ; \qquad (2) \quad \angle BDC = \angle BAC$$

Da ABC gleichschenklig mit $AB = BC$ ist, gilt (3) $\angle ACB = \angle BAC$. Aus (1), (2), (3) folgt $\angle ADB = \angle BDC$, w. z. b. w.

Aufgabe 160814:
Peter stellt seinem Freund Fritz folgende Aufgabe:

> „Gegeben sei ein Kreis, dessen Durchmesser gleich dem Erddurchmesser ist, und ein zweiter dazu konzentrischer Kreis, dessen Umfang 1 m länger als der Umfang des ersten Kreises ist. Ermittle den Abstand beider Kreislinien voneinander!“

Nach kurzem Überlegen nennt Fritz diesen Abstand und behauptet:

> „Wenn der erste Kreis nur den Durchmesser einer Stecknadelkuppe (1 mm) besitzt, und der Umfang des zweiten konzentrischen Kreises wiederum 1 m länger als der des ersten Kreises ist, dann ist der Abstand dieser beiden Kreise genau so groß wie in deiner Aufgabe.“

Stimmt diese Behauptung von Fritz?

Wie groß ist der Abstand der konzentrischen Kreislinien in beiden Fällen?

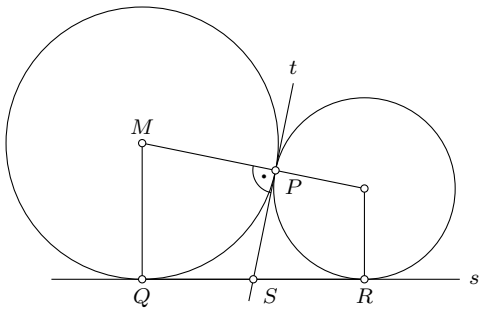
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist d der Erddurchmesser und u (in m) der Umfang des gegebenen kleineren Kreises, so gilt $\pi \cdot d = u$.
Ist x der in Peters Aufgabe gesuchte Abstand, so ist der Durchmesser des zweiten (größeren) Kreises $d + 2x$. Andererseits ist dessen Umfang $u + 1 = \pi d + 1$; also gilt $\pi(d + 2x) = \pi d + 1$, woraus $2\pi x = 1$, $x = \frac{1}{2\pi}$ folgt.

Analoge Schlüsse gelten aber auch für die Aufgabe von Fritz, wenn d (= 1 mm) = 0,001 m ist, da nämlich der erhaltene Wert $x = \frac{1}{2\pi}$ nicht von d abhängt. Somit stimmt die Behauptung von Fritz. Der gesuchte Abstand beträgt in beiden Fällen $\frac{1}{2\pi}$ (in m), das sind etwa 16 cm.

Aufgabe 190814:
Von zwei Kreisen werde vorausgesetzt, dass sie sich von außen in einem Punkt P berühren. Die Gerade, die beide Kreise in P berührt, sei t. Ferner sei s eine weitere gemeinsame Tangente beider Kreise; sie berühre diese in den Punkten Q bzw. R. Der Schnittpunkt von s mit t sei S.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen S der Mittelpunkt der Strecken QR ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

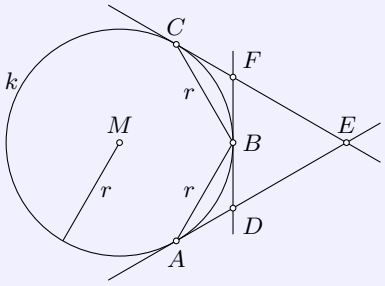


Der Mittelpunkt des von s in Q berührten Kreises sei M. Dann gilt $\triangle SQM \cong \triangle SPM$; denn diese Dreiecke stimmen in den Seitenlängen $SM = SN$, $MQ = MP$ und in der Größe $\angle SQM = \angle SPM$ desjenigen Winkels überein, der in beiden Dreiecken als rechter Winkel jeweils der größten Seite gegenüberliegt. Daher ist $SQ = SP$ (1) (entsprechende Seiten in kongruenten Dreiecken).
Ebenso folgt $SR = SP$. (2)

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung $SQ = SR$.

Aufgabe 200814:

Gegeben sei ein Kreis k mit dem Radius r. AB und BC seien zwei Sehnen der Länge r. In A, B und C seien die Tangenten an den Kreis gelegt. Diese ergeben Schnittpunkte D, E und F, wie im Bild angegeben.



Beweise aus diesen Voraussetzungen, dass das Dreieck DEF gleichseitig ist!

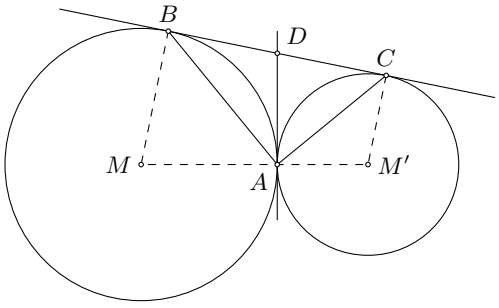
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist M der Mittelpunkt von k, so gilt nach Voraussetzung $MB \perp FD$. Ferner sind die Dreiecke ABM und BCM gleichseitig. Daher ist $\angle MBC = \angle MBA = 60°$.
Folglich gilt $\angle CBF = \angle ABD = 30°$.
Da $MC \perp EC$ und $\angle MCB = 60°$ gilt, folgt $\angle BCF = 30°$. Entsprechend erhält man $\angle BAD = 30°$.

Daraus folgt sowohl $\angle DFE = 60°$ (1) als auch $\angle FDE = 60°$ (2) als Außenwinkel der Dreiecke CBF bzw. ADB.
Aus (1) und (2) folgt, dass das Dreieck DEF gleichseitig ist; w. z. b. w.

Aufgabe 220814:
In einer Ebene seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die sich in einem Punkt A von außen berühren. Eine der gemeinsamen äußeren Tangenten von k_1 und k_2 berühre den Kreis k_1 in B, den Kreis k_2 in C.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\angle BAC$ ein rechter Winkel ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die gemeinsame innere (also durch A gehende) Tangente von k_1 und K_2 schneide die durch E und C gehende Tangente in D. Nach dem Satz von der Gleichheit der Tangentenabschnitte gilt dann

$$DB = DA = DC$$

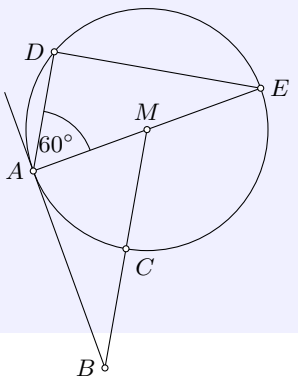
Daher liegt A auf dem Kreis mit BC als Durchmesser. Nach dem Satz des Thales ist somit $\angle BAC$ ein rechter Winkel.

Aufgabe 260813:
Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Vier Punkte A, C, E und D seien in dieser Reihenfolge auf k so gelegen, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind (siehe Bild):

(1) A, M und E liegen auf ein und derselben Geraden.

(2) Es gilt $\angle MAD = 60°$.

(3) Die Gerade durch M und C schneide die in A an k gelegte Tangente in einem Punkt B derart, daß $\overline{MC} = \overline{BC}$ gilt.



Untersuche, ob unter diesen Voraussetzungen die Strecken AB und DE die gleiche Länge haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Strecken AB und DE sind Seiten der Dreiecke MAB bzw. ADE. Kann man zeigen, dass diese beiden Dreiecke kongruent sind, so folgt $\overline{AB} = \overline{DE}$.

Der Radius von k sei r. Nach Voraussetzung (1) ist AE ein Durchmesser von k, also gilt $\overline{AE} = 2r$. Als Radius von k ist auch $\overline{MC} = r$. Nach (3) folgt hieraus $\overline{MB} = 2r$. Somit gilt

$$\overline{MB} = \overline{AE}. \tag{4}$$

Nach dem Satz von Thales gilt $\overline{\angle ADE} = 90°$. Da die Tangente senkrecht auf dem Berührungsradius steht, gilt $\overline{\angle MAB} = 90°$, also ist

$$\overline{\angle MAB} = \overline{\angle ADE}. \tag{5}$$

Da A und D auf k liegen, ist das Dreieck MAD gleichschenklig mit $\overline{MA} = \overline{MD}$. Für den Basiswinkel folgt aus (2) daher $\overline{\angle MDA} = \overline{\angle MAD} = 60°$, nach dem Innenwinkelsatz also $\overline{\angle AMD} = 60°$. Also ist das Dreieck MAD sogar gleichseitig, und es gilt

$$\overline{MA} = \overline{AD}. \tag{6}$$

In den Dreiecken MAB bzw. ADE liegt der in (5) genannte Winkel als rechter Winkel der größten Seite gegenüber, die in (4) genannt ist. Nach dem Kongruenzsatz sSW folgt somit $\triangle MAB \cong \triangle ADE$ und damit $\overline{AB} = \overline{DE}$.

Anderer Lösungsweg: Wie oben zeigt man (4) und (5). Nach der Umkehrung des Thalessatzes liegt nun A auf dem Kreis mit dem Durchmesser BM, der nach (3) als Mittelpunkt C hat. Somit ist $\overline{CA} = \overline{CM} = \overline{AM}$, also das Dreieck ACM gleichseitig, und es folgt

$$\overline{\angle BMA} = \overline{\angle CMA} = 60°,$$

nach (2) also weiter

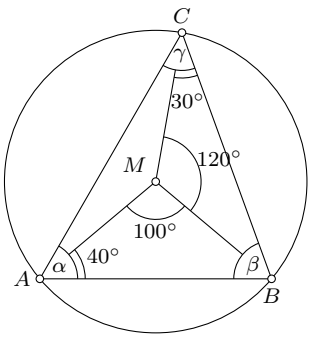
$$\overline{\angle BMA} = \overline{\angle MAD} = \overline{\angle EAD}. \tag{7}$$

Aus (4), (5), (7) folgt nach dem Kongruenzsatz wws, dass $\triangle MAB \cong \triangle ADE$, also $\overline{AB} = \overline{DE}$ gilt.

Aufgabe 280812:
Es sei M der Umkreismittelpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks ABC. Die Größe des Winkels $\angle BAM$ betrage 40° und die des Winkels $\angle BCM$ sei 30°.

Ermittle aus diesen Angaben die Größen α, β, γ der drei Innenwinkel des Dreiecks ABC!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da das Dreieck ABC spitzwinklig ist, liegt M innerhalb des Dreiecks. Da M Umkreismittelpunkt des Dreiecks ist, folgt ferner $AM = BM = CM$.

Somit sind die Dreiecke ABM, BCM und CAM gleichschenklig, und es gilt nach dem Basiswinkelsatz sowie nach dem Innenwinkelsatz

$$\beta = \angle CBA = \angle CBM + \angle ABM = \angle BCM + \angle BAM = 70°$$
$$\angle AMB = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$$
$$\angle BMC = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$$

Also ist $\angle AMC = 360° - 100° - 120° = 140°$ (Ergänzung zum Vollwinkel), und es folgt weiter nach dem

Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz $\angle CAM = \angle ACM = \frac{1}{2}(180° - 140°) = 20°$.

Damit erhalten wir

$$\alpha = \angle BAC = \angle BAM + \angle CAM = 60° \qquad \text{und} \qquad \gamma = \angle ACB = \angle ACM + \angle BCM = 50°$$

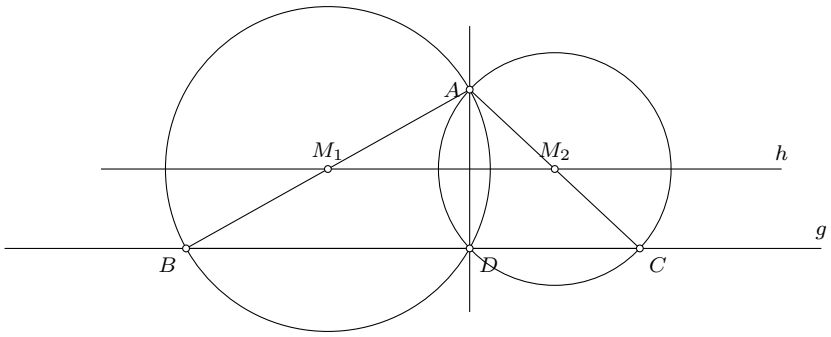
Die Größen der Innenwinkel bei A,B,C sind somit $\alpha = 60°, \beta = 70°$ und $\gamma = 50°$.

Aufgabe 290813:
Zwei Kreise k_1 und k_2 seien so gelegen, dass sie zwei verschiedene Schnittpunkte A und D haben und dass ihre Mittelpunkte M_1, M_2 auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und D liegen. Der von A verschiedene Schnittpunkt, den k_1 mit der Geraden durch A und M_1 hat, sei B. Der von A verschiedene Schnittpunkt, den k_2 mit der Geraden durch A und M_2 hat, sei C.

a) Weise nach, dass unter diesen Voraussetzungen stets der Punkt D auf der Geraden g durch B und C liegen muss!

b) Stelle eine Vermutung über die gegenseitige Lage der Geraden g und der Geraden h durch M_1, M_2 auf! Beweise deine Vermutung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Da D auf einem Halbkreis über AB als Durchmesser liegt, folgt nach dem Satz des Thales $\angle BDA = 90°$. Ebenso folgt $\angle ADC = 90°$.
Da B und C (ebenso wie M_1 und M_2) auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und D liegen, folgt $\angle BCD = \angle BDA + \angle ADC = 180°$. Also liegen B, D, C auf einer gemeinsamen Geraden.

b) Vermutung: Unter den genannten Voraussetzungen ist stets $g \parallel h$.

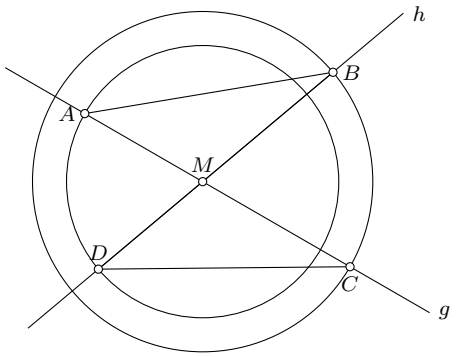
1. Beweismöglichkeit:
Die Verbindungsgerade h der Kreismittelpunkte steht auf der Schnittsehne AD senkrecht. Nach a) steht auch g auf AD senkrecht. Also ist $g \parallel h$.

2. Beweismöglichkeit:
Nach einer Strahlensatz-Umkehrung folgt $g \parallel h$ aus $AM_1 : AB = AM_2 : AC = 1 : 2$.

Aufgabe 340813:
Zeichne zwei Kreise k_1 und k_2 mit gemeinsamem Mittelpunkt M! Zeichne dann zwei Geraden g und h, die durch M gehen! Einen der Schnittpunkte von k_1 mit g bezeichne mit A, einen der Schnittpunkte von k_2 mit h bezeichne mit B! Weiterhin bezeichne mit C denjenigen Schnittpunkt von k_2 mit g, für den M zwischen A und C liegt; und bezeichne mit D denjenigen Schnittpunkt von k_1 mit h, für den M zwischen B und D liegt!

Untersuche, ob für so konstruierte Punkte A, B, C, D stets eine der Aussagen $\overline{AB} < \overline{CD}$, $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AB} > \overline{CD}$ gilt! Wenn das für eine dieser Aussagen der Fall ist, beweise dies!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Abbildung zeigt eine Zeichnung der verlangten Art.

Für so konstruierte Punkte A,B,C,D gilt stets $AB = CD$.
Beweis:
Da A und D auf k_1, liegen, gilt $MA = MD$ (1); da B und C auf k_2 liegen, gilt $MB = MC$. (2)
Aus der Lage von M zwischen A und C sowie zwischen B und D folgt, dass $\angle AMB$ und $\angle DMC$ Scheitelwinkel voneinander sind; daher gilt $\angle AMB = \angle DMC$. (3)

Aus (1),(2),(3) folgt $\angle ABC$ nach dem Kongruenzsatz sws $\triangle AMB \cong \triangle DMC$.
In diesen Dreiecken sind AB und DC einander entsprechende Seiten; damit folgt die Behauptung $AB = CD$.

Aufgabe 340814:
An einer Analog-Uhr (einer Uhr mit Minutenzeiger und Stundenzeiger) kann man den Winkel zwischen den Zeigern so messen, dass man die Gradzahl angibt, um die man den Minutenzeiger im Uhrzeigersinn drehen müsste, bis er den (hierbei unbeweglich gedachten) Stundenzeiger erreicht.
Neben einer solchen Uhr, von der wir voraussetzen, dass sie stets genau geht, denken wir eine Digitaluhr betrachtet, die ebenfalls genau geht, d. h.: Wir setzen voraus, dass sich ihre Stunden-, Minuten- und Sekundenanzeige stets zu Beginn jeder Sekunde auf die richtige Zahlenangabe einstellt.

a) Welche Zahlen zeigt die Digitaluhr zu allen denjenigen Zeitpunkten zwischen 9.30 Uhr und 12.30 Uhr, in denen die beiden Zeiger der Analog- Uhr genau aufeinander zu liegen kommen?

b) Wie viele Minuten nach 9.30 Uhr bilden die beiden Zeiger der Analog-Uhr erstmals einen ebenso großen Winkel miteinander wie 9.30 Uhr?

   Hinweis: Fällt ein Zusammenhang mit den Ergebnissen der Aufgabe a) auf?

c) Welche Zahlen zeigt die Digitaluhr zu allen denjenigen Zeitpunkten zwischen 3 Uhr und 6 Uhr, in denen die beiden Zeiger der Analog-Uhr einen Winkel von 30° miteinander bilden?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Minutenzeiger bewegt sich in jeder Minute um 6 Grad vorwärts, der Stundenzeiger 12 mal so langsam, also in jeder Minute um $\frac{1}{2}$ Grad.

a) Um 9.30 Uhr zeigt der Minutenzeiger auf die „6“, der Stundenzeiger auf die Mitte zwischen „9“ und „10“, also $(3+\frac{1}{2})\cdot 30$ Grad vor dem Minutenzeiger. Liegen die Zeiger nach x Minuten übereinander, so gilt folglich

$$x\cdot 6 = (3+\frac{1}{2})\cdot 30 + x\cdot\frac{1}{2} \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{19}{11}$$

Da $\frac{1}{11}$ Minute wegen $\frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$ dasselbe wie $5\frac{5}{11}$ Sekunden sind, zeigt die Digitaluhr zu dieser Zeit 09 : 49 : 05 Uhr. (1)

II. Vergehen bis zum nächsten Übereinanderliegen u Minuten, in denen der Minutenzeiger eine volle Umdrehung (360°) und zusätzlich denselben Winkel wie der Stundenzeiger zurücklegt, so gilt also

$$u\cdot 6 = 360 + u\cdot\frac{1}{2} \qquad \rightarrow \qquad u = 65\frac{5}{11}$$

Somit sind die nächsten gesuchten Zeitpunkte:
$65\frac{4}{11}$ Minuten nach $9.49\frac{1}{11}$ Uhr, d.i. $10.54\frac{6}{11}$ Uhr, digital 10 : 54 : 32 Uhr, (2)
$65\frac{4}{11}$ Minuten nach $10.54\frac{6}{11}$ Uhr, d.i. 12.00 Uhr, digital 12 : 00 : 00 Uhr (3)
Damit sind die gesuchten Anzeigen (1), (2), (3) gefunden.

b) Der Zeitraum von einer Zeigerstellung bis zur nächsten mit gleichem Winkel zwischen den Zeigern ist genau so lang wie der Zeitraum von einer Begegnung bis zur nächsten Begegnung, also $65\frac{5}{11}$ Minuten.

c) Bilden die Zeiger erstmals x Minuten nach 3 Uhr einen Winkel von 30°, so hat sich der Winkel, der um 3 Uhr noch 90° betragen hatte, um 60° verringert, indem nämlich der Minutenzeiger $x\cdot 6$ Grad zurücklegte, der Stundenzeiger aber nur $x\cdot\frac{1}{2}$ Grad. Daher gilt

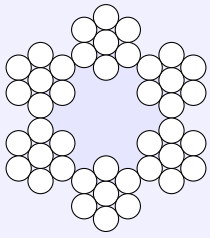
$$x\cdot 6 = 60 + x\cdot\frac{1}{2} \qquad \rightarrow \qquad x = 10\frac{10}{11}$$

Der erste gesuchte Zeitpunkt ist also $3.10\frac{10}{11}$ Uhr, wegen $\frac{600}{11} = 54\frac{6}{11}$ digital 03 : 10 : 54 Uhr.

II. Die nächsten Zeitpunkte sind nach b) jeweils $65\frac{5}{11}$ Minuten später:
digital 04 : 16 : 21 Uhr bzw. 05 : 21 : 49 Uhr.

II Runde 2

Aufgabe 020825:



Drahtseile bestehen häufig aus Litzen, die wieder aus einzelnen Stahldrähten bestehen. Die Litzen sind um eine gefettete Hanfseele geschlagen, die das Seil von innen her schmiert. Die Abbildung zeigt den Querschnitt durch ein solches Drahtseil, das aus 42 Drähten und einer (grau gefärbten) Hanfseele besteht. Jeder Draht hat einen Durchmesser von 1 mm.

Wie groß ist der Durchmesser des dem Seilquerschnitt umbeschriebenen Kreises? Begründung!

Lösung von Carsten Balleier:
Eine wesentliche Eigenschaft von Kreisen ist, dass man sie in regelmäßige Sechsecke einbeschreiben kann, bei denen der Abstand gegenüberliegender Seiten gleich dem Kreisdurchmesser ist. Demzufolge kann man den grau gefärbten Innenbereich mit diesen Sechsecken „parkettieren“; der Rest ist dann eine Abzählaufgabe.

Der Durchmesser des Umkreises wird von 9 aneinanderliegenden Kugeln gebildet, er ist also 9 mm.

Aufgabe 080821:

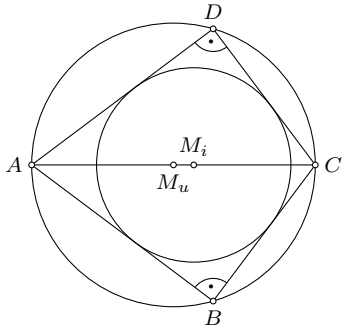
a) Beweise folgende Aussage:

Wenn in einem Drachenviereck $ABCD$ zwei gegenüberliegende Innenwinkel je 90° groß sind, dann hat es sowohl einen Inkreis als auch Umkreis.

b) Zeige, dass diese Kreise dann auch jeweils eindeutig bestimmt sind!

c) Untersuche, unter welcher Bedingung die Mittelpunkte dieser beiden Kreise zusammenfallen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Jedes konvexe Drachenviereck besitzt einen Inkreis.

Beweis:
Hat ein Drachenviereck $ABCD$ etwa die Gerade AC als Symmetrieachse, so sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ACD$ kongruent (sss). Die Halbierenden der Winkel bei B und D schneiden sich daher auf AC. Ihr Schnittpunkt sei M_i.
Da AC Halbierende der Winkel bei A und C ist, ist M_i Schnittpunkt aller vier Winkelhalbierenden des Vierecks $ABCD$. Daher hat M_i von allen vier Seiten des Vierecks denselben Abstand.
Wegen der Konvexität von $ABCD$ fallen auch die Fußpunkte der von M_i auf die Geraden durch A, B; durch B, C; durch C, D bzw. D, A gefällten Lote ins Innere der Strecken AB, BC, CD bzw. DA. Daher ist M_i Inkreismittelpunkt des Drachenvierecks $ABCD$.

Für ein Drachenviereck $ABCD$ mit AC als Symmetrieachse sind nun unter der zusätzlichen Voraussetzung der Aufgabenstellung folgende zwei Fälle möglich:

1. Fall: $\angle ABC = \angle ADC = 90°$
In diesem Fall hat das Drachenviereck $ABCD$ als Umkreis den Thaleskreis über dem Durchmesser AC. Der Umkreismittelpunkt M_u liegt auf AC und halbiert AC.

2. Fall: $\angle BAD = \angle BCD = 90°$
In diesem Fall folgt aus

$$\angle ABC + \angle ADC = 360° - (\angle BAD + \angle BCD) = 180°$$

$\angle ABC = \angle ADC$ (dies wegen $\triangle ABC \cong \triangle ADC$), dass $\angle ABC = \angle ADC = 90°$ gilt, also zugleich auch der 1. Fall vorliegt.

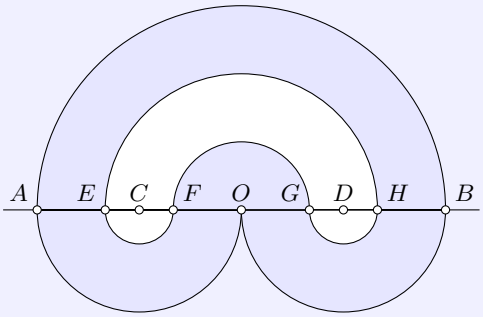
b) Der Umkreis ist eindeutig bestimmt bereits dadurch, dass er durch drei der Punkte A, B, C, D geht, etwa durch A, B, C (sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten des Dreiecks $\triangle ABC$). Entsprechend ist der Mittelpunkt des Inkreises (und damit dieser selbst) eindeutig bestimmt als Schnittpunkt etwa der Halbierenden der Innenwinkel bei A und B.

(Bemerkung: Dies gilt auch im Quadratfall, in welchem nicht etwa drei Viereckssseiten, genügend verlängert, ein Dreieck bilden.)

c) M_i und M_u fallen genau dann zusammen, wenn im Dreieck $\triangle ABC$ die Winkelhalbierende des Winkels ABC und die Seitenhalbierende der Seite AC zusammenfallen. Das ist genau im gleichschenkligen Dreieck der Fall, d. h., M_i und M_u fallen genau dann zusammen, wenn das Drachenviereck $ABCD$ ein Quadrat ist.

Aufgabe 090822:
Auf einer Geraden seien die Punkte A, E, C, F, O, G, D, H, B in dieser Reihenfolge so gelegen, dass gilt:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 6 \text{ cm} \\ \overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FO} = \overline{OG} = \overline{GH} = \overline{HB} &= 1 \text{ cm}; \\ \overline{EC} = \overline{CF} = \overline{GD} = \overline{DH} &= 0{,}5 \text{ cm} \end{aligned}$$



Über den Strecken AB, EH und FG seien Halbkreise in die eine Halbebene und über den Strecken AO, OB, EF und GH Halbkreise in die andere Halbebene bezüglich der Geraden durch A und B gezeichnet.

Berechne den Inhalt der farbigen Fläche!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der gesuchte Flächeninhalt A ist gleich der Summe der Inhalte der Halbkreisflächen über AB, FG, AO und OB vermindert um die Summe der Inhalte der Halbkreisflächen über EH, EF und GH.

Wegen $AB = 6$ cm, $FG = 2$ cm, $AO = OB = 3$ cm, $EH = 4$ cm, $EF = GH = 1$ cm gilt daher:

$$A = \frac{\pi}{8}(36 + 4 + 9 + 9 - 16 - 1 - 1) \text{ cm}^2 = 5\pi \text{ cm}^2$$

Der Inhalt der schraffierten Fläche beträgt 5π cm^2, das sind angenähert 15,71 cm^2.

Aufgabe 090823:

a) Wie oft insgesamt stehen im Verlaufe von 24 Stunden (von 0.00 Uhr bis 24.00 Uhr) der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr senkrecht aufeinander?

b) Berechne insbesondere alle derartigen Zeitpunkte zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Im Zeitraum von je einem Übereinanderstehen der beiden Zeiger bis zum nächsten nimmt der Winkel zwischen den Zeigern (gemessen im Uhrzeigersinn vom Stundenzeiger bis zum Minutenzeiger) alle Werte von 0° bis 360° an, jeden genau einmal. Unter diesen Zeigerstellungen befinden sich genau zwei der gesuchten, nämlich die mit den Winkeln 90° und 270°.

(II) In der Zeit von 0 Uhr bis 12 Uhr führt der Minutenzeiger genau 12 volle Umdrehungen aus, der Stundenzeiger genau eine in gleicher Richtung.
Daher wird dieser Zeitraum durch die Zeitpunkte des Übereinanderstehens der beiden Zeiger in 11 Teile geteilt (und zwar wegen der Gleichförmigkeit der Bewegungen in gleichlange).

(III) Aus (I) und (II) folgt zunächst: Die Zeit von 0 Uhr bis 24 Uhr wird durch die Zeitpunkte des Übereinanderstehens in 22 Teile geteilt, und in jedem dieser Teilzeiträume befinden sich genau 2 gesuchte Zeitpunkte.
Deren Gesamtzahl beträgt somit 44.

(IV) Aus (I), (II) und der Gleichförmigkeit der Bewegungen folgt ferner: Der Zeitraum von 0 Uhr bis 12 Uhr wird, durch diejenigen Zeitpunkte, die den Winkeln $0°, 90°, 180°, 270°$ entsprechen, in 44 gleichlange Teile geteilt.
Diese Zeitpunkte ergeben sich somit als die ersten 43 positiven ganzzahligen Vielfachen von $\frac{12}{44}$ h $= \frac{3}{11}$ h.

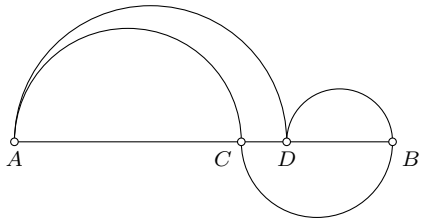
Die Zeitpunkte mit den Winkeln 90° und 270° sind dabei die ungeradzahligen unter diesen Vielfachen. Von diesen liegen zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr genau diejenigen $n \cdot \frac{3}{11}$ h (n ungerade), bei denen n die Ungleichung $4 < n \cdot \frac{3}{11} < 5$ oder gleichbedeutend $\frac{44}{3} < n < \frac{55}{3}$ erfüllt, das sind die Zeitpunkte

$$15 \cdot \frac{11}{3}\text{h} = 4\text{h } 5\frac{5}{11} \text{ min} \quad ; \quad 17 \cdot \frac{11}{3}\text{h} = 4\text{h } 38\frac{2}{11} \text{ min}$$

Aufgabe 110822:
Es sei AB eine Strecke gegebener Länge a, auf der zwei Punkte C und D liegen. Dabei liege C zwischen A und D und D zwischen C und B. Über AC, AD und DB seien auf derselben Seite der Geraden durch A und B Halbkreise geschlagen, und über CB sei ein Halbkreis auf der anderen Seite der Geraden geschlagen.

Es ist die Summe s der Längen aller dieser Halbkreisbögen in Abhängigkeit von a zu ermitteln.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Länge des Halbkreisbogens über AC beträgt $AC \cdot \frac{\pi}{2}$. Die Länge des Halbkreisbogens über AD beträgt $AD \cdot \frac{\pi}{2}$. Die Länge des Halbkreisbogens über DB beträgt $DB \cdot \frac{\pi}{2}$ und die Länge des Halbkreisbogens über CB beträgt $CB \cdot \frac{\pi}{2}$.
Daher beträgt die gesuchte Summe

$$s = (AC + AD + DB + CB) \cdot \frac{\pi}{2} = 2 \cdot AB \cdot \frac{\pi}{2} = a \cdot \pi$$

Aufgabe 110824:
In einer Ebene ε seien zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q sowie eine durch Q gehende Gerade g beliebig gegeben.

a) Beweise, dass dann stets der Spiegelpunkt P' von P bezüglich g auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ liegt!

b) Beweise, dass es umgekehrt zu jedem Punkt P' des Kreises um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ eine durch Q verlaufende Gerade g gibt, bezüglich der P' der Spiegelpunkt von P ist!

c) Beweise: Ist P^* ein Punkt, der nicht auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ liegt, so gibt es keine durch Q verlaufende Gerade, bezüglich der P^* der Spiegelpunkt von P wäre!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Liegt P auf g, so auch P', und es gilt $QP = QP'$ (1).
Liegt P nicht auf g, so ist $P' \neq P$, und die Gerade durch P und P' steht senkrecht auf g. Ist S ihr Schnittpunkt mit g, so gilt ferner $SP = SP'$. Wenn nun $S = Q$ ist, so ist damit (1) gezeigt.
Wenn aber $S \neq Q$ ist, so erhält man $\triangle QSP = \triangle QSP'$ (sws) und hieraus ebenfalls (1). Mit (1) ist bereits die Behauptung bewiesen.

b) Ist $P' = P$, so hat die Gerade g durch P, Q die behauptete Eigenschaft.

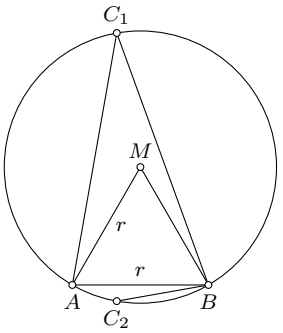
Ist $P' \neq P$ ein Punkt des Kreises um Q mit PQ, so gilt (1), und daher geht die Mittelsenkrechte g von PP' durch Q. Da P' der Spiegelpunkt von P bezüglich g ist, ist somit die Behauptung bewiesen.

c) Gäbe es entgegen der Behauptung doch eine Gerade g mit den genannten Eigenschaften, so läge nach a) der Spiegelpunkt P^* von P bezüglich g auf dem Kreis um Q mit PQ. Das steht im Widerspruch zur Behauptung.
Es gibt für die genannten Punkte P^* mithin keine durch Q verlaufende Gerade, bezüglich der P^* der Spiegelpunkt von P wäre.

Aufgabe 120822:
Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, AB eine Sehne von k der Länge r und C ein von A und B verschiedener Punkt auf k.

Ermittle alle Möglichkeiten für die Größe des Winkels $\angle BCA$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Laut Aufgabe ist das Dreieck $\triangle ABM$ gleichseitig mit $AB = AM = r$. Wir unterscheiden nun bezüglich der Lage des Punktes C zwei Fälle:



Fall 1: Der Punkt C_1 liege auf dem größeren der beiden zu $\overset{\frown}{AB}$ gehörenden Kreisbögen. Dann ist $\angle AC_1B$ Peripheriewinkel zum Zentriwinkel $\angle AMB$. Da dieser als Innenwinkel im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABM$ eine Größe von 60° hat, hat $\triangle AC1B$ eine Größe von 30°.

Fall 2: Der Punkt C_2 liege auf dem kleineren der beiden zu AB gehörenden Kreisbögen. Dann ist AC_2BC_1 ein Sehnenviereck. Nach einem bekannten Satz ergänzen sich im Sehnenviereck die Größen der gegenüberliegende Winkel zu 180°. Daher hat der Winkel $\angle AC_2B$ eine Größe von $180° - 30° = 150°$.

Aufgabe 130824:
Zwei Kreise k_1 und k_2 mögen einander in zwei verschiedenen Punkten A und B schneiden.
Zwei voneinander verschiedene parallele Geraden g_1 und g_2 durch A bzw. B seien so gelegen, dass g_1 den Kreis k_1 in einem von A verschiedenen Punkte C und den Kreis k_2 in einem von A verschiedenen Punkte D schneidet, dass ferner g_2 den Kreis k_1 in einem von B verschiedenen Punkte E und den Kreis k_2 in einem von B verschiedenen Punkte F schneidet und dass dabei A zwischen C und D sowie B zwischen E und F liegt.

Beweise, dass dann $\overline{CD} = \overline{EF}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die zueinander parallelen Geraden g_1 und g_2 schneiden aus den Kreisen k_1 und k_2 je zueinander parallele Sehnen aus. Nun seien s_1 bzw. s_2 die Symmetrieachsen dieser beiden Sehnenpaare.

Dann gilt $s_1 \parallel s_2$ (wegen $s_1 \perp g_1$ und $s_2 \perp g_2$). Durch Spiegelung an s_1 geht CE in AB und durch Spiegelung an s_2 geht AB in DF über, so dass $CE \parallel DF$ folgt.

Somit ist $CEFD$ ein Parallelogramm, und es gilt $CD = EF$, w. z. b. w.

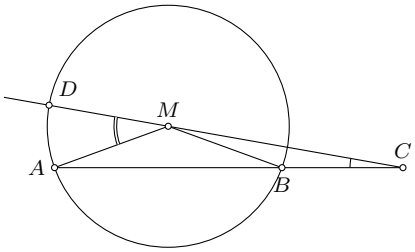
Aufgabe 150823:
Es sei k ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M. Ferner sei AB eine Sehne von k, die nicht Durchmesser von k ist. Auf dem Strahl aus A durch B sei C der Punkt außerhalb AB, für den $\overline{BC} = r$ gilt. Der Strahl aus C durch M schneide k in dem außerhalb CM gelegenen Punkt D.

Beweise, dass dann $\overline{\angle AMD} = 3 \cdot \overline{\angle ACM}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Winkel $\angle AMD$ ist Außenwinkel des Dreiecks ACM. Folglich gilt: $\angle AMD0\angle ACM + \angle MAC$.
Nun gilt: $AM = BM = BC = r$. Folglich sind die Dreiecke ABM und BMC gleichschenklig. Daher gilt:

$$(\angle MAC =)\angle MAB = \angle MBA \quad (1) \qquad \text{und} \qquad \angle BMC = \angle BCM (= \angle ACM) \quad (2)$$

Der Winkel $\angle MBA$ ist Außenwinkel des Dreiecks BMC und wegen (2) daher doppelt so groß wie $\angle ACM$.



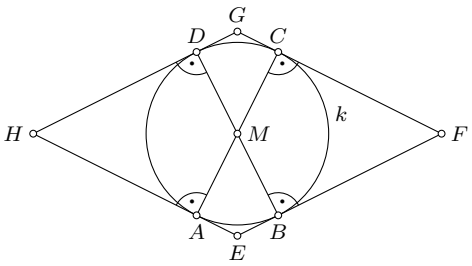
Folglich ist wegen (1) $\angle MAC$ doppelt so groß wie $\angle ACM$ und mithin $\angle AMD$ dreimal so groß wie $\angle ACM$, w. z. b. w.

Aufgabe 160823:
In einem Kreis k seien zwei verschiedene Durchmesser, die nicht aufeinander senkrecht stehen, eingezeichnet. Ferner sei durch jeden der vier Endpunkte beider Durchmesser die Tangente gelegt.

Beweise, dass die Schnittpunkte E, F, G, H dieser Tangenten die Ecken eines nichtquadratischen Rhombus sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Werden die in der Aufgabe genannten Durchmesser mit AC und BC sowie die erwähnten Schnittpunkte mit E, F, G, H wie in der Abbildung bezeichnet, dann gilt: $AM = MC = BM = MD$.
Folglich gilt $\triangle MBP \cong \triangle MCF$ und $\triangle MAH \cong \triangle MDH$ (s, s, rechter Winkel).

Hieraus folgt $EP = CP$, $\angle BMF = \angle CMF = \frac{1}{2}\angle BMC$, weil B und C auf verschiedenen Seiten der Geraden durch M und F liegen, und entsprechend $DH = AH$, $\angle DMH = \angle AMH = \frac{1}{2}\angle DMA$.



Da nun als Gleichheit von Scheitelwinkeln $\angle BMC = \angle DMA$ gilt, folgt $\angle BMF = \angle DMH$ und damit $\triangle MBF \cong \triangle MDH$ (sww), also

$$BF = CF = DH = AH \quad (1)$$

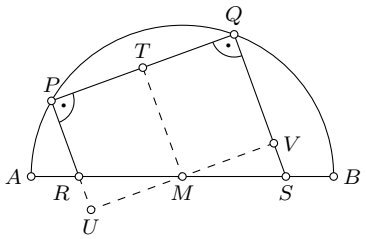
Entsprechend erhält man $BE = AE = DG = GG$. (2)
Aus (1) und (2) folgt: $EH = EF = GF = GH$, d. h., $EFGH$ ist ein Rhombus.

Im Viereck $AMDH$ sind die Winkel bei A und D rechte. Daher ergänzen sich $\angle AMD$ und $\angle AHD$ zu 180°. Laut Voraussetzung ist $\angle AMD$ kein rechter Winkel. Folglich ist auch $\angle AHD$ kein rechter Winkel und $EFGH$ mithin kein Quadrat.

Aufgabe 200823:
Gegeben sei ein Halbkreis mit dem Durchmesser AB und dem Mittelpunkt M. Ferner seien P und Q zwei von A und B und voneinander verschiedene Punkte auf diesem Halbkreis. Die in P und Q auf der Geraden durch P und Q errichteten Senkrechten mögen AB in R bzw. in S schneiden.

Beweise, dass dann $\overline{RM} = \overline{SM}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

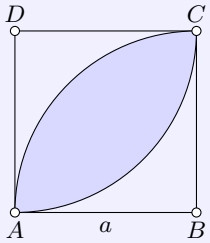


Da die Mittelsenkrechte einer Sehne stets durch den Mittelpunkt des Kreises verläuft, schneidet die Mittelsenkrechte auf PQ den Durchmesser AB in M.
Sie verläuft außerdem parallel zu PR und QS und ist somit Mittellinie des Trapezes $PQSH$. Folglich halbiert sie die Trapezseite RS in M, d. h., es gilt $RM = SM$, w. z. b. w.

Aufgabe 210822:
Gegeben sei die Seitenlänge a eines Quadrates $ABCD$. Um B und D seien mit dem Radius a Kreisbögen gezeichnet, die in dem Quadrat $ABCD$ eine blattartige Figur (im Bild blau) einschließen.

a) Berechne für $a = 3{,}5$ cm den Flächeninhalt der schraffierten Fläche!

b) Ermittle eine allgemeine Formel, die angibt, wie der Flächeninhalt der blattartigen Figur von der gegebenen Seitenlänge a abhängt!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Durch die Diagonale AC wird das Quadrat und (wegen der symmetrischen Lage der beiden Kreisbögen) auch die schraffierte Fläche halbiert.
Daher ergibt sich die Hälfte des gesuchten Flächeninhaltes, indem man vom Flächeninhalt des um B gezeichneten Viertelkreises den Flächeninhalt des Dreiecks ABC (d. h. den halben Flächeninhalt des Quadrates) subtrahiert. Also beträgt der gesuchte Flächeninhalt

$$2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cdot 3{,}5^2 - \frac{1}{2} \cdot 3{,}5^2 \right) \text{cm}^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \cdot 3{,}5^2 \text{ cm}^2 \approx 6{,}98 \text{ cm}^2$$

b) Mit derselben Begründung wie in a) ergibt sich für den gesuchten Flächeninhalt die Formel

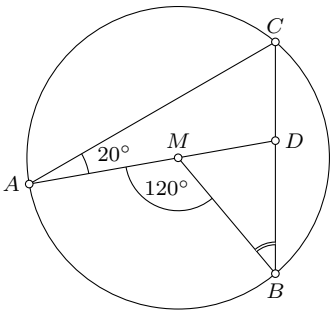
$$2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} \cdot a^2 - \frac{1}{2} \cdot a^2 \right) = \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) a^2$$

Aufgabe 230823:
Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Drei Punkte A, B und C auf k seien so gelegen, dass der Punkt M im Innern des Dreiecke ABC liegt. Ferner sei $\overline{\angle CAM} = 20°$ und $\overline{\angle AMB} = 120°$.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\angle CBM$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach dem Satz über Peripheriewinkel und Zentriwinkel gilt: $\angle BCA = 120° : 2 = 60°$.
D sei der Schnittpunkt der Geraden durch A und M mit der Sehne BC. Dann gilt aufgrund des Außenwinkelsatzes für das Dreieck ADC:

$$\angle ADB = 20° + 60° = 80° \tag{1}$$



Ferner ist $\angle BMD$ Nebenwinkel zu $\angle AMB$, und somit gilt:

$$\angle BMD = 180° - 120° = 60° \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck, angewandt auf das Dreieck DMB:

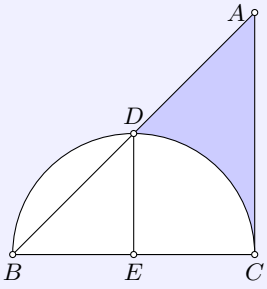
$$\angle DBM (= \angle CBM) = 180° - (60° + 80°) = 40°$$

Folglich gilt für den gesuchten Winkel $\angle CBM = 40°$.

Aufgabe 250824:
Es sei ABC ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Über BC als Durchmesser sei derjenige Halbkreis gezeichnet, der AB in einem Punkt D zwischen A und B schneidet (siehe Abbildung).

a) Beweise, dass die Gerade durch D und den Mittelpunkt E von BC senkrecht auf BC steht!

b) Berechne, wie viel Prozent der Fläche des Dreiecks ABC nicht von dem Halbkreis bedeckt sind! Der gesuchte Prozentsatz ist auf eine Dezimalstelle nach dem Komma anzugeben.



Hinweis: Benutze den Näherungswert $\pi \approx 3{,}142$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Da BC Durchmesser des Halbkreises ist, ist der Mittelpunkt E von BC auch der Mittelpunkt des Halbkreises. Die Punkte B und D liegen auf dem Halbkreis; also gilt $EB = ED$.
Daraus folgt $\angle DBE = \angle BDE$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck BDE).

Andererseits ist $\angle DBE = \angle ABC = 45°$ (Basiswinkel im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABC). Nach dem Innenwinkelsatz folgt somit

$$\angle BED = 180° - (\angle DBE + \angle BDE) = 90°$$

d. h. die Behauptung $DE \perp BC$.

b) Wegen $\angle BED = \angle BCA = 90°$ gilt nach der Umkehrung des Satzes über Stufenwinkel an geschnittenen Geraden $ED \parallel CA$, das Viereck $ACED$ ist daher ein Trapez.
Seine Höhenlänge ist zugleich der Radius $r = EC$ des Halbkreises; die parallelen Seiten des Trapezes haben die Längen $ED = r$ und $CA = BC = 2r$. Der Inhalt J der vom Halbkreis nicht bedeckten Fläche des Dreiecks ABC lässt sich als Differenz der Flächeninhalte des Trapezes $ACED$ und eines Viertelkreises mit dem Radius r darstellen:

$$J = \frac{r+2r}{2}r - \frac{\pi}{4}r^2 = \frac{r^2}{6}(6-\pi)$$

Das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r = 2r^2$$

Der gesuchte Prozentsatz beträgt daher

$$p = \frac{100J}{F} = \frac{25r^2(6-\pi)}{2r^2} = 12{,}5(6-\pi)$$

Aus $\pi \approx 3{,}142$ ergibt auf eine Dezimalstelle genau $p \approx 35{,}7$. Also sind 35,7% der Fläche des Dreiecks ABC nicht von dem Halbkreis bedeckt.

Aufgabe 260822:
Es sei k ein Halbkreis über dem Durchmesser AB. Eine Gerade schneide k in zwei von A und B verschiedenen Punkten D und C sowie die Verlängerung von AB über B hinaus in einem Punkt E derart, dass C zwischen D und E liegt. Außerdem gelte

(1) $\overline{BD} = \overline{BE}$ und

(2) $\angle DAC = 27°$.

Ermittle die Größe α des Winkels $\angle ACD$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Dreieck EDB ist wegen (1) gleichschenklig, also ist $\overline{\angle EDB} = \overline{\angle BED}$.
Die Winkel $\angle ABD$ und $\angle ACD$ sind Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen $\overset{\frown}{AD}$, also ist $\overline{\angle ABD} = \overline{\angle ACD} = \alpha$.
Der Winkel $\angle ABD$ ist Außenwinkel des Dreiecks EDB. Also ist

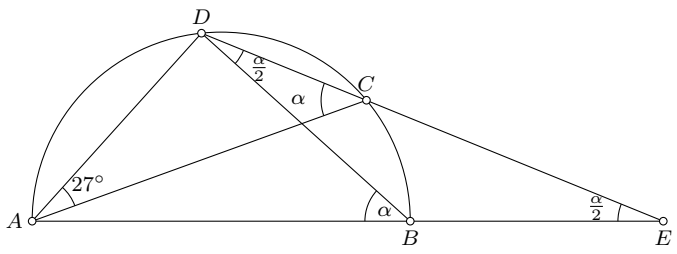
$$\overline{\angle BED} + \overline{\angle EDB} = \overline{\angle ABD}$$

und wegen (3)

$$\overline{\angle BED} = \overline{\angle EDB} = \frac{\alpha}{2}$$

Der Winkel $\angle BDA$ ist als Peripheriewinkel über dem Durchmesser ein rechter Winkel. Im Dreieck ACD gilt nach dem Innenwinkelsatz und wegen (2):

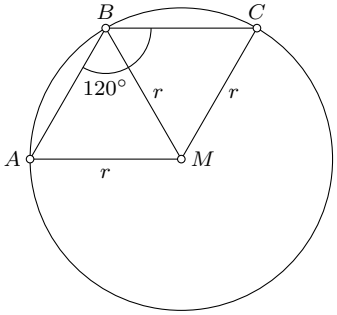
$$27° + \alpha + \frac{\alpha}{2} + 90° = 180° \qquad \text{also} \qquad \alpha = 42°$$



Aufgabe 270822:
Gegeben sei ein Kreis k; sein Mittelpunkt sei M, sein Radius betrage r. Von drei Punkten A, B, C auf k werde vorausgesetzt, dass $\overline{AB} = \overline{BC}$ gilt und dass der Winkel $\angle ABC$ die Größe 120° hat.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{AB} = r$ gilt!

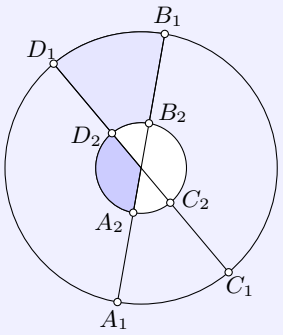
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Wegen $MA = MB = MC = r$ und $AB = BC$ sind die Dreiecke ABM und CBM gleichschenklig und zueinander kongruent (Kongruenzsatz sss). Also ist $\angle ABM = \angle CBM$.
Hieraus, und da nach Voraussetzung $\angle ABM + \angle CBM = \angle ABC = 120°$ ist, folgt $\angle ABM = \angle CBM = 60°$.
Daher sind die Dreiecke ABM und CBM sogar gleichseitig; insbesondere gilt $AB = MA = r$, w. z. b. w.

Aufgabe 280824:

Es seien k_1 und k_2 zwei konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt M, deren Radien sich wie $3 : 1$ verhalten. Zwei Durchmesser A_1B_1 und C_1D_1 von k_1 schneiden k_2 in Punkten A_2, B_2 bzw. C_2, D_2, die so angeordnet sind, wie die Abbildung zeigt.



a) Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte des Kreisausschnittes A_2MD_2 und des Kreisringausschnittes $D_2B_2B_1D_1$, wenn vorausgesetzt wird, dass $\angle A_1MD_1$ ein rechter Winkel ist!

b) Wie hat man die Größe des Winkels $\angle A_1MD_1$ zu wählen, damit der Flächeninhalt des Kreisausschnittes A_2MD_2 gleich dem Flächeninhalt des Kreisringausschnittes $D_2B_2B_1D_1$ ist?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es seien $A_1M = r_1$ und $A_2M = r_2$. Dann ist der Flächeninhalt F_1 des Kreisausschnittes A_2MD_2

$$F_1 = \frac{r_2^2\pi \cdot 90°}{360°} = \frac{r_2^2\pi}{4}$$

und der Flächeninhalt F_2 des Kreisringausschnittes $D_2B_2B_1D_1$

$$F_2 = \frac{r_1^2\pi \cdot 90°}{360°} - \frac{r_2^2\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(r_1^2 - r_2^2)$$

Wegen $r_1 = 3r_2$ ist $r_1^2 - r_2^2 = 8r_2^2$, und es folgt $F_2 = 2\pi r_2^2$. Das Verhältnis $F_1 : F_2$ beträgt demnach

$$F_1 : F_2 = \frac{r_2^2\pi}{4} : (2\pi r_2^2) = 1 : 8$$

b) Es seien $A_1M = r_1$; $A_2M = r_2$ und $\angle A_1MD_1 = \alpha$. Nun gilt für den Flächeninhalt F_3 des Kreisausschnittes A_2MD_2:

$$F_3 = \frac{r_2^2\pi \cdot \alpha}{360^\circ}$$

Da $\angle B_1MD_1$ Nebenwinkel von $\angle A_1MD_1$ ist, beträgt seine Größe $180^\circ - \alpha$. Für den Flächeninhalt F_4 des Kreisringausschnittes $D_2B_2B_1D_1$ ergibt sich daraus:

$$F_4 = \frac{r_1^2\pi(180^\circ - \alpha)}{360^\circ} - \frac{r_2^2\pi(180^\circ - \alpha)}{360^\circ} = \frac{\pi(180^\circ - \alpha)}{360^\circ}(r_1^2 - r_2^2)$$

Wegen $r_1 = 3r_2$ ist $r_1^2 - r_2^2 = 8r_2^2$, und es folgt

$$F_4 = \frac{\pi(180^\circ - \alpha)}{360^\circ} \cdot 8r_2^2$$

Um die Forderung $F_3 = F_4$ zu erfüllen, hat man folglich zu wählen, dass

$$\frac{r_2^2\pi\alpha}{360^\circ} = \frac{\pi(180^\circ - \alpha)}{360} \cdot 8r_2^2$$

gilt.
Aus dieser Gleichung folgt, nach Multiplikation mit 360° und Division durch $\pi \cdot r_2^2$

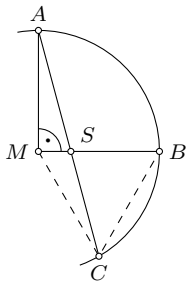
$$\alpha = 8 \cdot (180^\circ - \alpha) \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 160^\circ$$

Für den Winkel $\angle A_1MD_1$ hat man also die Größe 160° zu wählen.

Aufgabe 320822:
Auf einer Kreislinie k um einen Punkt M seien drei Punkte A, B, C so gelegen, dass $MA \perp MB$ sowie $\overline{BC} = \overline{MB}$ gilt und dass sich die Strecken AC und MB in einem Punkt S schneiden.

Untersuche, ob durch diese Voraussetzungen die Größe den Winkels $\angle BSC$ eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, dann gib diese Größe an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Als Radien von k haben MB und MC einander gleiche Länge; hiernach und wegen $BC = MB$ ist Dreieck MBC gleichseitig, also gilt $\angle BMC = 60^\circ$.
Daraus und aus $MA \perp MB$ folgt $\angle AMC = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$.
Daher und weil Dreieck MAC mit $MA = MC$ gleichschenklig ist, folgt aus dem Basis- und dem Innenwinkelsatz

$$\angle MAC = \angle MCA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AMC) = \frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ$$

Aus $MA \perp MB$ und nochmals dem Innenwinkelsatz, auf Dreieck MAS angewandt, folgt damit $\angle MSA = 90^\circ - \angle MAC = 75^\circ$. Schließlich ergibt sich nach dem Scheitelwinkelsatz, dass auch $\angle BSC = 75^\circ$ gilt. Diese Winkelgröße ist damit durch die Voraussetzungen eindeutig bestimmt.

Aufgabe 340823:

a) Wie oft insgesamt stehen im Verlaufe von 24 Stunden (von 0.00 Uhr bis 24.00 Uhr) der Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr senkrecht aufeinander?

b) Berechne insbesondere alle derartigen Zeitpunkte zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr! Gib diese Zeitpunkte so an, wie sie eine Digitaluhr anzeigen würde, von der wir voraussetzen, dass sie korrekt geht, d. h. zu Beginn jeder Sekunde die richtige Stunden-, Minuten- und Sekundenanzeige bringt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Da beide Zeiger mit gleichbleibenden Geschwindigkeiten gehen, gilt:
Kommen im Verlauf von 24 Stunden (wobei etwa der Anfang dieser Zeitspanne mit dazugerechnet werde, aber nicht das Ende) die Zeiger genau n mal miteinander zur Deckung, so gibt es in dieser Zeitspanne auch genau n Zeitpunkte, in denen der Minutenzeiger um 90° vor dem Stundenzeiger steht, und auch genau n Zeitpunkte, in denen der Minutenzeiger um 90° hinter dem Stundenzeiger steht.

Diese Zahl n kann man folgendermaßen finden:
In 12 Stunden macht der Minutenzeiger genau 12 vollständige Umläufe, der Stundenzeiger genau einen Umlauf. Also muss es in dieser Zeitspanne genau 11 Zeitpunkte geben, in denen der Minutenzeiger den Stundenzeiger überholt. In 24 Stunden sind es doppelt so viele Zeitpunkte; d. h., es gilt $n = 22$.
Also stehen die Zeiger im Verlauf von 24 Stunden insgesamt 44 mal aufeinander senkrecht.

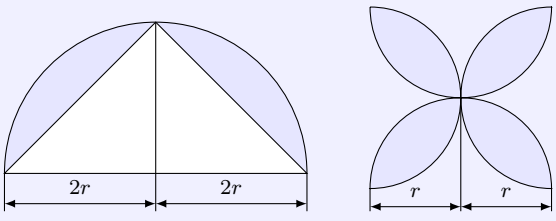
(b) Um 4 Uhr steht der Stundenzeiger 20 Teilstriche vor dem Minutenzeiger. Hat sich nach x Minuten dieser Abstand zum ersten Mal um 5 Teilstriche verringert, so deshalb, weil der Minutenzeiger um x Teilstriche vorgerückt ist, der Stundenzeiger aber nur um $\frac{x}{12}$ Teilstriche. Also gilt $x = 5 + \frac{x}{12}$.

Daraus folgt $12x = 60 + x$, $x = 5\frac{5}{11}$; d. h., der erste gesuchte Zeitpunkt ist $5\frac{5}{11}$ Minuten nach 4 Uhr. Digital wird dieser Zeitpunkt als 04:05:27 angezeigt.

Hat aber y Minuten nach 4 Uhr der Minutenzeiger den Stundenzeiger überholt, also den ursprünglichen Abstand von 20 Teilstrichen aufgebraucht und steht dann erstmals 15 Teilstriche vor dem Stundenzeiger, so gilt $y = 20 + 15 + \frac{y}{12}$ mit $y = 38\frac{2}{11}$. Für einen zweiten gesuchten Zeitpunkt erhält man die digitale Anzeige 04:38:10.

III Runden 3 & 4

Aufgabe V10834:



Welche Fläche ist größer, die Fläche der Rosette oder die Gesamtfläche der beiden Kreisabschnitte?

Lösung von Steffen Polster:
Dreht man den Kreisabschnitt um die Spitze des Dreiecks, so entsteht eine von zwei Kreisbögen begrenzte Fläche, die die gleiche Form wie ein Viertel der Rosette hat. Da der Kreis der linken Figur einen Radius

$2r$ hat und die Rosette aus vier Kreiszweiecken besteht, sind beide farbigen Flächen gleich groß.

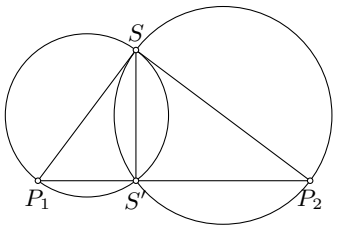
linke Figur: $A = 4\pi r^2 - 4r^2 = 4r^2(\pi - 1)$

eine Viertel der Rosette: $A = r^2 - 2r^2(1 - \frac{\pi}{4}) = r^2(\pi - 1)$

Aufgabe 020835:
Beweise folgenden Satz:

Wenn man durch den einen Schnittpunkt zweier Kreise die beiden Durchmesser zieht, so liegen deren andere Endpunkte mit dem zweiten Schnittpunkt der Kreise in einer Geraden.

Lösung von Carsten Balleier:



Beweis: Sei der erste Schnittpunkt S, der andere S' und heißen die anderen Endpunkte der Durchmesser P_1 und P_2.

Dann ist $\angle P_1S'S$ ein Peripheriewinkel über dem Durchmesser P_1S, nach Satz des Thales also ein rechter Winkel. Ebenso gilt $\angle P_2S'S = 90°$. Damit schließen P_1S' und P_2S' einen Winkel von 180° ein; mit anderen Worten: P_1, S' und P_2 liegen wie behauptet auf einer Geraden. □

Aufgabe 090834:
Es seien K_1, K_2, K_3, K_4 vier konzentrische Kreise, für deren Radien r_1, r_2, r_3 und r_4

$$r_4 - r_3 \quad = \quad r_3 - r_2 = r_2 - r_1 = r_1 \qquad \text{gilt.}$$

Ermittle das Verhältnis des Flächeninhalts von K_1 zu den Flächeninhalten der drei von K_1 und K_2 bzw. K_2 und K_3 bzw. K_3 und K_4 gebildeten Kreisringe!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus den Gleichungen für die Radien folgt $r_2 = 2r_1, r_3 = 3r_1, r_4 = 4r_1$.
Der Flächeninhalt A_1 des inneren Kreises K_1 beträgt

$$A_1 = \pi r_1^2$$

Der Flächeninhalt A_2 des ersten Kreisringes beträgt

$$A_2 = \pi \left[(2r_1)^2 - r_1^2\right] = 3\pi r_1^2$$

Der Flächeninhalt A_3 des zweiten Kreisringes beträgt

$$A_3 = \pi \left[(3r_1)^2 - (2r_1)^2\right] = 5\pi r_1^2$$

Der Flächeninhalt A_4 des dritten Kreisringes beträgt

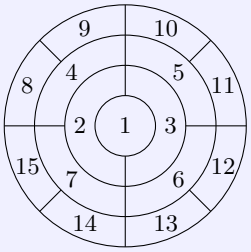
$$A_3 = \pi \left[(4r_1)^2 - (3r_1)^2\right] = 7\pi r_1^2$$

Daraus folgt:

$$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = \pi r_1^2 : 3\pi r_1^2 : 5\pi r_1^2 : 7\pi r_1^2 = 1 : 3 : 5 : 7$$

Die vier Flächeninhalte verhalten sich zueinander wie 1 : 3 : 5 : 7.

Aufgabe 100831:



Die Abbildung zeigt vier konzentrische Kreise. Die innere Kreisfläche ist mit 1 bezeichnet. Die von dem innersten und dem nächstfolgenden Kreis begrenzte Fläche des Kreisringes ist in zwei kongruente Teile, mit 2 und 3 bezeichnet, geteilt. Entsprechend ist die Fläche des nächsten Kreisringes in 4 und die des letzten in 8 jeweils untereinander kongruente Teilflächen zerlegt, die fortlaufend nummeriert wurden.

Wie müssen die Verhältnisse der Radien der vier Kreise gewählt werden, damit alle diese 15 genannten Flächenstücke einander inhaltsgleich sind?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Radien der vier Kreise seien von innen nach außen mit r_1, r_2, r_3, r_4 bezeichnet. Die Kreise enthalten der Reihe nach 1, 3, 7 und 15 der genannten jeweils einander inhaltsgleichen Flächenstücke.
Da die Flächeninhalte der Kreise πr_i^2 (i = 1,2,3,4) betragen, erhält man aus der Aufgabenstellung die Proportion

$$\pi r_1^2 : \pi r_2^2 : \pi r_3^2 : \pi r_4^2 = 1 : 3 : 7 : 15$$

und daraus wegen $r_i > 0$ (i = 1,2,3,4) schließlich, dass

$$r_1 : r_2 : r_3 : r_4 = 1 : \sqrt{3} : \sqrt{7} : \sqrt{15}$$

gelten muss, wenn alle 15 Flächenstücke einander inhaltsgleich sein sollen.

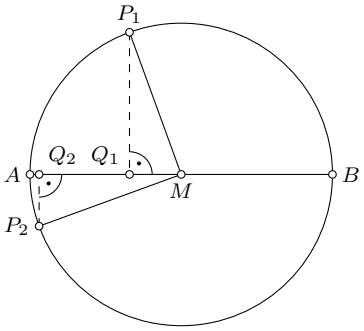
Aufgabe 120834:
Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Ein Durchmesser dieses Kreises sei AB. Zwei Punkte P_1 und P_2 mögen sich vom gleichen Zeitpunkt an gleichförmig auf je einer der beiden Halbkreislinien von A nach B bewegen, wobei die Bewegung des Punktes P_1 viermal so schnell erfolgen soll wie die des Punktes P_2.

Gibt es zwischen dem Start und der Ankunft von P_1 (in B) einen Zeitpunkt, zu dem die Dreiecke $\triangle ABP_1$ und $\triangle ABP_2$ gleichen Flächeninhalt haben?

Wenn ja, dann ermittle für jeden solchen Zeitpunkt die Größe des Winkels $\angle AMP_2$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede Lage des Punktes P_1, auf dem von ihm durchlaufenen Halbkreisbogen ist P_2 so gelegen, dass $\angle AMP_2 = \frac{1}{4} AMP_1 < \frac{1}{4} \cdot 180° = 45°$ gilt.
Umgekehrt nimmt die Größe des $\angle AMP_2$ während der beschriebene Bewegung alle Werte zwischen 0° und 45° an, jeden zu genau einem Zeitpunkt. Sind Q_1 bzw. Q_2 die Fußpunkte der von P_1 bzw. P_2 auf AB gefällten Lote, so haben die Dreiecke $\triangle ABP_1$ und $\triangle ABP_2$ genau dann gleichen Flächeninhalt, wenn gilt:

$$P_1Q_1 = P_2Q_2 \tag{1}$$



Im Falle $\angle AMP_1 < 90°$ ist

$$\angle Q_2MP_2 = \angle AMP_2 = \frac{1}{4}\angle AMP_1 < \angle AMP_1 = \angle Q_1MP_1$$

und daher $P_2Q_2 < P_1Q_1$.
Im Fall $\angle AMP_1 = 90°$ ist $\angle Q_2MP_2 = \angle AMP_2 = \frac{1}{4}\angle AMP_1 < 90°$ und daher ebenfalls $P_2Q_2 < (MP_2 = MP_1 =)P_1Q_1$. Also kann (1) in den Fällen $\angle AMP_1 \leq 90°$ nicht erfüllt werden.

Im Fall $\angle AMP_1 > 90°$ ist die Bedingung (1) genau dann erfüllt, wenn

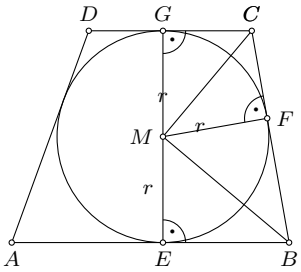
$$\angle BMP_1 = \angle Q_1MP_1 = \angle Q_2MP_2 = \angle AMP_2 \tag{2}$$

gilt; denn aus (1) folgt (2) vermittels des Kongruenzsatzes (ssw), aus (2) folgt (1) vermittels (sww). Nun ist (2) gleichwertig mit $180° - 4 \cdot \angle AMP_2 = AMP_2$ und dies mit $\angle AMP_2 = 36°$.
Daher gibt es genau einen Zeitpunkt mit der geforderten Eigenschaft, nämlich denjenigen, an dem der Winkel $\angle AMP_2$ die Größe 36° hat.

Aufgabe 160832:
Einem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ derart umbeschrieben, dass jede der Trapezseiten den Kreis berührt.

Beweise, dass dann $\overline{\angle BMC} = 90°$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Berührungspunkte des Inkreises mit den Seiten AB, BC, CD seien in dieser Reihenfolge mit E, F, G bezeichnet.
Wegen $MB = MB, ME = MF = r$ sowie $\angle BEM = \angle BFM = 90°$ (Berührungsradius) gilt $\triangle BME \cong \triangle BMF$ nach dem Kongruenzsatz (ssw). Analog lässt sich $\triangle CMG \cong \triangle CMF$ zeigen. Folglich gilt:

$$\angle GMC = \angle CMF \qquad \text{sowie} \qquad \angle FMB = \angle BME$$

Da ME und MG die Lote auf die Parallelen AB und CD von dem zwischen ihnen liegenden Punkt M aus sind, ist $\angle GME = 180°$. Wegen

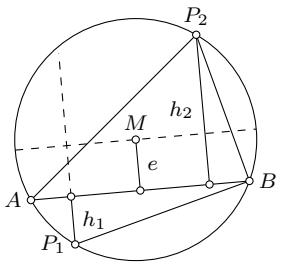
$$\angle BME + \angle FMB + \angle CMF + \angle MGC = \angle GME = 180° \qquad \text{d. h.} \qquad 2 \cdot \angle FMB + 2 \cdot \angle CMF = 180°$$

gilt somit $\angle BMC = \angle FMB + \angle CMF = 90°$, w. z. b. w.

Aufgabe 160836:
Gegeben seien eine Länge r und eine Länge $a \leq 2r$. Auf einem Kreis k mit dem Radius r seien A und B zwei Punkte, deren Abstand a beträgt. Weiterhin seien mit P_1 und P_2 zwei solche Punkte von k bezeichnet, die auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und B liegen.

a) Gesucht sind unter allen diesen Punkten P_1 und P_2 solche, für die der Flächeninhalt des Vierecks AP_1BP_2 am größten ist. Beweise, dass es solche Punkte gibt, und ermittle ihre Lage auf k.
b) Ermittle den entstehenden größtmöglichen Flächeninhalt unter allen Vierecken AP_1BP_2!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Der Flächeninhalt von Viereck AP_1BP_2 ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AP_1B und ABP_2. Deren Flächeninhalte sind jeweils am größten, wenn die Längen der Lote von P_1 bzw. P_2 auf die Gerade g durch A und B am größten sind.

Das ist genau dann der Fall, wenn P_1, P_2 die Schnittpunkte von k mit der Mittelsenkrechten von AB sind, d. h. der zu g senkrechten Geraden durch den Mittelpunkt M von k.

Beweis: Bezeichnen nämlich e, h_1, h_2 die Abstände von M, P_1 bzw. P_2 zu g und sind die Bezeichnungen so gewählt, dass M und P_2 in derselben von g begrenzten Halbebene liegen, so kann man zunächst zu allen Punkten P_2, für die $h_2 < e$ ist, auch Punkte P_2 finden für die $h_2 > e$ gilt, und dann ist stets $h_1 + e$ bzw. $h_2 - e$ der Abstand von P_1 bzw. P_2 zu dem zu g parallelen Durchmesser von k; d. h., $h_1 + e$ bzw. $h_2 - e$ ist die halbe Länge der durch P_1 bzw. P_2 gehenden auf AB senkrechten Sehne.

Unter allen zu AB senkrechten Sehnen ist aber diejenige am längsten, die durch M geht. Also nehmen auch h_1 und h_2 für diese Lage von P_1, P_2 ihre größten Werte an.

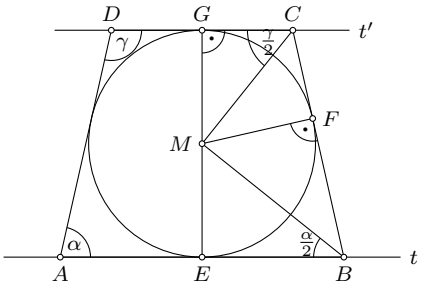
b) Für diese gilt $h_1 + h_2 = 2r$; der größtmögliche Flächeninhalt unter allen Vierecken AP_1BP_2 ist mithin

$$\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2) = ar.$$

Aufgabe 190835:
Es sei EG ein Durchmesser eines Kreises k. Die in E und G an k gelegten Tangenten seien t bzw. t'. Auf t sei eine Strecke AB so gelegen, dass E ihr Mittelpunkt ist. Die von A und B aus an k gelegten (und von t verschiedenen) Tangenten mögen t' in D bzw. C schneiden. Der Radius von k sei r; die Längen von AB bzw. CD seien a bzw. c.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die Gleichung $r^2 = \frac{ac}{4}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Mittelpunkt von k sei M. Bei Spiegelung an der Geraden durch E, G geht k in sich über. Ebenso t und t', und die Punkte A,B werden miteinander vertauscht. Das gilt folglich ebenfalls für die von A und B an k gelegten Tangenten und somit falls für D und C.

Daher ist G der Mittelpunkt der Strecke CD. Ferner folgt, dass im Trapez $ABCD$ die Innenwinkel bei A und B beide dieselbe Größe α und die Innenwinkel bei C und D beide die Größe $\gamma = 180° - \alpha$ haben (Gegenwinkel an geschnittenen Parallelen).

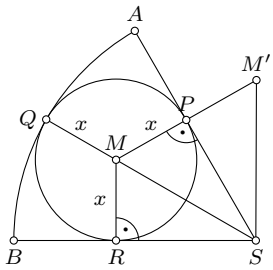
Berührt k die Gerade durch B,C in F, so gilt $\triangle BEM \cong \triangle BFM$ (ssw), also $\angle EBM < \angle FBM = \frac{\alpha}{2}$. Ebenso folgt $\angle GCM = \frac{\gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$, also $\angle GMC = \frac{\alpha}{2}$ (Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck CGM).

Daher sind die rechtwinkligen Dreiecke BME und MCG einander ähnlich, und es folgt $BE : EM = MG : GC$, also $\frac{a}{2} : r = r : \frac{c}{2}$ und somit $r^2 = \frac{1}{4}ac$, w. z. b. w.

Aufgabe 220835:
Der Zentriwinkel $\angle ASB$ eines Kreissektors s betrage $60°$. In diesem Kreissektor sei derjenige Kreis k gezeichnet, der die Strecken AS, BS und den Bogen $\overset{\frown}{AB}$ von innen berührt.

Wie viel Prozent vom Flächeninhalt des Kreissektors s beträgt der Flächeninhalt des Kreises k?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $r = AS = BS$. Der Mittelpunkt von k sei M, der Radius von k sei x. Die Berührungspunkte von k mit AS, BS bzw. $\overset{\frown}{AB}$ seien P, R bzw. Q. Dann liegt Q auf der Verbindungsgeraden der beiden Kreismittelpunkte S, M, und es gilt

$$SM + x = r. \tag{1}$$

Ferner sind die Radien MP bzw. MR von k senkrecht auf AS bzw. BS. Wegen $MP = MR = x$ hat also M gleiche Abstände zu AS und BS und liegt folglich auf der Halbierenden des Winkels $\angle ASB$.
Also ist $\angle PSM = 30°$. Daher und wegen $\angle MPS = 90°$ gilt nach dem Winkelsummensatz $\angle PMS = 60°$. Hat M bei der Spiegelung an der Geraden durch A,S das Bild M', so ist folglich SMM' ein gleichseitiges Dreieck. Darin ist die Höhe SP zugleich Seitenhalbierende, also gilt $SM = MM' = 2 \cdot MP$, d. h.

$$SM = 2x \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $3x = r$, der Flächeninhalt des Kreissektors s beträgt also

$$A_s = \frac{\pi r^2 \cdot 60°}{360°} = \frac{\pi r^2}{6} = \frac{3\pi x^2}{2}$$

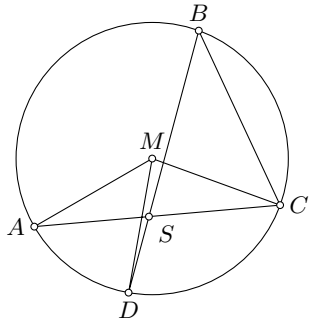
Der Flächeninhalt des Kreises k ist $Ak = \pi x^2 = \frac{2}{3}A_s$, d. h., A_k beträgt $66\frac{2}{3}\%$ von A_s.

Aufgabe 220836:
Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Auf k seien Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge so gelegen, dass folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

(1) Die Sehnen AC und BD schneiden einander in einem von M verschiedenen Punkt S.
(2) Derjenige Teilbogen von A nach B, der C und D nicht enthält, ist kleiner als ein Halbkreis.
(3) Derjenige Teilbogen von C nach D, der A und B nicht enthält, ist kleiner als ein Halbkreis.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{\angle ASD} = \frac{1}{2}\left(\overline{\angle AMB} + \overline{\angle CMD}\right)$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel gilt:

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AMB \qquad \text{und} \qquad \angle CBD = \frac{1}{2}\angle CMD$$

Durch Addition folgt

$$\angle ACB + \angle CBD = \frac{1}{2}(\angle AMB + \angle CMD) \qquad \text{d. h.}$$

$$\angle SCB + \angle CBD = \frac{1}{2}(\angle AMB + \angle CMD)$$

Nach dem Außenwinkelsatz, angewandt auf das Dreieck BCS, gilt $\angle ASD = \angle SCB + \angle CBS$. Daher folgt

$$\angle ASD = \frac{1}{2}(\angle AMB + \angle CMD)$$

Aufgabe 230835:
a) Zu einem gegebenen Kreis K werde dasjenige Quadrat Q betrachtet, das den gleichen Umfang wie K hat.
Ist der Flächeninhalt von Q größer, gleich oder kleiner als der Flächeninhalt von K? Wie viel Prozent des Flächeninhaltes von K beträgt der Flächeninhalt von Q?

b) Zu einem gegebenen Kreis k werde dasjenige Quadrat q betrachtet, das den gleichen Flächeninhalt wie k hat.
Ist der Umfang von q größer, gleich oder kleiner als der Umfang von k? Wie viel Prozent des Umfanges von k beträgt der Umfang von q?

Für π kann der auf 4 Dezimalen genaue Näherungswert $\pi \approx 3{,}1416$ verwendet werden. Die gesuchten Prozentsätze sind auf eine Dezimale nach dem Komma genau anzugeben.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Hat K den Radius r und Q die Seitenlänge a, so ist nach Voraussetzung $4a = 2\pi r$, also $a = \frac{\pi}{2}r$. Der Flächeninhalt von K ist $J(K) = \pi r^2$.
Der Flächeninhalt von Q ist $J(Q) = a^2 = \frac{\pi}{4}r^2$, er beträgt also das $\frac{\pi}{4}$fache, das sind 25 $pi\% \approx 78{,}5\%$ von $J(K)$.
Der Flächeninhalt von Q ist also kleiner als der von K.

b) Hat k den Radius ρ und q die Seitenlänge s, so ist nach Voraussetzung $s^2 = \pi\rho^2$, also $s = \sqrt{\pi}\rho$.
Der Umfang von k ist $2\pi\rho$. Der Umfang von q ist $4s = 4\sqrt{\pi}\rho$, er beträgt also das $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$fache, das sind $\approx 112{,}8\%$ des Umfangs von k.
Der Umfang von q ist also größer als der von k.

Aufgabe 230836:
Über fünf Punkte A, B, C, D, M wird folgendes vorausgesetzt:

M ist der Mittelpunkt der Strecke AB;

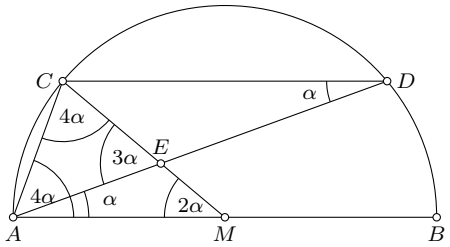
die Punkte A, C, D, B liegen in dieser Reihenfolge auf einem Halbkreis über AB;

es gilt $AB \parallel CD$;

die Strecke MC schneidet die Strecke AD in einem Punkt E, für den $\overline{AC} = \overline{EC}$ gilt.

Beweise, dass durch diese Voraussetzungen die Größe des Winkels $\angle ACM$ eindeutig bestimmt ist! Ermittle diese Winkelgröße!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $\alpha = \angle DAB$. Nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen gilt $\angle CDA = \angle DAB = \alpha$.
Nach dem Peripherie-Zentriwinkelsatz folgt hieraus: $\angle AMC = 2\angle CDA = 2\alpha$.
Nach dem Außenwinkelsatz gilt (da $\angle AEC$ Außenwinkel des Dreiecks AME ist)

$$\angle AEC = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$$

Nach Voraussetzung folgt hieraus

$$\angle EAC = \angle AEC = 3\alpha$$

und somit $\angle MAC = 4\alpha$. Wegen $AM = CM$ ist auch $\triangle AMC$ gleichschenklig, und es folgt

$$\angle ACM = 4\alpha$$

Somit ergibt sich nach dem Innenwinkelsatz (angewandt auf $\triangle AMC$)

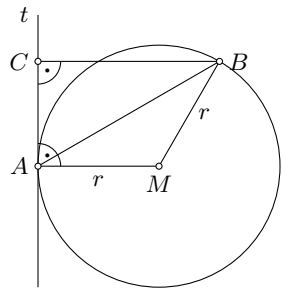
$$4\alpha + 4\alpha + 2\alpha = 180^\circ \qquad \text{also} \qquad \alpha = 18^\circ$$

und somit $\angle ACM = 72^\circ$.
Die gesuchte Winkelgröße ist folglich durch die Voraussetzungen eindeutig bestimmt; sie beträgt 72°.

Aufgabe 250834:
Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Eine Sehne von k, die nicht Durchmesser ist, sei AB. Ferner sei t die in A an k gelegte Tangente, und C sei der Fußpunkt des von B auf t gefällten Lotes.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Gerade durch A und B stets den Winkel $\angle CBM$ halbiert!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

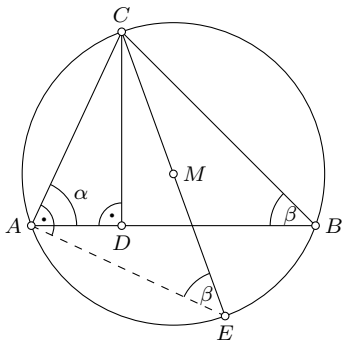


Der Berührungsradius MA steht senkrecht auf t. Deshalb und nach Voraussetzung stehen AM und CB senkrecht auf t und sind nach Umkehrung des Satzes über Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen parallel zueinander.
Da $\angle MAB$ und $\angle ABC$ Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind, gilt $\angle ABC = \angle MAB$. (1)

Andererseits ist das Dreieck AMB gleichschenklig mit $AM = MB$ (Radius), und es gilt $\angle MAB = \angle ABM$ (Basiswinkel). (2)
Aus (1) und (2) folgt unmittelbar $\angle ABC = \angle ABM$ und damit ist gezeigt, dass AB den Winkel $\angle CBM$ halbiert.

Aufgabe 270833:
Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Diesem Kreis sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC einbeschrieben, bei dem für die Größen α, β der Winkel $\angle BAC$, $\angle ABC$ vorausgesetzt werde, dass $\alpha > \beta$ gilt. Im Dreieck ABC sei D der Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe. Der von C ausgehende Strahl durch M schneide k in E.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen der Winkel $\angle DCE$ stets die Größe $\alpha - \beta$ hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung ist CE ein Durchmesser des Kreises k, und A liegt auf k. Nach dem Satz des Thales folgt hieraus $\angle EAC = 90°$.
Nach Voraussetzung sind $\angle AEC$ und $\angle ABC$ Peripheriewinkel über gleichem Bogen, also gilt $\angle = \angle ABC = \beta$.
Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck AEC folgt hieraus

$$\angle ACE = 90° - \beta \tag{1}$$

Nach Voraussetzung gilt ferner $\angle DAC = \angle BAC = \alpha$ und $\angle ADC = 90°$. Nach dem Innenwinkelsatz für Dreieck ADC folgt hieraus

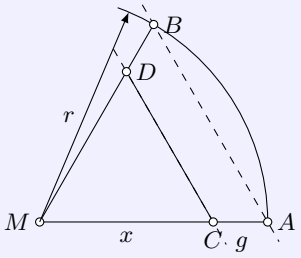
$$\angle ACD = 90° - \alpha \tag{2}$$

Nach Voraussetzung gilt schließlich $\alpha > \beta$; wegen (1) und (2) folgt hieraus $\angle ACE > \angle ACD$ und damit, wie behauptet,

$$\angle DCE = \angle ACE - \angle ACD = (90° - \beta) - (90° - \alpha) = \alpha - \beta$$

Aufgabe 270834:

Es sei $\overset{\frown}{ABM}$ ein Kreissektor, für den die Länge $r = \overline{MA} = \overline{MB}$ gegeben ist und der Zentriwinkel $\angle AMB$ die Größe 60° hat. Von einer Geraden g, die zu AB parallel ist und die Strecken MA bzw. MB in C bzw. D schneidet, sei bekannt, dass der Umfang u_1 des Dreiecks MCD gleich dem Umfang u_2 der Figur $\overset{\frown}{ABDC}$ ist (siehe Abbildung).



a) Ermittle unter dieser Voraussetzung die Länge $x = \overline{MC}$ in Abhängigkeit von r!

b) Die Länge r sei mit einer Genauigkeit gemessen, bei der sich auf eine Dezimale nach dem Komma genau $r = 6{,}7$ cm ergibt. Ferner sei zur Berechnung verwendet, dass auf zwei Dezimalen nach dem Komma genau $\pi = 3{,}14$ gilt.

Beweise, dass man daraus die Länge x (in Zentimetern) auf eine Dezimale nach dem Komma genau durch Berechnung von Schranken ermitteln kann! Wie lautet diese Längenangabe x?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wegen $\angle AMB = 60° = \frac{360°}{6}$ hat $\overset{\frown}{AB}$ die Bogenlänge

$$b = \frac{2\pi r}{6} = \frac{1}{3}\pi \cdot r \tag{1}$$

Da Dreieck MAB mit $MA = MB$ gleichschenklig ist, gilt für die Basiswinkel $\angle MAB = \angle MBA$ sowie nach dem Innenwinkelsatz $\angle MAB + \angle MBA = 180° - 60°$; daraus folgt $\angle MAB = \angle MBA = 60°$.
Wegen $CD \parallel AB$ gilt daher auch $\angle MCD = \angle MAB = 60°$ (Stufenwinkel) und ebenso $\angle MDC = 60°$. Also ist Dreieck MCD gleichseitig, d. h., es ist

$$MC = MD = CD = x \tag{2}$$

Aus (2) folgt $u_1 = 3x$ und $CA = DB = r - x$; hieraus und aus (1) folgt $u_2 = x + 2(r-x) + \frac{1}{3}\pi r$. Daher besagt die Voraussetzung $u_1 = u_2$

$$3x = x + 2r - 2x + \frac{1}{3}\pi r$$
$$4x = \left(2 + \frac{\pi}{3}\right) r = \frac{6+\pi}{12} r$$
$$x = \frac{6+\pi}{12} r$$

b) Aus den Genauigkeitsvoraussetzungen ergibt sich nach (3), dass die Maßzahl von x als eine untere Schranke die Zahl

$$\frac{6+3{,}135}{12} \cdot 6{,}65 = 5{,}0623125$$

und als eine obere Schranke die Zahl

$$\frac{6+3{,}145}{12} \cdot 6{,}75 = 5{,}1440625$$

hat. Damit ist bewiesen, dass auf eine Dezimale nach dem Komma genau $x = 5{,}1$ cm gilt.

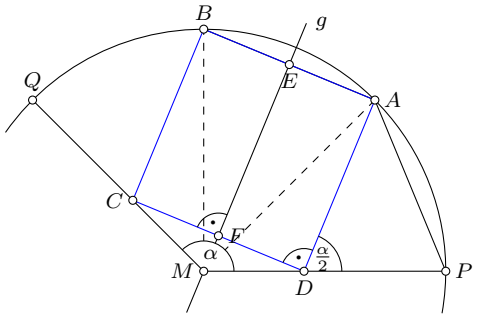
Aufgabe 290832:
Einem Kreisausschnitt soll ein Quadrat so einbeschrieben werden, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Die - aus zwei Strecken (Radien) und einem Kreisbogen bestehende - Randlinie des Kreisausschnittes enthält die vier Eckpunkte des Quadrates.

(2) Der Kreisbogen wird durch zwei dieser Eckpunkte in drei gleichlange Teilbögen zerlegt.

Untersuche, ob durch diese Bedingungen die Größe α des Zentriwinkels des Kreisausschnittes eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, so gib diese Größe an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn die Bedingungen von einem Kreisausschnitt K mit dem Kreismittelpunkt M, den Radien MP, MQ und dem Zentriwinkel der Größe $\alpha = \angle PMQ$ sowie von einem Quadrat $ABCD$ erfüllt werden, wobei o. B. d. A. nach (1) die Punkte A und B so auf PQ liegen, dass PQ nach (2) in die gleichlangen Teilbögen $\overset{\frown}{PA}, \overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BQ}$ zerlegt wird, so folgt:



Bei der Spiegelung an der Geraden g durch die Mittelpunkte E, F von AB bzw. CD werden A und B miteinander vertauscht, ebenso C und D miteinander. Also muss der Kreisausschnitt K in einen kongruenten Kreisausschnitt K' übergehen, der Bogen $\overset{\frown}{AB}$ in den zu K' gehörenden Teilbogen $\overset{\frown}{BA}$, der folglich wegen der Kongruenz von K und K' mit $\overset{\frown}{AB}$ zusammenfällt; die Bögen $\overset{\frown}{PA}$ und $\overset{\frown}{QB}$ werden miteinander vertauscht, somit fällt K' mit K zusammen, g ist Symmetrieachse des Kreisausschnitts, geht durch M und halbiert den Bogen $\overset{\frown}{PQ}$.

Da zu gleichlangen Bögen eines Kreises auch gleichlange Sehnen und gleichgroße Zentriwinkel gehören, gilt somit einerseits $\angle PME = \frac{\alpha}{2}$, wegen $g \parallel AD$ nach dem Stufenwinkelsatz also $\angle PDA = \frac{\alpha}{2}$ (3), andererseits $\angle PMA = \frac{\alpha}{3}$ und $PA = AB = AD$, nach dem Basiswinkelsatz und dem Innenwinkelsatz also

$$\angle PDA = \angle MPA = \angle MAP = \frac{1}{2}(180° - \frac{\alpha}{3}) = 90° - \frac{\alpha}{6} \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt $\frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{6}$, $\alpha = 135°$. Daher ist die Größe des Zentriwinkels des Kreisausschnitts durch die Bedingungen eindeutig bestimmt; sie beträgt $\alpha = 135°$.

Aufgabe 340843:
Auf einem Zeichenblatt seien drei Punkte A, B, C mit $A \neq B$, $A \neq C$ und $B \neq C$ gegeben. Gesucht sind zwei einander gleichgroße, voneinander verschiedene Kreise, von denen einer durch A, der andere durch C geht und die sich im Punkt B berühren.

Beschreibe Lagemöglichkeiten der gegebenen Punkte A, B, C, bei denen es

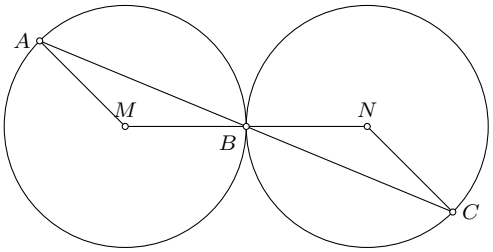
a) keine solchen Kreise,

b) mehr als ein Paar solcher Kreise,

c) genau ein Paar solcher Kreise gibt!

Zu (a) zeige, warum es keine solchen Kreise gibt; zu (b) bzw. (c) beschreibe und begründe je eine Konstruktion, mit der man aus den gegebenen Punkten mehrere derartige Kreispaare bzw. das eine derartige Kreispaar erhalten kann! Führe die von dir beschriebene Konstruktion durch! Wähle hierzu A, B, C jeweils in passender Lage für (b) bzw. (c) und konstruiere aus diesen A, B, C bei (b) zwei Kreispaare, bei (c) das eine Kreispaar!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(a) Bei den folgenden Lagemöglichkeiten für A, B, C (mit $A \neq B$, $A \neq C$, $B \neq C$) gibt es keine Kreise der genannten Art:

(a1) Der Punkt B liegt auf einer Verlängerung der Strecke AC.
(a2) Der Punkt B liegt auf der Strecke AC, ist aber nicht ihr Mittelpunkt.

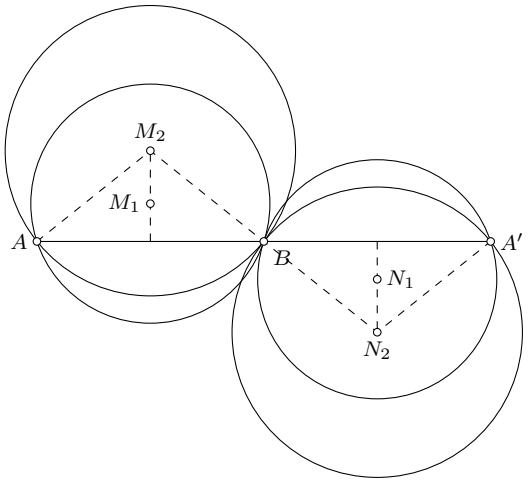
Berühren sich nämlich zwei einander gleichgroße, voneinander verschiedene Kreise, so muss dies eine Berührung von außen sein.
Für jede Gerade durch den Berührungspunkt B, die die Kreise in je einem von B verschiedenen Punkt A bzw. C schneidet (siehe Abbildung), gilt aber:

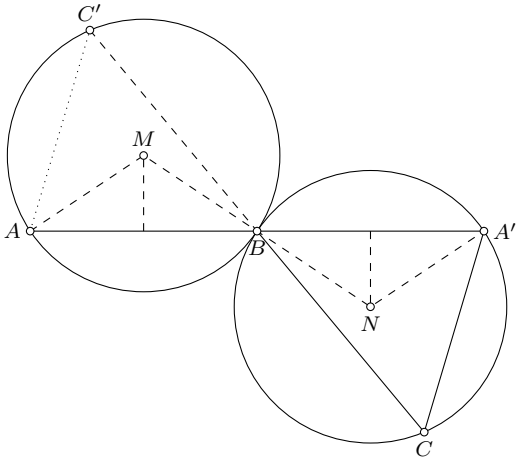
B liegt zwischen A und C; also kann nicht (a1) vorliegen. Ferner gilt für jede solche Gerade: Sind M bzw. N die Mittelpunkte der beiden Kreise, so liegt B auf der Strecke MN, daher gilt $\angle ABM = \angle CBN$ (Scheitelwinkel), wegen $\angle ABM = \angle BAM$, $\angle CBN = \angle BCN$ (Basiswinkel) und $MB = NB$ nach Kongruenzsatz sww also $\triangle ABM \cong \triangle CBN$, $AB = CB$, somit kann auch (a2) nicht vorliegen.

(b) Mehr als ein Paar von Kreisen der genannten Art gibt es, wenn B der Mittelpunkt der Strecke AC ist. Man erhält solche Kreise durch folgende Konstruktion:

Auf der Mittelsenkrechten von AB wählt man einen beliebigen Punkt M und bringt die Gerade durch M und B zum Schnitt N mit der Mittelsenkrechten von BC. Die Kreise um M und um N durch B gehen dann nämlich wegen $MA = MB$ und $NC = NB$ auch durch A bzw. C; sie berühren sich in B, da B auf MN liegt. Schließlich sind diese Kreise auch einander gleichgroß; denn wegen der Voraussetzung $AB = CB$ und wegen $\angle BAM = \angle ABM = \angle CBN = \angle BCN$ gilt $\triangle ABM \cong \triangle CBN$, also $MB = NB$.

Die Abbildung zeigt zwei Kreispaare, die nach dieser Beschreibung bei den Wahlen $M = M_1$ und $M = M_2$ erhalten werden.





(c) Genau ein Kreispaar der genannten Art gibt es, wenn A, B und C nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
Man erhält es durch folgende Konstruktion (siehe dritte Abbildung):
Man verlängert die Strecken AB und CB jeweils über B hinaus um ihre eigene Länge bis A' bzw. C' und konstruiert die Umkreise der Dreiecke ABC' und $A'BC$ (die Umkreismittelpunkte M bzw. N sind in bekannter Weise als Schnittpunkte von Mittelsenkrechten zu erhalten).

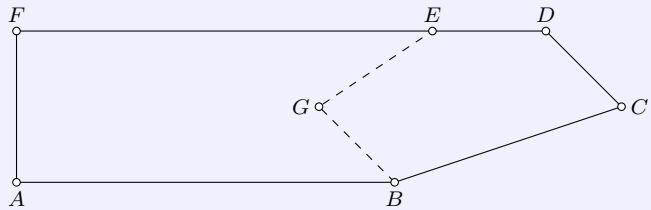
Diese Kreise haben die geforderten Eigenschaften; denn nach Konstruktion wird $\triangle ABC' \cong \triangle A'BC$, also sind die Umkreise einander gleichgroß.
Daher ist auch $\triangle ABM \cong \triangle A'BN$ (Kongruenzsatz sss), also sind die Winkel $\angle ABM$, $\angle A'BN$ einander gleichgroß und folglich Scheitelwinkel; d. h., B liegt auf MN, die Kreise berühren sich in B.

Dass dieses Kreispaar das einzige mit den geforderten Eigenschaften ist, kann so gezeigt werden:
Wenn vorausgesetzt wird, dass zwei Kreise diese Eigenschaften haben, so folgt wie in (a), aber mit A, B, A' und nochmals mit C, B, C' statt der dortigen A, B, C, dass die Kreise auch durch die hier konstruierten Punkte A' bzw. C' gehen.

IV.IV Konstruktionen

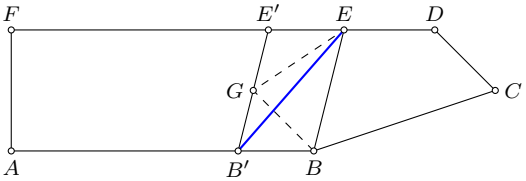
I Runde 1

Aufgabe V00810:



Die Grenze zweier aneinandergrenzender Felder (siehe Abbildung). einer LPG ist eine gebrochene Linie EGB. Zur Erleichterung der Bestellung soll die Grenzlinie gradlinig führen, ohne die Größe der Einzelfelder zu verändern.
Löse die Aufgabe durch Konstruktion und begründe sie!

Lösung von Steffen Polster:
Verschiebt man die Strecke EB parallel durch G, so entsteht ein Viereck $BEE'B'$. Dieses Viereck ist ein Parallelogramm, da AB und EF parallel sind und eine Parallelverschiebung von EB erfolgte.
Diese Parallelogramm kann durch eine Diagonale, z. B. EB', in zwei flächengleiche Dreiecke zerlegt werden.



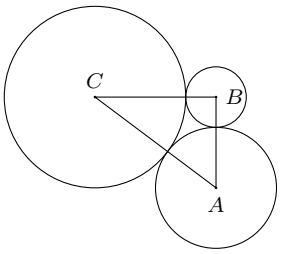
Beide Teilfelder verändern damit nicht ihren Flächeninhalt. Die Strecke EB' ist somit eine Möglichkeit für die neue Grenze zwischen beiden Feldern.

Aufgabe V00813:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $a = 8$ cm, $b = 10$ cm, $c = 6$ cm.
Die Eckpunkte dieses Dreiecks sollen die Mittelpunkte der Kreise sein, die sich gegenseitig berühren.
Bestimme die Größe der Radien!
(Der Lösungsweg kann beliebig gewählt werden!)

Lösung von Steffen Polster:
Für die Radien r_a, r_b, r_c der Kreise um die Punkte A, B und C wird dann

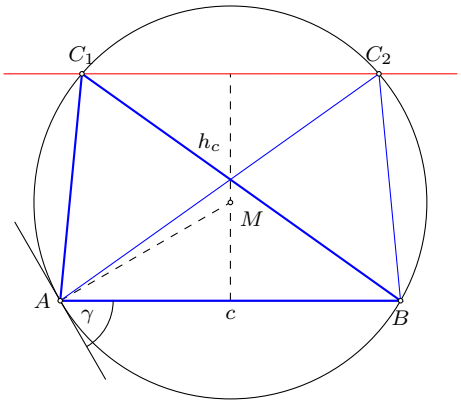
$$r_a + r_c = b = 6$$
$$r_a + r_b = c = 10$$
$$r_b + r_c = a = 8$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen $r_a = 4$ cm, $r_b = 2$ cm und $r_c = 6$ cm.



Aufgabe V10815:
Konstruiere ein Dreieck aus: $c = 7$ cm, $h_c = 5$ cm, $\gamma = 60°$.
(Hilfslinien müssen erkennbar sein.)

Lösung von Steffen Polster:

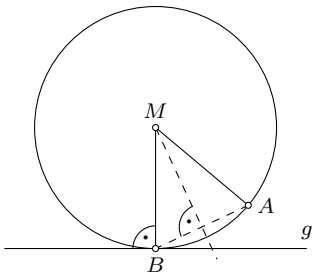


Konstruktion:
Die Konstruktion ergibt sich aus dem Sehnentangentenwinkel - Peripheriewinkelsatz.
1. An die Strecke $\overline{AB} = c$ wird der Winkel γ angetragen.
2. Die Senkrechte zum freien Schenkel von γ und die Mittelsenkrechte von AB schneiden sich im Umkreismittelpunkt M des gesuchten Dreiecks ABC.
3. Die Parallele zu AB im Abstand h_c schneidet den Kreis in 0, 1 oder 2 Punkten, je nachdem, wie viele Lösungen für den Punkt C existieren. Für die gegebenen Größen gibt es zwei Schnittpunkte C_1 und C_2. Die beiden Dreiecke ABC_1 und ABC_2 erfüllen die Anforderungen und sind zueinander kongruent.

Aufgabe 010816:
Es ist ein Kreis zu konstruieren, der eine gegebene Gerade g in dem gegebenen Punkt B berührt und durch einen gegebenen Punkt A geht, der nicht auf g liegt.

Begründe die Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

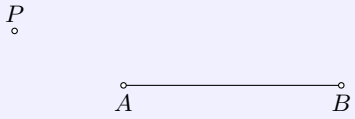


Berührt der Kreis die Gerade g, so muss der Kreismittelpunkt M auf dem Lot (Senkrechte) auf g in B liegen.

M muss aber auch, als Punkt der von A und B den gleichen Abstand hat, auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB liegen.

Der Schnittpunkt der Senkrechten in B und der Mittelsenkrechten ist dann der gesuchte Kreismittelpunkt M.

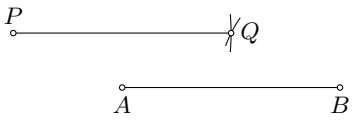
Aufgabe 030816:



Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ und ein nicht auf ihr liegender Punkt P (Lage siehe Abbildung).

Es ist mit Zirkel und Lineal eine zu $\overline{AB}$ parallele Strecke gleicher Länge zu konstruieren, deren einer Endpunkt P ist! Fertige eine Konstruktionsbeschreibung an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Konstruktion: (Bild) Es ist ein Punkt Q gesucht mit $PQ \parallel AB$ und $PQ = AB$.

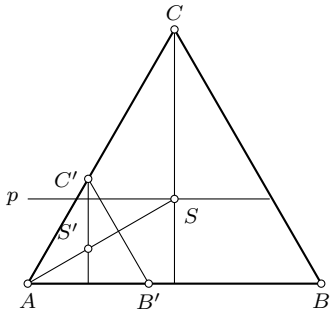
Das bedeutet, dass Q mit A, B und P ein Parallelogramm bilden muss. Der Punkt Q muss also von B den Abstand AP haben. Deshalb zeichnet man um B einen Kreisbogen mit Radius AP und um P einen mit Radius AB.

Man erhält zwei Schnittpunkte, es ist derjenige auszuwählen, für den $\angle BQP = \angle PAB$ gilt.

Aufgabe 070814:
Von einem gleichseitigen Dreieck ist die Länge ρ des Inkreisradius bekannt. Das Dreieck ist unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal zu konstruieren!

Lösung von Manuela Kugel:
I. Analyse:
In einem gleichseitigen Dreieck fallen Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt und Schwerpunkt zusammen, d. h. der Höhenschnittpunkt ist gleichzeitig der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden. Ferner sind im gleichseitigen Dreieck alle Innenwinkel 60° groß.

Wenn man irgendein gleichseitiges Dreieck konstruiert ist dieses zum gesuchten Dreieck ähnlich. Dann kann man auf alle Seiten und den Inkreisradius den Strahlensatz anwenden.



II. Konstruktion:
(1) Man konstruiert ein beliebiges gleichseitiges Dreieck $AB'C'$, indem zwei Punkte A und B' festgelegt werden. Um beide Punkte wird ein Kreis mit dem Abstand AB' gezeichnet. Der Schnittpunkt beider Kreise werde C' genannt.

(2) Es wird ein Punkt S' konstruiert aus dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten für die Dreiecksseiten AB' und $B'C'$. Er sei S' genannt

(3) Eine Parallele zu AB' mit Abstand ρ wird in der Halbebene, in der C' liegt, konstruiert. Sie sei p genannt und schneidet die Gerade durch AS' in S.

(4) Die Senkrechte durch S auf der Geraden durch AB' schneidet die Gerade durch AC' im Punkt C.

(5) Zuletzt wird die Gerade durch $B'C'$ durch den Punkt C parallel verschoben und schneidet die Gerade durch AB' in B. Das Dreieck ABC ist das gesuchte gleichseitige Dreieck mit dem Inkreisradius ρ.

III. Beweis:
Das gesuchte Dreieck erfüllt die Bedingungen, dass es gleichseitig ist und einen Inkreisradius von ρ besitzt, denn:

Nach Konstruktion ist das Dreieck $\triangle ABC$ zum Dreieck $\triangle AB'C'$ ähnlich mit dem gleichen Winkel $\angle BAC$ und nach Strahlensatz, da $B'C' \parallel BC$ und folglich $AC' : AC = AB' : AB = B'C' : BC$ ist. Also ist das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig.

Da S' der Punkt im gleichseitigen Dreieck ist, der gleichzeitig Umkreis-, Inkreismittelpunkt und Schwerpunkt ist, so ist auch S' als Schnittpunkt der Höhe durch C sowie der Winkelhalbierenden von Winkel $\angle BAC$ derjenige Punkt, der im Dreieck $\triangle ABC$ Umkreis-, Inkreismittelpunkt und Schwerpunkt ist. Folglich ist der Abstand von S zu AB der Inkreisradius, der nach Konstruktion wiederum die Größe ρ hat.

IV. Existenz und Eindeutigkeit:
Die Konstruktionsschritte (1), (2) und (3) sind eindeutig ausführbar. Da AC' nicht senkrecht auf AB' steht, gibt es genau einen Schnittpunkt C, der nach Schritt (4) konstruiert werden kann. Auch der Schritt (5) ist eindeutig durchführbar.

Aufgabe 110814:
Gegeben seien ein beliebiges Parallelogramm $ABCD$ sowie eine beliebige Länge e ($e > 0$).

Konstruiere unter Beibehaltung der Seite AB ein zu $ABCD$ flächengleiches Parallelogramm ABC_1D_1, das auf derselben Seite der Geraden durch A und B wie $ABCD$ liegt und dessen Diagonale AC_1 die gegebene Länge e hat!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken stets eindeutig ein Parallelogramm der geforderten Art konstruieren lässt! (Eine Untersuchung ob zwei eventuell entstehende verschiedene Parallelogramme einander kongruent sind, wird hier nicht verlangt.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, ABC_1D_1 sei ein Parallelogramm, wie es konstruiert werden soll. Dann stimmt es mit

$ABCD$ im Flächeninhalt und in der Seite AC überein. Daher muss es mit $ABCD$ auch in der zu AB gehörigen Höhe übereinstimmen. Also müssen C_1 und D_1 auf der Geraden durch C und D liegen.

(II) Daher kann ein Parallelogramm ABC_1D_1 nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

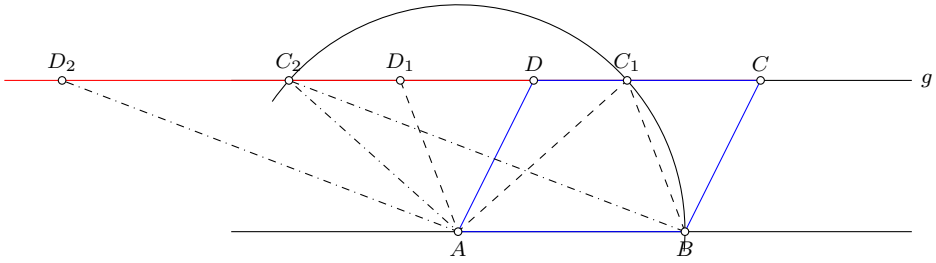
(1) Man zeichnet die Gerade g durch C und D.

(2) Man schlägt den Kreis um A mit e. Schneidet er g, so sei einer der Schnittpunkte C_1 genannt.

(3) Man zieht die Parallele zu BC_1 durch A. Ihr Schnittpunkt mit g sei D_1 genannt.

(III) Der Beweis, dass jedes so erhaltene Parallelogramm ABC_1D_1 den Bedingungen der Aufgabe entspricht, ergibt sich aus (II) und der Umkehrbarkeit der Schlüsse in (I).

(IV) Der Abstand der Seite AB von der Seite CD sei mit h bezeichnet. Dann erhält man für $e < h$ keinen Schnittpunkt C_1. Die Aufgabe hat in diesem Falle keine Lösung.
Im Falle $e = h$ gibt es genau einen Schnittpunkt C_1 (Berührungspunkt) und mithin genau eine Lösung, im Falle $e > h$ dagegen zwei Schnittpunkte C_1 und C_2 und damit zwei verschiedene Parallelogramme ABC_1D_1 und ABC_2D_2 als Lösungen.



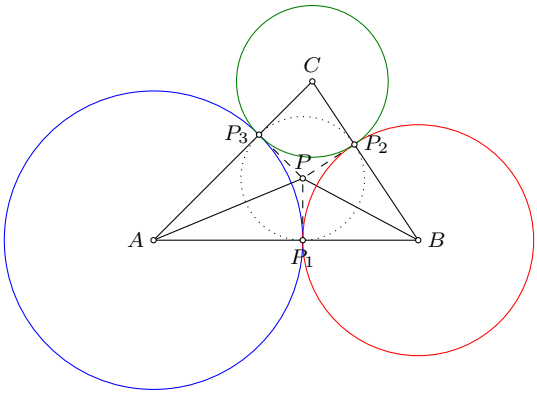
Aufgabe 120814:
Gegeben sei ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$.

Konstruiere um jeden der Punkte A, B, C einen Kreis derart, dass die so entstandenen Kreise einander paarweise von außen berühren!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, es gibt drei derartige Kreise. Ihre Berührungspunkte seien P_1, P_2, P_3 genannt. Da der Berührungspunkt je zweier Kreise stets auf der Verbindungsstrecke ihrer Mittelpunkte liegt, liegen die drei genannten Punkte auf den Seiten des Dreiecks $\triangle ABC$. Die Bezeichnung sei nun so gewählt, dass P_1 auf AB, P_2 auf BC und P_3 auf AC liegt. Dann gilt:

$$(1)\quad P_1B = BP_2, \qquad (2)\quad P_2C = CP_3, \qquad (3)\quad P_3A = AP_1$$

Die Senkrechten auf AB bzw. BC im Punkte P_1 bzw. P_2 schneiden einander in einem Punkt, der mit P bezeichnet sei. Dann sind PP_1 und PP_2 Tangentenabschnitte auf den von einem Punkt an denselben Kreis gezogenen Tangenten, und es gilt: (4) $\quad PP_1 = PP_2$.
Analog erhält man $PP_1 = PP_3$. Folglich ist P der Inkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.



(II) Daraus ergibt sich, dass drei Kreise nur dann die geforderte Eigenschaft haben, wenn sie durch folgende Konstruktion erhalten werden können:

(1) Man konstruiert den Inkreismittelpunkt P des Dreiecks $\triangle ABC$.
(2) Man fällt von P auf die drei Seiten des Dreiecks die Lote. Ihre Endpunkte seien mit P_1, P_2, P_3 bezeichnet.
(3) Man schlägt um A den Kreis mit dem Radius AP_1, um B den Kreis mit dem Radius BP_1 und um C den Kreis mit dem Radius CP_2.

(III) Da jeder der Schlüsse in (I) umkehrbar ist, ergibt sich ein Beweis, dass die so konstruierten Kreise den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, aus der Umkehrung der Schlusskette in (I).

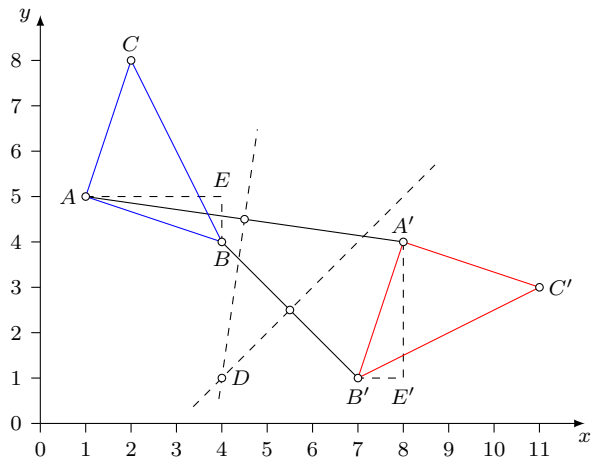
(IV) Der in (II) beschriebene Konstruktionsschritt (1) ist stets eindeutig ausführbar. Da somit stets genau ein Punkt P existiert, sind aus bekannten Gründen auch die Konstruktionsschritte (2) und (3) eindeutig ausführbar.

Aufgabe 270812:
In einen rechtwinkligen Koordinatensystem seien die Punkte $A(1;5)$, $B(4;4)$, $C(2;8)$, $A'(8;4)$, $B'(7;1)$, $C'(11;3)$ gegeben. Sie sind so gelegen, dass es eine Drehung gibt, bei der A, B und C die Bildpunkte A', B' bzw. C' haben.

Konstruiere das Drehzentrum D dieser Drehung! Beschreibe deine Konstruktion!

Beweise folgende Aussage: Wenn D das gesuchte Drehzentrum ist, dann lässt sich D nach deiner Beschreibung konstruieren.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Das Einzeichnen von Punkten wie E,E' oder von Dreiecken wie ABC, ABE, $A'B'C'$, $A'B'E'$, die zur Verdeutlichung der nachstehenden Hinweise dienen, wird nicht gefordert.

Konstruktionsbeschreibung:
(1) Man konstruiert die Mittelsenkrechte g von AA'.
(2) Man konstruiert die Mittelsenkrechte h von BB'.
Der Schnittpunkt D von g und h ist das gesuchte Drehzentrum.

Beweis: Wenn D das gesuchte Drehzentrum ist, so muss $DA = DA'$ gelten. Also muss D auf der Mittelsenkrechten von AA' liegen (denn diese ist die Menge aller derjenigen Punkte, deren Entfernung zu A gleich ihrer Entfernung zu A' ist).
Ebenso folgt, dass D auf der Mittelsenkrechten von BB' liegen muss. Daher kann nur derjenige Punkt D das gesuchte Drehzentrum sein, der durch die Konstruktion (1), (2) erhalten werden kann.

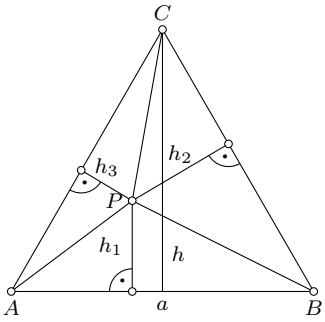
Zur Kontrolle: Es muss sich der Punkt $D(4,1)$ ergeben.

Aufgabe 280814:
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Ferner sei P ein beliebiger im Innern dieses Dreiecks gelegener Punkt.

a) Konstruiere ein derartiges Dreieck!
b) Miss die Länge der von P auf die Seiten gefällten Lote und vergleiche die Summe dieser Längen mit der Länge einer Höhe dieses Dreiecks! Was vermutest du?
c) Beweise deine Vermutung!

Hinweis: Es ist zweckmäßig, den Flächeninhalt geeigneter Teildreiecke zu betrachten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Konstruktion siehe Abbildung
b) Vermutung: Die Summe der Längen der drei Lote ist gleich der Länge der Höhe des gleichseitigen Dreiecks.

c) Die Seitenlänge des Dreiecks sei mit a bezeichnet, die Längen der Lote von P auf AB, BC und AC in dieser Reihenfolge mit h_1, h_2 und h_3; die Länge einer (also jeder) Höhe des Dreiecks ABC sei mit h bezeichnet.

Benennt man die Flächeninhalte der Teildreiecke ABP, BPC und APC in dieser Reihenfolge mit F_1, F_2 und F_3, sowie den Flächeninhalt des Dreiecke ABC mit F, dann gilt $F = F_l + F_2 + F_3$.

Andererseits gilt nach der Flächenformel für Dreiecke

$$F = \frac{1}{2}ah; \qquad F_1 = \frac{1}{2}ah_1; \qquad F_2 = \frac{1}{2}ah_2; \qquad F_3 = \frac{1}{2}ah_3$$

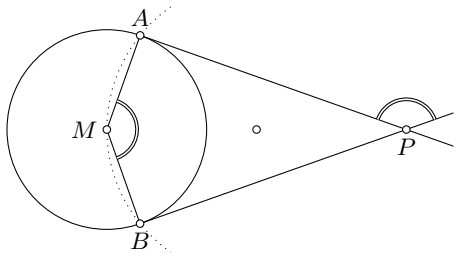
Hieraus folgt

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2 + h_3) \qquad \text{und damit} \qquad h = h_1 + h_2 + h_3$$

Aufgabe 310813:
Dirk zeichnet an einen Kreis k zwei Tangenten, die sich in einem Punkt P außerhalb von k schneiden. Den Mittelpunkt des Kreises nennt er M, die Berührungspunkte der Tangenten A bzw. B. Nun stellt er fest, dass der Winkel $\angle AMB$ die gleiche Größe hat wie einer der Schnittwinkel der beiden Tangenten.

a) Konstruiere einen Kreis, dazu zwei Tangenten und die von Dirk betrachteten Winkel!
b) Beweise, dass Dirks Feststellung stets für beliebige (sich schneidende) Tangenten eines Kreises zutrifft!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Die Abbildung zeigt eine geforderte Konstruktion.

b) Für je zwei (sich schneidende) Tangenten gilt mit den angegebenen Bezeichnungen $\angle MAP = \angle MBP = 90°$ (Tangenten und Berührungsradien), also $\angle AMB = 180° - \angle APB$ (Winkelsumme im Viereck).
Folglich hat der Winkel $\angle AMB$ die gleiche Größe wie ein Nebenwinkel von $\angle APB$ und damit wie einer der Schnittwinkel der beiden Tangenten.

Aufgabe 310814:
Gegeben seien ein Kreis k und ein Punkt P, der innerhalb von k liegt, aber verschieden ist vom Mittelpunkt M des Kreises k.

Zu konstruieren sind zwei Sehnen s_1 und s_2 des Kreises k, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) s_1 und s_2 schneiden einander in P.

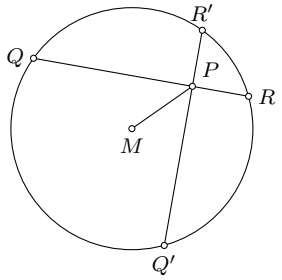
(2) s_1 und s_2 stehen aufeinander senkrecht.

(3) s_1 und s_2 haben einander gleiche Länge.

a) Beschreibe eine Konstruktion, durch die zu gegebenem Kreis k und gegebenem Punkt P zwei Sehnen s_1 und s_2 erhalten werden! Führe die beschriebene Konstruktion durch!

b) Beweise, dass zwei Sehnen, die nach Deiner Beschreibung konstruiert werden, stets die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Konstruktionsbeschreibung (siehe Abbildung):

[1] Man trägt an die Strecke PM in P einen Winkel der Größe 45° an; der freie Schenkel dieses Winkels schneidet den Kreis k in Q; die Gerade g durch Q und P schneidet k außerdem in R.
[2] Man trägt an PM in P nach der anderen Seite von PM als soeben in [1] den Winkel der Größe 45° an; der freie Schenkel dieses Winkels schneidet k in Q'; die Gerade g' durch Q' und P schneidet k außerdem in R'.
Die Strecken QR und $Q'R'$ sind zwei Sehnen, die (1),(2),(3) erfüllen.

b) Beweis: Nach [1] und [2] sind QR und $Q'R'$ zwei durch P gehende Sehnen, d. h., (1) ist erfüllt. Ferner ist mit

$$\angle QPQ' = \angle QPM + \angle Q'PM = 45° + 45° = 90° \tag{4}$$

auch (2) erfüllt. Weiter gilt $MP = MP$ sowie $MQ = MQ'$ und $MR = MR'$ (Radien von k), $r > MP$ (da P innerhalb k ist),

$$\angle MPQ = \angle MPQ' = 45° \quad , \quad \angle MPR = \angle MPR' = 135°$$

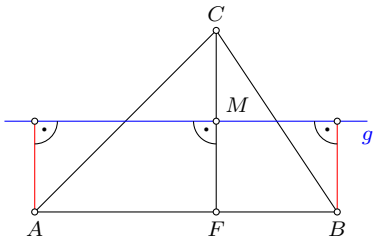
also $\triangle MPQ \cong \triangle MPQ'$ und $\triangle MPR \cong \triangle MPR'$ (Kongruenzsatz Ssw), $PQ = PQ'$ und $PR = PR'$.

Damit folgt $QR = Q'R'$; d. h., auch (3) ist erfüllt.

II Runde 2

Aufgabe V10825:
Gegeben sind drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte.
Konstruiere eine Gerade, von der alle drei Punkte den gleichen (senkrechten) Abstand haben!
Wie viel solcher Geraden gibt es?

Lösung von Steffen Polster:



Konstruktion:
1. Konstruiere die Höhe h_c von C auf die Seite AB. Konstruiere den Mittelpunkt M dieser Höhe.
2. Zeichne eine Senkrechte zu h_c durch M, die somit parallel zu AB ist. Diese Senkrechte g ist eine Gerade, die den Anforderungen der Aufgabe entspricht. Der Abstand der Punkte A und B von g ist $\frac{h_c}{2}$. Auf Grund der Konstruktion hat auch C den Abstand $\frac{h_c}{2}$ von g.

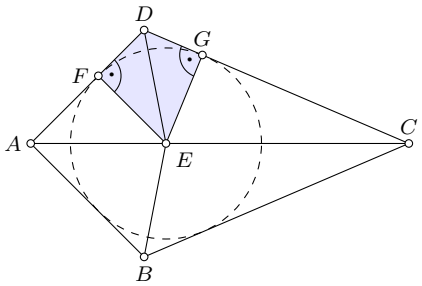
In einem Dreieck existieren stets 3 derartige Geraden, die mittels einer der Höhen h_a, h_b und h_c konstruiert werden können.

Aufgabe 010824:
Können zwei Sehnen eines Kreises, die nicht Durchmesser sind, einander halbieren? Die Antwort ist zu begründen!

Lösung von Carsten Balleier:
Beweis: Zwei Strecken, die sich schneiden, legen eindeutig ein Viereck fest, das diese Strecken als Diagonalen besitzt. Ein Viereck, dessen Diagonalen einander halbieren, ist ein Parallelogramm. Ein in einen Kreis einbeschriebenes Parallelogramm ist stets ein Rechteck. Dessen Diagonalen wiederum sind Durchmesser des Kreises, also ist die Antwort: nein.

Aufgabe 010825:
Gibt es in einem Drachenviereck, das nicht gleichzeitig Rhombus ist, einen Punkt, dessen Abstände von den vier Seiten einander gleich sind?
Wenn ja, dann konstruiere diesen Punkt und beweise, dass er die angegebene Eigenschaft hat!

Lösung von Carsten Balleier:



Analysis und Konstruktion:

(Bild) Aus Symmetriegründen muss der gesuchte Punkt E auf der Diagonalen AC des Drachenvierecks $ABCD$ liegen. Auf dieser ist es genau der Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden von $\angle ADC$ bzw. $\angle ABC$.

Beweis:
Punkte auf einer Winkelhalbierenden haben von beiden Schenkeln des Winkels stets den gleichen senkrechten Abstand. Das zeigt man, indem zwei rechtwinklige Dreiecke DFE und DGE betrachtet werden:

die Winkelhalbierende DE als gemeinsame Seite, die gleichen Winkel $\angle FDE = \angle GDE$ sowie die ebenfalls gleichen rechten Winkel $\angle DFE = \angle DGE = 90°$. Damit sind auch die dritten Winkel gleich und die beiden Dreiecke nach WSW kongruent.

Die Lote $\overline{EF} = \overline{EG}$ (die gleichzeitig die gesuchten Abstände sind) haben demzufolge die gleiche Länge. Somit ist Punkt E der Inkreismittelpunkt des Drachenvierecks. □

Aufgabe 020827:
Von einem Dreieck sind die Summe zweier Seiten und zwei Winkel gegeben:

$$a + b = 10 \text{ cm}, \qquad \beta = 45°, \qquad \gamma = 60°$$

Konstruiere das Dreieck! Beschreibe und begründe die Konstruktion!

Lösung von Carsten Balleier:
Man konstruiere zuerst ein beliebiges Dreieck $A'B'C$ mit den angebenen Winkeln; dieses ist dem gesuchten dann ähnlich.

Dann verlängere man die Seite b' über den Punkt A' hinaus um die Seite a'; man erhält den Punkt D.

Nunmehr kann man eine Gerade durch C zeichnen, auf der man $a+b$ abtrage, der entstandene Endpunkt sei E. Zu beachten ist, dass CD und CE einen spitzen Winkel miteinander bilden. Die Parallele zu DE durch A' teilt (Strahlensatzkonstruktion!) $CE = a + b$ genau in a (Endpunkt E) und b (bei C).

Diese Seiten kann man in C antragen, womit man das Dreieck ABC bekommt.

Aufgabe 020828:
Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $AB = 10$ cm! Der Fußpunkt der Höhe h_c soll die Hypotenuse in zwei Abschnitte teilen, die sich wie $2 : 3$ verhalten.

Bestimme aus der Konstruktion die Länge von h_c! Beschreibe die Konstruktion!

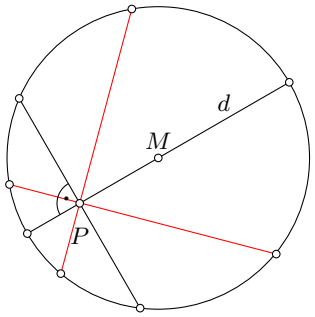
Lösung von Carsten Balleier:
Man zeichne die Strecke AB. Diese teile man, z. B. per Strahlensatzkonstruktion, im Verhältnis $2 : 3$. Im Teilungspunkt errichte man die Senkrechte, auf der die Höhe h_c liegt.

Den anderen Endpunkt der Höhe erhält man nach dem Satz des Thales: konstruiert werden muss der Kreis mit AB als Durchmesser. Sein Schnittpunkt mit der errichteten Senkrechten ist der gesuchte Punkt C des Dreiecks. Damit kann man feststellen, dass die Länge von $h_c \approx 4{,}9$ cm beträgt.

Aufgabe 030825:
Gegeben seien ein Kreis und ein Punkt P in seinem Innern.

Konstruiere durch P zwei gleichlange aufeinander senkrecht stehende Sehnen. Beschreibe und begründe die Konstruktion!

Lösung von Manuela Kugel:

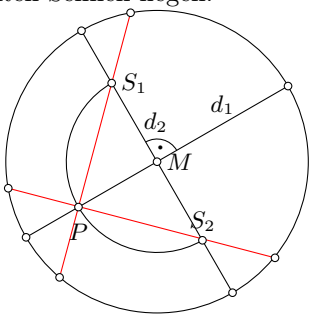


Da gleichlange Sehnen gleichen Abstand vom Mittelpunkt M haben, müssen sie symmetrisch zu dem Durchmesser d durch P liegen.

Errichtet man in P auf PM die Senkrechte und halbiert die rechten Winkel, so erhält man die gesuchten Sehnen.

Alternative: Man errichtet den senkrechten Durchmesser d_2 auf d_1, welcher wiederum der Durchmesser durch P ist. Darauf werden im Abstand PM von M die Schnittpunkte S_1 und S_2 erzeugt, welche jeweils mit P verbunden auf den gesuchten Sehnen liegen.

Laut Konstruktion haben die Punkte S_1, P und S_2 den gleichen Abstand von M, liegen folglich auf einem Kreis um M, wobei S_1, M und S_2 auf einem Durchmesser dieses Kreises liegen. Folglich ist der Winkel $\angle S_1PS_2 = 90°$ nach dem Thalessatz.

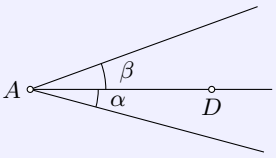


Ferner gilt $PS_1 = PS_2$, da $PM \perp S_1S_2$. Die gesuchten Sehnen sind eine Vergrößerung der Strecken PS_1 und PS_2 um denselben Faktor (kleiner Kreis zu großem Kreis) und bleiben daher in ihrem Verhältnis zueinander identisch, also gleich groß.

Aufgabe 040821:
Ein beliebiges Trapez $ABCD$ ist in ein flächengleiches Rechteck zu verwandeln (Konstruktion!).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man konstruiert das Rechteck aus der Mittellinie und der Höhe des Trapezes.

Aufgabe 040823:
Gegeben sind die beiden anliegenden Winkel α und β mit dem Scheitelpunkt A und Punkt D auf dem gemeinsamen Schenkel (s. Abb.).



a) Konstruiere aus dieser Figur das Dreieck ABC derart, dass $\overline{AD}$ Seitenhalbierende ist!
b) Unter welcher Bedingung wird das Dreieck ABC gleichseitig?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Man verlängert $\overline{AD}$ über D hinaus um sich selbst und erhält dadurch Punkt E. Dann konstruiert man das Parallelogramm $ABEC$

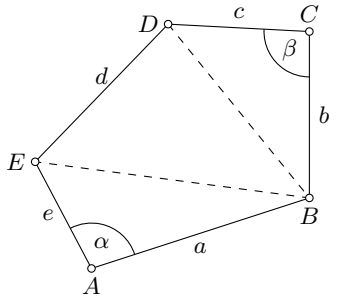
b) Genau dann, wenn $\alpha = \beta$ gilt, ist $ABEC$ ein Rhombus und damit $\triangle ABC$ gleichschenklig. Das Dreieck ABC ist daher genau dann gleichseitig, wenn $\alpha = \beta = 30°$ gilt.

Aufgabe 050823:
Die Seiten eines konvexen Fünfecks seien der Reihe nach a, b, c, d und e. Die Seite a sei 5,5 cm, b sei 4 cm, c sei 3,4 cm, d sei 4,6 cm und e sei 2,9 cm lang. Die Seiten a und e schließen einen Winkel mit dem Maß $\alpha = 100°$, die Seiten b und c einen Winkel mit dem Maß $\beta = 93°$ ein.

a) Konstruiere das Fünfeck aus diesen 7 Stücken!

b) Beschreibe die Konstruktion!

Lösung von Manuela Kugel:



a) Konstruktion (siehe Abbildung)

b) Man konstruiert zunächst ein zu dem Teildreieck $\triangle BCD$ kongruentes Dreieck $\triangle B'C'D'$ aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. Dann ist $\overline{B'D'} = \overline{BD}$. Nun konstruiert man in gleicher Weise das Teildreieck $\triangle ABE$. Die Punkte D bzw. C erhält man durch Konstruktion der Dreiecke $\triangle EBD$ und $\triangle DBC$ jeweils aus den drei Seiten.

Aufgabe 070822:
Gegeben sind ein Kreis k (Mittelpunkt M, Radius der Länge $r = 6$ cm) und ein Kreis k_1 (Mittelpunkt M_1, Radius der Länge $r_1 = 2$ cm). Beide Kreise berühren einander von außen.

Konstruiere alle Kreise mit dem Radius der Länge 2 cm, die die beiden gegebenen Kreise berühren!

Konstruiere auch die Berührungspunkte der gesuchten Kreise mit den gegebenen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Die Mittelpunkte der gesuchten Kreise liegen entweder (1) auf dem Kreis um M mit dem Radius der Länge $r + r_1$ oder (1') auf dem Kreis um M mit dem Radius der Länge $r - r_1$, da sie k berühren sollen, und (2) auf dem Kreis um M_1 mit dem Radius der Länge $r + r_1$, da sie k_1 berühren sollen und denselben Radius haben wie k_1.

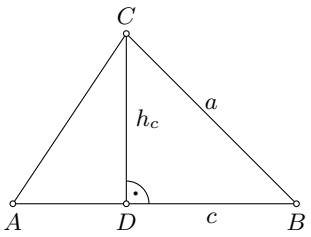
(II) Daher ergeben sich die Mittelpunkte der gesuchten Kreise als Schnittpunkte der Kreise nach (1) und (2) (das sind 2 Schnittpunkte) und als Berührungspunkt der Kreise nach (1') und (2).
Dieser Punkt liegt auf der Verbindungsgeraden durch M und M_1. Die Berührungspunkte der Kreise erhält man, wenn man die Mittelpunkte der sich berührenden Kreise miteinander verbindet. Es gibt genau 3 Kreise, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Der Beweis folgt aus (I).

Aufgabe 100824:
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $c = 5$ cm, $h_c = 4$ cm, $a = 6$ cm!

Dabei sei a die Länge der Seite BC, c die der Seite AB und h_c die der auf der Geraden durch A und B senkrechten Höhe.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren lässt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Der Fußpunkt der auf der Geraden durch A und B senkrechten Höhe sei D. Dann enthält das Teildreieck $\triangle CDB$, sofern es nicht mit $D = B$ entartet ist, als bekannte Stücke a, h_c und den rechten Winkel $\angle CDB$. Der Punkt A liegt erstens auf der Geraden durch B und D und zweitens auf dem Kreis um B mit c.

(II) Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Wir konstruieren das Teildreieck $\triangle CDB$ aus $BC = a$, $CD = h_c$ und dem rechten Winkel $\angle CDB$. Der Entartungsfall $D = B$ tritt nicht auf, da für die gegebenen Werte $h_c < a$ gilt.

(2) Wir zeichnen die Gerade durch D und B.

(3) Wir schlagen den Kreis um B mit c. Schneidet er die Gerade durch D und B, so sei A einer der Schnittpunkte.

(III) Beweis, dass jedes so erhaltene Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Nach Konstruktion ist $BC = a$, $AB = c$, $CD = h_c$ und CD die auf der Geraden durch A und B senkrechte Höhe.

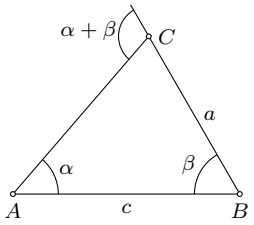
(IV) Wegen $h_c < a$ ist der Konstruktionsschritt (1) nach dem Kriterium ssw eindeutig möglich, da der gegebene rechte Winkel der größeren Seite gegenüberliegt. (Wie sich (1) [und (2)] für $h_c = a$ gestalten würde, braucht bei den gegebenen Werten nicht untersucht zu werden.)

Konstruktionsabschnitt (2) ist stets eindeutig möglich, da sich wegen $h_c < a$ bei (1) $D \neq B$ ergeben hatte. Schließlich ergibt (3) stets zwei verschiedene Punkte A_1 und A_2.
Da nun der wegen $h_c < a$ spitze Winkel $\angle DBC$ in dem einen der beiden Dreiecke $\triangle A_1BC'; \triangle A_2BC$ als Innenwinkel, in dem anderen als Außenwinkel bei B auftritt, so ist das eine dieser Dreiecke bei B spitzwinklig, das andere bei B stumpfwinklig; folglich sind diese beiden Dreiecke nicht kongruent (bei gleicher Reihenfolge A_1,B,C bzw. A_2,B,C homologer Punkte).
Somit besitzt die Aufgabe genau diese beiden Dreiecke als Lösung.

Aufgabe 120824:
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $c = 7{,}5$ cm; $a = 6{,}5$ cm und $\alpha + \beta = 120°$!

Dabei sei c die Länge der Seite AB, a diejenige der Seite BC, α die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die des Winkels $\angle ABC$.
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Dann ist durch die Außenwinkel bei C, deren jeder nach dem Außenwinkelsatz die Größe $\alpha + \beta$ hat, auch die Größe des Innenwinkels $\angle ACB$ (als Nebenwinkel des Außenwinkels) bestimmt (es lässt, sich auch der Winkelsummensatz benutzen). Seine Größe beträgt $180° - 120° = 60°$.
Die ihm gegenüberliegende Seite ist länger als die andere gegebene Seite.



(II) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Das Dreieck $\triangle ABC$ wird aus $\angle ACB = 60°$, $BC = a = 6{,}5$ cm, $AB = c = 7{,}5$ cm als Dreieck aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite (ssw) konstruiert.

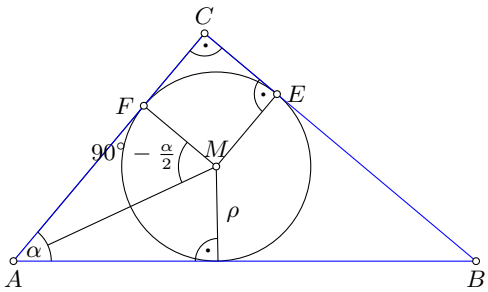
(III) Beweis, dass jedes nach (II) konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht: Nach dem Außenwinkelsatz gilt $\alpha + \beta = 180° - \angle ACB = 120°$ und nach Konstruktion $AB = c = 7{,}5$ cm sowie $BC = a = 6{,}5$ cm.

(IV) Die in (II) angegebene Konstruktion ist bekanntlich bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Daher ist durch die gegebenen Stücke wegen $c > a$ das Dreieck $\triangle ABC$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 130822:
Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C aus $\rho = 2{,}5$ cm und $\alpha = 50°$! Dabei sei ρ der Inkreisradius und α die Größe des Winkels BAC.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht, M sei der Schnittpunkt seiner Winkelhalbierenden, d. h. der Mittelpunkt seines Inkreises, und E, F seien die Fußpunkte der Lote von M auf die Seiten BC, CD.
Dann hat das Viereck $CFME$ rechte Winkel bei E, C und F und ist daher wegen $ME = MF = \rho$ ein Quadrat mit der Seitenlänge ρ.
Die Halbierende des Winkels BAC geht durch M; es gilt $\angle FMA = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Punkt A liegt erstens auf dem Strahl aus C durch F und zweitens auf dem freien Schenkel eines in M an MF nach der Seite der Geraden durch M und E, auf der C nicht liegt, angetragenen Winkels der Größe $90° - \frac{\alpha}{2}$.
Punkt B liegt erstens auf dem Strahl aus C durch E und zweitens auf dem freien Schenkel eines in A an AC nach der Seite der Geraden durch A und C, auf der E liegt, angetragenen Winkels der Größe α.

(II) Daraus folgt, dass ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

1. Wir konstruieren das Quadrat $CFME$ mit der Seitenlänge ρ.
2. Wir zeichnen den Strahl C durch F.
3. Wir tragen in M an MF einen Winkel der Größe $90° - \frac{\alpha}{2}$ nach der Seite der Geraden durch M und F an, auf der C nicht liegt. Schneidet sein freier Schenkel den Strahl aus C durch F, so sei der Schnittpunkt A genannt.
4. Wir tragen in A an AC nach der Seite der Geraden durch A und C, auf der E liegt, einen Winkel der Größe α an.
5. Wir zeichnen den Strahl aus C durch E. Schneidet er den freien Schenkel des in (4) konstruierten Winkels, so sei der Schnittpunkt B genannt.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Laut Konstruktion ist der Winkel bei C ein Rechter. Ebenso hat laut Konstruktion der Winkel BAC die Größe α. M hat laut Konstruktion von AC und BC den Abstand ρ. Da ferner nach Konstruktion

$$\angle CAM = \angle FAM = \frac{\alpha}{2} \qquad \text{und} \qquad \angle MAB = \angle CAB - \angle CAM = \frac{\alpha}{2}$$

ist, ist AB ebenso wie AC Tangente an den Kreis mit ρ um M. Folglich ist M der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ABC.

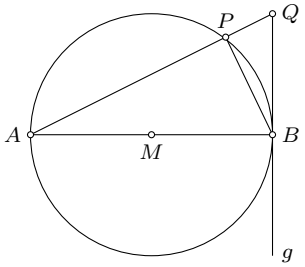
(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso ist Konstruktionsschritt (2) eindeutig ausführbar. Ferner ist wegen $0° < 90° - \frac{\alpha}{2} < 90°$ auch (3) eindeutig ausführbar. Danach ist dann (4) und wegen $0° < \alpha < 90°$ schließlich auch (5) eindeutig ausführbar.
Das Dreieck ABC ist also durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 140824:
Konstruiere einen Kreis k, der folgende Eigenschaft hat:

Ist AB ein Durchmesser von k, g die Tangente an k in B und liegt ein Punkt Q so auf g, dass $\overline{BQ} = 6$ cm gilt, so schneidet k die Strecke AQ in einem Punkt P, für den $\overline{PQ} = 3$ cm gilt.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein derartiger Kreis k bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, k sei ein Kreis, wie er laut Aufgabenstellung konstruiert werden soll.
Sein Mittelpunkt sei M. Dann ist nach dem Satz des Thales $\angle APB$ ein rechter Winkel und als sein Nebenwinkel $\angle BPQ$ ebenfalls ein rechter Winkel. Folglich liegt P erstens auf dem Halbkreis über BQ und zweitens auf dem Kreis um Q mit dem Radius PQ.
Punkt A liegt erstens auf dem Strahl aus Q durch P und zweitens auf der Senkrechten zu BQ durch B.
Daraus folgt, dass ein Kreis nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(II)
(1) Wir zeichnen die Strecke BQ der Länge 6 cm.
(2) Wir schlagen über BQ einen Halbkreis.
(3) Wir schlagen um Q mit dem Radius der Länge 3 cm einen Kreis. Schneidet er den in (2) gezeichneten Halbkreis in einem Punkt, so sei dieser P genannt.
(4) Wir errichten in B die Senkrechte zu g.
(5) Wir zeichnen den Strahl aus Q durch P. Schneidet er die in (4) konstruierte Senkrechte, so sei der Schnittpunkt A genannt.
(6) Wir zeichnen den Kreis k mit dem Durchmesser AB.

(III) Jeder so konstruierte Kreis k entspricht den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis:
Nach Konstruktion gilt $BQ = 6$ cm und $PQ = 3$ cm. Der Kreis k berührt die Gerade g laut Konstruktion in B, da $AB \perp g$ ist. Ferner liegt laut Konstruktion P auf AQ (und zwar ist $P \neq A$).
Wegen $BP \perp PQ$ (nach dem Satz von Thales) und damit $BP \perp AP$ liegt P nach der Umkehrung des Satzes des Thales auf dem Kreis k mit dem Durchmesser AB sowie laut Konstruktion auf AQ.

(IV) Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Ebenso ist (2) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.

(3) liefert bei den gegebenen Längen für BQ und PQ genau einen Schnittpunkt P. (4) ist eindeutig ausführbar, ebenso (5), und es gibt, da der in (5) konstruierte Strahl einen spitzen Winkel mit dem Strahl aus Q durch B bildet, genau einen Schnittpunkt A des in (5) konstruierten Strahles mit der in (4) konstruierten Senkrechten.
Schließlich ist auch (6) eindeutig ausführbar.

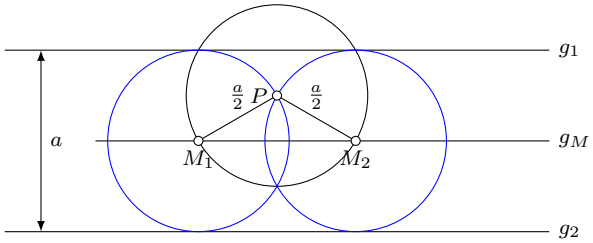
Der Kreis k ist durch die gegebenen Stücke mithin bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 150824:
Gegeben seien zwei parallele Geraden g_1 und g_2 mit dem Abstand a und außerdem ein Punkt P in beliebiger Lage zwischen g_1 und g_2.

Konstruiere einen Kreis k, der g_1 und g_2 berührt und durch P geht!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Aufgabenstellung ein Kreis eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, k sei ein Kreis, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht. (siehe Abbildung). Sein Mittelpunkt M liegt erstens auf der Mittelparallelen g_M zu g_1 und g_2 und zweitens (da sein Radius folglich $\frac{a}{2}$ beträgt) auf dem Kreis um P mit den Radius $\frac{a}{2}$.
Daher entspricht ein Kreis nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion gewonnen werden kann:

(II) (1) Wir konstruieren die Mittelparallele g_M zu g_1 und g_2.
(2) Wir zeichnen um P einen Kreis mit $\frac{a}{2}$, schneidet er g_M, so sei M einer der Schnittpunkte.
(3) Wir zeichnen um M den Kreis k mit $\frac{a}{2}$.

(III) Jeder so konstruierte Kreis k genügt den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Nach Konstruktion beträgt der Abstand von M zu g_1 und g_2 jeweils $\frac{a}{2}$, g_1 und g_2 sind somit Tangenten an k. Ferner gilt auch nach Konstruktion $MT = \frac{a}{2}$.

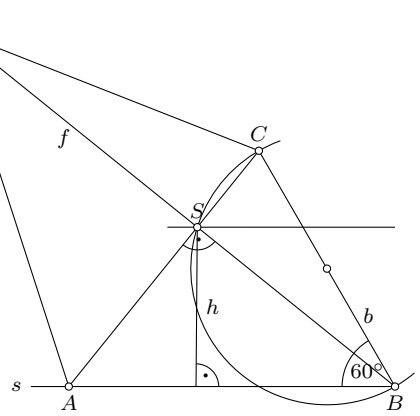
(IV) Konstruktionsschritt (1) ist stets eindeutig ausführbar. Da P zwischen g_1 und g_2 liegt, ist der Abstand von P zu g_M gut kleiner als $\frac{a}{2}$. Also existieren stets genau zwei Schnittpunkte von g_M mit dem Kreis um P mit $\frac{a}{2}$. Es entstehen somit stets genau zwei Kreise, die den geforderten Bedingungen genügen.

Aufgabe 160824:
Konstruiere ein Viereck $ABCD$, das folgende Bedingungen erfüllt:

- Die Größe β des Innenwinkels $\angle CBA$ im Viereck $ABCD$ beträgt 60°.
- Die Länge f der Diagonalen BD beträgt 12,5 cm.
- Die Länge b der Seite BC beträgt 6,0 cm.
- Der Abstand h des Schnittpunktes S der Diagonalen des Vierecks $ABCD$ von der Seite AB beträgt 3,5 cm.
- Die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ stehen senkrecht aufeinander.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die angegebenen Bedingungen ein Viereck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Angenommen, $ABCD$ sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Dann liegt der Schnittpunkt S seiner Diagonalen wegen der Umkehrung des Lehrsatzes des Thales erstens auf dem Kreis mit dem Durchmesser BC und zweitens auf einer Parallelen, die im Abstand h zur Geraden durch A und B verläuft.

Punkt A liegt erstens auf einem Strahl s, der in B an BC unter einem Winkel der Größe β angetragen wurde, und zweitens auf der Geraden durch C und S. Punkt D liegt erstens auf der Geraden durch B und S und zweitens auf dem Kreis um B mit f als Radius.
Daraus folgt, dass ein Viereck nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Wir zeichnen die Seite BC der Länge b.
(2) Wir tragen in B an BC einen Winkel der Größe β an. Sein freier Schenkel sei s.
(3) Wir zeichnen den Kreis k, der BC als Durchmesser hat.
(4) Wir zeichnen die Parallelen zu s im Abstand h.
(5) Für jeden Schnittpunkt von k mit einer dieser Parallelen zeichnen wir, wenn der betreffende Schnittpunkt $S \neq C$ ist, die Gerade durch C und S. Schneidet sie den Strahl s, so sei dieser Schnittpunkt A genannt.
(6) Wir zeichnen die Gerade g durch B und S.
(7) Wir zeichnen um B den Kreis mit dem Radius f. Ein Schnittpunkt von g mit diesem Kreis sei mit D bezeichnet, wenn dabei $ABCD$ ein Viereck wird, das den in (2) konstruierten Winkel als Innenwinkel hat.

III. Jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Laut Konstruktion hat die Seite BC die Länge $b = 6$ cm. Ebenso hat laut Konstruktion der Innenwinkel $\angle ABC$ die Größe $\beta = 60°$, ferner die Diagonale BD die Länge $f = 12{,}5$ cm.

Weiter hat der Punkt S von AB einen Abstand von $h = 3{,}5$ cm. Da schließlich Punkt S auf dem Kreis mit dem Durchmesser BC liegt, schneiden sich die Diagonalen BD und AC unter einem Winkel von 90°, wie es verlangt war.

IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2), (3), (4) sind ausführbar und - bis auf Kongruenz - eindeutig ausführbar.
Bei den gegebenen Werten für β, b, h schneidet genau eine der beiden in (4) konstruierten Parallelen den Kreis k, und zwar in 2 Punkten. Für genau einen von diesen führt (5) zu einem Punkt A.
Sodann ist Konstruktionsschritt (6) eindeutig ausführbar, und in (7) ergeben sich genau 2 Schnittpunkte von g mit dem Kreis um B mit f. Von den beiden entstehenden Vierecken hat genau eines den in (2) konstruierten Winkel als Innenwinkel (das andere hat bei B einen Innenwinkel der Größe 300°).

Das Viereck $ABCD$ ist mithin durch die angegebenen Bedingungen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

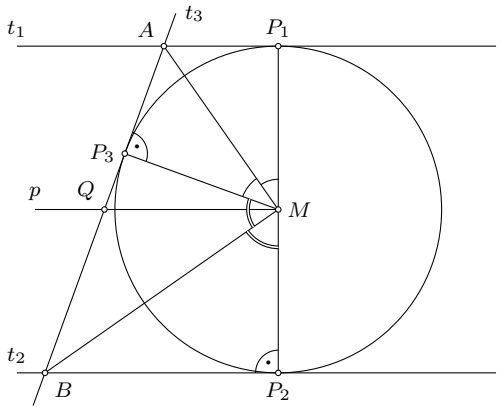
Aufgabe 310824:

a) Konstruiere einen Kreis mit dem Radius 3 cm, zwei zueinander parallele Tangenten t_1, t_2 sowie eine dritte Tangente t_3 an diesen Kreis! Für die Schnittpunkte A, B von t_3 mit t_1 bzw. mit t_2 und für den Mittelpunkt M des Kreises stelle eine Vermutung über die Größe des Winkels $\angle AMB$ auf!

b) Beweise, dass diese Vermutung stets zutrifft, wenn t_1, t_2, t_3 drei Tangenten an einen Kreis sind und $t_1 \parallel t_2$ ist!

c) Beweise, dass dann auch stets für den Schnittpunkt Q, den AB mit der Parallelen p durch M zu t_1 und t_2 hat, $\overline{AQ} = \overline{MQ}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Abbildung zeigt eine geforderte Konstruktion:



Vermutung: Es gilt $\angle AMB = 90°$.

b) Beweis: Ist P_1 der Berührungspunkt, von t_i ($i =$ 1,2,3) so folgt nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius:
Wegen $t_1 \parallel t_2$ sind MP_1 und MP_2 zueinander parallele Radien, was nur möglich ist, wenn sie einen Durchmesser P_1P_2 bilden, d. h. wenn

$$\angle P_1MP_2 = 180° \tag{1}$$

ist. Aus ($MA = MA$ und) $\angle MP_1A = \angle MP_3A = 90°$, $MP_1 = MP_3$ (Radien des Kreises), $< MA$ (da MA Hypotenuse ist) folgt nun nach dem Kongruenzsatz Ssw $\triangle AMP_1 \cong \triangle AMP_3$, also halbiert MA den Winkel $\angle P_1MP_3$.

Ebenso folgt: MB halbiert $\angle P_2MP_3$. Wegen (1), d. h. $\angle P_1MP_3 + \angle P_2MP_3 = 180°$, ist folglich $\angle AMP_3 + \angle BMP_3 = 90°$, d. h.

$$\angle AMB = 90° \tag{2}$$

c) Wegen $t_1 \parallel p \parallel t_2$ folgt aus $MP_1 = MP_2$ auch $QA = QB$.
Nach (2) und der Umkehrung des Thalessatzes liegt M auf einem Halbkreis über AB; für dessen Radien gilt somit $AQ = MQ$.

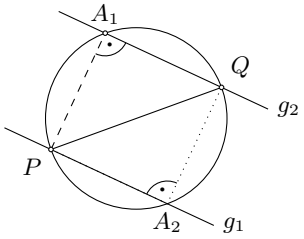
III Runde 3

Aufgabe 010835:
Gegeben sind die Punkte P und Q mit einem Abstand von 5 cm.

Konstruiere zwei Parallelen, von denen eine durch P, die andere durch Q geht und die voneinander einen Abstand $a = 3$ cm haben!

Begründe die Konstruktion! Wie viel verschiedene Möglichkeiten gibt es dabei in der Ebene?

Lösung von Carsten Balleier:



I. Analyse:
(Bild) Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck PQA, dessen Hypotenuse $PQ = 5$ cm und dessen Kathete $AP = 3$ cm beträgt. Eine der Parallelen, etwa g_2, geht dann durch A und Q, die andere, $g_1 \parallel g_2$, geht durch Punkt P.

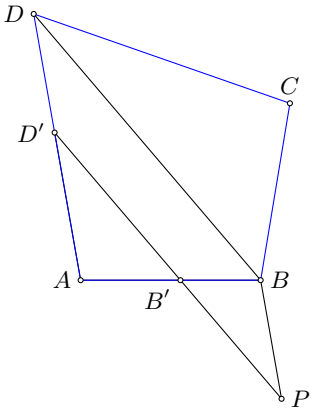
II. Konstruktionsbeschreibung:
Wir zeichnen den Thales-Kreis über dem Durchmesser PQ und schlagen anschließend mit dem Zirkel einen Kreisbogen mit dem Radius a um P. Damit erhalten wir zwei mögliche Punkte A_1 bzw. A_2.

III. Beweis:
Der (stets senkrechte) Abstand beider Parallelen g_1 und g_2 ist durch die Strecke a nach obiger Konstruktion gegeben; P und Q haben ebenfalls den geforderten Abstand.

Beide Paare von Parallelen erfüllen somit die Bedingungen der Aufgabenstellung. □

Aufgabe 020834:
Es soll ein Drachenviereck konstruiert werden, in dem 2 gegenüberliegende Winkel je 100° betragen, das Verhältnis der ungleichen Seiten 2 : 3 ist und eine Diagonale 7 cm misst.

Lösung von Carsten Balleier:



Die Konstruktion führt man in zwei wesentlichen Teilen durch.

(1) Man konstruiert ein Dreieck, welches der einen Hälfte des Drachenvierecks ähnlich ist.
Man zeichnet einen Winkel von 100° (der Scheitel sei A), auf dessen Schenkeln man zwei bzw. drei (beliebig wählbare) Einheiten abträgt. Die beiden Endpunkte (B' und D') verbindet man, die erhaltene Strecke e' entspricht der Diagonalen e von 7 cm. (2) Per Strahlensatzkonstruktion erzeugt man die richtige Größe. Auf der Geraden durch $D'B'$ wird Punkt P konstruiert, indem die Länge e von D' aus in Richtung B' abgetragen wird. Nun wird eine Gerade durch P parallel zu AD' konstruiert, die die Gerade durch AB' in B schneidet. Die Parallelverschiebung von $B'D'$ durch B erzeugt D als Schnittpunkt mit der Geraden durch AD'.

(3) Das Dreieck ABD wird an BD gespiegelt. Der Spiegelpunkt von A sei C. Es entsteht das Drachenviereck $ABCD$, welches den geforderten Bedingungen entspricht.

Aufgabe 030835:
Gegeben sind die Strecken $s-a=3$ cm, $s-b=2$ cm, $s-c=1$ cm, wobei $2s=a+b+c$ der Umfang des Dreiecks ist.
a) Konstruiere das Dreieck!
b) Begründe die Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt:

$$\begin{aligned} a &= a+b+c-(b+c)=2s-b-c=(s-b)+(s-c) \\ b &= a+b+c-(a+c)=2s-a-c=(s-a)+(s-c) \\ c &= a+b+c-(a+b)=2s-a-b=(s-a)+(s-b) \end{aligned}$$

Aus den so beschriebenen drei Seiten konstruiert man nun das Dreieck in der üblichen Weise.

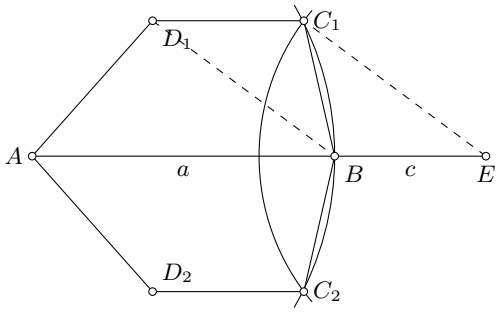
Anmerkung: Es ergeben sich für a, b, c die Seitenlängen 3, 4 und 5 cm, was einem rechtwinkligen Dreieck entspricht.

Aufgabe 030836:
Gegeben seien die parallelen Seiten $a=8$ cm und $c=4$ cm eines Trapezes sowie seine Diagonalen $e=8$ cm und $f=6$ cm.

a) Konstruiere das Trapez!

b) Begründe die Konstruktion!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Konstruktion:



Konstruktionsbeschreibung:

1. Zeichne die Strecke $\overline{AB} = a = 8$ cm.
2. Trage auf der Geraden durch A und B über B hinaus E ab, so dass $\overline{BE} = c = 4$ cm ist.
3. Zeichne einen Kreisbogen um A mit dem Radius $e = 8$ cm.
4. Zeichne einen Kreisbogen um E mit dem Radius $f = 6$ cm. Der Schnittpunkt der Kreisbögen sei C.
5.Konstruiere die Parallele g zu $\overline{BE}$ durch C.
6. Auf der Geraden g ist von C der Abstand $c = 4$ cm derart abzutragen und mit D zu bezeichnen, dass das entstehende Viereck $ABCD$ nicht entartet ist. D ist mit A zu verbinden.

Begründung:
Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ beträgt a mit (1). Laut Konstruktion ist $BECD$ ein Parallelogramm: $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ mit (5) und $\overline{BE} = \overline{CD} = c$ mit (2) und (6).

Damit ist die Länge der Strecke $\overline{BD} = \overline{EC} = f$ mit (4).

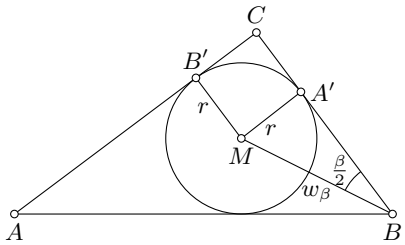
Ferner hat $\overline{AC}$ laut Konstruktion die Länge von e mit (3).

Somit erfüllt jedes derart konstruierte Trapez die Forderungen der Aufgabenstellung.

Aufgabe 040832:
Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, wenn der Radius r des Inkreises und die Länge a einer Kathete gegeben sind, und beschreibe die Konstruktion!

Unter welchen Bedingungen ist die Konstruktion ausführbar?

Lösung von Manuela Kugel:



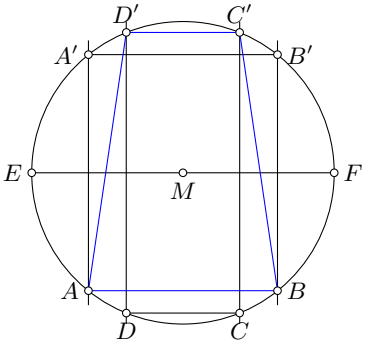
Konstruktionsbeschreibung:

a) Ich zeichne a und erhalte C und B. Um C schlage ich mit r einen Kreisbogen und erhalte A' und auf der Senkrechten zu a in C B'. Um A' und B' schlage ich mit r die Kreisbögen und erhalte M.
$\overline{MB}$ ist Winkelhalbierende w_β. Ich konstruiere β in B und erhalte A.

b) Die Konstruktion ist nur dann ausführbar, wenn gilt $a > 2r$.

Aufgabe 040834:
Gegeben seien drei Strecken mit den Längen p_1, p_2 und r mit $p_1 < p_2$. Gesucht ist ein gleichschenkliges Trapez, dessen parallele Seiten die Längen p_1 bzw. p_2 haben und dessen Umkreis den Radius r hat!
a) Untersuche, unter welchen Bedingungen es solche Trapeze gibt, und beschreibe die Konstruktion!
b) Führe die Konstruktion für den Fall $p_1 = 3$ cm, $p_2 = 5$ cm und $r = 4$ cm aus!

Lösung von Manuela Kugel:



a) Angenommen, $ABCD$ sei eines der gesuchten Trapeze, wobei $\overline{AB} = p_2$ und $\overline{CD} = p_1$ ist. Dann gilt $p_2 \leq 2r$ als Bedingung für die Konstruktion.

b) *Konstruktionsbeschreibung:*

Wir zeichnen um M einen Kreis mit dem Radius r und dem Durchmesser $\overline{EF}$. Auf $\overline{EF}$ konstruieren wir zwei Strecken p_1 bzw. p_2 so, dass M sie halbiert. Durch die Endpunkte dieser Strecken zeichnen wir die Senkrechten zu $\overline{EF}$ und erhalten A und A' bzw. B und B' bzw. C und C' bzw. D und D'.

Die gesuchten Trapeze sind dann $ABCD$, $ABC'D'$, $A'B'CD$, $A'B'C'D'$, von denen je zwei kongruent sind. Für $p_2 = 2r$ entstehen nur zwei kongruente Trapeze.

Aufgabe 050836:

a) Konstruiere das Dreieck ABC, wenn $a + b$, r und α gegeben sind!

Dabei ist a die Länge der Seite BC, b die Länge der Seite AC, r die Länge des Umkreisradius und α das Maß des Winkels $\angle CAB$.

b) Beschreibe und diskutiere die Konstruktion!

Anmerkung: Die Konstruktionsbeschreibung soll kurz gehalten sein. Bei der Konstruktion von Dreiecken genügt die Angabe von Seiten und Winkeln, aus denen sich das Dreieck konstruieren lässt.

Lösung von Eckart Keller:

a) Für die Konstruktion:

Analyse:

Wie die Figur zeigt, sind von dem Teildreieck $\triangle MBC$ zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt. Daher lässt es sich konstruieren, wodurch gleichzeitig a bestimmt wird.

Damit ist aber, da $a + b$ gegeben ist, auch b bestimmt (wobei $a < a + b$ gelten muss), so dass die Konstruktion des Dreiecke $\triangle ABC$ auf die Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und einem Gegenwinkel zurückgeführt ist.

b) Für die Beschreibung und Diskussion:

Beschreibung:

Man konstruiert das Teildreieck $\triangle MBC$. Dabei gibt es folgende Fälle:

(1) $\alpha < 90°$. Dann lässt sich das Dreieck aus den Seiten MC (Länge r), MB (Länge r) und dem Winkel $\angle BMC$ (Winkelmaß 2α) konstruieren.

(2) $\alpha > 90°$. Dann gilt $2\alpha > 180°$. Das Teildreieck $\triangle MBC$ lässt sich in diesem Fall aus den Seiten MC (Länge r), MB (Länge r) und dem Winkel $\angle CMB$ (Winkelmaß δ) konstruieren, wobei $\delta = 360° - 2\alpha$ gilt.

(3) Für $\alpha = 90°$ gilt $a = 2r$. In diesem Falle lässt sich das Dreieck $\triangle ABC$ sofort aus den Seiten BC (Länge $2r$), AC (Länge $a + b - a = b$) und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel $\angle BAC$ (Winkelmaß $\alpha = 90°$) konstruieren, wobei die Konstruktion für $b < 2r$, also $a+b < 4r$, und nur dann durchführbar ist. Das Dreieck ist in diesem Falle eindeutig bestimmt.

In den Fällen (1) und (2) erhält man mit dem Teildreieck $\triangle MBC$ auch die Seite BC (Länge a) und damit auch die Länge b der Seite AC. Man schlägt den Umkreis um M mit dem Radius r und mit dem Radius b um C einen Kreisbogen, der den Umkreis im Falle $b < 2r$ in den Punkten A und A' schneidet.

Für $b = 2r$ haben beide Kreise genau einen Punkt, den Punkt A, gemeinsam, und für $b > 2r$ gibt es keine gemeinsamen Punkte beider Kreise.

Diskussion:

Im Falle $b = 2r$ gibt es genau ein Dreieck. Dieses wird durch die angegebene Konstruktion erhalten.

Wenn $b < 2r$ gilt, gibt es im Falle $\alpha < 90°$ für $b > a$ zwei zueinander inkongruente Dreiecke, für $b = a$ genau ein Dreieck (das andere artet zu einer Strecke aus) und für $b < a$ ebenfalls genau ein Dreieck, da wegen $2\alpha < 180°$ der Winkel $\angle BAC$ in derselben Halbebene in Bezug auf die Gerade BC wie der Punkt M liegen muss.

Im Falle $90° < \alpha < 180°$ gibt es für $b \geq a$ kein Dreieck, das allen gestellten Bedingungen genügt, und für $b < a$ genau ein Dreieck, da wegen $180° < 2\alpha < 360°$ der Winkel $\angle BAC$ nicht in der gleichen Halbebene in Bezug auf die Gerade BC wie der Punkt M liegen kann. Im Falle $b > 2r$ gibt es kein Dreieck, das allen gestellten Bedingungen genügt.

Die Entscheidung, welcher der drei Fälle eintritt, insbesondere also, ob es überhaupt ein solches Dreieck gibt, kann in den Fällen $\alpha \neq 90°$ auf geometrischem Wege erst nach der Konstruktion des stets konstruierbaren Hilfsdreiecks $\triangle BMC$ gefällt werden.

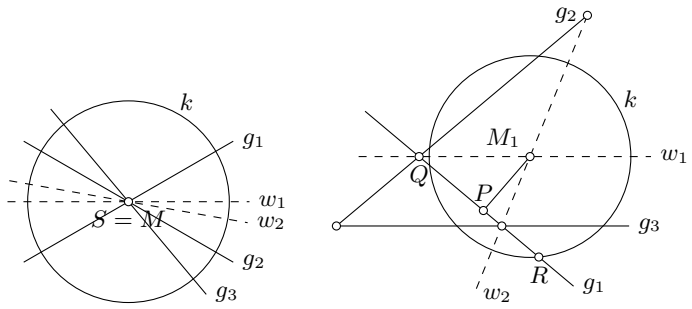
Aufgabe 060835:
In der Ebene seien drei Geraden g_1, g_2, g_3 gegeben, von denen keine zwei einander parallel sind. Außerdem ist eine Länge s gegeben.

Konstruiere einen Kreis, der von jeder der Geraden g_1, g_2, g_3 eine Strecke der Länge s abschneidet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I. Angenommen, M sei der Mittelpunkt eines der gesuchten Kreise k. Die Sehnen, die k von g_1, g_2, g_3 abschneidet, sind dann gleich lang, also sind sie gleichweit von M entfernt. Daher liegt M auf einer Winkelhalbierenden w_1 von g_1, g_2 und auf einer Winkelhalbierenden w_2 von g_1, g_3.

a) Haben g_1, g_2, g_3 einen (und wegen ihrer Verschiedenheit dann auch nur einen) Punkt S gemeinsam, so gehen w_1 und w_2 durch S; außerdem ist $w_1 \neq w_2$; denn wäre $w_1 = w_2 = w$, so folgte $\angle(w,g_3) \cong \angle(g_1,w) \cong \angle(w,g_2)$, also $g_3 = g_2$, also $g_3 \parallel g_2$. Somit ergibt sich $M = S$. (erste Abbildung)



b) Haben g_1, g_2, g_3 keinen Punkt gemeinsam, so bilden sie nach Voraussetzung ein Dreieck D, und es folgt: M ist einer der 4 Schnittpunkte M_0, M_1, M_2, M_3 der Innen- und Außenwinkelhalbierenden von D.

Daher kann ein Kreis k höchstens dann die verlangte Eigenschaft haben, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten wird:

II. a) Man schlage den Kreis k um S mit dem Radius von der Länge $\frac{s}{2}$.

b) Man wähle als M einen der 4 Punkte M_0, M_1, M_2, M_3. Von M fälle man das Lot MP auf g_1. Um P schlage man den Kreis mit dem Radius von der Länge $\frac{s}{2}$; er schneidet g_1 in zwei Punkten Q, R. Dann schlage man den Kreis k um M durch Q.

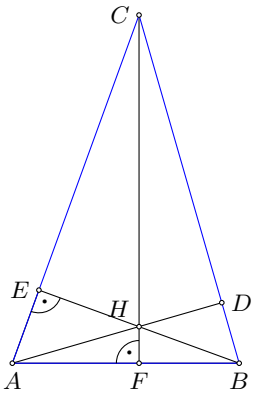
III. Ist ein Kreis k wie in II konstruiert, so hat er die verlangte Eigenschaft.

Beweis: Er schneidet von g_1 nach Konstruktion eine Strecke der Länge s ab und von g_2, g_3 je eine ebenso lange Strecke, da sein Mittelpunkt von g_1, g_2, g_3 gleichweit entfernt ist.

IV. Die Konstruktion II ergibt a) genau einen Kreis, b) genau 4 verschiedene Kreise. Nach III sind dies und nach I auch nur dies alle gesuchten.

Aufgabe 070831:
Konstruiere ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $\overline{AB} = 5$ cm, dem Winkel $\angle BAC$ mit der Größe $\alpha = 70°$ und der Bedingung, dass der Schnittpunkt der drei Höhen des Dreiecks die Höhe durch den Eckpunkt B halbiert!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei das verlangte Dreieck, die Punkte D, E und F seien die Fußpunkte der Höhen durch A, B bzw. C; H sei der Höhenschnittpunkt.
Dann ist $\triangle ABE$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB, dem rechten Winkel $\angle AEB$ und dem Winkel $\angle BAE \cong \angle BAC$.
Die Höhe durch C geht durch den Mittelpunkt H der Seite EB und steht senkrecht auf AB.
(II) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck $\triangle ABC$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entsprechen kann, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
Man konstruiert zunächst das Teildreieck $\triangle ABE$, halbiert die Seite EB (Halbierungspunkt sei H) und fällt von H auf AB das Lot. Sein Fußpunkt sei F.

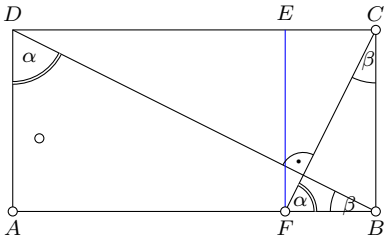
Die Verlängerung dieses Lotes über H hinaus schneidet die Verlängerung der Seite AE über E hinaus im Punkt C. $\triangle ABC$ ist das verlangte Dreieck.

(III) Der Beweis, dass ein so konstruiertes Dreieck ABC tatsächlich den Bedingungen der Aufgabe genügt (also die Umkehrung von (I)), ergibt sich leicht aus (II); die eindeutige Lösbarkeit der Aufgabe aus (I).

Aufgabe 080834:
Von einem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{AD} = b$ $(b < a)$ ist durch genau eine Parallele zu einer Seite ein dem ursprünglichen Rechteck ähnliches abzuschneiden. Löse die Aufgabe durch Konstruktion!

Bemerkung: Zwei nicht quadratische Rechtecke heißen ähnlich, wenn das Längenverhältnis der größeren zur kleineren Seite bei beiden gleich ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, es gibt eine solche Parallele. Dann kann sie wegen $b < a$ nur parallel zur Seite AD gezogen werden. Es sei EF diese Parallele. Dann gilt:
$ABCD \sim BCEF$ und damit auch: $\triangle ABD \sim \triangle BCF$. Daraus folgt: $\angle ABD \cong \angle BCF$.



II. Daher kommt man zu folgender Konstruktion:
Man trägt im Punkt C an BC nach der Seite hin, auf der A liegt, einen Winkel von der Größe des Winkels $\angle ABD$ an. Der freie Schenkel dieses Winkels schneide die Seite AB in F.

III. Die Parallele zu AD durch F entspricht den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis:
Die Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle BCF$ sind laut Konstruktion ähnlich; denn sie stimmen in den Winkeln überein. Daher gilt:
$AD : BF = AB : BC$ und mithin $ABCD \sim BCEF$.

IV. Die Konstruktion ist stets auf genau eine Weise ausführbar. Da die Größe des Winkels $\angle ABD$ zwischen $0°$ und $90°$ liegt, existiert ein solcher Schnittpunkt F und ist von B verschieden. Daher existiert das Dreieck $\triangle CFB$. Wegen (III) gilt

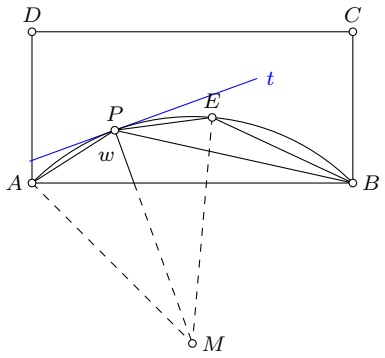
$$\frac{BC}{BF} = \frac{a}{b} > 1$$

also $BC > BF$, und F liegt zwischen A und B.

Aufgabe 090836:
Im ebenen Gelände seien genau alle diejenigen Punkte zugänglich, die auf einem Rechteck $ABCD$ einschließlich seines Inneren gelegen sind. In dieser Rechteckfläche führe ein Kreisbogen von A nach B, dessen zugehöriger Mittelpunkt nicht zugänglich sei. Auf dem Kreisbogen liege der Punkt P (mit $P \neq A$ und $P \neq B$).

Konstruiere die Tangente in P an den Kreisbogen, ohne dass bei Durchführung des Konstruktion das Rechteck $ABCD$ verlassen wird!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei o. B. d. A. $AP \leq BP$. Der Kreis um P mit dem Radius PA schneidet den gegebenen Kreis außer in A in E.



Wegen $AP \leq BP$ ist E zugänglich, ebenso ein Stück der Winkelhalbierenden w des Winkels $\angle APE$.

Behauptung: Die Senkrechte t durch P auf w ist die gesuchte Tangente.

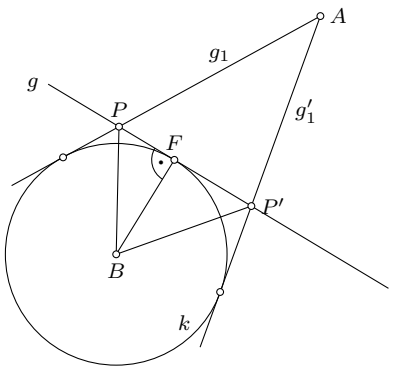
Beweis: Ist M der Mittelpunkt des gegebenen Kreises, so ist $\triangle AMP \cong \triangle UMP$ (sss), also $\angle APM \cong \angle EPM$; daher liegt M auf w. Die gesuchte Tangente steht somit senkrecht auf w; sie fällt also mit der konstruierten Geraden t zusammen.

Aufgabe 100833:
Gegeben seien eine Gerade g und zwei auf verschiedenen Seiten von g gelegene Punkte A und B.

Konstruiere alle diejenigen Punkte P auf g, die die Eigenschaft haben, dass der Strahl PB einen der Winkel halbiert, die von g und der Geraden g_1 durch A und P gebildet werden!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob sie stets eindeutig durchführbar ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, P sei ein Punkt, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann hat B als Punkt der Winkelhalbierenden gleiche Abstände zu g und der Geraden g_1 durch A und P, also wird derjenige Kreis um B, der g berührt, auch g_1 berühren.



(II) Daher entspricht ein Punkt P nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

Man fällt das Lot BF von B auf g. Dann schlägt man den Kreis k um B durch F und konstruiert die Tangenten von A an k.
Ist g_1 eine dieser Tangenten und schneidet sie g, so sei P ihr Schnittpunkt mit g.

(III) Beweis, dass jeder so konstruierte Punkt P den Bedingungen der Aufgabe genügt:
Die Geraden g und g_1 werden nach Konstruktion beide von k berührt, sie haben also gleiche Abstände von B. Daher liegt B auf einer Winkelhalbierenden dieser beiden Geraden.

(IV) Die Konstruktion von F ist stets eindeutig durchführbar und ergibt $F \neq B$ und $F \neq A$, da A und B nicht auf g liegen. Ferner liegt k mit Ausnahme des Punktes F ganz auf der anderen Seite von g wie A. Also liegt A außerhalb von k.
Somit gibt es genau zwei verschiedene Tangenten g_1 und g_1' von A an k.

Da jede von ihnen A und einen Punkt von k, also einen Punkt auf der anderen Seite von g wie A, enthält, schneidet jede von ihnen g, und diese beiden Schnittpunkte P, P' sind auch voneinander verschieden, da sie andernfalls sowohl auf g_1, als auch auf g_1' lägen, also mit dem Schnittpunkt A von g_1 und g_1' zusammenfielen.
Somit hat die Aufgabe genau diese zwei Lösungen P, P'.

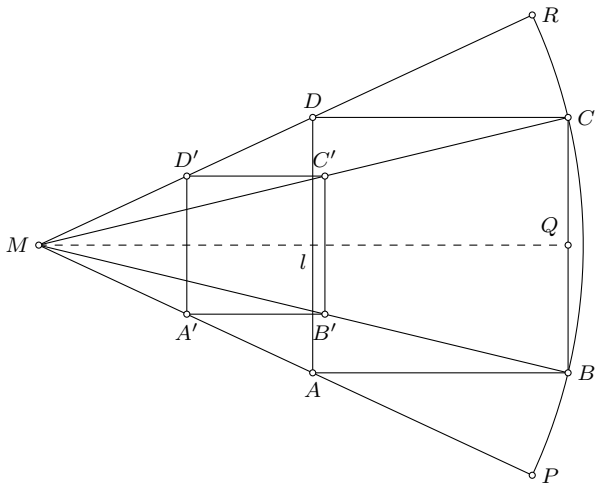
Aufgabe 120835:
Gegeben sei ein Kreissektor mit dem Radius $\overline{MP} = \overline{MR} = 9$ cm und einem Zentriwinkel $\angle PMR$ der Größe 50°.

Konstruiere ein Quadrat $ABCD$ so, dass A auf MP liegt, B und C auf dem Bogen $\overset{\frown}{PR}$ liegen und D auf MR liegt!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! (Eine Untersuchung, ob es genau ein derartiges Quadrat gibt, wird nicht verlangt.)

Hinweis: Es empfiehlt sich, zur Lösung Eigenschaften von zentrischen Streckungen zu benutzen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, $ABCD$ sei ein Quadrat, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Ferner sei A' ein Punkt auf MP. Es sei weiter Q der Fußpunkt des Lotes l von M auf BC. Dann ist $\triangle MBQ \cong \triangle MCQ$ (ssw), also ist l die Mittelsenkrechte von BC und daher auch die von AD. Somit gilt $MA = MD$.

Die Parallele durch A' zu AB schneide den Strahl aus M durch R in einem Punkt, der D' genannt sei. Die Parallelen durch B' zu BC und durch D' zu DC mögen sich im Punkt C' schneiden.
Dann ist $A'B'C'D'$ ein Viereck, das aus $ABCD$ durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum M hervorgegangen ist, also ein Quadrat, für das wegen $MA = MD$ auch $MA' = MD'$ gilt. Da das Quadrat $ABCD$ nicht auf derselben Seite von AD liegt wie M, so liegt das Quadrat $A'B'C'D'$ nicht auf derselben Seite von $A'D'$ wie M.

(II) Daraus ergibt sich, dass ein Quadrat $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man wählt auf MP einen beliebigen Punkt A'.

(2) Man schlägt den Kreis um M mit MA'. Schneidet er den Strahl aus M durch R in einem Punkt, so sei dieser D' genannt.

(3) Man errichtet über $A'D'$ das Quadrat $A'B'C'D'$, das nicht auf derselben Seite von $A'D'$ liegt wie M.

(4) Man zeichnet die von M ausgehenden Strahlen durch B' bzw. C'. Schneiden sie den Bogen PR, so seien diese Schnittpunkte B bzw. C genannt.

(5) Man zeichnet die Parallele zu $B'A'$ durch B. Schneidet sie PM in einem Punkt, so sei dieser A genannt.

(6) Man zeichnet die Parallele zu $C'A'$ durch C. Schneidet sie RM in einem Punkt, so sei dieser D genannt.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierbare Quadrat $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Laut Konstruktion ist die Mittelsenkrechte l von $A'D'$ auch die von $B'C'$; wegen $MA' = MD'$ geht sie durch M, ist also auch Winkelhalbierende von $\angle B'MC'$.
Schneidet sie BC in Q, so ist daher $\triangle MBQ \cong \triangle MCQ$ (sws), also l auch senkrecht auf BC und folglich $BC \parallel B'C'$. Hiernach und nach der weiteren Konstruktion ist $ABCD$ durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum M aus $A'B'C'D'$ hervorgegangen.
Daher ist $ABCD$ ebenfalls ein Quadrat, und seine Punkte liegen so, wie es in der Aufgabe verlangt wurde.

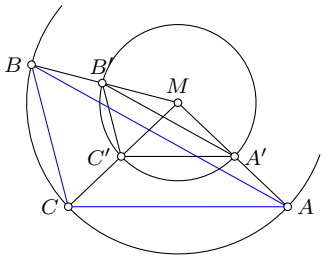
Aufgabe 130836:
Konstruiere ein Dreieck ABC, das den Bedingungen $a : b : c = 2 : 3 : 4$ und $r = 4$ cm genügt!

Dabei seien a, b, c in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten BC, AC und AB, und r sei der Umkreisradius.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Bedingungen ein Dreieck ABC eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht, der Mittelpunkt seines Umkreises sei M. Dann gibt es ein Dreieck $A'B'C'$, das aus $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum M entsteht (A' Bild von A, B' Bild von B, C' Bild von C) und bei dem $A'B' = 4$ cm beträgt.

Dabei gilt weiter $A'C' = 3$ cm, $B'C' = 2$ cm. Folglich ist $\triangle ABC$ ähnlich einem Dreieck $A'B'C'$ mit den Seitenlängen $a' = 2$ cm, $b' = 3$ cm, $c' = 4$ cm, das aus $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum M hervorgeht.



(II) Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck $A'B'C'$ mit den Seitenlängen $B'C' = 2$ cm, $C'A' = 3$ cm, $A'B' = 4$ cm sowie dessen Umkreismittelpunkt M.
(2) Man zeichnet die Strahlen aus M durch A' bzw. B' bzw. C'.

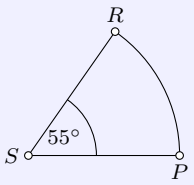
(3) Man schlägt um M den Kreis mit dem Radius r. Schneidet er die in (2) gezeichneten Strahlen, so seien die Schnittpunkte in dieser Reihenfolge mit A, B, C bezeichnet.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierbare Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Laut Konstruktion ist $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit dem Zentrum M aus $\triangle A'B'C'$ hervorgegangen. Daher sind beide Dreiecke ähnlich. Das Dreieck ABC hat also ebenfalls das Verhältnis der Seitenlängen $2 : 3 : 4$. Ebenso gilt laut Konstruktion $AM = BM = CM = r$, d. h., das Dreieck ABC hat einen Umkreis vom Radius r.

(IV) Da wegen $2 + 3 > 4$; $2 + 4 > 3$ und $3 + 4 > 2$ ein Dreieck $A'B'C'$ mit den angegebenen Seitenlängen existiert, ist Konstruktionsschritt (1) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Die Konstruktionsschritte (2) und (3) sind ebenfalls eindeutig ausführbar. Daher ist durch die gegebenen Bedingungen ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 140833:
Gegeben sei ein Kreissektor mit dem Radius $\overline{SP} = \overline{SR} = 8{,}5$ cm und dem Zentriwinkel $\angle PSR$ der Größe $55°$ (siehe Abbildung).

Konstruiere einen Kreis k, der dem gegebenen Sektor einbeschrieben ist, d. h., der die Strecken SP, SR und den Bogen PR so berührt, dass k innerhalb der Fläche des PR enthaltenden Kreises liegt! Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

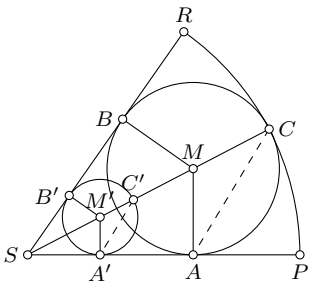


Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, k sei ein Kreis, der den Bedingungen der Aufgabe genügt.
A sei sein Berührungspunkt mit SP, B der mit SR und C der mit dem Bogen $\overset{\frown}{PR}$. Der Mittelpunkt M des Kreises k liegt dann auf dem Strahl s aus S durch C; ferner ist $\triangle SAM \cong \triangle MBS$ wegen $SM = SM$, $MA = MB$ (Radius von k) und $\angle MAS = \angle MBS = 90°$.

Daher ist $\angle MSA = \angle MSB$, so dass s den Winkel $\angle PSR$ halbiert. Wegen $MA = MC$ ist weiter $\triangle ACM$ gleichschenklig und somit $\angle ACM = \angle CAM = \frac{1}{2}\angle AMS$, letzteres nach dem Außenwinkelsatz, der hier anwendbar ist, weil wegen der vorausgesetzten Berührung von innen M zwischen S und C liegt.

Sind jetzt M' ein beliebiger von S verschiedener Punkt auf s, A' der Fußpunkt des Lotes von M' auf die Gerade durch S und P und C' der Schnittpunkt von s mit dem Kreis um M' mit dem Radius $M'A'$, so ist $\angle A'M'S = \angle AMS$, weil $\triangle AMS \sim \triangle A'M'S$ ist. Es gilt nämlich $\angle ASM = \angle A'SM'$ und $\angle SAM = \angle SA'M' = 90°$.

Daher genügt ein Kreis k nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(II) (1) Man konstruiert die Halbierende des Winkels $\angle PSR$, in dessen Innerem der Bogen $\overset{\frown}{PR}$ verläuft. Ihr Schnittpunkt mit dem Bogen $\overset{\frown}{PR}$ sei C.
(2) Man wählt einen beliebigen Punkt M' auf SC. Von M' fällt man das Lot $M'A'$ auf SP.
(3) Man schlägt um M' den Kreis k' mit dem Radius $M'A'$. Der Schnittpunkt von k' mit der Verlängerung von SM' über M' hinaus sei C'.
(4) Man zeichnet die Parallele zu $A'C'$ durch C. Ihr Schnittpunkt mit SP sei A.
(5) Man errichtet auf SP in A die Senkrechte. Ihr Schnittpunkt mit SC sei M.
(6) Man schlägt den Kreis k um M mit dem Radius MA.

(III) Jeder so konstruierte Kreis k genügt den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis: Da gemäß (5) $\angle MAS = 90°$ ist und gemäß (4) A auf SP liegt, berührt k die Strecke SP, und zwar in A. Aus Symmetriegründen berührt daher k auch die Strecke SR.

Wegen $CA \parallel C'A'$ (nach (4)) gilt $\angle SCA = \angle SC'A'$ und wegen $MA \parallel M'A'$ (nach (2) und (5)) und, da M auf SC liegt (nach (5)), $\angle CMA = \angle C'M'A'$.

Daher gilt $\triangle CMA \sim \triangle C'M'A'$, und wegen $M'A' = M'C'$ ist $MA = MC$. Daher berührt k den Bogen $\overset{\frown}{PR}$ in C, dem gemeinsamen Punkt von k, PR und der Zentralen durch M und S.

(IV) Die Konstruktionen in (II) sind alle (eindeutig) ausführbar. Das ist für (1), (3) und (6) bekannt und ergibt sich für (2), (4) und (5) folgendermaßen:

(2) Für den Fußpunkt A' des Lotes von M' auf die Gerade durch S und P gilt $SA' < SM' < SC = SP$, also liegt A' auf SP wegen $\angle CSP < 90°$:
(4) Weil M' auf SC' liegt, gilt $SA' < SC'$ und folglich nach dem Strahlensatz für den Schnittpunkt A mit der Geraden durch S und P $SA < SC = SP$, also liegt wegen $\angle CSP < 90°$ der Punkt A auf SP.
(5) Der Schnittpunkt M mit der Geraden durch S und C gilt nach dem Strahlensatz, und weil M' auf SC' liegt,

$$SM = \frac{SM'}{SC'} \cdot SC < SC$$

woraus, weil A auf SP liegt und $\angle CSP < 90°$ ist, folgt, dass M auf SC liegt.

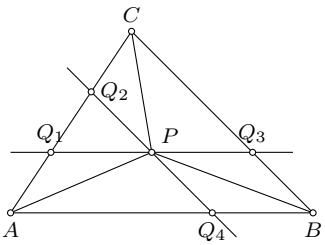
Aufgabe 150833:
Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC.

Konstruiere in seinem Inneren einen Punkt P, so dass die Dreiecke ABP, BCP, ACP alle einander flächengleich sind!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob stets genau ein solcher Punkt P existiert!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, P sei ein Punkt, wie er nach Aufgabenstellung konstruiert werden soll. Dann hat das Dreieck ABP ein Drittel des Flächeninhalts von ABC als Flächeninhalt. Sind h_c, h'_c die Längen der Höhen

auf die Gerade durch A und B in den Dreiecken ABC, ABP, so ist folglich $h'_c = \frac{1}{3}h_c$.
Also liegt P auf einer Parallelen zu AB im Abstand $\frac{1}{3}h_c$, und zwar, da P im Innern von $\triangle ABC$ liegt, auf derjenigen Parallelen p_1, die auf derselben Seite der Geraden durch A und B verläuft, auf der auch C liegt.
Diese Parallele p_1 schneidet AC in einem Punkt Q_1, für den $AQ_1 = \frac{1}{3}AC$ gilt.
Ebenso liegt P auf der Parallelen p_2 zu BC durch denjenigen Punkt Q_2 auf AC, für den $CQ_2 = \frac{1}{3}AC$ gilt. Somit entspricht ein Punkt P nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



II. (1) Man konstruiert die Punkte Q_1 und Q_2 auf AC, für die $AQ_1 = CQ_2 = \frac{1}{3}AC$ gilt.
(2) Man zieht die Parallele p_1 zu AB durch Q_1 und die Parallele p_2 zu BC durch Q_2.
(3) Schneiden sich p_1 und p_2, so sei P ihr Schnittpunkt.

III. Jeder so konstruierte Punkt P entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:
Nach Konstruktion liegt P ebenso wie Q_1 auf derselben Seite der Geraden durch A und B wie C. Ferner liegt P ebenso wie Q_2 auf derselben Seite der Geraden durch B und C wie A. Weiterhin schneidet p_1 die Strecke BC in einem Punkt Q_3, der folglich auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegt wie B.

Da Q_2 zwischen Q_1 und C liegt, liegt der Schnittpunkt P von p_1 mit p_2 zwischen Q_1 und Q_3, und damit ebenfalls auf derselben Seite der Geraden durch A und C wie B.
Damit ist gezeigt, dass P im Innern von $\triangle ABC$ liegt.

Sind ferner h_c, h'_c die Längen der Höhen auf die Gerade durch A und B in den Dreiecken ABC, ABP und sind h_a, h'_a die Längen der Höhen auf die Gerade durch B und C in den Dreiecken ABC, PBC je ein Drittel des Flächeninhalts von $\triangle ABC$ als Flächeninhalt. Dasselbe gilt auch für $\triangle ACP$; denn da P im Innern von $\triangle ABC$ liegt, setzt sich $\triangle ABC$ aus den Dreiecken ABP, PBC, ACP zusammen.

IV. Da die Seiten AB und BC des Dreiecks ABC nicht parallel zueinander und folglich p_1 und p_2 ebenfalls nicht parallel zueinander sind, schneiden sie einander in genau einem Punkt. Somit existiert stets genau ein Punkt P, der die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgabe 160835:
Gegeben sei ein spitzer Winkel; sein Scheitel sei der Punkt S, seine Schenkel seien die Strahlen a und b; seine Winkelhalbierende sei der Strahl w. Gegeben sei ferner ein auf w gelegener Punkt $P \neq S$.

Konstruiere einen Kreis k, der a und b berührt und durch P geht!

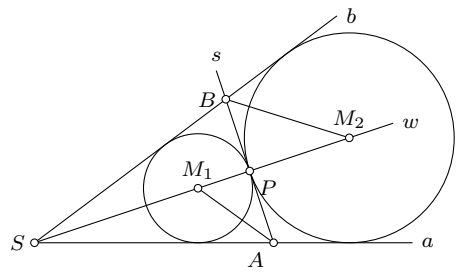
Beschreibe und begründe Deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die genannten Bedingungen ein Kreis eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, k sei ein Kreis, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Dann liegt dieser Kreis k in dem gegebenen Winkel; sein Mittelpunkt M hat gleiche Abstände zu a und b und liegt folglich auf w. Daher steht die Senkrechte s zu w durch P senkrecht auf einem Durchmesser von k; sie ist also die Tangente in P an k.

Folglich hat M auch gleiche Abstände zu a und s und liegt demnach auf der halbierenden Geraden eines Winkels, den s mit a bildet. Daher entspricht ein Kreis nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er

durch folgende Konstruktion gewonnen werden kann:

II. (1) Man konstruiert in P die Senkrechte s auf w. Schneidet sie a, so sei der Schnittpunkt A genannt.



(2) Man konstruiert die halbierende Gerade eines Winkels, den s mit a bildet. Schneidet sie w in einem Punkt, so sei dieser M genannt.
(3) Man zeichnet den Kreis k um M mit dem Radius MP.

III. Jeder so konstruierte Kreis genügt den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Laut Konstruktion geht k durch P. Ferner berührt k die Gerade s in P, da M auf w liegt und da sich w und s in P rechtwinklig schneiden. Weiterhin liegt M (auf w, also) in dem gegebenen Winkel sowie auf einer winkelhalbierenden Geraden von a und s; hiernach hat M gleiche Abstände zu a und s.

Endlich hat M auch gleiche Abstände zu a und b, da M auf w liegt, also berührt k außer der Geraden s auch die Strahlen a und b.

IV. Die Konstruktion von s nach (1) ist eindeutig ausführbar. Da w mit a einen spitzen Winkel bildet und auf s senkrecht steht, schneiden sich a und s; also ist auch A eindeutig bestimmt.

Die in (2) zu konstruierenden winkelhalbierende Geraden, von denen es genau zwei gibt, schneiden beide w; denn die eine halbiert den Innenwinkel bei A im Dreieck SAP, schneidet also dessen Seite SP zwischen S und P; die andere steht senkrecht auf der ersten, also bildet ein Strahl von ihr mit dem auf s liegenden Strahl aus A durch P einen spitzen Winkel, während w auf s senkrecht steht. Also entstehen in (2) genau zwei verschiedene Schnittpunkte M_1, M_2; es gibt mithin zwei Kreise k_1 und k_2, die den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Aufgabe 170832:
Gegeben seien ein Punkt S und zwei von S ausgehende Strahlen a und b, die miteinander einen spitzen Winkel bilden.

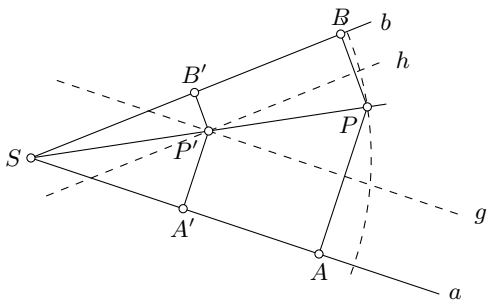
Konstruiere im Innern dieses Winkels einen Punkt P, der folgenden Bedingungen entspricht:

(1) P hat von a den doppelten Abstand wie von b.

(2) Die Länge der Strecke SP beträgt 5,0 cm.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Bedingungen der Aufgabe ein Punkt P eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Es sei P ein Punkt, der den Bedingungen der Aufgabe entspricht.
Die Fußpunkte der Lote von P auf a bzw. b seien A bzw. B. Dann gilt $PA = 2PB$, d. h. $PA : PB = 2 : 1$.

Ist h eine beliebige Parallele zu b auf der Seite von b, auf der a liegt, so schneidet sie den Strahl aus S durch P in einem Punkt P'. Die Fußpunkte der Lote von P' auf a bzw. b seien A' bzw. B'. Nach dem Strahlensatz gilt dann $P'A' : PA = SP' : SP$ und $P'B' : PB = SP' : SP$, also $P'A' : PA = P'B' : PB$.
Hieraus folgt $P'A' : P'B' = PA : PB : 2 : 1$.

Somit hat die Parallele g zu a durch P' doppelt so großen Abstand von a wie h von b. Diese Parallele g liegt auf der Seite von a, auf der b liegt.

II. Deshalb entspricht ein Punkt P nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man zieht eine beliebige Parallele h zu b auf der Seite von b, auf der a liegt.
(2) Man konstruiert in doppelt so großem Abstand von a, wie ihn h von b hat, die Parallele g zu a auf der Seite von a, auf der b liegt. Schneiden sich g und h im Innern des gegebenen Winkels, so sei der Schnittpunkt P' genannt.
(3) Um S beschreibt man einen Kreis mit einem Radius von 5,0 cm. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Strahl aus S durch P' sei P genannt.

III. Beweis, dass jeder so konstruierte Punkt P den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Die Fußpunkte der Lote von P auf a bzw. b seien A bzw. B; die Fußpunkte der Lote von P' auf a bzw. b seien A' bzw. B'. Nach Konstruktion gilt $P'A' : PB = SP' : SP$, also $P'A' : PA = P'B' : PB$.
Hieraus folgt $PA : PB = P'A' : P'B' = 2 : 1$, also ist (1) erfüllt. Nach Konstruktion erfüllt P auch (2). Schließlich liegt P' (nach Konstruktion) und daher auch P im Innern des gegebenen Winkels.

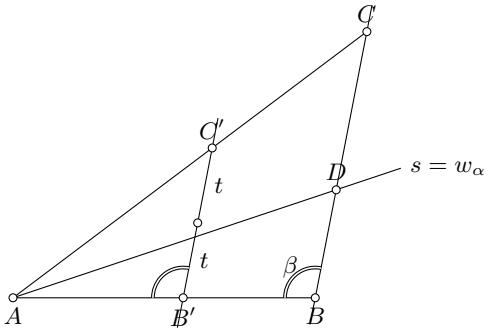
IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2) sind eindeutig ausführbar; die Geraden g und h schneiden sich, und zwar im Innern des gegebenen Winkels. Hierauf ist auch Konstruktionsschritt (3) eindeutig ausführbar. Daher gibt es genau einen Punkt P, der alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Aufgabe 180832:
Von einem Dreieck ABC wird gefordert, dass für die Länge a der Seite BC, die Länge c der Seite AB, die Länge w_α der Halbierenden des Winkels $\angle BAC$ und für die Größe β des Winkels $\angle ABC$ die Beziehungen $a : c = 2 : 3$; $w_\alpha = 6$ cm; $\beta = 35°$ gelten.

a) Konstruiere ein solches Dreieck, und beschreibe deine Konstruktion!

b) Beweise, dass jedes so konstruierte Dreieck die gestellten Forderungen erfüllt! Eine Analysis und eine Determination werden nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) (1) Man konstruiert eine Strecke AB', deren Länge das Dreifache einer beliebig gewählten Länge t ist.
(2) In B' trägt man an den Strahl aus B' durch A einen Winkel der Größe 35° an.
(3) Auf seinem freien Schenkel trägt man von B' aus diejenige Strecke $B'C'$ ab, deren Länge das Zweifache von t ist.
(4) Man konstruiert den Strahl s, der den Winkel $\angle B'AC'$ halbiert.
(5) Auf s trägt man von A aus die Strecke AD der Länge 6 cm ab.

(6) Man konstruiert die Parallele durch D zu $B'C'$. Sie schneidet den Strahl aus A durch B' in einem Punkt B und den Strahl aus A durch C' in einem Punkt C.

b) Ist $\triangle ABC$ auf diese Weise konstruiert, so folgt:
Nach (6) ist $BC \parallel B'C'$, also $\angle ABC = \angle AB'C'$ (Stufenwinkel an Parallelen) und $\alpha = 35°$ (nach (2)).
Nach (4) ist AD Halbierende des Winkels $\angle B'AC'$, der wegen (6) mit dem $\angle BAC$ zusammenfällt.

Ferner hat AD nach (5) die Länge 6 cm. Nach einem Teil des Strahlensatzes gilt wegen $BC \parallel B'C'$

$$BC : AB = B'C' : AB' = 2t : 3t = 2 : 3$$

Damit sind alle geforderten Eigenschaften für $\triangle ABC$ nachgewiesen.

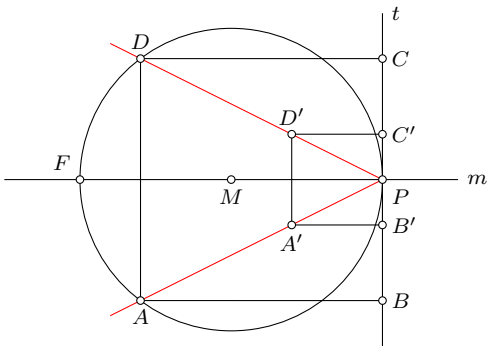
Aufgabe 190832:
Gegeben seien ein Punkt M sowie ein Kreis k mit M als Mittelpunkt. Gesucht ist ein Quadrat $ABCD$, das folgende Eigenschaften hat:

(1) Die Eckpunkte A und D liegen auf der Kreislinie k.

(2) Die Quadratseite BC berührt den Kreis k in einem Punkt P, der zwischen B und C liegt.

Begründe und beschreibe eine Konstruktion, die (ausgehend von dem gegebenen Kreis k) zu einem Quadrat mit diesen Eigenschaften führt! Untersuche, ob es (zu gegebenen k) bis auf Kongruenz genau ein solches Quadrat gibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, ein Quadrat $ABCD$ habe die verlangten Eigenschaften. Dann liegt M wegen $MA = MD$ auf der Mittelsenkrechten m von AD. Ferner berührt die Gerade t durch B, C den Kreis k in P, also ist t senkrecht zur Geraden durch M, P.
Diese steht somit wegen $AD \parallel BC$ auch auf AD senkrecht und ist daher die Gerade m; damit ist gezeigt, dass m durch P geht.
Da m auch Mittelsenkrechte von BC ist, ist folglich P der Mittelpunkt von BC. Wendet man auf $ABCD$ eine beliebige zentrische Streckung mit dem Zentrum P an, so entsteht ein Quadrat $A'B'C'D'$, dessen Ecken B', C' auf t liegen und dessen Seite $B'C'$ den Mittelpunkt P hat.



II. Daher ist $ABCD$ nur dann ein Quadrat mit den Eigenschaften (1), (2), wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(3) Man zieht durch M eine Gerade, die m genannt sei. Einen ihrer Schnittpunkte mit k bezeichne man mit P.
(4) Man konstruiert die Senkrechte t in P auf m.
(5) Auf t wählt man einen beliebigen Punkt $B' \neq P$ und verlängert die Strecke $B'P$ über P hinaus um ihre eigene Länge bis C'.
(6) Auf $B'C'$ errichtet man das Quadrat $A'B'C'D'$ (nach der Seite von t hin, auf der k liegt).
(7) Die Strahlen aus P durch A' bzw. durch D' schneiden k in A bzw. D.
(8) Man fällt die Lote AB bzw. DC von A bzw. D auf t.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ ein Quadrat mit den Eigenschaften (1) und (2) ist:

Nach Konstruktion liegen A und D auf k, also ist (1) erfüllt. Ferner berührt die Gerade t, auf der B und C liegen, den Kreis k in P. Nach Konstruktion ist m die Mittelsenkrechte von $B'C'$ und damit auch von $A'D'$.

Daher liegen die Geraden durch P, A' bzw. durch P, B' symmetrisch zu m; dasselbe gilt für k und folglich für A und D. Somit ist $AD \perp m$, also $AD \parallel A'D'$. Da nach Konstruktion auch $AB \parallel A'B'$ und $DC \parallel D'C'$ ist, geht $ABCD$ aus $A'B'C'D'$ durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum P hervor.
Folglich ist auch $ABCD$ ein Quadrat, und die Seite BC wird von k in ihrem Mittelpunkt P berührt, so dass (2) insgesamt erfüllt ist.

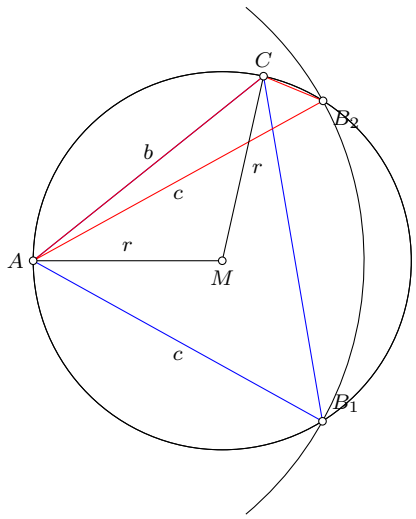
IV. Konstruktionsschritt (3) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.
Die Schritte (5) und (6) führen zwar nicht zu einem eindeutig bestimmten Quadrat $A'B'C'D'$, aber je zwei der Quadrate, die entstehen können, gehen auseinander durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum P hervor. Daher sind die in (7) konstruierten Strahlen für alle in (5), (6) zu erhaltenden Quadrate dieselben, d. h. durch (k und) P eindeutig bestimmt; dasselbe gilt somit für A, D und nach (8) für B, C.

Also gibt es (zu k) bis auf Kongruenz genau ein Quadrat mit den geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 200833:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r = 4$; $b = 6$ und $c = 7$ cm! Dabei seien r der Umkreisradius des Dreiecks und b, c die Längen der Seiten AC bzw. AB des Dreiecks ABC.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Angenommen, ein Dreieck ABC erfülle die Bedingungen der Aufgabe.
Sein Umkreis sei mit k, sein Mittelpunkt mit M bezeichnet. Dann ist das Dreieck ACM nach dem Kongruenzsatz sss eindeutig bestimmt. Der Punkt B liegt einerseits auf k und andererseits auf dem Kreis um A mit dem Radius c.

(II) Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiere ein Dreieck ACM aus $AC = b$, $AM = CM = r$.
(2) Um A zeichne man den Kreis k' mit dem Radius c. Man wähle einen der Schnittpunkte von k mit k' und bezeichne ihn mit B.

(III) Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:
Nach Konstruktion haben b, c und r die geforderten Längen, und k ist der Umkreis des Dreiecks ABC.

(IV) Der Konstruktionsschritt (1) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Wegen $b < c < 2r$ entstehen beim Konstruktionsschritt (2) genau zwei Schnittpunkte, die sich so mit B_1 bzw. B_2 bezeichnen lassen, dass M im Innern des Dreiecks AB_1C, aber außerhalb des Dreiecks AB_2C liegt. Daher ist das Dreieck AB_1C spitzwinklig, das Dreieck AB_2C aber stumpfwinklig; somit sind diese beiden Dreiecke nicht zueinander kongruent.
Durch die gegebenen Stücke ist ein Dreieck ABC daher nicht eindeutig bestimmt.

Aufgabe 210833:
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $\overline{BC} = 4$ cm, $\overline{AC} = 5$ cm und $\overline{AB} = 6$ cm. Auf der Seite CB sei M_1 derjenige Punkt, für den $\overline{BM_1} = 3$ cm ist. Um M_1 sei der Kreis k_1 mit dem

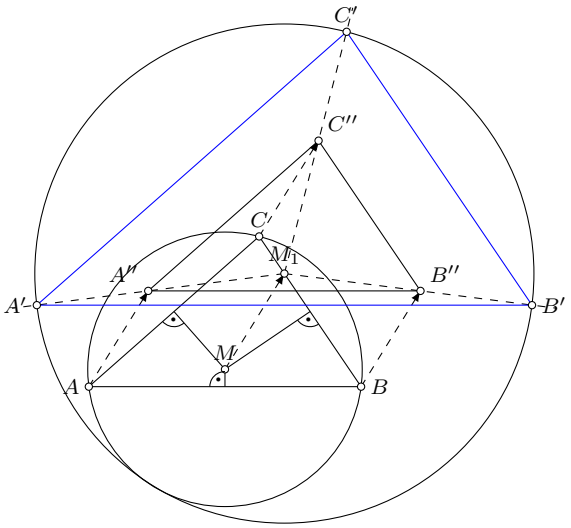
Radius 5,5 cm gezeichnet.

Zu diesen gegebenen Stücken soll ein dem Dreieck ABC ähnliches Dreieck $A'B'C'$ konstruiert werden, dessen Eckpunkte sämtlich auf dem Kreis k_1 liegen.

Beschreibe eine Konstruktion eines solchen Dreiecks $A'B'C'$ und beweise, dass es die geforderten Eigenschaften hat, wenn es nach dieser Konstruktionsbeschreibung konstruiert wird!

Hinweis: Eine „Analyse“ (Schlussfolgerung aus der Annahme, ein Dreieck $A'B'C'$ habe die verlangten Eigenschaften, zur Herleitung der Konstruktionsbeschreibung) und eine „Determination“ (Diskussion auf Existenz und Eindeutigkeit der Konstruktion) werden nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Konstruktionsbeschreibung:
(1) Man konstruiert den Schnittpunkt M zweier Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC.
(2) Man wendet auf A, B und C die Verschiebung mit dem Verschiebungspfeil $\overrightarrow{MM_1}$ an. Die erhaltenen Bildpunkte von A, B, C seien A'', B'' bzw. C''.
(3) Man verlängert M_1A'', M_1B'', M_1C'' jeweils über A'', B'' bzw. C'' hinaus bis zum Schnitt mit k_1. Die Schnittpunkte seien A', B' bzw. C'.

II. Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck $A'B'C'$ die geforderten Eigenschaften hat:

Nach Konstruktionsschritt (3) liegen A', B' und C' auf k_1, also gilt:

$$M_1A' = M_1B' = M_1C' \qquad (*)$$

Ferner ist der in (1) konstruierte Punkt M Mittelpunkt des Umkreises k des Dreiecks ABC. Geht k bei der in (2) durchgeführten Verschiebung in k'' über, so ist folglich M_1 der Mittelpunkt von k'' und k'' der Umkreis des Dreiecks $A''B''C''$. Hiernach gilt

$$M_1A'' = M_1B'' = M_1C'' \qquad (**)$$

Wegen (3), (*) und (**) gehen A'', B'', C'' aus A',B',C' durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum M_1 hervor. Also entsteht das Dreieck $A'B'C'$ aus dem Dreieck ABC dadurch, dass erst eine Verschiebung und dann eine Streckung ausgeführt wird; somit sind die Dreiecke $A'B'C'$ und ABC einander ähnlich.

Alternativ-Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. (1) Man wählt einen beliebigen Punkt A' auf k_1.
(2) An M_1A' trägt man in M_1 nach einer Seite den Winkel der Größe $2 \cdot \angle ACB$ und nach der anderen Seite den Winkel der Größe $2 \cdot \angle ABC$ an. Der freie Schenkel des erstgenannten Winkels schneide k_1 in B', der freie Schenkel des anderen Winkels schneide k_1 in C'.

II. Nach (1) und (2) liegen A',B',C' auf k_1. Nach dem Peripheriewinkelsatz und (2) ist ferner $\angle A'C'B' = \frac{1}{2}\angle A'M_1'B' = \angle ACB$ sowie $\angle A'B'C' = \frac{1}{2}\angle A'M_1'C' = \angle ABC$.
Daher sind die Dreiecke $A'B'C'$ und ABC ähnlich nach dem Hauptähnlichkeitssatz.

Aufgabe 220833:
Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ und den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) aus $b = 6$ cm. Dabei sei b die Länge der Seite BC. Die geforderten Eigenschaften sind:

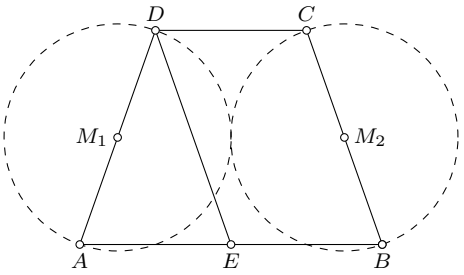
(1) Es gilt $\overline{AD} = \overline{BC}$.
(2) Es gilt $\overline{AB} : \overline{DC} = 2 : 1$.
(3) Die Kreise mit den Durchmessern AD und BC berühren einander.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebene Länge b ein Trapez mit den genannten Eigenschaften bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Trapez $ABCD$ die geforderten Eigenschaften hat (siehe Abbildung) und E,M_1 bzw. M_2 die Mittelpunkte von AB, AD bzw. BC sind, so folgt:
Wegen $AB \parallel DC$ ist $EB \parallel DC$; nach (2) ist $AE = EB = DC$. Daher ist $EBCD$ ein Parallelogramm; es gilt $ED = BC$; hiernach und nach (1) ist $AD = ED = b$.

Ferner ist M_1M_2 nach (3) gleich der Summe der Radien der genannten Kreise, also wegen (1) gleich $AD = BC = b$. Andererseits ist M_1M_2 die Mittelparallele des Trapezes $ABCD$; hieraus und aus (2) folgt

$$b = M_1M_2 = \frac{1}{2}(AB + DC) = \frac{3}{2}DC = \frac{3}{2}AE \qquad ; \qquad AE = \frac{2}{3}b$$



II. Daher ist ein Viereck $ABCD$ nur dann ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
(*) Man konstruiert ein Dreieck AED mit $AD = ED = b$ und $AE = 2$
(**) Man verlängert die Strecke AE über E hinaus um ihre eigene Länge bis B.
(***) Man konstruiert die Parallele durch D zu AB und die Parallele durch B zu ED; beide schneiden sich in C.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ die geforderten Eigenschaften hat:

Nach (***) ist $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel DC$. Ferner ist $EBCD$ ein Parallelogramm. Hieraus folgt einerseits $ED = BC$, nach (*) also $AD = BC = b$, andererseits $EB = DC$, nach (**) also $AB : DC = 2 : 1$, und zwar nach (*) $DC = EB = AE = 4b$, $AB = 4b$.

Folglich hat die Mittelparallele M_1M_2 des Trapezes $ABCD$ die Länge

$$M_1M_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}b + \frac{4}{3}b\right) = b = AD = BC$$

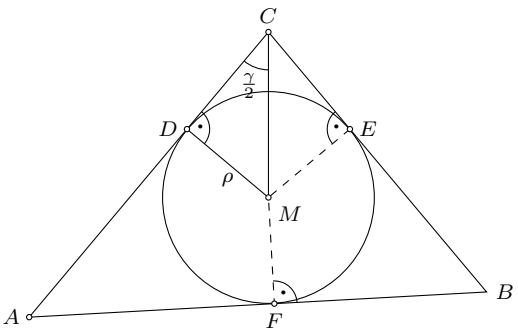
Die Mittelpunkte M_1, M_2 der Kreise mit den Durchmessern AB bzw. BC haben als Abstand voneinander also die Summe der Radien dieser Kreise. Daher berühren sich diese Kreise.

IV. Konstruktionsschritt (*) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, da die Seitenlängen b, b und $\frac{2}{3}b$ alle Dreiecksungleichungen erfüllen.
Die Konstruktionsschritte (**) und (***) sind dann eindeutig ausführbar. Daher ist durch die gegebene Länge b ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 230833:
Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b = 7cm$, $\rho = 2cm$ und $\gamma = 80°$! Dabei sei b die Länge der Seite AC, ρ der Radius des Inkreises des Dreiecks ABC, und γ sei die Größe des Innenwinkels $\angle ACB$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Angenommen, ein Dreieck ABC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe.
Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC sei M; der Inkreis berühre die Seite AC in D. Dann ist $MD = \rho, \angle CDM = 90°$ und, da M auf den Winkelhalbierenden des Dreiecks liegt, $\angle DCM = \frac{\gamma}{2}$.

Ferner liegt A auf der Verlängerung von CD über D hinaus im Abstand $CA = b$ von C. Schließlich ist die Gerade durch A,B die von der Geraden durch A,C verschiedene Tangente von A an den Inkreis, und die Gerade durch C,B ist die von der Geraden durch A,C verschiedene Tangente von C an den Inkreis.

II. Daher entspricht ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiere ein Dreieck CDM aus $MD = \rho, \angle CDM = 90°$ und $\angle DCM = \frac{\gamma}{2}$. (2) Man zeichne den Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius CM.
(3) Man spiegelt den Punkt D an der Geraden durch C und M und erhält den Berührungspunkte E einer Tangente durch C an den Inkreis.
(4) Die Gerade durch C und D verlängert man auf $b = 7$ cm und erhält den Punkt A.
(5) Von A konstruiere man eine von CA verschiedene Tangente an den Kreis. Der Berührungspunkt sei der Punkt F.
(5) Diese Tangente und die Verlängerung von CE über E hinaus schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkte ist B.

III. Jeder Konstruktionsschritt ist eindeutig ausführbar, womit das Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig ist.

Aufgabe 240833:
Konstruiere ein nicht überschlagenes Viereck $ABCD$, das die folgenden Bedingungen (I) bis (V) erfüllt!

(I) Die Seite AB hat die Länge $a = 7{,}0$ cm.
(II) C liegt auf der Mittelsenkrechten p der Strecke AB.
(III) D liegt auf der Mittelsenkrechten q der Strecke AC.
(IV) A liegt auf der Mittelsenkrechten r der Strecke BD.
(V) Die Geraden p und q schneiden sich in einem Punkt S, der auf der Stecke AB liegt.

Beschreibe deine Konstruktion! Beweise, dass jedes Viereck, das die geforderten Eigenschaften hat, nach deiner Beschreibung konstruiert werden kann! Beweise, dass jedes Viereck, das nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die geforderten Eigenschaften hat!

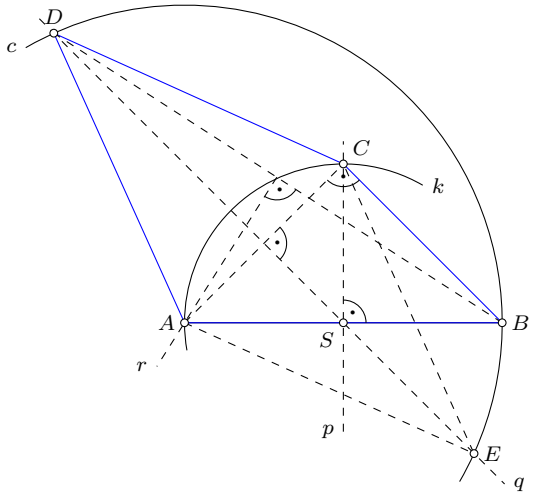
Hinweis: Ein Viereck $ABCD$ heißt genau dann „nicht überschlagen“, wenn die Strecken AB und CD sich nicht schneiden und die Strecken AD und BC sich nicht schneiden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Viereck $ABCD$ die geforderten Eigenschaften hat, so folgt: Nach (V) und (II) ist S derjenige Punkt der Strecke AB, der auf der Mittelsenkrechten p von AB liegt, also der Mittelpunkt von AB.

Ferner liegt S nach (V) und (III) auf der Mittelsenkrechten von AC, also gilt $CS = AS$.
Außerdem liegt C nach (II) auf der Mittelsenkrechten p von AB.

Nach (IV) und (I) gilt $AD = AB = a$; außerdem liegt D nach (III) auf der Mittelsenkrechten q von AC.
Ferner liegt D so, dass die Strecke CD die Strecke AB nicht schneidet.

Daher kann ein Viereck $ABCD$ nur dann die geforderten Eigenschaften haben, wenn es folgendermaßen konstruiert werden kann:



II. (1) Man konstruiert eine Strecke AB der Länge a.
(2) Man konstruiert den Mittelpunkt S und die Mittelsenkrechte p der Strecke AB.
(3) Man konstruiert den Kreis k um S mit AS und bezeichnet einen Schnittpunkt von p und k mit C.
(4) Man konstruiert die Mittelsenkrechte q von AC.
(5) Man konstruiert den Kreis c um A mit AB.
Die Konstruktion ergibt: Für (genau) einen der Schnittpunkte von q und c schneidet seine Verbindungsstrecke mit C die Strecke AB nicht; diesen Schnittpunkt bezeichnet man mit D.

III. Beweis, dass jedes Viereck $ABCD$, das nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die geforderten Eigenschaften hat:

Nach (1) gilt $AB = a$. Nach (2) und (3) liegt C auf der Mittelsenkrechten p von AB. Nach (4) und (5) liegt D auf der Mittelsenkrechten q von AC. Nach (5) gilt $AD = AB$, also liegt A auf der Mittelsenkrechten von BD.

Da S nach (2) der Mittelpunkt von AB ist, liegt S auf der Mittelsenkrechten p von AB. Da nach (2) und (3) ferner, $CS = AS$ ist, liegt S auch auf der Mittelsenkrechten q von AC. Also schneiden sich p und q in dem auf AB liegenden Punkt S.

Ferner ergibt die Konstruktion: Für den in (5) konstruierten und ausgewählten Punkt D, für den sich AB und CD nicht schneiden, schneiden sich auch BC und AD nicht. Daher ist $ABCD$ ein nicht überschlagenes Viereck.

Aufgabe 250833:
Es sei g eine gegebene Gerade. Ferner seien zwei Punkte A und B gegeben, die beide nicht auf g

liegen, deren Verbindungsstrecke AB aber g schneidet und nicht auf g senkrecht steht.

Für einen Streckenzug $APQB$ seien folgende Bedingungen (1), (2), (3) gefordert:

(1) Die Punkte P und Q liegen auf g.

(2) Die Gerade durch A und P ist parallel zur Geraden durch B und Q.

(3) Die Strecke PQ hat die Länge $t = 6cm$.

a) Beweise, dass jeder Streckenzug $APQB$, der die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, durch eine Konstruktion (aus gegebenen g, A, B und der gegebenen Länge $t = 6cm$) erhalten werden kann!

b) Beschreibe eine solche Konstruktion!

c) Beweise, dass jeder Streckenzug $APQB$, der nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

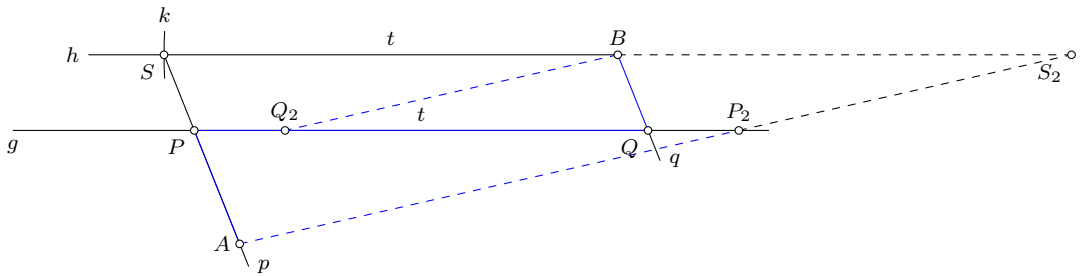
d) Wähle selbst eine Gerade g und Punkte A, B, wie oben beschrieben, und konstruiere dazu *alle* diejenigen Streckenzüge $APQB$, die die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen! (Ein Beweis, dass alle verlangten Streckenzüge konstruiert wurden, wird nicht gefordert.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn ein Streckenzug $APQB$ die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, so folgt:
Die Gerade p durch A und P ist nach (1) und den Voraussetzungen über g,A nicht parallel zu g; sie schneidet daher die Parallele h durch B zu g in einem Punkt S.
Für diesen gilt $SB \parallel PQ$ und nach (2) auch $PS \parallel QB$. Also ist $PQBS$ ein Parallelogramm; hieraus und aus (3) folgt $SB = PQ = t$.

Somit liegt S auf dem Kreis k um B mit dem Radius $t = 6$ cm.
Ferner folgt, dass P auf g und auf AS liegt und dass Q auf g und der Parallelen q durch B zu AS liegt.

Damit ist bewiesen, dass jeder Streckenzug $APQB$, der (1), (2), (3) erfüllt, durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

b) [1] Man konstruiert die Parallele h durch B zu g.
[2] Man konstruiert den Kreis k um B mit dem Radius $t = 6$ cm und bezeichnet einen Schnittpunkt von h und k mit S,
[3] Man konstruiert die Gerade p durch A und S und bezeichnet den Schnittpunkt von p und g mit P.
[4] Man konstruiert die Parallele q durch B zu p und bezeichnet den Schnittpunkt von q und g mit Q.



c) Für jeden Streckenzug $APQB$, der nach dieser Beschreibung konstruiert wird, gilt:
Nach [3] und [4] liegen P und Q auf g; d. h., (1) ist erfüllt. Nach [3] und [4] gilt ferner $p \parallel q$; A und P liegen auf p; B und Q liegen auf q; also ist (2) erfüllt.

Nach [1], [3] und [4] ist $PQBS$ ein Parallelogramm; hieraus und aus [2] folgt $PQ = BS = 6$ cm; d. h., (3) ist erfüllt.

d) Gefordert wird eine Konstruktion, die (wegen der Möglichkeit, in Konstruktionsschritt [2] jeden der beiden Schnittpunkte S_1, S_2 von h und k mit S zu bezeichnen) genau zwei Streckenzüge ergibt. Die beiden Streckenzüge sind nicht zueinander kongruent. (siehe Abbildung)

Aufgabe 260833:
Gegeben seien ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = 5$ cm sowie eine Gerade g, die von M den Abstand $d = 6$ cm hat. Zu konstruieren sind alle diejenigen Punkte P, die die folgenden Bedingungen (a) und (b) erfüllen:

(a) Der Punkt P liegt auf der Geraden g.

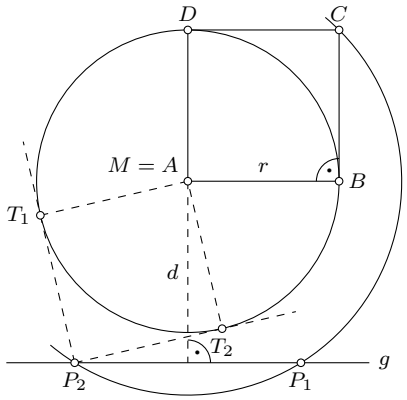
(b) Die von P an k gelegten Tangenten bilden miteinander einen rechten Winkel.

Beschreibe eine Konstruktion! Fertige eine Konstruktionszeichnung an! Beweise die beiden folgenden Sätze (I) und (II)!

(I) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (a) und (b) erfüllt, dann lässt er sich nach der angegebenen Beschreibung konstruieren.

(II) Wenn ein Punkt P nach der angegebenen Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt er die Bedingungen (a) und (b).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Konstruktionsbeschreibung:

(1) Man konstruiert ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge r.

(2) Man konstruiert den Kreis c um M mit dem Radius $\overline{AC}$. Die Schnittpunkte P_1, P_2, die c mit g hat, sind dann alle zu konstruierenden Punkte P.

Beweis zu (I): Es sei P ein Punkt, der (a) und (b) erfüllt; die Berührungspunkte der von P an k gelegten Tangenten seien T_1 und T_2 (siehe Abbildung).
Nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius gilt dann

$$\overline{\angle MT_1P} = 90^\circ \qquad , \qquad \overline{\angle MT_2P} = 90^\circ$$

nach (b) gilt $\overline{\angle T_1PT_2} = 90^\circ$. Also ist MT_1PT_2 ein Rechteck. Wegen $\overline{MT_1} = \overline{MT_2} = r$ ist dieses Rechteck ein Quadrat mit der Seitenlänge r und folglich kongruent zu dem in (1) konstruierten Quadrat $ABCD$. Daraus folgt $\overline{MP} = \overline{AC}$; also liegt P auf dem in (2) konstruierten Kreis c. Wegen (a) liegt P auch auf g. Also ist P einer der in (2) erhaltenen Schnittpunkte P_1, P_2, w. z. b. w.

Beweis zu (II): Es sei P ein Punkt, der nach der angegebenen Beschreibung konstruiert ist. Nach (2) liegt dann P auf g, erfüllt also die Bedingung (a). Nach (2) gilt ferner $\overline{AC} = \overline{MP}$.

Da g größeren Abstand als r zu M hat und somit k meidet, gibt es zwei von P an k gelegte Tangenten. Sind T_1 und T_2 ihre Berührungspunkte, so folgt: Nach (1) gilt $\overline{AB} = \overline{MT_1}$, nach (1) und dem Satz über Tangente und Berührungsradius gilt $\overline{\angle ABC} = \overline{\angle MT_1P}$, zugleich sind die hier genannten Winkel als rechte Winkel die größten Innenwinkel in $\triangle ABC$ bzw. $\triangle MT_1P$.

Nach dem Kongruenzsatz sSW ergibt sich damit $\triangle ABC \cong \triangle MT_1P$. Ebenso folgt $\triangle ADC \cong \triangle MT_2P$.

Also sind die Vierecke $ABCD$ und MT_1PT_2 zueinander kongruent. Da nach (1) nun $\overline{\angle BCD} = 90°$ ist, gilt auch $\overline{\angle T_1PT_2} = 90°$; d. h., auch (b) ist erfüllt, w. z. b. w.

Hinweis: Hat man im Konstruktionsschritt (1) $A = M$ gewählt, so kann zum Beweis (II) auch ausgeführt werden, dass es nach (2) eine Drehung um M gibt, die C in P überführt. Bei dieser Drehung gehen die tangentialen Strecken CB, CD in tangentiale Strecken PT_1, PT_2 über; und ihr rechter Winkel bleibt erhalten.

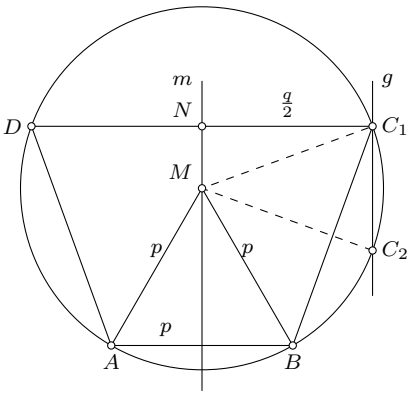
Aufgabe 280836:
Gegeben seien zwei Strecken; für ihre Längen p und q gelte $p < q$. Gesucht ist ein Viereck $ABCD$, das die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt.

(1) Das Viereck $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.
(2) Es gilt $\overline{AB} = p$ und $\overline{CD} = q$.
(3) Es gibt einen Kreis, auf dem die Punkte A, B, C und D liegen und dessen Radius p beträgt.

I. Zeige, dass ein Viereck, wenn es die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, aus p und q konstruiert werden kann!
II. Beschreibe eine solche Konstruktion!
III. Zeige, dass ein Viereck, wenn es nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!
IV. Untersuche, unter welchen Bedingungen für die gegebenen Lösungen p und q ein solches Viereck

a) existiert,
b) bis auf Kongruenz eindeutig durch p und q bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Viereck $ABCD$ die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, so gilt:



Der Mittelpunkt des in (3) genannten Kreises sei M; dann ist ABM nach (2) und (3) ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge p.
Die Mittelsenkrechte m von AB geht folglich durch M. Wegen (1) steht sie auch auf CD senkrecht. Wegen (2), und da das Lot vom Kreismittelpunkt auf eine Sehne diese halbiert, gilt $CN = \frac{q}{2}$ für den Schnittpunkt N von m und CD. Also hat C den Abstand von der Geraden m und liegt folglich auf einer Parallelen zu m im Abstand $\frac{q}{2}$.

Außerdem liegt C auf derselben Seite der Geraden m wie B. Damit ist bewiesen, dass ein Viereck $ABCD$, wenn es (1), (2), (3) erfüllt, nach folgender Beschreibung konstruiert werden kann:

1. Man konstruiert ein gleichseitiges Dreieck ABM mit der Seitenlänge p.
2. Man konstruiert die Mittelsenkrechte m von AB.

3. Man konstruiert auf derselben Seite der Geraden m wie B die Parallele g zu m im Abstand $\frac{q}{2}$. Hat sie einen Punkt mit dem Kreis um M mit p gemeinsam, so sei C einer dieser Punkte.
4. Man fällt das Lot CN von C auf m und verlängert es über N hinaus um seine Länge bis D.

III. Wenn ein Viereck $ABCD$ nach dieser Beschreibung konstruiert wird, so folgt:

Nach den Konstruktionsschritten 2. und 4. sind AB und CD senkrecht auf m, also zueinander parallel; damit ist (1) erfüllt. Nach Konstruktionsschritt 1. ist $AB = p$, nach Konstruktionsschritt 4. ist $CD = q$; damit ist (2) erfüllt.
Nach Konstruktionsschritt 1. und 3. liegen A, B und C auf dem Kreis um M mit p. Bei der Spiegelung an m geht dieser Kreis in sich über, da m durch den Mittelpunkt M des Kreises geht. Bei dieser Spiegelung geht C nach Konstruktionsschritt 4. in D über; also liegt auch D auf dem Kreis; damit ist (3) erfüllt.

IV. Die Konstruktionsschritte 1. und 2. sowie die Konstruktion von g in 3. sind stets bis auf Kongruenz eindeutig durchführbar.
Ein gemeinsamer Punkt C von g mit dem Kreis existiert genau dann, wenn der Abstand zwischen m und g nicht größer als der Radius des Kreises ist, d. h., genau dann, wenn $\frac{q}{2} \leq p$ gilt. Ein solcher Punkt ist genau dann eindeutig bestimmt (nämlich Berührungspunkt von g mit dem Kreis), wenn $\frac{q}{2} = p$ gilt, wenn dagegen $\frac{q}{2} < p$ ist, so gibt es genau zwei Schnittpunkte C_1, C_2, die man in 3. als C wählen kann.

Liegt ein so erhaltener Punkt C vor, so ist jeweils D durch Konstruktionsschritt 4. eindeutig bestimmt. Im Fall $\frac{q}{2} < p$ erhält man so zu C_1 bzw. C_2 jeweils D_1 bzw. D_2. Da hierzu verschieden große (nicht überstumpfe) Zentriwinkel $\angle BMC_1$, $\angle BMC_2$, also auch verschieden lange Sehnen BC_1, BC_2 gehören, sind die Trapeze ABC_1D_1 und ABC_2D_2 zueinander nicht kongruent. Damit ist bewiesen:

a) Genau dann existiert ein gesuchtes Viereck, wenn $\frac{q}{2} \leq p$ gilt,
b) genau dann ist es bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt, wenn $\frac{q}{2} = p$ gilt.

Aufgabe 290836:
Von einem Viereck $ABCD$ wird gefordert, dass es ein Trapez mit $AB \parallel DC$, $e = 7$ cm, $f = 6$ cm, $\alpha = 48°$, $\varepsilon = 114°$ ist, wobei e die Länge der Diagonale AC, f die Länge der Diagonale BD, α die Größe des Winkels $\angle DAB$ und, wenn S der Schnittpunkt von AC mit BD bezeichnet, ε die Größe des Winkels $\angle ASB$ ist.

a) Beweise: Wenn ein Viereck diese Forderungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Längen und Winkelgrößen konstruiert werden!

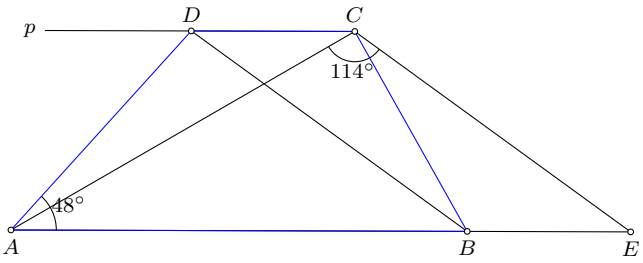
b) Beschreibe eine solche Konstruktion und fertige eine Konstruktionszeichnung an!

c) Beweise: Wenn ein Viereck nach der Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Forderungen!

d) Beweise, dass durch die Forderungen ein Viereck $ABCD$ auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn ein Viereck $ABCD$ die Forderungen erfüllt, so folgt:
Es gilt $\angle DAB = \alpha = 48°$. Ist ferner E der Schnittpunkt der Geraden durch A, B mit der Parallelen durch C zu BD, so ist das Viereck $BECD$ wegen $BD \parallel EC$, $AB \parallel DC$ ein Parallelogramm.
Daher gilt $EC = BD = f = 6$ cm sowie nach dem Stufenwinkelsatz $\angle ACE = \angle ASB = \varepsilon = 114°$. Ferner ist $AC = e = 7$ cm.
Daher kann das Viereck $ABCD$ durch folgende Konstruktion aus den gegebenen Längen und Winkelgrößen erhalten werden:

b) (1) Man konstruiert ein Dreieck ACE aus $AC = 7$ cm, $\angle ACE = 114°$, $EC = 6$ cm.
(2) Man konstruiert die Parallele p durch C zu AE.
(3) Man trägt in A an AE nach derjenigen Seite, auf der C liegt, den Winkel der Größe 48° an; sein zweiter Schenkel schneidet p in D.
(4) Man konstruiert die Parallele durch D zu EC; sie schneidet AE in B
Konstruktionszeichnung:



c) Wenn ein Viereck $ABCD$ nach dieser Beschreibung konstruiert wird, dann folgt: Nach (2) (und (3), (4)) ist $AB \parallel DC$, nach (1) ist $AC = e = 7$ cm, nach (3) (und (4)) ist $\angle DAB = \alpha = 48°$.
Nach (2) und (4) ist ferner $BECD$ ein Parallelogramm, daher und nach (1) folgt $BD = EC = f = 6$ cm, und nach dem Stufenwinkelsatz sowie (1) folgt, wenn S den Schnittpunkt der in (1) bzw. (4) erhaltenen Strecken AC, BD bezeichnet, auch $\angle ASB = \angle ACE = \varepsilon = 114°$.
Also erfüllt jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ die gestellten Forderungen.

d) Konstruktionsschritt (1) ergibt nach dem Kongruenzsatz sws ein bis auf Kongruenz eindeutig bestimmtes Dreieck ACE.
Die Konstruktionsschritte (2), (3), (4) führen dann auf eindeutig bestimmte Punkte D und B. Damit (und wegen (a)) ist bewiesen:
Durch die Forderungen ist ein Viereck $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 300833:
Aus drei gegebenen Längen $c = 8$ cm, $s_a = 6$ cm, $s_b = 7$ cm soll ein Dreieck ABC konstruiert werden. Dabei wird gefordert:

(1) Die Seite AB hat die Länge $\overline{AB} = c$.

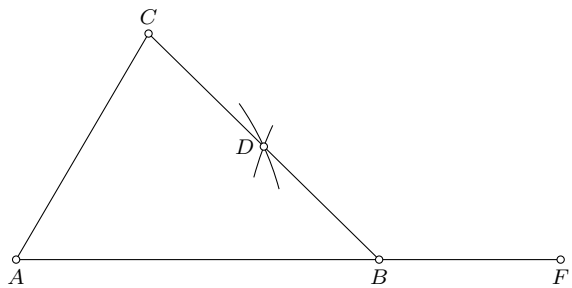
(2) Die Seitenhalbierende AD der Seite BC hat die Länge $\overline{AD} = s_a$.

(3) Die Seitenhalbierende BE der Seite AC hat die Länge $\overline{BE} = s_b$.

a) Konstruiere ein Dreieck und beschreibe deine Konstruktion!

b) Beweise: Wenn ein Dreieck nach deiner Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (1), (2), (3).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Die Abbildung zeigt ein nach folgender Beschreibung konstruiertes Dreieck:

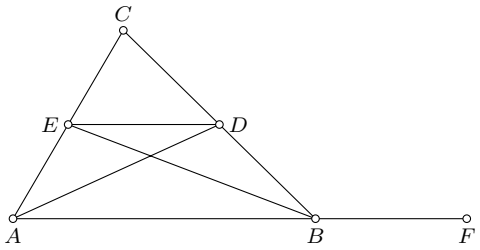


1. Man konstruiert eine Strecke AB der Länge c.
2. Man verlängert die Strecke AB über B hinaus um ihre halbe Länge bis zum Punkt F.
3. Man konstruiert den Kreis um A mit s_a den Kreis um F mit s_b und wählt einen Schnittpunkt dieser Kreise als D.
4. Man verlängert die Strecke BD über D hinaus um ihre eigene Länge bis zum Punkt C.

b) Wenn ein Dreieck ABC nach dieser Beschreibung konstruiert wird, so folgt (siehe Abbildung 2):

Nach Konstruktionsschritt 1. ist $AB = c$, also (1) erfüllt. Nach 4. ist D der Mittelpunkt, also AD die Seitenhalbierende von BC, und nach 3. gilt $AD = s_a$; also ist (2) erfüllt.

Ist ferner E der Mittelpunkt, also BE die Seitenhalbierende von AC, so ist nach der Umkehrung des Strahlensatzes $ED \parallel AB$, und nach dem Strahlensatz sowie nach 2. folgt $ED = \frac{1}{2}AB = BF$. Also ist $BFDE$ ein Parallelogramm; hieraus und aus 3. folgt $BE = FD = s_b$; d. h., auch (3) ist erfüllt.



Aufgabe 310833:
Gegeben sei ein Dreieck ABC. Auf der Seite BC dieses Dreiecks seien ferner ein Punkt D zwischen B und C sowie ein Punkt E zwischen D und C gegeben. Gesucht sind zwei Punkte F, G, mit denen die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

(1) F liegt auf AC.
(2) G liegt auf AB.
(3) $DEFG$ ist ein Parallelogramm.

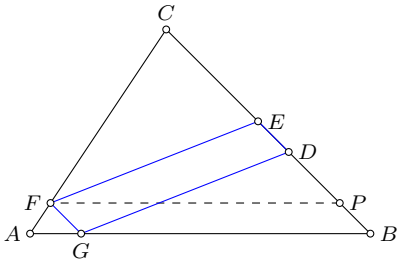
a) Beweise, dass für jedes Dreieck ABC mit den Punkten D, E in beschriebener Lage gilt: Wenn zwei Punkte F, G die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen, dann können sie (aus den gegebenen A, B, C, E) konstruiert werden;

b) Beschreibe eine solche Konstruktion!

c) Beweise, dass auch umgekehrt F und G, wenn sie nach deiner Beschreibung konstruiert werden, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

d) Wähle A, B, C, D, E wie genannt und führe die von dir beschriebene Konstruktion durch!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Wenn F und G (bei genannter Vorgabe von A,B,C,D,E) die Bedingungen (1),(2),(3) erfüllen, so folgt: Nach (3) gilt

$$GF = DE \tag{4}$$

und $GF \parallel DE$, also, da D und E auf BC liegen, auch

$$GF \parallel BC \tag{5}$$

Weiter folgt: Die Parallele durch F zu AB schneidet BC in einem Punkt P, da F nach (1) auf AC liegt. Für diesen Punkt P gilt

$$FP \parallel AB \quad (6) \qquad \text{als auch} \qquad FP \parallel GB \quad (7)$$

da G nach (2) auf AB liegt. Da ferner P auf BC (8) liegt, besagt (5) auch $GF \parallel BP$; hiernach und nach (7) folgt, dass $GBPF$ ein Parallelogramm ist. Also gilt $GF = BP$ und damit wegen (4) auch $BP = DE$ (9).

Mit (8),(9),(6),(5) ist bewiesen, dass F und G durch folgende Konstruktion erhalten werden können:

b) [1] Man konstruiert denjenigen Punkt P auf BC, für den $BP = DE$ gilt.
[2] Man konstruiert die Parallele durch P zu AB; sie schneidet AC in einem Punkt F.
[3] Man konstruiert die Parallele durch F zu BC; sie schneidet AB in einem Punkt G.

c) Wenn F, G nach dieser Beschreibung konstruiert sind, so folgt:
Nach [2], [3] liegt F auf AC bzw. G auf AB; d. h., (1), (2) sind erfüllt.
Nach [2], [3] gilt ferner $FP \parallel AB$, $GF \parallel BC$. (10)

Da aber G auf AB und P nach [1] auf BC liegt, besagt (10) auch $FP \parallel GB$, $GF \parallel BP$; also ist $GBPF$ ein Parallelogramm. Folglich gilt $GF = BP$ und damit nach [1] auch $GF = DE$. (11)

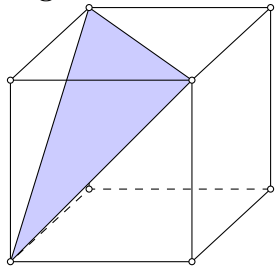
Wegen (10) und weil D, E auf BC liegen, ist $GF \parallel DE$ (12); mit (11),(12) ist gezeigt:
$DEFG$ ist ein Parallelogramm; d. h., auch (3) ist erfüllt.

IV.V Raumgeometrie

I Runde 1

Aufgabe V00814:
Durch einen Würfel soll ein ebener Schnitt so geführt werden, dass als Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck verläuft.
a) Wie muss der Schnitt geführt werden?
b) Veranschauliche den Schnitt durch ein Schrägbild!

Lösung von Steffen Polster:



Die Diagonalen dreier anliegender Würfelflächen bilden die Seiten des gleichseitigen Dreiecks.

Aufgabe V10812:
Im VEB Kabelwerk Köpenick wird aus einem Draht von 6 mm Durchmesser und 4 m Länge ein Draht von 0,02 mm Durchmesser gezogen.
Wie lang ist dieser Draht?

Lösung von Steffen Polster:
Das Volumen des Drahtes bleibt erhalten, d. h. es ist

$$\pi r_a^2 l_a = \pi r_e^2 l_e \Rightarrow l_e = \frac{r_a^2}{r_e^2} \cdot l_a$$

wobei r_a, l_a Radius und Länge am Anfang und r_e, l_e Radius und Länge des Endproduktes sind.
Einsetzen der Werte ergibt $l_e = 360$ Millionen mm = 360 km.

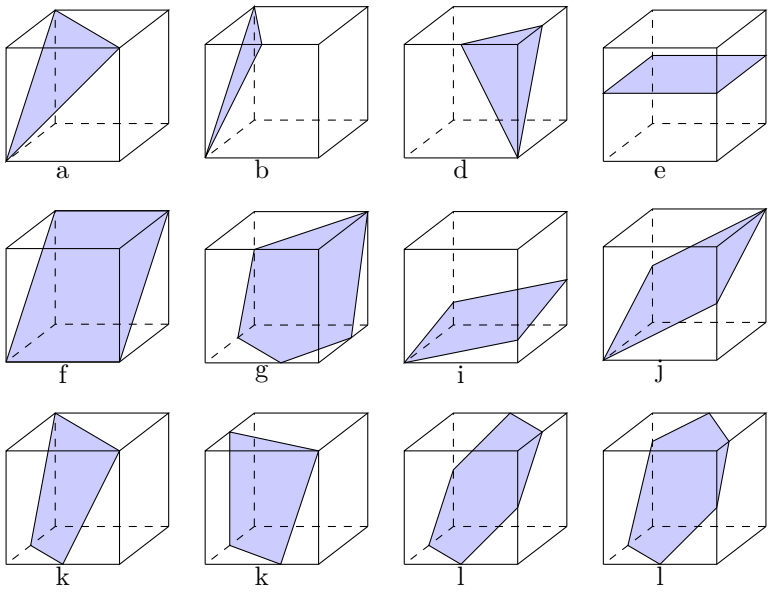
Aufgabe 040816:
Ein Würfel soll auf verschiedene Arten durch einen ebenen Schnitt in zwei Teilkörper zerlegt werden.
Können dabei folgende Schnittfiguren entstehen:

a) gleichseitiges Dreieck	b) gleichschenkliges Dreieck (nicht gleichseitig)
c) rechtwinkliges Dreieck	d) ungleichschenkliges Dreieck
e) Quadrat	f) Rechteck (nicht quadratisch)
g) Fünfeck	h) Achteck?

Welche möglichen Schnittfiguren sind in der Aufzählung nicht enthalten?

Fertige zu jeder Schnittfigur eine Skizze an, aus der man sehen kann, wie der ebene Schnitt geführt werden muss, wenn man die betreffende Schnittfigur erhalten will!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Von den angegebenen Schnittfiguren sind folgende möglich (siehe Abbildung):



a, b und d nur für spitzwinklige Dreiecke; e, f, g (unregelmäßig mit 2 Paaren paralleler Seiten). Nicht möglich sind dagegen: c) und h).

In der Aufzählung fehlen:

i) Parallelogramm, die weder Rhombus- noch Rechteckform haben,

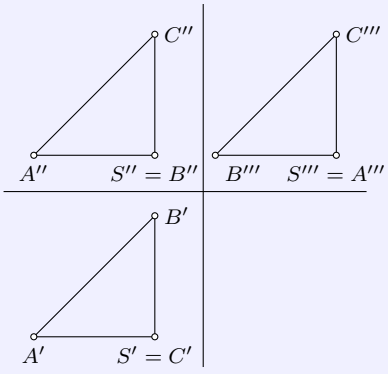
j) Rhombus,

k) Trapeze (gleichschenklig und ungleichschenklig)

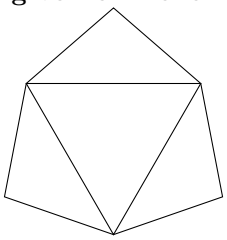
l) Sechsecke (regelmäßige und solche mit 3 Paaren paralleler Seiten).

Aufgabe 050813:

a) Gib einen Körper an, der den abgebildeten Grund-, Auf- und Kreuzriss besitzt (siehe Abbildung)! (Sämtliche Risse sind rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke.)
b) Zeichne ein Netz dieses Körpers, und stelle ein Körpermodell her!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Ein Tetraeder, bei dem drei Seitenflächen untereinander kongruente, rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke sind, besitzt einen derartigen Grund-, Auf- und Seitenriss.
b) Körpernetz (siehe Abbildung)

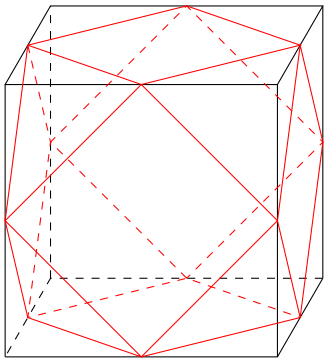
Aufgabe 100814:
Ein Würfel werde von allen denjenigen Ebenen geschnitten, die durch die Mittelpunkte jeweils der drei von einem Eckpunkt ausgehenden Kanten verlaufen. Dabei entsteht ein Restkörper.

a) Stelle diesen Würfel mit der Kantenlänge $a = 6$ cm und den Restkörper in einem Schrägbild ($\alpha = 60°$; $q = \frac{1}{3}$) dar!

b) Ermittle die Anzahl aller Eckpunkte und die Anzahl aller Kanten des Restkörpers!

c) Gib die Form und die Anzahl aller Teilflächen der Oberfläche des Restkörpers an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



b) Die Eckpunkte des Restkörpers sind genau alle Mittelpunkte der Kanten des Würfels. Da der Würfel genau 12 Kanten hat, deren Mittelpunkte sämtlich voneinander verschieden sind, hat der Restkörper folglich genau 12 Eckpunkte.

Die Kanten des Restkörpers sind genau alle diejenigen Strecken, die die Mittelpunkte je zweier von einem Eckpunkt des Würfels ausgehender Kanten miteinander verbinden.
Jede dieser Verbindungsstrecken verläuft innerhalb einer Seitenfläche des Würfels, und zwar liegen in jeder der 6 Seitenflächen genau 4 verschiedene Verbindungsstrecken. Deren Anzahl beträgt folglich genau 24.

c) Die in jeder Seitenfläche des Würfels liegenden 4 Kanten des Restkörpers begrenzen eine der gesuchten Teilflächen, nämlich ein Quadrat (da durch die Verbindungsstrecken von je zwei aufeinanderfolgenden Seitenmitten eines Quadrates wieder ein Quadrat begrenzt wird). Solche quadratischen Teilflächen gibt es folglich genau 6.

Die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte je dreier von einem Eckpunkt des Würfels ausgehender Kanten begrenzen eine der gesuchten Teilflächen, nämlich ein gleichseitiges Dreieck (da diese 3 Verbindungsstrecken als Seiten dreier kongruenter vorhin genannter Quadrate gleichlang sind). Solche gleichseitigen Dreiecke gibt es folglich genau 8.

Diese 14 Teilflächen schließen sich bereits zur Oberfläche eines Körpers zusammen (wie man z. B. daran erkennt, dass sich um jeden Eckpunkt des Restkörpers 4 Teilflächen lückenlos zusammenschließen). Daher

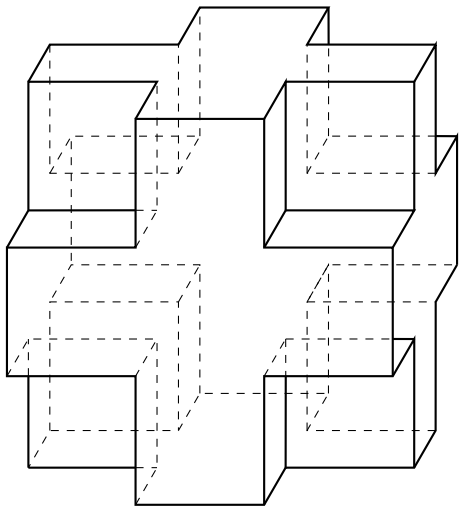
hat die Oberfläche des Restkörpers keine weiteren Teilflächen.

Aufgabe 120812:
Von einem Würfel mit der Kantenlänge $a = 9$ cm seien an jeder seiner Ecken jeweils ein Würfel mit einer Kantenlänge $b < \frac{a}{2}$ herausgeschnitten. (Die Flächen der herausgeschnittenen Würfel seien parallel zu den entsprechenden Flächen des großen Würfels).

a) Zeichne ein Schrägbild des Restkörpers für $b = 3$ cm! ($\alpha = 60°$, $1 : 3$)

b) Es gibt genau einen Wert von b, für den das Volumen V_R des Restkörpers 217 cm^3 beträgt. Ermittle diesen Wert!

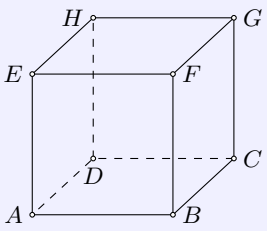
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



b) Das Volumen des großen Würfels sei mit V, das eines der herausgeschnittenen Würfel mit V_A bezeichnet. Dann gilt: $V_R = V_W - 8V_A$.

Also hat b genau dann den gesuchten Wert, wenn 217 cm^3 = 729 cm^3 $- 8b^3$ gilt. Dies ist gleichbedeutend mit $8b^3 = 512$ cm^3 $\rightarrow b = 4$ cm, und es gilt 4 cm $<$ 3 cm $= a$.

Aufgabe 150814:
Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge 5 cm (siehe Abbildung).
Dieser Würfel ist in senkrechter Zweitafelprojektion abzubilden. Dabei wird gefordert, dass die Raumdiagonale AG sowohl parallel zur Grundrisstafel als auch parallel zur Aufrisstafel liegt. Im übrigen kann, wenn diese Forderung erfüllt wird, die Lage des Würfels im Raum beliebig gewählt werden. Alle Eckpunkte sind entsprechend der Abbildung zu benennen.



Beschreibe und begründe die Konstruktion einer derartigen Zweitafelprojektion des Würfels!

Hinweis: Es empfiehlt sich, eine günstige Lage der vier Punkte A, E, G, C zu wählen.

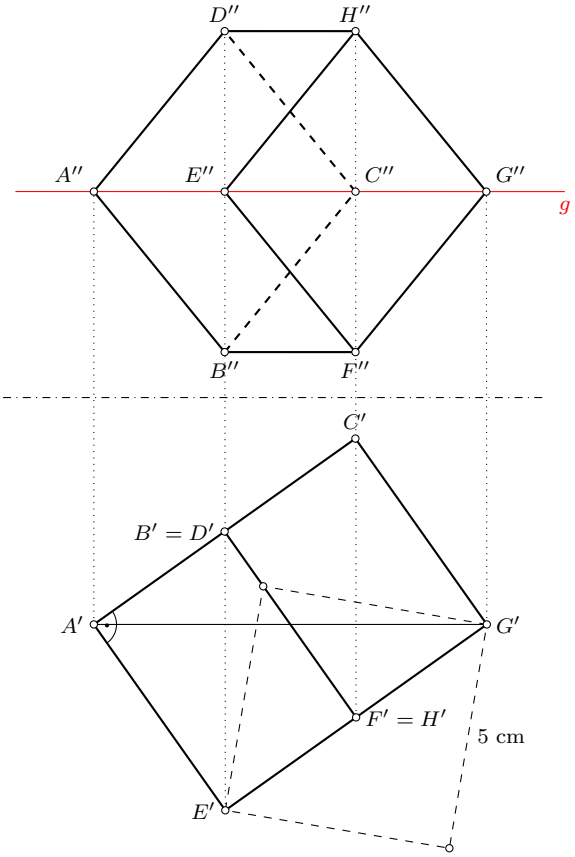
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Möglichkeit, die Forderung der Aufgabe zu erfüllen, ist die folgende:

Man legt die Ebene ε, in der das Rechteck $AEGC$ liegt, parallel zur Grundrisstafel. Als Grundriss $A'E'G'C'$ erscheint $AEGC$ dann in wahrer Größe.
Wählt man seine Lage insbesondere so, dass $A'G'$ parallel zur Achse verläuft, so ist die in der Aufgabe gestellte Forderung erfüllt. Bei dieser Lage lassen sich Grund- und Aufriss durch folgende Konstruktion finden:

Man konstruiert ein Quadrat mit der gegebenen Kantenlänge 5 cm. Ist d seine Diagonalenlänge, so konstruiert man ein Rechteck $A'E'G'C'$ mit der Kantenlänge $A'E' = 5$ cm und $A'C' = d$.

Die Achse der Zweitafelprojektion wählt man parallel zu $A'G'$. Die Strecken BD und FH schneiden die Strecken AC bzw. EG in ihren Mittelpunkten und stehen senkrecht auf der Ebene ε. Also ist der Mittelpunkt von $A'C'$ der gemeinsame Grundriss $B' = D'$ der Punkte B und D.
Ebenso ist der Mittelpunkt von $E'G'$ der gemeinsame Grundriss $F' = H'$ von F und H.
Als von oben sichtbare Kanten zeichnet man die Umrissstrecken $A'E'$, $E'G'$, $G'C'$, $C'A'$ sowie die Strecke $D'H'$, (von der die Strecke $B'H'$ verdeckt wird, wenn angenommen wird, dass $A'E'G'H'$ von oben gesehen entgegen dem Uhrzeigersinn umlaufen ist und folglich DH oberhalb BF liegt).

Die Aufrisse A'', E'', G'', C'' liegen auf einer Parallelen g zur Achse sowie auf den Ordnungslinien durch A', E', G' bzw. C'. Zur Bestimmung von B'' und D'' schneide man zunächst g mit der Ordnungslinie durch $B' = D'$.



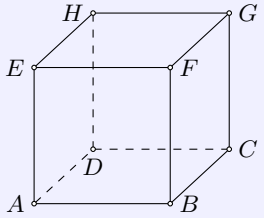
Da die Strecke BD mit ihrem in ε liegenden Mittelpunkt im Aufriss in wahrer Größe erscheint, findet man B'' und D'', indem man nun von dem Schnittpunkt (E'') aus auf der Ordnungslinie nach beiden Seiten die Länge $\frac{d}{2}$ abträgt.
Ebenso findet man F'' und H'' auf der Ordnungslinie durch F' von deren Schnittpunkt (C'') mit g aus im Abstand $\frac{d}{2}$. Dabei sind B'', F'' unterhalb, D'', H'' oberhalb g zu zeichnen.

Als von vorn sichtbare Kanten zeichnet man die Umrissstrecken $A''B''$, $B''F''$, $F''G''$, $G''H''$, $H''D''$, $D''A''$ sowie die vom Aufriss E'' des Punktes E ausgehenden Kanten $E''A''$, $E''F''$, $E''H''$; denn an der Lage des Grundrisses E' ist E als der am weitesten vorn gelegene Punkt zu ersehen.
Entsprechend werden die von C'' ausgehenden Kanten $C''G''$, $C''D''$, $C''B''$ als verdeckte Kanten gezeichnet.

Aufgabe 160811:

Durch einen Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) soll ein ebener Schnitt so gelegt werden, dass als Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck entsteht, dessen sämtliche Ecken auch Eckpunkte des Würfels sind.

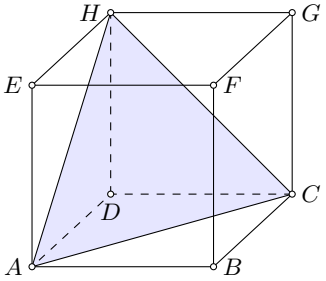
Gib alle Möglichkeiten für einen solchen Schnitt an, und stelle einen Würfel mit einem solchen Schnitt in Kavalierperspektive dar!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, zwei Ecken einer Schnittfigur wären die Endpunkte ein und derselben Körperdiagonalen. Dann müsste die dritte Ecke von jedem dieser beiden Endpunkte den Abstand AG haben, was nicht möglich ist.

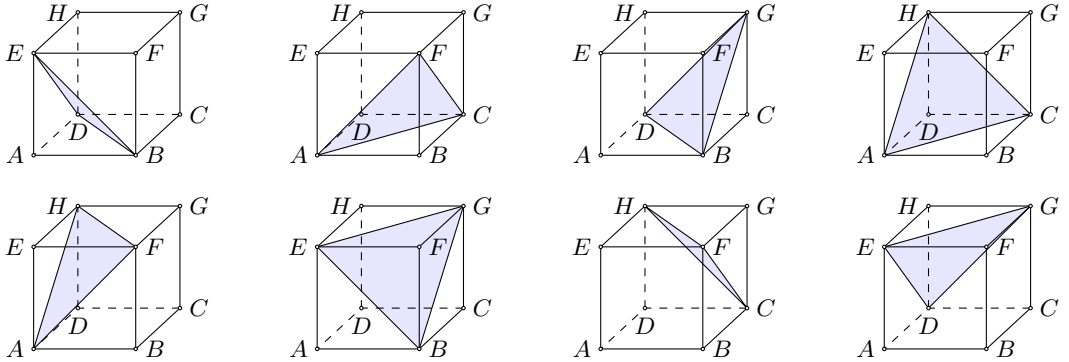
Angenommen, zwei Eckpunkte einer Schnittfigur wären die Endpunkte ein und derselben Würfelkante. Dann müsste die dritte Ecke von jedem dieser beiden Endpunkte den Abstand AB haben, was für keinen Eckpunkt des Würfels zutrifft.

Also kann nur dann ein der Aufgabe entsprechendes Schnittdreieck vorliegen, wenn es drei Flächendiagonalen des Würfels als seine drei Seiten hat. Jedes solche Dreieck ist gleichseitig, da alle Flächendiagonalen des Würfels einander gleich lang sind, also entspricht jede derartige Schnittfigur den Bedingungen.



Die Ecken jedes solchen Dreiecks sind Endpunkte der drei von einer und derselben Würfelecke ausgehenden Würfelkanten. Durch diese Eigenschaft ist jedem Eckpunkt genau ein Dreieck und umgekehrt jedem derartigen Dreieck genau ein Eckpunkt zugeordnet.

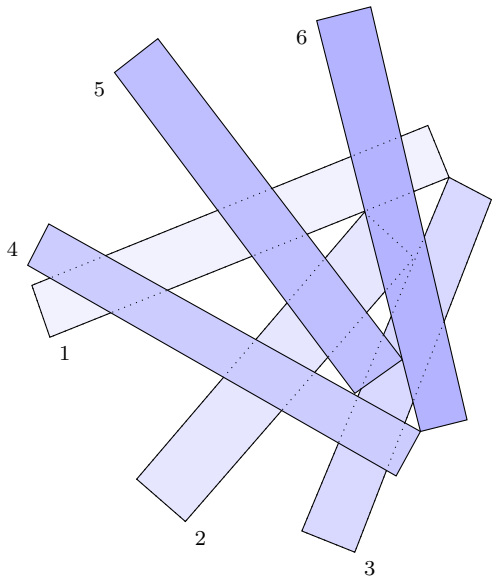
Mithin gibt es genau 8 gleichseitige Dreiecke der geforderten Art, nämlich die Dreiecke BDE, ACF, BDG, ACH, AFH, BEG, CFH, DEG.



Aufgabe 170812:
Sechs quaderförmige Stücke Wandtafelkreide, jedes mit den Kantenlängen 8 cm, 1 cm, 1 cm sollen derart hingelegt oder aufgestellt werden, dass jedes Stück alle fünf anderen berührt.

Gib eine Lösung in Form einer Skizze an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

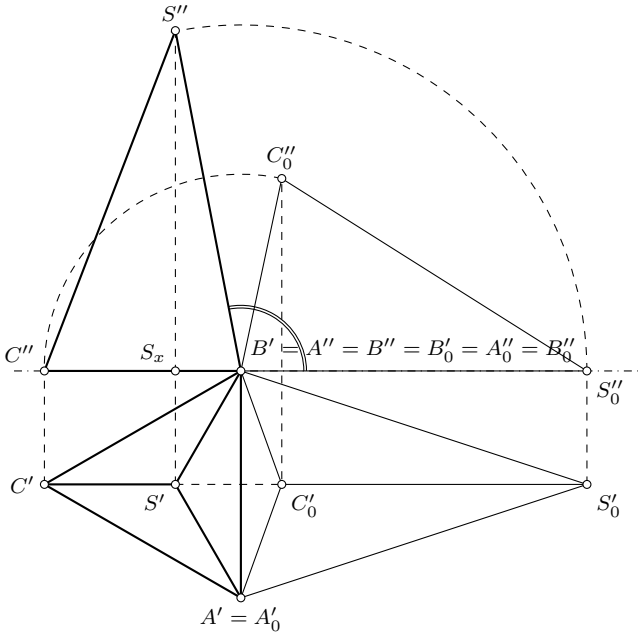


Aufgabe 180813:
Gegeben sei eine dreiseitige Pyramide $ABCS$, deren Grundfläche ABC ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 4 cm bildet und deren Spitze S so gelegen ist, dass das Lot von S auf die Ebene durch A, B, C den Schwerpunkt F der Grundfläche als Fußpunkt besitzt und dass FS die Länge 6 cm hat.

Diese Pyramide ist in einer Zweitafelprojektion darzustellen. Dabei wird gefordert, dass die Seitenfläche ABS in der Grundrisstafel liegt. Zu konstruieren ist die Abbildung nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal aus den gegebenen Streckenlängen 4 cm, 6 cm.

Bemerkung: Beschreibung und Begründung der Konstruktion werden nicht verlangt. Man kann z. B. die geforderte Abbildung aus einer anderen Darstellung gewinnen, in der das gleichseitige Dreieck ABC in der Grundrisstafel liegt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Man wählt zunächst eine solche Lage der Pyramide, dass ihre Grundfläche ABC in der Grundrisstafel liegt, dass dabei die Seite AB senkrecht zur Rissachse verläuft, B auf der Rissachse und S oberhalb der Grundrisstafel liegt.

Dreieck ABC wird dann im Grundriss in wahrer Größe abgebildet als $\triangle A'B'C'$. Der Schwerpunkt dieses Dreiecks ist der Schnittpunkt seiner Symmetrieachsen und gleichzeitig der Grundriss S' der Pyramidenspitze S.

Man zeichnet also ein gleichseitiges Dreieck $A'B'C'$ mit der Seitenlänge 4 cm so, dass $A'B'$ senkrecht zur Rissachse verläuft und B' auf derselben liegt. Dann zeichnet man zwei Symmetrieachsen dieses Dreiecks und erhält als Schnittpunkt S'. Die Ordnungslinien durch A', C' und S' schneiden die Rissachse in $A'' = B'' = B'$, C'' bzw. S:

Da die Körperhöhe im Aufriss in wahrer Größe erscheint, verlängert man $S'S_x$ über S_x hinaus und trägt $S_xS'' = 6$ cm auf ihr ab. Nun werde die Pyramide $ABCS$ um die Seite AB geklappt, bis die Seitenfläche ABS in die Grundrissebene gelangt. Die so entstandene Pyramide $A_0B_0C_0S_0$ erfüllt die Forderung der Aufgabe. Ihr Grund- und Aufriss ergibt sich folgendermaßen:

Als Punkte der Drehachse bleiben A und B fest, also gilt $A' = A_0'$ und $A'' = B' = B'' = A_0'' = B_0' = B_0''$.

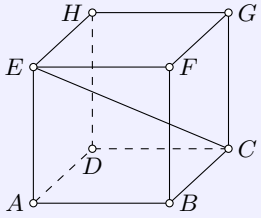
Bei der Umklappung beschreiben S und C Kreisbögen, die sich im Aufriss als solche, im Grundriss als Parallele zur Rissachse abbilden.

Das Bild S_0'' des Punktes S liegt also erstens auf der Rissachse und zweites auf dem Kreisbogen um A'' mit $A''S''$ als Radius. Das Grundrissbild S_0' liegt dann erstens auf der Parallelen zur Rissachse durch S' und zweitens auf der Ordnungslinie von S_0''.
Da bei der Umklappung der Drehwinkel für alle Punkte der Pyramide der gleiche ist, liegt C_0'' erstens auf dem Kreisbogen um A'' mit $A''C''$ als Radius und zweitens auf dem freien Schenkel des in A'' an $A''C''$ angetragenen Winkels der Größe $\angle S''A''S_0''$.

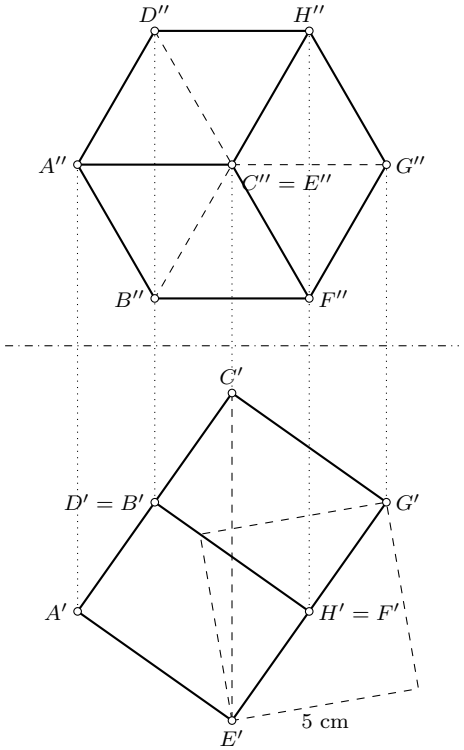
Verbindet man nun C_0'' mit A'' sowie mit S_0'', so erhält man den gesuchten Aufriss der Pyramide.
Im Grundriss liegt C_0' erstens auf der Parallelen zur Rissachse durch C' und zweitens auf der Ordnungslinie durch C_0''. Verbindet man C_0' mit $A_='$, B_0' und S_0', sowie S_0' mit A_0' und B_0', so erhält man das geforderte Grundrissbild der Pyramide; sämtliche Seitenkanten der Pyramide sind im Grundriss als sichtbare Kanten wiederzugeben.

Aufgabe 190811:
Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge 5 cm (siehe Bild). Dieser Würfel ist in senkrechter Zweitafelprojektion abzubilden. Dabei wird gefordert, dass die Raumdiagonale EC parallel zur Grundrisstafel und senkrecht zur Aufrisstafel liegt. Unter Beachtung dieser Forderung kann die Lage des Würfels im Raum sonst beliebig gewählt werden. Alle Eckpunkte sind entsprechend dem Bilde zu benennen.

Beschreibung und Begründung der Konstruktion sind nicht erforderlich.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



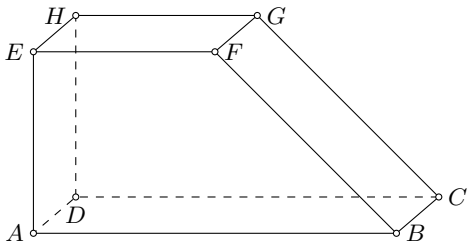
Aufgabe 250814:
Ein Quader habe die Kantenlängen a, $2a$ und $\frac{a}{2}$, wobei a vorgegeben ist. Von diesem Quader werde ein gerades Prisma abgetrennt. Die Höhe dieses Prismas habe die Länge $\frac{a}{2}$, seine Grundfläche sei ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Schenkellänge a. Der Restkörper sei ein Prisma mit trapezförmiger Grundfläche.

a) Zeichne den Restkörper in Kavalierperspektive und wähle dafür $a = 6$ cm!

b) Ermittle das Volumen des Restkörpers in Abhängigkeit von a!

c) Gib das Verhältnis der Volumina des Restkörpers und des Quaders an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



b) Bezeichnet man den Flächeninhalt der Grundfläche des Restkörpers mit A_G und seine Höhenlänge mit $h = \frac{a}{2}$, dann gilt für das Volumen V_R deS Restkörpers

$$V_R = A_G \cdot h$$

Da die Grundfläche trapezförmig (mit a und $2a$ als Längen der parallelen Seiten und mit a als Höhenlänge) ist, beträgt der Flächeninhalt der Grundfläche

$$A_G = \frac{a+2a}{2} \cdot a = \frac{3}{2}a^2$$

Mithin ist

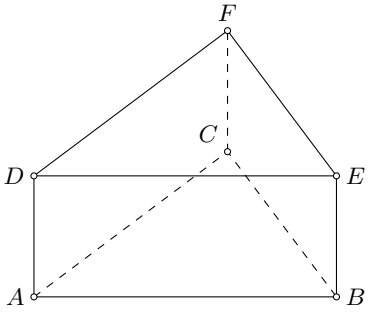
$$V_R = \frac{3}{2}a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{3}{4}a^2$$

c) Das Volumen V_Q des Quaders ist $V_Q = 2a \cdot a \cdot \frac{a}{2} = a^3$. Damit ist das gesuchte Verhältnis $V_R : V_Q = 3 : 4$.

Aufgabe 260814:
Es sei $ABCDEF$ ein gerades dreiseitiges Prisma. Alle drei Seitenflächen $ABED$, $BCFE$, $CADF$ sowie die Grund- und die Deckfläche ABC bzw. DEF seien sämtlich einander umfangsgleich. Gegeben sei die Länge h der Strecke AD.

Ermittle in Abhängigkeit von h die Längen der Strecken BC, CA und AB!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Seitenflächen des Prismas sind Rechtecke, haben also gleichlange Gegenseiten. Mithin gilt

$$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = h$$

sowie für die gesuchten Längen

$$a = \overline{BC} = \overline{EF}, \qquad b = \overline{CA} = \overline{FD}, \qquad c = \overline{AB} = \overline{DE}.$$

Aus der Umfangsgleichheit der Seitenflächen untereinander folgt somit

$$2a + 2h = 2b + 2h = 2c + 2h \tag{1}$$

und aus der Umfangsgleichheit der Seitenflächen mit der Grund- oder Deckfläche folgt

$$2a + 2h = a + b + c \tag{2}$$

Aus (1) ergibt sich damit $a = b = c$ und daher aus (2) $2a + 2h = 3h$, also $a = 2h$.

Die gesuchten Längen lauten mithin $\overline{BC} = \overline{CA} = \overline{AB} = 2h$.

Aufgabe 290812:
Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein gleichseitiges Dreieck mit gegebener Seitenlänge a. Die Summe aller Kantenlängen dieses Prismas beträgt $15a$.

Berechne den Flächeninhalt der Mantelfläche dieses Prismas!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ein gerades Prisma ist ein Körper, dessen Grundfläche und Deckfläche parallelliegende kongruente Vielecke und dessen Seitenflächen Rechtecke sind.
Bei dem genannten Prisma ist die Summe der Längen der Deckkanten und der Grundkanten $6a$, also verbleibt $15a - 6a = 9a$ für die Summe der drei Seitenkantenlängen; jede Seitenkante hat daher die Länge $3a$.
Der Flächeninhalt A_M der Mantelfläche beträgt somit $A_M = 9a^2$.

II Runde 2

Aufgabe 010822:
Für eine große Schmiedepresse wurden als Führungssäulen vier Stahlzylinder mit einem Durchmesser von $d = 512$ mm und einem Gesamtgewicht von $G = 68$ Mp gedreht.

Wie lang ist eine Führungssäule? (Wichte des Stahls $\gamma = 7{,}85 \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$.)

Lösung von Carsten Balleier:
Jeder der vier Stahlzylinder hat ein Gewicht $G = \frac{1}{4} \cdot 68 \text{ Mp } = 17 \text{ Mp}$. Für das Gewicht eines Zylinders gilt $G = \gamma \cdot V = \gamma \cdot \pi r^2 h$, d. h. Wichte mal Zylindervolumen. Umstellen nach der Höhe h, Einsetzen und Ausrechnen ergibt:

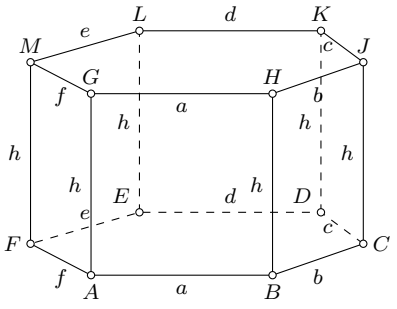
$$h = \frac{G_1}{\gamma \pi r^2} = \frac{1{,}7 \cdot 10^7 \text{ p}}{(7{,}85 \frac{\text{p}}{\text{cm}^3}) \cdot \pi \cdot (25{,}6 \text{ cm})^2} = 1051{,}8 \text{ cm} \approx 10{,}5 \text{ m}.$$

Jede Führungssäule ist rund 10,5 m lang.

Aufgabe 260823:
Es sei $ABCDEFGHJKLM$ ein gerades sechsseitiges Prisma, in dem die sechs Seitenflächen $ABHG$, $BCJH$, $CDKJ$, $DELK$, $EFML$, $FAGM$ sowie die Grund- und Deckfläche $ABCDEF$ und $GHJKLM$ sämtlich einander umfangsgleich sind. Gegeben sei die Länge h der Strecke AG.

Ermittle in Abhängigkeit von h die Längen der Strecken AB, BC, CD, DE, EF und FA!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da die Seitenflächen jedes geraden Prismas Rechtecke sind, also jeweils gleichlange Gegenseiten haben, ist die gegebene Länge

$$h = \overline{AG} = \overline{BH} = \overline{CJ} = \overline{DK} = \overline{EL} = \overline{FM}$$

und für die gesuchten Längen gilt

$$a = \overline{AB} = \overline{GH}, b = \overline{BC} = \overline{HJ}, c = \overline{CD} = \overline{JK}, d = \overline{DE} = \overline{KL}, e = \overline{EF} = \overline{LM}, f = \overline{FA} = \overline{MG}$$

Aus der Umfangsgleichheit aller sechs Seitenflächen folgt

$$2a + 2h = 2b + 2h = 2c + 2h = 2d + 2h = 2e + 2h = 2f + 2h \qquad \text{also} \qquad a = b = c = d = e = f$$

und aus der Umfangsgleichheit der Grundfläche mit jeder Seitenfläche folgt somit $6a = 2a + 2h$, also $a = \frac{h}{2}$.

Daher sind die gesuchten Längen $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA} = \frac{h}{2}$.

Aufgabe 270824:
Ein Würfel W werde in volumengleiche Teilwürfel zerlegt. Der Oberflächeninhalt des Würfels W sei A, die Summe der Oberflächeninhalte der voneinander getrennten Teilwürfel sei S. Ermittle das Verhältnis $A : S$

(a) wenn der Würfel W die Kantenlänge 14 cm hat und die Anzahl der Teilwürfel 8 beträgt,

(b) bei beliebiger Kantenlänge a des Würfels W und bei der Anzahl 8 der Teilwürfel,

(c) bei beliebiger Kantenlänge a des Würfels W und bei der Anzahl n^3 der Teilwürfel, wobei n eine beliebige natürliche Zahl mit $n \geq 2$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(c) Es gilt $A = 6a^2$. Ferner hat W das Volumen a^3; daraus folgt:
Jeder Teilwürfel hat das Volumen $\frac{a^3}{n^3}$, also die Kantenlänge $\frac{a}{n}$ und folglich den Oberflächeninhalt $6\frac{a^2}{n^2}$. Daher ist

$$S = n^3 \cdot 6 \cdot \frac{a^2}{n^2} = 6na^2$$

Somit ergibt sich

$$A : S = 6a^2 : (6na^2) = 1 : n$$

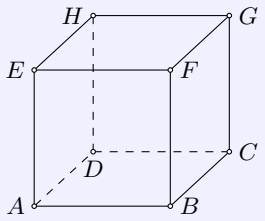
Wählt man hierin $n = 2$, so erhält man (wegen $2^3 = 8$) als Ergebnis sowohl zu (a) als auch zu (b) das Verhältnis $A : S = 1 : 2$.

Aufgabe 290823:

Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit beliebiger Kantenlänge (siehe Abbildung).

a) Ermittle die Größe des Winkels $\angle DEB$!

b) Beweise, dass die Winkel $\angle AHB$ und $\angle BEC$ zueinander gleiche Größen haben!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Das Dreieck DBE ist gleichseitig, da DE, BE und BD Flächendiagonalen des Würfels und somit einander gleichlang sind. Der gesuchte Winkel ist Innenwinkel dieses Dreiecks, folglich gilt $\angle DEB = 60°$.

b) Die Dreiecke AHB und BEC sind nach dem Kongruenzsatz (sss) zueinander kongruent, da) $BC = AB$ (Kanten des Würfels), $BE = AH$ (Flächendiagonalen) und $CE = BH$ (Raumdiagonalen) gilt.
In diesen Dreiecken entsprechen die gesuchten Winkel einander, da sie jeweils von einer Flächen- und einer Raumdiagonale eingeschlossen werden. Somit gilt $\angle AHB = \angle BEC$, w. z. b. w.

III Runden 3 & 4

Aufgabe 060831:
Die Kante eines Würfels habe die Länge $a_1 = 2$ cm, die eines anderen Würfels die Länge $a_2 = 6$ cm.

Berechne das Verhältnis der Kantenlängen dieser zwei Würfel, das Verhältnis ihrer Oberflächeninhalte und das Verhältnis ihrer Rauminhalte!

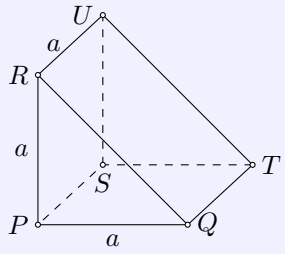
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Oberflächeninhalte der beiden Würfel seien O_1 bzw. O_2, die Rauminhalte V_1 bzw. V_2. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a_1 : a_2 &= 2 : 6 = 1 : 3 \\ O_1 : O_2 &= 6a_1^2 : 6a_2^2 = 24 : 216 = 1 : 9 \\ V_1 : V_2 &= a_1^3 : a_2^3 = 8 : 216 = 1 : 27 \end{aligned}$$

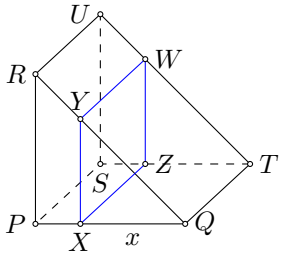
Aufgabe 250836:
Es sei $PQRSTU$ ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck PQR ist (siehe Abbildung). Die Höhenlänge des Prismas sei gleich der Kantenlänge a des Dreiecks PQR.

Gesucht ist eine Ebene E, die parallel zu einer der quadratischen Seitenflächen F des Prismas verläuft und die das Prisma in zwei Körper zerlegt, deren Volumina sich in irgendeiner Reihenfolge wie 9 : 16 verhalten.

Ermittle zu gegebenen a alle diejenigen Werte, die der Abstand zwischen der Seitenfläche F und einer solchen Ebene E betragen kann!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für jede Ebene, die (o. B. d. A.) parallel zur Seitenfläche $F = PSRU$ verläuft und das Prisma in zwei Teilkörper $PXYRSWZU$ und $XQYWTZ$ zerlegt (siehe Abbildung), gilt:
Die Teilkörper sind Prismen der, gleichen Höhenlänge a; ihre Volumina verhalten sich also wie die Flächeninhalte ihrer Grundflächen $PXYR$ und XQY. Dabei ist wegen $XY \parallel PR$, also (Stufenwinkel) $\angle QXY = \angle QPR = 90°$ und $\angle XQY = \angle PQR = 45°$, auch XQY ein gleichschenklig-rechtwinkliges

Dreieck.

Mit $XQ = x$ ist folglich auch $XY = X$, und XQY hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}x^2$. Somit hat $PXYR$ den Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}x^2$.

Daher hat die Ebene E genau dann die geforderte Eigenschaft, wenn entweder

$$(a^2 - x^2) : x^2 = 9 : 16 \qquad \text{oder} \qquad x^2 : (a^2 - x^2) = 9 : 16$$

gilt. Dies ist der Reihe nach äquivalent mit

$$16(a^2 - x^2) = 9x^2 \qquad \text{bzw.} \qquad 16x^2 = 9(a^2 - x^2)$$
$$16a^2 = 25x^2 \qquad \text{bzw.} \qquad 25x^2 = 9a^2$$

und dies wegen $a > 0$, $x > 0$ mit

$$x = \frac{4}{5}a \qquad \text{bzw.} \qquad x = \frac{3}{5}a$$

Somit haben für den gesuchten Abstand PX genau die beiden Werte

$$a - x = \frac{1}{5}a \qquad \text{und} \qquad a - x = \frac{2}{5}a$$

die geforderte Eigenschaft.

Aufgabe 260836:
Es sei $ABCD$ eine dreiseitige Pyramide, die die Bedingung erfüllt, dass die vier Dreiecke ABC, ABD, ACD und BCD sämtlich einander umfangsgleich sind.

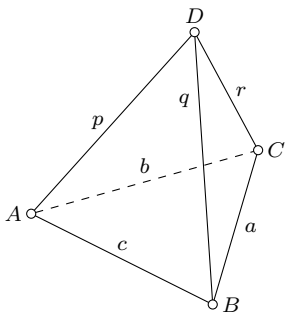
Untersuche, ob durch diese Bedingung und durch die Längen

$$\overline{AD} = p, \qquad \overline{BD} = q, \qquad \overline{CD} = r$$

die Längen $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ und $\overline{AB} = c$ eindeutig bestimmt sind!

Wenn dies der Fall ist, gib diese Längen a, b, c in Abhängigkeit von p, q, r an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Wegen der Umfangsgleichheit von ABC und ABD gilt $a + b + c = p + q + c$ (1).
Wegen der Umfangsgleichheit von ABC und ACD gilt $a + b + c = p + b + r$ (2).
Wegen der Umfangsgleichheit von ABC und BCD gilt $a + b + c = a + q + r$ (3).
Behauptung: Hieraus folgt: a, b, c sind eindeutig bestimmt und zwar gilt $a = p$, $b = q$, $c = r$.

1. Beweismöglichkeit hierzu:

   Aus (1) folgt $a+b=p+q$ (4), aus (3) und (2) folgt $a+q+r=p+b+r$ und daraus $a+q=p+b$. (5)

   Addiert man (4) und (5), so ergibt sich $2a+b+q=2p+b+q$ und daraus $a=p$.

   Setzt man dies in (1) bzw. in (2) ein, so ergibt sich $b=q$ bzw. $c=r$.

2. Beweismöglichkeit:

   Addition von (1), (2), (3) ergibt

   $$3(a+b+c)=a+b+c+2(p+q+r)$$

   also $a+b+c=p+q+r$ (6).

   Aus (6) zusammen mit (1) bzw. mit (2) bzw. mit (3) folgt $c=r$ bzw. $b=q$ bzw. $a=p$.

Aufgabe 270836:
Es sei $ABCDS$ eine gerade Pyramide mit einem Quadrat $ABCD$ als Grundfläche und S als Spitze. Der Fußpunkt der Höhe dieser Pyramide sei E, ferner sei $a=\overline{AB}$ und $h=\overline{ES}$.

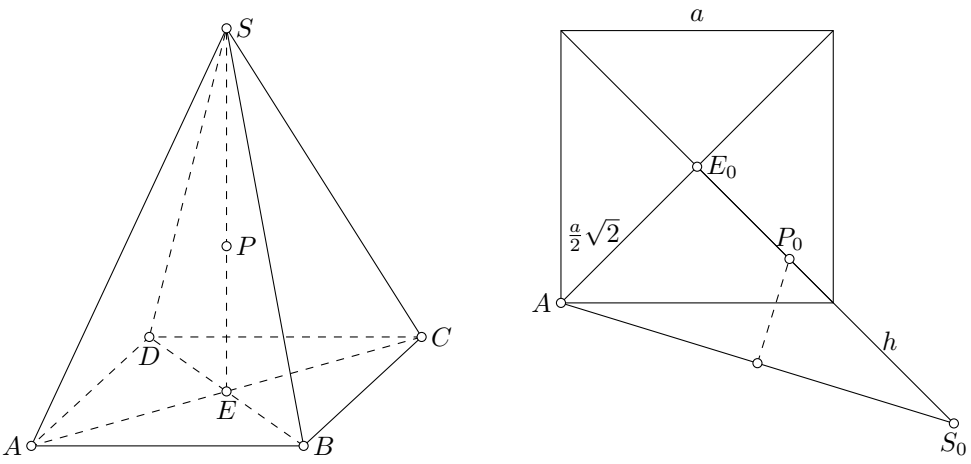
I. Zeichne ein Bild dieser Pyramide mit den Maßen $a=6$ cm, $h=8$ cm in schräger Parallelprojektion ($\alpha=45°$, $q=\frac{1}{2}$), wobei die Strecke ES in wahrer Länge erscheinen soll!

II. Auf der Strecke ES gibt es genau einen Punkt P, für den die (im Raum verlaufenden) Strecken AP und SP einander gleichlang sind.

   Leite eine Möglichkeit her, in dem nach I. hergestellten Bild der Pyramide $ABCDS$ den Bildpunkt dieses Punktes P zu konstruieren; beschreibe diese Konstruktion und führe sie durch!

III. Die Länge a sei beliebig gegeben. Ermittle diejenigen Werte h, für die sich (in der Pyramide mit diesen Maßen a, h) ein Punkt P auf ES finden lässt, der die in II. genannte Bedingung $\overline{AP}=\overline{SP}$ erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) und b) siehe Abbildung
b) Man kann das Dreieck AES in wahrer Größe als Dreieck $A_0E_0S_0$ konstruieren, indem man $E_0S_0=h$, $\angle A_0E_0S_0=90°$ und A_0E_0 als halbe Diagonalenlänge eines Quadrates der Seitenlänge a verwendet.
Dem Punkt P entsprechend ist dann derjenige Punkt P_0 auf E_0S_0 zu ermitteln, für den $A_0P_0=S_0P_0$ gilt. Da (in der Zeichenebene) alle Punkte X mit $A_0X=S_0X$ auf der Mittelsenkrechten von A_0S_0 liegen,

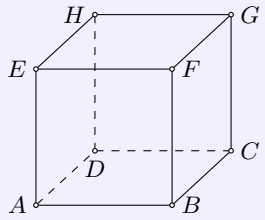
kann man P_0 konstruieren, indem man $E_0S_=$ mit dieser Mittelsenkrechten zum Schnitt bringt.

In der Pyramide $ABCDS$ liegt dann der gesuchte Punkt P so auf ES, dass $EP = E_0P_0$ gilt. Da nun auf dem in a) hergestellten Bild die Strecke ES mit ihren Teilstrecken in wahrer Länge erscheint, kann man den Bildpunkt von P konstruieren, indem man auf der Bildstrecke ES von E aus die Länge E_0P_0 abträgt.

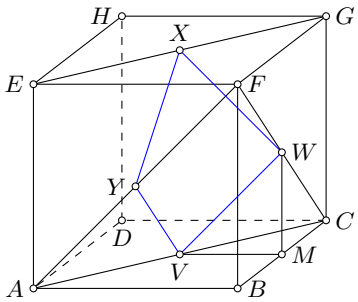
c) In der Pyramide mit den Maßen a, h lässt sich genau dann ein Punkt P auf ES finden, der $AP = SP$ erfüllt, wenn eine nach der Beschreibung in b) durchgeführte Konstruktion zu einem Schnittpunkt P_0 von E_0S_0 mit der Mittelsenkrechten von A_0S_0 führt.
Das ist genau dann der Fall, wenn $E_0S_0 \geq A_0E_0$ gilt, d. h. genau für alle $h \geq \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Aufgabe 290833:
In einem Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) seien V, W, X, Y in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seitenflächen $ABCD$, $BCGF$, $EFGH$ bzw. $ABFE$.

Beweise, dass unter dieser Voraussetzung die Strecken VW, WX, XY und YV sämtlich einander gleichlang sind!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Kantenlänge des Würfels sei a. Die Punkte V, W sind die Mittelpunkte dar Quadrate $ABCD$, $BCGF$, die die Kante BC gemeinsam haben (siehe Abbildung).
Ist M der Mittelpunkt von BC, so ist $VM \parallel AB$ und $VM = \frac{a}{2}$. Entsprechend folgt $WM \parallel FB$ und $WM = \frac{a}{2}$. Wegen $AB \perp FB$ ist folglich auch $VM \perp WM$; also ist VW die Hypotenuse in dem gleichschenklig- rechtwinkligen Dreieck VWM mit der Kathetenlänge $\frac{a}{2}$.
Für jede der Strecken WX, XY, YV folgt ebenso, dass sie die Hypotenuse in einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck mit der Kathetenlänge $\frac{a}{2}$ sind, da ihre Endpunkte ebenfalls die Mittelpunkte jeweils zweier Quadrate sind, die eine Würfelkante gemeinsam haben. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 310835:
Es sei $ABCDEF$ ein gerades dreiseitiges Prisma mit $AD \parallel BE \parallel CF$. Die Deckfläche DEF sei ein rechtwinkliges Dreieck mit E als Scheitel des rechten Winkels. Weiterhin sei S der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks DEF.

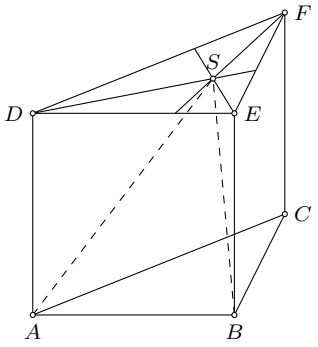
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets $\overline{SB} < \overline{SA}$ folgt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
DA ES und DS nach Voraussetzung die Winkel $\angle DEF$ und $\angle EDF$ halbieren und da im rechtwinkligen

Dreieck $\angle EDF < 90° = \angle DEF$ gilt, folgt

$$\angle EDS = \frac{1}{2}\angle EDF < \frac{1}{2}\angle DEF = \angle DES$$

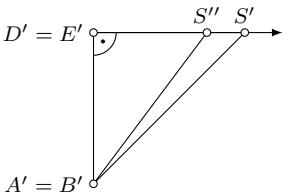
Im Dreieck DES liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber, also folgt weiter $ES < DS$. (1)
Da $ABCDEF$ ein gerades Prisma ist, stehen AD und BE auf der Deckfläche DEF senkrecht, daher gilt $\angle ADS = \angle BES = 90°$ (2).
Ferner gilt für die Seitenkanten $AD = BE$. (3)



Aus (1), (2), (3) kann die Behauptung $BS < AS$ z. B. folgendermaßen erhalten werden:
Wegen (2) und (3) kann man in einer Ebene Punkte $A' = B'$, $D' = E'$, S' und S'' so wählen, dass S' und S'' auf demselben von D' ausgehenden Strahl liegen und

$$\triangle A'D'S' \cong \triangle ADS \qquad ; \qquad \triangle B'E'S'' \cong \triangle BES \tag{4}$$

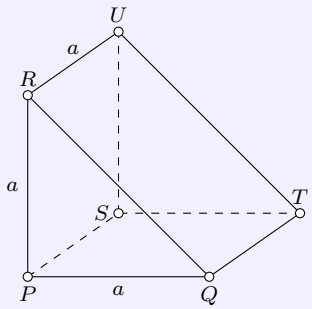
gilt (siehe Abbildung).



Wegen (1) liegt dann S'' zwischen D' und S', ferner ist $\angle A'S''E' < 90°$, also $\angle A'S''S' > 90°$, und im Dreieck $A'S''S'$ daher $\angle A'S''S'$ der größte Winkel. Daraus und aus (4) folgt

$$BS = B'S'' < A'S' = AS$$

Aufgabe 340845:

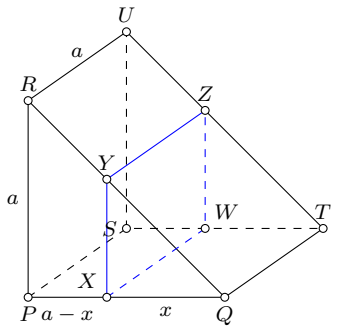


Es sei $PQRSTU$ ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck PQR ist (siehe Abbildung). Die Höhenlänge des Prismas sei gleich der Kathetenlänge a des Dreiecks PQR.

Gesucht ist eine Ebene E, die parallel zu einer der quadratförmigen Seitenflächen F des Prismas verläuft und das Prisma in zwei Teilkörper zerlegt, deren Volumina sich in irgend einer Reihenfolge wie 9 : 16 verhalten.

Ermittle zu gegebenen a alle diejenigen Werte, die der Abstand zwischen der Seitenfläche F und einer solchen Ebene E betragen kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für jede Ebene E, die (o. B. d. A.) parallel zur Seitenfläche $F = PSUR$ verläuft und das Prisma in zwei Teilkörper $PXYRSWZU$ und $XQYWJZ$ zerlegt (siehe Abbildung), gilt:
Die Teilkörper sind Prismen, beide mit der Höhenlänge a; ihre Volumina verhalten sich also wie die Flächeninhalte ihrer Grundflächen $PXYR$ und XQY.

Wegen $\angle XQY = \angle PQR = 45°$ und $XY \parallel PR$, also $\angle QXY = \angle QPR = 90°$ (Stufenwinkel) ist auch XQY ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck.
Mit $XQ = x$ ist folglich auch $XY = x$, und XQY hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}x^2$; somit hat $PXYR$ den Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}x^2$.

Daher hat die Ebene E genau dann die geforderte Eigenschaft, wenn entweder

$$(a^2 - x^2) : x^2 = 9 : 16 \qquad \text{oder} \qquad x^2 : (a^2 - x^2) = 9 : 16$$

gilt. Dies ist äquivalent zu $16a12 = 25x^2$ bzw. $25x^2 = 9a^2$ und dies wegen $a > 0$, $x > 0$ mit $x = \frac{4}{5}a$ bzw. $x = \frac{3}{5}a$.
Also haben für den gesuchten Abstand PX genau die beiden Werte

$$a - x = \frac{1}{5}a \qquad \text{und} \qquad a - x = \frac{2}{5}x$$

die geforderte Eigenschaft.

V Klasse 9

V.I Dreiecke

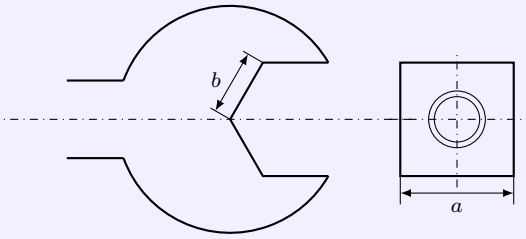
I Runde 1

Aufgabe V00903:
Aus dem Indischen nach dem Mathematiker Bhaskara (1114 n.d.Z.):
Eine Lotosblume ragt mit ihrer Spitze 4 Fuß aus einem Teiche hervor. Vom Winde gepeitscht, verschwindet sie 16 Fuß von ihrem früheren Standpunkt unter dem Wasser.
Wie tief war der Teich?

Lösung von Steffen Polster:
x sei die Länge der Lotosblume. Dann gilt $x^2 = (x-4)^2 + 16^2$ mit $x = 34$. Da die Lotosblume 4 m aus dem Teich hervorragt, ist der Teich 30 m tief.

Aufgabe V00913:

Eine Vierkantmutter (Kantenlänge 8) soll mit einem Sechskantschlüssel (Seitenlänge des Sechskants sei b) gelöst werden.
Welche Abmessungen muss b haben, damit der Schlüssel passt?



Lösung von Steffen Polster:
b ist die Länge der Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basis gleich a ist und dessen Basiswinkel 30° sind (Sechseck!). Damit wird

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{b} \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{a}{3}\sqrt{3} \approx 4{,}62$$

Aufgabe V00914:
Es sei r der Radius des in ein rechtwinkliges Dreieck eingeschriebenen Kreises, h die kleinste Höhe des Dreiecks.
Man beweise, dass für ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck die Beziehungen $0{,}4 < \frac{r}{h} < 0{,}5$ gelten!

Lösung von MontyPythagoras:
Die kleinste Höhe steht senkrecht auf der Hypotenuse. Mit den gewöhnlichen Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck gilt daher:

$$ch = ab \qquad ; \qquad h = \frac{ab}{c}$$

Für den Inkreisradius gilt

$$(a+b+c)r = ab \qquad ; \qquad r = \frac{ab}{a+b+c}$$

Das gesuchte Verhältnis ist

$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c}$$

Wir untersuchen zunächst die „rechte“ Ungleichung der Aufgabenstellung. Es soll gelten:

$$\frac{c}{a+b+c} < \tfrac{1}{2}; \qquad c < \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c; \qquad 2c < a+b+c; \qquad c < a+b$$

Dies ist die Dreiecksungleichung, womit diese Ungleichung erfüllt ist. Die „linke“ Ungleichung lautet:

$$\tfrac{2}{5} < \frac{c}{a+b+c}$$

$$\tfrac{2}{5}(a+b) < \tfrac{3}{5}c$$

$$2(a+b) < 3\sqrt{a^2+b^2}$$

Beide Seiten quadrieren:

$$4a^2 + 8ab + 4b^2 < 9a^2 + 9b^2$$

$$0 < 5a^2 - 8ab + 5b^2$$

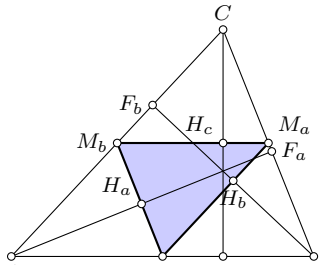
$$0 < a^2 + 4(a-b)^2 + b^2$$

Da rechts nur positive Terme stehen, ist auch diese Ungleichung immer gültig. q. e. d.

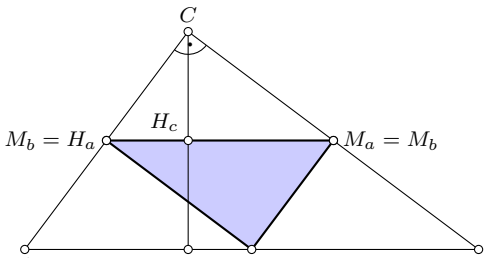
Aufgabe 010915:
Bei welchen Dreiecken liegen die Mitten der drei Höhen auf einer Geraden?

Die Behauptung ist zu beweisen!

Lösung von Carsten Balleier:
Das ist genau bei den rechtwinkligen Dreiecken der Fall (Bild b). In diesem Fall sind die beiden Katheten auch Höhen des Dreiecks. Die Verbindungslinie zwischen den Mitten der Katheten ist parallel zur Hypotenuse. Nach Strahlensatz wird die dritte Höhe auch in der Mitte geteilt.



a)



b)

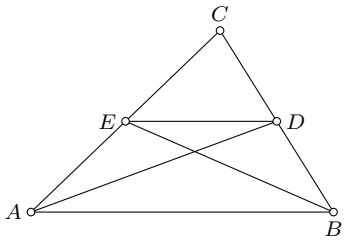
Aufwändiger ist es zu zeigen, dass die Behauptung für andere Dreiecke nicht zutrifft. Betrachten wir zuerst spitzwinklige Dreiecke (Bild a); die Bezeichnung sei so gewählt, dass h_a die längste Höhe ist. Die Fußpunkte der Höhen seien F_a, F_b und F_c, deren Mittelpunkte H_a, H_b und H_c. Die Seiten haben die Mittelpunkte M_a, M_b und M_c.
Dann ist der senkrechte Abstand von M_b, M_c und H_a zur Seite a gleich.

Weiterhin gilt $h_c < b$ und $h_b < c$ (Kathete kürzer als Hypotenuse), woraus $\overline{BH_b} < \overline{BM_c}$ und $\overline{CH_c} < \overline{CM_b}$ folgen. Damit ist der senkrechte Abstand von H_b und H_c zu a geringer als der von H_a. Weil h_a aber zwischen H_b und H_c liegt, kann H_a nicht auf der Geraden H_bH_c liegen.

Für stumpfwinklige Dreiecke gilt Ähnliches, allerdings ist dann der senkrechte Abstand von H_b und H_c zu a größer als der von H_a.

Aufgabe 020913:
Es ist zu beweisen, dass ein Dreieck, bei dem zwei Seitenhalbierende gleich groß sind, stets gleichschenklig ist!

Lösung von André Lanka:



Sei $\triangle ABC$ ein solches Dreieck und seien o. B. d. A. A und B die beiden Punkte, von denen zwei gleichlange Seitenhalbierende ausgehen. Die Seitenhalbierende von A aus schneide die Strecke $\overline{BC}$ in D und die Seitenhalbierende von B aus schneide die Strecke $\overline{AC}$ in E.

Dann sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle EDC$ ähnlich zueinander (SWS).

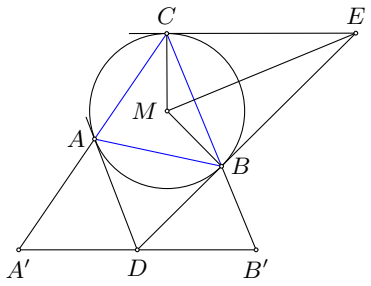
Mithin ist nach Strahlensatz $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$. Das Viereck $ABDE$ ist daher ein Trapez.

Ein Trapez mit gleichlangen Diagonalen ist gleichschenklig. Daher ist $|\overline{AE}| = |\overline{DB}|$ und damit wegen Seitenhalbierenden $|\overline{AC}| = 2|\overline{AE}| = 2|\overline{DB}| = |\overline{CB}|$. Das Dreieck ist also gleichschenklig. □

Aufgabe 020915:
Gegeben ist ein Dreieck ABC und sein Umkreis. Man konstruiere die Tangenten in A und B. Ihr Schnittpunkt sei D. Nun ziehe man durch D die Parallele zu der Tangente in C. Die Verlängerungen der Seiten CA und CB schneiden diese Parallelen in A' bzw. B'.
Es ist zu beweisen, dass

a) die Dreiecke $AA'D$ und $DB'B$ gleichschenklig sind und
b) es einen Kreis gibt, der durch A, A', B, B' geht!

Lösung von André Lanka:



a) Der Schnittpunkt der Tangenten durch B und C sei E. Es gilt, dass die Dreiecke $\triangle MCE$ und MBE kongruent sind nach SSW:

(1) gemeinsame Seite $\overline{ME}$,
(2) $\overline{MB} = \overline{MC} = r$ und
(3) $\angle MCE = \angle MBE = 90°$.

Mithin ist $\overline{CE} = \overline{BE}$ und daher ist das Dreieck $\triangle CBE$ gleichschenklig.

Es gilt $\angle CBE = \angle B'BD$, da dies Scheitelwinkel sind.

Ferner gilt: $\angle BDB' = \angle BEC$ wegen Wechselwinkeln an geschnittenen Parallelen.

Analog gilt $\angle ECB = \angle DB'B$.

Daraus resultiert, dass die beiden Winkel $\angle B'BD$ und $\angle DB'B$ gleichgroße Basiswinkel sind und das Dreieck $\triangle B'BD$ gleichschenklig ist.
Analog kann man den Beweis auf das Dreieck $\triangle DAA'$ übertragen.

b) Mit der gleichen Überlegung wie zu Beginn von a) kann man sehen, dass die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{DB}$ gleichlang sind.

Die Punkte A, A', B und B' haben so alle den gleichen Abstand vom Punkt D. Es existiert ein Kreis mit Mittelpunkt D und Radius $|\overline{AD}|$, der alle vier Punkte enthält.

Aufgabe 030915:
Beweisen Sie den folgenden Satz:

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Katheten gleich der Summe der Durchmesser von Um- und Inkreis.

Lösung von Korinna Grabski:
Es ist zu beweisen: $a + b = d_U + d_I$

Der Mittelpunkt des Inkreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Der Inkreis berührt jede Seite des Dreiecks. Damit ist jede Seite des Dreiecks eine Tangente an den Inkreis, die Strecke zwischen Berührungspunkt und Mittelpunkt steht somit senkrecht auf der jeweiligen Seite.

Der Flächeninhalt des Dreiecks kann über das ganze Dreieck oder 3 Teildreiecke berechnet werden:

$$\begin{aligned} A &= a \cdot \frac{b}{2} = a \cdot \frac{r_I}{2} + b \cdot \frac{r_I}{2} + c \cdot \frac{r_I}{2} \\ a \cdot b &= (a + b + \sqrt{a^2 + b^2}) \cdot r_I \\ r_I &= \frac{a \cdot b}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Der Mittelpunkt des Umkreises ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten. Der Umkreis geht durch die Eckpunkte des Dreiecks. Die Katheten a und b bilden zusammen mit den Mittelsenkrechten ein Rechteck mit den Seitenlängen $a/2$ und $b/2$. Die Diagonale des Rechtecks beträgt r_U. Es gilt also:

$$r_U^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad r_U = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Und ferner:

$$\begin{aligned} a + b &= d_U + d_I = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{2ab}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{(a + b) \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + b^2 + 2ab}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{(a + b) \cdot \sqrt{a^2 + b^2} + (a + b)^2}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{(a + b) \cdot (\sqrt{a^2 + b^2} + a + b}{a + b + \sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= a + b \quad \square \end{aligned}$$

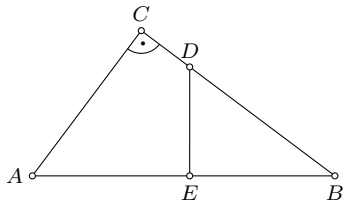
Aufgabe 040913:
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Hypotenuse $\overline{AB}$ 25 mm und dessen Kathete $\overline{BC}$ 20 mm lang ist. Auf dieser Kathete wird die Strecke $\overline{BD}$ von der Länge 15 mm abgetragen, und vom Punkt D aus wird das Lot $\overline{DE}$ auf die Hypotenuse gefällt.

Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks BDE!

Lösung von Manuela Kugel:
Es gilt $u = \overline{EB} + \overline{BD} + \overline{DE}$ mit $\overline{BD} = 15$.

Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DBE$ sind einander ähnlich mit 2 gleichen Winkeln:

$\measuredangle ABC = \measuredangle DBE$ sowie $\measuredangle ACB = \measuredangle DEB = 90°$.



Damit gilt nun:

$$\overline{EB} = \overline{BC} \cdot \overline{BD} : \overline{AB} = 20 \cdot 15 : 25 = 12$$

sowie nach dem Satz des Pythagoras

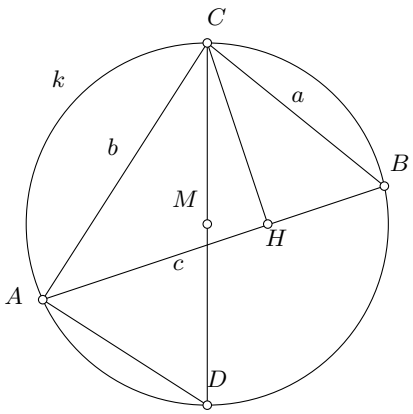
$$\overline{DE} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{EB}^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9.$$

Dadurch ergibt sich in obiger Gleichung: $u = 12 + 15 + 9 = 36$. Der Umfang des Dreiecks $\triangle BDE$ beträgt also 36 mm.

Aufgabe 050914:
Beweisen Sie folgenden Satz:

Der Flächeninhalt jedes Dreiecks ist gleich dem Produkt der Seiten dieses Dreiecks dividiert durch den vierfachen Umkreisradius des Dreiecks.

Lösung von Manuela Kugel:



Man bezeichne die Eckpunkte des Dreiecks so mit A, B und C, dass keiner der Dreieckswinkel größer als der bei C ist, und sodann die Längen der Dreiecksseiten wie üblich mit a, b und c (siehe Bild). Dann ist AC nicht Durchmesser des Umkreises k, weil sonst der Winkel bei B ein rechter und daher größer als der bei C wäre. Ist CD Durchmesser des Umkreises k, so ist $D \notin g_{AC}$.

H sei der Fußpunkt des Lotes von C auf g_{AB}. Dann gilt, wenn r der Umkreisradius ist, $|CD| = 2r$ und für den Flächeninhalt I des Dreiecks ABC, wenn noch $|HC| = h_c$ gesetzt wird

$$I = \frac{ch_c}{2}. \tag{1}$$

Nach Definition von H ist $|\angle BHC| = 90°$, und nach dem Satz von Thales gilt

$$|\angle DAC| = 90°. \tag{2}$$

Der Punkt B liegt auf derselben Seite von g_{AC} wie D, denn andernfalls lägen B und D nach dem obigen auf verschiedenen Seiten von g_{AC}. Dann wäre $ABCD$ ein nicht überschlagenes Sehnenviereck und daher nach folgendem Satz:

> $ABCD$ ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn die Summe der Größen zweier gegenüberliegender Innenwinkel 180° beträgt, wenn also $|\angle ABC| + |\angle CDA| = 180°$ ist.

$$|\angle ABC| + |\angle ADC| = 180°. \tag{3}$$

Wegen (2) ist $|\angle ADC| < 90°$ und folglich wäre wegen (3) $|\angle ABC| > 90°$ im Widerspruch dazu, dass $\angle ACB$ größter Winkel im Dreieck ABC ist. Weiter gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\angle CBA \simeq \angle CDA$. Also gilt nach dem 1. Ähnlichkeitssatz $\triangle BCH \sim \triangle DCA$. Daraus folgt

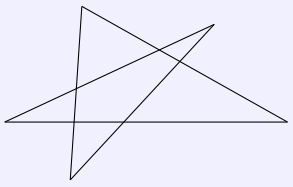
$$a : h \quad = \quad 2r : b, \quad \text{d. h.} \quad h_c = \frac{ab}{2r}.$$

Setzt man diesen Wert in die Flächeninhaltsformel (1) ein, so erhält man

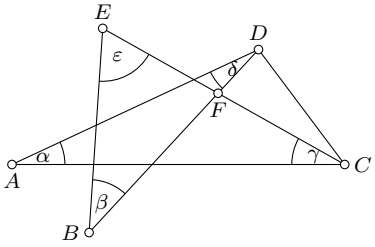
$$I \quad = \quad \frac{abc}{4r}.$$

Aufgabe 060911:

Ermitteln Sie ohne Messung die Summe der Größen der Innenwinkel an den fünf Spitzen des in der Abbildung dargestellten fünfzackigen Sternes.



Lösung von Manuela Kugel:



Es seien: $\alpha = \angle CAD$; $\beta = \angle EBD$; $\gamma = ACE$; $\delta = \angle BDA$; $\varepsilon = \angle BEC$.
Im Dreieck $\triangle ACD$ gilt dann nach Innenwinkelsummensatz:

$$180° = \alpha + \gamma + \angle ECD + \angle CDB + \delta$$

Unter Nutzung des Innenwinkelsummensatzes in Dreieck $\triangle CDF$:

$$= \quad \alpha + \gamma + \delta + (180° - \angle CFD)$$

Ferner gilt: $\angle BFE = \angle CFD$, weil sie zueinander Scheitelwinkel sind. Ferner gilt der Innenwinkelsummensatz im Dreieck $\triangle BFE$:

$$= \alpha + \gamma + \delta + 180° - \angle BFE = \alpha + \gamma + \delta + 180° - (180° - \beta - \varepsilon) = \alpha + \gamma + \delta + \beta + \varepsilon$$

Dies ist die Summe aller 5 Innenwinkel der Spitzen des fünfzackigen Sternes und beträgt somit 180°.

Aufgabe 110912:
Jede Seitenhalbierende eines Dreiecks zerlegt die Dreiecksfläche in zwei Dreiecksflächen, die gleich lange Grundseiten und gleich lange Höhen haben und somit inhaltsgleich sind. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden heißt Schwerpunkt des Dreiecks.

Untersuchen Sie, ob jede Gerade durch den Schwerpunkt S eines Dreiecks $\triangle ABC$ dessen Fläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt!

Lösung von Manuela Kugel:
Im Dreieck $\triangle ABC$ sei CM die Seitenhalbierende der Seite AB und S der Schwerpunkt des Dreiecks. Dann gilt nach einem Satz über die Seitenhalbierenden

$$|SM| : |SC| = 1 : 2. \tag{1}$$

Wir zeigen nun, dass nicht jede Gerade durch S die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt. Die Parallele g zu AB durch S schneide AC und BC in D bzw. E. Diese Punkte existieren stets, da AC und BC nicht parallel zu AB und damit auch nicht parallel zu g sind. Das Lot CG von C auf die Gerade durch A und B schneide g in F. Dieser Punkt existiert stets, da $CG \perp g$ gilt.

Nach den Strahlensätzen und wegen (1) ist dann

$$|DE| : |AB| = 2 : 3, \text{ d. h.} \tag{2}$$

$$|DE| = \frac{2}{3}|AB| \text{ und} \tag{3}$$

$$|CF| : |CG| = 2 : 3, \text{ d. h.} \tag{4}$$

$$|CF| = \frac{2}{3}|CG| \tag{5}$$

Also beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle CDE$ nur $\frac{4}{9}$ von dem des Dreiecks $\triangle ABC$.
Damit ist gezeigt, dass nicht alle Geraden durch S die Dreiecksfläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegen.

Aufgabe 130911:
Zwei in gleicher Höhe über den Erdboden liegende Punkte A und B befinden sich in gleichem Abstand und auf derselben Seite von einer geradlinig verlaufenden hohen Wand. Die Strecke AB ist 51 m lang. Ein in A erzeugter Schall trifft in B auf direktem Wege um genau $\frac{1}{10}$s früher ein als auf dem Wege über die Reflexion an der Wand.

Man ermittle den Abstand jedes der beiden Punkte A und B von der Wand, wobei angenommen sei, dass der Schall in jeder Sekunde genau 340 m zurücklegt.

Lösung von Manuela Kugel:
Nach dem Reflexionsgesetz ist der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel. Es Sei C der Punkt an der Wand, in dem der von A kommende Schall nach B reflektiert wird. Dann ist wegen der erwähnten Winkelgleichheit und wegen der Gleichheit der Abstände der Punkte A und B von der Wand das Dreieck $\triangle ABC$ gleichschenklig mit $|AB| = |CB|$. Da der Schall auf dem Wege von A über C nach B genau $\frac{1}{10}$s länger braucht als auf direktem Wege und da laut Aufgabe der Schall in jeder Zehntelsekunde 34m zurücklegt, gilt

$$|AC| + |CB| \quad = \quad |AB| + 34m = 51m + 34m = 85m,$$

also $|AC| = |CB| = 42{,}5$ m.
Der Abstand des Punktes A von der Wand beträgt somit nach dem Satz des Pythagoras

$$\sqrt{42{,}5^2 - 25{,}5^2}m \quad = \quad 34m.$$

Aufgabe 140912:
Peter behauptet, man könne bei einem beliebig gegebenen Dreieck ABC, in dem D der Mittelpunkt der Seite AB ist, allein durch Längenvergleich der Seitenhalbierenden CD und der halben Seite AD feststellen, ob das Dreieck bei C einen spitzen, rechten oder stumpfen Innenwinkel hat.

Untersuchen Sie, ob Peters Behauptung richtig ist!

Lösung von Manuela Kugel:
Die Größen der Innenwinkel von $\triangle ABC$ bei A, B, C seien α, β, γ. Ist $|AD| = |DB| < |CD|$, so gilt, da im Dreieck der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegt, $|\angle ACD| < |\angle CAD|$ und $|\angle DCB| < |\angle CBD|$, also

$$\gamma \quad = \quad |\angle ACD| + |\angle DCB| < \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$$

und daher $2\gamma < 180^\circ$, woraus $\gamma < 90^\circ$ folgt. Steht in der ersten Ungleichung das Gleichheitszeichen bzw. das Größerzeichen statt des Kleinerzeichens, so gilt dasselbe auch für die folgenden Ungleichungen.

Daher ist Peters Behauptung richtig: das Dreieck ABC hat bei C einen spitzen, rechten oder stumpfen Innenwinkel, je nachdem, ob $|AB|$ kleiner, gleich oder größer als $2|CD|$ ist.

Aufgabe 160913:
Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB, der Länge $\overline{AB} = b$ und der Schenkellänge $2b$. Die Punkte D bzw. E seien die inneren Punkte von AC bzw. BC, in denen die Schenkel den Kreis mit dem Durchmesser AB schneiden. Man ermittle den Umfang des Vierecks $ABED$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Mittelpunkt von AB sei M. Dann ist Dreieck DAM gleichschenklig mit $DM = AM = \frac{b}{2}$

Daher ist $\angle MDA = \angle MAD = \angle BAC = \angle ABC$, also $\triangle DAM \sim \triangle ABC$.

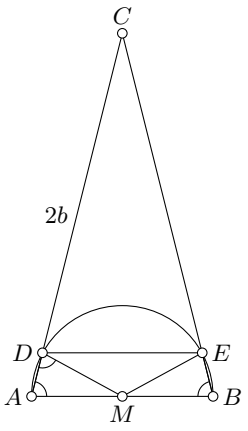
Folglich gilt $DA : AM = AB : BC = 1 : 2$, also $DA = \frac{1}{2}AM = \frac{b}{4}$ und daher

$$CD = AC - DA = 2b - \frac{b}{4} = \frac{7b}{4}$$

Ebenso erhält man $EB = \frac{b}{4}$ und $CA = \frac{7b}{4}$.

Also ist $DE \parallel AB$ und folglich $\triangle DEC \sim \triangle ABC$. Daraus ergibt sich $DE : AB = CD : AC = 8 : 7$, also $DE = \frac{7b}{8}$. Somit beträgt der gesuchte Umfang

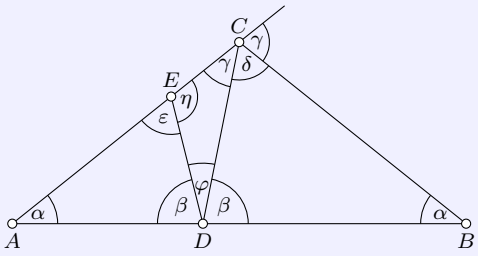
$$AB + BE + ED + DA = b + \frac{b}{4} + \frac{7b}{4} + \frac{b}{4} = \frac{19b}{8}$$



Aufgabe 190911:

In der dargestellten Figur sei die Größe δ des Winkels $\angle DCB$ bekannt. Ferner sei vorausgesetzt, dass gleichbezeichnete Winkel auch gleiche Größen haben.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Winkelgrößen α, β, γ, ε, η und φ in Abhängigkeit von δ!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

(1) Wegen $\alpha + \beta + \delta = 180°$ (Winkelsumme im Dreieck $\triangle DBC$) und $\alpha + \beta + \varepsilon = 180°$ ((Winkelsumme im Dreieck $\triangle ADE$) gilt

$$\varepsilon = \delta$$

(2) Wegen $\delta + 2\gamma = 180°$ (gestreckter Winkelsumme bei C) gilt

$$\gamma = 90° - \frac{\delta}{2}$$

(3) Wegen $\gamma = 2\alpha$ (Außenwinkel der Dreieck ABC) gilt $\alpha = \frac{\beta}{2}$ und wegen (2) gilt dann

$$\alpha = 45° - \frac{1}{4}\delta$$

(4) Wegen $\eta + \varepsilon = 180°$ (Nebenwinkel) und wegen (1) gilt dann

$$\eta = 180° - \varepsilon \qquad ; \qquad \eta = 180° - \delta$$

(5) Wegen $\gamma + \eta + \varphi = 180°$ (Winkelsumme im Dreieck $\triangle EDC$) gilt $\varphi = 180° - \gamma - \eta$, und unter Berücksichtigung von (2) und (4) gilt dann

$$\varphi = 180° - \left(90° - \frac{\delta}{2}\right) - (180° - \delta) = \frac{3}{2}\delta - 90°$$

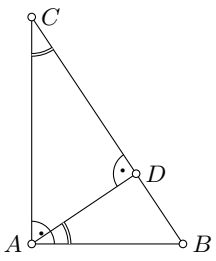
(6) Wegen $2\beta + \varphi = 180°$ (gestreckter Winkel bei D) gilt $\beta = 90° - \frac{\varphi}{2}$, und unter Berücksichtigung von (4) gilt dann

$$\beta = 90° - \left(\frac{3}{4}\delta - 45°\right) = 135° - \frac{3}{4}\delta$$

Aufgabe 240913:
Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei A. Der Fußpunkt des Lotes von A auf BC sei D.

Beweisen Sie, dass dann stets $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{AD}$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung gilt

$$\angle ADB = \angle CDA = 90^\circ \tag{1}$$

und unter Berücksichtigung des Dreiecksinnenwinkelsatzes

$$\angle BAD = 90^\circ - \angle CAD = \angle ACD$$

Aus (1) und (2) folgt $\triangle ABD \sim \triangle CAD$ und damit

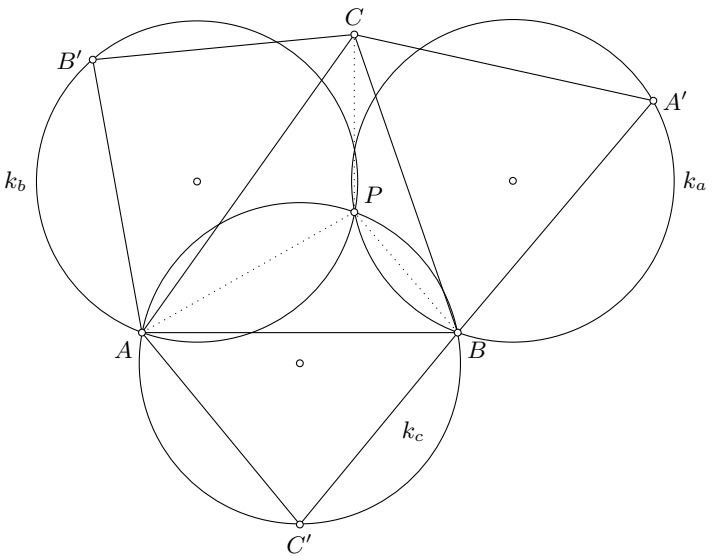
$$AB : BD = CA : CD \qquad \text{also} \qquad AB \cdot CD = AC \cdot AD \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Aufgabe 320914:
Über jeder Seite eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werde nach außen dasjenige gleichschenklige Dreieck errichtet, dessen Basis die betreffende Seite von ABC ist und dessen Winkel an der Spitze ebenso groß ist wie der im Dreieck ABC der genannten Seite gegenüberliegende Innenwinkel.

Beweisen Sie, dass sich die Umkreise der drei so konstruierten neuen Dreiecke in einem Punkt schneiden!

Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden: Je zwei dieser drei Umkreise schneiden sich außer in einem Eckpunkt des Dreiecks ABC noch ein zweites Mal im Innern des Dreiecks ABC.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Innenwinkelgrößen des Dreiecks ABC seien wie üblich mit α, β, γ bezeichnet. Die über BC, CA bzw. AB errichteten Dreiecke seien BCA', CAB' bzw. ABC', ihre Umkreise k_a, k_b, k_c.

Nach dem Hinweis schneiden sich k_a und k_b außer in C in einem Punkt P, der im Innern des Dreiecks ABC liegt.

Nach Definition von BCA', CAB' und da $CPBA'$ und $CPAB'$ Sehnenvierecke sind, gilt

$$\angle CPB = 180^\circ - \alpha \qquad , \qquad \angle CPA = 180^\circ - \beta$$

Daraus sowie aus dem Innenwinkelsatz und der Definition von ABC' folgt

$$\begin{aligned} \angle APB &= 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) = \alpha + \beta \\ &= 180^\circ - \gamma = 180^\circ - \angle AC'B \end{aligned}$$

Also ist auch $APBC'$ ein Sehnenviereck; d. h., P liegt auf dem Umkreis k_c von ABC'; d. h., k_a, k_b und k_c schneiden sich in dem Punkt P.

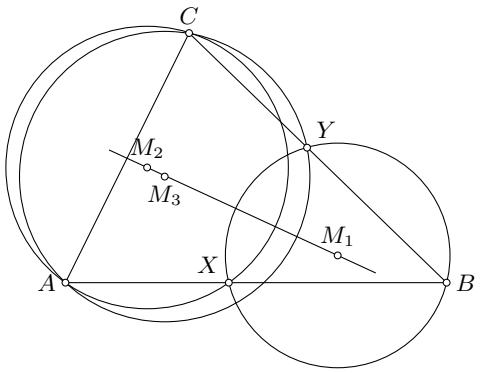
Aufgabe 340914:
Arne zeichnet ein Dreieck ABC und einen Kreis k_1, der so gewählt ist, dass er durch B geht, die Strecke AB in einem von B verschiedenen Punkt X schneidet und dass er die Strecke BC in einem von B verschiedenen Punkt Y schneidet. Dann konstruiert Arne den Umkreis k_2 des Dreiecks ACX und den Umkreis k_3 des Dreiecks ACY.

Nun stellt er fest, dass in seiner Zeichnung die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der Kreise k_1, k_2, k_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen; das findet er erstaunlich.

Britta meint: Zu jedem Dreieck ABC gibt es für den Kreis k_1 unendlich viele Möglichkeiten, bei denen jeweils die drei genannten Mittelpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und es gibt für k_1 auch unendlich viele Möglichkeiten, bei denen das nicht zutrifft.

Hat Britta recht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Um zu erreichen, dass M_1, M_2, M_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen, kann man folgendermaßen vorgehen (siehe Abbildung): Man wählt auf der Mittelsenkrechten von AC einen Punkt M_1, der so liegt, dass der um M_1 durch B konstruierte Kreis k, die Strecken AB und BC in Punkten $X \neq B$ bzw. $Y \neq B$ schneidet.

Beweis, dass bei dieser Wahl M_1, M_2, M_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen:

Da die Kreise k_2 und k_3 beide durch A und C gehen, also $M_2A = M_2C$ und $M_3A = M_3C$ gilt, liegen M_2 und M_3 auf der Mittelsenkrechten von AC. Auf dieser wurde auch M_1 gewählt.

Damit sind unendlich viele derartige Wahlmöglichkeiten nachgewiesen.

II. Um zu erreichen, dass M_1, M_2, M_3 nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, kann man folgendermaßen vorgehen:

Man wählt M_1 außerhalb der Mittelsenkrechten von AC, dabei aber so, dass der Kreis k_1 um M_1 durch B die Strecken AB und BC in Punkten $X \neq B$ bzw. $Y \neq B$ schneidet. Durch eventuelle (genügend kleine) Änderung kann man auch erreichen, dass die Umkreise der beiden Dreiecke ACX

und ACY nicht miteinander übereinstimmen. Für eine so zu treffende Wahl von k_1 gibt es ebenfalls unendlich viele Möglichkeiten.

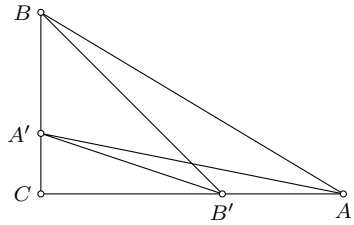
Beweis, dass bei jeder solchen Wahl M_1, M_2, M_3 nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen: Durch die zuletzt genannte Änderungsmöglichkeit wird erreicht, dass M_3, nicht mit M_2 zusammenfallen kann; hiernach (und weil M_2 und M_3 auf der Mittelsenkrechten von AC liegen) könnten M_1, M_2, M_3 nur dann auf einer gemeinsamen Geraden liegen, wenn auch M_1 auf der Mittelsenkrechten von AC läge, was durch die Wahl von M_1 ebenfalls verhindert wurde.

Damit ist gezeigt, dass Britta mit beiden Behauptungen recht hat.

II Runde 2

Aufgabe V10924:
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC. Auf der Kathete a wird A', auf b wird B' beliebig gewählt. Durch Verbinden entsteht das Viereck $ABA'B'$. Für dieses Viereck gilt: Die Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen ist gleich der Summe der Quadrate zweier Viereckseiten.
Welche beiden Viereckssseiten sind das? Beweisen Sie diese Aussage!

Lösung von J. Lehmann und W. Unze:



Nach dem Lehrsatz von Pythagoras gilt:

I im Dreieck $A'B'C'$	$A'C^2 + B'C^2 = A'B'^2$
II im Dreieck $BB'C$	$BC^2 + B'C^2 = BB'^2$
III im Dreieck $AA'C$	$A'C^2 + AC^2 = AA'^2$
IV im Dreieck ABC	$BC^2 + AC^2 = AB^2$

Da die Aufgabe von der Summe der Diagonalenquadrate spricht, wird diese angesetzt (aus II und III):

$$(BB')^2 + (AA')^2 = (B'C)^2 + (BC)^2 + (A'C)^2 + (AC)^2$$

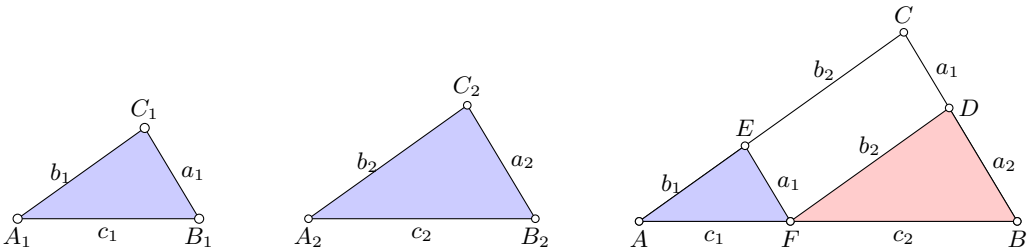
Rechts steht kein Quadrat einer Viereckssseite; die Aufgabe fordert aber die Summe zweier von ihnen. So wird versucht, je 2 der rechten Quadrate zu einem Viereckseitenquadrat zusammenzufassen.
Das gelingt nach I und IV:

$$(BB')^2 + (AA')^2 = (A'B')^2 + (AB)^2$$

Damit ist bewiesen, dass die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich ist der Summe der Quadrate über denjenigen Viereckseiten, die nicht auf den Ausgangskatheten liegen.

Aufgabe 010925:
Zeichnen Sie zwei ähnliche Dreiecke mit den Seiten a_1, b_1, c_1 bzw. a_2, b_2, c_2! Bilden Sie $a_1 + a_2, b_1 + b_2$ und $c_1 + c_2$!
Konstruieren Sie mit diesen Strecken ein Dreieck! Ist es zu den ursprünglichen Dreiecken ähnlich? Beweisen Sie Ihre Behauptung: a) geometrisch, b) arithmetisch!

Lösung von Carsten Balleier:
Das Dreieck aus den Seiten $a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2$ ist zu den beiden ursprünglichen Dreiecken ähnlich.



a) Geometrischer Beweis:
In linken Bild sind beide Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ zu sehen, die, wenn sie ähnlich zueinander sein sollen, untereinander jeweils gleiche Innenwinkel haben müssen.
Im rechten Bild werden sie als $\triangle AFE$ und $\triangle FBD$ so aneinander gesetzt, dass A, F und B auf einer Geraden zu liegen kommen.
Werden nun die Strecken DF entlang FE und EF entlang FD parallel verschoben, so ist das entstehende Viereck $EFDC$ offenbar ein Parallelogramm, die Punkte A, E, C bzw. B, D, C liegen wegen gleicher Innenwinkel der Dreiecke AFE und FBD jeweils auf einer Geraden und es gilt:

$$\angle ACB = \angle ECD = \angle AEF = \angle FDB$$

Damit hat das Dreieck ABC die geforderten Seitenlängen $a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2$ und dieselben Innenwinkel wie die gegebenen Dreiecke.

b) Arithmetischer Beweis:
Nach Voraussetzung sind beide Dreiecke ähnlich, also gilt:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$$

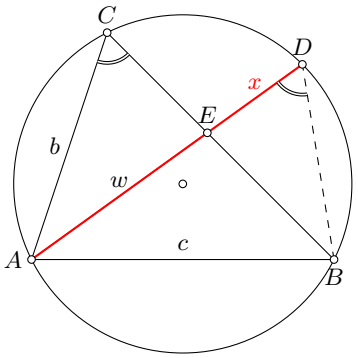
Nach Addition von 1 folgt daraus

$$1 + \frac{a_2}{a_1} = 1 + \frac{b_2}{b_1} = 1 + \frac{c_2}{c_1} \Rightarrow \frac{a_1 + a_2}{a_1} = \frac{b_1 + b_2}{b_1} = \frac{c_1 + c_2}{c_1}$$

Die letzte Gleichung besagt, dass auch das aus den Summen der Seitenlängen gebildete Dreieck diesen ähnlich ist.

Aufgabe 080922:
Von einem Dreieck $\triangle ABC$ seien die Längen zweier Seiten und die Länge der Winkelhalbierenden des von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkels bekannt. Berechnen Sie die Länge derjenigen Sehne des Umkreises des Dreiecks, die durch Verlängerung der erwähnten Winkelhalbierenden entsteht!

Lösung von Nuramon:



Es seien die Seitenlängen c von AB und b von AC, so wie die Länge w der Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$ bekannt. Es sei E der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit der Seite BC und es sei D der Schnittpunkt der Verlängerung von w mit dem Umkreis. Gesucht ist die Länge x der Sehne AD.

Nach Umfangswinkelsatz gilt $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BDA$.
Per Definition der Winkelhalbierenden w gilt außerdem $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC$. Also stimmen die Dreiecke ABD und AEC in zwei Winkeln überein und sind somit ähnlich. Insbesondere gilt also $\frac{x}{c} = \frac{b}{w}$, d. h. $x = \frac{bc}{w}$.

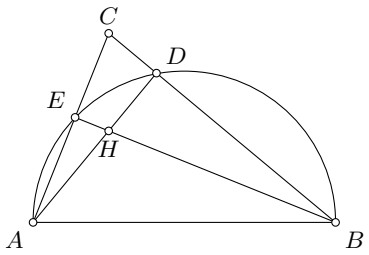
Aufgabe 130922:
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC, in dem die Winkel ABC und BAC die Größe 90° bzw. 60° haben, schneide die Halbierende des Winkels BAC die Gegenseite im Punkt D.
Beweisen Sie, dass D die Seite BC im Verhältnis 1 : 2 teilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Spiegelt man das Dreieck ABC an BC, wobei das Bild von A der Punkt A' sei, so erhält man das gleichseitige Dreieck $AA'C$. Darin ist BC Halbierende der Seite AA'.

Verlängert man AD über D hinaus bis zum Schnittpunkt S mit der Seite $A'C'$, dann ist AS Seitenhalbierende von $A'C'$, da im gleichseitigen Dreieck die Halbierende jedes Winkels mit der Halbierenden seiner Gegenseite zusammenfällt.
Da sich nun in jedem Dreieck die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2 schneiden, ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 140922:
Es sei $\triangle ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck, H sei der Schnittpunkt seiner Höhen und D, E, F deren Fußpunkte, wobei D auf BC, E auf CA und F auf AB liegen mögen.
Man beweise, dass dann $AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$ gilt.

Lösung von Nuramon:



Da $\sphericalangle AEB = 90° = \sphericalangle ADB$ gilt, ist das Viereck $ABDE$ nach Umfangswinkelsatz ein Sehnenviereck. Nach Sehnensatz gilt daher $AH \cdot HD = BH \cdot HE$. Die andere Gleichung folgt analog.

Aufgabe 150924:
Bei der Lösung der Aufgabe, ein Dreieck ABC aus $AB = c$, $BC = a$ und $\angle BAC = \alpha$ zu konstruieren, seien zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke ABC_1 und ABC_2 entstanden, die den Bedingungen genügen.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\angle AC_1B$, wenn außerdem bekannt ist, dass er viermal so groß ist wie der Winkel $\angle AC_2B$!

Lösung von cyrix:
Es ist das Dreieck BC_1C_2 gleichschenklig mit Basis C_1C_2. Damit ist

$$\angle BC_1C_2 = \angle C_1C_2B = \angle AC_2B$$

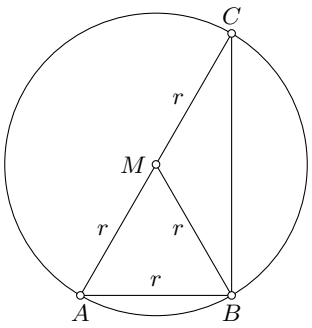
Da die Winkel $\angle AC_1B$ und $\angle BC_1C_2$ Nebenwinkel sind, ergänzen sie sich zu 180°. Zusammen mit $\angle AC_1B = 4 \cdot \angle AC_2B$ folgt $5\angle AC_2B = 180°$, also $\angle AC_2B = 36°$ und damit schließlich $\angle AC_1B = 4 \cdot 36° = 144°$.

Aufgabe 180923:
Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei B und $\angle BAC = 60°$ ist die Länge r des Umkreisradius gegeben.
Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt dieses Dreiecks sowie die Länge der auf seiner Hypotenuse senkrecht stehenden Höhe!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegt B auf dem Halbkreis über AC. Sei M der Mittelpunkt

von AC, dann ist der Kreis um M mit dem Radius $MA = MB = MC = r$ der Umkreis des Dreiecks ABC: Damit gilt $AC = 2r$.
Das gleichschenklige Dreieck ABM hat laut Voraussetzung einen Winkel mit der Größe 60°, ist also gleichseitig. Daraus folgt $AB = r$.
Nach dem Satz des Pythagoras erhält man $CB = r\sqrt{3}$. Damit gilt für den Umfang $u = 3r + r\sqrt{3} = r(3 + \sqrt{3})$ und für den Flächeninhalt

$$I = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} r^2 \sqrt{3}$$



Da der Flächeninhalt auch nach der Formel $I = \frac{1}{2} AC \cdot h = r \cdot h$, mit h als Länge der Höhe auf der Hypotenuse AC berechnet werden kann, folgt

$$h = \frac{I}{r} = \frac{1}{2} r\sqrt{3}$$

Aufgabe 260924:
Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C wird gefordert, dass dieser rechte Winkel durch die Seitenhalbierende der Seite AB, die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$ und die auf der Seite AB senkrechte Höhe in vier gleichgroße Winkel zerlegt wird.
Untersuchen Sie, ob es ein Dreieck ABC gibt, das diese Forderungen erfüllt, und ob alle Dreiecke, für die das zutrifft, einander ähnlich sind!
Ermitteln Sie, wenn dies der Fall ist, die Größen der Winkel $\angle BAC$ und $\angle ABC$!

Lösung von cyrix:
Es sei W der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit AB, H der Fußpunkt der Höhe von C auf AB und M der Mittelpunkt der Strecke AB.

Da die Winkelhalbierende den rechten Winkel bei C in die beiden Winkel $\angle ACW = \angle WCB = 45°$ halbiert, müssen die Höhe und die Seitenhalbierende diese beiden Teilwinkel halbieren.
O. B. d. A. gelte, dass die Seitenhalbierende den Winkel $\angle ACW$ und die Höhe den Winkel $\angle WCB$ halbiert. (Den umgekehrten Fall erhält man durch Vertauschung der beiden Punkte A und B.)

Also gilt

$$\angle ACM = \angle MCW = \angle WCH = \angle HCB = 22{,}5°$$

Nach Definition ist $\angle BHC = 90°$, sodass aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle BHC$ gilt, dass

$$\angle CBA = \angle CBH = 180° - \angle HCB - \angle BHC = 67{,}5°$$

gilt.
Aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ABC$ ist dann $\angle BAC = 180° - \angle ACB - \angle CBA = 22{,}5°$. Damit sind (bis auf Vertauschung) die beiden übrigen Innenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$ eindeutig bestimmt, sollte es überhaupt ein solches geben.

Sei also nun umgekehrt ein solches Dreieck $\triangle ABC$ mit $\angle BAC = 22{,}5°$, $\angle CBA = 67{,}5°$ und $\angle ACB = 90°$ gegeben und seien die Punkte H, W und M wie oben definiert. Dann sind also aufgrund der Definition der Winkelhalbierenden $\angle ACW = \angle WCB = \frac{90°}{2} = 45°$.
Nach dem Satz des Thales liegen C, A und B auf dem Kreis um M durch A, sodass also $|AM| = |BM| = |CM|$ gilt. Insbesondere ist das Dreieck $\triangle AMC$ gleichschenklig und es gilt

$$\angle ACM = \angle MAC = \angle BAC = 22{,}5° = \frac{90°}{4} \qquad \text{sowie} \qquad \angle MCW = \angle ACW - \angle ACM = 22{,}5° = \frac{90°}{4}$$

Im Dreieck $\triangle HCB$ gilt wie oben nach der Definition der Höhe $\angle BHC = 90°$, sodass sich aufgrund der Innenwinkelsumme in diesem Dreieck und $\angle CBH = \angle CBA$ wieder

$$\angle HCB = 180° - \angle BHC - \angle CBH = 180° - 90° - 67{,}5° = 22{,}5° = \frac{90°}{4}$$

Da das Dreieck $\triangle ABC$ keinen stumpfen Innenwinkel besitzt, liegt H auf der Strecke AB und es gilt abschließend auch

$$\angle WCH = \angle WCB - \angle HCB = 45° - 22{,}5° = 22{,}5° = \frac{90°}{4}$$

sodass tatsächlich, wie in der Aufgabenstellung gefordert, Seitenhalbierende, Winkelhalbierende und Höhe den rechten Winkel in vier gleich große Teile.
Es gibt also bis auf Vertauschung der Innenwinkel bei A und B (was natürlich die Ähnlichkeit erhält) genau eine Wahl der beiden weiteren Innenwinkel von $\triangle ABC$, nämlich die oben angegebene von 22,5° und 67,5°.

Aufgabe 280923:
In einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen und Winkelgrößen wie üblich mit a, b, c und α, β, γ bezeichnet.
Die Winkelhalbierende von $\angle BAC$ schneide die Seite BC in einem Punkt D. Dabei sei $AD = b$.
Ferner sei vorausgesetzt, dass eine der drei Winkelgrößen α, β, γ das arithmetische Mittel der beiden anderen ist.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen alle Möglichkeiten für die Winkelgrößen α, β, γ!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn die Winkelgrößen α, β, γ eines Dreiecks ABC die Voraussetzungen erfüllen, so folgt:
Wegen $AD = b$ ergibt nach dem Basiswinkelsatz $\angle ADC = \angle ACD = \gamma$. Da AD den Winkel $\angle BAC$ halbiert, folgt nach dem Innenwinkelsatz für $\triangle ACD$

$$\frac{\alpha}{2} = 180° - 2\gamma \quad ; \quad \alpha = 360° - 4\gamma \tag{1}$$

Nach dem Innenwinkelsatz für $\triangle ABC$ folgt damit

$$\beta = 180° - (360° - 4\gamma) - \gamma = 3\gamma - 180° \tag{2}$$

Für die Voraussetzung, dass eine der drei Winkelgrößen α, β, γ das arithmetische Mittel der beiden anderen ist, gibt es nur die folgenden Möglichkeiten:
1. Fall: $\alpha = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$
Dies führt nach (1), (2) auf

$$360° - 4\gamma = 2\gamma - 90°; \quad \gamma = 75°; \quad \alpha = 60°; \quad \beta = 45°$$

2. Fall: $\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$
Dies führt nach (1), (2) auf

$$3\gamma - 180° = 180° - \frac{3}{2}\gamma; \quad \gamma = 80°; \quad \alpha = 40°; \quad \beta = 60°$$

3. Fall: $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$

Dies führt nach (1), (2) auf

$$\gamma = 90° - \frac{\gamma}{2}; \quad \gamma = 60°; \quad \beta = 0°$$

Der 3.Fall scheidet also aus.
II. Die Winkelgrößen des 1. bzw. des 2.Falles, d. h.

$$\alpha = 60°; \quad \beta = 45°; \quad \gamma = 75° \quad (3) \quad \text{bzw.} \quad \alpha = 40°; \quad \beta = 60°; \quad \gamma = 80° \qquad (4)$$

sind Innenwinkelgrößen von Dreiecken ABC (denn sie sind positiv und erfüllen $\alpha + \beta + \gamma = 180°$). Sie erfüllen auch die Bedingung, dass $AD = b$ für die Winkelhalbierende AD gilt; denn sie erfüllen die Gleichung $\frac{\alpha}{2} = 180° - 2\gamma$, woraus nach dem Innenwinkelsatz $\angle ADC = \gamma$ und daher nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes $AD = AC$ folgt.
Mit I., II. ist gezeigt, dass in (3), (4) alle gesuchten Möglichkeiten für α, β, γ angegeben sind.

Aufgabe 320924:
Auf einer Geraden g seien A, B, C drei Punkte; B liege zwischen A und C.
Über der Strecke AC sei nach einer Seite von g das gleichseitige Dreieck ACP errichtet, über die Strecken AB und BC nach der anderen Seite von g die gleichseitigen Dreiecke ABQ und BCR.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen (bei jeder Wahl der Streckenlängen $AB = a$ und $BC = b$) die Mittelpunkte L, M bzw. N der Dreiecke ACP, ABQ und BCR stets die Ecken eines ebenfalls gleichseitigen Dreiecks sind!

Lösung von cyrix:
Wir legen ein Koordinatensystem in die Ebene, sodass A im Punkt $(-a,0)$, B im Koordinatenursprung und C im Punkt $(b,0)$ liegt.
In jedem gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge s besitzt die Höhe genau die Länge $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$ und fällt mit der Mittelsenkrechten der gegenüberliegenden Seite zusammen. Gleichzeitig fällt sie mit der entsprechenden Seitenhalbierenden zusammen, welche vom Schwerpunkt im Verhältnis 2:1 geteilt wird, sodass der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks auf der Mittelsenkrechten einer Seite in der Höhe von $\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot s$.

Wenden wir dies auf die gegebene Situation an, so haben die Punkte L, M und N demnach die Koordinaten $\left(\frac{b-a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+b)\right)$, $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a\right)$ bzw. $\left(\frac{b}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b\right)$.

Es ergeben sich nach dem Satz des Pythagoras die Quadrate der Streckenlängen zwischen je zwei dieser Punkte zu

$$\begin{aligned}
|LM|^2 &= \left(\frac{b-a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+b) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a\right)\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (2a+b)\right)^2 \\
&= \frac{b^2}{4} + \frac{3}{36} \cdot (4a^2 + 4ab + b^2) = \frac{9b^2 + 12a^2 + 12ab + 3b^2}{36} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \\
|LN|^2 &= \left(\frac{b-a}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+b) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b\right)\right)^2 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (a+2b)\right)^2 \\
&= \frac{a^2}{4} + \frac{3}{36} \cdot (a^2 + 4ab + 4b^2) = \frac{9a^2 + 3a^2 + 12ab + 12b^2}{36} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \text{ und} \\
|MN|^2 &= \left(-\frac{a}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot a - \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b\right)\right)^2 = \left(-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot (b-a)\right)^2 \\
&= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} + \frac{3}{36} \cdot (a^2 - 2ab + b^2) = \frac{9a^2 + 18ab + 9b^2 + 3a^2 - 6ab + 3b^2}{36} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}
\end{aligned}$$

sodass $|LM| = |LN| = |MN| = \sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$ gilt und damit das Dreieck $\triangle LMN$ gleichseitig ist, $\square$.

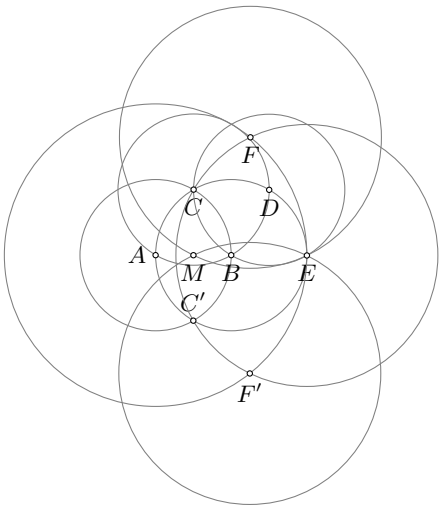
Aufgabe 330924:
Beweisen Sie, dass für jedes nicht gleichschenklige Dreieck ABC die folgende Aussage gilt! Ist X der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von BC mit der Winkelhalbierenden durch A und ist Y der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AC mit der Winkelhalbierenden durch B, so liegen die vier Punkte A, B, X, Y auf einem gemeinsamen Kreis.

Lösung von cyrix:
Nach dem Südpolsatz liegen X und Y auf dem Umkreis des Dreiecks $\triangle ABC$, also insbesondere damit auch auf einem gemeinsamen Kreis mit A und B, $\square$.

III Runden 3 & 4

Aufgabe V10934:
Man kann den Mittelpunkt M einer Strecke AB auf folgende Weise nur mit dem Zirkel konstruieren: Zeichnen Sie AB! Schlagen Sie um B mit AB einen Kreis und um A mit der gleichen Zirkelspanne ebenfalls einen Kreis, der den anderen Kreis in C bzw. C' schneidet! Um C schlagen Sie wiederum einen Kreis mit gleicher Zirkelspanne, der den Kreis um B in D schneidet! Schlagen Sie nun einen gleich großen Kreis um D!
Sie erhalten Punkt E als Schnittpunkt mit dem Kreis um B. Jetzt schlagen Sie um E mit CE und um A mit AE Kreise, die einander in F und F' schneiden!
Schlagen Sie schließlich noch um F und F' Kreise mit FE, dann erhalten Sie den Punkt M!
Beweisen Sie, dass M der Mittelpunkt von AB ist!

Lösung von Steffen Polster:



Es sei $AB = r$ der Radius des ersten Kreises. Weiterhin liege A im Koordinatenursprung und B bei $(r, 0)$.
Dann ergeben sich für die Punkte auf Grund der Konstruktion die Koordinaten:

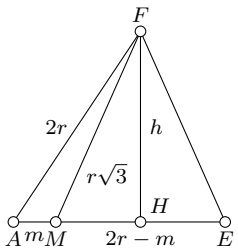
$$A(0,0) \quad ; \quad B(r,0) \quad ; \quad C\left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right) \quad ; \quad E(2r,0)$$

Damit ergibt sich für den Abstand der Punkte C und E: $CE = \sqrt{3}r$, sowie $AE = 2r$. Für die Punkte F und F' wird mit der Konstruktion für das Dreieck AFE

$$AE = 2r \quad ; \quad AF = 2r \quad ; \quad EF = \sqrt{3}r$$

Der Schnittpunkt M der Kreise um F und F' mit dem Radius EF liegt aus Symmetriegründen auf der Strecke AE (1).

Für den Punkt $M(m; 0)$ ergibt sich dann in den zwei rechtwinkligen Dreiecken AHF und MFH für die Höhe h:



$$h^2 = (2r)^2 - \left(m + \frac{2r-m}{2}\right)^2 \quad ; \quad h^2 = (r\sqrt{3})^2 - \left(\frac{2r-m}{2}\right)^2$$

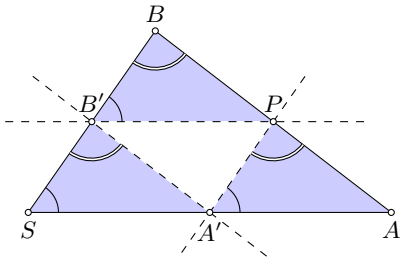
Gleichsetzen und Auflösen nach m ergibt:

$$m^2 + 4mr - 12r^2 = m^2 - 4mr - 8r^2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{r}{2}$$

Damit ist mit (1) M Mittelpunkt der Strecke AB. w. z. b. w.

Aufgabe 010934:
Gegeben seien ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S sowie ein zwischen den Schenkeln dieses Winkels, aber nicht auf der Winkelhalbierenden liegender Punkt P.
Konstruieren Sie eine durch P verlaufende Gerade, die die Schenkel des Winkels in den Punkten A und B so schneidet, dass $PA = PB$ wird!
Die Konstruktion ist zu begründen!

Lösung von Carsten Balleier:



Konstruktion: Man ziehe die Parallelen zu beiden Schenkeln durch den Punkt P. Dadurch erhält man die Punkte A' und B' als Schnittpunkte mit den Schenkeln.
Verlängert man SA' und SB' über A' bzw. B' hinaus um ihre jeweilige eigene Länge, dann erhält man die Punkte A und B und damit die gesuchte Gerade.

Beweis:
Dass $PA = PB$ tatsächlich erfüllt ist, sieht man beim Vergleichen der Dreiecke $SA'B'$, $A'AP$ und $B'PB$.
Es gilt nämlich
$\angle A'SB' = \angle AA'P = \angle PB'B$ (Stufenwinkel an den Parallelen $SA \parallel B'P$),
$\angle A'B'S = \angle APA' = \angle PBB'$ (Stufenwinkel an den Parallelen $SB \parallel A'P$) und
$\overline{SA'} = \overline{A'A}$ bzw. $\overline{SB'} = \overline{B'B}$ (per Konstruktion).
Damit sind die drei genannten Dreiecke kongruent, die Seiten PA und PB also gleich.

Aufgabe 070935:
Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen a, b und c bekannt.
Berechnen Sie die Länge s_c der Seitenhalbierenden der Seite AB!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Sei S der Mittelpunkt der Strecke AB. Mittels Kosinussatz in den Dreiecken ABC und ASC erhalten wir:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos(\alpha) = \frac{b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - s_c^2}{2b\frac{c}{2}}$$

und somit

$$\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = b^2 + \frac{1}{4}c^2 - s_c^2 \iff s_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

Aufgabe 080934:
Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$. Man ermittle das Verhältnis der Inhalte von In- und Umkreisfläche dieses Dreiecks zueinander!

Lösung von cyrix:
Im gleichseitigen Dreieck fallen Mittelsenkrechten, Winkelhalbierende und Seitenhalbierende zusammen, insbesondere also auch ihre Mittelpunkte. Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1, wobei der längere Abschnitt in Richtung der Eckpunkte liegt.
Demzufolge ist der Umkreisradius genau doppelt so groß wie der Inkreisradius und es ergibt sich ein Verhältnis von 4 zwischen Umkreisfläche und Inkreisfläche.

Aufgabe 090935:
Die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ werde durch eine Parallele zur Seite AB in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt.
Ermitteln Sie das Verhältnis, in dem die zur Seite AB gehörende Höhe des Dreiecks durch die Parallele geteilt wird!

Lösung von cyrix:
Es seien P und Q die Schnittpunkte der Parallelen mit den Seiten AC bzw. BC. Darüber hinaus seien h_{AB} und h_{PQ} die Längen der Höhen des Punktes C auf AB bzw. die Parallele PQ.
Nach Aufgabenstellung ist der Flächeninhalt A_{PQC} des Dreiecks $\triangle PQC$ genau halb so groß wie der Flächeninhalt A_{ABC} des Dreiecks $\triangle ABC$.
Also ist

$$\frac{1}{2}|PQ| \cdot h_{PQ} = A_{PQC} = \frac{1}{2}A_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot |AB| \cdot h_{AB}$$

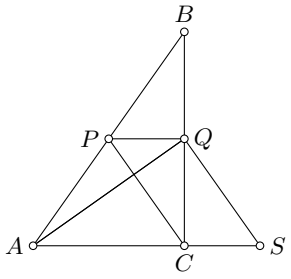
bzw.

$$2 = \frac{|AB|}{|PQ|} \cdot \frac{h_{AB}}{h_{PQ}}$$

Nach den Strahlensätzen ist $\frac{|AB|}{|PQ|} = \frac{h_{AB}}{h_{PQ}}$, also $h_{AB} = \sqrt{2} \cdot h_{PQ}$. Damit wird die Höhe h_{AB} im Verhältnis $1 : (\sqrt{2} - 1)$ durch die Parallele PQ zu AB geteilt.

Aufgabe 110933:
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Verhalten sich die Seitenlängen eines Dreiecks $\triangle ABC$ wie $\sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$, dann stehen zwei Seitenhalbierende dieses Dreiecks senkrecht aufeinander.

Lösung von cyrix:
Wegen $\sqrt{3}^2 = \sqrt{2}^2 + 1^2$ ist das Dreieck rechtwinklig. Im folgenden betrachten wir ein Dreieck ABC mit $|AB| = \sqrt{3}$, $|AC| = 1$ und $|BC| = \sqrt{2}$.



Wir verschieben die Seitenhalbierende CP parallel zu QS (PQ ist parallel zu AC). Das Dreieck AQS hat die Seitenlängen

$$|AS| = \frac{3}{2}, \quad |AQ|^2 = |AC|^2 + |CQ|^2 = \frac{3}{2}, \quad |QS|^2 = |QC|^2 + |CS|^2 = \frac{3}{4}$$

Diese erfüllen die Gleichung $|AS|^2 = |AQ|^2 + |QS|^2$. Daher sind die beiden Seitenhalbierenden AQ, CP orthogonal.

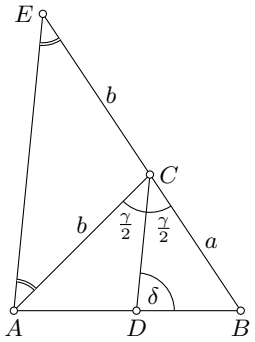
Aufgabe 150932:
Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $BC = a$ und die Höhenlänge $AD = h_a$ bekannt. Eine Gerade g verläuft so, dass BC auf g liegt.
Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der durch Rotation der Dreiecksfläche um die Gerade g beschrieben wird!

Lösung von cyrix:
Durch den ebenen Schnitt mit der Ebene, die senkrecht zu g durch A verläuft (und in der dann nach Konstruktion auch der Höhenfußpunkt D liegt), zerlegt den Rotationskörper in zwei gerade Kreiskegel: Beide besitzen den aus der Rotation der Strecke AD gebildeten Kreis als gemeinsame Grundfläche sowie B bzw. C als Spitze. Damit ist

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h_a^2 \cdot (|BD| + |DC|) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h_a^2 \cdot a$$

Aufgabe 150935:
Beweisen Sie den folgenden Satz! In jedem Dreieck teilt die Halbierende jedes Innenwinkels die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Dabei seien a, b und c in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten BC, AC bzw. AB und α, β und γ die Größen der Innenwinkel bei A, B und C.
Ferner schneide die Halbierende des Winkels $\angle ACB$ die Seite AB in D.
Da Jede Winkelhalbierende eines Dreiecks stets innerhalb des Dreiecks verläuft, liegt D zwischen A und B.
Es wird nun (o. B. d. A.) behauptet: $AD : BC = AC = BC$.

Beweis: Man verlängert BC über C hinaus um b bis zum Punkt E.
Wegen $AC = EC$ ist das Dreieck ACE gleichschenklig.
Also gilt $\angle CAE = \angle CEA$ (als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck) und ferner $\angle CAE + \angle CEA = \gamma$ (nach dem Außenwinkelsatz).
Daraus folgt $\angle CAE = \frac{\gamma}{2}$.

Die Winkel $\angle CAE$ und $\angle ACD$ sind Wechselwinkel an geschnittenen Geraden und außerdem gleich groß.
Folglich sind die Geraden CD und AE parallel.
Daher gilt nach einem der Strahlensätze und wegen $AC = EC = b$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{EC}{BC} = \frac{AC}{BC}$$

Aufgabe 160935:
Es sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck. Von allen Geraden, die die Fläche des Dreiecks ABC in zwei Teilflächen zerlegen, seien diejenigen Geraden ausgewählt, die zwei zueinander inhaltsgleiche Teilflächen erzeugen.
Untersuchen Sie, ob es einen Punkt P gibt, durch den alle diese Geraden gehen!

Lösung von cyrix:
Nein, einen solchen Punkt gibt es nicht.
Da jede Seitenhalbierende das Dreieck in zwei flächengleiche Teilflächen zerlegt, sich diese aber allein im Schwerpunkt des Dreiecks schneiden, wäre der einzig in Frage kommende Punkt P eben der Schwerpunkt des Dreiecks.
Dieser teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1. Die Parallele zur Seite AB durch den Schwerpunkt schneide die Seiten AC und BC in D bzw. E.
Dann ist das Dreieck DEC ähnlich zum Dreieck ABC und es gilt nach dem Strahlensatz, dass der Streckungsfaktor $\frac{2}{3}$ ist.
Damit hat aber das Dreieck DEC nur $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$ des Flächeninhalts vom Dreieck ABC. Demzufolge gibt es eine Parallele zur Seite AB, die näher an dieser liegt als die gerade betrachtete Parallele durch den Schwerpunkt, welche das Dreieck in zwei flächengleiche Stücke zerlegt. Diese neue Parallele verläuft dann aber nicht mehr durch den Schwerpunkt, sodass wir mit den drei Seitenhalbierenden und dieser Parallele vier Geraden, die die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllen, gefunden haben, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

Aufgabe 170933:
In einem Dreieck ABC sei $AC = b = 13$ cm und $BC = a = 15$ cm. Das Lot von C auf die Gerade durch A und B sei CD, und es gelte $CD = h_c = 12$ cm.
Ermitteln Sie für alle Dreiecke ABC, die diesen Bedingungen entsprechen, den Flächeninhalt I!

Lösung von cyrix:
Das Dreieck $\triangle ACD$ ist rechtwinklig mit rechtem Winkel bei D. Nach dem Satz von Pythagoras gilt also $|AD|^2 + |CD|^2 = |AC|^2$, also wegen $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$ ist $|AD| = 5$ cm.
Auf analoge Weise im rechtwinkligen Dreieck $\triangle BCD$ erhält man wegen $\sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9$, dass $|BD| = 9$ cm.

Liegen A und B auf der gleichen Seite von D auf der Geraden durch A und B (handelt es sich also beim Dreieck $\triangle ABC$ um ein stumpfwinkliges, sodass der Höhenfußpunkt D außerhalb liegt), so gilt $c = |AB| = |BD| - |AD| = 4$ cm und somit $I = \frac{1}{2}c \cdot h_c = 24\ cm^2$.
Liegen dagegen A und B auf verschiedenen Seiten von D auf der Geraden durch A und B (also D zwischen ihnen), dann ist $c = |AB| = |AD| + |BD| = 14$ cm und damit $I = 84\ cm^2$.

Aufgabe 180934:
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C teile die von C auf die Hypotenuse AB gefällte Höhe diese im Verhältnis $1 : 3$.
Berechnen Sie die Größe der bei A bzw. B liegenden Innenwinkel des Dreiecks ABC!

Lösung von cyrix:
Es sei H der Fußpunkt der Höhe von C auf AB und es gelte $|HB| = 3 \cdot |AH|$. Weiterhin seien $\alpha := \angle BAC$ und $\beta := \angle ABC$.
Dann ist $|AB| = 4 \cdot |AH|$ und nach dem Kathetensatz $|BC| = \sqrt{|AH| \cdot |AB|} = 2 \cdot |AH|$.
Nach der Definition des Sinus im rechtwinkligen Dreieck ist $\sin \alpha = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{1}{2}$, also $\alpha = 30°$, da $0 < \alpha < 90°$ gilt.
Aus der Innenwinkelsumme im Dreieck erhält man schließlich $\beta = 180° - 90° - 30° = 60°$.

Aufgabe 180936:
Gegeben seien ein Dreieck ABC sowie zwei Punkte A_1 und B_2 im Innern dieses Dreiecks.
Bei der Verschiebung, die A in A_1 überführt, habe $\triangle ABC$ das Bilddreieck $A_1B_1C_1$.
Bei der Verschiebung, die B in B_2 überführt, habe $\triangle ABC$ das Bilddreieck $A_2B_2C_2$.
Der Durchschnitt der Dreiecksflächen (ABC) und $(A_1B_1C_1)$ sei die Fläche F_1. Der Durchschnitt der Dreiecksflächen (ABC) und $(A_2B_2C_2)$ sei die Fläche F_2.
Man beweise, dass F_1 entweder durch eine Verschiebung oder durch eine zentrische Streckung in F_2 überführt werden kann.
Hinweis: Ist XYZ ein Dreieck, so verstehen wir unter der Dreiecksfläche (XYZ) die Menge aller Punkte auf dem Rande und im Innern des Dreiecks XYZ.

Lösung von cyrix:
Durch Verschiebungen bleiben Richtungen erhalten, sodass Bildgeraden parallel zu ihren Urbildern sind. Insbesondere sind also die Geraden A_1C_1 und AC zueinander parallel und schneiden sich, da A_1 nicht auf AC liegt, nicht.
Es liegt A_1 in der bezüglich AB gleichen Halbebene wie der Punkt C, sodass der von A_1 ausgehende und durch C_1 verlaufende Strahl die Gerade AB nicht schneidet. Also muss die Strecke A_1C_1 wegen $A_1C_1 \parallel AC$ und $|A_1C_1| = |AC|$ die dritte Dreiecksseite BC schneiden.
Es sei S_C dieser Schnittpunkt. Analog erhält man, dass auch A_1B_1 nur genau die Seite BC schneidet und sei S_B dieser Schnittpunkt.
Dann ist $F_1 = (A_1S_BS_C)$. Aufgrund der Parallelitäten $A_1SB = A_1B_1 \parallel AB$, $A_1SC = A_1C_1 \parallel AC$ und $S_BSC = BC$ ist dabei $\triangle A_1S_BS_C \sim \triangle ABC$.

Analog erhält man $F_2 = (T_AB_2T_C)$ und $\triangle T_AB_2T_C \sim \triangle ABC$, wobei T_A und T_C die Schnittpunkte von A_2B_2 bzw. C_2B_2 mit AC seien. Auch hier gilt, dass entsprechende Seiten parallel sind.
Insbesondere sind die beiden F_1 und F_2 definierenden Dreiecke $\triangle A_1S_BS_C$ und $\triangle T_AB_2T_C$ zueinander ähnlich und entsprechende Seiten beider Dreiecke liegen jeweils parallel zueinander.

Wir betrachten nun die Geraden T_AA_1 und B_2S_B. Sind diese Geraden nicht parallel, so sei Z ihr Schnittpunkt und es gilt nach dem Strahlensatz mit Scheitelpunkt Z und geschnittenen Parallelen $A_1S_B \parallel T_AB_2$ die Beziehung $\frac{|ZT_A|}{|ZA_1|} = \frac{|ZB_2|}{ZS_B} =: f$. Die zentrische Streckung mit Zentrum Z und Faktor f bildet also A_1 auf T_A und S_B auf B_2 ab.

Da zentrische Streckungen Richtungen erhalten, muss durch diese Streckung auch S_C als Schnitt von Parallelen zu AB und BC durch S_B auch auf den Schnittpunkt der Parallelen zu diesen beiden Geraden durch B_2, also T_C abgebildet werden. Also bildet diese zentrische Streckung das Dreieck $\triangle A_1S_BS_C$ auf das Dreieck $\triangle T_AB_2T_C$ und damit auch F_1 auf F_2 ab.

Schneiden sich die Geraden T_AA_1 und B_2S_B dagegen nicht, sind aber verschieden, so bildet das Viereck $A_1S_BB_2T_A$ ein Parallelogramm. Insbesondere sind dann die beiden Strecken $|A_1S_B|$ und $|T_AB_2|$ kongruent und parallel, sodass auch die Figuren F_1 und F_2 kongruent sind und man F_2 aus F_1 durch die Verschiebung, die A_1 auf T_A abbildet, erhält.
Liegen abschließend T_A, A_1, B_2 und S_B auf einer Geraden g, dann unterscheiden wir die beiden Fälle, ob die Gerade T_CS_C diese schneidet, oder parallel dazu ist. (Identisch kann sie nicht sein, da sonst A_1, S_B und S_C auf einer Geraden lägen, was aufgrund der Definition der beiden letzteren als Schnittpunkte von verschiedenen von A_1 ausgehenden Strahlen mit der gleichen Gerade BC zum Widerspruch führen würde.)

Schneidet T_CS_C die Gerade g, so sei Z ihr Schnittpunkt und wegen $A_1S_C \parallel T_AT_C$ folgt aufgrund des Strahlensatzes $\frac{|ZT_A|}{|ZA_1|} = \frac{|ZT_C|}{|ZS_C|} =: f$, sodass durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum Z um den Faktor f die Punkte A_1 und S_C auf T_A bzw. T_C abgebildet werden. Analog oben schlussfolgert man nun, dass durch diese zentrische Streckung auch S_B auf B_2 und damit F_1 auf F_2 abgebildet wird.

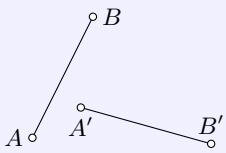
Sind dagegen g und T_CS_C parallel und verschieden, so bilden $T_AA_1S_CT_C$ und $B_2S_BS_CT_C$ Parallelogramme, sodass $|T_AA_1| = |T_CS_C| = |B_2S_B|$ gilt und die zugehörigen Geraden alle parallel zueinander sind, sodass F_2 aus F_1 durch die Verschiebung hervorgeht, die A_1 auf T_A abbildet.

Damit wurde in jedem Fall gezeigt, dass man F_2 aus F_1 durch eine Verschiebung oder eine zentrische Streckung erhalten kann. Beides zugleich ist aber nicht möglich, da eine Verschiebung die Kongruenz der Figuren voraussetzt, während jede zentrische Streckung um einen Faktor verschieden von ± 1 die Kongruenz zerstört und nur Ähnlichkeit erhält.

Eine Streckung um den Faktor -1 würde aber die Orientierung ändern, während der Umlaufsinn der entsprechenden Punkte $A_1S_BS_C$ bzw. $T_AB_2T_C$ identisch ist. Und eine Streckung um den Faktor 1 entspricht der Identitätsabbildung. Jedoch kann nicht $F_1 = F_2$ gelten, da B_2 im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$ liegt, während der entsprechende Punkt S_B von F_2 sich auf dem Rand von $\triangle ABC$ befindet, also von B_2 verschieden ist.
Demnach gibt es für jeden Fall entweder eine Verschiebung oder eine zentrische Streckung, die F_2 auf F_1 abbildet, $\square$.

Aufgabe 190935:

Auf der Abbildung sind zwei zueinander kongruente Strecken AB und $A'B'$ gegeben. Gesucht ist ein Punkt Z der Zeichenebene mit folgender Eigenschaft:
Es gibt eine Drehung um Z, die A in A' und B in B' überführt.



Beschreiben und begründen Sie eine Konstruktion eines solchen Punktes Z (falls ein solcher existiert)! Untersuchen Sie, ob genau ein solcher Punkt Z existiert!

Lösung von cyrix:
Fallen die beiden Punkte A und A' zusammen, so gilt offenbar $Z = A$, da bei einer Drehung (um einen

von Vielfachen von 360° verschiedenen Drehwinkel) das Zentrum der einzige Fixpunkt ist. (Ansonsten bleiben alle Punkte fix, was genau dann der Fall wäre, wenn auch $B = B'$ gilt. Dann kann man jeden Punkt der Ebene als Z und den Drehwinkel 0° wählen.) Analog gilt für $B = B'$ und $A \neq A'$, dass man ausschließlich $Z = B$ als Drehzentrum wählen kann. In beiden Fällen (die nicht beide Punkte auf sich selbst abbilden) ist dann nicht nur das Drehzentrum Z, sondern auch der Drehwinkel zwischen 0° und 360° eindeutig bestimmt.

Sei ab nun $A \neq A'$ und $B \neq B'$, sodass die jeweiligen Geraden AA' und BB' auch existieren.
Wenn es einen solchen Punkt Z gibt, dann muss $|AZ| = |A'Z|$ und $|BZ| = |B'Z|$ gelten, sodass Z auf den Mittelsenkrechten von AA' und BB' liegen muss. Sind diese Mittelsenkrechten nicht parallel (was genau dann der Fall ist, wenn die Geraden AA' und BB' nicht parallel sind), dann ist dieser Punkt Z also eindeutig bestimmt.

In dem Fall sind die Dreiecke $\triangle ABZ$ und $\triangle A'B'Z$ nach dem Kongruenzsatz sss zueinander kongruent. Es ist also $\angle AZB = \angle A'ZB'$, also (ggf. mit vorzeichenbehafteten Winkeln zu lesen) $\angle AZA' = \angle AZB + \angle BZA' = \angle A'ZB' + \angle BZA' = \angle BZB'$, sodass bei einer Drehung um Z mit Drehwinkel $\angle AZA'$ nicht nur A auf A', sondern auch B auf B' abgebildet wird. Auch hier sind wieder Drehzentrum und Drehwinkel eindeutig bestimmt.

Sind dagegen die Mittelsenkrechten von AA' und BB' parallel, so kann es einen solchen Punkt Z nur dann geben, wenn diese beiden Mittelsenkrechten die gleiche Gerade bilden. Andernfalls gibt es keinen Punkt Z, der $|AZ| = |A'Z|$ und $|BZ| = |B'Z|$ erfüllt, was für die Eigenschaft, Drehzentrum zu sein, notwendig ist.

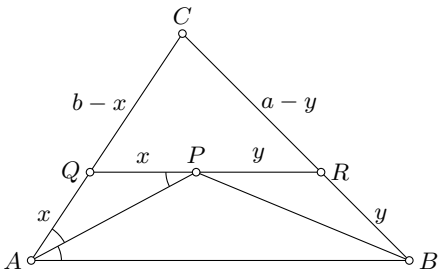
Seien also nun diese Mittelsenkrechten von AA' und BB' identisch und mit m bezeichnet. Dann muss jedes Drehzentrum Z auf m liegen. Sei Z ein solches Drehzentrum. Dann gilt $\angle AZA' = \angle BZB'$, sodass die gleichschenkligen Dreiecke $\triangle AA'Z$ und $\triangle BB'Z$ in ihren Nicht-Basiswinkeln übereinstimmen, also zueinander ähnlich sind. Demzufolge stimmen auch die zugehörigen Winkel $\angle ZAA'$ und $\angle ZBB'$ überein.

Da die beiden Schenkel AA' und BB' zueinander parallel sind, müssen es die entsprechend zweiten Schenkel der Winkel $\angle ZAA' = \angle ZBB'$ auch sein, was $ZA \parallel ZB$ nach sich zieht, sodass Z auch auf der Geraden AB liegen muss. Ist aber AB parallel zu und verschieden von m, gibt es keinen solchen Schnittpunkt und damit auch kein Drehzentrum.

Andernfalls ist Z nun als Schnitt zweier Geraden m und AB eindeutig bestimmt, da A nicht auf m, der Mittelsenkrechten von AA' liegen kann, da wir $A \neq A'$ vorausgesetzt haben. Da die Spiegelung an M A in A' und B in B' überführt, ist der Schnittpunkt Z von m und AB auch der von m und $A'B'$, sodass auch Z auf der Geraden $A'B'$ liegt und damit $\angle AZA' = BZB'$ gilt, sodass tatsächlich eine Drehung um Z mit diesem Winkel existiert, welche A auf A' und B auf B' abbildet.

Aufgabe 220936:
Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $AB = c$, $AC = b$ und $BC = a$ gegeben. Die Halbierenden der Winkel $\angle CAB$ und $\angle ABC$ mögen einander in P schneiden. Durch P sei die Parallele zu AB gelegt. Sie schneide AC in Q und BC in R.
Ermitteln Sie die Länge QR in Abhängigkeit von den drei gegebenen Seitenlängen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $x = PQ$, $y = PR$. Dann gilt nach Voraussetzung $\angle PAQ = \angle BAP = \angle QPA$ (Wechselwinkel an den Parallelen AB, PQ), also ist das Dreieck APQ gleichschenklig mit $AQ = PQ = x$. Entsprechend gilt $BR = PR = y$.

Wegen $QR \parallel AB$ folgt aus dem Strahlensatz

$$CA : CB = QA : RB, \qquad b : a = x : y, \qquad by = ax \tag{1}$$

$$CA : CQ = AB : AR, \qquad b : (b - x) = c : (x + y), \qquad bx + by = bc - cx \tag{2}$$

Setzt man (1) in (2) ein, so folgt $bx + ax = bc - cx$ und

$$x = \frac{bc}{a + b + c}$$

hieraus und aus (1) folgt $y = \frac{ax}{b} = \frac{ac}{a+b+c}$. Damit ergibt sich

$$QR = x + y = \frac{(a + b)c}{a + b + c}$$

Aufgabe 230935:
In einem Dreieck ABC schneide eine Parallele zu AB, über deren Lage sonst nichts vorausgesetzt werden soll, die Seite AC in einem Punkt A_1 zwischen A und C, und sie schneide die Seite BC in B_1. Ferner sei P auf AB ein Punkt zwischen A und B, über dessen Lage sonst ebenfalls nichts vorausgesetzt werden soll.
Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC sei F_0, der Flächeninhalt des Dreiecks A_1B_1C sei F_1.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt F des Vierecks A_1PB_1C in Abhängigkeit von F_0 und F_1!

Lösung von cyrix:
Die Dreiecke $\triangle A_1B_1C$ und $\triangle ABC$ sind aufgrund der Parallelität von A_1B_1 und AB zueinander ähnlich, da ihre entsprechenden Innenwinkel bei A_1 und A bzw. B_1 und B jeweils Stufenwinkel, also insbesondere gleich groß, sind. Damit gibt es eine reelle Zahl $k > 0$, sodass $\triangle A_1B_1C$ aus $\triangle ABC$ durch Streckung um den Faktor k mit Zentrum C hervorgeht.

Sei h die Länge der Höhe von C auf AB und h_1 die von C auf A_1B_1. Insbesondere gilt dann $h_1 = k \cdot h$ und $|A_1B_1| = k \cdot |AB|$, also $F_1 = k^2 \cdot F_0$, d. h. $k = \sqrt{\frac{F_1}{F_0}}$.

Die Diagonale A_1B_1 zerlegt das Viereck A_1PB_1C in die zwei Dreiecke $\triangle A_1B_1C$ und $\triangle A_1B_1P$, sodass sich sein Flächeninhalt als Summe der Flächeninhalte dieser beiden Teildreiecke ergibt.

Es sei h_2 die Länge der Höhe von P auf A_1B_1 und F der Fußpunkt von C auf AB sowie F_1 der Fußpunkt der Höhe von C auf A_1B_1. Da $A_1B_1 \parallel AB$ gilt, liegt F_1 auf CF und es gilt

$$h = |CF| = |CF_1| + |F_1F| = h_1 + |F_1F|$$

Wiederum wegen $A_1B_1 \parallel AB$ ist $h_2 = |F_1F|$, da F_1 auch der Fußpunkt der Höhe von F auf A_1B_1 ist. Insbesondere ist also $h_2 = h - h_1 = (1 - k) \cdot h$.

Für das Dreieck $\triangle A_1B_1P$ ergibt sich also ein Flächeninhalt von

$$F_P := \frac{1}{2}|A_1B_1| \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot |AB| \cdot (1 - k) \cdot h = F_0 \cdot (k - k^2)$$

und damit für den Flächeninhalt F des Vierecks A_1PB_1C

$$F = F_P + F_1 = F_0 \cdot (k - k^2 + k^2) = F_0 \cdot k = F_0 \cdot \sqrt{\frac{F_1}{F_0}} = \sqrt{F_1 \cdot F_0}.$$

Aufgabe 230936:
Drei Schüler X, Y, Z diskutieren über die Möglichkeiten, ein gleichseitiges Dreieck D in drei flächengleiche Dreiecke D_1, D_2, D_3 zu zerlegen.
X behauptet: Es gibt genau drei verschiedene derartige Zerlegungen.
Y behauptet: Es gibt genau vier verschiedene derartige Zerlegungen.
Z behauptet: Es gibt mehr als vier verschiedene derartige Zerlegungen.
Welcher der drei Schüler hat recht?
Hinweis: Zwei Zerlegungen von D (einmal in D_1, D_2, D_3, ein zweites Mal in D_1', D_2', D_3') werden dabei genau dann als verschieden bezeichnet, wenn es keine Reihenfolge der Bezeichnungen D_1', D_2', D_3' gibt, für die $D_1 \cong D_1', D_2 \cong D_2', D_3 \cong D_3'$ gilt.

Lösung von cyrix:
Y hat recht: Es gibt genau vier verschiedene derartige Zerlegungen, wie im Folgenden bewiesen wird.

Es sei D das gleichseitige Dreieck $\triangle ABC$ mit Kantenlänge $|AB| = |BC| = |CA| = a$. Dann muss jeder dieser drei Punkte A, B, C auch Eckpunkt mindestens eines der drei Teildreiecke D_1, D_2, D_3 sein.

Für jeden weiteren Eckpunkt P eines dieser drei Teildreiecke gilt, dass er auch Eckpunkt mindestens eines weiteren Teildreiecks sein muss. Also kann es höchstens $\frac{3 \cdot 3 - 3}{2} = 3$ verschiedene weitere Eckpunkte der Teildreiecke geben.

Nehmen wir an, es gäbe drei und seien dies P_1, P_2 und P_3. Sie müssten dann Eckpunkte von je genau zwei der Teildreiecke sein, sodass A, B und C Eckpunkt von nur jeweils genau einem der Teildreiecke sind. Es sei A o. B. d. A. Eckpunkt von D_1. Da A nicht Eckpunkt eines weiteren Teildreiecks ist, muss der gesamte Winkel $\angle BAC$ durch D_1 abgedeckt werden. Also müssen die beiden anderen Eckpunkte von D_1 auf den Kanten AB und AC liegen.

Wäre auch B Eckpunkt von D_1, so müsste dessen dritter Eckpunkt analog auch auf BC liegen, also auf dem Schnittpunkt von AC und BC, sodass $D_1 = \triangle ABC = D$ folgen würde, was ein Widerspruch ist. Also liegt auf jedem Teildreieck genau einer der Eckpunkt von D und zwei der Punkte P_1, P_2, P_3, welche auf den vom entsprechenden Eckpunkt von D ausgehenden Kanten von D liegen müssen. Damit verbliebe aber in der Zerlegung das Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$, welches nicht durch die Teildreiecke D_1, D_2, D_3 abgedeckt wird, sodass wieder ein Widerspruch entsteht.

Also können wir schlussfolgern, dass es höchstens zwei zusätzliche Eckpunkte gibt und damit auch mindestens eine der Seiten des Dreiecks D nicht durch einen zusätzlichen Eckpunkt der Teildreiecke zerlegt wird. Wir führen im Folgenden eine Fallunterscheidung danach durch, wie viele der Kanten von D durch zusätzliche Eckpunkte der Teildreiecke zerlegt werden:

Fall 1: Keine der Kanten AB, BC, AC wird durch einen zusätzlichen Eckpunkt zerlegt. Dann seien o. B. d. A. A, B Eckpunkte von D_1; B, C von D_2 und C, A von D_3. Da es nur höchstens zwei zusätzliche Eckpunkte geben kann, müssen die dritten Eckpunkte von mindestens zwei der drei Teildreiecke zusammenfallen. O. B. d. A. haben D_1 und D_2 den gemeinsamen dritten Eckpunkt P. Dann jedoch muss auch der dritte Eckpunkt von D_3 gleich P sein, da dieser auch Eckpunkt eines weiteren Teildreiecks sein muss.

Damit die drei Teildreiecke alle flächengleich sind, müssen sie, da sie D zerlegen, jeweils ein Drittel von dessen Flächeninhalt besitzen. Da D_1 mit AB auch eine Seitenkante der Länge a besitzt, muss P auf einer Parallelen zu AB im Abstand $\frac{1}{3}h$ liegen, wobei h die Länge der Höhe in D ist. Nach dem Strahlensatz und der Eigenschaft, dass der Schwerpunkt S eines Dreiecks jede Seitenhalbierende im Verhältnis $2 : 1$ teilt, liegt auch S auf dieser Parallele. Also muss P auf der Parallelen zu AB durch S liegen. Analog muss er wegen D_2 auch auf der Parallelen zu BC durch S liegen, sodass $P = S$ folgt. Abschließend ist dann aber auch die Höhe von $P = S$ auf AC in D_3 genau ein Drittel mal so lang wie die Höhe in D, sodass auch D_3 flächengleich zu D_1 und D_2 ist und diese drei Teildreiecke D vollständig zerlegen.

Wir erhalten also in diesem Fall die eindeutige Zerlegung, die durch die Verbindung des Schwerpunkts S von D mit seinen drei Eckpunkten entsteht. Die Teildreiecke D_1, D_2, D_3 sind paarweise kongruent.

Fall 2: Genau eine der Kanten von D, o. B. d. A. sei dies BC, wird durch mindestens einen zusätzlichen Eckpunkt zerlegt. O. B. d. A. sei damit die Kante AB vollständig in D_1 und AC vollständig in D_3 enthalten und seien deren dritte Eckpunkte mit P_1 bzw. P_3 bezeichnet. Mindestens einer von diesen beiden Punkte, o. B. d. A. P_1, muss auf BC liegen. Wir unterscheiden zwei Unterfälle, je nach dem, wo P_3 liegt.

Fall 2.1: Auch P_3 liegt auf BC. Da die Höhen von A auf die Gerade $BC = BP_1 = P_2C$ identisch sind mit der Höhe von A auf BC in D, besitzen D_1 und D_3 genau dann jeweils ein Drittel des Flächeninhalts von D, wenn $|BP_1| = |P_3C| = \frac{1}{3} \cdot |BC|$ gilt. Dann ist jedoch auch $|P_1P_3| = \frac{1}{3} \cdot |BC|$, sodass auch das entstehende Dreieck $D_2 = \triangle AP_1P_3$ flächengleich zu D_1 und D_3 ist, sowie diese drei Teildreiecke D vollständig zerlegen.

Wir erhalten also in diesem Fall die eindeutige Zerlegung, die durch Drittelung einer Seitenkante von D und Verbindung der dort entstehenden zwei Zwischenpunkte mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt von D entsteht. Alle drei Teildreiecke besitzen eine Seite mit Länge $\frac{1}{3}a$, zwei dieser drei Teildreiecke (D_1 und D_3 in der obigen Bezeichnung) sind zueinander kongruent und besitzen als eine zweite Kantenlänge a, während das dritte gleichschenklig ist.

Fall 2.2: Der dritte Eckpunkt P_3 von D_3 liegt nicht auf BC und damit echt im Innern des Dreiecks D. Wie im Fall 2.1 folgt, dass $|BP_1| = \frac{1}{3}|BC|$ gelten muss. Das entstehende Dreieck $\triangle AP_1C$ muss nun in zwei flächengleiche Teildreiecke D_2 und D_3 zerlegt werden. Dies ist nur möglich, indem es durch eine Seitenhalbierende zerlegt wird. Damit muss P_3 Mittelpunkt einer der Seiten von $\triangle AP_1C$ sein. Da aber P_3 nach Fallannahme weder auf AC noch BC liegt, muss P_3 der Mittelpunkt von AP_1 sein.

Wir erhalten also in diesem Fall die eindeutige Zerlegung, die durch Einzeichnen eines Punkts P_1, der eine Seitenkante CB von D im Verhältnis 2:1 teilt, der Verbindung dieses Punkts mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt A von D und dem Einzeichnen der Verbindung des Mittelpunkts P_3 von AP_1 mit dem dritten Eckpunkt C von D entsteht. Genau zwei der drei Teildreiecke besitzen eine Seite der Länge a, wobei genau eine davon eine zweite Kante der Länge $\frac{1}{3}a$ besitzt.

Fall 3: Genau zwei der drei Kanten von D werden durch zusätzliche Eckpunkte der Teildreiecke geteilt, seien dies o. B. d. A. P_1 auf BC und P_3 auf AC, sodass AB ungeteilt verbleibt und vollständig o. B. d. A. in D_1 enthalten ist. Dessen dritter Eckpunkt muss dann P_1 oder P_3 sein, wobei wir o. B. d. A. annehmen können, dass P_1 der dritte Eckpunkt von D_1 ist. Dann folgt analog Fall 2.1, dass $|BP_1| = \frac{1}{3} \cdot |BC|$ gelten muss und analog Fall 2.2, dass P_3 der Mittelpunkt einer Seite des Dreiecks $\triangle AP_1C$, hier also von AC ist. Man überprüft leicht, dass alle entstehenden Teildreiecke den gleichen Flächeninhalt besitzen.

Wir erhalten hier also die eindeutige Zerlegung, die entsteht, wenn analog zu Fall 2.1 erst ein Punkt P_1, der eine Seite CB von D im Verhältnis 2:1 teilt, sowie die Verbindung zum gegenüberliegenden Eckpunkt A von D eingezeichnet wird, während dann das entstehende Dreieck $\triangle AP_1C$ entlang der Seitenhalbierenden von AC halbiert wird. Es entstehen drei paarweise inkongruente Teildreiecke, wobei genau eines eine Seite mit Kantenlänge a und genau zwei je eine Seite mit Kantenlänge $\frac{1}{2}a$ besitzen.

Die Fallunterscheidung ist vollständig, sodass keine weiteren Zerlegungen möglich sind. Auch liefern keine zwei dieser (Unter-)Fälle gleiche Zerlegungen, da niemals alle drei Paare von Teildreiecken zweier verschiedener solcher Zerlegungen untereinander kongruent sind. Also gibt es genau diese vier verschiedenen Zerlegungen, □.

Aufgabe 250935:
In einem beliebigen spitzwinkligen Dreieck ABC sei A' der Fußpunkt der durch A gehenden Höhe, B' der Fußpunkt der durch B gehenden Höhe und S der Schnittpunkt dieser beiden Höhen.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets $AB : A'B' = AS : SB'$ gilt!

Lösung von cyrix:
Nach dem Satz von Thales, angewendet auf die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle ABA'$ und $\triangle ABB'$, liegen die Punkte A, B, B' und A' (in dieser Reihenfolge) auf dem Kreis mit Durchmesser AB.

In diesem Kreis sind die beiden Peripheriewinkel $\angle BB'A'$ und $\angle BAA'$ über der gleichen Sehne BA' nach dem Peripheriewinkelsatz gleich. Weiterhin sind die beiden Winkel $\angle ASB$ und $\angle A'SB'$ Scheitelwinkel, also auch gleich, sodass die beiden Dreiecke $\triangle ABS$ und $\triangle A'B'S$ in zwei Innenwinkeln übereinstimmen, also ähnlich zueinander sind. Demnach stehen die entsprechenden Seitenlängen im gleichen Verhältnis und es gilt $|AB| : |A'B'| = |AS| : |SB'|$, $\square$.

Aufgabe 260932:
In einer Ebene e sei ein Dreieck ABC fest vorgegeben. Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten BC, CA, AB seien U, V bzw. W in dieser Reihenfolge.
Weiter sei P ein beliebiger Punkt der Ebene e. Spiegelt man P sowohl an U, V als auch an W, so erhält man die Bildpunkte P_U, P_V bzw. P_W.
(Unter dem Bildpunkt P_S von P bei der Spiegelung an einem Punkt S versteht man denjenigen Punkt, für den gilt, dass S der Mittelpunkt der Strecke PP_S ist. Falls $P = S$ ist, ist $P_S = P$.)
Beweisen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks $P_UP_VP_W$ unabhängig von der Lage des Punktes P ist, und vergleichen Sie diesen Flächeninhalt mit dem des Dreiecks ABC!

Lösung von cyrix:
Es ist für jeden Punkt P der Ebene e das Dreieck $\triangle P_UP_VP_W$ kongruent zum Dreieck $\triangle ABC$. Insbesondere haben also die beiden Dreiecke auch den gleichen Flächeninhalt.

Zum Beweis der Kongruenz sei zuerst $P \notin \{U,V,W\}$. Dann sind nach der Umkehrung des Strahlensatzes wegen $\frac{|PP_U|}{|PU|} = 2 = \frac{|PP_V|}{|PV|}$ die Geraden P_UP_V und UV zueinander parallel und nach dem Strahlensatz gilt $\frac{|P_UP_V|}{|UV|} = \frac{|PP_U|}{|PU|} = 2$, also $|P_UP_V| = 2 \cdot |UV|$.
Weiterhin gilt analog nach der Umkehrung des Strahlensatzes (mit Scheitelpunkt bei C), dass $UV \parallel AB$ und mit dem Strahlensatz an gleicher Stelle dann, dass $|AB| = 2 \cdot |UV|$ ist. Insgesamt ist also $|P_UP_V| = |AB|$. Analog folgt auch $|P_UP_W| = |AC|$ und $|P_VP_W| = |BC|$, sodass die Dreiecke $\triangle P_UP_VP_W$ und $\triangle ABC$ nach Kongruenzsatz sss zueinander kongruent sind.

Andernfalls gilt o. B. d. A. $P = W = P_W$. Dann ist aber direkt nach Definition $|P_UP_W| = 2 \cdot |UP| = 2 \cdot |UW| = |AC|$ und analog $|P_VP_W| = |BC|$.
Wie im ersten Fall können wir schließen, dass $|P_UP_V| = |AC|$ gilt, sodass sich die gewünschte Dreiecks-Kongruenz auf die gleiche Art und Weise ergibt, $\square$.

Aufgabe 310933:
a) Silke behauptet: Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ und jedes Dreieck ABC ist es möglich, die Fläche dieses Dreiecks durch geradlinige Schnitte in k^2 einander kongruente, zu ABC ähnliche Dreiecke zu zerlegen.
b) Hanka behauptet: Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ und jedes konvexe n-Eck $A_1A_2A_3...A_n$ $(n > 3)$ ist es möglich, die Fläche dieses n-Ecks durch geradlinige Schnitte in eine Anzahl t von Teilflächen zu zerlegen, aus denen sich k^2 einander kongruente, zu $A_1A_2A_3...A_n$ ähnliche n-Ecke zusammensetzen lassen, wobei zum Zusammensetzen jede der t Teilflächen nur einmal verwendet wird und keine übrigbleibt.

Untersuchen Sie, ob a) Silkes, b) Hankas Behauptung wahr ist!
Hinweis:
Eine Fläche F heißt genau dann konvex, wenn jede Strecke, deren Eckpunkte in F liegen, ganz in F liegt.

Lösung von cyrix:
Beide Behauptungen sind wahr, wie im folgenden bewiesen wird:

a) Unterteilt man die Strecken AB, BC und CA jeweils in k kongruente Abschnitte und zeichnet die Parallelen zu den Dreiecksseiten durch die entstandenen Unterteilungspunkte auf den Seiten, so wird das Dreieck $\triangle ABC$ in eine Vielzahl kleinerer Dreiecke zerlegt.
Wir nennen ein solches Dreieck „Elementardreieck“, wenn es nicht weiter durch eine solche Parallele unterteilt wird. Die Seitenkanten eines jeden solchen Elementardreiecks sind parallel zu einer Seite des Dreiecks $\triangle ABC$ und haben aufgrund dieser Parallelitäten die gleichen Längen wie die entsprechenden Randabschnitte, also die $\frac{1}{k}$-fache Länge der entsprechenden Seite des Dreiecks $\triangle ABC$.
Insbesondere haben also alle Elementardreiecke die gleichen Seitenlängen, sind damit kongruent untereinander, und, da diese im gleichen Verhältnis stehen wie beim Dreieck $\triangle ABC$ sind sie auch alle ähnlich zu diesem.
Da der Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{k}$ beträgt, ist der Flächeninhalt eines jeden solchen Elementardreiecks genau das $\frac{1}{k^2}$-fache des Flächeninhalts des Dreiecks $\triangle ABC$. Da dieses vollständig in Elementardreiecke zerlegt wird, gibt es davon also genau k^2 Stück, $\square$.

b) Da das n-Eck konvex ist, kann man es durch Diagonalen vollständig in Dreiecke zerlegen. Für jedes dieser Dreiecke führe man die Konstruktion aus Teilaufgabe a) durch.
Gegebenenfalls werden durch die Schnitte, die eines der Teildreiecke zerlegen, auch andere Teildreiecke und dortige Elementardreiecke zerlegt. Diese „fremden Schnitte“ werden aber direkt durch Zusammenfassen der entsprechenden Teile zu den jeweiligen Elementardreiecken direkt wieder rückgängig gemacht.
Damit ist jedes der durch die Diagonalen des n-Ecks erzeugten „großen Teildreiecke“ des n-Ecks in genau k^2 Elementardreiecke, die mit einem Ähnlichkeitsfaktor von $\frac{1}{k}$ ähnlich zum jeweiligen „großen Teildreieck“ sind, zerlegt. Greift man sich nun aus jedem dieser „großen Teildreiecke“ eines der dortigen Elementardreiecke heraus, so lässt sich daraus ein n-Eck, welches ähnlich zum Ausgangs-n-Eck mit dem Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{k}$ ist, zusammenlegen.
Dies funktioniert aber unabhängig für jedes der k^2 Elementardreiecke jeder Sorte, sodass man also k^2 untereinander kongruente und zum Ausgangs-n-Eck mit dem Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{k}$ ähnliche n-Ecke aus diesen zusammenlegen kann, ohne eines der Elementardreiecke doppelt zu verwenden oder übrig zu behalten, $\square$.

Aufgabe 310934:
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Auf der Verlängerung von BA über A hinaus liege ein Punkt D, auf der Verlängerung CB über B hinaus ein Punkt E, und auf der Verlängerung von AC über C hinaus liege ein Punkt F.
Ferner werde vorausgesetzt, dass das Dreieck DEF gleichseitig sei.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets $AD = BE = CF$ folgt.

Lösung von cyrix:
In den gleichseitigen Dreiecken $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ sind alle Innenwinkel genau $60°$ groß. Also ist, da C, B und E sowie D, A und E in diesen Reihenfolgen jeweils auf einer Geraden liegen $\angle DBE = \angle ABE = 180° - \angle CBA = 180° - 60° = 120°$. Analog folgt auch $\angle ECF = 120°$ und $\angle FAD = 120°$, sodass diese drei Winkel alle gleich groß sind.

Weiterhin ist $\angle ADF = \angle FDE - \angle EDA = 60° - \angle EDB = 180° - 120° - \angle EDB = 180° - \angle DBE - \angle EDB = \angle BED$, wobei letzteres aus der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle BED$ folgt. Analog folgt auch $\angle ADF = \angle BED = \angle CFE$.

Damit stimmen die Dreiecke $\triangle BED$, $\triangle CFE$ und $\triangle ADF$ jeweils in zwei Winkeln und einer Seitenlänge ($|DE| = |EF| = |FD|$, da das Dreieck $\triangle DEF$ n.V. gleichseitig ist) überein, sodass sie paarweise kongruent sind und die Längen entsprechender Seiten gleich groß sind, also insbesondere $|AD| = |BE| = |CF|$ gilt, □.

Aufgabe 330946:
Ist P ein Punkt im Innern eines Dreiecks ABC, so kann folgende Konstruktion durchgeführt werden: Die Parallele durch P zu CB schneidet AB in S_1, die Parallele durch S_1 zu AC schneidet BC in S_2, die Parallele durch S_2 zu BA schneidet CA in S_3. In dieser Weise kann man für $k = 1, 2, 3, ...$ fortsetzen:
Die Parallele durch S_{3k} zu CB schneidet AB in S_{3k+1}, die Parallele durch S_{3k+1} zu AC schneidet BC in S_{3k+2}, die Parallele durch S_{3k+2} zu BA schneidet CA in S_{3k+3}.
Beweisen Sie, dass für jedes Dreieck ABC und jeden Punkt P im Innern dieses Dreiecks eine der so konstruierten Parallelen wieder durch P gehen muss!

Lösung von cyrix:
Es sei S der Schnittpunkt der Parallelen durch P zu CB mit AC. Dann liegen S, P und S_1 in dieser Reihenfolge auf einer Parallelen zu CB. Wir zeigen im Folgenden, dass $S_6 = S$ gilt und damit die Gerade S_6S_7, welche nach Definition parallel ist zu CB und durch S_6 verläuft, identisch ist mit der Gerade SS_1, auf der auch P liegt.

Nach Konstruktion sind die Geraden $SC = AC$ und S_1S_2 sowie SS_1 und $CS_2 = CB$ jeweils zueinander parallel, sodass das Viereck SS_1S_2C ein Parallelogramm ist. Damit gilt insbesondere $|SC| = |S_1S_2|$.

Weiterhin sind analog auch die Vierecke $S_3S_4BS_2$ und $S_3S_4S_5C$ Parallelogramme (da jeweils gegenüberliegende Seiten nach Konstruktion parallel zueinander sind), sodass $|CS_5| = |S_3S_4| = |S_2B|$ folgt.

Es ist $S_6C = AC \parallel S_1S_2$ und es liegen C, S_5, S_2 und B auf einer Geraden, also ist $\angle S_6CS_5 = \angle S_1S_2B$, da es sich um Stufenwinkel handelt. Analog folgert man auch $\angle CS_5S_6 = \angle S_2BS_1$, sodass die beiden Dreiecke $\triangle S_6CS_5$ und $\triangle S_1S_2B$ nicht nur aufgrund der Übereinstimmung zweier Winkelgrößen zueinander ähnlich, sondern wegen dem zuvor gezeigten $|CS_5| = |S_2B|$ sogar kongruent sind. Insbesondere folgt damit $|S_6C| = |S_1S_2| = |SC|$. Also liegen S und S_6 beide auf der Strecke AC in gleicher Entfernung zu C, sodass sie identisch sind. Es folgt, wie oben beschrieben, dass P auf der Parallelen zu BC durch S_6 liegt, □.

Aufgabe 340931:
Jürgen wählt auf einem Zeichenblatt drei Punkte A, B, C so aus, dass es keine Gerade gibt, auf der alle drei Punkte liegen, und dass die Strecke AB eine andere Länge hat als die Strecke BC.
Dann versucht er, einen Punkt X zu konstruieren, der weder auf der durch A und B gelegten Geraden g noch auf der durch B und C gelegten Geraden h liegt und der außerdem die beiden folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt:
(1) Der Punkt X hat von g den gleichen Abstand wie von h.
(2) Die Strecken AB und BC erscheinen von X aus unter gleichgroßen Winkeln; d. h. der Winkel $\angle AXB$ ist ebenso groß wie der Winkel $\angle BXC$.
Christa behauptet: Es gibt keinen solchen Punkt X; gleichgültig welche Wahl von A, B, C (mit den eingangs genannten Lagebedingungen) Jürgen getroffen hat.
Hat Christa recht?

Lösung von cyrix:
Ja, sie hat recht, wie im folgenden indirekt bewiesen wird:

Angenommen, es gäbe ein solches Dreieck $\triangle ABC$ und einen solchen Punkt X. Dann liegt nach (1) X auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle CAB$, sodass die beiden Winkel $\angle CBX$ und $\angle XBA$ gleich groß sind.

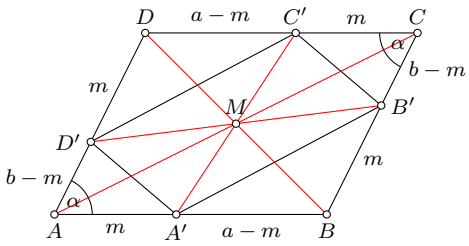
Da nach Annahme auch die Winkel $\angle AXB$ und $\angle BXC$ gleich groß sind, stimmen die beiden Dreiecke $\triangle AXB$ und $\triangle BXC$ in zwei Innenwinkeln überein und zusätzlich auch in der Strecke XB, die sie beide gemeinsam haben, zwischen diesen beiden Innenwinkeln, sodass diese Dreiecke kongruent sind.
Dann folgt aber direkt, da die Strecken gleichgroßen Winkeln gegenüberliegen, auch $|AB| = |CD|$, was den Widerspruch zur entsprechenden Bedingung in der Lage der drei Punkte A, B, C liefert. Also kann es kein solches nicht gleichschenklige Dreieck $\triangle ABC$ mit entsprechendem Punkt X geben, $\square$.

V.II Vier- & Vielecke

I Runde 1

Aufgabe V10914:
Zeichnen Sei ein Parallelogramm $ABCD$!
Tragen Sie von A aus auf AB die Strecke m ab, die kleiner als die kleinere Seite des Parallelogramms ist! Sie erhalten den Punkt A'! Tragen Sie von B aus auf BC, von C aus auf CD und von D aus auf DA dieselbe Strecke m ab! Sie erhalten die Punkte B', C' und D'!
Was für eine Figur stellt $A'B'C'D'$ dar? Beweisen Sie Ihre Feststellung!

Lösung von Steffen Polster:



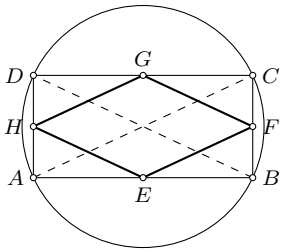
$A'B'C'D'$ ist ein Parallelogramm. Auf Grund der Punktsymmetrie des Parallelogramm $ABCD$ bezüglich des Mittelpunktes M und die Konstruktion der Punkte A',B',C' und D' sind die Dreiecke $AA'D'$ und $B'CC'$ sowie $A'BB'$ und $C'DD'$ paarweise zueinander kongruent und spiegelsymmetrisch in Bezug auf M.
Damit sind $A'D'$ und $B'C'$ sowie $A'B'$ und $C'D'$ jeweils gleichlang und zueinander parallel. $A'B'C'D'$ ist somit ein Parallelogramm.

Aufgabe 010916:
Schlagen Sie einen Kreis mit dem Radius $r = 3cm$! Konstruieren Sie in diesen Kreis ein beliebiges Parallelogramm so, dass dessen Eckpunkte auf der Kreisperipherie liegen! Halbieren Sie die Seiten des Parallelogramms und verbinden Sie die Halbierungspunkte fortlaufend!

Wie groß ist der Umfang der so entstehenden Figur? Die Behauptung ist zu beweisen!

Lösung von Carsten Balleier:
Ein Parallelogramm kann man sich als zwei kongruente Dreiecke vorstellen, die an einer Seite zusammen gefügt sind. Es geht bei Drehung um 180° in sich selbst über. Dies muss auch dann so sein, wenn seine Eckpunkte auf einer Kreisperipherie liegen.

Damit die Diagonalen des Parallelogramms aber in sich selbst übergehen, müssen sie Durchmesser des Kreises sein. Daher kann ein zulässiges Parallelogramm nur ein Rechteck $ABCD$ sein. Die dem Rechteck einbeschriebene Figur ist dann ein Rhombus $EFGH$.



Aufgabe 040915:
In den Eckpunkten eines Sehnenvierecks werden an den Umkreis die Tangenten gezeichnet.

a) Beweisen Sie, dass das so entstandene Tangentenviereck ein Rhombus ist, wenn das Sehnenviereck ein Rechteck ist!

b) Gilt die Umkehrung dieser Aussage ebenfalls?

Lösung von Kristin Steinberg:

a) Die Diagonalen des Rechtecks sind Durchmesser des Kreises und müssen sich somit im Mittelpunkt M des Kreises schneiden (Umkehrung des Satzes von Thales).

Die Dreiecke AMD und MBC sind gleichschenklig und kongruent (SSS: AD=BC, weil gegenüberliegende Seiten im Rechteck gleich groß sind und $AM = MD = BM = MC$, weil sich die Diagonalen (gleich lang) im Rechteck halbieren). Daraus folgt, dass die Winkel MAD, ADM, CBM und MCB gleich groß sind (Größe sei mit α bezeichnet).

Daraus wiederum folgt, da die Tangente jeweils senkrecht zu der Strecke zu M ist, dass die Winkel DAE, EDA, GBC und BCG 90° - α betragen und somit gleich groß sind. Also sind die Dreiecke EAD und BGC gleichschenklig und kongruent (WSW). Daraus folgt, dass $DE = EA = BG = GC$ ist.

Wenn man analog die Dreiecke ABM und DMC bzw. AFB und DCH betrachtet, folgt, dass $HD = AF = FB = CH$ ist.

Beide Gleichungen addiert ergibt: $DE + HD = EA + AF = BG + FB = GC + CH$ und somit: $HE = EF = FG = GH$.

Damit sind also die Seiten des Tangentenvierecks gleich lang - es ist also ein Rhombus.

b) Da in einem Rhombus, die gegenüberliegenden Winkel gleich groß sind, gilt, dass die Winkel AED und CGB gleich groß sind.

Betrachtet man nun die Vierecke $AMDE$ und $BGCM$, so fällt auf, dass sie kongruent zueinander sind (Drei Winkel gemeinsam: zwei rechte Winkel und $AED = CGB$).

Somit sind also jeweils die vierten Winkel der Vierecke gleich groß, was bedeutet, dass sie gleichzeitig Scheitelwinkel sind und somit die Strecken AC und BD keine Dreiecke und gleichzeitig die Durchmesser des Kreises sind.

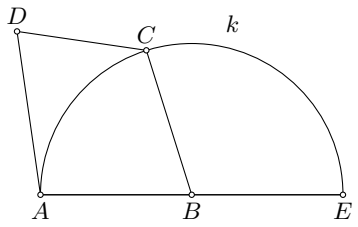
Durch den Satz des Thales folgt, dass die Winkel des Vierecks $ABCD$ alle rechtwinklig sind und es somit ein Rechteck ist.

Aufgabe 060913:
In einem Viereck $ABCD$ wird die Seite AB über B hinaus bis zum Punkt E so verlängert, dass $\overline{BE} = \overline{AB}$ ist.

Von jeder der folgenden Bedingungen ist zu untersuchen, ob sie dafür notwendig ist, dass der Winkel $\angle ACE$ ein rechter Winkel ist.

Das Viereck $ABCD$ hat
a) vier kongruente Winkel,
b) vier kongruente Seiten,
c) zwei Paare kongruenter Seiten,
d) zwei kongruente Seiten mit gemeinsamen Eckpunkt,
e) zwei kongruente Winkel.

Lösung von Manuela Kugel:



Aufgrund der Lage von A, B und E kann man feststellen, dass der Winkel $\angle ACE$ immer genau dann ein rechter Winkel ist, wenn sich C auf dem Kreis um B mit dem Radius $\overline{AB}$ befindet. Die Lage von C ist daher definiert, aber nicht eindeutig. Gleichzeitig kann man sagen, dass die Lage von D unabhängig zu den anderen Viereckecken ist.

a) vier kongruente Winkel ⇒ falsch, da D beliebig
b) vier kongruente Seiten ⇒ falsch, da D beliebig
c) zwei Paare kongruenter Seiten ⇒ falsch, da D beliebig
d) zwei kongruente Seiten mit gemeinsamen Eckpunkt ⇒ korrekt: gemeinsamer Punkt B und kongruente Seiten $\overline{AB} = \overline{BC}$ mit A und C auf dem Kreisbogen und B als Kreismittelpunkt
e) zwei kongruente Winkel ⇒ falsch, da D beliebig.

Aufgabe 070913:
Für jede ganze Zahl $n \geq 3$ ist die größtmögliche Anzahl von rechten Winkeln zu ermitteln, die ein konvexes n-Eck haben kann.

Lösung von Annika Heckel:
In einem konvexen Polygon sind alle Innenwinkel kleiner als 180°. Ein konvexes n-Eck hat bekanntlich die Innenwinkelsumme $180° \cdot (n-2)$. Es habe k rechte Winkel.

(1) Sei $k = n$. Dann wird $90° \cdot n = 180° \cdot (n-2)$, also $n = 2n - 4$ und $n = 4$.
Dies ist also nur dann möglich, wenn $n = 4$ ist. $k = n = 4$ ist bei einem Rechteck erfüllt.

(2) Sei $k < n \Rightarrow n - k > 0$
Die restlichen $n-k$ Innenwinkel (die ja existieren, weil $n-k > 0$) sind alle kleiner als 180° (konvexes Polygon!). Folglich gilt:

$$\begin{aligned} 180° \cdot (n-2) &< 90° \cdot k + 180° \cdot (n-k) \\ -360° &< -90° \cdot k \\ 4 &> k \end{aligned}$$

Folglich kann in diesem Fall die natürliche Zahl k, die echt kleiner als 4 sein soll, höchstens 3 sein. Bei jedem $n > 4$ ist dies auch möglich. Zum Beispiel kann ein Polygon drei rechte Winkel und $n-3$ Winkel der Größe $(180° \cdot (n-2) - 270°)/(n-3)$ haben, die Winkel haben dann die Summe $180°(n-2)$.

$$\frac{180° \cdot (n-2) - 270°}{n-3} = 180° - \frac{90°}{n-3}$$

Das heißt: jeder dieser Winkel wäre kleiner als 180° und größer als 90°. Wäre ein weiterer Winkel 90°, so würde mindestens ein Winkel größer als 180° sein oder alle nicht-90°-Winkel wären gleich 180°:

$$\frac{180° \cdot (n-2) - 360°}{n-4} \quad = \quad 180°$$

Für $n = 3$ kann es maximal einen rechten Winkel geben, da sonst das Dreieck entartet.

Antwort:
Für $n = 3$ gibt es maximal einen rechten Winkel.
Für $n = 4$ gibt es maximal 4 rechte Winkel.
Für $n > 4$ gibt es maximal 3 rechte Winkel.

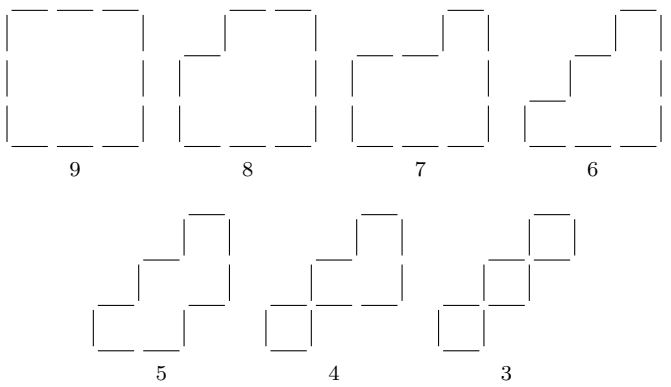
Aufgabe 090912:
Aus je 12 geradlinigen Hölzern von je 1 dm Länge sollen die Ränder ebener Figuren gelegt werden, deren Flächeninhalte der Reihe nach

$$I_1 = 9 \text{ dm}^2, \quad I_2 = 8 \text{ dm}^2, \quad I_3 = 7 \text{ dm}^2, \quad I_4 = 6 \text{ dm}^2, \quad I_5 = 5 \text{ dm}^2, \quad I_6 = 4 \text{ dm}^2, \quad I_7 = 3 \text{ dm}^2$$

groß sind. Dabei sollen in jedem Fall alle 12 Hölzer zur Herstellung der Berandung der betreffenden Figur gebraucht und keines geteilt oder geknickt werden; keine zwei Hölzer sollen (ganz oder teilweise) übereinanderliegen oder sich überkreuzen.

Geben Sie für jeden Fall eine Lösung an!

Lösung von Steffen Polster:



Für eine mögliche Lösungen, von denen es unendlich viele gibt, beginnt man mit einem $3 \cdot 3$ Quadrat mit der Fläche 9 welches sich mit $4 \cdot 3$ Hölzern beranden lässt. Danach klappt man schrittweise jeweils 2 Hölzchen nach innen.
Ab der Fläche 6 kann man auch ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 nutzen.

Aufgabe 110914:
In einer Ebene ε liege ein Rechteck $ABCD$. S sei ein Punkt der Senkrechten in A auf ε.

Ermitteln Sie die Größe des Winkels $\angle CDS$!

Lösung von Manuela Kugel:
Die Punkte A, D, S liegen in einer Ebene ε', die auf der Ebene ε durch A, B, C und D senkrecht steht; denn nach Voraussetzung ist $AD \perp AB$ und, falls $S \neq A$ ist, auch $SA \perp AB$.
Im Fall $S = A$ sei ε' die zu ε senkrechte Ebene durch A und D. Daher ist in jedem Fall $CD \perp \varepsilon'$ und somit $|\angle CDS| = 90°$.

Aufgabe 160911:
Frank und Jens spielen ein Spiel, das sie „Autorennen“ nennen. Sie haben dazu auf quadratisch-kariertem Papier eine Spielfläche durch einen Streckenzug $ABCDEFGA$ eingeschlossen, wobei A, B, C, D, E, F, G Gitterpunkte bezeichnen. Jeder Spieler soll von der „Startlinie“ AG zur „Ziellinie“ DE oder über sie hinaus gelangen, indem er nach folgenden Regeln einen Streckenzug $P_0P_1P_2 \ldots P_n$ bildet, der den Weg des Fahrzeuges darstellen soll, wobei die P_0, P_1, …, P_n Gitterpunkte sind. Keine der Teilstrecken P_0P_1, P_1P_2,… , $P_{n-1}P_n$ des Streckenzuges darf dabei die Randlinie des Spielfeldes (mit Ausnahme der Start- und Ziellinie) berühren oder schneiden. Unter einem „Zug“ wird der Übergang von einem Punkt P_k zu dem nächsten Punkt P_{k+1} verstanden. Die Spielregeln lauten:

(1) P_0 liegt auf AB

(2) Der erste „Zug“ besteht aus der Strecke P_0P_1, wobei $\overline{P_0P_1} = 1$ (Seitenlänge des Grundquadrates) ist.

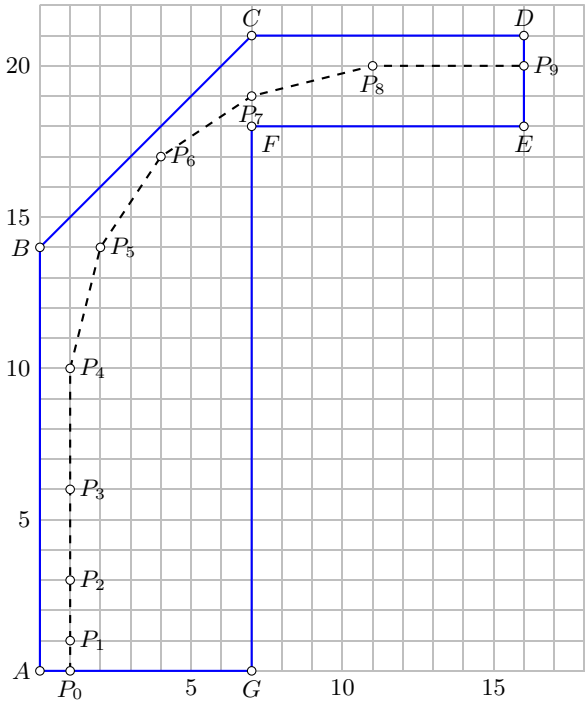
(3) Wenn bereits ein „Zug“ $P_{k-1}P_k$ ausgeführt wurde, so findet man den nächsten „Zug“ P_kP_{k+1} folgendermaßen:
   a) Man verlängert die Strecke $P_{k-1}P_k$ über P_k hinaus um sich selbst bis zu einem Punkt, der Q_k genannt sei.
   b) Man wählt entweder den Punkt Q_k oder einen seiner acht benachbarten Gitterpunkte als Punkt P_{k+1}.

   Hinweis: P_{k+1} muss innerhalb des Spielfeldes liegen, aber nicht notwendig Q_k.

Geben Sie für ein Spielfeld mit $A(0;0)$, $B(0;14)$, $C(7;21)$, $D(16;21)$, $E(16;18)$, $F(7;18)$, $G(7;0)$ einen „Fahrweg“, d. h. einen Streckenzug $P_0P_1P_2 \ldots P_9$ an, bei dem die Ziellinie von der Teilstrecke P_8P_9 erreicht oder geschnitten wird!

Als Lösung genügt eine zeichnerische Darstellung oder die Angabe der Koordinaten der Punkte P_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, 9)$ ohne Begründung.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt verschiedene Lösungen. Die Abbildung zeigt ein Beispiel.

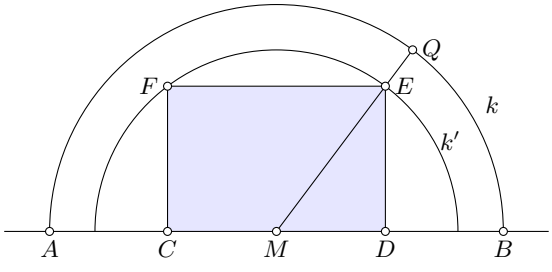


Aufgabe 170912:
Ein Fahrzeug, dessen Querschnitt vereinfacht als ein Rechteck angenommen werden soll, soll durch einen Tunnel mit halbkreisförmigem Querschnitt fahren, dessen Höhe 3 m beträgt.

Ermitteln Sie die größtmögliche Höhe des Fahrzeuges, wenn es eine Breite von 3 m hat und wenn bei der Durchfahrt überall ein Spielraum von mindestens einem halben Meter zwischen der Tunnelwand und dem Fahrzeug vorhanden sein soll, d. h. wenn jeder Punkt des Fahrzeuges einen Abstand von mindestens einem halben Meter zur Tunnelwand haben soll!

Hinweis: Unter dem Abstand eines Punktes P im Innern des Tunnels zur Tunnelwand versteht man die Länge der Strecke PQ, wobei Q folgendermaßen definiert ist: Man lege durch P einen Querschnitt des Tunnels, wobei dieser als ein Halbkreis k mit den Endpunkten A und B erscheint. Ist M der Mittelpunkt von AB, so sei Q der Schnittpunkt von k mit der Geraden durch M und P.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei k ein halbkreisförmiger Querschnitt des Tunnels, das Halbkreisbogen k habe die Endpunkte A und B. Ferner sei M der Mittelpunkt von AB.

Ein Punkt P im Innern des Querschnitts erfüllt genau dann die Forderung, mindestens einen halben Meter Abstand zur Tunnelwand zu besitzen, wenn $MP \leq 2{,}5$ m gilt, d. h. genau dann, wenn P der Fläche des Halbkreises k' angehört, der den Mittelpunkt M, den Radius 2,5 m hat und in der Fläche des Halbkreises k liegt.

Angenommen nun, alle Punkte eines rechteckigen Fahrzeugquerschnitts $CDEF$ erfüllen diese Forderung, wobei C und D auf der Strecke AB liegen.

Dann gilt $ME \leq 2{,}5$ m und $MF \leq 2{,}5$ m. Ferner gilt $MC \geq 1{,}5$ m oder $MD \geq 1{,}5$ m; denn wäre

$MC < 1{,}5$, und $MD < 1{,}5$ m, so ergäbe sich $CD < 3$ m. Es sei o. B. d. A. $MD \geq 1{,}5$ m. Dann folgt

$$DE = \sqrt{ME^2 - MD^2} \leq \sqrt{2{,}5^2 - 1{,}4^2}m = 2m$$

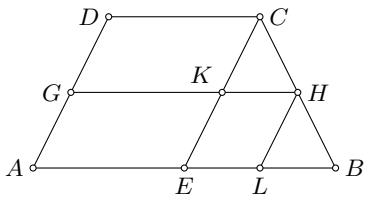
Daher kann ein Fahrzeug nur dann die Bedingungen der Aufgabe erfüllen, wenn es nicht höher als 2 m ist.

Umgekehrt lassen sich die Bedingungen der Aufgabe mit einem Fahrzeug (der Breite 3 m und) der Höhe 2 m erfüllen. Wählt man nämlich im Tunnelquerschnitt ein Rechteck $CDEF$ mit C und D auf AB und mit $CD = 3$ m, $DE = DF = 2$ m so, dass $MC = MD = 1{,}5$ m ist, so liegen E und F wegen $ME = MF = \sqrt{1{,}5^2 + 2^2}m = 2{,}5m$ auf k', also gehört das gesamt Rechteck $CDEF$ der Fläche des Halbkreises k' an.
Die gesuchte größtmögliche Fahrzeughöhe beträgt somit 2 m.

Aufgabe 230914:
Ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ und $\overline{AB} = a > \overline{CD} = c$ soll durch eine zu AB parallele Strecke GH in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt werden.

Beweisen Sie, dass es genau eine solche Strecke GH gibt und dass ihre Länge $\overline{GH} = s$ eindeutig durch a und c bestimmt ist! Ermitteln Sie s in Abhängigkeit von a und c!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



(I) Wenn eine zu AB parallele Strecke GH (G auf AD, H auf BC) das Trapez in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt, so folgt:

Es sei E der Punkt auf AB mit $AE = DC$. Die Strecken EC und GH schneiden sich in einem Punkt K.

Im Viereck $AEKG$ gilt somit außer $AE \parallel GH$ auch $AG \parallel EK$, folglich ist es ebenfalls ein Parallelogramm. Hiernach gilt $EB = a - c$ und $KH = s - c$.

Die Höhenlänge und der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ seien h bzw. F, die Höhenlänge und der Flächeninhalt des Trapezes $GHCD$ seien h' bzw. F'. Dann sind h und h' auch Höhenlängen der Dreiecke EBC bzw. KHC; diesen sind wegen $EB \parallel KH$ zueinander ähnlich. Also gilt:

$$\begin{aligned} \frac{h}{h'} &= \frac{EB}{KH} = \frac{a-c}{s-c} \\ \frac{F}{F'} &= \frac{(a+c)h}{(a+c)h'} = \frac{a^2-c^2}{s^2-c^2} \end{aligned} \tag{1}$$

Wegen $F = 2F'$ gilt somit

$$\begin{aligned} a^2 - c^2 &= 2(s^2 - c^2) \\ a^2 &= \frac{1}{2}(a^2 + c^2) \end{aligned} \tag{2}$$

wegen $s > 0$ also

$$s = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + c^2)} \tag{3}$$

Wegen $c < \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+c^2)} < a$ liegt der Punkt L auf AB mit $AL = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+c^2)}$ zwischen E und B. Für ihn ist $ALHG$ wegen $AL \parallel GH$ und $AL = GH$ ein Parallelogramm. Daher kann nur die durch $LH \parallel AD$ (und H auf BC) sowie $GH \parallel AB$ (und G auf AD) bestimmte Strecke GH die geforderten Eigenschaft haben.

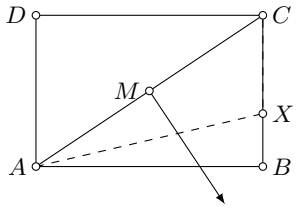
(II) Für diese Strecke ist $ALHG$ ein Parallelogramm, also gilt für ihre Länge (3) und folglich (2). Ferner kann man für sie wie in (I) wieder (1) herleiten.

Daraus folgt $F = 2F'$; also hat die Strecke GH die geforderte Eigenschaft.

Mit (I) und (II) ist bewiesen, dass es genau eine Strecke GH mit der geforderten Eigenschaft gibt. Ihre Länge ist in (3) angegeben; wie verlangt, eindeutig durch a und c bestimmt.

Aufgabe 280913:
Beweisen Sie, dass in jedem Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} > \overline{BC}$ die Mittelsenkrechte auf der Diagonalen AC die Seite AB zwischen A und B schneidet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Es sei M der Mittelpunkt von AC. Derjenige Strahl auf der Mittelsenkrechten von AC, der von M ausgeht und in das Dreieck ABC hineinführt (siehe Abbildung), muss dieses Dreieck wieder in einem Punkt verlassen, der auf einer der Strecken AB, BC liegt (und von A sowie C verschieden ist; denn die Mittelsenkrechte schneidet AC nur in M).

Für jeden (von C verschiedenen) Punkt X der Strecke BC kann man aber beweisen, dass X nicht auf der Mittelsenkrechten liegt. Ist dieser Beweis geführt (siehe II.), so folgt, wie verlangt, dass die Mittelsenkrechte die Strecke zwischen A und B schneiden muss.

II. Durchführung des angekündigten Beweises:

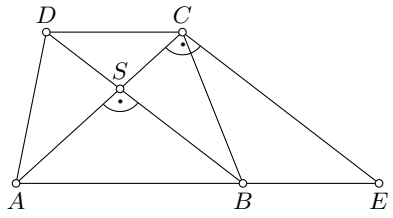
Für jeden Punkt X auf BC gilt: Entweder ist $X = B$, also $AX = AB$, oder $\triangle ABC$ ist ein rechtwinkliges Dreieck, das AX als Hypotenuse hat, womit $AX > AB$ folgt.

Wegen der Voraussetzung $AB > BC$ folgt somit in beiden Fällen $AX > BC$ und daher erst recht $AX > XC$. Da aber jeder Punkt der Mittelsenkrechten dieselbe Entfernung von A wie von C hat, liegt X folglich nicht auf der Mittelsenkrechten, wie gezeigt werden sollte.

Aufgabe 300913:
Beweisen Sie, dass in jedem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, dessen Diagonalen AC und BD aufeinander senkrecht stehen,

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = (\overline{AB} + \overline{CD})^2 \quad \text{gilt!}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Verlängert man AB um eine Strecke der Länge CD bis E, so sind in dem Viereck $BECD$ die Gegenseiten BE und CD zueinander parallel und gleichlang, also ist $BECD$ ein Parallelogramm. Daher gilt $BD = EC$ ind $BD \parallel EC$.

Für den Schnittpunkt S von AC und BD gilt nach Voraussetzung $\angle ASB = 90°$, nach dem Stufenwinkelsatz wegen $BS \parallel EC$ also auch $\angle ACE = 90°$. Daher folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$AC^2 + EC^2 = AE^2 = (AB + BE)^2 \qquad \text{und damit} \qquad AC^2 + BD^2 = (AB + CD)^2$$

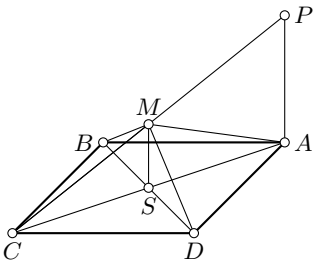
II Runde 2

Aufgabe 050924:
In einer Ebene ε ist ein Rechteck $ABCD$ gegeben. P sei ein beliebiger Punkt auf der Senkrechten zur Ebene ε durch A.
Es ist zu beweisen, dass die Punkte A, B, D auf der Kugel mit dem Durchmesser PC liegen.

Lösung von Manuela Kugel:
Der Mittelpunkt M der Strecke PC ist der Mittelpunkt der Kugel mit dem Durchmesser PC. Die Punkte A, B und D liegen genau dann auf dieser Kugel, wenn

$$|AM| = |BM| = |DM| = |CM| = \frac{1}{2}|PC|$$

ist (siehe Bild).



Zum Beweis dieser Gleichheiten fälle man das Lot von M auf ε. Sein Fußpunkt S liegt wegen $MS \parallel PA$ auf AC.
Ferner gilt nach dem 1. Strahlensatz wegen $|CM| = |MP|$

$$|CS| = |SA|$$

Also ist S der Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks $ABCD$. Die Dreiecke CSM, ASM, BSM und DSM sind mithin nach dem Kongruenzsatz (sws) untereinander kongruent. Daher ist

$$|AM| = |BM| = |DM| = |CM| = \frac{1}{2}|PC|$$

Die Punkte A, B, C, D und P liegen also auf der Kugel mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $\frac{1}{2}|PC|$, also mit dem Durchmesser PC.

Aufgabe 060923:
Beweisen Sie den folgenden Satz!
Die Diagonalen des ebenen konvexen Vierecks $ABCD$ schneiden einander genau dann rechtwinklig, wenn

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

gilt, wobei a, b, c und d die Seitenlängen des Vierecks sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es ist zu beweisen, dass die Bedingung $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ notwendig und hinreichend ist. Also müsste gelten:

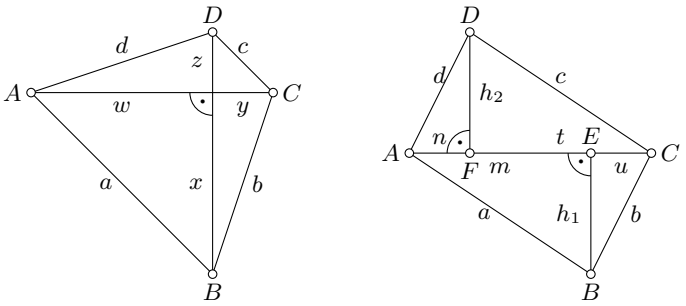
(1) Wenn $AC \perp DB$ ist, so ist $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. In der linken Figur gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$a^2 = x^2 + w^2 \quad , \quad b^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad c^2 = z^2 + y^2 \quad , \quad d^2 = w^2 + z^2$$

wobei x, w, z und y die Längen der Diagonalenabschnitte sind. Daraus folgt:

$$a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + w^2 + z^2 = b^2 + d^2$$

Also gilt (1). Ferner müsste gelten:



(2) Wenn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ ist, so ist $AC \perp DB$. Man betrachtet das Viereck $ABCD$, in dem die Diagonale AC eingezeichnet ist. Von den Punkten B und D werden die Lote auf AC gefällt, ihre Fußpunkte seien E und F.

Ferner sei $\overline{BE} = h_1$, $\overline{DF} = h_2$, $\overline{AF} = n$, $\overline{FC} = t$, $\overline{AE} = m$, $\overline{EC} = u$ (rechte Figur).

Dann gilt: (3) $m + u = n + t$. Ferner gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras:

$$a^2 = m^2 + h_1^2 \quad , \quad c^2 = t^2 + h_2^2 \quad , \quad b^2 = u^2 + h_1^2 \quad , \quad d^2 = n^2 + h_2^2$$

also nach Voraussetzung

$$a^2 + c^2 = h_1^2 + h_2^2 + m^2 + t^2 = h_1^2 + h_2^2 + u^2 + n^2 = b^2 + d^2$$

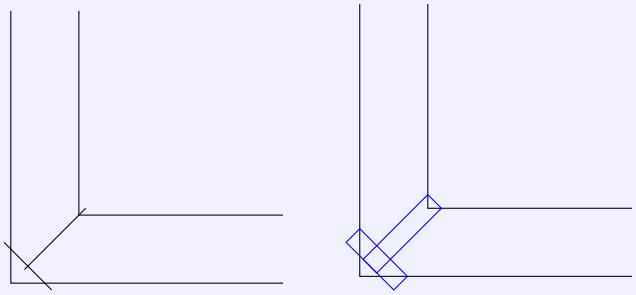
Daraus folgt: (4) $m^2 + t^2 = u^2 + n^2$ bzw. $m^2 - u^2 = n^2 - t^2$, oder

$$(m + u)(m - u) = (n + t)(n - t)$$

Wegen (3) folgt (5) $m - u = n - t$.

Aus (3) und (5) erhält man schließlich $m = n$, das heißt, die Punkte E und F sind identisch, D, E $(= F)$ und B liegen auf derselben Gerade DB, die senkrecht zu AC verläuft. Der behauptete Satz ist also richtig. □

Aufgabe 070923:

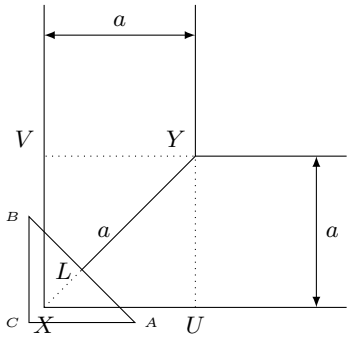


In einer alten Denksportaufgabe soll man einen Graben, der überall gleich breit ist und einen rechtwinkligen Knick macht, mit Hilfe von zwei Bohlen überqueren, die genau so lang sind, wie der Graben breit ist.
Die gesuchte Lösung (ohne Berücksichtigung der Breite der Bretter) ist die in der Abbildung gezeichnete.

a) Zeigen Sie durch eine Rechnung, dass diese Lösung richtig ist!
b) Die Breite des Grabens und die Länge der Bohlen sei a, die Breite der Bohlen sei b. Welchen Wert hat das Verhältnis $b : a$, wenn die Bretter die in der Abbildung gezeigte Lage haben?
Ein Durchbiegen der Bohlen und eine bedingte Tragfähigkeit des Grabenrandes sollen nicht berücksichtigt werden.

Lösung von Stefan Knott:
Zunächst ermitteln wir die maximale Entfernung, die durch die beiden Bretter mit der Länge a überbrückt werden kann.
Dazu setzten wir laut Aufgabenstellung voraus, dass die Breite der Bretter unberücksichtigt bleibt und das diese so wie auf der Abbildung dargestellt, im rechten Winkel zueinander liegen (rote durchgehenden Linien in der Planfigur). Mithin gilt:

$$AB = LY = a \qquad (1) \qquad AL = BL = \frac{a}{2} \qquad (2)$$



Demnach ist das Dreieck ABC rechtwinklig mit der Strecke CL als Höhe. Nach dem Höhensatz gilt:

$$(CL)^2 = AL \cdot BL \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt somit:

$$(CL)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \text{ und } AL = BL = \frac{a}{2} \Rightarrow CL = \frac{a}{2} \qquad (6)$$

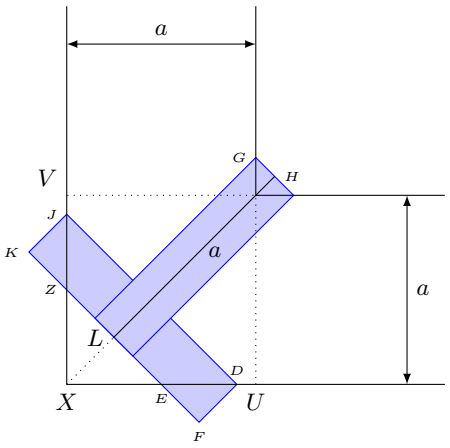
Wegen (2) und (6) ist damit aber auch $AL = BL = CL = \frac{a}{2}$. Damit beträgt die Länge der maximal überbrückbaren Strecke mit 2 Brettern:

$$a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a \qquad (8)$$

Berechnen wir nun die Entfernung der beiden Grabenecken (Punkte X und Y). Laut Aufgabenstellung stellt das Viereck $XUYV$ ein Quadrat mit der Seitenlänge a dar, die Strecke XY entspricht genau der Diagonalen dieses Quadrates. Für die Diagonale XY des Quadrates wird $XY = a\sqrt{2}$ (10).

Vergleichen wir nun die maximal überbrückbare Strecke (8) mit der Entfernung der beiden Grabenecken (10). Es gilt $\frac{3}{2}a > a\sqrt{2}$, daher kann der Graben mit Hilfe der beiden Bretter überquert werden.

Aufgabenteil b)
Wie bereits im Aufgabenteil a) gezeigt, beträgt die Länge der Strecke $XY = a\sqrt{2}$. Weiterhin ist laut den Bedingungen der Aufgabenstellung das Dreieck ZEX rechtwinklig und gleichschenklig. In einem solchen Dreieck beträgt die Winkelgröße eines Basiswinkels genau 45°, so natürlich auch der Basiswinkel ZEX im Dreieck ZEX.



Die Winkel ZEX und DEF sind Scheitelwinkel, daher haben diese die gleiche Größe. Außerdem handelt es sich bei den verwendeten Bohlen um rechteckige Bretter, daher ist das Dreieck DEF ebenfalls gleichschenklig und rechtwinklig.
Mithin ist die Dreieckseite DF eben dieses Dreieckes die Breite b der verwendeten Bretter, daher gilt: $DF = EF = b$. Ein weiteres gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck ist das Dreieck XEL, somit ist: $XL = EL$
Die Strecke FL besteht aus den Teilabschnitten EF und EL, entsprechend den gestellten Voraussetzungen beträgt ihre Länge $\frac{a}{2}$. Demnach ist:

$$\frac{a}{2} = FL = EF + EL$$

Daraus ergibt sich durch Substitution von EF und EL: $XL = \frac{a}{2} - b$.
Das Dreieck GYH ist ebenfalls gleichschenklig und rechtwinklig (rechter Winkel bei Punkt H). Außerdem entspricht, wie aus der Planfigur ersichtlich, die Länge der Kathete GH der halben Breite eines Brettes, d. h. $GH = YH = \frac{b}{2}$.
Die Länge der Strecke LY ergibt sich nun aus der Differenz der Strecken LH und YH, wobei LH der Gesamtlänge eines Brettes a entspricht: $LY = LH - YH = a - YH$4.YH ersetzen wir noch erhalten somit für LY: $LY = a - \frac{b}{2}$.

Betrachten wir wieder die Strecke XY. Diese setzt sich aus den Teilstrecken XL und LY zusammen, somit ist: $XY = XL + LY$.
Die Substitution der Teilstrecken XL und LY ergibt: $XY = \frac{3}{2}(a - b)$.
Wir haben nun zwei verschiedene Möglichkeiten erhalten, die Länge der Strecke XY zu berechnen. Um schließlich das gesuchte Verhältnis $b : a$ zu ermitteln, setzen wir wie folgt fort: $XY = \frac{3}{2}(a - b) = a\sqrt{2}$.
Auflösen nach $b : a$ ergibt

$$b : a = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Das Verhältnis $b : a$ hat den Wert von $1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$, wenn die Bretter die in der Abbildung gezeigte Lage haben.

Aufgabe 090924:
Es ist zu beweisen:
Verbindet man in einem Parallelogramm $ABCD$ den Eckpunkt C mit den Mittelpunkten der Seiten AB und AD, so teilen diese Verbindungsstrecken die Diagonale BD in drei gleich lange Teilstrecken.

Lösung von cyrix:
Sei mit S der Diagonalenschnittpunkt des Parallelogramms, M der Mittelpunkt von AB und N der von AD bezeichnet.
Die Diagonalen AC und BD halbieren sich gegenseitig. Also ist BS Seitenhalbierende im Dreieck $\triangle ABC$, genauso wie CM. Damit schneiden diese sich im Schwerpunkt S_B des Dreiecks, sodass $|BS_B| = \frac{2}{3}|SB| = \frac{1}{3}|DB|$ gilt, da der Schwerpunkt eines Dreiecks jede seiner Seitenhalbierenden im Verhältnis $1 : 2$ teilt.
Analog ist DS Seitenhalbierende im Dreieck $\triangle ACD$, genauso wie CN. Damit schneiden sich diese beiden Geraden im Schwerpunkt S_D des Dreiecks, sodass wieder $|DS_D| = \frac{2}{3}|DS| = \frac{1}{3}|DB|$ gilt, was zu beweisen war.

Aufgabe 110923:
Eine Kreislinie sei in 30 gleich große Bögen geteilt. Die Teilpunkte seien der Reihe nach mit P_1 bis P_{30} bezeichnet.
Berechnen Sie die Größe jedes der vier Winkel, unter denen sich die Strecken P_7P_{18} und $P_{12}P_{21}$ schneiden!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Wir ergänzen das 30-Eck zu einem 60-Eck mit Ecken $Q_1, \ldots, Q_{60}$. Sei M der Mittelpunkt.
Dann ist $P_7P_{18} = Q_{14}Q_{36}$ orthogonal zu MQ_{25}, $25 = \frac{1}{2}(14 + 36)$ und $P_{12}P_{21} = Q_{24}Q_{42}$ orthogonal zu MQ_{33}, $33 = \frac{1}{2}(24 + 42)$.
Der Schnittwinkel der Geraden entspricht daher dem Winkel $\sphericalangle Q_{25}MQ_{33} = \frac{360^\circ}{60}(33 - 25) = 48^\circ$.

Aufgabe 120924:
Ein konvexes Tangentenviereck $ABCD$ (ein Viereck, in das ein Kreis so einbeschrieben werden kann, dass er jede der vier Seiten des Vierecks in je einem Punkt berührt) habe den Umfang u, der Radius seines Inkreises sei r.
Berechnen Sie den Flächeninhalt F dieses Tangentenvierecks!

Lösung von cyrix:
Sei M der Mittelpunkt und r der Radius des Inkreises. Dann zerfällt das Tangentenviereck in vier Teildreiecke ABM, BCM, CDM, ADM, so dass die Höhe der Dreiecke auf der äußeren Kante gerade der Inkreisradius ist. Daher gilt für den Flächeninhalt:

$$F = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2} = \frac{ur}{2} \ .$$

Aufgabe 130923:
Ein konvexes gleichschenkliges Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$; $AD = BC$; $AB > CD$) soll folgende Eigenschaften haben:
Es soll sich einem Kreis mit dem Radius $r = 12$ cm umbeschreiben lassen; der Umfang des Trapezes soll $u = 100$ cm betragen.
Untersuchen Sie, ob es solche Trapeze gibt und berechnen Sie die Seitenlängen jedes derartigen Trapezes!

Lösung von cyrix:
Da das Trapez einen Inkreis hat, ist es ein Tangentenviereck, sodass die Summe der Längen jedes Paares seiner gegenüberliegender Seiten gleich ist. Also gilt $|AB|+|CD| = |AD|+|BC| = \frac{u}{2} = 50$ cm. Aufgrund der Gleichschenkligkeit ist dann sogar schon $|AD| = |BC| = 25$ cm bekannt.
Die Berührradien des Inkreises an AB sowie CD stehen jeweils senkrecht auf den Seiten, sodass sie aufgrund der Parallelität der beiden Seiten selbst parallel zueinander liegen.
Da beide Berührradien durch den Mittelpunkt des Inkreises verlaufen, ergänzen sie sich also zu einem Durchmesser, der senkrecht auf AB und CD steht, sodass diese beiden Parallelen den Abstand $2r = 24$ cm haben. Insbesondere sind sie damit auch kürzer als $|AD| = |BC| = 25$ cm.

Seien L_C und L_D die Fußpunkte der Lote von C bzw. D auf AB. dann sind diese Lote $|CL_C|$ und $|DL_D|$ jeweils auch gleich 24 cm, also gleich lang. Damit sind die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle BL_CC$ und $\triangle AL_DD$ zueinander nach dem Kongruenzsatz Ssw kongruent. Da die beiden entsprechenden Seiten CL_C und DL_D zueinander parallel sind sowie die entsprechenden Seiten BL_C und AL_D beide auf der Geraden AB liegen, gibt es also nur zwei mögliche Lagebeziehungen:
Entweder sind auch die dritten Seiten AD und BC dieser beiden Dreiecke zueinander parallel, oder aber sie gehen durch Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Strecke AB ineinander über, zeigen also in verschiedene Richtungen.

Im ersten dieser beiden Fälle sind aber im Viereck $ABCD$ jeweils gegenüberliegende Seiten parallel, sodass es sich um ein Parallelogramm handelt. Damit folgt dann auch $|AB| = |CD|$, was im Widerspruch zur Aufgabe steht.

Im zweiten Fall müssen die Lotfußpunkte L_C und L_D also beide außerhalb oder beide innerhalb der strecke AB liegen, wobei ersteres auf $|CD| > |AB|$ führen würde, was im Widerspruch zur Aufgabenstellung steht. Also befinden sich beide Lotfußpunkte im Inneren der Strecke AB. Es gilt damit $|AB| = |AL_D|+|L_DL_C|+|L_CB| = |L_DL_C| + 2|L_CB|$, letzteres aufgrund der Kongruenz der Dreiecke $\triangle BL_CC$ und $\triangle AL_DD$.
Im Viereck L_DL_CCD sind aber nun gegenüberliegende Seiten parallel, sodass es sich um ein Parallelogramm handelt und $|L_DL_C| = |CD|$ folgt.

Es verbleibt, $|L_CB|$ zu berechnen. Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle BL_CC$ gilt $|L_CC|^2 + |BL_C|^2 = |BC|^2$, also $|L_CB| = \sqrt{25^2 - 24^2}$ cm $= \sqrt{49}$ cm $= 7$ cm.
Setzt man dies ein, erhält man $|AB| = |CD|+2\cdot 7$ cm und zusammen mit $|AB|+|CD| = 50$ cm schließlich $|AB| = 32$ cm und $|CD| = 18$ cm. Für ein solches Trapez gilt damit, dass seine Kantenlängen $|AB| = 32$ cm, $|BC| = 25$ cm, $|CD| = 18$ cm und $|AD| = 25$ cm betragen.

Aufgabe 150923:
Gegeben seien die Seitenlänge a eines Quadrates $ABCD$ sowie eine Länge m, für die $m \leq a$ gilt. Es sei M derjenige Punkt auf der Seite CD, für den $MD = m$ gilt.
Gesucht ist ein Punkt N auf der Seite AD so, dass sich der Flächeninhalt des Dreiecks NMD zu dem des Quadrates $ABCD$ wie $1 : 7$ verhält.
Man ermittle alle diejenigen Werte von m, für die ein solcher Punkt N auf AD existiert, und hierzu jeweils die Länge der Strecke DN.

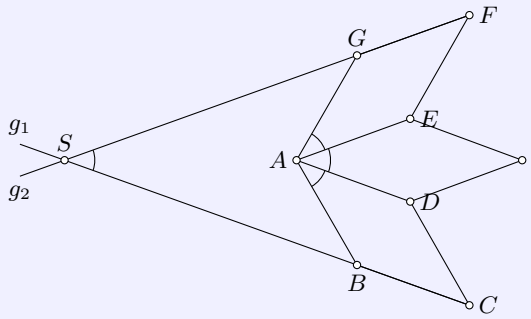
Lösung von cyrix:
Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle NMD$ beträgt

$$\frac{1}{2}|MD| \cdot |DN| = \frac{m}{2} \cdot |DN|$$

Damit dieser den von der Aufgabenstellung verlangten Wert von $\frac{1}{7}a^2$ annimmt, muss $|DN| = \frac{2a}{7m} \cdot a$ gelten. Damit der Punkt D auf der Seite AD des Quadrats liegt (und nicht nur auf der Gerade durch diese Seite), muss der Vorfaktor $\frac{2a}{7m}$ zwischen 0 und 1 liegen.

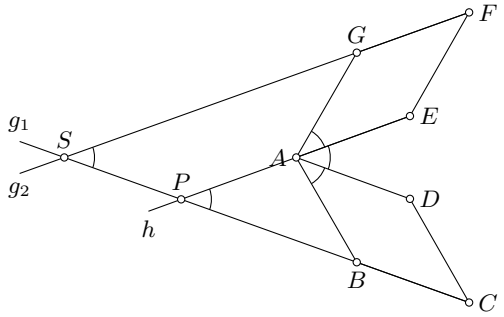
Wegen $a > 0$ und $m \geq 0$ ist auch immer $\frac{2a}{7m} > 0$. Schließlich ist die Ungleichung $\frac{2a}{7m} \leq 1$ äquivalent zu $m \geq \frac{2}{7}a$, sodass genau für solche Werte von m ein entsprechender Punkt N auf der Strecke AD existiert.

Aufgabe 160921:



Karlheinz betrachtet die in der Abbildung dargestellte, aus drei kongruenten Rhomben bestehende Figur. Dabei stellt er fest, dass der Winkel $\angle BSG$ genau so groß ist wie jeder der Winkel $\angle BAD, \angle DAE, \angle EAG$.
Nach einigem Nachdenken behauptet er, dass der folgende Satz gilt:
„Sind zwei Parallelogramme $ABCD$ und $AEFG$, die genau den Punkt A gemeinsam haben, so gegeben, dass die Winkel $\angle BAD, \angle DAE$ und $\angle EAG$ gleich groß und kleiner als 120° sind, dann hat auch der Winkel $\angle BSG$, den die Gerade g_1 durch B und C mit der Geraden g_2 durch F und G einschließt, die gleiche Größe wie jeder dieser drei Winkel."
Beweisen Sie diesen Satz!

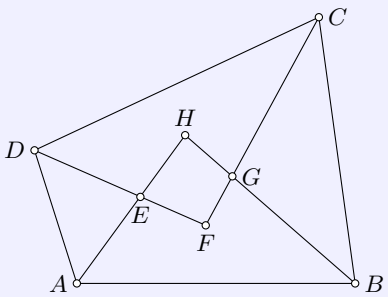
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei h die gerade durch A und E. Dann gilt $h \parallel g_2$, da $AEFG$ ein Parallelogramm ist. Folglich schneidet die zu g_2 nicht parallele Gerade g_1 die Geraden g_2 und h in S bzw. P. (siehe Abbildung)
Nun sind $\angle BPA$ und $\angle BSG$ Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen und daher gleichgroß. Ebenso sind $\angle DAE$ und $\angle BPA$ Stufenwinkel an geschnittenen Paralellen und mithin gleichgroß. Folglich ist der Winkel $\angle BSG$, den g_1 mit g_2 einschließt, genau so groß wie jeder der Winkel $\angle BAD$, $\angle DAE$, $\angle EAG$.

Aufgabe 190923:

Von einem konvexen Viereck $ABCD$ werde folgendes vorausgesetzt:
Konstruiert man die Winkelhalbierenden seiner Innenwinkel, so entstehen Schnittpunkte E, F, G, H, die so auf den Winkelhalbierenden angeordnet sind, wie dies aus dem Bild ersichtlich ist.
Beweisen Sie, dass unter dieser Voraussetzung stets in dem Viereck $EFGH$ die Summe zweier gegenüberliegender Innenwinkel 180° beträgt!



Lösung von cyrix:
Es seien die Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ wie üblich mit α bei A bis δ bei D bezeichnet.
Es ist $\angle FEH = \angle DEA = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\delta}{2}$ und analog $\angle HGF = \angle BGC = 180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$, also

$$\angle FEH + \angle HGF = 360° - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = 180° \qquad \square.$$

Aufgabe 220923:
Von einem Quadrat $ABCD$ und vier Punkten P, Q, R, S wird folgendes vorausgesetzt:
(1) P liegt auf der Strecke AB zwischen A und B,
(2) Q liegt auf der Strecke BC zwischen B und C,
(3) R liegt auf der Strecke CD zwischen C und D,
(4) S liegt auf der Strecke DA zwischen D und A,
(5) es gilt $PR \perp QS$.
Untersuchen Sie, ob für jede Lage der Punkte, bei der die Voraussetzungen (1) bis (5) erfüllt sind, stets dieselbe der drei Aussagen $PR < QS$, $PR = QS$, $PR > QS$ gilt!
Wenn das der Fall ist, nennen Sie diese Aussage!

Lösung von cyrix:
Wir legen so ein Koordinatensystem in die Ebene des Quadrats, dass A im Koordinatenursprung, B im Punkt (1,0) und D im Punkt (0,1) zu liegen kommt. Dann liegt C im Punkt (1,1). Weiterhin existieren reelle Zahlen p,q,r,s, sodass P die Koordinaten (p,0), Q die Koordinaten (1,q), R die Koordinaten (r,1) und S die Koordinaten (0,s) besitzt.

Gilt dabei $p = r$, so liegt die Gerade PR parallel zur y-Achse und damit parallel zur y-Achse. Damit muss wegen (5) die Strecke QS parallel zur x-Achse liegen, sodass $q = s$ gilt. Damit ergibt sich für beide Strecken eine Länge von

$$|PR| = \sqrt{(r-p)^2 + (1-0)^2} = 1 = \sqrt{(1-0)^2 + (s-q)^2} = |QS|$$

Sonst hat die Gerade PR den Anstieg $m_1 = \frac{1-0}{r-p} = \frac{1}{r-p}$ und die Gerade QS den Anstieg $m_2 = \frac{s-q}{1-0} = s-q$. Nach (5) stehen die beiden Geraden senkrecht aufeinander, sodass sich ihre Anstiege zu (-1) multiplizieren. Es gilt also $\frac{1}{r-p} \cdot (s-q) = -1$ bzw. $s-q = -(r-p)$, also $(s-q)^2 = (r-p)^2$. Für die Längen der Strecken PR und QS erhalten wir damit wieder

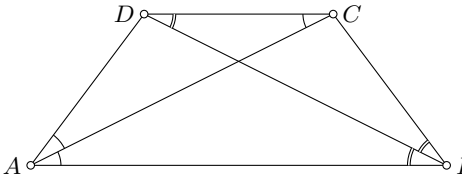
$$|PR| = \sqrt{(r-p)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (s-q)^2} = |QS|$$

sodass in jedem Fall $|PR| = |QS|$ gilt.

Bemerkung: Wir haben von den Bedingungen (1) bis (4) nur genutzt, dass die Punkte P bis S auf den angegebenen Geraden liegen. Damit kann die Zusatzvoraussetzung, die dort gefordert wird, dass die Punkte jeweils im Inneren der jeweiligen Quadratseiten liegen sollen, entfallen.

Aufgabe 230922:
Von einem Trapez $ABCD$ wird vorausgesetzt
(1) Es gilt $AB \parallel DC$.
(2) Es gilt $AB > DC$.
(3) Das Trapez besitzt einen Innenwinkel mit einer Größe von 110°.
(4) Die Diagonalen AC und BD sind die Halbierenden der Winkel $\angle DAB$ bzw. $\angle ABC$.
Zeigen Sie, dass durch diese Voraussetzungen die Größen aller Innenwinkel des Trapezes eindeutig bestimmt sind und ermitteln Sie diese Größen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es gilt $\angle BAC = \angle DCA$ und $\angle ABD = \angle CD$ als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. Aus (4) und (1) folgt daher

$$\angle DAC = \angle DCA \qquad \text{bzw.} \qquad \angle DBC = \angle CDB \qquad (5)$$

Aus (5) folgt: $AD = DC = CB$ (6).
Wegen (2) ist $ABCD$ kein Parallelogramm, nach (6) daher ein gleichschenkliges Trapez. Seine stumpfen Innenwinkel liegen wegen (2) bei D und C, also gilt $\angle ADC = \angle DCB = 110°$ (7).
Die Innenwinkel bei A und B ergänzen (7) jeweils zu 180°, d. h., es gilt $\angle DAB = \angle ABC = 70°$ (8).
Mit (7) und (8) sind alle verlangten Winkelgrößen ermittelt.

Aufgabe 240923:
Es sei $ABCD$ ein Quadrat. Für zwei verschiedene Punkte E und F, die in irgendeiner Reihenfolge auf der Seite BC zwischen B und C liegen, gelte $BE = FC$ und $BE : EF = 41 : 11$.
Die Gerade durch A und E sei g, die Gerade durch D und F sei h, der Schnittpunkt von g und h sei S.
Untersuchen Sie, ob bei einer Lage von Punkten A, B, C, D, E, F, S, die diese Voraussetzungen erfüllt, das Dreieck EFS gleichseitig ist!

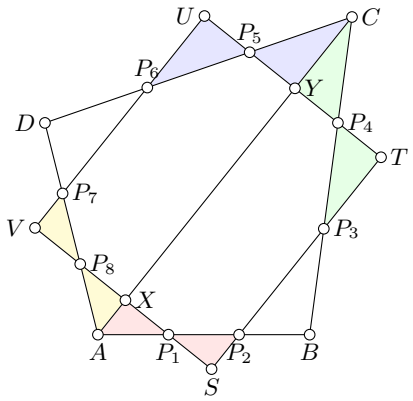
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus $AB = AC$, $\angle ABE = \angle DCF$ und $BE = FC$ folgt $\triangle ABE \cong \triangle DCF$, also $\angle BAE = \angle CDF$. Daher ist $\triangle ADS$ gleichschenklig mit $\angle DAS = \angle ADS$.
Wegen $\angle FES = \angle DAS$ und $\angle EFS = \angle ADS$ (entweder Stufenwinkel oder Wechselwinkel) ist folglich auch $\triangle EFS$ gleichschenklig mit $\angle FES = \angle EFS$.

a) Liegen die Punkte B, E, F, C in dieser Reihenfolge auf BC, so gilt $AS > AE$. Da ferner AE im rechtwinkligen Dreieck ABE als Hypotenuse die längste Seite ist, gilt erst recht $AS > AB = AD$. Somit ist das Dreieck ADS nicht gleichseitig; es gilt $60° = \angle ASD = \angle ESF$; also ist auch das Dreieck EFS nicht gleichseitig.

b) Liegen die Punkte B, F, E, C in dieser Reihenfolge auf BC, so gilt:
Wäre $\triangle EFS$ gleichseitig, also $\angle FES = \angle BEA = 60°$, so wäre für den Bildpunkt E' von E bei Spiegelung an AB (der wegen $EB \perp AB$ auf der Verlängerung von EB liegt($\triangle AEE'$ gleichseitig. Daher wäre $AE = E'E = 2 \cdot BE$.
Zerlegt man BE in 41 gleich lange Teilstrecken, von denen nach Voraussetzung 11 auf FE, also 30 auf BF kommen, so hätte $AB = BC = BF + FC = BF + BE$ die Länge von 71 Teilstrecken. Nach dem Satz des Pythagoras müsste dann $AB^2 + BE^2 = AE^2$, also $71^2 + 41^2 = (2 \cdot 41)^2$ gelten.
Es ist aber $71^2 + 41^2 = 6722$ und $(2 \cdot 41)^2 = 6724$.
Dieser Widerspruch beweist, dass $\triangle EFS$ nicht gleichseitig sein kann.

Aufgabe 250922:
Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Jede Seite dieses Vierecks werde durch zwei Teilpunkte in drei gleich lange Strecken geteilt. Durch je zwei solche Teilpunkte, die ein und derselben Ecke des Vierecks $ABCD$ am nächsten liegen, sei eine Gerade gezeichnet.
Auf diese Art kann man genau vier Geraden zeichnen, deren Schnittpunkte ein weiteres Viereck $STUV$ bilden.
Welches der beiden Vierecke $ABCD$ bzw. $STUV$ hat den größeren Flächeninhalt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die in der Aufgabe genannten Teilpunkte $P_1, P_2, ..., P_8$ und Schnittpunkte S, T, U, V sowie die Schnittpunkte X, Y von AC mit VS bzw. TU seien wie im Bild bezeichnet.
Nach Voraussetzung gilt: $BP_2 : BA = BP_3 : BC = 1 : 3$.
Nach Umkehrung des Strahlensatzes folgt hieraus $P_2P_3 \parallel AC$ und folglich $AX \parallel P_2S$. Nach dem Satz über Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen folgt hieraus $\angle P_1AX = \angle P_1P_2S$.
Da ferner $\angle AP_1X = \angle P_2P_2S$ (Scheitelwinkel) und $AP_1 = P_1P_2$ (nach Voraussetzung) ist, so folgt nach dem Kongruenzsatz wsw die Kongruenz der Dreiecke AP_1X und P_1P_2S und damit auch deren Flächengleichheit.
Analog folgt die Flächengleichheit der Dreiecke AP_8X und P_7P_8V, der Dreiecke CP_4Y und P_3P_4T sowie der Dreiecke CP_5Y und P_6P_5U. Die Viereckflächen $ABCD$ und $STUV$ haben die Achteckfläche $P_1P_2...P_9$ gemeinsam.
Vergleicht man die außerhalb dieser Achteckfläche liegenden Teilflächen, so zeigt sich, dass der Inhalt des Vierecks $ABCD$ um die Summe der Inhalte P_2BP_3 und P_6DP_7 größer ist als der Inhalt des Vierecks $STUV$.

Aufgabe 300922:
Man untersuche, ob es ein Rechteck $ABCD$ mit einander gegenüberliegenden Ecken A und C gibt, bei dem im Dreieck ABC die Winkelhalbierende des Innenwinkels $\angle ACB$ die Seite AB in deren Mittelpunkt schneidet.

Lösung von cyrix:
Die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ im Dreieck $\triangle ABC$ teilt die gegenüberliegende Seite AB im Verhältnis der anliegenden Seiten AC und BC. Verläuft sie durch den Mittelpunkt von AB, so gilt also $|AC| = |BC|$, was aber im Rechteck $ABCD$ nicht sein kann, da das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig in B, die Hypotenuse AC also länger als die Kathete BC ist. Also kann die Winkelhalbierende nicht durch den Mittelpunkt der Seite AB verlaufen, □.

Aufgabe 340923:
Ausgehend von einem Quadrat $ABCD$ kann man für je zwei positive ganze Zahlen x und y die folgenden Konstruktionen ausführen:
Die Seite AB wird über B hinaus um die Länge $x \cdot AB$ bis zum Punkt S verlängert,
die Seite BC wird über C hinaus um die Länge $y \cdot BC$ bis zum Punkt T verlängert,
die Seite CD wird über D hinaus um die Länge $x \cdot CD$ bis zum Punkt U verlängert,
die Seite DA wird über A hinaus um die Länge $y \cdot DA$ bis zum Punkt V verlängert.
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ positiver ganzer Zahlen, für die das so erhaltende Viereck $STUV$ einen genau 11 mal so großen Flächeninhalt wie das Quadrat $ABCD$ hat!

Lösung von cyrix:
Das Viereck $STUV$ lässt sich zerlegen in das Quadrat $ABCD$ sowie die vier rechtwinkligen Dreiecke $\triangle VSA$, $\triangle STB$, $\triangle TUC$ und $\triangle UVD$.

Es habe das Quadrat $ABCD$ die Kantenlänge $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 1$, sodass $|AV| = |CT| = y$, $|BS| = |DU| = x$ und also $|AS| = |CU| = 1 + x$ und $|BT| = |DV| = 1 + y$ gilt.
Damit können wir die Flächeninhalte der vier Dreiecke, des Quadrats und damit auch des Vierecks $STUV$ berechnen, denn dieser ist nun

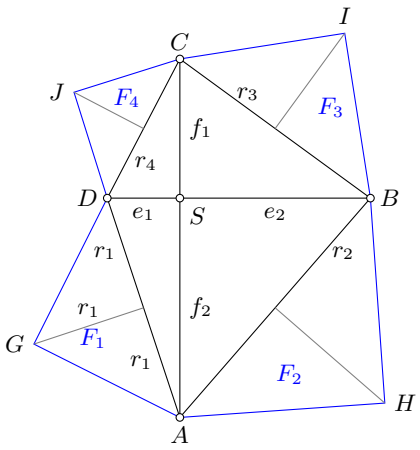
$$F = 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot y \cdot (1+x) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot (1+y) + \frac{1}{2} \cdot y \cdot (1+x) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot (1+y) = 1 + y + xy + x + xy = 1 + x + y + 2xy$$

Nach Aufgabenstellung soll $F = 11$ sein, sodass die Gleichung $11 = 1+x+y+2xy$ bzw. $10 = x+y+2xy$ in positiven ganzen Zahlen x und y zu lösen ist. Da diese symmetrisch in x und y ist, können wir o. B. d. A. $x \leq y$ annehmen, sodass $10 = x + y + 2xy \geq 2x + 2x^2 = 2x(1 + x)$ gilt, also $x = 1$, da für alle $x \geq 2$ diese Ungleichung nicht erfüllt ist.
Dann ist aber $10 = 1 + y + 2y$, also $y = 3$, was schließlich auf die beiden Lösungen $(x; y) \in \{(1; 3), (3; 1)\}$ führt, für die dann der Flächeninhalt des Vierecks $STUV$ genau 11 mal so groß ist wie der des Quadrats $ABCD$.

III Runden 3 & 4

Aufgabe 020935:
Über den Seiten a, b, c und d eines konvexen Vierecks, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, sind gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit den Flächeninhalten F_1, F_2, F_3 und F_4 in dieser Reihenfolge errichtet.
Beweisen Sie, dass $F_1 + F_3 = F_2 + F_4$ ist!

Lösung von André Lanka:
Mit den Bezeichnungen in der Abbildung gilt als gegeben: e (bestehend aus den Abschnitten e_1 und e_2) steht senkrecht auf f (bestehend aus den Abschnitten f_1 und f_2). Jedes der Dreiecke mit den Flächeninhalten F_1, F_2, F_3, F_4 ist gleichschenklig-rechtwinklig.
Damit teilt die Höhe in den Punkten G, H, I, J die Grundseite in zwei längengleiche Stücke, die zudem der Länge der Höhe entsprechen (Radius des jeweiligen Thaleskreises). Damit sind die Angaben r_1, r_2, r_3, r_4 in der Abbildung erklärt.
Der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks ergibt sich dann als $F_i = r^2$ $(i \in 1, 2, 3, 4)$.
Gleichzeitig sind die Dreiecke $\triangle DAS, \triangle ABS, \triangle BCS, \triangle CDS$ rechtwinklig, so dass hier der Satz des Pythagoras angewandt werden kann:



$$4r_1^2 = e_1^2 + f_1^2 \quad ; \quad 4r_2^2 = e_2^2 + f_2^2 \quad ; \quad 4r_3^2 = e_3^2 + f_3^2 \quad ; \quad 4r_4^2 = e_4^2 + f_4^2$$

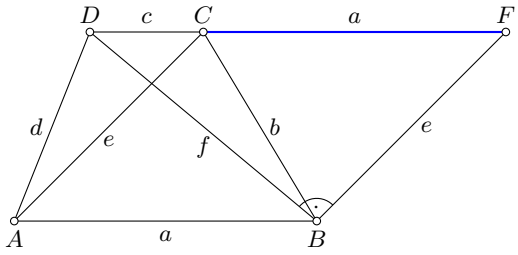
Dies kann nun zur Berechnung der Flächeninhaltssumme herangezogen werden:

$$\begin{aligned} F_1 + F_3 = r_1^2 + r_3^2 &= \frac{1}{4}(e_1^2 + f_2^2) + \frac{1}{4}(e_2^2 + f_1^2) \\ &= \frac{1}{4}(e_2^2 + f_2^2) + \frac{1}{4}(e_1^2 + f_1^2) \\ &= r_2^2 + r_4^2 = F_2 + F_4 \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 030935:
Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Wenn in einem Trapez die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, so ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich dem Quadrat der Summe der Grundseiten (Parallelseiten).

Lösung von Manuela Kugel:



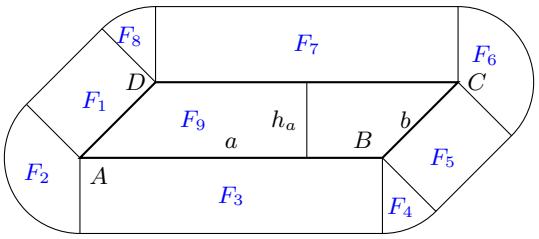
Beweis: In einem Trapez $ABCD$ seien die einander parallelen Grundseiten $AB = a$ und $CD = c$ und die Diagonalen $AC = e$ und $BD = f$. Die Parallele zu AC durch B schneidet die Gerade CD in F. Dann ist $CF = a$, also $DF = a + c$ und $BF = e$.
Da das Dreieck $\triangle BFD$ rechtwinklig ist, folgt aus dem Lehrsatz des Pythagoras $e^2 + f^2 = (a + c)^2$.

Aufgabe 050935:
In dem Parallelogramm $ABCD$ sei $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $(a > b)$ und $AE = h_a$, wobei E der Fußpunkt des vom Punkt A des auf die Seite CD bzw. ihre Verlängerung gefällten Lotes ist.
Ferner sei eine Kreisscheibe mit einem Radius der Länge r gegeben. Der Mittelpunkt der Kreisscheibe durchlaufe sämtliche Seiten des Parallelogramms.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche F, die von der Kreisscheibe überstrichen wird!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Für $2r \geq h_a$ wird die gesamte Parallelogrammfläche überstrichen.
2. Für $2r < h_a$ wird ein Teil der Parallelogrammfläche nicht überstrichen; es gilt nämlich, wenn h_b die zur Seite BC gehörige Höhenlänge des Parallelogramms $ABCD$ bezeichnet, $ah_a = bh_b$, und somit, weil $a > b$ vorausgesetzt ist, $h_a < h_b$, und daher auch $2r < h_b$.

Im Fall 1) lässt sich überstrichene Fläche F in die Teilflächen F_1 bis F_9 zerlegen.



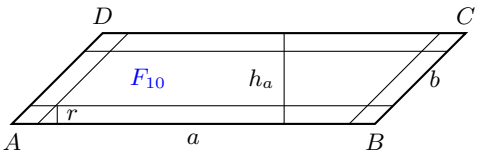
Dabei sind

- F_1 und F_5 Rechtecke mit den Seitenlängen a und r,
- F_3 und F_7 Rechtecke mit den Seitenlängen b und r,
- F_2, F_4, F_6 und F_7 Kreissektoren, die im Radius r übereinstimmen und deren Winkel sich zu einem Winkel der Größe 360° ergänzen. Daher kann man die vier Kreissektoren zu einer Kreisscheibe zusammensetzen.

Also gilt für den Flächeninhalt $I(F)$ der überstrichenen Fläche

$$I(F) = 2(I(F_1) + I(F_3)) + I(F_9) + \pi r^2 = 2(ar + br) + \pi r^2 + ah_a$$

Im Fall 2 entstehen außerhalb des Parallelogramms die gleichen Teilflächen wie im Fall 1. Die Fläche des Parallelogramms wird nicht völlig überdeckt. Es bleibt die Fläche F_{10} frei.



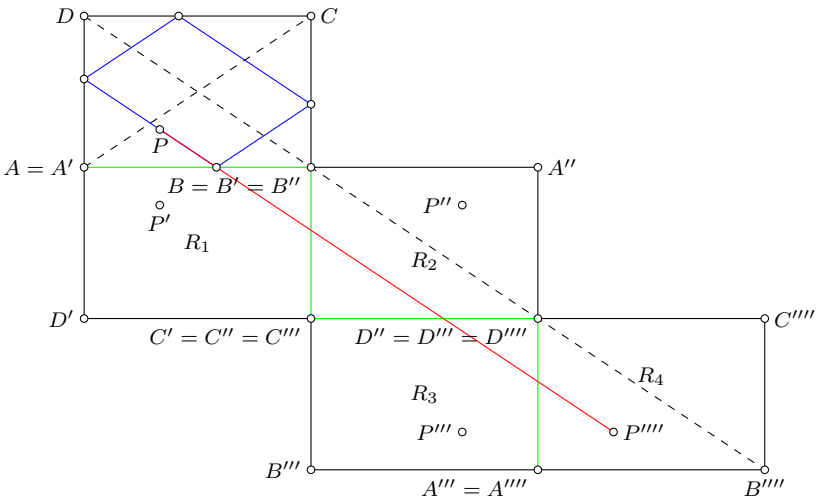
F_{10} ist ein Parallelogramm mit der Seitenlänge $(a-2x)$ und der zugehörigen Höhe (h_a-2r), wobei x die Seitenlänge eines der Eckrhomben ist.
Nach dem 2. Strahlensatz gilt $x : r = b : h_a$ und damit $x = \frac{br}{h_a}$.
Also gilt für den Inhalt $F(F')$ der überstrichenen Fläche im Fall 2

$$I(F') = I(F) - I(F_{10}) = 2ar + 2br + \pi r^2 + ah_a - \left(ah_a - 2br - 2ar + \frac{4br^2}{h_a}\right) =$$

$$= 4\left(ar + br - \frac{br^2}{h_a}\right) + \pi r^2$$

Aufgabe 070932:
Auf einem rechtwinkligen Billardtisch $ABCD$ befindet sich im Punkt P eine Kugel.
Nach welchem Punkt von AB muss diese gestoßen werden, damit sie erst der Reihe nach genau je einmal an den Seiten AB, BC, CD und DA des Tisches reflektiert wird und dann genau wieder im Punkt P eintrifft?

Lösung von Nuramon:
Man muss auf den Schnittpunkt von AB mit der Parallelen zu BD durch P zielen. Dieser Punkt wird gefunden, indem man durch P eine zur Diagonalen BD parallele Gerade legt. (Dieser Schnittpunkt existiert nur, wenn P im Dreieck ABD liegt.) Zum Beweis reicht es aus, ein einfaches Bild zu malen:

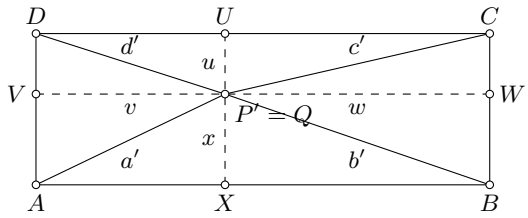


Man spiegele $ABCD$ an AB. Das dadurch erhaltene neue Rechteck R_1 spiegle man an der Seite, die BC entspricht und erhalte R_2.
R_2 wiederum spiegle man an der Seite von R_2, die CD entspricht. Das Spiegelrechteck sei R_3.
R_3 spiegelt man an der Seite, die DC entspricht und erhalte R_4.
Sei P' der Punkt in R_4, der P entspricht. (Man beobachte, dass R_4 durch Verschiebung von $ABCD$ parallel zur Diagonalen BD entsteht.)
Das Reflexionsgesetz sagt nun aus, dass wenn man die Kugel im Punkt P in die Richtung von P' stößt, man die Seiten in der gewünschten Reihenfolge trifft und anschließend wieder bei P landet.

Analog zeigt man, dass man auch zu Punkt P zurückkehrt, wenn man die Kugel parallel zur Diagonalen AC anstößt.

Aufgabe 080936:
Es sei $ABCD$ ein Rechteck, und es sei P ein Punkt, der nicht notwendig in der Ebene des Rechtecks zu liegen braucht. P habe vom Eckpunkt A den Abstand a, vom Punkt B den Abstand b und vom Punkt C den Abstand c.
Man berechne den Abstand d des Punktes P vom Eckpunkt D und zeige dabei, dass zur Ermittlung dieses Abstandes d die Kenntnis der drei Abstände a, b, c ausreicht.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Abstand des Punktes P von D sei d. Es sei PQ das Lot von P auf die Ebene des Rechtecks.
Die Parallele durch Q zu (AD) bzw. (AB) schneide die Gerade (AB) bzw. (AD) in (X) bzw. (V), die Gerade (DC) bzw. (BC) in (U) bzw. (W). Es sei $PQ = h$, $QX = x$, $QU = u$, $QV = v$, $QW = w$.

Dann erhält man nach jeweils zweimaliger Anwendung des Lehrsatzes des Pythagoras folgende Gleichungen:

$$a^2 = v^2 + x^2 + h^2 \quad ; \quad b^2 = w^2 + x^2 + h^2$$
$$c^2 = u^2 + w^2 + h^2 \quad ; \quad d^2 = u^2 + v^2 + h^2$$

Daraus folgt (nach Addition)

$$a^2 + c^2 = u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + 2h^2 \quad \text{und} \quad b^2 + d^2 = u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + 2h^2$$

Somit gilt $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ und damit $d^2 = a^2 - b^2 + c^2$ (also insbesondere $a^2 + c^2 \geq b^2$). Der Abstand des Punktes P von D beträgt folglich

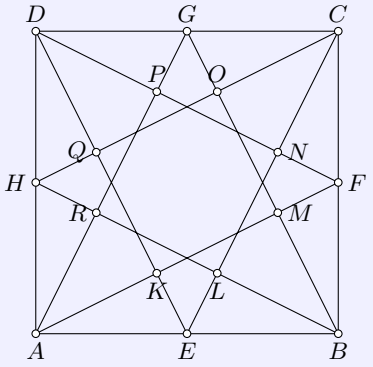
$$d = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$$

Aufgabe 090931:
Es sei $ABCDEFGH$ ein regelmäßiges Achteck. Man denke sich alle Dreiecke gebildet, deren Ecken je drei der Punkte A, B, C, D, E, F, G, H sind.
Jemand will nun einige dieser Dreiecke aufschreiben, und zwar so, dass keine zwei der aufgeschriebenen Dreiecke einander kongruent sind.
Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von Dreiecken, die er unter dieser Bedingung aufschreiben kann!

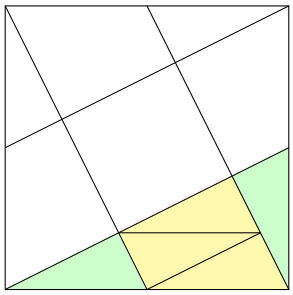
Lösung von StrgAltEntf:
Es gibt nur fünf verschiedene Sorten von Dreiecken, d. h. jedes mögliche Dreieck gehört zu genau einer dieser Sorten.
Begründung: Für ein Dreieck mit den Ecken X,Y,$Z \in \{A,...,H\}$ seien x,y und z die Abstände zwischen jeweils zwei Ecken. (Bei dem Dreieck mit den Ecken B,C,H wäre etwa $x = 1, y = 5, z = 2$.)
Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn die Tripel der zugehörigen Abstände gleich sind. Dabei spielt es aber keine Rolle, in welcher Reihenfolge die Abstände stehen. (Etwa für das Dreieck E,G,D ist $x = 2$,$y = 5$,$z = 1$, und die Dreiecke E,G,D und B,C,H sind kongruent.)
Die Summe $x + y + z$ ist stets gleich 8. Folglich ist die Fragestellung dazu äquivalent, auf wie viele Weisen sich 8 als Summe dreier natürlicher Zahlen darstellen lässt, wobei die Reihenfolge der Summanden keine Rolle spielt.
Hierfür gibt es nur die fünf Möglichkeiten $1 + 1 + 6 = 1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4 = 2 + 2 + 4 = 2 + 3 + 3$

Aufgabe 100932:

In einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a seien die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA mit E, F, G, H bezeichnet.
In dem Streckenzug $AFDECHBGA$ auftretenden Schnittpunkte seien so mit K, L, M, N, O, P, R bezeichnet, dass $AKELBMFNCOGPDQHR$ ein (nicht konvexes) Sechzehneck ist, auf dessen Seiten keine weiteren Schnittpunkte des obengenannten Streckenzuges mit sich selbst liegen (siehe Bild).
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Sechzehnecks!



Lösung von cyrix:
Der Flächeninhalt des Sechzehnecks ergibt sich als Differenz der Fläche des Quadrats und der der acht (aus Symmetriegründen – Spiegelung an den Diagonalen bzw. den Mittelparallelen des Quadrats bzw. Hintereinanderausführungen davon überführt je zwei solche ineinander – kongruenten) Dreiecke AKL, ELB, BMF, FNC, COG, GPD, DQH und HRA.

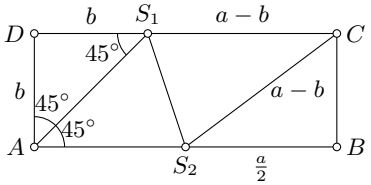


Der Flächeninhalt des Dreiecks AED beträgt $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$. Dieses lässt sich zerlegen in das Dreieck AKE und das Dreieck DAK. Aufgrund der Parallelität der Geraden $AK = AF$ und $HQ = HC$ geht das Dreieck DAK durch Streckung mit Zentrum D um den Faktor 2 aus dem Dreieck DHQ hervor, da $|DA| = 2|DH|$ ist.

Sei mit x der Flächeninhalt des Dreiecks AKE bezeichnet. Dann hat also auch das Dreieck DHQ den Flächeninhalt x und das Dreieck DAK demnach den Flächeninhalt $2^2 \cdot x = 4x$.
Nach der Vorüberlegung ist der Flächeninhalt des Dreiecks AED gleich $4x + x = \frac{1}{4}a^2$, sodass jedes einzelne der betrachteten „kleinen Dreiecke“ den Flächeninhalt von $x = \frac{1}{20}a^2$ besitzt.
Der Flächeninhalt des Sechzehnecks beträgt demnach $a^2 - 8 \cdot \frac{1}{20}a^2 = \frac{3}{5}a^2$.

Aufgabe 110934:
In einem Rechteck $ABCD$ mit $AB = CD = a$ und $BC = DA = b$, $(a > b)$ schneide die Halbierende des Winkels $\angle BAD$ die Seite CD in S_1. Weiter sei S_2 der Mittelpunkt von AB.
Ermitteln Sie das Verhältnis $a : b$ der Seitenlängen eines solchen Rechtecks, bei dem die Halbierende des Winkels $\angle AS2C$ die Seite CD in S_1 schneidet!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Ein Rechteck $ABCD$ genügt genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn $angle AS_2S_1 \cong \angle S_1S_2C$ gilt. Da ferner in jedem Rechteck $\angle AS_2S_1 \cong \angle S_2S_1C$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen) ist, so genügt ein genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn das Dreiecke $\triangle S_1S_2C$ gleichschenklig mit $S_1C = S_2C$ ist.
Nun ist das rechtwinkliges Dreieck $\triangle ADS_1$ stets gleichschenklig, da $\angle DAS_1$ eine Größe von 45° hat und somit $\angle DAS_1 \cong \angle AS_1D$ gilt. Daher gilt:
$DS_1 = DA = b$, und das Rechteck genügt genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn $S_2C = S_1C = a - b$ gilt. Da $\triangle S_2BC$ rechtwinklig ist, ist dies nach dem Satz des Pythagoras genau dann der Fall, wenn

$$(a-b)^2 = b^2 + \frac{a^2}{4}$$

oder, gleichbedeutend hiermit $a^2 - 2ab = \frac{a^2}{4}$, d. h. $\frac{3}{4}a^2 = 2ab$ gilt.
Wegen $a \neq 0$ trifft dies genau für $a : b = 8 : 3$ zu.

Aufgabe 130933:
Auf einer Geraden g seien in dieser Reihenfolge sechs Punkte A, B, C, D, E, F gelegen. Ein Punkt P außerhalb von g sei so gelegen, dass PC das Lot von P auf g ist. Dabei gelte $PC = AB = BC = CD = DE = EF$.
Man beweise, dass dann $\angle APF = 135°$ gilt.
Hinweis: Es genügt nicht, diese Gleichheit nur mit Rechentafelgenauigkeit nachzuweisen.

Lösung von cyrix:
Um die folgende Notation zu vereinfachen, setzen wir $|PC| = 1$. Durch den Satz von Pythagoras erhalten wir im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ACP$ die Kantenlänge $|AP| = \sqrt{|AC|^2 + |PC|^2} = \sqrt{5}$ und analog im rechtwinkligen Dreieck $\triangle CFP$ die Kantenlänge $|FP| = \sqrt{|CF|^2 + |PC|^2} = \sqrt{10}$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle AFP$ kann einerseits ermittelt werden zu $\frac{1}{2} \cdot |AF| \cdot |PC| = \frac{5}{2}$ und andererseits auch als $\frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot |FP| \cdot \sin(\angle AFP) = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\angle AFP)$, sodass man $\sin(\angle AFP) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ erhält.
Es ist $|AF| = 5 = \sqrt{25} > \sqrt{10} = |FP| > \sqrt{5} = |AP|$, sodass AF die längste Seite im Dreieck $\triangle AFP$ ist. Ihr gegenüber liegt damit auch der größte Innenwinkel dieses Dreiecks, sodass $\angle AFP > 60° > 45°$ gilt. also muss $\angle AFP = 135°$ gelten, da dies der einzige weitere Wert im Intervall $[0, 180°]$ ist, an welchem der Sinus den Wert $\frac{\sqrt{2}}{2}$ annimmt, □.

Aufgabe 130934:
In einer Ebene sollen regelmäßige n-Ecke (mit einheitlicher Eckenzahl) so um einen Eckpunkt herum aneinandergelegt werden, dass die Summe der Größen der an diesem Eckpunkt liegenden Innenwinkel 360° beträgt.
Geben Sie alle natürlichen Zahlen n an, für die das möglich ist; geben Sie dabei jeweils die Anzahl der insgesamt benötigten n-Ecke an!

Lösung von cyrix:
Sei $n \geq 3$. Dann betragen die Innenwinkel im regelmäßigen n-Eck jeweils $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$. Für $n = 3; 4; 5$ und 6 ergeben sich so Innenwinkel von 60°, 90°, 108° und 120°.

Offensichtlich ist wegen $\frac{n-2}{n} = 1 - \frac{2}{n}$ die Größe der Innenwinkel eine in n streng monoton steigende Funktion, sodass für alle $n > 6$ gilt, dass die Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks größer als $120° = \frac{1}{3} \cdot 360°$, aber wegen $\frac{n-2}{n} < 1$ auch kleiner als $180° = \frac{1}{2} \cdot 360°$ sind.
Damit kann für diese n (also $n > 6$) keine Anzahl von regelmäßigen n-Ecken überschneidungsfrei an einer Ecke zusammengelegt werden. Ähnlich sieht es für $n = 5$ aus, da $\frac{360°}{108°} = \frac{10}{3} \notin \mathbb{Z}$ ist. Es verbleiben $n = 3; 4$ und 6, wo jeweils 6; 4 bzw. 3 regelmäßige n-Ecke überschneidungsfrei in einer Ecke aneinandergefügt werden können.

Aufgabe 140933:
Von einem beliebigen Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ seien die Längen $a = AB$, $c = CD$ seiner Parallelseiten sowie der Abstand h der diese beide Parallelseiten enthaltenen Geraden gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD sei S.
Man berechne aus den gegebenen Längen a, c, h die Flächeninhalte F_1, F_2, F_3, F_4 der Dreiecke ABS, BCS, CDS bzw. ADS.

Lösung von cyrix:
Es ist $F_{ABC} = F_{ABD} = \frac{1}{2}ah$, also $F_1 + F_2 = F_1 + F_4 = \frac{1}{2}ah$ und damit insbesondere $F_2 = F_4$.
Analog ist $F_{ACD} = F_{BCD} = \frac{1}{2}ch$, also $F_3 + F_4 = F_2 + F_3 = \frac{1}{2}ch$.

Die Winkel $\angle ASB$ und $\angle CSD$ sind Scheitelwinkel, also gleich groß. Genauso stimmen die Winkel $\angle BAS$ und $\angle DCS$ überein, da sie Wechselwinkel sind. Demnach stimmen die Dreiecke $\triangle ABS$ und $\triangle CDS$ in zwei Innenwinkeln überein, sind also ähnlich zueinander und es gilt $\frac{F_3}{F_1} = \left(\frac{|SC|}{|AS|}\right)^2$.
Es ist nach Strahlensatz $\frac{|AC|}{|AS|} = \frac{h}{h_S}$, wobei h_S die Länge der Höhe von S auf AB sei. Insbesondere ist damit

$$\frac{|SC|}{|AS|} = \frac{|AC| - |AS|}{|AS|} = \frac{|AC|}{|AS|} - 1 = \frac{h}{h_S} - 1 = \frac{F_{ABC}}{F_1} - 1 = \frac{F_2}{F_1}$$

Damit ergibt sich $\frac{F_3}{F_1} = \frac{F_2^2}{F_1^2}$ bzw. $\frac{F_3}{F_2} = \frac{F_2}{F_1}$.
Sei $x := \frac{F_3}{F_2}$. Dann gilt einerseits $F_2 + F_3 = (1+x)F_2 = \frac{1}{2}ch$ und andererseits $F_1 + F_2 = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot F_2 = \frac{1}{2}ah$.
Stellt man die erste dieser beiden Gleichungen nach F_2 um und setzt sie in die zweite ein, erhält man

$$\frac{1+x}{x} \cdot \frac{1}{2}ch \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}ah$$

bzw. $x = \frac{c}{a}$. Damit ergibt sich

$$F_2 = F_4 = \frac{1}{2}h \cdot \frac{ac}{a+c} \quad , \quad F_3 = \frac{1}{2}h \cdot \frac{c^2}{a+c} \quad \text{und} \quad F_1 = \frac{1}{2}h \cdot \frac{a^2}{a+c}$$

Aufgabe 160931:
Ein dem Einheitskreis einbeschriebenes n-Eck habe die Eigenschaft, dass es bei einer Drehung um 180° um den Mittelpunkt des Einheitskreises in sich übergeht. Auf der Peripherie des Einheitskreises sei irgendein Punkt P gegeben.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen aus der gegebenen Zahl n die Summe s der Quadrate der Abstände des Punktes P zu allen Punkten des n-Ecks!

Lösung von cyrix:
Aufgrund der Punktsymmetrie ist $n = 2m$ gerade.
Seien die Eckpunkte des n-Ecks in mathematisch positiver Richtung mit P_1, P_2, …, P_{2m} durchnummeriert, sodass sich jeweils P_k und P_{m+k} gegenüberliegen. Diese bilden also jeweils einen Durchmesser des Einheitskreises und es gilt $|P_k P_{m+k}|^2 = 2^2 = 4$.
Nach dem Satz von Thales ist jedes Dreieck $P_k P_{k+m} P$ rechtwinklig bei P (oder P fällt mit einem der beiden Endpunkte des betrachteten Durchmessers zusammen).
In jedem Fall gilt aber nach Pythagoras (bzw. sofort durch Einsetzen)

$$|PP_k|^2 + |PP_{k+m}|^2 = |P_k P_{k+m}|^2 = 4$$

sodass sich für die gesuchte Summe s als Wert die Anzahl dieser Durchmesser ergibt, die $4m = 2n$ beträgt, da jeder der Eckpunkte des n-Ecks an genau einem Durchmesser des Einheitskreises beteiligt ist, und auf jedem solchen genau zwei der Eckpunkte des n-Ecks liegen.

Aufgabe 170934:
Für ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ gelte $BC = CD = DA = a$ sowie $AB > a$.
a) Beweisen Sie, dass die Diagonale AC den Innenwinkel $\angle DAB$ des Trapezes halbiert!
b) Berechnen Sie die Länge von AB für den Fall, dass $\angle DAB = 60°$ gilt!

Lösung von cyrix:
Bemerkung: Bei kanonischer Anordnung und Bezeichnung der Eckpunkte des Trapezes in mathematisch positiver Orientierung, ist der Innenwinkel bei A „falsch“ bezeichnet und müsste eigentlich $\angle BAD$ heißen, damit nicht der zugehörige Gegenwinkel gemeint ist. In der Lösung wird diese „korrekte“ Bezeichnung verwendet.

a) Es ist $|DA| = |DC|$, also das Dreieck $\triangle ACD$ gleichschenklig und es gilt $\angle CAD = \angle DCA$. Es sind nun aber $\angle DCA$ und $\angle BAC$ Wechselwinkel an den von AC geschnittenen Parallelen AB bzw. CD, also gleich groß, sodass sich direkt $\angle CAD = \angle BAC$ ergibt, also AC die Winkelhalbierende von $\angle BAD$ ist, $\square$.

b) Aufgrund von $\angle CAD = \angle DCA = \frac{1}{2}\angle BAD = 30°$ folgt mit der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ACD$, dass $\angle ADC = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$ ist.
Sei M der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle ADC$ mit der Strecke AB. Dann besitzt das Dreieck $\triangle AMD$ zwei Innenwinkel der Größe 60°, ist also gleichseitig mit Kantenlänge $|AD| = a$.
Für das Dreieck $\triangle MCD$ gilt $|DM| = |DC| = a$, sodass es gleichschenklig ist und $\angle DCM = \angle CMD$ folgt. Da dessen dritter Innenwinkel $\angle MDC = \angle ADC - \angle ADM = 120° - 60° = 60°$ beträgt, ist auch dieses Dreieck gleichseitig mit Kantenlänge a.

Schließlich betrachten wir das Dreieck $\triangle MBC$. Auch hier sind nun zwei Seiten gleich lang: $|MC| = |BC| = a$, sodass die gegenüberliegenden Innenwinkel $\angle CBM$ und $\angle BMC$ gleich groß sind, wobei sich letzterer als Differenz des gestreckten Winkels $\angle BMA = 180°$ und den beiden Winkeln $\angle CMD = \angle DMA = 60°$, also zu $180° - 2 \cdot 60° = 60°$ ergibt, sodass auch das Dreieck $\triangle MBC$ gleichseitig mit Kantenlänge a ist.
Damit ergibt sich abschließend $|AB| = |AM| + |MB| = 2a$.

Aufgabe 190932:
Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$, für das $AB = a\sqrt{2}$ und $BC = a$ gilt. Es sei F der Mittelpunkt der Seite CD.
Beweisen Sie, dass die Strecken AC und BF senkrecht zueinander verlaufen!

Lösung von cyrix:
2 Geraden verlaufen orthogonal zueinander, wenn das Produkt ihrer Steigungen -1 ergibt. Sei A der Ursprung (0,0). Dann ist $B(a\sqrt{2},0)$, $C(a\sqrt{2},a)$ und $F(\frac{a}{2}\sqrt{2},a)$.
Sei nun g die proportionale Funktion durch A und C. Diese hat offensichtlich die Steigung $m_1 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Sei f die Gerade durch B und F. Für die Steigung gilt

$$m_2 = \frac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{2} - a\sqrt{2}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Es gilt somit $m_1 \cdot m_2 = -1$. qed.

Aufgabe 200933:
Von einem Rechteck $ABCD$ und einem Punkt P in seinem Innern wird $PA = \sqrt{2}$ cm, $PB = \sqrt{3}$ cm, $PC = \sqrt{5}$ cm vorausgesetzt.
Beweisen Sie, dass die Länge PD durch diese Voraussetzungen eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Länge!

Lösung von cyrix:
Es sei a die Länge des Lots von P auf die Seite AB, b die des Lots von P auf BC, c die des Lots von P auf CD und d die des Lots von P auf DA.
Damit bilden jeweils ein Eckpunkt, die Lotfußpunkte auf den von diesem Eckpunkt ausgehenden Seiten des Rechtecks und P ein Quadrat, dessen Diagonalen „Eckpunkt-P“ die Längen

$$|AP| = \sqrt{a^2+b^2}, |BP| = \sqrt{b^2+c^2}, |CP| = \sqrt{c^2+d^2}, |DP| = \sqrt{d^2+a^2}$$

besitzen. Da nach Aufgabenstellung $|AP|^2 + |BP|^2 = |CP|^2$ gilt, folgt $a^2+b^2+b^2+c^2 = c^2+d^2$, also $a^2+2b^2 = d^2$ und damit

$$|DP| = \sqrt{a^2+d^2} = \sqrt{a^2+a^2+2b^2} = \sqrt{2\cdot(a^2+b^2)} = \sqrt{2}\cdot|AP| = 2cm$$

Aufgabe 210932:
Ist $ABCD$ ein Rechteck, für dessen Seitenlängen $b = AD = 6$ cm und $a = AB > b$ gilt, so seien E, G diejenigen Punkte auf CD und F, H diejenigen Punkte auf AB, für die $AFED$ und $HBCG$ Quadrate sind.
Beweisen Sie bei diesen Bezeichnungen, dass es genau eine Seitenlänge a gibt, für die $EH \perp AC$ gilt, und ermitteln Sie diese Seitenlänge!

Lösung von cyrix:
Offensichtlich ist die genaue Länge von b irrelevant. Wir legen in die Ebene des Rechtecks derart ein Koordinatensystem, dass A im Koordinatenursprung, B im Punkt (a,0) und D im Punkt (0,b) zu liegen kommt. Dann gilt nach Konstruktion für die übrigen Punkte, dass sie folgende Koordinaten besitzen: $C(a,b)$, $F(b,0)$, $E(b,b)$, $H(a-b,0)$ und $G(a-b,b)$.

Die Gerade AC hat den Anstieg $m_1 = \frac{b-0}{a-0} = \frac{b}{a}$, die Gerade EH den Anstieg $m_2 = \frac{b-0}{b-(a-b)} = \frac{b}{2b-a}$, sofern $a \neq 2b$ ist. (Wäre aber $a = 2b$, so würde H mit zusammenfallen, die Gerade EH wäre senkrecht zu AB, also insbesondere nicht senkrecht zu AC, sodass sich in diesem Fall keine Lösung ergibt. Deshalb können wir ab sofort $a \neq 2b$ annehmen.)

Zwei nicht zu den Koordinatenachsen parallele Geraden stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn sich ihre Anstiege zu -1 multiplizieren, d. h., es ist

$$EH \perp AC \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow -1 = \frac{b}{2b-a}\cdot\frac{b}{a} \Leftrightarrow b^2 = a\cdot(a-2b) = a^2-2ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 = 2b^2$$

$$\Leftrightarrow a-b = \sqrt{2}b \Leftrightarrow a = (1+\sqrt{2})b$$

sodass für festes b genau ein a existiert, sodass die beiden Geraden EH und AC senkrecht aufeinander stehen. Im konkreten Fall mit $b = 6$ cm ist dafür dann $a = (1+\sqrt{2})\cdot 6$ cm.

Aufgabe 260935:
Von einem Viereck $ABCD$ werde vorausgesetzt:
(1) $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.
(2) Es gilt $AB > CD$.
(3) Die Summe der Größen der Innenwinkel $\angle BAD$ und $\angle CBA$ beträgt 90°.
Der Mittelpunkt von AB sei M, der Mittelpunkt von CD sei N.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets $MN = \frac{1}{2}\cdot(AB-CD)$ gilt!

Lösung von cyrix:
Wegen (2) sind die Geraden AD und BC nicht parallel, schneiden sich also in einem Punkt S, der auf den Verlängerungen über D bzw. C hinaus liegt. Aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ABS$

und (3) gilt dann $\angle ASB = 180° - \angle BAS - \angle SBA = 180° - (\angle BAD + \angle CBA) = 90°$, sodass das Dreieck $\triangle ABS$ rechtwinklig bei S ist. Nach dem Satz von Thales gilt dann

$$|SM| = |AM| = |BM| = \frac{1}{2} \cdot |AB|$$

Wegen (1) und der Umkehrung des Strahlensatzes liegen wegen $\frac{|AM|}{|MB|} = 1 = \frac{|DN|}{|NC|}$ die drei Punkte S, N und M auf einer Geraden, da auch S, D und A sowie S, C und B jeweils auf einer Geraden liegen. Insbesondere ist dann $\frac{|SN|}{|SM|} = \frac{|CD|}{|AB|}$ und damit

$$|MN| = |SM| - |SN| = |SM| \cdot \left(1 - \frac{|CD|}{|AB|}\right) = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot \frac{|AB| - |CD|}{|AB|} = \frac{1}{2} \cdot (|AB| - |CD|), \square$$

Aufgabe 270933:
Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, dessen Seiten AB und CD so gelegen sind, dass sich die Verlängerung von AB über B hinaus und die Verlängerung von DC über C hinaus in einem Punkt T schneiden. Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ATD$ sei h. Der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD sei S; die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ASD$ sei g.
Beweisen Sie:
Aus diesen Voraussetzungen folgt stets, dass g und h zueinander parallel sind.
Bemerkung: Auch in dem Spezialfall, dass g und h in dieselbe Gerade fallen, werden sie als zueinander parallel bezeichnet.

Lösung von cyrix:
Wir berechnen die Winkel, in denen g sowie h die Gerade BC schneiden, und zeigen, dass sie gleich sind. Daraus folgt dann sofort die zu zeigende Parallelität von g und h. Dazu betreiben wir eine Winkeljagd:

Nach Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ASD$ ist $\angle ASD = 180° - (\angle SDA + \angle DAS)$. Da $\angle ASD$ und $\angle CSB$ Scheitelwinkel sind, sind sie auch gleich groß und besitzen die gleiche Winkelhalbierende. Sei S_1 der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle ASD$, also auch von $\angle CSB$, mit BC. Dann ist $\angle S_1SB = \frac{1}{2} \cdot \angle CSB = 90° - \frac{1}{2} \cdot (\angle SDA + \angle DAS)$. Nach dem Peripheriewinkelsatz sind die beiden Peripheriewinkel $\angle DBC = \angle SBS_1$ und $\angle DAC = \angle DAS$ über der Sehne DC gleich groß, sodass aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle SS_1B$ folgendes gilt:

$$\angle BS_1S = 180° - \angle SBS_1 - \angle S_1SB = 180° - \angle DAS - 90° + \frac{1}{2} \cdot (\angle SDA + \angle DAS) = 90° + \frac{1}{2} \cdot (\angle SDA - \angle DAS)$$

Andererseits erhält man mit der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ATD$, dass $\angle ATD = 180° - \angle DAT - \angle TDA = 180° - \angle DAB - \angle CDA$ ist. Sei S_2 der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle ATD$ mit BC. Dann ist $\angle BTS_2 = \angle ATS_2 = \frac{1}{2} \cdot \angle ATD = 90° - \frac{1}{2} \cdot (\angle DAB + \angle CDA)$.
Im Sehnenviereck $ABCD$ addieren sich gegenüberliegende Innenwinkel zu 180°, sodass $\angle ABC = 180° - \angle CDA$ gilt. Da $\angle ABC$ und $\angle CBT = \angle S_2BT$ Nebenwinkel sind, gilt $\angle S_2BT = 180° - \angle ABC = \angle CDA$. Damit gilt aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle BTS_2$

$$\angle TS_2B = 180° - \angle S_2BT - \angle BTS_2 = 180° - \angle CDA - 90° + \frac{1}{2} \cdot (\angle DAB + \angle CDA) =$$

$$= 90° + \frac{1}{2} \cdot (\angle DAB - \angle CDA)$$

Es ist $\angle DAB = \angle DAC + \angle CAB$. Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes sind die beiden Peripheriewinkel $\angle CAB$ und $\angle CDB$ über der Sehne CB gleich. Also gilt auch $\angle DAB = \angle DAC + \angle CDB$. Weiterhin ist $\angle CDA = \angle CDB + \angle BDA$, sodass sich

$$\angle DAB - \angle CDA = (\angle DAC + \angle CDB) - (\angle CDB + \angle BDA) = \angle DAC - \angle BDA = \angle DAS - \angle SDA$$

und damit

$$\angle TS_2B = 90° + \frac{1}{2} \cdot (\angle DAB - \angle CDA) = 90° + \frac{1}{2} \cdot (\angle DAS - \angle SDA) =$$

$$= 180^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2} \cdot (\angle SDA - \angle DAS)) = 180^\circ - \angle BS_1S$$

ergibt. Sei P ein Punkt auf dem von T ausgehenden Strahl durch S_2, nicht aber auf der Strecke TS_2, (also „nach S_2“) liegt. Dann sind $\angle TS_2B$ und $\angle BS_2P$ Nebenwinkel, sodass sich

$$\angle BS_2P = 180^\circ - \angle TS_2B = \angle BS_1S$$

ergibt und damit g sowie h die Gerade BC im gleichen Winkel schneiden, also nach Umkehrung des Stufenwinkelsatzes zueinander parallel sind, □.

Aufgabe 280935:
Untersuchen Sie, ob es ein Rechteck $ABCD$ gibt, in dem die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ durch den Mittelpunkt der Strecke AB geht!

Lösung von cyrix:
Es kann kein solches Rechteck geben:
Die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ im Dreieck $\triangle ABC$ teilt die gegenüberliegende Seite AB im Verhältnis der anliegenden Seiten AC und BC. Verläuft sie durch den Mittelpunkt von AB, so gilt also $|AC| = |BC|$, was aber im Rechteck $ABCD$ nicht sein kann, da das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig in B, die Hypotenuse AC also länger als die Kathete BC ist. Also kann es kein solches Rechteck geben, □.

Aufgabe 330933:
Antje hat in einem älteren Geometriebuch folgende Näherungskonstruktion für regelmäßige Vielecke mit gegebener Seitenlänge s gefunden:
Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge s. Dann konstruiere man den Mittelpunkt D von AB und verlängere die Strecke DC über C hinaus.
Auf dieser Verlängerung trage man fortgesetzt Strecken der Länge $\frac{s}{6}$ ab. Die dabei der Reihe nach erhaltenen Punkte seien mit M_7, M_8, M_9, ... bezeichnet.
Für $n > 6$ ist dann jeweils der durch A und B gehende Kreis um M_n näherungsweise der Umkreis eines regelmäßigen n-Ecks der Seitenlänge s.
Beate behauptet, speziell für $n = 12$ gelte das nicht nur näherungsweise, sondern sogar genau.
Beweisen Sie diese Behauptung!

Lösung von cyrix:
Nach Konstruktion ist die Gerade DC die Mittelsenkrechte der Strecke AB. Damit ist DC auch die Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$, sodass $|DC| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$ gilt.
Insbesondere ist das Dreieck $\triangle ADM_{12}$ rechtwinklig bei D und besitzt die Kantenlängen $|AD| = \frac{1}{2} \cdot s$ und

$$D_{M_12} = |DC| + (12 - 6) \cdot \frac{1}{6} \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s + s = \frac{\sqrt{3} + 2}{2} \cdot s$$

sodass sich mit dem Satz des Pythagoras die Länge der Hypotenuse zu

$$|AM_{12}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot s = \frac{\sqrt{3 + 4\sqrt{3} + 4 + 1}}{2} \cdot s = \frac{\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}}{2} \cdot s = (\sqrt{2 + \sqrt{3}}) \cdot s$$

ergibt. Aus Symmetriegründen ist auch $|BM_{12}| = |AM_{12}|$.

Es sei $\alpha = \angle AM_{12}B$. Wendet man den Kosinussatz auf das Dreieck $\triangle ABM_{12}$ an, erhält man

$$|AB|^2 = |AM_{12}|^2 + |BM_{12}|^2 - 2|AM_12| \cdot |BM_{12}| \cdot \cos\alpha$$

bzw. nach Einsetzen

$$s^2 = (2 + \sqrt{3})s^2 + (2 + \sqrt{3})s^2 - 2 \cdot (2 + \sqrt{3})s^2 \cdot \cos\alpha$$

sowie $1 = 2(2+\sqrt{3}) \cdot (1-\cos\alpha)$, also

$$1-\cos\alpha = \frac{1}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{2\cdot(4-3)} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

und also $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$. Da für α als Innenwinkel eines Dreiecks $0° < \alpha < 180°$ gilt und der Cosinus in diesem Bereich streng monoton fallend ist, ist also $\angle AM_{12}B = \alpha = 30° = \frac{1}{12}\cdot 360°$ der Zentriwinkel eines regelmäßigen Zwölfecks, sodass M_{12} der Mittelpunkt des Umkreises eines solchen ist, von dem AB eine Kante ist, welches damit die Kantenlänge $|AB| = s$ besitzt, □.

Aufgabe 330936:
Man beweise, dass für jedes konvexe Viereck $ABCD$ die folgende Aussage gilt:
Sind M_1, M_2, M_3, M_4 die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA und M_5, M_6 die Mittelpunkte der Diagonalen AC, BD so gehen die drei Strecken M_1M_3, M_2M_4 und M_5M_6 durch einen gemeinsamen Punkt.
Hinweis: Ein Viereck ist genau dann konvex, wenn alle seine Innenwinkel kleiner als 180° sind.

Lösung von cyrix:
Wir stellen zuerst fest, dass genau im Fall, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist, die Mittelpunkte M_5 und M_6 beider Diagonalen zusammenfallen und somit keine echte Stecke M_5M_6 existiert. In diesem Fall jedoch sind die Mittellinien M_1M_3 und M_2M_4 jeweils parallel zu den Seitenkanten des Parallelogramms und verlaufen durch die Mittelpunkte der Seiten, schneiden sich also auch im Diagonalenschnittpunkt $M_5 = M_6$, sodass die Behauptung für diesen Fall als gezeigt gelten kann.

Sei ab nun $ABCD$ ein konvexes Nicht-Parallelogramm. Dann fallen die Punkte M_5 und M_6 nicht zusammen (sowie auch keine weiteren der Mittelpunkte M_1 bis M_4 verschiedener Seiten, auch nicht mit M_5 oder M_6, die echt im Innern des konvexen Vierecks liegen).

Wir zeigen zuerst folgendes Lemma:
Verbindet man im echten Dreieck $\triangle PQR$ die Mittelpunkte X von PQ und Y von PR miteinander, so ist die entstehende Strecke XY parallel zur Strecke QR.

Beweis: Dies zeigt direkt die Umkehrung des Strahlensatzes (von P aus gesehen).

Wenden wir dieses Lemma auf die Situation der Aufgabe an, so folgt einerseits im Dreieck $\triangle ABC$, dass $M_1M_2 \parallel AC$ gilt, und andererseits im Dreieck $\triangle CDA$, dass $M_3M_4 \parallel AC$, insbesondere also $M_1M_2 \parallel M_3M_4$ gilt. Analog folgt auch $M_2M_3 \parallel BD \parallel M_1M_4$. Damit ist das Viereck $M_1M_2M_3M_4$ ein Parallelogramm, sodass sich dessen Diagonalen M_1M_3 und M_2M_4 im gemeinsamen Mittelpunkt schneiden.

Wenden wir das Lemma auf das Dreieck $\triangle ACD$ an, so folgt $M_3M_5 \parallel DA$. Und wenden wir es auf das Dreieck $\triangle ABD$ an, erhalten wir $M_1M_6 \parallel AD$, also insbesondere $M_3M_5 \parallel M_1M_6$. Wenden wir es auf das Dreieck $\triangle BCD$ an, erhalten wir $M_3M_6 \parallel BC$ und im Dreieck $\triangle ABC$ schließlich $M_1M_5 \parallel BC$, sodass $M_1M_6M_3M_5$ wieder ein Parallelogramm ist und sich dessen Diagonalen M_1M_3 und M_5M_6 im gemeinsamen Mittelpunkt schneiden.

Damit haben alle drei Geraden M_1M_3, M_2M_4 und M_5M_6 einen Punkt gemeinsam, der Mittelpunkt jeder dieser drei Strecken ist, □.

Bemerkung: Die Konvexität wurde hier nicht benutzt, sodass der Satz auch für konkave und überschlagene Vierecke gilt, sofern keine der Punkte A bis D und M_1 bis M_6 zusammenfallen.

Aufgabe 330943:
Zu einem regelmäßigen Achteck werde ein Quadrat so konstruiert, dass der Mittelpunkt des Achtecks ein Eckpunkt des Quadrates ist und dass zwischen der Seitenlänge a des Achtecks und der Seitenlänge b des Quadrats die Ungleichung $b \geq \frac{4}{3}a$ gilt.
Dann bezeichne f den Flächeninhalt desjenigen Flächenstücks, das dem Achteck und dem Quadrat gemeinsam ist.
Man beweise, dass zu gegebenem Achteck für alle Quadrate, die dieser Beschreibung entsprechen, f denselben Wert hat.

Lösung von cyrix:
Das Achteck sei im mathematisch positiven Sinne als $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ bezeichnet, sein Mittelpunkt mit A und sein Umkreisradius mit r.
Da das Achteck regelmäßig ist, gilt $\angle P_1AP_2 = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$, sodass mit dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle P_1P_2A$ wegen $|AP_1| = |AP_2| = r$ und $|P_1P_2| = a$ die Beziehung

$$a^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \cos(45^\circ) = 2r^2 - 2r^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(2 - \sqrt{2}\right) \cdot r^2$$

bzw.

$$r^2 = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} \cdot a^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2^2 - 2} \cdot a = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4} \cdot a^2 \qquad \text{und damit} \qquad r = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{2} \cdot a$$

folgt. Damit ist

$$r < \frac{4}{3} \cdot a \Leftrightarrow \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} < \frac{8}{3} \Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{2} < \frac{64}{9} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < \frac{28}{9}$$

was wegen $2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3 < \frac{28}{9}$ der Fall ist. Also ist die Kantenlänge des Quadrats größer als der Umkreisradius des Achtecks.

Seien die Eckpunkte des Quadrats, wie üblich, in mathematisch positiver Orientierung mit A, B, C und D bezeichnet. Dann schneiden also die Kanten AB und AD den Umkreis des Achtecks, sodass die dazu parallelen Kanten CD bzw. BC echt außerhalb des Umkreises des Achtecks verlaufen und somit weder diesen noch das Achteck selbst schneiden.

Die Kante AB des Quadrats schneide o. B. d. A. das Achteck in einem vom Punkt P_2 verschiedenen Punkt S_1 der Kante P_1P_2. (Gegebenenfalls müsste man die Nummerierung der Eckpunkte des Achtecks zyklisch vertauschen, bis diese Situation eintritt.)
Dann gilt $0^\circ \leq \angle P_1AS_1 < 45^\circ$. Damit ist $0^\circ < \angle S_1AP_2 \leq 45^\circ$, also

$$\angle S_1AP_3 = \angle S_1AP_2 + \angle P_2AP_3 \leq 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ \qquad \text{und}$$

$$\angle S_1AP_4 = \angle S_1AP_2 + \angle P_2AP_4 > 0^\circ + 90^\circ = 90^\circ$$

sodass die Kante AD des Quadrats wegen $90^\circ = \angle BAD = \angle S_1AS_2$ das Achteck in einem vom Punkt P_4 verschiedenen Punkt S_2 der Kante P_3P_4 schneidet.

Das gemeinsame Flächenstück von Achteck und Quadrat ergibt sich also als das n-Eck, welches (in dieser Reihenfolge) durch die Punkte $AS_1P_2P_3S_2$ begrenzt wird, wobei ggf. P_3 und S_2 zusammenfallen.

Die beiden (ggf. entarteten) Dreiecke $\triangle AP_1S_1$ und $\triangle AP_3S_2$ besitzen den gleichen Flächeninhalt: Ist $S_1 = P_1$, so auch $S_2 = P_3$, sodass beide Dreiecke den Flächeninhalt 0 besitzen. Sonst stimmen die beiden (nun echten) Dreiecke in der Seitenlänge $|AP_1| = |AP_3|$, dem Winkel

$$\angle AP_1S_1 = \angle AP_1P_2 = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 45^\circ) = \angle AP_3P_4 = \angle AP_3S_2$$

(Innenwinkelsumme in den gleichschenkligen Dreiecken $\triangle AP_1P_2$ und $\triangle AP_3P_4$) und dem Winkel

$$\angle P_1AS_1 = 45^\circ - \angle S_1AP_2 = 45^\circ - (\angle S_1AS_2 - \angle P_2AS_2) = 45^\circ - 90^\circ + \angle P_2AP_3 + \angle P_3AS_2 = \angle P_3AS_2$$

überein, sind also kongruent und damit insbesondere flächengleich.

Das gemeinsame Flächenstück von Achteck und Quadrat $AS_1P_2P_3S_2$ lässt sich zerlegen in die (ggf. entarteten) Dreiecke $\triangle AS_1P_2$, $\triangle AP_2P_3$ und $\triangle AP_3S_2$. Letzteres ist – wie gerade bewiesen – flächengleich zum Dreieck $\triangle AP_1S_1$, sodass das gemeinsame Flächenstück von Achtecke und Quadrat den gleichen Flächeninhalt besitzt wie die Figur, die sich aus den Dreiecken $\triangle AP_1S_1$, $\triangle AS_1P_2$ und $\triangle AP_2P_3$ zusammensetzt, also dem Viereck $AP_1P_2P_3$.
Dessen Flächeninhalt ist aber von der Lage des Quadrats $ABCD$ unabhängig, sodass das gemeinsame Flächenstück für jede Lage des Quadrats den gleichen Flächeninhalt (nämlich ein Viertel des Flächeninhalts des Achtecks) besitzt, □.

Aufgabe 340943:
Auf der Seite AB des Quadrates $ABCD$ werde ein Punkt $X \neq A$ gewählt. Dann werde das Quadrat durch die Strecken AC und XD in vier Teilflächen zerlegt.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, die Wahl von X so zu treffen, dass es natürliche Zahlen p, q und r gibt, für die die Flächeninhalte dieser Teilflächen in geeigneter Reihenfolge im Verhältnis $1 : p : q : r$ stehen!

Lösung von cyrix:
Wir legen so ein Koordinatensystem in die Ebene des Quadrats, dass A im Koordinatenursprung liegt und C die Koordinaten (1,1) besitzt. Dann liegt B bei (1,0) und D bei (0,1). Weiterhin sei $0 < a \leq 1$ eine relle Zahl und der Punkt X habe die Koordinaten (a,0). Dann liegt X auf der Strecke AB, ist aber verschieden von A.

Die Gerade XD lässt sich beschreiben durch die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{0-1}{a-0} \cdot x + 1 = -\frac{1}{a} \cdot x + 1$ und die Gerade AC durch $g(x) = x$. Für den Schnittpunkt S beider Geraden und den Koordinaten (x_S,y_S) gilt $f(x_S) = g(x_S)$, also $-\frac{1}{a}x_S + 1 = x_S$ bzw. $1 = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \cdot x_S = \frac{a+1}{a} \cdot x_S$, also $y_S = x_S = \frac{a}{a+1}$.

Damit hat die Höhe h_a von S auf AB die Länge $h_a = y_s = \frac{a}{a+1}$ und die Höhe h_d von s auf AD die Länge $h_d = x_s = \frac{a}{a+1}$. Es ergibt sich für das Dreieck $\triangle ASX$ der Flächeninhalt von

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot |AX| \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{a+1} = \frac{a^2}{2(a+1)}$$

und analog für das Dreieck $\triangle ASD$ der Flächeninhalt

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot h_d = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{a}{a+1} = \frac{a}{2(a+1)}$$

Da das Dreieck $\triangle ACD$ den Flächeninhalt von $\frac{1}{2}$ besitzt und von der Strecke DS in die beiden Dreiecke $\triangle ASD$ und $\triangle DCS$ zerlegt wird, gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle DCS$

$$F_3 = \frac{1}{2} - F_4 = \frac{(a+1) - a}{2(a+1)} = \frac{1}{2(a+1)}$$

Analog gilt für den Flächeninhalt des Vierecks $XBCS$

$$F_2 = \frac{1}{2} - F_1 = \frac{(a+1) - a^2}{2(a+1)} = \frac{a+1-a^2}{2(a+1)}$$

Insgesamt ist also $F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = a^2 : a + 1 - a^2 : 1 : a$.

Da $0 < a \leq 1$ ist, ist $1 \geq a \geq a^2$, also auch $1 - a^2 \geq 0$ und damit $a + 1 - a^2 \geq a$. Also ist a^2 der kleinste der hier auftretenden Werte. Kürzt man das Verhältnis mit a^2, erhält man

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = 1 : \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 1 : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a}$$

Die Werte $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-1$, $\frac{1}{a^2}$ und $\frac{1}{a}$ müssen dann in irgendeiner Reihenfolge den natürlichen Zahlen p, q und r entsprechen. Insbesondere muss also $0<\frac{1}{a}=r$ eine natürliche Zahl, also $a=\frac{1}{r}$ sein. Dann ist aber

$$F_1:F_2:F_3:F_4=1:r+r^2-1:r^2:r=1:p:q:r$$

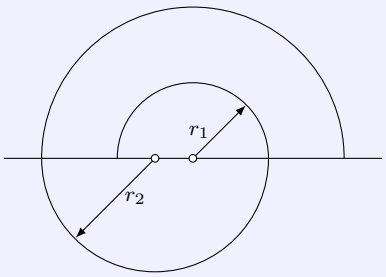
mit $p:=r+r^2-1$ und $q:=r^2$, von der gewünschten Form.
Zusammenfassend erhalten wir also genau dann ein Verhältnis der Flächeninhalte der vier Teilflächen, wie es von der Aufgabenstellung gefordert wird, wenn die Strecke AB ein positives ganzzahliges Vielfaches der Strecke AX ist bzw. $|AX|=\frac{1}{r}\cdot|AB|$ mit einer positiven ganzen Zahl r gilt.

V.III Kreise

I Runde 1

Aufgabe V00910:

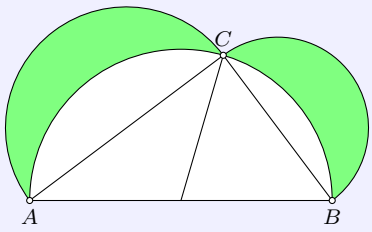
Eine Schar von Halbkreisen bildet eine Spirale.
a) Wie groß ist der 10. Halbkreisbogen, wenn $r_1=1$ cm, $r_2=1{,}5$ cm usw. ist?
b) Wie groß ist die Gesamtlänge der Spirale bis zum 10. Bogen?



Lösung von Steffen Polster:
a) Es wird $r_{10}=1+9\cdot 0{,}5=5{,}5$. Der 10.Radius ist 5,5 cm groß.

b) $(r_1+r_2+...+r_{10})\cdot\pi\approx 102{,}1$ cm.

Aufgabe V00915:



Beweisen Sie folgenden Satz:
„Die Summe der beiden Mondsicheln AC und BC über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Fläche des Dreiecks ABC.“ (Hippokrates, 440 v. u. Z. in Athen).

Lösung von svrc:
Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
A_{\text{Dreieck}} &: \text{Flächeninhalt des Dreiecks } ABC,\\
A_{\text{Halbkreis},\overline{AC}} &: \text{Flächeninhalt des Halbkreises über der Kathete } b=\left|\overline{AC}\right|,\\
A_{\text{Halbkreis},\overline{BC}} &: \text{Flächeninhalt des Halbkreises über der Kathete } a=\left|\overline{BC}\right|,\\
A_{\text{Halbkreis},\overline{AB}} &: \text{Flächeninhalt des Halbkreises über der Hypotenuse } c=\left|\overline{AB}\right|,\\
A_{\text{grün}} &: \text{Flächeninhalt der grün markierten Mondsichel.}
\end{aligned}$$

Es gilt

$$A_{\text{Dreieck}} + A_{\text{Halbkreis},\overline{AC}} + A_{\text{Halbkreis},\overline{BC}} = A_{\text{Halbkreis},\overline{AB}} + A_{\text{grün}}. \tag{1}$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$a^2 + b^2 = c^2$$

und somit

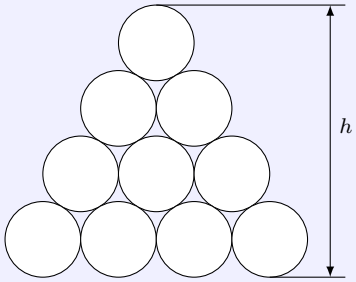
$$A_{\text{Halbkreis},\overline{AC}} + A_{\text{Halbkreis},\overline{BC}} = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi a^2}{8} = \frac{\pi c^2}{8} = A_{\text{Halbkreis},\overline{AB}}.$$

Damit folgt aus (1)

$$A_{\text{Dreieck}} = A_{\text{grün}},$$

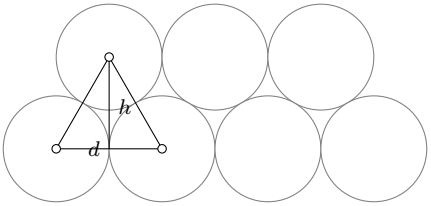
was die Behauptung beweist.

Aufgabe V00916:



Ein Stapel von zylindrischen Eisenfässern mit dem Durchmesser von 52 cm besteht aus vier Schichten. Wie hoch ist der Stapel?

Lösung von Steffen Polster:



Die Mittelpunkte der Grundkreise der untersten Lage liegen $\frac{d}{2}$ über der Grundfläche. Die zweite Lage Kreise befinden sich $\frac{d}{2} + h$ über dem Boden, wobei die Höhe h die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks der Kantenlänge d ist. Damit ergibt sich für die Gesamthöhe

$$\frac{d}{2} + 3 \cdot h + \frac{d}{2} = d + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} d \approx 187 \text{ cm}$$

Allgemein gilt für n Schichten Fässer mit einem Durchmesser d für die Gesamthöhe H

$$H = d + \left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot d \cdot \sqrt{3}$$

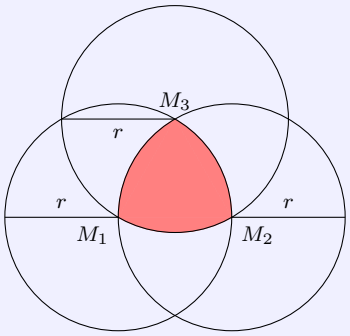
Aufgabe V00917:
In den Berliner Metallhütten- und Halbwerkzeugen VEB werden Kupferrohre (äußerer Durchmesser 32 mm, innerer Durchmesser 29 mm) von 3 m Länge zu Rohren mit einem äußeren Durchmesser von 27 mm und einem inneren Durchmesser von 25 mm gezogen.
Wie lang sind die gezogenen Rohre?

Lösung von Steffen Polster:
Es seien $d_a = 32$ mm, $d_i = 29$ mm, $l = 3$ m die Maße der ursprünglichen Rohre und $d'_a = 27$ mm, $d'_i = 25$ mm, $l' = x$ m der gezogenen Rohre. Da das Volumen der Rohre konstant bleibt, gilt

$$\left(\frac{\pi}{4}d_a^2 - \frac{\pi}{4}d_i^2\right) \cdot l = V = \left(\frac{\pi}{4}{d'}_a^2 - \frac{\pi}{4}{d'}_i^2\right) \cdot x$$
$$(d_a^2 - d_i^2) \cdot l = ({d'}_a^2 - {d'}_i^2) \cdot x$$
$$x = \frac{d_a^2 - d_i^2}{{d'}_a^2 - {d'}_i^2} \cdot l$$

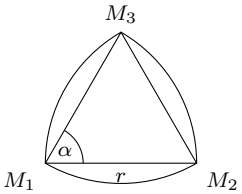
Einsetzen der Werte ergibt $x \approx 5{,}28$ m.

Aufgabe V10913:



Berechnen Sie die Fläche, das Volumen und das Gewicht eines Stanzbleches von 3 mm Dicke der abgebildeten (farbigen) Form. Der Radius r beträgt 20 mm, $\gamma = 7{,}8$ p·cm^{-3}.

Lösung von Steffen Polster:



$$F = F_{\triangle M_1 M_2 M_3} + 3F_{\text{Segmente}} = \frac{r^2}{4}\sqrt{3} + 3\left(\frac{\pi \cdot \alpha}{180} - \sin\alpha\right) \cdot \frac{r^2}{2} \approx 0{,}845 cm^3$$
$$G \approx 6{,}6p$$

Aufgabe 030916:

a) Auf einem Kreisumfang liegen 5 verschiedene Punkte beliebig verteilt. Wie viel Strecken kann man einzeichnen, die je zwei Punkte miteinander verbinden?

b) Welche Anzahl von Strecken wird ermittelt, wenn 10 Punkte auf dem Kreisumfang liegen?

c) Die Anzahl der Punkte sei n. Wie viel Strecken lassen sich einzeichnen? (Begründung!)

Lösung von Sebastian Boesler:

c) Es seien $P_i, i \in \{1, ..., n\}$ die n Punkte auf dem Kreisumfang. Jeder Punkt P_i kann mit $n-1$ Punkten $P_j, j \in \{1, ..., i-1, i+1, ..., n\}$ verbunden werden. Somit ergibt sich $n(n-1)$ als Gesamtzahl möglicher gerichteter Punkt-zu-Punkt-Verbindungen.

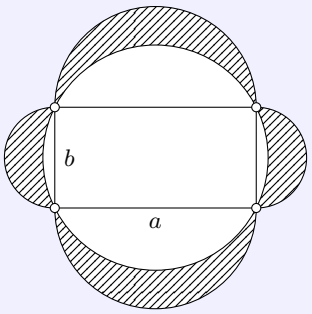
Strecken sind keine gerichteten Verbindungen zweier Punkte. Daher besitzt ein Paar $(\overrightarrow{P_iP_j}, \overrightarrow{P_jP_i})$ entgegengesetzt gerichteter Verbindungen zweier Punkte nur eine zugehörige Strecke, $\overline{P_iP_j}$. Die Gesamtzahl möglicher Strecken ist somit die Hälfte der Gesamtzahl möglicher gerichteter Verbindungen, also $\frac{n(n-1)}{2}$.

a) Mit c) ergibt sich für $n = 5$ eine Anzahl von $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ möglichen Strecken.

b) Mit c) ergibt sich für $n = 10$ eine Anzahl von $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 4$ möglichen Strecken.

Aufgabe 080912:

Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b. Über jeder Seite werde außerhalb des Rechtecks ein Halbkreis gezeichnet. Ferner konstruiere man den Umkreis des Rechtecks (siehe Abbildung).



Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der vier schraffierten sichelförmigen Flächen!

Lösung von Manuela Kugel:
Die Summe der Flächeninhalte der vier Halbkreisflächen über den Rechteckseiten beträgt

$$A_1 = \pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right).$$

Der Flächeninhalt des Umkreises beträgt

$$A_2 = \pi \left(\frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{2} \right) = \pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right).$$

Der Flächeninhalt des Rechtecks A ist also $A_3 = ab$. Der gesuchte Flächeninhalt A ist also

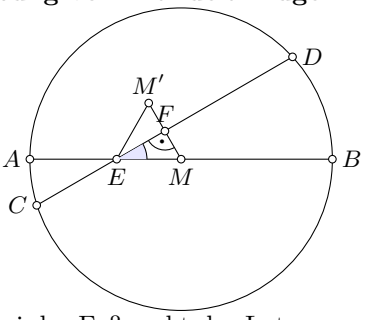
$$A = A_1 + A_3 - A_2 = \pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right) + ab - \pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right).$$

Die Summe der Flächeninhalte der sichelförmigen Fläche ist somit gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks.

Aufgabe 120913:
Ein Durchmesser AB eines Kreises werde von einer Sehne CD in einem Punkt E geschnitten, der AB innen im Verhältnis $2 : 5$ teilt. Dabei schneide die Sehne CD den Durchmesser AB unter einem Winkel von $30°$.

Ermitteln Sie den Abstand der Sehne vom Mittelpunkt M des Kreises, wenn die Länge d des Durchmessers gegeben ist!

Lösung von Manuela Kugel:



Bei geeigneter Wahl der Bezeichnungen A, B gilt nach Voraussetzung

$$|AE| = \frac{2}{7}d \qquad \text{und} \tag{1}$$

$$|EB| = \frac{5}{7}d, \qquad \text{also} \tag{2}$$

$$|EM| = \frac{1}{2}d - \frac{2}{7}d = \frac{3}{14}d. \tag{3}$$

F sei der Fußpunkt des Lotes von M auf CD. Dann ist $\triangle EMF$ rechtwinklig mit $|\angle MEF| = 30°$ (nach Voraussetzung), also

$$|\angle FME| = 60°. \tag{4}$$

Man spiegele nun $\triangle MEF$ an CD. Für das dadurch erhaltene rechtwinklige Dreieck $\triangle EFM'$ gilt dann

$$|\angle FEM'| = 30° \text{ und } |\angle EM'F| = 60° \tag{5}$$

Nach (4) und (5) ist das Dreieck $\triangle EMM'$ gleichseitig und daher der Höhenfußpunkt F auch der Mittelpunkt von MM'. Unter Berücksichtigung von (3) folgt daraus $|MF| = \frac{3}{28}d$. Der Abstand der Sehne CD vom Mittelpunkt des Kreises beträgt also $\frac{3}{28}d$, wenn d die Durchmesserlänge des Kreises ist.

Aufgabe 250914:
Drei Kreise mit dem gegebenen Radius r mögen so in einer Ebene liegen, dass jeder die beiden anderen berührt. An je zwei dieser drei Kreise werde diejenige gemeinsam Tangente gelegt, die keinen Punkt mit dem dritten Kreis gemeinsam hat. Mit diesen drei Tangenten hat man ein gleichseitiges Dreieck konstruiert.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von r!

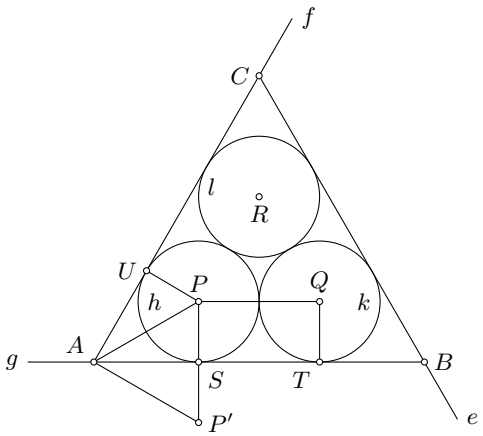
Hinweis: Für Zahlenwerte, die bei der Flächeninhaltsangabe auftreten, ist eine Verwendung von Näherungswerten zugelassen (aber nicht gefordert); dann jedoch mit einer Angabe - und Begründung -, auf wie viele Dezimalstellen der Näherungswert genau ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Kreise seien h, k, l ihre Mittelpunkte P, Q, R. Die genannte gemeinsame Tangente an k,l bzw. an l,h bzw. an h,k sein e bzw. f bzw. g. Der Schnittpunkt von f mit g bzw. von g mit e bzw. von e mit f sei A bzw. B bzw. C. Das Dreieck mit dem zu berechnenden Flächeninhalt ist dann $\triangle ABC$.

Das Lot von P bzw. Q auf g hat als Fußpunkt S bzw. T den Berührungspunkt von g mit h bzw. k, das Lot von P auf f hat las Fußpunkt U den Berührungspunkt von f mit h (siehe Abbildung).

Daher ist $STQP$ ein Rechteck mit $PS = QT = r$, $PQ = ST = 2r$, und die Dreiecke APS, APU sind nach dem Kongruenzsatz ssw (wobei der Winkel $\angle ASP$ bzw. $\angle AUP$ als rechter Winkel der größten Seite gegenüberliegt) zueinander kongruente rechtwinklige Dreiecke, woraus $\angle PAS = \angle PAU$ folgt.

Da die Summe dieser beiden Winkelgrößen die Innenwinkelgröße $\angle BAC = 60°$ des gleichseitigen Dreiecks ABC ergibt, folgt $\angle PAS = \angle PAU = 30°$ und damit nach dem Innenwinkelsatz $\angle APS = 60°$.



Somit ist für den bei der Spiegelung an g aus P entstehenden Bildpunkt P' das Dreieck APP' gleichseitig. Die zur Seite PP' gehörende Höhe AS ist zugleich Seitenhalbierende; d. h., es folgt $AP = PP' = 2PS = 2r$ und damit (nach dem Satz des Pythagoras oder nach der Formel für die Höhenlänge im gleichseitigen Dreieck) $AS = r\sqrt{3}$. Entsprechend erhält man $BT = r\sqrt{3}$.

Daher hat das Dreieck ABC die Seitenlänge

$$a = r\sqrt{3} + 2r + r\sqrt{3} = 2r(1 + \sqrt{3})$$

und somit nach der Flächeninhaltsformel für gleichseitige Dreiecke der Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = \frac{1}{4} \cdot 4r^2(1 + \sqrt{3})^2 = r^2 \cdot (4\sqrt{3} + 6)$$

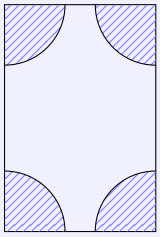
Beispiel für die Verwendung von Näherungswerten:

Es gilt auf drei Dezimalen nach dem Komma genau $\sqrt{3} \approx 1{,}732$. Daraus folgt $1{,}7315 < \sqrt{3} < 1{,}7325$ und hieraus $12{,}296 < 4\sqrt{3} + 6 < 12{,}93$. Somit ist $F \approx 12{,}93r^2$, und der hier angegebene Zahlenwert 12,93 ist auf zwei Dezimalen nach dem Komma genau.

Aufgabe 330914:
Von der Fläche eines Rechtecks mit Seitenlängen a, b sollen die Flächen von vier Viertelkreisen abgeschnitten werden. Diese sollen alle vier den gleichen Radius r haben, mit dem die Voraussetzung erfüllt ist, dass von den Rechtecksseiten noch Teilstrecken übrigbleiben (siehe Abbildung).

a) Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, zu denen es Längen a, b, r der vorausgesetzten Art gibt, so dass genau x Prozent der Rechteckfläche abgeschnitten werden!

b) Ermitteln Sie alle diejenigen Verhältniswerte $k = \frac{b}{a} \geq 1$, für die es möglich ist, einen Radius r der vorausgesetzten Art so zu wählen, dass genau die Hälfte der Rechteckfläche abgeschnitten wird!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die von a, b, r zu erfüllende Voraussetzung besagt: Wenn o. B. d. A. die Bezeichnungen so gewählt werden, dass $0 < a \leq b$ gilt, so erfüllt r die Ungleichung $0 < r < \frac{a}{2}$.

a) I. Wenn x eine reelle Zahl ist, so dass die abgeschnittenen Flächen genau x Prozent des Rechteckfläche betragen, so folgt:

Der Flächeninhalt der abgeschnitten vier Viertelkreise ist gleich dem Flächeninhalt eines Kreises von Radius r, also gleich πr^2. Da dies x Prozent der Rechteckfläche sind, gilt

$$x = \frac{\pi \cdot r^2}{a \cdot b} \cdot 100 \tag{1}$$

Wegen $0 < a \leq b$ und der Voraussetzung $0 < r < \frac{a}{2}$ folgt $0 < x < \frac{\pi}{a^2} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot 100 = 25\pi$

II. Wenn $0 < x < 25\pi$ gilt, so folgt: Für beliebiges $a > 0$ für $b = a$ und $r = \sqrt{\frac{x \cdot ab}{100\pi}}$ ist einerseits

$$0 < r < \sqrt{\frac{25\pi \cdot a^2}{100\pi}} = \frac{a}{2}$$

so dass a,b,r Längen der vorausgesetzten Art sind; andererseits gilt (1), also werden genau x Prozent der Rechteckflächen abgeschnitten.

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchten Zahlen x sind genau alle reellen Zahlen x mit $0 < x < 25\pi$ ($\approx 78{,}5398$).

b) I. Wenn für einen Wert $k = \frac{b}{a} \geq 1$ vier Viertelkreise mit einem Radius $r < \frac{a}{2}$ genau die Hälfte der Rechteckfläche abschneiden, so ist der Flächeninhalt des Rechtecks doppelt so groß wie der Flächeninhalt eines Kreises vom Radius r, also $ab = 2\pi \cdot r^2$ (2).

Wegen $r < \frac{a}{2}$ folgt $ab < 2\pi \cdot \frac{a^2}{4}$ und damit $1 \leq k = \frac{ab}{a^2} < 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$

II. Wenn $1 \leq k < \frac{\pi}{2}$ gilt, so folgt: Für Längen a,b, > 0 mit $\frac{b}{a} = k$ und $r = \sqrt{\frac{ab}{2\pi}}$ ist einerseits

$$r = \sqrt{\frac{a \cdot ak}{2\pi}} < \sqrt{\frac{a^2}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{a}{2}$$

so dass a,b,r Längen der vorausgesetzten Art sind; andererseits gilt (2), also wird genau die Hälfte der Rechteckfläche abgeschnitten.

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchten Zahlen k sind genau alle reellen Zahlen x mit $1 \leq k < \frac{\pi}{2}$ ($\approx 1{,}5708$)

II Runde 2

Aufgabe V10923:
Inge zeichnet 5 konzentrische Kreise und fängt mit dem kleinsten an ($r_1 = 2$ cm).
Wie muss sie die Radien wählen, wenn der Ausgangskreis und die entstehenden Kreisringe alle flächengleich sein sollen?

Lösung von J. Lehmann und W. Unze:
Radius des kleinsten Kreises ist $r_1 = 2$ cm. Die Radien der übrigen konzentrischen Kreise, deren entsprechende Kreisringe flächengleich mit dem Ausgangskreis sein sollen, seien r_2, r_3, r_4 und r_5. Es ist gefordert, dass

$$F_1 = \pi r_1^2 = F_2 = \pi(r_2^2 - r_1^2) = F_3 = \pi(r_3^2 - r_2^2) = F_4 = \pi(r_4^2 - r_3^2) = F_5 = \pi(r_5^2 - r_4^2)$$

sein soll. Das heißt aber $\pi r_1^2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$; bei Division durch π ergibt sich dann

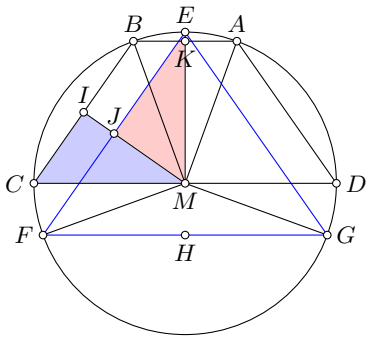
$$\begin{aligned}
r_1^2 = r_2^2 - r_1^2 \Rightarrow 2r_1^2 = r_2^2 \Rightarrow r_2 = r_1\sqrt{2} \\
r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 - r_2^2 \Rightarrow 2r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 \Rightarrow r_3 = r_1\sqrt{3} \\
r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 - r_3^2 \Rightarrow 2r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 \Rightarrow r_4 = r_1\sqrt{4} \\
r_4^2 - r_3^2 = r_5^2 - r_4^2 \Rightarrow 2r_4^2 - r_3^2 = r_5^2 \Rightarrow r_5 = r_1\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Inge muss für die Konstruktion folgende Radien wählen: $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$ cm, $r_3 = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5$ cm, $r_4 = 2\sqrt{4} = 4$ cm und $r_5 = 2\sqrt{5} \approx 4{,}5$ cm.

Aufgabe 020924:
Gegeben sei ein Kreis. In diesem Kreis seien ein Trapez und ein Dreieck so einbeschrieben, dass eine Seite des Trapezes ein Durchmesser des Kreises ist und die Seiten des Dreiecks parallel zu den Trapezseiten verlaufen.
Es ist zu beweisen, dass Trapez und Dreieck in diesem Falle gleichen Flächeninhalt haben!

Lösung von André Lanka:
J sei der Höhenfußpunkt im Dreieck $\triangle MFE$ von Punkt M auf der Seite EF. Dann gilt $\triangle MFJ \cong \triangle MEJ$ nach SSW:

(1) $MF = ME = r$
(2) MJ in beiden Dreiecken enthalten
(3) $\angle MJF = \angle MJE = 90°$



Analog sei I der Höhenfußpunkt im Dreieck $\triangle MBC$ von Punkt M auf der Seite BC. Die Punkte M, I und J liegen auf einer Geraden, da die Winkel $\angle MJF$ und $\angle MIC$ gleich groß und die Strecken $EF \parallel BC$ sind.

Sei Winkel $\angle BCD := \alpha$. Dann gilt auch $\angle EFG = \alpha$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen). Nach Innenwinkelsatz im Dreieck $\triangle EFH$ gilt dann für Winkel $\angle FEH = 90° - \alpha$ und nach Innenwinkelsummensatz im Dreieck $\triangle MEJ : \angle JME = \alpha$. Demzufolge gilt $\triangle MEJ \cong \triangle MCI$ nach WWS:

(1) $ME = MC = r$
(2) $\angle JME = \angle MCB = \alpha$
(3) $\angle MJE = \angle MIC = 90°$

Damit hat man sogar 4 kongruente Dreiecke:

$$\triangle FMJ \cong \triangle MEJ \cong \triangle MCI \cong \triangle MBI$$

Nun bleibt zu zeigen, dass gilt: $\triangle FHM \cong \triangle MBK$, wobei H und K die Höhenfußpunkte in den Dreiecken $\triangle FGM$ und $\triangle MAB$ wie in der Zeichnung ersichtlich sind.
Dazu betrachte man zuerst Winkel

$$\angle MFG = 180° - \angle FHM - \angle MFE - \angle FEM = 180° - 90° - 2 \cdot \angle MFE$$

wobei $\angle MFE = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$ im Dreieck $\triangle JFM$ gilt.
Damit ergibt sich $\angle MFG = 90° - 2 \cdot (90° - \alpha) = 2 \cdot \alpha - 90°$.
Als nächstes wird Winkel $\angle BMK$ betrachtet:

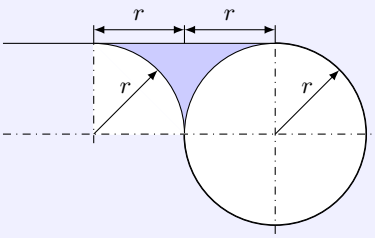
$$\angle BMK = 90° - \angle CMI - \angle CMI = 90° - 2 \cdot (180° - 90° - \alpha) = 2 \cdot \alpha - 90°$$

Beide Dreiecke $\triangle FHM$ und $\triangle MBK$ sind nach WWS kongruent:

(1) $MF = MB = r$
(2) $\angle MFG = \angle BMK = 2 \cdot \alpha - 90°$
(3) $\angle MHF = \angle BKM = 90°$

Mithin ist eine Hälfte des Dreiecks aus den Teilflächen $\triangle FHM, \triangle MFJ$ und $\triangle JME$ flächengleich zu einer Trapezhälfte, die aus den Teilflächen $\triangle MBK$, $\triangle BMI$ und $\triangle CMI$ besteht.

Aufgabe 020926:



An der Endstation einer Straßenbahnlinie soll eine Gleisschleife gebaut werden. Sie wird so angelegt, dass die gerade Strecke in einen Kreis mündet, dessen letztes Viertel als Gegenkurve zur geraden Strecke zurückführt.
a) Berechnen Sie die Gleislänge von Weichenspitze bis wieder zur Weichenspitze!
b) Wie groß ist das Flächenstück, das von der Schleife eingeschlossen wird?

Lösung von André Lanka:
a) Die Gleislänge ist $2r + 2\pi r$.

b) Das Flächenstück beinhaltet einen Kreis mit der Fläche πr^2 und die Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen $2r$ und r abzüglich der Fläche der beiden Viertelkreise. Als eingeschlossene Fläche erhält man

$$\pi r^2 + 2r^2 - \frac{\pi r^2}{2} = 2r^2 + \frac{\pi r^2}{2}$$

Aufgabe 040923:
Gegeben sind drei verschiedene, nicht auf einer Geraden liegende Punkte. Um jeden dieser Punkte ist ein Kreis so zu konstruieren, dass sich diese Kreise paarweise außen berühren.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man bezeichnet die drei Punkte mit A, B und C und fasst sie als die Ecken eines Dreiecks mit den Seiten a, b, c auf. Die Radien der drei Kreise um A, B und C seien (in dieser Reihenfolge) x, y und z. Dann gilt:

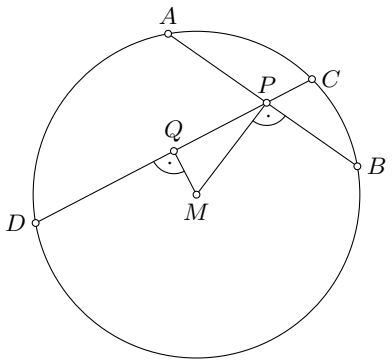
$$x + y = c; \qquad y + z = a; \qquad z + x = b$$

Daraus folgen:

$$x = \frac{-a + b + c}{2}; \qquad y = \frac{a - b + c}{2}; \qquad z = \frac{a + b - c}{2}$$

Aufgabe 060922:
Innerhalb eines Kreises k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius von der Länge r liege der von M verschiedene Punkt P.
Konstruieren Sie unter allen Sehnen durch P die kürzeste!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Konstruktion:
Man verbindet P mit dem Mittelpunkt M des Kreises und konstruiert die Senkrechte zu MP in P. Sie schneide die Kreislinie in den Punkten A und B. AB ist die gesuchte Sehne.

Beweis:
Zum Nachweis, dass AB die kürzeste durch P verlaufende Sehne des Kreises ist, legen wir eine beliebige andere Sehne durch P. Sie schneide die Kreislinie in den Punkten C und D. Dann ist der Abstand der Sehne CD von M kleiner als MP. Enthält CD den Punkt M, dann ist der Abstand der Strecke CD von M gleich Null. Enthält aber CD den Punkt M nicht, dann fällen wir das Lot von M auf CD und nennen seinen Fußpunkt Q.

Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle MQP$ ist MP die Hypotenuse, und daher gilt $\overline{MQ} < \overline{MP}$. Nach dem Satz, dass von Sehnen eines Kreises mit unterschiedlichen Abständen von Mittelpunkt diejenige die kürzere ist, die den größeren Abstand vom Mittelpunkt hat, folgt $\overline{AB} < \overline{CD}$.
Da CD (durch P) beliebig angenommen wurde, muss AB die kürzeste durch P verlaufende Sehne dieses Kreises sein. Da es stets genau eine Gerade durch M und P gibt, ist die Konstruktion stets ausführbar und eindeutig. □

Aufgabe 170923:
Gegeben seien ein Kreis k und ein Durchmesser AB von k. Der Mittelpunkt von k sei M. Sind C und D so auf k gelegen, dass $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $AB \parallel DC$ ist, so sei α die Größe des Winkels $\angle CMB$ und β die Größe desjenigen spitzen Winkels, den die Sehne DC mit der Tangente t an k in D einschließt.
Man ermittle diejenigen Werte des Abstandes zwischen AB und CD, für die
a) $2\alpha = \beta$ und b) $\alpha = \beta$ gilt.

Lösung von cyrix:
Wegen $|MB| = |MC|$ ist das Dreieck $\triangle MBC$ gleichschenklig und es gilt

$$\angle CBM = \angle MCB = \frac{180° - \angle BMC}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$$

Da $|DM| = |CM|$ ist, liegt M auf der Mittelsenkrechten der Strecke CD, welche wegen $AB \parallel DC$ und $|AM| = |MB|$ gleich der Mittelsenkrechten der Strecke AB ist. Demzufolge geht bei Spiegelung an dieser A in B, M in sich selbst und C in D über. Also ist $\angle MAD = \angle CBM = 90° - \frac{\alpha}{2}$.
Nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz, angewendet auf die Sehne BC, ist

$$\angle MAC = \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BMC = \frac{\alpha}{2} \quad \text{also}$$

$$\angle CAD = \angle MAD - \angle MAC = 90° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 90° - \alpha$$

Und nach dem Sehnen-Tangentenwinkel-Satz, angewendet auf die Sehne CD, ist dies gleich β.
Es gilt also allgemein $\alpha + \beta = 90°$.
Weiterhin ist aufgrund der Definition des Sinus im Einheitskreis der Abstand h der beiden Parallelen gleich $h = \sin\alpha \cdot |MB|$.
a) Aus $2\alpha = \beta$ folgt dann $\alpha = 30°$ und also $h = \frac{1}{2}|MB|$.
b) Aus $\alpha = \beta$ folgt dann $\alpha = 45°$ und also $h = \frac{\sqrt{2}}{2}|MB|$.

Aufgabe 200923:
Von zwei Kreisen k_1 und k_2 seien die Radien r_1 bzw. r_2 gegeben, wobei $r_1 > r_2$ gelte.
Weiterhin sei vorausgesetzt, dass sich beide Kreise von außen berühren, also genau eine gemeinsame innere Tangente besitzen. Diese innere Tangente schneide die eine gemeinsame äußere Tangente beider Kreise in P und die andere gemeinsame Tangente in Q.
Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen aus r_1 und r_2 die Länge PQ!

Lösung von cyrix:
Es sei S der Schnittpunkt der beiden äußeren Tangenten, M_1 der Mittelpunkt von k_1, M_2 der Mittelpunkt von k_2, B ihr Berührpunkt, B_1 der Berührpunkt von k_1 mit der Tangenten t, auf der P liegt, und B_2 der von k_2 mit der gleichen Tangenten t.

Dann sind M_1B_1 und M_2B_2 parallel, da sie als Berührungsradien beide senkrecht auf der Tangenten t stehen. Nach dem Strahlensatz gilt dann $\frac{|SM_1|}{|SM_2|} = \frac{|M_1B_1|}{|M_2B_2|} = \frac{r_1}{r_2}$.
Insbesondere ist $|SM_1| > |SM_2|$, also, da S, M_2, B und M_2 aus Symmetriegründen auf einer Geraden liegen, $|SM_1| = |SM_2| + |M_2B| + |BM_1| = |SM_2| + r_1 + r_2$. Setzt man dies in die eben erhaltene Verhältnisgleichung ein, erhält man

$$\frac{|SM_2| + r_1 + r_2}{|SM_2|} = 1 + \frac{r_1 + r_2}{|SM_2|} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{also}$$

$$|SM_2| = r_2 \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2} \quad \text{und} \quad |SM_1| = r_1 \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 - r_2}$$

Es ist $\triangle M_1SB_1$ rechtwinklig bei B_1, sodass sich nach dem Satz von Pythagoras

$$|SB_1| = \sqrt{|SM_1|^2 - |M_1B_1|^2} = \sqrt{r_1^2 \cdot \frac{(r_1 + r_2)^2}{(r_1 - r_2)^2)} - r_1^2} = r_1 \cdot \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2}{(r_1 - r_2)^2}}$$

$$= \frac{r_1}{r_1 - r_2} \cdot \sqrt{4r_1r_2} = r_1 \cdot \frac{2\sqrt{r_1r_2}}{r_1 - r_2}$$

und analog $|SB_2| = r_2 \cdot \frac{2\sqrt{r_1r_2}}{r_1 - r_2}$ ergibt. Damit ist

$$|B_1B_2| = |SB_1| - |SB_2| = \frac{2\sqrt{r_1r_2}}{r_1 - r_2} \cdot (r_1 - r_2) = 2\sqrt{r_1r_2}$$

Der Punkt P liegt auf zwei Tangenten an k_1, sodass die Tangentenabschnitte $|PB_1|$ und $|PB|$ gleich lang sind. Aus gleichem Grund (Tangenten an k_2) ist auch $|PB| = |PB_2|$ und damit P der Mittelpunkt der Strecke B_1B_2. Insbesondere ist also $|PB| = \frac{1}{2}|B_1B_2| = \sqrt{r_1r_2}$.
Aus Symmetriegründen ist $|QB| = |PB|$, und da Q, B und P nach Voraussetzung auf einer Geraden liegen, ist

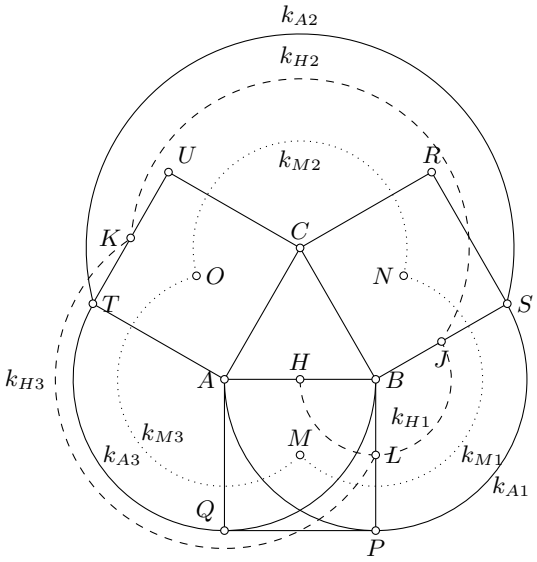
$$|PQ| = 2|PB| = 2\sqrt{r_1}r_2$$

Aufgabe 340924:
Über der Seite AB des gleichseitigen Dreiecks ABC mit gegebener Seitenlänge a werde nach außen das Quadrat $ABPQ$ errichtet.
Anschließend stellt man sich dieses Quadrat beweglich vor. Es soll in mathematisch positivem Drehsinn um das Dreieck ABC herum „rollen, ohne zu gleiten“.
(Zu Anfang bleibt also nur der Punkt B fest, die anderen Punkte bewegen sich, bis die Strecke BP in die Lage von BC kommt; dann bleibt C fest usw.).
a) Auf diese Weise werde das Quadrat so lange gerollt, bis es zum ersten Mal wieder eine mit AB zusammenfallende Seite hat (dies muss nicht die Seite sein, die zu Anfang AB war).
Wie lang ist dabei der Weg, den
- der Punkt A,

- der Mittelpunkt M des Quadrates $ABCD$,
- der Mittelpunkt H der Seite AB des Quadrates

zurücklegt?
b) Ausgehend von dem Anfangszustand $ABPQ$ wurde nicht nur eine in a) beschriebene „volle Umrundung des Dreiecks ABC“ durchgeführt, sondern in Fortsetzung hierzu wurde das Quadrat weitergerollt.
Dies wurde erst dann beendet, als zum ersten Mal jeder der vier Punkte A, B, P, Q seine ursprünglich Lage wieder erreicht hatte.
- Wie viele volle Umrundungen des Dreiecks ABC fanden vom Anfangszustand bis zum geschilderten Ende dabei insgesamt statt?
- Wie viele volle Umdrehungen des Quadrats, bezogen auf seien eigenen Mittelpunkt M wurden dabei insgesamt ausgeführt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Die volle Umrundung des Dreiecks ABC findet in drei Teilbewegungen statt (siehe Abbildung):
Die erste ist die Drehung um B durch den überstumpfen Winkel $\angle PBC$ der Größe $360°-60°-90° = 210°$; dabei gehen P, Q, A, M, H und C, R, S, N, J über.
Die zweite Teilbewegung ist die Drehung um C durch 210°; dabei gehen R,S,B,N,J in A,T,U,O,K über.
Die dritte Teilbewegung ist die Drehung um A mit 210°; dabei gehen T, U, C, O, K in B, P, Q, M, L über.



Der Weg von A besteht demnach aus den drei Kreisbögen $k_{A1} = APS$, $k_{A2} = ST$m $k_{A3} = TQB$. Sie sind Bögen zu Zentriwinkeln der Größe 210° in Kreisen mit den Radien $a, a\sqrt{2}, a$. Also legt A einen Weg der Länge

$$\frac{\pi a \cdot 210°}{180°} \cdot (1 + \sqrt{2} + 1) = (2 + \sqrt{2}) \cdot \frac{7}{6}\pi a \approx 12{,}5137a$$

zurück. Der Weg von M besteht aus $k_{M1} = MN$, $k_{M2} = NO$, $k_{M3} = OM$; Bögen zu Zentriwinkeln von 210° in Kreisen des Radius $\frac{a}{2}\sqrt{2}$; also legt M einen Weg der Länge

$$\frac{\pi a \cdot 210°}{180°} \cdot (3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{7}{4}\sqrt{2}\pi a \approx 7{,}7750a$$

zurück. Für den Weg von H, bestehend aus $k_{H1} = HLJ$, $k_{H2} = JK$, $k_{H3} = KL$, ergibt sich entsprechend die Länge

$$(1 + 2 \cdot \sqrt{5}) \cdot \frac{7}{12}\pi a \approx 10{,}0282a$$

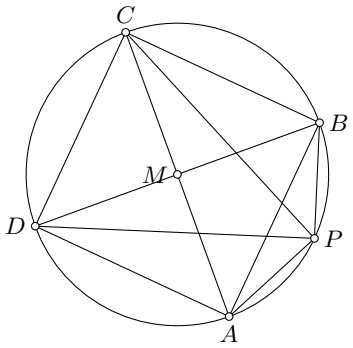
(b) Bei der ersten Umrundung gehen die Punkt A, B, P, Q wie in (a) beschrieben, in B, P, Q, A über, d. h., sie haben dieselbe Lage wie nach einer Vierteldrehung um M erreicht. Um zu bewirken, dass sie erstmals in ihre Anfangslage übergehen, muss eine solche Umrundung daher insgesamt 4 man durchgeführt werden.

Die Strecke MQ geht bei der ersten in (a) genannten Teilbewegung in die Strecke NR über. Bezogen auf den Mittelpunkt des rollenden Quadrats ist das eine Drehung von der Größe des überstumpfen Winkels $\angle QBR = 210°$.
Entsprechendes gilt für die weiteren Teilbewegungen, also findet bezogen auf den Mittelpunkt des Quadrats bei der ersten Umrundung eine Drehung um $3 \cdot 210°$ statt. Bei den festgestellten 4 Umrundungen ist dies eine Drehung um $12 \cdot 210° = 2520° = 7 \cdot 360°$, das sind 7 volle Umdrehungen.

III Runde 3

Aufgabe 020933:
Von einem Punkt P auf der Peripherie eines Kreises gehen zwei Sehnen aus, die einen Winkel von 135° miteinander bilden. Zwei weitere Sehnen, die ebenfalls von P ausgehen, zerlegen diesen Winkel in 3 Winkel von je 45°.
Beweisen Sie, dass die 4 Endpunkte der Sehnen (außer P) die Eckpunkte eines Quadrates sind!

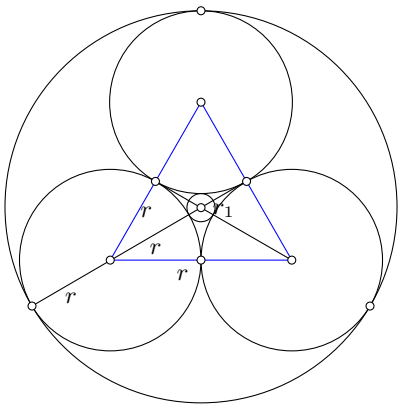
Lösung von André Lanka:



Der Peripheriewinkel $\angle CPA$ über der Strecke AC ist 90°. Damit ist nach Umkehrung des Thalessatzes AC ein Durchmesser des Kreises. Genauso ist BD ein Durchmesser. Beide Durchmesser schneiden sich im Punkt M, dem Mittelpunkt des Kreises. Die beiden Diagonalen des Vierecks sind also gleich lang.
Der Peripheriewinkel $\angle CPD = 45°$. Der Zentriwinkel über BC ist also $\angle CMD = 90°$. Die beiden Diagonalen sind nicht nur gleich lang, sondern stehen auch senkrecht aufeinander.
Das Viereck $ABCD$ muss ein Quadrat sein.

Aufgabe 030932:
Jeder von vier Kreisen in einer Ebene habe mit den drei anderen genau je einen Punkt gemeinsam. Drei von ihnen haben den gleichen Radius r.
a) Führen Sie die Konstruktion durch ($r = 3$ cm) und geben Sie eine Konstruktionsbeschreibung!
b) Berechnen Sie den Radius des vierten Kreises (Fallunterscheidungen)!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Die beiden Lösungsmöglichkeiten entnehme man der Abbildung.
a) Die Mittelpunkte der 3 Kreise mit den Radien r bestimmen ein gleichseitiges Dreieck. Der Mittelpunkt der gesuchten Kreise ist der Schnittpunkt der Höhen bzw. der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks.
Daraus ergibt sich die Konstruktion.

b) Da sich die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 : 2 teilen, ergibt sich:

$$r + r_1 = \frac{2}{3} r\sqrt{3} \qquad \text{bzw.} \qquad r_1 = \frac{2}{3} r\sqrt{3} - r$$

oder $r_1 = r\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1\right) \approx 0{,}15r$.
$r_2 = 2r + r_1$ oder $r_2 = r\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right) \approx 2{,}15r$.

Aufgabe 120935:
Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, k sein Umkreis, und es gelte für die Bogenlänge derjenigen zwischen den Eckpunkten des Sehnenvierecks liegenden Kreisbögen von k, auf denen jeweils kein anderer Eckpunkt liegt, die Gleichung

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DA}$$

Man beweise, dass dann $AC \perp BD$ gilt!

Lösung von cyrix:
Da die Bogenlänge proportional zum entsprechenden Zentriwinkel ist, folgt aus der Bedingung auch $\angle AMB + \angle CMD = \angle BMC + \angle DMA = 180°$, wobei M der Mittelpunkt von k sei und die vier Zentriwinkel den Vollwinkel bei M bilden.
Nach dem Peripherie-Zentriwinkelsatz sind die Peripheriewinkel über einem Bogen genau halb so groß wie der zugehörige Zentriwinkel, also

$$\angle ADB + \angle CAD = \frac{1}{2}(\angle AMB + \angle CMD) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$$

Sei S der Schnittpunkt der Geraden AC und BD. Dann gilt für das Dreieck $\triangle ASD$ aufgrund der Innenwinkelsumme

$$\angle DSA = 180° - \angle SAD - \angle ADS = 180° - (\angle CAD + \angle ADB) = 180° - 90° = 90°$$

Damit stehen die beiden Geraden AC und BD in s senkrecht aufeinander, □.

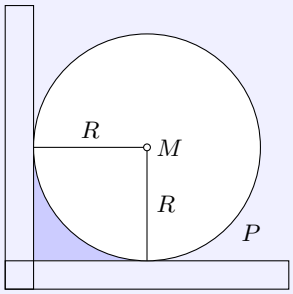
Aufgabe 140935:
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C. Auf dem Umkreis k des Dreiecks liege auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$, der C nicht enthält, ein von A und B verschiedener Punkt P.
Symmetrisch zu P bezüglich der Geraden durch A und C bzw. der durch B und C mögen die Punkte P_1 und P_2 liegen.
a) Man beweise, dass C auf der Geraden g durch P_1 und P_2 liegt.
b) Man beweise, dass g genau dann die Tangente im Punkt C an den Umkreis k ist, wenn $CP \perp AB$ gilt.

Lösung von cyrix:
a) Die Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen zu sich schneidenden Spiegelachsen ist eine Drehung um ihren Schnittpunkt um einen Drehwinkel, der dem Doppelten des Winkels zwischen den Spiegelachsen entspricht.
Da P_1 durch Spiegelung an AC auf P abgebildet wird und dieser Punkt durch Spiegelung an BC auf P_2, gilt $\angle P_1CP_2 = 2\angle ACB = 180°$, sodass P_1, C und P_2 auf einer Geraden liegen.

b) Sei M der Mittelpunkt von k. Nach dem Satz des Thales ist M damit auch gleichzeitig Mittelpunkt der Strecke AB. Weiterhin sei M_1 der Bildpunkt von M bei der Spiegelung an AC. Dann ist $|CM| = |CM_1| = |AM| = |AM_1|$, sodass es sich beim Viereck $AMCM_1$ um eine Raute, also insbesondere ein Parallelogramm handelt. Damit gilt $CM_1 \parallel AM = AB$.

Es ist die Gerade P_1C gleich g eine Tangente an k genau dann, wenn $P_1C \perp CM$ gilt. Bei Spiegelung an AC geht P_1C in PC und CM in CM_1 über, sodass g eine Tangente an k genau dann ist, wenn auch $PC \perp CM_1$ gilt. Letztere Gerade ist aber parallel zu AB, sodass diese Bedingung äquivalent zu $PC \perp AB$ ist, □.

Aufgabe 160936:
Zwei Holzleisten sind so aneinandergeleimt, dass sie einen rechten Winkel bilden. In diesen rechten Winkel ist eine kreisförmige Pappscheibe P gelegt, die beide Schenkel des rechten Winkels berührt; der Radius R dieser Scheibe ist bekannt (siehe Abbildung).



In den farbigen Teil zwischen dem rechten Winkel und der Pappscheibe P soll eine weitere Pappscheibe gelegt werden, die die Schenkel des rechten Winkels und die Scheibe P berührt.
a) Man zeige: Es gibt genau einen Punkt für die Lage des Mittelpunktes der zweiten Pappscheibe.
b) Man ermittle den Radius dieser Pappscheibe.

Lösung von cyrix:
a) Bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden des rechten Winkels gehen die beiden Schenkel ineinander über. Da die Pappscheibe beide Schenkel nur in je einem Punkt P bzw. Q berührt, müssen auch diese Berührpunkte zueinander Spiegelpunkte sein.

Da der Mittelpunkt N der kleinen Kreisscheibe mit Radius r in gleicher Entfernung zu beiden Berührpunkten liegt, muss dieser sich auf der Mittelsenkrechten der Strecke PQ befinden. Dies ist aber genau die Spiegelachse, also die Winkelhalbierende des rechten Winkels. Also liegt N (und analog auch M) auf dieser Geraden.

Lässt man (beginnend beim Scheitelpunkt des Winkels) N auf der Winkelhalbierenden in Richtung M wandern, so vergrößert sich streng monoton seine Entfernung zu beiden Schenkeln (beginnend bei 0). Umgekehrt sinkt seine Entfernung zu M (beginnend bei einem positiven Wert, bis sie 0 erreicht, wenn N auf M liegt). Demzufolge gibt es genau eine Stelle dazwischen, wo die Entfernungen r von N zu den Schenkeln des Winkels und $|MN| - R$ identisch sind. In dem Fall berührt der Kreis um N mit Radius r beide Schenkel und den Kreis um M mit Radius R, also die Pappscheibe P.

b) Sei S der Scheitelpunkt des Winkels. Es stehen die Berührradien NP und NQ senkrecht auf den Schenkeln, sodass das Viereck $SPNQ$ drei (und damit auch vier) rechte Innenwinkel besitzt, also ein Rechteck ist. Da $|NP| = |NQ| = r$ gilt, ist es sogar ein Quadrat.

Dessen Diagonale SN hat damit die Länge $|SN| = \sqrt{2}r$. Auf analoge Weise erhält man $|SM| = \sqrt{2}R$, also $r + R = |NM| = |SM| - |SN| = \sqrt{2}(R - r)$, also $r \cdot (1 + \sqrt{2}) = R \cdot (\sqrt{2} - 1)$ bzw.

$$r = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \cdot R = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2 - 1} \cdot R = (3 - 2\sqrt{2})R$$

Aufgabe 220932:
Über zwei Kreise k_1, k_2 und ihre Mittelpunkte M_1 bzw. M_2 wird vorausgesetzt, dass der Kreis k_2 durch den Punkt M_1 geht und den Kreis k_1 in zwei Punkten schneidet. Ferner sei der Schnittpunkt von k_1 mit demjenigen Strahl, der den Anfangspunkt M_1 hat und durch M_2 geht, S genannt.
Die Berührungspunkte, die eine gemeinsame Tangente der beiden Kreise k_1 und k_2 mit diesen Kreisen hat, seien P_1 und P_2 genannt.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets P_2S auf M_1S senkrecht steht!

Lösung von cyrix:
Es seien r_1 sowie r_2 die Längen der Radien von k_1 und k_2 sowie g die Gerade M_1M_2.

Da die Berührradien senkrecht auf die Tangente stehen, sind sowohl M_1P_1 als auch M_2P_2 senkrecht auf P_1P_2 und damit zueinander parallel.

Ist $P_1P_2 \parallel M_1M_2$, so ist das Viereck $M_1M_2P_2P_1$ ein Parallelogramm, sodass gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, also $r_1 = |M_1P_2| = |M_2P_2| = r_2$ und damit $S = M_2$ gilt. Insbesondere ist dann $P_2S = P_2M_2 \perp P_1P_2 \parallel M_1M_2 = M_1S$, also $P_2S \perp M_1S$.

Seien ab nun die Geraden P_1P_2 und $g = M_1M_2$ nicht parallel (was gleichbedeutend mit $r_1 \neq r_2$ ist) und X ihr gemeinsamer Schnittpunkt. Da $M_1P_1 \parallel M_2P_2$ ist, gilt nach dem Strahlensatz $\frac{|XM_1|}{|XM_2|} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|XP_1|}{|XP_2|}$.

Ist $r_1 < r_2$, so folgt $|XM_1| < |XM_2|$, sodass X auf dem von M_1 ausgehenden Strahl auf g liegt, der M_2 nicht enthält. Insbesondere ist $|XM_2| = |XM_1| + |M_1M_2| = |XM_1| + r_2$, also $\frac{r_2}{|XM_2|} = 1 - \frac{r_1}{r_2}$.
Für $r_1 < r_2$ ist auch $|XP_1| < |XP_2|$, sodass P_1 zwischen X und P_2 liegt. Damit ist

$$|P_1P_2| = |XP_2| - |XP_1| = |XP_2| \cdot \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \quad \text{also} \quad |P_1P_2| = \frac{|XP_2| \cdot r_2}{|XM_2|}$$

Ist dagegen $r_1 > r_2$, so ist $|XM_1| > |XM_2|$ und M_2 liegt zwischen X und M_1, sodass sich $|XM_2| = |XM_1| - |M_1M_2| = |XM_1| - r_2$, also $\frac{r_2}{|XM_2|} = \frac{r_1}{r_2} - 1$ ergibt.
Für $r_2 > r_1$ ist auch $|XP_1| > |XP_2|$, sodass P_2 zwischen X und P_1 liegt. Damit ist $|P_1P_2| = |XP_1| - |XP_2| = |XP_2| \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} - 1\right)$, also genauso wie im Fall $r_1 < r_2$ wieder

$$|P_1P_2| = \frac{|XP_2| \cdot r_2}{|XM_2|}$$

Das Dreieck $\triangle XM_2P_2$ ist rechtwinklig in P_2, da der Berührungsradius M_2P_2 senkrecht auf der Tangente XP_2 steht. Den Flächeninhalt F dieses Dreiecks kann man damit einerseits als das halbe Produkt der Längen seiner Katheten bestimmen, sodass $2F = |XP_2| \cdot |P_2M_2| = |XP_2| \cdot r_2$ gilt.
Andererseits kann man den Flächeninhalt dieses Dreiecks auch als halbes Produkt der Länge der Hypotenuse $|XM_2|$ und der Länge h der zugehörigen Höhe von P_2 auf XM_2 bestimmen, sodass auch $2F = |XM_2| \cdot h$ gilt. Insbesondere ist also $1 = \frac{2F}{2F} = \frac{|XP_2| \cdot r_2}{|XM_2| \cdot h}$ und damit

$$|P_1P_2| = \frac{|XP_2| \cdot r_2}{|XM_2|} = h$$

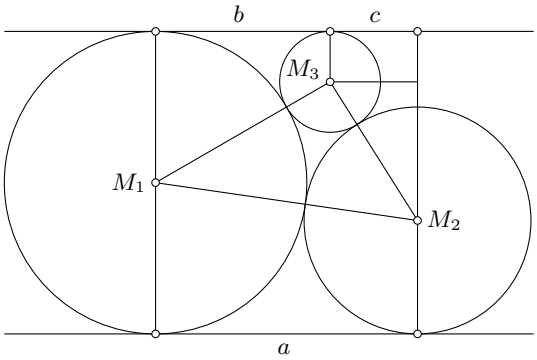
Sei H der Fußpunkt der Höhe von P_2 auf XM_2. Dann ist also $|P_2P_1| = |P_2H|$. Weiterhin ist $XM_2 \perp HP_2$, also gilt wegen nun $XM_2 = M_1H$ nun $\angle M_1HP_2 = 90° = \angle P_2P_1M_1$.
Und schließlich gilt $|P_2M_1| = |P_2M_1|$, sodass die beiden Dreiecke $\triangle M_1P_1P_2$ und $\triangle M_1HP_2$ in zwei Seiten und einem Winkel übereinstimmen. Da zusätzlich noch die größere der beiden Seiten (es ist M_1P_2 die Hypotenuse in beiden rechtwinkligen Dreiecken) dem (rechten) Winkel gegenüberliegt, sind diese beiden Dreiecke damit kongruent und insbesondere sind auch die dritten Seiten gleich, sodass $|M_1P_1| = |M_1H| = r_1$ gilt und H auch auf dem Kreis k_1 liegt.
Und da H nach Konstruktion innerhalb von k_2 liegt, gilt schließlich $H = S$, sodass $P_2S = P_2H \perp HM_1 = SM_1$, also $P_2S \perp SM_1$ gilt, □.

Aufgabe 240936:
Es sei AB eine Strecke und P ein Punkt auf der Verlängerung von BA über A hinaus. Von P werden an alle diejenigen Kreise, die AB als Sehne haben, die Tangenten gelegt.
Beweisen Sie, dass es dann einen Kreis um P gibt, auf dem die Berührungspunkte aller dieser Tangenten liegen!

Lösung von cyrix:
Es sei B' einer dieser Berührungspunkte einer Tangente durch P mit einem Kreis durch A und B. Dann gilt nach dem Sekanten-Tangenten-Satz, dass $|PB'|^2 = |PA| \cdot |PB|$ gilt. Insbesondere ist also $|PB'|$ unabhängig von der Wahl des konkreten Punktes B', sodass jeder Berührpunkt auf dem Kreis um P mit Radius $\sqrt{|PA| \cdot |PB|}$ liegen muss, $\square$.

Aufgabe 290936:
Es seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die einander von außen berühren. Für ihre Radien r_1 bzw. r_2 gelte $r_1 > r_2$.
Eine Gerade, die k_1 und k_2 in zwei voneinander verschiedenen Punkten berührt, sei t. Die von t verschiedene und zu t parallele Tangente an k_1 sei u.
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von r_1 und r_2 den Radius r_3 desjenigen u berührenden Kreises k_3, der k_1 und k_2 von außen berührt!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Seien M_1, M_2, M_3 die Mittelpunkte der Kreise und a, b, c die Projektionen der Strecken M_1M_2, M_1M_3 und M_2M_3 auf die Tangenten. Dann erhalten wir mittels Pythagoras

$$\begin{aligned} a^2 + (r_1 - r_2)^2 &= (r_1 + r_2)^2 \\ b^2 + (r_1 - r_3)^2 &= (r_1 + r_3)^2 \\ c^2 + (2r_1 - r_2 - r_3)^2 &= (r_2 + r_3)^2 \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir $a = 2\sqrt{r_1 r_2}$ und $b = 2\sqrt{r_1 r_3}$. Mit $c = |a - b|$ ergibt dann die dritte Gleichung

$$4(\sqrt{r_1 r_2} - \sqrt{r_1 r_3})^2 + (2r_1 - r_2 - r_3)^2 = (r_2 + r_3)^2$$

Nach Ausmultiplizieren und zusammenfassen der Terme ist dieses äquivalent zu $4r_1^2 = 8r_1\sqrt{r_2 r_3}$ und somit

$$r_1^2 = 4r_2 r_3 \Rightarrow r_3 = \frac{r_1^2}{4r_2}$$

Aufgabe 320933:
Gegeben ist eine Gerade g und auf ihr drei Punkte A, B, C, in dieser Reihenfolge angeordnet.
a) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von den Längen $a = AB$, $b = BC$ den Radius eines Kreises k, der durch A und B geht und eine durch C gehende Tangente besitzt, die auf g senkrecht steht!
b) Beweisen Sie, dass es einen Kreis c um C gibt, auf dem alle Berührungspunkte der Tangente liegen, die von C an alle diejenigen Kreise k gelegt werden, die durch A und B gehen!

Lösung von cyrix:
a) Da k durch A und B verläuft, liegt dessen Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten von AB. Diese ist parallel zu der durch C gehenden Senkrechten zu g, welche im Abstand $r := b + \frac{a}{2}$ zu dieser liegt. Es sei P der Berührungspunkt von k mit dieser Senkrechten.
Dann ist der Berührungsradius MP senkrecht auf der Tangenten, sodass diese Strecke genau das Lot von M auf die Tangenten ist, also die Länge r hat. Damit gilt $|MP| = r$, sodass der Radius von k genau den Wert $r = b + \frac{a}{2}$ besitzt.

b) Es sei P ein Berührungspunkt eines Kreises k durch A und B mit einer Tangenten durch C. Nach dem Sekanten-Tangenten-Satz ist dann $|CP|^2 = |CA| \cdot |CB| = (a+b) \cdot b$, also mit $r := \sqrt{(a+b) \cdot b}$ schließlich $|CP|^2 = r^2$ bzw. $|CP| = r$.
Dabei ist r vom gewählten Kreis k unabhängig, sodass all diese Berührungspunkte auf dem Kreis c um C mit Radius r liegen, □.

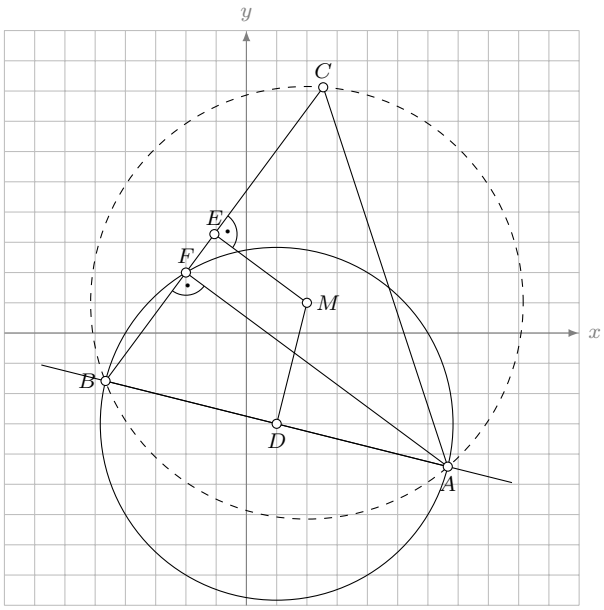
V.IV Konstruktionen

I Runde 1

Aufgabe V00912:
Es ist ein Dreieck zu konstruieren, für das die Koordinaten folgender Punkte gegeben sind:
a) Fußpunkt F der Höhe $h_a(-2;+2)$
b) Mittelpunkt D der Seite $AB = c(+1;-3)$
c) Mittelpunkt M des Umkreises $(+2;+1)$
Beschreiben Sie die Konstruktion! Messen Sie die Seiten des Dreiecks auf Millimeter genau! (1 cm ≅ 1 Einheit im Koordinatensystem)

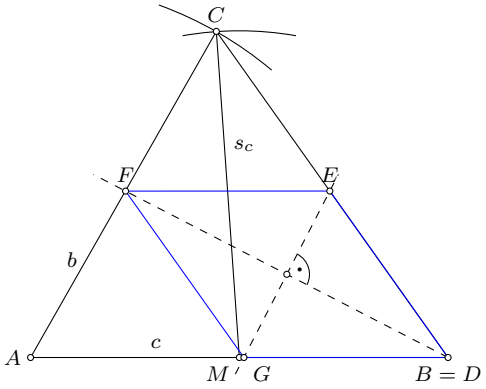
Lösung von Steffen Polster:
Konstruktion:
(1) Zeichne die Punkte D, F, M in ein Koordinatensystem ein.
(2) Der Höhenfußpunkt F liegt dann auf dem Thaleskreis über AB, d. h. einem Kreis mit dem Mittelpunkt D und dem Radius gleich DF. Zeichne diesen Kreis.
(3) Der Umkreismittelpunkt M liegt auf der Mittelsenkrechten von AB. Zeichne DM und konstruiere dazu eine Senkrechte s.
(4) Diese Senkrechte s schneidet den Thaleskreis über AB in den Punkten A und B. Konstruiere A und B.
(5) Verbinde A mit dem Höhenfußpunkt F und konstruiere zu AF eine Senkrechte. Auf dieser Senkrechten liegt der Mittelpunkt der Strecke BC. Da M auf der Mittelsenkrechten von BC liegt, erhält man den Mittelpunkt E der Strecke BC indem man das Lot von M auf die Senkrechte durch F fällt. Der Lotfußpunkt ist E.
(6) Der Punkt C ist dann das Ergebnis einer Punktspiegelung von B an E.

Dreiecksseiten: $c = 11{,}7$ cm, $a = 12{,}3$ cm, $b = 13{,}3$ cm.



Aufgabe V10915:
Konstruieren Sie ein Dreieck aus: $s_c = 5{,}4$ cm, $c = 6{,}9$ cm, $b = 6{,}2$ cm.
In dieses Dreieck ist ein Rhombus so zu konstruieren, dass er mit dem Dreieck den Winkel β gemeinsam hat und dass die Gegenecke des Rhombus auf der Seite b liegt. (Hilfslinien müssen erkennbar sein.)

Lösung von Steffen Polster:



Konstruktion des Dreiecks ABC:
(1) Zeichne die Strecke $AB = c$. Konstruiere den Mittelpunkt M von AB.
(2) Zeichne einen Kreisbogen um M mit dem Radius s_c. Zeichne einen Kreisbogen um A mit dem Radius b. Beide Kreisbögen schneiden sich in dem Punkt C. Der zweite Schnittpunkt der Kreisbögen (auf der anderen Seite von AB) erzeugt ein kongruentes Dreieck ABC_2.

Konstruktion des Rhombus $DEFG$:
(1) Der D gegenüberliegende Punkt F muss auf der Winkelhalbierenden von β liegen. Konstruiere diese Winkelhalbierende. Ihr Schnittpunkt mit AC ist der Punkt F.
(2) Konstruiere den Mittelpunkt von DF und errichte in ihm die Senkrechte zu DF. Die Schnittpunkte dieser Senkrechten mit den Seiten BC und AC sind die gesuchten Punkte E und G. $DEFG$ ist der gesuchte Rhombus.

Aufgabe 030913:

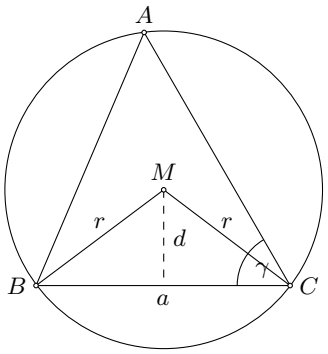
a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $a = 5{,}6$ cm, $r = 3{,}5$ cm (Radius des Umkreises) und $\gamma = 60°$!

b) Beschreiben Sie die Konstruktion!

c) Berechnen Sie den Abstand des Umkreismittelpunktes von der Seite a!

d) Untersuchen Sie, für welche Maße des Umkreisradius die Konstruktion eines Dreiecks mit $a = 5{,}6$ cm und $\gamma = 60°$ nicht möglich ist!

Lösung von Carsten Balleier:



a) s. Bild.
b) Man beginne mit der Seite a und bezeichne ihre Endpunkte mit B und C. Dann zeichne man Kreisbögen mit Radius r um die beiden Endpunkte von a, so dass ein Schnittpunkt entsteht. Dieser ist dann der Umkreismittelpunkt des gesuchten Dreiecks; er heiße M.

Dann konstruiere man den Kreis um M mit Radius r, auf ihm muss der Punkt A liegen. Letzterer ensteht, wenn der Winkel γ an a in C so angetragen wird, dass γ ein Innenwinkel des erhaltenen Dreiecks ABC ist.

c) Das Dreieck BCM ist gleichschenklig. Aus dem Satz des Pythagoras folgt dann für die Höhe auf a, die gleichzeitig der gesuchte Abstand d ist: $d = \sqrt{r^2 - (a/2)^2} = 2{,}1cm$.

d) Das Dreieck BCM muss existieren, d. h. seine Dreiecksungleichung muss erfüllt sein: $2r \geq a$ oder $r \geq 2{,}8cm$.

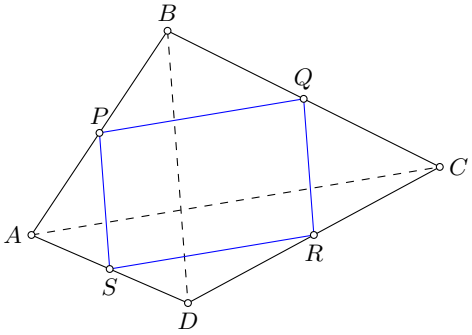
Aufgabe 070911:
Gegeben sei ein beliebiges konvexes Viereck.

Konstruieren Sie ein Parallelogramm, das die folgenden Bedingungen erfüllt!

(1) Je zwei gegenüberliegende Seiten des Parallelogramms sind parallel zu einer Diagonalen des Vierecks, und jede von ihnen ist halb so lang wie diese.

(2) Die Eckpunkte des Parallelogramms liegen auf den Seiten des Vierecks.

Lösung von Manuela Kugel:



Sei das konvexe Viereck $ABCD$ gegeben. Die Diagonalen sind demnach $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$.
Durch die Angabe, dass 2 Seiten des (vermeintlichen) Parallelogramms parallel zu $\overline{AC}$ und auch halb so groß wie $\overline{AC}$ sind, sind die 4 Eckpunkte des (vermeintlichen) Parallelogramms schon bestimmt. Denn es existiert genau eine solche Strecke im Dreieck ABC und eine im Dreieck ACD.
Die eine Strecke sei $\overline{PQ}$ mit P auf $\overline{AB}$ und Q auf $\overline{BC}$, die andere $\overline{RS}$ mit R auf $\overline{CD}$ und S auf $\overline{AD}$.

Wir wissen nach Voraussetzung, dass $\overline{PQ} = \overline{RS} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ gilt und dass diese Strecken parallel sind. Wenn wir jetzt noch zeigen können, dass $\overline{PS} = \overline{QR} = \frac{1}{2}\overline{BD}$ gilt und dass auch diese Strecken parallel sind, dann sind wir fertig.

Nach Strahlensatz gilt:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB} - \overline{AP}}{\overline{AB}} = 1 - \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}$$

Daraus folgt $\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Der Punkt P halbiert also die Seite auf der er liegt. Gleiches lässt sich für Q, R und S schließen.
Es gilt also $\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$ und $\frac{\overline{CQ}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CR}}{\overline{CD}} = \frac{1}{2}$. Aus der Umkehrung des 1. Strahlensatzes folgt damit, dass $\overline{PS}$, $\overline{QR}$ und $\overline{BD}$ zueinander parallel sind. Mit dem 2. Strahlensatz folgt direkt $\frac{\overline{PS}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{QR}}{\overline{BD}} = \frac{1}{2}$.

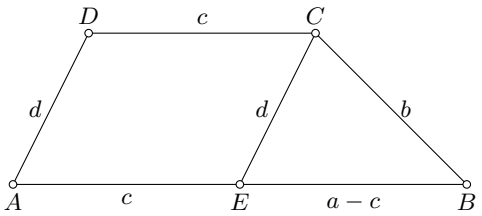
Aufgabe 080913:
Konstruieren Sie ein Trapez aus a, b, c und d!

Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die Länge der Seite BC, c die Länge der Seite CD und d die Länge der Seite DA. Weiterhin soll $AB \parallel CD$ und $a > c$ gelten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

a) Angenommen, $ABCD$ sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Zieht man durch C die Parallele zu DA, dann schneidet diese AB, da $a > c$ ist. Der Schnittpunkt sei E. Es entstehen das Dreieck $\triangle EBC$ mit $EB = a - c$ und das Parallelogramm $AECD$ mit $|CE| = d$.

$\triangle EBC$ ist konstruierbar aus $a - c$, b, d nach Kongruenzsatz (sss).
$\triangle ABC$ ist konstruierbar aus $|CB|$, $\angle CBE$, a nach Kongruenzsatz (sws).
$\triangle ACD$ ist konstruierbar aus $|AC|$, c, d nach Kongruenzsatz (sss).



b) Daraus ergibt sich, dass ein Trapez nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:
- Man zeichne die Strecke EB der Länge $a - c$.
- Punkt C liegt dann auf dem Kreis um B mit dem Radius b und auf dem Kreis um E mit dem Radius d.
- Punkt A liegt auf der Verlängerung von BE über E hinaus und auf dem Kreis um B mit dem Radius a.
- Punkt D liegt auf dem Kreis um C mit dem Radius c und auf dem Kreis um A mit dem Radius d, und zwar ist D derjenige der beiden Schnittpunkte dieser Kreise, der nicht auf derselben Seite der Geraden AC wie E liegt.

c) Beweis, dass ein so konstruiertes Trapez den Bedingungen der Aufgabe entspricht: nach Konstruktion gilt $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = |AE| = c$, $|DA| = |CE| = d$. Also ist $AECD$ ein Parallelogramm, und es gilt $AE \parallel CD$ und damit auch $AB \parallel CD$. Weiterhin gilt nach Voraussetzung $a > c$.

d) Die Konstruktion ist genau dann ausführbar, wenn $\triangle EBC$ konstruierbar ist, und zwar dann auf genau eine Weise. Zur Konstruierbarkeit von $\triangle EBC$ ist notwendig nd hinreichend, dass die Dreiecksungleichungen erfüllt sind:

$$a - c < b + d, \qquad b < a - c + d, \qquad d < a - c + b.$$

Ist eine dieser Bedingungen verletzt, so existiert kein der Aufgabe entsprechendes Trapez.

Aufgabe 150913:
Gegeben seien zwei verschiedene zueinander parallele Geraden g und h. Außerhalb des von ihnen eingeschlossenen Streifens seien ferner zwei voneinander verschiedene Punkte A und B so gegeben, dass auch kein Punkt der Strecke AB in diesem Streifen liegt und dass der Abstand von A zu g kleiner ist als der Abstand von A zu h. Für jeden Punkt P auf h bezeichne A' bzw. B' den Schnittpunkt von g mit PA bzw. PB.

Konstruieren Sie alle diejenigen Punkte P auf h, für die mit diesen Bezeichnungen $\overline{A'P} = \overline{B'P}$ gilt!

Begründen Sie die Konstruktion; diskutieren Sie, ob alle Punkte P mit der genannten Eigenschaft erhalten werden können und wie viele solcher Punkte es je nach der Lage der gegebenen g, h, A, B geben kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, ein Punkt P auf h habe die Eigenschaft $A'P = B'P$. Dann folgt:

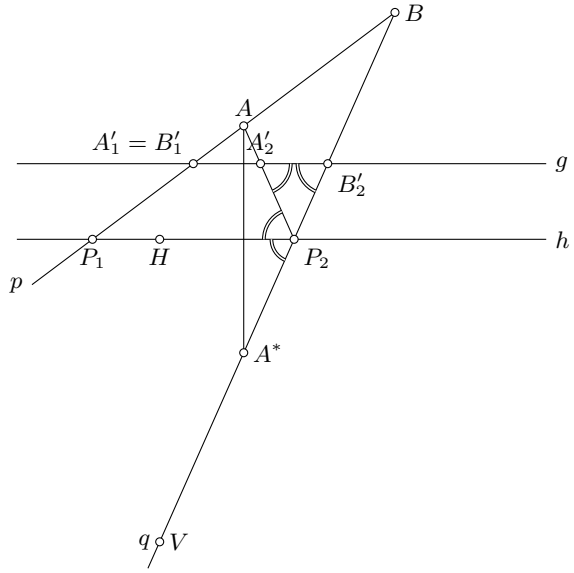
1. Ist $A' = B'$, so geht die durch P und A gelegte Gerade p auch durch $(A' =)B'$, also auch durch B.
2. Ist $A' \neq B'$, so gilt, wenn H einen näher an A als an B' gelegenen Punkt auf h und V einen Punkt der Verlängerung von BP über P hinaus bezeichnet,

   $\angle APH = \angle PA'B'$ (Wechselwinkel an Parallelen)

   $= \angle PB'A'$ (Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)

   $= \angle VPH$ (Stufenwinkel an Parallelen)

Daher liegt der durch Spiegelung von A an h entstandene Punkt A^* auf der Geraden q durch P und B.



II. Hiernach hat ein Punkt P nur dann die geforderte Eigenschaft, wenn er als einer der Punkte P_1, P_2 durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

1. Man konstruiere die Gerade p durch A und B.
2. Schneiden sich p und h, so sei P_1 ihr Schnittpunkt.

3. Man konstruiere den durch Spiegelung von A an h entstehenden Punkt A^*.
4. Man konstruiere die Gerade q durch A^* und B.
5. Schneiden sich q und h, so sei P_2 ihr Schnittpunkt.

III. Jeder so konstruierte Punkt P hat die geforderte Eigenschaft.

Beweis:

1. Ist $P = P_1$ nach II.1.2 konstruiert, so gilt:

   Die Strecken PA und PB liegen beide auf p. Daher schneiden beide die Gerade q im demselben Punkt, d. h. es gilt $A' = B'$ und somit $A'P = B'P$.

2. Ist $P = P_2$ nach II.3.4.5. konstruiert, so gilt:

   a) Ist $A' = B'$, so gilt $A'P = B'P$.

   b) Ist $A' \neq B'$, so gilt, wenn H einen näher an A' als an B' gelegenen Punkt auf h bezeichnet,

   $\angle PA'B = \angle ABH$ (Wechselwinkel an Parallelen)

   $= \angle A^*PH$ (da A^* Spiegelpunkt von A an h ist)

   $= \angle PB'A'$ (Stufenwinkel an Parallelen)

   also ist $\triangle PA'B'$ gleichschenklig mit $A'P = B'P$.

V. Konstruktionsschritt II.1. ist eindeutig ausführbar. Konstruktionsschritt II.2. führt genau dann auf keinen Punkt P_1, wenn $p \parallel h$ ist, anderenfalls auf genau einen Punkt P_1.

Konstruktionsschritt II.3. und 4. sind stets eindeutig ausführbar, ebenfalls Konstruktionsschritt II.5., da A^* auf B auf verschiedenen Seiten der Geraden h liegen.

Es gilt genau dann $P = P_2$, wenn der Spiegelpunkt A^* auf der Geraden p durch A, B liegt. Da die Gerade durch A, A^* stets auf h senkrecht steht, gilt somit $P_1 = P_2$ genau im Falle $p \perp h$.

Damit ist gezeigt:

1. Ist die Gerade durch A, B parallel zu h, so existiert genau ein gesuchter Punkt P, und er kann durch die Konstruktion II.3. bis 5. gefunden werden.
2. Ist die Gerade durch A, B senkrecht zu h, so existiert genau ein gesuchter Punkt P, und er kann durch die Konstruktion II.1.2. oder durch die Konstruktion II.3. bis 5. gefunden werden.
3. Ist die Gerade durch A, B weder parallel noch senkrecht zu h, so existieren genau zwei gesuchte Punkte P_1, P_2; sie können durch die Konstruktion II.1.2. bzw. II.3. bis 5. gefunden werden.

Aufgabe 180914:
Gegeben seien zwei Punkte A_0 und A_1. Ihr Abstand voneinander werde mit a bezeichnet.

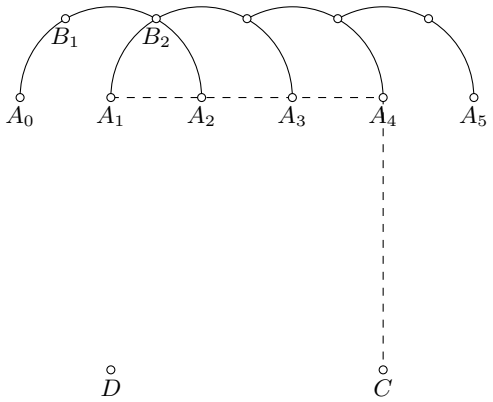
Man konstruiere die Eckpunkte eines Quadrats mit der Seitenlänge $3a$ unter alleiniger Benutzung eines Zirkels!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man schlägt um A_0 und A_1 Kreise mit dem Radius a. Einer ihrer Schnittpunkte sei B_1 genannt. Man schlägt um A_1 und B_1 Kreise mit dem Radius a. Ihr von A_0 verschiedener Schnittpunkt sei B_2 genannt. Man schlägt um A_1 und B_2 Kreise mit dem Radius a. Ihr von B_1 verschiedener Schnittpunkt sei A_2 genannt.

Da die Dreiecke $A_0A_1B_1$, $B_1A_1B_2$ gleichseitig sind, haben die Winkel $\angle A_0A_1B_1$, $\angle B_1A_1B_2$ und $\angle B_2A_1A_2$ jeweils eine Größe von $60°$ und bilden zusammen einen gestreckten Winkel.

Damit liegen die Punkte A_0, A_1 und A_2 auf derselben Geraden, und es ist $A_0A_1 = A_1A_2 = a$.

Durch eine Fortsetzung dieses Verfahrens lässt sich eine beliebig große Menge von Punkten A_n konstruieren, die alle auf derselben Geraden liegen und von denen je zwei benachbarte den Abstand a haben.



Man konstruiert auf diese Weise eine Folge von Punkten $A_0, A_1, ..., A_5$. Dann ist $A_0A_5 = 5a$, $A_1A_4 = 3a$ und $A_0A_4 = 4a$.

Man schlägt nun den Kreis um A_4 mit dem Radius $3a$ und um A_0 den Kreis mit dem Radius $5a$. Beide Kreise schneiden einander, einer der beiden Schnittpunkte sei C.

Wegen $(3a)^2 + (4a)^2 = (5a)^2$ ist nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras das durch die Punkte A_0, A_4, C bestimmte Dreieck rechtwinklig, und A_4 ist der Scheitelpunkt des rechten Winkels.

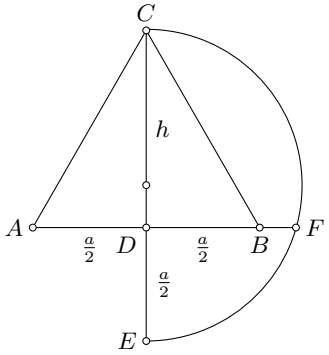
Man schlägt nun den Kreis um C mit dem Radius $3a$ und um A_1 den Kreis mit dem gleichen Radius. Ihr von A_4 verschiedener Schnittpunkt sei D genannt. Wegen $A_1A_4 = A_4C = CD = DA_1 = 3a$ und der Tatsache, dass der Innenwinkel bei A_4 ein rechter ist, sind A_1,A_4,C und D Eckpunkte eines Quadrats mit der Seitenlänge $3a$.

Aufgabe 190914:
Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC.

Beschreiben Sie eine Konstruktion einer Seite eines Quadrates, das denselben Flächeninhalt wie das Dreieck ABC hat!

In der Konstruktionsbeschreibung sollen wie üblich nur solche Konstruktionsschritte auftreten, die sich unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal ausführen lassen. Dass bei der Durchführung der Konstruktion (nach der von Ihnen gegebenen Beschreibung) eine Seite eines zu dem gegebenen Dreieck ABC flächeninhaltsgleichen Quadrates entsteht, ist zu beweisen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Konstruktionsbeschreibung:

(1) Man fällt das Lot CD von C auf AB.

(2) Man verlängert dieses Lot über D hinaus bis zu einem Punkt E, für den $DE = AD$ gilt.

(3) Man konstruiert einen Halbkreis über CD. Er schneidet die Gerade durch A und B in einem Punkt F. Die Strecke DF hat die verlangte Eigenschaft.

II. Beweis, dass ein Quadrat mit der Seitenlänge DF denselben Flächeninhalt hat wie das Dreieck ABC (1):

Es sei $AB = a$, $CD = h$. Nach Konstruktionsschritt (1) ist CD eine Höhe und folglich auch Seitenhalbierende im gleichseitigen Dreieck ABC, also gilt $AD = \frac{a}{2}$. Nach (2) gilt daher ebenfalls $DE = \frac{a}{2}$.

Nach (3) und nach dem Satz von Thales ist das Dreieck DEF bei F rechtwinklig; in diesem Dreieck ist FD nach (1) und (2) die Höhe auf der Hypotenuse. Folglich gilt nach dem Höhensatz

$$DF^2 = \frac{a}{2} \cdot h$$

Der Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge DF ist mithin gleich dem Flächeninhalt $\frac{a}{2} \cdot h$ des Dreiecks ABC, w. z. b. w.

Aufgabe 200914:
Gegeben seien ein Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius $r_1 = 4{,}5$ cm sowie ein Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius $r_2 = 2{,}5$ cm. Es sei $\overline{M_1M_2} = 7$ cm.

Konstruieren Sie sämtliche gemeinsamen Tangenten der Kreise k_1 und k_2! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Da laut Aufgabe $M_1M_2 = r_1 + r_2$ gilt, berühren sich beide Kreise von außen. Daher haben sie genau eine innere gemeinsame Tangente s. Diese geht durch den Berührungspunkt A der beiden Kreise k_1 und k_2 und steht senkrecht auf M_1M_2. Daraus ergibt sich ihre Konstruktion.

(I) Es sei nun t eine gemeinsame äußere Tangente der Kreise k_1 und k_2, ihre Berührungspunkte mit diesen Kreisen seien T_1 bzw. T_2. Die Parallele zu t durch M_2 schneidet M_1T_1 in einem Punkt, der F genannt sei. Dann ist $T_1T_2M_2F$ ein Rechteck, es gilt $M_1T_1 = r_1$ sowie $M_2T_2 = r_2$, also $M_1F = r_1 - r_2$.

Der Punkt F liegt daher erstens auf dem Kreise um M_1 mit $r_1 - r_2$ als Radius und wegen $\angle M_1FM_2 = 90°$ zweitens auf einem der Halbkreise über M_1M_2.

(II) Daraus ergibt sich folgende Konstruktion für eine äußere gemeinsame Tangente der Kreise k_1 und k_2:

(1) Man konstruiere den Kreis um M_1 mit $r_1 - r_2$ als Radius.

(2) Man konstruiert einen Halbkreis über M_1M_2. Sein Schnittpunkt mit dem in (1) konstruierten Kreis sei F genannt.

(3) Man zieht den Strahl aus M_1 durch F. Sein Schnittpunkt mit dem Kreis k_1 sei T_1 genannt.

(4) Man zieht die Parallele t zu M_2 durch T_1.

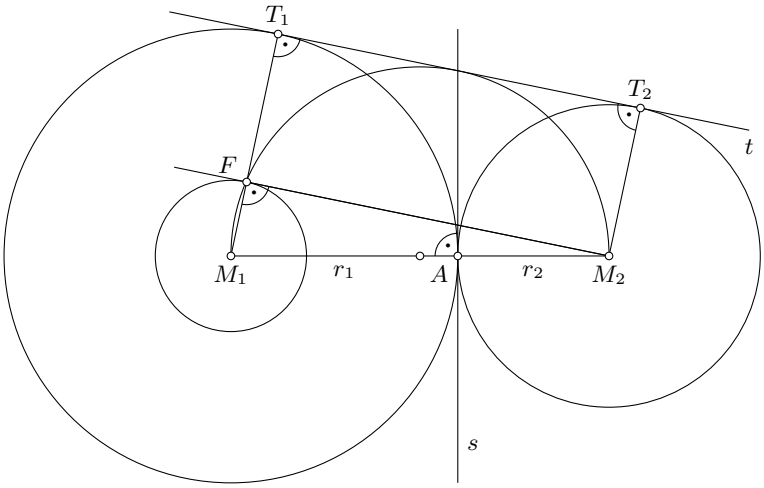
(III) Beweis, dass jede so konstruierte Gerade t Tangente an k_1 und k_2 ist:

Es sei T_2 der Schnittpunkt der Parallelen zu FT_1 durch M_2 mit t. Laut Konstruktion ist t parallel zu FM_2. Folglich gilt $\angle M_1FM_2 = \angle FT_1T_2 = 90°$ (als Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen).

Ferner gilt $\angle FT_1T_2 + \angle M_2T_2T_1 = 180°$ (als entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen), also $\angle M_2T_2T_1 = 180° - FT_1T_2 = 180° - 90° = 90°$. Mithin ist $FT_1T_2M_2$ eine Rechteck, und es folgt $FT_1 = M_2T_2 = r_2$.

Daher ist t Tangente an k_1 und k_2.

(IV) In Konstruktionsschritt (2) gibt es genau zwei Möglichkeiten für die Konstruktion des Halbkreises. Alle anderen Konstruktionsschritte sind eindeutig ausführbar. Also gibt es für jeden der beiden Halbkreise über M_1M_2 genau eine Tangente t, insgesamt also genau zwei gemeinsame äußere Tangenten von k_1 und k_2.



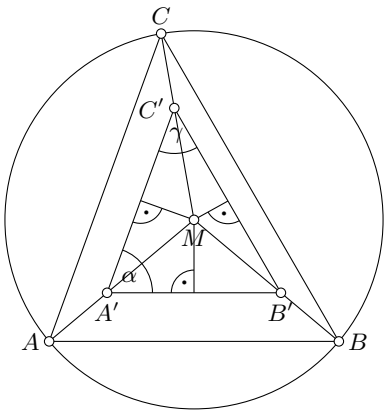
Aufgabe 210914:
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\overline{\angle BAC} = \alpha = 70°$, $\overline{\angle ACB} = \gamma = 50°$ und $r = 5$ cm, wobei r der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC ist!

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, ein Dreieck ABC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Der Mittelpunkt seines Umkreises sei M; dann gilt $MA = MB = MC = r$.

Ist $A'B'C'$ ein Dreieck mit $\angle B'A'C' = \alpha$ und $\angle A'C'B' = \gamma$, so ist es zu $\triangle ABC$ ähnlich, kann also durch eine Bewegung in eine solche Lage gebracht werden, dass es aus dem Dreieck ABC durch eine zentrische Streckung mit dem Streckzentrum M und einem Streckungsfaktor $k > 0$ hervorgeht.

Dann gilt $MA' = MB' = MC' = kr$. Also ist M auch der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $A'B'C'$, d. h. der Schnittpunkt seiner Mittelsenkrechten.



II. Daher entspricht ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck $A'B'C'$, in dem $\angle B'A'C' = \alpha$ und $\angle A'C'B' = \gamma$ gilt.

(2) Man konstruiert den Schnittpunkt M seiner Mittelsenkrechten.

(3) Man trägt auf den von M durch A', B' und C' gehenden Strahlen von M aus jeweils die Strecke der Länge r ab. Die erhaltenen Endpunkte bezeichnet man mit A, B bzw. C und verbindet sich untereinander.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe genügt:

Nach (3) gilt $MA = MB = MC = r$, also ist r der Umkreisradius des Dreiecks ABC. Nach (2) folgt weiter, dass M der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $A'B'C'$ ist, demnach gilt $MA' = MB' = MC'$. Also gelten mit einer Zahl $k > 0$ die Gleichungen $MA' = MB' = MC' = kr$; folglich geht $\triangle ABC$ aus $\triangle A'B'C'$ durch eine zentrische Streckung hervor. Somit sind beide Dreiecke einander ähnlich und es gilt

$$\angle BAC = \angle B'A'C' = \alpha \qquad ; \qquad \angle ACB = \angle A'C'B' = \gamma$$

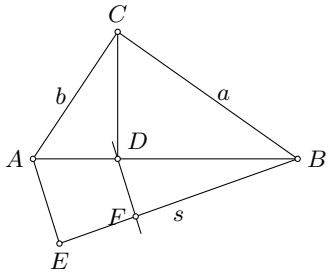
IV. Konstruktionsschritt (1) ist (bei den gegebenen Werten von α und γ) ausführbar, aber nicht eindeutig; jedoch sind je zwei nach (1) zu erhaltende Dreiecke $A'_1B'_1C'_1$, $A'_2B'_2C'_2$ zueinander ähnlich. Also kann stets $A'_2B'_2C'_2$ durch eine Bewegung in eine solche Lage gebracht werden, dass es aus $A'_1B'_1C'_1$ durch eine zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum M hervorgeht.

Hiernach ist die Figur aus den drei in (3) konstruierten Strahlen bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt. Somit ist auch das in (3) anschließend konstruierte Dreieck ABC durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 260912:
Es seien a, b, s drei gegebene Streckenlängen. Peter soll eine Strecke der Länge s im Verhältnis $a^2 : b^2$ teilen. Er gibt folgende Konstruktion an:
(1) Man konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck aus $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ und $\overline{\angle ACB} = 90°$
(2) Von C fällt man das Lot auf AB, sein Fußpunkt sei D.
(3) In B trägt man an BA einen Winkel an, dessen Größe zwischen 0° und 180° liegt. Auf den freien Schenkel dieses Winkels wird von B aus die Strecke der Länge s abgetragen, ihr anderer Endpunkt sei E.
(4) Die Parallele zu EA durch D schneide BE in einen Punkt, der F genannt sei.

a) Führen Sie die beschriebene Konstruktion durch!
b) Beweisen Sie:
Wenn eine Strecke BE und ein Punkt F nach Peters Beschreibung konstruiert werden, dann teilt F die Strecke BE in Verhältnis $\overline{BF} : \overline{FE} = a^2 : b^2$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Die Abbildung zeigt die geforderte Konstruktion.

b) Wenn A, B, C, D, E, F nach der Beschreibung konstruiert werden, so folgt:
Nach (1) und (2) ist $\angle ACB = 90° = \angle CDB$. Ferner ist $\angle ABC = \angle CBD$. Daher gilt $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, also

$$AB : BC = CB : BD \qquad ; \qquad BD \cdot AB = BC^2 = a^2$$

Nach (3) und (4) folgt damit aus dem Strahlensatz

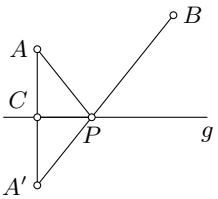
$$BF : FE = BD : DA = a^2 : b^2$$

w. z. b. w.

II Runde 2

Aufgabe 020925:
Zeichnen Sie eine Gerade g und auf derselben Seite von g zwei Punkte A und B, die verschiedenen Abstand von g haben und deren Verbindungsstrecke verlängert die Gerade g nicht unter einem rechten Winkel schneidet!
Konstruieren Sie auf g einen Punkt P, für den der Winkel zwischen AP und g gleich dem Winkel zwischen BP und g ist! Begründen Sie die Konstruktion!

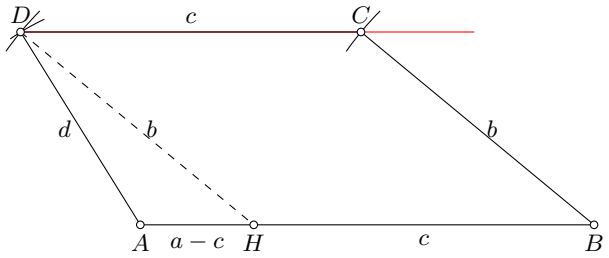
Lösung von André Lanka:



Man spiegelt zuerst den Punkt A an der Geraden g und erhält den Punkt A'. Der Schnittpunkt von g mit AA' sei C. Der Schnittpunkt von g mit $A'B$ sei P.
Dann sind die beiden Dreiecke $\triangle ACP$ und $\triangle A'CP$ wegen SWS kongruent zueinander. Demnach ist $\angle A'PC = \angle CPA$. Außerdem ist auch $\angle A'PC$ genauso groß wie der Winkel zwischen g und PB, weil es sich um Wechselwinkel handelt.
Der gefundene Punkt P erfüllt also die Anforderungen.

Aufgabe 030921:
Von einem Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD sind gegeben:
$AB = 6$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 4{,}5$ cm, $DA = 3$ cm.
Konstruieren Sie das Trapez und begründen Sie die Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Planfigur: Sei $a > c$. Wählt man auf der Seite $|AB| = a$ einen Punkt H so, dass $|HB| = c$, erhält man durch die Verbindung $|HD|$ das Parallelogramm $HBCD$.

Damit ergibt sich folgende Konstruktion:

1. Lege durch die Strecke $|AB| := a$ die Punkte A und B fest.
2. Trage auf $|AB|$ vom Startpunk B die Strecke c ab; Endpunkt sei H.
3. Beschreibe einen Kreis (H, b) um H vom Radius b. Beschreibe einen Kreis (A, d) um A vom Radius d. Schnittpunkt beider Kreise ist die Ecke D so dass, A,H,D im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werden.
4. Lege durch D eine Parallele zu $|AB|$.
5. Beschreibe einen Kreis (B, b) um B vom Radius b. Schnittpunkt des Kreises mit der Parallelen ist die Ecke C.
6. Erhalte durch entsprechende Verbindung der Punkte A,B,C,D das Trapez $ABCD$.

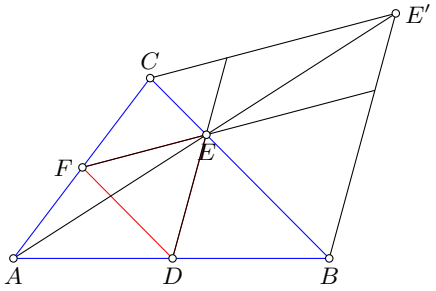
Aufgabe 030923:
Einem spitzwinkligen Dreieck ABC soll ein gleichseitiges Dreieck so einbeschrieben werden, dass eine seiner Seiten parallel zur Seite BC verläuft und die Eckpunkte des einbeschriebenen Dreiecks auf den Seiten des Dreiecks ABC liegen.
Begründen Sie die Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Analyse
Angenommen, D, E, F genügen allen Bedingungen der Aufgabe. Bezeichnet E' den auf der anderen Seite von g_{BC} wie A gelegenen Eckpunkt des gleichseitigen Dreiecks mit der Seite BC, dann ist E der Schnittpunkt von AE' mit g_{BC}.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $FD \parallel CB$ und $|\angle DFE| = 60°$, und nach Definition $|\angle BCE'| = 60°$. Da E und E' auf derselben Seite von g_{FD} liegen wie gCB, folgt $CD' \parallel FE$ und entsprechend $FE \parallel BE'$.
Die Gerade g_{AE} schneidet $g_{CE'}$ in einem Punkt, der P genannt sei, und die Gerade $g_{BE'}$ in einem Punkt, der Q genannt sei. Dann gelten nach dem 1. Strahlensatz die Beziehungen

$$|AD| : |AB| = |AF| : |AC|, \qquad |AD| : |AB| = |AE| : |AQ'|, \qquad |AF| : |AC| = |AE| : |AF|$$

Aus diesen Gleichungen folgt $|AE| : |AP| = |AE| : |AQ|$, also $|AP| = |AQ|$ und damit $P = Q = E'$.
Daher ist $\triangle CPB$ gleichseitig; denn jeder der Winkel $\angle BCP, \angle CBP$ hat entweder die Größe 60° oder 120°, und 120° kommt nicht in Frage, weil die Winkelgrößensumme im Dreieck 180° beträgt.
Daher können E, F, D nur dann allen Bedingungen der Aufgabe genügen, wenn sie auf folgende Weise konstruierbar sind.



II. Konstruktion:
Man konstruiere über CB das gleichseitige Dreieck CBE', dessen Ecke E' nicht auf derselben Seite von g_{BC} wie A liegt. Dann schneidet die Strecke AE' die Gerade g_{BC} in einem Punkt E.
F sei der Schnittpunkt von g_{AC} mit der Parallelen zu CE' durch E; D der Schnittpunkt von g_{AB} mit der Parallelen zu BE' durch E.

III. Satz:
Wenn E, F, D gemäß II. konstruiert sind, genügt $\triangle EFD$ allen Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:
a) Man überzeugt sich zunächst davon, dass E auf BC liegt: Da nach Voraussetzung $\triangle ABC$ spitz ist und A und E' auf verschiedenen Seiten von g_BC liegen, gilt

$$|\angle ABE'| = |\angle ABC| + |\angle CBE'| \leq 90° + 60° < 180°$$

und entsprechend $|\angle ACE'| < 180°$. Daher kann E nicht mit B oder C zusammenfallen.
Läge E nicht auf BC, so läge BC auf ein und derselben Seite von $g_{AE'}$. Dann wäre einer der beiden Winkel $\angle EBE'$ oder $\angle ECE'$ Außenwinkel zum Dreieck BCE'.
O. B. d. A. kann angenommen werden, dass dies der Winkel $\angle EBE'$ ist. Da A und E' auf verschiedenen Seiten von g_{EC} liegen, läge B im Innern des Dreiecks $AE'C$ und es wäre

$$360° = |\angle ABE'| + |\angle E'BC| + |\angle CBA| \qquad \text{also}$$

$$|\angle CBA| = 360° - |\angle ABE'| - |\angle E'BC| > 360° - 180° - 60° = 120°$$

d. h. $\triangle ABC$ wäre nicht spitzwinklig.

b) Läge F nicht auf AC, so lägen A und C auf derselben Seite von g_{EF}, und zwar wegen $g_{EF} \parallel g_{CE'}$ auf derselben Seite wie E', so dass AE' keinen Punkt mit g_{EF} gemeinsam hätte. Das ist ein Widerspruch, weil E auf AE' und g_{EF} liegt.

c) Entsprechend zeigt man, dass D auf AB liegt.

d) Wegen $g_{EF} \parallel g_{E'C}$ und $g_{ED} \parallel g_{E'B}$ folgt nun nach dem 1. Strahlensatz $|AD| : |AB| = |AE| : |AE'| = |AF| : |AC|$ und aus $|AD| : |AB| = |AF| : |AC|$ nach Umkehrung des 1. Strahlensatzes $DF \parallel BC$.

e) Da EE' die Gerade g_{AC} nicht schneidet (denn der Schnittpunkt von $g_{EE'}$ mit g_{AC} ist A, und A liegt nicht auf EE', weil E auf AE' liegt), liegen E und E' auf derselben Seite von g_{AC}.
Daher gilt $\angle AFE \cong \angle ACE'$, wegen $FE \parallel CE'$.
Entsprechend ergibt sich, da DB auf derselben Seite von g_{AC} liegt wie EE', $\angle AFD \cong \angle ACB$ und weiter $|\angle DFE| = |\angle BCE'| = 60°$.
Analog folgt, dass auch die anderen Innenwinkel von $\triangle DEF$ je die Größe 60° haben, so dass $\triangle DEF$ gleichseitig ist.

IV. Determination:
Da jeder Konstruktionsschritt stets ausführbar ist, und zwar genau auf eine Weise, gibt es stets genau ein Dreieck DEF, das allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 210924:
Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC.
Konstruieren Sie eine Parallele zu BC so, dass sie die Dreieckseiten AB und AC in Punkten D bzw. E schneidet, für die $ED = DB + EC$ gilt!
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob es (zu dem gegebenen Dreieck ABC) genau eine Parallele der verlangten Art gibt!

Lösung von cyrix:
Konstruktion:
1) Man konstruiere die Winkelhalbierende w des Winkels $\angle BAC$ und deren Schnittpunkt W mit der Seite BC.
2) Der Kreis um C durch W schneide die Gerade AC in zwei Punkten, wobei genau einer nicht auf der gleichen Seite von C wie A liegt. Dieser Schnittpunkt heiße X.
3) Die Parallele zur Geraden XW durch C schneide w in S.
4) Die Parallele zur Geraden BC durch S schneide die Geraden AB in D und AC in E.

Begründung:
Da A, E und C in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen, gilt $|AE| + |EC| = |AC|$, also

$$\frac{|AE| + |EC|}{|ES|} = \frac{|AC|}{ES}$$

Da die Geraden ES und CW nach Konstruktion parallel sind, gilt nach dem Strahlensatz $\frac{|ES|}{|AS|} = \frac{|CW|}{|AW|}$, also $|ES| = |CW| \cdot \frac{|AS|}{|AW|}$. Setzt man dies ein, erhält man

$$\frac{|AE| + |EC|}{|ES|} = \frac{|AC|}{ES} = \frac{|AC|}{|CW|} \cdot \frac{|AW|}{|AS|}$$

Da die Geraden CS und XW nach Konstruktion parallel sind, gilt nach dem Strahlensatz $\frac{|AW|}{|AS|} = \frac{|AX|}{|AC|}$. Setzt man dies ein, erhält man

$$\frac{|AE| + |EC|}{|ES|} = \frac{|AC|}{|CW|} \cdot \frac{|AW|}{|AS|} = \frac{|AC|}{|CW|} \cdot \frac{|AX|}{|AC|} = \frac{|AX|}{|CW|}$$

Nach Konstruktion ist $|AX| = |AC| + |CW|$, also

$$\frac{|AE| + |EC|}{|ES|} = \frac{|AX|}{|CW|} = \frac{|AC| + |CW|}{|CW|} = 1 + \frac{|AC|}{|CW|}$$

Da die Geraden ES und CW parallel sind, gilt nach dem Strahlensatz $\frac{|AC|}{|CW|} = \frac{|AE|}{|ES|}$. Setzt man das ein, erhält man

$$\frac{|AE| + |EC|}{|ES|} = 1 + \frac{|AC|}{|CW|} = 1 + \frac{|AE|}{|ES|} = \frac{|AE| + |ES|}{|ES|} \qquad \text{also} \qquad |EC| = |ES|$$

Da die Geraden ED und CB parallel sind, gilt $\frac{|SD|}{|ES|} = \frac{|WB|}{|WC|}$. Da W der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ mit der gegenüberliegenden Seite ist, gilt $\frac{|WB|}{|WC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$, da eine Winkelhalbierende in einem Dreieck die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der angrenzenden Seiten teilt. Zusammen gilt also

$$\frac{|SD|}{|ES|} = \frac{|AB|}{|AC|} \quad \text{bzw.} \quad |SD| = |ES| \cdot \frac{|AB|}{|AC|}$$

Setzt man hierin $|ES| = |EC|$ und $|EC| = |AC| - |AE|$ ein, erhält man

$$|SD| = (|AC| - |AE|) \cdot \frac{|AB|}{|AC|} = |AB| - |AB| \cdot \frac{|AE|}{|AC|}$$

Da die Geraden ED und CB parallel sind, gilt nach dem Strahlensatz $\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AB|}$. Setzt man dies ein, erhält man

$$|SD| = |AB| - |AB| \cdot \frac{|AE|}{|AC|} = |AB| - |AB| \cdot \frac{|AD|}{|AB|} = |AB| - |AD| = |DB|$$

Damit gilt $|ED| = |ES| + |SD| = |EC| + |DB|$, wie gefordert.

Zur Eindeutigkeit:
Für eine Parallele p zu BC bezeichne E' und D' deren Schnittpunkte mit den Geraden AC bzw. AB. Bewegt man diese Parallele p beginnend mit $p = BC$ kontinuierlich soweit, bis sie durch A verläuft, dann ist die Länge der zugehörigen Strecke $E'D'$ beginnend mit dem Wert $|BC|$ streng monoton auf 0 gesunken.
Umgedreht wachsen in diesem Prozess die Streckenlängen $|D'B|$ und $|E'C|$ von 0 beginnend bis $|AB|$ bzw. $|AC|$, sodass für deren Summe $|D'B| + |E'C|$ gilt, dass sie streng monoton von 0 bis $|AB| + |AC| > |AB|$ wächst, wobei die letzte Ungleichung die Dreiecksungleichung ist.
Also gibt es genau eine Position der Parallelen p in diesem Bereich, an dem Gleichheit zwischen den beiden Werten $|E'D'|$ und $|D'B| + |E'C|$ Gleichheit herrscht. Damit ist die Position der Parallelen eindeutig bestimmt. (Außerhalb des betrachteten Bereichs schneidet p nicht mehr die Dreiecksseiten, was nach Aufgabenstellung gefordert war.)

Aufgabe 310922:
Gegeben seien zwei beliebige, voneinander verschiedene Punkte A und B.
Konstruieren Sie nur mit dem Zirkel einen von A und B verschiedenen Punkt C, für den $\angle ABC$ ein rechter Winkel ist!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!
Beweisen Sie: Wenn ein Punkt C nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, dann ist $\angle ABC$ ein rechter Winkel!
Hinweis:
Man sagt, eine Konstruktion sei „nur mit dem Zirkel“ ausgeführt, wenn jeder Konstruktionsschritt darin besteht, dass um einen Punkt M ein Kreis konstruiert wird, dessen Radius gleich dem Abstand zweier Punkte P, Q ist (für die auch $M = P$ oder $M = Q$ sein darf), wobei die Punkte M, P, Q entweder gegebene oder beliebig gewählte oder zuvor konstruierte Punkte sind.
Als „nur mit dem Zirkel konstruiert“ gilt dann jeder Punkt, der als gemeinsamer Punkt von (mindestens) zwei solchen Kreisen zu erhalten ist.

Lösung von cyrix:
Wir führen folgende Konstruktion durch:
1) Kreis k_1 um B durch A, Kreis k_2 um A durch B
2) Schnittpunkte von k_1 und k_2 seien P_1 und P_5
3) Kreis k_3 um P_1 durch A, Schnittpunkt von k_1 und k_3 seien A und P_2
4) Kreis k_4 um P_2 durch P_1
5) Schnittpunkte von k_4 und k_1 seien P_1 und P_3
6) Kreis k um P_3 durch A, Kreis ℓ um A durch P_3
7) Schnittpunkte von k und ℓ seien C und C'

Beweis, dass $\angle ABC = 90°$ ist:
Nach Konstruktion besitzen die Kreise k_1 und k_2 den gleichen Radius $|AB|$, sodass das Dreieck $\triangle ABP_1$ gleichseitig mit Kantenlänge $|AB|$ ist. Insbesondere ist $\angle ABP_1 = 60°$.
Auf analoge Weise erhält man auch die Gleichseitigkeit der Dreiecke $\triangle P_1BP_2$ und $\triangle P_2BP_3$, sodass sich auch $\angle P_1BP_2 = \angle P_2BP_3 = 60°$ und damit

$$\angle ABP_3 = \angle ABP_1 + \angle P_1BP_2 + \angle P_2BP_3 = 60° + 60° + 60° = 180°$$

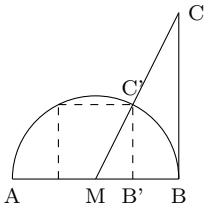
ergibt, sodass die Punkte A, B und P_3 auf einer Geraden liegen, wobei B zwischen A und P_3 liegt.

Weiterhin haben alle drei betrachteten gleichseitigen Dreiecke die Kantenlänge $|AB|$, sodass auch $|BP_3| = |AB|$ gilt und damit B der Mittelpunkt der Strecke AP_3 ist.
Abschließend schneiden sich die beiden Kreise k und ℓ auf dem Mittellot dieser Strecke AP_3, also insbesondere in einem Punkt C mit $\angle ABC = 90°$, da das Mittellot von AP_3 natürlich durch dessen Mittelpunkt B verläuft und senkrecht auf der Geraden $AP_3 = AB$ steht, □.

III Runde 3

Aufgabe 040933:
Konstruieren Sie zu einem gegebenen Halbkreis mit dem Radius r das einbeschriebene Quadrat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



$ABCD$ sei das geforderte Quadrat, M der Mittelpunkt des Halbkreises und E ein Endpunkt des Durchmessers. Es gilt $MB : BC = 1 : 2$.
Die Senkrechte zu AE in E schneidet die Verlängerung von MC im Punkt P. Dann gilt $\triangle MBC \sim \triangle MEF$. Daraus folgt:

$$ME : EF = MB : BC = 1 : 2$$

Also gilt $EF = 2ME$.

Konstruktion:
Man errichtet auf dem Durchmesser in E die Senkrechte und trägt auf ihr $EF = 2ME$ ab.
Man verbindet M mit F und erhält C als Schnittpunkt von MF mit dem Halbkreis. Danach ist das Quadrat leicht zu konstruieren.

2.Lösung:
Seien A, B die Ecken des Halbkreises und M der Mittelpunkt, Konstruiere in B eine Strecke der Länge $|AB| = 2r$ senkrecht zur Gerade AB mit Endpunkt C.
Der Schnittpunkt der Gerade MC und des Halbkreises ist eine Ecke des gesuchten Quadrats. Mittels Spiegelung und Lot erhalten wir die anderen 3 Ecken.
Wenn C' der so konstruierte Schnittpunkt der Gerade MC mit dem Halbkreis ist und B' der Fußpunkt des Lots durch C' auf der Strecke AB ist, dann ist MB' genau halb so groß wie $B'C'$ nach Strahlensatz und es entsteht das gesuchte Quadrat.

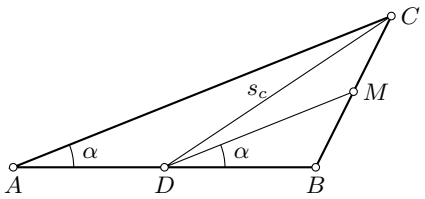
Aufgabe 050932:

a) Konstruieren Sie das Dreieck $\triangle ABC$, wenn α, a und s_c gegeben sind. Dabei bedeutet α das Maß des Winkels $\angle CAB$, a die Länge der Seite BC und s_c die Länge der Seitenhalbierenden CD, wobei D der Mittelpunkt der Seite AB ist.

b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Analyse:
Angenommen, ABC sei ein Dreieck der verlangten Art, dann bestehen folgende Lagebeziehungen. Bezeichnet M den Mittelpunkt von BC und D der Mittelpunkt von AB, dann liegt D

1) auf dem Kreis k um C mit dem Radius s_c.
2) auf einem zu α gehörigen Ortskreisbogen $\widehat{\text{b}}$ über BM.



Beweis:
1) gilt auf Grund der Definition des Kreises
2) Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes gilt $DM \parallel AC$ und somit $\angle BDM \cong \angle BAC$ (als Stufenwinkel an Parallelen), so dass nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes D auf $\widehat{\mathrm{b}}$ liegt.
Der Punkt A liegt
1) auf dem von B ausgehenden Strahl durch D (ausschließlich B)
2) auf dem Kreis um D mit dem Radius $|BD|$.

Beide Aussagen folgen unmittelbar daraus, dass D Mittelpunkt von AB ist. Daher können AmB, C nur dann die Ecken eines allen Bedingungen der Aufgabe genügenden Dreiecks sein, wenn sie auf folgende Weise konstruierbar sind.

II. Konstruktion
Man zeichne die Strecke BC der gegebenen Länge a. Danach konstruiere man den Mittelpunkt M von BC. Um C schlage man den Kreis k mit dem gegebenen Radius s_c, und über BM errichte man einen zu α gehörigen Ortskreisbogen $\widehat{\mathrm{b}}$.
Ist D ein gemeinsamer Punkt von k und $\widehat{\mathrm{b}}$, so trage man auf dem von B ausgehenden Strahl durch D von D aus nach der B nicht enthaltenden Seite eine Strecke der Länge $|BD|$ ab, deren zweiter Endpunkt A sei.

III. Satz:
Sind A, B, C gemäß II. konstruierbar, so bilden sie die Ecken eines allen Bedingungen der Aufgabe genügenden Dreiecks.

Beweis:
Nach Konstruktion ist $|BC| = a$, D Mittelpunkt von AB und $|CD| = s_c$. Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt $|\angle BDM| = \alpha$ und nach dem 1. Strahlensatz und dem Satz über Winkel an geschnittenen Parallelen $\angle BDM \cong \angle CAB$, so dass $|\angle CAB| = \alpha$ ist.

IV. Determination:
Sämtliche Konstruktionsschritte in II. sind, falls D existiert, ausführbar.
Der Punkt D existiert, wenn

$$\begin{array}{ll} 1) & \alpha \geq 90°; \quad \frac{a}{2} < s_c < a \\ 2) & \alpha < 90°; \quad d - r \leq s_c < d + r \end{array}$$

In allen anderen Fällen existiert D nicht, und es gibt daher kein Dreieck, das allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 060936:
In einer Ebene sind ein Kreis k, eine Gerade g sowie ein Punkt A auf g gegeben.
Man konstruiere einen Kreis k', der erstens k berührt und zweitens g in A berührt.
Man untersuche, wie viele solcher Kreise k' es bei den verschiedenen Lagemöglichkeiten von k, g und A geben kann.

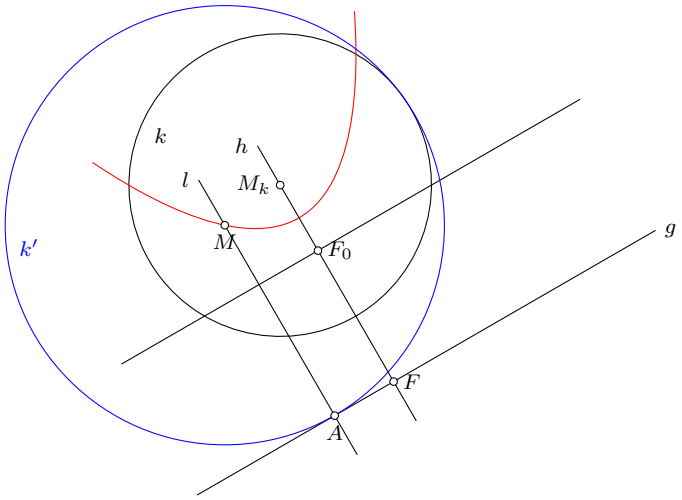
Lösung von ZePhoCa:
Wir geben zunächst eine Konstruktionsvorschrift für den Mittelpunkt M von k' an falls A nicht auf g

liegt und untersuchen dann, wie viele Möglichkeiten es gibt.

Wir konstruieren zunächst die zu g senkrechte Gerade h durch den Mittelpunkt von k.

Wir verschieben nun g entlang dieser Senkrechten um den Radius von k. Wir konstruieren nun die Ortslinie aller Punkte, die von der verschobenen Gerade und dem Mittelpunkt denselben Abstand haben. Dies ist eine Parabel, die symmetrisch bzgl. h ist.
Damit k' nicht nur g berührt, sondern dies auch in A tut, konstruieren wir die zu g senkrechte Gerade l durch A.
Weil l zu h parallel ist, hat diese genau einen Schnittpunkt mit der oben konstruierten Parabel. Dieser Schnittpunkt ist Mittelpunkt eines gewünschten Kreises (denn der Abstand von M zum Mittelpunkt von k ist gleich dem Abstand von M zu A plus dem Radius des Kreises k).

Nun zum eigentlichen Beweis. Wir unterscheiden drei Fälle:



1. g ist Passante von k. Dann kann k' sowohl g als auch k nur dann berühren, wenn k' in derselben Halbebene bzgl. g liegt wie k.

   Der Mittelpunkt M von k' muss außerdem auf einer zu g senkrechten Geraden durch A liegen, damit k' die Gerade g in A berührt. Es gibt nun zwei prinzipielle Möglichkeiten, wie sich k und k' berühren können:

   Äußerlich (dann muss der Abstand von M zum Mittelpunkt von k gleich dem Abstand von M zu A plus dem Radius des Kreises k sein) oder innerlich (dann muss der Abstand von M zum Mittelpunkt von k gleich dem Abstand von M zu A minus dem Radius des Kreises k sein). Beide Fälle treten genau je einmal auf (für das äußerliche Berühren zeigt das die Konstruktion von oben, dass innerliche Berühren lässt sich analog begründen, hier muss nur g zu Beginn anders verschoben werden), es gibt also genau zwei Möglichkeiten für k'.

2. g ist Tangente an k. Ist A der Berührungspunkt von k und g, so gibt es unendliche viele Möglichkeiten für k' (jeder Kreis der g in A berührt, berührt auch k).

   Ist A nicht der Berührungspunkt von k und g, so gibt es genau eine Möglichkeit für k:

   Es gibt nämlich theoretisch wieder die Fälle des inneren und äußeren Berührens wie oben, das äußere Berühren tritt genau einmal auf, dass innere Berühren jedoch nicht, denn hier liegt A auf der verschobenen Gerade, die konstruierte Ortslinie ist hier eine Senkrechte durch den Mittelpunkt von k und diese hat mit der Senkrechten zu g durch A keinen Schnittpunkt.

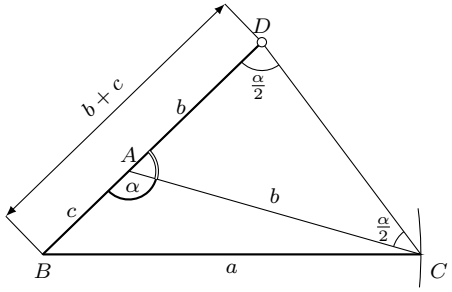
3. g ist Sekante an k. Ist A einer der Schnittpunkte von k und g so gibt es keine Möglichkeit für k' (denn jeder Kreis, der g in A berührt schneidet k in A).

Liegt A außerhalb von k, so gibt es genau zwei Möglichkeiten (hier kann nämlich, anders als in Fall 1, der Kreis k' in einer beliebigen Halbebene bzgl. g liegen, da A außerhalb von k liegt ist aber nur äußeres Berühren möglich).

Analog dazu gibt es im Fall, dass A in k liegt auch genau zwei Möglichkeiten.

Aufgabe 080932:
Konstruieren Sie ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $a, b+c$ und α!
Dabei sind a, b, c die Längen der Dreiecksseiten und α die Größe des Winkels $\angle BAC$.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:

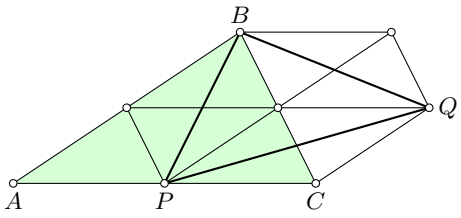


Wird die Seite c eines Dreieck ABC um die Strecke b verlängert, Endpunkt sei D, erhält man die gegebene Strecke $b+c$.
Durch die Verbindung von D und C entsteht das gleichschenklige Dreieck ACD mit dem Winkel $180° - \alpha$ an der Spitze A und zufolge mit dem Basiswinkel $\frac{\alpha}{2}$ und Schenkeln der Länge b.

Damit ergibt sich folgende Konstruktion:
(1) Ziehe die Strecke $b + c = BD$, womit die Punkte B und D festgelegt werden.
(2) Lege eine Gerade h durch D, die mit BD den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ einschließt.
(3) Beschreibe einen Kreis (B,a) um B vom Radius a.
Hier hängt es von der Größe des Winkels α ab, ob es zwischen h und (B,a) keinen oder zwei Schnittpunkte (C_1 und C_2) oder einen Berührungspunkt (C_1) gibt.
(4) Lege durch die Schnittpunkte aus (3) jeweils eine Gerade, die mit h den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ einschließt; welche die Strecke BD im Punkt A_1 bzw. in den Punkten A_1 und A_2 schneidet.
(5) Durch Verbindung A_1BC_1 bzw. A_1BC_1 und A_2BC_2 erhält man eine bzw. zwei Lösungen für das gesuchte Dreieck.

Aufgabe 090932:
Konstruieren Sie ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $s_a = 9{,}6$ cm, $s_b = 12{,}6$ cm und $s_c = 11{,}1$ cm! Dabei sind s_a, s_b und s_c die Längen der drei Seitenhalbierenden des Dreiecks.
Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Die Seitenmittelpunkte unterteilen das Dreieck ABC in 4 kongruente Teildreiecke. Durch hinzufügen weiterer Kopien erhalten wir das Dreieck BPQ, dessen Seiten gerade die Längen s_a,s_b,s_c haben - dieses ist an geeigneten Parallelogrammen einsehbar.
BPQ kann wie üblich konstruiert werden. Die Seitenhalbierenden des Dreiecks BPQ sind parallel zu den Seiten des gesuchten Dreiecks ABC. Daher erhalten wir dieses mittels parallele Geraden durch B und P. Insbesondere ist das Dreieck konstruierbar, falls s_a,s_b,s_c die Dreieckungleichungen erfüllen.

Aufgabe 100936:
Es sei ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $a+b+c, \angle, \gamma$ zu konstruieren. Dabei bedeuten wie üblich a, b, c die Längen der Seiten BC, AC, AB und α, γ die Größen der Winkel $\angle CAB, \angle ACB$.
Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

Lösung von cyrix:

1) Man zeichne zuerst ein beliebiges Dreieck mit den Innenwinkeln α und γ, indem man ausgehend von zwei Punkten A und C' an die Strecke AC' in A den Winkel α und in C' den Winkel γ in entsprechender Orientierung, dass sich ein Dreieck $AB'C'$ mit B' als Schnittpunkt der freien Schenkel der gezeichneten Winkel ergibt.
2) Auf einer Geraden durch A, welche weder B' noch C' enthält, konstruiere man einen Punkt S' mit $AS' = AC' + AB' + B'C'$, indem man zuerst die Strecke AC' an A, dann AB' an den so erhaltenen ersten Zwischenpunkt und schließlich die Strecke $B'C'$ an den gerade erhaltenen zweiten Zwischenpunkt auf der Geraden anträgt.
3) Auf dem von A ausgehenden Strahl, der S enthält, konstruiere man auch den Punkt S mit $AS = a+b+c$.
4) Man konstruiere nun die Parallele zu $B'S'$ durch S. Diese schneide die Gerade AB' in B.
5) Analog sei der Schnittpunkt der Parallelen zu $C'S'$ durch S mit der Geraden AC' mit C bezeichnet.

Dann ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck.

Beweis: Das Dreieck $\triangle AB'C'$ ist ähnlich zum zu konstruierenden Dreieck, da es nach Konstruktion in zwei Innenwinkeln mit diesem übereinstimmt. Also gibt es einen Streckungsfaktor k, sodass alle Seitenlängen des Dreiecks $\triangle AB'C'$ um den gleichen Faktor k gestreckt werden müssen, um die Seitenlängen des gesuchten Dreiecks zu erhalten.
Demzufolge ist auch der Umfang des Dreiecks $\triangle AB'C'$ um den Faktor k zu klein. Dieser Umfang ist durch die Strecke AS' gegeben; der Umfang des zu konstruierenden Dreiecks mit AS, der Streckungsfaktor also durch $\frac{AS}{AS'}$.

Nach den Strahlensätzen ist aber nach Konstruktion $\frac{AB}{AB'} = \frac{AS}{AS'}$ und analog $\frac{AC}{AC'} = \frac{AS}{AS'}$, da die von A ausgehenden Strahlen AB, AC und AS von den Parallelen BS und $B'S'$ bzw. CS und $C'S'$ geschnitten werden. Damit ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck.

Aufgabe 170932:
Es sei $ABCD$ ein nicht überschlagenes Viereck, das die Seitenlängen $AB = 9$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 11$ cm, $AD = 8$ cm hat und in dem der Innenwinkel bei B die Größe 110° hat.
Untersuchen Sie durch Konstruktion, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt von $ABCD$ eindeutig bestimmt ist!
Von einem Rechteck $EFGH$ werden nun folgende Eigenschaften gefordert:
(1) Das Rechteck $EFGH$ ist flächengleich dem Viereck $ABCD$.
(2) A liegt auf der Rechteckseite EH zwischen E und H, und C liegt auf der Rechteckseite FG.
(3) Die Rechteckseite EH steht auf AC senkrecht.
Begründen und beschreiben Sie, wie sich alle diejenigen Punkte konstruieren lassen, die als Eckpunkt E eines Rechtecks $EFGH$ mit den geforderten Eigenschaften (1), (2), (3) auftreten können!

Lösung von cyrix:
Nach dem Kongruenzsatz sws ist das Dreieck $\triangle ABC$ und damit nach Kongruenzsatz sss das Dreieck $\triangle ACD$, also auch das Viereck $ABCD$ und schließlich genauso sein Flächeninhalt eindeutig bestimmt. Man kann das Viereck $ABCD$, wie folgt, konstruieren:

An die Strecke AB trage man in B den gegebenen Winkel und auf dem zweiten Schenkel die Strecke BC ab, sodass man den Punkt C erhält. Um diesen schlage man einen Kreis mit Radius $|CD|$ und um A einen mit Radius $|DA|$. Diese beiden Kreise liefern zwei Schnittpunkte, wobei aber nur einer ein – in dieser Reihenfolge der Punkte – nicht überschlagenes Viereck $ABCD$ liefert.

Für die Gerade EH gilt nach (3), dass sie orthogonal zu AC, und nach (2) auch durch A verläuft, sodass es das eindeutig bestimmte Lot von A auf AC ist. Da im Rechteck $EFGH$ die Gerade FG parallel zur Geraden EH ist, muss nach (2) die Gerade FG das eindeutig bestimmte Lot von C auf AC sein, da auch C auf FG liegt. Damit legt ein Punkt E auf EH eindeutig den Punkt F auf FG wegen $EH \perp EF$ fest und es gilt in jedem Fall $|EF| = |AC|$.

Es seien L_B und L_D die Lotfußpunkte von B bzw. D auf AC. Dann gilt für den Flächeninhalt I vom Viereck $ABCD$:

$$I = I_{\triangle ABC} + I_{\triangle ACD} = |AC| \cdot \frac{|BL_B| + |DL_D|}{2}$$

Konstruiert man also die beiden Lote von B und D auf AC, trägt deren Längen auf einer Strecke hintereinander ab und halbiert die so entstandene Summe, hat man die zweite Kantenlänge $|EH| := \frac{|BL_B|+|DL_D|}{2}$ des Rechtecks $EFGH$ konstruiert.

Damit A nach (2) zwischen E und H liegt, muss $|EA| < |EH|$ gelten. Jeder dieser Punkte erfüllt dann aber die gewünschte Eigenschaft. Man findet alle diese Punkte E dann auf dem Lot zu AC durch A, welche innerhalb des Kreises um A mit Radius $|EH|$ liegen.

(Der Punkt H ist dann der eindeutig bestimmte Punkt auf diesem Lot, der die Entfernung $|EH|$ von E hat und auf der gleichen Seite wie A von E liegt. Die Punkte F und G ergeben sich als Schnitte der Parallelen zu AC durch E bzw. H mit dem Lot zu AC durch C. Der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks EGH berechnet sich dann nach Konstruktion zu

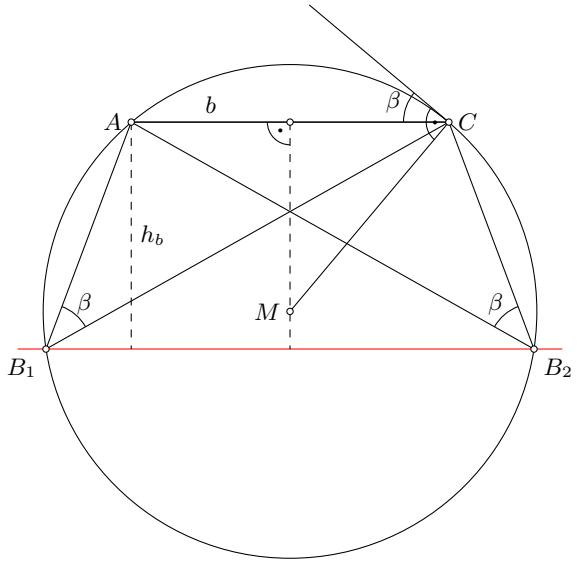
$$|EF| \cdot |EH| = |AC| \cdot \frac{|BL_B| + |DL_D|}{2} = I$$

Aufgabe 200936:
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $b = 7$ cm, $\beta = 40°$ und $h_b = 5$ cm!
Dabei sollen b die Länge der Seite AC, β die Größe des Winkels $\angle CBA$ und h_b die Länge der von B ausgehenden Höhe bedeuten.
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck ABC gibt, das die geforderten Größen b, β und h_b aufweist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, ein Dreieck ABC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Dann liegt der Punkt B erstens auf dem Umkreis des Dreiecks ABC und zweitens auf einer Parallelen zu AC im Abstand h_b.
Der Mittelpunkt M des Umkreises liegt erstens auf der Mittelsenkrechten von AC und zweitens auf der Senkrechten, die in C auf der in C an den Umkreis gelegten Tangente errichtet wird. Auf dieser Tangente bildet derjenige von C ausgehende Strahl, der nach der Seite von AC hin verläuft, in der B nicht liegt, mit dem Strahl aus C durch A einen Winkel der Größe β.

(II) Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man zeichnet einen Winkel der Größe β, der Scheitelpunkt sei C genannt.
(2) Auf dem einen Schenkel des Winkels trägt man von C aus eine Strecke der Länge b ab. Der andere Endpunkt der Strecke sei A genannt.
(3) Auf dem anderen Schenkel des Winkels errichtet man in C die Senkrechte s.
(4) Man konstruiert die Mittelsenkrechte zu AC. Schneidet sie die Senkrechte s, so sei M dieser Schnittpunkt.
(5) Um M zeichnet man einen Kreis mit dem Radius MC.
(6) Man zeichnet die Parallele zu AC im Abstand h_b auf derjenigen Seite von AC, in die hinein der in (1) konstruierte Winkel nicht verläuft. Schneidet diese Parallele den in (5) konstruierten Kreis um M, so sei B einer der Schnittpunkte.



(III) Jedes so konstruierte Dreieck ABC genügt den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis: Laut Konstruktion gilt $AC = b$. Nach dem Satz über Sehnentangentenwinkel und nach Konstruktion gilt $\angle CBA = \beta$.
Ebenfalls nach Konstruktion hat B von AC den Abstand h_b damit hat die von B ausgehende Höhe des Dreiecks die Länge h_b.

(IV) Die Konstruktionsschritte (1) bis (5) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Da der in (1) gezeichnete Winkel spitz ist, existiert genau ein Schnittpunkt der Senkrechten von (3) und (4).
Für die gegebenen Werte von b, β, h_b schneidet die in (6) konstruierte Parallele den in (5) konstruierten Kreis in genau zwei Punkten B_1, B_2.
Es entstehen daher zwei Dreiecke AB_1C, AB_2C. Die in (4) konstruierte Mittelsenkrechte ist Symmetrieachse sowohl von AC als auch von dem in (5) konstruierten Kreis als auch von der in (6) konstruierten Parallelen.
Daher geht das Dreieck AB_1C bei Spiegelung an dieser Mittelsenkrechten in das Dreieck CB_2A über; es gilt $\triangle AB_1C \cong \triangle CB_2A$. In diesem Sinne gibt es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck ABC, das die geforderten Größen aufweist.

Aufgabe 210934:
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\alpha = 50°$, $r = 4$ cm und $h_a = 6$ cm!
Dabei bezeichne α die Größe des Winkels $\angle BAC$, r den Umkreisradius und h_a die Länge der auf BC senkrechten Höhe des Dreiecks ABC.

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob ein Dreieck ABC durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist! Dabei sollen Dreiecke ABC, $A'B'C'$ auch dann als kongruent bezeichnet werden, wenn sie miteinander mit beliebiger Reihenfolge der Eckpunkte zur Deckung gebracht werden können.

Lösung von cyrix:
1) Man zeichne einen Kreis um einen Punkt M mit Radius r. Auf dessen Rand markiere man einen beliebigen Punkt B und zeichne den zugehörigen Radius BM ein.
2) An diesen Radius trage man den Winkel 2α ab und bestimme den Schnittpunkt des zweiten Schenkels dieses Winkels mit dem Kreis. Der Schnittpunkt heiße C.
3) Man zeichne eine Parallele zu BC im Abstand h_a in der Halbebene von BC, in der auch M liegt. Diese Parallele schneidet den Kreis in zwei Punkten, wovon man einen A und den anderen A' nennt.

Dann sind das Dreieck $\triangle ABC$ und das dazu kongruente Dreieck $A'BC$ das Gesuchte.

Begründung:
Es müssen alle Punkte auf einem Kreis mit Radius r liegen, da dies der Umkreisradius des gesuchten Dreiecks ist. Über der Sehne BC ist $\angle BAC$ ein Peripheriewinkel, sodass der zugehörige Zentriwinkel $\angle BMC$ genau doppelt so groß sein muss. Schließlich liegen A und M in der gleichen Halbebene bezogen auf die Gerade BC, da $\alpha < 90°$ ist. Da h_a senkrecht auf BC steht, muss also A auf einer Parallelen zu BC in diesem Abstand liegen.
Die entstehenden beiden Schnittpunkte A und A' erfüllen dabei gleichermaßen die Bedingungen, was man auch daran sieht, dass sie durch Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Strecke BC ineinander übergehen (sowie B in C und umgekehrt), sodass die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'BC$ zueinander kongruent sind.

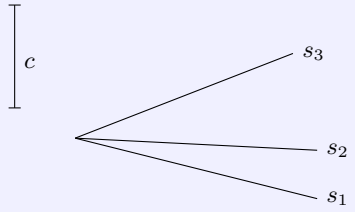
Aufgabe 290931:
Beschreiben und begründen Sie für die folgende Aufgabe eine Konstruktion, die ausführbar ist, indem außer gezeichnet vorgegebenen Strecken nur Lineal und Zirkel (zum Konstruieren von Geraden und Kreisen, nicht zur Nutzung von Millimeter- oder Grad-Skalen) verwendet werden.
Gezeichnet vorgegeben seien zwei Strecken AB und AC, die einen Winkel $\angle BAC$ der Größe 7° bilden.
Zu konstruieren ist eine Zerlegung dieses Winkels in 7 gleich große Teile.
Das zeichnerische Ausführen der beschriebenen Konstruktion wird nicht verlangt.

Lösung von cyrix:
Zur Konstruktion: 1) Man zeichne einen Kreis k um A, der beide Strecken AB und AC schneidet. Die Schnittpunkte mit AB und AC seien mit P_0 und P_7 bezeichnet, die Streckenlänge $|P_0P_7|$ mit r_7.
2) Der Kreis um P_7 mit Radius r_7 schneide den Kreis k außer in P_0 noch in einem zweiten Punkt P_{14}; der Kreis um P_{14} mit Radius r_7 außer in P_7 noch in einem zweiten Punkt P_{21}, usw. Man erhält auf diese Weise sukzessive die Punkte P_{7n} auf k mit $n = 0, 1, \ldots, 13$, insbesondere also den Punkt P_{91}.
3) Man errichte das Lot l auf AB durch A und als Schnittpunkt des Lots l mit dem von P_0 ausgehenden Halbkreisbogen von k, auf dem auch P_7 liegt, den Punkt P_{90}. Der Abstand $|P_{90}P_{91}|$ sei mit r_1 bezeichnet.
4) Der Kreis um P_0 mit Radius r_1 schneide den von P_0 ausgehenden Halbkreisbogen von k in P_1; der Kreis um P_1 den Kreis k neben P_0 in einem zweiten Punkt P_2; der Kreis um P_2 den Kreis k neben P_1 in einem zweiten Punkt P_3; usw., bis man den Punkt P_6 erhält.
5) Die Strahlen AP_i mit $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ zerlegen den Winkel $\angle P_0AP_1 = \angle BAC$ in sieben gleich große Teile.

Begründung:
Die Indizes der Punkte sind so gewählt, dass für jedes i der Winkel $\angle P_0AP_i$ genau $i°$ groß ist. Dies ist für P_0 und P_7 aufgrund der gezeichneten Strecken und dem von diesen aufgespannten Winkel der Fall. Da die Bögen auf k zwischen P_{7n} und $P_{7(n+1)}$ alle genauso groß sind wie der zwischen P_0 und P_7, gilt auch $\angle P_{7n}AP_{7(n+1)} = 7°$ und damit sukzessive auch $\angle P_0AP_{7n} = 7n°$.

Für P_{90} gilt $\angle P_0AP_{90} = 90°$, da dieser Punkt auf dem Lot zu AP_0 durch A liegt. Insbesondere ist nun $\angle P_{90}AP_{91} = \angle P_0AP_{91} - \angle P_0AP_{90} = 1°$.
Nach Konstruktion ist der Bogen zwischen P_i und P_{i+1} für $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$ immer genauso groß wie der zwischen P_{90} und P_{91}, sodass für diese i jeweils $\angle P_iAP_{i+1} = 1°$ gilt und damit sukzessive $\angle P_0AP_i = i°$ für alle $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$, was das Gewünschte zeigt, da man dadurch eine entsprechende Unterteilung in 7 Teilwinkel der Größe von je einem Grad erhält.

Aufgabe 300936:
Gegeben seien drei von einem Punkt S ausgehenden Strahlen s_1, s_2, s_3.
Dabei habe der von s_1 und s_3 gebildete Winkel $\angle(s_1, s_3)$ eine beliebige Größe kleiner als 60°, und der Strahl s_2 sei ein beliebiger von S aus in das Innere des Winkels $\angle(s_1, s_3)$ hinein verlaufender Strahl (siehe Abbildung).



Gegeben sei ferner eine beliebige Streckenlänge c.

a) Wählen Sie derartige Vorgaben c, s_1, s_2, s_3 (dabei s_2 nicht als Winkelhalbierende von $\angle(s_1, s_3)$) und konstruieren Sie dann drei von S verschiedene Punkte A auf s_1, B auf s_2 und C auf s_3 so, dass sie die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks ABC der Seitenlänge c sind!

b) Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!

c) Beweisen Sie, dass das nach Ihrer Beschreibung konstruierte Dreieck ABC gleichseitig ist und dass seine Ecken A, B, C auf s_1, s_2 bzw. s_3 liegen.

Eine Untersuchung, wieviele Dreiecke mit den geforderten Eigenschaften es außerdem noch gibt, wird nicht verlangt.

Lösung von cyrix:
Wir geben zuerst an, wie man zu einer gegebenen Strecke PQ einen Kreis k durch P und Q konstruiert, sodass der Peripheriewinkel in diesem Kreis über der Sehne PQ einem vorgegebenen Winkel α entspricht:

Man trage in P und Q an die Strecke PQ in die gleiche Halbebene bezüglich der Geraden PQ den Winkel $\frac{180°-\alpha}{2}$ ab, der sich leicht aus α konstruieren lässt. Der Schnittpunkt der beiden freien Schenkel dieser beiden Winkel sei R. Nach der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle PQR$ gilt dann $\angle QRP = 180° - 2 \cdot \frac{180°-\alpha}{2} = \alpha$, sodass der Umkreis des Dreiecks $\triangle PQR$ der gesuchte Kreis ist.

Nun zur eigentlichen Konstruktion:

- Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck $\triangle A'B'C'$ der Kantenlänge c.
- Über der Strecke $A'B'$ konstruiere man den Kreis k durch A' und B', für den die Peripheriewinkel $\angle A'PB'$ der Punkte P auf k, die in der gleichen Halbebene bezüglich $A'B'$ wie C' liegen, genau so groß ist wie der Winkel zwischen s_1 und s_2.
- Analog konstruiere man über der Strecke $A'C'$ den Kreis ℓ durch A' und C', sodass die entsprechenden Peripheriewinkel zu Punkten, die in der gleichen Halbebene bezüglich $A'C'$ wie B' liegen, die Größe des Winkels zwischen s_1 und s_3 haben.
- Der neben A' zweite Schnittpunkt der beiden Kreise k und ℓ sei mit M bezeichnet, der Schnittpunkt der drei Strahlen s_1, s_2, s_3 mit S.

- Trage von S aus auf s_1 die Streckenlänge $|A'M|$ ab und erhalte A, trage von S aus auf s_2 die Streckenlänge $|B'M|$ ab und erhalte B und trage schließlich von S aus auf s_3 die Streckenlänge $|C'M|$ ab und erhalte C.

Dann ist $\triangle ABC$ ein gesuchtes Dreieck.

Beweis:
Nach Konstruktion[1] ist $\angle A'MB' = \angle ASB$, $\angle A'MC' = \angle ASC$ und $\angle B'MC' = \angle A'MC' - \angle A'MB' = \angle ASC - \angle ASB = \angle BSC$.
Also sind die beiden Dreiecke $\triangle A'MB'$ und $\triangle ASB$, die beiden Dreiecke $\triangle A'MC'$ und $\triangle ASC$ sowie die beiden Dreiecke $\triangle B'MC'$ und $\triangle BSC$ jeweils zueinander kongruent, da sie jeweils in einem Winkel und den beiden anliegenden Seiten übereinstimmen.
Also gilt auch $|AB| = |A'B'| = c = |A'C'| = |AC| = |B'C'| = |BC|$. Also ist das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig mit Kantenlänge c, wobei nach Konstruktion A auf s_1, B auf S_2 und C auf s_3 liegt, $\square$.

V.V Raumgeometrie

I Runde 1

Aufgabe V00911:
Einer Kugel mit dem Radius $r_u = 1$ ist ein Würfel einzubeschreiben. Wie lang wird dessen Kante a? Dem Würfel ist wieder eine Kugel einzubeschreiben. Wie lang wird deren Radius r_i?

Lösung von Steffen Polster:
Die Kugel ist für den Würfel die sogenannte Umkugel, bei der die Würfelpunkte auf der Kugel liegen. Damit ist der Radius r_u gleich der halben Länge der Raumdiagonale des Würfels, d. h.

$$\frac{\sqrt{3a^2}}{2} = r_u = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Der Durchmesser der Inkugel ist gleich der Kantenlänge des Würfels, d. h.

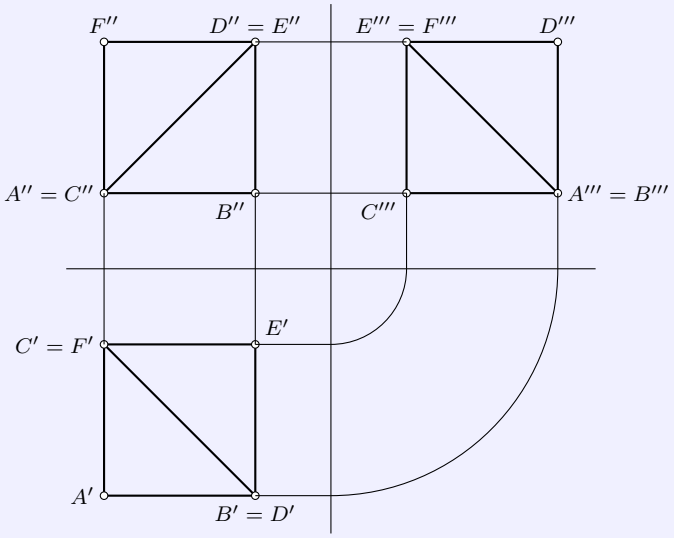
$$r_i = \frac{a}{2} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Aufgabe 090913:
In der Abbildung ist ein konvexer, durch ebene Flächen begrenzter Körper im Grund-, Auf- und Seitenriss dargestellt.

Ein durch ebene Flächen begrenzter Körper K heißt konvex, wenn für jede seiner Begrenzungsflächen F gilt: Ist ε die Ebene, in der F liegt, so befindet sich K ganz in einem der beiden Halbräume, in die der Raum durch ε zerlegt wird.
Die Umrisse des dargestellten Körpers sind im Grund-, Auf- und Seitenriss Quadrate mit der Seitenlänge a.

Bauen oder beschreiben Sie einen solchen Körper, und berechnen Sie sein Volumen!

[1] Die beiden Kreise k und ℓ sind verschieden, denn sonst würden sie mit dem Umkreis des Dreiecks $\triangle A'B'C'$ zusammenfallen, sodass die jeweiligen Peripheriewinkel jeweils 60° betragen würden, entgegen der Voraussetzung.



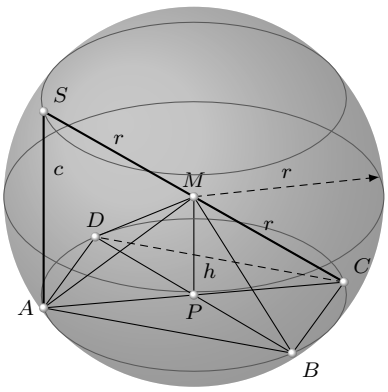
Lösung von Rainer Sattler:
Um die Lösung zu finden, ist es nützlich, sich den Körper einem Würfel einbeschrieben vorzustellen. Des weiteren liegen drei in der Projektion auf einer Geraden liegende Punkte im Original in einer Ebene (und wie man sich anhand der Abstände leicht klarmachen kann sogar auf Ecken). Die Flächendiagonalen machen nach erfolgreicher Bestimmung einiger Seitenbelegungen das Problem schnell eindeutig.

Das Volumen des nichtregulären Oktaeders ist das zweier vierseitiger Pyramiden über der Fläche $a \cdot \sqrt{2} \cdot a$ mit den Höhen der halben Flächendiagonalen also $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot a \cdot \sqrt{2}a = \frac{2}{3} \cdot a^3$.

Aufgabe 100912:
Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. In einer Ebene ε liege ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$. Ferner sei S ein Punkt der in A auf ε errichteten Senkrechten, wobei $\overline{AS} = c$ gelte.

Man beweise, dass es dann genau eine Kugel gibt, auf der die Punkte A, B, C, D, S liegen, und berechne aus den gegebenen Längen a, b, c die Länge des Durchmessers dieser Kugel!

Lösung von Manuela Kugel:



a) Angenommen, k sei eine Kugel der verlangten Art, und M sei ihr Mittelpunkt. Dann haben sie Strecken MA, BM, MC, MD, MS alle die gleiche Länge, die mit r bezeichnet sei. Ist P der Fußpunkt und h die Länge des Lotes von M auf ε, so ist nach dem Satz des Pythagoras

$$|PA|^2 \quad = \quad |PB|^2 = |PC|^2 = |PD|^2 = r^2 - h^2,$$

also $|PA| = |PB| = |PC| = |PD|$. Daher ist P der Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks $ABCD$. Der Punkt M, der somit auf der in P auf ε errichteten Senkrechten s liegt, muss demnach in der Ebene ε_1 liegen, die durch die Punkte A, C und S geht; denn diese Ebene enthält die auf ε senkrechte Strecke AS, steht also auf ε senkrecht und geht durch P, sie enthält also die Gerade s.

Daher und wegen $|MA| = |MC| = |MS|$ ist M der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ACS$. Da dieses wegen $\varepsilon_1 \perp \varepsilon$, also $AS \perp AC$ bei A rechtwinklig ist, ist M der Mittelpunkt seiner Hypotenuse CS.

b) Umgekehrt hat in der Tat diejenige Kugel k, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt M der Strecke CS ist und die durch C geht, die verlangte Eigenschaft. Zunächst geht k nämlich außer durch C wegen $|MC| = |MS|$ auch durch S. Ist ferner P der Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks $ABCD$, so ist

$$\triangle MPA \simeq \triangle MPB \simeq \triangle MPC \simeq \triangle MPD.$$

Also ist $|MA| = |MB| = |MD|$, und daher geht die Kugel k auch durch A, B und D.

c) Die Länge des Durchmessers der Kugel k beträgt nach dem Satz des Pythagoras

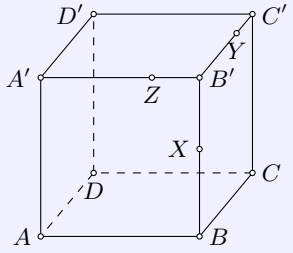
$$|CS| = \sqrt{|AC|^2 + |AS|^2} = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2 + AS|^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Aufgabe 120911:
Zeigen Sie, dass es für jede ganze Zahl $n \geq 4$ einen ebenflächig begrenzten Körper mit genau n Ecken und genau n Flächen gibt! (Es genügt die Angabe je eines Beispiels.)

Lösung von Manuela Kugel:
Jede Pyramide, deren Grundfläche ein $(n-1)$-Eck ist, hat genau n Ecken (nämlich die $n-1$ Ecken der Grundfläche und die Spitze) und genau n Flächen (nämlich die $n-1$ Mantelflächen und die Grundfläche).

Aufgabe 140911:
Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, A', B', C', D' und der Kantenlänge a (siehe Abbildung). Auf BB' liege ein Punkt X, auf $B'C'$ ein Punkt Y und auf $A'B'$ ein Punkt Z, wobei diese Punkte beliebig gelegen, aber von B' verschieden sein sollen.

Wir betrachten dann für jede solche Wahl von X, Y, Z den geschlossenen Streckenzug $XYZX$. Als Länge dieses Streckenzuges bezeichnet man die Summe der Längen $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$ und $\overline{ZX}$.



a) Ermitteln Sie, ob es unter diesen Streckenzügen einen mit größter Länge gibt!

b) Ermitteln Sie, ob es unter diesen Streckenzügen einen mit kleinster Länge gibt!

c) Falls es bei a) oder b) einen solchen Streckenzug gibt, so ermitteln Sie seine Länge!

Lösung von Manuela Kugel:

I. Für alle der Aufgabenstellung entsprechenden Punkte X, Y, Z gilt: Setzt man $|B'X| = x$, $|B'Y| = y$, $|B'Z| = z$, so ist $0 < x,y,z \leq a$. Ferner ist nach dem Satz des Pythagoras

$$|XY| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |YZ| = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad |ZX| = \sqrt{x^2 + z^2}.$$

Daraus folgt

$$0 < |XY| + |YZ| + |ZX| \leq 3\sqrt{2a^2}.$$

II. Bei der laut Aufgabenstellung zulässigen Wahl $X = B$, $Y = C'$, $Z = A'$ ergibt sich $x = y = z = a$, also

$$|XY| + |YZ| + |ZX| = 3\sqrt{2a^2}.$$

III. Wählt man zu beliebigen der Aufgabenstellung entsprechenden Punkten X, Y, Z einen ebenfalls der Aufgabenstellung entsprechenden Punkt $X*$ zwischen B' und X und setzt man $|B'X*| = x*$, so ist $0 < x* < x$, also

$$|X*Y| + |YZ| + |ZX*| \quad = \quad \sqrt{x*^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x*^2} < |XY| + |YZ| + |ZX|.$$

Aus I. und II. folgt:

a) Es gibt unter den in der Aufgabe genannten Streckenzügen einen mit größter Länge, nämlich den für $X = B$, $Y = C'$, $Z = A'$ entstehenden.

c) Seine Länge beträgt $3a\sqrt{2}$.

Aus III folgt:

b) Zu jedem der genannten Streckenzüge gibt es einen mit einer kleineren Länge, d. h., es gibt keinen mit kleinster Länge.

Aufgabe 160914:
Stellen Sie fest, ob Körper existieren, für die folgendes gilt!

	Kantenlänge bzw. Durchmesser in cm	Oberflächeninhalt in cm^2	Volumen in cm^3
Würfel	a	b	b
Kugel	c	d	d
reguläres Tetraeder	e	f	f

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a, c, e, die diesen Bedingungen genügen! Dabei bezeichnen gleiche Buchstaben gleiche reelle Zahlen, während verschiedene Buchstaben nicht notwendig verschiedene Zahlen bezeichnen müssen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt solche Körper, dann muss gelten 1) für den Würfel

$$\begin{aligned} b &= 6a^2 \\ b &= a^3 \quad \text{und damit} \quad a^3 = 6a^2 \\ a &= 6 \end{aligned}$$

Tatsächlich hat ein Würfel mit der Kantenlänge 6 cm den Oberflächeninhalt 216 cm^2 und das Volumen 216 cm^3.

2) für die Kugel

$$\begin{aligned} d &= \frac{\pi}{6}c^3 \\ d &= \pi c^2 \quad \text{und damit} \quad \frac{\pi}{6}c^3 = \pi c^2 \\ c &= 6 \end{aligned}$$

Tatsächlich hat eine Kugel mit dem Durchmesser 6 cm einen Oberflächeninhalt von 36 cm^2 und ein Volumen von 36 cm^3.

3) für das reguläre Tetraeder

$$f = e^2\sqrt{3}$$
$$f = \frac{e^3}{12}\sqrt{2} \quad \text{und damit} \quad \frac{e^3}{12}\sqrt{2} = e^2\sqrt{3}$$
$$e = \frac{12\sqrt{3}}{2}$$
$$e = 6\sqrt{6}$$

Tatsächlich hat ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge $6\sqrt{6}$ cm einen Oberflächeninhalt von $216\sqrt{3}$ cm^2 und ein Volumen von $216\sqrt{3}$ cm^3.

Also erfüllen genau die folgenden Zahlen die gestellten Bedingungen:

$$a = 6, \quad c = 6 \quad \text{und} \quad e = 6\sqrt{6}$$

Aufgabe 220914:
In einer Ebene ε befinde sich ein n-Eck mit den Eckpunkten A_1, A_2, ..., A_n. Dieses sei die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S. Das Volumen der Pyramide sei V_P. Die Mittelpunkte der Kanten A_1S, A_2S, ..., A_nS seien M_1, M_2, ..., M_n. Ferner sei B_1 ein beliebiger Punkt in der Ebene ε.

Die zu M_1B_1 parallele Gerade jeweils durch einen der Punkte M_2, M_3, ..., M_n schneide ε in B_2, B_3, ..., B_n. Der Körper K mit den Eckpunkten B_1, B_2, ..., B_n, M_1, M_2, ..., M_n habe das Volumen V_K.

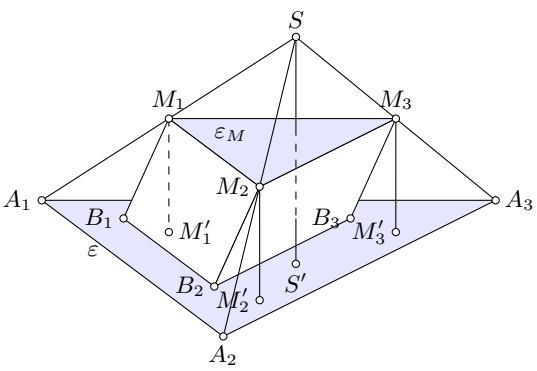
a) Beweisen Sie, dass alle Punkte M_1, M_2, .., M_n in einer gemeinsamen zu ε parallelen Ebene liegen und K daher ein Prisma ist!

b) Beweisen Sie, dass V_K durch V_P eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie V_K in Abhängigkeit von V_P!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Fußpunkte der Lote von $S, M_1, M_2, ...,M_n$ auf ε seien $S', M_1', M_2', ..., M_n'$. Für alle i = 1,2,...,n gilt wegen $M_iM_i' \parallel SS'$: Die Ebene durch A_i, S, S' geht auch durch M_i und M_i'. Auf ihrer Schnittgeraden mit ε liegen folglich A_i, M_i' und S'. Somit gilt nach einem der Strahlensätze

$$M_iM_i' : SS' = A_iM_i : A_iS = 1 : 2$$

Also haben alle Punkte M_i denselben Abstand $M_iM_i' = \frac{1}{2}SS'$ von ε. Folglich liegen sie in einer gemeinsamen zu ε parallelen Ebene ε_M.



b) Hiernach schneiden die von dem gemeinsamen Punkt S ausgehenden Geraden jeweils durch A_i und M_i die beiden zueinander parallelen Ebenen ε und ε_M in zwei ähnlichen Vielecken $A_1A_2...A_n$ bzw. $M_1M_2...M_n$.

Für jeweils entsprechende Seiten A_iA_j, M_iM_j gilt $A_iA_j \parallel M_iM_j$, also nach einem der Strahlensätze

$$A_iA_j : M_iM_j = SA_i : SM_i = 2 : 1$$

Also stehen die Flächeninhalte F_P und F_L der Vielecke $A_1A_2...A_n$ bzw. $M_1M_2...M_n$ im Verhältnis

$$F_P : F_K = 4 : 1$$

Nach a) gilt für die Höhenlängen $h_P = SS'$ und $h_K = M_1M_1'$ der Pyramide bzw. des Prismas $h_K = \frac{1}{2}h_P$.

Daher und wegen der Volumenformel $V_K = F_K \cdot h_K, V_P = \frac{1}{3} F_P \cdot h_P$ für Pyramide bzw. Pyramide ergibt sich

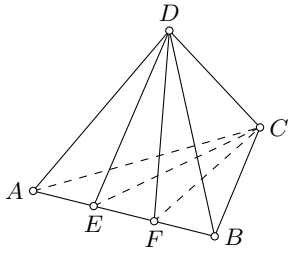
$$V_K = \frac{1}{4} F_P \cdot \frac{1}{2} h_P = \frac{1}{8} F_P \cdot h_P = \frac{3}{8} V_P$$

Aufgabe 230913:
Ein regelmäßiges Tetraeder soll in drei volumengleiche (nicht regelmäßige) Tetraeder zerlegt werden.

a) Geben Sie zwei Möglichkeiten einer solchen Zerlegung an!

b) Beweisen Sie, dass die beiden von Ihnen angegebenen Zerlegungen verschieden sind! Dabei wird eine Zerlegung in drei Tetraeder T_1, T_2, T_3 verschieden von einer Zerlegung in drei weitere Tetraeder genannt, wenn sich diese nicht so als T_1', T_2', T_3' bezeichnen lassen, dass $T_1 \cong T_1'$, $T_2 \cong T_2'$ und $T_3 \cong T_3'$ gilt.

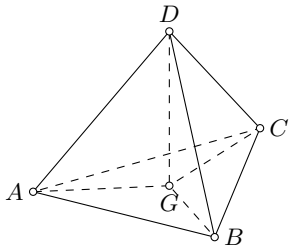
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Zwei Möglichkeiten sind beispielsweise die folgenden:



- Die Kante AB eines regelmäßigen Tetraeders $ABCD$ werde durch E und F in drei gleichlange Teilstrecken zerlegt (Abbildung 1). Dann wird $ABCD$ in die Tetraeder

$$AECD, \quad EFCD, \quad FBCD \tag{1}$$

zerlegt, und diese sind volumengleich; denn die Grundflächen AEC, EFC, FBC sind flächeninhaltsgleich (gleichlange Grundlinien AE, EF, FB, gemeinsame Höhe; Lot von C auf AB), und die zugehörige Höhe ist gemeinsam (Lot von D auf die Ebene durch A, B, C).



- Es sei G der Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks ABC (Abbildung 2).

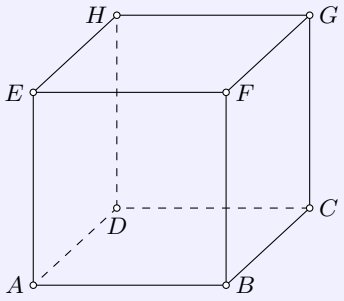
Dann wird $ABCD$ in

$$ABGD, \quad BCGD, \quad CAGD \tag{2}$$

zerlegt, und auch diese Tetraeder sind volumengleich (übereinstimmende Höhe GD zu den Grundflächen ABG, BCG, CAG mit gleichlangen Grundlinien $AB = BC = CA = a$ und gleichlangen Höhe $\frac{a}{6}\sqrt{3}$, wegen der Übereinstimmung von Höhe und Seitenhalbierender ein Drittel der Höhenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{3}$).

b) Im Tetraeder $EFCD$ aus (1) gilt $EF < a$, $EC = ED = FC = FD < a$, es hat also nur eine Kante der Länge a. In allen Tetraedern aus (2) kommen dagegen drei kanten der Länge a vor. Daher ist $EFCD$ zu keinem Tetraeder aus (2) kongruent. Daraus folgt die Verschiedenheit der Zerlegungen (1), (2).

Aufgabe 290914:



Die Eckpunkte eines Würfels seien wie im Bild bezeichnet.

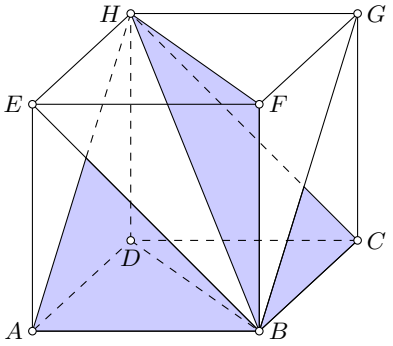
a) Fertigen Sie mit verdoppelten Streckenlängen, aber gleichen Winkeln eine weitere Zeichnung an, die zunächst nur die Eckpunkte des Würfels wiedergibt! Zeichnen Sie nun die Dreiecksflächen BHA, BHC, BHD, BHE, BHF und BHG (durch Wiedergabe ihrer Seitenkanten) ein! Berücksichtigen Sie dabei die Sichtbarkeitsverhältnisse, indem Streckenteile, die durch mindestens eine davor liegende Dreiecksfläche verdeckt sind, gestrichelt wiedergegeben werden!

Die Seitenflächen und für die Dreiecke nicht benötigten Seitenkanten des Würfels selbst sollen nicht berücksichtigt werden.
(Abschließend können Sie die Anschaulichkeit der Zeichnung noch durch Schraffur oder Farbe erhöhen.)

b) Beweisen Sie, dass die genannten Dreiecke sämtlich untereinander kongruent sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

Jedes dieser Dreiecke hat als Seitenlängen die Längen einer Seitenkante, einer Flächendiagonale und einer Raumdiagonale des Würfels. Da beim Würfel alle Seitenkanten bzw. Flächen- bzw. Raumdiagonalen jeweils untereinander gleichlang sind, sind somit die genannten Dreiecke nach dem Kongruenzsatz sss sämtlich untereinander kongruent.



Aufgabe 330915:
Bei einer oben offenen Blechdose von der Form eines geraden Kreiszylinders mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h seien A und B die Endpunkte eines Durchmessers der Grundfläche. Dabei liege A außerhalb und B innerhalb der Dose. Die Dicke des Bleches werde vernachlässigt.

Eine Ameise bewegt sich von A nach B

a) nur auf Mantellinien und einem Durchmesser der Grundfläche,

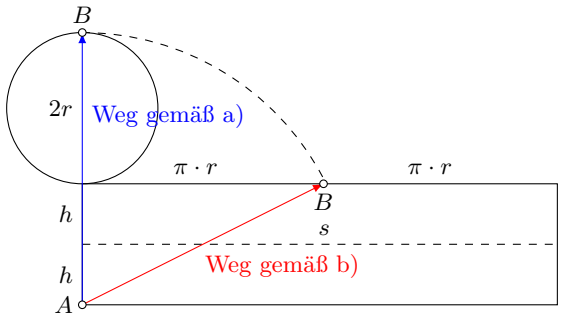
b) auf einem möglichst kurzen Weg, den es unter allen Wegen von A nach B gibt, die die äußere und die innere Mantelfläche nicht verlassen.

Ermitteln Sie einen Wert des Verhältnisses $h : r$, für den die beiden in a) und b) beschriebenen Wege einander gleichlang sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der in a) beschriebene Weg hat die Länge $2h + 2r$.

Denkt man sich die Mantelfläche längs der durch A gehenden Mantellinie aufgeschnitten und in die Zeichenebene abgewickelt, so geht der obere Rand der Mantelfläche in eine Strecke s der Länge $2\pi \cdot r$ über. Denkt man sich ferner die Innenseite der so abgewickelten Mantelfläche als ein zweites Exemplar auf der Rückseite der Zeichenebene, das sich nun um die Strecke s als Drehachse in die Vorderseite der

Zeichenebene hineindrehen lässt, so entsteht ein Rechteck mit den Seitenlängen $2h$ und $2\pi \cdot r$, in dem A eine Ecke und B der Mittelpunkt derjenigen Seiten ist, die A nicht enthält und $2\pi \cdot r$ lang ist (siehe Abbildung; die Grundfläche der Dose wurde ebenfalls in die Zeichenebene gebracht).



Bei diesen Veränderungen haben sich die Weglängen auf der Mantelfläche nicht geändert. Ein in b) genannter möglichst kurzer Weg von A nach B muss daher nun geradlinig verlaufen und somit nach dem Satz des Pythagoras die Länge

$$\sqrt{4h^2 + \pi^2 r^2}$$

haben. Die beiden Wege sind folglich einander gleichlang, wenn

$$2h + 2r = \sqrt{4h^2 + \pi^2 r^2}$$

gilt. Dies ist der Fall, wenn

$$\begin{aligned} 4^2 + 8hr + 4r^2 &= 4h^2 + \pi^2 r^2 \\ 8h &= (\pi^2 - 4) \cdot r \end{aligned}$$

gilt. Damit ist als ein gesuchter Wert ermittelt:

$$h : r = \frac{\pi^2 - 4}{8} \quad (\approx 0{,}7337)$$

II Runde 2

Aufgabe 070924:
Einem regelmäßigen Oktaeder ist eine Kugel umschrieben.
Berechnen Sie das Verhältnis der Oberflächeninhalte beider Figuren!

Lösung von Stefan Knott:
Um das Verhältnis der Oberflächeninhalte der beiden Figuren zu bestimmen, müssen diese Flächen bekannt sein. Für den Oberflächeninhalt einer Kugel gilt

$$A_{\text{Kugel}} = 4\pi r^2$$

Die Formel zur Berechnung des Oberflächeninhaltes eines regelmäßigen Oktaeders lautet:

$$A_{\text{Okta}} = 2a^2\sqrt{3}$$

Nun müssen wir den Zusammenhang zwischen dem Radius r der Kugel und der Kantenlänge a des Oktaeders herstellen. Halbiert man den Oktaeder genau zwischen den beiden Spitzen, so erhält man als Schnittfläche ein Quadrat mit der Seitenlänge a, die ja auch gleichzeitig der Kantenlänge des vorgegebenen Oktaeders entspricht.
Der Radius r der umschreibenden Kugel entspricht nun genau der Hälfte der Länge der Diagonalen dieses Schnittflächenquadrates, d. h. $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Wir ersetzen zur Bestimmung des Oberflächeninhaltes der Kugel den Radius r und erhalten somit für die Oberfläche der Kugel:

$$A_{\text{Kugel}} = 2\pi a^2$$

Das gesuchte Verhältnis wird zu

$$\frac{A_{\text{Okta}}}{A_{\text{Kugel}}} = \sqrt{3} : \pi$$

Der Oberflächeninhalt des regelmäßigen Oktaeders verhält sich zum Oberflächeninhalt der umschreibenden Kugel wie $\sqrt{3}$ zu π.

Aufgabe 090922:
Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a_1 und dem Volumen V_1 sowie ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge a_2 und dem Volumen V_2. Für die Kantenlängen gelte $a_1 : a_2 = 1 : \sqrt{2}$.
Berechnen Sie das Verhältnis $V_1 : V_2$!

Lösung von cyrix:
Es ist

$$V_1 = a_1^3 \qquad \text{und} \qquad V_2 = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{2} \cdot a_2^3 = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}a_1)^3 = \frac{1}{3}a_1^3 = \frac{1}{3}V_1$$

sodass das Verhältnis $V_1 : V_2$ genau $3 : 1$ beträgt.

Bemerkung:
Das Volumen V eines regulären Tetraeders mit Kantenlänge a ergibt sich (wie für jede Pyramide) zu $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$, wobei A_G der Flächeninhalt der Grundfläche und h die Länge der zugehörigen Höhe ist.
Als Grundfläche ergibt sich ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge a. Dessen Fläche lässt sich (wie in jedem Dreieck) via $A_G = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_g$ berechnen, wobei h_g die Länge einer Höhe im Dreieck ist.
Da die Höhen im gleichseitigen Dreieck mit den Seitenhalbierenden zusammenfallen, teilt eine solche das gleichseitige Dreieck in zwei rechtwinklige, wobei eine der Katheten eines solchen Dreiecks die Höhe h_g, die zweite eine halbe Grundseite und die Hypotenuse die ungeteilte Dreiecksseite ist.
Es ergibt sich nach dem Satz von Pythagoras $h_g^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$, also $h_g = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ und damit $A_G = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Für die Höhe im regulären Tetraeder beachte man, dass sie mit der entsprechenden Schwerelinie (Verbindung eines Eckpunkts mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche) zusammenfällt. So ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck mit „Spitze des Tetraeders“, „Schwerpunkt der Grundfläche“ und einem Eckpunkt der Grundfläche als Eckpunkte.
Dessen Hypotenuse ist eine Kante des regulären Tetraeders, eine Kathete die Höhe h und die zweite Kathete der Abschnitt der Seitenhalbierenden in der Grundfläche zwischen Schwerpunkt und Eckpunkt.
Da der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2 : 1$ teilt, wobei der Abschnitt zwischen Eckpunkt und Schwerpunkt der längere ist, und da im gleichseitigen Dreieck die Höhen und Seitenhalbierenden zusammenfallen, ist dieser Abschnitt hier also $\frac{2}{3} \cdot h_g = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ lang.

Es ergibt sich für das betrachtete rechtwinklige Dreieck zwischen Spitze, Schwerpunkt und Eckpunkt nach dem Satz von Pythagoras nun also $h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = a^2$, also $h^2 + \frac{3}{9}a^2 = a^2$ bzw. $h = \sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}a$.

Zusammen mit der zuvor berechneten Grundfläche ergibt sich nun

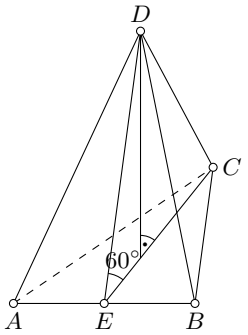
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{3\cdot 4}a^3$$

was wir oben verwendet haben.

Aufgabe 100924:
Eine regelmäßige gerade dreiseitige Pyramide ist eine Pyramide, deren Grundfläche eine gleichseitige Dreiecksfläche ist und deren Höhenfußpunkt mit dem Schwerpunkt der Grundfläche zusammenfällt. In der regelmäßigen Pyramide mit den Ecken A, B, C, D und der Spitze D sei der Neigungswinkel zwischen jeder der drei Seitenflächen und der Grundfläche 60° groß. Die Grundfläche habe die Seitenlänge a.
Berechnen Sie das Volumen V dieser Pyramide!

Anmerkung: Haben zwei ebene Flächen eine gemeinsame Kante und ist P ein von den Endpunkten verschiedener Punkt dieser Kante, dann ist der Winkel, den zwei in P auf der Kante errichtete und in den beiden Flächen gelegene senkrecht stehende Strecken miteinander bilden, gleich dem Neigungswinkel der beiden Flächen zueinander.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für das Volumen V der Pyramide mit den Ecken A, B, C, D gilt $V = \frac{1}{3}Gh$, wobei G der Inhalt der Grundfläche und h die Länge der Pyramidenhöhe ist. Laut Aufgabe ist die Grundfläche die Fläche des gleichseitigen Dreiecks $\triangle ABC$. Für den Flächeninhalt G dieses Dreiecks gilt $G = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.



Es sei F der Fußpunkt der Pyramidenhöhe. Da F nach Voraussetzung mit dem Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ zusammenfällt, schneidet der von C ausgehende Strahl durch F die Seite AB in deren Mittelpunkt, der mit E bezeichnet sei. Damit ist CE Seitenhalbierende und wegen der Gleichseitigkeit von $\triangle ABC$ auch Höhe dieses Dreiecks. Folglich gilt

$$|AE| = |EB| \qquad (1)\text{sowie} \qquad |FE| = \frac{1}{3}|CE| = \frac{a}{6}\sqrt{3}$$

Da $\triangle DFA \cong \triangle DFB$ (sws) ist, gilt $|AD| = |BD|$, also ist $\triangle ABD$ gleichschenklig. Wegen (1) ist folglich DE Höhe in diesem Dreieck.
Der Winkel $\angle FED$ ist daher der Neigungswinkel zwischen der Grundfläche und einer Seitenfläche der Pyramide und somit laut Aufgabe 60°. Da $\angle EFD$ ein rechter Winkel ist, lässt sich die Fläche des Dreiecks $\triangle EFD$ als die Hälfte der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks auffassen. Also gilt

$$|DE| = 2|EF| = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt nun

$$h = |DF| = \sqrt{|DE|^2 - |EF|^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{12}} = \frac{a}{2}$$

Damit ergibt sich für das Volumen V der Pyramide der Wert

$$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{a^3}{24}\sqrt{3}$$

Alternativ-Lösung von cyrix:
Es sei M der Mittelpunkt der Strecke AB. Dann ist das Dreieck $\triangle CAM$ rechtwinklig mit Hypotenuse CA und es gilt

$$|CM| = \sqrt{|CA|^2 - |AM|^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Damit ist $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |CM| \cdot |AB| = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.
Sei S der Schwerpunkt der Grundfläche. Da der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt und CM eine Seitenhalbierende in der Grundfläche ist, gilt $|SM| = \frac{1}{3}|CM| = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}}a$.
Die drei Punkte D, S und M bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei S und $\angle SMD = 60°$, da sowohl $SM = CM$ als auch DM senkrecht auf AB stehen. (Es ist das Dreieck $\triangle ABD$ gleichschenklig mit $|AD| = |BD|$, also die Seitenhalbierende DM auf AB gleich der Höhe von D auf AB, also DM orthogonal zu AB.)
Nach der Definition des Tangens im rechtwinkligen Dreieck $\triangle DMS$ ist $\tan \angle SMD = \frac{|SD|}{|SM|}$, also $|SD| = \tan 60° \cdot |SM| = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}}a = \frac{a}{2}$.
Damit ergibt sich für das Volumen V der Pyramide

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} \cdot |SD| = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{24}a^3$$

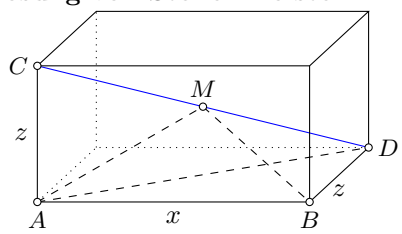
Aufgabe 110921:
Bei einem geraden Kreiszylinder sollen die Maßzahlen des Umfangs seiner Grundfläche (in cm), des Inhalts seiner Mantelfläche (in cm^2) und seines Volumens (in cm^3) untereinander gleich sein.
Ermitteln Sie den Grundkreisradius und die Höhenlänge jedes derartigen Zylinders!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, ein gerader Kreiszylinder entspreche den Bedingungen der Aufgabe. Mit r sei die Maßzahl des (in Zentimeter gemessenen) Radius seiner Grundfläche und mit h die Maßzahl seiner Höhenlänge bezeichnet.
Dann beträgt die Maßzahl des Umfangs seiner Grundfläche (in cm): $2\pi r$, die Maßzahl des Inhalts seiner Mantelfläche: $2\pi r \cdot h$ und die Maßzahl seines Volumens (in cm^3): $\pi r^2 \cdot h$, und es gilt: $2\pi r = 2\pi r \cdot h$, woraus wegen $r > 0$ $h = 1$ folgt.

Ferner gilt: $2\pi r \cdot h = \pi r^2 \cdot h$, woraus wegen $r = 2$ folgt.
Also kann höchstens ein gerader Kreiszylinder mit einem Radius von 2 cm und einer Höhenlänge von 1 cm den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.
Tatsächlich ist in diesem Falle der Umfang der Grundfläche 4π cm, der Mantelflächeninhalt $4\pi cm^2$ und das Volumen $4\pi cm^3$.

Aufgabe 140924:
AB sei eine in der Ebene ε gegebene Strecke der Länge a. In ε sei g die Gerade durch A, die senkrecht zu AB ist.
In B sei die Senkrechte s auf die Ebene ε errichtet. Schließlich seien C ein von A verschiedener Punkt auf g und D ein von B verschiedener Punkt auf s.
a) Man beweise, dass es eine Kugel gibt, die durch die Punkte A, B, C und D geht.
b) Man berechne den Radius einer solchen Kugel für den Fall, dass $CA = a\sqrt{2}$ und $BD = a\sqrt{3}$ gilt.

Lösung von Steffen Polster:



a) Behauptung: Der Mittelpunkt M der Strecke CD hat von den Punkten A,B,C,D jeweils den gleichen Abstand und kann somit als Mittelpunkt der gesuchten Kugel gewählt werden.

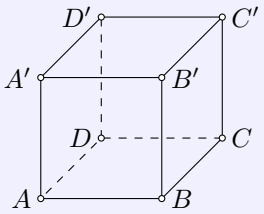
Die Strecken x, y und z stehen nach Aufgabenstellung paarweise aufeinander senkrecht. Damit spannen sie einen Quader mit den Kantenlängen x, y und z auf.
Die Strecke CD ist dann die Raumdiagonale des Quaders mit der Länge $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Der Mittelpunkt von CD hat per Definition von C und D den gleichen Abstand. Als Symmetriezentrum des Quaders liegt M aber auch auf den Raumdiagonalen durch A bzw. B. Alle Raumdiagonalen eines Quaders haben die gleiche Länge, so dass $MA = MB = BC = MD$ folgt.
Damit ist M der Mittelpunkt einer Kugel auf deren Peripherie A, B, C und D liegen.

b) Setzt man $x = a$, $y = a\sqrt{2}$ und $z = a\sqrt{3}$ in die Gleichung des Radius r der Kugel ein, so wird

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2a^2 + 3a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{6}$$

Aufgabe 160923:

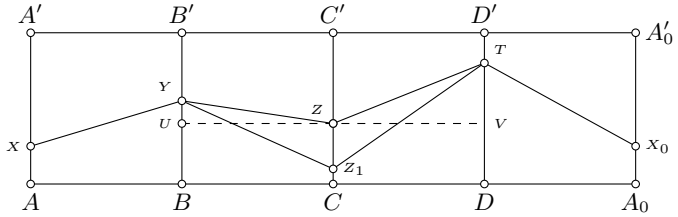


Gegeben sei ein Würfel $ABCDA'B'C'D'$ (siehe Abbildung). Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge $XYZTX$, wobei X, Y, Z und T in dieser Reihenfolge beliebige innere Punkte der Kanten AA', BB', CC' bzw. DD' seien.
Untersuchen Sie, ob es eine Lage derartiger Punkte X, Y, Z, T so gibt, dass der Streckenzug $XYZTX$ unter allen betrachteten Streckenzügen
a) minimale,
b) maximale
Gesamtlänge besitzt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Gesamtlänge der Streckenzüge wird nicht verändert, wenn wir den „Mantel“ aus den vier zu AA' parallelen Seitenflächen des Würfels wie folgt in die Ebene abwickeln:
Für den dabei zweimal (als X und X_0) auftretenden Punkt X gilt $XX_0 \parallel AA_0$.

a) Zu jedem solchen X ergibt sich als Möglichkeit für Y, Z, T mit minimaler Gesamtlänge von $XYTZX_0$ die Wahl von Y, Z, T auf der Strecke XX_0, da diese die kürzeste Verbindung zwischen X und X_0 ist und da sie so bestimmten Punkte Y, Z, T wegen $AX = BY = CZ = DT = A_oX_o$ im Innern von BB', CC' bzw. DD' liegen.
Die so zu je einem X gehörende minimale Gesamtlänge von $XYZTX_0$ ist $XX_0 = AA_0$, also für alle X dieselbe Länge.
Daher ist dies unter allen betrachteten Streckenzügen überhaupt die minimale Gesamtlänge, deren Existenz somit nachgewiesen ist.

b) Es sei $XYZTX$ ein beliebiger zu betrachtender Streckenzug.
Für ihn sei durch geeignete Wahl in der Reihenfolge der Bezeichnungen A, B, C, D sowie gleichzeitig A', B', C', D' und X, Y, Z, T erreicht, dass $CZ \leq BY$ und $CZ \leq DT$ gilt.



Nach der Abwicklung schneidet die Parallele zu AA_0 durch Z dann BB' und CC' in Punkten U bzw. V auf BY bzw. DT. Daher ist $\angle CZY \geq \angle CZU = 90°$ und $\angle CZT \geq \angle CZV = 90°$.
Wählt man nun einen Punkt Z_1 zwischen C und Z, so gehört auch XYZ_1TX zu den betrachteten Streckenzügen. Ferner ist im Dreieck Z_1ZY der Innenwinkel bei Z größer als der bei Z_1, also gilt $YZ_1 > YZ$.
Ebenso folgt $Z_1T > ZT$. Daher hat XYZ_1TX eine größere Gesamtlänge als $XYZTX$. Folglich gibt es unter den betrachteten Streckenzügen keinen mit maximaler Gesamtlänge.

Aufgabe 210922:
Gegeben sei ein beliebiger Quader, für dessen Kantenlängen a, b und c die Beziehung $a < b < c$ gilt. Untersuchen Sie, ob es einen ebenen Schnitt durch diesen Quader so gibt, dass die Schnittfigur ein Quadrat ist!

Lösung von cyrix:
Ja, dies ist möglich.
Es sei $ABCDA'B'C'D'$ der Quader mit Grundfläche $ABCD$, Deckfläche $A'B'C'D'$, sodass jeder Eckunkt P der Grundfläche mit seinem entsprechenden Eckpunkt P' der Deckfläche durch eine Kante verbunden sei. Weiterhin gelte $|AB| = b$, $|AA'| = a$ und $|AD| = |A'D'| = c$.

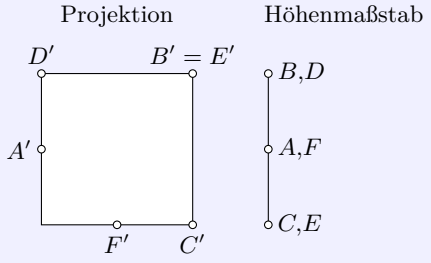
Auf den Kanten $A'D'$ sowie $B'C'$ seien so die Punkte K bzw. L markiert, dass $|A'K| = |B'L| = \sqrt{a^2 - b^2}$ gilt. Dies ist wegen $\sqrt{a^2 - b^2} < \sqrt{a^2} = a < c = |A'D'|$ immer möglich. Dann ist die Strecke KL parallel zur Strecke $A'B'$, also auch zu AB, sodass die vier Punkte $ABLK$ in einer Ebene liegen. Weiterhin gilt damit $|KL| = |AB| = a$ und aufgrund der Symmetrie $|AK| = |BL|$.

Das Dreieck $\triangle AKA'$ ist rechtwinklig in A', sodass sich nach dem Satz von Pythagoras

$$|AK| = \sqrt{|AA'|^2 + |A'K|} = \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)} = a$$

ergibt. Damit ist das Viereck $ABLK$ eine Raute.
Aufgrund der Symmetrie (Spiegelung an der zur Seitenfläche $ADD'A'$ parallelen Ebene durch den Mittelpunkt von AB überführt sowohl den Quader in sich selbst und bildet K auf L sowie A auf B ab) sind aber dessen Diagonalen gleich lang, sodass es sich um ein Quadrat handelt. Der Schnitt des Quaders durch $ABKL$ liefert also das Gewünschte, □.

Aufgabe 290924:

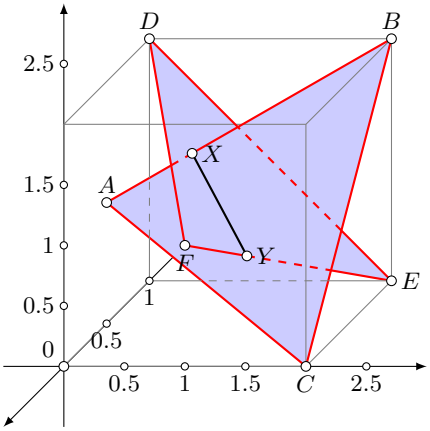


Die Abbildung stellt sechs Punkte A, B, C, D, E, F in senkrechter Eintafelprojektion mit zugehörigem Höhenmaßstab dar.
Die Punkte C', B', D' und ein vierter nicht bezeichneter Punkt sind in dieser Reihenfolge die Eckpunkte eines Quadrates mit der Seitenlänge $a = 6$ cm.
Die Punkte A' und F' sind die Mittelpunkte der in der Abbildung ersichtlichen Quadratseiten. Im Höhenmaßstab haben A, F von B, D den Abstand 3 cm und C, E von B, D den Abstand 6 cm.

a) Zeichnen Sie in schräger Parallelprojektion, wobei mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ sei, eine Darstellung desjenigen Würfels, zu dem die Eckpunkte B, C, D, E gehören, und dazu die Punkte A und F!
b) Zeichnen Sie anschließend die Dreiecksflächen ABC und DEF durch Wiedergabe ihrer Seitenkanten sowie der Schnittstrecke XY, die diese beiden Dreiecksflächen miteinander gemeinsam haben!
Berücksichtigen Sie in a) und b) die Sichtbarkeitsverhältnisse, indem Streckenteile, die durch eine davor liegende Dreiecksfläche verdeckt sind, gestrichelt wiedergegeben werden!
Eine Verdeckung durch davor liegende Seitenflächen des Würfels soll dagegen nicht berücksichtigt werden (diese Flächen sind als „nicht vorhanden“ oder „durchsichtig“ zu betrachten).
Verdeutlichen Sie die sichtbaren Teile der Dreiecksflächen durch Schraffur, im Dreieck ABC parallel zu CB, im Dreieck DEF in dichterer Schraffur parallel zu DE!
c) Geben Sie für die Schnittstrecke XY eine Herleitung der - von Ihnen in b) verwendeten - Konstruktion der Bildpunkte von X und Y!
Beschreiben Sie diese Konstruktion!

Lösung von cyrix:
a), b): Eine Darstellung der beschriebenen Situation (mit Ausnahme der geforderten Schraffuren) findet sich in folgendem Bild, wobei hierfür eine Längeneinheit als 3 cm gewählt wurde.

Dabei ist genau der Teil des Dreiecks $\triangle ABC$ nicht sichtbar, welcher durch das Viereck $FYXS$ verdeckt wird, wobei S der Schnittpunkt in der Schrägbilddarstellung von DF und AX ist. Vom Dreieck $\triangle DEF$ ist genau jenes Viereck, „der von D ausgehende Bereich bis zur Geraden AB“ und „der von E ausgehende Bereich bis zur Geraden BC“ sichtbar.



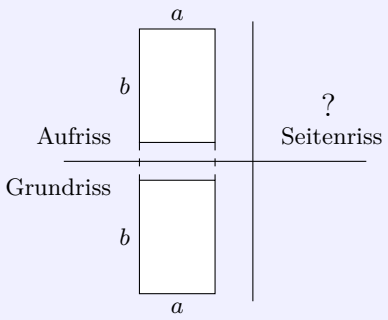
c) Jeder der beiden Endpunkte der Strecke XY muss auf dem Rand mindestens einer der beiden Dreiecksflächen liegen, findet sich also dort, wo eine Kante einer Fläche die andere durchstößt. Offenbar schneidet die Strecke AB das Dreieck $\triangle DEF$ und die Strecke EF das Dreieck $\triangle ABC$, während die übrigen Seitenkanten dieser beiden Dreiecke das jeweils andere Dreieck nicht schneiden. Es sind also genau diese beiden Schnittpunkte zu bestimmen.

Jeder Punkt auf der Geraden AB besitzt für ein bestimmtes $t \in \mathbb{R}$ die Koordinaten $(0 + t \cdot (2 - 0), 1 + t \cdot (2 - 1), 1 + t \cdot (2 - 1)) = (2t, 1 + t, 1 + t)$. (Dies erhält man aus der Zweipunktform zur Aufstellung der Gleichung einer Geraden durch zwei gegebene Punkte.) Weiterhin gilt für jeden Punkt (x,y,z) auf der Ebene durch die Punkte D, E und F, dass $x + z = 2$ ist. Für den Schnittpunkt X der Geraden mit der Ebene muss also $2t + 1 + t = 2$ bzw. $t = \frac{1}{3}$ gelten, sodass X die Koordinaten $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ besitzt.

Analog gilt für jeden Punkt auf der Geraden FE, dass er für ein reelles t die Koordinaten $(1 + t \cdot (2 - 1), 0 + t \cdot (2 - 0), 1 + t \cdot (0 - 1)) = (1 + t, 2t, 1 - t)$ besitzt, sowie für jeden Punkt (x,y,z) auf der Ebene durch A, B und C, dass $y = z$ gilt. Also muss der Schnittpunkt Y dieser beiden Objekte die Bedingung $2t = 1 - t$ bzw. $t = \frac{1}{3}$ erfüllen, sodass Y die Koordinaten $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ besitzt.

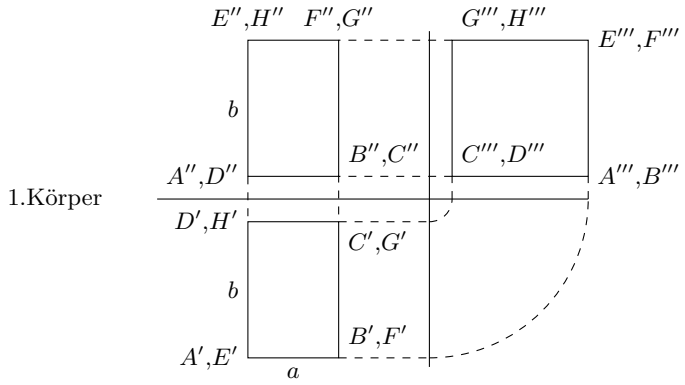
Kennt man die Koordinaten beider Punkte X und Y, kann man sie leicht in das Schrägbild eintragen. (Streckenlängen von einem Drittel bzw. Vielfache davon kann man mit dem Strahlensatz konstruieren.)

Aufgabe 310923:

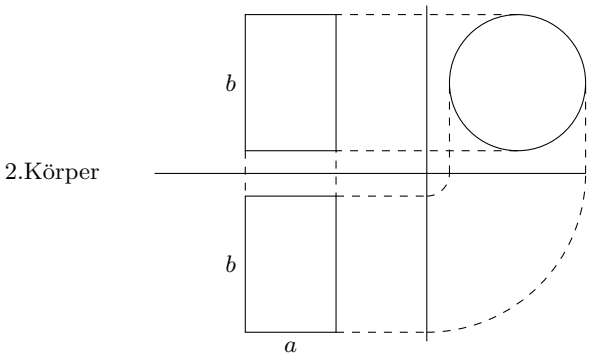


Wenn bei der Abbildung eines Körpers in Zweitafelprojektion die Grund- und Aufrissbilder nicht für eine eindeutige Festlegung ausreichen, kann man einen Seitenriss hinzufügen und damit zur Dreitafelprojektion übergehen.
Die Abbildung zeigt zwei Rechtecke (mit gegebenen Seitenlängen a, b) als Grund- und Aufriss eines Körpers. (Es wird nicht gefordert, dass der Körper nur von ebenen Flächen begrenzt wird.)
Ergänzen Sie die Risse in drei verschiedenen Zeichnungen so durch Seitenrisse, dass die Bilder von drei Körpern entstehen, von denen keine zwei das gleiche Volumen haben!
Bezeichnen Sie in Ihren Darstellungen alle an den Körpern auftretenden Ecken! (Grund-, Auf- und Seitenriss eines Punktes P bezeichne man mit P', P'' bzw. P'''; eventuell auftretende Kanten, die von Flächen verdeckt sind, zeichne man gestrichelt.)
Geben Sie in Abhängigkeit von a und b die Volumina der drei dargestellten Körper an!
Eine Begründung wird nicht verlangt.

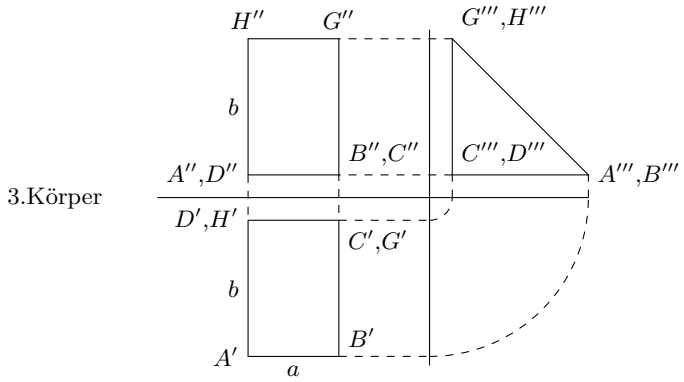
Lösung von cyrix:



Der 1. Körper ist ein Quader mit den Seitenlängen a, b und b. Der Seitenriss ist ein Quadrat der Kantenlänge b. Das Volumen des Körpers ist damit $V = ab^2$.



Der 2. Körper ist ein „liegender“ Zylinder (Grund- und Deckfläche sind Kreise mit Durchmesser b, die „Höhe“, also eher die Länge ist a). Der Seitenriss ist ein Kreis dem mit Durchmesser b. Das Volumen wird $V = \frac{\pi}{4}ab^2$.



Der 3. Körper ist ein dreiseitiges Prisma mit der Höhe a und einem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck als Grundfläche, dessen Katheten b sind. Der Seitenriss ist ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck. Das Volumen des Körpers ist damit $V = \frac{1}{2}ab^2$.

III Runden 3 & 4

Aufgabe V10932:
Das Volumen eines Holzmastes für Telegrafenleitungen wird nach der folgenden Formel berechnet.

$$V = \frac{\pi h}{12}(d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2)$$

Dabei sind h die Höhe, d_1 der untere Durchmesser und d_2 der obere Durchmesser.
In der Praxis rechnet man aber meist mit der folgenden Näherungsformel:

$$V' = \frac{\pi h}{4}d^2$$

wobei d der mittlere Durchmesser des Holzmastes ist

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

a) Berechnen Sie das Volumen eines Holzmastes, für den folgende Werte gegeben sind, nach der genauen und nach der Näherungsformel:
$h = 10$ m, $d_1 = 20$ cm, $d_2 = 14$ cm!
b) Wie viel Prozent beträgt der Fehler, wenn man mit der Näherungsformel rechnet?
c) Stellen Sie eine Formel für $\frac{V-V'}{V}$ an, indem Sie $d_1 = d + \delta$ und $d_2 = d - \delta$ setzen!
Welchen Wert ergibt dieser Ausdruck bei Benutzung der unter a) genannten Werte?

Lösung von MontyPythagoras:
a) Die Volumina betragen $V = 229{,}336\text{cm}^3$ und $V' = 226.980\text{cm}^3$.
b) Der Fehler beträgt 1,03%.

c) Setzt man die Formeln für d_1 und d_2 in die Gleichung für V ein, erhält man

$$V = \frac{\pi h}{12}\left((d+\delta)^2 + (d+\delta)(d-\delta) + (d-\delta)^2\right)$$

$$V = \frac{\pi h}{12}\left(d^2 + 2d\delta + \delta^2 + d^2 - \delta^2 + d^2 - 2d\delta + \delta^2\right)$$

$$V = \frac{\pi h}{12}\left(3d^2 + \delta^2\right) = \frac{\pi h}{4}d^2 + \frac{\pi h}{12}\delta^2$$

Der relative Fehler ist dann

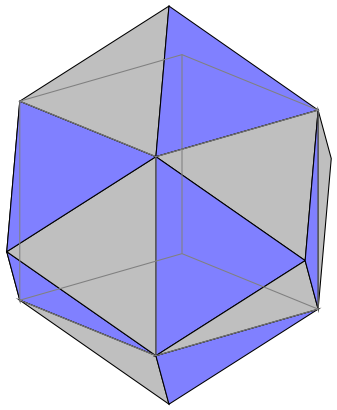
$$\frac{V - V'}{V} = \frac{\frac{\pi h}{12}\delta^2}{\frac{\pi h}{12}\left(3d^2 + \delta^2\right)} = \frac{\delta^2}{3d^2 + \delta^2}$$

Das ergibt in diesem Fall $\frac{3}{292}$, was den 1,03% von oben entspricht.

Aufgabe 040936:
Auf die Flächen eines Würfels sind Pyramiden aufgesetzt, deren Grundflächen den Flächen des Würfels kongruent sind und deren Seitenflächen mit der Grundfläche Winkel von 45° bilden.

1. Wie viel Flächen hat der neue Körper, und welche Form haben diese Flächen?
2. Geben Sie das Volumen des zusammengesetzten Körpers als Funktion der Würfelkante a an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da es sich jeweils um eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge a handelt, ist jede Mantelfläche jeder der Pyramiden ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basislänge a, und die Dreiecke sind alle untereinander kongruent.



Wir berechnen die Größe des Winkels zwischen zwei Dreiecksflächen, die dieselbe Würfelkante als Basis haben. Der Winkel setzt sich zusammen aus

1. dem Winkel zwischen einer Dreiecksfläche und der Grundfläche der zugehörigen Pyramide.
2. dem rechten Winkel zwischen zwei benachbarten Seitenflächen des Würfel und
3. dem Winkel zwischen der anderen Dreiecksfläche und der Grundfläche der zugehörigen Pyramide. Seine Größe ist mithin $45° + 90° + 45° = 180°$.

Die beiden benachbarten Dreiecke liegen in also derselben Ebene, und weil sie einander kongruent und gleichschenklig sind und eine gemeinsame Seite besitzen, bilden ihre Schenkel die Seiten eine Rhombus. Da der Würfel 12 Kanten hat, besitzt der zusammengesetzte Körper 12 Rhombusflächen als Seitenflächen; denn keine zwei zu verschiedenen Kanten gehörende Rhomben liegen in einer Ebene. Die Rhomben sind untereinander kongruent.

Wir zeigen noch, dass die Rhomben keine Quadrate sind. Die Höhen der aufgesetzten Pyramiden haben; wegen des Winkels zwischen Mantel- und Grundfläche jeder Pyramide von der Größe 45°; die Länge $\frac{a}{2}$. Die Höhen der die Mantelflächen bildenden Dreiecksflächen haben nach dem Satz des Pythagoras die Länge $\sqrt{2(\frac{a}{2})^2}$, d. h. $\frac{a}{2}\sqrt{2}$.
Damit haben die Diagonalen der Rhomben unterschiedliche Länge, nämlich a und $a\sqrt{2}$.

Jede der aufgesetzten Pyramiden hat das Volumen $\frac{1}{3}(a^2\frac{a}{2})$, d. h. $\frac{a^3}{6}$.
Die sechs aufgesetzten Pyramiden haben somit zusammen mit dem Würfel das Volumen $2a^3$.

Aufgabe 060932:
Beweisen Sie die folgende Behauptung:
Sind bei einem (nicht notwendigerweise regelmäßigen) Tetraeder $ABCD$ die Umfänge aller seiner vier Seitenflächen untereinander gleich, dann sind diese Flächen zueinander kongruent.

Lösung von Philipp Weiß:
Der Umfang sei u, die Seitenlängen seinen a, b, c, d, e, f, so dass

$$u = a + b + c = a + e + f = b + d + f = c + d + e$$

Addiere die ersten beiden Umfänge und ziehe die anderen beiden Umfänge ab, und wir erhalten:

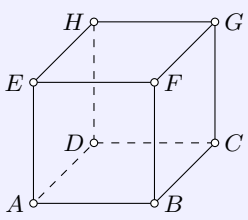
$$0 = u + u - u - u = a + b + c + a + e + f - b - d - f - c - d - e = 2a - 2d$$

also $a = d$. Analog erhält man $b = e$ und $c = f$. Also haben alle vier Dreiecke Seiten mit Längen a, b und c. Dreiecke mit den gleichen Seitenlängen sind bekanntlich kongruent.

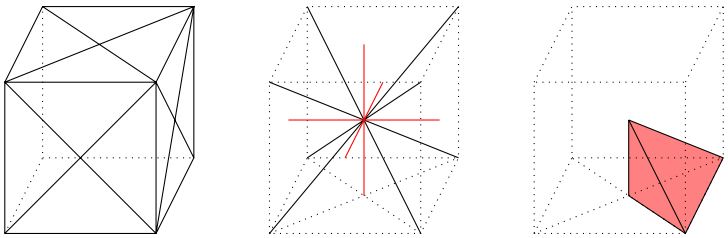
Aufgabe 100935:
Eine dreiseitige Pyramide mit den Ecken A, B, C, D und der Spitze D habe die Kantenlängen $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm, $BC = 5$ cm, $BD = 12$ cm, $CD = 13$ cm, und $\angle ABD$ sei ein rechter Winkel.
Man berechne das Volumen V dieser Pyramide.

Lösung von cyrix:
Da $AB^2 + AC^2 = BC^2$ gilt, ist nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig, wobei AB und AC seine Katheten sind.
Also beträgt sein Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}AB \cdot AC = 6cm^2$. Da $\angle ABD = 90°$ beträgt, ist die Strecke BD auch gleichzeitig die Höhe der Spitze D über der Grundfläche ABC. Also beträgt das Volumen V der Pyramide genau $V = \frac{1}{3}A \cdot BD = 24cm^3$.

Aufgabe 120933:
Ein Würfel mit der Kantenlänge a und den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abbildung) wird von sechs Ebenen geschnitten, die jeweils durch die Punkte A, B, G, H; D, C, F, E; A, D, G, F; B, C, H, E; A, E, G, C und B, H, F, D gehen.
Man ermittle die Anzahl der Teilkörper, in die der Würfelkörper dadurch zerlegt wird. Außerdem gebe man das Volumen der einzelnen Teilkörper an.



Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Jede der Ebenen wird von zwei Raumdiagonalen des Würfels aufgespannt. Da es $\binom{4}{2} = 6$ ungeordnete Paare von Raumdiagonalen gibt, entsprechen diese genau den Ebenen. Der Mittelpunkt des Würfels ist gemeinsamer Schnitt aller Raumdiagonalen und liegt somit in allen Ebenen. Eine Ebene schneidet die Oberfläche des Würfels in zwei diagonal gegenüberliegenden Kanten und den dazugehörigen Flächendiagonalen. Daher ergibt die linke Skizze den Schnitt aller Ebenen mit der Würfeloberfläche.

Falls zwei Ebenen eine gemeinsame Raumdiagonale haben, ist diese bereits die Schnittgerade. Falls zwei Ebenen keine gemeinsame Raumdiagonale haben, ist die Schnittgerade durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Flächen gegeben (rote Strecken). Somit stellt die mittlere Skizze sämtliche Schnitte zwischen den Ebenen dar.

Die linke und mittlere Zeichnung ergeben daher alle möglichen Kanten, der gesuchten Teilkörper an. Daher ist ein Teilkörper eine Pyramide mit einer dreieckigen Grundfläche und dem Mittelpunkt der Würfels als Spitze. Insgesamt zerfällt der Würfel in $6 \cdot 4 = 24$ Teilkörper. Da eine Seitenfläche in 4 kongruente Teildreiecke unterteilt wird und alle Pyramiden dieselbe Höhe besitzen, haben diese alle das gleiche Volumen $V = \frac{a^3}{24}$.

Aufgabe 130936:
Gegeben sei ein regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D und der Kantenlänge a. Ein Punkt D' soll folgende Eigenschaften haben:
a) Das Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D' ist volumengleich zu dem gegebenen Tetraeder,
b) $BD' = CD' = a$, c) $AD' \neq a$.

Man untersuche, ob es solche Punkte D' gibt, und ermittle für jedes solche D' die Länge der Kante AD'.

Lösung von cyrix:
Ist h die Höhe des Tetraeders $ABCD$, so folgt aus Eigenschaft a), dass D' in einer zur Grundfläche ABC parallelen Ebene ε mit Abstand h liegt. Prinzipiell sind dabei zwei Möglichkeiten denkbar: Entweder es liegt ε im gleichen von der Grundfläche erzeugten Halbraum wie D (dann liegt D auf ε), oder die Ebene ε liegt im entsprechend anderen Halbraum. Da aber die weiteren Bedingungen nicht davon abhängen, welche der beiden Fälle eintritt, ergeben sich symmetrische Strukturen, sodass wir o. B. d. A. annehmen können, dass ε im oberen Halbraum zusammen mit D liegt, sodass D und D' beides Punkte auf ε sind.

Nach Bedingung b) liegt D' auf der Oberfläche der beiden Kugeln um die Punkte B und C mit Radius a. Da $h < a$ gilt, werden diese beiden Kugeln durch ε geschnitten (und nicht nur berührt), sodass sich zwei Kreise $k_B; k_C$ als Schnittfiguren in der Ebene ε ergeben. Diese beiden Kreise schneiden sich nun in bis zu zwei Punkten, wovon einer D ist (da auch $|BD| = |CD| = a$ gilt) und der andere (falls existent) D'.

Einen zweiten Schnittpunkt gäbe es nur dann nicht, wenn sich die Kreise in D nur berühren würden. Da die Mittelpunkte M_B und M_C der beiden Kreise wie die Kugelmittelpunkte B und C den Abstand a haben (da ε parallel zur Grundfläche ist), müssten deren gleich große Radien sich also zu a addieren und so würde im rechtwinkligen Dreieck $\triangle BM_BD$ nach dem Satz des Pythagoras die Beziehung $|BM_B|^2 + |M_BD|^2 =$

$|BD|^2$ bzw. $h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$, also $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ folgen. Im regelmäßigen Tetraeder ist aber $h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$, sodass sich die Kreise also nicht nur berühren und es also neben D noch einen zweiten Punkt D' gibt, der die Bedingungen a) und b) erfüllt.

Da $|AD| = a$ ist, kommt nach Bedingung c) auch nicht $D = D'$ Frage. Berechnen wir nun für den zweiten Schnittpunkt D' der beiden Kreise den Abstand zu A:

Die beiden Schnittpunkte zweier Kreise liegen symmetrisch zur Verbindungsgeraden der beiden Mittelpunkte. Da die Ebene ε_1, die senkrecht zur Grundfläche und durch die Gerade BC verläuft, auch senkrecht auf ε steht sowie dort durch die Gerade $M_B M_C$ verläuft, geht also D durch Spiegelung an ε_1 in D' über. Aufgrund der Orthogonalität von ε_1 sowohl zu ε wie auch zur Grundfläche geht damit aber auch der Lotfußpunkt L_D von D auf die Grundfläche durch Spiegelung an ε_1 in den Lotfußpunkt $L_{D'}$ von D' auf die Grundfläche über: Die Lote sind jeweils parallel zur Spiegelungsebene. Bei Betrachtung nur in der Grundfläche geht also L_D durch Spiegelung an der Geraden BC in $L_{D'}$ über.

Da im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ die Seitenhalbierenden und Höhen zusammenfallen und L_D der Schwerpunkt dieses Dreiecks ist, steht die Gerade AL_D als Seitenhalbierende und zugleich Höhe senkrecht auf BC und verläuft durch deren Mittelpunkt M. Insbesondere liegt also auch der Spiegelungspunkt $L_{D'}$ auch auf dieser Geraden und es gilt

$$|AL_{D'}| = |AL_D| + 2 \cdot |L_D M| = \frac{2}{3}s + 2 \cdot \frac{1}{3}s = \frac{4}{3}s$$

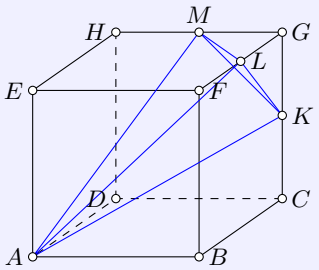
wobei s die Länge der Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge a sei. Für diese gilt im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABM$ die Beziehung $s^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$ und damit $s^2 = \frac{3}{4}a^2$. Einsetzen liefert $|AL_{D'}|^2 = \frac{16}{9}s^2 = \frac{4}{3}a^2$.

Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle AL_{D'}D'$ gilt abschließend nun

$$|AD'|^2 = |AL_{D'}|^2 + |L_{D'}D'|^2 = \frac{4}{3}a^2 + h^2 = \frac{4}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^2 = 2a^2$$

also $|AD'| = \sqrt{2}a$.

Aufgabe 140936:



In einem Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abbildung) und der Kantenlänge a seien K, L, M die Mittelpunkte der Seiten CG, FG bzw. HG. Man ermittle das Volumen des Pyramidenkörpers mit den Eckpunkten A, K, L, M.

Lösung von cyrix:
Eine Rotation des Würfels um die Raumdiagonale AG um den Winkel 120° bildet den Würfel wieder auf sich selbst ab, wobei die Punkte K, L und M zyklisch vertauscht werden. Demnach geht die Ebene, die durch diese drei Punkte definiert wird, durch die Drehung in sich selbst über und steht also senkrecht auf der Raumdiagonalen AG.

Sei S der Schnittpunkt der Raumdiagonalen mit der Ebene durch K, L und M. Dann ist also SG die Höhe von G auf diese Ebene.
Sei V das Volumen des Tetraeders $KLMG$. Dann gilt einerseits $V = \frac{1}{3}A_{\triangle KLM} \cdot |SG|$ und andererseits

$$V = \frac{1}{3}A_{\triangle MGL} \cdot |GK| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|MG| \cdot |LG| \cdot |KG| = \frac{1}{48}a^3$$

Da

$$A_{\triangle KLM} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |KL| = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$$

gilt, da $\triangle KLM$ ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ ist, folgt

$$|SG| = \frac{1}{48}a^3 : \frac{\sqrt{3}}{24}a^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

Damit ergibt sich für das gesuchte Volumen V_P des Pyramidenkörpers mit den Eckpunkten A,K,L,M:

$$V_P = \frac{1}{3}A_{\triangle KLM} \cdot |AS| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)a = \frac{5\sqrt{3}}{36}a^3$$

Aufgabe 160933:
Wir betrachten die Menge aller Tetraeder, für die folgendes gilt:
(1) Eine der Flächen des Tetraeders ist die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks.
(2) Von den Kanten des Tetraeders haben drei die (gegebene) Länge a und drei die Länge $a\sqrt{2}$.
a) Zeigen Sie, dass zwei zueinander nicht kongruente Tetraeder existieren, die dieser Menge angehören!
b) Geben Sie für jedes dieser Tetraeder den Oberflächeninhalt an!

Lösung von cyrix:
a) T_1 entsteht, indem die drei Kanten der Länge a die Grundfläche $\triangle ABC$ bilden und die drei Kanten AD, BD, CD zur Spitze D jeweils die Länge $a\sqrt{2}$ besitzen. Dann sind beide Bedingungen erfüllt und neben dem gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge a sind die anderen drei Seitenflächen von T_1 gleichschenklige Dreiecke mit Basislänge a und Schenkellänge $a\sqrt{2}$.
Der Tetraeder T_2 entsteht analog, nur dass diesmal die Kanten mit Länge $\sqrt{2}a$ die Grundfläche bilden, während die Kanten zur Spitze die Länge a erhalten. Dann sind wieder beide Bedingungen erfüllt und neben dem gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge $a\sqrt{2}$ sind die drei anderen Seitenflächen von T_2 gleichschenklige Dreiecke mit Basislänge $a\sqrt{2}$ sowie Schenkellänge a.
Insbesondere sind die Seitenflächen von T_1 und T_2 nicht kongruent, also auch nicht die Tetraeder selbst.

b) Für ein gleichschenkliges Dreieck mit Basislänge g und Schenkellänge s gilt, dass die Höhe auf die Basis gleichzeitig eine Seitenhalbierende ist. Insbesondere gilt also für deren Länge h aufgrund des rechten Winkels am Höhenfußpunkt $h^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2 = s^2$ bzw. $h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4s^2 - q^2}$ und damit $A = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{4} \cdot g\sqrt{4s^2 - q^2}$.
Für ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge s folgt damit insbesondere

$$A = \frac{1}{4} \cdot s\sqrt{4s^2 - s^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$$

Damit beträgt der Oberflächeninhalt von T_1

$$O_{T_1} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot a\sqrt{4(\sqrt{2}a)^2 - a^2} = \frac{1}{4}a^2 \cdot (\sqrt{3} + 3\sqrt{8-1}) = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{7}}{4} \cdot a^2$$

und der von T_2

$$O_{T_2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}a)^2 + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2}a \cdot \sqrt{4a^2 - (\sqrt{2}a)^2} = \frac{1}{4}a^2 \cdot (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{4-2}) = \frac{2\sqrt{3}+6}{4}a^2$$

Aufgabe 180933:
Gegeben sei ein Würfel, dessen Volumen mit V_1 bezeichnet sei.
Verbindet man den Mittelpunkt je einer Seitenfläche dieses Würfels mit den Mittelpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines regelmäßigen Oktaeders. Das Volumen dieses Oktaeders sei V_2 genannt.
Verbindet man nun wieder den Schwerpunkt je einer Seitenfläche dieses Oktaeders mit den Schwerpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines zweiten Würfels. Sein Volumen sei V_3 genannt.
Berechnen Sie das Verhältnis $V_1 : V_2 : V_3$!

Lösung von cyrix:
Es habe der Ausgangswürfel die Kantenlänge a, der Oktaeder die Kantenlänge b und der innere Würfel die Kantenlänge c. Dann gilt $V_1 = a^3$.

Der Oktaeder lässt sich als Vereinigung zweier gerader Pyramiden mit identischer quadratischer Grundfläche auffassen. Deren Spitzen bilden die Mittelpunkte gegenüberliegender Seitenflächen des Ausgangswürfels, sodass sich als Höhe h einer dieser Pyramiden der Wert $h = \frac{1}{2}a$ ergibt. Diese quadratische Grundfläche beider Pyramiden liegt in der Ebene durch die Mittelpunkte der vier übrigen Seiten des Ausgangswürfels. Jede die Kanten dieser Grundfläche entsteht in dieser Schnittfigur als Hypotenuse eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten die Länge $\frac{1}{2}a$ haben. Also gilt $b = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ und $V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3}b^2 \cdot h = \frac{1}{6}a^3$.

Verbindet man die Mittelpunkte zweier benachbarter Kanten der quadratischen Grundfläche der beiden Pyramiden miteinander, entsteht eine Strecke der Länge $\frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{1}{2}a$. Der Schwerpunkt der von der Spitze der Pyramide ausgehenden und in einer solchen Seitenfläche des Oktaeders verlaufenden Seitenhalbierenden teilt diese im Verhältnis $2 : 1$, sodass sich nach dem Strahlensatz für die Länge c der Strecke zwischen den Schwerpunkten benachbarter Oktaederflächen $\frac{c}{\frac{a}{2}} = \frac{2}{3}$ bzw. $c = \frac{a}{3}$ und damit $V_3 = \frac{1}{27}a^3$ ergibt. Damit gilt

$$V_1 : V_2 : V_3 = 1 : \frac{1}{6} : \frac{1}{27} = 54 : 9 : 2$$

Aufgabe 200935:
Beweisen Sie, dass man den Körper eines regulären Tetraeders $ABCD$ so durch eine Ebene schneiden kann, dass die Schnittfläche ein Quadrat ist!
Berechnen Sie aus der gegebenen Kantenlänge a des Tetraeders $ABCD$ den Flächeninhalt I eines solchen Quadrates!
Hinweis: Unter dem Körper eines regulären Tetraeders $ABCD$ versteht man denjenigen Körper, der von den Flächen der Dreiecke ABC, ABD, ACD und BCD begrenzt wird, wobei $AB = AC = AD = BC = BD = CD$ gilt.

Lösung von cyrix:
Bei einem regulären Tetraeder sind alle Seitenflächen gleichseitige Dreiecke gleicher Kantenlänge. Insbesondere betragen alle Innenwinkel auf den Seitenflächen jeweils 60°.

Es seien M_{AB}, M_{AC}, M_{DB} und M_{DC} die Mittelpunkte der Strecken AB, AC, DB und DC. Dann sind die Dreiecke $\triangle M_{AB}M_{AC}A$, $\triangle M_{DB}M_{DC}D$, $\triangle M_{AB}M_{DB}B$ und $\triangle M_{AC}M_{DC}C$ allesamt gleichschenklig, wobei die beiden Schenkel einen Innenwinkel von 60° einschließen, sodass diese Dreiecke sogar alle gleichseitig mit Kantenlänge $\frac{a}{2}$ sind. Insbesondere ist also

$$|M_{AB}M_{AC}| = |M_{DB}M_{DC}| = |M_{AB}M_{DB}| = |M_{AC}M_{DC}| = \frac{a}{2}$$

Nach der Umkehrung des Strahlensatzes mit Zentrum A ist $M_{AB}M_{AC} \parallel BC$ und analog bei Betrachtung mit Zentrum D ist $M_{DB}M_{DC} \parallel BC$, sodass diese beiden Geraden und damit die vier Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Damit ist das Viereck $M_{AB}M_{AC}M_{DC}M_{DB}$ eine Raute.

In den gleichseitigen Dreiecken $\triangle ABC$ und $\triangle DBC$ fallen die Mittelsenkrechten der Strecke BC mit den Höhen von A bzw. D auf diese zusammen. Damit steht die Gerade BC senkrecht auf der Ebene ε, die durch A, D und den Mittelpunkt M_{BC} von BC verlaufe, sodass bei der Spiegelung an ε wegen $|BM_{BC}| = |CM_{BC}|$ die Punkte B und C jeweils aufeinander abgebildet werden, während A und D fix bleiben. Das bedeutet, dass bei dieser Spiegelung die Strecken $M_{AB}M_{DC}$ und $M_{AC}M_{DB}$ aufeinander abgebildet werden, also gleich lang sind.
Das bedeutet aber, dass in der Raute $M_{AB}M_{AC}M_{DC}M_{DB}$ die Diagonalen gleich lang sind, sodass es sich um ein Quadrat handelt. Dieses Quadrat hat die Kantenlänge $\frac{a}{2}$ und also den Flächeninhalt $I = \frac{1}{4}a^2$.

Aufgabe 210936:
Bei einem Tetraeder $ABCD$ seien die Kantenlängen $AB = 10$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $AD = 13$ cm, $BD = 13$ cm geben, das Lot von D auf die Fläche des Dreiecks ABC sei 12 cm lang.
Beweisen Sie, dass durch diese Angaben die Länge der Kante CD eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Kantenlänge!

Lösung von cyrix:
Es sei L der Fußpunkt des Lots von D auf die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$. Dann sind die Dreiecke $\triangle ADL$ und $\triangle BDL$ rechtwinklig in L und es gilt

$$|AL| = \sqrt{|AD|^2 - |DL|^2} = \sqrt{13^2 - 12^2}\text{ cm} = \sqrt{25}\text{ cm} = 5\text{ cm}$$

sowie analog $|BL| = 5$ cm. Da $|AB| = 10$ cm die Summe dieser beiden Strecken ist, liegt L auf der Strecke AB und bildet dessen Mittelpunkt.

Da $|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$ gilt, ist das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig in C. Damit gilt nach der Umkehrung des Satzes von Thales $|AL| = |BL| = |CL| = 5$ cm.
Das Dreieck $\triangle CDL$ ist rechtwinklig in L. Also gilt nach dem Satz von Pythagoras

$$|CD| = \sqrt{|CL|^2 + |DL^2|} = \sqrt{5^2 + 12^2}\text{ cm} = 13\text{ cm}$$

Aufgabe 220935:
Auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius 1 seien k_1 und k_2 zwei beliebige voneinander verschiedene Großkreise. Ihre Schnittpunkte seien P und Q.
Beweisen Sie, dass für jeden Punkt S der Kugeloberfläche die Summe $PS^2 + QS^2$ denselben Wert hat! Ermitteln Sie diesen Wert!
Hinweis:
1. Unter einem Großkreis versteht man einen Kreis, der sich als Schnitt der Kugeloberfläche mit einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene ergibt.
2. Streckenlängen, z. B. PS, PQ seien geradlinig gemessen, nicht etwa auf der Kugeloberfläche. Dabei sei stets dieselbe Maßeinheit gewählt, aber der Einfachheit halber nur die Maßzahl angegeben.

Lösung von cyrix:
Es seien ε_1 und ε_2 die Ebenen, die die beiden Großkreise beinhalten. Da diese verschieden sind, sind auch die Ebenen verschieden, schneiden sich also in einer Geraden. Da beide Ebenen den Mittelpunkt der Kugel enthalten, ist dieser auch in der Schnittgeraden enthalten, sodass P und Q sowohl auf der Kugeloberfläche als auch einer Geraden durch den Kugelmittelpunkt liegen. Sie bilden also einen Durchmesser der Kugel und es gilt $|PQ| = 2$.

Ist $S = P$ oder $S = Q$, so vereinfacht sich die Summe $|PS|^2 + |QS|^2$ zu $|PQ|^2 + 0^2 = 2^2 = 4$.

Sei ab nun S verschieden von P und Q ein Punkt auf der Kugeloberfläche. Da PQ ein Durchmesser der Kugel ist, liegt S also nicht auf der Geraden durch P und Q, sodass genau eine Ebene ε existiert, auf der die drei Punkte liegen. Mit P und Q liegt auch ihr Mittelpunkt, was der Kugelmittelpunkt ist, in dieser Ebene, sodass der Schnitt von ε mit der Kugeloberfläche ein Großkreis ist, insbesondere also ein Kreis mit Durchmesser PQ, auf dem S liegt.

Nach dem Satz von Thales ist damit das Dreieck $\triangle PQS$ rechtwinklig in S und nach dem Satz von Pythagoras gilt $|PS|^2 + |QS^2| = |PQ|^2 = 2^2 = 4$, sodass diese Summe unabhängig von der Lage immer den Wert 4 annimmt, $\square$.

Aufgabe 240933:
Es sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge a. Der Mittelpunkt der Kante AB sei M, der Mittelpunkt der Kante CD sei N.
a) Beweisen Sie, dass die Gerade durch M und N sowohl auf der Geraden g durch A und B als auch auf der Geraden h durch C und D senkrecht steht!
b) Ermitteln Sie den Abstand MN zwischen M und N!
c) Beweisen Sie, dass für jeden Punkt X auf g und jeden Punkt Y auf h der Abstand XY zwischen X und Y die Ungleichung $XY \geq MN$ erfüllt!

Lösung von cyrix:
a) Es ist CM eine Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ und steht damit senkrecht auf g. Analog ist DM eine Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABD$, die damit auch senkrecht auf g ist. Da beide Geraden durch M verlaufen, liegen sie in der eindeutig bestimmten Ebene ε, welche zu g senkrecht ist und durch M verläuft. Damit liegen auch C und D, also auch ihre Verbindungsgerade und damit auch N auf ε. Da alle Geraden auf ε, die g schneiden, senkrecht zu dieser verlaufen, gilt dies auch für die Gerade MN, die g in M schneidet.

Da im regulären Tetraeder keine Eckpunkte oder Seitenkanten voneinander ausgezeichnet sind, folgt aus Symmetriegründen völlig analog auch $MN \perp h$.

b) Wie gerade nachgewiesen, ist das Dreieck $\triangle MND$ rechtwinklig in N. Dabei ist $|ND| = \frac{1}{2}a$, da N der Mittelpunkt der Kante CD mit Länge a ist. Weiterhin ist $|MD| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, da dies die Länge einer Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABD$ mit Kantenlänge a ist. Also gilt nach dem Satz des Pythagoras $|MN|^2 = |MD|^2 - |ND|^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2$, also $|MN| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

c) Die Geraden g und h sind windschief, denn lägen sie in einer Ebene, so auch die Punkte A, B, C und D, die auf ihnen liegen, sodass diese keinen Tetraeder bilden würden. Damit gibt es die zwei parallelen Ebenen ϕ_g und ϕ_h die g bzw. h beinhalten und jeweils parallel zur anderen Geraden sind. Nach Aufgabenteil b) haben diese beiden Ebenen wegen Teil a) den Abstand $|MN|$.

Sei für einen beliebigen Punkt X auf ϕ_g der Bildpunkt bezüglich Projektion auf ϕ_h mit P bezeichne. Dann ist also $|XP| = |MN|$. Ist Y nun ein beliebiger Punkt auf ϕ_h, so kann entweder $Y = P$ gelten, sodass dann $|XY| = |XP| = |MN|$ gilt, oder aber es ist $Y \neq P$.
Dann ist das Dreieck $\triangle XYP$ rechtwinklig in P und es gilt $|XY|^2 = |XP|^2 + |YP|^2$, also $|XY| > |XP| = |MN|$, sodass in jedem Fall, insbesondere auch für X auf g und Y auf h die Ungleichung $|XY| \geq |MN|$ erfüllt ist, $\square$.

Aufgabe 250933:
Das Volumen eines regelmäßigen Tetraeders sei V_T, das Volumen seiner Umkugel sei V_K.
Berechnen Sie das Verhältnis $V_K : V_T$ und runden Sie es ganzzahlig (d. h. ermitteln Sie die zu $V_K : V_T$ nächstgelegene ganze Zahl)!
Dabei können die (auf eine bzw. zwei Dezimalen nach dem Komma genauen) Näherungswerte $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ und $\pi \approx 3{,}14$ verwendet werden.

Lösung von cyrix:
Im regulären Tetraeder mit Kantenlänge a sind alle Seitenflächen gleichseitige Dreiecke mit Kantenlänge a. Die Seitenhalbierende s in einem solchen Dreieck verläuft durch den Mittelpunkt der entsprechenden Seite und steht orthogonal auf dieser, besitzt also die Länge $s = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ und die Seitenfläche einen Flächeninhalt von $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt dessen Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1, sodass die Entfernung eines Eckpunkts zum Schwerpunkt der entsprechenden Seitenfläche genau $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ beträgt.
In einem regulären Tetraeder steht die Schwerelinie (d. h. Verbindungsstrecke eines Eckpunkts mit dem Schwerpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche) senkrecht auf der entsprechenden Seitenfläche, sodass diese eine Länge von $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.

Damit hat der Tetraeder ein Volumen von

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{3 \cdot 4 \cdot 3}a^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

Der Umkugelmittelpunkt es regulären Tetraeders fällt mit dessen Schwerpunkt zusammen. Dieser teilt die Schwerelinien im Verhältnis 3:1, sodass sich als Umkugelradius r der Wert $r = \frac{3}{4} \cdot h = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ ergibt.
Damit hat die Umkugel ein Volumen von

$$V_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4 \cdot 6\sqrt{6}}{3 \cdot 4^3} \cdot \pi \cdot a^3 = \frac{\sqrt{6}}{8} \cdot \pi \cdot a^3$$

sodass

$$V_K : V_T = \frac{\sqrt{6} \cdot 12}{8 \cdot \sqrt{2}} \cdot \pi = \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{2} \cdot \pi \approx \frac{1{,}7 \cdot 3}{2} \cdot \pi = 2{,}55 \cdot \pi \approx 2{,}55 \cdot 3{,}14 = 8{,}007 \approx 8$$

ist.

Aufgabe 260936:
a) Ein regelmäßiges Tetraeder $ABCD$ soll durch eine Ebene e, die durch den Punkt A geht, in zwei Tetraeder T_1, T_2 zerlegt werden.
Skizzieren Sie eine derartige Zerlegung, z. B. in Kavalierperspektive, und beschreiben Sie, welche Lage e in Bezug auf die drei Punkte B, C, D bei derartigen Zerlegungen haben muss!
b) Beweisen Sie, dass es unter den in a) genannten Ebenen genau drei gibt, bei denen T_1 volumengleich zu T_2 wird!

Lösung von cyrix:
a) Da die Schnittfläche von e mit dem Tetraeder Seitenfläche beider Teiltetraeder T_1 und T_2 wird, muss sie insbesondere selbst dreieckig sein. Da sie a enthält, muss die Ebene e noch genau zwei weitere Schnittpunkt mit Kanten von $ABCD$ besitzen.

Da mit einem weiteren Punkt auf einer von A ausgehenden Kante gleich die gesamte weitere Gerade, auf der diese Kante liegt, in e liegen würde, also auch der Endpunkt der entsprechenden Kante, der B, C oder D ist, können wir o. B. d. A. annehmen, dass e das Dreieck $\triangle BCD$ in einer Strecke schneidet. (Die Endpunkte dieser strecke sind dann genau die beiden weiteren Eckpunkte der Schnittfläche von e mit

dem Tetraeder $ABCD$.)

Diese Strecke s kann aber keine der Seitenkanten des Dreiecks $\triangle BCD$ sein, da sonst der gesamte Tetraeder $ABCD$ in einem der beiden von e aufgespannten Halbräume läge, also diesen nicht in zwei Teiltetraeder zerlegen würde. also muss s innere Punkte von $\triangle BCD$ enthalten und dieses in zwei Teilfiguren zerlegen.

Die beiden Teilkörper vom Tetraeder $ABCD$, die beim Schnitt entlang e entstehen, besitzen die beiden Teilfiguren, in die s das Dreieck $\triangle BCD$ zerlegt, als Grundfläche sowie A als Spitze. Da die Teilkörper Tetraeder sind, muss also deren Grundfläche jeweils ein Dreieck sein, sodass s das Dreieck $\triangle BCD$ in zwei Teildreiecke zerlegt.

Dies ist aber durch eine Strecke s nur genau dann möglich, wenn sie durch einen Eckpunkt des Dreiecks verläuft und die gegenüberliegende Seite in deren Innern schneidet.
Also muss e durch A sowie genau einen der drei übrigen Eckpunkte B, C oder D sowie das Innere der Strecke aus den übrigen beiden Punkten verlaufen. Dies beschreibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass e den Tetraeder $ABCD$ in zwei Teiltetraeder T_1 und T_2 zerlegt. Verläuft e o. B. d. A. durch B und S, wobei S ein innerer Punkt der Strecke CD ist, dann sind die beiden Tetraeder gegeben durch $ABCS$ und $ABDS$.

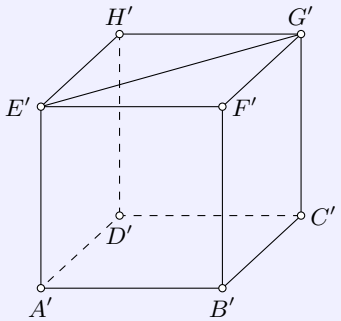
b) Es verlaufe o. B. d. A. die Ebene e durch B und den inneren Punkt S der Strecke CD. Die beiden übrigen Fälle, dass e durch C bzw. D verlaufe, sind hierzu völlig analog.

Da in beiden Teiltetraedern $ABCS$ und $ABDS$ die Höhe der Spitze A auf die Grundflächenebene $\varepsilon_{BCS} = \varepsilon_{BDS} = \varepsilon_{BCD}$ identisch ist, genauso wie in der Grundfläche die Höhe von B auf die Gerade CD der gegenüberliegenden Dreiecksseiten CS bzw. DS, verhalten sich die Volumina der beiden Tetraeder wie die Längen der Grundseiten $|CS|$ bzw. $|DS|$ in ihren Grundflächen. Insbesondere sind sie genau dann volumengleich, wenn $|CS| = |DS|$ gilt, also S der Mittelpunkt von CD ist.

Zusammenfassend erhält man also genau dann eine Zerlegung in zwei volumengleiche Tetraeder, wenn die Ebene e durch A verläuft sowie eine Seitenhalbierende des Dreiecks $\triangle BCD$ enthält. (Damit ist e eindeutig bestimmt.) Da keine zwei der Seitenhalbierenden mit A in einer gemeinsamen Ebene liegen und das Dreieck $\triangle BCD$ genau drei Seitenhalbierende besitzt (je eine durch jeden seiner Eckpunkte), gibt es also genau drei Ebenen, die A enthalten und das Tetraeder $ABCD$ in zwei volumengleiche Teiltetraeder T_1 und T_2 zerlegt, □.

Aufgabe 270936:

Auf dem Arbeitsblatt ist das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Würfels $ABCDEFGH$ bei einer schrägen Parallelprojektion gegeben. Diese ist so gewählt, dass die Fläche $ABFE$ ohne Verzerrung in wahrer Größe $A'B'F'E'$ erscheint.
a) Beweisen Sie folgende Aussage:
Es gibt auf der Strecke EG genau einen Punkt P_0 mit der Eigenschaft, dass die Summe $CP_0 + P_0F$ kleiner ist als die Summe $CP + PF$ für jeden anderen Punkt P auf EG.



b) Leiten Sie eine Möglichkeit her, das Bild P_0' dieses Punktes P_0 bei der Parallelprojektion auf dem Arbeitsblatt zu konstruieren!
Führen Sie die Konstruktion durch! Beschreiben Sie ihre Konstruktion!
Hinweis: CP_0, P_0F, CP, PF bezeichnen Strecken im Raum, nicht ihre Bildstrecken in der Zeichenebene.

Lösung von cyrix:
a) Dreht man das Quadrat $EFGH$ um die Achse EG so um 90°, dass der Bildpunkt $\tilde{F}$ von F nun senkrecht „über“ dem Mittelpunkt von EG liegt, dann liegt $\tilde{F}$ nun mit in der gleichen Ebene wie A, C, G und E. Da EG als Drehachse bei der Drehung fix blieb, gilt für jeden Punkt P auf dieser, dass $|PF| = |P\tilde{F}|$ gilt.
Es ist also P_0 derjenige Punkt auf EG (falls existent und eindeutig bestimmt), für den $|CP_0| + |P_0\tilde{F}|$ minimal wird. Dies ist aber aufgrund der Dreiecksungleichung genau dann der Fall, wenn P_0 auf der Geraden $\tilde{F}C$ liegt, denn dann ist diese Summe gleich $|C\tilde{F}|$, sonst größer. Da C und $\tilde{F}$ auf verschiedenen Seiten von EG liegen, schneiden sich die beiden Geraden EG und $C\tilde{F}$ in genau einem Punkt P_0, der die Aussage in der Aufgabenstellung erfüllt, sodass dieser existiert und eindeutig bestimmt ist, □.

b) Zur Konstruktion von P_0' genügt es also $\tilde{F}'$ zu konstruieren, da auch für die Bildgeraden $E'G'$ und $C'\tilde{F}'$ gilt, dass sie sich in P_0' schneiden.

Es liegt $\tilde{F}$ senkrecht über dem Schnittpunkt M der Diagonalen des Quadrats $EFGH$ in einer Höhe von $h = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |EF|$. Da $|E'F'| = |EF|$ gilt, kann man h leicht durch eine Hilfskonstruktion erhalten, indem etwa in das schon gegebene Quadrat $A'B'F'E'$ der Kantenlänge $|EF|$ die beiden Diagonalen eingezeichnet und der Diagonalenschnittpunkt N' ermittelt wird. Dann gilt $|E'N'| = h$.

Da die Strecke $M\tilde{F}$ parallel zu AE ist, wird also auch diese unverzerrt dargestellt, sodass man zuerst M' als Schnittpunkt der Diagonalen $E'G'$ und $H'F'$ erhält und dann dort in M' die Streckenlänge h auf einer Geraden durch M', die parallel zu $A'E'$ ist, „nach oben“ abträgt. Der damit erhaltene Punkt ist $\tilde{F}'$ und der Schnittpunkt der Geraden $E'G'$ und $C'\tilde{F}'$ schließlich der gesuchte Punkt P_0'.

Aufgabe 280933:
Untersuchen Sie, ob es zu jeder geraden Pyramide $P = ABCDS$ mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ eine Ebene e so gibt, dass die Schnittfigur von P mit e ein gleichseitiges Dreieck ist!
Hinweis: Gibt es nicht zu jeder Pyramide P eine solche Ebene e, so ist für eine Pyramide P diese Unmöglichkeit zu beweisen; gibt es aber zu jeder Pyramide eine solche Ebene e, so ist anzugeben, wie eine Ebene e gefunden werden kann und dass jede so gefundene Ebene e die geforderte Bedingung erfüllt.

Lösung von cyrix:
Es gibt zu jeder solcher Pyramide eine solche Ebene:
Da P eine gerade Pyramide ist, sind alle dreieckigen Seitenflächen von P zueinander kongruente gleichschenklige Dreiecke. Es sei a die Kantenlänge des Quadrats $ABCD$ (und damit Basislänge in den gleichschenkligen Dreiecken $\triangle ABS$ und $\triangle DAS$) sowie $0° < \alpha < 45°$ die Größe des Basiswinkels in den Seitenflächen.
Damit ist die Länge h der Höhe von S in den „Seitendreiecken“ nach der Definition des Tangens im rechtwinkligen Dreieck gleich $h = \frac{a}{2} \cdot \tan\alpha > 0$, da die Höhe mit der Seitenhalbierenden zusammenfällt, und die Länge s der von der Spitze S der Pyramide ausgehenden Kanten mit dem Satz des Pythagoras gleich $s = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} > 0$.

Es sei $0 \leq \beta \leq 90°$ der Winkel, der $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}$ erfüllt. Wegen $0 < \alpha < 45°$ ist $0 < \sin\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$, also $0 < \sin\beta < \frac{1}{2}$ und damit sogar $0 < \beta < 30°$. Insbesondere ist auch

$$180° > \gamma := 180° - \alpha - \beta > 180° - 45° - 30° = 105°$$

sodass sich ein stumpfwinkliges Dreieck mit den Innenwinkeln α, β und γ bilden lässt. Außerdem gilt wegen $90° < \gamma < 180°$, dass $\cos\gamma$ negativ ist. Schließlich sei f eine reelle Zahl, die definiert ist als $f := \sqrt{3 - 2\sqrt{2}\cos\gamma}$, was wegen $\cos\gamma < 0$ eine wohldefinierte, positive reelle Zahl ist.

Es sei nun $0 < x < a$ eine Länge mit $f \cdot x < s$. Wir betrachten die Punkte S_1 auf der Strecke AB und S_2 auf der Strecke DA mit $|AS_1| = |AS_2| = x$. (Wegen $0 < x < a$ liegen diese Punkte im Innern der jeweils entsprechenden Strecke.) Dann gilt (wegen des rechten Winkels bei A) offenbar $|S_1S_2| = \sqrt{2}x$.

Schließlich sei S_3 der Schnittpunkt des Kreises in der Ebene der Seitenfläche SAB um S_1 mit Radius $\sqrt{2}x$ und dem von A ausgehenden und durch S verlaufenden Strahl. (Ein solcher Schnittpunkt muss wegen $|AS_1| = x < 2\sqrt{x}$ existieren und ist dann auch aufgrund der nur einen betrachteten Richtung der von A ausgehenden Strahlen auch eindeutig bestimmt.)
Liegt S_3 im Innern der Strecke AS, so erhält man mit einem ebenen Schnitt entlang der durch S_1, S_2, S_3 definierten Ebene e genau das nach Konstruktion gleichseitige Dreieck $\triangle S_1S_2S_3$ mit Kantenlänge $\sqrt{2}x$, da nicht nur $|S_1S_2| = \sqrt{2}x = |S_3S_1|$, sondern aus Symmetriegründen auch $|S_3S_2| = |S_3S_1| = \sqrt{2}x$ gilt.

Wir zeigen nun, dass S_3 im Innern der Strecke AS liegt, indem wir das Dreieck $\triangle AS_1S_3$ betrachten und die Streckenlänge $|AS_3|$ berechnen. Dazu berechnen wir erst dessen Innenwinkel:

Es ist $\angle S_1AS_3 = \angle BAS = \alpha$ und nach dem Sinussatz

$$\frac{\sin \angle AS_3S_1}{|AS_1|} = \frac{\sin \angle S_1AS_3}{|S_1S_3|}.$$

Setzt man hierin die schon bekannten Größen $|AS_1| = x$, $|S_1S_3| = \sqrt{2}x$ und $\angle S_1AS_3 = \alpha$ ein, erhält man

$$\sin \angle S_1AS_3 = \frac{x}{\sqrt{2}x} \cdot \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} = \sin \beta,$$

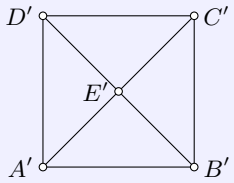
also wegen $\beta < \alpha < 90°$ (der kleineren Seite $|AS_1| = x < \sqrt{2}x = |S_1S_3|$ liegt auch der kleinere Winkel gegenüber) auch $\angle S_1AS_3 = \beta$. Nach der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle AS_1S_3$ ist damit schließlich auch $\angle S_3S_1A = \gamma$, sodass wir seine drei Innenwinkel schon kennen.
Nach dem Kosinussatz in diesem Dreieck gilt dann

$$|AS_3| = \sqrt{|AS_1|^2 + |S_1S_3|^2 - 2 \cdot |AS_1| \cdot |S_1S_3| \cdot \cos\gamma} = \sqrt{x^2 + 2x^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{2}x \cdot \cos\gamma} =$$

$$= x \cdot \sqrt{3 - 2\sqrt{2}\cos\gamma} = f \cdot x < s = |AS|,$$

sodass S_3 tatsächlich im Innern der Strecke AS liegt und man durch S_1, S_2 und S_3 die Ebene e definieren kann, die beim Schnitt mit P die Schnittfläche des gleichseitigen Dreiecks $\triangle S_1S_2S_3$ erzeugt, □.

Aufgabe 290933:



Von einem ebenflächig begrenzten Körper werden folgende Bedingungen gefordert:
(1) Der Körper hat genau fünf Eckpunkte A, B, C, D, E.
(2) Bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Bildebene sind die Bildpunkte A', B', C', D', E' die Eckpunkte bzw. der Mittelpunkt eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a.
Blickt man in Projektionsrichtung auf die Bildebene (diese Blickrichtung sei als Richtung von „oben“ nach „unten“ bezeichnet), so sind die Eckpunkte und Kanten in gleicher Weise unverdeckt sichtbar, wie in der Abbildung angegeben.
(3) Die durch A, B, C gehende Ebene ε ist parallel zu der in (2) genannten Bildebene.
(4) Der Punkt D liegt „oberhalb“ der Ebene ε im Abstand $\frac{a}{2}$ von ihr.
(5) Der Punkt E liegt „oberhalb“der Ebene ε im Abstand a von ihr.
(6) Der Körper hat das Volumen $\frac{1}{4}a^3$.
Zeigen Sie, dass der Körper durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt ist, und zeichnen Sie diesen Körper in schräger Parallelprojektion!

Lösung von cyrix:
Da laut Bedingung (3) die Ebene ε parallel zur Bildebene ist und sonst in den weiteren Bedingungen nur von ε die Rede ist, können wir o. B. d. A. die Bildebene mit ε – und diese mit der xy-Ebene – identifizieren. Legen wir dort noch A in den Koordinatenursprung sowie B und C geeignet, dass sie die weiteren Eckpunkte des Quadrats darstellen, erhalten wir also aus den Bedingungen (2) bis (5) die Koordinaten aller fünf Punkte A bis E, die im Folgenden angegeben werden:

$$A(0,0,0), \quad B(a,0,0), \quad C(a,a,0), \quad D\left(0,a,\frac{a}{2}\right), \quad E\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},a\right)$$

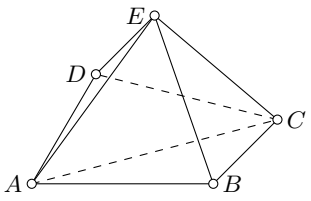
Aus der Zeichnung ergibt sich, dass alle vier Punkte A bis D jeweils mit E durch eine Kante verbunden sind. Damit lässt sich der aus allen fünf Punkten bestehende Körper auffassen als die Vereinigung der beiden Tetraeder $ABCE$ und $ACED$. Diese beiden Tetraeder besitzen die gemeinsame Fläche $\triangle ACE$, jedoch keine gemeinsamen inneren Punkte, sodass sich das Volumen des Gesamtkörpers aus der Summe der Volumina der beiden Tetraeder berechnet.

Zur Berechnung des Volumens des Tetraeders $ABCE$ betrachten wir zuerst desen Grundfläche $\triangle ABC$. Dieses ist gleichschenklig rechtwinklig mit Kathetenlänge a, sodass es einen Flächeninhalt von $\frac{1}{2}\cdot a\cdot a = \frac{1}{2}\cdot a^2$ besitzt.
Die Spitze E dieses Tetraeders hat nach (5) eine Höhe von a über der Ebene, in der die Grundfläche liegt, sodass sich für den Tetraeder ein Volumen von $V_1 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot a^2\right)\cdot a = \frac{1}{6}\cdot a^3$ ergibt.

Zur Berechnung des Volumens des Tetraeders $ACED$ betrachten wir zuerst dessen Grundfläche $\triangle ACE$. Dieses hat eine Grundseite AC der Länge $\sqrt{2}\cdot a$ und eine Höhe des dritten Punkts E auf diese Seite der Länge a, also einen Flächeninhalt von $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot a\cdot a = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a^2$. Die Ebene durch die Punkte A, C und E verläuft parallel zur Projektionsrichtung, sodass das Lot von D auf diese Ebene parallel zur Bildebene – und damit der xy-Ebene – verläuft, also die gleiche Länge besitzt wie die dazu parallele Strecke $D'E'$, da das Viereck $D'E'LD$, wobei L der Lotfußpunkt von D ist, ein Rechteck darstellt. Also besitzt die Spitze D des Tetraeders $ACED$ eine Höhe von $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a$ über der Grundfläche $\triangle ACE$, sodass sich für diesen Tetraeder ein Volumen von $V_2 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a^2\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a = \frac{1}{6}\cot a^3$ ergibt.

Damit hat der Gesamtkörper $ABCDE$ das Volumen $V = V_1 + V_2 = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)\cdot a^3 = \frac{1}{3}\cdot a^3$, im Widerspruch zu Bedingung (6). Es gibt also keinen solchen Körper.

Bemerkung:
Wäre in den Bedingungen (4) und (5) nicht eine Beschreibung der Lage von D und E relativ zur Ebene ε durch A, B und C gegeben, sondern relativ zur Bildebene, so wären die Höhen von D und E über ε – und damit der xy-Ebene – noch nicht eindeutig bestimmt.
Da die Bildebene „unterhalb“ (oder auf) der Ebene ε liegen muss, damit die Kanten des Dreiecks $\triangle ABC$ sichtbar sind und E „oberhalb“ (oder auf) der Ebene ε liegen muss, damit die Kanten AE, BE und CE sichtbar sind, gilt dann, dass E die Höhe h „über“ ε besitzt, wobei $0 \le a-h \le a$ der Abstand der Ebene ε zur Bildebene sei.
Der Tetraeder $ABCE$ hätte dann nur noch das Volumen $V_1 = \frac{1}{6}\cdot a^2\cdot h$ und der Tetraeder $ACED$ analog das Volumen $V_2 = \frac{1}{6}\cdot a^2\cdot h$, sodass sich für den Gesamtkörper ein Volumen von $V = \frac{1}{3}\cdot a^2\cdot h$ ergäbe, was mit Bedingung (6) auf $h = \frac{3}{4}\cdot a$ und damit die eindeutig bestimmten Koordinaten $E\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{3}{4}\cdot a\right)$ und $D\left(0,a,\frac{a}{4}\right)$ führt.
Eine Darstellung dieses Körpers kann man nun leicht aus den Koordinaten seiner Eckpunkte erhalten.



Aufgabe 340936:
Es sei $ABCD$ ein (nicht notwendig regelmäßiges) Tetraeder, bei dem die vier Tetraederflächen ABC, ABD, ACD und BCD alle einander kongruent sind.
Ferner sei h die Länge der auf einer der vier Tetraederflächen senkrechten Höhe, und P sei ein Punkt im Innern des Tetraeders $ABCD$.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die folgende Aussage gilt:
Die Summe der Abstände von P zu den vier Tetraederflächen beträgt h.
Hinweis:
Der Abstand eines Punktes zu einer begrenzten ebenen Fläche werde definiert als die Länge des Lotes von diesem Punkt auf die ebene, in der die Fläche liegt. Das gelte auch dann, wenn der Fußpunkt des Lotes (zwar in der Ebene, aber) außerhalb der Begrenzung der ebenen Fläche liegt.
In diesem Sinne wird auch die auf einer Tetraederfläche senkrechte Höhe stets als Lot von der Gegenecke auf die Ebene verstanden, in der die Tetraederfläche liegt.

Lösung von cyrix:
Es sei A der Flächeninhalt einer (und damit jeder der) Tetraederfläche(n) und V das Volumen des Tetraeders $ABCD$. Dann gilt $V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h$.

Das Tetraeder $ABCD$ lässt sich durch die Verbindungsstrecken von P zu den vier Eckpunkten vollständig in die vier Tetraeder $ABCP$, $ABDP$, $ACDP$ und $BCDP$ zerlegen, deren Volumina V_1, V_2, V_3 und V_4 bezeichnet seien. Dann gilt $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$.
Seien weiterhin h_1, h_2, h_3 und h_4 die Längen der Höhen von P auf die Tetraederflächen ABC, ABD, ACD bzw. BCD, so gilt wegen der Kongruenz dieser vier Tetraederflächen $V_i = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h_i$ für alle $i = 1,2,3,4$. Insbesondere ist also

$$\frac{1}{3} \cdot A \cdot h = V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{3} \cdot A \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$$

und damit wegen $A \neq 0$ schließlich $h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$, $\square$.

Aufgabe 340945:
Einem regelmäßigen Tetraeder $ABCD$ wird die Inkugel K einbeschrieben (das ist diejenige Kugel, die alle vier Dreiecksflächen ABC, ABD, ACD, BCD berührt).
Dieser Kugel wird ein zweiter regelmäßiger Tetraeder $PQRS$ einbeschrieben (d. h., seine Ecken P, Q, R, S liegen alle auf der Oberfläche der Kugel K).
Welches Verhältnis $V_2 : V_1$ bildet das Volumen V_2 eines solchen Tetraeders $PQRS$ mit dem Volumen V_1 von $ABCD$?

Lösung von cyrix:
In- und Umkugelmittelpunkt eines regelmäßigen Tetraeders fallen mit dem Schnittpunkt seiner Schwerelinien zusammen. Da sich diese im Verhältnis 3:1 schneiden und senkrecht auf den jeweiligen Seitenflächen stehen, ist also der Umkugelradius eines Tetraeders genau dreimal so groß wie sein Inkugelradius.

Da der Inkugelradius r_1 von $ABCD$ genau dem Umkugelradius von $PQRS$ entspricht, beträgt also dessen Inkugelradius r_2 genau $\frac{1}{3} r_1$.
Mittels Strahlensatz folgt schnell, dass die Kantenlängen und Inkugelradien von regelmäßigen Tetraedern im gleichen Verhältnis stehen, ihre Volumina aber in der dritten Potenz dieses Verhältnisses. Also gilt

$$V_2 : V_1 = (r_2 : r_1)^3 = (1 : 3)^3 = 1^3 : 3^3 = 1 : 27$$

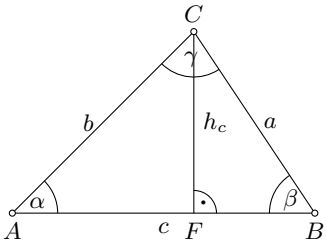
VI Klasse 10

VI.I Dreiecke

I Runde 1

Aufgabe V01009:
Von einem nicht rechtwinkligen Dreieck sind die Winkel und die Seite c gegeben. Leiten Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe h_c her!

Lösung von Steffen Polster:



In den rechtwinkligen Dreiecken AFC und BFC gilt zum einen $h_c = a \sin\alpha$, zum anderen $h_c = b \sin\beta$. Für den Flächeninhalt F wird mit dem Einsetzen der zwei Gleichungen

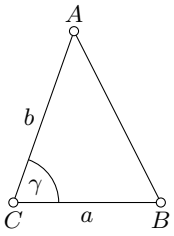
$$F = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} \frac{h_c}{\sin\alpha} \frac{h_c}{\sin\beta} \sin\gamma$$

Auflösen der Gleichung nach h_c ergibt die gesuchte Beziehung

$$h_c = \frac{c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

Aufgabe V01011:
In einem Steinkohlenbergwerk sind von einem Punkt aus in gleicher Höhe zwei horizontal verlaufende Stollen von 162,5 m und von 200 m Länge vorgetrieben worden. Sie schließen einen Winkel von 70,5° ein. Die Endpunkte sollen durch einen Stollen verbunden werden.
Wie lang wird er?

Lösung von svrc:



Der Punkt, von dem die beiden Stollen ausgehen und in einer Ebene liegen, soll mit C bezeichnet werden. Die beiden Stollenlängen sind $a = 162{,}5\text{m}$ und $b = 200\text{m}$. Der Winkel, der von den beiden Stollenlängen a und b am Punkt C eingeschlossen wird, wird $\gamma = 70{,}5°$ genannt. Die gesuchte Stollenlänge nennen wir c.

Da im Dreieck die zwei Seiten und deren eingeschlossener Winkel gegeben sind, folgt die eindeutige Konstruierbarkeit bis auf Kongruenz aus den Kongruenzsätzen.

Mit dem Kosinussatz gilt

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \\ &= (162{,}5\text{m})^2 + (200\text{m})^2 - 2 \cdot (162{,}5\text{m}) \cdot (200\text{m}) \cdot \cos(70{,}5°) \approx 44708{,}8\text{m}^2 \end{aligned}$$

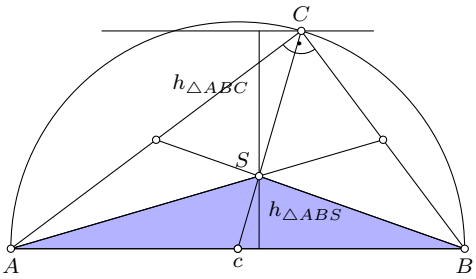
und damit $c \approx 211{,}4\text{m}$. Somit wird der Verbindungsstollen ungefähr 211,4m lang.

Aufgabe V01017:
Berechnen Sie die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, von dem gegeben sind:
a) Fläche des durch die Dreieckspunkte A, B und den Schwerpunkt S des Dreiecks bestimmten Dreieck

$$F_1 = 6\frac{2}{3}\ \text{cm}^3$$

b) Hypotenuse $AB = c = 10$ cm.

Lösung von J. Lehmann und W. Unze:



Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Schwerpunkt S des Dreiecks ABC. Der Schwerpunkt S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.
Aus $F = \frac{gh}{2}$ folgt $h = \frac{2F}{g}$ und damit für das Dreieck ABS: $h_{\triangle ABS} = \frac{4}{3}$. Auch die Höhenabschnitte verhalten sich wie 1:2, daraus folgt:

$$h_{\triangle ABC} = 3h_{\triangle ABS} = 4\ \text{cm} \quad \Rightarrow \quad F_{\triangle ABC} = \frac{c \cdot h}{2} = 20\ \text{cm}^2$$

Aus den Verbindungslinien des Schwerpunkts S mit den Dreieckspunkten A, B und C entstehen somit drei flächengleiche Teildreiecke.
Aus c und h ergeben sich dann die Katheten mittels Höhensatz und Satz des Pythagoras zu $a = 8{,}94$ cm sowie $b = 4{,}47$ cm.

Aufgabe V11013:
Von einem Dreieck sind gegeben: $a = 5$ cm, $\beta = 47°$ und $\gamma = 55°$.
Berechnen Sie b, c und α!

Lösung von svrc:
Da die Winkel β und γ an der Seite a anliegen, ist dieses Dreieck nach den Kongruenzsätzen bis auf Kongruenz eindeutig konstruierbar.
Für den Winkel α gilt nach Innenwinkelsummensatz im Dreieck

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 47° - 55° = 78°.$$

Mit dem Sinussatz gilt

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}$$

und daher

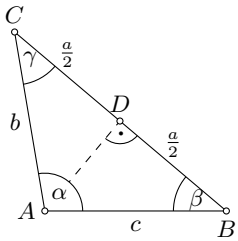
$$b = a \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = 5\text{cm} \cdot \frac{\sin(47°)}{\sin(78°)} \approx 3{,}74\text{cm}.$$

Ebenso folgt mit dem Sinussatz

$$c = a \cdot \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = 5\text{cm} \cdot \frac{\sin(55°)}{\sin(78°)} \approx 4{,}19\text{cm}.$$

Aufgabe 011011:
Von einem gleichschenkligen Dreieck sind gegeben: $AB = c = 87{,}51$ m, $\angle CAB = \alpha = 93{,}42°$.
Berechnen Sie die restlichen Winkel und Seiten!

Lösung von Christiane Czech:



Wegen $2\alpha > 180°$ kann α kein Basiswinkel sein. Für die Größe der beiden Basiswinkel $\angle ABC = \beta$ und $\angle ACB = \gamma$ gilt dann

$$\beta = \gamma = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 43{,}29°$$

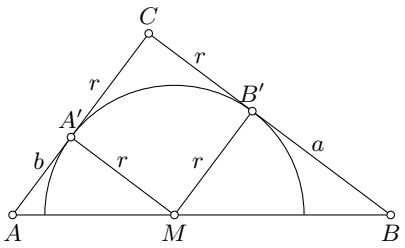
Da $AC = b$ wie AB ein Schenkel ist, gilt $b = c = 87{,}51$ m. Zeichnet man die auf $BC = a$ stehende Höhe AD ein, so erhält man im entstehenden rechtwinkligen Dreieck ABD die Gleichung $\cos\beta = \frac{a}{2c}$ und damit $a = 2c \cdot \cos\beta = 127{,}40$ m.

Aufgabe 021013:
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C.
Es ist zu beweisen, dass für den oberhalb der Hypotenuse konstruierten Halbkreis, der die Katheten $AC = b$ und $BC = a$ berührt, stets

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

ist, wobei r der Radius dieses Halbkreises sein soll!

Lösung von André Lanka:



Sei M der Mittelpunkt des Halbkreises mit Radius r und A' bzw. B' die Berührungspunkte des Halbkreises mit der Seite a bzw. b. Dann steht die Strecke MA' senkrecht auf a, weil a Tangente am Halbkreis ist. Ebenso steht MB' senkrecht auf b. Das Viereck $MA'CB'$ ist wegen drei rechten Winkel also ein Rechteck. Da weiterhin die benachbarten Seiten MA' und MB' gleichlang sind, handelt es sich um ein Quadrat.
Einerseits ist der Flächeninhalt F des Dreiecks $\triangle ABC$

$$F = \frac{ab}{2}$$

andererseits ist

$$F = r^2 + \frac{(b-r)r}{2} + \frac{(a-r)r}{2} = \frac{br}{2} + \frac{ar}{2}$$

Nach Gleichsetzung beider Formeln und Multiplikation mit $\frac{2}{abr}$, gewinnt man die gesuchte Gleichung

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Aufgabe 071012:
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$, dessen Seiten folgende Längen (in cm) haben: $\overline{AB} = 13$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{AC} = 5$. Die Seite $\overline{AB}$ ist durch einen Punkt T so zu teilen, dass die Umfänge der Dreiecke $\triangle ATC$ und $\triangle TBC$ gleichlang sind.

Der Flächeninhalt (in cm^2) des Dreiecks $\triangle TBC$ ist zu berechnen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Alle Zahlenangaben verstehen sich in cm.

Zunächst kann mit der Umkehrung vom Satz des Pythagoras gezeigt werden, dass es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt:

Es gilt: $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2 = \overline{AB}^2$ und somit auch, dass das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig mit rechtem Winkel bei $\angle ACB$ ist.

Für die Umfänge der Dreiecke ergibt sich jeweils:

(1) $u_{\triangle ATC} = \overline{AC} + \overline{AT} + \overline{CT}$

(2) $u_{\triangle BTC} = \overline{BC} + \overline{BT} + \overline{CT}$

Bei gleichen Umfängen der Teildreiecke und Zusammensetzung von $\overline{AB}$ aus $\overline{AT}$ und $\overline{BT}$, ergibt sich für $\overline{BT}$:

$$\begin{aligned} \overline{AC} + \overline{AT} + \overline{CT} &= \overline{BC} + \overline{BT} + \overline{CT} \\ \overline{AC} + \overline{AT} &= \overline{BC} + \overline{BT} \\ \overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BT} &= \overline{BC} + \overline{BT} \\ \overline{BT} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}\right) \end{aligned} \tag{VI.1}$$

Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes kann auf 2 verschiedene Arten berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot g \cdot h &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \\ \overline{AB} \cdot h &= \overline{BC} \cdot \overline{AC} \\ h &= \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB}} \end{aligned} \tag{VI.2}$$

Nun ergibt sich für den Flächeninhalt des Teildreiecks $\triangle TBC$ mit (1) und (2):

$$\begin{aligned} A_{\triangle TBC} &= \frac{1}{2} \cdot \overline{BT} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{AB} + \overline{AC} - \overline{BC}\right) \cdot \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot (13 + 5 - 12) \cdot \frac{12 \cdot 5}{13} \approx 6{,}9 \end{aligned}$$

Das Teildreieck $\triangle TBC$ hat somit einen Flächeninhalt von ungefähr $6{,}9 cm^2$.

Aufgabe 141013:
In einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem seien die Punkte $A(-\frac{1}{2}; 0)$ und $B(\frac{1}{2}; 0)$ gegeben.

a) Beweisen Sie, dass es möglich ist, die Koordinaten von vier Punkten P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ so anzugeben, dass für die Menge dieser vier Punkte die folgenden Bedingungen erfüllt sind!
   (1) Die Längen aller Strecken AP_i und BP_i sind ganzzahlig.
   (2) Es gibt keine Gerade, auf der drei der Punkte P_i liegen.

b) Beweisen Sie, dass es keine Menge aus mehr als vier Punkten P_i mit den Eigenschaften (1) und (2) gibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, für einen Punkt P seien $|AP| = a$ und $|BP| = b$ ganzzahlig. Wegen $|AB| = 1$ gilt dann nach der Dreiecksungleichung $a - 1 \leq b = a + 1$.

Ist $a-1=b$ oder $b=a+1$, so bilden A, B, P kein Dreieck, sondern es gibt eine Gerade, die A, B und P enthält; dann liegt also P auf der x-Achse.

Ist $a-1<b<a+1$, so folgt, da a, b ganzzahlig sind, $a=b$. Dann liegt P auf der Mittelsenkrechten von AP, d. h. auf der y-Achse. Hieraus folgt bereits die Behauptung b), da unter den Punkten P_i einer Menge mit den Eigenschaften I und II höchstens zwei Punkte auf der x-Achse und höchstens zwei Punkte auf der y-Achse auftreten können.

Um a) nachzuweisen, genügt es, ein Beispiel anzugeben. Dies kann man folgendermaßen finden:

Für einen Punkt $P(x,0)$ auf der x-Achse sind

$$|AP| = \left|x+\frac{1}{2}\right| \qquad \text{und} \qquad |BP| = \left|x-\frac{1}{2}\right|$$

genau dann ganzzahlig, wenn $x-\frac{1}{2}=m$ ganzzahlig ist, also $x=m+\frac{1}{2}$ (1) mit ganzem m gilt. Für einen Punkt $P(0,y)$ auf der y-Achse ist

$$|AP| = |BP| = \sqrt{\frac{1}{4}+y^2} = n$$

genau dann ganzzahlig, wenn

$$y = \pm\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}$$

mit ganzem n gilt.

Daher erhält man z. B. dadurch vier derartige Punkte, dass man $(x,0)$ mit x aus (1) für $m=-1$ und $m=0$ sowie $(0,y)$ mit y aus (2) für $n=1$ wählt. In diesem Fall ergeben sich die Punkte

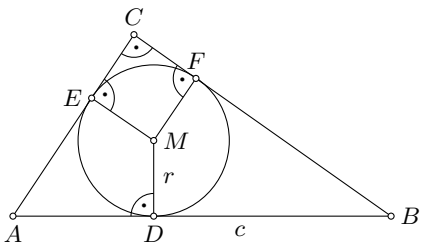
$$P_1\left(-\frac{1}{2},0\right)=A \quad , \quad P_2\left(\frac{1}{2},0\right)=B \quad , \quad P_3\left(0,\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \quad , \quad P_4\left(0,-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$$

Diese erfüllen nach dem eben Gezeigten die Bedingung 1. Sie erfüllen aber auch die Bedingung II; denn unter je dreien von ihnen gibt es zwei, deren Verbindungsgerade eine Koordinatenachse ist, die nicht durch den dritten geht.

Aufgabe 151012:
Von einem rechtwinkligen Dreieck seien die Länge c der Hypotenuse und die Länge r des Inkreisradius bekannt.

Ermitteln Sie den Umfang des Dreiecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei Dreieck ABC rechtwinklig mit $\angle ACB = 90°$. Ferner seien M der Mittelpunkt des Inkreises und D, E und F die Fußpunkte der von M auf die Seiten AB, AC und BC (in dieser Reihenfolge) gefällten Lote.

Da der Inkreis die Seiten in diesen Punkten berührt, sind D, E und F innere Punkte der Seiten. Nun gilt für den Umfang u des Dreiecks

$$u = AD + DB + AE + EC + BF + CF \tag{1}$$

Ferner gilt

$$AD = AE, \qquad DB = BF, \qquad EC = CF \tag{2}$$

als Abschnitte der Tangenten an den Inkreis. Setzt man (2) in (1) ein, so erhält man

$$u = 2AD + 2DB + 2EC \qquad \text{oder} \qquad u = 2(AD + DB) + 2EC \tag{3}$$

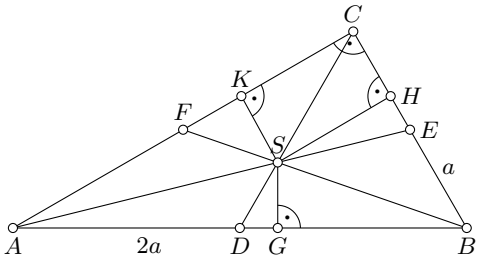
Das Viereck $MFCE$ enthält drei rechte Winkel und mit EM und MF ein Paar kongruenter Nachbarseiten. Es ist demnach ein Quadrat. Folglich hat EC die Länge r.

Unter Berücksichtigung von $AD + DB = AB$ folgt dann aus (3) $u = 2c + 2r$ oder $u = 2(c + r)$.

Aufgabe 161014:
Gegeben sei eine Streckenlänge a. Ein Dreieck ABC habe die Eigenschaften $\overline{AB} = 2a$, $\overline{BC} = a$, $\overline{\angle ACB} = 90°$.

Berechnen Sie die Abstände des Schnittpunktes der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks von jeder der Dreieckseiten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit der geforderten Eigenschaft. Darin seien d, E und F die Mittelpunkte der Seiten AB, BC und AC, und es sei S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden. Dann gilt:

(1) Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegt C auf einem Halbkreis über AB. Damit gilt $CD = a$.

(2) Da $\triangle DBC$ gleichseitig ist, folgt $\angle DCB = \angle CDB = \angle DBC = 60°$ und somit $\angle DCF = 30°$.

(2) Da der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden eines Dreiecks diese im Verhältnis $2 : 1$ teilt, ist ferner $SD = \frac{a}{3}$ und $SC = \frac{2}{3}a$.

(2) Sei nun G der Fußpunkt des von S auf AB gefällten Lotes, dann ist SC der Abstand des Punktes S von der Seite AB.

Wegen $\angle SDG = 60°$ kann SG als Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $SD = \frac{a}{3}$ aufgefasst werden. Demnach gilt $SG = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$.

(2) Sei H der Fußpunkt des von S auf die Seite BC gefällten Lotes, dann ist SH der Abstand des Punktes S von der Seite BC.

Wegen $\angle SCH = 60°$ kann SH als Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $SC = \frac{2}{3}a$ aufgefasst werden. Somit gilt $SH = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.

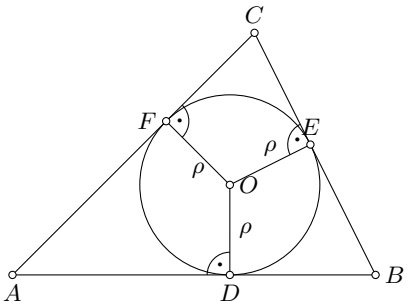
(2) Sei nun K der Fußpunkt des von S auf AC gefällten Lotes, dann ist SK der Abstand des Punktes S von der Seite AC.

Wegen $\angle SCF = 30°$ kann SK als halbe Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $SC = \frac{2}{3}a$ aufgefasst werden. Daher ist SK halb die lang wie SC. Somit gilt $SK = \frac{a}{3}$.

Aufgabe 181014:

Da sei ein Dreieck ABC
mit rechtem Winkel ACB.
Der Inkreisradius sei ρ.
(Man nennt ihn nun mal gerne so.)
Dann möge man das c noch kennen.
(Man kann's auch Hypotenusenlänge nennen.)
Nun gilt es, nur mit diesen Stücken
den Flächeninhalt auszudrücken.
Man muss sich nach Gesetzen richten,
(doch braucht man nicht dabei zu dichten.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

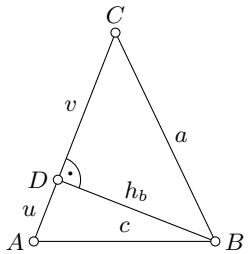


Der Inkreismittelpunkt sei O.
Dann steht gewiss der Radius ρ
stets senkrecht einmal auf AB,
zum zweiten tut er's mit BC.
Auch mit AC, der dritten Strecke,
da bildet er 'ne rechte Ecke;
Die Punkte, wo jeweils der Treff,
bezeichnet man mit D, E, F.
Das Dreieck ABO dabei,
des Inhalt $c \cdot \rho : 2$
wird durch DO nochmals geteilt.
Wenn man bei $\triangle ADO$ verweilt
und es mit $\triangle AFO$ vergleicht,
so sieht man - wie so üblich „leicht"
dass beide Flächen kongruent,
falls man den Kongruenzsatz kennt,
den man mit ssw beschreibt,
AO sich nämlich selbst gleich bleibt;
dann ist CD genau gleich ρ
und für OF gilt's ebenso;
der Winkel $\angle ADO$ ist Rechter,
und $\angle AFO$ macht's auch nicht schlechter.
Auch für das Dreieck BOD
stimmt der Vergleich mit $\triangle BOE$.
Das Viereck mit $FCEO$
bleibt noch als Rest.
Jetzt denkt man so:
Da drei der Winkel 90 Grad,
wohl auch der vierte soviel hat.
Darum muss es ein Rechteck sein.
Setzt man die Seitenlängen ein,
erkennt man, dass es folglich hat
den Flächeninhalt ρ^2.
Und unsre Lösung heißt nun so:
$\rho^2 + c \cdot \rho$.

Aufgabe 201013:
Gegeben seien die Seitenlängen $a = \overline{BC} = 15cm$, $b = \overline{AC} = 14cm$, $c = \overline{AB} = 13cm$ eines Dreiecks ABC.

Berechnen Sie die Länge h_b der durch B verlaufenden Höhe und den Flächeninhalt F dieses Dreiecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Fußpunkt der genannten Höhe sei D; es sei $u = AD$, $v = CD$. Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$h_b^2 + v^2 = a^2 \quad (1) \qquad ; \qquad h_b^2 + u^2 = c^2 \quad (2)$$

Daraus folgt

$$v^2 - u^2 = a^2 - c^2 \qquad ; \qquad (v-u)(v+u) = 56 \text{ cm} \qquad (3)$$

Läge D nicht zwischen A und C, so wäre $v - u = b = 14$ cm; hieraus und aus (3) folgte $v + u = 4$ cm, so dass der Widerspruch $v + u < v|u$ entstünde. Daher liegt D zwischen A und C, es gilt

$$v + u = b = 14 \text{ cm} \qquad (4)$$

hieraus und aus (3) folgt $v - u = 4$ cm (5), aus (4) und (5) ergibt sich $2v = 18$ cm, $v = 9$ cm; hieraus und aus (1) folgt

$$h_b = \sqrt{a^2 - v^2} = 12 \text{ cm}$$

Damit erhält man auch $F = \frac{b \cdot h_b}{2} = 84$ cm^2.

Aufgabe 211013:
Für Kreisflächen ist bekanntlich der Begriff des Durchmessers definiert. Man kann aber auch für andere Flächenstücke F eine „längste Strecke“ als „Durchmesser“ bezeichnen.[1)]

Ist beispielsweise F die Fläche eines Dreiecks ABC (einschließlich des Randes) und gilt $\overline{AB} \geq \overline{AC}$ sowie $\overline{AB} \geq \overline{BC}$, so ist die Länge $\overline{AB}$ der Durchmesser d von F; denn dann lässt sich beweisen, dass für beliebige Punkte X, Y der Dreiecksfläche F stets $\overline{AB} \geq \overline{XY}$ ist.

Untersuchen Sie, ob die beiden folgenden Aussagen (1), (2) wahr sind!

(1) Man kann nicht jede Dreiecksfläche F so durch eine Gerade in zwei Dreiecksflächen F', F'' zerlegen, dass jede der beiden Flächen F', F'' einen kleineren Durchmesser hat als F.

(2) Es gibt eine Dreiecksfläche F, die man so durch eine Gerade in zwei Dreiecksflächen F', F'' zerlegen kann, dass jede der beiden Flächen F', F'' einen kleineren Durchmesser hat als F.

[1)] Das heißt man kann definieren: Wenn es zwei Punkte P, Q in F mit der Eigenschaft gibt, dass für beliebige Punkte X, Y in F stets $\overline{PQ} \geq \overline{XY}$ gilt, so heißt die Länge $d = \overline{PQ}$ der „Durchmesser“ von F.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Dreiecksfläche F wird nur dann durch eine Gerade in zwei Dreiecksflächen zerlegt, wenn diese Gerade durch einen Eckpunkt von F geh , da andernfalls nur Zerlegungen entstehen können, bei denen eine Teilfläche ein Viereck ist.

Zu (1): Ist F die Fläche eines Dreiecks ABC mit $AB = AC \geq BC$, so ist ihr Durchmesser die Länge $d = AB = AC$. Bei jeder Zerlegung von F in zwei Dreiecksflächen F', F'' hat mindestens eine dieser beiden Dreiecksflächen noch eine Seite mit der Länge d als längste Seite; d. h., sie hat denselben Durchmesser d wie F.

Also ist die Aussage (1) wahr.

Zu (2): Ist F die Fläche eines Dreiecks ABC mit $AB > AC$ und $AB > BC$, so ist ihr Durchmesser die Länge $d = AB$. Eine Gerade, die durch C und einen Punkt P zwischen A und B geht, zerlegt F in zwei Dreiecksflächen F', F'', für die folgendes gilt:

Mindestens einer der Winkel $\angle APC, \angle BPC$ ist größer oder gleich $90°$, also in den Dreiecken APC bzw. BPC der größte Winkel. Daher gilt mindestens eine der Ungleichungen $AC > PC$, $BC > PC$ und somit wegen $AB > AC$ und $AB > BC$ jedenfalls $AB > PC$.

Ferner gelten die beiden Ungleichungen $AB > AP$ und $AB > BP$. Also sind in den beiden Dreiecken APC, BPC alle Seitenlängen kleiner als $d - AB$.

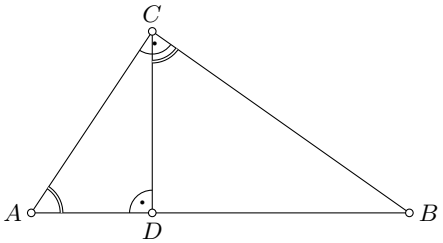
Folglich hat jede der beiden Flächen F', F'' einen kleineren Durchmesser als F. Somit ist auch Aussage (2) wahr.

Aufgabe 241012:
In einem Dreieck ABC mit spitzen Innenwinkeln bei A und B sei das Lot von C auf AB gefällt. Sein Fußpunkt sei D. Für ihn gelte.

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{CD}.$$

Ermitteln Sie aus dieser Voraussetzung die Größe des Innenwinkels $\angle ACB$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da in dem Dreieck ABC die Innenwinkel bei A und B spitz sind, liegt die Höhe CD innerhalb des Dreiecks. Nach Voraussetzung gilt $\angle CDA = \angle BDC = 90°$.

Aus der Voraussetzung folgt ferner $AC : CD = CB : BC$.
Daher sind die Dreiecke ACD und CBD nach dem Ähnlichkeitssatz „ssw“ einander ähnlich, da der jeweils genannte Winkel, in dem sie übereinstimmen, ein rechter Winkel ist, so dass ihm die größere der beiden jeweils genannten Seiten gegenüberliegt.

Daraus folgt $\angle DAC = \angle DCB$ (1).

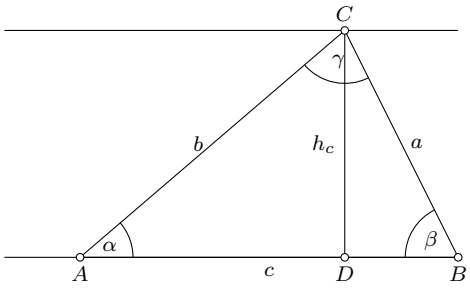
Ferner gilt in dem rechtwinkligen Dreieck ADC nach dem Winkelsummensatz $\angle ACD = 90° - \angle DAC$. Wegen (1) erhält man damit

$$\angle ACB = \angle ACD + \angle DCB = 90°$$

II Runde 2

Aufgabe V11022:
An dem linken Ufer eines Flusses, dessen Ufer geradlinig und parallel verlaufen, ist eine Standlinie $AB = 250$ m abgesteckt worden (Messfehler $\pm 0{,}50$ m). Es wird der an dem rechten Ufer liegende Punkt C angepeilt, und man misst die Winkel $\angle CAB = 41°, \angle ABC = 72°$.
Da nicht sehr genau gemessen wurde, beträgt der Messfehler für beide Winkel je $\pm\frac{1}{2}°$.
a) Berechnen Sie die Breite x des Flusses ohne Berücksichtigung der Messfehler!
b) Berechnen Sie den möglichen Fehler des Resultats.

Lösung von Steffen Polster:



a) Allgemeine Lösung: Es gilt $\sin\beta = \frac{CD}{CB} = \frac{h_c}{a}$ sowie $h_c = a\sin\beta$. Aus dem Sinussatz wird durch Einsetzen

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma} \qquad \Rightarrow \qquad h_c = \frac{c\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(180° - \alpha - \beta)}$$

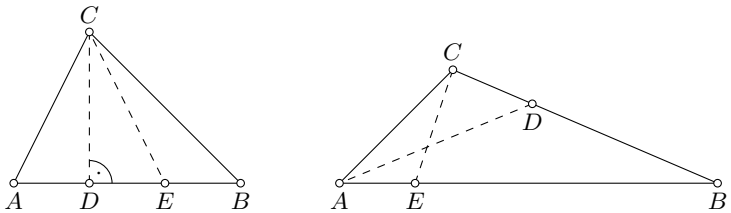
Für die gegebenen Werte ergibt sich somit $h_c = 169{,}5$ m. Die Breite des Flusses beträgt ohne Berücksichtigung des Messfehlers 169,5 m.

b) Berechnet man die Höhe h_c mit $c + 0.5$, $\alpha + 0.5°$ und $\beta + 0.5°$ ergibt sich $h_c = 173{,}3$ m.
Im Fall $c - 0.5$, $\alpha - 0.5°$ und $\beta - 0.5°$ wird $h_c = 165{,}7$ m.
Der mögliche Fehler ist somit $\frac{173{,}5 - 165{,}5}{2} = 4$ m.

Aufgabe 011023:
Ist es möglich, ein beliebiges ungleichseitiges Dreieck in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen?
Die Behauptung ist zu begründen!

Lösung von Eckard Specht:
Nein, es ist nicht möglich, ein beliebiges ungleichseitiges Dreieck in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen.

Beweis: Zunächst ist festzustellen, dass der Schnitt durch das Dreieck ABC durch einen der Eckpunkte gehen muss, da ansonsten ein Viereck entsteht.
Angenommen, ABC sei spitzwinklig (linkes Bild).



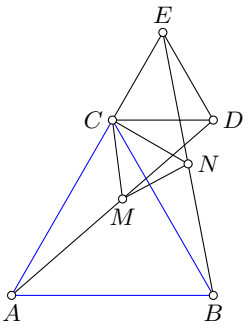
Dann erzeugt jeder geradlinige Schnitt durch einen Eckpunkt, hier C, an der gegenüberliegenden Seite AB zwei Winkel, von denen entweder beide rechtwinklig ($\angle CDA = \angle CDB = 90°$) oder einer spitz- und der andere stumpfwinklig ($\angle CEA < \angle CEB$) sind.

Im ersten Fall können die Dreiecke CDA und CDB nicht kongruent sein, da ihre Hypotenusen nach Voraussetzung ungleich lang sind; im zweiten Fall entsteht nur ein stumpfer Winkel, der keinen „Partner“ im anderen Teildreieck hat.

Ist das zu teilende Dreieck ABC dagegen stumpfwinklig (rechtes Bild), so erzeugt ein Schnitt durch einen der Eckpunkte, an denen spitze Innenwinkel vorliegen, hier AD, auf der gegenüber-liegenden Seite zwar einen stumpfen Winkel, der aber stets größer als der stumpfe Innenwinkel in $\triangle ABC$ ist.
Bei einem Schnitt durch den Eckpunkt mit dem stumpfen Innenwinkel, hier CE, gilt bezüglich der rechten Winkel dasselbe wie im ersten Fall. Selbst wenn dabei ein stumpfer Innenwinkel zustande kommt, hier $\angle AEC$, kann dieser nicht gleich dem verbleibenden Winkel $\angle ECB$ sein, weil dazu zwei Seiten des Dreiecks parallel sein müssten ($AB \parallel BC$), was nicht geht.
Es ist somit nicht möglich, ein beliebiges Dreieck in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen.

Aufgabe 021024:
Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC. Verlängern Sie AC über C hinaus bis zu einem beliebigen Punkt E.
Konstruieren Sie über CE das gleichseitige Dreieck CDE (die Punkte sollen in mathematisch positivem Drehsinn in dieser Reihenfolge liegen)! Verbinden Sie A mit D und B mit E und halbieren Sie die beiden Strecken! Ihre Mittelpunkte seien M und N. Beweisen Sie, dass das Dreieck CMN stets gleichseitig ist!

Lösung von André Lanka:



Da der Winkel $\angle ECD = 60°$ ist, muss $\angle DCA = 120°$ sein. Genauso ist $\angle BCA = 60°$ und deshalb $\angle ECB = 120°$.
Die beiden Dreiecke $\triangle DCA$ und $\triangle ECB$ sind deswegen nach Kongruenzsatz SWS kongruent. Die beiden Seitenhalbierenden CN und CM sind dann gleichlang und das Dreieck $\triangle CMN$ ist gleichschenklig. Rotiert man das Dreieck $\triangle CAD$ um den Punkt C um 60° nach links, so bildet man es genau auf das Dreieck $\triangle CBE$ ab. Dabei wird auch M auf N abgebildet. Die beiden Punkte müssen bezüglich C einen Winkel von 60° haben, womit unter Beachtung der Gleichschenkligkeit gezeigt ist, dass $\triangle CMN$ gleichseitig ist.

Aufgabe 031022:
In einem Dreieck sei die Seite a größer als die Seite b. Die zu diesen Seiten gehörenden Höhen seien h_a und h_b.
a) Es ist zu beweisen, dass stets $a + h_a \geq b + h_b$ ist!
b) Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Ist I der Flächeninhalt des Dreiecks, so gilt $ah_a = 2I$ und $bh_b = 2I$. Damit erhalten wir

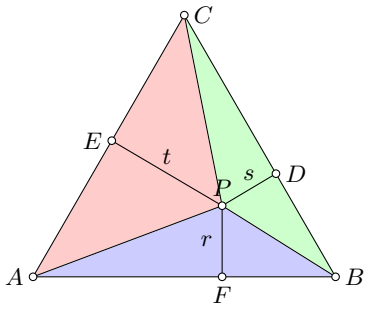
$$(a + h_a) - (b - h_b) = \left(a + \frac{2I}{a}\right) - \left(b + \frac{2I}{b}\right) = (a - b)\left(1 + \frac{2I}{ab}\right) \tag{1}$$

Wegen $a \geq b$ $(b > 0)$ und $ab \geq ab\sin\gamma = 2I$. ($\gamma$ ist die Größe eines Winkels, der von Dreiecksseiten mit den Längen a und b bestimmt wird) folgt hieraus die Aussage $(a + h_a) - (b - h_b) \geq 0$, die mit der behaupteten gleichbedeutend ist.

b) Aus (1) folgt, dass $(a+h_a)-(b+h_b) = 0$ genau dann gilt, wenn $ab = 2I$ oder wenn $a = b$ ist, d. h., wenn das Dreieck rechtwinklig ist und a und b die Kathetenlängen sind, oder wenn das Dreieck gleichschenklig ist und a und b die Längen von Schenkeln sind.

Aufgabe 081023:
Verbindet man einen beliebigen, im Innern eines gleichseitigen Dreiecks gelegenen Punkt mit je einem Punkt der drei Dreieckseiten, dann ist die Summe der Längen dieser drei Verbindungsstrecken stets größer oder gleich der Höhenlänge dieses gleichseitigen Dreiecks.
Beweisen Sie diese Aussage!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Ist P ein beliebiger Punkt im Inneren eines gleichseitigen Dreiecks, so ist die Summe der Abstände dieses Punktes von den Seiten konstant:

$$r + s + t + u = h = 3r$$

Dabei bezeichnet h die Höhe des Dreiecks und r den Inkreisradius.
Die Fläche des gleichseitigen Dreiecks ist so groß wie die Summe der Flächen der farbig markierten Dreiecke.
Für die Fläche des gleichseitigen Dreiecks ABC gilt $\frac{gh}{2}$, wobei $g = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ die Grundseite und h die Höhe sein soll. Die Summe der Flächen der farbig markierten Dreiecke ist

$$\frac{gr}{2} + \frac{gs}{2} + \frac{gt}{2} \qquad \text{also} \qquad \frac{gh}{2} = \frac{gr}{2} + \frac{gs}{2} + \frac{gt}{2}$$

Damit folgt die Behauptung $h = s + t + u$.

Anmerkung: Diese Aussage ist der Satz von Viviani.

Aufgabe 101023:
In einem gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ mit der Seitenlänge a sei M der Mittelpunkt des Umkreises. S sei ein Punkt der in M auf der Ebene des Dreiecks errichteten Senkrechten, für den $AB : SM = 3 : \sqrt{6}$ gilt.
Beweisen Sie, dass das Tetraeder mit den Ecken A, B, C, S regulär ist, d. h. dass alle Kanten dieses Tetraeders gleich lang sind!

Lösung von cyrix:
Da die Figur durch Drehung um die Gerade SM um 120° in sich selbst übergeht, ist $|AS| = |BS| = |CS|$ schon gegeben. Da das Dreieck $\triangle AMS$ rechtwinklig mit rechtem Winkel bei M ist, gilt die Beziehung $|AS|^2 = |AM|^2 + |MS|^2$. Es verbleibt also $|AM|$ zu berechnen:

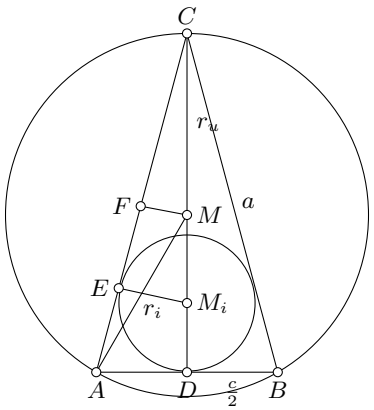
Da die Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Höhen zusammenfallen, berechnet sich deren Länge zu $s^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$, also $s = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.
Da die Seitenhalbierenden sich im Verhältnis $2:1$ schneiden und der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im gleichseitigen Dreieck mit dessen Umkreismittelpunkt zusammenfällt, ist $|AM| = \frac{2}{3} \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.
Einsetzen liefert nun

$$|AS^2| = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 a^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 a^2 = \left(\frac{3}{9} + \frac{6}{9}\right) \cdot a^2 = a^2$$

also $|AS| = a = |BS| = |CS| = |AB| = |AC| = |BC|$, $\square$.

Aufgabe 111024:
Unter allen gleichschenkligen Dreiecken $\triangle ABC$ ist bei gegebener Schenkellänge $AC = BC = a$ die Basislänge $AB = c$ derjenigen Dreiecke zu ermitteln, für die das Verhältnis der Flächeninhalte von In- und Umkreis $1:4$ beträgt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC = AB = a$. Seine Basislänge sei $AB = c$.
Ferner sei CD eine Strecke auf der Mittelsenkrechten der Seite AB, wobei D auf AB liegen möge. Dann ist CD gleichzeitig Halbierende des Winkels $\angle ACB$. Daher liegen die Mittelpunkte M_i und M_u von In- und Umkreis auf der Geraden durch C und D.

Die Radien der beiden Kreise seien r_i bzw. r_u. Das Lot von M_i auf AC habe den Fußpunkt E, das Lot von M_u auf die Gerade durch A und C habe den Fußpunkt F.

Dann ist $AF = CF = \frac{a}{2}$, $AD = BD = AE = \frac{c}{2}$, $DM_u = \sqrt{r_u^2 - \frac{c^2}{4}}$, $CM_i = \sqrt{(a - \frac{c}{2})^2 + r_i^2}$. Daher erhält man durch Anwendung des Satzes des Pythagoras auf $\triangle ACD$ einerseits

$$\frac{c^2}{4} + \left(r_u \pm \sqrt{r_u^2 - \frac{c^2}{u}}\right)^2 = a^2$$

wobei das obere und das untere Vorzeichen gilt, (je nachdem, ob M_u auf der Strecke CD liegt oder nicht), also

$$\pm r_u \sqrt{4r_u^2 - c^2} = a^2 - 2r_u^2$$
$$4r_u^2 - c^2 r_u^2 = a^4 - 4a^2 r_u^2 + 4r_u^4$$
$$r_u = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}} \tag{1}$$

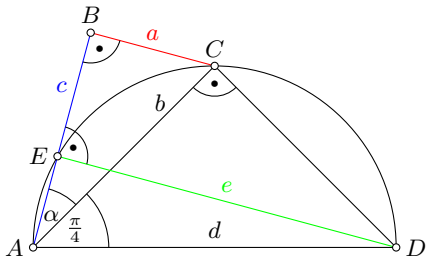
und andererseits

$$\frac{c^2}{4} + \left(r_i + \sqrt{a^2 - ac + \frac{c^2}{4} + r_i^2}\right)^2 = a^2$$
$$r_i \sqrt{4a^2 - 4ac + c^2 + 4r_i^2} = ac - \frac{c^2}{2} - 2r_i^2$$
$$4a^2 r_i^2 - 4acr_i^2 + c^2 r_i^2 + 4r_i^4 = a^2 c^2 - ac^3 - 4acr_i^2 + \frac{c^4}{4} + 2c^2 r_i^2 + 4r_i^4$$
$$r_i = \frac{c\left(a - \frac{c}{2}\right)}{2\sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}} \tag{2}$$

Nun hat ein Dreieck genau dann die geforderten Eigenschaften, wenn $\pi r_i^2 : \pi r_u^2 = 1 : 4$ oder, äquivalent hiermit, $r_u = 2r_i$ gilt.
Nach (1), (2) ist dies gleichwertig mit $a^2 = c(2a - c)$, dies mit $(a - c)^2 = 0$ und daher mit $a = c$.

Aufgabe 141023:
Es sei $\triangle ADC$ ein rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit C als Scheitelpunkt des rechten Winkels.
Über AC sei nach außen ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit B als Scheitelpunkt des rechten Winkels so gelegen, dass der Fußpunkt E des Lotes von D auf die Gerade durch A, B zwischen A und B liegt.
Man beweise, dass dann $DE = AB + BC$ gilt!

Lösung von Steffen Polster:

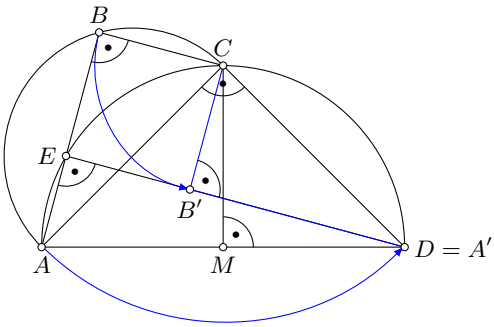


Es gilt

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}d \qquad \text{und} \qquad e = d\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$e = d\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + d\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}d\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}d\cos\alpha$$

$$e = b\sin\alpha + b\cos\alpha = a + c$$

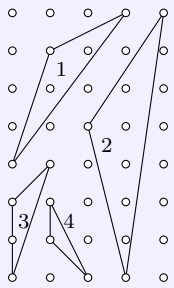


2.Lösung:
Auf Grund der Aufgabenstellung ist $AC = DC$. Wird das Dreieck ABC um 90° um C so gedreht, dass A auf D zu liegen kommt, so liegt das Bild B' von B auf der Strecke ED (der Winkel $\angle CDE$ ist gleich dem Winkel $\angle CAB$).

Auf Grund der rechten Winkel $\angle DEB = \angle EBC$ sind BC und ED parallel. Da $BC = B'C$ ist, ist das Viereck $EBCB'$ ein Quadrat.
Damit sind $B'D = AB$ und $EB' = BC$, so dass folgt

$$ED = EB' + B'D = BC + AB$$

Aufgabe 151023:
Die Eckpunkte der mit 1, 2, 3 und 4 gekennzeichneten Dreiecke seien sämtlich Gitterpunkte eines quadratischen Netzes (siehe Abbildung).



Ermitteln Sie von diesen vier Dreiecken alle, die untereinander ähnlich sind!

Lösung von Steffen Polster:
Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn zwei Seitenverhältnisse identisch sind. Mit der Festlegung a ist die kleinste, b die mittlere und c die größte Seite, ergibt sich unter der Annahme, dass der waagerechte und senkrecht Abstand zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten x ist, mit Hilfe des Satzes von Pythagoras für die Dreiecke:

Dreieck	a	b	c	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$
1	$\sqrt{5}x$	$\sqrt{10}x$	$\sqrt{25}x$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$
2	$\sqrt{13}x$	$\sqrt{17}x$	$\sqrt{50}x$	$\sqrt{\frac{17}{13}}$	$\sqrt{\frac{50}{13}}$
3	$\sqrt{2}x$	$2x$	$\sqrt{10}x$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$
4	x	$\sqrt{2}x$	$\sqrt{5}x$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$

Die Dreiecke 1, 3 und 4 sind paarweise zueinander ähnlich. Das Dreieck 2 ist zu keinem anderen der Dreiecke ähnlich.

Aufgabe 161022:
Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC, in dem CD die Höhe auf der Hypotenuse ist, seien die Kathetenlänge $b = AC = 4$ cm und die Länge $p = BD = 1{,}8$ cm gegeben.
Man berechne die Längen der restlichen Seiten des Dreiecks, die Höhenlänge $CD = h$ und die Länge $q = AD$.

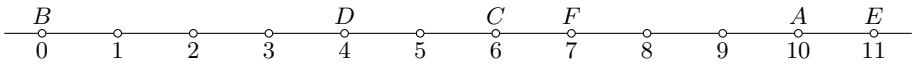
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für die gesuchten Längen $a = BC$, $c = AB$, h,q gilt: (1) $^2 + b^2 = c^2$ (nach dem Satz des Pythagoras)
(2) $cq = b^2$ (nach dem Kathetensatz)
(3) $pq = h^2$ (nach dem Höhensatz)
(4) $p + q = c$ (da D auf AB liegt).
Aus (2), (4) folgt $q^2 + pq - b^2 = 0$. Für die Maßzahl x der in cm gemessenen Länge q gilt daher $x^2 + 1{,}8x - 16 = 0$ sowie $x > 0$. Mit den Lösungen

$$x_{1,2} = -0{,}9 \pm \sqrt{0{,}81 + 16} = -0{,}9 \pm 4{,}1$$

folgt $q = 3{,}2$ cm und damit für restlichen Größen $c = 5$ cm, $a = 3$ cm und $h = 2{,}4$ cm.

Aufgabe 181021:
Auf einer Geraden sollen sechs Punkte A, B, C, D, E und F so angeordnet werden, dass $AB = 10$ cm; $BC = 6$ cm; $BE = 11$ cm; $CD = 2$ cm; $FD = 3$ cm; $AF = 3$ cm und $DE = 7$ cm gilt.
Untersuchen Sie, ob das möglich ist und in welcher Reihenfolge die Punkte bei jeder derartigen Möglichkeit angeordnet sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Angenommen, eine Anordnung von Punkten $A, ..., F$ erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Die Gerade, auf der die Punkte liegen, werde als Zahlengerade mit der Einheit 1 cm aufgefasst.
Wegen $BE = 11$ cm kann dabei erreicht werden, dass die Punkte B bzw. E den Zahlen 0 bzw. 11 entsprechen. Dann entspricht C wegen $BC = 6$ cm der Zahl 6 oder der Zahl -6, weiterhin D wegen $DE = 7$ cm der Zahl 4 oder der Zahl 18.
Hiernach kann aber $CD = 2$ cm nur erfüllt werden, wenn C der Zahl 6 und D der Zahl 4 entspricht.
Nun folgt weiter: Wegen $AB = 10$ cm entspricht A der Zahl 10 oder der Zahl -10; wegen $FD = 3$ cm entspricht F der Zahl 1 oder der Zahl 7.
$AF = 3$ cm kann aber danach nur erfüllt werden, wenn A der Zahl 10 und F der Zahl 7 entspricht. Also können nur bei der Anordnung im Bild die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sein.
In der Tat erfüllt diese Anordnung (als einzige) alle gestellten Bedingungen. Die gesuchte Reihenfolge lautet: B, D, C, F, A, E. (Laut Aufgabentext ist E, A, F, C, D, B als Ergebnis ebenfalls richtig.)

Aufgabe 181024:
Von einem Dreieck ABC mit $\angle CAB = \alpha = 120°$ und $\angle BCA = \gamma = 30°$ ist die Länge r des Umkreisradius bekannt.
Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt dieses Dreiecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach dem Satz über die Summe der Innenwinkel im Dreieck gilt $\angle ABC = \beta = 30°$, und damit $AB = AC$ (1)
Ist M der Mittelpunkt des Umkreises von $\triangle ABC$, so gilt

$$AM = BM = CM = r \qquad (2)$$

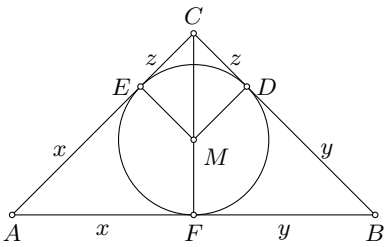
Wegen (l) und (2) geht die Mittelsenkrechte von BC durch A und durch M, und sie ist in dem gleichschenkligen Dreieck ABC die Winkelhalbierende von $\angle CAB$. Also hat in dem gleichschenkligen Dreieck ABM ein Winkel die Größe 60°, folglich ist das Dreieck gleichseitig.
Dasselbe gilt für $\triangle ACM$. Somit ist $CABM$ ein Rhombus der Seitenlänge r. Seine Diagonale BC steht auf der Diagonalen AM senkrecht und wird von ihr halbiert, also ist BC die doppelte Höhenlänge eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge r. Daher hat das Dreieck ABC den Umfang

$$CA + AB + BC = r + r + 2 \cdot \frac{r}{2}\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})r$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist gleich dem halben Flächeninhalt des Rhombus $CABM$, also gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks ABM; er beträgt somit $\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$.

Aufgabe 191023:
Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $BC = a$, $CA = b$ und $AB = c$ und gegeben. Der Inkreis dieses Dreiecks berühre die Seite BC in D, die Seite CA in E und die Seite AB in F.
Ermitteln Sie die Längen der Seitenabschnitte BD, DC, CE, EA, AF und FB, in Abhängigkeit von a, b und c ausgedrückt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei M der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Die Seiten des Dreiecks sind Tangenten an den Inkreis, also gilt $ME \perp AC$ und $MF \perp AB$. Weiter folgt $\triangle AEM \cong \triangle AFM$; denn diese Dreiecke stimmen in den Seitenlängen $AM = AM; ME = MF$ und in der Größe $\angle AEM = \angle AFM$ desjenigen Winkels überein, der in beiden Dreiecken als rechter Winkel jeweils der größten Seite gegenüberliegt. Daher ist $AE = AF$.
Entsprechend lässt sich zeigen, dass $BF = BD$ und $CD = CD$ gilt. Für die gesuchten Seitenabschnitte

$$AE = AF = x, \qquad BF = BD = y, \qquad CD = CE = z$$

gilt somit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y + z &= a \qquad (1)\\ x + z &= b \qquad (2)\\ x + y &= c \qquad (3) \end{aligned}$$

Addiert man (2) und (3) und subtrahiert (1), so folgt nach Division durch 2

$$x = \frac{1}{2}(b + c - a)$$

Entsprechend ergibt sich

$$y = \frac{1}{2}(c + a - b) \qquad ; \qquad z = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

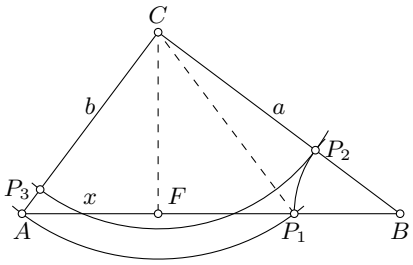
Die gesuchten Längen sind also

$$AE = AF = \frac{1}{2}(b + c - a); \qquad BF = BD = \frac{1}{2}(c + a - b); \qquad CD = CE = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

Da die Existenz des Inkreises und folglich auch der gesuchten Längen als bekannt verwendet werden darf, ist eine Probe oder ein Nachweis der Äquivalenz zwischen dem System (1), (2), (3) und der Angabe von x,y,z nicht erforderlich.

Aufgabe 201022:
Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $BC = 4$ cm und $AC = 3$ cm. Der Kreis um C mit dem Radius AC schneide AB außer in A noch in einem Punkt P_1, der Kreis um B mit dem Radius BP_1 schneide BC in einem Punkt P_2 zwischen B und C, der Kreis um C mit dem Radius CP_2 schneide AC in einem Punkt P_3 zwischen A und C.
Berechnen Sie das Verhältnis $AP_3 : CP_3$!

Lösung von Steffen Polster:



Wir lösen die Aufgabe allgemein. Aus den bekannten Sätzen am rechtwinkligen Dreieck (Satz des Pythagoras, Kathetensätze, Höhensatz) wird $CF = h = \frac{ab}{c}$. Der 1. Kreis um C hat den Radius b und schneidet AB auch in P_1. $\triangle ACP_1$ ist gleichschenklig, so dass $x = AF = FP_1$ gilt. x ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras zu $x = \sqrt{b^2 - h^2} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ und somit

$$BP_1 = c - 2\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Der Kreis um B mit dem Radius BP_1 schneide BC in P_2. Es wird

$$CP_2 = CP_3 = a - \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2} - a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Der Kreis um C mit dem Radius CP_2 schneide AC in P_3. Jetzt wird

$$AP_3 = a - CP_3 = -\frac{(a - b)\sqrt{a^2 + b^2} - a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

und für das Verhältnis

$$\frac{AP_3}{CP_3} = -\frac{(a - b)\sqrt{a^2 + b^2} - a^2 + b^2}{a \cdot \sqrt{a^2 + b^2} - a^2 + b^2}$$

Setzt man die gegebenen Größen $a = 4$ und $b = 3$ ein, wird für das Verhältnis $AP_3 : CP_3 = 2 : 13$.

Aufgabe 211021:
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC ist die zur Hypotenuse AB senkrechte Höhe DC genau $\frac{2}{5}$ mal so lang wie die Hypotenuse AB. Für den Höhenfußpunkt D gilt $AD < DB$.
In welchem Verhältnis $AD : DB$ teilt er die Hypotenuse?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für die Längen $AB = c$, $DC = h$, $AD = q$, $DB = p$ gilt

$$h = \frac{2}{5}c \quad (1) \quad \text{sowie} \qquad p + q = c \quad (2) \quad \text{und} \quad q < p \quad (3)$$

Ferner gilt nach dem Höhensatz $pg = h^2 \quad (4)$. Setzt man h aus (1) in (4) ein, so folgt

$$pq = \frac{4}{25}c^2 \tag{5}$$

setzt man q aus (2) in (5) ein, so folgt

$$\begin{aligned} p(c-p) &= \frac{4}{25}c^2 \\ p_{1,2} &= \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{4}{25}c^2} = \frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{100}c^2(25-16)} \\ &= \frac{c}{10}(5 \pm 3) \end{aligned}$$

also entweder $p = \frac{4}{5}c$ und dann nach (2) weiter $q = \frac{1}{5}c$ oder $p = \frac{1}{5}c$ und dann nach (2) weiter $q = \frac{4}{5}c$.
Von diesen beiden Möglichkeiten verbleibt wegen (3) nur die erste. Daher beträgt das gesuchte Verhältnis $AD : DB = q : p = 1 : 4$.

Aufgabe 211024:
Über den Seiten eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks ABC mit dem rechten Winkel bei C werden gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke errichtet, über den Katheten nach außen, über der Hypotenuse nach innen.
Beweisen Sie, dass die Spitzen dieser Dreiecke und der Punkt C dann auf ein und derselben Geraden liegen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die über BC und AC nach außen errichteten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke seien BCE bzw. ACF. Wegen

$$\angle FCA + \angle ACB + \angle BCE = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$

liegt C auf der Geraden durch E und F.
Die Mittelpunkte von BC, CA, AB seien U, V bzw. W. Der Kreis mit AB als Durchmesser geht nach der Umkehrung des Satzes, von Thales durch C, ist also der Umkreis des Dreiecks ABC. Folglich liegt sein Mittelpunkt W auf den Mittelsenkrechten von BC und AC.
Somit ist $WUCV$ ein Rechteck; E, F liegen auf den Verlängerungen von WU bzw. WV, und es gilt:

$$WE = WU + UE = WU + UC = WV + VC = WV + VF = WF \tag{1}$$

Die Mittelsenkrechte von AB schneide EF in G. Dann gilt

$$\angle FWG = 90^\circ - \angle AWV = 90^\circ - \angle WBU = \angle EWB \tag{2}$$

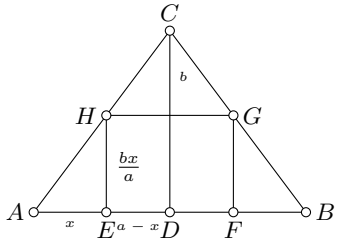
und $\angle GFW = 45^\circ = \angle BEW \quad (3)$.
Aus (1), (2), (3) folgt $\triangle FGW \cong \triangle EBW$, also $WG = WB$. Daher ist $\triangle ABG$ das über AB nach innen errichtete gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck. Dessen Ecke G liegt somit ebenfalls auf der Geraden durch E, F, w. z. b. w.

Aufgabe 241022:
Von einem Dreieck ABC wird vorausgesetzt, dass es nicht stumpfwinklig ist und dass für die zu AB senkrechte Höhe CD die Gleichung $CD \cdot AC = AD \cdot BC$ gilt.
Beweisen Sie, dass durch diese Voraussetzungen die Größe γ des Innenwinkels $\angle ACB$ eindeutig bestimmt ist! Ermitteln Sie diese Winkelgröße γ!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Laut Voraussetzung sind dann die Dreiecke ADC und DBC ähnlich, da sie im Verhältnis zweier Seiten und im gegenüberliegenden Winkel der größeren Seite übereinstimmen. Damit ist $\gamma = \alpha + \beta = 90°$.

Aufgabe 251023:
Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basislänge $AB = 20$ cm und der Höhenlänge $CD = 8$ cm.
Diesem Dreieck soll ein Rechteck $EFGH$ so einbeschrieben werden, dass E und F auf AB, G auf BC und H auf AC liegen und dass dabei der Flächeninhalt des Rechtecks möglichst groß ist.
Beweisen Sie, dass es genau ein Rechteck mit diesen Eigenschaften gibt!
Ermitteln Sie die Seitenlängen und den Flächeninhalt dieses Rechtecks!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da die Höhe CD im gleichseitigen Dreieck ABC zugleich Seitenhalbierende ist, ist ihr Fußpunkt D der Mittelpunkt von AB; es gilt also $AD = BD = 10$ cm.
Es sei $AD = a$ und $DC = b$ (siehe Bild).
Für jedes Rechteck $EFGH$, das dem Dreieck ABC (mit E und F aus AB, G auf BC und H auf AC) einbeschrieben ist, sei $AE = x$ gesetzt. Wegen $EH \perp AB$ und $DC \perp AB$, also $EH \parallel DC$, folgt aus dem Strahlensatz

$$EH : DC = AE : AD \qquad \text{also} \qquad EH = \frac{bx}{a}$$

Da $EFGH$ ein Rechteck ist, gilt somit $FG = EH = \frac{bx}{a}$. Da auch $FG \parallel DC$ gilt, folgt aus dem Strahlensatz

$$BF : BD = FG * DC$$

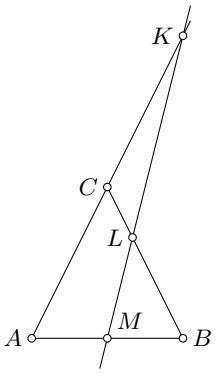
und damit $BF = x$. Hiernach ergibt sich $EF = ED + FD = 2(a - x)$. Der Flächeninhalt J des Rechtecks $EFGH$ ist folglich

$$J = 2(a-x)\frac{bx}{a} = \frac{2b}{a}(ax - x^2) = \frac{2b}{a}\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + ax - x^2\right) = \frac{ab}{2} - \frac{2b}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

Daraus folgt: Für $x \neq \frac{a}{2}$ ist $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 > 0$, also $J < \frac{ab}{2}$; für $x = \frac{a}{2}$ ist $J = \frac{ab}{2}$.
Somit wird für genau dasjenige Rechteck $EFGH$, das sich mit $x = \frac{a}{2} = 5$ cm ergibt, der Flächeninhalt J am größten. Die Seitenlängen dieses Rechtecks sind $EF = 10$ cm, $EH = 4$ cm, sein Flächeninhalt beträgt $J = 40$ cm^2.

Aufgabe 331023:
Beweisen Sie, dass für jedes gleichschenklige Dreieck ABC mit $AC = BC$ die folgende Aussage gilt!
Verlängert man die Strecke AC über C hinaus um ihre eigene Länge bis K, legt man einen Punkt L so auf die Strecke CB zwischen C und B, dass $3 \cdot CL = CB$ gilt, und ist M der Mittelpunkt von AB, so liegen die drei Punkte K, L, M auf einer gemeinsamen Geraden.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Es ist

$$\frac{KA}{CA} \cdot \frac{CL}{LB} \cdot \frac{MB}{MA} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1/3}{2/3} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

Nach der Umkehrung des Satzes von Menelaus folgt die Behauptung.

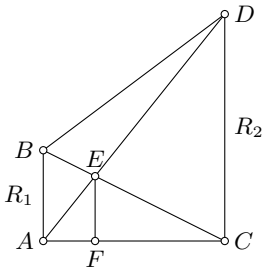
III Runde 3

Aufgabe 021036:
Für die Berechnung des Gesamtwiderstandes R_g bei parallel geschalteten Widerständen R_1 und R_2 gilt die Beziehung:

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Diese Aufgabe kann man durch folgende einfache Konstruktion lösen:
Auf einer beliebigen Geraden g werden in den Punkten A und C (beliebiger Abstand) die Senkrechten AB und CD errichtet, wobei AB und CD in einem geeigneten Maßstab die Widerstände R_1 und R_2 darstellen sollen.
Verbindet man A mit D und B mit C, so schneiden sich diese Verbindungslinien in E. Fällt man von E aus das Lot auf die Gerade (Fußpunkt sei F), dann wird behauptet, dass EF die Größe des gesuchten Widerstandes R_g angibt.
a) Beweisen Sie die Richtigkeit der Konstruktion!
b) Wie bestimmen Sie graphisch den Gesamtwiderstand, wenn drei Widerstände von $8\Omega, 10\Omega, 12\Omega$ parallel geschaltet werden?

Lösung von André Lanka:



a) Mit den Strahlensätzen ergibt sich

$$\frac{AF}{EF} = \frac{AC}{CD} \quad \text{und} \quad \frac{CF}{EF} = \frac{AC}{AB}$$

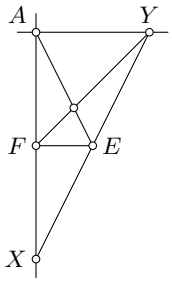
Nach Addition und Division durch die Länge der Strecke AC erhält man

$$\frac{AF + FC}{EF} = \frac{AC}{CD} + \frac{AC}{AB} \quad \text{und} \quad \frac{1}{EF} = \frac{1}{CD} + \frac{1}{AB}$$

Die Strecke EF ist also tatsächlich der gesuchte Widerstand.
b) Zuerst konstruiert man den Gesamtwiderstand von 8Ω und 10Ω. Anschließend wiederholt man die Konstruktion mit dem eben ermittelten Widerstand und 12Ω.

Aufgabe 031032:
Zwei Geraden schneiden einander rechtwinklig im Punkt A. Gegeben sei ferner eine Strecke $XY = 6$ cm, deren Endpunkte auf je einer der beiden Geraden liegen.
Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Schwerpunkte S aller möglichen Dreiecke AXY! (X und Y sind stets von A verschieden.)

Lösung von Manuel Naumann:



Der Schwerpunkt eines beliebigen Dreiecks ergibt sich aus dem Schnitt seiner Seitenhalbierenden.
Sei $\triangle AXY$ ein Dreieck, das die Voraussetzungen erfüllt, E der Punkt, der XY halbiert und F das Lot von E auf AX.
Dann folgt aus dem Strahlensatz die Beziehung $\frac{AX}{FX} = \frac{XY}{EX} = 2$.
D. h., $AX = 2FX$. Das Dreieck $\triangle AXE$ ist somit gleichschenklig.
In allen Dreiecken $\triangle AXY$, gilt also: $AE = EX = 3$ cm. Der Schwerpunkt S eines Dreiecks $\triangle AXY$ liegt auf der Strecke AE und teilt diese bekanntermaßen im Verhältnis $2 : 1$.

Somit liegen alle möglichen Schwerpunkte S auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $r = 2$ cm.

Aufgabe 071031:
Beweisen Sie folgende Aussage:
Die Winkelhalbierende je eines Innenwinkels jedes Dreiecks teilt die gegenüberliegende Seite in Abschnitte, von denen jeder kleiner ist als die dem Innenwinkel anliegende Dreiecksseite durch einen Endpunkt des betreffenden Abschnitts.

Lösung von cyrix:
Wir betrachten das Dreieck $\triangle ABC$ und o. B. d. A. die Winkelhalbierende durch B, welche die Seite AC im Punkt W_B schneide. O. B. d. A. betrachten wir das Teildreieck $\triangle ABW_B$.
Dessen Innenwinkel bei W_B sei mit ϕ bezeichnet; die Innenwinkel im Dreieck $\triangle ABC$ bei A und B, wie üblich, mit α und β. Dann ist, da BW_B den Innenwinkel β halbiert, also $\angle W_BBA = \frac{\beta}{2}$, und aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck ABW_B schließlich $\phi = 180° - \alpha - \frac{\beta}{2}$.
Aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ABC$ ist

$$\alpha < 180° - \beta \qquad \text{, also} \qquad \phi > 180° - (180° - \beta) - \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$$

Da in einem Dreieck dem größeren Innenwinkel auch immer die größere Seite gegenüberliegt, ist $|AB| > |AW_B|$, was zu beweisen war.

Aufgabe 081031:
In einem Dreieck $\triangle ABC$ sei $AB = 18$ cm. Zu dieser Seite werde im Innern dieses Dreiecks eine Parallele gezogen, so dass ein Trapez $ABDE$ entsteht, dessen Flächeninhalt F_2 ein Drittel des Flächeninhalts F_1 des Dreieck $\triangle ABC$ ist.
Berechnen Sie die Länge der Seite DE des Trapezes!

Lösung von cyrix:
Den Flächeninhalt F_3 des Dreiecks $\triangle CDE$ erhält man als Differenz der Flächeninhalte des Dreiecks $\triangle ABC$ und des Trapezes $ABDE$, also $F_3 = F_1 - F_2 = \frac{2}{3} \cdot F_1$.

Da die Strecken DE und AB parallel sind, sowie E und A bzw. D und B jeweils auf einem von C ausgehenden Strahl liegen, geht das Dreieck $\triangle CDE$ aus dem Dreieck $\triangle ABC$ durch zentrische Streckung mit Zentrum C hervor. Der Streckungsfaktor sei k. Dann gilt $F_3 = k^2 \cdot F_1$, also $k = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, und damit $|DE| = k \cdot |AB| = \sqrt{6} \cdot 3$ cm.

Aufgabe 091035:
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$, und auf AB ein Punkt D.
Konstruieren Sie einen Punkt E auf einer der beiden anderen Dreiecksseiten so, dass DE die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt!

Lösung von cyrix:
O. B. d. A. können wir $|AD| \geq \frac{1}{2}|AB|$ annehmen. (Andernfalls vertausche man im Folgenden jeweils die Rollen von A und B.)

Ist $D = B$, so wähle man E als Mittelpunkt der Seite AC (den man mit der üblichen Konstruktionsweise erhält). Das Dreieck $\triangle DEA = \triangle BEA$ besitzt die gleiche Höhe von A auf die Grundseite auf der Geraden g_{BE} wie das Dreieck $\triangle ABC$ auf dessen Grundseite, die wegen $g_{BC} = g_{BE}$ auf der gleichen Geraden liegt, während diese Grundseite im Dreieck $\triangle BEA$ aber nach Konstruktion nur halb so lang ist wie die entsprechende im Dreieck $\triangle ABC$. Damit besitzt es also auch genau die Hälfte von dessen Flächeninhalt. Ist D identisch mit dem Mittelpunkt M der Strecke AB, so wähle man $E = C$ und man erhält mit der gleichen Begründung, dass der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle AED = \triangle ACM$ genau halb so groß ist wie der des Ausgangsdreiecks $\triangle ABC$. Diesmal wird die Höhe von C auf die Grundseiten AE bzw. AB betrachtet.

Sei im Folgenden also nun D ein innerer Punkt der Strecke MB. Dann konstruiere man E als Schnittpunkt der Parallelen zu DC durch M mit der Geraden AC. (Da M innerer Punkt der Strecke AD ist, schneidet die Parallele zu DC durch M die Gerade g_{AC} im Inneren der Strecke AC.) Dann hat das Dreieck $\triangle ADE$ genau den halben Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$, wie im Folgenden gezeigt wird:

Das Dreieck $\triangle ADC$ besitzt wieder die gleiche Höhe von C auf auf die Gerade $g_{AD} = g_{AB}$ wie das Dreieck $\triangle ABC$, sodass sich

$$F_{\triangle ADC} = \frac{|AD|}{|AB|} \cdot F_{\triangle ABC}$$

ergibt.
Analog kann man die Flächeninhalte der Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle ADE$ in Beziehung setzen, wenn man beachtet, dass sie die gleiche Höhe von D auf die Gerade $g_{AC} = g_{AE}$ besitzen. Es ist also

$$F_{\triangle ADE} = \frac{|AE|}{|AC|} \cdot F_{\triangle ADC} = \frac{|AE|}{|AC|} \cdot \frac{|AD|}{|AB|} \cdot F_{\triangle ABC}$$

Nach dem Strahlensatz (da die Geraden g_{DC} und g_{ME} nach Konstruktion parallel sind und von zwei von A ausgehenden Strahlen geschnitten werden) gilt aber $\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AM|}{|AD|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AB|}{|AD|}$, sodass man nach Einsetzen genau das gewünschte Resultat $F_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot F_{\triangle ABC}$ erhält.

Aufgabe 101032:
Es sei $\triangle ABC$ ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC = BC$.
Konstruieren Sie die Parallele zu AB, die die Dreiecksfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt. Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

Lösung von cyrix:
1) Die Kreise um A durch C sowie C durch A schneiden sich in zwei Punkten. Sie seien mit P_1 und P_2 bezeichnet.
2) Die Gerade durch P_1 und P_2 schneidet die Gerade AC im Punkt M.
3) Der Kreis um M durch C schneidet die Gerade P_1P_2 in zwei Punkten. Einer davon werde mit P bezeichnet.
4) Der Kreis um C durch P schneide die Gerade AC im Punkt S.
5) Die Parallele zu AB durch S ist die gesuchte Gerade.

Begründung:
Der mit den Schritten 1) und 2) konstruierte Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke AC und die Gerade P_1P_2 ist ihre Mittelsenkrechte. Der Punkt P liegt auf einem Kreis mit Durchmesser AC, sodass das Dreieck $\triangle ACP$ nach dem Satz des Thales rechtwinklig mit rechtem Winkel bei P ist.
Weiterhin liegt P auf der Mittelsenkrechten von AC, sodass $|AP| = |CP|$, also auch $\angle PAC = \angle ACP = 45°$ gilt (letzteres aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle APC$). Nach der Definition des Sinus im rechtwinkligen Dreieck ist

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45° = \sin \angle PAC = \frac{|CP|}{|AC|} \qquad \text{also} \qquad |CS| = |CP| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |AC|$$

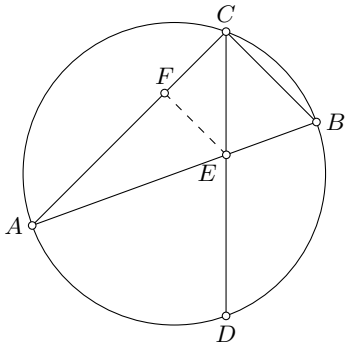
Sei T der Schnittpunkt der Parallelen zu AB durch S mit BC. Dann geht das Dreieck $\triangle STC$ also aus dem Dreieck ABC durch Streckung um den Faktor $k := \frac{\sqrt{2}}{2}$ mit Zentrum C hervor. Damit ist $F_{\triangle STC} = k^2 \cdot F_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} F_{\triangle ABC}$, wie gewünscht.
Bemerkung: Die Gleichschenkligkeit des Dreiecks $\triangle ABC$ wurde hier nirgends benutzt und kann demnach auch als Bedingung gestrichen werden.

Aufgabe 111033:
Gegeben sei die Kathetenlänge $BC = a$ eines rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ mit dem rechten Winkel bei C, für das $AC : BC = 2 : 1$ gilt.
Die Halbierende des rechten Winkels $\angle ACB$ schneide den Umkreis des Dreiecks außer in C noch in D.
Man berechne die Länge der Sehne CD als Funktion von a!
Hinweis: Nach einem bekannten Satz der ebenen Geometrie teilt im Dreieck die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Aufgabenstellung ist $AC = 2a$ und nach dem Lehrsatz des Pythagoras (1) $\quad AB = a\sqrt{5}$. Es sei E der Schnittpunkt von AB und CD. Dann gilt nach dem im Hinweis angegebenen Satz

$$AE : EB = AC : BC = 2 : 1$$

Daraus folgt wegen (1): $AE = \frac{2}{3}a\sqrt{5}$ und $EB = \frac{1}{3}a\sqrt{5}$. Die Parallele zu BC durch E schneide AC in F. Dann gilt nach einem der Strahlensätze $EF : BC = AE : AB = 2 : 3$, woraus $EF = \frac{2}{3}a$ folgt. (siehe Abbildung)



Dreieck $\triangle EFC$ ist rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei F und, da $\angle ACE$ eine Größe von 45° hat, auch gleichschenklig. Also gilt $EF = FC$. Nach dem Satz des Pythagoras folgt nun $CE = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$.
Weiter gilt: $\triangle ADE \cong \triangle BCE$; denn $\angle BEC \cong \angle AED$ (Scheitelwinkel) und $\angle CBA \cong \angle CDA$ (Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen. Daher gilt: $CE : EB = AE : ED$, woraus man

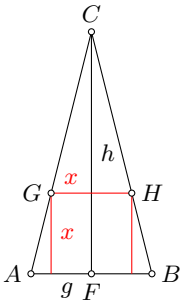
$$ED = \frac{AE \cdot EB}{CE} = \frac{\frac{2}{3}a\sqrt{5} \cdot \frac{1}{3}a\sqrt{5}}{\frac{2}{3}a\sqrt{2}} = \frac{5}{6}a\sqrt{2}$$

erhält. Somit ergibt sich

$$CD = CE + ED = \frac{2}{3}a\sqrt{2} + \frac{5}{6}a\sqrt{2} = \frac{3}{2}a\sqrt{2}$$

Aufgabe 121031:
Für ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle ABC$ sei die Höhenlänge $|CD| = h$ und die Basislänge $|AB| = g$ genannt.
Ferner sei dem Dreieck ein Quadrat $EFGH$ derart einbeschrieben, dass EF auf AB, G auf BC und H auf AC liegen.
Ermitteln Sie alle Verhältnisse $h : g$, für die sich die Flächeninhalte von Dreieck $\triangle ABC$ und Quadrat $EFGH$ wie 9 : 4 verhalten.

Lösung von Steffen Polster:



Nach dem Strahlensatz gilt für die Grundseite g, die Höhe h und die Länge x der Quadratseiten

$$\frac{h-x}{x} = \frac{h}{g} \Rightarrow g = \frac{hx}{h-x} \tag{1}$$

Anderseits soll für den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ und der Flächeninhalt des Quadrats gelten:

$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\text{Quadrat}}} = \frac{\frac{1}{2}gh}{x^2} = \frac{9}{4} \tag{2}$$

Einsetzen von (1) in (2) ergibt

$$18x^2 - 18hx + 4h^2 \Rightarrow x_1 = \frac{h}{3}; \quad x_2 = \frac{2h}{3}$$

Für die Lösungen wird (2) dann zu x_1: $g = \frac{h}{2}$ und x_2: $g = 2h$.
Für das Verhältnis $g : h = 1 : 2$ (spitzwinkliges Dreieck) bzw. $g : h = 2 : 1$ (stumpfwinkliges Dreieck) wird das Verhältnis der Flächeninhalte von Dreieck $\triangle ABC$ und Quadrat $EFGH$ gleich 9 : 4.

Aufgabe 121036:
Beweisen Sie den folgenden Satz! Hat der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks eine Größe von 36°, so ist die Basis des Dreiecks genau so lang wie der größere Abschnitt auf einem nach dem „Goldenen Schnitt“ geteilten Schenkel des Dreiecks.

Anmerkung: Eine Strecke heißt nach dem „Goldenen Schnitt“ in zwei Abschnitte geteilt, wenn die Länge des größeren Abschnitts die mittlere Proportionale zwischen der Länge des kleineren Abschnitts und der Länge der gesamten Strecke ist.

Lösung von cyrix:
Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit $|AC| = |BC|$ und $\angle ACB = 36°$. Dann sind die beiden Basiswinkel $\angle BAC = \angle CBA$ jeweils $\frac{1}{2} \cdot (180° - 36°) = 72°$ groß. Da dem größeren Winkel in einem Dreieck die größere Seite gegenüberliegt, ist also auch $|AC| > |AB|$.

Sei W der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden bei A durch BC.
Da die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten schneidet, gilt $\frac{|CW|}{|WB|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ und insbesondere $|CW| > |WB|$.

Es ist $\angle BAW = \frac{1}{2}\angle BAC = 36°$, sodass das Dreieck $\triangle BAW$ ähnlich ist zum Dreieck $\triangle ABC$ und damit $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|WB|}$, also $|AB| = |CW|$ gilt. Damit ist die Basis AB genauso lang wie der größere Abschnitt der durch W geteilten Strecke AC.
Es bleibt noch zu zeigen, dass dieser Punkt W den Schenkel AC tatsächlich im Goldenen Schnitt teilt:

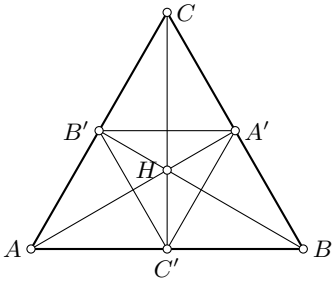
Setzt man diese Gleichheit sowie $|AC| = |BC| = |CW| + |WB|$ in das zuvor erhaltene Verhältnis ein, so ergibt sich $\frac{|CW|}{|WB|} = \frac{|CW|+|WB|}{|CW|}$, sodass W die Strecke AC im Goldenen Schnitt teilt, □.

Aufgabe 151034:
Beweisen Sie folgende Aussage!
Wenn für ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit den Höhen AA', BB' und CC' und dem Höhenschnittpunkt H die Gleichungen

$$\frac{AH}{HA'} = \frac{BH}{HB'} = \frac{CH}{HC'}$$

gelten, so ist das Dreieck ABC gleichseitig.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Aus den Bedingungen folgt durch Umkehrung des Strahlensatzes, dass $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ und $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$. Beispielsweise folgt aus der Gleichheit $\frac{AH}{HA'} = \frac{BH}{HB'}$ durch Umstellen $\frac{|HA|}{|HB|} = \frac{|HA'|}{|HB'|}$, sodass nach Umkehrung des Strahlensatzes mit dem Zentrum H die Parallelität von AB und $A'B'$ folgt.
Das $\triangle A'B'C'$ ist somit Mittendreieck von $\triangle ABC$, womit die Behauptung folgt.

Aufgabe 181032:
Beweisen Sie:
Ein Dreieck ist genau dann gleichseitig, wenn mindestens zwei seiner Seitenhalbierenden auch Winkelhalbierende sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
A) Ein Dreieck ABC sei gleichseitig, d. h., es gelte $AB = AC = BC$. Der Mittelpunkt von AB sei M. Dann gilt nach dem Kongruenzsatz sss: $\triangle AMC \cong \triangle BMC$.
Also gilt $\angle ACM = \angle BMC$, d. h., die Seitenhalbierende CM ist auch Winkelhalbierende. Entsprechend beweist man die gleiche Aussage für eine der anderen Seitenhalbierenden.

B) In einem Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt von AB, und die Seitenhalbierende CM sei auch Winkelhalbierende. Dann gilt

$$AM = MB \quad (1) \qquad \text{und} \qquad \angle ACM = \angle MCB \quad (2)$$

Die Parallelen zu AC durch B und zu BC durch A schneiden sich in einem Punkt C', und hierfür ist $AC'BC$ ein Parallelogramm. Wegen (1) und da sich die Diagonalen im Parallelogramm halbieren, geht CC' durch M.

Somit sind $\angle MCB$ und $angleAC'M$ Winkel an geschnittenen Parallelen und daher einander kongruent; hiernach und wegen (2) gilt $\angle ACM = \angle AC'M$.
Also ist das Dreieck $AC'C$ gleichschenklig mit $AC = AC'$. Hieraus und aus $AC' = CB$ folgt $AC = BC$. (3)

Analog zeigt man: Ist etwa die Seitenhalbierende durch B auch Winkelhalbierende, so folgt $AB = CB$. (4)
Aus (3) und (4) folgt die Gleichseitigkeit von $\triangle ABC$.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Jede Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Dreiecksseite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten. Sie ist also genau dann auch eine Seitenhalbierende, wenn die beiden anliegenden Seiten gleich lang sind.
Sind also zwei Winkelhalbierende auch Seitenhalbierende, dann sind alle drei Dreiecksseiten gleich lang, mithin das Dreieck gleichseitig. Und umgekehrt sind in einem gleichseitigen Dreieck alle Seiten gleich lang, also alle drei (und damit auch mindestens zwei) Winkelhalbierende auch Seitenhalbierende.

Aufgabe 211032:
Beweisen Sie den folgenden Satz (den sogenannten Satz von Menelaos)!
Wenn eine Gerade g die Seite BC eines Dreiecks ABC in einem Punkt E zwischen B und C schneidet und wenn g außerdem die Seite CA in einem Punkt F zwischen C und A schneidet und wenn g außerdem eine Verlängerung der Seite AB in einem Punkt G schneidet, dann gilt

$$\frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} \cdot \frac{AG}{BG} = 1$$

Lösung von cyrix:
Es seien a, b und c die Längen der Lote von A, B und C auf g. Da diese Lote alle senkrecht zu g und damit untereinander parallel sind, können wir die Strahlensätze anwenden und erhalten

(von E aus gesehen) $\frac{|BE|}{|CE|} = \frac{b}{c}$,

(von F aus gesehen) $\frac{|CF|}{|AF|} = \frac{c}{a}$ und

(von G aus gesehen) $\frac{|AG|}{|BG|} = \frac{a}{b}$, also

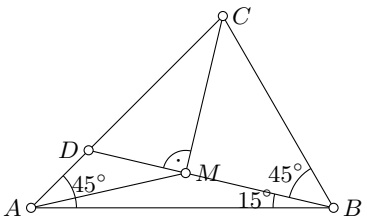
$$\frac{|BE|}{|CE|} \cdot \frac{|CF|}{|AF|} \cdot \frac{|AG|}{|BG|} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1 \text{ ,}\square.$$

Aufgabe 231032:
Von einem Dreieck ABC und einem Punkt D auf der Seite AC wird vorausgesetzt, dass

$$\angle BAC = \angle CBD = 45^\circ \quad \text{und} \quad \angle ABD = \frac{1}{3}\angle BAC$$

gilt. Beweisen Sie, dass dann $AD = \frac{1}{3}AC$ gilt!

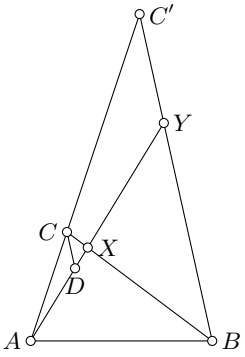
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Voraussetzung ist $\angle ABD = 15^\circ$. Nach dem Innenwinkelsatz folgt $\angle ACB = 75^\circ$, $\angle ADB = 120^\circ$ und daher als Nebenwinkel $\angle BDC = 60^\circ$.



Es sei CM das Lot von C auf BD. Dann ist nach dem Innenwinkelsatz $\angle DCM = 30°$, $\angle BCM = 45°$, und daher ist $\triangle BDM$ gleichschenklig mit $MB = MC$ (1).
In dem Dreieck DCM, das durch sein Spiegelbild an CM zu einem gleichseitigen Dreieck mit der Höhe (zugleich Seitenhalbierende) CM ergänzt wird, gilt $DC = 2MD$ (2).
Der Kreis um M durch B, der wegen (1) auch durch C geht, geht nach der Umkehrung des Peripherie-Zentriwinkelsatzes auch durch A. Also ist auch $\triangle ACM$ gleichschenklig mit $\angle CAM = \angle ACM = 30°$.
Hieraus folgt nach dem Innenwinkelsatz $\angle AMD = 30°$; daher ist $\triangle AMD$ gleichschenklig mit $AD = AM$ (3).
Aus (2) und (3) folgt $DC = 2AD$ und damit die Behauptung $AD = \frac{1}{3}AC$.

Aufgabe 241035:
a) Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck ABC, verlängern Sie AC über C hinaus bis zu demjenigen Punkt C', für den $AC' = 3 \cdot AC$ ist, und konstruieren Sie auf BC' denjenigen Punkt Y, für den $BY = 2 \cdot C'Y$ gilt!
Der Schnittpunkt von AY mit BC sei X.
b) Beweisen Sie, dass die in a) verlangte Konstruktion für jedes Dreieck ABC auf denselben Wert des Verhältnisses $BX : CX$ führt! Ermitteln Sie diesen Wert!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



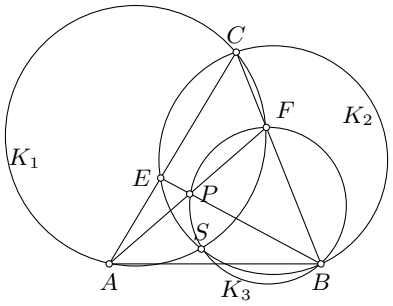
b) Für jedes Dreieck ABC und die hierzu nach a) konstruierten Punkte C', Y und X gilt:
Ist D der Schnittpunkt von AY mit der Parallelen durch C zu BC', so folgt aus dem Strahlensatz $CD = \frac{1}{3}C'Y = \frac{1}{6}BC$ und daher

$$BX : CX = BY : CD = 6$$

Damit ist der verlangte Beweis geführt und der gesuchte Wert von $BX : CX$ ermittelt.

Aufgabe 251035:
Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Darin sei F ein von B und C verschiedener Punkt der Strecke BC, und E sei ein von A und C verschiedener Punkt der Strecke AC.
Ferner sei P der Schnittpunkt der Strecken AF und BE.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen die Umkreise der drei Dreiecke AFC, EBC und PFB stets genau einen Punkt gemeinsam haben!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Umkreise K_1 und K_2 der Dreiecke AFC bzw. EBC haben den Punkt C gemeinsam, während z. B. der auf K_2 gelegene Punkt E im Innern von K_1 und der auf K_1 gelegene Punkt F im Innern von K_2 liegt.
Folglich haben K_1 und K_2 außer C genau einen weiteren Punkt S gemeinsam. Für ihn gilt:

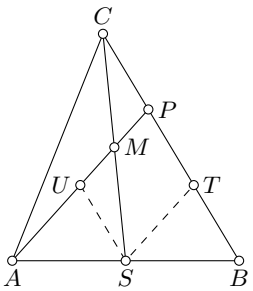


- $\angle PFS = \angle AFS$ (da P zwischen A und F liegt)
- $= \angle ACS$ (nach dem Peripheriewinkelsatz, da F und C auf K_1 über dem Bogen $\overset{\frown}{AS}$ liegen)
- $= \angle ECS$ (da E zwischen A und C liegt)
- $= \angle EBS$ (nach dem Peripheriewinkelsatz, da C und B auf K_2 über dem Bogen $\overset{\frown}{ES}$ liegen)
- $= PBS$ (da P zwischen E und B liegt).

Nach der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes liegen somit P, F, S und B auf einem Kreis K_3, d. h., der Umkreis des Dreiecks PFB geht auch durch S.
Durch C geht er nicht, da er mit der Geraden durch B und C bereits die beiden von C verschiedenen Punkte B und F gemeinsam hat.
Also haben die Umkreise der Dreiecke AFC, EBC und PFB genau den Punkt S gemeinsam. Damit ist der geforderte Beweis erbracht.

Aufgabe 271035:
Es sei ABC ein Dreieck, der Mittelpunkt von AB sei S, der Mittelpunkt von CS sei M, der Schnittpunkt von BC mit der Geraden durch A und M sei P.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Verhältnisse $BP : PC$ und $AM : MP$ eindeutig bestimmt sind, und ermittle diese Verhältnisse.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Parallele durch S zu AP bzw. zu BC schneide BC bzw. AP in T bzw. U (siehe Abbildung).
Nach dem Strahlensatz ist dann

$$BT : TP = BS : SA = 1 : 1, \qquad \text{also} \qquad BT = TP$$

$$TP : PC = SM : MC = 1 : 1, \qquad \text{also} \qquad TP = PC$$

Daher gilt $BT = TP = PC$, also $BP : PC = 2 : 1$. Ferner ist nach dem Strahlensatz

$$AU : UP = AS : SB = 1 : 1, \qquad \text{also} \qquad AU = UP$$

$$MU : MP = MS : MC = 1 : 1, \qquad \text{also} \qquad MU = MP$$

Daher gilt $MP = \frac{1}{2}UP = \frac{1}{4}AP$, also

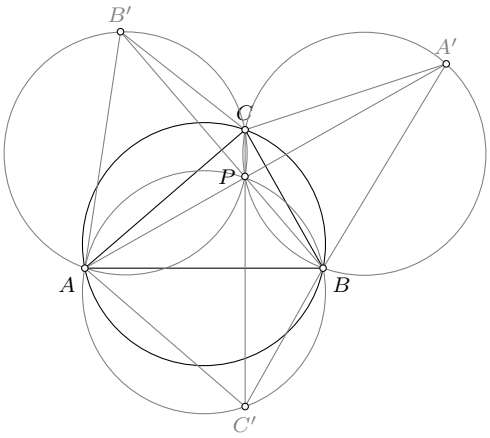
$$AM : MP = 3 : 1$$

Alternativ-Lösung von einem Mitglied des Matheplaneten:
Nach dem Satz von Menelaus gilt $\dfrac{AB}{SB} \cdot \dfrac{BP}{PC} \cdot \dfrac{CM}{MS} = 1$ und somit $\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{2}{1}$.

Außerdem gilt ebenso nach Menelaus $\dfrac{BC}{PC} \cdot \dfrac{PM}{MA} \cdot \dfrac{AS}{SB} = 1$ und somit $\dfrac{AM}{MP} = \dfrac{3}{1}$.

Aufgabe 321036:
Ermitteln Sie zu jedem spitzwinkligen Dreieck ABC alle diejenigen Punkte P, für die jedes der drei Spiegelbilder von P, gebildet durch die Spiegelung an den Dreiecksseiten, auf dem Umkreis des Dreiecks liegt!

Lösung von ochen:



Sei ABC ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck mit dem Umkreis k. Wir spiegeln jeden der drei Eckpunkte A, B und C an ihrer gegenüberliegenden Dreieckseite, also A an BC, B an AC und C an AB. Die Bildpunkte nennen wir A', B' und C'.

Nun bilden wir die Umkreise der Dreiecke $A'BC$, $AB'C$ und ABC' und bezeichnen diese mit k_1, k_2 und k_3. Die Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in zwei Punkten, der eine dieser Punkte ist C und der anderen Punkt heiße P.

Wir zeigen, dass P auch auf dem Umkreis k_3 liegt. Da $A'CPB$ ein Sehnenviereck ist, gilt

$$\angle BPC + \angle BAC = \angle BPC + \angle CA'B = 180^\circ$$

Analog ist auch $B'APC$ ein Sehnenviereck ist, somit folgt

$$\angle CPA + \angle CBA = \angle CPA + \angle AB'C = 180^\circ$$

Nun ist aber auch $C'BPA$ ein Sehnenviereck, da mit der Innenwinkelsumme im Dreieck

$$\angle APB + \angle BC'A = 180^\circ + 180^\circ - (\angle BAC + \angle CBA + \angle ACB) = 180^\circ$$

folgt. Da $C'BPA$ ein Sehnenviereck ist, liegt P auch auf k_3.

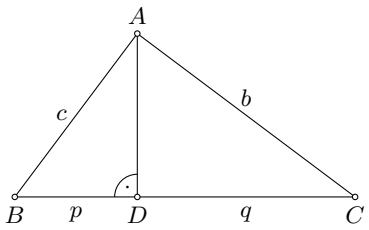
Wenn wir k_1 an der Seite BC spiegeln, erhalten wir den Kreis k, da A' auf A, B auf B und C auf C abgebildet werden. Weiter wird bei dieser Spiegelung auch P auf einen Punkt P_1 auf den Kreis k abgebildet, da P auf k_1 liegt.

Analog können wir k_2 an der Seite AC und k_3 an der Seite AB spiegeln, dann erhalten wir den Kreis k, da bei der Spiegelung an AC die Punkte A auf A, B' auf B und C auf C abgebildet werden und bei der Spiegelung an AB die Punkte A auf A, B auf B und C auf C' abgebildet werden. Weiter wird bei diesen Spiegelung auch P auf einen Punkt auf den Kreis k abgebildet, da P auf k_2 und auf k_3 liegt.

IV Runde 4

Aufgabe 011044:
Folgender Satz ist zu beweisen:
Wenn die von A auf BC gefällte Höhe eines Dreiecks mittlere Proportionale zwischen den Strecken ist, in die sie BC teilt, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

Lösung von Eckard Specht:



Beweis: Der Höhenfußpunkt von A auf BC sei D.
Mit den Bezeichnungen $h = AD, q = BD$ und $p = CD$ sowie den üblichen Abkürzungen $b = CA, c = AB$ und $a = BC = p + q$ folgt aus dem Satz des Pythagoras, angewandt auf die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle ADB$:

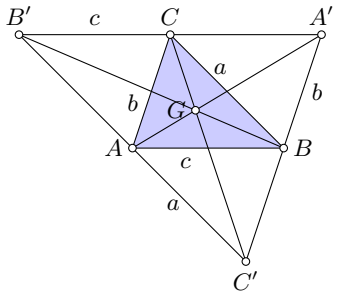
$$b^2 + c^2 = (h^2 + p^2) + (h^2 + q^2) = 2h^2 + (p^2 + q^2)$$

$$b^2 + c^2 + 2pq = 2h^2 + (p^2 + 2pq + q^2) = 2h^2 + (p + q)^2 = 2h^2 + a^2$$

Nach Voraussetzung gilt $h^2 = pq$, so dass aus obiger Gleichung nach Subtraktion $b^2 + c^2 = a^2$ folgt. Nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras ist damit bewiesen, dass das Dreieck bei A rechtwinklig ist.

Aufgabe 021045:
Beweisen Sie, dass die Summe der Seitenhalbierenden eines Dreiecks kleiner als der Umfang des Dreiecks ist!

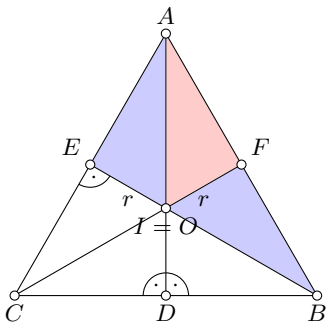
Lösung von Eckard Specht:



Beweis: Der Schwerpunkt des Dreiecks, in dem sich bekanntlich die Seitenhalbierenden schneiden, sei G; die Seitenlängen seien wie üblich a, b und c. Wir ergänzen nun das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm $ABA'C$.
Dieses hat die Diagonalenlängen $BC = a$ und $AA' = 2m_a$, letzteres, weil sich in Parallelogrammen die Diagonalen stets halbieren. Jetzt können wir die Dreiecksungleichung auf das Dreieck ABA' anwenden: $b + c > 2m_a$.
Analoge Ungleichungen erhalten wir, wenn wir die Parallelogramme $BCB'A$ und $CAC'B$ betrachten: $c + a > 2m_b$ bzw. $a + b > 2m_c$. Eine Addition dieser drei Ungleichungen liefert die Behauptung $m_a + m_b + m_c < a + b + c$.

Aufgabe 031046:
Beweisen Sie die folgende Behauptung:
Wenn in einem Dreieck der Mittelpunkt des Umkreises und der Mittelpunkt des Inkreises zusammenfallen, so ist das Dreieck gleichseitig.

Lösung von Eckard Specht:
Beweis: Seien D, E und F die Fußpunkte der Lote vom Inkreismittelpunkt I des Dreiecks auf den Seiten BC, CA bzw. AB.
Vom Inkreismittelpunkt darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass die Abstände $ID = IE = IF = r$ untereinander gleich sind und dem Inkreisradius r entsprechen. Dann folgt aus dem Kongruenzsatz SSW, dass z. B. die beiden rechtwinkligen Dreiecke AIE und AIF kongruent sind.

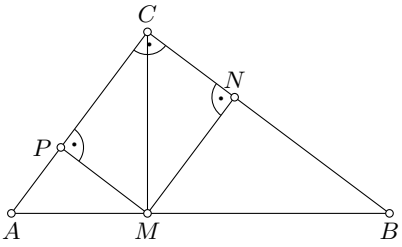


Fällt nun nach Voraussetzung der Umkreismittelpunkt O mit I zusammen, gilt auch $IA = IB = R$, da O gleiche Abstände (d.i. der Umkreisradius R) zu den Eckpunkten des Dreiecks hat. Somit sind nach SSW auch die Dreiecke AIF und BIF kongruent.
Diese Argumentation lässt sich fortführen, bis wir wieder beim Dreieck AIE ankommen und feststellen, dass alle sechs Teildreiecke kongruent sind, und das Dreieck mithin gleichseitig ist.

Aufgabe 041044:
Gegeben seien ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit $\angle ACB = R$ und ein beliebiger Punkt M auf der Hypotenuse AB. Beweisen Sie, dass folgende Relation gilt:

$$AM^2 \cdot BC^2 + BM^2 \cdot AC^2 = CM^2 \cdot AB^2$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Fall I: $M = A$
Die Relation reduziert sich auf $BA^2 \cdot AC^2 = CA^2 \cdot AB^2$, sie ist identisch erfüllt.

Fall II: $M = B$
Die Relation reduziert sich auf $AB^2 \cdot BC^2 = CB^2 \cdot AB^2$, sie ist identisch erfüllt.

Fall III: $M \neq A$, $M \neq B$

Der Schnittpunkt von BC und der Senkrechten auf BC durch M sei N. Der Schnittpunkt von AC und der Senkrechten auf AC durch M sei P. Nach dem Satz des Pythagoras bzw. nach dem Strahlensatz gelten:

$$AM^2 = AP^2 + MP^2 \quad \text{und} \quad BM^2 = MN^2 + BN^2 \quad \text{sowie} \tag{1}$$

$$\frac{AP}{AC} = \frac{MP}{BC}; \quad AP = \frac{MP \cdot AC}{BC} \quad \text{und} \quad \frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}; \quad BN = \frac{MN \cdot BC}{AC} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) erhält man:

$$AM^2 \cdot BC^2 = MP^2 \cdot AC^2 + MP^2 + BC^2 \quad \text{und} \quad BM^2 \cdot AC^2 = MN^2 \cdot AC^2 + MN^2 + BC^2 \tag{3}$$

Durch Addition der Gleichungen (3) ergibt sich:

$$AM^2 \cdot BC^2 + BM^2 \cdot AC^2 = (MP^2 + MN^2)(AC^2 + BC^2)$$

Unter Berücksichtigung von $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $MP^2 + MN^2 = PN^2$ und $PN = CM$ ($PMNC$ ist ein Rechteck) erhält man die Relation.

Aufgabe 061043:
In einem Zirkel Junger Mathematiker wird folgende Aufgabe gestellt:
Gegeben ist ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$; gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle PQR$ so, dass P innerer Punkt der Strecke BC, Q innerer Punkt der Strecke CA und R innerer Punkt der Strecke AB ist.

Bei der Diskussion über diese Aufgabe werden verschiedene Meinungen geäußert:

Anita glaubt, dass die Aufgabe nicht für jedes Dreieck $\triangle ABC$ lösbar ist.
Berthold ist der Meinung, dass es für jedes Dreieck $\triangle ABC$ genau eine Lösung gibt.
Claus nimmt an, für jedes Dreieck $\triangle ABC$ gelte folgendes: Es gibt beliebig viele Lösungen, und alle Dreiecke $\triangle PQR$, die Lösung sind, sind einander kongruent.
Dagmar meint zwar auch, für jedes Dreieck $\triangle ABC$ gebe es beliebig viele Lösungen; sie behauptet dann aber weiter: Es gibt wenigstens ein Dreieck $\triangle ABC$ mit der Eigenschaft, dass nicht alle Dreiecke $\triangle PQR$, die als Lösung auftreten, einander kongruent sind.

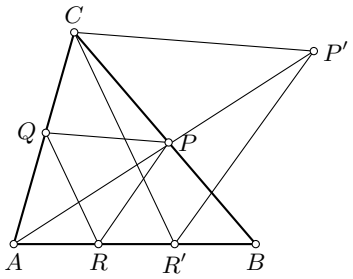
Untersuchen Sie diese Meinungen auf ihre Richtigkeit!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir zeigen, dass die Meinung und Behauptung von Dagmar richtig und daher die zu ihnen in Widerspruch stehenden Meinungen der drei anderen falsch sind.
Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, dass im gegebenen Dreieck (Bild)

$$|\angle BCA| \leq |\angle ABC| \leq |\angle CAB|$$

insbesondere also gilt

$$|\angle BCA| \leq 60^\circ \qquad \text{und} \qquad |\angle CAB| \geq 60^\circ$$



Unter diesen Bedingungen sei R' ein beliebiger (innerer) Punkt von AB. P' sei derjenige Punkt, für den $\triangle P'CR'$ gleichseitig ist und der auf der anderen Seite von $g_{CR'}$ wie A liegt. Dann liegt P' auf der anderen Seite von g_{BC} wie A, weil $|\angle BCA| \leq 60^\circ$ und $|\angle P'CA| = |\angle P'CR'| + |\angle R'CA| > 60^\circ$ gilt.

Außerdem ist $|\angle P'CA| \leq 120^\circ$ und $|\angle P'R'A| \leq 60^\circ + |\angle CR'A| < 180^\circ$, so dass $AR'P'C$ ein konvexes Viereck ist und insbesondere R' und C auf verschiedenen Seiten von $g_{AP'}$ liegen.
Da R' Punkt von AB ist, liegt B auf derselben Seite von $g_{AP'}$ wie R', so dass die Strecken BC und AP' einen Schnittpunkt haben, der mit P bezeichnet werde. Ist nun Q derjenige Punkt auf dem Strahl aus A durch C, für den

$$AQ : AC = AP : AP' \tag{1}$$

gilt, und R derjenige Punkt auf dem Strahl aus A durch B, für den

$$AR : AB = AP : AP' \tag{2}$$

gilt, so ist, da wegen $P \in AP'$ sicher $AP : AP' < 1$ ausfällt, Q innerer Punkt von AC und R innerer Punkt von AB.
Nach der Umkehrung des 1. Strahlensatzes gilt aufgrund von (1)

$$g_{PQ} \parallel g_{P'C} \quad \text{und aufgrund von (2)} \quad g_{PR} \parallel g_{P'R'}$$

Daher folgt aus dem 2. Strahlensatz, dass die drei Beziehungen

$$PQ : P'C = AP : AP' \qquad ; \qquad PR : P'R' = AP : AP'$$

$$\angle QPR = \angle CP'R'$$

bestehen. Da $\triangle P'C'R'$ gleichseitig ist, folgt somit

$$PQ = PR \qquad \text{und} \qquad \angle QPR = 60^\circ$$

so dass $\triangle PQR$ gleichseitig ist.

Hieraus ergibt sich weiter, dass $QR \parallel CR'$ ist, so dass keine zwei der gleichseitigen Dreiecke, die zu verschiedenen Lagen von R' auf AB gehören, zusammenfallen können. Es gibt also zu jedem Dreieck ABC unendlich viele verschiedene gleichseitige Dreiecke, die der im Zirkel gestellten Aufgabe entsprechen.

Es bleibt noch zu zeigen, dass es bei mindestens einem Dreieck ABC unter diesen gleichseitigen Dreiecken mindestens zwei zueinander inkongruente gibt. Dazu wählen wir $\triangle ABC$ gleichseitig. Sind P_1, Q_1, R_1 die Mittelpunkte von BC, CA bzw. AB, so ist $\triangle P_1Q_1R_1$ gleichseitig and es gilt

$$P_1Q_1 = \frac{1}{2}AB$$

Sind P_2, Q_2, R_2 die Mittelpunkte von P_1C, Q_1A bzw. R_1B, so ist auch $\triangle P_2Q_2R_2$ gleichseitig und es gilt nach dem Kosinussatz

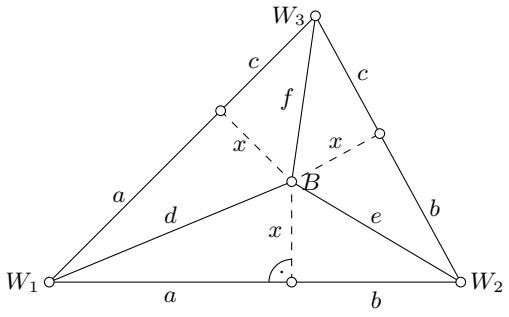
$$P_2Q_2 = \sqrt{BP_2^2 + BQ_2^2 - 2 \cdot BP_2 \cdot BQ_2 \cdot \cos 60^\circ} = AB\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$= AB\frac{\sqrt{7}}{4} > P_1Q_1$$

so dass $\triangle P_1Q_1R_1$ und $\triangle P_2Q_2R_2$ infolge unterschiedlicher Seitenlängen inkongruente gleichseitige Dreiecke sind.

Aufgabe 071045:
Drei Werkhallen (symbolisiert durch die Punkte W_1,W_2,W_3) eines größeren Betriebes und eine Bahnstation (symbolisiert durch den Punkt B) liegen in einem ebenen Gelände.
W_1,W_2,W_3 liegen nicht auf derselben Geraden.
Die Werkhallen sind miteinander durch drei geradlinige Straßen (symbolisiert durch die Strecken W_1W_2, W_2W_3 und W_3W_1) verbunden. Für die Strecken gilt: $W_2W_3 < W_3W_1 < W_1W_2$.
Die Bahnstation hat von den drei Straßen gleichen Abstand.
Sie ist ferner durch geradlinige Zubringerstraßen (symbolisiert durch die Strecken BW_1, BW_2 und BW_3) mit den drei Werkhallen verbunden.
Ein Autobus soll von der Bahnstation aus erst zu allen drei Werkhallen fahren und dann zur Bahnstation zurückkehren, wobei er ausschließlich die oben angegebenen Wege benutzen kann.
Ermitteln Sie unter diesen Bedingungen die kürzeste Fahrroute für den Bus!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der geometrische Ort aller Punkte, die von den zwei Schenkeln eines Winkels den gleichen Abstand haben, ist dessen Winkelhalbierende. Infolgedessen ist B der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks $\triangle W_1W_2W_3$ (somit der Inkreismittelpunkt).
Der Radius des Inkreises sei x, die in der Abbildung eingezeichneten Berührungsradien bestimmen Abschnitte auf den Dreiecksseiten, die wegen der Kongruenz der Teildreiecke (zwei Seiten und zwei Winkel stimmen überein) paarweise die gleiche Länge haben.
Die in der Aufgabenstellung gegebene Relation zwischen den Seitenlängen des $\triangle W_1W_2W_3$ bedeutet

$$a+b>a+c>b+c \qquad \text{also} \qquad a>b>c$$

Jede zulässige Fahrtroute führt von B zu einer Werkhalle und hat dort zwei mögliche Fortsetzungen. Das ergibt insgesamt sechs Routen. Drei von ihnen unterscheiden sich nur in der Orientierung von der anderen drei:

I: $B-W_1-W_2-W_3-B$ (gleiche Länge: $B-W_3-W_2-W_1-B$)
II: $B-W_2-W_1-W_3-B$ (gleiche Länge: $B-W_3-W_1-W_2-B$)
III: $B-W_1-W_3-W_2-B$ (gleiche Länge: $B-W_2-W_3-W_1-B$)

Die entsprechenden Längen sind:

$$\begin{aligned} I &: d+a+b+b+c+f \\ II &: e+b+a+a+c+f \\ III &: d+a+c+c+b+e \end{aligned}$$

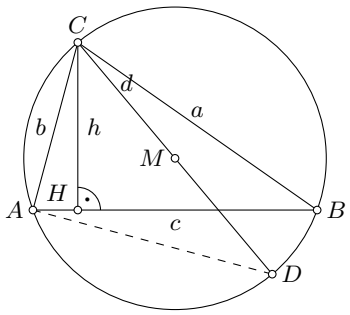
Nun werden die Längen der Routen I und II verglichen. Das ist gleichbedeutend mit dem Vergleich:

I	II
$b+d$	$a+e$
$b+\sqrt{a^2+x^2}$	$a+\sqrt{b^2+x^2}$
$b^2+2b\sqrt{a^2+x^2}+a^2+x^2$	$a^2+2a\sqrt{b^2+x^2}+b^2+c^2$
$b\sqrt{a^2+x^2}$	$a\sqrt{b^2+x^2}$
$b^2a^2+b^2x^2$	$a^2b^2+a^2x^2$
b^2x^2	a^2x^2
b^2	a^2
b	a

Da auf beiden Seiten nur positive Werte vorkommen, bedeuten Quadrieren und Wurzelziehen äquivalente Umformungen des Vergleichs. Es kann also aus $b<a$ geschlossen werden, dass der Weg I kürzer ist als der Weg II.
Analog zeigt man, dass III kürzer als I ist. Somit sind die beiden Varianten von III die gesuchten Routen.

Aufgabe 081041:
a) Beweisen Sie, dass für jedes Dreieck folgender Satz gilt!
Das Produkt der Längen a und b zweier Dreiecksseiten ist gleich dem Produkt aus der Länge h der der dritten Dreiecksseite zugeordneten Höhe und der Länge d des Umkreisdurchmessers dieses Dreiecks.
b) Folgern Sie aus diesem Satz die Beziehung $F=\frac{abc}{2d}$, wobei F der Flächeninhalt des Dreiecks und c die Länge der dritten Dreiecksseite sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Im Dreieck $\triangle ABC$ sei H der Fußpunkt des Lotes von C auf die Gerade durch A und B. Der durch C gehende Durchmesser des Umkreises des Dreiecks $\triangle ABC$ schneide diesen im Punkt D.
Es gelte $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$, $CH = h$, $CD = d$. Da die zu beweisende Aussage sich nicht ändert, wenn man A mit B vertauscht, so kann (eventuell durch eine solche Vertauschung) $\angle ABC < 90°$ erreicht werden.

Dann ist $D \neq A$; ferner $H \neq B$, und zwar liegen A und H auf demselben von B ausgehenden Strahl.
Nach dem Satz über die Peripheriewinkel über demselben Bogen (AC) folgt daher $\angle HBC = \angle ADC$.

Ferner ist nach der Definition der Höhe und nach dem Satz des Thales $\angle BHC = \angle DAC = 90°$. Daraus folgt nach dem Hauptähnlichkeitssatz $\triangle BHC \sim \triangle DAC$ und damit $a : h = d : b$, also $ab = hd$.

b) Nach a) gilt $h = \frac{a \cdot b}{d}$. Nun ist der Flächeninhalt F des Dreiecks $\triangle ABC$: $F = \frac{1}{2}c \cdot h$. Somit erhält man

$$F = \frac{a \cdot b \cdot c}{2d}$$

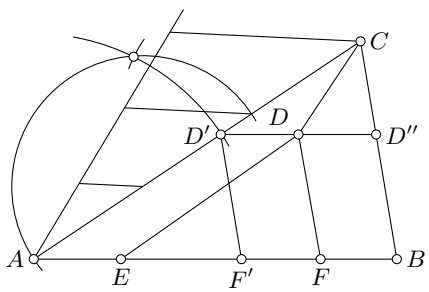
Aufgabe 101046:
Die Fläche eines Dreiecks $\triangle ABC$ soll folgendermaßen in drei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt werden: Zwischen den Eckpunkten A und B des Dreiecks liegen auf AB zwei Punkte E und F so, dass E zwischen A und F liegt. Außerdem sei D derjenige Punkt im Innern des Dreiecks $\triangle ABC$, für den $ED \parallel AC$ und $FD \parallel BC$ gilt.
Die Flächen der Trapeze $AEDC$ und $FBCD$ und die des Dreiecks $\triangle EFD$ sollen dann untereinander inhaltsgleich sein.
Konstruieren Sie Punkte E, F, D, für die diese Forderung erfüllt ist! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Unter der Annahme, dass in einem Dreieck ABC ein den Bedingungen der Aufgabe genügendes Dreieck EFD existiert, kann man folgende Aussagen machen:

(1) Dreieck EFD ist wegen der geforderten Parallelität der entsprechenden Seiten ähnlich dem Dreieck ABC.
(2) Der Flächeninhalt des Dreiecks EFD ist der dritte Teil des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC.
(3) Durch Parallelverschiebung des Dreiecks EFD um die Länge der Strecke AE in Richtung der Strecke BA entsteht das diesem kongruente Dreieck $AF'D'$.
(4) Nach dem Satz über die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke gilt

$$AD' : AC = 1 : \sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3} : 1$$

(5) Der Flächeninhalt des Trapezes $F'BCD'$ ist doppelt so groß wie der des Trapezes $FBCD$. Wegen der Längengleichheit von $F'D'$ und FD folgt aus der Flächenformel für ein Trapez nach dem Strahlensatz $2FB = F'B'$, also $FB = F'F$.



Konstruktion:
Man teilt AC im Verhältnis $\frac{1}{3}\sqrt{3} : 1$ durch Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks über der Hypotenuse $\frac{2}{3}AC$ mit der einen Kathete $\frac{1}{3}AC$. Die zweite Kathete sit dann gerade $\frac{1}{3}\sqrt{3}AC$.

Durch den Teilpunkt D' wird je eine Parallele zu AB bzw. BC gezeichnet. Die Schnittpunkte dieser Parallelen mit BC bzw. AB seien D'' und F'.

Der Mittelpunkt von $D'D''$ ist d, der von $F'B$ ist F. Der Schnittpunkt der Parallelen zu AC durch D mit AB ist E. Diese Konstruktion ist stets eindeutig ausführbar, wenn A, B und C nicht auf einer Geraden liegen.

Die nach der Konstruktion gewonnenen Punkte E, F und D genügen stets der Bedingungen der Aufgabe, denn es gelten folgende Überlegungen:

Wegen $AD' = \frac{1}{3}\sqrt{3}AC$ und $F'D'$ parallel BC ist der Flächeninhalt des Dreiecks $AF'D'$ gleich dem dritten Teil des Flächeninhalts des Dreiecks ABC. Wegen der Kongruenz der Dreiecke $AF'D'$ und EFD trifft das auch für den Flächeninhalt des Dreiecks EFD zu.
Damit ist der Flächeninhalt des Trapezes $F'BCD'$ doppelt so groß wie der des Dreiecks EFD. Da D die Strecke $D'D''$ und F die Strecke $F'B$ halbiert und $F'D'$ gleich FD ist, ist der Flächeninhalt des Trapezes $FBCD$ halb so groß wie der des Trapezes $F'BCD'$, also gleich dem des Dreiecks EFD.

Damit muss auch das Trapez $EDCA$ den gleichen Flächeninhalt besitzen, da die Summe der drei Teilflächen die Fläche des Dreiecks ABC ergeben muss.

Aufgabe 171044:
Gegeben seien zwei von einem Punkt C ausgehenden Strahlen s und t, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen.
Ermitteln Sie die Menge der Umkreismittelpunkte aller derjenigen Dreiecke ABC, deren Ecken A und B auf s bzw. t liegen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Sei s' die Gerade, die auf s in C senkrecht steht und t' die Gerade, die auf t in C senkrecht steht. s' zerlegt die Ebene ε, die von s und t aufgespannt wird, in die Halbebene $\varepsilon_s(1)$ und $\varepsilon_s(2)$, wobei $\varepsilon_s(1)$ die Halbebene ist, in der sich s befindet. Analog erhalten wir $\varepsilon_t(1)$ und $\varepsilon_t(2)$, wobei in $\varepsilon_t(1)$ t liege.

Behauptung: $L = \varepsilon_s(1) \cap \varepsilon_t(1)$ ist die gesuchte Menge.

Beweis: Ist P Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC mit $A \in s$ und $B \in t$, so ist P der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von CA und CB, also zweier Geraden, die sich in L schneiden, da die Mittelsenkrechten in $\varepsilon_s(1)$ bzw. $\varepsilon_t(1)$ liegen.
Liegt P in L, so liegen die Fußpunkte Q bzw. R der Lote von P auf die Geraden, die s und t enthalten, auf s bzw. t selbst und sind von C verschieden. Wir verlängern die Strecken CQ und CR um ihre eigene Länge über Q bzw. R hinaus. Wir erhalten die Punkte A und B, die ebenfalls auf s bzw. t liegen und zusammen mit C ein Dreieck bilden. Nach Konstruktion gilt $PA = PB = PC$, da PQ und PR auf den Mittelsenkrechten von CA bzw. CB liegen. Damit gehört P der gesuchten Menge an.

Aufgabe 191044:
Gegeben seien zwei Längen a, b und ein Flächeninhalt $F \leq \frac{1}{2}ab$.
Berechnen Sie aus diesen gegebenen Werten a, b, F alle diejenigen Längen r, die die Eigenschaft haben, dass ein Dreieck ABC mit $BC = a$, $AC = b$, dem Flächeninhalt F und dem Umkreisradius r existiert!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Lösung besteht aus zwei Teilen. Erstens ist r durch a, b und F auszudrücken, und zweitens ist die Existenz eines Dreiecks mit a, b, r und F nachzuweisen.

I. Angenommen, es existiert ein Dreieck ABC mit $a = BC, b = AC$, dem Flächeninhalt F und dem Umkreisradius r. Nun gilt mit $c = AB$ und $\gamma = \angle ACB$: $\sin\gamma = \frac{c}{2r}$ (siehe Bezirksolympiade Aufgabe 191034),

$$F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \qquad ; \qquad \cos\gamma = \pm\sqrt{1-\sin^2\gamma} \qquad (1)$$

und nach dem Kosinussatz $c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}$ (2). Damit ergibt sich

$$r = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{abc}{4F} = \frac{ab}{4F}\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma} = \frac{ab}{4F}\sqrt{a^2+b^2\pm 2\sqrt{a^2b^2-4F^2}} \qquad (3)$$

II. Wegen $0 < F \le \frac{1}{2}ab$ ist $a^2b^2 > a^2b^2 - 4F^2 \ge 0$ und

$$a^2+b^2\pm 2\sqrt{a^2b^2-4F^2} \ge a^2+b^2-2\sqrt{a^2b^2-4F^2} > a^2+b^2-2ab \ge 0$$

d. h., jeder der in (3) angegebenen r-Werte existiert. Da $0 \le \frac{\sqrt{a^2b^2-4F^2}}{ab} < 1$ gilt, existiert ein γ mit $0 < \gamma < \pi$ und

$$\cos\gamma = \pm\frac{\sqrt{a^2b^2-4F^2}}{ab} \qquad (4)$$

wobei das obere bzw. untere Vorzeichen entsprechend (3) gewählt wird. Hierzu gibt es ein Dreieck ABC, in dem (2) mit $c = AB$ gilt. Wegen $\sin\gamma > 0$ und (4) folgt

$$\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{1-\frac{a^2b^2-4F^2}{ab}} = 2\frac{F}{ab}$$

also ist $F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ der Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
Aus (3), (4) und (2) folgt

$$r = \frac{abc}{4F}$$

d. h., r (mit dem entsprechenden Vorzeichen) ist der Umkreisradius des Dreiecks ABC. Damit haben genau die durch (3) angegebenen Längen r die geforderte Eigenschaft.

Aufgabe 221044:
Beweisen Sie folgenden Satz!
Wenn ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $AC = BC$ ist und wenn D der Mittelpunkt von AB, D' der Fußpunkt des Lotes von D auf BC und H der Mittelpunkt von DD' ist, dann stehen AD' und CH aufeinander senkrecht.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Also sei $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C\left(\frac{a}{2},b\right)$ und $D\left(\frac{a}{2},0\right)$ mit $a,b \in \mathbb{R}^+$.
Die Gerade durch C und B hat die Funktionsgleichung $f_1(x) = \frac{-2b}{a}x + 2b$. Die Lotgerade durch D berechnet sich zu $f_2(x) = \frac{a}{2b}x - \frac{a^2}{4b}$.
Durch Gleichsetzen erhalten wir dann den Schnittpunkt

$$D'\left(\frac{8ab^2+a^3}{2a^2+8b^2}, \frac{a^2b}{a^2+4b^2}\right)$$

Die Steigung der proportionalen Funktion durch A und D' lässt sich leicht berechnen zu

$$m_3 = \frac{2a^3b+8ab^3}{a^4+12a^2b^2+32b^4}$$

Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{DD'}$ berechnet sich zu $H\left(\frac{6ab^2+a^3}{2a^2+8b^3}, \frac{a^2b}{2a^2+8b^2}\right)$. Die Steigung der Geraden durch C und H ermittelt sich nach etwas Algebra dann zu

$$m_4 = -\frac{a^4+12a^2b^2+32b^4}{2a^3b+8ab^3}$$

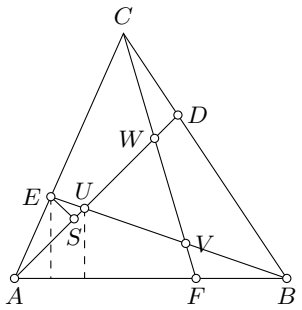
womit die Behauptung folgt.

Alternativ-Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Wir zeichnen zunächst eine Parallele zu $\overline{DD'}$ durch A, der Schnittpunkt mit $\overline{BC}$ sei E. Nun ist nach Winkelsummensatz im Dreieck DBD' $\angle 2 = 90° - \angle 1$.
Da das Dreieck ABC nach Voraussetzung gleichschenklig ist und D Mittelpunkt der Seite c ist, ist $\overline{DC}$ die Höhe auf der Seite c. Es gilt somit $\angle D'DC = 90° - \angle 2 = \angle 1$.
Da $\angle DD'C = 90°$ nach Voraussetzung ist, folgt somit die Ähnlichkeit der Dreiecke $DD'C$ und ABE. Nach Strahlensatz ist D' Mittelpunkt der Strecke $\overline{BE}$. Die Strecke $\overline{AD'}$ ist somit Seitenhalbierende im Dreieck ABE. Nun war H laut Voraussetzung Mittelpunkt der Strecke $\overline{DD'}$, also ist die Strecke $\overline{CH}$ entsprechende Seitenhalbierende im Dreieck $DD'C$.

Nun können wir das Dreieck ABE wie folgt auf das Dreieck $DD'C$ abbilden: Wir drehen zunächst das Dreieck um B um 90° und erhalten danach das Dreieck BIG.
Anschließend verschieben wir noch B auf D und Strecken anschließend das Dreieck. Da Verschiebung und Achsenstreckung winkeltreue Abbildungen sind, ändern sich die Winkel entsprechender Strecken nicht, womit die Behauptung bewiesen ist.

Aufgabe 241042:
Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Auf den Seiten BC, CA, AB seien D, E bzw. F diejenigen Punkte, für die $BD = 2 \cdot CD$, $CE = 2 \cdot AE$, $AF = 2 \cdot BF$ gilt.
Weiter sei jeweils U bzw. V bzw. W der Schnittpunkt von AD mit BE bzw. von BE mit CF bzw. von CF mit AD.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen der Flächeninhalt des Dreiecks UVW stets gleich einem Siebentel des Flächeninhalts des Dreiecks ABC ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung ist $AE = \frac{1}{3}AC$. Da die Dreiecke ABE, ABC bezüglich der Grundlinie AE bzw. AC dieselbe Höhe haben, folgt [1]

$$J(ABE) = \frac{1}{3} \cdot J(ABC)$$

Der Schnittpunkt von AD mit der Parallelen durch E zu BC sei S. Dann folgt aus dem Strahlensatz $ES = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{6}BC$ und weiter

$$DE : DB = ES : SD = 1 : 6 \qquad \text{also} \qquad UE = \frac{1}{7}BE$$

Ferner ergibt der Strahlensatz für die Längen h_U, h_E der von U bzw. E auf die Gerade durch A und B gefällten Lote $h_U : h_E = BU : BE = 6 : 7$. Hiernach und nach (1) gilt

$$J(ABU) = \frac{6}{7} \cdot J(ABE) = \frac{2}{7} \cdot J(ABC)$$

Analog folgt

$$J(BCV) = \frac{2}{7} \cdot J(ABC) \qquad , \qquad J(CAW) = \frac{2}{7} \cdot J(ABC)$$

[1] Ist XYZ ein Dreieck, so bezeichne $J(XYZ)$ seinen Flächeninhalt.

und damit, wie behauptet

$$J(UVW) = J(ABC) - J(ABU) - J(BCV) - J(CAW) = \frac{1}{7} \cdot J(ABC)$$

Aufgabe 261041:
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Ferner sei x eine beliebig vorgegebene Streckenlänge.
Die Seiten des Dreiecks ABC seien jeweils um eine Strecke dieser Länge x verlängert, und zwar BA über A hinaus bis A', CB über B hinaus bis B' und AC über C hinaus bis C'.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen das Dreieck $A'B'C'$ stets denselben Umkreismittelpunkt wie das Dreieck ABC hat!

Lösung von cyrix:
Sei U der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$. Dann bildet die Drehung um U um den Drehwinkel $120°$ aufgrund der Gleichseitigkeit das Dreieck $\triangle ABC$ auf sich selbst ab, also auch Geraden durch zwei seiner Eckpunkte wieder auf eine solche Gerade.
Da auch Längen bei dieser Kongruenzabbildung erhalten bleiben, wird somit auch das Dreieck $\triangle A'B'C'$ auf sich selbst abgebildet, sodass dies auch für dessen Umkreismittelpunkt U' gelten muss. Da aber U der einzige Fixpunkt bei dieser Drehung ist, folgt $U' = U$, $\square$.

Aufgabe 281045:
In einer Ebene seien drei zueinander parallele Geraden g, h, k so gegeben, dass g und h voneinander den Abstand 8 cm haben und dass k im Abstand 5 cm von g in dem Streifen zwischen g und h verläuft.
Man untersuche, ob ein gleichseitiges Dreieck ABC existiert, für das A auf g, B auf h und C auf k liegt.
Falls kein solches Dreieck existiert, so beweise man diese Aussage.
Falls ein solches Dreieck existiert, so gebe man an, wie die Seitenlänge eines solchen Dreiecks rechnerisch oder konstruktiv erhalten werden kann, und beweise, dass ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der nach dieser Angabe erhaltenen Seitenlänge die geforderten Bedingungen (A auf g, B auf h, C auf k) erfüllt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, ein gleichseitiges Dreieck ABC erfülle die geforderten Bedingungen; seine Seitenlänge habe die Maßzahl a.
Das Lot von B auf g habe den Fußpunkt P und schneide k in Q, das Lot von A auf k habe den Fußpunkt R; die Punkte B und C seien auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A, R gelegen.
Für die Maßzahlen x, y von PA, RC folgt dann, dass QC die Maßzahl $x + y$ hat. Daher ergibt sich nach dem Satz des Pythagoras

$$x^2 + 64 = a^2 \tag{1}$$
$$y^2 + 25 = a^2 \tag{2}$$
$$(x + y)^2 + 9 = a^2 \tag{3}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

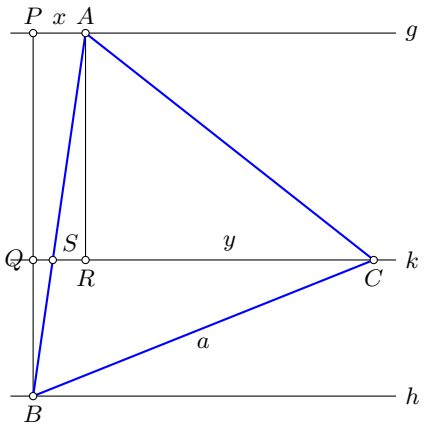
$$x^2 = a^2 - 64 \tag{4}$$
$$y^2 = a^2 - 25 \tag{5}$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = a^2 - 9 \tag{6}$$

und damit weiter

$$2xy = a^2 - 9 - (a^2 - 64) - (a^2 - 25) = 80 - a^2 \tag{7}$$
$$4(a^2 - 64)(a^2 - 25) = (80 - a^2)^2 \tag{8}$$
$$a^2(3a^2 - 196) = 0$$

Wegen $a > 0$ folgt somit, dass die Seitenlänge von ABC erhalten werden kann mit der Maßzahl

$$a = \frac{14}{\sqrt{3}} \tag{9}$$



II. Wird eine Seitenlänge nach der Angabe (9) erhalten, so folgt umgekehrt:
Wegen $196 > 3 \cdot 64$, also $\frac{14}{\sqrt{3}} > 8$ existieren x,y (> 0) mit (4), (5). Für diese gilt wegen (8) und $3 \cdot 80 > 196$, also $80 > \left(\frac{14}{\sqrt{3}}\right)^2$ auch (7), (6), also sind (1), (2), (3) erfüllt.

Wählt man daher B auf h, fällt das Lot BP von B auf g, legt A auf g mit x als Maßzahl von PA fest, fällt das Lot AR von A auf k und bestimmt dann C auf k mit y als Maßzahl von RC so, dass B und C auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A, R liegen, so besagen (1), (2), (3) nach dem Satz des Pythagoras:
ABC ist mit der Maßzahl a der Längen $AB = AC = BC$ ein gleichseitiges Dreieck, das die geforderten Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 291045:
Ermitteln Sie eine Verteilung von fünf verschiedenen Punkten auf die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks (einschließlich seines Randes), bei der der kleinste Abstand zwischen zwei verschiedenen dieser Punkte möglichst groß wird!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Die Verbindungsstrecken der 3 Seitenmitten des gegebenen gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge a zerlegen es in vier kongruente Teildreiecke der Seitenlänge $\frac{a}{2}$.
Daher findet man bei jeder Verteilung von 5 Punkten nach dem Dirichletschen Schubfachschluss ein Teildreieck, in dem - einschließlich des Randes - mindestens zwei der 5 Punkte liegen.
Diese beiden haben einen Abstand, der nicht größer als die Seitenlänge, also nicht größer als $\frac{a}{2}$ ist. Folglich kann bei keiner Verteilung von 5 Punkten der kleinste Abstand zwischen 2 von ihnen größer als $\frac{a}{2}$ sein.

(II) Wir legen 2 der 5 Punkte in Eckpunkte und die restlichen 3 in die Seitenmitten des gegebenen Dreiecks. Dann ist der kleinste Abstand zwischen 2 von ihnen gleich $\frac{a}{2}$.
Wegen (I) ist dies eine gesuchte Verteilung.

Aufgabe 311042:
Es sei ABC ein beliebiges Dreieck; auf der Seite BC sei D ein beliebiger Punkt zwischen B und C; auf CA sei E ein beliebiger Punkt zwischen C und A; auf AB sei F ein beliebiger Punkt zwischen A und B.
Ferner sei k_A der Kreis durch A, E, F; es sei k_B der Kreis durch B, F, D; und es sei k_C der Kreis durch C, D, E.
Man beweise, dass bei allen Lagemöglichkeiten, die es unter diesen Voraussetzungen für A, B, C, D, E, F, k_A, k_B, k_C gibt, die drei Kreise k_A, k_B, k_C stets einen Punkt gemeinsam haben.

Lösung von Nuramon:
Lemma:
Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, $t \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Punkt und $D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Drehung um 90° um den Ursprung.
Dann existiert für die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \alpha D(x) + t$ ein Punkt $s \in \mathbb{R}^2$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung $f(x - s) = \alpha D(x) - s$ gilt.
In anderen Worten: Jede Verknüpfung einer Drehstreckung um 90° um den Ursprung und einer Verschiebung lässt sich darstellen als eine Drehstreckung um 90° mit dem gleichen Streckfaktor um einen Punkt.

Beweis des Lemmas:
Sei $x \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Für das gesuchte $s \in \mathbb{R}^2$ muss gelten

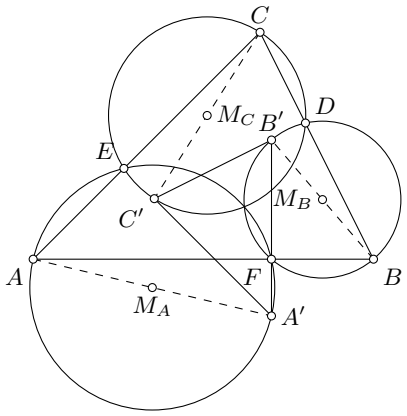
$$\alpha D(x) - s = f(x - s) = \alpha D(x - s) + t = \alpha D(x) - \alpha D(s) + t,$$

also $\alpha D(s) - s = t$. Es genügt daher zu zeigen, dass die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v \mapsto \alpha D(v) - v$ surjektiv ist. Da g linear ist, genügt es sogar zu zeigen, dass g injektiv ist.
Angenommen $v \in \ker g$, also $g(v) = 0$, d. h. $\alpha D(v) = v$. Dann gilt

$$|v|^2 = \langle v, v\rangle = \alpha\langle v, D(v)\rangle = 0.$$

(Das letzte Gleichheitszeichen gilt, weil per Definition v orthogonal zu $D(v)$ ist.) Also muss $v = 0$ gelten, d. h. g injektiv sein. □

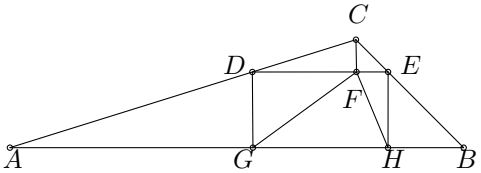
Beweis der Behauptung in der Aufgabe:
Die Mittelpunkte der Kreise k_A,k_B,k_C seien mit M_A,M_B,M_C bezeichnet. Es seien A',B' bzw. C' die den Punkten A,B bzw. C diametral in k_A, k_B bzw. k_C gegenüberliegenden Punkte.



Nach dem Satz von Thales, ist dann AF orthogonal zu $A'F$ und BF orthogonal zu $B'F$. Also liegen A' und B' beide auf dem Lot zu AB durch F. Analog liegen B' und C' auf dem Lot zu BC durch D, sowie C' und A' auf dem Lot zu AC durch E.
Da die erwähnten Lote untereinander jeweils die gleichen Winkel einschließen, wie die Seiten des Dreiecks ABC, folgt, dass das Dreieck $A'B'C'$ zu ABC ähnlich ist.
Nach obigem Lemma lässt sich diejenige affine Abbildung, die A,B,C auf A',B',C' abbildet, darstellen als eine Drehstreckung um 90° um einen Punkt S. Insbesondere steht also AS auf $A'S$ senkrecht. Nach dem Satz von Thales muss daher S auf dem Kreis k_A liegen. Analog lässt sich zeigen, dass S auch auf k_B und k_C liegt. □

Aufgabe 311045:
Kann jedes Dreieck in genau 8 spitzwinklige Dreiecke zerlegt werden?

Lösung von Kornkreis:
Im Folgenden sei mit Dreieck immer ein nichtentartetes Dreieck gemeint. Wir beweisen nun, dass jedes (nichtentartete) Dreieck in genau 8 spitzwinklige Dreiecke zerlegt werden kann. Dazu zeigen wir zunächst, dass jedes recht- oder stumpfwinklige Dreieck in genau 7 spitzwinklige Dreiecke zerlegt werden kann.



Sei also ein recht- oder stumpfwinkliges Dreieck ABC gegeben und dessen größter Winkel sei (o. B. d. A.) bei C, siehe Skizze.

Die Höhe auf AB durch C liegt echt im Dreieck (da bei C der größte Winkel ist). Auf dieser Höhe wählen wir nun einen Punkt F ungleich C und nicht auf AB. Die Parallele bezüglich AB durch F schneide AC und BC in D bzw. E, beide Punkte sind jeweils von A,B verschieden. Die Fußpunkte von D und E auf AB seien G bzw. H, beide sind jeweils von A,B verschieden. Da F im Inneren von DE liegt, hat das Dreieck GFH einen nicht-spitzen Winkel höchstens bei F. Wenn F nahe genug an C liegt, ist dieser Winkel bei F allerdings immer spitz (da er gegen 0 geht, wenn F gegen C geht).

Alle Teildreiecke in ABC, außer dem Dreieck GFH, haben nun genau einen rechten Winkel. Man sieht leicht, dass man diese rechten Winkel verkleinert, wenn man F ein hinreichend kleines Stück nach unten zieht (d. h. den Abstand FC vergrößert), G ein hinreichend kleines Stück nach rechts und H nach links zieht (d. h. die Abstände AG und HB vergrößert). Die spitzen Winkel bleiben dabei spitz, wenn die Verschiebungen hinreichend klein sind. Des Weiteren bleibt das Dreieck GFH spitzwinklig.
Somit hat man ABC in genau 7 spitzwinklige Dreiecke zerlegt.

Sei nun irgendein beliebiges Dreieck ABC gegeben. Wähle die Ecke mit dem größten Winkel, o. B. d. A. sei dies C. Die Höhe durch C liegt dann vollständig im Dreieck und der Fußpunkt F auf AB ist von A,B verschieden. Verschiebe nun F ein hinreichend kleines Stück auf AB, dabei entstehen genau ein spitzwinkliges und genau ein stumpfwinkliges Dreieck als Zerlegung von ABC.
Nach Obigem lässt sich das stumpfwinklige Dreieck in genau 7 spitzwinklige Dreiecke zerlegen. Damit haben wir ABC insgesamt in genau 8 spitzwinklige Dreiecke zerlegt und die Aussage ist gezeigt.

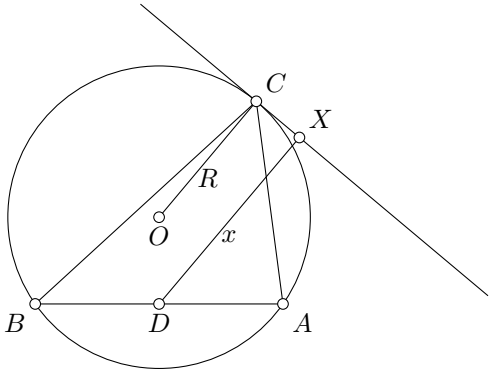
Aufgabe 321046:
Man beweise:
Sind a, b, c die Seitenlängen und ist F der Flächeninhalt eines Dreiecks, so hat die Summe der Längen der drei Lote, die von je einer Seitenmitte aus auf die in der Gegenecke an den Umkreis gelegte Tangente gefällt werden, den Wert

$$2F \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$$

Lösung von Nuramon:
Es seien x,y,z die Längen der erwähnten Lote. Für den Umkreisradius R des Dreiecks ABC gilt bekanntlich $R = \frac{abc}{4F}$. Die zu zeigende Behauptung ist daher äquivalent zu

$$x+y+z = \frac{a^2+b^2+c^2}{2R}$$

Wir betrachten ein Koordinatensystem, bei dem der Umkreismittelpunkt O von ABC im Ursprung liegt. Auf diese Weise haben die Ortsvektoren A,B,C alle die Länge R. Es sei $D = \frac{1}{2}(A+B)$ der Mittelpunkt von AB. Schließlich sei X der Fußpunkt des Lotes von D auf die durch C verlaufende Tangente an den Umkreis von ABC.



Die Strecken CO und XD sind parallel und haben die gleiche Orientierung. Daher gibt es ein $\lambda \geq 0$, so dass $X - D = \lambda C$, also $X = \lambda C + \frac{1}{2}(A + B)$ gilt.
Außerdem steht CX senkrecht auf CO. Somit gilt für das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle X - C, C\rangle \\ &= \langle(\lambda - 1)C + \frac{1}{2}(A + B), C\rangle \\ &= (\lambda - 1)\langle C,C\rangle + \frac{1}{2}(\langle A,C\rangle + \langle B,C\rangle) \\ &= (\lambda - 1)R^2 + \frac{1}{2}(\langle A,C\rangle + \langle B,C\rangle) \end{aligned}$$

Also gilt $\lambda = 1 - \frac{1}{2R^2}(\langle A,C\rangle + \langle B,C\rangle)$. Somit folgt

$$x = |X - D| = \lambda R = R - \frac{1}{2R}(\langle A,C\rangle + \langle B,C\rangle).$$

Analog erhalten wir für die Längen der anderen beiden Lote

$$\begin{aligned} y &= R - \frac{1}{2R}(\langle B,A\rangle + \langle C,A\rangle), \\ z &= R - \frac{1}{2R}(\langle C,B\rangle + \langle A,B\rangle). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$x + y + z = 3R - \frac{1}{R}(\langle A,B\rangle + \langle B,C\rangle + \langle C,A\rangle).$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R} &= \frac{1}{2R}(|A - B|^2 + |B - C|^2 + |C - A|^2) \\ &= \frac{1}{2R}(|A|^2 + |B|^2 - 2\langle A,B\rangle + |B|^2 + |C|^2 - 2\langle B,C\rangle + |C|^2 + |A|^2 - 2\langle C,A\rangle) \\ &= 3R - \frac{1}{R}(\langle A,B\rangle + \langle B,C\rangle + \langle C,A\rangle), \end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

Aufgabe 331046:
An einem Dreieck ABC wurde festgestellt, dass es folgende Bedingungen erfüllt:
(1) Der Innenwinkel $\angle BAC$ ist ein spitzer Winkel.
(2) Die Seite BC hat die Länge $a = BC = 6{,}5$ cm.
(3) Für die Seitenlängen $b = AC$ und $c = AB$ gilt $b - c = 4{,}5$ cm.
(4) Für die Längen h_b bzw. h_c der auf AC bzw. AB senkrechten Höhen gilt: $h_c - h_b = 2{,}7$ cm.
Beweisen Sie, dass es bis auf Kongruenz nur ein Dreieck gibt, das diese Bedingungen erfüllt!

Lösung von OlgaBarati:
$(b - c) = 45mm$ (i) und $h_c - h_b = 27mm$ (ii)
Die beiden Höhen $h_c = b\sin\alpha$ und $h_b = c\sin\alpha$ führen mit (ii) und (i) zur Bestimmung von $\measuredangle BAC = \alpha : \alpha < 45°$:

$$\begin{gathered} h_c - h_b = 27mm \\ b\sin\alpha - c \cdot \sin\alpha = 27mm \\ (b - c)\sin\alpha = 27mm \\ 45mm\sin\alpha = 27mm \\ \sin\alpha = \frac{27mm}{45mm} = \frac{3}{5},\ \alpha \approx 36.87° \end{gathered}$$

Der Kosinussatz und (i) ergeben nach Umformung und mit $\cos(\arcsin(\frac{3}{5})) = \frac{4}{5}$ und $a = 65mm$:

$$(65mm)^2 = (c + 45mm)^2 + c^2 - 2(c + 45mm)c\frac{4}{5}$$

$$(65mm)^2 = c^2 + 90mm\ c + (45mm)^2 + c^2 - \frac{8}{5}c^2 - \frac{8}{5}45mm\ c$$

$$c^2 + 45mm\ c - 5500mm^2 = 0$$

$$c = -22{,}5mm \pm 77{,}5mm$$

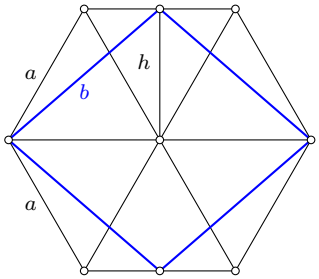
Es folgt hieraus nur eine positive Lösung mit $c = 55mm$ und es gibt somit nur ein Dreieck das mit den Seitenlängen, Angaben in Millimeter, $(a,b,c) = (65{,}100{,}55)$ existiert und die Bedingungen (1),(2),(3),(4) erfüllt.

VI.II Vierecke; Vielecke

I Runde 1

Aufgabe V01012:
Zeichnen Sie in ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a den größtmöglichen Rhombus!
a) Stellen Sie eine Formel für den Flächeninhalt und den Umfang des Rhombus auf!
b) Wieviel Prozent der Sechseckfläche nimmt der Rhombus ein?

Lösung von MontyPythagoras:



a) Es ist

$$b = \sqrt{a^2 + h^2}$$

wobei $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ist, und daher:

$$b = \sqrt{a^2 + \tfrac{3}{4}a^2} = \tfrac{\sqrt{7}}{2}a$$

Der Umfang des Rhombus ist somit:

$$U_R = 4b = 2\sqrt{7}\,a$$

Die Fläche des Rhombus lautet:

$$A_R = 4 \cdot \tfrac{1}{2}ah = 2ah = \sqrt{3}\,a^2$$

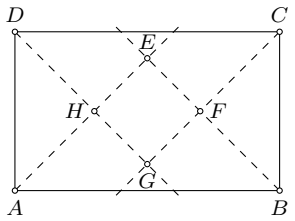
b) Die Fläche des Sechsecks lautet:

$$A_S = 6 \cdot \tfrac{1}{2}ah = 3ah$$

Die Fläche des Rhombus ist daher zwei Drittel des Flächeninhalts des Sechsecks, und daher gerundet 66,7%.

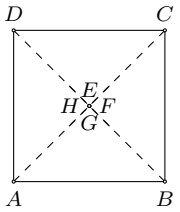
Aufgabe V11015:
Konstruieren Sie ein Rechteck ($a = 5$ cm, $b = 3$ cm) und seine Winkelhalbierenden!
a) Was für eine Figur wird durch alle vier Winkelhalbierenden eingeschlossen? Begründen Sie das!
b) Welchen Flächeninhalt erhält man für die Figur, wenn die Ausgangsfigur ein Quadrat mit $a = 5$ cm ist?

Lösung von Steffen Polster:



a) Die vier Winkelhalbierenden bilden ein Quadrat $EFGH$.
F und H liegen aus Symmetriegründen auf der waagerechten Mittellinie des Rechtecks $ABCD$. Nach einem Strahlensatz gilt dann $EH : AE = EF : EB$. Da $AE = EB$ ist, gilt auch $EH = FH$. Analog folgt auch $FG = GH$, $EH = GH$ und $GF = EF$, d. h., alle vier Seiten von $EFGH$ sind gleich lang.
Das Dreieck ABE ist gleichschenklig mit den Basiswinkeln von 45° (Winkelhalbierende). Das ist der Winkel bei E ein Rechter und $EFGH$ ist ein Quadrat.

b) Für ein Quadrat fallen die vier Punkte E, F, G und H zusammen, da auch die Diagonalen Symmetrieachsen sind. Es entsteht keine Fläche.



Aufgabe 041013:
In den Eckpunkten eines Sehnenvierecks werden an den Umkreis die Tangenten gezeichnet.
a) Beweisen Sie, dass das so entstandene Tangentenviereck ein Drachenviereck ist, wenn das Sehnenviereck ein Trapez ist! b) Gilt die Umkehrung dieser Aussage ebenfalls?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, bei dem keine Seite Durchmesser des Umkreises ist. Dann sind die Tangenten an den Umkreis von $ABCD$ in benachbarten Eckpunkten nicht parallel zueinander und haben daher einen Schnittpunkt.
Wir bezeichnen den Schnittpunkt der Tangenten in A und B mit E und entsprechend den der Tangenten in B und C mit F, in C und D mit G und den der in D und A mit H. E, F, G, H sind paarweise voneinander verschieden.

Aufgrund einer bekannten Eigenschaft von Tangentenabschnitten gelten dann die folgenden Beziehungen:

$$|AE| = |BE|, \quad |BF| = |CF|, \quad |CG| = |DG|, \quad |DH| = |AH|$$

Ist M der Mittelpunkt des Umkreises des Sehnenvierecks $ABCD$, so gilt außerdem $|MA| = |MB| = |MC| = |MD|$.
Daher ist jedes der Vierecke $AEBM$, $BFCM$, $CGDM$, $DHAM$ ein Drachenviereck. Infolgedessen halbieren ihre Diagonalen ME, MF, MG bzw. MH die Winkel $\angle AEB$, $\angle BFC$, $\angle CBD$ bzw. $\angle DMA$ und stehen auf den Strecken AB, BC, CD bzw. DA senkrecht.

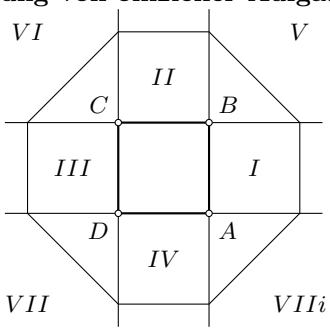
a) Ist nun $ABCD$ Trapez, so kann o. B. d. A. angenommen werden, dass $AB \perp CD$ ist. In diesem Fall ist auch die auf AB senkrechte Strecke ME parallel zu der auf CD senkrechten Strecke MG.
Folglich liegen ME und MG auf der Geraden g_{EG}, so dass die Diagonale EG von $EFGH$ die Winkel $\angle HEF$ und $\angle HGF$ halbiert. Daher ist nach dem Kongruenzsatz (sww) $\triangle EFG$ zu $\triangle EHG$ kongruent. Wegen $F \neq H$ liegen diese Dreiecke somit auf verschiedenen Seiten von g_{EG}, und zwar spiegelbildlich zu g_{EG}. Folglich ist $EFGH$ ein Drachenviereck.

b) Ja. Dazu ist zu zeigen: Ist $EFGH$ Drachenviereck, so ist $ABCD$ Trapez.

Beweis:
Wenn $EFGH$ Drachenviereck ist, so kann es o. B. d. A. zu g_{EG} symmetrisch angenommen werden, so dass g_{EG} jeden der beiden Winkel $\angle HEF$ und $\angle FGH$ halbiert. Wegen $\angle HEF = \angle AEB$ und $\angle HGF = \angle DGC$ (1) halbiert g_{EG} auch die beiden Winkel auf der rechten Seite von (1). Da g_{ME} den Winkel $\angle AEB$ und g_{MA} den Winkel $\angle DGC$ halbiert ist $g_{ME} = g_{EG} = g_{MG}$.
Außerdem steht g_{ME} auf AB und g_{MG} auf DC senkrecht. Daher steht sowohl AB als auch DC auf g_{EC} senkrecht, so dass $AB \perp CD$ gilt.

Aufgabe 051012:
Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge 1.
Ermitteln Sie die Menge aller Punkte in der Ebene, für die die Summe der Entfernungen von den Quadratseiten oder deren Verlängerungen gleich 4 ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Geraden $g_{AB}, g_{BC}, g_{CD}, g_{DA}$ zerlegen die Ebene außerhalb des Quadrates in 8 Felder, die im Bild mit I bis VIII bezeichnet sind, wobei die Punkte und Trennungsgeraden als zu allen ihren Feldern anliegenden Feldern zugehörig betrachtet werden.

Wir betrachten zunächst das Feld I. Die Abstände jedes Punktes P dieses Feldes, der die gestellte Bedingung erfüllt, von den Geraden $g_{AB}, g_{BC}, g_{CD}, g_{DA}$ bezeichnen wir mit e_{AB}, e_{BC}, e_{CD} bzw. e_{DA}. Dann gilt:

$$e_{AB} + e_{BC} + e_{CD} + e_{DA} = 4$$

Weil P zwischen den parallelen Geraden g_{BC} und g_{DA} liegt, ist $e_{BC} + e_{DA} = 1$. Da die Geraden g_{AB} und g_{CD} parallel sind, und weil g_{CD} und P auf verschiedenen Seiten von g_{AB} liegen, ist $e_{CD} = e_{AB} + 1$. Daher folgt:

$$2e_{AB} + 1 + 1 = 4 \qquad ; \qquad e_{AB} = 1$$

Diese Bedingung wird genau von den Punkten erfüllt, die im Feld I und auf einer Parallelen zu g_{AB} im Abstand 1 liegen. Analog erhält man Parallelen zu den Quadratseiten im Abstand 1 in den Feldern II, III und IV.

Wir betrachten nun das Feld V. Die Abstände jedes Punktes Q dieses Feldes, der die gestellte Bedingung erfüllt, von den Geraden $g_{AB}, g_{BC}, g_{CD}, g_{DA}$ bezeichnen wir mit f_{AB}, f_{BC}, f_{CD} bzw. f_{DA}. Dann gilt:

$$f_{AB} + f_{BC} + f_{CD} + f_{DA} = 4$$

Analog zum Fall $P \in I$ ist $f_{CD} = f_{AB} + 1$ und $f_{DA} = f_{BC} + 1$. Daraus folgt

$$2f_{AB} + 2f_{BC} + 2 = 4 \qquad ; \qquad f_{AB} + f_{BC} = 1$$

Q liegt daher auf der zu g_{AC} parallelen Diagonalen des aus $ABCD$ durch Spiegelung an D entstehenden Quadrates.
Analog erhält man in den Feldern VI, VII und VIII die Strecken, deren Endpunkte mit den Endpunkten der schon gefundenen Strecken in den Feldern II und III, III und IV bzw. IV und I übereinstimmen.

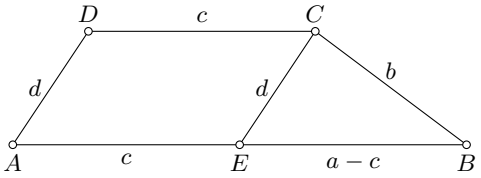
Im Innern des Quadrats (Feld IX) können keine derartigen Punkte liegen, da der Abstand jedes Punktes im Innern von jeder der Quadratseiten kleiner als die Seitenlänge ist, was dann auch für die entsprechenden Summen gilt.

Die gesuchte Punktmenge besteht also aus den Punkten des Achtecks, dessen Eckpunkte alle auf demselben Kreis um den Mittelpunkt des Quadrates $ABCD$ liegen und von dessen Seiten jede entweder zu einer Seite oder zu einer Diagonalen des Quadrates $ABCD$ parallel und kongruent ist.

Aufgabe 081013:
Konstruieren Sie ein Trapez aus a, b, c und d!

Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die Länge der Seite BC, c die Länge der Seite CD und d die Länge der Seite DA. Weiterhin soll $AB \parallel CD$ und $a > c$ gelten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Angenommen, $ABCD$ sei ein Trapez, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Zieht man durch C die Parallele zu DA, dann schneidet diese AB, da $a > c$ ist. Der Schnittpunkt sei E. Es entstehen das Dreieck $\triangle EBC$ mit $EB = a - c$ und das Parallelogramm $AECD$ mit $|CE| = d$.

$\triangle EBC$ ist konstruierbar aus $a - c$, b, d nach Kongruenzsatz (sss).
$\triangle ABC$ ist konstruierbar aus $|CB|$, $\angle CBE$, a nach Kongruenzsatz (sws).
$\triangle ACD$ ist konstruierbar aus $|AC|$, c, d nach Kongruenzsatz (sss).

b) Daraus ergibt sich, dass ein Trapez nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

- Man zeichne die Strecke EB der Länge $a - c$.
- Punkt C liegt dann auf dem Kreis um B mit dem Radius b und auf dem Kreis um E mit dem Radius d.
- Punkt A liegt auf der Verlängerung von BE über E hinaus und auf dem Kreis um B mit dem Radius a.
- Punkt D liegt auf dem Kreis um C mit dem Radius c und auf dem Kreis um A mit dem Radius d, und zwar ist D derjenige der beiden Schnittpunkte dieser Kreise, der nicht auf derselben Seite der Geraden AC wie E liegt.

c) Beweis, dass ein so konstruiertes Trapez den Bedingungen der Aufgabe entspricht: nach Konstruktion gilt $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = |AE| = c$, $|DA| = |CE| = d$. Also ist $AECD$ ein Parallelogramm, und es gilt $AE \parallel CD$ und damit auch $AB \parallel CD$. Weiterhin gilt nach Voraussetzung $a > c$.

d) Die Konstruktion ist genau dann ausführbar, wenn $\triangle EBC$ konstruierbar ist, und zwar dann auf genau eine Weise. Zur Konstruierbarkeit von $\triangle EBC$ ist notwendig und hinreichend, dass die Dreiecksungleichungen erfüllt sind:

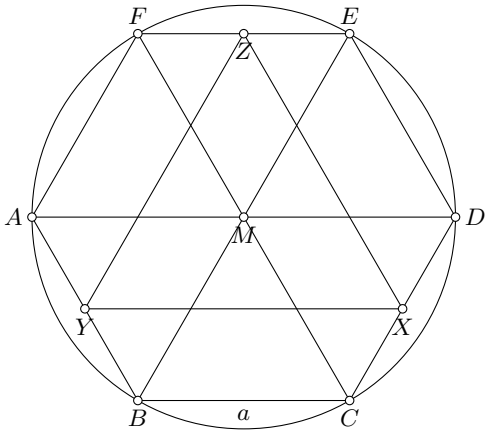
$$a - c < b + d, \qquad b < a - c + d, \qquad d < a - c + b.$$

Ist eine dieser Bedingungen verletzt, so existiert kein der Aufgabe entsprechendes Trapez.

Aufgabe 091013:
In einem regelmäßigen Sechseck mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, seien X, Y, Z die Mittelpunkte der Seiten AB, CD und EF.

Berechnen Sie das Verhältnis $I_S : I_D$, wenn I_S der Flächeninhalt des Sechsecks und I_D der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle XYZ$ ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Mittelpunkt des regelmäßigen Sechsecks sei M, seine Seitenlänge a. Dann zerlegen die Strecken MA, MB, ..., MF das Sechseck in 6 gleichseitige Teildreiecke mit der Seitenlänge a. Der Flächeninhalt eines Teildreiecks sei I_T.

$$I_T = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} \qquad \text{folgt} \qquad I_S = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$$

Das Dreieck $\triangle XYZ$ ist gleichseitig, denn XY, YZ und XZ sind Mittellinien in den Trapezen $ABCD$, $CDEF$ und $ABEF$, diese Trapeze sind kongruent.

Dabei gilt $XY = \frac{a+2a}{2} = \frac{3}{2}a$ und somit

$$I_D = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}a\right)^2\sqrt{3} = \frac{9}{16}a^2\sqrt{3}$$

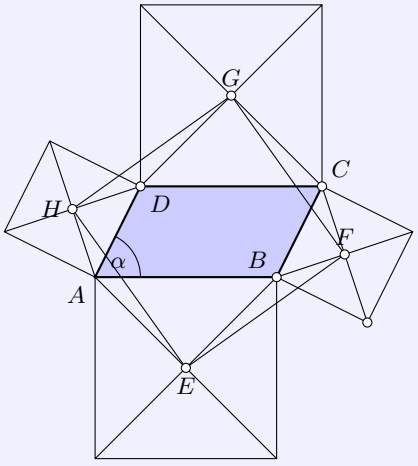
Daher ist

$$I_S : I_D = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} : \frac{9}{16}a^2\sqrt{3} = 8 : 3$$

Aufgabe 101014:

Über jeder der vier Seiten eines Parallelogramms $ABCD$ sei nach außen je ein Quadrat errichtet. Die Mittelpunkte E, F, G, H dieser Quadrate bilden ein Viereck $EFGH$.

Man beweise, dass $EFGH$ ein Quadrat ist.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei $|\angle DAB| = \alpha$, wobei wir o. B. d. A. annehmen, dass $0° < \alpha \leq 90°$ gilt Dann ist

$$|\angle EAH| = |\angle GCF| = \alpha + 2 \cdot 45° = 90° + \alpha \qquad \text{und}$$

$$|\angle EBF| = |\angle GDH| = 360° - (180° - \alpha) - 2 \cdot 45° = 90° + \alpha \qquad \text{also}$$

$$|\angle EAH| = |\angle EBF| = |\angle GCF| = |\angle GDH| \tag{1}$$

Ferner ist (als halbe Diagonalen in kongruenten Quadraten)

$$|AE| = |DG| = |BE| = |CG| \quad (2) \qquad \text{und} \qquad |AH| = |BF| = |CF| = |DH| \quad (3)$$

Aus (1), (2), (3) folgt $\triangle AEH \cong \triangle BEF \cong \triangle CGF \cong \triangle DGH$, also

$$|EH| = |EF| = |GF| = |GH| \tag{4}$$

und $|\angle AEH| = |\angle BEF|$, also $|\angle HEF| = |\angle WEB$, d. h. $|\angle HEF| = 90°$ (5). Wegen (4), (5) ist $EFGH$ ein Quadrat.

Bemerkung: Im Fall $\alpha = 90°$ entarten die Dreiecke $\triangle AEH$ usw., (4) und (5) bleiben aber trotzdem richtig.

Aufgabe 111012:
Beweisen Sie den folgenden Satz!

Der Durchschnitt aus der Menge aller Drachenvierecke und der Menge aller Trapeze ist die Menge aller Rhomben.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der zu beweisende Satz ist äquivalent damit, dass die beiden folgenden Aussagen richtig sind:

a) Jeder Rhombus ist sowohl ein Drachenviereck als auch ein Trapez.

b) Jedes Viereck, das sowohl Drachenviereck als auch ein Trapez ist, ist ein Rhombus.

Beweis zu a):

Ist $ABCD$ ein Rhombus, so gilt $|AB| = |BC|$ und $|CD| = |DA|$, also ist $ABCD$ auch ein Drachenviereck. Ferner gilt dann $AB \parallel CD$, und die Strecken BC und DA haben keinen Punkt gemeinsam, also ist $ABCD$ auf ein Trapez.

Beweis zu b):

Ist $ABCD$ ein Drachenviereck, so können seine aufeinanderfolgenden Ecken derart mit A, B, C, D bezeichnet werden, dass

$$|AB| = |BC| \qquad \text{und} \qquad |CD| = |DA| \tag{1}$$

gilt. Ist $ABCD$ zugleich ein Trapez, so kann die Bezeichnung außerdem noch so gewählt werden, dass $AB \parallel CD$ (2) gilt.

Als Trapez ist $ABCD$ konvex. Daher wird es durch AC in zwei Dreiecke zerlegt. Dabei sind sowohl $\angle BAC$, $\angle DCA$ bezüglich AB, CD als auch $\angle DAC$, $\angle BCA$ bezüglich AD, BC Wechselwinkel. Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle CDA$ sind wegen (1) gleichschenklig. Daher gilt

$$\angle BAC \cong \angle BCA \qquad \text{und} \qquad \angle DAC \cong \angle DCA$$

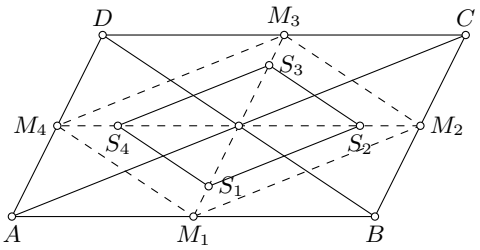
(als Basiswinkel). Ferner ist wegen (2) $\angle BAC \cong \angle DCA$ (als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen). Folglich gilt auch $\angle DAC \cong \angle BCA$.

Da die Winkel Wechselwinkel sind, gilt mithin $AD \parallel BC$. Also sit $ABCD$ ein Parallelogramm und, da es außerdem ein Paar gleichlanger Nachbarseiten besitzt, sogar ein Rhombus.

Aufgabe 131012:
Es sei $ABCD$ ein Parallelogramm und M der Schnittpunkt seiner Diagonalen. Ferner seien S_1, S_2, S_3, S_4 die Schwerpunkte der Dreiecke ABM, BCM, CDM, DAM.

Man beweise, dass dann $S_1S_2S_3S_4$ ein Parallelogramm ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es seien M_1,M_2, M_3, M_4 die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA. Da S_1, S_2, S_3, S_4 die Seitenhalbierenden MM_1, MM_2, MM_3, MM_4 im Verhältnis 2:1 teilen, folgt nach der Umkehrung des Strahlensatzes

$$S_1S_2 \parallel M_1M_2 \parallel AC \parallel M_4M_3 \parallel S_4S_3$$

$$S_2S_3 \parallel M_2M_3 \parallel BD \parallel M_1M_4 \parallel S_1S_4$$

Also ist $S_1S_2S_3S_4$ ein Parallelogramm.

Aufgabe 141014:
In einem konvexen n-Eck $A_1A_2...A_n$ soll der Innenwinkel bei A_1 die Größe 120° haben, und die Innenwinkel an den Ecken A_2, A_3, ... , A_n sollen in dieser Reihenfolge jeweils um 5° größer sein als der vorhergehende Winkel, also 125°, 130°, ... betragen.

Man zeige, dass für $n \neq 9$ ein solches n-Eck nicht existieren kann!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, $A_1A_2...A_n$ sei ein konvexen n-Eck mit den verlangten Innenwinkelgrößen. Ihre Summe beträgt nach einer bekannten Formel $(n-2) \cdot 180°$.

Andererseits haben die Innenwinkel bei $A_1, A_2, ..., A_n$ der Reihe nach Größen, die mit 120° beginnen und immer um 5° größer sind als die vorhergehende. Dies sind folglich die Größen

$$120°, \quad 120° + 1 \cdot 5°, \quad ..., \quad 120° + (n-1) \cdot 5°$$

Ihre Summe ist

$$n \cdot 120^\circ + (1 + ... + (n-1)) \cdot 5^\circ = n \cdot 120^\circ + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 5^\circ$$

Somit folgt

$$(n-2) \cdot 180^\circ = n \cdot 120^\circ + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 5^\circ$$

also (unter Weglassung des Zeichens $\circ$)

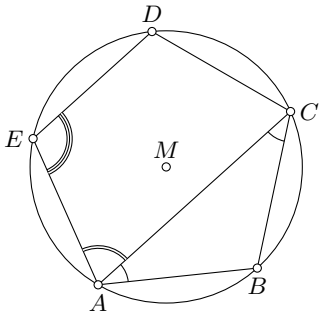
$$360n - 720 = 240n + 5n^2 - 5n \qquad , \qquad n^2 - 25n + 144 = 0$$

d. h. entweder $n = 9$ oder $n = 16$. Da das n-Eck $A_1A_2...A_n$ konvex ist, gilt $120^\circ + (n-1) \cdot 5^\circ < 180^\circ$, so dass $n = 16$ ausscheidet. Daher kann höchstens für $n = 9$ ein solches n-Eck existieren.

Aufgabe 171011:
Beweisen Sie den folgenden Satz!

In jedem regelmäßigen Fünfeck ist jede der Diagonalen parallel zu einer der Fünfeckseiten.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $ABCDE$ ein regelmäßiges Fünfeck. Dann hat jeder seiner Innenwinkel die Größe $\frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$. Da man durch Drehung des Fünfecks um seinen Mittelpunkt um jeweils $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ jede seiner Diagonalen der Reihe nach mit jeder anderen zur Deckung bringen kann, genügt es, den Satz für eine beliebige dieser Diagonalen, z. B. für AC, zu beweisen.

Wegen $AB = BC$ und $\angle ABC = 108^\circ$ gilt $\angle BAC = \angle ACB = 36^\circ$ und folglich

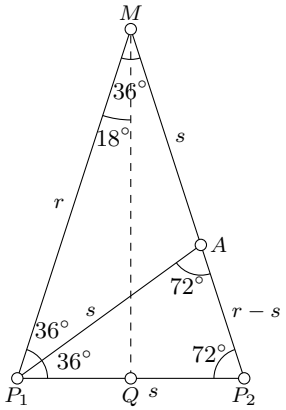
$$\angle CAE + \angle AED = (\angle BAE - \angle BAC) + \angle AED = (108^\circ - 36^\circ) + 108^\circ = 180^\circ$$

Nach der Umkehrung des Satzes über entgegengesetzt liegende Winkel an parallelen Geraden folgt hieraus $AC \parallel ED$, w. z. b. w.

Aufgabe 221014:
Es sei r der Radius des Umkreises eines regelmäßigen Zehnecks $P_1P_2...P_{10}$ und s die Länge einer Seite dieses Zehnecks.

Berechnen Sie s in Abhängigkeit von r!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Zwei benachbarte Eckpunkte P_1, P_2 des Zehnecks bilden mit dem Mittelpunkt M des Umkreises die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Seitenlängen

$$P_1M = P_2M = r \qquad r \qquad P_1P_2 = s$$

Für den Winkel $\angle P_1MP_2$ gilt, da er ein Zehntel eines Vollwinkels ist $\angle P_1MP_2 = 36^\circ$. Folglich gilt nach dem Innenwinkelsatz und dem Satz über Basiswinkel, angewandt auf Dreieck P_1MP_2,

$$\angle MP_1P_2 = \angle MP_2P_1 = \frac{1}{2}(180^\circ - 36^\circ) = 72^\circ$$

Die Halbierende des Winkels $\angle MP_1P_2$ schneidet die Gegenseite MP_2 in einem Punkt A. Für ihn gilt $\angle MP_1A = \angle AP_1P_2 = 36°$ und daher nach dem Innenwinkelsatz, angewandt auf das Dreieck P_1P_2A

$$\angle P_1AP_2 = 180° - 36° - 72° = 72°$$

Also sind die Dreiecke P_1MA und P_1P_2A gleichschenklig mit $AM = AP_1 = P_1P_2 = s$. Daraus folgt $AP_2 = MP_2 - AM = r - s$.

Ferner sind nach dem Hauptähnlichkeitssatz die Dreiecke MP_1P_2 und P_1P_2A einander ähnlich. Also gilt $P_1M : P_1P_2 = P_1P_2 : AP_2$, d. h. $\frac{r}{s} = \frac{s}{r-s}$ und daher $s^2 + rs - r^2 = 0$ und da $s > 0$

$$s_{1,2} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + r^2} = -\frac{r}{2} \pm \frac{r}{2}\sqrt{5}$$

$$s = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0{,}618r$$

Aufgabe 251013:
Der Querschnitt einen Kanals habe die Form eines gleichschenkligen Trapezes. Seine parallelen Seiten seien waagerecht, die längere oben, die kürzere unten (*Sohle* des Grabens). Die schrägen Seitenwände seien gegen die lotrechte Richtung um 30° geneigt.

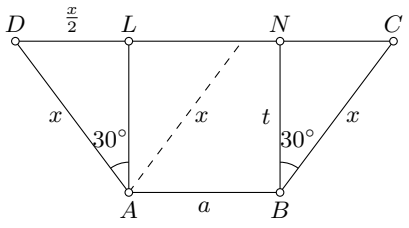
Wegen der geforderten Durchflussmenge soll der Querschnitt einen vorgegebenen Flächeninhalt F besitzen. Außerdem ist die Länge a der kürzeren der parallelen Seiten des Querschnitte (Sohle des Grabens) vorgegeben.

Ermitteln Sie die Tiefe t des Kanals in Abhängigkeit von a und F!

Diese Aufgabe wurde zunächst unter Verwendung trigonometrischer Verfahren bearbeitet. Am nächsten Tage trug Jörg eine Lösung ohne Verwendung der Trigonometrie vor.

Man gebe eine derartige Lösung an.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Das genannte Trapez sei ABC mit $AB \parallel DC$ und $AB < DC$.

Die Fußpunkte der Lote von A bzw. B auf DC seien L bzw. N. Dann gilt laut Aufgabenstellung

$$AD = BC \quad ; \quad \angle DAL = \angle CBN = 30° \quad ; \quad AB = LN = a \quad ; \quad AL = BN = t$$

und das Trapez $ABCD$ hat den Flächeninhalt F.

Verschiebt man das Dreieck BCN längs BA so, dass das Bild von BN mit AL zusammenfällt, dann entsteht ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Winkel zwischen den Schenkeln 60° groß ist.

Damit sind die Basiswinkel auch jeweils 60° groß. Das betrachtete Dreieck ist also gleichseitig. Bezeichnet man seine Seitenlänge mit x, dann gilt (nach dem Satz von Pythagoras oder der Formel für die Höhenlänge im gleichseitigen Dreieck)

$$t = \frac{x}{2}\sqrt{3}$$

Daraus folgt

$$DL + NC = x = \frac{2t}{\sqrt{3}} \qquad \text{also}$$

$$DC = DL + LN + NC = a + \frac{2t}{\sqrt{3}}$$

Hieraus ergibt sich

$$F = \frac{1}{2}(AB + DC)t = \frac{1}{2}\left(2a + \frac{2t}{\sqrt{3}}\right)t = at + \frac{t^2}{\sqrt{3}}$$

$$t^2 + at\sqrt{3} - F\sqrt{3} = 0$$

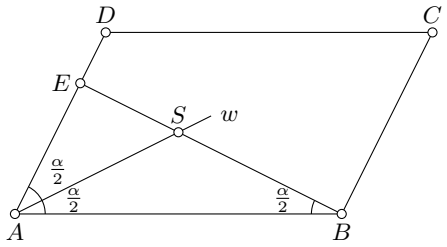
Von den beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung scheidet die negative aus, und es folgt

$$t = \frac{a}{2}\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + F\sqrt{3}}$$

Aufgabe 261012:
Martin erzählt seinem Freund Jörg, er habe ein Parallelogramm $ABCD$ gezeichnet, bei dem das von B auf die Gerade durch A und D gefällte Lot BE durch den Schnittpunkt S verläuft, den die Mittelsenkrechte s von AB mit der Winkelhalbierenden w des Winkels $\angle BAD$ hat. Jörg behauptet, dass sich allein aus diesen Angeben die Größe des Winkels $\angle CBA$ ermitteln lässt.

Untersuchen Sie, ob Jörgs Behauptung wahr ist! Ist das der Fall, so ermitteln Sie die Größe des Winkels $\angle CBA$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Aus den genannten Angaben folgt:

Bezeichnet man die Größe des Winkels $\angle BAD$ mit α, dann gilt $\angle EAS = \angle SAB = \frac{\alpha}{2}$, da w den Winkel $\angle BAD$ halbiert und durch S verläuft.

Ferner gilt $AS = SB$, da S auf der Mittelsenkrechten s von AB liegt. Mithin ist des Dreieck ASB gleichschenklig, woraus

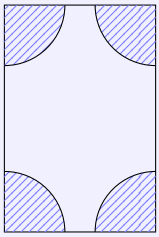
$$\angle SAB = \angle SBA = \frac{\alpha}{2}$$

folgt (Basiswinkel). Da das Lot BE durch S verläuft, ist ABE ein rechtwinkliges Dreieck mit $\angle AEB = 90°$ und $\angle ABE = \frac{\alpha}{2}$. Folglich gilt nach den Innenwinkelsatz $\alpha + \frac{\alpha}{2} = 90°$, also $\alpha = 60°$.

Wegen $\angle CBA = 180° - \alpha$ (benachbarte Winkel im Parallelogramm) gilt daher $\angle CBA = 120°$.

Damit ist Jörgs Behauptung als wahr erwiesen und die gesuchte Winkelgröße ermittelt.

Aufgabe 331014:



Von der Fläche eines Rechtecks mit Seitenlängen a, b sollen die Flächen von vier Viertelkreisen abgeschnitten werden. Diese sollen alle vier den gleichen Radius r haben, mit dem die Voraussetzung erfüllt ist, dass von den Rechteckseiten noch Teilstrecken übrigbleiben (siehe Abbildung).

a) Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, zu denen es Längen a, b, r der vorausgesetzten Art gibt, so dass genau x Prozent der Rechteckfläche abgeschnitten werden!

b) Ermitteln Sie alle diejenigen Verhältniswerte $k = \frac{b}{a} \geq 1$, für die es möglich ist, einen Radius r der vorausgesetzten Art so zu wählen, dass genau die Hälfte der Rechteckfläche abgeschnitten wird!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die von a, b, r zu erfüllende Voraussetzung besagt: Wenn o. B. d. A. die Bezeichnungen so gewählt werden, dass $0 < a \leq b$ gilt, so erfüllt r die Ungleichung $0 < r < \frac{a}{2}$.

a) I. Wenn x eine reelle Zahl ist, so dass die abgeschnittenen Flächen genau x Prozent des Rechteckfläche betragen, so folgt:

Der Flächeninhalt der abgeschnitten vier Viertelkreise ist gleich dem Flächeninhalt eines Kreises von Radius r, also gleich πr^2. Da dies x Prozent der Rechteckfläche sind, gilt

$$x = \frac{\pi \cdot r^2}{a \cdot b} \cdot 100 \tag{1}$$

Wegen $0 < a \leq b$ und der Voraussetzung $0 < r < \frac{a}{2}$ folgt

$$0 < x < \frac{\pi}{a^2} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot 100 = 25\pi$$

II. Wenn $0 < x < 25\pi$ gilt, so folgt: Für beliebiges $a > 0$ für $b = a$ und $r = \sqrt{\frac{x \cdot ab}{100\pi}}$ ist einerseits

$$0 < r < \sqrt{\frac{25\pi \cdot a^2}{100\pi}} = \frac{a}{2}$$

so dass a,b,r Längen der vorausgesetzten Art sind; andererseits gilt (1), also werden genau x Prozent der Rechteckflächen abgeschnitten.

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchten Zahlen x sind genau alle reellen Zahlen x mit $0 < x < 25\pi$ ($\approx 78{,}5398$).

b) I. Wenn für einen Wert $k = \frac{b}{a} \geq 1$ vier Viertelkreise mit einem Radius $r < \frac{a}{2}$ genau die Hälfte der Rechteckfläche abschneiden, so ist der Flächeninhalt des Rechtecks doppelt so groß wie der Flächeninhalt eines Kreises vom Radius r, also

$$ab = 2\pi \cdot r^2 \tag{2}$$

Wegen $r < \frac{a}{2}$ folgt $ab < 2\pi \cdot \frac{a^2}{4}$ und damit

$$1 \leq k = \frac{ab}{a^2} < 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

II. Wenn $1 \le k < \frac{\pi}{2}$ gilt, so folgt: Für Längen a,b, > 0 mit $\frac{b}{a} = k$ und $r = \sqrt{\frac{ab}{2\pi}}$ ist einerseits

$$r = \sqrt{\frac{a \cdot ak}{2\pi}} < \sqrt{\frac{a^2}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{a}{2}$$

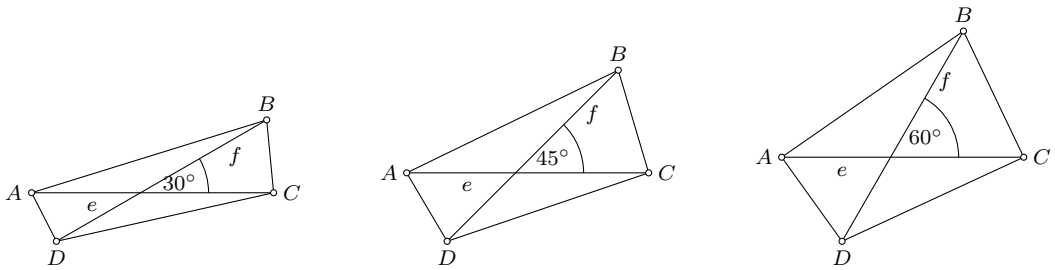
so dass a,b,r Längen der vorausgesetzten Art sind; andererseits gilt (2), also wird genau die Hälfte der Rechteckfläche abgeschnitten.

Mit I. und II. ist bewiesen: Die gesuchten Zahlen k sind genau alle reellen Zahlen x mit $1 \le k < \frac{\pi}{2}$ ($\approx 1{,}5708$)

II Runde 2

Aufgabe V11023:
Die Vierecke V_1, V_2, V_3 stimmen in den Diagonalen e und f überein. In V_1 schneiden sich diese Diagonalen unter einem Winkel von 30°, in V_2 unter 45°, in V_3 unter 60°.
Wie verhalten sich die Flächeninhalte der drei Vierecke?

Lösung von Steffen Polster:



Jedes der Vierecke wird durch die Diagonalen in vier Teildreiecke zerlegt. Dabei entstehen die Diagonalenteile e_1, e_2, f_1, f_2 mit $e = e_1 + e_2$ und $f = f_1 + f_2$. Mit dem Schnittwinkel α der Diagonalen ergibt sich dann für den Flächeninhalt des Vierecks

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}e_1 \cdot f_1 \sin\alpha + \frac{1}{2}e_2 \cdot f_2 \sin\alpha + \frac{1}{2}e_1 \cdot f_2 \sin(180^\circ - \alpha) + \frac{1}{2}e_2 \cdot f_1 \sin(180^\circ - \alpha) \\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot (e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_1 f_2 + e_2 f_1) \\ &= \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot (e_1 + e_2)(f_1 + f_2) = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot e \cdot f \end{aligned}$$

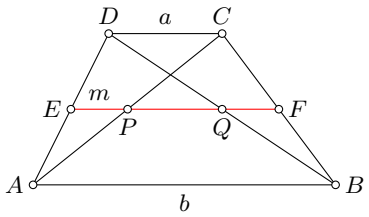
Damit folgt für die Verhältnisse der Flächeninhalte

$$F_1 : F_2 = \sin 30^\circ : \sin 45^\circ = \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2}$$
$$F_2 : F_3 = \sin 45^\circ : \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{2} : \sqrt{3}$$

Die Flächeninhalte der drei Vierecke verhalten sich wie $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

Aufgabe 031023:
Gegeben ist ein Trapez mit den parallelen Seiten a und b. Die Mittelpunkte seiner Diagonalen seien P und Q.
Berechnen Sie die Länge der Strecke PQ!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Als bekannt kann vorausgesetzt werden, dass die Länge der Mittellinie $m = \frac{a+b}{2}$ beträgt. Ferner ist offensichtlich, dass die Mittelpunkte der Diagonalen auch auf der Mittellinie m liegen.
Nun bleibt zu untersuchen, wie groß die Streckenlängen EP und QF sind: Da die von A ausgehenden Strahlen AD und AC zwei Parallelen EP und DC schneiden, verhalten sich die Seiten $DC : EP$ wie $AD : AE = 2 : 1$, da die Mittellinie die Seite AD halbiert. Damit gilt $EP = \frac{a}{2}$.
Analog erhält man $QF = \frac{a}{2}$.
Setzt man diese Werte nun in die Ausgangsgleichung ein, so ergibt sich

$$PQ = m - EP - QF = \frac{a+b}{2} - \frac{a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2}$$

Aufgabe 041023:
Ein konvexes Viereck wird durch seine Diagonalen in vier Dreiecke zerlegt.
Man beweise, dass das Viereck genau dann ein Parallelogramm ist, wenn die vier Dreiecke flächengleich sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Abschnitte der einen Diagonalen mit a und b, die der anderen mit c und d und den Winkel zwischen a und c mit β, so erhält man für die Flächen der vier Dreiecke:

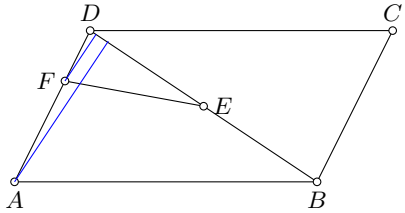
$$F_1 = 0{,}5ac\sin\beta \quad ; \quad F_2 = 0{,}5ad\sin(180^\circ - \beta)$$

$$F_3 = 0{,}5bd\sin\beta \quad ; \quad F_4 = 0{,}5bc\sin(180^\circ - \beta)$$

Aus $F_1 = F_2$ folgt $c = d$, und aus $F_1 = F_4$ folgt $a = b$. Das heißt, die Diagonalen halbieren einander, es liegt ein Parallelogramm vor.
Umgekehrt folgt, dass die Flächen der vier Dreiecke gleich sind, wenn die Diagonalen einander halbieren.

Aufgabe 051021:
Es sei E der Mittelpunkt der Diagonalen DB des Parallelogramms $ABCD$. Punkt F sei derjenige Punkt auf AD, für den $|DA| : |DF| = 3 : 1$ gilt.
Wie verhält sich das Maß des Flächeninhalts des Dreiecks $\triangle DFE$ zu dem des Vierecks $ABEF$, wenn man gleiche Maßeinheiten zugrundelegt?

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:

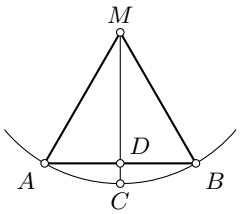


Die Höhen der Dreiecke DAB bzw. DFE auf g_{DB} bzw. g_{DE} sind zueinander parallel, da die zu diesen Höhen gehörenden Seiten DB bzw. DE der genannten Dreiecke auf derselben Geraden liegen.
Nach dem 2. Strahlensatz verhalten sich die Längen dieser Höhen aufgrund der Voraussetzung wie 3:1. Ferner verhalten sich die Längen der Grundseiten DB bzw. DE zueinander wie 2:1.
Daher verhalten sich die Flächeninhalte beider Dreiecke wie 6:1. Folglich verhält sich der Flächeninhalt des Dreiecks DFE zu dem des Vierecks $ABEF$ wie 1:5.

Aufgabe 051022:
Einem Kreis vom Radius r ist ein regelmäßiges Zwölfeck einbeschrieben.

a) Berechnen Sie den Umfang des Zwölfecks!
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Zwölfecks!
c) Um wie viel Prozent ist der Umfang des Zwölfecks kleiner als der des Kreises? (Das Ergebnis ist auf eine Stelle nach dem Komma genau anzugeben.)
d) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt des Zwölfecks kleiner als der des Kreises? (Genauigkeit wie bei c)

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Es sei M der Mittelpunkt des Kreises. Weiter seien C eine Ecke und A und B die beiden benachbarten Ecken des Zwölfecks.
Dann gilt: $r = |MA| = |MC| = |MB| = |AB|$.
AB ist die Seite eines dem Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks und $MC \perp AB$. $ACBM$ ist wegen $|AM| = |BM|$ und $|AC| = |BC|$ ein Drachenviereck.

a) Die Strecken AB und MC haben einen Schnittpunkt D. Setzt man $|DC >= x$, dann gilt

$$x = r - |MD| = r - \frac{\sqrt{3}}{2}r$$

MD ist die Höhe im gleichseitigen Dreieck MAB. Bezeichnet $s = |AC| = |BC|$ die Seitenlänge des Zwölfecks, so gilt nach dem Lehrsatz des Pythagoras, angewandt auf das Dreieck CBD

$$s^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)^2 = r^2(2 - \sqrt{3}) \to s = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Der Umfang des Zwölfecks beträgt daher $12r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

b) Wir berechnen zunächst den Flächeninhalt I_1 des Dreiecks MBC. Es gilt

$$I_1 = \frac{1}{2}r \cdot r \sin 30° = \frac{r^2}{4}$$

Der Flächeninhalt $12I_1$ des Zwölfecks beträgt demnach $3r^2$.

c) Es ist

$$12r\sqrt{2\sqrt{3}} : 2r\pi \approx 3{,}106 : \pi \approx 0989$$

Weil $3{,}1055^2 < 36(2 - \sqrt{3}) < 3{,}1065^2$ also $3{,}1055 < 6\sqrt{2 - \sqrt{3}} < 3{,}1065$ gilt und wegen $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$

$$0.9885 \cdot 3{,}1416 < 3{,}1055 < 6\sqrt{2 - \sqrt{3}} < 3{,}1065 < 0.9895 \cdot 3{,}1415$$

ausfällt. Der Umfang des Zwölfecks ist also um etwa 1,1% kleiner als der des Kreises.

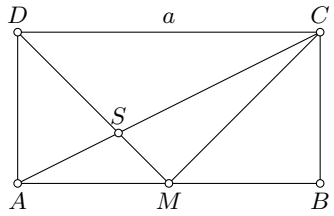
d) Wegen $0{,}9549 \cdot 3{,}1416 < 3 < 0{,}955 \cdot 3{,}1415$ ist

$$3r^2 : \pi r^2 = 3 : \pi \approx 0{,}955$$

Der Flächeninhalt des Zwölfecks ist also um etwa 4,5% kleiner als der des Kreises.

Aufgabe 071022:
Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$. Der Mittelpunkt von AB sei M. Man verbinde C und D mit Mund A mit C. Der Schnittpunkt von AC und MD sei S.
Ermitteln Sie das Verhältnis des Flächeninhalts des Rechtecks $ABCD$ zum Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle SMC$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Bezeichnet man die Längen der Seiten des Rechtecks $ABCD$ mit a und b, so gilt für den Flächeninhalt des Rechtecks $I(ABGB) = a \cdot b$.
Ferner gilt $\triangle ASM \sim \triangle DSC$, da $\angle ASM \cong \angle DSC$ (Scheitelwinkel) und $\angle SAM \cong \angle DCS$ (Wechselwinkel) sind.

Weil M Mittelpunkt von AB ist, gilt $AM : CD = 1 : 2$. Ferner ist $I(\triangle AMC) = \frac{1}{4}a \cdot b$, und wegen $SM : SD = 1 : 2$ (Strahlensatz) gilt

$$I(\triangle AMS) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{3} = \frac{1}{12}a \cdot b$$

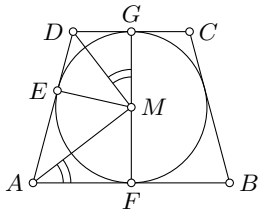
Somit erhält man

$$I(\triangle SMC) = I(\triangle AMC) - I(\triangle AMS) = \frac{1}{4}a \cdot b - \frac{1}{12}a \cdot b = \frac{1}{6}a \cdot b$$

Mithin gilt $I(ABCD) : I(\triangle SMC) = 6 : 1$.

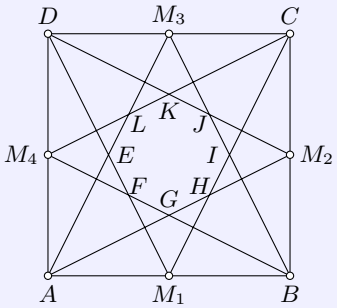
Aufgabe 131023:
Ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $AB = 8$ cm, $CD = 2$ cm habe einen Inkreis mit dem Radius ρ.
Man berechne diesen Inkreisradius ρ!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da das Trapez gleichschenklig ist, liegt der Inkreismittelpunkt M auf der Symmatrieachse des Trapezes. Diese Symmetrieachse verläuft durch die Mittelpunkte F und G der Seiten AB und CD.
Ferner liegt M auf den Winkelhalbierenden der Winkel CDE und EAF. Wegen $\angle GDE + \angle EAF = 180°$ gilt daher (1) $\angle MDG + \angle MAF = 90°$.
Da die Dreiecke MDG und MAF rechtwinklige sind, gilt (2) $\angle MDG + \angle DMG = 90°$. Aus (1) und (2) folgt $\angle MAF = \angle DMG$. Folglich sind die Dreiecke MDG und MAF ähnlich.



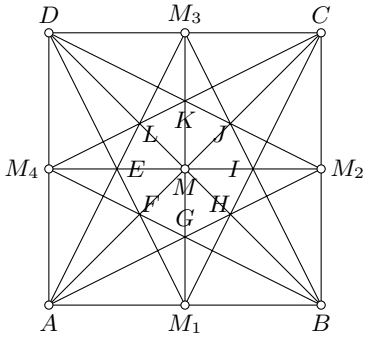
Wegen $DG = 1$ cm, $AF = 4$ cm und $MG = MF = \rho$ folgt daraus $DG : MG = MF : AF$ bzw. 1 cm $: \rho = \rho : 4$ cm, woraus man $\rho^2 = 4$ cm^2 und wegen $\rho > 0$ schließlich $\rho = 2$ cm erhält. Der Inkreisradius ρ hat die Länge 2 cm.

Aufgabe 191024:



Verbindet man in einem Quadrat $ABCD$ die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 und M_4 der Seiten jeweils mit den beiden gegenüberliegenden Eckpunkten, so entsteht ein achtstrahliger Stern, der in seinem Innern ein Achteck $EFGHIJKL$ enthält.
Stellen Sie fest, ob dieses Achteck regelmäßig ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei M der Schnittpunkt der Diagonalen und a die Seitenlänge des Quadrates. Da M_4M_2 Symmetrieachse des Quadrats ist, liegt M auf M_4M_2, und da M_4M Symmetrieachse des Rechtecks AM_1M_3D ist, liegt E auf M_4M.



Da ferner AC Symmetrieachse des Quadrats bezüglich der Spiegelung ist, die B und D sowie M_4 und M_1 jeweils untereinander vertauscht, liegt F auf AC. Jeweils nach einem Teil des Strahlensatzes folgt nun

$$\frac{M_4E}{DM_3} = \frac{AM_4}{AD} = \frac{1}{2} \qquad \text{oder} \qquad M_4E = \frac{a}{4}; \quad EM = \frac{a}{4}$$

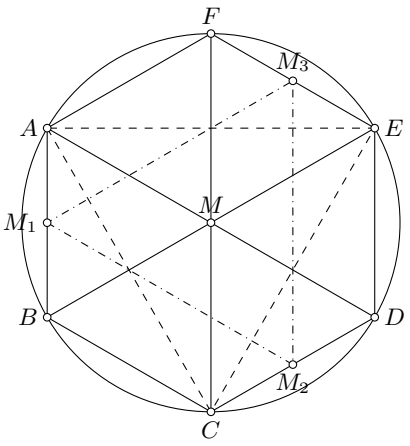
und

$$\frac{FM}{FA} = \frac{M_4M}{AB} = \frac{1}{2} \qquad \text{also} \qquad FM = \frac{AM}{3}$$

Da AM die halbe Diagonale des Quadrats ist, gilt $AM = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und daher $MF = \frac{a}{6}\sqrt{2}$.
Wegen $\frac{1}{6}\sqrt{2} \neq \frac{1}{4}$ folgt $ME \neq MF$ und hieraus nach der Seiten—Winkel-Relation $\angle MEF \neq \angle MFE$.
Da sowohl M_4M_2 als auch AC Symmetrieachsen der gesamten Figur sind, gilt $\angle LEF = 2\angle MEF$ und $\angle EFG = 2\angle MFE$. Daher folgt aus der vorigen Ungleichung auch $\angle LEF = \angle EFG$. Da somit in dem Achteck $EFGHIJKL$ zwei verschieden große Innenwinkel vorkommen, ist es nicht regelmäßig.

Aufgabe 221024:
Es sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck, sein Flächeninhalt F_1. Mit F_2 sei der Flächeninhalt des (gleichseitigen) Dreiecks ACE und mit F_3 der Flächeninhalt des (gleichseitigen) Dreiecks $M_1M_2M_3$ bezeichnet, wobei M_1, M_2, M_3 in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, CD bzw. EF seien.
Berechnen Sie das Verhältnis $F_1 : F_2 : F_3$!
(Das Verhältnis soll durch drei möglichst kleine natürliche Zahlen ausgedrückt werden.)

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a des Sechsecks beträgt $D = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, daher ist $F_1 = 6D = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$.
Jede der Seitenlänge des Dreiecks ACE ist gleich der doppelten Höhenlänge es gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a. Daher ist $s = AC = CE = EA = a\sqrt{3}$ und folglich $F_2 = \frac{s^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$.



Wegen $\angle BAD = 60°$ und $\angle ABC = 2 \cdot 60°$ ist $AD \parallel BC$ (Umkehrung des Satzes über entgegengesetzt liegende Winkel an geschnittenen Parallelen).
Also ist M_1M_2 Mittellinie in einem Trapez, dessen parallele Seiten die Längen $2a$ bzw. a haben. Entsprechendes gilt für M_2M_3 und M_3M_1; daher ist

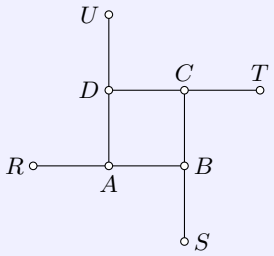
$$t = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_1 = \frac{3}{2}a$$

und folglich

$$F_3 = \frac{t^2}{4}\sqrt{3} = \frac{9}{16}a^2\sqrt{3}$$

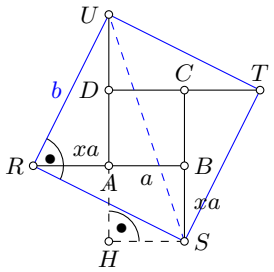
Somit gilt $F_1 : F_2 : F_3 = \frac{3}{2} : \frac{3}{4} : \frac{9}{16} = 8 : 4 : 3$.

Aufgabe 271023:



Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a, ferner sei x eine beliebig gewählte positive reelle Zahl. Die Quadratseiten seien wie in der Abbildung um Strecken der Länge $x \cdot a$ verlängert bis R, S, T bzw. U.
a) Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets $RSTU$ ein Quadrat ist!
b) Ermitteln Sie alle diejenigen positiven reellen Zahlen x, bei deren Wahl der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ ein Fünftel des Flächeninhaltes des Quadrates $RSTU$ beträgt!

Lösung von Steffen Polster:



In der Abbildung sei $AB = BC = CD = DA = a$, $RA = UD = CT = BS = x \cdot a$ und die Strecke $RU = b$. Der Punkt H sei der Endpunkt der Verlängerung von DA um xa über A hinaus. Der Winkel $\angle SHA$ ist dann offensichtlich ein rechter Winkel.
Aus dem rechtwinkligen Dreieck SBR mit den Katheten xa und $a + xa$ ergibt sich für die Hypotenuse

$$RS^2 = (xa)^2 + (a + xa)^2 = a^2(2x^2 + 2x + 1) \to RS = b = a\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

Aus Symmetriegründen muss $RS = ST = TU = UR = b$ gelten (bzw. durch analoge Rechnung nachzuweisen). Damit das Viereck $RSTU$ Quadrat ist, müssen die Innenwinkel rechte Winkel sein. Im rechtwinkligen Dreieck HSU mit den Katheten a und $a + 2xa$ wird für die Hypotenuse

$$US^2 = a^2 + (a + 2xa)^2 = 2a^2(2x^2 + 2x + 1) \to US = a\sqrt{2}\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

Nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras wird im Dreieck SRU aus

$$US^2 = 2a^2(2x^2 + 2x + 1) = RS^2 + RU^2$$

dass SRU ein rechtwinkliges Dreieck mit $\angle SRU = 90°$ ist. Analog weißt man die rechten Winkel bei S, T und U nach. Das Viereck $RSTU$ ist damit ein Quadrat.

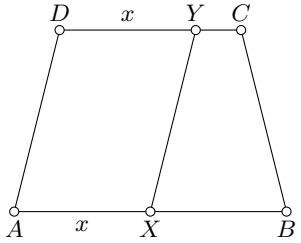
b) Der Flächeninhalt des Quadrates $RSTU$ ist $A_{RSTU} = b^2$, der des Quadrates $ABCD$ gleich $A_{ABCD} = a^2$. Es wird

$$\begin{aligned} A_{RSTU} &= 5A_{ABCD} \\ (a\sqrt{2x^2 + 2x + 1})^2 &= 5a^2 \\ 2a^2 \cdot (x^2 + x - 2) &= 0 \to x_1 = 1; x_2 = -2 \end{aligned}$$

$x_2 < 0$ entfällt, so dass für $x = 1$ das Quadrat $RSTU$ den fünffachen Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ hat.

Aufgabe 291023:
Gegeben sei ein Trapez mit parallelen Seiten AB und CD. Dabei sei $AB > CD$.
Man zeige, dass sich das Trapez genau dann durch eine zu einem der beiden Schenkel parallele Gerade in zwei Vierecke gleichen Flächeninhaltes zerlegen lässt, wenn $AB < 3 \cdot CD$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Seitenlängen AB, CD und die Höhe des Trapezes seien wie üblich mit a, c bzw. h bezeichnet.
Jede zu einem Schenkel, o. B. d. A. zu AD parallele Gerade, die des Trapez in zwei Vierecke zerlegt, muss AB in einem Punkt X zwischen A und B sowie CD in einem Punkt zwischen C und D schneiden (sonst ergäbe sich entweder überhaupt keine Zerlegung des Trapezes oder eine Zerlegung in ein Fünfeck und ein Dreieck).
Die entstehenden Vierecke sind das Parallelogramm $AXYD$ und des Trapez $XBCY$.

Mit $x = AX = DY$ sowie wegen $c < a$ ist die Bedingung, dass X zwischen A und B sowie Y zwischen C und D liegt, äquivalent mit $x < c$. (1)
Wegen $XB = a - x$ und $YC = c - x$ haben die genannten Vierecke die Flächeninhalte

$$F(AXYD) = x \cdot h, \qquad F(XBCY) = \frac{1}{2}(a - x + c - x) \cdot h = \left(\frac{1}{2}(a + c) - x\right) \cdot h$$

Also gibt es genau dann eine zu AD parallele Gerade mit $F(AXYD) = F(XBCY)$, wenn es eine Streckenlänge x mit (1) und

$$x \cdot h = \frac{1}{2}(a - x + c - x) \cdot h \tag{2}$$

gibt. Die Gleichung (2) ist nun der Reihe nach äquivalent mit

$$x = \frac{1}{2}(a+c) - x \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{1}{4}(a+c)$$

Diese Zahl erfüllt genau dann (1), wenn $\frac{1}{4}(a+c) < c$ gilt, und dies ist der Reihe nach äquivalent mit $a + c < 4c$ sowie $a < 3c$, wie es zu zeigen war.

Aufgabe 301023:
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Wenn $ABCD$ ein Rechteck mit $AB > AD$ ist, so schneidet die Mittelsenkrechte der Diagonale AC die Randlinie des Dreiecks ABC in einem Punkt P, der zwischen B und dem Mittelpunkt Q der Strecke AB liegt.

Lösung von cyrix:
Sei M der Mittelpunkt der Strecke AC. Damit ist M auch der Mittelpunkt der anderen Diagonalen BD des Rechtecks $ABCD$. Da die Diagonalen eines Rechtecks auch gleichlang sind, gilt damit $|AM| = |BM|$. Insbesondere ist das Dreieck $\triangle ABM$ gleichschenklig mit Basis AB.

Wegen $|AB| > |AD| = |BC|$ ist $\angle BAC < \angle ACB$, da im Dreieck $\triangle ABC$ dem kleineren Winkel auch die kleinere Seite gegenüberliegt. Wegen $\angle CBA = 90°$ und der Innenwinkelsumme in diesem Dreieck ist somit $\angle BAM = \angle BAC < 45°$, also aufgrund der Gleichschenkligkeit im Dreieck $\triangle ABM$ auch $\angle MBA = \angle BAM < 45°$ und damit $\angle AMB > 90° = \angle AMP$, da die Mittelsenkrechte der Strecke AC natürlich durch M verläuft.

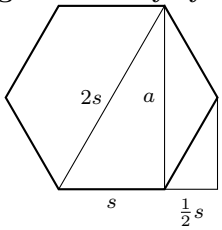
Weiterhin liegt wegen $|AM| = |BM|$ der Punkt M auf der Mittelsenkrechten von AB. Diese verläuft durch den Mittelpunkt Q dieser Strecke, sodass $\angle MQA = 90°$ und wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle AMQ$ auch $\angle AMQ = 180° - \angle MQA - \angle QAM < 180° - \angle MQA = 180° - 90° = 90° = \angle AMP$ gilt.

Zusammen ist also $\angle AMQ < \angle AMP < \angle AMB$, sodass, da Q, P und B auf einer Geraden liegen, also P im Innern der Strecke QB liegt, □.

III Runde 3

Aufgabe V11032:
Günther will im Unterrichtstag in der sozialistischen Produktion an einem Werkstück eine Fläche berechnen, die die Form eines regelmäßigen Sechsecks hat. Sein Betreuer behauptet, man könne dafür die Näherungsformel $F_S = \frac{7}{8}a^2$ benutzen, wobei a der Abstand zweier paralleler Sechseckseiten ist.
a) Wie lautet die genaue Flächenformel?
b) Wieviel Prozent des genauen Wertes beträgt der Fehler bei Verwendung der Näherungsformel für $a = 50$ mm?

Lösung von MontyPythagoras:



a) Die genaue Formel lautet:

$$F_S = (s + \tfrac{1}{2}s)a = \tfrac{3}{2}as$$

Dabei gilt wegen des Satzes von Pythagoras:

$$a = \sqrt{(2s)^2 - s^2} = \sqrt{3}\,s \quad \rightarrow \quad s = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Und daher gilt für die genaue Formel:

$$F_S = \frac{3}{2\sqrt{3}}a^2 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

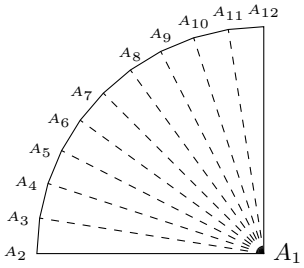
b) Der prozentuale Fehler ist immer gleich, egal ob $a = 50\text{mm}$ oder irgendein anderer Zahlenwert ist. Der relative Fehler ist

$$1 - \frac{\frac{7}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 - \frac{7}{4\sqrt{3}} = 1 - \frac{7}{12}\sqrt{3}$$

Das entspricht etwa -1%. (Die Näherung ergibt einen größeren Wert als die genaue Formel, daher negativ).

Aufgabe 011033:
In einem konvexen Zwölfeck sind 3 Innenwinkel rechte Winkel.
Wieviel der übrigen 9 Innenwinkel können spitze Winkel sein? Die Behauptung ist zu beweisen!

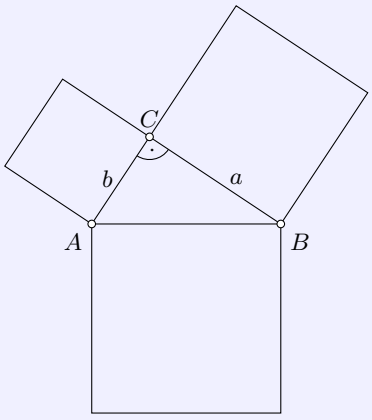
Lösung von Christiane Czech:



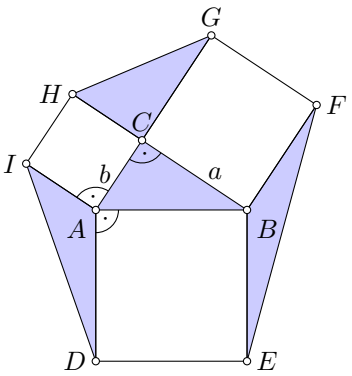
Wir legen einen Eckpunkt des Zwölfecks fest, etwa A_1, und zeichnen alle Diagonalen, die durch diesen Punkt gehen, ein. Dabei entstehen 10 Dreiecke, die durch solche Diagonalen und die Seiten des Zwölfecks begrenzt sind.
Die Innenwinkelsumme des Zwölfecks ist gleich der Summe aller Innenwinkel dieser Dreiecke, also gleich $10 \cdot 180° = 1800°$. Sind drei der Innenwinkel rechte Winkel (hier diejenigen bei A_{12}, A_1 und A_2), müssen die übrigen 9 Innenwinkel folglich eine Summe von $1800° - 270° = 1530°$ haben.
Ist darunter ein spitzer Winkel, so ist die Summe der restlichen 8 Winkel größer als $1530° - 90° = 1440°$. Diese sind jedoch alle kleiner als $180°$ (da das Zwölfeck konvex ist), ihre Summe ist also kleiner als $8 \cdot 180° = 1440°$. Damit kann es keine spitzen Winkel in diesem Zwölfeck geben.

Aufgabe 021034:

Aus der Figur zum pythagoreischen Lehrsatz mache man durch Verbinden der äußeren Eckpunkte ein Sechseck.
Sein Flächeninhalt soll durch die beiden Katheten a und b ausgedrückt werden!



Lösung von Eckard Specht:



Nennen wir die Eckpunkte des Sechsecks D, E, F, G, H und I. Dann setzt sich der Flächeninhalt des Sechsecks zusammen aus vier Dreiecken und drei Quadraten:

$$A_{DEFGHI} = A_{ABC} + A_{ADEB} + A_{BFGC} + A_{CHIA} + \\ + A_{AID} + A_{BEF} + A_{CGH}$$

Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras folgt nun:

$$A_{ABC} = \frac{ab}{2} \qquad A_{ADEB} = a^2 + b^2$$
$$A_{BFGC} = a^2 \qquad A_{CHIA} = b^2$$

Verbleiben noch die äußeren farbigen Dreiecksflächen. Doch diese sind alle untereinander gleich der Fläche des Dreiecks ABC.
Um das einzusehen, vergleichen wir z. B. die Dreiecke AID und ABC. Beide haben paarweise gleiche Seiten $AI = AC = b$ und $AD = AB = c$, die jeweils Supplementwinkel einschließen: $\angle IAD = 180° - \angle CAB$.
Wegen $\sin(\angle IAD) = \sin(180° - \angle CAB) = \sin(\angle CAB)$ und der bekannten Formel $\frac{bc}{2} \sin\alpha$ für den Flächeninhalt eines Dreiecks ist also tatsächlich $A_{AID} = A_{ABC} = \frac{ab}{2}$.
Dasselbe gilt für A_{BEF} und A_{CGH}.
Alle Flächeninhalte addiert ergibt schließlich $A_{DEFGHI} = 2(a^2 + ab + b^2)$.

Aufgabe 061033:
Von sechs Orten A, B, C, D, E und F sind folgende Entfernungen voneinander (in km) bekannt:

$$AB = 30, AE = 63, AF = 50, BF = 40, CD = 49, CE = 200, DF = 38$$

Welche Entfernung haben B und D voneinander?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es ist

$$EA + AF + FD + DC = 63 + 50 + 38 + 49 = 200 = EC$$

Daraus folgt, dass die Orte E, A, F, D, C in dieser Reihenfolge auf ein und derselben geraden liegen. A, B, F sind die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem rechten Winkel $\angle ABF$. Dies folgt wegen

$$AB^2 + BF^2 = 30^2 + 40^2 = 50^2 = AF^2$$

aus der Umkehrung des Lehrsatzes des Pythagoras.
Es sei Q der Fußpunkt des Lotes von B auf AF. Wegen $\triangle BFQ \sim \triangle AFB$ ist dann

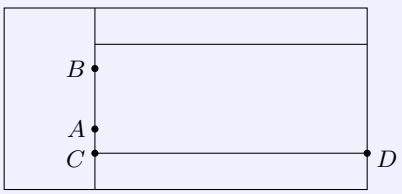
$$BQ = \frac{AB \cdot BF}{AF} = 24 \qquad \text{und} \qquad QF = \frac{BF^2}{AF} = 32$$

Also ist $QD = QF + FD = 70$. Schließlich erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle BQD$ nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$BD^2 = BQ^2 + QD^2 = 24^2 + 70^2 = 4(12^2 + 35^2) = 4 \cdot 37^2 = 74^2$$

und damit $BD = 74$. Die Entfernung von B nach D beträgt also 74 km.

Aufgabe 061036:



Die Abbildung stellt den Grundriss eines Teiles eines Theaterraumes dar. AB ist die Bühnenbreite, CD die Flucht der Seitenlogen.
Es sind alle Punkte P auf CD zu ermitteln, von denen aus die Bühne unter dem größten Sehwinkel erscheint!
Unter dem Sehwinkel ist hier der Winkel $\angle APB$ zu verstehen. Man setze gleiche Höhe der Bühne und der Seitenlogen über dem Erdboden voraus.

Anmerkung: Die Abbildung ist lediglich eine Skizze, aus der keineswegs auf die Größenverhältnisse geschlossen werden darf.

Lösung von cyrix:
Sei P auf CD mit $P \neq C$ gegeben. Dann sind die Dreiecke $\triangle ACP$ und $\triangle BCP$ rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C, sodass sich nach der Definition des Tangens im rechtwinkligen Dreieck für die Winkel bei P die Gleichungen $\tan(\angle CPA) = \frac{|AC|}{|CP|}$ und $\tan(\angle CPB) = \frac{|BC|}{|CP|}$ ergeben.
Für den Sichtwinkel auf die Bühne von P aus gilt also

$$\angle APB = \angle CPB - \angle CPA = \arctan\left(\frac{|BC|}{|CP|}\right) - \arctan\left(\frac{|AC|}{|CP|}\right)$$

Der Formelsammlung entnehmen wir für reelle Zahlen x und y mit $xy > -1$ das Additionstheorem $\arctan(x) - \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$.
Setzen wir unsere konkreten Verhältnisse aus der Aufgabe für x und y ein (die jeweils positiv sind, ihr Produkt also sicher größer als -1 ist), so erhalten wir

$$\angle APB = \arctan\left(\frac{\frac{|BC|}{|CP|} - \frac{|AC|}{|CP|}}{1 + \frac{|BC|}{|CP|} \cdot \frac{|AC|}{|CP|}}\right) = \arctan\left(\frac{|AB|}{|CP| + \frac{|BC| \cdot |AC|}{|CP|}}\right)$$

Da die Arcustangens-Funktion streng monoton steigend ist, nimmt sie ihren maximalen Wert genau dann an, wenn auch das Argument maximiert wird. Damit erhalten wir den maximalen Sichtwinkel $\angle APB$ genau dann, wenn das Argument des Arcustangens maximal, also, da dessen Zähler nicht von der Wahl von P abhängt, wenn der Nenner minimal wird. Es verbleibt demnach der Ausdruck $|CP| + \frac{|BC| \cdot |AC|}{|CP|}$ zu minimieren.

Für positive reelle Zahlen x und c betrachten wir die Funktion $f(x) = x + \frac{c}{x}$. Setzen wir $x := t \cdot \sqrt{c}$ mit einer positiven reellen Zahl t hier ein, erhalten wir

$$f(t \cdot \sqrt{c}) = t \cdot \sqrt{c} + \frac{c}{t \cdot \sqrt{c}} = \sqrt{c} \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

was genau für $t = 1$, also $x = \sqrt{c}$ minimal wird.
Wenden wir dies auf unseren zu betrachtenden Term $|CP| + \frac{|BC| \cdot |AC|}{|CP|}$ an, so wird dieser minimal – und der Sichtwinkel auf die Bühne maximal – , wenn $|CP| = \sqrt{|BC| \cdot |AC|}$ gilt.
Dies beschreibt (da man nur „vor“ und nicht auch „hinter“ der Bühne sitzen kann) den eindeutigen Platz auf der Seitenloge mit dem besten Blickwinkel auf die Bühne.

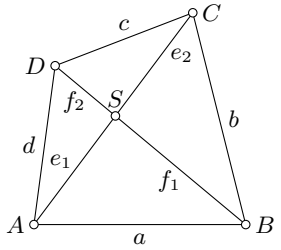
Ist die Seitenloge zu kurz, um den so errechneten Punkt P mit größtem Blickwinkel auf die Bühne zu enthalten, d. h., ist $|CD| < \sqrt{|BC| \cdot |AC|}$, so ist $P = D$ zu wählen, also mit maximaler Entfernung zur Bühne, da der Blickwinkel auf die Bühne, wenn man den Punkt P auf dem von C ausgehenden und durch D verlaufenden Strahl wandern lässt, am Punkt $P = C$ gleich 0 beträgt, dann bis zum Maximum bei $P = \sqrt{|BC| \cdot |AC|}$ streng monoton wächst, und abschließend mit gegen unendlich gehender Entfernung $|PC|$ wieder streng monoton auf Null fällt.
Ist also die Seitenloge schon vor Erreichen des Maximums zu Ende, ist genau dieser auf ihr am weitesten von der Bühne entfernte Punkt derjenige mit dem größten Sichtwinkel auf die Bühne.

Aufgabe 131031:
Man beweise, dass für alle konvexen Vierecke $ABCD$

$$\frac{1}{2}u < e + f < u$$

gilt! Dabei sei u der Umfang des Vierecks, und e und f seien die Längen seiner Diagonalen AC bzw. BD.

Lösung von Steffen Polster:



In der Abbildung seien die Diagonalen $AC = e = e_1 + e_2$ sowie $BD = f = f_1 + f_2$.
Die Dreiecksungleichungen für die Dreiecke ABC, BCD, CDA und DAB ergeben

$$a + b > e \quad ; \quad b + c > f \quad ; \quad c + d > e \quad ; \quad d + a > b$$

Deren Summe wird $2a + 2b + 2c + 2d = 2e + 2f$, also $u = a + b + c + d > e + f \quad (1)$.
Andererseits wird für die Dreiecke ABS, BCS, CDS, DAS mit den Dreiecksungleichungen

$$e_1 + f_1 > a \quad ; \quad e_2 + f_1 > b \quad ; \quad e_2 + f_2 > c \quad ; \quad e_1 + f_2 > d$$

Erneute Addition der vier Ungleichungen ergibt

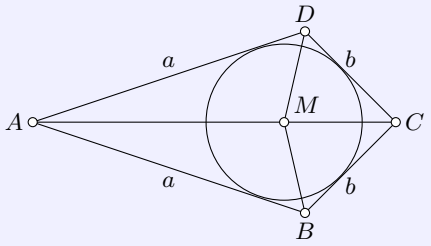
$$2e_1 + 2e_2 + 2f_1 + 2f_2 = 2e + 2f > a + b + c + d \Rightarrow e + f > \frac{a + b + c + d}{2} = \frac{u}{2}$$

Mit (1) ist damit die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 141032:
Beweisen Sie folgenden Satz!

Ist $ABCD$ ein (konvexes) Drachenviereck mit $AB = AD = a$, $BC = DC = b$ und dem Inkreismittelpunkt M, dann gilt

$$\frac{a}{b} = \frac{AM}{CM} \cdot \frac{BM}{DM}$$



Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Wegen der Symmetrie im Drachenviereck gilt $BM = DM$. Somit ist nur

$$\frac{a}{b} = \frac{AM}{CM}$$

zu zeigen. Im Dreieck ABM bezeichnen β,μ die Winkel bei B,M. Nach dem Sinussatz gilt $\frac{a}{AM} = \frac{\sin\mu}{\sin\beta}$.
Im Dreieck BCM erhalten wir analog $\frac{b}{CM} = \frac{\sin(180^\circ - \mu)}{\sin\beta}$.
Aus $\sin(180^\circ - \mu) = \sin\mu$ folgt $\frac{a}{AM} = \frac{b}{CM}$ und somit die Behauptung.

Aufgabe 141036:
Gegeben sei ein Parallelogramm $OPQR$. Gesucht sind alle Punkte X auf der Verlängerung von OP über P hinaus, die folgende Eigenschaft haben:
Schneidet die Parallele durch Q zu XR die Verlängerung von OR über R hinaus in Y, so gilt $PY \parallel XQ$.

Man untersuche, ob derartige Punkte X existieren!
Ist dies der Fall, so beschreibe und begründe man eine Konstruktion aller derartigen Punkte und untersuche, ob es nur einen solchen Punkt X gibt!

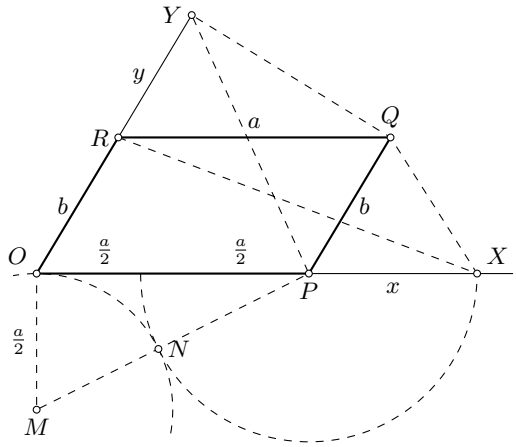
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Angenommen, X sei ein Punkt der geforderten Art. Dann gilt, wenn $OP = a$, $OR = b$, $PX = x$, $RY = y$ gesetzt wird:

$$\frac{y}{a} = \frac{b}{a+b} \tag{1}$$

denn wegen $\angle ROP = \angle YRQ$ und $\angle ORX = \angle RYQ$ ist $\triangle ORX \sim \triangle RYQ$. Außerdem gilt

$$\frac{x}{b} = \frac{a}{b+y} \tag{2}$$

weil wegen $\angle OPY = \angle OXQ$ und $\angle OYP = \angle PQX$ $\triangle OYP \sim \triangle PQX$ gilt.



Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{x}{b} = \frac{a}{b + \frac{ab}{a+x}} \tag{3}$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0 \tag{4}$$

und hieraus wegen $x > 0$

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

Ist nun $\triangle OMP$ ein rechtwinkliges Dreiecke mit den Katheten OP und $OM = \frac{a}{2}$, N der Schnittpunkt von MP mit dem Kreis um M mit dem Radius $\frac{a}{2}$, X der nicht auf OP gelegene Schnittpunkt des Kreises um P mit dem Radius PN, so ist $PX = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Daher genügt der Punkt X nur dann allen Forderungen der Aufgaben, wenn er auf folgende Weise konstruiert werden kann:

(a) Man errichtet auf OP in O die Senkrechte s.

(b) Man trägt von O aus auf s eine Strecke OM der Länge $\frac{a}{2}$ ab.

(c) Man schlägt den Kreis k um M mit dem Radius MO. Ist N der Schnittpunkt von k mit PM, dann

(d) schlage man den Kreis k' um P mit dem Radius PN. Der nicht auf OP liegende Schnittpunkt von k' mit der Geraden durch O und P ist der Punkt X.

(III) Jeder so konstruierte Punkt X genügt den Bedingungen der Aufgabe.
Beweis:
Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt

$$MP = \sqrt{OM^2 + OP^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

Daher ist nach Konstruktion

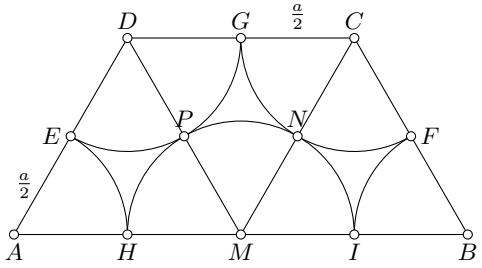
$$PX = PN = PM - MN = PM - MO = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

Folglich gilt $x = PX = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$ und damit (4) und (3).
Ist nun Y außerhalb von OP auf der OR enthaltenden Geraden so gelegen, dass $YQ \parallel RX$ ist, so gilt $\triangle OYP \sim \triangle PQX$ und hieraus $\angle OPY = \angle PXQ$. Folglich ist $\angle PXQ + \angle YPX = 180°$.
Daher können die PY bzw XQ enthaltenden Geraden nach dem Winkelsummensatz für Dreiecke keinen Schnittpunkt, sind also parallel.

(IV) Die angegeben Konstruktion ist stets auf genau zwei Weisen ausführbar, die beide auf denselben Punkt X führen.

Aufgabe 161031:
In einem Trapez $ABCD$ mit $AB \perp CD$ und $AB > CD$ sei a die Länge der Seiten BC, CD und DA. Um die Eckpunkte seien Kreise mit gleichem Radius so gezeichnet, dass
der Kreis um A die Seite AB in H und die Seite AD in E,
der Kreis um B die Seite AB in I und die Seite BC in F,
der Kreis um C die Seite BC in F und die Seite CD in G und
der Kreis um D die Seite CD in G und die Seite AD in E schneide.
Der über HI errichtete Halbkreis berühre die um C und D gezeichneten Kreise von außen in den Punkten N und P. Ermitteln Sie die Länge der Seite AB!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $AE = ED$ beträgt der Radius der vier um die Eckpunkte gezeichneten Kreise $\frac{a}{2}$.
Sei x die gesuchte Länge der Seite AB, dann gilt $HI = x - a$ da wegen $AB > CD$ der Punkt H zwischen A und I liegt.
Sei M der Mittelpunkt von AB und damit auch von HI, so ist $HM = \frac{x-a}{2}$ der Radius des Halbkreises über HI.



Da M, N und C auf derselben Geraden liegen, gilt

$$MC = \frac{a}{2} + \frac{x-a}{2} = \frac{x}{2}$$

Ebenso folgt $MD = \frac{x}{2}$, also $MA = MB = MC = MD$. Somit sind die Dreiecke AMD, DMC und CMB gleichschenklig und wegen Kongruenzsatz sss kongruent. Die Winkel $\angle AMD, \angle DMC$ und $\angle CMB$ sind folglich ebenfalls kongruent und da $\angle AMD + \angle DMC + \angle CMB = 180°$ ist, ist jeder von ihnen 60° groß.

Daher sind die genannten Dreiecke gleichseitig und somit ist $MA = MB = a$. Die Seite AB hat also die Länge $2a$.

Aufgabe 171032:
Es sei $ABCD$ ein nicht überschlagenes Viereck, das die Seitenlängen $AB = 9$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 11$ cm, $AD = 8$ cm hat und in dem der Innenwinkel bei B eine Größe von 110° hat.
Untersuchen Sie durch Konstruktion, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt von $ABCD$ eindeutig bestimmt ist!
Begründen und beschreiben Sie eine Konstruktion derjenigen Länge UV, die die Seitenlänge eines zu $ABCD$ flächeninhaltsgleichen Quadrates $UVWX$ ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Durch die Angaben über AB, BC, $\angle ABC$ ist das Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt. Wie eine Konstruktion zeigt, haben die Kreise um A bzw. C mit 8 cm bzw. 11 cm als radius genau zwei Schnittpunkte.
Genau einer von ihnen liegt nicht auf derselben Seite der Gerade durch A und C wie B, dieser sei d genannt, der andere D^*.
Die Konstruktion ergibt, dass $ABCD^*$ ein überschlagenes Viereck wird. Somit ist durch die Angaben über AB, BC, CD, AD, $\angle ABC$ ein nicht überschlagenes Viereck $ABCD$ bis auf Kongruenz eindeutig und daher auch sein Flächeninhalt eindeutig bestimmt. Die Lote von B und D auf AC seien BB' bzw. DD'. Dann hat $ABCD$ den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}AC \cdot BB' + \frac{1}{2}AC \cdot DD' = AC \cdot \frac{1}{2}(BB' + DD')$$

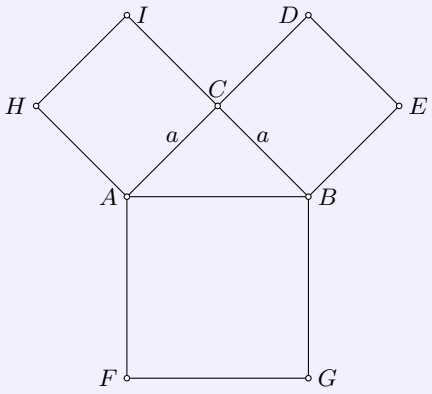
Daher hat ein Rechteck mit den Seitenlängen AC und $\frac{1}{2}(BB' + DD')$ denselben Flächeninhalt. Sind M, N die Mittelpunkte von BB' bzw. DD', so haben die Parallelen zu AC durch M bzw. N den Abstand $\frac{1}{2}(BB' + DD')$ voneinander. Daher entsteht durch diese Parallelen und durch die in A bzw. C auf AC errichteten Senkrechten ein Rechteck $EFGH$, das die genannten Längen als Seitenlängen hat.
Ist etwa $EF > FG$, liegt G' so auf EF, dass $FG' = FG$ gilt und ist EFV ein bei V rechtwinkliges Dreieck, für das VG' das Lot von V auf EF ist, so ist nach dem Kathetensatz

$$FV^2 = EF \cdot FG' = EF \cdot FG$$

also ein über FV errichtetes Quadrat zu $EFGH$ flächeninhaltsgleich.
Daher führt (z. B.) die folgende Konstruktion zu der gesuchten Länge UV:

(1) Man konstruiert die Parallelen p bzw. q durch die Mittelpunkte M bzw. N von BB' bzw. DD' zu AC.
(2) Man errichtet die Senkrechten s bzw. t in A bzw. C auf AC.
(3) Die Parallele p schneidet s bzw. t in E bzw. F; q schneidet s bzw. t in H bzw. G. Hierbei wird $EFGH$ ein Rechteck mit $EF > FG$.
(4) Der Kreis um F durch G schneidet EF in G'.
(5) Die Senkrechte in G' auf EF schneidet einen Halbkreis über EF in V.
(6) Man setze $F = U$. Die Strecke UV hat die geforderte Länge; ein über ihr errichtetes Quadrat $UVWX$ ist zu $ABCD$ flächeninhaltsgleich.

Aufgabe 191031:
Die Abbildung zeigt ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit gegebener Kathetenlänge a, über dessen Seiten nach außen die Quadrate $BCDE$, $ABGF$, $ACJH$ gezeichnet sind.
a) Zeigen Sie, dass es eine Kreislinie gibt, auf der die Punkte D, E, F, G, H und J liegen!
Ermitteln Sie (zu gegebenem a) den Durchmesser dieses Kreises!
b) Beweisen Sie:
Jeder Kreis, der die Punkte D, E, F, G, H und J in seiner Fläche oder auf seinem Rande enthält und einen anderen Mittelpunkt als der in a) genannte Kreis hat, hat einen größeren Radius als dieser Kreis!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es sei M der Mittelpunkt der Strecke AB. Die Gerade g durch C und M ist Symmetrieachse der gesamten Figur, also gilt

$$MD = MJ, ME = MH, MG = MF \qquad (1)$$

Ferner ist CM zugleich Höhe in ABC, also hat $\triangle BCM$ bei B bzw. M Winkel von 45° bzw. 90° und ist daher ebenfalls gleichschenklig mit $MB = MC$. Also liegt M auf der Mittelsenkrechten von BC; diese ist zugleich die Mittelsenkrechte von DE, hiernach gilt $MD = ME$ (2).

$\triangle BCD$ ist gleichschenklig-rechtwinklig mit $\angle DBC = 45°$, also ist $\angle DBM = 90° = \angle GBM$; ferner gilt $BD = a\sqrt{2} = BG$. Nach dem Kongruenzsatz sws ist somit $\triangle DBM \cong \triangle GBM$, also $MD = MG$ (3).
Aus (1), (2), (3) folgt, dass der Kreis k um M durch D auch durch E, F, G, H, J geht. Sein Durchmesser ist nach dem Satz des Pythagoras

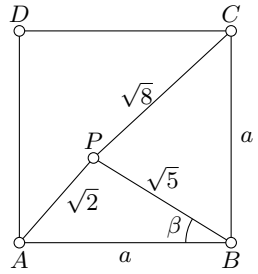
$$2MG = 2\sqrt{MB^2 + MG^2} = 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{10}$$

b) Zu zeigen ist, dass für jeden Punkt $M' \neq M$ jeder Kreis um M', der in seiner Fläche oder auf seinem Rande die Punkte D, E, F, G, H, J enthält, einen größeren Radius als k hat.
O. B. d. A. liege M' auf g oder in derjenigen durch g begrenzten Halbebene, die A enthält. Das Lot von M' auf g habe den Fußpunkt L.

Ist $L = M$ (also M' nicht auf g gelegen), so gilt $M'D > MD$. Ist $L \neq M$ und liegt L auf dem Strahl aus M durch C, so gilt $M'G \geq LG > MG$. Liegt L auf der Verlängerung von CM über M hinaus, so gilt $M'D \geq LD < MD$.
Damit ist der verlangte Beweis erbracht.

Aufgabe 201033:
Gegeben sei ein Punkt P in einer Ebene ε. Untersuchen Sie, ob es in ε ein Quadrat $ABCD$ gibt, für das $PA = \sqrt{2}$ cm, $PB = \sqrt{5}$ cm, $PC = \sqrt{8}$ cm gilt!
Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie für jedes derartige Quadrat seine Seitenlänge!

Lösung von MontyPythagoras:



Die gesuchte Seitenlänge sei a. Mit dem Kosinusssatz erhält man im Dreieck ABP einerseits:

$$2 = a^2 + 5 - 2\sqrt{5}\, a \cos\beta \qquad \rightarrow \qquad (1) \qquad 2\sqrt{5}\, a \cos\beta = a^2 + 3$$

und andererseits im Dreieck PBC:

$$8 = a^2 + 5 - 2\sqrt{5}\, a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \qquad \rightarrow \qquad 8 = a^2 + 5 - 2\sqrt{5}\, a \sin\beta$$

$$(2) \qquad 2\sqrt{5}\, a \sin\beta = a^2 - 3$$

Quadriert man die Gleichungen (1) und (2) und addiert sie, dann folgt:

$$20a^2 = a^4 + 6a^2 + 9 + a^4 - 6a^2 + 9$$

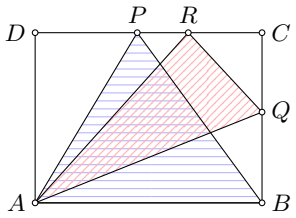
$$a^4 - 10a^2 + 9 = 0$$

$$a^2 = 5 \pm \sqrt{25 - 9} \qquad \rightarrow \qquad a_1^2 = 9 \qquad a_2^2 = 1$$

Positive Seitenlängen vorausgesetzt, kann die Seitenlänge des Dreiecks entweder $a = 3$ oder $a = 1$ betragen (in letzterem Falle liegt P natürlich außerhalb des Quadrats).

Aufgabe 231035:
Ulrike, Vera und Waltraud wollen je ein Rechteck $ABCD$ und dazu einen inneren Punkt P der Strecke CD, einen inneren Punkt Q der Strecke BC sowie noch einen inneren Punkt R der Strecke CD zeichnen.
Ulrike stellt sich die Aufgabe, zu erreichen, dass für den Flächeninhalt F_1 des Dreiecks ABP und den Flächeninhalt F_2 des Dreiecks AQR die Ungleichung $F_1 < F_2$ gilt;
Vera will $F_1 = F_2$ und Waltraud $F_1 > F_2$ erreichen.
Untersuchen Sie für jedes der drei Mädchen, ob es sich eine lösbare oder eine unlösbare Aufgabe gestellt hat!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Zunächst stellen wir fest, dass das Dreieck ABP unabhängig von der Wahl des Punktes P immer flächeninhaltsgleich ist und $A_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}ab$ gilt. Nun können wir die Punkte R und Q wählen und definieren einmal die Länge der Strecken $|\overline{CR}| =: x$ und $|\overline{CQ}| =: y$.

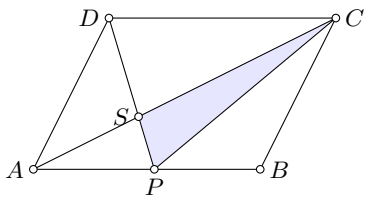
Der Flächeninhalt des Dreiecks AQR ist somit $A_{\triangle AQR} = ab - \frac{xy}{2} - \frac{(a-x)b}{2} - \frac{(b-y)a}{2} = \frac{1}{2}(ay + bx - xy)$. Nun überprüfen wir einmal Ulrike: Aus $F_1 < F_2$ folgt somit:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ab &< \frac{1}{2}(ay + bx - xy) \\ ab &< ay + bx - xy \\ ab - bx &< y(a - x) \\ b(a - x) &< y(a - x) \end{aligned}$$

Da $x \neq a$ laut Voraussetzung (R ist innerer Punkt der Strecke) und $a > x$ folgt somit $b < y$. Dieses ist also unmöglich. Analog folgt für Vera $b = y$, was auch unmöglich ist, da auch Q ein innerer Punkt sein soll. Für Waltraud folgt $y < b$, was möglich ist.

Aufgabe 311035:
Es sei $ABCD$ ein gegebenes Parallelogramm. Für jeden Punkt P, der auf der Strecke AB liegt, sei S der Schnittpunkt der Strecken AC und PD.
a) Für welche Lage von P auf AB ist der Flächeninhalt des Dreiecks SPC gleich einem Sechstel des Flächeninhalts des Parallelogramms $ABCD$?
b) Für welche Lage von P auf AB ist der Flächeninhalt des Dreiecks SPC möglichst groß?

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



a) Ein Punkt, dessen Lage man auf einer Strecke beschreiben kann, ist der Mittelpunkt. Und tatsächlich ist dieser Punkt der gesuchte Punkt, wie man leicht einsehen kann.

Sei die Länge des Parallelogramms a und die Höhe b. Das Parallelogramm hat dann also eine Fläche von $A = ab$. Offensichtlich hat das $\triangle ASD$ den gleichen Flächeninhalt wie das $\triangle SPC$, da das $\triangle APD$ flächeninhaltsgleich zum $\triangle APC$ ist (Scherung).
Sei also der Flächeninhalt der Dreiecke x. Die Dreiecke APS und DSC sind ähnlich, da alle Winkel gleich sind. Nach Strahlensatz beträgt der Streckfaktor 2, die Fläche von $\triangle DSC$ ist also viermal so groß, wie die von $\triangle ASP$. Sei nun $A_{\triangle ASP} = y$, dann gilt:

$(1): \quad x + 4y = \dfrac{ab}{2}$

$(2): \quad x + y = \dfrac{ab}{4}$

$(1) - (2): \quad 3y = \dfrac{ab}{4}$ und somit $y = \dfrac{ab}{12}$

Damit erhalten wir also $A_{\triangle SPC} = \dfrac{ab}{4} - \dfrac{ab}{12} = \dfrac{ab}{6}$.

b) Nun - verschiebt man P nach links wird der Flächeninhalt immer kleiner, verschiebt man P nach rechts, wird er größer. Liegt P schließlich auf B ist die Fläche maximal, nämlich $A = \frac{ab}{4}$.

Aufgabe 331033:
Antje hat in einem älteren Geometriebuch folgende Näherungskonstruktion für regelmäßige Vielecke mit gegebener Seitenlänge s gefunden:
Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge s. Dann konstruiere man den Mittelpunkt D von AB und verlängere die Strecke DC über C hinaus. Auf dieser Verlängerung trage man fortgesetzt Strecken der Länge $\frac{s}{6}$ ab. Die dabei der Reihe nach erhaltenen Punkte seien mit $M_7, M_8, M_9, ...$ bezeichnet.
Für $n > 6$ ist dann jeweils der durch A und B gehende Kreis um M_n näherungsweise der Umkreis eines regelmäßigen n-Ecks der Seitenlänge s_n.
Beate behauptet, speziell für $n = 12$ gelte das nicht nur näherungsweise, sondern sogar genau.
Beweisen Sie diese Behauptung!

Lösung von cyrix:
Nach Konstruktion ist die Gerade DC die Mittelsenkrechte der Strecke AB. Damit ist DC auch die Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$, sodass $|DC| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s$ gilt.
Insbesondere ist das Dreieck $\triangle ADM_{12}$ rechtwinklig bei D und besitzt die Kantenlängen $|AD| = \frac{1}{2} \cdot s$ und

$$D_{M_12} = |DC| + (12-6) \cdot \frac{1}{6} \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s + s = \frac{\sqrt{3}+2}{2} \cdot s$$

sodass sich mit dem Satz des Pythagoras die Länge der Hypotenuse zu

$$|AM_{12}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot s = \frac{\sqrt{3+4\sqrt{3}+4+1}}{2} \cdot s = \frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{2} \cdot s = (\sqrt{2+\sqrt{3}}) \cdot s$$

ergibt. Aus Symmetriegründen ist auch $|BM_{12}| = |AM_{12}|$.

Es sei $\alpha = \angle AM_{12}B$. Wendet man den Kosinussatz auf das Dreieck $\triangle ABM_{12}$ an, erhält man

$$|AB|^2 = |AM_{12}|^2 + |BM_{12}|^2 - 2|AM_12| \cdot |BM_{12}| \cdot \cos\alpha$$

bzw. nach Einsetzen

$$s^2 = (2+\sqrt{3})s^2 + (2+\sqrt{3})s^2 - 2 \cdot (2+\sqrt{3})s^2 \cdot \cos\alpha$$

sowie $1 = 2(2+\sqrt{3}) \cdot (1-\cos\alpha)$, also

$$1 - \cos\alpha = \frac{1}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{2 \cdot (4-3)} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und also $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$. Da für α als Innenwinkel eines Dreiecks $0° < \alpha < 180°$ gilt und der Kosinus in diesem Bereich streng monoton fallend ist, ist also $\angle AM_{12}B = \alpha = 30° = \frac{1}{12} \cdot 360°$ der Zentriwinkel eines regelmäßigen Zwölfecks, sodass M_{12} der Mittelpunkt des Umkreises eines solchen ist, von dem AB eine Kante ist, welches damit die Kantenlänge $|AB| = s$ besitzt, □.

IV Runde 4

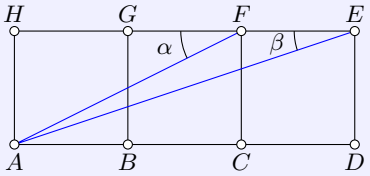
Aufgabe 021044:
Es ist ein Rechteck zu konstruieren, das den gleichen Inhalt wie ein gegebenes Quadrat mit der Seite a hat und dessen Umfang doppelt so groß wie der des gegebenen Quadrats ist.
Wie viele Lösungen hat diese Aufgabe?

Lösung von André Lanka:
Es gibt genau ein Rechteck, das diese Bedingungen erfüllt.
Seien c und d die Rechteckseiten. Dann gilt $c \cdot d = a^2$ und $2(c+d) = 2 \cdot 4a$.

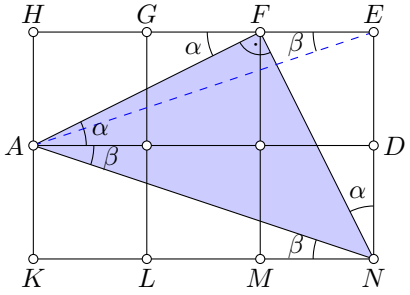
Aus der ersten Gleichung erhält man $c = \frac{a^2}{d}$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, kommt man zu $2(\frac{a^2}{d} + d) = 8a$ und erhält $d^2 - 4ad + a^2 = 0$.
Die quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen $d_1 = (2 + \sqrt{3})a$ und $d^2 = (2 - \sqrt{3})a$. Entsprechend kommen als Lösung ein Rechteck mit den Seitenlängen $(2 + \sqrt{3})a$ und $\frac{a}{2+\sqrt{3}}$ und ein Rechteck mit den Seitenlängen $(2 - \sqrt{3})a$ und $\frac{a}{2-\sqrt{3}}$ in Frage.
Da aber $\frac{a}{2+\sqrt{3}} = a(2 - \sqrt{3})$ ist und entsprechend $\frac{a}{2\sqrt{3}} = a(2 + \sqrt{3})$ ist, sind beide Rechtecke identisch. Es gibt also bis auf Kongruenz genau ein solches Rechteck.

Aufgabe 031042:

Gegeben sei ein aus drei kongruenten Quadraten zusammengesetztes Rechteck lt. Abbildung.
Es ist zu beweisen, dass $\alpha + \beta = 45°$ ist!



Lösung von Eckard Specht:



Beweis: Spiegeln wir die drei Quadrate an der unteren Kante, so erkennen wir, dass die rechtwinkligen Dreiecke AHF und EFN kongruent sind (z. B. SSS).
Daher ist $\triangle AFN$ gleichschenklig mit den Basiswinkeln

$$\angle FNA = \angle FAN = \angle FAD + \angle DAN$$

$$\alpha = \angle HFA = \angle FAD \qquad \text{und} \qquad \beta = \angle DAN = \angle ANK$$

sind jeweils Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, so dass aus obiger Gleichung

$$\angle FNA = 90° - \alpha - \beta = \angle FAN = \alpha + \beta$$

folgt. Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung $\alpha + \beta = 45°$.

Aufgabe 111043A:
Es sei $ABCD$ ein konvexes Drachenviereck mit $AB = AD > BC = CD$. Ferner sei F ein auf AB zwischen A und B gelegener Punkt, für den $AB : BC = BC : FB$ gilt.
Schließlich sei E derjenige im Inneren von $ABCD$ gelegene Punkt, für den $EC = BC(= CD)$ und $FE = FB$ gilt.
Beweisen Sie, dass E auf dem von D auf die Gerade durch A und B gefällten Lot liegt!

Lösung von cyrix:
Aus $EC = BC$ und $FE = FB$ folgt, dass $EBCF$ ebenfalls ein Drachenviereck ist. Die Dreiecke ABC und FBC haben eine gemeinsamen Winkel in B.
Aus $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{FB}$ folgt, dass diese und somit die beiden Drachenvierecke kongruent sind mit $FE = FB < EC = BC$.

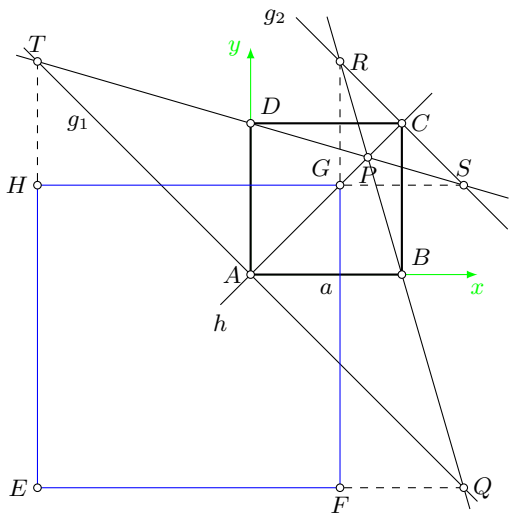
Definiere $\alpha := \angle DAB := \angle BCF$, $\beta = \angle ABC = \angle BCD = \angle EBC = \angle CFB$ und $\gamma := \angle BCD = \angle FEB$. Dann erhalten wir $\angle ECD = \gamma - \alpha$. Da das Dreieck ECD gleichschenklig mit Basis ED ist, gilt $\angle CDE = 90° - \frac{\gamma-\alpha}{2}$ und somit

$$\angle EDA = \angle CDA - \angle CDE = \beta - (90° - \frac{\gamma - \alpha}{2}) = \frac{2\beta + \gamma + \alpha - 2\alpha}{2} - 90° = 90° - \alpha = 90° - \angle DAB$$

Also schneidet die Gerade ED die Strecke AB im rechten Winkel.

Aufgabe 111045:
Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ und auf der Geraden h durch A und C ein vom Mittelpunkt M des Quadrates verschiedener Punkt P. Die auf h senkrechte durch A laufende Gerade sei g_1, die auf h senkrechte durch C laufende Gerade sei g_2.
Ferner sei h_1 die Gerade durch P und B und h_2 die Gerade durch P und D.
Der Schnittpunkt von g_1 und h_1 sei Q, der von g_2 und h_1 sei R, der von g_2 und h_2 sei S und der von g_1 und h_2 sei T genannt.
Die Schnittpunkte der Parallelen durch Q und S zu AB sowie durch R und T zu AD seien so mit E, F, G, H bezeichnet, dass $EFGH$ ein Rechteck ist.
Schließlich sei I_1 der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ und I_2 der des Rechtecks $EFGH$.
Ermitteln Sie $I_1 : I_2$.

Lösung von Steffen Polster:



Zur Lösung der Aufgabe wird ein Koordinatensystem derart eingeführt, dass A im Koordinatenursprung liegt und AB auf der x-Achse sowie AD auf der y-Achse liegen.
Dann haben die Punkte die Koordinaten: $A(0;0)$, $B(a;0)$, $C(a;a)$ und $D(0;a)$. Der Punkt P auf AC (Funktion $y = x$) habe die Koordinaten $P(p;p)$. Die Gerade h liegt dann auf der linearen Funktion $y = x$, die Gerade g_1 durch A auf $y = -x$ (1) und die Gerade g_2 durch C auf $y = -x + 2a$ (2). Für die Gerade durch B und P ermittelt man

$$g(BP): \quad y = \frac{p}{p-a}x - \frac{pa}{p-a} \tag{3}$$

und für die Gerade durch D und P

$$g(DP): \quad y = \frac{p-a}{p}x + a \tag{4}$$

Lösen der Gleichungssysteme aus (2) und (3) bzw. (4) ergibt die Koordinaten der Punktes R und S zu:

$$R\left(\frac{a(2a-3p)}{a-2p}; \frac{ap}{2p-a}\right) \quad ; \quad S\left(\frac{ap}{2p-a}; \frac{a(2a-3p)}{a-2p}\right)$$

Auf Grund der symmetrischen Lage beider Punkte zu $y = x$ sind deren x- und y-Koordinaten vertauscht. Analog ergibt sich aus den Gleichungssystemen aus (1) und (3) bzw. (4):

$$Q\left(\frac{ap}{2p-a}; \frac{ap}{a-2p}\right) \quad ; \quad T\left(\frac{ap}{a-2p}; \frac{ap}{2p-a}\right)$$

Wie man der Darstellung entnimmt, folgen daraus die Koordinaten der Eckpunkte des Rechtecks $EFGH$ zu:

$$E\left(\frac{ap}{a-2p}; \frac{ap}{a-2p}\right); F\left(\frac{a(2a-3p)}{a-2p}; \frac{ap}{a-2p}\right); G\left(\frac{a(2a-3p)}{a-2p}; \frac{a(2a-3p)}{a-2p}\right); H\left(\frac{ap}{a-2p}; \frac{a(2a-3p)}{a-2p}\right)$$

und für die Seitenlängen des Rechtecks

$$EF = FG = GH = HE = 2a$$

Damit ist der Flächeninhalte $I_2 = 4a^2$ des Rechtecks $EFGH$ viermal so groß, wie der Flächeninhalt $I_1 = a^2$ des Ausgangsquadrates $ABCD$, d. h. $I_1 : I_2 = 1 : 4$.

Aufgabe 121041:
a) Zeigen Sie, dass es eine größte Zahl m gibt, für die die folgende Aussage richtig ist!
Es gibt ein konvexes Vieleck, unter dessen Innenwinkeln genau m spitz sind.
b) Ermitteln Sie diese größte Zahl m!
c) Untersuchen Sie, ob es (mit dieser Zahl m) für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ ein konvexes n-Eck gibt, unter dessen Innenwinkeln genau m spitze sind!

Lösung von cyrix:
a) In einem konvexen n-Eck beträgt die Innenwinkelsumme $(n-2) \cdot 180°$. Da in einem solchen konvexen n-Eck alle Innenwinkel kleiner als 180° und die spitzen jeweils kleiner als 90° sind, folgt also $(n-2) \cdot 180° < m \cdot 90° + (n-m) \cdot 180°$ bzw. $n - 2 < n - \frac{m}{2}$ und damit $m < 4$.

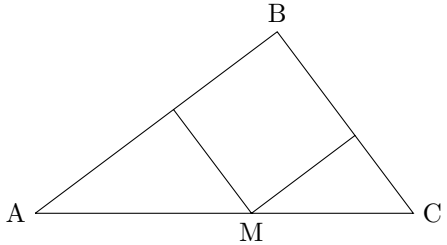
b) Es ist $m = 3$, wie etwa ein gleichseitiges Dreieck zeigt.

c) Sei $n \geq 3$ gegeben und der Winkel ε definiert als $\varepsilon = \frac{90°}{n}$, dann gilt $0 < \varepsilon < 90°$. Wählt man nun drei Winkel mit der Größe $90° - \varepsilon$ und für $n-3$ Winkel jeweils die Größe $180° - \varepsilon$, dann ist deren Summe genau $3 \cdot 90° + (n-3) \cdot 180° - n \cdot \varepsilon = (n-2) \cdot 180°$, sodass man diese $3 + (n-3) = n$ Winkel als Innenwinkel eines konvexen n-Ecks verwenden kann.
Dies hat dabei wegen $180° - \varepsilon > 180° - 90° = 90°$ auch nur genau drei spitze Innenwinkel.

Aufgabe 121043A:
a) Man beweise, dass jedes konvexe Drachenviereck einen Inkreis hat!
b) Man beweise, dass jedes konvexe Drachenviereck $ABCD$ mit $AB = AD = x$, $CB = CD = y$ und $AB \perp CB$ einen Umkreis hat!
c) Man beweise! Sind M und U die Mittelpunkte und ρ bzw. r die Radien des In- bzw. Umkreises eines unter b) beschriebenen Drachenvierecks, so gilt:

$$|MU|^2 = r^2 + \rho^2 - \rho\sqrt{\rho^2 + 4r^2}$$

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



a,b) Der Inkreismittelpunkt ist durch den Schnittpunkt der Diagonale AC und der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ gegeben. Falls $\angle ABC$ ein rechter Winkel ist, so liegt B auf dem Thaleskreis über AC, welcher dann der Umkreis des Drachenvierecks ist.
c) Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt: $\frac{xy}{2} = \rho^2 + \frac{(x-\rho)\rho}{2} + \frac{(x-\rho)\rho}{2}$ und somit $\rho = \frac{xy}{x+y}$. Wegen der Kongruenz der Dreiecke in der Skizze erhalten wir $\frac{|MC|}{\rho} = \frac{2r}{x} \Rightarrow |MC| = \frac{2\rho r}{x}$ und somit

$$|MU|^2 = (r - |MC|)^2 = \left(r - \frac{2\rho r}{x}\right)^2 = r^2\left(1 - \frac{2\rho}{x}\right)^2 = r^2\left(1 - \frac{2y}{x+y}\right)^2 = r^2\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2$$

Für die rechte Seite der Gleichung gilt: Aus $r = \frac{1}{2}AC$, $\rho < x + y$ und

$$4r^2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2\rho(x+y) \Rightarrow \rho^2 + 4r^2 = (x+y-\rho)^2$$

folgt

$$\begin{aligned} r^2 + \rho^2 - \rho\sqrt{\rho^2 + 4r^2} &= r^2 + \rho^2 - \rho(x+y-\rho) \\ &= r^2 + 2\rho^2 - xy = \frac{x^2+y^2}{4} + \frac{4x^2y^2}{(x+y)^2} - xy \\ &= \frac{1}{4(x+y)^2}\left((x^2+y^2)(x+y)^2 + 8x^2y^2 - 4xy(x+y)^2\right) \\ &= \frac{1}{4(x+y)^2}\left((x^2+y^2)(x+y)^2 - 4x^3y - 4xy^3\right) \\ &= \frac{x^2+y^2}{4(x+y)^2}\left((x+y)^2 - 4xy\right) \\ &= r^2\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 141042:
Beweisen Sie folgenden Satz!
Ist $ABCD$ ein Tangentenviereck mit den Seitenlängen $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$ und dem Inkreismittelpunkt M, so gilt:

$$\frac{a}{c} = \frac{AM \cdot BM}{CM \cdot DM}$$

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Der Beweis erfolgt ähnlich zur Aufgabe 141032.
Seien die Innenwinkel des Tangentenvierecks durch $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$ gegeben, so dass z. B. das Dreieck ABM die Innenwinkel α,β und $180° - \alpha - \beta$ hat. Nach dem Sinussatz in den Dreiecken ABM und BCM gilt

$$\frac{a}{AM} = \frac{\sin(180° - \alpha - \beta)}{\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} \quad \text{und} \quad \frac{b}{CM} = \frac{\sin(180° - \beta - \gamma)}{\sin\beta} = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta}\ .$$

Division der beiden Gleichungen ergibt

$$\frac{a}{AM} \cdot \frac{CM}{b} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta+\gamma)} \iff \frac{a}{b} = \frac{AM}{CM} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta+\gamma)}\ .$$

Für b,c erhalten wir entsprechend

$$\frac{b}{c} = \frac{BM}{DM} \cdot \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\gamma+\delta)}\ .$$

Multiplikation beider Gleichungen ergibt

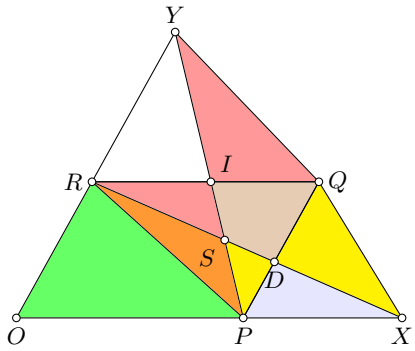
$$\frac{a}{c} = \frac{AM}{CM} \cdot \frac{BM}{DM} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\gamma+\delta)} \overset{!}{=} \frac{AM}{CM} \cdot \frac{BM}{DM}\ .$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt aus $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°$, also

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(180° - \gamma - \delta) = \sin(\gamma+\delta)$$

Aufgabe 161041:
Man beweise den folgenden Satz!
Ist $OPQR$ ein Parallelogramm, sind ein Punkt X auf seiner Verlängerung von OP über P hinaus und ein Punkt Y auf seiner Verlängerung von OR über R hinaus gelegen und ist S der Schnittpunkt von PY mit RX, so sind die Vierecke $OPSR$ und $SXQY$ einander flächeninhaltsgleich.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Die Hauptüberlegung bei dieser Aufgabe ist, dass die gelben und roten Dreiecke $\triangle RPD$ und $\triangle QDX$ sowie $\triangle RPI$ und $\triangle YIQ$ flächeninhaltsgleich sind. Das überlegt man sich wie folgt (ich zeige das für die gelben):

Das $\triangle RPQ$ ist flächeninhaltsgleich zum $\triangle RXQ$, da hier nur eine Scherung stattfindet (beide Dreiecke haben die gleiche Grundseite und Höhe). Diese beiden Dreiecke setzen sich jeweils nun aus dem Dreieck RDQ und einem gelben Dreieck zusammen, womit die Behauptung folgt. Für die roten Dreiecke läuft es analog.

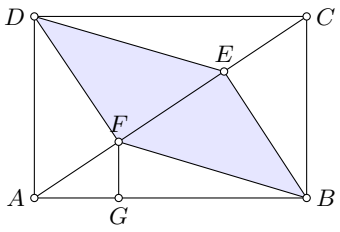
Der Flächeninhalt des Vierecks OPSR setzt sich nun zusammen aus dem halben Parallelogramm und dem Dreieck RSP. Die Fläche des Viereck $SXQY$ berechnet sich als

$$A = A_{\text{rot}} + A_{\text{gelb}} + (A_{\text{halbes Parallelogramm}} - A_{\text{rot}} - A_{\text{gelb}} + A_{\triangle RSP})$$

womit die Behauptung folgt.

Aufgabe 161045:
Für ein Rechteck $ABCD$ sei a die Länge der Strecke BC, ferner sei die Diagonale AC eine q-mal so lange Strecke wie BC (q reell). Von den Eckpunkten B und D seien die Lote auf AC gefällt, ihre Fußpunkte seien in dieser Reihenfolge E und F.
Man ermittle aus den gegebenen Werten a und q den Flächeninhalt des Vierecks $FBED$!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Da die Diagonale im Quadrat mit Seitenlänge a die Länge $d = a\sqrt{2}$ besitzt und die Diagonalen im Quadrat senkrecht aufeinander stehen, verschwindet das Viereck $FBED$ für $q = \sqrt{2}$. Wir unterscheiden nun die Fälle $q > \sqrt{2}$ und $q < \sqrt{2}$:



1. Fall: $q > \sqrt{2}$
Zunächst einmal definieren wir folgende Variablen: Sei $x := |\overline{AC}|$, $z := |\overline{EC}| = |\overline{AF}|$ und $h := |\overline{FG}|$, wobei G der Lotfußpunkt von F auf die Seite AB ist.

Aus Symmetriegründen reicht es, dass wir den Flächeninhalt von Dreieck FBE berechnen und diesen anschließend verdoppeln.
Dafür stellen wir zunächst einmal fest, dass die Dreiecke ABF und CEB offensichtlich den gleichen Flächeninhalt haben, da sie zusammen mit Dreieck FBE jeweils ein Dreieck mit gleicher Höhe und Grundseite bilden. Wir berechnen nun zunächst den Flächeninhalt von $\triangle ABC$ in Abhängigkeit von a und q. Laut Voraussetzung ist $x = q \cdot b$. Nun ist $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. Einsetzen und quadrieren liefert:

$$a^2 + b^2 = q^2 b^2$$
$$a^2 = q^2 b^2 - b^2 = b^2(q^2 - 1)$$
$$b^2 = \frac{a^2}{q^2 - 1} \Rightarrow b = \frac{a\sqrt{q^2 - 1}}{q^2 - 1}$$

Damit:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{ab}{2} = \frac{a^2\sqrt{q^2 - 1}}{2(q^2 - 1)}$$

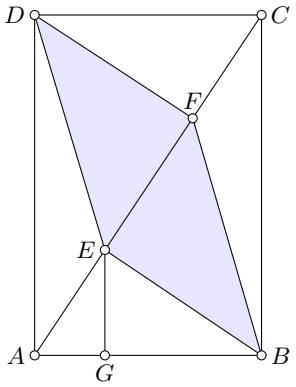
Laut Kathetensatz gilt im Dreieck ABC nun $b^2 = zx \iff z = \frac{b^2}{x}$.

Nach Strahlensatz gilt $\frac{b}{h} = \frac{x}{z} \iff h = \frac{bz}{x}$. Einsetzen liefert:

$$h = \frac{b \cdot \frac{b^2}{x}}{x} = \frac{b^3}{x^2} = \frac{b^3}{q^2 b^2} = \frac{b}{q^2} = \frac{a\sqrt{q^2 - 1}}{q^2(q^2 - 1)}$$

Der Flächeninhalt des Vierecks beträgt also:

$$A = 2 \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{q^2-1}}{2(q^2-1)} - 2 \cdot \frac{a \cdot a\sqrt{q^2-1}}{2q^2(q^2-1)} \right) = \frac{a^2\sqrt{q^2-1}(q^2-2)}{q^2(q^2-1)}$$



2. Fall: $q < \sqrt{2}$
Für $q < \sqrt{2}$ ändert sich die Reihenfolge von E und F auf der Diagonalen. Sei nun also $x := |\overline{AC}|$, $z := |\overline{FC}| = |\overline{AE}|$ und $h := |\overline{EG}|$, wobei G der Lotfußpunt von E auf die Seite AB ist.

Nun gilt nach Kathetensatz $a^2 = zx \iff z = \frac{a^2}{x}$. Eingesetzt:

$$h = \frac{b \cdot \frac{a^2}{x}}{x} = \frac{a^2 b}{x^2} = \frac{a^2 b}{q^2 b^2} = \frac{a^2}{q^2 b} = \frac{a^2(q^2-1)}{q^2 a\sqrt{q^2-1}} = \frac{a\sqrt{q^2-1}}{q^2}$$

Der Flächeninhalt beträgt somit:

$$A = 2 \cdot \left(\frac{a^2\sqrt{q^2-1}}{2(q^2-1)} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{q^2-1} \cdot a}{2q^2} \right) = \frac{a^2\sqrt{q^2-1}(q^2-2(q^2-1))}{q^2(q^2-1)} = \frac{a^2\sqrt{q^2-1}(2-q^2)}{q^2(q^2-1)}$$

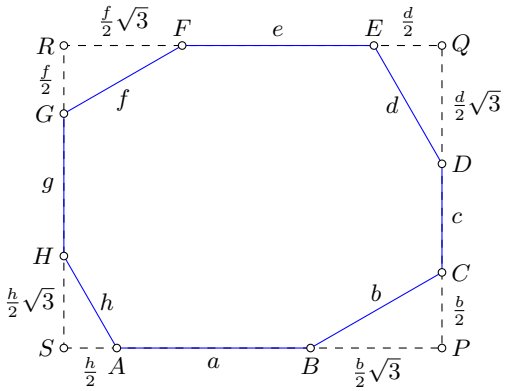
Somit folgt für den Flächeninhalt $A = \frac{a^2\sqrt{q^2-1}|q^2-2|}{q^2(q^2-1)}$

Aufgabe 211042:
Definition: Eine Länge d heißt Durchmesser einer Punktmenge M, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Für je zwei Punkte X, Y aus M gilt: Der Abstand XY zwischen diesen Punkten erfüllt die Ungleichung $XY \leq d$.
(2) Es gibt zwei Punkte P, Q aus M, deren Abstand $PQ = d$ beträgt.
Aufgabe:
Untersuchen Sie, ob man jede Viereckfläche V so durch einen Streckenzug in zwei Teilflächen zerlegen kann, dass jede der beiden Teilflächen einen kleineren Durchmesser als V hat!
Dabei soll jede der genannten Flächen einschließlich ihres Randes genommen werden. (Insbesondere zählt also ein zerlegender Streckenzug zu beiden Teilflächen.)

Lösung von Nuramon:
So eine Zerlegung ist nicht immer möglich.
Es seien A,B,C die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 1 und es sei M der Mittelpunkt dieses Dreiecks. Dann hat das konkave Viereck $AMBC$ Durchmesser 1.
Zerlegt man $AMBC$ in zwei Teilflächen, so muss nach Schubfachprinzip eine dieser Teilflächen mindestens zwei der Punkte A,B,C enthalten und hat somit einen Durchmesser von mindestens 1.

Aufgabe 231046:
Von einem Achteck $ABCDEFGH$ werden folgende Eigenschaften vorausgesetzt:
(1) Die Maßzahlen der Längen jeder der Achtecksseiten sind rationale Zahlen.
(2) Die Innenwinkel des Achtecks haben abwechselnd die Größen 150° und 120°.
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen folgt:
In dem Achteck $ABCDEFGH$ gilt $AB = EF$, $BC = FG$, $CD = GH$ und $DE = HA$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Geraden durch A und B bzw. C und D bzw. E und F bzw. G und H mögen einander in den Punkten S, P, Q, R schneiden, wie es die Abbildung zeigt.
Dann ist $SPQR$ ein Rechteck, da die Dreiecke HSA, BPC, DQE und FRG wegen der Sätze über Nebenwinkel und über die Winkelsumme im Dreieck rechtwinklige Dreiecke mit den rechten Winkeln bei S, P, Q und R sind.
Es gilt nämlich:

Die Dreiecke HSA, BPC, DQE und FRG haben nach dem Nebenwinkelsatz je einen Winkel von 30° und einen Winkel von 60°, und zwar so, dass o. B. d. A.

$$\angle SAH = \angle PCB = \angle QED = \angle RGF = 60° \qquad \text{sowie}$$

$$\angle SHA = \angle PBC = \angle QDE = \angle RFG = 30°$$

gilt. Es sei nun ferner $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $EF = e$, $FG = f$, $GH = g$ und $HA = h$.
Nach einem bekannten Satz über gleichseitige Dreiecke gilt dann: $AS = \frac{h}{2}$, $PC = \frac{b}{2}$, $EQ = \frac{d}{2}$, $GR = \frac{f}{2}$ sowie

$$SH = \frac{h}{2}\sqrt{3}, \quad BM = \frac{b}{2}\sqrt{3}, \quad DQ = \frac{d}{2}\sqrt{3}, \quad RF = \frac{f}{2}\sqrt{3}$$

Da $SPQR$ ein Rechteck ist, gilt $SP = QR$ und $SR = PQ$, also

$$\frac{h}{2} + a + \frac{b}{2}\sqrt{3} = \frac{f}{2}\sqrt{3} + e + \frac{d}{2} \qquad \text{sowie} \qquad \frac{h}{2}\sqrt{3} + g + \frac{f}{2} = \frac{b}{2} + c + \frac{d}{2}\sqrt{3}$$

woraus man

$$\sqrt{3}\left(\frac{b}{2} - \frac{f}{2}\right) = e + \frac{d}{2} - a - \frac{h}{2} \qquad \text{und} \qquad \sqrt{3}\left(\frac{h}{2} - \frac{d}{2}\right) = \frac{b}{2} + c - g - \frac{f}{2}$$

erhält. Da die Maßzahlen von a,b,c,d,e,f,g,h laut Aufgabe rationalen Zahlen sein sollen, muss $\frac{b}{2} - \frac{f}{2} = 0$ und $\frac{h}{2} - \frac{d}{2} = 0$, also $b = f$ und $h = d$ gelten.
Wegen $e + \frac{d}{2} - a - \frac{h}{2} = 0$ und $\frac{b}{2} + c - g - \frac{f}{2} = 0$ folgt schließlich $e = a$ und $c = g$.
Damit ist der geforderte Beweis erbracht.

Aufgabe 321043A:
Zeigen Sie, dass es ein ebenes Vieleck $P_1P_2P_3...P_{n-1}P_n$ gibt, für das folgende Aussagen gelten:
(1) Die Randlinie des Vielecks hat keine Selbstüberschneidung, das heißt: Außer den gemeinsamen Eckpunkten aufeinanderfolgender Seiten P_1P_2, P_2P_3; P_2P_3, P_3P_4; ...; $P_{n-2}P_{n-1}$, $P_{n-1}P_n$; $P_{n-1}P_n$, P_nP_1; P_nP_1, P_1P_2 gibt es keine gemeinsamen Punkte von irgend zwei Seiten.
(2) Es gibt zwei aufeinanderfolgende Ecken P_k, P_{k+1} $(2 < k < n-1)$, für die Folgendes gilt:
(2.1) Bei einer geeigneten Drehung um P_1 geht der Streckenzug $P_1P_2 \dots P_{k-1}P_k$ in den Streckenzug $P_1P_n \dots P_{k+2}P_{k+1}$ über.
(2.2) Bei der Punktspiegelung an einem geeigneten Punkt Q wird der Streckenzug $P_1P_2...P_kP_{k+1}$ auf sich selbst (in umgekehrter Durchlaufung, also auf den Streckenzug $P_{k+1}P_k \dots P_2P_1$) abgebildet.
Als Lösung genügt eine Zeichnung, an der diese Aussagen genügend genau zu bestätigen sind.
Eine Beschreibung oder Begründung wird nicht verlangt. Freilich können Sie genaues Zeichnen auch durch - dann lückenlos zu gebende - Konstruktionsbeschreibung ersetzen.

Lösung von MontyPythagoras:
Zunächst ein paar grundsätzliche Überlegungen:

Zu Punkt (2.1): Der Streckenzug $P_1P_2 \dots P_{k-1}P_k$ umfasst k Punkte, der Streckenzug $P_1P_nP_{n-1} \dots P_{k+2}P_{k+1}$ umfasst $n-k+1$ Punkte. Da durch die Drehung der eine auf den anderen Streckenzug abgebildet werden soll, muss die Anzahl der Punkte gleich sein. Daher gilt $k = n - k + 1$ beziehungsweise $n = 2k - 1$. Das Polygon hat daher eine ungerade Anzahl an Punkten.

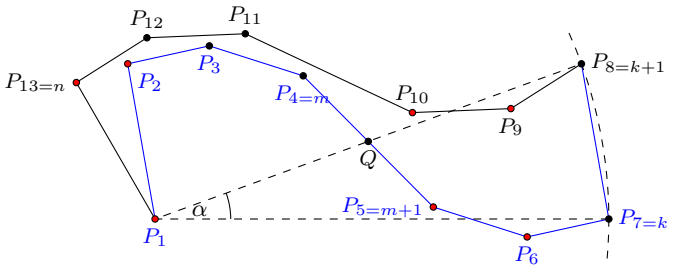
Zu Punkt (2.2): Da der Streckenzug $P_1P_2 \dots P_kP_{k+1}$ durch Punktspiegelung auf sich selbst abgebildet wird, kann k nicht gerade sein.

Beweis:
Angenommen, $k = 2m$ sei gerade. Dann hat der zu spiegelnde Streckenzug $k + 1 = 2m + 1$ Punkte. Das heißt, der Punkt P_{m+1} müsste dem Punkt Q entsprechen, an dem gespiegelt wird, weil er dem „mittleren“ Punkt in der Reihenfolge entspricht und er daher auf sich selbst abgebildet werden muss. Wenn dann aber P_m an P_{m+1} gespiegelt wird, um P_{m+2} zu ergeben, dann liegen P_m, P_{m+1} und P_{m+2} auf einer Geraden und P_{m+1} wäre kein Eckpunkt.

Somit ist k ungerade, also $k = 2m - 1$ mit $m > 1$. Nun wird P_1 auf P_{2m} abgebildet, und P_m auf P_{m+1}. Der Spiegelpunkt Q ist somit die Mitte der Strecke P_mP_{m+1} als auch der Strecke P_1P_{k+1}.

Aus $k = 2m-1$ folgt außerdem $n = 4m-3$. Nachfolgend eine Zeichnung zur Erläuterung der Konstruktion. In diesem Beispiel wurde $m = 4$ gewählt. Die rot dargestellten Punkte P_3 und P_4 sind von den 13 Punkten die einzigen, die man frei wählen kann bei Vorgabe eines Drehwinkels α, alle anderen ergeben sich aus einer Konstruktionsvorschrift.

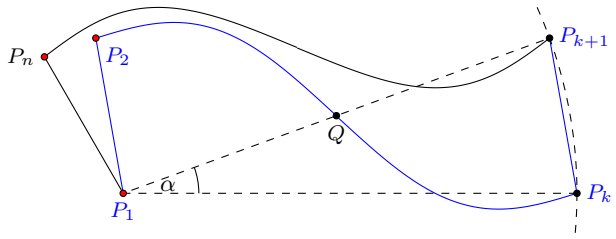
Da hier $m = 4$ gewählt wurde, ist $k = 7$ und $n = 13$. Vorgegeben werden o. B. d. A. die Punkte P_1 und P_k sowie der Drehwinkel $\alpha = 20°$.



Konstruktionsschritte:

1. P_8 ergibt sich wegen (2.1) durch die Drehung von P_7 um den Winkel α um P_1.
2. Q ist der Mittelpunkt der Strecke P_1P_8, wie in den Vorüberlegungen festgehalten.
3. Spiegelung von P_7 an Q ergibt P_2. Das Viereck $P_1P_7P_8P_2$ ist daher ein Parallelogramm, woraus sich zwangsläufig die S-Form des Streckenzuges $P_2...P_7$ ergibt.
4. Punkte P_3 und P_4 können relativ frei gewählt werden, Punkte P_5 und P_6 ergeben sich durch Spiegelung an Q. Wichtig ist, dass die Streckenlängen P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4 und P_1Q streng monoton ansteigen. Eine Verkleinerung des Radius an irgendeinem Punkt würde ein „Zacken“ nach innen bedeuten, so dass das schwarze Polygon unweigerlich das blaue Polygon kreuzen würde, was laut Aufgabenstellung nicht sein darf.
5. Die Punkte P_9 bis P_{13} entstehen durch Drehung der Punkte P_2 bis P_6 um den Winkel α am Punkt P_1. Der blau hervorgehobene Streckenzug ist derjenige, der durch Punktspiegelung an Q auf sich selbst abgebildet wird.

Anmerkung:



Man kann zwischen P_2 und Q natürlich beliebig viele Punkte einfügen.
Solange diese nicht ein relativ enges Band verlassen, ist es möglich, dass umlaufend der Abstand zu P_1 nicht streng monoton wächst. Je größer der Winkel wird, um so kleiner wird diese Bandbreite. Bei unendlich vielen Punkten kann der Polygonzug zu einer Kurve werden. Die dargestellte Kurve ist eine Spirale mit linear wachsendem Abstand zu P_1, wodurch sich ein konstanter Abstand zwischen der schwarzen und der blauen Kurve ergibt. Wenn dieser auf null zusammenschmilzt, ist der maximale Drehwinkel erreicht. Die Kurve ist dann nur ein Kreis (quasi eine Spirale mit Steigung null), und das tritt ein, wenn $\overline{P_1P_2} = \overline{P_1Q}$ ist. Dann gilt

$$\sin\tfrac{\alpha_{max}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\overline{P_1Q}}{2\overline{P_1Q}} = \tfrac{1}{4} \qquad ; \qquad \alpha_{max} = 2\arcsin\tfrac{1}{4} \approx 28{,}955°$$

Der Abstand zwischen den Kurven (radial von P_1 aus betrachtet) ist

$$\Delta(\alpha) = \frac{\alpha(1-4\sin\frac{\alpha}{2})}{\pi-\alpha}\overline{P_1P_k}$$

Leitet man das nach α ab, um den maximal möglichen Abstand zwischen den Kurven zu bestimmen, erhält man eine transzendente Gleichung für den optimalen Winkel:

$$\pi(1-4\sin\tfrac{\alpha}{2}) - 2\alpha(\pi-\alpha)\cos\tfrac{\alpha}{2} = 0$$

Diese Gleichung kann nur numerisch gelöst werden, man erhält $\alpha_{opt} \approx 15{,}032°$.
Selbst bei diesem optimalen Drehwinkel, der größtmöglichen Platz zwischen den beiden Kurven erzeugt, ist der Abstand $\Delta(\alpha)$ nur etwa ein Dreiundzwanzigstel der Streckenlänge P_1P_k.

Aufgabe 331043:
Zu einem regelmäßigen Achteck werde ein Quadrat so konstruiert, dass der Mittelpunkt des Achtecks ein Eckpunkt des Quadrates ist und dass zwischen der Seitenlänge a des Achtecks und der Seitenlänge b des Quadrats die Ungleichung $b \geq \frac{4}{3}a$ gilt.
Dann bezeichne f den Flächeninhalt desjenigen Flächenstücks, das dem Achteck und dem Quadrat gemeinsam ist.
a) Man beweise, dass zu gegebenem Achteck für alle Quadrate, die dieser Beschreibung entsprechen, f denselben Wert hat.
b) Man ermittle diesen Flächeninhalt f, formelmäßig durch die Seitenlänge a des Achtecks ausgedrückt.

Lösung von cyrix:
Das Achteck sei im mathematisch positiven Sinne als $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ bezeichnet, sein Mittelpunkt mit A und sein Umkreisradius mit r.
Da das Achteck regelmäßig ist, gilt $\angle P_1AP_2 = \frac{360°}{8} = 45°$, sodass mit dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle P_1P_2A$ wegen $|AP_1| = |AP_2| = r$ und $|P_1P_2| = a$ die Beziehung

$$a^2 = r^2 + r^2 - 2r\cdot r\cdot\cos(45°) = 2r^2 - 2r^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \left(2-\sqrt{2}\right)\cdot r^2$$

bzw.

$$r^2 = \frac{1}{2-\sqrt{2}}\cdot a^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2^2-2}\cdot a = \frac{4+2\sqrt{2}}{4}\cdot a^2$$

und damit

$$r = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2} \cdot a$$

folgt. Damit ist

$$r < \frac{4}{3} \cdot a \Leftrightarrow \sqrt{4+2\sqrt{2}} < \frac{8}{3} \Leftrightarrow 4+2\sqrt{2} < \frac{64}{9} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < \frac{28}{9}$$

was wegen $2\sqrt{2} = \sqrt{8} < \sqrt{9} = 3 < \frac{28}{9}$ der Fall ist. Also ist die Kantenlänge des Quadrats größer als der Umkreisradius des Achtecks.

Seien die Eckpunkte des Quadrats, wie üblich, in mathematisch positiver Orientierung mit A, B, C und D bezeichnet. Dann schneiden also die Kanten AB und AD den Umkreis des Achtecks, sodass die dazu parallelen Kanten CD bzw. BC echt außerhalb des Umkreises des Achtecks verlaufen und somit weder diesen noch das Achteck selbst schneiden.

Die Kante AB des Quadrats schneide o. B. d. A. das Achteck in einem vom Punkt P_2 verschiedenen Punkt S_1 der Kante P_1P_2. (Gegebenenfalls müsste man die Nummerierung der Eckpunkte des Achtecks zyklisch vertauschen, bis diese Situation eintritt.)
Dann gilt $0° \leq \angle P_1AS_1 < 45°$. Damit ist $0° < \angle S_1AP_2 \leq 45°$, also

$$\angle S_1AP_3 = \angle S_1AP_2 + \angle P_2AP_3 \leq 45° + 45° = 90° \qquad \text{und}$$

$$\angle S_1AP_4 = \angle S_1AP_2 + \angle P_2AP_4 > 0° + 90° = 90°$$

sodass die Kante AD des Quadrats wegen $90° = \angle BAD = \angle S_1AS_2$ das Achteck in einem vom Punkt P_4 verschiedenen Punkt S_2 der Kante P_3P_4 schneidet.

Das gemeinsame Flächenstück von Achteck und Quadrat ergibt sich also als das n-Eck, welches (in dieser Reihenfolge) durch die Punkte $AS_1P_2P_3S_2$ begrenzt wird, wobei ggf. P_3 und S_2 zusammenfallen.

Die beiden (ggf. entarteten) Dreiecke $\triangle AP_1S_1$ und $\triangle AP_3S_2$ besitzen den gleichen Flächeninhalt: Ist $S_1 = P_1$, so auch $S_2 = P_3$, sodass beide Dreiecke den Flächeninhalt 0 besitzen. Sonst stimmen die beiden (nun echten) Dreiecke in der Seitenlänge $|AP_1| = |AP_3|$, dem Winkel

$$\angle AP_1S_1 = \angle AP_1P_2 = \frac{1}{2} \cdot (180° - 45°) = \angle AP_3P_4 = \angle AP_3S_2$$

(Innenwinkelsumme in den gleichschenkligen Dreiecken $\triangle AP_1P_2$ und $\triangle AP_3P_4$) und dem Winkel

$$\angle P_1AS_1 = 45° - \angle S_1AP_2 = 45° - (\angle S_1AS_2 - \angle P_2AS_2) = 45° - 90° + \angle P_2AP_3 + \angle P_3AS_2 = \angle P_3AS_2$$

überein, sind also kongruent und damit insbesondere flächengleich.

Das gemeinsame Flächenstück von Achteck und Quadrat $AS_1P_2P_3S_2$ lässt sich zerlegen in die (ggf. entarteten) Dreiecke $\triangle AS_1P_2$, $\triangle AP_2P_3$ und $\triangle AP_3S_2$. Letzteres ist – wie gerade bewiesen – flächengleich zum Dreieck $\triangle AP_1S_1$, sodass das gemeinsame Flächenstück von Achtecke und Quadrat den gleichen Flächeninhalt besitzt wie die Figur, die sich aus den Dreiecken $\triangle AP_1S_1$, $\triangle AS_1P_2$ und $\triangle AP_2P_3$ zusammensetzt, also dem Viereck $AP_1P_2P_3$.

Dessen Flächeninhalt ist aber von der Lage des Quadrats $ABCD$ unabhängig, sodass das gemeinsame Flächenstück für jede Lage des Quadrats den gleichen Flächeninhalt (nämlich ein Viertel des Flächeninhalts des Achtecks) besitzt, □.

Aufgabe 341042:
Auf der Seite AB des Quadrates $ABCD$ werde ein Punkt $X \neq A$ gewählt. Dann werde das Quadrat durch die Strecken AC und XD in vier Teilflächen zerlegt.
Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, die Wahl von X so zu treffen, dass es natürliche Zahlen p, q und r gibt, für die die Flächeninhalte dieser Teilflächen in geeigneter Reihenfolge im Verhältnis $1 : p : q : r$ stehen!

Lösung von cyrix:
Wir legen so ein Koordinatensystem in die Ebene des Quadrats, dass A im Koordinatenursprung liegt und C die Koordinaten (1,1) besitzt. Dann liegt B bei (1,0) und D bei (0,1). Weiterhin sei $0 < a \leq 1$ eine reelle Zahl und der Punkt X habe die Koordinaten (a,0). Dann liegt X auf der Strecke AB, ist aber verschieden von A.

Die Gerade XD lässt sich beschreiben durch die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{0-1}{a-0} \cdot x + 1 = -\frac{1}{a} \cdot x + 1$ und die Gerade AC durch $g(x) = x$. Für den Schnittpunkt S beider Geraden und den Koordinaten (x_S,y_S) gilt $f(x_S) = g(x_S)$, also $-\frac{1}{a}x_S + 1 = x_S$ bzw. $1 = \left(1 + \frac{1}{a}\right) \cdot x_S = \frac{a+1}{a} \cdot x_S$, also $y_S = x_S = \frac{a}{a+1}$.

Damit hat die Höhe h_a von S auf AB die Länge $h_a = y_s = \frac{a}{a+1}$ und die Höhe h_d von s auf AD die Länge $h_d = x_s = \frac{a}{a+1}$. Es ergibt sich für das Dreieck $\triangle ASX$ der Flächeninhalt von

$$F_1 = \frac{1}{2} \cdot |AX| \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{a+1} = \frac{a^2}{2(a+1)}$$

und analog für das Dreieck $\triangle ASD$ der Flächeninhalt

$$F_4 = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot h_d = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{a}{a+1} = \frac{a}{2(a+1)}$$

Da das Dreieck $triangleACD$ den Flächeninhalt von $\frac{1}{2}$ besitzt und von der Strecke DS in die beiden Dreiecke $\triangle ASD$ und $\triangle DCS$ zerlegt wird, gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle DCS$

$$F_3 = \frac{1}{2} - F_4 = \frac{(a+1) - a}{2(a+1)} = \frac{1}{2(a+1)}$$

Analog gilt für den Flächeninhalt des Vierecks $XBCS$

$$F_2 = \frac{1}{2} - F_1 = \frac{(a+1) - a^2}{2(a+1)} = \frac{a+1-a^2}{2(a+1)}$$

Insgesamt ist also $F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = a^2 : a + 1 - a^2 : 1 : a$.

Da $0 < a \leq 1$ ist, ist $1 \geq a \geq a^2$, also auch $1 - a^2 \geq 0$ und damit $a + 1 - a^2 \geq a$. Also ist a^2 der kleinste der hier auftretenden Werte. Kürzt man das Verhältnis mit a^2, erhält man

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = 1 : \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 1 : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a}$$

Die Werte $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 1$, $\frac{1}{a^2}$ und $\frac{1}{a}$ müssen dann in irgendeiner Reihenfolge den natürlichen Zahlen p, q und r entsprechen. Insbesondere muss also $0 < \frac{1}{a} = r$ eine natürliche Zahl, also $a = \frac{1}{r}$ sein. Dann ist aber

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 = 1 : r + r^2 - 1 : r^2 : r = 1 : p : q : r$$

mit $p := r + r^2 - 1$ und $q := r^2$, von der gewünschten Form.
Zusammenfassend erhalten wir also genau dann ein Verhältnis der Flächeninhalte der vier Teilflächen, wie es von der Aufgabenstellung gefordert wird, wenn die Strecke AB ein positives ganzzahliges Vielfaches der Strecke AX ist bzw. $|AX| = \frac{1}{r} \cdot |AB|$ mit einer positiven ganzen Zahl r gilt.

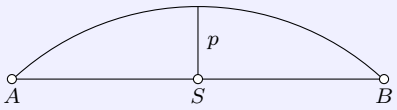
VI.III Kreise; Ellipsen

I Runde 1

Aufgabe V01010:
Welcher Nagel lässt sich leichter herausziehen, einer mit rundem, einer mit quadratischem oder einer mit dreieckigem Querschnitt. Jede der drei Querschnittflächen beträgt 1 cm^2. Alle drei Nägel sind gleich tief ins Holz getrieben. Begründen Sie die Formeln!

Lösung von MontyPythagoras:
Der Nagel weist den besten Halt auf, der den ihn umgebenden Werkstoff in einer größeren Fläche berührt. Bei gleicher Fläche (von 1 cm^2) hat ein Dreieck den größten Umfang, vor dem Quadrat und dem Kreis. Folglich hat der Dreiecknagel den besten Halt.

Aufgabe V01014:



Der Radius r eines flachen Kreisbogens mit unzugänglichem Mittelpunkt sei durch Messung einer Sehne s und der zugehörigen Pfeilhöhe p zu bestimmen.
Wie lautet die entsprechende Funktion $r(s;p)$?

Lösung von StrgAltEntf:
Es sei M der Kreismittelpunkt. Dann bildet MSA ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten AS und MS und der Hypotenuse AM.
Die Seitenlängen sind $\frac{s}{2}$, $r-p$ und r. Nach Pythagoras gilt $(\frac{s}{2})^2+(r-p)^2=r^2$. Diese Gleichung nach r aufgelöst ergibt

$$r = r(s,p) = \frac{s^2}{8p} + \frac{p}{2}$$

Aufgabe V01016:
Zu einem Kreis mit dem Radius r sind nacheinander vier größere konzentrische Kreise zu zeichnen, so dass jeder entstehende Kreisring denselben Flächeninhalt hat wie der Ausgangskreis.
a) Drücken Sie die Radien der vier zusätzlichen Kreise r_1, r_2, r_3, r_4 durch den Ausgangsradius r allgemein aus!
b) Führen Sie Rechnung und Zeichnung für $r = 20$ mm durch.

Lösung von J. Lehmann und W. Unze:
Radius des kleinsten Kreises ist nach b) $r = 2$ cm. Die Radien der übrigen konzentrischen Kreise, deren entsprechende Kreisringe flächengleich mit dem Ausgangskreis sein sollen, seien r_1, r_2, r_3 und r_4. Es ist gefordert, dass

$$F_1 = \pi r^2 \quad ; \quad F_2 = \pi(r_1^2 - r^2) \quad ; \quad F_3 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$$
$$F_4 = \pi(r_3^2 - r_2^2) \quad ; \quad F_5 = \pi(r_4^2 - r_3^2)$$

sein soll. Das heißt aber $\pi r^2 = \pi(r_1^2 - r^2)$; bei Division durch π ergibt sich dann

$$\begin{aligned} r^2 = r_1^2 - r^2 \Rightarrow 2r^2 = r_1^2 \Rightarrow r_1 = r\sqrt{2} \\ r_1^2 - r^2 = r_2^2 - r_1^2 \Rightarrow 2r_1^2 - r^2 = r_2^2 \Rightarrow r_2 = r\sqrt{3} \\ r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 - r_2^2 \Rightarrow 2r_2^2 - r_1^2 = r_3^2 \Rightarrow r_3 = r\sqrt{4} \\ r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 - r_3^2 \Rightarrow 2r_3^2 - r_2^2 = r_4^2 \Rightarrow r_4 = r\sqrt{5} \end{aligned}$$

Die Kreise haben folgende Radien: $r = 2$ cm, $r_1 = 2\sqrt{2} \approx 2{,}8$ cm, $r_2 = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5$ cm, $r_3 = 2\sqrt{4} = 4$ cm und $r_4 = 2\sqrt{5} \approx 4{,}5$ cm.

Aufgabe V11014:
In Moskau wird der höchste Fernsehturm der Welt gebaut, der nach seiner Fertigstellung eine Höhe von rund 500 m haben wird.
Wie weit kann ein Punkt der Erdoberfläche von der Spitze des Turmes höchstens entfernt sein, wenn er von dieser aus noch sichtbar sein soll (ohne Berücksichtigung der Lichtbrechung)?
Radius der Erde $R = 6370$ km.

Lösung von svrc:
Es entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, in dem die Hypotenuse gerade die Summe des Erdradius und der Höhe des Fernsehturms ist. Wir setzen dafür $c = 6370{,}5$km. Die bekannte Kathete ist der Erdradius und wir schreiben dafür $a = 6370$km. Es handelt sich um ein rechtwinkliges Dreieck, da die gesuchte Kathete b tangential am Erdgroßkreis anliegt.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$b^2 = c^2 - a^2 = (6370{,}5\text{km})^2 - (6370\text{km})^2 = 6370{,}25\text{km}^2$$

und somit

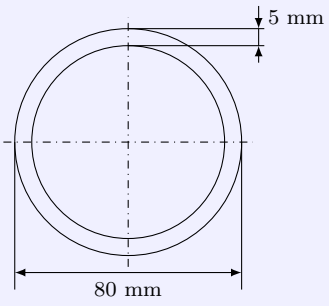
$$b \approx 79{,}8\text{km}.$$

Das bedeutet, dass man vom Fernsehturm etwa 79,8km weit sehen kann.

Aufgabe 021012:

Im VEB Berliner Bremsenwerk wurden Lagerscheiben ($d = 80$ mm, $h = 15$ mm) früher voll aus Messing hergestellt. Nach einem Verbesserungsvorschlag wird ein Stahlkern mit einer 5 mm starken Messingauflage versehen (siehe Abbildung).

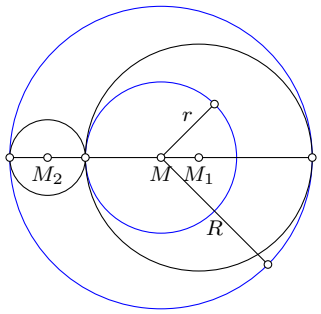
Wieviel Lagerscheiben können heute aus der Messingmenge hergestellt werden, die früher nur für eine Scheibe reichte?



Lösung von André Lanka:
Während früher für eine Scheibe $\frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h \approx 75400$ mm^3 Messing benötigt wurden, können heute $\frac{\pi}{4} \cdot (d - 10\text{ mm})^2 \cdot h \approx 57700$ mm^3 eingespart werden. Es werden jetzt also nur noch 17700 mm^3 Messing benötigt.
Jetzt können ungefähr 4,25 Scheiben aus der Menge Messing gefertigt werden, die früher für eine Scheibe reichte.

Aufgabe 021014:
Gegeben sind zwei konzentrische Kreise mit den Radien r und R, wobei $R > r$ sein soll.
a) Konstruieren Sie einen Kreis, der sowohl den inneren als auch den äußeren der gegebenen Kreise berührt (zwei verschiedene Fälle)!
b) Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller dieser gesuchten Kreise (wieder zwei verschiedene Fälle)?

Lösung von André Lanka:



Es gibt zwei verschiedene Fälle:
1. Der innere Kreis wird von dem zu konstruierenden Kreis umschlossen.
2. Der innere Kreis liegt nicht in dem zu konstruierenden Kreis.
a) Man zeichnet einen beliebigen Durchmesser in den großen Kreis. Für den 2. Fall halbiert man einen der beiden Teile des Durchmessers, der zwischen dem kleinen und dem großen Kreis liegt. Dort liegt der Mittelpunkt M_2 des gesuchten Kreises. Dessen Radius ist folglich $\frac{R-r}{2}$.
Im 1. Fall halbiert man den Rest des Durchmessers und schlägt um diesen Punkt einen Kreis mit Radius $\frac{R+r}{2}$.
b) Bei 1. liegen alle Mittelpunkte auf einem Kreis mit Radius

$$\frac{R+r}{2} - r = \frac{R-r}{2}$$

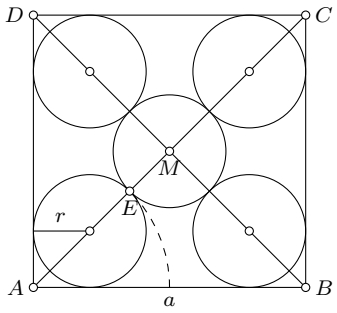
und dem gleichen Mittelpunkt wie die gegebenen konzentrischen Kreise. Im anderen Fall ist es ein Kreis mit dem Radius

$$\frac{R-r}{2} + r = \frac{R+r}{2}$$

und dem gleichen Mittelpunkt.

Aufgabe 031014:
Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge a. In dieses Quadrat sollen fünf gleichgroße Kreise so gezeichnet werden, dass ein Kreis in der Mitte liegt und die vier übrigen sowohl diesen Kreis als auch je zwei aneinanderstoßende Quadratseiten berühren.
a) Drücken Sie den Radius dieser Kreise durch a aus! b) Führen Sie die Konstruktion nur mit Zirkel und Lineal durch (Konstruktionsbeschreibung)!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Diagonale des Vierecks hat die Länge $a\sqrt{2}$; und sie lässt sich auch in Abhängigkeit von r ausdrücken, und zwar als: $r\sqrt{2} + 4r + r\sqrt{2}$.
Gleichsetzen der beiden Terme führt auf $r = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$.



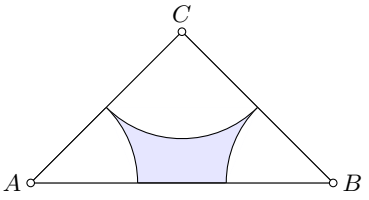
b) Man zeichne das Quadrat $ABCD$ und dessen Diagonalen; deren Schnittpunkt sei M. Von einem der Eckpunkte aus trage man auf der Diagonalen $\frac{a}{2}$ ab und bezeichne den erhaltenen Punkt auf der Diagonalen mit E. Wegen $\frac{a}{2} = r + r\sqrt{2}$ folgt für den gesuchten Radius $r = EM$.

Aufgabe 061011:
In dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Katheten der Länge $\overline{AC} = \overline{BC} = a$ sind im Inneren um jeden Eckpunkt Kreisbögen mit dem Radius von der Länge $r = \frac{a}{2}$ geschlagen. Die drei Kreissektoren lassen auf der Dreiecksfläche eine Fläche mit dem Inhalt I_K frei.

a) Berechnen Sie I_K!

b) Wieviel Prozent des Flächeninhalts I_D des Dreiecks $\triangle ABC$ beträgt der Flächeninhalt I_K?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



a) Für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC gilt

$$I_D = \frac{a^2}{2} \tag{1}$$

Ferner gilt: $I_K = I_D - I_{D'}$, wobei $I_{D'}$ die Summe der Flächeninhalte der drei im Innern des Dreiecks ABC gelegenen Kreissektoren ist. Da nach dem Satz des Pythagoras $|AB| = a\sqrt{2} > a$ gilt, schneiden sich die um A bzw. B jeweils mit dem Radius $\frac{a}{2}$ geschlagenen Kreise nicht (siehe Bild).
Diese drei Kreissektoren lassen sich zu einer Halbkreisscheibe zusammensetzen, da die Winkelgrößen im Dreieck 180° beträgt. Daher gilt:

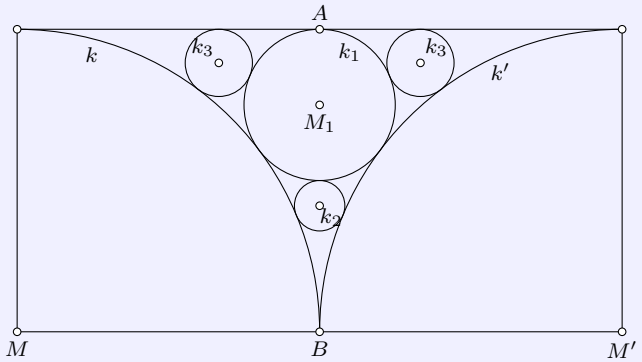
$$\begin{aligned} I_{D'} &= \frac{\pi a^2}{8} \\ I_K &= I_D - I_{D'} = \frac{a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{8} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\frac{a^2}{2} \sim 0{,}2146 \cdot \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

b) Wegen (1) beträgt somit der Inhalt I_K rund 21,46% des Flächeninhaltes des Dreiecks ABC.

Aufgabe 061013:

In dem in der Abbildung dargestellten Teil eines Ornaments treten als Grundformen Kreise auf. Die Längen der Radien r und r' der Kreise k bzw. k' seien bekannt, und es ist $r = r'$.

Berechnen Sie die Längen r_1, r_2 und r_3 der Radien der Kreise k_1, k_2 und k_3!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bezeichnet man die Mittelpunkte der Kreise k, k', k_1, k_2 und k_3 der Reihe nach mit M, M', M_1, M_2 und M_3, den Berührungspunkt der Kreise k und k' mit B und den nicht auf BM_1 gelegenen Schnittpunkt von k_1 mit g_{BM_1} mit A, dann gilt

$$|MM_1| \quad = \quad r + r_1 \text{ sowie } AB \perp MB \text{ (Bild a)}$$

Außerdem gilt $|AB| = |MB| = r$, und daher $|M_1B| = r - r_1$. Daraus folgt nach dem Lehrsatz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle MBM_1$, $(r + r_1)^2 = (r - r_1)^2 + r^2$, und somit $4rr_1 = r^2$, d. h. wegen $r > 0$: $r_1 = \frac{r}{4}$.

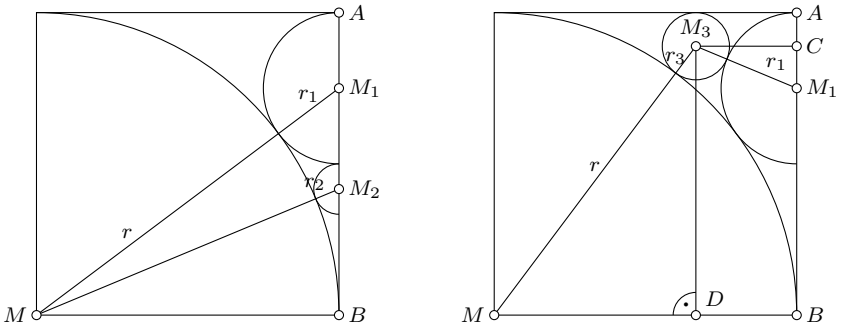
Ferner gilt $|MM_2| = r + r_2$ und $|M_2B| = r \cdot 2r_1 - r_2 = \frac{r}{2} - r_2$, also nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle MBM_2$, $(r + r_2)^2 = (\frac{r}{2} - r_2)^2 + r^2$, und somit $3rr_2 = \frac{r^2}{4}$, d. h. wegen $r > 0$: $r_2 = \frac{r}{12}$.

Weiterhin gilt $|M_1M_3| = r_1 + r_3$ und $|M_1C| = r_1 - r_3$, wobei C der Fußpunkt des Lotes von M_3 auf AB ist (Bild b).

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle M_1CM_3$, erhält man dann

$$\begin{aligned} |M_3C|^2 &= (r_1 + r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2 \\ &= 4r_1r_3 = rr_3, \end{aligned}$$

also $|M_3C| = \sqrt{rr_3}$. Schließlich gilt: $|MM_3| = r + r_3$ und $|M_3D| = r - r_3$, wobei D der Fußpunkt des Lotes von M_3 auf MB ist, sowie $|MD| = r - |M_3C|$, also $|MD| = r - \sqrt{rr_3}$.



Nach dem Lehrsatz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle MDM_3$, gilt dann

$$\begin{aligned} (r + r_3)^2 &= (r - r_3)^2 + (r - \sqrt{rr_3})^2 \\ (r + r_3)^2 - (r - r_3)^2 &= (r - \sqrt{rr_3})^2 \\ 4rr_3 &= r^2 - 2r\sqrt{rr_3} + rr_3, \\ r - 3r_3 &= 2\sqrt{rr_3}. \text{ (wegen } r > 0) \\ r^2 - 6rr_3 + 9r_3^2 &= 4rr_3 \\ r_3^2 - \frac{10rr_3}{9} + \frac{r^2}{9} &= 0, \end{aligned}$$

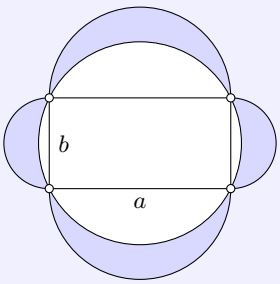
woraus sich für die Lösungen r_{3_1} und r_{3_2} die Beziehungen

$$\begin{aligned} r_{3_1} &= \frac{5r}{9} + \sqrt{(25r^2 + 9r^2)\frac{1}{81}} = \frac{5r}{9} + 4r9 = r \text{ und} \\ r_{3_2} &= \frac{5r}{9} - 4r9 = \frac{r}{9} \end{aligned}$$

ergeben. Hiernach ist entweder $r_3 = r$ oder $r_3 = \frac{r}{9}$. Wegen $r_3 < r$ folgt $r_3 = \frac{r}{9}$. Zusammenfassend gilt also:

$$r_1 = \frac{r}{4}, \quad r_2 = \frac{r}{12} \quad \text{und} \quad r_3 = \frac{r}{9}.$$

Aufgabe 081012:



Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b. Über jeder Seite werde außerhalb des Rechtecks ein Halbkreis gezeichnet. Ferner konstruiere man den Umkreis des Rechtecks (siehe Abbildung).

Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der vier blauen sichelförmigen Flächen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Summe der Flächeninhalte der vier Halbkreisflächen über den Rechteckseiten beträgt

$$A_1 \quad = \quad \pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right).$$

Der Flächeninhalt des Umkreises beträgt

$$A_2 \quad = \quad \pi \left(\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{2} \right) = \pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right).$$

Der Flächeninhalt des Rechtecks A ist also

$$A_3 \quad = \quad ab.$$

Der gesuchte Flächeninhalt A ist also

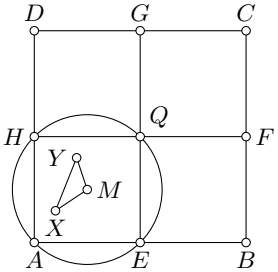
$$A \quad = \quad A_1 + A_3 - A_2 = \pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right) + ab - \pi \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right).$$

Die Summe der Flächeninhalte der sichelförmigen Fläche ist somit gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks.

Aufgabe 191011:
Jens zeichnet auf ein Zeichenblatt ein Quadrat von der Seitenlänge 22 cm. Dirk soll vier möglichst kleine, einander kongruente Kreise aus Papier ausschneiden und so auf das Zeichenblatt legen, dass kein Punkt der Quadratfläche mehr sichtbar ist.

Wie groß muss Dirk den Radius der vier Kreise wählen, um diese Forderungen zu erfüllen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es gilt die folgende Aussage:

(*) Wenn ein Kreis mit dem Radius r zwei Punkte X und Y überdeckt, so ist $XY \leq 2r$. Das Quadrate sei $ABCD$, sein Mittelpunkt sei Q. Angenommen, vier Kreise mit dem Radius $r < 1$ cm haben die verlangte Eigenschaft. Jede Ecke des Quadrates muss dann von einem dieser Kreise überdeckt werden, und der betreffende Kreis kann wegen (*) keine andere Ecke überdecken.
Also muss jeder der vier Kreise eine Ecke des Quadrates überdecken.

Nun gibt es einen der vier Kreise, der Q überdeckt; auch dieser Kreis muss eine Ecke des Quadrates überdecken. Ist dies o. B. d. A. die Ecke A, so folgt nach (*)

$$\sqrt{2}\text{ cm} = AQ \leq 2r \qquad \text{also} \qquad r \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}\text{ cm}$$

(Haben ferner vier Kreise mit einem Radius $r \geq 1$ cm die verlangte Eigenschaft, so gilt wegen $1 > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ für sie erst recht $r \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$).

Damit ist in jedem Fall bewiesen:

(I) Vier Kreise der verlangten Eigenschaft haben stets einen Radius $r \geq \frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm.

Ferner gilt:
(II) Wählt man $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm, so haben vier geeignet gelegene Kreise mit diesem Radius bereits die verlangte Eigenschaft.

Um dies zu zeigen, wähle man die Lage der Kreise so, dass sie die Strecken AQ, BQ, CQ bzw. DQ als Durchmesser haben. Sind nämlich E,F,G,H die Mittelpunkte der Strecken AB, BC, CD bzw. DA, so überdecken vier so ausgewählte Kreise die Flächen von $HAEQ$, $EBFQ$, $FCGQ$, $GDHQ$ und damit jeden Punkt der Fläche des Quadrates $ABCD$.

Aus (I) und (II) folgt: Möglichst kleine Kreise mit der verlangten Eigenschaft liegen genau dann vor, wenn ihr Radius $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm beträgt; d. h. Dirk muss $r = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm als Radius der Kreise wählen.

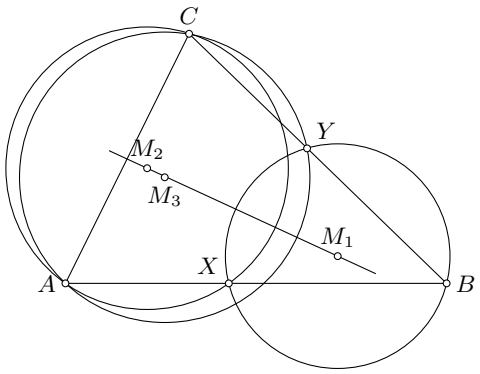
Aufgabe 341014:
Arne zeichnet ein Dreieck ABC und einen Kreis k_1, der so gewählt ist, dass er durch B geht, die Strecke AB in einem von B verschiedenen Punkt X schneidet und dass er die Strecke BC in einem von B verschiedenen Punkt Y schneidet. Dann konstruiert Arne den Umkreis k_2 des Dreiecks ACX und den Umkreis k_3 des Dreiecks ACY.

Nun stellt er fest, dass in seiner Zeichnung die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der Kreise k_1, k_2, k_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen; das findet er erstaunlich.

Britta meint: Zu jedem Dreieck ABC gibt es für den Kreis k_1 unendlich viele Möglichkeiten, bei denen jeweils die drei genannten Mittelpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen, und es gibt für k_1 auch unendlich viele Möglichkeiten, bei denen das nicht zutrifft.

Hat Britta recht?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Um zu erreichen, dass M_1, M_2, M_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen, kann man folgendermaßen vorgehen (siehe Abbildung): Man wählt auf der Mittelsenkrechten von AC einen Punkt M_1, der so liegt, dass der um M_1 durch B konstruierte Kreis k, die Strecken AB und BC in Punkten $X \neq B$ bzw. $Y \neq B$ schneidet.

Beweis, dass bei dieser Wahl M_1, M_2, M_3 auf einer gemeinsamen Geraden liegen:

Da die Kreise k_2 und k_3 beide durch A und C gehen, also $M_2A = M_2C$ und $M_3A = M_3C$ gilt, liegen M_2 und M_3 auf der Mittelsenkrechten von AC. Auf dieser wurde auch M_1 gewählt.

Damit sind unendlich viele derartige Wahlmöglichkeiten nachgewiesen.

II. Um zu erreichen, dass M_1, M_2, M_3 nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen, kann man folgendermaßen vorgehen:

Man wählt M_1 außerhalb der Mittelsenkrechten von AC, dabei aber so, dass der Kreis k_1 um M_1 durch B die Strecken AB und BC in Punkten $X \neq B$ bzw. $Y \neq B$ schneidet. Durch eventuelle (genügend kleine) Änderung kann man auch erreichen, dass die Umkreise der beiden Dreiecke ACX und ACY nicht miteinander übereinstimmen. Für eine so zu treffende Wahl von k_1 gibt es ebenfalls unendlich viele Möglichkeiten.

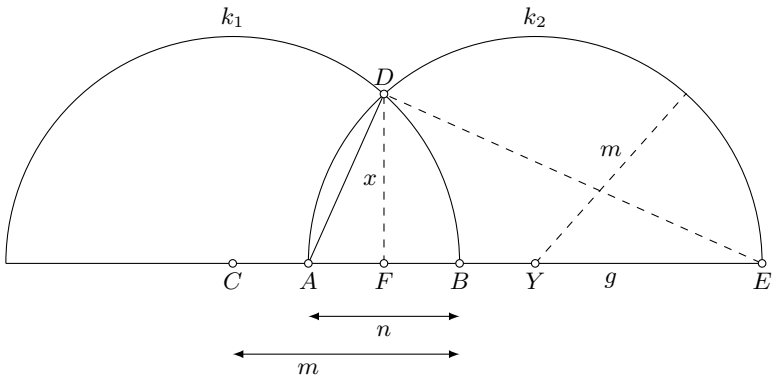
Beweis, dass bei jeder solchen Wahl M_1, M_2, M_3 nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen: Durch die zuletzt genannte Änderungsmöglichkeit wird erreicht, dass M_3, nicht mit M_2 zusammenfallen kann; hiernach (und weil M_2 und M_3 auf der Mittelsenkrechten von AC liegen) könnten M_1, M_2, M_3 nur dann auf einer gemeinsamen Geraden liegen, wenn auch M_1 auf der Mittelsenkrechten von AC läge, was durch die Wahl von M_1 ebenfalls verhindert wurde.

Damit ist gezeigt, dass Britta mit beiden Behauptungen recht hat.

II Runde 2

Aufgabe 091023:
Gegeben sind zwei Strecken der Längen m und n (mit $n < m$).
a) Führen Sie folgende Konstruktion aus:
Um einen beliebigen Punkt Y einer Geraden g werde ein Kreis k_1 mit dem Radius m geschlagen. Einer der Schnittpunkte von g und k_1 sei A genannt, der andere E.
Von A aus werde die Strecke AB mit $AB = n$ so auf g abgetragen, dass B zwischen A und Y liegt (das ist wegen $n < m$ möglich). Von B aus werde auf g die Strecke BC mit $BC = m$ so abgetragen, dass A zwischen B und C liegt (das ist wieder wegen $n < m$ möglich). Um C werde ein Kreis k_2 mit dem Radius BC geschlagen. Einer der Schnittpunkte von k_1 und k_2 sei D genannt.
b) Ermitteln Sie die Länge x der Strecke AD!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Verfährt man wie angegeben, so entsteht folgendes Bild:



b) Aus der Konstruktion folgt $AB = n \quad ; \quad AY = DY = EY = m$. Ferner ist $AD = x = BD$.
Nach einem Satz der Elementargeometrie halbiert das von D auf g gefällte Lot die Strecke AB. Sein Fußpunkt sei F. Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck $\triangle AED$ rechtwinklig. In ihm gilt nach dem Satz des Euklid (Kathetensatz):

$$x^2 = \frac{n}{2}(2m) = m \cdot n \qquad \text{also} \qquad x = \sqrt{m \cdot n}$$

Aufgabe 171021:
Von vier Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4 wird verlangt, dass sie die folgenden beiden Eigenschaften (1), (2) haben:
(1) Der Durchmesser von k_4 ist um 1 cm größer als der Durchmesser von k_3, dessen Durchmesser ist um 1 cm größer als der von k_2, und dessen Durchmesser ist um 1 cm größer als der von k_1.
(2) Der Flächeninhalt von k_4 ist so groß wie die Summe der Flächeninhalte der anderen drei Kreise.
Untersuchen Sie, für welche Länge des Durchmessers von k_1 diese beiden Forderungen (1), (2) erfüllt sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wenn (1) und (2) für eine Länge d cm des Durchmessers von k_1 erfüllt sind, so haben k_2, k_3 und k_4 Durchmesser der Länge $(d+1)$ cm, $(d+2)$ cm bzw. $(d+3$ cm und es gilt

$$\frac{\pi}{4}d^2 + \frac{\pi}{4}(d+1)^2 + \frac{\pi}{4}(d+2)^2 = \frac{\pi}{4}(d+3)^2$$

Hieraus erhält man $d^2 + d^2 + 2d + 1 + d^2 + 4d + 4 = d^3 + 6d + 9$, also $2d^2 = 4$ und wegen $d > 0$ daraus $d = \sqrt{2}$.
Daher kann nur die Länge $\sqrt{2}$ cm die Forderungen (1) und (2) erfüllen.
Eine Kontrolle über die Summen der Kreisflächeninhalte bestätigt das Ergebnis.

Aufgabe 171022:
Beweisen Sie die folgende Aussage!
Wenn M der Mittelpunkt eines Kreises k ist und wenn eine Gerade g, die durch einen Punkt A von k geht, auf AM senkrecht steht, dann ist sie eine Tangente des Kreises k, d. h., sie hat mit k genau einen Punkt gemeinsam.

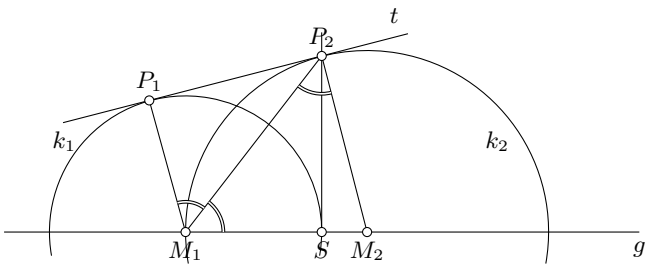
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beweis (direkt):
B sei ein von A verschiedener Punkt auf g.
In dem Dreieck AMB liegt dann die Seite BM nach Voraussetzung einem rechten Winkel und damit dem größten Winkel des Dreiecks gegenüber. Es gilt also $BM > AM$.
Da AM Radius von k ist, liegt B außerhalb des Kreises. Die Gerade g hat also genau einen Punkt mit k gemeinsam. Sie ist mithin Tangente des Kreises k.

Aufgabe 181022:
Um auf einer gegebenen Strecke AB im Punkt B die Senkrechte zu errichten, führt Roland folgende Konstruktion aus:
Er wählt zwischen A und B einen Punkt C. Sodann zeichnet er um B und C Kreise mit dem Radius BC. Einen der Schnittpunkte dieser Kreise nennt er D.
Schließlich zeichnet er die Gerade durch C und D und trägt darauf von D aus auf der Verlängerung von CD eine Strecke der Länge CD ab. Ihren zweiten Endpunkt nennt er E. Nun behauptet er, die Gerade durch B und E sei die gesuchte Senkrechte.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Konstruktion gilt $DC = DE = DB$. Also liegt B auf dem Halbkreis über CE, und $\angle CBE$ ist nach der Umkehrung des Satzes von Thales ein rechter Winkel.

Aufgabe 281023:
Über einen Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und einen Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 werde vorausgesetzt, dass k_2 durch M_1 geht, aber nicht ganz in der Fläche des Kreises k_1 liegt.
Derjenige Schnittpunkt von k_1 mit der Geraden g durch M_1, M_2, der dann im Innern von k_2 liegt, sei S. Ferner sei P_2 einer der Schnittpunkte, die k_2 mit der in S auf g errichteten Senkrechten hat.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen stets folgende Aussage gilt:
Diejenige von P_2 an k_1 gelegte Tangente t, die k_1 in einem von S verschiedenen Punkt P_1 berührt, ist auch Tangente an k_2.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung gilt: $\angle M_1SP_2 = 90°$ sowie nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius $\angle M_1P_1P_2 = 90°$ (1).
Hieraus sowie aus $M1S = M_1P_1$ (Radien von k_1) folgt $\triangle M_1SP_2 \cong \triangle M_1P_1P_2$. Daher gilt $\angle P_2M_1S = \angle P_2M_1P_1$ (2).
Da ferner $M_2M_1 = M_2P_2$ (Radien von k_2) gilt, folgt nach dem Basiswinkelsatz $\angle P_2M_1S = \angle M_1P_2M_2$ (3).
Aus (2) und (3) folgt $\angle P_2M_1P_1 = \angle M_1P_2M_2$ und daraus nach der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes $M_1P_1 \parallel M_2P_2$.
Daher und wegen (1), d. h. $M_1P_1 \perp t$, ist auch $M_2P_2 \perp t$. Nach der Umkehrung des Satzes über Tangente und Berührungsradius folgt daraus, wie behauptet, dass t auch Tangente an k_2 ist.

Der Beweis verläuft ohne jede Änderung für die folgenden Fälle:
(1) S ist innerer Punkt von M_1M_2, (2) S ist äußerer Punkt von M_1M_2 und (3) $S = M_2$.

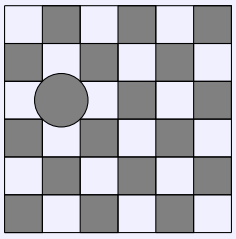
Aufgabe 341022:
Anja und Bernd sprechen darüber, wie man die an den Kreis k, dessen Mittelpunkt M sei, in einen seiner Punkte P gelegte Tangente t vollständig ausreichend beschreiben kann.
Anja ist für folgende Beschreibung: t ist diejenige durch P gehende Gerade, die auf MP senkrecht steht und mit k nur den Punkt P gemeinsam hat.
Bernd meint: Man kann jeweils eine der beiden Bedingungen weglassen, da jede dieser Bedingungen

aus der anderen folgt, d. h. da für jeden Kreis k um M und für jeden Punkt P auf k die beiden nachstehenden Sätze (1) und (2) gelten:
(1) Wenn eine durch P gehende Gerade t auf MP senkrecht steht, dann hat sie mit k nur den Punkt P gemeinsam.
(2) Wenn eine durch P gehende Gerade t nur den Punkt P mit k gemeinsam hat, dann steht sie auf MP senkrecht.
Beweisen Sie beide Sätze (1) und (2)!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
(1) Wir nehmen an, dass t noch einen Punkt P' gemeinsam mit k hat. Offensichtlich liegen diese Punkte nicht auf einer Geraden, bilden somit ein Dreieck mit rechten Winkel in P. Da dem größten Winkel immer die längste Seite gegenüberliegt, ist $\overline{MP'}$ die längste Seite, insbesondere also länger als $|\overline{MP}| = r$. Widerspruch.

(2) Wir nehmen an, dass der Winkel kein rechter ist. Da der (kürzeste) Abstand eines Punktes zur Geraden immer das Lot ist, existiert dann auf t ein Punkt P' mit $|\overline{MP'}| < |\overline{MP}| = r$. Somit liegt P' offensichtlich innerhalb des Kreises und t besitzt einen weiteren Punkt mit k. Widerspruch.

Aufgabe 341024:



Für jede positive ganze Zahl n denke man sich ein Schachbrett von $2n \times 2n$ Feldern. Beispielsweise zeigt die Abbildung ein solches Schachbrett für $n = 3$. Um jedes schwarze Feld denke man sich den Umkreis konstruiert. (Die Abbildung zeigt einen solchen Umkreis.)

a) Beweisen Sie, dass für jedes positive ganzzahlige n die folgende Aussage gilt:
Der Flächeninhalt des Schachbrettes, der von keinem der Kreise überdeckt wird, beträgt mehr als 20%.

b) Ermitteln Sie die kleinste positive ganze Zahl n, für die der Flächenanteil des Schachbrettes, der von keinem der Kreise überdeckt wird, weniger als 25% beträgt!

Lösung von Steffen Polster:
a) O. B. d. A. werde die Breite eines Feldes des Schachbretts mit 1 angenommen. Für eine beliebige Breite a verändert sich das Verhältnis von bedeckter und Gesamtfläche nicht.
Insgesamt gibt es $4n^2$ Felder und damit eine Gesamtfläche $A = 4n^2$.
Ein überdeckender Kreis hat den Radius $\frac{\sqrt{2}}{2}$ und eine Fläche von $A_k = \frac{pi}{2}$.

$2n^2$ Felder sind schwarz und werden mit einem Kreis bedeckt. Jeder dieser Kreise überragt an jeder Seite eines Feldes das Feld um $\frac{1}{4}$ der Differenz zwischen Kreis- und Feldfläche. Benachbarte Umkreise schneiden sich jeweils nur in einem Punkt. Das gilt, da die Diagonalen der weißen Felder Tangenten zu den Umkreisen sind.
Allerdings treten an jedem Rand des Schachbretts n Felder auf, deren Kreis über den Rand hinausragt. Damit ragen insgesamt $4n$ Kreise um jeweils $\frac{1}{4}$ der Kreisfläche über das Schachbrett hinaus.

Damit ist die bedeckte Fläche

$$A_K = 2n^2 \cdot \frac{\pi}{2} - 4n \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi n^2 + \frac{n(2-\pi)}{2}$$

Der Anteil der bedeckten Fläche ist folglich

$$V = \frac{A_K}{A} = \frac{\pi n^2 + \frac{n(2-\pi)}{2}}{4n^2} = \frac{2\pi n - \pi + 2}{8n}$$

Die Zahlenfolge $(a_n) = \frac{2\pi n - \pi + 2}{8n}$ ist streng monoton wachsend, da $a_{n+1} - a_n = \frac{\pi - 2}{8n(n+1)} > 0$ $(n > 0)$ ist. Gleichzeitig gilt für den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\pi n - \pi + 2}{8n} = \frac{\pi}{4} < 0{,}8$$

D. h., die bedeckte Fläche hat immer einen Anteil kleiner als 80%, die bedeckte somit mehr als 20%.

b) Es ist das kleinste n zu ermitteln, für welches

$$\frac{2\pi n - \pi + 2}{8n} > \frac{3}{4}$$

wird. Umstellen ergibt

$$n > \frac{\pi - 2}{2 \cdot (\pi - 3)}$$

Es ist $3.\overline{1} = \frac{28}{9} < \pi < \frac{22}{7}$ und damit:

$$\frac{\pi - 2}{2 \cdot (\pi - 3)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(\pi - 3)} \begin{cases} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{9}} = 5 \\ > \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{7}} = 4 \end{cases}$$

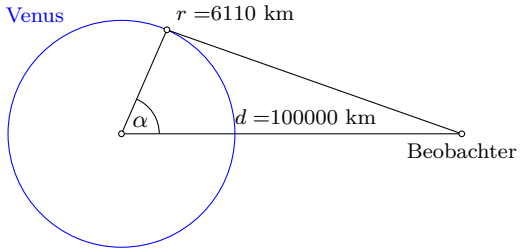
Das kleinste n, für das der Flächenanteil des Schachbrettes, der von keinem der Kreise überdeckt wird, weniger als 25% beträgt, ist damit 5.

III Runde 3

Aufgabe V11031:
Das sowjetische Raumschiff wird sich am 19. Mai 1961 voraussichtlich bis auf rund 100000 km der Venus nähern.
a) Wieviel mal so groß wie der Vollmond von der Erde aus würde die Venus einem Beobachter vom Raumschiff aus erscheinen?
Anmerkung: Man rechne näherungsweise mit der Vollmondscheibe bzw. der Venusscheibe und beziehe die Angaben auf die Durchmesser dieser Scheiben.
b) Welchen Teil der Venusoberfläche könnte er sehen?
Monddurchmesser: 3476 km, Venusdurchmesser: 12220 km, Entfernung Erde-Mond: 384000 km

Lösung von MontyPythagoras:
a) Betrachtet man die Himmelskörper wie gefordert näherungsweise als scheibenförmig, dann ist das Raumschiff beim Vorbeiflug 3,84 mal näher als der Mond von der Erde entfernt ist. Außerdem ist die Venus $\frac{12220}{3476}$ mal größer als der Mond, so dass sie einem Beobachter im Raumschiff $\frac{12220}{3476} \cdot 3{,}84 = 13{,}5$ mal größer erscheinen würde als der Vollmond von der Erde aus gesehen.

b) Hier ist man versucht, zu antworten: „den ihm Zugewandten“. Es soll jedoch wohl der tatsächliche Beobachtungswinkel verwendet werden, um prozentual die sichtbare Fläche der Venus anzugeben. Leider lässt uns die Aufgabe auch im Unklaren darüber, ob mit der Entfernung von 100000 km der Abstand zum Schwerpunkt der Venus oder zur Oberfläche gemeint ist. Wir nehmen das erste an:



Es ist $\cos\alpha = \frac{r}{d}$. Die gesamte Oberfläche der Venus ist

$$A_g = 4\pi r^2$$

Der sichtbare Teil ist dagegen

$$A_s = 2\pi r^2(1-\cos\alpha) = 2\pi r^2\left(1-\frac{r}{d}\right)$$

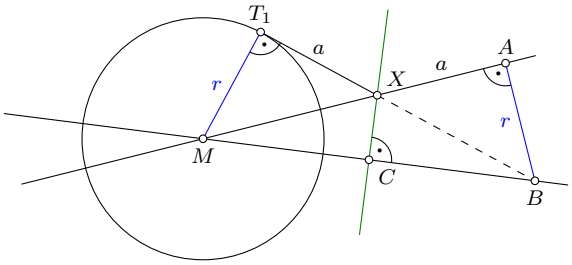
Somit ist der sichtbare Anteil der Oberfläche

$$\frac{A_s}{A_g} = \frac{1-\frac{r}{d}}{2} = \frac{d-r}{2d}$$

Im vorliegenden Fall entspricht das etwa 46,9% der gesamten Oberfläche.

Aufgabe V11034:
Zeichnen Sie einen Kreis und außerhalb dieses Kreises den Punkt A. Verbinden Sie den Punkt A mit dem Mittelpunkt M des Kreises.
Gesucht ist der auf der Zentralen AM gelegene Punkt X, bei dem für die von diesem Punkt an den Kreis gelegten Tangenten gilt, dass die Tangentenabschnitte XT_1 bzw. XT_2 gleich dem Abstand des Punktes X vom Punkt A sind. (T_1 und T_2 sind die Berührungspunkte der Tangenten.)
Begründen Sie Ihre Konstruktion!

Lösung von MontyPythagoras:



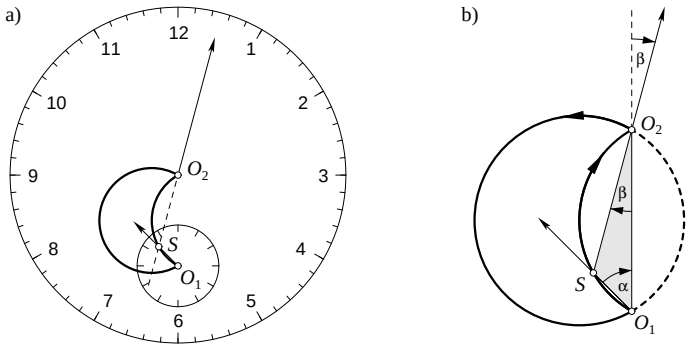
1. Man zeichne Punkt B so, dass die Strecke AB die Länge r (Radius des Kreises) habe und senkrecht stehe auf der Strecke AM, siehe Skizze.
2. Vom Punkt B zeichne man eine Gerade durch M.
3. Man konstruiere den Mittelpunkt C der Strecke MB.
4. Man zeichne eine Senkrechte auf die Gerade MB durch den Punkt C.
5. Der Schnittpunkt dieser Geraden (grün) mit der Geraden AM ist der gesuchte Punkt X.

Begründung:
Man erkennt, dass der Streckenzug MT_1XAB symmetrisch ist bezüglich der „grünen“ Geraden CX. a und r stehen senkrecht aufeinander sowohl im Punkt T_1 als auch im Punkt A. T_1 und X sind zwar anfangs noch unbekannt, aber der Punkt C auf der Symmetrieachse lässt sich mit obigen Schritten einfach konstruieren.

Aufgabe 011034:
Eine Armbanduhr besitzt außer dem im Unterteil des Ziffernblattes angebrachten Sekundenzeiger noch eine Stoppuhreinrichtung mit einem Sekundenzeiger, dessen Achse durch die Mitte des Ziffernblattes verläuft.

Wenn beide Zeiger in Gang sind, laufen sie mit gleicher Geschwindigkeit um. Da die Stoppuhr willkürlich in Gang gesetzt werden kann, werden die beiden Sekundenzeiger in der Regel nicht zur gleichen Zeit die gleiche Sekunde anzeigen. Wir denken uns nun beide Zeiger in beiden Richtungen beliebig verlängert.
a) Welches ist der geometrische Ort für alle Schnittpunkte der beiden umlaufenden Sekundenzeiger bzw. ihrer Verlängerungen?
b) Konstruieren Sie diese Kurve für den folgenden Fall:
Drehpunktabstand der Zeiger $a = 5$ cm (aus Gründen der besseren Konstruierbarkeit absichtlich so groß gewählt)!
Beim Ingangsetzen der Stoppuhr zeigt der kleine Sekundenzeiger auf die 10 des Sekundenziffernblattes.

Lösung von Eckard Specht:
Das Bild a) zeigt das Ziffernblatt der Armbanduhr und die Stellung der beiden Sekundenzeiger, nachdem beide einen Winkel von 15° überstrichen haben. Die Mittelpunkte der Zeiger seien O_1 bzw. O_2, deren Schnittpunkt S. Es genügt im Folgenden, ausschließlich das Dreieck O_1O_2S zu betrachten (Bild b).



a) Je weiter die Zeit voran schreitet, desto kleiner wird der Winkel α und desto größer der Winkel β. Da beide Zeiger aber mit derselben Winkelgeschwindigkeit umlaufen, bleibt die Summe $\alpha + \beta$ konstant, die hier gleich dem Differenzwinkel beider Zeiger zu Beginn ist.

   Wegen der Innenwinkelsumme in diesem Dreieck folgt daraus: $\angle O_1SO_2 = 180° - (\alpha + \beta) = \text{const.}$

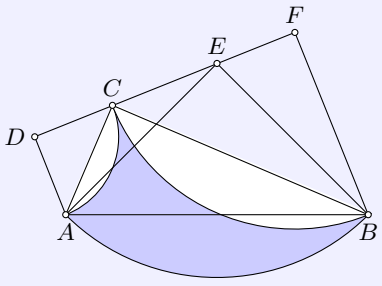
   Die Strecke O_1O_2 ist ebenfalls konstant, somit kann der gesuchte geometrische Ort aller Schnittpunkte S nur ein Kreisbogen sein, für den alle Peripheriewinkel über der Sehne O_1O_2 konstant sind.

   Erreicht einer der Zeiger die vertikale Richtung, kehrt sich die Umlaufrichtung von S um. Insgesamt ergibt sich somit eine, im Bild gezeigte möndchenförmige Figur.

b) Zur Konstruktion wird derjenige Kreisbogen gezogen, der über der Sehne O_1O_2 einen Peripheriewinkel von $\alpha + \beta$ fasst. Der kleinere der beiden Bögen O_1O_2 wird anschließend an der Geraden durch O_1 und O_2 gespiegelt.

Aufgabe 021031:

Vergleichen Sie die Flächeninhalte der grauen Fläche und des rechtwinkligen Dreiecks ABC!
(Die Dreiecke $\triangle ACD, \triangle ABE$ und $\triangle CBF$ sind rechtwinklig-gleichschenklig; D, E und F sind die Mittelpunkte der Kreise.)



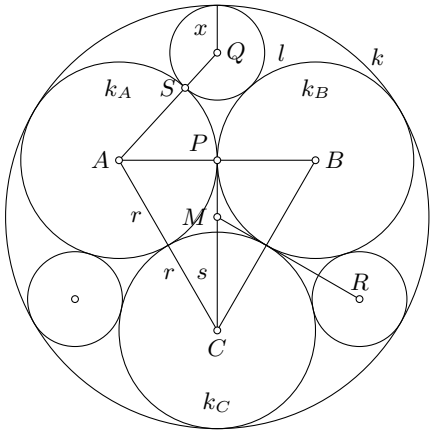
Lösung von Carsten Balleier:
Die graue Fläche besteht aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC, erweitert um den Kreisabschnitt AB und vermindert um die Kreisabschnitte AC und BC.
Man berechne die Fläche eines dieser Abschnitte, hier die Fläche S_{AB} zwischen der Strecke AB und dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$. Sie ist gleich der Differenz aus dem Viertelkreis mit Mittelpunkt E und Radius AE und dem Dreieck ABE, also

$$S_{AB} = \frac{1}{4}\pi AE^2 - \frac{1}{2}AE^2 = \frac{AB^2}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{1}{4}(AC^2 + BD^2)\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt wegen $AB = AE\sqrt{2}$ im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck.
Der letzte Schritt nutzt den Satz des Pythagoras: diese beiden Summanden haben die gleiche Form wie der für S_{AB}, sie sind die anderen beiden Kreisabschnitte S_{AC} und S_{BC}.
Damit haben wir $S_{AB} = S_{AC} + S_{BC}$, d. h. die hinzugefügte Fläche ist genauso groß wie die abgeschnittenen Flächen. Also sind das Bogendreieck und das Geradendreieck ABC flächengleich.

Aufgabe 031035:
Einem Kreis sind drei einander berührende Kreise mit dem gleichen Radius r einbeschrieben. Drei kleinere Kreise mit dem Radius x sind so eingezeichnet, dass sie je zwei der Kreise mit r sowie den umhüllenden Kreis berühren.
Es ist x rechnerisch zu bestimmen, wenn r gegeben ist!

Lösung von Manuel Naumann:



Seien A, B bzw. C die Mittelpunkte der Kreise k_A, k_B bzw. k_C mit dem Radius r.
Der Abstand des Mittelpunktes M des Kreises k, in den diese drei Kreise einbeschrieben sind, zu den Punkten A, B und C ist aufgrund der Symmetrie gleich. Damit ist M Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.
Der Radius R des Kreises k ergibt sich nun z. B. durch $R = MA + r$.
Da das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig ist und seine Seitenlänge a durch $a = 2r$ bestimmt ist, berechnet sich die Länge s einer Seitenhalbierenden mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:

$$s = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{3r}$$

Da M Schwerpunkt von $\triangle ABC$ ist, teilt M bekanntermaßen die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2 : 1$. Damit hat die Strecke MA eine Länge von $MA = \frac{2}{\sqrt{3}}r$. Deshalb gilt nun für R:

$$R = MA + r = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) r$$

Andererseits berühren sich k_A und k_B in einem Punkt P. Sei Q der Mittelpunkt des Kreises l mit Radius x, der k_A in einem Punkt S und k_B berührt. Dann ergibt sich der Radius R von k aus $R = MP + PQ + x$.
Da $AP = r$ erhält man über den Satz des Pythagoras

$$MP = \sqrt{MA^2 - AP^2} = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

Desweiteren gilt, dass $AQ = r + x$. Daraus folgt wieder mit Hilfe des Satzes des Pythagoras:

$$PQ = \sqrt{AQ^2 - AP^2} = \sqrt{2rx + x^2}$$

Man findet für R also eine zweite Darstellung durch:

$$R = MP + PQ + x = \frac{r}{\sqrt{3}} + \sqrt{2rx + x^2} + x$$

Es ist nun möglich die beiden gefundenen Darstellungen für R gleichzusetzen und die entstehende Gleichung nach x umzustellen.

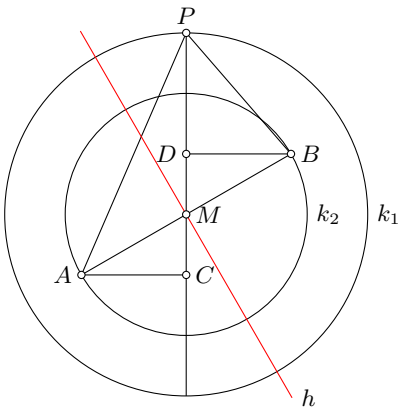
$$\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)r=\sqrt{2rx+x^2}+\frac{r}{\sqrt{3}}+x \Rightarrow \left(4+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)rx=\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)r^2$$

$$x=\frac{\frac{4}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}}{4+\frac{2}{\sqrt{3}}}r \Rightarrow x=\left(\frac{3}{11}+\frac{4\sqrt{3}}{33}\right)\cdot r$$

Aufgabe 051036:
Gegeben seien zwei konzentrische Kreise.
Man beweise, dass die Summe der Quadrate der Entfernungen jedes Punktes P auf der äußeren Kreislinie von den Endpunkten eines Durchmessers des inneren Kreises konstant ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien M der Mittelpunkt der gegebenen konzentrischen Kreise k_1 und k_2 und A und B die Endpunkte eines Durchmessers des inneren Kreises k_2.

Behauptung: $|PA|^2+|PB|^2=c$, wobei c nicht von $P\in k_1$ abhängt.



Beweis:
Es seien C und D die Fußpunkte der Lote von A bzw. B auf g_{MP} und h die Senkrechte zu g_{AB} durch M (siehe Abbildung). Liegt P nicht auf h und nicht auf g_{AB}, so fallen C und D nicht mit A, B oder M zusammen, und es gilt für die Dreiecke ACM und BDM

- $|AM>=|BM|$ (als Radien des inneren Kreises)
- $|\angle ACM|=|\angle BDM|$ (als rechte Winkel)
- $|\angle AMC|=|\angle BMD|$ (als Scheitelwinkel)

Folglich sind die Dreiecke ACM und BDM kongruent nach dem Kongruenzsatz (wsw), und es gilt $|CM|=|DM|$ und $|AC|=|BD|$.
O. B. d. A. kann angenommen werden, dass P auf derselben Seite von h wie B liegt. Dann folgt aus dem Satz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle ACP$

$$|AP|^2=|AC|^2+(|CM|+|MP|)^2$$

sowie, angewandt auf $\triangle BPD$,

$$|BP|^2=|BD|^2+(|MP|-|DM|)^2$$

Wegen $|BD|=|AC|$ und $|DM|=|CM|$ folgt daraus

$$|BP|^2=|AC|^2+(|MP|-|CM|)^2$$

Also ist

$$|AP|^2+|BP|^2=|AC|^2+|CM|^2+2|CM|\cdot|MP|+|MP|^2+|AC|^2+|MP|^2-2|CM|\cdot|MP|+|CM|^2=$$

$$=2\left(|AC|^2+|CM|^2+|MP|^2\right)$$

Weiter gilt nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf $\triangle ACM$

$$|AM|^2=|AC|^2+|CM|^2$$

und somit ist

$$|AP|^2+|BP|^2=2\left(|AM|^2+|MP|^2\right)=c$$

da $|AM|$ und $|MP|$ die Radien der konzentrischen Kreise sind.
Liegt P auf g_{AB} und zwar o. B. d. A. auf der Verlängerung von AB über B hinaus, erhält man

$$|AP|^2+|BP|^2=(|AM|+|MP|)^2+(|MP|-|BM|)^2$$

und wegen $|AM|=|BM|$

$$|AP|^2+|BP|^2=(|AM|+|MP|)^2+(|MP|-|AM|)^2=2\left(|AM|^2+|MP|^2\right)=c$$

Liegt P auf h, so erhält man durch Anwendung des Satzes des Pythagoras auf $\triangle AMP$ und $\triangle MBP$

$$|AP|^2+|BP|^2=|AM|^2+|MP|^2+|MP|^2+|BM|^2$$

und wegen $|AM|=|BM|$

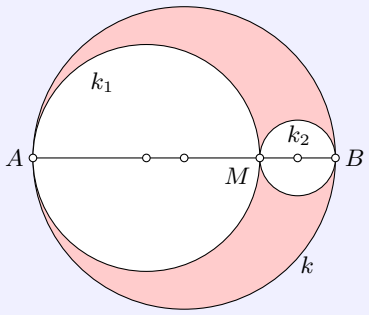
$$|AP|^2+|BP|^2=2\left(|AM|^2+|MP|^2\right)=c$$

Aufgabe 081035:
Beweisen Sie folgende Behauptung:
Zeichnet man in einem Kreis zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen und legt an ihren Endpunkten Tangenten an den Kreis, so ist das entstehende Tangentenviereck gleichzeitig auch ein Sehnenviereck.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gilt der Satz:
Beträgt die Summe zweier gegenüberliegender Winkel eines Vierecks 180°, so ist das Viereck ein Sehnenviereck.
M sei der Mittelpunkt eines Kreises, KG und LH seien zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen eines Kreises. Die in ihren Endpunkten an den Kreis gelegten benachbarten Tangenten mögen sich in den Punkten A, B, C, D schneiden, so dass G, H, K, L in dieser Reihenfolge auf AB, BC, CD, DA liegen.
Da KG und LH aufeinander senkrecht stehen, ist $\angle KGH+\angle GHL=90°$.

Durch Übergang zu den Zentriwinkeln folgt $\angle KMH+\angle GML=180°$. Ersetzt man hierin links jeden Summanden durch seine Ergänzung zu 180°, so folgt (da die Summe ebenfalls 180° betrug) wieder $\angle KCH+\angle GAL=180°$.
Nach dem eingangs erwähnten Satz folgt hieraus die Behauptung.

Aufgabe 131035:
Gegeben sei ein Kreis k mit dem Durchmesser AB der Länge d. In diesem Kreis seien zwei Kreise k_1 und k_2 so gelegen, dass sie k von innen in den Punkten A bzw. B und einander von außen in einem Punkt M berühren, so dass also $AM+MB=AB$ gilt. Dabei sei $AM \geq MB$.
Der Flächeninhalt der farbigen Fläche ist gleich der Differenz aus dem Flächeninhalt von k und der Summe der Flächeninhalte von k_1 und k_2.
Man ermittle diejenige Länge von AM, für die der Flächeninhalt dieser farbigen Fläche am größten ist!



Lösung von Steffen Polster:
Die Länge der Strecke AM sei x. Dann wird der Flächeninhalt der farbigen Fläche

$$A = A_k - A_{k_1} - A_{k_2} = \frac{\pi}{4}d^2 - \frac{\pi}{4}x^2 - \frac{\pi}{4}(d-x)^2$$

Der Flächeninhalt A ist damit eine Funktion von x. Vereinfachen ergibt:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\pi}{2}x^2 + \frac{\pi d}{2}x = -\frac{\pi}{2}(x^2 - dx) = -\frac{\pi}{2}\left(\left(x-\frac{d}{2}\right)^2 - \frac{d^2}{4}\right) \\ &= -\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{\pi d^2}{8} \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt A wird maximal, wenn $\left(x-\frac{d}{2}\right)^2$ Null wird, d. h. für $x=\frac{d}{2}$. Der Flächeninhalt der farbigen Fläche wird somit maximal, wenn der Berührungspunkt M im Mittelpunkte des Kreises k liegt, d. h. $AM=\frac{d}{2}$.

Aufgabe 171036:
Gegeben sei der Radius r eines Kreises k. Unter allen zu k konzentrischen Kreisen k', deren Radius r' größer als r ist, seien diejenigen betrachtet, für die folgendes gilt:
(1) Es gibt ein gleichseitiges Dreieck ABC so, dass A auf k' liegt und B und C auf k liegen.
a) Beweisen Sie, dass unter allen so entstandenen Dreiecken ABC auch solche mit maximalem Flächeninhalt existieren und dass diese für genau einen Wert r_1' von r' zustande kommen!
Drücken Sie diesen Wert r_1' und diesen maximalen Flächeninhalt F_1 durch r aus!
b) Zeigen Sie, dass für den Wert r_1' auch noch Dreiecke ABC existieren, die (1) erfüllen und einen Flächeninhalt $F_0 < F_1$ haben!
Beweisen Sie, dass es genau einen solchen Flächeninhalt F_0 gibt, und drücken Sie ihn durch r aus!
c) Beweisen Sie, dass es genau einen Wert r_2' von r' mit folgender Eigenschaft gibt:
Alle Dreiecke ABC, die (1) für dieses r' erfüllen, haben denselben Flächeninhalt!
Drücken Sie diesen Wert r_2' und den zugehörigen Flächeninhalt F_2 durch r aus!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC, das (1) erfüllt, ist genau dann maximal, wenn BC maximal ist. Nun gibt es im Kreis k Sehnen BC maximaler Länge, nämlich genau die Durchmesser. Also ist die Existenz von Dreiecken ABC, die (1) erfüllen und maximalen Flächeninhalt haben, bewiesen, wenn noch folgendes gezeigt ist:
Wenn B_1C_1 ein Durchmesser von k ist, $A_1B_1C_1$ ein gleichseitiges Dreieck und k' der zu k konzentrische Kreis durch A_1 ist, so ist sein Radius r' größer als r.
Dies trifft in der Tat zu; denn es folgt $B_1C_1 = 2r$ und, wenn M den Mittelpunkt von k bezeichnet, $MA_1 = r\sqrt{3}$ als Höhenlänge im gleichseitigen Dreieck $A_1B_1C_1$. Zugleich ist damit dieser Wert $R' = r\sqrt{3}$ als einzig möglicher in a) genannter Wert für r' nachgewiesen, und als maximaler Flächeninhalt ergibt sich

$$F_1 = \frac{1}{2}B_1C_1 \cdot MA_1 = r^2\sqrt{3}$$

b) Sind $M, r_1', A_1B_1C_1$ wie in a), so schneiden die Geraden durch A_1 und B_1 bzw. C_1 den Kreis k jeweils noch ein zweites Mal, da sie einen Punkt außerhalb k mit je einem Punkt auf k verbinden und nicht auf MB_1, bzw. MC_1 senkrecht stehen. Der jeweils erhaltene zweite Schnittpunkt sei B_0 bzw C_0. Bei Spiegelung an der Geraden durch A, und M geht B_1 in C_1 über, A_1 und k gehen in sich über, also geht B_0 in C_0 über.
Daher ist $\triangle A_1B_0C_0$ gleichschenklig mit $A_1B_0 = A_1C_0$, wegen $\angle B_0A_1C_0 = 60°$ sogar gleichseitig, folglich erfüllt es (1) und ist außer $A_1B_1C_1$ das einzige Dreieck A_1BC, das (1) erfüllt.

Weiter ist $\triangle MB_1B_0$ gleichschenklig mit $MB_1 = MB_0$, wegen $\angle MB_1B_0 = 60°$ sogar gleichseitig; dasselbe gilt für $\triangle MC_1C_0$. Daher wird auch $\triangle MB_0C_0$ mit MB_00MC_0 und $\angle B_0MC_0 = 60°$ gleichseitig, folglich ist $B_0C_0 = r$ und $\triangle A_1B_0C_0$ hat den (damit eindeutig bestimmten) Flächeninhalt

$$F_0 = \frac{1}{4}r^2\sqrt{3} < F_1$$

c) Für jeden überhaupt zu betrachtenden Wert von r' gilt:
Ist A_2 irgendein Punkt auf k' und ist ABC irgendein Dreieck, das (1) für dieses r' erfüllt, so geht dieses durch eine geeignete Drehung um M in ein Dreieck $A_2B_2C_2$ über, das ebenfalls (1) für dieses r' erfüllt. Daher hat ein Wert r' genau dann die in c) genannte Eigenschaft, wenn für einen einzigen Punkt A_2 auf k' alle Dreiecke $A_2B_2C_2$, die (1) für r' erfüllen, dieselbe Seitenlänge haben.
Damit ist gleichwertig, dass es genau einen Kreis h um A_2 gibt, der k in zwei Punkten B_2, C_2 mit $B_2C_2 = A_2B_2$ oder, wegen $A_2B_2 = A_2C_2$ äquivalent hierzu, mit $\angle B_2A_2C_2 = 60°$ schneidet.

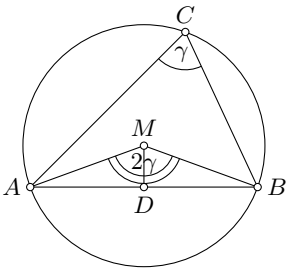
Nun gehen k und jeder Kreis h um A_2 bei Spiegelung an der Geraden durch A_2 und M in sich über; daher ist die zuletzt genannte Forderung äquivalent mit $\angle MA_2B_2 = 30°$.
Also hat r' genau dann die genannte Eigenschaft, wenn ein Strahl aus A_2, der mit A_2M einen Winkel von 30° bildet, mit dem Kreis k genau einen Punkt B_2 besitzt, d. h. Tangente an k ist. Hierfür ist notwendig und hinreichend, dass r' die Hypotenusenlänge in einem rechtwinkligen Dreieck ist, in dem eine Kathete r und der ihr gegenüberliegende Winkel 30° beträgt.
Durch diese Forderung ist, wie behauptet, genau ein Wert r_2' bestimmt, und zwar ergibt sich:

Spiegelt man ein solches Dreieck MA_2B_2 an der Geraden durch M und B_2, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck; folglich gilt $r_2' = MA_2 = 2MB_2 = 2r$. Die Höhenlänge $A_2B_2 = r\sqrt{3}$ dieses Dreiecks ist die Seitenlänge von $\triangle A_2B_2C_2$; folglich beträgt

$$F_2 = \frac{1}{4}AB^2\sqrt{3} = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$$

Aufgabe 191034:
Beweisen Sie folgende Aussage!
Sind A, B, C drei verschiedene Punkte auf einer Kreislinie vom Radius r und hat $\angle ACB$ die Größe γ, so gilt $\sin\gamma = \frac{AB}{2r}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Ist M der Mittelpunkt von k, so gilt nach dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel $\angle AMB = 2\gamma$.
Ferner gibt es genau die folgenden Möglichkeiten:

1. Es gilt $2\gamma \neq 180°$
In dem gleichschenkligen Dreieck ABM ist die Höhe MD zugleich Winkel- und Seitenhalbierende. Daher ist $\triangle ADM$ bei D rechtwinklig; es gilt $AD = \frac{1}{2}AB$ und $\angle AMD = \gamma$ in Falle $2\gamma < 180°$ bzw. $\angle AMD = 180° - \gamma$ im Fall $2\gamma > 180°$.

Wegen $\sin(180° - \gamma) = \sin\gamma$ folgt in beiden Fällen somit

$$\sin\gamma = \frac{AD}{AM} = \frac{AB}{2r}$$

2. Es gilt $2\gamma = 180°$. Dann ist $AB = 2r, \sin\gamma = \sin 90° = 1 = \frac{AB}{2r}$, w. z. b. w.

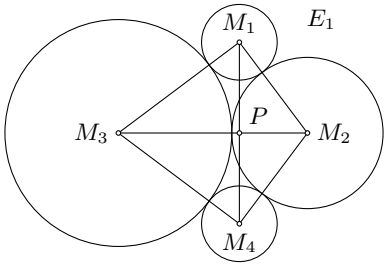
Aufgabe 221032:
Es sei M der Mittelpunkt eines Kreises k. Auf der Kreislinie k seien zwei Punkte A und B so gelegen, dass M nicht auf der Geraden g durch A, B liegt.
Beweisen Sie unter diesen Voraussetzungen die folgende Umkehrung des Satzes über Zentri- und Peripheriewinkel!
Wenn für einen Punkt P, der bezüglich g in derselben Halbebene wie M liegt, der Winkel $\angle APB$ halb so groß ist wie $\angle AMB$, dann liegt P auf der Kreislinie k.

Lösung von cyrix:
Die Tangenten an k durch A und B schneiden sich in einem Punkt, der nicht in der gleichen Halbebene bezüglich g wie M, und damit auch P liegt. Also kann P nicht auf beiden Tangenten gleichzeitig liegen, sodass wir o. B. d. A. annehmen können, dass P nicht auf der Tangenten an k durch A liegt.

Es sei S der neben A zweite Schnittpunkt der Geraden AP mit k.
Dann gilt nach dem Zentri-Peripheriewinkelsatz $\angle ASB = \frac{1}{2}\angle AMB = \angle APB$. Weiterhin stimmen die beiden Dreiecke $\triangle ASB$ und $\triangle APB$ auch im Winkel $\angle BAS = \angle BAP$ und der Seite AB überein, sind also kongruent. Damit folgt aufgrund der gleichen Lage auch direkt $S = P$, sodass P auf k liegt, $\square$.

Aufgabe 271033:
Vier Kreise k_1, k_2, k_3 und k_4 mit den Mittelpunkten M_1 bis M_4 und den Radien r_1 bis r_4 mögen so in einer Ebene E_1 liegen, dass sich k_1, k_2 und k_3 paarweise von außen berühren.
Außerdem berührt k_4 die Kreise k_2 und k_3 ebenfalls von außen und hat mit k_1 keinen Punkt gemeinsam.
Die Kreise seien die Grundflächen von vier geraden Kreiskegeln mit den Höhen h_1 bis h_4 und den Spitzen S_1 bis S_4.
Die Punkte S_1, S_2 und S_3 mögen auf der gleichen Seite von E_1 (d. h. im gleichen Halbraum bezüglich E_1) liegen.
Folgende Maße seien gegeben: $r_1 = r_4 = 1$ cm, $r_2 = 2$ cm, $r_3 = 3$ cm, $h_1 = 1$ cm, $h_2 = 2{,}1$ cm, $h_3 = 4{,}6$ cm.
Nun sollen S_1, S_2, S_3 und S_4 in einer Ebene E_2 liegen.
Wie groß muss dann h_4 sein?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für die Mittelpunkte der Kreise gilt nach Voraussetzung $M_1M_2 = M_4M_2 = 3$ cm (1), $M_1M_3 = M_4M_3 = 4$ cm (2) und $M_2M_3 = 5$ cm (3), siehe Abbildung.
Der Schnittpunkt der Diagonalen M_1M_4, M_2M_3 des Vierecks $M_1M_2M_3M_4$ sei P. Wegen (1), (2) in $M_1M_2M_3M_4$ ein Drachenviereck; daher gilt

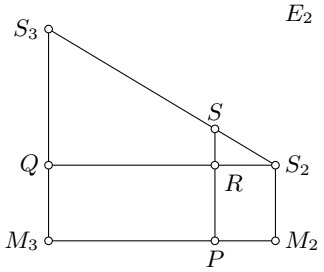
$$M_1P = PM_4 \quad (4) \qquad \text{und} \qquad \angle M_1PM_2 = 90° \quad (5)$$

Wegen $3^2 + 4^2 = 5^2$ folgt weiterhin nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras aus (1), (2), (3) $\angle M_2M_1M_3 = 90°$ (6).

Aus (5), (6) und $\angle M_1M_2P = \angle M_3M_2M_1$ folgt nach dem Hauptähnlichkeitssatz $\triangle M_2PM_1 \sim \triangle M_2M_1M_3$, also

$$M_2P : M_2M_1 = M_2M_1 : M_2M_3 \qquad \Rightarrow \qquad M_2P = \frac{9}{5}\text{cm} \tag{7}$$

Da die Strecken M_2S_2 und M_3S_3 auf der Ebene E_1 senkrecht, also zueinander parallel sind, liegen die Punkte M_2, M_3, S_2, S_3 in einer gemeinsamen Ebene und bilden ein Trapez $M_2M_3S_3S_2$, in dem die Seitenlängen $M_2S_2 = h_2$, $M_3S_3 = h_3$ und (3) auftreten. (siehe Abbildung)



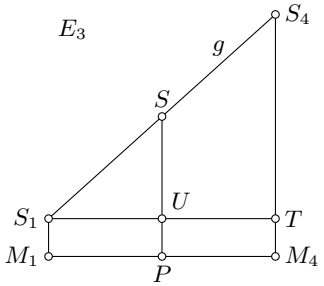
Die Parallele durch S_2 zu M_2M_3 schneidet M_3S_3 in einem Punkt Q, und da hiermit $M_2M_3QS_2$ ein Parallelogramm wird, ergibt sich

$$QS_3 = h_3 - h_2 = 2{,}5\text{cm} \tag{8}$$

Errichtet man die Senkrechte in P auf der Ebene E_1, so ist sie parallel zu M_2S_2 und M_3S_3, schneidet also S_2Q und S_2S_3 in Punkten R und S. Damit wird auch M_2PRS_2 ein Parallelogramm; ferner ergibt sich nach dem Strahlensatz und (3), (7), (8)

$$RS : QS_3 = S_2R : S_2Q = M_2P : M_2M_3 \quad \Rightarrow \quad RS = 0{,}9\text{cm}; \quad PS = h_2 + RS = 3\text{cm} \tag{9}$$

Da M_1S_1 und M_4S_4 ebenfalls auf E_1 senkrecht stehen, liegen M_1, M_4, S_1, S_4 in einer gemeinsamen Ebene E_3; in dieser liegt auch die Strecke PS. (siehe Abbildung)



Daher ist wieder $M_1M_4S_4S_1$ ein Trapez, und die Strecke PS ist parallel zu M_1S_1 und M_4S_4. Ihr Endpunkt S liegt nach seiner Definition auf S_2S_3, also in E_2 und damit auf der Schnittgeraden g von E_3 mit E_2. Auch S_1 und S_4 gehören sowohl zu E_2 als auch zu E_3; also ist g die Gerade durch S_1, S_4; folglich liegt S auf S_1S_4.

Die Parallele durch S_1 zu M_1M_4 schneidet M_4S_4 und PS in Punkten T bzw. U, und da hiermit $M_1M_4TS_1$ und M_1PUS_1 Parallelogramme werden, ergibt sich wegen (9)

$$US = PS - h_1 = 2\text{cm} \tag{10}$$

Aus dem Strahlensatz und (4), (10) erhält man damit

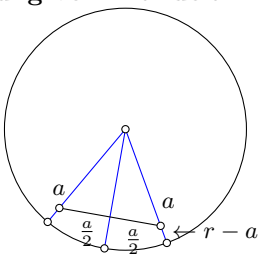
$$TS_4 : US = S_1T : S_1U = M_1M_4 : M_1P = 2 : 1$$
$$TS_4 = 2 \cdot US = 4\text{cm}$$

also die gesuchte Höhe $h_4 = h_1 + TS_4 = 5$ cm.

IV Runde 4

Aufgabe 021043:
Ein Kreisausschnitt mit einem Zentriwinkel von 60° wird durch eine Senkrechte zur Winkelhalbierenden so in zwei Teile geteilt, dass die Umfänge dieser zwei Teile gleich groß sind.
Welcher von den beiden Teilen hat den kleineren Flächeninhalt? (Beweis!)

Lösung von Manuela Kugel:



Durch die Senkrechte zur Winkelhalbierenden entsteht ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a. Dieses Dreieck hat den Umfang $3a$. Der Rest des Kreisausschnittes hat einen Umfang von $2(r-a)+a+2\pi\frac{\pi}{6}$. Damit beide Umfänge gleich sind, muss

$$a = \frac{2r + 2\pi\frac{r}{6}}{4} = \frac{r}{12}(\pi + 6)$$

sein. Das Dreieck hat einen Flächeninhalt von

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}r^2(\pi+6)^2}{4\cdot 144}$$

Für den zweiten Flächeninhalt gilt, dass er die Differenz zwischen dem gesamten Kreissegment abzüglich A_1 ist:

$$A_2 = \frac{\pi}{6}r^2 - \frac{\sqrt{3}r^2(\pi+6)^2}{4\cdot 144} = \frac{r^2}{4\cdot 144}\left(96\pi - \sqrt{3}(\pi+6)^2\right)$$

Nun gilt $A_1 = A_2 + k$. Wenn $k > 0$, so ist $A_1 > A_2$, wenn $k = 0$, so ist $A_1 = A_2$ und wenn $k < 0$, so ist $A_1 < A_2$. Daher wird nun die Differenz ermittelt:

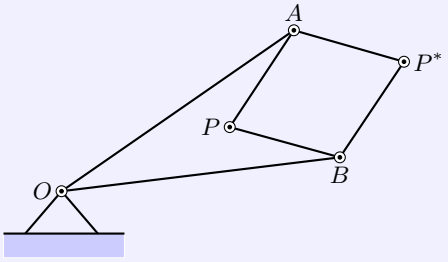
$$k = A_1 - A_2 \qquad = \frac{r^2}{4\cdot 144}\left(\sqrt{3}(\pi+6)^2 - 96\pi + \sqrt{3}(\pi+6)^2\right) = \frac{r^2}{4\cdot 144}(\sqrt{3}(\pi+6)^2 - 48\pi)$$

Abschätzung nach unten mit $\sqrt{3} < 1{,}8$ und $3{,}15 > \pi > 3{,}14$:

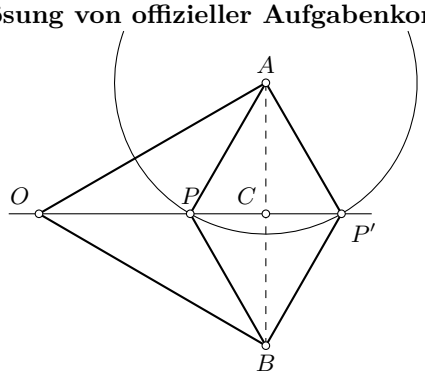
$$k < \frac{r^2}{4\cdot 144}(1{,}8(3{,}15+6)^2 - 48\cdot 3{,}14) < -\frac{0{,}0195}{2\cdot 144}r^2 < 0$$

Indem $k < 0$ gilt, ist der Flächeninhalt des Dreiecks kleiner als der des abgeschnittenen Kreissegments.

Aufgabe 031045:
Der „Inversor“ von Peaucellier besteht aus zwei in O gelenkig verbundenen Stäben OA und OB (mit $OA = OB$), die in A und B mit einen Gelenkrhombus $APBP^*$ verbunden sind (vgl. Abbildung). Es sei $OA > AP$.
Man denke sich den Punkt O in der Ebene drehbar fixiert und zeige, dass das Produkt der Entfernungen $OP = r$ und $OP^* = r^*$ eine von der Stellung des Mechanismus unabhängige Konstante ist.



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



1. Lösung
Man betrachte den Mechanismus in einer fixierten Stellung, bei der $A \neq B$ und $P \neq P'$ ist. Da die beiden Vierecke $AOBP'$ und $APBP'$ Drachenvierecke sind, gilt für ihre Diagonalen $AB \perp OP'$ und $AB \perp PP'$,und demnach liegen O, P und P' auf derselben Geraden.
Der Schnittpunkt dieser Geraden mit g_{AB} ist der Schnittpunkt der Diagonalen des Rhombus $APBP'$ und liegt daher auf AB. Er werde mit C bezeichnet. Der Punkt O liegt außerhalb der Strecke PP'.

Läge O auf PP', so hätte die Größe eines der beiden Winkel $\angle AOP, \angle AOP$ einen Wert, der größer oder gleich 90° ist, da ihre Summe 180° beträgt.
Daher wäre in einem der Dreiecke $POA, P'OA$ der Winkel mit dem Scheitel O der größte im betreffenden Dreieck. Folglich wäre PA oder $P'A$ die längste Seite im Dreieck, was wegen der Voraussetzung $|P'A| = |PA| < |OA|$ nicht möglich ist.
Daher gilt wegen $|PC| = |P'C|$

$$|OP| \cdot |OP'| = (|OC| - |CP|)(|OC| + |CP|) = |OC|^2 - |CP|^2$$

ferner ist nach dem Satz des Pythagoras

$$|OC|^2 = |OA|^2 - |AC|^2 \qquad \text{und} \qquad |CP|^2 = |PA|^2 - |AC|^2$$

woraus sich ergibt, dass

$$|OP| \cdot |OP'| = |OA|^2 - |PA|^2 \tag{1}$$

gilt, also $|OP| \cdot |OP'|$ nicht von der Stellung des Mechanismus abhängt.

Bemerkung: In den Grenzfällen $A = B$ oder $P = P'$ ist $APBP'$ kein Rhombus. Es gilt aber trotzdem (1); denn im Fall $A = B$ liegen P und P' auf der Geraden g_{OA}, und dann gilt:

$$|OP| \cdot |OP'| = (|OA| - |PA|)(|OA| + |PA|) = |OA|^2 - |PA|^2$$

und im Fall $P = P'$ ist P Fußpunkt der Höhe auf AB im gleichschenkligen Dreieck AOB, und es folgt aus dem Satz des Pythagoras

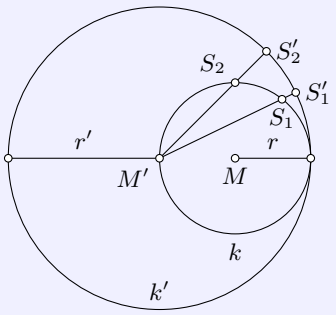
$$|OP| \cdot |OP'| = |OP|^2 = |OA|^2 - |PA|^2.$$

Alternativ-Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
O. B. d. A. kann angenommen werden, dass OA festliegt. O, P und P' liegen auf derselben Geraden (siehe erste Lösung), welche Sekante (im Grenzfall Tangente) des Kreises k mit dem Radius $|PA|$ um A ist. Die Behauptung folgt dann aus dem Sekantentangentensatz:

$$|OP| \cdot |OP'| = |OQ|^2$$

wenn Q der Berührungspunkt einer Tangente von O an k ist.

Aufgabe 051046:
Der Kreis k rolle auf dem Kreis k', dessen Radius doppelt so groß ist wie der von k, ohne zu gleiten, ab, indem er stets k' von innen berührt.
Man ermittle die Bahnkurve, die ein beliebiger auf k fixiert zu denkender Punkt P bei dieser Bewegung durchläuft!



Anleitung: Man beweise zunächst folgenden Hilfssatz!
Trifft jeder von zwei vom Mittelpunkt M' von k' ausgehende Strahlen k ein zweites Mal, so werden durch diese Schnittpunkte k bzw. k' in zwei solche Bögen zerlegt, dass die im gleichen Winkelraum gelegenen Bögen gleich lang sind.

Lösung von cyrix:
Wir beweisen zuerst den Hilfssatz:
Der Kreis k habe den Radius 1 und damit k' den Radius 2. Mit den Bezeichnungen aus der Skizze in der Aufgabenstellung hat der Bogen zwischen S_1' und S_2' eine Länge von $2 \cdot \angle S_1' M' S_2'$, wobei der Winkel im Bogenmaß angegeben sei.
Da M' auf dem Kreis k liegt, ist $\angle S_1' M' S_2' = \angle S_1 M' S_2$ ein Peripheriewinkel im Kreis k, dessen zugehöriger Zentriwinkel $\angle S_1 M S_2$ nach dem Peripherie-Zentriwinkel-Satz genau doppelt so groß ist, also $\angle S_1 M S_2 = 2 \cdot \angle S_1 M' S_2$ beträgt.
Da k den Radius 1 besitzt, hat der Bogen zwischen S_1 und S_2 damit die Länge $2 \cdot \angle S_1 M' S_2$, also die gleiche wie der Bogen zwischen S_1' und S_2' auf k', $\square$.

Wendet man den Hilfssatz auf die Situation an, in der einer der beiden von M' ausgehenden Strahlen M enthält, so schneidet dieser beide Kreise in ihrem Berührungspunkt. Da die von dort ausgehenden Bögen zu den Schnittpunkten des zweiten Strahls gleich lang sind, heißt dies, dass beim weiteren Abrollen von k an k' diese beiden Punkte sich berühren werden.
Da dieser Berührungspunkt auf k' fest ist, findet man bei jeder Lage des Kreises k den darauf fixierten (und sich somit mitbewegenden) Punkt, der später auf den Berührungspunkt abgerollt wird, indem man die Gerade durch den Berührungspunkt und M' mit k schneidet (und den von M' verschiedenen Schnittpunkt betrachtet, sofern es zwei verschiedene gibt).

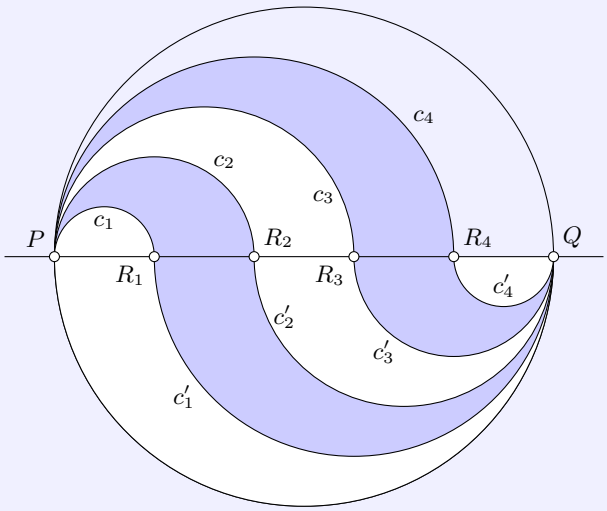
Damit bewegt sich ein auf k fixierter Punkt P auf einem Durchmesser von k'.

Bemerkung:
Die Argumentation funktioniert auf diese Weise an sich nur dann, wenn sich M höchstens $\frac{\pi}{2}$ „vor“ oder „nach“ dem Berührungspunkt von P an k' befindet, da nur dann der von M' ausgehende und durch den Berührungspunkt verlaufende Strahl den Kreis k überhaupt noch zumindest tangiert.
Aber da k' den doppelten Radius von k hat, rollt k bei einer vollständigen Umdrehung um k' genau zweimal ab, sodass nach einer halben Runde P ein zweites mal k' berührt; genau am auf k' dem ersten Berührungspunkt diametral gegenüberliegenden Punkt, sodass sich die beiden von M' ausgehenden und durch die Berührungspunkte verlaufenden Strahlen zu einer Gerade ergänzen und die Argumentation nun für beliebige Lagen von M, ohne Einschränkung an Winkel, durchführbar ist.

Aufgabe 081043:
In einer Ebene ε sei k ein Kreis mit gegebenem Radius r; ferner sei eine natürliche Zahl $n > 2$ gegeben.
Ein Durchmesser PQ von k werde in n gleiche Teile geteilt; die Teilpunkte seien $R_1, R_2, ..., R_{n-1}$, so dass

$$PR_1 = R_1R_2 = ... = R_{n-2}R_{n-1} = R_{n-1}Q$$

gilt.
Eine der beiden Halbebenen, in die ε durch die Gerade g_{PQ} zerlegt wird, sei H genannt, die andere H'. Dann sei c_i der in H gelegene Halbkreis über PR_i, ferner c_i' der in H' gelegene Halbkreis über R_iQ, sowie schließlich b_i die aus c_i und c_i' zusammengesetzte Kurve $(i = 1, 2, 3, ..., n-1)$.



Man berechne die Inhalte der Flächenstücke, in die die Kreisfläche durch je zwei benachbarte Kurven $b_1, ..., b_{n-1}$ bzw. durch b_1 bzw. b_{n-1} und den jeweiligen Halbkreis zerlegt wird!

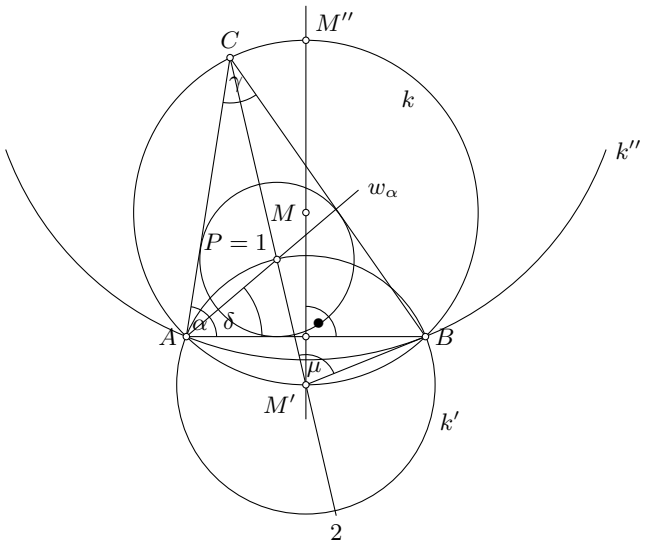
Lösung von cyrix:
Definieren wir zusätzlich $R_0 := P$, $R_n := Q$, sowie b_0 und b_n als Halbkreise über dem Durchmesser PQ in H' bzw. H, so ist nun allgemein nach dem Inhalt der Fläche zwischen den beiden Kurven b_{i-1} und b_i mit $1 \leq i \leq n$ gefragt. Sei diese Fläche mit F_i bezeichnet.
Man kann F_i zerlegen in den Teil davon, der in H liegt, und den, der in H' liegt. Der erste lässt sich darstellen als die Differenz der Halbkreise in H über den Durchmessern PR_i und PR_{i-1}, der zweite als Differenz der Halbkreise in H' über den Durchmessern $R_{i-1}Q$ und R_iQ.
Damit berechnet sich der Flächeninhalt der Figur F_i zu

$$\frac{\pi}{8} \cdot \left(\frac{i^2}{n^2} - \frac{(i-1)^2}{n^2} + \frac{(n-(i-1))^2}{n^2} - \frac{(n-i)^2}{n^2} \right) \cdot (2r)^2 = \frac{\pi \cdot r^2}{2 \cdot n^2} \cdot (2i - 1 + 2(n-i) + 1) = \frac{1}{n} \cdot \pi r^2$$

Der Kreis wird also in n flächengleiche Flächenstücke zerlegt.

Aufgabe 091045:
Es seien k' und k'' zwei voneinander verschiedene Kreise durch die Eckpunkte A und B des Dreiecks $\triangle ABC$, deren Mittelpunkte M' bzw. M'' beide auf dem Umkreis k von Dreieck $\triangle ABC$ liegen.
Beweisen Sie, dass der Mittelpunkt des Inkreises von Dreieck $\triangle ABC$ entweder auf k' oder auf k'' liegt!

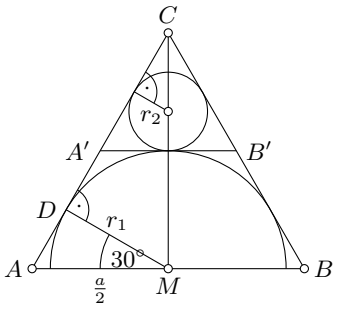
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Beweis: Zunächst zeichnet man eine Planfigur (siehe Abbildung) entsprechend den Vorgaben der Aufgabenstellung.
Der Inkreismittelpunkt P des Dreiecks $\triangle ABC$ liegt im Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden. Wir zeichnen zunächst die Winkelhalbierende w_γ ein. Diese schneidet k' in den Punkten 1 und 2.



Wenn die eingangs aufgestellte Behauptung wahr sein soll, dann muss der Punkt 1 mit dem Inkreismittelpunkt P identisch sein. Der Punkt 2 liegt außerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$ und scheidet deshalb von der Betrachtung aus.
Der geforderte Beweis ist also erbracht, wenn gezeigt wird, dass der Punkt 1 auf w_α oder w_β liegt.
γ ist ein Peripheriewinkel von k bezüglich der Sehne AB. Da M' nach Konstruktion den Kreisbogen $\widehat{AB}$ halbiert, gilt $AM' = M'B$. Somit liegt M' auf w_γ.
Wir setzen $\angle CAB = \alpha$ und $\angle CM'B = \mu$. Da α und μ Peripheriewinkel von k bezüglich der Sehne BC darstellen und in der gleichen Halbebene bezüglich dieser Sehne liegen, gilt $\alpha = \mu \quad (1)$.
Ferner setzen wir $\angle 1AB = \delta$. Nun sind δ ein Peripheriewinkel von k' und μ ein Zentriwinkel von k' bezüglich der gemeinsamen Sehne $B1$. Folglich gilt $\mu = 2\delta \quad (2)$.
Aus (1) und (2) folgt $\alpha = 2\delta$ oder $\delta = \frac{\alpha}{2}$; d. h. die Verbindungslinie $(1A)$ liegt in der Winkelhalbierenden w_α.
Der auf k' liegende Punkt 1 ist also identisch mit dem Inkreismittelpunkt P, was zu beweisen war.
Hätte man C auf k im Inneren von k' angenommen, wäre der Beweis völlig analog gelaufen. Eine Fallunterscheidung erübrigt sich damit.

Aufgabe 131041:
In einem Ornament sind ein gleichseitiges Dreieck ABC, darin ein Halbkreis k_1 (mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius r_1) und ein Kreis k_2 (mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius r_2) so gezeichnet, dass sie den folgenden Bedingungen genügen:
(1) M_1 liegt auf der Strecke AB,
(2) k_1 berührt jede der Strecken AC und BC,
(3) k_2 berührt k_1 von außen sowie jede der Strecken AC und BC.
Man zeige, dass dann $r_1 > r_2$ gilt und ermittle das Verhältnis $r_1 : r_2$.

Lösung von Steffen Polster:



Hat das gleichseitige Dreieck ABC die Seitenlänge a, so ist seine Höhe $CM = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ (nach Anwendung des Satzes von Pythagoras auf das Dreieck AMC).
Im rechtwinkligen Dreieck AMD ist der Winkel $\angle AMD = 30°$, die Seite $AM = \frac{a}{2}$ und $DM = r_1$. Dann wird

$$r_1 = \frac{a}{2}\cos 30° = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{4}\sqrt{3}$$

Zieht man parallel zu AB die zweite Tangente an den Kreis k_1, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck

$A'B'C$ (Ähnlichkeitslage zu $\triangle ABC$). Für die Höhe h' von $\triangle A'B'C$ wird

$$h' = h - r_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{a}{4}\sqrt{3} = \frac{a}{4}\sqrt{3} = \frac{h}{2}$$

Im gleichseitigen Dreieck $A'B'C$ ist der Inkreismittelpunkt mit dem Schwerpunkt identisch. Daher wird die Höhe bzgl. des Inkreismittelpunktes im Verhältnis 1:2 geteilt. Damit wird für den Radius des Kreises k_2:

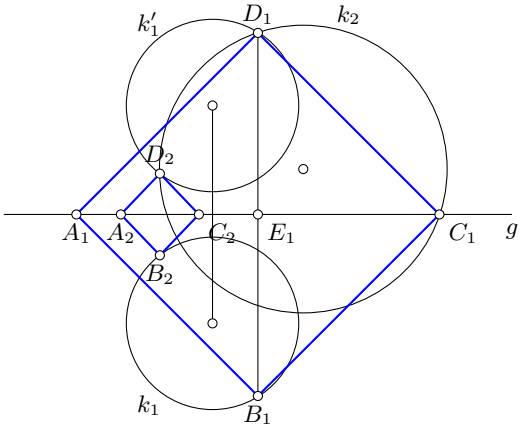
$$r_2 = \frac{1}{3}h' = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{3} = \frac{a}{12}\sqrt{3}$$

Folglich gilt $r_1 > r_2$ und für das Verhältnis ergibt sich: $r_1 : r_2 = 3 : 1$.

Aufgabe 171041:
In einer Ebene ε sind eine Gerade g und zwei Kreise k_1 und k_2 gegeben.
Konstruieren Sie ein Quadrat $ABCD$, dessen Eckpunkte A und C auf g liegen, dessen Eckpunkt B auf k_1 und dessen Eckpunkt D auf k_2 liegt! Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!
Stellen Sie fest, für welche Lagemöglichkeiten der gegebenen g, k_1, k_2 ein solches Quadrat existiert und für welche von diesen Lagemöglichkeiten es dann sogar eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Analysis: Angenommen, es existiert ein Quadrat $ABCD$, das den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Dann ist nach den Eigenschaften des Quadrates die Gerade g eine seiner Symmetrieachsen, und die nicht auf g liegenden Eckpunkte B und D liegen bezüglich g symmetrisch.
Demzufolge liegt D sowohl auf k_2 als auch auf dem Kreis k_1', der durch Spiegelung von k, an g entsteht. Ferner ist der Schnittpunkt E von g und BD der Diagonalenschnittpunkt des Quadrates $ABCD$, der von allen vier Eckpunkten gleichweit entfernt ist. Daraus ergibt sich:

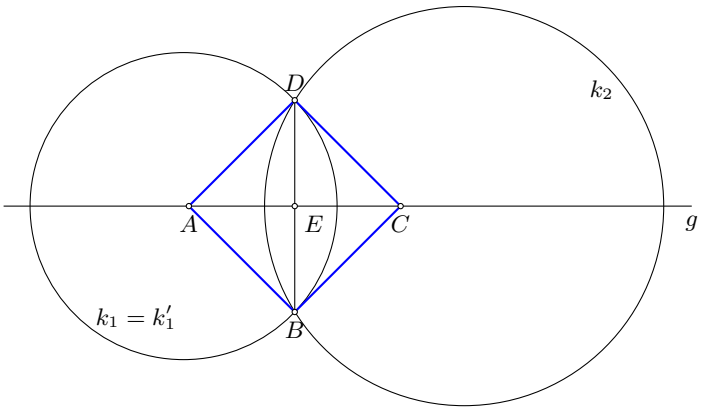
Wenn ein Quadrat $ABCD$ den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kann es durch folgende Konstruktion erhalten werden:



II. Konstruktion:
(1) Man spiegelt k_1 an g; das Bild sei k_1'.
(2) Wenn k_1' und k_2 einen gemeinsamen, nicht auf g liegenden Punkt besitzen, so werde ein solcher mit D bezeichnet.
(3) Man spiegelt D an g, der Bildpunkt sei B.
(4) Die Gerade g schneidet als Mittelsenkrechte die Strecke BD in deren Mittelpunkt E. Von E aus trägt man auf g nach jeder Seite eine Strecke der Länge $EB = \frac{1}{2}BD$ ab. Die so konstruierten Punkte seien mit A bzw. C bezeichnet.

III. Beweis: Die unter II. beschriebene Konstruktion führt stets zu einem Quadrat der geforderten Art: A, C liegen auf g. Wegen der geforderten Eigenschaft von D liegt D auf k_2 und B als Spiegelpunkt auf k_1. Wegen $DE = EB = EC = EA \neq 0$ und $DB \perp AC$ ist $ABCD$ ein Quadrat.

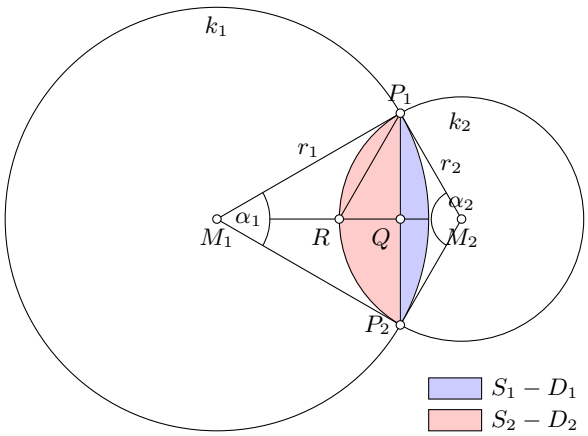
IV. Determination: Entsprechend der Lage von k_1, k_2 und g zueinander können folgende Fälle unterschieden werden:
1. k_1' und k_2 haben keinen Punkt gemeinsam.
2. k_1' und k_2 haben genau einen Punkt gemeinsam.
2.1. der auf g liegt
2.2. der nicht auf g liegt.
3. k_1' und k_2 haben genau zwei Punkte gemeinsam,
3.1. die beide nicht auf g und nicht symmetrisch zu g liegen,
3.2. die beide nicht auf g, aber symmetrisch zu g liegen,
3.3. von denen genau einer auf g liegt,
3.4. die beide auf g liegen.
4. k_1' und k_2 fallen zusammen.



A) Im Fall 4. gibt es unendlich viele Quadrate, die den Bedingungen genügen.
B) Im Fall 3.1. gibt es genau zwei Quadrate der verlangten Art (siehe Abbildung oben).
C) In den Fällen 2.2., 3.2., 3.3. gibt es genau ein den angegebenen Bedingungen genügendes Quadrat (eine Möglichkeit die zweite Abbildung). D) In den Fällen 1., 2.1., 3.4. gibt es kein Quadrat, das die Bedingungen erfüllt.
Die Fallunterscheidung ist vollständig, die Fälle schließen einander aus. Also gilt:
Genau in den unter A), B) und C) genannten Fällen existiert ein solches Quadrat, dessen Existenz genau in den unter C) genannten Fällen eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 271044:
Ein Kreis k_1 mit dem Radius $r_1 = 10$ cm und ein Kreis k_2 mit dem Radius $r_2 = \frac{10}{\sqrt{2}}$ cm seien so in einer Ebene gelegen, dass der Mittelpunkt von k_2 außerhalb von k_1 liegt und dass sich k_2 in zwei Punkten P_1, P_2 schneiden, für die $P_1P_2 = 10$ cm gilt.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt A des gemeinsamen Flächenstücks der beiden Kreisflächen!
Hinweis: Entsprechend wie bei der obigen Angabe von r_2 soll die zahlenmäßige Angabe von A erfolgen, ohne dabei Näherungswerte (z. B. endliche Dezimalbrüche) für irrationale Zahlen zu verwenden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Mittelpunkte von k_1, k_2 seien M_1 bzw. M_2. Die Gerade durch M_1, M_2 schneide P_1P_2 in Q.
Das Dreieck $P_1P_2M_1$ ist gleichseitig mit $P_1P_2 = M_1P_1 = M_1P_2 = r_1 = 10$ cm; daher gilt

$$\angle P_1M_1P_2 = \angle P_2P_1M_1 = \angle P_1P_2M_1 = 60°$$

Da die Verbindungsgerade der Kreismittelpunkte die Schnittsehne halbiert und auf ihr senkrecht steht, ist $QP_1 = \frac{1}{2}r_1$ und $\angle M_2QP_1 = 90°$; hieraus und aus $M_2P_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}r_1$ folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$M_2Q = r_1\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{12}}r_1 = \frac{1}{2}r_2$$

Verlängert man M_2Q über Q hinaus um seine eigene Länge bis R, so liegt folglich R auf k_2; außerdem aber ist P_1Q im Dreieck M_2RP_1 sowohl Höhe als auch Seitenhalbierende. Dieses Dreieck ist daher auch mit $M_2P_1 = RP_1$ gleichschenklig, also sogar gleichseitig.
Da Q (als Punkt der Schnittsehne) innerhalb k_1 liegt, M_2 aber nach Voraussetzung außerhalb k_1, folgt wegen $r_2 < r_1$, dass R innerhalb k_1 liegt. Daraus und aus der Symmetrie bezüglich M_1M_2 ergibt sich: Es gilt

$$A = (S_1 - D_1) + (S_2 - D_2)$$

mit folgenden Bezeichnungen:

S_1: Flächeninhalt des Kreissektors $\overset{\frown}{P_1P_2}M_1$ von k_1 mit dem Zentriwinkel der Größe $\alpha_1 = \angle P_1M_1P_2 = 60°$,
S_2: Flächeninhalt des Kreissektors $\overset{\frown}{P_1P_2}M_2$ von k_2 mit dem Zentriwinkel der Größe $\alpha_2 = \angle P_1M_2P_2 = 2 \cdot \angle P_1M_2R = 120°$,
D_1: Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2M_1$,
D_2: Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2M_2$, wegen $\triangle M_2QP_2 \cong \triangle M_2QP_1 \cong \triangle RQP_1$ auch Flächeninhalt des Dreiecks M_2RP_1.

Hiernach und wegen $r_2^2 = \frac{1}{3}r_1^2$ erhält man nach den Flächeninhaltsformeln für Kreissektoren und gleichseitige Dreiecke

$$S_1 = \frac{1}{6}\pi r_1^2 \quad ; \quad D_1 = \frac{1}{4}r_1^2\sqrt{3} \quad ; \quad S_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 \quad ; \quad D_2 = \frac{1}{4}r_2^2\sqrt{3}$$

$$A = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{\pi}{9} - \frac{1}{12}\sqrt{3}\right) r_1^2 = \left(\frac{5}{18} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \cdot 100\text{cm}^2$$

Aufgabe 291041:
Gegeben seien drei Geraden g, h, j in einer Ebene; keine zwei dieser Geraden seien zueinander parallel; kein Punkt der Ebene liege auf allen drei Geraden. Gegeben sei ferner eine Länge a.
Gesucht ist für jede solche Vorgabe von g, h, j, a die Anzahl aller derjenigen Kreise c, die die folgenden Bedingungen erfüllen:
(1) Der Kreis c schneidet jede der Geraden g, h, j in zwei Punkten G_1, G_2 bzw. H_1, H_2 bzw. J_1, J_2.
(2) Es gilt $G_1G_2 = H_1H_2 = J_1J_2 = a$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Kreis c die Bedingungen (1), (2) erfüllt, so folgt: Ist M der Mittelpunkt und r der Radius von c, so hat M von jeder der Geraden g, h, j den Abstand

$$s = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \qquad (3)$$

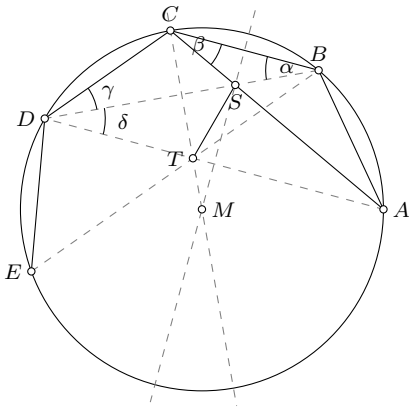
Dies ergibt sich aus dem Satz, dass jeweils das Lot von M auf eine Sehne diese halbiert, und aus dem Satz des Pythagoras.
Nach Voraussetzung bilden g, h, j die Seiten und deren Verlängerungen eines Dreiecks D. Also ist M einer der vier Punkte, die von den (einschließlich ihrer Verlängerungen verstandenen) Seiten von D jeweils drei gleichgroße Abstände haben; d. h., M ist der Inkreismittelpunkt oder einer der drei Ankreismittelpunkte von D, und die in (3) genannte Länge s ist der Inkreisradius bzw. der Radius des betreffenden Ankreises. Aus (3) folgt ferner, dass c den Radius hat:

$$r = \sqrt{s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \qquad (4)$$

II. Umgekehrt folgt: Wenn M der Mittelpunkt und s der Radius des Inkreises oder eines Ankreises von D ist und wenn hiermit r die nach (4) gebildete Länge ist, dann schneidet der um M mit r konstruierte Kreis c jeder der drei Geraden g, h, j in einer Sehne, deren halbe Länge $\sqrt{r^2 - s^2} = \frac{a}{2}$ beträgt; d. h., dann erfüllt c die Bedingungen (1) und (2).
Damit ist bewiesen: Für jede der in der Aufgaben genannten Vorgaben von g, h, j, a gibt es genau vier Kreise C, die (1) und (2) erfüllen.

Aufgabe 341046:
In einem Kreis k seien vier Sehnen AB, BC, CD, DE von gleicher Länge $AB = BC = CD = DE$ gezeichnet.
Dabei sei diese Länge so gewählt, dass der von A über B, C, D zu E führende Bogen kleiner als der gesamte Kreisumfang ist. Der Schnittpunkt der Strecken AC und BD sei S; der Schnittpunkt der Strecken AD und BE sei T.
Beweisen Sie, dass aus dieser Voraussetzung stets $AB^2 = AC \cdot ST$ folgt!

Lösung von MontyPythagoras:



Die blau gestrichelten Linien sind Symmetrieachsen durch den Mittelpunkt des Kreises. Wegen der Symmetrie bezüglich der Achse MS ist BC parallel zu AD und $\alpha = \beta$. Da $BC = CD$, ist $\alpha = \gamma$, und wegen der Parallelität von BC zu AD ist $\alpha = \delta$. Alle grün eingezeichneten Winkel sind daher gleich groß.
Zu zeigen ist:

$$AB^2 = AC \cdot ST \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{AB}{ST} = \frac{AC}{AB}$$

Da $AB = BC$ ist und $AC = BD$, ist das gleichbedeutend mit

$$\frac{BC}{ST} = \frac{BD}{BC}$$

Da $\gamma = \delta$ ist und das Viereck $BCDT$ symmetrisch ist zur Spiegelachse CM, entsteht T auch durch Spiegelung von C an BD. Daher ist $ST = CS$. Setzt man das ein, lautet die zu zeigende Gleichung

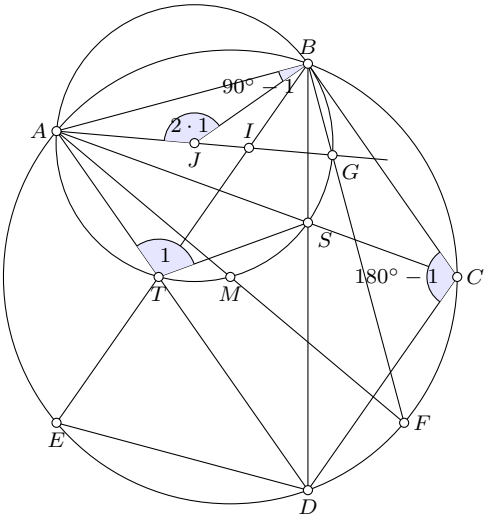
$$\frac{BC}{CS} = \frac{BD}{BC}$$

Wegen der Winkelgleichheit sind die Dreiecke BCD und BCS ähnlich, und die Gleichung ist erfüllt.

Alternativ-Lösung von einem Mitglied des Matheplaneten:
Es ist zu zeigen:
1. $ATSB$ ist Sehnenviereck.
2. $|\overline{ST}| = |\overline{SC}|$
3. CB ist Tangente an den Umkreis von $ATSB$.

zu 1. Die Dreiecke ABD und EDB sind nach sss kongruent. Damit folgt dann $\angle DAB = \angle EBD$. Beides sind Umfangswinkel über der Sehne TS.

zu 2. Offensichtlich ist $BC \parallel TD$ und $BT \parallel CD$. Da zudem $|\overline{BC}| = |\overline{CD}|$ ist, ist $BCDT$ eine Raute. Punkt S liegt dann auf der Diagonalen $\overline{BD}$ und es entstehen wieder kongruente Dreiecke.



zu 3. Wir zeichnen einen Durchmesser durch A, der Schnittpunkt mit dem Umkreis sei G. B liegt dann auf dem Thaleskreis und somit ist $\angle ABG = 90°$. Sei nun der Mittelpunkt des Umkreises J und $\angle BTA = \angle 1$. Nach Umfangswinkelsatz folgt dann $\angle BJA = 2 \cdot \angle 1$. Dreieck AJB ist gleichschenklig und somit folgt nach Basiswinkelsatz $\angle ABJ = 90° - \angle 1$.

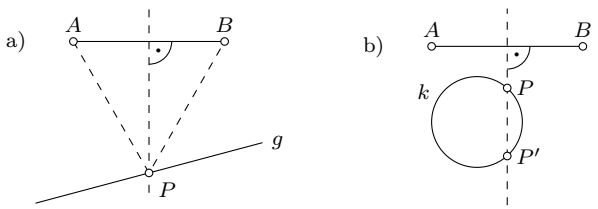
Viereck $TDBC$ ist eine Raute und $\angle DTB = 180° - \angle 1$ (Nebenwinkel). Nach Konstruktion ist $\angle DTB = \angle ABC$. Dann ist $\angle GBC = \angle 180° - \angle 1 - 90° = 90° - \angle 1$. Es ist somit $\angle GBC = ABJ$, womit $\angle JBC = 90°$ folgt.

VI.IV Konstruktionen

I Runde 1

Aufgabe 011015:
Es ist
a) auf einer gegebenen Geraden ein Punkt zu konstruieren, der von zwei gegebenen und nicht auf der Geraden liegenden Punkten A und B gleich weit entfernt ist;
b) auf einem gegebenen Kreis ein Punkt zu konstruieren, der von zwei gegebenen und nicht auf dem Kreis liegenden Punkten A und B gleich weit entfernt ist.
Ist dieser Punkt stets vorhanden? Gibt es nur einen solchen Punkt?

Lösung von Steffen Weber:

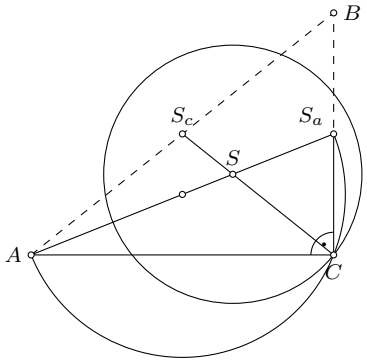


a) (Bild a) Der gesuchte Punkt P ist der Schnittpunkt der gegebenen Geraden g mit der Mittelsenkrechten von AB. Wenn diese parallel zu g verläuft, gibt es keine Lösung.

b) (Bild b) Wie oben. Wenn die Mittelsenkrechte mit dem gegebenen Kreis k keinen Punkt gemeinsam hat, gibt es keine Lösung. Ist sie Tangente, erhält man eine, ist sie Sekante, zwei Lösungen P und P'.

Aufgabe 031012:
Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck ($\gamma = 90°$) aus den Seitenhalbierenden s_a und s_c!
Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!

Lösung von Carsten Balleier:



Analysis:
Da das gesuchte Dreieck ABC rechtwinklig sein soll, muss das Dreieck AS_aC ebenfalls rechtwinklig sein, wenn S_a der Mittelpunkt von BC ist. Damit muss C auf dem Thaleskreis über AS_a liegen.
Andererseits müssen sich s_a und s_c gegenseitig im Verhältnis 2 : 1 teilen. Somit kennt man den Abstand von C zum Schnittpunkt S der beiden Seitenhalbierenden, woraus auch der Rest folgt.
Wichtig dabei ist, dass beide Bedingungen für C (Lage auf dem Thaleskreis und Abstand zu S) gleichzeitig erfüllbar sein müssen.

Konstruktion:
Man zeichne die Strecke AS_a mit der Länge s_a, über der man einen Halbkreis errichtet. Danach ergibt sich S als Teilpunkt bei der Teilung von AS_a im Verhältnis 2 : 1. Um S wird ein Kreis mit dem Radius $\frac{2s_c}{3}$ gezogen.
Der Schnittpunkt mit dem vorher gezeichneten Halbkreis ist – sofern er existiert – der gesuchte Punkt C. Damit der Schnittpunkt tatsächlich auftritt, muss

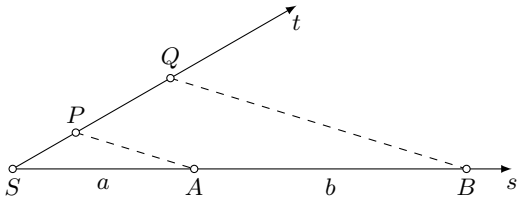
$$\frac{1}{3}s_a < \frac{2}{3}s_c < \frac{2}{3}s_a$$

gelten; andernfalls ist die Konstruktion nicht ausführbar.
Mit Hilfe der Länge s_c erhält man auf der Geraden CS den Punkt S_c. Der Punkt B ist dann der Schnittpunkt von AS_c und CS_a.

Aufgabe 121013:
Gegeben seien zwei Strecken mit den Längen a und b.

Konstruieren Sie eine Strecke der Länge $\dfrac{a \cdot b}{a + b}$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Man zeichne zwei von, einem Punkt S ausgehende, nicht auf derselben Gemden liegende Strahlen s, t.

Auf s trage man die Strecke SA der Länge a und auf deren Verlängerung über A hinaus die Strecke AB der Länge b ab.

Auf t trage man die Strecke SQ der Länge b ab.

Die Parallele durch A zu BQ schneidet t in einem Punkt P. Dann hat die Strecke SP die Länge $\frac{ab}{a+b}$.

Beweis: Nach Konstruktion ist $|SQ| = b$, $|SA| = a$, $|SB| = a + b$.. Ferner ist $AP \parallel BQ$. Daher folgt aus dem Strahlensatz

$$|SP| : |SQ| = |SA| : |SB|$$

d. h. $\frac{|SP|}{b} = \frac{a}{a+b}$ und somit $|SP| = \frac{ab}{a+b}$.

Aufgabe 241014:
Gegeben seien ein beliebiges Rechteck $ABCD$ und zwei auf der Seite AD liegende beliebige Punkte X und Y mit $X \neq A$, $Y \neq A$ und $X \neq Y$.

Konstruieren Sie alle diejenigen Kreise k, die die durch A und B gehende Gerade g berühren und durch die Punkte X und Y gehen! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Beweisen Sie, dass jeder Kreis k mit den geforderten Eigenschaften nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann und dass jeder nach dieser Beschreibung konstruierte Kreis k die geforderten Eigenschaften hat!

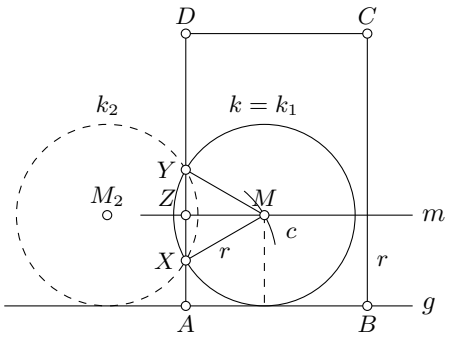
Wie viele solcher Kreise k gibt es (jeweils zu gegebenen $ABCD$, X und Y)?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Kreis k die geforderten Eigenschaften hat, so folgt:

Für den Mittelpunkt M und den Radius r von k gilt $MX = MY = r$, also liegt M auf der Mittelsenkrechten m von XY sowie auf dem Kreis c um X mit r.

Da die Gerade g berührt, hat M von g den Abstand r. Wegen $AB \perp AD$ steht g senkrecht auf der Geraden durch X,Y und ist folglich parallel zu m. Daher ist der Abstand r, den M von g hat, auch der Abstand der beiden Parallelen g, m voneinander. Da der Mittelpunkt Z von XY auf m liegt und $ZA \perp g$ ist, gilt somit auch $AZ =$.

II. Daher hat ein Kreis k nur dann die geforderten Eigenschaften, wenn er durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(1) Man konstruiert den Mittelpunkt Z und die Mittelsenkrechte m von XY.

(2) Man konstruiert den Kreis c um X mit $r = AZ$.

(3) Man wählt einen Schnittpunkt M von c mit m und konstruiert den Kreis k um M durch X.

III. Beweis, dass jeder so konstruierte Kreis k die geforderten Eigenschaften hat:

Nach (1) und (3) liegt M auf der Mittelsenkrechten m von XY, also gilt $MX = MY$. Daher geht der nach (3) durch X gehende Kreis k auch durch Y. Wegen $AB \perp AD$ ist M zu g parallel und hat den Abstand AZ von g. Somit hat auch M den Abstand AZ von g.

Andererseits ist der Radius MX von k gleich AZ, da M nach (3) auf dem in (2) konstruierten Kreis c um X mit AZ liegt.
Also berührt k die Gerade g.

IV. Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind wegen $X \neq Y$ und $Z \neq A$ (was aus X,$Y \neq A$ und der Lage von X, Y auf AD folgt) eindeutig ausführbar. Da X und Y auf der Seite AD des Rechtecks $ABCD$ liegen, aber nicht in A, liegt A auf der Verlängerung der Strecke XY, deren Mittelpunkt Z ist; also gilt $XZ = YZ < AZ$.

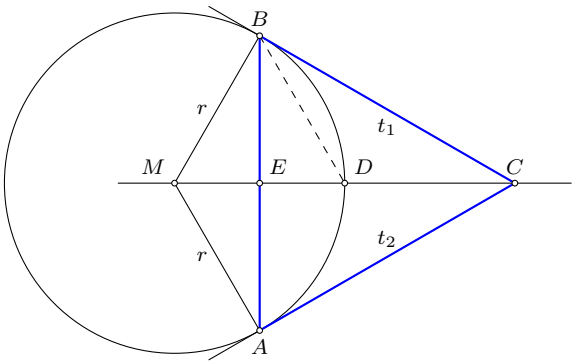
Der Punkt Z durch den die Gerade m geht, ist folglich ein innerer Punkt des in (2) konstruierten Kreises c. Daher schneidet m den Kreis c in zwei verschiedenen Punkten M_1, M_2; jeden von ihnen kann man in (3) als M wählen.

Somit gibt es genau zwei Kreise k_1, k_2 mit den geforderten Eigenschaften.

II Runde 2

Aufgabe V11024:
Zeichnen Sie einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm! An diesen Kreis sind zwei Tangenten so zu konstruieren, dass sie mit der Berührungssehne ein gleichseitiges Dreieck bilden.
Begründen Sie die Konstruktion!

Lösung von Steffen Polster:



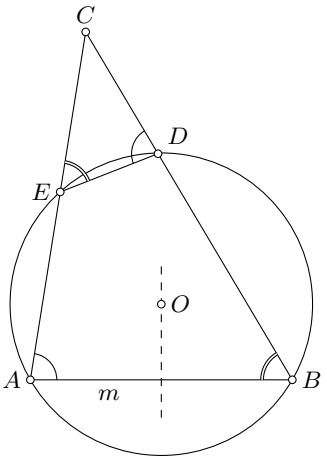
Behauptung: Das Dreieck ABC ist gleichseitig.

Beweis:
1. Winkel $\angle MBC$ ist 90° (Tangente-Berührungsradius).
2. Dreieck MDB ist gleichseitig, alle Seiten sind r, folglich sind auch alle Innenwinkel 60°.
3. Winkel $\angle MBC$ - Winkel $\angle MED$ = Winkel $\angle DEC = 30°$.
4. Das Dreieck CDB ist gleichschenklig. Folglich ist der Winkel $\angle BCD$ = Winkel $\angle DEC = 30°$.

Im $\triangle EBM$ treten die Winkel $\angle EMB = 60°$ (aus 2.), $\angle MBE = 30°$ (Basiswinkel in ABM) auf, folglich ist Winkel $\angle MBC$ - Winkel $\angle EBM$ = Winkel $\angle EBC = 60°$. Im Dreieck EBC ist der Winkel $\angle EBC = 60°$, der Winkel $BCE = 30°$ und der Winkel $\angle BEC = 90°$.
Die Strecke EC ist Symmetrieachse im Dreieck. Daraus folgt, dass es sich um ein gleichseitiges Dreieck handeln muss.

Aufgabe 011024:
Es ist ein beliebiges Dreieck zu zeichnen. Dieses Dreieck soll durch eine zu keiner der Dreieckseiten parallelen Geraden so geschnitten werden, dass das abgeschnittene dem ursprünglichen Dreieck ähnlich ist.
Die Konstruktion ist zu begründen!

Lösung von Eckard Specht:
Konstruktion:
(Bild) O. B. d. A. sei AB die kürzeste der Seiten des Dreiecks ABC.
Wir wählen auf der Mittelsenkrechten m der Seite AB einen Punkt O derart, dass ein Kreis mit Mittelpunkt O durch die Eckpunkte A und B geht und weiterhin noch die beiden anderen Seiten in den Punkten D bzw. E schneidet.
Das Dreieck DEC ist dann dem ursprünglichen Dreieck ähnlich. Die kürzeste Seite als Sehne des Kreises auszuwählen, garantiert dabei, dass die Schnittpunkte D und E tatsächlich existieren.



Beweis:
$ABDE$ ist ein Sehnenviereck, in dem sich gegenüberliegende Winkel stets zu einem Gestreckten ergänzen. Also gilt:

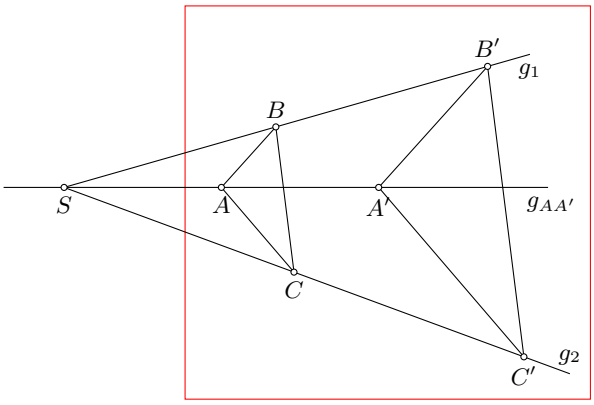
$$\angle CAB = 180° - \angle BDE = \angle CDE \qquad ; \qquad \angle CBA = 180° - \angle AED = \angle CED$$

Das abgeschnittene Dreieck DEC hat somit dieselben Innenwinkel wie das ursprüngliche Dreieck ABC und ist diesem daher ähnlich. Außerdem liegen sich gleiche Winkel stets gegenüber, so dass für alle nicht gleichschenkligen, also beliebigen Dreiecke $AB \nparallel ED$ gilt.

Aufgabe 061023:
Auf einem (ebenen) Zeichenblatt sind ein Punkt A und zwei nicht parallele Geraden g_1, g_2 gegeben, die nicht durch A gehen und deren Schnittpunkt S außerhalb des Zeichenblattes liegt.
Konstruieren Sie die Verbindungsgerade durch A und S, so dass die gesamte Konstruktion auf dem Zeichenblatt erfolgt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Analyse: Angenommen, ein Punkt A' ($\neq A$) des Zeichenblattes liege auf AS. Man wähle B auf g_1, C auf g_2 so, dass A, B, C nicht auf derselben Geraden liegen.
Die Parallelen durch A' zu AB bzw. AC schneiden g_1 bzw. g_2 in B' bzw. C'.

Folglich gilt nach dem Strahlensatz $SB : SB' = SA : SA' = SC : SC'$ und nach einer Umkehrung des Strahlensatzes $BC \parallel B'C'$. Daher kann die gesuchte Gerade nur diejenige sein, die sich durch folgendes Konstruktion ergibt:



Man wähle B auf g_1, C auf g_2 so, dass A, B, C nicht auf derselben Geraden liegen und zeichne eine beliebige, von BC verschiedene, Parallele zu BC.
Sie schneide g_1 in B', g_2 in C', Die Parallelen durch B' bzw. C' zu BA bzw. CA schneiden sich dann in einem Punkt A', und $g_{AA'}$ ist die gesuchte Gerade.

Beweis: Nach Konstruktion ist

$$SC : SC' = BC : B'C' \qquad \text{(Strahlensatz)}$$

$$= AC : A'C' \qquad (\text{da } \triangle ABC \sim \triangle A'B'C')$$

nach einer Umkehrung des Strahlensatzes geht also $g_{AA'}$ durch S.

Diskussion:
Da BC nicht zu g_2 oder G_1 parallel ist, gilt dasselbe für die gezeichnete Parallele, also sind B', C' eindeutig bestimmt. Da BA, CA nicht parallel sind, gilt dasselbe für ihre Parallelen durch B' bzw. C', also ist auch A' eindeutig bestimmt.

Da schließlich die Parallele zu BC von BC verschieden gezeichnet war, ist $B \neq B'$; $C' \neq C$; also wird auch $A' \neq A$. Somit ist auch der letzte Konstruktionsschritt eindeutig ausführbar.
Endlich kann durch geeignete Wahl von B, C und der Parallelen zu BC stets erreicht werden, dass B, C, B', C', A' auf den Zeichenblatt liegen. Auf einen exakten Beweis hierzu, wird hier verzichtet.

Aufgabe 121024:
a) Den Schülern einer Klasse wird die Aufgabe gestellt, $\sqrt{12}$ und $\sqrt{133}$ graphisch zu ermitteln.
Dafür sollen nur der Höhensatz oder der Kathetensatz oder beide Sätze (für jede der Wurzeln jeweils einer dieser beiden Sätze) benutzt werden. Ein Schüler löst beide Aufgaben an dem gleichen rechtwinkligen Dreieck.
Wie lauten alle Möglichkeiten, hierfür geeignete Maßzahlen p und q der Längen der Hypotenusenabschnitte zu wählen, so dass diese Maßzahlen p und q überdies rationale Zahlen sind?

b) Man beantworte die gleiche Frage für den Fall, dass $\sqrt{11}$ und $\sqrt{133}$ zu ermitteln waren.

Lösung von Steffen Polster:
Seien a, b, c, q, p, h die üblichen Bezeichnungen in einem rechtwinkligen Dreieck. Mit p,q ist auch c rational. Also sind für die Wurzeln nur die Strecken a, b, h möglich. Insbesondere gilt, dass $a^2+b^2 = c^2$, $a^2-h^2 = p^2$ und $b^2 - h^2 = q^2$ Quadrate rationaler Zahlen sind.

a) Da $\sqrt{133}^2 + \sqrt{12}^2 = 145$ keine Quadratzahl ist und $\sqrt{12} < \sqrt{133}$ gilt, bleibt nur die Möglichkeit $a = \sqrt{133}$, $h = \sqrt{12}$ (oder symmetrisch dazu $b = \sqrt{133}$). Das Gleichungssystem aus dem Höhen- und Kathetensatz

$$pq = 12p(p + q) = 133$$

lässt sich eindeutig lösen durch $p^2 = 121 \Rightarrow p = 11$ und $q = \frac{12}{11}$

b) Da $\sqrt{133}^2 - \sqrt{11}^2 = 122$ kein Quadrat ist, bleibt nur der Ansatz $a = \sqrt{133}$, $b = \sqrt{11}$. Durch Addition der beiden Kathetengleichungen

$$p(p + q) = 133q(p + q) = 11$$

erhalten wir $(p + q)^2 = 144 \Rightarrow p + q = 12$. Einsetzen der Summe ergibt $p = \frac{133}{12}$ und $q = \frac{11}{12}$.
Bemerkung: Wurzeln zweier rationaler Zahlen sind simultant konstruierbar, falls die Summe oder Differenz das Quadrat einer rationalen Zahl ist.

Aufgabe 131024:
Konstruieren Sie ein konvexes Sehnenviereck $ABCD$ aus $a = 10$ cm, $b = 8$ cm, $c = 7$ cm und $\alpha = 70°$!
Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die der Seite BC, c die der Seite CD und α die Größe des Winkels $\angle BAD$.

Lösung von cyrix:
Im Sehnenviereck ergänzen sich die gegenüberliegenden Winkel zu 180°, sodass der Winkel $\gamma = DCB = 110°$ betragen muss. So kann man das gesuchte Viereck wie folgt konstruieren:
1) Konstruiere einen Winkel von $\gamma = 110°$ (ggf. als Nebenwinkel eines gegebenen 70°-Winkels) und nenne den Scheitelpunkt C.

2) Trage auf dem einen Scheitel dieses Winkels die Streckenlänge b von C aus ab und erhalte den Punkt B, sowie analog auf dem anderen Schenkel des Winkels die Streckenlänge c von C aus und erhalte den Punkt D.

3) Man konstruiere den Umkreis k des Dreiecks $\triangle BCD$ (durch Schnitt der Mittelsenkrechten von zwei der Seiten dieses Dreiecks und Kreis um diesen Schnittpunkt durch einen der Eckpunkte).

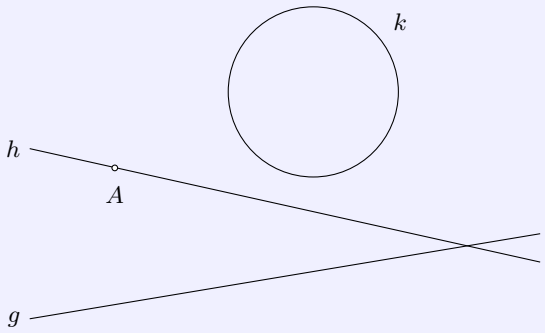
4) Der Kreis um B mit Radius a schneide k in zwei Punkten. Man wähle einen aus, sodass das Viereck $ABCD$ konvex ist. Dies ist dann das gesuchte.

Begründung:

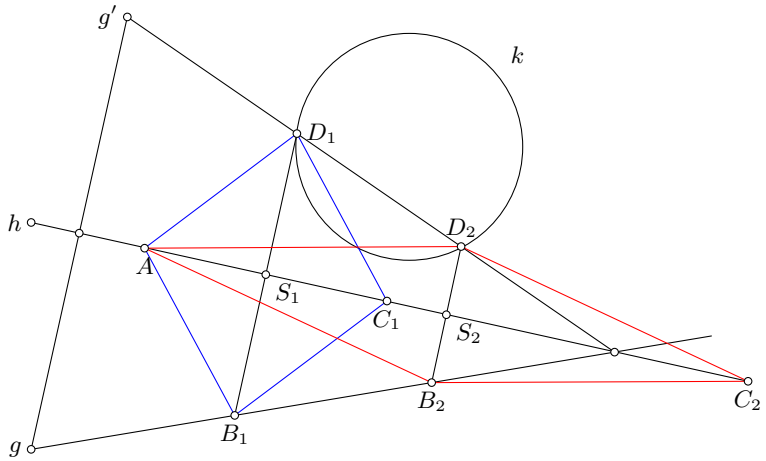
Da nach Konstruktion alle vier Punkte auf k liegen, ist $ABCD$ ein Sehnenviereck. Die Längen der Strecken AB, BC und CD haben nach Konstruktion (Schritte 4 bzw. 2) die geforderte Länge und aufgrund der Winkeleigenschaft von Sehnenvierecken hat mit Schritt 1) und der Vorüberlegung auch $\angle BAD$ als dem Winkel $\angle DCB$ gegenüberliegender Weinkel die gewünschte Größe.

Aufgabe 261024:
Auf dem Arbeitsblatt sind zwei Geraden g und h, ein Punkt A auf h und ein Kreis k eingetragen.
Untersuchen Sie, ob es einen Rhombus $ABCD$ gibt, der außer der gegebenen Ecke A seine Ecke B auf g, die Ecke C auf h und die Ecke D auf k hat!
Untersuchen Sie, ob es mehr als einen Rhombus mit diesen Eigenschaften gibt!
Wenn dies der Fall ist, sind dann alle derartigen Rhomben zueinander kongruent?

Hinweis:
Der Lösungstext (nicht auf dem Arbeitsblatt) soll sich auf genau diejenige gegenseitige Lage der gegebenen g, h, k und A beziehen, die auf dem Arbeitsblatt ersichtlich ist.
Das Arbeitsblatt (das für Konstruktionsschritte genutzt werden kann) ist abzugeben.
Arbeitsblatt:



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Konstruktion auf dem Arbeitsblatt:



Wenn es einen Rhombus ABC mit den genannten Eigenschaften gibt, so liegt seine Diagonale AC in der Geraden h, also geht B bei der Spiegelung an h in D über. Konstruiert man also diejenige Gerade g', die aus g durch die Spiegelung an h entsteht, so muss D ein Schnittpunkt von g' mit k sein.

Wie die Konstruktion auf dem Arbeitsblatt zeigt, schneiden sich g' und k in genau zwei Punkten D_1 und D_2. Für jeden dieser beiden Punkte gilt:

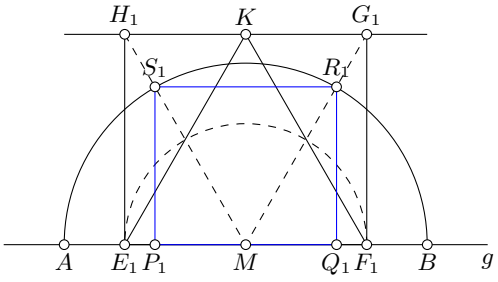
Spiegelt man ihn an h, so liegt der erhaltene Punkt B_1 bzw. B_2 wieder auf g. Ferner gilt: Schneidet h die Strecke B_1D_1 bzw. die Strecke B_2D_2 in S_1 bzw. S_2 und verlängert man die Strecke AS_1 bzw. AS_2 um ihre eigene Länge bis C_1 bzw. C_2, so liegt der erhaltene Punkt C_1 bzw. C_2 auf h, und sowohl $AB_1C_1D_1$ als auch $AB_2C_2D_2$ ist je ein Viereck, in dem die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen und einander halbieren, also je ein Rhombus.

Es gibt also mehr als einen Rhombus mit den genannten Eigenschaften; ferner wird (bei der auf dem Arbeitsblatt vorgegebenen Lage) offensichtlich $AD_1 \neq AD_2$, d. h., die beiden Rhomben ABC_1D_1 und ABC_2D_2 haben voneinander verschiedene Seitenlänge. Sie sind folglich nicht zueinander kongruent.

Aufgabe 281024:
Gegeben sei ein Halbkreis. Gesucht sind Vierecke, die die folgenden Bedingungen (1) bis (3) erfüllen:
(1) Zwei Eckpunkte des Vierecks liegen auf dem Durchmesser des Halbkreises, die beiden anderen Eckpunkte liegen auf dem Halbkreisbogen.
(2) Das Viereck ist ein Rechteck.
(3) Seine Seitenlängen verhalten sich wie $\sqrt{3} : 2$.
a) Beschreiben Sie eine Konstruktion, durch die man zwei verschiedene Vierecke $P_1Q_1R_1S_1$ und $P_2Q_2R_2S_2$ erhält!
b) Führen Sie die beschriebene Konstruktion aus!
c) Beweisen Sie, dass die nach Ihrer Beschreibung konstruierten Vierecke die Bedingungen (1) bis (3) erfüllen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der Durchmesser des Halbkreises sei AB, sein Mittelpunkt M, die Gerade durch A und B sei g, der Halbkreis h.
Man konstruiert zunächst folgendermaßen ein Rechteck $EFGH$: (4) Man konstruiert ein gleichseitiges Dreieck EFK mit beliebiger Seitenlänge.
(5) Die Parallele durch K zu EF schneidet die in E und F auf EF errichteten Senkrechten in h bzw. G.

Man konstruiert dann folgendermaßen ein Viereck $P_1Q_1R_1S_1$:
(6) Der Kreis um M mit $\frac{1}{2}EF$ schneidet g in E_1 und F_1; man konstruiert auf derjenigen Seite von g auf der h liegt, das zu $EFGH$ kongruente Rechteck $E_1F_1G_1H_1$.
(7) Die Strahlen aus M durch G_1 bzw. H_1 schneiden h in R_1 bzw. S_1; man konstruiert die Lote R_1Q_1 bzw. S_1P_1 von R_1 bzw. S_1 auf g.



Schließlich konstruiert man folgendermaßen ein Viereck $P_2Q_2R_2S_2$:

(8) Der Kreis um M mit $\frac{1}{2}FG$ schneidet g in F_2 und G_2; man konstruiert auf derjenigen Seite von g, auf der h liegt, fas zu $FGHE$ kongruente Rechteck $F_2G_2H_2E_2$. (9) Die Strahlen aus M durch H_2 bzw. E_2 schneiden h in R_2 bzw. S_2; man konstruiert die Lote R_2Q_2 bzw. S_2P_2 von R_2 bzw. S_2 auf g.

c) Beweis, dass $P_1Q_1R_1S_1$ die Bedingungen (1) bis (3) erfüllt:
Das nach (5) konstruierte Rechteck $EFGH$ hat als Seitenlänge FG die Höhenlänge des nach (4) konstruierten gleichseitigen Dreiecks EFK. Daher gilt

$$FG : EF = \frac{1}{2}\sqrt{3EF} : EF = \sqrt{3} : 2$$

Nach (6) ist $\angle ME_1H_1 = \angle MF_1G_1 = 90°$ und $E_1H_1)F_1G_1$ (Winkel bzw. Gegenseiten im Rechteck $E_1F_1G_1H_1$) sowie $ME_1 = MF_1 = \frac{1}{2}EF$. Damit folgt $\triangle ME_1H_1 \cong \triangle MF_1G_1$ 8sws), also $\angle E_1MH_1 = \angle F_1MG_1$.
Wegen (7) besagt das auch $\angle P_1MS_1 = \angle Q_1MR_1$.
Nach (7) liegen ferner P_1, Q_1 auf AB und R_1, S_1 auf h, also ist (1) erfüllt. Weiterhin folgt $\angle MP_1S_1 = \angle MQ_1R_1 = 90°$ und $MS_1 = MR_1$ (Radien von h). Also gilt $\triangle MP_1S_1 \cong \triangle MQ_1R_1$ (Innenwinkelsatz und wsw).
Damit folgt $P_1S_1 = Q_1R_1$ und $P_1Q_1R_1S_1$ ist als Rechteck nachgewiesen, erfüllt also (2).
Schließlich folgt aus dem Strahlensatz

$$Q_1R_1 : MQ_1 = F_1G_1 : MF_1$$

hiernach und wegen (6) gilt

$$Q_1R_1 : P_1Q_1 = F_1G_1 : E_1F_1 = FG : EF = \sqrt{3} : 2$$

also (3).
Entsprechend beweist man aus (8), (9): $P_2Q_2R_2S_2$ erfüllt (1), (2) und mit

$$P_2Q_2 : Q_2R_2 = FG : GH = \sqrt{3} : 2$$

auch (3).

III Runde 3

Aufgabe 041033:
Gegeben sind Strecken von den Längen $a = 5$, $b = 4$ und $c = 1$.
Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal den algebraischen Ausdruck

$$x = \frac{a^2 + b^2}{3c}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man setze $a^2 + b^2 = y^2$. Dann ist y mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks als Hypotenuse konstruierbar. Aus $x = \frac{y^2}{3c}$ erhält man $x \cdot 3c = y^2$. Dann ist x nach dem Höhensatz konstruierbar.

Aufgabe 051032:
a) Konstruieren Sie einen Rhombus $ABCD$ aus $e + f$ und α! Dabei bedeutet e die Länge der Diagonalen AC, f die Länge der Diagonalen BD und α das Maß des Winkels $\angle DAB$.
b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Lösung von cyrix:

1) Man konstruiere zwei Strahlen, die von A ausgehen und den Winkel α einschließen.

2) Auf dem ersten Strahl markiere man einen beliebigen, von A verschiedenen Punkt B'.

3) Der Schnittpunkt des zweiten Strahls mit dem Kreis um A durch B' heiße D'.

4) Der Schnittpunkt der Parallelen zu AB' durch D' mit der Parallelen zu AD' durch B' heiße C'.

5) Die Länge der Strecke $B'D'$ wird auf dem Strahl AC' an C' in die Richtung angetragen, in der A nicht liegt. Der entstehende zweite Endpunkt dieser Strecke sei S'.

6) Auf dem Strahl AC' wird zusätzlich noch der Punkt S markiert, sodass die Strecke AS die Länge $e + f$ habe.

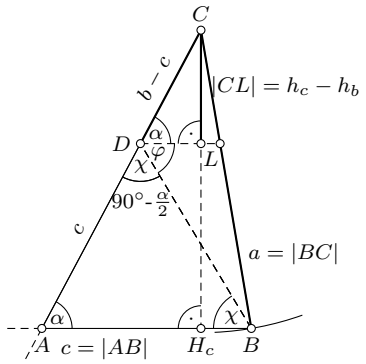
7) Die Parallele zu $B'S'$ durch S schneide die Gerade AB' im Punkt B; die Parallele zu $D'S'$ durch S die Gerade AD' in D; und die Parallelen zu AB durch D sowie zu AD durch B sich in C.

Dann ist $ABCD$ der gesuchte Rhombus.

Beweis: Zuerst ist nach Konstruktion $AB'C'D'$ ein Parallelogramm (siehe Schritt 4)), wobei zwei benachbarte Seiten gleichlang sind (siehe Schritt 3)); also ein Rhombus.
Weiterhin hat es bei A den Innenwinkel α, ist also ähnlich dem gesuchten Viereck. Also gibt es eine positive rationale Zahl k, sodass das gesuchte Viereck durch Streckung um den Faktor k mit Zentrum A aus dem Rhombus $AB'C'D'$ hervorgeht.
Dies gilt insbesondere auch für die Diagonalen und deren Summe, sodass sich der Streckungsfaktor k ergibt als $\frac{e+f}{|AC'|+|B'D'|} = \frac{|AS|}{|AS'|}$. Nach den Strahlensätzen ist dann aber auch $k = \frac{|AB|}{|AB'|}$ sowie $k = \frac{|AD|}{|AD'|}$.
Abschließend wird C wieder als vierter Parallelogrammpunkt konstruiert, sodass das so konstruierte Viereck $ABCD$ wieder ein Rhombus mit Innenwinkel α ist, dessen Diagonalensumme aber nun die gewünschte Größe hat.

Aufgabe 071036:
a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $h_c - h_b = 3$ cm; $b - c = 3{,}5$ cm und $a = 8$ cm!
Dabei ist h_c die Länge der zur Seite AB gehörenden Höhe, h_b die Länge der zur Seite AC gehörenden Höhe und a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC und c die der Seite AB.
b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



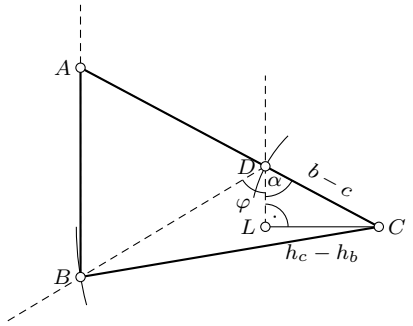
Planfigur und Konstruktion
Trägt man auf der Seite $b = |AC|$ die Strecke c ab, Endpunkt sei D, erhält man die gegebene Strecke $b - c = |DC|$.
Legt man durch D eine Parallele zu $|AB|$ und fällt von C das Lot auf die Parallele, Lotfußpunkt sei L, dann erhält man eine Strecke $|CL| = h_c - h_b$, die gleich der gegebenen Strecke $h_c - h_b$ ist.
Beweis: Nach der Strahlensatzfigur mit Scheitelpunkt C ist

$$\frac{|CL|}{h_c} = \frac{b-c}{b} = 1 - \frac{c}{b} \;\Leftrightarrow\; |CL| = h_c - \frac{ch_c}{b} = h_c - \frac{bh_b}{b} = h_c - h_b$$

da nach der Flächenformel $2F = ah_a = bh_b = ch_c$ gilt.

Damit ist mit DLC ein rechtwinkliges Dreieck gegeben, mit der Hypotenuse $b - c$ und einer Kathete $h_c - h_b$.
Mit ABD ist ein gleichschenkliges Dreieck mit Spitze A und den Schenkeln c und entsprechend dem Basiswinkel $\chi = \dfrac{180° - \alpha}{2} = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$ gegebenen.
Für den Konstruktionswinkel φ bei D ist $\varphi = 180° - \alpha - \left(90° - \dfrac{\alpha}{2}\right) = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$, also $\varphi = \chi$. Die Ecke B liegt also auf einer Geraden, die den Supplementwinkel $\sphericalangle ADL$ von $\alpha = \sphericalangle CDL$ halbiert sowie auf einem Kreis (C,a) beschrieben um C vom Radius a.

Die Ecke A liegt auf einer Parallelen zu $|DK|$ durch B sowie auf derjenigen Geraden durch $|CD|$.



Damit ergibt sich folgende Konstruktion:
(1) Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks DLC.
(1a) Lege durch $h_c - h_b = |CL|$ die Punkte C und L fest.
(1b) Errichte eine Senkrechte zu $|CL|$ in L.
Beschreibe einen Kreis $(C,b-c)$ um C vom Radius $b-c$. Schnittpunkt des Kreises mit der Senkrechten ist der Punkt D.
(2) Konstruktion des gleichschenkligen Dreiecks ABD.
(2a) Lege eine Gerade durch $|CD|$ und halbiere den Supplementwinkel von $\alpha = \sphericalangle LDC$, um den Winkel φ zu erhalten.
(2b) Lege eine Gerade durch D so, dass sie mit $|LD|$ den Konstruktionswinkel $\varphi = 90° - \frac{\alpha}{2}$ einschließt.
Beschreibe einen Kreis (C,a) um C vom Radius a. Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden ist die Ecke B.

(2c) Lege eine Parallele zu $|DL|$ durch B.
Schnittpunkt der Parallelen mit derjenigen Geraden durch $|CD|$ ist die Ecke A.

Bedingungen für die Konstruktion
Man liest aus der Konstruktionsskizze, dass $b - c > h_c - h_b$ sein muss, da $b - c$ Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks DLC ist.
Ferner muss $a > b - c$ sein, da der Punkt B sonst innerhalb des Dreiecks DLC liegt.

Aufgabe 111036:
Konstruieren Sie ein Dreieck $\triangle ABC$ aus $a - b = 3$ cm, $\alpha = 70°$ und $\beta = 50°$!
Dabei seien a die Länge der Seite BC, b die der Seite AC, α die Größe des Winkels $\angle BAC$ und β die des Winkels $\angle ABC$.
Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

Lösung von cyrix:
Durch die Angabe zweier Innenwinkel ist das Dreieck bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmt. Streckt man es nun noch um einen geeigneten Faktor, sodass auch die Bedingung an die Differenz der beiden Seitenlängen erfüllt ist, hat man das bis auf Kongruenz eindeutig bestimmte gesuchte Dreieck konstruiert:

1) Man wähle eine beliebige, echte Strecke $A'B$, trage in A' α und in B β in die gleiche Halbebene an, sodass sich ein Schnittpunkt der beiden freien Schenkel ergibt, der mit C' bezeichnet sei.

2) Man trage die Strecke $A'C'$ von C' auf der Geraden $C'B$ in Richtung B ab und erhalte damit den Punkt S'. Auf der gleichen Geraden trage man von B aus in Richtung C' die Streckenlänge $a - b$ ab und erhalte den Punkt S.

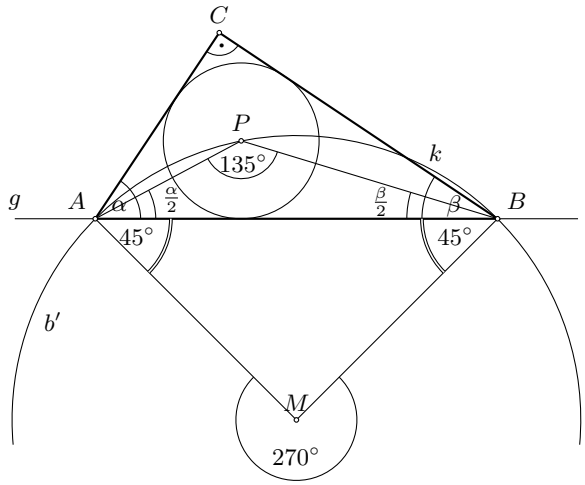
3) Die Parallele zu $A'S'$ durch S schneide die Gerade BA' in A und die Parallele zu $C'S'$ durch S schneide die Gerade BC' in C.

Dann ist das Dreieck $\triangle ABC$ das zu konstruierende.

Begründung:
Nach Konstruktion ist das Dreieck $\triangle A'BC'$ ähnlich zum zu konstruierenden Dreieck $\triangle ABC$. Also gibt es eine positive reelle Zahl k, sodass $k = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, also auch $= \frac{a-b}{a'-b'}$ gilt, wobei a' und b' die Längen der Strecken BC' bzw. $A'C'$ seien.
Weiterhin gilt nach Konstruktionsschritt 2), dass $|BS'| = a' - b'$ und $|BS| = a - b$ ist.
Nach Strahlensatz gilt nun $\frac{|AB|}{|A'B|} = \frac{a-b}{a'-b'}$ und analog $\frac{|CB|}{|C'B|} = \frac{a-b}{a'-b'}$. Damit geht das Dreieck $\triangle ABC$ aus dem Dreieck $\triangle A'BC'$ durch zentrische Streckung mit Zentrum B hervor, wobei der Streckungsfaktor genau so gewählt ist, dass die Differenz der Streckenlängen von BC und AC genau den angegebenen Wert hat.

Aufgabe 151032:
Gegeben sei eine Strecke AB mit $AB = 5$ cm.
Man konstruiere die Menge aller Punkte P, die die Eigenschaft haben, Inkreismittelpunkt je eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit der Hypotenuse AB zu sein!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Angenommen, P sei der Inkreismittelpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit der Hypotenuse AB. Dann liegt P nicht auf der Geraden g durch A, B. Sind α, β die Innenwinkelgrößen bei A bzw. B im Dreieck ABC, so ist

$$\alpha + \beta = 90^\circ \qquad \text{und}$$

$$\angle BAP = \frac{\alpha}{2}, \quad \angle ABP = \frac{\beta}{2}$$

also $\angle BAP + \angle ABP = 45^\circ$ und daher $\angle APB = 135^\circ$.
Ist M der Mittelpunkt des Umkreises k von $\triangle ABP$, so hat folglich derjenige Zentriwinkel, der zu dem P nicht enthaltenden Bogen $b' = \overset{\frown}{AB}$ von k gehört, die Größe 270°.

Also ist $\triangle ABM$ ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB, folglich gilt $\angle BAM = \angle ABM = 45^\circ$, und da zu b' ein überstumpfer Zentriwinkel gehört, liegt M auf derselben Seite von g wie b', d. h. nicht auf derselben Seite von g wie P (siehe Abbildung).

Daher kann ein Punkt P nur dann der gesuchten Menge V angehören, wenn diese durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man zeichnet die Gerade g durch A und B. Sie teilt die Ebene in zwei Halbebenen ε_1 und ε_2.

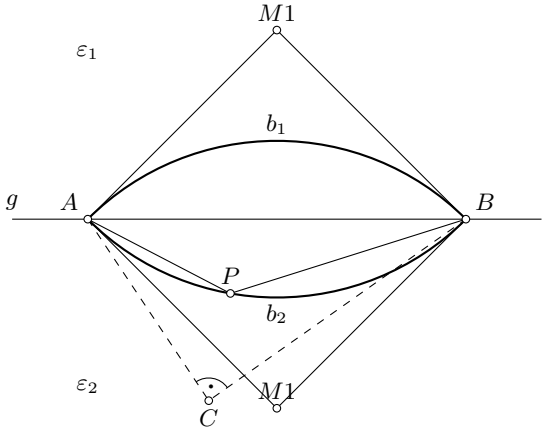
(2) Man trägt an AB in A und B je einen Winkel von 45° so an, dass dessen freie Schenkel in ε_1 verlaufen und sich in M_1 schneiden.

(3) Man zeichnet den Kreis um M_1 mit dem Radius $M_1A = M_1B$. Der in ε_2 liegende Bogen dieses Kreises sei b_1 genannt.

(4) Man trägt an AB in A und B je einen Winkel von 45° so an, dass dessen freie Schenkel in ε_2 verlaufen und sich in M_2 schneiden.

(5) Man zeichnet den Kreis um M_2 mit dem Radius $M_2A = M_2B$. Der in ε_1 liegende Bogen dieses Kreises sei b_2 genannt.

(6) Die Vereinigungsmenge der beiden Kreisbögen b_1 und b_2 mit Ausnahme der Punkte A und B sei mit V bezeichnet.



III. Jeder Punkt P der so konstruierten Menge V gehört der gesuchten Menge an.

Beweis:
Nach Konstruktion sind die Dreiecke ABM_1 und ABM_2 gleichschenklig-rechtwinklig mit der Hypotenuse AB.
Liegt P $(\neq A, B)$ auf b_1, so ist $\angle APB$ ein in dem Kreis k_1 um M_1 mit $M_1A = M_1B$ liegender Peripheriewinkel; und der Zentriwinkel, der zu dem P nicht enthaltenden, d. h. in ε_1 gelegenen Bogen $b_1' = \overset{\frown}{AB}$ von k_1 gehört, ist überstumpf, da auch M_1 in ε_1 liegt.

Somit hat dieser Zentriwinkel die Größe 270°, folglich gilt $\angle SPB = 135°$, also $\angle BAP + \angle ABP = 45°$. Trägt man an AB in A und B je einen Winkel der Größe $2 \cdot \angle BAP$ bzw. $2 \cdot \angle ABP$ so an, dass die freien Schenkel in ε_2 verlaufen, so schneiden sich diese folglich in einem Punkt C, für den $\angle BAC + \angle ABC = 90°$, also $\angle ACB = 90°$ gilt.

In dem entstandenen rechtwinkligen Dreieck ABC mit AB als Hypotenuse ist P der Schnittpunkt zweier Innenwinkelhalbierender, also der Inkreismittelpunkt. Daher gehört P der gesuchten Menge an.

IV. Analog beweist man, dass jeder Punkt P ($\neq A,B$) auf b_2 der gesuchten Menge angehört.
Alle Konstruktionsschritte sind eindeutig ausführbar.

Aufgabe 161036:
Konstruieren Sie ein Drachenviereck $ABCD$ mit $AD = CD$, $AB = CB$ aus $a + b = 12$ cm, $f = 9$ cm und $\beta + \delta = 172°$!
Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die Länge der Seite AD, f die Länge der Diagonalen BD, β die Größe des Winkels $\angle CBA$ und δ die Größe des Winkels $\angle ADC$.
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob ein solches Drachenviereck existiert, und beweisen Sie, dass alle Drachenvierecke, die den Bedingungen der Aufgabe genügen, zueinander kongruent sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, $ABCD$ sei ein Viereck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Dann gilt $AB = BC = a$ und $AD = CD = b$. Auf Grund der Symmetrieeigenschaften des Drachenvierecks halbiert die Diagonale BD die Winkel $\angle CBA$ und $\angle ADC$.
Der Kreis um A mit b schneide die Verlängerung von BA über A hinaus in E. Nach dem Satz über Außenwinkel eines Dreiecks gilt dann

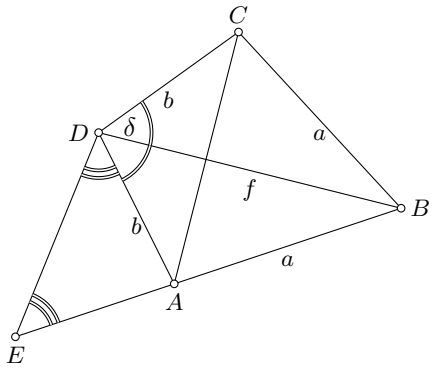
$$\angle DAE = \frac{1}{2}(\beta + \delta)$$

Da $AE = AD$ nach Konstruktion gilt, ist $BE = a + b$. Ferner ist das Dreieck ADE gleichschenklig. Für seine Basiswinkel gilt folglich:

$$\angle AED = \angle EDA = \frac{1}{2}\left(180° - \frac{1}{2}(\beta + \delta)\right) = 90° - \frac{1}{4}(\beta + \delta)$$

Daraus ergibt sich, dass das Viereck $ABCD$ nur dann den Bedingungen der Aufgabe entspricht, wenn man es durch folgende Konstruktion erhalten kann.

(1) Man zeichnet eine Strecke BE mit der Länge $a + b$.
(2) Man trägt an EB in E einen Winkel der Größe $90° - \frac{1}{4}(\beta + \delta)$ an.



(3) Man zeichnet den Kreis mit f um B. Schneidet der Kreis den freien Schenkel des Winkels, so ist D einer der Schnittpunkte.

(4) Man trägt an DE in D einen Winkel der Größe $90° - \frac{1}{4}(\beta + \delta)$ an. Schneidet sein freier Schenkel die Strecke BE, so sei A der Schnittpunkt.
(5) Man zeichne die Kreise um D mit DA und um B mit BA. Der Schnittpunkte dieser Kreise in der durch BD bestimmten Halbebene, in der A nicht liegt, sei C genannt.

Jedes so konstruierte Viereck $ABCD$ entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:
Nach Konstruktion gilt $BD = f$. Da an ED gleichgroße Winkel angetragen wurden, folgt, dass das Dreieck EDA gleichschenklig ist (*).
Nach Konstruktion, Innenwinkelsatz und Außenwinkelsatz eines Dreiecks ergeben sich die folgenden Winkelgrößen:

$$\angle EAD = \frac{1}{2}(\beta + \delta) \qquad \text{und} \qquad \angle ABD + \angle ADB = \frac{1}{2}(\beta + \delta)$$

Nach Konstruktion sind die Dreiecke BDA und BDC symmetrisch bezüglich BD. (**) Daraus folgt:

$$\angle CBA + \angle ADC = \beta + \delta$$

Aus (**) folgt, dass das Viereck $ABCD$ ein Drachenviereck mit $AD = DC$, $AB = CB$ ist.

Die Konstruktionsschritte (1) und (2) sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Nun gilt laut Aufgabenstellung $f < a + b$, der Winkel $\angle AED$ liegt also der kleineren Seite gegenüber. Daher ist (3) entweder zweideutig oder eindeutig oder nicht ausführbar.

Mit den gegebenen Größen erhält man bei der Konstruktion des Dreiecks ADE zwei verschiedene Punkte D_1 und D_2. Danach sind die Konstruktionsschritte (4) und (5) jeweils eindeutig ausführbar.
Somit erhält man die beiden Drachenvierecke $A_1BC_1D_1$ und $C_2D_2A_2B$.
Sie sind zueinander (ungleichsinnig) kongruent, denn es gilt:

$BD_1 = BD_2 = f$, $\angle BA_1D_1 = \angle D_2A_2B$, wegen $A_1D_1 \parallel A_2D_2$ als Stufenwinkel, weiter gilt $\angle BED_1 + \angle EBD_1 = \angle D_2D_1B$ (Außenwinkelsatz) sowie $\angle ED_1A_2 + \angle A_2D_2B = \angle D_1D_2B$, woraus wegen $\angle D_2D_1B = \angle D_1D_2B$ dann $\angle A_1BD_1 = \angle A_2D_2B$ folgt.

Aufgabe 181036:
Gegeben seien drei Punkte M, S und C, wobei $CM = 6$ cm, $CS = 7$ cm und $MS = 1{,}5$ cm gelte.
Man konstruiere zwei Punkte A und B so, dass sie zusammen mit C ein Dreieck ABC bilden, das den gegebenen Punkt M als Mittelpunkt seines Umkreises und den gegebenen Punkt S als Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden besitzt.
Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob ein solches Dreieck ABC eindeutig durch die gegebenen Punkte M, S, C bestimmt ist!

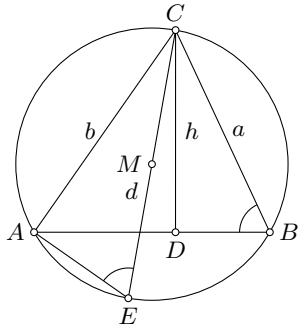
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, ein Dreieck ABC erfüllt die Bedingungen der Aufgabe. Ist H der Mittelpunkt von AB, so teilt S die Seitenhalbierende CH im Verhältnis $1 : 2$, also liegt H im Abstand $HS = \frac{1}{2}SC$ auf der Verlängerung von CS.
Ferner liegt M als Mittelpunkt des Umkreises auf der Mittelsenkrechten von AB. MH verläuft also senkrecht zu AB.
Schließlich liegen A und B auf dem Umkreis, d. h. dem Kreis um M durch C. Daraus folgt, dass ein Dreieck nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügt, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

II. (1) Man trägt an CS in S auf der Verlängerung von CS über S hinaus die Strecke der Länge $\frac{1}{2}CS$ an; ihr zweiter Endpunkt sei H.

(2) Man konstruiert die Gerade durch H, die auf MH senkrecht steht.
(3) Man zeichnet den Kreis um M durch C. Schneidet er die nach (2) konstruierte Gerade in zwei Punkten, so seien diese A und B genannt.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe genügt:

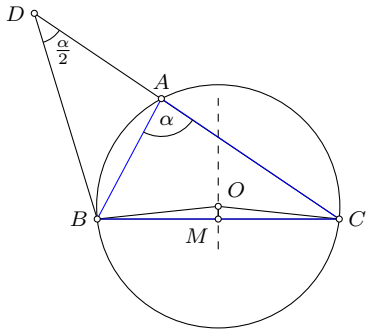
M ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC, da A, B und C nach Konstruktion auf ein und demselben Kreis um M liegen. Ferner gilt nach Konstruktion $MA = MB$ und $\angle AHM = \angle BHM = 90°$, also ist $\triangle AHM \cong \triangle BHM$ (Kongruenzsatz ssw; dieser ist anwendbar, da $\angle AHM, \angle BHM$ als rechter Winkel jeweils der längsten Dreieckseite gegenüberliegen).
Somit gilt $AH = BH$, folglich ist CH Seitenhalbierende im Dreieck ABC. Da sie nach Konstruktion durch S im Verhältnis $HS : SC = 1 : 2$ geteilt wird, ist S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks ABC.



IV. Konstruktionsschritte (1) und (2) sind eindeutig ausführbar. Die Konstruktion ergibt ferner, dass H im Innern des nach (3) konstruierten Kreises liegt. Also schneidet die in (2) konstruierte Gerade diesen Kreis in zwei Punkten.
Da schließlich AB senkrecht zu MH verläuft und $\angle MHC < 90°$ ist, liegt C nicht auf der Geraden durch A und B. Also existiert zu den gegebenen Punkten M, S, C genau ein Dreieck ABC, das den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgabe 201036:
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC, in dem die Längen a, b, c der Seiten BC, CA, AB und die Größen β, γ der Winkel $\angle ABC$, $\angle BCA$ die Bedingungen $a = 8$ cm, $b + c = 12$ cm, $\beta + \gamma = 100°$ erfüllen!
Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion!
Beweisen Sie, dass alle Dreiecke, die diesen Bedingungen genügen, einander kongruent sind!
Hinweis:
In dieser Aufgabe werden auch Dreiecke ABC, $A'B'C'$ als „einander kongruent“ bezeichnet, bei denen A', B', C' in irgendeiner anderen Reihenfolge mit A, B, C zur Deckung gebracht werden können.

Lösung von Steffen Polster:



Analyse:
Ist die Winkelsumme $\beta + \gamma$ bekannt, so ergibt sich nach dem Innenwinkelsatz für den Winkel $\alpha = 80°$. Damit sind von dem gesuchten Dreieck die Stücke Seite a, die Seitensumme $b + c$ und der Winkel α bekannt.

Angenommen das Dreieck ABC ist gegeben, so sei der Punkt D die Verlängerung von CA, so dass $|CD| = c + b$ ist. Dann ergibt sich im Dreieck ABD der Winkel δ bei D zu

$$\delta = \frac{1}{2}(180° - (180° - \alpha)) = \frac{1}{2}\alpha$$

Der Winkel α ist Peripheriewinkel des Umkreises von ABC über der Sehne BC. Damit ist der Punkt A Schnittpunkt des Umkreisbogens BC mit der Strecke CD.

Konstruktion:
1. Das Dreieck BCD ist somit nach dem Kongruenzsatz SSW (Seiten a und $b+c$, Innenwinkel $\frac{\alpha}{2}$) konstruierbar.
2. Über BC wird ein gleichschenkliges Dreieck BCO konstruiert, für das der Winkel $\angle BAO = 10°$ ist. Damit wird der Winkel $\angle AOB = 160°$. Der Kreis um O mit dem Radius OA schneidet dann die Strecke CD außer in C in dem gesuchten Punkt A.

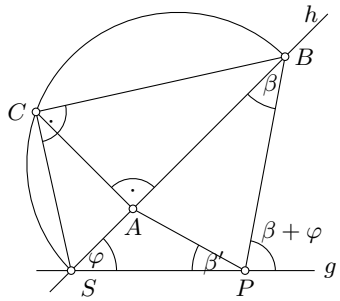
Der 1. Konstruktionsschritt ist im Sinne der Aufgabenstellung nach Kongruenzsatz SSW eindeutig ausführbar.
Die Konstruktion des Umkreises des Dreiecks ABC ist nach dem 2. Konstruktionsschritt ebenfalls eindeutig ausführbar.
Als Schnittpunkt des Umkreises mit der Strecke CD entsteht genau ein Punkt A. A liegt dann auf dem Kreis um O mit einem Peripheriewinkel gleich dem halben Zentriwinkel $\angle AOB$. Damit ist $\alpha = 80°$.
Das Dreieck ABC ist damit, bis auf Kongruenz, eindeutig bestimmt.

Aufgabe 261033:
Über eine Gerade h und drei Punkte S, A, B auf h wird vorausgesetzt, dass A zwischen S und B liegt.
Ferner wird über eine Gerade $g \neq h$ vorausgesetzt, dass sie h in S schneidet.
Gesucht sind alle diejenigen Punkte P, die die folgenden Bedingungen a) und b) erfüllen:
a) Der Punkt P liegt auf g.
b) Der Innenwinkel $\angle SBP$ im Dreieck SBP hat dieselbe Größe wie einer der Winkel, den AP mit g bildet.
(I) Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn ein Punkt P die Bedingungen a), b) erfüllt, dann kann er (aus voraussetzungsgemäß gegebenen h, g, S, A, B) durch eine Konstruktion erhalten werden.
(II) Beschreiben Sie eine Konstruktion, für die die Aussage (I) zutrifft!
(III) Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn ein Punkt P nach der Beschreibung (II) konstruiert wird, dann erfüllt er die Bedingungen a), b).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (a), (b) erfüllt (Abbildung), so folgt: Ist β die Größe des Innenwinkels $\angle SBP$ im Dreieck SBP, β' die Größe des Innenwinkels $\angle SPA$ im Dreieck SPA sowie φ die Größe des gemeinsamen Innenwinkels $\angle PSA = \angle PSB$ (1) in den Dreiecken SPA, SBP so ist

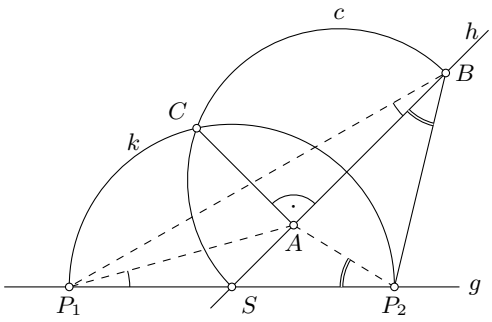
$$\beta < \beta + \varphi < 180° - \beta'$$

Also kann die Bedingung (b) (nicht mit $\beta = 180° - \beta'$, sondern) nur mit $\beta = \beta'$ (2) erfüllt sein.



Aus (1) und (2) folgt $\triangle SPA \sim \triangle SBP$ und daraus $PS : AS = BS : PS$, also $PS^2 = AS \cdot BS$. Daher gilt nach dem Kathetensatz $PS = CS$ (3) für einen Punkt C, der so gelegen ist, dass SBC ein rechtwinkliges Dreieck (4) ist, das SB als Hypotenuse (5) und darauf A als Höhenfußpunkt (6) hat.

Nach der Umkehrung des Thalessatzes folgt aus (4), (5): C liegt auf dem Kreis, der SB als Durchmesser hat.
Hiernach und nach (6), (3) ergibt sich, dass P ein Punkt ist, der durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:



(II) Konstruktionsbeschreibung:
(7) Man konstruiert den Kreis c der SB als Durchmesser hat.
(8) Man errichtet in A die Senkrechte auf SB. Einen der Punkte, in denen sie c schneidet, bezeichnet man mit C.
(9) Man konstruiert den Kreis k um S mit dem Radius CS. Jeder der beiden Punkte P_1, P_2, in denen er g schneidet, kann als Punkt P gewählt werden.

(III) Wenn ein Punkt P nach dieser Beschreibung konstruiert wird, so folgt (Abbildung mit $P = P_1$ oder $P = P_2$):
Nach (9) liegt P auf g, also ist (a) erfüllt.
Nach (7), (8) und dem Thalessatz ist SBC ein rechtwinkliges Dreieck, das SB als Hypotenuse hat. Nach (8) ist A der Höhenfußpunkt auf der Hypotenuse. Also gilt nach dem Kathetensatz

$$CS^2 = AS \cdot BS$$

Hiernach und nach (9) ist $PS^2 = AS \cdot BS$ also

$$PS : AS = BS : PS$$

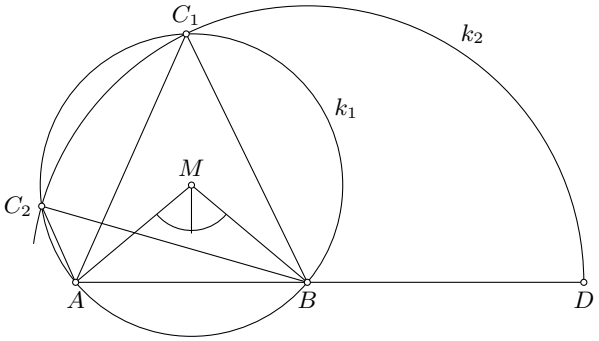
Hieraus und aus $\angle PSA = \angle PSB$ folgt $\triangle SPA \sim \triangle SBP$ und daher $\angle SBP = \angle SPA$, und hiermit ist auch (b) erfüllt.

Aufgabe 281035:
Gegeben seien die Streckenlängen $r = 5$ cm, $s = 16{,}8$ cm und die Winkelgröße $\gamma = 50°$. Gesucht sind Dreiecke ABC, die den folgenden Bedingungen genügen:
(1) Der Umkreis des Dreiecks ABC hat den Radius r.
(2) Die Seitenlänge $c = AB$ und $a = BC$ haben die Summe $c + a = s$.
(3) Der Winkel $\angle ACB$ hat die Größe γ.
I. Beweisen Sie, dass jedes Dreieck ABC, das die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, aus den gegebenen r, s, γ konstruiert werden kann!
II. Beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
III. Beweisen Sie, dass jedes Dreieck, das nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, den Bedingungen (1), (2), (3) genügt!
IV. Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck oder bis auf Kongruenz genau eine andere Anzahl von Dreiecken der verlangten Art gibt, und ermitteln Sie im letztgenanten Fall diese Zahl!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Wenn ein Dreieck ABC die genannten Bedingungen erfüllt, so folgt:
Für den Mittelpunkt M des Umkreises gilt nach (1): $MA = MB = r$, sowie nach (3) und dem Zentri-Peripheriewinkelsatz $\angle AMB = 2\gamma$.

Der Punkt C liegt einerseits auf dem Umkreis k_1, andererseits auf dem Kreis k_2 um B mit dem Radius a; dabei gilt nach (2) $a = s - AB$.

Damit ist bewiesen, dass jedes Dreieck, das (1), (2), (3) erfüllt, nach folgender Beschreibung konstruiert werden kann (siehe Abbildung):



II. 1. Man konstruiert einen Winkel der Größe 2γ; sein Schenkel sei M.
2. Man konstruiert den Kreis k_1 um M mit r, er schneidet die Schenkel des in 1. konstruierten Winkels in A bzw. B.
3. Man konstruiert die Länge $a = s - AB$ (z. B. indem man den Kreis um A mit s konstruiert, ihn mit dem von A aus durch B gehenden Strahls zum Schnitt D bringt und damit $a = BC$ erhält).
4. Man konstruiert den Kreis k_2 um B mit a. Er schneidet den Kreis k_1 in zwei Punkten C_1, C_2; jeder von ihnen kann als Endpunkt C in einem damit konstruierten Dreieck ABC genommen werden.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Dreiec ABC den Bedingungen (1), (2), (3) genügt:
Nach Konstruktionsschritt 2. und 4. liegen A, B und C_1 als auch C_2 auf einem Kreis mit dem Radius r, also ist (1) erfüllt. Nach Konstruktionsschritt 3. und 4. gilt (wieder sowohl für $C = C_1$ als auch für $C = C_2$) $BC = s - AB$, also $AB + BC = s$, d. h., (2) ist erfüllt.
Nach Konstruktionsschritt 1., 2. und 4. und dem Zentri-Peripheriewinkelsatz gilt auch $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AMB = \gamma$, also (3).

IV. Die Konstruktionsschritte 1., 2., 3. sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Konstruktionsschritt 4. führt, wie oben bemerkt, auf zwei Dreiecke ABC_1, ABC_2. Für sie gilt $\angle ABC_1 \neq \angle ABC_2$, also sind $\triangle ABC_1$ und $\triangle ABC_2$ nicht zueinander kongruent. Damit ist bewiesen:
Es gibt bis auf Kongruenz genau zwei Dreiecke der verlangten Art.

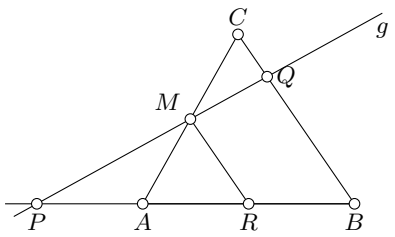
Aufgabe 291035:
Man begründe und beschreibe eine Konstruktion, durch die zu beliebig vorgegebenen Dreiecken ABC alle diejenigen Geraden g erhalten werden können, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen:
(1) Die Gerade g geht durch den Mittelpunkt M der Seite AC.
(2) Die Gerade g schneidet die Verlängerung der Seite BA über A hinaus in einem Punkt P und folglich die Seite BC in einem Punkt Q.
(3) Der Flächeninhalt des Dreiecks AMP ist doppelt so groß wie der Flächeninhalt des Dreiecks CMQ.
Man zeichne ein beliebiges, nicht gleichschenkliges und nicht rechtwinkliges Dreieck ABC und führe dann die beschriebene Konstruktion aus.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Eine Gerade g, für die (1) und (2) gilt, erfüllt wegen $AM = MC$ genau dann auch (3), wenn der Abstand des Punktes P von der Geraden durch A, C doppelt so groß ist wie der Abstand des Punktes Q von dieser Geraden.

Nach dem Strahlensatz ist dies genau dann der Fall, wenn $PM = 2 \cdot MQ$ gilt. Aus dem Strahlensatz folgt ferner:
Die Parallele durch M zu BC schneidet einerseits die Seite AB in ihrem Mittelpunkt R; andererseits ist die Bedingung $PM = 2 \cdot MQ$ äquivalent mit $PR = 2 \cdot RB = AB$, also mit

$$PA = (PR - AR =)\frac{1}{2} \cdot AB$$

Daher werden (zu gegebenem Dreieck ABC) die Bedingungen (1), (2), (3) genau von derjenigen Geraden g erfüllt, die durch folgende Konstruktion erhalten werden kann.



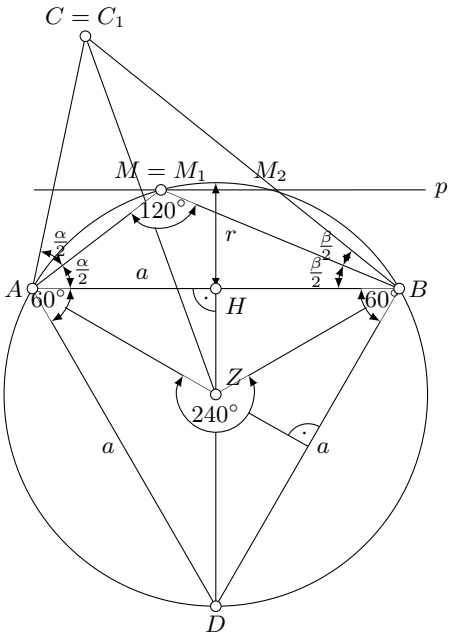
Man konstruiert die Mittelpunkte M bzw. R von AC bzw. AB und verlängert BA über A hinaus um die Länge $\frac{1}{2}AB$ bis P. Dann konstruiert man die Gerade g durch P und M.

Aufgabe 301036:
Zur Konstruktion eines Dreiecks seien die Streckenlängen $c = \sqrt{120}$ cm und $r = 3$ cm vorgegeben. Gefordert wird, dass c die Länge der Seite AB ist, r der Inkreisradius des Dreiecks ABC ist und dass der Winkel $\angle ACB$ die Größe von 60° hat.
a) Beweisen Sie:
Wenn ein Dreieck ABC diese Bedingungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Streckenlängen c und r konstruiert werden.
b) Beschreiben Sie eine solche Konstruktion!
c) Beweisen Sie:
Wenn ein Dreieck nach Ihrer Beschreibung konstruiert werden kann, dann erfüllt es die geforderten Bedingungen.
d) Beweisen Sie, dass es bis auf Kongruenz (bei der es nicht auf die Reihenfolge der Eckpunkte A, B, C ankommt) genau ein Dreieck ABC gibt, das diese Bedingungen erfüllt!
Eine zeichnerisch genaue Ausführung der Konstruktion wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Wenn ein Dreieck ABC die Bedingungen erfüllt, so folgt mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = ACB$ (Abbildung)
Ist M der Inkreismittelpunkt, also der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, so ist nach dem Innenwinkelsatz

$$\angle AMB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90° + \frac{\gamma}{2} = 120°$$

Daher liegt M nach dem Peripherie-Zentriwinkelsatz auf demjenigen Kreis k, in dem $\angle AMB$ ein zum Zentriwinkel $\angle AZB$ der Größe 240° gehörender Peripheriewinkel ist.



Ist ZD der Radius von k, der diesen Zentriwinkel halbiert, so zerlegen ZA, ZB, ZD den Vollwinkel in drei Winkel zu je 120°, also ist ABD ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge c und Z sein Höhenschnittpunkt.

Ferner hat M den Abstand r von AB und liegt nicht auf dem von A über D nach B führenden Bogen. Daher gehört M derjenigen Parallelen im Abstand r zu AB an, die nicht auf derselben Seite von AB liegt wie Z.
Damit ist bewiesen, dass das Dreieck ABC durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

1. Man konstruiert ein gleichseitiges Dreieck ABD der Seitenlänge c und seinen Höhenschnittpunkt Z.

2. Man konstruiert den Kreis k um Z durch A.

3. Man konstruiert diejenige Parallele p im Abstand r zu AB, die nicht auf derselben Seite von AB liegt wie Z, und wählt als M einen Schnittpunkt von k mit p.

4. Man trägt an AB in A den Winkel der Größe $2 \cdot \angle BAM$ und an BA in B den Winkel der Größe $2 \cdot \angle ABM$ nach derjenigen Seite von AB an, auf der M liegt, und bringt die zweiten Schenkel dieser Winkel zum Schnitt C.

(c) Wenn ein Dreieck ABC nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann, so folgt:

Nach 1. ist $AB = c$, und die Dreiecke ABZ, BDZ, DAZ haben Innenwinkel von $30°, 30°, 120°$. Für den nach 3. erhaltenen Punkt M ist folglich $\angle AMB$ Peripheriewinkel zum Zentriwinkel $\angle AZB$ der Größe $2 \cdot 120°$, also gilt $\angle AMB = 120°$. Daher ist

$$\angle BAM + \angle ABM = 180° - 120° = 60°$$

und nach 4. folgt

$$\angle ACB = 180° - (2 \cdot \angle BAM + 2 \cdot \angle ABM) = 180° - 2 \cdot 60^{\cdot} = 60^{\cdot}$$

Ferner folgt aus 4., das M der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden, also der Inkreismittelpunkt von ABC ist. Sein Abstand von AB ist folglich der Inkreisradius, nach 3. beträgt er r.
Damit erfüllt das Dreieck ABC alle geforderten Bedingungen.

(d) Die Konstruktionsschritte 1., 2. und die Konstruktion von p in 3. sind bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar.

Der Abstand von Z zur Geraden p ist $d = ZH + r$, wo ZH im gleichschenkligen Dreieck ABZ Höhe, also auch Seiten- und Winkelhalbierende ist. Daher ist AZH ein Dreieck mit Innenwinkeln von $30°, 60°, 90°$, und $e = ZH$ ist die halbe Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks der Höhenlänge $AH = \frac{c}{2}$. Daraus folgt $\frac{c}{2} = a\sqrt{3}$, $e = \frac{\sqrt{120}}{2\sqrt{3}} cm = \sqrt{10} cm$.

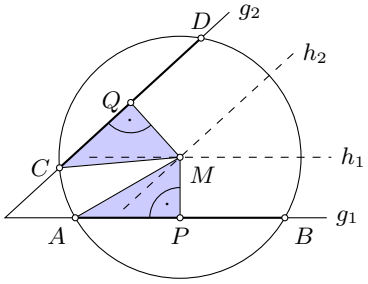
Wegen $3 < \sqrt{10}$, ist somit $d = (\sqrt{10} + 3)$ cm kleiner als der Radius $AZ = 2e = 2\sqrt{10}$ cm von k. Daher schneiden sich p und k in zwei Punkten M_1, M_2, unter denen nach 3. der Punkt M zu wählen ist, und es ist bewiesen, dass Dreiecke existieren, die den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Wegen $p \perp ZH$ liegen M_1 und M_2 ebenso wie A und B symmetrisch zur Geraden durch Z und H. Daher sind die beiden Dreiecke ABM_1, BAM_2 (mit dieser Reihenfolge entsprechender Punkte) zu einander kongruent.
Dasselbe gilt für die beiden nach 5. zu $M = M_1$ bzw. $M = M_2$ erhaltenen Dreiecke ABC_1 bzw. BAC_2. Damit ist gezeigt, dass es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck gibt, das die geforderten Eigenschaften erfüllt.

IV Runde 4

Aufgabe 011045:
Gegeben sei ein Winkel $\alpha = 40°$.
Konstruieren Sie den Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius $r = 5$ cm, wobei dieser Kreis aus den Schenkeln des Winkels die Strecken $a = 9$ cm und $b = 8$ cm ausschneiden soll! Die Konstruktion ist zu begründen!
Dürfen bei gegebenem α und Radius r die Längen von a und b beliebig gewählt werden? (Begründung!)

Lösung von Eckard Specht:



Analyse:
Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises sei M. Der Kreis schneide die beiden Schenkel g_1 und g_2 des Winkels in den Punkten A, B bzw. C, D. Ferner seien MP und MQ die Lote auf g_1 bzw. g_2.
Betrachten wir nun die rechtwinkligen Dreiecke APM und CQM, so sind diese durch ihre Hypotenusen $MA = MC = r$ sowie die Katheten $AP = \frac{a}{2}$ bzw. $CQ = \frac{b}{2}$ bekannt. Also sind auch die anderen beiden Katheten MP und MQ bekannt.
Daraus ergibt sich folgende Konstruktion:

Konstruktionsbeschreibung:
Die Strecken MP und MQ lassen sich aus den gegebenen Stücken mit Hilfe des Kongruenzsatzes SSW konstruieren. Nun werden zwei Parallelen $h_1 \parallel g_1$ und $h_2 \parallel g_2$ im Abstand MP bzw. MQ von den Schenkeln des Winkels gezogen. Ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Mittelpunkt M.
Es ist zu beachten, dass sich ein anderer Mittelpunkt ergibt, wenn die Abschnitte a und b auf den Schenkeln vertauscht werden.

Aufgabe 051042:
a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $h_a + h_b = 10cm$, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$.
Dabei ist h_a die Länge der zur Seite BC gehörenden Höhe, h_b die Länge der zur Seite AC gehörenden Höhe, α das Maß des Winkels $\angle BAC$ und β das Maß des Winkels $\angle CBA$.
b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Lösung von cyrix:

1) Gegeben Sei eine beliebige echte Strecke, deren Endpunkte mit A und B' bezeichnet seien.

2) In A trage man den Winkel α und in B' den Winkel β in der entsprechenden Orientierung an die Strecke AB' an. Der Schnittpunkt der beiden freien Schenkel der Winkel heiße C'.

3) Man konstruiere im Dreieck $AB'C'$ die Höhen auf die Seiten $B'C'$ sowie AC', deren Längen mit h'_a bzw. h'_b bezeichnet seien.

4) Auf einem von A ausgehenden Strahl, auf dem keiner der beiden Punkte B' und C' liegt, trage man von A aus die Streckenlänge $h'_a + h'_b$ konstruktiv ab und erhalte den Punkt S'.

5) Auch auf diesem Strahl konstruiere man den Punkt S mit $|AS| = h_a + h_b$.

6) Die Parallele zu $B'S'$ durch S schneide die Gerade AB' in B; die Parallele zu $C'S'$ durch S die Gerade AC' in C.

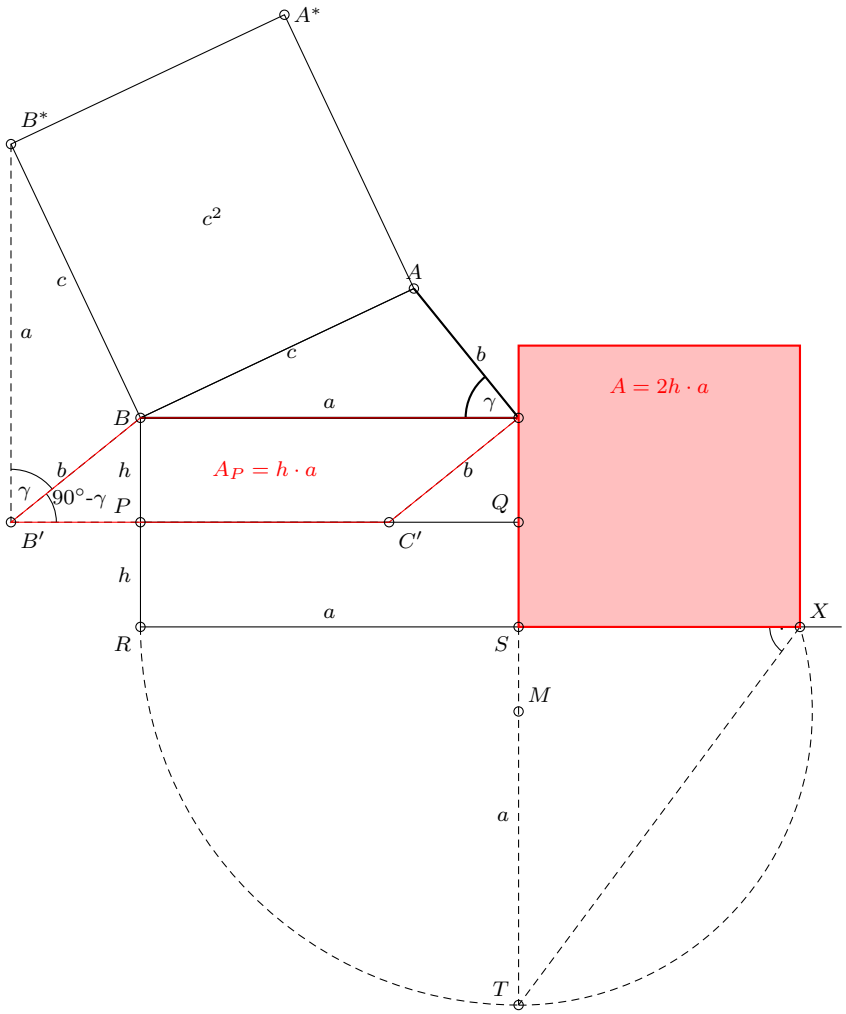
Dann ist $\triangle ABC$ das gesuchte Dreieck.

Beweis:
Nach Konstruktion ist $\triangle AB'C'$ zum gesuchten Dreieck ähnlich. Also gibt es eine positive reelle Zahl k, sodass das gesuchte Dreieck durch Streckung um den Faktor k und Zentrum A aus dem Dreieck $\triangle AB'C'$ hervorgeht.
Insbesondere ist damit auch das Verhältnis entsprechender Höhen (sowie deren Summen) in den beiden Dreiecken jeweils gleich $k = \frac{h_a+h_b}{h'_a+h'_b} = \frac{|AS|}{|AS'|}$.
Nach den Strahlensätzen gilt dann aber auch $k = \frac{|AB|}{|AB'|}$ sowie $k = \frac{|AC|}{|AC'|}$, sodass im Dreieck $\triangle ABC$ die Höhen (und deren Summe) die richtige Länge besitzen.

Aufgabe 061044:
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$; wie üblich sei $BC = a$, $CA = b$ und γ das Gradmaß des Winkels $\angle ACB$.
Konstruieren Sie ein Quadrat, dessen Flächeninhalt $2ab \cdot |\cos\gamma|$ beträgt!

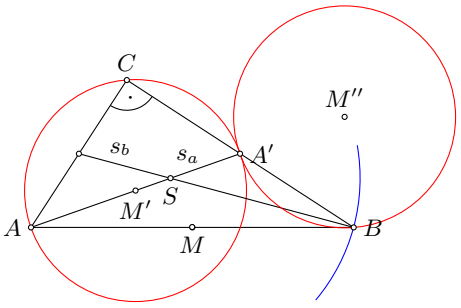
Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:

1. Errichte das Quadrat über $|AB| = c$.
2. Ergänze an der Quadratseite BB^* das zum Dreieck ABC kongruente Dreieck $B'BB^*$.
3. Bilde das Parallelogramm $B'C'CB$ aus den Seiten $|BB'|$ und $|BC|$; dieses hat den Flächeninhalt $A_P = a \cdot h = ab\sin(90° - \gamma) = ab\cos(\gamma)$.
4. Bilde aus dem Parallelogramm das flächengleiche Rechteck $PQCB$; verdopple das Rechteck zum Rechteck $RSCB$; dieses hat den Flächeninhalt $A = 2h \cdot a$.
5. Verlängere die Rechteckseite $|CS|$ um $a = |RS|$, Endpunkt sei T.
6. Errichte über der Strecke $|CT|$ den Thaleskreis (Mittelpunkt sei M).
7. Bestimme den Schnittpunkt derjenigen Geraden durch $|RS|$ mit dem Thaleskreis; der Schnittpunkt sei X.
8. Dann gilt für das rechtwinklige Dreieck CTX nach dem Höhensatz: Das Rechteck aus den Höhenabschnitten ($2h$ und a) der zur Hypotenuse gehörenden Höhe ist so groß wie das Quadrat über der Höhe; mit anderen Worten: $A = 2h \cdot a = 2b\cos(\gamma) \cdot a = 2ab\cos(\gamma)$.



Aufgabe 131042:
Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C aus $s_a = 6$ cm, $s_b = 8$ cm!
Dabei seien s_a die Länge der Seitenhalbierenden von BC und s_b die Länge der Seitenhalbierenden von AC.
Beschreiben und begründen Sie ihre Konstruktion. Untersuchen Sie, ob ein derartiges Dreieck ABC mit den gegebenen Längen s_a, s_b existiert und bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von Steffen Polster:



In der Abbildung ist AA' die Seitenhalbierende s_a des Dreiecks ABC. Da bei C ein rechter Winkel vorliegt, befindet sich C auf dem Thaleskreis k' über der Strecke AA'. M' sei der Mittelpunkt dieses Thaleskreises.

Der Punkt B ist dann das Spiegelbild von C an dem Seitenmittelpunkt A'. Damit liegt B auf einem weiteren Kreis k'' (rot in der Abbildung) mit dem Mittelpunkt M''. Dieser Mittelpunkt ist das Spiegelbild von M' an A'. Der Kreis k'' hat den gleichen Radius wie der Thaleskreis k'.

Der Schwerpunkt S, d. h. der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 1:2. Der Punkt B liegt auf einem Kreisbogen (blau) um S mit dem Radius $\frac{2}{3}s_b$. Somit ist B eindeutig

bestimmt. Der Punkt C ist der Schnittpunkt der verlängerten Strecke BA' mit dem Thaleskreis k'.

Konstruktion:
1. Zeichne eine Strecke AA' mir $AA' = s_a$.
2. Konstruiere über der Strecke AA' den Thaleskreis k' mit dem Mittelpunkt M'.
3. Spiegele den Punkt M' am Punkt A'. Das Ergebnis ist M''.
4. Zeichne einen Kreis k'' um M'' mit dem Radius des Kreises k'.
5. Teile die Strecke AA' im Verhältnis 2:1, so dass der Teilungspunkt S näher an A' als zu A liegt.
6. Konstruiere einen Kreis um S mit dem Radius $\frac{2}{3}s_b$. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Kreis k'' ist der Punkt B.
7. Zeichne eine Gerade BB'. Diese schneidet den Kreis k' in einem Punkt, dem gesuchten Punkt C.

Der blaue Kreis schneidet den grünen k'' in zwei Punkten. Die Konstruktion ist eindeutig, da der zweite Punkt eine kongruente Lösung ergibt. Es gibt eine Lösung, da $s_a < 2s_b$ und $s_b < 2s_a$.
Dieses ist gerade die Bedingung, dass der blaue und grüne Kreis einen Schnittpunkt haben. Im Fall $s_a = 2s_b$ bzw. $s_b = 2s_a$ bekommen wir den Grenzfall mit einer Seite des Dreiecks gleich 0.

Aufgabe 151045:
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus s, R, r! Dabei sei s der halbe Umfang, R der Radius des Ankreises an der Seite AC und r der Radius des Inkreises des zu konstruierenden Dreiecks ABC.
Ermitteln Sie Beziehungen, die genau dann zwischen den gegebenen Längen s, R, r bestehen, wenn ein derartiges Dreieck existiert!
Untersuchen Sie, ob es dann bis auf Kongruenz genau ein solches Dreieck gibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, $\triangle ABC$ sei ein Dreieck, das den Bedingungen der Aufgabe genügt. Der Berührungspunkt des Ankreises mit der Seite AC sei T, die Berührungspunkte dieses Ankreises mit den Strahlen aus B durch C bzw. aus B durch A seien U bzw. S. Der Mittelpunkt des Ankreises sei M, der des Inkreises I. Dann gilt nach dem Satz über Tangentenabschnitte von einem Punkt an einem Kreis:

$$BS = BU, \qquad AS = AT, \qquad CT = CU$$

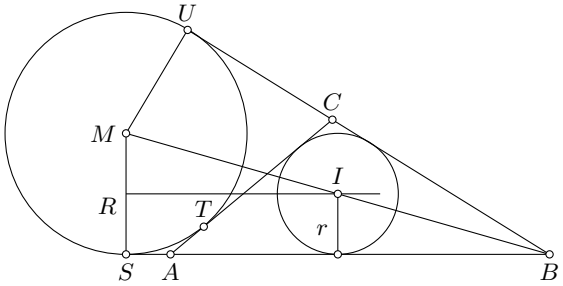
Ferner gilt

$$AB = BS - AS = BU - AS, \qquad BC = BU - CU, \qquad CA = CT + AT = CU + AS$$

und mithin

$$AB + BC + CA = BU - AS + BU - CU + CU + AS = 2BU \qquad \text{also} \qquad s = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) = BU$$

Da die Strahlen aus B durch S bzw. Z die genannten Kreise mit den Mittelpunkten M und I berühren, liegen M und I nach einen bekannten Satz auf der Winkelhalbierenden von $\angle SBU$ (Abbildung).



Daraus ergibt sich, dass ein Dreieck ABC nur dann den Bedingungen der Aufgabe genügt, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man zeichnet eine Strecke der Länge s mit den Endpunkten B und S.

(2) Man errichtet in S die Senkrechte auf SB und trägt darauf eine Strecke der Länge R ab. Der andere Eckpunkt dieser Strecke sei M.

(3) Man spiegelt SB an MB und erhält UB.

(4) Man zeichnet zu SB die Parallele im Abstand r. Schneidet sie MB in einem Punkt zwischen B und M, so sei I dieser Schnittpunkt.

(5) Man zeichnet die Kreise und M bzw. I mit den Radien R bzw. r.

(6) Man konstruiert, falls die unter (5) konstruierten Kreise sich nicht schneiden, eine ihrer inneren Tangenten. Ist das der Fall, so seien A bzw. B die Schnittpunkte dieser Tangente mit SB bzw. SU.

III. Jedes so konstruierte Dreieck ABC entspricht den Bedingungen der Aufgabe.

Beweis:
Lauf Konstruktion hat das Dreieck ABC einen Inkreis vom Radius r und einen Ankreis an die Seite AC vom Radius R. Laut Konstruktion gilt ferner

$$s = BS = BU = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$$

IV. Die Konstruktionsschritte (1), (2), (3) und (5) sind stets eindeutig ausführbar. Der Konstruktionsschritt (4) ist genau dann ausführbar, wenn $R > r$ gilt, und in diesem Falle eindeutig ausführbar.

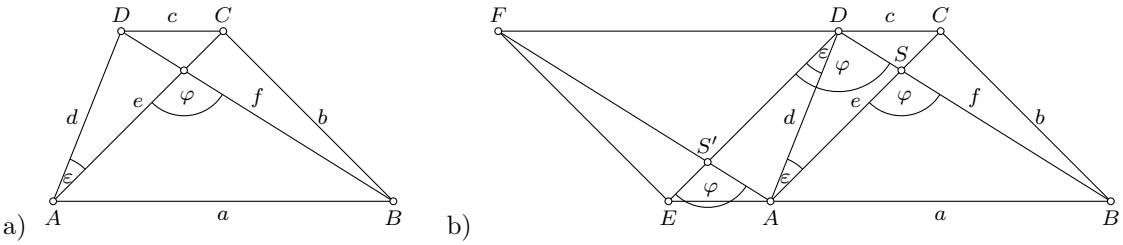
Konstruktionsschritt (6) ist genau dann ausführbar, wenn $MI \geq R + r$ gilt. Wegen $MI = MB - BI$ und $MB = \sqrt{s^2 + R^2}$ (Pythagoras) sowie $BI = \frac{MB \cdot r}{R}$ (Strahlensatz) ist diese Beziehung gleichwertig mit $MB - MI \geq R + r$, also auch mit

$$\sqrt{s^2 + R^2}(1 - \frac{r}{R}) \geq R + r \qquad (*)$$

Für $MI = R + r$ erhält man genau eine gemeinsame Tangente und damit auch genau ein Dreieck ABC. Für $MI > R + r$ erhält man genau zwei gemeinsame Tangenten und genau zwei spiegelbildlich zu MB liegende kongruente Dreiecke. Daher existiert genau dann ein den Bedingungen der Aufgabe entsprechendes Dreieck, wenn (*) gilt; und ist dies der Fall, so gibt es bis auf Kongruenz genau ein derartiges Dreieck.

Aufgabe 161042:
Konstruieren Sie ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ aus $a + c = 13$ cm, $e + f = 15$ cm, $\varphi = 100°$ und $\varepsilon = 70°$!
Dabei seien a die Länge der Seite AB, c die Länge der Seite CD, e die Länge der Diagonalen AC, f die Länge der Diagonalen BD, ε die Größe des Winkels $\angle DAC$ und φ die Größe des Winkels $\angle ASB$. S bezeichne den Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Trapezes.
Untersuchen Sie, ob ein solches Trapez existiert und bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von Stephan Hauschild:
Angenommen $ABCD$ wäre das gesuchte Trapez (Abbildung a).



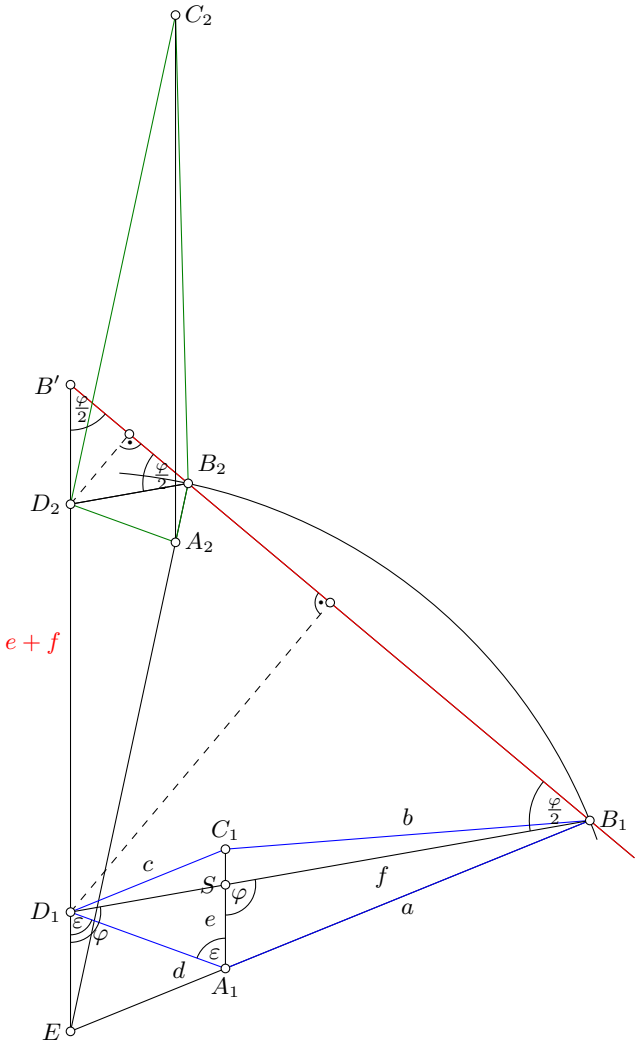
Wir setzen an das Trapez links ein um 180° gedrehtes Trapez $EADF$ an, so dass EA gleich $a + c$ wird (Abbildung b).
Die Winkel $\angle ES'A$ und $\angle EDB$ sind dann gleich dem Winkel φ (Winkel an geschnittenen Parallelen und Scheitelwinkel). Wir klappen die Strecke BD um D so heraus, dass der Bildpunkt B' auf der Geraden durch E und D liegt. Dann gilt $DB = DB'$ und $\angle DBB' = \angle DB'B = \frac{\varphi}{2}$. Damit ergibt sich folgende Konstruktion:

a) Zuerst wird das Dreieck EBB' konstruiert. (aus $EB = a + c$, $EB' = e + f$ und $\angle BB'E = \frac{\varphi}{2}$, da das Dreieck $\triangle BB'D$ gleichschenklig ist). Diese Konstruktion ist allerdings mehrdeutig und liefert eine zweite Lösung B_2.

b) Der Schnitt der Mittelsenkrechten von BB' mit EB' ergibt den Punkt D.

c) Der Punkt A wird mit Hilfe des Winkels ε konstruiert.

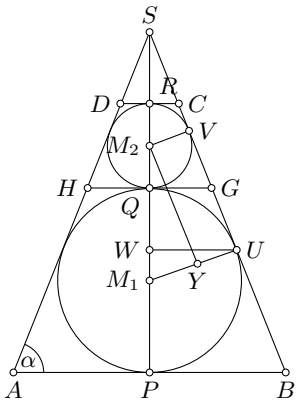
d) Der Punkt C ergibt sich dann durch Parallelverschiebung von DE durch A.



Die Punkte D_2, A_2, C_2 werden analog aus B_2 gewonnen. Damit ergeben sich 2 nicht kongruente Trapeze.

Aufgabe 201042:
Gegeben sei eine Länge r_1.
Konstruieren Sie ein Trapez $ABCD$ mit $CD < AD = AB = BC$, in dem ein Kreis k_1 mit dem Radius r_1 und ein zweiter Kreis k_2 so liegen, dass sie einander von außen berühren und dass k_1 die Seiten AD, AB und BC berührt, k_2 die Seiten BC, CD und AD berührt!
Begründen und beschreiben Sie die Konstruktion!
Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften gibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Angenommen, ein Trapez $ABCD$ mit den Kreisen k_i (Mittelpunkte M_i, Radien r_i, $i = 1{,}2$) habe die geforderten Eigenschaften.
Gilt $AD \parallel BC$, so ist $ABCD$ wegen $AD = BC$ ein Parallelogramm im Widerspruch zu $AB > CD$. Also gilt $AB \parallel CD$ und das Trapez ist wegen $AD = BC$ gleichschenklig.
Da k_1 und k_2 die Schenkel AD, BC berühren, deren Verlängerungen über D bzw. C hinaus sich in S schneiden, liegen M_1 und M_2 auf der Winkelhalbierenden m des $\angle ASB$, die gleichzeitig Mittelsenkrechte von AB und CD ist.
Ferner liegt auch Q (der Berührungspunkt von k_1 und k_2) auf m. Die Parallele zu AB durch Q ist somit die gemeinsame innere Tangente von k_1 und k_2, die AD in H und BC in G schneidet.
Das Trapez $HGCD$, dessen Seiten von k_2 berührt werden, geht durch eine Streckung mit dem Zentrum S in das Trapez $ABGH$ über, dessen Seiten von k_1 berührt werden.

Es sei $x = r_2 : r_1$m $a = AB$, $b = HG$, $C = DC$. Es ist $x = DC : HG = HG : AB$, also $b = ax$, $c = bx = ax^2$. U und V seien die Berührungspunkte von k_1 bzw. k_2 mit BC.
Es gilt

$$a = AB = BC = BU + UG + GV + VC = BP + QG + QG + CR =$$

nach dem über de Gleichheit der Tangentenabschnitte

$$= \frac{a}{2} + b + \frac{c}{2} = \frac{a}{2}(1 + 2x + x^2)$$

Diese Gleichung wird wegen $x > 0$ nur von $x = \sqrt{2} - 1$ erfüllt. Also kann das Trapez $ABCD$ nur dann den Bedingungen genügen, wenn gilt:

$$r_2 = r_1(\sqrt{2} - 1)$$

II. Konstruktionsbeschreibung
(1) Aus r_1 konstruiere man $r_2 = r_1(\sqrt{2} - 1)$.
(2) Man konstruiere die sich von außen in Q berührenden Kreise k_i (Mittelpunkte M_i, Radien r_i, $i = 1{,}2$).
(3) Man konstruiere die beiden äußeren Tangenten t und t' von k_1, k_2.
(4) Die Gerade durch M_1 und M_2 schneide die Kreise k_1, k_2 zusätzlich in R und P. Man errichte die Senkrechten auf dieser Geraden in R und P. Diese schneiden t und t' in A, D und B, C.
$ABCD$ ist das gesuchte Trapez.

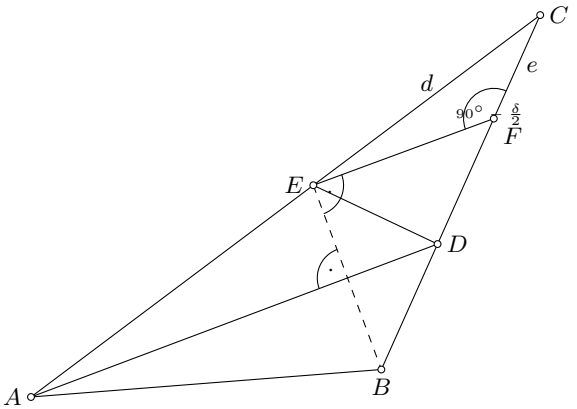
III. Beweis, dass jedes so konstruierte Trapez den Bedingungen der Aufgabe genügt:
Nach Konstruktion ist $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez mit $AD = BC$. Die Kreise k_1, k_2 haben die vorgeschriebenen Berührungen mit den Seiten. Wegen $r_2 < r_1$ ist $CD < AB$. Wie in I. kann man herleiten, dass mit $x = r_2 : r_1$ die Gleichung $BC = \frac{a}{2}(1 + 2x + x^2)$ gilt.
Da nach Konstruktionsschritt (1) $r_2 = r_1(\sqrt{2} - 1)$ ist, erfüllt x die Gleichung $x^2 + 2x + 1 = 2$, und es folgt $BC = a = AB$.

IV. Konstruktionsschritt (1) ist eindeutig ausführbar. (2) ist bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar, und (3) und (4) sind es anschließend auch. Also gibt es bis auf Kongruenz genau ein Trapez mit den geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 231042:
„Konstruieren Sie ein Dreieck aus $b - c = 10$ cm, $\beta - \gamma = 80°$ und der Differenz $u - v = 4$ cm der Winkelhalbierenden-Abschnitte u, v von a!“
Mit dieser Kurzfassung ist folgende Aufgabe gestellt:
Gegeben seien die Längen $d = 10$ cm, $e = 4$ cm und die Winkelgröße $\delta = 80°$.
Konstruieren Sie ein Dreieck ABC mit folgenden Eigenschaften: Wenn die Winkelhalbierende von $\angle BAC$ die Seite BC in D schneidet, und wenn b, c, u, v die Längen der Strecken AC, AB, CD, BD sowie β, γ die Größen der Winkel $\angle ABC$, $\angle ACB$ sind, so gilt:

$b - c = d$, $u - v = e$, $\beta - \gamma = \delta$.
Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Stellen Sie fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



I. Angenommen, ein Dreieck ABC erfülle die Bedingungen der Aufgabe. Es sei $\angle BAC = \alpha$, auf AC sei E der Punkte mit $AE = c$, azf DC sei F der Punkt mit $DF = v$. Dann ist $EC = d$ und $FC = e$.
Die Dreiecke ADB und ADE sind nach Kongruenzsatz sws kongruent, also liegen B und E symmetrisch zur Geraden durch A, D. Hieraus folgt einerseits $BE \perp AD$, andererseits $DE = v$. Also ist nach dem Thalessatz auch $BE \perp EF$ und folglich $EF \parallel AD$. Hiernach gilt $\angle CEF = \angle CAD = \frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen, Innenwinkelsatz für $\triangle ABC$) und nach dem Innenwinkelsatz für $\triangle EFC$ daher

$$\angle EFC = 180° - \gamma - (90° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}) = 90° + \frac{\delta}{2}$$

II. Daher entspricht ein Dreiecke ABC nur dann den Bedingungen der Aufgaben, wenn es durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(1) Man konstruiert ein Dreieck EFC aus $EC = d$, $FC = e$ und $\angle EFC = 90° + \frac{\delta}{2}$.

(2) Man errichtet die Senkrechte in E auf EF; ihr Schnittpunkt mit der Verlängerung von CF über F hinaus sei B.

(3) Man konstruiert den Mittelpunkt D von BF.

(4) Man konstruiert die Parallele durch D zu EF; ihr Schnittpunkt mit der Verlängerung von CE über E hinaus sei A.

III. Beweis, dass jedes so konstruierte Dreieck ABC den Bedingungen der Aufgabe entspricht:

Nach (2), (3) und der Umkehrung des Thalessatzes liegt E auf dem Kreis um D durch B und F, also ist $DE = DB$ und daher $\triangle BED$ gleichschenklig mit - wegen (2), (4) - auf DA gelegener Höhe zu BE.
Somit liegen B und E symmetrisch bezüglich der Geraden durch A, D; also gilt $AB = AE$ und daher $b - c = AC - AB = EC = d$ (siehe (1)).

Ferner folgt $\angle BAD = \angle EAD$; d. h., AD ist die Winkelhalbierende von $\angle BAC$. Wegen (3), also $BD = DF$, folgt somit $u - v = CD - BD = FC = e$ (siehe (1)).
Nach (4) ist für $\alpha = \angle BAC$ schließlich $\frac{\alpha}{2} = \angle CEF$ (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen), woraus nach dem (auf $\triangle ABC$ und $\triangle EFC$ angewandten) Innenwinkelsatz und (1) auch folgt:

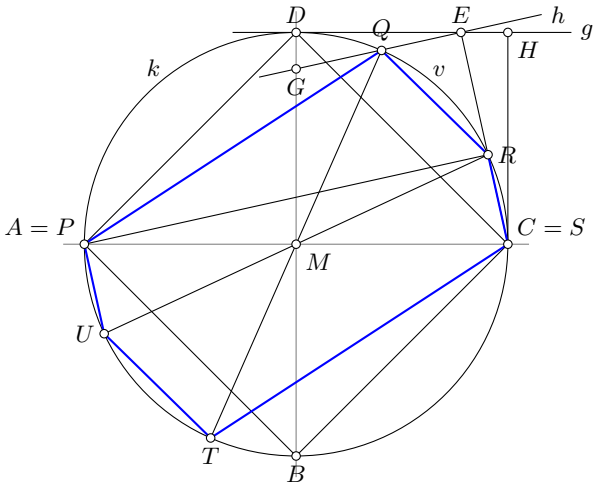
$$\beta - \gamma = 180° - \alpha - 2\gamma = 180° - 2(\angle CEF + \angle ECF) = 2\angle EFC - 180° = \delta$$

IV. Da für die gegebenen Größen $d > e$ und $90° + \frac{\delta}{2} < 180°$ gilt, ist Konstruktionsschritt (1) bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Wegen $\angle EFC > 90°$ schneidet die in (2) konstruierte Senkrechte die Verlängerung von CF über F hinaus; d. h., Konstruktionsschritt (2) ist eindeutig ausführbar.

Auch Konstruktionsschritt (3) ist eindeutig ausführbar und Konstruktionsschritt (4) ebenfalls; denn da D auf der Verlängerung der Seite CF des Dreiecks EFC liegt, schneidet die in (4) zur Dreiecksseite EF konstruierte Parallele die Verlängerung der Seite CE dieses Dreiecks.
Daher ist durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Aufgabe 251042:
Es sei $ABCD$ ein Quadrat; sein Flächeninhalt sei $F(ABCD)$; sein Umkreis sei k.
Beschreiben Sie eine Konstruktion für ein (nicht notwendig regelmäßiges) konvexes Sechseck $PQRSTU$, dessen sämtliche Eckpunkte auf k liegen und dessen Flächeninhalt gleich $F(ABCD)$ ist!
Beweisen Sie, dass jedes Sechseck, das nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, diese Forderungen erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Lösung ist nicht eindeutig; eine Lösungsmöglichkeit ist die folgende:
a) Konstruktionsbeschreibung:



(1) Man wählt $P = A$ und $S = C$.

(2) Man wählt auf dem von C nach D führenden Viertelkreisbogen v des Kreises k einen Punkt R ($\neq C, \neq D$).

(3) Man konstruiert die Parallele g durch D zu AC und ihren Schnittpunkt E mit der Geraden durch C und R. Dieser Schnittpunkt existiert und ist eindeutig bestimmt, da R nicht auf der Geraden durch A und C liegt, also die Gerade durch C und R nicht parallel zu g ist.

(4) Man konstruiert die Parallele h durch E zu AR und ihren Schnittpunkt Q mit dem Viertelkreisbogen v. Dieses Schnittpunkt existiert und ist eindeutig bestimmt; denn ist M der Mittelpunkt von k und H derjenige Punkt, für den $DMCH$ ein Quadrat ist, so schneidet h die Quadratseiten DH und MD in inneren Punkten E bzw. G (das erste wegen $45° < \angle MCR = \angle MCE < 90°$, das zweite wegen $AR \perp CR$, also $h \perp CE$).

(5) Man konstruiert den Strahl aus R durch M und seinen Schnittpunkt U mit k.

(6) Man konstruiert den Strahl aus Q durch M und seinen Schnittpunkt T mit k.

b) Beweis der geforderten Eigenschaften:
Nach (2) und (4) ist $ACRQ$ ein konvexes Viereck, mit einem Durchmesser AC von k als einer Seite und einem Halbkreis über diesem Durchmesser einbeschrieben. Zentralsymmetrisch bezüglich M liegt hierzu nach (5) und (6) das Viereck $CAUT$. Damit und mit (1) ergibt sich $PQRSTU$ als ein konvexes Sechseck, dessen sämtlich Eckpunkte auf k liegen.

Wegen (3), also $DE \parallel AC$, ist

$$F(ACE) = F(ACD) = \frac{1}{2}F(ABCD)$$

Wegen (4), also $EQ \parallel AR$, ist $F(ARQ) = F(ARE)$. Damit folgt

$$F(ACRQ) = F(ACR) + F(ARQ) = F(ACR) + F(ARE) = F(ACE) = \frac{1}{2}F(ABCD)$$

und somit wegen der genannten Zentralsymmetrie

$$F(PQRSTU) = 2F(ACRQ) = F(ABCD)$$

Aufgabe 251043A:
Kurt möchte auf einer Holzkugel K vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 konstruieren, die die Bedingungen

$$P_1P_2 = P_1P_3 = P_1P_4 = P_2P_3 = P_2P_4 = P_3P_4$$

erfüllen. Folgende Hilfsmittel stehen ihm zur Verfügung:
- Ein ebenes Zeichenblatt B, auf dem eine Strecke DE gegeben ist, deren Länge gleich dem Durchmesser d der Kugel K ist,
- ein Zirkel, mit dem man sowohl auf B als auch auf der Oberfläche der Kugel K Kreise zeichnen kann (der Zirkel besitzt zu diesem Zweck einknickbare, genügend lange Schenkel),
- ein Lineal (wie üblich nur zum Konstruieren gerader Linien auf B zu verwenden, nicht zur Skalenbenutzung).
Beschreiben Sie eine Konstruktion, die sich mit diesen Hilfsmitteln ausführen lässt!
Beweisen Sie, dass durch die von Ihnen beschriebene Konstruktion vier Punkte der geforderten Art erhalten werden!
Hinweis: Unter P_iP_j ist die Länge der im Raum geradlinig (nicht auf der Kugeloberfläche) verlaufenden Verbindungsstrecke der Punkte P_i, P_j zu verstehen. Ebenso wird beim Konstruieren eines Kreises auf K die Zirkelspanne als geradlinige Streckenlänge festgelegt.

Lösung von cyrix:
Offenbar ist $P_1P_2P_3P_4$ ein reguläres Tetraeder mit Umkugel K.
Besitzt dieses Tetraeder die Kantenlänge a und ist M_{12} der Mittelpunkt der Strecke P_1P_2, so hat die von P_3 im gleichseitigen Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$ ausgehende Höhe als Kathete im rechtwinkligen Dreieck $\triangle P_1P_3M_{12}$ die Länge

$$|P_3M_{12}| = \sqrt{|P_1P_3|^2 - |P_1M_{12}|} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Ist S_{123} der Schwerpunkt im Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$, so gilt also $|P_3S_{123}| = \frac{2}{3} \cdot |P_3M_{12}| = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, da der Schwerpunkt jede Seitenhalbierende (und P_3M_{12} ist im gleichseitigen Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$ sowohl Höhe als auch Seitenhalbierende) im Verhältnis 2:1 teilt.

Weiterhin steht im regulären Tetraeder die Schwerelinie P_4S_{123} senkrecht auf P_3S_{123}, sodass das Dreieck $\triangle P_4P_3S_{123}$ rechtwinklig in S_{123} ist. Damit ergibt sich

$$|P_4S_{123}| = \sqrt{|P_3P_4|^2 - |P_3S_{123}|^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

Sei schließlich M der Schnittpunkt der Schwerelinien im Tetraeder $P_1P_2P_3P_4$. Da dieses regulär ist, ist es auch gleichzeitig dessen Umkugelmittelpunkt. Da M die Schwerelinien im Verhältnis 3:1 teilt, ist der Umkugelradius $r = |P_4M| = \frac{3}{4} \cdot |P_4S_{123}| = \frac{\sqrt{6}}{4}a$.
Damit ist $d = 2r = \frac{\sqrt{6}}{2}a$ bzw. $a = \frac{2}{\sqrt{6}}d = \frac{\sqrt{6}}{3}d = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot d\right)$

Errichtet man also auf B über der Strecke DE mit Länge $|DE| = d$ ein gleichseitiges Dreieck $\triangle DEF$ sowie dessen Schwerpunkt S als Schnittpunkt zweier Seitenhalbierenden, dann erhält man die Strecke DS mit Länge $|DS| = \frac{\sqrt{3}}{3}d$, siehe vorherige Berechnung. Errichtet man nun über dieser Strecke DS das Quadrat $DSXY$, so hat dessen Diagonale DX die Länge $|DX| = \sqrt{2} \cdot |DS| = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}d = a$.

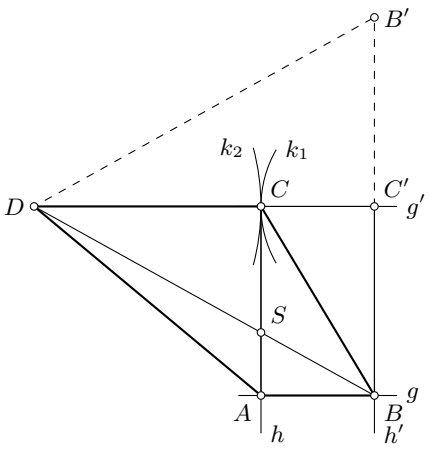
Nimmt man also nun die gerade auf B konstruierte Streckenlänge $|DX|$ in die Zirkelspanne, zeichnet auf K um einen beliebigen Punkt P_1 auf K einen Kreis k_1 mit Radius $a = |DX|$ sowie um einen beliebigen Punkt P_2 auf k_1 (und damit auf K) einen Kreis k_2 mit gleichem Radius, dann schneiden sich diese beiden Kreise in zwei Punkten, die P_3 und P_4 benannt seien.

Nach Konstruktion gilt $|P_1P_2| = a = |P_1P_3| = |P_1P_4| = |P_2P_3| = |P_2P_4|$, da P_2, P_3 und P_4 auf k_1 bzw. P_3 und P_4 auch auf k_2 liegen. Damit ist das Tetraeder $P_1P_2P_3P_4$ eindeutig festgelegt. Da jedoch das reguläre Tetraeder mit Kantenlänge a den gleichen Umkugeldurchmesser wie $P_1P_2P_3P_4$ besitzt, muss auch dieses ein reguläres Tetraeder sein, sodass auch $|P_3P_4| = a$ folgt.

Aufgabe 301041:
Zur Konstruktion eines Vierecks $ABCD$ seien die Streckenlängen $a = 3$ cm, $c = 6$ cm, $e = \sqrt{27}$ cm, $f = \sqrt{108}$ cm und die Winkelgröße $\varphi = 60°$ vorgegeben. Gefordert wird:
(1) Die Seite AB hat die Länge $AB = a$.
(2) Die Seite CD hat die Länge $CD = c$.
(3) Die Diagonale AC hat die Länge $AC = e$.
(4) Die Diagonale BD hat die Länge $BD = f$.
(5) Die Diagonalen AC und BD schneiden sich in einem Punkt S, für diesen hat der Winkel $\angle ASB$ die Größe φ.
(a) Beweisen Sie: Wenn ein Viereck $ABCD$ die geforderten Bedingungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Größen a, c, e, f, φ konstruiert werden.
(b) Beschreiben Sie eine Konstruktion und führen Sie die beschriebene Konstruktion durch!
(c) Beweisen Sie: Wenn ein Viereck $ABCD$ nach Ihrer Beschreibung konstruiert werden kann, dann erfüllt es die geforderten Bedingungen!
(d) Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Viereck $ABCD$ gibt, das die geforderten Bedingungen erfüllt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Wenn ein Viereck $ABCD$ die geforderten Bedingungen (1) bis (5) erfüllt, so folgt:
Für den Schnittpunkt C' der Parallelen g' durch C zur Geraden g durch A, B und der Parallelen h' durch B zur Geraden durch A, C ist $ABC'C$ ein Parallelogramm. Daher ist $BC' = AC$, nach (3) also $BC' = e$.
Weiter ist $BC' \parallel AC$, nach dem Wechselwinkelsatz und nach (5) also $\angle DBC' = \angle ASB = \varphi$.
Damit und mit (4), also $BD = f$, sind im Dreieck DBC' die Längen zweier Seiten und die Größe des eingeschlossenen Winkels gegeben.
Ferner ist $CC' = AB$, nach (1) also $CC' = a$, und nach (2) ist $CD = c$. Daher liegt C auf dem Kreis k_1 um C' mit a und auf dem Kreis k_2 um D mit c.
Der Punkt A liegt auf g und h, und nach (5) haben die Strecken AC und BD einen Schnittpunkt S miteinander. Damit ist bewiesen, dass $ABCD$ durch folgende Konstruktion erhalten werden kann:

(b) (1) Man konstruiert ein Dreieck DBC' mit $BD = f$, $BC' = e$, $\angle DBC' = \varphi$.
(2) Man konstruiert den Kreis k_1 um C' mit a und den Kreis k_2 um D mit c.
(3) Man wählt einen gemeinsamen Punkt von k_1 und k_2 als C, falls für ihn folgendes gilt:
Schneiden sich die Parallele g durch B zur Geraden g' durch C, C' und die Parallele h durch C zur Geraden h' durch B, C' in A, so schneiden die Strecken AC und BD einander.



Durchführung der Konstruktion : siehe Abbildung, ohne gestrichelte Linien.

(c) Wenn ein Viereck $ABCD$ nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann, so folgt:
Nach den Konstruktionsschritten (1) und (2) ist $BD = f$ und $CD = c$, also sind (4) und (2) erfüllt.
Nach (3) ist $ABC'C$ ein Parallelogramm. Daher und nach (1),(2) ist $AC = BC' = e$ und $AB = CC' = a$, also sind (3) und (1) erfüllt. Nach der Wahl von C in (3) schneiden sich AC und BD in einem Punkt S, und wegen $AC \parallel BC'$ folgt nach dem Wechselwinkelsatz sowie nach (1), dass $\angle ASB = \angle DBC' = \varphi$ gilt, also auch (5) erfüllt ist.

(d) Der Konstruktionsschritt (1) ist nach dem Kongruenzsatz sws bis auf Kongruenz eindeutig ausführbar. Wegen $BD = \sqrt{108}cm = 2\times\sqrt{27}cm = 2\times BC'$ und $\angle DBC' = 60°$ wird dabei DC' in einem gleichseitigen Dreieck $BB'D$ Seitenhalbierende und zugleich Höhe, und es folgt $DC' = BC'\cdot\sqrt{3} = \sqrt{27}\cdot\sqrt{3}cm = 9cm = a + c$. Also haben die in (2) konstruierten Kreise k_1, k_2 genau einen Punkt, ihren Berührungspunkt C, gemeinsam, und D liegt auf der Verlängerung von $C'C$ über C hinaus.

Daher (und weil B im Parallelogramm $ABC'C$ der Ecke C gegenüberliegt) schneiden sich BD und AC. Also führt (3) auf eindeutig bestimmte Punkte C und A.
Somit gibt es bis auf Kongruenz genau ein Viereck $ABCD$, das (1) bis (5) erfüllt.

VI.V Raumgeometrie

I Runde 1

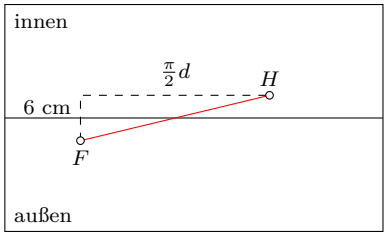
Aufgabe V01008:
Eine Schöpfkelle hat die Form einer Halbkugel. Wie groß muss der innere Durchmesser sein, wenn die Kelle einen Liter Flüssigkeit fassen soll?

Lösung von Steffen Polster:
Das Volumen einer Halbkugel ergibt sich zu $V_H = \frac{4}{6}\pi r^3$. Mit $V_H = 1$ dm^3 wird $r = \sqrt[3]{\frac{6}{4\pi}} = 0{,}78$ dm. Der innere Durchmesser der Schöpfkelle muss 15,6 cm groß sein.

Aufgabe V01015:
An der Innenwand eines zylinderförmigen Glasgefäßes klebt 3 cm vom oberen Rande entfernt ein Tropfen Honig, während an der Außenwand auf einem genau gegenüberliegenden Punkt eine Fliege sitzt.

Welches ist der kürzeste Weg, auf dem die Fliege zu dem Honigtropfen kriechen kann?
Die Maße des Zylinders: $h = 20$ cm, $d = 10$ cm.

Lösung von Steffen Polster:



Die Fliege muss sowohl den Rand des Zylinders überklettern, als auch den halben Umfang des Zylinders überwinden. Breitet man äußere Mantelfläche und innere Mantelfläche in der Ebene aus, so erkennt man, dass der kürzeste Weg die eingezeichnete Gerade von der Fliege F zum Honig H ist.

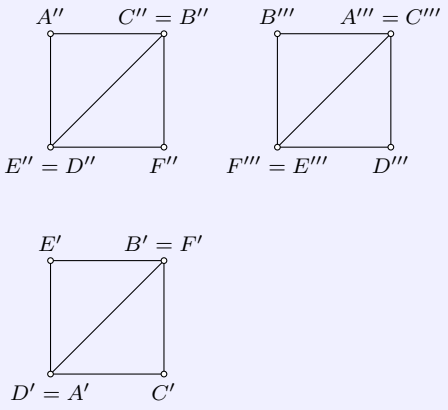
Für das entstehende rechtwinklige Dreieck wird die Hypotenuse (Weglänge) gleich $\sqrt{6^2 + \left(\frac{\pi}{2}d\right)^2}$.

Für die konkreten Maße muss die Fliege $d \approx 16{,}8$ cm Weg zurücklegen.

Aufgabe 011014:
Aus einem würfelförmigen Stück Material (Kantenlänge a) wird die größte Kugel herausgedreht. Was wiegt mehr, die Kugel oder der Abfallspan? Die Antwort ist zu begründen!

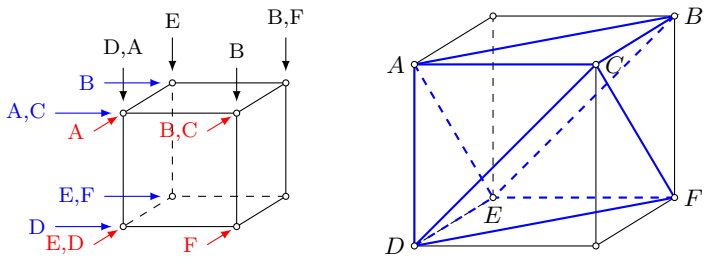
Lösung von Christiane Czech:
Die Kugel hat den Durchmesser a und damit ein Volumen von $\frac{\pi}{6}a^3$. Der Würfel hat ein Volumen von a^3, der Abfallspan also ein Volumen von $(1 - \frac{\pi}{6})a^3$. Das Volumen der Kugel ist somit etwas größer als das des Verschnitts, denn es gilt: $\pi > 3 \Rightarrow \frac{\pi}{3} > 1 \Rightarrow \frac{\pi}{6} > 1 - \frac{\pi}{6}$.

Aufgabe 031013:



Bauen Sie ein Modell des Körpers, den die Abbildung in Grundriss, Aufriss und Seitenriss zeigt ($a = 6$ cm)!

Lösung von Rainer Sattler:



Um die Lösung zu finden, ist es nützlich, sich den Körper einem Würfel einbeschrieben vorzustellen, siehe erste Abbildung.

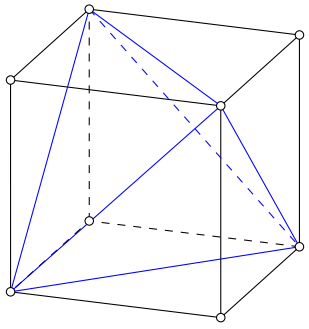
Des Weiteren liegen drei in der Projektion auf einer Geraden liegende Punkte im Original in einer Ebene (und wie man sich anhand der Abstände leicht klarmachen kann sogar auf Ecken). Die Flächendiagonalen machen nach erfolgreicher Bestimmung einiger Seitenbelegungen das Problem schnell eindeutig.

Wenn man gedanklich die drei zu einem Buchstaben gehörenden Richtungspfeile verbindet, treffen sie sich immer alle in einem Punkt des Würfels. Dieser wird in der Parallelprojektion entsprechend mit diesem Buchstaben gekennzeichnet.

Anhand dieser Punkte werden alle Kanten eingetragen. Es entsteht die blaue Figur aus der 2. Abbildung, die aus 6 paarweise parallelen Dreiecksflächen besteht.

Aufgabe 041014:
Gegeben sei ein regelmäßiges Tetraeder (Kantenlänge 6 cm).
a) Stellen Sie das Tetraeder im dimetrischen Verfahren dar!
b) Beweisen Sie, dass die Gegenkanten (Kanten, die keinen Punkt gemeinsam haben) eines regelmäßigen Tetraeders orthogonal sind!

Lösung von Manuela Kugel:



a) Ein regelmäßiges Tetraeder kann man erhalten, wenn man die Flächendiagonalen eines Würfels wie in der Abbildung miteinander verbindet. Jede Kante des Tetraeders hat dann dieselbe Länge.
Dies kann man sich für die dimetrische Darstellung des Tetraeders zu Nutze machen, indem man in gewohnter Weise einen Würfel darstellt (Winkel zur Horizontalen 7° und 42°, Verkürzungsfaktor 0,5 auf der x-Achse) und die Flächendiagonalen geeignet zum Tetraeder verbindet.

b) Projiziert man die gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders so aufeinander, dass sie sich schneiden, so liegen sie in derselben Ebene, da sich gegenüberliegende Kanten in gegenüberliegenden Würfelseiten befinden und diese einander bei Parallelprojektion genau dann schneiden, wenn sie aufeinander zu liegen kommen.

Demzufolge liegen die projizierten Tetraederkanten dann in derselben Ebene und sind die beiden Diagonalen einer Würfelfläche.

Nun ist aus dem Schulunterricht bekannt, dass die Diagonalen eines Quadrates (jede Würfelfläche ist ein Quadrat) einander im rechten Winkel schneiden. Damit ist gezeigt, dass die gegenüberliegenden Tetraederkanten orthogonal zueinander sind, wenn es sich um ein regelmäßiges Tetraeder handelt.

Aufgabe 051013:
Wie verhält sich das Maß der Oberfläche eines Kegels, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, zum Maß der Oberfläche eines Zylinders mit quadratischem Achsenschnitt, wenn das Maß der Rauminhalte beider Körper gleich ist?
Dabei werden bei beiden Figuren gleiche Maßeinheiten zugrundegelegt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien r_1 der Grundkreisradius, I_1 der Oberflächeninhalt und V_1 das Volumen des Kegelkörpers sowie r_2, I_2 und V_2 die entsprechenden Maße des Zylinderkörpers. Die Länge der Mantellinie des Kegels beträgt wegen der Form des Achsenabschnittes $2r_1$.

Die Oberfläche des Kegelkörpers setzt sich aus einer Kreisscheibe vom Radius $r1$ und einem Kegelmantel vom Grundkreisradius r_1 und der Mantellinienlänge $s = 2r_1$ zusammen. Daher gilt:

$$I_1 = \frac{\pi}{2}(2r_1)^2 + \pi r_1^2 = 3\pi r_1^2 \tag{1}$$

Als Fläche eines gleichseitigen Dreiecks hat der Achsenabschnitt und damit auch der Kegelkörper die Höhenlänge $2r_1\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und somit gilt

$$V_1 = \pi r_1^2 r_1 \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{\pi r_1^3}{\sqrt{3}} \tag{2}$$

Die Oberfläche des Zylinderkörpers setzt sich aus zwei Kreisscheiben vom Radius r_2 und einem Zylindermantel vom Radius r_2 und der Höhenlänge $2r_2$ zusammen. Daher gilt:

$$I_2 = 4\pi r_2^2 + 2\pi r_2^2 = 6\pi r_2^2 \tag{3}$$

und außerdem

$$V_2 = \pi r_2^2 \cdot 2r_2 = 2\pi r_2^3 \tag{4}$$

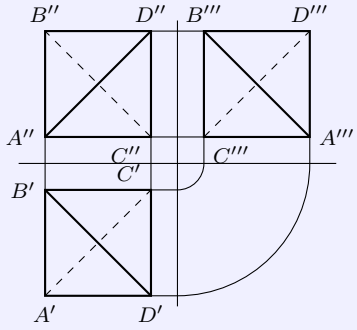
Wegen $V_1 = V_2$ folgt aus (2) und (4)

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt[3]{2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{12} \tag{5}$$

und somit aus (1), (3) und (5)

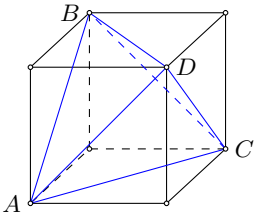
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \tag{6}$$

Aufgabe 101013:



Die Abbildung zeigt einen konvexen durch ebene Flächen begrenzten Körper im Grund-, Auf- und Kreuzriss.
Die Umrisse des dargestellten Körpers sind in den drei Rissen Quadrate mit der Seitenlänge a.
a) Zeichnen Sie einen Schrägriss eines derartigen Körpers ($\alpha = 60°$, $q = 1 : 3$).
b) Berechnen Sie sein Volumen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
b) Der dargestellte Körper kann aus einem Würfelkörper mit der Kantenlänge a hervorgehen, indem man von diesem mit ebenen Schnitten durch die Punkte A, B, C; A, B, D; A, C, D und B, C, D vier kongruente Pyramiden abtrennt.



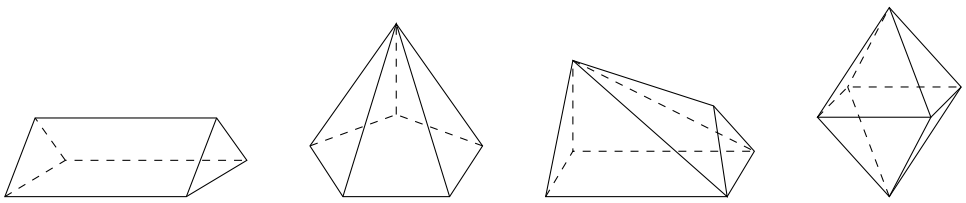
Das Volumen V des dargestellten Körpers ist also gleich der Differenz aus dem Volumen des Würfelkörpers mit der Kantenlänge a und der Summe der Volumina der vier abgetrennten Pyramidenkörper. Da jede von diesen das Volumen $V_P = \frac{1}{6}a^3$ hat, erhält man

$$V = a^3 - \frac{4}{6}a^3 = \frac{a^3}{3}$$

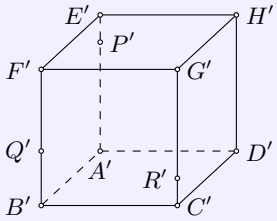
Aufgabe 121011:
Zeichnen Sie in schräger Parallelprojektion vier ebenflächig begrenzte Körper mit jeweils genau 6 Ecken, von denen der erste genau 5, der zweite genau 6, der dritte genau 7 und der vierte genau 8 Flächen besitzt!

Ermitteln Sie jeweils für diese Körper die Anzahl aller Kanten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es könnten zum Beispiel die in der Abbildung gezeigten Körper mit 9, 10, 11 bzw. 12 Kanten gezeichnet werden.



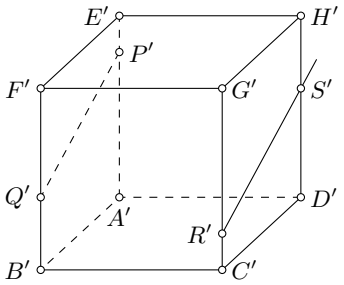
Aufgabe 231014:



Ein Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) mit der Kantenlänge 5 cm habe bei schräger Parallelprojektion mit $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45°$ (auch als Kavalierperspektive bezeichnet) das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$. Auf den Kanten AE, BF und CG mögen Punkte P, Q und R so liegen, dass $\overline{AP} : \overline{PE} = 4 : 1$, $\overline{BQ} : \overline{QF} = 2 : 3$ und $\overline{CR} : \overline{RG} = 1 : 4$ gilt. Der Punkt S sei der Punkt, in dem die Ebene, die durch P, Q und R geht, die Kante DH oder deren Verlängerung schneidet.

Konstruieren Sie das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ des Würfels, konstruieren Sie darin die Bildpunkte P', Q', R' der Punkte P, Q, R und dann das Bild S' des Punktes S! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion von S' und beweisen Sie, dass der Punkt S bei der Parallelkonstruktion den nach Ihrer Beschreibung konstruierten Punkt S' als Bild hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Beschreibung der Konstruktion von S':

Man konstruiert auf den Strecken $A'E'$, $B'F'$ und $C'G'$ mittels Hilfskonstruktion (Strahlensatz) diejenigen Punkte P',Q' und R', für die

$$A'P' : P'E' = 4 : 1 \qquad ; \qquad B'Q' : Q'F' = 2 : 3 \qquad ; \qquad C'R' : R'G' = 1 : 4$$

gilt. Dann konstruiert man (Abbildung) die Parallele durch R' zu $Q'P'$ und bringt sie zum Schnitt mit der Geraden durch $D'H'$. Der Schnittpunkt ist S'.

Beweis, dass S den so konstruierten Punkt S' als Bild hat:

Da bei Parallelprojektion Teilverhältnisse unverändert bleiben, sind die konstruierten Punkte P',Q',R' die Bilder von P,Q bzw. R.
Da die Ebene durch A, B, F, E parallel zur Ebene durch D, C, G, H ist, werden diese beiden Ebenen von der Ebene durch P, Q, R in zwei zueinander parallelen Geraden geschnitten. Weil bei Parallelprojektion parallele Geraden parallele Bildgeraden haben, ist die konstruierte Parallele durch R' zu $Q'P'$ die Bildgerade der Geraden durch R, S. Ihr Schnittpunkt S' mit $D'H'$ ist folglich das Bild des Punktes S.

Aufgabe 261013:
Man denke sich durch den Mittelpunkt einer Kugel drei (nicht notwendig voneinander verschiedene) Ebenen gelegt.

In wie viele Teilflächen kann die Kugeloberfläche durch solche Ebenen zerlegt werden? Nehmen Sie eine Fallunterscheidung vor, um alle Möglichkeiten für die gesuchte Anzahl von Teilflächen zu erhalten!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es gibt genau die folgenden Fälle für drei Ebenen durch den Kugelmittelpunkt M:

1. Fall: Alle drei Ebenen sind miteinander identisch.
   In diesem Fall entstehen genau zwei Teilflächen (die zwei Halbkugelflächen, deren gemeinsamer Rand der Großkreis ist, in dem die Ebene die Kugeloberfläche schneidet).

2. Fall: Genau zwei der drei Ebenen sind miteinander identisch.
   In diesem Fall schneiden sich die beiden Großkreise, die durch den Schnitt der nicht identischen Ebenen mit der Kugeloberfläche entstehen, in genau zwei Schnittpunkten P und Q.

   Jede der beiden Halbkugelflächen, in die die Kugeloberfläche durch den einen Großkreis zerlegt wird, wird durch den zweiten Kreis nochmals in je zwei Teilflächen geteilt. Es entstehen daher insgesamt vier Teilflächen.

3. Fall: Keine zwei der drei Ebenen sind miteinander identisch.
   In diesen Fall entstehen zunächst durch zwei der Ebenen wie im 2. Fall zwei Großkreise, die sich in zwei Punkten P, Q schneiden und die Kugeloberfläche in vier Teilflächen zerlegen. Die Gerade g durch P und Q enthält den Mittelpunkt M der Kugel, da sie die Schnittgerade der beiden Ebenen ist und diese durch M gehen.

   Nun gibt es genau die beiden folgenden Unterfälle:

   3.1. Die Gerade g ist auch in der dritten Ebene enthalten. Dann verläuft der dritte Schnittkreis durch P und Q. Genau zwei der bereits entstandenen vier Teilflächen werden dabei nochmals geteilt. Es entstehen mithin genau sechs Teilflächen.

   3.2. Die Gerade g ist nicht in der dritten Ebene enthalten. Dann geht der dritte Schnittkreis weder durch P noch durch Q. Er schneidet die beiden anderen Schnittkreise in jeweils zwei von P und Q verschiedenen Punkten. Das sind insgesamt vier Punkte, durch die dieser dritte Kreis in vier Teile zerlegt wird. Jeder dieser vier Teilbogen wirkt als neue Begrenzung für je zwei neue Teilflächen, die aus einer alten entstanden sind. Also entstehen insgesamt $2 \cdot 4 = 8$ Teilflächen.

Die gesuchten sämtlichen Möglichkeiten lauten daher: Es können zwei, vier, sechs oder acht Teilflächen entstehen.

Aufgabe 281013:
Gegeben sei eine regelmäßige, fünfseitige, gerade Pyramide P mit der Höhenlänge $h = 10cm$. Durch einen ebenen Schnitt, der parallel zur Grundfläche verläuft, soll von dieser Pyramide eine wiederum regelmäßige, fünfseitige und gerade Pyramide $P*$ abgetrennt werden, deren Volumen $V*$ ein Drittel des Volumens V der ursprünglichen Pyramide P ist. Wie groß ist die Höhenlänge h^* dieser abgetrennten Pyramide P^*?

Hinweis : Schätzen Sie vor der Berechnung das zu erwartende Ergebnis! Wird es

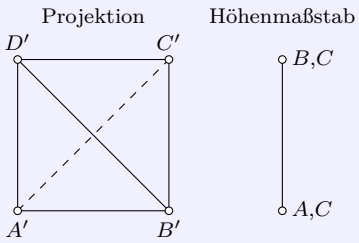
a) zwischen 2 cm und 4 cm,
b) zwischen 4 cm und 6 cm,
c) zwischen 6 cm und 8 cm,
d) zwischen 8 cm und 9 cm

liegen?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist S die Spitze beider Pyramiden, so geht P^* aus P durch zentrische Streckung hervor. Ist k der Streckungsfaktor, so gilt für die Volumina $V^* = k^3 V$. Daher wird die Forderung $V^* = \frac{1}{3}V$ genau dann erfüllt, wenn $k^3 = \frac{1}{3}$, d. h. $k = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ und damit für die Höhenlänge gilt:

$$h^* = k \cdot h = \frac{10}{\sqrt[3]{3}} \text{ cm} \approx 6{,}9 \text{ cm}$$

Aufgabe 291014:

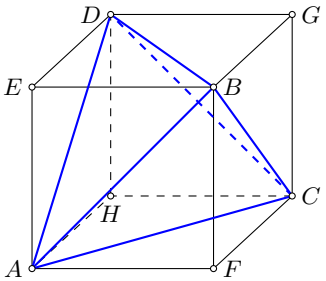


Das Bild stellt einen ebenflächig begrenzten Körper $ABCD$ in senkrechter Eintafelprojektion dar.

Die Punkte A', B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a. Der Abstand der Punkte A, C von den Punkten B, D im Höhenmaßstab betrage ebenfalls a.

Ermitteln Sie aus diesen Angaben das Volumen $V(ABCD)$ des dargestellten Körpers!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Auf den Projektionsgeraden durch A, B, C und D D mögen in dieser Reihenfolge zusätzlich die Punkte E, F, G und H liegen. Dabei sollen die Punkte E und G die gleiche Höhe wie B haben, die Punkte F und H dagegen die gleiche Höhe wie A (siehe Abbildung).

Die 8 Punkte $A, ..., H$ sind die Ecken eines Würfels, dessen Volumen a^3 beträgt.

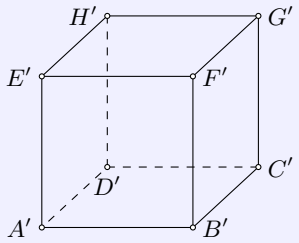
Die Punkte A, F, C, B sind die Ecken eines Tetraeders, bei dem man das rechtwinklige Dreieck AFC als Grundfläche und FB als zugehörige Höhe ansehen kann. Daher hat dieses Tetraeder $AFCB$ das Volumen

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot a = \frac{1}{6} a^3$$

Die zu $AFCB$ kongruenten Tetraeder $AHCD, BEDA$ und $BGDC$ haben das gleiche Volumen. Werden von den Würfel alle vier genannten Tetraeder abgetrennt, so bleibt der in Aufgabentext beschriebene Körper übrig; sein Volumen ist daher

$$V(ABCD) = a^3 - 4 \cdot \frac{1}{6} a^3 = \frac{1}{3} a^3$$

Aufgabe 301014:



Das Bild sei das Bild eines von genau sechs ebenen Viereckflächen begrenzten Körpers $ABCDEFGH$ in Parallelprojektion. Die Vierecke $A'B'C'D'E'F'G'H'$ sind einander kongruente Quadrate. Die vier Strecken $A'D'$, $B'C'$, $F'G'$, $E'H'$ sind zueinander parallel und gleichlang. D' liegt im Inneren von $A'B'F'E'$.

Beweisen Sie, dass es einen Körper gibt, mit dem bei geeigneter Parallelprojektion diese Bedingungen erfüllt sind und bei dem keine seiner sechs begrenzenden Viereckflächen einen Innenwinkel der Größe 90° hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zum Beweis genügt es, einen Körper z. B. durch konstruktive Beschreibung der Eckpunkte anzugeben und die genannten Bedingungen für den so angegebenen Körper als erfüllt nachzuweisen. Eine Möglichkeit hierfür ist die folgende. (siehe Abbildung)

Man wähle D,C,G,H so, dass sie bei senkrechter Parallelprojektion auf die Zeichenebene Z die gegebenen Punkte D',C',G',H' haben und dass genauer $C = C'$ ist, D und G eine miteinander übereinstimmende Höhe h über Z haben sowie H die Höhe $2h$ über Z hat. Bezeichnet H^* den Mittelpunkt von HH', so sind CD', $G'H'$, GH^* parallel und gleichlang zueinander, ebenso $D'D$ und H^*H, also gilt dasselbe auch für CD und GH; somit ist $CGHD$ ein Parallelogramm.

Mit einer weiteren Länge $k > h$ wähle man A,B,F,E so, dass sie bei senkrechter Parallelprojektion auf Z die Bilder A',B',F',E' haben, dass B die Höhe k hat, A und F die Höhe $k + h$ haben sowie E die Höhe $k + 2h$ über Z hat.

Ist A^* der Punkt der Höhe h über A', so folgt durch entsprechende Betrachtung von CB', DA^* und von $B'B$, A^*A, dass auch $ABCD$ ein Parallelogramm ist. In gleicher Weise zeigt man, dass $ABFE$, $ADHE$, $BCGF$ und $EFGH$ ebenfalls Parallelogramme sind; jeweils zwei einander gegenüberliegende der 6 genannten Parallelogramme sind zueinander kongruent.

Ferner ist

$$CH = \sqrt{CH'^2 + (2h)^2} > CH' = D'G' = DG$$

Das Parallelogramm $CGHD$ hat also zwei verschieden lange Diagonalen und ist daher kein Rechteck; d. h., es enthält keinen Innenwinkel der Größe 90°. Dasselbe gilt für aus Parallelogramm $ABFE$.

Nach Voraussetzung (siehe Abbildung der Aufgabe) gilt $B'D' < A'C'$. Daraus folgt

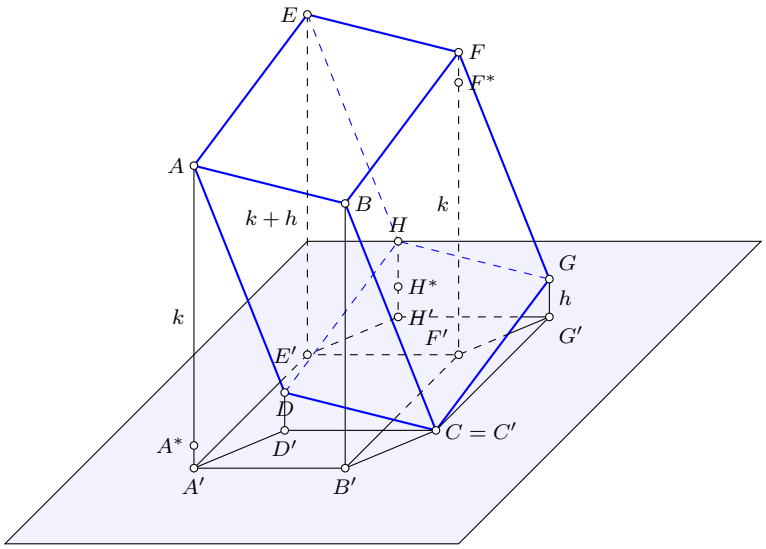
$$BD < BD' = \sqrt{B'D'^2 + k^2} < \sqrt{A'C'^2 + (k + k)^2} = AC$$

Somit enthalten auch $ABCD$ und $EFGH$ keinen Innenwinkel der Größe 90°.
Weiter gilt $C'F' < B'G'$. Daraus folgt: Ist F^* der Punkt der Höhe k über F', so ist

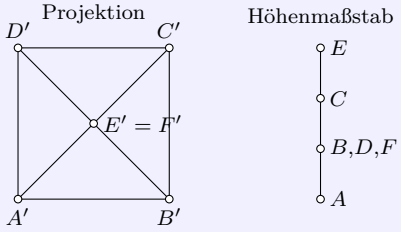
$$CF^* = \sqrt{C'F'^2 + k^2} < \sqrt{B'G'^2 + k^2} = BG'$$

also hat die Differenz $x = BG' - CF^*$ einen positiven Wert. Hat man nun die Länge h (zwar größer als 0, aber) genügend klein gewählt, so kann erreicht werden, dass CF zwar größer ist als CF^*, aber um

weniger als $\frac{x}{2}$, und dass BG zwar kleiner ist als BG', aber ebenfalls um weniger als $\frac{x}{2}$. Dann gilt auch noch $CF < BG$ und damit ist erreicht, dass $BCGF$ und $ADHE$ um keinen Innenwinkel der Größe 90° enthalten.



Aufgabe 311014:



Zur Abbildung wurde als Beschreibung hinzugefügt, sie sei Grundriss und zugehöriger Höhenmaßstab eines ebenflächig begrenzten Körpers. Dieser habe A, B, C, D, E, F als Eckpunkte.

$A'B'C'D'$ ist ein Quadrat, $E' = F'$ sein Diagonalenschnittpunkt; im Höhenmaßstab ist die Strecke, die den Höhenunterschied zwischen A und E angibt, in drei gleichlange Teilstrecken geteilt.

Weisen Sie nach, dass die Abbildung zusammen mit der obigen Beschreibung widerspruchsvoll ist! Führen Sie eine Änderung durch, die den Widerspruch beseitigt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wie der Höhenmaßstab zeigt, liegen die Punkte B und D auf gleicher Höhe h, gemessen über der Höhe von A; dieselbe Höhe hat folglich auch der Mittelpunkt M von BD.

Ferner hat C die Höhe $2h$ über der von A; daher hat nach dem Strahlensatz auch der Mittelpunkt N von AC die Höhe h. Bei der Parallelprojektion geht jeweils der Mittelpunkt einer Strecke in den Mittelpunkt der Bildstrecke über; daher und weil im Quadrat $A'B'C'D'$ die Diagonalen einander halbieren, haben M und N denselben Bildpunkt

$$M' = N' = F' \tag{1}$$

Hiernach und wegen der gleichen Höhe gilt $M = N$, also schneiden sich die Strecken BD und AC (in diesem Punkt); folglich liegen A, B, C, D in einer gemeinsamen Ebene e.

Wegen (1) und da F ebenfalls die Höhe h hat, ist auch $M = N = F$, somit liegt F in der Ebene e. In der Abbildung sind die Strecken $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ eingezeichnet; sie können nur als Bilder der Strecken

$$AB, BC, CD, DA \tag{2}$$

zustande kommen. Wenn es einen nach der Beschreibung dargestellten ebenflächig begrenzten Körper gäbe, so wären dies vier seiner Kanten.

In jeder Kante müssten zwei Teilflächen seiner Oberfläche zusammenstoßen. Die einzigen ebenen Flächen, die je eine der Kanten (2) mit anderen der Punkte A, B, C, D, E, F verbinden, sind aber, da F in e liegt, das Viereck $ABCD$ und die vier Dreiecke ABE, BCE, CDE, DAE. In dem so begrenzten Körper (der Pyramide $ABCDE$) wäre aber F kein Eckpunkt, was der Beschreibung widerspricht, die auch F unter den Eckpunkten aufzählt.

Eine Änderung, die den Widerspruch beseitigt, ist z. B. das Weglassen einer der Strecken $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ aus der Zeichnung.

Der dann widerspruchsfrei dargestellte und beschriebene Körper entsteht aus der Pyramide $ABCDE$ durch Herausschneiden der entsprechenden unter den Teilpyramiden $ABFE$, $BCFE$, $CDFE$, $DAFE$.

Aufgabe 331015:
Bei einer oben offenen Blechdose von der Form eines geraden Kreiszylinders mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h seien A und B die Endpunkte eines Durchmessers der Grundfläche. Dabei liege A außerhalb und B innerhalb der Dose. Die Dicke des Bleches werde vernachlässigt.

Eine Ameise bewegt sich von A nach B

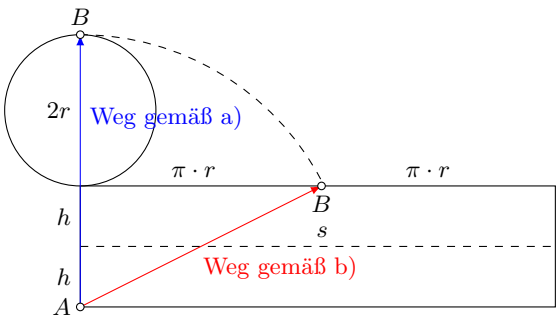
a) nur auf Mantellinien und einem Durchmesser der Grundfläche,

b) auf einem möglichst kurzen Weg, den es unter allen Wegen von A nach B gibt, die die äußere und die innere Mantelfläche nicht verlassen.

Ermitteln Sie einen Wert des Verhältnisses $h : r$, für den die beiden in a) und b) beschriebenen Wege einander gleichlang sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der in a) beschriebene Weg hat die Länge $2h + 2r$.

Denkt man sich die Mantelfläche längs der durch A gehenden Mantellinie aufgeschnitten und in die Zeichenebene abgewickelt, so geht der obere Rand der Mantelfläche in eine Strecke s der Länge $2\pi \cdot r$ über. Denkt man sich ferner die Innenseite der so abgewickelten Mantelfläche als ein zweites Exemplar auf der Rückseite der Zeichenebene, das sich nun um die Strecke s als Drehachse in die Vorderseite der Zeichenebene hineindrehen lässt, so entsteht ein Rechteck mit den Seitenlängen $2h$ und $2\pi \cdot r$, in dem A eine Ecke und B der Mittelpunkt derjenigen Seiten ist, die A nicht enthält und $2\pi \cdot r$ lang ist (siehe Abbildung; die Grundfläche der Dose wurde ebenfalls in die Zeichenebene gebracht).



Bei diesen Veränderungen haben sich die Weglängen auf der Mantelfläche nicht geändert. Ein in b) genannter möglichst kurzer Weg von A nach B muss daher nun geradlinig verlaufen und somit nach dem Satz des Pythagoras die Länge

$$\sqrt{4h^2 + \pi^2 r^2}$$

haben. Die beiden Wege sind folglich einander gleichlang, wenn

$$2h + 2r = \sqrt{4h^2 + \pi^2 r^2}$$

gilt. Dies ist der Fall, wenn

$$\begin{aligned} 4^2 + 8hr + 4r^2 &= 4h^2 + \pi^2 r^2 \\ 8h &= (\pi^2 - 4) \cdot r \end{aligned}$$

gilt. Damit ist als ein gesuchter Wert ermittelt:

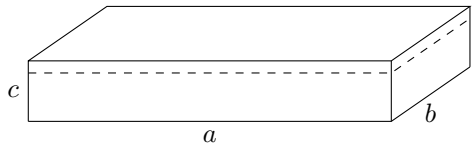
$$h : r = \frac{\pi^2 - 4}{8} \quad (\approx 0{,}7337)$$

II Runde 2

Aufgabe 011022:
An quaderförmigen Werkstücken mit den Abmessungen $a = 120$ mm, $b = 60$ mm und $c = 17$ mm soll die Dicke c von 17 mm auf 15 mm verringert werden. Das geschieht mit Hilfe einer Kurzhobelmaschine. Folgende Einstellungen sind möglich:
(1) 46 Hübe je Minute, Hublänge bis zu 180 mm,
(2) 108 Hübe je Minute, Hublänge bis zu 77 mm.

a) Wie ist das Werkstück einzuspannen und welche Einstellung ist zu wählen, damit die Arbeit möglichst schnell durchgeführt wird?
b) Welches Ergebnis erhält man für ein Werkstück mit den Abmessungen $a = 150$ mm, $b = 50$ mm, $c = 17$ mm?
Anmerkung: Der Vorschub möge 1,5 mm betragen.

Lösung von Christiane Czech:

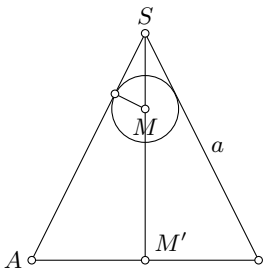


a) Bei Einstellung 1 wird man so einspannen, dass a in Hubrichtung liegt. Man benötigt für eine Fläche $\frac{60}{1{,}5} = 40$ Hübe, also $\frac{40}{46} = \frac{20}{23}$ min reine Arbeitszeit.
Bei Einstellung 2 spannt man so ein, dass b in Hubrichtung liegt. Man benötigt dann 80 Hübe, also eine Arbeitszeit von $\frac{20}{27}$ min.
Damit ist Einstellung 2 rationeller.

b) Bei Einstellung 1 wählt man die Einspannung wie oben; man braucht 34 Hübe, also $\frac{17}{23}$ min. Bei Einstellung 2 wählt man ebenfalls die Einstellung wie oben und braucht 100 Hübe, also eine Arbeitszeit von $\frac{25}{27}$ min.
Hier ist damit Einstellung 1 rationeller.

Aufgabe 031024:
In einem Kreiskegel, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, befindet sich eine Kugel, die den Mantel des Kegels berührt und deren Mittelpunkt die Höhe des Kegels im Verhältnis 1 : 2 (von der Spitze aus) teilt.
Der Durchmesser der Grundfläche des Kegels sei a.
Wie groß ist der Radius der Kugel?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Sind SA Mantellinie und MF Lot von M auf g_{SA} (siehe Abbildung), so gilt nach dem 1. Ähnlichkeitssatz $\triangle MFS \cong \triangle AM'S$, also wegen $|AM'| = \frac{a}{2}; |SA| = a$ und $|MF| = r$

$$r : |SM| = \frac{a}{2} : a \qquad \text{und damit} \qquad r = \frac{|SM|}{2}$$

Besitzt die Höhe des Kegelkörpers, d. h. des gleichseitigen Schnittdreiecks mit der Seitenlänge a, die Länge h, so gilt $h = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.
Nach Voraussetzung ist weiterhin $|SM| : |MM'| = 1 : 2$, woraus wegen $|SM'| = h$ folgt: $|SM| = \frac{h}{3}$, so dass sich schließlich $r = \frac{a}{12}\sqrt{3}$ ergibt.

Aufgabe 061024:
Verbindet man bei einem Würfel die Mittelpunkte der Seitenflächen gradlinig miteinander, so erhält man die Kanten eines dem Würfel einbeschriebenen Oktaeders. Verführt man in entsprechender Weise bei einem Oktaeder, so erhält man die Kanten eines Würfels.

a) Wie verhalten sich die Volumina von Würfel und einbeschriebenen Oktaeder zueinander?
b) Wie verhalten sich die Volumina von Oktaeder und einbeschriebenen Würfel zueinander?
c) Wie verhalten sich im ersten Fall die Inhalte der Oberflächen zueinander?
d) Wie verhalten sich im zweiten Fall die Inhalte der Oberflächen zueinander?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für das Volumen des Würfels mit der Kantenlänge a gilt: $V_w = a^3$.
Für den Inhalt der Oberfläche des Würfels mit der Kantenlänge a gilt: $O_w = 6a^2$.

Für das Volumen des Oktaeders mit der Kantenlänge b gilt: $V_o = \frac{1}{3}b^3 \cdot \sqrt{2}$.
Für den Inhalt der Oberfläche des Oktaeders mit der Kantenlänge b gilt: $O_o = 2b^2 \cdot \sqrt{3}$.

Das Oktaeder setzt sich aus einer vierseitigen Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche des Inhalts b^2 und deren Spiegelbild an der Grundfläche zusammen. Die Höhe ist die halbe Diagonale des Quadrates, also $\frac{b}{2}\sqrt{2}$.
Die Oberfläche besteht aus 8 gleichseitigen Dreiecken mit der Grundseite b. Deren Höhe ist $\frac{b}{2}\sqrt{3}$. Damit ist der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke $\frac{b^2}{4}\sqrt{3}$.

a) Die Länge der Würfelkante sei a. Dann gilt für die Länge der Oktaederkante $b = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Daher ist

$$V_w = a^3 \qquad \text{und} \qquad V_o = \frac{1}{3}\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right) = \frac{1}{6}a^3$$

und mithin $V_w : V_o = 6 : 1$.

b) Die Länge der Oktaederkante sei b. Die Mittelpunkte S der gleichseitigen Dreiecke liegen auf den Seitenhalbierenden. Diese werden von S im Verhältnis $1 : 2$ geteilt. Eine parallele Strecke zu b durch S

hat die Länge $\frac{2}{3}b$. Der Schnitt einer Ebene, in der eine Seitenfläche des einbeschriebenen Würfels liegt, mit dem Oktaeder ist also ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{2}{3}b$.
Die Länge der Quadratseite a ergibt sich aus

$$a^2 = \left(\frac{1}{3}b\right)^2 + \left(\frac{1}{3}b\right)^2 \qquad \text{also} \qquad a = \frac{1}{3}b\sqrt{2}$$

Daher gilt:

$$V_o = \frac{1}{3}b^3\sqrt{2} \qquad \text{und} \qquad V_w = \left(\frac{1}{3}b\sqrt{2}\right)^3 = \frac{2}{27}b^3\sqrt{2}$$

und mithin $V_o : V_w = 9 : 2$.

c) Es ist $O_w = 6a^2$ und $O_o = a^2\sqrt{3}$. Daher ist $O_w : O_o = 2\sqrt{3} : 1$.

d) Es ist $O_o = 2b^2\sqrt{3}$ und $O_w = \frac{4}{3}b^2$. Daher ist $O_o : O_w = 3\sqrt{3} : 2$.

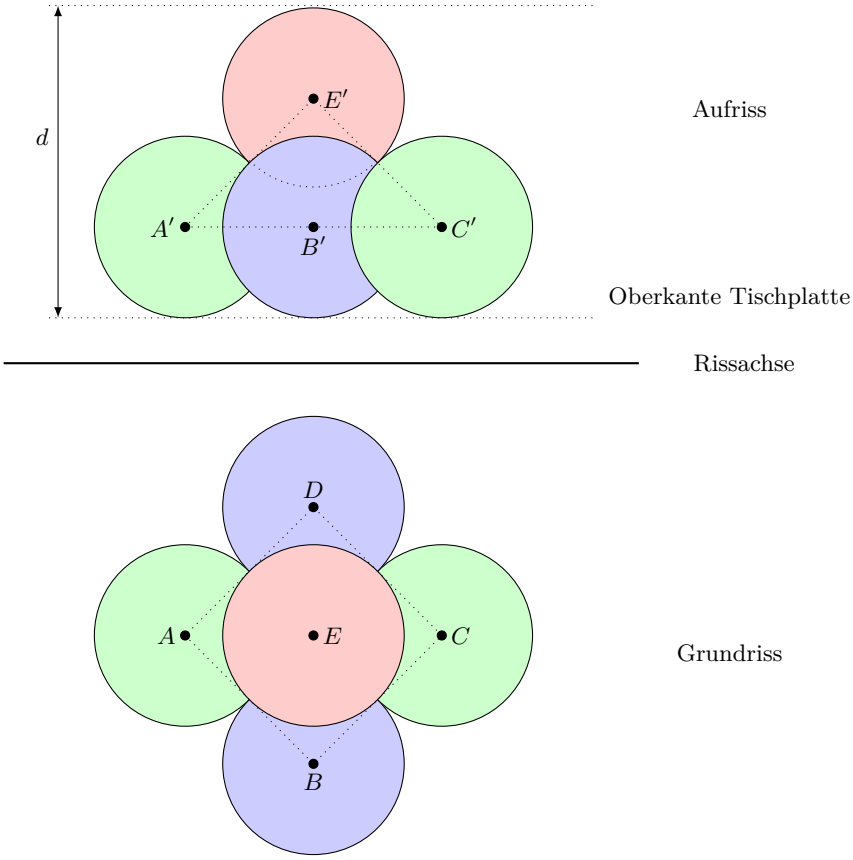
Aufgabe 071024:
Auf einem ebenen Tisch liegen 4 Holzkugeln, von denen jede den Radius der Länge r hat und die sich gegenseitig so berühren, dass ihre Berührungspunkte mit der Tischplatte die Ecken eines Quadrates bilden.
Auf die entstandene mittlere Lücke wird eine fünfte Holzkugel mit gleichem Radius gelegt.
Geben Sie den Abstand d des höchsten Punktes dieser fünften Kugel von der Tischplatte an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das durch die Berührungspunkte gebildete Quadrat $ABCD$ (Abbildung Grundriss) hat die Seitenlänge $2r$ und die Diagonalenlänge $2r\sqrt{2}$.
Ein senkrecht zur Tischebene geführter, die Diagonale AC enthaltender Schnitt ergibt das Aufrissbild.
Da das Dreieck $\triangle A'C'E'$ gleichschenklig ist und die Seitenlängen

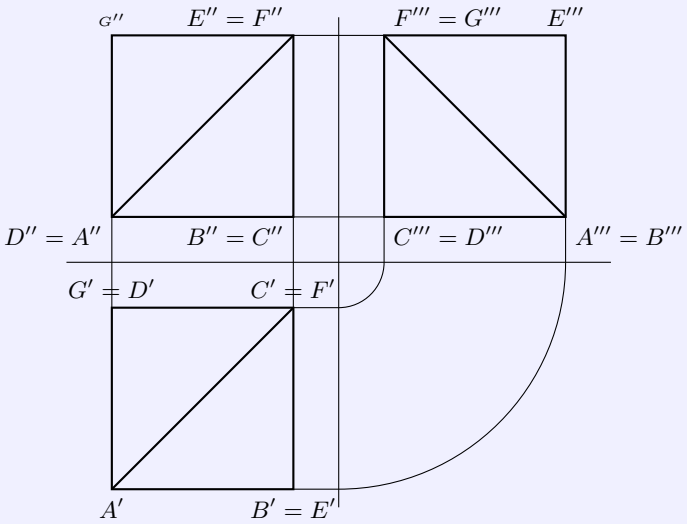
$$A'C' = AC = 2r\sqrt{2}; \qquad A'E' = AE = C'E' = CE = 2r$$

hat, so ist es gleichschenklig-rechtwinklig; das Lot von E auf AC hat folglich die Länge $r\sqrt{2}$.
Der gesuchte Abstand d beträgt daher

$$d = r + r\sqrt{2} + r = r(2 + \sqrt{2})$$

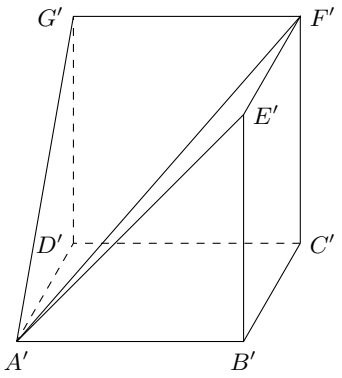


Aufgabe 121022:



In der Abbildung ist ein konvexer, durch ebene Flächen begrenzter Körper in Grund-, Auf- und Seitenriss dargestellt. Die Umrisse des dargestellten Körpers sind in allen drei Rissen Quadrate mit der Seitenlänge a.
a) Zeichnen Sie für $a = 6$ cm den Körper in schräger Parallelprojektion $\left(\alpha = 60°; q = \frac{1}{2}\right)$.
b) Berechnen Sie das Volumen V des in a) dargestellten Körpers!

Lösung von Steffen Polster:



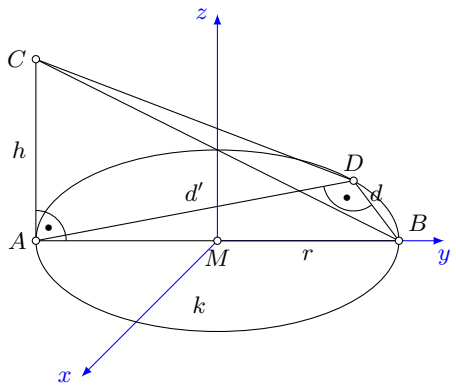
Der Körper entsteht, in dem aus einem Würfel eine Pyramide mit der Grundfläche $EFGH$ (H wäre der Punkt senkrecht über A, der zum Würfel ergänzt) und der Höhe a herausschneidet.
Damit wird für das Volumen V des Körpers

$$V = W_{\text{Würfel}} - V_{\text{Pyamide}} = a^3 - \frac{1}{3}a \cdot a^2 = \frac{2}{3}a^3 = 144cm^3$$

Aufgabe 141024:
Gegeben seien positive Streckenlängen h, r, d mit $d < 2r$. Es bezeichne ε eine Ebene und k einen in ε gelegenen Kreis mit einem Durchmesser AB der Länge $2r$.
Auf der Senkrechten zu ε durch A sei C ein Punkt mit $AC = h$. Auf k sei D ein Punkt mit $BD = d$.
a) Man berechne das Volumen V der Pyramide mit den Eckpunkten C, D, A, B!
b) Man beweise, dass $BD \perp CD$ gilt!

Lösung von Steffen Polster:
Wir führen wie in der Abbildung ein orthogonales, kartesisches Koordinatensystem ein und legen den Mittelpunkt M des Kreises k in den Koordinatenursprung. Die Ebene ε sei die $x-y$-Koordinatenebene, so dass der Kreis k in ihr liegt.
Dann haben laut Aufgabenstellung die Punkte A, B, C die Koordinaten:

$$A(0;-r;0) \quad ; \quad B(0;r;0) \quad ; \quad C(0;-r;h)$$



$D(x;y)$ liegt auf dem Kreis k mit der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ (1). Sein Abstand d vom Punkt B ist

$$d = \sqrt{(0-x)^2 + (r-y)^2 + 0^2}$$

Einsetzen von (1) nach x^2 umgestellt, ergibt nach Auflösen die Koordinate y von D:

$$d = \sqrt{r^2 - y^2 + (r-y)^2} \Rightarrow y = \frac{2r^2 - d^2}{2r}$$

Für die x-Koordinate des Punktes D folgt

$$x_{1;2} = \pm\frac{d}{2r}\sqrt{4r^2 - d^2}$$

O. B. d. A. wählen wir das positive x_1. Für den Abstand $AD = d'$ wird dann

$$d' = \sqrt{x^2 + (-r - y)^2}$$

$$d' = \sqrt{\left(\frac{d}{2r}\sqrt{4r^2 - d^2}\right)^2 + \left(-r - \frac{2r^2 - d^2}{2r}\right)^2}$$

$$d' = \sqrt{4r^2 - d^2}$$

Wählen wir o. B. d. A. den positiven Wert x_1, so wird der Flächeninhalt des Grunddreiecks der gesuchten Pyramide $A_\triangle = \frac{d \cdot d'}{2}$, da das Dreieck rechtwinklig ist. Der Punkt D liegt nämlich auf dem Thaleskreis des Durchmessers AB. Für das Volumen der Pyramide ergibt sich somit

$$V = A_\triangle \cdot \frac{h}{3} = \frac{d \cdot h}{6}\sqrt{4r^2 - d^2}$$

Die Strecke CD steht auf BD senkrecht, wenn das Dreieck CDB rechtwinklig ist, mit dem rechten Winkel bei D. Dann muss nach dem Satz des Pythagoras und seiner Umkehrung

$$CD \perp BD \quad \Leftrightarrow \quad CD^2 + BD^2 = CB^2 \tag{2}$$

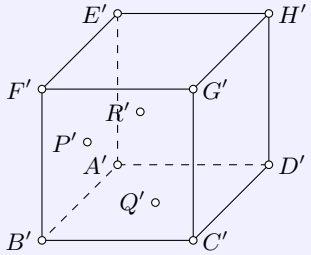
gelten. Für die Quadrate der drei Strecken ergibt sich durch Einsetzen der für D ermittelten Koordinaten

$$\begin{aligned} CB^2 &= 4r^2 + h^2 \\ DB^2 &= d^2 \\ CD^2 &= \left(\frac{d}{2r}\sqrt{4r^2 - d^2}\right)^2 + \left(\frac{2r^2 - d^2}{2r} + r\right)^2 + h^2 \\ &= -d^2 + h^2 + 4r^2 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich sofort (2) und CD und BD sind senkrecht zueinander. w. z. b. w.

Aufgabe 231023:
Auf dem Arbeitsblatt ist das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Würfels $ABCDEFGH$ bei schräger Parallelprojektion gegeben.
Ferner sind die Bilder P', Q' und R' dreier Punkte P, Q bzw. R gegeben, wobei P auf der Seitenfläche $ABFE$, Q auf der Seitenfläche $BCGF$, R auf der Seitenfläche $DAEH$ liegt.
Konstruieren Sie das Bild der Schnittfigur des Würfels mit der Ebene durch P, Q und R!
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Arbeitsblatt:



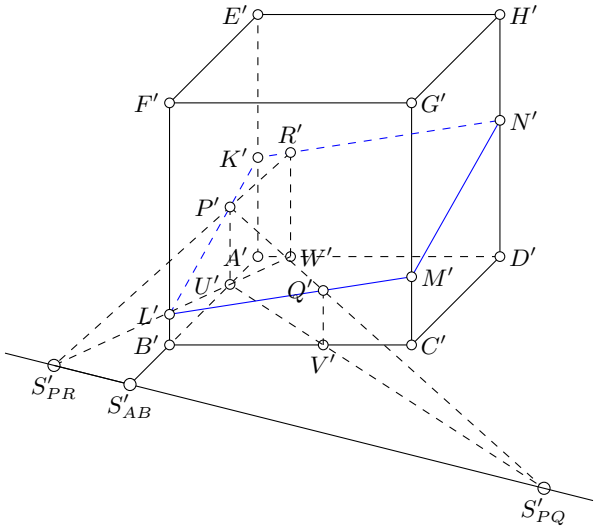
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Parallelen durch P, Q, R zu FB liegen in den Seitenflächen $ABFE$, $BDGF$ bzw. $DAEH$. Sie schneiden daher die Strecken AB, BC bzw. DA; die Schnittpunkte seien U, V bzw. W. Da parallele Geraden

bei Parallelprojektion wieder in parallele Geraden übergehen, folgt:

(1) Man konstruiere die Parallelen durch P', Q', R' zu $F'B'$ und ihre Schnittpunkte U', V' bzw. W' mit $A'B'$, $B'V'$ bzw. $D'A'$ dann sind U', V', W' die Bildpunkte von U, V bzw. W.
Wegen $PU \parallel QV$ liegen P, Q, U, V in derselben Ebene. Die Geraden durch P, Q bzw. U, V sind nicht zueinander parallel (denn wie die Konstruktion ergibt, ist $P'Q' \nparallel U'V'$); sie haben also einen Schnittpunkt S_{PQ}. Er liegt in der Ebene durch P, Q, R (da P und Q und folglich ihre Verbindungsgerade in dieser Ebene liegen) und in der Ebene durch A, B, C, D (da U und V in dieser liegen). Daraus folgt:

(2) Man konstruiere die Geraden durch P', Q' bzw. U', V' und ihren Schnittpunkt S'_{PQ}; dann ist S'_{PQ} der Bildpunkt eines Punktes S_{PQ} auf der Schnittgeraden$s$ der Ebene durch P, Q, R bzw. A, B, C, D.

(3) Man konstruiere die Geraden durch P', R' bzw. U', W' und ihren Schnittpunkt S'_{PR}; dann ist S'_{PR} der Bildpunkt eines Punktes S_{PR} auf der Schnittgeraden s.

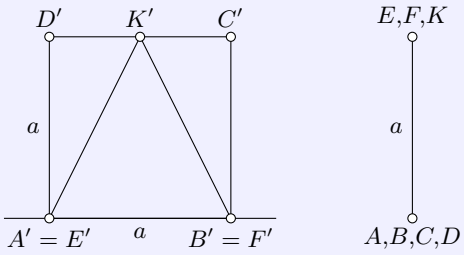


(4) die Gerade s' durch S'_{PQ}, S'_{PR}, so ist s' die Bildgerade von s.
Die Gerade durch A, B und die Gerade s liegen in der Ebene durch A, B, C, D. Sie sind auch nicht parallel zueinander (dann es ist $A'B' \nparallel s'$); sie haben also einen Schnittpunkt S_{AB}. Er liegt in der Ebene durch P, Q, R (da s in dieser Ebene liegt) und in der Ebene durch A, B, F, E. Das gilt auch von P.
Also ist die Gerade durch S_{AB} und P die Schnittgerade der Ebenen durch P, Q, R bzw. A, B, F, E. Die im Quadrat $ABFE$ gelegene Teilstrecke dieser Geraden ist folglich ein Teil der gesuchten Schnittfigur.

Daraus folgt: Konstruiert man
(5) die Gerade durch A', B' und ihren Schnittpunkt S'_{AB} mit s',
(6) die Gerade durch S'_{AB}, P' und ihre in $A'B'F'E'$ gelegene Teilstrecke $K'L'$ ($'K'$ auf $A'E'$m L' auf $B'F'$, so ist $K'L'$ das Bild des Teiles der Schnittfigur (K auf AE, L auf BF).

Damit folgt weiter:
(7) Man verlängere $L'Q'$ bis zum Schnitt M' mit $C'G'$ sowie $K'R'$ bis zum Schnitt N' mit $D'H'$.
Dann ist das Viereck $K'L'M'N'$ das Bild der Schnittfigur $KLMN$.

Aufgabe 241024:



Die Abbildung stellt den Grundriss eines Körpers in senkrechter Eintafelprojektion sowie den dazugehörigen Höhenmaßstab dar. Dabei ist K' der Mittelpunkt von $C'D'$.
Zeigen Sie, dass es mindestens zwei ebenflächig begrenzte Körper mit unterschiedlichem Volumen gibt, die diesen Grundriss, diesen Höhenmaßstab und genau die hierdurch festgelegten Punkte A, B, C, D, E, F, K als Eckpunkte haben!
Als Lösung genügt die Aufzählung von (mindestens zwei) Körpern der verlangten Art durch folgende Angaben:
Jeweils eine Darstellung des Körpers in schräger Parallelprojektion, eine Aufzählung seiner sämtlichen Seitenflächen (in der Schreibweise, dass $UV...Z$ dasjenige ebene Vieleck bezeichnet, das genau die Ecken $U, V, ..., Z$ hat, die bei einer Umlaufung in dieser Reihenfolge erreicht werden) und eine Berechnung des Volumens des Körpers in Abhängigkeit von der gegebenen Länge a.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Abbildungen a) bis e) zeigen fünf Beispiel für Körper der gesuchten in schräger Parallelprojektion. Als Lösung genügt es, zwei derartige Darstellungen und die zugehörigen Angaben aufzuführen.

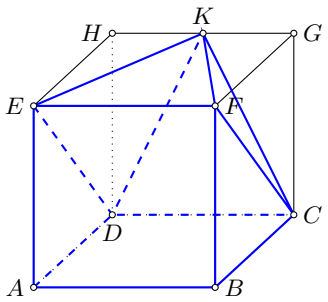


Abbildung a)

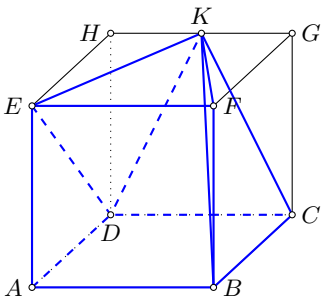


Abbildung b)

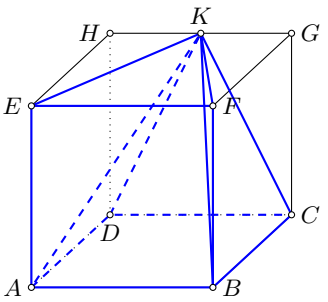


Abbildung c)

Zu a):
Seitenflächen $ABCD, ADE, ABFE, BCF, CFK, CDK, DEK, EFK$
Der Körper kann gebildet werden, indem man von dem Würfel $ABCDFEGH$ die Pyramiden $CGFK$ (Grundfläche CGF mit Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2$, Länge der zugehörigen Höhe $GK = \frac{1}{2}a$, also Volumen $\frac{1}{12}a^3$) und $DHEK$ (zu $CGFK$ spiegelbildlich) abschneidet.
Daher beträgt das Volumen des Körpers $a^3 - 2 \cdot \frac{1}{12}a^3 = \frac{5}{6}a^3$.

Zu b):
Seitenflächen $ABCD, ADE, ABFE, BFK, BCK, CDK, DEK, EFK$
Von $ABCDEFGH$ abgeschnitten:
$BCFGK$ (Grundfläche $BCDGF$ mit Inhalt a^2, Höhenlänge $GK = \frac{1}{2}a$, $DEHK$ (Grundfläche DHE mit Inhalt $\frac{1}{2}a^2$, Höhenlänge $HK = \frac{1}{2}a$.
Volumen des Körpers: $a^3 - \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{12}a^3 = \frac{3}{4}a^3$.

Zu c):
Seitenfächen $ABCD, ADK, AEK, ABFE, BFK, BCK, CDK, EFK$
Von $ABCDEFGH$ abgeschnitten:
$BCFGK$ (wie in b)) mit Inhalt a^2, Höhenlänge $GK = \frac{1}{2}a$, $ADHEK$ (spiegelbildlich)
Volumen des Körpers: $a^3 - 2 \cdot \frac{1}{6}a^3 = \frac{2}{3}a^3$.

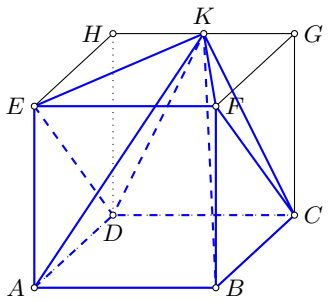


Abbildung d)

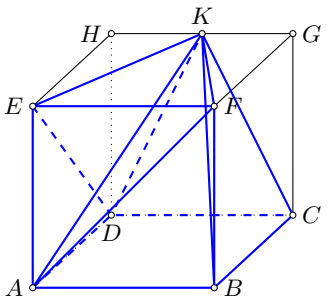
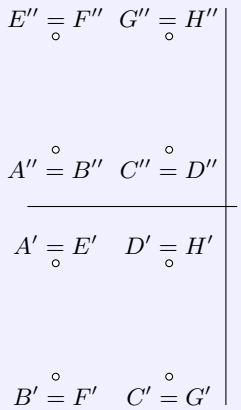


Abbildung e)

Zu d):
Seitenflächen $ABCD, ADE, AEK, ABK, BFK, BCF, CFK, CDK, DEK$
Von $ABCDFEGH$ abgeschnitten:
$CGFK, DHEK$ (wie in a)), $ABFEK$ (Grundfläche $ABFE$ mit Inhalt a^2, Höhenlänge a (Lot von K auf EF))
Volumen des Körpers: $a^3 - 2 \cdot \frac{1}{12}a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{2}a^3$.

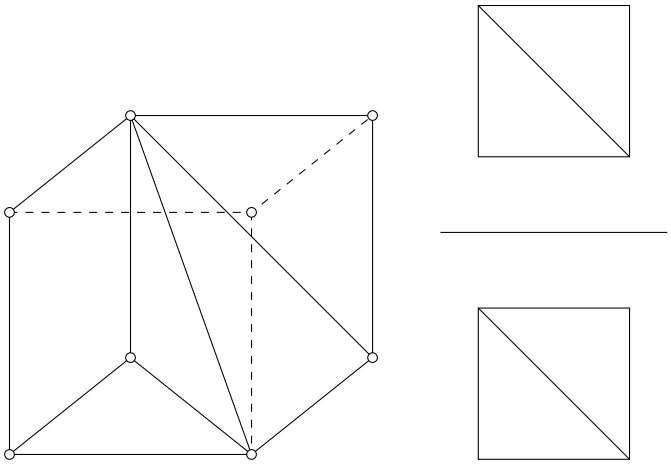
Zu e):
Seitenflächen $ABCD, ADE, AEK, AFK, ABF, BFK, BCK, CDK, DEK$
Von $ABCDFEGH$ abgeschnitten:
$BCGFK, DHEK$ (wie in b)), $AEFK$ (Grundfläche AEF mit Inhalt $\frac{1}{2}a^2$, Höhenlänge a)
Volumen des Körpers: $a^3 - \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{12}a^3 - \frac{1}{6}a^3 = \frac{7}{12}a^3$.

Aufgabe 251024:



Die Punkte A, B, C, D, E, F, G, H seien im Raum so gelegen, wie es die Abbildung in Zweitafelprojektion zeigt.
Zeichnen Sie in Kavalierperspektive und in Zweitafelprojektion einen zusammenhängenden, ebenflächig begrenzten Körper, der genau diese acht Punkte als Eckpunkte besitzt, der kein Würfel ist, aber aus einem solchen durch Herausschneiden eines ebenflächig begrenzten Teilkörpers entstanden ist.
Von Körperflächen verdeckte Kanten sind gestrichelt zu zeichnen.
Hinweis: Zwei Körper, die sich nur in einem Punkt oder einer Kante berühren, sollen nicht als zusammenhängend gelten.
Als Lösung genügt ein gezeichnetes Beispiel ohne Begründung.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

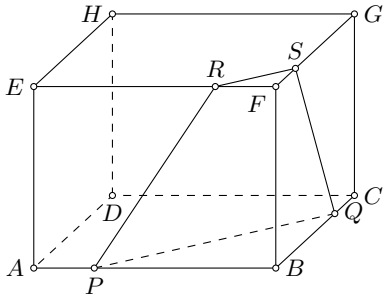


Aufgabe 261022:
Schneidet man einen Quader mit einer Ebene, so entsteht als Schnittfigur entweder ein Punkt oder eine Strecke oder ein n-Eck.
a) Ist es möglich, dass dieses n-Eck zwar ein Viereck, aber kein Trapez ist?
b) Ist es möglich, dass dieses n-Eck zwar ein Viereck, aber kein Parallelogramm ist?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(a) Für jede Ebene E, die den Quader in einem n-Eck schneidet gilt:
Jedes Seite dieses n-Ecks ist der Durchschnitt der Ebene E mit mindestens einer Seitenfläche des Quaders. Dabei sind zwei verschiedene Seiten des n-Ecks nur dann in derselben Seitenfläche des Quaders enthalten, wenn diese Seitenfläche ganz in der Ebene E liegt und daher die gesamte Schnittfigur ist.
In diesem Fall also ist das n-Eck ein Rechteck und somit ein Trapez. In jedem anderen Fall aber, in dem ein Viereck entsteht, gibt es folglich vier paarweise verschiedene Seitenflächen des Quaders, deren Durchschnitt mit E die vier Viereckssseiten sind.

Da der Quader nicht mehr als drei paarweise nichtparallele Seitenflächen besitzt, müssen sich unter den genannten Seitenflächen mindestens zwei zueinander parallele befinden. Die (zueinander parallelen) Ebenen, in denen zwei solche Seitenflächen liegen, werden von der Ebene E in zwei zueinander parallelen Geraden geschnitten; das Viereck hat also (mindestens) zwei zueinander parallele Seiten und ist folglich ein Trapez.

Die in (a) gestellte Frage muss daher mit nein beantwortet werden.



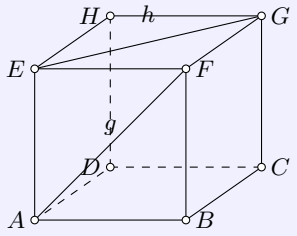
(b) Die in (b) gestellte Frage ist zu bejahen, wie man durch ein Beispiel der folgenden Art beweisen kann: Auf den Seiten AB und BC eines Quaders $ABCDEFGH$ (Abbildung) wähle man je einen Punkt P bzw. Q; auf den entsprechenden Seiten EF und FG der $ABCD$ gegenüberliegenden Fläche $EFGH$ zwei Punkte R bzw. S mit $FR < BP$ und $RS \parallel PQ$.

Wegen $FR \parallel BP$ wird dann $\angle FRS = \angle BPQ$; hieraus und aus $\angle RFS = 90° = \angle PBQ$ folgt $\triangle FRS \cong \triangle BPQ$, also $FS : BQ = FR : BP < 1$, d. h. $FS < BQ < BC = FG$, also ist die genannte Wahl von S

auf FG tatsächlich möglich, und es gilt $RS : PQ = FR : BP < 1$, d. h. $RS < PQ$.

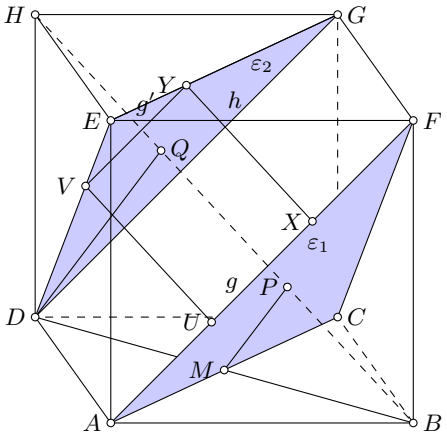
Wegen $RS \parallel PQ$ liegen P, Q, R, S in einer und derselben Ebene; diese hat als Schnittfigur mit dem Quader das Viereck $PQSR$, das wegen $RS < PQ$ kein Parallelogramm ist.

Aufgabe 271024:



Bei einem Würfel mit gegebener Kantenlänge a seien die Eckpunkte wie in der Abbildung bezeichnet. Die Gerade durch A und F sei g, die Gerade durch E und G sei h.
Ermitteln Sie den Abstand von g und h!
Hinweis: Unter dem Abstand zweier windschiefer Geraden g, h versteht man die Länge einer Strecke XY, die so gelegen ist, dass X auf g, Y auf h liegt und dass XY sowohl auf g als auch auf h senkrecht steht.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

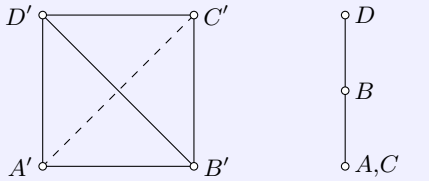


Die Ebenen ε_1 durch A, C, F und ε_2 durch D, E, G sind parallel zueinander; die Raumdiagonale BH die sie in P und Q schneide, steht auf diesen Ebenen senkrecht.
Alle von Punkte aus ε_1 auf ε_2 gefällten Lote haben somit die Länge PQ. Zu diesen Loten gehört auch XY mit der im Aufgabentext beschriebenen Lange.

Die Fußpunkte aller von Punkten aus g gefällten Lote bilden nämlich eine zu g parallele Gerade g' in ε_2. Wegen $g \parallel g' \nparallel h$ schneidet sie h in einem Punkt Y, dieser ist Fußpunkt eines X auf g, und wegen $XY \perp \varepsilon_1$, $XY \perp \varepsilon_2$ gilt $XY \perp g$, $XY \perp h$.
Also ist PQ gleich dem gesuchten Abstand XY. Ist nun M der Schnittpunkt von AC mit BD, so gilt: Die Ebene durch B,F,H,D schneidet ε_1 bzw. ε_2 in der Geraden durch P, P bzw. der Geraden durch D, Q. Wegen $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ ist daher $MP \parallel DQ$, nach dem Strahlensatz und wegen $BM = MD$ also $BP = PQ$.
Ebenso folgt $HQ = PQ$. Also ist der gesuchte Abstand

$$XY = PQ = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$$

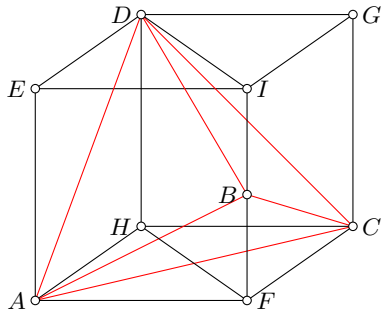
Aufgabe 291024:



Projektion Höhenmaßstab

Das Bild stellt einen ebenflächig begrenzten Körper $ABCD$ in senkrechter Eintafelprojektion dar. Die Punkte A', B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a. Im Höhenmaßstab haben A, C von D ebenfalls den Abstand a, während B im Höhenmaßstab den Abstand $\frac{a}{2}$ von D hat.
a) Zeichnen Sie diesen Körper $ABCD$ in schräger Parallelprojektion, wobei mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ sei!
b) Ermitteln Sie aus den obigen Angaben das Volumen $V(ABCD)$ des Körpers!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a)



Die Figur mit den roten Kanten ist der darzustellende Körper $ABCD$.

b) Auf den Projektionsgeraden durch A, B, C und D mögen in dieser Reihenfolge zusätzlich die Punkte E, F, G, H liegen, auf der Projektionsgeraden durch B außerdem der Punkt I. Dabei sollen E, G und I die gleiche Höhe wie D haben, F und H dagegen die gleiche Höhe wie A.

Damit ist $AFCHEIGD$ ein Würfel, dessen Volumen a^3 beträgt. $AFCB$ ist ein Tetraeder, bei dem man das rechtwinklige Dreieck AFC als Grundfläche und FB als zugehörige Höhe ansehen kann; dessen Volumen also

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{12}a^3$$

beträgt. $AHCD$ ist ein Tetraeder; sein Volumen ergibt sich entsprechend zu

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot a = \frac{1}{6}a^3$$

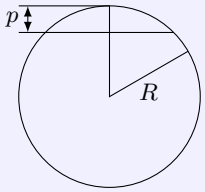
Weiter sind $AEIBD$ und $CGIBD$ Pyramiden, jeweils mit einem Trapez, $AEIB$ bzw. $CGIB$ als Grundfläche und ED bzw. GD als zugehöriger Höhe.
Jede dieser Pyramiden hat also das Volumen

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) a \cdot a = \frac{1}{4}a^3$$

Werden die Tetraeder $AFCB$, $AHCD$ und die Pyramiden $AEIBD$, $CGIBD$ von dem Würfel abgetrennt, so bleibt der im Aufgabentext beschriebene Körper $ABCD$ übrig; sein Volumen ist daher

$$V(ABCD) = a^3 - \frac{1}{12}a^3 - \frac{1}{6}a^3 - 2 \cdot \frac{1}{4}a^3 = \frac{1}{4}a^3$$

Aufgabe 311022:
Eine Kugel K wird zylindrisch so durchbohrt, dass die Achse der Bohrung durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Danach bleibt von der Kugel ein Restkörper C übrig.
Dieser ringförmige Körper C hat zwei kreisförmige Kanten; als einzige Größenangabe bekannt sei die Länge h einer zur Bohrungsachse parallelen Strecke, die einen Punkt der einen Kante mit einem Punkt der anderen Kante verbindet.
Andrea behauptet, allein aus h könne man das Volumen $V(C)$ von C ermitteln.
Birgit meint dagegen: Da sich der genannte Wert h ausgehend von unterschiedlich großen Kugeln (Radius R) durch jeweils zu R passende Wahl des Radius r der zylindrischen Bohrung habe erreichen lassen, müssten zu diesem h unterschiedliche Werte $V(C)$ möglich sein; man könne also, wenn man weder R noch r kennt, $V(C)$ nicht allein aus h ermitteln.
Wer hat recht?



Hinweis : Für das Volumen $V(K), V(A), V(Z)$ einer Kugel K (Radius R) bzw. eines Kugelabschnitts A (Pfeilhöhe p siehe Abbildung) bzw. eines Zylinders Z (Grundkreisradius r, Höhe h) gelten die Formeln

$$V(K) = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad ; \qquad V(A) = \pi R p^2 - \frac{1}{3}\pi p^3 \qquad ; \qquad V(Z) = \pi r^2 h$$

Lösung von OlgaBarati:
Die Behauptung, das Volumen $V(C)$ eines Restkörpers C sei allein mit h zu ermitteln ist genau dann widerlegt, wenn ein Restkörper $\bar{C}$ mit gleicher Höhe $h = \bar{h}$ existiert für den gilt, $V(C) \neq V(\bar{C})$. Es genügt somit einen Einzelfall zu zeigen um die Behauptung zu widerlegen. Dazu seien:

$$R = 5, \quad r = 4, \quad h = 6, \quad p = 2$$

$$\bar{R} = 4, \quad \bar{r} = 2, \quad \bar{h} = 6, \quad \bar{p} = 1$$

$$V(C) = V(K) - V(Z) - 2V(A) \neq V(\bar{C}) = V(\bar{K}) - V(\bar{Z}) - 2V(\bar{A})$$

$$\pi(\frac{4}{3}R^3 - r^2 h - 2Rp^2 + \frac{2}{3}p^3) \neq \pi(\frac{4}{3}\bar{R}^3 - \bar{r}^2\bar{h} - 2\bar{R}\bar{p}^2 + \frac{2}{3}\bar{p}^3)$$

$$\pi(\frac{4}{3} \cdot 5^3 - 4^2 \cdot 6 - 2 \cdot 5 \cdot 2^2 + \frac{2}{3} \cdot 2^3) \neq \pi(\frac{4}{3} \cdot 4^3 - 2^2 \cdot 6 - 2 \cdot 4 \cdot 1^2 + \frac{2}{3} \cdot 1^3)$$

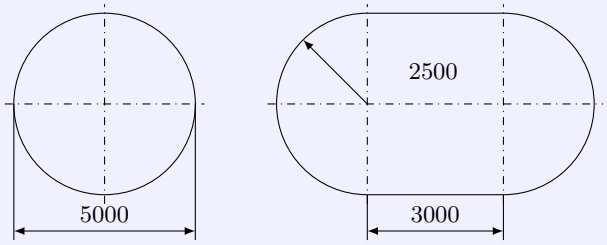
$$36\pi \neq 54\pi$$

$$V(C) \neq V(\bar{C})$$

Birgit hat recht.

III Runde 3

Aufgabe 011032:



In dem VEB Schwermaschinenbau „Karl Liebknecht“ in Magdeburg werden große Zellstoffkocher aus Stahl hergestellt. Ein solcher Apparat ist 8 m lang und hat in seinem mittleren Teil einen Durchmesser von 5 m (s. Abbildung) und ein Leergewicht von 30 Mp.
a) Wie groß sind seine Oberfläche und seine Wandstärke? (Wichte des Stahls 7,85 $\frac{\text{p}}{\text{cm}^3}$)

b) Wie groß ist sein Fassungsvermögen?

Lösung von Christiane Czech:
Der Kocher hat die Form eines Zylinders, an dessen Grund- und Deckfläche jeweils eine Halbkugel angebracht ist.

a) Damit ist die Oberfläche gleich die Summe der Oberfläche der gesamten Kugel und der Mantelfläche des Zylinders, also gleich

$$4\pi(2{,}5\text{ m})^2 + 2\pi \cdot 2{,}5\text{ m} \cdot 3\text{ m} = 125{,}7\text{ m}^2$$

Die Wichte eines Stoffes ist der Quotient aus Masse und Volumen (des Stahlmantels). Damit beträgt das Volumen des verwendeten Stahls 3,83 m^3. Die Wandstärke beträgt damit $\frac{3{,}82\text{ m}^3}{125\text{ m}^2} = 3$ cm.
b) Das Fassungsvermögen ist die Summe aus dem Volumen der Kugel und des Zylinders, also gleich

$$\frac{4}{2}\pi(2{,}5\text{ m})^3 + \pi(2{,}5\text{ m})^2 \cdot 3\text{ m} = 124{,}4\text{ m}^3$$

Aufgabe 041036:
Ein regelmäßiges Tetraeder habe die Höhe h. Ein Punkt im Innern des Tetraeders habe von den Seitenflächen die Abstände a, b, c und d.
Man beweise: $a + b + c + d = h$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Das Volumen des Tetraeders ist gegeben durch

$$V = \frac{1}{3}G \cdot h$$

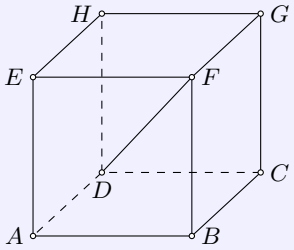
wobei G die Grundfläche bezeichnet. Durch einen Punkt im Inneren zerfällt der Tetraeder in 4 Teiltetraeder mit Grundfläche G und den Höhen a,b,c,d.
Da das ganze Tetraeder regelmäßig ist, haben alle 4 Teiltetraeder ebenfalls die Grundfläche G. Es gilt die Gleichung $V = V_a + V_b + V_c + V_d$, wobei V_* das Volumen des Teiltetraeders mit der entsprechenden Höhe ist. Nach Anwenden der Volumenformel erhalten wir

$$\frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}G \cdot a + \frac{1}{3}G \cdot b + \frac{1}{3}G \cdot c + \frac{1}{3}G \cdot d$$

und nach Kürzen $h = a + b + c + d$.

Aufgabe 061031:

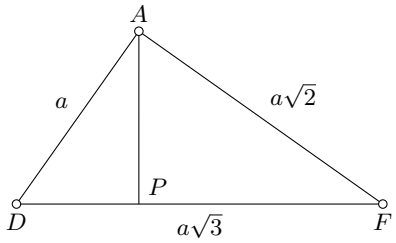
Gegeben sei die Kantenlänge a eines Würfels $ABCDEFGH$. Ermitteln Sie die Abstände der Eckpunkte A,B,C,G,H,E von der Diagonalen DF!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

Die gesuchten Abstände sind sämtlich einander gleich, nämlich gleich der Länge der in einem Dreieck mit den Seiten von der Länge $a, a\sqrt{2}, a\sqrt{3}$ auf der letztgenannten Seite errichteten Höhe. Wir betrachten ein solches Dreieck, etwa $\triangle ADF$. Es ist bei A rechtwinklig, da AD auf der Ebene ε_{ABEF} senkrecht steht. Die gesuchte Länge der Höhe HP ist daher, wie aus $\triangle ADP \sim \triangle DFA$ folgt,

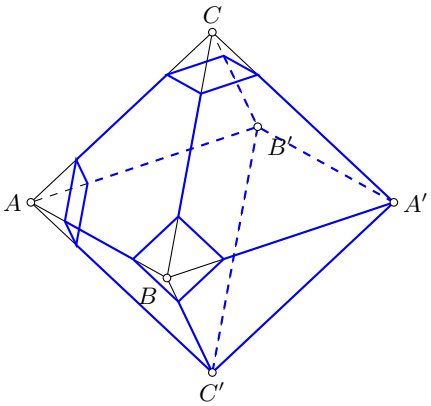
$$h = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a \cdot \sqrt{3}} = \frac{a}{3}\sqrt{6}$$



Aufgabe 091032:

Ein regelmäßiges Oktaeder soll durch Ebenen so geschnitten werden, dass ein konvexer Restkörper entsteht, dessen Oberfläche sich aus genau einer Dreiecksfläche, genau drei Quadratflächen, genau drei nicht quadratförmigen Trapezflächen, genau drei Fünfeckflächen und genau einer Sechseckfläche zusammensetzt.
Geben Sie eine Möglichkeit für die Lage der Schnitte an!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da die Anzahl der ebenen Begrenzungsflächen nach der Ausführung der Schnitte 11 betragen soll, und da ein Oktaeder ein konvexer Körper ist, muss man mindestens 3 Schnitte ausführen. Das gegebene Oktaeder habe die Eckpunkte A, B, C, A', B', C' (A' liege A gegenüber usw.).
Da 3 Quadrate als Schnittfiguren entstehen sollen, liegt es nahe, zu untersuchen, was für ein Restkörper entstehen kann, wenn man die Schnitte parallel zu zweien oder dreien der Quadrate $ABA'B'$, $ACA'C'$, $BCB'C'$ legt, und zwar so nahe bei den hierdurch abgeschnittenen Eckpunkten (C oder C' bzw. B oder B' bzw. A oder A'), dass die Schnittflächen sich gegenseitig nicht treffen.
Dabei werden drei vierseitige Pyramiden abgeschnitten. Da auch ein Sechseckfläche entstehen soll, wähle man die drei abzuschneidenden Pyramiden so, dass unter deren Spitzen keine zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Oktaeders vorkommen, also etwas die Eckpunkte A, B, C als Spitzen auftreten.
Man überzeugt sich leicht, dass man damit einen Körper der geforderten Art erhält.

Aufgabe 111034:

Ein gerader Kreiskegelkörper mit dem Radius $R = 6$ und der Höhenlänge h sei so zylindrisch durchbohrt, dass die Achse des Kegels mit der des Bohrlochs zusammenfällt.
Wie groß muss der Radius r (R, h, r in cm gemessen) des Bohrlochs gewählt werden, wenn das Volumen des Restkörpers halb so groß sein soll wie das des Kegelkörpers?

Lösung von cyrix:
Der ausgebohrte Teilkörper lässt sich zerlegen in einen Zylinder mit Radius r und Höhe $h_T := \frac{R-r}{R} \cdot h$ sowie einen Kreiskegel mit Radius r und Höhe $h - h_T = \frac{r}{R} \cdot h$, da das Bohrloch (von der Grundfläche aus gesehen) in einer Höhe von h_T die Mantelfläche des gegebenen Kreiskegelkörpers durchstößt.
Für das Volumen V des Ausgangskegels ergibt sich $V = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 h$ und für den Teilkörper

$$V_T = \pi r^2 \cdot h_t + \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot (h - h_T) = \pi r^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(3\frac{R-r}{R} + \frac{r}{R} \right) \cdot h$$

Aus $V = 2V_T$ ergibt sich damit die Gleichung

$$R^2 = 2r^2 \cdot \frac{3R - 2r}{R} \qquad \text{bzw.} \qquad 6r^2R - 4r^3 - R^3 = 0$$

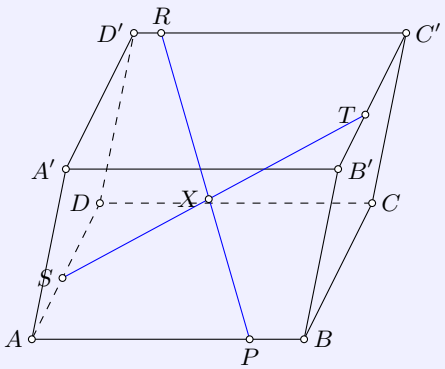
Mit $R = 6$ ergibt sich $4r^3 - 36r^2 + 216 = 0$ bzw. $r^3 - 9r^2 + 54 = 0$. Es ist $r^3 - 9r^2 + 54 = (r-3) \cdot (r^2 - 6r + 18)$, was $r = 3$ als einzige Nullstelle besitzt. Also muss der Radius r des Bohrlochs 3 cm betragen.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Offensichtlich gilt, dass, je größer der Radius r des Bohrlochs gewählt wird, desto größer auch das Volumen V_T des ausgebohrten Teilkörpers ist. Wählt man $r = 0$, so ist $V_T = 0$ und für $r = R$ ist $V_T = V$ der gesamte Ausgangskörper. Variiert man also r im Intervall $[0; R]$, so gibt es genau einen Wert, für den $V_T = \frac{1}{2}V$ gilt.
Wir wählen $r = \frac{1}{2}R$ und zerlegen den ausgebohrten Teilkörper in einen geraden Kreiszylinder sowie einen Kreiskegel. Beide haben als Grundfläche $\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi R^2$ und als Höhe $\frac{1}{2}h$, sodass sich das Volumen des Teilkörpers ergibt zu

$$V_T = \frac{1}{4}\pi R^2 \cdot \frac{1}{2}h + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\pi R^2 \cdot \frac{1}{2}h = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24} \right) \cdot \pi \cdot R^2 h = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot R^2 h = \frac{1}{2}V$$

Damit führt die Wahl von $r = \frac{1}{2}R = 3$ cm als einzige dazu, dass der Restkörper genau das halbe Volumen des Ausgangskörpers besitzt.

Aufgabe 121032:



Es sei $ABCDA'B'C'D'$ ein Parallelepiped, d.i. ein nicht notwendig gerades vierseitiges Prisma mit einem Parallelogramm $ABCD$ als Grundfläche.
Es ist die Menge aller derjenigen Punkte X zu ermitteln, die als Schnittpunkte von Strecken PR und ST auftreten können, wenn P ein Punkt auf AB, R ein Punkt auf $C'D'$, S ein Punkt auf AD und T ein Punkt auf $B'C'$ ist.

Lösung von cyrix:
Wir legen so ein Koordinatensystem in den Raum des Parallelepipeds, dass A in dessen Ursprung liegt. Weiterhin identifizieren wir alle Punkte mit ihren jeweiligen Ortsvektoren und bezeichnen mit $\vec{a} := \vec{B}$,

$\vec{b} := \vec{D}$ und $\vec{c} := \vec{A'}$, sodass diese drei Vektoren linear unabhängig sind.

Dann gibt es eine reelle Zahl $0 \leq s_1 \leq 1$ mit $\vec{P} = s_1 \cdot \vec{a}$. Analog gibt es reelle Zahlen s_2, t_1 und t_2, die jeweils zwischen 0 und 1 liegen, sodass $\vec{R} = s_2 \cdot \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{S} = t_1 \cdot \vec{b}$ und $\vec{T} = \vec{a} + t_2 \cdot \vec{b} + \vec{c}$ gilt.

Für jeden Punkt X auf der Strecke PR gibt es eine reelle Zahl $0 \leq k \leq 1$ mit

$$\vec{X} = \vec{P} + k \cdot (\vec{R} - \vec{P}) = (1-k) \cdot s_1 \cdot \vec{a} + k \cdot s_2 \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b} + k \cdot \vec{c} = (s_1 - ks_1 + ks_2) \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b} + k \cdot \vec{c}$$

Analog gibt es für jeden Punkt X auf der Strecke ST eine reelle Zahl $0 \leq \ell \leq 1$ mit

$$\vec{X} = \vec{S} + \ell \cdot (\vec{T} - \vec{S}) = (1-\ell) \cdot t_1 \cdot \vec{b} + \ell \cdot \vec{a} + \ell \cdot t_2 \cdot \vec{b} + \ell \cdot \vec{c} = \ell \cdot \vec{a} + (t_1 - \ell t_1 + \ell t_2) \cdot \vec{b} + \ell \cdot \vec{c}$$

Da X auf beiden Strecken liegt und die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind, müssen ihre jeweiligen Koeffizienten in beiden Darstellungen von $\vec{X}$ übereinstimmen, insbesondere also die von $\vec{c}$, sodass $k = \ell$ folgt.

Aus der ersten Darstellung von $\vec{X}$ folgt, dass die Koeffizienten von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ beide gleich (und zwar k) sein müssen, während aus der zweiten Darstellung folgt, dass die Koeffizienten von $\vec{a}$ und $\vec{c}$ beide gleich (und zwar $\ell = k$) sind, sodass tatsächlich die Koeffizienten aller drei Vektoren übereinstimmen und X auf der Geraden $k \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$, also der Raumdiagonalen AC' liegt.

Nun ist noch zu überprüfen, ob tatsächlich jeder Punkt auf der Raumdiagonalen AC' als Schnittpunkt X angenommen werden kann. Da das Parallelepiped konvex ist, schneiden sich je zwei Strecken, die durch Punkte auf dessen Oberfläche begrenzt werden, wieder im Innern oder auf dessen Oberfläche, sodass nur Punkte, die auf der Strecke AC' liegen, in Frage kommen, was $0 \leq k \leq 1$ bedeutet.

Aus der ersten Darstellung von $\vec{X}$ erhalten wir $k = s_1 - ks_1 + ks_2$ bzw. $k \cdot (1 - s_2 + s_1) = s_1$, also für $s_2 - s_1 \neq 1$ die Darstellung $k = \frac{s_1}{1-s_2+s_1}$.

Setzt man hierbei $s_1 := s_2$, so ergibt sich $k = s_1$, was mit s_1 das gesamte Intervall $[0, 1]$ durchläuft, sodass auch tatsächlich alle Punkte auf der Strecke AC' als Schnittpunkte X angenommen werden.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Die zueinander parallelen, aber verschiedenen Geraden AB und $D'C'$ spannen eine Ebene ε_1 auf. Damit liegt auch PR in dieser Ebene. Analog spannen auch die parallelen, aber verschiedenen Geraden AD und $B'C'$ eine Ebene ε_2 auf, in der dann die Strecke ST liegt.

Damit muss der Schnittpunkt X der zu betrachtenden Strecken auf der Schnittgerade der beiden Ebenen liegen. (Es sind ε_1 und ε_2 nicht identisch, da B' auf ε_2, nicht aber auf ε_1 liegt.) Da sowohl A als auch C' in beiden Ebenen enthalten sind, ist AC' genau deren Schnittgerade, sodass X auf dieser Gerade liegen muss.

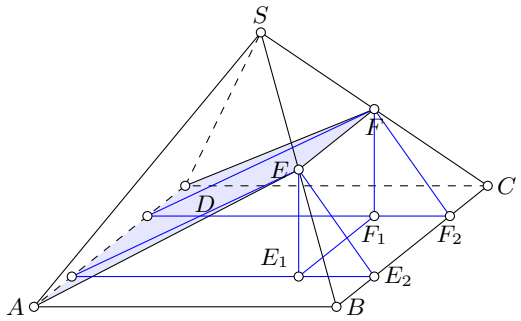
Aufgrund der Konvexität des Parallelepipeds muss sich X innerhalb oder auf der Oberfläche des Parallelepipeds befinden, sodass nur Punkte auf der Strecke AC' in Frage kommen.

Wählt man jedoch für einen beliebigen Punkt X auf dieser Strecke die Punkte P und R als Schnitt der zu $ADD'A'$ parallelen Ebene durch X mit den Geraden AB bzw. $D'C'$, so liegen diese Schnittpunkte (wieder aufgrund der Konvexität des Parallelepipeds) auf den Strecken AB bzw. $D'C'$ und X auf PR. Wählt man für den gleichen Punkt X die Punkte S bzw. T als Schnittpunkte der zu $ABB'A'$ parallelen Ebene durch X mit den Geraden AD bzw. $B'C'$, so liegen diese wieder auf den entsprechenden Strecken und X auch auf ST, sodass für jeden Punkt X auf der Strecke AC' Strecken PR und ST gemäß den Vorgaben gefunden werden können, die sich in X schneiden.

Damit ist genau die Strecke AC' die gesuchte Punktmenge.

Aufgabe 131033:
Gegeben sei eine vierseitige Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Eckpunkte dieser Fläche seien die Punkte A, B, C und D. Die Spitze der Pyramide sei S. Alle acht Kanten haben die Länge a.
E und F seien die Mittelpunkte der Kanten SB bzw. SC. Eine Ebene durch die Punkte A, E, F und D zerlegt die Pyramide in zwei Teilkörper.
Errechnen Sie das Verhältnis der Volumina dieser beiden Teilkörper!

Lösung von Stephan Hauschild:
Berechnung des unteren Teilkörpers:
Der untere Teilkörper ist - geeignet zerlegt - auffassbar als Dreiecksprisma T_1 und zwei zusammenschiebbare Pyramiden T_2. Es ist die Grundfläche des Prismas $G = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$ und die Prismenhöhe $h = \frac{a}{4}\sqrt{2}$. Damit wird



$$V_{T_1} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{2} = \frac{a^3}{16}\sqrt{2}$$

Für die zwei Pyramiden ergibt sich analog

$$V_{T_2} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{2} = \frac{a^3}{24}\sqrt{2}$$

und für den unteren Teilkörper

$$V_{\text{unten}} = V_{T_1} + V_{T_2} = \frac{5}{48}a^3\sqrt{2}$$

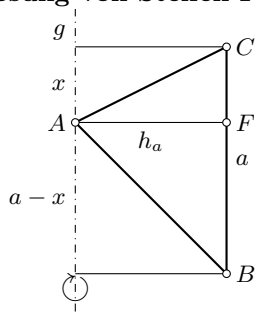
Für den oberen Teilkörper verbleiben damit noch

$$V_{\text{oben}} = V_{\text{Pyramide}} - V_{\text{unten}} = \frac{1}{16}a^3\sqrt{2}$$

und ein Verhältnis von $V_{\text{oben}} : V_{\text{unten}} = 3 : 5$.

Aufgabe 151031:
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit der Seitenlänge $BC = a$ und der Höhenlänge $AD = h_a$. Die Gerade g sei die Parallele zu BC durch A.
Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der durch Rotation der Dreiecksfläche ABC um g entsteht, in Abhängigkeit von a und h_a!

Lösung von Steffen Polster:



Rotiert das Dreieck um die Gerade g, so entsteht ein zylinderförmiger Körper, aus dem auf den Seiten der Grund- und Deckfläche ein Kegel herausgeschnitten wurde. Zylinder Z und beide Kegel K_1, K_2 haben als Radius die Höhe h_a. Die Höhe des Zylinders ist s, die der zwei Kegel x und $a - x$. Für das Volumen des gesuchten Körpers wird dann:

$$V = V_Z - V_{K_1} - V_{K_2} = \pi \cdot h_a^2 \cdot a - \frac{1}{3}\pi \cdot h_a^2 \cdot x - \frac{1}{3}\pi \cdot h_a^2 \cdot (a - x) = \frac{2}{3}\pi \cdot h_a^2 \cdot a$$

Aufgabe 161035:
Für ein gerades Prisma und eine gerade Pyramide seien folgende Voraussetzungen zugrundegelegt:
Beide Körper haben dieselbe Grundfläche; diese ist ein gleichseitiges Dreieck mit gegebener Seitenlänge a. Die Spitze der Pyramide liegt in der Deckfläche des Prismas.
Man ermittle diejenigen Werte für die (gemeinsame) Höhenlänge h des Prismas (und der Pyramide), für die unter den zugrundegelegten Voraussetzungen der Mantel des Prismas den gleichen Flächeninhalt wie der Mantel der Pyramide hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da die Pyramide gerade ist, liegt ihre Spitze im Schwerpunkt der Deckfläche des Prismas. Der Mantel der Pyramide besteht aus drei zueinander kongruenten gleichschenkligen Dreiecken mit der Basislänge a. Bezeichnet man die Länge der zugehörigen Höhe in diesen Dreiecken mit H, so ergibt sich nach dem Lehrsatz des Pythagoras

$$H^2 = h^2 + \left(\frac{1}{6}a\sqrt{3}\right)^2 = h^2 + \frac{1}{12}a^2$$

Also hat der Mantel der Pyramide den Flächeninhalt

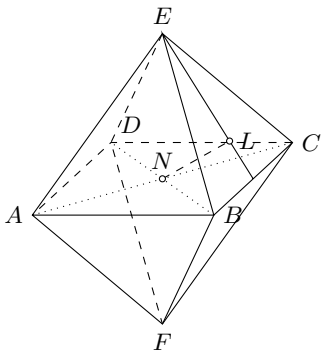
$$M_1 = \frac{3}{2}a\sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2}$$

Der Mantel des Prismas hat den Flächeninhalt $M_2 = 3ah$. Daher ist wegen $a > 0$ und $h > 0$ die Forderung $M1 = M_2$ der Reihe nach gleichwertig mit

$$\begin{aligned} 3ah &= \frac{3}{2}a\sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2} \\ 2h &= \sqrt{h^2 + \frac{1}{12}a^2} \\ 4h^2 &= h^2 + \frac{1}{12}a^2 \\ h &= \frac{1}{6}a \end{aligned}$$

Aufgabe 191033:
Jeder Würfel besitzt sowohl eine Umkugel (d. h. eine Kugel, auf der sämtliche Eckpunkte des Würfels liegen) als auch eine Inkugel (d. h. eine Kugel, die jede Seitenfläche des Würfels berührt).
Ebenso besitzt jedes reguläre Oktaeder sowohl eine Umkugel als auch eine Inkugel.
Von einem Würfel und einem regulären Oktaeder werde nun vorausgesetzt, dass die Umkugeln dieser beiden Körper denselben Radius haben.
Ermitteln Sie unter dieser Voraussetzung das Verhältnis $r_1 : r_2$, wobei r_1 der Radius der Inkugel des Würfels und r_2 der Radius der Inkugel des Oktaeders ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Mittelpunkt M eines Würfels, d.i. der Schnittpunkt seiner Körperdiagonalen, hat von allen Ecken gleiche Entfernung und (da er auch Schnittpunkt der Verbindungsstrecken je zweier gegenüberliegender Seitenflächen-Mittelpunkte ist) zu allen Seitenflächen gleichen Abstand. Er ist daher der Mittelpunkt sowohl der Umkugel als auch der Inkugel.
Ist a die Kantenlänge des Würfels, also $a\sqrt{3}$ seine Körperdiagonalenlänge, so ist die Entfernung von M zu den Ecken, d. h. der Umkugelradius $r = \frac{a}{2}\sqrt{3}$; der Abstand von M zu den Seitenflächen, d. h. der Inkugelradius, ist $r = \frac{a}{2} = \frac{r}{\sqrt{3}}$. Weiter sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Oktaeder (siehe Bild).



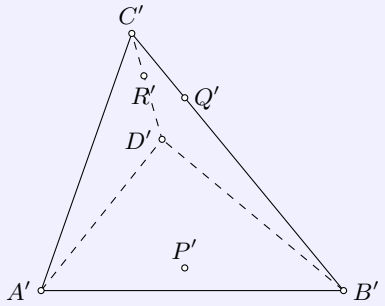
Sein Mittelpunkt N, d.i. der Schnittpunkt von AC, BD und EF, hat von allen Ecken gleiche Entfernung und zu allen Seitenflächen gleichen Abstand; er ist daher der Mittelpunkt sowohl der Umkugel als auch der Inkugel.
Ist b die Kantenlänge des Oktaeders, also $BD = b\sqrt{2}$, so ist der Umkugelradius $r = NB = \frac{b}{2}\sqrt{2} = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Ferner folgt: $BCEN$ ist eine Pyramide mit gleichseitiger Grundfläche BCE; für ihre Spitze N gilt $NB = NC = NE$, also handelt es sich um eine gerade Pyramide.
Der Fußpunkt L des Lotes von N auf, die Fläche BCE ist folglich deren Schwerpunkt. Hiernach gilt $LE = \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{2}\sqrt{3} = \frac{b}{\sqrt{3}}$.
Daraus und aus $NE = \frac{b}{\sqrt{2}}$ folgt nach dem Satz des Pythagoras, dass der Inkugelradius

$$r_2 = NL = \sqrt{NE^2 - LE^2} = \sqrt{\frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{3}} = \frac{b}{\sqrt{6}} = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

ist. Somit gilt $r_1 : r_2 = 1 : 1$.

Aufgabe 211036:
Die Eckpunkte A, B, C, D eines Tetraeders $ABCD$ und ein Punkt P auf der Fläche des Dreiecks ABC seien so im Raum gelegen, dass sie bei einer Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Bildpunkte A', B', C', D' bzw. P' haben.
Ein Punkt Q liege auf der Strecke BC; ein Punkt R liege auf der Strecke CD; ihre Bildpunkte seien bei der Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Punkte Q' bzw. R'. Die Ebene durch P, Q und R schneidet die vier Seitenflächen des Tetraeders in einer Schnittfigur.
Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Projektion dieser Schnittfigur!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, dass eine Figur die gesuchte Projektion der Schnittfigur ist, wenn sie nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird!

Arbeitsblatt zu 211036



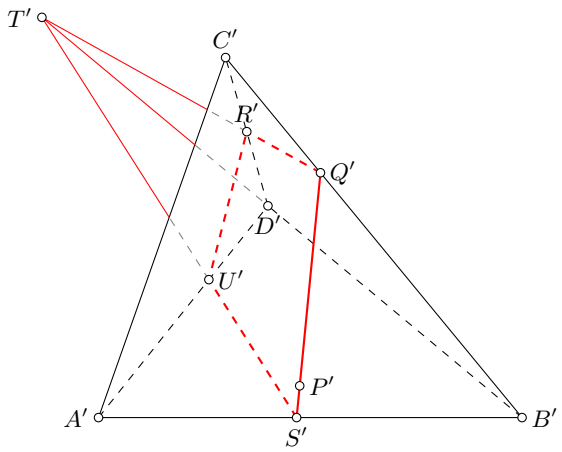
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Konstruktionsbeschreibung:

(1) Man konstruiert die Gerade durch Q', P' und bringt sie zum Schnitt S' mit $A'B'$.

(2) Man konstruiert die Gerade durch R', Q' und bringt sie zum Schnitt T' mit der Geraden durch B', D'.

(3) Man konstruiert die Gerade durch S', T' und bringt sie zum Schnitt U' mit $A'D'$.

(4) Man konstruiert die Strecke $R'U'$.



II. Beweis, dass die so konstruierte Figur $R'Q'S'U'$ die Projektion der Schnittfigur ist:
Die Gerade durch Q, P liegt in der Ebene e durch P, Q, R. Sie verläuft außerdem durch die Seitenflächen AB; daher schneidet sie den Rand von ABC in einem weiteren Punkt S, der zu e gehört. Folglich ist der in (1) konstruierte Punkt S' der Bildpunkt von S, und S liegt, wie die Konstruktion ergibt, auf AB.

Die Gerade durch R, Q liegt sowohl in e als auch in der Ebene durch B, C, D. Wie die Konstruktion ergibt, ist sie auch nicht parallel zu BD (denn auch $RQ \parallel BD$ würde auch $R'Q' \parallel B'D'$ folgen). Also schneidet sie die Gerade durch B, D in einem Punkt T, der zu e gehört. Folglich ist der in (2) konstruierte Punkt T' der Bildpunkt von T.

Die Punkte S und T liegen sowohl in e als auch in der Ebene durch A, B, D; denn S liegt auf der Geraden durch A, B; T liegt auf der Geraden durch B, D. Wie die Konstruktion ergibt, ist ferner die Gerade durch S, T nicht parallel zu AD, Also schneidet die Gerade durch S,T die (Gerade durch A,D und sogar, wie die Konstruktion zeigt, die) Strecke SD in einem Punkt$U$m der zu e gehört. Folglich ist der in (3) konstruierte Punkt U' der Bildpunkt von U.

De Strecke RQ liegt sowohl in e als auch in der Seitenfläche BCD, sie gehört also der Schnittfigur an. Ebenso gehören QS, SU und UR der Schnittfigur an. Diese vier Strecken bilden ein geschlossenes Vieleck und somit die gesamte Schnittfläche; das Viereck $R'Q'S'U'$ ist folglich deren gesuchte Projektion.

Aufgabe 221036:
Aus einem Würfel mit gegebener Kantenlänge a soll ein reguläres Tetraeder herausgeschnitten werden.
Beweisen Sie, dass es ein solches Tetraeder mit möglichst großer Kantenlänge gibt!
Ermitteln Sie diese Kantenlänge in Abhängigkeit von a!

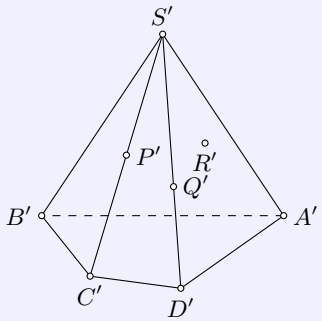
Lösung von cyrix:
Die Endpunkte zweier nicht-parallelen Flächendiagonalen auf den gegenüberliegenden Seitenflächen des Würfels bilden ein reguläres Tetraeder der Kantenlänge $\sqrt{2}a$. (Dies prüft man leicht nach.)

Der Umkugelradius eines regulären Tetraeders beträgt das $\frac{\sqrt{6}}{4}$-fache seiner Kantenlänge, wie man leicht nachrechnet. (Der Umkreismittelpunkt fällt mit dem Schwerpunkt, also dem Schnittpunkt der Schwerelinien, die gleichzeitig Höhen sind, zusammen.)

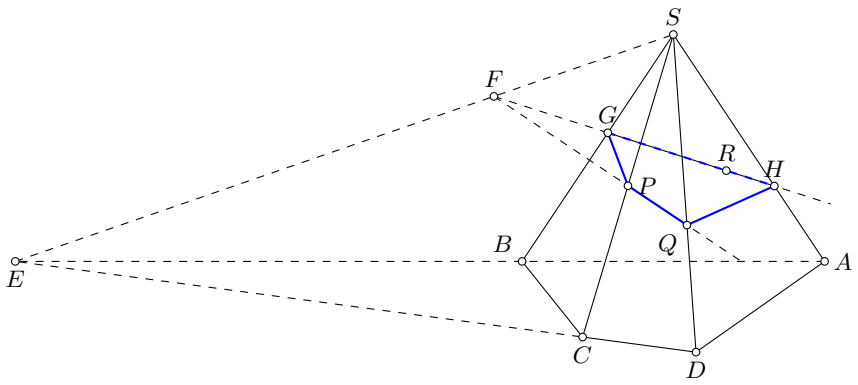
Für ein reguläres Tetraeder mit Kantenlänge $> \sqrt{2}a$ wäre also auch der Umkugelradius größer als $\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{4}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, was den Umkugelradius des Würfels darstellt. Da aber alle Punkte des Teraeders auch zum Würfel gehören, muss die Entfernung aller Tetraederpunkte zum Umkugelmittelpunkt des Würfels kleiner oder gleich dem Umkugelradius des Würfels sein (wie dies für alle Punkte in oder auf dem Würfel

gilt). Damit kann aber auch der Umkugelradius des Tetraeders höchstens so groß sein wie der Umkugelradius des Würfels.
Also kann es kein größeres reguläres Teraeder geben, welches man aus dem Würfel herausschneiden kann, □.

Aufgabe 231036:
Das Arbeitsblatt zeigt das Bild $A'B'C'D'S'$ einer Pyramide $ABCDS$ in schräger Parallelprojektion sowie das Bild P' eines auf der Kante CS liegenden Punktes P, das Bild Q' eines auf der Kante DS liegenden Punktes Q und das Bild R' eines auf der Fläche ABS liegenden Punktes R.
Konstruieren Sie das Bild der Schnittfigur, die beim Schnitt der Pyramide $ABCDS$ mit der Ebene durch P, Q, R entsteht!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Eine Begründung und Diskussion wird nicht gefordert.



Lösung von MontyPythagoras:



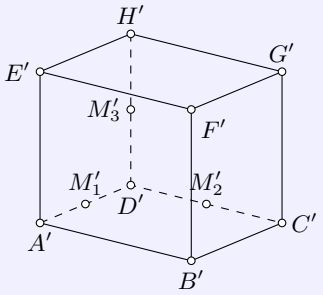
Konstruktionsanweisung:

1. E ist der Schnittpunkt von AB und CD.
2. Zeichne eine Gerade durch E und S.
3. Zeichne eine Gerade durch P und Q.
4. F ist der Schnittpunkt der Geraden PQ und ES.
5. Zeichne eine Gerade durch F und R.
6. G ist der Schnittpunkt der Geraden FR mit der Kante BS.
7. H ist der Schnittpunkt der Geraden FR mit der Kante AS.

Das Viereck $PQHG$ ist die gesuchte Schnittfigur, die Strecke GH ist eine verdeckte Kante.

Aufgabe 241033:

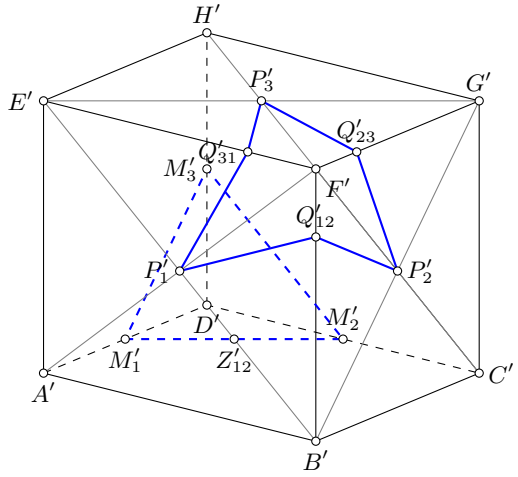
Das Arbeitsblatt zeigt das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Würfels $ABCDEFGH$ in schräger Parallelprojektion sowie die Bilder M_1', M_2', M_3' der Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der Würfelkanten DA, DC bzw. DH.
Ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche $M_1M_2M_3$ sei, habe als Seitenkanten die Strecken M_1N_1, M_2N_2 und M_3N_3, die parallel zu DF verlaufen.
Die Deckfläche $N_1N_2N_3$ des Prismas liege so weit außerhalb des Würfels, dass das Prisma in seinem Innern den Punkt F enthält.



Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Bilder der Schnittlinien, die die Oberfläche des Prismas mit der Oberfläche des Würfels hat!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion, und beweisen Sie, dass eine nach Ihrer Beschreibung durchgeführte Konstruktion die Bilder aller genannten Schnittlinien ergibt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Grundfläche $M_1M_2M_3$ des Prismas hat mit der Oberfläche des Würfels genau die Strecken M_1M_2, M_2M_3 und M_3M_1 gemeinsam. Die Deckfläche $N_1N_2N_3$ enthält keinen Punkt der Würfeloberfläche.

Legt man einen Würfel des Kantenlänge $\frac{1}{2}AB$ so, dass er A als Ecke hat und dass seine von A ausgehenden Kanten Teilstrecken von AB, AD und AE sind, so ist M_1 eine Ecke dieses Würfels, und als gegenüberliegende Ecke ergibt sich der Mittelpunkt P_1 des Quadrates $ABFE$.



Daher gilt $M_1P_1 \parallel DF$; d. h., P_1 ist derjenige Punkt, in dem die Prismenkante M_1N_1 die Würfeloberfläche zum zweiten Mal (außer in M_1) durchstößt. Entsprechend durchstoßen die Kanten M_2N_2 und M_3N_3 die Würfeloberfläche in den Mittelpunkten P_2 bzw. P_3 der Quadrate $BCGF$ bzw. $EFGH$.

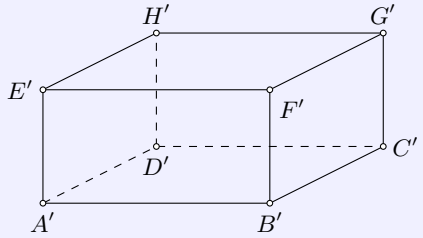
Legt man einen Würfel der Kantenlänge $\frac{3}{4}AB$ so, dass er B als Ecke hat und dass seine von B ausgehenden Kanten Teilstrecken von BA, BC und BF sind, so ist der Mittelpunkt Z_{12} der Strecke M_1M_2 eine Ecke des Würfels, und als gegenüberliegende Ecke ergibt sich derjenige Punkt Q_{12} auf BF, für den $BQ_{12} = \frac{3}{4}AB$ gilt.

Daher gilt $Z_{12}Q_{12} \parallel DF$, also liegt die Strecke $Z_{12}Q_{12}$ in der Seitenfläche $M_1M_2N_2N_1$ des Prismas. Somit sind P_1Q_{12} und $Q_{12}P_2$ die (außer M_1M_2 noch auftretenden) Schnittlinien dieser Seitenfläche mit der Oberfläche des Würfels.
Entsprechend gilt: Sind Q_{23} und Q_{31} diejenigen Punkte auf FG bzw. EF, für die $GQ_{23} = EQ_{31} = \frac{3}{4}AB$ gilt, so sind P_2Q_{23}, $Q_{23}P_3$ bzw. P_3Q_{31}, $Q_{31}P_1$ die (außer M_2M_3, M_3M_1 auftretenden) Schnittlinien des Flächen $M_2M_3N_3N_2$ bzw. $M_3M_1N_1N_3$ mit der Oberfläche des Würfels.

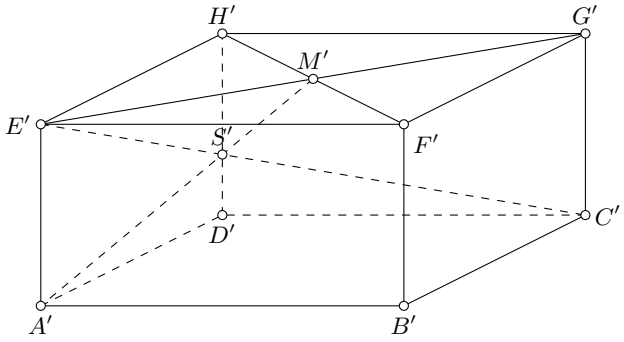
Damit ist bewiesen, dass eine nach der folgenden Beschreibung durchgeführt Konstruktion die gesuchten Bilder der Schnittlinien ergibt:
Man konstruiere die Bilde P_1', P_2', P_3' der Mittelpunkte P_1, P_2, P_3 der Quadrate $ABFE$, $BCGF$, $EFGH$, d.s. die Diagonalenschnittpunkte P_1', P_2', P_3' der Vierecke $A'B'F'E'$, $B'C'G'F'$, $E'F'G'H'$.
Ferner konstruiere man diejenigen Punkte Q_{12}', Q_{23}', Q_{31}' auf $F'B'$, $F'G'$ bzw. $F'E'$, für die $F'Q_{12}' = \frac{1}{4}F'B'$, $F'Q_{23}' = \frac{1}{4}F'G'$ bzw. $F'Q_{31}' = \frac{1}{4}F'E'$ gilt.

Dann sind das Dreieck $M_1'M_2'M_3'$ und das Sechseck $P_1'Q_{12}'P_2'Q_{23}'P_3'Q_{31}'$ die gesuchten Bilder der Schnittlinien.

Aufgabe 251036:
Das Arbeitsblatt zeigt das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Quaders $ABCDEFGH$ bei einer schrägen Parallelprojektion.
a) Konstruieren Sie das Bild S' des Schnittpunktes S der Strecken EC mit der Ebene, die durch A, F und H geht!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, dass der nach Ihrer Beschreibung konstruierte Punkt S' das Bild des genannten Punktes S ist!
b) Ermitteln Sie alle diejenigen Quader $ABCDEFGH$, für die S mit dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks AFH zusammenfällt!
Arbeitsblatt:



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Konstruktion siehe Abbildung



Konstruktionsbeschreibung:

(1) Man konstruiert den Schnittpunkt M' der Strecken $E'G'$ und $F'H'$.

(2) Man konstruiert den Schnittpunkt S' der Strecken $A'M'$ und $E'C'$.

Beweis, dass der so konstruierte Punkt S' das Bild des in der Aufgabe genannten Punktes S ist:
Wegen $AE \parallel CG$ liegen A, E, C und G in einer Ebene η. Diese enthält mit E und G auch den Schnittpunkt M der Rechteckdiagonalen EG un FH; dabei hat M als Bild den in (1) konstruierten Schnittpunkt von $E'G'$ und $F'H'$.
Die Ebene ε durch A, F, H enthält mit F und H auch M. Da somit die Ebenen η und ε beide die Punkte A und M enthalten, ist die Gerade g durch A und M die Schnittgerade von η und ε.
Ferner enthält η die Strecke EC; folglich enthält g den Schnittpunkt S von EC und ε. Dessen Bild S' ist somit der in (2) konstruierte Schnittpunkt der Bildgeraden g' mit der Strecke $E'C'$.

b) Da die Rechteckdiagonalen EG und FH einander halbieren, ist M der Mittelpunkt von HF; also AM Seitenhalbierende im Dreieck AFH. Ferner ist $EM = \frac{1}{2}EG = \frac{1}{2}AC$. Daraus und aus dem Strahlensatz folgt $SM : SA = EM : AC = 1 : 2$.
Also ist S der Schwerpunkt des Dreiecks AFH. Folglich ist S genau dann der Höhenschnittpunkt des Dreiecks AFH, wenn dessen Seitenhalbierenden zugleich Höhen sind. Das trifft genau im Fall $AF = HF = AH$ zu.

Aus $AF = HF$ folgt $\triangle AEF \cong \triangle HEF$ (Kongruenzsatz ssw; dem rechten Winkel $\angle AEF = \angle HEF$ liegt als größtem Innenwinkel die längere Dreiecksseite gegenüber) und daher $AE = HE$.
Umgekehrt gilt: Aus $AE = HE$ folgt $\triangle AEF \cong \triangle HEF$ (Kongruenzsatz wsw), also $AF = HF$. Analog gilt: Aus $HF = AH$ folgt $EF = AE$ und umgekehrt.

Analog ist S für genau diejenigen Quader $ABCDEFGH$ der Höhenschnittpunkt des Dreiecks AFH, für die $EF = AE = HE$ gilt, d. h. für genau diejenigen Quader, die Würfel sind.

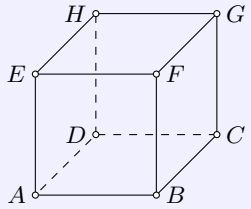
Aufgabe 261035:
Beweisen Sie folgende Aussage:
Wenn n eine natürliche Zahl mit $1 \leq n \leq 5$ ist, so gilt:
Wird eine Kugel von n Ebenen geschnitten, so entstehen auf der Kugeloberfläche höchstens 22 Teilflächen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wird die Kugel von einer Ebene e_1 geschnitten, so entsteht als Schnittfigur mit der Kugeloberfläche ein Kreis k_1, der die Kugeloberfläche in genau zwei Teilflächen zerlegt.
Beim Schnitt mit eine zweiten Ebene $e_2 \neq e_1$ entsteht als Schnittfigur mit der Kugeloberfläche ein Kreis k_2. Er kann mit e_1 (wie jeder Kreis mit jeder Ebene, in der er nicht liegt) höchstens zwei Punkte gemeinsam haben und wird dadurch in höchstens zwei Teilbögen zerlegt.
Jeder dieser Teilbögen zerlegt seinerseits diejenige bereits vorliegende Teilfläche, in der er ganz (in sich geschlossen oder sie durchquerend) enthalten ist, in genau zwei neue Teilflächen, vermehrt also die Anzahl der bereits vorliegenden Teilflächen um genau 1. Somit entstehen höchstens $2 + 2 = 4$ Teilflächen.

Entsprechend folgt schrittweise weiter:
Beim Schnitt mir einer dritten/vierten/fünften Ebene $e_3/e_4/e_5$, die verschieden ist von allen vorangehenden Ebenen, entsteht als Schnittfigur mit der Kugeloberfläche ein Kreis $k_3/k_4/k_5$.
Er kann mit e_1 und e_2 / mit e_1, e_2, e_3 / mit e_1, e_2, e_3, e_4 höchstens je zwei Punkte gemeinsam haben und wird dadurch in höchstens 4 / 6 / 8 Teilbögen zerlegt. Fügt man diese Teilbögen schrittweise einzeln zu der jeweils erreichten Zerlegung der Kugeloberfläche hinzu, so ergibt sich:

Jeder Teilbogen bewirkt für diejenige bereits vorliegende Teilfläche, in der er ganz enthalten ist, entweder eine Aufteilung in genau zwei neue Teilflächen oder aber keine neue Aufteilung (nämlich falls die Teilfläche noch an einer anderen, von dem Teilbogen nicht durchquerten Stelle zusammenhängt). Somit entstehen höchsten $4 + 4 = 8$ / $8 + 6 = 14$ / $14 + 4 = 22$ Teilflächen. w. z. b. w.

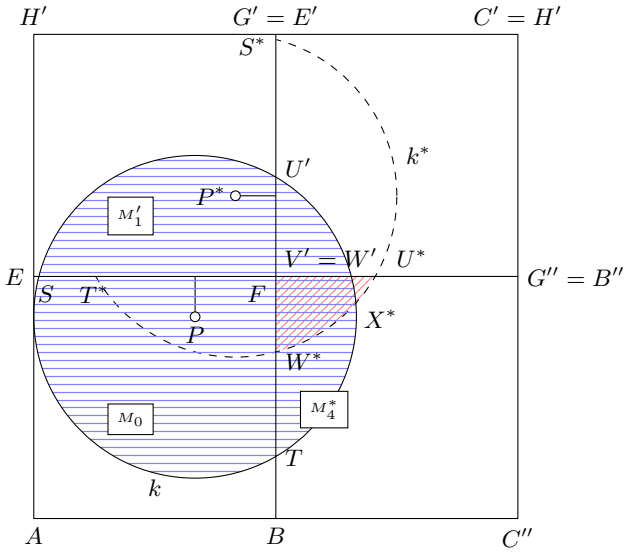
Aufgabe 281033:



Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel der Kantenlänge 6 cm.
Auf der Seitenfläche $ABFE$ sei P derjenige Punkt, der von EF den Abstand 1 cm und von BF den Abstand 2 cm hat (siehe Abbildung).
Ermitteln Sie die Menge M aller derjenigen Punkte auf der Oberfläche des Würfels, die von P aus erreichbar sind, jeweils längs eines auf der Oberfläche verlaufenden Weges, der höchstens die Länge

4 cm hat!
Hinweis:
Die gesuchte Menge M ist als Vereinigungsmenge von Flächenstücken auf den einzelnen Seitenflächen des Würfels nachzuweisen.
Jedes dieser Flächenstücke ist durch Angabe seiner Randkurve zu beschreiben; die Beschreibung ist so anzulegen, dass sie die Möglichkeit einer konstruktiven Gewinnung der einzelnen Teile solcher Randkurven vermittelt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Zur Angabe von Flächenstücken in einer Seitenfläche f des Würfels (oder einer Bildfläche f hiervon) bezeichne stets $\overset{\frown}{XYZ}$ das Flächenstück mit derjenigen Randkurve, die aus dem in f enthaltenen Boden $\overset{\frown}{XY}$ eines zuvor angegebenen Kreises und den Strecken YZ, ZX besteht. Entsprechend sei die Bezeichnung $\overset{\frown}{XY_1}\overset{\frown}{Y_1Y_2}Z$ verwendet.

Die gesuchte Menge M lässt sich in folgenden Schritten ermitteln (siehe Abbildung).
(0) In der Fläche $ABFE$ sind mindestens alle diejenigen Punkte auf die geforderte Weise erreichbar, die der Kreisfläche K um P mit dem Radius $r = 4$ cm angehören.
Die Kreislinie k um P mit r schneidet EF in einem Punkt S und BF in einem Punkt T. Die Punkte in $ABFE$, die der Kreisfläche K angehören, bilden dann das Flächenstück $M_0 = \overset{\frown}{TSF}$.

(1) Durch Überqueren der Strecke EF sind in der Fläche $EFGH$ alle Punkte eines Flächenstückes M_1 erreichbar, das folgendermaßen erhalten werden kann:
Man drehe die Fläche $EFGH$ um EF in die durch $A; B; FE$ gehenden Ebene e in die Lage $EFG'H'$ außerhalb $ABFE$. Dann schneidet k die Strecke FG' in einem Punkt U'. Die Punkte in $EFG'H'$, die der Kreisfläche K angehören, bilden das Flächenstück $M_1' = \overset{\frown}{SU'F}$. Durch Zurückdrehen von $EFG'H'$ in $EFGH$ geht U' in einen Punkt U und damit $\overset{\frown}{SU'}$ in einen Kreisboden $\overset{\frown}{SU}$ sowie M_1' in das Flächenstück $M_1 = \overset{\frown}{SUF}$ über.

(2) Durch Überqueren von BF sind in $BFGC$ alle Punkte eines Flächenstücks M_2 erreichbar, das folgendermaßen erhalten werden kann:
Man drehe $BFGC$ um BF in die Ebene e in die Lage $BFG''C''$ außerhalb $ABFE$. Dann schneidet k die Strecke FG'' in einem Punkt V''. Durch Zurückdrehen von $BFG''C''$ in $BFGC$ geht das Flächenstück $M_2'' = \overset{\frown}{TV''F}$ aller in $BFG''C''$ zu K gehörenden Punkte über in $M_2 = \overset{\frown}{TVF}$.

(3) Durch Überqueren erst von EF und dann von FG sind in $BFGC$ auch alle Punkte eines Flächenstücks M_3 erreichbar, das folgendermaßen erhalten werden kann:
Man drehe $BFGC$ erst um FG in die Ebene durch E,F,G,H in die Lage außerhalb $EFGH$ und wende dann die in (1) genannte Drehung um EF an. Dadurch kommt $BFGC$ in die Lage $B'FG'C'$ außerhalb $EFG'H'$.
Der Kreis k schneidet FB' in einem Punkt W' (der wegen $B' = G''$ mit dem schon in (2) genannten Punkt V'' zusammenfällt). Die Punkte $B'FG'C'$, die K angehören, bilden das Flächenstück $M_3' = \overset{\frown}{U'W'F}$. Durch Zurückdrehen von $B'FG'C'$ in $BFGC$ geht $M_3' = \overset{\frown}{UWF}$ über.

(4) Man kann aber auch $B'FG'C'$ durch eine in der Ebene e ausgeführte Drehung um F in die Lage $BFG''C''$ bringen. Dabei gehen U', W' in die Punkte U^*, W^* über. Diese sind die Schnittpunkte von FG'' bzw. FB mit demjenigen Kreis k^*, der bei der genannten Drehung aus k entsteht.
Sein Mittelpunkt P^* entsteht bei dieser Drehung aus P, sein Radius ist r. Das Flächenstück M_3' geht bei dieser Drehung in $M_3'' = \overset{\frown}{U^*W^*F}$ über.

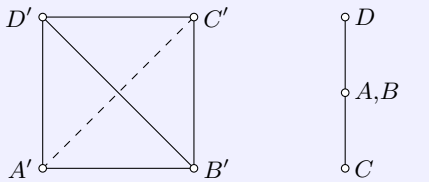
(5) Aus (2), (3), (4) folgt:
In $BFGC$ sind alle Punkte der Vereinigungsmenge $M_4 = M_2 \cup M_3$ auf die geforderte Weise erreichbar. Da die Kreise k und k^* in $BFG''C''$ genau einen Schnittpunkt X^* haben ergibt sich die Vereinigungsmenge $M_4^* = M_2'' \cup M_3 = \overset{\frown}{TX^*X^*U^*F}$.
Geht bei dem Zurückdrehen von $BFG''C''$ und $BFGC$ der Punkt X^* in X über, so geht M_4^* in $M_4 = \overset{\frown}{YXXUF}$ über.

(6) Durch Überqueren erst von EF, dann von FG und dann von BF sind in $ABFE$ keine neuen Punkte mehr erreichbar.
Dies ist daraus ersichtlich, dass die Menge $\overset{\frown}{T^*M^*F}$ aller in $ABFE$ zur Kreisfläche k^* um P^* mit r gehörenden Punkte bereits in M_0 liegt. Ebenso folgt:

Durch Überqueren erst von BF, dann von FG sind in $EFGH$ keine neuen Punkte erreichbar; denn man kann $EFG'H'$ durch die in (5) genannte Drehung in die Lage $E''FG''H''$ bringen; dabei geht M_1' in die Menge $\overset{\frown}{S^*U^*F}$ aller in $E''FG''H''$ zu k^* gehörenden Punkte über, auch in ihr liegen bereits alle in $E''FG''H''$ zu k gehörenden Punkte (die wegen $G''FE''H'' = B'FG'C'$ das schon in (1) genannte Flächenstück M_3' bilden).

Damit ist auch gezeigt, dass durch weiter fortgesetztes Überqueren von Kanten keine neuen Punkte mehr erreichbar sind.
Die gesuchte Menge ist also die Vereinigungsmenge der in (0), (1) und (5) durch Angabe ihrer Randkurven und deren konstruktiver Gewinnung beschriebenen Flächenstücke M_0, M_1 und M_4.

Aufgabe 291033:

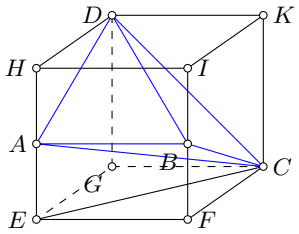


Projektion Höhenmaßstab

Die Abbildung stellt in senkrechter Eintafelprojektion einen ebenflächig begrenzten Körper dar, der genau vier Eckpunkte A, B, C, D hat.

Ihre Bildpunkte A', B', C', D' sind die Ecken eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a.
Im beigefügten Höhenmaßstab hat D die Höhendifferenz a zu C, und A, B haben die Höhendifferenz $\frac{a}{2}$ zu C.
Ermitteln Sie aus diesen Angaben das Volumen des Körpers!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



wie in der Abbildung gezeigt, kann der Körper $ABCD$ aus einem Würfel $EFGHIKD$ erhalten werden, indem man die Pyramiden $ABFEC$, $ABIHD$, $ADGEC$m $BCKID$ entfernt.
Die ersten beiden haben als Grundfläche je ein Rechteck mit den Seitenlängen a, $\frac{a}{2}$, also dem Flächeninhalt $\frac{1}{2}a^2$.
Die letzten beiden haben als Grundfläche je ein Trapez mit parallelen Seiten der Länge a, $\frac{a}{2}$ und der Höhenlänge a, also dem Flächeninhalt $\frac{3}{4}a^2$.
Alle vier Pyramiden haben die Höhenlänge a. Damit ergibt sich als gesuchtes Volumen von $ABCD$

$$V = a^3 - 2 \cdot \frac{1}{6}a^3 - 2 \cdot \frac{1}{4}a^3 = \frac{1}{6}a^3$$

Aufgabe 301033:
Es sei F die Oberfläche eines regulären Tetraeders $ABCD$. Die Mittelpunkte der Strecke AB bzw. CD seien M bzw. N.

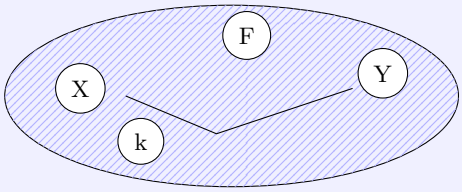


Abbildung a)

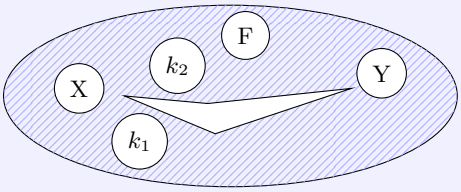
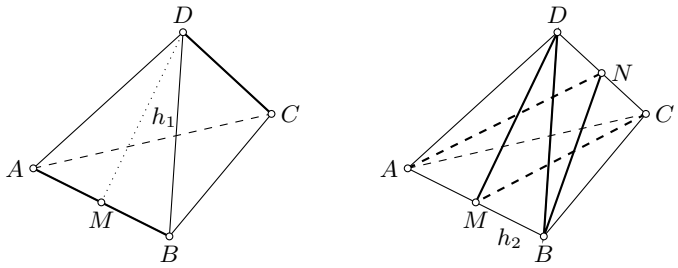


Abbildung b)

Die Abbildungen a und b verdeutlichen den Vorgang des „Aufschneidens einer Fläche F längs einer Kurve $k = XY$“:
Diese Kurve k, die im Innern der Fläche F verläuft, geht durch das Aufschneiden über in eine von X nach Y durchlaufende Kurve k_1 und eine andere von Y nach X durchlaufende Kurve k_2.
Beide Kurven k_1 und k_2 bilden zusammen eine neu entstandene geschlossene (d. h. in sich zurücklaufende) Randkurve der aufgeschnittenen Fläche F.
a) Schneidet man die Tetraederfläche F in dieser Weise zweimal auf, nämlich längs der Strecke AB und außerdem längs der Strecke CD, so lässt sich die aufgeschnittene Fläche F so verbiegen, dass die aus AB und aus CD entstandenen Randkurven zu zwei Kreislinien werden, die in zueinander parallelen Ebenen liegen.
Die Fläche F wird dabei zur Mantelfläche eines geraden Zylinders.
b) Schneidet man die Tetraederfläche sowohl längs der Kurve auf, die aus den Strecken CM und MD besteht, als auch längs der Kurve, die aus den Strecken AN und NB besteht, so lässt sich F ebenfalls so verbiegen, dass die Randkurve zu Kreislinien werden und F zum Mantel eines geraden Zylinders.
Untersuchen Sie, welcher der beiden in a), b) genannten Zylinder das größere Volumen hat!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Jede der beiden entstehenden Zylinder-Mantelflächen hat als Umfang ihres Grund- und Deckkreises die doppelte Länge jeweils einer Kurve, längs deren die Tetraederfläche F aufgeschnitten wird.
Die Höhe des betreffenden Zylinders ist die Länge des Lotes, das von einem Punkt der einen Schnittkurve auf ein - in der ursprünglichen Lage von F geradlinigen - Stück der anderen Schnittkurve gefällt wird, wenn dieses Lot ganz in der Tetraederfläche verläuft. So ergibt sich (siehe Abbildungen):



Ist a die Kantenlänge des Tetraeders $ABCD$, so hat im Fall a) der Zylinder den Grundkreisumfang $u_1 = 2AB = 2a$ und die Höhe $h_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.
Im Fall b) hat der Zylinder den Grundkreisumfang $u_2 = 2(CM + MD) = 2a\sqrt{3}$ und die Höhe $h_2 = \frac{a}{2}$.
Für die Höhen gilt also

$$\frac{h_1}{h_2} = \sqrt{3}$$

für die Grundkreisradien r_1 bzw. r_2 gilt

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

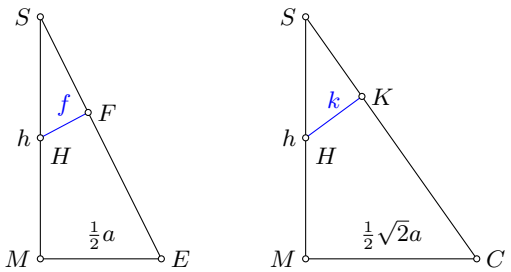
Also gilt für die Volumina $V_i = \pi r_i^2 h_i$ $(i = 1{,}2)$ der beiden Zylinder

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1^2 h_1}{r_2^2 h_2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

und daher $V_2 > V_1$, d. h., der in b) genannte Zylinder hat das größere Volumen.

Aufgabe 311033:
Es sei $ABCDS$ eine Pyramide; ihre Grundfläche sei ein Quadrat $ABCD$, das Lot von der Spitze S auf die Grundfläche habe als Fußpunkt den Diagonalenschnittpunkt M des Quadrates $ABCD$.
Ferner sei H der Mittelpunkt der Strecke MS; das Lot von H auf die Seitenfläche BCS habe den Fußpunkt F, das Lot von H auf die Kante CS habe den Fußpunkt K.
Unter diesen Voraussetzungen berechne man aus den gegebenen Längen $f = HF$ und $k = HK$ das Volumen der Pyramide $ABCDS$.

Lösung von MontyPythagoras:
Der Mittelpunkt der Strecke BC sei E. Die Höhe der Pyramide sei h, die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche sei a. Wir legen nun einen Schnitt durch MES und durch MCS:



Das gesuchte Volumen der Pyramide ist

$$V = \tfrac{1}{3}a^2h$$

Wir müssen daher a und h mithilfe der gezeigten Schnitte aus den gegebenen Längen f und k ermitteln. Es gilt im linken Schnitt:

$$\frac{f}{\frac{1}{2}h} = \frac{\frac{1}{2}a}{\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}a^2}}$$

$$f^2(h^2 + \tfrac{1}{4}a^2) = \tfrac{1}{16}a^2h^2$$

$$16f^2h^2 + 4f^2a^2 = a^2h^2$$

$$(a^2 - 16f^2)h^2 = 4f^2a^2$$

$$h^2 = \frac{4f^2a^2}{a^2 - 16f^2} \tag{1}$$

Aus dem rechten Schnittbild erhält man in ähnlicher Weise:

$$\frac{k}{\frac{1}{2}h} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}a}{\sqrt{h^2 + \frac{1}{2}a^2}}$$

Und mit den gleichen Rechenschritten wie oben:

$$h^2 = \frac{4k^2a^2}{a^2 - 8k^2} \tag{2}$$

Wir setzen (1) und (2) gleich und lösen nach a^2 auf:

$$\frac{4f^2a^2}{a^2 - 16f^2} = \frac{4k^2a^2}{a^2 - 8k^2}$$

$$f^2(a^2 - 8k^2) = k^2(a^2 - 16f^2)$$

$$8f^2k^2 = (k^2 - f^2)a^2$$

$$a^2 = \frac{8f^2k^2}{k^2 - f^2} \tag{3}$$

Setzen wir das in (1) ein, erhalten wir:

$$h^2 = \frac{4f^2 \cdot \frac{8f^2k^2}{k^2-f^2}}{\frac{8f^2k^2}{k^2-f^2} - 16f^2} = \frac{32f^4k^2}{8f^2k^2 - 16f^2(k^2 - f^2)} = \frac{4f^2k^2}{2f^2 - k^2}$$

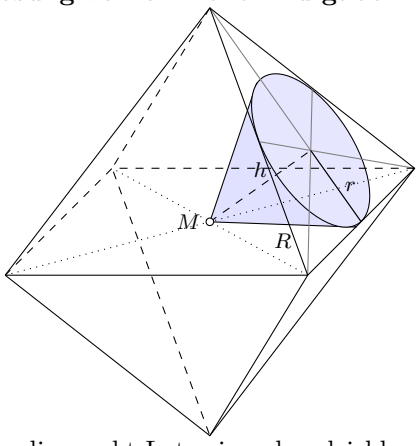
$$h = \frac{2fk}{\sqrt{2f^2 - k^2}}$$

Diese Gleichung und Gleichung (3) setzen wir in die Formel für das Volumen ein:

$$V = \frac{2fk}{3\sqrt{2f^2 - k^2}} \cdot \frac{8f^2k^2}{k^2 - f^2} = \frac{16f^3k^3}{3(k^2 - f^2)\sqrt{2f^2 - k^2}}$$

Aufgabe 321033:
Zeigen Sie, dass es möglich ist, einer Kugel acht einander kongruente gerade Kreiskegel möglichst großer Höhe so einzubeschreiben, dass jeder dieser Kegel genau drei andere von ihnen jeweils längs einer gemeinsamen Mantellinie berührt!
Ermitteln Sie aus dem gegebenen Kugelradius R den Grundradius r und die Höhe h solcher Kegel!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Bildet man in jeder der acht Seitenflächen eines regulären Oktaeders (diese Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke) den Inkreis, so hat jeder dieser acht Kreise mit genau drei anderen je genau einen gemeinsamen Punkt, nämlich jeweils den Berührungspunkt auf einer gemeinsamen Kante zweier Seitenflächen (diese Berührungspunkte sind die Mittelpunkte der Kanten).

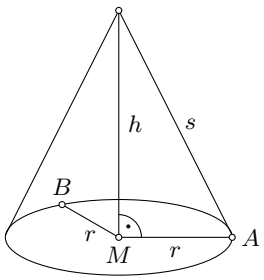
Verbindet man den Mittelpunkt M des Oktaeders mit den Kreisen, so erhält man acht Kreiskegel, die die gewünschten Berührungen aufweisen.
Sie sind gerade Kegel, da das Lot von M auf je eine Seitenfläche deren Inkreismittelpunkt als Fußpunkt hat (siehe Abbildung).
Da diese acht Lote einander gleichlang sind, sind die acht Kegel (ebenso wie ihre Grundkreise) einander kongruent. Alle ihre Mantellinien sind also von gleicher Länge; daher sind die Kegel einer Kugel so einbeschrieben, dass (zum Einbeschreiben in diese Kugel) ihre Höhe möglichst groß ist.

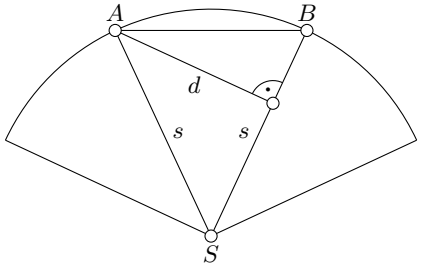
Die Länge dieser Mantellinien, also der Kugelradius R, ist in dem von vier Oktaederkanten gebildeten Quadrat der Abstand des Quadratmittelpunktes von einem Kantenmittelpunkt, also beträgt die Kantenlänge $2R$.
Der Grundkreisradius r der Kegel ist (nach dem Satz über den Schwerpunkt auf den Seitenhalbierenden) ein Drittel der Höhenlänge eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge $2R$, also $r = \frac{1}{3}R \cdot \sqrt{3}$.
Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich als Höhenlänge der Kegel

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = R \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}R \cdot \sqrt{6}$$

Aufgabe 331036:
Es sei K ein gerader Kreiskegel. Die Grundfläche von K habe den Mittelpunkt M und den Radius r, die Spitze von K sei S, die Höhe $h = MS$ von K betrage $h = r \cdot \sqrt{3}$.
Auf dem Rand der Grundfläche seien zwei Punkte A, B so gelegen, dass der Winkel $\angle AMB$ die Größe $120°$ hat.
Eine Ameise, die sich im Punkt A befindet, will zu einem Punkt C der Mantellinie BS gelangen und diesen Zielpunkt C so wählen, dass sie, ohne die Mantelfläche zu verlassen, einen möglichst kurzen Weg zurückzulegen hat.
Ermitteln Sie die Länge eines solchen Weges, ausgedrückt in Abhängigkeit von r!

Lösung von Kornkreis:
Die Hauptidee ist den Kegel abzuwickeln. Gefragt ist dann also einfach nach der kürzesten Entfernung von einem Punkt zur Strecke. Diese kürzeste Entfernung ist bekannterweise das Lot.





Gesucht ist also im Dreieck ASB die Höhe auf der Seite $\overline{AS}$ (im folgenden als d bezeichnet). Dazu berechnen wir nun zuerst die Länge der Seite $\overline{AB}$ durch Sinussatz im $\triangle ABM$. Da dieses Dreieck gleichschenklig

ist, betragen die beiden unbekannten Winkel 30° (Basiswinkelsatz). Nun ist:

$$\frac{|\overline{AB}|}{\sin(120°)} = \frac{r}{\sin(30°)} \iff |\overline{AB}| = \frac{\sin(120°)r}{\sin(30°)}$$

Nun ist $\sin(30°) = \frac{1}{2}$ bekannt und

$$\sin(120°) = \sin(90° + 30°) = \sin(90°)\cos(30°) + \cos(90°)\sin(30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Eingesetzt also:

$$|\overline{AB}| = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot r}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}r$$

Dann berechnen wir die Seiten $\overline{AS}$ und $\overline{BS}$, welches ja Mantellinien vom Körper sind. Nach Pythagoras gilt also:

$$s^2 = h^2 + r^2 = (\sqrt{3}r)^2 + r^2 = 4r^2$$

und somit $s = 2r$.
Sei nun $\alpha = \angle BSA$. Nach Kosinussatz gilt im Dreieck ASB nun:

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}r)^2 &= (2r)^2 + (2r)^2 - 2 \cdot 2r \cdot 2r \cdot \cos(\alpha)\\ 3r^2 &= 4r^2 + 4r^2 - 8r^2 \cdot \cos(\alpha)\\ \alpha &= \arccos\left(\frac{5}{8}\right)\end{aligned}$$

Nun gilt weiterhin $\sin(\alpha) = \frac{d}{2r}$. Eingesetzt und umgestellt erhalten wir also:

$$d = \sin\left(\arccos\left(\frac{5}{8}\right)\right) \cdot 2r$$

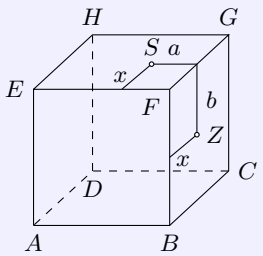
Dieses lässt sich noch vereinfachen. Es ist nach dem trigonometrischen Pythagoras $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \iff \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.
Dadurch erhalten wir also für $\sin(\arccos x)$ nun

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - (\cos(\arccos(x)))^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

Somit:

$$d = \sin\left(\arccos\left(\frac{5}{8}\right)\right) \cdot 2r = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{8}\right)^2} \cdot 2r = \sqrt{\frac{39}{64}} \cdot 2r = \frac{\sqrt{39}}{4}r$$

Aufgabe 341036:

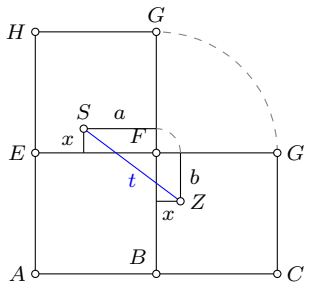


Auf der Oberfläche eines Würfels $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) mit der Kantenlänge 1 seien S und Z zwei Punkte. Ein Weg vom Startpunkt S zum Zielpunkt Z werde genau dann zulässig genannt, wenn er ganz auf der Oberfläche des Würfels verläuft.
Der Startpunkt S liege auf der Quadratfläche $EFGH$, er habe zu FG einen gegebenen Abstand a

mit $0 < a < 1$ und zu EF einen Abstand x.
Der Zielpunkt Z liege auf der Quadratfläche $BCGF$, er habe zu FG einen gegebenen Abstand b mit $0 < b < 1$ und zu BF ebenfalls den Abstand x.
Die Längen a und b seien - unter Einhaltung von $0 < a < 1$ und $0 < b < 1$ beliebig, aber - fest vorgegeben.
Ermitteln Sie (in Abhängigkeit von diesen a und b) alle diejenigen Werte x mit $0 < x < 1$, für die es zwei voneinander verschiedene zulässige Wege von S nach Z gibt, die beide unter allen zulässigen Wegen von S nach Z dieselbe möglichst kleine Länge haben!

Lösung von MontyPythagoras:
Einer der kürzestmöglichen Wege von S nach Z ist der direkte, geradlinige Weg über die Kante FG hinweg. Die Länge dieses Weges ist $l = a + b$. Der Punkt, an dem der Weg die Kante FG kreuzt, muss vom Punkt F auch den Abstand x haben, da ein Punkt mit größerem oder kleinerem Abstand zu F einen Umweg bedeuten würde.
Selbst wenn a und b so groß wie möglich werden, ist bei dem direkten Weg immer $l < 2$. Der Weg über die Kanten EH, AD und BC ist auf jeden Fall größer als 2, weil zwei komplette Würfelflächen überquert werden müssen.

Wenn x nun klein wird, S also an die Kante EF und Z an BF heranrückt, dann ist auch ein Weg möglich über die Kante EF und BF. Wir stellen nachfolgend die drei Würfelflächen $ABFE$, $EFGH$ und $BCGF$ abgewickelt dar:



Die Länge dieser diagonal verlaufenden Strecke ist dann:

$$t(x) = \sqrt{(x+a)^2 + (x+b)^2}$$

Es gibt kein lokales Minimum - je kleiner x, desto kleiner auch t. Aber der Weg soll ja auch nur gleich l sein, also

$$\sqrt{(x+a)^2 + (x+b)^2} = a + b$$
$$(x+a)^2 + (x+b)^2 = (a+b)^2$$
$$2x^2 + 2ax + 2bx + a^2 + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$x^2 + (a+b)x - ab = 0$$
$$x = -\frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} + ab}$$

Es kommt nur diese Lösung der quadratischen Gleichung in Frage, das ansonsten $x < 0$ wäre. Somit folgt:

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 6ab + b^2} - (a+b)\right)$$

Außerdem ist auch

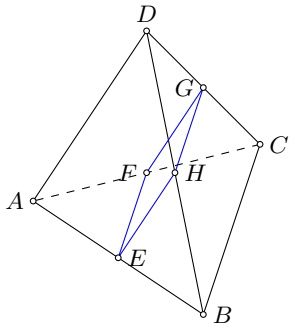
$$x_2 = 1 - x_1$$

eine gültige Lösung, denn dann haben S und Z den gleichen Abstand zur Würfelfläche $CDHG$ wie in der vorliegenden Lösung zur Fläche $ABFE$. Der Weg ist gleich lang, er führt dann aber über die Kanten GH und GC.

IV Runde 4

Aufgabe 021046:
Ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kante a soll durch eine Ebene so geschnitten werden, dass eine quadratische Schnittfigur entsteht.
a) Geben Sie die Lage der Schnittebene an!
b) Warum ist die Schnittfigur ein Quadrat?
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Quadrats!

Lösung von Manfred Worel:
a) A, B, C, D seien die Ecken des regelmäßigen Tetraeders, und E sei der Mittelpunkt der Kante $AB = a$. Eine der gesuchten Schnittebenen, die den Tetraeder so schneidet das eine quadratische Schnittfigur entsteht, ist die Ebene ε, die durch den Punkt E geht und parallel zu den Kanten AD und BC verläuft.
b) Die unter a) beschriebene Ebene ε schneide die Kanten AC, CD und BD in dieser Reihenfolge in den Punkten F, G und H.



Dann gilt $EF \parallel BC$ und $GH \parallel BC$ und somit $EF \parallel GH$, sowie $FG \parallel AD$ und $HE \parallel AD$ und somit $FG \parallel HE$.
Hieraus folgt nach dem Strahlensatz

$$EF = FG = GH = HE = BH = HD = CG = GD = CF = AF = \frac{a}{2}$$

Die Schnittfigur $EFGH$ ist demnach ein Rhombus und die Punkte F, G, H sind in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Kanten AC, CD, BD.
Da die vier Seitenflächen des Tetraeders $ABCD$ gleichseitige Dreiecke sind und E der Mittelpunkt von AB ist, gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$CE = DE = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Damit ist das Dreieck $\triangle CDE$ gleichschenklig. Da G der Mittelpunkt von CD ist, ist er auch der Fußpunkt des Lotes von E auf DC. Damit ist EG die Höhe auf die Basislänge des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle CDE$. Nach dem Satz des Pythagoras gilt dann:

$$EG^2 = DE^2 - DG^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

Da die Strecken EH, HG und EG der Beziehung

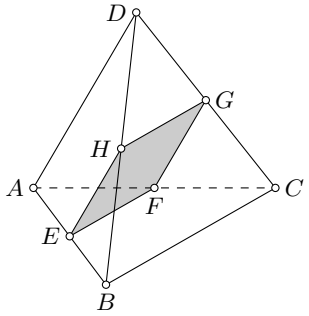
$$EG^2 = EH^2 + HG^2 \qquad \left(\frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\right)$$

genügen ist nach der Umkehrung des Satzes von Pythagoras das Dreieck $\triangle EGH$ rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei H. Wegen $\angle EHG = 90°$ ist der Rhombus $EFGH$ ein Quadrat.
c) Für den Flächeninhalt A des Quadrates $EFGH$ gilt:

$$A = |EF| \cdot |EH| = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$$

Aufgabe 041045:
Die Länge der Kanten eines regelmäßigen Tetraeders sei a. Durch den Mittelpunkt einer Kante wird eine Ebene ε so gelegt, dass sie diese Kante nicht enthält und parallel zu zwei einander nicht schneidenden Kanten verläuft.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Schnittfigur dieser Ebene mit dem Tetraeder!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



A, B, C, D seien die Ecken des Tetraeders, und E sei der Mittelpunkt von AB (siehe Abbildung). Dann kann ε o. B. d. A. als E enthaltend und parallel zu AD und BC vorausgesetzt werden.
Daher schneidet ε weder AD noch BC. Folglich liegen A und D bzw. B und C jeweils auf derselben Seite von ε, während A und B auf verschiedenen Seiten von ε liegen. Mithin schneidet ε die Kanten AC, CD und DB. Die Schnittpunkte seien in dieser Reihenfolge mit $F.G$ und H bezeichnet.

Dann gilt

$$EF \parallel BC \quad \text{und} \quad GH \parallel BC \qquad \text{sowie} FG \parallel AD \quad \text{und} \quad HE \parallel AD$$

Daraus folgt nach dem 2. Strahlensatz

$$|EF| = |FG| = |GH| = |HE| = \frac{a}{2}$$

Die Schnittfigur ist demnach ein Rhombus. Da wegen der Regelmäßigkeit des Tetraeders die Seitenflächen untereinander kongruente regelmäßige Dreiecksflächen sind, sind deren Höhen untereinander kongruent; es gilt also

$$|DE| = |CE| = |DF| = |BF|$$

Da außerdem $|CD| = |BD|$ ist, gilt nach dem Kongruenzsatz (sss) $\triangle CDE \cong \triangle BDF$ und folglich $\angle DCE \cong \angle DBF$.
Wegen $|CG| = |BH| = \frac{1}{2}|CD|$ gilt nach dem Kongruenzsatz (sws) $\triangle CGE \cong \triangle BHF$ und mithin $|GE| = |HF|$. Die Mittelpunkte von GE und HF fallen im Schnittpunkt der Diagonalen im Rhombus zusammen, so das GE und HF Durchmesser desselben Kreises sind.
Damit ist $EFGH$ als Rhombus und Sehnenviereck ein Quadrat und hat den Flächeninhalt

$$I = |EF|^2 = \frac{a^2}{4}$$

Aufgabe 051043:
Man beweise folgenden Satz:
Die sechs Ebenen, deren jede einen Innenwinkel zwischen zwei Seitenflächen des (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeders mit den Ecken $A_i, i = 1, 2, 3, 4$, halbiert, schneiden einander in genau einem Punkt M.
Dieser ist der Mittelpunkt der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel.
Anmerkung:
Die Existenz einer einbeschriebenen Kugel soll beim Beweis nicht benutzt werden.

Lösung von cyrix:
Für jeden Punkt P auf einer solchen Ebene, die den Innenwinkel zwischen zwei Seitenflächen halbiert, gilt, dass seine Lote auf die beiden Seitenflächen-Ebenen gleich groß sind. Umgekehrt bildet die Menge der Punkte, für die deren Lote auf diese beiden Seitenflächen-Ebenen gleich groß sind, genau jeweils eine solche Winkelhalbierenden-Ebene.

Da jede dieser Ebenen eine Kante des Tetraeders enthält, und keine zwei Tetraederkanten parallel sind, sind auch keine zwei dieser sechs Ebenen zueinander parallel. Es folgt, dass sich je drei von ihnen in genau einem Punkt schneiden.

Sei M der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden-Ebenen durch die Geraden A_1A_2, A_1A3 und A_2A4. Auf der ersten dieser Winkelhalbierenden-Ebenen liegen alle Punkte, deren Lote auf die Ebenen $\varepsilon_{A_1A_2A_3}$ und $\varepsilon_{A_1A_2A_4}$ gleichlang sind; in der zweiten die, für die die Lote auf die Ebenen $\varepsilon_{A_1A_2A_3}$ und $\varepsilon_{A_1A_3A_4}$ gleichlang sind; und auf der dritten die, für die die Lote auf die Ebenen $\varepsilon_{A_1A_2A_4}$ und $\varepsilon_{A_2A_3A_4}$ gleichlang sind. Für den Punkt M stimmen also die Längen der Lote auf alle vier Seitenflächen-Ebenen überein. Damit ist aber M in jeder der sechs Winkelhalbierenden-Ebenen enthalten, also ihr gemeinsamer Schnittpunkt.

Da die Lote von M auf die Seitenflächenebenen alle gleichlang sind, berührt eine Kugel um M mit diesem Radius genau alle Seitenflächen (in den jeweiligen Lotfußpunkten).

Aufgabe 061042:
Gegeben sei das Gradmaß des Neigungswinkels zwischen zwei Ebenen ε und ε_1. Gegeben sei ferner der Flächeninhalt $I_{\triangle ABC}$ eines Dreiecks $\triangle ABC$, das in der Ebene ε liegt.
Die Fußpunkte der Lote von A,B,C auf ε_1 bilden ein (möglicherweise ausgeartetes) Dreieck $\triangle A_1B_1C_1$.
Wie groß ist dessen Flächeninhalt $I_{\triangle A_1B_1C_1}$?

Lösung von cyrix:
Sei ϕ der Winkel zwischen den beiden Ebenen und g ihre Schnittgerade.
Durch die Orthogonalprojektion werden Strecken in ε, die parallel zu g sind, auf kongruente Strecken in ε_1 abgebildet.
Für Strecken in ε, die senkrecht zu g verlaufen, sind deren Bilder in ε_1 dagegen um den Faktor $\cos\phi$ gestreckt (bzw., da $\cos\phi \leq 1$ ist, eher „gestaucht“). Die Bilder von Parallelen zu g in ε sind auch weiterhin in ε_1 parallel zu g; analog werden auch die zu g in ε orthogonalen Geraden wieder auf in ε_1 zu g orthogonale Geraden abgebildet.
Wir betrachten das Dreieck $\triangle ABC$ in ε. Ist eine der Seiten des Dreiecks (o. B. d. A. AB) parallel zu g, dann ist ihr Bild (also dann A_1B_1) kongruent zu ihr, während ihre Höhe (h_{AB}) senkrecht zu g verläuft, und so dessen Bild ($h_{A_1B_1}$) eine um den Faktor $\cos\phi$ gestreckte Länge besitzt. Da die Bilder dieser beiden Strecken auch in der Zielebene senkrecht aufeinander stehen, berechnet sich der Flächeninhalt des Bilddreiecks zu

$$I_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}\cdot|A_1B_1|\cdot|h_{A_1B_1}| = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot\cos\phi\cdot h_{AB} = \cos\phi\cdot I_{\triangle ABC}$$

Ist dagegen keine Seite des Dreiecks $\triangle ABC$ parallel zu g, dann schneidet (genau) eine der Parallelen in ε zu g durch die drei Eckpunkte die jeweils gegenüberliegende Dreiecksseite in einem inneren Punkt.
Sei dies o. B. d. A. die Parallele durch A; und deren Schnittpunkt mit BC heiße D. Dann ist AD parallel zu g und die Höhen von B und C auf AD orthogonal zu g, sodass sich auf diese Teildreiecke die eben gemachte Überlegung jeweils einzeln anwenden lässt, also (mit D_1 als Bildpunkt von D bezüglich der Orthognalprojektion)

$$I_{\triangle A_1B_1D_1} = \cos\phi\cdot I_{\triangle ABD} \qquad \text{und} \qquad I_{\triangle A_1C_1D_1} = \cos\phi\cdot I_{\triangle ACD}$$

gilt.
Abschließend ist festzustellen, dass die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A_1B_1C_1$ sich aus den jeweiligen zwei Teildreiecken $\triangle ABD$ und $\triangle ACD$ bzw. entsprechend $\triangle A_1B_1D_1$ und $\triangle A_1C_1D_1$ zusammensetzen, sich ihre Flächeninhalte also aus der Summe derer der jeweiligen beiden Teildreiecke ergibt und damit in jedem Fall gilt:

$$I_{\triangle A_1B_1C_1} = \cos\phi\cdot I_{\triangle ABC}$$

Aufgabe 071042:
Für einen Körper, der die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche und kongruenten Seitenflächen hat, soll ein quaderförmiger Behälter von möglichst kleinem Volumen angefertigt werden. Der pyramidenförmige Körper soll dabei so hineingelegt werden, dass er entweder mit seiner Grundfläche oder mit einer seiner Seitenflächen eine der Innenflächen des Behälters berührt. Es sei h die Höhe des pyramidenförmigen Körpers und a die Seitenlänge seiner Grundfläche.
Untersuchen Sie, für welche dieser beiden Lagen der Behälter ein geringeres Volumen benötigt! Dabei sind zweckmäßigerweise die Fälle $h < \frac{a}{2}$, $h = \frac{a}{2}$ und $h > \frac{a}{2}$ zu unterscheiden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
V_1 sei das Volumen des Behälters für die erste der oben angegebenen Lagen der Pyramide. Die Grundfläche der Pyramide fällt dann mit einer Seitenfläche des umschließenden Quaders zusammen, die Höhe der Pyramide ist gleich der Höhe des Behälters. Es gilt

$$V_1 = a^2 h \tag{1}$$

V_2 sei das Volumen des Behälters in der zweiten Lage der Pyramide. Wie berechnen V_2 für die beiden möglichen Fälle $h \geq \frac{a}{2}$ und $h < \frac{a}{2}$.

Fall 1: Es sei $h \geq \frac{a}{2}$.
Die Seitenfläche ABS der Pyramide liege in einer Seitenfläche des Behälters, die Kante AB sei gemeinsame Kanten von Pyramide und Behälter.
Wie legen eine Ebene durch die Pyramidenspitze S, die Mitte M von AB und die Mitte M' der Gegenseite zu AQB im Basisquadrat der Pyramide.
Die Schnittfigur dieser Ebene mit der Pyramide ist (wegen der Kongruenz der Seitenflächen der Pyramide) das gleichschenklige Dreieck SMM' mit $SM = SM' = s$; $MM' = a$,
Die Höhe SP dieses Dreiecks ist die Pyramidenhöhe h, die Seiten SM, SM' sind die Höhen der Seitenflächen der Pyramide.
Wegen $h \geq \frac{a}{2}$ gilt $\angle MSP \leq 45°$, also $\angle MSM' \leq 90°$. Hieraus folgt $MQ \leq MS = s$, wobei Q der Fußpunkt des Lotes von M' auf die Verbindungsgerade der Punkte M und S ist. Sei $x = M'Q$, dann gilt:

$$V_2 = a \cdot s \cdot x \tag{2}$$

Die Dreiecke MQM' und MSP sind (wegen der Gleichheit der Winkel) ähnlich, also $x : a = h : s$ oder

$$x = \frac{ah}{s} \tag{3}$$

Einsetzen dieser Beziehung in (2) ergibt

$$V_2 = a^2 h = V_1$$

d. h., die Behältervolumina sind für $h \geq \frac{a}{2}$ in beiden Lagen gleich.

2. Fall: Es sei $h < \frac{a}{2}$.
Die Schnittfigur ist jetzt ein bei S stumpfwinklig gleichschenkliges Dreieck. Wie im Fall 1 fällen wir von M' der Lot $M'Q$ auf die Verbindungsstrecke der Punkt M und S.
Wegen $\angle MSM' > 90°$ ist $s_1 = MQYMS = s$. Für der Volumen des umschließenden Quaders gilt (mit $x = M'Q$):

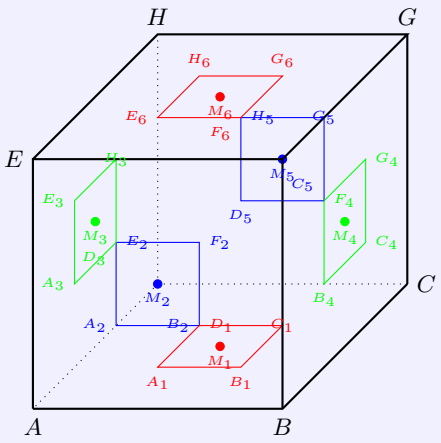
$$V_2 = as_1 x$$

Wie im Fall 1 ist $x = \frac{ah}{s}$; demzufolge

$$V_2 = a^2 h \cdot \frac{s_1}{s}$$

und wegen $\frac{s_1}{s} > 1$, gilt also $V_2 > V1$.
Das Volumen ist kleiner, wenn die Grundfläche der Pyramide mit einer Seitenfläche des Behälters zusammenfällt.

Aufgabe 081046:
Die Abbildung zeigt einen Würfel $W = ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge a.



In den Seitenflächen $ABCD$, $ABFE$, $ADHE$, $BCGF$, $DCGH$, $EFGH$ von W sind kantenparallele Quadrate

$$A_1B_1C_1D_1, A_2B_2F_2E_2, A_3D_3H_3E_3, B_4C_4G_4F_4, D_5C_5G_5H_5, E_6F_6G_6H_6$$

einer Kantenlänge $x < a$ und mit den Mittelpunkten $M_1, ..., M_6$ gelegen, und zwar so, dass die drei Geraden $g_{M_1M_6}, g_{M_2M_5}, g_{M_3M_4}$ kantenparallel verlaufen und sich in einem und demselben Punkt schneiden. Aus W werden die drei Quader

$$A_1B_1C_1D_1E_6F_6G_6H_6, A_2B_2F_2E_2D_5C_5G_5H_5, A_3D_3H_3E_3B_4C_4G_4F_4$$

herausgeschnitten. Für welchen Wert von x hat der entstandene Restkörper das halbe Volumen des ursprünglichen Würfels?

Lösung von cyrix:
Jeder der drei herausgeschnittenen Quader hat ein Volumen von $x^2 \cdot a$. Jedoch überschneiden sie sich in einem Würfel der Kantenlänge x (und Mittelpunkt als Schnittpunkt der drei Geraden $g_{M_1M_6}$, $g_{M_2M_5}$ und $g_{M_3M_4}$), sodass dieser Teil nur von einem Quader herausgeschnitten wird, die beiden übrigen ihn aber nicht erneut entfernen.
Also hat der Restkörper ein Volumen von $a^3 - 3ax^2 + 2x^3$. Wenn dies gleich dem halben Volumen des Ausgangswürfels entsprechen soll, muss

$$\frac{1}{2}a^3 = a^3 - 3ax^2 + 2x^3 \qquad \text{bzw.} \qquad 4x^3 - 6ax^2 + a^3 = 0$$

gelten. Offenbar erfüllt $x = \frac{a}{2}$ diese Gleichung, da

$$4 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 - 6 \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^3 = \left(\frac{4}{8} - \frac{6}{4} + 1\right) \cdot a^3 = 0$$

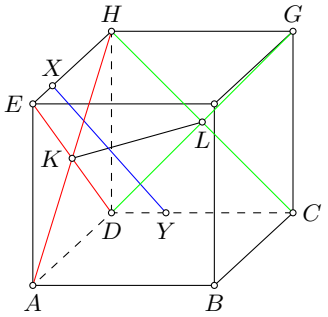
ist. Also kann man $4x^3 - 6ax^2 + a^3$ darstellen als $4x^3 - 6ax^2 + a^3 = (2x - a) \cdot (2x^2 - 2ax - a^2)$. Wäre $x \neq \frac{a}{2}$, so müsste der zweite Faktor $2x^2 - 2ax - a^2$ also Null ergeben. Die Lösungen für die sich so ergebende Gleichung in x lauten

$$\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \cdot a$$

Dabei ist jedoch die eine Lösung $\frac{1-\sqrt{3}}{2} \cdot a$ negativ (für $a > 0$) und die andere $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot a$ größer als a und somit auch nicht zulässig.
Es verbleibt die einzig mögliche Wahl für x im Intervall $[0, a]$ mit $x = \frac{1}{2}a$ als einzige Lösung.

Aufgabe 091043:
A, B, C, D, E, F, G, H seien die Eckpunkte eines Würfels, und X sei ein Punkt der Strecke EH, wobei die Bezeichnungen wie in der Abbildung gewählt seien.
K sei der Schnittpunkt der Strecken AH und ED, und L sei der Schnittpunkt der Strecken HC und DG. Schließlich sei Y derjenige auf der Strecke DC gelegene Punkt, für den $DY = EX$ ist.
Man beweise, dass der Mittelpunkt von XY auf KL liegt.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Vektorielle Lösung:
Wir legen den Würfel in ein Koordinatensystem mit den Koordinaten $D = (0,0,0)^T$, $A = (1,0,0)$, $C = (0,1,0)^T$, $H = (0,0,1)^T$.
Dann haben wir $K = (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$, $L = (0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ und $X = (1,0,1) - r \cdot (1,0,0)^T$, $Y = r \cdot (0,1,0)^T$, $0 \leq r \leq 1$, wobei die beiden Faktoren der Richtungsvektoren wegen $|DY| = |EX|$ identisch sind.
Die Strecke $|KL|$ ist gegeben durch

$$|KL| = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (1-s) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \;\middle|\; 0 \leq s \leq 1 \right\} .$$

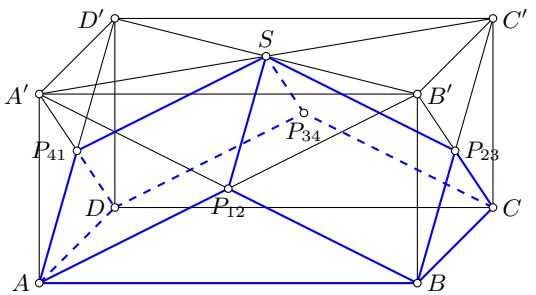
Für den Mittelpunkt M der Strecke $|XY|$ gilt

$$M = \frac{1}{2}(X+Y) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1-r \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-r) \\ \frac{1}{2}(1-(1-r)) \\ \frac{1}{2}(1-r) + \frac{1}{2}(1-(1-r)) \end{pmatrix} ,$$

welcher mit $s = r - 1$ auf der Strecke $|KL|$ liegt.

Aufgabe 101042:
Von einem Quaderkörper mit den Eckpunkten $A, B, C, D, A', B', C', D'$ und den Kantenlängen $AB = a, AD = b, AA' = c$ seien mit Hilfe der ebenen Schnitte durch die Eckpunkte B', A, D' bzw. A', B, C' bzw. A', D, C' bzw. B', C, D' diejenigen Teile abgetrennt, die jeweils den Eckpunkt A' bzw. B' bzw. C' bzw. D' enthalten. Das Volumen des verbleibenden Restkörpers sei V_R, das des ursprünglichen Quaders V_Q.
a) Man gebe sämtliche Punkte des Quaderkörpers an, die Eckpunkte des Restkörpers sind, und stelle diesen in einem Schrägbild $\alpha = 60°, q = 1$ dar.
Das Schrägbild ist für den Fall $a = 5$ cm, $b = 2$ cm, $c = 2{,}5$ cm zu zeichnen.
b) Man berechne $V_R : V_Q$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Man bezeichne die vier schneidenden Ebenen mit E_1, E_2, E_3, E_4 entsprechend der in der Aufgabenstellung festgelegten Reihenfolge.

E_1 und E_2 schneiden die Deckfläche des Quaderkörpers nach den Diagonalen $B'D'$ bzw $A'C'$. Der Schnittpunkt S dieser Diagonalen ist den Ebenen E_1 und E_2 gemeinsam.

E_1 und E_2 schneiden die Seitenfläche $ABB'A'$ des Quaderkörpers nach den Diagonalen AB' bzw. $A'B$. Der Schnittpunkte P_{12} dieser Diagonalen ist den Ebenen E_1 und E_2 gemeinsam. Folglich ist die Verbindungsgerade SP_{12} die Schnittgerade der Ebenen E_1 und E_2.

Wegen der Konvexität der Quaders hat die Schnittgerade mit dem Quaderkörper genau die Strecke SP_{12} gemeinsam.
Aus den gleichen Überlegungen ist die Verbindungsgerade AP_{12} Schnittgerade von E_1 mit der von den Punkten $ABB'A'$ aufgespannten Ebene. Entsprechend liegt BP_{12} in der Schnittgeraden von E_2 und

$ABB'A'$.

Die Punkte A, B und P_{12} liegen gemeinsam mit dem Restkörper unterhalb der Ebenen E_3 und E_4. Daraus folgt, dass die Strecken AP_{12}, BP_{12}, SP_{12} Kanten des Restkörpers darstellen. Die Kante AB bleibt bei diesen vier Schnitten ungeändert bestehen.

Durch zyklische Fortsetzung dieser Überlegungen findet man, dass die Punkte A, B, C, D als Eckpunkte des Restkörpers erhalten bleiben, während die Ecken A', B', C', D' entfallen. Genau die Mittelpunkte P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{41} und S der Seitenflächen bzw. Deckfläche treten als neue Eckpunkte hinzu.
Es verbleibt ein konvexer Restkörper mit 9 Ecken, 16 Kanten und 9 Flächen. Die Probe mit Hilfe des Eulerschen Polyedersatzes $f + f - k = 2$ ist erfüllt.

Das Volumen V_R des Restkörpers kann in folgender Weise zu dem Volumen V_Q der Quaders in Beziehung gesetzt werden:

Man lege durch den Punkt S zwei seitenparallele ebene Schnitte, die den Quaderkörper in vier kongruente Quaderkörper zerlegen. Durch Anbringen der vier ebenen Schnitte wird z. B. der Teilquader mit der Kante AA' von der Ebene E_1 in zwei volumengleiche Teilkörper zerlegt, wobei genau der untere Teil dem Restkörper zufällt.

Wendet man diese Überlegung auf alle vier Teilquader an, ergibt sich die Aussage $V_R : V_Q = 1 : 2$.

Aufgabe 111046:
Es seien A, B, C, D die Ecken eines (nicht notwendig regelmäßigen) Tetraeders, S ein in seinem Innern gelegener Punkt und A', B', C', D' die Schnittpunkte der aus A, B, C bzw. D durch S verlaufenden Strahlen mit den Flächen der Dreiecke $\triangle BCD, \triangle ACD, \triangle ABD$ bzw. $\triangle ABC$. Man beweise, dass dann gilt

$$\frac{SA'}{AA'} + \frac{SB'}{BB'} + \frac{SC'}{CC'} + \frac{SD'}{DD'} = 1$$

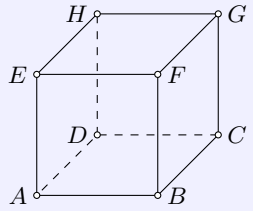
Lösung von cyrix:
Es sei L_D der Höhenfußpunkt von D auf die Tetraederfläche $\triangle ABC$ sowie L_{SD} analog der von S auf die gleiche Fläche. Dann sind nach Konstruktion die Geraden DL_D und SL_{SD} parallel, sodass nach Strahlensatz $\frac{|SL_{SD}|}{|DL_D|} = \frac{|SD'|}{|DD'|}$ gilt.
Da diese Strecken die Höhen der Tetraeder $ABCS$ bzw. $ABCD$ über der gleichen Grundfläche $\triangle ABC$ sind, stehen ihre Volumina V_D bzw. V im gleichen Verhältnis, also $V_D = \frac{|SD'|}{|DD'|} \cdot V$.
Auf analoge Weise berechnen sich die Volumina V_A, V_B und V_C der Tetraeder $SBCD$, $SACD$ bzw. $SABD$ zu $V_A = \frac{|SA'|}{|AA'|} \cdot V$, $V_B = \frac{|SB'|}{|BB'|} \cdot V$ und $V_C = \frac{|SC'|}{|CC'|} \cdot V$.

Die vier Tetraeder $SABC$, $SABD$, $SACD$ und $SBCD$ zerlegen den Tetraeder $ABCD$ vollständig in vier Teilkörper, sodass sich ihre Volumina zum Volumen des Gesamt-Tetraeder aufaddieren. Es gilt also

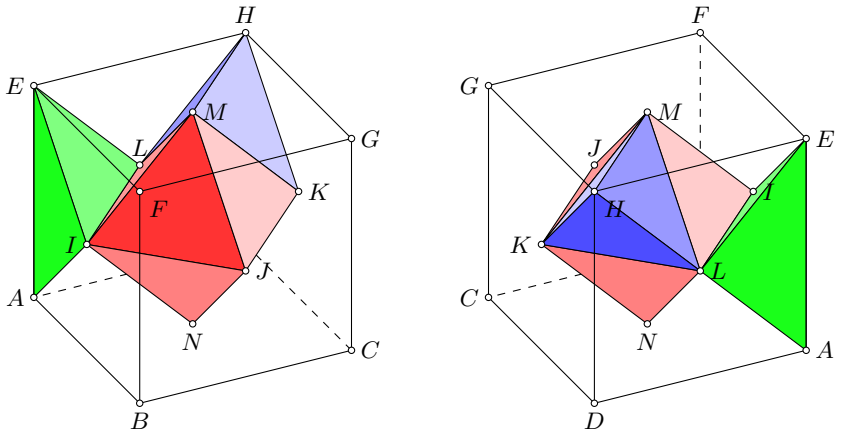
$$V = V_A + V_B + V_C + V_D = \left(\frac{|SA'|}{|AA'|} + \frac{|SB'|}{|BB\prime|} + \frac{|SC'|}{|CC'|} + \frac{|SD'|}{|DD'|} \right) \cdot V$$

was wegen $V \neq 0$ direkt das Gewünschte zeigt, $\square$.

Aufgabe 121042:
Ein Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) sei durch ebene Schnitte durch die Punkte A, F, H; B, E, G; C, F, H; D, E, G; E, B, D; F, A, C; G, B, D und H, A, C in Teilkörper zerlegt.
a) Ermitteln Sie die Anzahl dieser Teilkörper!
b) Geben Sie das Volumen jedes dieser Teilkörper als Funktion der Kantenlänge a des Würfels an!



Lösung von MontyPythagoras:
Der Würfel wird zerlegt in drei Arten von Körpern, siehe nachfolgendes Bild:



1. Ein regelmäßiges Oktaeder im Zentrum des Würfels (rot).
Die Eckpunkte des Oktaeders liegen jeweils in der Mitte der äußeren Würfelflächen, die Kantenlänge des Oktaeders ist eine halbe Würfelflächendiagonale. Die quadratische Grundfläche eines halben Oktaeders (Pyramidengrundfläche) ist dann genau eine halbe Würfelfläche, die Höhe einer Pyramide ist $\frac{1}{2}a$, so dass sich als Volumen des Oktaeders ergibt:

$$V_O = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{6}a^3$$

2. Auf jeder Oktaederfläche sitzt ein regelmäßiges Tetraeder (blau), dessen Spitze der Eckpunkt eines Würfels ist. Es gibt daher acht dieses Tetraeder. Er besitzt die gleiche Kantenlänge wie der Oktaeder, also eine halbe Würfelflächendiagonale $\frac{1}{2}\sqrt{2}a$.
Das Volumen eines regelmäßigen Tetraeders wird als bekannt vorausgesetzt und wird hier nicht hergeleitet. Das Volumen dieser Tetraeder ist dann

$$V_T = \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{24}a^3$$

3. Die Würfelkanten bilden mit zwei Tetraederflächen und jeweils einer Viertel-Würfelfläche eine schiefe, wenngleich symmetrische Pyramide (grün). Die Grundfläche (z. B. ELA) ist $\frac{1}{4}a^2$, die Höhe der Pyramide ist $\frac{1}{2}a$, so dass das Volumen der Pyramide

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}a^2 \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{24}a^3$$

beträgt. Das Volumen der Pyramide entspricht also der des Tetraeders. Da eine solche Pyramide an jeder Würfelkante liegt, gibt es derer zwölf.

Der Würfel wird also in 21 Teile geteilt, 1 Oktaeder, 8 Tetraeder und 12 schiefe Pyramiden. Kontrolle:

$$V_{ges} = V_O + 8V_T + 12V_P = \frac{1}{6}a^3 + \frac{8}{24}a^3 + \frac{12}{24}a^3 = a^3$$

Aufgabe 131046:
Ein reguläres Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C und D und der Kantenlänge a werde durch sechs paarweise voneinander verschiedene Ebenen geschnitten, wobei jede der Ebenen von dem Tetraeder genau eine Kante und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante enthalte.
a) Wieviel Teilkörper entstehen insgesamt, wenn man sich alle Schnitte gleichzeitig ausgeführt denkt?
b) Berechnen Sie die Volumina der einzelnen Teilkörper unter Verwendung der Kantenlänge a.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $AC = AD$ liegt A auf der mittelsenkrechten Ebene ε von CD. Ebenso liegt B auf ε.
Daher ist ε diejenige der Schnittebenen, die AB enthält. Entsprechend stimmen die anderen Schnittebenen mit mittelsenkrechten Ebenen von Tetraederkanten überein.

Als regelmäßiges Tetraeder hat $ABCD$ einen Umkugelmittelpunkt S mit $SA = SB = SC = SD$, dieser liegt somit auf jeder der genannten mittelsenkrechten Ebenen, d. h. auf allen Schnittebenen. Folglich ist die Ebene durch A, B, S, diejenige der Schnittebenen, die AB enthält. Entsprechend stimmen auch die anderen Schnittebenen mit Verbindungsebenen von je einer Tetraederkante und S überein.

Jeder der an S angrenzenden Seitenflächen des Tetraeders $SBCS$ liegt somit in einer der Schnittebenen. Entsprechende gilt für die Tetraeder $ABDS$, $ACDS$, $BCDS$. Die gesuchte Zerlegung von $ABCD$ kann daher durch weiteres Zerlegen der vier Tetraeder $ABCS$, $ABDS$, $ACDS$, $BCDS$ (in die man $ABCD$ zunächst zerlegen kann) erhalten werden.

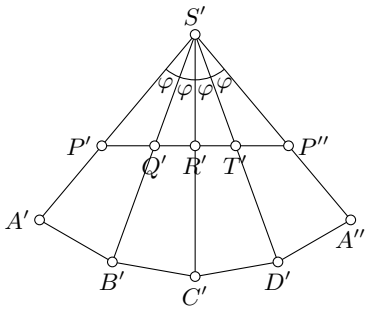
Zum weiteren Zerlegen von $ABCS$ geben genau diejenigen Schnittkanten Anlass, die (außer durch S) durch innere Punkte von $ABCS$ gehen. Das sind genau diejenigen durch innere Punkte des Dreiecks ABC gehen, also diejenigen, die durch D, einer der Ecken A, B, C und eine Kantenmitte gehen.
Sie zerlegen die Fläche des Dreiecks ABC durch dessen Seitenhalbierende in 6 flächeninhaltsgleiche (sogar kongruente) Teilflächen.
Demnach wird das Tetraeder $ABCS$ in genau 6 volumengleiche (sogar kongruente) Teilkörper zerlegt.

Entsprechendes gilt für die zu $ABCS$ kongruenten Tetraeder $ABDS$, $ACDS$, $BCDS$. Daher entstehen insgesamt 24 volumengleiche Tetraeder.
Jeder von ihnen hat somit das Volumen $V_K = \frac{1}{24}V_T$, wobei V_T das Volumen des Tetraeders $ABCD$ ist. Wegen $V_T = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$ gilt also

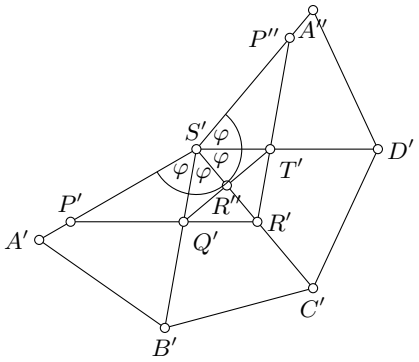
$$V_K = \frac{a^3}{288}\sqrt{2}$$

Aufgabe 141043A:
Es sei $ABCDS$ eine geraden vierseitige Pyramide mit fest vorgegebener quadratischer Grundfläche $ABCD$.
Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge $PQRTP$, wobei P ein fest vorgegebener innerer Punkt der Kante AS, Q ein innerer Punkt von BS, R von CS sowie T von DS ist.
Man ermittle die Menge aller derjenigen Winkelgrößen ρ ($0° < \rho < 90°$), für die folgendes gilt:
Hat der Winkel $\angle ASB$ die Größe ρ, so existiert unter den auf der Pyramide $ABCDS$ betrachteten Streckenzügen $PQRTP$ ein kürzester.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



$0^\circ < \varphi < 45^\circ$



$45^\circ < \varphi < 90^\circ$

Wir denken uns den Pyramidenmantel längs der Kanten SA aufgeschnitten und in eine Ebene so „abgewickelt“, dass eine Figur wie in der Abbildung entsteht, also ein Sechseck $S'A'B'C'D'A''$, bei dem

$$\triangle S'A'B' \cong \triangle SAB \quad ; \quad \triangle S'B'C' \cong \triangle SBC \quad ; \quad \triangle S'C'D' \cong \triangle SCD \quad ; \quad \triangle S'D'A'' \cong \triangle SDA$$

und für den bei S' gelegenen Innenwinkel $\angle A'S'A''$ des Sechsecks $\angle A'S'A'' = 4\varphi$ gilt. Dabei gilt ferner:

(1) Jeder der betrachteten geschlossenen Streckenzüge $PQRTP$ geht dabei in einen gleichlangen nicht geschlossenen Streckenzug $P'Q'R'T'P''$ über, wobei P', Q', R', T', P'' jeweils innere Punkte von SA', SB', SC', SD', SA'' sind und $S'P' = S'P''$ gilt.
Umgekehrt entspricht jedem der in (1) genannten Streckenzüge $P'Q'R'T'P''$ ein gleichlanger Streckenzug $PQRTP$ auf dem Pyramidenmantel.

Damit ist die Aufgabe darauf zurückgeführt, alle φ mit $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ zu ermitteln, für die unter alle bei (1) genannten Streckenzügen ein kürzester existiert.
Wir untersuchen dazu zwei Fälle:

1) $0^\circ < 4\varphi < 180^\circ$, d. h. das Sechseck $S'A'B'C'D'A''$ ist konvex.
2) $180^\circ < 4\varphi < 360^\circ$, d. h. das Sechseck S' eine einspringende Ecke oder ist zu einem Fünfeck ausgeartet.

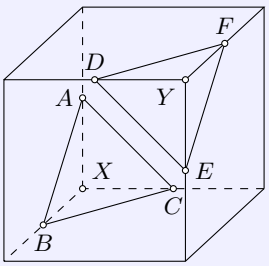
Fall 1: Wegen der Konvexität des Sechsecks schneidet die Strecke $P'P''$ jede der Strecken $S'B'$, $S'C'$, $S'D'$ in genau einem inneren Punkt, die in dieser Reihenfolge mit Q', R', T' bezeichnet seien.

Beweis: Da der Innenwinkel des Sechsecks bei S' die Größe 4φ hat, liegen P' und P'' auf verschiedenen Seiten jeder der Geraden durch S' und B', durch S' und C', sowie durch S' und D'. Folglich schneidet $P'P''$ jede dieser Geraden, und zwar im Innern des Sechsecks, also im Innern der Strecken $S'B'$, $S'C'$, $S'D'$, da das Sechseck konvex ist.

Daher ist $P'Q'R'T'P''$ in diesem Falle einer der Streckenzüge (1) und hat die Länge $P'P''$, ist also der kürzeste.

Fall 2: In diesem Fall enthält entweder $P'P''$ den Punkt S' (wenn $4varphi = 180^\circ$) oder $P'P''$ enthält keinen Punkt einer der Strecken $S'B', S'C', S'D'$.
Ist daher $P'Q'R'T'P''$ einer der zulässigen Streckenzüge (1), so liegen bei wenigstens einem der drei Streckenzüge $P'Q'R'$, $Q'R'T'$, $R'T'P''$ nicht alle drei angegebenen Punkte auf derselben Geraden.
Ersetzt man daher einen solchen Streckenzug durch die Verbindungsstrecke seiner Endpunkte, so hat diese eine kleinere Länge als der Streckenzug und liegt wegen $2\varphi < 180^\circ$ innerhalb des Sechsecks und bildet mit den restlichen beiden Strecken von $P'Q'R'T'P''$ zusammen einen anderen zulässigen Streckenzug (1) von kleinerer Länge.
Daher gibt es im Fall 2 keinen kürzesten unter den Streckenzügen (1).
Die gesuchte Menge der Winkelgrößen φ ist die Menge aller φ mit $0^\circ < \varphi < 45^\varphi$.

Aufgabe 141046:

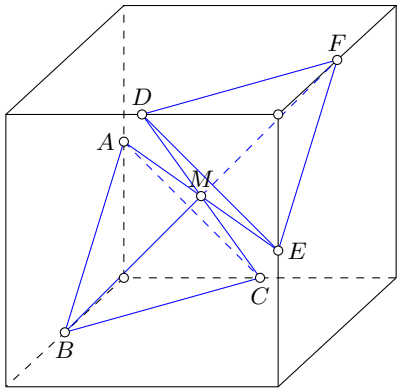


Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a. Eine seiner Raumdiagonalen habe die Endpunkte X und Y.
Die Mittelpunkte der von X ausgehenden Würfelkanten seien mit A, B, C, die Mittelpunkte der von Y ausgehenden Würfelkanten mit D, E, F so bezeichnet, dass A und E auf zwei zueinander parallelen Würfelkanten liegen, ebenso B und F und ebenso C und D.

a) Man ermittle alle Möglichkeiten, eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten A, B, C und den Punkten D, E, F so zu wählen, dass folgendes gilt!
Die drei Strecken, die jeden der Punkte A, B, C jeweils mit seinem zugeordneten Punkt verbinden, und die sechs Strecken AB, BC, CA, DE, EF, FD sind die sämtlichen Kanten einer Figur, die entweder ein Polyeder (das ist ein ebenflächig begrenzter Körper) ist oder aus mehreren Polyedern zusammengesetzt werden kann.
b) Wenn es Figuren der in a) genannten Art gibt, so ermittle man für jede von ihnen das Volumen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) I. Angenommen, eine Zuordnung zwischen A, B, C und D, E, F habe die geforderte Eigenschaft. Wir bezeichnen dabei jetzt mit A', B', C' den A, B und C zugeordneten Punkt.
Da AB Kanten sein soll, muss AB mindestens zwei Seitenflächen angehören. Nach Voraussetzung gegen von A nur die Kanten AB, AC, AA' und von B nur die Kanten BA, BC, BB' aus. Folglich müssen AA' und BB' in einer gemeinsamen Ebene liegen, in der mithin auch AB und $A'B$ liegen.

Wir beachten jetzt, dass EF und AB in einer gemeinsamen Ebene ε liegen. Der Mittelpunkt des Würfels liegt nämlich aus Symmetriegründen sowohl auf AE als auch auf BF, so dass AE und BF in einer gemeinsamen Ebene ε liegen.
Die Ebene ε enthält D nicht; weil die Ebene durch D, E, F nicht A, B, C enthält. Daher kann weder DE noch DF mit AB in einer gemeinsamen Ebene liegen. Es muss also $A'B' = EF$, d. h. entweder $A' = E$ und $B' = F$ oder $A' = F$ und $B' = E$, und aus Symmetriegründen $B'C' = FD$ und $C'A' = DE$ sein. Daraus folgt, dass $A' = E$, $B' = F$, $C' = D$ sein muss.



II. Umgekehrt hat in der Tat diese Zuordnung die geforderte Eigenschaft, dass die Strecken AE, BF, CD, AB, BC, CA, DE, EF, FD die sämtlichen Kanten einer aus Polyedern zusammensetzbaren Figur sind.

Der Mittelpunkt von AE ist aus Symmetriegründen zugleich der von BF, der von CD sowie der der Würfels. Daher besteht die gesuchte Figur aus den beiden Tetraedern $ABCM$ und $DEFM$.

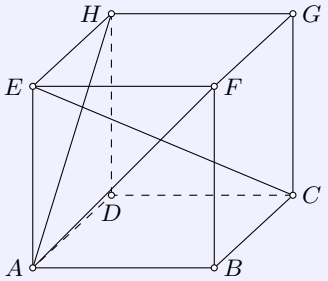
b) Die Strecken AB, BC, CA, DE, EF, FD haben sämtlich die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$. Wegen $AE = BF = CD = a\sqrt{2}$ haben auch AM, BM, CM, DM, EM, FM die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$.
Daher sind die beiden Tetraeder regelmäßig, zueinander kongruent und haben nach einer bekannten Formel das Volumen

$$\frac{1}{12}\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^3\sqrt{2} = \frac{a^3}{24}$$

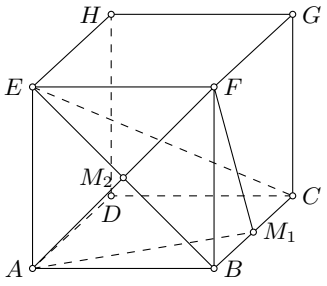
Die gesamte Figur hat das Volumen $\frac{a^3}{12}$.

Aufgabe 151041:

Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge a.
Durch die Punkte A und F, A und H sowie F und H seien drei ebene Schnitte so gelegt, dass sie jeweils zur Raumdiagonalen EC parallel verlaufen. Durch diese Schnitte werden drei Teilkörper vom Würfel abgetrennt.
Berechnen Sie das Volumen V_R des verbliebenen Restkörpers!



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei M_1 der Mittelpunkt der Strecke BC und M_2 des des Quadrates $ABFE$. Nach der Umkehrung eines Teiles des Strahlensatzes ist dann $M_1M_2 \parallel CE$. Die zu CE parallele Ebene durch A und F geht durch M_2 und enthält somit die zu CE parallele Gerade durch M_2. Also geht sie durch M_1.



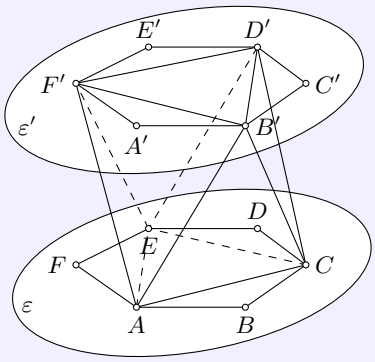
Der Teilkörper, den sie vom Würfel $ABCDEFGH$ abschneidet, ist folglich das Tetraeder $ABFM_1$. Sieht man das Dreieck ABF als Grundfläche und BM_1 als Höhe dieses Tetraeders an, so folgt, dass sein Volumen

$$V_T = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{2}a = \frac{1}{12}a^3$$

beträgt.
Analog erhält man für die beiden anderen Schnitte ebenfalls als abgetrennte Körper Tetraeder mit dem Volumen V_T, wobei je zwei dieser Tetraeder keine gemeinsamen inneren Punkte haben.

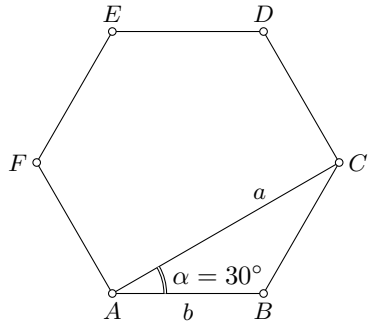
Wegen $3V_T = \frac{1}{4}a^3$ beträgt infolgedessen das Volumen des Restkörpers $V_R = \frac{3}{4}a^3$.

Aufgabe 161046:



In einer Ebene ε sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck. Eine Ebene ε' sei zu ε parallel.
In ε' liege ein regelmäßiges Sechseck $A'B'C'D'E'F'$ so, dass die Strecken AA', BB', CC', DD', EE' und FF' auf ε senkrecht stehen.
Gegeben seien die Seitenlänge $a = AC$ des Dreiecks ACE sowie der Abstand h zwischen ε und ε'.
Man berechne hieraus das Volumen V des Polyederkörpers, der genau die Strecken AC, CE, EA, $B'D'$, $D'F'$, $F'B'$, AB', AF', CB', CD', ED' und EF' als Seitenkanten hat.

Lösung von MontyPythagoras:
Wenn man den Körper durch sechs Pyramiden ergänzt, ergibt sich ein einfaches Prisma mit sechseckiger Grundfläche. Die zu ergänzenden Pyramiden sind zum Beispiel $ABCB'$, $AEFF'$ oder $A'B'F'A$. Alle diese Pyramiden sind gleich groß. Das Sechseck stellt sich wie folgt dar:



Es gilt $a = \sqrt{3}\, b$. Die Fläche des Sechsecks ist dann:

$$A_S = ab + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b = \frac{3}{2}ab$$

Die Grundfläche einer der sechs zu ergänzenden Pyramiden ist:

$$A_P = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}ab$$

Das Volumen einer Pyramide ist:

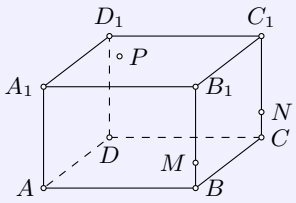
$$V_P = \frac{1}{3}hA_P = \frac{1}{12}abh$$

Dann ergibt sich für das Volumen des gesuchten Körpers:

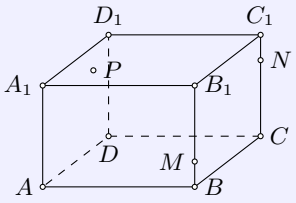
$$V_K = hA_S - 6V_P = \frac{3}{2}abh - 6 \cdot \frac{1}{12}abh = abh$$

$$V_K = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, a^2 h$$

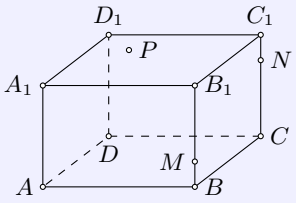
Aufgabe 171043B:



$CN = BM$



$CN > BM$

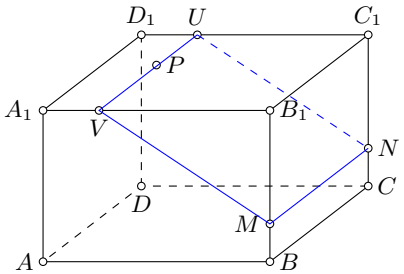


$CN > BM$

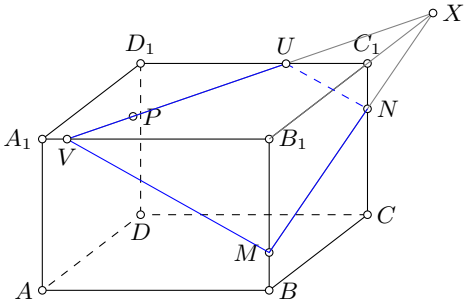
Auf den Abbildungen ist dreimal ein Quader $ABCDA_1B_1C_1D_1$ in schräger Parallelprojektion dargestellt.
Auf BB_1 liegt ein Punkt M, auf CC_1 ein Punkt N und im Innern der Rechteckfläche $A_1B_1C_1D_1$ ein Punkt P.
Konstruieren Sie (in der verwendeten perspektivischen Darstellung) für die angegebenen drei Lagen dieser Punkte jeweils die Schnittfigur, die sich als Schnitt des Quaders mit der Ebene ε durch M, N, P ergibt!
Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für den 1. Fall ist insbesondere folgender grundlegender Satz der räumlichen Geometrie von Bedeutung:

(i) Liegen eine Gerade g und ein Punkt P in einer Ebene ε und ist h die Parallele zu g durch P, so liegt auch h in ε.
Aus der Voraussetzung $CN = BM$ folgt zunächst $MN \parallel B_1C$. Die Parallele h zu B_1C_1 durch P liegt nach (i) in der Ebene $\varepsilon(A_1,B_1,C_1D_1)$ und auch in der Ebene $\varepsilon(M, N, P)$ wegen $MN \parallel h$; sie ist also die Schnittgerade dieser beiden Ebenen.

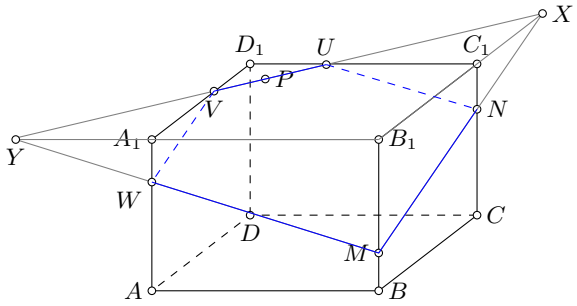


Da bei der Parallelprojektion — die ja der Kavalierperspektive zugrunde liegt — parallele Geraden wieder in solche übergehen, erhält man in der vorliegenden Kavaliersperspektive selbst die Schnittfigur $MNUV$ (siehe obere Abbildung), indem man die Parallele zu MN durch P mit den Strecken C_1D_1 und A_1B_1 zum Schnitt bringt.



Im 2. Fall ist $MN \nparallel B_1C_1$ wegen $CN > BM$; da diese Geraden in einer gemeinsamen Ebene liegen, schneiden sie sich in einem Punkt X. Die Gerade PX ist nun offensichtlich der Schnitt der Ebene $\varepsilon(A_1, B_1, C_1, D_1)$ mit $\varepsilon(M, N, P)$.

Diese Schnittgerade kann in der Darstellung selbst konstruiert werden (siehe oberes Bild); sie schneidet auf Grund der Lage von P die Kanten C_1D_1 und A_1B_1 in Punkten U und V Damit ist $MNUV$ die gesuchte Schnittfigur.



Im 3. Fall kann zunächst in gleicher Weise verfahren werden. Die Gerade PX schneidet zwar auch hier die Kante C_1D_1 in einem Punkt U, aber nur die Verlängerung der Strecke A_1B_1 über A_1 hinaus in einem Punkt Y (siehe 3.Abbildung); folglich schneidet PX die Kante A_1D_1 in einem Punkt V.
Die Gerade YM schneidet schließlich die Kante AA_1 in einem Punkt W. Damit ist jetzt das Fünfeck $MNUVW$ die gesuchte Schnittfigur.

Aufgabe 181042:
In einer Ebene ε seien durch ihre paarweise verschiedenen Endpunkte 6 Strecken A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1', A_2A_2', B_2B_2', C_2C_2' gegeben:

$$A_1 \text{ ——— } A_1' \qquad A_2 \text{ ——— } A_2'$$
$$B_1 \text{ ——— } B_1' \qquad B_2 \text{ ——— } B_2'$$
$$C_1 \text{ ——— } C_1' \qquad C_2 \text{ ——— } C_2'$$

Mit V_1 sei das Volumen eines Quaders bezeichnet, der die Kantenlängen $a_1 = A_1A_1'$, $b_1 = B_1B_1'$, $c_1 = C_1C_1'$ hat; mit V_2 sei das Volumen eines Quaders bezeichnet, der die Kantenlängen $a_2 = A_2A_2'$, $b_2 = B_2B_2'$, $c_2 = C_2C_2'$ hat.
a) Beschreiben Sie eine in ε durchzuführende Konstruktion zweier Strecken P_1Q_1, P_2Q_2 mit folgender Eigenschaft (1)!
Falls $P_1Q_1 < P_2Q_2$ ist, gilt $V_1 < V_2$;
falls $P_1Q_1 = P_2Q_2$ ist, gilt $V_1 = V_2$;
falls $P_1Q_1 > P_2Q_2$ ist, gilt $V_1 > V_2$ (1)
Dass P_1Q_1, P_2Q_2 die Eigenschaft (!) haben, wenn sie nach der Beschreibung konstruiert wurden, ist zu beweisen.
b) Untersuchen Sie für die Strecken $A_1A_1', ..., C_2C_2'$ auf der Abbildung auf die in a) genannte Weise, ob $V_1 < V_2$, $V_1 = V_2$ oder $V_1 > V_2$ gilt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wir gehen von den Volumen $V_1 = a_1b_1c_1$ und $V_2 = a_2b_2c_2$ der Quader aus. Offenbar ist $V_1 \lessgtr V_2$; gleichwertig mit

$$\frac{a_1b_1}{c_2} \lessgtr \frac{a_2b_2}{c_1} \qquad (1)$$

Damit ist aber bereits eine einfache Lösung vorgezeichnet. Die Terme auf den beiden Seiten von (1) sind nämlich Strecken. Sie können anhand der Strahlensätze konstruiert werden.
Wir wählen also als Strecken P_1Q_1 und P_2Q_2 der Länge $\frac{a_1b_1}{c_2}$ bzw. $\frac{a_2b_2}{c_1}$.
Konstruktionsbeschreibung: Wir wählen zwei von einem Punkt S_1 ausgehende Strahlen s_1, t_1, die nicht auf einer Geraden liegen. Entsprechend wählen wir zwei Strahlen s_2, t_2 mit gemeinsamem Scheitelpunkt S_2.
Durch Streckenabtragung konstruieren wir die Punkte $P_1 \in s_1$, $R_1, T_1 \in t_1$ und $P_2 \in s_2$ sowie $R_2, T_2 \in t_2$, für die $S_1P_1 = a_1$, $S_1R_1 = c_2$, $R_1T_1 = b_1$ und R_1 zwischen S_1, T_1 liegt sowie $S_2P_2 = a_2$, $S_2R_2 = c_1$, $R_2T_2 = b_2$ und R_2 zwischen S_2, T_2 liegt.

Die Parallele zu P_1R_1 durch T_1 schneidet s_1 in Q_1, und die Parallele zu P_2R_2 durch T_2 schneidet s_2 in Q_2.

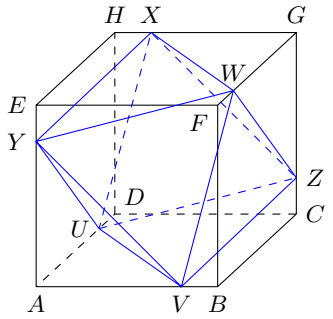
Beweis: Nach dem Strahlensatz ist $P_1Q_1 : a_1 = b_1 : c_2$ und $P_2Q_2 : a_2 = b_2 : c_1$.
Nun gilt $P_1Q_1 \lessgtr P_2Q_2$ genau dann, wenn (1) und damit $V_1 \lessgtr V_2$.
Damit ist gezeigt, dass die oben konstruierten Strecken P_1Q_1, P_2Q_2 die Eigenschaft (*) der Aufgabenstellung besitzen.

b) Die in a) beschriebene Konstruktion führt auf $P_1Q_1 < P_2Q_2$ und damit auf $V_1 < V_2$.

Aufgabe 181046:
Verbindet man bei einem Würfel mit der Kantenlänge a die Mittelpunkte je zweier benachbarter Seitenflächen miteinander, so bilden die sämtlichen entstehenden Verbindungsstrecken die Kanten eines regelmäßigen Oktaeders. Sein Volumen sei mit V bezeichnet.
Beweisen Sie, dass auch ein regelmäßiges Oktaeder existiert, dessen Ecken auf der Oberfläche des gleichen Würfels liegen und dessen Volumen mehr als $3V$ beträgt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, wir haben ein regelmäßiges Oktaeder mit den geforderten Eigenschaften konstruiert.
Wir betrachten die Umkugel K dieses Oktaeders. Der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von je zwei diametral gegenüberliegenden Punkten ist infolge des Strahlensatzes mit dem Würfelmittelpunkt identisch. Daraus folgt, dass der Würfelmittelpunkt M mit dem Kugelmittelpunkt notwendig zusammenfällt.

Die Kugel um M mit dem Radius r mit $\frac{\sqrt{2}}{2} < r < \frac{\sqrt{3}}{2}$ schneidet die Kanten des Würfels u.a. in den Punkten U, V, W, X, Y, Z (siehe Bild).



$UVWX$ ist ein Parallelogramm, da UV und XW zueinander parallel und gleichlang sind. Da $UVWX$ symmetrisch zur Ebene durch A, C, G liegt, gilt $UW = VX$ damit ist $UVWX$ ein Rechteck. Sei nun $x = AV = AU = GW = GX$. Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich:

$$VW = \sqrt{a^2 + 2(a-x)^2}$$

Aus der Bedingung $VW = UV = \sqrt{2}x$ ergibt sich $x = \frac{3}{4}a$. $UVWX$ ist dann nach Konstruktion ein Quadrat.
Wir wählen nun noch Y auf AE und Z auf GC mit $AY = GZ = \frac{3}{4}a$. Es folgt analog $YU = YV = YW = ZU = ZV = ZW = ZX$.
Daher sind die Dreiecke UVY, VWY, WXY, XUY, UVZ, VWZ, WXZ, XUZ gleichseitig. Der eingeschlossene Körper ist somit aus zwei Pyramiden mit derselben quadratischen Grundfläche und sämtlich gleichseitigen Seitenflächen zusammensetzbar, d. h., er ist ein regelmäßiger Oktaeder.
Wir berechnen V. Das Oktaeder setzt sich aus zwei Pyramiden mit quadratischer Grundfläche der Kantenlänge $a\sqrt{2}\frac{1}{2}$ und der zugehörigen Höhe $\frac{a}{2}$ zusammen. Damit ist

$$V = \left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}a^3$$

Analog berechnen wir das Volumen des konstruierten Oktaeders. Es ist

$$\left(\frac{3}{4}a\sqrt{2}\right)^2 \frac{3}{4}a \cdot \frac{2}{3} = \frac{9}{16}a^3 > \frac{1}{2}a^3 = 3V$$

Damit erfüllt das konstruierte Oktaeder alle gestellten Bedingungen.

Aufgabe 191046:
Vier Kugeln mit gegebenem Radius r seien so im Raum angeordnet, dass jede von ihnen jede der anderen drei von außen berührt.
Die vier Tangentialebenen, die jeweils drei dieser Kugeln berühren und die vierte nicht schneiden, erzeugen dann ein reguläres Tetraeder.
Berechnen Sie das Volumen dieses Tetraeders in Abhängigkeit von r!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die vier Mittelpunkte M_1, M_2, M_3, M_4 der Kugeln sind die Eckpunkte eines regulären Tetraeders mit der Seitenlänge $2r$.
Es sei Z der Mittelpunkt dieses regulären Tetraeders, d. h. der Schnittpunkt der Lote, die von jeweils einer Ecke auf die gegenüberliegende Seitenfläche gefällt werden. Je ein solches Lot hat nach der Formel für die Höhenlänge im regulären Tetraeder die Länge

$$h = \frac{2}{3}r\sqrt{6} \qquad (1)$$

Z teilt jedes Lot im Verhältnis $3 : l$. (2)
Den Satz (2) kann man z. B. über Volumenbetrachtungen (bei Zerlegung des Tetraeders in vier kongruente Tetraeder) oder durch Anwendung des Strahlensatzes beweisen. (Man darf (2) auch als bekannt voraussetzen.)
Die vier Seitenflächen des von den vier Tangentialebenen erzeugten Tetraeders $ABCD$ sind jeweils parallel zu den entsprechenden Seitenflächen des Tetraeders $M_1M_2M_3M_4$ im Abstand r. Damit ist $ABCD$ ein reguläres Tetraeder mit dem Mittelpunkt Z. Es kommt nun darauf an, die Höhe h' des Tetraeders $ABCD$ in Abhängigkeit von h zu ermitteln, weil damit dann auch das Volumen V' des Tetraeders $ABCD$ in Abhängigkeit von h und nach (1) in Abhängigkeit von r zu berechnen ist.

Wir geben dafür zwei Möglichkeiten an:
1. $ABCD$ geht durch zentrale Streckung mit dem Streckenzentrum Z aus $M_1M_2M_3M_4$ hervor. Das Streckungsverhältnis K ist wegen (2) (mit (D)

$$K = \left(\frac{1}{6}r\sqrt{6} + r\right) : \frac{1}{6}r\sqrt{6} = 1 + \sqrt{6} \qquad (3)$$

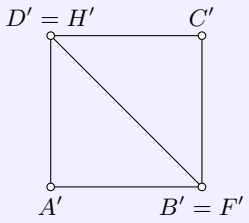
2. Wir verlängern die Kanten M_4M_1, M_4M_2, M_4M_3 bis zu den Durchstoßpunkten A', B', C' mit der Ebene durch A, B, C.
Das Tetraeder $M_4A'B'C'$ ist wegen der Parallelität der Ebenen durch A, B, C bzw. M_1, M_2, M_3 wieder regulär und hat die Höhe $h+r$. Wiederholen wir diesen Prozess noch dreimal (bzgl. der anderen Flächen), so erhalten wir schließlich das Tetraeder $ABCD$ mit

$$h' = h + 4r \qquad (4)$$

Mit (3) bzw. (4) berechnet man das Volumen

$$V' = \frac{2}{3}r^3\sqrt{2}(1+\sqrt{6})^3$$

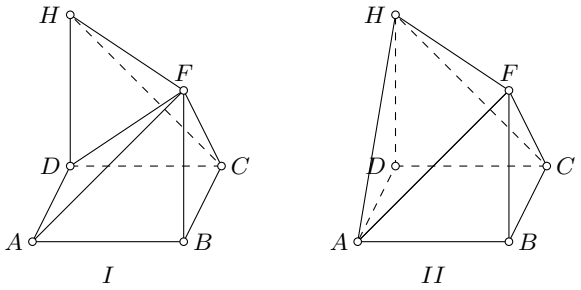
Aufgabe 201044:



Ein ebenflächig begrenzter Körper mit genau 6 Ecken A, B, C, D, F, H soll den im Bild dargestellten Grundriss haben. ($A'B'C'D'$ ist dabei ein Quadrat von gegebener Seitenlänge a.)
Die Punkte A, B, C, D sollen in der Grundrissebene liegen, die Punkte F und H im Abstand a über B bzw. D.
Jede Kante des Körpers soll im Bild sichtbar dargestellt sein (entweder als Strecke oder, wenn sie senkrecht zur Grundrissebene verläuft, als Punkt), auch wenn sie etwa von oben betrachtet durch andere Flächen verdeckt wird.

Stellen Sie zwei Körper, die diese Forderungen erfüllen und voneinander verschiedene Volumina haben, in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 60°$, $q = \frac{1}{2}$) dar!
Ermitteln Sie für jeden der beiden dargestellten Körper sein Volumen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Körper I (siehe Bild) erfüllt die Bedingungen der Aufgabenstellung, da er genau sechs Ecken (A, B, C, D, F, H) und den angegebenen Grundriss besitzt. Letzteres folgt aus der Lage von AF über AB, von HF und DF über BD, von FC über BC, von HC über CD sowie die Lage von F über B und der von H über D.
Damit wird jede Kante entweder auf einer der Seiten des Quadrates $ABCD$, aus dessen Diagonale BD oder - bei senkrechter Lage zur Grundrissebene - als Punkt auf A, B, C oder D im Grundriss abgebildet. Nach Konstruktion liegt F (bzw. H) im Abstand a über B (bzw. D). Der Körper I ist auch - wie gefordert - ebenflächig begrenzt, da alle Seitenflächen Dreiecke sind und die Fläche $ABCD$ nach Voraussetzung eben ist.
Analoge Betrachtungen zeigen, dass auch der Körper II den Bedingungen der Aufgabenstellung genügt.

Es ist noch zu zeigen, dass die Körper I und II unterschiedliches Volumen haben, und es sind diese Volumina zu berechnen.
Ergänzt man den Körper I durch die Pyramide $AFDH$, so erhält man offensichtlich den Körper II, damit unterscheiden sich die Volumina V_I und V_{II} der Körper um das Volumen V_p der Pyramide $AFDH$ und sind damit auch unterschiedlich.

$$V_{II} = V_I + V_P \tag{1}$$

Den Körper I kann man sich aus den drei Pyramiden $ABDF$, $DBCF$ und $DCHF$ zusammengesetzt denken. Ergänzt man den Körper I zu einem Würfel mit der Kantenlänge a, so erkennt man, dass für jede dieser Pyramiden als Grundfläche eine halbe Seitenfläche des Würfels und als Höhe die Kantenlänge a gewählt werden kann. Das gilt auch für die Pyramide $AFDH$ (mit der Grundfläche ADH). Damit gilt

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{1}{6} a^3 \tag{2}$$

Daher folgt

$$V_I = \frac{1}{2} a^3 \qquad \text{und} \qquad V_{II} = \frac{2}{3} a^3$$

Aufgabe 211043B:
Beweisen Sie, dass man auf der Oberfläche einer Kugel, die den Radius r hat, 12 Punkte $P_1, P_2, ..., P_{12}$ so verteilen kann, dass für je zwei dieser Punkte ihr Abstand voneinander größer als r ist!
Dabei wird als Abstand zwischen zwei Punkten die Länge ihrer geradlinigen Verbindungsstrecke bezeichnet (nicht etwa ein Bogen auf der Kugeloberfläche).

Lösung von MontyPythagoras:
Wir bezeichnen die Kugel der Anschaulichkeit halber wie einen Globus. Der Äquator liege in der xy-Ebene, der Nordpol auf der positiven z-Achse. Wir haben insgesamt 12 Punkte zu platzieren, davon platzieren wir sechs auf der nördlichen Hemisphäre und sechs auf der südlichen.
Der Punkt P_1 liege am Nordpol. Die 5 weiteren Punkten in der nördlichen Hemisphäre werden so angeordnet, dass sie alle auf derselben Höhe („Breitengrad“) liegen und ein regelmäßiges Fünfeck bilden. Der Punkt P_2 liege auf dem Nullmeridian, also in der xz-Ebene. Die Höhe werde so bestimmt, dass der geradlinige Abstand zum Nordpol P_1 genau gleich r ist. Dann gilt

$$\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Da der Punkt P_2 mit dem Nordpol P_1 und dem Urspung der Kugel ein gleichseitiges Dreieck bildet, kann man unmittelbar schlussfolgern, dass die Koordinaten des Punktes P_2 lauten:

$$\vec{p_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}r \\ 0 \\ \frac{1}{2}r \end{pmatrix}$$

Wir zeigen nun, dass die Seiten dieses regelmäßigen Fünfecks länger sind als r. Die Koordinaten von P_3 lauten

$$\vec{p_3} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}r\cos 72° \\ \frac{\sqrt{3}}{2}r\sin 72° \\ \frac{1}{2}r \end{pmatrix}$$

Die Strecke P_2P_3 hat demnach eine Länge von

$$d^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r(1-\cos 72°)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\sin 72°\right)^2$$

$$d^2 = r^2(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cdot 2\cos 72° + \frac{3}{4})$$

$$d^2 = \frac{3}{2}(1-\cos 72°)r^2$$

$$d = r\sqrt{\frac{3}{2}(1-\cos 72°)} \approx 1{,}018r > r$$

Alle Punkte werden jetzt an der Äquatorebene gespiegelt. Die gespiegelten Punkte erhalten ein Apostroph. Dementsprechend ist P_1' der Südpol, und jeder andere gespiegelte Punkt hat die gleichen x- und y-Koordinaten, aber die negative z-Koordinate, also

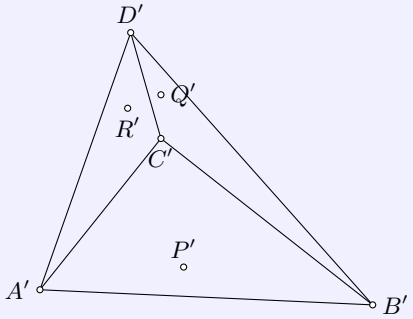
$$\vec{p_2'} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}r \\ 0 \\ -\frac{1}{2}r \end{pmatrix}$$

Man erkennt, dass die Punkte P_2 bis P_6, die das nördliche Fünfeck bilden, jeweils einen Abstand r zu ihrem gespiegelten Pendant haben, weil der eine bei der Höhe $\frac{1}{2}r$ und der andere bei der Höhe $-\frac{1}{2}r$ liegt. Wir haben daher 12 Punkte so angeordnet, dass sie, wenn man einem Meridian vom Nordpol zum Südpol folgt, jeweils einen Abstand von r haben. Der Abstand vom Punkt P_2 zu dem Nachbarn seines Pendants, also zu P_3' ist dementsprechend deutlich größer als r. Man kann nun die Abstände vergrößern, indem man die Punkte auf der südlichen Halbkugel um einen bestimmten Winkel um die z-Achse dreht.

Dadurch wächst der Abstand von P_2 zu seinem ehemals gespiegelten Gegenüber P_2'. Diesen Abstandszuwachs kann man nutzen, um den Abstand der Fünfeckpunkte zum Pol zu vergrößern, womit der Beweis erbracht wäre, dass man einen Abstand zwischen zwei Punkten größer als r einstellen kann.

Aufgabe 211046:
Die Eckpunkte A, B, C, D eines Tetraeders $ABCD$, ein Punkt P auf der Fläche des Dreiecks ABD, ein Punkt Q auf der Fläche des Dreiecks BCD und ein Punkt R auf der Fläche des Dreiecks ACD seien so im Raum gelegen, dass sie bei einer Parallelprojektion die auf dem Arbeitsblatt angegebenen Bildpunkte A', B', C', D', P', Q' bzw. R' haben (siehe Abbildung). Die Ebene durch P, Q und R schneidet die vier Seitenflächen des Tetraeders in einer Schnittfigur.
Konstruieren Sie auf dem Arbeitsblatt die Projektion dieser Schnittfigur!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion, und beweisen Sie, dass eine Figur die gesuchte Schnittfigur ist, wenn sie nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird!

Arbeitsblatt zu 211046

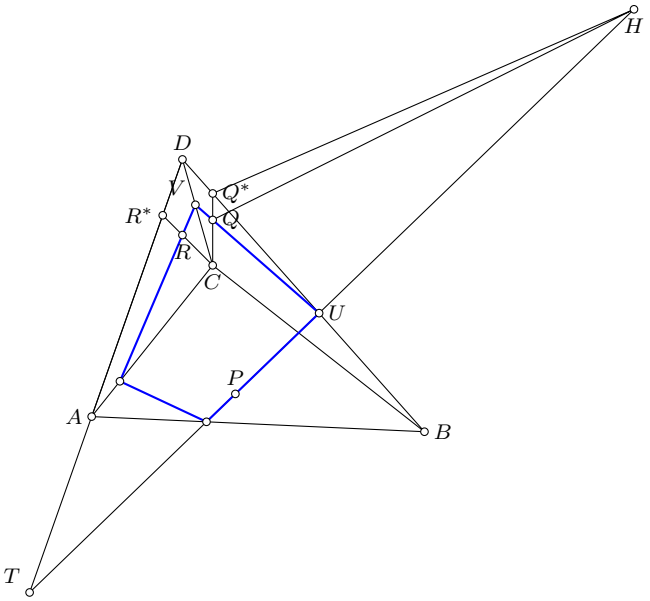


Lösung von moudi:
Da sich die Lösung in der projektiven Geometrie abspielt, muss die Lösung durch reine Inzidenz (nur Schnittpunkte von Geraden) konstruierbar sein.

Meine Konstruktion findet im Raum statt, deshalb spreche ich von den Punkten A, B, C etc. und nicht von den Projektionen A', B', C' etc.

Es ist klar, dass es genügt, z. B. die Schnittgerade s der Ebenen ABD und PQR zu konstruieren. (Ich gehe im Folgenden vom Fall aus, dass die Schnittfigur ein Dreieck ist, die anderen Fälle gehen analog.) Dann schneidet man s mit AD und erhält T, man schneidet s mit BD und erhält U. Man schneidet UQ mit CD und erhält V. Das Dreieck TUV, wobei R auf TV liegen muss(!), ist dann die Schnittfigur.

Wie erhält man nun die Schnittgerade s der Ebenen ABD und PQR?
Da P in der Ebene ABD liegt, liegt P schon auf s. Ich konstruiere jetzt einen weiteren Punkt von s. Dazu projiziere ich die Punkte Q und R von C aus auf die Seiten BD resp. AD und erhalte die Punkte Q^* und R^*. Der Schnittpunkt H der Geraden QR und Q^*R^* ist dann ein weiterer Schnittpunkt der Ebenen ABD und PQR.



Konkrete Konstruktionsanleitung für Dreieck TUV:

1. Schneide CQ mit BD: Q^*
2. Schneide CR mit AD: R^*
3. Schneide QR mit Q^*R^*: H $\quad (s = HP)$
4. Schneide HP mit AD: T
5. Schneide HP mit BD: U
6. Schneide QU mit CD: V

Aufgabe 221043B:
Fünf Kugeln $K_1, \ldots, K_5$ mit gleichem Radius r seien so angeordnet, dass jede Kugel genau zwei andere berührt und dass ihre Mittelpunkte $M_1, \ldots, M_5$ ein ebenes regelmäßiges Fünfeck bilden.
Eine sechste Kugel K_6 mit dem Radius r berühre jede der fünf Kugeln $K_1, \ldots, K_5$.
Untersuchen Sie, ob K_6 die Ebene durch $M_1, \ldots, M_5$ schneidet, berührt oder nicht erreicht!

Lösung von cyrix:
Es sei $M_1M_2M_3M_4M_5$ das in der Aufgabenstellung beschriebene regelmäßige Fünfeck. Dann hat dieses die Kantenlänge $2r$. Sei M dessen Mittelpunkt. Dann ist das Dreieck $\triangle M_1M_2M$ gleichschenklig mit Basislänge $|M_1M_2| = 2r$ und $\angle M_1MM_2 = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ sowie $|M_1M| = |M_2M| =: R$.

Nach dem Kosinussatz ist dann

$$4r^2 = |M_1M_2| = |M_1M|^2 + |M_2M|^2 - 2|M_1M||M_2M|\cos\angle M_1MM_2 =$$

$$= R^2 + R^2 - 2R^2\cos 72^\circ = 2R^2 \cdot (1 - \cos 72^\circ)$$

Es ist $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, also $4r^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}R^2$ bzw.

$$R^2 = \frac{8}{5-\sqrt{5}}r^2 = \frac{8(5+\sqrt{5})}{25-5}r^2 = \frac{10+2\sqrt{5}}{5}r^2$$

Aus Symmetriegründen ist M auch der Fußpunkt des Lots von M_6 auf die Ebene durch die Mittelpunkte der anderen Kugeln. Also ist das Dreieck $\triangle M_1MM_6$ rechtwinklig in M und es gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$|MM_6|^2 = |M_1M_6|^2 - |M_1M|^2 = 4r^2 - \frac{10+2\sqrt{5}}{5}r^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{5}r^2$$

also wegen $2\sqrt{5} = \sqrt{20} < \sqrt{25} = 5$ und damit $10 - 2\sqrt{5} > 10 - 5 = 5$ ist damit

$$|MM_6|^2 < \frac{5}{5}r^2 = r^2$$

also $|MM_6| < r$, sodass der Mittelpunkt M des Fünfecks echt innerhalb der Kugel K_6 liegt, diese also die Ebene durch $M_1, \ldots, M_5$ schneidet.

Aufgabe 221046:
Beweisen Sie, dass sich in einem würfelförmigen Hohlkörper von der Kantenlänge a zwei regelmäßige Tetraeder der Kantenlänge a vollständig und ohne einander zu durchdringen unterbringen lassen!

Lösung von OlgaBarati:
Die Eckpunkte der Grundfläche des würfelförmigen Hohlkörpers mit der Kantenlänge a seien mit A,B,C,D und die Diagonale $\overline{BD}$ zwischen den Punkten B und D mit d_w bezeichnet.

$$d_w = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

Die Eckpunkte der Grundfläche Tetraeders mit der Kantenlänge a seien mit X,Y,Z und die den Eckpunkten gegenüberliegenden Flächen seien mit x,y,z bezeichnet.

Die Anordnung des ersten Tetraeders erfolgt auf seiner Grundfläche im Hohlkörper auf dessen Grundfläche stehend und zwar mit der Höhenlinie seiner Grundfläche (des gleichseitigen Dreiecks) gleich der Diagonalen d_w mit seinem Eckpunkt X auf dem Eckpunkt des Hohlkörpers D. Die Anordnung des zweiten Tetraeders erfolgt um 180° gedreht auf seiner Spitze stehend, so dass die Flächen x_1,x_2 der beiden Tetraeder plan aufeinander liegen.

Die Bestimmung der Länge der diagonalen $\overline{X_1X_2} = 2d_t - \frac{1}{3}d_t$ dieser beiden so (für die Berechnung außerhalb des Hohlkörpers) angeordneten Tetraeder ergibt sich aus den beiden Höhen der Grundflächen abzüglich deren Überlappung.

$$\frac{5}{3}d_t = \frac{5}{3}\sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{3}{4}a} = \frac{5}{3}\frac{\sqrt{3a}}{2} = \frac{5}{6}\sqrt{3}\cdot a$$

Mit

$$d_w^2 = 2a^2 < (\frac{5}{3}d_t)^2 = \frac{75}{36}a^2 = (\frac{5}{3}d_t)^2$$

$$d_w < \frac{5}{3}d_t$$

folgt dass der zweite Tetraeder nicht so in den Hohlkörper passt, dass seine Spitze dessen Boden trifft. Es ist daher zu überprüfen ob der hochstehende Teil des zweiten Tetraeders auch innerhalb des Hohlkörpers liegt.

Mit $d_t = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ ergibt sich für die Höhe des Tetraeders $h_t^2 = a^2 - (\frac{2}{3}d_t^2)$ und nach Umformung

$$h_t = a\sqrt{\frac{2}{3}} = a\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Die Höhe des würfelförmigen Hohlkörpers ist mit $h_w = a$ gegeben.

Die Bestimmung der Höhendifferenz Δh erfolgt mit der Gleichung:

$$\Delta h = (\frac{5}{3}d_t - d_w)\frac{3h_t}{d_t} \quad ; \quad \Delta h \le h_w - h_t$$

$$\frac{5d_t h_t}{d_t} - \frac{3h_t d_w}{d_t} \le a(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}) \quad ; \quad 5h_t - \frac{3h_t d_w}{d_t} \le a(1 - \frac{\sqrt{6}}{3})$$

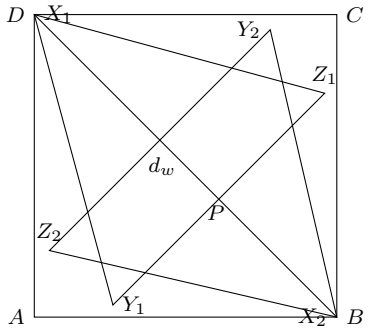
$$\frac{5}{3}\sqrt{6}a - \frac{2\sqrt{6}\sqrt{2}a}{\sqrt{3}} \le a(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}) \quad ; \quad \frac{5}{3}\sqrt{6}a - 4a \le a(1 - \frac{\sqrt{6}}{3})$$

$$a(\frac{5}{3}\sqrt{6} - 4 \le a(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}) \quad ; \quad a(5\sqrt{6} - 12) \le a(3 - \sqrt{6})$$

$$6\sqrt{6}a \le 15a \quad ; \quad a \le \frac{15}{6\sqrt{6}}a \approx 1{,}02a$$

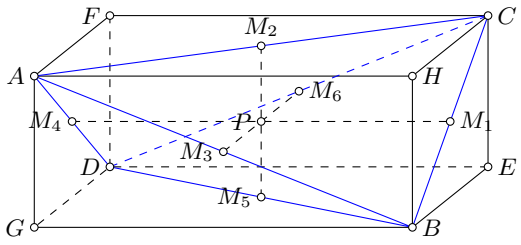
Die Höhe der beiden so angeordneten Tetraeder passt in den Hohlkörper.
Da ein Kreisbogen mit dem Radius a abgetragen an Punkt D vollständig im Inneren des Hohlkörpers liegt, liegen auch die Punkte $Y1$,$Y2$ und $Z1$,$Z2$ im Inneren des Hohlkörpers.

Es ist somit möglich zwei Tetraeder mit der Kantenlänge a in einem würfelförmigen Hohlkörper mit der Kantenlänge a vollständig und ohne einander zu durchdringen unterzubringen. □



Aufgabe 231043A:
Von einem Tetraeder $ABCD$ wird $BC = AD$, $CA = BD$ und $AB = CD$ vorausgesetzt.
Die Mittelpunkte der Strecken BC, CA, AB, AD, BD, CD seien in dieser Reihenfolge M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6.
Beweisen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen ein gemeinsamer Punkt P der drei Strecken M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6 existiert und dass dieser Punkt P der Mittelpunkt der Umkugel von $ABCD$ (d. h. der durch die vier Punkte A, B, C, D gehenden Kugel) ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die durch BC gehende und gleichzeitig zu AC parallele Ebene sowie die durch AC gehende und gleichzeitig zu BC parallele Ebene bilden ein Paar zueinander paralleler Ebenen.
Dasselbe gilt für die durch CA gehende und zu VD parallele Ebene sowie die durch BD gehende und zu CA parallele Ebene.
Ein drittes Paar zueinander paralleler Ebenen bilden die durch AB gehende zu CD parallele Ebene und die durch CD gehende zu AB parallele Ebene.

Diese drei Ebenenpaare ergeben ein Parallelepiped [2] $AGBHFDEC$. Darin ist $HE = AD$, wegen der Voraussetzung $BC = AD$ also $HE = BC$ und somit das Parallelogramm $BECH$ ein Rechteck.

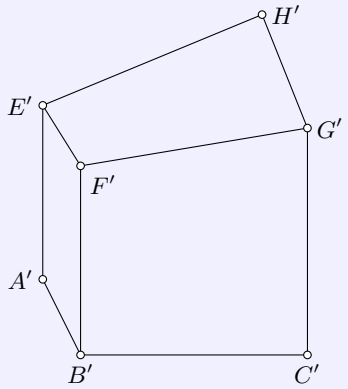
[2] Zu den Kanten dieser Körper kann auch gelangen, indem man die durch $A, B, C, D, M_1, ..., M_6$ gehenden, zu M_1M_4, M_2M_5, M_3M_6 parallelen Geraden verwendet.

Entsprechend weist man die anderen Seitenflächen des Parallelepipeds als Rechteck nach; diese ist somit ein Quader.

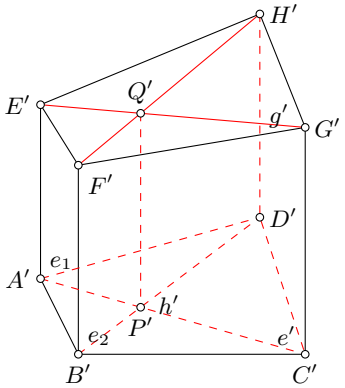
Die Punkte $M_1, ..., M_6$ sind die Mittelpunkte (Diagonalenschnittpunkte) seiner Seitenflächen. Legt man die drei jeweils zu einem Paar gegenüberliegender Seitenflächen paralleler Ebenen durch M_2, M_3, M_5, M_6 bzw. durch M_3, M_1, M_6, M_4 bzw. durch M_1, M_2, M_4, M_5, so folgt einerseits:
Die Gerade durch M_1, M_4, die Gerade durch M_2, M_5 und die Gerade durch M_3, M_6 sind jeweils Schnittgerade von zwei dieser drei Ebenen. Der Schnittpunkt P der drei Ebenen liegt somit auf allen drei Strecken M_1M_4, M_2M_5 und M_3M_6.

Andererseits zerlegen die drei Ebenen den Quader $AGBHFDEC$ in acht kongruente Teilquader. Der Punkt P ist gemeinsame Ecke dieser Teilquader; in jedem Teilquader führt die von P ausgehende Körperdiagonale zu einem der Punkte A, G, B, H, F, D, E, C.
Daher hat P von diesen acht Punkten gleiche Abstände, insbesondere gilt: $PA = PB = PC = PD$. Folglich ist P der Mittelpunkt der Umkugel von $ABCD$.

Aufgabe 231044:
Auf dem Arbeitsblatt sind von einem Körper K die bei schräger Parallelprojektion entstandenen Bilder der sichtbaren Ecken und Kanten abgebildet. Ferner wird vorausgesetzt, dass der Körper K insgesamt von sechs ebenen Vierecken $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$ und $EFGH$ begrenzt wird und dass die vier Kanten AE, BF, CG und DH sämtlich zueinander parallel sind.
Konstruieren Sie das Bild D' der nicht sichtbaren Ecke D bei der genannten Parallelprojektion!
Beschreiben Sie Ihre Konstruktion und beweisen Sie, dass der nach Ihrer Beschreibung konstruierte Punkt D' das Bild der genannten Ecke D ist!
Arbeitsblatt:



Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Konstruktion:



Konstruktionsbeschreibung:

(1) Die Strecke $E'G'$ schneidet die Strecke $F'H'$ in einem Punkt Q'.

(2) Die Parallele durch Q' zu $A'E'$ schneidet die Strecke $A'C'$ in einem Punkt P'.

(3) Die Parallele durch H' zu $A'E'$ schneidet die Gerade durch B', P' in einem Punkt D'.

Beweis, dass der so konstruierte Punkt D' das Bild von D ist:
Da $EFGH$ ein ebenes Viereck ist, schneiden sich EG und F in einem Punkt Q, und der in (1) konstruierte Punkt Q' ist sein Bild.

Die Ebene e_1 durch A, E, G und die Ebene e_2 durch B, F, H gehen beide durch Q, und sie sind beide parallel zu AE. Also ist die durch Q parallel zu AE gehende Gerade die Schnittgerade von e_1 und e_2. Sie schneidet somit die in e_1 liegende Strecke AC in einem Punkt P, und der in (2) konstruierte Punkt P' ist sein Bild.
Zugleich ist P als ein Punkt auf der Schnittgeraden h von e_2 mit der Ebene e durch A, B, C nachgewiesen. Ein anderer Punkt dieser Schnittgeraden h ist B. Da aber auch D in e und (wegen $DH \parallel BF$) in e_2 liegt, ist D ebenfalls ein Punkt von h, d. h., die Gerade h durch B und P geht auch durch D; ihr Bild ist die in (3) konstruierte Gerade durch B', P'.
Andererseits liegt D auch auf der Parallelen g durch H zu AE, und deren Bild ist die in (3) konstruierte Parallele zu H' zu $A'E'$. Daher ist der in (3) konstruierte Punkt D' das Bild von D.

Aufgabe 241043B:
Es sei P die Oberfläche einer beliebigen Pyramide mit quadratischer Grundfläche.
Man beweise: Wenn der Durchschnitt von P mit einer Ebene E ein (nicht entartetes) Parallelogramm ist, dann ist er ein Quadrat.
Hinweis: Ein Parallelogramm heißt genau dann nicht entartet, wenn keine drei seiner Eckpunkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

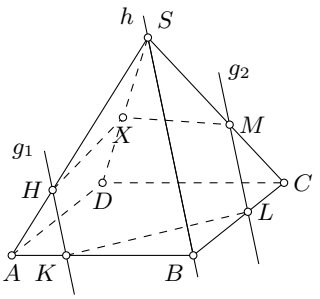
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Durchschnitt von P mit E sei das nicht entartete Parallelogramm $HKLM$; für die Gerade g_1 durch H und K sowie die Gerade g_2 durch M und LL gilt hiernach $g_1 \parallel g_2$ und $g_1 \neq g_2$.

Die Grundfläche der Pyramide sei $ABCD$, die Spitze S; die Oberfläche P besteht somit aus der Quadratfläche $ABCD$ und den Dreiecksflächen ABS, BCS, CDS, ADS. Keine zwei der Ebenen, in denen diese fünf Flächen liegen, sind zueinander parallel, also auch nicht diejenigen beiden Ebenen E_1, E_2, die g_1 bzw. g_2 als Durchschnitt mit E haben. Somit ist der Durchschnitt von E_1 mit E_2 eine Gerade h.

Für diese gilt $g_1 \parallel h$ und $g_1 \neq h$; denn andernfalls hätten g_1 und h, da sie in E_1 liegen, einen gemeinsamen Punkt; dieser würde (da er auf h läge) auch zu E_2 und folglich (da er in E läge) zu g_2 gehören, was wegen $g_1 \parallel g_2$, $g_1 \neq g_2$ nicht möglich ist.
Ebenso beweist man $g_2 \parallel h$ und $g_2 \neq h$.

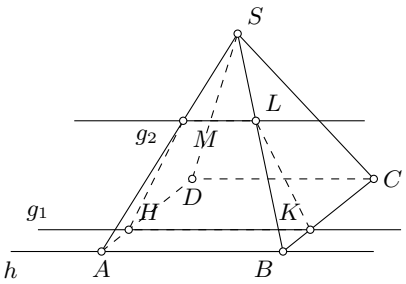
Für E_1 und E_2 liegt nun einer der folgenden Fälle (1), (2), (3), vor:

(1) In E_1, E_2 liegen zwei benachbarte Dreiecksflächen aus P, o. B. d. A.; In E_1 liegt ABS, in E_2 liegt BCS.
Wäre dieser Fall möglich, so folgte: h wäre die Gerade durch B und S, und es läge (o. B. d. A.) H zwischen A und S, K zwischen A und B, L zwischen B und C, M zwischen C und S. (siehe Abbildung)



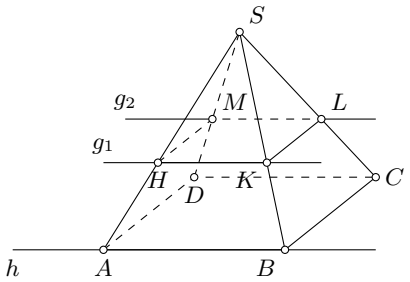
Da g_1 zwar durch H, aber wegen $g_1 \parallel h$, $g_1 \neq h$ nicht durch S ginge, also von der Geraden durch A und S verschieden wäre, schnitte E die Ebene durch A, D, S in einer Geraden, die mit der Dreiecksfläche ADS eine Strecke HX gemeinsam hätte.
Die Schnittfigur von E mit der Pyramidenoberfläche P hätte somit außer H, K, L, M einen weiteren Eckpunkt X, wäre also nicht, wie angenommen, ein nicht entartetes Parallelogramm. Daher ist Fall (1) nicht möglich.

(2) In E_1, E_2 liegen eine Dreiecksfläche und die Quadratfläche aus P, o. B. d. A.: In E_1 liegt $ABCD$, in E_2 liegt ABS.
Wäre dieser Fall möglich, so folgte: h wäre die Gerade durch A und B, und es läge (o. B. d. A.) H zwischen A und D, K zwischen B und C, L zwischen BB und S, M zwischen A und S (siehe Abbildung).



Wegen $HA \perp AB$, $KB \perp AB$ und $HK \parallel AB$ wäre $ABKH$ ein Rechteck. Ferner wäre $MS < AS$, also wegen $ML \parallel AB$ nach dem Strahlensatz $ML < AB = HK$; somit wäre $HKLM$ kein Parallelogramm. Also ist auch der Fall (2) nicht möglich.

(3) In E_1, E_2 liegen zwei nicht benachbarte Dreiecksflächen aus P, o. B. d. A.: In E_1 liegt ABS, in E_2 liegt CDS.



In diesem Fall ist h die zu AB und DC parallele Gerade durch S, und es liegt (o. B. d. A.) H in A oder zwischen A und S, K in B oder zwischen B und S, L in C oder zwischen C und S, M in D oder zwischen D und S (siehe Abbildung).

Aus $HK \parallel AB$, $HK = ML$, $ML \parallel DC$ und dem Strahlensatz folgt

$$HS : AS = HK : AB = ML : DC = MS : DS$$

Hieraus folgt nach der Umkehrung des Strahlensatzes $HM \parallel AD$. Also ist die Ebene E parallel zur Ebene durch A, B, C, D und schneidet P folglich in einer zu $ABCD$ ähnlichen Figur, d. h. in einem Quadrat.

Aufgabe 251045:
Stellen Sie fest, ob es möglich ist, einen Würfel mittels einer Ebene so zu schneiden, dass als Schnittfigur a) ein regelmäßiges Dreieck, b) ein regelmäßiges Viereck, c) ein regelmäßiges Fünfeck entsteht!

Lösung von cyrix:
a) Schneidet man etwa durch die drei mit einem Eckpunkt des Würfels durch Kanten verbundenen Eckpunkte, so erhält man als Schnittfigur ein gleichseitiges (und damit regelmäßiges) Dreieck. Dies ist also möglich.

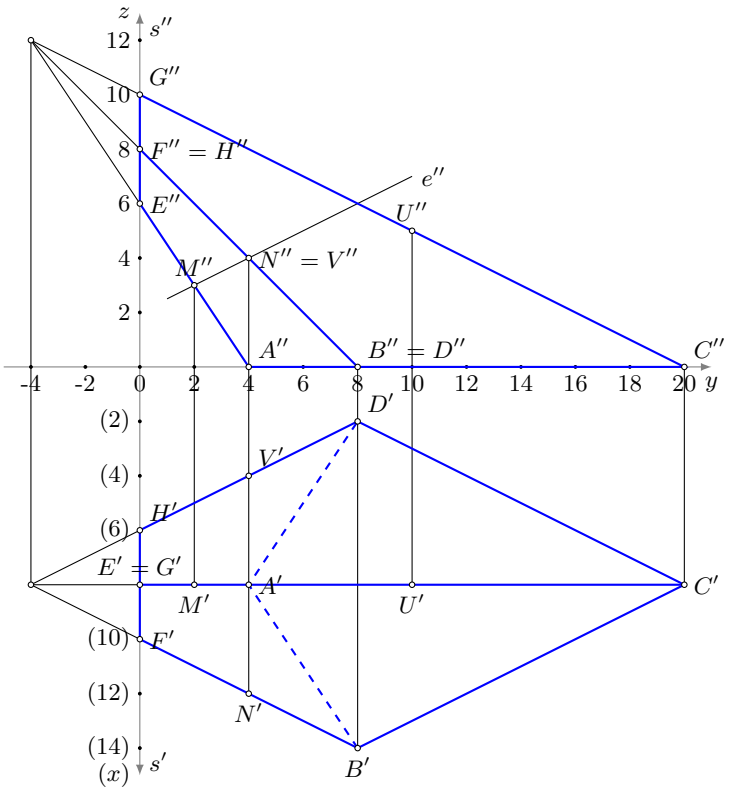
b) Schneidet man etwa den Würfel parallel zu einer seiner Seitenflächen, erhält man ein Quadrat, also regelmäßiges Viereck, als Schnittfläche. Dies ist also möglich.

c) Werden durch die Schnittebene nur die drei Seitenflächen des Würfels, die einen Eckpunkt gemeinsam haben, in ihrem Inneren geschnitten, entstehen nur drei Schnittkanten mit dem Würfel, also als Schnittfigur nur ein Dreieck. Demzufolge muss ein ebener Schnitt, der ein Fünfeck erzeugt, mindestens ein Paar gegenüberliegender Seitenflächen des Würfels in deren Inneren schneiden. Die auf diesen entstehenden Schnittkanten sind aber – wie die Seitenflächen – zueinander parallel, was im regelmäßigen Fünfeck nicht vorkommen kann.

Also ist es nicht möglich, ein regelmäßiges Fünfeck als Schnittfigur eines ebenen Schnitts durch einen Würfel zu erhalten.

Aufgabe 261046:
Beweisen Sie, dass es einen Körper mit den folgenden Eigenschaften (1) bis (4) gibt!
(1) Die Oberfläche des Körpers besteht aus genau sechs ebenen Vierecken.
(2) Unter diesen Vierecken gibt es zwei, die keine Seitenkante miteinander gemeinsam haben.
(3) Außer den Seitenkanten dieser beiden Vierecke hat der Körper noch genau vier weitere Seitenkanten.
(4) Die Mittelpunkte dieser vier Seitenkanten liegen nicht in einer gemeinsamen Ebene.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es genügt, einen Körper K zu beschreiben und aus seiner Beschreibung herzuleiten, dass er die Eigenschaften (1) bis (4) hat.
Ein Beispiel hierfür ist das folgende: K sei der Restkörper, der verbleibt, wenn man einer Pyramide $P = ABCDS$ vermittels einer geeigneten Schnittebene s eine Pyramide $EFGHS$ abschneidet.
Dabei seien P und s gegegen durch ihre Darstellung in Zweitafelprojektion (siehe Abbildung), wobei die Aufrissebene und die (noch nicht in die Zeichenebene heruntergeklappte) Grundrissebene zugleich die y,z-Ebene bzw. die x,y-Ebene eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems seien.



In diesem Koordinatensystem sei

$$A = (8{,}4{,}0), \quad B = (14{,}8{,}0), \quad C = (8{,}20{,}0), \quad D(2{,}8{,}0), \quad S = (8, -4{,}12)$$

Als Schnittebene s sei die $x - z$-Ebene gewählt. Für ihre Schnittpunkte E, F, G, H mit den Kanten AS, BS, CS, DS erhält man

$$E = (8{,}0{,}6), \quad F = (10{,}0{,}8), \quad G = (8{,}0{,}10), \quad H = (6{,}0{,}8)$$

Für den so definierten Restkörper K gilt in der Tat, wie gefordert:

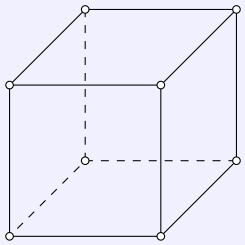
(1) Die Oberfläche von K besteht genau aus den sechs ebenen Vierecken $ABCD$ (Grundfläche P in der $x-y$-Ebene), $EFGH$ (Schnittfläche von P mit der Ebene s), $ABFE$, $BDGF$, $CDHG$, $DAEH$ (Teilflächen der Seitenflächen ABS, BCS, CDS, DAS von P).
(2) Die Vierecke $ABCD$ und $EFGH$ haben die Seitenkanten AB, BC, CD, DA bzw. EF, FG, GH, HE, also keine gemeinsame Seitenkante.
(3) Außer diesen hat der Körper K noch genau die 4 Seitenkanten AE, BF, CG, DH.
(4) Deren Mittelpunkte sind

$$M = (8,2,3), \quad N = (12,4,4), \quad U = (8,10,5), \quad V = (4,4,4)$$

Dass diese vier Punkte nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen, kann man z. B. folgendermaßen nachweisen:

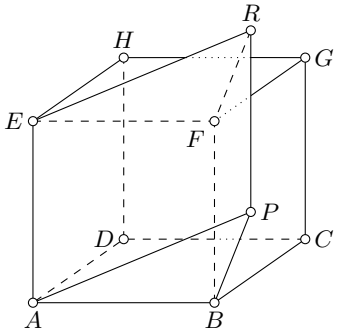
Wegen der Gleichheit der Aufrisse $N'' = V''$ steht die durch M,N,V gelegte Ebene e senkrecht zur Aufrissebene; bei senkrechter Projektion von e auf die Aufrissebene ergibt sich also eine Gerade e''; sie geht durch M'', N''. Diese Gerade e'' in der $y-z$-Ebene hat den Anstieg $(4-4):(4-2) = \frac{1}{2}$. Dagegen hat die Gerade durch N'', U'' den Anstieg $(5-4):(10-4) = \frac{1}{6}$.
Also liegt U'' nicht auf e''; folglich kann auch U nicht auf e liegen.

Aufgabe 271043A:



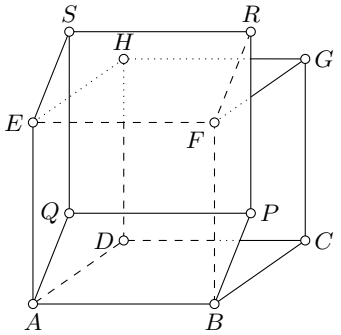
Die Abbildung wird gewöhnlich als das Bild eines Würfels oder jedenfalls eines achteckigen Körpers in schräger Parallelprojektion angesehen.
Zeigen Sie, dass dies aber auch sowohl das Bild eines zehneckigen als auch das Bild eines zwölfeckigen Körpers in schräger Parallelprojektion sein kann!
Zeichnen Sie zu diesem Zweck je einen solchen Körper in einer neu gewählten schrägen Parallelprojektion, bei der alle zehn bzw. alle zwölf Eckpunkte des Körpers als voneinander verschiedene Bildpunkte erscheinen!
Geben Sie ferner zu jedem der beiden Körper eine Aufzählung aller Eckpunkte, aller Kanten und aller ebenen Teilflächen seiner Oberfläche an, und nennen Sie eine Gerade in einer Projektionsrichtung, bei der die Abbildung entstehen würde!
Eine weitere Begründung wird nicht verlangt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Zehneckiger Körper:

Eckpunkte: $A, B, C, D, E, F, G, H, P, R$
Kanten: $AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, BP, PA, FR, RE, AE, BF, CG, DH, PR$
ebene Teilflächen: $ABCD, EFGH, ABP, EFR, BCGF, CDHG, DAEH, APRE, PBFR$



Zwölfeckiger Körper:

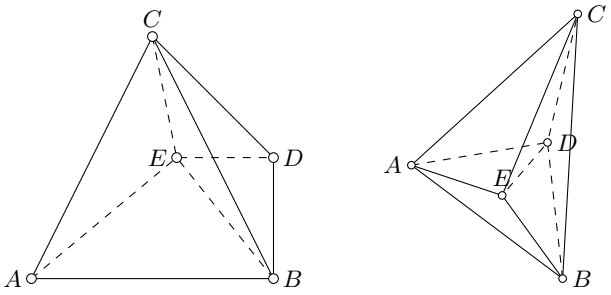
Eckpunkte: $A, B, C, D, E, F, G, H, P, Q, R, S$
Kanten: $AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, BP, PQ, QA, FR, RS, SE, AE, BF, CG, DH, PR, QS$
ebene Teilflächen: $ABCD, EFGH, ABPQ, EFRS, BCGF, CDHG, DAEH, AQSE, QPRS, PBFR$

Für beide Körper: Gerade in Projektionsrichtung z. B. die Gerade durch P und B.

Aufgabe 291043B:
Gegeben seien fünf Punkte A, B, C, D, E.
Sie seien so im Raum gelegen, dass keine vier dieser fünf Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen und dass keine zwei Verbindungsstrecken von je zwei verschiedenen dieser fünf Punkte einander gleich lang sind.
Ermitteln Sie für jede Lagemöglichkeit derartiger Punkte die Anzahl aller verschiedenen Polyeder, die genau die fünf Ecken A, B, C, D, E haben!
Dabei seien zwei Polyeder genau dann als voneinander verschieden bezeichnet, wenn es keine Drehung und keine Spiegelung gibt, die das eine Polyeder in das andere überführt.
Hinweis: Ein Polyeder ist ein Körper endlicher Größe, dessen Oberfläche aus ebenen Vielecken besteht.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Fallunterscheidung: a) Es existieren vier Punkte - o. B. d. A. die Punkte A, B, C, D - so, dass der fünfte Punkt E im Inneren des Tetraeders $ABCD$ liegt (linkes Bild).

b) Negation von Fall a) (rechtes Bild)

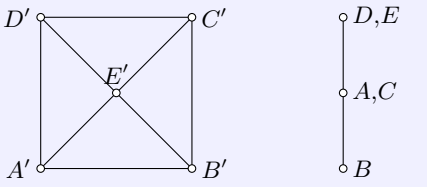


Im Fall a) lassen sich entweder ein oder zwei der Tetraeder mit dem Eckpunkt E aus dem Tetraeder $ABCD$ „herausschneiden“. Damit entstehen in diesem Fall 10 Polyeder.

Im Fall b) muss eine der Verbindungsstrecken (im Bild ist es DE) im Inneren des Körpers verlaufen, wenn $ABCDE$ konvex ist (konvexe Hülle). Schneidet man nun aus diesem konvexen Körper die drei Tetraeder heraus, die eine zu DE windschief verlaufende Kanten haben, so erhält man drei weitere Körper. Damit existieren in diesem Fall 4 Polyeder.

In jedem Fall sind alle diese Polyeder voneinander verschieden, da sie nicht in allen Verbindungsstrecken übereinstimmen können und laut Voraussetzung alle Verbindungsstrecken voneinander verschieden sind.

Aufgabe 291046:

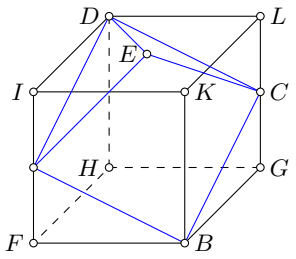


Projektion Höhenmaßstab

Die Abbildung stellt in senkrechter Eintafelprojektion ein Polyeder dar, das genau die Punkte A, B, C, D, E als Ecken hat.
Die Bildpunkte A', B', C', D' sind die Eckpunkte eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a, der Bildpunkt E' ist der Mittelpunkt des Quadrates.
Im beigefügten Höhenmaßstab ist a die Höhe von D und E über der von B, und $\frac{a}{2}$ ist die Höhe von A und C über der von B.
Beweisen Sie, dass es bis auf Kongruenz genau ein Polyeder gibt, auf das diese Beschreibung zutrifft!
Ermitteln Sie das Volumen dieses Polyeders!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zunächst beweist man die Einzigkeit des Polyeders.

Wegen der laut Aufgabenstellung gleichen Höhe von A und C über der Ebene durch F, B, G, H schneidet die Strecke AC die Strecke BD (= Raumdiagonale im Würfel). Damit liegen A, B, C und D in einer Ebene und E kann nur die Spitze einer„zugehörigen“ vierseitigen Pyramide sein.

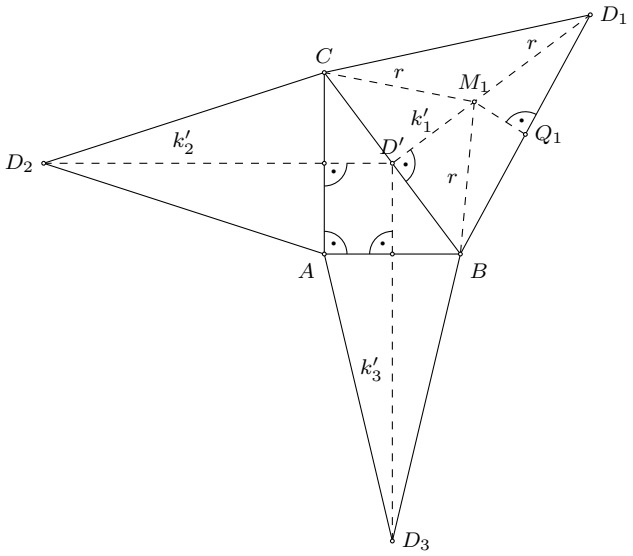


Für die Volumenberechnung bieten sich verschiedene Wege an:

1. Subtraktion der Volumina von Teilkörpern, die die Pyramide zu einem Würfel ergänzen, vom Würfelvolumen.
2. Direkte Berechnung des Volumens
2.1. mit $ABCD$ als Grundfläche
2.2. bei Zusammensetzung der vierseitigen Pyramide aus den beiden Tetraedern $ACED$ und $ACEB$. Der Weg 2.2 ist der eleganteste.
In jedem Fall ergibt sich $V = \frac{1}{6}a^3$.

Aufgabe 301043B:
Im Raum seien vier Punkte A, B, C, D so gelegen, dass zwischen ihnen folgende Abstände auftreten: $AB = 7{,}2$ cm; $AC = 9{,}6$ cm; $AD = 15{,}6$ cm; $BC = 12{,}0$ cm; $BD = 15{,}6$ cm; $CD = 15{,}6$ cm.
Ermitteln Sie den Radius r derjenigen Kugel, auf deren Oberfläche diese vier Punkte liegen!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wegen $AB = 3 \cdot 2{,}4$ cm; $AC = 4 \cdot 2{,}4$ cm; $BC = 5 \cdot 2{,}4$ cm und $3^2 + 4^2 = 5^2$, also $AB^2 + AC^2 = BC^2$, ist das Dreieck ABC nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras bei A rechtwinklig.
Dreht man, ausgehend von einem Netz $ABCD_1D_2D_3$ des Tetraeders $ABCD$ (siehe Abbildung), die Dreiecke BCD_1, CAD_2 und ABD_3 um BC, CA bzw. AB so, dass D_1, D_2 und D_3 im Punkt D zusammentreffen, so beschreiben dabei D_1, D_2 und D_3 Kreisbögen k_1, k_2, k_3.



Deren Bilder k_1', k_2', k_3' bei senkrechter Projektion auf die Zeichenebene sind geradlinig und senkrecht auf BC, CA bzw. AB.

Da die Dreiecke BCD_1, CAD_2, ABD_3 gleichschenklig sind, gehen k_1', k_2' , k_3' durch die Mittelpunkte von BC, CA bzw. AB; d. h. sie sind die Mittelsenkrechten des Dreiecks ABC. Ihr Schnittpunkt, das Bild D' von D bei senkrechter Projektion auf die Zeichenebene, ist also der Umkreismittelpunkt von ABC, und dieser ist nach der Umkehrung des Thalessatzes der Mittelpunkt der Hypotenuse BC.

Da der Mittelpunkt M derjenigen Kugel, auf deren Oberfläche A, B, C und D liegen, insbesondere gleiche Abstände r zu A, B und C hat, liegt er auf der Senkrechten, die im Umkreismittelpunkt von ABC auf der Zeichenebene errichtet wird; d. h. M liegt auf $D'D$ und ist folglich der Umkreismittelpunkt des Dreiecks BCD (die Abbildung zeigt seine Lage M_1, wenn das Dreieck BCD in die Lage BCD_1 gedreht ist).

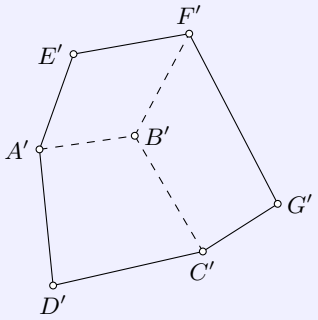
Damit und mit $BD' = \frac{1}{2}BC = 6$ cm folgt nach dem Satz des Pythagoras einerseits $D'D^2 = BD^2 - BD'^2$, wegen $BD = 13 \cdot 1{,}2$ cm ; $BD' = 5 \cdot 1{,}2$ cm und $13^2 - 5^2 = 12^2$ also $DD' = 12 \cdot 1{,}2$ cm; andererseits folgt

$$(D'D - r)^+ BD'^2 = r^2, \qquad (D'D)^2 + BD'^2 - 2r \cdot D'D = 0$$

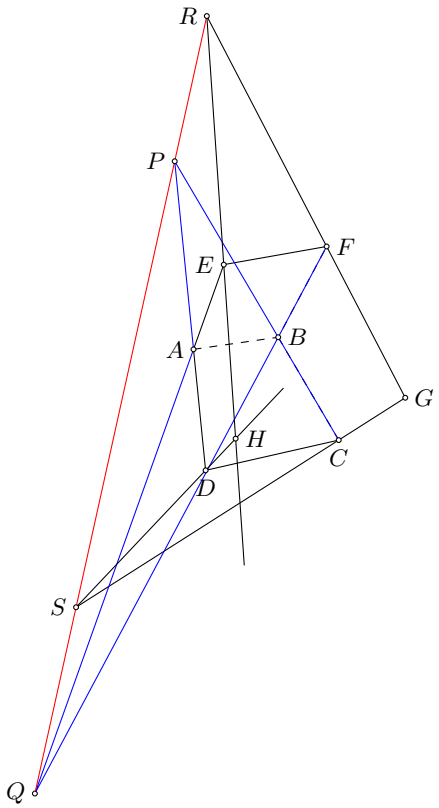
$$r = \frac{BD^2}{2D'D} = \frac{(13 \cdot 1{,}2)^2}{24 \cdot 1{,}2} cm = 8{,}45 cm$$

(Die Formel $r \cdot D'D = \frac{BD}{2} \cdot BD$ folgt auch, weil M auf der Mittelsenkrechen QM von BD liegt und daher $\triangle MQD \cong \triangle BD'D$ ist.)

Aufgabe 301046:
Das Arbeitsblatt zeigt die Bilder $A', B', C', D', E', F', G'$ von sieben Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G eines Körpers bei Parallelprojektion.
Dieser Körper hat außerdem noch einen Eckpunkt H; die Oberfläche des Körpers besteht aus sechs ebenen Vierecken $ABCD$, $ABFE$, $ADHE$, $BCGF$, $CDHG$, $EFGH$.
Die Kanten AB, BC, BF werden (bei der Sicht auf die Zeichenebene in Projektionsrichtung) von davor liegenden Flächen verdeckt; daher sind $A'B'$, $B'C'$, $B'F'$ gestrichelt gezeichnet.
Konstruieren Sie unter diesen Voraussetzungen das Bild H' des Punktes H und die Bilder der von H ausgehenden Kanten!
Begründen und beschreiben Sie Ihre Konstruktion! (siehe Abbildung)



Lösung von MontyPythagoras:



Zunächst die Konstruktionsanweisungen:

1. Zeichne jeweils eine Gerade entlang AD und BC, der Schnittpunkt ist P.
2. Zeichne jeweils eine Gerade entlang AE und BF, der Schnittpunkt ist Q.
3. Zeichne eine Gerade durch P und Q.

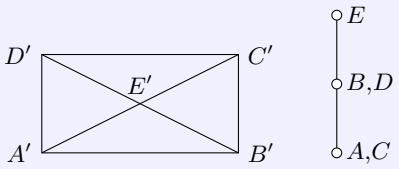
4. Zeichne eine Gerade entlang FG. Der Schnittpunkt mit der Geraden PQ sei R.
5. Zeichne eine Gerade durch R und E.
6. Zeichne eine Gerade entlang CG. Der Schnittpunkt mit der Geraden PQ sei S.
7. Zeichne eine Gerade durch S und D.
8. Der Schnittpunkt der Geraden RE und SD ist der gesuchte Punkt H.

Begründung:
Die „rote“ Gerade PQ ist die Schnittlinie der Ebenen $ADHE$ und $BCGF$. Wir kennen zwar H nicht, aber die Ebene $ADHE$, in der H liegt, ist allein durch die Kanten AE und AD definiert.

Da AD und BC in einer Ebene liegen, müssen sie die Schnittlinie im selben Punkt, nämlich P schneiden. Sinngemäß das gleiche gilt für AE und BF, die sich in Q schneiden. Die Schnittlinie muss daher durch die Punkte P und Q verlaufen.

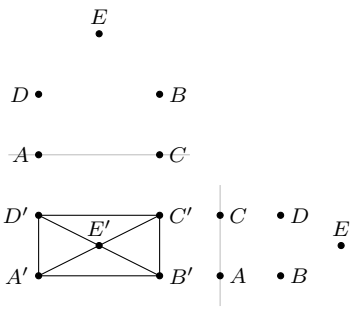
Nachdem wir so die Schnittlinie konstruiert haben, können wir auf H Rückschlüsse ziehen. Da EH und FG ebenfalls in einer Ebene liegen sollen, müssen ihre Geraden sich auf der Schnittlinie im selben Punkt schneiden. Daher schneiden wir die Gerade FG mit der Schnittlinie und erhalten den Schnittpunkt R. R muss der Schnittpunkt von EH mit der Schnittlinie PQ sein, daher legen wir eine Gerade durch R und E. Das gleiche noch einmal mit CG und DH, die sich ebenfalls auf der Schnittlinie PQ schneiden müssen.

Aufgabe 311043B:
In der Abbildung ist die senkrechte Eintafelprojektion eines ebenflächig begrenzten Körpers mit zugehörigem Höhenmaßstab dargestellt.
$A'B'C'D'$ ist ein Rechteck, E' sein Diagonalenschnittpunkt; für die im Höhenmaßstab gezeigten Höhen (über A und C) gilt: Die Höhe von E ist das Zweifache der Höhe von B und D.
Vorausgesetzt wird ferner, dass der Körper genau die Punkte A, B, C, D, E als Ecken hat.
a) Untersuchen Sie, ob es (bis auf Verschiebung senkrecht zur Zeichenebene) genau einen Körper gibt, auf den diese Angaben zutreffen!
b) Zeichnen Sie für jeden derartigen Körper eine Darstellung in Dreitafelprojektion, bei der der Grundriss aus der Abbildung übernommen ist!
Im Auf- und Seitenriss sind alle Kanten des betreffenden Körpers zu zeichnen. Dabei ist in üblicher Weise zu unterscheiden zwischen sichtbaren Linien (durchgezogen) und verdeckten Linien (gestrichelt, sofern nicht genau hinter sichtbaren Linien verdeckt); die Abbildung selbst ist in dieser Weise aufzufassen.

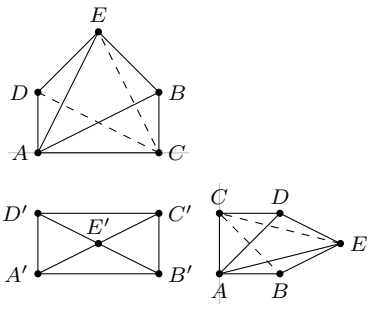


Lösung von MontyPythagoras:
Da von oben nach unten erst E, dann B und D und am Ende A und C kommen, muss E durch gerade Kanten mit den anderen vier Punkten verbunden sein. Aber auch die vier Punkte A, B, C, D sind umlaufend untereinander verbunden, wie das Rechteck $A'B'C'D'$ beweist. Wir zeichnen in den drei Ansichten die Punkte und danach die Strecken wie angegeben ein.

Schritt 1:

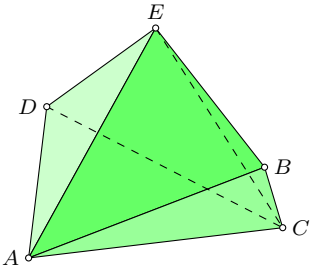


Schritt 2:



In der Vorderansicht sind CD und CE als verdeckte Kanten zu zeichnen, da sie hinter den ABC, ABE und AED verlaufen müssen. In der Seitenansicht rechts sind CB und CE als verdeckte Kanten zu zeichnen, da sie von links gesehen hinter den Flächen ABE, ADE und ADC angeordnet sind.

Aus den genannten Gründen ist die Zuordnung aller Kanten und damit auch die Form des Körpers insgesamt eindeutig. Der Körper sieht dann wie folgt aus:



Aufgabe 341045:
Einem regelmäßigen Tetraeder $ABCD$ wird die Inkugel K einbeschrieben (das ist diejenige Kugel, die alle vier Dreiecksflächen ABC, ABD, ACD, BCD berührt).
Dieser Kugel wird ein zweiter regelmäßiger Tetraeder $PQRS$ einbeschrieben (d. h., seine Ecken P, Q, R, S liegen alle auf der Oberfläche der Kugel K).
Welches Verhältnis $V_2 : V_1$ bildet das Volumen V_2 eines solchen Tetraeders $PQRS$ mit dem Volumen V_1 von $ABCD$?

Lösung von cyrix:
In- und Umkugelmittelpunkt eines regelmäßigen Tetraeders fallen mit dem Schnittpunkt seiner Schwerelinien zusammen. Da sich diese im Verhältnis 3:1 schneiden und senkrecht auf den jeweiligen Seitenflächen stehen, ist also der Umkugelradius eines Tetraeders genau dreimal so groß wie sein Inkugelradius.

Da der Inkugelradius r_1 von $ABCD$ genau dem Umkugelradius von $PQRS$ entspricht, beträgt also dessen Inkugelradius r_2 genau $\frac{1}{3}r_1$.
Mittels Strahlensatz folgt schnell, dass die Kantenlängen und Inkugelradien von regelmäßigen Tetraedern im gleichen Verhältnis stehen, ihre Volumina aber in der dritten Potenz dieses Verhältnisses. Also gilt

$$V_2 : V_1 = (r_2 : r_1)^3 = (1 : 3)^3 = 1^3 : 3^3 = 1 : 27$$

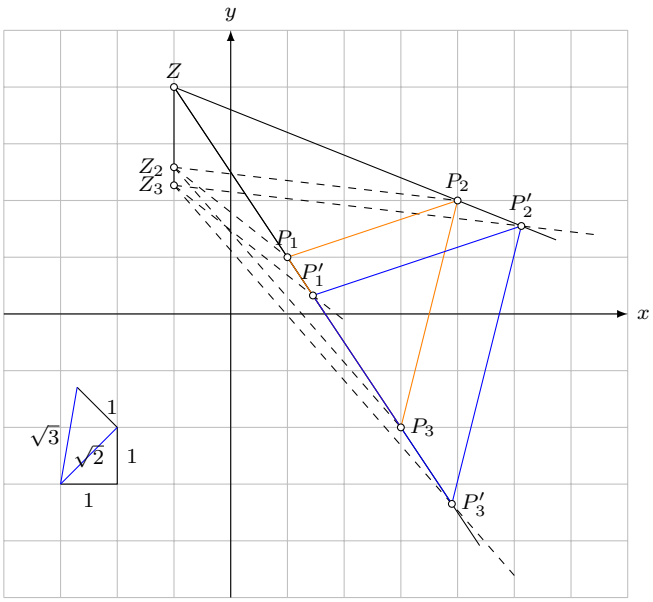
VII Oberstufe

VII.I Dreiecke

I Runde 1

Aufgabe V01114:
In einem Achsenkreuz sind die Punkte $P_1(1;1), P_2(4;2), P_3(3;-2), Z(-1;4)$ gegeben. Es ist ein dem $\triangle P_1P_2P_3$ ähnliches Dreieck zu zeichnen unter Verwendung des Ähnlichkeitspunktes Z und des Ähnlichkeitsverhältnisses $2:3$.

Lösung von Steffen Polster:



Wenn die Flächeninhalte der ähnlichen Dreiecke $P_1P_2P_3$ und $P'_1P'_2P'_3$ im Verhältnis 2:3 stehen sollen, so müssen die Seitenlängen im Verhältnis $\sqrt{2}:\sqrt{3}$ zueinander stehen.

1. In einer Nebenkonstruktion (siehe Abbildung) ermittelt man durch zweimaliges Anwenden des Satzes von Pythagoras zwei Strecken der Längen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$.
2. Von Z trägt man diese Strecken auf einer beliebigen Geraden ab und erhält die Punkte Z_2 und Z_3.
3. Von Z aus werden Strahlen durch die Punkte P_1, P_2, P_3 gezeichnet.
4. P_1, P_2, P_3 werden mittels Geraden mit Z_1 verbunden.
5. Die Parallelverschiebungen dieser Geraden durch Z_2 schneiden die entsprechenden Strahlen durch Z in den gesuchten Punkten P'_1, P'_2 und P'_3.

Nach dem Strahlensatz gilt dann

$$\frac{ZZ_1}{ZZ_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{ZP_1}{ZP'_1} = \frac{ZP_2}{ZP'_2} = \frac{ZP_3}{ZP'_3}$$

und erneut nach einem Strahlensatz

$$\frac{P_1P_2}{P_1'P_2'} = \frac{P_1P_3}{P_1'P_3'} = \frac{P_2P_2}{P_2'P_3'} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}'}$$

so dass das Dreieck $P_1'P_2'P_3'$ das gesuchte Dreieck ist.

Aufgabe V01212:
Der Umfang eines Dreiecks sei 1 cm. Kann es möglich sein, dass der dem Dreieck umbeschriebene Kreis einen Radius hat, der größer als 1000 m ist?

Lösung von Steffen Polster:
Für ein beliebiges Dreieck ABC gilt für den Flächeninhalt F zum einen die Heronsche Dreiecksformel

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{1}$$

mit dem halben Dreiecksumfang $s = \frac{a+b+c}{2}$ und hier konkret $s = \frac{1}{2}$ cm, und zum anderen die Beziehung Flächeninhalt - Umkreisradius R

$$F = \frac{1}{4}\frac{a \cdot b \cdot c}{R} \tag{2}$$

Gleichsetzen von (1) und (2) und Umstellen nach R ergibt

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \tag{3}$$

Nach der Aufgabenstellung genügt es ein beliebiges Dreieck anzugeben, für das der Umkreisradius R größer als 1000 m wird. Daher betrachten wir ein gleichschenkliges Dreieck mit $a = b$ und $c = 1$ cm $-a-b$. Setzt man diese Werte in (3) ein, wird (alle Maße in cm)

$$\begin{aligned} R &= \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{ab(1-a-b)}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-1+a+b)}} \\ &= \frac{a^2(1-2a)}{4\sqrt{s(s-a)^2(s-1+2a)}} \end{aligned}$$

und mit $s = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} R &= \frac{a^2(1-2a)}{4\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-a)^2(2a-\frac{1}{2})}} = \frac{a^2(1-2a)}{\sqrt{16 \cdot \frac{1}{2}(\frac{1}{4}-a+a^2)(2a-\frac{1}{2})}} \\ R &= \frac{a^2(1-2a)}{\sqrt{(1-4a+4a^2)(4a-1)}} = \frac{a^2(1-2a)}{\sqrt{(1-2a)^2(4a-1)}} = \frac{a^2}{\sqrt{(4a-1)}} \end{aligned}$$

Ist a nur wenig größer als 0,25 cm, d. h. zum Beispiel $a = 0{,}25 + \varepsilon$ mit einem beliebigen $\varepsilon > 0$ ergibt sich

$$R = \frac{0{,}25+\varepsilon)^2}{\sqrt{4 \cdot \varepsilon}} = \frac{(0{,}25+\varepsilon)^2}{2 \cdot \sqrt{\varepsilon}}$$

Dieser Term wächst für $\varepsilon \to 0$ über alle Grenzen, d. h.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(0{,}25+\varepsilon)^2}{2 \cdot \sqrt{\varepsilon}} = \infty$$

Der Umkreisradius R kann damit jeden hinreichend großen positiven Wert annehmen, d. h. auch größer als 1000 m sein.

Alternativ-Lösung von cyrix:
Konstruiert man ein Dreieck ABC, bei welchem die Innenwinkel α und β beliebig kleine Werte annehmen, dann sind die beiden Mittelsenkrechten der Seiten AC und BC „beinahe“ parallel zueinander, sodass die Entfernung R ihres Schnittpunkts U von den Eckpunkten beliebig groß wird, wenn man α und β nur genügend klein wählt. Da U der Mittelpunkt des Umkreises von ABC ist und R sein Radius, kann dieser also beliebig groß werden und damit auch sein Umfang.

Aufgabe V01213:
Im Dreieck ABC ist der Winkel γ zu berechnen, wenn gilt:

$$\sin\gamma = \sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Lösung von svrc:
Da α, β und γ die Innenwinkel eines Dreiecks bilden, gilt nach Innenwinkelsummensatz

$$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ \Longleftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

und somit

$$\sin(\gamma) = \sqrt{2}\cdot\cos\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right).$$

Da $\cos\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ für beliebige Winkel γ gilt, folgt

$$\sin(\gamma) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Nach dem Additionstheorem gilt

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$$

für alle reellen Zahlen x und y, sodass

$$\sin(\gamma) = 2\cdot\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

gilt. Da $\gamma \in (0^\circ, 180^\circ)$ gelten muss, folgt

$$2\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{2}$$

und somit

$$\gamma = 2\cdot\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 90^\circ.$$

Deshalb handelt es sich bei γ um einen rechten Winkel.

Alternativ-Lösung von MontyPythagoras:
Die Rechnung kann verkürzt werden. Man muss nicht den komplizierten Weg über die Fläche gehen, sondern kann beim gleichschenkligen Dreieck den Umkreisradius durch Anwenden des Satzes von Pythagoras berechnen.

Sei a einer von den zwei gleichen Schenkeln und c die dritte Seite, dann ist

$$R^2 = \left(\tfrac{1}{2}c\right)^2 + \left(R - \sqrt{a^2 - \left(\tfrac{1}{2}c\right)^2}\right)^2$$

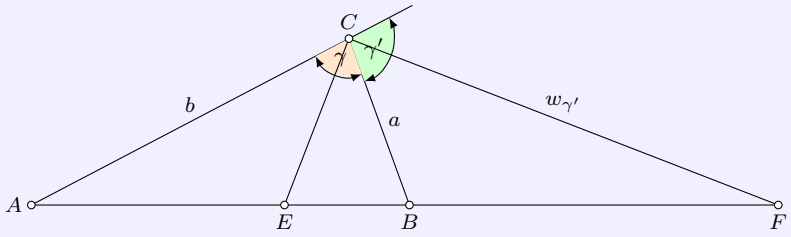
$$R^2 = \tfrac{1}{4}c^2 + R^2 - 2R\sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}c^2} + a^2 - \tfrac{1}{4}c^2$$

$$R\sqrt{4a^2 - c^2} = a^2$$

$$R = \frac{a^2}{\sqrt{2a+c}\cdot\sqrt{2a-c}} = \frac{a^2}{\sqrt{U}\sqrt{4a-U}}$$

Der weitere Lösungsweg entspricht dem von oben.

Aufgabe V01214:
Beweisen Sie folgenden Satz:
Die Halbierungslinien eines Dreieckwinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite innen und außen im Verhältnis der anliegenden Seiten.



Beispiel-Behauptung:

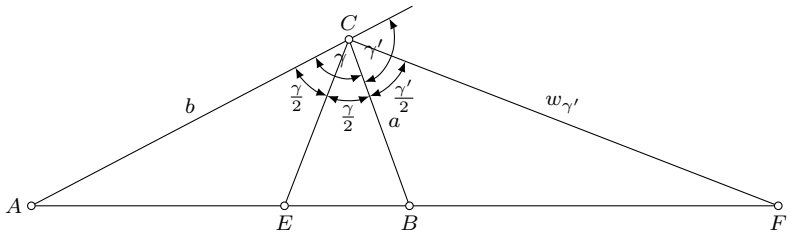
$$\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FB} = \frac{b}{a}$$

Lösung von Steffen Polster:
Nach dem Sinussatz ist im Dreieck EBC (siehe nachfolgende Abbildung)

$$\frac{\sin(180° - \angle AEC)}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{EB}$$

und im Dreieck AEC

$$\frac{\sin\angle AEC}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{EA}$$



Wegen $\sin(180° - \frac{\gamma}{2}) = \sin\frac{\gamma}{2}$ folgt

$$\frac{EA}{EB} = \frac{b}{a}$$

Für den Außenwinkel γ' läuft der Beweis analog:

$$\frac{\sin\angle BFC}{\sin(180° - \frac{\gamma'}{2})} = \frac{b}{FA} \quad ; \quad \frac{\sin\angle BFC}{\sin\frac{\gamma'}{2}} = \frac{a}{FB}$$

und somit

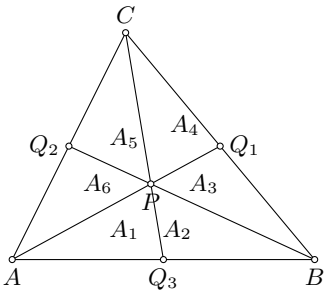
$$\frac{FA}{FB} = \frac{b}{a}$$

Aufgabe 011114:
Es seien ein Dreieck $P_1P_2P_3$ und ein beliebiger Punkt P im Innern des Dreiecks gegeben. Die Schnittpunkte der Geraden P_1P, P_2P bzw. P_3P mit den gegenüberliegenden Seiten seien Q_1, Q_2, Q_3.
Es ist zu beweisen, dass unter den Verhältnissen

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \quad \frac{P_2P}{PQ_2}, \quad \frac{P_3P}{PQ_3}$$

wenigstens eines nicht größer als 2 und wenigstens eines nicht kleiner als 2 ist.

Lösung von Eckard Specht:
Beweis: Nennen wir die Teilflächen, in die das Dreieck $P_1P_2P_3$ durch P zerlegt wird, $A_1, A_2, ...; A_6$, die gesamte Fläche sei A. Dann gilt, da sich die Flächeninhalte von Dreiecken mit gleicher Höhe wie die zugehörigen Grundseiten verhalten:



$$x = \frac{P_1P}{PQ_1} = \frac{A_1 + A_2}{A_3} = \frac{A_5 + A_6}{A_4} = \frac{A - A_3 - A_4}{A_3 + A_4}$$
$$x = \frac{P_2P}{PQ_2} = \frac{A_3 + A_4}{A_5} = \frac{A_1 + A_2}{A_6} = \frac{A - A_5 - A_6}{A_5 + A_6}$$
$$x = \frac{P_3P}{PQ_3} = \frac{A_5 + A_6}{A_1} = \frac{A_3 + A_4}{A_2} = \frac{A - A_1 - A_2}{A_1 + A_2}$$

Betrachten wir nun die Teildreiecke $P_1P_2P, P_2P_3P, P_3P_1P$, deren Flächeninhalte $A_1 + A_2, A_3 + A_4$ bzw. $A_5 + A_6$ betragen und deren Summe A ist, so ist nach den obigen Gleichungen offensichtlich, dass wenigstens eines der Verhältnisse

$$\frac{A_1 + A_2}{A} = \frac{1}{1+z} \qquad \frac{A_3 + A_4}{A} = \frac{1}{1+x} \qquad \frac{A_5 + A_6}{A} = \frac{1}{1+y} \qquad (1)$$

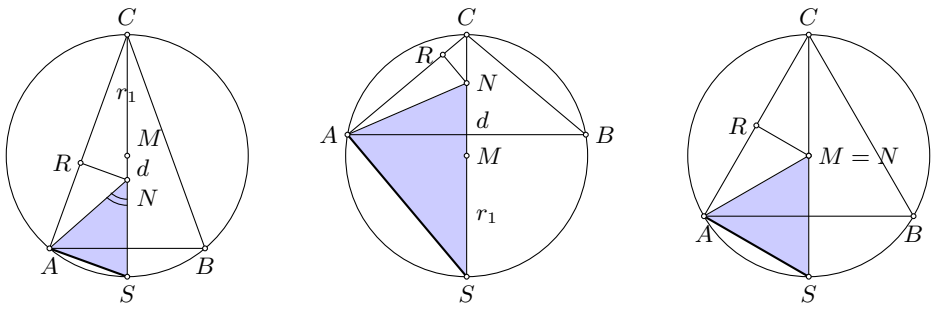
(deren Summe 1 ergibt) nicht größer und eines nicht kleiner als $\frac{1}{3}$ ist. Dabei ist der Fall, dass alle Verhältnisse gleich $\frac{1}{3}$ sind, eingeschlossen.
Diese Aussage ist nach elementarer Umformung der Gleichungen (1) äquivalent damit, dass wenigstens eine der Größen x, y, z nicht größer als 2 und wenigstens eine nicht kleiner als 2 ist.

Aufgabe 021113:
Es ist ein gleichschenkliges Dreieck gegeben. Sein Umkreis habe den Radius r_1, sein Inkreis den Radius r_2.
Beweisen Sie, dass für den Abstand d der Mittelpunkte beider Kreise gilt:

$$d = \sqrt{r_1(r_1 - 2r_2)}$$

Untersuchen Sie dabei alle verschiedenen Lagemöglichkeiten der Mittelpunkte!

Lösung von Eckard Specht:



Die Behauptung kann leicht in

$$r_1^2 - d^2 = 2r_1r_2 \Rightarrow \frac{r_1 + d}{r_2} = \frac{2r_1}{r_1 - d}$$

umgeformt werden, was auf eine Anwendung des Strahlensatzes schließen lässt. Wir gelangen so zu folgendem Beweis:

(Bild links) Seien M und N Umkreis- bzw. Inkreismittelpunkt des gleichschenkligen Dreiecks ABC (wobei M zunächst zwischen C und N liegen soll, welches für $\angle ACB \equiv \gamma < 60°$ stets der Fall ist), S der

Schnittpunkt der Geraden CM mit dem Umkreis und R der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite AC.
Dann sind $\triangle CRN$ und $\triangle CAS$ rechtwinklige Dreiecke – Ersteres, da der Berührungsradius NR stets senkrecht auf der Seite steht und Zweites wegen $\angle CAS = 90°$ (Thales-Kreis).
Nach dem zweiten Strahlensatz gilt daher:

$$\frac{CN}{RN} = \frac{CS}{AS} \Rightarrow \frac{r_1 + d}{r_2} = \frac{2r_1}{AS}$$

Um nun von (2) zu (1) zu gelangen genügt es, die Gleichheit der Strecken AS und $NS = r_1 - d$ zu zeigen. Diesen Nachweis führen wir über die Gleichheit der Basiswinkel $\angle ANS$ und $\angle NAS$ des Dreiecks ANS. Es gilt einerseits $\angle ANS = \angle ACN + \angle CAN$ (Außenwinkel) $= \frac{\gamma}{2} + \angle NAB$ (Winkelhalbierende), andererseits $\angle NAS = \angle NAB + \angle BAS$ (Winkelsumme) $= \angle NAB + \frac{\gamma}{2}$ (gleiche Peripheriewinkel über den Sehnen $SB = SA$). Damit ist (1) bewiesen.

(mittleres Bild b) Im Fall $\gamma > 60°$ liegt M zwischen S und N und es folgt

$$\frac{CN}{RN} = \frac{CS}{AS} \Rightarrow \frac{r_1 - d}{r_2} = \frac{2r_1}{AS}$$

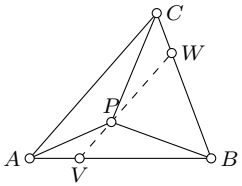
Auch hier ist das Dreieck ANS gleichschenklig, nun jedoch mit $AS = NS = r_1 + d$. Die beiden letzten Gleichungen liefern ebenfalls die Behauptung (1).

(rechtes Bild) Im Fall $\gamma = 60°$ ist das Dreieck ABC gleichseitig, beide Mittelpunkte fallen übereinander und die Behauptung (1) gilt auch hier mit $d = 0$.

Aufgabe 111214:
In einem Dreieck $\triangle ABC$ mit $\overline{AB} \geqslant \overline{BC} \geqslant \overline{AC}$ sei P ein im Inneren des Dreiecks gelegener Punkt.

Man beweise, dass dann stets $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{BC}$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Parallele zu AC durch P schneide die Seite AB in V und die Seite CB in W. Dann ist nach dem Hauptähnlichkeitssatz $\triangle VBW \sim \triangle ABC$, also $|VB| \geq |BW| \geq |VW|$.

Weiter gilt nach dem Außenwinkelsatz für Dreieck $\triangle BPW$ die Ungleichung $|\angle VPB| > |\angle VWB|$. Weil in jedem Dreieck, also auch im $\triangle VBW$, dem größeren Winkel die größere Seite gegenüberliegt, ist zunächst $|\angle VWB| \geq |\angle BVN|$ und damit auch $|PB| < |VB|$. Daraus folgt

$$|VW| + |PB| < |VB| + |BW| \tag{1}$$

Aus den Dreiecken $\triangle AVP$ und $\triangle CPW$ erhält man

$$|PA| < |AV| + |VP| \quad (2) \qquad \text{bzw.} \qquad |PC| < |CW| + |WP| \quad (3)$$

Durch Addition folgt schließlich aus (1), (2) und (3)

$$|PA| + |PB| + |PC| + |VW| < (|AV| + |VB|) + (|CW| + |BW|) + (|VP| + |WP|)$$

also

$$|PA| + |PB| + |PC| + < |AB| + |BC|$$

Aufgabe 121212:
Man beweise den folgenden Satz:

Gelten für die Maßzahlen a,b,c der mit gleicher Maßeinheit gemessenen Seitenlängen eines Dreiecks die Bedingungen $1 < a < \sqrt{2}$, $1 < b < \sqrt{2}$, $1 < c < \sqrt{2}$, so ist das Dreieck spitzwinklig.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Aus $1 < c < \sqrt{2}, 1 < a, 1 < b$ folgt $c^2 < 2 = 1 + 1 < a^2 + b^2$. Also ist

$$a^2 + b^2 - c^2 > 0$$

Auf Grund des Kosinussatzes gilt nun

$$\cos \angle(a,b) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Wegen (1) und $2ab > 0$ folgt daraus $\cos \angle(a,b) > 0$; also ist $\angle(a,b) < 90°$.
Entsprechend folgt auch $\angle(a,c) < 90°$ und $\angle(b,c) < 90°$. Daher ist das betrachtete Dreieck spitzwinklig.

Aufgabe 161212:
Man beweise, dass für jedes Dreieck ABC die Gleichung

$$\overline{MA}^2 \cdot \sin\alpha + \overline{MB}^2 \cdot \sin\beta + \overline{MC}^2 \cdot \sin\gamma = 2F$$

gilt, wobei α, β, γ die Größen der Innenwinkel bei A, B bzw. C bezeichnen, F der Flächeninhalt des Dreiecks und M der Mittelpunkt seines Inkreises ist.

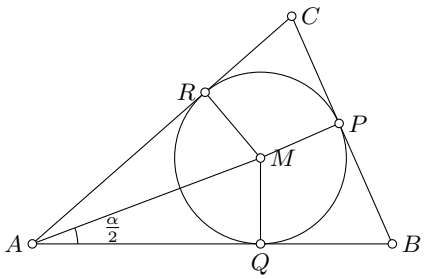
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Berührungspunkte des Inkreises des Dreiecks ABC mit den Seiten BC, CA bzw. AB seine P, Q bzw. R. Dann ist das Dreieck AMR bei R rechtwinklig, also gilt

$$AR = MA \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \qquad \text{und} \qquad MR = MA \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

demzufolge ist der Flächeninhalt F_1 von $\triangle AMR$

$$F_1 = \frac{1}{2} AR \cdot MR = \frac{1}{2} MA^2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} MA^2 \sin\alpha$$

Denselben Flächeninhalt hat auch $\triangle AMQ$.



Entsprechend erhält man den Flächeninhalt F_2 von $\triangle BMP$ und $\triangle BMR$ sowie den Flächeninhalt F_3 von $\triangle CMQ$ und $\triangle CMP$:

$$F_2 = \frac{1}{4}MB^2 \sin\beta \qquad ; \qquad F_3 = \frac{1}{4}MC^2 \sin\gamma$$

Hieraus ergibt sich:

$$2F = 2(2F_1 + 2F_2 + 2F_3) = 4(F1 + F_2 + F_3) = \overline{MA}^2 \cdot \sin\alpha + \overline{MB}^2 \cdot \sin\beta + \overline{MC}^2 \cdot \sin\gamma$$

Aufgabe 191213:
Von einem Dreieck werde gefordert, dass sein Flächeninhalt gleich $\frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ ist, wobei a und b die Längen zweier Seiten des Dreiecks sind.

Man beweise, dass diese Forderung erfüllbar ist und dass durch diese Forderung die Größen der Winkel des Dreiecks eindeutig bestimmt sind. Man ermittle ferner diese Winkelgrößen.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Angenommen, es gibt ein Dreieck mit der geforderten Eigenschaft. die den Seiten mit den Längen a bzw. b gegenüberliegenden Winkel mögen die Größen α bzw. β, und der dritte Dreieckswinkel möge die Größe γ haben.

Dann hat das Dreieck den Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{4}(a^2 - b^2)$$

Hieraus ergibt sich

$$(a-b)^2 + 2ab(1 - \sin\gamma) = 0 \tag{1}$$

Da $(a-b)^2 \geq 0$, $a < 0$, $b > 0$, $\sin\gamma \leq 1$ gilt, ist (1) nur erfüllbar, wenn $a - b = 0$ und $1 - \sin\gamma = 0$ also $a = b$ und $\gamma = 90°$ und somit $\alpha = \beta = 45°$ ist.

Damit ist gezeigt, dass die Winkelgrößen durch die genannte Forderung eindeutig bestimmt sind.

Umgekehrt hat für diese Werte der Winkelgrößen, d. h. für ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit der Kathetenlänge $a = b$, der Flächeninhalt des Dreiecks den Wert $\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2)$, womit die Forderung als erfüllbar nachgewiesen ist.

Aufgabe 281212:
Man untersuche, ob es rechtwinklige Dreiecke ABC mit dem rechten Winkel bei C gibt, in denen die Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$ in dieser Reihenfolge

a) eine geometrische Folge,

b) eine arithmetische Folge

bilden.

Falle es solche Dreiecke gibt, ermittle man jeweils in Abhängigkeit von a alle diejenigen Seitenlängen b, c für die die geforderte Eigenschaft vorliegt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Seitenlängen a, b, c bilden genau dann in dieser Reihenfolge eine geometrische Folge, wenn es eine reelle Zahl q mit $b = aq$, $c = aq^2$ gibt. Ein Dreieck mit diesen Seitenlängen ist genau dann bei C rechtwinklig, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ oder, äquivalent hiermit

$$a^2 + a^2q^2 = a^2q^4 \quad \rightarrow \quad q^4 - q^2 - 1 = 0$$

gilt, d. h., wenn die Zahl $t = q^2$ die Gleichung $t^2 - t - 1 = 0$ erfüllt.

Diese hat genau die Lösungen $t = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, von denen genau $t = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ nicht negativ und damit das Quadrat von einer reellen Zahl q ist, und zwar von genau einer positiven Zahl, nämlich

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})}$$

Damit ist bewiesen: Es gibt Dreiecke der geforderten Art; es sind genau diejenigen, in denen die Seitenlängen

$$a \quad ; \quad b = a\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})} \quad ; \quad c = a \cdot \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

betragen.

b) Die Seitenlängen a,b,c bilden genau dann in dieser Reihenfolge eine arithmetische Folge, wenn es ein d mit $b = a + d$, $c = a + 2d$ gibt. Ein Dreieck mit diesen Seitenlängen ist genau dann bei C rechtwinklig, wenn $c > a$, also $d > 0$ und $a^2 + b^2 = c^2$ oder, äquivalent hiermit

$$a^2 + a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 4ad + 4d^2$$
$$d^2 + \frac{2}{3}ad - \frac{1}{3}a^2 = 0$$

Diese Gleichung hat genau die Lösungen $d = \frac{a}{3}(-1 \pm 2)$, von denen genau $d = \frac{a}{3}$ positiv ist.

Damit ist bewiesen: Es gibt Dreieck der geforderten Art; es sind genau diejenigen, in denen die Seitenlängen

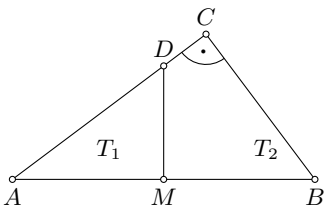
$$a \quad ; \quad b = \frac{4}{3}a \quad ; \quad c = \frac{5}{3}a$$

betragen.

Aufgabe 291213:
In jedem Dreieck ABC zerlegt die Mittelsenkrechte der Seite AB die Fläche dieses Dreiecks in zwei Teilflächen, die so mit T_1, T_2 bezeichnet seien, dass A in T_1 und B in T_2 liegt. Der Flächeninhalt von T_1 sei F_1, der von T_2 sei F_2.

Man ermittle unter allen Dreiecken ABC, die rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei C sind, genau diejenigen, für die das Verhältnis $k = F_2 : F_1$ ganzzahlig ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



In jedem Dreieck ABC mit $\angle ACB = 90°$ bezeichne M den Mittelpunkt von AB und D den von M verschiedenen Schnittpunkt des Dreiecksrandes mit der Mittelsenkrechten. Wegen $\triangle AMD \cong \triangle BMD$ und da die Bedingung der Ganzzahligkeit von k nur mit $k \geq 1$, also $F_2 \geq F_1$ erfüllbar ist, kann C nicht auf der Verlängerung von BD über D hinaus liegen, also muss D auf AC liegen (siehe Abbildung).

Nun gilt mit den üblichen Bezeichnungen a, b, c für die Seitenlängen

$$F_1 = \frac{c}{4} \cdot MD \quad ; \quad F_2 = \frac{ab}{2} - F_1$$

Da wegen das Hauptähnlichkeitssatzes $\triangle AMD \sim \triangle ACB$ ist, gilt

$$\frac{c}{2} : MD = b : a \quad ; \quad MD = \frac{ac}{2b} \quad \text{also}$$

$$F_1 = \frac{ac^2}{8b} \quad ; \quad F_2 = \frac{ab}{2} - \frac{ac^2}{8} = \frac{a}{8b}(4b^2 - c^2)$$

Somit wird

$$k = F_2 : F_1 = \frac{4b^2 - c^2}{c^2}$$

genau dann mit ganzzahligem k erfüllt, wenn dies für

$$(k+1) \cdot c^2 = 4b^2 \quad ; \quad \frac{b}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{k+1} \tag{1}$$

zutrifft. Da die Kathetenlänge b kleiner als die Hypotenusenlänge c ist, folgt

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{k+1} < 1 \quad \Rightarrow \quad k < 3$$

Hiernach und wegen $0 < F_2 : F_1 = k$ ist (1) genau mit $k = 1$ und $k = 2$ zu erfüllen.

Die so charakterisierten Dreiecke lassen sich auch unter Verwendung der üblichen Bezeichnungen für die Innenwinkelgrößen folgendermaßen beschreiben:

Im Fall k_1 gilt (1), d. h. $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ genau für alle Dreiecke mit $\alpha = \beta = 45°$.

Im Fall $k = 2$ gilt (1), d. h. $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ genau für alle Dreiecke mit $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

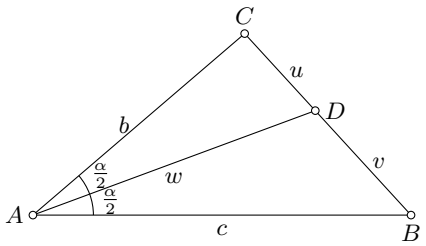
Somit sind genau diese Dreiecke alle gesuchten.

Aufgabe 301214:
In jedem Dreieck ABC seien die Seitenlängen wie üblich mit a, b, c bezeichnet. Die Winkelhalbierende von $\angle CAB$ schneide die Seite BC in einem Punkt D.

Man beweise, dass in jedem Dreieck für die Länge w der Strecke AD gilt:

$$w = \frac{\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{(b+c)^2 - a^2}.$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Bekanntlich teilt in jedem Dreieck jede Winkelhalbierende die jeweils gegenüberliegende Seite in Verhältnis der anliegenden Seiten. Für $u = CD$, $V)BD$ gilt somit

$$u : v = b : c \qquad ; \qquad u + v = a$$

Daraus folgt

$$u = \frac{ab}{b+c} \qquad ; \qquad v = \frac{ac}{b+c}$$

Nach den Kosinussatz für die Dreiecke ACD bzw. ABD folgt mit $\alpha = \angle BAC$ somit

$$b^2 + w^2 - 2bw\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} \tag{1}$$

$$c^2 + w^2 - 2cw\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2c^2}{(b+c)^2} \tag{2}$$

Multipliziert man (1) mit c, (2) mit b und subtrahiert, so folgt

$$bc(b-c) + w^2(c-b) = \frac{a^2bc(b-c)}{(b+c)^2} \tag{3}$$

1. Fall: Ist $b \neq c$, so folgt aus (3)

$$w^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc}{(b+c)^2}((b+c)^2 - a^2)$$

wegen $w > 0$ und $b > 0$, $c > 0$ (woraus auch $(b+c)^2 - a^2 > 0$ folgt) ergibt sich damit die behauptete Formel.

2. Fall: Ist $b = c$, so ist diese Herleitung über (3) nicht möglich. In diesen Fall ist AD auch Seitenhalbierende und Höhe; daher folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$w = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$$

Die behauptete Formel lautet im Fall $b = c$ aber

$$w = \frac{\sqrt{b^2}}{2b} + \sqrt{(2b)^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$$

und ist diesem damit ebenfalls bewiesen.

Aufgabe 321213:
Dora und Karla berechnen für verschiedene Flächen jeweils den Quotienten aus Flächeninhalt und Umfang. Sie vermuten: Wählt Dora ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck D und Karla den einbeschriebenen Kreis K dieses Dreiecks D, so müssen sich stets einander gleichgroße Quotientenwerte ergeben.

Trifft diese Vermutung zu?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
In einem gleichschenkligen Dreieck ABC sei $BC = AC = a$, $AB = c$; mit dem Fußpunkt F der auf AB senkrechten Höhe sei $CF = h$.

Diese Höhe ist zugleich Seitenhalbierende und Winkelhalbierende; auf ihr liegt somit der Mittelpunkt M des einbeschriebenen Kreises k. Das Lot von M auf BC habe den Fußpunkt G; der Radius von k ist damit $r = MF = MG$.

Das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2}ch$ und den Umfang $2a + c$; der Quotient aus diesen Größen ist

$$\frac{ch}{2 \cdot (2a + c)} \tag{1}$$

Wegen $\angle BCF = \angle MCG$ und $\angle BFC = \angle MGC = 90°$ ist nach dem Hauptähnlichkeitssatz $\triangle BFC \sim \triangle MGC$; daher gilt

$$\frac{c}{2} : a = r : (h - r) \Rightarrow r = \frac{ch}{2a + c} \tag{2}$$

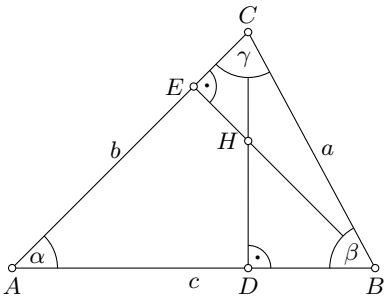
Der Quotient aus Flächeninhalt πr^2 und Umfang $2\pi r$ von k beträgt $\frac{r}{2}$; nach (2) hat er somit ebenfalls den Wert (1). Damit ist die Vermutung als zutreffend nachgewiesen.

Aufgabe 331214:
Man beweise, dass für jedes spitzwinklige Dreieck ABC die folgende Aussage gilt:

Sind a, b, c die Seitenlängen, α, β, γ die Winkelgrößen, ist F der Flächeninhalt, ist D der Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe und ist H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC, so gilt für die Streckenlängen $\overline{CH}$ und $\overline{HD}$ die Gleichung

$$\overline{CH} \cdot \overline{HD} = \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}{4F^2}$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Fußpunkt der auf AC senkrechten Höhe sei E. Da das Dreieck spitzwinklig ist, liegen D, E, H im Innern der Strecken AB, AC bzw. CD (siehe Abbildung). Es gilt

$$EC = a \cdot \cos\gamma \tag{1}$$

$$AD = b \cdot \cos\alpha \tag{2}$$

$$BD = a \cdot \cos\beta \tag{3}$$

$$F = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha \tag{4}$$

Da der Winkel $\angle DHE$ die Größe $180° - \alpha$ und mithin der Winkel $\angle CHE$ die Größe α hat, sowie wegen (1) und (4) folgt

$$CH = \frac{EC}{\sin\alpha} = \frac{a \cdot \cos\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot \cos\gamma}{2F} \tag{5}$$

Die Dreiecke HDB und ADC sind einander ähnlich, da sie in den Winkelgrößen α und $90°$ übereinstimmen. Daher gilt $HD : BD = AC : CD$, also

$$HD = \frac{AD \cdot BD}{CD}$$

Wegen $F = \frac{1}{2}c \cdot CD$, also $CD = \frac{2F}{c}$, folgt hieraus und aus (2),(3)

$$HD = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta}{2F} \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt, wie behauptet,

$$\overline{CH} \cdot \overline{HD} = \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}{4F^2}$$

II Runde 2

Aufgabe V01121:
Bei der Aufnahme (Vermessung und Bestimmung der Koordinaten) einer Landstraße erhält man einen Polygonzug, dessen Eckpunkte folgende Koordinaten haben (Maßangaben in m):

$$A(0{,}00,;0{,}00), B(87{,}00;54{,}40), C(153{,}60;44{,}00), D(206{,}40;25{,}00), E(303{,}50;33{,}80), F(352{,}00;0{,}00)$$

a) Berechnen Sie die Länge der Landstraße!
b) Die Landstraße ist 5,5 m breit. Sie soll asphaltiert werden. Es ist näherungsweise zu ermitteln, wie viel m^2 Straße asphaltiert werden müssen!

Lösung von Steffen Polster:
a) Mit dem Satz des Pythagoras gelten:

$$\begin{aligned}
\left|\overline{AB}\right| &= \sqrt{(87-0)^2 + (54{,}4-0)^2} \approx 102{,}61,\\
\left|\overline{BC}\right| &= \sqrt{(153{,}6-87)^2 + (44-54{,}4)^2} \approx 67{,}41,\\
\left|\overline{CD}\right| &= \sqrt{(206{,}4-153{,}6)^2 + (25-44)^2} \approx 56{,}11,\\
\left|\overline{DE}\right| &= \sqrt{(303{,}5-206{,}4)^2 + (33{,}8-25)^2} \approx 97{,}50,\\
\left|\overline{EF}\right| &= \sqrt{(352-303{,}5)^2 + (0-33{,}8)^2} \approx 59{,}12.
\end{aligned}$$

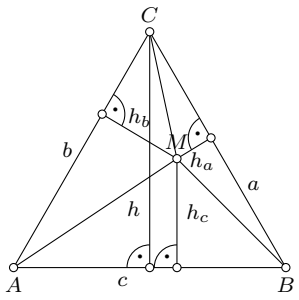
Die Länge l der Landstraße beträgt $l \approx 382{,}75\,\text{m}$. b) Für die zu asphaltierende Fläche gilt

$$A = 5{,}5\,\text{m} \cdot l = 5{,}5\,\text{m} \cdot 382{,}75\,\text{m} \approx 2105{,}13\,\text{m}^2$$

und somit müssen ungefähr 2105,13 Quadratmeter Straße asphaltiert werden.

Aufgabe V11123:
Beweisen Sie folgende Behauptung!
In einem gleichseitigen Dreieck ist die Summe der Abstände eines im Innern des Dreiecks gelegenen Punkte von den Dreiecksseiten gleich der Höhe des Dreiecks.

Lösung von svrc:



Wir bezeichnen mit $\triangle ABC$ das Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C. Da das Dreieck gleichseitig ist, gilt für die den Eckpunkten gegenüberliegenden Seiten $a = \left|\overline{BC}\right|$, $b = \left|\overline{AC}\right|$ und $c = \left|\overline{AB}\right|$, dass $a = b = c$ ist. Diese Seiten möchten wir alle als Grundseite $g = a = b = c$ bezeichnen.

Liegt im Inneren des Dreiecks ein Punkt M, so entstehen die drei Dreiecke $\triangle ABM$, $\triangle BCM$ und $\triangle CAM$. Diese Dreiecke besitzen ebenfalls die Grundseite g.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ mit Grundseite g und Höhe h ist genauso groß wie die Summe der Flächeninhalte der drei kleineren Dreiecke. Die Höhen in $\triangle ABM$, $\triangle BCM$ und $\triangle CAM$ nennen wir h_1, h_2 und h_3. Dies sind auch die Abstände von M zur entsprechenden Grundseite.

Es gilt somit

$$\frac{gh}{2} = \frac{gh_1}{2} + \frac{gh_2}{2} + \frac{gh_3}{2} = \frac{g}{2} \cdot \{h_1 + h_2 + h_3\}$$

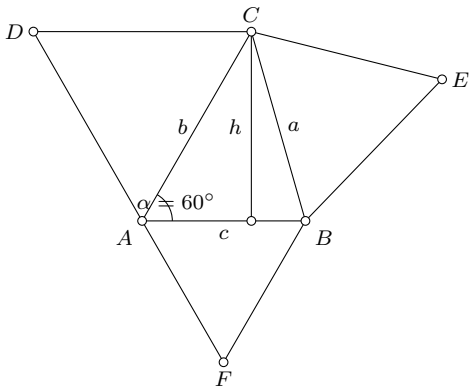
und daher folgt

$$h = h_1 + h_2 + h_3,$$

was die Behauptung zeigt.

Aufgabe V11224:
Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck, das einen Winkel von 60° enthält! Konstruieren Sie nun über allen drei Seiten gleichseitige Dreiecke, so ist die Summe der Flächen des ursprünglichen Dreiecks und des über der Gegenseite des Winkels von 60∘ konstruierten Dreiecks gleich der Summe der Flächen der beiden übrigen Dreiecke.
Beweisen Sie diese Behauptung!

Lösung von MontyPythagoras:



Der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks BEC ist

$$A_{BEC} = \tfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Die anderen Flächen der gleichseitigen Dreiecke berechnen sich in gleicher Weise. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC lautet

$$A_{ABC} = \tfrac{1}{2}ch = \tfrac{1}{2}bc\sin 60^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{4}bc$$

Daher soll gelten:

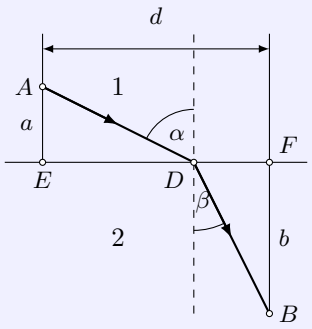
$$\tfrac{\sqrt{3}}{4}bc + \tfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \tfrac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \tfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

Laut dem Kosinussatz gilt außerdem

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 60^\circ$$

Da $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ist, ist die obige Gleichung tatsächlich erfüllt. q. e. d.

Aufgabe 021222:



Ein Lichtstrahl, der in einem Medium 1 die Geschwindigkeit c_1 hat, wird an der Grenzschicht gebrochen und hat im Medium 2 die Geschwindigkeit c_2.
Beweisen Sie, dass die für den Weg ADB (siehe Abbildung) benötigte Zeit ein Minimum wird, wenn gilt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

Lösung von Carsten Balleier:
Zuerst muss die Zeit als Funktion der Veränderlichen ausgedrückt werden, deren Minimum dann gesucht werden muss. Diese Funktion ist die Summe aus der Zeit für die Durchquerung von Medium 1 und der für Medium 2:

$$t(\alpha,\beta) = \frac{1}{c_1}\frac{a}{\cos\alpha} + \frac{1}{c_2}\frac{b}{\cos\beta}$$

Dabei gilt die Nebenbedingung $a\tan\alpha + b\tan\beta = d$. Diese wird wie folgt verwendet:

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{b^2}(d-a\tan\alpha)^2}}$$

Einsetzen liefert:

$$\bar{t}(\alpha) = \frac{a}{c_1}\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{b}{c_2}\sqrt{1+\frac{1}{b^2}(d-a\tan\alpha)^2}$$

Wir bilden die erste Ableitung:

$$\overline{t}'(\alpha) = \frac{a}{c_1}\frac{-1}{\cos^2\alpha}(-\sin\alpha) + \frac{b}{c_2}\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{b^2}(d-a\tan\alpha)^2}}\cdot\frac{1}{b^2}\cdot 2(d-a\tan\alpha)\cdot(-a)\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

An Extremstellen wird diese Null:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\cos^2\alpha}\left[\frac{a}{c_1}\sin\alpha - \frac{a}{c_2}\frac{d-a\tan\alpha}{\sqrt{b^2+(d-a\tan\alpha)^2}}\right] \\
0 &= c_2\sin\alpha - c_1\frac{d-a\tan\alpha}{\sqrt{b^2+(d-a\tan\alpha)^2}} \\
&= c_2\sin\alpha - c_1\frac{b\tan\beta}{1+\tan^2\beta} \\
&= c_2\sin\alpha - c_1\sin\beta
\end{aligned}$$

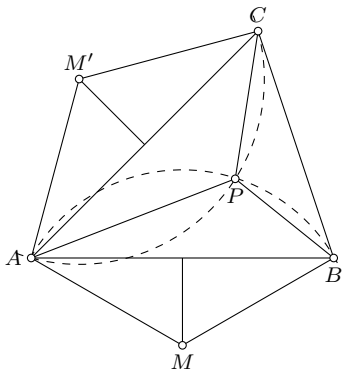
Das ist aber äquivalent zu

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Anmerkung: Die Kontrolle der Lösung in der 2.Ableitung zeigt, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt.

Aufgabe 041225:
In einem spitzwinkligen Dreieck ABC ist der Punkt P zu konstruieren, von dem aus alle Seiten des Dreiecks unter gleich großen Winkeln erscheinen (d. h. $\angle BPA \cong \angle CPB \cong \angle CPA$).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Wir nehmen an, dass P der gesuchte Punkt im Innern des Dreiecks ABC sei (also $\angle APB \cong \angle BFC \cong \angle CPA \cong \frac{4}{3}R$, R: rechter Winkel).
Den Kreis durch A, P, B bezeichnen wir mit K. den Kreis durch A, P, C mit K'. M sei der Mittelpunkt von K, M' der Mittelpunkt von K'. Nach dem Satz vom Peripheriewinkel gilt $\angle AMB \cong \frac{4}{3}R$ und daher $\angle MAB \cong \frac{R}{3}$.

Man zeichnet also in dem Dreieck ABC die Mittelsenkrechte von AB und trägt in A an AB nach außen einen Winkel von 30° an, dessen freier Schenkel die Mittelsenkrechte in M schneidet (siehe Abbildung).

Analog konstruiert man M'. Die Kreise um M bzw. M' mit den Radien MA bzw. $M'A$ schneiden einander außer in A in einem weiteren Punkt P (Berührung kann nicht eintreten, da hierbei $\angle BAC \cong \frac{4}{3}R$ sein müsste, was der Voraussetzung widerspricht). Der Schnittpunkt P liegt entweder

a) Im Innern des Winkels BAC oder
b) im Innern des zugehörigen Scheitelwinkels.

a) Angenommen, P läge im Innern des Winkels BAC, aber nicht im Innern des Dreiecks ABC. Dann wäre die Summe der Innenwinkel des Vierecks $ABPC$ größer als $4R$, im Widerspruch zum Satz über die Winkelsumme im Viereck.

b) Angenommen, P läge im Innern des zugehörigen Scheitelwinkels. Dann gälte nach dem Satz vom Peripheriewinkel $\angle APB \cong \angle APC \cong \frac{2}{3}R$, also $\angle BFC \cong \frac{4}{3}R$.
Da das Dreieck BAC im Innern des Dreiecks BFC liegt, gälte

$$\angle ABC + \angle BCA < \angle PBC + \angle PCB \cong \frac{2}{3}R$$

also $\angle BAC > \frac{4}{3}R$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es bleibt also nur der Fall, dass P im Innern des Dreiecks ABC liegt. Nach der Konstruktion ist

$$\angle APB \cong \angle APC \cong \frac{4}{3}R \quad \text{und} \quad \angle BPC \cong 4R - \frac{8}{3}R \cong \frac{4}{3}R$$

Aufgabe 221222:
Man untersuche, ob es unter allen Dreiecken, bei denen für die Seitenlängen a, b, c die Beziehungen $a \leq 1cm \leq b \leq 2cm \leq c \leq 3cm$ gelten, ein Dreieck mit größtmöglichem Flächeninhalt gibt.
Ist das der Fall, so ermittle man diesen Flächeninhalt.

Lösung von weird:
Gemäß der trigonometrischen Flächenformel

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

für ein Dreieck mit den Seitenlänge a und b, sowie dem eingeschlossenen Winkel γ nimmt A unter Berücksichtigung jetzt nur der Nebenbedingungen

$$a \in (0,1],\ b \in [1,2],\ \gamma \in (0,\pi)$$

sein Maximum offensichtlich für

$$a = 1,\ b = 2, \gamma = \frac{\pi}{2}$$

an. Allerdings haben wir hier noch eine weitere Nebenbedingung, nämlich $c \in [2,3]$ für die dritte Seite c, welche aber dann wegen

$$c = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2.236$$

ebenfalls erfüllt ist, sodass dieses rechtwinklige Dreieck mit Flächeninhalt $A = 1$ dann tatsächlich die Lösung der Aufgabe darstellt.

Aufgabe 241224:
a) Beweisen Sie, dass in jedem rechtwinkligen Dreieck für die Seitenlängen a, b, c und die Höhenlängen h_a, h_b, h_c die Ungleichung

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \qquad (1)$$

gilt!
b) Untersuchen Sie, ob (1) auch in jedem spitzwinkligen Dreieck gilt!
Gibt es a) rechtwinklige, b) spitzwinklige Dreiecke, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Hat die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks die Länge c und wird sie durch die zugehörige Höhe in Abschnitte der Längen p und q zerlegt, so ist nach dem Satz des Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad , \qquad h_c^2 = a^2 - p^2 = b^2 - q^2$$

Ferner gilt $h_a = b$ und $h_b = a$. Damit gilt in jedem rechtwinkligen Dreieck

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 4h_a^2 - 4h_b^2 - 4h_c^2 = 3a^2 + 3b^2 + 3a^2 + 3b^2 - 4b^2 - 4a^2 - 2a^2 + 2p^2 - 2b^2 + 2q^2$$

$$= 2p^2 + 2q^2 > 0$$

Ungleichung (1) ist hiermit für alle rechtwinkligen Dreiecke bewiesen. Zugleich ist gezeigt, dass es kein rechtwinkliges Dreieck gibt, für das in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

b) Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Die Höhenfußpunkte H_a, H_b, H_c liegen dann auf den Seiten BC, CA bzw. AB, und für die Längen $BH_a = a_1$, $H_aC = a_2$, $CH_b = b_1$, $H_bA = b_2$, $AH_c = c_1$, $H_cB = c_2$ gilt

$$a_1 + a_2 = a, \qquad b_1 + b_2 = b, \qquad c_1 + c_2 = c \qquad (2)$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt ferner

$$c^2 = h_a^2 + a_1^2, \qquad b^2 = h_a^2 + a_2^2, \qquad a^2 = h_b^2 + b_1^2$$
$$c^2 = h_b^2 + b_2^2, \qquad b^2 = h_c^2 + c_1^2, \qquad a^2 = h_c^2 + c_2^2$$

Addiert man diese sechs Gleichungen, so ergibt sich nach Multiplikation mit 2

$$4(a^2 + b^2 + c^2) = 4(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) + 2(a_1^2 + a_2^2) + 2(b_1^2 + b_2^2) + 2(c_1^2 + c_2^2) \qquad (3)$$

Nun gilt wegen $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$ die Ungleichung $a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a - 2$, also

$$2(a_1^2 + a_2^2) \geq (a_1 + a_2)^2 = a^2 \qquad (4)$$

und analog

$$2(b_1^2 + b_2^2) \geq b^2 \quad (5) \qquad ; \qquad 2(c_1^2 + c_2^2) \geq c^2 \quad (6)$$

Daraus folgt aus (3)

$$48a^2 + b^2 + c^2) \geq 4(h_a^2 + h_b^2 + h - c^2) + (a^2 + b^2 + c^2)$$

d. h., (1) gilt auch für jedes spitzwinklige Dreieck.
Es gibt spitzwinklige Dreiecke, für die das Gleichheitszeichen in (1) gilt. Im gleichseitigen Dreieck gilt nämlich $a = b = c$ und $h_a = h_b = h_c = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, woraus (1) mit dem Gleichheitszeichen folgt.

Aufgabe 251222:
Beweisen Sie, dass in jedem Dreieck ABC für die Seitenlängen $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ und die Länge s_a der Verbindungsstrecke zwischen dem Punkt A und dem Mittelpunkt M der Strecke BC die Beziehung gilt:

$$s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

Lösung von cyrix:
Nach dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle ABC$ gilt $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, also $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ und nach dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle MAC$ ist

$$s_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2b \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\gamma$$

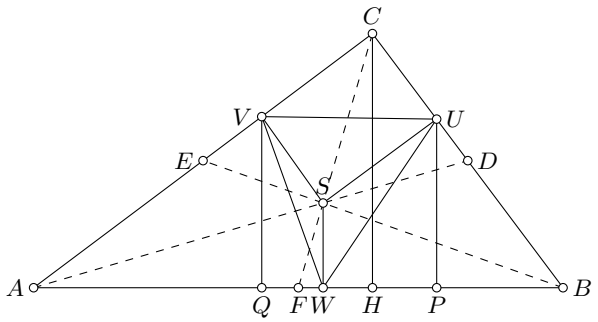
$$= b^2 + \frac{a^2}{4} - ab \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2b^2 - a^2 + 2c^2}{4}$$

also

$$s_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \square$$

Aufgabe 301224:
Ist ABC ein Dreieck, so bezeichne S den Schnittpunkt seiner Seitenhalbierenden, ferner sei mit U, V bzw. W der Fußpunkt des von S auf die Seite BC, CA bzw. AB gefällten Lotes bezeichnet und $J(ABC)$ bzw. $J(UVW)$ bezeichne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC bzw. UVW.
Man beweise mit diesen Bezeichnungen, dass das Verhältnis $r = J(UVW) : J(ABC)$ in allen rechtwinkligen Dreiecken ABC denselben Wert hat und ermittle diesen Wert r.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei ABC ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck, o. B. d. A. mit dem rechten Winkel bei C. Wie üblich sei $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.
Ferner seien CH, UP, VQ die Lote von C, U, V auf AB, und es sei $h = CH$, $p = HB$, $q = HA$. Für jedes Dreieck XYZ bezeichne $J(XYZ)$ seinen Flächeninhalt.

Für den Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden AD, BE und CF gilt bekanntlich

$$SD = \frac{1}{3}AD; \qquad SE = \frac{1}{3}BE; \qquad SF = \frac{1}{3}CF$$

Da nach Voraussetzung $SU \parallel AC$, $SV \parallel BC$, $SW \parallel CH$ ist, folgt aus dem Strahlensatz

$$SU = \frac{b}{3}; \qquad SV = \frac{a}{3}; \qquad SH = \frac{h}{3}$$

Nach Voraussetzung ist ferner $CVSU$ ein Rechteck, also ist auch

$$CV = \frac{b}{3}; \qquad CU = \frac{a}{3}$$

wegen $UP \parallel CH$ und $VQ \parallel CH$ folgt somit nach dem Strahlensatz

$$HP = \frac{p}{3}; \qquad HQ = \frac{q}{3}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} J(SUV) &= \frac{1}{2}SU \cdot SV = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}ab = \frac{1}{9}J(ABC) \\ J(SWU) &= \frac{1}{2}SW \cdot WP \\ J(SWV) &= \frac{1}{2}SW \cdot WQ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(SWU) + J(SWV) &= \frac{1}{2}SW \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{3}(HP + HQ) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{p+q}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}hc \\ &= \frac{1}{9}J(ABC) \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) folgt schließlich

$$J(UVW) = J(SUV) + J(SWU) + J(SWV) = \frac{2}{9}J(ABC)$$

Damit ist bewiesen, dass sich für alle rechtwinkligen Dreiecke der Wert $r = 2 : 9$ ergibt.

Aufgabe 311222:
Man untersuche, ob es ein gleichseitiges Dreieck ABC gibt, dessen drei (nicht miteinander zusammenfallende) Eckpunkte in einem kartesischen Koordinatensystem sämtlich ganzzahlige Koordinaten haben.

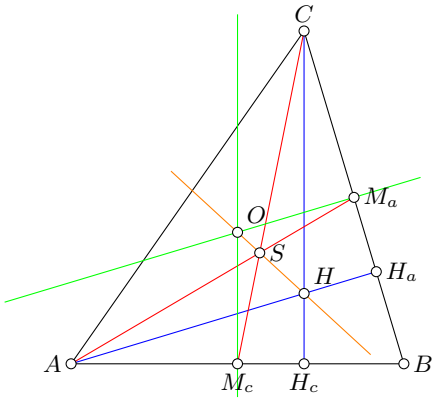
Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Ein solches Dreieck gibt es nicht, da der Flächeninhalt sonst nach dem Satz von Pick rational wäre.

Erklärung:
Wenn die Eckpunkte ganzzahlige Koordinaten haben, dann liegen sie im Koordinatensystem auf der Gitterlinie. Ich kann den Flächeninhalt des Dreiecks dann per Ergänzungsverfahren bestimmen. Das Rechteck hat sicherlich rationalen Flächeninhalt, da seine Linien auf der Gitterlinie verlaufen und ganzzahlig sind. Vom Rechteck muss ich dann 3 (oder nach Lage auch 2) rechtwinklige Dreiecke abziehen, wobei die Seiten, welche den rechten Winkel einschließen wieder auf der Gitterlinie verlaufen und ganzzahlig sind. Die Dreiecke haben also auch rationalen Flächeninhalt. Damit folgt dann, dass das Dreieck auch rationalen Flächeninhalt hat.
Der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks beträgt jedoch $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$. Nun ist $\frac{a^2}{4} \in \mathbb{Q}$, sodass das Problem sich also auf die Frage, ob $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ reduziert. Dass dies nicht der Fall ist, ist bekannt. Damit ergibt sich ein Widerspruch zur Annahme, ein gleichseitiges Dreieck hätte ganzzahlige Koordinaten.

Aufgabe 321223:
Man beweise:
In jedem Dreieck ist für jede seiner Ecken der Abstand des Höhenschnittpunktes zu dieser Ecke doppelt so groß wie der Abstand des Umkreismittelpunktes von derjenigen Seite, die der genannten Ecke gegenüberliegt.

Lösung von Nuramon:
Wenn man als bekannt voraussetzen darf, dass der Umkreismittelpunkt O, der Höhenschnittpunkt H und Schwerpunkt S auf einer Gerade (der Eulerschen Gerade) liegen, dann folgt die Aussage aus dem Strahlensatz:

Sei D der Mittelpunkt der Seite BC. Für die Ecke A sind dann die Mittelsenkrechte von BC und die Höhe von A auf BC parallel. S teilt die Seitenhalbierende DA von BC im Verhältnis $2:1$, also gilt nach Strahlensatz auch $AH : OD = 2:1$.



Hier ein kurzer Beweis dafür, dass der Schwerpunkt, der Höhenschnittpunkt und der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks ABC auf einer Geraden liegen:

Man erhält das Dreieck $M_aM_bM_c$ der Seitenmitten durch zentrische Streckung von ABC am Schwerpunkt S (der Streckfaktor ist $\frac{1}{2}$).

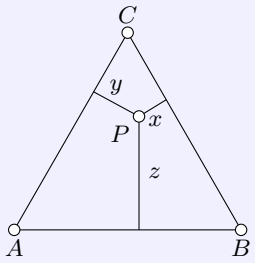
Daher liegen der Höhenschnittpunkt H von ABC, der Schwerpunkt S und der Höhenschnittpunkt H' von $M_aM_bM_c$ auf einer Geraden. Es ist aber offenbar H' auch gleich der Umkreismittelpunkt von ABC. Daraus folgt die Behauptung und es folgt sogar die Aussage, dass der Schwerpunkt die Verbindungslinie vom Höhenschnittpunkt zum Umkreismittelpunkt im Verhältnis $2:1$ teilt.

Aufgabe 331224:
Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck, C' sei der Bildpunkt von C bei der Spiegelung an AB.
Für jeden Punkt P, der auf AB zwischen A und B liegt, seien Q auf BC und R auf CA so gelegen, dass $PQCR$ ein Parallelogramm ist.
Dann sei X der von P verschiedene Schnittpunkt der Umkreise der beiden Dreiecke APR und BPQ.
Man beweise: Die Menge aller so zu erhaltenden Punkte X stimmt überein mit dem im Innern des Dreiecks ABC gelegenen Bogen den Umkreises des Dreiecks ABC'.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Die Dreiecke APR und BPQ sind nach Konstruktion wieder gleichseitig. Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes gilt $60° = \angle ARP = AXP = 60° = \angle PQB = PXB$ und somit $\angle AXB = 120°$. Aus $\angle AXB + \angle BC'A = 180°$ folgt dann, dass $AXBC'$ ein Sehnenviereck ist und X auf dem Umkreis des Dreiecks ABC' liegt.

Für einen gegeben Punkt X auf dem Bogen erhalten wir P als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle AXB$ mit AB. Wegen $\angle AXB = 120°$ erhalten wir wieder mit dem Peripheriewinkelsatz, dass X der Schnittpunkt der beiden Umkreise ist.

Aufgabe 341222:



Man beweise für jeden Punkt P, der im Inneren eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit dem Flächeninhalt $F = 1$ liegt:
Die Längen x, y, z der Lote von P auf die Dreiecksseiten (siehe Abbildung) erfüllen die Gleichung

$$x + y + z = \sqrt[4]{3}$$

Lösung von cyrix:
Nach dem Satz von Viviani gilt $x + y + z = h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Mit $\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 1 \iff a^2 = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ folgt

$$x + y + z = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}\sqrt{3}}}{2}\sqrt{3} = \sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}$$

qed.

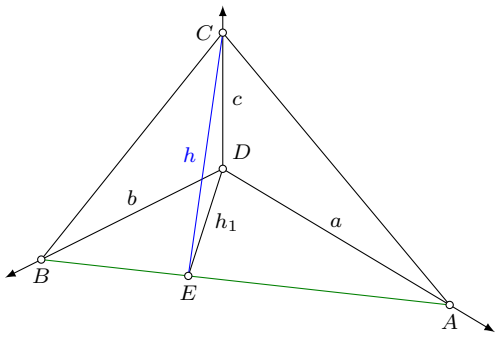
Zum Satz von Viviani:

Die Strecken AP, BP und CP zerlegen das gleichseitige Dreieck $\triangle ABC$ in drei Teildreiecke $\triangle ABP$, $\triangle BCP$ und $\triangle ACP$, deren Flächeninhalte sich jeweils aus dem halben Produkt der Grundseite $|AB| = |BC| = |AC|$ mit der entsprechenden Höhe x, y bzw. z ergibt. Da diese drei Dreiecke das Dreieck $\triangle ABC$ zerlegen, addieren sich ihre Flächeninhalte zu dem des Dreiecks $\triangle ABC$, also zu $\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h$, sodass sich $x + y + z = h$ ergibt.

III Runde 3

Aufgabe V11134:
Von einem Punkt P gehen drei Strecken aus, von denen je zwei senkrecht aufeinander stehen. Die drei Endpunkte A, B, C der Strecken werden miteinander verbunden. Das Quadrat der Fläche des so entstandenen Dreiecks ABC ist gleich der Summe der Quadrate der Flächen der übrigen Dreiecke. Beweisen Sie diese Behauptung!

Lösung von MontyPythagoras:



Die gesuchte Fläche des Dreiecks ABC ist

$$A_{ABC} = \tfrac{1}{2}dh = \sqrt{\tfrac{1}{4}d^2c^2 + (\tfrac{1}{2}dh_1)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2c^2 + \tfrac{1}{4}b^2c^2 + A_{ABD}^2} = \sqrt{A_{ACD}^2 + A_{BCD}^2 + A_{ABD}^2}$$

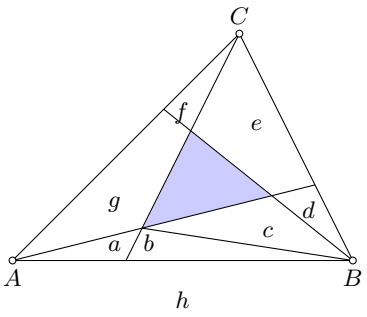
Daher gilt

$$A_{ABC}^2 = A_{ACD}^2 + A_{BCD}^2 + A_{ABD}^2$$

q. e. d.

Aufgabe 011134:
Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Teilt man die Seiten eines Dreiecks ABC im Verhältnis $1 : 2$ und verbindet man die Eckpunkte A, B bzw. C mit den Teilpunkten A_0, B_0 bzw. C_0, so bilden die Verbindungsgeraden ein Dreieck DEF, dessen Flächeninhalt gleich einem Siebentel des Flächeninhalts des ursprünglichen Dreiecks ist.

Lösung von Eckard Specht:



Beweis: Bezeichnen wir die durch die Teilung entstandenen Teilflächen mit $a, b, ..., h$ (s. Bild).
Wir zeigen zunächst, dass $f + g = 6a$ gilt. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass sich die Flächeninhalte zweier Dreiecke bei gleicher Höhe wie die zugehörigen Grundseiten verhalten. Damit lassen sich folgende Gleichungen ablesen:

$$f + g = (f + g + e + h) - (e + h) = 2(a + b + c + d) - 2(c + d) = 2(a + b) = 2a + 4a = 6a$$

Auf analoge Weise erhalten wir die Gleichungen $a + b + c = 6d$ und $d + e = 6f$, deren Addition

$$(f + g) + (a + b + c) + (d + e) = A - h = 6(a + d + f) \qquad (1)$$

ergibt, wobei A der Flächeninhalt von $\triangle ABC$ ist. Außerdem gilt:

$$2(a + b + c + d) = e + f + g + h \quad ; \quad 2(d + e + f) = g + a + b + c + h$$

$$2(f + g + a) = b + c + d + e + h$$

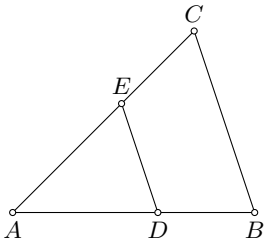
deren Addition auf

$$3(a + d + f) = 3h \Rightarrow a + d + f = h \qquad (2)$$

führt. (1) und (2) ergeben dann die Behauptung $h = \frac{1}{7}A$.

Aufgabe 021132:
Gegeben sei ein Dreieck ABC. Zur Seite BC wird eine Parallele gezogen, die die Seiten AB bzw. AC in D bzw. E schneidet.
In welchem Verhältnis teilt D die Seite AB, wenn sich die Umfänge der Dreiecke ADE und ABC zueinander verhalten wie der Inhalt des Dreiecks ADE zum Inhalt des Trapezes $DBCE$?

Lösung von W. Engel und U. Pirl:



Sei $k \equiv \frac{AD}{AB}$. Dann gilt ebenso $k = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, da es sich bei $ABCDE$ wegen $DE \parallel BC$ um eine Strahlensatzfigur handelt. Mit den üblichen Abkürzungen $BC \equiv a$, $CA \equiv b$ und $AB \equiv c$ soll nun laut Voraussetzung

$$\frac{DE + EA + AD}{a + b + c} = \frac{ka + kb + kc}{a + b + c} = k = \frac{[ADE]}{[DBCE]}$$

sein, wobei $[XYZ]$ den Flächeninhalt von XYZ bezeichnet.
Da jedoch $[DBCE] = [ABC] - [ADE]$ gilt und Dreieck ADE aus Dreieck ABC durch eine zentrische Stauchung um den Faktor k hervorgeht, ist $[ADE] = k^2[ABC]$. Daraus folgt die Gleichung

$$k = \frac{[ADE]}{[ABC] - [ADE]} = \frac{k^2}{1 - k^2} \quad \Rightarrow \quad k^2 + k - 1 = 0$$

Als Lösung dieser quadratischen Gleichung kommt wegen $0 < k < 1$ nur $k = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0{,}618$, die Verhältniszahl des goldenen Schnitts, in Frage. Punkt D teilt demzufolge die Seite AB im Verhältnis

$$\frac{k}{1 - k} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)}{1 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5} - 1)(3 + \sqrt{5}}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

Aufgabe 031232:
Beweisen Sie folgenden Satz:
Ein Dreieck mit den Winkeln α, β und γ ist genau dann rechtwinklig, wenn gilt:

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$$

Lösung von Eckard Specht:
Beweis: Die Lösungsidee bei derartigen Aufgaben besteht darin, die gegebene Gleichung in ein Produkt von Faktoren umzuformen, das null ist. Die gestellte Bedingung (hier die Rechtwinkligkeit des Dreiecks) muss sich dann darin wiederfinden, dass die Faktoren einzeln null werden.
Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras ist klar, dass die Gleichung

$$(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0 \qquad (1)$$

genau das Gewünschte liefert. Es bleibt also nur zu zeigen, dass (1) äquivalent zur gegebenen Gleichung

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1$$

ist. Dieser Lösungsansatz gestattet es gleichzeitig, beide Beweisrichtungen elegant zu erledigen:

i) Ist das Dreieck rechtwinklig, verschwindet genau einer der Faktoren in (1) und (2) ist erfüllt;
ii) Ist (2) und damit (1) erfüllt, so muss mindestens einer der Faktoren in (1) verschwinden, und das bedeutet Rechtwinkligkeit des Dreiecks.

Wie kommt man nun von (2) auf (1)? Wir benutzen ein Additionstheorem und den Kosinussatz:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 - 1 = \frac{a^2(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 2a^2b^2c^2}{2a^2b^2c^2}$$

Zusammen mit den zyklischen Vertauschungen dieser Gleichung für $\cos 2\beta$ und $\cos 2\gamma$ führt das auf die Gleichung

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2)^2 + b^2(c^2 + a^2 - b^2)^2 + c^2(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2c^2 = 0$$

Ein Ausmultiplizieren der Klammerausdrücke, Zusammenfassen und anschließende Faktorisierung führt in der Tat auf (1).

Aufgabe 091235:
Die Ebene ε eines gegebenen Dreiecks $\triangle ABC$ wird in dessen Eckpunkten derart von drei Kugeln berührt, dass die Kugeln außerdem paarweise einander von außen berühren.
Ermitteln Sie die Radien der drei Kugeln in Abhängigkeit von den Seitenlängen des gegebenen Dreiecks!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Seien M_A,M_B,M_C und r_A,r_B,r_C die Mittelpunkte bzw. die Radien der Kugeln. Das Viereck ABM_BM_A hat in A und B zwei rechte Winkel und die Seiten AM_A und BM_B sind parallel. Da die Kugel sich berühren hat M_AM_B die Länge r_A+r_B. Der Satz des Pythagoras ergibt die Gleichung $|AB|^2+(|AM_A|-|BM_B|)^2 = |M_AM_B|^2$.
Einsetzen und kürzen liefert die Gleichung $c^2 = 4r_Ar_B$. Zusammen mit den Gleichungen zu den beiden anderen Seiten erhalten wir das Gleichungssystem

$$c^2 = 4r_Ar_Bb^2 = 4r_Ar_Ca^2 = 4r_Br_C \ .$$

Dieses hat die Lösung $r_A = \frac{bc}{2a}$,$r_B = \frac{ac}{2b}$,$r_C = \frac{ab}{2c}$

Aufgabe 131235:
Die Maßzahlen der Seitenlängen eines Dreiecks ABC seien $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{4}$.
Man beweise: Sind α, β und γ die Größen der Innenwinkel dieses Dreiecks, so hat die Gleichung

$$x \sin\alpha + y \sin\beta + z \sin\gamma = 0$$

als einzige Lösung im Bereich aller Tripel ganzer Zahlen das Zahlentripel $(x; y; z) = (0; 0; 0)$.

Lösung von cyrix:
Im Dreieck $\triangle ABC$ sei die Länge der Seite, die dem Winkel mit Größe α gegenüberliegt, mit $a = \sqrt{2}$ bezeichnet, analog $b = \sqrt{3}$ und $c = \sqrt{4} = 2$. Dann gilt nach dem Sinussatz $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$, also

$$bc \sin\alpha = ac \sin\beta = ab \sin\gamma =: T$$

Die zu betrachtende Gleichung $x \sin\alpha + y \sin\beta + z \sin\gamma = 0$ geht durch Multiplikation mit abc und Division durch T dann äquivalent über in $0 = x \cdot a + y \cdot b + z \cdot z = \sqrt{2}x + \sqrt{3}y + 2z$ bzw. $-2z = \sqrt{2}x + \sqrt{3}y$. Quadrieren liefert

$$4z^2 = 2x^2 + 3y^2 + 2xy\sqrt{6} \qquad \text{bzw.} 2xy\sqrt{6} = 4z^2 - 2x^2 - 3y^2 \in \mathbb{Q}$$

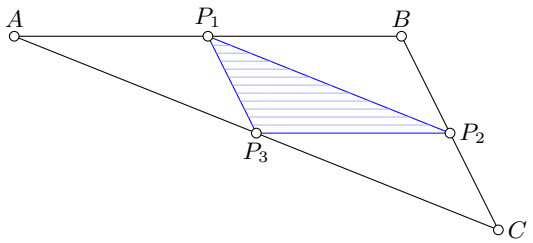
Da $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ gilt, aber $2xy$ als ganze Zahl rational ist, muss $2xy = 0$, also $x = 0$ oder $y = 0$ gelten.
Ist $x = 0$, so folgt aus $\sqrt{3}y = -2z \in \mathbb{Q}$ auch $y = z = 0$ und analog aus $y = 0$ aus $\sqrt{2}x = -2z \in \mathbb{Q}$ genauso nun $x = z = 0$, sodass es nur höchstens diese eine Lösung $(x; y; z) = (0; 0; 0)$ gibt.
Einsetzen dieser Werte bestätigt aber schnell, dass dies auch wirklich eine, also die einzige, Lösung der zu betrachtenden Gleichung ist, $\square$.

Aufgabe 161235:
In einer Ebene sei eine Menge von endlich vielen Punkten, die nicht alle auf ein und derselben Geraden liegen, so gegeben, dass der Flächeninhalt jedes Dreiecks, das drei dieser Punkte als Eckpunkte hat, nicht größer als 1 ist.
Man beweise, dass für jede derartige Menge eine Dreiecksfläche (einschließlich ihres Randes verstanden) existiert, deren Flächeninhalt nicht größer als 4 ist und die die gegebene Menge enthält.

Lösung von Kornkreis:
Nach der Voraussetzung, dass nicht alle Punkte der Menge auf derselben Gerade liegen, gibt es mindestens drei Punkte, die ein nicht-entartetes Dreieck bilden. Betrachte von allen Dreiecken, deren Eckpunkte aus der betrachteten Menge sind, eines mit dem größten Flächeninhalt (so ein Dreieck existiert, da die Menge nur endlich viele Punkte besitzt und damit nur endlich viele Dreiecke).

Bezeichne die Eckpunkte dieses Dreiecks mit P_1, P_2, P_3. Da dessen Flächeninhalt maximal ist, müssen alle anderen Punkte in einem Gebiet (oder auf dessen Rand) liegen, welches begrenzt wird durch die Parallelen zur Seite P_iP_j durch die Punkte P_k sowie P_k' (für alle i,j,$k \in \{1,2,3\}$ paarweise verschieden), wobei P_k' den Spiegelpunkt von P_k bezüglich der Seite P_iP_j bezeichnet. Das folgt einfach daraus, dass die Fläche eines Dreiecks gleich „Grundseite mal Höhe durch 2“ ist.

Die Parallelen zu P_iP_j durch die jeweiligen Punkte P_k ergeben ein Dreieck ABC, welches bereits ein geschlossenes Gebiet ist, sodass die Parallelen durch die Spiegelpunkte P_k' nicht mehr betrachtet werden müssen. Man überlegt sich leicht, dass die Seitenlängen von $\triangle ABC$ dem Doppelten der jeweiligen Seitenlängen von $\triangle P_1P_2P_3$ entsprechen.



Damit gilt für die Dreiecksfläche $A_{\triangle ABC} = 4 \cdot A_{\triangle P_1P_2P_3} \leq 4$, was die Behauptung zeigt.

Aufgabe 171235:
Man beweise folgenden Satz:
Sind u der Umfang, r der Radius des Inkreises und R der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC, dann gilt

$$R > \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{ur}$$

Ist das Dreieck insbesondere rechtwinklig, dann gilt sogar $R \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{ur}$.

Lösung von cyrix:
Es sei U der Umkreismittelpunkt, I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$ und F seine Fläche. Dann zerlegen die Strecken AI, BI und CI das Dreieck in drei Teildreiecke, die jeweils die Grundseiten AB, AC bzw. BC und eine dazu zugehörige Höhe der Länge r besitzen. Also ist

$$F = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (|AB| + |AC| + |BC|) = \frac{1}{2} \cdot ur$$

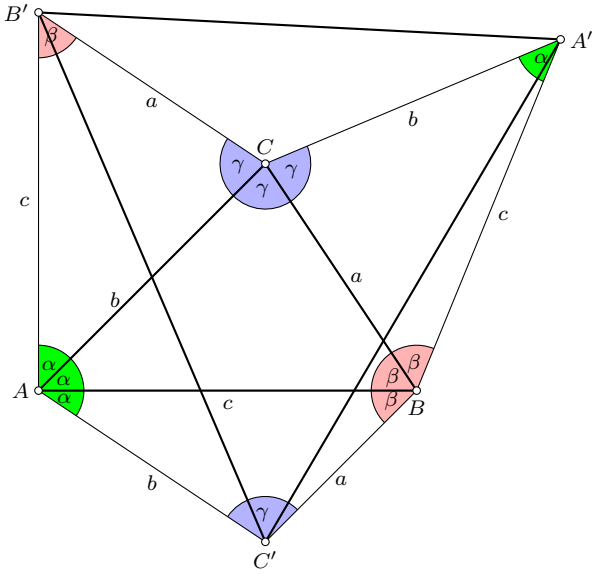
und damit $ur = 2F$.
Die drei (ggf. auch zu einer Strecke entarteten) Dreiecke $\triangle ABU$, $\triangle ACU$ und $\triangle BCU$ sind jeweils gleichschenklig mit Schenkellänge R, besitzen also jeweils einen Flächeninhalt von $\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin \angle x$, wobei x der Innenwinkel des betreffenden Dreiecks bei U ist.

Da der Sinus nur Werte ≤ 1 annimmt und nicht alle drei hier betrachteten Dreiecke rechtwinklig bei U sein können (liegt U im Innern oder auf dem Rand des Dreiecks $\triangle ABC$, so ergänzen sich diese drei Innenwinkel der Teildreiecke bei U zu 360°, sonst bildet die Summe von zwei dieser drei Innenwinkel den dritten), aber diese drei Dreiecke das Dreieck $\triangle ABC$ vollständig überdecken, gilt $F < 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 = \frac{3}{2} \cdot R^2$ bzw. $R^2 > \frac{2}{3}F = \frac{1}{3} \cdot ur$, also $R > \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{ur} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{ur}$.

Ist das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig bei C, so ist U nach der Umkehrung des Satzes von Thales der Mittelpunkt von AB. Damit gilt $|AB| = 2R$. Ist h die Höhe von C auf AB, so ist offenbar $h \leq |CU| = R$, also $F = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h \leq \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R = R^2$. Damit ergibt sich nun $R^2 \geq F = \frac{1}{2} \cdot ur$ bzw. $R \geq \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{ur} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{ur}$, $\square$.

Aufgabe 181236B:
Ist $\triangle ABC$ ein Dreieck, so bezeichne A' den Bildpunkt von A bei Spiegelung an der Geraden durch B und C, B' den Bildpunkt von B bei Spiegelung an der Geraden durch C und A, C' den Bildpunkt von C bei Spiegelung an der Geraden durch A und B.
Mit diesen Bezeichnungen beweise man:
Genau dann ist $\triangle A'B'C'$ ein zu $\triangle ABC$ ähnliches Dreieck - mit jeweils A, A' bzw. B, B' bzw. C, C' als entsprechende Ecken -, wenn $\triangle ABC$ gleichseitig ist.

Lösung von moudi:



Wir zeigen die Kontraposition. Ist $\triangle ABC$ nicht gleichseitig, so sind $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ nicht ähnlich.

Sei also Dreieck $\triangle ABC$ nicht gleichseitig. O.b.d.A. nehme ich $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ an. Dann ist der Winkel $\alpha < 60°$ und $\gamma > 60°$. Jetzt unterscheide ich die Fälle $\beta \leq 60°$ und $\beta \geq 60°$.

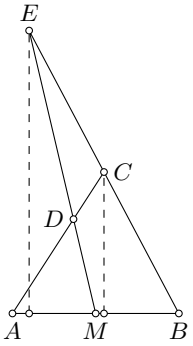
Fall 1: $\beta \leq 60°$.
Da Winkel $\angle C'AB' = 3\alpha < 180°$ und $\angle A'BC' = 3\beta \leq 180°$, liegt A' innerhalb und B innerhalb oder höchstens auf dem Rand des Sektors $\angle BC'A = \gamma$. Deshalb ist Winkel $|\angle A'C'B'| < \angle BC'A = \gamma$. (Beachte, dass die Orientierung im Fall $\gamma > 90°$ des Dreieck $\triangle A'B'C'$ ändern kann und deshalb Winkel $A'C'B'$ negativ werden kann.)

Fall 2: $\beta \geq 60°$.
In diesem Fall ist $\gamma < 120°$. Da Winkel $\angle B'CA' = 3\gamma > 180°$ und Winkel $\angle A'BC' = 3\beta \geq 180°$, liegt B' ausserhalb und C' ausserhalb oder höchstens auf dem Rand des Sektors $\angle CA'B = \alpha$.

Deshalb ist Winkel $\angle B'A'C' > \angle CA'B = \alpha$.

Aufgabe 231231:
In einem Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt der Seite AB. Eine Gerade durch M verlaufe so, dass sie AC in einem Punkt D und die Verlängerung von BC über C hinaus in einem Punkt E schneidet und dass dabei die Dreiecke AMD und CED den gleichen Flächeninhalt haben.
Beweisen Sie, dass durch diese Voraussetzung das Verhältnis $AD : DC$ eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie dieses Verhältnis!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Aus der Voraussetzung über die Flächeninhalte der Dreiecke AMD und CED folgt durch Addition des Flächeninhalts des Vierecks $MBCD$ zu diesen Dreiecksflächen, dass die Dreiecke ABC und MBE gleichen Flächeninhalt haben.
Wegen $AB = 2MB$ hat folglich C halb so großen Abstand von AB wie E. Nach dem Strahlensatz (angewandt auf die Geraden durch B und A bzw. durch B und E sowie die zueinander parallelen Lote von E, C auf AB) folgt $BC = \frac{1}{2}BE$.
Also sind AC und EM Seitenhalbierende im Dreieck ABE, und für ihren Schnittpunkt D folgt

$$AD : DC = 2 : 1$$

Aufgabe 231236:
Es sei $\angle P_0SQ$ ein Winkel von beliebig, aber fest vorgegebener Größe $\alpha < 180°$.
Ein vom Punkt P_0 ausgehender, ins Innere des Winkels gerichteter Lichtstrahl werde jedes mal, wenn er auf einen der Schenkel des Winkels trifft, nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen.
Die Punkte, in denen der Lichtstrahl dabei auf die Schenkel des Winkels trifft, seien fortlaufend mit $P_1, P_2, P_3, ...$ bezeichnet (soweit solche Punkte existieren).
Die Größe des Winkels, den zu Beginn der von P_0 ausgehende Lichtstrahl mit der von P_0 nach S führenden Halbgeraden bildet, sei φ_0 genannt ($0° < \varphi_0 < 180°$).
Beim Experimentieren mit derartigen Winkelspiegeln kann man fragen,

- ob es zu gegebenem φ_0 endlich oder unendlich viele Punkte $P_1, P_2, P_3, ...$ gibt,
- ob es zu jedem φ_0 unter den Punkten $P_1, P_2, P_3, ...$ einen Punkt P_k derart gibt, dass $SP_k \leq SP_i$ für alle $i = 1, 2, 3, ...$ gilt und
- durch wie viele Möglichkeiten ... der Richtungswahl φ_0 es (je nach der Vorgabe von α) erreichbar ist, dass der Lichtstrahl eine auf seinem Weg dem Punkt S nächstgelegene Teilstrecke $P_{m-1}P_m$ mit der Eigenschaft $SP_{m-1} = SP_m$ durchläuft, so dass also das Wegstück $P_0...P_{m-1}$ symmetrisch liegt zum Wegstück $P_m...P_{2m-1}$ bezüglich der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle P_0SQ$.

Diese Frage wird durch folgende Teilaufgaben genauer erfasst:
I. Man beweise die folgenden Aussagen (A) und (B) bei beliebig, aber fest vorgegebenem α
(A) Für jedes φ_0 gibt es genau eine natürliche Zahl n so, dass Punkte $P_0, P_1, ..., P_n$ existieren, während der von P_n ausgehende Lichtstrahl nicht mehr den anderen Schenkel des Winkels $\angle P_0SQ$ erreicht.
(B) Für jedes φ_0 gibt es genau eine natürliche Zahl $m \geq 1$ so, dass Punkte $P_0, P_1, ..., P_{m-1}$ existieren und (falls $m \geq 2$ ist) für $k = 1, ..., m-1$ die Ungleichung $SP_k < SP_{k-1}$ erfüllen, dass dagegen entweder kein Punkt P_m mehr existiert oder $SP_m \geq SP_{m-1}$ sowie (falls $m < n$ ist) für $k = m+1, ..., n$ sogar $SP_k > SP_{k-1}$ gilt.

II. Man ermittle alle diejenigen am Anfang vorzugebenden Werte α, zu denen es
(C) genau einen, (D) genau zwei, (E) genau n
Werte φ_0 mit der Eigenschaft gibt, dass für die in (B) gefundene Zahl m (ein Punkt P_m existiert und) die Gleichung $SP_m = SP_{m-1}$ gilt. In (E) sei dabei $n > 2$ eine gegebene natürliche Zahl.

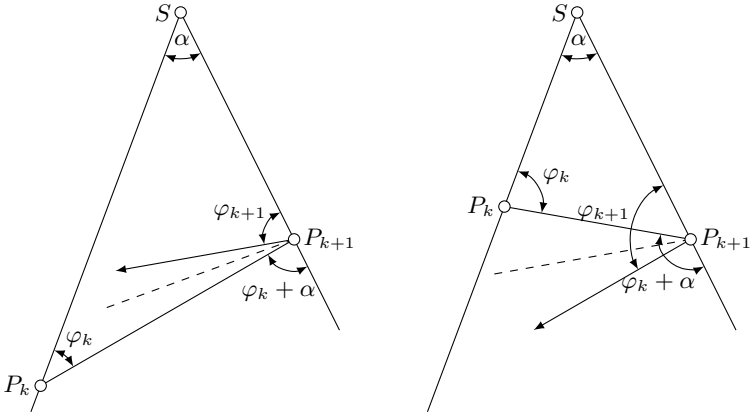
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Die Größe des Winkels, den der von P_k ausgehende Lichtstrahl mit der von $P-k$ nach S führenden Halbgeraden bildet, sei φ_k genannt.
Dieser von P_k ausgehende Lichtstrahl erreicht genau dann den anderen Schenkel des Winkels $\angle P_0SQ$, wenn $\varphi_k < 180° - \alpha$ gilt. Ist dies der Fall, so hat derjenige Strahl, den die von P_{k+1} nach P_k führende Halbgerade mit der Verlängerung von SP_{k+1} über P_{k+1} hinaus bildet, nach dem Außenwinkelsatz die Größe $\varphi_k + \alpha$. (Abbildung)

Nach dem Reflexionsgesetz ist also auch $\varphi_{k+1} = \varphi_k + \alpha$.
Für alle diejenigen k, für die P_k existiert, folgt somit durch vollständige Induktion $\varphi_k = \varphi_0 + k\alpha$.

Wenn daher zu gegebenem (α und) φ_0 eine Zahl k die Eigenschaft $\varphi_0 + k \cdot \alpha < 180°$ hat, dann gilt (entweder $k = 0$ oder, falls $k \geq 1$ ist)

$$\varphi_{k-1} = \varphi_0 + (k-1) \cdot \alpha < 180° - \alpha$$

d. h., dann existiert ein Punkt P_k. Wenn aber $\varphi_0 + k \cdot \alpha \geq 180°$ ist, dann gilt ($k \geq 1$ und) $\varphi_{k-1} \geq 180° - \alpha$; d. h., dann existiert kein Punkt P_k mit diesem k.
Für jedes φ_0 gibt es nun genau eine natürliche Zahl n so, dass $\varphi_0 + n \cdot \alpha < 180°$, aber $\varphi_0 + (n+1) \cdot \alpha \geq 180°$ gilt. Genau diese Zahl hat folglich die in (A) behauptete Eigenschaft.



Für jedes φ_0 und jede natürliche Zahl $k \geq 1$, für die P_k existiert, sowie für jede der drei Relationen in

$$SP_k \gtreqless SP_{k-1}$$

gilt weiter, dass die betreffende Relation infolge des Satzes über Dreiecksseiten und ihre Gegenwinkel äquivalent ist mit der entsprechenden Relation in

$$\varphi_{k-1} \gtreqless 180° - (\varphi_{k-1} + \alpha \qquad ; \qquad \varphi_{k-1} \gtreqless 90° - \frac{\alpha}{2}$$
$$\varphi_0 + (k+1) \cdot \alpha \gtreqless 90° - \frac{\alpha}{2} \qquad ; \qquad \varphi_0 + k \cdot \alpha \gtreqless 90° + \frac{\alpha}{2}$$

Zu jedem φ_0 gibt es sodann genau eine ganze Zahl g so, dass

$$\varphi_0 + (g-1) \cdot \alpha < 90° + \frac{\alpha}{2} \qquad \text{aber} \qquad \varphi_0 + g \cdot \alpha < 90° + \frac{\alpha}{2}$$

gilt. Genau die Zahl $m \max(1; g)$ hat dann die in (B) behauptete Eigenschaft (insbesondere folgt für $m > 1$ die Existenz von $P_0, ..., P_{m-1}$ wegen $\alpha < 180°$ aus $\varphi_0 + (m-1) \cdot \alpha < 90° + \frac{\alpha}{2} < 180°$ und (A)).

II. Eine Winkelgröße φ_0 mit $0° < \varphi 0 < 180°$ hat genau dann die in II. zu untersuchende Eigenschaft, wenn diejenige; durch α und φ_0 eindeutig bestimmte, Zahl m, die die Gleichung

$$\varphi_0 + m \cdot \alpha = 90° + \frac{\alpha}{2}$$

erfüllt, eine natürliche Zahl $m \geq 1$ ist. Zu gegebenem α existieren daher genau so viele derartige Winkelgrößen φ_0, wir es natürliche Zahlen $m \geq 1$ mit

$$0^\circ < 90^\circ + \frac{\alpha}{2} - m \cdot \alpha < 180^\circ$$

gibt. Diese Bedingung für m ist äquivalent mit

$$\frac{\alpha}{2} - 90^\circ < m \cdot \alpha < \frac{\alpha}{2} + 90^\circ$$

also, da die linke Ungleichung wegen $\alpha < 180^\circ$ für alle natürlichen Zahlen gilt, mit

$$m < \frac{1}{2} + \frac{90^\circ}{\alpha}$$

Wegen $\alpha < 180^\circ$ ist stets $\frac{1}{2} + \frac{90^\circ}{\alpha} > 1$, also gibt es stets mindestens eine natürlichen Zahl $m \geq 1$, die diese Bedingung erfüllt.

(C) Die Bedingung wird genau dann von der Zahl $m = 1$ und keiner weiteren natürlichen Zahl $m \geq 1$ erfüllt, wenn $\frac{1}{2} + \frac{90^\circ}{\alpha} \leq 2$ gilt. Das trifft genau für alle $\alpha \geq 60^\circ$ zu.

(D) Die Bedingung wird genau dann von der Zahl $m = 1$ und $m = 2$ und keiner weiteren natürlichen Zahl $m \geq 1$ erfüllt, wenn $2 < \frac{1}{2} + \frac{90^\circ}{\alpha} \leq 3$ gilt. Das trifft genau für alle α mit $36^\circ \leq \alpha < 60^\circ$ zu.

(E) Die Bedingung wird genau dann von den N Zahlen $m = 1, m = 2, ..., m = N$ und keiner weiteren natürlichen Zahl $m \geq 1$ erfüllt, wenn $N < \frac{1}{2} + \frac{90^\circ}{\alpha} \leq N + 1$ gilt.
Das trifft genau für alle α mit

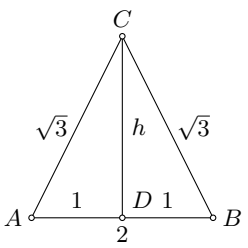
$$\frac{180^\circ}{2N+1} \leq \alpha < \frac{180^\circ}{2N-1}$$

zu.

Aufgabe 241232:
Man beweise:
Wenn die Seitenlängen eines Dreiecks ABC nicht kleiner als $\sqrt{3}$ und nicht größer als 2 sind, dann gilt:
a) ABC ist ein spitzwinkliges Dreieck.
b) Die Längen der Höhen des Dreiecks ABC sind nicht kleiner als $\sqrt{2}$.

Lösung von MontyPythagoras:
Variante 1:

Der größte der Innenwinkel liegt gegenüber der längsten Dreiecksseite, und die kürzeste Höhe gehört ebenfalls zur längsten Seite (letzterer Zusammenhang ergibt sich ganz einfach daraus, dass Dreiecksseite mal dazugehörige Höhe ja der doppelten Fläche des Dreiecks entspricht, also konstant ist). Wir setzen daher einfach zwei Seiten zu $\sqrt{3}$ (der kleinstmögliche Wert) und die längste Seite zu 2 (der größtmögliche Wert):



Die Höhe dieses Dreiecks ist laut Satz des Pythagoras

$$h^2 = \sqrt{3}^2 - 1 = 2$$

$$h = \sqrt{2}$$

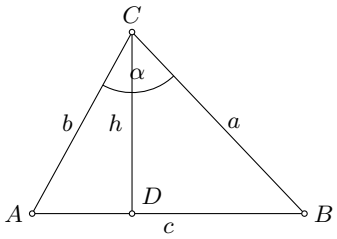
Es sei immer $\overline{AB} > \overline{AC}$ und $\overline{AB} > \overline{BC}$. Wenn man nun die Seiten AC oder BC verlängert oder AB verkürzt, wird h größer, so dass tatsächlich $h \geq \sqrt{2}$ gilt, was Aufgabenteil b) beweist.

Der Winkel in C wäre nur dann ein stumpfer Winkel, wenn der Winkel $\angle ACD > 45°$ wäre. Es ist jedoch

$$\angle ACD = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} < \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = 45°$$

womit auch Aufgabenteil a) bewiesen wäre.

Variante 2 (allgemeiner):



O. B. d. A. sei $c > a,b$. Laut Kosinussatz gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2ab + (a-b)^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab}$$

α wird möglichst groß, wenn $\cos\alpha$ möglichst klein wird. Das ist der Fall, wenn c möglichst groß, a und b möglichst klein und am besten $a = b$ wird. Wie in Variante 1 ist der Winkel also möglichst groß, wenn $a = b = \sqrt{3}$ und $c = 2$ ist. Dann ist

$$\cos\alpha = \frac{3 + 3 - 4}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3} > 0$$

$$\alpha < \frac{\pi}{2}$$

Damit wäre Aufgabenteil a) bewiesen. Für die Dreiecksfläche gilt:

$$F = \tfrac{1}{2}ab\sin\alpha = \tfrac{1}{2}ch$$

Und daher:

$$h = \frac{ab}{c}\sin\alpha$$

Bei gegebenem Flächeninhalt wird h umso kleiner, je größer c wird. Wir setzen also maximal $c = 2$. Bei gegebenem c wird der Flächeninhalt und damit auch h umso kleiner, je kleiner a und b werden. Deshalb setzen wir $a = b = \sqrt{3}$ und können daher das Ergebnis für α direkt verwenden. Es ist

$$h_{min} = \frac{\sqrt{3}^2}{2}\sqrt{1 - \left(\tfrac{1}{3}\right)^2} = \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{8}}{3} = \sqrt{2}$$

und daher

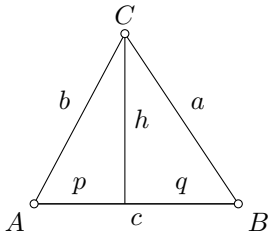
$$h \geq \sqrt{2}$$

Alternativ-Lösung von Nuramon:

a) Seien a,b,c die Seitenlängen des Dreiecks, wobei o. B. d. A. $a \le b \le c$ sei. Nach Kosinussatz ist das Dreieck spitzwinklig, genau dann wenn $a^2 + b^2 > c^2$ gilt. Diese Bedingung ist erfüllt, denn

$$a^2 + b^2 \ge 3 + 3 > 4 \ge c^2.$$

b) Wegen a) verlaufen die Höhen innerhalb des Dreiecks. Seien wieder a,b,c die Seitenlängen, wobei diesmal nicht zwingend $a \le b \le c$ gelten soll. Wir betrachten o. B. d. A. die Höhe h von C auf AB.



Seien p,q die Längen der Abschnitte, in die c durch h zerlegt wird. Wegen $p + q = c \le 2$ muss $p \le 1$ oder $q \le 1$ gelten. O. B. d. A. sei $p \le 1$. Dann folgt

$$h^2 = b^2 - p^2 \ge 3 - 1 = 2,$$

also $h \ge \sqrt{2}$.

Aufgabe 261233B:
Man beweise, dass in jedem Dreieck ABC für die Seitenlänge $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, die Größen α, β, γ der Innenwinkel $\angle CAB; \angle ABC; \angle BCA$ sowie für den Inkreisradius ρ und den Flächeninhalt F die Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{b}\cos^2\frac{\beta}{2} + \frac{1}{c}\cos^2\frac{\gamma}{2} \ge \frac{27\rho}{8F} \tag{1}$$

Man gebe alle diejenigen Dreiecke an, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach der Formel $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$ und dem Kosinussatz gilt

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2a}(1 + \cos\alpha) = \frac{1}{2a}\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = \frac{b^2 + c^2 - a^2 + 2bc}{4abc}$$

Entsprechend ist

$$\frac{1}{b}\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{c^2 + a^2 - b^2 + 2ac}{4abc} \quad ; \quad \frac{1}{c}\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{4abc}$$

Bezeichnet T die linke Seite der Ungleichung (1), so gilt

$$T = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}{4abc}$$

Mit der Abkürzung $s = \frac{1}{2}(a + b + c+)$ also

$$T = \frac{s^2}{abc}$$

Ferner ist $F = \rho \cdot s$ (nach Heron) also

$$T = \frac{s^3}{abc}\frac{\rho}{F} \tag{2}$$

Nun gilt nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

$$\frac{1}{3}(a + b + c) \ge \sqrt[3]{abc} \tag{3}$$

und darin das Gleichheitszeichen genau im Fall $a = b = c$.
Äquivalent zu (3) ist

$$s^3 \geq \frac{27}{8} abc \tag{4}$$

und das Gleichheitszeichen in (3) ist äquivalent zu dem in (4). Damit folgt aus (2), (4)

$$T \geq \frac{27}{8} \cdot \frac{\rho}{F}$$

d. h. die zu beweisende Ungleichung (1), und es folgt, dass das Gleichheitszeichen in (1) genau im Fall $a = b = c$, d. h. genau für alle gleichseitigen Dreiecke gilt.

Aufgabe 271234:
Man beweise für jedes Dreieck ABC:
Bezeichnen wie üblich b, c, h_a die Längen der Seiten AC, AB bzw. der auf BC senkrechten Höhe und α die Größe des Winkels $\angle BAC$, so gilt

$$h_a \leq \sqrt{bc} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \tag{1}$$

Man ermittle alle diejenigen Dreiecke ABC, bei denen in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist somit gleich $\frac{1}{2}ah_a$ (mit $a = BC$) als auch gleich $\frac{1}{2}bc\sin\alpha$. Hiernach und nach der Formel $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ gilt

$$h_a = \frac{bc \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{2bc \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{a} \tag{2}$$

Nach dem Kosinussatz sowie nach der Formel $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ gilt ferner

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha = (b-c)^2 + 4bc \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} \geq 4bc \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} \tag{3}$$

Aus (2) und (3) ergibt sich wegen

$$a, b, c, \sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2} > 0 \tag{4}$$

die Behauptung

$$h_a \leq \frac{2bc \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{bc} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{bc} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

Wegen (4) gilt darin das Gleichheitszeichen genau dann, wenn es in (3) gilt, d. h. genau für alle diejenigen Dreiecke ABC, in denen $b = c$ ist.

Aufgabe 291233A:
Auf der Randlinie eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit der Seitenlänge 1 m bewegen sich drei Punkte P_1, P_2, P_3 und zwar P_1 mit der Geschwindigkeit 1 $\frac{m}{s}$, P_2 mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2}\frac{m}{s}$, P_3 mit der Geschwindigkeit $\sqrt{3}\frac{m}{s}$.
Zu Beginn (Zeitpunkt $t = 0$) befindet sich P_1 in A, P_2 in B, P_3 in C.
Die Bewegungsrichtung ist bei allen drei Punkten einheitlich stets im Umlaufsinn von A nach B, von B nach C, von C nach A.
Man untersuche, ob es einen Zeitpunkt $t > 0$ gibt, zu dem P_1, P_2, P_3 wieder die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind (wobei auch der Fall $P_1 = P_2 = P_3$ als Sonderfall eines gleichseitigen Dreiecks aufgefasst werde).

Lösung von MontyPythagoras:
Die Strecke, die ein Punkt P_i zum Zeitpunkt t insgesamt zurückgelegt hat, ist $v_i \cdot t$, wobei v_i die jeweilige Geschwindigkeit ist. Man bestimmt die Position eines Punktes, indem die gesamte zurückgelegte Strecke um das Dreieck „herumgewickelt“ wird. Da der Umfang des Dreiecks $U = 3$ ist, kann man Vielfache von 3 abziehen. Die Zählung beginne jeweils beim Eckpunkt A: ein Wert von 7,3 bedeute zum Beispiel, dass der Punkt P sich auf der Strecke BC befindet, und zwar 0,3 m vom Punkt B entfernt.
In dieser Weise gilt für die drei Punkte P_i:

$$(1) \qquad x_1 = t$$

$$(2) \qquad x_2 = 1 + \sqrt{2}t$$

$$(3) \qquad x_3 = 2 + \sqrt{3}t$$

Der Summand „1“ in Gleichung (2) ist dem Startpunkt B geschuldet, ebenso der Summand „2“ in Gleichung (3) aufgrund des Startpunktes C.
Wir untersuchen zunächst, ob es möglich ist, dass sich alle drei Punkte gleichzeitig in Eckpunkten des Dreiecks befinden. Der Punkt 1 befindet sich genau dann in einem Eckpunkt, wenn x_1 eine ganze Zahl ist. Dann muss, da $x_1 = t$ gilt, auch t ganzzahlig sein. Aber schon der Punkt 2 wird sich nie zur gleichen Zeit in einem Eckpunkt befinden können, weil er sich von seinem Startpunkt aus um $\sqrt{2}t$ weiterbewegt haben wird. Da bekanntermaßen $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist, ist $\sqrt{2} \cdot t$ niemals eine ganze Zahl. Die Punkte P_1 und P_2 befinden sich also niemals gleichzeitig in Eckpunkten, weder im gleichen noch in verschiedenen. Sinngemäß das gleiche gilt auch für den Punkt P_3.

Wir untersuchen nun, ob die drei Punkte zumindest irgendwann ein gleichseitiges Dreieck bilden können, während sie sich jeweils auf den Strecken zwischen zwei Eckpunkten befinden. Wäre der Punkt P_1 zum Beispiel (modulo 3) beim Wert 0,7, dann müssten die Punkte P_2 bei 1,7 und der Punkt P_3 bei 2,7 liegen, wobei allerdings P_2 und P_3 auch die Plätze tauschen dürften. Die Punkte 1 bis 3 könnten also im mathematisch positiven oder negativen Sinne angeordnet sein. Ein gleichseitiges Dreieck läge daher vor, wenn entweder

$$(x_2 - x_1) \equiv 1 \pmod 3 \quad \wedge \quad (x_3 - x_1) \equiv 2 \pmod 3$$

oder

$$(x_3 - x_1) \equiv 1 \pmod 3 \quad \wedge \quad (x_2 - x_1) \equiv 2 \pmod 3$$

gälte. Wir untersuchen zunächst die erste Möglichkeit. Die beiden Bedingungen lassen sich auch wie folgt formulieren:

$$x_2 - x_1 = 1 + (\sqrt{2} - 1)t = 3k + 1$$

und

$$x_3 - x_1 = 2 + (\sqrt{3} - 1)t = 3n + 2$$

mit k,$n \in \mathbb{N}$. Wir eliminieren t, indem wir diese Gleichungen vereinfachen und zusammenführen. Es folgt als Bedingung

$$\frac{3k}{\sqrt{2} - 1} = \frac{3n}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\frac{n}{k} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2} - 1}$$

$\frac{n}{k}$ ist als Quotient aus zwei natürlichen Zahlen eine rationale Zahl. Die Bedingung wäre daher nur erfüllbar, wenn $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1}$ eine rationale Zahl wäre. Für die zweite Konstellation ergibt sich analog:

$$x_2 - x_1 = 1 + (\sqrt{2} - 1)t = 3k + 2 \qquad \text{und} \qquad x_3 - x_1 = 2 + (\sqrt{3} - 1)t = 3n + 1$$

Daraus folgt:

$$\frac{3k + 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{3n - 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$\frac{3n - 1}{3k + 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2} - 1}$$

Auch $\frac{3n-1}{3k+1}$ ist eine rationale Zahl. Daher kann man zusammenfassend festhalten, dass die Punkte P_1 bis P_3 nur dann zu einem bestimmten Zeitpunkt $t > 0$ ein gleichseitiges Dreieck bilden, wenn

$$r = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1}$$

eine rationale Zahl wäre.
r ist irrational, was bedeutet, dass die Punkte eben nie wieder ein gleichseitiges Dreieck bilden.
Nachweis: Es ist

$$r = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\sqrt{2}r - (r-1) = \sqrt{3}$$

Quadrieren:

$$2r^2 + (r-1)^2 - 2(r-1)\sqrt{2} = 3$$

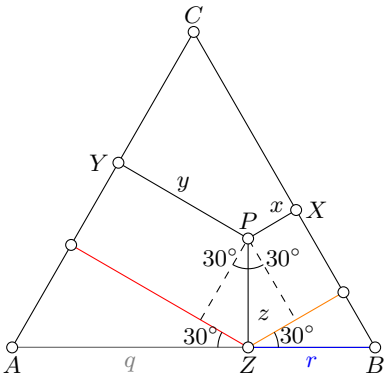
$$3r^2 - 2r - 2 = 2(r-1)\sqrt{2}$$

$$\frac{3r^2 - 2r - 2}{2(r-1)} = \sqrt{2}$$

Wenn r rational wäre, dann wäre es auch $\sqrt{2}$, was nicht der Fall ist. So folgt aus der Irrationalität von $\sqrt{2}$ unmittelbar die Irrationalität von r.

Aufgabe 341232:
Im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC werde ein Punkt P beliebig gewählt.
Die Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten BC, CA, AB seien in dieser Reihenfolge mit X, Y, Z bezeichnet.
Man beweise, dass die Summe der Längen x, y, z der Strecken BX, CY, AZ nicht von der Wahl des Punktes P abhängt.

Lösung von MontyPythagoras:



Zu bestimmen ist die Summe $x + y + z$. Es ist

$$y = q\cos 30° - z\sin 30°$$

und

$$x = r\cos 30° - z\sin 30°$$

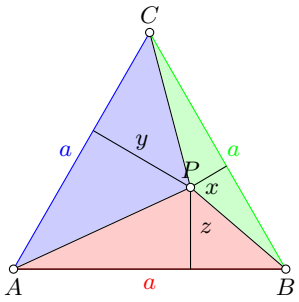
Bekanntermaßen ist $\sin 30° = \frac{1}{2}$ und $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Das ergibt:

$$x + y + z = \tfrac{\sqrt{3}}{2}r - \tfrac{1}{2}z + \tfrac{\sqrt{3}}{2}q - \tfrac{1}{2}z + z = \tfrac{\sqrt{3}}{2}(q+r) = h$$

wobei h die Höhe des Dreiecks sei. q. e. d.

Man kann es sich auch durch einfache geometrische Überlegungen klarmachen, wenn man sieht, dass $x + y + z$ gleich der Summe der roten und orangefarbenen Strecke entspricht. Spiegelt man das ganze Dreieck an der Strecke AB, wird auch klar, dass die Summe der roten und orangefarbenen Strecke gleich der Höhe des gleichseitigen Dreiecks ist.

Alternativ-Lösung von MontyPythagoras:



Offensichtlich ist die Summe der Flächen der drei Teildreiecke gleich dem Flächeninhalt des gesamten Dreiecks ABC. Also gilt:

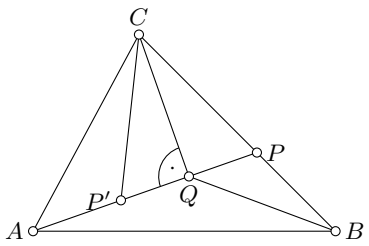
$$\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az = \frac{1}{2}ah$$
$$x + y + z = h$$

q. e. d.

IV Runde 4

Aufgabe 031245:
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\beta = 45°$. Auf der Seite BC liege ein Punkt P, wobei $BP : PC = 1 : 2$ (innere Teilung) und $\angle APC = 60°$ sind.
Jemand behauptet, man könne allein mit elementaren geometrischen Sätzen ohne Benutzung der ebenen Trigonometrie die Größe des Winkels γ ermitteln.

Lösung von Henning Thielemann:



Auf der Strecke AP sei Q der Punkt, welcher von P den gleichen Abstand hat, wie B von P. Dann ist das Dreieck QPB gleichschenklig und weil $\angle CPQ = 60°$ sein soll, ist der Nebenwinkel $\angle QPB = 120°$ und die Basiswinkel des Dreiecks QPB sind 30° groß.
Die Größe des Winkels $\angle PBA$ wird als 45° vorausgesetzt, daher muss $\angle QBA = 15°$. Der Winkel $\angle AQB$ muss als Nebenwinkel von $\angle BQP150°$ groß sein. Damit ist auch $\angle BAP = 15°$, wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck BAP. Auch BAP ist folglich ein gleichschenkliges Dreieck.

Nun soll das Dreieck PQC genauer betrachtet werden: Da PC doppelt so lang wie PB und mithin doppelt so lang wie PQ ist, und der Winkel $\angle CPQ60°$ groß ist, ist $\angle PQC$ ein rechter Winkel. Davon überzeugt man sich am besten, indem man noch einen Punkt P' auf der Gerade durch A und P hinzunimmt.

Dann ist $P'PC$ ein gleichseitiges Dreieck, weil $PC = PP'$ und $\angle CPQ = 60°$ und Q ist als Mittelpunkt von $P'P$ gleichzeitig Lotfußpunkt vom Lot von C auf $P'P$. Weil $\angle CPQ = 60°$ und $\angle PQC = 90°$ ergibt sich wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck PQC dass $\angle QCP = 30°$. Damit ist dieser Winkel genauso groß wie $\angle PBQ$ und auch BQP ist gleichschenklig.

Der Punkt Q gehört also zu zwei gleichschenkligen Dreiecken, die sich die Seite QB teilen. Es ergibt sich, dass die Strecken QA, QB und QC gleich lang sind. Also ist Q Umkreismittelpunkt von ABC.

Das Dreieck CQA ist deshalb ebenfalls gleichschenklig und außerdem, wie oben gezeigt, rechtwinklig. Der Winkel $\angle ACQ$ ist damit 45° groß.

Die gesuchte Größe von $\angle ACB$ ist $\angle ACQ + \angle QCP = 45° + 30° = 75°$.

Aufgabe 051243:
Unter allen Strecken MN, die das Dreieck $\triangle ABC$ in zwei inhaltsgleiche Teile zerlegen, ist die Anzahl und die Länge aller derjenigen zu ermitteln, die möglichst kurz sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Wir betrachten zunächst eine Strecke MN, deren Endpunkt M auf dem Strahl aus A durch B und deren Endpunkt N auf dem Strahl aus A durch C liegt und für die der Inhalt des Dreiecks AMN halb so groß ist, wie der Inhalt des Dreiecks ABC.
Die Strecke MN darf auch teilweise außerhalb des gegebenen Dreiecks verlaufen. Setzt man $AM = x$ und $AN = y$, so ist nach einer bekannten Inhaltsformel der Flächeninhalt des Dreiecks AMN genau dann halb so groß wie der des Dreiecks ABC, wenn

$$\frac{1}{2}xy\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

also $2xy = bc$ gilt.
Bedeutet $d_a = MN$, so ergibt sich nach dem Kosinussatz, angewandt auf $\triangle AMN$

$$\begin{aligned} d_a^2 &= x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha = (x-y)^2 + 2xy(1-\cos\alpha) \\ &= (x-y)^2 + bc(1-\cos\alpha) \end{aligned}$$

Andererseits gilt nach dem Kosinussatz, angewandt auf das Dreieck ABC,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = (b-c)^2 + 2bc(1-\cos\alpha) \quad \text{also}$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

Folglich ist

$$d_a^2 = (x-y)^2 + \frac{1}{2}[a^2 - (b-c)^2] = (x-y)^2 + 2(s-b)(s-c)$$

mit $2s = a + b + c$. Unter Verwendung der Dreiecksformel $I_{\triangle ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ergibt sich somit

$$d_a^2 = (x-y)^2 + \frac{2I^2}{s(s-a)} \qquad (2)$$

Durch zyklische Vertauschung von (2) ergeben sich

$$d_b^2 = (x'-y')^2 + \frac{2I^2}{s(s-b)}; \quad d_c^2 = (x''-y'')^2 + \frac{2I^2}{s(s-c)} \qquad (3)$$

wenn x', y', x'', y'' die entsprechenden Abschnitte bei einer Strecke bedeuten, deren Endpunkte auf den von B bzw. C ausgehenden Strahlen liegen und d_b bzw. d_c die Längen dieser Strecken sind.

Wir nehmen o. B. d. A. an, dass $a \leq b \leq c$ ist. Dann gilt

$$\frac{2I^2}{s(s-a)} \leq \frac{2I^2}{s(s-b)} \leq \frac{2I^2}{s(s-c)}$$

und das erste bzw. zweite Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $a = b$ bzw. $b = c$ ist. Hieraus und aus (2) und (3) ergibt sich, dass jede der Längen d_a, d_b, d_c nicht kleiner als

$$\frac{\sqrt{2}I}{\sqrt{s(s-a)}}$$

ist. Um zu zeigen dass

$$d = \frac{\sqrt{2}I}{\sqrt{s(s-a)}} = \sqrt{2(s-b)(s-c)}$$

das gesuchte Minimum ist, genügt es zu zeigen, dass die für $x = y$ entstehende Strecke MN, deren Länge $d_a = d$ ist, nicht in das Äußere des Dreiecks eintritt.
Im Fall $x = y$ ergibt sich aus (1)

$$x = y = \sqrt{\frac{bc}{2}}$$

Da $a \leq b \leq c$ vorausgesetzt ist, gilt wegen der Dreiecksungleichung $c < a + b \leq 2b$ und daher

$$\sqrt{\frac{bc}{2}} < \sqrt{b^2} = b \leq c$$

so dass jeder der Punkte M und N auf einer der Dreiecksseiten liegt.

Ist $a < b$, so gibt es genau eine kürzeste unter diesen Strecken, nämlich die für $x = y$.
Ist $a = b < c$, so gibt es genau zwei kürzeste unter diesen Strecken, nämlich die für $x = y$ und $x' = y'$.
Ist $a = b = c$, so gibt es entsprechend drei kürzeste unter diesen Strecken, die für $x = y$, $x' = y'$ und $x'' = y''$.

Aufgabe 071246:
Es ist folgender Satz zu beweisen:
Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn mindestens zwei seiner Winkelhalbierenden gleich lang sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Der Beweis des Satzes erfordert zwei Schritte; es sind die folgenden Behauptungen zu beweisen:

1. Ist ein Dreieck gleichschenklig, so sind mindestens zwei seiner Winkelhalbierenden gleichlang.
2. Sind in einem Dreieck mindestens zwei Winkelhalbierende gleichlang, so ist das Dreieck gleichschenklig.

Beweis zu 1.:
Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit den Winkelhalbierenden $AE = w_\alpha$ und $BF = w_\beta$. Ferner sei dieses Dreieck gleichschenklig mit $AC = BC$, also $\angle CAB = \alpha = \angle ABC = \beta$. Dann folgt aus

$$\angle EAB = \angle ABF = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle ABE = \angle FAB \Rightarrow \triangle ABE \cong \triangle ABF$$

Somit gilt $AE = BF$, d. h. $w_\alpha = w_\beta$, was zu beweisen war.

Beweis zu 2.:
Es sei in dem wie oben bezeichneten Dreieck $\triangle ABC$ $w_\alpha = w_\beta$, d. h., $AE = BF$.

Den Beweis, dass dann $\alpha = \beta$ gilt, führen wir indirekt. Angenommen diese Behauptung sei falsch; dann können wir o. B. d. A. annehmen, dass $\alpha > \beta$ gilt. Wir zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt.
Der Punkt G sei so gelegen, dass $FG \parallel AE$ und $FG = AE = w_\alpha$ gilt. Dann liegt G außerhalb des Dreiecks $\triangle ABC$. Nach dem Kosinussatz gilt nun

$$BE^2 = c^2 + w_\alpha^2 - 2w_\alpha c \cos\frac{\alpha}{2} \qquad ; \qquad AF^2 = c^2 + w_\beta^2 - 2w_\beta c \cos\frac{\beta}{2}$$

Nach Voraussetzung ist $w_\alpha = w_\beta$ und $\frac{\beta}{2} < \frac{\alpha}{2} < 90°$, also $\cos\frac{\alpha}{2} < \cos\frac{\beta}{2}$. Daraus folgt

$$BE > AF \qquad (1)$$

Da $AEGF$ auf Grund der obigen Voraussetzung ein Parallelogramm ist, gilt $AF = EG$. In dem Dreieck $\triangle BGE$ gilt daher wegen (1) $BE > EG$, also

$$\angle BGE > \angle EBG \qquad (2)$$

Ferner gilt wegen $\angle FAE = \angle EGF$

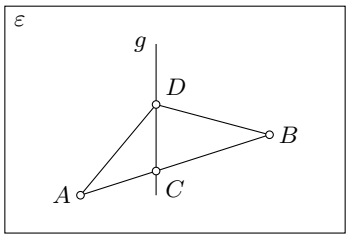
$$\frac{\alpha}{2} = \angle EGF > \angle FBE = \frac{\beta}{2} \qquad (3)$$

Durch Addition erhält man aus (2) und (3): $\angle BGF > \angle FGB$.

Das ist ein Widerspruch, weil das Dreieck $\triangle FGB$ gleichschenklig mit $AE = BF = FG$. Damit ist auch die Behauptung (2) bewiesen.

Aufgabe 091242:
Gegeben sei eine Gerade g und eine Strecke AB, die nicht in ein und derselben Ebene liegen. Unter allen Punkten C von g ist ein solcher zu finden, für den der Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ möglichst klein ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



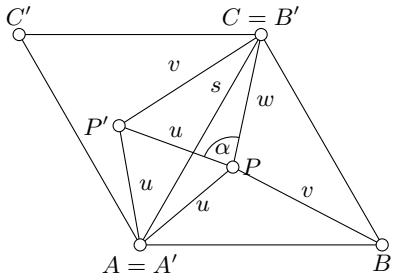
Man betrachtet die Ebene ε, in der die Gerade g und der Punkt A liegen. Man drehe die Ebene, die g und B enthält, so um g, dass das Bild B' von B bei dieser Drehung in der Ebene ε liegt, und zwar so, dass B' und A nicht auf derselben Seite von g liegen (Abbildung).
Der Schnittpunkt C der Strecke AB' mit der Geraden g ist ein Punkt der geforderten Art und der einzige.
Beweis:
Sei D ein beliebiger Punkt der Geraden g. Dann gilt: $DB = DB'$. Daher gilt auch

$$AD + DB = AD + DB'$$

Nun ist stets $AD + DB' \geq AC + CB'$ (Dreiecksgleichung), wobei das Gleichheitszeichen genau für $D = C$ gilt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 151243:
P bezeichne einen Punkt im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC, der von den Eckpunkten dieses Dreiecks die Abstände $PA = u$, $PB = v$, $PC = w$ hat.
Man berechne die Seitenlänge s des gleichseitigen Dreiecks ABC aus u, v, w.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Zunächst wird das in der Aufgabenstellung vorausgesetzte Dreieck ABC samt dem im Innern dieses Dreiecks liegenden Punkt P mit einem Winkel der Größe $\varphi = 60°$ um den Punkt A gedreht. Damit entsteht die in der Abbildung wiedergegebene Figur.



Nach Voraussetzung und Konstruktion gilt $C = B'$ und

$$\angle PAP' = 60° \qquad (1)$$
$$u = AP = AP' \qquad (2)$$
$$v = PB = P'C \qquad (3)$$

Dabei ist B' der Bildpunkt von B, P' der Bildpunkt von P. Aus (2) folgt, dass das Dreieck PAP' gleichschenklig ist. Aus (1) folgt mit 82) nach dem Basiswinkelsatz:

$$\angle APP' = \angle AP'P \qquad (4)$$

Nach dem Innenwinkelsatz im Dreieck gilt:

$$\angle PAP' + \angle AP'P + \angle P'PA = 180° \qquad (5)$$

Aus (5) folgt mit (1) und (4): $\angle APP' = 60°$ (6). Damit ist gezeigt, dass das Dreieck APP' gleichseitig ist. Es gilt also $PP' = u$ (7).
Weiterhin setzt man $\angle P'PC = \alpha$ und wendet den Kosinussatz der ebenen Trigonometrie unter Beachtung von (3) und (7) auf das Dreieck $P'PC$ an:

$$\cos\alpha = \frac{u^2 + w^2 - v^2}{2uw} \qquad (8)$$

Weil P ein innerer Punkt des Dreiecks ABC ist, gilt $\angle ABC < 180°$. Daraus folgt $\alpha < 180°$ und weiterhin $\sin\alpha > 0$. Unter Verwendung der Beziehung $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ folgt:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{u^2 + w^2 - v^2}{2uw}\right)^2} \qquad (9)$$

Hieraus ergibt sich durch algebraische Umformung:

$$\sin\alpha = \frac{1}{2uw}\sqrt{(u^2 + v^3 + w^2)^2 - 2u^4 - 2v^4 - 2w^4} \qquad (10)$$

Mit (8) und (10) ist jetzt unter Anwendung des Kosinussatzes auf das Dreieck APC möglich, die Länge s der Dreiecksseite AC durch u, v und w auszudrücken. Man erhält:

$$s^2 = u^2 + w^2 - 2uw\cos(\alpha + 60°) \qquad (11)$$

Wegen $\cos(\alpha + 60°) = \cos\alpha\cos 60° - \sin\alpha\sin 60°$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$ und $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ folgt mit (8), (10) und (11):

$$s^2 = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + \sqrt{3}\cdot\sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)^2 - 2(u^4 + v^4 + w^4)} \qquad (12)$$

Da die Länge s der Strecke AC positiv ist, ergibt sich aus (12):

$$s = \sqrt{\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2) + \sqrt{3}\cdot\sqrt{(u^2+v^2+w^2)^2 - 2(u^4+v^4+w^4)}}$$

Aufgabe 171243:
a) Man gebe alle Möglichkeiten an, eine gegebene Dreiecksfläche D in drei Dreiecksflächen D_1, D_2, D_3 zu zerlegen.
b) Man beweise:
Ist eine Dreiecksfläche D in drei zueinander ähnliche Dreiecksflächen D_1, D_2, D_3 zerlegbar, so ist sie gleichschenklig oder rechtwinklig.

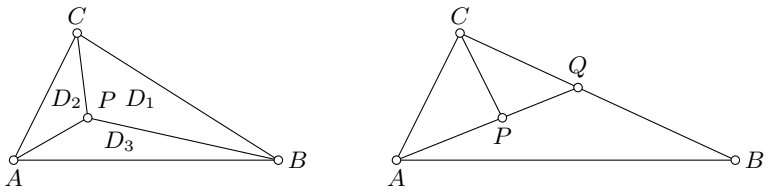
Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Liegt eine Zerlegung der Dreiecksfläche $D(ABC)$ in drei Dreiecksflächen D_1, D_2, D_3 vor, so muss in der Figur zusätzlich zu den Eckpunkten der Dreiecksfläche D wenigstens noch ein vierter Punkt $P \in D$ existieren, der Eckpunkt einer Dreiecksfläche D ist. Dieser Punkt P kann ein innerer Punkt von D oder ein von den Eckpunkten A, B, C verschiedener Randpunkt von D sein.

1. Es werde angenommen, dass P ein innerer Punkt von D ist. Diese Annahme führt auf folgende zwei Zerlegungsfälle:

a) P ist mit den Eckpunkten A bzw. B bzw. C durch je eine Strecke zu verbinden. Es entsteht eine Zerlegung von D in drei Dreiecksflächen.

b) P ist einem der Eckpunkte (etwa A) durch eine Gerade zu verbinden. Die Verbindungsgerade schneidet die Gegenseite (hier a) in Q. Soll P ein Eckpunkt von wenigstens einer der Dreiecksflächen D_i sein, ist P mit einem der noch freien Eckpunkte (hier B oder C) zu verbinden.

Durch zyklische Vertauschung der Bezugselemente der Dreiecksflächen werden alle Zerlegungsmöglichkeiten von D ausgeschöpft, wenn P ein innerer Punkt von D ist (siehe Abbildung 1 und 2).

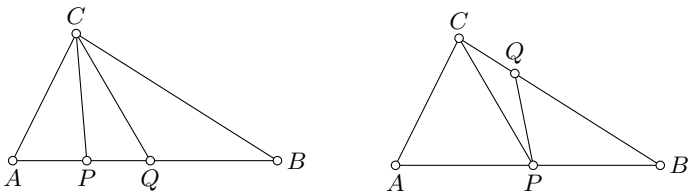


2. Es werde angenommen, dass P ein von den Eckpunkten verschiedener Randpunkt von D ist. Diese Annahme führt auf folgende zwei Zerlegungsfälle:

a) P ist mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt von D durch eine Strecke (hier PC) zu verbinden. Durch diesen Eckpunkt (hier C) ist eine weitere, von PC verschiedene Dreieckstransversale zu legen, die die Gegenseite in Q schneidet. Es entsteht eine Zerlegung von D in drei Dreiecksflächen.

b) P ist mit einem von den Eckpunkten verschiedenen Randpunkt Q von D zu verbinden. Dabei muss Q auf einer vom gegenüberliegenden Eckpunkt von P (hier C) ausgehenden Seite liegen.

Durch die Strecke PQ wird D in einer Vierecks- und Dreiecksfläche zerlegt. Die geforderte Zerlegung von D wird durch Einzeichnen einer Diagonalen in die Viereckfläche herbeigeführt. Dabei ist es unwesentlich, ob die Diagonale durch P oder Q geht.
Durch zyklische Vertauschung der Bezugselemente der Dreiecksfläche werden alle Zerlegungsmöglichkeiten von D erschöpft, wenn P ein von den Eckpunkten verschiedener Randpunkt von D ist. (siehe Abbildung 3 und 4)



3. Lässt sich für die Zerlegung der Dreiecksfläche D in die Dreiecksflächen D_i nach einer der vier möglichen Arten zeigen, dass wenigstens vier der entstehenden Innenwinkel von D_i der Größe nach paarweise voneinander verschieden sind, so ist dies hinreichend dafür, dass diese Dreiecksflächen nicht ähnlich zueinander sind.

Wird eine der DreiecksflächenD_i als gleichschenklig vorausgesetzt, so genügt der Nachweis, dass wenigstens drei der durch die Zerlegung erzeugten Innenwinkel der Größe nach paarweise voneinander verschieden sind. Wird eine der Dreiecksflächen D_i als gleichseitig vorausgesetzt, so genügt der Nachweis, dass die Größe eines der durch die Zerlegung erzeugten Innenwinkels von $60°$ verschieden ist.

Folgende Hilfssätze werden zur Beweisführung herangezogen, ohne dabei zitiert zu werden:

α): Die Summe der Innenwinkelgrößen im Dreieck beträgt $180°$.
β): Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist größengleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.
γ): Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind zueinander größengleich.

4.1. In der Zerlegung 1a) seien die Dreiecksflächen D_1, D_2, D_3 zueinander ähnlich. Da die Innenwinkelgrößen der D_i bei P die Summe von $360°$ haben, müssen wenigstens zwei dieser Innenwinkel stumpf sein.
O. B. d. A. kann angenommen werden, D_1 und D_2 haben in P stumpfe Winkel. Da ein Dreieck höchstens einen stumpfen Winkel haben kann und D_1 und D_2 ähnliche Dreiecksflächen sind, müssen diese stumpfen Winkel größengleich sein.
Nun werde angenommen, in D_3 sei der Winkel $\angle PBA$ stumpf. Dann müsste

$$\angle APC = \angle CPB = \angle PBA$$

gelten. Wegen des eingangs zitierten Satzes γ) gilt $CP \parallel BA$. Dies steht jedoch im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass P ein innerer Punkt von D ist.
Analog lässt sich der Widerspruch herbeiführen, wenn $\angle PAB$ als stumpf vorausgesetzt wird. Folglich ist $\angle APB$ stumpf, und es gilt:

$$\angle CPA = \angle BPC = \angle APB = 120°$$

Angenommen, es gelte $AP = k \cdot BP$ und $BP = h \cdot CP$ mit $k \neq 1$, so folgt $AP = k^2 \cdot CP$ im Widerspruch zur Ähnlichkeitsforderung für die Dreiecksflächen D_i.

Angenommen, es gelte $AP = k \cdot BP$ und $CP = h \cdot BP$ mit $k \neq 1$, so folgt $AP = CP$ im Widerspruch zur Ähnlichkeitsforderung für die Dreiecksflächen D_i.
Die Ähnlichkeitsforderung an die Dreiecksflächen D_i ist daher nur für $k = 1$ erfüllbar. Die Dreiecksflächen D_i sind in diesem Fall gleichschenklig. Die Dreiecksfläche D ist gleichseitig.

4.2. In der Zerlegung 1b) (siehe Abbildung 2) sei die Dreiecksfläche PQC nicht gleichschenklig, und außerdem gelte $\angle PQC \neq 90°$.
Dann sind die vier Winkel $\angle CPQ, \angle PQC, \angle QCP, \angle PQB$ der Größe nach paarweise voneinander verschieden. Hat die Dreiecksfläche PQC unter sonst gleichen Voraussetzungen einen rechten Winkel bei Q, so sind die Winkel $\angle CPQ$, $\angle PQ$, $\angle QCP$, $\angle APC$ der Größe nach paarweise voneinander verschieden.

Ist die Dreiecksfläche PQC gleichschenklig, jedoch nicht gleichseitig und nicht rechtwinklig bei Q, so sind der Außenwinkel $\angle PQB$ und zwei geeignet gewählte Innenwinkel der Größe nach paarweise voneinander

verschieden.

Ist die Dreiecksfläche PQC gleichschenklig mit rechtem Winkel bei Q, so sind die Winkel $\angle APC$, $\angle CPQ$, $\angle PQC$ der Größe nach paarweise voneinander verschieden. Ist die Dreiecksfläche PC gleichseitig, so gilt $\angle PQB = 120°$.
Damit ist gezeigt, dass die Zerlegung von D in D_i nach 1b) (Abbildung 2) nicht auf drei zueinander ähnliche Dreiecksflächen D_i führen kann.

4.3 In der Zerlegung 2a) (siehe Abbildung 3) gelte $CP \neq CQ$. Ferner liege weder bei P noch bei Q ein rechter Winkel. Dann sind die vier Winkel $\angle CPA$, $\angle CPQ$, $\angle CQP$, $\angle CQB$ der Größe nach paarweise voneinander verschieden.
Hat die Dreiecksfläche PQC bei Q einen rechten Winkel (P liegt zwischen A und Q), so sind die Winkel $\angle CAP$, $\angle CPA$, $\angle CPQ$, $\angle CQP$ der Größe nach paarweise voneinander verschieden. Analoges gilt, wenn ein rechter Winkel bei P liegt.
Gilt $CP = CQ$, so sind die drei Winkel $\angle CAP, \angle CPA, \angle CPQ$ der Größe nach paarweise voneinander verschieden. Ist die Dreiecksfläche PQC gleichseitig, so gilt $\angle APC = 120°$.
Damit ist gezeigt, dass die Zerlegung von D in D_i nach 2a) nicht auf drei zueinander ähnliche Dreiecksflächen führen kann.

4.4 Ist die Dreiecksfläche PQC in Abbildung 4 nicht gleichschenklig und besitzt sie bei Q keinen rechten Winkel, so sind die Winkel $\angle CPQ$, $\angle PQC$, $\angle QCP$, $\angle PQB$ ihrer Größe nach paarweise voneinander verschieden.
Ist die Dreiecksfläche PQC gleichschenklig, jedoch nicht gleichseitig und gilt $\angle PQC \neq 90°$, so ist der Nebenwinkel $\angle PQB$ größenmäßig verschieden von dem Scheitel- und Basiswinkel dieser Dreiecksfläche. Ist die Dreiecksfläche PQC gleichseitig, so gilt $\angle PQB = 120°$.

Ist die Dreiecksfläche PQC bei Q rechtwinklig und sonst beliebig, so kann die Ähnlichkeitsforderung im Fall 2b) für die Dreiecksflächen D_i in zweifacher Weise erfüllt werden:

1. Man setzt $\angle QPB$ größengleich mit $\angle QCP$ und mit $\angle CAP$. Weil hierdurch die Winkel $\angle CPQ$ und $\angle QPB$ Komplementwinkel sind, folgt $\angle APC = 90°$. Hieraus resultiert $\angle ACP = \angle CPQ = \angle QBP$. Die Dreiecksflächen D_i sind untereinander und auch zur Dreiecksfläche D ähnlich.

2. Man setzt $\angle QPB$ größengleich mit $\angle QCP$ und mit $\angle ACP$. Weil hierdurch die Winkel $\angle CPQ$ und $\angle QPB$ Komplementwinkel sind, folgt weiter $\angle APC = 90°$.
Hieraus resultiert $\angle CAP = \angle CPQ = \angle QBP$.
Daher ist die Dreiecksfläche $D(ABC)$ gleichschenklig und die Dreiecksflächen Di sind zueinander ähnlich.
Die Dreiecksfläche D ist genau dann ähnlich zu den Dreiecksflächen D_i, wenn $\angle ACB$ ein rechter Winkel ist.
Diese Zerlegung kann auch dem Fall 1 zugeordnet werden.

Damit ist gezeigt:
Ist eine Dreiecksfläche D in drei zueinander ähnliche Dreiecksflächen D_1, D_2, D_3 zerlegbar, so ist sie gleichschenklig oder rechtwinklig. Die erste zerlegende Strecke ist das Lot vom Scheitel der gleichschenkligen Dreiecksfläche bzw. Scheitel des rechten Winkels auf die Gegenseite.
Die zweite zerlegende Strecke ist das Lot vom Lotfußpunkt der ersten zerlegenden Strecke auf eine vom Scheitelpunkt ausgehende Dreiecksseite. Für gleichseitige Dreiecksflächen ist auch eine Zerlegung nach 1a) in kongruente Dreiecksflächen möglich.

Aufgabe 201241:
In einem beliebigen Dreieck ABC seien D, E, F die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden des Dreiecks mit den Dreieckseiten.

Man beweise:
Sind I der Flächeninhalt des Dreiecks ABC und I_1 der Flächeninhalt des Dreiecks DEF, so gilt $I_1 \leq \frac{I}{4}$.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Bezeichnet man die Flächeninhalte der Dreiecke AFE, BDF, CED entsprechend mit I_2, I_3, I_4, so gilt, wenn jeweils A und D, B und E sowie C und F voneinander verschiedene Punkte auf derselben Winkelhalbierenden sind:

$$I_1 = I - I_2 - I_3 - I_4$$

Bezeichnet man die Längen der Dreiecksseiten BC, CA AB entsprechend mit a, b, c und die Größe des Winkels $\angle ACB$ mit α, so gilt:

$$I = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha \quad (2) \qquad \text{und} \qquad I_2 = \frac{1}{2}AF \cdot AE \cdot \sin\alpha \quad (3)$$

Da bekanntlich in jedem Dreieck jede Winkelhalbierende eines Innenwinkels die gegenüberliegende Dreiecksseite innen im Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten teilt, teilt der Punkt E die Seite AC im Verhältnis $c : a$. Also gilt:

$$AE = \frac{bc}{a+c} \qquad (4)$$

Entsprechend gilt:

$$AF = \frac{bc}{a+b} \qquad (5)$$

Wegen (3), (4), (5) gilt daher

$$I_2 = \frac{b^2c^2 \cdot \sin\alpha}{2(a+c)(a+b)} \quad \left(= \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha \frac{bc}{(a+c)(a+b)}\right)$$

und hieraus ergibt sich wegen (2):

$$I_2 = I \cdot \frac{bc}{(a+c)(a+b)} \qquad (6)$$

Entsprechend gilt:

$$I_3 = I \cdot \frac{bc}{(a+b)(b+c)} \qquad ; \qquad I_4 = I \cdot \frac{bc}{(a+c)(b+c)} \qquad (7)$$

Aus (1), (6), (7) folgt:

$$I_1 = I \cdot \left(1 - \frac{bc(b+c) + ac(a+c) + ab(a+b)}{(b+c)(a+c)(a+b)}\right) = I \cdot \frac{2abc}{(b+c)(a+c)(a+b)}$$

Nun gilt auf Grund der Beziehung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel:

$$\frac{b+c}{2} \cdot \frac{a+c}{2} \cdot \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ac} \cdot \sqrt{ab} = abc \qquad \text{also} \qquad (b+c)(a+c)(a+b) \geq 8abc$$

Daher gilt:

$$I_1 = I \cdot \frac{2abc}{(b+c)(a+c)(a+b)} \leq \frac{I}{4}$$

Aufgabe 251246B:
Für jedes Dreieck ABC bezeichne d die Länge des Inkreisdurchmessers, g die größte Seitenlänge und ε die Größe des kleinsten Winkels des Dreiecks ABC.
a) Man beweise: Es gibt eine Konstante K, so dass für jedes Dreieck ABC die folgende Ungleichung (1) gilt:

$$\frac{1}{d} < \frac{K}{g \sin\varepsilon} \qquad (1)$$

b) Unter allen Konstanten K, für die die in a) zu beweisende Aussage gilt, ermittle man die kleinste Konstante, falls diese existiert.

Lösung von cyrix:
Wir bezeichnen alle Längen und Winkel im Dreieck $\triangle ABC$ mit ihren kanonischen Bezeichnungen und setzen o. B. d. A. $c = |AB| \geq |AC| = b \geq |BC| = a$ voraus, woraus direkt $\gamma = \angle ACB \geq \beta = \angle CBA \geq \alpha = \angle BAC$ und mit den Bezeichnungen der Aufgabenstellung $c = g$ sowie $\alpha = \varepsilon$ folgt. Schließlich sei A der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$.
Dann gilt nach dem Sinussatz

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2A} = d$$

Die zu zeigende Ungleichung ist damit äquivalent zu

$$\frac{2A \cdot \sin\alpha}{ab} < K$$

Setzt man hierin noch $2A = ab\sin\gamma$ ein, erhält man die äquivalente Ungleichung

$$\sin\alpha \cdot \sin\gamma < K$$

Für jedes Dreieck $\triangle ABC$ mit stumpfem Winkel γ nimmt für ein Dreieck mit gleichem (oder größerem) kleinsten Innenwinkel α und rechtem Innenwinkel γ das Produkt $\sin\alpha \cdot \sin\gamma$ einen größeren Wert an, sodass wir o. B. d. A. $\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq 90°$ fordern können.
Für festes γ wird das Produkt $\sin\alpha \cdot \sin\gamma$ maximal, wenn α als kleinster Innenwinkel maximal wird, also $\alpha = \beta = \frac{1}{2} \cdot (180° - \gamma) = 90° - \frac{\gamma}{2}$ gilt. Dann ist

$$\sin\alpha \cdot \sin\gamma = \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\gamma = \sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2}} \cdot \sqrt{1-\cos^2\gamma}$$

genau dann maximal, wenn es $(1+x)\cdot(1-x^2)$ mit $x := \cos\gamma$ und $60° \leq \gamma$ (wegen $90° - \frac{\gamma}{2} = \alpha \leq \gamma$), also $\frac{1}{2} \geq x \geq 0$, auch ist.

Es ist für die Funktion

$$f(x) := (1+x)\cdot(1-x^2) = -x^3 - x^2 + x + 1$$

die Ableitungsfunktion

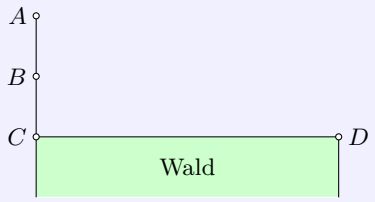
$$f'(x) = -3x^2 - 2x + 1 = (x+1)(-3x+1)$$

welche im Intervall $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ genau die eine Nullstelle $\frac{1}{3}$ besitzt. Für kleinere Werte im Intervall ist f' positiv, für größere negativ, sodass f an dieser Stelle im Intervall sein globales Maximum von $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{32}{27}$ annimmt.
Es ergibt sich für $\gamma = \arccos\frac{1}{3}$ und $\alpha = \beta = 90° - \frac{\gamma}{2}$, dass das Produkt $\sin\alpha \cdot \sin\gamma$ den Wert

$$\sqrt{\frac{16}{27}} = \frac{4}{9} \cdot \sqrt{3} =: K'$$

annimmt; und für alle anderen Innenwinkel-Belegungen einen kleineren.
Damit erfüllt jede reelle Zahl $K > K'$ die Ungleichung der Aufgabenstellung, während es kein kleinstes solches K gibt, da im Fall $K = K'$ bei den angegebenen Winkeln der Gleichheitsfall eintritt.

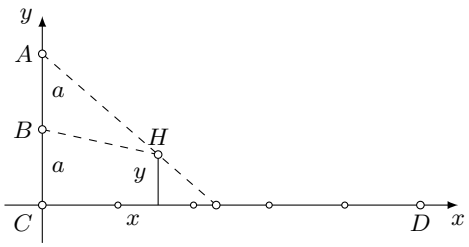
Aufgabe 291242:



Ein Waldstück werde durch eine Strecke CD begrenzt (siehe Abbildung).
In derjenigen Halbebene, die von der Geraden durch C und D begrenzt wird und in der das Waldstück nicht liegt, befindet sich auf der durch C senkrecht zu CD gehenden Geraden ein Hase in einem Punkt A und ein Wolf in einem Punkt B zwischen A und C.
Dabei sei $AB = BC = a$ und $CD = 5a$ mit einer gegebenen Länge a.
Der Hase laufe geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit vom Punkt A zu einem von ihm gewählten Zielpunkt X der Strecke CD. Der Wolf kann höchstens halb so schnell laufen wie der Hase.

Der Hase werde genau dann unterwegs vom Wolf gefasst, wenn die Strecke AX einen Punkt H enthält, den der Wolf gleichzeitig mit dem Hasen oder sogar eher als der Hase erreichen kann.
Man ermittle alle diejenigen Punkte X auf CD, bei deren Wahl als Zielpunkt der Hase erreicht, dass er nicht unterwegs vom Wolf gefasst wird.

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
Man lege ein Koordinatensystem so, dass C, B, A, D die Koordinaten $0;0)$, $(0;a)$, $(0;2a)$ bzw. $(5a;0)$ haben.
Hat ein beliebiger Punkt H der Ebene die Koordinaten $(x;y)$ und bezeichnet v die größtmögliche Geschwindigkeit des Wolfs, also $2v$ die des Hasen, so erreicht der Hase den Punkt H geradlinig in der Zeit $t_1 = \frac{AH}{2v}$ und der Wolf frühestens in der Zeit $t_2 = \frac{BH}{v}$.

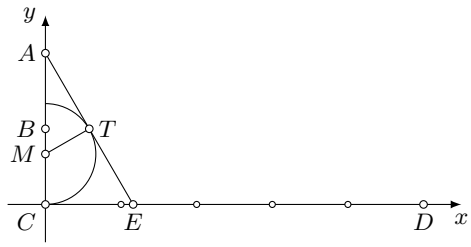


Der Wolf kann somit genau dann den Punkt H weder gleichzeitig mit dem Hasen noch sogar eher als dieser erreichen, wenn für diese Zeiten $t_1 < t_2$ gilt. Das ist der Reihe nach äquivalent mit $AH < 2 \cdot BH$:

$$\sqrt{x^2 + (y-2a)^2} < 2 \cdot \sqrt{x^2 + (y-a)^2} \quad ; \quad 3x^2 + 3y^2 + 4ay > 0$$

$$x^2 + \left(y - \frac{2}{3}a\right)^2 > \left(\frac{2}{3}a\right)^2 \qquad (1)$$

Damit ist gezeigt, dass der Hase durch Wahl seines Zielpunktes x genau dann erreicht, nicht unterwegs vom Wolf gefasst zu werden, wenn die Koordinaten aller Punkte der Strecke AX die Ungleichung (1) erfüllen.
Das trifft genau dann zu, wenn die Strecke AX vollständig außerhalb desjenigen Kreises k liegt, dessen Mittelpunkt M die Koordinaten $\left(0; \frac{2}{3}a\right)$ hat und dessen Radius $\frac{2}{3}a$ beträgt (nachfolgende Abbildung)



Es sei nun E der Schnittpunkt der positiven x-Achse mit derjenigen von A an k gelegten Tangente, die die positive x-Achse schneidet. Für diesen Punkt E und für den Berührungspunkt T der Tangente gilt $TM = \frac{2}{3}a$, $MA = \frac{4}{3}a$ und $\angle MTA = 90°$, also $\triangle CEA \sim \triangle TMA$,

$$CE : EA = TM : MA = 1 : 2 \quad ; \quad EA = 2 \cdot CE \quad ; \quad CA = CE\sqrt{3}$$

$$CE = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$$

Insbesondere liegt daher wegen $\frac{2}{3}\sqrt{3} < 5$ der Punkt auf der Strecke CD und es ist bewiesen:
Die gesuchten Zielpunkte X sind genau die auf der Verlängerung von CE über E hinaus gelegenen Punkte der Strecke CD, d. h. genau die Punkte X auf CD mit $CX > \frac{2}{3}a\sqrt{3}$.

Aufgabe 301246A:
Man beweise:
In jedem Dreieck ABC erfüllen für jeden Punkt P im Innern des Dreiecks die Längen $x = PA$, $y = PB$, $z = PC$ und die Längen u, v bzw. w der von P auf die Seiten BC, CA bzw. AB oder deren Verlängerungen gefällten Lote die Ungleichung

$$xyz \geq (v+w)(w+u)(u+v)$$

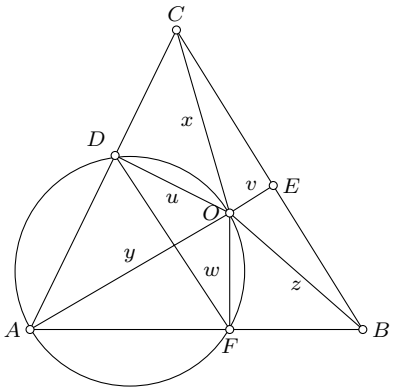
Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Sei ABC ein Dreieck und O ein Punkt innerhalb des Dreiecks. Sei u das Lot von O auf die Seite AC und w das Lot von O auf die Seite AB. Die Lotfußpunkte seien D und F.

Das Viereck $AFOD$ ist dann offensichtlich ein Sehnenviereck und besitzt einen Umkreis. Die Strecke $y := OA$ ist offensichtlich Durchmesser, da die beiden Halbkreise Thaleskreise über der Strecke sind. Der Umkreis ist zudem Umkreis vom Dreieck AFD. Für den Radius des Umkreises gilt somit:

$$\frac{DF}{\sin A} = 2y \iff y \sin A = \frac{DF}{2}$$

Quadrieren liefert:

$$y^2 \sin^2 A = \frac{DF^2}{4} \quad (*)$$



Im Dreieck FOD gilt nach Kosinussatz nun:

$$DF^2 = u^2 + w^2 - 2uw\cos(\pi - A) = u^2 + w^2 + 2uw\cos A$$

Setzen wir in $*$ ein:

$$y^2 \sin^2 A = \frac{u^2 + w^2 + 2uw\cos A}{4}$$
$$4y^2 \sin^2 A = u^2 + w^2 + 2uw\cos A$$

Nun ist $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ und $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ womit $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ folgt. Damit:

$$4y^2 \sin^2 A = u^2 + w^2 + 2uw\left(\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}\right) = (u+w)^2 \cos^2 \frac{A}{2} + (u-w)^2 \sin^2 \frac{A}{2} \geq (u+w)^2 \cos^2 \frac{A}{2}$$

Ziehen wir die Wurzel folgt somit:

$$2y \sin A \geq (u+w)\cos \frac{A}{2}$$

Mit $\frac{\sin x}{\cos\frac{x}{2}} = \sin\frac{x}{2}$ folgt dann:

$$2y \sin\frac{A}{2} \geq (u+w)$$

Analoges Vorgehen für die anderen beiden Sehnenvierecke liefert mit Multiplikation der drei Ungleichungen:

$$8xyz \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \geq (u+w)(v+w)(u+v)$$

mit Gleichheit für $u = v = w$.
Es ist sehr bekannt und einfach zu beweisen, dass $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$, mit Gleichheit für $A = B = C$, womit dann die Behauptung folgt. Dieses kann man z. B. so zeigen:

Wir setzen $l = \frac{A}{2}$ und $m = \sin\frac{B}{2}$, dann folgt:

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \sin l \sin m \cos(l+m)$$

mit $0 \leq l$,$m \leq \frac{\pi}{2}$

Damit folgt:

$$2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \sin l(\sin(l+m) - \sin l) \leq \frac{1}{4}$$

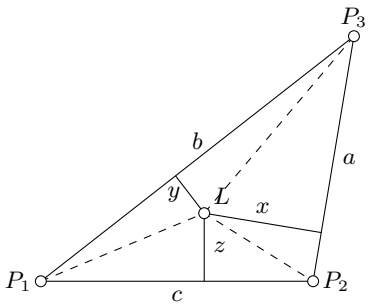
da das Maximum für $l + m = \frac{\pi}{2}$, $\sin l = \frac{1}{2}$ angenommen wird.

Aufgabe 311244:
Es sei $P_1P_2P_3$ ein gegebenes beliebiges Dreieck; sein Flächeninhalt sei F, sei Inkreis habe den Mittelpunkt M und den Radius r.
a) Man beweise, dass eine Pyramide $P_1P_2P_3S$ genau dann unter allen Pyramiden $P_1P_2P_3S$ mit dieser Grundfläche $P_1P_2P_3$ und mit gegebenem Volumen V einen kleinstmöglichen Oberflächeninhalt hat, wenn das Lot von S auf die durch P_1, P_2, P_3 gelegte Ebene den Fußpunkt M hat.
b) Man beweise, dass dieser kleinstmögliche Oberflächeninhalt

$$F + \sqrt{F^2 + \left(\frac{3V}{r}\right)^2}$$

beträgt.

Lösung von MontyPythagoras:



In dieser Skizze blicken wir senkrecht auf die Grundfläche der Pyramide, und L sei der beliebige Lotfußpunkt der Pyramidenspitze auf die Dreiecksebene. x, y und z seien die Abstände des Lotfußpunktes zu den Seitenflächen des Dreiecks. Die Fläche des Dreiecks $P_1P_2P_3$ ist dann

$$F = \tfrac{1}{2}(ax + by + cz) \tag{1}$$

Die Mantelfläche M der Pyramide setzt sich aus drei Dreiecksflächen zusammen. Die Grundseiten dieser drei Flächen sind die Seiten a, b und c, die Höhe dieser Dreiecke ergibt sich per Satz des Pythagoras aus den Abständen x, y und z mit der Höhe der Pyramide h:

$$M = \tfrac{1}{2}\left(a\sqrt{x^2+h^2} + b\sqrt{y^2+h^2} + c\sqrt{z^2+h^2}\right) \tag{2}$$

x, y und z hängen über die Gleichung (1) zusammen, so dass man eine Größe als Funktion der anderen beiden Größen betrachten kann:

$$z(x,y) = \frac{1}{c}(2F - ax - by) \tag{3}$$

Da M maximal sein soll, muss die partielle Ableitung von M nach x und y jeweils null sein:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \tfrac{1}{2}\left(a\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} + c\frac{z}{\sqrt{z^2+h^2}} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

Aus Gleichung (3) erhalten wir

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{a}{c}$$

Dies eingesetzt ergibt

$$a\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} + c\frac{z}{\sqrt{z^2+h^2}}\left(-\frac{a}{c}\right) = 0$$

Daraus folgt einfach:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{z}{\sqrt{z^2+h^2}} \tag{4}$$

$$x^2(z^2+h^2) = z^2(x^2+h^2)$$

$$x^2h^2 = z^2h^2$$

$$x = z$$

(Theoretisch wäre hier auch $x = -z$ möglich, wodurch aber Gleichung (4) verletzt würde). In gleicher Art und Weise erhält man mit der Ableitung nach y auch $y = z$, so dass letztlich $x = y = z$ gelten muss. Das ist genau am Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Fall, was dem Inkreismittelpunkt entspricht und Aufgabenteil a) beweist. Mit $x = y = z = r$ haben wir

$$F = \tfrac{1}{2}(a+b+c)r$$

Das Volumen der Pyramide ist

$$V = \tfrac{1}{3}Fh$$

Die Mantelfläche der Pyramide ist

$$M = \tfrac{1}{2}(a+b+c)\sqrt{r^2+h^2} = \frac{F}{r}\sqrt{r^2 + \left(\frac{3V}{F}\right)^2}$$

$$M = \sqrt{F^2 + \left(\frac{3V}{r}\right)^2}$$

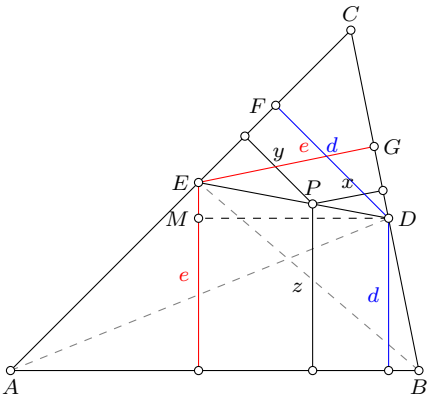
Die gesamte Oberfläche der Pyramide ist somit

$$O = F + M = F + \sqrt{F^2 + \left(\frac{3V}{r}\right)^2}$$

Damit wäre auch Aufgabenteil b) gezeigt.

Aufgabe 331244:
Für jedes Dreieck ABC sei D bzw. E jeweils der Schnittpunkt der von A bzw. B ausgehenden Winkelhalbierenden mit der Gegenseite BC bzw. AC; ferner sei P ein beliebiger Punkt der Strecke DE.
Man beweise:
Unter dieser Voraussetzung ist stets die Summe der Abstände des Punktes P zu den Geraden durch B, C bzw. durch A, C gleich dem Abstand des Punktes P zur Geraden durch A, B.

Lösung von MontyPythagoras:



Gemäß Aufgabenstellung muss gelten:

$$z = x + y$$

Da es sich bei D und E um die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den Dreiecksseiten handelt, sind die blau dargestellten Strecken d gleichlang, und ebenso die rot dargestellten Strecken mit der Bezeichnung e. Sei nun q das Verhältnis der Strecke EP zur Strecke ED, also

$$q = \frac{\overline{EP}}{\overline{ED}}$$

Offensichtlich gilt $0 \leq q \leq 1$. Wir betrachten zunächst das Dreieck EMD. Laut Strahlensatz gilt:

$$\frac{z-d}{e-d} = 1 - q$$

$$z = d + (e-d)(1-q) = dq + e(1-q) \tag{1}$$

Im Dreieck EDF gilt auch wegen des Strahlensatzes:

$$\frac{y}{d} = q$$

$$y = dq \tag{2}$$

Und letztlich im Dreieck EDG:

$$\frac{x}{e} = 1 - q$$

$$x = e(1-q) \tag{3}$$

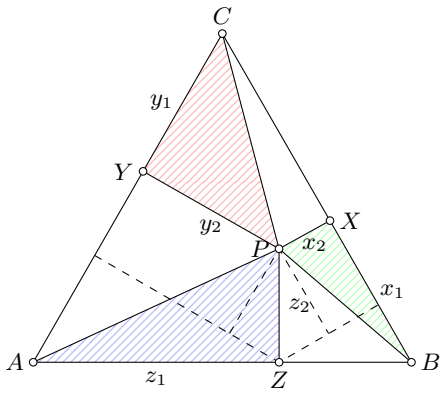
Addiert man nun (2) und (3), dann folgt:

$$x + y = dq + e(1-q) = z$$

q. e. d.

Aufgabe 341242:
Im Innern eines gleichseitigen Dreiecks ABC werde ein Punkt P beliebig gewählt.
Die Fußpunkte der Lote von P auf die Seiten BC, CA, AB seien in dieser Reihenfolge mit X, Y, Z bezeichnet.
Man beweise, dass die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke BXP, CYP, AZP nicht von der Wahl des Punktes P abhängt.

Lösung von MontyPythagoras:



Die Summe der drei Flächeninhalte ist

$$F = \tfrac{1}{2}x_1x_2 + \tfrac{1}{2}y_1y_2 + \tfrac{1}{2}z_1z_2$$

Bekanntermaßen sind $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$ und $\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Mithilfe der gestrichelten Hilflinien erkennt man folgende Zusammenhänge:

$$a - y_1 = \tfrac{1}{2}z_1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}z_2$$

$$y_2 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}z_1 - \tfrac{1}{2}z_2$$

$$x_1 = \tfrac{1}{2}(a - z_1) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}z_2$$

$$x_2 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}(a - z_1) - \tfrac{1}{2}z_2$$

Das setzen wir alles in die Flächenformel ein:

$$2F = \left(\tfrac{1}{2}(a - z_1) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}z_2\right)\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}(a - z_1) - \tfrac{1}{2}z_2\right) + \left(a - \tfrac{1}{2}z_1 - \tfrac{\sqrt{3}}{2}z_2\right)\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}z_1 - \tfrac{1}{2}z_2\right) + z_1z_2$$

Ausmultiplizieren und vereinfachen:

$$2F = \tfrac{\sqrt{3}}{4}(a - z_1)^2 + \tfrac{1}{2}(a - z_1)z_2 - \tfrac{\sqrt{3}}{4}z_2^2 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}az_1 - \tfrac{1}{2}az_2 - \tfrac{\sqrt{3}}{4}z_1^2 - \tfrac{1}{2}z_1z_2 + \tfrac{\sqrt{3}}{4}z_2^2 + z_1z_2$$

$$2F = \tfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}a + \tfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)z_1 + \left(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}a\right)z_2 + \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + 1\right)z_1z_2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{4} - \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)z_1^2 + \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{4} + \tfrac{\sqrt{3}}{4}\right)z_2^2$$

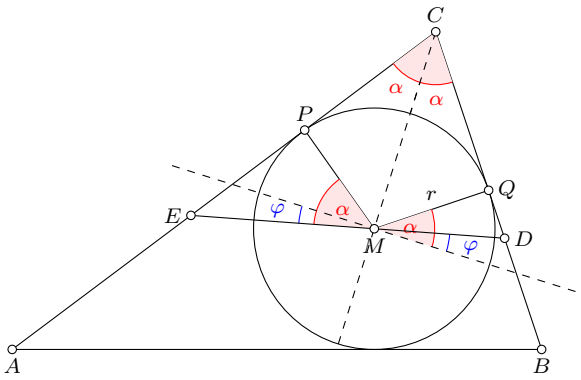
$$2F = \tfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$F = \tfrac{1}{2}F_{ABC}$$

Die Summe der drei Teildreiecke ist also immer die Hälfte des Flächeninhalts des Gesamtdreiecks ABC.

Aufgabe 341244:
Über ein Dreieck ABC und zwei Punkte D, E werde vorausgesetzt:
D liegt auf der Strecke BC und ist von C verschieden, E liegt auf der Strecke AC und ist von C verschieden.
Die Strecke DE geht durch den Inkreismittelpunkt M des Dreiecks ABC. Der Inkreisradius des Dreiecks ABC sei r, der Flächeninhalt des Dreiecks CDE sei F.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $F \geq 2r^2$ gilt.

Lösung von MontyPythagoras:
Die Fläche des Dreiecks CDE setzt sich zusammen aus den vier rechtwinkligen Teildreiecken MDQ, MQC, MCP und MPE. Der Inkreisradius r ist eine Kathete jedes dieser vier Teildreiecke. Der Flächeninhalt des erst- und letztgenannten Dreiecks sind abhängig von dem Winkel φ, der die Lage der Strecke DE festlegt und der der Winkel zwischen dieser Strecke und der Senkrechten auf die Winkelhalbierende MC ist.



Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist die Hälfte des Produktes aus den beiden Katheten. Als Gesamtfläche ergibt sich:

$$F(\varphi) = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2} r \cdot \frac{r}{\tan\alpha}\right) + \tfrac{1}{2} r \cdot r \tan(\alpha - \varphi) + \tfrac{1}{2} r \cdot r \tan(\alpha + \varphi)$$

$$F(\varphi) = \frac{r^2}{\tan\alpha} + \tfrac{1}{2} r^2 \tan(\alpha - \varphi) + \tfrac{1}{2} r^2 \tan(\alpha + \varphi)$$

Man erkennt, dass $F(\varphi)$ eine gerade Funktion ist, da $F(-\varphi) = F(\varphi)$ ist. Gerade, stetige und differenzierbare Funktionen haben immer ein lokales Extremum bei null. In diesem Fall ist es klarerweise ein Minimum, wie man sich schon aus anschaulichen geometrischen Gründen leicht klar machen kann. Die minimale Fläche ist daher

$$F_{min} = F(0) = \frac{r^2}{\tan\alpha} + r^2 \tan\alpha = r^2 \left(\frac{1}{\tan\alpha} + \tan\alpha\right)$$

$$F_{min} = r^2 \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{r^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$F_{min} = \frac{2r^2}{\sin 2\alpha} \geq 2r^2 \quad \forall \quad 0 < 2\alpha < \pi$$

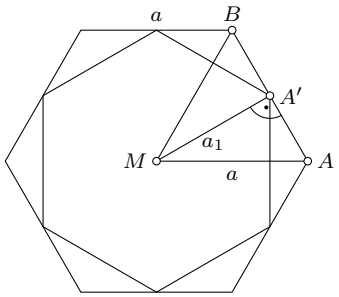
q. e. d.

VII.II Vierecke; $n > 3$-Ecke

I Runde 1

Aufgabe V01112:
Auf ein aus $d = 0{,}1$ mm starkem Papier ausgeschnittenes regelmäßiges Sechseck von $a = 10$ cm Seitenlänge wird ein zweites, kleineres aufgeklebt, dessen Ecken in den Seitenmitten des vorhergehenden liegen.
Auf dieses wird ein drittes geklebt, dessen Ecken wieder in den Seitenmitten des vorangehenden liegen. Verfährt man weiter in dieser Weise, so entsteht ein räumliches Gebilde.
a) Wie hoch ist dieses, wenn angenommen wird, dass die untere Grenze des Ausschneidens bei 2 mm liegt und die Leimdicke vernachlässigt werden kann?
b) Wie groß ist das Volumen?
c) Wie groß wären Höhe und Volumen, wenn dem Ausschneiden keine untere Grenze gesetzt wäre?

Lösung von Steffen Polster:



Ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge $a = a_0$ hat einen Flächeninhalt von $F = \frac{3}{2}\sqrt{3}a^2$. Damit hat erste sechsseitige Prisma, mit einer Seitenlänge von $a = 10$ cm und einer Höhe von $h = 0{,}1$ mm, das Volumen

$$V_0 = \frac{3}{2}\sqrt{3}a^2 \cdot h = \frac{3}{2}\sqrt{3}\text{ cm}^3$$

Das erste aufgeklebte Sechseck hat eine Seitenlänge $a_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 10$ cm (Höhe im gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge a). Das Volumen des Prismas wird

$$V_1 = V_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{3}{4}V_0$$

Jedes weitere aufgesetzte Prisma hat $\frac{3}{4}$ des Volumens des vorhergehenden Prismas. Für n auf das unterste Prisma aufgesetzte Prismen ergibt sich als Gesamtvolumen mittels Partialsumme einer geometrischen Zahlenfolge

$$V = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^i V_0 = \sum_{i=0}^{n}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^i \frac{3}{2}\sqrt{3}\text{ cm}^3\right\} = 6\sqrt{3} - \frac{9}{2}\sqrt{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n\text{ cm}^3 \tag{1}$$

a) Das oberste Prisma soll noch mindestens 2 mm Seitenlänge haben. Für das n-te Prisma wird die Seitenlänge

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^n \cdot 10\text{ cm}$$

und damit

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^n \cdot 10\text{ cm} > 0{,}2\text{ cm}$$

$$n\lg\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) > \lg 0{,}02 \qquad n < 27{,}1968...$$

Auf das Grundsechseck können weitere 27 Sechsecke aufgesetzt werden. Der Körper wird damit $28\dot{0}{,}1$ mm = 2,8 cm hoch.

b) Einsetzen von $n = 27$ in (1) ergibt ein Volumen des Körpers von $\approx 10{,}389$ cm^3.

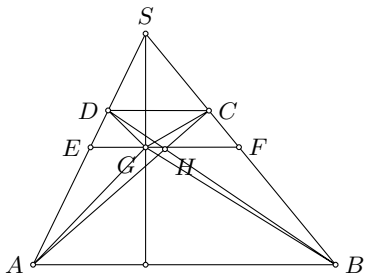
c) Für den Grenzwert $n \to \infty$ ergibt sich bei (1)

$$\lim_{n\to\infty} 6\sqrt{3} - \frac{9}{2}\sqrt{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 6\sqrt{3}$$

Wäre dem Ausschneiden keine Grenze gesetzt, so wäre der Sechseckturm unendlich hoch und hätte ein Volumen von $V = 6\sqrt{3} \approx 10{,}3923$ cm^3.

Aufgabe 031115:
Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD und den nicht parallelen Seiten BC und AD.
Man bezeichne mit H den Schnittpunkt der Diagonalen und mit S den Schnittpunkt der nichtparallelen Seiten. Die Parallele zu AB durch H schneide die Seiten BC und AD in E und F. Die Projektion von S auf EF sei G.
Beweisen Sie, dass die Gerade EF die Winkelhalbierende der Winkel BGC und AGD ist!

Lösung von W. Engel und U. Pirl:



Da $g_{SG} \neq g_{EF}$ ist, gilt auch $g_{SG} \neq g_{AB}$ und $g_{SG} \neq g_{CD}$. Daher schneidet g_{SG} die Geraden g_{AB} und g_{CD} in je einem Punkt L bzw. K. Wegen $G \neq E$ gilt $K \neq C$ und $L \neq B$. Aus den Strahlensätzen folgt dann:

$$\frac{KG}{GL} = \frac{CE}{EB} = \frac{CH}{HA} = \frac{CD}{AD} \quad \text{und} \qquad (1)$$

$$\frac{SC}{SB} = \frac{KC}{LB} = \frac{CD}{AB}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{KG}{GL} = \frac{KC}{LB} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{KG}{KC} = \frac{GL}{LB}$$

Da außerdem die Winkel $\angle CKG$ und $\angle GLB$ rechte sind, sind alle Dreiecke KGC und GLB ähnlich. Daher gilt: $\angle BGL \cong \angle KGC$.
Da weiter die Winkel $\angle SGE$ und $\angle EGL$ rechte sind, folgt $\angle BGE \cong \angle EGC$.

Aufgabe 041212:
Es ist der folgende Satz zu beweisen:

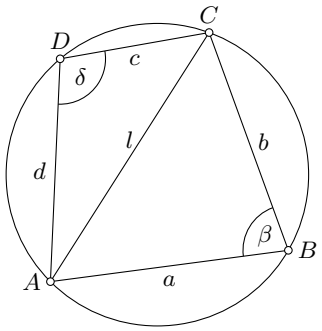
Der Flächeninhalt eines Sehnenvierecks ist

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

wobei a, b, c, d die Längen der Seiten des Sehnenvierecks sind und $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ gesetzt wird.

Lösung von Rainer Müller:

Vorbemerkung: mit „Sehnenviereck“ muss in der Aufgabenstellung „nicht-überschlagenes Sehnenviereck“ gemeint sein, da die Aussage sonst nicht korrekt ist.



F ist die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ABC und CDA, die gleich $\frac{1}{2}ab\sin\beta$ bzw. $\frac{1}{2}cd\sin\delta$ sind (Bezeichnungen wie in der Abbildung). Da $ABCD$ ein Sehnenviereck ist, gilt $\beta + \delta = 180°$, so dass $\sin\beta = \sin\delta$ und

$$F = \frac{1}{2}ab\sin\beta + \frac{1}{2}cd\sin\delta = \frac{1}{2}(ab+cd)\sin\beta. \qquad (1)$$

l sei die Länge der Diagonalen AC. Nach dem Kosinussatz für ABC gilt $l^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$, und nach dem gleichen Satz für CDA gilt $l^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta$. Daraus können wir l^2 eliminieren, und wegen $\beta + \delta = 180°$ gilt $\cos\delta = -\cos\beta$, so dass

$$(ab + cd)\cos\beta = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2). \tag{2}$$

Indem wir (1) quadrieren, $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ berücksichtigen und (2) einsetzen, erhalten wir

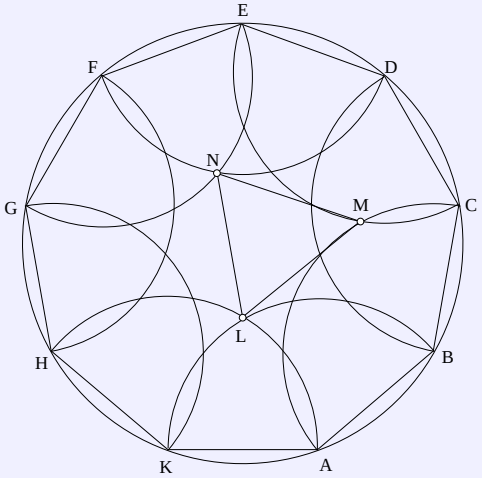
$$\begin{aligned}
F^2 &= \frac{1}{4}\Big((ab+cd)^2 - (ab+cd)^2\cos^2\beta\Big) \\
&= \frac{1}{16}\Big(2(ab+cd) - (a^2+b^2-c^2-d^2)\Big)\cdot\Big(2(ab+cd) + (a^2+b^2-c^2-d^2)\Big) \\
&= \frac{1}{16}\Big(-a^2+2ab-b^2+c^2+2cd+d^2\Big)\Big(a^2+2ab+b^2-c^2+2cd-d^2\Big) \\
&= \frac{1}{16}\Big(-(a-b)+(c+d)\Big)\Big((a-b)+(c+d)\Big)\cdot\Big((a+b)-(c-d)\Big)\Big((a+b)+(c-d)\Big) \\
&= \frac{-a+b+c+d}{2}\cdot\frac{a-b+c+d}{2}\cdot\frac{a+b-c+d}{2}\cdot\frac{a+b+c-d}{2} \\
&= (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).
\end{aligned}$$

Wurzel ziehen und die Aufgabe ist gelöst.

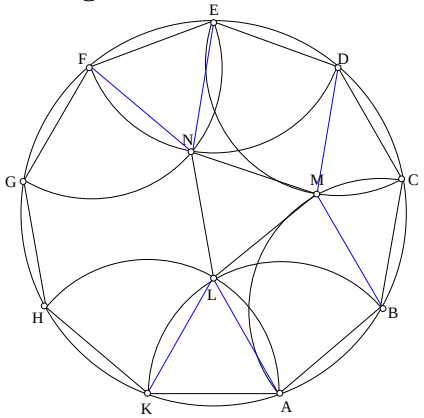
Aufgabe 071213:

Die Abbildung zeigt ein regelmäßiges Neuneck mit seinem Umkreis.
Um die Eckpunkte A, B, C, D, E, F, G, H und K dieses Neunecks sind in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise Kreisbögen gezeichnet, deren Radien ebenso lang wie die Neuneckseiten sind.

Untersuchen Sie, ob die in der Figur mit L, M und N bezeichneten Schnittpunkte dieser Kreisbögen Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind!



Lösung von Daniel Gutekunst:



Sei $a = \overline{AB} = \overline{BC} = \ldots$ die Kantenlänge des regelmäßigen Neunecks, und sei S_{XY} der Schnittpunkt der Kreisbogen um X und Y mit dem Radius a. Ferner beträgt jeder Innenwinkel $\frac{7}{9}\cdot 180° = 140°$.

Es ist $M = S_{BD}$, also $a = \overline{MB} = \overline{MD} = \overline{BC} = \overline{DC}$. Damit ist $BCDM$ ein Rhombus und $\angle BMD = \angle BCD = 140°$.

Es ist $N = S_{FE}$ und $L = S_{KA}$, woraus die gleichseitigen Dreiecke $\triangle NFE$ und $\triangle LKA$ entstehen. Insbesondere ist $a = \overline{AL} = \overline{EN}$.

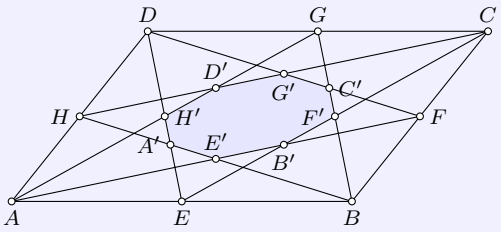
Im Rhombus gilt $\angle MBC = \angle MDC = (360° - 2\cdot 140°)/2 = 40°$. Damit ist $\angle MDE = \angle MBA = 100°$. Außerdem ist $\angle LAB = \angle NED = 140° - 60° = 80°$.

Die Strecken $\overline{AL}$ und $\overline{BM}$ sind parallel, da sie gleiche Winkel zur Geraden durch A und B haben. Die Strecken $\overline{EN}$ und $\overline{DM}$ sind parallel, da sie gleiche Winkel zur Geraden durch E und D haben.

Es folgt, dass $EDMN$ und $ABML$ kongruente Rhomben sind, insbesondere ist $\overline{ML} = \overline{MN}$. Ebenfalls folgt $\angle LMB = \angle NMD = \angle LAB = \angle NED = 80°$. Schließlich ist dann $\angle LMN = 360° - \angle LMB - \angle NMD - \angle BCD = 60°$.

Daraus folgt, dass $\triangle LMN$ gleichseitig ist (was zu zeigen war).

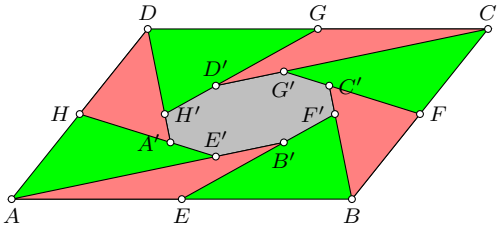
Aufgabe 141213:



In einem beliebigen Parallelogramm $ABCD$ seien E, F, G, H die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD bzw. DA.
Der Schnittpunkt von DE mit HB sei A',
der von HB mit AF sei E',
der von AF mit EC sei B',
der von EC mit GB sei F',
der von GB mit FD sei C',
der von FD mit CH sei G',
der von CH mit GA sei D', und
der von GA mit DE sei H' (siehe Abbildung).

Man beweise, dass der Flächeninhalt des Achtecks $A'E'B'F'C'G'D'H'$ ein Sechstel des Flächeninhalts des Parallelogramms $ABCD$ beträgt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei definiert: $a := \overline{AB} = \overline{CD}$, $b := \overline{BC} = \overline{AD}$, h_a als Höhe des Parallelogrammes bzgl. a und analog h_b bzgl. b. Dann gilt für den Flächeninhalt des Parallelogrammes: $A_{ABCD} = a \cdot h_a = b \cdot h_b$.

Das Parallelogramm lässt sich in die grünen, roten und grauen Teilfiguren gemäß Zeichnung zerlegen. Der gesuchte Flächeninhalt der grauen Figur ist somit die Differenz zwischen der Parallelogrammfläche und der Summe aller roten und grünen Dreiecksflächen.

Weiterhin gilt: $\triangle EBF' \equiv \triangle GCF'$ ($\angle EF'B = \angle GF'C$ als Wechselwinkel, $\angle EBF' = \angle F'GC$ als Scheitelwinkel an geschnittenen Parallelen, $\overline{EB} = \overline{CG} = a/2$). Die Höhen in den beiden Dreiecken sind

also gleich groß und also die Höhen bzgl. $\overline{EB}$ bzw. $\overline{CG}$ auch halb so groß wie h_a. Damit ergibt sich: $A_{EBF'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h_a}{2} = \frac{1}{8} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{8} \cdot A_{ABCD}$. Analog kann nachgewiesen werden, dass alle grünen Dreiecksflächen ein Achtel der Parallelogrammfläche einnehmen.

Im Dreieck ABC gilt: EB' liegt auf der Seitenhalbierenden von $\overline{AB}$ und AB' auf der Seitenhalbierenden von $\overline{BC}$. Da der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden in einem Dreieck selbige im Verhältnis 1:2 teilt, gilt, dass der Abstand von B' zu $\overline{AB}$ ein Drittel des Abstandes von C zu $\overline{AB}$ beträgt. Damit ist die Höhe im Dreieck AEB' bzgl. AE ein Drittel von h_a. Für den Flächeninhalt in diesem Dreieck gilt folglich: $A_{AEB'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h_a}{3} = \frac{1}{12} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{12} \cdot A_{ABCD}$. Analoges gilt für die restlichen roten Dreiecke.

Zusammenfassend erhält man für den gesuchten Flächeninhalt:

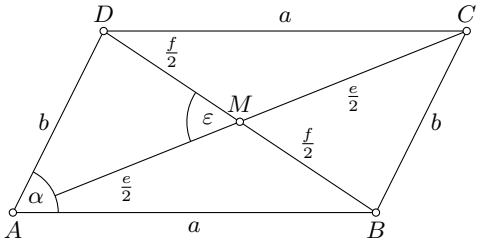
$$\begin{aligned} A &= A_{ABCD} - 4 \cdot A_{rot} - 4 \cdot A_{gruen} \\ &= A_{ABCD} - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot A_{ABCD} - 4 \cdot \frac{1}{12} \cdot A_{ABCD} \\ &= \frac{24 - 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2}{24} \cdot A_{ABCD} = \frac{4}{24} \cdot A_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot A_{ABCD} \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 221212:
Man beweise:

Sind a, b die Seitenlängen eines Parallelogramms und e, f die Längen seiner Diagonalen, so gilt $a^2 - b^2 < ef$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei $ABCD$ ein beliebiges Parallelogramm, mit $AB = CD = a$, $BC = DA = b$, $AC = e$, $BD = f$. Ferner sei M der Schnittpunkt von AC und BD, und es sei $\angle BMC = \varepsilon$.

Nach dem Kosinussatz, angewandt auf die Dreiecke BMC und AMB folgt

$$\begin{aligned} b^2 &= \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos\varepsilon \\ a^2 &= \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos(180^\circ - \varepsilon) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wegen $\cos(180^\circ - \varepsilon) = -\cos\varepsilon$ durch Subtraktion

$$a^2 - b^2 = ef \cos\varepsilon$$

Wegen $\varepsilon > 0^\circ$ (und $\varepsilon < 360^\circ$, sogar $\varepsilon < 180^\circ$), also $\cos\varepsilon < 1$, folgt hieraus die behauptete Ungleichung.

Aufgabe 231213:
Man gebe die Menge aller ebenen, konvexen, nichtentarteten Vierecke $ABCD$ an, für die zwei der vier folgenden Aussagen wahr und zwei der Aussagen falsch sind:

(1) Das Viereck $ABCD$ besitzt wenigstens ein Paar paralleler Seiten.

(2) Das Viereck $ABCD$ besitzt vier gleichlange Seiten.

(3) Ein Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ ist ein rechter Winkel.

(4) Kein Innenwinkel des Vierecks $ABCD$ hat eine Größe von 90°.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

I Wenn ein Viereck zu der gesuchten Menge gehört, so folgt:

Da (3) die Verneinung von (4) ist, ist genau eine der Aussagen (3), (4) wahr. Folglich ist auch genau eine der Aussagen (1), (2) wahr. Wäre (2) wahr, so wäre $ABCD$ ein Rhombus, im Widerspruch dazu, dass (1) falsch sein müsste. Also ist (2) falsch und (1) wahr.

Das besagt: $ABCD$ ist ein Trapez, in dem mindestens zwei verschieden lange Seiten auftreten.

II Wenn ein Viereck $ABCD$ ein Trapez ist, in dem mindestens zwei verschieden lange Seiten auftreten, so folgt: (1) ist wahr, (2) ist falsch.

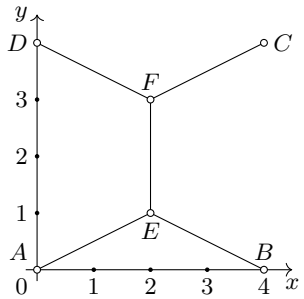
Ferner ist genau eine der Aussagen (3),(4) wahr, da (3) die Verneinung von (4) ist. Somit gehört $ABCD$ zu der gesuchten Menge.

Die gesuchte Menge ist folglich die Menge aller Trapeze, die kein Rhombus sind.

Aufgabe 311211:
Vier Dörfer bilden die Eckpunkte eines Quadrates mit der Seitenlänge 4 km.

Man untersuche, ob es möglich ist, diese Dörfer durch ein Straßennetz mit einer Gesamtlänge von weniger als 11 km zu verbinden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Ein solches Straßennetz ist möglich; man wähle z. B. in demjenigen Koordinatensystem, in dem die vier Dörfer A, B, C, D die Koordinaten $(0;0)$, $(4;0)$, $(4;4)$, $(0;4)$ haben, die Punkte E, F mit den Koordinaten $(2;1)$, $(2;3)$ und dann das Straßennetz aus den Strecken AE, BE, EF, EC, FD (siehe Abbildung).

Seine Gesamtlänge, gemessen in km, beträgt nämlich $2 + 4\sqrt{5}$, ist also wegen $\sqrt{5} < \frac{9}{4}$ kleiner als 11 km.

Aufgabe 311213:
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C sei D der Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle BAC$. Ein Punkt P auf AB und ein Punkt Q auf AD seien so gelegen, dass DPQ ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei P ist.

Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen

a) der vierte Eckpunkt R des Quadrates $DPQR$ auf AC liegt,

b) die Strecken BD und BP einander gleiche Länge haben.

Man ermittle die Seitenlänge des Quadrates $DPQR$

c) für $\overline{BC} = 49$ mm, $\overline{AC} = 168$ mm,

d) allgemein ausgedrückt durch $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Fällt man das Lot PM von P auf DQ und verlängert es bis zum Schnitt R' mit AC, so wird $\angle PMA = \angle R'MA = 90°$ sowie (für $\alpha = \angle BAC$), $\angle PAM = \angle R'AM = \frac{\alpha}{2}$; und mit $AM = AM$ folgt nach dem Kongruenzsatz (wsw) $\triangle AMP = \triangle AMR'$, also $MP = MR'$.

Für den vierten Eckpunkt R des Quadrates $DPQR$ gilt aber ebenfalls, dass er auf der Verlängerung des Lotes PM im Abstand $MR = MP$ von M liegt (da die Diagonalen des Quadrates aufeinander senkrecht stehen und einander halbieren).

Also ist $R = R'$; damit (und weil R' nach seiner Definition auf AC liegt) ist bewiesen, dass R auf AC liegt.

b) Wegen der Winkelsumme in den Dreiecken APM und ADC erhält man $\angle APM = \angle ADC$ $(= 90° - \frac{\alpha}{2})$; hieraus und aus $\angle DPM = \angle PDM$ $(= 45°)$, folgt $\angle DPB = \angle PDB'$ $(= 180° - (90° - \frac{\alpha}{2}) - 45°)$, also nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes $BD = BP$.

d) Somit ist $BPMD$ ein Drachenviereck, die Winkelhalbierende BE von $\angle ABC$ geht durch M und ist senkrecht auf PD, also parallel zu DR; daher gilt

$$\triangle DRC \sim \triangle BEC \tag{1}$$

Nach dem Satz, dass die Winkelhalbierenden die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, gilt

$$DC = \frac{ab}{b+c} \quad ; \quad DB = \frac{ac}{b+c} \quad \text{und} \tag{2}$$

$$EC = \frac{ab}{b+c} \quad ; \quad EA = \frac{bc}{b+c} \tag{3}$$

Aus (3) folgt nach dem Satz des Pythagoras

$$BE = \sqrt{a^2 + \frac{a^2b^2}{(a+c)^2}} = \frac{a}{a+c}\sqrt{a^2 + 2ac + c^2 + b^2} = \frac{a}{a+c}\sqrt{2ac + 2c^2} = a\sqrt{\frac{2c}{a+c}} \tag{4}$$

Aus (1) und (4) folgt $DR : DC = BE : BC = \sqrt{\frac{2c}{a+c}}$, hiernach und nach (2) ist

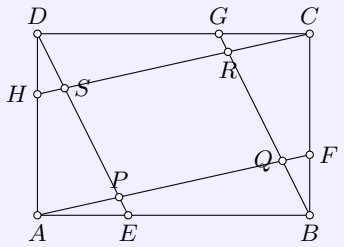
$$DR = \frac{ab}{b+c}\sqrt{\frac{2c}{a+c}} \tag{5}$$

Für $a = 49$ mm $= 7 \cdot 7$ mm, $b = 168$ mm $= 7 \cdot 24$ mm erhält man $c = 7 \cdot \sqrt{z^2 + 24^2}$ mm $= 7 \cdot 25$ mm und damit

$$DR = \frac{7 \cdot 7 \cdot 24}{24 + 25} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 25}{7 + 25}} \text{ mm } = 24 \cdot \sqrt{\frac{25}{16}} \text{ mm } = 30 \text{ mm}$$

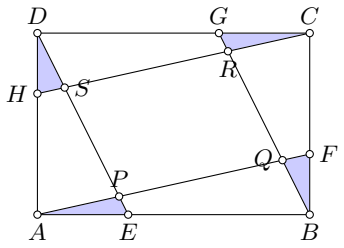
II Runde 2

Aufgabe 021123:



Die Seiten eines Rechtecks $ABCD$ werden im Verhältnis $1 : 2$ geteilt. Die Teilpunkte seien (fortlaufend) E, F, G, H.
Die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden AF, BG, CH und DE bilden die Ecken des Vierecks $PQRS$ (siehe Abbildung).
a) Was für ein Viereck ist $PQRS$?
b) Wie verhält sich der Flächeninhalt dieses Vierecks zu dem Flächeninhalt des Rechtecks?

Lösung von Carsten Balleier:
a) Offensichtlich gelten wegen $AB = CD$, $BC = DA$, $AE = CG$ und $BF = DH$ folgende Kongruenzen: $\triangle ABF \cong \triangle CDH$ bzw. $\triangle BCG \cong \triangle DAE$ (Kongruenzsatz SWS), also $AF = CH$.
Darüber hinaus gilt auch $\triangle AEP \cong \triangle CGR$ und $\triangle BFQ \cong \triangle DHS$ (Kongruenzsatz WSW), somit $AP = CR$, $PE = RG$, $BQ = DS$ und $QF = SH$. Daraus folgt $PQ = RS$ und $QR = SP$. Das Viereck hat mithin gegenüberliegende Seiten, die gleich lang sind, ist damit ein Parallelogramm.



b) Zuerst ist es sinnvoll, einige Bezeichnungen einzuführen. Sei A_0 die Fläche des Rechtecks A_{BCD} und A_{PQRS} die Fläche des Parallelogramms $PQRS$ – aus diesen beiden suchen wir das Verhältnis A_{PQRS}/A_0. Weiterhin seien die Flächeninhalte der Dreiecke AEP, ABQ, BFQ und BCR mit A_1, A_2, A_3 und A_4 bezeichnet. Aus Ähnlichkeitsüberlegungen erhält man $A_2 = 9A_1$ und $A_4 = 9A_3$. Außerdem hat man

$$A_0 = AB \cdot BC = 3 \cdot AB \cdot BF = 6A_{\triangle ABF} = 6(A_2 + A_3)$$

und analog $A_0 = 6(A_4 + A_1)$. Daraus bekommen wir die Gleichung

$$A_2 + \frac{1}{9}A_4 = A_4 + \frac{1}{9}A_2$$

aus der $A_2 = A_4$ und $A_1 = A_3$ folgen. Einsetzen führt auf $\frac{1}{6}A_0 = A_2 + \frac{1}{9}A_2$, es folgt $A_2 = \frac{3}{20}A_0$. Jetzt sieht man

$$A_{PQRS} = A_0 - 4A_2 = A_0 - \frac{12}{20}A_0 = \frac{2}{5}A_0$$

Aufgabe 061222:
In einer Ebene seien die vier Punkte P, Q, R, S ($P \neq Q, R \neq S$, PQ nicht senkrecht auf RS) gegeben. Es ist zu zeigen, dass man dann stets vier Geraden p, q, r, s mit P auf p, Q auf q, R auf r und S auf s so konstruieren kann, dass ihre sämtlichen Schnittpunkte die Ecken eines Quadrates bilden.

Lösung von cyrix:
Es wird ein reiner Existenzbeweis gegeben, dass es solche Geraden gibt, keine explizite Konstruktion dieser.

Es sei $0 \leq \alpha < 180°$ ein Winkel. Wir betrachten nun diejenige Gerade p, die mit der positiven x-Achse den Winkel α einschließt (bzw. im Fall $\alpha = 0$ parallel zu dieser ist) und durch P verläuft, sowie die dazu parallele Gerade q durch Q. Dann variiert in Abhängigkeit von α der Abstand $d_p(\alpha)$ dieser beiden Parallelen zwischen 0 (falls $PQ = p = q$ gilt) und $|PQ| > 0$ (falls p und q senkrecht auf PQ stehen).

Zu p werden nun die Orthogonalen r durch R und s durch S betrachtet. Wieder gilt, dass der Abstand $d_r(\alpha)$ dieser beiden Parallelen r und s in Abhängigkeit von α zwischen 0 (falls $RS = r = s$ gilt) und $|RS| > 0$ (falls r und s senkrecht auf RS stehen) variiert.

Ändert man stetig den Winkel α, so verändern sich auch stetig die Abstände $d_p(\alpha)$ von p und q sowie $d_r(\alpha)$ von r und s. Diese Abstände können nicht gleichzeitig Null werden, da in diesem Fall wegen $p \perp r$ auch $PQ = p$ und $RS = r$ senkrecht aufeinander stünden, was nach Aufgabenstellung nicht der Fall ist.

Sei o. B. d. A. der Winkel α_1, an dem $d_p(\alpha_1) = 0$ ist, kleiner als der Winkel α_2, für den der Abstand $d_r(\alpha_2) = 0$ wird. Dann gilt für die Differenz $d_p(\alpha) - d_r(\alpha)$ für $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, dass sie an der linken Intervallgrenze negativ, an der rechten positiv und dazwischen stetig ist, es also eine Stelle α_0 geben muss, an welcher diese Differenz Null wird und die beiden Paare von Parallelen den gleichen Abstand zueinander haben. Da die nicht-parallelen Geraden nach Konstruktion orthogonal zueinander sind, bilden die vier Schnittpunkte dieser Geraden die Eckpunkte eines Quadrats.

Aufgabe 081226:
Ein Trapez $ABCD$, dessen Grundseiten die Längen a und b ($a > b$) haben und dessen beide anderen (nichtparallelen) Seiten, genügend verlängert, einen Winkel der Größe α einschließen mögen, habe einen Inkreis.
Berechnen Sie aus den Größen a, b und α den Durchmesser d dieses Inkreises!

Lösung von cyrix:
Es sei $|AB| = a$, $|CD| = b$, $AB \parallel CD$ und S der Schnittpunkt von AD sowie BC. Weiterhin sei F_T der Flächeninhalt des Trapezes, F_{SAB} der des Dreiecks $\triangle SAB$ und F_{SCD} der des Dreiecks $\triangle SCD$. Dann gilt $F_{SAB} = F_T + F_{SCD}$.

Nach dem Strahlensatz gilt $F_{SCD} = F_{SAB} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2$, also $F_T = F_{SAB} \cdot \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = F_{SAB} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2}$.

Es ist $F_T = d \cdot \frac{a+b}{2}$, da $\frac{a+b}{2}$ die Länge der Mittellinie des Trapezes und d der Abstand der Parallelen ist. Also ist

$$\frac{d}{2} = F_{SAB} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 \cdot (a+b)} = F_{SAB} \cdot \frac{a-b}{a^2}$$

Andererseits ist $F_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot (|AS| + |BS| + a) \cdot \frac{d}{2}$. Dies ergibt sich daraus, dass der Inkreis des Trapezes auch gleichzeitig einer des Dreiecks $\triangle SAB$ ist. Zeichnet man die Verbindungen des Inkreismittelpunkts zu den Eckpunkten des Dreiecks und die Berührungsradien auf die drei Seiten ein, wird das Dreieck $\triangle SAB$ in insgesamt sechs rechtwinklige Dreiecke zerlegt, deren eine Katheten jeweils ein Radius des Inkreises sind,

und deren andere Katheten genau den Umfang des Dreiecks zerlegen.

Setzt man hierin den zuvor erhaltenen Term für $\frac{d}{2}$ ein und kürzt durch F_{SAB}, erhält man

$$1 = \frac{1}{2} \cdot (|AS| + |BS| + a) \cdot \frac{a-b}{a^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{2a^2}{a-b} = a + |AS| + |BS|$$

also

$$|AS| + |BS| = \frac{2a^2}{a-b} - a = \frac{a^2+ab}{a-b} = a \cdot \frac{a+b}{a-b}$$

und

$$(|AS| + |BS|)^2 = |AS|^2 + |BS|^2 + 2 \cdot |AS| \cdot |BS| = a^2 \cdot \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$$

Nach dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle SAB$ gilt $a^2 = |AS|^2 + |BS|^2 - 2 \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \cos\alpha$. Die Differenz der letzten beiden Identitäten liefert

$$2 \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot (1 + \cos\alpha) = a^2 \cdot \left(\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} - 1 \right) = a^2 \cdot \frac{4ab}{(a-b)^2}$$

also

$$F_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \sin\alpha = a^2 \cdot \frac{ab}{(a-b)^2} \cdot \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Damit erhält man

$$d = 2F_{SAB} \cdot \frac{a-b}{a^2} = 2a^2 \cdot \frac{ab}{(a-b)^2} \cdot \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \cdot \frac{a-b}{a^2} = 2\frac{ab}{a-b} \cdot \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Berücksichtigt man, dass

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha \cdot (1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha) \cdot (1-\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha \cdot (1-\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha \cdot (1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ist, lässt sich das Ergebnis auch schreiben als

$$d = 2\frac{ab}{a-b} \cdot \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Aufgabe 101224:
Es sei $ABCD$ ein konvexes Tangentenviereck und S der Schnittpunkt seiner Diagonalen, und es seien $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$, $BD = f$ und δ die Größe des Winkels $\angle BSA$. Beweisen Sie, dass dann $ac - bd = ef \cdot \cos\delta$ gilt!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Sei $e_1 = AS, e_2 = CS, f_1 = BS, f_2 = DS$. Nach dem Kosinussatz gilt

$$\begin{aligned}
2e_1f_1\cos\delta &= e_1^2 + f_1^2 - a^2 \\
2e_2f_2\cos\delta &= e_2^2 + f_2^2 - c^2 \\
-2e_2f_1\cos\delta = 2e_2f_1\cos(180^\circ - \delta) &= e_2^2 + f_1^2 - b^2 \\
-2e_1f_2\cos\delta = 2e_1f_2\cos(180^\circ - \delta) &= e_1^2 + f_2^2 - d^2 \ .
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

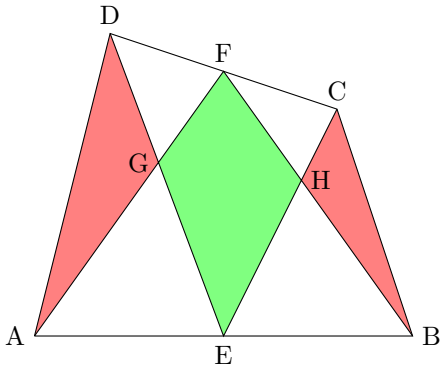
$$\begin{aligned}
2ef\cos\delta &= 2(e_1+e_2)(f_1+f_2)\cos\delta \\
&= (e_1^2+f_1^2-a^2) + (e_2^2+f_2^2-c^2) - (e_2^2+f_1^2-b^2) - (e_1^2+f_2^2-d^2) \\
&= -a^2 - c^2 + b^2 + d^2 \\
&= 2ac - 2bd - (a+c)^2 + (b+d)^2 \\
&= 2ac - 2bd + (b+d-a-c)(a+c+b+d) \ .
\end{aligned}$$

Da in einem Tangentenviereck $a+c = b+d$ gilt, ist die letze Zeile gleich $2(ac-bd)$, woraus die Behauptung folgt.

Aufgabe 131223:
In einem beliebigen konvexen Viereck $ABCD$ seien E der Mittelpunkt der Seite AB und F der der Seite CD. Der Schnittpunkt von AF mit DE sei G, der von BF mit CE sei H genannt.
Es ist zu beweisen, dass der Flächeninhalt des Vierecks $EHFG$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke AGD und BHC ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Mit Beträgen bezeichnen wir im folgenden den Flächeninhalt eines Vielecks. Dann können wir die Behauptung (durch ergänzen der vier weißen Teildreiecke) äquivalent umformen:

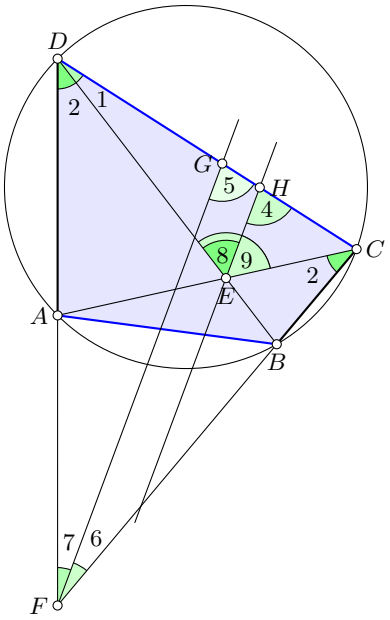
$$\begin{aligned} & |EHFG| = |AGD| + |BHC| \\ \iff & 2|EHFG| + |AEG| + |DFG| + |BEH| + |CFH| \\ & \qquad = 2|AGD| + 2|BHC| + |AEG| + |DFG| + |BEH| + |CFH| \\ \iff & |ABF| + |CDE| = (|AED| + |EBC|) + (|CFB| + |FDA|) \ . \end{aligned}$$



Da F der Mittelpunkt der Strecke CD ist, ist die Höhe des Dreiecks ABF gerade das arithmetische Mittel der Höhen der Dreiecke AED und EBC. Daraus folgt $|ABF| = |AED| + |EBC|$ und analog $|CDE| = |CFB| + |FDA|$ und somit die Behauptung.

Aufgabe 141223:
Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck und E der Schnittpunkt seiner Diagonalen AC und BD. Die Seite DA sei nicht parallel zur Seite BC, so dass sich die diese Seiten enthaltenden Geraden in einem Punkt F schneiden.
Die Gerade g halbiere den Winkel $\angle BEA$ und die Gerade h den Winkel $\angle AFB$.
Man beweise, dass dann $g \parallel h$ ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Nach Sehnensatz zerlegen die Diagonalen das Viereck in 2 Paare ähnlicher Dreiecke, womit die Gleichheit der Winkel 2 folgt. Nun ist:

$$\angle 6 = \frac{1}{2}\angle 7 = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \angle D - \angle C\right) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle D - \frac{1}{2}\angle C$$

$$\angle 5 = \angle D + \angle 6 = \angle D + 90^\circ - \frac{1}{2}\angle D - \frac{1}{2}\angle C = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle D - \frac{1}{2}\angle C$$

Wir weisen nun nach, dass $\angle 5 = \angle 4$. Es ist:

$$\angle 8 = \frac{1}{2}\angle 9 = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \angle 1 - (\angle C - \angle 2)\right) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle 1 + \frac{1}{2}\angle 2 - \frac{1}{2}\angle C$$

$$\angle 4 = \angle 8 + \angle 1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle 1 + \frac{1}{2}\angle 2 - \frac{1}{2}\angle C + \angle 1 = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle 1 + \frac{1}{2}\angle 2 - \frac{1}{2}\angle C =$$
$$= 90^\circ + \frac{1}{2}\left(\angle 1 + \angle 2\right) - \frac{1}{2}\angle C = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle D - \frac{1}{2}\angle C$$

Aufgabe 161221:
Es sei R ein Rechteck mit dem Flächeninhalt A, den Seitenlängen a, b und der Diagonalenlänge d. Ferner sei a das arithmetische Mittel von b und d.
Man ermittle für dieses Rechteck a, b und d in Abhängigkeit von A.

Lösung von Steffen Polster:
Folgende Beziehungen gelten dann

$$A = a \cdot b \quad (1) \qquad ; \qquad d = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2) \qquad ; \qquad a = \frac{b+d}{2} \quad (3)$$

Umstellen von (1) und (2) und Einsetzen in (3) ergibt

$$a = \frac{A + \sqrt{a^4 + f^2}}{2a}$$
$$(2a^2 - A)^2 = a^4 + A^2$$
$$a^2(3a^2 - 4A) = 0$$

mit den Lösungen $a_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{A}$ und $a_2 = 0$, wobei a_2 entfällt.

Rückwärtseinsetzen in (1), (2) ergibt $b = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{A}$ und $d = \frac{5\sqrt{3}}{6}\sqrt{A}$. Ein Probe in (3) bestätigt die Korrektheit der Lösung.

Aufgabe 191222:
Ist $ABCD$ ein konvexes Viereck, seine Fläche also durch die Diagonale AC in zwei Dreiecksflächen, nämlich die des Dreiecks ABC und die des Dreiecks ACD, zerlegt, so werde der Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit F_1, der des Dreiecks ACD mit F_2 sowie die Größe des Winkels $\angle DAB$ mit α bezeichnet.
Von einem konvexen Viereck $ABCD$ seien nun die folgenden Eigenschaften gefordert:

$$AB \parallel CD \qquad (1)$$
$$|AB| > |CD| \qquad (2)$$
$$|BC| = |CD| = |DA| \qquad (3)$$
$$AC \perp BC \qquad (4)$$

Man beweise, dass die Forderungen (1) bis (4) erfüllbar sind und dass die Werte von $F_1 : F_2$ und α durch diese Forderungen eindeutig bestimmt sind. Man ermittle diese Werte.

Lösung von cyrix:
Nach (1) handelt es sich bei $ABCD$ um ein Trapez, nach (3) wegen $|BC| = |DA|$ (und $|AB| \neq |CD|$) sogar um ein symmetrisches. Also ist $\alpha = \angle DAB = \angle ABC = 180° - \angle BCA - \angle CAB = 90° - \angle CAB$.
Weiterhin sind im gleichschenkligen Dreieck $\triangle ACD$ die beiden Basiswinkel $\angle DAC$ und $\angle ACD$ gleich groß sowie auch die Wechselwinkel $\angle ACD$ und CAB an den geschnittenen Parallelen AB und CD.
Damit ist $2\angle CAB = \angle CAB + \angle DAC = \alpha = 90° - \angle CAB$, also $\angle CAB = 30°$ und $\alpha = 60°$. Damit ist α eindeutig bestimmt.

Tatsächlich ist bei einem symmetrischen Trapez $ABCD$ mit $\alpha = \angle DAB = \angle ABC = 60°$ und $\angle BCD = \angle CDA = 120°$ die Diagonale AC die Winkelhalbierende des Winkels $\angle DAB$, sodass sie senkrecht auf der Seite BC steht und die Seiten DA, CD und BC gleich lang sind.
Weiterhin ist AB die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$, also insbesondere länger als die Kathete BC, sodass auch $|AB| > |CD|$ folgt.

Abschließend ist nach der Definition des Sinus im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ das Verhältnis $|BC| : |AB| = \sin\angle CAB = \sin 30° = 1 : 2$, also auch $|CD| : |AB| = 1 : 2$. Ist h der Abstand der beiden Parallelen AB und CD, so berechnet sich F_1 zu $F_1 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h$ und F_2 zu $F_2 = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot h$, sodass $F_1 : F_2 = |AB| : |CD| = 2 : 1$ folgt.

Aufgabe 211223:
Es sei $ABCD$ ein beliebiges Viereck. Seine Seitenlängen seien a, b, c, d; sein Flächeninhalt sei F.
Man beweise, dass dann stets die folgende Ungleichung (1) gilt

$$F \leq \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \qquad (1)$$

Ferner ermittle man alle diejenigen Vierecke, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Falls das Viereck konkav ist, können wird durch Spiegelung der konkaven Ecke ein zweite Viereck konstruieren welche das erste enthält und dieselben Seitenlängen besitzt. Daher reicht es aus, die Gleichung für konvexe Vierecke zu zeigen.

Seien β,δ die Winkel in B,D. Der Flächeninhalt kann getrennt in den Dreiecken ABC und ACD bestimmt werden:

$$4F = 2ab\sin\beta + 2cd\sin\delta \leq 2ab + 2cd = a^2 + b^2 - (a-b)^2 + c^2 + d^2 - (c-d)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Die Gleichheit gilt nur für 1) $\beta = \delta = 90°$ und 2) $a = b$,$c = d$. Analog erhalten wir mit

$$4F = 2ad\sin\alpha + 2bc\sin\gamma$$

aus der Gleichheit ebenfalls 1') $\alpha = \gamma = 90°$ und 2') $a = d$,$b = c$. Also gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn $ABCD$ ein Quadrat ist.

Aufgabe 231223:
Es sei $ABCD$ ein beliebiges Trapez mit $AB \parallel CD$. Die Längen seiner Seiten und Diagonalen seien folgendermaßen bezeichnet:

$$AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e, BD = F$$

Man beweise, dass dann stets die folgenden Gleichungen (1) und (2) gelten!

$$af^2 + ce^2 = (a+c)(ac+b^2) \qquad (1)$$
$$ae^2 + cf^2 = (a+c)(ac+d^2) \qquad (2)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ist β die Größe des Winkels $\angle ABC$, dann ist wegen $AB \parallel CD$ die Größe des Winkels $\angle BCD$ gleich $180° - \beta$.
Nach dem Kosinussatz, angewandt auf die Dreiecke ABC und BCD, gilt dann

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta \qquad \text{und} \qquad (3)$$
$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180° - \beta) \qquad \text{also}$$
$$f^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\beta \qquad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt durch Multiplizieren mit c bzw. a und anschließender Addition

$$af^2 + ce^2 = a^2c + b^2c + ab^2 + ac^2 \qquad \text{also}$$
$$af^2 + ce^2 = (a+c)(ac+b^2)$$

Ist α die Größe des Winkels $\angle DAB$, so ergibt sich analog

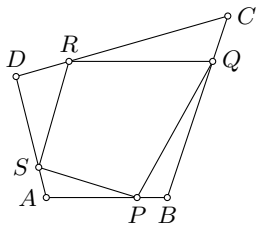
$$e^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha \qquad \text{und}$$
$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$$

woraus folgt

$$ae^2 + cf^2 = ac^2 + ad^2 + ca^2 + cd^2 \qquad \text{also}$$
$$ae^2 + cf^2 = (a+c)(ac+d^2)$$

Aufgabe 271222:
Es sei $ABCD$ ein beliebiges ebenes konvexes Viereck; k sei eine beliebige positive reelle Zahl.
Die Punkte P, Q, R, S mögen in dieser Reihenfolge die Seiten AB, BC, CD, DA dieses Vierecks jeweils im Verhältnis $k : 1$ teilen.
Man ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte der Vierecke $PQRS$ und $ABCD$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Ist $XY...Z$ ein Polygon, so bezeichne $I(XY...Z)$ seinen Flächeninhalt. Aus der Voraussetzung $AP : BP = k : 1$ folgt

$$AP = \frac{k}{k+1} \cdot AB \qquad , \qquad PB = \frac{1}{k+1} \cdot AB$$

Da die Dreiecke PBQ und ABQ die gleiche zur Seite PB bzw. AB senkrechte Höhe haben, folgt

$$I(ABQ) = \frac{k}{k+1} \cdot I(ABC) \qquad \text{und damit} \qquad I(PBQ) = \frac{k}{(k+1)^2} \cdot I(ABC)$$

Entsprechend folgt

$$I(RDS) = \frac{k}{(k+1)^2} \cdot I(CDA) \qquad \text{und damit}$$

$$I(PBQ) + I(RDS) = \frac{k}{(k+1)^2} I(ABCD)$$

$$I(SAP) + I(QCR) = \frac{k}{(k+1)^2} I(ABCD)$$

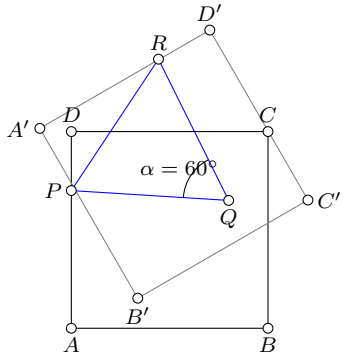
und damit folgt insgesamt

$$\begin{aligned} I(PQRS) &= I(ABCD) - I(SAP) - I(PBQ) - I(QCR) - I(RDS) \\ &= I(ABCD) \cdot \left(1 - \frac{2k}{(k+1)^2}\right) \\ \frac{I(PQRS)}{I(ABCD)} &= \frac{k^2+1}{(k+1)^2} \end{aligned}$$

III Runde 3

Aufgabe V11234:
Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ und ein fester Punkt Q, der nicht auf dem Umfang des Quadrates liegt. Für jede Wahl des Punktes P auf dem Umfang des Quadrates wähle man einen Punkt R so, dass PQR ein gleichseitiges Dreieck wird.
Welche Kurve beschreibt R, wenn sich P längs $ABCD$ bewegt?

Lösung von MontyPythagoras:



Da PQR ein gleichseitiges Dreieck ist, ist $\overline{QR} = \overline{QP}$. R entsteht also aus P durch Drehung des Punktes P um Q um 60° oder −60° (bildlich dargestellt ist die Drehung um −60°). Dadurch werden auch alle Punkte des Quadrates und das Quadrat als ganzes um 60° um Q gedreht. Die Kurve, die R beschreibt, ist daher das um ±60° um den Punkt Q gedrehte Quadrat.

Aufgabe 021235:
Gegeben sei eine Strecke AB und auf ihr ein beliebiger Punkt M.
Man konstruiere über derselben Seite der Strecke AB die Quadrate $AMDE$ und $MBGH$! Die Mittelpunkte der beiden Quadrate seien R und S.
Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken RS?

Lösung von Manfred Worel:
Die Strecke AB wird so in ein zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem gelegt, so dass folgende Punkte folgende Koordinaten haben: $A(0,0)$, $B(a,0)$, $M(m,0)$, mit $0 \leq m \leq a$.
Nach den Bedingungen der Aufgabenstellung haben die Punkte D, E, G und H dann die folgenden Koordinaten: $D(m,m)$, $E(0,m)$, $G(a, a-m)$, $H(m, a-m)$.
Die Mittelpunkte R des Quadrates $MADE$ und S des Quadrates $MBGH$ haben somit die Koordinaten:

$$R\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right) \quad ; \quad S\left(\frac{a+m}{2}, \frac{a-m}{2}\right)$$

Die Koordinaten des Mittelpunktes N der Strecke RS im zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem lauten demnach

$$N\left(\frac{a+2m}{4}, \frac{a}{4}\right)$$

Da der Punkt M auf der Strecke AB beliebig gewählt werden kann, d. h. es gilt $0 \leq m \leq a$, ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken RS eine zu AB parallele Strecke KL der Länge $\frac{a}{2}$, wobei deren Endpunkte K und L folgende Koordinaten haben:

$$K\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right) \quad ; \quad L\left(\frac{3a}{4}, \frac{a}{4}\right)$$

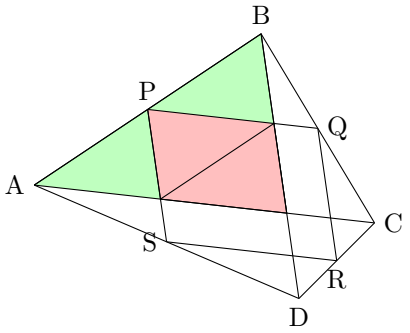
Aufgabe 051235:
Der Flächeninhalt des ebenen (nicht notwendig konvexen) Vierecks $ABCD$ sei S, die Längen der Seiten AB, BC, CD, DA seien (in dieser Reihenfolge) a, b, c, d. Man beweise, dass stets gilt

$$S \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

und untersuche, wann das Gleichheitszeichen gilt.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Vorbemerkung:
Falls $ABCD$ konkav ist, so erhalten wir durch „Ausklappen„ der konkaven Ecke ein konvexes Viereck, für die die Ungleichung ebenfalls gelten soll. Daher reicht es im folgenden nur ein konvexes Viereck zu betrachten. Gleichheit kann nur im nicht konkaven Fall auftreten.

Bestimmung des Flächeninhalts:
Seien P,Q,R,S die Seitenmittelpunkte der Seiten AB,BC,CD,DA, $e = |PR|, f = |QS|$ die Diagonalen des Vierecks $PQRS$.
Dann lässt sich über Strahlensätze $PQ||AC||RS$ und $QR||BD||SP$ zeigen, d. h. $PQRS$ ist ein Parallelogramm mit dem Flächeninhalt $\frac{1}{2}ef\sin(\varepsilon)$, wobei ε den Winkel zwischen den Diagonalen bezeichnet.
Des Weiteren erhalten wir über Strahlensätze, dass der Flächeninhalt des Parallelogramms genau halb so groß wie S ist, als $S = ef\sin(\varepsilon)$ (Konvexität!). Insbesondere gilt $S = ef$ genau dann, wenn e und f orthogonal sind.



Die Ungleichung:
Als Vektoren betrachtet gilt: $\vec{PR} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$, insbesondere haben wir nach Anwendung der Dreiecksungleichung $e \leq \frac{a+c}{2}$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn a und c parallel sind.
Alles zusammen:

$$S = ef\sin(\varepsilon) \leq ef \leq \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

Nach den obigen Bemerkungen gilt $S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ genau dann wenn die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks parallel und orthogonal zu den benachbarten Seiten sind, d. h. wenn $ABCD$ ein Rechteck ist.

Aufgabe 061231:
In ein und derselben Ebene seien n Punkte ($n > 2$) so verteilt, dass es zu jedem von ihnen unter den übrigen nur einen nächstgelegenen gibt. Zu jedem dieser n Punkte werde der von ihm ausgehende und in dem ihm nächstgelegenen Punkt endende Vektor und nur dieser gezeichnet.
Man ermittle die größtmögliche Anzahl derjenigen unter diesen Vektoren, die dann in einem und demselben der n Punkte enden können.

Lösung von cyrix:
Die größtmögliche Anzahl ist 5.
Um dies zu zeigen, nehmen wir zuerst an, es gäbe 6 Punkte P_1 bis P_6, deren nächstgelegener Punkt jeweils der von ihnen alle verschiedene Punkt Q sei.
O. B. d. A. seien die Punkte so bezeichnet, dass die von P_i nach Q verlaufenden Vektoren bei einem in mathematisch positiver Orientierung erfolgenden Umlauf um Q in aufsteigender Reihenfolge getroffen werden.

Definieren wir für eine einfachere Notation noch zusätzlich $P_7 := P_1$, dann zerlegen nun also die 6 Winkel $\angle P_iQP_{i+1}$ den Vollwinkel bei Q. Demzufolge ist mindestens einer unter diesen höchstens 60° groß, o. B. d. A. sei dies $\angle P_1QP_2$. Dann ist einer der beiden anderen Innenwinkel des Dreiecks $\triangle P_1QP_2$ mindestens so groß, sei dies o. B. d. A. $\angle QP_1P_2$.

Da aber dem größeren Innenwinkel in einem Dreieck immer auch die größere Seite gegenüberliegt, ist dann auf jeden Fall die Strecke $\overline{P_2Q}$ mindestens so lang wie die Strecke $\overline{P_1P_2}$, also der Punkt P_1 höchstens so weit entfernt von P_2 wie Q.
Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme, der eindeutig bestimmte nächstgelegene Punkt zu P_2 wäre Q gewesen. Also können höchstens 5 Vektoren in einem Punkt ankommen.
Dass dies auch wirklich möglich ist, zeigt die Konstellation eines regelmäßigen Fünfecks sowie seines Mittelpunkts. Dann führt die eben durchgeführte Überlegung in jedem Fall dazu, dass die Verbindungsstrecke zweier „benachbarter" Eckpunkte immer länger ist als die jeweiligen Radien. (Und die übrigen Diagonalen sind sowieso noch länger.)

Aufgabe 071236:
Beweisen Sie, dass es stets möglich ist, von 6 Punkten einer Ebene, wobei keine 3 Punkte kollinear (d. h. auf derselben Geraden gelegen) seien, 3 Punkte derart auszuwählen, dass diese die Ecken eines Dreiecks bilden, das einen stumpfen Winkel von mindestens 120° enthält!

Lösung von cyrix:
Gibt es unter den sechs Punkten vier, M, A, B und C so, dass M im Inneren des Dreiecks ABC liegt, dann zerlegen die Strecken MA, MB und MC den Vollwinkel bei M in drei Teilwinkel. Mindestens einer von diesen, o. B. d. A. $\angle AMB$ beträgt dann mindestens $\frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$ und mit dem Dreieck AMB ist ein gewünschtes gefunden.

Andernfalls befindet sich keiner der Punkte im Inneren der durch die sechs Punkte aufgespannten konvexen Figur. Damit, da keine drei Punkte auf einer Geraden liegen, muss es sich bei dieser Figur um ein konvexes Sechseck handeln. Dieses besitzt eine Innenwinkelsumme von $(6-2) \cdot 180° = 720°$, sodass mindestens einer der Innenwinkel mindestens $\frac{1}{6} \cdot 720° = 120°$ beträgt.
Das Dreieck, dass durch den Punkt, an dem dieser Innenwinkel liegt, sowie seinen beiden Nachbarn entsteht, erfüllt die gewünschte Eigenschaft.

Aufgabe 121235:
Man untersuche, ob es regelmäßige n-Ecke gibt, bei denen die Differenz der Längen einer größten und einer kleinsten Diagonale gleich der Seitenlänge des n-Ecks ist.
Wenn ja, so gebe man alle natürlichen Zahlen n ($n \geq 4$) an, für die das gilt.

Lösung von MontyPythagoras:
O. B. d. A. sei die Kantenlänge des n-Ecks gleich 1. Die kürzeste Diagonale, die zwei Kanten umspannt, sei d_2. Dann ist

$$1 < d_2 < 2$$

Die maximale Diagonale nennen wir d_m. Laut Aufgabenstellung soll $d_m = 1 + d_2$ gelten, woraus folgt:

$$2 < d_m < 3 \tag{1}$$

Wenn $n = 6$ ist, ist $d_m = 2$, und die Ungleichung (1) nicht erfüllt. Für $n = 4$ und $n = 5$ ist jeweils sogar $d_m < 2$. Daher muss $n \geq 7$ sein.
Der Umfang des Umkreises bei einem n-Eck mit geradem n ist πd_m, da d_m durch den Mittelpunkt verläuft. Der Umfang des Umkreises ist größer als der Umfang des n-Ecks:

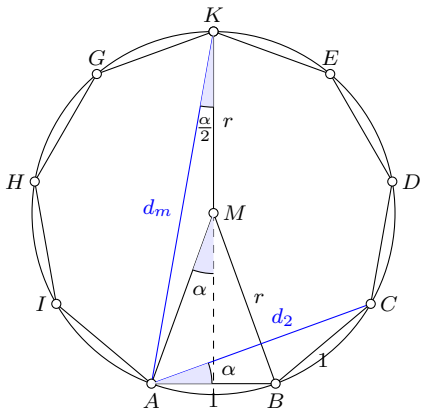
$$\pi d_m > n \qquad ; \qquad d_m > \frac{n}{\pi}$$

Wenn $n \geq 10$ ist, ist $d_m > 3$ und damit (1) nicht erfüllbar. Skizziert man ein 8-Eck, kann man mithilfe des Satzes von Pythagoras die Diagonalen recht einfach berechnen. Es ist für $n = 8$:

$$d_2 = \sqrt{(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2 + (\tfrac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx \sqrt{3.4} \approx 1.8$$

$$d_m = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2+1} = \sqrt{4+2\sqrt{2}} \approx \sqrt{6{,}8} \approx 2.6$$

Beim 8-Eck ist die Differenz zwischen maximaler Diagonale d_m und kürzester Diagonale d_2 zu klein, so dass nur ungerade $n \geq 7$ in Frage kommen.
Nachfolgend eine Zeichnung eines n-Ecks mit ungeradem n:



Es ist

$$\alpha = \frac{\pi}{n}$$

Damit folgt:

$$d_2 = 2\cos\alpha$$

und

$$d_m = \frac{\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

Es muss gelten:

$$\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha} = 2\cos\alpha + 1$$

Mit $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ erhält man

$$\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha} = 3 - 4\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\tfrac{1}{2} = 3\sin\tfrac{1}{2}\alpha - 4\sin^3\tfrac{1}{2}\alpha$$

An dieser Stelle kann die Gleichung für den Sinus des dreifachen Winkels verwendet werden:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

Dann ist nämlich

$$\sin\tfrac{3}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{3}{2}\alpha = 30^\circ$$
$$\alpha = 20^\circ$$

Man sieht daher, dass tatsächlich nur das 9-Eck die Voraussetzung erfüllt, da $\alpha = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$ ist. (Die weiteren Lösungen der kubischen Gleichung ergeben $\alpha = 100^\circ$ und $\alpha = 260^\circ$, woraus sich kein sinnvolles n-Eck konstruieren lässt).

Aufgabe 131233:
Es sei $V = ABCD$ ein beliebiges (konvexes oder nichtkonvexes) nicht überschlagenes ebenes Viereck. Ferner seien A', B', C', D' diejenigen Punkte, für die die Vierecke $ABA'D$, $ABCB'$, $C'BCD$, $AD'CD$ Parallelogramme sind.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen folgende Aussage gilt:
Dann und nur dann, wenn V nichtkonvex ist, liegen alle vier Punkte A', B', C', D' außerhalb von V.

Lösung von cyrix:
Die Innenwinkel in V bei A, B, C und D seien wie üblich mit α, β, γ und δ bezeichnet.

Sei zuerst V ein konvexes Viereck und es sei o. B. d. A. $\alpha + \beta \geq 180°$. (Da $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ gilt, beträgt mindestens eine der beiden Summen $\alpha + \beta$ bzw. $\gamma + \delta$ mindestens 180°.)

Die Parallele zu DA durch B schneide die Gerade CD in P. Dann liegt P im Innern oder auf der Strecke CD, da $\angle ABP = 180° - \alpha \leq \beta$ ist, da $\angle ABP$ und α Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind. Analog ist auch mindestens eine der beiden Summen $\alpha + \delta$ und $\beta + \gamma$ mindestens 180°, sodass wir (unter gegebenenfalls erfolgender Variablenumbenennung) o. B. d. A. $\alpha + \delta \geq 180°$ annehmen können und nun analog oben der Schnittpunkt Q der Parallelen zu AB durch D mit BC im Innern oder auf dem Rand der Strecke BC liegt, da $\angle ADQ = 180° - \alpha \leq \delta$ gilt.

Da nun die Strecken BP und DQ gegenüberliegende Seiten des konvexen Vierecks V miteinander verbinden, besitzen sie einen Schnittpunkt A' im Innern oder auf dem Rand von V. Nach Konstruktion ist das Viereck $ABA'D$ ein Parallelogramm und nicht alle der vier Punkte A', B', C' und D' liegen außerhalb von V.

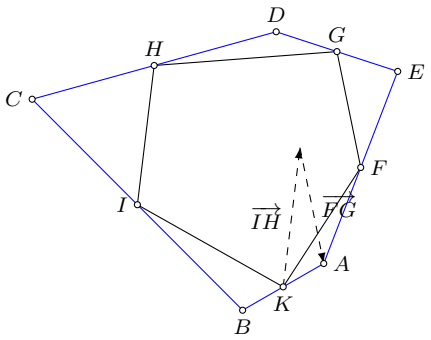
Sei nun umgekehrt V ein nichtkonvexes, nicht überschlagenes Viereck mit überstumpfen Innenwinkel α. Aufgrund der Innenwinkelsumme von V kann es nur einen überstumpfen Innenwinkel geben. Dann liegt die Diagonale BD (bis auf die Endpunkte) außerhalb von V. Damit liegen alle Punkte von V in nur einer der beiden von der Geraden BD erzeugten Halbebenen. Im Parallelogramm $ABA'D$ liegen aber A und A' in verschiedenen von der Diagonalen BD erzeugten Halbebenen, also A' außerhalb von V.

Analog liegt auch im Parallelogramm $C'BCD$ der Punkt C' in der von BD erzeugten Halbebene, in der C, und damit V, nicht liegt. Also ist auch C' ein Punkt, der außerhalb von V liegt. Weiterhin ist $\gamma = 360° - \alpha - \beta - \delta < 180° - \beta$ und damit $\angle B'CB = 180° - \beta > \gamma = \angle DCB$, sodass B' außerhalb von V liegt. Analog (durch Vertauschen der Rollen von B und D) folgt schließlich auch $\angle DCD' = 180° - \delta > \gamma = \angle DCB$, sodass auch D' außerhalb von V liegt.

Damit befinden sich für ein nicht überschlagenes Viereck $V = ABCD$ genau dann die vier Punkte A', B', C' und D' außerhalb von V, wenn V nichtkonvex ist, □.

Aufgabe 141235:
Es seien in der Ebene fünf Punkte F, G, H, I, K gegeben, von denen keine drei auf derselben Geraden liegen.
Man begründe und beschreibe eine Konstruktion eines solchen Fünfecks $ABCDE$, dass F, G, H, I, K in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DE, EA des Fünfecks sind.
Man untersuche ferner, ob ein solches Fünfeck $ABCDE$ durch die gegebenen Punkte F, G, H, I, K eindeutig bestimmt ist.
Dabei wird nicht vorgeschrieben, dass das Fünfeck $ABCDE$ konvex, nicht konvex oder überschlagen ist; es soll auch zugelassen sein, dass Ecken miteinander zusammenfallen oder Seiten teilweise ineinander oder in der Verlängerung voneinander liegen.

Lösung von Steffen Polster:



Setzen wir $\vec{f}, \vec{g}, \ldots, \vec{k}$ für die Ortsvektoren von F, G, H, I, K und analog $\vec{a}, \vec{b}, \ldots, \vec{e}$ für die gesuchten Punkte A, B, C, D, E, F des „Mittenfünfecks“.

Damit z. B. K Mittelpunkt von A und B ist, muss gelten

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \vec{k} \tag{1}$$

Für die anderen Punkte wird damit

$$\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} = \vec{i} \quad ; \quad \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2} = \vec{h} \quad ; \quad \frac{\vec{d}+\vec{e}}{2} = \vec{g} \quad ; \quad \frac{\vec{e}+\vec{a}}{2} = \vec{f} \tag{2,3,4,5}$$

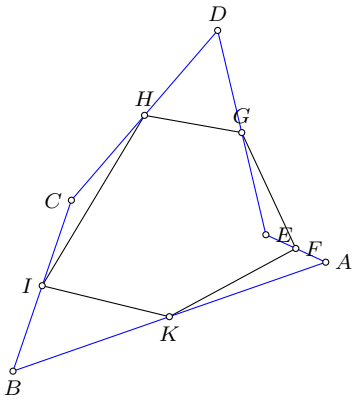
Addition und Subtraktion dieser Gleichungen in der Form (1)-(2)+(3)-(4)+(5) ergibt

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} + \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2} - \frac{\vec{d}+\vec{e}}{2} + \frac{\vec{a}+\vec{e}}{2} = \vec{k} - \vec{i} + \vec{h} - \vec{g} + \vec{f}$$

und da die Vektoren $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ sich in der Summe aufheben

$$\vec{a} = \vec{k} - \vec{i} + \vec{h} - \vec{g} + \vec{f}$$

Damit kann der Punkt A konstruiert werden, in dem an K die Vektoren $\overrightarrow{IH}$ und $\overrightarrow{GF}$ addiert werden. (siehe Abbildung). Die Punkte B, C, D, E ergeben sich durch anschließende Punktspiegelung an den Punkten K, I, H und G.
Beispiel 2:



Nachweis:
Für den Punkt A wird nach oben

$$\vec{a} = \vec{k} - \vec{i} + \vec{h} - \vec{g} + \vec{f}$$

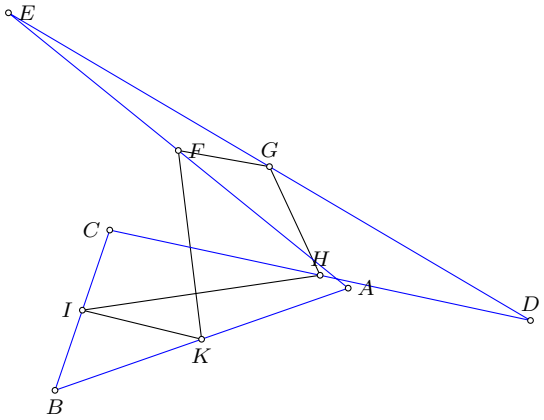
sowie für den Punkt B in analoger Weise

$$\vec{b} = \vec{i} - \vec{f} + \vec{k} - \vec{h} + \vec{g}$$

und somit

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \frac{\vec{k} - \vec{i} + \vec{h} - \vec{g} + \vec{f} + \vec{i} - \vec{f} + \vec{k} - \vec{h} + \vec{g}}{2} = \frac{2\vec{k}}{2} = \vec{k}$$

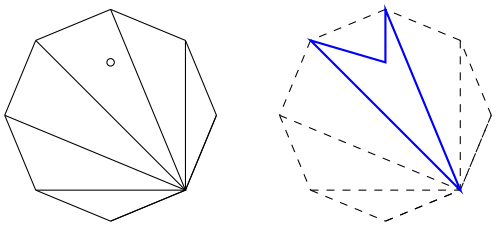
Damit ist K Mittelpunkt von A und B. Für die Punkte F, G, H und I ergibt sich dies in gleicher Weise. Damit erfüllt das Fünfeck $ABCDE$ die in der Aufgabenstellung geforderten Bedingungen.
Da jeder Konstruktionsschritt eindeutig ist, ist $ABCDE$ das einzige Fünfeck entsprechend der Aufgabenstellung.
Beispiel 3 (nicht konvexes Ausgangsfünfeck):



Aufgabe 151235:
In der Ebene mögen n Punkte ($n \geq 4$) so gelegen sein, dass je vier von ihnen Eckpunkte eines nichtentarteten konvexen Vierecks sind.
Man beweise, dass dann alle n Punkte Eckpunkte eines konvexen n-Ecks sind.

Lösung von ochen:
Wir betrachten die konvexe Hülle aller n Punkte. Diese bildet ein konvexes k-Eck mit $k \leq n$. Gilt $k = n$, sind die n Punkte Eckpunkte eines konvexen n-Ecks und wir sind fertig.

Nehmen wir also an, es gelte $k < n$. Wir triangulieren unser k-Eck, indem wir einen der Eckpunkte des k-Ecks auswählen und ihn mit allen anderen Eckpunkten durch Strecken verbinden.



Diese Strecken befinden sich alle im k-Eck, da dieses konvex ist. Wir erhalten $k - 2$ Dreiecke. Da $k < n$ ist, gibt es einen der n Punkte, welches sich im Inneren oder auf einer Seite eines der Dreiecke befindet.

Die Eckpunkte des Dreiecks und der Punkt im Inneren oder auf der Seite des Dreiecks bilden aber die Eckpunkte eines konkaven oder entarteten Vierecks. Also war unsere Annahme falsch und es muss $k = n$ gelten.

Aufgabe 191232:
Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, auf dessen Kanten AB, BC, CD bzw. DA Punkte E, F, G bzw. H so gelegen sind, dass sie die entsprechende Kante jeweils im Verhältnis der Längen der anliegenden Kanten teilen, d. h. es wird vorausgesetzt:

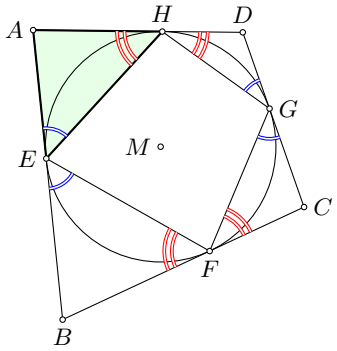
$$AE : EB = DA : BC; BF : FC = AB : CD; CG : GD = BC : DA; DH : HA = CD : AB \qquad (1)$$

Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die folgende Aussage wahr ist:
Im Viereck $ABCD$ gilt $AB + CD = BC + DA$ (d. h. $ABCD$ ist ein Tangentenviereck) genau dann, wenn im Viereck $EFGH$ für die Größe der Innenwinkel

$$\angle EFG + \angle GHE = \angle FGH + \angle HEF$$

gilt (d. h. wenn $EFGH$ ein Sehnenviereck ist).

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:



Die Bedingung

$$\angle EFG + \angle GHE = \angle FGH + \angle HEF$$

ist äquivalent zu

$$\angle AEH + \angle FEB + \angle CGF + \angle HGD = \angle BFE + \angle GFC + \angle DHG + \angle EHA \qquad (2),$$

d. h. wir gehen von den Innenwinkeln zu den Winkeln der Dreiecke AEH, BFE, CGF und DHG über. Im folgenden zeigen wir, dass aus $AB+CD = BC+DA$, $AB+CD < BC+DA$ und $AB+CD > BC+DA$ jeweils $\angle AEH = \angle EHA$, $\angle AEH > \angle EHA$ und $\angle AEH < \angle EHA$ im Dreieck AEH folgt, d. h. das Größenverhältnis der an den Seiten anliegenden Winkel ist umgekehrt zu dem Größenverhältnis der Summe der Seiten.
Dieses gilt ebenfalls für die anderen drei Dreiecke und somit ist (2) äquivalent zu $AB+CD = BC+DA$, da aus $AB + CD \neq BC + DA$ die Ungleichheit in (2) folgt.

Aus $AE + EB = AB$ und $AE : EB = DA : BC$ folgt $AE = \frac{AB \cdot DA}{BC+DA}$ und $EB = \frac{AB \cdot BC}{BC+DA}$. Anlog erhalten wir $AH = \frac{AB \cdot DA}{AB+CD}$ und somit $\frac{AE}{AH} = \frac{AB+CD}{BC+DA}$. Aus $AB + CD = BC + DA$ folgt, dass $\triangle AEH$ gleichschenklig mit $\angle AEH = \angle EHA$ ist. Entsprechend gilt

$$AB + CD < BC + DA \Rightarrow AE < AH \Rightarrow \angle EHA < \angle AEH$$

wegen der Größenbeziehung zwischen Seiten und Winkeln im Dreieck AEH. Aus Symmetrie gilt ebenfalls $AB + CD > BC + DA \Rightarrow \angle EHA > \angle AEH$.

Aufgabe 221233A:
a) Man untersuche, ob es eine kleinste reelle Zahl p mit der folgenden Eigenschaft gibt:
In jedem konvexen Viereck gilt für die Seitenlängen a, b, c, d und den Flächeninhalt F des Vierecks

$$F \leq p \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

b) Man untersuche, ob es eine kleinste reelle Zahl q mit der folgenden Eigenschaft gibt:
In jedem Dreieck gilt für die Seitenlängen a, b, c und den Flächeninhalt F des Dreiecks

$$F \leq q \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$$

Wenn es in a) bzw. b) eine solche kleinste Zahl p bzw. q gibt, so ermittle man jeweils diese Zahl.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) I. ist $ABCD$ ein konvexes Viereck, F sein Flächeninhalt und $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $\beta = \angle ABC$, $\delta = \angle CDA$, so gilt

$$F = \frac{ab}{2} \cdot \sin\beta + \frac{cd}{2} \cdot \sin\delta$$

wegen $\sin\beta \leq 1$, $\sin\delta \leq 1$, $0 < ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, $0 < cd \leq \frac{c^2+d^2}{2}$ also

$$F \leq \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

II. Es gibt konvexe Vierecke, bei denen für die Seitenlängen a, b, c, d und den Flächeninhalt F

$$F = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \qquad (1)$$

gilt; denn es gibt Vierecke mit $a = b = c = d$ und $\beta = \delta = 90°$, diese sind (Quadrate, also) konvex, und für sie gilt $F = a^2$, also (1).
Mit I. und II. ist bewiesen: Es gibt eine kleinste reelle Zahl p mit der genannten Eigenschaft; sie lautet $p = \frac{1}{4}$.

b) I. Ist ABC ein Dreieck, F sein Flächeninhalt und $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $a = \frac{1}{2}(a + b + c)$, so gilt nach der Dreiecksungleichung

$$s - a \geq 0 \qquad ; \qquad s - b \geq 0 \qquad ; \qquad s - c \geq 0$$

Hieraus und aus der Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel nichtnegativer reeller Zahlen folgt

$$\begin{aligned} F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} &\leq \sqrt{s(\frac{1}{3}(s-a+s-b+s-c)^3} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{3}}s^2 = \frac{1}{12\sqrt{3}}(a+b+c)^2 \\ &= \frac{1}{36}\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) \\ &\leq \frac{1}{36}\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2+a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2) \\ &= \frac{1}{12}\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2) \end{aligned}$$

II. Es gibt Dreiecke, bei denen für die Seitenlängen a, b, c und den Flächeninhalt F

$$F = \frac{1}{12}\sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

gilt; denn für gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge a $(= b = c)$ gilt $F = \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2$, also (2).
Mit I. und II. ist bewiesen: Es gibt eine kleinste reelle Zahl q mit der genannten Eigenschaft; sie lautet $q = \frac{1}{12}\sqrt{3}$.

Aufgabe 261234:
Beweisen Sie:
Für jedes Sehnenviereck $ABCD$, dessen Diagonale BD durch den Mittelpunkt N der Diagonalen AC verläuft, gilt die folgende Gleichung (1).

$$2 \cdot BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 \qquad (1)$$

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Mit $\alpha = \angle BAD$ ist nach dem Satz über Gegenwinkel im Sehnenviereck $\angle BCD = 180° - \alpha$. Nach dem Kosinussatz und wegen $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ gilt daher

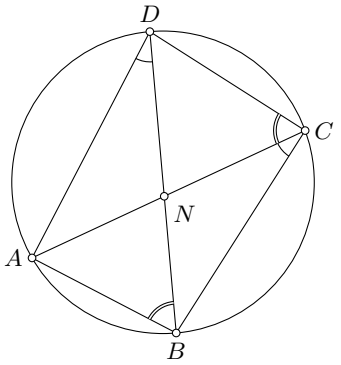
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cos\alpha \qquad ; \qquad BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2 \cdot BC \cdot CD \cos\alpha$$

also

$$2BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 - 2(AB \cdot AD - BC \cdot CD)\cos\alpha \tag{2}$$

Wegen $\angle ANB = \angle DNC$, $\angle BNC = \angle AND$ (Scheitelwinkel) und $\angle ABN = \angle DCN$, $\angle BCN = \angle ADN$ (Peripheriewinkel über dem Boden $\overset{\frown}{AD}$ bzw. $\overset{\frown}{AB}$ des Kreises, dem das Sehnenviereck einbeschrieben ist) gilt

$$\triangle ABN \sim \triangle DCN \qquad \text{und} \qquad \triangle BCN \sim \triangle ADN \tag{3}$$



Aus (3) folgt $AB : DC = AN : DN$, wegen der Voraussetzung $AN = CN$ also
$AB : CD = CN : DN$ (5). Aus (4) folgt $BC : AD = CN : DN$ (6). Wegen (5) und (6) ist

$$AB : CD = BC : AD \qquad \text{also} \qquad AB \cdot AD = BC \cdot CD$$

Damit ergibt sich aus (2) die Behauptung (1).

Aufgabe 281232:
Gegeben seien ein Punkt A in einer Ebene ε sowie eine Länge a.
Man ermittle die Menge alle derjenigen Punkte C in ε, zu denen es jeweils Punkte B und D so gibt, dass $ABCD$ ein Parallelogramm mit $AB = a$ und $AC : AB = BD : AD$ ist.

Lösung von MontyPythagoras:
Es liege A im Ursprung und der Punkt B auf der x-Achse bei $(a,0)$. Der Punkt C habe die Koordinaten (x,y) und der Punkt D liege bei $(x-a,y)$. Es soll gelten:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} = \frac{\sqrt{(a-(x-a))^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$$

Wir quadrieren und multiplizieren mit den Nennern:

$$(x^2+y^2)\left((x-a)^2+y^2\right) = a^2\left((x-2a)^2+y^2\right)$$

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2-2ax+a^2) = a^2(x^2+y^2-4ax+4a^2)$$

Wir substituieren $r^2 = x^2+y^2$:

$$r^2(r^2-2ax+a^2) = a^2(r^2-4ax+4a^2)$$

$$r^4-(2ax-a^2)r^2-a^2r^2+(4ax-4a^2)a^2 = 0$$

$$r^4-2axr^2+(4ax-4a^2)a^2 = 0$$

$$r^2 = ax \pm \sqrt{a^2x^2 - 4a^3x + 4a^4}$$
$$r^2 = ax \pm a\sqrt{x^2 - 4ax + 4a^2}$$
$$r^2 = ax \pm a(x - 2a)$$

Es gibt daher 2 mögliche Lösungen.
1. Die „Minus“-Lösung:

$$r^2 = ax - ax + 2a^2 = 2a^2$$

Das ist ein Kreis um A mit dem Radius $\sqrt{2}\,a$.
2. Die „Plus“-Lösung:

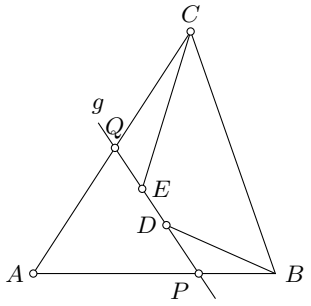
$$r^2 = x^2 + y^2 = 2ax - 2a^2$$
$$(x - a)^2 - a^2 + y^2 = -2a^2$$
$$(x - a)^2 + y^2 = -a^2$$

Diese Gleichung ist in $\mathbb{R}$ nicht erfüllbar. Als einzige Lösung bleibt für die Ortskurve des Punktes C nur der Kreis um A mit dem Radius $r = \sqrt{2}\,a$.

Aufgabe 291235:
Man beweise:
In jeder Menge aus fünf Punkten, die in einer gemeinsamen Ebene liegen und von denen keine drei in einer gemeinsamen Geraden liegen, gibt es vier Punkte, die die Ecken einer konvexen Viereckfläche sind.
Hinweis: Eine Viereckfläche heißt genau dann konvex, wenn mit jedem beliebigen Paar von Punkten dieser Fläche jeder Punkt der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte zu der Fläche gehört.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für je fünf Punkte der vorausgesetzten Lage gilt:
Man kann unter allen Dreiecken, deren Eckpunkte drei der fünf Punkte sind, eines mit möglichst großem Flächeninhalt auswählen. Dann muss nach Voraussetzung einer der folgenden Fälle vorliegen:

1. Fall:
Die beiden anderen der fünf Punkte liegen im Innern des ausgewählten Dreiecks.
Ihre Verbindungsstrecke geht nach Voraussetzung durch keine Ecke des Dreiecks, sie muss daher zwei verschiedenen Seiten des Dreiecks in je einem inneren Punkt schneiden. Das Dreieck sei etwa ABC, die Punkte im Innern D, E; die Gerade g durch D, E schneide etwa AB in P und AC in Q.
Dabei seien die Punkte P, D, E, Q auf g in dieser Reihenfolge angeordnet (siehe Abbildung).



Dann ist die Viereckfläche $BDEC$ konvex.

2. Fall:
Mindestens eine anderer der fünf Punkte liegt außerhalb des ausgewählten Dreiecks.
Das Dreieck sei ABC, der außerhalb liegende Punkt sei D. Die Geraden, die die Dreiecksseiten enthalten, zerlegen die Ebene in die Dreiecksfläche und in weitere Flächen, die entweder von zwei Strahlen oder von einer Dreiecksseite und zwei Strahlen begrenzt werden.

Nach Voraussetzung kann D auf keiner Randlinie eines dieser Gebiete liegen. Länge D im Innern eines von zwei Strahlen, etwa von den Verlängerungen der Seiten AC und BC über C hinaus, begrenzten Gebietes, so ergäbe der Flächeninhalt des Dreiecks ABC, vermehrt um die Flächeninhalte der Dreiecke ACD und BCD, den Flächeninhalt von ABC. Das widerspricht der Auswahl der drei Punkte A, B, C.

Also muss D im Innern eines von einer Dreiecksseite und zwei Strahlen begrenzten Gebiets liegen, etwa in dem Gebiet, das von der Seite VC und den Verlängerungen der Seiten AB bzw. AC über B bzw. C hinaus, begrenzt wird. Dass ist die Viereckfläche $ABDC$ konvex. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 301234:
Man beweise:
In jedem n-Eck ($n \geq 3$) gibt es mindestens zwei verschiedene Seiten des n-Ecks, für deren Längen a, b die Ungleichung $a \leq b < 2a$ gilt.

Lösung von cyrix:
Nehmen wir an, es gäbe ein n-Eck, welches ein Gegenbeispiel zu dieser Aussage wäre und bezeichnen die in ihm auftretenden Seitenlängen der Größe nach aufsteigend mit s_1 bis s_n, sodass dann insbesondere $s_{i+1} > 2s_i$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$ ist.
Dann jedoch ist

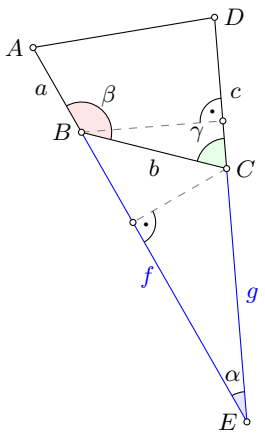
$$s_n > 2s_{n-1} = s_{n-1} + s_{n-1} > s_{n-1} + 2s_{n-2} > \cdots > s_{n-1} + s_{n-2} + \cdots + s_2 + 2s_1 > s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}$$

sodass die direkte Verbindung der beiden Endpunkte der Strecke mit Länge s_n länger ist als der „Umweg“ über die übrigen Eckpunkte des n-Ecks, welcher die Länge $s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}$ besitzt.
Dies ist ein Widerspruch (zur wiederholt angewandten Dreiecksungleichung), sodass es ein solches n-Eck nicht gibt, □.

Aufgabe 311232:
Man beweise, dass jedes konvexe Viereck $ABCD$, in dem die Seitenlängen $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ betragen und die Innenwinkel $\angle ABC$, $\angle BCD$ die Größen β bzw. γ haben, den Flächeninhalt hat:

$$F = \frac{1}{2}(ab \cdot \sin\beta + bc \cdot \sin\gamma - ac \cdot \sin(\beta + \gamma))$$

Lösung von MontyPythagoras:



Die Fläche des Vierecks $ABCD$ ist gleich der Fläche des Dreiecks AED minus die Fläche des Dreiecks BEC:

$$F = \tfrac{1}{2}(f+a)(g+c)\sin\alpha - \tfrac{1}{2}fg\sin\alpha$$
$$F = \tfrac{1}{2}ag\sin\alpha + \tfrac{1}{2}cf\sin\alpha + \tfrac{1}{2}ac\sin\alpha \quad (1)$$

Aufgrund der Innenwinkelsumme des Dreiecks BEC gilt:

$$\alpha = \pi - (\pi-\beta) - (\pi-\gamma) = \beta + \gamma - \pi$$
$$\sin\alpha = \sin(\beta+\gamma-\pi) = -\sin(\beta+\gamma) \quad (2)$$

Außerdem ist, wenn man die gestrichelten Linien betrachtet, die senkrecht auf die Strecken AE bzw. DE stehen:

$$g\sin\alpha = b\sin(\pi-\beta) = b\sin\beta \quad (3)$$

und

$$f\sin\alpha = b\sin\gamma \quad (4)$$

Wir setzen nun die Gleichungen (2) bis (4) in (1) ein, und erhalten direkt:

$$F = \tfrac{1}{2}ab\sin\beta + \tfrac{1}{2}bc\sin\gamma - \tfrac{1}{2}ac\sin(\beta+\gamma)$$

q. e. d.

IV Runde 4

Aufgabe 021244:
Gegeben sei ein Rechteck mit den Seiten $2a$ und $2b$, wobei $a > b$ ist. Von diesem Rechteck sollen vier kongruente rechtwinklige Dreiecke (an jeder Ecke ein Dreieck, dessen Katheten auf den Rechteckseiten liegen) so abgeschnitten werden, dass die Restfigur ein Achteck mit gleich langen Seiten bildet.
Die Seite des Achtecks ist durch a und b auszudrücken und aus a und b zu konstruieren. Außerdem ist anzugeben, unter welchen Bedingungen die Aufgabe lösbar ist.

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Die Kathetenlängen der abgeschnittenen rechtwinkligen Dreiecksflächen werden mit x und y und die Hypotenusenlänge, die gleich der zu berechnenden Seitenlänge des Achtecks ist, werde mit c bezeichnet. Dann gilt:

$$2x + c = 2a, \quad \text{d. h.} \quad x = \frac{2a-c}{2} \quad (1)$$
$$2y + c = 2b, \quad \text{d. h.} \quad y = \frac{2b-c}{2} \quad (2)$$
$$x^2 + y^2 = c^2 \quad (3)$$

also wegen (1), (2) und (3)

$$\frac{(2a-c)^2}{4} + \frac{(2b-c)^2}{4} = c^2 \Rightarrow c^2 + 2(a+b)c - 2(a^2+b^2) = 0$$

Hieraus ergibt sich, dass entweder

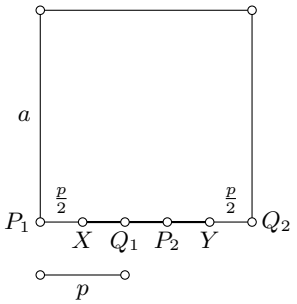
$$c = -(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 + 2(a^2+b^2)} \quad \text{oder} \quad (4)$$
$$c = -(a+b) - \sqrt{(a+b)^2 + 2(a^2+b^2)} \quad (5)$$

sein muss. Da a, b und c positiv sind, kann c nicht der Relation (5) genügen. Falls die Konstruktion überhaupt möglich ist, muss c die Bedingung (4) erfüllen.

Bemerkung: Die Konstruktion ist genau dann möglich, wenn $c < 2\min(a,b)$ ist, d. h. wenn $\max(a,b) < 3\min(a,b)$ ausfällt.

Aufgabe 021245:
Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge a. Eine Strecke PQ von der Länge p, wobei $p < a$ ist, bewegt sich so, dass ihre Endpunkte stets auf den Seiten des Quadrats liegen.
Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Strecken PQ?

Lösung von Manuela Kugel:

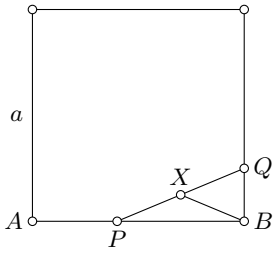


Für jede Seite gilt, dass der gesuchte geometrische Ort auf der Quadratseite liegt, wenn sich P von einer Ecke des Quadrates (im Bild mit P_1 bezeichnet) weg bewegt und Q noch nicht bei der nächsten Ecke (im Bild mit Q_2 bezeichnet) des Quadrates angekommen ist.
Dann befindet sich der erstmögliche gesuchte Punkt X auf dieser Quadratseite wie im Bild dargestellt in einer Entfernung von der Ecke P_1 von $\frac{p}{2}$.
Der letztmögliche gesuchte Punkt Y auf dieser Quadratseite befindet sich in einer Entfernung von der nächsten Ecke Q_2 von ebenfalls $\frac{p}{2}$. Eine solche Strecke XY muss existieren, da gilt:

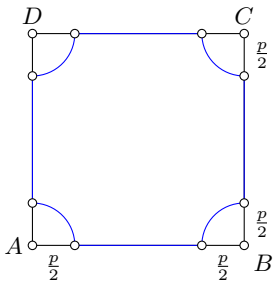
$$a = P_1Q_2 = P_1X + XY + YQ_2 = \frac{p}{2} + XY + \frac{p}{2} = p + XY$$

Da $a > p$ gilt demzufolge $XY > 0$.
Mit dieser Argumentation kann jede Quadratseite separat betrachtet werden und enthält in jedem Fall den geometrischen Ort, der sich zwischen den Abständen, der größer oder gleich $\frac{p}{2}$ zu beiden Ecken der betrachteten Quadratseite ist, befindet.

Nun wird der Fall betrachtet, der sich dann abspielt, wenn P auf einer und Q auf einer benachbarten Quadratseite entlanglaufen. Dann gelten die Bezeichnungen der zweiten Abbildung.

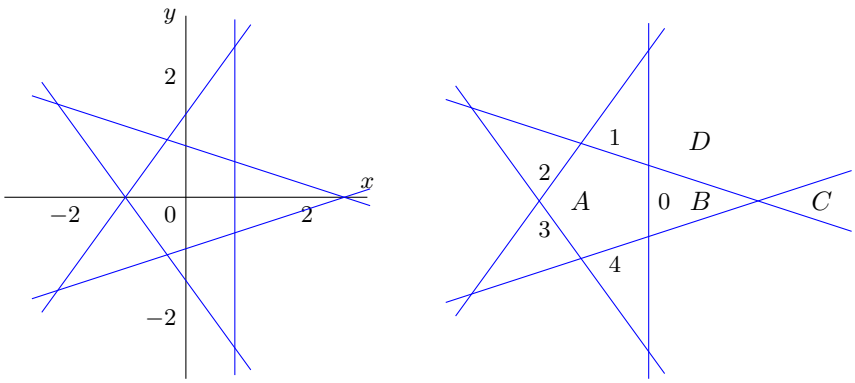


Da $p < a$ ist offensichtlich, dass P und Q nie auf gegenüberliegenden Seiten entlanglaufen können. Es sind also immer benachbarte Quadratseiten, die betrachtet werden müssen, wenn der zuerst beschriebene Fall nicht mehr zutrifft.
Benachbarte Quadratseiten umschließen einen Winkel von 90°; die Ecke zwischen P und Q sei o. B. d. A. B, somit ist $\triangle PBQ$ immer rechtwinklig.
Damit ist PQ der Durchmesser eines Thaleskreises, auf dem B liegt. Da X die Strecke PQ halbiert, ist X Mittelpunkt des Kreises und es gilt für den Radius r des Thaleskreises: $r = PX = QX = BX$.
Da stets $P_iQ_i = p$ gilt, ist für jede Lage in diesem betrachteten Fall (beide Punkte auf verschiedenen Quadratseiten) $\frac{p}{2} = r_i = P_iX_i = Q_iX_i = BX_i$.
Damit ist der Viertelkreis um B mit dem Radius $\frac{p}{2}$ innerhalb des Quadrates der gesuchte geometrische Ort. Fasst man beide Fälle zusammen, ergibt sich folgende Figur als gesuchter geometrischer Ort (blau):



Aufgabe 041244:
Ermitteln Sie den geometrischen Ort aller Punkte der Ebene, für die die Summe der Entfernungen von den Seiten eines in dieser Ebene gegebenen regelmäßigen Fünfecks oder ihren Verlängerungen fünfmal so groß wie der Radius des dem Fünfeck einbeschriebenen Keises ist!

Lösung von Rainer Müller:



Zur bequemeren Rechnung wählen wir das Koordinatensystem der Fünfeckebene so, dass der Mittelpunkt der Schwerpunkt des Fünfecks und die positive x-Achse eine Fünfeckseite in deren Mittelpunkt schneidet (siehe linke Abbildung).
Der nach „außen“ gerichtete normierte Normalenvektor der (verlängerten) i-ten Fünfeckseite s_i ($i = 0,...,4$ gemäß rechter Abbildung) ist $(\cos\varphi_i, \sin\varphi_i)$ mit $\varphi_i = \frac{2\pi i}{5}$. Mit den Funktionen

$$f_i(x,y) := x\cos\varphi_i + y\sin\varphi_i - r$$

ist $f_i(x,y) = 0$ die implizite Gleichung von s_i und $|f_i(x,y)|$ der Abstand eines Punktes (x,y) von s_i, wobei $r > 0$ der Radius des Inkreises des Fünfecks ist (in der Abbildung ist $r = 1$, was man o. B. d. A. annehmen könnte, ohne jedoch die Rechnung merklich zu vereinfachen).
Die gesuchte Punktmenge ist damit beschreibbar durch die Gleichung

$$f(x,y) = 5r \qquad \text{mit} \qquad f = |f_0| + |f_1| + |f_2| + |f_3| + |f_4|$$

Für die f_i verwenden wir die folgende Tabelle:

i	φ_1	$\cos\varphi_i$	$\sin\varphi_i$	$f_i(x,y)$
0	0	1	0	$x - r$
1	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = a_1$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = b_1$	$a_1x + b_1y - r$
2	$\frac{4}{5}\pi$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1) = a_2$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = b_2$	$-a_2x + b_2y - r$
3	$\frac{6}{5}\pi$	$-a_2$	b_2	$-a_2x - b_2y - r$
4	$\frac{8}{5}\pi$	a_1	$-b_1$	$a_1x - b_1y - r$

Manche der Werte stehen in Formelsammlungen, die übrigen ergeben sich aus Additionstheoremen und Symmetrieeigenschaften der trigonometrischen Funktionen.

Wegen der Betragsfunktionen ist f nicht einfach handhabbar. Wir benutzen, dass die fünf Geraden s_i die Ebene in 16 Gebiete zerlegen, in denen jeweils keine der fünf Funktionen f_i ihr Vorzeichen wechselt (wir betrachten jeweils den Rand des Gebietes als zum Gebiet gehörig).
Wegen der fünfzähligen Rotationssymmetrie müssen wir nur vier verschiedene Gebiete betrachten, z. B. die Gebiete A, B, C und D in der rechten Abbildung.

Betrachten wir zunächst den Fall $(x, y) \in A$ (das Fünfeck selbst). Hier gilt

$$f_0(x,y) \le 0, f_1(x,y) \le 0, f_2(x,y) \le 0, f_3(x,y) \le 0, f_4(x,y) \le 0$$

Damit ist

$$f(x,y) = -f_0(x,y) - f_1(x,y) - f_2(x,y) - f_3(x,y) - f_4(x,y) =$$
$$= -(x-r) - (a_1x + b_1y - r) - (-a_2x + b_2y - r) - (-a_2x - b_2y - r) - (a_1x - b_1y - r) =$$
$$= 5r + (2a_2 - 2a_1 - 1)x = 5r$$

Die Gleichung $f(x, y) = 5r$ ist also in A identisch erfüllt, d. h. die ganze Menge A gehört zur gesuchten Punktmenge.
Sei nun $(x, y) \in B$. Dann ist

$$f_0 \ge 0, f_1 \le 0, f_2 \le 0, f_3 \le 0, f_4 \le 0 \qquad \text{also}$$

$$f(x,y) = f_0(x,y) - f_1(x,y) - f_2(x,y) - f_3(x,y) - f_4(x,y) = 5r + 2f_0(x,y)$$

$f(x, y) = 5r$ gilt daher in B genau dann, wenn $f_0(x, y) = 0$ ist, also entlang der gemeinsamen Strecke mit A, so dass wir keine zusätzlichen Lösungen erhalten.
Sei nun $(x, y) \in C$. Dann ist

$$f_0 \ge 0, f_1 \ge 0, f_2 \le 0, f_3 \le 0, f_4 \ge 0 \qquad \text{also}$$

$$f(x,y) = f_0(x,y) + f_1(x,y) - f_2(x,y) - f_3(x,y) + f_4(x,y) = 5r + 2f_0(x,y) + 2f_1(x,y) + 2f_4(x,y)$$

$f(x, y) = 5r$ gilt daher in C genau dann, wenn

$$f_0(x,y) + f_1(x,y) + f_4(x,y) = 0 \Leftrightarrow x - r + a_1x + b_1y - r + a_1x - b_1y - r = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}(\sqrt{5} - 1)r$$

Der Punkt mit dem niedrigsten x-Wert in C ist jedoch $((\sqrt{5}-1)r, 0)$, der Schnittpunkt der Seiten $s1$ und $s4$, also hat $f(x, y) = 5r$ keine Lösungen in C.
Sei nun $(x, y) \in D$. Dann ist

$$f_0 \ge 0, f_1 \ge 0, f_2 \le 0, f_3 \le 0, f_4 \le 0 \qquad \text{also}$$

$$f(x,y) = f_0(x,y) + f_1(x,y) - f_2(x,y) - f_3(x,y) - f_4(x,y) = 5r + 2f_0(x,y) + 2f_1(x,y)$$

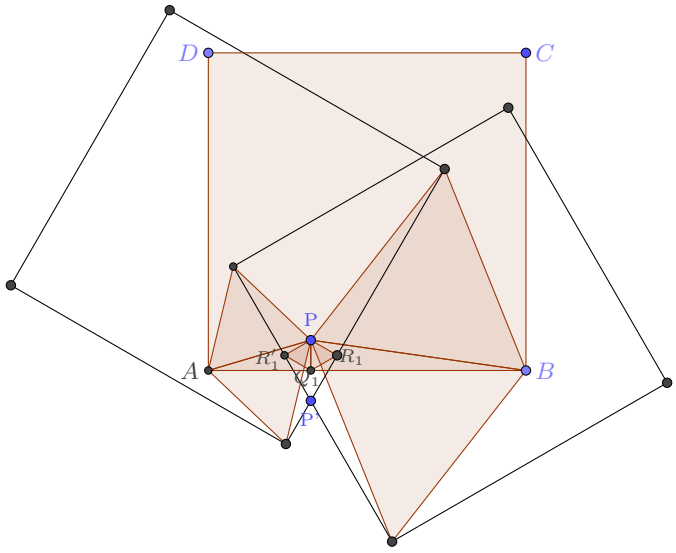
$f(x, y) = 5r$ gilt also in C genau dann, wenn

$$f_0(x,y) + f_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow (a_1 + 1)x + b_1y - 2r = 0$$

Diese Gerade enthält den Eckpunkt des Fünfecks, der A und D gemeinsam ist, und verläuft senkrecht zur Symmetrieachse von D, so dass sie keine weiteren Lösungspunkte liefert.
Die gesuchte Punktmenge ist also das Fünfeck selbst (Rand und Inneres).

Aufgabe 061241:
In einer Ebene ε seien ein Quadrat $ABCD$ und ein in seinem Innern gelegenen Punkt P gegeben. Ein Punkt Q durchlaufe alle Seiten des Quadrates.
Beschreiben Sie die Menge aller derjenigen Punkte R in ε, für die das Dreieck $\triangle PQR$ gleichseitig ist!

Lösung von Kornkreis:
Die Menge der Punkte R entspricht den Rändern des Quadrates $ABCD$ nach Drehung um den Punkt P um $60°$ sowie $-60°$, was aus der folgenden Zeichnung ersichtlich wird.



Beweis (skizziert):
Da es für die zwei stets nicht-identischen Punkte P, Q in der Ebene immer genau zwei gleichseitige Dreiecke gibt (PQR und PQR'), betrachten wir im Folgenden nur den Punkt R, der sich auf einer bestimmten Seite von PQ befindet (d. h. wir schließen Sprünge von R zu R' aus).
Man begründet leicht, dass sich R genau dann auf einer Geraden bewegt, wenn sich Q auf einer Geraden bewegt, da die Änderung von Winkel und Länge von PQ identisch für PR ist. Außerdem folgt, dass sich R auf einer Strecke bewegt, die aus der Drehung von AB um den Winkel 60° um P hervorgeht, wenn sich Q auf AB bewegt (analog für die anderen vier Seiten).
In den Übergängen zwischen zwei Seiten, wenn Q seine Richtung um 90° ändert, ändert auch R seine Richtung um 90° (mit der gleichen Orientierung). Insgesamt folgt daraus die obige Behauptung.

Aufgabe 061244:
Gegeben ist eine natürliche Zahl $n > 3$. Es sei $V = P_1P_2...P_n$ ein ebenes regelmäßiges n-Eck.
Geben Sie die Gesamtanzahl aller voneinander verschiedenen stumpfwinkligen Dreiecke $\triangle P_kP_lP_m$ (wobei P_k, P_l, P_m Ecken von V sind) an!

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Wir unterscheiden die Fälle n gerade und n ungerade.
Seien also P_k, P_l und P_m die Eckpunkte des Dreiecks im Uhrzeigersinn. Zunächst stellen wir fest, dass das Dreieck $P_kP_lP_m$ genau dann einen rechten Winkel in P_l hat, wenn P_l auf dem Halbkreis über der Strecke zwischen P_k und P_m liegt (Satz des Thales).

Wir fordern nun, dass der gewünschte stumpfe Winkel in P_l liegt. Dieses ist offensichtlich der Fall, wenn P_l und P_k auf einem Kreisbogen liegen, der weniger als die Hälfte des Umkreises vom regelmäßigen n-Eck einnimmt. Zunächst legen wir also einen beliebigen Punkt P_k fest. Dafür haben wir in beiden Fällen n Möglichkeiten.

1. Fall: Sei n gerade.

   Wir suchen nun die beiden fehlenden Punkte mit obiger Forderung. Zählen wir $\frac{n}{2}$ Punkte von P_k weiter und setzen den Punkt P_m, so hat jedes Dreieck in P_m einen rechten Winkel. Wir können also die fehlenden 2 Punkte für das stumpfe Dreieck aus $\frac{n}{2} - 1$ auswählen.

2. Fall: Sei n ungerade.

   Zeichnen wir den Durchmesser durch P_k, so liegen in diesem Fall genau $\frac{n-1}{2}$ Eckpunkte auf jedem Halbkreis. Davon können wir wieder 2 beliebig auswählen.

Sei $A(n)$ die Gesamtanzahl der stumpfwinkligen Dreiecke, erhalten wir somit:

$$A(n) = \begin{cases} n\binom{\frac{n}{2}-1}{2} & , n \text{ gerade} \\ n\binom{\frac{n-1}{2}}{2} & , n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Aufgabe 091244:
Die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks mit dem Mittelpunkt M seien der Reihe nach mit $P_1, P_2, ..., P_n$ bezeichnet.
a) Es ist zu beweisen: Die Strecken MP_k $(k = 1, 2, ..., n)$ können parallel zu sich selbst so verschoben werden, dass sie nach der Verschiebung die Seiten eines regelmäßigen n-Ecks bilden.
b) Es ist zu beweisen (z. B. mit Hilfe des Satzes unter a)), dass folgende Beziehungen für alle natürlichen Zahlen n größer als 2 gültig sind:

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + ... + \cos\frac{2\pi n}{n} = 0 \qquad (1)$$

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + ... + \sin\frac{2\pi n}{n} = 0 \qquad (2)$$

Lösung von cyrix:
a) Zur Vereinfachung der Notation definieren wir $P_0 := P_n$.
Der Winkel $\angle P_{k+1}MP_k$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Radien MP_{k+1} und MP_k ergibt sich zu $\frac{2\pi}{n}$. In einem regelmäßigen n-Eck betragen alle Innenwinkel $\frac{n-2}{n} \cdot \pi = \pi - \frac{2\pi}{n}$, was genau dem Nebenwinkel zu $\angle P_{k+1}MP_k$ der Geraden, auf denen die beiden Radien liegen, entspricht.

Startet man also mit der Strecke MP_0 und verschiebt die Strecke MP_1 parallel so, dass M auf P_0 abgebildet wird, entsteht dort der passende Innenwinkel. Diese Konstruktion kann man nun fortsetzen, indem man MP_2 parallel so verschiebt, dass M auf den Bildpunkt von P_1 abgebildet wird, sodass man einen zweiten passenden Innenwinkel angefügt hat.
So fügt man nach und nach durch Verschiebung des Radius MP_k derart, dass M auf den Bildpunkt von P_{k-1} bezüglich der Verschiebung des vorherigen Radius' abgebildet wird, alle Radien des Ausgangs-n-Ecks als neue Kanten zu dem entstehenden n-Eck hinzu, wobei je zwei aufeinanderfolgende dieser Radien dann den Innenwinkel eines regelmäßigen n-Ecks bilden. Weiterhin sind die Radien alle gleich lang, sodass sich tatsächlich ein regelmäßiges n-Eck bildet.

b) In die Ebene des Ausgangs-n-Ecks fügen wir derart Koordinatenbezeichnungen ein, dass der Umkreismittelpunkt dieses n-Ecks der Koordinatenursprung ist und $P_0 := P_n$ der Punkt $(1|0)$. Dann ergeben sich aufgrund der Definition der Winkelfunktionen am Einheitskreis und $\angle P_kMP_0 = k \cdot \frac{2\pi}{n}$ die Koordinaten der Punkte P_k zu

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} \middle| \sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Verschiebt man die Radien nun parallel, so ist die (vorzeichenbehaftete) Differenz der x-Koordinaten der Bildpunkte der Endpunkte eines solchen Radius genauso groß wie die der Endpunkte des Radius' selbst. Für die Verschiebung des Radius MP_k ergibt sich also eine solche Differenz der x-Koordinaten der Bildpunkte der Endpunkte von $\cos\frac{2k\pi}{n}$.
Fügt man nun die Radien entsprechend Teilaufgabe a) zu einem geschlossenen Streckenzug zusammen, addieren sich also diese Differenzen der x-Koordinaten insgesamt zu Null, was genau Gleichung (1) entspricht. Analog erhält man bei der Betrachtung der Differenz der y-Koordinaten Gleichung (2), □.

Aufgabe 101243:
Es ist der folgende Satz zu beweisen:
Haben je drei von vier in der gleichen Ebene liegenden konvexen Vielecksflächen jeweils einen Punkt gemeinsam, so gibt es einen Punkt, der jeder der vier Vielecksflächen angehört.

Lösung von Kornkreis:
Bezeichne die gegebenen Flächen mit F_i, $i \in \{1,2,3,4\}$. Betrachte die Dreier-Schnitte

$$A_i := \cap_{j \in \{1,2,3,4\} \setminus \{i\}} F_j$$

welche nach Voraussetzung alle nicht leer sind, und wähle für jedes A_i einen Punkt $P_i \in A_i$.
Wir betrachten das Problem für allgemeine konvexe Flächen und nutzen die eine konvexe Fläche definierende Eigenschaft aus, dass mit zwei Punkten auch die Verbindungslinie der zwei Punkte in der Fläche enthalten ist.
Daraus folgt, dass die Verbindungslinie P_iP_j in $F_k \cap F_m$ enthalten ist (mit $k,m \in \{1,2,3,4\} \setminus \{i,j\}$ und $k \neq m$, $i \neq j$). Wenn zwei der Punkte P_i übereinstimmen, so ist dies der gesuchte Punkt, da er in allen der gegebenen Flächen enthalten ist.

Seien die P_i nun also alle verschieden. Wenn drei der P_i auf einer Linie liegen, so ist der mittlere von ihnen in allen vier Flächen enthalten (denn der linke und rechte Punkt, sowie deren Verbindungslinie [wegen Konvexität], sind in der für den mittleren Punkt noch eventuell fehlenden Fläche enthalten) und damit der gesuchte Punkt.
Wenn keine drei der P_i auf einer Linie liegen, so bilden sie ein nicht-entartetes Viereck, sodass es zwei sich schneidende Verbindungslinien P_iP_j und P_kP_m gibt, mit i,j,k,m paarweise verschieden. Der Schnittpunkt ist in allen Flächen enthalten und damit der gesuchte Punkt.

Aufgabe 101245:
Es seien $A_0A_1...A_n$ $(n > 2)$ ein ebener konvexer Polygonzug der Länge s mit $A_0 \neq A_n$. Die Punkte $A_1, ..., A_{n-1}$ mögen auf ein und derselben Seite der Geraden g durch A_0 und A_n liegen.
Anmerkung: Ein ebener Polygonzug $A_0A_1...A_n$ heiße konvex, wenn der durch die Strecke A_0A_n geschlossene Polygonzug eine konvexe Fläche begrenzt.
Es ist zu beweisen, dass der Flächeninhalt F der bei Rotation des Polygonzuges um g entstehenden Fläche nicht größer als $\pi\frac{s^2}{2}$ ist, dass also $F \leq \pi\frac{s^2}{2}$ gilt.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Seien s_k die Länge der Strecke $A_{k-1}A_k$ und r_k der Abstand von A_k zur Gerade g. Die Rotationsfläche wird aus Mantelflächen von Kegelstümpfen zusammengesetzt. Eine einzelne Mantelfäche F_k definiert durch die Punkte $A_{k_1}A_k$ hat die Oberfläche $F_k = \pi s_k(r_{k-1} + r_k)$. Die Summe der F_k ergibt dann F.
Falls es keinen Punkt A_m, der genau auf der Mitte des Polygonzuges liegt, fügen wir diesen hinzu. Der so entstandene Polygonzug erzeugt dieselbe Oberfläche.

Behauptung: Die durch $A_0 \dots A_m$ erzeugte Fläche hat höchstens den Flächeninhalt $\pi\frac{s^2}{4}$, d. h. $F_1 + \dots + F_m \leq \pi\frac{s^2}{4}$

Beweis:
Für r_k haben wir die Abschätzung $r_k \leq |A_0A_k| \leq p_k$ mit $p_k := s_1 + \dots s_k$, da eine Strecke die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist. Weiterhin gilt $|r_k - r_{k-1}| \leq s_k$, da s_k die Kante eines Kegelstumpfes mit Radien r_k,r_{k-1} ist. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} F_k &= \pi s_k(r_{k-1} + r_k) \\ &= \pi s_k(2r_{k-1} + (r_k - r_{k-1}) \\ &\leq \pi s_k(2p_{k-1} + s_k) \\ &= \pi\left[(p_{k-1} + s_k)^2 - p_{k-1}^2\right] \\ &= \pi(p_k^2 - p_{k-1}^2) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir durch aufsummieren $F_1 + \dots + F_m \leq \pi(p_0^2 - p_m^2) = \pi\frac{s^2}{4}$, da $p_0 = 0$ und nach Wahl $p_m = \frac{s}{2}$ gilt.

Wegen Symmetrie gilt ebenso $F_{m+1} + \ldots + F_n \leq \pi\frac{s^2}{4}$. Hieraus folgt insgesamt $F \leq \pi\frac{s^2}{2}$.

Aufgabe 111246A:
Es sei n eine natürliche Zahl, für die $4 \leq n \leq 8$ gilt. In der Ebene seien n Punkte so angeordnet, dass auf jeder Geraden durch je zwei dieser Punkte wenigstens noch ein weiterer dieser n Punkte liegt. Man beweise, dass dann eine Gerade existiert, auf der alle diese n Punkte liegen.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Angenommen es gebe 3 Punkte A,B,C, die nicht auf einer Gerade liegen.
Durch Wahl äußerer Punkte - z. B. Ecken der konvexen Hülle - können wir ebenfalls annehmen, dass weiter Punkte der Menge, die auf den Geraden AB, BC, AC liegen, sich nur auf den Seiten des Dreiecks befinden. Daher gibt es Punkte P,Q,R auf den Dreiecksseiten, die ebenfalls zu der Menge gehören, welche nicht auf einer gemeinsamen Gerade liegen.
Da A,B,C nicht auf den Geraden PQ,QR,PR liegen, gibt es drei weitere Punkte auf diesen Geraden, die zu der Menge gehören. Daher hat die Menge mindestens 9 Punkte. Widerspruch!

Aufgabe 131245:
a) In einer Ebene sei $P_1P_2...P_n$ ein beliebiges konvexes n-Eck E.
Man beweise folgende Aussage:
Sind n Punkte $Q_1...Q_n$ so im Innern oder auf dem Rand von E gelegen, dass $Q_1Q_2...Q_n$ ein zu E kongruentes n-Eck ist, so ist jeder Punkt Q_i eine Ecke von E.
b) Gibt es nichtkonvexe n-Ecke E, für die die in a) genannte Aussage falsch ist?
c) Ist für jedes nichtkonvexe n-Eck E die in a) genannte Aussage falsch?

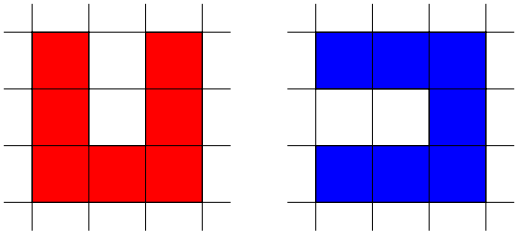
Lösung von Nuramon:
a) Sei $F := Q_1 \ldots Q_6$ und sei P_k eine beliebige Ecke von E.

Bemerkung: Im Folgenden ist mit E bzw. F jeweils die Menge aller Punkte gemeint, die im Inneren oder auf dem Rand des entsprechenden n-Ecks liegen.

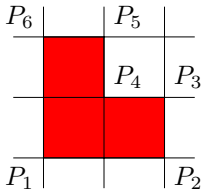
Angenommen P_k läge außerhalb von F.
Da F konvex ist, gäbe es dann eine Gerade, die die Ebene in zwei Halbebenen zerlegt, wobei P_k im Inneren der einen und E im Inneren der anderen Halbebene liegt. Der Schnitt von E mit der Halbebene, die P_k enthält, hätte dann einen positiven Flächeninhalt und somit wäre der Flächeninhalt von F echt kleiner als der von E. Das ist ein Widerspruch dazu, dass E und F kongruent sind.

Also liegt jede Ecke von E im Inneren oder auf dem Rand von F.
Da F und E konvex sind, muss somit E komplett in F enthalten sein.
Da andererseits nach Voraussetzung auch F komplett in E enthalten ist, folgt $F = E$. Daraus folgt, dass die Menge der Ecken von F gleich der Menge der Ecken von E sein muss, also die Behauptung.

b) Ja, gibt es:



c) Nein:



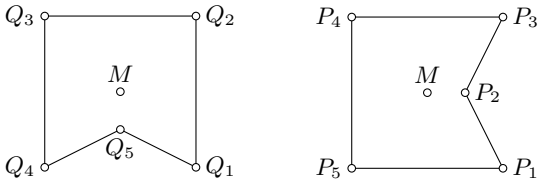
Angenommen $F := Q_1 \dots Q_6$ ist ein zu E kongruentes Sechseck, wobei $Q_1, \dots, Q_6$ im Inneren oder auf dem Rand von E liegen.
Die einzigen Punkte in E, die Abstand $2\sqrt{2}$ zu einander haben, sind P_2 und P_6. Also muss $\{P_2,P_6\} = \{Q_2,Q_6\}$ gelten.
Es ist Q_4 der Mittelpunkt von Q_2Q_6, also muss $Q_4 = P_4$ gelten.
Da die Dreiecke $P_1P_2P_6$ und $Q_1Q_2Q_6$ kongruent sind und Q_1 in E liegen soll, muss $P_1 = Q_1$ gelten.
Da Q_3 und Q_5 auf verschiedenen Seiten von Q_2Q_6 liegen müssen und die Dreiecke $Q_2Q_3Q_4$ und $P_2P_3P_4$ bzw. $Q_4Q_5Q_6$ bzw. $P_4P_5P_6$ kongruent sind, folgt, dass $\{Q_3, Q_5\} = \{P_3, P_5\}$ gilt.
Also ist jedes Q_i eine Ecke E.

Aufgabe 181243:
a) In einer Ebene sei $P_1P_2...P_n$ ein beliebiges ebenes konvexes n-Eck E.
Man beweise folgende Aussage:
Sind im Innern oder auf dem Rande von E Punkte $Q_1, ..., Q_n$ so gelegen, dass $Q_1, ..., Q_n$ ein zu E kongruentes n-Eck ist, so ist jeder Punkt Q_i $(i = 1, 2, ..., n)$ eine Ecke von E. (1)
b) Gibt es nichtkonvexe n-Ecke E, für welche die Aussage (1) falsch ist.
c) Ist für jedes nichtkonvexe n-Eck E die Aussage (1) falsch?

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
(a) Wegen der Konvexität von E liegt jede Seite von F und damit die ganze n-Ecksfläche von F in der n-Ecksfläche von E. Als zu E kongruente Figur hat F den gleichen Flächeninhalt wie E. Daher fällt mit F mit E zusammen. Mithin ist jede Ecke von F Ecke von E, was zu beweisen war.

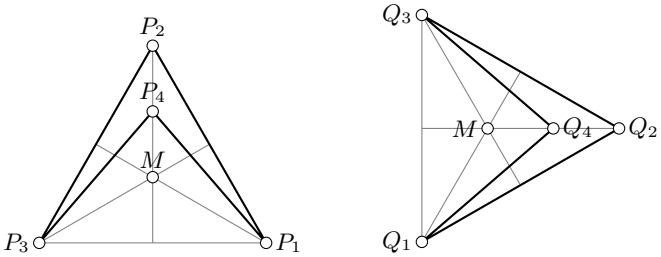
Die unter (b) aufgeworfene Frage kann durch ein Beispiel beantwortet werden.
Gesucht wird ein nicht-konvexes Polygon $F(Q_1...Q_n)$, welches dem dazu kongruenten Polygon $E(P_1...P_n)$ derart aufgepasst werden kann, dass sich die Eckpunkte von F mit Randpunkten oder inneren Punkten von E decken, ohne dass hierbei sämtliche Eckpunkte von F auf Eckpunkte von E zu liegen kommen.

Konstruktion:
Aus dem Quadrat $\square(Q_1Q_2Q_3Q_4)$ wird ein gleichschenklig-stumpfwinkliges Dreieck mit der Strecke Q_4Q_1 als Basis herausgeschnitten. Der Scheitel dieses Dreiecks sei Q_5.
Bringt man dieses Polygon F mit dem hierzu kongruenten Polygon $E(P_1P_2P_3P_4P_5)$ durch Parallelverschiebung in eine solche Lage, dass sich Q_1 mit P_1 deckt, so wird offensichtlich, dass das vorliegende nicht-konvexe Polygon E ein Beispiel ist, auf das die Aussage (a) nicht übertragen werden kann (siehe Abbildung)



Die unter (c) aufgeworfene Problemstellung kann wiederum durch ein Beispiel erledigt werden. Wir suchen ein nicht-konvexes n-Eck E, für das die Aussage (a) wahr ist.

Konstruktion:
Vorgelegt sei ein gleichseitiges Dreieck $\triangle(P_1P_2P_3)$ mit M als Mittelpunkt. P_4 sei der Halbierungspunkte der Strecke MP_2.
$E(P_1P_2P_3P_4)$ ist ein nicht-konvexes Viereck. Das hierzu kongruente Viereck $F(Q_1Q_2Q_3Q_4)$ ist nun so auf E zu legen, dass sich die Punkte Q_i mit Randpunkten oder inneren Punkten von E decken.
Bei geeigneter Wahl der Punktbezeichnung ist das Dreieck $\triangle(Q_1Q_2Q_3)$ ebenfalls gleichseitig.



Für F kommen nur solche Lagebeziehungen zu E in Betracht, bei denen die Eckpunkte der kongruenten gleichseitigen Dreiecke zur Deckung gelangen. Soll außerdem Q_4 nicht außerhalb E liegen, ist zusätzlich F in eine solche Stellung zu bringen, dass sich Q_4 mit P_4 deckt.
Andernfalls fiele Q_4 in einen inneren Punkt der Strecke MP_3 oder MP_1. Diese liegen jedoch außerhalb von E.

Damit ist gezeigt, dass sich die Eckpunkte Q_i von F bezüglich E nur dann in die geforderte Lage bringen lassen, wenn die Punkte Q_i in die Eckpunkte von E fallen. Zugleich gehen, wie im Falle des konvexen Polygons, Randpunkte von F in Randpunkte von E über.
Die eingangs gestellte Frage ist also mit nein zu beantworten.

Aufgabe 181246A:
Es sei $A_1A_2A_3A_4A_5$ ein regelmäßiges Fünfeck mit gegebener Seitenlänge s.
Um jeden Punkt A_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ sei die Kugel K_i mit dem Radius $\frac{s}{2}$ und dem Mittelpunkt A_i gelegt.
Dann gibt es in der Menge derjenigen Kugeln K', die die Eigenschaft haben, jede der fünf Kugeln K_i zu berühren, genau zwei Kugeln K_1' und K_2' mit dem Radius $\frac{s}{2}$.
Man untersuche, ob K_1' und K_2' einander schneiden, berühren oder ob sie keinen Punkt gemeinsam haben.

Lösung von cyrix:
Es sei M der Mittelpunkt des regelmäßigen Fünfecks $A_1A_2A_3A_4A_5$ und r sein Umkreisradius. Dann ist $\angle A_1MA_2 = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ und nach dem Kosinussatz im Dreieck $\triangle A_1A_2M$ ist

$$s^2 = |A_1A_2|^2 = r^2 + r^2 - 2^2 \cdot \cos 72^\circ = r^2 \cdot (2 - 2\cos 72^\circ)$$

Mit $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ folgt also $\frac{s^2}{4} = r^2 \cdot \frac{4+1-\sqrt{5}}{2}$ bzw.

$$r^2 = s^2 \cdot \frac{2}{5-\sqrt{5}} = s^2 \cdot \frac{2(5+\sqrt{5})}{25-5} = s^2 \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{10}$$

Aus Symmetriegründen liegen die Mittelpunkte M_1 von K_1' und M_2 von K_2' auf verschiedenen Seiten der durch das Fünfeck definierten Ebene ε, wobei die Lote dieser Mittelpunkte auf ε beide den Fußpunkt M besitzen und die gleiche Länge h besitzen.

Damit sind die Dreiecke $\triangle A_1MM_1$ und $\triangle A_1MM_2$ jeweils rechtwinklig in M, wobei die einen Katheten jeweils die Länge $|A_1M| = r$, die zweiten Katheten die Länge $|MM_1| = |MM_2| = h$ und die Hypotenusen die Länge $|A_1M_1| = |A_1M_2| = s$ besitzen, wobei letzteres daraus folgt, dass die Mittelpunkte zweier sich

berührender Kugeln genau die Entfernung der Summe ihrer beider Radien besitzen. Nach dem Satz von Pythagoras gilt also $r^2 + h^2 = s^2$ bzw.

$$h^2 = s^2 - r^2 = s^2 \cdot \left(1 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) = s^2 \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{10} = s^2 \cdot \frac{10-\sqrt{20}}{20} > s^2 \cdot \frac{10-\sqrt{25}}{20} = s^2 \cdot \frac{10-5}{20} = \frac{1}{4}s^2$$

also $h > \frac{1}{2}s$, sodass keine der beiden Kugeln K_1' und K_2' die Ebene ε des Fünfecks berührt oder schneidet. Also berühren oder schneiden sie sich auch gegenseitig nicht.

Bemerkung zur Berechnung von $\cos 72°$:

Es ist einerseits $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ und andererseits

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos(2x) \cdot \cos x - \sin(2x) \cdot \sin x = (2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2\sin x \cos x \cdot \sin x =$$
$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cdot \cos x =$$
$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

Mit $x := 18°$ folgt wegen $\sin 2x = \sin 36° = \cos(90° - 36°) = \cos 54° = \cos 3x$ also
$2\sin x \cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ bzw. nach Division durch $\cos x = \cos 18° \neq 0$ also

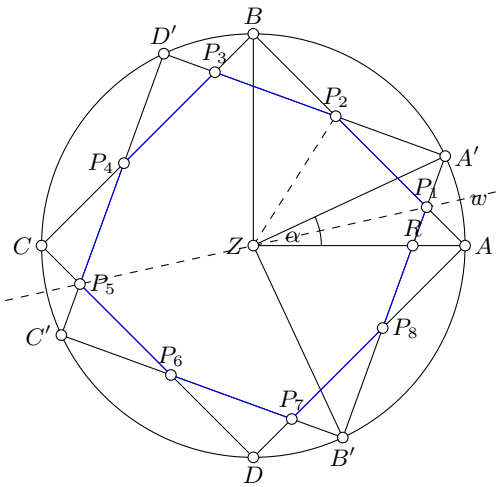
$$2\sin x = 4\cos^2 x - 3 = 4(1 - \sin^2 x) - 3 = 1 - 4\sin^2 x \qquad \text{bzw.} \qquad 4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$$

Diese quadratische Gleichung in $\sin x$ hat die Lösungen $-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Da $\sin x = \sin 18°$ positiv ist, folgt

$$\cos 72° = \sin 18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Aufgabe 191242:
Es sei M die Menge aller derjenigen Quadratflächen Q, die in einer gegebenen Ebene ε liegen, einen gegebenen Punkt Z der Ebene ε als Mittelpunkt haben und eine gegebene Streckenlänge a als Seitenlänge haben.
Für beliebige Quadratflächen Q, Q' aus dieser Menge M bezeichne $u(Q \cup Q')$ den Umfang derjenigen Polygonfläche, die sich als Durchschnitt der Quadratflächen Q und Q' ergibt.
Man untersuche, ob es in M Quadratflächen Q, Q' mit kleinstmöglichem $u(Q \cap Q')$ gibt.
Ist dies der Fall, so ermittle man (in Abhängigkeit von a) diesen kleinstmöglichen Wert von $u(Q \cap Q')$.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Für beliebige $Q, Q' \in M$ gilt: Ist $Q = Q'$, so ist $Q \cap Q'$ die Quadratfläche Q mit dem Umfang $4a$.
Ist $Q \neq Q'$, so kann man, wenn AB eine beliebige Seite der Quadratfläche Q ist, die Ecken von Q und Q' so mit A, B, C, D bzw. A', B', C', D' bezeichnen, dass die Punkte $A, A', B, D', C, C', D, B'$ auf dem gemeinsamen Umkreis von Q und Q' in dieser Reihenfolge angeordnet sind (siehe Abbildung).



Hiernach hat der Winkel $\angle AZA'$ eine Größe α mit $0° < \alpha < 90°$. Bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden w dieses Winkels geht A in A' über, also Q' in Q, folglich (wegen des Umlaufsinns) B in B', C in C', D in D' und daher der wegen $0° < \alpha < 90°$ existierende Schnittpunkt P_1 von AB mit $A'B'$ in sich über. Also liegt P_1 auf w.
Die Strecken AB und $A'B'$ schneiden einander also in demjenigen Punkt P_1 auf AB, für den $\angle AZP_1 = \frac{\alpha}{2}$ gilt. Ebenso folgt:
AB und $D'A'$ schneiden einander in demjenigen Punkt P_2 auf AB, für den $\angle BZP_2 = \frac{90° - \alpha}{2} = 45° - \frac{a}{2}$ ist.
Da also $\angle AZP_2 = \frac{\alpha}{2} + 45°$ gilt, ist wegen $0° < \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2} + 45° < 90°$ die Strecke P_1P_2 folglich eine Seite der Polygonfläche $Q \cap Q'$.
Ebenso findet man die weiteren Schnittpunkte P_3, P_4 von BC mit $D'A'$ bzw. $C'D'$, P_5, P_6 von CD mit $C'D'$ bzw. $B'C'$, P_7, P_8 von DA mit $B'C'$ bzw. $A'B'$ und damit $Q \cap Q'$ als die Achtecksfläche $P_1P_2...P_8$.

Bei Spiegelung an w geht der Schnittpunkt P_2 von AB und $D'A'$ über in den Schnittpunkt von $A'B'$ und DA, d. h. in P_8. Also ist $P_1P_2 = P_1P_8$.
Ebenso folgt, dass je zwei benachbarte Seiten von $Q \cap Q'$ dieselbe Länge $s = P_1P_2$ haben, somit gilt $u(Q \cap Q') = 8s$.
Wegen $\angle A'Z'B' = 90°$ und $0° < \alpha < 90°$ schneiden die Strecken ZA und $A'B'$ einander in einem Punkt R, und es gilt $\angle ARP_8 = \angle A'RZ$ (Scheitelwinkel) sowie $\angle RAP_8 = 45° = \angle RA'Z$. Somit gilt $\angle P_1P_8A = \angle RP_8A = \alpha$ (Winkelsumme im Dreieck), wegen $\angle P_1AP_8 = 90°$ also $AP_1 = s \cdot \sin\alpha$.
Ebenso erhält man $\angle P_2P_3B = 90° - \alpha$, also $P_2B = s \cdot \cos\alpha$. Aus

$$a = AP_1 + P_1P_2 + P_2B = s(\sin\alpha + 1 + \cos\alpha) \qquad \text{folgt somit}$$

$$s = \frac{a}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}$$

Nun nimmt

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}(\cos\alpha \cdot \cos 45° + \sin\alpha \cdot \sin 45°) = \sqrt{2}\cos(\alpha - 45°)$$

wegen $-45° < \alpha - 45° < 45°$ für genau $\alpha - 45° = 0$ seinen größten Wert an, und dieser beträgt $\sqrt{2}$. Daher existiert für alle $Q, Q' \in M$ mit $Q \neq Q'$ ein kleinstmöglicher Wert von $u(Q \cap Q') = 8s$, und dieser beträgt

$$\frac{8a}{1 + \sqrt{2}} = 8a(\sqrt{2} - 1)$$

Wegen $\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$, also $8a(\sqrt{2} - 1) < 4a$ ist dies zugleich der kleinstmögliche Wert von $u(Q \cap Q')$ für alle $Q, Q' \in M$ auch bei zugelassenem $Q = Q'$.

Aufgabe 231244:
Seien $P_1, P_2, ..., P_n$ verschiedene Punkte in der Ebene, $n \geq 2$. Man beweise:

$$\max_{ij} P_iP_j > \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{n} - 1) \cdot \min_{ij} P_iP_J \qquad (1 \leq i < j \leq n)$$

Lösung von Nuramon:
Seien $R := \max_{ij} P_iP_j$ und $r := \min_{ij} P_iP_j$ $(1 \leq i < j \leq n)$ der größte bzw. der kleinste Abstand der unter den n Punkten vorkommt.

Wir zeigen zunächst, dass es einen Punkt M in der Ebene gibt, so dass die Punkte P_1,P_2, …, P_n alle im Inneren oder auf dem Rand des Kreises um M mit Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}R$ liegen.

Dazu betrachten wir irgendeinen Kreis k, der P_1,P_2, …, P_n enthält und finden dann schrittweise Kreise mit kleinerem Radius, die ebenfalls alle n Punkte enthalten.

1. Wenn keiner der n Punkte auf dem Rand von k liegt, so können wir den Radius von k weiter verkleinern, indem wir k am Mittelpunkt von k zentrisch stauchen bis einer der Punkte $P_1, \ldots, P_n$ auf dem Rand des gestauchten Kreises liegt.

2. Wenn genau einer der n Punkte auf dem Rand von k liegt, dann erhalten wir durch eine geeignete Drehung von k um diesen Punkt einen neuen Kreis mit gleichem Radius, der mindestens zwei der n Punkte auf dem Rand und alle anderen im Inneren enthält.

3. Angenommen P_i und P_j sind zwei verschiedene Punkte, die auf dem Rand von k liegen und alle anderen Punkte liegen im Inneren von k. Falls P_iP_j ein Durchmesser von k ist, dann ist der Radius von k höchstens $\frac{1}{2}P_iP_j \leq \frac{1}{2}R < \frac{1}{\sqrt{3}}R$ und wir sind fertig.

Wenn P_iP_j kürzer ist als der Durchmesser von k, dann können wir den Mittelpunkt O von k so lange in Richtung des Mittelpunkts von P_iP_j verschieben, bis der Kreis k' um den verschobenen Mittelpunkt O' mit Radius $O'P_i = O'P_j$ einen weiteren der n Punkte auf dem Rand enthält oder aber P_iP_j ein Durchmesser von k' ist. In letzterem Fall sind wir bereits fertig.

4. Angenommen mindestens drei Punkte liegen auf dem Rand von k und die restlichen Punkte im Inneren von k.

Falls k einen Durchmesser hat, so dass alle Punkte, die auf dem Rand von k liegen, sich auf der gleichen Seite dieses Durchmessers befinden, dann können wir durch eine kleine Verschiebung von k einen Kreis erhalten, der alle Punkte $P_1, \ldots, P_n$ im Inneren enthält. Diesen können wir gemäß 1. weiter verkleinern.

Falls k keinen solchen Durchmesser hat, dann gibt es drei Punkte auf dem Rand von k, die ein spitzwinkliges oder ein rechtwinkliges Dreieck bilden. O. B. d. A. seien P_1,P_2,P_3 diese drei Punkte. Seien $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ die Innenwinkel des Dreiecks $P_1P_2P_3$. Es gilt dann $60° \leq \alpha \leq 90°$. Sei o. B. d. A. P_1P_2 die Seite von $P_1P_2P_3$, die dem Winkel α gegenüberliegt. Der Radius von k ist gleich dem Umkreisradius ρ von $P_1P_2P_3$ und für diesen gilt nach dem erweiterten Sinussatz

$$\rho = \frac{P_1P_2}{2\sin\alpha} \leq \frac{R}{2\sin 60°} = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Wir können diese vier Schritte nur endlich oft iterieren, denn bei jedem Durchlauf von Schritt 3 bzw. Schritt 4, bei dem wir noch nicht unseren gesuchten Kreis mit Radius $\leq \frac{1}{\sqrt{3}}R$ gefunden haben, wird der Radius von k im Anschluss an Schritt 4 echt kleiner als der Umkreisradius von einem Dreieck $P_kP_lP_m$ $(1 \leq k \leq l \leq m \leq n)$ und es gibt nur endlich viele solcher Dreiecke.

Sei jetzt also M ein Punkt in der Ebene, so dass $P_1, \ldots, P_n$ alle im Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}R$ um M liegen. Wir zeichnen um jeden Punkt P_i einen kleinen Kreis mit Radius $\frac{r}{2}$. Per Definition von r können sich je zwei dieser n Kreise nicht im Inneren schneiden. Die Gesamtfläche, die diese Kreise einnehmen ist daher genau $\frac{1}{4}n\pi r^2$.
Der Kreis um M mit Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}R + \frac{r}{2}$ enthält jeden dieser n kleinen Kreise. Daher gilt für dessen Flächeninhalt

$$\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}R + \frac{r}{2}\right)^2 > \frac{1}{4}n\pi r^2$$

(Da $n \geq 2$ gilt, muss dies eine strikte Ungleichung sein, sonst könnte man nämlich den großen Kreis vollständig in n kleinere Kreise zerlegen.) Aus obiger Ungleichung folgt, dass

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{R}{r} + \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{4}n,$$

also

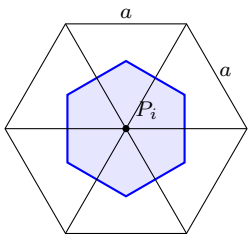
$$\frac{R}{r} > \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{n} - 1),$$

was offenbar äquivalent ist zur Behauptung.

Alternativ-Lösung von MontyPythagoras:
Man kann die Ungleichung wie folgt umformen:

$$\frac{\max_{ij} P_iP_j}{\min_{ij} P_iP_j} \geq c_n$$

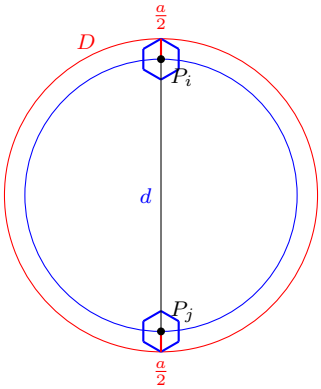
wobei c_n ein von n abhängiger Schwellenwert ist. Es ist also das kleinstmögliche Verhältnis zwischen maximalem und minimalem Abstand zu finden. Nach oben ist das Verhältnis natürlich offen, da der minimale Abstand beliebig klein oder der maximale Abstand bei (mindestens) einem sehr weit entfernten Punkt beliebig groß werden kann. Gibt man also den minimalen Abstand vor, so besteht die Aufgabe quasi darin, alle Punkte möglichst dicht zu scharen, ohne den vorgegebenen Mindestabstand zu unterschreiten. Zwei Schlussfolgerungen drängen sich auf: 1. Soll ein gewisser vorgegebener Mindestabstand eingehalten werden, so entsteht zwangsläufig ein Muster aus gleichseitigen Dreiecken. Dichter als das geht nicht. 2. Wenn die Punkte in einem Kreis angeordnet werden, ergibt sich mit dem Durchmesser des Kreises der geringstmögliche Maximalabstand zwischen zwei Punkten. Ein Muster aus gleichseitigen Dreiecken in eine Kreisform zu pressen klingt nach Quadratur des Kreises, doch es reicht für eine sinnvolle Abschätzung.



Der Minimalabstand zweier Punkte sei a, der maximale Abstand zwischen zwei Punkten sei d_{max}. Wenn man nun Punkte mit dieser sechseckigen Mindestabstandszone (blau dargestellt in obigem Bild) so eng wie möglich schart, kommt ein Wabenmuster heraus. Die Fläche eines solchen Sechsecks ist

$$A_S = 6 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} a \tfrac{\sqrt{3}}{2} a = \tfrac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

Bei sehr vielen Sechsecken könnte man sie recht gut in einem Kreis unterbringen, aber es werden am Rand immer Lücken bleiben. Wir versuchen daher nur eine Abschätzung:



In dieser Grafik ist der äußere Kreis nicht der tatsächliche Kreis, der alle Punkte inklusive der blauen Sechsecke umrundet, sondern ein Kreis, der flächengleich ist zu der Anzahl n an kleinen blauen Sechsecken, also

$$A_K = \tfrac{\sqrt{3}}{2} a^2 n$$

Sein Durchmesser sei D, so dass

$$D = a\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi} n}$$

ist. Ein Kreis, der alle Punkte tatsächlich umschließt, muss größer sein als dieser, denn selbst wenn die Sechsecke im Inneren spaltfrei liegen, müssen sich an den Rändern zum Kreis hin Lücken ergeben, wie

schon gesagt. Das Maximale, um das sich der Mittelpunkt eines solchen kleinen Sechsecks vom äußeren Kreis mit dem Durchmesser D entfernt liegen könnte, ist $\frac{1}{2}a$, denn wenn er weiter entfernt wäre, gäbe es andere Punkte, die direkt am Kreis anliegen müssten. Wenn es rundum einen Abstand gäbe, wäre der Kreis nicht minimal und schon gar nicht flächengleich. Damit ist der Durchmesser des kleineren Kreises d gleich dem Abstand zwischen zwei sich gegenüber liegenden Sechsecken, die im abgebildeten Fall den Kreis wie dargestellt von innen mit einer Spitze berühren, und es ist $d \geq D - a$ (sie könnten ja auch flach anliegen). Diese Kreise sind nur hypothetisch, es wird eine doppelte Abschätzung durch bewusst unerreichbar klein gewählte Annahmen vorgenommen. Da außerdem $d_{max} \geq d$ gelten muss, folgt

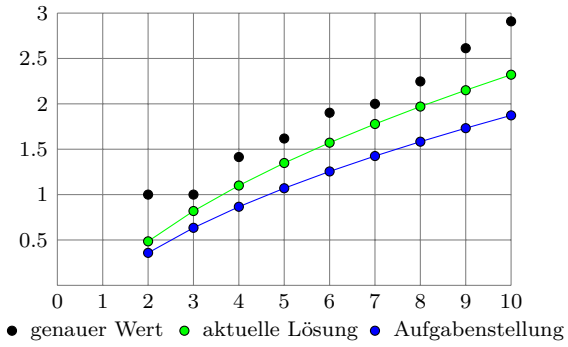
$$d_{max} \geq d \geq D - a = a\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}n} - a$$

$$d_{max} \geq a\left(\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{\pi}n} - 1\right)$$

Daher gilt

$$\max_{ij} P_iP_j \geq \left(\sqrt{\frac{2\sqrt{3}\,n}{\pi}} - 1\right) \min_{ij} P_iP_j$$

Dies ist eine schärfere Ungleichung als in der Aufgabenstellung gefordert. Hier ein Vergleich für die ersten n:



Aufgabe 261245:
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 3$, mit denen die folgende Aussage gilt:
Jede ebene konvexe n-Ecksfläche $A_1A_2...A_n$ wird vollständig überdeckt von den Flächen der n Kreise, die die Strecken A_iA_{i+1} als Durchmesser haben ($i = 1, 2, ..., n$; es sei $A_{n+1} = A_1$ gesetzt).
Dabei sei jede n-Ecksfläche und jede Kreisfläche einschließlich ihrer Randpunkte verstanden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Für jede Dreiecksfläche $F = A_1A_2A_3$ und jede konvexe Viereckfläche $F = A_1A_2A_3A_4$ gilt die genannte Überdeckungsaussage; dies kann folgendermaßen bewiesen werden:

Wäre die Aussage falsch, so gäbe es einen Punkt P in F, der außerhalb jeder der drei bzw. vier genannten Kreise läge. Da diese Kreise den Rand von F überdecken, läge P im Innern von F. Da F konvex ist, ergäben sich Winkel $\angle A_iPA_{i+1}$ (i = 1,...,n; $A_{n+1} = A_1$, mit $n = 3$ bzw. $n = 4$) für die

$$\sum_{i=1}^{n} \angle A_iPA_{i+1} = 360° \tag{1}$$

gelten müsste. Andererseits wäre, da P außerhalb des Kreise über den Durchmessern A_iA_{i+1} läge, $\angle A_iPA_{i+1} < 90°$ (i = 1,...,n), also

$$\sum_{i=1}^{n} \angle A_iPA_{i+1} < n \cdot 90°$$

was (1) wegen $n \leq 4$ widerspricht.

II. Für jedes $n > 4$ gibt es eine konvexe n-Ecksfläche $A_1A_2...A_n$, die von den genannten Kreisen nicht überdeckt wird; dies zeigt folgendes Beispiel:

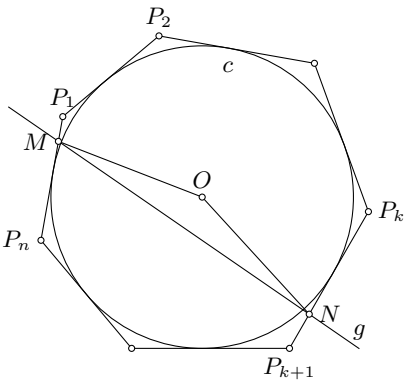
Ist $A_1A_2...A_n$ ein regelmäßiges n-Eck und P sein Mittelpunkt, so gilt (1) (jetzt mit $n > 4$) und daher $\angle A_iPA_{i+1} = \frac{1}{n} \cdot 360° < 90°$ für alle $i = 1,...,n$; $A_{n+1} = A_1$.
Also liegt P außerhalb aller Kreise über den Durchmessern A_iA_{i+1}.
Mit I. und II: ist bewiesen, dass die in der Aufgabe genannte Aussage genau für $n = 3$ und $n = 4$ gilt.

Aufgabe 271244:
Durch ein konvexes n-Eck $P_1P_2...P_n$, das einen Inkreis c besitzt, sei eine Gerade g gelegt, die die Seite P_nP_1 in einem Punkt M und eine Seite P_kP_{k+1} $(1 \leq k < n)$ in einem Punkt N schneidet.
Die Gerade g sei so gelegt, dass sie sowohl den Umfang als auch den Flächeninhalt des n-Ecks halbiert, d. h., dass die folgenden Bedingungen (1) und (2) gelten:
(1) Die Längen der Streckenzüge $MP_1P_2...P_kN$ und $NP_{k+1}P_{k+2}...P_nM$ sind einander gleich.
(2) Die Flächeninhalte der Vielecke $MP_1P_2...P_kN$ und $NP_{k+1}P_{k+2}...P_nM$ sind einander gleich.
Man beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt:
Die Gerade g geht durch den Mittelpunkt des Kreises c.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Mit O sei der Mittelpunkt und mit r der Radius des Inkreises bezeichnet. Da alle Seiten des n-Ecks Tangenten an den Inkreis sind und folglich in jedem Dreieck $P_iP_{i+1}O$ $(1 \leq i < n)$ der Berührungsradius Höhe auf P_iP_{i+1} ist, ergibt sich der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke mit

$$\frac{r}{2} \cdot P_iP_{i+1}$$

Ebenso ergibt sich der Flächeninhalt der Dreiecke MP_1O, P_kNO, $NP_{k+1}O$ bzw. P_nMO zu $\frac{r}{2}MP_1$, $\frac{r}{2}P_kN$, $\frac{r}{2}NP_{k+1}$ bzw. $\frac{r}{2}P_nM$.



Aus Voraussetzung (1) der Aufgabe folgt

$$\frac{r}{2}(MP_1 + P_1P_2 + ... + P_kN) = \frac{r}{2}(NP_{k+1} + P_{k+1}P_{k+2} + ... + P_nM) \quad \text{also}$$

$$\frac{r}{2}MP_1 + \frac{r}{2}P_1P_2 + ... + \frac{r}{2}P_kN = \frac{r}{2}NP_{k+1} + \frac{r}{2}P_{k+1}P_{k+2} + ... + \frac{r}{2}P_nM$$

d. h., die Flächeninhalte der Vielecke $MP_1P_2...P_kNO$ und $NP_{k+1}P_{k+2}...P_nMO$ sind einander gleich.
Ginge die Gerade g nicht durch O, so läge O im Innern von einem der beiden in (2) genannten Vielecke, o. B. d. A. etwa von $MP_1P_2...P_kN$ (siehe Abbildung).
Dessen Flächeninhalt wäre somit die Summe der Flächeninhalte des Vielecks $MP_1P_2...P_kNO$ und Dreiecks MNO, das nicht zur Strecke MN entartet wäre. Zugleich wäre der Flächeninhalt von $NP_{k+1}P_{k+2}...P_nM$

die Differenz der Flächeninhalte des Vielecks $NP_{k+1}P_{k+2}...P_nMO$ und des Dreiecks MNO.

Damit ergäbe sich zwischen den in (2) genannten Flächeninhalten eine Differenz, die gleich dem doppelten Flächeninhalt von MNO, also nicht Null wäre.
Wegen dieses Widerspruchs ist die Annahme, g ginge nicht durch O widerlegt, d. h. der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 281243:
Man ermittle alle diejenigen konvexen Vielecke $P_1P_2...P_n$, in deren Inneren ein Punkt X existiert, für den

$$P_1X^2 + P_2X^2 + ... + P_nX^2$$

gleich dem doppelten Flächeninhalt von $P_1P_2...P_n$ ist.

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
X sei innerer Punkt des konvexen n-Ecks $P_1P_2...P_n$. Dann gilt für den Flächeninhalt F_i des Teildreiecks P_iXP_{i+1} ($i = 1,2,...,n$; $P_{n+1} = P_1$)

$$2F_i = P_iX \cdot P_{i+1}X \cdot \sin\angle P_iXP_{i+1} \leq P_X \cdot P_{i+1}X \qquad (1)$$

Für beliebige reelle Zahlen a,b gilt wegen $(a-b)^2 \geq 0$: $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$. Damit folgt aus (1)

$$2F_i \leq P_iX \cdot P_{i+1}X \leq \frac{1}{2}(P_iX^2 + P_{i+1}X^2) \qquad (2)$$

Das Gleichheitszeichen in (1) gilt genau dann, wenn $\sin\angle P_iXP_{i+1} = 1$ ist, wegen der Lage von X also genau dann, wenn $\angle P_iXP_{i+1} = 90°$ gilt. Das Gleichheitszeichen in (2) gilt genau dann, wenn $P_iX = P_{i+1}X$ gilt. Aus (1) und (2) folgt für den Flächeninhalt F von $P_1P_2...P_n$

$$2F = \sum_{i=1}^{n} 2F_i \leq P_1X^2 + P_2X^2 + ... + P_nX^2 \qquad (3)$$

Das Gleichheitszeichen in (3) gilt genau dann, wenn für jedes i ($i = 1,2,...,n$) das Gleichheitszeichen in (1) und in (2) gilt, d. h. genau dann, wenn jedes Teildreieck P_iXP_{i+1} rechtwinklig und gleichschenklig ist.
Gibt es in $P_1P_2...P_n$ einen inneren Punkt X, für den in (3) das Gleichheitszeichen steht, so folgt wegen

$$\sum_{i=1}^{n} \angle P_iXP_{i+1} = 360° \qquad \text{und} \qquad \angle P_iXP_{i+1} = 90°$$

für $i = 1,2,...,b$ notwendig $n = 4$. Es sind alle Teildreiecke P_iXP_{i+1} kongruent (sws), und es folgt

$$P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4P_1$$

und die Gleichheit der Innenwinkel im Viereck $P_1P_2P_3P_4$. Das Viereck muss aber ein Quadrat sein. Jedes Quadrat erfüllt auch die gestellten Bedingungen, denn für den Mittelpunkt X eines Quadrates mit der Kantenlänge a gilt $P_iX = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und folglich

$$P_1X^2 + P_2X^2 + P_3X^2 + P_4X^2 = 4 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot = 2a^2 = 2F$$

VII.III Kreise, Ellipsen

I Runde 1

Aufgabe V01103:
500 m Papier mit einer Stärke von 0,1 mm sollen auf eine Rolle mit einem Durchmesser von 15 cm aufgewickelt werden.
a) Wieviel Lagen Papier befinden sich am Schluss auf der Rolle, und
b) welchen Durchmesser hat die Rolle, wenn alles Papier aufgewickelt wurde?

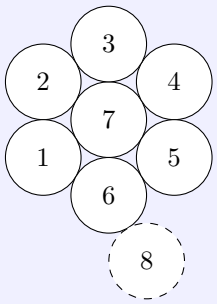
Lösung von Steffen Polster:
Die erste Lage Papier hat eine Länge πd mit $d = 150$ mm. Mit jeder Lage wächst der Durchmesser um 0,2 mm. Damit wird für die Gesamtlänge des Papiers von 500000 mm bei n Lagen Papier

$$\begin{aligned} 500000 &= \pi d + \pi(d + 0{,}2) + \pi(d + 2 \cdot 0{,}2) + ... + \pi(d + (n-1) \cdot 0{,}2) \\ &= \pi(n \cdot d + 0{,}2 + 0{,}4 + ...(n-1) \cdot 0{,}2) \\ &= \pi \left(n \cdot d + 0{,}2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \right) \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $n_1 \approx 717{,}91$ und $n_2 \approx -2216{,}91$, wobei n_2, da kleiner 0, entfällt.
Auf der Rolle befinden sich am Ende 718 Lagen Papier. Die Rolle hat dann einen Durchmesser von $150 + 717 \cdot 0{,}2 = 293{,}4$ mm, also von 29,34 cm.

Aufgabe V01108:

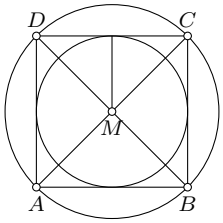
In der Abbildung sind acht Kreise dargestellt. Sieben davon sind unbeweglich, der achte rollt an ihnen reibungslose ab.
Wie oft dreht sich der Kreis bei einmaligem Abrollen um die Kreise 1 bis 6?



Lösung von Steffen Polster:
Der 8. Kreis rollt auf einem Kreis solange bis er mit seiner Peripherie den nächsten Kreis berührt. Die Mittelpunkte der zwei berührten Kreise und der Mittelpunkt des achten Kreises bilden dann ein gleichseitiges Dreieck, mit den Innenwinkeln von 60°.
Damit rollt der achte Kreis, z. B. auf dem sechsten, genau 120°, d. h. $\frac{2}{3}$ des Kreisumfangs.
Bei 6 Kreisen ergibt dies insgesamt $6 \cdot \frac{2}{3}u = 4u$. Damit führt der 8. Kreis genau 4 Umdrehungen aus.

Aufgabe V01111:
Einem Kreis vom Radius r ist ein Quadrat einbeschreiben, dem Quadrat ein Kreis, diesem Kreis wieder ein Quadrat usw. bis zum Mittelpunkt.
Wie groß ist die Flächensumme aller konstruierten Kreise, ausschließlich des gegebenen, und wie groß ist die Summe aller Quadrate?

Lösung von Steffen Polster:



Der äußere Kreis habe den Radius $r_0 = r$. Das Quadrat $ABCD$ habe die Kantenlänge $a0 = a$. Seine Diagonale d_0 hat nach dem Satz Pythagoras die Länge $d_0 = a_0\sqrt{2}$. Die Diagonale ist aber auch gleich zweimal der Radius r_0:

$$d_0 = a_0\sqrt{2} = 2r_0 \rightarrow a_0 = r_0\sqrt{2}$$

Allgemein gilt:

$$a_i = r_i\sqrt{2}$$

Die Kantenlänge a_0 des Quadrats ist identisch mit dem halben Radius r_1 des inneren Kreises $a_0 = 2r_1$, bzw. allgemein:

$$r_i = \frac{1}{2}a_{i-1}$$

Die rekursive Formel für die Radien der Kreise lautet demnach:

$$r_i = \frac{1}{2}a_{i-1} = r_{i-1}\frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow r_i = r_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i$$

Für die Kantenlängen gilt das gleiche:

$$a_i = ri\sqrt{2} = a_{i-1}\frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow a_i = r_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i$$

a) Die Summe der Flächeninhalte aller Kreise ist (eine geometrische Reihe)

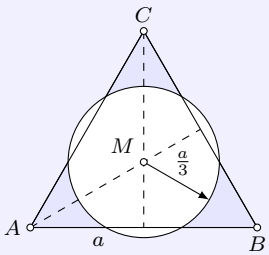
$$\sum A_K = \sum \pi r^2 = \pi\sum_{i=0}^{\infty}\left(r_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i\right)^2 = \pi r_0^2\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i = \pi r_0^2\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi r^2$$

b) die Summe der Flächeninhalte aller Quadrate

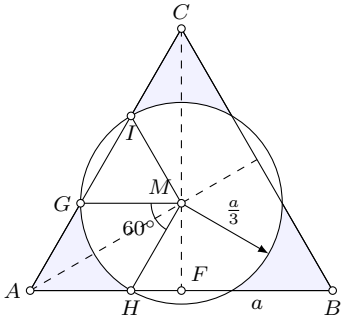
$$\sum A_Q = \sum a_i^2 = \sum_{i=0}^{\infty}\left(a_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i\right)^2 = a_0^2\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^i = 2a_0^2 = 4r^2$$

Aufgabe V01216:

Die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks seien a. Um den Mittelpunkt dieses Dreiecks ist mit dem Radius $\frac{a}{3}$ ein Kreis zu schlagen.
Wie groß ist der Teil der Dreiecksfläche, die außerhalb des Kreises liegt?



Lösung von Steffen Polster:



Die zu A näheren Schnittpunkte des Kreises mit den Seiten AC und AB seien G und H. F sei der Fußpunkt der Höhe von C, die von M im Verhältnis 2:1 geteilt wird, da $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck ist. Dann wird nach einem Strahlensatz

$$2:1 = CM:MF = MG:AF \qquad \rightarrow \qquad MG = \frac{a}{3}$$

Analog ergibt sich $AG = AH = MH = \frac{a}{3}$, so dass das Viereck $AHMG$ ein Rhombus und der Winkel $\angle HMG = \alpha = 60°$ ist.

Damit schneidet der Kreis aus dem Dreieck 3 gleichseitige Dreiecke der Art GMI (Seitenlänge $\frac{a}{3}$) und

drei Sektoren $\widehat{GHM}$, die, da $\angle HMG = 60°$, zu einem Halbkreis zusammengefasst werden können. Für die nicht von Kreis bedeckte Dreiecksfläche wird somit

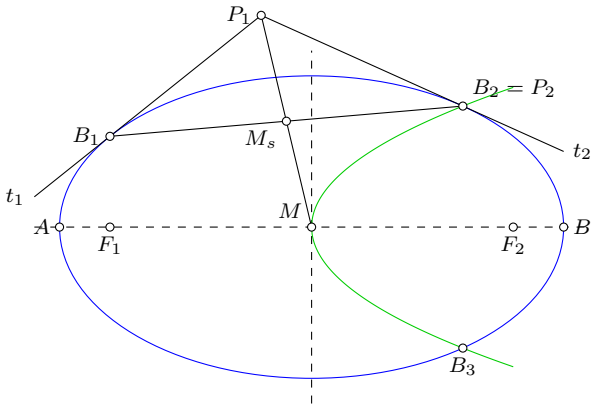
$$F = F_{\triangle ABC} - 3 \cdot F_{\triangle GMI} - \frac{1}{2} F_{\text{Kreis}}$$
$$= \frac{a^2}{4}\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{18}a^2$$

Aufgabe V01217:
Gegeben ist die Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ sowie der Punkt $P_1(-1; \frac{21}{5})$.
a) Gesucht sind die Gleichungen der Tangenten von P_1 an die Ellipse.
b) Weisen Sie nach, dass die Gerade, die P_1 mit der Mitte der Berührungssehne verbindet, durch den Mittelpunkt der Ellipse geht!
c) Die Hauptachse der Ellipse ist Achse einer Parabel, deren Scheitel im Mittelpunkt der Ellipse liegt und durch $P_2(3; \frac{12}{5})$ geht.
Unter welchem Winkel schneiden sich Ellipse und Parabel?

Lösung von Steffen Polster:
Umstellen der Ellipsengleichung ergibt

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{1}$$

d. h. die Halbachsen $a = 5$ und $b = 3$. Die lineare Exzentrizität wird damit $e = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$. Die Brennpunkte haben die Koordinaten $F_1(-4{,}0)$ und $F_2(4{,}0)$.



a) Die Tangentengleichung dieser Ellipse in einem Berührungspunkt B ist

$$\frac{x \cdot x_B}{25} + \frac{y \cdot y_B}{9} = 1$$

Setzt man den Punkt P_1, der auf den Tangenten liegt ein, wird

$$\frac{-x}{25} + \frac{\frac{21}{5}}{9} = 1 \tag{2}$$

(2) umgestellt und in (1) eingesetzt, liefert die Koordinaten der zwei Berührungspunkte

$$B_1\left(-4; \frac{9}{5}\right) \quad ; \quad B_2\left(3; \frac{12}{5}\right)$$

mit den Tangenten

$$t_1: \quad y = \frac{4}{5}x + 5 \quad ; \quad t_2: \quad y = -\frac{9}{20}x + \frac{15}{4}$$

b) Der Mittelpunkt der Berührungssehne B_1B_2 ist $M_s\left(-\frac{1}{2}; \frac{21}{10}\right)$. Er ist offensichtlich auch der Mittelpunkte der Strecke MP_1 und liegt damit auf der Gerade von P_1 durch den Mittelpunkt M der Ellipse.

c) Für die Parabel ergibt sich aus dem Ansatz $y^2 = ax$ mit den Koordinaten des Punktes $P_2\left(3; \frac{12}{5}\right)$

$$y^2 = \frac{48}{25}x \qquad ; \qquad f(x) = y = \pm\sqrt{\frac{48}{25}x}$$

Die Tangente in P_2 an die Parabel hat den Anstieg

$$f'(x) = \frac{2}{5}\sqrt{3} \cdot x \Rightarrow f'(3) = \frac{2}{5} = m_2$$

Die Tangente t_2 hat den Anstieg $m_1 = -\frac{9}{20}$. Für den Schnittwinkel der zwei Geraden, d. h. auch dem Schnittwinkel von Parabel und Ellipse, folgt damit

$$\tan\varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{85}{82} \Rightarrow \varphi = 46{,}03°$$

Ellipse und Parabel schneiden sich unter dem Winkel 46,03°.

Aufgabe V01219:
Zeichnen Sie die Ellipse

$$9x^2 + 25y^2 = 225 \tag{1}$$

und bestimmen Sie grafisch und rechnerisch die Punkte, in denen die Brennstrahlen senkrecht aufeinander stehen.

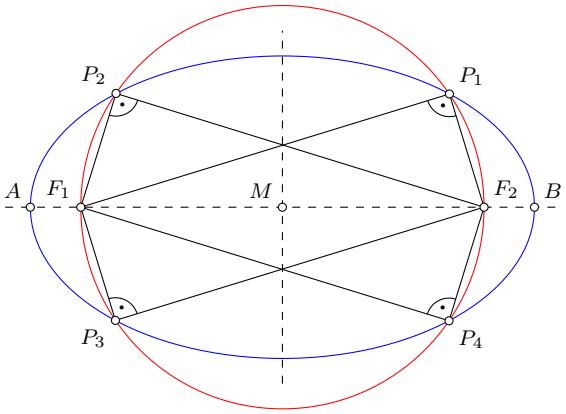
Lösung von Steffen Polster:
Umstellen der Ellipsengleichung ergibt

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{2}$$

d. h. die Halbachsen $a = 5$ und $b = 3$. Die lineare Exzentrizität wird damit $e = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$. Die Brennpunkte haben die Koordinaten $F_1(-4{,}0)$ und $F_2(4{,}0)$.

Die Konstruktion erfolgt mit Zirkel und Lineal mittels klassischem Verfahren:

> Wir wählen einen Hilfspunkt H auf AB, zeichnen um F_1 einen Kreisbogen mit Radius HA und um F_2 einen Kreisbogen mit dem Radius HB. Die beiden Schnittpunkte dieser Kreise sind (symmetrisch zur Hauptachse liegende) Punkte X_1 und X_2 der Ellipse.



Die Punkte der Ellipse, in denen sich die Brennstrahlen senkrecht schneiden, müssen auf dem Thaleskreis über der Strecke F_1F_2 liegen.
Zur Konstruktion zeichnet man den Kreis um M mit dem Radius MF_1. Die Schnittpunkte mit der Ellipse sind die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 mit der geforderten Eigenschaft.

Der beschriebene Thaleskreis hat die Gleichung $x^2 + y^2 = 16$. Umstellen nach y^2 und Einsetzen in (1) ergibt

$$9x^2 + 25(16 - x^2) = 225 \qquad \Rightarrow \qquad x_{1;2} = \pm\frac{5}{4}\sqrt{7} \quad ; \quad y_{1,2} = \pm\frac{9}{4}$$

Die gesuchten Punkte haben somit die Koordinaten

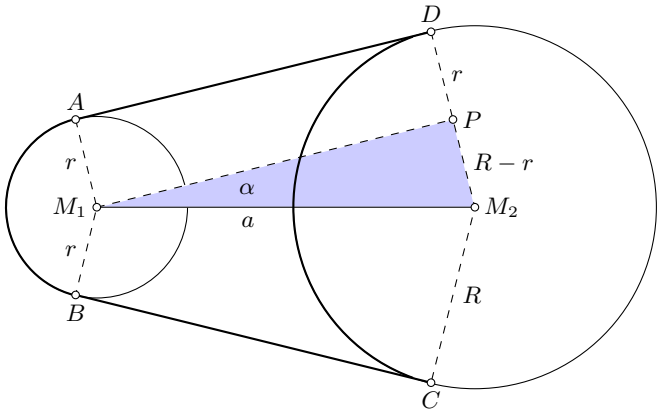
$$P_1\left(\frac{5}{4}\sqrt{7};\frac{9}{4}\right) \quad ; \quad P_2\left(-\frac{5}{4}\sqrt{7};\frac{9}{4}\right) \quad ; \quad P_3\left(-\frac{5}{4}\sqrt{7};-\frac{9}{4}\right) \quad ; \quad P_4\left(\frac{5}{4}\sqrt{7};-\frac{9}{4}\right)$$

Aufgabe 011215:
Zur Berechnung der Länge l eines Treibriemens wird in der Praxis die Näherungsformel

$$l = \pi\frac{D+d}{2} + 2a + \frac{(D-d)^2}{4a}$$

benutzt. Dabei ist d der Durchmesser der treibenden Scheibe, D der Durchmesser der getriebenen Scheibe und $M_1M_2 = a$ der Abstand der beiden Achsen.
Für die folgenden beiden Beispiele soll die Länge des Treibriemens genau und nach der Näherungsformel berechnet werden.
Wie groß ist in den beiden Beispielen der relative Fehler (in Prozent), der bei Anwendung der Näherungsformel entsteht?
a) $d = 140$ mm, $D = 220$ mm, $a = 500$ mm,
b) $d = 60$ mm, $D = 220$ mm, $a = 200$ mm.

Lösung von Eckard Specht:
Wir berechnen zunächst die genaue Länge des Treibriemens. Dazu seien A, B und C, D diejenigen Punkte, an denen sich der Riemen von der treibenden bzw. getriebenen Scheibe (Mittelpunkte M_1 bzw. M_2 und Radien r bzw. R) löst.
AD und BC sind dann die gemeinsamen äußeren Tangenten beider Kreise, die wir z. B. dadurch finden, indem wir ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse $M_1M_2 \equiv a$, der Kathete $PM_2 = R - r$ und $\angle M_1PM_2 = 90°$ konstruieren und die Kathete M_1P um r parallel nach außen verschieben.



Bezeichnen wir noch den Winkel $\angle PM_1M_2 \equiv \alpha$, dann gilt $\sin\alpha = \frac{R-r}{a}$, und die geradlinigen Teile des Riemens haben die Länge $AD = BC = a\cos\alpha$, die beiden Kreisbögen die Länge $AB = (\pi - 2\alpha)r$ bzw. $CD = (\pi + 2\alpha)R$ (α im Bogenmaß gemessen), insgesamt also

$$\bar{l} = 2a\cos\alpha + (\pi - 2\alpha)r + (\pi + 2\alpha)R = \pi(R + r) + 2a(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha) \qquad (1)$$

Für kleine Winkel α ergibt sich daraus mit $\frac{R-r}{a} = \sin\alpha \approx \alpha$ und $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \approx 1 - \frac{(R-r)^2}{2a}$ die in der Aufgabenstellung angegebene Näherungsformel

$$l \approx \pi(R + r) + 2a + \frac{(R-r)^2}{a}$$

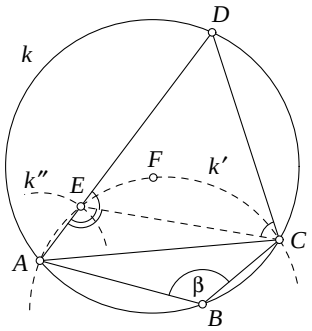
Mit den gegebenen Werten für $d = 2r, D = 2R$ sowie a ergeben sich nun mit (1) und (2) folgende Winkel, Längen und relativen Fehler:

a) $\alpha = 4{,}59°$, $\bar{l} = 1568{,}7$ mm, $l = 1568{,}7$ mm, $\frac{|\bar{l}-l}{\bar{l}} = 0{,}00\%$,

b) $\alpha = 23{,}58°$, $\bar{l} = 872{,}3$ mm, $l = 871{,}8$ mm, $\frac{|\bar{l}-l}{\bar{l}} = 0{,}05\%$,

Aufgabe 021215:
Auf einer Kreislinie sind drei verschiedene Punkte A, B, C gegeben.
Es ist auf der gleichen Kreislinie ein weiterer Punkt D so zu konstruieren, dass $ABCD$ sowohl Sehnenviereck als auch Tangentenviereck ist!
(Näherungslösungen z. B. mit Hilfe einer Hyperbel gelten nicht als Lösung. Es dürfen nur Zirkel und Lineal benutzt werden.)

Lösung von Eckard Specht:



Analysis: Da D auf dem Kreis k liegt, ist die Forderung, dass $ABCD$ ein Sehnenviereck sein soll, trivial. Für ein Tangentenviereck $ABCD$ muss jedoch $AB + CD = BC + DA$ oder $|AB - BC| = |DA - CD|$ gelten.

Sei o. B. d. A. $AB \geq BC$ (und damit $DA \geq CD$) sowie E derjenige Punkt auf DA mit $DE = DC$. Dann ist das Dreieck DEC gleichschenklig mit $\angle CDE = 180° - \angle ABC = 180° - \beta$ (Eigenschaft eines Sehnenvierecks) und den Basiswinkeln $\frac{1}{2}\beta$.

Folglich ist $\angle AEC = 180° - \frac{1}{2}\beta$. Außerdem ist $AE = DA - CD = AB - BC$ eine bekannte Länge. Wir gelangen dadurch zu folgender Konstruktion.

Konstruktion:

Es wird derjenige Kreisbogen k' konstruiert, der über der Sehne AC auf der B entgegengesetzten Seite den Winkel $180° - \frac{1}{2}\beta$ fasst (z. B. durch Konstruktion des gleichschenkligen Dreiecks AFC mit den Basiswinkeln $\frac{1}{4}\beta$).

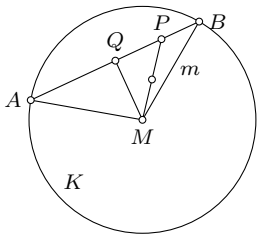
Dessen Schnittpunkt mit dem Kreis k'' (Mittelpunkt A, Radius $AE = AB - BC$) liefert den Punkt E.

Die Verlängerung von AE schneidet k dann im gesuchten Punkt D.

Aufgabe 031215:
Gegeben seien ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und ein Punkt P im Innern des Kreises.

Welches ist der geometrische Ort für die Mitten der durch P verlaufenden Sehnen?

Lösung von Henning Thielemann:



Behauptung: Der Ort aller gesuchten Punkte ist der Kreis k mit dem Durchmesser MP.

Beweis:
1. Teilbehauptung:
Jeder Sehnenmittelpunkt liegt auf k.

Es seien A und B die Schnittpunkte des Kreises (ab jetzt K genannt) mit einer Sehne durch den Punkt P. Die Strecken MA und MB sind Radien des Kreises und daher gleich lang und das Dreieck AMB ist gleichschenklig.

Der Lotfußpunkt Q des Lotes von M auf AB ist gleichzeitig Mittelpunkt der Sehne AB.

Das Dreieck MQP ist rechtwinklig, folglich ist der Mittelpunkt m seines Umkreises gleichzeitig Mittelpunkt von der Hypotenuse MP. Das bedeutet, dass der Umkreis vom Dreieck MQP der Kreis k ist.

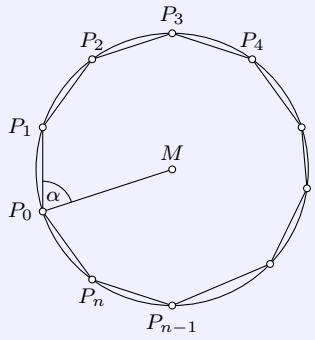
2. Teilbehauptung:
Alle Punkte von k sind Sehnenmittelpunkte

Man wähle einen Punkt Q auf dem Kreis k, der nach dem Satz des Thales das rechtwinklige Dreieck MQP aufspannt. Die Dreiecksungleichung bezogen auf das Dreieck MQP stellt sicher, dass Q von M weniger weit entfernt ist als P von M und damit genau wie P innerhalb des Kreises liegt. Daher kann man die Strecke QP auf beiden Seiten bis zum Kreis K verlängern und erhält dort die Schnittpunkte A und B.

Das Dreieck AMB ist gleichschenklig und Q ist als Lotfußpunkt von M gleichzeitig Mittelpunkt von AB.
□

Aufgabe 041112:
In den Schlitz eines zylindrischen Spiegels, der nach innen spiegelt, tritt bei P_0 ein Lichtstrahl ein, der mit dem Radius MP_0 den Winkel α bildet ($\alpha < \frac{\pi}{2}$).

Der Lichtstrahl verläuft in einer auf der Zylinderachse senkrecht stehenden Ebene und wird an den Punkten $P_1, P_2, P_3, ..., P_n, ...$ reflektiert (siehe Abbildung).



a) Geben Sie eine Formel für die Bogenlänge $\overset{\frown}{P_0P_n}$ an!
b) Wie groß ist α, wenn P_{10} mit P_0 zusammenfällt und der Streckenzug $P_0P_1P_2...P_{10}$ sich nicht überschneidet?
c) Es sei $\alpha = 50°$.
Wie groß ist n, wenn P_n mit P_0 zusammenfällt? Geben Sie die drei kleinsten Werte für n an! (In diesem Fall kann sich der Streckenzug $P_0P_1P_2...P_{10}$ überschneiden.)

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Es gilt

$$|P_0M| = |P_1M| = |P_2M| = ... = r \qquad \text{und}$$

$$|\angle P_1P_0M| = |\angle MP_1P_0| = |\angle P_2P_1M| = |\angle MP_2P_1| = ... = \alpha$$

da die Größe des Einfallswinkels gleich der Größe des Reflexionswinkels ist, Basiswinkel in jedem gleichschenkligen Dreieck kongruent sind und $|\angle P_1P_0M| = \alpha$ (Scheitelwinkel) ist.

Daher sind die Dreiecke $P_0MP_1, P_1MP_2, P_2MP_3$ usw. untereinander kongruent, und es gilt für die Bögen:

$$\overset{\frown}{P_0P_1} \simeq \overset{\frown}{P_1P_2} \simeq \overset{\frown}{P_2P_3} \simeq ... \qquad \text{und}$$

$$|\angle P_0MP_1| = |\angle P_1MP_2| = |\angle P_2MP_3| = ... = \pi - 2\alpha$$

a) Dann ist

$$|\overset{\frown}{P_0P_n}| = |\overset{\frown}{P_0P_1}| + |\overset{\frown}{P_1P_2}| + ... + |\overset{\frown}{P_{n-1}P_n}| = (\pi - 2\alpha)r + (\pi - 2\alpha)r + ... + (\pi - 2\alpha)r = n(\pi - 2\alpha)r$$

b) Für n = 10 gilt in diesem Falle:

$$|\overset{\frown}{P_0P_{10}}| = 10(\pi - 2\alpha)r = 2\pi r, \qquad \text{also} \qquad \alpha = \frac{2}{5}\pi$$

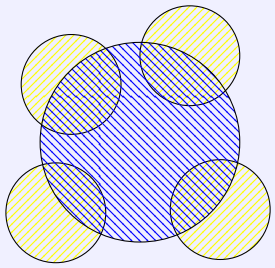
c) Fällt P_n mit P_0 zusammen und ist $\alpha = \frac{5}{18}\pi$, so gilt:

$$n\left(\pi - \frac{5}{9}\pi\right)r = k2\pi r \qquad (k = 1,2,3,...) \tag{1}$$

(1) ist äquivalent mit $n = \frac{9}{2}k$ (2).

Da n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist, wird (2) genau dann erfüllt, wenn $k = 2k'$ mit $k' > 0$ und k' ganzzahlig gilt. Daher ist $n = 9k'$ $(k' = 1,2,3,...)$.

Aufgabe 041113:
Ein Kreis wird von vier in derselben Ebene liegenden Kreisen, deren Radius halb so groß wie der Radius des gegebenen Kreises ist, so geschnitten, dass diese kleineren Kreise einander nicht schneiden (siehe Abbildung).



a) Es ist zu beweisen, dass der Flächeninhalt der in der Abbildung blauen Teilfläche des großen Kreises gleich der Summe der Flächeninhalte der gelb schraffierten Teilflächen der kleineren Kreise ist.

b) Diese Aussage lässt sich in verschiedener Hinsicht verallgemeinern. Geben Sie eine Verallgemeinerung an!

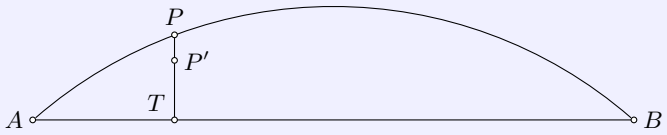
Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Der Inhalt p der blau gerasterten Fläche ist gleich der Differenz aus dem Inhalt πr^2 des Kreises k und dem Inhalt f der in k gelegenen gelb gerasterten Fläche

$$p = \pi r^2 - f$$

Der Flächeninhalt s der schraffierten Fläche ist gleich der Differenz aus der Summe der Inhalte der vier Kreisscheiben k_ν und f.
Da die genannte Summe gleich $4\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \pi r$ ist, ergibt sich $s = \pi r^2 - f$ und damit $s = p$.

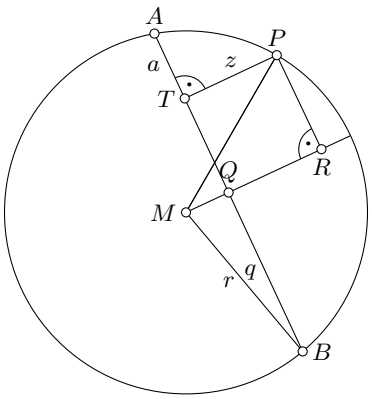
Aufgabe 091214:
In einem ebenen Gelände kann das Abstecken eines Kreisbogens vom Radius r über einer Sehne AB der Länge $\overline{AB} = s < 2r$ (der gesuchte Kreisbogen sei der kleinere der beiden von A und B begrenzten Bögen eines Kreises vom Radius r) nach folgender Näherungsmethode ausgeführt werden:

In beliebigen Teilpunkten T im Innern der Strecke AB werden Senkrechte nach der Seite des gesuchten Kreisbogens errichtet und auf diesen von T aus Strecken der Länge $\overline{TP'} = z' = \frac{ab}{2r}$ abgetragen ($\overline{AT} = a$, $\overline{TB} = b$). Der gesuchte Punkt P des Kreisbogens auf der Geraden durch T und P' habe von T den Abstand $\overline{TP} = z$. Ferner sei, wie in der Vermessungstechnik vorausgesetzt wird, $s \leqslant \frac{1}{5}r$.



Es ist zu beweisen, dass dann der relative Fehler $\delta = \dfrac{|z - z'|}{z}$ stets kleiner als 0,0051, d. h. 0,51 % ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Es sei M der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, Q der Mittelpunkt der Sehne AB, PR das Lot von P auf die Gerade durch M und Q. Dann kann o. B. d. A. $0 < a \leq b$ vorausgesetzt werden, da dies gegebenenfalls durch entsprechende Wahl der Bezeichnungen stets erreicht werden kann.

Dabei gilt $PR = \frac{1}{2}(b-a)$ und $BQ = \frac{1}{2}(b+a)$. Setzt man nun $PR = p$, $BQ = q$, so erhält man

$$z = \sqrt{r^2 - p^2} - \sqrt{r^2 - q^2} \qquad \text{und} \qquad z' = \frac{(q-p)(q+p)}{2r} \qquad \text{also}$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{q^2 - p^2}{2r(\sqrt{r^2 - p^2} - \sqrt{r^2 - q^2})} = \frac{\sqrt{r^2 - p^2} + \sqrt{r^2 - q^2}}{2r}$$

Aus $0 < a \leq b$ und $a + b \leq \frac{1}{5}r$ folgt $0 \leq p < q \leq \frac{1}{10}r$, also

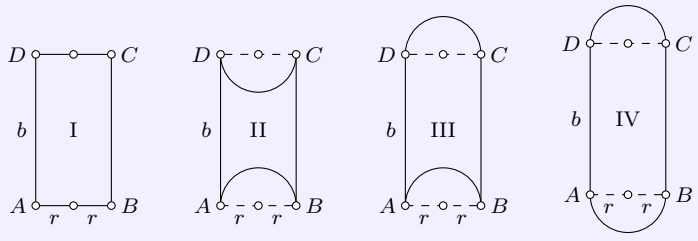
$$r\sqrt{0{,}99} \leq \sqrt{r^2 - q^2} < \sqrt{r^2 - p^2} \leq r$$

und hieraus $\sqrt{0{,}99} < \frac{z'}{z} < 1$, also $\delta = \left|1 - \frac{z'}{z}\right| = 1 - \frac{z'}{z} < 1 - \sqrt{0{,}99}$.

Nun ist $(1 - 0{,}0051)^2 = 1 - 0{,}0102 + 0{,}00002601 < 0{,}99$, also $1 - 0{,}0051 < \sqrt{0{,}99}$.
Daher gilt: $\delta < 1 - \sqrt{0{,}99} < 0{,}0051$. Der relative Fehler ist kleiner als 0,0051, d.s. 0,51 %.

Aufgabe 111212:

a) Es ist für jede der hier abgebildeten Figuren (I bis IV), die sämtlich durch Strecken oder Halbkreise mit dem Radius r begrenzt sind und für die jedes Mal $ABCD$ ein Rechteck mit $\overline{AB} = \overline{CD} = 2r$ und $\overline{AD} = \overline{BC} = b$ ist, folgende Untersuchung durchzuführen:



Gibt es Streckenverhältnisse $b : r$, für die der Umfang u der betreffenden Figur bei gegebenem Flächeninhalt F am kleinsten ist? Wenn ja, so sind sämtliche derartigen Streckenverhältnisse anzugeben.

Ferner ist dieser Minimalumfang jeweils durch r auszudrücken, und es ist der Quotient aus dem Minimalumfang und der Quadratwurzel des Flächeninhalts zu berechnen.

b) Die Figuren I bis IV sind nach abnehmendem Minimalumfang bei konstantem Flächeninhalt zu ordnen. Dabei wird auch der Fall $b = 0$ zugelassen, falls in diesem Falle der Minimalumfang der betreffenden Figur erreicht wird.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Der Flächeninhalt der Figur 1 ist gleich $F = 2br$. Daraus folgt $b = \frac{F}{2r}$. Ferner ist der Umfang dieser Figur gleich

$$u = 2b + 4r = \frac{F}{r} + 4r = \frac{F}{r} - 4\sqrt{F} + 4r + 4\sqrt{F} = \left(\sqrt{\frac{F}{r}} - \sqrt{4r}\right)^2 + 4\sqrt{F} \geq 4\sqrt{F}$$

Der Umfang wird also, wenn die Bedingung

$$\sqrt{\frac{F}{r}} - \sqrt{4r} = 0 \tag{1}$$

erfüllbar ist, genau dann am kleinsten, wenn (1), d. h. $F = 4r^2$, gilt. Das trifft zu, wenn

$$\frac{b}{r} = \frac{F}{2r^2} = \frac{4r^2}{2r^2} = 2$$

ist. Somit beträgt der Minimalumfang $u = 2b + 4r = 4r + 4r = 8r$. Ferner gilt für ihn

$$\frac{u}{\sqrt{F}} = \frac{8r}{2r} = 4$$

Im Fall der Figuren II, III und IV erhalten wir für F, b und u die jeweils in Spalte 2, 3 bzw. der Tabelle angegebenen Werte. Daher gilt in alle Fällen

$$u = \frac{F}{r} + kr$$

wobei k eine positive reelle Zahl ist, die im Fall I gleich 4, im Fall II gleich 3π, im Fall III gleich 2π und im Fall IV gleich π ist.

Figur	F	b	u	F	$\frac{b}{r}$	u	$\frac{u}{\sqrt{F}}$
Spalte 1	2	3	4	5	6	7	8
I	$2br$	$\frac{F}{2r}$	$2b + 4r = \frac{F}{r} + 4r$	$4r^2$	2	$8r$	4
II	$2br - \pi r^2$	$\frac{F}{2r} + \frac{\pi}{2}$	$2b + 4r = \frac{F}{r} + 3\pi r$	$3\pi r^2$	2π	$6\pi r$	$2\sqrt{3\pi} \approx 6{,}140$
III	$2br$	$\frac{F}{2r}$	$2b + 4r = \frac{F}{r} + 2\pi r$	$2\pi r^2$	π	$4\pi r$	$2\sqrt{2\pi} \approx 5{,}013$
IV	$2br + \pi r^2$	$\frac{F}{2r} - \frac{\pi}{2}$	$2b + 4r = \frac{F}{r} + \pi r$	πr^2	0	$2\pi r$	$2\sqrt{\pi} \approx 3{,}545$

Die Werte in der 5. bis 8. Spalte entsprechen dem Fall, dass u ein Minimum wird.

Mithin gilt in allen Fällen analog wie im Fall I

$$u = \frac{F}{r} + kr = \frac{F}{r} - 2\sqrt{Fk} + kr + 2\sqrt{Fk} = \left(\sqrt{\frac{F}{r}} - \sqrt{kr}\right)^2 + 2\sqrt{Fk} \geq 2\sqrt{Fk}$$

Der Umfang der Figur wird also, wenn die Bedingung

$$\sqrt{\frac{F}{r}} = \sqrt{kr} \tag{2}$$

erfüllt ist, genau dann am kleinsten, wenn (2), d. h. $F = kr^2$ gilt.
Setzen wir nun für k die obigen Werte ein, so erhalten wir, dass u genau dann ein Minimum wird, wenn die Werte für F so lauten, wie sie in Spalte 5 angegeben sind. Ferner erhalten wir unter Benutzung der Werte der Spalten 3 und 4, dass dies genau für die in den Spalten 6, 7 und 8 angegebenen Werte von $\frac{b}{r}$,

u bzw. $\frac{u}{\sqrt{F}}$ zutrifft.

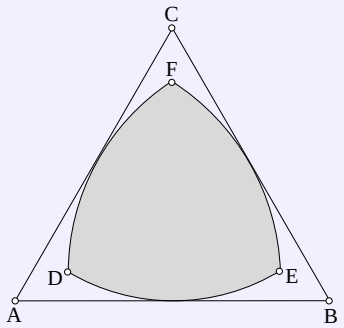
b) Aus den Zahlen der Spalte 8 ergibt sich nun die folgende Ordnung der Figuren nach abnehmendem Minimalumfang bei konstantem Flächeninhalt: II, III, I, IV.

Nachweis dieser Reihenfolge ohne dezimale Berechnung der Wurzeln:

Aus $2 < \pi < 4$ folgt $12\pi > 8\pi > 16 > 4\pi$, also

$$2\sqrt{3\pi} > 2\sqrt{2\pi} > 4 > 2\sqrt{\pi}$$

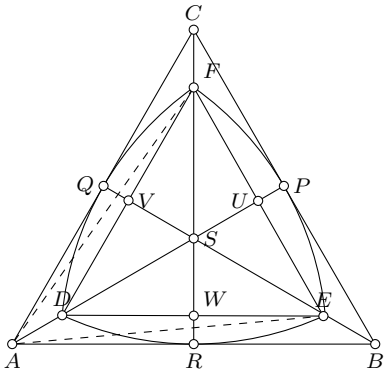
Aufgabe 181214:



Gegeben sei die Seitenlänge a eines gleichseitigen Dreiecks. Um jeden der Eckpunkte dieses Dreiecks werde derjenige Kreis konstruiert, der die gegenüberliegende Seite berührt. Je zwei dieser Kreise haben im Innern des Dreiecks genau einen Schnittpunkt. Je zwei dieser drei Schnittpunkte lassen sich durch einen Bogen eines der konstruierten Kreise miteinander verbinden, wobei jeder dieser Bögen innerhalb der Dreiecksfläche liegt. Die drei Kreisbögen schließen ein Flächenstück ein.

Man drücke den Inhalt dieses (schraffierten) Flächenstücks in der Form $z \cdot a^2$ aus (wobei man die Zahl z mit einer durch die Zahlentafel ermöglichten Genauigkeit angebe).

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Das Dreieck sei ABC; der Kreis um A, B bzw. C der jeweils die Gegenseite berührt, sei k_A, k_B bzw. k_C. Der im Dreieck ABC gelegene Schnittpunkt D von k_B und k_C liegt auf der durch A gehenden Symmetrieachse des Dreiecks.

Die Kreise k_B, k_C haben als Radius die Höhenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ des Dreiecks; daher hat in dem gleichschenkligen Dreieck BCD die Höhe DP die Länge

$$DP = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Entsprechendes gilt für die im Dreieck ABC gelegenen Schnittpunkte E, F von k_C und k_A bzw. von k_A und k_B sowie für ihre Lote EQ, FR auf CA bzw. AB.

Ist S der Schwerpunkt des Dreiecks ABC, so gilt wegen

$$SP = SQ = SR = \frac{a}{6}\sqrt{3} \qquad ; \qquad SD = SE = SF = \frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{a}{6}\sqrt{3}$$

und wegen $SA = SB = SC = \frac{a}{3}\sqrt{3}$ folgt aus dem Strahlensatz

$$EF = FD = DE = a \cdot \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2} - \frac{a}{6}\sqrt{3}}{\frac{a}{3} \cdot 3} = \frac{a}{2}\sqrt{6} - \frac{a}{2}$$

ferner schneiden EF, FD bzw. DE jeweils AP, BQ bzw. CR in U, V bzw. W, wobei

$$SU = SV = SW = \frac{EF}{6}\sqrt{3} = \frac{a}{4}\sqrt{2} - \frac{a}{12}\sqrt{3} \qquad \text{also}$$
$$AU = BV = CW = AS + SU = \frac{a}{4}\sqrt{2} + \frac{a}{4}\sqrt{3}$$

ist.
Bezeichnet φ die (in Grad gemessene) Größe der zu den im Dreieck ABC verlaufenden Bögen $\overset{\frown}{EF}$, $\overset{\frown}{FD}$, $\overset{\frown}{DE}$ in k_A bzw. k_B bzw. k_C gehörenden Zentriwinkel, so gilt folglich

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{1}{2}EF}{AE} = \frac{\frac{a}{4}\sqrt{6} - \frac{a}{4}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

Der Flächeninhalt je eines der zu diesen Bögen gehörenden Kreissegmente beträgt

$$\pi \cdot AE^2 \cdot \frac{\varphi}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot EF \cdot AU = a^2\left(\pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\varphi}{360^\circ} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\right)\right) =$$
$$= a^2\left(\frac{\pi \cdot \varphi}{480^\circ} - \frac{1}{8}\sqrt{3} - \frac{2}{16}\sqrt{2} + \frac{1}{16}\sqrt{3}\right) = a^2\left(\frac{\pi \cdot \varphi}{480^\circ} - \frac{1}{16}\sqrt{3} - \frac{1}{8}\sqrt{2}\right)$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks DEF beträgt

$$\frac{1}{4}EF^2\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = a^2\left(\frac{7}{16}\sqrt{3} - \frac{3}{8}\sqrt{3}\right)$$

Somit ergibt sich für den gesuchten Flächeninhalt

$$a^2\left(\frac{\pi \cdot \varphi}{160^\circ} - \frac{3}{16}\sqrt{3} - \frac{3}{8}\sqrt{2} + \frac{7}{16}\sqrt{3} - \frac{3}{8}\sqrt{2}\right) = a^2\left(\frac{\pi \cdot \varphi}{160^\circ} + \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{3}{4}\sqrt{2}\right)$$

Die Berechnung von $z = \frac{\pi \cdot \varphi}{160^\circ} + \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{3}{4}\sqrt{2}$ ergibt sich mit Hilfe der Zahlentafel ($[\varphi]$ bezeichnet die Maßzahl von φ)

$\sqrt{2} = 1{,}414$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}707$	$\sqrt{3} = 1{,}732$	$\frac{1}{6}\sqrt{3} = 0{,}2887$	$\sqrt{18} = 4{,}243$
$\sin\frac{\varphi}{2} = 0{,}4183$	$\frac{\varphi}{2} = 24{,}73^\circ$	$\lg\frac{\varphi}{2} = 1{,}392$	$\lg\pi = 0{,}4971$	$\lg 80 = 1.9031$
$\frac{\pi \cdot \varphi}{160^\circ} = 0{,}971$	$\lg\frac{\pi \cdot \varphi}{160^\circ} = 0{,}9872 - 1$	$\frac{1}{4}\sqrt{3} = 0{,}433$	$\frac{3}{4}\sqrt{2} = 1{,}061$	

Auf 3 Dezimalen genau ist $z = 0{,}344$.

Aufgabe 201214:
In einem rechtwinkligen kartesischen x,y-Koordinatensystem seien gegeben:

Die Punkte $M(0;0)$, $F_1(2;0)$, $F_2(-2;0)$, $A(4;0)$, $B(0;2\sqrt{3})$, die Gerade g mit der Gleichung $x = -8$, der Kreis k_1 um M durch A, der Kreis k_2 um M durch B.

Unter der *Ellipse mit Brennpunkten F_1, F_2 und halber Hauptachsenlänge $\overline{MA}$* versteht man die Menge E_1 aller derjenigen Punkte $P(x;y)$, für die $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2 \cdot \overline{MA}$ gilt.

Unter der *Ellipse mit Brennpunkt F_2, Leitlinie g und Exzentrizität 1/2* versteht man die Menge E_2 aller Punkte $P(x;y)$ mit folgender Eigenschaft: Ist Q der Fußpunkt des Lotes von P auf g, so gilt $\overline{F_2P} = \frac{1}{2} \cdot \overline{PQ}$.

Unter der *Ellipse durch A mit Hauptscheitelkreis k_1 und Nebenscheitelkreis k_2* versteht man die Menge E_3 aller derjenigen Punkte $P(x;y)$, die durch folgende Konstruktion erhalten werden können: Man zeichne einen beliebigen von M ausgehenden Strahl. Er schneidet k_1 bzw. k_2 in je einem Punkt R_1 bzw. R_2. Die Parallele durch R_1 zur y-Achse und die Parallele durch R_2 zur x-Achse schneiden sich in P.

Beweisen Sie, dass die drei Punktmengen E_1, E_2, E_3 einander gleich sind!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
(I) Die Gültigkeit von $P \in E_1$ ist gleichbedeutend mit

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2} + \sqrt{(x+2)^2+y^2} = 8 \tag{1}$$

Ist dies für einen Punkt $P(x;y)$ der Fall, so folgt

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2\sqrt{(x^2+y^2+4-4x)(x^2+y^2+4+4x)} = 64 \tag{2}$$

$$\sqrt{(x^2+y^2+4)^2 - 16x^2} = 28 - (x^2+y^2) \tag{3}$$

$$(x^2+y^2)^2 + 8(x^2+y^2) + 16 - 16x^2 = 784 - 568x^2 + y^2) + (x^2+y^2)^2 \tag{4}$$

$$3x^2 + 4y^2 = 48 \tag{5}$$

Umgekehrt folgt aus (5) wieder (4). Ferner folgt aus (5), dass

$$3x^2 + 3y^2 \le 3x^2 + 4y^2 = 48 \qquad \text{also} \qquad x^2 + y^2 \le 16 < 28$$

gilt. Hiernach und weil der Radikand in (3) das Produkt der beiden Radikanden in (1), also nichtnegativ ist, kann man von (4) weiter auf (3) schließen, und es folgt (2), woraus sich auch die Gleichung (1) ergibt, da ihre beiden Seiten nichtnegativ sind.
Also ist $P \in E_1$ mit (5) gleichbedeutend.

(II) Die Gültigkeit von $P \in E_2$ ist gleichbedeutend mit

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2} = \frac{1}{2}|x+8|$$

dies mit

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 = \frac{1}{4}(x^2 + 16x + 64)$$

und dies wieder mit (5).

(III) Der Kreis k_1 hat die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 16$$

der Kreis k_2 hat die Gleichung

$$x^2 + y^2 = 12$$

Jeder von M ausgehende Strahl ist für ein geeignetes reelles Zahlenpaar $(p;q) \neq (0;0)$ die Menge aller derjenigen Punkte, deren Koordinaten sich mit reellem $t \geq 0$ in der Form

$$(pt; qt) \tag{8}$$

schreiben lassen, und umgekehrt liefert diese Beschreibung für jedes Paar $(p;q) \neq (0;0)$ einen von M ausgehenden Strahl. Hiernach ergeben sich (für den jeweils betrachteten Strahl) die Koordinaten von R_1 wegen (6) durch Einsetzen desjenigen Wertes $t \geq 0$ in (8), der $p^2t^2 + q^2t^2)16$ erfüllt. Das ist der Wert $t = \frac{4}{\sqrt{p^2+q^2}}$, damit ist

$$R_1\left(\frac{4p}{\sqrt{p^2+q^2}}; \frac{4q}{\sqrt{p^2+q^2}}\right)$$

gefunden. Ebenso findet man aus (7)

$$R_2\left(\frac{2p\sqrt{3}}{\sqrt{p^2+q^2}}; \frac{2q\sqrt{3}}{\sqrt{p^2+q^2}}\right)$$

Daraus ergibt sich nach Konstruktionsvorschrift

$$P\left(\frac{4p}{\sqrt{p^2+q^2}}; \frac{2q\sqrt{3}}{\sqrt{p^2+q^2}}\right) \tag{9}$$

Also ist die Gültigkeit von $P \in E_3$ gleichbedeutend damit, dass für ein geeignetes reelles Zahlenpaar $(p;q) \neq (0;0)$ die Koordinatenangabe (9) auf $P(x;y)$ zutrifft.

Ist dies der Fall, so folgt

$$3x^2 + 4y^2 = \frac{3 \cdot 16p^2}{p^2+q^2} + \frac{4 \cdot 12}{p^2+^2} = 48$$

also (5).
Gilt umgekehrt (5), so sind x und y nicht beide gleich 0. Definiert man daher beispielsweise $p = x; q = \frac{2}{\sqrt{3}}y$, so gilt $(p;q) \neq (0;0)$ und

$$p^2 + q^2 = x^2 + \frac{4}{3}y^2 = \frac{1}{3}(3x^2 + 4y^2) = 16$$

$$\frac{4p}{\sqrt{p^2+q^2}} = p = x \qquad , \qquad \frac{2q\sqrt{3}}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}q = y$$

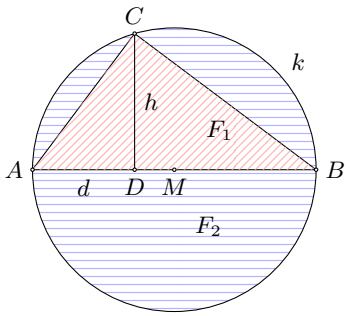
womit sich $P \in E_3$ ergeben hat.

In (I), (II), (III) ist nunmehr gezeigt, dass jede der Beziehungen $P \in E_1$, $P \in E_2$, $P \in E_3$ mit (5) gleichbedeutend ist. Daraus ergibt sich $E_1 = E_2 = E_3$, w. z. b. w.

Aufgabe 241211:
Ist ABC ein rechtwinkliges Dreieck und k sein Umkreis, so bezeichne F_1 den Flächeninhalt des Dreiecks sowie F_2 die Differenz zwischen dem Flächeninhalt des Umkreises und F_1.

Man ermittle unter allen Werten, die das Verhältnis $F_2 : F_1$ unter diesen Voraussetzungen annehmen kann, den kleinsten ganzzahligen Wert!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach dem Satz des Thales ist die Hypotenuse des Dreiecks ABC ein Durchmesser von k. Ihre Länge sei d, die Länge der zugehörigen Dreieckshöhe sein h, der Flächeninhalt von k sei F_0. Dann gilt

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{F_0 - F_1}{F_1} = \frac{F_0}{F_1} - 1 = \frac{\frac{\pi}{4}d^2}{\frac{dh}{2}} - 1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d}{h} - 1$$

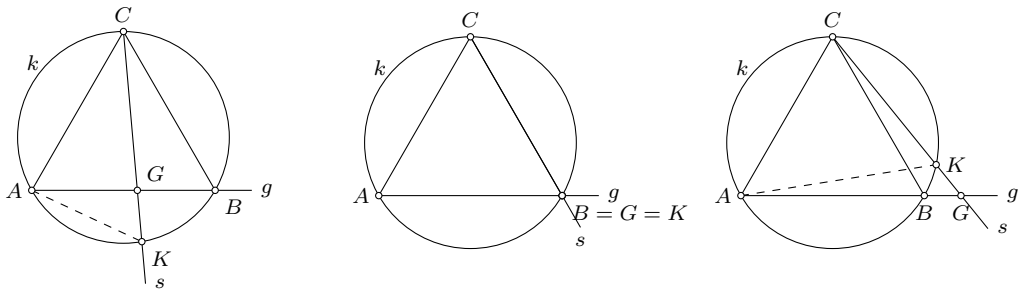
Ferner nimmt h alle positiven Werte $h \leq \frac{d}{2}$ an. Also nimmt $\frac{d}{h}$ alle Werte $\frac{d}{h} \geq 2$ an. Somit nimmt $\frac{F_2}{F_1}$ alle Werte $\frac{F_2}{F_1} \geq \frac{\pi}{2} \cdot 2 - 1 = \pi - 1$ an.

Der kleinste ganzzahlige Wert, den $F : 2 : F1$ annehmen kann, ist (wegen $2 < \pi - 1 < 3$) folglich der Wert 3.

Aufgabe 251212:
Einem Kreis k mit dem Radius $r = 1985$ mm sei ein gleichseitiges Dreieck ABC einbeschrieben. Ferner schneide eine durch C verlaufende Gerade s die Gerade g durch A und B in einem Punkt G und den Kreis k in einem weiteren von C verschiedenen Punkt K.

Man beweise, dass bei jeder Wahl der Geraden s unter den genannten Voraussetzungen das Produkt $\overline{CG} \cdot \overline{CK}$ denselben Wert hat, und berechne diesen Wert.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Für jede Gerade s kann unter den genannten Voraussetzungen durch eventuelle Vertauschung der Bezeichnungen A und B erreicht werden, dass der Punkt K auf demjenigen Bogen $\overset{\frown}{AC}$ des Kreises k liegt, auf dem auch B liegt (siehe Abbildungen)



Dann gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\angle AKC = \angle ABC = 60°$. Ferner liegt dann G auf dem von A ausgehenden Strahl durch B, also ist

$$\angle GAC = \angle BAC = 60° = \angle AKC \tag{1}$$

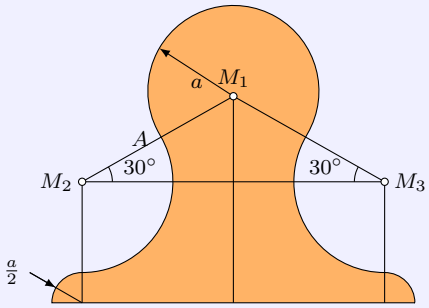
Da K auf den von C ausgehenden Strahl durch G liegt, ist $\angle AG = \angle KCA$. Aus (1) und (2) folgt $\triangle ACG \sim \triangle KCA$ und daraus $CA : CG = CK : CA$. Somit hat in der Tat

$$CG \cdot CK = CA^2$$

einen einheitlichen Wert, wie behauptet.
Zwischen der Seitenlänge $a = CA$ des k einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ABC und dem Radius r von k besteht die Beziehung $a = r\sqrt{3}$.
Daher ist $CG \cdot CK = 3r^2 = 3 \cdot 1985^2 \text{ mm}^2 = 11820675 \text{ mm}^2$.

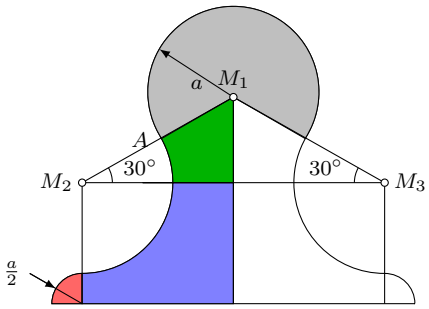
II Runde 2

Aufgabe V01120:



Berechnen Sie die Fläche der abgebildeten Figur, wenn $M_1A = M_2A = a$ ist.

Lösung von Steffen Polster:
Die Figur setzt sich aus 4 verschiedenen Arten von Figuren zusammen:



Fläche 1 (hellgrau): Kreissektor mit einem Zentriwinkel von 240°

$$A_1 = \pi a^2 \cdot \frac{240}{360}$$

Fläche 2 (grün): rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $2a$ und den Katheten a, $\sqrt{3}a$, von dem ein Kreissektor mit dem Zentriwinkel 30° abgezogen wird

$$A_2 = \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{3}a - \frac{30}{360}\pi a^2$$

Fläche 3 (blau): Rechteck mit den Seitenlängen $\sqrt{3}a$ und $\frac{3}{2}a$ aus dem ein Viertelkreis (Radius a) herausgeschnitten wird

$$A_3 = a \cdot \sqrt{3}a - \frac{1}{4}\pi a^2$$

Fläche 4 (rot): Viertelkreis mit dem Radius $\frac{a}{2}$

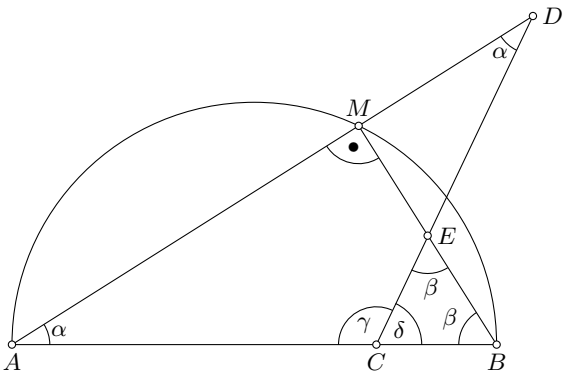
$$A_4 = \frac{1}{4}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Die Flächen 2, 3 und 4 treten in der Gesamtfläche zweimal auf, d. h.

$$A = A_1 + 2A_2 + 2A_3 + 2A_4 = \frac{\pi + 24\sqrt{3}}{8}a^2$$

Aufgabe 021224:
Gegeben sei eine Strecke AB und auf ihr ein beliebiger Punkt C. Man wähle einen Punkt E außerhalb AB so, dass $CE = CB$ ist!
Auf der Strecke CE bzw. auf ihrer Verlängerung über E hinaus ist ein Punkt D so zu konstruieren, dass $CA = CD$ ist!
a) Welches ist der geometrische Ort für alle Schnittpunkte M der Stecken AD und BE bzw. ihrer Verlängerungen?
b) Die Behauptung ist für jede mögliche Lage der Punktes C zu beweisen.
Anmerkung: Zur Eigenschaft eines geometrischen Ortes gehört auch der Nachweis, dass jeder seiner Punkte die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Lösung von Carsten Balleier:

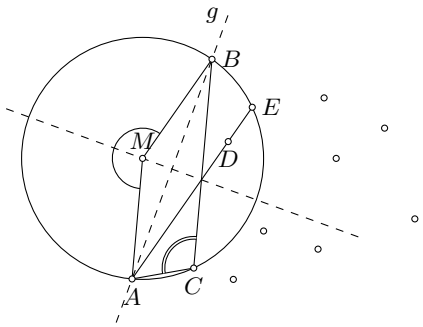


a) Der geometrische Ort aller Punkte M, die die gegebenen Bedingungen erfüllen, ist der Halbkreis mit Durchmesser AB, der auf der gleichen Seite von AB liegt wie der Punkt E.

b) Nach dem Satz des Thales ist es für die Wahrheit der obigen Behauptung notwendig, dass der Winkel $\angle BMA$ ein rechter Winkel ist. Gleichbedeutend ist es zu zeigen, dass $\angle DME = 90°$ gilt.
Gemäß dem Innenwinkelsatz gilt aber $\angle DME + \angle MED + \angle EDM = 180°$.
Per Konstruktion ist das Dreieck ACD gleichschenklig, daher $\angle EDM = \alpha$. Gleiches trifft auf das Dreieck BEC zu, so dass $\beta = \angle BEC = \angle MED$ (Gegenwinkel).
Der Außenwinkelsatz führt auf $2\alpha = \delta$ und $2\beta = \gamma$, also $2(\alpha + \beta) = \gamma + \delta = 180°$ (gestreckter Winkel).
Wegen $\alpha + \beta = 90° = \angle DME$ folgt die Behauptung.
Noch bewiesen werden muss, dass M nur auf einem Halbkreis liegen kann: Wegen $\alpha < 90°$ und $\beta < 90°$ können sich die Geraden BE und AD aber nur auf der einen Seite von AB schneiden.

Aufgabe 031123:
In der Ebene seien n Punkte ($n > 3$) gegeben, von denen keine drei in einer Geraden liegen.
Gibt es einen Kreis, der durch mindestens drei dieser Punkte hindurchgeht und keinen der übrigen Punkte im Innern enthält?

Lösung von Henning Thielemann:



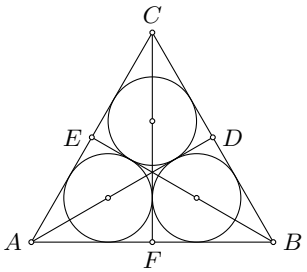
In der Punktmenge gibt es immer zwei Punkte A und B, durch die eine Gerade g verläuft, so dass alle Punkte der Menge auf derselben Seite von g liegen. Das trifft zum Beispiel für zwei benachbarte Punkte auf der konvexen Hülle zu. Diejenige Seite von g, auf der sich kein Punkt befindet betrachte als außen. Alle Kreise, die durch A und B verlaufen, haben ihren Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten zu der Strecke AB.

Da keine 3 Punkte der Punktmenge auf einer Geraden liegen, existiert zu jeder dreielementigen Untermenge genau ein Kreis, der durch alle Punkte der Untermenge verläuft. Von allen Punkten außer A und B nenne denjenigen Punkt C, der den größtmöglichen Winkel $\angle BCA$ aufweist.

Behauptung: Der Kreis durch A, B und C enthält keinen weiteren Punkt der Punktmenge.
Beweis: Angenommen, es gäbe noch einen Punkt D in dem Kreis.
Da sich alle Punkte der Menge auf der gleichen Seite der Geraden g befinden, muss sich D im Kreisabschnitt zwischen der Sehne AB und dem Bogen durch C befinden. Deswegen kann man die Strecke AD über D hinaus verlängern bis sie diesen Bogen im Punkt E schneidet.
Der Winkel $\angle BEA$ ist so groß wie $\angle BCA$ weil beide Peripheriewinkel über der gleichen Sehne auf derselben Seite sind. Die Dreiecke ABE und ABD haben den Winkel $\angle BAD$ gemeinsam, aber $\angle ABD$ ist kleiner als $\angle ABE$ und wegen der konstanten Innenwinkelsumme in Dreiecken ist $\angle BDA$ größer als $\angle BCA$.
Das ist aber ein Widerspruch, denn $\angle BCA$ sollte der größtmögliche Winkel sein. □

Aufgabe 031124:
In ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a sollen drei gleichgroße Kreise so eingezeichnet werden, dass jeder die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt.
a) Bestimmen Sie den Radius der Kreise!
b) Geben Sie eine Konstruktion für den Radius an!

Lösung von Henning Thielemann:



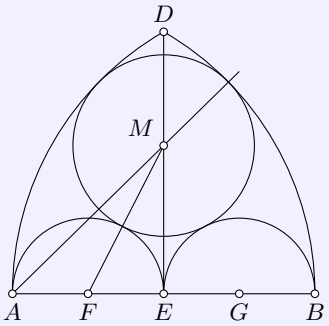
Bezeichne das Dreieck mit ABC und die Lotfußpunkte der Lote von A, B, C auf die jeweils gegenüberliegende Seite mit D, E, F. Der Inkreis vom Dreieck ACF berührt den Inkreis von BCF weil CF Symmetrieachse von ABC ist.
AD ist ebenfalls Symmetrieachse, deswegen ist der Inkreis von ACF gleichzeitig Inkreis von AEB und der Inkreis von BCE berührt den Inkreis von AEB. Analog folgt, dass sich die Inkreise von BCE und

BCF berühren. Die betrachteten Inkreise sind folglich die in der Aufgabenstellung ge- suchten.

a) $|AB| = a$ (Aufgabenstellung); $|CF| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (Höhe im gleichseitigen Dreieck); $|AF| = \frac{a}{2}$.
b) Die naheliegendste Konstruktion ist wohl, einen Inkreis zum Beispiel den von ACF zu konstruieren und dessen Radius zu bestimmen.

1. Bestimme den Inkreismittelpunkt als Schnittpunkt zweier Winkelhalbierender
2. Bestimme den Radius des Kreises als Lot des Mittelpunktes auf eine Dreiecksseite.

Aufgabe 031222:



Gegeben sei eine Strecke AB. Ein Schnittpunkt der um A bzw. B mit AB geschlagenen Kreisbogen sei D (siehe Abbildung).
E sei der Mittelpunkt von AB. Über AE und EB als Durchmesser seien die Halbkreise geschlagen. Berechnen Sie ME, wobei M der Mittelpunkt des Kreises ist, der beide Halbkreise und die Kreisbogen $\overset{\frown}{AD}$ und $\overset{\frown}{BD}$ berührt!

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
Ist r der Radius des in der Aufgabe genannten Kreises um M, so gilt wegen der vorausgesetzten Berührung von innen $|AM| = a - r$, $|BM| = a - r$. Daher liegt M auf der Mittelsenkrechten m von AB. Da E auf m und auf AB liegt, sind die Dreiecke $\triangle AEM$ und $\triangle FEM$ bei E rechtwinklig und es folgt aus dem Lehrsatz des Pythagoras

$$|ME|^2 = |AM|^2 - |AE|^2 = (a-r)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

$$|ME|^2 = |FM|^2 - |FE|^2 = \left(\frac{a}{2} + r\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2$$

Wegen der vorausgesetzten Berührung von außen gilt nämlich $|FM| = \frac{a}{4} + r$. Aus (1) und (2) ergibt sich

$$(a-r)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{4} + r\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2$$

$$\frac{3}{4}a^2 - 2ar + r^2 = \frac{ar}{2} + r^2$$

und weiter

$$\frac{3}{4}a^2 = \frac{5}{2}ar \Rightarrow r = \frac{3}{10}a$$

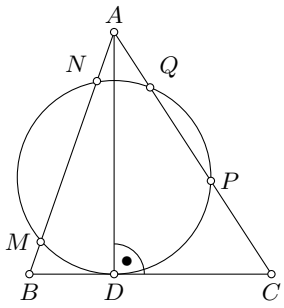
Mit Hilfe von (1) erhält man hieraus

$$|ME|^2 = \left(\frac{7}{10}a\right)^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{24}{100}a^2 \Rightarrow |ME| = \frac{\sqrt{6}}{5}a$$

Aufgabe 031224:
Es sei AD die Höhe eines Dreiecks ABC. Ein Kreis, der die Seite BC in D berührt, möge die Seite AB in M und N und die Seite AC in P und Q schneiden.
Man beweise, dass gilt

$$\frac{AM + AN}{AC} = \frac{AP + AQ}{AB}$$

Lösung von Eckard Specht:



Beweis: Da die Seite BC tangential an den genannten Kreis liegt, können wir den Sekanten-Tangentensatz ausgehend von den Punkten B und C hinschreiben:

$$BM \cdot BN = BD^2 \qquad \text{und} \qquad CP \cdot CQ = CD^2$$

Setzen wir hierin $BM = AB - AM, BN = AB - AN, CP = AC - AP, CQ = AC - AQ$ sowie $BD^2 = AB^2 - AD^2$ und $CD^2 = AC^2 - AD^2$ ein, multiplizieren aus und berücksichtigen schließlich noch den Sehnensatz $AM \cdot AN = AP \cdot AQ$, erhalten wir die Gleichung

$$(AM + AN)AB = (AP + AQ)AC$$

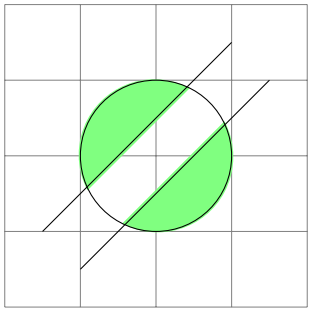
die der Behauptung äquivalent ist.

Aufgabe 041226:
Bestimmen Sie in der xy-Ebene die Menge aller Punkte, deren Koordinaten den beiden Ungleichungen

$$x^2 + y^2 < r^2 \qquad \text{und} \qquad |y - x| > \frac{r}{2}$$

genügen $(r > 0)$!

Lösung von Caban:



Die gesuchte Fläche sind zwei Kreissegmente des Kreises mit dem Radius r und mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt M.
Die Sehne des ersten Kreissegments liegt auf der Gerade $y = x + \frac{x}{2}$ und das Segment liegt oberhalb dieser Geraden. Die Sehne des zweiten Segments liegt auf der Gerade $y = x - \frac{x}{2}$, das Segment liegt unterhalb. Es ist $|x-y| > \frac{r}{2} \iff x - y > \frac{r}{2}$ oder $x - y < -\frac{r}{2} \iff y < x - \frac{r}{2}$ oder $y > x + \frac{r}{2}$. Folglich gehören nur solche Punkte (x,y) zur Menge, die unterhalb der Gerade $y = x - \frac{r}{2}$ oder oberhalb der Geraden $y = x + \frac{r}{2}$ liegen. Zur Berechnung der Eckpunkte:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad y = x + \frac{r}{2} \cdot q; q \in \{-1; +1\}$$

Dadurch ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} x^2 + (x + \frac{r}{2} \cdot q)^2 &= 1 \\ x^2 + (x^2 + q \cdot r \cdot x + \frac{r^2}{4}) &= 1 \\ x^2 + \frac{q}{2} \cdot rx - \frac{3}{8} \cdot r^2 &= 1 \\ x = r \cdot (-\frac{k}{2} + q \cdot \sqrt{\frac{7}{16}}); \quad k \in \{-1; 1\} & \\ y = r \cdot (\frac{k}{2} + q \cdot \sqrt{\frac{7}{16}}) & \end{aligned}$$

Aufgabe 111223:
Klaus bemerkt, dass die beiden Zeiger seiner Taschenuhr zwischen 6 Uhr und 7 Uhr zu genau zwei Zeitpunkten einen Winkel von 110° bilden.
Ermitteln Sie die Anzahl der Minuten, die vom ersten bis zum zweiten der genannten Zeitpunkte vergangen sind!

Lösung von StrgAltEntf:
In einer Minute überstreicht der Minutenzeiger einen Winkel von $\frac{360°}{60} = 6°$ und der Stundenzeiger einen Winkel von $\frac{360°}{12 \cdot 60} = 0{,}5°$.

Um x Minuten nach 6 Uhr schließt der Minutenzeiger mit der 12-Uhr-Position also einen Winkel von $6x°$ und der Stundenzeiger einen Winkel von $(180 + 0{,}5x)°$ ein. Für die beiden genannten Zeitpunkte a Minuten nach 6 Uhr und b Minuten nach 6 Uhr mit $a < b$ gilt daher

$$180 + 0{,}5a - 6a = 110 \qquad \text{und} \qquad 6b - (180 + 0{,}5b) = 110$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert $\frac{11}{2}b - \frac{11}{2}a = 220$ bzw. $b - a = 40$. Zwischen den beiden Zeitpunkten liegen also exakt 40 Minuten.

Aufgabe 171224:
Gegeben sei in einer Ebene ε ein gleichseitiges Dreieck ABC.
Man ermittle die Menge aller derjenigen Punkte X in ε, für die $AX + BX = CX$ gilt.

Lösung von ochen:
I. Wir skalieren das Dreieck bis es den Umkreisradius 1 hat und legen es in ein Koordinatensystem, sodass $A = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ und $C = (1{,}0)$ gilt. Für die gesuchten Punkte $X = (x,y)$ folgt

$$\sqrt{(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \sqrt{(x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

Quadrieren beider Seiten ergibt

$$(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+2\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=(x-1)^2+y^2.$$

Wenn wir die Quadrate subtrahieren, ausmultiplizieren und erneut zusammenfassen, erhalten wir

$$2\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=-(x+2)^2-y^2+3.$$

Nochmaliges Quadrieren ergibt

$$4((x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2)((x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{\sqrt{3}}{2})^2)=(-(x+2)^2-y^2+3)^2.$$

Multiplizieren wir dies wieder aus, erhalten wir

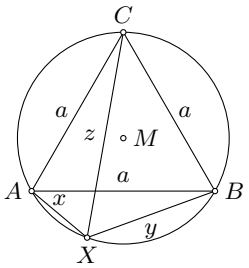
$$4x^4+8x^3+8x^2y^2+12x^2+8xy^2+8x+4y^4-4y^2+4=x^4+8x^3+2x^2y^2+18x^2+8xy^2+8x+y^4+2y^2+1.$$

Wenn wir die rechte Seite subtrahieren und anschließend zusammmenfassen, bekommen wir als Ergebnis

$$3(x^2+y^2-1)^2=0.$$

Alle Punkte X, die der Bedingung $|AX|+|BX|=|CX|$ genügen, liegen also auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.

II. Liegt ein Punkt X auf dem Umkreis des Dreiecks ABC, so bilden das Dreieck ABC und X ein Sehnenviereck. In diesem sind die Diagonalen (X liege zuerst zwischen A und B) einmal $|AB|=a$ und einmal $|CX|=z$. Die Viereckseiten sind $|CA|=a$, $|CB|=a$, $|AX|=x$ und $|BX|=y$.

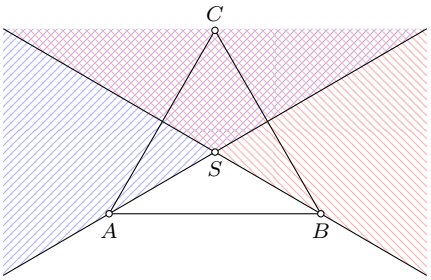


Nach dem Satz des Ptolemäus für Sehnenvierecke ist dann $x\cdot a+y\cdot a=z\cdot a$ womit sofort das Gesuchte ($a>0$) $|AX|+|BX|=|CX|$ folgt.
Für $X=A$ bzw. $X=B$ ergibt sich mit $|AX|=0$ und $|BX|=a$ bzw. mit $|BX|=0$ und $|AX|=a$, dass die Punkte A und B ebenfalls zur Lösungsmenge gehören.

Liegt X nicht zwischen A und B sondern auf den Kreisbögen $\overset{\frown}{AC}$ bzw. $\overset{\frown}{BC}$ erhält man für das Sehnenviereck nach dem Satz des Ptolemäus entweder $x\cdot a+z\cdot a=y\cdot a$ oder $y\cdot a+z\cdot a=x\cdot a$. Für derartige X ist $AX+BX=CX$ nicht erfüllt.

Die Menge alle Punkte X mit der geforderten Eigenschaft ist damit der Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ inkl. seiner Randpunkte.

Alternativ-Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Schwerpunkt von $\triangle ABC$ sei S. Liegt ein Punkt X auf derselben Seite der Geraden durch A und B wie C, so ist $BX > CX$ (da diese Gerade die Mittelsenkrechte von BC ist), also erst recht $AX + BX > CX$. Liegt X auf derselben Seite der Geraden durch B und S wie C, so gilt entsprechend $AX > CX$, also $AX + BX > CX$.
Gehört ein Punkt X der Fläche des Dreiecks ABC an, ist aber von A und V verschieden, so gilt

- $AX + BX \geq AB$ (Dreiecksungleichung)
- $> CX$ (da alle Punkte der Dreiecksfläche außer A und B im Innern des Kreises um C durch A und B liegen).

Für $X = A$ und für $X = B$ gilt die Gleichung $AX + BX = CX$.

Die nun noch verbleibenden Punkte X liegen sämtlich in derjenigen Halbebene H, die von der Geraden durch A und B begrenzt wird und nicht C enthält. Außerdem kann durch eventuelle Vertauschung der Bezeichnungen A und B erreicht werden, dass X nicht auf der Verlängerung von CA liegt, so dass die Punkte A, C, X ein (nicht entartetes) Dreieck bilden.

Es sei $\triangle AXY$ dasjenige gleichseitige Dreieck, für das Y und B auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und X liegen. Dann gilt

$$AX = AY \qquad , \qquad AB = AC \tag{1}$$

und die Summe der Innenwinkel bei A in den Dreiecken AXY, ABX ist gleich der Summe der Innenwinkel bei A in den Dreiecken ABC, ABX.

Nach den Angaben über X ist diese Summe entweder kleiner oder größer als 180°; in beiden Fällen folgt, dass die Dreiecke ABY und ACX bei A gleichgroße Innenwinkel haben. Hieraus und aus (1) ergibt sich $\triangle ABY \cong \triangle ACX$, also $BY = CX$.

Also gilt genau dann $AX + BX = CY$, wenn $XY + BX = BY$ gilt. Diese ist genau dann der Fall, wenn X auf der Strecke BY liegt, d. h. die Summe der Innenwinkel bei X in den Dreiecken AXY und AXB genau 180° beträgt.
Hierfür ist $\angle AXB = 120°$ notwendig und hinreichend und dies ist (für die im vorliegenden Fall betrachteten X) gleichwertig damit, dass X auf dem in H verlaufenden Kreisbogen liegt, der zu einem Zentriwinkel der Größe 240° gehört.

Wegen $\angle ASC + \angle CSB = 240°$ ist S der zugehörige Kreismittelpunkt. Die gesuchte Menge ist also derjenige Bogen $\overset{\frown}{AB}$ des Unkreises des Dreiecks ABC, der C nicht enthält.

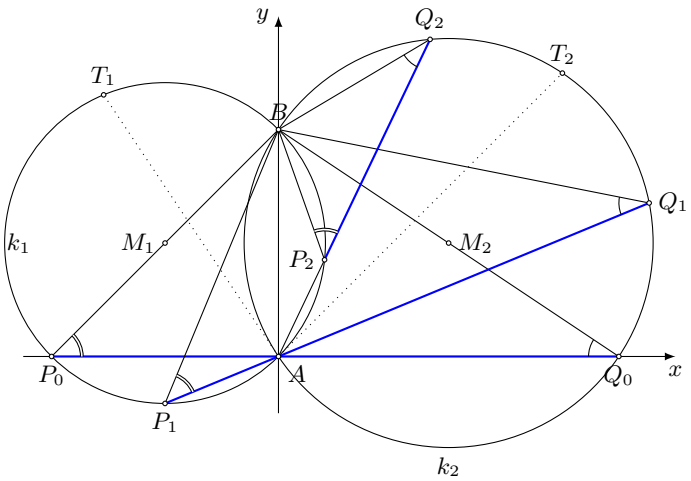
Aufgabe 261224:
Zwei Kreise k_1, k_2 seien so gelegen, dass sie sich in zwei verschiedenen Punkten A, B schneiden und dass die Verbindungsstrecke M_1M_2 der beiden Kreismittelpunkte von der Strecke AB in einem Punkte geschnitten wird, der zwischen M_1 und M_2 liegt.
Unter allen denjenigen Geraden, die durch A gehen und außerdem sowohl den Kreis k_1 in einem von A und B verschiedenen Punkt P als auch den Kreis k_2 in einem von A und B verschiedenen Punkt Q schneiden, wird nun eine Gerade gesucht, für die die Strecke PQ möglichst lang ist.
Man untersuche, ob es eine solche Gerade gibt, ob sie dann durch die Kreise k_1, k_2 eindeutig bestimmt ist und, wenn dies der Fall ist, welche Lage diese Gerade dann hat.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Bei der vorausgesetzten Lage von k_1 und k_2 (siehe Abbildung) schneidet die in A an k_2 gelegte Tangente den Kreis k_1 außer in A in einem Punkt T_1, und ebenso schneidet die in A an k_1 gelegte Tangente den Kreis k_2 außer in A in einem Punkt T_2, Die sämtlichen zu betrachtenden Längen der Strecke PQ sind

dann folgendermaßen zu erhalten:

(1) P durchläuft den ganz außerhalb k_2 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{T_1A}$ von k_1 (mit Ausnahme seiner Endpunkte T_1, A). Dabei durchläuft Q den ganz außerhalb k_1 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{AT_2}$ von k_2 (mit Ausnahme seiner Endpunkte A, T_2). Die Abbildung zeigt zwei Beispiele P_0Q_0 und P_1Q_1.

(2) P durchläuft den innerhalb k_2 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{AB}$ von k_1 (mit Ausnahme seiner Endpunkte A, B). Dabei durchläuft Q den ganz außerhalb k_1 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{T_2B}$ von k_2 (mit Ausnahme seiner Endpunkte T_2, B). Die Abbildung zeigt ein Beispiel P_2Q_2.



(3) P durchläuft den ganz außerhalb k_2 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{BT_1}$ von k_1 (mit Ausnahme seiner Endpunkte B, T_1). Dabei durchläuft Q den innerhalb k_1 gelegenen Bogen $\overset{\frown}{BA}$ von k_1 (mit Ausnahme seiner Endpunkte B, A).

Unter den zu betrachtenden Geraden durch A befindet sich diejenige, die senkrecht zu AB verläuft (oder, als gleichwertige Charakterisierung, parallel zu M_1M_2). Die von ihr erhaltene Strecke PQ hat die in der Abbildung gezeigt Lage P_0Q_0, die zu Fall (1) gehört.

Behauptung: Genau für diese Gerade ist die Strecke PQ möglichst lang.
Beweis:
Es sei PQ irgendeine der zu betrachtenden Strecken, die verschieden von P_0Q_0 ist. Ist sie eine zu Fall (1) gehörende Strecke P_1Q_1, so folgt:
Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt $\angle BP_1A = \angle BP_0A$ und $\angle BQ_1A = \angle BQ_0A$, nach dem Hauptähnlichkeitssatz also $\triangle BP_1Q_1 \sim \triangle BP_0Q_0$.
Ist PQ eine zu Fall (2) gehörende Strecke P_2Q_2, so folgt:
Nach dem Satz über Gegenwinkel im Sehnenviereck gilt $\angle BP_2A = 180° - \angle BP_0A$ und $\angle BP_2Q_2 = \angle BP_0A$, nach dem Peripheriewinkelsatz gilt $\angle BQ_2A = \angle BQ_0A$, so dass ebenfalls $\triangle BP_2Q_2 \sim \triangle BP_0Q_0$ folgt.
Da Fall (3) durch Vertauschung von k_1, k_2 in Fall (2) übergeht, gilt in jedem Fall

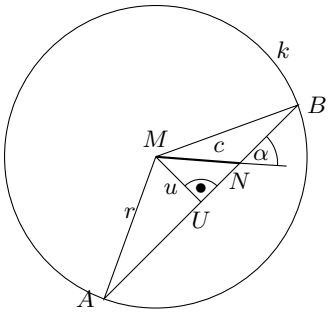
$$\triangle BPQ \sim \triangle BP_0Q_0 \qquad (*)$$

Nach dem Satz über Peripherie- und Zentriwinkel folgt ferner aus $\angle BAP_0 = 90°$, dass $\angle BM_1P_0 = 180°$ gilt, d. h., dass die Sehne BP_0 ein Durchmesser von k_1 ist. Ebenso ist BQ_0 ein Durchmesser von k_2.

Da aber jede von dem Durchmesser BP_0 verschiedene Sehne BP kürzer als der Durchmesser ist, d. h. $BP < BP_0$ gilt, folgt wegen (*) schließlich $PQ < P_0Q_0$, w. z. b. w.

Aufgabe 281223:
Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M, gegeben sei ferner ein von M verschiedener Punkt N im Innern von k.
Man untersuche, ob es unter allen durch N gehenden Sehnen AB des Kreises k
a) eine gibt, für die $NA^2 + NB^2$ möglichst klein ist,
b) eine gibt, für die $NA^2 + NB^2$ möglichst groß ist.
Gibt es jeweils eine solche Sehne, so gebe man deren Lage (in bezug auf die gegebenen k, M, N) an.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Radius von k betrage r, ferner sei $C = MN$. Ist AB eine Sehne durch N, so bezeichne U den Fußpunkt des Lotes von M auf AB. Mit $u = MU$ gilt dann (bei geeigneter Reihenfolge der Bezeichnungen A, B)

$$NA = AU + UN = \sqrt{r^2 - u^2} + \sqrt{c^2 - u^2}$$

$$NB = BU - UN = \sqrt{r^2 - u^2} - \sqrt{c^2 - u^2}$$

Daher ist

$$NA^2 + NB^2 = 2(r^2 - u^2) + 2(c^2 - u^2)$$

genau dann möglichst klein, wenn u möglichst groß ist, und genau dann möglichst groß, wenn u möglichst klein ist. Damit folgt:

a) Für $u = \sqrt{x^2 - UN^2}$ gibt es einen größtmöglichen Wert, nämlich $u = c$. Er wird angenommen, wenn der Lotfußpunkt U mit N zusammenfällt, d. h., wenn AB die auf MN senkrecht (durch N) verlaufende Sehne ist. Für diese Sehne ist somit $NA^2 + NB^2$ möglichst klein.

b) Für u gibt es einen kleinstmöglichen Wert, nämlich $u = 0$. Er wird angenommen, wenn U mit M zusammenfällt, d. h. wenn AB die durch (N und) M gehende Sehne ist. Für diese Sehne ist somit $NA^2 + NB^2$ möglichst groß.

III Runde 3

Aufgabe V11133:
Gegeben sind zwei feste Punkte A und B mit der Entfernung e.
a) Wo liegen alle Punkte F, für die die Quadrate ihrer Entfernungen von A und B die feste Summe s haben?
b) Gibt es bei jeder Wahl von e und s solche Punkte?

Lösung von ochen:
a) O. B. d. A. seien $A = (-\frac{e}{2},0)$ und $B = (\frac{e}{2},0)$, so sind alle Punkte $F = (x,y)$ mit

$$s = ((x + \frac{e}{2})^2 + y^2) + ((x - \frac{e}{2})^2 + y^2) = 2x^2 + 2 \cdot \frac{e^2}{4} + 2y^2$$

gesucht. Diese Gleichung ist äquivalent zur Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = \frac{s}{2} - \frac{e^2}{4}.$$

Die gesuchten Punkte F bilden also einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Strecke AB ist und dessen Radius $\frac{s}{2} - \frac{e^2}{4}$ ist.

b) Da Quadrate reeller Zahlen stets größer oder gleich Null sind, gibt es nur solche Punkte F, wenn $\frac{s}{2} - \frac{e^2}{4} \geq 0$ ist. Insbesondere gibt es nicht bei jeder Wahl von e und s solche Punkte.

Aufgabe V11233:
In einem Kreis seien zwei senkrecht aufeinander stehende Sehnen gegeben.
Behauptung: Die Fläche des Kreises ist gleich der Summe der 4 Kreisflächen mit den Sehnenabschnitten als Durchmesser!
Beweisen Sie die Behauptung!

Lösung von ochen:
Wir legen den Kreis mit dessen Sehnen in ein Koordinatensystem, sodass der Kreismittelpunkt im Koordinatenursprung liegt und die Sehnen parallel zu jeweils einer der Koordinatenachsen verlaufen. Der Radius des Kreises sei mit r bezeichnet.
Der Schnittpunkt der Sehnen habe die Koordinaten (x,y), so haben die Endpunkte der einen Sehne die Koordinaten $(x, \pm\sqrt{r^2 - x^2})$ und die Endpunkte der anderen Sehne die Koordinaten $(\pm\sqrt{r^2 - y^2}, y)$.
Die Summe der vier Kreisflächen mit den Sehnenabschnitten als Durchmesser

$$\frac{\pi}{4}(y - \sqrt{r^2 - x^2})^2 + \frac{\pi}{4}(y + \sqrt{r^2 - x^2})^2 + \frac{\pi}{4}(x - \sqrt{r^2 - y^2})^2 + \frac{\pi}{4}(x + \sqrt{r^2 - y^2})^2 =$$

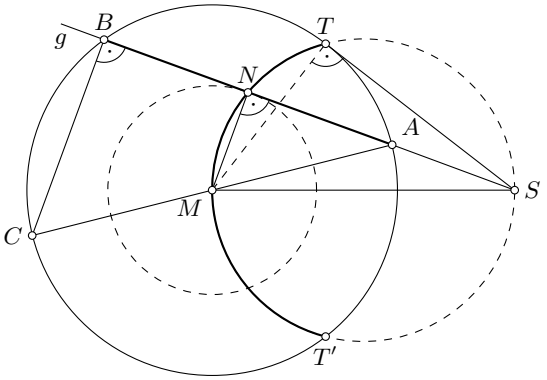
$$= \frac{\pi}{4}((y - \sqrt{r^2 - x^2})^2 + (y + \sqrt{r^2 - x^2})^2) + \frac{\pi}{4}((x - \sqrt{r^2 - y^2})^2 + (x + \sqrt{r^2 - y^2})^2) =$$

$$= \frac{\pi}{4}(2y^2 + 2(r^2 - x^2)) + \frac{\pi}{4}(2x^2 + 2(r^2 - y^2)) = \pi r^2$$

Das ist genau der Flächeninhalt des Kreises. Somit ist die Behauptung gezeigt.

Aufgabe 021135:
Gegeben sei in der Ebene ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und die Schar aller Geraden, die einander sämtlich in einem außerhalb des Kreises liegenden Punkt S schneiden.
Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Sehnen, die der Kreis aus den Geraden herausschneidet?

Lösung von Eckard Specht:



Sei AB eine der Sehnen, die die beliebige Gerade g aus dem gegebenen Kreis k herausschneidet und N deren Mittelpunkt. ST und ST' seien die beiden Tangentenabschnitte von S an k.
Ferner sei k' ein Kreis mit dem Mittelpunkt M, für den AN gerade ein Tangentenabschnitt ist. Dann gilt aufgrund $ST \perp MT$ und $AN \perp MN$:

$$\begin{aligned} SM^2 &= MT^2 + ST^2 \quad \text{(Satz des Pythagoras in } \triangle STM) \\ &= (MT^2 - MN^2) + ST^2 + MN^2 \quad (\text{„nahrhafte Null“ } MN^2 - MN^2) \\ &= (AM^2 - MN^2) + ST^2 + MN^2 \quad (\text{gleiche Radien } MT = AM) \\ &= AN^2 + ST^2 + MN^2 \quad \text{(Satz des Pythagoras in } \triangle ANM) \quad (1) \end{aligned}$$

Nach dem Sekanten-Tangentensatz gilt weiterhin:

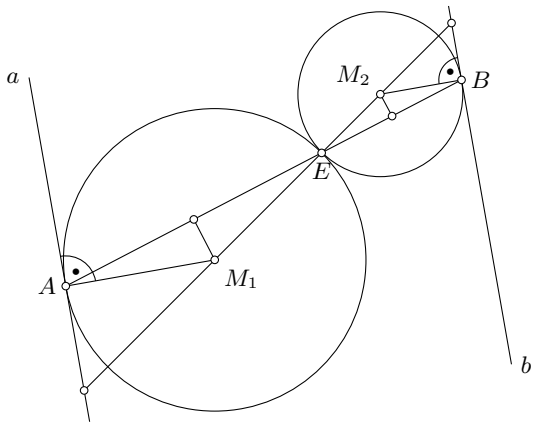
$$ST^2 = SA \cdot SB = \left(\frac{SB + SA}{2}\right)^2 - \left(\frac{SB - SA}{2}\right)^2 = SN^2 - AN^2 \quad (2)$$

wobei $SB + SA = 2SN$ und $SB - SA = 2AN$ wegen der Mittelpunktseigenschaft von N gilt.

(2) in (1) eingesetzt ergibt $SM^2 = SN^2 + MN^2$, woraus mit Hilfe der Umkehrung des Satzes des Pythagoras folgt, dass N auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser SM liegt.

Aufgabe 031236:
Gegeben seien zwei verschiedene parallele Geraden a und b. Auf a liegt der Punkt A und auf b der Punkt B.
Konstruieren Sie alle Kreise $k_1 = (M_1; r_1)$ und $k_2 = (M_2; r_2)$ mit den folgenden Eigenschaften:
a) Der Kreis k_1 berührt a in A, und M_1 liegt auf derselben Seite von a wie b.
b) Der Kreis k_2 berührt b in B, und M_2 liegt auf derselben Seite von b wie a.
c) Die Kreise k_1 und k_2 haben genau einen Punkt gemeinsam.
d) Es ist $r_1 = 2r_2$.

Lösung von Carsten Balleier:



Konstruktion:
In A und B werden die Senkrechten zu a bzw. b errichtet, diese seien $a^\perp$ und $b^\perp$. Die Strecke AB wird im Verhältnis $r_1 : r_2$ geteilt; der Teilpunkt sei E.
Zu AE wird die Mittelsenkrechte konstruiert, ihr Schnittpunkt mit $a^\perp$ ist der gesuchte Mittelpunkt M_1. Analog erhält man M_2 als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von BE mit $b^\perp$. Die Radien sind $r_1 = M_1E$ und $r_2 = M_2E$.

Beweis:

Zu zeigen ist zuerst (Bild), dass der Punkt E der einzig mögliche Berührungspunkt der beiden gesuchten Kreise ist. Im weiteren wird geprüft, dass die Konstruktion die geforderten Bedingungen erfüllt.
Die erste Überlegung ist, dass die Punkte M_1 und M_2 auf den Senkrechten zu a bzw. b in den Punkten A bzw. B liegen müssen. Genauer gesagt liegen sie auf dem Teilstrahl, der die jeweils andere Gerade schneidet. Nur so können die Bedingungen a) und b) erfüllt werden.
Um Bedingung c) zu genügen, zeigt man: Wählt man zwei Punkte M_1' auf $a^\perp$ und M_2' auf $b^\perp$ (mit $AM_1' : BM_2' = r_1 : r_2$), so ist der Punkt E, der $M_1'M_2'$ im Verhältnis $r_1 : r_2$ teilt, unabhängig von der Wahl der M_i' und liegt auf AB.

Das ist der Fall, weil die Dreiecke EBM_2' und EAM_1' ähnlich sind (Wechselwinkel bei M_1' und M_2', sowie $M'1E : M'1A = M'2E : M'2B$ nach Voraussetzung).
Da der Punkt E der eindeutige Teilpunkt für alle denkbaren Mittelpunktspaare M_1', M_2' ist, muss er auch der Berührungspunkt der beiden gesuchten Kreise sein.

Hiermit ist nun klar, dass die obige Konstruktion korrekt ist:
Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten haben zu A und E, die auf dem Kreis liegen müssen, den gleichen Abstand. Daher muss M_1 auf ihr liegen. Gleichzeitig muss M_1 auf $a^\perp$ liegen, also ist M_1 der Schnittpunkt. Ebenso geht man für M_2 vor.

Aufgabe 081233:
Es sei P_1P_2 eine Strecke in einer Ebene ε und g die Gerade, die diese Strecke enthält.
a) Von einem Punkt Q auf g, der nicht auf P_1P_2 liegt, werden an alle die Kreise in ε, die P_1P_2 als Sehne besitzen, die Tangenten gelegt.
Beweisen Sie! Die Berührungspunkte dieser Tangenten liegen auf einem Kreis um Q.

b) Es seien Q_1 und Q_2 zwei verschiedene Punkte auf g, die nicht auf der Strecke P_1P_2 liegen.
Beweisen Sie! Die beiden Kreise um Q_1 und Q_2, die für diese Punkte die Bedingung des Aufgabenteiles a) erfüllen, haben keinen Punkt gemeinsam.

Lösung von cyrix:
a) Für einen Berührungspunkt B eines Kreises k, der die Sehne P_1P_2 enthält (und für den also g eine Sekante ist, die auch den Punkt Q enthält) mit der Tangente durch Q gilt nach dem Sekanten-Tangentensatz $|BQ|^2 = |QP_1| \cdot |QP_2|$. Insbesondere ist die rechte Seite dieser Gleichung konstant und nicht vom betrachteten Kreis k abhängig. Damit liegen alle diese Berührungspunkte für alle solche Kreise k auf einem Kreis um Q mit Radius $\sqrt{|QP_1| \cdot |QP_2|}$.

b) Wir nehmen an, es gäbe einen Punkt B, der auf beiden Kreisen nach Aufgabenteil a) um Q_1 bzw. Q_2 liegt. Dabei sind zur Lage des Punktes B zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: B liegt nicht auf g. Dann gibt es genau einen Kreis, der die drei Punkte B, P_1 und P_2 enthält. Sein Mittelpunkt sei M. Nach Aufgabenteil a) berühren aber sowohl die Gerade Q_1B als auch Q_2B den Kreis k in B und stehen somit senkrecht auf MB. Da es nur eine solche Orthogonale zu MB durch B gibt, müssen die beiden Geraden Q_1B und Q_2B identisch sein, ihre Schnittpunkte mit g aber auch. Da B nicht auf g liegt, ist dieser Schnittpunkt aber eindeutig bestimmt, sodass $Q_1 = Q_2$ entgegen der Voraussetzung folgen würde, was ein Widerspruch ist.

Fall 2: B liegt auf g. Es seien $r_1 = \sqrt{|Q_1P_1| \cdot |Q_1P_2|}$ und $r_2 = \sqrt{|Q_2P_1| \cdot |Q_2P_2|}$ die Radien der beiden Kreise. Wir unterscheiden zwei Unterfälle:

Fall 2.1: Q_1 und Q_2 liegen auf verschiedenen Seiten von P_1P_2. O. B. d. A. gelte $|Q_1P_1| < |Q_1P_2|$. Dann ist $r_1 < \sqrt{|Q_1P_2| \cdot |Q_1P_2|} = |Q_1P_2| < |Q_1Q_2|$. Analog ist auch $r_2 < |Q_1Q_2|$. Damit muss jeder Schnittpunkt B beider Kreise auf g zwischen ihnen liegen.

Dann ist

$$|Q_1Q_2| = |Q_1B| + |Q_2B| = \sqrt{|Q_1P_1| \cdot |Q_1P_2|} + \sqrt{|Q21P_1| \cdot |Q_2P_2|} <$$
$$< \frac{1}{2} \cdot (|Q_1P_1| + |Q_1P_2| + |Q_2P_1| + |Q_2P_2|) = |Q_1M| + |MQ_2| = |Q_1Q_2|$$

was ein Widerspruch ist.

Fall 2.2.: Q_1 und Q_2 liegen auf der gleichen Seite von P_1P_2. O. B. d. A. liegen die Punkte dann in der Reihenfolge Q_2, Q_1, P_1, P_2 auf g. Es ist dann wegen $|P_1Q_2| > |P_1Q_1|$ und $|P_2Q_2| > |P_2Q_1|$ auch $r_2 > r_1$. Insbesondere kann dann nicht B „vor“ Q_2 liegen, da dann $r_1 = |BQ_1| = |BQ_2| + |Q_1Q_2| > r_2$ gelten müsste, was ein Widerspruch ist. Auch kann B nicht auf der Strecke Q_2Q_1 liegen, da sonst der Widerspruch durch $|Q_2P_1| < r_2 < |Q_2B| + |BQ_1| = |Q_2Q_1| < |Q_2P_1|$ folgen würde.

Also muss B auf g „nach“ Q_1 liegen. Da $|Q_2P_1| < r_2 < |Q_2P_2|$ gilt, liegt der einzige Schnittpunkt des Kreises um Q_2 mit g, der „nach“ Q_1 liegt, auf der Strecke P_1P_2. Dieser hat die Entfernung $r_2 - |Q_2P_1|$ von P_1. Analog hat der Schnittpunkt des Kreises um Q_1 mit g, der „nach“ Q_1 auf g liegt, die Entfernung $r_1 - |Q_1P_1|$ von P_1. Damit B als Schnittpunkt dieser beiden Kreise an der angegebenen Stelle existiert, müssen diese Werte gleich sein.

Es seien x und t positive reelle Zahlen. Wir betrachten die Funktion $f_t(x) := \sqrt{x \cdot (t+x)} - x$. Dann ist die Entfernung des zu betrachtenden Schnittpunktes des Kreises um Q_2 mit g von P_1 gleich $f_{|P_1P_2|}(|Q_2P_1|)$ und analog die des Schnittpunktes des Kreises um Q_1 von P_1 gleich $f_{|P_1P_2|}(|Q_1P_1|)$. Es genügt also für die Nichtexistenz eines gemeinsamen Schnittpunktes B beider Kreise auf g zu zeigen, dass für konstantes $t > 0$ die Funktion $f_t(x)$ streng monoton für alle $x > 0$ ist.

Es ist dabei $f_t'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+t}{\sqrt{x \cdot (t+x)}} - 1$. Um die strenge Monotonie für $f_t(x)$ zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass für die zu betrachtenden positiven Werte von x stets auch $f_t'(x) > 0$ ist. Für $x = t$ ist dies jedenfalls der Fall, denn $f_t'(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3t}{\sqrt{t \cdot 2t}} - 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} - 1 > 0$. Die letzte Ungleichung sieht man dadurch ein, dass man sie äquivalent zu $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} > 1$ bzw. $3 > 2\sqrt{2}$ und schließlich der offensichtlich wahren Ungleichung $9 > 4 \cdot 2 = 8$ umformt.

Wäre $f_t(x)$ nicht streng monoton für alle $x > 0$, so müsste es also aufgrund der Stetigkeit von $f_t'(x)$ mindestens eine Nullstelle dieser Funktion geben. Es ist aber die Gleichung $f_t'(x) = 0$ äquivalent zu

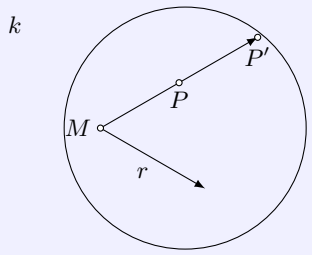
$\frac{1}{2} \cdot \frac{2x+t}{\sqrt{x \cdot (t+x)}} = 1$ bzw. $2x + t = 2\sqrt{x \cdot (t+x)}$, woraus

$$4x^2 + 4xt + t^2 = (2x+t)^2 = 4x(t+x) = 4x^2 + 4xt$$

also $t^2 = 0$ und damit $t = 0$ folgt, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

Damit hat $f_t'(x)$ für alle $t > 0$ keine Nullstellen, ist $f_t(x)$ streng monoton und nimmt also für verschiedene Argumente x auch verschiedene Funktionswerte an. Insbesondere sind also wegen $P_1 \neq P_2$ und $Q_1 \neq Q_2$ auch $f_{|P_1P_2|}(|Q_1P_1|)$ und $f_{|P_1P_2|}(|Q_2P_1|)$ verschieden, sodass die beiden Kreise gemäß Teilaufgabe a) um Q_1 bzw. Q_2 keinen gemeinsamen Punkt auf g, und damit auch auf ganz ε, besitzen, □.

Aufgabe 091233:



Gegeben sei in einer Ebene ε ein Kreis k mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M. Ein Punkt P_1 der Ebene heiße Spiegelpunkt eines Punkts P ($P \neq M$) bezüglich k, wenn P_1 auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl liegt und $MP \cdot MP_1 = r^2$ ist.
Es sei k_1 ein Kreis der gleichen Ebene ε, der k orthogonal schneidet, d. h. die Tangenten der beiden Kreise in den Schnittpunkten stehen senkrecht aufeinander.
Welches ist der geometrische Ort aller Spiegelpunkte der auf k_1 gelegenen Punkte P bezüglich k?

Lösung von cyrix:
Es wird k_1 auf sich selbst abgebildet.
Beweis:
Seien S und T die beiden Schnittpunkte von k und k_1. Dann gilt offensichtlich $|MS| \cdot |MS| = r^2 = |MT| \cdot |MT|$, sodass die Punkte S und T ihre eigenen Spiegelpunkte bezüglich k sind.

Sei nun P ein Punkt auf k_1, der verschieden von diesen beiden Schnittpunkten ist. Dann schneidet der von M ausgehende Strahl durch P den Kreis k_1 in einem zweiten Punkt, da es sich nicht um eine Tangente handeln kann, da die beiden von M ausgehenden Tangenten an k_1 durch S und T verlaufen. Nennen wir diesen zweiten Schnittpunkt P_1.
Dann gilt nach dem Sehnen-Tangentensatz (bezogen auf k_1, die Sehne PP_1 und die Tangente MS) die Beziehung $|MP| \cdot |MP_1| = |MS|^2 = r^2$, sodass jeder Punkt auf k_1 wieder auf einen Punkt auf k_1 abgebildet wird.
Offensichtlich ist diese Spiegelungsoperation aber auch umkehrbar:

Wird sie zwei mal angewendet, erhält man wieder den Ausgangspunkt. Demzufolge muss auch jeder Punkt auf k_1 der Spiegelungspunkt eines anderen (oder sich selbst) auf k_1 sein, sodass der geometrische Ort aller Spiegelungspunkte bezüglich k von Punkten auf k_1 wieder genau k_1 selbst ist $\square$.

Aufgabe 111231:
Gegeben seien in einer Ebene zwei sich schneidende Geraden g und h. Die Größe des einen ihrer vier Schnittwinkel sei $\alpha \leq 90°$.
a) Es ist zu beweisen: Zwei nacheinander ausgeführte Spiegelungen der Ebene, erst an g, dann an h, lassen sich stets durch eine Drehung der Ebene ersetzen (d. h., sie sind einer Drehung der Ebene äquivalent).
Deren Drehpunkt und Drehwinkel sind zu ermitteln.
b) Es ist festzustellen, ob sich dieselbe Drehung wie in a) ergibt, wenn man erst an h und dann an g spiegelt.

Lösung von cyrix:
Es sei S der Schnittpunkt von g und h. Wir legen so ein Koordinatensystem in die Ebene dieser beiden Geraden, dass g auf der x-Achse, S im Koordinatenursprung und h derart zu liegen kommt, dass diese Gerade durch den ersten Quadranten (bzw. auf der y-Achse) verläuft.

Der Punkt S ist Fixpunkt beider Spiegelungen, wird also auch durch die Hintereinanderausführung beider Spiegelungen wieder auf sich selbst abgebildet.

Für einen von S verschiedenen Punkt P kann man dessen Polarkoordinaten mit dem Paar (r,ϕ) angeben, wobei $r > 0$ die Entfernung $|SP|$ und ϕ den Winkel, den ein Strahl, beginnend mit der positiven x-Achse, überstreichen muss, bis er P erreicht, darstellt. Dabei ist der Winkel ϕ modulo 360° zu lesen, da Polarkoordinaten, bei denen sich das Argument ϕ um ganzzahlige Vielfache von 360° unterscheiden, den gleichen Punkt in der Ebene beschreiben.

Der Punkt P mit Koordinaten (r,ϕ) wird durch Spiegelung an g, also an der x-Achse, auf den Punkt P_g mit Koordinaten $(r,-\phi)$ abgebildet.

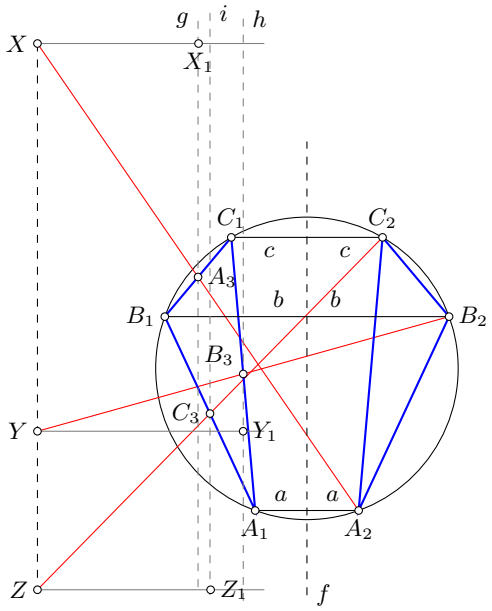
Spiegelt man dagegen den Punkt P an der Geraden h, so bleibt wieder dessen Betrag r erhalten, da Spiegelungen längentreu sind, und die Strecke SP also die gleiche Länge wie die Strecke SP_h besitzt. Um das Argument vom Spiegelpunkt P_h zu ermitteln, beachten wir, dass der von S ausgehende Strahl, der sich von P bis zum positiven Ast von h bewegt, einen Winkel von $\alpha - \phi$ überstreicht. Bis P_h muss nun der Strahl von eben jenem positiven Ast von h in der gleichen Richtung einen gleichgroßen Winkel überstreichen, bis er P_h erreicht. Also besitzt P_h das Argument $\alpha + (\alpha - \phi) = 2\alpha - \phi$ und damit die Polarkoordinaten $(r,2\alpha - \phi)$.

Auf analoge Weise können wir nun den Punkt P_g an h spiegeln und erhalten den Punkt P_{gh} mit den Polarkoordinaten $(r,2\alpha - (-\phi)) = (r,\phi + 2\alpha)$. Jeder von S verschiedene Punkt P wird also durch die Hintereinanderausführung der Spiegelungen erst an g und dann an h um den Winkel 2α in mathematisch positiver Richtung um S gedreht. Der Punkt S bleibt dabei fix und ist das Drehzentrum.

Spiegelt man dagegen P_h an g, so erhält man den Punkt P_{hg} mit den Polarkoordinaten $(r,-(2\alpha - \phi)) = (r,\phi - 2\alpha)$. Dies stellt also eine Drehung um den Winkel -2α in mathematisch positiver Richtung um das Drehzentrum S dar. Dies liefert also nur dann die gleiche Drehung wie die zuvor betrachtete, wenn $P_{gh} = P_{hg}$ gilt, also sich die Argumente $\phi \pm 2\alpha$ um ein ganzzahliges Vielfaches von 360° unterscheiden. Wegen $0 < \alpha \leq 90°$ ist dies nur genau für $\alpha = 90°$ der Fall.

Aufgabe 151233:
Es seien A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 drei voneinander verschiedene parallele Sehnen eines Kreises k. Ferner seien X bzw. Y bzw. Z die zu A_2 bzw. B_2 bzw. C_2 bezüglich der Mittelpunkte der Sehnen B_1C_1 bzw. C_1A_1 bzw. A_1B_1 symmetrisch liegende Punkte.
Man beweise, dass X, Y und Z auf ein und derselben Geraden liegen.

Lösung von Felix Kaschura:



Voraussetzung: A_3 halbiert B_1C_1 und A_2X, B_3 halbiert A_1C_1 und B_2Y, C_3 halbiert A_1B_1 und C_2Z
Behauptung: X, Y und Z liegen auf derselben Gerade

Beweis: Es werden folgende zu den parallelen Sehnen senkrechte Geraden eingeführt:
f durch den Kreismittelpunkt, g durch A_3, h durch B_3, i durch C_3.
Allgemein werde der Abstand eines Punktes P von einer Geraden g durch $d(gP)$ bezeichnet.
a, b bzw. c sind wie folgt definiert: $a := d(fA_2)$, $b := d(fB_2)$, $c := d(fC_2)$. Da der Durchmesser (hier durch f repräsentiert) eines Kreises senkrecht stehende Sehnen halbiert, gilt ebenfalls $d(fA_1) = a$, $d(fB_1) = b$, $d(fC_1) = c$.
Mit der Voraussetzung lässt sich nun der Abstand von A_3, B_3 und C_3 zu f ausdrücken:

$$d(fA_3) = \frac{d(fB_1) + d(fC_1)}{2} = \frac{b+c}{2}$$

und analog

$$d(fB_3) = \frac{a+c}{2} \qquad \text{bzw.} \qquad d(fC_3) = \frac{a+b}{2}$$

Schließlich ergeben sich nun für die Abstände der Punkte X, Y, Z zu f folgende Gleichungen:

$$d(fX) = d(gX) + d(fA_3) = d(gA_2) + d(fA_3) = a + d(fA_3) + d(fA_3) = a + 2 \cdot \frac{b+c}{2} = a+b+c$$

$$d(fY) = d(hY) + d(hB_3) = d(hB_2) + d(fB_3) = b + d(fB_3) + d(fB_3) = b + 2 \cdot \frac{a+c}{2} = a+b+c$$

$$d(fZ) = d(iZ) + d(iC_3) = d(iC_2) + d(fC_3) = c + d(fC_3) + d(fC_3) = c + 2 \cdot \frac{a+b}{2} = a+b+c$$

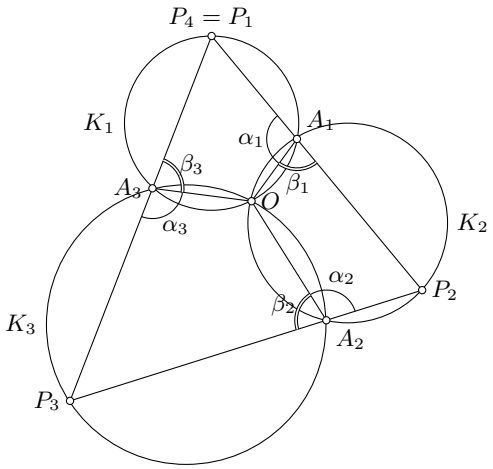
Damit liegen die drei Punkte X, Y und Z auf derselben Seite einer Geraden (f) und haben denselben Abstand zu ihr. Daraus folgt, dass diese drei Punkte auf einer Geraden liegen (die parallel zu f verläuft).
q. e. d.

Aufgabe 251232:
Für eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 3$ seien n Kreise $K_1, ..., K_n$, so in einer Ebene gelegen, dass sie folgende Bedingungen erfüllen (wobei der Kreis K_1 auch mit K_{n+1} bezeichnet sei):
Es gibt einen Punkt O, der auf allen Kreisen $K_1, ..., K_n$ liegt. Für $i = 1, ..., n$ gilt:
K_i und K_{i+1} haben noch genau einen von O verschiedenen Punkt A_i gemeinsam.

Die Punkte $A_1, ..., A_n$ sind paarweise verschieden; die Strahlen von O aus durch $A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n, A_1$ sind in dieser Reihenfolge um O herum angeordnet.
Ferner seien $P_1, ..., P_{n+1}$ Punkte, die folgende Bedingungen erfüllen: Für $i = 1, ..., n$ gilt: P_i liegt auf Kreis K_i und ist von O und A_i verschieden: P_{i+1} ist der von A_i verschiedene Schnittpunkt des Kreises K_{i+1} mit der Geraden durch P_i und A_i.
Die Strahlen von O aus durch $A_n, P_1, A_1, P_2, A_2, ..., P_n, A_n$ sind in dieser Reihenfolge um O herum angeordnet.
a) Beweisen Sie, dass für $n = 3$ aus diesen Voraussetzungen stets $P_4 = P_1$ folgt!
b) Untersuchen Sie, ob für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ aus den genannten Voraussetzungen stets $P_{n+1} = P_1$ folgt!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach den Voraussetzungen über $O, A_3, P_1, A_1, P_2, A_2, P_3$ sind $OA_3P_1A_1$, $OA_1P_2A_2$ und $OA_2P_3A_3$ Sehnenvierecke.
Für $\alpha_1 = \angle P_1A_1O$, $\alpha_2 = \angle P_2A_2O$, $\alpha_3 = \angle P_3A_3O$, $\beta_1 = \angle P_2A_1O$, $\beta_2 = \angle P_3A_2O$, $\beta_3 = \angle P_1A_3O$ gilt daher

$$\alpha_1 + \beta_3 = \alpha_2 + \beta_1 = \alpha_3 + \beta_2 = 180^\circ \tag{1}$$



Ferner geht nach Voraussetzung die Verlängerung von P_1A_1 über A_1 hinaus durch P_2 und die Verlängerung von P_2A_2 über A_2 hinaus durch P_4, also gilt

$$\alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ = \alpha_2 + \beta_2 \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $\alpha_3 + \beta_3 = 180^\circ$. Also geht die Verlängerung von P_3A_3 über A_3 hinaus durch P_1. Hiernach ist P_1 der von A_3 verschiedene Schnittpunkt des Kreises K_1 mit der Geraden durch P_3 und A_3. Dieser Schnittpunkt ist aber nach Voraussetzung P_4; somit ist $P_4 = P_1$ bewiesen.

b) Nach den Voraussetzungen über $O, A_n, P_1, A_1, ..., A_{n-1}, P_n$ sind $OA_nP_1A_1$, $OA_1P_2A_2$, ..., $OA_{n-1}P_nA_n$ Sehnenvierecke.
Für $\alpha_1 = \angle P_1A_1O$, $\beta_1 = \angle P_2A_1O$, ..., $\alpha_{n-1} = \angle P_{n-1}A_{n-1}O$, $\beta_{n-1} = \angle P_nA_{n-1}O$, $\alpha_n = \angle P_nA_nO$, $\beta_n = \angle P_1A_nO$ gilt daher

$$\alpha_1 + \beta_n = \alpha_2 + \beta_1 = ... = \alpha_n + \beta_{n-1} = 180^\circ \tag{3}$$

Ferner geht nach Voraussetzung die Verlängerung von P_1A_1 über A_1 hinaus durch P_2, ... die Verlängerung von $P_{n-1}A_{n-1}$ über A_{n-1} hinaus durch P_n, also gilt

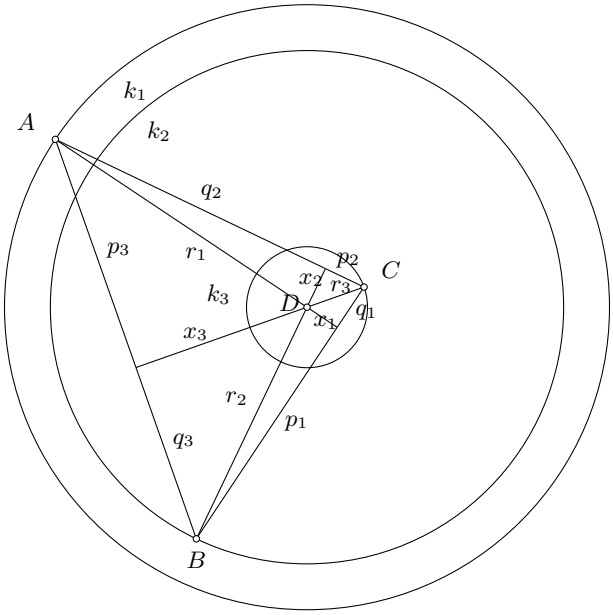
$$\alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ = ... = \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt $\alpha_n + \beta_n = 180^\circ$. Also geht die Verlängerung von P_nA_n über A_n hinaus durch P_1. Hiernach ist P_1 der von A_n verschiedene Schnittpunkt des Kreises K_1 mit der Geraden durch P_n und A_n. Dieser Schnittpunkt ist aber nach Voraussetzung P_{n+1}; somit folgt für jedes $n \geq 3$ aus den Voraussetzungen stets $P_{n+1} = P_1$.

Aufgabe 321236:
Es seien k_1, k_2 und k_3 drei konzentrische Kreise mit den Radien $r_1 = 5$, $r_2 = 3\sqrt{2}$ bzw. $r_3 = 1$.
Man ermittle den größtmöglichen Wert für den Flächeninhalt eines Dreiecks ABC mit der Eigenschaft, dass A auf k_1, B auf k_2 und C auf k_3 liegt.
Hinweis: Als bekannter Sachverhalt kann die Aussage verwendet werden, dass unter allen Dreiecken mit der genannten Eigenschaft ein Dreieck mit größtmöglichem Flächeninhalt existiert.

Lösung von MontyPythagoras:
Der Punkt D sei der Mittelpunkt der konzentrischen Kreise. Es ist gleichzeitig der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks ABC. Das heißt, dass wenn man Geraden durch den Mittelpunkt D und die Eckpunkte legt, diese Geraden die Dreiecksseiten unter einem rechten Winkel schneiden. Warum das so sein muss, kann man sich relativ leicht klar machen:

Betrachtet man zwei Punkte als fix, z. B. A und B, dann ist die Fläche des Dreiecks gleich die Grundseite AB mal den halben Abstand des Punktes C von der Seite AB. Wenn der Punkt C nur um D im Abstand r_3 rotieren kann, ist der Abstand des Punktes C von AB genau dann maximal (und damit auch die Fläche), wenn die Verbindungslinie CD senkrecht steht auf AB. Das gleiche gilt sinngemäß auch für die anderen Punkte.



Sei nun x_3 die Verlängerung der Strecke CD bis zur Strecke AB. Dann gilt:

$$x_3^2 + p_3^2 = r_1^2 \tag{1}$$

$$x_3^2 + q_3^2 = r_2^2 \tag{2}$$

Die zu maximierende Fläche des Dreiecks ist

$$A = \tfrac{1}{2}(x_3 + r_3)(p_3 + q_3) \tag{3}$$

Löst man (1) und (2) nach p_3 und q_3 auf und setzt in (3) ein, dann folgt:

$$A(x) = \tfrac{1}{2}(x_3 + r_3)\left(\sqrt{r_1^2 - x_3^2} + \sqrt{r_2^2 - x_3^2}\right) \tag{4}$$

Nach x_3 ableiten und null setzen, um das Maximum zu bestimmen (den Faktor $\frac{1}{2}$ können wir gleich eliminieren durch das Nullsetzen):

$$0 = \left(\sqrt{r_1^2 - x_3^2} + \sqrt{r_2^2 - x_3^2}\right) + (x_3 + r_3)\left(\frac{-x_3}{\sqrt{r_1^2 - x_3^2}} + \frac{-x_3}{\sqrt{r_2^2 - x_3^2}}\right)$$

$$0 = \left(\sqrt{r_1^2 - x_3^2} + \sqrt{r_2^2 - x_3^2}\right) - x_3(x_3 + r_3)\frac{\sqrt{r_1^2 - x_3^2} + \sqrt{r_2^2 - x_3^2}}{\sqrt{r_1^2 - x_3^2} \cdot \sqrt{r_2^2 - x_3^2}}$$

$$0 = 1 - \frac{x_3(x_3 + r_3)}{\sqrt{r_1^2 - x_3^2} \cdot \sqrt{r_2^2 - x_3^2}}$$

$$x_3(x_3 + r_3) = \sqrt{r_1^2 - x_3^2} \cdot \sqrt{r_2^2 - x_3^2}$$

$$x_3^4 + 2r_3x_3^3 + r_3^2x_3^2 = (r_1^2 - x_3^2)(r_2^2 - x_3^2)$$

$$x_3^4 + 2r_3x_3^3 + r_3^2x_3^2 = x_3^4 - (r_1^2 + r_2^2)x_3^2 + r_1^2r_2^2$$

$$2r_3x_3^3 + (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)x_3^2 - r_1^2r_2^2 = 0$$

Damit wären wir bei einer kubischen Gleichung für x_3. Wir setzen an dieser Stelle die Zahlenwerte ein, und erhalten:

$$2x_3^3 + 44x_3^2 - 450 = 0$$

$$x_3^3 + 22x_3^2 - 225 = 0$$

Man kann und muss die Lösung $x_3 = 3$ erraten und kann die Gleichung dann faktorisieren:

$$(x_3 - 3)(x_3^2 + 25x_3 + 75) = 0$$

Die weiteren Lösungen des quadratischen Terms kommen nicht in Frage, weil sie beide negativ sind. Mit $x_3 = 3$ erhalten wir außerdem

$$p_3 = \sqrt{25 - 9} = 4$$

und

$$q_3 = \sqrt{18 - 9} = 3$$

Damit erhalten wir als maximale Dreiecksfläche

$$A_{max} = \tfrac{1}{2}(3 + 1)(3 + 4) = 14$$

Zusatz zur allgemeinen Lösung: Multipliziert man obige allgemeine kubische Gleichung mit r_3^2, erhält man:

$$2r_3^3x_3^3 + (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)r_3^2x_3^2 - r_1^2r_2^2r_3^2 = 0$$

Setzt man nun $x_3r_3 = c$, dann folgt:

$$2c^3 + (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)c^2 - r_1^2r_2^2r_3^2 = 0$$

Wie man erkennt, ist diese Gleichung symmetrisch bezüglich r_1, r_2 und r_3. Daher ist c eine Invariante, und es gilt

$$x_1r_1 = x_2r_2 = x_3r_3 = c$$

Die Lösung der kubischen Gleichung führt auf den Casus irreducibilis, so dass man c nicht als Summe von Wurzeln und dritten Wurzeln darstellen kann, sondern nur mit dem Kosinus von Winkeldritteln. Aufgrund der bekannten Tatsache, dass die Dreiteilung eines Winkels nicht mit elementaren Konstruktionsmitteln durchführbar ist, ist auch das Dreieck mit maximalem Flächeninhalt nicht elementar konstruierbar. Setzt man

$$r_q = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{3}}$$

$$r_m = (r_1r_2r_3)^{\frac{1}{3}}$$

als quadratischen und geometrischen Mittelwert der Radien, dann lautet die kubischen Gleichung für die Invariante c:

$$2c^3 + 3r_q^2c^2 - r_m^6 = 0$$

Die Lösung der kubischen Gleichung lautet dann (vollständiger Rechenweg wird hier nicht gezeigt):

$$c = r_q^2\left[\cos\left(\tfrac{1}{3}\arccos\left(2\left(\frac{r_m}{r_q}\right)^6 - 1\right)\right) - \tfrac{1}{2}\right]$$

Um eine symmetrische Formel für die Dreiecksfläche zu finden, benutzen wir folgenden Zusammenhang:

$$A_{ABC} = \tfrac{1}{2}(A_{BDCA} + A_{CDAB} + A_{ADBC})$$

$$A_{ABC} = \tfrac{1}{4}\left(r_1(p_1+q_1) + r_2(p_2+q_2) + r_3(p_3+q_3)\right)$$

$$A_{ABC} = \tfrac{1}{4}\left(r_1\sqrt{r_2^2-x_1^2} + r_1\sqrt{r_3^2-x_1^2} + r_2\sqrt{r_1^2-x_2^2} + r_2\sqrt{r_3^2-x_2^2} + r_3\sqrt{r_1^2-x_3^2} + r_3\sqrt{r_2^2-x_3^2}\right)$$

$$A_{ABC} = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{r_1^2r_2^2-c^2} + \sqrt{r_1^2r_3^2-c^2} + \sqrt{r_1^2r_2^2-c^2} + \sqrt{r_2^2r_3^2-c^2} + \sqrt{r_1^2r_3^2-c^2} + \sqrt{r_2^2r_3^2-c^2}\right)$$

$$A_{ABC} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{r_1^2r_2^2-c^2} + \sqrt{r_1^2r_3^2-c^2} + \sqrt{r_2^2r_3^2-c^2}\right)$$

$$A_{ABC} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sqrt{\left(\frac{r_m^3}{r_i}\right)^2 - c^2}$$

Alternativ-Lösung von offizieller Aufgabenkommission:

Der gemeinsame Mittelpunkt der Kreise k_1, k_2, k_3 sei M für jedes Dreieck ABC mit A auf k_1, B auf k_2, C auf k_3 (*) seien AD, BE, CF die auf BC, CA bzw. AB senkrechten Höhen.

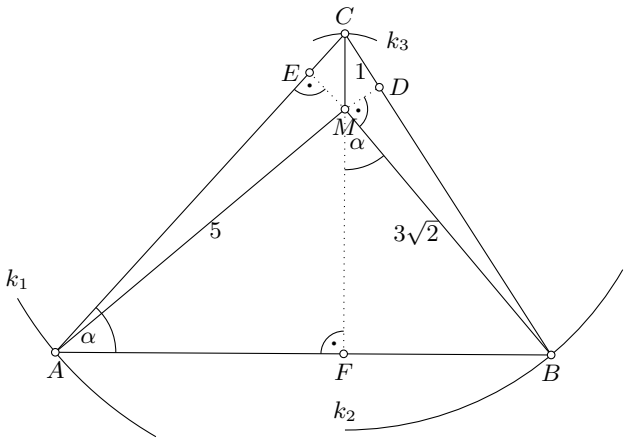
I. Liegt M nicht auf der Strecke CF, so gibt es auf k_3 einen Punkt C', für den ABC' größeren Flächeninhalt als ABC hat.

Beweis:
Die Parallele durch M zur Geraden g durch A, B schneide die Gerade h durch C, F in Q; die Parallele m durch M zu h schneide g in P. Unter den Schnittpunkten von m mit k_3 kann man C' so wählen, dass M der Strecke $C'P$ angehört; damit wird

$$C'P = C'M + MP = r_3 + MP = CM + QF$$

Falls nun M nicht auf h liegt, ist CQM ein (eventuell mit $C = Q$ entartetes) bei Q rechtwinkliges Dreieck, und es folgt $CM > CQ$, also $C'P > CQ + QF \geq CF$.
Liegt aber M auf h, d. h., ist $M = Q$, so folgt wegen der Lage von M außerhalb CF, dass $CM+MF > CF$ und damit ebenfalls $C'P > CF$ gilt. Also hat ABC' größere auf AB senkrechte Höhe und folglich größeren Flächeninhalt als ABC.

Entsprechend kann man schließen, wenn M nicht auf AC oder nicht auf BE liegt. Also gilt:
Wenn nicht alle drei Höhen AD, BE, CF durch M gehen, d. h., wenn M nicht im Innern des Dreiecks ABC liegt und zugleich sein Höhenschnittpunkt ist, so gibt es ein Dreieck, dessen Ecken die zu (*) entsprechende Bedingung erfüllen und das größeren Flächeninhalt als ABC hat.



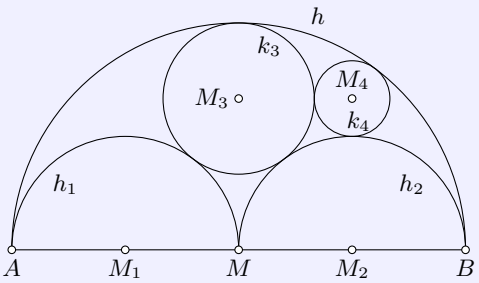
II. Nach dem im Hinweis genannten Sachverhalt existiert unter allen Dreiecken mit (*) eines mit größtmöglichen Flächeninhalt. Wegen I. folgt daher:
Wenn der Flächeninhalt eines Dreiecks mit (*), in dessen Innerem der Punkt M zugleich der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ist, durch dies Voraussetzungen eindeutig bestimmt ist, so ist er der gesuchte größtmöglich Flächeninhalt.

Wenn nun ein Dreieck ABC diese Voraussetzungen erfüllt (Abbildung), so folgt:
Die auf BC, CA bzw. AB senkrechten Höhen AD, BE bzw. CF schneiden sich in M, und es gilt $MA = 5$, $MB = 3\sqrt{2}$, $MC = 1$. Mit $MF = x$ gilt nach dem Satz des Pythagoras $AF = \sqrt{25 - x^2}$ und $BF = \sqrt{18 - x^2}$.
Mit $\triangle BAS = \alpha$ gilt ferner $\triangle FMB = \triangle CME = 90° - \angle ACF = \alpha$; damit ergibt sich $triangleAFC \sim \triangle MFB$, also

$$\begin{aligned}(1 + x) : \sqrt{25 - x^2} &= \sqrt{18 - x^2} : x \\ x^2(1 + x)^2 &= (25 - x^2)(18 - x^2) \\ x^4 + 2x^3 + x^2 &= 450 - 43x^2 + x^4 \\ x^3 + 22x^2 - 225 &= 0 \\ (x - 3)(x^2 + 25x + 75) &= 0\end{aligned}$$

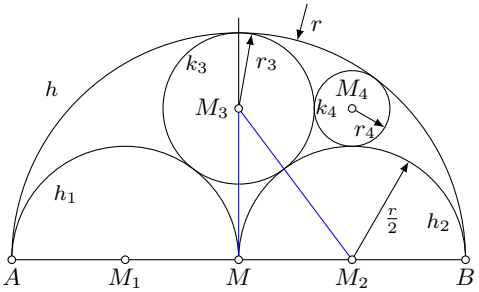
Wegen $x > 0$, also $x^2 + 25x + 75 > 0$ folgt $x = 3$ und damit weiter $AB = \sqrt{25 - x^2} + \sqrt{18 - x^2} = 7$, $CF = 1 + x = 4$.
Also ist durch die genannten Voraussetzungen eindeutig der Flächeninhalt des Dreiecks ABC bestimmt und somit der gesuchte größtmöglich Flächeninhalt; er beträgt $\frac{1}{2}AB \cdot CF = 14$.

Aufgabe 331232:



Über einer Strecke AB sei ein Halbkreis h mit dem Mittelpunkt M errichtet. Darin (siehe Abbildung) seien die Halbkreise h_1 und h_2 über AM bzw. MB konstruiert.
Ferner sei k_3 derjenige Kreis, der h von innen sowie h_1 und h_2 von außen berührt, und es sei k_4 derjenige Kreis, der h von innen sowie h_1 und k_3 von außen berührt.
Man beweise, dass M und die Mittelpunkte M_3, M_4, M_1 von k_3, k_4 bzw. h_1 die Ecken eines Rechtecks sind.

Lösung von MontyPythagoras:
Der Punkt M liege im Ursprung eines 2D-Koordinatensystems:



Wir bestimmen zunächst r_3 mithilfe des rechtwinkligen blauen Dreiecks MM_2M_3:

$$(r - r_3)^2 + \left(\tfrac{1}{2}r\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}r + r_3\right)^2$$
$$r^2 - 2rr_3 + r_3^2 + \tfrac{1}{4}r^2 = \tfrac{1}{4}r^2 + rr_3 + r_3^2$$
$$r^2 = 3rr_3$$
$$r_3 = \tfrac{1}{3}r$$

Der Punkt M_3 liegt somit bei $(0,\tfrac{2}{3}r)$, M_2 bei $(\tfrac{1}{2}r,0)$. Der Punkt M_4 habe die Koordinaten (x,y) und den unbekannten Radius r_4. Das sind drei Unbekannte, die wir aus den drei Bedingungen bestimmen, die sich daraus ergeben, dass der Punkt M_4 von drei Kreisen (h, h_2 und k_3) gleichweit entfernt liegen soll. Das führt zu folgenden drei Gleichungen:

$$(1) \qquad (x - \tfrac{1}{2}r)^2 + y^2 = (\tfrac{1}{2}r + r_4)^2$$
$$(2) \qquad x^2 + (y - \tfrac{2}{3}r)^2 = (\tfrac{1}{3}r + r_4)^2$$
$$(3) \qquad x^2 + y^2 = (r - r_4)^2$$

Multipliziert man die Gleichungen aus und zieht dann Gleichung (1) von (3) ab, erhält man:

$$rx - \tfrac{1}{4}r^2 = \tfrac{3}{4}r^2 - 3rr_4$$
$$(4) \qquad x = r - 3r_4$$

Und wenn man Gleichung (2) von (3) abzieht:

$$\tfrac{4}{3}ry - \tfrac{4}{9}r^2 = \tfrac{8}{9}r^2 - \tfrac{8}{3}rr_4$$
$$(5) \qquad y = r - 2r_4$$

Wir setzen (4) und (5) wieder in (3) ein:

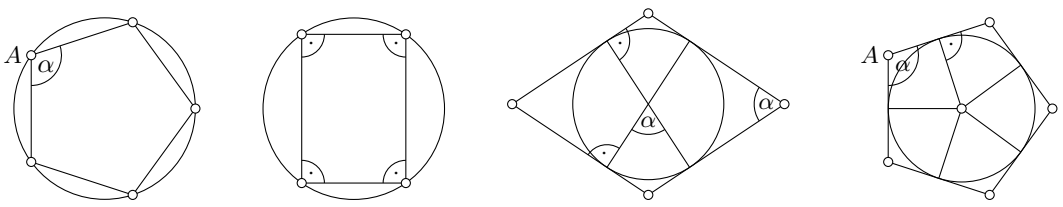
$$(r - 3r_4)^2 + (r - 2r_4)^2 = (r - r_4)^2$$
$$2r^2 - 10rr_4 + 13r_4^2 = r^2 - 2rr_4 + r_4^2$$
$$r^2 - 8rr_4 + 12r_4^2 = 0$$
$$(r - 6r_4)(r - 2r_4) = 0$$

Die einzig plausible Lösung ist $r = 6r_4$ bzw. $r_4 = \tfrac{1}{6}r$. Setzt man das in (4) und (5) ein, erhält man für M_4 die Koordinaten $(x,y) = (\tfrac{1}{2}r,\tfrac{2}{3}r)$. Somit hat der Punkt M_4 dieselbe x-Koordinate wie M_2 und dieselbe y-Koordinate wie M_3, so dass das Viereck $MM_2M_4M_3$ tatsächlich ein Rechteck darstellt.

IV Runde 4

Aufgabe 031246:
Welche der folgenden vier Aussagen sind wahr, welche sind falsch?
a) Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig.
b) Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig.
c) Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig.
d) Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig.

Lösung von Henning Thielemann:



Untersuchung der einzelnen Behauptungen:

a) Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig. Diese Aussage ist richtig.

Gegeben sei ein Kreis und eine Seitenlänge, so dass sich ein Vieleck mit dieser Seitenlänge in den Kreis einbeschreiben lässt.

Betrachte einen Punkt A des Vielecks. Es gibt nur zwei Punkte auf dem Kreis, die von A den gleichen Abstand besitzen (Anzahl Schnittpunkte bei Schnitt von zwei Kreisen). Das müssen die Nachbarpunkte des Vielecks zum Eckpunkt A sein. Der Winkel zwischen den benachbarten Kanten ist daher immer gleichgroß.

b) Wenn ein einem Kreis einbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig. Diese Aussage ist falsch.

Beispiel: Das Rechteck mit den Seitenlängen 3 und 4 kann einem Kreis mit Durchmesser 5 einbeschrieben werden. Es hat 4 Winkel der Größe $90°$ aber unterschiedlich lange Seiten.

c) Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichseitig ist, so ist es auch gleichwinklig. Diese Aussage ist falsch.

Beispiel: Man nehme zwei verschiedene Durchmesser des Kreises, die um den Winkel α gegeneinander verdreht sind. An den vier Schnittpunkten der Durchmesser mit dem Kreis lege man Tangenten an den Kreis. Diese Tangenten erzeugen einen Rhombus, also ein gleichseitiges Parallelogramm, mit den Winkeln α und $180° - \alpha$.

d) Wenn ein einem Kreis umbeschriebenes Vieleck gleichwinklig ist, so ist es auch gleichseitig. Diese Aussage ist richtig.

Den Winkel zwischen zwei benachbarten Kanten des Vielecks nenne α. Die Kanten sind Tangenten an den Kreis, daher liegen Kanten und Kreisradien im rechten Winkel zueinander. Der Winkel zwischen zwei solchen benachbarten Radien ist $180° - \alpha$ groß. Die Vieleckskanten bilden mit den Kreisradien aneinandergereihte Drachenvierecke mit gleichen Winkeln.

Da ein Kreisradius Kante zweier benachbarter Drachenvierecke ist, sind die Drachenvierecke nicht nur ähnlich sondern auch kongruent. Damit sind die Vieleckskanten alle gleich lang.

Aufgabe 081242:
In einer Ebene ε liege ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r.
Als „Spiegelung am Kreis k“ bezeichnet man die folgende Abbildung, durch die jedem Punkt $P \neq M$ aus ε ein Punkt P' aus ε zugeordnet wird:
(1) P' liegt auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl.
(2) Es ist $MP \cdot MP' = r^2$.
a) Konstruieren Sie zu einem beliebig im Innern von k gegebenen Punkt $P \neq M$ den Spiegelpunkt P'!
b) Es sei ein weiterer Kreis k_1 beliebig gegeben, jedoch so, dass M außerhalb von k_1 liegt.
Konstruieren Sie k_1' , d. h. die Menge aller Spiegelpunkte P' der Punkte P von k_1!

Lösung von cyrix:
a) Man zeichne die Gerade s durch M und P. Die Orthogonale zu s durch M schneide k in C und C'. Die Orthogonale zu CP schneide s in Q. Die Spiegelung von Q an M ist dann P'.

Begründung:
Nach Konstruktion ist das Dreieck $\triangle QPC$ rechtwinklig in C und QM seine Höhe auf die Hypotenuse QP. Dann gilt nach dem Höhensatz $|QM| \cdot |MP| = |MQ|^2 = r^2$. Spiegelt man Q nun noch an M, so liegen dessen Spiegelpunkt P' und P auf s auf der gleichen Seite von M, also P' auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl. Weiterhin ist $|MP'|$, also $|MP| \cdot |MP'| = |MP| \cdot |MQ| = r^2$, wie gewünscht.

b) Es sei M_1 der Mittelpunkt von k_1. Ist dieser nicht gegeben, so kann man ihn sich leicht als Umkreismittelpunkt eines beliebigen Dreiecks auf k_1 durch Schnitt von zwei der drei zugehörigen Mittelsenkrechten erhalten.

Da M außerhalb von k_1 liegt, kann man die durch M verlaufenden Tangenten t_1 und t_2 an k_1 konstruieren. Dazu schneide man den Kreis um den Mittelpunkt der Strecke MM_1 und dem Durchmesser MM_1 mit k_1 und erhalte die Berührungspunkte B_1 und B_2. Die Geraden MB_1 und MB_2 sind dann die gesuchten Tangenten t_1 bzw. t_2 an k_1.

Begründung zur Tangentenkonstruktion:
Nach Konstruktion und Satz von Thales sind die Dreiecke $\triangle MM_1B_1$ und $\triangle MM_1B_2$ rechtwinklig, da B_1 und B_2 auf dem Kreis mit Durchmesser MM_1 liegen. Also sind die Geraden MB_1 und B_1M_1 bzw. MB_2 und B_2M_1 jeweils senkrecht zueinander. Dabei sind B_1M_1 und B_2M_1 Radien, auf die die Geraden MB_1 bzw. MB_2 in den Punkten auf der Kreislinie senkrecht stehen. Die Geraden MB_1 und MB_2 berühren also k_1 in B_1 bzw. B_2, sind demnach Tangenten an k_1 und verlaufen durch M.

Weiter zur Konstruktion:
Man konstruiere gemäß Teilaufgabe a) die Spiegelpunkte B_1' von B_1 und B_2' von B_2, errichte auf t_1 die Senkrechte durch B_1', auf t_2 die Senkrechte durch B_2' und bezeichne deren Schnittpunkt als M'. Abschließend konstruiere man den Kreis k_1' um M' durch B_1'.

Begründung:
Da alle Punkte auf k_1 im von t_1 und t_2 aufgespannten Winkel mit Scheitelpunkt M liegen, muss dies analog für k_1' auch gelten, da ja auch alle von M ausgehenden und durch Punkte von k_1 verlaufenden Strahlen in diesem Winkel liefen.

Da t_1 sowie t_2 jeweils nur einen Punkt mit k_1 gemeinsam haben, muss das für k_1' auch gelten. Setzen wir hier voraus, dass das Bild eines Kreises k_1, der nicht durch M verläuft, wieder ein Kreis ist, erhält man dessen Mittelpunkt also dadurch, dass man die Orthogonalen durch die konstruierten Berührungspunkte an den Tangenten schneidet.

Es bleibt zu zeigen, dass k_1' tatsächlich das Bild von k_1 ist. Sei dazu P ein von B_1 und B_2 verschiedener Punkt auf k_1 und Q der zweite Schnittpunkt des von M ausgehenden Strahl s durch P mit k_1. Dann gilt nach dem Sekanten-Tangentensatz bezogen auf den Kreis k_1 die Gleichung $|MP| \cdot |MQ| = |MB_1|^2$. Es seien P' und Q' die Spiegelpunkte von P bzw. Q. Dann liegen diese beiden Punkte auch auf dem Strahl s und es gilt $|MP| \cdot |MP'| = r^2 = |MQ| \cdot |MQ'|$, also

$$|MP'| \cdot |MQ'| = \frac{r^2}{|MP|} \cdot \frac{r^2}{|MQ|} = \frac{r^4}{|MP| \cdot |MQ|} = \frac{r^4}{|MB_1|^2} = \left(\frac{r^2}{|MB_1|}\right)^2 = |MB_1'|^2$$

Damit gilt nach der Umkehrung des Sekanten-Tangentensatz, dass die drei Punkte P', Q' und B_1' auf einem Kreis liegen, für den die Gerade MB_1' eine Tangente ist. Also liegen die Bilder aller Punkte von k_1 auf k_1'.

Da die Spiegelung an k bei zweifacher Ausführung jeden Punkt wieder auf sich selbst abbildet und das Bild aller Punkte von k_1' nach der gleichen Argumentation auf k_1 liegen muss, ist tatsächlich der gesamte Kreis k_1' das Bild der Punkte des gesamten Kreises k_1.

Aufgabe 101246B:
In einem ebenen Gelände erfolge das Abstecken eines Kreisbogens vom Radius r, falls außerdem eine Tangente t an diesen Kreisbogen und ihr Berührungspunkt A bekannt sind, dadurch, dass in beliebigen Punkten P' von t (mit $AP' = x < r$) Senkrechte auf t errichtet und auf ihnen (nach der

Seite von t, auf der der Kreisbogen liegt) Strecken $P'P$ so abgetragen werden, dass die Punkte P Punkte des gesuchten Kreisbogens sind. Dabei gelte $P'P = y < r$.
a) Man beweise, dass dann $y = \frac{x^2}{2r-y}$ gilt!
b) In der Praxis genügt es oft, Näherungswerte für y zu ermitteln. Das geschieht auf folgende Weise: Einen ersten Näherungswert y_1 erhält man aus der Gleichung $y_1 = \frac{x^2}{2r}$.
Falls dessen Genauigkeit nicht ausreicht, wird ein zweiter Näherungswert y_2 aus der Gleichung $y_2 = \frac{x^2}{2r-y_1}$ ermittelt. Analog kann weiter verfahren werden, bis die geforderte Genauigkeit erreicht ist.
Untersuchen Sie, ob es eine kleinste natürliche Zahl n mit der Eigenschaft gibt, dass für alle positiven reellen Zahlen $x \leq \frac{1}{n}r$ der relative Fehler $\delta = \frac{|y-y_1|}{r}$ des Näherungswertes $y_1 = \frac{x^2}{2r}$ nicht größer als 0,001 ausfällt, dass also $\delta \leq 0{,}001$ gilt.

Lösung von cyrix:
a) Wir legen in die Ebene ein x-z-Koordinatensystem, sodass der Mittelpunkt des Kreises im Koordinatenursprung und der Berührungspunkt A im Punkt $(0, r)$ liegt. Die Tangente t bildet die Gerade $z = r$.

Ein Punkt P' habe die Koordinaten $(x,1)$ und somit den Abstand x zu A. (Da Figur ist symmetrisch zur Geraden $x = 0$, sodass man sich o. B. d. A. auf positive x beschränken kann.) Die Senkrechte zu t durch P' ist die Parallele zur z-Achse durch P', haben also x-Koordinate x. Damit hat auch P die x-Koordinate x.

Da alle Punkte auf dem Kreis $x^2 + z^2 = r^2$ erfüllen und es mit P um den „oberen“ Schnittpunkt mit dem Kreis geht, lässt sich dessen z-Koordinate erhalten als $z = \sqrt{r^2 - x^2}$. Der Abstand $|P'P|$ ist damit $y = r - z = r - \sqrt{r^2 - x^2}$.
Mit diesem Wert für y rechnet man schnell nach, dass $2r - y = r + \sqrt{r^2 - x^2}$ und

$$\frac{x^2}{2r-y} = \frac{x^2}{r+\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{x^2 \cdot (r-\sqrt{r^2-x^2})}{(r+\sqrt{r^2-x^2}) \cdot (r-\sqrt{r^2-x^2})} = \frac{x^2 \cdot y}{r^2-(r^2-x^2)} = y \cdot \frac{x^2}{x^2} = y$$

ist.

b) Es ist

$$\delta = \frac{|y-y_1|}{r} = \left|\frac{y}{r} - \frac{y_1}{r}\right| = \left|(1-\sqrt{1-t^2}) - \left(\frac{1}{2}t^2\right)\right|$$

mit $t := \frac{x}{r}$.
Dabei ist für alle reellen $1 > t > 0$

$$1-\sqrt{1-t^2} = \frac{1-\sqrt{1-t^2}}{1} = \frac{(1-\sqrt{1-t^2}) \cdot (1+\sqrt{1-t^2})}{1+\sqrt{1-t^2}} = \frac{1-(1-t^2)}{1+\sqrt{1-t^2}} = \frac{t^2}{1+\sqrt{1-t^2}} = t^2 \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}$$

und also

$$\delta = \left|t^2 \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{2}t^2\right| = t^2 \cdot \left|\frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{2}\right|$$

Dabei ist wegen $0 < t^2 < 1$ auch $0 < \sqrt{1-t^2} < 1$ und $\frac{1}{2} < \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}} < 1$, also $0 < \frac{1}{1+\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$.
Damit ist $\delta < \frac{1}{2}t^2$.

Ist $t < \frac{1}{23}$, so ist $t^2 < \frac{1}{23^2} = \frac{1}{529} < \frac{1}{500}$ und damit $\delta < \frac{1}{2}t^2 < \frac{1}{1000} = 0{,}001$. Also folgt für alle $n \geq 23$, dass für alle $x \leq \frac{1}{n}r$ die Abweichung δ höchstens 0,001 beträgt. Gegebenenfalls gilt dies auch für noch kleinere natürliche Zahlen n. Jedoch gibt es in jedem Fall ein kleinstes solches n.

Aufgabe 121246B:
In der Ebene seien zwei außerhalb voneinander gelegene, sich nicht berührende Kreise k_1 und k_2 sowie ein außerhalb beider Kreise gelegener Punkt A gegeben.
Gesucht ist ein gleichseitiges Dreieck $\triangle ABC$ so, dass B auf k_1 und C auf k_2 liegen.
a) Man begründe und beschreibe eine Konstruktion solcher Dreiecke.
b) Man ermittle die größte Zahl, die als Anzahl der gesuchten Dreiecke $\triangle ABC$ in denjenigen Fällen auftreten kann, in denen es nicht unendlich viele solcher Dreiecke gibt.

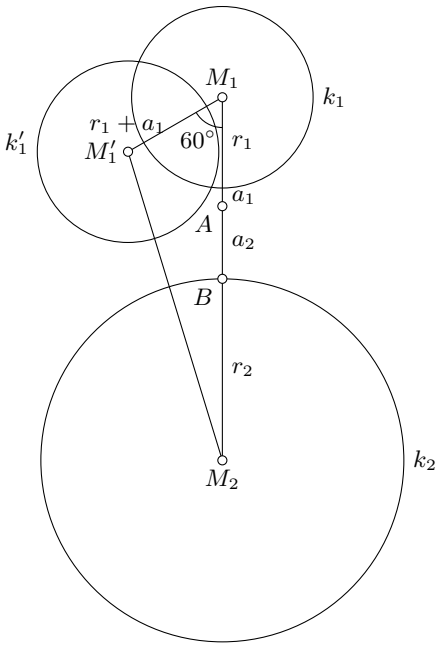
Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Angenommen, es existiert ein $B \in k_1$ und ein $C \in k_2$ mit $AB = BC = CA$, dann erhalte ich den Punkt C, falls B schon festliegt, durch Drehen der Strecke AB um A um den Winkel von 60°.
Falls ich einen beliebigen Punkt B auf k_1 wähle und AB um A um 60° drehe, ist es wahrscheinlich, dass der Endpunkt der Strecke AB nach der Drehung auf der Kreislinie k_2 liegt. Drehe ich aber den ganzen Kreis k_1 um A um 60°, und gibt es ein solches Dreieck, dann schneidet der gedrehte Kreis k_1 der Kreis k_2 sicher in einem Punkt C', der den Bedingungen der Aufgabe genügt; denn der Urpunkt B der Drehung um A um 60° von C' liegt auf k_1, und es gilt sicher

$$\angle C'AB' = 60° \qquad \text{und} \qquad C'A = B'A$$

Damit ist $\triangle AB'C'$ ein gesuchtes Dreieck.

Konstruktion: Die Kreislinie k_1 wird um A einmal um 60° im mathematisch positiven Drehsinn und einmal im mathematisch negativen Drehsinn gedreht. Es entstehen die Kreislinien k_1' und k_1''.
Falls Punkte C mit $C \in k_2 \cap k_1'$ oder $C \in k_2 \cap k_1''$ existieren, so sind diese Punkte Lösungen der Aufgabe. Die entsprechenden Punkte B erhält man durch Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks über AC und der Bedingung $B \in k_1$.

Determination: Als höchste Anzahl von Lösungen können vier gleichseitige Dreiecke auftreten und zwar genau dann, wenn $k_1' \cap k_2$ und $k_1'' \cap k_2$ jeweils genau zwei Punkte enthalten.
k_1' und k_1'' können jeweils k_2 in höchstens zwei Punkten schneiden, da vorausgesetzt war, dass k_2 nicht mit k_1' oder k_1'' identisch ist.
Der Fall, dass vier gleichseitige Dreiecke auftreten, ist möglich, wie im folgenden gezeigt wird (Abbildung).



Ich wähle den Punkt A auf der Verbindungsstrecke von M_1 und M_2 und werden beweisen, dass a_1 und a_2 so gewählt werden können, dass $M_2M_1' < r_1 + r_2$ ausfällt. Es gilt nämlich nach dem Kosinussatz:

$$(M_1'M_2)^2 = (r_2 + a_2 + r_1 + a_1)^2 + (r_1 + a_1)^2 - (r_2 + a_2 + r_1 + a_1)(r_1 + a_1)$$

Für $a_1 = a_2 = 0$ gilt sicher

$$(M_1'M_2)^2 = (r_2 + r_1)^2 + r_1^2 - (r_2 + r_1)r_1 = (r_2 + r_1)^2 - r_1r_2 < (r_1 + r_2)^2$$

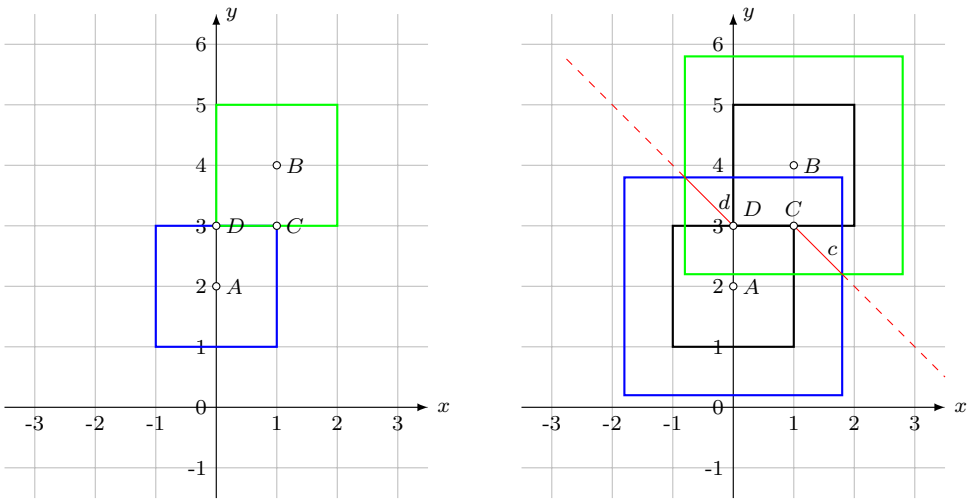
Wegen der stetigen Abhängigkeit von $M_1'M_2$ von a_1 und a_2 lassen sich $a_1, a_2 > 0$ finden, für die ebenfalls noch $(M_1M_2)^2 < (r_1 + r_2)^2$ gilt. Damit schneidet dann k_1' den Kreis k_2 in zwei Punkten und wegen der Symmetrie auch k_1'' den Kreis k_2.
Damit können keine zwei der vier Punkte zusammenfallen, da sowieso $k_1' \cap k_2$ zwei Punkte enthält, ebenso $k_1'' \cap k_2$. Es könnten sich dann höchstens k_1' und k_1'' auf k_2 in B schneiden (wegen der Symmetrie).
Dies würde dann zur Folge haben, dass $\angle M_1'BM_1 > 60°$ und $\angle BM_1'M_1 > 60°$ gilt (nach dem Satz, dass der größeren Seite im Dreieck der größere Winkel gegenüberliegt).
Damit würde die Winkelsumme in diesem Dreieck größer als 180° sein, womit wir zu einem Widerspruch gelangt sind.
Damit ist vier die maximale Lösungsanzahl, wenn nicht unendlich viele Lösungen existieren.

Aufgabe 141246B:
In der Ebene sei der „Abstand“ zwischen zwei Punkten wie folgt definiert:
Sind P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte, die in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Koordinaten $(x_1; y_1)$ bzw. $(x_2; y_2)$ haben (x_1, x_2, y_1, y_2 seien reelle Zahlen), so sei ihr „Abstand“

$$d(P_1; P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

Man ermittle die Menge M aller Punkte der Ebene, die bezüglich des so definierten Abstandes von den Punkten $A(0; 2)$ und $B(1; 4)$ gleich weit entfernt sind.

Lösung von MontyPythagoras:
Der so definierte Abstand zwischen zwei Punkten ist das Maximum aus horizontalem und vertikalem Abstand. Das heißt doch nichts anderes, als dass die Punkte, die einen konstanten Abstand zu einem gegebenen Punkt A haben sollen, ein Quadrat darstellen, in dessen Mittelpunkt sich der Punkt A befindet. Man muss also zwei gleich große Quadrate um die zwei Punkte A und B konstruieren. Die gemeinsamen Punkte beider Quadrate sind dann die gesuchte Lösungsmenge.



Die beiden kleinstmöglichen Quadrate sind die in der linken Grafik gezeigten. Sie teilen sogar eine ganze Strecke, nämlich CD. Lässt man die Quadrate nun größer werden, haben sie nur noch zwei Schnittpunkte (rechtes Bild).

Angefangen bei den kleinstmöglichen Quadraten in der vorigen Skizze, liegen die Schnittpunkte der größeren Quadrate auf den Diagonalen c und d (rot dargestellt). Die Quadrate kann man beliebig groß

werden lassen. Daher kann man die Lösungsmenge wie folgt angeben:

$$M = \begin{cases} y = 3 - x & x < 0 \\ y = 3 & 0 \leq x \leq 1 \\ y = 4 - x & x > 1 \end{cases}$$

Oder zusammengefasst in einer Gleichung:

$$y = \tfrac{7}{2} - x - \tfrac{1}{2}|x - 1| + \tfrac{1}{2}|x|$$

Aufgabe 161246B:
Man gebe für jede natürliche Zahl $n \geq 5$ eine Zerlegung eines regelmäßigen, konvexen n-Ecks in eine minimale Anzahl von
a) sämtlich spitzwinkligen Dreiecken,
b) sämtlich stumpfwinkligen Dreiecken an.
Hinweis:
Unter einer Zerlegung in Dreiecke wird eine Zerlegung des n-Ecks verstanden, bei der jede Seite eines Zerlegungsdreiecks entweder gleichzeitig Seite eines anderen Zerlegungsdreiecks oder eine der Seiten des n-Ecks ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Strecken, die den Mittelpunkt des n-Ecks mit dessen Eckpunkten verbinden, zerlegen das n-Eck in n spitzwinklige Dreiecke. In eine kleinere Anzahl von sämtlich spitzwinkligen Dreiecken lässt sich das n-Eck nicht zerlegen.

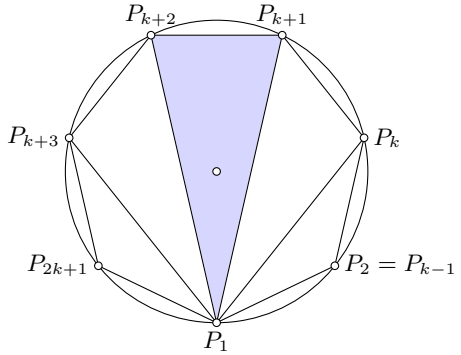
Andernfalls müssten zwei nebeneinander liegende Seiten des n-Ecks zu ein und demselben Zerlegungsdreieck gehören, das dann aber, da der Winkel zwischen diesen beiden Seiten für $n = 5$ stumpf ist, kein spitzwinkliges Dreiecke mehr ist.

b) Jedes Dreieck ABC lässt sich in drei stumpfwinklige Dreiecke zerlegen. Man verbinde hierzu den Schnittpunkt S der Winkelhalbierenden mit den drei Eckpunkten. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \angle ASB &= \pi - \frac{1}{2} \cdot (\angle ABC + \angle CAB) \\ &= \pi - (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \angle ACB) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \angle ACB > \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Analog gilt $\angle BSC, \angle CSA > \frac{\pi}{2}$.
Jedes beliebige regelmäßige n-Eck $P_1P_2...P_n$ $(n \geq 5)$ lässt sich in stumpfwinklige Dreiecke zerlegen.

Es sei $n = 2k + 1$ (k natürliche Zahl):
Das n-Eck wird durch $(n - 3)$ Diagonalen von P_1 zu den Eckpunkten $P_3, P_4, ..., P_{n-1}$ in $(n - 2)$ Dreiecke zerlegt. (siehe Abbildung für $n = 7$)



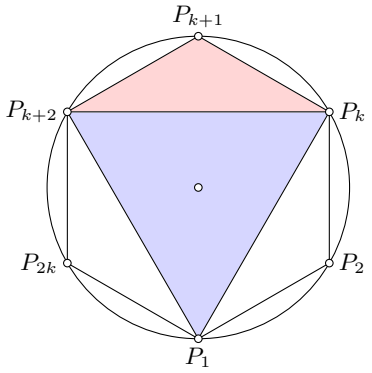
Die Winkel

$$\angle P_1P_2P_3, \angle P_1P_3P_4, ..., \angle P_1P_kP_{k+1}, \angle P_{k+2}P_{k+3}P_1, ..., \angle P_{n-1}P_nP_1$$

sind als Peripheriewinkel im umbeschriebenen Kreis über den angegebenen Diagonalen, von denen keine Durchmesser ist, größer als 90°, da der entsprechende Eckpunkt auf dem kleineren der beiden Teilbögen liegt.
Das Dreieck $P_1P_{k+1}P_{k+2}$ kann, wie angegeben, in drei stumpfwinklige Dreiecke zerlegt werden, womit eine verlangte Zerlegung gefunden ist.

Es sei $n = 2k$:
Das n-Eck wird wieder durch $(n-3)$ Diagonalen von P_1 zu den Eckpunkten P_3, P_4,..., P_{n-1} in $(n-2)$ Dreiecke zerlegt. (siehe nachfolgende Abbildung für $n = 6$)
Die Diagonale P_1P_{k+1} ist Durchmesser im umbeschriebenen Kreis von $P_1P_2...P_n$, also sind die Dreiecke $P_1P_kP_{k+1}$ und $P_1P_{k+1}P_{k+2}$ nicht stumpfwinklig.

Das Viereck $P_1P_kP_{k+1}P_{k+2}$ wird nun in die Dreiecke $P_kP_{k+1}P_{k+2}$ (stumpfwinklig, da zwei der Dreiecksseiten benachbarte n-Eckseiten sind) und $P_1P_kP_{k+2}$ zerlegt. Das Dreieck $P_1P_kP_{k+2}$ kann dann wieder wie angegeben in drei stumpfwinklige Dreiecke zerlegt werden, womit eine gesuchte Zerlegung gefunden wurde.



Es wird nun gezeigt, dass eine Zerlegung in weniger als n stumpfwinklige Dreiecke nicht existieren kann. Dazu wird zuerst nachgewiesen, dass keine Zerlegung in stumpfwinklige Dreiecke existiert, die ausschließlich durch Diagonalen entsteht, d. h., bei der die Eckpunkte sämtlicher Zerlegungsdreiecke zugleich Eckpunkte des n-Ecks sind.

Angenommen, es existiert eine solche Zerlegung. Es sei o. B. d. A. P_1P_m einer Diagonale dieser Zerlegung mit maximaler Länge. Nach Voraussetzung ist sie Seite zweier Zerlegungsdreiecke $P_1P_rP_m$ und $P_1P_mP_s$ mit $1 < r < m < s$.
Da P_1, P_r, P_m, P_s Eckpunkte des n-Ecks sind, ist das Viereck $P_1P_rP_mP_s$ Sehnenviereck und es gilt

$$\angle P_1P_rP_m + \angle P_mP_sP_1 = \pi$$

Dann ist jedoch einer der beiden Winkel, o. B. d. A. $\angle P_1P_rP_m$, nicht größer als $\frac{\pi}{2}$. Wegen der Maximalität von P_1P_m muss aber $\angle P_1P_rP_m$ als Winkel, der der größten Seite gegenüber liegt, der größte Winkel im Dreieck $P_1P_rP_m$ sein. Folglich kann das Dreieck $P_1P_rP_m$ im Widerspruch zur Annahme nicht stumpfwinklig sein.

Da nach Voraussetzung kein Eckpunkt eines Zerlegungsdreiecks innerer Punkt einer n-Eckseite sein kann, muss folglich ein innerer Punkt P des n-Ecks existieren, der Eckpunkt eines Zerlegungsdreiecks ist. Er kann dann nicht innerer Punkt eines Seite eines anderen Zerlegungsdreiecks sein, ist also in allen Zerlegungsdreiecken, die ihn überhaupt enthalten, Eckpunkt.
Die Winkel, deren Scheitelpunkt P ist, haben die Winkelsumme 2π. Die Winkel, für die die Punkte $P_1, P_2, ..., P_n$ Scheitelpunkte sind, haben die Winkelsumme $(n-2)\pi$.

Folglich kann die Anzahl der Zerlegungsdreiecke nicht kleiner als $\frac{1}{\pi} \cdot [2\pi + (n-2)\pi] = n$ sein.

Aufgabe 171244:
Definition:
Es sei mit $d(X,Y)$ der Abstand zweier Punkte X, Y einer Punktmenge m bezeichnet. Eine reelle Zahl d heißt Durchmesser von m, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
(1) Für je zwei Punkte X, Y aus m gilt $d(X,Y) \leq d$.
(2) Es gibt Punkte P, Q aus m, für die $d(P,Q) = d$ ist.
Man beweise:
a) Wenn eine Kreisfläche mit dem Durchmesser d von einem beliebigen Streckenzug, der die Kreislinie in einem Punkt M und einem Punkt N schneidet, in zwei Teile zerlegt wird, dann hat eine dieser Teilflächen (jeweils einschließlich ihres Randes verstanden) ebenfalls den Durchmesser d.
b) Wenn ein Kugelkörper mit dem Durchmesser d von einer ebenen Schnittfläche ε_1 in zwei Teilkörper und danach einer dieser Teilkörper durch eine ebenen Schnittfläche ε_2 wieder in zwei Teilkörper zerlegt wird, dann hat bei jeder derartigen Zerlegung eines Kugelkörpers in drei Teilkörper wenigstens einer dieser Teilkörper (jeweils einschließlich seiner Begrenzungsflächen verstanden) ebenfalls den Durchmesser d.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Für je zwei Punkte X, Y einer Teilmenge von m gilt wegen (1) $d(X,Y) \leq d$. Es genügt also, Bedingung (2) für wenigstens eine der Teilpunktmengen nachzuweisen.

a) Es sei Z ein Streckenzug gemäß Aufgabenstellung. Da die Ränder jeweils zu den entsprechenden Flächen gehört, ist M Punkt beider Teilflächen. M' sei der durch Spiegelung am Kreismittelpunkt aus M hervorgegangene Punkt.
Der Abstand $d(M,M')$ ist gleich dem Durchmesser d des Kreises; denn nach der Dreiecksungleichung gilt

$$d(M,M') \leq d(M,O) + d(O,M') \leq \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d$$

wobei O der Mittelpunkt des Kreises ist; dabei kann nur $d(M,M') = d$ zutreffen, da M, O, M' Punkte auf einer Geraden sind und M, M' auf der Kreislinie liegen. Außerdem ist M' Element wenigstens einer der Teilflächen. Damit gibt es wenigstens eine Teilfläche, deren Durchmesser gleich d ist, nämlich eine, die M und M' enthält.

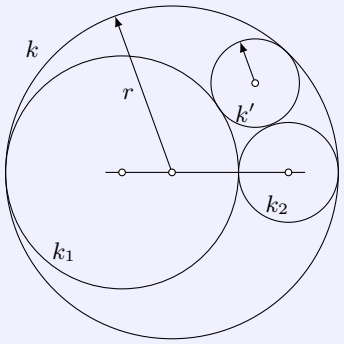
b) Die Schnittflächen ε_1 und ε_2 enthalten als ebene Figuren wenigstens je drei nichtkollineare Punkte, sie bestimmen daher je eine Ebene π_1 bzw. π_2. Mit K bezeichnen wir die Menge aller Punkte des Kugelkörpers, die entsprechenden Teilpunktmengen seien K_1, K_2, K_3, wobei o. B. d. A. $K_1 \cap \pi_1 = \varepsilon_1$ und $K_2 \cap \pi_2 = K_3 \cap \pi_2 = \varepsilon_2$.

Fall 1: Da drei Teilkörper entstehen sollen, kann $\pi_1 = \pi_2$ nicht zutreffen.
Fall 2: $\pi_2 \cap \pi_2 = \varnothing$, d. h., die Ebenen sind parallel, aber nicht identisch.
Die Ebene π, die parallel zu π_1 (bzw. π_2) durch den Mittelpunkt O der Kugel verläuft, hat mit dem Kugelkörper eine Kreisfläche gemeinsam, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt O der Kugel ist.
Für jeden Punkt M der zugehörigen Kreislinie und den durch Spiegelung von M an O entstehenden Punkt M' gilt wie oben $d(M,M') = d$. Wegen der Parallelität der Ebenen π, π_1, π_2, gehören die Punkte M und M' zu wenigstens einem der Teile K_1, K_2, K_3.

Fall 3: π_2 und π_2 schneiden sich in einer Geraden g.
3.1. $g \cap K = \varnothing$.
Die durch g und O bestimmte Ebene π' hat mit dem Kugelkörper eine Kreisfläche gemeinsam, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt O der Kugel ist. Wie im Fall 2 besitzt die Kreisfläche den Durchmesser d und gehört ganz zu einem der drei Teilkörper von K, womit dieser den Durchmesser d besitzt.

3.2. $g \cap K \neq \varnothing$.
Es sei M ein gemeinsamer Punkt von g und der Kugeloberfläche, dann ist M Element von K_1, K_2 und K_3. Der aus M durch Spiegelung an O entstehende Punkt M' gehört zu wenigstens einem der drei Teilkörper, dieser hat den Durchmesser $d(M, M') = d$.

Aufgabe 241242:



Über vier Kreise k, k_1, k_2, k' wird folgendes vorausgesetzt:
Die Kreise k_1 und k_2 berühren einander von außen; die Mittelpunkte von k_1, k_2 und k liegen auf einer gemeinsamen Geraden; die Kreise k_1 und k_2 berühren den Kreis k von innen; der Kreis k' berührt die Kreise k_1 und k_2 von außen und den Kreis k von innen.
Man beweise:
Unter diesen Voraussetzungen gilt für die Radien r, r' von k bzw. k' stets $r' \leq \frac{r}{3}$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Radien von k_1, k_2 seien r_1 bzw. r_2; o. B. d. A. gelte $r_1 \geq r_2 \quad (1)$.
Die Mittelpunkte von k, k_1, k_2, k' seien M, M_1, M_2 bzw. M'. Auf der Geraden g, die nach Voraussetzung durch M_1, M_2 und M geht, liegen auch die Berührungspunkte, die je zwei der Kreise k, k_1, k_2 miteinander haben. Hieraus und aus den Voraussetzungen, welche Kreise sich von außen bzw. von innen berühren, folgt

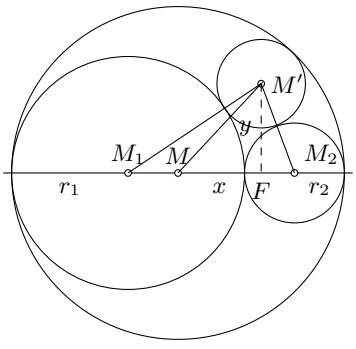
$$2r_1 + 2r_2 = 2r$$

und weiter

$$M_1M_2 = r_1 + r_2 + r; \qquad M_1M = r - r_1 = r_2; \qquad MM_2 = r - r_2 = r_1$$

sowie ferner

$$M_1M' = r_1 + r'; \qquad M_2M' = r_2 + r'; \qquad MM' = r - r'$$



Ist F der Fußpunkt des Lotes von M' auf g und $MF = x$, $FM' = y$, so liegt F wegen $M_1M' \geq M_2M'$ und $M_1M \leq M_2M$ zwischen M und M_2 oder in M; damit folgt nach dem Satz des Pythagoras, angewandt auf die Dreiecke MFM', M_1FM' und M_2FM'

$$x^2 + y^2 = (r - r')^2 \tag{2}$$

$$(r_2 + x)^2 + y^2 = (r_1 + r')^2 \tag{3}$$

$$(r_1 - x)^2 + y^2 = (r_2 + r')^2 \tag{4}$$

Subtrahiert man von der mit 2 multiplizierten Gleichung (2) die Summe der Gleichungen (3) und (4), so ergibt sich

$$2(r_1 - r_2)x = 2r^2 - 4rr' - 2(r - 1 + r_2)r'$$

wegen $r_1 + r_2 = r$ also

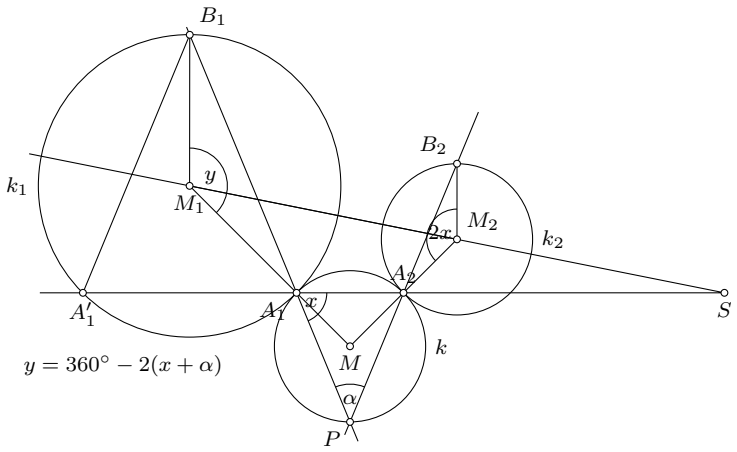
$$(r_1 - r_2)x = r(r - 3r')$$

Hieraus sowie aus (1) (und $x \geq 0$, $r > 0$) folgt $r - 3r' \geq 0$, also $r' \leq \frac{r}{3}$, w. z. b. w.

Aufgabe 311242:
Auf einem Kreis k seien A_1, A_2 und P drei paarweise verschiedene Punkte; die Strecke A_1A_2 sei kein Durchmesser von k.
Für $i = 1; 2$ sei jeweils k_i ein Kreis, der k von außen in A_i berührt, und B_i sei der von A_i verschiedene Schnittpunkt des Kreises k_i mit der Geraden durch P und A_i. Der Mittelpunkt von k_i sei M_i.
Man beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets die durch A_1, A_2 bzw. durch B_1, B_2 bzw. durch M_1, M_2 gelegten Geraden a bzw. b bzw. m entweder alle drei genau einen Punkt gemeinsam haben oder alle drei zueinander parallel sind.

Lösung von Kornkreis:
M sei der Mittelpunkt von k. Mit XY sei im Folgenden die Strecke durch die Punkte X, Y bezeichnet und mit Gerade XY die Gerade durch X, Y. Alle Winkel hier sind orientierte Winkel.
Wir setzen voraus, dass M und P unterhalb von A_1A_2 liegen; der Beweis geht analog, wenn diese Einschränkung fallen gelassen wird.

Bezeichne den Peripheriewinkel $\measuredangle A_2PA_1$ mit α. Wegen $\measuredangle A_2MA_1 = 2\alpha$ (Zentriwinkel) und $|MA_1| = |MA_2|$, gilt $\measuredangle A_1A_2M = \measuredangle MA_1A_2 = 90° - \alpha$. Wir bezeichnen $\measuredangle PA_1A_2 = x$ und haben $\measuredangle PA_1M = x - (90° - \alpha)$ sowie $\measuredangle MA_2P = (180° - x - \alpha) - (90° - \alpha) = 90° - x$. Weiterhin ist $\measuredangle B_1A_1M_1 = \measuredangle PA_1M$ und $\measuredangle M_2A_2B_2 = \measuredangle MA_2P$. Da nun M_1B_1 und M_1A_1 sowie M_2B_2 und M_2A_2 jeweils gleich lang sind, gilt $\measuredangle A_1M_1B_1 = 180° - 2\measuredangle PA_1M = 360° - 2(x + \alpha)$ und $\measuredangle B_2M_2A_2 = 180° - 2\measuredangle MA_2P = 2x$.



Für $x = 90° - \alpha/2$, d. h. wenn die Gerade MP senkrecht auf A_1A_2 steht (P ist dann sozusagen unterer Scheitelpunkt von k), so gilt $\measuredangle A_1M_1B_1 = 180° - \alpha = \measuredangle B_2M_2A_2$, d. h. die Drehwinkel von B_1 und B_2 bezüglich der Strecken M_1A_1 bzw. M_2A_2 sind gleich; B_1 und B_2 sind hier obere Scheitelpunkte der Kreise k_1 bzw. k_2, siehe Skizze.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Kreise k_1 und k_2 denselben Radius haben. Für $x = 90° - \alpha/2$ folgt direkt, dass B_1B_2 parallel zu A_1A_2 ist.
Wenn sich x um Δx ändert, indem P seine Position ändert, so ändert sich der Drehwinkel von B_1 um $-2\Delta x$ und der Drehwinkel von B_2 um $+2\Delta x$, insbesondere bleibt B_1B_2 parallel zu A_1A_2.

Wenn die Radii von k_1 und k_2 gleich sind, ist aber auch A_1A_2 parallel zu M_1M_2, da MM_1 und MM_2 dieselbe Länge haben und parallel zu MA_1 bzw. MA_2 liegen, die ebenfalls gleichlang sind. Daraus folgt die Parallelität der Geraden A_1A_2, M_1M_2, B_1B_2.

Seien nun die Kreise k_1 und k_2 von verschiedenem Radius r_1 bzw. r_2. Offensichtlich sind die Geraden M_1M_2 und A_1A_2 dann nicht mehr parallel und schneiden sich in einem Punkt S. Der zweite Schnittpunkt der Gerade A_1A_2 mit k_1 sei mit A_1' bezeichnet. Es gilt $\measuredangle A_1A_1'M_1 = \measuredangle SA_2M_2$, da beide Winkel gleich $\measuredangle MA_1A_2$ sind. Folglich sind die Strecken $A_1'M_1$ und A_2M_2 zueinander parallel. Des Weiteren haben wir $\measuredangle A_1A_1'B_1 = 360° - (2\cdot(90°-\alpha)+2\cdot(x+\alpha)) = 180° - \alpha = \measuredangle SA_2B_2$, d. h. $A_1'B_1$ und A_2B_2 sind parallel zueinander.

Nach dem Strahlensatz haben wir nun $\frac{|SA_2|}{r_2} = \frac{|SA_1'|}{r_1}$. Man sieht leicht, dass die Gerade B_1B_2 nie parallel zur Gerade A_1A_2 ist, bezeichne den Schnittpunkt mit S'. Nach dem Strahlensatz ist $\frac{|S'A_2|}{\lambda r_2} = \frac{|S'A_1'|}{\lambda r_1}$, wobei $\lambda r_1 = |A_1'B_1|$, $\lambda r_2 = |A_2B_2|$ und $\lambda \neq 0$ eine Konstante ist, die vom Winkel $\measuredangle A_1A_1'B_1$ abhängt.

Kombination beider Strahlensatzgleichungen ergibt $\frac{|SA_2|}{|SA_1'|} = \frac{|S'A_2|}{|S'A_1'|} = \frac{|SA_2|+d}{|SA_1'|+d}$, wobei d den (vorzeichenrichtigen) Abstand von S und S' bezeichnet. Man sieht leicht, dass diese Gleichung nur gelten kann, wenn $d = 0$ oder $|SA_2| = |SA_1'|$ gilt. Letzteres ist nicht der Fall, weshalb $d = 0$ und damit $S = S'$ folgt, d. h. alle drei Geraden A_1A_2, M_1M_2, B_1B_2 schneiden sich im selben Punkt S.

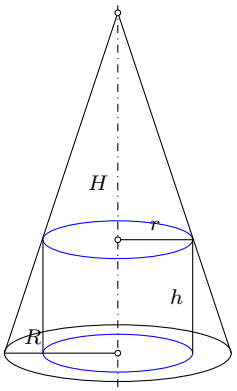
Insgesamt haben wir bewiesen, dass A_1A_2, M_1M_2, B_1B_2 sich entweder im selben Punkt S schneiden oder zueinander parallel liegen.

VII.IV Raumgeometrie

I Runde 1

Aufgabe V01201:
Ein Dreher bekam ein kegelförmiges Stück Stahl mit dem Auftrag, einen Zylinder daraus abzudrehen, wobei möglichst wenig Werkstoff verlorengehen sollte.
Der Dreher dachte über die Form des Zylinders nach:
Sollte er einen hohen schmalen oder einen dicken kurzen Zylinder drehen? Können Sie ihm raten, was er tun sollte?

Lösung von Steffen Polster:



(1) Für das Volumen des Zylinders mit dem Grundkreisradius r und der Höhe h gilt

$$V = r^2\pi h$$

(2) Der Zusammenhang von Kegel- und Zylinderabmessungen ergibt sich aus dem Strahlensatz zu

$$h : (R - r) = H : R$$

Damit kann h durch R, H und r ausgedrückt werden, und V wird eine Funktion der einen unabhängigen Variablen r:

$$V(r) = r^2\pi\frac{H}{R}(R - r) = \pi r^2 \cdot H - \pi\frac{H}{R}r^3$$

(3,4) Für die erste Ableitung bezüglich r wird

$$V'(r) = 2\pi rH - 3 \cdot r^2\pi\frac{H}{R} = r\pi\frac{H}{R}(2R - 3r)$$

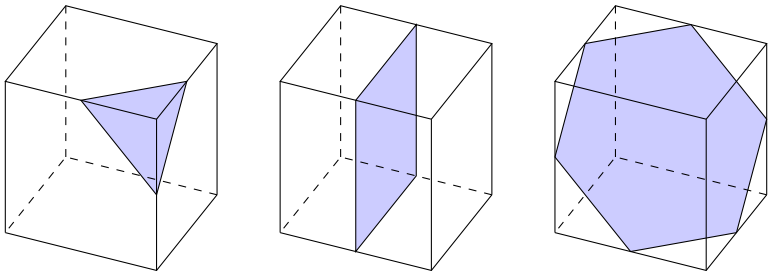
und aus $r\pi\frac{H}{R}(2R-3r)=0$ folgt $r=\frac{2}{3}R$. Da die 2. Ableitung für dieses r negativ wird, liegt ein relatives Maximum. An den Rändern gilt $V(r=0)=0$ und $V(r=R)=0$. Damit ist das relative Maximum zugleich das absolute Maximum. Als maximales Volumen für den Zylinder erhält man

$$V=V\left(\frac{2}{3}R\right)=\frac{4}{27}\pi R^2H.$$

mit der Höhe $h=\frac{H}{3}$. Es sollte ein eher kurzer Zylinder gedreht werden.

Aufgabe 011113:
Kann man einen Würfel durch eine Ebene so teilen, dass der erhaltene Schnitt ein a) gleichseitiges Dreieck,
b) Quadrat,
c) regelmäßiges Fünfeck,
d) regelmäßiges Sechseck
ist? Die Behauptungen sind zu beweisen!

Lösung von Eckard Specht:
Die möglichen Schnitte sind in den folgenden Bildern dargestellt:



a) Ja. Jeder Schnitt, der entlang dreier zusammentreffender Kanten gleiche Strecken abschneidet, erzeugt ein gleichseitiges Dreieck als Schnittfläche. Dies ist leicht einzusehen, da alle durch den Schnitt entstehenden rechtwinkligen Dreiecke auf den Würfeloberflächen kongruent sind (SWS), mithin auch die Hypotenusen.

b) Ja. Jeder Schnitt parallel zu einer Würfelfläche ergibt ein Quadrat, welches der Würfelfläche kongruent ist.

c) Nein. Wäre eine Schnittfläche eines Würfels bei einem ebenen Schnitt ein reguläres Fünfeck, so würden je zwei verschiedene Kanten des Fünfecks zu zwei verschiedenen Seitenflächen des Würfels gehören (denn ansonsten läge das ganze Fünfeck auf einer Seitenfläche, was nicht geht).

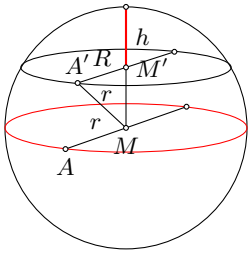
Zwei verschiedene dieser fünf Seitenflächen dürften aber nicht parallel sein, weil sich (die Verlängerungen von) je zwei verschiedenen Fünfeckskanten in einem Punkt schneiden. Da es aber im Würfel nur sechs Seitenflächen gibt, von denen je zwei gegenüberliegende parallel sind, findet man keine fünf paarweise nichtparallelen Seitenflächen. Es gibt also keinen solchen ebenen Schnitt.

d) Ja. Der Schnitt trifft - wie im Bild gezeigt - die Würfelkanten in deren Mittelpunkten. Alle Seiten des sechseckigen Schnitts haben offensichtlich die Länge $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, wenn a die Länge einer Kante bezeichnet.

Der angegebene Schnitt ist auch tatsächlich eben, da alle Abstände der Eckpunkte des Sechsecks vom oberen–rechten–vorderen (oder unteren–linken–hinteren) Eckpunkt des Würfels untereinander gleich, nämlich $\frac{\sqrt{5}}{2}a$ sind.

Aufgabe 021111:
Zu dem „Haus des Lehrers“ in Berlin gehört auch ein Kongressgebäude mit einem Saal, der von einer Aluminiumkuppel überdeckt wird. Die Kuppel hat die Form einer Kugelkalotte.
Der Basiskreis hat einen äußeren Durchmesser von 31,2 m, die Kuppel (Kalotte) eine Höhe von 9,6 m.
Berechnen Sie:
a) den Radius r der Kugel,
b) die Fläche der Kugelkalotte und
c) das Gewicht der Aluminiumhaut, mit der die Kuppel abgedeckt wird! (Stärke der Aluminiumhaut $s = 1{,}4$ mm, Wichte des Aluminiums $\gamma = 2{,}7\frac{p}{cm^3}$.)

Lösung von Eckard Specht:

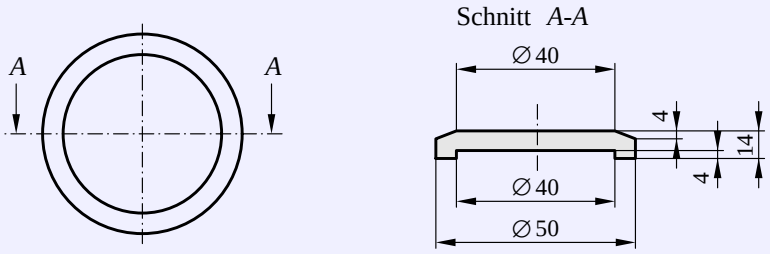


Wie im Bild dargestellt ist rot der Basiskreis mit Radius $R = \frac{1}{2} \cdot 31{,}2$ m $= 15{,}6$ m und Mittelpunkt M' und Höhe $h = 9{,}6$ m. A' sei ein Punkt auf dem Basiskreis und der Kugeloberfläche. M sei der Mittelpunkt der Kugel. Dann gilt im rechtwinkligen Dreieck $\triangle MM'A'$:

$$A'M^2 = r^2 = MM'^2 + A'M'^2 = (r-h)^2 + R^2 \qquad \text{(Satz des Pythagoras)}$$

a) Damit erhalten wir $r = \frac{h^2+R^2}{2h} = 17{,}5$ m.
b) Die Fläche der Kugelkalotte beträgt $O = \pi(R^2 + h^2) = 1054$ m^2.
c) Das Gewicht der Aluminiumhaut beträgt $G = \gamma V = \gamma O s = 3{,}98$ Mp.

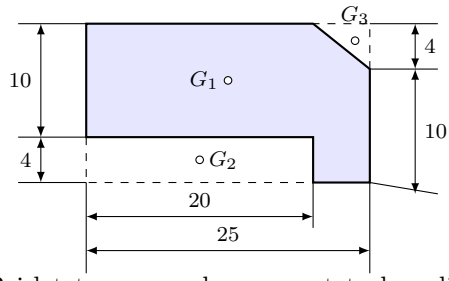
Aufgabe 021112:
Im VEB Wälzlagerwerk „Josef Orlopp“ wurden Bunsenbrennerfüße früher aus einer zylindrischen Scheibe ($d = 50$ mm, $h = 14$ mm) gedreht. Nach einem Verbesserungsvorschlag sollen die Füße in der abgebildeten Form gegossen werden.



a) Wie groß ist dabei die prozentuale Materialeinsparung?
b) Wieviel Bunsenbrennerfüße lassen sich aus dem Material herstellen, das bei der Anfertigung eines Klassensatzes (30 Stück) eingespart wird (vgl. Abbildung)?

Lösung von Eckard Specht:
Hier muss zunächst das Volumen desjenigen Rotationskörpers berechnet werden, der entsteht, wenn die grau abgebildete Fläche um die Symmetrieachse (d.i. die linke Kante im Bild) rotiert.
Das Volumen V eines Körpers, der durch Drehung eines ebenen Gebietes um eine dieses Gebiet nicht schneidende Achse entsteht, ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt F dieses Gebietes mit dem

Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt dieses Gebietes bei der Drehung beschreibt.



Die graue Fläche ist dabei die Differenz aus einem großen Rechteck mit den Maßen 25 mm × 14 mm und einem kleinen Rechteck (links unten, 20 mm × 4 mm) sowie einem Dreieck (rechts oben, Fläche 10 mm^2).
Die Abstände der Schwerpunkte G_1 (großes Rechteck), G_2 (kleines Rechteck) und G_3 (Dreieck) betragen: $s_1 = 12{,}5$ mm, $s_2 = 10$ mm und $s_3 = 23{,}33$ mm.

Bei letzterem wurde ausgenutzt, dass die Schwerpunktkoordinaten eines Dreiecks gleich dem arithmetischen Mittel der jeweiligen Eckpunktkoordinaten sind. Damit erhalten wir:

$$V = 2\pi(350mm^2 \cdot 12{,}5mm - 80mm^2 \cdot 10mm - 10mm^2 \cdot 23{,}33mm) = 20996mm^3$$

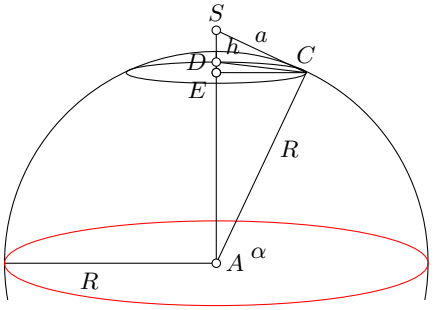
a) Gegenüber der zylindrischen Scheibe vom Volumen $V_0 = \frac{1}{4}d^2h$ =1 27489 mm^3 ergibt das eine Materialeinsparung von ca. 23,6%.
b) Pro Stück werden $V_0 - V = 6493$ mm^3 eingespart, also insgesamt 194790 mm^3.
Bezogen auf V_0 entspricht das einer Menge von ca. 7 Bunsenbrennerfüßen.

Aufgabe 031111:
Der 352 m hohe Antennenmast des Deutschlandsenders in Zehlendorf, Kreis Oranienburg, Bezirk Potsdam, ist zur Zeit das höchste Bauwerk Europas.
a) Wie groß ist die Fläche, die man von der Spitze des Mastes bei klarem Wetter überblicken kann? (Bei der Berechnung werden Erhebungen im Gelände vernachlässigt.)
b) Wie groß ist der prozentuale Fehler, der entsteht, wenn man in die Formel für die Kugelkappe $M = 2\pi Rh$ nicht die richtige Größe für die Höhe des Kugelabschnittes, sondern die Höhe des Antennenmastes einsetzt?
Warum ist der Fehler sehr gering? (Radius der Erde R = 6 370 km.)

Lösung von Rainer Sattler:
a) Um zunächst die Fläche $M = 2\pi RH$ der überschaubaren Kugelkappe zu berechnen, findet man zunächst mittels des Satzes des Pythagoras für die Sichtweite a den Ausdruck

$$a = \sqrt{/R+h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2}$$

Dies gilt, da das Dreieck $\triangle ACS$ rechtwinklig ist, denn die Sichtgerade kann als Tangente an den Kreis (die Erde) angesehen werden.



Mit E und C als Punkte auf der Grundseite der Kugelkappe sowie D als Punkt, an dem der Antennenmast die Erde berührt, sei H die Länge der Strecke DE. Dann gilt $\cos\alpha = \frac{a}{h+R} = \frac{h+H}{a}$ (die Dreiecke $\triangle ACS$ und $\triangle ECS$ sind ähnlich aufgrund eines gemeinsamen Winkels und des in beiden Dreiecken vorhandenen rechten Winkels) und damit auch

$$H = \frac{a^2}{h+R} - h = \frac{2R+h^2}{h+R} - h$$

Damit erhält man als Ergebnis

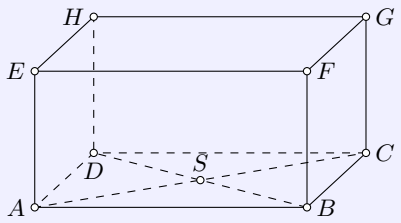
$$M = 2\pi RH = 2\pi R\left(\frac{2RH+h^2}{h+R} - h\right)$$

Für das gegebene Beispiel ist also $H \approx 351{,}98$ m und damit $M \approx 1{,}4088 \cdot 10^{10} m^2$. b) h ist 100,005682 % von H, die Abweichung der Fläche ist also 0,005682%. Sie ist für $h \ll R$ deshalb so gering weil dann

$$H = \frac{2Rh+h^2}{h+R} - h \approx \frac{2Rh}{R} - h = h$$

gilt.

Aufgabe 041213:
Gegeben sei ein Quader $ABCDEFGH$ mit den Kanten $\overline{AD}$ und $\overline{AE}$ von der Länge a und der Kante $\overline{AB}$ von der Länge $a\sqrt{3}$. Der Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche $ABCD$ sei S.



a) Es ist der Radius der durch die Punkte A, D, H, E und S gehenden Kugel durch a auszudrücken.

b) Es ist zu beweisen, dass die durch die Punkte S, F und G gehende Ebene die Kugel berührt.

Lösung von Rainer Müller:
Wir führen ein Koordinatensystem mit A als Ursprung, AB als x-, AD als y- und AE als z-Achse ein. Dann ist

$$A = (0,0,0),\ B = (\sqrt{3}a,0,0),\ C = (\sqrt{3}a,a,0),\ D = (0,a,0),$$
$$E = (0,0,a),\ F = (\sqrt{3}a,0,a),\ G = (\sqrt{3}a,a,a),\ H = (0,a,a),$$
$$S = \frac{1}{4}(A+B+C+D) = (\sqrt{3}a/2,a/2,0).$$

a) Eine Kugel mit Mittelpunkt $M = (m_x,m_y,m_z)$ und Radius $r \geq 0$ hat die Gleichung $(x-m_x)^2 + (y-m_y)^2 + (z-m_z)^2 = r^2$. Setzt man die Punkte ein, die auf der Kugel liegen sollen, erhält man ein Gleichungssystem für die Unbekannten m_x,m_y,m_z und r. Dass in der Aufgabenstellung mehr Punkte genannt werden, als zur eindeutigen Festlegung der Kugel notwendig sind, ist wohl als Aufforderung zu verstehen, statt direkter Lösung des Systems erst festzustellen, dass offensichtlich $m_y = m_z = a/2$ gelten muss (der Schnittkreis der Kugel mit der Ebene durch A,D,E und H soll diese vier Punkte enthalten). m_x und r berechnen wir daraus, dass A und S auf der Kugel liegen sollen:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (0-m_x)^2 + (0-\frac{1}{2}a)^2 + (0-\frac{1}{2}a)^2 &=& r^2 \\ (\frac{1}{2}\sqrt{3}a - m_x)^2 + (\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}a)^2 + (0-\frac{1}{2}a)^2 &=& r^2 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} m_x^2 + \frac{1}{2}a^2 &=& r^2 \\ m_x^2 - \sqrt{3}am_x + a^2 &=& r^2 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} m_x^2 + \frac{1}{2}a^2 &=& r^2 \\ -\sqrt{3}am_x + \frac{1}{2}a^2 &=& 0 \end{array}\right\}$$

(subtrahiere die obere Gleichung von der unteren). Aus der zweiten Gleichung des letzten Paares folgt $m_x = \frac{1}{6}\sqrt{3}\,a$ und somit

$$r = \sqrt{m_x^2 + \frac{1}{2}a^2} = \frac{\sqrt{21}}{6}a.$$

b) Eine Ebene berührt eine Kugel genau dann, wenn der Abstand des Kugelmittelpunktes von der Ebene gleich dem Kugelradius ist. Ein Normalenvektor der Ebene durch S,F und G ist

$$n := (G-F) \times (S-F) = (0,a,0) \times (-\sqrt{3}a/2,a/2,-a) = \frac{1}{2}a^2(-2,0,\sqrt{3}).$$

Da F in der Ebene liegt, ist der Abstand eines Punktes P von der Ebene gleich $\left|\,(P-F)\cdot n/|n|\,\right|$. Speziell für den oben berechneten Kugelmittelpunkt $M=(\frac{1}{6}\sqrt{3},\frac{1}{2},\frac{1}{2})a$ ist der Abstand

$$\left|\frac{(\frac{1}{6}\sqrt{3}-\sqrt{3},\frac{1}{2},\frac{1}{2}-1)\cdot(-2,0,\sqrt{3})\frac{1}{2}a^3}{\frac{\sqrt{7}}{2}a^2}\right| = \left|\frac{\frac{7}{6}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}a^3}{\frac{\sqrt{7}}{2}a^2}\right| = \frac{\sqrt{21}}{6}a = r.$$

Also berührt die Ebene die Kugel.

Aufgabe 051212:
Vier kongruente Kugeln berühren eine Ebene auf ein und derselben Seite. Ferner berührt jede Kugel zwei der anderen, und jede der Kugeln berührt einen und denselben geraden Kreiskegel, dessen Grundkreis in der gegebenen Ebene liegt.

Es ist der Radius des Grundkreises des Kegels in Abhängigkeit vom Radius der Kugeln und von der Höhe des Kegels darzustellen (Fallunterscheidung).

Lösung von Manuela Kugel:
Mit den Bezeichnungen im Bild und $x=\overline{X_1M}$, $h=\overline{MS}$, $y=\overline{AY}$, $z_1=\overline{M_1A}$, $z_2=\overline{AB}$ und dem Radius

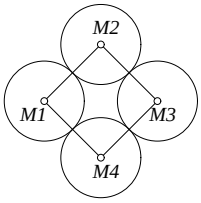


Abb. 051311a

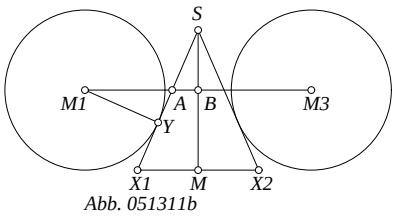


Abb. 051311b

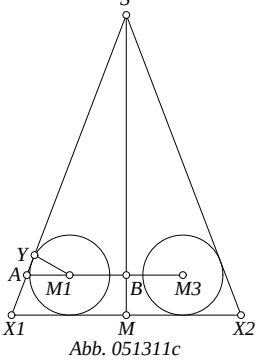


Abb. 051311c

r der Kugeln müssen folgende Beziehungen gelten:

(1) $\overline{M_1M_3}=2\cdot\sqrt{2}r$ (die Mittelpunkte der Kugeln bilden ein Quadrat wie in Abbildung a) dargestellt, wenn sie sämtliche denselben Kegel berühren)

(2) $\frac{x}{h}=\frac{y}{r}\Rightarrow rx=hy$ (ähnliche Dreiecke $\triangle X_1MS$ und $\triangle AYM_1$)

(3) $y=\sqrt{z_1^2-r^2}$ (Satz des Pythagoras)

(4) $z_1+z_2=\frac{\overline{M_1M_3}}{2}=\sqrt{2}r$ für Bild b) bzw. $z_2-z_1=\frac{\overline{M_1M_3}}{2}=\sqrt{2}r$ für Bild c) $\Rightarrow z_1=\pm(\sqrt{2}r-z_2)$, wobei + im Fall b) und − im Fall c) gilt. Dann gilt aber in beiden Fällen: $z_1^2=2r^2+z_2^2-2\sqrt{2}\cdot r\cdot z_2$

(5) $\frac{z_2}{x}=\frac{h-r}{h}\Rightarrow z_2=\frac{h-r}{h}\cdot x$ (Strahlensatz)

Nun werden die Gleichungen (1) bis (4) ineinander eingesetzt:

$$\begin{aligned}
rx &= h \cdot \sqrt{z_1^2 - r^2} \\
rx &= h \cdot \sqrt{2r^2 + z_2^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot z_2 - r^2} \\
rx &= \sqrt{h^2 r^2 + h^2 z_2^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot h^2 \cdot z_2} \\
rx &= \sqrt{h^2 r^2 + (h-r)^2 \cdot x^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot h \cdot (h-r) \cdot x} \\
r^2 x^2 &= h^2 r^2 + (h-r)^2 \cdot x^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot h \cdot (h-r) \cdot x \\
0 &= h^2 r^2 + (h^2 - 2hr) \cdot x^2 - 2\sqrt{2} \cdot r \cdot h \cdot (h-r) \cdot x \\
0 &= x^2 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{r \cdot (h-r)}{h-2r} \cdot x + \frac{hr^2}{h-2r} \\
x_{1,2} &= \frac{\sqrt{2} r \cdot (h-r)}{h-2r} \pm \sqrt{\frac{2r^2 \cdot (h-r)^2}{(h-2r)^2} - \frac{hr^2}{h-2r}} \\
x_{1,2} &= \frac{\sqrt{2} r \cdot (h-r)}{h-2r} \pm \frac{r}{h-2r} \cdot \sqrt{2 \cdot (h-r)^2 - h \cdot (h-2r)} \\
x_{1,2} &= \frac{r}{h-2r} \cdot \left(\sqrt{2}(h-r) \pm \sqrt{h^2 + 2r^2 - 2hr} \right)
\end{aligned}$$

Der Fall mit dem Plus vor der Wurzel stellt die Lösung für den Fall des Berührens der Kugeln von außen und das Minus für innen dar.

Aufgabe 061211:
Die Cheops-Pyramide in Ägypten hat die Form einer Pyramide mit der quadratischen Grundfläche $ABCD$. Die Spitze S liegt 140 m über dem Mittelpunkt M der Grundfläche. Die Seitenlänge der Grundfläche beträgt 231 m. Wir wollen einmal annehmen, dass folgendes möglich ist:

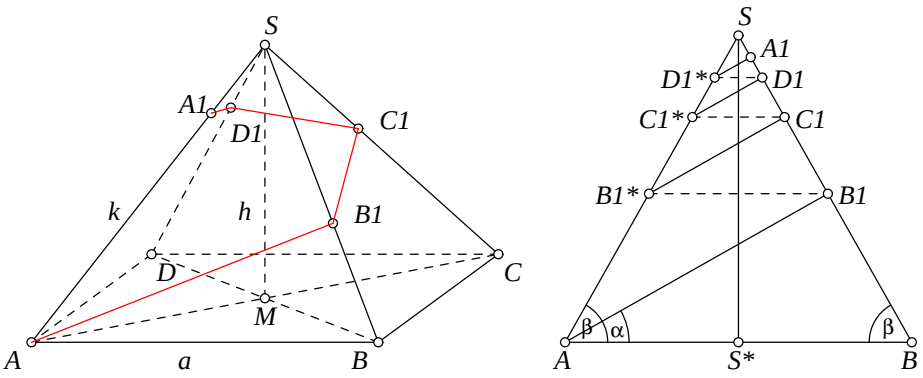
Ein Tourist besteigt die Pyramide derart, dass er von A ausgehend auf geradem Wege senkrecht zur Kante BS gelangt. Nachdem er diese Kante im Punkt B_1 erreicht hat, geht er weiter auf geradem Wege senkrecht zur Kante CS bis zu dieser Kante im Punkt C_1, von dort entsprechend weiter zum Punkt D_1 auf Kante DS und zum Punkt A_1 auf der Kante AS.

a) Wie lang wäre der von ihm von A bis zum Punkt A_1 zurückgelegte Weg?

b) In welcher Höhe über der Grundfläche befände sich der Tourist im Punkt A_1?

c) Welche Winkel würden die geraden Teilwege mit der Ebene der Grundfläche bilden?

Lösung von Gerd Wachsmuth:



- Aus der Höhe $h := \overline{MS} = 140$ m und der Länge der Grundfläche $a := \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 231m$ kann man leicht die Länge der Kanten $k := \overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS}$ ausrechnen (die Dreiecke AMS und ABC sind rechtwinklig; dadurch kann jeweils der Satz des Pythagoras verwendet werden):

$$\begin{aligned} k = \overline{AS} &= \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{MS}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot \overline{AC}\right)^2 + h^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2) + h^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (a^2 + a^2) + h^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + h^2} = 215{,}13m \end{aligned}$$

  Gesucht ist nun die Weglänge s (wobei $\gamma = \angle ASB$):

$$\begin{aligned} s &= \overline{AB_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{C_1D_1} + \overline{D_1A_1} \\ &= \overline{AS}\sin\gamma + \overline{B_1^*S}\sin\gamma + \overline{C_1^*S}\sin\gamma + \overline{D_1^*S}\sin\gamma \\ &= \sin\gamma \cdot (k + \overline{B_1S} + \overline{C_1S} + \overline{D_1S}) \end{aligned}$$

  mit

$$\begin{aligned} \overline{B_1S} &= k \cdot \cos\gamma, \\ \overline{C_1S} &= \overline{B_1S} \cdot \cos\gamma = k \cdot \cos^2\gamma, \\ \overline{D_1S} &= \overline{C_1S} \cdot \cos\gamma = k \cdot \cos^3\gamma. \\ \overline{A_1S} &= \overline{D_1S} \cdot \cos\gamma = k \cdot \cos^4\gamma. \end{aligned}$$

  Setzt man dies ineinander ein, erhält man:

$$s = k \cdot \sin\gamma \cdot (1 + \cos\gamma + \cos^2\gamma + \cos^3\gamma). \tag{VII.1}$$

  Nun stellen wir fest, dass die Dreiecke ABB_1 und AS^*S zueinander ähnlich sind (beide sind rechtwinklig und haben den Winkel β gemeinsam: $\beta = \angle BAS = \angle ABS$). Damit lässt sich $sin\alpha$ wie folgt berechnen:

$$\sin\alpha = \overline{AS^*} : \overline{AS} = a : 2k$$

  ($\Rightarrow \alpha = 32{,}47°$). Und für $cos\alpha$ ergibt sich mit $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ folgendes:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - a^2 : 4k^2}$$

  $\sin\gamma$ lässt sich aus $\overline{AB}$ und $\overline{AS}$ ausrechnen (mit dem Sinussatz): $\sin\gamma : sin\beta = \overline{AB} : \overline{AS} = a : k$, wobei $\sin\beta = \cos\alpha$ gilt, also:

$$\sin\gamma = \frac{a}{k} \cdot \sqrt{1 - a^2 : 4k^2} \tag{VII.2}$$

  Analog ergibt sich für $\cos\gamma$:

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{a^2}{k^2} \cdot \left(1 - \frac{a^2}{4k^2}\right)} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{k^2} + \frac{a^4}{4k^4}} \tag{VII.3}$$

  Setzt man (1), (3) und (4) in (2) ein erhält man das Ergebnis, dass der Tourist 327 m zurücklegen muss. Zur Kontrolle seien die Teilstrecken auch angegeben: $\overline{AB_1} = 195m$, $\overline{B_1C_1} = 83m$, $\overline{C_1D_1} = 35m$, $\overline{D_1A_1} = 15m$.

- Für die gesuchte Höhe h_a gilt mit den Bezeichnungen aus dem 1. Bild: $h_a : h = \overline{A_1A} : \overline{AS}$. Daraus folgt nun:

$$h_a = h \cdot \frac{\overline{A_1A}}{k} = \frac{h \cdot (k - \overline{A_1S})}{k} = \frac{h \cdot (k - k \cdot \cos^4\gamma)}{k} = h \cdot (1 - \cos^4\gamma) = 135{,}50m$$

- Die geraden Teilwege bilden mit der Grundfläche alle denselben Winkel. Dazu wird die Höhe analog zur vorigen Teilaufgabe bzgl. B_1 benötigt:

$$h_b \quad = \quad h \cdot \frac{\overline{B_1B}}{k} = \frac{h \cdot (k - \overline{B_1S})}{k} = \frac{h \cdot (k - k \cdot \cos\gamma)}{k} = h \cdot (1 - \cos\gamma) = 80{,}70m$$

Nun kann der Sinus des gesuchten Winkels wie folgt ausgedrückt werden:

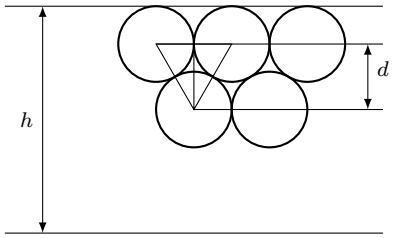
$$\varepsilon \quad = \quad \arcsin\left(h_b : \overline{AB_1}\right) = \arcsin\left(\frac{h \cdot (1 - \cos\gamma)}{k \cdot \sin\gamma}\right)$$

Man erhält nach Einsetzen: $\varepsilon = 65{,}5°$.

Aufgabe 061213:
In einer quaderförmigen Schachtel mit den inneren Abmessungen 10 cm, 10 cm und 1 cm sind gleich große Kugeln von 1 cm Durchmesser einzulegen. Jemand behauptet, man könne mehr als 105 dieser Kugeln in der Schachtel unterbringen.

Stellen Sie fest, ob diese Behauptung richtig ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Neben der Möglichkeit, 100 Kugeln zu je 10 in 10 Reihen zu legen, gibt es auch die Möglichkeit, in einer Reihe 10 Kugeln, in der nächsten 9 Kugeln, dann wieder 10 Kugeln usw. unterzubringen. Dabei ist der Abstand d der Geraden durch die Mittelpunkte der ersten von der zweiten Kugelreihe $d = r \cdot \sqrt{3}$, wobei r der Kugelradius ist; denn der Abstand der Geraden durch die Mittelpunkte ist gleich der Länge einer Höhe eines Dreiecks, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte dreier benachbarter Kugeln sind (siehe Bild). Ein derartiges Dreieck ist gleichseitig und hat die Seitenlänge $2r$.



Bezeichnen wir mit n die Anzahl der Kugelreihen, so gilt für den Abstand h der Tangentialebenen bei der oben beschriebenen Anordnung der Kugeln

$$h \quad = \quad 2r + (n-1)r\sqrt{3}.$$

Für $n = 11$ folgt $\left(\text{wegen } r = \frac{1}{2}\right) \quad h < 10$.

Man kann daher 11 Reihen in der Schachtel unterbringen. Die Kugeln lassen sich so anordnen, dass 6 Reihen mit je 10 und 5 Reihen mit je 9 Kugeln besetzt sind, also 105 Kugeln in der Schachtel liegen. Dabei liegen in den 'äußeren' Reihen jeweils 10 Kugeln. Ersetzt man nun eine der Reihen zu 9 Kugeln durch eine mit 10 Kugeln, so vergrößert sich der Abstand

$$h \quad = \quad 2r + r(11-1)\sqrt{3} = 1 + 5 \cdot \sqrt{3}$$

auf

$$h' \quad = \quad 6r + 8r\sqrt{3} = 3 + 4\sqrt{3} < 3 + 4 \cdot 1{,}74 = 9{,}96.$$

Da $h' < 10$ ist, lassen sich 106 Kugeln in der Schachtel unterbringen. Die Behauptung ist also richtig.

Aufgabe 081213:
In einem regelmäßigen Tetraeder $ABCD$ schneiden sich die Höhen in einem Punkt S.

Berechnen Sie die Größe α des Winkels $\angle CSD$!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Man fällt das Lot AM von A auf die Tetraederkante CD. Dann ist $AM \simeq BM$, da beide Strecken Höhen einer Seitenfläche ein und desselben regelmäßigen Tetraeders sind. Weiter ist mit $\alpha = |\angle ASB|$, wenn BQ Tetraederhöhe ist,

$$\alpha = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - |\angle QMB|,$$

also

$$\cos\alpha = \cos(180^\circ - |\angle QMB|) = -\frac{QM}{MB} = -\frac{1}{3},$$

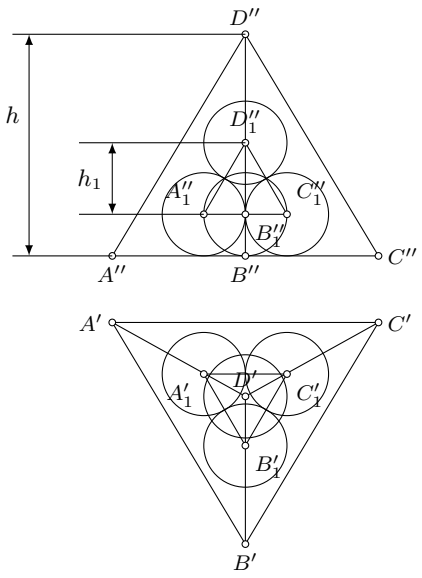
woraus $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ folgt. Zur Erinnerung eines Näherungswertes mit Hilfe einer Tafel benutze man die Relation $\alpha = 180^\circ - \arccos\frac{1}{3}$. Man findet dann $\cos(70{,}6^\circ) < \frac{1}{3} < \cos(70{,}5^\circ)$, so dass $180^\circ - 70{,}5^\circ = 109{,}5^\circ$ ein Näherungswert der geforderten Art ist.

Aufgabe 101212:
In ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge a seien 4 Kugeln von gleichem Radius so einbeschrieben, dass jede von ihnen die drei anderen von außen und drei der Tetraederflächen (von innen) berührt.

Ermitteln Sie den Radius r dieser Kugeln in Abhängigkeit von a!

Anmerkung: Für jedes reguläre Tetraeder gilt: Die vier Höhen des Tetraeders schneiden sich in einem Punkt und teilen einander im Verhältnis 3 : 1, wobei der längere Abschnitt von der Ecke bis zum Schnittpunkt reicht.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Da laut Aufgabe jede der Kugeln die drei anderen von außen berührt, bilden die Verbindungsstrecken der Mittelpunkte aller vier Kugeln die Kanten eines regulären Tetraeders T_1 mit der Kantenlänge $2r$.

Zu je drei der Kugeln existiert ferner genau eine Seitenfläche F des gegebenen Tetraeders T, die von diesen drei Kugeln berührt wird. Deren Mittelpunkte haben daher von F den Abstände r. Somit ist diejenige Seitenfläche F_1 des Tetraeders T_1, auf der die genannten drei Mittelpunkte liegen, parallel zu F im Abstand r.

Dreht man nun die gesamte Figur so um eine Höhe von T, dass eine andere Seitenfläche F' von T in die Lage F kommt, so kommt eine andere Seitenfläche F_1' von T_1 in die Lage F_1. Daher liegen entsprechende Höhen der beiden Tetraeder jeweils auf der gleichen Geraden. Infolgedessen fallen die Höhenschnittpunkte beider Tetraeder zusammen.

Bezeichnet man die Länge der Höhe des gegebenen Tetraeders mit h, die des in ihm liegenden Tetraeders mit h_1, so ist

$$d = \frac{h_1}{4} + r = \frac{h}{4} \tag{1}$$

der Abstand d des gemeinsamen Höhenschnittpunktes zu jeder Fläche des gegebenen Tetraeders. Nun gilt für die Länge h der Höhe eines regulären Tetraeders mit der Kantenlänge a die Beziehung $h = \frac{a}{3}\sqrt{6}$. Analog erhält man

$$h_1 = \frac{2r}{3}\sqrt{6} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$\frac{r}{6}\sqrt{6} + r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$$

also

$$r\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{a}{12}\sqrt{6}$$

woraus man

$$r = \frac{a \cdot 6 \cdot \sqrt{6}}{12 \cdot (6 + \sqrt{6})} = \frac{a(\sqrt{6} - 1)}{10}$$

erhält.

Aufgabe 131212:
Aus einem geraden Kreiskegelstumpf soll ein Kegelkörper herausgeschnitten werden, dessen Spitze der Mittelpunkt der (größeren) Grundfläche des Kegelstumpfes ist und dessen Grundfläche mit der Deckfläche des Kegelstumpfes zusammenfällt.

Man ermittle diejenigen Werte des Verhältnisses des Radius der Grund- zum Radius der Deckfläche des Kegelstumpfes, für die das Volumen des entstehenden Restkörpers sechsmal so groß ist wie das des ausgeschnittenen Kegelkörpers.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien r_1 bzw. r_2 die Radien der Grund- bzw. Deckfläche eines Kreiskegelstumpfes ($r_1 \geq r_2 > 0$) und h die Höhenlänge dieses Körpers. Dann gilt für das Volumen V, des betrachteten Körpers

$$V_1 = \frac{\pi}{3}h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

Ferner gilt für das Volumen v_2 des ausgeschnittenen Kegelkörpers

$$V_2 = \frac{\pi}{3}hr_2^2 \tag{1}$$

und daher für das Volumen V des Restkörpers

$$V = \frac{\pi}{3} h(r_1^2 + r_1 r_2) \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) entspricht $r_1 : r_2$ genau dann den Bedingungen der Aufgabe, wenn $6r_2^2 = r_1^2 + r_1 r_2$ und $r_1 \geq r_2 > 0$ oder, gleichbedeutend hiermit,

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \frac{r_1}{r_2} - 6 = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{r_1}{r_2} \geq 1$$

ist. Daher kann nur

$$\frac{r_1}{r_2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 2 \tag{3}$$

den Bedingungen der Aufgabe genügen. Durch Einsetzen in (3) und Rückwärtsschließen ergibt sich, dass für $\frac{r_1}{r_2} = 2$ tatsächlich $V = 6V_2$ ist.

Aufgabe 151212:
Man beweise, dass es zu drei beliebig ausgewählten Punkten einer Kugeloberfläche stets eine Halbkugel gibt, auf der diese drei Punkte liegen.

Bemerkung: Eine Halbkugel(-fläche) werde stets einschließlich ihrer Randlinie verstanden.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Durch den Mittelpunkt der Kugel und zwei der drei ausgewählten Punkte gibt es stets eine Ebene. Durch diese werden zwei Halbkugeln bestimmt, die die gesamte Kugeloberfläche überdecken.

Daher liegt der dritte ausgewählte Punkt in (wenigstens) einer dieser beiden Halbkugeln. Diese Halbkugel enthält aber (auf ihrer Randlinie) auch die beiden zuerst genannten Punkte.

Aufgabe 161214:
Auf der Oberfläche einer massiven Kugel, deren Durchmessergröße nicht angegeben ist, seien zwei Punkte A und B gegeben, die nicht auf ein und demselben Kugeldurchmesser liegen.

Man beschreibe eine Konstruktion des durch die Punkte A und B verlaufenden Großkreises. Zur Konstruktion auf der Kugeloberfläche darf nur ein Zirkel, zu eventuell notwendigen Hilfskonstruktionen in einer Ebene dürfen nur Zirkel und Lineal verwendet werden.

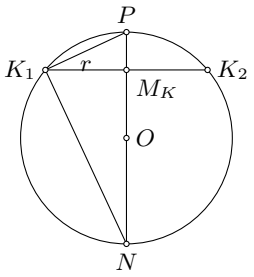
Hinweis: Unter einem Großkreis versteht man einen Kreis auf der Kugeloberfläche, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfällt. Durch zwei Punkte der Kugeloberfläche, die nicht auf ein und demselben Kugeldurchmesser liegen, verläuft genau ein Großkreis.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Im ersten Schritt wird der Durchmesser $2R$ der Kugel konstruiert.

a) Man zeichnet um einen beliebigen Punkt P der Kugeloberfläche mit einem beliebig, aber genügend klein gewählten Abstand s der Zirkelspitzen einen Kreis K und ermittelt den Radius r von K. Dazu werden auf K drei beliebige, voneinander verschiedene Punkte $P_1, P_2, P3$ markiert; die Abstände P_1P_2, P_2P_3 und P_3P_1 werden mit dem Zirkel auf der Kugel abgegriffen.

Mit diesen Abständen wird als ebene Hilfsfigur ein zu dem in der Ebene des Kreises K gelegenen Dreieck $P_1P_2P_3$ kongruentes Dreieck $P_1'P_2'P_3'$ und dessen Umkreis K' konstruiert. Sein Radius ist dann gleich r.

b) Durch P und den Kugelmittelpunkt O denke man sich eine Ebene ε gelegt.



In der in ε gelegenen Schnittfigur (siehe Abbildung), seien mit K_1, K_2 die Schnittpunkte des Kreises K mit ε, mit M_K der Mittelpunkt von K und mit N der zweite Schnittpunkt von der P_0 enthaltenden Geraden mit dem Schnittkreis bezeichnet.

Um eine Strecke der Länge R zu konstruieren, genügt es dann, wegen $PN = 2R$, als ebene Hilfskonstruktion ein zum Dreieck PK_1N kongruentes Dreieck zu konstruieren.

Man zeichnet eine Strecke mit der Länge $ST = r$. Auf ST wird in T die Senkrechte errichtet. Der Kreis mit dem Radius s um S schneidet dann wegen $s > r$ die Gerade t in zwei voneinander verschiedenen Punkten M_1, M_2. Die Senkrechte auf SM_1 in S schneidet t in einem Punkt Q. Wegen

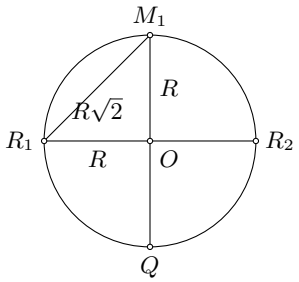
$$K_1P = SM_1 \qquad ; \qquad ST = K_1M_K \qquad ; \qquad \angle STM_1 = \angle K_1M_KP$$

gilt $\triangle K_1M_KP \cong \triangle STM_1$, also gilt $\angle SM_1T = \angle K_1PM_K$. daher und wegen $\angle M_1SQ = \angle PK_1N$ ist das Dreieck M_1SQ zum Dreieck PK_1N kongruent, und es gilt $M_1Q = 2R$.

2) Nun wird der Großkreis durch A und B konstruiert.

Da jeder Großkreis den Radius R hat, muss der Abstand der Zirkelspitzen, wenn man einen Großkreis auf der Kugel um einen beliebigen Punkt P der Kugelfläche konstruieren will, gleich $R\sqrt{2}$ sein.

Umgekehrt ist auch jeder Kreis, der mit $s = R\sqrt{2}$ um einen Punkt der Kugeloberfläche, konstruiert wird, ein Großkreis. Indem man auf der konstruierten Strecke M_1Q in der Ebene der Hilfekonstruktion die Mittelsenkrechte errichtet, und um den Halbierungspunkt von M_1Q einen Kreis mit dem Radius R beschreibt, der die Mittelsenkrechte in zwei Punkten R_1 und R_2 schneidet, erhält man die Strecke M_1R_1 mit $M_1R_1 = R\sqrt{2}$ (Abbildung), und es folgt durch Vergleich mit dem kongruenten Kreis in der oberen Abbildung, dass der um P mit dem Abstand $R\sqrt{2}$ der Zirkelspitzen auf der Kugeloberfläche konstruierte Kreis in der zu OP senkrechten Ebene durch O liegt, also der behauptete Großkreis ist.



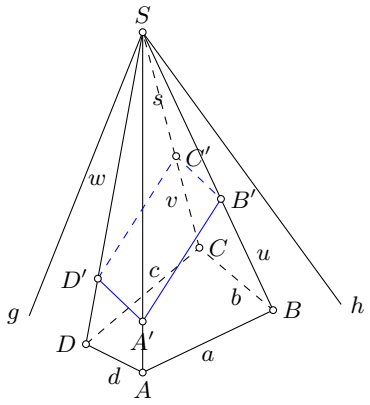
Auf der Kugel wird nun um A und B mit einem Abstand der Zirkelspitzen von $R\sqrt{2}$ je ein Großkreis konstruiert. Diese Kreise haben zwei Punkte gemeinsam; denn die Ebenen, in denen sie verlaufen, haben diejenige Gerade durch O gemeinsam, die sowohl zu OA als auch zu OB senkrecht ist.

Der Kreis um einen dieser Punkte mit dem Abstand der Zirkelspitzen von $s = R\sqrt{2}$ ist dann ebenfalls Großkreis und verläuft durch A und B. Damit ist die verlangte Konstruktion beschrieben.

Aufgabe 171213:
Über fünf Punkte A, B, C, D, S im Raum wird vorausgesetzt, dass A, B, C, D in einer Ebene ξ liegen; dass sie die Ecken eines konvexen Vierecks sind und dass S nicht in ξ liegt.

Es ist zu beweisen, dass dann zu der vierseitigen Pyramide $ABCDS$ eine Ebene existiert, die die Kanten SA, SB, SC bzw. SD in Punkten A', B', C' bzw. D' schneidet, die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Nach Voraussetzung ist $A \neq B$, und S liegt nicht auf der Geraden durch A, B. Daher gibt es genau eine Ebene α durch A, B, S. Ebenso gibt es eine Ebene β durch B, C, S, genau eine Ebene γ durch C, D, S und genau eine Ebene δ durch D, A, S. Für diese Ebenen gilt:

(1) α und ξ haben genau die Gerade a durch A, B gemeinsam,
β und ξ haben genau die Gerade b durch B, C gemeinsam,
γ und ξ haben genau die Gerade c durch C, D gemeinsam,
δ und ξ haben genau die Gerade d durch D, A gemeinsam.

Beweis: α und β gehen beide durch A und B. Wäre $\alpha = \xi$, so läge S auf ξ. Ebenso folgen die anderen Aussagen.

(2) α und β haben genau die Gerade u durch B, S gemeinsam,
β und γ haben genau die Gerade v durch C, S gemeinsam,
γ und δ haben genau die Gerade w durch D, S gemeinsam,
δ und α haben genau die Gerade d durch A, S gemeinsam.

Beweis: α und β gehen beide durch B und S. Wäre $\alpha = \beta$, so lägen A, B, C, S auf α, also wäre $\alpha = \xi$, und S läge auf ξ. Ebenso folgen die anderen Aussagen.

(3) α und γ haben genau eine Gerade gemeinsam,
β und δ haben genau eine Gerade gemeinsam,

Beweis: α und γ durch S. Wäre $\alpha = \gamma$, so lägen A, B, C, D, S auf α, also S auf ξ. Ebenso folgt die andere Aussage.

(4) g und h haben genau den Punkt S gemeinsam, folglich gibt es genau eine Ebene η durch g, h.
Beweis: g und h gehen durch S. Wäre $g = h$, so gingen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch g; nach (2) wäre $u = v = w = s = g$, also lägen A, B, C, D, S auf g.

(5) α und η haben genau die Gerade g gemeinsam,
β und η haben genau die Gerade h gemeinsam,
γ und η haben genau die Gerade g gemeinsam,
δ und η haben genau die Gerade h gemeinsam.

Beweis: α und η gehen durch g. Wäre $\alpha = \eta$, so ginge außer β, δ auch α durch h, nach (2) wäre $u = v = h$, also lägen A, B, S auf h. Ebenso folgen die anderen Aussagen.

(6) A liegt nicht η,
B liegt nicht η,
C liegt nicht η,
D liegt nicht η,

Beweis: Läge A auf η, so läge A nach (5) sowohl auf g als auch auf h; nach (4) wäre daher $A = S$. Ebenso folgen die anderen Aussagen.

(7) A und B liegen auf derselben Seite von η,
B und C liegen auf derselben Seite von η,
C und D liegen auf derselben Seite von η,

Beweis: Lägen A und B nicht auf derselben Seite von η, so ginge η nach (6) durch einen Punkt P zwischen A und B. Nach Voraussetzung wäre $P \neq S$; die Gerade durch P und S stimmte nach (5) mit g überein. Also läge P auf γ und folglich nach (1) auf c.

Das steht im Widerspruch dazu, dass die Geraden a und c sich wegen der Konvexität von $ABCD$ nicht zwischen A und B schneiden können. Ebenso folgen die anderen Aussagen.

Verschiebt man nun η parallel zu sich nach derjenigen Seite hin, auf der A,B,C und D liegen, jedoch um ein so kleines Stück, dass auch der zu η nächstgelegene unter den vier Punkten A, B, C, D noch nicht erreicht wird, so erhält man eine Ebene ε, die alle vier Strecken AS, BC, CS, DS in inneren Punkten schneidet.

Sind A', B', C', D' die Schnittpunkte, so gilt $A' \neq B'$, $B' \neq C'$, $C' \neq D'$, $D' \neq A'$, (da ABS, BCS, CDS, DAS nicht entartete Dreiecke sind) und weiter:

(8) Die Gerade durch A', B' ist parallel zu g,
Die Gerade durch B', C' ist parallel zu h,
Die Gerade durch C', D' ist parallel zu g,
Die Gerade durch D', A' ist parallel zu h,

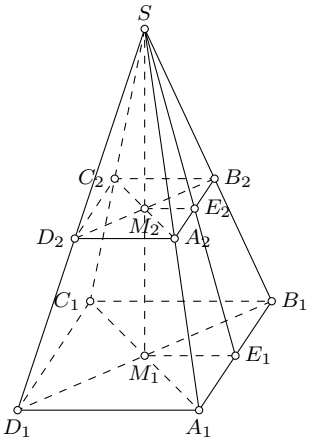
Beweis: Die Ebene α scheidet η nach (5) genau in g, also schneidet sie die zu η parallele Ebene ε genau in einer zu g parallelen Geraden. Auf dieser liegen A' und B'. Ebenso folgen die anderen Aussagen.

Mit (8) ist der verlangte Beweis geführt.

Aufgabe 201213:
Eine gerade Pyramide K_1 mit quadratischer Grundfläche werde durch einen zu ihrer Grundfläche parallelen ebenen Schnitt in eine Teilpyramide K_2 und einen Pyramidenstumpf K_3 zerlegt. Die Kantenlängen der Grundflächen von K_1 und K_2 seien a_1 bzw. a_2, die Volumina von K_2 bzw. K_3 seien V_2 bzw. V_3.

Man ermittle $a_1 : a_2$ so, dass $V_2 : V_3 = 2 : 3$ gilt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Die Ecken von K_1 und K_2 seien so mit $A_1, B_1, C_1, D_1,\ A_2, B_2, C_2, D_2,\ S$ bezeichnet wir die Abbildung angibt. Die Mittelpunkte (Diagonalenschnittpunkte) von $A_1B_1C_1D_1$ bzw. $A_2B_2C_2D_2$ seien M_1 bzw. M_2; die Mittelpunkte von A_1B_1 bzw. A_2B_2 seien E_1 bzw. E_2.

Dann sind $H_1 = SM_1$, $h_2 = SM_2$ die Höhenlängen von K_1 bzw. K_2M die Punkte S, M_2, M_1 liegen auf einer Geraden, ebenso S,E_2,E_1; es gilt $M_1E_1 \parallel M_2E_2$ sowie $M_1E_1 = \frac{1}{2}a_1$, $M_2E_2 = \frac{1}{2}a_2$. Daher folgt aus dem Strahlensatz

$$h_1 : h_2 = M_1E_1 : M_2E_2 = a_1 : a_2$$

Definiert man $r = a_1 : a_2$, so gilt folglich $r = h_1 : h_2$, sowie $a_1 = ra_2, h_1 = r_2$. Ferner haben K_2, K_1 die Volumina

$$V_2 = \frac{1}{3}a_2^2h_2 \qquad \text{und} \qquad V_1 = \frac{1}{3}a_1^2h_1 = \frac{1}{3}r^3a_2^2h_2 = r^3V_2$$

Somit ist

$$V_3 = V_1 - V : 2 = (r^3 - 1)V_2 \qquad , \qquad V_2 : V_3 = 1 : (r^3 - 1)$$

Daher ist die Forderung $V_2 : V_3 = 2 : 3$ der Reihe nach gleichbedeutende mit

$$1 : (r^3 - 1) = 2 : 3 \qquad , \qquad 2r^3 - 2 = 3 \qquad , \qquad r = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$$

Somit ist die genannte Forderung genau für $a_1 : a_2 = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ erfüllt.

Aufgabe 211211:
Gegeben sei die Seitenlänge a eines gleichseitigen Dreiecks ABC. Auf diesem Dreieck als Grundfläche soll eine Pyramide $ABCD$ mit den folgenden Eigenschaften (1), (2) errichtet werden:

(1) Die Kanten AD, BD und CD haben einander gleiche Länge s.

(2) Die Höhe h der Pyramide ist das arithmetische Mittel aus a und s.

Man untersuche, ob es eine derartige Pyramide $ABCD$ gibt und ob dann h und s eindeutig durch a bestimmt sind. Ist dies der Fall, so ermittle man h und s.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
I. Angenommen, eine Pyramide $ABCD$ habe die verlangten Eigenschaften. Ist F der Fußpunkt des Lotes von D auf die durch A, B, C gelegte Ebene ε, so gilt wegen (1) nach dem Satz des Pythagoras

$$FA = FB = FC = \sqrt{s^2 - h^2}$$

Also ist F der Umkreismittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks ABC und somit in diesem Dreieck auch Höhenschnittpunkt und Schwerpunkt. Die Höhenlänge im Dreieck ABC beträgt $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$, der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1:2, also ist $FA = FB = FC = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$. Daher gilt

$$s^2 - h^2 = FA^2 = \frac{1}{3}a^2 \tag{3}$$

Aus (2) folgt ferner

$$h = \frac{1}{2}(h + s) \tag{4}$$

Setzt man dies in (3) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}a^2 &= s^2 - \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}as - \frac{1}{4}s^2 \\ 0 &= s^2 - \frac{2}{3}as - \frac{7}{9}a^2 \\ s_{1,2} &= \frac{a}{3}(1 \pm 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

wegen $s > 0$ also

$$s = \frac{a}{3}(1 + 2\sqrt{2}) \qquad ; \qquad a + s = \frac{a}{3}(4 + 2\sqrt{2})$$

und daraus nach (4)

$$h = \frac{a}{3}(2 + \sqrt{2})$$

Daher kann eine Pyramide $ABCD$ nur dann die verlangten Eigenschaften haben, wenn D so auf der im Schwerpunkt F des Dreiecks ABC auf ε errichteten Senkrechten liegt, dass gilt:

$$FD = \frac{a}{3}(2 + \sqrt{2})$$

II. Für jede solche Pyramide $ABCD$ gilt in der Tat

$$\begin{aligned} AD = BD = CD &= \sqrt{FA^2 + FD^2} = \sqrt{\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{9}a^2(2 + \sqrt{2})^2} \\ &= \frac{a}{3}\sqrt{3 + 4 + 4\sqrt{2} + 2} \\ &= \frac{a}{3}(1 + 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

also ist (1)mit $s = \frac{a}{3}(1 + 2\sqrt{2})$ erfüllt, und die Höhenlänge $FD = \frac{a}{3}(2 + \sqrt{2})$ ist auch gleich dem arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}(a + s)$, also ist (2) erfüllt.

Damit ist gezeigt: Es gibt eine Pyramide $ABCD$ mit den Eigenschaften (1),(2); dabei sind h und s eindeutig bestimmt, und zwar ist $h = \frac{a}{3}(2 + \sqrt{2})$, $s = \frac{a}{3}(1 + 2\sqrt{2})$.

II Runde 2

Aufgabe V11221:
Ein Flugzeug fliegt zunächst 300 km in Richtung Süden, ändert dann seinen Kurs und fliegt 300 km in Richtung Osten und dann wieder 300 km in Richtung Norden. Es ist an seinem Ausgangspunkt wieder angelangt!
Wo befindet sich der Ausgangspunkt, falls der Flug
a) über der nördlichen,
b) über der südlichen Halbkugel erfolgt?
(Erdradius $r = 6370$ km)
Hinweis: Die Aufgabe b) hat unendlich viele Lösungen.

Lösung von MontyPythagoras:
a) Der Ausgangspunkt war der Nordpol. Jede beliebige, geradlinige Strecke, die am Nordpol beginnt, führt Richtung Süden, und egal wie weit man in Richtung Osten oder Westen fliegt, wenn man anschließend die gleiche Streckenlänge wieder in Richtung Norden fliegt, kommt man wieder am Nordpol an. Allerdings setzt das voraus, dass man in Richtung Osten entlang eines Breitenkreises geflogen ist, und nicht geradlinig. (geradlinig heißt in diesem Zusammenhang natürlich entlang eines Großkreises).

b) Hier gilt sinngemäß das gleiche wie unter a), nämlich dass der Flug Richtung Osten entlang eines Breitenkreises erfolgt. Auf der Südhalbkugel ist die Rückkehr an den Ausgangspunkt nur möglich, wenn der Punkt, an dem von Flugrichtung Süd auf Ost gewechselt wird, derselbe ist wie der, wo die Flugrichtung von Ost auf Nord wechselt. Der Breitenkreis muss also einen Umfang von 300 km haben. Angesichts der geringen Erdkrümmung reicht eine näherungsweise Betrachtung. Der Breitenkreis muss somit $\frac{300\text{km}}{2\pi} = 47{,}75\text{km}$ vom Südpol entfernt sein.

Man kehrt mit obiger Route also genau dann zum Ausgangspunkt zurück, wenn dieser 347,75km vom Südpol entfernt ist.

Alle Punkte, die auf den die Breitenkreisen liegen, die 300 km nördlich von den Breitenkreisen mit Umfang 150 km oder 100 km oder 75 km entfernt sind, haben auch die geforderte Eigenschaft.

Aufgabe 011122:
Im internationalen Postverkehr sind für Briefsendungen und Päckchen in „Rollenform“ (zylindrische Form) die folgenden Höchst- und Mindestmaße vorgeschrieben:

Höchstmaße	Länge und der zweifache Durchmesser zusammen 100 cm, Länge jedoch nicht über 80 cm;
Mindestmaße	Länge und zweifacher Durchmesser zusammen 17 cm, größte Ausdehnung nicht unter 10 cm.

1. Welches Höchstvolumen kann die Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge und Durchmesser?
2. Welches Mindestvolumen kann die Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge und Durchmesser?

Lösung von Korrina Grabski:
a) Die Bedingungen für das Höchstmaß lauten: $l + 2d \leq 100$ cm und $l \leq 80$ cm. Damit erhält man für das Volumen eines Zylinders:

$$V = \frac{\pi}{4}d^2 l \leq \frac{\pi}{4}d^2(100cm - 2d) = \frac{\pi}{4} \cdot 100cm \cdot d^2 - \frac{\pi}{2}d^3$$

Die notwendige Bedingung für ein Maximum ist $V'(d) = 0$, also

$$V'(d) = \frac{\pi}{2} \cdot 100cm \cdot d - \frac{3\pi}{2}d^2 = 0$$

somit $d_1 = 0$ und $d_2 = \frac{100}{3}$ cm. Die erste Lösung entfällt, da das Volumen dann null wäre. Die zur zweiten Lösung gehörige maximale Länge ist $l = \frac{100}{3}$ cm, das entsprechende Volumen $V = 29089$ cm^3.
Es bleibt zu zeigen, dass die gefundene Lösung tatsächlich ein Maximum ist, wofür $V''(d) < 0$ hinreichend ist:

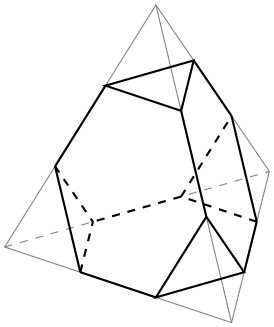
$$V''(d) = \frac{\pi}{2} \cdot 100cm - 3\pi d = -\pi \cdot 50cm < 0$$

Es handelt sich also wirklich um ein Maximum. Das Höchstvolumen der Sendung beträgt 29089 cm^3. In diesem Fall betragen Durchmesser und Länge $\frac{100}{3}$ cm.

b) Die Bedingungen für das Mindestmaß schließen einen Durchmesser von 0 cm nicht aus, was auf einen theoretischen Mindestwert des Volumens von 0 cm^3 führt.
Nach der ersten Bedingung beträgt die Länge dann mindestens 17 cm.

Aufgabe 021124:
Von einem regelmäßigen Tetraeder sind die 4 Ecken so abzuschneiden, dass von den Seitenflächen regelmäßige Sechsecke übrigbleiben.
Volumen und Oberfläche des entstandenen Körpers sind zu berechnen.

Lösung von Eckard Specht:
Regelmäßige Sechsecke auf den Seitenflächen des Tetraeders mit der Kantenlänge a entstehen nur, wenn dessen Kanten gedrittelt werden und somit vier kleine regelmäßige Tetraeder mit der Kantenlänge $\frac{1}{3}a$ abgeschnitten werden.



Jeder dieser kleinen Tetraeder hat ein Volumen von $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ des ursprünglichen Tetraeders, also hat der verbleibende Körper ein Volumen von $V' = (1 - \frac{4}{27})V = \frac{23}{27}$ des ursprünglichen Volumens V. Mit der Volumenformel eines Tetraeders $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ ergibt sich $V' = \frac{23\sqrt{2}}{324}a^3$.

Auf jeder Seitenfläche fallen durch das Abschneiden drei kleine gleichseitige Dreiecke der Kantenlänge $\frac{1}{3}a$ weg, dafür entsteht an jeder Ecke ein neues dieser Dreiecke. Die Oberfläche des Restkörpers beträgt also

$$A' = A - 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}A = \frac{7}{9}A \quad \text{bzw.} \quad A' = \frac{7}{9}\sqrt{3}a^2$$

Aufgabe 041221:
Von einem Würfel mit der Kantenlänge a werden alle Ecken durch ebene Schnitte so abgetrennt, dass aus allen Seitenflächen des Würfels kongruente regelmäßige Vielecke entstehen.
Es ist der Rauminhalt des Restkörpers zu berechnen.
Unterscheiden Sie die folgenden Fälle!
a) Es entstehen regelmäßige Vierecke.
b) Es entstehen regelmäßige Achtecke.
c) Gibt es noch andere Möglichkeiten?

Lösung von cyrix:
Lässt man zu, dass durch die Schnitte kein Punkt der Kanten des Würfels im Restkörper enthalten sein muss, dann sind keine eindeutigen Ergebnisse möglich, siehe unten. Daher wird angenommen, dass die Aufgabenstellung (als erste Aufgabe einer zweiten Runde) sich darauf bezieht, dass von jeder Kante noch jeweils mindestens ein Punkt im Restkörper enthalten ist.

a) Wir betrachten zuerst eine Seitenfläche $ABCD$ des Würfels. In dieses kann ein regelmäßiges Viereck (also Quadrat) $A_1B_1C_1D_1$ mit A_1 auf AB, B_1 auf BC, C_1 auf CD und D_1 auf DA nur genau so einbeschrieben werden, indem $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1| = |DD_1|$ gilt.
(Dass dann $A_1B_1C_1D_1$ tatsächlich ein Quadrat ergibt, zeigt die Rotationssymmetrie der Figur, sodass alle Seitenlängen und alle Innenwinkel des Vierecks $A_1B_1C_1D_1$ gleich groß sind.)
Aufgrund der Symmetrie ist $|AD_1| = |A_1B|$.

Aufgrund der Kongruenz der aus den Seitenflächen durch die Schnitte entstehenden Quadrate muss der zu $ABCD$ benachbarte Würfelseitenfläche $ABFE$ auf die gleiche Weise ein Quadrat $A_1B_2F_2E_2$ mit B_2 auf BF, F_2 auf FE und E_2 auf EA einbeschrieben werden. Insbesondere gilt dann $|AE_2| = |A_1B|$.
Analog erhält man auch auf der zu beiden bisher betrachteten Würfelseitenflächen $ABCD$ und $ABFE$ benachbarten Würfelseitenfläche $AEHD$ ein einbeschriebenes Quadrat $E_2E_3H_3D_1$ mit E_3 auf EH und H_3 auf HD, für welches $|AE_2| = |DD_1| = |AD| - |AD_1| = |AB| - |BA_1| = |AA_1|$ gilt.
Damit ist $|A_1B| = |AE_2| = |AA_1|$, sodass A_1 der Mittelpunkt von AB ist und aus Symmetriegründen also jede Kante des Würfels durch die entsprechenden Schnitte halbiert wird.

Der Teilkörper, der beim Abtrennen einer Würfelecke entsteht, ist demnach eine dreiseitige Pyramide mit gleichschenklig-rechtwinkliger Grundfläche, deren Katheten die Länge $\frac{a}{2}$ haben, und Höhe $\frac{a}{2}$. Jeder dieser Teilkörper hat damit ein Volumen von $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8}a^3$, und da sich die acht entstehenden, abgetrennten Teilkörper jeweils paarweise nicht in inneren Punkten überschneiden, besitzt der verbleibende Restkörper ein Volumen von $a^3 - 8 \cdot \frac{1}{48}a^3 = \frac{5}{6}a^3$.

(Würde man die „Kantenlängen“ der abzuschneidenden – sich dann überschneidenden – dreiseitigen Pyramiden auf knapp unter a erhöhen, so entstünde zwar aus jeder Würfelseitenfläche ein Quadrat mit beliebig kleiner Kantenlänge; der verbleibende Restkörper hätte aber ein Volumen, welches unter jede beliebige Schranke, die größer als $\frac{1}{3}a^3$ ist, gedrückt werden kann: Die abgeschnittenen dreiseitigen Pyramiden zu zwei gegenüberliegenden Ecken im Würfel überschneiden sich nich, haben aber jeweils ein Volumen von knapp unter $\frac{1}{3}a^3$, sodass der verbleibende Restkörper höchstens ein Volumen von „etwas mehr“ als $a^3 - 2 \cdot \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}a^3$ besitzen kann. Der Betrag von „etwas mehr“ kann beliebig klein gemacht werden, indem man die Kantenlänge der abzuschneidenden Pyramiden beliebig nahe an a heranführt.)

b) Da ein gerader Schnitt durch ein konvexes n-Eck die Anzahl der Ecken höchstens um 1 erhöhen kann (und dies auch nur tut, wenn er durch das Innere zweier benachbarter Seiten verläuft), müssen die die Würfelecken abtrennenden ebenen Schnitte jede Würfelkante in drei Abschnitte einteilen: Die jeweils an einer Würfelkante angrenzenden Abschnitte einer Kante gehören dann zum diese Ecke enthaltenden Teilkörper, während der jeweils mittlere Abschnitt Kante des Restkörpers ist. Insbesondere liegen also auf jeder Kante des ursprünglichen Würfels nun zwei benachbarte Eckpunkte der entstehenden Achtecke des Restkörpers.

Zeichnet man in ein Quadrat ein regelmäßiges Achteck ein, dessen Eckpunkte alle auf den Seiten des Quadrats liegen, dann geht die Figur sowohl durch Drehung um 90° um den Mittelpunkt des Quadrats als auch durch Spiegelung an einer Mittelparallele zweier gegenüberliegender Seiten des Quadrats in sich selbst über, da sowohl Quadrat als auch regelmäßiges Achteck diese Symmetrien besitzen. Also sind alle entsprechenden Strecken gleich lang.

Sei die Würfelkante AB durch die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 in der Reihenfolge AS_1S_2B in drei Abschnitte geteilt, sodass regelmäßige Achtecke auf den Würfelflächen mit Kantenlänge $|S_1S_2|$ entstehen. Dann ist nach der vorherigen Überlegung $b := |AS_1| = |S_2B|$ und $|S_1S_2|$ die Länge der Hypotenuse eines

gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten genau die Länge b besitzen. Damit ergibt sich

$$a = |AB| = 2 \cdot b + \sqrt{2} \cdot b \qquad \text{also} \qquad b = \frac{1}{2+\sqrt{2}}a = \frac{2-\sqrt{2}}{2}a$$

Weiterhin überschneiden sich wegen $b \leq \frac{1}{2}a$ die abzuschneidenden dreiseitigen Pyramiden mit Kantenlängen b nicht und haben jeweils ein Volumen von

$$\frac{1}{6}b^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{(2-\sqrt{2})^3}{8}a^3 = \frac{8-12\sqrt{2}+12-2\sqrt{2}}{48}a^3 = \frac{20-14\sqrt{2}}{48}a^3$$

sodass der Restkörper ein Volumen von

$$a^3 - 8 \cdot \frac{10-7\sqrt{2}}{24}a^3 = \frac{3-10+7\sqrt{2}}{3}a^3 = \frac{7}{3} \cdot (\sqrt{2}-1) \cdot a^3$$

hat.

c) Wie schon in Teil b) gesehen, kann pro Schnitt durch eine der Würfelseiten die Anzahl der Ecken dieser Fläche nur um höchstens 1 erhöht werden. Also sind maximal Achtecke als aus den Würfelseiten entstehenden Flächen des Restkörpers möglich. Ein gleichseitiges Dreieck ist dabei nicht möglich zu erhalten, da dafür mindestens eine Kante des Würfels komplett entfernt werden müsste, da ein solches nie zugleich alle vier Seiten des Quadrats berühren kann. Neben $n = 4$ und $n = 8$ sind also noch die Fälle $n = 5$, $n = 6$ und $n = 7$ zu betrachten. In allen Fällen müssen auf mindestens einer Kante zwei verschiedene Eckpunkte eines solchen regelmäßigen n-Ecks liegen.

Gibt es mindestens zwei Seiten eines Quadrats, auf denen je zwei der Eckpunkte des regelmäßigen n-Ecks liegen, sind die beiden durch diese Eckpunkte gebildeten Seiten des n-Ecks entweder parallel oder senkrecht zueinander. Derartige Seiten gibt es im regelmäßigen Siebeneck aber nicht, sodass $n = 7$ ausgeschlossen werden kann.

Im Fall des Sechsecks verläuft die gemeinsame Mittelparallele zwei gegenüberliegender Sechseckseiten durch den Diagonalenschnittpunkt. Insbesondere müsste die Figur des dem Quadrat einbeschriebenen Sechsecks spiegelsymmetrisch zu dieser Achse sein, sodass die Eckpunkte des Sechsecks, die nicht auf den beiden Quadratseiten mit je zwei Sechseck-Eckpunkten liegen, durch die Spiegelung auf den jeweils anderen abgebildet werden müssten. Damit betrüge die Länge der Diagonalen genau a und die Kantenlänge des Sechsecks $\frac{1}{2}a$.

An den Quadratecken ergäben sich aber nun aus Symmetriegründen gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit Kathetenlänge $\frac{1}{4}a$ und Hypotenusenlänge = Sechseck-Seitenlänge $\frac{1}{2}a$, was aber dem Satz von Pythagoras widerspricht. Demzufolge kann es auch der Fall $n = 6$ ausgeschlossen werden.

Bleibt noch zu betrachten, ob regelmäßige Fünfecke möglich sind. Gäbe es ein solches, dass einem Quadrat einbeschrieben ist, so müsste die Höhe des Punktes, dass der Kante des Fünfecks, welche auf einer Quadratseite liegt, gegenüberliegt, auf eben jene gegenüberliegende Kante des Fünfecks parallel zu einer Quadratseite zwei gegenüberliegende Quadratseiten verbinden, also die Länge a haben.
Aufgrund der Symmetrie (Spiegelung an dieser Höhe überführt die Figur in sich selbst) ist aber auch die Verbindungslinie der zwei übrigen Eckpunkte des Fünfecks parallel zu zwei gegenüberliegenden Quadratseiten (nun dem anderen Paar) und verbindet auch zwei Punkte auf diesen, hat also genauso die Länge a. Im regelmäßigen Fünfeck verläuft aber die Höhe eines Punktes auf die gegenüberliegende Fünfeckseite durch keinen der beiden Eckpunkte dieser Seite, sodass die Diagonalen alle länger sind als diese Höhen. So ist auch dieser Fall auszuschließen.

Es verbleiben die in a) und b) betrachteten Fälle mit $n = 4$ bzw. $n = 8$.

Aufgabe 051221:
Aus einer Kugel vom Radius r wird ein Kugelsektor herausgeschnitten, der sich aus einem Kegel der Höhe h und dem zugehörigen Kugelsegment zusammensetzt.

a) Welche Länge h hat die Höhe des Kegels, wenn der Flächeninhalt der herausgeschnittenen Kugelkappe gleich einem Drittel des Oberflächeninhaltes der Kugel ist?

b) Welche Länge h hat die Höhe des Kegels, wenn das Volumen des Kugelsektors gleich einem Drittel des Volumens der Kugel ist?

Lösung von Caban:
Mit den Standardbezeichnungen r für Radius, h für Höhe und A für Flächeninhalt bzw. V für Volumen wird:

a) $\frac{1}{3}A_{Kugel} = A_{Kappe} \rightarrow \frac{4}{3}\pi \cdot r^2 = 2\pi \cdot r \cdot h_{Kappe} = 2\pi \cdot r \cdot (r-h)$
Daraus ergibt sich wegen $r \neq 0$: $r - h = \frac{2}{3}r$ also $h = \frac{1}{3}r$

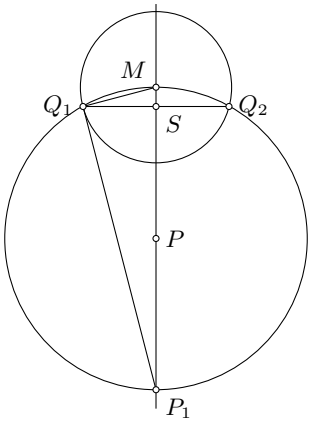
b) $\frac{1}{3}V_{Kugel} = V_{Sektor} \rightarrow \frac{2}{3}\pi \cdot r^2 \cdot (r-h) = \frac{4}{9}\pi \cdot r^3$
$h = \frac{1}{3}r$

Aufgabe 051226:
Kann ein von einem regelmäßigen Tetraeder begrenzter Körper bei parallelem und senkrecht auf die Bildebene auftreffendem Licht auf dieser einen quadratförmigen Schatten werfen?

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Es ist möglich.
Wähle die Mittelpunkte zweier gegenüberliegende Kanten. Sei g die Gerade durch diese beiden Punkte. Die beiden Kanten und die Gerade g sind paarweise orthogonal zueinander.
Eine Parallelprojektion in Richtung g bildet die beiden Kanten auf ein symmetrisches Kreuz ab, welche die Diagonalen eines Quadrats bilden. Die übrigen vier Kanten werden auf die Seiten des Quadrats abgebildet.

Aufgabe 061224:
Es sei M der Mittelpunkt der Kugel K_1, und P sei ein Punkt außerhalb K_1. Ferner sei K_2 die Kugel mit dem Mittelpunkt P und dem Radius von der Länge MP, und I_F sei der Flächeninhalt des innerhalb K_1 liegenden Teiles von K_2.
Beweisen Sie, dass I_F von der Lage des Punktes P unabhängig ist!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Der Radius von K_1 sei r. Man lege eine Ebene ε durch M und P (Abbildung). Der Schnittkreis k von K_1 und K_2 schneidet ε in zwei Punkten Q_1, Q_2. Der Schnittpunkt von MP und Q_1Q_2 sei S genannt. P_1 sei der von M verschiedene Schnittpunkt von PM und K_2. Dann ist I der Flächeninhalt der auf K_2 liegenden Kugelkappe, deren Höhe die Länge MS hat. Da MP der Radius von K_2 ist, gilt

$$I = \pi \cdot 2 \cdot |MP| \cdot |MS|$$

Da das Dreieck MQ_1P_1 nach dem Satz des Thales rechtwinklig ist, gilt nach dem Kathetensatz:

$$MQ^2 = 2|MP| \cdot |MS|$$

Mithin erhält man

$$I = \pi \cdot |MQ_1|^2 = \pi r^2$$

womit gezeigt ist, dass I nicht von der Lage des Punktes P abhängt.

Aufgabe 071226:
Gegeben sei eine regelmäßige sechsseitige Pyramide. Man lege einen ebenen Schnitt durch die Pyramide, der durch die Mittelpunkte zweier nicht benachbarter und nicht paralleler Seiten der Grundfläche und durch den Mittelpunkt der Höhe der Pyramide verläuft.
Es ist das Verhältnis des Flächeninhalts der dabei entstehenden Schnittfigur und des Flächeninhalts einer Seitenfläche der Pyramide zu ermitteln.

Lösung von cyrix:
Die Eckpunkte der Grundfläche seien in der Reihenfolge mit P_1 bis P_6 bezeichnet sowie die Spitze der Pyramide mit S und der Mittelpunkt der Grundfläche mit F. Dann ist auch F der Fußpunkt der Höhe von S auf die Grundfläche, da von einer geraden Pyramide ausgegangen wird.
(Sonst könnte man nicht vom Flächeninhalt „einer“ Seitenfläche der Pyramide sprechen, da sie unterschiedliche Flächeninhalte haben könnten, wäre die Pyramide nicht gerade.)

Schließlich sei M der Mittelpunkt der Strecke FS, also der Mittelpunkt der Höhe der Pyramide und ε die Ebene des zu betrachtenden Schnitts.

Der Schnitt verlaufe durch die Mittelpunkte M_1 und M_3 der Seiten P_1P_2 und P_3P_4, die weder benachbart noch parallel sind. Insbesondere ist dann also die Gerade durch die Diagonale P_1P_4 des Sechsecks parallel zur Schnittebene ε.

Sei weiterhin $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ das Sechseck, welches als Schnitt der Pyramide mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene durch den Mittelpunkt M der Höhe entsteht, wobei jeder Punkt Q_i auf der Gerade SP_i liege. Da ε erstens durch M, welcher gleichzeitig Mittelpunkt dieses zweiten Sechsecks ist, verläuft, zweitens parallel zu P_1P_4 ist und drittens nach dem Strahlensatz die Geraden P_1P_4 und Q_1Q_4 parallel sind, muss die Strecke Q_1Q_4, die M als eigenen Mittelpunkt enthält, in ε liegen. Somit schneidet ε also die Geraden P_1S und P_4S in Q_1 bzw. Q_4.

Analog sei das Sechseck $R_1R_2R_3R_4R_5R_6$ als Schnitt der Pyramide mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene in Höhe von $\frac{3}{4}|SF|$ definiert, wobei wieder die Punkte R_i auf den Geraden SP_i liegen sollen. Der Schnitt von ε mit dieser zur Grundfläche parallelen Ebene liefert wieder eine Gerade, die parallel zu R_1R_4 ist.

Sei d der Abstand der parallelen Geraden P_1P_4 und P_5P_6. Dann beträgt nach dem Strahlensatz der Abstand der parallelen Geraden R_1R_4 und R_5R_6 genau $\frac{1}{4}d$.

Der Abstand des Schnitts von ε mit der Grundfläche, also der Geraden M_1M_3, hat einen Abstand $\frac{1}{2}d$ von der dazu parallelen Gerade P_1P_4. Und in der zu Grundfläche parallelen Ebene durch M (also in Höhe

$\frac{1}{2}|SF|$ über der Grundfläche) ist der Schnitt von ε mit dieser Ebene identisch mit der Geraden R_1R_4, sodass der entsprechende Abstand Null beträgt.
Daher gilt nach Strahlensatz (mit Zentrum M in Höhe $\frac{1}{2}|SF|$ über der Grundfläche), dass der Schnitt von ε mit der zur Grundfläche parallelen Ebene in Höhe $\frac{3}{4}|SF|$ genau den Abstand $\frac{1}{4}d$ zur entsprechenden parallelen Gerade R_1R_4 hat. Da weiterhin diese Schnittgerade von ε mit der gerade betrachteten Ebene in der von R_1R_4 erzeugten Halbebene liegt, in der nicht R_2 und R_3 liegen; in der im gleichen Abstand zu R_1R_4 aber der Gerade R_5R_6 verläuft, muss also der Schnitt von ε mit dieser Ebene gerade die Gerade R_5R_6 sein. Damit schneidet ε die Geraden SP_5 und SP_6 in R_5 bzw. R_6.

Die entstehende Schnittfigur beim Schnitt von ε mit der sechsseitigen Pyramide ist demnach genau das Sechseck $M_1M_3Q_4R_5R_6Q_1$. Dieses lässt sich zerlegen in die beiden Trapeze $M_1M_3Q_4Q_1$ und $Q_1Q_4R_5R_6$, deren Flächeninhalte – in Abhängigkeit der Kantenlänge a des Sechsecks der Grundfläche und der Höhe $h = |SF|$ der Pyramide – im Folgenden ermittelt werden:

Sei P_0 der Schnittpunkt der Geraden P_1P_2 und P_3P_4 und es entsteht das gleichseitige Dreieck $\triangle P_2P_0P_3$. Dann gilt nach dem Strahlensatz $\frac{|P_0M_1|}{|P_0P_2|} = \frac{|M_1M_3|}{|P_2P_3|}$, also $|M_1M_3| = \frac{3}{2}a$. Analog folgt auch $|P_1P_4| = 2a$. Aus letzterem folgt mittels Strahlensatz (mit Zentrum S), dass $|Q_1Q_4| = \frac{1}{2}|P_1P_4| = a$ gilt. Damit kennen wir die Längen der parallelen Strecken im Trapez $M_1M_3Q_4Q_1$.

Für den Abstand dieser beiden Parallelen betrachten wir das rechtwinklige Dreieck bestehend aus M, F und dem Mittelpunkt N der Strecke M_1M_3, wobei der rechte Winkel bei F liegt. Es ist $|MF| = \frac{1}{2}|SF| = \frac{1}{2}h$. Für die Streckenlänge $|FN|$ gilt, dass die Strecke die halbe Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle P_2P_3F$ ist, also $|FN| = \frac{\sqrt{3}}{4}$ folgt. Damit beträgt der Abstand der beiden Geraden M_1M_3 und Q_1Q_4 genau

$$h_1 := |NM| = \sqrt{|MF|^2 + |FN|^2} = \sqrt{\frac{1}{4}h^2 + \frac{3}{16}a^2} = \frac{1}{4}\sqrt{4h^2 + 3a^2}$$

Der Flächeninhalt des Trapezes $M_1M_3Q_4Q_1$ ergibt sich damit zu

$$A_1 := \frac{1}{2} \cdot (|M_1M_3| + |Q_1Q_4|) \cdot h_1 = \frac{5}{16}a \cdot \sqrt{4h^2 + 3a^2}$$

Für die Bestimmung des Flächeninhalts des Trapezes $Q_1Q_4R_5R_6$ beachte man, dass aufgrund des Strahlensatzes (mit Zentrum S) $|R_5R_6| = \frac{1}{4}|P_5P_6| = \frac{1}{4}a$ und (mit Zentrum M) $h_2 = \frac{1}{2}h_1 = \frac{1}{8}\sqrt{4h^2 + 3a^2}$ gilt, wobei h_2 der Abstand der Parallelen Q_1Q_4 und R_5R_6 ist. Also ergibt sich für dieses Trapez der Flächeninhalt zu

$$A_2 := \frac{1}{2}(|Q_1Q_4| + |R_5R_6|) \cdot h_2 = \frac{5}{64}a \cdot \sqrt{4h^2 + 3a^2} = \frac{1}{4}A_1$$

Damit ergibt sich der Flächeninhalt A der gesamten Schnittfigur zu

$$A := A_1 + A_2 = \frac{5}{4} \cdot A_1 = \frac{25}{64}a \cdot \sqrt{4h^2 + 3a^2}$$

Um den Flächeninhalt der Seitenfläche $\triangle P_1P_2S$ (und damit jeder Seitenfläche) der Pyramide zu bestimmen, benötigen wir die Länge ihrer Seitenhöhe h_s. Diese ist die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck $\triangle SFM_1$ mit rechtem Winkel bei F. Es ist FM_1 die Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle P_1P_2F$, sodass $|FM_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ gilt. Also ist $|SF| = h$, also

$$h_s = |M_1S| = \sqrt{|SF|^2 + |FM_1|^2} = \sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + 3a^2}$$

Daraus ergibt sich nun der Flächeninhalt A_S einer Seitenfläche der Pyramide zu $A_S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = \frac{1}{4}a \cdot \sqrt{4h^2 + 3a^2}$ und damit für den Flächeninhalt Schnittfigur

$$A = \frac{25}{16} \cdot A_S$$

Aufgabe 081222:
In einer dreiseitigen Pyramide sei die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge a, die Spitze S liege in der Höhe h über dem Schnittpunkt M der Seitenhalbierenden des Grunddreiecks. Welchen Wert hat der Quotient $\frac{h}{a}$, wenn der Neigungswinkel zweier Seitenflächen der Pyramide gegeneinander 90° beträgt?

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Der Winkel zwischen zwei Seitenflächen liegt in einer Ebene, die senkrecht auf den beiden Seitenflächen steht. Diese senkrechte Ebene schneidet die beiden Seitenflächen in zwei Seitenflächenhöhen, die senkrecht auf einer Seitenlange stehen und einen gemeinsamen Fußpunkt haben.
Der Winkel zwischen den beiden Seitenflächenhöhen ist der Winkel zwischen den beiden Seitenflächen. $\angle AEB$ ist ein solcher Winkel. Seine Größe sei τ. Es gilt somit nach Aufgabenstellung $\tau = 90°$. Dreieck AEB ist gleichschenklig mit der Basis $\overline{AB}$. Nach Innenwinkelsummensatz gilt somit $\tau + 2\varepsilon = 180°$ und somit $\varepsilon = 45°$. Nach dem Kosinussatz gilt im Dreieck AB:

$$|AE|^2 = |AB|^2 + |BE|^2 - 2|AB||AE|\cos\varepsilon \quad (*)$$

Da die Dreiecke ACS und BCS kongruent und gleichschenklig sind, ist $|AE| = |BE|$. Einsetzen in $(*)$ liefert zudem mit $\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $|AB| = a$:

$$|BE|^2 = |AB|^2 + |BE|^2 - 2|AB||AE| \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$|AB||AE| \cdot \sqrt{2} = |AB|^2 \iff |AE| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Sei $\varphi = \angle BCE$. Dreieck CBE ist rechtwinklig. Es gilt: $\sin\varphi = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{a} \iff \varphi = 45°$.
Dreieck CBS ist gleichschenklig mit Basis CB. Sei h_s die Höhe auf der Basis und s die Länge der Seitenkante. Es gilt $\cos\varphi = \frac{\frac{a}{2}}{s} \iff s = \frac{a}{2}\sqrt{2}$
Dreieck ABC ist gleichseitig. Die Höhe im gleichseitigen beträgt $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ und die Seitenhalbierenden (im Dreieck gleichzeitig Höhe) schneiden sich im Verhältnis 2:1 , wobei die Strecke vom Schwerpunkt zum Eckpunkt doppelt so lang ist, wie die Strecke vom Schwerpunkt zum Mittelpunkt der Seite.
Dreieck HCS ist rechtwinklig. Nach dem Satz Satz des Pythagoras gilt:

$$\left(\frac{2}{3}\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 \iff h = \frac{a}{6}\sqrt{6}$$

Der Quotient berechnet sich also zu $\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Alternativ-Lösung von MontyPythagoras:
Das gleichseitige Dreieck ABC liege in der xy-Ebene, der Punkt A liege im Ursprung, B auf der x-Achse. Dann sind die Ortsvektoren von B und C:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Spitze S der Pyramide

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ h \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor auf die Seitenfläche ABS ist dann:

$$\vec{n}_{ABS} = \vec{b} \times \vec{s} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -ah \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a^2 \end{pmatrix}$$

Ein Normalenvektor auf ACS:

$$\vec{n}_{ACS} = \vec{c} \times \vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}ah \\ -\frac{1}{2}ah \\ \frac{\sqrt{3}}{12}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}ah \\ -\frac{1}{2}ah \\ -\frac{\sqrt{3}}{6}a^2 \end{pmatrix}$$

Sollen die beiden Flächen senkrecht aufeinander stehen, muss das Skalarprodukt der beiden Normalenvektoren null sein:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -ah \\ \frac{\sqrt{3}}{6}a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}ah \\ -\frac{1}{2}ah \\ -\frac{\sqrt{3}}{6}a^2 \end{pmatrix} = 0$$

Das bedeutet:

$$\frac{1}{2}a^2h^2 - \frac{3}{36}a^4 = 0$$
$$\frac{h^2}{a^2} = \frac{6}{36}$$
$$\frac{h}{a} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Aufgabe 091222:
In einem Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H und der Kantenlänge a seien FB, FG und FE die drei von F ausgehenden Kanten. Ferner sei ε die Ebene durch G, B, E.
Es ist zu beweisen, dass die Körperdiagonale FD senkrecht auf der Ebene ε steht und von ihr im Verhältnis $1 : 2$ geteilt wird.

Lösung von cyrix:
Durch Drehung um 120° um die Raumdiagonale geht der Würfel in sich selbst über, sodass die drei Eckpunkte B, G und E zyklisch die Reihenfolge tauschen. Damit geht aber auch die Ebene ε bei dieser Drehung in sich selbst über und steht somit senkrecht zur Drehachse FD.
Das Tetraeder $BGEF$ hat das Volumen $\frac{1}{6}a^3$. Das gleichseitige Dreieck $\triangle BGE$ besitzt die Kantenlänge $\sqrt{2}a$ und damit einen Flächeninhalt von

$$F_{\triangle BGH}\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

Da sich das Volumen dieses Tetraeders auch als $\frac{1}{3}F_{\triangle BGH} \cdot h$ berechnen lässt, wobei h die Länge des Lots des Punktes F auf die Ebene ε ist, folgt

$$h = \frac{\frac{1}{6}a^3}{\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}a = \frac{1}{\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{1}{3} \cdot |BD|$$

da die Raumdiagonale BD die Länge $\sqrt{3}a$ besitzt, □.

Aufgabe 111221:
Gegeben seien zwei Würfel mit den Kantenlängen a bzw. b.
Gesucht ist ein gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche, dessen Volumen gleich der Summe der Würfelvolumina und dessen Höhenlänge gleich der Summe der Längen der Würfelkanten ist.
a) Man berechne die Seitenlänge c der quadratischen Grundfläche eines solchen Prismas.
b) Man gebe eine Konstruktion für eine Strecke der in a) ermittelten Länge c an.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
a) Für das Volumen V des Prismas gilt $V = c^2h$ mit $h = a + b$. Aus $a^3 + b^3 = V = c^2(a + b)$ erhalten wir

$$c^2 = \frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2$$

b) Aus der Gleichung $c^2 = a^2 - ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(60°)$ können wir mittels Kosinussatz eine Konstruktionsvorschrift ablesen: Konstruiere aus a,b mit eingeschlossenem Winkel $\gamma = 60°$ ein Dreieck. Die dritte Seite des Dreiecks hat dann die gesuchte Länge c.

Aufgabe 151222:
Gegeben sei eine Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck mit dem Flächeninhalt Q ist. Zwei der Seitenflächen stehen senkrecht auf der Grundfläche; die zwei restlichen schließen mit der Grundfläche Winkel der Größe α bzw. β ein.
Man ermittle das Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von Q, α und β.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es sei $ABCDS$ eine Pyramide, deren Grundfläche $ABCD$ ein Rechteck mit dem Flächeninhalt Q ist und deren Spitze S sei.
Die senkrecht auf der Grundfläche stehenden Seitenflächen haben eine Pyramidenkante gemeinsam, da sie sonst parallelen Ebenen angehören würden, was bei einer Pyramide nicht möglich ist. Diese zur Grundfläche senkrechte Pyramidenkante sei SD.
Daher sind für die zur Grundfläche nicht senkrechten Seitenflächen BCS und ABS die Neigungswinkel gleich den Winkeln $\angle SAD$ und $\angle SCD$. Außerdem ist die Länge von SD gleich der Länge h der Höhe der Pyramide.

O. B. d. A. gelte nun $\angle SAD = \alpha, \angle SCD = \beta$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} h = SD &= AD \cdot \tan\alpha \qquad (1)\\ &= CD \cdot \tan\beta \qquad (2)\\ Q &= AD \cdot CD \qquad (3) \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich durch Multiplikation und anschließendem Einsetzen von (3) und Radizieren:

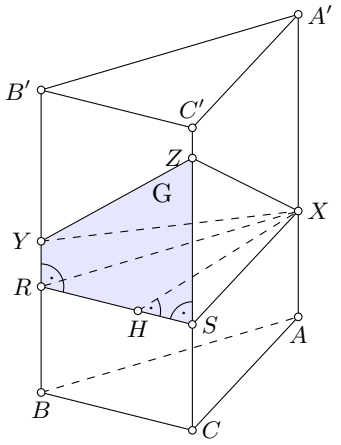
$$h^2 = AD \cdot CD \cdot \tan\alpha \cdot \tan\beta \qquad ; \qquad h = \sqrt{Q \cdot \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Damit ergibt sich für das Volumen V der Pyramide:

$$V = \frac{1}{3}Qh = \frac{1}{3}Q\sqrt{Q \cdot \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Aufgabe 231222:
Es sei $P = ABCA'B'C'$ ein gerades dreiseitiges Prisma mit der Grundfläche ABC, der Deckfläche $A'B'C'$ und den parallelen Kanten AA', BB', CC'.
Auf diesen seien drei Punkte X, Y, Z gelegen, X zwischen A und A', Y zwischen B und B', Z zwischen C und C'.
Man beweise, dass der Körper $K = ABCXYZ$ das Volumen $V_K = \frac{1}{3}F(x+y+z)$ hat, wobei $x = AX$, $y = BY$, $z = CZ$ ist und F den Flächeninhalt von ABC bezeichnet.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
O. B. d. A. sei $x \le y \le z$ angenommen. Durch X werde die zur Grundfläche ABC parallele Ebene gelegt. Sie schneidet BY in einem Punkt R, CZ in einem Punkt S und zerlegt den Körper K in das gerade Prisma $P_1 = ABCXRS$ und einen Teilkörper T (der im Fall $x = y = z$ nur noch im Sinne einer Entartung mit dem Volumen $V_T = 0$ zu betrachten ist).



In den Fällen $x < y \leq z$ und $x = y < z$ ist T eine Pyramide mit dem Trapez $YRSZ$ bzw. dem Dreieck RSZ als Grundfläche G und mit dem Punkt X als Spitze.
Die Höhenlänge dieser Pyramide ergibt sich als Länge des Lotes XH von X auf die Ebene, in der die Seitenfläche $BCSR$ des Prismas P_1 liegt. Da dieses ein gerades Prisma ist, verläuft XH in der Ebene der Deckfläche RSX von P_1, ist also zugleich die auf RS senkrechte Höhe dieses Dreiecks.
Aus $RS \perp CZ$ folgt ferner, dass die Fläche G den Inhalt

$$\frac{1}{2}(RY + SZ)RS$$

hat (beim Trapez $YRSZ$ wegen der Flächeninhaltsformel für Trapeze; beim Dreieck RSZ mit $RY = 0$ und RS als Höhe auf SZ). Daher hat T das Volumen

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(RY + SZ)RS \cdot XH$$

Darin ist $RY = y - x$, $SZ = z - x$; ferner hat das zu ABC kongruente Dreieck XRS den Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{2}RS \cdot XH$$

Somit gilt

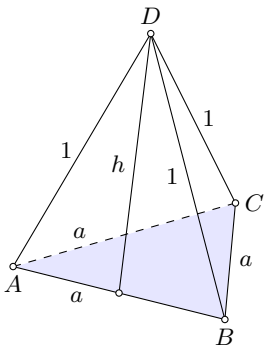
$$V_T = \frac{1}{3}F(y - x + z - x)$$

(Diese Formel erfasst auch den Fall $x = y = z$). Das Prisma P_1 hat das Volumen $V_{P_1} = F \cdot x$. Damit ergibt sich

$$V_K = V_{P_1} + V_T = \frac{1}{3}F(3x + y - x + z - x) = \frac{1}{3}F(x + y + z)$$

Aufgabe 341223:
Man beweise die folgende Aussage:
Wenn die Längen der Seitenkanten eines Tetraeders $ABCD$ die Gleichungen $AD = BD = CD = 1$ und $AB = BC = CA$ erfüllen, so ist die Oberfläche des Tetraeders kleiner als $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Lösung von MontyPythagoras:



Die Grundfläche des Tetraeders ist ein gleichseitiges Dreieck der Kantenlänge a. Die Höhe eines Manteldreiecks sei h. Dann ist

$$h = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}a^2}$$

und die Oberfläche des Tetraeders ist:

$$F = \tfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3 \cdot \tfrac{1}{2}ah = \tfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \tfrac{3}{2}a\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}a^2}$$

Gemäß Aufgabenstellung gelte:

$$\tfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \tfrac{3}{2}a\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}a^2} < \tfrac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\tfrac{1}{2}a^2 + \sqrt{3}a\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}a^2} < 3$$

$$3a^2(1 - \tfrac{1}{4}a^2) < (3 - \tfrac{1}{2}a^2)^2$$

$$3a^2 - \tfrac{3}{4}a^4 < 9 - 3a^2 + \tfrac{1}{4}a^4$$

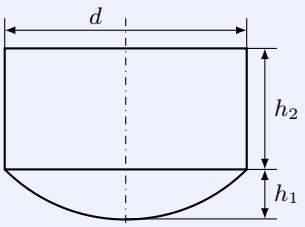
$$0 < a^4 - 6a^2 + 9$$

$$0 < (a^2 - 3)^2$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn $a > \sqrt{3}$ ist. Es tritt jedoch Gleichheit ein, wenn $a = \sqrt{3}$ ist, was genau dann der Fall ist, wenn der Tetraeder auf eine Höhe von null zusammenschrumpft, so dass die Oberfläche dann genau zweimal dem gleichseitigen Dreieck mit Kantenlänge $\sqrt{3}$ entspricht.
Strenggenommen gilt die Ungleichung laut Aufgabenstellung also nur, wenn der Punkt D über dem Dreieck ABC liegt, und nicht in der gleichen Ebene.

III Runde 3

Aufgabe V11132:



Der im Schnitt abgebildete Blechbehälter (Hohlzylinder mit aufgesetzter Kugelkappe, Abbildung) soll durch Tiefziehen aus einer Blechscheibe hergestellt werden.
a) Wie groß ist allgemein der Durchmesser der Blechscheibe ?
b) Berechnen Sie den Zahlenwert für $d = 230$ mm, $h_1 = 70$ mm, $h_2 = 110$ mm!
Anmerkung: Die Blechscheibe, aus der der Behälter durch Tiefziehen gezogen wird, hat dieselbe Fläche wie der Blechbehälter.

Lösung von MontyPythagoras:
a) Die Gesamtfläche des Blechbehälters ist

$$A = \pi d h_2 + \pi(\tfrac{1}{4}d^2 + h_1^2)$$

Diese Fläche soll gleich der Fläche der kreisförmigen Blechscheibe sein, deren Durchmesser D sei. Daher gilt:

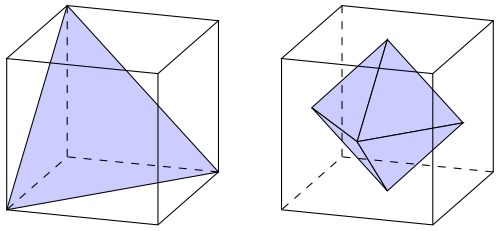
$$\frac{D^2\pi}{4} = \pi d h_2 + \pi(\tfrac{1}{4}d^2 + h_1^2)$$

$$D = 2\sqrt{\tfrac{1}{4}d^2 + h_1^2 + d h_2}$$

b) Der Durchmesser der Blechscheibe betrug $D = 416{,}8\text{mm}$.

Aufgabe 011233:
Einem Würfel von der Kantenlänge a werden ein Tetraeder und ein Oktaeder einbeschrieben.
a) Wie verhalten sich die Volumina der 3 Körper zueinander?
b) Dem Tetraeder wird noch eine Kugel einbeschrieben. Begründen Sie, dass diese Kugel gleichzeitig das Oktaeder berührt, und drücken Sie das Volumen dieser Kugel als Funktion von a aus!

Lösung von Eckard Specht:
Da der Würfel sechs Quadrate als Oberfläche besitzt und das Tetraeder sechs Kanten hat, nehmen wir sechs geeignete Oberflächendiagonalen als Kanten des Tetraeders (Bild a), die selbstverständlich gleich lang sind und damit tatsächlich ein regelmäßiges Tetraeder bilden.
Das Oktaeder hat sechs Eckpunkte, so dass die Mittelpunkte der Oberflächen des Würfels als Eckpunkte eines regelmäßigen Oktaeders gewählt werden können (Bild b).



a) Das Tetraeder schneidet vom Würfel mit dem Volumen $V_W = a^3 4$ vier dreiseitige Pyramiden ab, wobei das Volumen jede dieser Pyramiden mittels $V = \frac{1}{3}Ah$ berechnet werden kann.
Dazu wählen wir das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck mit der Kathetenlänge a als Grundfläche, also $A = \frac{1}{2}a^2$. Die Höhe beträgt ebenfalls $h = a$, so dass $V = \frac{1}{6}a^3$ folgt. Daraus ergibt sich das Volumen des Tetraeders zu

$$V_T = a^3 - 4\frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3}a^3$$

Für das Oktaeder ergibt sich eine Kantenlänge von $\frac{\sqrt{2}}{2}a$; es kann aus zwei vierseitigen Pyramiden zusammengesetzt werden. Die Grundseiten dieser Pyramiden (ein Quadrat) haben einen Flächeninhalt von $A = \frac{1}{2}a^2$, somit hat das Oktaeder ein Volumen von

$$V_O = 2\frac{1}{6}a^2 \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{6}a^3$$

Die Volumina stehen also im Verhältnis $V_W : V_T : V_O = 6 : 2 : 1$.

b) Um den Radius der dem Tetraeder einbeschriebenen Kugel zu bestimmen, betrachten wir zunächst die Umkugel des Tetraeders. Diese ist offenbar mit der Umkugel des Würfels identisch, so dass die halbe Raumdiagonale des Würfels gleich dem Umkugelradius ist: $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.
Die Inkugel mit dem Radius r berührt dagegen die Tetraederflächen von innen, wobei jede Tetraederfläche eine Tangentialebene an die Inkugel im Berührungspunkt aufspannt. Somit liegen Würfeleckpunkt,

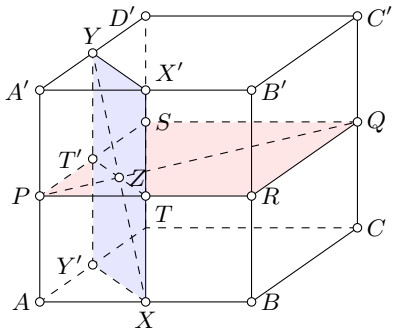
Berührungspunkt und Mittelpunkt auf einer Geraden, und es gilt $R = h+r$ bzw. $r = R-h$ mit h als Höhe der unter a) betrachteten dreiseitigen Pyramiden mit dem (jetzt gleichseitigen) Dreieck als Grundfläche. Diese Höhe berechnet sich aus der obigen Volumenformel mit

$$V = \frac{1}{6}a^3 \quad \text{zu} \quad h = \frac{3V}{A} = \frac{\frac{a^3}{2}}{\sqrt{3}\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Daraus folgt $r = \frac{1}{2\sqrt{3}}a = \frac{1}{3}R$.

Aufgabe 021236:
Gegeben sei ein Würfel $ABCDA'B'C'D'$ mit $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$.
Der Punkt X durchläuft mit konstanter Geschwindigkeit den Umfang des Quadrats $ABCD$ in dieser Reihenfolge, der Punkt Y durchläuft mit derselben Geschwindigkeit den Umfang des Quadrats $A'D'C'B'$ in dieser Reihenfolge.
Beide Punkte beginnen ihre Bewegungen im gleichen Augenblick von den Punkten A und A' aus.
Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Mittelpunkte Z der Strecken XY!

Lösung von W. Engel und U. Pirl:



Aufgrund der gegebenen Bedingungen ergibt sich die Lage des Punktes Y aus der von X folgendermaßen:
a) für $X \in AB$ liegt Y auf $A'D'$ so, dass $|AX| = |A'Y|$ ist,
b) für $X \in BC$ liegt Y auf $D'C'$ so, dass $|BX| = |D'Y|$ ist,
c) für $X \in CD$ liegt Y auf $C'B'$ so, dass $|CX| = |C'Y|$ ist,
d) für $X \in DA$ liegt Y auf $B'A'$ so, dass $|DX| = |B'Y|$ ist.

Zur Lösung der Aufgabe werden die folgenden beiden Sätze bewiesen:
Satz 1: Ist P der Mittelpunkt von AA' und Q der Mittelpunkt von CC', so liegt der Mittelpunkt Z von XY auf PQ.
Satz 2: Liegt Z auf PQ, so ist Z Mittelpunkt einer der Strecken XY.

Aus beiden Sätzen folgt, dass der zu ermittelnde geometrische Ort die Strecke PQ ist.

Beweis von Satz 1:
Wird zu einem fest gedachten Zeitpunkt der Bewegung der Würfel an der Achse g_{PQ} gespiegelt, so geht dieser in sich über, und zwar so, dass A, B, C, D und X in dieser Reihenfolge mit A', B', C', D', Y vertauscht werden. Daher liegt Z auf der Symmetrieachse g_{PQ}.
Weil jeder Würfel konvex ist, ist PQ die Menge der Punkte von g_{PQ}, die im Würfelkörper liegen. Da aus demselben Grund XY und damit Z im Würfelkörper liegen, gilt $Z \in PQ$. □

Beweis von Satz 2:
Es sei ε_2 die auf g_{PQ} senkrecht stehende Ebene durch $Z \in PQ$. Dann liegen P und Q nicht auf derselben Seite von ε_2. Da jede der Kanten AA', BB', CC', DD' zu ε_2 parallel ist, liegen jeweils A und A', B und

B', C und C', D und D' nicht auf verschiedenen Seiten von ε_2, während A und C bzw. A' und C' nicht auf derselben Seite von ε_2 liegen.
Die Ebene ε_2 enthält die Strecken BB' und DD' entweder beide - genau dann, wenn Z der Mittelpunkt von PQ ist - oder beide nicht. Folglich hat ε_2 mit jeder der Strecken $AB, A'B', AD, A'D'$ oder mit jeder der Strecken $BC, B'C', CD, C'D'$ einen Punkt gemeinsam. Diese Schnittpunkte vertauschen sich bei der im Beweis von Satz 1 genannten Spiegelung auf die dort beschriebene Weise.
Daher gibt es zu jedem Punkt $Z \in PQ$ ein Paar, im Falle $Z \neq P, Z \neq Q$ genau zwei Paare (X, Y) zusammengehöriger Punkte X, Y, für die Z Mittelpunkt von XY ist. □

Aufgabe 031235:
Gegeben sei ein Würfel $ABCDA'B'C'D'$ mit $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Ferner sei eine Strecke XY gegeben, wobei $XY = AB$ und X ein Punkt der Strecke AA' sowie Y ein Punkt der Fläche $ABCD$ sind.
Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Strecken XY?

Lösung von Steffen Weber:
Der Mittelpunkt von XY werde mit M bezeichnet, der Lotfußpunkt von M auf AA' mit F. Da A, X, Y, M und F in einer Ebene liegen – die Ebene, in der auch $\triangle AXY$ liegt – gilt nun nach Strahlensatz

$$\frac{FM}{AY} = \frac{XM}{XY} = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \frac{AF}{AX} = \frac{YM}{YX} = \frac{1}{2}$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$AM^2 = AF^2 + FM^2 = \frac{1}{4}AX^2 + \frac{1}{4}AY^2$$

da $AF \perp FM$. Ferner ist $\triangle AXY$ rechtwinklig mit Kathete XY und es gilt $AX^2 + AY^2 = XY^2 = AB^2$. Also ist $AM = \frac{1}{2}AB \equiv$ konstant.
Da XY vollständig zum Würfel gehört, ist der geometrische Ort aller Mittelpunkte der Strecken XY der Teil der Kugel um A mit Radius $\frac{1}{2}AB$, der zu $ABCDA'B'C'D'$ gehört.

Aufgabe 041236:
Gegeben sind im dreidimensionalen Anschauungsraum drei Kreise, die einander paarweise in drei verschiedenen Punkten berühren, d. h., je zwei Kreise haben genau einen gemeinsamen Punkt und in diesem Punkt eine gemeinsame Tangente.
Es ist zu beweisen, dass unter diesen Voraussetzungen die drei Kreise entweder in einer Ebene oder auf der Oberfläche einer Kugel liegen.

Lösung von Rainer Müller:
Vorbemerkung: Daraus, dass die drei Kreise paarweise genau einen gemeinsamen Punkt haben und die drei Berührungspunkte verschieden sind, folgt insbesondere, dass kein Kreis zu einem Punkt degeneriert ist und keine zwei Kreise identisch sind.

Die Kreise bezeichnen wir als k_1, k_2, k_3, den Punkt $k_1 \cap k_2$ als P_{12}, die gemeinsame Tangente von k_1 und k_2 in P_{12} als t_{12}. Analog sind P_{23}, P_{13}, t_{23} und t_{13} definiert.

Zunächst nehmen wir an, dass zwei der Kreise in einer Ebene liegen, o. B. d. A. seien dies k_1 und k_2. In dieser Ebene müssen dann auch die Geraden t_{13} und t_{23} liegen. Sie müssen verschieden sein, denn sonst würde die Gerade $t_{13} = t_{23}$ den Kreis k_3 in den beiden verschiedenen Punkten P_{13} und P_{23} berühren, was nicht möglich ist.
Also hat die k_3 enthaltende Ebene zwei verschiedene Geraden mit der k_1 und k_2 enthaltenden Ebene gemeinsam. Das ist nur dann möglich, wenn beide Ebenen identisch sind.

Wenn also zwei der drei Kreise in einer Ebene liegen, dann liegen alle drei Kreise in dieser Ebene.

Nun betrachten wir den Fall, dass keine zwei Kreise in einer gemeinsamen Ebene liegen.
Zu zeigen ist, dass dann alle drei Kreise auf einer einzigen Kugel liegen. E_{12} sei die zu t_{12} senkrechte Ebene durch P_{12}, d.i. die gemeinsame Symmetrieebene von k_1 und k_2. Für $i = 1, 2, 3$ sei die „Mittelsenkrechte“ m_i des Kreises k_i die Menge aller Punkte, die von jeweils allen Punkten des Kreises den gleichen Abstand haben, d.i. die Gerade senkrecht zur Kreisebene durch den Kreismittelpunkt.
Da k_1 und k_2 symmetrisch zu E_{12} liegen, enthält E_{12} die Geraden m_1 und m_2.
Diese Geraden sind nicht parallel (und insbesondere nicht identisch), da sonst die Ebenen der Kreise k_1 und k_2 parallel und somit gleich wären, und schneiden sich daher in genau einem Punkt M_{12}.
Nach Konstruktion hat M_{12} sowohl von allen Punkten aus k_1 als auch von allen Punkten aus k_2 den gleichen Abstand. Da die Kreise k_1 und k_2 einen Punkt gemeinsam haben, hat M_{12} von allen Punkten aus $k_1 \cup k_2$ den gleichen Abstand, den wir als r_{12} bezeichnen.

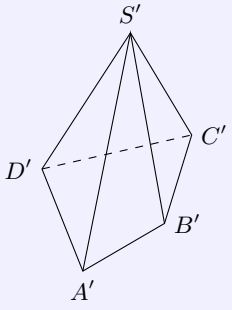
Völlig analog schneiden sich m_2 und m_3 in einem Punkt M_{23}, der von allen Punkten aus $k_2 \cup k_3$ den konstanten Abstand r_{23} hat, und m_1 und m_3 schneiden sich in einem Punkt M_{13}, der von allen Punkten aus $k_1 \cup k_3$ den konstanten Abstand r_{13} hat.

Wenn die drei Punkte M_{12}, M_{23} und M_{13} nicht paarweise verschieden sind, dann sind sie alle drei gleich (denn z. B. aus $M_{12} = M_{23}$ folgt, dass m_1 den Punkt $m_2 \cap m_3$ enthält), so dass $r_{12} = r_{23} = r_{13}$.
Dann liegen alle drei Kreise auf der Kugel mit Radius r_{12} um M_{12}.

Dass die Punkte M_{12}, M_{23} und M_{13} immer gleich sind, zeigen wir durch einen indirekten Beweis, indem wir annehmen, dass sie paarweise verschieden sind.
M_{23} und M_{13} liegen auf m_1 bzw. m_2 und damit in der von diesen Geraden aufgespannten Ebene E_{12}. m_3 hat also zwei verschiedene Punkte mit dieser Ebene gemeinsam und liegt daher in dieser Ebene, die folglich mit den analog definierten Ebenen E_{23} und $E13$ identisch ist. Damit liegen außer P_{12} auch die Punkte P_{23} und P_{13} in dieser Ebene $E = E_{12} = E_{23} = E_{13}$.

Da E mit jedem der Kreise nur zwei Punkte gemeinsam hat und von diese sechs Punkte jeweils zwei als Berührungspunkt zusammenfallen, besteht der Schnitt von E mit den Kreisen genau aus den drei verschiedenen Punkten P_{12}, P_{23} und P_{13}, und die Geraden m_1, m_2 und m_3 sind die Mittelsenkrechten des von den drei Berührungspunkten gebildeten Dreiecks.
Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich jedoch immer in einem einzigen Punkt. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass M_{12}, M_{23} und M_{13} paarweise verschieden sind.
Also tritt der oben genannte Fall ein, dass diese drei Punkte gleich sind und die drei Kreise auf einer Kugel liegen.

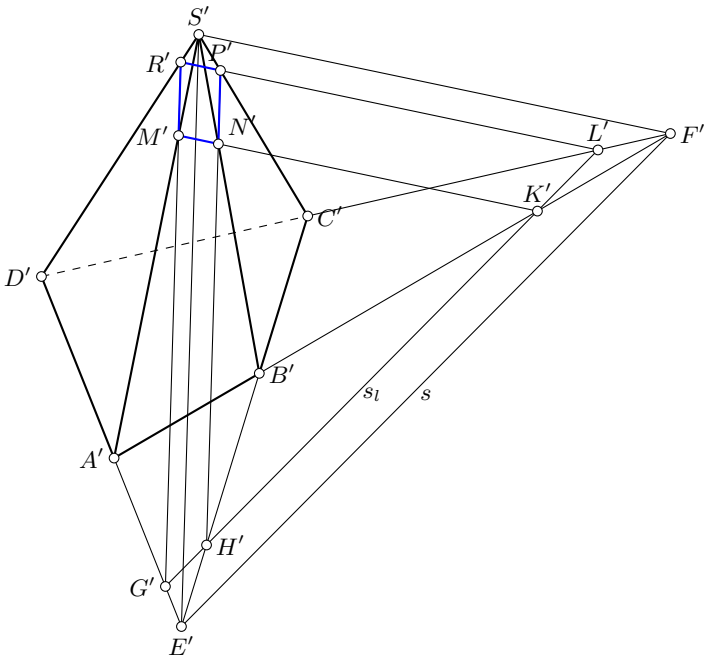
Aufgabe 051232:
Die in der Abbildung im Grundriss gegebene vierseitige Pyramide soll durch eine Ebene derart geschnitten werden, dass die Schnittfläche ein Parallelogramm ist.



a) Konstruieren Sie an dem gegebenen Grundriss die geforderte Schnittfläche und die Spurgerade der zugehörigen Schnittebene!
b) Wie verändert sich die Konstruktion, wenn die Grundfläche ein Trapez ist?
c) Wie verändert sich die Konstruktion, wenn die Grundfläche ein Parallelogramm ist?

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Die Verlängerungen von DA und CB schneiden sich im Punkt E. Die Verlängerungen vin DC und AB schneiden sich im Punkt F. Die Spur der Ebene des Dreiecks $\triangle EFS$ sei s.

Jede Ebene, die parallel zur Ebene des Dreiecks $\triangle EFS$ verläuft und deren Spur s_l zwischen B (einschließlich B) und s liegt, schneidet aus der Pyramide ein Parallelogramm aus.
Die Seiten des Parallelogramms $MNPR$ sind paarweise parallel zu ES bzw. zu FS. LR und KM sind parallel zu FS; GR und HP sind parallel zu ES.



Der Konstruktion liegt folgender Satz zugrunde:
Wenn eine Ebene ε parallel zur Schnittgeraden zweier vorgegebener Ebenen verläuft und diese beiden Ebenen schneidet, so schneidet ε die vorgegebenen Ebenen in Geraden, die parallel zu s sind.

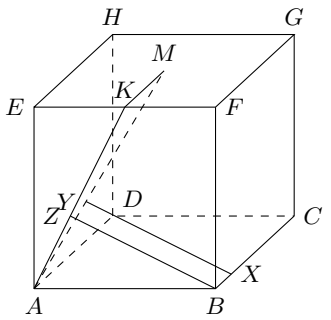
Die Schnittgerade der Ebenen der Seitenflächen $\triangle ADS$ und $\triangle BCS$ geht durch E uns S. Die Schnittgerade der Ebenen der Seitenflächen $\triangle ABS$ und $\triangle DCS$ geht durch F und S.
Da die Ebene mit der Spur s_l parallel zur Ebene ESF verläuft, sind GR und HP parallel zu ES, KM und LR parallel zu FS. Die Strecken GR, HP, KM und LR liegen in derselben Ebene und bestimmen somit das Parallelogramm $MNRP$.

b) Ist die Grundfläche ein Trapez, aber kein Parallelogramm, so liegt einer der Punkte E oder F im Unendlichen. Die Spuren s und s_l sind dann parallel zu den beiden parallelen Seiten des Trapezes. Zwei Seiten des gesuchten Parallelogramms sind dann ebenfalls parallel zu den parallelen Seiten des Trapezes.

c) Ist die Grundfläche ein Parallelogramm, so schneidet jede zur Grundfläche parallele Ebene, die die Pyramide in mehr als einem Punkt trifft, diese in einem Parallelogramm.

Aufgabe 061232:
Gegeben sei die Kantenlänge a eines Würfels. Eine seiner Seitenflächen sei das Quadrat $ABCD$, der Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche sei M.
Wie groß ist der Abstand der Geraden BC und AM?
Anmerkung: Unter dem Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden g und h versteht man die Länge derjenigen Strecke XY, die folgende Eigenschaften hat: X liegt auf g, Y liegt auf h, $XY \perp g$, $XY \perp h$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Zunächst bemerkt man, dass AM und BC windschief zueinander sind, weil AM mit ε_{ABC} nur den Punkt A gemeinsam hat und folglich die in ε_{ABC} gelegene, A nicht enthaltende Gerade BC weder schneidet noch zu ihr parallel ist (Abbildung).
Daher gibt es genau ein Punktepaar (X,Y) mit $X \in BC, Y \in AM$, für das $|XY| = d$ gilt, wenn d den zu berechnenden Abstand von BC und AM bezeichnet. Dabei gilt außerdem

$$XY \perp AM \quad (1) \qquad ; \qquad XY \perp BC \quad (2)$$

Die Ebenen ε_{ADM} und ε_{BCY} schneiden sich in einer Y enthaltenden Geraden g. Wegen

$$BC \parallel AD \quad (3) \qquad \text{ist} \qquad BC \parallel g \quad (4)$$

Andernfalls hätte nämlich g mit BC einen Schnittpunkt, der auch gemeinsamer Punkt von ε_{ABC} und ε_{ADM} wäre und damit auf AD läge, was (3) widerspricht.
Aus (2), (3), (4) folgt $g \perp XY$. Hieraus ergibt sich in Verbindung mit (1) wegen $g \neq AM$: $XY \perp \varepsilon_{ADM}$ (5).
Bezeichnet Z den Schnittpunkt der Parallelen zu XY durch B mit ε_{ADM}, so ist $BZ \perp \varepsilon_{ADM}$ wegen (5), insbesondere also $BZ \perp AZ$ (6) und $|XY| = |BZ|$.
Denn im Fall $X \neq B$ ist $BXYZ$ ein Parallelogramm, während in dem (übrigens nicht eintretenden) Fall $X = B$ außerdem $Y = Z$ wäre.
Wegen $BZ \parallel XY$, (2) ist $BZ \perp BC$. Somit liegt Z in der auf BC senkrechten Ebene ε durch B, die eine Seitenfläche des Würfels enthält, deren Rand das Quadrat $ABFE$ ist. Die Ebene ε_{ADM} schneidet die Strecke EF in ihrem Mittelpunkt K. Aufgrund der Bedeutung von M und K ist nämlich $MK \parallel AD$, so dass MK in ε_{ADM} liegt.
Als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen ist dann $\angle AKE = \angle KAB$. Hieraus folgt wegen $Z \in AK$, $AE \perp EK$ und (6) nach dem 1. Ähnlichkeitssatz $\triangle AEK \sim \triangle AZB$ und damit

$$AZ : BZ = KE : AE = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2} \qquad \text{also} \qquad AZ = \frac{1}{2}BZ \quad (7)$$

Wegen (6) ist $\triangle AZB$ rechtwinklig mit der Hypotenuse AB, so dass aufgrund des Lehrsatzes des Pythagoras und (7)

$$BZ^2 = AB^2 - AZ^2 = a^2 - \frac{1}{4}BZ^2 \qquad \text{also} \qquad BZ = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

gilt. Mithin ist

$$d = XY = BZ = \frac{2}{\sqrt{5}}a = \frac{2}{5}a\sqrt{5}$$

Aufgabe 071231:
Drei gleich große Holzkugeln mit einem Radius der Länge r, die sich paarweise berühren, liegen auf einer ebenen Tischplatte.
Wie groß ist der Radius einer vierten Kugel, die alle drei Kugeln und die Tischplatte gleichzeitig berührt?

Lösung von cyrix:
Die Mittelpunkte der drei großen Kugeln liegen alle in einer Ebene, die parallel zur Tischplatte in einem Abstand von r verläuft. Sie bilden ein gleichseitiges Dreieck $\triangle M_1M_2M_3$ mit Kantenlänge $2r$ und sei S der Schwerpunkt dieses Dreiecks.
Dann gilt $|M_1S| = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$, da der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $2:1$ teilt und jede Seitenhalbierende im gleichseitigen Dreieck auch eine Höhe ist, deren Länge durch die Anwendung des Satzes von Pythagoras als $\sqrt{(2r)^2 - r^2}$ ermittelt werden kann.

Sei M der Mittelpunkt der vierten Kugel. Da sie die drei großen berührt, muss M aus Symmetriegründen auf dem Lot von S auf die Tischebene liegen. So entsteht ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle M_1SM$ mit rechtem Winkel bei S.
Ist R der gesuchte Radius der vierten Kugel, so gilt einerseits $|SM| = r - R$, da die vierte Kugel auch die Tischplatte (von oben) berührt und die Berührungsradien aller Kugeln auf die Tischplatte senkrecht zu dieser stehen, also der der vierten Kugel auch auf der Gerade MS liegt. Andererseits berühren sich aber auch die vierte und die erste Kugel, sodass ihre Mittelpunkte M_1 und M den Abstand $r + R$ haben.

Setzt man dies in die durch den Satz von Pythagoras gegebenen Gleichung für das rechtwinklige Dreieck $\triangle M_1SM$ ein, erhält man

$$(r+R)^2 = |M_1M|^2 = |M_1S|^2 + |SM|^2 = \frac{4}{3}r^2 + (r-R)^2$$

bzw. $4rR = (r+R)^2 - (r-R)^2 = \frac{4}{3}r^2$, also wegen $r > 0$ schließlich $R = \frac{1}{3}r$.

Aufgabe 081235:
Gegeben seien eine dreiseitige Pyramide und die ihr umbeschriebene Kugel. Über diese Pyramide und diese Kugel werden die folgenden Aussagen gemacht:

(1) Eine Grundkante der Pyramide ist ebenso lang wie der Durchmesser der Kugel.
(2) Die Längen der beiden anderen Grundkanten verhalten sich wie $3:4$.
(3) Das Volumen der Pyramide beträgt 40 cm^3.
(4) Alle Kanten der Pyramide sind einander paarweise gleich lang.
(5) Die Grundfläche der Pyramide ist ein rechtwinkliges Dreieck.
(6) Die Höhe der Pyramide ist ebenso lang wie der Radius der Kugel.

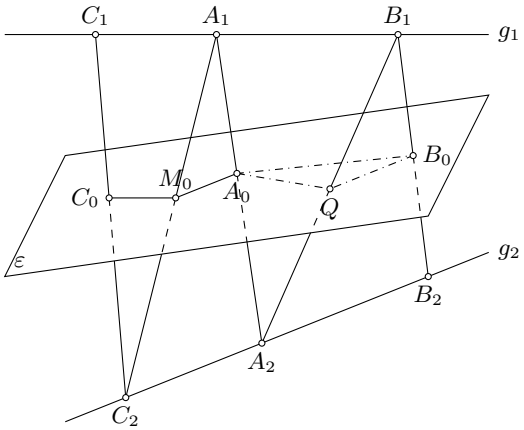
Es sei bekannt, dass von den obigen sechs Aussagen eine Aussage falsch und die übrigen Aussagen wahr sind.
Wie lang sind die Kanten der Pyramide?

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Die Aussagen 1) und 4) können nicht beide gleichzeitig erfüllt sein, da es höchstens eine Kante mit Länge des Kugeldurchmessers geben kann.
Eine Pyramide mit der rechtwinkligen Grundfläche mit den Seiten $3; 4; 5$ und einer Höhe 2,5, wobei die Spitze über dem Mittelpunkt der Hypotenuse liegt, erfüllt die Bedingungen 1), 2), 5) und 6).
Diese hat das Volumen $V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}\frac{3\cdot 4}{2} \cdot 2{,}5 = 5$. Streckung um den Faktor 2 ergibt eine Pyramide mit den Volumen 40 und den Grundkanten $6; 8; 10$. Die anderen Kanten sind gleichlang, da die Spitze direkt über dem Mittelpunkt des Umkreises der Grundfläche liegt und haben die Länge $5\sqrt{2}$.

Dieses lässt sich leicht an dem gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreieck bestehend aus der Hypotenuse und der Spitze ablesen.

Aufgabe 101235:
Es seien zwei nicht in ein und derselben Ebene liegende (also zwei windschiefe) Geraden g_1 und g_2 gegeben.
Gesucht ist der geometrische Ort aller Punkte P, zu denen es Punkte P_1 auf g_1 und P_2 auf g_2 mit der Eigenschaft gibt, dass P die Strecke P_1P_2 in ein und demselben Verhältnis von innen teilt.
Anmerkung: Eine Gerade g ist zu einer Ebene ε genau dann parallel, wenn es in ε eine Gerade gibt, die zu g parallel ist.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Auf g_1 bzw. g_2 seien je zwei Punkte $A_1 \neq B_1$ bzw. $A_2 \neq B_2$ beliebig gewählt. Die Punkte, die die Strecken A_1A_2, B_1B_2 bzw. B_1A_2 in erwähnten Verhältnis von innen teilen, seien A_0, B_0 bzw. Q genannt, woraus $Q \neq A_0$ und $Q \neq B_0$ folgt.



Nach der Umkehrung eines der Strahlensätze folgt aus der Gleichheit der Teilverhältnisse

$$A_0Q \parallel g_1 \qquad \text{und} \qquad QB_0 \parallel g_2 \tag{1}$$

Aus $g_1 \nparallel g_2$ folgt jetzt $A_0Q \nparallel QB_0$ und damit $A_0 \neq B_0$. Daher liegt Q nicht auf der Geraden durch A_0 und B_0; denn anderenfalls wäre $g_1 \parallel g_2$ im Widerspruch zur Aufgabenstellung.
Also bestimmen A_0, B_0 und Q eine Ebene ε, die zu g_1 und g_2 parallel liegt.

II) Seien C_1 auf g_1 und C_2 auf g_2 beliebig liegende Punkte. Der innere Teilpunkt von C_1C_2 mit dem erwähnten Teilverhältnis sei C_0, der von A_1C_2 sei M_0.
Analog zu (I) folgt $M_0A_0 \parallel g_2$ und $C_0M_0 \parallel g_1$. Daher und aus (I) folgt $M_0A_0 \parallel B_0Q$ sowie $C_0M_0 \parallel QA_0$.
Also gehört mit A_0 auch M_0 und mit M_0 aus C_0 zu ε.

Daraus folgt:
Alle Punkte, die die Verbindungsstrecke eines Punktes auf g_1 mit einem Punktr auf g_2 in ein und demselben Verhältnis von innen teilen, gehören zu ε.

III) C_0 sei beliebiger Punkt aus ε.
Die Parallele h_1 durch C_0 zu g_1 und die Parallele h_2 durch A_0 zu g_2 sind in ε gelegen und einander nicht parallel. Sie schneiden sich daher in genau einem Punkt, der M_0 genannt sei.
Die durch A_1, A_2 und g_2 bestimmte Ebene enthält A_2 und damit AQ_0, also h_2 und folglich M_0. Damit schneiden sich die Geraden durch A_1 und M_0 und die Gerade g_2 in genau einem Punkt, der C_2 genannt sei.

Ebenso (mit $C_2, A_1, M_0, C_0, g_1, h_1$ statt $A_1, A_2, A_0, M_0, g_2, h_2$) folgt dass sich die Geraden durch C_2 und C_0 und die Gerade g_1 in genau einem Punkt schneiden, der C_1 genannt sei.
Dann folgt der Reihe nach, dass auch A_1C_2 durch M_0 und C_1C_2 durch C_0 von innen im erwähnten Verhältnis geteilt werden.

Damit gehört jeder Punkt von ε zum geometrischen Ort.
Also ist der gesuchte geometrische Ort die zu g_1 und g_2 parallele Ebene ε.

Aufgabe 121232:
Im Raum seien vier Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 gegeben, die nicht in ein und derselben Ebene liegen. Man ermittle die Anzahl aller derjenigen Ebenen, die von diesen vier Punkten gleich weit entfernt sind.

Lösung von Kitaktus:
Vorbemerkung: Wenn die vier Punkte nicht in einer Ebene liegen, so können auch nicht drei von ihnen auf einer gemeinsamen Geraden liegen. (1)

Wir unterscheiden danach, wie viele Punkte jeweils auf den beiden Seiten einer solchen Ebene E liegen.

1. Fall: Alle vier Punkte liegen auf der gleichen Seite von E. Dieser Fall ist nicht möglich, weil es sonst eine Ebene gäbe, die parallel zu E ist und alle vier Punkte enthält.

2. Fall: Drei Punkte liegen auf der einen Seite von E, der vierte auf der anderen. Die drei Punkte auf der einen Seite von E liegen in einer Ebene E', die parallel zu E ist, da sie alle den gleichen Abstand zu E haben. Diese Ebene ist wegen (1) eindeutig bestimmt.

Betrachten wir nun das Lot l des vierten Punktes auf E', so steht l auch senkrecht auf E. E muss daher l genau halbieren, damit der Abstand aller vier Punkte zu E gleichgroß ist. Damit ist E eindeutig bestimmt. E ist parallel zu E' und geht durch den Mittelpunkt von l.
Da es vier Auswahlmöglichkeiten gibt, welcher Punkt derjenige ist, der alleine auf einer Seite von E liegt, ergeben sich hier vier verschiedene Ebenen.

3. Fall: Auf beiden Seiten liegen je zwei Punkte. Diese beiden Paare bestimmen zwei Geraden g und h. Diese Geraden schneiden sich nicht und sind nicht parallel, da sonst alle vier Punkte in einer Ebene liegen würden. Die Geraden sind also windschief zueinander.
Eine Ebene, die zu zwei auf der gleichen Seite liegenden Punkten den gleichen Abstand hat, hat auch zur gesamten Geraden durch diese zwei Punkte den gleichen Abstand.

Die Ebene E muss zu den Gerade g und h parallel sein und den Abstand beider Geraden halbiert. Damit ist E eindeutig bestimmt.
Da es drei Auswahlmöglichkeiten gibt, welcher Punkt zusammen mt P_1 auf einer Seite von E liegt, ergeben sich hier drei verschiedene Ebenen.

Insgesamt gibt es also sieben Ebenen, die von allen vier Punkten den gleichen Abstand haben.

Aufgabe 131234:
Gegeben sei ein nicht notwendig regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten P_1, P_2, P_3 und P_4. Wir betrachten 4 Kugeln K_i $(i = 1, ..., 4)$ mit P_i als Mittelpunkt von K_i.

Man beweise, dass die Forderung, derartige Kugeln sollen sich paarweise von außen berühren, genau dann erfüllbar ist, wenn gilt:

$$P_1P_2 + P_3P_4 = P_1P_3 + P_2P_4 = P_1P_4 + P_2P_3$$

Lösung von cyrix:
Es sei r_i der Radius der Kugel K_i.
Wir nehmen zuerst an, dass sich die Kugeln K_i jeweils von außen berühren. Dann ist die Summe der Radien zweier dieser Kugeln genau gleich der Entfernung von deren Mittelpunkten. Also ist für $1 \leq i < j \leq 4$ die Summe $r_i + r_j = |P_iP_j|$. Insbesondere ist

$$|P_1P_2| + |P_3P_4| = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = |P_1P_3| + |P_2P_4| = |P_1P_4| + |P_2P_3|$$

Sei nun umgekehrt die Gleichheit dieser Streckensummen gegeben. Wir wählen dann

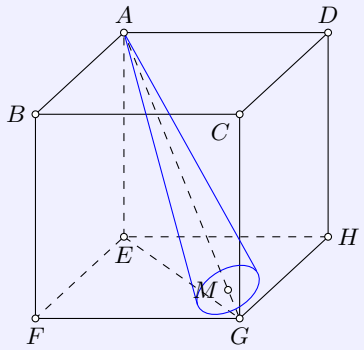
$$\begin{aligned} r_1 &:= \frac{1}{2} \cdot (|P_1P_2| + |P_1P_3| - |P_2P_3|), \\ r_2 &:= \frac{1}{2} \cdot (|P_1P_2| + |P_2P_3| - |P_1P_3|), \\ r_3 &:= \frac{1}{2} \cdot (|P_1P_3| + |P_2P_3| - |P_1P_2|) \quad \text{und} \\ r_4 &:= \frac{1}{2} \cdot (|P_1P_4| + |P_2P_4| - |P_1P_2|) \end{aligned}$$

wobei r_1 bis r_3 aufgrund der Dreiecksungleichung im Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$ und r_4 aufgrund der Dreiecksungleichung im Dreieck $\triangle P_1P_2P_4$ positiv sind.
Es ist dann

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= |P_1P_2|, \\ r_1 + r_3 &= |P_1P_3|, \\ r_2 + r_3 &= |P_2P_3|, \\ r_1 + r_4 &= \frac{1}{2} \cdot (|P_1P_4| + (|P_2P_4| + |P_1P_3|) - |P_2P_3|) = \frac{1}{2} \cdot (|P_1P_4| + (|P_2P_3| + |P_1P_4|) - |P_2P_3|) = |P_1P_4|, \\ r_2 + r_4 &= \frac{1}{2} \cdot (|P_2P_4| + (|P_1P_4| + |P_2P_3|) - |P_1P_3|) = \frac{1}{2} \cdot (|P_2P_4| + (|P_1P_3| + |P_2P_4|) - |P_1P_3|) = |P_2P_4|, \\ r_3 + r_4 &= \frac{1}{2} \cdot ((|P_1P_3| + |P_2P_4|) + (|P_2P_3| + |P_1P_4|) - 2|P_1P_2|) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2(|P_1P_2| + |P_3P_4|) - 2|P_1P_2|) = |P_3P_4|, \end{aligned}$$

sodass sich die Kugeln K_i jeweils gegenseitig von außen berühren, □.

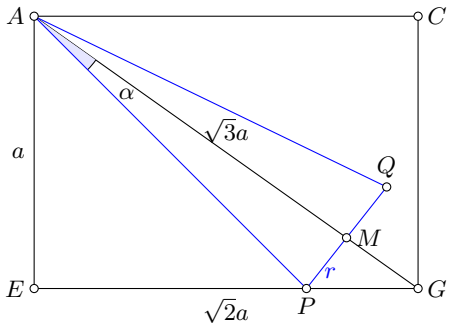
Aufgabe 141233:



Im Innern eines Würfels $ABCDEFGH$ mit den Seitenflächen $ABCD$, $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$, $DAEH$, $EFGH$ und mit der Kantenlänge a befindet sich ein gerader Kreiskegelkörper mit den folgenden Eigenschaften:
a) Seine Spitze fällt mit dem Eckpunkt A des Würfels zusammen.
b) Seine Achse liegt auf der Raumdiagonalen AG des Würfels.
c) Seine Grundfläche hat mit einer der drei Seitenflächen des Würfels, auf denen G liegt, genau einen Punkt gemeinsam.
Man beweise:
Ist α die Größe des Winkels zwischen einer Seitenlinie und der Achse und r der Radius der Grundfläche des Kegelkörpers, so gilt

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{\cot\alpha + \sqrt{2}}$$

Lösung von MontyPythagoras:
Wir betrachten einen Schnitt durch die Ebene $AEGC$:



Der Berührungspunkt des Kegels auf der Würfelfläche $EFGH$ ist P. Aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke PGM und AGE gilt:

$$\frac{r}{\overline{GM}} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a}$$

$$\overline{GM} = \sqrt{2}\,r$$

In dem rechtwinkligen Dreieck APM gilt dann:

$$\cot\alpha = \frac{\sqrt{3}\,a - \sqrt{2}\,r}{r}$$

$$\sqrt{3}\,a - \sqrt{2}\,r = r\cot\alpha$$

$$\sqrt{3}\,a = r(\cot\alpha + \sqrt{2})$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{\cot\alpha + \sqrt{2}}$$

q. e. d.

Aufgabe 161232:
In einen geraden Kreiskegel mit dem Radius r und der Höhenlänge h seien Kugeln so einbeschrieben, dass die erste Kugel die Grundfläche und die Mantelfläche des Kegels, jede folgende Kugel die vorhergehende Kugel von außen und die Mantelfläche des Kegels berührt, wobei sämtliche Kugelmittelpunkte auf der Kegelachse liegen.
Gesucht ist eine formelmäßige Ermittlung des Radius r_n der n-ten Kugel aus den gegebenen Längen

r und h.
Man weise insbesondere nach, dass die Folge (r_n) eine geometrische Folge mit dem Quotienten

$$q = \frac{h - 2r_1}{h}$$

ist.

Lösung von anonymes Mitglied des Forums „Matheplanet“:
Wir packen Kreise in ein gleichschenkliges Dreieck. Es ergeben sich dann ähnliche Dreiecke und es gilt (ein Kreis im Dreieck):

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{r_1}{h-r_1} \iff r_1 = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}+r} \cdot h$$

Nun packen wir den zweiten Kreis in das Dreieck. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} &= \frac{r_2}{h-2r_1-r2} \\ rh - 2rr_1 - rr_2 &= r_2\sqrt{r^2+h^2} \\ r_2 = \frac{r(h-2r_1)}{r+\sqrt{r^2+h^2}} &= \frac{r_1(h-2r_1)}{h} = q \cdot r_1 \end{aligned}$$

Für den dritten Kreis:

$$\begin{aligned} \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} &= \frac{r_3}{h-2r_1-2r_2-r_3} \\ rh - 2rr_1 - 2rr_2 - rr_3 &= r_3\sqrt{r^2+h^2} \\ r(h-2r_1-2r_2) &= r_3(r+\sqrt{r^2+h^2}) \end{aligned}$$

$$r_3 = \frac{r_1}{h}(h-2r_1-2r_2) = r_2 - 2\frac{r_1 r_2}{h} = r_2\left(1-2\frac{r_1}{h}\right) = r_2\frac{h-2r_1}{h} = r_2 \cdot q$$

Sowie analog der n-te Kreis:

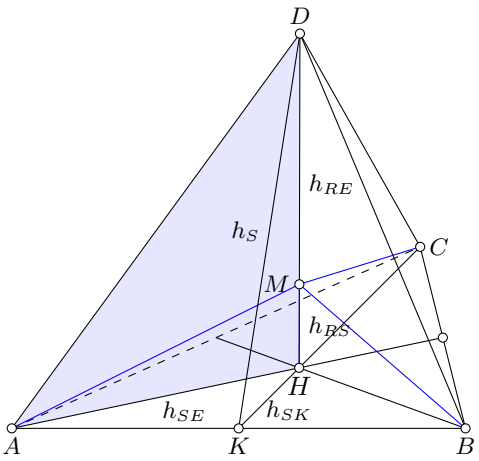
$$\begin{aligned} \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} &= \frac{r_n}{h-2r_1-2r_2-\ldots-2r_{n-1}-r_n} \\ rh - 2rr_1 - 2rr_2 - \ldots - 2rr_{n-1} - rr_n &= r_n\sqrt{r^2+h^2} \\ r(h-2r_1-2r_2-\ldots-2r_{n-1}) &= r_n(r+\sqrt{r^2+h^2}) \end{aligned}$$

$$r_n = \frac{r_1}{h}(h-2r_1-2r_2-\ldots-2r_{n-1}) = r_{n-1} - 2\frac{r_1 r_{n-1}}{h} = r_{n-1}\left(1-2\frac{r_1}{h}\right) = r_{n-1}\frac{h-2r_1}{h} = r_{n-1} \cdot q$$

Aus $r_n = r_{n-1} \cdot q$ folgt sofort, dass die Folge (r_n) eine geometrische Folge ist.

Aufgabe 171233:
Es sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge s, in dem fünf kongruente Kugeln (mit den Mittelpunkten P, Q, R, S, T) so angeordnet sind, dass gilt:
(1) Die Kugel um P berührt die drei von A ausgehenden Seitenflächen ABC, ACD, ADB des Tetraeders,
(2) die Kugel um Q berührt die drei von B ausgehenden Seitenflächen,
(3) die Kugel um R berührt die drei von C ausgehenden Seitenflächen und
(4) die Kugel um S die drei von D ausgehenden Seitenflächen.
(5) Die Kugel um T berührt die vier übrigen Kugeln von außen.
Man ermittle den Radius r dieser fünf Kugeln.

Lösung von Daniel Gutekunst:



Als Mittelpunkt (z. B. H) einer Seite bezeichne ich den Punkt, in dem sich Winkelhalbierende, Seitenhalbierende, Mittelsenkrechte bzw. Höhen (was bei einem gleichseitigen Dreieck alles das Gleiche ist) schneiden.
Als Raumhöhe bezeichne ich die Strecke vom Mittelpunkt einer Seite zur gegenüberliegenden Tetraeder-Ecke. Diese Strecke tritt senkrecht aus der Seite mit dem Mittelpunkt.
Als Raummittelpunkt M bezeichne ich den Punkt, in dem sich die 4 Raumhöhen schneiden.

Die Punkte auf den Raumhöhen haben denselben Abstand von 3 Seiten, der Raummittelpunkt sogar von 4 Seiten. Die Mittelpunkte von 4 der Kugeln liegen auf jeweils einer Raumhöhe und haben denselben Abstand von der dazugehörigen Ecke/Seite. Der Mittelpunkt der fünften Kugel ist der Raummittelpunkt.

Zunächst berechne ich die Seitenmittelpunkte. Dabei berechne ich eher Abstände als Punkte. Für die Seitenhöhe h_S gilt

$$h_S^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = s^2 \Rightarrow h_S = \frac{\sqrt{3}}{2}s$$

Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Mittelpunkt im Verhältnis 2 zu 1. Damit folgt für den Abstand einer Ecke zum Seitenmittelpunkt (z. B. AH)

$$h_{SE} = \frac{2}{3}h_S = \frac{\sqrt{3}}{3}s$$

und von der Kante (z. B. KH)

$$h_{SK} = \frac{1}{3}h_S = \frac{\sqrt{3}}{6}s$$

Für die Raumhöhe h_R gilt nun:

$$h_R^2 + H_{SK}^2 = h_S^2 \Rightarrow h_R = \frac{2\sqrt{2}}{3}h_S = \frac{\sqrt{6}}{3}s$$

Um die Abstände des Raummittelpunktes M von den Ecken h_{RE} (rote Linien) bzw. Seiten h_{RS} zu berechnen, betrachte ich das rechtwinklige Dreieck (z. B. $\triangle MHA$) vom Raummittelpunkt M zu einem Seitenmittelpunkt (z. B. H) zu einer Ecke (z. B. A) dieser Seite und zurück. Es gilt

$$h_{RE}^2 = h_{RS}^2 + h_{SE}^2 \quad \text{und} \quad h_{RE} + h_{RS} = h_R$$

Es ergibt sich $h_{RS} = \frac{\sqrt{6}}{12}$. Der Umkugelradius h_{RE} ist gleich $\frac{\sqrt{6}}{4}s$.

Nun versucht man eine Kugel in eine Ecke zu platzieren, d. h. bei einem gegeben Radius r die Kugel auf einer Raumhöhe so weit zur Ecke hin zu schieben, bis die Kugel alle 3 Seiten berührt. Die Berührungspunke liegen dabei auf den Seitenhöhen.
Ist die Bedingung (Berührung) für eine Seite erfüllt, gilt sie auch für die anderen zwei.

Für den Winkel α, den die Raumhöhe mit einer der drei möglichen Seitenhöhen einschließt, gilt $\sin\alpha = \frac{h_{SK}}{h_S} = \frac{1}{3}$. Für den Abstand z, den der Mittelpunkt der Kugel (in 2D übertragen ein Kreis) von der Ecke haben muss, gilt $\sin\alpha = \frac{r}{z}$ (Radius und Seitenhöhe stehen senkrecht aufeinander), also $z = 3r$.
Damit alle 4 Kugeln die fünfte Kugel in der Mitte berühren, muss die Summe aus Abstand z der ersten Kugel von einer Ecke plus deren Radius plus nochmals diesem Radius (für die Kugel im Raummittelpunkt) gleich der vollen Strecke von der Ecke bis zum Mittelpunkt sein:

$$5r = h_{RE} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{20}$$

Wegen $r < h_{RS}$ befindet sich auch die fünfte Kugel im Inneren des Tetraeders, womit alle Bedingungen erfüllt sind.

Aufgabe 181232:
Im Raum seien A, B zwei verschiedene Punkte und ε eine Ebene. Für jede mögliche Lage von A, B, ε ermittle man zu diesen gegebenen A, B, ε alle diejenigen Punkte C auf ε, für die die Abstandssumme $AC + BC$ möglichst klein ist.

Lösung von ochen:
Falls die Strecke AB und ε gemeinsame Punkte haben, so haben alle diese gemeinsamen Punkte C die Eigenschaft, dass

$$AC + BC = AB$$

gilt. Die Abstandssumme wird also für alle Punkte C, die im Schnitt der Ebene ε und der Strecke AB liegen, minimal. Für alle Punkte C', die nicht in diesem Schnitt liegen, gilt dagegen

$$AC + BC > AB.$$

Falls Schnitt der Ebene ε und der Strecke AB nicht leer ist, wird die Abstandssumme genau dann minimal, wenn C im Schnitt der Ebene ε und der Strecke AB liegt.

Falls die Strecke AB und ε keine gemeinsame Punkte haben, so liegen A und B auf der gleichen Seite von ε. Sei B' der Spiegelpunkt von B an der Ebene ε, so haben die Strecke AB' und ε einen gemeinsamen Punkt. Weiter folgt folgt für alle Punkte C

$$AC + BC = AC + B'C \geq AB'.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn C der Schnittpunkt der Strecke AB' mit der Ebene ε ist. Falls Schnitt der Ebene ε und der Strecke AB nicht leer ist, wird die Abstandssumme genau dann minimal, wenn C der Schnittpunkt der Ebene ε und der Strecke AB' ist.

Aufgabe 191234:
Man untersuche, ob unter allen Tetraedern $ABCD$ mit gegebenem Volumen V und mit rechten Winkeln $\angle BDC$, $\angle CDA$, $\angle ADB$ eines mit kleinstmöglicher Summe $AB+AC+AD+BC+BD+CD$ existiert.
Ist dies der Fall, so ermittle man (in Abhängigkeit von V) diese kleinstmögliche Summe.

Lösung von cyrix:
Aufgrund der rechten Winkel gilt nach dem Satz von Pythagoras $|AB| = \sqrt{|AD|^2 + |BD|^2}$, $|AC| = \sqrt{|AD|^2 + |CD|^2}$ und $|BC| = \sqrt{|BD|^2 + |CD|^2}$.

Für beliebige positive reelle Zahlen x und y gilt $\frac{x^+y^2-2xy}{2} = \frac{(x-y)^2}{2} \geq 0$, also

$$x^2 + y^2 \geq \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{2} = \frac{(x+y)^2}{2} \qquad \text{und damit} \qquad \sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x + y)$$

wobei Gleichheit nur für $x = y$ gilt.

Setzt man dies ein, so erhält man

$$|AB| + |AC| + |AD| + |BC| + |BD| + |CD| \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (|AD| + |BD|) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (|AD| + |CD|) + |AD| + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (|BD| + |CD|) + |BD| + |CD| =$$

$$= (|AD| + |BD| + |CD|) \cdot (1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = (|AD| + |BD| + |CD|) \cdot (1 + \sqrt{2})$$

wobei Gleichheit nur genau für $|AD| = |BD| = |CD|$ eintritt.

Das Volumen V des Tetraeders $ABCD$ bestimmt sich aufgrund der rechten Winkel bei D zu $V = \frac{1}{6} \cdot |AD| \cdot |BD| \cdot |CD|$, sodass $\sqrt[3]{|AD| \cdot |BD| \cdot |CD|} = \sqrt[3]{6V}$ folgt.

Für beliebige positive reelle Zahlen x, y und z gilt aufgrund der Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$, wobei Gleichheit nur genau für $x = y = z$ eintritt.

Also ist

$$|AD| + |BD| + |CD| = 3 \cdot \frac{|AD| + |BD| + |CD|}{3} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{6V}$$

und damit

$$|AB| + |AC| + |AD| + |BC| + |BD| + |CD| \geq 3 \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot \sqrt[3]{6V}$$

wobei Gleichheit nur genau für $|AD| = |BD| = |CD|$ eintritt. Damit ist der dafür entstehende Term auf der rechten Seite genau die gesuchte kleinste Summe.

Aufgabe 211232:
a) Beweisen Sie, dass kein Polyeder existiert, das genau sieben Kanten besitzt!
b) Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl n mit $n > 7$ ein Polyeder existiert, das genau n Kanten besitzt!
Hinweis: Ein Polyeder ist ein ebenflächig begrenzter Körper. Im Sinne der Aufgabenstellung wird positives Volumen vorausgesetzt; weitere Anforderungen wie Konvexität werden nicht gestellt.

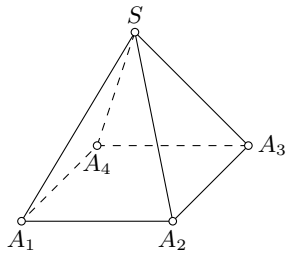
Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Angenommen, es gäbe ein Polyeder P mit genau sieben Kanten.
Aus dieser Annahme folgt,

(1) falls P eine Seitenfläche F mit mindestens vier Ecken A_1, A_2, A_3, A_4 hat:
Zu F gehören mindestens vier Kanten, da jedes n-Eck auch n Kanten besitzt. Von jeder der Ecken A_i geht noch mindestens eine Kante k_i aus, die nicht in der Ebene durch F verläuft.
Je zwei dieser Kanten k_i, k_j $(i \neq j)$ sind voneinander verschieden (denn da k_i jeweils A_i enthält, würde eine Kante, die $k_i = k_j$ wäre, A_i und A_j enthalten, also in der Ebene durch F verlaufen). Damit ergibt sich der Widerspruch, dass P mindestens acht Kanten besitzen müsste.

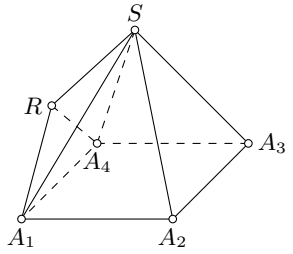
(2) falls P nur Dreiecke als Seitenflächen besitzt:
Die Anzahl dieser Dreiecke sei m. Zählt man für jedes dieser m Dreiecke seine drei Kanten auf, so hat man mit dieser Aufzählung von $3m$ Kanten jede Kante des Polyeders genau zweimal erfasst; denn an jede Kante des Polyeders grenzen genau zwei Seitenflächen an.
Also besitzt P genau $\frac{3m}{2}$ Kanten.
Damit ergibt sich der Widerspruch, dass die Anzahl m die Gleichung $\frac{3m}{2} = 7$, d. h. $3m = 14$ erfüllen müsste.

b) Es sei nun n eine beliebige natürliche Zahl mit $n > 7$.

(1) Ist n gerade, so gibt es eine natürliche Zahl $m \geq 4$ mit $n = 2m$.
Dann hat z. B. jede m-seitige Pyramide genau n Kanten, nämlich, wenn $G = A_1A_2...A_m$ ihre Grundfläche und S ihre Spitze ist, die m Seitenkanten von G und die m hiervon und untereinander verschiedenen Kanten $A_1S, ..., A_mS$. (Abbildung für $m = 4$)



(2) Ist n ungerade, so gibt es eine natürliche Zahl $m \geq 3$ mit $n = 2m + 3$.
Dann hat z. B. jedes folgendermaßen zu erhaltende Polyeder P genau n Kanten: Man wähle eine m-seitige Pyramide Q mit der Grundfläche $A_1A_2...A_m$ und der Spitze S.
Außerhalb von Q wähle man einen Punkt R, der auf keiner der Verbindungsgeraden zweier Eckpunkte von Q liegt und so nahe an der Seitenfläche $F = A_1A_2S$ gelegen ist, dass das Tetraeder $T = A_1A_2SR$ mit Q nur F gemeinsam hat.
Dann wird aus Q und T ein Polyeder zusammengesetzt, das genau die $2m$ Kanten von Q sowie die hiervon und untereinander verschiedenen Strecken A_1R, A_2S, SR als Seitenkanten besitzt. (Abbildung für $m = 4$)

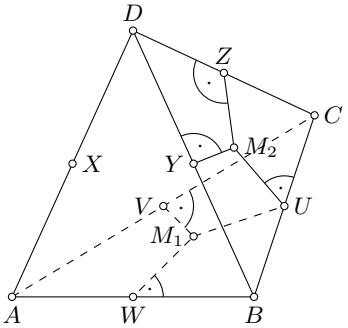


Aufgabe 221233B:
Man beweise:
a) Wenn es zu einem Tetraeder $ABCD$ eine Kugel K gibt, die alle sechs Kanten des Tetraeders berührt, dann gilt:

$$AB + CD = AC + BD = AD + BC \qquad (1)$$

b) Wenn (1) für ein Tetraeder $ABCD$ gilt, dann gibt es eine Kugel K, die alle sechs Kanten des Tetraeder berührt.
Definition: Eine Kugel K berührt genau dann eine Strecke s, wenn K die s enthaltende Gerade berührt und der Berührungspunkt auf s liegt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Wenn eine Kugel K die Kanten BC, CA, AB, AD, BD, CD eines Tetraeders $ABCD$ in U, V, W, X, Y, Z berührt, so folgt: (siehe Abbildung)



Die Ebene durch $A, B; C$ hat mit K die Punkte U, V, W gemeinsam, sie schneidet K also in einem Kreis. Dieser berührt die Geraden durch B, C bzw. durch $C; A$ in U bzw. V. Nach dem Satz von der Gleichheit der Tangentenabschnitte gilt daher $CV = CU$.
Entsprechend folgt

$$CZ = CV = CU \quad ; \quad AW = AV = AX \quad ; \quad BW = BY = BU \quad ; \quad DZ = DY = DX$$

und damit durch Addition (1).

b) Wenn (1) für ein Tetraeder $ABCD$ gilt, so folgt:
Man bezeichne die Ebenen, in denen die Dreiecke ABC, BCD, CAD, ABD liegen, mit e_1, e_2, e_3, e_4, ferner die Inkreismittelpunkte dieser Dreiecke mit M_1, M_2, M_3, M_4 sowie die Inkreisberührungspunkte (in der aus der Abbildung ersichtlichen Verteilung) mit U_1, V_1, W_1 bzw. Z_2, Y_2, U_2 bzw. X_3, Z_3, V_3 bzw. Y_4, X_4, W_4.
Dann ist $AV_1 = AW_1$, $BW_1 = BU_1$, $CU_1 = CV_1$, also

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(BC + AC - AB) &= \frac{1}{2}(BU_1 + CU_1 + AV_1 + CV_1 - AW_1 - BW_1)\\ &= \frac{1}{2}(BU_1 + CU_1 + AV_1 + CU_1 - AV_1 - BU_1) = CU_1\end{aligned}$$

Entsprechend ist $CU_2 = \frac{1}{2}(BC + CD - BD)$. Unter Anwendung von (1) folgt

$$CU_2 = \frac{1}{2}(BC + AC - AB) = CU_1$$

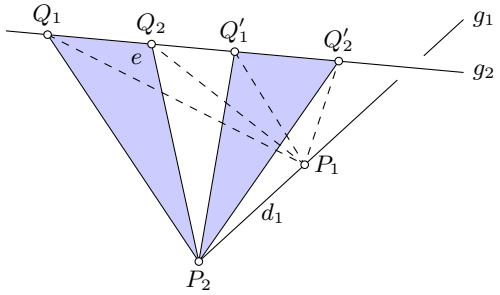
Damit ist $U_1 = U_2$ gezeigt.
Ebenso folgt $V_1 = V_3$, $W_1 = W_4$, $X_3 = X_4$, $Y_4 = Y_2$, $Z_2 = Z_3$. Für die genannten Punkte können demnach die Bezeichnungen U, V, W, X, Y, Z verwendet werden.

Nach dem Satz über Tangente und Berührungsradius stehen U_M1 und UM_2 senkrecht auf BC, also ist die Ebene U durch U, M_1, M_2 senkrecht auf BC und damit senkrecht auf e_1. Folglich enthält u auch die in M_1 auf e_1 errichtete Senkrechte g_1. Ebenso enthält u die in M_2 auf e_2 errichtete Senkrechte g_2.
Da e_1 und e_2 nicht zueinander parallel sind, ist $g_1 \nparallel g_2$. Somit schneiden sich g_1 und g_2 in einem Punkt M.
Da nun MM_1U, MM_1V, MM_1W rechtwinklige Dreiecke mit gleicher Kathete MM_1 und gleichlangen Katheten M_1U, M_1V, M_1W sind, folgt $MU = MV = MW$. Ebenso folgt $MU = MY = MZ$.

Damit ist bewiesen: Die Kugel K durch U,V, W, X geht auch durch Z. Analog folgt, dass K auch durch X geht.
Die Schnittkreise von K mit e_1, e_2, e_3, e_4 sind folglich die Kreise durch U, V, W bzw. durch Z, Y, U bzw. durch X, Z, V bzw. durch Y, X, W, also die Inkreise der Dreiecke ABC, BCD, CAD, ABD. Daher berührt K alle Kanten des Tetraeders.

Aufgabe 261232:
Im Raum seien zwei windschiefe Geraden g_1 und g_2 gegeben. Ferner seien d_1 und d_2 zwei gegebene Streckenlängen.
Beweisen Sie folgende Aussage:
Wie man auch auf g_1 Punkte P_1, P_2 mit $P_1P_2 = d_1$ und auf g_2 Punkte Q_1, Q_2 mit $Q_1Q_2 = d_2$ wählt, stets ergibt sich für das Volumen des Tetraeders mit den Eckpunkten P_1, P_2, Q_1, Q_2 ein und derselbe Wert.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Es seien auf g_1 sowohl P_1, P_2 mit $P_1P_2 = d$ als auch P_1', P_2' mit $P_1'P_2' = d$ sowie auf g_2 sowohl Q_1, Q_2 mit $Q_1Q_2 = d$ als auch Q_1', Q_2' mit $Q_1'Q_2' = d$ gelegen, Zu beweisen ist, dass unter diesen Voraussetzungen stets die beiden Tetraeder $P_1P_2Q_1Q_2$ und $P_1'P_2'Q_1'Q_2'$ einander volumengleich sind. Dieses Beweis kann folgendermaßen geführt werden:



Es sei e die durch P_2, g_2 verlaufende Ebene. Die beiden Tetraeder $P_1P_2Q_1Q_2$ und $'_1P_2Q_1'Q_2'$ (1) (siehe Abbildung) haben jeweils eine in der Ebene liegende Seitenfläche, nämlich $P_2Q_1Q_2$ bzw. $P_2Q_1'Q_2'$ (2). Diese beiden Dreiecke sind einander flächengleich, da $Q_1Q_2 = Q_1'Q_2'$ gilt und die zu diesen Seiten gehörenden Dreieckshöhen miteinander übereinstimmen, nämlich das Lot von P_2 auf g_2 sind.

Ferner stimmen in den Tetraedern (1) die zu den Seitenflächen (2) gehörenden Tetraederhöhen miteinander überein; sie sind nämlich das Lot von P_1 auf die Ebene e.
Also sind die beiden Tetraeder (1) zueinander volumengleich. Ebenso beweist man, dass die beiden Tetraeder $P_1P_2Q_1'Q_2'$ und $P_1'P_2Q_1'Q_2'$ zueinander volumengleich sind.
Aus beiden Volumengleichheiten folgt die zu beweisende Aussage.

Aufgabe 271233A:
Man ermittle den größten Wert, den der Flächeninhalt des Bildes eines beliebig im Raum liegenden Quaders Q mit gegebenen Kantenlängen a, b, c bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Ebene annehmen kann.

Lösung von MontyPythagoras:
Der Quader liege mit seinen drei Kanten auf den Koordinatenachsen, wobei a längs der x-Achse, b längs der y-Achse und c längs der z-Achse liege. Die Projektionsebene werde durch den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}| = 1$ definiert. Der Inhalt einer Fläche A_i, die auf die schräg liegende Ebene projiziert wird, ist proportional zu dem Kosinus des Winkels zwischen $\vec{n}$ und dem Normalenvektor $\vec{n}_i$ auf der Originalfläche A_i. Es ist $\overrightarrow{n_{ab}} = \vec{e}_z$, $\overrightarrow{n_{bc}} = \vec{e}_x$ und $\overrightarrow{n_{ac}} = \vec{e}_y$. Das ergibt:

$$A_{proj} = ab(\vec{n}\vec{n}_{ab}) + bc(\vec{n}\vec{n}_{bc}) + ac(\vec{n}\vec{n}_{ac})$$

$$A_{proj} = ab(\vec{n}\vec{e}_z) + bc(\vec{n}\vec{e}_x) + ac(\vec{n}\vec{e}_y)$$

$$A_{proj} = abn_3 + bcn_1 + acn_2 = \vec{n} \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix}$$

$$A_{proj} = abc \cdot \vec{n} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren von gegebener Länge wird genau dann maximal, wenn die beiden Vektoren parallel sind. Der Normalenvektor muss daher ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix}$ sein. Da seine Länge außerdem gleich 1 sein muss, können wir schlussfolgern:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

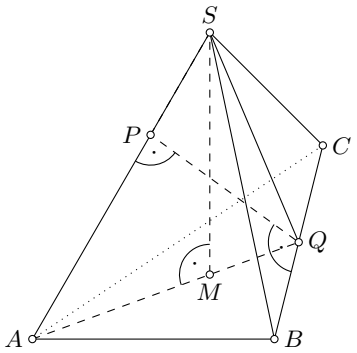
Für die maximale projizierte Fläche erhalten wir:

$$A_{proj} = \frac{abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

$$A_{proj} = abc\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$$

Aufgabe 281236:
Es sei d eine gegebene Streckenlänge. Ferner sei M die Menge aller derjenigen Pyramiden $ABCS$, die den folgenden Bedingungen genügen:
(1) Das Dreieck ABC ist gleichseitig.
(2) Das Lot von S auf die Ebene durch A, B, C hat den Schwerpunkt des Dreiecks ABC als Fußpunkt.
(3) Der Abstand zwischen den Kanten AS und BC beträgt d.
Untersuchen Sie, ob es in der Menge M eine Pyramide mit kleinstem Volumen gibt!
Ist das der Fall, so ermitteln Sie in Abhängigkeit von d dieses kleinstmögliche Volumen!
Hinweis:
Unter dem Abstand zwischen zwei Strecken UV und XY, von denen UV auf einer Geraden g und XY auf einer zu g windschiefen Geraden h liegt, versteht man die Länge der Strecke GH, wo G auf g, H auf h liegt und GH sowohl g als auch h senkrecht schneidet.
Diese Erklärung gilt auch für den Fall, dass derartige Punkte G, H sogar den Stecken UV bzw. XY angehören.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:



Für jede Pyramide aus M sei $AB = BC = CA = x$ gesetzt. Das gleichseitige Dreieck ABC hat den Flächeninhalt

$$F = \frac{1}{4}x^2\sqrt{3} \tag{1}$$

Es sei AQ die auf BC senkrechte Höhe in diesem Dreieck, zugleich die Seitenhalbierende von BC. Der Schwerpunkt des Dreiecks ABC sein M; er teilt AQ im Verhältnis

$$AM : MQ = 2 : 1 \tag{2}$$

und ist zugleich der Umkreismittelpunkt von ABC.
Nach Voraussetzung steht SM senkrecht auf BM und CM; daraus und asu $BM = CM, SM = SM$ folgt $\triangle BMS \cong \triangle CMS$ nach dem Kongruenzsatz sws.

Also ist das Dreieck BCS gleichschenklig mit $BS = CS$, und seine Seitenhalbierende SQ ist zugleich Höhe. Somit sind AQ und SQ senkrecht auf BC, also ist BC senkrecht auf der Ebene durch A, Q, S und daher senkrecht auf allen Geraden dieser Ebene.
Fällt man das Lot QP von Q auf AS, so gibt folglich PQ den Abstand zwischen AS und BC an, das ABC und AQS spitzwinklige Dreiecke sind, also Q und P den Strecken CB bzw. AS angehören. Das heißt, es gilt

$$PQ = d \tag{3}$$

Man erhält dann

$$AQ = \frac{x}{2}\sqrt{3} \qquad \text{(Höhe im Dreieck } ABC\text{)}$$

$$AP = \sqrt{\frac{3}{4}x^2 - d^2} \qquad \text{(Satz des Pythagoras für } \triangle APQ\text{)} \tag{4}$$

$$AM = \frac{2}{3}AQ = \frac{x}{3}\sqrt{3} \qquad \text{(nach (2))} \tag{5}$$

Wegen $\triangle AMS \sim \triangle APQ$ (Übereinstimmung in der rechten Winkeln und im Winkel bei A) gilt

$$MS : AM = PQ : AP \tag{6}$$

Aus (6) und (3), (4), (5) folgt

$$MS = \frac{AM \cdot PQ}{AP} = \frac{\frac{x}{3}\sqrt{3} \cdot d}{\sqrt{\frac{3}{4}x^2 - d^2}} = \frac{2d \cdot x\sqrt{3}}{3\sqrt{3x^2 - 4d^2}}$$

Hiernach und nach (1) hat die Pyramide das Volumen, als Funktion von x:

$$f(x) = V = \frac{1}{3} \cdot F \cdot MS = \frac{d \cdot x^3}{6\sqrt{3x^2 - 4d^2}} \tag{7}$$

Als Intervall für die Variable x ist $x > \frac{2d}{\sqrt{3}}$ zugrunde zu legen (wie sich wegen der Bedingung $3x^2 - 4d^2 > 0$ für den Radikanden im Nenner und geometrisch aus $AQ > PQ$ im rechtwinkligen Dreieck APQ ergibt). In diesem Intervall gilt

$$f'(x) = \frac{d}{6} \cdot \frac{3x^2\sqrt{3x^2 - 4d^2} - x^3 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3x^2 - 4d^2}} \cdot 6x}{3x^2 - 4d^2} = \frac{d \cdot x^2 \cdot (x^2 - 2d^2)}{\sqrt{3x^2 - 4d^2}^3}$$

Daraus folgt: Im Intervall $\frac{2d}{\sqrt{3}} < x < d\sqrt{2}$ ist $f'(x) < 0$, für $x = d\sqrt{2}$ ist $f'(x) = 0$, im Intervall $x > d\sqrt{2}$ ist $f'(x) > 0$.
Also ist V kleinstmöglich (genau) für $x = d\sqrt{2}$; dieses kleinstmögliche Volumen beträgt

$$f(d\sqrt{2}) = \frac{1}{3}d^3$$

Aufgabe 291232:
Ist $ABCD$ ein Tetraeder, so bezeichnet R den Radius seiner Umkugel (d. h. derjenigen Kugel, auf der die Punkte A, B, C, D liegen) und r den Radius seiner Inkugel (d. h. derjenigen Kugel, deren Mittelpunkt im Innern des Tetraeders liegt und die jede der Flächen ABC, ABD, ACD, BCD berührt).
Man beweise, dass es unter allen Tetraedern $ABCD$ mit $AB \perp AC$, $AC \perp AD$, $AD \perp AB$ auch solche gibt, für die das Verhältnis $R : r$ einen kleinsten Wert annimmt; man ermittle diesen Wert.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Nach Voraussetzung kann man zu jedem in Betracht zu ziehenden Tetraeder $ABCD$ ein rechtwinkliges Koordinatensystem so wählen, dass A der Nullpunkt ist und B, C, D auf der positiven $x-, y-$ bzw. $z-$Achse liegen, also mit positiven Zahlen b, c, d die Koordinaten (b,0,0), (0,c,0) bzw. (0,0,d) haben.
Für den Radius R und den Mittelpunkt (x,y,z) der Umkugel gilt:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (x-b)^2 + y^2 + z^2 \\ &= x^2 + (y-c)^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + (z-d)^2 = R^2 \end{aligned}$$

daraus folgt

$$x = \frac{b}{2}; \qquad y = \frac{c}{2}; \qquad z = \frac{d}{2}; \qquad R = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+d^2} \qquad (1)$$

Für den Radius r und den Mittelpunkt der Inkugel gilt, dass dieser Mittelpunkt die Koordinaten (r,r,r) hat und dass er von der durch B, C, D gehenden Ebene den Abstand r hat und auf derselben Seite dieser Ebene liegt wie der Punkt A. Eine Gleichung dieser Ebene ist

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{c} + \frac{z}{d} = 1$$

diejenige Hessesche Normalform, bei der der Nullpunkt positiven Abstand von der Ebene hat, ist folglich

$$\frac{-cdx - dby - bcz - bcd}{\sqrt{c^2d^2 + d^2b^2 + b^2c^2}} = 0$$

Daher ist die Bedingung, dass der Punkt (r,r,r) von dieser Ebene den Abstand r hat und auf derselben Seite dieser Ebene wie A liegt, äquivalent mit

$$\frac{-cdr - dbr - bcr - bcd}{\sqrt{c^2d^2 + d^2b^2 + b^2c^2}} = r$$

Daraus folgt

$$r = \frac{bcd}{cd + db + bc + \sqrt{c^2d^2 + d^2b^2 + b^2c^2}} \qquad (2)$$

Nach (1) und (2) ist

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{2bcd}(cd + db + bc + \sqrt{c^2d^2 + d^2b^2 + b^2c^2}) \cdot \sqrt{b^2+c^2+d^2}$$

Aus der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel folgt

$$cd + db + bc \geq 3 \cdot \sqrt[3]{cd \cdot db \cdot bc} \qquad (3)$$

$$c^2d^2 + d^2b^2 + b^2c^2 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{c^2d^2 \cdot d^2b^2 \cdot b^2c^2} \qquad (4)$$

$$b^2 + c^2 + d^2 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{b^2 \cdot c^2 \cdot d^2} \qquad (5)$$

also

$$\begin{aligned} \frac{R}{r} &\geq \frac{1}{2bcd}(3\sqrt[3]{b^2c^2d^2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{b^4c^4d^4}) \cdot \sqrt{3}\sqrt[6]{b^2c^2d^2} \\ &= \frac{1}{2bcd}(3+\sqrt{3})\sqrt[3]{b^2c^2d^2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{bcd} \\ &= \frac{3}{2}(1+\sqrt{3}) \qquad (6) \end{aligned}$$

Im Fall $b = c = d$ gilt in (3), (4), (5) und folglich in (6) das Gleichheitszeichen.
Damit ist bewiesen, dass $R : r$ einen kleinsten Wert annimmt; er beträgt $\frac{3}{2}(1+\sqrt{3})$.

Aufgabe 301232:
Im Raum seien n Punkte ($n \geq 3$) so gelegen, dass sich unter je drei dieser Punkte stets mindestens zwei befinden, die zueinander einen Abstand kleiner als 1 haben.
Man beweise, dass es unter dieser Voraussetzung stets zwei Kugelkörper K_1 und K_2 vom Radius 1 geben muss, so dass jeder der n Punkte (mindestens) einem der beiden Kugelkörper K_1, K_2 angehört.
Bemerkung: Jeder Kugelkörper werde hier ohne seinen Rand (die Kugelfläche) verstanden.

Lösung von Nuramon:
Es seien P_1,P_2 zwei der n Punkte, die voneinander maximalen Abstand haben. Ist dann P_3 ein weiterer Punkt, so können die Strecken P_1P_3 und P_2P_3 höchstens so lang sein wie die Strecke P_1P_2.
Andererseits ist nach Voraussetzung die kürzeste der Strecken P_1P_2, P_2P_3,P_1P_3 kürzer als 1. Damit ist gezeigt, dass P_3 in der Kugel mit Radius 1 um P_1 oder in der Kugel mit Radius 1 um P_2 enthalten ist.
Da P_3 beliebig war, folgt die Behauptung.

Aufgabe 311236:
Es seien alle diejenigen Pyramiden $ABCS$ betrachtet, die den folgenden Bedingungen (1), (2), (3) genügen:
(1) Die Grundfläche ABC der Pyramide hat den Flächeninhalt 1.
(2) Es gilt $AB = AC = SB = SC$.
(3) Es gilt $BC = SA$.
Man untersuche, ob es unter allen Pyramiden, die diese Bedingungen erfüllen, eine mit größtem Volumen gibt. Wenn dies der Fall ist, so ermittle man für eine solche Pyramide die Größe des Winkels $\angle BAC$.

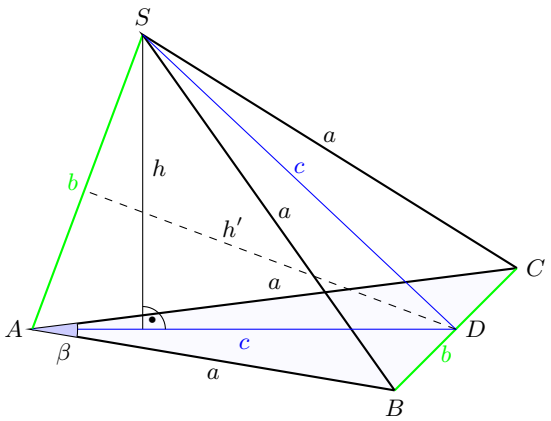
Lösung von MontyPythagoras:
Da die Fläche F des Dreiecks ABC konstant gleich eins sein soll, gilt

$$V = \tfrac{1}{3}Fh = \tfrac{1}{3}h$$

Das Volumen ist somit maximal, wenn die Höhe h maximal ist. D sei der Mittelpunkt der Strecke BC. Dann gilt:

$$F = \tfrac{1}{2}bc = 1$$

$$c = \frac{2}{b}$$



Betrachten wir nun das gleichschenklige Dreieck ADS. Seine Fläche ist

$$\tfrac{1}{2}bh' = \tfrac{1}{2}ch$$

wobei

$$h' = \sqrt{c^2 - \tfrac{1}{4}b^2}$$

ist. Damit erhält man:

$$h = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - \tfrac{1}{4}b^2}$$

Setzt man noch c ein, folgt:

$$h = \frac{b^2}{2}\sqrt{\frac{4}{b^2} - \tfrac{1}{4}b^2}$$

$$h = \sqrt{b^2 - \tfrac{1}{16}b^6}$$

Soll h und damit V maximal werden, muss der Term unter der Wurzel maximal werden. Wir setzen daher die erste Ableitung gleich null:

$$2b - \tfrac{3}{8}b^5 = 0$$

$b = 0$ stellt offenkundig kein Maximum dar, so dass die Lösung lautet:

$$b^4 = \tfrac{16}{3}$$

$$b = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$$

Für den Winkel β gilt dann:

$$\beta = 2\arctan\frac{b}{2c} = 2\arctan\frac{b^2}{4} = 2\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\beta = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$$

Dann ist $b = a$. Das Volumen ist also maximal, wenn die Pyramide ein regelmäßiges Tetraeder ist.

Aufgabe 341235:
Man beweise:
Wenn in einem Tetraeder $OABC$ die Seitenflächen OAB, OBC, OCA rechtwinklige Dreiecke mit den rechten Winkeln bei O sind, so gilt für die Längen $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ und für die Länge h der auf ABC senkrechten Höhe des Tetraeders die Ungleichung

$$h \leq \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Lösung von MontyPythagoras:
In einem dreidimensionalen Koordinatensystem sei O der Ursprung und die drei Punkte A,B,C liegen jeweils auf den Koordinatenachsen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Den Normalenvektor der durch die Punkte A,B,C aufgespannten Ebene berechnet man am einfachsten durch das Kreuzprodukt zweier Kantenvektoren:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} = abc \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

Die normierte Ebenengleichung lautet dann

$$\vec{n}^0\vec{x} - \vec{n}^0\vec{a} = 0$$

Die Höhe h auf das Dreieck ABC ist der Abstand des Ursprungs von dieser Ebene, so dass

$$h = |\vec{n}^0 \vec{a}| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

Laut Aufgabenstellung muss gelten:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \leq \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Quadrieren und mit 3 multiplizieren:

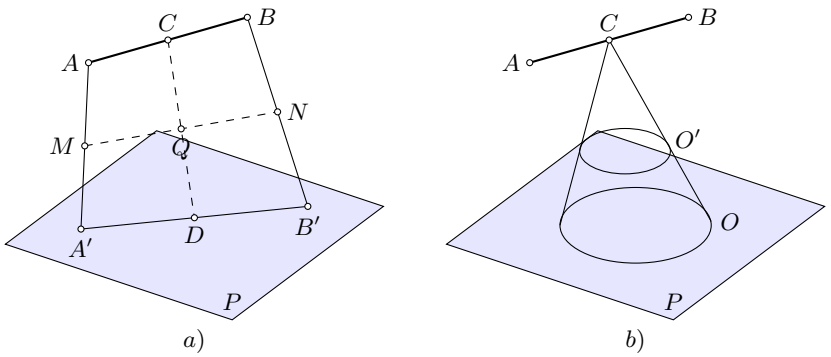
$$\frac{3}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \leq \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

Links steht des harmonische Mittel der drei Werte a^2,b^2,c^2, rechts das arithmetische. Aufgrund der Ungleichung zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel, die als bekannt vorausgesetzt wird, ist diese Ungleichung erfüllt.

IV Runde 4

Aufgabe 011245:
Gegeben sind eine Ebene P und zwei feste Punkte A und B, die nicht in dieser Ebene liegen. Man bezeichnet mit A' und B' zwei Punkte der Ebene P und mit M und N die Mittelpunkte der Strecken AA', BB'.
a) Bestimmen Sie den geometrischen Ort des Mittelpunktes der Strecke MN, wenn sich die Punkte A' und B' willkürlich in der Ebene P bewegen!
b) In der Ebene P wird ein Kreis O betrachtet. Bestimmen Sie den geometrischen Ort L des Mittelpunktes der Strecke MN, wenn die Punkte A' und B' sich auf dem Kreise O oder in dessen Innern befinden!
c) Wird A' fest auf dem Kreise O oder in dessen Innern angenommen und B' beweglich im Innern oder Äußern von O, so soll der geometrische Ort des Punktes B' bestimmt werden, so dass der oben bestimmte Ort L derselbe bleibt.
Anmerkung: Bei b) und c) sollen folgende Fälle betrachtet werden:
1. A' und B' sind verschieden,
2. A' und B' fallen zusammen.

Lösung von Eckard Specht:



a) (Bild a) Beschreiben wir die Lage der Punkte A, B, A', B' usw. mit den Ortsvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a'}$ bzw. $\vec{b'}$ usw., so sind die Mittelpunkte M und N durch $\vec{m} \equiv \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{a'})$ bzw. $\vec{n} \equiv \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{b'})$ gegeben.
Der Mittelpunkt Q der Strecke MN ist demzufolge gleich dem arithmetischen Mittel $\vec{q} \equiv \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{a'} + \vec{b} + \vec{b'})$ der vier Vektoren.

Aufgrund des Kommutativ- und Assoziativgesetzes ist dieser Ausdruck auch der Mittelpunkt derjenigen Strecke, deren Endpunkte durch $\vec{c} \equiv \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ und $\vec{d} \equiv \frac{1}{2}(\vec{a'}+\vec{b'})$ beschrieben werden.

Der erste Punkt ist der Mittelpunkt C der Strecke AB (und damit ein fester Punkt), während der zweite der Mittelpunkt D einer willkürlich gewählten Strecke in P (also selbst ein beliebiger Punkt) ist. Die Mittelpunkte Q aller Strecken CD liegen somit nach der Umkehrung des Strahlensatzes in einer Ebene P', die parallel zu P verläuft und z. B. das Lot von C auf P halbiert.

b) Aus den obigen Betrachtungen folgt, dass der geometrische Ort aller Punkte L ebenfalls ein Kreis bzw. dessen Inneres ist, der die Schnittfläche des (schiefen) Kreiskegels mit der Grundfläche O und der Höhe h in halber Höhe ist.

Aufgabe 021246:
Gegeben sei eine Pyramide $ABCD$, deren Grundfläche ABC ein Dreieck ist. Durch einen Punkt M der Kante DA werden in der Ebene der Flächen DAB bzw. DAC die Geraden MN bzw. MP so gezogen, dass N auf DB und P auf DC liegen und $ABNM$ sowie $ACPM$ Sehnenvierecke sind.
a) Beweisen Sie, dass auch $BCPN$ ein Sehnenviereck ist!
b) Beweisen Sie, dass die Punkte A, B, C, M, N, P auf einer Kugel liegen!

Lösung von W. Engel und U. Pirl:
a) Da $ABNM$ und $ACPM$ Sehnenvierecke sind, liegen A, B, N, M sowie A, C, P, M jeweils auf einem Kreis. Die durch D, M, A und D, N, B und D, P, C gehenden Geraden sind Sekanten dieser Kreise. Nach dem Sekantensatz gilt

$$\begin{aligned} |DM| \cdot |DA| &= |DN| \cdot |DB| \qquad \text{und} \\ |DM| \cdot |DA| &= |DP| \cdot |DC| \qquad \text{also} \\ |DN| \cdot |DB| &= |DP| \cdot |DC| \end{aligned}$$

Daher liegen nach Umkehr des Sekantensatzes die Punkte N, B, C, P auf ein und demselben Kreis und, da nach Aufgabenstellung $NBCP$ ein Viereck ist, ist es ein Sehnenviereck.

b) Sind M_1 bzw. M_2 die Mittelpunkte der Umkreise von $ABNM$ bzw. $ACPM$, r_1 und r_2 ihre Radien und g_1 bzw. g_2 die Senkrechten zu ε_{ABM} durch M_1 bzw. zu $\varepsilon_A CM$ durch M_2, so gilt

$$|QA| = |QB| = |QM| = |QN| = \sqrt{|QM_1|^2 + r_1^2} \qquad \text{für alle } Q \in g_1 \qquad (1)$$

$$|QA| = |QC| = |QM| = |QP| = \sqrt{|QM_2|^2 + r_2^2} \qquad \text{für alle } Q \in g_2 \qquad (2)$$

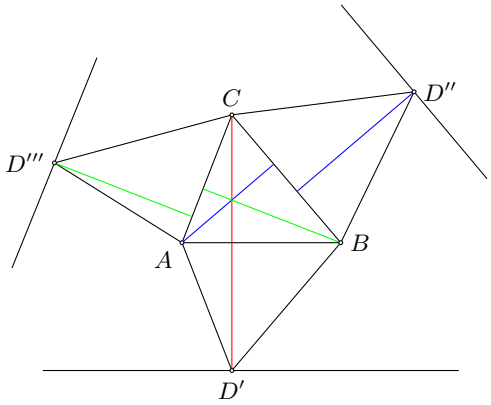
Daher liegt sowohl g_1 als auch g_2 in der zu AM senkrechten Ebene ε durch den Mittelpunkt von AM. Weil $\varepsilon_{ABM} \neq \varepsilon_{ACM}$ ist, gilt auch $g_1 \neq g_2$. Folglich haben g_1 und g_2 einen Schnittpunkt O. Für ihn gilt wegen (1) und (2)

$$|OA| = |OM| = |OB| = |ON| = |OC| = |OP|$$

Also liegen A, B, C, M, N, P auf der Kugel um O mit dem Radius OA.

Aufgabe 031243:
Gegeben sein ein (nicht notwendig regelmäßiges) Tetraeder, dessen Seitenflächen sämtlich flächengleich sind.
Beweisen Sie, dass dann folgende Punkte zusammenfallen:
a) der Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel, das heißt der alle vier Seitenflächen innerlich berührenden Kugel,
b) der Mittelpunkt der Umkugel, das heißt der durch die vier Eckpunkte gehenden Kugel!

Lösung von Manuela Kugel:



Was bedeutet es, wenn das Tetraeder flächengleiche Seiten hat? Zeichnen wir uns ein Tetraedernetz wie im Bild dargestellt auf, dann kann man folgende Überlegungen anstellen:

Ich beginne mit einem beliebigen Dreieck $\triangle ABC$. Dann muss wegen der Flächengleichheit der jeweils fehlende Punkt (D', D'', D''') der äußeren Dreiecke auf je einer Linie liegen, die von der jeweiligen Kante von $\triangle ABC$ denselben Abstand hat wie von dieser Kante zum dritten Punkt im $\triangle ABC$.
Mit dieser Einschränkung haben die Dreiecke $\triangle ABC$ und das betrachtete anliegende Dreieck eine gemeinsame Seite und die auf dieser Seite stehende Höhe von gleicher Länge. Mithin ist der Flächeninhalt gleich.
Es ist also sogar jede Seite des Dreiecks zu jeder anderen Seite flächengleich.

Nun zeige ich mit der folgenden Begründung, dass es nur eine Lösung gibt, Dreiecke $\triangle ABD'$, $\triangle BCD''$, $\triangle CAD'''$ zu einem vorhandenen Dreieck $\triangle ABC$ zu erzeugen:

(1) Wähle ich einen beliebigen Punkt auf einer dieser Parallelen (bspw. im Dreieck $\triangle ABD'$), dann liegt D' fest, damit auch AD' und BD'. Für das Dreieck $\triangle BCD''$ ist damit D'' bestimmt, denn es muss $BD' = BD''$ gelten, sonst entsteht aus dem Netz kein Tetraeder.
Nun liegt auch CD'' fest und damit im Dreieck $\triangle ACD'''$, denn es muss gelten $CD'' = CD'''$. Damit liegt auch AD''' fest, was wiederum genauso groß wie AD' aus dem Dreieck $\triangle ABD'$ sein muss.

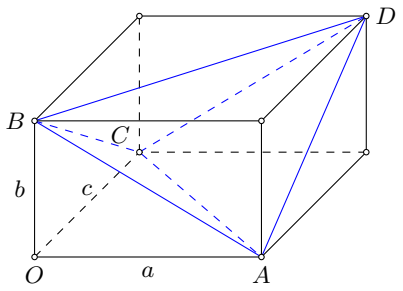
(2) I.d.R. wird es nicht auf Anhieb klappen, dass in oben beschriebener Folge $AD' = AD'''$ gilt.
Wenn nun o. B. d. A. $AD' < AD'''$, dann verlängere ich $AD' \Rightarrow BD'$ wird kürzer $\Rightarrow BD''$ wird kürzer $\Rightarrow CD''$ wird länger $\Rightarrow CD'''$ wird länger $\Rightarrow AD'''$ wird kürzer.
Auf diesem Weg kann man mit genügend kleinen Schritten $AD' = AD'''$ erzeugen - und zwar genau eine Lösung.

Jetzt zeige ich, dass dies genau dann gilt, wenn die Dreiecke $\triangle ABD'$, $\triangle BCD''$ und $\triangle ACD'''$ dadurch entstehen, dass das Dreieck $\triangle ABC$ um einen Kantenmittelpunkt um 180° gedreht wird.
Dann sind die Dreiecke kongruent und es gilt:

$$AB = CD'' = CD''' \qquad BC = AD' = AD''' \qquad AC = BD' = BD''$$

Damit ist insbesondere gezeigt, dass die Seiten, die gleich lang sein müssen, dies auch tatsächlich sind. Es ergibt sich also tatsächlich das Netz eines Tetraeders.

Allgemein gilt, dass Tetraeder aus einem Parallelepiped entstehen, wenn jede 2. Ecke abgeschnitten wird. Für Tetraeder mit kongruenten Seiten gilt sogar, dass sie analog aus einem Quader entstehen.



Die Punkte A, B, C, D lassen sich wie im Bild angegeben in einem Quader mit den Kantenlängen a, b, c in Vektorschreibweise darstellen als:

$$A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Ein Punkt P, der der Diagonalenschnittpunkt des Quaders ist, hat offensichtlich zu allen Ecken den gleichen Abstand und ist daher der Umkugelmittelpunkt. P hat dabei die Koordinaten

$$P = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix}$$

Nun wird untersucht, wie groß der Abstand d_i von P zu den Tetraederseitenflächen ist. Dabei wird die Hessesche Normalform verwendet. Es entstehen folgende vier Gleichungen:

$$d_1 = (\vec{p} - \vec{a}) \cdot \frac{[(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})]}{(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})} = \frac{1}{(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})} \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \frac{1}{(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})} \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} bc \\ -ac \\ ab \end{pmatrix} = \frac{-abc}{2\sqrt{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}}$$

und analog Gleichungen für d_2, d_3 und d_4.

Damit sind bis auf das Vorzeichen alle Abstände identisch. Das Vorzeichen bestimmt nur die Richtung des Vektors, der den Abstand zwischen dem Punkt und der Ebene darstellt.
Insofern sind alle Abstände von gleicher betragsmäßiger Länge und es ist gezeigt, dass die Inkugel des Tetraeders ihren Mittelpunkt in P, also in dem Umkugelmittelpunkt hat.

Aufgabe 041243:
Im dreidimensionalen Raum sind zwei Parallelogramme $ABCD$ und $A'B'C'D'$ gegeben. Jedes Parallelogramm sei nicht entartet, d. h., seine 4 Eckpunkte sollen nicht auf ein und derselben Geraden liegen.
Die durch die Parallelogramme bestimmten Ebenen brauchen nicht voneinander verschieden zu sein.
Die Strecken AA', BB', CC' und DD' seien in demselben Verhältnis geteilt; die Teilpunkte seien A'', B'', C'', D''.
Welche Aussagen kann man über die aus den Punkten A'', B'', C'', D'' gebildete Figur machen?

Lösung von Rainer Müller:
Die vier Punkte A,B,C,D bilden genau dann ein Parallelogramm (bzgl. dieser Reihenfolge entlang des Viereckrandes), wenn $B - A = C - D$ und $C - B = D - A$ gilt, d. h. wenn es zwei Vektoren s_1, s_2 gibt, so dass

$$B = A + s_1, C = A + s_1 + s_2, D = A + s_2 \qquad (1)$$

gilt. Nach Voraussetzung gibt es zwei solche Vektoren sowie analog Vektoren s_1', s_2', so dass

$$B' = A' + s_1', C' = A' + s_1' + s_2', D' = A' + s_2' \qquad (2)$$

Dass die Parallelogramme nach Voraussetzung nicht entartet sind, bedeutet, dass s_1 und s_2 sowie s_1' und s_2' jeweils linear unabhängig sind (das ist hier allerdings irrelevant).
Dass A'' auf der Strecke AA' liegt, ist äquivalent zur Existenz eines $\lambda in\,[0,1]$, so dass $A'' = (1-\lambda)A+\lambda A'$.
Dass A'', B'', C'' und D'' den gleichen Teilungsparameter haben, bedeutet

$$\exists\lambda : A'' = (1-\lambda)A + \lambda A', B'' = (1-\lambda)B + \lambda B'$$

$$C'' = (1-\lambda)C + \lambda C', D'' = (1-\lambda)D + \lambda D' \qquad (3)$$

Einsetzen von (1) und (2) in (3) liefert

$$B'' = A'' + s_1'', C'' = A'' + s_1'' + s_2'', D'' = A'' + s_2''$$

mit

$$s_1'' = (1-\lambda)s_1 + \lambda s_1', s_2'' = (1-\lambda)s_2 + \lambda s_2'$$

d. h. $A''B''C''D''$ ist immer ein Parallelogramm, unabhängig vom Teilungsverhältnis und der relativen Lage und Form der gegebenen Parallelogramme.
Ansonsten kann man keine allgemeinen Aussagen machen. Z. B. kann das neue Parallelogramm entartet sein (z. B. wenn die beiden gegebenen Parallelogramme in einer Ebene liegen, spiegelsymmetrisch zueinander sind und die Teilungspunkte jeweils die Mittelpunkte sind), oder es können Sonderfälle wie Rechtecke und Quadrate entstehen, obwohl die Ausgangsparallelogramme keine Rechtecke sind.

Aber es muss i.A. keinen Teilungsparameter λ geben, für den $A''B''C''D''$ entartet oder ein Rechteck ist (gehen z. B. die beiden Ausgangsparallelogramme durch eine Translation ineinander über, dann sind alle entstehenden Parallelogramme ihnen ähnlich, d. h. nie entartet und i.A. kein Rechteck).

Aufgabe 051246:
Man beweise den folgenden Satz:
Wenn der Schnitt jeder Ebene, die mit der Fläche F mehr als einen Punkt gemeinsam hat, ein Kreis ist, dann ist F eine Kugel(fläche).

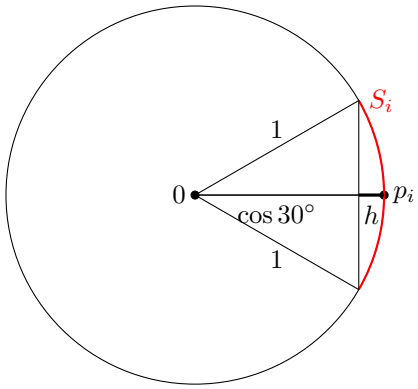
Lösung von Kornkreis:
Wähle einen Schnittkreis k einer Ebene mit der Fläche F (Schnittkreise existieren, weil F eine Fläche ist und somit mehr als einen Punkt enthält).
Nun betrachte die Ebenenschar E_t bestehend aus allen Ebenen e', die durch den Mittelpunkt von k gehen und senkrecht auf der Ebene von k stehen. Eine beliebige solche Ebene e' schneidet k in zwei (auf k gegenüberliegenden) Punkten.

Insbesondere schneidet e' also die Fläche F in zwei Punkten, sodass die Schnittfigur einen Kreis k' darstellt. Alle anderen Ebenen der Schar E_t schneiden nun k' in denselben zwei Punkten und sie schneiden k.
Man sieht leicht, dass die entsprechenden Schnittkreise alle denselben Mittelpunkt und Radius haben, sodass sie insgesamt eine Kugelfläche bilden.
Dies zeigt, dass eine Kugelfläche in F enthalten ist. Da die Ebenenschar E_t aber den ganzen Raum überdeckt und somit jeden möglichen Schnittpunkt mit der Fläche F enthalten muss, folgt, dass F in der Kugelfläche enthalten ist. Beides zusammen impliziert, dass F eine Kugelfläche ist.

Aufgabe 061246:
Man beweise folgenden Satz:
Liegen die n paarweise voneinander verschiedene Punkte P_i, $i = 1, 2, ..., n$; $n > 2$, so im dreidimensionalen Raum, dass jeder von ihnen von ein und demselben Punkt Q einen kleineren Abstand hat als von jedem anderen der P_i, dann ist $n < 15$.

Lösung von Nuramon:
Wir legen alle Punkte in ein kartesisches Koordinatensystem, wobei o. B. d. A. $Q = 0$ sei.
Nach Annahme ist in jedem der Dreiecke P_iP_jQ die Seite P_iP_j am längsten. Insbesondere schließen also die Vektoren P_i und P_j einen Winkel von mindestens 60° ein.
Daher genügt es zu zeigen: Wenn n paarweise verschiedene Vektoren $p_1,p_2,\ldots,p_n \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ paarweise miteinander Winkel von jeweils mindestens 60° einschließen, dann gilt $n < 15$.
Da der Winkel zwischen zwei Vektoren nicht von der Länge der Vektoren sondern nur von deren Orientierung abhängt, können wir für den Beweis dieser neuen Behauptung sogar o. B. d. A. annehmen, dass $p_1,p_2,\ldots,p_n$ auf der Einheitskugel liegen.

Es sei für $i = 1,\ldots,n$ die Menge $S_i \subset \mathbb{R}^3$ definiert als die Menge derjenigen Punkte auf der Einheitskugel, deren Ortsvektor mit p_i einen Winkel kleiner als 30° einschließen.



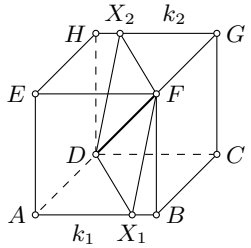
Die S_i sind Kugelsegmente der Höhe $h = 1 - \cos(30°) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ und haben somit eine Mantelfläche von $2\pi h = (2 - \sqrt{3})\pi$.

Aus den Voraussetzungen folgt, dass diese Kugelsegmente paarweise disjunkt sind, also $S_i \cap S_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Da die Oberfläche der Einheitskugel 4π ist muss somit gelten $(2 - \sqrt{3})\pi n \leq 4\pi$, also

$$n \leq \frac{4}{2 - \sqrt{3}} = 4(2 + \sqrt{3}) = 8 + \sqrt{48} < 8 + 7 = 15.$$

Aufgabe 071242:
Welche von allen Ebenen, die eine und dieselbe Körperdiagonale eines Würfels mit der Kantenlänge a enthalten, schneiden aus den Würfel eine Schnittfigur kleinsten Flächeninhaltes heraus? Berechnen Sie den Flächeninhalt solch einer Schnittfigur!

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Ohne Einschränkung der Allgemeinheit betrachten wir alle Ebenen, die die Körperdiagonale enthalten (siehe Abbildung).



Sei ε einer dieser Ebenen. ε enthält außer D und F noch (mindestens einer auf einer Würfelkante k_1 gelegenen von D und F verschiedenen Punkt X_1.

Geht k_1 von F aus, dann verläuft ε sowohl durch diese Würfelkante als auch durch die den Punkt D enthaltende zu k_1 parallele Kante k_2. Entsprechend den drei von F ausgehenden Kanten gibt es drei derartige Lagen der Ebene ε und die dabei entstehenden Schnittflächen F_ε sind kongruente Rechtecke mit dem Flächeninhalt

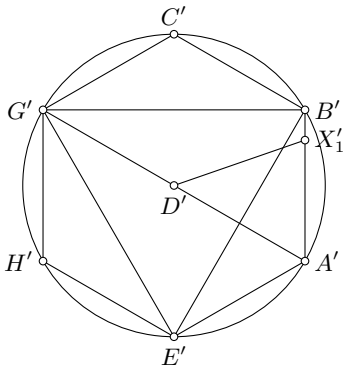
$$|F_\varepsilon| = a \cdot \sqrt{2}a = \sqrt{2}a^2$$

Geht k_1 nicht von D oder F aus, d. h. bezeichnet k_1 einer der sechs Kanten AB, BC, CG, GH, HE oder EA, dann gibt es unter diesen sechs Kanten eine zu k_1 parallele Kante k_2. Da ε k_1 schneidet, so schneidet die Ebene ε auch k_2 in einem Punkt X_2, wobei X_1FX_2D ein Parallelogramm mit der Diagonalen DF ist.

X_1FX_2D ist die Schnittfläche von ε mit einem Würfel. Durch entsprechende Wahl von X_1 (und damit auch von X_2) auf einem der beiden anderen Paare paralleler Kanten entsteht eine zu X_1FX_2D kongruente Schnittfläche.

Da die Diagonale DF die Schnittfläche in zwei kongruente Dreiecke zerlegt, wird der Flächeninhalt der Schnittfläche genau dann ein Minimum, wenn die Höhe l zur Grundseite DF der zugehörigen Dreiecke eine minimale Länge hat.

Sei X_1 aus AB gelegen. Projiziert man den Würfel parallel zu FD auf eine zu FD senkrechte Ebenem so verzerren sich die Strecken l, AC, CH, HA, BG, GE und EB nicht, und werden die Bilder der Originalpunkte durch einen Strich gekennzeichnet, so bilden A', B', C', G', H', E' die Ecken eines regelmäßigen Sechsecks mit dem Mittelpunkt D'.



Wegen $l = X_1'D'$ hat l offenbar genau dann den kleinsten Wert, wenn der Punkt X_1' der Strecke $A'B'$ diese Strecke halbiert, also $X_1'D'$ Höhe im gleichseitigen Dreieck $\triangle A'B'D'$ ist. Dann gilt $|l| = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ und für die Maßzahl der entsprechenden Schnittfläche

$$|F_e| = a\sqrt{3} \cdot a\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a^2$$

Wegen $2a^2 > \frac{\sqrt{6}}{2}a^2$ ist diese Schnittfläche tatsächlich minimal.
Entsprechend der Lage von X_1, X_2 auf einem der drei ober betrachteten Paare paralleler Kanten gibt es drei Lagen von ε, in denen diese minimale Schnittfläche ausgeschnitten wird.

Aufgabe 111243:
Es seien P_1, P_2, P_3, Q die Eckpunkte eines nicht notwendig regelmäßigen Tetraeders. Die Strahlen aus Q durch je zwei der Punkte P_i, P_j $(i, j = 1, 2, 3)$ bilden einen Winkel, dessen Größe α_{ij} zwischen $0°$ und $180°$ liegt.
Man beweise, dass für diese Größen die Ungleichung $\alpha_{23} + \alpha_{31} > \alpha_{12}$ gilt.

Lösung von cyrix:
Wir schneiden die von Q ausgehenden und durch die P_i verlaufenden Strahlen mit einer Kugeloberfläche

mit Radius 1 um Q. Dann erhalten wir auf dieser Kugeloberfläche als Schnitt die Punkte Q_i, wobei P_i auf dem von Q ausgehenden Strahl durch Q_i liegt. Damit ist $\alpha_{ij} = \angle P_iQP_j = \angle Q_iQQ_j$ und die Großkreis-Bögen zwischen je zwei dieser Punkte P_i und P_j besitzen genau die Länge α_{ij}, wobei der Winkel im Bogenmaß angegeben sei.

Da die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einer Kugeloberfläche der (kürzere) Bogen des Großkreises ist, auf dem die beiden Punkte liegen, (welche eindeutig ist, sofern sich die beiden Punkte nicht diametral auf der Kugel gegenüberliegen), folgt, da alle Winkel α_{ij} echt zwischen 0 und $\pi = 180°$ liegen, dass der direkte Weg von Q_1 nach Q_2 entlang des kürzeren Großkreis-Bogens durch diese beide Punkte kürzer ist als der Weg von Q_1 über Q_3 nach Q_2 entlang der entsprechenden Großkreis-Bögen, also $\alpha_{12} < \alpha_{31} + \alpha_{23}$, □.

Aufgabe 121243:
Ermitteln Sie die größte Anzahl von paarweise verschiedenen Gebieten, in die die Oberfläche einer Kugel durch n auf dieser Oberfläche gezeichnete Kreise zerlegt werden kann!

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
1. Ein auf der Kugeloberfläche κ gezeichneter Kreis k kann durch einen Schnitt von κ mit der Ebene ε erzeugt werden.
Im Folgenden soll der auf κ liegende Kreis k_i als Schnittkurve von κ mit der Ebene ε_i interpretiert werden. Entsprechend werden zwei auf κ liegende und voneinander verschiedene Kreise k_i und k_j als Schnitte von κ mit den Ebenen ε_i und ε_j angesehen. Für die Lage der Schnittebenen ε_i und ε_j sind vier Fälle zu unterscheiden:

a) ε_i und ε_j sind parallel zueinander,
b) ε_i und ε_j schneiden sich in einer Geraden g_{ij}, die κ meidet,
c) ε_i und ε_j schneiden sich in einer Geraden g_{ij}, die κ berührt,
d) ε_i und ε_j schneiden sich in einer Geraden g_{ij}, die κ in zwei voneinander verschiedenen Punkten schneidet.

In den Fällen a), b), c) wird die Kugeloberfläche durch k_i und k_j in drei paarweise voneinander verschiedene Gebiete zerlegt. Im Falle d) wird κ in vier paarweise voneinander verschiedene Gebiete zerlegt.

2. Auf κ seine $p-1$ paarweise voneinander verschiedene Kreise k_i vorgegeben. p_{p-1} sei die Höchstzahl der durch $p-1$ Kreise auf κ erzeugbaren, paarweise verschieden Gebiete.
s_p sei die Anzahl der getrennt liegenden Punkte, die die p-te Kreis k_p mit den $p-1$ auf κ vorgelegten Kreisen gemeinsam hat.
Für $s_p \geq 2$ teilt der je zwei benachbarte Punkte von k_p verbindende Kreisbogenabschnitt das zugehörige Gebiet von κ in genau zwei Gebiete.
Für $s_p = 0$ und $s_p = 1$ wächst die Anzahl der Gebiete infolge der Zufügung von k_p um eins. Aus der Zugabe des Kreises k_p resultiert also eine Vergrößerung der Anzahl der Gebiete um $x_p \geq 1$.
Nach diesen Überlegungen gilt die Rekursionsformel

$$n_p = n_{p-1} + x_p \qquad (1)$$

für $p \geq 1$.

3. Da nach der größten Anzahl von paarweise verschiedenen Gebieten auf κ gefragt ist, muss man die Schnittebenen ε_i so legen, dass jeder neu hinzukommende Kreis k_i einen möglichst großen Summanden x_p in die Rekursionsformel (1) einbringt.
Nach 1. und 2. kann x_p nicht größer sein als in dem Fall, dass k_p jeden der $p-1$ vorliegenden Kreise in zwei Punkten schneidet und sämtliche auf κ existierenden Schnittpunkte durch den Schnitt von genau zwei Kreisen erzeugt werden. In (1) muss daher gelten:

$$x_p \leq 2(p-1) \qquad (2)$$

4. Mit (2) nimmt die Rekursionsformel (1) die Form

$$n_p \leq n_{p-1} + 2(p-1) \qquad (3)$$

an. Der Anschauung ist zu entnehmen, dass $n_1 = 2$ gilt. Daraus folgt weiter mit (3):

$$\begin{aligned} n_2 &\leq 2 + 2 \cdot 1 \\ n_3 &\leq 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ n_4 &\leq 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ &... \\ n_p &\leq 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + 2(p-1) \qquad (4) \end{aligned}$$

Unter Anwendung der Summationsformel für die arithmetische Reihe ergibt sich für (4) die Darstellung

$$n_p \leq 2 + p(p-1) \qquad (5)$$

5. Jetzt wird gezeigt, dass auf κ tatsächlich ein p-Tupel von Kreisen existiert, bei welchem jeder der paarweise voneinander verschiedenen Kreise mit jeden anderen genau zwei getrennt liegende Punkte gemeinsam hat und auch durch keinen der Kreisschnittpunkte mehr als zwei Kreise hindurchgehen.

Im Mittelpunkt der Kugel liege der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Von der x- und y-Achse wird die zu κ gehörige Äquatorebene aufgespannt. Die z-Achse werde mit der Achse des Drehkegels Φ zur Deckung gebracht, dessen Öffnungswinkel 45° beträgt und dessen Spitze im Ursprung liegt.
Die Tangentialebenen an die Kegelfläche berühren diese längs einer Erzeugenden. Daher gehen die Tangentialebenen von Φ durch den Kugelmittelpunkt und schneiden κ in Großkreisen.

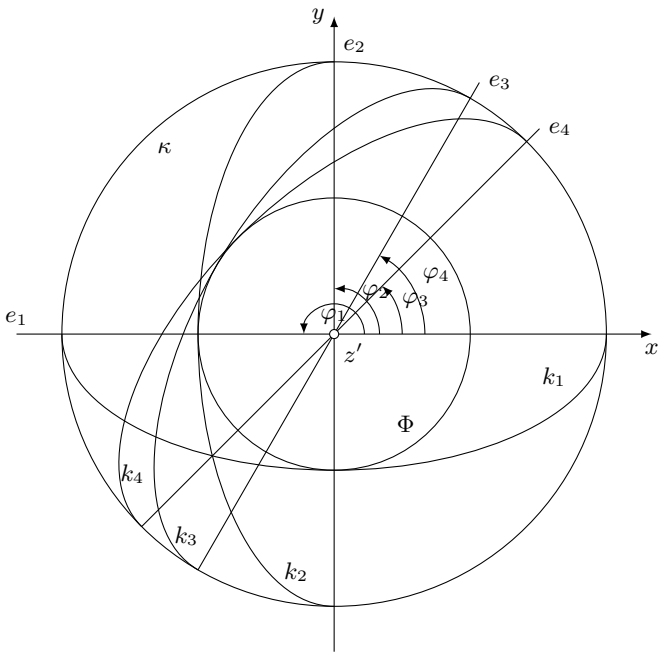


Abbildung: Normalprojektion von κ mit den Kreisen k_1, k_2, k_3 und k_4 auf die Äquatorebene von κ

Zwei voneinander verschiedene Tangentialebenen ε_i und ε_j schneiden sich in dem Kugeldurchmesser g_{ij}. Die Endpunkte dieses Durchmessers sind mit den Schnittpunkten der Großkreise k_i und k_j identisch.
Die Tangentialebene ε_i von Φ schneidet die Äquatorebene von κ in der Spur e_i. Die in e_i liegende Streichrichtung von ε_i ist so orientiert, dass die Ebene ε_i beim Blick in diese Richtung von links nach rechts fallend erscheint. Die positive x-Achse schließt mit dem in Streichrichtung der Ebene ε_i zeigenden Strahl r_i^+ den Winkel φ_i ein.

Trifft man die Vereinbarung $\varphi_i = \frac{\pi}{i}$ $(i = 1,2,3,...,p)$, so hat man p Tangentialebenen an Φ, die κ nach einem p-Tupel von Großkreisen k_i mit den geforderten Eigenschaften schneiden. In diesem Fall ergibt sich als Zahl für die Gebietseinteilung auf κ der Wert $2 + p(p-1)$, so dass wegen (5)

$$n_p = 2 + p(p-1) \qquad (6)$$

gilt. (siehe Abbildung)

Aufgabe 121244:
Es seien P_1 und P_2 zwei Punkte im Raum mit den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten $(3;4;0)$ bzw. $(10;8;4)$.
Es ist zu untersuchen, ob es zwei Punkte P_3 und P_4 mit ganzrationalen Koordinaten gibt, so dass das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ ein Quadrat ist. Wenn ja, dann sind alle Möglichkeiten für P_3 und P_4 anzugeben.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Wir verlegen den Koordinatenursprung in den Punkt P_1: Das bedeutet Übergang von den Koordinaten (X, Y, Z) zu (x, y, z) gemäß der Vorschrift

$$(x;y;z) = (X;Y;Z) - (3;4;0) \qquad (1)$$

Durch diese Koordinatentransformation gehen offensichtlich Punkte mit ganzrationalen Koordinaten genau in Punkte der gleichen Art über; insbesondere erhält der Punkt P_2 die Koordinaten $(7;4;4)$. Punkte P_3 und P_4 mit ganzrationalen Koordinaten sind genau dann Lösung wenn

$$\overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_2P_3}; \qquad \overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_1P_2}; \qquad \overrightarrow{P_1P_2} \bullet \overrightarrow{P_1P_4} = 0$$

gilt. Sind die Koordinaten von $P_4(x;y;z)$, so bedeuten diese Bedingungen für sie wegen $|\overrightarrow{P_1P_2}| = 9$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 81 \quad (2) \qquad ; \qquad 7x + 4y + 4z = 0 \quad (3)$$

Aus (3) folgt

$$z = -\left(y + \frac{7}{4}x\right) \qquad (4)$$

und nach Einsetzen in (2)

$$y^2 + \frac{7}{4}xy + \frac{65}{32}x^2 - \frac{81}{2} = 0$$

Hieraus ergibt sich

$$y_{1;2} = \frac{1}{8}(-7x \pm 9\sqrt{32 - x^2})$$

Da x und y ganzrationale Zahlen sind, muss $\sqrt{32 - x^2}$ rational und daher $32 - x^2$ eine Quadratzahl sein. Dafür kommt nur $x_{1,2} = \pm 4$ in Frage. Man erhält daraus, und mit (4)

$$\begin{array}{cccccccc} y_{11} = 1 & ; & y_{21} = -8 & ; & y_{12} = 8 & ; & y_{22} - 1 \\ z_{11} = -8 & ; & z_{21} = 1 & ; & z_{12} = -1 & ; & z_{22} = 8 \end{array}$$

Durch Einsetzen bestätigt man, dass diese Werte Lösungen des System (2), (3) sind. Es ergeben sich vier Quadrate, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Mit (1) finden man für die Koordinaten der Eckpunkte

$$\begin{array}{ccccccc} P_{31} = (14{,}9, -4) & ; & P_{41} = (7,5,-8) & ; & P_{32} = (14{,}0{,}5) & ; & P_{42} = (7, -4{,}1) \\ P_{33} = (6{,}16{,}3) & ; & P_{43} = (-1{,}12, -1) & ; & P_{34} = (6{,}7{,}12) & ; & P_{44} = (-1{,}3{,}8) \end{array}$$

Aufgabe 141245:
Ist P ein Punkt im Innern eines regelmäßigen Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$, so seien die Abstände, die P von den vier Seitenflächen des Tetraeders hat, mit x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnet.
Mit h sei der Abstand bezeichnet, den A_4 von der Fläche des Dreiecks $A_1A_2A_3$ hat.
a) Man zeige, dass es genau einen Punkt P^* im Innern von $A_1A_2A_3A_4$ gibt, für den alle vier Abstände x_1, x_2, x_3, x_4 den Wert $\frac{h}{4}$ haben.
b) Man beweise, dass für alle Punkte P im Innern des Tetraeders das Produkt $x_1x_2x_3x_4$ genau dann seinen größten Wert annimmt, wenn P mit dem in a) genannten Punkt P^* zusammenfällt.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
a) Es sei P ein beliebiger innerer Punkt des regelmäßigen Tetraeders $A_1A_2A_3A_4$. Dieses Tetraeder ist die Vereinigung der vier (durchschnittsfremden) Tetraeder $A_1A_2A_3P$, $A_1A_2A_4P$, $A_1A_3A_4P$, $A_2A_3A_4P$. Für die Volumina gilt:

$$\frac{1}{3}Gh = V_{A_1A_2A_3A_4} = V_{A_1A_2A_3P} + V_{A_1A_2A_4P} + V_{A_1A_3A_4P} + V_{A_2A_3A_4P} =$$

$$= \frac{1}{3}G_1x_1 + \frac{1}{3}G_2x_2 + \frac{1}{3}G_3x_3 + \frac{1}{3}G_4x_4$$

wobei G das Maß der Fläche des Dreiecks $A_1A_2A_3$, $G_1 = G$ das des Dreiecks $A_1A_2A_3$, $G_2 = G_1 = G$ das des Dreiecks $A_1A_2A_4$, $G_3 = G_2 = G_1 = G$ das des Dreiecke $A_1A_3A_4$, $G_4 = G_3 = G_2 = G_1 = G$ das des Dreiecks $A_2A_3A_4$ ist (die Gleichheit gilt, da es sich um ein regelmäßiges Tetraeder handelt) und x_1, x_2, x_3, x_4 die Abstände des Punktes P von den Tetraederseiten in der entsprechenden Reihenfolge sind.

Wegen der Inhaltsgleichheit der Seitenflächen folgt hieraus

$$h = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad (*)$$

Angenommen, es existiert ein Punkt P^+ mit den geforderten Eigenschaften. Dann liegt P^+ auf der zu $A_1A_2A_3$ im Abstand $\frac{h}{4}$ liegenden parallelen Ebene ε_1, deren Durchschnitt mit dem Tetraeder nicht leer ist, analog auf der zu $A_1A_2A_4$ liegenden Ebene ε_2 und da diese Ebenen nicht zueinander parallel sind, auf der Schnittgeraden g von ε_1 und ε_2, die ihrerseits parallel zu A_1A_2 ist.

Die in analoger Weise zu $A_1A_3A_4$ parallele Ebene ε_3 schneidet demzufolge g in genau einem Punkt P_s. Jeder Punkt P, der den Bedingungen der Aufgabe genügt, muss notwendig aus ε_1, ε_2, ε_3 liegen, d. h. aber, er muss mit P_s zusammenfallen.

Der Punkt P_s hat von $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$ und $A_1A_3A_4$ die Abstände $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{h}{4}$; wegen (*) ist dann jedoch $x_4 = \frac{h}{4}$ und P_s ist der gesuchte Punkt P^+.

b) Es sei P ein beliebiger innerer Punkt des Tetraeders, x_1, x_2, x_3, x_4 seien wie in a) die Abstände zu den Tetraederseiten.

Da x_1, x_2, x_3, x_4 nichtnegative Zahlen sind, gilt die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel:

$$\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4} \leq \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

Wegen (*) ist die rechte Seite der Ungleichung gleich $\frac{1}{4}$.

Das Gleichheitszeichen wird bekanntlich genau dann angenommen, wenn $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, d. h., wenn $x_i = \frac{h}{4}$, $i = 1,2,3,4$ ist.

Dies ist genau dann der Fall, wenn $P \equiv P^+$ ist.

Aufgabe 161243:
Ist $P_1P_2P_3P_4$ eine vierseitige Pyramide mit S als Spitze und einem konvexen Viereck $P_1P_2P_3P_4$ als Grundfläche, so seien die Seitenflächen SP_iP_{i+1} mit ε_i und die Größe des Winkels zwischen ε_{i-1} und ε_i mit α_i bezeichnet ($i = 1, 2, 3, 4$; tritt in den Formeln ein Index 5 auf, so werde er durch den Index 1 ersetzt; tritt ein Index 0 auf, so werde er durch den Index 4 ersetzt).
Man beweise:
Wenn zu einer solchen Pyramide ein gerader Kreiskegel mit der Spitze S existiert, auf dessen Mantel P_1, P_2, P_3 und P_4 liegen, so gilt $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4$.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Da P_1, P_2, P_3, P_4 auf dem Mantel eines geraden Kreiskegels mit der Spitze S liegen, haben die Strahlen SP_i (i = 1,...,4) mit einer (in demselben Halbraum wie die Pyramide liegenden) geeigneten zur Kegelachse senkrechten Ebene ε Schnittpunkte Q_i. Der Schnittpunkt von ε mit der Kegelachse sei mit M bezeichnet. Da für jedes i = 1,..,4 die Punkte S_i, P_i, Q_i auf einer Geraden liegen, fallen die durch S_i, Q_i, Q_{i+1} bestimmten Ebenen mit der Ebene ε_i zusammen.
Es gilt $SQ_i = SQ_j$ (i, j = 1,...4), da $\varepsilon \perp SM$ und die Q_i dem Schnittkreis k des Kegels mit ε angehören.

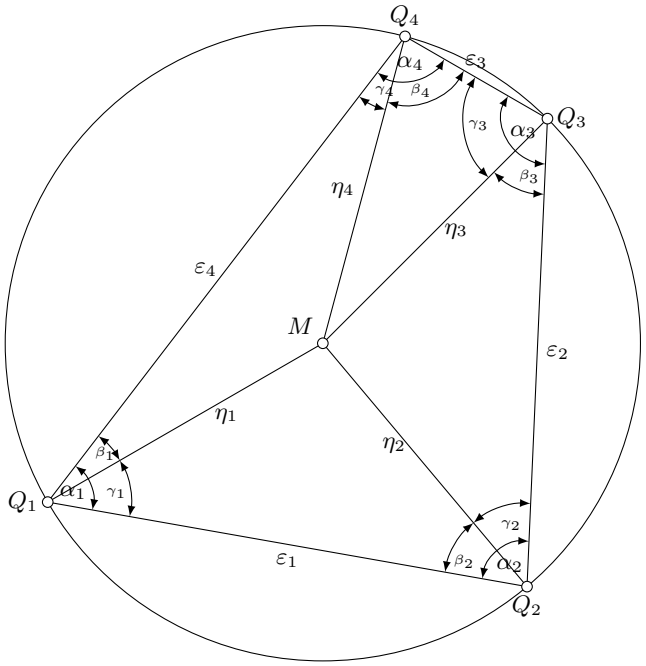


Abbildung: Von den Flächen ε_i, η_i (i = 1,...,4) wurden nur die in k liegenden Strecken gezeichnet; die eingezeichneten Winkelangaben $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ geben nicht die wahre Größe an.

Aus demselben Grunde gilt $MQ_i = MQ_j$ (i, j = 1,...,4), d. h. die Grundflächen der Pyramiden $MQ_iQ_{i+1}S$ mit der Spitze S sind für i = 1,...,4 gleichschenklige Dreiecke, so dass wegen $\varepsilon \perp SM$ die durch S, M und die Mittelpunkte M_i (i = 1,...,4) von Q_iQ_{i+1} gehenden Ebenen für die entsprechenden Pyramiden $MQ_iQ_{i+1}S$ Symmetrieebenen darstellen, d. h., $MQ_iQ_{i+1}S$ in die bez. der entsprechenden Ebenen MQ_iQ_{i+1} zueinander symmetrischen Tetraeder SMM_iQ_i und SMM_iQ_{i+1} zerlegen.

Mit η_i seien die durch S, M und Q_i bestimmten Ebenen bezeichnet; die Größe des Winkels zwischen den Ebenen ε_{i-1} und η_i sei mit β_i, die Größe des Winkels zwischen den Ebenen ε_i und η_i sei mit γ_i bezeichnet. Dann gilt auf Grund der Symmetrie stets

$$\beta_{i+1} = \gamma_i \qquad (i = 1,2,3,4) \qquad (1)$$

Da das Viereck $P_1P_2P_3P_4$ konvex ist, sind folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

a) M liegt innerhalb des Vierecks $Q_1Q_2Q_3Q_4$ bzw. auf einer seiner Seiten. Dann ist $\alpha_i = \beta_i + \gamma_i$ ($i = 1,...,4$) (siehe Abbildung).
Folglich gilt nach (1)

$$\alpha_1 + \alpha_3 = \beta_1 + \gamma_1 + \beta_3 + \gamma_3 = \beta_2 + \gamma_2 + \beta_4 + \gamma_4 = \alpha_4 + \alpha_2$$

b) M liegt außerhalb des Vierecks $Q_1Q_2Q_3Q_4$.
Dann gibt es einen Index i_0 so, dass M in Außenwinkeln bei Q_{i_0} und Q_{i_0+1} liegt. Durch zyklische Vertauschung der Indizes, die weder die Voraussetzungen, noch die Behauptung der Aufgabe ändert, kann $i_0 = 1$ erreicht werden. Dann liegt ε_1 in dem Winkel zwischen ε_4 und η_1, also ist

$$\alpha_1 = \beta_1 - \gamma_1 \qquad (2)$$

Ferner liegt ε_1 in dem Winkel zwischen ε_2 und η_2, also gilt

$$\alpha_2 = \gamma_2 - \beta_2 \qquad (3)$$

Für $i = 3,4$ liegt η_i in dem Winkel zwischen ε_{i-1} und ε_i, also ist

$$\alpha_i = \beta_i + \gamma_i \qquad (4)$$

Also gilt

$$\alpha_1 + \alpha_3 = \beta_1 - \gamma_1 + \beta_3 + \gamma_3 = -\beta_2 + \gamma_2 + \beta_4 + \gamma_4 = \alpha_4 + \alpha_2$$

Aufgabe 201246B:
Ist $T = ABCD$ ein Tetraeder, so bezeichne s die Summe aller Kantenlängen von T.
Dabei sei in dieser Aufgabe jede (in Zentimeter zu messende) Kantenlänge nur durch ihre Maßzahl angegeben.
Man untersuche, ob es unter allen Tetraedern T mit den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) eines gibt, für das s einen größten Wert annimmt.
Trifft das zu, so ermittle man diesen größten Wert von s.
Die geforderten Eigenschaften sind:
(1) $\angle BDC = \angle CDA = \angle ADB = 90°$.
(2) Sämtliche Kantenlängen von T sind nicht kleiner als $\frac{1}{6}$.
(3) Das Volumen von T ist gleich $\frac{1}{6}$.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Wir betrachten die Menge alle Tetraeder, die die Eigenschaften (1), (2), (3) besitzen. Setzen wir $AD = x$, $BD = y$, $CD = z$, so gilt nach (1) unter Beachtung des Satzes von Pythagoras für die zu untersuchende Summe s:

$$s = x + y + z + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2} \qquad (4)$$

Wegen (1) ist das Volumen $\frac{1}{6}xyz$, so dass nach (3) gilt: $xyz = 1$.
Für ein festes $z \geq \frac{1}{6}$ (siehe (2)) untersuchen wir nun die Summe s als Funktion des Quotienten $k = \frac{x}{y}$, wobei wir o. B. d. A. $k \geq 1$ annehmen können.

Aus $xy = \frac{1}{z}$ und $\frac{x}{y} = k$ folgt $x^2 = \frac{z}{k}$ und $y^2 = \frac{1}{k \cdot z}$, Setzen wir dies in (4) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} s(k) &= \sqrt{\frac{k}{z}} + \sqrt{\frac{1}{k \cdot z}} + z + \sqrt{\frac{k}{z} + \frac{1}{kz}} + \sqrt{\frac{1}{kz} + z^2} + \sqrt{z^2 + \frac{k}{z}} \\ &= z + \frac{1}{\sqrt{z}}\left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \sqrt{\frac{1}{z}\left(k + \frac{1}{k}\right)} + \sqrt{\left(\sqrt{z^2 + \frac{1}{kz}} + \sqrt{z^2 + \frac{k}{z}}\right)^2} \\ &= z + \frac{1}{\sqrt{z}}\left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \sqrt{\frac{1}{z}\left(k + \frac{1}{k}\right)} + \sqrt{2z^2 + \frac{1}{z}\left(k + \frac{1}{k}\right) + 2\sqrt{z^4 + \frac{1}{z^2} + z\left(k + \frac{1}{k}\right)}} \end{aligned}$$

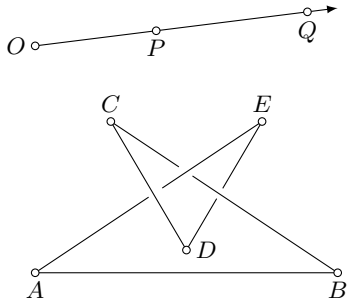
Nun sind die Funktionen $\sqrt{x}$ für $x \geq 0$ und $f(t) = t + \frac{1}{t}$ für $t \geq 1$ monoton wachsend $[f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} \geq 0]$, so dass $s(k)$ monoton wachsend ist.
Bei festem z wird aber wegen (2) das größte Verhältnis von $k = \frac{1}{y^2 z}$ für $y = \frac{1}{6}$ erreicht. $s(k9$ nimmt also für jedes beliebige fest z sein Maximum für $y = \frac{1}{6}$ und $x = \frac{6}{x}$ an. Zu untersuchen ist also nur noch, ob und, wenn ja, bei welchem z die Summe s maximal wird.

Halten wir $y = \frac{1}{6}$ fest und nehmen wir o. B. d. A. $x \geq z$ an, so folgt mit Hilfe derselben Schlussweise, dass es ein Tetraeder gibt, für das s ein Maximum annimmt, und zwar für $z = \frac{1}{6}$ und $x = 36$. Das maximale Wert von s wird also für $x = 36$, $y = z = \frac{1}{6}$ angenommen und ist

$$s = 36 + \frac{2 + \sqrt{2}}{6} + 2\sqrt{36^2 + \frac{36}{1}}$$

Aufgabe 211243:
Man beweise, dass sich aus fünf geraden Stäben kein räumlicher Streckenzug $ABCDEA$ bilden lässt, der die folgenden Eigenschaften (1) und (2) besitzt:
(1) Keine vier der fünf Punkte A, B, C, D, E liegen in einer gemeinsamen Ebene.
(2) Aus einer geeigneten Blickrichtung betrachtet, gilt: Keine zwei der fünf Punkte A, B, C, D, E werden genau hintereinander (also scheinbar miteinander zusammenfallend) gesehen;
ein innerer Punkt der Strecke CD verdeckt einen inneren Punkt von AE, ein innerer Punkt von BC verdeckt einen inneren Punkt von DE, ein innerer Punkt von AE verdeckt einen inneren Punkt von BC.
Hinweis:
Unter einem inneren Punkt P einer Strecke XY versteht man einen von X und Y verschiedenen, d. h. zwischen diesen Punkten liegenden Punkt P der Strecke XY.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
In der Abbildung ist das beim Sehen mit einem Auge O entstehende Bild eines räumlichen Streckenzuges unter Einarbeitung der bei Überdeckungen vorliegenden Sichtbarkeitsverhältnisse wiedergegeben.



Von dem als zentralperspektives Bild dargestellten hypothetischen Streckenzug $ABCDEA$ ist nachzuweisen, dass dieser im Raum nicht existieren kann.
Zunächst sei vorangestellt: Trifft ein von O ausgehender Sehstrahl s erst den Punkt P und dann den Punkt Q, so wollen wir sagen:

„P liegt vor Q“ oder „Q liegt hinter P“

Gemäß der Abbildung treffen drei von O ausgehende Sehstrahlen je zwei windschief zueinander liegende Strecken des Streckenzuges $ABCDEA$ in je einem Punkt. Wir stellen fest:

1. Ein von O ausgehender Sehstrahl trifft AE in T_{AE1} und CD in ${}_{CD}$. T_{CD} liegt vor T_{AE1}.
2. Ein Sehstrahl trifft BC in T_{BC1} und DE in T_{DE}. T_{BC1} liegt vor T_{DE}.
3. Ein Sehstrahl trifft AE in T_{AE2} und BC in T_{BC2}. T_{AE2} liegt vor T_{BC2}.

Jetzt führen wir eine Hilfsebene γ ein, die von den drei (nichtkollinearen) Punkten ABC aufgespannt wird. Offenbar liegt jeder Punkt der Strecken AB und BC in γ.

Nach Feststellung 3. liegt T_{AE2} vor T_{BC2} und damit vor γ. Da A in γ und T_{AE2} vor γ liegen, muss auch der Punkt E vor γ liegen.
Nach Feststellung 1. liegt T_{CD} vor T_{AE1}. Da A in γ und E vor γ liegen, muss auch der dazwischenliegende Punkt T_{AE1} vor γ liegen. Daraus folgt, dass auch T_{CD} vor γ liegt. Da C in und T_{CD} vor γ liegen, muss auch D vor γ liegen.
Folglich liegt auch jeder innere Punkt der Strecke DE vor γ.
Nach Feststellung 2. wird T_{DE} von T_{BC1} verdeckt. T_{DE} liegt als innerer Punkt von DE hinter T_{BC1} und damit auch hinter γ.
Dies ist ein Widerspruch zu oben genannter Feststellung. Die Punkte D, E und T_{DE} können auf Grund der durch die Abbildung wiedergegebenen Lagebeziehungen nicht in einer Geraden liegen.

Aufgabe 211245:
Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\angle BCA = 90°$.
Man ermittle die Menge aller derjenigen Punkte P des Raumes, für die $PA^2 + PB^2 = PC^2$ gilt.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
O. B. d. A. sei das gegebene Dreieck ABC mit $\angle BCA = 90°$ so in einem räumlichen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem gelegen, dass die Eckpunkte A, B und C die Koordinaten $(b; 0; 0)$, $(0; a; 0)$ bzw. $(0; 0; 0)$ haben, wobei a und b beliebige von Null verschiedene reelle Zahlen sind.
Ferner sei P ein beliebiger Punkt des Raumes; er habe die Koordinaten $(x; y; z)$. Dann gilt:

$$PA^2 = (x-b)^2 + y^2 + z^2$$
$$PB^2 = x^2 + (y-a)^2 + z^2$$
$$PC^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Daher hat ein Punkt P genau dann die Eigenschaft $PA^2 + PB^2 = PC^2$, wenn für ihn

$$(x-b)^2 + y^2 + z^2 + x^2 + (y-a)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

gilt. Dies ist äquivalent zu

$$(x-b)^2 + (y-a)^2 + z^2 = 0 \qquad (1)$$

Wegen $(x-b)^2 \geq 0$, $(y-a)^2 \geq 0$, $z^2 \geq 0$ trifft (1) genau dann zu, wenn $x - b = y - a = z = 0$ ist.
Daher ist die gesuchte Menge diejenige, die genau den Punkt mit den Koordinaten $(b; a; 0)$ enthält. (Dieser Punkt P ist derjenige Punkt, für den $ACBP$ ein Rechteck ist.)

Aufgabe 211246A:
a) Man beweise: Wenn

$$a = BC, b = AC, c = AB, d = AD, e = BD, f = CD \qquad (1)$$

die Kantenlängen eines Tetraeders $ABCD$ sind, dann gilt für den Oberflächeninhalt A_O dieses Tetraeders die Ungleichung

$$A_O < \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) \qquad (2)$$

b) Man untersuche, ob sich die Aussage über (2) noch zu folgender Aussage verschärfen lässt:
Es gibt eine kleinste reelle Zahl λ mit $\lambda < \frac{1}{3}$, so dass für den Oberflächeninhalt A_O jedes Tetraeders $ABCD$, wenn man dessen Kantenlängen wie in (1) bezeichnet, die Ungleichung

$$A_O \leq \lambda(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) \qquad (3)$$

gilt. Wenn das der Fall ist, so ermittle man diese Zahl λ.

Lösung von Zeitschrift „Mathematik in der Schule“:
Für den Flächeninhalt A des gleichseitigen Dreiecks mit dem Unfang u gilt:

$$A = \left(\frac{u}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Von allen Dreiecken gleichen Umfangs besitzt das gleichseitige Dreieck einen maximalen Flächeninhalt. Für den Flächeninhalt $A_\triangle$ eines Dreiecks mit den Seitenlängen x, y, z gilt folglich

$$A_\triangle \leq \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2$$

und wegen der Beziehungen zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel

$$A_\triangle \leq \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \qquad (1)$$

Die Ungleichung (1) gilt für alle Seitenflächen jedes Tetraeders $ABCD$. Somit folgt für die Oberfläche A_O des Tetraeders $ABCD$

$$\begin{aligned} A_O &\leq \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2) + \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+e^2+f^2) + \frac{\sqrt{3}}{12}(b^2+d^2+f^2) + \frac{\sqrt{3}}{12}(c^2+d^2+e^2) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12}(2a^2+2b^2+2c^2+2d^2+2e^2+2f^2) \qquad (2) \\ &= \frac{1}{6}\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2) \end{aligned}$$

Da $\frac{1}{6}\sqrt{3} = \sqrt{\frac{1}{12}} < \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ gilt, ergibt sich aus (2) die Aussage a)

$$A_O < \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$$

Aus (2) folgt weiterhin, dass mit $\lambda = \frac{1}{6}\sqrt{3}$ eine reelle Zahl $\lambda < \frac{1}{3}$ existiert, so dass für den Flächeninhalt A_O

$$A_O < \lambda(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$$

$\lambda = \frac{1}{6}\sqrt{3}$ ist auch die kleinste reelle Zahl λ dieser Art; denn für ein reguläres Tetraeder folgt aus $a = b = c = d = e = f$

$$A_O = a^2\sqrt{3} = \frac{1}{6}\sqrt{3}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$$

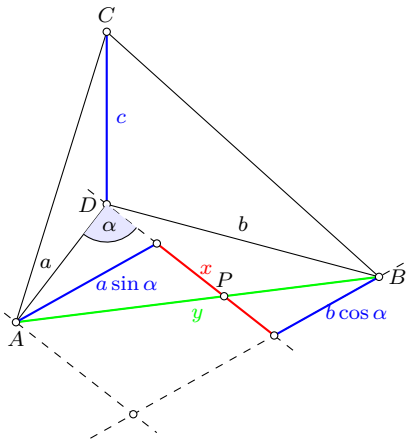
Folglich ist $\lambda = \frac{1}{6}\sqrt{3}$ die in b) gesuchte reelle Zahl.

Aufgabe 221246A:
Es sei $ABCD$ ein Tetraeder, bei dem die drei Kanten AD, BD und CD paarweise senkrecht aufeinanderstehen.
Die Längen dieser Kanten AD, BD bzw. CD seien mit a, b, bzw. c bezeichnet. Ferner sei P ein beliebiger Punkt auf dem Rande des Dreiecks ABC, und dann sei jeweils g die Gerade durch D und P.
a) Man beweise, dass dann hiernach für die Summe s der Abstände der Punkte A, B und C von g stets gilt:

$$s \leq \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)} \quad (1)$$

b) Man untersuche (in Abhängigkeit von den gegebenen Kantenlängen a, b, c), ob es einen Punkt P derart gibt, dass in (1) das Gleichheitszeichen gilt.
Wenn das der Fall ist, so ermittle man (in Abhängigkeit von a, b, c) alle diese Punkte P.

Lösung von MontyPythagoras:
O. B. d. A. liege der Punkt P auf der Kante AB. Siehe folgende Skizze:



Dann ist s die Summe der „blauen“ Strecken:

$$s = a\sin\alpha + b\cos\alpha + c$$

Außerdem ist zu Zwecken der Abkürzung:

$$y^2 = a^2 + b^2$$

und

$$x = b\sin\alpha - a\cos\alpha$$

Offensichtlich gilt:

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{y^2 - x^2}$$

und somit:

$$s = \sqrt{y^2 - x^2} + c$$

Es soll gelten:

$$s^2 = \left(\sqrt{y^2 - x^2} + c\right)^2 \leq 2(y^2 + c^2)$$

$$y^2 - x^2 + c^2 + 2c\sqrt{y^2 - x^2} \leq 2y^2 + 2c^2$$

$$0 \leq y^2 - x^2 + c^2 - 2c\sqrt{y^2 - x^2} + 2x^2$$

$$0 \leq \left(\sqrt{y^2 - x^2} - c\right)^2 + 2x^2$$

Diese Ungleichung ist offensichtlich immer erfüllt, was die Ungleichung (1) beweist.

Für Aufgabenteil b) soll Gleichheit eintreten, was nur dann der Fall ist, wenn einerseits

$$x = 0$$

und andererseits (mit $x = 0$)

$$\sqrt{y^2} - c = 0$$

also

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ist. x ist genau dann gleich null, wenn die Gerade g durch D und P die Strecke AB rechtwinklig kreuzt, P also den Lotfußpunkt von D auf AB darstellt.

Aufgabe 231246A:
Über n Punkte des Raumes, von denen keine vier in einer gemeinsamen Ebene liegen, wird vorausgesetzt, dass jedes Tetraeder, das vier dieser n Punkte als Ecken hat, einen Rauminhalt nicht größer als 1 besitzt.
Man beweise aus dieser Voraussetzung, dass es dann im Raum ein Tetraeder mit einem Rauminhalt nicht größer als 27 gibt, das alle n Punkte in seinem Inneren oder auf seinem Rand enthält.
Anmerkung:
In dieser Aufgabe wurde (bei der Angabe von Rauminhalten) einfachheitshalber auf die Angabe von Maßeinheiten verzichtet. In der Lösungsangabe verfahre man ebenso.

Lösung von Kornkreis:
Für $0 \leq n \leq 3$ ist die Aussage trivial, da dann alle Punkte in einer Ebene und somit in einer Dreiecksfläche liegen (entarteter Tetraeder mit Volumen 0). Sei nun $n \geq 4$. Nach Voraussetzung gibt es einen nicht-entarteten Tetraeder mit Eckpunkten aus der gegebenen Punktmenge.

Betrachten wir nun von allen solchen Tetraedern einen mit dem größten Volumen (so ein maximaler Tetraeder existiert, da die Menge nur endlich viele Punkte besitzt und damit nur endlich viele Tetraeder).

Bezeichne die Eckpunkte dieses Tetraeders mit P_1, P_2, P_3, P_4. Da dessen Volumen maximal ist, müssen alle anderen Punkte P_i $(i > 4)$ so liegen, dass die Volumina der Tetraeder mit den Eckpunkten P_a,P_b,P_c und P_i (für alle a,b,$c \in \{1,2,3,4\}$ paarweise verschieden und alle $i > 4$) nicht größer sind als das Volumen des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$.

Da das Volumen eines Tetraeders gleich „Grundfläche mal Höhe durch 3“ ist, liegen also alle Punkte in einem Gebiet T (oder auf dessen Rand), welches begrenzt wird durch die Ebenen, die parallel zu den Seitenflächen des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$ liegen und den der jeweiligen Seitenfläche gegenüberliegenden Eckpunkt enthalten.
Beachte, dass man die Ebenen durch den Spiegelpunkt dieses Eckpunktes an der jeweiligen Fläche nicht zu betrachten braucht, da das soeben beschriebene Gebiet T bereits geschlossen ist. T stellt nämlich einen nicht-entarteten Tetraeder dar. Dessen Seitenflächen sind parallel zu denen des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$, und überdies ähnlich zu ihnen mit drei mal so großen Seitenlängen, was wir im Folgenden zeigen wollen.

Betrachten wir als Beispiel (die anderen Seiten sind dann analog) die Schnittlinie g, die durch den Schnitt der Ebene parallel zu $P_1P_2P_3$ durch P_4 mit der Ebene parallel zu $P_1P_2P_4$ durch P_3 entsteht. Die Ebenen $P_1P_3P_4$ und $P_2P_3P_4$ schneiden g in den Punkten A bzw. B.
Nun kann man sehen, dass das Parallelverschieben der Strecke P_1P_4 entlang der Strecke P_1P_3 einen dieser Schnittpunkte A oder B auf g ergibt; der andere Schnittpunkt dann entsprechend durch Parallelverschieben der Strecke P_2P_4 entlang der Strecke P_2P_3. Die Strecken P_1P_4 und P_2P_4 schneiden sich im Punkt P_4 und nach dem Verschieben im Punkt P_3. Da A und B in der Ebene parallel zu $P_1P_2P_3$ durch P_4 liegen und P_1, P_2 in der Ebene $P_1P_2P_3$, folgt, dass der Abstand zwischen A und B genau der Abstand zwischen P_1 und P_2 ist.

Nun müssen die Ebenen $P_1P_3P_4$ und $P_2P_3P_4$ noch zusätzlich zum Punkt P_2 bzw. P_1 parallelverschoben werden, was in der Ebene $P_1P_2P_3$ (und allen dazu parallelen Ebenen, insbesondere der durch P_4) einer Verschiebung um jeweils $|P_1P_2|$ entspricht. Die entsprechenden Schnittpunkte A', B' auf g haben dann also den Abstand $3\,|P_1P_2|$ voneinander.

Dies zeigt das oben behauptete, sodass das Volumen des Tetraeders T gleich $3^3 = 27$ mal dem Volumen des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$ entspricht. Letzterer hat maximal das Volumen 1, womit dann die Behauptung der Aufgabenstellung folgt.

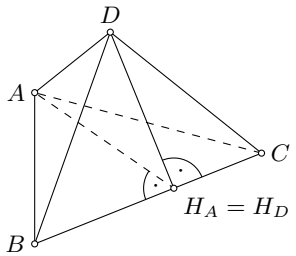
Aufgabe 241245:
Es ist zu beweisen:
Wenn die Längen der Kanten eines Tetraeders $ABCD$ nicht kleiner als $\sqrt{3}$ und nicht größer als 2 sind, dann sind die Innenwinkel zwischen je zwei Seitenflächen des Tetraeders $ABCD$ nicht größer als 90°.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Zunächst gilt allgemein:
Die Innenwinkel zwischen je zwei Seitenflächen jedes Tetraeders liegen zwischen 0° und 180°. In einem Tetraeder $ABCD$ sei nun für die Kantenlängen

$$\sqrt{3} \leq AB, BC, AC, AD, BD, CD \leq 2$$

vorausgesetzt. Es genügt, o. B. d. A., zu zeigen, dass der Innenwinkel zwischen den Seitenflächen ABC und BCD nicht größer als 90° ist.
Es seien H_A bzw. H_D die Fußpunkte der von A bzw. D auf die Gerade durch B und C gefällten Lote. Nach Aufgabe 241232 sind die Dreiecke ABC und BCD spitzwinklig. H_A und H_D liegen zwischen B und C und es gilt $AH_A, DH_D \geq \sqrt{2}$.

1. Fall: $H_A = H_D$

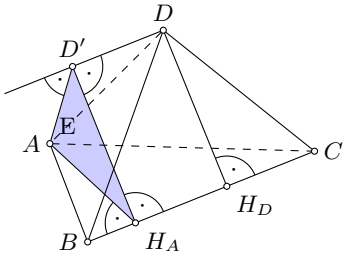


In diesem Fall steht die Ebene durch A, H_A und D senkrecht auf der Schnittgeraden der beiden Ebenen, in denen die Seitenflächen ABC und BCD liegen. Folglich ist der Innenwinkel $\angle AH_AD$ im Dreieck AH_AD zugleich auch der Innenwinkel zwischen diesen Seitenflächen des Tetraeders. Nach dem Kosinussatz gilt

$$\cos\angle AH_AD = \frac{AH_A^2 + DH_A^2 - AD^2}{2AH_A \cdot DH_A} \qquad \geq \frac{2+2-4}{2AH_A \cdot DH_A} = 0$$

wegen $0° < \angle AH_AD < 180°$ als $\angle AH_AD = 90°$. w. z. b. w.

2. Fall: $H_A \neq H_D$



In diesem Fall sei E die durch H_A gehende Ebene senkrecht zur Geraden durch B und C. Der Fußpunktes des Lotes von D auf E sei D'.
Dann liegt die Höhe AH_A in E, und die Strecke $D'H_A$, die folglich ebenfalls in E liegt, steht somit auch auf BC senkrecht. Der Innenwinkel $\angle AH_AD'$ im Dreieck AH_AD' ist daher zugleich auch der Innenwinkel zwischen den Seitenflächen ABC und BCD im Tetraeder.

Die Höhe DH_D ist zu E parallel. Wegen $DD' \perp E$, $H_AH_D \perp E$ gilt $DD' \parallel H_AH_D$ und wegen $DH_D \perp BC$ auch $DH_D \parallel D'H_A$. Folglich ist $DD'H_AH_D$ ein ebenes Rechteck, und es gilt $D'H_A = DH_D$.

Das Dreieck $AD'D$ ist rechtwinklig, also ist seine Hypotenuse AD länger als AD'. Damit folgt nach dem Kosinussatz

$$\cos\angle AH_AD' = \frac{AH_A^2 + D'H_A^2 - AD'^2}{2AH_A \cdot D'H_A} > \frac{AH_A^2 + DH_D^2 - AD^2}{2AH_A \cdot DH_D} \geq \frac{2+2-4}{2AH_A \cdot DH_D} = 0$$

wegen $0° < \angle AH_AD' < 180°$ als $\angle AH_AD' < 90°$. w. z. b. w.

Aufgabe 251244:
Es sei $A_1A_2A_3A_4$ ein Tetraeder mit gegebenen Kantenlängen $A_1A_2 = a$, $A_1A_3 = b$, $A_1A_4 = c$, $A_2A_3 = d$, $A_2A_4 = e$, $A_3A_4 = f$.
Man untersuche, ob es einen Punkt P im Raum gibt, so dass die Summe s der Quadrate des Abstandes des Punktes P von den Eckpunkten des Tetraeders einen kleinsten Wert annimmt.
Falls das zutrifft, ermittle man jeweils zu gegebenen a, b, c, d, e, f diesen kleinsten Wert von s.

Lösung von Nuramon:
Der Ausdruck

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} |P - A_i|^2 &= \sum_{i=1}^{4} \left(|P|^2 - 2\langle P, A_i\rangle + |A_i|^2\right) \\ &= 4|P|^2 - 2\left\langle P, \sum_{i=1}^{4} A_i \right\rangle + \sum_{i=1}^{4} |A_i|^2 \\ &= |2P|^2 - 2\left\langle 2P, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} A_i \right\rangle + \left|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} A_i\right|^2 - \left|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} A_i\right|^2 + \sum_{i=1}^{4} |A_i|^2 \\ &= \left|2P - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} A_i\right|^2 - \left|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} A_i\right|^2 + \sum_{i=1}^{4} |A_i|^2\end{aligned}$$

wird offenbar genau dann minimal, wenn $P = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} A_i$ der Schwerpunkt des Tetraeders ist. Der gesuchte minimale Wert s ist also gegeben durch

$$\begin{aligned}s &= -\left|\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} A_i\right|^2 + \sum_{i=1}^{4} |A_i|^2 \\ &= -\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{4} |A_i|^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq 4} \langle A_i, A_j\rangle\right) + \sum_{i=1}^{4} |A_i|^2 \\ &= \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{4} |A_i|^2 - \frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq 4} \langle A_i, A_j\rangle \\ &= \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{4} |A_i|^2 - \frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq 4} \frac{1}{2}\left(|A_i|^2 + |A_j|^2 - |A_i - A_j|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{1\leq i<j\leq 4} |A_i - A_j|^2 \\ &= \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2).\end{aligned}$$

Aufgabe 261243:
Es seien $k_1, ..., k_n$ Kugelkörper, jeder einschließlich seiner Randpunkte verstanden. Diese Kugeln seien

beliebig im Raum gelegen; es sei auch zugelassen, dass sie einander durchdringen oder berühren. Die Vereinigungsmenge der k_i habe das Volumen V.
Man beweise, dass es unter diesen Voraussetzungen stets möglich ist, eine Auswahl aus den Kugeln k_i so zu treffen, dass je zwei der ausgewählten Kugeln keinen gemeinsamen Punkt haben und dass die Vereinigungsmenge der ausgewählten Kugeln ein Volumen $U \geq \frac{1}{27}V$ hat.

Lösung von offizieller Aufgabenkommission:
Die Kugel k_i habe den Mittelpunkt $M-i$, den Radius r_i und das Volumen V_i ($i = 1,...,n$). Man definiere z. B. folgendermaßen eine Auswahl aus den k_i:
Unter den Kugeln k_i gibt es eine mit maximalem Radius. In einem ersten Auswahlschritt sei eine solche Kugel gewählt: o. B. d. A. sei sie k_1. Man bilde die Kugel K_1 um M_1 mit dem Radius $3r_1$. Sind alle k_i in K_1 enthalten, so sei die Auswahl beendet.

Andernfalls gibt es unter allen denjenigen Kugeln k_j, die nicht in K_1 enthalten sind, eine mit maximalem Radius. In zweiten Auswahlschritt sei eine solche gewählt: o. B. d. A. sei sie k_2. Man bilde die Kugel K_2 um M_2 mit dem Radius $3r_2$. Sind alle k_i in der Vereinigungsmenge $K_1 \cup K_2$ enthalten, so sei die Auswahl beendet.

In dieser Weise wird fortgesetzt: Im m-ten Auswahlschritt wird unter allen denjenigen Kugeln k_i, die nicht in der zuvor gebildeten Menge $K_1 \cup ... \cup K_{m-1}$ enthalten sind, eine mit maximalem Radius gewählt; o. B. d. A. sei sie k_m. Man bilde die Kugel K_m um M_m mit dem Radius $3r_m$. Sind alle k_i in $K_1 \cup ... \cup K_{m-1} \cup K_m$ enthalten, so sei die Auswahl beendet. Dieses Ende des Auswahlverfahrens muss einmal eintreten (o. B. d. A. mit dem m-ten Auswahlschritt), denn wegen

$$k_i \subset K_i \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq n \tag{1}$$

ist nach jedem Auswahlschritt mindestens eine Kugel mehr als beim vorangehenden Auswahlschritt in der betreffenden Menge K_1 bzw. ... bzw. $K_1 \cup ... \cup K_{m-1}$ bzw. $K_1 \cup ... \cup K_m$ enthalten, steht also nicht mehr für einen nächsten Auswahlschritt zur Verfügung.

Dass eine so definierte Auswahl die geforderten Bedingungen erfüllt, kann folgendermaßen bewiesen werden:
Für alle i mit $1 \leq i, i+1 \leq m$ gilt wegen der Maximalität von r_i, die bei der Auswahl von k_i zu beachten war, $r_i \geq r_{i+1}$. Folglich ist $r_i \geq r_j \quad (2)$ für alle $1 \leq i < j \leq m$.
Ferner ist für $1 \leq i < j \leq m$ stets k_1 nicht in $K_1 \cup ... \cup K_{j-1}$, also erst recht nicht in K_i enthalten. Somit gibt es einen Punkt P in k_j mit $M_iP > 3r_1$.
Nach der Dreiecksungleichung folgt hieraus und aus (2), dass

$$M_iM_j \geq M_iP - M_jP > 3r_i - r_j \geq r_i + r_j$$

gilt. Damit ist gezeigt, dass k_i und k_j keinen gemeinsamen Punkt haben; denn wäre X ein solcher, so folge wieder aus der Dreiecksungleichung

$$M_iM_j \leq M_iX + M_jX \leq r_i + r_j$$

Für das Volumen U von $k_1 \cup ... \cup k_m$ gilt somit

$$V_1 + ... + V_m = U \tag{3}$$

Für das Volumen Q_i von K_i gilt wegen des Radius $3r_i$ von K_i einerseits $Q_i = 27V_i$, also

$$V_i = \frac{1}{27}Q_i \tag{4}$$

($i = 1,...,m$), andererseits wegen (1) und nach Definition der Auswahlbedingung bei k_m

$$K_1 \cup ... \cup K_m \geq k_1 \cup ... \cup k_m \tag{5}$$

Ist nun Q das Volumen von $K_1 \cup ... \cup K_m$, so gilt einerseits

$$Q_1 + ... + Q_m \geq Q \tag{6}$$

andererseits wegen (5) $Q \geq V$ (7). Aus (3), (4), (6), (7) erhält man die nachzuweisende Ungleichung $U \geq \frac{1}{27}V$.

Aufgabe 281245:
Für ein Tetraeder $ABCD$ werde vorausgesetzt, das der Mittelpunkt M der Umkugel des Tetraeders im Innern des Tetraeders liegt.
Die Verbindungsgerade von M mit jeweils einer Tetraederecke A, B, C bzw. D schneide die Seitenfläche des Tetraeders, die der betreffenden Ecke gegenüberliegt, in A', B', C' bzw. D'.
Der Radius der Umkugel sei r.
Beweisen Sie, dass aus diesen Voraussetzungen stets folgt:

$$AA' + BB' + CC' + DD' \geq \frac{16}{3}r$$

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
Bezeichnet man die Volumina der Tetraeder $ABCD$, $MBCD$, $MACD$, $MABD$ bzw. $MABC$ mit V, V_1, V_2, V_3 bzw. V_4, so gilt

$$V_i > 0 \quad (i = 1,2,3,4) \qquad \text{und} \qquad V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = V \qquad (1)$$

Sind h_1, h_2, h_3 bzw. h_4 die Längen der Höhen des Tetraeders $ABCD$ bezüglich der Grundflächen BCD, ACD, ABD bzw. ABC und h_1', h_2', h_3' bzw. h_4' die Längen der Höhen der Tetraeder $MBCD$, $MACD$, $MABD$ bzw. $MABC$ bezüglich derselben Grundflächen, so gilt

$$\frac{V_i}{V} = \frac{h_1'}{h_i} \quad (i = 1,2,3,4) \qquad (2)$$

Die Lote von A und M auf die Ebene durch B, C, D sind zueinander parallel; daher liegen sie mit der Geraden durch A, M, A' in einer Ebene, und aus dem Strahlensatz folgt die erste der Gleichungen

$$\frac{MA'}{AA'} = \frac{h_1'}{h_1}, \quad ..., \quad \frac{MD'}{DD'} = \frac{h_4'}{h_4} \qquad (3)$$

die übrigen ergeben sich analog für B, C bzw. D statt A. Aus (1), (2), (3) folgt

$$\frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} + \frac{MD'}{DD'} = 1$$

wegen $MA = MB = MC = MD = r$ also

$$\frac{AA' - r}{AA'} + \frac{BB' - r}{BB'} + \frac{CC' - r}{CC'} + \frac{DD' - r}{DD'} = 1$$

$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} + \frac{1}{DD'} = \frac{3}{r} \qquad (4)$$

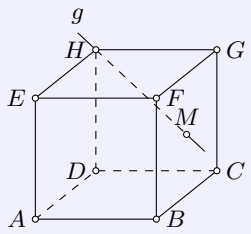
Da das harmonische Mittel der vier Kantenlängen $AA', ..., DD'$ nicht größer als ihr arithmetisches Mittel ist, gilt

$$\frac{4}{\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} + \frac{1}{DD'}} \leq \frac{\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} + \frac{1}{DD'}}{4}$$

Hieraus und aus (4) folgt

$$AA' + BB' + CC' + DD' \geq \frac{16}{\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} + \frac{1}{DD'}} = \frac{16}{3}r$$

Aufgabe 291245:



Die Ecken eines Würfels mit gegebener Kantenlänge a seien wie in der Abbildung mit A, B, C, D, E, F, G, H bezeichnet.
Die Ebene, in der A, B, C, D liegen sei ε_1; die Ebene, in der B, C, G, F liegen sei ε_2; die Gerade durch H und den Mittelpunkt M des Quadrates $BCGF$ sei g genannt.
Man beweise, dass es unter allen Strecken, die einen Punkt von ε_1 mit einem Punkt von ε_2 verbinden und deren Mittelpunkt auf g liegt, eine Strecke von kleinster Länge gibt.
Man ermittle diese kleinste Länge.

Lösung von Zeitschrift „alpha“:
Ein Koordinatensystem sei so gewählt, dass folgende Punkte folgende Koordinaten haben: B(0,0,0), C(a,0,0,), A(0,a,0), F(0,0,a).
Dann haben M, H die Koordinaten ($\frac{a}{2}$,0,$\frac{a}{2}$) bzw. (a,a,a) und g ist die Menge aller Punkte

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{at}{2}; at; \frac{a}{2}+\frac{at}{2}\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Mit $s = \frac{1+t}{2}$ besteht g aus der Menge aller Punkte $(as, a(2s-1), as)$, $s \in \mathbb{R}$. Jeder Punkt aus ε_1 kann durch (x,y,0) und jeder Punkt aus ε_2 durch (v,0,w) beschrieben werden. Der Mittelpunkt einer Verbindungsstrecke zweier solcher Punkte hat die Koordinaten

$$\left(\frac{x+v}{2}; \frac{y}{2}; \frac{w}{2}\right)$$

und liegt genau dann auf g, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\frac{x+v}{2} = as; \qquad \frac{y}{2} = a(2s-1); \qquad \frac{w}{2} = as$$

Dies gilt genau dann, wenn $x+v = w$, $y = 2w-2a$ ist. Das Quadrat q der zu betrachtenden Streckenlänge ist

$$q = (x-v)^2 + y^2 + w^2 = (w-2v)^2 + (2w-wa)^2 + w^2 = (w-2v)^2 + \frac{(5w-4a)^2 \cdot 4a^2}{5}$$

Es nimmt seinen kleinsten Wert genau dann an, wenn $w-2v = 0$ und $5w-4a = 0$ ist, also wenn gilt

$$w = \frac{4a}{5}; \qquad v = x = \frac{2a}{5}; \qquad y = \frac{-2a}{5}; \qquad s = \frac{2}{5}$$

Der kleinste Wert von q ist damit gleich $\frac{4a^2}{5}$, die gesuchte kleinste Länge beträgt mithin $2a\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Aufgabe 331243:
Es sei $ABCDS$ eine gerade vierseitige Pyramide mit der Spitze S und der quadratischen Grundfläche $ABCD$. Ferner seien A', B', C', D' vier Punkte, die jeweils auf den Seitenkanten AS, BS, CS bzw. DS liegen und von S beliebig gegebene (von Null verschiedene) Abstände a, b, c bzw. d haben.
Man zeige, dass unter diesen Voraussetzungen stets gilt:
Die Punkte A', B', C', D' liegen genau dann in einer gemeinsamen Ebene, wenn gilt:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c} = \frac{1}{b}+\frac{1}{d}$$

Lösung von MontyPythagoras:
Die Größe der Pyramide ist für diese Aufgabe belanglos. Wir können die vier Kanten der Pyramide auch durch 4 Geraden darstellen, die durch den Ursprung gehen, wenn man die Spitze der Pyramide in selbigen legt. Denkt man sich die Grundfläche der Pyramide als senkrecht zur z-Achse, dann lauten die Koordinaten der Punkte A', B', C' und D':

$$\vec{a} = \frac{a}{\sqrt{2q^2+h^2}} \begin{pmatrix} q \\ q \\ h \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \frac{b}{\sqrt{2q^2+h^2}} \begin{pmatrix} q \\ -q \\ h \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \frac{c}{\sqrt{2q^2+h^2}} \begin{pmatrix} -q \\ -q \\ h \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \frac{d}{\sqrt{2q^2+h^2}} \begin{pmatrix} -q \\ q \\ h \end{pmatrix}$$

q und h sind Größen der gedachten Pyramide (h die Höhe und q eine halbe Grundflächenseite), aber sie sind für die Berechnung ohne Belang. Die Punkte liegen in einer Ebene, wenn das Spatprodukt dreier Differenzen dieser Vektoren null ergibt, also z. B.:

$$(\vec{b}-\vec{a},\vec{c}-\vec{a},\vec{d}-\vec{a}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} q(b-a) & -q(c+a) & -q(d+a) \\ -q(b+a) & -q(c+a) & q(d-a) \\ h(b-a) & h(c-a) & h(d-a) \end{vmatrix} = 0$$

Nun folgt eine reine Fleißaufgabe:

$$\begin{aligned} -(b-a)(c+a)(d-a) - (c+a)(d-a)(b-a) + (d+a)(b+a)(c-a) - (d+a)(c+a)(b-a) \\ -(b-a)(d-a)(c-a) - (c+a)(b+a)(d-a) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b-a)(-cd+ac-ad+a^2-cd-ad+ac+a^2) + (d+a)(ac+bc-ab-a^2-bc-ab+ac+a^2) \\ +(d-a)(-bc+ac+ab-a^2-bc-ab-ac-a^2) = 0 \end{aligned}$$

$$(b-a)(-2cd+2ac-2ad+2a^2) + (d+a)(2ac-2ab) + (d-a)(-2bc-2a^2) = 0$$

$$-bcd+abc-abd+a^2b+acd-a^2c+a^2d-a^3+acd-abd+a^2c-a^2b-bcd-a^2d+abc+a^3 = 0$$

$$-2bcd+2abc-2abd+2acd = 0$$

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{d}-\frac{1}{c}+\frac{1}{b} = 0$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c} = \frac{1}{b}+\frac{1}{d}$$

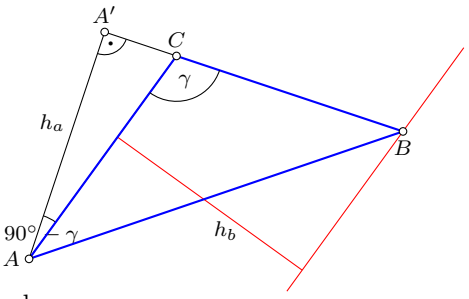
q. e. d.

VII.V Konstruktionen

I Runde 1

Aufgabe V01110:
Folgende Stücke eines Dreiecks sind bekannt: $h_a = 4{,}2$ cm, $h_b = 4{,}2$ cm, $\gamma = 106{,}4°$.
Konstruieren Sie das Dreieck!

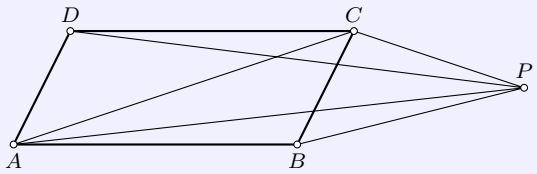
Lösung von Steffen Polster:



Konstruktion:
1. Zeichne ein Dreieck $AA'C$ mit $AA' = h_a$, $\angle CAA' = 90° - \gamma$ und $\angle AA'C = 90°$.
2. Verlängere die Strecke $A'C$ über C hinaus.
3. Führe eine Parallelverschiebung von AC um die Länge h_b durch.
4. Der Schnittpunkt der verschobenen Geraden und der Verlängerung von $A'C$ ist der Punkt B.

Analyse:
1. Das Dreieck ABC ist ein stumpfwinkliges Dreieck mit $\gamma > 90°$. Damit liegt der Höhenfußpunkt A' der Höhe h_a außerhalb der Strecke BC.
Das Dreieck ACA' ist nach Kongruenzsatz sww direkt konstruierbar, wobei der Winkel bei A nach dem Außenwinkelsatz gleich $\gamma - 90°$ ist. (siehe Abbildung)
2. Der Punkt B liegt auf der Verlängerung von CA' und einer Parallelen zu AC mit dem Abstand h_b zu AC.

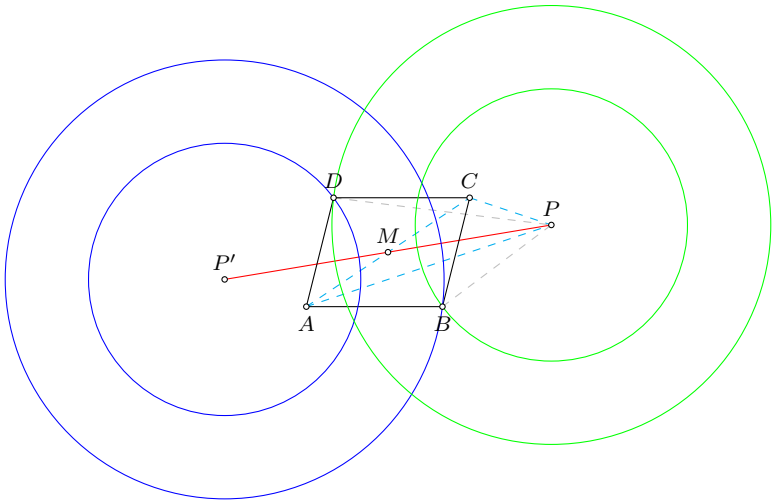
Aufgabe V01119:
Von einem Parallelogramm sind der Durchmesser AC und die Entfernungen der Eckpunkte des Parallelogramms von einem Punkt P außerhalb des Parallelogramms gegeben.



Konstruieren Sie das Parallelogramm und beschreiben Sie die Konstruktion.

Lösung von Steffen Polster:
Das Dreieck ACP ist mit den bekannten Strecken AC, AP und CP unmittelbar konstruierbar (blaue gestrichelte Linien). Um das Parallelogramm zu konstruieren, spiegelt man zunächst den Punkt P am Mittelpunkt M der Geraden AC und erhält so den Punkt P'.
Nun schlägt man Kreise mit den Radien PB und PC um den Punkt P (grüne Kreise), und tut dasselbe um den Punkt P' (blaue Kreise).
Die Schnittpunkte des großen blauen Kreises mit dem kleinen grünen Kreis ergeben Kandidaten für den Eckpunkt B des Parallelogramms, während die Schnittpunkte des kleinen blauen Kreises mit dem großen grünen Kreis Kandidaten für den Eckunkt D darstellen.

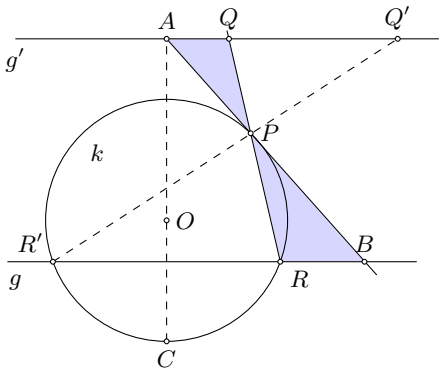
In der Darstellung sind die Kandidaten ausgewählt, die eine Nummerierung der Ecken entgegen des Uhrzeigersinns erlauben.
Zu zeigen bleibt, dass $ABCD$ tatsächlich ein Parallelogramm ist.



Die Punkte B und D sind punktsymmetrisch zu M, da sie als Schnittpunkte von Kreisen mit gleichen Radien und punktsymmetrischen Mittelpunkten konstruiert wurden. Damit sind die Längen MD und MB gleich.
Wegen der Punktsymmetrie von B und D geht deren Verbindungslinie durch M.
Die Diagonalen AC und BD treffen sich also in M und M halbiert beide Diagonalen. Damit ist nach einem bekannten Kriterium $ABCD$ ein Parallelogramm.

Aufgabe 021115:
Gegeben sei ein Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm und eine Gerade g mit dem Abstand $a = 5$ cm vom Mittelpunkt des Kreises. Ferner ist auf der Peripherie des Kreises ein beliebiger Punkt P gegeben.
a) Konstruieren Sie durch P eine Sekante, die den Kreis in R und die Gerade in Q so schneidet, dass $PR = PQ$ ist!
b) Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen die Konstruktion ausführbar ist (Begründung)!

Lösung von Eckard Specht:



Sei k der gegebene Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r sowie A auf g derjenige Punkt mit kürzestem Abstand zu O.
a) Konstruktion: Durch Verdoppelung der Strecke AP entsteht Punkt B. Die Parallele $g' \parallel g$ durch B schneide k in den Punkten R bzw. R'. Die Geraden PR und PR' schneiden g in den Punkten Q bzw. Q'. Die gesuchten Sekanten sind dann RPQ bzw. $R'PQ'$.

Beweis: Nach obiger Konstruktion und Kongruenzsatz WSW ($\angle QAP = \angle RBP$ Wechselwinkel, $AP = PB$ sowie $\angle APQ = \angle BPR$ Scheitelwinkel) gilt $\triangle APQ \cong \triangle BPR$, woraus die Forderung $PR = PQ$ sofort folgt.
Ebenso folgern wir aus $\triangle APQ' \cong \triangle BPR'$ die Gleichheit $PR' = PQ'$. $\square$

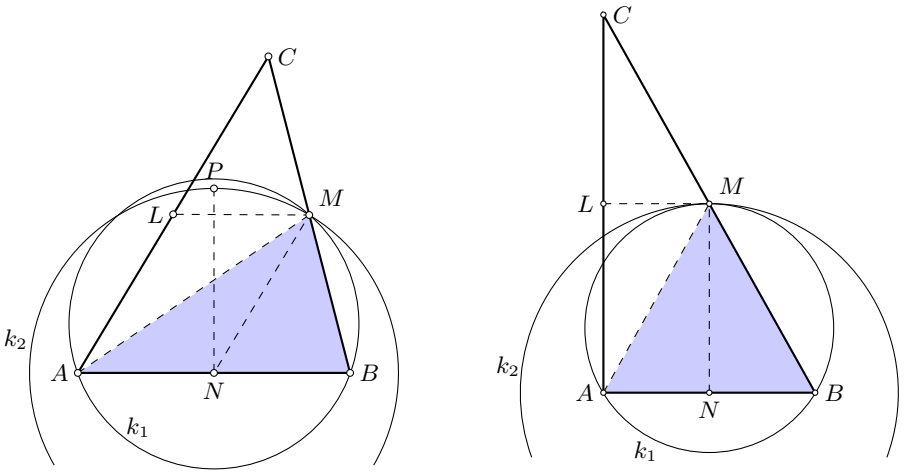
b) Offensichtlich schlägt die Konstruktion fehl, wenn g' keine Schnittpunkte mit k hat. Das ist genau dann der Fall, wenn der senkrechte Abstand von P zu g größer als die Hälfte des Abstandes $AC = a+r = 8$ cm, also größer als 4 cm ist. Dabei ist C der Schnittpunkt der Geraden AO mit k, der den größeren Abstand zu g hat.

Aufgabe 011214:
Es ist ein Dreieck ABC aus $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ und $\angle BMA = \omega$ zu konstruieren, wobei M die Mitte der Strecke $\overline{BC}$ ist. Es sei $\omega < 90°$.
Man beweise, dass die Aufgabe dann und nur dann lösbar ist, wenn

$$b \cdot \tan\frac{\omega}{2} \leq c < b$$

ist. In welchem Falle tritt Gleichheit auf?

Lösung von Eckard Specht:



I. Konstruktion:
(linkes Bild) Das Hilfsdreieck AMB kann aus den gegebenen Stücken konstruiert werden, denn Punkt M liegt auf dem Kreis k_1, der über der Sehne $AB = c$ derjenige geometrische Ort aller Punkte ist, für die $\angle BMA = \omega$ gilt.
Sei ferner LMN das Seitenmittendreieck von $\triangle ABC$. Dann ist $ALMN$ nach den Strahlensätzen ein Parallelogramm und somit $AL = MN = \frac{b}{2}$, d. h., ein zweiter geometrischer Ort für M ist der Kreis k_2 mit dem Radius $\frac{b}{2}$ um N.

II. Beweis:
Wegen $\omega < 90°$ muss $\frac{b}{2} > \frac{c}{2}$, also $c < b$ gelten, da in den Dreiecken AMC und AMB dem größeren Winkel (hier $\angle CMA > \angle BMA$) auch die größere Seite gegenüberliegt.
Die Aufgabe ist also nur lösbar, wenn beide Kreise Punkte gemeinsam haben.
Gewöhnlich sind dies zwei Lösungen, die auch zu zwei nichtkongruenten Dreiecken ABC führen. Berühren sich beide Kreise von innen, gibt es nur eine Lösung (Bild rechts).
Hier wird ω vom Radius MN halbiert und wegen $MN \parallel AC$ sowie $MN \perp AB$ ist

$$\tan\omega = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{b}{2}} = \frac{c}{b}$$

und mithin $c = b\tan\frac{\omega}{2}$. In allen anderen Fällen kann man in N eine Senkrechte auf AB errichten, die k_1 in P schneidet. Dann gilt nach dem Peripheriewinkelsatz $\omega = \angle BMA = \angle BPA$ und

$$MN = \frac{b}{2} < x \equiv PN = \frac{c}{2}\cot\frac{\omega}{2}$$

Also ist hier $b \tan \frac{\omega}{2} < c$ und somit allgemein

$$b \cdot \tan \frac{\omega}{2} \leq c < b$$

Umgekehrt folgt aus (1), dass k_1 und k_2 Schnittpunkte haben und die Aufgabe lösbar ist.

Aufgabe 031211:
Von den Punkten A und B einer Strecke $\overline{AB}$, deren Länge nicht direkt gemessen werden kann, werden zwei weitere Punkte C und D, deren gegenseitiger Abstand bekannt ist, angepeilt. Man misst folgende Winkel:

$$\angle \mathrm{DAB} = 80°, \quad \angle \mathrm{CAB} = 30°, \quad \angle \mathrm{ABC} = 60°, \quad \angle \mathrm{ABD} = 20°.$$

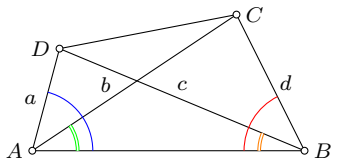
Die Länge der Strecke $\overline{CD}$ beträgt 2 km. Wie kann man die Länge der Strecke $\overline{AB}$ ermitteln?

a) Lösen Sie die Aufgabe durch Konstruktion! Fertigen Sie eine Konstruktionsbeschreibung und eine Begründung an!

b) Lösen Sie die Aufgabe auf rechnerischem Wege! (Es genügt hierbei die Angabe der Formeln, eine zahlenmaßige Berechnung wird nicht verlangt.)

Lösung von Henning Thielemann:
Konstruktion:

1. Zeichne beliebige Strecke AB
2. Trage zur gleichen Seite von AB folgende Winkel ab: Am Punkt A die Winkel der Größen 80° und 30° und am Punkt B die Winkel der Größen 20° und 60°. Bezeichne die entstehenden Schenkel der Reihe nach mit a, b, c, d.



3. Den Schnittpunkt von a und c nenne D und den von b und d nenne C.
4. Die gesuchte Länge ist $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} \cdot 2km$. Diese Größe kann man auch mit Lineal und Dreieck unter Verwendung des Strahlensatzes konstruieren.

Berechnung:
Sinussatz im Dreieck ABD:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{\sin 80°}{\sin 80°} = 1$$

Sinussatz im Dreieck ABC:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{\sin 30°}{\sin 90°} = \frac{1}{2}$$

Kosinussatz im Dreieck BCD bezüglich $\angle CBD$.

$$\begin{aligned}
\overline{DC}^2 &= \overline{DB}^2 + \overline{CB}^2 - 2 \cdot \overline{DB} \cdot \overline{CB} \cdot \cos \angle \mathrm{CBD} \\
&= \overline{AB}^2 + \frac{1}{4}\overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \cos 40° = \overline{AB}^2 \cdot \left(\frac{5}{4} - \cos 40°\right) \\
\overline{DC} &= \overline{AB} \cdot \sqrt{\frac{5}{4} - \cos 40°} \\
\overline{AB} &= \frac{\overline{DC}}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos 40°}} = \frac{4km}{\sqrt{5 - 4\cos 40°}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 071214:
Zur Verfügung stehen eine Holzkugel, ein Zirkel, mit dem man sowohl auf einer (genügend groß gedachten) ebenen Fläche als auch auf der Kugeloberfläche zeichnen kann, Bleistift, ein starr geradliniges (ohne Längenskale) Lineal und (ebenes) Zeichenpapier.

Man konstruiere den Radius der Holzkugel!

Lösung von Felix Kaschura:
Man kann die Kugel zunächst auf einem Blatt (auf dem der Radius zu konstruieren ist) positionieren.

Danach kann man das Lineal senkrecht zum Boden an die Kugel heranstellen (ein Lineal hat rechte Winkel) und am unteren Ende des Lineals mit dem Bleistift eine Markierung machen. Das wiederholt man noch 2 mal mit anderen Punkten an der Kugel.

Nun hat man auf dem Papier 3 Punkte, die auf dem größten in die Kugel passenden Kreis liegen. Verbindet man die 3 Punkte, erhält man ein Dreieck, bei dem man wiederum den Umkreis (selber Radius wie Kugel) konstruieren kann.

Man verbindet also die 3 Punkte mit dem Lineal und konstruiert mit dem Zirkel die 3 Mittelsenkrechten, deren Schnittpunkt der Umkreismittelpunkt ist. Man nimmt nun diesen Mittelpunkt und einen Eckpunkt des Dreiecks in die Zirkelspanne und kann sie auf eine Gerade abtragen und erhält so den Radius.

Eine weitere Lösungsmöglichkeit besteht darin, den Zirkel an einen beliebigen Punkt der Kugel zu halten und mit dem anderen Zirkelende so lange auf der Kugel entlangwandert, bis dieses gerade noch so an der Kugel anliegt und bei weiterem „Wandern“ in beliebiger Richtung die Kugeloberfläche verlassen würde. Dann hat man den Kugeldurchmesser in der Zirkelspanne.

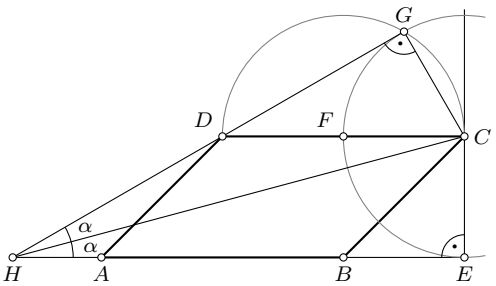
Diese beiden Verfahren sind recht ungenau. Man kann auch mit folgendem Verfahren vorankommen, indem die Kugel als Kreis auf die Papierfläche projiziert werden soll:

1. Man wählt einen beliebigen Punkt B auf der Kugeloberfläche
2. Es wird ein Kreis k um B auf der Kugeloberfläche gezeichnet. Die Zirkelspanne sei dabei r_1. Achtung: der gezeichnete Kreis hat nicht den Radius r_1!
3. Auf dem Blatt wird eine waagerechte Linie w gezeichnet, auf der ein Punkt B^* festgelegt wird. Um B^* wird ein Kreis mit dem Radius r_1 gezeichnet.
4. Nun wird auf dem Kreis k auf der Kugel ein beliebiger Punkt A gewählt. Den Durchmesser d_k dieses Kreises kann man mit dem Zirkel ermitteln, indem man ihn in A sticht und den maximalen Abstand sucht.
5. Mittels einer Grundkonstruktion auf dem Papier kann d_k halbiert werden.
6. Auf w wird eine Senkrechte konstruiert und von dem Schnittpunkt $\frac{d_k}{2}$ jeweils nach unten und nach oben abgetragen. Es entsteht eine Strecke, die so lange auf w parallelverschoben wird, bis sie den Kreis mit dem Radius r_1 trifft. Einer dieser Schnittpunkte sei A^* genannt.
7. Abschließend wird die Mittelsenkrechte von A^* und B^* konstruiert. Ihr Schnittpunkt mit w heiße M^*. Die Strecke $\overline{B^*M^*}$ bzw. $\overline{A^*M^*}$ entspricht nun dem Radius der Kugel.

II Runde 2

Aufgabe V11124:
Zeichnen Sie ein Parallelogramm!
Konstruieren Sie auf der Grundlinie (bzw. auf ihrer Verlängerung dieses Parallelogramms den Punkt, von dem aus die Gegenseite und eine der beiden anderen unter gleichem Winkel erscheinen!
Beweisen Sie die Richtigkeit der Konstruktion!

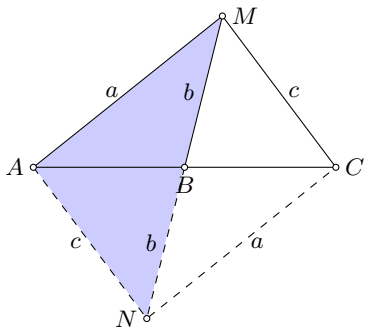
Lösung von MontyPythagoras:
Den gesuchten Punkt H konstruiert man wie folgt:
1. Zeichne eine Senkrechte von C auf die Gerade AB. Der Schnittpunkt ist E.
2. Zeichne einen Kreis um den Mittelpunkt C durch den Punkt E.
3. Konstruiere den Mittelpunkt F der Strecke CD.
4. Zeichne einen Halbkreis um den Punkt F vom Punkt C zum Punkt D. Der Schnittpunkt der Kreise ist G.
5. Zeichne eine Gerade durch die Punkte D und G. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Gerade AB ist der gesuchte Punkt H.



Begründung:
Die Gerade HC muss die Winkelhalbierende der Geraden HE und HG sein. Das ist der Fall, weil die Dreiecke HEC und HCG kongruent sind, da sie in G und E einen rechten Winkel aufweisen, die Seite HC gemeinsam haben und eine weitere Seite (CG bzw. CE) gleich lang ist (SSW). Damit der Winkel $\angle DGC$ rechtwinklig ist, wurde wegen des Satzes von Thales der Kreis um den Mittelpunkt F mit dem Kreis um C geschnitten.

Aufgabe 011124:
Drei Strecken der unterschiedlichen Längen a, b und c sollen von einem Punkt M ausgehen und so in einer Ebene liegen, dass ihre Endpunkte A, B und C in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen und $AB = BC$ ist.
Führen Sie die Konstruktion aus und begründen Sie diese!
Es sei $a > c$. Geben Sie die Bedingungen für b an, bei denen die Aufgabe lösbar ist!

Lösung von Eckard Specht:
I. Analyse:
Betrachten wir das Dreieck AMC, so ist MB wegen $AB = BC$ eine der Seitenhalbierenden. Es gilt also, ein Dreieck aus zwei Seiten und der eingeschlossenen Seitenhalbierenden zu konstruieren. Dazu ergänzen wir AMC zu einem Parallelogramm $AMCN$, in welchem sich die Diagonalen AC und MN bekanntermaßen stets halbieren.
Das Teildreieck AMN kann somit aus den gegebenen Stücken hergestellt werden.



II. Konstruktionsbeschreibung:
Wir konstruieren das Dreieck AMN aus den Seitenlängen a, c und $2b$ nach Kongruenzsatz SSS. Der Mittelpunkt der Strecke MN ist dann B und AB verdoppelt liefert Punkt C.

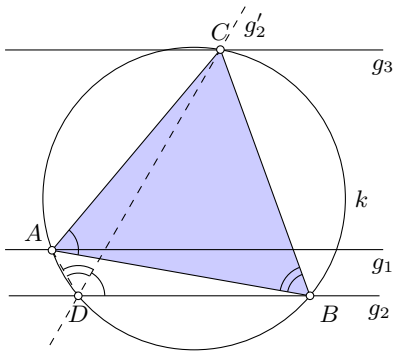
III. Beweis:
Nach obiger Konstruktion ist AMN ein Dreieck, in dem $AM = a, AN = c$ und $MB = BN = b$ gilt sowie AB eine Seitenhalbierende ist. Da C durch Verdopplung von AB entsteht, gilt die Kongruenz $\triangle ABN \cong \triangle CBM$ (SWS), d. h. $AN = MC = c$. Die Punkte A, B und C haben damit die geforderten Abstände von M.

IV. Konstruktion:
Das Dreieck AMN existiert genau dann, wenn die Dreiecksungleichungen erfüllt sind: $a + c > 2b$ und $c + 2b > a$. Das führt auf die gesuchten Bedingungen für die Länge b:

$$\frac{1}{2}(a - c) < b < \frac{1}{2}(a + c)$$

Aufgabe 011224:
Gegeben sind drei parallele Geraden g_1, g_2 und g_3, die untereinander ungleiche Abstände haben. Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck, dessen Punkte A, B, C auf den Geraden liegen! Begründen Sie die Konstruktion!

Lösung von Eckard Specht:



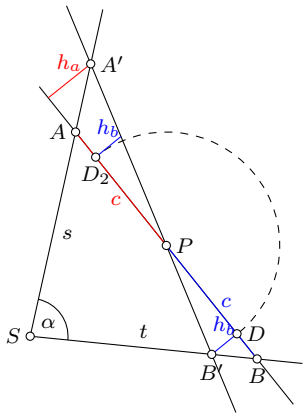
Analysis und Konstruktion:
ABC sei das gleichseitige Dreieck mit den Eckpunkten auf den parallelen Geraden g_1, g_2 und g_3. Da $\triangle ABC$ längs der Parallelen beliebig verschoben werden kann, dürfen wir eine Ecke, etwa A auf g_1, nach Gutdünken auswählen.
Drehen wir nun $\triangle ABC$ um A um 60° und nimmt bei dieser Drehung Ecke B die Gerade g_2 mit, so gelangt AB in die Lage AC und g_2 nach $g'2$. Eckpunkt C wird demnach durch g_3 und die um 60° gedrehte Gerade $g'2$ bestimmt. Den dritten Eckpunkt B finden wir als Schnittpunkt des Kreises mit Mittelpunkt A und

Radius AC mit der Geraden g_2.

Alternative Konstruktion:
Wir wählen einen beliebigen Punkt D auf einer der äußeren Geraden, etwa g_2, und tragen hieran die Winkel 60° und 120° ab. Die Schnittpunkte der freien Schenkel mit g_3 und g_1 seien C bzw. A. Der zweite Schnittpunkt des Umkreises k von $\triangle DCA$ mit g_2 sei B. Dann ist $\triangle ABC$ das gesuchte gleichseitige Dreieck.
Beweis:
Nach Konstruktion gilt $\angle BDC = \angle CDA = 60°$ im Sehnenviereck $BCAD$. Ferner ist aufgrund des Peripheriewinkelsatzes $\angle BDC = \angle BAC = 60°$ und $\angle CDA = \angle CBA = 60°$.
Das Dreieck ABC hat somit zwei Innenwinkel von 60°, also hat auch der dritte Innenwinkel diese Größe. Mithin ist das Dreieck gleichseitig.

Aufgabe 181223:
Gegeben seien zwei von einem Punkt S ausgehende Strahlen s, t, die einen Winkel einschließen, für dessen Größe α die Ungleichung $0° < \alpha < 180°$ gilt.
Gegeben sei ferner ein Punkt P im Innern dieses Winkels.
Ist g eine Gerade durch P, die s und t schneidet und nicht durch S geht, so bezeichne A bzw. B ihren Schnittpunkt mit s bzw. t. Man beweise, dass es unter allen diesen Geraden g genau eine gibt, für die das Dreieck SAB einen möglichst kleinen Flächeninhalt hat. Man beschreibe eine Konstruktion dieser Geraden.

Lösung von cyrix:



Damit das Dreieck SAB einen minimalen Flächeninhalt hat, ist die Gerade g so zu legen, dass der Punkt P den Mittelpunkt der Strecke AB darstellt.

Beweis:
In obiger Zeichnung liegen A und B so, dass P der Mittelpunkt der Strecke AB ist. A' und B' seien beliebige Punkte, wobei natürlich voraussetzungsgemäß P auch auf der Strecke $A'B'$ liegen muss.

Der Flächeninhalt des Dreiecks $SA'B'$ lässt sich aus dem Flächeninhalt des Dreiecks SAB berechnen, indem man den Flächeninhalt des Dreiecks APA' addiert und den von BPB' subtrahiert. Der Flächeninhalt von SAB ist dann minimal, wenn der Flächeninhalt von APA' größer ist als der von BPB'.

Das ist auch tatsächlich der Fall. Da $AP = PB = c$ ist, haben die beiden Dreiecke APA' und BPB' eine gleichlange Grundseite, aber es gilt $h_A > h_B$, wie man der Zeichnung leicht entnehmen kann.

Konstruktion der Geraden:

Man trage auf dem Strahl SP von S die Streckenlänge $2|SP|$ ab und erhalte den Verdopplungspunkt V von SP. Nun zeichne man die Parallelen zu s bzw. t durch V und erhalte die Schnittpunkte B bzw. A mit t bzw. s. Nach Konstruktion ist nun das Viereck $SAVB$ ein Parallelogramm, dessen Diagonalen SV und AB sich gegenseitig halbieren. Da der Mittelpunkt von SV nach Konstruktion P ist, ist P auch Mittelpunkt der so erhaltenen Strecke AB.

III Runde 3

Aufgabe 011135:
Gegeben sei eine Strecke $AB = a = 6$ cm. M sei der Mittelpunkt der Strecke.
Schlagen Sie mit AM um M den Halbkreis über AB! Halbieren Sie AM und MB und schlagen Sie über beiden Strecken mit $\frac{AM}{2}$ die beiden Halbkreise, die innerhalb des großen Halbkreises liegen!
Es ist der Mittelpunkt des Kreises zu konstruieren, der den großen Halbkreis von innen und die beiden kleinen Halbkreise von außen berührt!
Die Konstruktion ist zu begründen!

Lösung von Steffen Weber:
I. Analyse:
Der Berührungspunkt des Halbkreise über AM bzw. über MB mit dem zu konstruierenden Kreis k sei K bzw. L, der Berührungspunkt des Halbkreise über AB mit k sei N. Die Mittelpunkte von AM bzw. BM werden mit P bzw. Q bezeichnet.
Da die Tangenten von k und den Halbkreis über AM in K identisch sind und die Tangenten senkrecht auf den Radien stehen, geht die Strecke zwischen dem Mittelpunkt R vom Kreis k und P durch K.
Analog folgt, dass L auf RQ liegt. Da $RP = \frac{AM}{2} + RK = RQ$ gilt, ist $\angle PMR = 90°$ und es gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$\left(\frac{AM}{2}\right)^2 + (AM - RN)^2 = \left(\frac{AM}{2} + RK\right)^2$$

Aus $RN = RK$ folgt

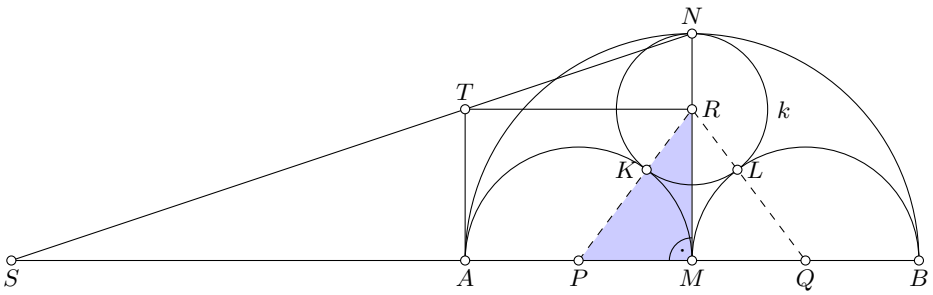
$$\frac{1}{4}AM^2 + AM^2 - 2AM \cdot RN + RN^2 = \frac{1}{4}AM^2 + AM \cdot RN + RN^2$$

Also ist $AM^2 = 3AM \cdot RN$, d. h.

$$RN = \frac{1}{3}AM = \frac{a}{6} = 1cm \qquad \text{und} \qquad MR = MT - RN = 2cm$$

II. Konstruktionsbeschreibung:
(1) Konstruiere die Mittelsenkrechte von AB und bezeichne den Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten und den Halbkreis über AB mit N.
(2) Nun konstruiere einen Punkt S auf der Verlängerung von AM über A hinaus mit $SM = 3AM$.
Konstruiere die Senkrechte zu SM in A, bezeichne den Schnittpunkt dieser Senkrechten und SN mit T.
Dann ist nach Strahlensatz $TN = \frac{1}{3}SN$.
(3) Konstruiere nun das Lot von T auf MN und bezeichne den Lotfußpunkt mit R, so ist nach Strahlensatz $NR = \frac{TN}{SN}MN = 1$ cm, d. h. R ist nach obiger Vorbetrachtung der Mittelpunkt des Kreises k, der die kleinen Halbkreise außen und den großen Halbkreis innen berührt.
(4) Schlage einen Kreis um R mit den Radius RN.

III. Konstruktion:



Aufgabe 011234:
Gegeben sei eine Strecke $AB = a = 6$ cm. M sei der Mittelpunkt der Strecke.
Schlagen Sie mit AM um M den Halbkreis über AB! Halbieren Sie AM und MB und schlagen Sie über beiden Strecken mit $\frac{AM}{2}$ die beiden Halbkreise, die innerhalb des großen Halbkreises liegen!
Es ist der Mittelpunkt des Kreises zu konstruieren, der den großen Halbkreis von innen und die beiden kleinen Halbkreise von außen berührt!
Die Konstruktion ist zu begründen!

Lösung von Steffen Weber:
I. Analyse:
Der Berührungspunkt des Halbkreise über AM bzw. über MB mit dem zu konstruierenden Kreis k sei K bzw. L, der Berührungspunkt des Halbkreise über AB mit k sei N. Die Mittelpunkte von AM bzw. BM werden mit P bzw. Q bezeichnet.
Da die Tangenten von k und den Halbkreis über AM in K identisch sind und die Tangenten senkrecht auf den Radien stehen, geht die Strecke zwischen dem Mittelpunkt R vom Kreis k und P durch K.
Analog folgt, dass L auf RQ liegt. Da $RP = \frac{AM}{2} + RK = RQ$ gilt, ist $\angle PMR = 90°$ und es gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$\left(\frac{AM}{2}\right)^2 + (AM - RN)^2 = \left(\frac{AM}{2} + RK\right)^2$$

Aus $RN = RK$ folgt

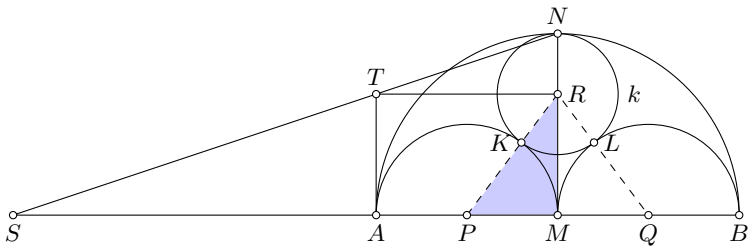
$$\frac{1}{4}AM^2 + AM^2 - 2AM \cdot RN + RN^2 = \frac{1}{4}AM^2 + AM \cdot RN + RN^2$$

Also ist $AM^2 = 3AM \cdot RN$, d. h.

$$RN = \frac{1}{3}AM = \frac{a}{6} = 1cm \qquad \text{und} \qquad MR = MT - RN = 2cm$$

II. Konstruktionsbeschreibung:
(1) Konstruiere die Mittelsenkrechte von AB und bezeichne den Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten und den Halbkreis über AB mit N.
(2) Nun konstruiere einen Punkt S auf der Verlängerung von AM über A hinaus mit $SM = 3AM$.
Konstruiere die Senkrechte zu SM in A, bezeichne den Schnittpunkt dieser Senkrechten und SN mit T.
Dann ist nach Strahlensatz $TN = \frac{1}{3}SN$.
(3) Konstruiere nun das Lot von T auf MN und bezeichne den Lotfußpunkt mit R, so ist nach Strahlensatz $NR = \frac{TN}{SN}MN = 1$ cm, d. h. R ist nach obiger Vorbetrachtung der Mittelpunkt des Kreises k, der die kleinen Halbkreise außen und den großen Halbkreis innen berührt.
(4) Schlage einen Kreis um R mit den Radius RN.

III. Konstruktion:

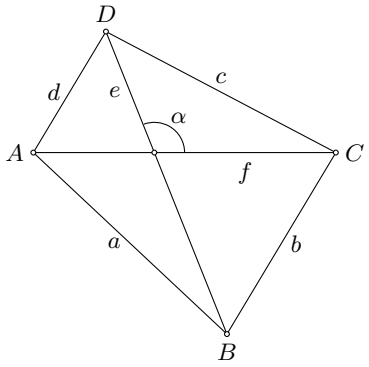


Aufgabe 021232:
Konstruieren Sie ein (konvexes) Viereck aus seinen Diagonalen, dem Winkel zwischen ihnen und zwei Seiten!
Begründen Sie die Konstruktion und diskutieren Sie die verschiedenen Möglichkeiten!

Lösung von Manuela Kugel:
Grundsätzlich sind hier die beiden Fälle zu unterscheiden:

I. Die beiden gegebenen Seiten des Vierecks grenzen aneinander.
II. Die beiden gegebenen Seiten liegen sich im Viereck gegenüber.

Alle weiteren Fälle lassen sich auf diese beiden zurückführen. Seien also a und b die gegebenen Seiten und e und f die gegebenen Diagonalen sowie α der gegebene Winkel zwischen den Diagonalen.
Wenn nun in der folgenden Beschreibung die Lage von α angegeben ist, so müssen die Konstruktionsbeschreibungen ebenfalls für den Gegenwinkel $\beta = 180° - \alpha$ gelten, da nicht angegeben ist, welcher Winkel der Schnittwinkel zwischen e und f sei.
Ebenso müssen e und f gedanklich austauschbar sein genau so wie a und b.



I. Die beiden gegebenen Seiten des Vierecks grenzen aneinander.
Die Konstruktion geschieht wie folgt:

a) Konstruktion des Dreiecks ABC aus a, b, f.
b) Konstruktion des Winkels α an f in einem beliebigen Punkt, es entsteht eine Gerade e^*.
c) Parallelverschiebung von e^* so, dass die Gerade durch B verläuft, es entsteht eine Gerade e^{**}.
d) Abtragen der Strecke e in B auf der Geraden e^{**} so, dass der entstehende Punkt D in der bzgl. AC anderen Halbebene als B liegt.
Das Viereck $ABCD$ ist das gesuchte Viereck. Wie bereits angemerkt, müssen alle Fälle, die durch Vertauschen von a und b sowie e und f sowie α und sein Nebenwinkel betrachtet werden.

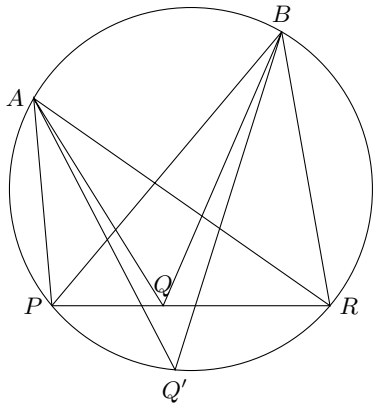
II. Die beiden gegebenen Seiten liegen sich im Viereck gegenüber.
Die Konstruktion geschieht wie folgt:
a) Konstruktion eines Dreiecks BED aus $BD = e$, $DE = f$ und dem Winkel α zwischen den beiden Seiten.

b) Konstruktion des Dreiecks BCE aus $BC = b, CE = a$ und der vorhin konstruierten Strecke BE.
c) Wie im 1. Fall wird nun auf e der Winkel α abgetragen und die entstehende Gerade so parallel verschoben, dass sie durch C geht. Auf der neu entstandenen Gerade wird f abgetragen, es entsteht A. Das Viereck $ABCD$ ist das gesuchte Viereck. Wie bereits angemerkt, müssen alle Fälle, die durch Vertauschen von a und b sowie e und f sowie α und sein Nebenwinkel betrachtet werden.

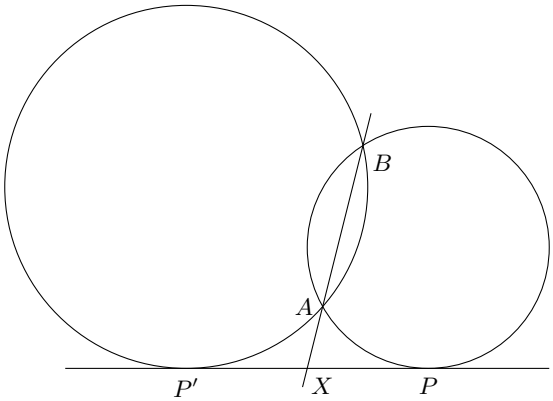
Aufgabe 041233:
Gegeben sind in der Ebene eine Gerade g und zwei Punkte A und B, die nicht auf g, jedoch in derselben durch g bestimmten Halbebene liegen.
Durch Konstruktion (mit Zirkel und Lineal) ist ein Punkt P auf g zu finden, von dem aus die Strecke AB unter einem möglichst großen Winkel erscheint, d. h. für den $\angle APB \geq \angle AQB$ für alle $Q \in g$ gilt.

Lösung von Rainer Müller:
Auch wenn es in der Aufgabenstellung nicht explizit gesagt wird, können wir annehmen, dass A und B verschieden sind, denn sonst ist $\angle APB = 0$ für alle $P \in g$ und die Aufgabe sinnlos.
Wenn P auf der Geraden AB liegt, dann ist $\angle APB = 0$, was nicht maximal ist. Also liegt der gesuchte Punkt nicht auf AB, so dass es einen eindeutigen Kreis k durch A, B und P gibt.

Angenommen, k schneidet g in einem weiteren Punkt R wie in der obigen Abbildung. Nach Peripheriewinkelsatz ist $\angle APB = \angle ARB = \angle AQ'B$, und wegen $\angle BAQ < \angle BAQ'$ und $\angle ABQ < \angle ABQ'$ ist $\angle AQB > \angle AQ'B = \angle APB$, also erfüllt P nicht die verlangte Bedingung.



Der gesuchte Punkt P ist demnach dadurch gekennzeichnet, dass der Kreis k durch A, B und P die Gerade g in P berührt. Dieser Sonderfall des Apollonischen Kreisproblems hat i.A. zwei Lösungen. Die folgende Abbildung zeigt ein Beispiel.



Speziell zu behandeln ist der Fall, dass AB parallel zu g ist.

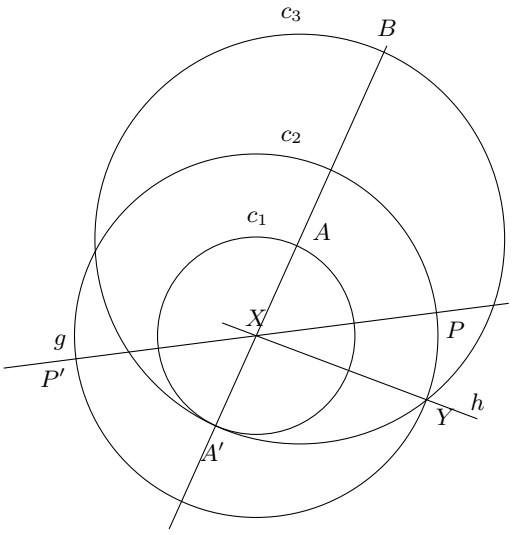
Dann kann nur ein A und B enthaltender Kreis g berühren, der Berührungspunkt P ist wegen der Symmetrie der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecke AB mit g.
Im folgenden betrachten wir den allgemeinen Fall, dass AB nicht parallel zu g ist, so dass ein eindeutiger Schnittpunkt X von AB und g existiert. Da A und B nach Voraussetzung auf der gleichen Seite von g liegen, liegt X außerhalb jedes A und B enthaltenden Kreises k (wie in obiger Abbildung).
Da g eine Tangente an k im gesuchten Punkt P sein soll und X enthält, muss $XA \cdot XB = XP^2$ gelten (allgemeiner Satz über Sehnen und Tangenten).
Der gesuchte Punkt P liegt demnach im berechenbaren Abstand $\sqrt{XA \cdot XB}$ von X auf g.

Es gibt zwei solche Punkte P und P', die lokale Maxima des Winkels sind, unter dem AB erscheint. Das globale Maximum liegt in dem Punkt P, für den der Kreis k kleiner ist, also so, dass $\angle PXA < \angle P'XA$.
Im symmetrischen Sonderfall, dass AB senkrecht zu g ist, ist der Winkel in beiden Punkten gleich groß, d. h. es gibt zwei verschiedene Lösungen.
Da wir nun wissen, wie der Punkt P berechnet wird, können wir ihn auch wie folgt konstruieren. Die Abbildung zeigt die wesentlichen Konstruktionsschritte, ein paar Hilfskonstruktionen wurden zur Übersichtlichkeit weggelassen.

1. Schneide die Gerade AB mit g, der Schnittpunkt sei X (der Fall, dass AB parallel zu g ist, wurde oben behandelt und hier ausgeschlossen). In der Abbildung liegt A zwischen X und B, was o. B. d. A. angenommen werden kann, aber auch keinen Unterschied macht.

2. Schlage um X einen Kreis c_1 durch A, der von A verschiedene Schnittpunkt mit AB sei A'.

3. Konstruiere den Thaleskreis c_2 durch A' und B. Dazu lege man einen Kreis um A' durch B und einen Kreis um B durch A' und verbinde die beiden Schnittpunkte dieser Kreise. Der Schnitt der Verbindungsgeraden mit $A'B$ ist der Kreismittelpunkt (diese beiden Hilfskreise und die Verbindungsgerade sind in der Abbildung nicht gezeichnet).

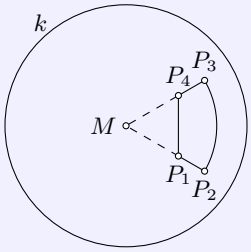


4. Konstruiere die Gerade h, die X enthält und senkrecht zu AB ist. Da $XA = XA'$, ist h die Mittelsenkrechte von A und A', also gehe man vor wie bei der Konstruktion von c_2 (die beiden Hilfskreise sind wieder in der Abbildung weggelassen).

5. Y sei ein Schnittpunkt von h und c_2 (es ist egal, welchen von beiden man verwendet). Da Y auf dem Thaleskreis von A' und B liegt, hat das Dreieck $A'BY$ in Y einen rechten Winkel. Ferner ist h die Höhe des Dreiecks durch Y und X der Fußpunkt dieser Höhe. Nach dem Höhensatz von Euklid gilt
$$XY^2 = XA' \cdot XB = XA \cdot XB \qquad \text{wegen} \quad XA = XA'$$

6. Schlage um X einen Kreis c_3 durch Y. Die Schnittpunkte des Kreises mit g sind die Punkte P und P', denn $XP = XP' = XY = \sqrt{XA \cdot XB}$.

Aufgabe 101232:
In einer Ebene ε liegt ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Als Spiegelung am Kreis k sei diejenige Vorschrift bezeichnet, durch die jedem Punkt $P \neq M$ in ε der folgendermaßen definierte Punkt P' in ε zugeordnet wird:
(1) P' liegt auf dem von M ausgehenden und durch P verlaufenden Strahl.
(2) $MP \cdot MP' = r^2$.
Gegeben sei ferner ein im Innern von k gelegener Kurvenzug $P_1P_2P_3P_4P_1$ der folgenden Gestalt:



P_1, P_2 seien auf einem und demselben Strahl gelegen; P_3, P_4 auf einem und demselben anderen von M ausgehenden Strahl. Es gelte $MP_1 = MP_4 < MP_2 = MP_3$. Der Winkel $\angle P_2MP_3$ sei kleiner als $180°$.
Der Kurvenzug bestehe aus den Strecken P_1P_2, P_3P_4 und P_4P_1 sowie aus dem im Innern des Winkels $\angle P_2MP_3$ gelegenen Bogen $\overset{\frown}{P_2P_3}$ des Kreises um M durch P_2.
Spiegeln Sie diesen Kurvenzug $P_1P_2P_3P_4P_1$ an k (Beschreibung und Begründung einer Konstruktion unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal.)

Lösung von cyrix:
Den Bildpunkt P' eines beliebigen von M verschiedenen Punktes P im Inneren von k erhält man konstruktiv wie folgt:

(a) Zeichne den von M ausgehenden Strahl s durch P.
(b) Errichte in P die Orthogonale auf s und erhalte als einen der beiden Schnittpunkte von dieser mit k den Punkt C, sodass $\angle CPM = 90°$ und $|CM| = r$ gilt.
(c) Man errichte auf der Geraden MC in C die Orthogonale und schneide diese mit s. Der Schnittpunkt heiße P'.

Begründung: Es liegt P' auch auf s und nach dem Kathetensatz im rechtwinkligen Dreieck $\triangle MP'C$ mit Fußpunkt P der Höhe von C auf die Hypotenuse MP' ist $|MP| \cdot |MP'| = |MC|^2 = r^2$.

Da P_1 bis P_4 alle im Innern des Kreises k liegen, kann man mit der vorgenannten Konstruktion ihre Spiegelpunkte P_1' bis P_4' erhalten. Da alle Punkte P auf dem von M ausgehenden Strahl, die zwischen P_1 und P_2 liegen, auch auf solche P' abgebildet werden, die zwischen P_2' und P_1' auf dem gleichen Strahl liegen, wird die Strecke P_1P_2 auf die Strecke $P_1'P_2'$ abgebildet. Analoges gilt für die Strecke P_3P_4, die auf $P3'P_4'$ abgebildet wird.

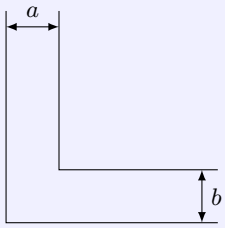
Für alle Punkte P auf dem Kreis um M durch P_2 gilt, dass die Bildpunkte auf einem Kreis um M mit Radius $\frac{r^2}{|MP_2|}$ liegen. Damit geht der Bogen $\overset{\frown}{P_2P_3}$ in den Bogen $\overset{\frown}{P_2'P_3'}$ im gleichen Winkel über.
Schließlich wird die Gerade durch P_4 und P_1 auf einen Kreis durch P_4', P_1' und M abgebildet; die Strecke P_4P_1 also auf den Bogen $\overset{\frown}{P_4P_1}$ dieses Kreises, der M nicht enthält.

VII.VI Weitere Aufgaben

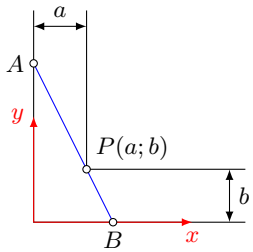
I Runde 1

Aufgabe V01109:

Um die Ecke eines gemauerten Ganges (vgl. Abbildung), soll eine Stange waagerecht getragen werden.
Welche größte Länge kann sie haben? (Die Dicke der Stange soll unberücksichtigt bleiben.)



Lösung von Steffen Polster:



Wir führen ein Koordinatensystem derart ein, dass die äußere Ecke im Ursprung liegt und die x- und y-Achse längs der Gänge ausgerichtet sind. (siehe Abbildung)
Durch den Punkt $P(a;b)$ legen wir dann eine lineare Funktion so, dass diese sowohl die positive x-Achse in B, also auch die positive y-Achse in A schneidet. Die minimale Strecke AB ist dann die gesuchte größte Länge der Stange.

Für die Funktion durch A und B ergibt sich (mit $m > 0$)

$$y = -m(x-a) + b$$

Die Punkte haben damit die Koordinaten $A(0; am+b)$ und $B\left(\frac{b}{m} + a\right)$. Die Länge der Stange von A nach B ist dann

$$d = \sqrt{\left(\frac{b}{m} + a\right)^2 + (am+b)^2} \tag{1}$$

Diese Länge wird minimal, wenn der Radikand minimal wird. Die 1.Ableitung des Radikanden ist

$$d'(m) = \frac{2}{m^2}(am+b)(am^3 - b)$$

Diese Ableitung hat eine Nullstelle für $m = -\frac{b}{a}$, die entfällt da dann A und B zusammenfallen. Die zweite Nullstelle für

$$m = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}} \tag{2}$$

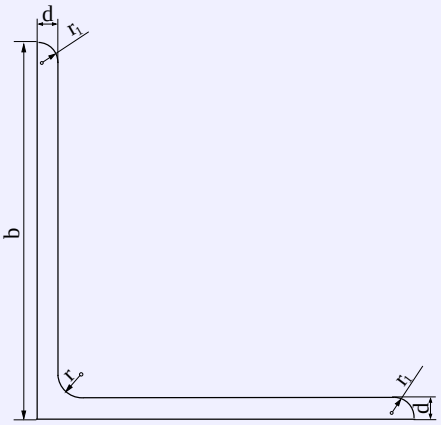
ergibt das gesuchte Minimum, wie die Kontrolle über die 2.Ableitung zeigt. Für die größtmögliche Länge der Stange ergibt sich durch Einsetzen von (2) in (1)

$$d = \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3}$$

Aufgabe 051211:
Ein Winkelstahl (gleichschenkliger L-Stahl) hat den in der Abbildung angegebenen Querschnitt. Dabei ist $b = 50$ mm , $d = 5$ mm, $r = 2r_1 = 7$ mm.

a) Wie groß ist seine Masse bei einer Länge von 5 m? (Dichte des Stahls $\rho = 7{,}85\frac{g}{cm^3}$)?

b) Wie groß ist der prozentuale Fehler, wenn man zur Vereinfachung der Rechnung die Rundungen vernachlässigt und annimmt, dass die Querschnittsfläche aus zwei rechteckigen Flächen besteht?



c) Wie groß ist der maximale prozentuale Fehler, der bei der zu b) durchgeführten Näherungsrechnung entsteht, wenn $b = 50$ mm und $r = 7$ mm konstant sind und d zwischen 5 mm und 9 mm liegt?

Lösung von Felix Kaschura:

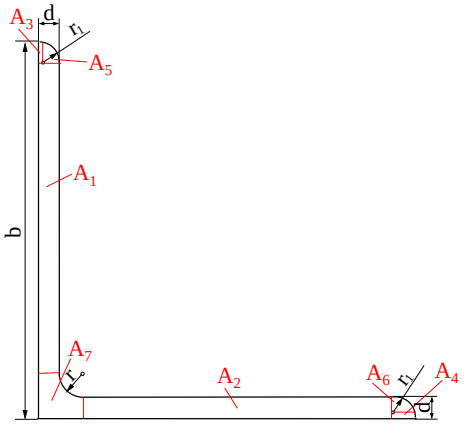
a) Für die Masse des Körpers benötigt man zuerst das Volumen und dafür den Flächeninhalt vom Querschnitt (da die Länge 5 m bekannt ist). Die Querschnittsfläche setzt sich wie in der Zeichnung ersichtlich aus den Flächeninhalten A_1 bis A_7 zusammen, wobei $A_1 = A_2$, $A_3 = A_4$ und $A_5 = A_6$ gilt. Die Teilflächen ergeben sich wie folgt:

$$A_1 = d \cdot (b - r - r_1 - d) = d \cdot (b - 3r_1 - d) = bd - 3r_1 d - d^2$$

$$A_2 = (d - r_1) \cdot r_1 = r_1 d - r_1^2$$

$$A_3 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r_1^2$$

$$A_7 = (d + r)^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2 = d^2 + 4r_1^2 + 4r_1 d - \pi r_1^2$$



$$A = 2 \cdot (bd - 3r_1 d - d^2) + 2 \cdot (r_1 d - r_1^2) + 2 \cdot (\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r_1^2) + d^2 + 4r_1^2 + 4r_1 d - \pi r_1^2$$

$$= 2bd - d^2 + 2r_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2 = 480{,}258\text{mm}^2 = 4{,}80258\text{cm}^2$$

$$\Rightarrow m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot l = 7{,}85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 4{,}80258\text{cm}^2 \cdot 500\text{cm} = 18850\text{g} = 18{,}85\text{kg}$$

b) Den prozentualen Fehler erhält man, indem man den vereinfachten Wert durch den genauen Wert dividiert, 100% multipliziert und die Differenz zu 100% bildet.

Da Länge und Dichte gleich sind und die sich kürzen würden, reicht es aus, mit den Flächeninhalten zu rechnen:

Der vereinfachte Flächeninhalt ergibt sich als $A^* = bd+(b-d)d = 2bd-d^2$. Daraus folgt der Fehler:

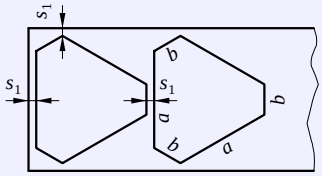
$$\Delta = (1 - \frac{2bd - d^2}{2bd - d^2 + 2r_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2}) \cdot 100\% = (\frac{2r_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2}{2bd - d^2 + 2r_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r_1^2}) \cdot 100\% = 1{,}09\%$$

c) In der unter b) gefundenen Formel bleibt der Zähler unabhängig von d. Es muss also lediglich der Nenner untersucht werden. Da b viel größer als d ist, wird der Term $2bd - d^2$ mit größer werdendem d auch größer. Damit wird der Nenner größer und bei konstantem Zähler wird der Bruch kleiner.

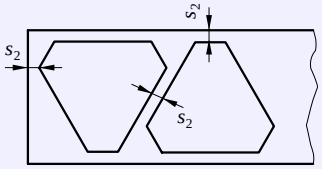
Der prozentuale Fehler wird also ebenfalls kleiner. Für Werte von d aus dem Bereich 5 bis 9 mm ist der prozentuale Fehler also bei d= 5 mm am größten mit einem Wert von 1,09%.

II Runde 3

Aufgabe 011232:
Aus Aluminiumblech von 2 mm Stärke sollen 10000 Werkstücke nach der beigefügten Zeichnung 1 gestanzt werden. (Sämtliche Innenwinkel sind gleich groß, $a = 34$ mm, $b = 8$ mm.)



Zeichnung 1



Zeichnung 2

a) Wie lang und wie breit muss der Blechstreifen sein, aus dem gestanzt wird? Dabei ist zu beachten, dass die Stegbreite (Abstand der Teile voneinander bzw. vom Rand) $s_1 = 2$ mm betragen muss. Wieviel Quadratmeter Blech werden verbraucht? Wieviel Quadratmeter beträgt der Abfall?
b) Es wird der Verbesserungsvorschlag gemacht, nach Zeichnung 2 zu stanzen, um Material zu sparen. Wie lang und wie breit muss nunmehr der Blechstreifen genommen werden? Wieviel Quadratmeter Blech wird verbraucht? Wieviel Quadratmeter beträgt der Abfall?
Wieviel Prozent beträgt die Materialersparnis gegenüber dem unter a) angegebenen Verfahren? (Stegbreite hier $s_2 = 3$ mm.)

Lösung von Eckard Specht:
Da das Werkstück ein Sechseck mit gleich großen Innenwinkeln ist, beträgt jeder Innenwinkel $\frac{1}{6}(6-2) \cdot 180° = 120°$.
Wir berechnen nachfolgend die Länge (in Längsrichtung des Blechstreifens) und Breite (in Querrichtung) eines Werkstücks und daraus die erforderlichen Abmessungen. a) (Bild a) Die Länge beträgt

$$b \cdot \cos(30°) + a \cdot \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b) = 36{,}373mm$$

für 10000 Werkstücke also 363,730 m zuzüglich 20,002 m für 10001 Abstände s_1. Der Blechstreifen muss somit insgesamt 383,732 m lang sein. Die Breite des Werkstücks ist

$$a + 2b\sin(30°) = a + b = 42mm$$

zusammen mit zwei Abständen s_1 muss der Blechstreifen 46 mm breit sein. Seine Fläche beträgt $383{,}732m \cdot 0{,}046m = 17{,}652m^2$.
Die Fläche eines Werkstücks ist gleich der Fläche eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge $a + 2b$ abzüglich der Fläche dreier gleichseitiger Dreiecke der Seitenlänge b, also

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(a+2b)^2 - 3\frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = 999{,}4mm^2$$

Die 10000 Werkstücke beanspruchen somit eine Fläche von 9,994 m^2, woraus sich der Abfall zu 7,658 m^2 berechnet.

b) (Bild b) Da die Werkstücke jetzt um 90° gedreht werden, ist die Breite gleich der Länge aus a), zusammen mit der doppelten Stegbreite s_2 ergibt sich eine Breite des Blechstreifens von 42,4 mm.

Zur Berechnung der Länge wird zunächst $s_2 = 0$ angenommen. Die Schwerpunkte zweier Werkstücke sind dann

$$\frac{b}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{1}{2}(a + 3b) = 29{,}0mm$$

entfernt. Die gesamte Länge des Blechstreifens ist hier

$$9999 \cdot (29{,}0mm + s_2 \cos(30°)) + 2 \cdot 21{,}0mm + 2s_2 = 315{,}997m$$

der Verbrauch 13,398 m^2 sowie der Abfall 3,404 m^2. Die Materialersparnis beträgt gegenüber a) 24,1 %.

III Runde 4

Aufgabe 131243:
Es seien n_1 und n_2 zwei positive ganze Zahlen; in einer Ebene seien eine Menge M_1 aus $2n_1$ voneinander verschiedenen Punkten sowie eine Menge M_2 aus $2n_2$ voneinander und von jedem der Punkte aus M_1 verschiedenen Punkten so gelegen, dass es keine Gerade gibt, die durch drei dieser $2n_1 + 2n_2$ Punkte geht.
Man beweise, dass dann eine Gerade g mit folgender Eigenschaft existiert:
Zerlegt g die Ebene in die Halbebenen H und K (wobei g selbst weder zu H noch zu K gerechnet werde), so liegen sowohl in H als auch in K jeweils genau die Hälfte aller Punkte aus M_1 und genau die Hälfte aller Punkte aus M_2.

Lösung von Kornkreis:
Zunächst wählen wir eine Gerade, die zu keiner der Verbindungsstrecken zweier Punkte aus M_1 parallel ist und die alle Punkte von M_1 auf der rechten Seite hat. Hierbei sind 'linke Seite' und 'rechte Seite' vereinfachte Bezeichnungen für die beiden Halbebenen, in welche die Gerade die Ebene teilt, und für stetige Bewegungen der Gerade (wie stetige Verschiebungen und Rotationen) soll sich diese Einteilung stetig ändern, d. h. wir springen in unserer Bezeichnung nicht zwischen links und rechts.

Wenn diese Gerade nun nach rechts verschoben wird, so kann die Anzahl der Punkte aus M_1, die sich auf der rechten Seite befinden, nur in diskreten Einerschritten abnehmen (nach Voraussetzung der Aufgabenstellung und Konstruktion der Gerade). Zudem ist, wenn man die Gerade hinreichend weit nach rechts verschoben hat, jeder Punkt von M_1 auf der linken Seite der verschobenen Gerade (so eine Verschiebung existiert aufgrund der Endlichkeit von M_1).

Da M_1 eine gerade Anzahl von Punkten hat, gibt es somit eine Verschiebung der Gerade, für die M_1 halbiert wird, d. h. auf beiden Seiten der Gerade sind jeweils n_1 Punkte aus M_1. Bezeichne diese verschobene Gerade mit g.

Betrachte nun die Verbindungsstrecke eines Punktes P_l der linken und eines Punktes P_r der rechten Seite von g ($P_l, P_r \in M_1$), die mit g von allen derartigen Verbindungsstrecken den kleinsten Winkel α einschließt, wobei der eingeschlossene Winkel als orientierter Winkel zu verstehen ist, der auf der linken Seite von g betrachtet und entgegen dem Uhrzeigersinn als positiv definiert wird. Drehe g nun entgegen dem Uhrzeigersinn um den Schnittpunkt von P_lP_r mit g.

Wegen der Minimalität von α wird bei dieser Drehung kein weiterer Punkt von M_1 überstrichen, bis schließlich erstmalig die Punkte P_l und P_r auf der gedrehten Gerade g' liegen; nach Voraussetzung der

Aufgabenstellung liegt dann auch kein weiterer Punkt auf g'. Wird g' (um beliebige hinreichend kleine Winkel größer 0) weiter gedreht zu g'', so liegt P_l auf der rechten und P_r auf der linken Seite von g'' (und kein weiterer Punkt von M_1 wird dabei überstrichen), sodass g'' weiterhin M_1 halbiert.

Mit dem oben beschriebenen Rotationsschema lassen sich also Geraden konstruieren, die M_1 halbieren und eine beliebige Orientierung haben, aber nicht parallel zu den (endlich vielen) Verbindungsstrecken zweier Punkte aus M_1 sind. Insbesondere kann man eine Gerade g''' konstruieren, die M_1 halbiert, zu g parallel ist und alle Punkte aus M_1, die auf der linken Seite von g waren, auf der rechten Seite hat. (g''' entsteht also gewissermaßen aus einer Rotation von g um insgesamt 180°, allerdings um im Allgemeinen wechselnde Drehpunkte)

O. B. d. A. seien nun weniger als n_2 Punkte von M_2 auf der linken Seite von g (falls es genau n_2 Punkte wären, wären wir fertig). Damit sind also mehr als n_2 Punkte von M_2 auf der linken Seite von g'''. Bei dem Rotationsvorgang von g nach g''' nach obigem Schema kann sich die Anzahl der Punkte von M_2, die auf der linken Seite der rotierenden Gerade liegen, nur in diskreten Schritten um 0 oder ± 1 oder ± 2 ändern (betragsmäßig mehr als zwei geht nach Voraussetzung der Aufgabenstellung nicht).

Die Änderung um ± 1 oder ± 2 geschieht nur dann, wenn gerade kein Punkt von M_1 überstrichen wird (da bei der Rotation immer entweder keiner oder genau zwei Punkte von M_1 überstrichen werden, und nach Voraussetzung der Aufgabenstellung keine drei Punkte aus $M_1 \cup M_2$ auf einer Geraden liegen).

Weil auf der linken Seite von g und g''' weniger bzw. mehr als n_2 Punkte von M_2 liegen, wird also irgendwann während des Rotationsvorganges die Anzahl der Punkte aus M_2 auf der linken Seite der rotierenden Gerade von $n_2 - 1$ auf n_2 oder von $n_2 - 2$ auf n_2 wachsen (dann wären wir fertig) oder von $n_2 - 1$ auf $n_2 + 1$ wachsen, indem zwei Punkte P_1, P_2 von M_2 überstrichen werden, die auf der rechten Seite der Geraden liegen.

Betrachte also den letzteren Fall, wenn P_1 und P_2 auf der rotierenden Gerade liegen. Drehe die Gerade nun entgegen dem Uhrzeigersinn um den Mittelpunkt zwischen P_1 und P_2 um einen hinreichend kleinen Winkel größer 0, sodass die Gerade h entsteht. Da der Drehwinkel hinreichend klein ist, wird kein Punkt aus M_1 überstrichen, sodass h immer noch M_1 halbiert.

Weiterhin halbiert h die Menge M_2, da einer der Punkte P_1, P_2 rechts von h und der andere links von h liegt, und kein weiterer Punkt aus M_2 überstrichen wurde.
h ist also so eine gesuchte Gerade, die M_1 und M_2 halbiert.