WURZEL

1
68

schülerzeitung für mathematik

WURZEL - Schülerzeitung für Mathematik

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Die Zeitung erscheint monatlich zum Preis von 0,20 MDN. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Eike Hertel, Günter Horn
Mitarbeiter: K. Fischer, H. Meißner, N. Kuse, H. Peuker, H. Schirrmeister, L. Staiger, W. Ulbrich, R. Wackernagel

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

V-14-6 8 1842 M 175

Ein Jahr Schülerzeitung WURZEL

Mit dem vorliegenden Heft erscheint unsere Schülerzeitung bereits im 2. Jahrgang. Wir nehmen dieses "Jubiläum" zum Anlaß für einen kurzen Rück- und Ausblick. Über das Ziel, welches sich das FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik der F.-Schiller-Universität Jena mit der Herausgabe der "Wurzel" gestellt hat, ist bereits mehrmals geschrieben worden (s. Heft 1/67 oder 5/67). Das Programm der fachlichen Artikel des 1. Jahrganges war umfangreich und abwechslungsreich. Wir brachten Artikel über die verschiedensten Gebiete der Mathematik und eine Fülle von Aufgaben. Auch das Programm für den 2. Jahrgang soll allen Ansprüchen in dieser Richtung genügen.

Wie die steigenden Abonnentenzahlen beweisen, können wir unser Anliegen im wesentlichen als erreicht ansehen. Trotzdem muß auf einen Mangel hingewiesen werden. Unser Ruf nach intensiver Mitarbeit a l l e r Leser ist fast ungehört verhallt, wenn man von den Einsendungen der Aufgabenlösungen absieht. Aus diesem Grunde wiederholen wir unsere diesbezügliche Bitte hier nochmals: Wir sind für jede Kritik, für jeden Vorschlag zur inhaltlichen Gestaltung unserer Zeitschrift, für Einsendung von interessanten Aufgaben (zur evtl. Veröffentlichung) und natürlich für eingesandte Lösungen zu unseren Aufgaben sehr dankbar. Wir hoffen, daß es in diesem Jahr zu einer breiteren Leserdiskussion kommt.

Die Redaktion

Der klassische zweiwertige Aussagenkalkül

Im Heft 12 der "Wurzel" hatten wir erläutert, daß es bei Beschränkung auf einen Teil unserer natürlichen Sprache -die Aussagesätze- möglich ist, das Schließen von Wahrheitswerten gewisser Aussagen auf Wahrheitswerte anderer Aussagen "in Formeln" zu erfassen.
Will man einen derartigen Übergang zu einer formalen Beschreibung gewisser Gesetzmäßigkeiten vollziehen, so ist es nötig, zunächst einen gewissen Apparat von Regeln usw. (Kalkül genannt) zu schaffen. Dieser Kalkül muß, soll er das Gewünschte leisten, bei jeder konkreten Deutung (Interpretation) mit den inhaltlichen Vorstellungen über den zu formalisierenden Bereich übereinstimmen.
Wir wollen nun in diesem Heft zeigen, wie man für den Bereich der Aussagen eine geeignete formale ("logische") Zeichensprache konstruiert und wie man ihre Interpretation vornimmt.
In das Alphabet $\mathfrak{A}$ unseres Kalküls nehmen wir folgende Zeichen auf: $\mathfrak{A} =_{Df} \{p, \sim, \wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow, (,)\}$,
wobei das Zeichen p eventuell mit Unterscheidungsindex verwendet werden darf.
Aus der Menge $W_{\mathfrak{A}}$ aller endlichen Folgen von Zeichen aus $\mathfrak{A}$ (z. B. ist $p_1 \sim \wedge \vee p_2 \rightarrow$ eine Folge aus $W_{\mathfrak{A}}$) wählen wir nun diejenigen Zeichenreihen aus, die "sinnvolle Gebilde" -wir sagen "Ausdrücke"- unserer Sprache sein sollen. (Dabei haben wir im Auge, daß die p_i später als Aussagenvariablen, die Zeichen $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ als "nicht", "und", "oder", "wenn - so", "genau dann, wenn" gedeutet werden sollen.)
Dazu geben wir für die Menge aller Ausdrücke folgende Erzeugungsregel (induktive Definition) an:

D

<u>Anfangsschritt</u>: Jedes Zeichen p_i ist Ausdruck.
<u>Induktionsschritt</u>: Sind die Zeichenreihen H_1 und H_2 Ausdrücke, so sind es auch die folgenden Zeichenreihen: $\sim H_1$, $(H_1 \wedge H_2)$, $(H_1 \vee H_2)$, $(H_1 \rightarrow H_2)$, $(H_1 \leftrightarrow H_2)$.
<u>Abschluß</u>: Außer den aufgeführten gibt es keine weiteren Zeichenreihen, die Ausdruck sind.

Wir betrachten ein <u>Beispiel</u>:
Die Zeichenreihe $\sim((p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3)$ ist ein Ausdruck.

Begründung: p_1, p_2 sind Ausdrücke, also auch $(p_1 \wedge p_2)$. p_3 ist Ausdruck, also auch $((p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3)$. Schließlich folgt:

$\sim((p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3)$ ist Ausdruck.

<u>Übungsbeispiele</u>: Prüfen Sie nach, ob die folgenden Zeichenreihen Ausdrücke sind: $p_1 \wedge \sim \vee p_2 \rightarrow$, $((p_1 \wedge p_2) \vee (\sim p_3))$

Betrachtet man die hier gegebene Definition des Ausdrucks genauer, so stellt man fest, daß sie nach dem Vorbild unserer Sprache aufgestellt wurde: Sie widerspiegelt, wie man aus Aussagen mit Hilfe von "nicht", "und", "oder" usw. neue Aussagen bilden kann.

Formal gesehen sind unsere Ausdrücke jedoch noch bedeutungslose Zeichenreihen, die erst einer Interpretation bedürfen. Das Ziel der zu wählenden Interpretation soll es nun sein, jedem Ausdruck eindeutig einen Wahrheitswert 0 oder 1 zuzuordnen.

Dazu führen wir den Begriff der Belegung f der Variablen p_i ein.

D e f i n i t i o n:

D f heißt Belegung der $p_i =_{Df}$ f ist eine eindeutige Abbildung der Menge aller p_i in $\{0,1\}$.

$f(p_i)$ ist also ein eindeutig bestimmter Wahrheitswert aus $\{0,1\}$.

Man könnte an dieser Stelle fragen, weshalb p_i nicht mit einer Aussage belegt wird. Hierauf geben uns die Überlegungen von Heft 12 Auskunft: Da der Wert zusammengesetzter Aussagen zufolge der vorausgesetzten Extensionalität nur von den Wahrheitswerten der Einzelaussagen abhängt, ist es sicher sinnvoll, p_i mit einem Wahrheitswert zu belegen.

Wir bezeichnen nun den Wahrheitswert, den ein Ausdruck H bei vorgegebener Belegung f annimmt, mit Wert(H,f) und definieren ihn induktiv wie folgt:

D

<u>Anfangsschritt:</u> Besteht H nur aus dem Zeichen p_i, so ist Wert(H,f) $=_{Df}$ $f(p_i)$.

<u>Induktionsschritt:</u>

Ist H eine Zeichenreihe der Form	so ist Wert(H,f)
$\sim H_1$	$=_{Df}$ non(Wert(H_1,f))
$(H_1 \wedge H_2)$	$=_{Df}$ et(Wert(H_1,f),Wert(H_2,f))
$(H_1 \vee H_2)$	$=_{Df}$ vel(Wert(H_1,f),Wert(H_2,f))
$(H_1 \rightarrow H_2)$	$=_{Df}$ seq(Wert(H_1,f),Wert(H_2,f))
$(H_1 \leftrightarrow H_2)$,	$=_{Df}$ äq (Wert(H_1,f),Wert(H_2,f)).

(Dabei sind "non", "et" usw. die in Heft 12 definierten Booleschen Funktionen.)

Betrachten wir ein Beispiel:

Es sei die Belegung f mit $f(p_1) = 0$, $f(p_2) = 1$ und f(p) beliebig sonst gegeben. Wir bestimmen Wert(H,f) für den folgenden Ausdruck H: $((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (\sim p_1 \vee p_2))$

Nach Definition ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Wert}((p_1 \rightarrow p_2),f) &= \mathrm{seq}(\mathrm{Wert}(p_1,f),\mathrm{Wert}(p_2,f)) \\ &= \mathrm{seq}(f(p_1),f(p_2)) \\ &= \mathrm{seq}(0,1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ferner hat man:

$$\begin{aligned} \mathrm{Wert}(\sim p_1,f) &= \mathrm{non}(\mathrm{Wert}(p_1,f)) \\ &= \mathrm{non}(f(p_1)) \\ &= \mathrm{non}(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Wert}((\sim p_1 \vee p_2),f) &= \mathrm{vel}(\mathrm{Wert}(\sim p_1,f),\mathrm{Wert}(p_2,f)) \\ &= \mathrm{vel}(1,f(p_2)) \\ &= \mathrm{vel}(1,1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Wert}(H,f) &= \mathrm{seq}(\mathrm{Wert}((p_1 \rightarrow p_2),f),\mathrm{Wert}((\sim p_1 \vee p_2),f)) \\ &= \mathrm{seq}(1,1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Übungsbeispiele:

1. Man bestimme Wert(H,f), wenn H der Ausdruck
   $((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3))$ ist und
   $f(p_1) = f(p_2) = f(p_3) = 0$
2. Man suche eine Belegung f, so daß Wert(H,f) = 0, wenn der Ausdruck $H = ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1))$ ist.

Den wie oben aufgebauten Kalkül (bestehend aus formalen Ausdrücken und ihrer zweiwertigen Interpretation) nennt man klassischen zweiwertigen Aussagenkalkül.[1]

Rolf Lindner
wiss. Aspirant
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Univers.
Jena

AUFGABEN (Serie 1/68)

9. Klasse:

(9.23) Gegeben seien zwei verschiedene Parallelen und zwei Punkte A und B auf der einen Parallelen. Man halbiere nur mit Hilfe des Lineals die Strecke $\overline{AB}$.

(9.24) Drei Freunde trafen sich im Café: der Bildhauer Weiss, der Geiger Schwartz und der Maler Rot. "Es ist doch komisch, daß einer von uns weiße Haare, der andere schwarze und der dritte rote Haare hat, daß aber keiner von uns die Haarfarbe hat, auf die sein Name hinweist", bemerkte der Schwarzhaarige. "Ja, du hast recht", sagte Weiss. Welche Haarfarbe hat der Maler?

10. Klasse:

(10.23) Man löse die Ungleichungen:

a) $x^5 + x^4 + x + 1 > 0$

b) $|\tan x| + |\cot x| < 2$

(10.24) Kann man einen Würfel so schneiden, daß als Schnittfläche ein regelmäßiges Sechseck entsteht?

11/12. Klasse:

(11/12.23) Ist es möglich, aus den Zahlen

$$1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

eine unendliche geometrische Reihe so auszuwählen, daß ihre Summe $\frac{1}{7}$ ergibt?

(11/12.24) Es ist zu zeigen, daß $4^n + 15n - 1$ für alle natürlichen n durch 9 teilbar ist.

PREISAUFGABE (P. 13)

Man stelle die quadratische Gleichung auf, deren Wurzeln x_1 und x_2 folgenden Gleichungen genügen:

$$x_1x_2 + x_1 + x_2 - m = 0$$

$$x_1x_2 - m(x_1 + x_2) + 1 = 0, \text{ wobei } m \neq -1.$$

Unter welcher Bedingung sind diese Wurzeln reell? Wann existiert genau eine reelle Lösung der Gleichung?

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" bis zum 30. des jeweiligen Erscheinungsmonats (Datum des Poststempels) an unsere Adresse einzuschicken.

ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACH

Bei der Kontrolle der eingesandten Lösungen haben wir bemerkt, daß ein Einsender die Angaben über Name, Klasse und Schule auf seiner Einsendung vergessen hatte.
Wir bitten daher, daß sich derjenige Einsender bei uns meldet, der die Aufgaben (P.7), (P.8) und (10.13) auf <u>einem</u> Blatt bei uns eingesandt hatte.
Wir machen gleichzeitig darauf aufmerksam, daß in Zukunft nur solche Einsendungen bewertet werden können, bei denen Name des Einsenders, Klassenstufe und die von ihm besuchte Schule angegeben sind.

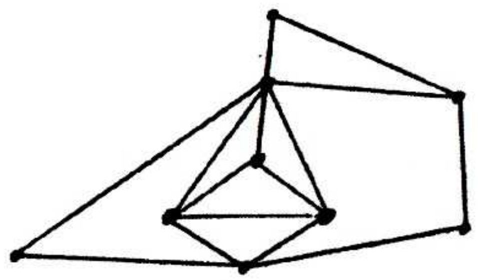
<u>Aufgaben zur Graphentheorie</u>
(siehe auch Heft 7/8/67 "Elementare Einführung in die Graphentheorie"I)

1. Zwei Mopedfahrern ist der Treibstoff ausgegangen. Sie stehen mit einem leeren 2l-Behälter und einem leeren 5l-Behälter an der Landstraße. Ein vorbeikommender Motorradfahrer ist bereit, jedem Mopedfahrer einen Liter Treibstoff abzugeben. Er führt einen gefüllten 7l-Behälter Treibstoff mit sich. Wieviel Umschüttungen sind mindestens erforderlich, um jedem Mopedfahrer genau einen Liter Treibstoff abzumessen? Die Umschüttungen sollen so vorgenommen werden, daß bei jeder Umfüllung ein Behälter gänzlich gefüllt oder ein Behälter gänzlich geleert wird. Wie groß ist die minimale Anzahl der Umschüttungen, wenn sich am Ende je ein Liter Treibstoff im 2l-Behälter und im 5l-Behälter befinden sollen?

Anleitung: Man löse das Problem mit graphentheoretischen Mitteln. Die Füllzustände der drei Behälter deute man als Knoten eines Graphen. Füllzustände, die durch erlaubte Umschüttungen auseinander hervorgehen, verbinde man durch gerichtete Bögen.

2. Das Straßenbahnnetz einer Stadt werde durch folgenden ungerichteten Graphen dargestellt.

Knoten: Haltestellen
Bögen: Teilstrecken



a) Existiert eine solche Fahrtroute, die jede Teilstrecke genau einmal enthält? (Wieviele solcher Fahrtrouten mit der geforderten Eigenschaft?)

b) Existiert eine geschlossene Fahrtroute? (Startpunkt = Zielpunkt)

c) Wann existiert eine geschlossene Fahrtroute im Straßenbahnnetz?

Anleitung: Die Ordnung der Kreuzungspunkte muß in die Überlegungen einbezogen werden!

Für vollständige Lösungen dieser Aufgaben über Graphentheorie werden Wertpunkte vergeben.

---

[1]) (Fußnote von Seite 5) In einer letzten Fortsetzung wollen wir an einigen Beispielen zeigen, wie man mit den Ausdrücken dieses Kalküls „rechnen" kann.

Die Spiegelung am Kreis - eine geometrische Abbildung mit interessanten Anwendungen !

Üblicherweise wird bei der Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben vorausgesetzt, daß als Konstruktionshilfsmittel Zirkel und Lineal dienen. Es gibt auch eine Reihe von Aufgaben, die man mit dem Zirkel allein lösen kann (siehe Aufgabe (9.23)), mit Zirkel und Lineal jedoch kann man mehr Aufgaben lösen. Welche Konstruktionsaufgaben kann man aber mit dem Zirkel allein lösen? Diese Frage wurde im 17. und 18. Jahrhundert von den Geometern MOHR und MASCHERONI beantwortet. Sie fanden den überraschenden

S a t z: Jede Aufgabe, die mit Zirkel und Lineal gelöst werden kann, läßt sich schon mit dem Zirkel allein lösen.

Dabei muß man voraussetzen, daß eine Gerade dann als gegeben anzusehen ist, wenn zwei ihrer Punkte bekannt sind, denn mit dem Zirkel allein kann man keine Gerade ziehen (aber man kann auf Grund des angegebenen Satzes z.B. beliebig viele Punkte einer durch zwei gegebene Punkte festgelegten Geraden einzeln konstruieren).

Im Rahmen dieser Artikelserie wird u.a. der Satz von MOHR und MASCHERONI bewiesen werden. Dabei werden wir nicht den von den Entdeckern des Satzes angegebenen Konstruktionen folgen, sondern wir werden mit der "Spiegelung am Kreis", einer geometrischen Abbildung arbeiten.

Allgemein spricht man in der Geometrie von einer Abbildung, wenn jedem Punkt P (der Ebene oder auch des Raumes) eindeutig ein Bildpunkt P' zugeordnet ist. Man nennt P den Originalpunkt zu P'. Für die Spiegelung am Kreis gibt es folgende

D e f i n i t i o n:

Gegeben ist ein Kreis - Spiegelkreis genannt - mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Das Bild eines Punktes P ($\neq$ M) ist derjenige Punkt P' auf dem Strahl MP, für den $\overline{MP'} \cdot \overline{MP} = r^2$ gilt.

Es bedeutet allgemein $\overline{AB}$ die Länge der durch die Punkte A und B festgelegten Strecke.

Aus der Definition folgen unmittelbar die nachstehenden Eigenschaften der Abbildung:

1) Ist P ein Punkt auf der Peripherie des Spiegelkreises, so stimmt sein Bild mit P überein:
es ist ja dann $\overline{MP} = r$, aus der Definitionsgleichung $\overline{MP'} \cdot \overline{MP} = r^2$ wird $\overline{MP'} \cdot r = r^2$, hieraus folgt $\overline{MP'} = 1$.

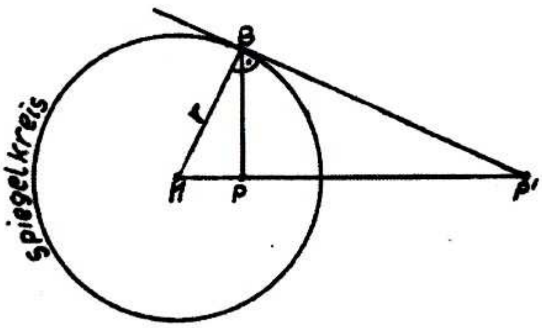
2) Ist P ein Punkt außerhalb des Spiegelkreises, so liegt sein Bild P' im Inneren des Spiegelkreises, denn es ist

$$\overline{MP} > r, \text{ folglich } \frac{r}{\overline{MP}} < 1,$$

und demzufolge $\overline{MP'} = \frac{r^2}{\overline{MP}} = r \cdot \frac{r}{\overline{MP}} < r$.

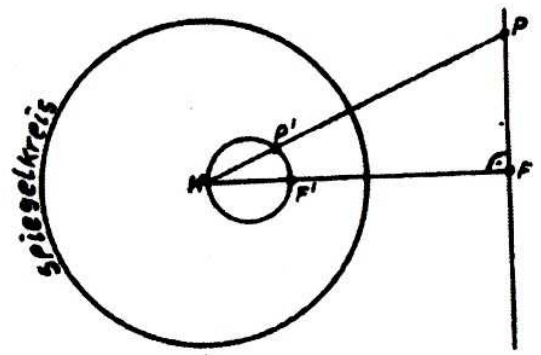
3) Ist das Bild von P der Punkt P', so ist das Bild von P' der Punkt P, denn es ist die Definitionsgleichung $\overline{MP'} \cdot \overline{MP} = r^2$ gleichbedeutend mit $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = r^2$. Bei der Spiegelung am Kreis werden Original- und Bildpunkt einfach vertauscht.

Diese drei Eigenschaften rechtfertigen überdies den Namen "Spiegelung" am Kreis.
Auf Grund der Definition kann dem Mittelpunkt M des Spiegelkreises kein Bild zugeordnet werden. Damit auch M ein Bild bekommt, fügt man künstlich zur Ebene noch einen "unendlich fernen Punkt" hinzu und setzt fest, daß er das Bild von M ist.
Der Kathetensatz für rechtwinklige Dreiecke gibt eine Möglichkeit, bei gegebenem Spiegelkreis zu einem gegebenen Punkt P dessen Bild P' zu konstruieren.



Faßt man nämlich $\overline{MP}$ und $\overline{MP'}$ als Hypotenusenabschnitte eines rechtwinkligen Dreiecks auf, so hat wegen $\overline{MP'} \cdot \overline{MP} = r^2$ die an $\overline{MP}$ anliegende Kathete die Länge r. Es folgt als Konstruktionsvorschrift:
Liegt P innerhalb des Spiegelkreises, so errichte man auf $\overline{MP}$ in P die Senkrechte, zeichne im Schnittpunkt B dieser Senkrechten mit dem Kreis die Tangente, diese schneidet den Strahl MP in P'. Liegt P außerhalb des Spiegelkreises, so zeichnet man durch P eine Tangente an den Spiegelkreis, vom Berührungspunkt B fällt man das Lot auf den

Strahl MP und bekommt als Lotfußpunkt den Punkt P'. Es sollen jetzt die Bilder von Geraden und Kreisen untersucht werden.
Man sieht sofort: das Bild einer Geraden durch M ist diese Gerade selbst, denn liegt ein Punkt P auf einer solchen Geraden, so liegt P' nach Definition auf dem Strahl MP, also auch auf dieser Geraden. Das Bild eines Kreises mit M (dem Mittelpunkt des Spiegelkreises) als Mittelpunkt und dem Radius a ist ein Kreis mit demselben Mittelpunkt und dem Radius $r^2 \cdot \frac{1}{a}$.
Es sei nun g eine Gerade die nicht durch M geht. F sei der Fußpunkt des Lotes von M auf g und F' dessen Bild. Ist P ein beliebiger Punkt von g, P' sein Bild, so gilt



$$\overline{MP'} \cdot \overline{MP} = \overline{MF'} \cdot \overline{MF},$$ hieraus folgt: $$\frac{\overline{MP'}}{\overline{MF'}} = \frac{\overline{MF}}{\overline{MP}}.$$

Auf Grund dieser Seitenverhältnisgleichheit sind die Dreiecke MFP und MP'F' ähnlich, weil sie ja auch noch den Winkel bei M gemeinsam haben. Da das Dreieck MFP bei F stets einen rechten Winkel hat, hat das Dreieck MP'F' bei P' stets einen rechten Winkel. Nach dem Satz des Thales folgt nun:
wandert P auf der Geraden g, so wandert P' auf einem Kreis mit dem Durchmesser MF'. So ergibt sich der

S a t z: Das Bild einer nicht durch M verlaufenden Geraden ist ein Kreis durch M, der in M eine zu g parallele Tangente hat. Das Bild eines durch M verlaufenden Kreises ist eine Gerade parallel zur Tangente des Kreises in M.

Diese Eigenschaft, nämlich daß bei Spiegelung am Kreis Geraden auf Kreise abgebildet werden, wird sich beim Beweis des Satzes von MOHR und MASCHERONI als sehr nützlich erweisen.
Als nächstes ist zu untersuchen, welche geometrischen Figuren sich als Bilder beliebiger Kreise ergeben.

Börner
wiss. Mitarbeiter
an der Sektion Mathematik
der Friedrich-Schiller-
Universität Jena

(P.11):(eingesandt von Siegfried Brandt aus Wurzbach)

$$N = \frac{X}{XY + X + 1} + \frac{YX}{YX + X + 1} + \frac{1}{X + 1 + XY}$$

$$= \frac{XY + X + 1}{XY + X + 1} = 1, \text{ da}$$

$$\frac{Y}{YZ + Y + 1} = \frac{YX}{YZX + YX + X} = \frac{YX}{YX + X + 1} \quad \text{und}$$

$$\frac{Z}{ZX + Z + 1} = \frac{ZXY}{XZXY + ZXY + XY} = \frac{1}{X + 1 + XY}$$

(9.19):(eingesandt von Michael Schulze aus Karl-Marx-Stadt)

Es gilt sicher $(a - b)^2 \geq 0$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Da $ab > 0$ ist, kann ich durch ab dividieren, ohne daß die Relation geändert wird, und erhalte:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

(9.20):(ebenfalls von Michael Schulze)

Wenn man ein Blatt Papier in 5 Teile zerreißt, so kommen 4 neue Blätter hinzu. Daraus folgt, daß bei Division der Anzahl der ursprünglich vorhandenen Blätter durch 4 der gleiche Rest entsteht wie bei Division der Anzahl der später vorhandenen Blätter durch 4.

Auf die Aufgabe angewandt, bedeutet das, daß

$$1967 = 4 \cdot k + 5 \quad (k \text{ ganz})$$

sein muß. Dies ist nicht der Fall, so daß man auf diese Weise nie 1967 Teile Papier erhalten kann.

(11/12.19): Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.

Die Behauptung gilt für $n = 1$:

$$2! - 1 = 2 - 1 = 1 = 1 \cdot 1!$$

Wir nehmen an, die Behauptung gelte für n und zeigen, daß sie dann auch für $n + 1$ gilt. Es ist:

$$\begin{aligned} &1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! + (n + 1)(n + 1)! \\ &= (n + 1)! - 1 + (n + 1)(n + 1)! \\ &= (n + 2)(n + 1)! - 1 \\ &= (n + 2)! - 1 \end{aligned}$$

2/68

WURZEL

schülerzeitung für mathematik

WURZEL - mathematische Schülerzeitschrift V-14-6 7, M 175

Herausgegeben vom FDJ -Aktiv der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Dr. Eike Hertel, Wolfgang Ulbrich
Mitarbeiter: W. Kiefer, N. Kuse, R. Lorenz, L. Staiger, E. Taubald, R. Wackernagel

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
DDR 69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

Der klassische zweiwertige Aussagenkalkül II

Wir betrachten das Übungsbeispiel 2 aus Teil I unserer Ausführungen in der "Wurzel", Heft 1/68.
Wenn Wert$(((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1)),f) = 0$ sein soll, so muß (siehe Definition von seq) Wert$((p_1 \rightarrow p_2),f) = 1$ und Wert$((p_2 \rightarrow p_1),f) = 0$ gelten. Letzteres ist aber der Fall, wenn $f(p_1) = 0$ und $f(p_2) = 1$ ist.
Neben diesem Ausdruck, dessen Wert bei geeigneten Belegungen gleich 0 oder 1 sein kann, gibt es - das überlegt man sich sehr leicht - auch Ausdrücke, deren Wert bei jeder Belegung gleich 0 bzw. gleich 1 ist. Wir werden uns im weiteren besonders für solche Ausdrücke interessieren, die "richtige logische Schlüsse" beschreiben, und sagen:

D e f i n i t i o n:

Ein Ausdruck H heißt allgemeingültig $=_{Df}$
Für jede Belegung f ist Wert$(H,f) = 1$.

Der oben betrachtete Ausdruck ist nach dieser Definition sicher nicht allgemeingültig, dagegen sind die Ausdrücke

(1) $(\sim(p_1 \wedge p_2) \leftrightarrow (\sim p_1 \vee \sim p_2))$ und

(2) $(\sim(p_1 \vee p_2) \leftrightarrow (\sim p_1 \wedge \sim p_2))$ - de Morgansche

Regeln genannt - allgemeingültig, wie man leicht durch Belegungen prüft. Der Ausdruck

(3) $(p \vee \sim p)$ ist ebenfalls allgemeingültig.

<u>Begrüngung:</u> Es ist Wert$((p \vee \sim p),f) =$ vel$(f(p)$, non $f(p)) = 1$,

da stets $f(p) \neq$ non $f(p)$ gilt.

Nimmt man sich nun das Rechnen in der Arithmetik zum Vorbild für das "Rechnen" in unserem Kalkül, so stellt man fest, daß noch eine wichtige Frage zu beantworten ist: "Wann sind zwei Ausdrükke gleichwertig?"

Vom Standpunkt unserer Vorüberlegungen betrachtet, heißt das aber: Ausdrücke sind (inhaltlich) gleichwertig, wenn ihre Wahrheitswerte bei jeder Belegung übereinstimmen. Hieraus folgt die D e f i n i t i o n:

Ausdrücke H_1 und H_2 heißen semantisch äquivalent (kurz H_1 äqsem H_2) $=_{Df}$ Für jede Belegung f ist Wert (H_1, f) = Wert (H_2, f).

Beispiele:

1) Es ist $((\sim p_1 \vee p_1) \vee p_2)$ äqsem $(\sim p_1 \vee p_1)$ (4)
2) Es ist $(p_1 \rightarrow p_2)$ äqsem $(\sim p_1 \vee p_2)$ (5)
3) Es ist $((p_1 \vee p_2) \wedge p_3)$ äqsem $((p_1 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge p_3))$ (6)
4) Es ist $((\sim p_1 \wedge p_1) \vee p_2)$ äqsem p_2 (7)

(Prüfen Sie das nach!)

Man zeigt nun leicht den folgenden

S a t z: H_1 äqsem H_2 genau dann, wenn $(H_1 \leftrightarrow H_2)$ allgemeingültig.

Beweis: Wenn H_1 äqsem H_2, so gilt für jedes f Wert(H_1, f) = Wert(H_2, f), woraus nach Definition von äq folgt: Wert$((H_1 \leftrightarrow H_2), f)$ = äq(Wert(H_1, f), Wert(H_2, f)) = 1, d.h. $(H_1 \leftrightarrow H_2)$ ist allgemeingültig. Analog schließt man in umgekehrter Richtung.

Mit diesen wenigen Hilfsmitteln können wir nun bereits an die logische Analyse einer elementarmathematischen Aussage gehen, so daß die Vorteile unserer Formalisierung in etwa deutlich werden. Wir analysieren den Satz:

"Sind die Zahlen a und b gleich, so sind auch ihre Quadrate gleich".

Hierzu führen wir folgende Abkürzungen für die konkreten Aussagen ein:

A_1: $a = b$

A_2: $a^2 = b^2$

Unser Satz läßt sich dann wie folgt aufschreiben:

Voraussetzungen: 1) Wenn A_1, so A_2 und 2) A_1

Behauptung: A_2

Für den Beweis der "Richtigkeit" dieses Schlusses genügt es aber zu zeigen, daß der Ausdruck H: $(((p_1 \to p_2) \wedge p_1) \to p_2)$ in den Aussagenvariablen p_1 und p_2 allgemeingültig ist. Dies können wir in der Tat:

Mit (5) gilt H äqsem $(((\sim p_1 \vee p_2) \wedge p_1) \to p_2)$,
weiter mit (6) H äqsem $(((\sim p_1 \wedge p_1) \vee (p_2 \wedge p_1)) \to p_2)$, also mit (7) H äqsem $((p_2 \wedge p_1) \to p_2)$, d.h. wegen (5)
H äqsem $(\sim (p_2 \wedge p_1) \vee p_2)$, woraus mit (1) folgt
H äqsem $((\sim p_2 \vee \sim p_1) \vee p_2)$, d.h. H äqsem $((\sim p_2 \vee p_2) \vee \sim p_1)$.
Wegen (4) und (3) folgt damit $((\sim p_2 \vee p_2) \vee \sim p_1)$ ist allgemeingültig, d.h. H ist allgemeingültig, was zu zeigen war.

Rolf Lindner

wiss. Aspirant
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Univers.

Achtung Knobelfreunde!

Die folgende Aufgabe ist als Anwendung der Planungsmethode PERT (siehe "Wurzel" Nr.10/67 und 11/67) gedacht. Für vollständige Lösungen dieser Aufgabe werden gemäß den Bestimmungen für die Preisaufgaben Wertpunkte vergeben.

Ein Sportwettkampf soll organisiert werden (das Beispiel ist etwas idealisiert bezüglich der Beteiligung). Folgende Disziplinen kommen zur Austragung:

1. 100m-Lauf
2. 200m-Lauf
3. 1500m-Lauf
4. Weitsprung
5. Hochsprung
6. Kugelstoßen
7. Speerwerfen
8. Hammerwerfen
9. Diskuswerfen
10. Stabhochsprung

An den einzelnen Disziplinen beteiligen sich 5 Sportler nach folgender Tabelle:

Tabelle I

	Disziplinen									
Teilnehmer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x		x		x		x		x	
2	x	x				x	x			x
3		x			x			x	x	x
4		x		x	x		x	x		
5			x	x		x	x		x	

Für die Einzelwettbewerbe liegen folgende Dispositionen für die Zeitdauer vor:

Tabelle II

Disziplin	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zeit	15'	30'	30'	60'	60'	45'	90'	30'	90'	30'

Der Wettkampf soll unter Berücksichtigung weiterer Bedingungen geplant werden:

1. Jedem Teilnehmer ist die Beteiligung gemäß Tabelle I zu garantieren (d.h. startet ein Teilnehmer in mehreren Disziplinen, so müssen diese zeitlich nacheinander abgewickelt werden).
2. Für die Laufdisziplinen steht nur eine Anlage zur Verfügung, d.h. sie müssen zeitlich nacheinander ablaufen.
3. Die Gesamtdauer für den Sportwettkampf soll möglichst kurz sein.

Aufgabe: Man plane den Sportwettkampf mit Hilfe der Planungsmethode PERT.

Anwendung der Spiegelung am Kreis

Aufgabe: Gegeben sei ein Kreis $\mathfrak{K}_1$ und zwei Punkte P_1 und P_2. Es ist ein Kreis zu konstruieren, der durch die gegebenen Punkte geht und $\mathfrak{K}_1$ senkrecht schneidet (Orthogonalkreis)

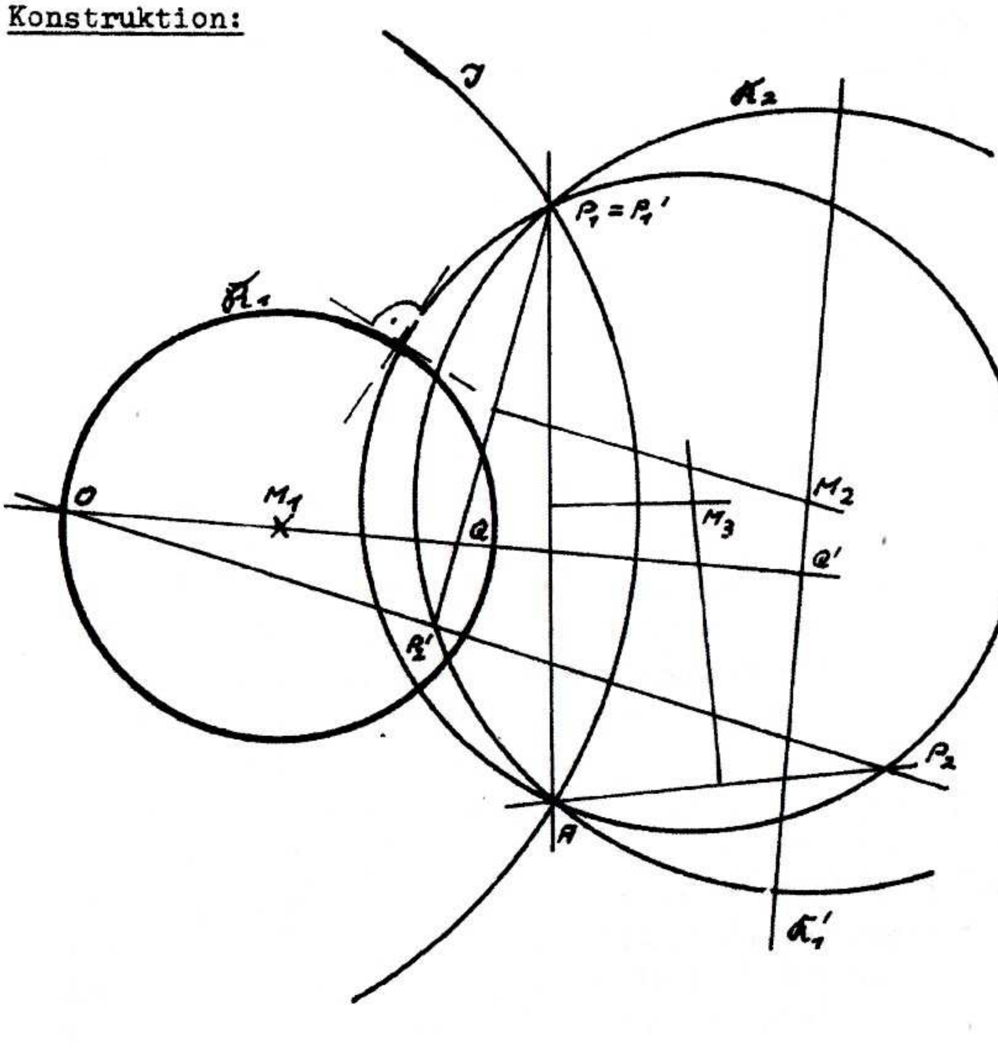
Konstruktionsbeschreibung:

M_1 sei der Mittelpunkt des gegebenen Kreises. Wir wählen das Zentrum O des Spiegelkreises $\mathfrak{J}$ so, daß es auf $\mathfrak{K}_1$ liegt. Der Radius von $\mathfrak{J}$ sei $r = \overline{OP_1}$ (möglich, da beliebig wählbar). P_1 bleibt dadurch bei der Spiegelung erhalten (geht in sich über). Die Spiegelung von P_2 an $\mathfrak{J}$ ergibt P_2' (in der Konstruktionszeichnung wurden die Konstruktionshilfslinien für die Spiegelung von P_2, Q und $\mathfrak{K}_1$ weggelassen, die Konstruktionsanleitung dazu wurde im I. Teil der Artikelserie "Spiegelung am Kreis - eine geometrische Abbildung . . .", Heft 1/68 gegeben).
Die Spiegelung von $\mathfrak{K}_1$ ergibt $\mathfrak{K}_1'$. $\mathfrak{K}_1$ geht durch das Zentrum des Spiegelkreises, also ist $\mathfrak{K}_1'$ eine Gerade, die die Gerade OM_1 in Q' senkrecht schneidet.
Laut Aufgabenstellung ist jetzt ein Kreis zu konstruieren, der

durch P_1' und P_2' geht und $\mathfrak{K}_1'$ senkrecht schneidet:
Man errichte in $\frac{1}{2} \cdot \overline{P_1'P_2'}$ die Senkrechte (Mittelsenkrechte), ihr Schnittpunkt mit $\mathfrak{K}_1'$ ergibt M_2. Der Kreis um M_2 mit dem Radius $r_2 = \overline{M_2P_1'} = \overline{M_2P_2'}$ schneidet $\mathfrak{J}$ in A. Der Kreis durch A, P_1, P_2 ist der gesuchte Orthogonalkreis. Sein Mittelpunkt ist M_3.

Bemerkung: In der Konstruktionsbeschreibung wurden elementare Konstruktionen, wie die Konstruktion der Tangente von einem gegebenen Punkt an einen gegebenen Kreis, die Konstruktion der Mittelsenkrechten und die Konstruktion eines Kreises durch drei gegebene Punkte weggelassen.

Konstruktion:



Der Leser überprüfe die Richtigkeit der Konstruktion.

Aufgaben (Serie 2/68)

9.Klasse: (9.25) Folgendes Gleichungssystem ist zu lösen:

$$x^2 + y^2 = 68 \quad (1)$$
$$x \cdot y = 16 \quad (2)$$

(9.26) Es ist zu zeigen, daß $11^{10} - 1$ durch 100 teilbar ist.

10.Klasse: (10.25) Man beweise, daß

$$\cos(\frac{\pi}{6} + \alpha) = \cos(\frac{\pi}{6} - \alpha) - \sin\alpha \quad \text{ist.}$$

(10.26) Man beweise folgende Aussage:
Wenn die Winkelhalbierende eines Dreiecks gleichzeitig Mittelsenkrechte ist, so ist das Dreieck gleichschenklig.

11/12.Klasse:

(11/12.25) Man beweise, daß für alle natürlichen n ($n > 1$) gilt:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} > \frac{n}{2}$$

(11/12.26) Es sei $(x - 1)(x - 2)\ldots(x - 100) =$

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{100}x^{100} .$$

Man bestimme die Koeffizienten a_{99} und a_{100} .

Preisaufgabe (P. 14)

Neben der Preisaufgabe (P.14) werden als Ferienpreisaufgaben für Leser aller Klassenstufen noch die Aufgaben (10.19) und (10.20) ausgeschrieben.

(P.14) Im Dreieck ΔABC sei der Winkel α doppelt so groß wie der Winkel β.
Weiterhin gilt: $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$.
Zu bestimmen ist die Länge der Seite $\overline{BC}$.

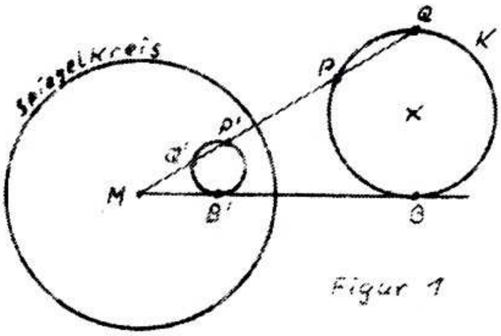
Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf

Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" bis zum 30. des jeweiligen Erscheinungsmonats (Datum des Poststempels) an unsere Adresse einzuschicken.

Die Spiegelung am Kreis - eine geometrische Abbildung mit interessanten Anwendungen II

Im Teil I wurde die geometrische Abbildung "Spiegelung am Kreis" definiert, und es wurden einige Eigenschaften hergeleitet. Insbesondere wurde gezeigt, daß die Bilder von Geraden gewisse Kreise sind und daß Kreise durch den Mittelpunkt M des Spiegelkreises auf Geraden abgebildet werden. Nun wird das Bild eines nicht durch M verlaufenden Kreises gesucht. Es sei K ein solcher Kreis und es möge M außerhalb von K liegen. Von M aus wird eine Tangente an K gelegt (Berührungspunkt B), eine beliebige Sekante durch M schneide K in P und Q. Dann gilt auf Grund des Sekantensatzes:

$$(\overline{MB})^2 = \overline{MP}\cdot\overline{MQ}\,.$$



Figur 1

Für die Bildpunkte P', Q', B' folgt aus der Definition der Abbildung:

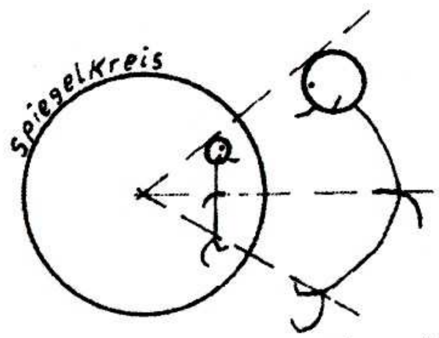
$$\overline{MP'}\cdot\overline{MQ'} = \frac{r^2}{\overline{MP}}\cdot\frac{r^2}{\overline{MQ}} = \frac{r^4}{(\overline{MB})^2} = \left(\frac{r^2}{\overline{MB}}\right)^2 = (\overline{MB'})^2.$$

Hieraus erkennt man (Umkehr. des Sekantensatzes!): durchläuft P den Kreis K, so durchlaufen die Bildpunkte P' ebenfalls einen Kreis. Ist nun K ein Kreis, in dessen Innerem der Punkt M liegt, so gelangt man zu analogen Ergebnissen auf Grund des Sehnensatzes. Man bekommt nämlich genau dieselben Gleichungen wie oben, wenn man in diesem Falle durch M die kürzeste Sehne legt und einen Endpunkt mit B bezeichnet (der Leser führe diese Schlüsse im einzelnen durch!). Insgesamt ergibt sich der

S a t z: Das Bild eines beliebigen nicht durch M gehenden Kreises ist ein Kreis.

Nun können wir zu allen Figuren, die nur aus Geradenstücken und

Kreisbögen bestehen, die Bilder konstruieren (siehe Figur 2).

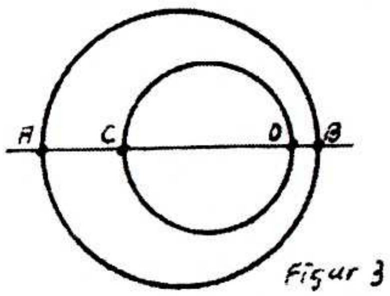


Figur 2

Übrigens kann man aus den bis jetzt hergeleiteten Sätzen ohne große Mühe die Schlußfolgerung ziehen, daß bei Spiegelung am Kreis die Winkel ihre Größe nicht verändern. Dabei muß man unter dem Schnittwinkel zweier sich in zwei Punkten schneidenden Kreise den Schnittwinkel ihrer Tangenten in den Schnittpunkten verstehen und berücksichtigen, daß die in den beiden Schnittpunkten entstehenden Winkel wegen der Symmetrie der beiden Kreise (Symmetrieachse ist die Verbindungsgerade der Mittelpunkte) gleich sind. Wird nun ein Winkel von den sich im Scheitel S schneidenden Geraden a und b gebildet, so sind die Bilder dieser Geraden Kreise, die sich im Mittelpunkt M des Spiegelkreises und S', dem Bild von S schneiden. Die Tangenten in M sind parallel zu a und b, also ist der Originalschnittwinkel gleich dem Schnittwinkel in M und dieser gleich dem Schnittwinkel in S'.

Trotz dieser "Winkeltreue" findet bei der Spiegelung am Kreis eine erhebliche Verzerrung der Figuren statt und manche geometrischen Eigenschaften der Originalfiguren sind im Bild nicht mehr anzutreffen. So sind z.B. die Bilder zweier Kreise mit gemeinsamen Mittelpunkt (sog. konzentrische Kreise) im allgemeinen nicht wieder konzentrisch.

Wir wollen nun zeigen, daß man zwei nicht konzentrische Kreise



Figur 3

durch Spiegelung an einem geeignet gewählten dritten Kreis in zwei konzentrische Kreise überführen kann. Die gegebenen Kreise mögen wie in Figur 3 ineinanderliegen, die Gerade ACDB sei Verbindungsgerade der Mittelpunkte. Der gesuchte Spiegelkreis soll den Mittelpunkt X haben, der aus Symmetriegründen auf der Geraden ACDB liegen wird, und der Radius sei r. Wir bezeichnen jetzt mit PQ die Länge einer Strecke mit den Endpunkten P und Q auf der Geraden ACDB und vereinbaren, daß PQ positiv ist, wenn P links von

Q liegt, andernfalls ist es negativ zu nehmen. Bei dieser Festsetzung gilt nämlich für jeden Punkt R die Regel $PQ = PR + RQ$, und es ist immer $RP = -PR$. Die Bildkreise liegen genau dann konzentrisch, wenn $A'C' = D'B'$ gilt. Um hieraus X zu bestimmen, schreiben wir diese Gleichung auf Grund der eben genannten Regel in der Form

$$A'X + XC' = D'X + XB',$$

aus der Definition der Abbildung folgt hieraus

$$\frac{r^2}{AX} + \frac{r^2}{XC} = \frac{r^2}{DX} + \frac{r^2}{XB}.$$

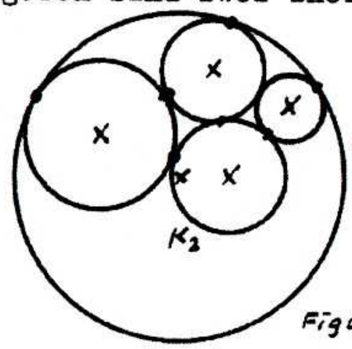
Betrachtet man AX als Unbekannte x und drückt die anderen X enthaltenden Größen durch AX aus (z.B. $DX = DA + AX$), so bekommt man die quadratische Gleichung

$$x^2(DB - AC) + 2AC \cdot AD \cdot x - AB \cdot AC \cdot AD = 0.$$

Ihre Diskriminante ist $AC^2AD^2 + (DB - AC) \cdot AB \cdot AC \cdot AD$, unter Benutzung der obigen Regel rechnet man aus, daß sich hierfür die stets positive Größe $AC \cdot AD \cdot BD \cdot BC$ ergibt, d.h. die quadratische Gleichung hat zwei Lösungen. Es gibt also zwei Punkte, die man als Mittelpunkte von Spiegelkreisen nehmen kann (der Radius ist beliebig), so daß die Bilder der gegebenen Kreise konzentrische Kreise werden. Man kann zeigen, daß einer dieser Mittelpunkte im Inneren des kleineren, der andere im Äußeren des größeren Kreises liegt.

Als Anwendung behandeln wir folgende Aufgabe:

Gegeben sind zwei ineinanderliegende, nicht konzentrische Kreise K_1 und K_2. Zwischen beide Kreise werden weitere, K_1 von innen, K_2 von außen berührende Kreise einbeschrieben (Figur 4).



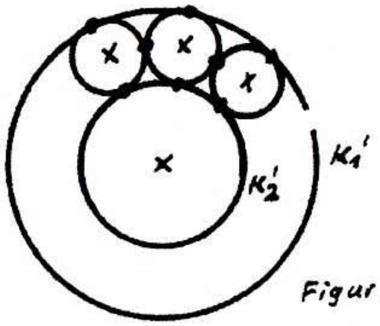
Figur 4

a) Auf welcher Linie liegen die Mittelpunkte dieser Kreise?

b) Auf welcher Linie liegen die Berührungspunkte?

c) K_1 und K_2 mögen so beschaffen sein, daß sich die Kette der einbeschriebenen Kreise schließt. Unter dieser Voraussetzung soll gezeigt werden: zeichnet man eine andere solche Kette, so schließt sich diese ebenfalls.

Die Aufgabe ist leicht zu lösen, wenn man durch Spiegelung an einem geeigneten Kreis K_1 und K_2 in konzentrische Kreise über-führt. Bei der Spiegelung am Kreis werden ja aus sich berührenden Kreisen wiederum sich berührende Kreise, so daß man nun die in Figur 5 vorliegende Situation zu betrachten hat. In dieser Figur erkennt man sofort, daß sowohl die Mittelpunkte der berührenden Kreise als auch die Berührungspunkte auf je einem Kreise liegen. Ferner ist zu sehen, daß es gleichgültig ist, an welcher Stelle man mit einer Kette einbeschriebener Kreise beginnt, wenn sich eine solche Kette schließt, so schließen sich alle (sie gehen ja durch Drehung um den Mittelpunkt der konzentrischen Kreise auseinander hervor). Dieser Sachverhalt gilt dann auch für die Figur 4, wenn man die Spiegelung am Kreis wieder rückwärts ausführt.



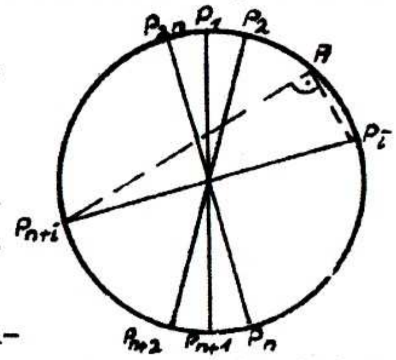
Figur 5

Im nächsten Heft wird in einer letzten Fortsetzung der in Teil I angekündigte Satz über die Konstruktion mit dem Zirkel allein bewiesen werden.

Börner
wiss. Assistent
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Lösungen

(11/12.20): Wir führen die Lösung für Vielecke mit geradzahligen Seitenzahlen durch.



Zu jeder Ecke P_i des Vielecks gibt es eine, die ihr diametral gegenüberliegt (P_{n+i}), da das Vieleck regelmäßig und die Anzahl der Eckpunkte geradzahlig ist. Für die Quadrate der Abstände zu einem beliebigen Punkt A der Peripherie gilt:

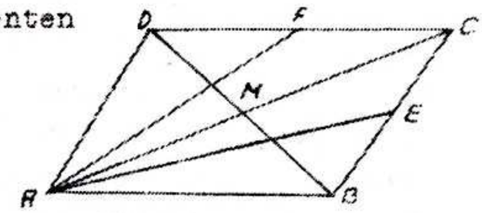
$$(\overline{AP_1})^2 + (\overline{AP_2})^2 + \ldots + (\overline{AP_{2n}})^2 = ((\overline{AP_1})^2 + (\overline{AP_{n+1}})^2) + ((\overline{AP_2})^2 + (\overline{AP_{n+2}})^2) + \ldots + ((\overline{AP_n})^2 + (\overline{AP_{2n}})^2).$$

Die Strecken $\overline{AP_i}$ und $\overline{AP_{n+i}}$ $(i = 1,\ldots,n)$ sind nach dem Satz des Thales jeweils Katheten im rechtwinkligen Dreieck ΔAP_iP_{n+i} mit der Hypotenuse $2R$. Dann ist:

$$(\overline{AP_i})^2 + (\overline{AP_{n+i}})^2 = (2R)^2$$

Man erhält als die gesuchte Summe $4nR^2$.
Im Spezialfall $n = 10$, $R = 1$ erhält man $4 \cdot 10 = 40$.

(9.21): Zunächst wird das Parallelogramm ABCD durch die Diagonale $\overline{AC}$ in die beiden kongruenten Dreiecke ΔABC und ΔACD geteilt. Es gilt nun, daß $\overline{AE}$ und $\overline{BM}$ Seitenhalbierende im Dreieck ΔABC sind. Daher



teilt $\overline{AE}$ die Strecke $\overline{BM}$ im Verhältnis 2:1. Analog wird $\overline{DM}$ von $\overline{AF}$ im Verhältnis 2:1 geteilt. Somit wird $\overline{BD}$ in drei gleiche Teile geteilt.

(11/12.21): Der Punkt O liege im Inneren des Tetraeders ABCD. Wenn wir den Punkt O mit den Eckpunkten des Tetraeders verbinden, erhalten wir vier Pyramiden: ABCO, ABDO, ACDO, BCDO. Es ist klar, daß die Summe der Volumina dieser vier Pyramiden gleich dem Volumen des Tetraeders ist. Bezeichnen wir den Flächeninhalt der Seitenflächen des Tetraeders mit S, seine Höhe mit h und die Abstände von O zu den Seitenflächen mit h_1, h_2, h_3, h_4, so erhalten wir:

$$\frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} Sh_1 + \frac{1}{3} Sh_2 + \frac{1}{3} Sh_3 + \frac{1}{3} Sh_4$$

oder $h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$.

Druckfehlerberichtigung!

In der Nr.1/68 ist uns ein bedauerlicher Druckfehler unterlaufen. Auf der Seite 9 (1.Abschnitt, 4.Zeile) muß es statt:

... die man mit dem Zirkel allein lösen kann ...

richtig heißen:

... die man mit dem Lineal allein lösen kann ...

Wir bitten, dieses Versehen zu entschuldigen.

3

68

WURZEL

schülerzeitung für mathematik

WURZEL - Schülerzeitung für Mathematik

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universitat Jena. Die Zeitung erscheint monatlich zum Preis von 0,20 MDN. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Eike Hertel, Günter Horn
Mitarbeiter: K.Fischer, H.Meißner, N.Kuse, H.Peuker, H.Schirrmeister, L.Staiger, W.Ulbrich, R.Wackernagel

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

Primzahlen I

Man sagt, die Primzahlen bilden die Bausteine beim multiplikativen Aufbau der natürlichen Zahlen 1, 2, 3,.... Was versteht man eigentlich unter einer Primzahl? Bekanntlich ist das Produkt zweier natürlichen Zahlen wieder eine natürliche Zahl. Also gibt es natürliche Zahlen, die sich als Produkt von zwei natürlichen Zahlen, die beide größer als 1 sind, darstellen lassen. Andererseits gibt es natürliche Zahlen, die nicht Produkt von zwei natürlichen Zahlen größer als 1 sind, z.B. 2, 3, 5, usw. Solche Zahlen wollen wir Primzahlen nennen.

D e f i n i t i o n:

Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl größer als 1, die nicht Produkt von zwei natürlichen Zahlen größer als 1 ist.

Wir stellen fest:

S a t z 1: Eine natürliche Zahl p ist dann und nur dann Primzahl, wenn sie genau zwei natürliche Teiler (1 und p) hat.

Bemerkung: Die natürliche Zahl b heißt Teiler der natürlichen Zahl a (in Zeichen b/a), wenn es eine natürliche Zahl c gibt, so daß a = bc gilt.

Beweis des Satzes 1:

Wir haben zu zeigen: 1) Eine Primzahl hat nur zwei Teiler.
2) Hat eine natürliche Zahl p genau zwei Teiler, dann ist sie

Primzahl. Der Beweis wird indirekt geführt, d.h., wir gehen von der gegenteiligen Annahme aus und führen diese auf einen Widerspruch.

1) Annahme: Die Primzahl p hat einen weiteren Teiler a, $1 < a < p$. Dann ist $p = ab$ und $1 < b = \frac{p}{a} < p$. Also müßte p zusammengesetzt sein im Widerspruch zur Primzahleigenschaft.

2) Hat p zwei natürliche Teiler, so muß $p > 1$ sein.
Annahme: p ist keine Primzahl. Dann muß es eine Zerlegung $p = ab$, $1 < a < p$, geben. Da wäre aber auch a ein Teiler von p, und p hätte mehr als zwei Teiler. Widerspruch!

S a t z 2: Jede natürliche Zahl $n > 1$ besitzt wenigstens einen Primteiler.

<u>Beweis:</u>

n hat wenigstens einen Teiler größer als 1, z.B. n selbst. Unter den Teilern von n, die größer als 1 sind, gibt es einen kleinsten p, $p > 1$. p ist Primzahl. Denn wäre p zusammengesetzt, $p = ab$ $(a,b > 1)$, so wäre $p > a$, und a wäre ein kleinerer Teiler von n als p.

Ist n eine zusammengesetzte Zahl, $n = ab$ $(a,b > 1$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a \leq b)$, so besitzt n sogar wenigstens einen Primteiler $\leq \sqrt{n}$. Denn wegen $a \leq b$ ist $n \geq a^2$ bzw. $a \leq \sqrt{n}$, und a hat nach Satz 2 mindestens einen Primteiler p, der dann auch n teilt und $p \leq a \leq \sqrt{n}$. Damit haben wir den

S a t z 3: Jede zusammengesetzte Zahl $n = ab$ $(a,b > 1)$ hat wenigstens einen Primteiler $\leq \sqrt{n}$.

Wieviel Primzahlen gibt es? Diese Frage beantwortete schon Euklid.

S a t z 4: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

<u>Beweis:</u> (indirekt)

Annahme: Es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Wir führen diese Annahme auf einen Widerspruch, indem wir bilden:

$$(1) \qquad P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

Ich behaupte, P enthält eine weitere Primzahl, die mit keiner der Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ übereinstimmt. Nach Satz 2 besitzt nämlich P mindestens einen Primteiler q. Wäre etwa $q = p_k$ $(1 \leq k \leq n)$, so wäre q ein Teiler von P und von $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$, müßte also nach (1) auch ein Teiler von 1 sein, was natürlich nicht sein kann, d.h. unsere Annahme war falsch.

Nun wenden wir uns dem eingangs erwähnten multiplikativen Aufbau der natürlichen Zahlen zu. Dieser wird ausgedrückt in dem

F u n d a m e n t a l s a t z   d e r   Z a h l e n t h e o r i e

I. Jede natürliche Zahl $n > 1$ läßt sich als Produkt von Primzahlen

$$n = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$$

darstellen.

II. Diese Darstellung ist, abgesehen von der Reihenfolge der Faktoren, eindeutig.

Der Fundamentalsatz besteht also aus zwei Teilen:

I. Die Existenz einer Primfaktorzerlegung

II. Die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung

Der Beweis von I ist ziemlich einfach, von II dagegen recht schwierig, weshalb wir ihn auf den zweiten Artikel verschieben wollen. Wenden wir uns dem Beweis von I zu:

Die Existenz einer Primfaktorzerlegung:

Nach Satz 2 hat n wenigstens einen Primteiler p_1. Wir können annehmen, p_1 ist der kleinste Primteiler von n. Dann ist $n = p_1 n_1$. Entweder ist $n_1 = 1$, dann ist n gleich der Primzahl p_1 (Und man ist fertig!), oder $n_1 > 1$. Im letzteren Fall wiederholen wir das Verfahren: Nach Satz 2 hat n_1 wenigstens einen Primteiler p_2, den wir wieder als den kleinsten Primteiler von n_1 annehmen können. Folglich ist $n = p_1 p_2 n_2$. Bei Fortsetzung des Verfahrens erhält man schließlich $n = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_k n_k$. Dabei ist $n > n_1 > \ldots > n_k$. Daher muß an eine Stelle $k = r$ kommen, so daß $n_r = 1$ ist. Jetzt bricht das Verfahren ab, und es ist $n = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ als Produkt von Primzahlen dargestellt.

In der Darstellung $n = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ können gewisse Primzahlen einander gleich sein. Faßt man gleiche Primzahlen zusammen, so erhält man die kanonische Zerlegung von n in Primfaktoren:

$$(2) \qquad n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdot \ \ldots \ \cdot p_k^{a_k}$$

In (2) sind die p_i verschiedene Primzahlen, die a_i natürliche Zahlen.

Dr. rer. nat. habil.
E. Krätzel
Dozent an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

AUFGABEN (Serie 3/68)

9. Klasse:

(9.27) Gegeben sei ein Kreis S. Es ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der Sehnen, die durch einen Punkt A führen, zu bestimmen.

(9.28) Man bestimme a so, daß die Gleichungen
$x^3 + ax + 1 = 0$ und $x^4 + ax^2 + 1 = 0$
eine gemeinsame Lösung haben.

10. Klasse:

(10.27) Gesucht ist eine positive ganze Zahl, deren Hälfte ein vollständiges Quadrat, deren Drittel eine vollständige Kubikzahl und deren Fünftel eine vollständige 5. Potenz ist.

(10.28) Man beweise:
Ist die Summe von 3 natürlichen Zahlen durch 6 teilbar, so ist auch die Summe der 3. Potenzen dieser Zahlen durch 6 teilbar.

11/12. Klasse:

(11/12.27) In einem Kasten befinden sich 28 rote, 20 grüne, 20 blaue, 10 weiße und 10 schwarze Kugeln. Wieviel Kugeln muß man mindestens herausnehmen, um 15 Kugeln von einer Farbe zu erhalten?

(11/12.28) Es ist zu zeigen, daß die drei Strecken, die die Mitten der gegenüberliegenden Kanten eines Tetraeders verbinden, sich in einem Punkt schneiden und durch diesen halbiert werden.

Preisaufgabe (P. 15)

Auf der Strecke $\overline{AB} = a$ sei der Punkt M gegeben, so daß $\overline{AM} = x$ ist. Man errichte über $\overline{AM}$ das gleichschenklige Dreieck ΔAMD mit der Höhe $\overline{DD_1} = \frac{1}{3}\overline{AM}$ und über $\overline{MB}$ das gleichschenklige Dreieck ΔBMC mit der Höhe $\overline{CC_1} = \frac{1}{3}\overline{MB}$.

a) Man gebe den Flächeninhalt des Vierecks ABCD als Funktion von x an: $F_{ABCD} = f(x)$.

b) Welchen Grenzen unterliegt der Flächeninhalt F_{ABCD} bei gegebenem a?

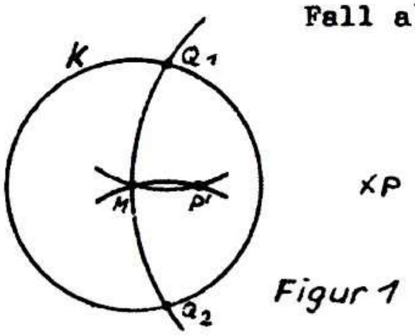
Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil.
Die Lösungen sind unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" bis zum 30. des jeweiligen Erscheinungsmonats (Datum des Poststempels) an unsere Adresse einzuschicken.

Die Spiegelung am Kreis - eine geometrische Abbildung mit interessanten Anwendungen III (Schluß)

Wie angekündigt soll jetzt der Satz von MOHR und MASCHERONI über die Konstruktion mit dem Zirkel allein bewiesen werden. Zu diesem Zweck geben wir zunächst drei mit dem Zirkel allein durchzuführende Grundkonstruktionen an. In jedem Falle ist der Spiegelkreis K (Mittelpunkt M, Radius r) vorgegeben.

GRUNDKONSTRUKTIONEN:

G1) Gegeben ist ein beliebiger Punkt P. Es ist das Spiegelbild P' von P bezüglich K mit dem Zirkel allein zu konstruieren.

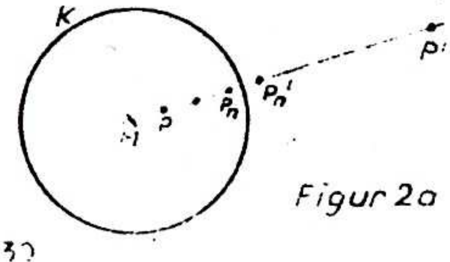


Figur 1

Fall a) Der Kreis um P mit dem Radius $\overline{PM}$ schneide K in zwei Punkten Q_1 und Q_2. Zeichnet man um Q_1 und Q_2 Kreise mit dem Radius $\overline{Q_1M}$ (= $\overline{Q_2M}$ = r), so liegt deren Schnittpunkt P' auf dem Strahl MP, und es ist P' das Bild von P, denn die gleichschenkligen Dreiecke Q_1MP und Q_1MP' haben den Winkel bei M gemeinsam, sie sind also ähnlich, und es gilt daher

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{MQ_1}} = \frac{\overline{MQ_1}}{\overline{MP'}}, \text{ daraus folgt } \overline{MP} \cdot \overline{MP'} = r^2 .$$

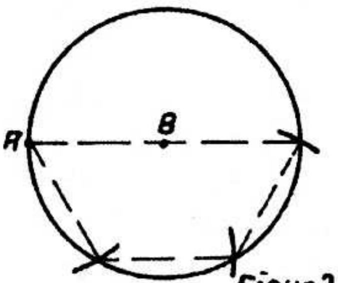
Fall b) Der Kreis um P mit dem Radius $\overline{PM}$ schneidet K nicht oder berührt ihn. In diesem Falle ver-n-facht (siehe *) man die Strecke MP über P hinaus bis zu einem Punkt P_n (in Figur 2a ist n = 3), für den Fall a) zutrifft.



Figur 2a

P_n kann nach a) auf P_n' abgebildet werden, und durch Ver-n-fachen der Strecke MP_n' erhält man P', denn es ist

$$n \cdot \overline{MP_n'} = \frac{nr^2}{\overline{MP_n}} = \frac{nr^2}{n \cdot \overline{MP}} = \frac{r^2}{\overline{MP}} = \overline{MP'}$$

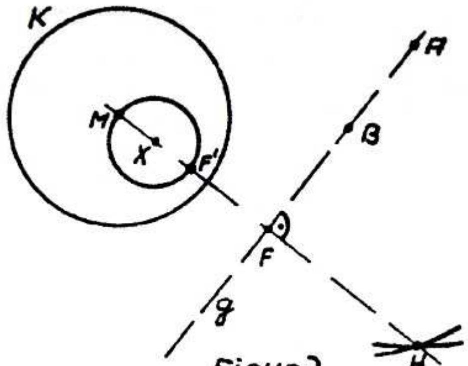


Figur 2b

* Wie man allgemein eine Strecke AB mit dem Zirkel allein verdoppelt, lehrt Figur 2b. Man beschreibt um B mit dem Radius $\overline{AB}$ einen Kreis und beschreibt dort bei A beginnend das regelmäßige Sechseck ein. Durch Wiederholung dieser Konstruktion kann man AB auch ver-n-fachen.

G2) Gegeben ist eine beliebige Gerade g durch zwei ihrer Punkte A und B. Es ist das Spiegelbild g' von g mit dem Zirkel allein zu konstruieren.

Nach einem Satz aus Teil I ist g' ein Kreis durch M, der in M eine zu g parallele Tangente hat.



Figur 3

Hat er den Mittelpunkt X, so ist $2\overline{MX} = \overline{MF'}$, wobei F der Lotfußpunkt des Lotes von M auf g und F' dessen Bild ist. Ferner ist

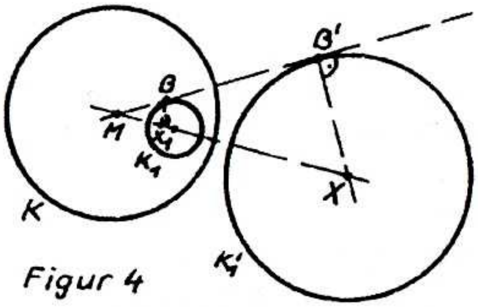
$$\overline{MX'} = \frac{r^2}{\overline{MX}} = \frac{2r^2}{\overline{MF'}} = 2\overline{MF} = \overline{MH}, \text{ d.h.}$$

das Bild H von X hat von M den doppelten Abstand wie F. Da umgekehrt X das Bild von H ist, lautet die Konstruktion: man konstruiere H durch Schneiden der Kreise um A (Radius $\overline{AM}$) und B (Radius $\overline{BM}$) und ermittle nach G1) das Bild X von H. Der Kreis um X durch M ist g'.

G3) Gegeben ist ein beliebiger Kreis K_1. Es ist das Spiegelbild K_1' von K_1 mit dem Zirkel allein zu konstruieren.

Es genügt, den Mittelpunkt X des Bildkreises K_1' zu bestimmen, denn der Radius ergibt sich, wenn man einen Punkt des Originalkreises gemäß G1) abbildet. Wir betrachten den Fall, daß der Mittelpunkt M des Spiegelkreises außerhalb von K_1 liegt. Die Tangente von M an K_1 berühre K_1 in B, das Bild B' von B ist dann Berührungspunkt der Tangente MBB' an K_1' (siehe Teil II!). Von B fällen wir das Lot auf MX und erhalten den Fußpunkt X_1.

X_1 ist also das Bild von M bei einer Spiegelung an K_1. Auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke MX_1B und $MB'X$ gilt



Figur 4

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MX_1}} = \frac{\overline{MX}}{\overline{MB'}}, \text{ also}$$

$$\overline{MX} \cdot \overline{MX_1} = \overline{MB} \cdot \overline{MB'} = r^2 \text{ , d.h.}$$

X ist das Bild von X_1 bei der Spiegelung an K. Man erhält also X, indem man M (nach G1)) an K_1, das erhaltene Bild an K spiegelt. Für den Fall, daß K_1 den Punkt M umschließt, ergibt sich dieselbe Konstruktionsvorschrift, der Leser möge das nachprüfen! Die Konstruktion läßt sich jedenfalls mit dem Zirkel allein durchführen.

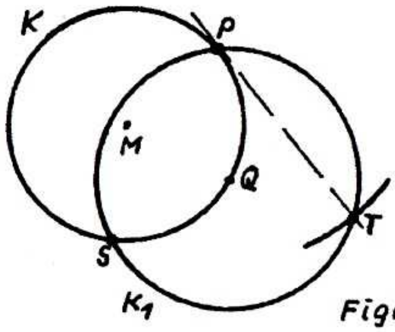
Nun können wir den Satz, daß jede Zirkel-Lineal-Konstruktion schon allein mit dem Zirkel durchführbar ist, ohne Schwierigkeiten beweisen:

Jede Zirkelkonstruktion besteht doch darin, daß man aus gegebenen (zuweilen im Verlauf der Konstruktion noch beliebig annehmbaren) Punkten neue Punkte konstruiert, indem man folgende Tätigkeiten ausführt:

a) je zwei gegebene Punkte verbinden und den Schnittpunkt der Verbindungsgerader ermitteln,
b) zwei gegebene Punkte verbinden, um einen gegebenen Punkt einen Kreis beschreiben und die Schnittpunkte von Gerade und Kreis ermitteln,
c) Schnittpunkte von Kreisen um gegebene Punkte ermitteln.

Alle drei Tätigkeiten lassen sich mit dem Zirkel allein ausführen. Für a) verwandelt man nach Grundkonstruktion G2) die Geraden, die ja nicht voll gezeichnet vorliegen, durch Spiegeln an einem weitgehend willkürlich wählbaren Spiegelkreis K in Kreise, die dann voll gezeichnet werden können. Ihr vom Mittelpunkt M des Spiegelkreises verschiedener Schnittpunkt wird nach Grundkonstruktion G1) an K gespiegelt und ergibt den gesuchten Schnittpunkt der Geraden. Bei b) verwandelt man die Gerade und den Kreis nach Grundkonstruktion G2) und G3) in zwei Kreise, deren Schnittpunkte durch abermaliges Spiegeln die gesuchten Punkte ergeben. Zu c) braucht man ohnehin nur den Zirkel.

Damit ist der Satz bewiesen. Der Beweis gibt zugleich ein Rezept, wie man bei jeder vorgelegten Aufgabe vorgehen kann: Man überlegt sich eine Lineal-Zirkel-Lösung und führt die einzelnen Schritte wie bei a), b), c) angegeben mit dem Zirkel allein aus! Dieser Lösungsweg wird jedoch manchmal recht umständlich werden, und es gibt oft kürzere Lösungswege. Als Beispiel sei folgende Aufgabe genannt:



Figur 5

Gegeben ist eine Kreislinie K und ein Punkt P auf K, gesucht ist die Tangente durch P an K. Zur Lösung wähle man einen Punkt Q auf K, beschreibe um Q einen Kreis K_1 durch P, der K in S schneidet. Der Kreis um P durch S schneidet K_1 im Punkt T, der ein Punkt der Tangente ist.

Der Beweis für die Richtigkeit der Konstruktion ist über den Satz vom Sehnen-Tangentenwinkel leicht zu führen und soll dem Leser überlassen bleiben.

W. Börner

wiss. Assistent
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Mathematikolympiade 1968

Am 20. und 21. Januar fanden die Bezirksausscheide der VII. Olympiade Junger Mathematiker statt. "Wurzel"-Mitarbeiter besuchten die Olympiaden der Bezirke Gera und Erfurt und brachten folgende interessante Lösungen mit:

Olympiadeklasse 10/1. Aufgabe

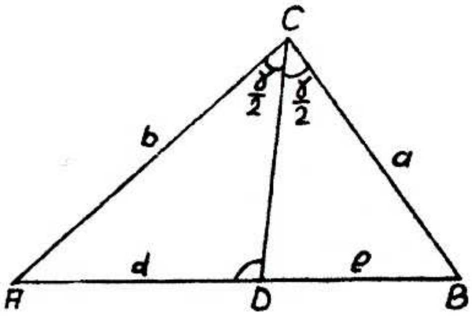
Beweisen Sie folgende Aussage:

Die Winkelhalbierende je eines Innenwinkels jedes Dreiecks teilt die gegenüberliegende Seite in Abschnitte, von denen jeder kleiner ist als die dem Innenwinkel anliegende Dreiecksseite durch einen Endpunkt des betreffenden Abschnitts.

Lösung (von Thomas Grellmann, EOS Wilh. v. Humboldt Nordhausen)

Die Summe der Innenwinkel im Dreieck ist 180°. Im $\triangle ABC$ gilt:

$$\alpha + \frac{1}{2}\gamma + \sphericalangle ADC = 180^\circ$$



$$180^\circ = \alpha + \beta + \gamma$$
$$\sphericalangle ADC = \frac{1}{2}\gamma + \beta$$
$$\text{d.h.: } \sphericalangle ADC > \frac{1}{2}\gamma$$

Da dem größeren Winkel im Dreieck immer die größere Seite gegenüberliegt, folgt, daß im Dreieck ΔADC $b > d$ ist. Entsprechend gilt auch im ΔBDC $a > e$. Das Gleiche erhält man durch zyklische Vertauschung auch für die durch die anderen Winkelhalbierenden gebildeten Abschnitte.

Somit ist die Aussage für nicht entartete Dreiecke bewiesen.

Olympiadeklassen 11/12/2. Aufgabe

Es ist das Produkt

$\sin 5^\circ \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 55^\circ \cdot \sin 65^\circ \cdot \sin 75^\circ \cdot \sin 85^\circ$ in einen Ausdruck umzuformen, der aus natürlichen Zahlen lediglich unter Anwendung der Rechenoperationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens, Dividierens sowie des Radizierens mit natürlichen Wurzelexponenten gebildet werden kann.

Lösung (von Harald Stibbe EOS Lobenstein)

Die Aufgabe kann gelöst werden unter Verwendung der beiden Additionstheoreme

$$(1) \quad 2\sin x \cdot \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$
$$(2) \quad 2\cos x \cdot \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

Nach (1) und mit Rücksicht darauf, daß $\cos 90^\circ = 0$, erhält man

$$\left.\begin{aligned} 2\sin 5^\circ \sin 85^\circ &= \cos 80^\circ \\ 2\sin 15^\circ \sin 75^\circ &= \cos 60^\circ \\ 2\sin 25^\circ \sin 65^\circ &= \cos 40^\circ \\ 2\sin 35^\circ \sin 55^\circ &= \cos 20^\circ \\ \sqrt{2}\,\sin 45^\circ &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{Multiplikation}$$

$$16 \cdot \sqrt{2}\, S = \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ, \quad \text{wegen } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

ergibt sich $\quad 32 \cdot \sqrt{2}\, S = \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

Unter ständiger Verwendung von (2) ergibt sich

$$\begin{aligned} 64 \cdot \sqrt{2}\, S &= (\cos 20^\circ + \cos 60^\circ)\cos 80^\circ \\ &= (\cos 20^\circ + \tfrac{1}{2})\cos 80^\circ \\ 128 \cdot \sqrt{2}\, S &= 2\cos 20^\circ \cos 80^\circ + \cos 80^\circ \\ &= \cos 60^\circ + \cos 100^\circ + \cos 80^\circ \\ &= \tfrac{1}{2} - \cos 80^\circ + \cos 80^\circ, \quad \text{d.h. } \underline{\underline{S = \frac{\sqrt{2}}{512}}} \end{aligned}$$

Olympiadeklassen 11/12/4. Aufgabe

Es sei $y = f(x)$ eine für alle reellen Zahlen x definierte Funktion, die für alle x folgende Gleichung erfüllt:

$$(1) \qquad f(x+1) = (x+1)\cdot f(x)$$

Außerdem sei $y = g(x)$ eine ebenfalls für alle reellen x definierte Funktion. Für alle x sei $f(x)$ von 0 verschieden.

Beweisen Sie: Die Funktion $\varphi(x) = f(x)\cdot g(x)$ erfüllt genau dann für alle reellen x die Gleichung

$$(2) \qquad \varphi(x+1) = (x+1)\cdot\varphi(x)\ ,$$

wenn $g(x)$ eine periodische Funktion mit der Periode 1 ist.

Lösung (von Mathias Christ, EOS Arnoldi, Gotha)

Eine periodische Funktion mit der Periodenlänge 1 muß der Gleichung $g(x) = g(x+1)$ genügen.

Ich setze in der Gleichung $\varphi(x+1) = (x+1)\cdot\varphi(x)$ die Funktion $\varphi(x) = f(x)\cdot g(x)$ ein und erhalte

$$f(x+1)\cdot g(x+1) = (x+1)\cdot f(x)\cdot g(x)$$

Da $y = f(x)$ die Gleichung (1) erfüllt, kann man schreiben

$$(x+1)\cdot f(x)\cdot g(x) = (x+1)\cdot f(x)\cdot g(x)$$

Diese Gleichung kann ich durch $f(x)$ dividieren, da $f(x)$ für alle x von 0 verschieden ist.

$$(3) \qquad (x+1)\cdot g(x+1) = (x+1)\cdot g(x)$$

Ich nehme an, daß $x \neq -1$ und kann jetzt durch $(x+1)$ dividieren:

$$g(x+1) = g(x)$$

Durch äquivalentes Umformen bin ich zu dieser Bedingung gekommen. Die Gleichung (2) ist also genau dann erfüllt, wenn diese "Bedingung" gilt, d.h. wenn die Funktion $g(x)$ eine periodische Funktion mit der Periodenlänge 1 ist. Für $x = -1$ erhalte ich (in (3) eingesetzt) $\qquad 0\cdot g(0) = 0\cdot g(-1)$

Die Gleichung ist für jede Funktion g erfüllbar. Die Funktion $g(x)$ kann deshalb an der Stelle $x = -1$ eine Sprungstelle aufweisen.

LÖSUNGEN

(11/12.22): Eine Zahl kann bei Division durch n die Reste $0, 1, \ldots, n-1$ lassen. Das sind insgesamt n verschiedene Reste. Bei $n+1$ Zahlen muß bei der Division durch n mindestens ein Rest zweimal auftreten. Die Differenz von diesen beiden Zahlen, die den gleichen

Rest lassen, ist durch n teilbar.
(Die Lösung wurde von Hugo Reinhardt, EOS Heiligenstadt, Kl.12B eingesandt)

(10.21): Es gilt:

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$
$$= \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

(10.22): Aus (2) folgt $x, y > 0$
und $\lg(xy) = 3$, d.h. $xy = 1000$

Unter Verwendung von (1) ergibt sich:

$$x(x - 90) = 1000$$
$$x^2 - 90x - 1000 = 0$$
$$x_{1/2} = 45 \pm \quad 2025 + 1000$$
$$= 45 \pm 55$$

x_2 =-10 entfällt als Lösung, da $x > 0$.
Man erhält als Lösung für das Gleichungssystem:

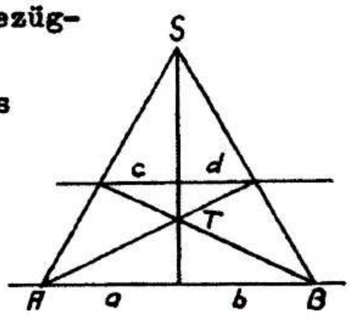
$$x = 100$$
$$\text{und } y = 10$$

(9.23): <u>1.Analysis</u>

In der nebenstehenden Figur gilt bezüglich des Strahlpunktes S nach dem Strahlensatz $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. Bezüglich des Strahlpunktes T gilt $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$.
Dann erhält man nach Multiplikation

$$\frac{a^2}{cd} = \frac{b^2}{cd}.$$

Daraus folgt, da $a, b \neq 0$, $a = b$.



<u>2.Konstruktion</u>

Es wird ein Punkt S so gewählt, daß die zu $\overline{AB}$ parallele Gerade die Seiten $\overline{AS}$ und $\overline{BS}$ des Dreiecks ΔABS schneidet (s. Skizze). Dann werden die so entstandenen Schnittpunkte mit den Punkten A und B durch Geraden verbunden, die im entstandenen Trapez Diagonalen sind. Die Gerade, die vom Schnittpunkt dieser Geraden und vom Punkt S bestimmt wird, halbiert $\overline{AB}$. (Beweis folgt aus 1.)

4

68

WURZEL

schülerzeitung für mathematik

WURZEL - Schülerzeitung für Mathematik

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Die Zeitung erscheint monatlich zum Preis von 0,20 MDN. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Eike Hertel, Günter Horn
Mitarbeiter: K.Fischer, H.Meißner, N.Kuse, H.Peuker, H.Schirrmeister, L.Staiger, W.Ulbrich, R.Wackernagel

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

Primzahlen II

Wir müssen noch den zweiten Teil des Fundamentalsatzes der Zahlentheorie beweisen, der besagte, daß die Zerlegung einer natürlichen Zahl in Primfaktoren bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist. Hierzu stellen wir eine Vorbetrachtung an, die auch für sich interessant ist. Wir wollen uns überlegen, was der größte gemeinsame Teiler zweier natürlichen Zahlen ist und wie dieser berechnet werden kann.

Es seien a und b zwei natürliche Zahlen. Beide haben gewisse gemeinsame Teiler. Beispiel: $a = 30$, $b = 45$, gemeisame Teiler sind 1, 3, 5, 15. Unter diesen gemeinsamen Teilern gibt es einen größten d, in dem Beispiel $d = 15$. Wir nennen d den größten gemeinsamen Teiler von a und b und schreiben $(a,b) = d$. Zwei Zahlen heißen teilerfremd, wenn $d = 1$ ist, z.B. $(14,15) = 1$.

<u>Eigenschaften des größten gemeinsamen Teilers $(a,b) = d$:</u>

1) d/a und d/b.
2) Ist t irgendein Teiler von a und b, t/a und t/b, dann gilt auch t/d.

Hierdurch ist der größte gemeinsame Teiler eindeutig bestimmt!

<u>Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers durch den Euklidischen Algorithmus:</u>

Es sei $a_1 > a_2 > 1$. Gesucht ist $(a_1,a_2) = d$.

Man teile a_1 durch a_2 so oft es geht, d.h. daß ein kleinerer Rest als a_2 verbleibt:

$$(3) \qquad a_1 = q_1a_2 + a_3, \qquad 0 \leq a_3 < a_2 .$$

Man wiederhole das Verfahren mit a_2 und a_3:

(4) $\qquad a_2 = q_2a_3 + a_4 , \qquad 0 \leq a_4 < a_3 ,$

usw. bis

(5) $\qquad a_{n-2} = q_{n-2}a_{n-1} + a_n , \quad 0 \leq a_n < a_{n-1} .$

Die Zahlen $a_2, a_3,\ldots,a_n$ bilden eine abnehmende Folge. Es sind nicht-negative ganze Zahlen. Folglich muß einmal nach endlich vielen Schritten der Fall eintreten, daß der Rest 0 ist. Das sei im nächsten Schritt der Fall, also $a_{n+1} = 0$:

(6) $\qquad a_{n-1} = q_{n-1}a_n .$

Dann ist $a_n = d$. Wir bestätigen das, indem wir die beiden Eigenschaften von d überprüfen:

Nach (6) ist a_n/a_{n-1} und nach (5) a_n/a_{n-2} usw., also nach (4) und (3) a_n/a_2, a_n/a_1. Das ist die Eigenschaft 1) von d. Nun zur Eigenschaft 2): t/a_1 und t/a_2, dann nach (3) t/a_3, nach (4) t/a_4 usw. nach (5) t/a_n.

<u>Beispiel:</u>

Gesucht ist $(133,91) = d$:

$$\begin{aligned} 133 &= 1\cdot91 + 42, \\ 91 &= 2\cdot42 + 7, \\ 42 &= 6\cdot7, \qquad \text{d.h.} \quad d = 7. \end{aligned}$$

Jetzt können wir den entscheidenden vorbereitenden Satz für den Beweis der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung darlegen.

S a t z 5: Sind a und b natürliche Zahlen, und ist ihr Produkt $a\cdot b$ durch eine Primzahl p teilbar, dann ist wenigstens eine der Zahlen a, b durch p teilbar.

<u>Beweis:</u>

Zu zeigen: Aus $p/a\cdot b$ folgt p/a oder p/b. Bilden wir (p,b). Da p Primzahl ist, kommen für (p,b) zwei Werte in Frage: Entweder ist $(p,b) = p$ oder $(p,b) = 1$. Im ersten Fall ist p/b, und wir sind fertig. Im zweiten Fall folgt aber aus $(p,b) = 1$ sofort $(ap, ab) = a$. Wegen p/ap und p/ab folgt aus der Eigenschaft 2) des größten gemeinsamen Teilers p/a. Und wir sind ebenfalls fertig.

<u>Folgerung aus Satz 5:</u>

Ist p Primzahl und gilt $p/a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n$, dann ist wenigstens eine der Zahlen $a_1, a_2,\ldots, a_n$ durch p teilbar.

Beweis als Übungsaufgabe!

Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung:

Nehmen wir an, es gibt natürliche Zahlen, die zwei verschiedene Primfaktorzerlegungen zulassen. Unter diesen Zahlen gibt es eine kleinste Zahl n:

$$n = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 q_2 \cdot \ldots \cdot q_s \ .$$

(p_i, q_i - Primzahlen). Aus p_1/n folgt $p_1/q_1 q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$ und nach Satz 5 muß p_1 wenigstens eine der Primzahlen $q_1, q_2, \ldots, q_s$ teilen, etwa p_1/q_1. Da p_1 und q_1 beide Primzahlen sind, kann nur $p_1 = q_1$ sein. Dann muß

$$n' = \frac{n}{p_1} = p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$$

sein. Weil aber $n' < n$ ist, hat n' nach Voraussetzung eine eindeutig bestimmte Primfaktorzerlegung. Folglich muß $r = s$ sein und, falls die Primzahlen p_i, q_i der Größe nach geordnet sind, $p_2 = q_2$, $p_3 = q_3, \ldots, p_r = q_r$. Also war unsere Annahme falsch, denn auch n hat eindeutige Primfaktorzerlegung.

Dr. rer. nat. habil.
E. Krätzel

Dozent an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

AUFGABEN (Serie 4/68)

9.Klasse: (9.29) Für welche ganzzahligen k erfüllen die Lösungen des Gleichungssystems

$$kx - 2y = 3$$
$$3x + ky = 4$$

die Bedingungen $x > 0$, $y < 0$?

(9.30) Es ist zu zeigen, daß $n^5 - 5n^3 + 4n$ für jedes natürliche n durch 120 teilbar ist.

10.Klasse: (10.29) Man zerlege $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ in zwei Polynome, deren Summe $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ist.

(10.30) Man bestimme den geometrischen Ort aller Punkte, deren Differenz der Quadrate der Abstände zu zwei gegebenen Punkten A und B konstant ist.

11/12. Klasse:

(11/12.29) Es ist zu beweisen, daß man unter 1000 ganzen Zahlen einige so auswählen kann, daß ihre Summe durch 1000 teilbar ist.

(11/12.30) Man bestimme

$$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\alpha}}} \quad \text{für } 0 \leq \alpha < 90^{\circ}.$$

Preisaufgabe (P. 16)

Es ist zu zeigen, daß unter drei natürlichen Zahlen, die der Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ genügen, mindestens eine durch drei teilbar ist.

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" bis zum 30. des jeweiligen Erscheinungsmonats (Datum des Poststempels) an unsere Adresse einzuschicken.

Elektronische Datenverarbeitung - Notwendigkeit oder Modeerscheinung

In den letzten beiden Jahren häufen sich in Publikationsorganen wie Zeitungen, Zeitschriften, Rundfunk und Fernsehen Beiträge, in denen Begriffe wie Kybernetik, Rechentechnik, Operationsforschung und Elektronische Datenverarbeitung auftauchen. Der unbeteiligte Leser kann zu dem Schluß kommen, daß es heute Mode ist, bestimmte mathematische Disziplinen zum Gesprächsgegenstand zu machen, etwa so, wie vor 10 Jahren über Sputniks, Satelliten und Raketen diskutiert wurde. Um die Bedeutung der Elektronischen Datenverarbeitung richtig einschätzen und bewerten zu können, ist es erforderlich, die stürmische Entwicklung unserer sozialistischen Wirtschaft, besonders im letzten Jahrzehnt, zu betrachten. Es steht außer Zweifel; moderne Produktionsprozesse haben einen solchen Grad an Kompliziertheit erreicht, daß ihre Planung und Leitung nach althergebrachten Erfahrungswerten völlig unzureichend ist. Die Lösung der großen Aufgaben bei der vollen Entfaltung des entwickelten gesellschaftlichen Systems des Sozialismus mit dem neuen ökonomischen System als seinem Kernstück, präzise formuliert in den Beschlüssen des VII. Parteitages der SED, erfordert neue wissenschaftliche Methoden der Planung und Leitung.

Viele Beispiele aus der Praxis weisen aus, daß mathematische Prinzipien vorzüglich für die Leitungstätigkeit und die Modellierung volkswirtschaftlicher Prozesse genutzt werden können.

Es geht darum, solche mathematischen Prinzipien wie Rechentechnik und Datenverarbeitung in voller Breite in Wissenschaft, Wirtschaft und Technik zum Einsatz zu bringen. Elektronische Datenverarbeitung ist also keine Modekrankheit, sondern ein unentbehrliches Hilfsmittel bei der weiteren Entwicklung unserer sozialistischen Gesellschaftsordnung. Eine ganze Anzahl wichtiger Beschlüsse unserer Partei- und Staatsführung geben dieser Schlußfolgerung ein gesetzliches Fundament.

Die erfolgreiche Anwendung der Elektronischen Datenverarbeitung in der Praxis ist abhängig von vielen Faktoren. Solche Faktoren sind zum Beispiel:

Entwicklung mathematischer Modelle für komplizierte Produktionsprozesse
- für die Planung
- in der wissenschaftlichen Forschung,

Exakte zahlenmäßige Erfassung der für den modellierten Prozeß charakteristischen Kenngrößen,

Heranbildung von Kadern für die Elektronische Datenverarbeitung,

Aufbau von Rechenzentren, ausgerüstet mit modernen Rechenanlagen.

Völlig zu Recht steht die Installierung von modernen Rechenanlagen nicht an erster Stelle. Die Aufstellung einer Rechenanlage schließt lediglich eine umfangreiche Etappe intensiver Vorbereitungsarbeiten ab.

Im folgenden sollen einige Ausführungen zum Problem "Heranbildung von Kadern für die EDV" gemacht werden. Diese Ausführungen erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit und absolute Aktualität, da an den zuständigen staatlichen Einrichtungen noch intensiv an Berufsbildern und Ausbildungsprogrammen für Kader der EDV gearbeitet wird. Es werden an dieser Stelle nur mathematisch orientierte Berufe diskutiert.

<u>Facharbeiter für Datenverarbeitung:</u>

Erforderliche Vorbildung: Erfolgreicher Abschluß der 10-klassigen polytechnischen Oberschule.

Die Ausbildung erfolgt in speziellen Berufsschulklassen und dauert zwei Jahre. (Im Bezirk Gera befinden sich solche Berufsschulen u.a. in Jena, Gera und Saalfeld)

Der zukünftige Facharbeiter erwirbt während der Berufsausbildung:

- erweiterte Kenntnisse in Mathematik
- Spezialkenntnisse über Informationsdarstellung auf modernen Datenträgern (Lochkarten, Lochband, Magnetband)
- praktische Erfahrungen mit modernen Datenerfassungsanlagen
- theoretische und praktische Kenntnisse in maschineller Datenverarbeitung (Sortiermaschinen, Tabelliermaschinen, Hollerith- und Arithmasystem)
- Elemente der EDV

Daneben werden die für die allgemeine Berufsausbildung obligatorischen Fächer gelehrt.

<u>Technischer Rechner:</u>

Erforderliche Vorbildung: Besuch der Erweiterten Oberschule.

Die Ausbildung erfolgt zur Zeit in der Form: Abitur mit Facharbeiterbrief. Der zukünftige Technische Rechner erwirbt während der Berufsausbildung:

- Kenntnisse über einfache mathematische Lösungsverfahren (Algorithmen) und ihre Darstellung (Flußbildtechnik)
- Kenntnisse über Aufbau und Struktur von Ziffernrechenautomaten und deren Programmierung
- Erfahrungen in der praktischen Handhabung von Rechenautomaten und in der Erprobung von selbstgefertigten Programmen.

Im Berufsbild und Ausbildungsprogramm des Technischen Rechners sind in absehbarer Zeit Veränderungen zu erwarten. Der Beruf Technischer Rechner wird in der Regel als Vorstufe für eine weitere Qualifizierung betrachtet.

Mathematisch-Technischer Assistent:

Erforderliche Vorbildung: Abitur und Facharbeiterbrief (Technischer Rechner).

Die Ausbildung erfolgt im Abendstudium und dauert zwei Jahre.

Der zukünftige Mathematisch-Technische Assistent erwirbt während seiner Ausbildung:

- umfangreiche Kenntnisse in Mathematik
- spezielle Kenntnisse in Numerischer (Praktischer) Mathematik
- theoretische Grundlagen über mathematische Modelle in Ökonomie und Leitungstätigkeit
- Kenntnisse über Aufbau und praktische Handhabung problemorientierter Programmsprachen (z.B. ALGOL 60)
- umfangreiche Erfahrungen in der Bedienung von Rechenanlagen.

Ingenieur für Programmierung:

Erforderliche Vorbildung: Abgeschlossene Berufsausbildung und längere Tätigkeit in der Praxis.

Die Ausbildung erfolgt in einem zweijährigen Direktstudium an einer Fachschule für Programmierungsingenieure. (Solche Fachschulen befinden sich u.a. in Rodewisch und Dresden.)

Der zukünftige Ingenieur für Programmierung erwirbt während seiner Ausbildung (entsprechend der Spezialrichtung der Fachschule:

- Spezialkenntnisse in Mathematik und Rechentechnik
- technische Kenntnisse über den Aufbau von Rechenanlagen (Elektronik)
- umfangreiche Kenntnisse und praktische Handhabung von Programmierungssprachen (Maschinensprachen, maschinenorientierte Sprachen, problemorientierte Sprachen)
- Kenntnisse auf dem Gebiet der mathematischen Modellierung ökonomischer Prozesse.

Diplom-Mathematiker:

Erforderliche Vorbildung: Abitur

Die Ausbildung erfolgt an einer Universität oder Hochschule in einem 5-jährigen Direktstudium. Über die Ausbildung eines Diplom-Mathematikers wurde bereits in "Wurzel"-Nr.7/8/67 berichtet.

An der Friedrich-Schiller-Universität Jena wird in den nächsten zwei Jahren ein Rechenzentrum mit einer modernen Rechenanlage aufgebaut. Interessierte Leser, die die Absicht haben, einen der aufgeführten Berufe zu ergreifen, finden im Rechenzentrum der Universität ein sehr interessantes Betätigungsfeld.

H. Peuker
wissenschaftlicher Mitarbeiter
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

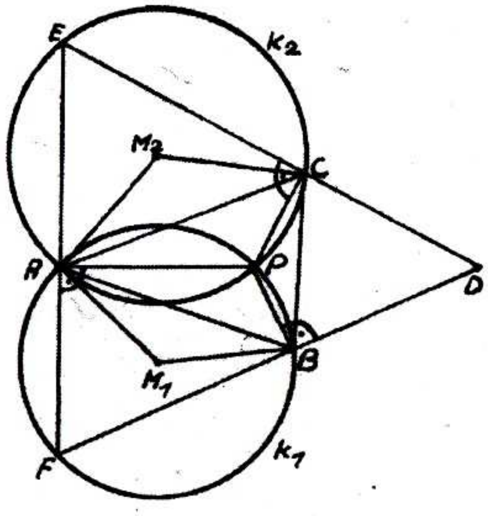
LÖSUNGEN

(P.12): (eingesandt von Hugo Reinhardt, EOS Heiligenstadt, Kl.12)

a) Es sei: $\overline{M_1A} = \overline{M_1B}$ $\quad \sphericalangle AM_1B = 120^\circ$
$\overline{M_2A} = \overline{M_2C}$ $\quad \sphericalangle AM_2C = 120^\circ$

M_1 bzw. M_2 seien die Mittelpunkte der Kreislinien k_1 bzw. k_2.

Der Schnittpunkt von k_1 und k_2 im Inneren des Dreiecks ΔABC sei P. Nach dem Peripheriewinkelsatz gilt: $\sphericalangle APB = \sphericalangle APC = 120^\circ$. Damit ist P der gesuchte Punkt von dem aus alle Seiten unter einem Winkel von 120° erscheinen.



Zwei Kreisbogen können sich nur zweimal schneiden (vorausgesetzt, daß ihre Mittelpunkte nicht aufeinander liegen). Da der eine Schnittpunkt von k_1 und k_2 der Eckpunkt A ist, kann es innerhalb von ΔABC nur einen Schnittpunkt von k_1 und k_2 geben.

b) D, E und F seien die Schnittpunkte der Geraden, die durch die Punkte A, B und C gehen und senkrecht zu $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ und $\overline{CP}$ verlaufen. Nach dem Peripheriewinkelsatz folgt, daß die Winkel $\sphericalangle AFB$ und $\sphericalangle AEC$ 60° betragen. Damit gilt auch $\sphericalangle$ BDC = 60° und Dreieck ΔDEF ist gleichseitig.

c) Jeder Punkt P_n im Inneren des Dreiecks ΔABC hat die gleiche Summe der Entfernungen zu den Seiten des Dreiecks ΔDEF.

Beweis: Man verbinde den Punkt P_n mit D, E und F. In den entstandenen 3 Teildreiecken gilt dann:

$$\frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot h_1}{2} + \frac{a \cdot h_2}{2} + \frac{a \cdot h_3}{2},$$ h = Höhe des ΔDEF,

h_1, h_2, h_3 - Abstände von den Dreieckseiten.

Hieraus folgt $h = h_1 + h_2 + h_3$ = konstant.

Da nach b) die Punkte A, B, C auf den Seiten des Dreiecks ΔDEF liegen, ist die Summe der Entfernungen der Punkte P_n zu A, B und C dann ein Minimum, wenn die Summe gleich h ist. Dies ist aber nur bei dem Punkt P der Fall.

(P.13): (eingesandt von H.-J. Riethmüller, EOS Heiligenstadt, Klasse 11)

Wird in beiden Gleichungen (nach dem Vietaschen Satz) x_1+x_2 durch p und $x_1 \cdot x_2$ durch q ersetzt, entsteht folgendes Gleichungssystem:

$$(1) \quad q - p - m = 0$$
$$(2) \quad q + mp + 1 = 0$$

Daraus ergibt sich:

$$p = -\frac{m+1}{m+1} = -1$$ (Die Division durch m + 1 ist wegen $m \neq -1$ möglich)

und $q = m - 1$

Die gesuchte quadratische Gleichung lautet also:

$$x^2 - x + m - 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1 - m} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} - m}$$

Hieraus folgt: 1) Wenn $m < \frac{5}{4}$: Beide Wurzeln sind reell,

2) Wenn $m = \frac{5}{4}$: Es existiert genau eine reelle Lösung.

(10.23): a) $x^5 + x^4 + x + 1 > 0$

$$x^4 \cdot (x + 1) + x + 1 > 0$$
$$(x^4 + 1) \cdot (x + 1) > 0$$

Hieraus folgt immer:

1. $x^4 + 1 > 0$
2. $x + 1 > 0$

und somit $x > -1$

b) $|\tan x| + |\cot x| < 2$

$$|\tan x| < 2 - \left|\frac{1}{\tan x}\right|$$
$$|\tan x| - 2 < -\left|\frac{1}{\tan x}\right|$$
$$\tan^2 x - 2|\tan x| + 1 < 0$$
$$(|\tan x| - 1)^2 < 0$$

Dieser Fall ist jedoch niemals möglich, d.h. für kein x ist diese Ungleichung erfüllt.

(eingesandt von Peter Kannemann, EOS Schleusingen, 10.Kl)

(11/12.23): Die Summenformel für die unendliche geometrische Reihe lautet: $S = \frac{a_1}{1-q}$

Nach Bedingung der Aufgabe soll $S = \frac{1}{7}$ sein, folglich

$$\frac{1}{7} = \frac{a_1}{1-q}$$
$$7a_1 + q = 1$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn $a_1 = \frac{1}{2^3}$ und $q = \frac{1}{2^3}$

Dann lautet die geometrische Reihe:

$$S = \frac{1}{2^3} + \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^3}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2^3}\right)^k + \ldots$$

Tatsächlich besitzt diese geometrische Reihe die Summe $\frac{1}{7}$ (wovon man sich leicht überzeugt). Man kann also aus den Zahlen:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

eine unendliche geometrische Reihe mit der Summe $\frac{1}{7}$ auswählen.

(eingesandt von Hugo Reinhardt, EOS Heiligenstadt, Klasse 12)

(11/12.24): Es ist zu zeigen, daß $4^n + 15n - 1$ für alle natürlichen Zahlen n durch 9 teilbar ist.

Es gilt also:

$$4^n + 15n - 1 = x \qquad (1)$$

$$(3 + 1)^n + 15n - 1 = x \qquad (2)$$

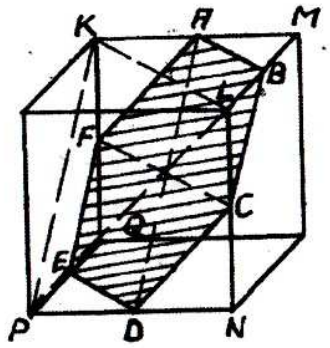
$$3^n + n\cdot 3^{n-1} + \binom{n}{2}3^{n-2} + \ldots + \binom{n}{2}3^2 + {} + n\cdot 3 + 1 + 15n - 1 = x$$

$$3^n + n\cdot 3^{n-1} + \ldots + \binom{n}{2}3^2 + 18n = x$$

$$3^2(3^{n-2} + n\cdot 3^{n-3} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2} + 2n) = x \qquad (3)$$

Aus Gleichung (3) ist zu erkennen, daß x durch 9 teilbar ist.
(eingesandt von Elisabeth Günther, EOS Weimar, Klasse $11B_1$)

(10.24): Durch die Eckpunkte K, L, P des gegebenen Würfels legen wir eine Ebene (die Schnittfläche ergibt ein gleichseitiges Dreieck). Eine zu dieser Ebene parallele Ebene legen wir durch den Punkt A, die Mitte der Kante KM. Die sich ergebende Schnittfläche ist ein ebenes Sechseck. Dieses Sechseck ist regelmäßig, weil alle 6 Seiten gleich der halben Flächendiagonale des Würfels, d.h. untereinander gleich sind, und weil die Innenwinkel, deren Schenkel zu den Seiten des Dreiecks KLP parallel sind, gleich dessen Außenwinkeln, d.h. gleich 120^0 sind.



(10.25): Nach Additionstheoremen gilt:

$$\cos(\tfrac{\pi}{6} + \alpha) = \cos\tfrac{\pi}{6}\cdot\cos\alpha - \sin\tfrac{\pi}{6}\cdot\sin\alpha$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\cos\alpha - \tfrac{1}{2}\sin\alpha$$
$$\cos(\tfrac{\pi}{6} - \alpha) = \cos\tfrac{\pi}{6}\cdot\cos\alpha + \sin\tfrac{\pi}{6}\cdot\sin\alpha$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\sin\alpha$$

Daraus folgt die Richtigkeit der Aussage.

5

68

WURZEL

schülerzeitung für mathematik

WURZEL - Schülerzeitung für Mathematik

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Die Zeitung erscheint monatlich zum Preis von 0,20 MDN. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Eike Hertel, Günter Horn
Mitarbeiter: K.Fischer, H.Meißner, N.Kuse, H.Peuker, H.Schirrmeister, L.Staiger, W.Ulbrich, R.Wackernagel

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

Primzahlen III (Schluß)

Es soll jetzt ein Verfahren beschrieben werden, wie man eine Primzahltafel aufstellen kann. Wir wollen alle Primzahlen angeben, die kleiner oder gleich einer gegebenen Zahl x sind. Falls x nicht allzu groß ist, kann man hierzu ein sehr altes und einfaches Verfahren benutzen:

Das Sieb des Eratosthenes: Stellen wir uns zum Beispiel die Aufgabe, alle Primzahlen ≤ 50 anzugeben. Wir schreiben zunächst alle natürlichen Zahlen von 2 bis 50 auf: 2, 3, 4, 5, 6, ..., 50. 2 ist Primzahl, wir lassen die 2 stehen und streichen alle Vielfachen von 2: 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49. Dann nehmen wir uns die 3 vor und streichen alle Vielfachen von 3: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49. Jetzt streichen wir alle Vielfachen von 5: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49. Streichen wir noch alle Vielfachen von 7: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. Stehen bleiben alle Primzahlen ≤ 50. Die Streichung der Vielfachen von 11, 13 usw. braucht nicht mehr vorgenommen zu werden, sie ist schon erfolgt; man bedenke $11^2 > 50$.

Ein interessantes und wichtiges Problem ist die Angabe der Anzahl aller Primzahlen $\leq x$. Üblicherweise bezeichnet man mit $\pi(x)$ jene Anzahlfunktion. So ist $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$, $\pi(4) = 2$, $\pi(5) = 3$, $\pi(50) = 15$. Das Sieb von Eratosthenes liefert uns eine

Methode, $\pi(x)$ zu bestimmen, wenn $\pi(\sqrt{x})$ bekannt ist. Streichen wir aus der Reihe der natürlichen Zahlen von 2 bis x alle Primzahlen $\leq \sqrt{x}$ und ihre Vielfachen weg, so bleiben die Primzahlen $> \sqrt{x}$ und $\leq x$ stehen. Ihre Anzahl ist $\pi(x) - \pi(\sqrt{x})$. (In unseren Beispiel mit $x = 50$ sind das die Primzahlen 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. $\pi(50) = 15$ und $\pi(\sqrt{50}) = \pi(8) = 4$ wegen $\sqrt{50} < 8$. Also ist $\pi(50) - \pi(\sqrt{50}) = 11$.) Nun bestimmen wir diese Anzahl auf andere Weise: Die Anzahl der Zahlen von 2 bis x ist $[x] - 1$. Dabei ist $[x]$ das größte Ganze von x (x braucht keine ganze Zahl zu sein!), z.B. ist $\left[\frac{5}{2}\right] = 2$, $[\sqrt{50}] = 7$. Da wir alle Vielfachen von 2 gestrichen haben, ist von $([x] - 1)$ $\left[\frac{x}{2}\right]$ abzuziehen. Ziehen wir weiter die Anzahl der Vielfachen von 3, $\left[\frac{x}{3}\right]$, ab, so haben wir die Anzahl der Vielfachen von $2\cdot 3$, $\left[\frac{x}{2\cdot 3}\right]$, zuviel abgezogen und müssen sie wieder hinzufügen. Bis dahin haben wir erhalten:

$$[x] - 1 - \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{2\cdot 3}\right].$$

Ziehen wir nunmehr die Anzahl der Vielfachen von 5, $\left[\frac{x}{5}\right]$, ab, so müssen wir entsprechend $\left[\frac{x}{2\cdot 5}\right]$, $\left[\frac{x}{3\cdot 5}\right]$ wieder hinzufügen. Das ist aber zu viel! Denn die Anzahl der Vielfachen von $2\cdot 3\cdot 5$ haben wir ja jetzt doppelt hinzugefügt. Also müssen wir sie einmal wieder abziehen, d.h. $\left[\frac{x}{2\cdot 3\cdot 5}\right]$. Damit sind wir jetzt auf

$$[x] - 1 - \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x}{2\cdot 3}\right] + \left[\frac{x}{2\cdot 5}\right] + \left[\frac{x}{3\cdot 5}\right] - \left[\frac{x}{2\cdot 3\cdot 5}\right]$$

gekommen. Und so geht das weiter, bis wir alle Primzahlen $\leq \sqrt{x}$ ausgeschöpft haben. Wir erhalten:

$$\pi(x) - \pi(\sqrt{x}) = [x] - 1 - \sum_{i} \left[\frac{x}{p_i}\right] + \sum_{i<j} \left[\frac{x}{p_i \cdot p_j}\right] - \sum_{i<j<k} \left[\frac{x}{p_i \cdot p_j \cdot p_k}\right] \pm \ldots$$

Die Reihe besteht aus $\pi(\sqrt{x})$ solcher Summen. Die Summation ist folgendermaßen zu verstehen: In der ersten Summe läuft i von 1 bis $\pi(\sqrt{x})$, d.h. in $\left[\frac{x}{p_i}\right]$ kommen alle Primzahlen $\leq \sqrt{x}$ nacheinander vor. In der zweiten Summe laufen ebenfalls i und j von 1 bis $\pi(\sqrt{x})$, aber es muß immer die Bedingung $i < j$ erfüllt sein. Usw.!
Berechnen wir nach dieser Formel $\pi(50)$:

$$\pi(50) = \pi(\sqrt{50}) + [50] - 1 - \sum_{i} \left[\frac{50}{p_i}\right] + \sum_{i<j} \left[\frac{50}{p_i \cdot p_j}\right] - \sum_{i<j<k} \left[\frac{50}{p_i \cdot p_j \cdot p_k}\right] + \sum_{i<j<k<l} \left[\frac{50}{p_i \cdot p_j \cdot p_k \cdot p_l}\right].$$

Primzahlen $\leq \sqrt{50}$: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$. $\pi(\sqrt{50}) = 4$.

Also: $\pi(50) = 4 + 49 - \left(\left[\frac{50}{2}\right] + \left[\frac{50}{3}\right] + \left[\frac{50}{5}\right] + \left[\frac{50}{7}\right]\right) + \left(\left[\frac{50}{2\cdot 3}\right] + \right.$

$$+ \left[\frac{50}{2\cdot 5}\right] + \left[\frac{50}{2\cdot 7}\right] + \left[\frac{50}{3\cdot 5}\right] + \left[\frac{50}{3\cdot 7}\right] + \left.\left[\frac{50}{5\cdot 7}\right]\right) - \left(\left[\frac{50}{2\cdot 3\cdot 5}\right] + \right.$$

$$+ \left[\frac{50}{2\cdot 3\cdot 7}\right] + \left[\frac{50}{2\cdot 5\cdot 7}\right] + \left.\left[\frac{50}{3\cdot 5\cdot 7}\right]\right) + \left[\frac{50}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\right]$$

$$= 53 - (25 + 16 + 10 + 7) + (8 + 5 + 3 + 3 + 2 + 1) -$$

$$- (1 + 1 + 0 + 0) + 0$$

$$= 53 - 58 + 22 - 2 = 15$$

Unregelmäßigkeiten in der Primzahlverteilung:

Die Aussiebung läßt die Vermutung aufkommen, daß die Primzahlen beim Fortschreiten in der Folge der natürlichen Zahlen immer seltener werden. Jedenfalls treten Unregelmäßigkeiten auf, die sich jedem Gesetz zu entziehen scheinen. Das wird unterstützt durch die Tatsache, daß man in der Folge der Primzahlen beliebig große Lücken entdecken kann. So befindet sich unter den n aufeinanderfolgenden Zahlen $(n+1)! + 2$, $(n+1)! + 3$, ..., $(n+1)! + (n+1)$ keine einzige Primzahl, da die erste durch 2, die zweite durch 3, die letzte durch n+1 teilbar ist (Es ist $k! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k$). Andererseits gibt es Primzahlen p, p+2 mit dem minimalen Abstand 2. Beispiele solcher Primzahlzwillinge sind 3,5; 5,7; 11,13; 17,19; 29,31; 41,43; 2309,2311. Wir wissen bis heute nicht, ob es unendlich oder nur endlich viele solcher Primzahlzwillinge gibt. Trotz dieser Unregelmäßigkeiten gehorcht die Primzahlfunktion $\pi(x)$ einem Gesetz. Schon Gauß vermutete, daß $\pi(x)$ für sehr große x sich ungefähr wie $\frac{x}{\log x}$ verhält(*). Einen ersten Schritt in dieser Richtung tat 1850 Tchebychef. Er zeigte, daß für hinreichend große x die Ungleichungen

$$\frac{7}{8}\,\frac{x}{\log x} < \pi(x) < \frac{9}{8}\,\frac{x}{\log x}$$

richtig sind. Mit ziemlich tiefliegenden funktionentheoretischen Hilfsmitteln bewiesen 1896 Hadamard und de la Vallée-Poussin

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}\text{, d.h. } \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\cdot \log x}{x} = 1.$$

Lange Zeit glaubte man nicht an die Existenz eines elementaren Beweises für diesen Primzahlsatz, so daß seine Entdeckung im Jahre 1948 durch Selberg und Erdös eine echte mathematische Sensation bedeutete. – Über die Annäherung von $\pi(x)$ durch $\frac{x}{\log x}$

gibt folgende Tabelle einigen Aufschluß:

x	$\pi(x)$	$\frac{\pi(x)\cdot\log x}{x}$
10^3	168	1,159
10^4	1 229	1,132
10^5	9 592	1,104
10^6	78 498	1,084
10^7	664 579	1,071
10^8	5 761 455	1,061
10^9	50 847 478	1,053

(*) Unter log x verstehen wir immer den natürlichen Logarithmus.

Dr. rer. nat. habil.
E. Krätzel

Dozent an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Aufgaben (Serie 5/68)

9. Klasse:

(9.31) Man löse folgende Ungleichung:

$$|2 - x| + |4 - x| - 1 \leq 0.$$

(9.32) Es ist zu zeigen, daß ein konvexes Viereck, das eine Symmetrieachse besitzt, ein Sehnen- oder Tangentenviereck ist.

10. Klasse:

(10.31) Es seien a, b und c ganze Zahlen. Man zeige

$$\left[\frac{\left[\frac{a}{b}\right]}{c}\right] = \left[\frac{a}{b\cdot c}\right].$$

(10.32) Drei Primzahlen (größer als 10) bilden eine arithmetische Folge. Zu zeigen ist, daß die Differenz der Folge durch 6 teilbar ist.

11/12. Klasse:

(11/12.31) Man beweise, daß für alle natürlichen n ($n \geq 2$) folgende Gleichung gilt:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

(11/12.32) Man schneide ein regelmäßiges Tetraeder so, daß ein Quadrat als Schnittfläche entsteht.

Preisaufgabe (P. 17)

Es wird in Sachen Brown, Jones und Smith verhandelt. Im Laufe der Untersuchungen machten diese folgende Aussagen:

Brown: "Ich beging die Tat nicht."
"Jones war es ebenfalls nicht."

Jones: "Brown war es nicht."
"Smith war der Täter."

Smith: "Ich habe es nicht getan."
"Brown tat es."

Es ist bekannt, daß einer zweimal lügt, ein anderer zweimal die Wahrheit sagt, der dritte einmal lügt und einmal die Wahrheit sagt. Wer war der Täter?

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" bis zum 30. des jeweiligen Erscheinungsmonats (Datum des Poststempels) an unsere Adresse einzuschicken.

Ausbildung an der Sektion Mathematik

Die Meisterung der wissenschaftlich-technischen Revolution verlangt in steigendem Maße die Anwendung mathematischer Methoden in der Praxis und damit den Einsatz von Mathematikern in allen Bereichen der Volkswirtschaft. In der Planung unserer Republik ist bis 1980 der Einsatz von 4000 elektronischen Datenverarbeitungsanlagen vorgesehen. Wenn man annimmt, daß pro Anlage nur 3,5 Mathematiker benötigt werden, ist klar ersichtlich, daß der enorme Zuwachs an mathematischen Kadern ein dringendes Bedürfnis ist. Die steigenden Anforderungen auf dem Gebiet der Mathematik verlangen auch eine enorme Intensivierung des Mathematikunterrichts in der Schule. Wie schnell es gelingt, die Mathematik als starkes Hilfsmittel in allen Bereichen unseres gesellschaftlichen Lebens einsetzen zu können, hängt davon ab, inwieweit es auch künftig in wachsendem Maße hochqualifizierte Mathematiklehrer an den Schulen geben wird, die eine moderne mathematische Denkweise zum Allgemeingut aller werden lassen. Diese Entwicklung bringt für die Sektion Mathematik große Aufgaben in der Ausbildung und Forschung mit sich. Über die Entwicklung der Studentenzahl, die im Hauptfach Mathematik studieren, geben folgende Tabellen auskunft:

T a b e l l e I	Mathe-Diplom	Mathe-Physik-Lehrer	insgesamt
Zahl der immatrikulierten Studenten 1962	20	30	50
ab 1969 werden jährlich immatrikuliert	80	120	200
T a b e l l e II			
Gesamtzahl der Studenten, die im Hauptfach Mathematik studieren			
1968	193	161	354
1972	400	480	880

In den folgenden Ausführungen sollen der Ausbildungsgang eines Diplom-Mathematikers, bzw. eines Mathematik-Physik-Lehrers, sowie die Einsatzmöglichkeiten nach Beendigung des Studiums dargelegt werden. Dabei werden wir auf die Ausbildung in der Elektronischen Datenverarbeitung nicht eingehen (siehe dazu "Wurzel" Nr.4/68).

Die Erfahrung lehrt, daß es für einen zukünftigen Mathematiker oder Lehrer nicht ausreicht, nur über gutes mathematisches Wissen zu verfügen. Von einem Absolventen unserer Universität wird deshalb verlangt, daß er über eine hohe Allgemeinbildung verfügt und die Gesetzmäßigkeiten unserer gesellschaftlichen Entwicklung voll begreift, um seine Kenntnisse für die Meisterung aller organisatorischen und ökonomischen Probleme der wissenschaftlich-technischen Revolution nutzbar machen zu können. Dementsprechend ist das Studium nicht auf die Mathematik allein beschränkt. Das Grundstudium eines Diplom-Mathematikers mit 5-jähriger Ausbildungszeit erstreckt sich über 3 Jahre und umfaßt folgende Ausbildungsbereiche:

Differential-Integralrechnung, Lineare Algebra, Algebra, Nume-

rische Mathematik, EDV, Funktionentheorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Experimentalphysik, Mechanik, Elektrodynamik, Dialektischer und Historischer Materialismus, Marxistische Philosophie, Politische Ökonomie, 2 Sprachen, Sport (wahlweise).
In den entsprechenden Vorlesungen werden die Grundlagen vermittelt, die jeder Studierende braucht, um später auf einem Spezialgebiet eine hohe Qualifikation erlangen zu können.
Die Ausbildung der Diplom-Mathematik- und Lehrerstudenten erfolgt in der Regel getrennt. Der Lehrstoff ist in beiden Ausbildungsbereichen schon vom ersten Studienjahr an auf spezielle Anforderungen zugeschnitten. Für die Lehrerstudenten stehen neben den oben genannten Vorlesungen noch spezielle Physikvorlesungen, Psychologievorlesungen, Hospitationen und ein Pädagogisches Einführungspraktikum (nach dem 3.Semester) im Ausbildungsprogramm.
Die Lehrerstudenten, deren Gesamtstudienzeit 4 Jahre beträgt, absolvieren nach dem 3.Jahr ein 3-monatiges Schulpraktikum. Hier werden sie unmittelbar an den Schulen auf ihren verantwortungsvollen Beruf des Lehrers vorbereitet. Das letzte halbe Jahr dient ihnen vor allem zum Anfertigen ihrer Staatsexamensarbeit. Außerdem besteht in diesem Semester die Möglichkeit, durch den Besuch von Spezialvorlesungen noch etwas tiefer in einzelne Gebiete der Mathematik (z.B. Zahlentheorie, Geometrie) einzudringen, als das im Laufe des Grundstudiums der Fall ist.
Für Diplom-Mathematiker schließt die Grundausbildung mit einem 6-wöchigen Berufspraktikum in verschiedenen Betrieben (z.B. VEB Carl Zeiss Jena, VEB Keramische Werke Hermsdorf) ab. Die letzten beiden Jahre sind einer spezialisierten Ausbildung in einem Teilgebiet der Mathematik gewidmet. Das Ziel dieser Ausbildung ist es, den Studenten auf einem Teilgebiet der modernen Mathematik so weit zu führen, daß er in seiner Diplomarbeit ein Forschungsthema bearbeiten kann. D.h., nach 5 Jahren soll sich der Student auf einem Spezialgebiet an der oberen Grenze des bisher Bekannten befinden und bereits mithelfen, in wissenschaftliches Neuland vorzudringen. An unserer Sektion besteht die Möglichkeit einer Spezialisierung in Wahrscheinlichkeitsrechnung, Numerischer Mathematik, Analysis und Kybernetik. Dabei werden in Zukunft die Abteilungen Numerische Mathematik und Wahrscheinlich-

keitsrechnung den größten Teil der Studenten erfassen. Die Einsatzmöglichkeiten der in diesen Richtungen spezialisierten Studenten sind sehr vielfältig. Bereits heute können unsere Absolventen aus einer Vielzahl günstiger Angebote auswählen. Auch in Zukunft werden immer mehr Mathematiker mit guter Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Numerischen Mathematik in allen Gebieten der Wirtschaft (Großbetriebe, Verwaltungszentren, staatliche Planung) und in den Forschungsinstituten aller Wissensgebiete, wie z.B. Medizin, Landwirtschaft, Biologie, Physik, usw., gebraucht.

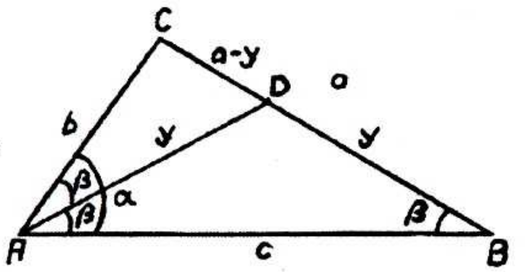
Da ein 5-jähriges Studium nicht ausreicht, umfassende mathematische Kenntnisse zur Befriedigung aller Bedürfnisse der Wirtschaft, der Forschung und der Entwicklung eines leistungsfähigen Hochschulkadernachwuchses zu vermitteln, gibt es für die erfolgreichsten Studenten weitere Formen einer schnellen Ausbildung, die mit der Promotion (Erlangung des Doktorgrades) abschließen. Die seit langem üblichen Aspiranturen erstrecken sich über drei Jahre. Sie schließen sich unmittelbar an die Diplomprüfungen an. Bis zur Promotion bedeutet das eine Gesamtstudienzeit von 8 Jahren. Um der Forderung unserer Gesellschaft nach hochqualifizierten Mathematikern schneller nachkommen zu können, sollen für besonders begabte Studenten zwei zusätzliche Studienjahre eingerichtet werden, die den Charakter eines Forschungsstudiums tragen und den Studenten ohne vorherigen Erwerb eines Diploms zur Promotion führen.

Auf der anderen Seite wird daran gedacht, einem Teil der Studenten ein 4-jähriges Studium zu ermöglichen. Ohne ein Diplom würden diese Studenten die Universität nach Abschlußprüfungen verlassen und könnten zum Beispiel als Mathematiker mit mittlerer Qualifikation einen Teil der Aufgaben bei der Bedienung von Rechenautomaten übernehmen.

H. Oswald
wiss. Assistent
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Univers.
Jena

(P.14): (eingesandt von Rolf Schmidt, Spezialschule des VEB Carl Zeiss Jena, Klasse 10)

$\overline{AD}$ ist Winkelhalbierende des $\sphericalangle\ \alpha$, $\overline{BD} = y$, $\overline{CD} = a - y$. Das Dreieck ΔABD ist gleichschenklig, da $\sphericalangle\ ABD = \beta$ und $\sphericalangle\ BAD = \frac{1}{2}\alpha = \beta$, folglich gilt $\overline{AD} = \overline{BD} = y$.



$\Delta ADC \sim \Delta ABC$ da 1. $\sphericalangle\ DCA = \sphericalangle\ BCA$

2. $\sphericalangle\ CAD = \frac{1}{2}\alpha = \beta = \sphericalangle\ ABC = \beta$

Es gelten folglich die Proportionen:

I. $b : c = (a - y) : y$

II. $a : b = b : (a - y)$

aus I. folgt:

$$by = ca - cy$$

$$ca = y(b + c) \quad \text{folglich } y = a \cdot \frac{c}{b + c}$$

aus II. folgt:

$$b^2 = a^2 - ay$$

I. in II. eingesetzt ergibt:

$$b^2 = a^2 - a^2 \cdot \frac{c}{b + c}$$

$$b^2 = a^2\left(1 - \frac{c}{b + c}\right) = a^2\left(\frac{b}{b + c}\right)$$

$$a^2 = b(b + c)$$

$$\overline{BC} = a = \sqrt{b(b + c)}$$

(9.22): Es sei $d = ax_1 + by_1$. Nimmt man an, daß a nicht durch d teilbar ist, so kann man a in der Form $a = qd + r$ mit $0 < r < d$ darstellen. Daraus folgt $r = a - qd$. Setzt man obigen Term für d ein, so gilt

$$r = a - q(ax_1 + by_1) = a(1 - qx_1) + b(-qy_1)$$

$$= ax_2 + by_2$$

mit $x_2 = 1 - qx_1$ und $y_2 = -qy_1$

Da $r < d$, ist d also nicht die kleinste positive Zahl der Form $ax + by$. Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme. a ist also durch d teilbar. Analog zeigt man, daß b durch d teilbar ist. d ist also ein gemeinsamer Teiler von a und b. Man zeigt noch, daß jede Zahl der Form $ax + by$ durch (a,b) teilbar ist.

Es gilt
$$ax + by = (a,b)\cdot sx + (a,b)\cdot ty = (a,b)(sx + ty)$$

Daraus folgt dann $d = (a,b)$.

(9.24): (eingesandt von Reinhard Beyer, EOS Pößneck, Klasse 9)

1. Alle drei Freunde können weiße, schwarze und rote Haare besitzen.
2. Haarfarbe (aller drei Freunde) ist nicht mit dem Namen identisch (\).
3. Aussage von Weiss: "Ja du hast recht" (Antwort für den Schwarzhaarigen (X)).

Hieraus ergibt sich folgende Tabelle:

Bildhauer Weiss	Geiger Schwartz	Maler Rot
$\cancel{w}$	w	$\cancel{w}$
$\cancel{s}$	$\cancel{s}$	$\boxed{s}$
r	$\cancel{r}$	$\cancel{r}$

Der Maler ist also schwarzhaarig.

(9.25): (eingesandt von Hans Rainer Schumann, EOS Naumburg, Klasse 9)

$$\text{I.}\quad x^2 + y^2 = 68$$
$$\text{II.}\quad xy = 16 \qquad (\text{folglich } x \neq 0,\ y \neq 0)$$
$$\text{II}'.\quad y = \frac{16}{x}$$

II'. eingesetzt in I. ergibt:

$$x^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2 = 68$$
$$x^2 + \frac{256}{x^2} = \frac{x^4 + 256}{x^2} = 68$$
$$x^4 + 256 = 68x^2$$
$$x^4 + 256 - 68x^2 = 0$$
$$x^2 = 34 \pm \sqrt{1156 - 256}$$
$$x^2 = 34 \pm \sqrt{900}$$
$$\underline{\underline{x = \pm\sqrt{34 \pm 30}}}$$

$x_1 = 8;\quad y_1 = 2 \qquad x_2 = 2;\quad y_2 = 8$

$x_3 = -8$; $y_3 = -2$ $x_4 = -2$; $y_4 = -8$

Es ergeben sich also folgende Lösungspaare und nur diese: $[8,2]$, $[2,8]$, $[-8,-2]$, $[-2,-8]$

(9.26): Es ist $11^{10} - 1 = (11-1)(11^9 + 11^8 + \ldots + 11 + 1)$

In der zweiten Klammer steht ein Ausdruck von 10 Summanden, die alle auf 1 enden. Folglich endet die Summe auf die Ziffer 0. Da auch der erste Faktor durch 10 teilbar ist, muß das Produkt ein Vielfaches von 100 sein.

(10.26): (eingesandt von Hans Rainer Schumann, EOS Naumburg, Klasse 9)

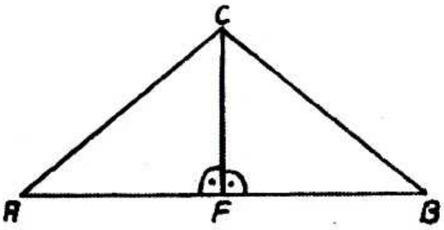
Im Dreieck ΔABC sei die Winkelhalbierende $\overline{CF}$ gleichzeitig Mittelsenkrechte:

Dann gilt: $\sphericalangle ACF = \sphericalangle FCB$ und $\overline{CF} \perp \overline{AB}$

folglich $\sphericalangle AFC = \sphericalangle CFB = 90^\circ$

Hieraus folgt für die Dreiecke ΔAFC und ΔFBC:

1. Die Dreiecke stimmen in einer Seite, $\overline{CF}$, überein.
2. Die Dreiecke stimmen in zwei der Seite $\overline{CF}$ anliegenden Winkeln überein:
   a. $\sphericalangle ACF = \sphericalangle FCB$
   b. $\sphericalangle AFC = \sphericalangle CFB = 90^\circ$



Dann folgt nach dem Kongruenzsatz:

$\Delta AFC \cong \Delta CFB$

Hieraus folgt $\overline{AC} = \overline{BC}$, d.h. ΔABC ist gleichschenklig.

(11/12.25): (eingesandt von Hugo Reinhardt, EOS Heiligenstadt, Klasse 12)

Beweis durch vollständige Induktion:

Für $n = 2$ ist die Behauptung richtig. Ich nehme nun an, die Behauptung sei für $n = k$ richtig, d.h. es gilt: $S_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^k} > \frac{k}{2}$.

Ich beweise nun, daß die Behauptung auch für $n = k+1$ richtig ist:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{1+2^k} + \frac{1}{2+2^k} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}} > S_k + 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$S_{k+1} > S_k + \frac{1}{2} = \frac{k}{2} + \frac{1}{2}\text{, also } S_{k+1} > \frac{k+1}{2}$$

Damit ist die Behauptung für jedes n richtig.

6
68

WURZEL

schülerzeitung für
mathematik

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Die Zeitung erscheint monatlich zum Preis von 0,20 MDN. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Eike Hertel, Günter Horn
Mitarbeiter: K.Fischer, H.Meißner, N.Kuse, H.Peuker, H.Schirrmeister, L.Staiger, W.Ulbrich, R.Wackernagel

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

Einführung in die Wahrscheinlichktsrechnung I

In der Natur gibt es Vorgänge, deren Ausgang ungewiß ist. Das heißt, wenn der Vorgang unter bestimmten Bedingungen abläuft, so kann man nicht mit Bestimmtheit vorhersagen, welches Ergebnis eintritt. Man sagt auch, daß der Vorgang zufällig abläuft. Ein einfaches Beispiel für einen solchen zufälligen Vorgang ist das Würfeln mit einem Würfel. Der Würfel wird in einen Würfelbecher gelegt, dieser wird mehr oder weniger stark geschüttelt, und zuletzt wird der Becher umgestülpt. Das Ergebnis eines solchen Vorgangs wird durch die Augenzahl bestimmt, die auf der Oberseite des Würfels zu sehen ist. Unter den oben beschriebenen Umständen ist es nun unmöglich, mit Bestimmtheit vorherzusagen, welches Ergebnis eintritt. Das bedeutet nicht, daß der Vorgang an sich zufällig ist, denn nach den Gesetzen der Mechanik läßt sich bei genauester Kenntnis der Umstände, unter denen das Würfeln stattfindet, das Ergebnis eindeutig vorhersagen. Es ist also hier die Unkenntnis eines Teils dieser Umstände, die uns zwingen, den Vorgang als zufällig zu betrachten.
Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich mit der mathematischen Beschreibung solcher zufälligen Vorgänge. Was mathematische Beschreibung ist, wird in folgendem klar werden.

<u>Das Elementarereignis</u>

Als Elementarereignis bezeichnen wir ein mögliches Ergebnis des zufälligen Vorgangs. Beim Würfeln ist jede der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 ein Elementarereignis. Wir sagen auch: Die Menge der Elementarereignisse ist $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Die erste und leichteste Aufgabe bei der mathematischen Beschreibung eines zufälligen Vorgangs ist die Bestimmung der Menge E der Elementarereignisse. Beim Würfeln hat die Menge E endlich viele Elemente. [Das muß nicht unbedingt der Fall sein. Wenn wir zum Beispiel die Brenndauer einer Glühlampe untersuchen (indem wir diese Brenndauer als zufällig ansehen), so kommen im Prinzip alle möglichen Zeiten in Betracht. Die Menge E enthält hier unendlich viele Elemente.] Wir betrachten ein weiteres Beispiel. Das Ziehen der 6 Zahlen bei der Wettart "6 aus 49" ist ein zufälliger Vorgang. (Von der Zusatzzahl sei hier einmal abgesehen.) Ein Elementarereignis ist hier jede Auswahl von 6 Zahlen aus 49 Zahlen. Die Reihenfolge, in der die Zahlen gezogen werden, spielt hier keine Rolle. Folglich können wir ein Elementarereignis durch eine Menge der folgenden Form kennzeichnen: $e = \{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6\}$ wobei die n_i ganze Zahlen sind und $1 \le n_i \le 49$ gilt. Die Menge E besteht also aus Elementen der Form e. Diese Elemente e sind selbst auch wieder Mengen. Nach den Rechenregeln der Kombinatorik kann man ausrechnen, daß die Menge E $\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\ 983\ 816$ Elemente hat.

Das Ereignis

Wir kommen wieder auf das Beispiel des Würfelns zurück. Man kann zum Beispiel beobachten, ob die Augenzahl kleiner oder gleich 3 ist. Das tritt ein, wenn das Ergebnis eine 1, eine 2 oder eine 3 ist. Anders ausgedrückt: Wenn wir das Ergebnis eines Würfelvorgangs mit e bezeichnen, so beobachtet man, ob e zur Menge A (mit $A = \{1, 2, 3\}$) gehört. Man stellt also die Frage: Ist $e \in A$? (lies: ist e Element von $\{1, 2, 3\}$?). Wir stellen fest, daß die Menge A enthalten ist in der Menge E. Das soll nichts weiter bedeuten, als daß jedes Element von A auch ein Element von E ist. Man schreibt auch $A \subseteq E$ (lies: A enthalten in E). Zum Beispiel ist $1 \in A$ und auch $1 \in E$.

D e f i n i t i o n:

Jede Menge A, die in E enthalten ist ($A \subseteq E$), heißt ein Ereignis.

Wir sagen nun, daß bei einem zufälligen Vorgang das Ereignis A eingetreten ist, wenn das Ergebnis des zufälligen Vorgangs ein Element von A ist.

Mit dem Begriff "Ereignis" verbindet sich folgende Vorstellung: Man kann jeden beliebigen Tatbestand, den man an dem zufälligen Vorgang beobachten will, dadurch beobachten, daß man feststellt, ob das Ergebnis des zufälligen Vorgangs in einer bestimmten Menge $A \subseteq E$ liegt. Wenn man zum Beispiel beobachten will, ob die Augenzahl beim Würfeln eine gerade Zahl ist, so beobachtet man, ob das Ergebnis in der Menge $A = \{2, 4, 6\}$ liegt.
Die Elementarereignisse sind ebenfalls Ereignisse (im oben definierten Sinn). Es gilt nämlich $\{2\} \subseteq E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ oder $\{5\} \subseteq E$. Allgemein: $\{n\} \subseteq E$ mit $1 \leq n \leq 6$.

Wolfgang Radecke
Student an der Sektion Mathematik (Abt. Wahrscheinlichkeitsr.) der Friedr.-Schiller-Universität Jena

Aufgaben (Serie 6/68)

9.Klasse:

(9.33) Man bestimme in einem konvexen Viereck ABCD den geometrischen Ort aller Punkte O im Inneren von ABCD, für die die Fläche der Vierecke OBCD und OBAD gleich ist.

(9.34) Man beweise die Ungleichung
$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

10.Klasse:

(10.33) Man löse die Gleichung
$$(\tan x)^{\sin x} = (\cot x)^{\cos x}$$

(10.34) Man beweise, daß sich das Polynom $(x - a)^2(x - b)^2 + 1$. (a und b ganze Zahlen) in ein Produkt zweier Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten zerlegen läßt.

11/12.Klasse:

(11/12.33) Wenn die Zahlen a^2, b^2, c^2 ($a^2 \neq b^2$) eine arithmetische Folge bilden, so gilt dies ebenfalls für $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$.

(11/12.34) Ist es möglich, eine Potenz von 3 zu finden, die auf die Ziffern 0001 endet?

Preisaufgabe (P. 18)

Gegeben seien n Geraden in der Ebene, von denen keine zwei parallel sind. Es ist bekannt, daß durch den Schnittpunkt von je zwei Geraden noch eine dritte Gerade geht. Man beweise, daß alle Geraden durch einen Punkt gehen!

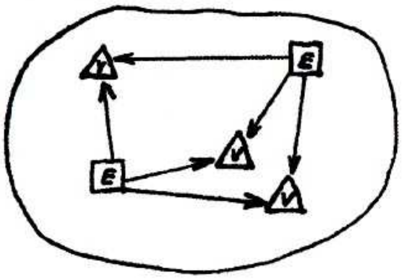
Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" bis zum 30. des jeweiligen Erscheinungsmonats (Datum des Poststempels) an unsere Adresse einzuschicken.

Einführung in die Rechentechnik I

Ziel der mit diesem Beitrag eröffneten Fortsetzungsreihe ist es, den interessierten Leser in die Problematik der digitalen Rechentechnik und Elektronischen Datenverarbeitung einzuführen.
Völlig zu Recht werden die Anwendung der Rechentechnik und der Einsatz von Datenverarbeitungsanlagen zu Schwerpunktaufgaben bei der weiteren Entwicklung unserer sozialistischen Wirtschaft erklärt. Diese zur Zeit sehr aktuellen Disziplinen der Mathematik gestatten es, Prozesse der Okonomie, Technik, Planung und Leitung wissenschaftlich zu durchdringen und mit hohem Effekt zu gestalten. Ein einfaches Einführungsbeispiel soll zeigen, wie erfolgreich die Mathematik bei der Lösung ökonomischer Aufgaben angewendet werden kann.

<u>Beispiel 1:</u> Das klassische Transportproblem
In einem bestimmten Territorium (Kreis, Bezirk usw.) ist ein Produkt von Erzeugern zu Verbrauchern zu transportieren (siehe Skizze). Solche Transporte können sein: Zementtransport von Zementwerken zu Baustellen, Kohletranport von Brikettfabriken zu den Lagerplätzen des Kohlehandels. Ein Transportbetrieb wird beauftragt, den Transport des Produkts so zu organisieren und durchzuführen, daß der Bedarf eines jeden Verbrauchers gedeckt

und die Lieferkapazität keines Erzeugers überschritten wird. Welche Überlegungen wird der Transportbetrieb anstellen?



Er wird versuchen, den Transportauftrag unter Einhaltung der bereits formulierten Bedingungen so rationell als möglich, d.h. mit einem minimalen Aufwand an Transportkosten zu erledigen. Dabei können als Transportkosten in Frage kommen: Kosten für verbrauchten Kraftstoff, der für die Ausführung des Transportauftrags erforderliche Zeitaufwand u.a. Im Beispiel soll als Maß für den Transportaufwand die Einheit tkm (Tonnenkilometer) benutzt werden, ein Maß, das in Kraftverkehrsbetrieben häufig verwendet wird.

Nachdem das Problem der Transportaufgabe inhaltlich formuliert ist, wird in einer nächsten Etappe ein mathematisches Modell aufgebaut. Das bisher in Worte gefaßte Transportproblem ist durch mathematische Größen, Gleichungen usw. auszudrücken.

Zunächst werden einige günstige Bezeichnungen gewählt.

Erzeuger: $E_1, E_2, \ldots, E_m$ Es mögen m Erzeuger vorhanden sein.

Verbraucher: $V_1, V_2, \ldots, V_n$ Die Anzahl n der Verbraucher wird in der Regel größer sein als die Anzahl der Erzeuger.

Lieferkapazität des Erzeugers E_i: a_i $\quad i = 1, 2, \ldots, m$

Bedarf des Verbrauchers V_j: b_j $\quad j = 1, 2, \ldots, n$

Menge des zu transportierenden Produkts vom Erzeuger E_i zum Verbraucher V_j: x_{ij} $\quad i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$

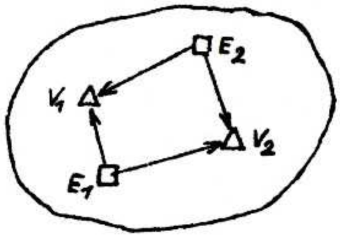
Die Werte dieser doppelt indizierten Größen sind gesucht. Der erste Index gibt die Nummer des Erzeugers, der zweite die des Verbrauchers an.

Transportaufwand für den Transport einer Einheit des zu transportierenden Produkts von E_i nach V_j: c_{ij} $\quad i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$

Diese Werte müssen gegeben sein, damit ein Vergleich einzelner Transportvarianten bezüglich des Aufwands angestellt werden kann. Die Indizes i, j sind wie bei den x_{ij} zu deuten.

Es ist nun möglich, das gestellte Transportproblem mathematisch zu formulieren. Der Einfachheit halber wird zunächst ein Spezialfall mit $m = n = 2$ betrachtet. E_1 liefert an V_1 x_{11} Einheiten und an V_2 x_{12} Einheiten des Produkts.

Die Gesamtmenge $x_{11} + x_{12}$, die E_1 liefert, darf die Lieferkapazität a_1 nicht überschreiten.



Folglich gilt:

$$x_{11} + x_{12} \leq a_1$$

Analoge Betrachtungen bezüglich E_2 liefern:

$$x_{21} + x_{22} \leq a_2$$

Andererseits erhält V_1 von E_1 x_{11} Einheiten des Produkts und von E_2 x_{21} Einheiten. Die nach V_1 transportierte Gesamtmenge $x_{11} + x_{21}$ muß mindestens gleich dem Bedarf von V_1 sein, also:

$$x_{11} + x_{21} \geq b_1$$

Entsprechend ergibt sich für V_2: $x_{12} + x_{22} \geq b_2$

Sicher ist es sinnvoll zu fordern, daß alle zu transportierenden Mengen nichtnegativ sind:

$$x_{11} \geq 0,\ x_{12} \geq 0,\ x_{21} \geq 0,\ x_{22} \geq 0$$

Die ökonomische Interpretation negativer Transportmengen würde seltsame und unreale Effekte liefern (Transporte vom Verbraucher zum Erzeuger). Der Gesamttransportaufwand kann folgendermaßen dargestellt werden:

Unter der Annahme, daß sich der Transportaufwand proportional zur transportierten Menge verändert gilt:

$$\begin{array}{lcl} E_1 \rightarrow V_1 & : & c_{11} \cdot x_{11} \\ E_2 \rightarrow V_1 & : & c_{21} \cdot x_{21} \\ E_1 \rightarrow V_2 & : & c_{12} \cdot x_{12} \\ E_2 \rightarrow V_2 & : & c_{22} \cdot x_{22} \end{array}$$

Gesamttransportaufwand:

$$z = c_{11} \cdot x_{11} + c_{12} \cdot x_{12} + c_{21} \cdot x_{21} + c_{22} \cdot x_{22}$$

Gesucht wird eine solche Transportvariante, für die z einen minimalen Wert annimmt.

Es ist leicht nachzuprüfen, daß die Arbeitshypothese über die Proportionalität zwischen Transportaufwand und transportierter Menge bei einer ganzen Reihe von praktischen Beispielen nicht zulässig ist. Durch passende Wahl der Maßeinheit für die zu transportierende Menge läßt sich die Proportionalität aber in den meisten Fällen erzielen (z.B. statt Maßeinheit: t Zement – Maßeinheit: LKW-Ladung Zement). Die Zusammenstellung aller mathematischen Beziehungen zum Transportproblem ergibt:

$$z = c_{11} \cdot x_{11} + c_{12} \cdot x_{12} + c_{21} \cdot x_{21} + c_{22} \cdot x_{22} \longrightarrow \min$$

Nebenbedingungen:

$$x_{11} + x_{12} \leq a_1$$
$$x_{21} + x_{22} \leq a_2$$
$$x_{11} + x_{21} \geq b_1$$
$$x_{12} + x_{22} \geq b_2$$
$$x_{11} \geq 0,\ x_{12} \geq 0$$
$$x_{21} \geq 0,\ x_{22} \geq 0$$

Gegeben:

c_{11} , c_{12} , c_{21} , c_{22}
a_1 , a_2 , b_1 , b_2

Gesucht:

x_{11} , x_{12} , x_{21} , x_{22}
z_{min}

Die allgemeine Gestalt des klassischen Transportproblems lautet folglich:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \longrightarrow \min$$

Nebenbedingungen:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Es ist Aufgabe des Mathematikers, das Transportproblem zu analysieren und folgende Fragen zu beantworten:

1. Unter welchen Bedingungen ist das Problem lösbar?
2. Ist die Lösung, falls sie existiert, eindeutig?
3. Nach welchem effektiven Verfahren kann die Lösung konstruiert werden?

H. Peuker
wissenschaftlicher Mitarbeiter
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

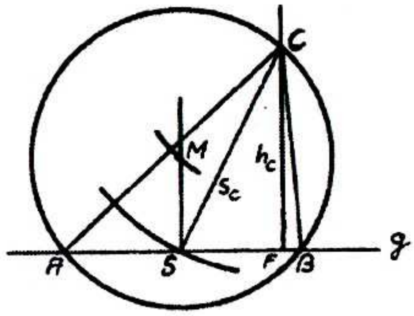
Lösungen

Lösungsbesprechung zur Ferienpreisaufgabe (10.19)
(Die angegebene Lösung wurde von Hans Rainer Schumann, EOS Naumburg, Klasse 9, eingesandt)

A. Analysis

Gegeben ist die Höhe h_c, die Seitenhalbierende s_c und der Umkreisradius r.

Angenommen, das Dreieck ΔABC wäre das gesuchte. A und B sollen auf der Geraden g liegen. Dann ist durch die Höhe h_c die Entfernung des Punktes C von g bestimmt. Durch den Schnittpunkt des Kreises mit dem Radius s_c um C mit der Geraden g ist der Mittelpunkt S der Strecke $\overline{AB}$ bestimmt. Auf der Senkrechten zu g im Punkt S liegt, da diese Senkrechte Mittelsenkrechte ist, und da der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten im Dreieck der Mittelpunkt des Umkreises ist,



eben dieser Mittelpunkt. Ein weiterer geometrischer Ort für diesen Mittelpunkt ist außerdem der Kreis mit dem Umkreisradius r um C (denn es muß gelten: $\overline{MC} = r$). Deshalb ist der Kreis mit dem Umkreisradius r um M ein geometrischer Ort für A und B, d.h. A und B sind Schnittpunkte dieses Kreises mit g.

B. Konstruktion

Die Konstruktionsbeschreibung ergibt sich aus der Analysis. Ich zeichne eine Gerade g. Auf dieser lege ich einen beliebigen Punkt F fest (1). In F errichte ich eine Senkrechte zu g (2). Auf dieser trage ich von F aus die Höhe h_c ab (3), ihr Endpunkt ist C. Um C schlage ich dann mit dem Radius s_c einen Kreisbogen (4). Ein Schnittpunkt wird mit S bezeichnet (5). In S wird eine Senkrechte errichtet (6). Dann wird um C mit dem Umkreisradius r ein Kreisbogen geschlagen, der die in S errichtete Senkrechte in M schneidet (7). Um M wird dann mit dem Umkreisradius r ein Kreisbogen geschlagen, der g in A und B schneidet (8). $\triangle ABC$ ist das gesuchte Dreieck.

C. Beweis

Der Beweis ergibt sich aus den einzelnen Schritten der Konstruktion:

$\overline{FC} = h_c$	(3)
$h_c \perp g$	(1, 2)
$s_c = \overline{CS}$	(4)
$\overline{MC} = r$	(6, 7)
$\overline{MA} = \overline{MB} = r$	(8)
$\overline{AS} = \overline{SB}$, da $\overline{MS}$ Mittelsenkrechte ist	(6)
$\overline{MS} \perp g$	(6)

Hieraus ist zu erkennen, daß das konstruierte Dreieck $\triangle ABC$ den gegebenen Bedingungen genügt.

D. Determination

Damit der Kreisbogen mit dem Radius s_c um C die Gerade g berührt oder schneidet, muß gelten: $s_c \geq h_c$.
Für $s_c > h_c$ gibt es zwei Schnittpunkte und somit auch zwei Möglichkeiten, das Dreieck zu konstruieren. Die Dreiecke sind ungleichsinnig-kongruent. Ist $s_c = h_c$, so gilt:

$$\overline{AF} = \overline{BF}, \text{ sowie } \sphericalangle AFC = \sphericalangle CFB = 90^\circ.$$

Dann folgt nach dem zweiten Kongruenzsatz: $\Delta AFC \cong \Delta FBC$, d.h. $\overline{AC} = \overline{BC}$. Das entstehende Dreieck ist gleichschenklig.
Damit der Kreis um C mit dem Radius r die Senkrechte in S schneidet oder berührt, muß gelten: $r \geq \overline{SF}$.
Im rechtwinkligen Dreieck ΔSFC gilt:

$$\overline{SF} = \sqrt{s_c^2 - h_c^2}, \text{ also } r \geq \sqrt{s_c^2 - h_c^2}.$$

Schneidet der Kreis mit dem Radius r um C die Gerade MS zweimal ($r > \sqrt{s_c^2 - h_c^2}$) und gilt für beide Schnittpunkte M_1 und M_2 $\overline{M_{1,2}S} < r$ so ergeben sich zwei Dreiecke, die nicht kongruent sind.

Analysis, Konstruktion und Beweis der angegebenen Lösung sind in allen Teilen richtig, jedoch fehlen in der Determination einige Betrachtungen. An den Anfang der Determination gehört die Voraussetzung

$$2r > s_c \geq h_c \qquad (I)$$

Die Bedingung, sie wurde hier nur teilweise angegeben, ist allgemeingültig, d.h. sie gilt auch für das zu konstruierende Dreieck. Folgerichtig müssen dann wie in der angegebenen Lösung eine Untersuchung der Fälle $s_c > h_c$, $s_c = h_c$ und die Herleitung der Beziehung

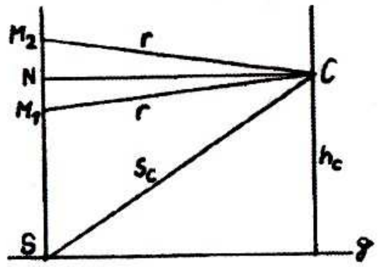
$$r \geq \sqrt{s_c^2 - h_c^2} \qquad (II)$$

erfolgen. Weiterhin hat der Einsender richtig erkannt, daß für $\overline{M_{1,2}S} < r$ zwei nichtkongruente Dreiecke entstehen. Warum wurden diese Beziehungen nicht weiter angewendet, d.h. welche Bedingungen müssen s_c , h_c und r erfüllen, damit eine bzw. zwei nichtkongruente Lösungen entstehen?
Die Determination hätte so fortgeführt werden können:
Man betrachte folgende Skizze und setze dabei die Gültigkeit von (I) und (II) voraus.

$\overline{CN} \parallel g$, $\overline{M_2N} = \overline{M_1N} = x$

Es gilt:

$$x^2 = r^2 + h_c^2 - s_c^2 \qquad (III)$$



außerdem $x \leq r$ (IV)

und $\overline{M_2S} \geq \overline{M_1S}$ (V)

Es sei nun

$\overline{M_2S} = h_c + x < r$

$x < r - h_c$, dann gilt

$$x^2 = r^2 + h_c^2 - s_c^2 < r^2 - 2rh_c + h_c^2$$

$$s_c^2 > 2rh_c \qquad \text{(VI)}$$

Da alle Umformungen äquivalent waren, existieren zwei nichtkongruente Lösungen genau dann, wenn (VI) gilt.

Höchstens eine Lösung existiert, wenn $\overline{M_2S} \leq r$ gilt

$$\text{d.h.} \quad s_c^2 \leq 2rh_c \qquad \text{(VII)}$$

Ist $r > h_c$, so gilt $|h_c - x| < r$, es existiert somit mindestens eine Lösung. Für $r \leq h_c$ gilt

$$\overline{M_1S} = h_c - x < r \leq \overline{M_2S} \quad \text{genau dann, wenn}$$

$$2h_cr > s_c^2 \qquad \text{(VIII)}$$

Eine Zusammenfassung ergibt:

genau zwei nichtkongruente Lösungen existieren, wenn $2h_cr < s_c^2$,

keine Lösung existiert für $r \leq h_c$ & $2h_cr = s_c^2$,

in allen anderen Fällen existiert genau eine Lösung (bis auf Kongruenz).

Entartete Dreiecke werden nicht als Lösung zugelassen.

(11/12.26): (eingesandt von Hans Dietrich Gronau, EOS "Friedr. Engels" Neubrandenburg, Klasse 11)

Nach dem Wurzelsatz von Vieta gilt:

$a_0 = \prod_{i=1}^{n} x_i$ (x_i sind Lösungen (hier: 1, 2, ..., 100))

$n = 100$

$$a_1 = -\sum_{j=1}^{100} \frac{\prod_{i=1}^{100} x_i}{x_j}$$

$$a_{99} = -\sum_{i=1}^{100} x_i$$

$a_{100} = 1$

Auf unseren Fall angewandt ergibt sich, daß 1, 2, ..., 100 die Lösungen (x_i) der Gleichung n-ten Grades sind (Produktdarstellung der Gleichung). Entsprechend folgt:

$$x_i = i \quad (i = 1, 2, \ldots, 100)$$

$$-a_{99} = \sum_{i=1}^{100} i = \frac{100}{2} \cdot 101 = 5050$$

$$a_{99} = -5050$$

$$a_{100} = 1$$

(9.30): Es ist $n^5 - 5n^3 + 4n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ ein Produkt von 5 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen und daher durch $5! = 120$ teilbar.

(9.28): $x = x_o$ sei eine gemeinsame Lösung beider Gleichungen, d.h. es gilt:

$$x_o^3 + ax_o + 1 = 0 \text{ und } x_o^4 + ax_o^2 + 1 = 0$$

Daraus erhalten wir:

$$x_o^3 + ax_o = -1 \text{ und } x_o^4 + ax_o^2 = -1$$

Dividieren wir die erste Gleichung durch die zweite Gleichung, so erhalten wir

$$\frac{x_o^4 + ax_o^2}{x_o^3 + ax_o} = \frac{x_o^3 + ax_o}{x_o^3 + ax_o}\, x_o = 1$$

Für $x_o = 1$ liefern beide Gleichungen den Wert $a = -2$

ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACH

Unser Mathematik-Spezialistenlager des Bezirkes Gera (Sommerlager) findet in diesem Jahr vom 12. bis 24. August in Bad Köstritz statt. Da das alte Internat des Institutes für Lehrerbildung seit diesem Jahr baupolizeilich gesperrt ist, können in diesem Jahr leider nur 65 bis 70 Schüler eingeladen werden. Die betreffenden Schüler haben ihre Einladungen bereits erhalten. Wir bitten diese Schüler, dem Rat des Bezirkes, Abteilung Volksbildung, mitzuteilen, ob sie in das Lager anreisen werden.

7/8
68

WURZEL

schülerzeitung für
mathematik

WURZEL - Schülerzeitung für Mathematik

Herausgegeben vom FDJ-Aktiv der Sektion Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Die Zeitung erscheint monatlich zum Preis von 0,20 MDN. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Eike Hertel, Günter Horn
Mitarbeiter: K. Fischer, H. Meißner, N. Kuse, H. Peuker, H. Schirrmeister, L. Staiger, W. Ulbrich, R. Wackernagel

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung II (Schluß)

Die Wahrscheinlichkeit

Wir stellen uns vor, daß wir einen zufälligen Vorgang beliebig oft unter gleichen Bedingungen ablaufen lassen können. Dabei beobachten wir jedesmal, ob ein gewisses Ereignis A eintritt oder nicht und notieren uns das. „1" soll bedeuten: A ist eingetreten, „0" soll bedeuten: A ist nicht eingetreten. Auf unserem Notizzettel entsteht bei der Beobachtung z.B. eine Folge der Form: 0101000110111100001111010... Sei n die Anzahl der Beobachtungen und k die Anzahl der Einsen bei n Beobachtungen. Die Zahl $\frac{k}{n}$ heißt relative Häufigkeit des Ereignisses A. Wir berechnen nun nach jeder Beobachtung, d.h. für jedes n, die Zahl $\frac{k}{n}$ und stellen fest, daß $\frac{k}{n}$ um einen bestimmten Wert schwankt.

Jeder kann selbst nachprüfen, daß beim Würfeln die relative Häufigkeit des Ereignisses $A = \{1\}$ um den Wert $\frac{1}{6}$ schwankt. Das gleiche gilt auch für die Ereignisse $A = \{2\}$, $A = \{3\}$, ..., $A = \{6\}$. Das bedeutet nicht, daß die relative Häufigkeit $\frac{k}{n}$ exakt gleich $\frac{1}{6}$ ist, sondern daß sie gleichmäßig um den Wert $\frac{1}{6}$ schwankt. Wenn wir das Ereignis $A = \{1, 2\}$ beobachten, so stellen wir fest, daß die relative Häufigkeit um den Wert $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ schwankt.

D e f i n i t i o n:

Als Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A bezeichnen wir denjenigen Wert P(A), um den die relative Häufigkeit schwankt.

Diese Definition ist nicht als exakte mathematische Definition zu

verstehen. Sie soll uns nur vermitteln, was wir uns unter der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses vorzustellen haben.
Die Erfahrung zeigt, daß die Schwankungen der relativen Häufigkeit kleiner werden, wenn wir die Anzahl der Versuche erhöhen.
Wir stellen nun folgende Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit P(A) fest:

(1) Da $\frac{k}{n}$ das Verhältnis der Anzahl der Einsen der Folge zur Gesamtzahl der Versuche ist, gilt $0 \leq \frac{k}{n} \leq 1$. Daher ist auch $0 \leq P(A) \leq 1$.

(2) Wenn A = E ist, so besteht die notierte Folge nur aus Einsen. Weil in E alle möglichen Ergebnisse des zufälligen Vorgangs enthalten sind, liegt jedes Ergebnis in E. Also ist die relative Häufigkeit $\frac{k}{n} = 1$. Deshalb ist auch P(E) = 1. Wir bezeichnen das Ereignis E als das sichere Ereignis, es tritt immer ein.

(3) Wenn wir beobachten, ob ein Ereignis A nicht eintritt, so beobachten wir damit wieder ein Ereignis, das wir mit $\bar{A}$ bezeichnen. In $\bar{A}$ sind alle diejenigen Elemente enthalten, die zwar in E liegen aber nicht in A. Wenn $\frac{k}{n}$ die relative Häufigkeit von A ist, so ist $\frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n}$ die relative Häufigkeit von $\bar{A}$. Es gilt daher:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

(4) Seien A und B zwei Ereignisse, die keine Elemente gemeinsam haben. Mengentheoretisch heißt das, daß $A \cap B = \emptyset$ ist (lies: A geschnitten B ist gleich der leeren Menge. Die leere Menge ist diejenige Menge, die keine Elemente enthält.)
Wir beobachten nun das Ereignis $A \cup B$ (lies A vereinigt mit B). $A \cup B$ ist dasjenige Ereignis, das sowohl die Elemente von A als auch die Elemente von B enthält. Sei $\frac{k}{n}$ die relative Häufigkeit des Ereignisses A und $\frac{l}{n}$ die relative Häufigkeit von B. Dann ist die relative Häufigkeit von $A \cup B$: $\frac{k+l}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n}$. Das gilt nur unter der Bedingung $A \cap B = \emptyset$. Wenn nämlich das Ereignis A eintritt, so tritt B nicht ein und umgekehrt. Deshalb addieren sich die Anzahlen der Einsen k und l. Daraus ergibt sich nun:
Wenn $A \cap B = \emptyset$, so gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Ein Beispiel für die Eigenschaft (4) sei hier gegeben:
Wir betrachten wieder unser Standardbeispiel, das Würfeln. Sei $A = \{4\}$ und $B = \{5\}$. Dann gilt $A \cap B = \emptyset$, außerdem wissen wir $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$. Daraus können wir $P(A \cup B)$ berechnen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Das Ergebnis stimmt mit unseren Beobachtungen überein, die wir beim Würfeln machen können.
Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich nun ganz allgemein mit solchen Funktionen P und den Mengen E.

D e f i n i t i o n:

P ist ein Verteilungsgesetz (oder Wahrscheinlichkeitsmaß) über der Menge E, wenn P jeder Teilmenge $A \subseteq E$ eine reelle Zahl $P(A)$ (lies P von A) zuordnet und folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(E) = 1$

(3) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(4) Falls $A \cap B = \emptyset$, so gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Das sind genau die vier Eigenschaften, die wir aus der Deutung der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit hergeleitet haben.
Die Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann man jetzt wie folgt formulieren:

Für einen zufälligen Vorgang sind die Menge E und das Verteilungsgesetz P zu bestimmen. P wird zum Beispiel aus der Bedingung bestimmt, daß für jedes Ereignis A die relative Häufigkeit um den Wert P(A) schwankt.

Behauptung (Beweis als Übungsaufgabe):
Wenn wir beim "Würfeln" festlegen, daß für jedes Ereignis der Form $\{i\}$ gilt $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$ mit $i = 1, \ldots, 6$, so kann man für jedes Ereignis A die Wahrscheinlichkeit P(A) mit Hilfe der Bedingungen (1) bis (4) berechnen.
Zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung empfehlen wir folgendes Buch:
B. Gnedenko, A. Chintschin: "Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung" (Kleine Schülerbücherei).

W. Radecke

Student an der Sektion Mathematik
(Abt. Wahrscheinlichkeitsrechnung)
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Aufgaben (Serie 7/8/68)

9. Klasse:

(9.35) Es ist folgende Behauptung zu beweisen: Wenn p_1, p_2 und p_3 Primzahlen sind, so daß $p_2 = \frac{1}{2}(p_1 + p_3)$ ist, so ist $p_2 - p_1 = p_3 - p_2$ durch 6 teilbar.

(9.36) Gegeben seien zwei einander schneidende Kreise K_1 und K_2. Ihre Schnittpunkte seien P und S. Man beweise, daß der Punkt T des Kreises K_1, für den gilt $\overline{TP} = \overline{TS}$, ein Punkt der Tangente in P an K_2 ist.

10. Klasse:

(10.35) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$ seien drei Kanten eines Tetraeders. Man zeige, daß sich die Ebenen, die auf $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$ senkrecht stehen, in einem Punkt schneiden.

(10.36) Man beweise die Ungleichung

$$5(x - 1) < x^5 - 1 < 5x^4(x - 1) \qquad \text{für } x > 1$$

11/12. Klasse:

(11/12.35) Man löse die Gleichung

$$\sqrt{x + \sqrt{14x-49}} + \sqrt{x - \sqrt{14x-49}} = \sqrt{14}$$

(11/12.36) Man beweise

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 1$$

Preisaufgabe (P. 19)

Man zeige: Die Beziehung $\sum\limits_{m \geq 1}\left(\left[\frac{n}{m}\right] - \left[\frac{n-1}{m}\right]\right) = 2$ ist dann und nur dann richtig, wenn n eine Primzahl ist.

Preisaufgabe (P. 20)

Man prüfe, ob der Ausdruck $((p \leftrightarrow q) \rightarrow (\sim p \vee q))$ erfüllbar oder allgemeingültig ist.

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf

Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" bis zum 30. des jeweiligen Erscheinungsmonats (Datum des Poststempels) an unsere Adresse einzuschicken.

Achtung: Einsendeschluß für die Preisaufgaben (P.19) und (P.20) ist der 30. August 1968.

Einführung in die Rechentechnik II

Im letzten Beitrag ("Wurzel"-Nr.6/68) wurde ein einfaches Transportproblem formuliert, dessen mathematisches Modell folgende Gestalt hatte:

(1) $z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \longrightarrow \min$ — Die Gesamttransportkosten sollen minimal werden.

(2) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad i = 1, \ldots, m$ — Die Lieferkapazität a_i des Erzeugers E_i darf nicht überschritten werden.

(3) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \quad j = 1, \ldots, n$ — Der Bedarf b_j des Verbrauchers V_j muß mindestens gedeckt werden.

(4) $x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n$ — Die zu transportierenden Mengen x_{ij} des Produkts dürfen nicht negativ sein.

Es handelt sich um eine Extremwertaufgabe mit Nebenbedingungen. Die Funktion z, Zielfunktion genannt, soll einen Extremwert, nämlich einen minimalen Wert annehmen. Die Nebenbedingungen liegen in Gestalt der Ungleichungssysteme (2), (3) und (4) vor. Ein Satz von Werten x_{ij}, für den z minimal wird, heißt optimale Lösung des Transportproblems.
Den Mathematiker interessiert vor allem die Frage nach der Existenz einer optimalen Lösung.
Durch Addition aller Ungleichungen des Systems (2) entsteht:

(5) $$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Analog liefert das System (3) nach der Addition:

(6)
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Da die linken Seiten von (5) und (6) identisch sind, kann geschlußfolgert werden:

(7)
$$\sum_{j=1}^{n} b_j \leq \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Die ökonomische Interpretation von (7) lautet:
Der Gesamtbedarf $\sum_{j=1}^{n} b_j$ aller Verbraucher darf die Gesamtlieferkapazität $\sum_{i=1}^{m} a_i$ aller Erzeuger nicht überschreiten. (7) ist notwendig und hinreichend für die Existenz einer optimalen Lösung für das Transportproblem. Auf einen streng mathematischen Beweis muß hier verzichtet werden. Da die a_i und b_j gegeben sind, ist vor der Konstruktion einer optimalen Lösung des Transportproblems die Existenzbedingung (7) zu prüfen. Prinzipiell sind drei Fälle möglich:

Fall I: $\Sigma b_j < \Sigma a_i$
Fall II: $\Sigma b_j = \Sigma a_i$
Fall III: $\Sigma b_j > \Sigma a_i$

Durch einen mathematischen Trick lassen sich die Fälle I und III auf den Fall II zurückführen.
Im Fall I wird das Transportproblem durch die Einführung eines fiktiven Verbrauchers V_{n+1} mit dem Bedarf $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ erweitert. Die in der optimalen Lösung auftauchenden Werte für $x_{i,n+1}$ sind als nicht anzuliefernde Restbestände des Erzeugers E_i zu werten. Im Fall III ist es sinnvoll, die Erweiterung des Transportproblems durch die Einführung eines fiktiven Erzeugers E_{m+1} mit der Lieferkapazität $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ vorzunehmen. Entsprechend sind die Werte $x_{m+1,j}$ in der optimalen Lösung als ungedeckter Bedarf des Verbrauchers V_j zu deuten. Überlegungen zur Wahl geeigneter $c_{i,n+1}$ bzw. $c_{m+1,j}$ seien dem Leser überlassen.
Es ist also ausreichend, die weiteren Überlegungen für das Transportproblem auf den Fall II zu beschränken. Für diesen Fall gestalten sich die Nebenbedingungen (2) und (3) als Gleichungssysteme, so daß das Transportproblem folgende Gestalt hat:

$z = \Sigma\Sigma c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min$ $\quad \Sigma x_{ij} = a_i \quad i = 1, \ldots, m$ summiert über j
$\quad x_{ij} \geq 0$ $\quad \Sigma x_{ij} = b_j \quad j = 1, \ldots, n$ summiert über i

Wie kann die optimale Lösung konstruiert werden?
Da die Hilfsmittel der klassischen Differentialrechnung bei dieser Extremwertaufgabe versagen, ist es notwendig, besondere Lösungsverfahren zu suchen.
Für den Spezialfall $m = n = 2$ ist ein Lösungsverfahren schnell gefunden. Die einfache Gestalt des Problems:

(1') $z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} \longrightarrow \min$
(2') $x_{11} + x_{12} = a_1, \quad x_{21} + x_{22} = a_2$
(3') $x_{11} + x_{21} = b_1, \quad x_{12} + x_{22} = b_2$
(4') $x_{11} \geq 0, \; x_{12} \geq 0, \; x_{21} \geq 0, \; x_{22} \geq 0$

legt die Vermutung nahe, daß mit (2') und (3') ein lineares Gleichungssystem von 4 Gleichungen für 4 Unbekannte mit einer eindeutigen Lösung vorliegt. Das ist aber nicht so. Wird von der Summe der beiden Gleichungen von (2') die erste Gleichung von (3') subtrahiert, so entsteht:

$$(x_{11} + x_{12}) + (x_{21} + x_{22}) - (x_{11} + x_{21}) = a_1 + a_2 - b_1$$
$$x_{12} + x_{22} = a_1 + a_2 - b_1$$

Andererseits folgt aus der Existenzbedingung für die optimale Lösung:
$$b_2 = a_1 + a_2 - b_1$$

Es zeigt sich, daß die zweite Gleichung von (2') überflüssig ist, da sie aus den übrigen gewonnen werden kann.
Durch Umformen von (2') und (3') können folgende Beziehungen gewonnen werden:

aus (2') folgt: I) $x_{12} = a_1 - x_{11}$
II) $x_{22} = a_2 - x_{21}$

aus (3') folgt: III) $x_{21} = b_1 - x_{11}$
III in II eingesetzt: II') $x_{22} = a_2 - b_1 + x_{11}$

Einsetzen von I, II' und III in die Zielfunktion liefert:
$$z = c_{11}x_{11} + c_{12}(a_1 - x_{11}) + c_{21}(b_1 - x_{11}) + c_{22}(a_2 - b_1 + x_{11})$$
Nach dem Ordnen entsteht:
$$z = (c_{11} - c_{12} - c_{21} + c_{22})x_{11} + c_{12}a_1 + (c_{21} - c_{22})b_1 + c_{22}a_2$$
In der Zielfunktion kommt nur noch die Unbekannte x_{11} vor. Wird z als lineare Funktion von x_{11} aufgefaßt, so gilt bei vorläufiger Vernachlässigung der Nebenbedingungen $x_{12} \geq 0$, $x_{21} \geq 0$ und $x_{22} \geq 0$:
Definitionsbereich: $x_{11} \geq 0$
Wertebereich (Es sind drei Fälle zu unterscheiden.):
a) $c_{11}-c_{12}-c_{21}+c_{22} > 0$: $\quad z \geq c_{12}a_1 + (c_{21} - c_{22})b_1 + c_{22}a_2$

b) $c_{11}-c_{12}-c_{21}+c_{22} = 0$: $z = c_{12}a_1 + (c_{21} - c_{22})b_1 + c_{22}a_2$

c) $c_{11}-c_{12}-c_{21}+c_{22} < 0$: $z \le c_{12}a_1 + (c_{21} - c_{22})b_1 + c_{22}a_2$

Wann nimmt z einen minimalen Wert an?

a) $z = c_{12}a_1 + (c_{21} - c_{22})b_1 + c_{22}a_2$ für $x_{11} = 0$

b) $z = c_{12}a_1 + (c_{21} - c_{22})b_1 + c_{22}a_2$ für x_{11} beliebig
(z hängt überhaupt nicht von x_{11} ab)

c) z kann beliebig kleine Werte annehmen, wenn x_{11} genügend groß gewählt wird.

Eine optimale Lösung ist leicht konstruierbar. Die Auswertung der Nebenbedingungen

I) $x_{12} = a_1 - x_{11}$ $\qquad x_{12} \ge 0$

II') $x_{22} = a_2 - b_1 + x_{11}$ $\qquad x_{22} \ge 0$

III) $x_{21} = b_1 - x_{11}$ $\qquad x_{21} \ge 0$

liefert folgende Resultate:

a) $x_{11} = \max(0, b_1 - a_2)$ (*)
$x_{12} = a_1 - \max(0, b_1 - a_2)$
$x_{21} = b_1 - \max(0, b_1 - a_2)$
$x_{22} = a_2 - b_1 + \max(0, b_1 - a_2)$

Es existiert genau eine opt. Lösung. Die max-Bedingung folgt aus der Nichtnegativitätsforderung für x_{22}.

b) $\max(0, b_1 - a_2) \le x_{11} \le \min(a_1, b_1)$
$x_{12} = a_1 - x_{11}$
$x_{22} = a_2 - b_1 + x_{11}$
$x_{21} = b_1 - x_{11}$

Es existieren unendlich viele optimale Lösungen. Die untere Grenze des Variationsbereiches für x_{11} folgt aus der Forderung $x_{22} \ge 0$, die obere aus den Forderungen $x_{12} \ge 0$ und $x_{21} \ge 0$.

c) $x_{11} = \min(a_1, b_1)$
$x_{12} = a_1 - \min(a_1, b_1)$
$x_{21} = b_1 - \min(a_1, b_1)$
$x_{22} = a_2 - b_1 + \min(a_1, b_1)$

Es existiert genau eine optimale Lösung. Die Nichtnegativitätsbedingung ist erfüllt auf Grund der Existenzbedingung für die optimale Lösung $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$

(*) Die Bezeichnung

$x = \begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ bedeutet x ist die $\begin{matrix}\text{größte}\\ \text{kleinste}\end{matrix}$ der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Ein Zahlenbeispiel soll die theoretisch angestellten Untersuchungen beleben.

Von 2 Mühlen E_1 und E_2 mit den Lieferkapazitäten $a_1 = 5t$ und

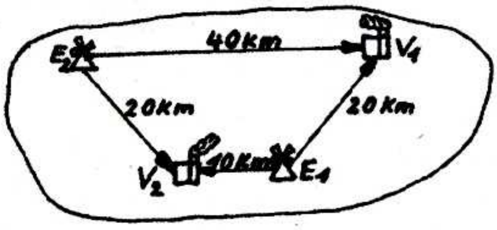
$a_2 = 4t$ soll Mehl zu 2 Großbäckereien V_1 und V_2 mit dem Bedarf $b_1 = 6t$ und $b_2 = 3t$ transportiert werden. Die Entfernungen für den Transport belaufen sich auf

$E_1 \longrightarrow V_1$: $c_{11} = 20km$

$E_1 \longrightarrow V_2$: $c_{12} = 10km$

$E_2 \longrightarrow V_1$: $c_{21} = 40km$

$E_2 \longrightarrow V_2$: $c_{22} = 20km$



Wie ist der Mehltransport auszuführen, damit der Gesamttransportaufwand minimal wird?

Zunächst wird die Existenzbedingung für die optimale Lösung geprüft:

$$a_1 + a_2 = 5t + 4t = 9t$$
$$b_1 + b_2 = 6t + 3t = 9t$$

Ergebnis: Es existiert eine optimale Lösung!

Konstruktion der optimalen Lösung:

$$c_{11} - c_{12} - c_{21} + c_{22} = (20 - 10 - 40 + 20)km = -10km$$
$$c_{12}a_1 + (c_{21} - c_{22})b_1 + c_{22}a_2 = (10\cdot5 + (40 - 20)6 + 20\cdot4)tkm = 250tkm$$

Offensichtlich liegt Fall c) vor.

Es existiert genau eine optimale Lösung:

$x_{11} = \min(5t, 6t) = 5t$

$x_{12} = 5t - 5t = 0t$

$x_{21} = 6t - 5t = 1t$

$x_{22} = 4t - 6t + 5t = 3t$

Minimaler Gesamttransportaufwand:

$z_{min} = -10\cdot5tkm + 250tkm = 200tkm$

Es ist auffällig, daß auf der kürzesten Strecke $E_1 \longrightarrow V_2$ nichts transportiert wird, ein Resultat, das nicht unmittelbar zu erwarten war.

Theoretisch läßt sich die soeben dargestellte Lösungsmethode auf Transportprobleme beliebiger Dimension (beliebiges m und n) verallgemeinern. Ohne den expliziten Versuch einer solchen Verallgemeinerung vornehmen zu müssen, kann sofort vorausgesagt werden, daß der erforderliche Rechenaufwand enorm wird. Für einen menschlichen Rechner wäre es aussichtslos, etwa eine Transportaufgabe mit 30 Erzeugern und 100 Verbrauchern nach dem angegebenen Verfahren lösen zu wollen. Dabei ist die Dimension m = 30 und n = 100 für praktische Belange keineswegs übertrieben hoch. Es besteht also ein echter Anlaß für den Mathematiker, sich folgenden Problemen zuzuwenden:

1. Ermittlung von hinreichend einfachen Lösungsverfahren für die Transportaufgabe (notfalls Näherungsverfahren).
2. Realisierung des Ablaufs der Zahlenrechnung durch Rechenmaschinen.

Immerhin treten im oben erwähnten Beispiel mehrere Tausend Zahlenwerte als gegebene Eingangsdaten auf (3000 Werte für c_{ij}, 30 Werte für a_i, 100 Werte für b_j).
Das Aufsuchen von praktisch brauchbaren Lösungsmethoden für die verschiedenartigsten mathematischen Probleme bildet den Forschungsgegenstand der Numerischen Mathematik und Verfahrenstechnik, einer speziellen Disziplin der Mathematik.
Mit der Darstellung von Lösungsverfahren in einer Form, die die Anwendung von Rechenmaschinen erlaubt (d.h. mit der Übersetzung der Rechenvorschriften einer Lösungsmethode in eine "Sprache", die von Rechenmaschinen "verstanden" wird), beschäftigt sich u.a. die Rechentechnik, ebenfalls eine spezielle mathematische Disziplin. Im weiteren werden sich die Betrachtungen auf Probleme der Rechentechnik beschränken.
Ohne auf eine spezielle Rechenmaschine bezug zu nehmen, kann etwa die Methode zur Bestimmung der optimalen Lösung eines Transportproblems der Dimension $m = n = 2$ wie in Tabelle I (Seite 84) dargestellt werden.
Welche Schlußfolgerungen erlaubt die schematische Darstellung für die Lösung des Transportproblems?

1. Der mathematische Hintergrund und die inhaltliche Bedeutung der Zwischenresultate sind verlorengegangen. Die Lösung des Transportproblems wurde auf Addition, Subtraktion, Multiplikation und Größenvergleich von Zahlen zurückgeführt. Die einzelnen Rechen- bzw. Vergleichsvorschriften gestatten, die Transportaufgabe zu lösen, ohne die ökonomische Problematik zu kennen. Die Anforderungen an die Qualitäten des Rechenhilfsmittels (menschlicher Rechner oder Rechenmaschine) sind sehr gering: Addition, Subtraktion, Multiplikation von Zahlen, Auswertung von Zahlenvergleichen.
2. Mit Hilfe der angegebenen Vorschriften kann jedes lösbare Transportproblem der Dimension $m = n = 2$ gelöst werden. Sie stellen ein universelles Arbeitsprogramm für das Rechenhilfs-

Tabelle I

B.	$c = c_{11} - c_{12} - c_{21} + c_{22}$							
V.	$c > 0$		$c = 0$				$c < 0$	
V.	$b_1 - a_2 > 0$	$b_1 - a_2 \leq 0$	$b_1 - a_2 > 0$		$b_1 - a_2 \leq 0$		$a_1 > b_1$	$a_1 \leq b_1$
			$a_1 > b_1$	$a_1 \leq b_1$	$a_1 > b_1$	$a_1 \leq b_1$		
B.	$x_{11} = b_1 - a_2$	$x_{11} = 0$	$b_1 - a_2 \leq x_{11} \leq b_1$	$b_1 - a_2 \leq x_{11} \leq a_1$	$0 \leq x_{11} \leq b_1$	$0 \leq x_{11} \leq a_1$	$x_{11} = b_1$	$x_{11} = a_1$
	$x_{12} = (a_1 - b_1 + a_2) = b_2$	$x_{12} = a_1$	$x_{12} = a_1 - x_{11}$				$x_{12} = a_1 - b_1$	$x_{12} = 0$
	$x_{21} = a_2$	$x_{21} = b_1$	$x_{21} = b_1 - x_{11}$				$x_{21} = 0$	$x_{21} = b_1 - a_1$
	$x_{22} = 0$	$x_{22} = a_2 - b_1$	$x_{22} = a_2 - b_1 + x_{11}$				$x_{22} = a_2$	$x_{22} = (a_2 - b_1 + a_2) = b_2$
B.	$z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22}$							
Z.	Optimale Lösung: $(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, z)$							

B. = Berechnung   V. = Vergleich   Z. = Zusammenfassung mittel dar, das nur einmal durchdacht und formuliert werden braucht. Die Aufstellung des Arbeitsprogramms muß sehr sorgfältig erfolgen. Jede mögliche Situation beim Lösungsprozeß muß erfaßt werden.

Beispielsweise fehlt im angeführten Arbeitsprogramm für das Transportproblem die Existenzbedingung für die optimale Lösung. Ist in einem konkreten Zahlenbeispiel die Existenzbedingung verletzt, so ist für dieses Zahlenbeispiel das Arbeitsprogramm nicht anwendbar. (Der Leser kann natürlich sofort das Arbeitsprogramm entsprechend ergänzen.)

Nach der Abarbeitung des Arbeitsprogramms liegt die optimale Lösung zahlenmäßig vor. Das Transportunternehmen kann jetzt die tatsächliche Gestaltung des Transportauftrags so organisieren, daß der Gesamttransportaufwand minimal wird. Es ist lediglich notwendig, die berechneten Zahlenwerte wieder mit einem ökonomischen Sinn zu versehen, sie ökonomisch zu interpretieren.

Etwa: $x_{11} = 5t$ bedeutet: Vom Erzeuger E_1 werden zum Verbraucher V_1 $x_{11} = 5t$ Mehl transportiert, usw.

Werden alle bisher angestellten Untersuchungen zum Einführungsbeispiel zusammengefaßt und verallgemeinert, so ergibt sich:

Die Lösung eines Problems aus Ökonomie, Technik und anderen Bereichen der Wissenschaft unter dem Einsatz der Mathematik vollzieht sich in mehreren Etappen. Eine mögliche Etappengliederung des Lösungsprozesses wäre die folgende:

1. Formulierung des Problems
2. Aufbau eines mathematischen Modells
3. Entwicklung bzw. Auswahl eines geeigneten Lösungsverfahrens
4. Aufstellung eines Arbeitsprogramms für das Rechenhilfsmittel
5. Abarbeitung des Arbeitsprogramms durch das Rechenhilfsmittel
6. Interpretation des Ergebnisses

Die weiteren Beiträge werden sich besonders auf die Etappen 4 und 5 konzentrieren. Zwischen diesen beiden Etappen bestehen enge Wechselbeziehungen.

H. Peuker

wissenschaftlicher Mitarbeiter
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

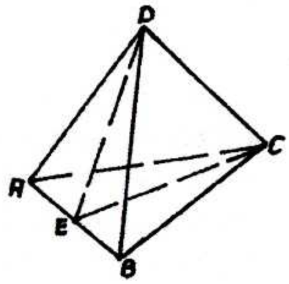
Lösung der Aufgaben der IMO 1967 ("Wurzel"-Nr. 9/67)

2. Aufgabe: In einem Tetraeder habe genau eine Kante eine Länge, die größer als 1 ist. Man zeige, daß dann für das Volumen V des Tetraeders $V \le \frac{1}{8}$ gilt.

Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\overline{CD} > 1$, $\overline{AE} = \overline{BE}$, $\overline{AB} = x$. Es gilt:

$V = \frac{1}{3} F_{ABC} \cdot h \le \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CE}}{6} \cdot \overline{DE}$. Es ist

$\overline{CE}^2 \le 1 - \frac{x^2}{4}$ im Dreieck ΔABC, da keine der Seiten $\overline{AC}$ oder $\overline{BC}$ länger als 1 ist. Analog $\overline{DE}^2 \le 1 - \frac{x^2}{4}$



Man erhält: $V \le \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2}(1 - \frac{x^2}{4})$

$\le \frac{1}{3}(\frac{x}{2}(1 - \frac{x}{2}))(1 + \frac{x}{2})$

$\le \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{8}$

3. Aufgabe: Es seien k, m und n positive ganze Zahlen, wobei m+k+1 eine Primzahl größer als n+1 ist. Wir führen die Bezeichnung $c_s = s(s+1)$ ein. Man beweise, daß das Produkt $(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)\cdot\ldots\cdot(c_{m+n}-c_k)$ durch das Produkt $c_1 c_2 \cdot\ldots\cdot c_n$ teilbar ist.

(Lösung von Rolf Benedikt, EOS Dresden-Süd)

$c_1 c_2 \cdot\ldots\cdot c_n = \prod_{s=1}^{n} c_s = n! \cdot (n+1)!$

Sei $q = m+r$ mit $1 \le r \le n$, r ganz

Dann gilt: $c_q - c_k = q(q+1) - k(k+1)$

$= q^2 + q - k^2 - k$

$= q^2 - k^2 + q - k$

$= (q - k)(q + k) + q - k$

$= (q - k)(q + k + 1)$

Dann ist $\prod_{q=m+1}^{m+n} (c_q - c_k) = ((m+1-k)(m+k+2))((m+2-k)(m+k+3)) \cdot \ldots \cdot ((m+n-k)(m+n+k+1))$

$= ((m+1-k)(m+2-k)\cdot\ldots\cdot(m+n-k)) \cdot ((m+k+2)(m+k+3)\cdot\ldots\cdot(m+n+k+1))$

Sei $u = (m+1-k)(m+2-k)\cdot\ldots\cdot(m+n-k)$ und

$v = (m+k+2)(m+k+3)\cdot\ldots\cdot(m+n+k+1)$

Sowohl u als auch v sind Produkte von n aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen. Daher gilt: n! teilt u.

Da $(m+k+1)v$ ein Produkt von $n+1$ aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist, teilt $(n+1)!$ das Produkt $(m+k+1)v$. Da aber $(m+k+1)$ eine Primzahl ist, die größer als $(n+1)!$ ist, gilt $((n+1)!,(m+k+1)) = 1$. Daraus ergibt sich, daß $(n+1)!$ ein Teiler von v ist. Somit ist die Behauptung bewiesen.

---

6. Aufgabe: Bei einem Sportwettkampf wurden m Medaillen im Laufe von n Tagen $(n > 1)$ verliehen. Am 1.Tage wurden 1 Medaille und $\frac{1}{7}$ der übrigen $m-1$, am 2.Tage 2 Medaillen und $\frac{1}{7}$ des nun verbliebenen Restes verliehen usw. Schließlich wurden am n-ten Tag gerade n Medaillen vergeben, ohne daß noch welche übrig blieben. Wieviel Tage dauerte der Wettkampf und wieviel Medaillen wurden insgesamt verliehen?

(Lösung von Rolf Benedikt, EOS Dresden-Süd)

Die Anzahl der Medaillen, die am k-ten Tage vergeben wurde, sei gleich a_k. Nach Aufgabenstellung gilt dann $\sum_{i=1}^{n} a_i = m$.

$$a_1 = 1 + \frac{1}{7}(m - 1)$$

$$a_2 = 2 + \frac{1}{7}(m - a_1 - 2)$$

....

$$a_k = k + \frac{1}{7}(m - \sum_{i=1}^{k-1} a_i - k)$$

....

$$a_n = n = n + \frac{1}{7}(m - \sum_{i=1}^{n-1} a_i - n)$$

(die allgemeine Formel für a_k gilt auch für a_n)

$$a_{k+1} - a_k = 1 + \frac{1}{7}(- 1 - a_k) \qquad |\cdot 7$$

$$7a_{k+1} - 7a_k = 7 - 1 - a_k$$

$$7a_{k+1} = 6a_k + 6$$

$$a_k = \frac{7}{6}a_{k+1} - 1$$

Es ergibt sich eine Rekursionsformel für die Folge $\{a_k\}$, gültig für $1 \leq k \leq n - 1$

$$k = 1:\ a_1 = \frac{7}{6}a_2 - 1$$

$$= \frac{7}{6}(\frac{7}{6}\, a_3 - 1) - 1$$

....

$$= \frac{7}{6}(\frac{7}{6}\cdot\ldots\cdot(\frac{7}{6}(\frac{7}{6}a_n - 1) - 1) - \ldots) - 1) - 1$$

$$= (\frac{7}{6})^{n-1}a_n - (\frac{7}{6})^{n-2} - \ldots - (\frac{7}{6}) - 1$$

$$a_1 = (\frac{7}{6})^{n-1}n - 6(\frac{7}{6})^{n-1} + 6 = (\frac{7}{6})^{n-1}(n - 6) + 6$$

Andererseits gilt für a_1:

$$a_1 = 1 + \frac{1}{7}(m - 1)$$
$$= \frac{1}{7}(m + 6)$$

Folglich gilt:

$$\frac{1}{7}(m + 6) = \left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}(n - 6) + 6 \qquad | \cdot 7$$
$$m + 6 = \frac{7^n}{6^{n-1}}(n - 6) + 42 \qquad | - 6$$
$$m = \frac{7\,(n - 6)}{6^{n-1}} + 36 \qquad m \text{ und } n \text{ natürliche Zahlen}$$

Für $n = 6$ ergibt sich die Lösung $m = 36$

Gibt es noch andere Lösungen? Wegen $n > 1$ gilt $6^{n-1} \geq 6$. Eine Potenz von 7 kann nicht durch eine Potenz von 6 teilbar sein (bei natürlichen Exponenten). Daher muß, um eine weitere Lösung für m zu erhalten, $(n - 6)$ durch 6^{n-1} teilbar sein, d.h. $n - 6 = z \cdot 6^{n-1}$ (z natürlich, $z \geq 1$).

Es gilt aber offensichtlich für alle k: $\quad 6^k > k$

also auch $\quad 6^{n-1} > n - 1 > n - 6$

und für $z \geq 1 \quad z \cdot 6^{n-1} > n - 6$

Das ist aber ein Widerspruch zu $\quad z \cdot 6^{n-1} = n - 6$

Das bedeutet es gibt keine andere Lösung als $n = 6$, $m = 36$

Damit ergeben sich $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 6$

Das heißt, es wurden in 6 Tagen täglich 6 Medaillen vergeben, so daß insgesamt 36 Medaillen vergeben wurden.

(S.2): Man zeige, daß alle Glieder der Folge

$$x_0 = 2, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 1}{5x_n}$$

a) größer als $\frac{1}{5}$

b) nicht größer als 2 sind.

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $\frac{1}{5} < x_0 \leq 2$

Es gelte nun $\frac{1}{5} < x_n \leq 2$

Zu zeigen ist $\frac{1}{5} < x_{n+1} \leq 2$

Beweis: α) für $1 \leq x_n \leq 2$ gilt:

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{5} + \frac{1}{5x_n} \leq x_{n+1} = \frac{x_n^3}{5} + \frac{1}{5x_n} \leq \frac{8}{5} + \frac{1}{5x_n} \leq 2$$

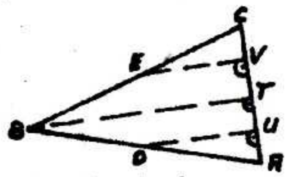
β) für $\frac{1}{5} < x_n < 1$ gilt:

$\frac{1}{5} < \frac{x_n^3}{5} + \frac{1}{5} \leq x_{n+1} \leq \frac{x_n^3}{5} + 1 \leq 2$

(S.4): D und E seien Mittelpunkte der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ des Dreiecks $\triangle ABC$. Der Punkt M liegt auf $\overline{AC}$. Man zeige: Wenn $\overline{MD} < \overline{AD}$, dann gilt auch $\overline{ME} > \overline{CE}$.

(Lösung von Martina Hudemann, EOS Geschwister Scholl Magdeburg, Klasse 12)

$\overline{BT}$ sei die Senkrechte von B auf $\overline{AC}$, $\overline{DU}$ und $\overline{EV}$ seien die Senkrechten von D und E auf $\overline{AC}$.



Nach dem Strahlensatz gilt:

$\overline{AU} = \overline{TU}$ $\qquad$ $\overline{TV} = \overline{CV}$

1) $M \equiv T$: $\overline{MD} = \overline{AD}$

$\overline{ME} = \overline{CE}$ (gleichschenklige Dreiecke)

2) $\overline{MD} < \overline{AD}$: $\qquad$ $\overline{AU} > \overline{MU}$ (wegen $\alpha > \beta$ folgt $a > b$)

folglich: $\overline{MV} > \overline{CV}$

Das bedeutet aber: $\overline{ME} > \overline{CE}$

Es gilt also: aus $\overline{MD} < \overline{AD}$ folgt $\overline{ME} > \overline{CE}$

(10.20): Es sei $y = 0$. Dann folgt aus der 2.Bedingung $f(x) \cdot f(0) = f(0)$, d.h. entweder $f(x) = 1$, was aber mit $f(x) + f(y) = f(x+y)$ im Widerspruch steht, oder $f(0) = 0$.

Es sei $y = -x$. Dann gilt:

$f(x) + f(-x) = f(x-x) = f(0) = 0$,

folglich $f(x) = -f(-x)$, d.h. die gesuchten Funktionen sind ungerade.

Sei $y = 1$. Dann gilt:

$f(x) \cdot f(1) = f(x)$, $\quad f(x) \neq 0$, $x \neq 0$, folglich $f(1) = 1$.

Man zeigt leicht durch vollständige Induktion, daß für jede natürliche Zahl k gilt: $f(k) = k$.

Aus den Betrachtungen für $y = -x$ folgt, daß $f(-x) = -x$ ist (x natürlich), d.h. $f(x) = x$ für alle ganzen Zahlen.

Es ist zu zeigen $\frac{a}{b} = \frac{f(a)}{f(b)} = f(\frac{a}{b})$ $\quad b \neq 0$,

d.h. $f(\frac{a}{b}) \cdot f(b) = f(a)$:

Durch Anwendung der 2.Bedingung erhält man

$f(\frac{a}{b}) \cdot f(b) = f(\frac{a \cdot b}{b}) = f(a)$.

Es gilt also für alle Brüche $f(x) = x$.

Durch Ausdehnung von $f(x)$ auf die irrationalen Zahlen erhält man für diese ebenfalls das Ergebnis $f(x) = x$. Diese Ausdehnung erfordert aber eine umfangreiche Untersuchung der Funktion (Monotonie usw.), die über den Rahmen einer solchen Aufgabe hinausreicht.

(10.28): Es gilt $a^3+b^3+c^3-(a+b+c) = a(a-1)(a+1)+b(b-1)(b+1)+c(c-1)(c+1)$

Dieser Ausdruck ist durch 6 teilbar, da jedes Produkt von 3 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen und damit auch die Summe solcher Produkte durch 6 teilbar ist. Damit sind aber $a^3+b^3+c^3$ und $a+b+c$ entweder gleichzeitig beide durch 6 teilbar oder nicht durch 6 teilbar.

(9.29): Durch Auflösen des Gleichungssystems nach x und y erhalten wir $x = \frac{3k+8}{k^2+6}$ und $y = \frac{4k-9}{k^2+6}$

Da der Ausdruck $(k^2 + 6)$ immer positiv ist wird x positiv, wenn $3k + 8 > 0$ gilt. y wird negativ bei $4k - 9 < 0$. k muß also folgenden Ungleichungen genügen:

$$k > -\frac{8}{3}, \quad k < \frac{9}{4}, \text{ oder } -\frac{8}{3} < k < \frac{9}{4}$$

Wegen der Ganzzahligkeit von k erhalten wir als Lösungen:

$-2, -1, 0, 1, 2.$

(10.29): Wir formen den Ausdruck $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ um.

Es gilt $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2-b^2}{ab} = \frac{(a+b)(a-b)}{ab} = \frac{(a+b)}{a} \cdot \frac{(a-b)}{b}$.

Offensichtlich ist damit die Aufgabe gelöst, denn die Summe von $\frac{a+b}{a}$ und $\frac{a-b}{b}$ ist $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

(10.30): Es seien A und B die gegebenen Punkte. M und N seien zwei Punkte, die die Bedingung erfüllen.

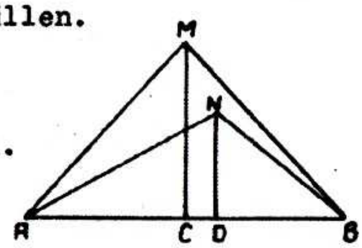
Dann gilt: $\overline{AM}^2 - \overline{MB}^2 = d^2$ (1)

$\overline{AN}^2 - \overline{NB}^2 = d^2$ (2)

wobei d eine gegebene Konstante sei.

Durch Gleichsetzen erhalten wir

$\overline{AM}^2 - \overline{MB}^2 = \overline{AN}^2 - \overline{NB}^2$ (3)



Von den Punkten M und N fällen wir die Lote $\overline{MC}$ und $\overline{ND}$

auf $\overline{AB}$. Wir verändern (3) zu (4):

$$(\overline{AM}^2 - \overline{MC}^2) - (\overline{MB}^2 - \overline{MC}^2) = (\overline{AN}^2 - \overline{ND}^2) - (\overline{NB}^2 - \overline{ND}^2).$$

(4) ist gleichwertig mit $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2$ (5)

bzw. $(\overline{AC} + \overline{BC})(\overline{AC} - \overline{BC}) = (\overline{AD} + \overline{BD})(\overline{AD} - \overline{BD})$ (6)

wobei $(\overline{AC} + \overline{BC}) = \overline{AD} + \overline{BD} = \overline{AB}$ (7)

Nach Division von (6) durch $\overline{AB}$ erhalten wir

$$\overline{AC} - \overline{BC} = \overline{AD} - \overline{BD} \qquad (8)$$

Aus (7) und (8) folgt $\overline{AC} = \overline{AD}$ und $\overline{BC} = \overline{BD}$, d.h. D und C fallen zusammen. M und N liegen also auf einer Geraden, die senkrecht zu $\overline{AB}$ verläuft. Wir zeigen jetzt, die Differenz der Quadrate der Abstände von Punkten, die auf einer Senkrechten zu $\overline{AB}$ liegen, zu den Eckpunkten A und B, ist eine konstante Größe. Fällen wir ein Lot von M auf $\overline{AB}$, dann gilt:

$$\overline{AM}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\overline{BM}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{BC}^2$$

Daraus folgt: $\overline{AM}^2 - \overline{BM}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = d^2$ (9)

Damit haben wir gezeigt, daß der geometrische Ort der Punkte, deren Differenz der Quadrate der Abstände von zwei gegebenen Punkten A und B konstant ist, eine Gerade senkrecht zu $\overline{AB}$ ist.

Um den gefundenen geometrischen Ort zu konstruieren, muß man die Lage des Punktes C auf $\overline{AB}$ bestimmen.

Aus (9) erhalten wir $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = d^2$

oder $(\overline{AC} + \overline{BC})(\overline{AC} - \overline{BC}) = d^2$

oder $\overline{AB}(\overline{AC} - \overline{BC}) = d^2$ woraus folgt

$$\overline{AC} - \overline{BC} = \frac{d^2}{\overline{AB}}$$

Wegen $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB}$ erhalten wir

$$\overline{AC} - (\overline{AB} - \overline{AC}) = \frac{d^2}{\overline{AB}} \quad \text{woraus folgt}$$

$$\overline{AC} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \frac{d^2}{\overline{AB}}\right)$$

$$\text{oder } 2\overline{AC}\cdot\overline{AB} = \overline{AB}^2 + d^2$$

Zur Konstruktion von $\overline{AC}$ muß man die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $\overline{AB}$ und d konstruieren. Man findet $\overline{AC}$ als Abschnitt der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks. Die Hypotenuse wird durch die Höhe in zwei Abschnitte geteilt, von denen einer

die Länge $2\overline{AB}$ und der andere die Länge $\overline{AC}$ hat.
<u>Anmerkung:</u> Statt $\overline{XY}^2$ ist immer $(\overline{XY})^2$ zu lesen!

<u>(P.16):</u> Wir nehmen an, daß keine der Zahlen a, b, c durch 3 teilbar ist. Dann lassen sich diese Zahlen in folgender Form darstellen:

$a = \alpha + 3N_1$ (1) N_1 ganze Zahl oder 0, $\alpha = 1, 2,$
$b = \beta + 3N_2$ (2) N_2 ganze Zahl oder 0, $\beta = 1, 2,$
$c = \gamma + 3N_3$ (3) N_3 ganze Zahl oder 0, $\gamma = 1, 2,$

α, β, γ sind also die Reste bei der Teilung durch 3. Unter Verwendung von (1), (2) und (3) gilt dann die Gleichung $(\alpha + 3N_1)^2 + (\beta + 3N_2)^2 = (\gamma + 3N_3)^2$

oder $\alpha^2 + 2\cdot 3\alpha N_1 + 9N_1^2 + \beta^2 + 2\cdot 3\beta N_2 + 9N_2^2 =$

$$= \gamma^2 + 2\cdot 3\gamma N_3 + 9N_3^2$$

oder $\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 =$

$$= 3((2\alpha N_1 + 3N_1^2) + (2\beta N_2 + 3N_2^2) - (2\gamma N_3 + 3N_3^2)) \qquad (4)$$

Diese rechte Seite von (4) stellt sich also in der Form $3N$, mit N ganzzahlig, dar.
Es muß also auch der Ausdruck $\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2$ durch 3 teilbar sein. Es ist nun leicht zu zeigen, daß bei den Werten, die für α, β, γ laut Annahme auftreten können, der Ausdruck $\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2$ niemals durch 3 teilbar ist. Unsere Annahme war also falsch, d.h. mindestens eine der drei Zahlen a, b, c ist durch 3 teilbar. Die bei dieser Aufgabe verwendete Methode des indirekten Beweises ist eine der wichtigsten Beweismethoden der Mathematik. Sie hat ihre Grundlage in Sätzen der mathematischen Logik. Es sei in diesem Zusammenhang für diejenigen Leser, die sich etwas näher mit der Logik beschäftigen wollen, auf die Artikelserie "Das klassische zweiwertige Aussagenkalkül" in den Heften 12/67 bis 2/68 verwiesen.

<u>(11.12/30):</u> Es gilt $\dfrac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \cos 4\alpha)}}} = \dfrac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{4\cos^2 2\alpha}}}$

Daraus erhalten wir $\dfrac{2}{\sqrt{2 + 2\cos 2\alpha}} = \dfrac{2}{\sqrt{2(1 + \cos 2\alpha)}}$

Nach Additionstheorem folgt: $= \dfrac{1}{\cos\alpha} = \mathrm{sc}\alpha$

Evariste Galois - Mathematiker und Patriot

In den frühen Morgenstunden des 30. Mai 1832 fand in Paris ein Pistolenduell statt - für die damalige Zeit war das sicher nichts Besonderes. Auch daß einer der Duellanten schwer getroffen zu Boden sank, war wohl der "Normalfall" für den Ausgang eines solchen Duells. Nicht üblich war aber, daß der Getroffene nach dem Duell allein auf dem Wege liegend gefunden wurde - seine Sekundanten hatten ihn verlassen. Das Mysteriöse dieses Duells wird jedoch noch deutlicher, wenn man die weiteren Ereignisse verfolgt.
Der Getroffene - ein Mitglied der "Gesellschaft der Freunde des Volkes", einer Vereinnigung der progressivsten Republikaner der damaligen Zeit - verstarb einen Tag nach dem Duell im Krankenhaus. Als sich seine Freunde trafen, um Einzelheiten des Begräbnisses zu besprechen, das zu einer Demonstration der Republikaner werden sollte, trat plötzlich Polizei auf und verhaftete den größten Teil der Anwesenden, obwohl das Duell und auch diese Zusammenkunft "geheim" geblieben waren. All das berechtigt zu der Annahme, daß das Duell wahrscheinlich durch Intrigen der Polizei und mit ihrer Hilfe zustande gekommen war. Wer war das Opfer dieser Intrigen, zu dessen Begräbnis - trotz der Maßnahmen der Polizei - zwei- bis dreitausend Republikaner anwesend waren? Das Opfer war ein junger Mann, von dem der deutsche Mathematiker Felix Klein sagte: "Um 1830 leuchtete ein neuer Stern von ungeahntem Glanze am Himmel der reinen Mathematik auf, um freilich, einem Meteor gleich, sehr bald zu verlöschen: Evariste Galois." Ein Mann, dessen Name heute jedem Mathematiker bekannt ist.
Worin liegen nun die Ursachen für das tragische Ende dieses hervorragenden mathematischen Genies? Um diese Frage beantworten zu können, muß man sich die Geschichte Frankreichs im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts und die Entwicklung des jungen Galois vergegenwärtigen.
Evariste Galois wurde am 25. Oktober 1811 in Bourg-la-Reine bei Paris als Sohn des späteren Bürgermeisters dieser Stadt geboren. Im Jahre 1823 trat Galois in das Collège Louis-le-Grand ein, der größten und wichtigsten Schule zur Erziehung von loyalen Untertanen des Königs im damaligen Paris. Daß die Schule ihr Erziehungsziel nicht bei allen Schülern verwirklichen konnte, be-

weisen die Namen Robespierre, Victor Hugo - und eben Evariste Galois, die alle Schüler von Louis-le-Grand waren.
Der junge Galois litt unter der Abgeschiedenheit und Strenge, die das Internat beherrschten. Seine Lehrer bezeichneten ihn als zerstreut und verträumt. Er mußte die vorletzte Klasse noch einmal wiederholen wegen nicht ausreichender Leistungen. Um der Langeweile der Hauptgegenstände Griechisch und Latein zu entgehen, begann Galois zum ersten Mal am Mathematikunterricht teilzunehmen, der an der Schule nicht obligatorisch war!
Mit 16 Jahren begann also Galois sich erstmalig mit Mathematik zu beschäftigen, und er war vom ersten Tage an von ihr fasziniert - er war von da an "von einer Leidenschaft für die Mathematik besessen." An der Schule wurde elementare Geometrie nach Euklid und elementare Algebra unterrichtet. Bald befriedigte ihn der Unterricht nicht mehr, er konnte von seinen Lehrern kaum noch etwas lernen, denn er studierte in seiner Freizeit die Werke der damals bedeutendsten französischen Mathematiker Legendre und Lagrange. Er widmete sich besonders der Algebra, deren Unvollkommenheit gegenüber der Geometrie ihn nicht befriedigte - man konnte damals die allgemeine Lösung von Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades angeben, über Gleichungen höheren Grades gab es keine allgemeingültigen Aussagen.
Bereits nach einem Jahr veröffentlichte Galois seine erste Arbeit, den Beweis eines Satzes über die periodischen Kettenbrüche, in einer mathematischen Zeitschrift. Sie enthielt noche keine wesentlichen Ergebnisse - diese "sparte" er auf für ein Manuskript, das er an die Académie française (der französischen Akademie der Wissenschaften) zur Begutachtung schickte. Dieses Manuskript enthielt die Grundgedanken der heute als "Galoische Theorie" bekannten Methode zur Untersuchung von algebraischen Gleichungen, die sich wesentlich auf die von Galois entwickelte Gruppentheorie stützt.
Die Neuheit und Tiefe dieser Gedanken erschwerten naturgemäß das Verständnis dieser Arbeit. Jedenfalls ist das Manuskript "verlorengegangen", nachdem es dem bekannten Mathematiker Cauchy zur Begutachtung geschickt worden war.
Das war die erste große Enttäuschung im Leben des jungen Galois, der die berechtigte Hoffnung hatte, mit dieser Arbeit bekannt,

wenn nicht berühmt zu werden. Die zweite Enttäuschung folgte, als Galois die Aufnahmeprüfung an der Ecole polytechnique, an der er Mathematik studieren wollte, zum zweiten Male nicht bestand. Auch hier muß angenommen werden, daß seine Antworten auf die Fragen des Prüfers nicht verstanden wurden, weil sie "zu mathematisch" waren. Auch seine zweite an die Akademie eingesandte Arbeit wurde von Poisson als unverständlich und unvollständig abgelehnt.

Inzwischen entwickelte sich der heranreifende Galois zu einem der "glühendsten Republikaner" (Alexandre Dumas), sicher nicht zuletzt wegen der Tatsache, daß sein Vater, ein demokratisch gesinnter Mann, von den reaktionären Kräften in den Tod getrieben wurde. Galois begann, aktiv für seine Überzeugung einzutreten. So nahm er an den revolutionären Kämpfen im Jahre 1830 in Paris teil und gründete danach einen Disskusionszirkel Gleichgesinnter. Seine wissenschaftliche Arbeit blieb unbekannt, sein mathematisches Genie unerkannt, aber der Polizei war er durch seine politische Aktivität als Aufrührer bekannt, und sie suchte nach Mitteln, um gegen ihn einschreiten zu können. So wurde er im Mai 1831 nach einem Bankett, auf dem in vorgerückter Stunde mißfällige Äußerungen gegen den König Louis Philippe gefallen waren, verhaftet. Er mußte allerdings nach einer vierwöchigen Untersuchungshaft freigesprochen werden. Aber bereits einen Monat später, am 14. Juli 1831, dem Erinnerungstag des Bastillesturmes, wurde er erneut verhaftet und diesmal auf Grund von gefälschtem Beweismaterial zu sechs Monaten Freiheitsentzug verurteilt. Seine Strafe mußte Galois in Sainte-Pélagie verbüßen. Galois verbrachte insgesamt mehr als 9 Monate seines kurzen Lebens im Gefängnis.

In der Nacht vor dem Duell, das vier Wochen nach seiner Haftentlassung stattfand, verfaßte Galois sein "Mathematisches Testament" in Form eines Briefes an Auguste Chevalier. Obwohl der Brief noch im gleichen Jahr veröffentlicht wurde, verging noch ein halbes Jahrhundert, bevor die Bedeutung der Arbeiten Galois' erkannt und er als einer "der genialsten Mathematiker aller Zeiten" (Perron) gewürdigt wurde. Über seinen hervorragenden mathematischen Leistungen sollte man jedoch nicht vergessen, auch die politische Tätigkeit von Evariste Galois gebührend zu würdigen. Er stand mit der akademischen Jugend von Paris in den ersten Reihen bei den Kämpfen gegen die Reaktion in jenen bewegten Jahren der Geschichte Frankreichs.[1]

E. Hertel

wiss. Assistent
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Prof. Dr. O. Stamfort

[1] Interessierte Leser verweisen wir auf den Roman von Leopold Infeld: Wen die Götter lieben. Die Geschichte des Evariste Galois. Schönbrunn-Verlag Wien 1954.

Leichte Kost für die Ferien

Der Umfang eines Vorderrades eines Wagens mißt 1,6m, der eines Hinderrades 2,25m. Zu bestimmen ist die kürzeste Strecke, die der Wagen zurücklegt, bis beide Räderpaare eine ganzzahlige Anzahl von Umdrehungen ausgeführt haben.

Wie groß ist die räumliche Diagonale eines Würfels, dessen Oberfläche in Quadratzentimetern zahlenmäßig mit dem Rauminhalt in Kubikzentimetern übereinstimmt?

Lösen Sie folgendes Gleichungssystem:

$$|x|+|y| = 2$$
$$|x + y| = 1 \qquad \text{für } x > y$$

Aus einer Holzplatte soll ein Quadrat herausgesägt werden. Wie kann man ohne Meßgeräte nachprüfen, ob das herausgeschnittene Viereck tatsächlich ein Quadrat ist?

Ein Wagen, vor den 3 Pferde gespannt sind, fahre in einer Stunde 15km. Mit welcher Geschwindigkeit läuft jedes Pferd?

(Die Aufgaben wurden aus der Broschüre von P. J. Germanowitsch "Aufgaben für mathematische Schülerwettstreite", Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1963, entnommen)

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

9/68

WURZEL · mathematische Schülerzeitschrift V-14-6 7 4283 M 175

Herausgegeben vom FDJ -Aktiv der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Eike Hertel, Günter Horn
Mitarbeiter: K.Fischer, H.Meißner, N.Kuse, H.Peuker, H.Schirrmeister, L.Staiger, W.Ulbrich, R.Wäckernagel

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

Stephan Heinrich: Die X. IMO Moskau 1968

Die X. - eine Jubiläumsolympiade, eine Olympiade, die allen Teilnehmern Tage voller Freude und schöne Eindrücke von der Sowjetunion brachte.
Als eine der ersten Mannschaften trafen wir acht Jungen aus der DDR auf dem Moskauer Flughafen Scheremetjewo ein, wo wir sofort von unserer Dolmetscherin Alla, sie studiert Germanistik an der Lomonossow-Universität, empfangen wurden. Auf die Begrüßung folgte eine Fahrt durch das abendliche Moskau, wir sahen die dicht gedrängt stehenden Hochhäuser, das Zentrum mit seinen alten, schönen Gebäuden, fuhren über breite Straßen und durch Autotunnel - wir erlebten Moskau als eine Zukunftsstadt. Voller neuer Eindrücke - wir besuchten alle zum ersten Mal die UdSSR - erreichten wir unser Quartier, ein Schulinternat, das für die Olympiade zur Verfügung gestellt worden war und jeder Mannschaft zwei wohnliche Zimmer bot. Nur die Delegationsleiter, die vor dem Wettkampf keinen Kontakt zu den Schülern aufnehmen durften, wohnten im Hotel Rossia.
Zunächst hieß es nun für uns, sich auf die Klausuren zu konzentrieren. Während der Vormittagszeit der nächsten zwei Tage jedoch besichtigten wir die Stadt. Stets standen Busse bereit, trotzdem waren die Fahrten recht anstrengend, zumal sich Moskau über eine große Fläche hinstreckt und das Internat ziemlich weit entfernt vom Zentrum lag. Anfangs waren wir darüber besorgt, denn müde wollten wir uns nicht zum Wettkampf stellen - aber wir hatten unsere Gastgeber unterschätzt. Jeder Nachmittag

vor den Klausuren war für Erholung vorgesehen, ja es wurde sogar streng darauf geachtet, daß keine Mannschaft irgendwelche Touren unternahm. Wir acht aus der DDR nutzten die freie Zeit, um ein wenig spazieren zu gehen, Volleyball, Basketball oder Tischtennis zu spielen oder uns auf den Zimmern auszuruhen.
Jeder von uns dachte in diesen Tagen an die große Entscheidung. Niemand war schon jetzt aufgeregt, auch hatten wir wegen unserer wochenlangen intensiven Vorbereitung nichts zu befürchten, doch ein Gefühl der Ungewißheit ließ uns nicht los. Und dieses Gefühl ging am Mittwoch, dem ersten Klausurtag in eine für alle spürbare Aufregung über, zumal sich das Olympiadekomitee um eine halbe Stunde verspätet hatte. Wir warteten zusammen mit allen anderen Teilnehmern in einem Flur, unterhielten uns ein wenig oder schwiegen. Andere Mannschaften versuchten, sich durch Lieder und laute Rufe, die unserem "Hip - Hip - Hurra!" ähnelten, zu beruhigen. Still wurde es erst bei der Eröffnung der Olympiade, nach der alle Schüler auf acht Räume - in jeden Raum ein Vertreter jeder Mannschaft - verteilt wurden. Mit einem letzten "Toi - toi - toi" und ein paar aufmunternden Worten verabschiedeten die noch verbliebenen jeden von uns, dann galt es, in den vier Stunden allein gegen die Aufgaben, die Nervosität und die eigenen Schwächen zu kämpfen.
An beiden Tagen wurden im Vergleich zum Vorjahr doch recht leichte Aufgaben gestellt, auch war die Geometrie erstaunlich wenig vertreten, so daß mittags, wenn wir uns einer nach dem anderen in der Vorhalle versammelten, jeder erzählen konnte, daß alles geklappt hatte. Auch mit den Ungarn und den sowjetischen Teilnehmern kamen wir gleich ins Gespräch. Sie berichteten ebenfalls, daß ihnen die Aufgaben leicht, ja sogar zu leicht gefallen sind. Daß nun möglicherweise jeder kleinste Fehler, jede Flüchtigkeit über die Preise entschied, war allen klar.
Aber warum sollten wir uns um die Arbeiten sorgen, vor uns stand eine lange Ferienwoche in einem fremden Land. Manchmal noch flackerten ein paar Gedanken an die Klausur auf, vielleicht entstand sogar eine Unterhaltung darüber, jedoch ständig stürmte so viel Neues auf uns ein, daß düstere oder fragende Erinnerungen keinen Platz fanden.
Gleich am Donnerstag besuchten wir den Moskauer Zirkus, bewunder-

ten die Leistungen der Artisten und lachten über Oleg Popow, den berühmten Clown. An den nächsten Tagen besuchten wir die Tretjakow-Galerie, die Kreml-Gebäude, den letzten Wohnort Lenins in Leninskije Gorki und schließlich das Mausoleum.
Daß Herr Dr. Bausch und Herr Titze, unsere Delegationsleiter, sich jetzt durch unsere Arbeiten hindurchfinden, ja manchmal hindurchwühlen mußten, hatten wir inmitten der turbulenten Stunden völlig vergessen. Erst am Sonntagabend, kurz vor der Abfahrt nach Leningrad, wurden wir wieder daran erinnert, als nämlich das Ergebnis bekanntgegeben wurde. Fünf Erste! Drei Zweite! Beste Mannschaft! - jubelte es in uns noch als wir im Bus saßen. Einige von uns schwiegen, andere waren ausgelassen, alle nahmen froh die Glückwünsche anderer Mannschaften entgegen. Welche wunderbaren Tage konnten wir nun verbringen, die herrliche Stadt Leningrad und dazu die ständige Freude über unsere Erfolge.
Umso schwerer aber wurde der Mittwochabend, der für uns Abschied von der Stadt an der Newa bedeutete. Wie gern hätten wir alles noch einmal erlebt - den Besuch des Winterpalais, der Peter-Pauls-Festung, des Petershofes. Wie gern hätten wir noch tagelang in der Ermitage verweilt, doch die letzten Stunden in der Sowjetunion waren angebrochen. Die Siegerehrung, ein letzter Einkaufsbummel durch Moskau, ein Vormittag in der DDR-Botschaft und schließlich der Empfang beim Minister für Volksbildung, auf dem die Mitglieder unserer Mannschaft mit Medaillen und Prämien ausgezeichnet wurden, beschlossen die für alle unvergeßlichen zwei Wochen der X.IMO.

Preisaufgaben P. 21/1 ... 6

Als Preisaugaben stellen wir heute die Aufgaben der X.IMO.
Wie üblich erhält der Einsender für jeden vollständigen Lösungsweg einen Wertpunkt. Als Einsendeschluß gilt die Veröffentlichung der Lösungen in irgendwelchen Zeitungen oder Zeitschriften, spätestens aber der 30.Oktober 1968 (Datum des Poststempels). Die Lösungen sind unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" an unsere Adresse einzuschicken.
Wir bitten, jede Lösung auf einem gesonderten Blatt einzuschicken und auf jedem Blatt Name, Klassenstufe und Schule des Einsenders anzugeben.

X. Internationale Mathematikolympiade

Erste Klausur

1. Man beweise, daß genau ein Dreieck existiert, bei dem die Maßzahlen der Seitenlängen aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind und einer der Winkel doppelt so groß wie einer der beiden anderen ist.

2. Es sei p(x) das Produkt aller Ziffern der im Dezimalsystem gegebenen Zahl x. Man ermittle alle positiven ganzen Zahlen x, für die $p(x) = x^2 - 10x - 22$ gilt.

3. Für die reellen Zahlen a, b, c mit $a \neq 0$ sei folgendes Gleichungssystem mit den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben:

$$ax_1^2 + bx_1 + c = x_2$$
$$ax_2^2 + bx_2 + c = x_3$$
$$\ldots$$
$$ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c = x_n$$
$$ax_n^2 + bx_n + c = x_1$$

Ferner sei $\Delta = (b - 1)^2 - 4ac$.
Man beweise, daß das System im Bereich der reellen Zahlen
für a) $\Delta < 0$ keine Lösung
b) $\Delta = 0$ genau eine Lösung
c) $\Delta > 0$ mehr als eine Lösung hat.

Zweite Klausur (Aufgaben nur sinngemäß)

4. Man beweise folgende Behauptung: In einem beliebigen Tetraeder läßt sich immer ein Eckpunkt so finden, daß man aus den Längen der von ihm ausgehenden Kanten ein Dreieck konstruieren kann.

5. Die Funktion f(x) sei reellwertig und für alle reellen x definiert. Weiterhin existiere eine positive reelle Zahl a, so daß für alle reellen x gilt

$$f(x + a) = \frac{a}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$$

Man beweise, daß f(x) periodisch ist, d.h. daß es eine reelle Zahl b gibt mit $f(x + b) = f(x)$.
Weiterhin gebe man für $a = 1$ ein Beispiel einer solchen Funktion an.

6. Man berechne für beliebiges natürliches n

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n + 2^{k-1}}{2^k}\right]$$

wobei [z] die größte ganze Zahl bedeutet, die z nicht überschreitet.

Aufgaben (Serie 9/68)

(A1) Man prüfe mit Hilfe der Aussagenlogik, ob folgender Schluß richtig ist:

Voraussetzungen: 1. Wenn ein n-Eck ABC...K regulär ist, so läßt es sich einem Kreis einbeschreiben.

2. Das n-Eck ABC...K ist nicht regulär.

Schluß: Das n-Eck ABC...K läßt sich keinem Kreis einbeschreiben.

(A2) Man zeige, daß die Summe zweier Primzahlzwillinge stets durch 12 teilbar ist, vorausgesetzt, daß die Primzahlen größer als 3 sind.

(A3) Man löse folgendes Gleichungssystem:

$$x(y + z) = 5$$
$$y(z + x) = 8$$
$$z(x + y) = 9$$

(A4) Gegeben seien eine Gerade g und zwei Punkte P_1 und P_2 auf derselben Seite von g. Man konstruiere einen Kreis durch P_1 und P_2, der g berührt.
(Diese Aufgabe läßt sich vorteilhaft durch Spiegelung am Kreis lösen.)

(A5) Es gelte $x + y = u + v$

$$x^2+y^2 = u^2+v^2$$

Man beweise, daß dann für natürliche n immer gilt

$$x^n+y^n = u^n+v^n$$

(Man zeige zuerst $x \cdot y = u \cdot v$)

(A6) Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge a. Um jeden Eckpunkt werde ein Kreisbogen mit dem Radius a geschlagen. Es entsteht im Inneren eine tönnchenförmige Fläche. Man berechne ihren Flächeninhalt.

Was ist ein Beweis?

Der Mensch besitzt die Fähigkeit, Erscheinungen und Verhältnisse seiner Umwelt durch die Sprache in Aussagen widerzuspiegeln. Besagt eine Aussage, daß sich gewisse Dinge in einer bestimmten Weise verhalten und verhalten sich diese Dinge tatsächlich in der ausgesagten Weise, so wird die Aussage als wahr bezeichnet. Verhalten sich aber die Dinge, über die eine Aussage gemacht wird, nicht in der ausgesagten Weise, so wird die Aussage als falsch bezeichnet. Die Aussagen, die in der Mathematik gemacht werden, werden so präzise formuliert, daß sie entweder einen gegebenen mathematischen Sachverhalt genau widerspiegeln oder ihn aber verfehlen. Mit anderen Worten: Eine Aussage in der Mathematik ist entweder wahr oder falsch, etwas Drittes gibt es nicht (Tertium non datur). Dieses der mathematischen Denkweise zugrunde liegende Prinzip ist das "Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten". Das "oder" in dem Satz "Eine Aussage ist wahr oder falsch" ist ein ausschließendes "oder", d.h. "Es gibt keine Aussage, die sowohl wahr als auch falsch ist" (Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch). Diesen Sachverhalt faßt der Logiker zusammen unter dem "Satz der Zweiwertigkeit". Die Logik des Mathematikers ist also "zweiwertig", eine mathematische Aussage kann nur mit wahr oder falsch beurteilt werden. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß nur die Rede davon ist, daß eine Aussage wahr oder falsch ist, daß aber keineswegs behauptet wird, daß man von jeder Aussage entscheiden kann, ob sie wahr oder falsch ist. So gibt es durchaus in der Mathematik zahlreiche Aussagen, für die bis heute nicht entschieden ist, ob sie wahr oder falsch sind. Als Beispiel sei folgendes ungelöste Problem erwähnt: Durchmustert man die Menge der natürlichen Zahlen, so findet man Primzahlen, deren Differenz 2 beträgt, sogenannte Primzahlzwillinge wie zum Beispiel (5,7), (17,19), (101,103). Unterhalb 1 000 000 gibt es 8164 solche Zwillinge. Man vermutet, daß es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt. Die Aussage "Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge" ist bis heute noch nicht als wahr oder falsch nachgewiesen, aber natürlich trifft genau eines von beiden zu.

Aus wahren Aussagen kann man durch Schließen neue wahre Aussagen herleiten. Was ein Schluß ist, soll an einem Beispiel verdeutlicht werden.

$$
\begin{array}{ll}
 & (P_1)\quad \text{Alle Menschen sind sterblich} \\
(I) & \underline{(P_2)\quad \text{Sokrates ist ein Mensch}} \\
 & (K)\quad \text{Sokrates ist sterblich}
\end{array}
$$

Das vorstehende Schema stellt einen Schluß dar, in dem aus den Sätzen "Alle Menschen sind sterblich" und "Sokrates ist ein Mensch" der Satz "Sokrates ist sterblich" erschlossen wird. Die Sätze (P_1) und (P_2) nennt man die Prämissen (das bedeutet so viel wie "Voraussetzungen") und den Satz (K) die Konklusion ("Schlußfolgerung") des Schlusses. Jeder Schluß enthält mindestens eine Prämisse und eine Konklusion, und wir nennen ihn gültig, wenn sich aus der Annahme der Wahrheit der Prämissen die Wahrheit der Konklusion ergibt, wie das im Beispiel der Fall ist. Man beachte dabei, daß in dem vorliegenden Schluß weder die Wahrheit der Prämissen behauptet wird, noch die Wahrheit der Konklusion. Vielmehr handelt es sich lediglich darum, daß die Konklusion wahr ist, wenn es die Prämissen sind. So würde auch folgendes Schema einen gültigen Schluß wiedergeben:

$$
\begin{array}{ll}
 & (P_1)\quad \text{Alle Menschen sind unsterblich} \\
(II) & \underline{(P_2)\quad \text{Sokrates ist ein Mensch}} \\
 & (K)\quad \text{Sokrates ist unsterblich}
\end{array}
$$

obwohl die Prämisse (P_1) und die Konklusion (K) als Aussagen falsch sind. Auch das folgende Schema liefert einen gültigen Schluß, obwohl eine der Prämissen (P_2) eine falsche Aussage darstellt

$$
\begin{array}{l}
(P_1)\quad \text{Alle Frauen sind sterblich} \\
\underline{(P_2)\quad \text{Sokrates ist eine Frau}} \\
(K)\quad \text{Sokrates ist sterblich}
\end{array}
$$

Im Gegensatz zu Beispiel (II) stellt diesmal die Konklusion eine richtige Aussage dar.

Es ist allgemein geläufig, daß unter den wissenschaftlichen Argumenten den Beweisen eine ausgezeichnete Bedeutung zukommt. Ein Beweis ist eine Folge von gültigen Schlüssen, deren erste Prämissen wahre Aussagen sind (z.B. bereits bewiesene Sätze) oder zu den Voraussetzungen gehören, unter deren Gültigkeit eine Aussage, die man dann auch Behauptung nennt, als wahr nachgewiesen werden soll. Eine Konklusion als Ergebnis eines gültigen Schlusses

wird zur Prämisse beim folgenden gültigen Schluß. Nach endlich vielen solchen gültigen Schlüssen ergibt sich als Konklusion des letzten Schlusses die zu beweisende Behauptung. Der gesamte Beweis zerfällt somit in eine endliche Folge von gültigen Schlüssen, vergleichbar mit einer Kette, die aus endlich vielen Gliedern aufgebaut ist.
Im folgenden sollen nun die wichtigsten Beweisverfahren der Mathematik an einfachen Beispielen vorgestellt und diskutiert werden.

E. Müller-Pfeiffer
Oberassistent
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACHTUNG - ACH

Die Artikelserie "Einführung in die Rechentechnik" (letzter Beitrag in Nr.7/8/68) wird in Nr.10/68 fortgesetzt.

Lösungen

(9.31): (Lösung von Hans Rainer Schumann, EOS Naumburg, 9.Kl)

$$|2 - x| + |4 - x| - 1 \leq 0$$
$$|2 - x| + |4 - x| \leq 1$$

$$|2 - x| = \begin{cases} 2 - x & \text{für } x < 2 \\ 0 & \text{für } x = 2 \\ x - 2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

$$|4 - x| = \begin{cases} 4 - x & \text{für } x < 4 \\ 0 & \text{für } x = 4 \\ x - 4 & \text{für } x > 4 \end{cases}$$

1. $x \leq 2$ folglich $x < 4$
$$|2 - x| + |4 - x| \leq 1$$
$$2 - x + 4 - x \leq 1$$
$$6 - 2x \leq 1$$
$$x \geq 2{,}5$$

2. $x > 2$, $x \leq 4$
$$|2 - x| + |4 - x| \leq 1$$
$$x - 2 + 4 - x \leq 1$$
$$2 \leq 1$$
Widerspruch! Es existiert keine Lösung für
$$2 < x \leq 4$$

3. $x > 2$, $x > 4$

$|2 - x| + |4 - x| \leq 1$

$x - 2 + x - 4 \leq 1$

$x \leq 3{,}5$

Aus 1. bis 3. folgt, daß die Ungleichung im Bereich der reellen Zahlen keine Lösung hat.

(9.34): (Lösung von Bernd Nikutowski, EOS Neubrandenburg, 9.Kl.)

Voraussetzung: x, y, z reelle Zahlen

Behauptung: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$

Beweis: Annahme: Die Behauptung ist wahr:

$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$

$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \geq 0$

Multiplikation mit 2:

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \geq 0$

Entsprechend der 2.binomischen Grundformel geordnet:

$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 + y^2 - 2yz + z^2 \geq 0$

$(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \geq 0$

Diese Aussage ist offensichtlich wahr. Da nur äquivalent umgeformt wurde, ist damit auch die Behauptung wahr.

(10.33): Eine Lösung ist nur sinnvoll für $\tan x > 0$ d.h.

(1) $k \cdot \pi < x < k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$ $k = 0, \pm 1, \ldots$

Dann ist wegen $\tan x \cdot \cot x = 1$

$$(\tan x)^{\sin x} = (\tan x)^{-\cos x}$$

Es ergeben sich:

I. $\sin x = -\cos x$

daraus folgt $\tan x = -1$ d.h. $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$

II. $\tan x = 0$ folglich $x = k\pi$

III. $\tan x = 1$ folglich $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Die Ergebnisse I. und II. stehen im Widerspruch zu (1).

Somit ist $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ die einzig mögliche Lösung.

(11/12.29): (Lösung von Hugo Reinhardt, EOS Heiligenstadt, 12.Kl.)

Die gegebenen Zahlen sind: $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$

Ich bilde nun die Summen:

a_1

$a_1 + a_2$

$a_1 + a_2 + a_3$

...

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1000}$

Bei Division dieser Summen durch 1000 können die Reste 0, 1, 2, ..., 999 auftreten, das sind insgesamt 1000 verschiedene Zahlen.

Läßt eine der oben angegebenen Summen bei Division durch 1000 den Rest 0, so ist die Bedingung der Aufgabe erfüllt. Läßt keine der Summen den Rest 0, so muß bei den 1000 Summen ein Rest zweimal auftreten. Man bildet nun die Differenz der beiden Summen, die den gleichen Rest lassen und erhält eine Teilsumme, die durch 1000 teilbar ist.

(11/12.31): (Lösung von H.-P.Müller, John-Schule Leuna, 10.Kl.)

Beweis durch vollständige Induktion:

I. Für n = 2 ist die Behauptung richtig

$$(1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{4} \qquad \frac{2+1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$$

II. Man nehme nun an, die Behauptung sei für n = k richtig, d.h. es gilt:

$$(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{k^2}) = p_k = \frac{k+1}{2k}$$

III. Man beweise nun, daß diese Behauptung auch für n = k + 1 richtig ist:

Behauptung:

$$(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{k^2})(1 - \frac{1}{(k+1)^2}) =$$

$$= \frac{k+2}{2k+2} = p_{k+1}$$

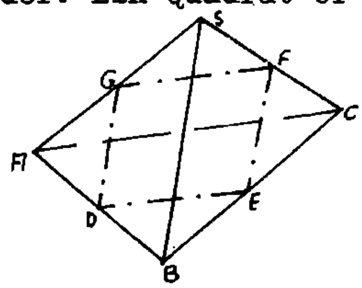
Beweis: $p_{k+1} = p_k \cdot (1 - \frac{1}{(k+1)^2})$

$$p_{k+1} = \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{(k+1)^2 - 1}{(k+1)^2}$$

$$= \frac{k^2 + 2k}{2k(k+1)} = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

Damit trifft die Behauptung für jedes n zu.

(11/12.32): ABCS sei das regelmäßige Tetraeder. Ein Quadrat ergibt sich als Schnittfläche, wenn der Schnitt so geführt wird, daß er durch die Mitten D, E, F und G der Kanten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CS}$, $\overline{SA}$ des Tetraeders geführt wird.



Daß die Strecken $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ und $\overline{FG}$ gleichlang sind als Verbindungsstrecken zweier Seitenmitten in kongruenten Dreiecken ist leicht zu sehen.
Zunächst zeige man noch, daß die Innenwinkel des Vierecks DEFG rechte Winkel sind. Es gilt:
$\overline{GD} \parallel \overline{BS}$, $\overline{EF} \parallel \overline{BS}$, $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ und $\overline{FG} \parallel \overline{AC}$ in den entsprechenden Seitenflächen des Tetraeders. Da im regelmäßigen Tetraeder die gegenüberliegenden Kanten $\overline{AC}$ und $\overline{BS}$ senkrecht zueinander stehen, folgt somit die Behauptung.
Schließlich wird noch gezeigt, daß DEFG ein ebenes Viereck ist. Dies folgt z.B. aus der Parallelität von $\overline{GD}$ und $\overline{EF}$.

(11/12.33): (Lösung von Elisabeth Günther, EOS Weimar, 11.Kl.)
Voraussetzung: a^2, b^2, c^2 (a^2 / b^2) bilden eine arithmetische Folge
Behauptung: $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ bilden ebenfalls eine arithmetische Folge
Beweis: Laut Voraussetzung gilt:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{3}{2}(a^2 + c^2) \qquad (1)$$

Behauptet wird :

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}\right) \qquad (2)$$

$$\frac{(c+a)(a+b)+(b+c)(a+b)+(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)(a+b)} = \frac{3(a+b+b+c)}{2(b+c)(a+b)}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab+ac+bc) = \frac{3}{2}(a+2b+c)(c+a)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab+ac+bc) = \frac{3}{2}(ac+a^2+2bc+2ab+c^2+ac)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab+ac+bc) = \frac{3}{2}(a^2+2ab+2ac+2bc+c^2)$$

$$a^2+b^2+c^2 = \frac{3}{2}(a^2+c^2) \qquad (3)$$

Da (3) und (1) äquivalent sind, ist die Behauptung bewiesen.

10
68

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

WURZEL - mathematische Schülerzeitschrift V-14-6 7 4283 M 175

Herausgegeben vom FDJ -Aktiv der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Eike Hertel, Günter Horn
Mitarbeiter: K.Fischer, H.Meißner, N.Kuse, H.Peuker, H.Schirrmeister, L.Staiger, W.Ulbrich, R.Wackernagel

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

Einführung in die Rechentechnik III

In Fortführung der bisherigen Beiträge zur Rechentechnik sollen im folgenden einige Probleme untersucht werden, die sich bei der Lösung von Aufgaben aus verschiedenen Bereichen mit Hilfe von Rechenanlagen ergeben.
Ein erstes Problem ist die Übersetzung von Lösungsverfahren in Arbeitsprogramme für das Rechenhilfsmittel (siehe auch "Wurzel" Nr.7/8/68). Es erscheint sinnvoll, folgende Fragen zu beantworten:

1. Gibt es allgemeingültige Prinzipien bei der inhaltlichen Charakterisierung von Lösungsverfahren?
2. Welche Formen der Darstellung von Lösungsverfahren haben sich als geeignet erwiesen?
3. Wie kann eine Rechenanlage ein Arbeitsprogramm automatisch realisieren?

zu 1. <u>Der Begriff des Algorithmus</u>

Der Begriff des Algorithmus ist keineswegs elementar zu definieren. Er ist Gegenstand der Untersuchungen in der mathematischen Kybernetik. Hier soll eine heuristische Beschreibung angegeben werden, die nach einigen geeigneten Präzisierungen für die weiteren Überlegungen ausreicht.

Ein System von Vorschriften, nach denen ein vorgelegtes Problem gelöst werden kann, soll Algorithmus heißen.

Der Verdeutlichung der Notwendigkeit, die Vorschriften in einer bestimmten Reihenfolge anzuwenden, dient die 1.Präzisierung:

Ein Algorithmus ist eine endliche Folge von Vorschriften.

Das Attribut "endlich" weist darauf hin, daß der Lösungsweg nach endlich vielen Schritten beendet sein soll, eine Einschränkung, die bei theoretischen Untersuchungen nicht erforderlich ist.

2.Präzisierung:

> Ein Algorithmus A(V,S) besteht aus
> einer endlichen Menge V von Vorschriften und
> einer logischen Struktur S, die diese Vorschriften zu einer Folge ordnet.

Diese zweite Präzisierung erleichtert die Beantwortung der Frage nach günstigen Formen der graphischen Darstellung von Algorithmen.

zu 2. <u>Darstellungsformen für Algorithmen</u>

Durch eine geschickte Interpretation können interessante Beziehungen zwischen Darstellungsformen für Algorithmen und der Graphentheorie aufgezeigt werden.

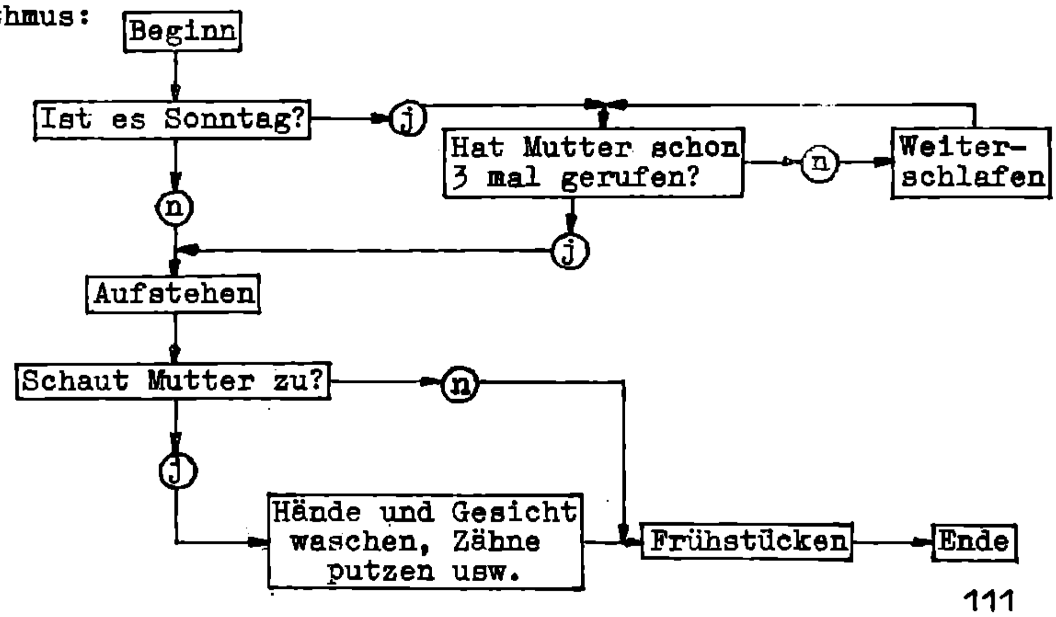
Werden die Elemente der endlichen Menge V als Knoten eines Graphen und die Elemente der logischen Struktur S als gerichtete Bögen, die aufeinanderfolgende Vorschriften verbinden, gedeutet, so kann der Algorithmus A(V,S) als endlicher gerichteter Graph dargestellt werden.

Ein einfaches Beispiel soll die bisherigen Ausführungen erläutern:

Problem: Ein nicht ganz wohlerzogener Junge gestaltet den Ablauf des Morgens.

Vorschriften: Schlafen, Aufstehen, Morgentoilette, Frühstücken, Information am Kalender, Hören, Schauen.

Algorithmus:



Das Beispiel zeigt, daß in einem Algorithmus auch Fragen vorkommen können, von deren Beantwortung der weitere Ablauf des Geschehens abhängt. Dieser Sachverhalt wird sich sehr bald als äußerst vorteilhaft erweisen. Im weiteren beschränken sich die Untersuchungen auf Algorithmen zur Lösung mathematischer Probleme. Die Verallgemeinerung auf andere Bereiche sei dem Leser überlassen.

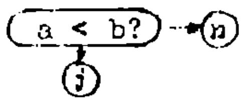
Zunächst sei ein formaler Aspekt hervorgehoben. Sicher ist es gerechtfertigt, die Vorschriften (Knoten des Graphen) auf eine möglichst geringe Menge von Typen zu standardisieren, um bei der Darstellung von Algorithmen ein bestimmtes Maß an Einheitlichkeit zu garantieren. Folgende Standardisierung hat sich bewährt:

1. Anweisungskästchen (rechteckig) Bsp.: $\boxed{z := f(x,y)}$

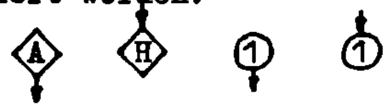
   Der Inhalt des Anweisungskästchens ist in der Sprache der Rechentechnik formuliert. Er ist folgendermaßen zu deuten: "Die Werte der Größen x und y werden durch die Vorschrift f miteinander verknüpft. Das Resultat ergibt den Wert der Größe z."

   Das Symbol „:=" heißt Ergibtzeichen und unterscheidet sich vom Gleichheitszeichen durch einen Richtungssinn. Der Inhalt des Anweisungskästchens ist <u>keine</u> Gleichung, sondern eine Vorschrift, deren Ausführung richtungsgebunden ist. Zunächst wird der Wert des rechts vom Ergibtzeichen stehenden Ausdrucks ermittelt und dann der links vom Ergibtzeichen stehenden Größe zugeordnet. Insbesondere hat die spezielle Vorschrift $\boxed{i := i+1}$ einen Sinn. Sie bedeutet: "Der Wert der Größe i wird um 1 vermehrt und ergibt den neuen Wert der Größe i". Offensichtlich kann durch eine derartige Vorschrift ein Zählvorgang realisiert werden. Eine Gleichung der Gestalt i = i+1 wäre dagegen sinnlos.

2. Fragekästchen: (abgerundet) Bsp.:



   Im Gegensatz zum Anweisungskästchen, in dem als Resultat in jedem Falle ein Wert auftritt, liefert die Auswertung des Inhalts des Fragekästchens ein logisches Ergebnis, die Antwort "ja" oder "nein". Der Inhalt des Fragekästchens ist stets so zu formulieren, daß als Ergebnis genau eine der Antworten "ja" oder "nein" zulässig ist. Komplizierte Fragen müssen in eine Folge elementarer Fragen aufgelöst werden. Um z.B. festzustellen, ob eine Zahl z größer, kleiner oder gleich Null ist, sind mindestens zwei Fragekästchen erforderlich. Die Ausgänge für die Antworten "ja" und "nein" können auch an anderen Stellen des Fragekästchens plaziert werden.

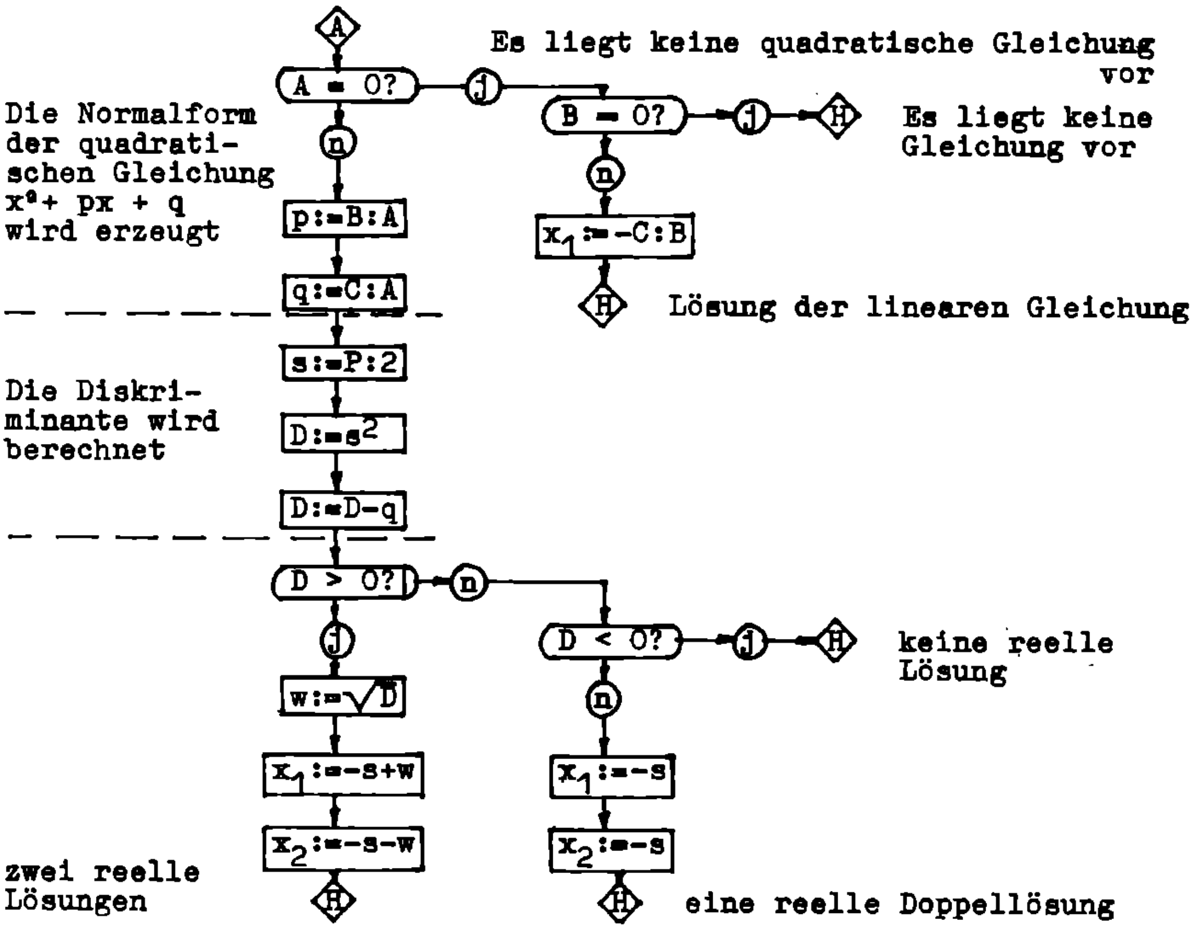
3. Organisationskästchen: (quadratisch, kreisförmig) Bsp.: 

   Organisationskästchen vermitteln keine Vorschriften. Sie dienen der Markierung besonderer Stellen des Graphen, insbesondere des Anfangs, des Endes und solcher Stellen, an denen aus Übersichtlichkeitsgründen eine Teilung des Graphen in zwei Komponenten sinnvoll erscheint.

Ein Beispiel soll das Zusammenwirken der einzelnen Typen von Kästchen demonstrieren.

Bsp.: Auflösung der quadratischen Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$

$V = \{+, -, x, :, \sqrt{\ }, <, =, >\}$



Ein endlicher gerichteter Graph, der einen Algorithmus darstellt, heißt Flußbild oder Flußdiagramm; die Darstellungsmethode Flußbildtechnik. Ein Flußbild zeigt neben der Anzahl und der Art der Vorschriften sehr deutlich die ganze Dynamik des Algorithmus.

H. Peuker
wissenschaftlicher Mitarbeiter
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Aufgaben (Serie 10/68)

(A7) Gegeben sei die Strecke $\overline{AB}$. Man bestimme im Raum den geometrischen Ort aller Punkte, von denen aus die Strecke $\overline{AB}$ unter einem Winkel von 120° erscheint.

(A8) Es wird mit 3 Würfeln gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich aus den gewürfelten Zahlen eine gerade Zahl zusammenstellen läßt?

(A9) Man beweise, daß $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$ ist, wenn $a+b \geq 1$ und $a, b > 0$ gilt.

(A10) Die Glieder einer unendlichen arithmetischen Reihe seien ganze Zahlen. Man beweise, daß die Summen ihrer Ziffern keine arithmetische Reihe bilden.

(A11) Es gelte
$$\cos\alpha + \cos\beta = a$$
$$\sin\alpha + \sin\beta = b$$
$$a^2 + b^2 \neq 0$$
Man bestimme $\cos(\alpha+\beta)$.

(A12) Man zeige: Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $4n + 3$.
Anleitung: Man bilde $P = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p - 1$, wo alle Primzahlen p als Faktoren im ersten Glied auftreten.

Preisaufgabe (P. 22)

Gegeben seien ein Kreis K und zwei Punkte P_1 und P_2. Gesucht ist derjenige Kreis durch P_1 und P_2, der K berührt.

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" bis zum 30. des jeweiligen Erscheinungsmonats (Datum des Poststempels) an unsere Adresse einzuschicken.
Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.

D r u c k f e h l e r b e r i c h t i g u n g
Durch einen Übermittlungsfehler wurde in der Nr.9/68 die Aufgabe 5 der IMO 1968 leider falsch gestellt. Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen muß lauten: $a \cdot f(x) - (f(x))^2$.
Wir bitten, diesen Fehler zu entschuldigen.

Unser Mathematik-Spezialistenlager

Das diesjährige Sommerlager fand vom 12. bis 23. August in Bad Köstritz statt. Etwa 70 Schüler hatten die Möglichkeit, in den Fachveranstaltungen neue Kenntnisse auf verschiedenen Gebieten der Mathematik zu erwerben. Fachbücher aus der Bibliothek unserer Sektion und Unterhaltungen mit Betreuern dienten den Schülern dazu, ihr Wissen in den neuen Stoffgebieten zu festigen. In den nächsten Ausgaben der "Wurzel" wollen wir einige im Sommerlager gehaltene Vorträge veröffentlichen. In der Tagesolympiade erreichten viele Schüler recht gute Ergebnisse. Die Besten erhielten Buchprämien.

Natürlich kam neben der Arbeit auch die Erholung nicht zu kurz. Sportfest, Fußballturnier und Gymnastikabend bildeten einen Ausgleich für das lange Sitzen am Vormittag. Ein Lichtbildervortrag über die IMO in Sofia von Ludwig Staiger, ein Kinobesuch und ein sehr interessanter Tucholsky-Abend waren kulturelle Höhepunkte des Lagers. Zum Abschlußabend, der mit einem großen Rostbratwurstessen eingeleitet wurde, boten Schüler und Betreuer ein buntes Programm. - Viele Gelegenheiten boten sich, die Freundschaft zwischen Schülern und Betreuern zu festigen. Offene Diskussionen über aktuelle politische Themen gehörten genauso zum Tagesablauf wie Gespräche über die Gestaltung des Lagers. Viele Schüler halfen durch große Einsatzbereitschaft, das Leben im Lager interessant und erlebnisreich zu gestalten. -
Wir möchten schon jetzt alle interessierten Schüler auf unsere nächsten Lager im Februar und im Juli 1969 hinweisen. Wir freuen uns sehr über Hinweise zur noch interessanteren Gestaltung des Lagerlebens und sind gern bereit, Fragen zu beantworten. Sendet Eure Zuschriften an die "Wurzel"-Redaktion.

Das Betreuerkollektiv

Was ist ein Beweis? II

Im ersten Teil dieser Artikelserie ("Wurzel" Nr.9/68) hatten wir zuletzt festgestellt, daß ein Beweis in eine endliche Folge von gültigen Schlüssen zerfällt. Folgendes Beispiel soll dies beleuchten. Es soll der Satz bewiesen werden, oder genauer: Folgende Aussage soll als wahr nachgewiesen werden:
Wenn a, b und n natürliche Zahlen sind und der größte gemeinsame Teiler $d = (a,b)$ von a und b ein Teiler von n ist, so ist die Gleichung $ax + by = n$ mit ganzen Zahlen x und y lösbar.
Im folgenden Beweis werden die Schemata, die gültige Schlüsse widerspiegeln, formal vereinfacht aufgeschrieben, indem man allgemein ein Schema

$$\begin{array}{l} (P_1)\ \ldots \\ (P_2)\ \ldots \\ \ldots \\ (P_n)\ \ldots \\ \hline (K)\ \ldots \end{array}$$

eines gültigen Schlusses durch $(P_1), \ldots, (P_n) \Longrightarrow (K)$ abkürzt.

Links stehen die Prämissen, auf der rechten Seite des Folgepfeiles $\Longrightarrow$ steht die Konklusion (z.B. $a = b$, $b = c \Longrightarrow a = c$).

Nun beginnt der Beweis:

(1) a, b natürliche Zahlen (P_1), a sei größer oder gleich b ($a \geq b$) (P_2) $\Longrightarrow a = p_1 b + r_1$, $p_1 \geq 1$, $0 \leq r_1 < b$, p_1 und r_1 ganz (K). Das bedeutet:

Wenn $a \geq b$ ist, so setzt sich a additiv zusammen aus einem ganzzahligen Vielfachen $p_1 b$ von b und einem Rest r_1, für welchen $r_1 < b$ gilt. Der durch das Schema skizzierte gültige Schluß könnte noch in eine Reihe von Teilen, die ihrerseits gültige Schlüsse darstellen, aufgelöst werden. Da wir jedoch das Rechnen mit ganzen Zahlen voraussetzen, kann der Kürze halber (1) als gültiger Schluß genommen werden. Für den Fall, daß $r_1 > 0$ ist, wird entsprechend (1) weitergeschlossen.

(2) b, r_1 natürliche Zahlen (P_1), $0 < r_1 < b$ (P_2) $\Longrightarrow b = p_2 r_1 + r_2$, $p_2 \geq 1$, $0 \leq r_2 < r_1$ (K)

(3) r_1, r_2 natürliche Zahlen (P_1), $0 < r_2 < r_1$ (P_2) $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow r_1 = p_3 r_2 + r_3,\ 0 \leq r_3 < r_2 \text{ (K)}$$

Diese Schlußkette wird fortgesetzt, bis sich in

(n+1) r_{n-1}, r_n natürliche Zahlen, $0 < r_n < r_{n-1} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow r_{n-1} = p_{n+1} r_n + r_{n+1}$$

die Zahl r_{n+1} als Null ergibt. Das muß eintreten, da es nur endlich viele natürliche Zahlen gibt, die kleiner als r_1 sind.

Faßt man die einzelnen skizzierten gültigen Schlüsse zu einem Schema zusammen, ergibt sich folgendes System von Gleichungen:

$$
\text{(S)} \qquad
\begin{aligned}
a &= p_1 b + r_1 \\
b &= p_2 r_1 + r_2 \\
r_1 &= p_3 r_2 + r_3 \\
&\dots \\
r_{n-2} &= p_n r_{n-1} + r_n \\
r_{n-1} &= p_{n+1} r_n
\end{aligned}
$$

Aus der letzten Zeile von (S) folgt, daß r_n ein Teiler von r_{n-1} ist, wofür $r_n | r_{n-1}$ geschrieben wird.

$r_n | r_{n-1}$ (P_1), $r_{n-2} = p_n r_{n-1} + r_n$ (P_2) $\Longrightarrow r_n | r_{n-2}$ (K)

$r_n | r_{n-1}$ (P_1), $r_n | r_{n-2}$ (P_2), $r_{n-3} = p_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1}$ (P_3) $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow r_n | r_{n-3} \text{ (K)}$$

u.s.w.

$r_n|r_2$ (P_1), $r_n|r_1$ (P_2), $b = p_2r_1 + r_2$ $(P_3) \Longrightarrow r_n|b$ (K)

$r_n|r_1$ (P_1), $r_n|b$ (P_2), $a = p_1b + r_1$ $(P_3) \Longrightarrow r_n|a$ (K)

Damit gilt:

$$r_n|b\ (P_1),\ r_n|a\ (P_2) \Longrightarrow r_n|d,\ d = (a,b)\ (K)$$

(Im weiteren soll auf Kennzeichnung der wahren Aussagen links von "$\Longrightarrow$" durch das Prämissensymbol (P_i) verzichtet werden. Dasselbe gilt für die Kennzeichnung der Aussage(n) rechts von "$\Longrightarrow$" durch das Konklusionssymbol (K).)

Wenn andererseits t ein Teiler von a und b ist (z.B. t = d), so kann wie folgt geschlossen werden:

$$t|a,\ t|b,\ r_1 = a - p_1b \quad (\text{aus (S)}) \Longrightarrow t|r_1$$

$$t|b,\ t|r_1,\ r_2 = b - p_2r_1 \Longrightarrow t|r_2 \quad \text{u.s.w.}$$

$$t|r_{n-2},\ t|r_{n-1},\ r_n = r_{n-2} - p_nr_{n-1} \Longrightarrow t|r_n$$

Setzt man t = d, so ergibt sich insgesamt der Schluß

$$r_n|d,\ d|r_n \Longrightarrow d = r_n$$

Aus den Gleichungen des Systems (S) ergibt sich weiter

$r_1 = a-p_1b$, $r_2 = b-p_2r_1$, $\Longrightarrow r_2 = b-p_2(a-p_1b) = -p_2a+(1+p_1p_2)b$

$r_1 = a-p_1b$, $r_2 = -p_2a+(1+p_1p_2)b$, $r_3 = r_1-p_3r_2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow r_3 = h_3a+k_3b$, h_3, k_3 ganz

u.s.w.

$r_{n-2} = h_{n-2}a+k_{n-2}b$, h_{n-2}, k_{n-2} ganz, $r_{n-1} = h_{n-1}a+k_{n-1}b$, h_{n-1}, k_{n-1} ganz,

$r_n = r_{n-2}-p_nr_{n-1} \Longrightarrow d = r_n = h_na+k_nb$, h_n, k_n ganz

Mit $x' = h_n$ und $y' = k_n$ sind also ganze Zahlen gefunden, die die Gleichung $x'a + y'b = d$ lösen. Durch Multiplikation dieser Gleichung mit der ganzen Zahl $m = \frac{n}{d}$ (nach Voraussetzung ist d ein Teiler von n) ergibt sich schließlich

$$x'a + y'b = d,\ \frac{n}{d} = m \Longrightarrow (x'm)a + (y'm)b = md = n$$

Mit $x_0 = x'm$ und $y_0 = y'm$ sind somit ganze Zahlen gefunden, welche die Gleichung $ax + by = n$ lösen. Damit ist der Satz in dem Falle bewiesen, daß $a \geq b$. Ist $a < b$, so vertausche man im obigen Beweis die Rollen von a und b. Mit dieser Bemerkung ist der Satz vollständig bewiesen.

(Bemerkung: Da die linke Seite der Gleichung $ax + by = n$ für beliebige ganze Zahlen x und y immer ein Vielfaches von d ist, muß auch n ein Vielfaches von d sein. Das bedeutet, daß die Gleichung

$ax + by = n$ keine Lösung besitzen kann, wenn d kein Teiler von n ist. Außerdem erkennt man sofort, daß der Satz richtig bleibt, wenn von a, b und n nur vorausgesetzt wird, daß sie ganze Zahlen sind. Sind zum Beispiel b und n negativ, so gibt es nach dem bewiesenen Satz Zahlen x_0 und y_0, die die Gleichung $ax_0 + (-b)y_0 = -n$ lösen, denn a, -b, -n sind dann natürliche Zahlen und genügen somit den Voraussetzungen des Satzes. Dann folgt aber $a(-x_0)+by_0=n$, so daß $x = -x_0$, $y = y_0$ die Gleichung $ax + by = n$ lösen. Der Fall, daß eine oder auch mehrere der Zahlen a, b, n gleich Null sind, ist leicht zu behandeln und kann vom Leser selbst erledigt werden. Es ist somit folgende Aussage als wahr nachgewiesen:
Die Gleichung $ax + by = n$, wobei a, b und n ganze Zahlen sind, ist mit ganzen Zahlen x und y dann und nur dann lösbar, wenn $d = (a,b)$ ein Teiler von n ist. Das Verfahren (S), mit welchem der größte gemeinsame Teiler zweier ganzer Zahlen berechnet werden kann, wird als Euklidischer Algorithmus bezeichnet.)
Der oben ausführlich dargestellte Beweis ist seiner Natur nach ein "direkter" Beweis,wie man sagt. Die zu beweisende Behauptung wird direkt durch eine Reihe von gültigen Schlüssen aus Prämissen gefolgert, die als wahr gelten.
Im nächsten Beitrag werden wir uns mit dem sogenannten "indirekten" Beweis beschäftigen.

Dr. habil. E. Müller-Pfeiffer
Oberassistent
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Lösungen

(10.32): Primzahlen, die größer als 10 sind, lassen sich immer in der Form $6n + 1$ oder $6n - 1$ darstellen. Da die drei gegebenen Primzahlen eine arithmetische Reihe bilden sollen, müssen sie sich, wie sich leicht zeigen läßt, in der Form $6n + 1$ oder $6n - 1$ darstellen lassen. Somit hat $d = p_3 - p_2 = p_2 - p_1$ die Form 6n und ist somit durch 6 teilbar.

(P17): Von den meisten Einsendern wurde Brown als alleiniger Tä-

ter bezeichnet. Auf den ersten Blick erhält man scheinbar nur diese Aussage. Dieses Ergebnis zeugt aber davon, daß diese Einsender eben nicht alle Fälle betrachtet haben.
Wir erhalten nämlich als Lösung folgende Aussage:
"Smith und Jones waren die Täter" oder
"Brown war der Täter".
Wir geben hier keine Lösung an, sondern verweisen nur darauf, daß man bei Untersuchung des vorgegebenen Aussagensystems mit Hilfe einer Wahrheitswerttabelle, in der als Gesamtaussage $(A \wedge B \wedge C)$
(A - Browns Aussage
B - Smith Aussage
C - Jones Aussage)
(siehe auch "Wurzel" Nr.1/68 bis 2/68 "Der klassische zweiwertige Aussagenkalkül") auftritt, unbedingt bei richtiger Bestimmung der Wahrheitswerte zu obigem Ergebnis gelangt. Dieser Weg führt bei solchen Aufgaben immer zum Ziel.

(P19): Folgendes gilt:
m, n, n-1 sind ganze Zahlen
$\frac{n}{m} = a + \frac{b}{m}$, a, b ganze Zahlen, $m > b \geq 0$, folglich:
$\frac{n-1}{m} = \frac{n}{m} - \frac{1}{m} = a + \frac{b}{m} - \frac{1}{m} = a + \frac{b-1}{m}$

1.Fall $b \geq 1$

$\frac{b-1}{m} \geq 0$, folglich $\left[\frac{n}{m}\right] - \left[\frac{n-1}{m}\right] = a - a = 0$

2.Fall $b = 0$

$a + \frac{b-1}{m} = a + \frac{-1}{m} = a - 1 + \frac{m-1}{m}$

folglich $\left[\frac{n}{m}\right] - \left[\frac{n-1}{m}\right] = a - (a-1) = 1$

Also $\left(\left[\frac{n}{m}\right] - \left[\frac{n-1}{m}\right]\right) = 1$ genau dann, wenn $b = 0$, also wenn $\frac{n}{m} = a$, d.h. m muß Teiler von n sein. Hieraus folgt:
$\sum_{m=1}\left(\left[\frac{n}{m}\right] - \left[\frac{n-1}{m}\right]\right) = 2$ wenn es genau zwei m_i gibt, die Teiler von n sind. n muß folglich eine Zahl sein, die nur zwei Teiler besitzt, d.h. muß eine Primzahl sein.
(Lösung eingesandt von Rolf Schmidt, Spezialschule Carl Zeiss Jena, Klasse $10E_1$)

11

68

WURZEL

zeitschrift für mathematik an ober- und spezialschulen

WURZEL - mathematische Schülerzeitschrift V-14-6 7 4283 M 175

Herausgegeben vom FDJ -Aktiv der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Elke Hertel, Günter Horn
Mitarbeiter: K.Fischer, H.Meißner, N.Kuse, H.Peuker, H.Schirrmeister, L.Staiger, W.Ulbrich, R.Wackernagel

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

Einführung in die Rechentechnik IV

In "Wurzel"-Nr.10/68 wurde gezeigt, daß die Flußbildtechnik eine geeignete Methode zur graphischen Darstellung von Algorithmen repräsentiert. Bei der Erarbeitung eines Flußbildes ist der darzustellende Algorithmus bezüglich aller auftretenden Spezialfälle zu durchforschen. Beim Beispiel der Auflösung der quadratischen Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ war die Berücksichtigung des Spezialfalles $A = 0$ im Interesse der universellen Anwendbarkeit des Algorithmus unbedingt notwendig.

Werden Flußbilder bzw. Teile von Flußbildern hinsichtlich ihres Aufbaus analysiert, kristallisieren sich eine Reihe von Elementartypen heraus. Diese Elementartypen sollen im folgenden an Hand von Beispielen diskutiert werden.

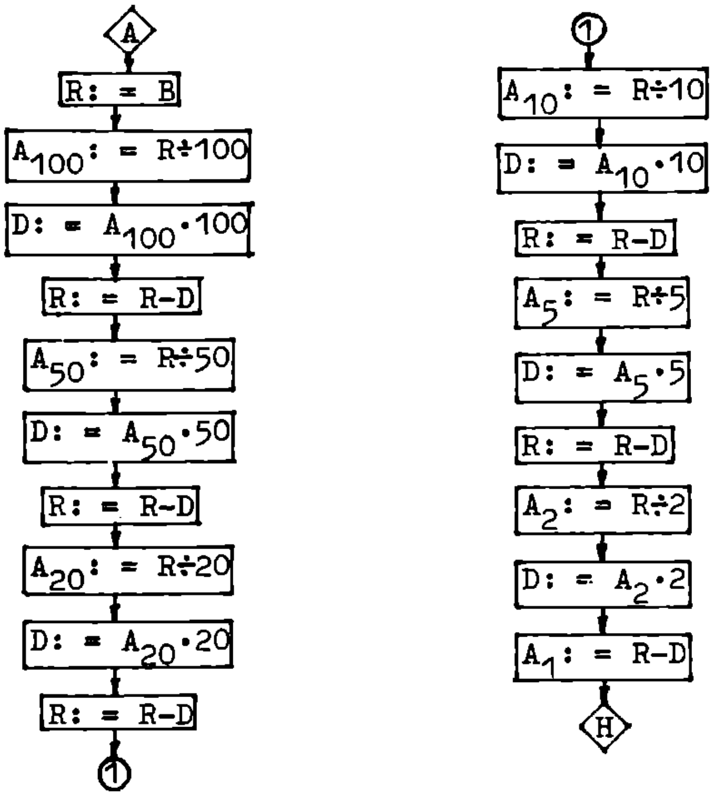
1. Das unverzweigte Flußbild:

Beispiel: Ein ganzzahliger Geldbetrag B ist mit einer minimalen Anzahl von Geldscheinen und Münzen auszuzahlen.
$V = \{+, -, \cdot, \div\}$
Das Symbol " $\div$ " bedeutet "ganzzahlige" Division. Das Resultat der ganzzahligen Division ist stets der ganze Anteil des wahren Quotienten.

Die Größen A_i stellen die Anzahl der auszuzahlenden Geldscheine bzw. -münzen im Werte zu i Mark dar. i = 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100. Die Größen R und D sind Hilfsgrößen.

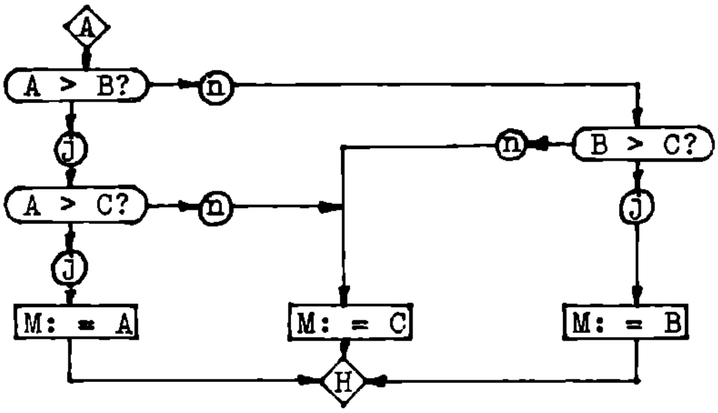
Der Zusammenhang zwischen dem wohlbekannten Euklidischen Algorithmus und dem dargestellten Algorithmus ist offensichtlich.

Das Flußbild wird bei der Realisierung des Algorithmus in einem Zuge von A bis H durchlaufen. Es treten keine Verzweigungen auf, daher der Name: unverzweigtes Flußbild.



2. Das einfach verzweigte Flußbild:

Beispiel: Von 3 gegebenen Zahlen A, B, C ist die größte auszusuchen. M = max{A, B, C}, V = { > }



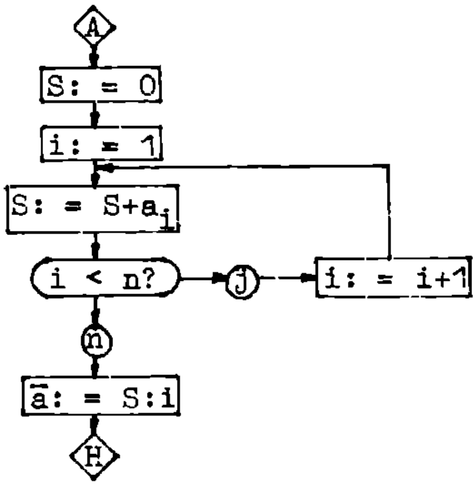
Auch im Falle der Mehrdeutigkeit des Maximums liefert der Algorithmus das richtige Ergebnis.

Bei der Realisierung des Algorithmus wird genau ein Zweig des Flußbildes genau einmal durchlaufen.

3. Das induktiv verzykelte Flußbild:

Beispiel: Es ist das arithmetische Mittel $\bar{a}$ von n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zu bilden.

$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad V = \{+, :, <\}$



Bei der Darstellung des Algorithmus durch ein unverzweigtes Flußbild wären für unterschiedliche Werte von n (Zahlenreihen unterschiedlicher Länge) gesonderte Flußbilder erforderlich. Der Leser stelle sich ein unverzweigtes Flußbild für den Fall n = 100 vor! Die Rückkopplung, "der Zyklus", gestattet, den Algorithmus für die Bildung des arithmetischen Mittels beliebig vieler Zahlen durch ein Flußbild darzustellen. In das Fragekästchen ist jeweils nur der aktuelle Wert von n einzutragen. Darüberhinaus kann bei bekanntem n sofort (vor der Rechnung) angegeben werden, wie oft der Zyklus durchlaufen wird, daher der Name induktiv verzykeltes Flußbild.

4. Das iterativ verzykelte Flußbild:

Beispiel: Es ist ein Näherungswert y für $\sqrt{a}$, $a > 0$, mit 5-stelliger Genauigkeit zu berechnen. Der Algorithmus wird nur angegeben, die mathematischen Hintergründe an späterer Stelle behandelt. Ausgehend von einem beliebigen Anfangswert $y_0 > 0$ wird folgende Vorschrift realisiert:

$$y_1 = \frac{1}{2}(y_0 + \frac{a}{y_0})$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(y_1 + \frac{a}{y_1})$$

$$\ldots$$

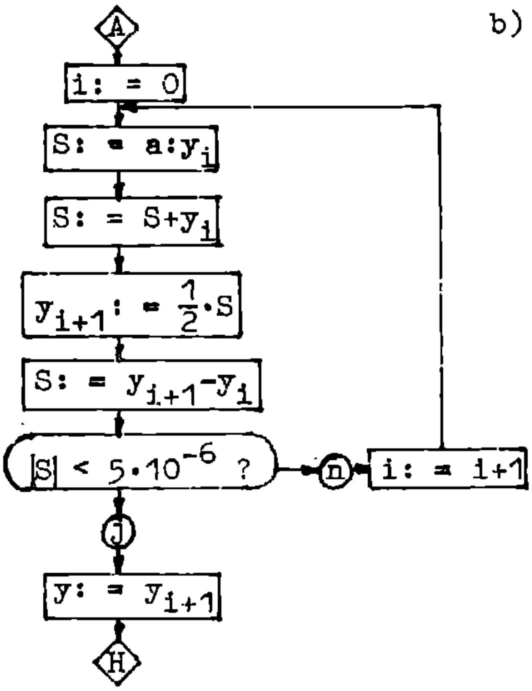
$$y_{i+1} = \frac{1}{2}(y_i + \frac{a}{y_i})$$

$$\ldots$$

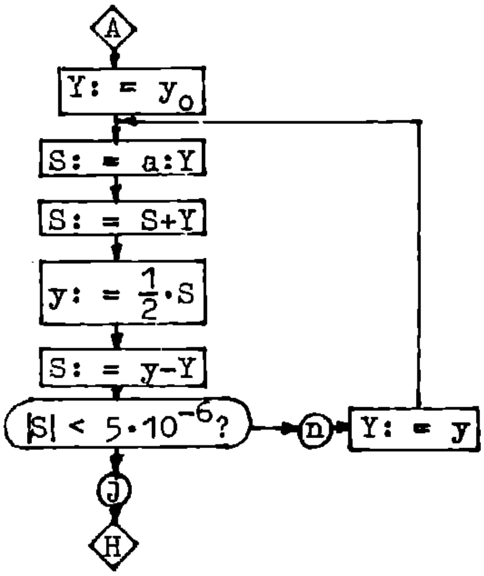
Die Werte von $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_i, y_{i+1}, \ldots$ stellen eine Folge von immer besseren Näherungswerten für $\sqrt{a}$ dar. Das Verfahren wird abgebrochen, wenn die geforderte Genauigkeit erreicht ist.

$V = \{+, -, \cdot, :, |\,|, <\}$

a)



b)



Von der Aufgabenstellung her interessieren die Werte von y_1, y_2, y_3, ... überhaupt nicht. Gewünscht wird der letzte Wert der Folge als Näherungswert y. Deshalb stellt das Flußbild b) den gleichen Algorithmus dar.

In der durch b) dargestellten Version des Algorithmus treten stets nur zwei aufeinanderfolgende Näherungswerte für $\sqrt{a}$ auf. Die Vorschrift $\boxed{Y: = y}$ kann als "Überschreibungsvorschrift" interpretiert werden. Ein Zahlenbeispiel soll die Wirkungsweise des Algorithmus demonstrieren.

$a = 2 \qquad y_0 = 1$

	y_0=1,000000	y_1=1,500000	y_2=1,416667	y_3=1,414216	y_4=1,414214
S	2,000000	1,333333	1,411764	1,414211	
	3,000000	2,833333	2,828431	2,828427	y=1,41421
	0,500000	-0,083333	-0,002451	-0,000002	

Offensichtlich ist es beim iterativ verzykelten Flußbild nicht möglich, vor Beginn der Rechnung die genaue Anzahl der Durchläufe durch den Zyklus zu bestimmen. Das Beispiel lehrt, daß die Durchlaufzahl sowohl vom Anfangspunkt y_0 als auch von der geforderten Genauigkeit abhängt. Allerdings erlaubt die höhere Mathe-

matik, die maximale Durchlaufzahl genau abzuschätzen, wenn y_0 und die Genauigkeitsschranke bekannt sind.
Bei der Darstellung von komplizierten Algorithmen in einem Flußbild treten natürlich die aufgeführten Elementartypen gemischt auf. Bei der Überführung eines Flußbildes in ein Arbeitsprogramm für das Rechenhilfsmittel läßt sich die Kenntnis der Elementartypen mit Vorteil verwenden.

H. Peuker
Leiter der Einsatzgruppe Datenverarbeitung
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Aufgaben (Serie 11/68)

(A13) Es seien k, m, n drei ganze Zahlen, wobei k und m Primzahlen sind. Man beweise, daß man eine solche Zahl x finden kann, für die gilt: $k \mid mx + n$

(A14) Man löse folgende Gleichung:

$$\sqrt{x + 3 - 4\cdot\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\cdot\sqrt{x-1}} = 1$$

(A15) Man konstruiere ein Dreieck ABC, von dem die Strecken $c = \overline{AB}$, $k = \overline{AS_1}$, $l = \overline{AS_2}$ gegeben sind, wobei S_1 Schnittpunkt der Mittelsenkrechten und S_2
a) Schnittpunkt der Winkelhalbierenden
b) Schnittpunkt der Höhen ist.

(A16) Es gelte: 1) Für jedes Paar (a,b) reeller Zahlen gilt entweder $a > 0$ oder $a = b$ oder $a < b$.
2) Es ist $a < b$.
Prüfen Sie mit Hilfe der Aussagenlogik, ob dann der Schluß: "Es ist nicht $a \geq b$" gilt.

(A17) Es ist zu beweisen: Genau dann, wenn es einen Punkt P gibt, der von den Eckpunkten eines ebenen Vierecks gleiche Abstände hat, ist das Viereck konvex und seine gegenüberliegenden Innenwinkel ergänzen sich zu 180°.

(A18) Es ist zu zeigen, daß gilt

$$\left(1 + \frac{1}{2^{14}}\right)^{1024} < \frac{16}{15}$$

Preisaufgabe (P. 23)

Für welche Werte von a besitzt das folgende Gleichungssystem genau eine Lösung:

$$x^2 + y^2 = z$$
$$x + y + z = a$$

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" bis zum 30. des jeweiligen Erscheinungsmonats (Datum des Poststempels) an unsere Adresse einzuschicken.
Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.

Was ist ein Beweis? III

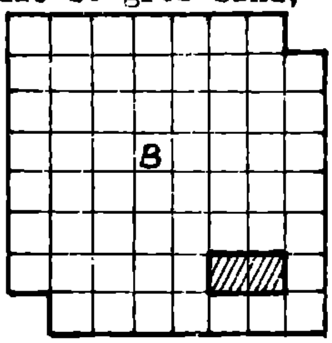
Der sogenannte "indirekte" Beweis beruht auf dem am Anfang dargelegten Satz der Zweiwertigkeit. Wird eine Aussage als wahr angenommen und folgt daraus durch eine Reihe von gültigen Schlüssen, wobei die als wahr angenommene Aussage einmal oder auch öfter die Rolle einer Prämisse übernimmt, eine Aussage, die nachweisbar falsch ist (man sagt auch, daß sich ein Widerspruch ergibt), so muß nach dem Satz der Zweiwertigkeit die als wahr angenommene Aussage in Wirklichkeit falsch sein, was dann die Behauptung eines zu beweisenden Satzes liefert.
Zwei Beispiele sollen diese Beweismethode illustrieren.

1) $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl

Beweis (indirekt): Man macht die Annahme, daß $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist. (Die Aussage "$\sqrt{2}$ ist rational" wird als wahr angenommen). $\sqrt{2}$ ist rational bedeutet $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, wobei p und q ganze Zahlen sind.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Longrightarrow \sqrt{2} = \frac{p'}{q'}$ mit $(p',q') = 1$ (Der Bruch $\frac{p'}{q'}$ entsteht aus dem Bruch $\frac{p}{q}$ durch Kürzen von gemeinsamen Teilern von p und q).
$\sqrt{2} = \frac{p'}{q'} \Longrightarrow 2 = \frac{p'^2}{q'^2} \Longrightarrow 2q'^2 = p'^2 \Longrightarrow p'$ ist eine gerade Zahl,
$p' = 2m \Longrightarrow 2q'^2 = 4m^2 \Longrightarrow q'^2 = 2m^2 \Longrightarrow q'$ ist eine gerade Zahl,
$q' = 2n \Longrightarrow (p',q') \geq 2$. Das steht im Widerspruch zu $(p',q') = 1$. Die Annahme, daß die Aussage "$\sqrt{2}$ ist rational" wahr ist, führt zum Widerspruch, so daß nach dem Satz der Zweiwertigkeit die Aussage "$\sqrt{2}$ ist rational" in Wirklichkeit falsch ist. Das bedeutet aber, daß $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. (Solche Zahlen nennt man irrational. $\sqrt{2}$ ist also irrational).

2) Betrachtet man ein Schachbrett, von dem zwei Felder, die an den Enden einer Diagonale liegen, weggenommen sind, so hat man einen Bereich B vor sich, der aus 62 Feldern besteht. Zur Verfügung stehen weiterhin Dominosteine, die so groß sind, daß ein jeder von ihnen genau zwei Felder des Bereiches B überdecken kann (siehe Abbildung). Es erhebt sich die Frage, ob man mit 31 solchen Dominosteinen den Bereich B so überdecken kann, daß kein Feld frei bleibt.



Behauptung: Es existiert keine Überdeckung der angegebenen Art.

Beweis (indirekt): Angenommen, es gibt eine Überdeckung. Dann überdecken die 31 Dominosteine insgesamt 31 weiße und 31 schwarze Felder, wenn man sich den Bereich B nach Art eines Schachbrettes schwarz-weiß gemustert denkt, denn jeder Stein überdeckt auf jeden Fall ein schwarzes und ein weißes Feld. Der Bereich B hat aber niemals gleichviel schwarze und weiße Felder, da die vom Schachbrett weggenommenen Felder, da sie auf einer Diagonalen liegen, immer von gleicher Färbung sind. Es entsteht also ein Widerspruch. Die Annahme, daß eine Überdeckung der verlangten Art existiert, ist falsch, und die Behauptung damit bewiesen.

Dr. habil. E. Müller-Pfeiffer

Oberassistent
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

(P.20): Die Aufgabe (P.20) wurde von den meisten Einsendern so gelöst, wie die nachstehende Lösung von Roland Engelmann (EOS Saalfeld) angibt:

Um zu prüfen, ob der Ausdruck allgemeingültig ist, kann man die einzelnen Wahrheitswerte in einer Wahrheitswerttabelle zusammenfassen:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\sim p \vee q)$
W	W	W	F	W	W
W	F	F	F	F	W
F	W	F	W	W	W
F	F	W	W	W	W

Aus dieser Tabelle folgt, da bei jeder Verteilung der Wahrheitswerte von p und q für $((p \leftrightarrow q) \rightarrow (\sim p \vee q))$ der Wahrheitswert W gilt, daß der Ausdruck allgemeingültig ist.

Eine andere, elegantere Möglichkeit, die Aufgabe zu lösen, zeigt die Lösung von Veronika Eberhardt (EOS Ernst Abbe, Eisenach):

Man wandelt die Aussage mit Hilfe gleichwertiger (wertverlaufsgleicher) Teilaussagen um, ohne dabei den Wahrheitswert zu verändern.

Voraussetzungen: (1) $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

(2) $\sim A \vee B \equiv A \rightarrow B$

(3) $A \rightarrow B \equiv \sim(A \wedge \sim B)$

(4) $(A \wedge B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \wedge B$

Hieraus folgt:

$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\sim p \vee q)$

$\equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow q)$ nach (1) und (2)

$\equiv \sim(((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \wedge \sim(p \rightarrow q))$ nach (3)

$\equiv \sim(((p \rightarrow q) \wedge \sim(p \rightarrow q)) \wedge (q \rightarrow p))$ nach (4)

$\equiv \sim(\quad f \quad \wedge \quad (q \rightarrow p))$, da $A \wedge \sim A \equiv f$

$\equiv \sim f$ da $f \wedge A \equiv f$

$\equiv w$

Damit wurde die Allgemeingültigkeit des Ausdrucks bewiesen.

Eine dritte Möglichkeit zeigt uns Joachim Puhl (EOS Arnstadt):

Wenn $\quad Wert(H,f) = 0$

so muß $\quad Wert((p \leftrightarrow q),f) = 1 \qquad (1)$

und $\quad Wert((\sim p \vee q),f) = 0 \qquad (2)$

(1) ist der Fall wenn:

$Wert(p,f) = Wert(q,f)$

(2) ist der Fall wenn:

$Wert(p,f) = 1$

$Wert(q,f) = 0$ Widerspruch zu (1)

Deshalb ist für jede Belegung f der $Wert(H,f) = 1$, der Ausdruck ist allgemeingültig.

(10.36): Es ist $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

Da $x > 1$, gilt $x^4 > x^3 > x^2 > x > 1$

somit gilt $\quad 5 < x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 < 5x^4$

da $x - 1 > 0$ folgt daraus die zu beweisende Ungleichung.

(11/12.35): Die gegebene Gleichung wird quadriert. Man erhält:

$$2(x + \sqrt{x^2 - 14x + 49}) = 14$$

d.h. $\quad x + \sqrt{(x - 7)^2} = 7 \quad$ und somit

$$x + |x - 7| = 7$$

Es ergibt sich folgende Lösung $x \leq 7$

Weil $14x - 49 \geq 0$ gelten muß, folgt $x \geq \frac{7}{2}$

Für diese Lösungsmenge ist die Gleichung immer erfüllt, da dann immer

$$x + \sqrt{14x - 49} \geq 0$$

und $\quad x - \sqrt{14x - 49} \geq 0$

Somit erfüllen alle x mit $\frac{7}{2} \leq x \leq 7$ die gegebene Gleichung.

(11/12.36): Man beweise

$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = 1$:

$3\cos^2\alpha - 3\cos^2\alpha + 3\cos^4\alpha - 3\cos^4\alpha + \cos^6\alpha - \cos^6\alpha + 1 = 1$

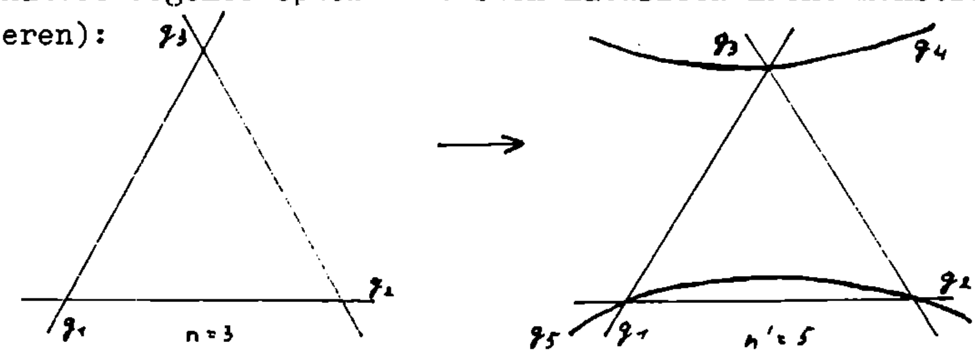
$1 - 3\cos^2\alpha + 3\cos^4\alpha - \cos^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\cos^2\alpha - 3\cos^4\alpha = 1$

$(1 - \cos^2\alpha)^3 + \cos^6\alpha + 3(1 - \cos^2\alpha)\cos^2\alpha = 1$

$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = 1$

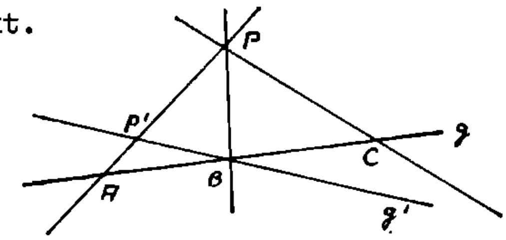
(Lösung von Joachim Puhl, EOS Arnstadt, Klasse 11)

(P.18): Fast alle Einsender lösten diese Aufgabe durch vollständige Induktion nach der Anzahl der vorgegebenen Geraden. Diese Lösungsmethode ist jedoch falsch.
Mit Hilfe der vollständigen Induktion nach der Anzahl der vorgegebenen Geraden erhält man hier nur folgende Aussage: Wenn man von einem Fall ausgeht, bei dem n vorgegebene Geraden durch einen Punkt gehen, so erhält man durch Hinzunahme der (n+1)-ten Geraden, d.h. nur einer, genau dann einen richtigen Fall, wenn alle Geraden durch einen Punkt verlaufen. Diese Aussage beweist nämlich noch nicht unsere Behauptung. Es könnte sein, daß man von einem falschen (im Sinne der Aufgabenstellung) Fall, d.h. einer Konfiguration, die die Bedingung nicht erfüllt, durch Hinzufügen von endlich vielen Geraden zu einem richtigen Fall kommt.
Die folgende Darstellung möge das veranschaulichen (ein exaktes Gegenbeispiel läßt sich natürlich nicht konstruieren):



Sollte diese Aufgabe durch vollständige Induktion gelöst werden, müßte folglich der Induktionsschluß so lauten: Wenn n Geraden durch einen Punkt verlaufen, so kann man durch Hinzunahme von k Geraden nur dann wieder einen richtigen Fall erhalten, wenn alle n+k Geraden durch einen Punkt verlaufen.
Man beginnt wie üblich im Falle n = 3 und zeigt, daß für k (k beliebig) hinzugenommene Geraden nur dann eine den Voraussetzungen entsprechende Konfiguration entstehen kann, wenn alle Geraden durch einen Punkt gehen. Für eine größere Anzahl n' vorgegebener Geraden erübrigt sich dann der Beweis, da man diese Fälle auf den Fall n = 3 zurückführen kann, indem man die Anzahl der hinzugenommenen

Geraden noch um die restlichen n'-3 Geraden erhöht. Die vollständige Induktion muß somit nach der Anzahl der hinzukommenden Geraden erfolgen. Eine kürzere Lösung (durch indirekten Beweis) gab unser Korrespondent Reinhard Höppner (Preisträger der VIII. und IX. IMO): Angenommen, die Geraden gehen nicht alle durch einen Punkt. Dann sei P der Schnittpunkt von drei Geraden, wobei P ein zur Geraden g nächstliegender Punkt ist und g nicht durch P verläuft. Die drei Geraden durch P mögen g in A, B und C schneiden (mit B auf $\overline{AC}$). Durch B muß nach Voraussetzung noch eine weitere Gerade g' verlaufen, g' schneidet nun aber entweder $\overline{AP}$ oder $\overline{CP}$ in P'. Der Abstand von P' zu g ist jedoch kleiner als der von P zu g. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, daß P ein zu g nächstliegender Punkt sei. Damit kann eine solche Gerade g nicht existieren, d.h. alle Geraden verlaufen durch einen Punkt.



Für unsere neuen Leser geben wir noch einmal die Aufgabenstellungen der Preisaufgaben (P.18) und (P.20):

(P.18): Gegeben seien n Geraden in der Ebene, von denen keine zwei parallel sind. Es ist bekannt, daß durch den Schnittpunkt von je zwei Geraden noch eine dritte Gerade geht. Man beweise, daß alle Geraden durch einen Punkt gehen.

(P.20): Man prüfe, ob der Ausdruck $((p \leftrightarrow q) \rightarrow (\sim p \vee q))$ erfüllbar oder allgemeingültig ist.

12
68

WURZEL

zeitschrift für mathematik an
ober- und spezialschulen

WURZEL - mathematische Schülerzeitschrift V-14-6 7 4283 M 175

Herausgegeben vom FDJ -Aktiv der Sektion Mathematik der Friedrich-Schiller-Universität Jena. Die Zeitschrift erscheint monatlich zum Preis von 0,20 M. Bestellungen sind an die Mathematiklehrer der EOS, BBS oder SpS zu richten. Einzelbestellungen können direkt an unsere Adresse eingesandt werden.

Redaktion: Leitung: Eike Hertel, Günter Horn
Mitarbeiter: K.Fischer, H.Meißner, N.Kuse, H.Peuker, H.Schirrmeister, L.Staiger, W.Ulbrich, R.Wackernagel

Anschrift der Redaktion: Sektion Mathematik
69 Jena
Helmholtzweg 1
"WURZEL"-Redaktion

Aus der mathematischen Kybernetik I

In dieser Artikelserie wird versucht, den Untersuchungsgegenstand der mathematischen Kybernetik aufzuzeigen und an Hand eines Beispiels die kybernetische Denk- und Arbeitsweise in groben Zügen darzulegen. Dabei werden zwei wichtige Teilgebiete der mathematischen Kybernetik berührt, nämlich die Algorithmentheorie und die Automatentheorie.

1. Was ist Kybernetik?

Es ist verhältnismäßig schwierig, das Anliegen dieser noch sehr jungen Wissenschaft, die erst 1948 mit dem Buch "Cybernetics" von Norbert Wiener ihren Anfang genommen hat, kurz zu umreißen. Bis heute gibt es mehr als hundert Definitionen der Kybernetik, aber keine wird von allen Kybernetikern vorbehaltlos anerkannt. Die erwähnten Schwierigkeiten beruhen darauf, daß die Kybernetik fast alle Wissensgebiete durchdringt und gewisse gemeinsame Erscheinungen gesondert studiert, die in den Einzelwissenschaften in den verschiedensten Formen vorkommen, die aber bis heute noch nicht genügend deutlich herausgearbeitet worden sind. Es handelt sich dabei um Steuerungs- und Regelungsprozesse, die u.a. in physikalischen, technischen, chemischen, aber auch in biologischen und psychologischen Bereichen auftreten. Man könnte demnach einfach meinen, die Kybernetik sei die Theorie der Steuer- und Regelprozesse. Diese Definition ist jedoch zu eng und betont nicht den Unterschied der kybernetischen zur physikalisch-technischen Auffassungsweise solcher Systeme.
Um diesen Unterschied herauszustellen, betrachten wir ein Regel-

system. Die Aufgabe eines Regelsystems besteht darin, eine be- bestimmte zu regelnde Größe (Druck, Temperatur, Geschwindigkeit o.ä.) bei veränderlichen äußeren Bedingungen konstant zu halten oder nach einer bestimmten Vorschrift zu verändern. In verein- fachter Form ist ein Regelsystem durch ein ausführendes und ein steuerndes Organ, die miteinander gekoppelt sind, darstellbar.
Als Beispiel kann ein gewöhnliches Regler-Bügeleisen dienen, bei dem es darauf ankommt, die Temperatur in bestimmten Grenzen zu halten, damit besonders feine Wäsche nicht durch zu große Hitze be- schädigt wird. Die zu regelnde Größe ist hier die Temperatur, das ausführende Organ die elektrisch geheizte Spirale des Bügeleisens und das steuernde Organ ist nichts anderes als ein Schalter, mit dem die Spirale bei Erreichen der oberen bzw. unteren Grenztempe- ratur aus- bzw. eingeschaltet werden kann.
Woher weiß der Schalter, wann er die Heizung aus- oder einzuschal- ten hat? Er erhält vom ausführenden Organ ständig Meldungen (so- genannte Informationen) über die Temperatur des Bügeleisens und wertet sie aus, indem er entweder nichts verändert, oder die Spi- rale aus- oder einschaltet, je nachdem, wie die erhaltene Infor- mation ausfällt. (Für unsere Betrachtungen ist es unwesentlich, ob dies mit Hilfe eines Bimetallstreifens oder auf andere Weise geschieht.) Diese Übertragung und Verarbeitung von Informationen ist es, die einen Regelvorgang der beschriebenen Art überhaupt erst ermöglicht.
Durch das betrachtete Beispiel ist der Leser auf die Begriffe <u>Information</u>, <u>Informationsverarbeitung</u>, <u>Informationsübertragung</u> hingewiesen worden, die bei der physikalischen Untersuchung der Arbeitsweise des Bügeleisens keine Beachtung finden, die aber das wesentlich neue der <u>kybernetischen</u> Betrachtungsweise ausmachen. Beispiele für diese Begriffe treten in einer unübersehbaren Fülle von Prozessen und Erscheinungen in Wissenschaft, Technik, Produk- tion und belebter Natur auf. Ihr Vorkommen reicht von elektroni- schen Rechenanlagen über automatisch gesteuerte Produktionsprozes- se bis zur Nerven- und Denktätigkeit des Menschen. Die Arbeitswei- se einer elektronischen Rechenmaschine kann z.B. unter diesen Ge- sichtspunkten kurz so beschrieben werden:
Sie nimmt zunächst Informationen auf, speichert sie in ihrem Inne- ren zur weiteren Verwendung, verarbeitet sie nach einem vorgegebe-

nen Programm und gibt Endinformationen nach außen ab. Dabei ist die Verarbeitung der Informationen mit einem ständigen Informationstransport im Inneren der Maschine verbunden. Die ständig wachsende Bedeutung, die dem theoretischen Studium von Informationsverarbeitungs, -übertragungs- und -speicherungsproblemen zukommt, hat die Schaffung einer eigenen, und zwar mathematischen, Theorie erforderlich gemacht. Diese Theorie ist die Kybernetik, die demnach als mathematische Theorie der Informationsverarbeitung, -übertragung und -speicherung erscheint.
In den nächsten Artikeln wollen wir an einem konkreten Beispiel einen Informationsverarbeitungsvorgang genauer beschreiben und dabei tiefer in die mathematische Kybernetik eindringen.

Dr. G. Wechsung
Leiter der Abteilung Mathem. Kybernetik
an der Sektion Mathematik
der Friedr.-Schiller-Universität
Jena

Aufgaben (Serie 12/68)

(A19) Vom Ufer eines Sees aus soll die Länge einer Insel gemessen werden, ohne die Insel zu betreten. Zur Verfügung stehen: Meßlatten, Bandmaß und ein Theodolit, mit dem Winkel nur eingestellt, nicht aber gemessen werden können. Die beiden Enden der Insel sind durch Bäume gut markiert, und der See liegt in ebenem Gelände. Wie kann unter diesen Bedingungen die Messung vorgenommen werden?

(A20) Peter, ein exzellenter Logiker, macht folgende Aussage: "Wenn es draußen regnet, regnet es draußen nicht." Regnet es draußen?

(A21) Man löse die Gleichung $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ = \sin x^\circ$

(A22) Ein Vater hat fünf paarweise verschiedenfarbige Bälle, die die er auf seine acht Söhne so aufteilt, daß jeder höchstens einen Ball erhält. Wieviel Möglichkeiten der Aufteilung gibt es?

(A23) Man beweise, daß für beliebiges k die Gleichung

$$\underbrace{11\ldots1}_{k}\underbrace{55\ldots5}_{k-1}6 = (\underbrace{33\ldots3}_{k-1}4)\cdot(\underbrace{33\ldots3}_{k-1}4)$$ gilt, wobei

auf der linken Seite und auf der rechten Seite kein Produkt steht, sondern die durch ihre Ziffernfolge gegebene Zahl.

(A24) Eine Fibonaccische Zahlenfolge $\{u_i\}$ sei gegeben durch $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ und $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Man beweise, daß für alle $m,n \geq 1$ gilt

$$u_{m+n-1} = u_{m-1}u_{n-1} + u_m u_n$$

Preisaufgabe (P. 24)

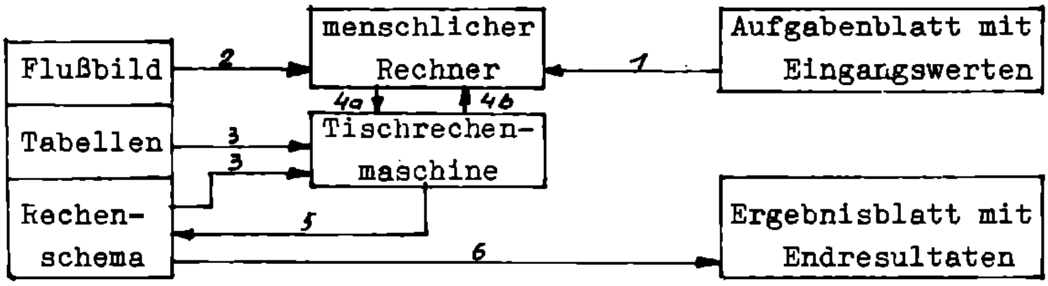
Man bestimme den geometrischen Ort aller Projektionen eines gegebenen Punktes A auf alle möglichen Ebenen, die durch einen festen Punkt B gehen.

Für jeden vollständigen Lösungsweg der Preisaufgabe erhält der Einsender einen Wertpunkt. Für fünf Wertpunkte erhält der Einsender ein Buch. Sollten pro Monat mehr als drei Einsender fünf Wertpunkte haben, entscheidet das Los (unter Ausschluß des Rechtsweges).
Falls ein Besitzer von fünf Wertpunkten nicht unter die Gewinner fällt, nimmt er automatisch an der nächsten Auslosung teil. Die Lösungen sind unter dem Kennwort "Wurzel-Preisaufgabe" bis zum 30. des jeweiligen Erscheinungsmonats (Datum des Poststempels) an unsere Adresse einzuschicken.
Wir weisen darauf hin, daß alle uns eingesandten Lösungs- bzw. Aufgabenblätter mit dem Namen des Einsenders, seiner Adresse und der von ihm besuchten Schule versehen sein müssen. Einsendungen, bei denen diese Angaben fehlen, können nicht berücksichtigt werden.

Einführung in die Rechentechnik V

Nachdem in den Nummern 10/68 und 11/68 Fragen der graphischen Darstellung von Algorithmen diskutiert wurden, sollen im folgenden Probleme der Erstellung eines Arbeitsprogramms für das zur Realisierung eines Algorithmus eingesetzte Rechenhilfsmittel untersucht werden. Dazu ist natürlich notwendig zu klären, was unter dem Begriff "Rechenhilfsmittel" zu verstehen ist. Das historisch älteste Rechenhilfsmittel ist der menschliche Rechner, unterstützt durch mehr oder weniger technisch perfektionierte Tischrechenmaschinen. Für das Rechenhilfsmittel "menschlicher Rechner plus Tischrechenmaschine" ist das Problem des Arbeitsprogramms leicht zu lösen. Das Flußbild in Verbindung mit einem geeignet an-

gelegten Rechenschema zur Fixierung der berechneten Werte stellt ein vollkommen ausreichendes Arbeitsprogramm dar. Es besteht nämlich eine ganz natürliche Arbeitsteilung. Der menschliche Rechner trifft sämtliche Entscheidungen, die für die folgerichtige Abwicklung des Algorithmus von Bedeutung sind. Er wertet den Inhalt der Testkästchen selbst aus. Mit Hilfe der Tischrechenmaschine werden die Anweisungskästchen ausgewertet, d.h. die Rechenvorschriften realisiert und z.T. die berechneten Werte ausgeschrieben. Infolge der relativ geringen Arbeitsgeschwindigkeiten der beiden Komponenten des betrachteten Rechenhilfsmittels ist die Realisierung komplizierter Algorithmen sehr zeitaufwendig. Hinzu kommt ein weiterer Nachteil. Die Leistungsfähigkeit des menschlichen Rechners ist von vielen objektiven und subjektiven Faktoren wie Arbeitsbedingungen, geistiger Kondition usw. abhängig. Beispielsweise haben Ermüdungserscheinungen Fehlentscheidungen, Übertragungsfehler und andere Unsicherheiten zur Folge. In der Regel muß beim Einsatz menschlicher Rechner jedes Arbeitsprogramm zweimal abgearbeitet werden, um die Richtigkeit des Endresultates garantieren zu können.
Die genannten Gründe waren wesentliche Aspekte bei der Entwicklung technischer Systeme zur automatischen Realisierung von Algorithmen. Die grundlegende Idee, die Steuerung des Rechenablaufs auch dem technischen System zu übertragen, wurde bereits im 19. Jahrhundert geboren. Allerdings waren zu dieser Zeit die technischen Voraussetzungen noch nicht gegeben, diese Idee zufriedenstellend zu verwirklichen. Erst die Entwicklung elektronischer Bauelemente bot die Grundlage, das Problem der Automatisierung von komplizierten Rechenvorgängen erfolgreich zu meistern. Eine historische Übersicht über die Entwicklung der Rechentechnik würde den Rahmen der in diesem Beitrag angestellten Betrachtungen sprengen. Sie wird an späterer Stelle nachgeholt.
Welche Forderungen sind an ein technisches System zur automatischen Realisierung von Berechnungsalgorithmen zu stellen? Um diese Frage zu beantworten, erscheint es sinnvoll, die Tätigkeit des primitiven Rechenhilfsmittels "menschlicher Rechner + Tischrechenmaschine" zu analysieren. Der Arbeitsplatz eines menschlichen Rechners kann grob durch das folgende Schema dargestellt werden:



Zwischen den einzelnen Komponenten des Rechenhilfsmittels besteht eine rege Korrespondenz. Die Realisierung eines Algorithmus kann folgendermaßen grob skizziert werden:

Schritt 0: Flußbild und Rechenschema sind vorhanden. Eventuell erforderliche Tabellen sind bereitgestellt. Es liegt ein Aufgabenblatt mit einer konkreten Aufgabe vor, die durch die Eingangsdaten repräsentiert wird. Das Ergebnisblatt für die geforderten Endresultate ist vorbereitet. Es folgt Schritt 1.

Schritt 1: Der menschliche Rechner überträgt die Eingangsdaten, möglicherweise über die Tischrechenmaschine, in das Rechenschema. Es folgt Schritt 2.

Schritt 2: Der menschliche Rechner bearbeitet das nächste Operationskästchen aus dem Flußbild. (Zu Beginn ist es das erste Operationskästchen, nach Bearbeitung des letzten Operationskästchens folgt Schritt 6.)
Er prüft, ob es sich um ein Entscheidungskästchen oder ein Anweisungskästchen handelt. Handelt es sich um ein Entscheidungskästchen, so trifft der menschliche Rechner die erforderliche Entscheidung. Es folgt Schritt 2. Handelt es sich um ein Anweisungskästchen, so folgt Schritt 3.

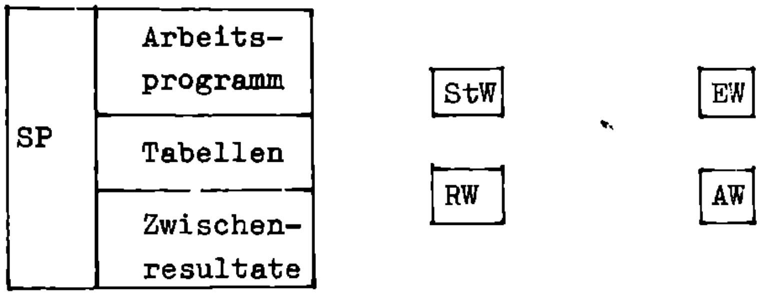
Schritt 3: Die Anweisung wird durch die Tischrechenmaschine realisiert. Erforderliche Zahlenwerte werden aus dem Rechenschema bzw. aus Tabellen in die Tischrechenmaschine eingegeben. Es folgt Schritt 4.

Schritt 4: Der Rechner löst die Ausführung der Rechenoperation aus (4a) und registriert die Beendigung der Rechenoperation (4b). Es folgt Schritt 5.

Schritt 5: Der errechnete Wert wird im Rechenschema fixiert. Es folgt Schritt 2.

Schritt 6: Die berechneten Endresultate werden auf das Ergebnisblatt übertragen. Der Algorithmus ist abgearbeitet.

Eine technische Nachbildung des Systems "menschlicher Rechner plus Tischrechenmaschine" könnte folgendermaßen gestaltet werden:



Der menschliche Rechner wird durch ein Steuerwerk (StW) ersetzt. An die Stelle der Tischrechenmaschine tritt das Rechenwerk (RW). Die zur logisch richtigen Abwicklung des Algorithmus erforderlichen Unterlagen (Arbeitsprogramm, Tabellen, Zwischenresultate usw.) werden in einer Baueinheit, dem Speicher (SP) aufbewahrt. Die Übernahme der Eingangsdaten in den Speicher erfolgt über ein Eingabewerk (EW). Die Auslieferung der Endresultate erfolgt über ein Ausgabewerk (AW).

Damit ist die Grobstruktur eines technischen Systems zur automatischen Realisierung von Algorithmen bereits umrissen. Sie besteht aus:

Steuerwerk	Eingabewerk
Rechenwerk	Ausgabewerk
Speicher	

Ein technisches System mit der eben formulierten Grobstruktur wird "Rechenanlage" genannt. Durch eine Reihe von Attributen, die aus der technischen Verwirklichung und der Wirkungsweise der 5 Grundbausteine abzuleiten sind, kann der Begriff "Rechenanlage" weiter präzisiert werden. Zunächst zur Arbeitsweise der Rechenanlage. In Analogie zum primitiven Rechenhilfsmittel "menschlischer Rechner + Tischrechenmaschine" ergibt sich folgende Gliederung:

Schritt 0: Das Arbeitsprogramm und eine Übersicht über alle benötigten Zwischenresultate sind vorhanden. Eventuell erforderliche Hilfsgrößen sind bereitgestellt. Die zur Lösung einer konkreten Aufgabe notwendigen Eingangsdaten sind vorbereitet. Alle genannten Informationen sind in einer, dem technischen Aufbau der

Rechenanlage angepaßten Form dargestellt. Sie befinden sich auf einem externen Informationsträger (z.B. Lochkarten, Lochstreifen u.a.). Es folgt Schritt 1.

Schritt 1: Über das Eingabewerk werden sämtliche Informationen in den Speicher übertragen und dort aufbewahrt. Es folgt Schritt 2.

Schritt 2: Aus dem Speicher wird die nächste Elementaroperation, im weiteren vorerst ohne weitere Begründung Befehl genannt, in das Steuerwerk übernommen. (Zu Beginn ist es der erste Befehl, nach Abarbeitung des letzten Befehls folgt Schritt 3.)
Im Steuerwerk wird der Befehl entschlüsselt.
Handelt es sich um einen Testbefehl, wird vom Steuerwerk die entsprechende Entscheidung gefällt. Es folgt Schritt 2.
Handelt es sich um einen Rechenbefehl, so werden die Werte der zur Rechnung notwendigen Operanden aus dem Speicher in das Rechenwerk eingelesen und die Rechenoperation im Rechenwerk durch ein Signal des Steuerwerks ausgelöst. Das Steuerwerk nimmt vom Rechenwerk ein Vollzugssignal entgegen. Danach wird der Wert des Resultats in den Speicher zur Aufbewahrung übertragen, also gespeichert, oder über das Ausgabewerk ausgeliefert.Es folgt Schritt 2.

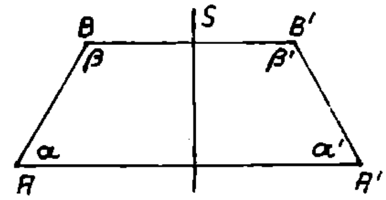
Schritt 3: Die geforderten Werte der Endresultate werden, soweit sie noch nicht ausgegeben sind, über das Ausgabewerk auf den externen Informationsträger fixiert (z.B. gedruckte Formulare, aber auch Lochkarten oder Lochstreifen).

Diese zunächst qualitative Beschreibung der Arbeitsweise einer Rechenanlage reicht aus, um zu erkennen, daß die Abwicklung des Arbeitsprogramms durch die Rechenanlage selbst gesteuert wird. Bei der technischen Verwirklichung der Grundbausteine einer Rechenanlage finden elektronische Bauelemente wie Transistoren, Ferritkerne usw. Verwendung. Hieraus resultiert die präzisere Bezeichnung "elektronische programmgesteuerte Rechenanlage".

H. Peuker
Leiter des Rechenzentrums
an der Sektion Mathematik der FSU Jena

(9.32): Für die Lage einer Symmetrieachse im Viereck gibt es nur zwei mögliche Fälle:

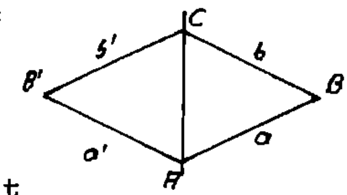
1.Fall: Die Symmetrieachse schneidet zwei gegenüberliegende parallele Seiten (siehe Skizze). Dann gilt wegen der Symmetrie $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$. Da die Winkelsumme im Viereck 360° beträgt, gilt somit $\alpha + \beta' = \alpha' + \beta = 180^\circ$. Damit ist $AA'B'B$ Sehnenviereck.



2.Fall: Die Symmetrieachse verläuft durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte (siehe Skizze). Wegen der Symmetrie gilt hier $a = a'$ und $b = b'$. Daraus folgt:

$$a + b' = a' + b.$$

Da das Viereck $ABCB'$ laut Voraussetzung weiterhin noch konvex ist, ist es somit ein Tangentenviereck.



(10.35): Bezeichnungen:

E_B sei eine zu $\overline{AB}$ senkrechte Ebene
E_C sei eine zu $\overline{AC}$ senkrechte Ebene
E_D sei eine zu $\overline{AD}$ senkrechte Ebene
E_{ABC} sei die Ebene, die durch die Punkte A, B und C bestimmt wird.

Behauptung: E_B, E_C und E_D schneiden sich in einem Punkt.

Beweis: Aus $AB \nparallel AC$ folgt $E_B \nparallel E_C$. Deshalb schneidet E_B die Ebene E_C. Die Schnittgerade sei s_{BC}. Wegen $E_B \perp E_{ABC}$ und $E_C \perp E_{ABC}$ folgt: $s_{BC} \perp E_{ABC}$. Aus $AD \nparallel E_{ABC}$ folgt: E_D steht nicht senkrecht auf E_{ABC}. Daraus folgt: $E_D \nparallel s_{BC}$, also schneidet E_D die Gerade s_{BC} in einem Punkt.

(A1): Die Aussage "Das n-Eck ABC...K ist regulär" werde mit p, die Aussage "Das n-Eck ABC...K läßt sich einem Kreis einbeschreiben" werde mit q bezeichnet.
Die Voraussetzungen nehmen dann folgende Gestalt an:

1. $p \to q$
2. $\sim p$

Schluß: $\sim q$

Somit hat der zu überprüfende Schluß folgende aussagenlogische Gestalt:

$$(p \to q) \wedge \sim p \to \sim q$$

Es seien jetzt Wert(p,f) = 0
und Wert(q,f) = 1

Dann sind Wert(($p \to q$),f) = 1
Wert($\sim p$,f) = 1
somit Wert(($p \to q) \wedge \sim p$,f) = 1
Es ist aber Wert($\sim q$,f) = 0
und somit ist der Schluß

$$(p \to q) \wedge \sim p \to \sim q$$

für falsche Aussage p und richtige Aussage q nicht erfüllt, also nicht allgemeingültig.

(A2): Es seien p_1, p_2 die Primzahlzwillinge ($p_2 - p_1 = 2$).
Bekanntlich läßt sich jede Primzahl, die größer als 3 ist, in der Form 6n + 1 oder 6n - 1 darstellen. Wir erhalten damit

$$p_1 + p_2 = (6n - 1) + (6n + 1) = 12n$$

(A3): Es war
$$x(y + z) = xy + xz = 5 \qquad (1)$$
$$y(z + x) = yz + xy = 8 \qquad (2)$$
$$z(x + y) = xz + yz = 9 \qquad (3)$$

Man addiere (1) und (2) und subtrahiere davon (3)

Es ergibt sich $2xy = 4$ oder $xy = 2$ (4)

Analog erhält man $xz = 3$ (5)
und $yz = 6$ (6)

(4), (5) und (6) multipliziert, ergibt

$$(xyz)^2 = 36 \text{ oder } xyz = \pm 6 \qquad (7)$$

Nach Division von (7) durch (4), (5) und (6) erhält man folgende Ergebnisse: $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $z_1 = 3$
$x_2 = -1$, $y_2 = -2$, $z_2 = -3$

Inhaltsverzeichnis der „Wurzel" Nr. 1/68 bis 12/68