

Rada Soutěže Adama Riese
ve Spolku Adama Riese e.V. Annaberg-Buchholz



Matematická soutěž „Adam Ries“ 2008

Sbírka příkladů
pro práci s kostkami a k počítání

vydavatel:
Dr. Norman Bitterlich
D-09114 Chemnitz, Draisdorfer Str. 21
e-mail: norman.bitterlich@t-online.de

Úvod

Adam Ries je na západě Krušných hor známou a oblíbenou osobností. Město Annaberg-Buchholz se svým označením "Horské město a město Adama Riese" pyšní po právu, protože právě zde tento počtář po několik let působil. Jeho praktické metody výrazně ovlivnily hospodářský rozkvět v tomto regionu v 16. století. Dobrá pověst jeho počtářské školy se šířila daleko za hranice Krušných hor.

V městě Annaberg-Buchholz je Adam Ries velmi uznávanou osobou. Jsou po něm pojmenovány ulice, škola, domov důchodců, nákupní středisko a obytná čtvrť. Ve městě se nachází pomník, který na tuto osobnost upozorňuje. Historická budova počtářské školy je dnes obyvatelům a turistům k dispozici jako muzeum. Moderně zařízené prostory jsou hojně využívány k hodinám počtů ve starém stylu. O Riesovo dědictví pečuje spolek Adam-Ries-Bund, který si tento úkol předsevzal. Má na starosti také pátrání po potomcích Adama Riese. Je známo přes 20.000 jmen příbuzných Adama Riese, kteří žili od 16. století do dneška!

Od roku 1981 nabízí Annaberg-Buchholz saským dívkám a chlapcům z pátých tříd vyučování ve stylu Adama Riese, které se týká počítání a hry v kostky. V každoroční matematické soutěži jsou vytipováni nejlepší počtáři Saska. V roce 2004/05 se uskuteční tento projekt po pětadvacáté. Cíl soutěže se během let nezměnil: poskytnout možnost chlapcům a dívkám, které zajímá matematika, ověřit si své znalosti a zároveň zintenzívnit jejich zájem o obor. Ale došlo k podstatným formálním změnám. Ze soutěže v regionu Chemnitz se stala soutěž s cílem internacionálního srovnání, kterou pořádá spolek Adam-Ries-Bund.

Při příležitosti 500. výročí narození Adama Riese v roce 1992 se Spolek Adama Riese, e.V.¹, stal nositelem této soutěže. Nabídka k porovnání výkonů byla poté vypsána v Bavorsku/Horních Frankách, Durynsku a v Sasku, kde jako pořadatelé působila města Staffelstein (místo narození Adama Riese), Erfurt (zde poprvé pracoval jako matematik) a Annaberg-Buchholz (kde jako matematik dlouhodobě působil). Od roku 1994 se soutěže účastní také žáci z České Republiky.

Jsme rádi, že můžeme v tomto školním roce již po patnácté přivítat na soutěži české družstvo. V uplynulých letech byli jako nejlepší za svou zemi vyznamenáni tito účastníci:

¹ www.adam-ries-bund.de

roce			mista	cena
2007	Alena Rossova	gymn. Louny	16.	
2006	Michaela Batoryová	gymn. Kadaň	13.	
2005	Markéta Gottfriedová	gymn. Louny	8.	III.
2004	Kateřina Hošková	gymn. Most	16.	
2003	Ondřej Mošna	gymn. Kadaň	17.	
2002	Tomáš Tvrzník	gymn. Most	8.	III.
2001	Jiří Urban	gymn. Louny	12.	
2000	Petr Sindelar	gymn. Most	9.	III.
1999	Michal Pelc	gymn. Most	2.	II.
1998	Vojtěch Mezera Frantisek Krticka	gymn. Louny gymn. Most	4.	II.
1997	Lenka Sarnová	gymn. Most	2.	I.
1996	Tomáš Janata	zš. Chomutov	2.	II.
1995	Tomáš Janata	zš. Chomutov	14.	
1994	Vladimir Patera	zš. Chomutov	7.	

V Sasku slavila svůj první úspěch v soutěži Adama Riese řada matematických talentů, které se později úspěšně účastnily matematických olympiád. Počtáře dokonce dostali až do německého národního týmu na mezinárodní matematické olympiádě:

Lisa Sauermann (stříbrná medaile ve Vietnamu v roce 2007,
začínala v roce 2003 v soutěži Adama Riese),
Georg Schröter (stříbrná medaile ve Vietnamu v roce 2007,
začínal v roce 2000 v soutěži Adama Riese).

V zájmu sjednocení podpory špičkových výkonů v matematice a podpory všeobecné matematické gramotnosti probíhá soutěž ve 3 kolech:

1. stupeň: soutěž domácích úkolů a klausur na úrovni jednotlivých zemí (prosinec až únor)
2. stupeň: soutěž klausur pro 50 nejúspěšnějších účastníků 1. kola (v rámci jednotlivých zemí)
3. stupeň: soutěž klausur pro 10 nejlepších žáků ze soutěží jednotlivých zemí (soutěž čtyř zemí)

Soutěž klausur se dělí na dvě části. V první, která trvá 90 minut, se jedná o exaktní znázornění řešení tří obsáhlých problémových matematických úloh, v němž musí být všechny výpovědi jasně formulovány a zdůvodněny. Ve druhé části dostanou žáci soubory úkolů s rozmanitými úlohami na přemýšlení a pro práci s kostkami. Pro každý komplex úloh je vymezen čas (10 až 15 minut), stačí však uvést pouze výsledek, ke

kterému je možno dojít skládáním a pokládáním kostek, různými kombinacemi a úvahami nebo výpočtem z paměti. Obě části se započítávají do celkového hodnocení.

Úspěšní účastníci soutěže

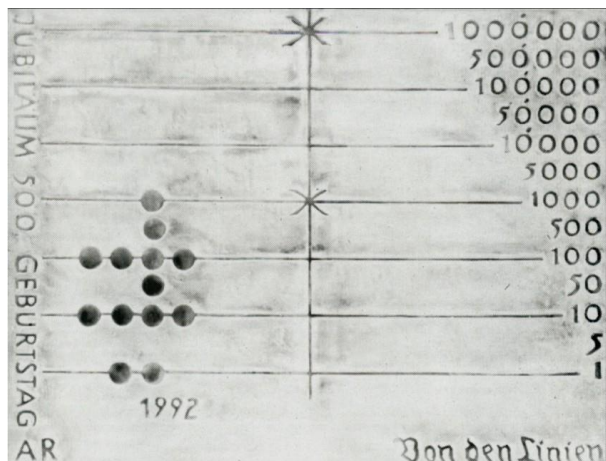
V předešlých letech bylo v klausurní části třetího kola možné získat maximálně 24 bodů, při skládání kostek 16 bodů. Podle obtížnosti úloh získali vítězové soutěže v letech 1994-2007 mezi 25 body (1998) a 39 body (2004). Všichni účastníci dostanou diplom a upomínkový dárek. Oceňována je přibližně jedna čtvrtina účastníků. Nejúspěšnějšími českými účastníky, kteří dosáhli nejméně 21 bodů byli:

		body	mista	cena	roce
Lenka Sarnová	gymn. Most	29	2.	I.	1997
Vladimír Patera	zš. Chomutov	29	7.		1994
Michal Pelc	gymn. Most	28	2.	II.	1999
Tomáš Janata	zš. Chomutov	27	2.	II.	1996
Vlasta Blahová	gymn. Louny	25	4.	III.	1996
Daniel Zibrt	gymn. Louny	25	8.	III.	1999
Marek Mojžík	zš. Chomutov	24	8.	III.	1997
Tomáš Tvrzník	gymn. Most	23	8.	III.	2002
Vojtěch Mezera	gymn. Louny	22	4.	II.	1998
František Krτικά	gymn. Most	22	4.	II.	1998
Michala Kockovská	zš. Chomutov	22	6.	III.	1998
Petr Sindelar	gymn. Most	22	9.	III.	2000
Petr Tvrzník	gymn. Most	21	10.		2000
Jiří Urban	gymn. Louny	21	12.		2001
Martin Suchan	gymn. Louny	21	14.		1997
Ondřej Mořna	gymn. Kadaň	21	17.		2003



Adam Ries – počtář německého lidu

V letech 1491/92 bylo na úpatí krušnohorské hory Schreckenberg objeveno naleziště stříbra. “Hlas hory” přivolal do této krajiny tisíce lidí. Nově vzniklá osada se už po čtyřech letech stala městem s názvem “Sankt Annaberg”.



Ve stejném roce 1492 se v městě Staffelstein (Bavorsko) narodil Adam Ries. Po mládí stráveném cestováním, úspěšném vedení početní školy v Erfurtu (Thüringen) a po vydání svých prvních počtářských knih, se usadil v rozkvétajícím městě Annaberg. V tomto horském městě se staly moderní počtářské metody předpokladem dalšího vývoje hornických obchodů.

O zásluze Adama Riese se dovídáme i z německých přísloví. Dodnes znamenají slova

”...něco udělat podle Adama Riese...”

korektní a bezchybný výpočet. Obdiv si jistě vysloužil i díky úspěšnosti svých počtářských knih. Jen jeho druhá kniha “Rechnung auf der Linien und Federn” byla mezi roky 1522 a 1656 prokazatelně 108krát vydána. Až do 18. století byla jeho díla používána jako učební materiál. Mnoho generací se podle Riesových metod učilo pravidlům praktického počítání a jeho použití.

Rechnung auff der
Linien vnd Federn / Auff allerley handt-
rung / Gemacht durch Adam Rysen.

Der ware Proceß vnd
Fürtziß weg Visier vnd Wechselruten zu
machen auß dem Quadrat / Durch die Arithmetick
vnd Geometri. Von Erhardo Helm / Mas-
chematico zu Franckfurt / beschriben.



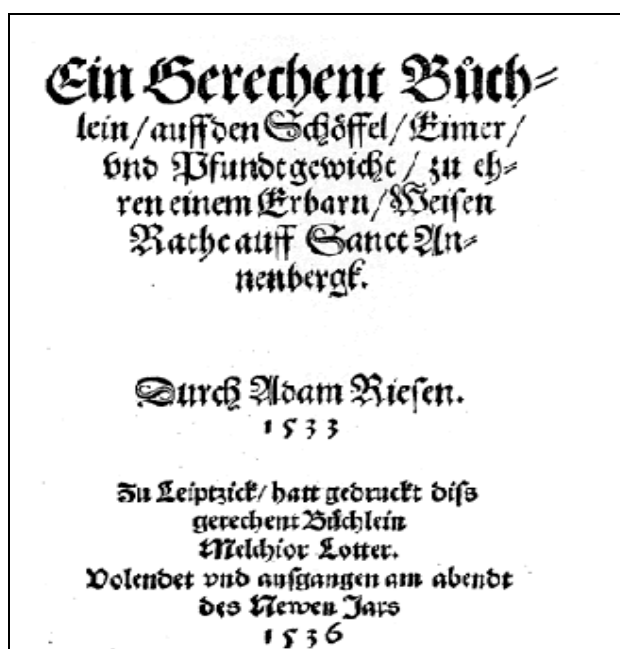
Zu Franckfurt. Christian Egenolphi

Chlebová norma

Ries vypracoval na základě požadavku městské rady města Annaberg tabulky, kde vypočítal hmotnost daného chleba z možné ceny obilí. Pokud se cena obilí lišila, byla změněna hmotnost a nikoliv cena chleba.

Jako jednotky hmotnosti byly používány libra (zkratka lb), lot (lot), čtvrtina lotu (kvint) (qu). Mezi jmenovanými jednotkami hmotnosti panovaly následující vztahy: 1 lb = 32 lot, 1 lot = 4 qu.

Díky tabulkám známým jako “chlebová norma” nemuseli pekařští mistři při změně ceny obilí dělat nové výpočty, ale mohli si z nich přečíst aktuální hmotnost. S těmito tabulkami je také spojena kontrola městské rady pekařských mistrů v dodržování přesných hmotností.



Vyobrazení 1: titulní strana chlebové normy
“Ein gerechnetes Büchlein” 1533

Adam Ries tento požadavek splnil jako obvykle svědomitě a důkladně. Vypracoval tabulky pro různé druhy chleba a pro pekárny na housky. Všechny tabulky byly stejně konstruovány: V levé části je cena obilí. Měřič označuje v minulosti obvyklou dutou míru k měření sušiny (jako například obilí). Uprostřed je uvedena odpovídající hmotnost housek a vpravo je udán počet housek, které mají být podle předpisu upečeny.

Weitz	Par semel am gewicht			Par semel uffn schof	Par semel so quent un teil nachgelassen	
Gr.	lot	quent	teil	par semel	Par semel	lot
76	6	2	40	912	1008	0
77	6	2	14	924	1008	0
78	6	1	66	936	1008	0
79	6	1	41	948	1008	0
80	6	1	16	960	1008	0
81	6	0	72	972	1008	0
82	6	0	48	984	1008	0
83	6	0	24	996	1008	0
84	6	0	0	1008	1008	0

Vyobrazení 2: výřez jedné tabulky chlebové normy

V páté řádce je uvedeno: Pokud dutá míra pšenice stojí 80 gr, pak jeden pár housek 6 lot 1 qu a váží 16 dílů kvintu a z jedné duté míry lze upéci 960 párů housek.

Chlebová norma podle Adama Riese se osvědčila. Kvůli různosti měn, mincí a hmotnosti nemohly tyto tabulky beze změn převzít ostatní města. Tehdy např. platilo:

Annaberg: 1 lb = 467,69 g
Cheb: 1 lb = 531,96 g
Freiburg: 1 lb = 466,56 g
Gdańsk: 1 lb = 435,41 g
Jáchymov: 1 lb = 513,78 g
Wrocław: 1 lb = 405,22 g

(I dnes se "libra" používá v hovorové němčině, 1 lb = 500 g). Proto také Adam Ries sestavil chlebovou normu pro Zwickau, Marienberg, Leipzig, Hof nebo Jáchymov.

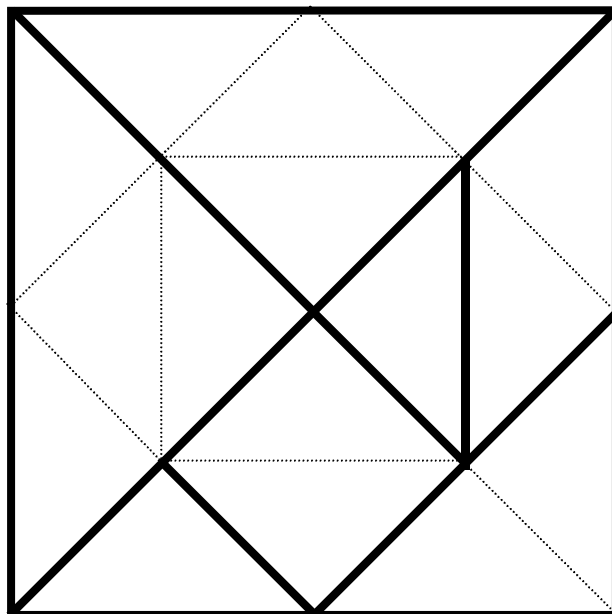
Pokládání a skládání kostek s TANGRAMem

Hra Tagram v sobě obsahuje dávnou čínskou minulost. „*Ch'i Ch'ae pan*“ znamená asi tolik, co „vševěd“ nebo „liška podšitá“. Skládání tvarů plných fantazie – lidí, zvířat, rostlin a různých dalších věcí – patřilo vždy k oblíbeným zábavám se sedmi TAGRAM-kostkami. V 19. století se tato hra stala populární v Evropě. Kniha „*Das große chinesische Rätselspiel*“

für die elegante Welt” (Velká čínská hádanková hra pro elegantní svět), která vyšla v Lipsku v roce 1818, podnítila početnými úkoly a příklady ke skládání kostek mnohé zvědavce.

Kostky určené k pokládání si každý může sám lehce vyrobit z TANGRAM-čtverce (viz obrázek).

K skládání tvarů je nutné vždy použít všech sedm kostek!



Úlohy soutěže Adama Riese 2008 (2. stupeň)

Část 1

2008/2 – I/1²

V první knize příkladů Adama Riese vydané roku 1518 (obrázek ukazuje titulní stranu jejího druhého vydání z roku 1525) uvádí Ries také úlohy spojené s prodejem zboží, při kterém je cena zboží určena s ohledem na velikost balení.

Vyjádřeno dnešním jazykem by úloha zněla takto (čísla jsou proti originálu pozměněna):

Zákazník koupil tři soudky medu.
První o hmotnosti 2 centy a 27 liber.
Druhý o hmotnosti 1 cent a 39 liber,
třetí o hmotnosti 1 cent a 84 liber.
12 liber medu stojí 1 gulden a 10 šilinků.

Pomocí centů a liber se udávala hmotnost. Pro přepočítání těchto jednotek platí:

1 cent = 100 liber.

Rechnung auff der linihen
gemacht durch Adam Riesen vonn Staßfel/
steyn/ in massen man es pflegt zu lern in allen
rechneschulen gründlich begriffen anno 1518.
vlesigklich vberlesen/ vnd zum andern mal
in trug vorfertiget.



¶ Gedruckt zu Erfordt zum
Schwarzen Horn.
1525.

² roce/stupeň – část/komplex

V době, ve které žil Adam Ries, se kromě jiných platilo guldeny, šilinky a haléři. Pro přepočítání těchto jednotek platí:

1 gulden = 20 šilinků

1 šilink = 12 haléřů

(a) Jaká byla celková hmotnost všech tří soudků s medem? Výsledek vyjádři pomocí centů a liber.

(b) Vypočti cenu, jakou musel zákazník celkem zaplatit za med. Cenu vyjádři tak, aby počet mincí použitých k zaplacení byl nejmenší možný.

Adam Ries ve svém zadání bere ohled na to, že se celková hmotnost soudků skládá z hmotnosti samotných soudků a z hmotnosti medu, který je v soudcích.

(c) Předpokládejme nyní, že v hmotnostech v zadání této úlohy obsahuje každý 1 cent medu 10 liber hmotnosti samotného soudku. Vypočti celkovou hmotnost medu.

(d) Adam Ries formuloval zadání tak, že na každý 1 cent medu v zadání úlohy připadá ještě 10 liber hmotnosti samotného soudku. Předpokládejme nyní, že 12 liber medu stojí 1 gulden a 10 šilinků. Vypočti, kolik musí zákazník zaplatit za med. Cenu vyjádři tak, aby počet mincí použitých k zaplacení byl nejmenší možný.

2008/2 – I/2

U logického puzzle HASHI (japonsky をかけろ) jde o to, postavit mezi poli, což jsou kroužky, které obsahují čísla, jednoduché nebo dvojité mosty tj. nakreslit čáry. Vždy mezi dvěma poli je třeba zanechat silné čáry podél čar sítě tak, že je třeba dodržet následující podmínky:

(1) Čáry probíhají buď jen vodorovně nebo svisle (tedy bez zlomu) a nesmí se křížit.

(2) V každém poli končí právě tolik čar, jako je číslo, které je udáno v poli. Čáry neprocházejí skrze pole a končí jen v polích.

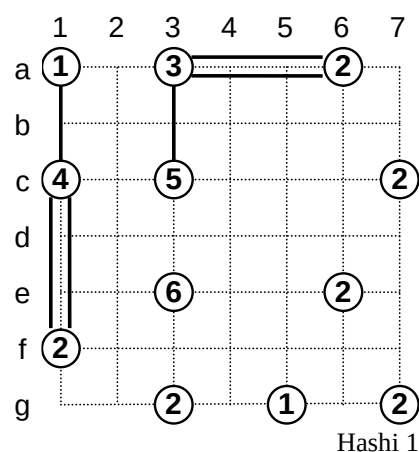
(3) Všechny čáry spolu souvisejí, to znamená, že je možné se dostat od každého pole ke každému jinému libovolnému poli, tím že sledujeme čáry.

Hashi je vyřešeno, jestliže všechny zanesené čáry splňují podmínky (1), (2) a (3).

(a) V hashi 1 (viz obrázek) je již zaneseno 6 čar. Pro lepší orientaci označíme řádky malými písmeny od a do g, sloupce čísly od 1 do 7 a pole tedy a1 až g7.

Zdůvodni, že od pole e3 musí vycházet přesně 3 dvojité čáry a zanes tyto čáry do pracovního listu.

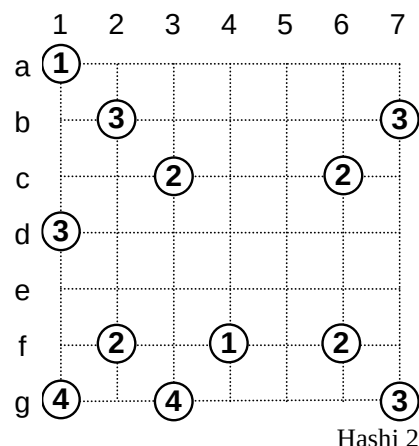
Vyřeš zcela hashi 1.



(b) Madlenka řeší hashi 2. Kreslí od pole a1 vycházející čáru, potom dvojitou čáru a ještě jednu dvojitou čáru. Když dojde k poli g3 rozmýšlí se, jak má pokračovat.

Velmi rychle zjistí, že mezi poli f2 a f4 nemůže být žádná čára. Zdůvodni to.

Díky tomuto zjištění může nyní Madlenka hashi lehce vyřešit. Nyní vyřeš ty hashi 2.

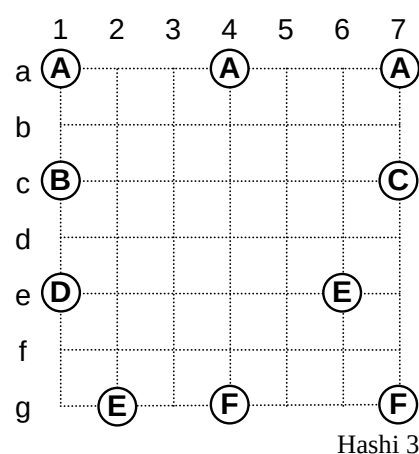


(c) U hashi 3 (viz obrázek) jsou místo číslic pole označena písmeny. Tato mají být nahrazena čísly, aby vzniklo hashi, které může být vyřešeno podle shora uvedených podmínek (stejná písmena znamenají stejná čísla, rozdílná písmena znamenají rozdílná čísla.)

Madlenka vytvoří tyto předpoklady:

A1: Pro B a C jsou možná jen čísla 5 a 6.

A2: V poli E musí být číslo 1.



Vyjdí z těchto předpokladů a na jejich základě přiřaď každému poli správné číslo a vyřeš hashi 3.

Zdůvodni, proč jsou oba Madlenčiny předpoklady pravdivé.

2008/2 – I/3

Mluvíme o číslech stran knih. Máme zjistit, jak často se vybrané číslo vyskytuje v číslování všech stránek knihy (krátce stránkování). Strany knihy se číslují vždy průběžně (počínaje stranou 1).

(a) Kniha „Soutěž Adama Riese 1992-2001“ má přesně 192 stran. Dokažte, proč se ve stránkování této knihy číslo 6 vyskytne přesně 39krát.

(b) Zjistěte, jak často se ve stránkování knihy „Soutěž Adama Riese 1992-2001“ vyskytne číslo 0.

(c) Jiná kniha má přesně 1000 stran. Zjistěte, jak často se ve stránkování této knihy vyskytne číslo 6.

(d) Předpokládejme, že by existovala kniha o přesně 100 000 stranách. Jak často by se ve stránkování této knihy vyskytlo číslo 6?

Část 2

2008/2 – II/1 Úlohy ze starých početnic

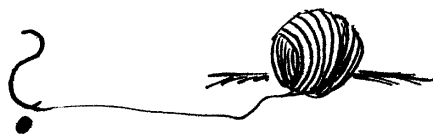
1. Hejno ptáků si sedne z části na keř, z části na strom. Ptáci na keři volají na ptáky na stromě: „Když k nám přiletí tři z vás, bude nás na keři i na stromě sedět stejně.“ Ptáci na stromě říkají: „Když tři z vás přeletí k nám, bude nás třikrát tolik co vás.“

Kolik ptáků sedí na keři a kolik na stromě?

Odpověď:

2. Z 2. početnice Adama Riese. Následující úloha pojednává o koupi a prodeji. Musíte přitom vědět, že za Riesových dob byl měřítkem množství „cent“ a jako platidlo sloužil 1 zlatý = 21 grošů, 1 groš = 12 vinder.

Jeden člověk koupil 8 centů vlny po osmi zlatých za jeden cent a 20 centů vlny po sedmi a půl zlatých za jeden cent. Vlnu smíchal a znovu ji prodal. Získal tak 10 zlatých.



Za kolik zlatých cent vlny prodal?

Odpověď:

3 Šel dědeček se svými čtyřmi vnoučaty do lesa na houby. Za hodinu měl dědeček ve svém košíku několik hub, ale vnoučata ani jednu. Aby děti nepřestalo bavit houby hledat, rozdělil dědeček všechny svoje houby

mezi vnoučata. Když se všichni znovu rozešli do různých směrů, stalo se následující:

Jedno vnouče našlo další dvě houby, jiné dvě houby ztratilo, třetí našlo stejně tolik, kolik dostalo od dědečka, a čtvrté ztratilo polovinu všech hub, které dostalo. Když se všichni znovu sešli, spočítalo každé vnouče houby ve svém košíku. Ukázalo se, že mají všichni hub stejně, totiž 10.

Kolik hub rozdělil dědeček mezi vnoučata?

Odpověď:



2008/2 – II/2 Hry s čísly

1. Číslo 1 lze znázornit pomocí pěti dvojek: $1 = 2 + 2 - 2 - 2 : 2$.

Znázorněte čísla 5 a 8 pomocí pěti dvojek a jejich propojení početními operacemi.

5 =

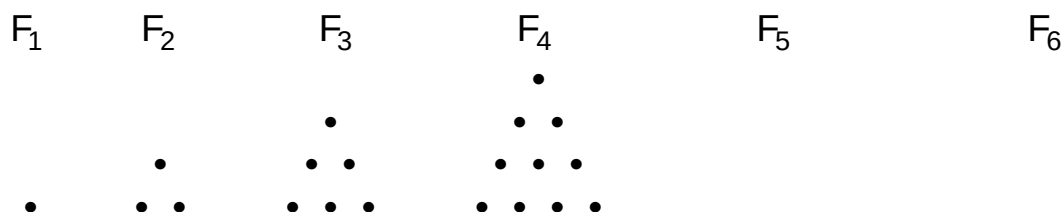
8 =

2. Po jednom čísle následuje další. Zjistěte pravidla a doplňte řady o dvě další čísla:

4 ; 13 ; 40 ; 121 ; ... ; ... ;

1 ; 8 ; 27 ; 64 ; ... ; ... ;

3. „Ahoj, nás čísla rozeznáš ve obrazcích - jsme počet bodů v obrázcích.“



Následující obrazce $F_5, F_6, \dots$ vzniknou tak, že délky stran trojúhelníku prodloužíme o 1 jednotku a v odstupu 1 jednotky umístíme body.

Vytvořte dva následující obrazce a napište na příslušný obrázek počet všech bodů v každém obrazci.

Kolikátý obrazec F_n má 78 bodů?

Odpověď:

2008/2 – II/3 Tolikero možností!

Prodavači květin a zeleniny na tržišti v Annabergu se každý týden starají o rozmanitost obchodu na trhu.

1. Občas sveze malé návštěvníky trhu malý vlak, který se skládá z lokomotivy a několika vagónů. Mezi jednotlivými vagóny jsou červený, modrý, žlutý a fialový vagón. Přitom lze vidět všechna možná různá pořadí, v nichž jsou různobarevné vagóny připojeny k lokomotivě.

(a) U kolika z těchto pořadí budou žlutý a fialový vagón vedle sebe?

K tomu vezmeme jeden růžový vagón, který se spojí s červeným a modrým vagónem do jedné části vlaku. V druhé části vlaku se spojí žlutý a fialový vagón.

Odpověď:



(b) Obě tyto části vlaku se připojí k lokomotivě.

Kolik různých možností pořadí barev vznikne?

Odpověď:

2. U jednoho stánku s květinami mají modré, žluté, oranžové, červené a bílé květiny. Prodavačka váže kytice, které se skládají z květin jedné nebo více barev. (V následujících úlohách je třeba dbát pouze na barvy, nikoliv na počet květin v kytici.)

(a) Napište všechny možnosti kytic, které lze uvázat z květin tří různých barev. Uveďte následovně: m-ž-o; m-ž-č;, tedy pouze počáteční písmena barev.

Odpověď:



(b) Kolik různých možností barevných kytic vznikne, když se v jedné kytici použije jedna, dvě, tři, čtyři nebo pět z výše uvedených barev?

Odpověď:

Složitě úlohy minulých let – část 1

2007/3 – I/3

A zase sudoku!

Vzpomínáte, při prvním stupni matematické soutěže Adama Rieseho jsme už jednou řešili sudoku.

V této úloze se budeme ale zabývat sudoku s bloky 2x2, při čemž každý blok opět obsahuje 2x2 pole. Takové 4x4 sudoku se tedy skládá ze 4 vodorovných řádků a 4 svislých sloupců, tedy ze 16 polí.

Takové sudoku je vyřešeno, když v každém poli je zapsána jedna z číslic od 1 do 4 tak, že se v každém řádku, každém sloupci a v každém bloku vyskytuje každé z čísel od 1 do 4 právě jen jednou.

Pro lepší orientaci označíme bloky postupným, řádkovým počítáním blokem 1 až 4, řádky malými písmeny od a do d, sloupce velkými písmeny od A do D a pole podle toho od aA do dD.

(a) Sudoku 4x4 na obr. 1, ve kterém je už předem zadáno sedm čísel, je jednoznačně řešitelné.

Vyřeš toto sudoku.

Prošetři, jestli by bylo toto sudoku jednoznačně řešitelné dokonce i s menším počtem předem daných čísel. Případně uveď pole všech čísel, které by se mohly vynechat.

	A	B	C	D
a	1	2	3	4
b	3	4		
c			1	
d				

Obr. 1

	A	B	C	D
a	1	2	3	4
b	3	4		
c				
d				

Obr. 2

	A	B	C	D
a	1	2		
b	3	4		
c				
d				

Obr. 3

(b) V sudoku 4x4 na obr. 2 jsou jen dána čísla bloku 1 a řádku a.

Zjisti všechna možná řešení tohoto sudoka (počet uvedených sudok se nemusí shodovat s počtem možných řešení).

(c) V sudoku 4x4 na obr. 3 jsou jen dána čísla v bloku 1.

Zjisti počet všech řešení tohoto sudoka, které mohou za těchto podmínek existovat. Zdůvodni!

(d) Zjisti celkový počet všech řešení sudoka 4x4, když nebude zadáno žádné číslo. Zdůvodni!

2007/2 – I/1

V nejvýznamnější matematické knize Adama Rieseho, která pochází z roku 1524 a jmenuje se **Coß**, se nachází úloha, jež převedena do současného jazyka, zní takto (čísla a jednotky jsou pozměněny):

136) Item ein Vischer hat ein hecht, Ist etwas groß und lang, sol t. 2 umb 20 A. gebn. Nun hat er kein wag darmit er wigt. Nimet eyner $\frac{1}{4}$ darvon gibt 30 ſ, komet einander Nimet $\frac{1}{8}$ vom vbrigen gibt darfur 7 ſ. Nun komet einander, Nimet das do vorhanden ist alles miteinander gibt darfur 80 ſ, Ist solches stuch wegen befindet $27\frac{1}{2}$ A. Nun frage ich, wiul der hecht wegen hab und ob er das gethan stuchweß vortaufft Dan mach A.

Rybář chytil velkou štikou, kterou chtěl prodat na trhu. Bohužel ale neměl s sebou žádnou váhu.

První zákazník si vzal čtvrtinu štiky a dal za ni 30 feniků, aniž by znal váhu.

Druhý zákazník si vzal ze zbytku štiky polovinu a dal za ni 40 feniků, aniž by znal váhu.

Třetí zákazník měl již váhu s sebou a zjistil, že ještě 15 liber ze štiky zbylo, a tak zbytek ryby koupil.

V době, kdy Adam Ries žil, se platilo mimo jiné feniky a halěři. Pro přepočítání platí: 1 fenik odpovídá 8 halěrům.

(a) Spočítej, jakou cenu musí třetí zákazník zaplatit, jestliže rybář požaduje 20 halěrů za libru štiky. Cenu uveď ve fenicích i v halěřích.

Ries klade ve své úloze další otázky. Vyřeš tyto úlohy:

(b) Kolik liber vážila celá štika?

(c) Prozkoumej, zda rybář prodejem prvním a druhému zákazníkovi udělal dobře, nebo zda by bylo pro něj výhodnější prodat celou štiky za cenu 20 haléřů za libru ?

2006/3 – I/3

U mnohého zakoupeného zboží je natištěn čárový kód s čísly, evropské číslo výrobku (EAN). Tento kód podává informaci o původu a druhu daného zboží.

Úplné EAN je většinou 13-místné. Pro rozeznání chybného EAN je poslední číslice číslicí kontrolní. Tu můžeme vypočítat z předcházejících 12 číslic následovně: Zleva do prava se násobí jednotlivé číslice střídavě s činiteli 1 resp. 3 a součiny se potom sečtou. Doplněk takto získaného kontrolního součtu k nejbližšímu násobku 10 je kontrolní číslicí.

Pro výše uvedené EAN 4 009993 010207 získáme kontrolní číslo 7 takto

$$4 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 9 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = 73$$
$$\rightarrow 73 + 7 = 8 \cdot 10$$

(a) U následujícího EAN chybí kontrolní číslo: 40 16138 10060?

(b) Jiné číslo EAN má kontrolní číslo 0, na všech ostatních místech stojí jedno a totéž číslo. Zjisti toto EAN.

(c) U následujícího EAN chybí první dvě číslice: ?? 57054 07149 3.
Zjisti všechny možné dvojice chybějících číslic a dokaž, že nemohou existovat další.

Mezinárodním standardním knižním číslem (krátce ISBN) jsou označovány skoro všechny knihy. Skládá se z 10 číslic, z nichž zase poslední je kontrolní číslicí. Tu můžeme vynásobit z předcházejících 9 číslic následovně: Počínaje zleva se vynásobí první číslice 10, druhá 9, třetí 8, ..., a devátá 2. Součiny se potom sečtou. Doplněk takto získaného kontrolního součtu k nejbližšímu násobku 11 je kontrolní číslice.

(d) Někdo vzpomíná, že kniha „O matematické soutěži Adam Ries 1992 – 2001“ má ISBN 3-930-43643-6. Ukáže se ale, že ve skutečném ISBN na právě jednom místě stojí (ne na místě kontrolního čísla) menší číslice. Zjisti, zda se z těchto údajů dá jednoznačně určit ISBN této knihy.

2006/2 – I/3

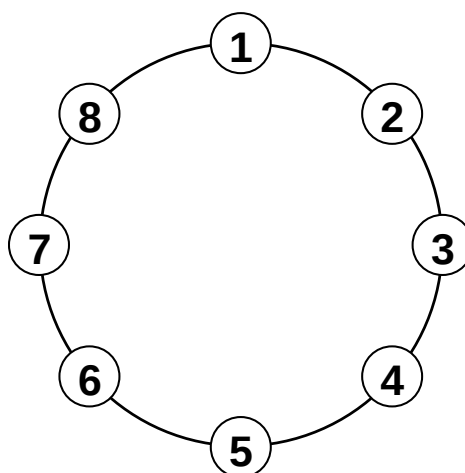
Znáte nějaké rozpočítadlo? Třeba „Ententyky dva špalíky, čert vyletěl z elektriky, bez klobouku, bos, narazil si nos...?“

Skupina n osob vytvoří uzavřený kruh. Rozpočítávání začíná u první osoby ve směru pohybu hodinových ručiček až ke k -té osobě, která je z kruhu vyřazena a kruh je znovu uzavřen.

Další rozpočítávání začne u osoby bezprostředně následující za vyřazenou osobou a pokračuje opět ve směru pohybu hodinových ručiček až ke k -té osobě, která je z kruhu také vyřazena a kruh je znovu uzavřen.

Takto se pokračuje nepřetržitě až do okamžiku, kdy ve hře zůstane pouze jedna osoba.

Na obrázku vpravo je znázorněno 8 osob ($n = 8$), které jsou očíslovány ve směru pohybu hodinových ručiček od čísla 1 do čísla 8. Vyřazena bude každá čtvrtá osoba ($k = 4$). Pořadí vyřazených osob bude tedy následující: [4, 8, 5, 2, 1, 3, 7, (6)]. Jako poslední zůstane ve hře osoba s číslem 6.



(a) Zjisti pořadí vyřazovaných osob pro $n = 10$ a $k = 5$ a urči, kdo zůstane jako poslední ve hře. U které osoby bychom museli začít s rozpočítáváním, aby jako poslední zůstala ve hře osoba s číslem 1?

(b) Nyní máme počet osob devět ($n = 9$) a vyřazovat budeme každou devátou osobu ($k = 9$). Zjisti, u které osoby musíme začít s rozpočítáváním, aby jako poslední ve hře zůstala osoba s číslem 1.

V následujících úlohách budeme s rozpočítáváním začínat vždy u osoby s číslem 1 a vyřazována bude každá druhá osoba ($k = 2$).

(c) Najdi všechny možné počty osob n , při jejichž rozpočítávání (začínáme u čísla jedna a $k = 2$) zůstane jako poslední ve hře osoba s číslem 1. Zdůvodni!

(d) Najdi návod, který umožní pro libovolný počet hráčů zjistit osobu, která zůstane ve hře jako poslední.

Poznámka: Problém zpracovaný v této úloze uvedl již historik Flavius Josephus (žil přibližně v letech 37 až 100 n. l.) a je nyní znám pod označením Josephův problém.

2005/3 – I/1

Vedle rozmanitých úloh k přeměně mincovních jednotek a jednotek hmotnosti nacházíme v početnicích Adama Rieseho i ojediněle úlohy o pohybu. V knize „Coß“, nejvýznamnější Riesově početnici, se nachází úloha o honu na lišku.

Pes pronásleduje lišku, která má určitý náskok. Pes a liška provádějí současně skok po skoku.

1. Na 5 psích skoků potřebuje liška 7 skoků.

(a) Kolik liščích skoků dohání pes při 15 svých skocích?

Ries předkládá následující úlohu: Liška je 250 svých skoků před psem. Nyní se ptám, za kolik psích skoků je liška polapena?

Vyřeš tuto úlohu.

(b) U jiného honu na lišku činí náskok 250 psích skoků. Vypočítej, kolika psími skoky je tentokrát liška dostižena.

2. U dalšího honu na lišku činí náskok lišky zase 250 jejích skoků. Po 1000 psích skocích je liška psem dostižena.

Zjisti souvislost mezi počtem psích a liščích skoků.

2005/2 – I/3

Arian, Bert, Celine a Denise hrají na oslavě narozenin následující hru:

Jeden z nich opustí místnost. Jeden z ostatních tří dětí si vezme nějaký předmět. Po zavolání dovnitř musí příchozí uhodnout, kdo daný předmět má. K tomu použije výpovědi od každého, kdo zůstal v místnosti. Ten, kdo předmět má, lže; ostatní dva mluví pravdu.

(Upozornění: Pokud někdo lže, lže v každé své výpovědi.)

1. V jedné takové hře musela jít Denise za dveře. Ostatní vypovídají následovně:

Arian: Předmět nemám. Celine ho má.
Bert: Předmět nemám. Arian ho má.
Celine: Předmět nemám.

(a) Zdůvodni, že pro případ, že Arian předmět má, jsou pravidla hry splněna. To znamená, že Arian lže v obou výpovědích, ale že ostatní říkají pravdu.

(b) Zjisti, zda by pro případ, že by předmět měl Bert respektive Celine, byla pravidla hry splněna.

2. V jiné takové hře musela Celine za dveře. Ostatní tři vypovídají následovně:

Arian: Předmět nemám.

Bert: Předmět mám.

Denise: Předmět nemám.

Ukaž, že pomocí těchto výpovědí nemá Celine možnost jednoznačně určit vlastníka předmětu.

Změň Bertovu výpověď tak, aby Celine poté měla možnost jednoznačně určit vlastníka předmětu. Zdůvodni!

2005/2 – I/2

„Lodě“ jsou klasickou dětskou hrou. Na hrací ploše s m vodorovnými řádky a n svislými sloupci jsou v jednotlivých ohraničených polích umístěny různé lodě, označené např. křížkem. Odhalení těchto poloh je spoluhráčovým úkolem.

Pro jednodušší vypátrání těchto pozic je určen počet křížků v jedné řádce resp. sloupci. Na vyobraz. 1 jsou představeny možné polohy 15-ti lodí a počet křížků v jedné řádce.

	X	X	X				3
							0
		X	X	X			3
X			X			X	3
	X		X				2
		X	X	X		X	4
1	2	3	5	2	0	2	

vyobrazení 1

V následujících úlohách se mají určit pozice lodí pomocí počtu křížků. Pro první hru je použito hrací pole o 6 řádcích a 7 sloupcích. K dispozici jsou jenom lodě o velikosti jednoho ohraničeného pole, to znamená označené jedním křížkem.

(a) Ve hře na vyobrazení 2 se dají pozice lodí jednoznačně určit. Urči jejich pozici a zakroužkuj je. (Tip: Vyškrtej pole, ve kterých nemůže být žádná loď.)

(b) Zjisti, jestli je možné jednoznačně určit pozice lodí pro hru na vyobraz.

Zdůvodni! V daném případě urči jaká uspořádání jsou možná.

							1
							5
							0
							3
							4
							2
3	5	0	1	0	4	2	

vyobrazení 2

							1
							5
							0
							3
							3
							3
3	5	0	1	0	4	2	

vyobrazení 3

Pro druhou hru je opět použito hrací pole o 6 řádcích a 7 sloupcích. Ale nyní budou použity jen takové lodě, které se mohou skládat z většího počtu spojených ohraničených polí:

loď ze 4 vedle sebe ležících ohraničených polí,

X X X X

loď ze 3 vedle sebe ležících ohraničených polí,

X X X

loď ze 2 ohraničených polí,

X X

loď z 1 ohraničeného pole.

X

Lodě musí být vždy uspořádány tak, svisle nebo vodorovně, aby se žádné dvě lodě nedotýkaly.

Urči možné pozice těchto lodí pro hru na vyobrazení 4. Zjisti, zda jsou možná nějaká další uspořádání. Zdůvodni!

							1
							4
							0
							1
							3
							1
1	3	1	1	1	2	1	

vyobrazení 4

Složité úlohy minulých let – část 2

Puzzle a skládat

2000/3 - II/1.2

Čtyři bonbóny mají být položeny na čtverec tak, aby na každém řádku, sloupci, případně na každé úhlopříčce ležel právě jeden bonbón.

Leží-li bonbón na jedné samohlásce (A; E; I) počítá se za dva body, leží-li na jedné souhlásce (B; D; G; M; N; R; S) počítá se za jeden bod.

Součet všech bodů se má nazývat bodový součet.

a) Polož jeden bonbón na M a zbývající tak, jak je vyžadováno v textu úlohy. Vypočítej získaný bodový součet.

b) Polož bonbóny tak, aby těmito bylo dosaženo co možná největšího bodového součtu.

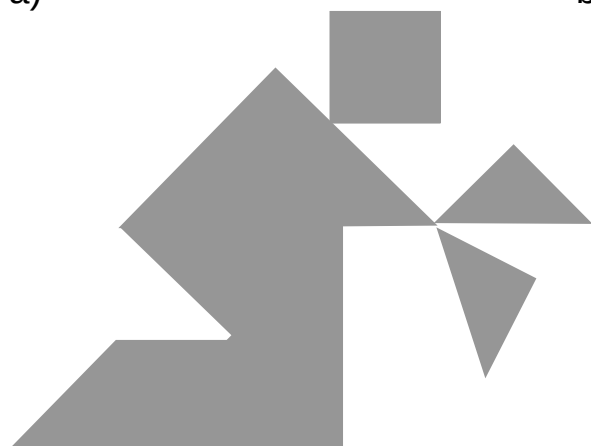
c) Polož bonbóny tak, aby těmito bylo dosaženo co možná nejmenšího bodového součtu.

A	D	A	M
R	I	E	S
A	N	N	A
B	E	R	G

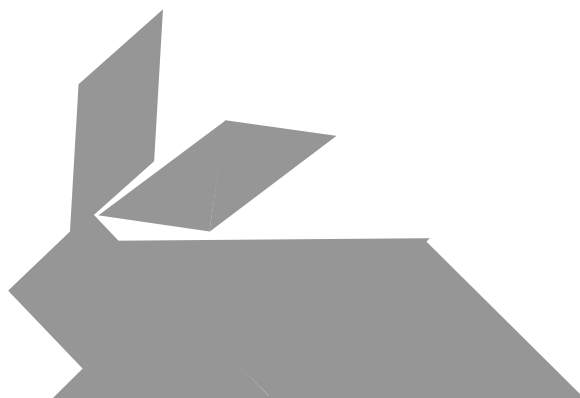
2001/3 - II/1.1

Slož ze sedmi částí hry „TANGRAM“ následující obrazce:

a)



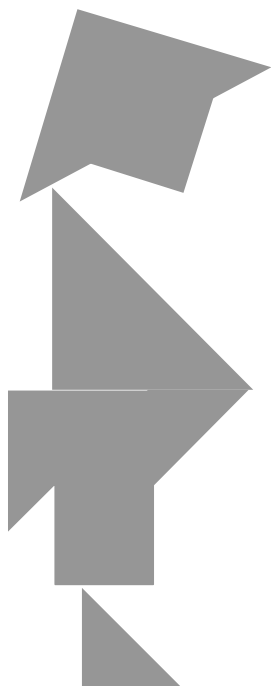
b)



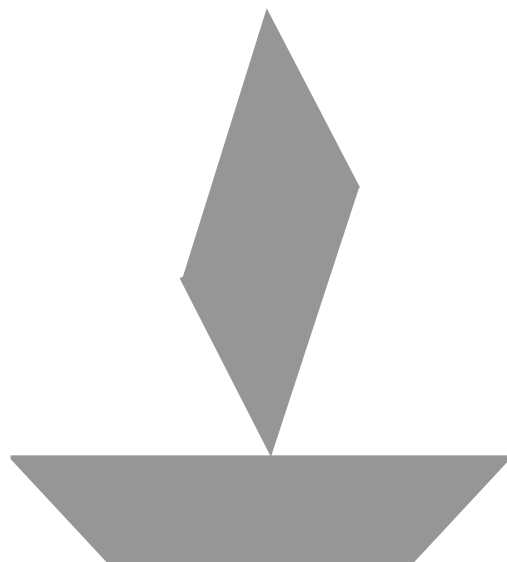
2002/3 - II/1.1

Slož ze sedmi částí hry „TANGRAM“ následující obrazce:

a)



b)



2003/3 – II/1.2

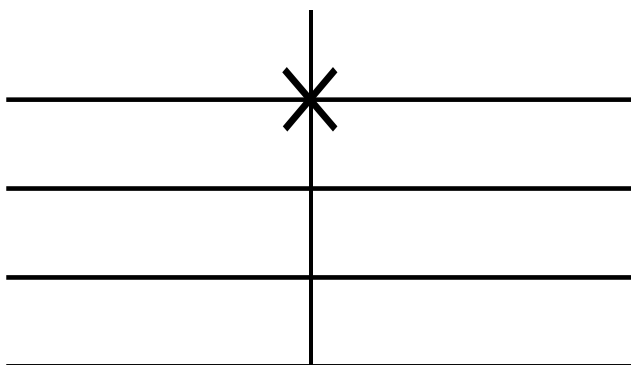
Za dob Adama Rieseho se pokládala pomocí počítací feniků „čísla“ na početní tabulku.

Polož na početní tabulku bonbóny jako počítací feniky. Přitom má vždy jedno číslo (neshodné s nulou) ležet na levé a pravé straně. Leží-li jeden bonbón na nejspodnější čáře je jeho hodnota 1, na každé výše položené je jeho hodnota 10, 100, 1000. Na jedné čáře mají ležet nejvýše dva bonbóny. Do mezer se nemá nic pokládat.

a) Polož 6 bonbónů tak, aby byl součet obou čísel co možná nejmenší.

b) Polož 6 bonbónů tak, aby byl rozdíl obou čísel co možná největší.

c) Polož 6 bonbónů tak, aby byl součin obou čísel co možná nejmenší.



Úlohy ze starých počtnic

1998/3 - II/2.2

Někdo byl tázán, kolik ovcí má v každém ze dvou chlévů, načež tento odpověděl: Rozdělím-li ovce ve stáji, kde je jich většina, na čtyři stejné díly, a rozdělím-li ovce ve stáji, kde jich stojí nejméně, do 7 stejných dílů, a vezmu-li nyní z každé stáje jeden takový díl, tak obnáší tyto díly dohromady 21. Kolik ovcí je v každé stáji?

Odpověď:

2000/3 – II/2.2

Ve staré perské povídce „Tisíc a jeden den“ najdeme následující povídku:

Jedna žena jde do zahrady sklízet jablka. Zahrada má čtyři brány, každá je střežena jedním mužem. Žena dá hlídači 1. brány polovinu sklizených jablek, hlídači 2. brány polovinu zbylých jablek; právě tak postupuje u třetího a čtvrtého. Zůstanou jí nakonec jen 10 jablek. Kolik jablek sklídila?

Odpověď:

2002/3 - II/2

Adam Ries, mistr počtář a báňský úředník, musel rozdělit výhru dle následujících podmínek:

Abrahám dostane dvakrát tolik zlatých než Bertram, Jacob dostane čtvrtinu toho, co Abrahám.

(a) Kolik zlatých dostane každý, když je na rozdělení celkem 70 zlatých?

Odpověď:

Abrahám zlatých

Bertram zlatých

Jacob zlatých

(b) Který nejbližší vyšší počet zlatých se nechá na tři beze zbytku podle výše uvedené podmínky rozdělit, když je požadováno, že každý podíl je celým číslem?

Odpověď: zlatých



2005/2 – II/2.2

Euklid (300 př.n.l.) položil následující otázku: Mezek a osel jsou naloženi obilím. Mezek řekne oslovi: „Když mi dáš dva díly svého nákladu, ponesu toho třikrát tolik co ty. Ale když ti dám jeden díl ze svého, budou naše náklady stejné.“ Kolik obilí tedy mezek a osel nesou?

Odpověď:

Hry s čísly**2004/2 – II/2.1**

Najdi pravidlo a doplň řady čísel vždy o dvě další čísla:

1	4	9	16	25				
1	4	10	19	31				
1	6	2	12	8	23	19		

2005/2 – II/2.1

Nahrad' ve vedle stojící figurce mezery čísly a početními znaménky tak, aby správně vypočítané příklady byly vodorovně i svisle.

309	-		=	
		-		+
150			=	170
=		=		=
	-	59	=	

2006/2 – II/2

1. Doplň v obrázku operační znaménka a přirozená čísla tak, aby řetězová úloha byla správně vyřešena při výpočtu směřujícím zleva doprava. (Pozor: pravidlo „násobení a dělení má přednost před sčítáním a odčítáním“ neplatí, mezivýpočty nejsou udány.)



2. Každé písmeno musí být nahrazeno jednou číslicí, přičemž rozdílná písmena znamenají rozdílné číslice, shodná písmena shodné číslice:

$$\begin{array}{r}
 A D A M \\
 + A N N A \\
 \hline
 = R I E S
 \end{array}$$

(a) Nahrad' písmeno **A** číslicí **4**. Zbývající písmena nahrad' tak, aby úloha byla vyřešena správně.

$$\begin{array}{r}
 4 \quad _ \quad 4 \quad _ \\
 + 4 \quad _ \quad _ \quad 4 \\
 \hline
 = \quad _ \quad _ \quad _ \quad _
 \end{array}$$

(b) Uveď další řešení:

$$\begin{array}{r}
 4 \quad _ \quad 4 \quad _ \\
 + 4 \quad _ \quad _ \quad 4 \\
 \hline
 = \quad _ \quad _ \quad _ \quad _
 \end{array}$$

3. Součin tří přirozených čísel je 30, součet těchto čísel je dělitelný čtyřmi. Uveď tato tři čísla.

Odpověď:

4. Hledají se dvě číslice, jejichž součet je 132, přičemž pátý díl jedné se rovná šestému dílu druhé číslice.

Odpověď:

Tolikero možností

1999/3 - II/3.1

Jana, Karel, Lisa, Martin a Nora sfárali na své průzkumnické výpravě do dolu „Markus Röhling“. Přitom existuje tolikero možností a ty máš všechny najít.

1. Horníci se před 500 lety klouzali dolů po chodbách na kožených „prdeláčích“. Proto se smí těchto pět nyní také sklouznout dolů.

(a) Napiš všechna různá pořadí pokud se Karel sklouzne první a Martin poslední. Napiš takto: K J L N M, K..., ...

(b) Kolik různých pořadí vyplývá celkem, pokud se Martin sklouzne vždy poslední a ostatní vždy ve změněném pořadí?

Odpověď:

(c) Kolik různých pořadí vyplyne celkem, když děvčata a chlapci se sklouznou střídavě jeden po druhém?

Odpověď:

2. K výjezdu ze štol využívají děti důlního vláčku. Malá lokomotiva táhne vagóny, ve kterých mohou sedět nanejvýš 4 děti. (V žádné z následujících úloh si nemusíte všímat pořadí vagónů.)

(a) Kolikero různých rozdělení těchto pěti dětí do právě dvou vagónů celkem existuje?

Odpověď:

(b) Kolik různých rozdělení těchto pěti dětí do právě dvou vagónů existuje celkem, když v každém vagónu sedí právě jeden chlapec?

Odpověď:

(c) Kolik různých rozdělení existuje, když jedno dítě smí jet s sebou na lokomotivě, zbývající usednou v právě dvou vagónech?

Odpověď:

2003/3 – II/3

Účastníci matematické soutěže Adama Rieseho z Česka dorazili do Annaberg-Buchholzu. Dozvídají se že dům Adama Rieseho v Johannisově uličce poskytuje přístřeší muzeu, počítařské škole, výstavě o Barboře Uthmannové a knihovně.

1. Hana, Ina, Karel, Lenka a Michal se dohadují, která zařízení domu a v jakém pořadí tato navštíví.

Kolik různých možností pořadí existuje,

(a) kdyby chtěli jít do muzea, do počítařské školy a do knihovny?

Odpověď:

(b) kdyby chtěli jít do tří ze čtyř zařízení?

(Důležité: Také pořadí, viz zadání úkolu, má být vzato v úvahu.)

Odpověď:

2. Po návštěvě domu Adama Rieseho se děti zdržují na náměstí a fotí se u znovu vybudované studny Barbory Uthmannové.

Kolik různých fotografií může vzniknout,

(a) kdyby se každé dítě nechalo vyfotit s každým právě jednou?

Odpověď:

(b) kdyby právě tři z těch pěti dětí měly být viděny na fotkách?

Napiš pro toto všechny možnosti. Využij k tomu počáteční písmena vlastních jmen H, I, K, L, M.

Odpověď:

(c) kdyby měly být viděny nejméně dvě z pěti dětí na fotkách (při čemž vychovatelka pomáhá při fotografování)?

Odpověď:

2005/3 – II/3

Děti z „Annabergské počtářské školy“ si vymýšlejí úkoly s kartami. Mají k dispozici série karet s následujícími obrázky:

Abacus (A)

Barbara Uthmann (B)

Coß (C)

mistr počtář Adam Ries (R)

Ke každé sérii patří právě čtyři karty, při čemž se každý obrázek vyskytuje právě jen jednou. (Písmena v závorkách jsou použita jako označení pro obrázky.)

1. Max klade karty jedné série přes sebe a říká: „Navrchu leží R. Pak existuje 6 různých pořadí polohy zbývajících karet, totiž ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Zamíchám nyní tyto čtyři karty. Kolik různých pořadí existuje pro polohu těchto čtyř karet?

Odpověď:

2. Marie klade dvě série takových karet vedle sebe. V každé sérii leží karty zakryté přes sebe. Táhne jednu kartu z 1. série, potom jednu z 2. série a odloží je v taženém pořadí vedle sebe, zaznamená výsledek, např. AC, vrátí karty zpátky a zopakuje tento postup. Kolik různých výsledků může dostat?

Odpověď:

3. František klade tři série takových karet vedle sebe. V každé sérii leží karty zakryté přes sebe. Táhne jednu kartu z 1. série, potom jednu z 2. série a jednu z 3. série, odloží je v taženém pořadí vedle sebe, zaznamená výsledek, např. ACA, vrátí karty zpátky a zopakuje tento postup.

(a) Zapiš všechny výsledky, ve kterých se R objeví právě dvakrát.

Možnosti:

(b) Uveď počet všech různých možností, ve kterých se R objeví (jednou nebo vícekrát).

Počet:

4. Nyní klade Líza 5 sérií takových karet do krabice, promíchá je a žádá: „Máš z této krabice bez poznání obrázků, říkám se za tmy, vyndat co možná nejmenší počet karet a být si jist, že se mezi vyndanými nachází nejméně

(a) od každého obrázku jedna karta. Odpověď:

(b) dvě karty se stejnými obrázky. Odpověď:

(Rada: K nalezení počtu vycházej z nejméně výhodného případu.)

vydavatel:

Dr. Norman Bitterlich

D-09114 Chemnitz, Draisdorfer Str. 21

e-mail: norman.bitterlich@t-online.de