

AUFGABENSAMMLUNG FÜR

UNGLEICHUNGEN

I.M.KIPNIS



$$2ah_a > 5,2d$$

J. M. Kipnis

Aufgabensammlung für Ungleichungen



Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin

1964

Titel der Originalausgabe:

И. М. Кипнис: Сборник прикладных задач на неравенства

Erschienen 1961 im Staatlichen Verlag für pädagogische Literatur, Moskau

Übersetzt von Dipl.-Math. Horst Götzke, Berlin

Redaktion: Siegmар Kubicek, Karlheinz Martin, Peter Pfeiffer

Redaktionsschluß: 15. 4. 1964

Zeichnungen: Heinz Grothmann

Einband: Werner Fahr

ES 10 C · Bestell-Nr. 00 21 64-1 · Lizenz Nr. 203 · 1000/64 (E)

Gesamtherstellung: B. G. Teubner, Leipzig (III/18/154)

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort des Autors	5
1. Aufgaben, die auf Ungleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten führen	7
2. Aufgaben, die auf ein System von zwei linearen Ungleichungen mit zwei Unbekannten führen .	16
3. Aufgaben, die auf Ungleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten führen	19
4. Aufgaben, bei denen Ungleichungen im Beweis auftreten	21
5. Antworten und Lösungen	29

Alle Aufgaben der vorliegenden Sammlung sind völlig elementar. Den Bedürfnissen der allgemeinbildenden Schule entsprechend sind sie in zwei Gruppen unterteilt:

Die erste Gruppe bilden

Aufgaben, die über den Stoff eines Kurses des Mathematikunterrichtes der allgemeinbildenden Schulen nicht hinausgehen
(Nr. 1 bis 30 und 41 bis 63).

Die zweite Gruppe besteht aus solchen

Aufgaben, die über die Grenzen des Stoffes in den Kursen hinausgehen
(Nr. 31 bis 40 und 64 bis 81).

Aufgaben der ersten Gruppe kann man sowohl im Unterricht der entsprechenden Klasse als auch für die außerschulische Arbeit verwenden. Die Aufgaben der zweiten Gruppe sind nur für die Arbeit in Arbeitsgemeinschaften gedacht. Einige Aufgaben eignen sich gut für Aufträge im Rahmen der mathematischen Arbeitsgemeinschaften. So könnten beispielsweise die Aufgaben 15, 26, 30 und 47 von Schülern nach ausreichender Vorbereitung an der Tafel vorgerechnet werden.

Die Auswahl der Aufgaben und die Darstellung ihrer Lösung sind dem Stoff in Mathematik und Physik der jeweiligen Klasse angepaßt.

Der Lehrplan der sowjetischen Schulen enthält das Thema „Ungleichungen“ nur für die 7. und 10. Klasse. Daher werden gewöhnlich in der 8. und 9. Klasse Aufgaben über Ungleichungen nicht gelöst. Das hat zur Folge, daß die Schüler, nachdem sie in der 7. Klasse mit Ungleichungen bekannt gemacht wurden, zu diesen erst nach einer zweijährigen Unterbrechung in der 10. Klasse zurückkehren.

Es läßt sich aber leicht nachweisen, insbesondere im Hinblick auf Anwendungsaufgaben, daß es außerordentlich wichtig ist, auch in der 8. und 9. Klasse Aufgaben mit Ungleichungen zu lösen.

Für die Schüler der 7. Klasse sind die Aufgaben 1 bis 6, 9, 49 bis 52, 60 und 63 (von den Aufgaben 50 und 60 nur die geometrischen Lösungen) geeignet. In den Klassen 8, 9 und 10 kann die Auswahl der Aufgaben, die auf Ungleichungen führen, entsprechend dem Lehrstoff in Mathematik und Physik erweitert werden. So werden für die 8. Klasse die Aufgaben 7, 13, 15, 19, 28, 29, 54 und 62 und für die 9. Klasse die Aufgaben 9, 11, 12, 16 bis 18 und 26 empfohlen. Für die 10. Klasse sind schließlich ausnahmslos alle Aufgaben von 1 bis 32 und von 41 bis 63 mit den in der Aufgabensammlung angegebenen Lösungswegen geeignet.

Es sei noch bemerkt, daß der Inhalt vieler Aufgaben der vorliegenden Sammlung dazu verwandt werden kann, analoge Aufgaben über Gleichungen insbesondere aus dem Gebiet der Anwendungen zu bilden. Teilweise können die Aufgaben auch zur Beweisführung von Gleichheiten herangezogen werden.

Mein besonderer Dank gilt S. I. NOWOSELOW, I. J. TANATAR, G. B. GÜREWITSCH und M. W. JAKOWKIN, deren Rezensionen wesentlich zur Verbesserung dieser Schrift beigetragen haben.

J. M. KIPNIS

Für die Lösung der Aufgaben ist es wichtig, folgende Schreibweisen von Größen zu unterscheiden:

1. „ m kg“ bedeutet eine Masse, deren Maßzahl m ist und deren Maßeinheit kg heißt (m ist also keine Größe, sondern eine unbenannte Zahl);
2. „ m (in kg)“ oder „ m , gemessen in Kilogramm“, bedeutet eine Masse, die in der Maßeinheit kg zu messen ist (m ist also eine Größe, die aus einer unbenannten Maßzahl und der Maßeinheit kg besteht).

1. Aufgaben,

die auf Ungleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten führen

1. Die Orte A und B liegen s km voneinander entfernt. Im Ort A betrage der Selbstkostenpreis für eine Tonne Kohle q MDN. Im Ort B sei er um $p\%$ höher.

Von welchem Punkt zwischen A und B an wird die aus B kommende Kohle billiger sein als die Kohle aus dem Ort A , wenn für eine Tonne Kohle je Kilometer n MDN Transportkosten entstehen?

2. In einer Fabrik hänge der Verbrauch der Geldmittel direkt von der Produktion ab (z.B. durch den Ankauf des Rohmaterials, durch den Lohn für die Arbeiter). Dieser Anteil betrage d MDN für jede Einheit des Fertigproduktes.

Die Kosten hängen aber auch von einer Anzahl von Größen ab, die nur indirekt zur Produktion stehen (z.B. von der Amortisation für die Ausrüstung und Gebäude, vom Lohnfonds derjenigen Mitarbeiter, die nicht unmittelbar in der materiellen Produktion stehen). Dieser Anteil betrage s MDN im Jahr. Der Verkaufspreis betrage r MDN für eine Einheit des Produktes.

Wieviel Produktionseinheiten muß das Werk jährlich fertigen, damit der Gewinn größer als p MDN im Jahr ist?

3. Es soll eine p_1 -prozentige Jod-Spirituslösung hergestellt werden. Wieviel Gramm reiner Spiritus muß zu m g p -prozentiger Jodlösung hinzugefügt werden, um eine Lösung zu erhalten, deren Stärke nicht kleiner als $p_1\%$ ist ($p_1 < p$)?

4. Die günstigste Höhendifferenz zwischen den höchstgelegenen Wohnungen einer Stadt und der städtischen Pumpstation für die Wasserversorgung betrage h m. Der in den Wasserleitungsrohren durch Reibung entstehende Druckverlust betrage in den entferntesten Punkten

nicht mehr als $f\%$. Welchen Druck muß das Wasser von der Pumpstation erhalten, damit im gesamten Wasserleitungsnetz der Stadt ein Druck von $p \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2}$ nicht unterschritten wird?

5. Der Körper eines erwachsenen Menschen habe die Masse $m \text{ kg}$ und das Volumen $V \text{ dm}^3$. Es soll untersucht werden, wieviel Korkscheiben mit dem Volumen $V_1 \text{ dm}^3$ für einen Rettungsgürtel erforderlich sind, der bei völligem Untertauchen in Süßwasser sichert, daß das Volumen eines Schwimmers nicht weniger als $f\%$ über die Wasseroberfläche hinausragt.

Die Dichte von Kork beträgt $0,2 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$.

6. Eine Stadt liege an einem Fluß. In welcher Entfernung oberhalb der städtischen Dampferanlegestelle sollte ein Badestrand angelegt werden, damit eine Dampferfahrt hin und zurück (Haltestellen werden nicht mit berechnet) nicht länger als t (in min) dauert? Die Eigengeschwindigkeit des Dampfers werde dabei mit v (in $\text{km} \cdot \text{min}^{-1}$) angenommen und die der Strömung des Flusses mit v_1 (in $\text{km} \cdot \text{min}^{-1}$) ($v_1 < v$).

7. Der Schutzbereich eines Blitzableiters ist geringer als seine doppelte Höhe.

Es ist der Punkt eines Satteldaches zu bestimmen, in dem ein Blitzableiter aufgestellt werden soll. Gleichzeitig ist auch die geringste zulässige Höhe zu bestimmen. Die Grundfläche des Daches stellt ein Rechteck mit den Seiten a und b , jeweils in Metern gegeben, dar.

8. Die Abbildung 1 stellt ein Reibradgetriebe mit zylindrischen Walzen dar, deren Rotationsachsen parallel verlaufen.

Das Treibrad sei A . Es drückt auf das angetriebene Rad B und zwingt es so, die Rotation in entgegengesetzter Richtung mitzumachen. Dabei ist zu sichern, daß beide Rollen nicht aufeinander gleiten.

Radius und Drehzahl des Treibrades seien r_1 (in mm) bzw. n_1 (in Umdrehungen je Sekunde). Welcher Radius x muß für das angetriebene Rad gewählt werden, damit die Drehzahl n_2 nicht kleiner wird als n (in Umdrehungen je Sekunde)?

9. Eine selbstfahrende Walze zum Befestigen von Wegen hat eine Breite von $0,85 \text{ m}$ (d.h., sie wälzt bei einem Durchgang einen Streifen von $0,85 \text{ m}$ Breite glatt). Dabei muß jeder nachfolgende Streifen den vorangegangenen um ein Viertel seiner Breite überlappen.

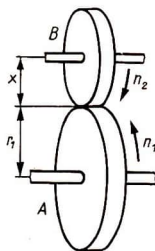


Abb. 1

Mit welcher Geschwindigkeit muß eine solche Walze fahren, damit sie einen Straßenabschnitt von 750,00 m Länge und 6,50 m Breite in nicht weniger als 5 h und nicht mehr als 6 h zweimal überwalzt?

10. Die Abbildung 2 stellt das Schema eines Bremsberges dar. Ein Bremsberg ist eine geneigte Ebene mit zwei Gleisen. Auf einem Gleis fahren

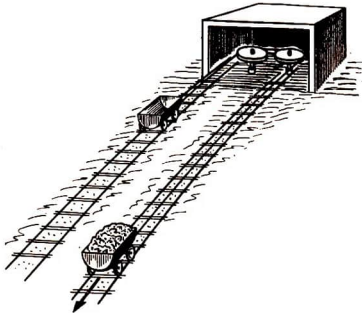


Abb. 2

volle Loren abwärts und ziehen dabei leere Loren auf dem zweiten Gleis mittels einer Seilverbindung über eine Umkehrrolle aufwärts. Solche Anlagen verwendet man in manchen Bergwerken.

Die beladene Lore habe die Masse m_1 (in t), die leere Lore dagegen nur die Masse m_2 (in t), wobei $m_1 > m_2$ gilt. Der Reibungskoeffizient zwischen den Rädern der Loren und den Schienen sei μ . Welchen Neigungswinkel φ muß die Strecke haben, damit eine beladene Lore mindestens n leere Loren heraufziehen kann? Die Reibung in den Lagern werde hierbei nicht berücksichtigt.

11. Das Neuland eines Staatsgutes mit einer Größe von 5000 ha soll in weniger als 200 Arbeitsstunden umgepflügt werden. Für das Pflügen wird eine Tiefe von 35 cm vorgegeben. Verwendet werden fünfscharige Pflüge, bei denen jede Pflugschar eine Breite von 40 cm faßt. Wieviel Traktoren mit einer Leistung von 60 PS sind unter Berücksichtigung des Bodens erforderlich, wenn die Festigkeit des Ackerbodens durchschnittlich $1,2 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2}$ Druck erfordert?

12. Der Fahrkorb eines Aufzugs wiege m (in kg). Er möge sich gleichförmig mit einer Beschleunigung von a (in $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$) bewegen. Es ist der Querschnitt α des Halteseiles zu bestimmen, wenn für das Material eine Bruchgrenze σ (in $\text{kp} \cdot \text{cm}^{-2}$) angegeben wird und nach geltenden Sicherheitsbestimmungen das n -fache des berechneten Wertes nicht unterschritten werden darf.
13. Die Masse des Schlittens einer Tischhobelmaschine einschließlich des zu bearbeitenden Werkstückes wurde durch Wägung zu $m = 100 \text{ kg}$ bestimmt. Die Arbeitsgeschwindigkeit des Schlittens unter dem Fräser betrage $v_2 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Die Zeit vom Beginn der Schlittenbewegung bis zum Beginn der Schnittarbeit betrage $t = 0,5 \text{ s}$. Es ist die Reibungszahl μ des Schlittens so zu bestimmen, daß der Kraftaufwand F zur Ausführung der Schlittenbewegung vom Ruhepunkt bis zum Beginn des Schnittes 40 kp nicht überschreitet.
14. Ein Fesselballon stehe in einer Höhe von 1400 m . Im Bereich dieses Ballons springen gleichzeitig zwei Fallschirmspringer mit sich automatisch öffnenden Schirmen ab, und zwar der Fallschirmspringer A aus einer Höhe von 1900 m und der Fallschirmspringer B aus einer Höhe von 1580 m .
Der Fallschirmspringer A hat eine Sinkgeschwindigkeit von $4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, und der Fallschirmspringer B sinkt mit einer Geschwindigkeit von $4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. In welcher Zeitspanne (vom Beginn des Absprungs an gerechnet) befindet sich der Fallschirmspringer A noch oberhalb, aber der Springer B bereits unterhalb des Ballons, wobei die Entfernung des Springers B vom Ballon die von A übersteigen soll?
15. Die Masse der Erde sei gleich M und die des Mondes gleich m . Die Entfernung zwischen den beiden Massenmittelpunkten des Mondes bzw. der Erde betrage s .
Bis zu welcher Entfernung vom Massenmittelpunkt der Erde muß ein interplanetarer Flugkörper in Richtung auf den Massenmittelpunkt des Mondes fliegen, damit dieses Raumschiff seinen Flug ohne Eigenantrieb, also lediglich unter Einwirkung des Gravitationsgesetzes, fortsetzen kann?
16. Eine zentrifugale Wasserpumpe habe Schaufeln mit einem Radius r (in m). Wieviel Umdrehungen in der Sekunde muß diese Pumpe machen, damit das Wasser mindestens um die Höhe h (in m) steigt?
17. Ungedroschenes Getreide enthält $k\%$ Beimengungen. Bei jedem Durchgang des Getreides durch die Schwingen der Dreschmaschine

verringert sich dieser Anteil um $q\%$, wobei die Menge des Getreides unverändert bleibt.

Wievielmal muß man das Getreide durch die Schwinde geben, damit der Beimengungsanteil zumindest $f\%$ unterschreitet?

18. Eine Zinkbadewanne mit der Masse 20 kg enthält 120 kg Wasser mit einer Temperatur von $t = 15^\circ\text{C}$.

Wieviel Kilogramm Wasser von der Temperatur 80°C müssen nachgefüllt werden, wenn die Wassertemperatur zwischen 30°C und 40°C liegen soll? Der Koeffizient der spezifischen Wärme für Zink ist $0,09 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grad}^{-1}$.

19. Die Abbildung 3 stellt einen Ablaufberg dar, wie er zum Auflösen und zum Formieren von Eisenbahnzügen verwendet wird.



Abb. 3

Der Ablaufberg besteht aus einem Hebeteil l und dem Abrollteil l_1 . Der oberste Punkt ist der Brechpunkt A .

Der zu rangierende Zug wird auf dem Rangiergleis von der Lokomotive über den Hebeteil zum Brechpunkt A geschoben. Im Brechpunkt werden die Waggon abgekuppelt und rollen über den Abrollteil selbstständig zu den Verteilerweichen (hinter dem Punkt E), wo auf den einzelnen Gleisen neue Züge zusammengestellt werden.

Die Bewegung der Waggon über den Abrollteil erfolgt lediglich durch die Wirkung der eigenen Schwerkraft.

Der Abrollteil ist in folgende Abschnitte unterteilt: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DE}$. Um ein allmähliches Bremsen der Waggon zu bewirken, hat jeder nachfolgende Abschnitt eine geringere Neigung als der vorangegangene.¹

Es ist die Länge des ersten Abschnittes $\overline{AB}$ (des sogenannten Geschwindigkeitsteiles) zu bestimmen, wenn die Neigung² mit 0,04 angegeben wird. Die Anfangsgeschwindigkeit der Waggon (im Punkt A) ist Null. Die Endgeschwindigkeit (im Punkt B) darf $4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ nicht

¹ Zur Erhöhung der Bremswirkung sind auf den einzelnen Abschnitten mit Ausnahme des Abschnittes $\overline{AB}$ auch noch spezielle Bremsvorrichtungen montiert.

² Die Neigung eines Gleisabschnittes wird durch den Sinus des Winkels angegeben, den sie mit der Horizontalen bildet.

unter- und $5,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ nicht überschreiten. Der Reibungskoeffizient der Räder mit den Schienen wird mit 0,02 in Rechnung gesetzt.

20. Lampen werden gewöhnlich zum Schutz der Augen mit einem Lampenschirm versehen, von dem die Wirkung der Lichtquelle abgeblendet wird. Die Schutzwirkung des Lampenschirmes ist um so größer, je größer der Winkel DAC ist (Abb. 4), der von der Horizontalen und der

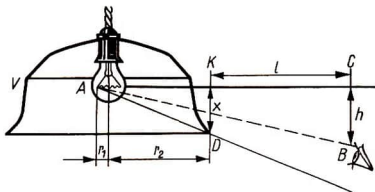


Abb. 4

Strecke $\overline{AD}$ gebildet wird. Diese Strecke führt vom äußersten Punkt der Lichtquelle zum gegenüberliegenden Rand des Lampenschirmes. Der so gebildete Winkel wird auch Schutzwinkel der Lampe genannt. Es werde der Radius des unteren Randes beim Lampenschirm einer elektrischen Deckenbeleuchtung mit r_2 und der Radius der Glühspirale in der Birne mit r_1 bezeichnet. Der Abstand des Auges sei auf der Horizontalen durch die Glühspirale nicht kleiner als l und von der Horizontalen nicht größer als h .

In welcher Entfernung vom Niveau der Spirale muß sich der untere Rand des Lampenschirmes befinden, damit die Spirale dem Auge noch verborgen bleibt?

21. Die Brennweite eines konkaven sphärischen Spiegels sei gleich f . In welcher Entfernung vom Scheitelpunkt dieses Spiegels muß ein Gegenstand angeordnet werden, damit die lineare Größe seines Bildes mindestens doppelt so groß, aber kleiner als das Dreifache des Gegenstandes ist?
22. Ein Variometer (ein Gerät, das in der Hochfrequenztechnik zur Veränderung der Selbstinduktion benutzt wird) bestehe aus zwei zylindrischen Spulen, die auf einer gemeinsamen Achse, senkrecht zur Zylinderachse, befestigt sind. Die äußere Spule sei unbeweglich (Stator), und die innere lasse sich drehen (Rotor). Gesucht wird bei Vorgabe des

äußeren Durchmessers des Rotors und des inneren Durchmessers des Stators die Breite des Rotors, wobei sich der Rotor frei bewegen soll.

23. Eine Rolle Papier habe die Masse m (in kg) und den Durchmesser d (in cm). Von dieser Rolle soll Papier abgewickelt werden, und zwar soll die Masse des abgewickelten Papiers nicht weniger als m_1 und nicht mehr als m_2 betragen, so daß gilt: $m_1 \leq m < m_2$.

Bis zu welchem Durchmesser muß die Rolle abgewickelt werden?

24. Auf Abbildung 5 ist ein ebener viergliedriger Gelenkmechanismus dargestellt. Dieser Mechanismus dient dazu, die rotierende Bewegung der Kurbel $\overline{AM_1}$ in eine lineare Schwingbewegung des Hebels $\overline{BM_2}$ mittels der Treibstange $\overline{AB}$ und umgekehrt die Schwingbewegung des Hebels in eine Rotation der Kurbel zu transformieren. Damit diese Bewegung ausgeführt werden kann, müssen folgende Ungleichungen erfüllt sein:

$$d - a \geq |b - c|$$

$$d + a \leq b + c,$$

wobei a den Kurbelradius $\overline{M_1A}$; b die Treibstange $\overline{AB}$; c den Hebel $\overline{BM_2}$ und d den Abstand zwischen den beiden Lagern M_1 und M_2 , also M_1M_2 bedeuten.¹

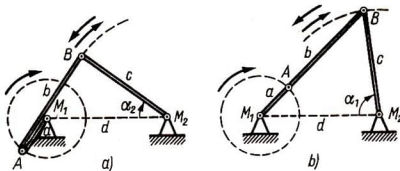


Abb. 5

Es ist unter der Voraussetzung, daß $b = 7$, $c = 5$ und $d = 6$ Maßeinheiten sind, das Intervall der möglichen Winkelwerte für die Schwingbewegung des Hebels zu bestimmen.

25. Um den Flüssigkeitsstand in einem geschlossenen Behälter zu bestimmen, wird vielfach ein sogenanntes Schwimmrelais angewandt. Dieses

¹ Der Nachweis, daß diese Bedingungen auch hinreichend sind, wird in Aufgabe 63 erbracht.

Schwimmrelais signalisiert mit Hilfe zweier Kurzschlußschalter das tiefste und das höchste jeweils noch zulässige Niveau der Flüssigkeit (Abb. 6).

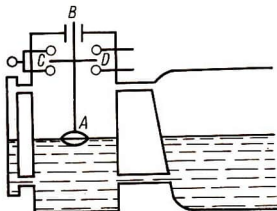


Abb. 6

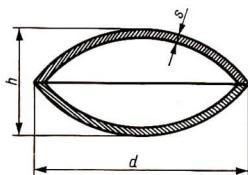


Abb. 7

Es soll ein Schwimmer für die Kontrolleinrichtung eines Erdölbehälters angefertigt werden. Dieser Schwimmer soll sich aus zwei gleichen Segmenten einer Hohlkugel zusammensetzen, die folgende Maße haben: Durchmesser $d = 20$ cm, Höhe $h = 10$ cm und Wanddicke $s = 0,2$ cm (Abb. 7).

Welche Dichte muß das verwendete Material für den Schwimmer haben, wenn seine Eintauchtiefe zwischen $h_1 = 3$ cm und $h_2 = 4$ cm liegen und die Stange $\overline{AB}$ mit der Kontaktplatte $\overline{CD}$ insgesamt $m_3 = 147$ g wiegen darf?

26. Eine Zisterne in der Form eines Quaders wird mit einer Flüssigkeit der Dichte ρ gefüllt. Die Höhe der Zisterne sei h . Die Seitenwände werden durch eine horizontale Linie jeweils in einen oberen und einen unteren Teil geteilt. Welchen Abstand von den oberen Kanten muß die Linie haben, damit der Druck der Flüssigkeit am oberen Teil der Wand höchstens den Wert $\frac{1}{k}$ des Druckes an der ganzen Wand ausmacht?
27. In einer RTS stehen zehn Elektromotoren, jeder mit einer maximalen Leistung P (in Kilowatt) bei einer Spannung U (in Volt). Die Entfernung zur Anschlußstelle aus der Hauptleitung beträgt l (in m), und der spezifische Widerstand der Leitung vom Hauptstrang zur Station sei gleich ρ .

Es ist der zulässige Querschnitt der Zuführungsleitung zu bestimmen, wenn in der Hauptleitung eine Spannung U_1 (in Volt) vorliegt und der Spannungsabfall in der Leitung den Wert U_2 nicht übersteigen darf.

- 28.** Ein Kran für die Beschickung eines Martinofens besteht aus der Lore A , an der eine Säule K nach unten befestigt ist. An dieser Säule befindet sich eine Schaufel D , deren Stiel die Länge c (in m) hat. Die Lore kann sich auf Schienen bewegen, die auf einer fahrbaren Brücke B befestigt sind (Abb. 8).

Die Gesamtmasse der Schaufel, der Säule und der Lore sei gleich m_1 . Diese Masse übe (infolge der Schwerkraft) die Kraft F_1 aus und greife im Punkt O an. Der Punkt O befindet sich in der Entfernung b von der Symmetrieachse der Lore und der Säule.

Die maximale Masse des Materials, das von der Schaufel aufgenommen werden kann, betrage m_2 . Diese Masse entspricht der Kraft F_2 . Welchen Abstand müssen die Achsen der Lore, die durch die Punkte Q und N verlaufen, haben, damit die Lore nicht abgekippt wird?

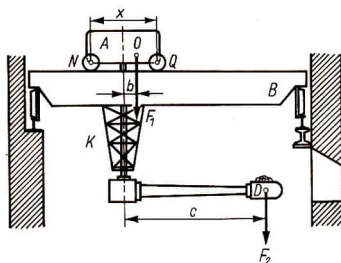


Abb. 8

- 29.** Die Abbildung 9 stellt die schematische Zeichnung eines Turmdrehkranes dar. Die Masse des Turms drückt infolge der Schwerkraft mit der Kraft F_1 auf den Standpunkt. Der Ausleger $\overline{AO}$ drückt mit der Kraft F_2 , die im Mittelpunkt B angreifen soll, senkrecht nach unten. Die maximale Belastung für den Kran sei die Masse m_3 , die die Schwerkraft F_3 ausübt. Im Abstand b vom Punkt A befindet sich das Gegenstück (Gegengewicht). E und N seien die Achsen des Wagens für den Kran.¹

¹ In der Abbildung 9 wurden jeweils die Kräfte eingezeichnet. Obwohl man auch mit den Massen die Berechnungen ausführen kann, wurden der Berechnung auf Seite 46 in diesem Fall die entsprechenden Kräfte zugrunde gelegt.

Welche Kraft F_x muß das Gegenstück ausüben, damit der Kran stabil bleibt?

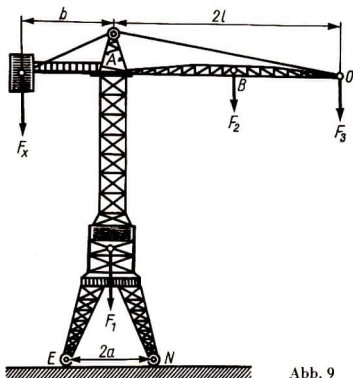


Abb. 9

30. Ein Gefäß in der Form einer Halbkugel mit dem inneren Durchmesser $2r$ ist bis zur Höhe h mit Flüssigkeit gefüllt. Das Gefäß soll so weit geneigt werden, daß die Flüssigkeit noch nicht ausfließt. Welche Werte sind für den Neigungswinkel zulässig?

2. Aufgaben, die auf ein System von zwei linearen Ungleichungen mit zwei Unbekannten führen

31. Die Abbildung 10 zeigt den Mechanismus einer Kurbelwelle mit Schubstange. Derartige Mechanismen verwendet man, wenn die rotierende Bewegung einer Kurbelwelle über eine Triebstange in eine geradlinige (translatorische) Bewegung eines Gleitstückes oder umgekehrt

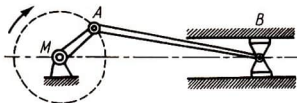


Abb. 10

eine translatorische Bewegung des Gleitstückes in eine rotierende Bewegung der Kurbelwelle umgeformt werden soll.

Es soll die Länge der Kurbel $\overline{MA}$ und die Länge der Pleiastange $\overline{AB}$ so bestimmt werden, daß

- I. der Abstand des Gleitstückes B vom Rotationszentrum der Kurbelwelle nicht kleiner als m Millimeter und nicht größer als m_1 Millimeter und
- II. der Winkel zwischen der Pleiastange $\overline{AB}$ und der Verbindungsgeraden $\overline{MB}$ nicht kleiner als α und nicht größer als α_1 wird.

32. Ein Lampenschirm habe die Form eines Kegelstumpfmantels. Der Durchmesser der Deckfläche sei gleich d und der Durchmesser der Grundfläche gleich D . Die Länge einer Mantellinie sei gleich s .

Der Mantel soll aus einem rechteckigen Stück Stoff zugeschnitten werden. Es ist die Formel zu bestimmen, mit deren Hilfe das rechteckige Stück Stoff zur Anfertigung des Lampenschirms so bestimmt werden kann, daß es minimale Ausmaße hat.

33. In einem Wasserbad zum Härten von Werkstücken aus Stahl befindet sich Wasser mit einer Temperatur von 6°C . In dieses Bad werden Werkstücke getaucht, die bis auf 850°C erhitzt sind.

Wieviel Wasser muß in das Bad gegeben werden, damit unter Berücksichtigung der Massen der Werkstücke die Durchschnittstemperatur zwischen 50°C und 70°C bleibt?

34. Es seien zwei Sorten von Bruchstahl vorhanden. Die erste enthalte 20% und die zweite 40% Nickel.

Wieviel Tonnen Stahl jeder Sorte sind für eine Legierung erforderlich, deren Nickelgehalt zwischen 25% und 30% liegen soll?

35. Ein beladener Lastkahn wird von zwei Schleppern A und B aus dem Hafen geschleppt. Die Schleppseile bilden dabei mit der Fortbewegungsrichtung des Lastkahnes spitze Winkel (Abb. 11). Wie groß müssen diese Winkel sein, damit bei einer Zugkraft des Schleppers A von 6 Mp und des Schleppers B von 4 Mp auf den Lastkahn eine Kraft wirkt, die größer ist als 5 Mp? Falls die Zugkraft des Schleppers A 10 Mp und die des Schleppers B 5 Mp beträgt, soll die Kraftwirkung auf den Lastkahn zudem 8 Mp nicht unterschreiten.

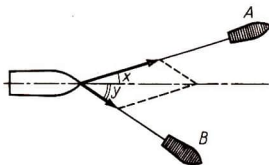


Abb. 11

36. In Laborversuchen soll die Konstruktion eines Flußgleitbootes am Modell in einem Versuchsbassin getestet werden. Bei den Versuchen kann sowohl die Geschwindigkeit des Versuchsmodelles als auch die der Wasserströmung variiert werden.

Das Modellboot soll eine Strecke von 60 m mit der Strömung in einer Zeit zurücklegen, die 5,4 s nicht unterschreitet. Die gleiche Strecke soll anschließend gegen die Strömung durchfahren werden, wobei die Zeit jetzt 7,2 s nicht übersteigen darf. Wie groß müssen die Geschwindigkeiten für das Modell und für das Wasser festgelegt werden, damit eine gleichförmige Bewegung entsteht?

37. Ein gerader Korridor von $a = 20$ m Länge soll von drei Lampen beleuchtet werden, die auf einer Geraden vier Meter über dem Fußboden angeordnet sind.

Zwei Beleuchtungskörper mit Glühlampen gleicher Lichtstärke befinden sich an den Enden des Korridors. Der dritte Beleuchtungskörper ist in der Mitte angeordnet.

Welche Lichtstärke muß jede Glühlampe haben, damit die Beleuchtungsstärke an den Endpunkten des Korridors 8 Lux nicht unterschreitet und in der Mitte 10 Lux nicht übersteigt?

38. Bei einem spezifischen Widerstand des Bodens von $f = 0,8 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2}$ darf das Pflügen eines Hektars Ackerfläche nicht weniger als $t = 1,0$ h und bei einem spezifischen Widerstand von $f_1 = 1,2 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2}$ nicht mehr als $t_1 = 1,4$ h in Anspruch nehmen. Die Tiefe beim Pflügen ist in den Grenzen von 0,1 m bis 0,85 m möglich.

Wie müssen die Nutzleistung des Traktors und die Furchentiefe festgelegt werden, damit die oben angeführten Daten eingehalten werden können?

39. Die Punkte A und B befinden sich auf den gegenüberliegenden Ufern eines Flusses, wobei der Punkt B gegenüber dem Punkt A weiter stromabwärts liegt. Die Strömungsgeschwindigkeit sei gleich v . Die Strömungsrichtung bilde mit der Verbindungsstrecke $\overline{AB}$ den Winkel α (Abb. 12). Dabei werde noch angenommen, daß die Strömungsgeschwindigkeit über die ganze Breite des Flusses gleich sei.

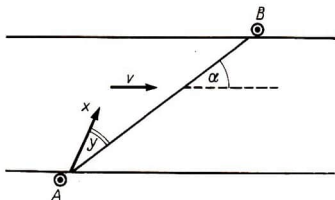


Abb. 12

Ein Kutter soll die Verbindung zwischen beiden Punkten längs der Verbindungsgeraden $\overline{AB}$ aufrechterhalten. Dabei soll er von A nach B nicht weniger als die Zeit t (in min) und von B nach A nicht mehr als die Zeit t_1 (in min) benötigen ($t < t_1$).

Welche Werte müssen die Geschwindigkeit x des Kutters und die Kursabweichung y gegenüber der Strecke $\overline{AB}$ annehmen?

40. Die Arbeitsproduktivität einer automatischen Werkzeugmaschine A betrage p Produktionseinheiten in der Stunde. Es sollen noch zwei weitere Werkzeugmaschinen, B und C , für dieselbe Produktion konstruiert werden. Dabei werden die Forderungen gestellt: die Produktivität der Maschine B soll nicht kleiner als $m\%$ der summierten Produktivität von A und C und die Produktivität der Maschine C nicht geringer als $n\%$ der summierten Produktivität von A und B sein. Wieviel Produktionseinheiten müssen die Maschine B und die Maschine C in der Stunde bringen?

3. Aufgaben, die auf Ungleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten führen

41. Ein Motorlastkahn soll eine dringende Ladung von einer Flußanlegestelle A zu einer Anlegestelle B befördern, die 24 km flußaufwärts liegt. Die Rückfahrt mit einer neuen Ladung geht infolge der Strömung, die $6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ beträgt, schneller. Wie groß muß die Geschwindigkeit des Motorkahnes in stehendem Gewässer sein, damit die Fahrt von A nach B und zurück nicht mehr als 3 Stunden dauert? (Die Zeiten für das Be- und Entladen sollen dabei nicht berücksichtigt werden.)
42. Bei einem gekrümmten Abschnitt einer Eisenbahnstrecke soll der Krümmungsradius 600 m nicht unterschreiten. Es sind die zulässigen Zahlenwerte für die Längen der Schienen einer Kurve zu ermitteln, wenn der zugehörige Zentriwinkel des Bogens kleiner als 180° ist und seine Sehne 156 m beträgt.
43. Ein Körper wird für die Dauer von x s bewegt. Er legt in der ersten Sekunde 3 m und in jeder folgenden Sekunde 4 m mehr als in der vorhergehenden Sekunde zurück.
Wenn dieser Körper in der ersten Sekunde 1 m und in jeder folgenden 8 m mehr als in der vorangegangenen zurückgelegt hätte, dann hätte er in der gleichen Zeit einen Weg zurückgelegt, der sich vom tatsächlich

zurückgelegten Weg wenig unterscheidet. Der Weg wäre größer bei 6 m und kleiner bei 30 m Gesamtstrecke.

Es ist die Gesamtdauer der Bewegung des Körpers zu bestimmen.

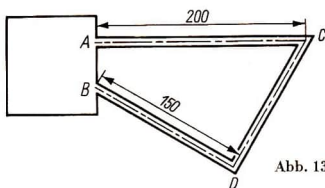
44. In einem Betrieb sind zwei Beregnungsanlagen vorhanden. Von der ersten wird das Wasser aus Öffnungen verspritzt, die sich in der gekrümmten Oberfläche eines Kugelabschnitts, also in der Kugelkappe, befinden, von der zweiten durch Öffnungen, die sich in der Grundfläche und im Mantel eines Kegels befinden. Grundfläche und Höhe des Kegels entsprechen der Grundfläche und der Höhe des Kugelabschnitts. Der Durchmesser der Öffnungen, die Dichte ihrer Anordnung und der Wasserdruck seien in beiden Anlagen gleich.

Für welche Größe des Bogens im Kugelabschnitt ist die Produktivität der ersten Anlage größer als die der zweiten Anlage? (Unter Produktivität sei hier die Menge des Wassers verstanden, das in einer Zeiteinheit verspritzt wird.)

45. Unter der Entfernung des sichtbaren Horizontes versteht man die Entfernung vom Beobachter zum entferntesten Punkt der Erdoberfläche, der vom Beobachter (zumindest theoretisch) noch eingesehen werden kann.

Bis zu welcher Höhe muß eine geophysikalische Rakete hochgeschossen werden, damit ein darin befindlicher Beobachter (oder ein Fotoapparat) einen sichtbaren Horizont erhält, der nicht kleiner ist als 2000 km? Der Erdradius wird mit 6370 km angenommen.

46. In einem Schacht sollen von einem Stollen zwei Seitenstollen vorgetrieben werden (Abb. 13). Der Seitenstollen $\overline{AC}$ soll rechtwinklig von der Wand



des Hauptstollens abgehen und 200 m lang sein. Der andere Nebenstollen $\overline{BD}$ soll vom Hauptstollen unter einem Winkel von 120° , also mit einer Abweichung um 30° gegenüber der Richtung des ersten Nebenstollens,

mit einer Länge von 150 m vorgetrieben werden. Die Enden dieser beiden Nebestollen sollen durch einen dritten Stollen $\overline{CD}$ verbunden werden. Wie groß muß der Abstand $\overline{AB}$ zwischen den Eingängen der beiden Nebestollen sein, damit der Verbindungsstollen nicht länger als 130 m wird?

47. Ein Keil in Form eines gleichschenkligen Dreiecks wird so eingetrieben, daß die Kraft längs der Höhe zur Spitze des gleichschenkligen Dreiecks wirkt. (Diese Höhe entspricht bekanntlich der Winkelhalbierenden des Winkels an der Spitze.)

Der Reibungskoeffizient zwischen den Wangen des Keiles und der Wandung sei gleich μ .

Für welche Größe des Winkels ABC (des Winkels an der Spitze des Keiles) wird das Verhältnis des Druckes der Keilwangen auf die Wandung zur aufzuwendenden Kraft auf den Keilrücken nicht kleiner als n sein, wenn $n > 1$ ist?

48. Es soll ein Eisenbahndamm mit der Länge l (in m) gebaut werden. Der Querschnitt stellt die Fläche eines gleichschenkligen Trapezes dar. Die untere Grundseite des Trapezes habe die Länge a (in m) und die obere Grundseite sei kürzer als b (in m). Der Böschungswinkel sei α . Welche Höhe muß dieser Damm haben, wenn das Erdreich, das im Rahmen des Dammbaus bewegt werden muß, das Volumen V (in m^3) nicht unterschreiten und das Volumen V_1 (in m^3) nicht überschreiten soll?

4. Aufgaben, bei denen Ungleichungen im Beweis auftreten

49. Ein optisches Gerät besitzt eine lineare horizontale Skale, und es ist in einer gewissen Entfernung von einem kleinen Spiegel C angeordnet, der um seine vertikale Achse gedreht werden kann (Abb. 14). Der Spiegel ist zudem mit einem Zeiger K versehen, der senkrecht auf der Spiegelfläche über der Drehachse steht.

Durch einen Spalt D in der Skale fällt ein Lichtstrahl $\overline{DC}$ auf den Spiegel. Dort wird der Strahl reflektiert, und er erzeugt auf der Skale die Lichtmarke F . Es ist zu beweisen, daß $\overline{ED} < \overline{DC}$ und das $\overline{EF} < \overline{FC}$ ist, wenn E derjenige Punkt ist, der durch den Zeiger $\overline{CK}$ auf der Skale markiert wird.

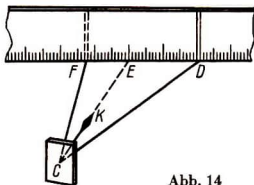


Abb. 14

50. Drei Industriebetriebe A, B, C liegen so, daß sie die Eckpunkte eines Dreiecks ABC bilden, für das gilt: $b < c < a$. Die gemeinsame Unterkunft für die Arbeiter dieser Betriebe liegt im Punkt O , der von den Seiten des Dreiecks gleichen Abstand hat. Die Punkte A, B, C und O werden durch geradlinige Chausseen verbunden.
Ein Autobus fährt vom Punkt O ab und bringt die Arbeiter an ihre Arbeitsstellen in den Punkten A, B und C und kehrt dann nach O zurück, wobei er lediglich die vorgezeichneten Wege benutzt.
Welches ist die kürzeste Route für den Autobus?
51. Es ist zu untersuchen, ob sich die Konzentration einer Lösung von Salz in Wasser erhöht oder erniedrigt, wenn man zu einer vorgegebenen Lösung eine beliebige, aber gleiche Menge an Salz und Süßwasser hinzufügt.
52. Die Fußbodenfläche ist bei Wohnungen im allgemeinen größer als die Fensterfläche. Daher ist das Verhältnis der Fußbodenfläche zur Fensterfläche größer als 100%.
Nach der Größe dieses Verhältnisses richtet sich unter anderem auch die hygienische Einschätzung einer Wohnung. Die Beurteilung in dieser Hinsicht fällt um so günstiger aus, je kleiner dieses Verhältnis ist.¹
Werden nun die hygienischen Verhältnisse einer Wohnung verbessert oder verschlechtert, wenn man die Fläche für Fußboden und Fenster dadurch beliebig erhöht, daß man beide Flächen jeweils um die gleiche Quadratmeterzahl vergrößert?
53. Ein Bild hänge in einer Höhe von $\overline{BF} = h_1$ vom Fußboden entfernt und bilde mit der Wand den Winkel α .
Es ist zu untersuchen, in welcher Entfernung von der Wand der Beschauer stehen muß, damit er das Bild unter dem größten Winkel sieht. Die Breite des Bildes betrage $\overline{AB} = a$, und die Augen der Betrachter seien durchschnittlich in der Höhe h_2 über dem Fußboden.
54. Bei einem zweiarmigen Hebel kann die Gleichgewichtslage auf zweierlei Art hergestellt werden. Die Last kann nämlich am Ende des kürzeren oder aber am Ende des längeren Hebelarmes angreifen. Die erforderliche Ausgleichskraft, die natürlich in den betrachteten Fällen unterschiedlich sein muß, greift jeweils am anderen Ende des Hebels an.
Es ist nachzuweisen, daß die Summe aus diesen beiden Ausgleichkräften stets größer ist als die Summe der hierbei konstant gehaltenen Lasten.

¹ Es besteht eine Vorschrift, nach der die Fläche des Fußbodens eines Wohnraumes nicht mehr als 1000% der Fläche der Fenster betragen darf.

55. Der Eisenbahnverkehr zwischen den beiden Städten A und B wird über eine Zwischenstation C abgewickelt, wo sich die beiden Teilstrecken $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$ rechtwinklig kreuzen.

Es ist zu zeigen, daß der Bau einer direkten Eisenbahnlinie, die also die Städte A und B unmittelbar verbindet, den Weg um nicht mehr als $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ des bestehenden Weges verkürzt, d.h. um nicht mehr als das 0,293fache der früheren Länge des Weges.

56. In der Abbildung 15 ist der Querschnitt eines Satteldaches dargestellt. Die Strecke $\overline{CD}$ stehe senkrecht auf der Strecke $\overline{AB}$. Es ist zu zeigen, daß die Länge von $\overline{CD}$ nicht mehr als das $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ -fache der Summe beider Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ beträgt.

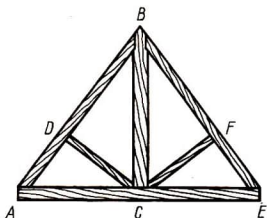


Abb. 15

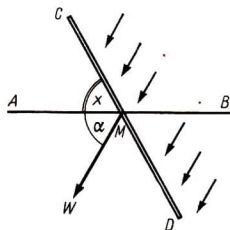


Abb. 16

57. Die Resultierende des Winddrucks auf ein Segel $\overline{CD}$ wird durch den Vektor $\overrightarrow{MW}$ gegeben. Dieser Vektor bilde mit der Kiellinie des Bootes $\overline{AB}$ den Winkel α (Abb. 16).

Es ist zu untersuchen, bei welcher Größe des Winkels zwischen der Segelstellung und der Kiellinie des Bootes die größte Geschwindigkeit erreicht wird.

58. Der Grundfläche eines Zylinders sei ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben und diesem wiederum ein Kreis. Nunmehr soll in den Zylinder parallel zur Achse ein Loch gebohrt werden, dessen Durchmesser gleich dem Durchmesser des einbeschriebenen Kreises ist.

Es ist zu beweisen, daß die beim Bohren dieser Öffnung entstehenden Abfälle nicht mehr als 25% der ursprünglichen Masse des Körpers betragen.

59. Es seien n Widerstände vorhanden, die eine arithmetische Folge mit folgenden Werten bilden:

$$(n+1)\Omega, (n+2)\Omega, \dots, (2n-1)\Omega, 2n\Omega.$$

Es ist zu zeigen, daß der Gesamtwiderstand bei Parallelschaltung kleiner als 2Ω sein wird.

60. Eine geknickte Röhre verbindet zwei Ballone, die mit Gasen von unterschiedlichem Druck gefüllt sind. Die Gase sind aber durch eine unbekannte Menge Quecksilber, die sich im Knie DCE der Röhre befindet, getrennt (Abb. 17).

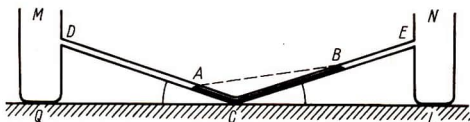


Abb. 17

Die Punkte D , C und E sollen in einer Ebene liegen, und die Winkel DCQ und ECL , die von den Röhren und der horizontalen Verbindungsstrecke QL gebildet werden, sollen gleich sein. Es wird ferner angenommen, daß das Volumen des Quecksilbers unbekannt ist. (Dazu braucht die Röhre lediglich in einem Raum untergebracht zu werden, dessen Temperatur unbekannt ist.)

Es ist zu zeigen, daß der Abstand $\overline{AB}$ zwischen den beiden Niveaupunkten des Quecksilbers dann den kleinsten Wert annimmt, wenn der Druck in beiden Ballonen gleich ist.

61. Ein Generator, der einen Strom I liefert, habe einen inneren Widerstand der Größe R_i .

Es ist zu untersuchen, bei welchem Verhältnis zwischen dem Widerstand des äußeren Kreises und dem inneren Widerstand des Generators die Leistungsaufnahme des äußeren Kreises einen maximalen Wert erreicht.

62. In einem Neulandgebiet befinden sich im Punkt A Stapelplätze und Speicher (Abb. 18). Die Entfernung h (in km) von der nächsten Eisenbahnlinie ist bekannt. Die Entfernung von der nächstgelegenen Station B auf dieser Eisenbahnlinie zum Fußpunkt des Lotes vom Stapelplatz auf die Bahn C ist gleichfalls bekannt. Sie sei d (in km). Die Strecke $\overline{BC}$ sei

geradlinig. Auf dieser Strecke ist ein Punkt D zu bestimmen, von dem aus eine geradlinige Schmalspur-Nebenbahn zum Stapelplatz geführt werden soll.

In welcher Entfernung vom Punkt C muß sich der Punkt D befinden, damit die Durchfahrt durch die Trasse $\overline{BD} + \overline{DA}$ mit minimalem Zeit-
aufwand erfolgen kann, wenn auf der Hauptstrecke eine Durchschnitts-
geschwindigkeit v (in $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) und auf der Nebenstrecke eine mittlere
Geschwindigkeit v_1 (in $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) gefahren werden kann ($v_1 < v$)?

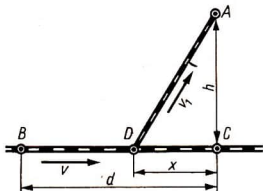


Abb. 18

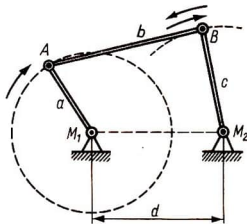


Abb. 19

63. In der Abbildung 19 ist schematisch ein ebener viergliedriger Gelenkmechanismus dargestellt¹, in dem sich die Scharniere A und B bewegen und die Gelenkpunkte M_1 und M_2 starr sind. Dadurch ist auch die Strecke $\overline{M_1M_2}$ starr, während die übrigen drei Gelenkstrecken $\overline{M_1A}$, $\overline{AB}$ und $\overline{BM_2}$ teils gedreht, teils dazu noch verschoben werden können (Vergleiche auch Aufgabe 24).

Es sind die Bedingungen dafür aufzustellen, daß sich ein Glied des Gestänges (beispielsweise das Glied $\overline{M_1A}$), das einseitig in M_1 gelagert ist, frei drehen kann, d. h. die Bewegung einer Kurbel ausführen kann.

64. Ein Zuschauer sitzt in dem Abstand a (in m) von der Filmleinwand entfernt. Die Leinwand hat die Höhe l (in m), gerechnet von der unteren zur oberen Kante.

Welche Entfernung muß der untere Rand der Leinwand vom Auge des Zuschauers haben, damit er den Film unter dem größten Blickwinkel sieht?²

¹ Viergliedrige Mechanismen haben in zahlreichen Modifikationen einen breiten Anwendungsbereich. Eine der bekanntesten Varianten dieser Mechanismen findet man im Kurbeltriebgestänge der Dampfmaschine.

² Hierbei ist der Gesichtswinkel auf die vertikale Fläche bezogen.

Anmerkung: Je größer der Gesichtswinkel ist, unter dem ein Gegenstand betrachtet werden kann, um so deutlicher ist der Gegenstand zu erkennen.

65. Auf einer optischen Bank ist ein Schirm in der Entfernung l von der punktförmigen Lichtquelle so anzubringen, daß eine Sammellinse auf dem Schirm das Bild eines Punktes erzeugt.
Es ist für diese Versuchsanordnung die größtmögliche Brennweite der Linse und ihre Entfernung von der Lichtquelle zu bestimmen.
66. Die Stromstärke I wird auf zwei parallel geschaltete Leiter gelegt, deren Widerstände R_1 und R_2 sind.
Es ist zu zeigen, daß durch die Verzweigung eine bestimmte, minimale Wärmemenge Q frei wird. Die Verzweigung muß nach der Proportion $I_1:I_2 = R_2:R_1$ erfolgen, wobei mit I_1 bzw. I_2 die Stromstärken in den Leitern bezeichnet werden. (Die Proportion ermittelt man physikalisch aus den KIRCHHOFFSchen Gesetzen.)
67. Zwei Laternen werden mit Glühlampen gleicher Lichtstärke, nämlich I Candela, ausgestattet. Es ist der Punkt auf der Verbindungsgeraden beider Laternen zu finden, der am geringsten beleuchtet wird, wenn zwischen den beiden Lampen ein Abstand l (in m) besteht.
68. Beim Wohnungsbau, aber auch im Industriebau von Werken und Fabriken sind quadratische Fenster sehr verbreitet.
Das Projekt eines solchen Baues sieht n solcher Fenster mit einer Gesamtfläche A (in m^2) vor. Es sind die höchstmöglichen Kosten für die (hölzernen) Rahmen dieser n Fenster zu bestimmen, wenn der laufende Meter für Fensterrahmen d (in MDN) kostet.
69. Es ist zu zeigen, daß der Gesamtwiderstand bei Reihenschaltung von n Leitern den Widerstand bei Parallelschaltung in denselben n Leitern um nicht weniger als n^2 übersteigt.
70. Am Punkt A eines einarmigen Hebels, der vom Drehpunkt des Hebels den Abstand d (in cm), greift eine Kraft F_1 (in kp) an. Vom Eigengewicht des Hebels entfällt das Gewicht R (in kp) auf jeden Zentimeter seiner Länge.
Welche Länge muß der Hebel haben, damit eine Kraft F_2 (in kp), die am anderen Ende des Hebels angreift, das Hebelsystem mit der Kraft F_1 und dem Eigengewicht R im Gleichgewicht hält?
71. Eine städtische Anlage wird symmetrisch zu einer geradlinig angenommenen Chaussee geplant. Die Gesamtfläche betrage A (in m^2). Jede

Teilfläche soll die Grundform eines Rechteckes haben, das an den Seitenkanten durch angefügte Halbkreise abgeschlossen wird (Abb. 20). Die Gesamtfläche soll eine Umzäunung erhalten.

Welche Länge und welche Breite müssen die rechteckigen Teile dieser Anlage erhalten, damit die Umzäunung der Gesamtanlage eine minimale Länge erhält?

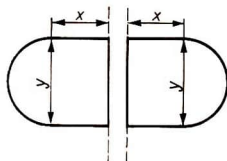


Abb. 20

72. Die elektromotorische Kraft eines Akkumulators sei gleich E und sein innerer Widerstand gleich R_i . Es wurden N solcher Akkumulatoren in n gleiche Gruppen eingeteilt. (N ist also ein Vielfaches von n .)

Die Akkumulatoren einer Gruppe werden in Reihe geschaltet und für alle Gruppen erfolgt eine Kopplung durch Parallelschaltung. Die so erhaltene „gemischte Batterie“ ist mit einem Widerstand R_a belastet. Bei welcher Größe von n wird der Strom durch R_a maximal?

73. Durch nachlässigen Transport von Papierrollen bilden sich auf der Oberfläche Risse, die zu Abfällen führen.

Diese Abfälle sind offensichtlich um so kleiner, je kleiner die Gesamtoberfläche der Rolle in Abhängigkeit vom Umfang ist.

Es ist zu untersuchen, bei welchem Verhältnis zwischen Durchmesser und Höhe der Rolle der Abfall des Papiers am kleinsten sein wird. (Die Tiefe der Risse soll immer gleich sein.)

74. Ein Fenster habe die Form eines Rechtecks. Wie groß müssen Länge und Breite des Fensters gewählt werden, damit es bei vorgegebenem Umfang von $2p$ die größtmögliche Menge Licht durchläßt?

75. Aus einem runden Balken mit dem Gesamtdurchmesser d ist ein Balken mit rechteckigem Querschnitt zu schneiden. Es sind die Maße der Schnitte so zu bestimmen, daß der Abfall ein Minimum wird.

76. Eine Stange mit der Länge l (in m) soll in drei Teile geteilt werden. Diese Teile sollen rechtwinklig so verbunden werden, daß sie das Gerüst für eine Laubhütte in der Form einer dreiseitigen Pyramide bilden.

Welche Länge muß jedes Teilstück haben, damit die Hütte möglichst groß wird?

77. In chemischen Laboratorien werden häufig kegelförmige Filter aus Filtrierpapier verwendet.

Dazu wird der Kreissektor mit dem Bogen b_2 so gefaltet (Abb. 21), daß der restliche Sektor mit dem Bogen b_1 zum Mantel des Kegels wird. Bei welcher Größe des Winkels AMB hat das kegelförmige Filter, das aus einer Scheibe mit dem Radius r erhalten wird, das größte Volumen?

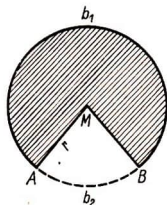


Abb. 21

78. In welcher Höhe muß man eine Laterne der Lichtstärke I über dem Zentrum einer quadratischen Fläche mit der Seitenlänge a (in m) anbringen, damit im Mittelpunkt jeder Seitenkante dieser Flächen die Beleuchtungsstärke einen maximalen Wert erreicht?

79. Die Tragkraft eines rechtwinkligen Balkens ist seiner Breite a und dem Quadrat seiner Höhe h proportional.

Wie sind die Maße des Querschnittes festzulegen, damit ein Balken, der aus einem kreisförmigen Holzstamm mit dem Durchmesser d geschnitten werden kann, eine maximale Tragkraft erhält?

80. Eine zylindrische Zisterne mit Deckel soll aus Eisenblech, von dem insgesamt eine Fläche mit dem Inhalt A (in m^2) zur Verfügung steht, so hergestellt werden, daß sie ein maximales Volumen erhält. (Der Abfall durch die Rundsnitte werde nicht mit berechnet.) Mit welcher Länge sind der Radius und die Höhe der Zisterne festzulegen?

81. Aus drei gleichen Brettern mit einer Höhe von a (in cm) soll eine Abflußrinne angefertigt werden. Die Rinne soll einen trapezförmigen Querschnitt $ABCD$ haben, bei dem dann gilt $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = a$ (Abb. 22). Bei welcher Größe des Winkels BAD nimmt die Fläche des Querschnitts dieser Rinne einen maximalen Wert an?

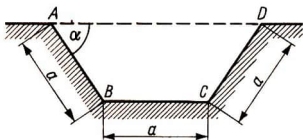


Abb. 22

ANTWORTEN UND LÖSUNGEN

1. Die Aufgabe führt auf die Ungleichung

$$\frac{q(100+p)}{100} + nx < q + (s-x)n.$$

Dabei wurde die Entfernung von B zum gesuchten Punkt mit x km angenommen. Ferner ist aus der Aufgabenstellung heraus noch zu berücksichtigen, daß Lösungen nur sinnvoll sind, wenn auch gilt $0 \leq x$. Hieraus ergibt sich

$$0 \leq x < \frac{100ns - pq}{200n},$$

wobei x und die beiden Schranken in Kilometern angegeben werden.

2. Die Aufgabe führt auf die Ungleichung

$$rx - (dx + s) \geq p,$$

wobei x die Produktionsmenge für ein Jahr ist. Nach dem Auflösen dieser Ungleichung ergibt sich:

$$\frac{p+s}{r-d} \leq x.$$

Dabei hat die Aufgabe offensichtlich nur dann einen Sinn, wenn $d < r$ ist.

3. Wenn man mit x g die Menge Spiritus bezeichnet, die der Jodlösung beigegeben wird, so führt die Aufgabe auf die Ungleichung

$$0,01 p_1 \leq \frac{0,01 pm}{m+x}.$$

Daraus folgt:

$$x \leq \frac{m(p-p_1)}{p_1}.$$

4. Die Aufgabe führt auf die Ungleichung

$$p \leq \frac{100-f}{100} x - 0,1 h.$$

Dabei wurde der gesuchte Druck, den das Wasser von der Pumpstation erhält, mit $x \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2}$ angenommen. Löst man diese Ungleichung auf, so erhält man

$$\frac{100p + 10h}{100 - f} \leq x.$$

5. Die Aufgabe führt auf die Ungleichung

$$0,2 V_1 x + m \leq V_1 x + (1 - 0,01f) V,$$

wobei x die gesuchte Anzahl von Korkplatten ist. Die Lösung dieser Ungleichung führt auf

$$\frac{100m - (100 - f) V}{80 V_1} \leq x.$$

6. Die Bedingungen der Aufgabe werden von folgender Ungleichung erfüllt:

$$\frac{s}{v + v_1} + \frac{s}{v - v_1} \leq t.$$

Dabei wurde mit s (in km) die gesuchte Entfernung von der Anlegestelle zum Strand angenommen.

Wird die Ungleichung nach s aufgelöst, so ergibt sich:

$$s \leq \frac{t(v^2 - v_1^2)}{2v}.$$

7. Der Blitzableiter muß so auf das Dach montiert werden, daß er von jedem Eckpunkt des Grundrisses die gleiche Entfernung hat. Offensichtlich ist der Grundriß des in der Aufgabe betrachteten Satteldaches ein Rechteck. Dann muß der Blitzableiter im Schnittpunkt der beiden Diagonalen dieses Rechtecks angebracht werden.

Wird die gesuchte Höhe des Blitzableiters mit h (in m) bezeichnet und wird berücksichtigt, daß sich die halbe Länge der Diagonalen eines Rechtecks aus den Rechteckseiten nach der Formel

$$\frac{1}{2} d = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$$

berechnen läßt, so erhält man entsprechend den Bedingungen der Aufgabe die Ungleichung

$$\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \leq 2h$$

und daraus

$$\frac{1}{4} \sqrt{a^2 + b^2} \leq h.$$

8. Der gesuchte Radius werde mit r_2 (in mm) bezeichnet. Die Geschwindigkeit beliebiger Punkte auf dem Mantel der treibenden Walze A ist gleich $v_1 = n_1 \pi r_1$. Die Geschwindigkeit beliebiger Punkte auf dem Mantel der getriebenen Walze B ist dann $v_2 = n_2 \pi x$. Da sich die Walzen drehen, ohne zu gleiten, gilt $v_1 = v_2$ oder nach Division durch π :

$$n_2 x = n_1 r_1.$$

Aus dieser Gleichung folgt, wenn $n \leq n_2$ sein soll:

$$n x \leq n_1 r_1.$$

Wird diese Ungleichung aufgelöst und die zusätzliche physikalische Bedingung $0 < x$ berücksichtigt, so ergibt sich:

$$0 < x \leq \frac{n_1 r_1}{n}.$$

Zahlenbeispiel:

Gegeben sei: $r_1 = 100$ mm; $n_1 = 5$ Umdrehungen je Sekunde; $n_2 = 8$ Umdrehungen je Sekunde.

Dann ist

$$0 \text{ mm} < x \leq \frac{5 \cdot 100}{8} \text{ mm}$$

oder

$$0 \text{ mm} < x \leq 62,5 \text{ mm}.$$

9. Die Aufgabe führt auf ein System von zwei Ungleichungen:

$$\frac{6,5 \text{ m}}{0,85 \text{ m} \cdot 0,75} \cdot 750 \text{ m} \cdot 2 \geq 5 \text{ h} \cdot x \frac{\text{m}}{\text{h}}$$

$$\frac{6,5 \text{ m}}{0,85 \text{ m} \cdot 0,75} \cdot 750 \text{ m} \cdot 2 \leq 6 \text{ h} \cdot x \frac{\text{m}}{\text{h}}.$$

Dabei wurde die gesuchte Geschwindigkeit mit $x \text{ m} \cdot \text{h}^{-1}$ angenommen. Wird dieses System aufgelöst und in $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ umgerechnet, so ergibt sich:

$$2,5 \frac{\text{km}}{\text{h}} \leq x \frac{\text{km}}{\text{h}} \leq 3 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

10. Die beladene Lore entwickelt beim Hinabrollen vom Bremsberg infolge ihrer Masse die Zugkraft $F_1 = F_G (\sin \varphi - \mu \cos \varphi)$, gemessen in Mp. Dabei ist φ dem gesuchten Neigungswinkel gleich. Die Kraft jedoch, die für das gleichförmige Heraufziehen von n leeren Loren benötigt wird,

ist $F_2 = n \cdot f_G (\sin \varphi + \mu \cos \varphi)$, gemessen in Mp. Hieraus ergibt sich entsprechend der Aufgabe folgende Ungleichung:

$$nf_G (\sin \varphi + \mu \cos \varphi) \leq F_G (\sin \varphi - \mu \cos \varphi).$$

Löst man diese Ungleichung auf, so erhält man

$$\arctan \frac{\mu (F_G + nf_G)}{F_G + nf_G} \leq \varphi < 90^\circ.$$

Aus der letzten Ungleichung ist auch ersichtlich, daß die gestellte Aufgabe nur dann gelöst werden kann, wenn gilt:

$$nf_G < F_G.$$

Zahlenbeispiel:

Gegeben sei: $F_G = 2,5$ Mp; $f_G = 0,4$ Mp; $\mu = 0,02$. Damit eine beladene Lore bei ihrer Abwärtsbewegung mindestens fünf leere Lore nach oben bewegt, muß der Neigungswinkel φ zwischen folgenden Grenzen liegen:

$$\arctan \frac{0,02 (2,5 + 5 \cdot 0,4)}{2,5 - 5 \cdot 0,4} \approx \arctan 0,18 \leq \varphi < 90^\circ$$

d. h.

$$10^\circ 18' \leq \varphi < 90^\circ.$$

11. Aus den Bedingungen der Aufgabe ergibt sich folgende Ungleichung:

$$(1) \quad A \leq x \cdot \frac{60 \cdot 75 \text{ kp} \cdot \text{m}}{\text{s}} \cdot 200 \cdot 3600 \text{ s.}$$

Dabei ist x die gesuchte Anzahl der Traktoren und A die gesamte Arbeit (in $\text{kp} \cdot \text{m}$) für das Pflügen von 5000 ha Bodenfläche. Zur Ermittlung von A berechnet man zunächst die erforderliche Arbeit für einen Hektar unter den Bedingungen der Aufgabe: $5000 \cdot 2 \cdot 0,35 \cdot 12000 \text{ kp} \cdot \text{m} = 35 \cdot 12 \cdot 10^5 \text{ kp} \cdot \text{m}$. Hieraus folgt für die gesamte Fläche:

$$(2) \quad A \leq 5000 \cdot 35 \cdot 12 \cdot 10^5 \text{ kp} \cdot \text{m} = 6 \cdot 35 \cdot 10^9 \text{ kp} \cdot \text{m}.$$

Damit ergibt sich:

$$6 \cdot 35 \cdot 10^9 \text{ kp} \cdot \text{m} \leq 6 \cdot 75 \cdot 72 \cdot 10^5 \text{ kp} \cdot \text{m} \cdot x$$

oder $65 \leq x$.

12. Offensichtlich ist zu Beginn der Fahrt nach oben die Spannung im Seil größer als zu Beginn der Fahrt nach unten. Zu Beginn der Fahrt nach oben soll die Belastung des Seiles gleich F sein. Damit ergibt sich aus den Bedingungen der Aufgabe die Ungleichung:

$$\frac{F}{x} < \frac{\sigma}{n},$$

wobei x der gesuchte Querschnitt des Seiles in cm^2 sein soll. Es ist

$$F = (m \cdot g + m \cdot a),$$

dann ergibt sich

$$\frac{(m \cdot g + m \cdot a)}{x} < \frac{\sigma}{n}$$

und hieraus

$$\frac{m \cdot g \left(1 + \frac{a}{g}\right) n}{\sigma} < x.$$

13. Der erforderliche und auch ausreichende Kraftaufwand ergibt sich als algebraische Summe aus der Kraft F_a , die der Beschleunigung a proportional ist, und der der Bewegung entgegengesetzt gerichteten Kraft F_μ :

$$(1) \quad F = F_a + F_\mu, \text{ wobei } F_a = m \cdot a$$

$$F_\mu = \mu \cdot F_m$$

$$F_m = m \cdot g.$$

Die Beschleunigung a ergibt sich aus der Geschwindigkeitsänderung

$$(2) \quad a = \frac{v_2 - v_1}{t}.$$

Unter Berücksichtigung dieser Bezeichnungen ist

$$(3) \quad F = \mu \cdot m \cdot g + m \frac{v_2 - v_1}{t} \leq 40 \text{ kp}.$$

Durch Umformen erhält man aus der Ungleichung für $\mu > 0$:

$$(4) \quad 0 < \mu \leq \frac{40 \text{ kp} - m \frac{v_2 - v_1}{t}}{m \cdot g}.$$

Mit den Zahlenwerten der Aufgabe ist dann

$$\begin{aligned} 0 < \mu &\leq \frac{40 \text{ kp} - 100 \text{ kg} \frac{1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} - 0}{0,5 \text{ s}}}{100 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = \\ &= \frac{40 \text{ kp} - 100 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{100 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} \approx \frac{40 \text{ kp} - 20 \text{ kp}}{100 \text{ kp}}. \end{aligned}$$

(Wegen $1 \text{ kp} \approx 9,81 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, ist $200 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \approx 20 \text{ kp}$);

$$0 < \mu \leq 0,2.$$

14. Diese Aufgabe führt auf folgendes System von Ungleichungen:

$$1400 \text{ m} < 1900 \text{ m} - 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot x;$$

$$1580 \text{ m} - 4,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot x < 1400 \text{ m};$$

$$(1900 \text{ m} - 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot x) - 1400 \text{ m} < 1400 \text{ m} - (1580 \text{ m} - 4,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot x).$$

Hierbei ist x die gesuchte Zeit, die seit dem Absprung der Fallschirmspringer A und B vergangen ist (Abb. 23). Die Lösung dieses Systems ergibt dann

$$80 \text{ s} < x < 125 \text{ s}.$$

15. Der Flugkörper befindet sich zum gegebenen Zeitpunkt in der Entfernung x vom Mittelpunkt der Erde und in der Entfernung $s - x$ vom Mittelpunkt des Mondes. Nach dem Gravitationsgesetz wird der Flugkörper mit der Kraft

$$F_E = \frac{M m_1}{x^2} f$$

von der Erde und mit

$$F_M = \frac{m m_1}{(s - x)^2} f$$

vom Mond angezogen, wobei f die Gravitationskonstante und m_1 die Masse des Flugkörpers ist. Offensichtlich werden alle Werte, für die eine Fortbewegung ausschließlich unter Einwirkung der Schwerkraft des Mondes erfolgt, durch die Ungleichung

$$(1) \quad \frac{M m_1}{x^2} f < \frac{m m_1}{(s - x)^2} f$$

bestimmt. Sie bringt eindeutig zum Ausdruck, daß die Anziehungskraft des Mondes größer sein muß als die der Erde.

Werden beide Seiten der Ungleichung (1) mit dem positiven Faktor $\frac{1}{m m_1 f}$ multipliziert (denn es gilt $0 < m m_1 f$), so ergibt sich:

$$(2) \quad \frac{M}{m x^2} < \frac{1}{(s - x)^2}.$$

Es gilt ferner $0 < s - x$, denn nach den Bedingungen soll sich die Rakete zwischen der Erde und dem Mond befinden. Dann gilt aber $x < s$ und damit $0 < s - x$. Ferner ist $0 < M$, $0 < m$ und $0 < x^2$.

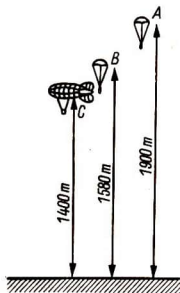


Abb. 23

Damit läßt sich die Ungleichung (2) durch Radizieren weiter vereinfachen, und es ergibt sich:

$$(3) \quad \frac{1}{x} \sqrt{\frac{M}{m}} < \frac{1}{s-x},$$

woraus folgt

$$(4) \quad \frac{s}{1 + \sqrt{\frac{m}{M}}} < x < s.$$

Berücksichtigt man schließlich die aus der Astronomie bekannte Relation

$$\frac{m}{M} \approx \frac{1}{81},$$

so ergibt sich

$$0,9 \cdot s < x < s.$$

16. Mit A werde ein Wasserteilchen mit der Masse m bezeichnet, das in die Steigleitung eintritt (Abb. 24). Die Geschwindigkeit v , die diesem Teilchen durch die Drehbewegung der Schaufeln der Pumpe verliehen wird, ist gleich der linearen Geschwindigkeit eines Endpunktes der Schaufeln, also

$$(1) \quad v = 2\pi r n,$$

wobei n die Drehzahl der Schaufeln in der Sekunde sein soll und v in $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ermittelt wird. Die Geschwindigkeit wirkt dabei in Richtung der Tangente im Punkt A des Kreises, der durch die Endpunkte der Schaufeln beschrieben wird. Der Anordnung entsprechend erfolgt die Bewegung also in der Richtung, die das Steigrohr hat. Aus Gleichung (1) läßt sich die kinetische Energie berechnen, die das Masseteilchen beim Eintritt in das Steigrohr hat. Sie ergibt sich zu

$$(2) \quad W_{\text{kin}} = \frac{m(2\pi r n)^2}{2}.$$

Das Wasserteilchen wird aber nur so lange steigen, bis seine gesamte kinetische Energie in potentielle Energie übergegangen ist. Die potentielle Energie ergibt sich gemäß

$$W_{\text{pot}} = mgh.^1$$

Soll nun erreicht werden, daß ein Wasserteilchen von der Pumpe mindestens um die

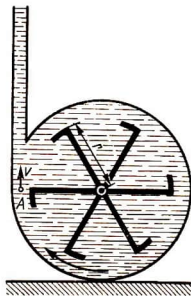


Abb. 24

¹ Hierbei soll der Energieverlust durch die Reibung nicht berücksichtigt werden.

Höhendifferenz h (in m) hochgehoben wird, so muß die Drehzahl, gemessen in Umdrehungen je Sekunde, folgender Ungleichung genügen:

$$(3) \quad \frac{m(2\pi r n)^2}{2} \leq m g h.$$

Durch Auflösen dieser Ungleichung nach n ergibt sich

$$(4) \quad \frac{\sqrt{2 g h}}{2 \pi r} \leq n.$$

17. Es enthalten Q kg ungedroschenes Korn $\frac{Qk}{100}$ kg Verunreinigungen und $\frac{Q(100-k)}{100}$ kg Getreide. Beim Dreschen bleibt die Gesamtmenge des Kornes unverändert. Es ändert sich jedoch der Anteil der Verunreinigungen. Dieser Anteil verringert sich.

Nach dem ersten Drusch möge sich die Menge der Beimengungen auf $\frac{Qk}{100} \cdot \frac{q}{100}$ kg verringern, also nur noch $\left(\frac{Qk}{100} - \frac{Qk}{100} \cdot \frac{q}{100}\right)$ kg ausmachen.

Umgerechnet ergibt das die Menge von $\frac{Qk}{100} \cdot \frac{100-q}{100}$ kg.

Der zweite Drusch reduziert die Menge der Verunreinigungen auf $\frac{100-q}{100}$ derjenigen Menge, die nach dem ersten Drusch noch vorhanden war. Das ergibt $\frac{Qk}{100} \cdot \left(\frac{100-q}{100}\right)^2$ kg.

Durch analoge Überlegungen kommt man zu dem Schluß, daß sich nach dem n -ten Drusch die Masse der Beimengungen auf $\frac{Qk}{100} \cdot \left(\frac{100-q}{100}\right)^n$ kg reduziert hat. Dann ist die Gesamtmasse, die nach dem n -ten Drusch vorhanden ist, gleich

$$\left[\frac{Qk}{100} \cdot \left(\frac{100-q}{100}\right)^n + \frac{Q(100-k)}{100} \right] \text{ kg.}$$

Hieraus läßt sich unter Berücksichtigung der Bedingungen in der Aufgabe folgende Ungleichung aufstellen:

$$(1) \quad \frac{\frac{Qk}{100} \cdot \left(\frac{100-q}{100}\right)^n}{\frac{Qk}{100} \cdot \left(\frac{100-q}{100}\right)^n + \frac{Q(100-k)}{100}} \leq \frac{f}{100}.$$

Diese Ungleichung läßt sich folgendermaßen vereinfachen:

$$(2) \quad \left(\frac{100-q}{100}\right)^n \leq \frac{f(100-k)}{k(100-f)}.$$

Aus (2) erhält man dann durch Logarithmieren

$$(3) \quad n \log \frac{100-q}{100} \leq \log \frac{f(100-k)}{k(100-f)}.$$

Berücksichtigt man dabei, daß $\frac{100-q}{100} < 1$ ist, folglich $\log \frac{100-q}{100} < 0$, so erhält man durch Division der Ungleichung (3) durch den negativen Wert $\log \frac{100-q}{100}$ die nachfolgend aufgeführte Ungleichung (4), bei der sich das Ungleichheitszeichen umgekehrt hat:

$$(4) \quad \frac{\log \frac{f(100-k)}{k(100-f)}}{\log \frac{100-q}{100}} \leq n.$$

18. Die Aufgabe führt auf das folgende System von Ungleichungen:

$$\begin{aligned} 20 \text{ kg} \cdot 15^\circ\text{C} \cdot 0,09 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} + 120 \text{ kg} \cdot 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} \cdot 15^\circ\text{C} + 80 \text{ kg} \cdot 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} \cdot x &\geq \\ &\geq 20 \text{ kg} \cdot 30^\circ\text{C} \cdot 0,09 \cdot \text{cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} + (120 \text{ kg} + x) \cdot 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} \cdot 30^\circ\text{C}, \\ 20 \text{ kg} \cdot 15^\circ\text{C} \cdot 0,09 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} + 120 \text{ kg} \cdot 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} \cdot 15^\circ\text{C} + 80 \text{ kg} \cdot 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} \cdot x &\leq \\ &\leq 20 \text{ kg} \cdot 40^\circ\text{C} \cdot 0,09 \cdot \text{cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} + (120 \text{ kg} + x) \cdot 1 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{grd}^{-1} \cdot 40^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$36,540 \text{ kg} \leq x \leq 76,125 \text{ kg}.$$

19. Wendet man hier die Formel für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit an, $v^2 = 2as$, so ergibt sich aus den Bedingungen der Aufgabe folgendes System von Ungleichungen:

$$(1) \quad \begin{aligned} 2as &\leq 5,5^2 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \\ 2as &\geq 4,5^2 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2. \end{aligned}$$

Dabei ist a die Beschleunigung der Waggonen (gemessen in $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$) beim Abrollen auf der Strecke $\overline{AB}$ (Abb. 25) und s die gesuchte Länge dieser Strecke (in m).

Die Beschleunigung errechnet man aus der Gleichung

$$(2) \quad a = g(\sin \alpha - k \cos \alpha).$$

Hierbei sind $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$,

$\alpha = \arcsin 0,04 \approx 2^\circ 18'$ und $k = 0,02$.

Man erhält dabei für a den Wert:

$$(3) \quad a \approx 0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Aus (1) und (3) ergibt sich schließlich

$$(4) \quad 51 \text{ m} \leq s \leq 77 \text{ m}.$$

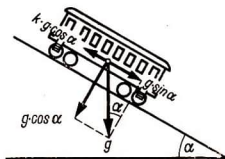


Abb. 25

20. Die gesuchte Entfernung $\overline{DK}$ werde mit x bezeichnet. Aus der Abbildung 4 ist ersichtlich, daß die Augen des Beobachters vor der Blendwirkung der

Lampe geschützt werden, wenn der Winkel DAC nicht kleiner ist als der Winkel BAC , d.h., wenn gilt:

$$(1) \quad \tan \sphericalangle BAC \leq \tan \sphericalangle DAC.$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken BAC und DAK erhält man

$$(2) \quad \tan \sphericalangle DAK = \frac{\overline{DK}}{\overline{AK}} = \frac{x}{r_2 + r_1}$$

bzw.

$$(3) \quad \tan \sphericalangle BAC = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{h}{r_2 + r_1 + l}.$$

Aus den Gleichungen (1) bis (3) ergeben sich die Ungleichungen

$$(4) \quad \frac{h}{r_2 + r_1 + l} \leq \frac{x}{r_2 + r_1}$$

bzw.

$$(5) \quad h \cdot \frac{r_2 + r_1}{r_2 + r_1 + l} \leq x.$$

Zahlenbeispiel:

Gegeben sei: $h = 1,00$ m; $r_2 = 0,25$ m, $r_1 = 0,01$ m und $l = 1,00$ m.

Dann wird

$$1 \cdot \frac{0,26}{1,26} \text{ m} \leq x \quad \text{oder} \quad 21 \text{ cm} \leq x = \overline{DK}.$$

21. Aus der bekannten physikalischen Formel

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

in der b die Bildweite und g die Gegenstandsweite sowie f die Brennweite des Hohlspiegels bedeuten, ergibt sich

$$(1) \quad \frac{b}{g} = \frac{f}{g-f}.$$

Aus der Physik ist auch bekannt, daß der Proportionalitätsfaktor zwischen der linearen Bild- und Gegenstandsgröße durch $\frac{b}{g}$ gegeben wird. Aus der Gleichung (1) ergibt sich unter Berücksichtigung der Bedingungen in der Aufgabe folgendes System von Ungleichungen:

$$(2) \quad \frac{f}{|g-f|} > 2$$

$$\frac{f}{|g-f|} < 3.$$

Hieraus ergeben sich zwei Fälle:

- a) Das Entstehen eines reellen Bildes: Wenn $f < g$ gilt, dann ist auch $0 < g - f$ und somit $|g - f| = g - f$. In diesem Fall erhält das System (2) die Form:

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{f}{g-f} &> 2 \\ \frac{f}{g-f} &< 3. \end{aligned}$$

Wird dieses System nach g aufgelöst, so ergibt sich:

$$1 \frac{1}{3} f < g < 1 \frac{1}{2} f.$$

- b) Das Entstehen eines virtuellen Bildes: Wenn $g < f$ gilt und somit $g - f < 0$, dann ist $|g - f| = f - g$. In diesem Fall wird das System (2) zu

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{f}{f-g} &> 2 \\ \frac{f}{f-g} &< 3. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich

$$\frac{1}{2} f < g < \frac{2}{3} f.$$

Anmerkung: Der Fall $g = f$ ist bei diesen Betrachtungen ausgelassen worden. In diesem Fall verläuft der reflektierte Strahl parallel zur optischen Achse und ergibt somit kein Bild.

22. Im Augenblick der Betrachtung möge der Rotor parallel zum Stator stehen. Wird nun orthogonal zur Drehachse des Variometers eine Ebene durch den Mittelpunkt des Stators gelegt, so ergeben sich im Schnitt zwei Rechtecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ (Abb. 26). In diesem Schnitt sei $\overline{BA}$ der innere Durchmesser des Stators, $\overline{A_1B_1}$ der äußere Durchmesser des Rotors und A_1D_1 die gesuchte Länge des Rotors. Die größte Annäherung zwischen Rotor und Stator erfolgt dann, wenn bei der Drehung die Diagonale des Rechteckes $A_1B_1C_1D_1$ (beispielsweise die Diagonale $\overline{B_1D_1}$) senkrecht zur Innenwand des Stators steht.

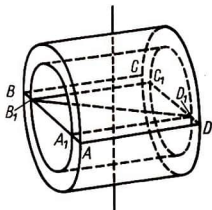


Abb. 26

Hieraus ergibt sich die Bedingung, daß sich der Rotor frei im Stator drehen kann, in Form folgender Ungleichung:

$$(1) \quad \overline{B_1 D_1} < \overline{AB}.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck $A_1 B_1 D_1$ ergibt sich

$$(2) \quad \overline{B_1 D_1} = \sqrt{(\overline{A_1 D_1})^2 + (\overline{A_1 B_1})^2}$$

und aus den beiden Formeln (1) und (2) folgt

$$(3) \quad \overline{A_1 D_1} < \sqrt{(\overline{AB})^2 - (\overline{A_1 B_1})^2}.$$

Setzt man hierin noch $\overline{AB}$ gleich D (gleich dem Durchmesser des Stators) und $\overline{A_1 B_1}$ gleich d (dem äußeren Durchmesser des Rotors), so ergibt sich schließlich

$$(4) \quad \overline{A_1 D_1} < \sqrt{D^2 - d^2}.$$

- 23.** Damit sich die Masse der Papierrolle um m_1 (in kg) verringert, muß sie bis zum Durchmesser d_1 (in cm) abgewickelt werden. Sollte sich die Masse um m_2 verringern, müßte die Rolle bis auf den Durchmesser d_2 abgewickelt werden. Der gesuchte Durchmesser werde mit d_x bezeichnet.

Aus $m_1 \leq m_x \leq m_2$,

folgt $d_2 \leq d_x \leq d_1$.

Für das Volumen der ganzen Papierrolle und des abgewickelten Papiers erhält man:

$$(2) \quad V = \frac{\pi b D^2}{4},$$

$$(3) \quad V_1 = \frac{\pi b (D^2 - d_1^2)}{4},$$

$$(4) \quad V_2 = \frac{\pi b (D^2 - d_2^2)}{4}.$$

Hierbei ist b die Breite der Rolle, V das Volumen der ganzen Rolle und V_1 sowie V_2 jeweils das Volumen des abgewickelten Papiers mit der Masse m_1 bzw. mit der Masse m_2 . Der Durchmesser der ganzen Rolle sei D .

Offensichtlich gilt $\frac{m_1}{m_2} = \frac{V_1}{V_2}$ und $\frac{m_2}{m} = \frac{V_2}{V}$. Dann folgt:

$$(5) \quad \frac{m_1}{m} = \frac{D^2 - d_1^2}{D^2},$$

$$(6) \quad \frac{m_2}{m} = \frac{D^2 - d_2^2}{D^2},$$

u. d. hieraus

$$(7) \quad d_1 = D \sqrt{\frac{m - m_1}{m}},$$

$$(8) \quad d_2 = D \sqrt{\frac{m - m_2}{m}}.$$

Aus den Formeln (7), (8) und (1) ergibt sich schließlich:

$$D \sqrt{\frac{m - m_2}{m}} \leq d_x \leq D \sqrt{\frac{m - m_1}{m}}.$$

24. Bei einer Umdrehung der Kurbel $\overline{M_1 A}$ bildet sie zweimal mit der Treibstange $\overline{AB}$ eine Gerade. Dabei deckt die Treibstange einmal die Kurbel (Abb. 5a), oder sie bildet deren Verlängerung (Abb. 5b).

Im ersten Fall wird der Winkel $BM_2 M_1$, der vom Hebel mit der Verbindungsgeraden $\overline{M_1 M_2}$ zwischen den beiden Lagern gebildet wird, zum Minimum, im zweiten Fall zum Maximum. Die maximale oder minimale Größe des Winkels $BM_2 M_1$ werde mit den Buchstaben α_1 bzw. α_2 bezeichnet. Dann ist offensichtlich der Winkel für die Schwingbewegung des Hebels durch den Wert $\alpha_1 - \alpha_2$ gegeben. Aus dem Dreieck $M_1 B M_2$ (siehe Abbildung 5a und 5b) erhält man unter Anwendung des Kosinussatzes:

$$(1) \quad \begin{aligned} (b + a)^2 &= c^2 + d^2 - 2cd \cos \alpha_1 \\ (b - a)^2 &= c^2 + d^2 - 2cd \cos \alpha_2 \end{aligned}$$

und hieraus

$$(2) \quad \alpha_1 - \alpha_2 = \arccos \frac{c^2 + d^2 - (b + a)^2}{2cd} - \arccos \frac{c^2 + d^2 - (b - a)^2}{2cd}.$$

Wie aus der Gleichung (2) ersichtlich wird, ist der Wert $\alpha_1 - \alpha_2$ für den Fall, daß b , c und d gleich sind, nur von a abhängig.

Für $b = 7$, $c = 5$ und $d = 6$ ergeben sich die Bedingungen für eine freie Drehung der Kurbel in folgender Form:

$$\begin{aligned} 7 - 5 &\leq 6 - a, \\ 6 + a &\leq 7 + 5. \end{aligned}$$

Da $0 < a$ gelten muß, ergibt sich

$$(3) \quad 0 < a \leq 4.$$

Aus der Formel (2) folgt dann für $b = 7$, $c = 5$, $d = 6$ und $0 < a \leq 4$:

$$\begin{aligned} &\arccos \frac{5^2 + 6^2 - (7 + 0)^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} - \arccos \frac{5^2 + 6^2 - (7 - 0)^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} < \alpha_1 - \alpha_2 \leq \\ &\leq \arccos \frac{5^2 + 6^2 - (7 + 4)^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} - \arccos \frac{5^2 + 6^2 - (7 - 4)^2}{2 \cdot 5 \cdot 6}, \end{aligned}$$

d.h., es muß gelten:

$$0 < \alpha_1 - \alpha_2 \leq 150^\circ.$$

Wählt man beispielsweise $a = 3,9$, dann ergibt sich:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \arccos \frac{25 + 36 - 10,9^2}{60} - \arccos \frac{25 + 36 - 3,1^2}{60} \approx 164^\circ 24' - 31^\circ;$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 133^\circ 18' < 150^\circ.$$

25. Die Formel für das Volumen eines Kugelabschnitts (Kugelsegments) lautet

$V = \pi H^2 \left(r - \frac{H}{3} \right)$, wobei H die Abschnittshöhe und r der Kugelradius ist. Unter Verwendung dieser Formel ergibt sich das Volumen der vom Schwimmer verdrängten Flüssigkeit, gemessen in cm^3 zwischen den Grenzen

$$(1) \quad \pi h_1^2 \left(r - \frac{h_1}{3} \right) \leq V_1 \leq \pi h_2^2 \left(r - \frac{h_2}{3} \right).$$

Ferner findet man mit Hilfe des Satzes von PYTHAGORAS

$$\left(2r - \frac{h}{2} \right) \frac{h}{2} = \left(\frac{d}{2} \right)^2,$$

$$(2) \quad r = \frac{d^2 + h^2}{4h}.$$

Setzt man (2) in (1) ein, so erhält man:

$$(3) \quad \pi h_1^2 \left(\frac{d^2 + h^2}{4h} - \frac{h_1}{3} \right) \leq V_1 \leq \pi h_2^2 \left(\frac{d^2 + h^2}{4h} - \frac{h_2}{3} \right).$$

Für den Auftrieb, der auf den eintauchenden Körper wirkt, ist die Dichte der tragenden Flüssigkeit bestimmend. Beim Eintauchen wirken auf die verdrängte Wassermenge und auf den eintauchenden Körper entgegengesetzt gerichtete Kräfte, deren Größen dann dem Betrage nach gleich sind, wenn der Körper schwimmt. Für unsere weiteren Berechnungen können wir uns damit auf den Vergleich der Massen beschränken und von den Kräften (Auftrieb und Schwerkraft) absehen.

Die Masse der verdrängten Flüssigkeit erhält man in dem Produkt aus Volumen und Dichte.

Setzt man voraus, daß die Dichte des hierbei verwendeten Erdöls $\varrho_E = 0,76 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ ist, so liegt die Masse m_1 des vom Schwimmer verdrängten Erdöls in folgendem Intervall:

$$(4) \quad \varrho_E \pi h_1^2 \left(\frac{d^2 + h^2}{4h} - \frac{h_1}{3} \right) \leq m_1 \leq \varrho_E \pi h_2^2 \left(\frac{d^2 + h^2}{4h} - \frac{h_2}{3} \right).$$

Dabei ist $m_1 = V_1 \cdot \varrho_E$.

Die Masse m_2 des Schwimmers erhält man in dem Produkt aus Volumen und Dichte des Schwimmkörpers. Die Dichte ist dabei die gesuchte Größe, das Volumen V_2 kann ermittelt werden (Abb. 7):

$$(5) \quad V_2 = 2 \left[\pi \left(\frac{h}{2} \right)^2 \left(\frac{d^2 + h^2}{4h} - \frac{h}{6} \right) - \pi \left(\frac{h}{2} - s \right)^2 \left(\frac{d^2 + h^2}{4h} - \frac{\frac{h}{2} - s}{3} \right) \right].$$

Nach Vereinfachung ergibt sich:

$$(6) \quad V_2 = \frac{\pi s}{24h} (6hd^2 - 3d^2s + 12h^3 - 21h^2s + 10hs^2).$$

Bezeichnet man die zu bestimmende Dichte mit ϱ_x , so erhält man für die Masse des Schwimmkörpers $m_2 = V_2 \cdot \varrho_x$, also:

$$(7) \quad m_2 = \frac{\pi s}{24h} (6hd^2 - 3d^2s + 12h^3 - 21h^2s + 10hs^2) \varrho_x.$$

Die gesamte Masse m des Schwimmers mit Stange und Kontaktplatte (Abb. 6), gemessen in Gramm, ergibt sich aus $m = m_2 + m_3$, d.h.

$$(8) \quad m = \frac{\pi s}{24h} (6hd^2 - 3d^2s + 12h^3 - 21h^2s + 10hs^2) \varrho_x + m_3.$$

Die gesamte Masse des Schwimmers m kann nun mit der Masse der verdrängten Flüssigkeitsmenge m_1 gleichgesetzt werden, also

$$(9) \quad \frac{\pi s}{24h} (6hd^2 - 3d^2s + 12h^3 - 21h^2s + 10hs^2) \varrho_x + m_3 = m_1.$$

Aus den Gleichungen (4) und (9) ergibt sich nunmehr:

$$\begin{aligned} & \frac{(0,76 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \pi h_1^2 \left(\frac{d^2 + h^2}{4h} - \frac{h_1}{3} \right) - m_3) 24h}{\pi s (6hd^2 - 3d^2s + 12h^3 - 21h^2s + 10hs^2)} \leq \varrho_x \leq \\ & \leq \frac{(0,76 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \pi h_2^2 \left(\frac{d^2 + h^2}{4h} - \frac{h_2}{3} \right) - m_3) 24h}{\pi s (6hd^2 - 3d^2s + 12h^3 - 21h^2s + 10hs^2)}. \end{aligned}$$

Für $h_1 = 3 \text{ cm}$, $h_2 = 4 \text{ cm}$, $d = 20 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$, $s = 0,2 \text{ cm}$ und $m_3 = 147 \text{ g}$ ergibt sich

$$3,4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \leq \varrho_x \leq 9,4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

26. Zur Lösung der Aufgabe werden folgende Festlegungen getroffen: a sei die Breite der Wand $ABCD$, $\overline{KD} = x$ die gesuchte Entfernung der Geraden $\overline{KL}$ vom oberen Rand der Wand $\overline{DC}$, p_1 sei der Druck der Flüssigkeit auf die ganze Wand $ABCD$, p_2 der Druck auf den oberen Teil $DKLC$ (Abb. 27). Nach den Bedingungen der Aufgabe ergibt sich folgende Ungleichung:

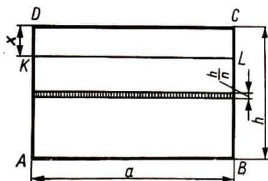


Abb. 27

$$(1) \quad p_2 \leq \frac{p_1}{k}.$$

Die gesamte Wand wird in n gleiche horizontale Streifen mit der Fläche $A = a \frac{h}{n}$ zerlegt. Der Abstand der jeweils untersten Kante dieser Streifen vom oberen Rand $\overline{DC}$ der Fläche bildet eine arithmetische Folge:

$$\frac{h}{n}, \frac{2h}{n}, \frac{3h}{n}, \dots, \frac{kh}{n}, \dots, \frac{(n-1)h}{n}, h.$$

Wird angenommen, daß der Druck der Flüssigkeit in ein und demselben Streifen einen konstanten Wert besitzt¹, so ergibt sich die gesamte Druckkraft auf die Fläche ebenfalls aus den Werten einer arithmetischen Folge:

$$\frac{ah}{n} \cdot \frac{h}{n} \varrho \cdot g, \frac{ah}{n} \cdot \frac{2h}{n} \varrho \cdot g, \frac{ah}{n} \cdot \frac{3h}{n} \varrho \cdot g, \dots, \frac{ah}{n} \cdot \frac{kh}{n} \varrho \cdot g, \dots, \frac{ah}{n} h \varrho \cdot g$$

bzw.

$$\frac{a h^2 \varrho \cdot g}{n^2}, 2 \frac{a h^2 \varrho \cdot g}{n^2}, 3 \frac{a h^2 \varrho \cdot g}{n^2}, \dots, k \frac{a h^2 \varrho \cdot g}{n^2}, \dots, n \frac{a h^2 \varrho \cdot g}{n^2}.$$

Die Summe dieser Folge ergibt sich dann zu

$$p_1 \approx \frac{a h^2 \varrho \cdot g}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + k + \dots + n) = \frac{a h^2 \varrho \cdot g}{n^2} \frac{n(n+1)}{2},$$

$$p_1 = \frac{a h^2 \varrho \cdot g}{2} \frac{n(n+1)}{n^2},$$

$$(2) \quad p_1 \approx \frac{a h^2 \varrho \cdot g}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Diese Näherungsformel ist um so genauer, je größer n ist. Der exakte Wert ergibt sich demnach als Grenzwert:

$$(3) \quad p_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a h^2 \varrho \cdot g}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{a h^2 \varrho \cdot g}{2}.$$

¹ Diese Annahme ist zulässig, denn der sich dabei ergebende Fehler hängt von der Anzahl der Streifen, also von deren Dicke ab. Er kann durch eine hinreichend feine Unterteilung, also durch Wahl eines hinreichend großen n , beliebig klein gemacht werden.

Durch analoge Überlegungen ergibt sich auch

$$(4) \quad p_2 = \frac{a x^2 \varrho \cdot g}{2}.$$

Aus den Formeln (1), (3) und (4) folgt schließlich

$$\frac{a x^2 \varrho \cdot g}{2} \leq \frac{a h^2 \varrho \cdot g}{2 k}$$

und hieraus, wenn noch berücksichtigt wird, daß gelten muß $0 < x$,

$$(5) \quad 0 < x \leq \frac{h}{\sqrt{k}},$$

27. Wird entsprechend der Formel $R = \varrho \frac{l}{q}$ angenommen, daß der Widerstand der Länge der Leitung vom Hauptstrang zur Station direkt und dem Querschnitt der Leitung indirekt proportional ist, so ergibt sich zum Beispiel für die Länge $2l$ (in m) der Widerstand:

$$(1) \quad R_1 = \varrho \frac{2l}{q}.$$

Wird die Stromstärke in dieser Leitung mit I bezeichnet, so erhält man nach dem OHMSchen Gesetz unter Berücksichtigung der Bedingungen in dem Beispiel folgende Ungleichung:

$$(2) \quad \varrho \frac{2l}{q} I \leq U_1.$$

Die gesamte Leistungsaufnahme aller Elektromotoren beträgt $10P$ (in kW) bei einer Spannung U (in V). Nach der Formel $\frac{U^2}{R} = P$, in der U die Spannung, R der Widerstand und N die Leistung sind, erhält man für den Gesamtwiderstand aller Elektromotoren:

$$(3) \quad R_2 = \frac{U^2}{10P}.$$

Der Gesamtwiderstand ist dann gleich $R_1 + R_2$, das sind

$$\varrho \frac{2l}{q} + \frac{U}{10P}.$$

Damit ergibt sich die Gesamtstromstärke zu

$$(4) \quad I = \frac{U}{\varrho \frac{2l}{q} + \frac{U}{10P}}.$$

Aus den Gleichungen (2) und (4) ergibt sich damit

$$(5) \quad \frac{2 \cdot 10l \varrho P (U - U_1)}{U^2 U_1} \leq q.$$

Zahlenbeispiel:

Gegeben sei:

$$l = 1000 \text{ m}; q = 0,017; P = 8 \text{ kW} = 8000 \text{ W}; U = 600 \text{ V}; U_1 = 30 \text{ V}$$

$$\frac{2 \cdot 10 \cdot 1000 \text{ m} \cdot 0,017 \frac{\text{mm}^2 \Omega}{\text{m}} \cdot 8000 \text{ W} \cdot 570 \text{ V}}{(600 \text{ V})^2 \cdot 30 \text{ V}} \leq q,$$

d.h. $q \geq 144 \text{ mm}^2$, was einem Durchmesser entspricht, der nicht kleiner sein darf als 14 mm.

- 28.** Aus der Abbildung 8 ist ersichtlich, daß der Kran lediglich um die Achse Q kippen kann. Die Schwerkraft F_2 der Masse m_2 bewirkt ein Kippen um diese Achse. Dieses Kippen wird aber durch die Kraft F_1 abgeschwächt, die dem entgegenwirkt.

Hieraus ergibt sich die Bedingung für eine stabile Lage des Kranes. Sie wird durch folgende Ungleichung ausgedrückt:

$$(1) \quad M_2 < M_1,$$

wobei M_2 und M_1 die Drehmomente bedeuten, die durch die Kräfte F_2 und F_1 in bezug auf die Achse Q erzeugt werden.

Bezeichnet man die Entfernung $\overline{QN}$ mit x , so ergibt sich nach Abbildung 8:

$$(2) \quad M_1 = F_1 \left(\frac{x}{2} - b \right).$$

$$(3) \quad M_2 = F_2 \left(c - \frac{x}{2} \right).$$

Nunmehr ergibt sich aus (3), (2) und (1) die Ungleichung

$$(4) \quad F_2 \left(c - \frac{x}{2} \right) < F_1 \left(\frac{x}{2} - b \right).$$

und somit

$$(5) \quad \frac{2(F_1 b + F_2 c)}{F_1 + F_2} < x.$$

- 29.** Der in der Abbildung 9 dargestellte Kran kann sowohl um die Achse N als auch um die Achse E kippen.

Die Kräfte F_2 und F_3 bewirken ein Kippen des Kranes um die Achse durch N , dem jedoch die Kraft F_1 und die Gegenkraft F_x entgegenwirken. Hierbei ist offensichtlich die Stabilität bezüglich der Achse durch N am geringsten, wenn der Schwenkarm $\overline{OA}$ waagerecht steht, denn dann erzeugen F_2 und F_3 bezüglich der Achse N das größte Moment.

Die absoluten Beträge der Momente, die durch die Kräfte F_x , F_1 , F_2 und F_3 bezüglich der Achse durch N erzeugt werden, sollen im folgenden mit

M_x , M_1 , M_2 und M_3 bezeichnet werden. Dann ergibt sich die Bedingung für die Standfestigkeit bezüglich der Achse durch N aus der Ungleichung

$$(1) \quad M_2 + M_3 \leq M_x + M_1.$$

Mit $M_x = F_x(a + b)$, $M_1 = F_1 a$, und im Falle einer horizontalen Lage des Schwenkarmes $\overline{OA}$ mit $M_2 = F_2(l - a)$ und $M_3 = F_3(2l - a)$ liefert die Ungleichung (1) die Ungleichung

$$(2) \quad F_2(l - a) + F_3(2l - a) \leq (a + b)F_x + F_1 a.$$

Für die Berechnung der Standfestigkeit des Kranes in bezug auf die Achse durch E erweist es sich als besonders ungünstig, wenn der Schwenkarm $\overline{OA}$ völlig fehlt (was ja bei der Montage des Kranes eintreten kann). Für diesen Fall wird die Bedingung für die Standfestigkeit des Kranes bezüglich der Achse durch E durch die Ungleichung

$$(3) \quad M_x' \leq M_1'$$

ausgedrückt, wobei M_x' und M_1' die absoluten Werte der Momente bezüglich der Achse durch E sind, die durch die Kräfte F_x und F_1 erzeugt werden.

Mit $M_x' = (b - a)F_x$ und $M_1' = F_1 a$ nimmt die Ungleichung (3) die Form

$$(4) \quad (b - a)F_x \leq F_1 a$$

an.

Wird das Ungleichungssystem (2) und (4) nach F_x aufgelöst, so ergibt sich:

$$\frac{F_2(l - a) + F_3(2l - a) - F_1 a}{a + b} \leq F_x \leq \frac{F_1 a}{b - a}.$$

Offensichtlich ist diese Aufgabe nur sinnvoll, wenn $a < b$ gilt und

$$\frac{F_2(l - a) + F_3(2l - a) - F_1 a}{a + b} < \frac{F_1 a}{b - a}$$

ist.

30. Aus der Abbildung 28 wird ersichtlich, daß die Flüssigkeit dann ausgegossen wird, wenn der Neigungswinkel φ des Durchmessers zum Horizont

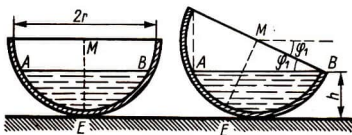


Abb. 28

größer wird als der Winkel φ_1 , der durch folgende Formel gekennzeichnet wird:

$$(1) \quad \varphi_1 = \arccos \frac{\overline{AB}}{2r}.$$

Damit ergibt sich der zulässige Bereich für den Winkel φ aus der Ungleichung

$$(2) \quad 0 \leq \varphi \leq \arccos \frac{\overline{AB}}{2r}.$$

Die Strecke $\overline{AB}$ läßt sich mit Hilfe der Formeln für die Berechnung von Kreisteilen finden. Mit Hilfe des Satzes des PYTHAGORAS findet man

$$\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 = (2r - h)h \text{ und daraus}$$

$$(3) \quad \overline{AB} = 2 \sqrt{(2r - h)h}.$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt dann

$$0^\circ \leq \varphi \leq \arccos \frac{\sqrt{(2r - h)h}}{r}.$$

31. Die Entfernung $\overline{MB}$ erhält ihren kleinsten Wert (Abb. 10), wenn der Punkt A die äußerste linke Lage einnimmt, wie es auf Abbildung 29 dargestellt ist. Aus dieser Abbildung ist auch ersichtlich, daß

$$(1) \quad \overline{MB}_{\min} = \overline{AB} - \overline{MA}$$

gilt.

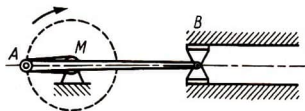


Abb. 29

Wendet man auf das Dreieck AMB (Abb. 10) den Sinussatz an, so ergibt sich

$$(2) \quad \sin \angle ABM = \frac{\overline{MA}}{\overline{AB}} \sin \angle AMB.$$

Aus der Gleichung (2) folgt, daß der $\sin \angle ABM$ seinen größten Wert annimmt, wenn

$$(\sin \angle ABM)_{\max} = \frac{\overline{MA}}{\overline{AB}} \sin 90^\circ$$

ist.

Also:

$$(3) \quad (\sin ABM)_{\max} = \frac{\overline{MA}}{\overline{AB}}.$$

Wenn $\overline{MB}$ nicht kleiner als m und nicht größer als m_1 sein soll, und wenn der Winkel ABM zwischen α und α_1 liegen soll, so muß unter Berücksichtigung von $0 < m < m_1$ und $0 < \alpha < \alpha_1 < 90^\circ$ sowie der Formeln (1) und (3) folgendes System von Ungleichungen¹ gelten:

$$\begin{aligned} \overline{AB} - \overline{MA} &\geq m \\ \overline{AB} - \overline{MA} &\leq m_1 \\ (4) \quad \frac{\overline{MA}}{\overline{AB}} &\geq \sin \alpha \\ \frac{\overline{MA}}{\overline{AB}} &\leq \sin \alpha_1. \end{aligned}$$

Die Auflösung dieses Ungleichungssystems führt auf:

$$\begin{aligned} (5) \quad \frac{m \sin \alpha}{2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)} &\leq \overline{MA} \leq \frac{m_1 \sin \alpha_1}{2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha_1}{2} \right)} \\ \frac{m}{2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)} &\leq \overline{AB} \leq \frac{m_1}{2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha_1}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Zahlenbeispiel:

Gegeben sei: $m = 200$ mm; $m_1 = 250$ mm; $\alpha = 30^\circ$ und $\alpha_1 = 40^\circ$. Für die vorgegebenen Werte erhält man aus den Ungleichungen (5) folgende Werte:

$$200 \text{ mm} \leq \overline{MA} \leq 458 \text{ mm und } 400 \text{ mm} \leq \overline{AB} \leq 700 \text{ mm.}$$

32. Der Mantel des Lampenschirmes entspricht der Figur $ABCD$ (Abb. 30). Sie wird begrenzt durch zwei Geraden und zwei Kreisbogen MAB und MDC . Die Länge und Breite des Stoffes, aus dem der Lampenschirm hergestellt werden soll, werde mit x bzw. y bezeichnet.

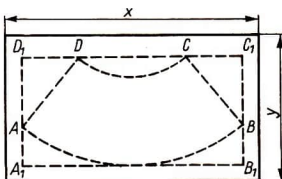


Abb. 30

¹ Somit gilt auch $0 < \overline{MA} < \overline{AB}$ und $0 < \frac{\overline{MA}}{\overline{AB}} < 1$.

Dann ist offensichtlich:

$$(1) \quad \begin{aligned} \overline{A_1 B_1} &\leq x \\ \overline{A_1 D_1} &\leq y, \end{aligned}$$

wobei $A_1 B_1 C_1 D_1$ ein Rechteck ist, das dem Kreisringsektor $ABCD$ umschrieben ist.

Aus der Kenntnis der Länge von $\overline{MA}$ und der Größe des Winkels α (Abb. 31) läßt sich $\overline{A_1 B_1}$ wie folgt berechnen:

$$(2) \quad \overline{A_1 B_1} = 2 \overline{MA} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Es ist

$$(3) \quad \begin{aligned} \overline{MA} \cdot \alpha &= \pi D, \\ (\overline{MA} - l) \alpha &= \pi d, \end{aligned}$$

wobei

$$(4) \quad \alpha = \frac{D-d}{l} \pi$$

und

$$(5) \quad \overline{MA} = \frac{Dl}{D-d}$$

ist.

Aus den Gleichungen (2), (4) und (5) ergibt sich

$$(6) \quad \overline{A_1 B_1} = \frac{2Dl}{D-d} \sin \frac{D-d}{2l} \pi.$$

Ferner gilt $\overline{A_1 D_1} = \overline{ME} - \overline{MK}$ ($\overline{ME}$ ist die Winkelhalbierende des Winkels α) und $\overline{MK} = \overline{MD} \cos \frac{\alpha}{2} = (\overline{MA} - l) \cos \frac{\alpha}{2}$ mit $\overline{ME} = \overline{MA}$. Daher ist

$$(7) \quad \overline{A_1 D_1} = \overline{MA} - (\overline{MA} - l) \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Aus den Gleichungen (7), (6) und (5) erhält man

$$(8) \quad \overline{A_1 D_1} = \frac{l}{D-d} \cos \frac{D-d}{2l} \pi,$$

und aus den Gleichungen (1), (6) und (8) ergibt sich schließlich

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{2Dl}{D-d} \sin \frac{D-d}{2l} \pi &\leq x, \\ \frac{l}{D-d} \cos \frac{D-d}{2l} \pi &\leq y. \end{aligned}$$

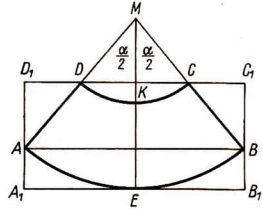


Abb. 31

33. Die Masse des Wassers sei x Kilogramm, und die Masse der im Wasserbad zu härtenden Werkstücke sei y Kilogramm. Die Aufgabe führt auf ein System von zwei Ungleichungen mit zwei Unbekannten:

$$6x + 0,11 \cdot 850y > 50x + 0,11 \cdot 50y$$

$$6x + 0,11 \cdot 850y < 70x + 0,11 \cdot 70y,$$

wobei 0,11 die spezifische Wärme des Stahles sein soll. Das Auflösen dieses Systems führt auf die Ungleichung

$$(1) \quad 0,50x < y < 0,76x.$$

Der Aufgabe entsprechend sind für x alle positiven Zahlen zulässig, also gilt

$$(2) \quad 0 < x < \infty.$$

Nach der Ungleichung (1) sind für jeden Wert x_n aus dem zulässigen Intervall (2) eine unendliche Menge von Werten y_n möglich, wie sie durch das Intervall

$$(3) \quad 0,50x_n < y_n < 0,76x_n$$

definiert werden.

Die Abbildung 32 gibt eine geometrische Erklärung der zulässigen Lösungen für die gestellte Aufgabe. Aus der Zeichnung ist unmittelbar ersichtlich, daß für jeden Wert x_n alle Abszissenwerte zulässig sind, die im Bereich des Winkels NOM liegen, der durch die Geraden

$$y = 0,5x \quad \text{und} \quad y = 0,76x$$

gebildet wird.

Insbesondere demonstriert das Intervall (3) geometrisch den Abschnitt $\overline{MN}$, aus dem allerdings der Anfangs- und Endpunkt ausgeschlossen werden müssen.

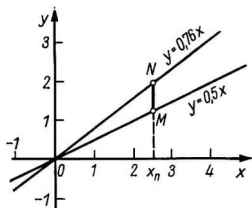


Abb. 32

Zahlenbeispiel:

Das Bad soll 100 kg Wasser fassen. Für diesen Fall wird die Masse des Metalls, das gehärtet werden soll, aus der Ungleichung (3) folgendermaßen ermittelt:

$$50 < y < 76.$$

34. Setzt man voraus, daß x t 20%igen Nickelstahls und y t 40%igen Nickelstahls erforderlich sind, so führt die Aufgabe auf folgendes System von zwei Ungleichungen mit zwei Unbekannten:

$$\frac{0,2x + 0,4y}{x + y} \geq 0,25,$$

$$\frac{0,2x + 0,4y}{x + y} \leq 0,30.$$

Löst man dieses System nach y auf, so ergibt sich:

$$(1) \quad \frac{1}{3}x \leq y \leq x.$$

Aus den Bedingungen der Aufgabe ist zudem als zulässiger Bereich für x das Intervall

$$(2) \quad 0 < x < \infty$$

möglich.

Es entspricht hier ebenfalls jedem Wert von x , also etwa x_n , eine beliebig große Anzahl zulässiger Werte von y , die mit y_n bezeichnet werden sollen. Die Werte y_n werden durch das Intervall

$$(3) \quad \frac{1}{3}x_n \leq y_n \leq x_n$$

festgelegt.

Die Abbildung 33 zeigt die geometrische Erklärung für alle Lösungen dieser Aufgabe. Aus der Abbildung geht hervor, daß die Lösungen für alle möglichen Fälle die Fläche, die von der Geraden $y = x$ und der Geraden $y = \frac{1}{3}x$ (für beide gilt $x, y > 0$) gebildet wird, ausfüllen. Ausgenommen ist hier der Koordinatenursprung. Insbesondere wird in der Abbildung 33 für das folgende Beispiel mit $x_n = 15$ der zulässige Bereich durch die Strecke $\overline{MN}$ dargestellt.

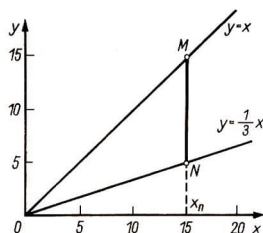


Abb. 33

Zahlenbeispiel: Die Masse des Stahls mit 20% Nickelgehalt soll 15 t betragen. Für diesen Fall liegt die Masse von 40%igem Nickelstahl, der für die gewünschte Legierung erforderlich ist, im Bereich

$$5 \leq y \leq 15.$$

35. Das Schleppseil zum Schlepper A soll mit der Achse des Lastkahnens den Winkel x und das Schleppseil zum Schlepper B den Winkel y bilden (Abb. 11). Dann ergibt sich entsprechend den Bedingungen der Aufgabe folgendes System von Ungleichungen:

$$6 \cos x + 4 \cos y > 5$$

$$10 \cos x + 5 \cos y > 8$$

$$0^\circ < x < 90^\circ; 0^\circ < y < 90^\circ.$$

Wird dieses System nach y aufgelöst, so ergibt sich:

$$(1) \quad 0^\circ < y < \arccos \frac{5 - 6 \cos x}{4},$$

für $\arccos \frac{5}{6} < x < \arccos 0,7$, d.h. für
 $33^\circ 30' < x < 45^\circ 30';$

$$(2) \quad 0^\circ < y < \arccos \frac{8 - 10 \cos x}{5},$$

für $\arccos 0,3 < x < \arccos 0,7$, d.h. für
 $45^\circ 30' < x < 72^\circ 30'.$

Zahlenbeispiel:

Gegeben sei: $x = \arccos 0,5 = 60^\circ$. Dann gilt

$$0^\circ < y < \arccos \frac{8 - 10 \cdot 0,5}{5},$$

d.h. $0^\circ < y < 53^\circ$.

Probe: Angenommen, daß $y = 50^\circ$ ist, dann ergibt sich

$$6 \cos 60^\circ + 4 \cos 50^\circ = 3 + 4 \cdot 0,643 \approx 5,57 > 5$$

$$10 \cos 60^\circ + 5 \cos 50^\circ = 5 + 5 \cdot 0,643 \approx 8,26 > 8.$$

36. Es werde der absolute Betrag für die Eigengeschwindigkeit des Gleitbootes mit $y \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ und die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers mit $x \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ bezeichnet. Die Aufgabe führt dann auf folgendes System von Ungleichungen:

$$\frac{60 \text{ m}}{(x + y) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \geq 5,4 \text{ s}$$

$$(1) \quad \frac{60 \text{ m}}{(y - x) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \leq 7,2 \text{ s}$$

$$0 \frac{\text{m}}{\text{s}} < x \frac{\text{m}}{\text{s}} < y \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

wobei gilt:

$$(2) \quad (30 + x) \frac{\text{km}}{\text{h}} \leq y \frac{\text{km}}{\text{h}} \leq (40 - x) \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$0 \frac{\text{km}}{\text{h}} < x \frac{\text{km}}{\text{h}} \leq 5 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Zahlenbeispiel:

Die Strömungsgeschwindigkeit betrage $2 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 0,55 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Dann liegt der absolute Betrag für die Eigengeschwindigkeit des Bootes im Bereich

$$32 \frac{\text{km}}{\text{h}} \leq y \frac{\text{km}}{\text{h}} \leq 38 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Probe:

Angenommen, die Eigengeschwindigkeit betrage $35 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 9,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Dann ergibt sich aus dem Ungleichungssystem (1):

$$\frac{60}{(9,72 + 0,55)} \text{ s} \approx 5,8 \text{ s} > 5,4 \text{ s}$$

$$\frac{60}{(9,72 - 0,55)} \text{ s} \approx 6,5 \text{ s} < 7,2 \text{ s}.$$

Die Abbildung 34 zeigt eine geometrische Erklärung für den Lösungsbereich dieser Aufgabe. Wie aus der Abbildung ersichtlich, sind nur diejenigen Punkte zulässig, die innerhalb des Dreiecks liegen, das durch die Geraden $y = x + 30$ und $y = -x + 40$ sowie durch die Ordinatenachse begrenzt wird. Dabei sind die Punkte auf der Ordinatenachse noch ausgeschlossen.

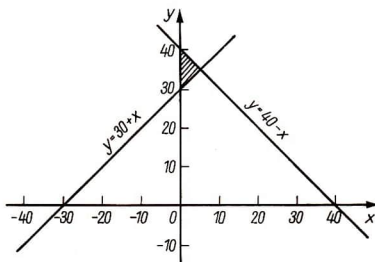


Abb. 34

37. Es möge die Lichtstärke der äußeren Lampen x Candela und die der mittleren Lampe y Candela betragen. Nach bekannten physikalischen Formeln ist dann die Beleuchtungsstärke $E = \frac{I}{R^2} \cos \alpha$, wobei I die Lichtstärke in Candela, R die Entfernung von der Lichtquelle in Metern, α den Einfallswinkel des Lichtstrahles und E die Beleuchtungsstärke in Lux bedeuten soll. Damit ergibt sich aus den Bedingungen der Aufgabe folgendes System von Ungleichungen (Abb. 35):

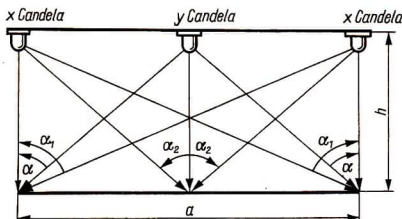


Abb. 35

$$\frac{x}{h^2} + \frac{x}{h^2 + a^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2}} + \frac{y}{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \geq 8$$

(1)
$$\frac{2x}{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} + \frac{y}{h^2} \leq 10$$

$0 < x; 0 < y.$

Werden nun $a = 20$ m und $h = 4$ m gesetzt, so ergibt sich nach einigen Vereinfachungen folgendes System von Ungleichungen:

$$\begin{aligned} &0,063x + 0,003y \geq 8 \\ (2) \quad &0,006x + 0,063y \leq 10 \\ &0 < x; 0 < y. \end{aligned}$$

Das System wird aufgelöst:

$$\begin{aligned} &120 \leq x \leq 127 \\ (3) \quad &\frac{8000 - 63x}{3} \leq y \leq \frac{10000 - 6x}{63}. \end{aligned}$$

Die Zahlen in diesen Ungleichungen tragen die Maßeinheit Candela.

Zahlenbeispiel:

Für $x = 125$ cd ergibt sich aus der Ungleichung (3) folgender Bereich für y :

$$\frac{8000 - 7875}{3} \leq y \leq \frac{10000 - 750}{63} \text{ oder } 41,7 \leq y \leq 146,7.$$

Probe:

Angenommen, es werde $y = 140$ gewählt. Das System liefert dann mit $x = 125$ und $y = 140$, wobei die Ausgangswerte jeweils in Candela gegeben sind, die Ungleichungen:

$$0,063 \cdot 125 + 0,003 \cdot 140 = 7,875 + 0,420 = 8,295 > 8,$$

$$0,006 \cdot 125 + 0,063 \cdot 140 = 0,750 + 8,820 = 9,570 < 10.$$

Diese Zahlen tragen die Maßeinheit der Beleuchtungsstärke, also Lux.

- 38.** Die Tiefe beim Pflügen betrage x (in m) und die Leistung des Traktors y (in PS). Dann ist für das Pflügen von einem Hektar Boden bei einem spezifischen Widerstand f (in $\text{kp} \cdot \text{cm}^{-2}$) folgende Arbeit aufzuwenden:

$$a \cdot x \cdot f \cdot \frac{10000 \text{ m}^2}{a}.$$

Dabei sei a die Schollenbreite in Metern.

Nach Vereinfachung erhält man daraus $10^4 f x \text{ m}^2$.

Soll nun die Ausführung dieser Arbeit in der Zeit t (in h) erfolgen, so ergibt sich für die erforderliche Leistung:

$$\frac{10^4 f x \text{ m}^2 \cdot \text{PS} \cdot \text{h} \cdot \text{s}}{75 \text{ kpm} \cdot 3600 \text{ s t}}, \text{ das sind } \frac{f \cdot x}{27 t} \cdot \frac{\text{m} \cdot \text{PS} \cdot \text{h}}{\text{kp}}.$$

Analog ergibt sich die Leistung, die für das Pflügen eines Hektars in der Zeit t_1 (in Stunden) bei einem spezifischen Widerstand des Bodens von f_1 (in $\text{kp} \cdot \text{cm}^{-2}$) notwendig ist, zu $\frac{f_1 \cdot x}{27 t_1} \cdot \frac{\text{m} \cdot \text{PS} \cdot \text{h}}{\text{kp}}$.

Damit führt die gegebene Aufgabe auf das System:

$$\frac{f \cdot x}{27 t} \cdot \frac{\text{m} \cdot \text{PS} \cdot \text{h}}{\text{kp}} \leq y \leq \frac{f_1 \cdot x}{27 t_1} \cdot \frac{\text{m} \cdot \text{PS} \cdot \text{h}}{\text{kp}},$$

wobei $0,1 \text{ m} < x < 0,85 \text{ m}$ gelten muß.

Für $f = 0,8 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2}$; $t = 1,0 \text{ h}$; $f_1 = 1,2 \text{ kp} \cdot \text{cm}^{-2}$ und $t_1 = 1,4 \text{ h}$ ergibt sich

$$296,3 \text{ PS} \cdot \text{m}^{-1} x \leq y \leq 317,6 \text{ PS} \cdot \text{m}^{-1} x.$$

Sei $x = 0,25 \text{ m}$, dann folgt $74,1 \text{ PS} \leq y \leq 79,4 \text{ PS}$.

39. Mit Hilfe des Sinussatzes ergibt sich aus den Geschwindigkeitsdreiecken CDE (Abb. 36 a) und $C_1D_1E_1$ (Abb. 36 b)

$$(1) \quad \frac{v}{\sin y} = \frac{x}{\sin \alpha}$$

$$(2) \quad \frac{z}{\sin(\alpha + y)} = \frac{v}{\sin y}$$

$$(3) \quad \frac{z'}{\sin(\alpha - y)} = \frac{v}{\sin y}$$

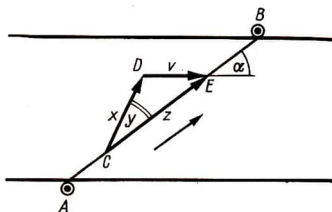


Abb. 36 a

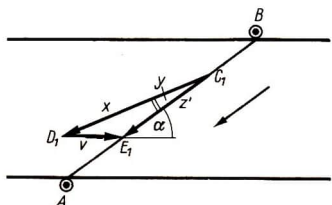


Abb. 36 b

Dabei ist z die Geschwindigkeit des Kutters in bezug auf das Ufer (also seine endgültige Geschwindigkeit) bei der Fahrt von A nach B und z' die Geschwindigkeit in bezug auf das Ufer während der Fahrt von B nach A . Die Geschwindigkeitskomponente, die auf die Strömung zurückzuführen ist, sei v und diejenige, die auf der Motorkraft des Kutters beruht, sei x (jeweils in $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$). Mit y wurde der Winkel bezeichnet, den die Komponente x und die Resultierende z miteinander bilden.

Aus den Gleichungen (1) bis (3) erhält man:

$$(4) \quad x = \frac{v \sin \alpha}{\sin y}$$

$$(5) \quad z = v (\sin \alpha \cot y + \cos \alpha)$$

$$(6) \quad z' = v (\sin \alpha \cot y - \cos \alpha).$$

Diese Gleichungen ergeben unter Berücksichtigung der Bedingungen der Aufgabe folgendes System von Ungleichungen ($s = \overline{AB}$)

$$(7) \quad \frac{s}{v (\sin \alpha \cot y + \cos \alpha)} \geq t$$

$$\frac{s}{v (\sin \alpha \cot y - \cos \alpha)} \leq t_1$$

$$x = \frac{v \sin \alpha}{\sin y}.$$

Die Lösung dieses Systems führt auf:

$$(8) \quad \arctan \frac{v t \sin \alpha}{s - v t \cos \alpha} \leq y \leq \arctan \frac{v t_1 \sin \alpha}{s + v t_1 \cos \alpha}$$

und

$$(9) \quad \frac{1}{t_1} \sqrt{s^2 + v^2 t_1^2 + 2 s v t_1 \cos \alpha} \leq x \leq \frac{1}{t} \sqrt{s^2 + v^2 t^2 - 2 s v t \cos \alpha}.$$

Zahlenbeispiel:

Gegeben sei: $s = 1200 \text{ m}$; $v = 1,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $\alpha = 60^\circ$; $t = 120 \text{ s}$ und $t_1 = 180 \text{ s}$.
Dann ergibt sich aus den Ungleichungen (8) und (9):

$$\arctan 0,18 \leq y \leq \arctan 0,23$$

$$\frac{1395}{180} \frac{\text{m}}{\text{s}} \leq x \leq \frac{1104}{120} \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\text{d.h.: } 10^\circ \leq y \leq 12^\circ \text{ und } 7,7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \leq x \leq 9,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Die Probe möge der Leser unter Verwendung des Systems (7) selbst ausführen.

40. Die gesuchte Produktivität der Werkzeugmaschine B werde mit x Produktionseinheiten je Stunde, die der Werkzeugmaschine C mit y Produktionseinheiten je Stunde bezeichnet. Aus den Bedingungen der Aufgabe ergibt sich dann folgendes System von Ungleichungen:

$$(1) \quad \frac{m(p+y)}{100} \leq x$$

$$\frac{n(p+x)}{100} \leq y.$$

Die Lösung dieses Systems ergibt:

$$(2) \quad \frac{n(p+x)}{100} \leq y \leq \frac{100x - mp}{m},$$

wobei gilt:

$$(3) \quad \frac{mp(n+100)}{10000-mn} \leq x.$$

Anmerkung:

Aus der Aufgabe folgt unmittelbar, daß gelten muß:

$0 < p$, $0 < m$, $0 < n$. Aus der Ungleichung (3) folgt, daß die Aufgabe nur sinnvoll ist, wenn zudem gilt: $mn \leq 10000$.

Zahlenbeispiel:

Die Arbeitsproduktivität einer Werkzeugmaschine belaufe sich auf 1000 Produktionseinheiten je Stunde ($p = 1000$), der Prozentsatz der Arbeitsproduktivität der Maschine B soll 80% ($m = 80$), der der Maschine C soll 64% ($n = 64$) sein.

Aus den Ungleichungen (2) und (3) ergibt sich dann:

$$\frac{64(1000+x)}{100} \leq y \leq \frac{5(x-800)}{4},$$

wobei $2689 \leq x$ sein muß. Wählt man beispielsweise $x = 3000$, so ergibt sich $2560 \leq y \leq 2750$.

Probe:

Ist beispielsweise $y = 2600$, so ist

$$\frac{3000}{1000+2600} \cdot 100\% \approx 89\% > 80\%;$$

$$\frac{2600}{1000+3000} \cdot 100\% \approx 65\% > 64\%.$$

41. Die Aufgabe führt auf das System von Ungleichungen:

$$(1) \quad \frac{24}{x-6} + \frac{24}{x+6} \leq 3$$
$$6 < x.$$

Dieses System kann auf folgende Weise vereinfacht werden:

$$(2) \quad 0 \leq x^2 - 16x - 36$$
$$6 < x.$$

Hieraus erhält man für die Geschwindigkeit des Lastkahns, gemessen in $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$:

$$18 \leq x.$$

42. Es soll $\overline{AB} = 156$ m sein (Abb. 37). Es ist der zulässige Bereich für die Gleislängen zu bestimmen, wenn für den Bogen $\widehat{ADB}$ gelten soll:
 $\overline{MD} \geq 600$ m.

In dem rechtwinkligen Dreieck AMC gilt nach dem Satz des PYTHAGORAS
 $(r - \overline{CD})^2 + (78)^2 = r^2$,

und, da $\overline{MC} = r - \overline{CD}$ und $\overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{2} = 78$ m, folgt

$$(1) \quad \frac{\overline{CD}^2 + 6084 \text{ m}^2}{2 \overline{CD}} = r.$$

Setzt man in (1) den gegebenen Wert
 $600 \leq r$ ein, so erhält man

$$(2) \quad 600 \leq \frac{\overline{CD}^2 + 6084 \text{ m}^2}{2 \overline{CD}}.$$

Diese Ungleichung führt auf

$$(3) \quad 0 \leq \overline{CD}^2 - 1200 \overline{CD} + 6084.$$

Aus der Lösung dieser Ungleichung ergeben sich zwei Gültigkeitsbereiche,
nämlich $1194,9 \text{ m} \leq \overline{CD}$

und $\overline{CD} \leq 5,1 \text{ m}$.

Aus der geometrischen Deutung folgt ferner, daß $Om < \overline{CD}$ und, da entsprechend der Aufgabe $\sphericalangle AMB < 180^\circ$ sein muß, folgt auch $\overline{CD} < r$.

Damit wird der Bereich der zulässigen Werte für $\overline{CD}$ durch das Intervall

$$Om < \overline{CD} \leq 5,1 \text{ m}$$

dargestellt.

Zahlenbeispiel:

Es sei $\overline{CD} = 4$ m. Dann liefert die Gleichung (1)

$$r = \frac{16 + 6084}{8} \text{ m} = 762,5 \text{ m} > 600 \text{ m}.$$

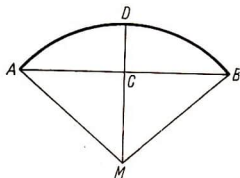


Abb. 37

43. Unter Anwendung der Formel $S = \frac{2a + d(n-1)}{2} n$, der Summenformel zur Berechnung der Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Folge, ergibt sich die Verbindung zu den Bedingungen der Aufgabe durch folgendes Ungleichungssystem:

$$(1) \quad \begin{aligned} 4x^2 - 3x - (2x^2 + x) &> 6 \\ 4x^2 - 3x - (2x^2 + x) &< 30, \end{aligned}$$

wobei die Dauer der Bewegung mit x s angenommen wird.

Aus dem Ungleichungssystem (1) ergibt sich:

$$(2) \quad 0 < x^2 - 2x - 3$$

$$x^2 - 2x - 15 < 0,$$

wobei

$$3 < x < 5$$

sein muß.

Die Zusatzbedingungen der Aufgabe lassen eine Fortsetzung der Bewegung über eine längere Zeit zu. Daher ist die Lösung eindeutig, und zwar

$$x = 4.$$

Die Abbildung 38 gibt eine grafische Lösung für das Ungleichungssystem (2) an.

Bekanntlich gilt: $x^2 - 2x - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 4 = (x - 1)^2 - 4$. Das besagt aber, daß die Parabel $y = x^2 - 2x - 3$ durch Verschiebung der Parabel $y = x^2$ gewonnen werden kann, und zwar wird der Scheitel um eine Einheit horizontal nach rechts und um vier Einheiten vertikal nach unten verschoben.

Weiter gilt:

$$x^2 - 2x - 15 = (x^2 - 2x - 3) - 12.$$

Daraus ist zu erkennen, daß die Parabel $y = x^2 - 2x - 15$ dadurch entsteht, daß der Scheitel der Parabel $y = x^2 - 2x - 3$ um weitere 12 Einheiten vertikal nach unten verschoben werden muß.

Aus der Abbildung 38 ist anschaulich zu erkennen, daß es nur eine ganzzahlige positive Abszisse gibt, der durch die Parabel $y = x^2 - 2x - 3$ eine positive Ordinate und entsprechend durch die Parabel $y = x^2 - 2x - 15$ eine negative Ordinate zugeordnet wird, und zwar die Abszisse $x = 4$.

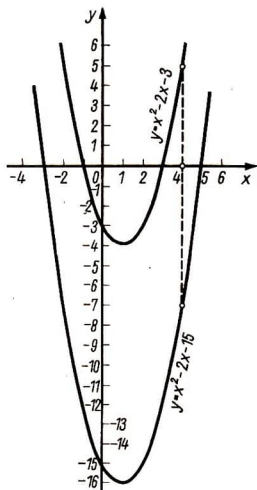


Abb. 38

44. Wird bei dieser Aufgabe vorausgesetzt, daß die Verteilungsdichte der Öffnungen, die Durchmesser der Öffnungen und der Wasserdruk gleich sind, so ist die in der Zeiteinheit verspritzte Wassermenge dem Oberflächeninhalt mit Spritzöffnungen direkt proportional. Dann läßt sich aus den Bedingungen der Aufgabe folgende Ungleichung herleiten (Abb. 39):

$$(1) \quad \pi \overline{AM_1} \cdot \overline{AS} + \pi \overline{AM_1}^2 < 2\pi \cdot \overline{M_2S} \cdot \overline{M_1S}.$$

Wird der Winkel ASM_1 mit x bezeichnet, dann ist

$$\overline{M_1S} = \overline{AS} \cos x, \quad \overline{M_2S} = \frac{\overline{AS}}{2 \cos x} \quad \text{und} \quad \overline{AM_1} = \overline{AS} \sin x.$$

Ersetzt man in der Ungleichung (1) die Strecken $\overline{M_2S}$, $\overline{M_1S}$ und $\overline{AM_1}$ entsprechend der oben angeführten Formeln durch $\overline{AS}$ und den Winkel durch x , so ergibt sich nach Vereinfachung folgende Ungleichung:

$$(2) \quad \sin^2 x + \sin x - 1 < 0.$$

Die Lösung dieser Ungleichung führt unter Berücksichtigung der Relation $0 < x < 90^\circ$ auf:

$$(3) \quad 0 < x < 38^\circ 12'.$$

Wegen $\sphericalangle AM_2B = 360^\circ - 4x$ folgt aus (3):

$$360^\circ - 4 \cdot 38^\circ 12' < \sphericalangle AM_2B < 360^\circ,$$

d.h.

$$(4) \quad 207^\circ 12' < \sphericalangle AM_2B < 360^\circ.$$

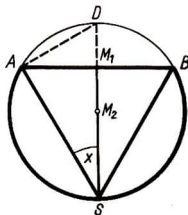


Abb. 39

Hieraus folgt, daß für gleichen Wasserdruk, gleiche Verteilungsdichte und gleiche Größe der Öffnungen die Beregnungsanlage, bei der das Wasser durch die Öffnungen auf einer Kugelkappe mit einem Bogen, der einem Zentriwinkel von über $207^\circ 12'$ entspricht, gesprüht wird, produktiver ist als die Anlage, bei der die Öffnungen auf der Grundfläche und dem Mantel eines Kegels verteilt sind.

45. Der Punkt M soll als Erdmittelpunkt gewählt werden. F sei die geophysikalische Rakete und $\overline{FA} = x$ ihre Höhe über der Erdoberfläche. $\overline{FN}$ sei die durch die Höhe erreichte Weite für den sichtbaren Horizont (Abb. 40).

Damit ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck FMN :

$$(1) \quad \sqrt{(\overline{MA} + x)^2 - \overline{MN}^2} = \overline{FN}.$$

Setzt man nach Voraussetzung $\overline{MA} = \overline{MN} = 6370$ km und $2000 \text{ km} \leq \overline{FN}$, so ergibt sich nach Vereinfachung folgende Ungleichung zweiten Grades mit einer Unbekannten:

$$(2) \quad 0 \leq x^2 + 12740x - 4\,000\,000.$$

Berücksichtigt man noch, daß diese Aufgabe nur für $0 < x$ sinnvoll ist, so erhält man nach Lösung der Ungleichung (2):

$$310 \text{ km} < x.$$

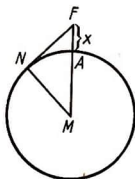


Abb. 40

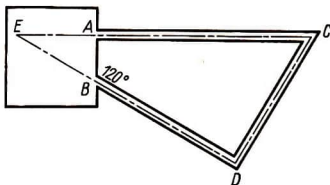


Abb. 41

46. Verlängert man die Geraden $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$, bis sie einander schneiden und bezeichnet man diesen Schnittpunkt mit E (Abb. 41), so ergibt sich aus dem Dreieck ECD unter Verwendung des Kosinussatzes:

$$(1) \quad \overline{EC}^2 + \overline{ED}^2 - 2\overline{EC} \cdot \overline{ED} \cos CED = \overline{CD}^2.$$

Es ist ferner:

$$(2) \quad \sphericalangle CED = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$(3) \quad \overline{AE} = \overline{AB} \tan 60^\circ = \overline{AB} \sqrt{3}$$

$$\overline{EC} = (\overline{AB} \sqrt{3} + 200 \text{ m})$$

$$\overline{BE} = \frac{\overline{AB}}{\cos 60^\circ} = 2 \overline{AB}$$

$$(4) \quad \overline{ED} = (2\overline{AB} + 100 \text{ m})$$

$$(5) \quad \overline{CD} \leq 130 \text{ m}.$$

Aus den Gleichungen (1) bis (5) ergibt sich nach Vereinfachungen folgende Ungleichung zweiten Grades mit einer Unbekannten:

$$\overline{AB}^2 + 100 \overline{AB} - 1540 \leq 0.$$

Nach Lösung dieser Ungleichung ergibt sich unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Aufgabe nur für Werte $0\text{ m} \leq \overline{AB}$ sinnvoll ist:

$$0\text{ m} \leq \overline{AB} \leq 13,56\text{ m}.$$

47. Die auf den Keil wirkende Treibkraft soll P sein. Außer dieser Kraft wirken auf den Keil noch die Kräfte: N_1 , N_2 , F_1 und F_2 (Abb. 42).

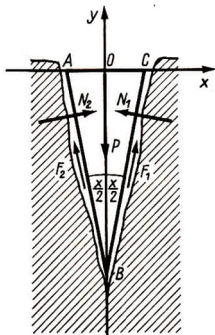


Abb. 42

Die Kräfte N_1 und N_2 sind Reaktionskräfte des zu spaltenden Materials. Sie wirken senkrecht auf die Keilwangen. F_1 und F_2 sind die Reibungskräfte, die zwischen den Keilwangen und der Oberfläche des zu spaltenden Materials wirken. Die Kräfte F_1 und F_2 wirken parallel zu den Keilwangen. Dabei ist $F_1 = N_1$ und $F_2 = N_2$, wobei μ der Reibungskoeffizient ist.

Der gesuchte Winkel ABC sei x . Projiziert man alle Kräfte auf eine Ebene durch den Koordinatenursprung, so kann man die Gleichung für die Gleichgewichtsbedingung am Keil bilden.

Da das Dreieck ABC gleichschenkelig ist und die Kraft in Richtung der Winkelhalbierenden des Winkels ABC wirkt, gilt: $N_1 = N_2 = N$ und $F_1 = F_2 = \mu N$.

Damit ergibt sich, wenn die Lage der Koordinatenachsen so gewählt wird, wie es auf der Abbildung 42 dargestellt ist, die Gleichung für das Gleichgewicht in der Form:

$$(1) \quad \begin{aligned} \Sigma x &= N \cos \frac{x}{2} - N \cos \frac{x}{2} - \mu N \sin \frac{x}{2} + \mu N \sin \frac{x}{2} = 0, \\ \Sigma y &= N \sin \frac{x}{2} + N \sin \frac{x}{2} + \mu N \cos \frac{x}{2} + \mu N \cos \frac{x}{2} - P = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt unter Anwendung bekannter trigonometrischer Formeln:

$$(2) \quad \frac{N}{P} = \frac{1}{2 \left(\sin \frac{x}{2} + \mu \cos \frac{x}{2} \right)}.$$

Nummehr ergibt sich aus den Bedingungen der Aufgabe, wobei berücksichtigt werden muß, daß $0^\circ < x < 180^\circ$ sein muß, folgendes System von Ungleichungen:

$$(3) \quad \begin{aligned} n &\leq \frac{1}{2 \left(\sin \frac{x}{2} + \mu \cos \frac{x}{2} \right)} \\ 0^\circ &< x < 180^\circ \\ 1 &< n. \end{aligned}$$

Dieses System läßt sich wie folgt vereinfachen:

$$0 \leq (2\mu n + 1) \tan^2 \frac{x}{4} - 4n \tan \frac{x}{4} - (2\mu n - 1)$$

$$(4) \quad 0 < \tan \frac{x}{4} < 1$$

$$1 < n,$$

woraus

$$(5) \quad 0 < x \leq 4 \arctan \frac{2n - \sqrt{4(1 + \mu^2)n^2 - 1}}{2n\mu + 1} \text{ folgt.}$$

Aus der Ungleichung (5) ist ersichtlich, daß die gegebene Aufgabe nur dann zu einer Lösung führt, wenn n folgendes System von Ungleichungen erfüllt:

$$0 \leq 4(1 + \mu^2)n^2 - 1$$

$$\sqrt{4(1 + \mu^2)n^2 - 1} < 2n$$

d. h., wenn

$$\frac{1}{2\sqrt{1 + \mu^2}} \leq n \leq \frac{1}{2\mu}.$$

Zahlenbeispiel:

Gegeben sei: $\mu = 0,1$ und $n = 4$. Für diese Werte ist die Aufgabe sinnvoll, denn es ist:

$$\frac{1}{2\sqrt{1 + 0,1^2}} < 4 < \frac{1}{2 \cdot 0,1}$$

$$\text{d. h. } \frac{1}{2\sqrt{1,01}} < 4 < 5.$$

Aus der Ungleichung (5) ergibt sich damit:

$$0 < x \leq 4 \arctan 0,0110, \text{ dem entspricht: } 0 < x \leq 2^\circ 32'.$$

48. Die Aufgabe führt auf folgendes System von Ungleichungen (Abb. 43):

$$0 \text{ m} < x$$

$$(1) \quad b < \overline{DC} < a$$

$$V \leq \frac{(a + \overline{DC})}{2} x \leq V_1,$$

wobei x die gesuchte Höhe des Damms in m ist.

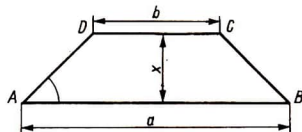


Abb. 43

Es ist $\overline{DC} = a - 2x \cot \alpha$. Damit erhält das System (1) die Form:

$$(2) \quad \begin{aligned} 0 &< x \\ b &\leq a - 2x \cot \alpha \\ x^2 \cdot l \cot \alpha - x \cdot la + V &\leq 0 \\ 0 &\leq x^2 l \cot \alpha - x la + V_1. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Systems führt auf:

$$(3) \quad \frac{la - \sqrt{l^2 a^2 - a l V \cot \alpha}}{2 l \cot \alpha} \leq x \leq \frac{la - \sqrt{l^2 a^2 - 4 l V_1 \cot \alpha}}{2 l \cot \alpha}$$

$$x \leq \frac{a - b}{2 \cot \alpha}.$$

Diese Aufgabe ist nur sinnvoll, wenn

$$(4) \quad V < V_1 < \frac{l(a^2 - b^2)}{4 \cot \alpha}.$$

Zahlenbeispiel:

Gegeben sei: $l = 100$ m; $a = 5$ m; $b = 2$ m; $\alpha = 45^\circ$, $V = 400$ m³ und $V_1 = 500$ m³.¹

Dann liefert die Ungleichung (3):

$$1 \text{ m} \leq x \leq 1,38 \text{ m}.$$

- 49.** Nach dem Reflexionsgesetz ergibt sich, wenn $\overline{CE}$ als Winkelhalbierende (Einfallslot) des Winkels FCD im Dreieck FCD gewählt wird (Abb. 14), die Lösung der Aufgabe durch den Beweis des folgenden geometrischen Satzes:

Die Winkelhalbierende eines Innenwinkels im Dreieck teilt die gegenüberliegende Seite in Abschnitte, von denen jeder kleiner ist als die anliegende Dreiecksseite.

Beweis:

1. Es sollen $\overline{CE}$ und $\overline{DF}$ orthogonal sein, also $\overline{CE} \perp \overline{DF}$, dann ist der Satz offensichtlich richtig.
2. Es soll $\overline{CE}$ zu $\overline{DF}$ geneigt sein. Dann ist einer der anliegenden Winkel DEC oder CEF stumpf und der andere Winkel ist spitz.
Wird angenommen, daß der Winkel DEC stumpf ist, dann kann man aus dem Dreieck DCE schließen, daß gilt $\overline{ED} < \overline{DC}$.

¹ $500 < \frac{100(5^2 - 2^2)}{4 \cot 45^\circ} = 525$

Der spitze Winkel $\angle CEF$ ist ein Außenwinkel des Dreiecks DCE . Folglich ist $\angle DCE < \angle CEF$. Ist aber $\angle DCE = \angle ECF$, dann ist $\overline{CE}$ die Winkelhalbierende des Winkels DCF . Darum muß gelten $\angle ECF < \angle CEF$ und somit $\overline{EF} < \overline{CF}$.

50. Aus der Abbildung 44 kann man ersehen, daß insgesamt folgende sechs Routen möglich sind:

$$1. S_1 = \overline{OA} + b + a + \overline{BO}$$

$$4. S_4 = \overline{OB} + a + b + \overline{OA}$$

$$2. S_2 = \overline{OA} + c + a + \overline{CO}$$

$$5. S_5 = \overline{OC} + a + c + \overline{AO}$$

$$3. S_3 = \overline{OC} + b + c + \overline{BO}$$

$$6. S_6 = \overline{OB} + c + b + \overline{CO}$$

Da $S_1 = S_4$, $S_2 = S_5$ und $S_3 = S_6$ ist, führt die gegebene Aufgabe darauf, die drei Routen S_1 , S_2 und S_3 zu vergleichen.

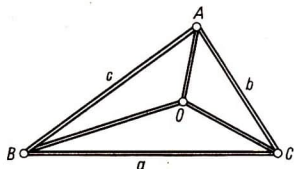


Abb. 44

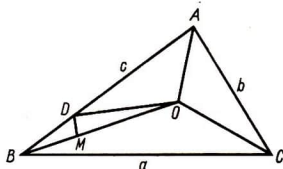


Abb. 45

Geometrische Lösung:

Es wird von $\overline{AB}$ der Abschnitt $\overline{AD} = \overline{AC} = b$ und von $\overline{OB}$ der Abschnitt $\overline{OM} = \overline{OC}$ abgetragen. Daraus ergeben sich die Punkte D und M . Den Punkt D verbindet man mit den Punkten O und M (Abb. 45).

Die beiden Dreiecke AOD und AOC sind kongruent, da sie in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen. Folglich ist $\overline{OD} = \overline{OC}$ und $\overline{OD} = \overline{OM}$. So ist der Winkel DMO Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks DMO . Dann sind der Winkel an der Spitze wie auch die Basiswinkel dieses Dreiecks spitz. Dann muß der Winkel DMB stumpf sein. Daraus folgt aber, daß $\overline{BM} < \overline{BD}$ und somit $\overline{OB} - \overline{OC} < c - b$, also auch

$$(1) \quad \overline{OB} + b < \overline{OC} + c$$

sein muß.

Addiert man auf beiden Seiten dieser Ungleichung (1) noch $\overline{OA} + a$, so ergibt sich:

$$\text{also } \overline{OB} + a + b + \overline{AO} < \overline{OC} + a + c + \overline{AO},$$

$$(2) \quad S_1 < S_2.$$

Durch Überlegungen, die zu den vorangegangenen völlig analog sind, ergibt sich, daß $\overline{OC} + c < \overline{OA} + a$. Addiert man in dieser Ungleichung auf beiden Seiten $\overline{OB} + b$, so ergibt sich:

$$\text{oder } \overline{OC} + b + c + \overline{BO} < \overline{OB} + a + b + \overline{OA}$$

$$(3) \quad S_3 < S_1.$$

Aus den Ungleichungen (2) und (3) kann man schließen, daß S_3 (oder damit gleichbedeutend S_6) die kürzeste Route ist. Wie aus der Abbildung 45 ersichtlich ist, enthalten die Routen S_3 und S_6 nicht die längste Seite des Dreiecks ABC (d.h. die Seite $\overline{BC} = a$), dafür aber den entsprechenden Abschnitt auf der längsten Winkelhalbierenden, also $\overline{BO}$.

Trigonometrische Lösung:

Es werde von O das Lot auf alle drei Seiten des Dreiecks ABC gefällt. Dadurch ergeben sich die Punkte K, L, M , und es ist $\overline{OK} \perp \overline{BC}$, $\overline{OL} \perp \overline{AC}$ und $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ sowie $\overline{OK} = \overline{OL} = \overline{OM} = r$, wobei r der Radius des einbeschriebenen Kreises ist. Ferner ist $\sphericalangle OAL = \frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle OCK = \frac{\gamma}{2}$ und $\sphericalangle OBA = \frac{\beta}{2}$ (Abb. 46).

Somit ergibt sich:

$$(1) \quad \overline{OA} = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad \overline{OB} = \frac{r}{\sin \frac{\beta}{2}}$$

und

$$\overline{OC} = \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

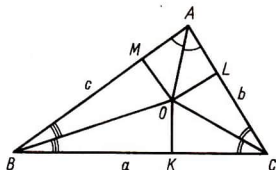


Abb. 46

$$(2) \quad a = \overline{BK} + \overline{KC} = r \left(\cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2} \right)$$

$$b = \overline{CL} + \overline{LA} = r \left(\cot \frac{\gamma}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$c = \overline{AM} + \overline{MB} = r \left(\cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2} \right)$$

Weiter erhält man:

$$(1) \quad S_1 = r \left(\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2} + 2 \cot \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} \right)$$

$$(2) \quad S_2 = r \left(\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \cot \frac{\alpha}{2} + 2 \cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} \right)$$

$$(3) \quad S_3 = r \left(\frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} + 2 \cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} \right).$$

Es werden nun die Differenzen $S_1 - S_2$ und $S_3 - S_1$ gebildet:

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= r \left(\cot \frac{\gamma}{2} - \cot \frac{\beta}{2} + \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} \right) \\ &= r \left[\left(\frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}} - \cot \frac{\beta}{2} \right) - \left(\frac{1}{\sin \frac{\gamma}{2}} - \cot \frac{\gamma}{2} \right) \right] \\ &= r \left(\frac{1 - \cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} - \frac{1 - \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$S_1 - S_2 = r \left(\tan \frac{\beta}{4} - \tan \frac{\gamma}{4} \right) < 0,$$

da aus den Bedingungen der Aufgabe ersichtlich ist, daß gilt $\beta < \gamma$.
Folglich ist

$$(4) \quad S_1 < S_2.$$

Analog ergibt sich:

$$S_3 - S_1 = r \left(\frac{1 - \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} - \frac{1 - \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$S_3 - S_1 = r \left(\tan \frac{\gamma}{4} - \tan \frac{\alpha}{4} \right) < 0,$$

woraus durch die Bedingung der Aufgabe $\gamma < \alpha$ die Ungleichung folgt:

$$(5) \quad S_3 < S_1.$$

Aus den Ungleichungen (4) und (5) kann man unmittelbar schließen, daß die kürzeste der angegebenen Routen durch S_3 gegeben ist (beziehungsweise auch noch durch S_6 , da ja $S_6 = S_3$ ist).

51. Die Konzentration einer Lösung wird durch das Verhältnis der Masse des zu lösenden Stoffes zur Masse des Lösungsmittels angegeben. Dabei ergibt sich ein positiver Bruch. Es kommt also bei der Lösung der Aufgabe darauf an, diese Brüche zu ermitteln und zu vergleichen.

Der zweite Bruch wird in dieser Aufgabe dadurch gebildet, daß zum Zähler und zum Nenner eines Bruches die gleiche positive Zahl addiert wird.

Es soll sein $0 < a < b$, dann ist $\frac{a}{b}$ ein echter positiver Bruch, bei dem Zähler und Nenner positiv sind.

Es werde nun die Differenz $\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b}$ gebildet, wobei $0 < c$ ist.

Es ist $\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} = \frac{(b-a)c}{b(b+c)} > 0$, da bereits gezeigt wurde, daß $0 < a < b$ und $0 < c$ ist. Folglich gilt $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$. Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner positiv sind, wird also größer, wenn man zum Zähler und Nenner jeweils die gleiche positive Zahl addiert.

Daraus folgt, daß die Konzentration einer ungesättigten Kochsalzlösung zunimmt, wenn man gleiche Mengen Salz und Wasser hinzufügt.

Zahlenbeispiel:

Löst man 2 g Salz in 100 g destilliertem Wasser, so erhält man eine 2%ige Kochsalzlösung.

Werden zu dieser Lösung noch 10 g Salz und 10 g destilliertes Wasser hinzugefügt, so wächst die Konzentration auf $\frac{12}{110} \cdot 100\%$, d. h., die Lösung ist nun rund 11%ig.

52. Die Lösung dieser Aufgabe führt auf die Untersuchung der folgenden Frage: Wie verändert sich ein unechter Bruch, dessen Zähler und Nenner positiv sind, wenn man zum Zähler und zum Nenner die gleiche positive Zahl addiert?

Es soll $0 < b < a$ sein. Dann ist $\frac{a}{b}$ ein unechter Bruch, bei dem Zähler

und Nenner positiv sind. Aus der Differenz $\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b}$ mit $0 < c$ ergibt

sich $\frac{a+c}{b+c} - \frac{a}{b} = \frac{(b-a)c}{b(b+c)} < 0$, da nach Voraussetzung $0 < b < a$ und

$0 < c$ gelten. Dann ist im betrachteten Fall $\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$. Ein unechter

Bruch, dessen Zähler und Nenner positiv sind, wird also kleiner, wenn man zum Zähler und zum Nenner jeweils die gleiche positive Zahl addiert.

Folglich wird das Verhältnis der Fußbodenfläche zur Fensterfläche kleiner, wenn man gleichzeitig die Fußbodenfläche und die Fensterfläche um ein und dieselbe Anzahl von Quadratmetern vergrößert.

Zahlenbeispiel:

Es soll die Fußbodenfläche 24 m^2 und die Fensterfläche 2 m^2 betragen. Dann ist

$$\frac{24}{2} \cong 1200 \text{ } \%$$

Wird die Fußbodenfläche und gleichzeitig die Fensterfläche um 6 m^2 erhöht, so ergibt sich:

$$\frac{30}{8} \cong 375 \text{ } \% < 1200 \text{ } \%$$

53. Im Niveau h_2 zeichnet man eine horizontale Gerade $\overline{CC_1}$ (Abb. 47) und schlägt durch die Punkte A und B einen Kreis derart, daß er die Gerade $\overline{CC_1}$ als Tangente hat. Der Berührungspunkt des Kreises mit der Geraden sei O . Von diesem Punkt O aus ist das Bild unter dem größten Winkel zu sehen. Dann ist $\overline{OC}$ die gesuchte Entfernung.

D soll der Schnittpunkt der Verlängerung der Geraden $\overline{AB}$ mit der Geraden $\overline{CC_1}$ sein. Aus dem Sekanten-Tangenten-Satz ergeben sich dann:

$$(1) \quad \overline{OD} = \sqrt{\overline{AD} \cdot \overline{BD}}$$

und

$$(2) \quad \overline{CO} = \sqrt{\overline{AD} \cdot \overline{BD}} - \overline{CD}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= \overline{AB} + \overline{BD} = a + \frac{\overline{BC}}{\cos \alpha} \\ &= a + \frac{h_1 - h_2}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

und

$$\overline{CD} = \overline{BC} \tan \alpha = (h_1 - h_2) \cdot \tan \alpha.$$

Damit wird

$$\overline{CO} = \sqrt{\left(a + \frac{h_1 - h_2}{\cos \alpha}\right) \frac{h_1 - h_2}{\cos \alpha}} - (h_1 - h_2) \tan \alpha$$

und nach Vereinfachung

$$(3) \quad \overline{CO} = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{(a \cos \alpha + (h_1 - h_2)) (h_1 - h_2)} - (h_1 - h_2) \cdot \sin \alpha.$$

54. Der kurze Hebelarm sei a (in cm) und der längere b (in cm). Die Last sei F_1 und die Ausgleichskräfte F_2 und F_3 , wobei mit F_2 die Kraft bezeichnet wird, die am Ende des längeren Hebels angreift.

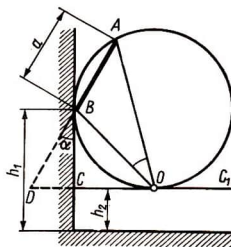


Abb. 47

Dann gelten $F_2 b = F_1 a$ und $F_3 a = F_1 b$.

Man löst nun nach F_2 bzw. nach F_3 auf und erhält:

$$F_2 = \frac{a}{b} F_1 \quad \text{bzw.} \quad F_3 = \frac{b}{a} F_1.$$

Die Addition beider Ausgleichskräfte ergibt

$$F_2 + F_3 = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) F_1.$$

Da die Summe eines Bruches mit seinem reziproken Wert immer größer als 2 ist (mit Ausnahme von $\frac{1}{1}$), erhält man:

$$2 < \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

und damit

$$2 F_1 < F_2 + F_3.$$

55. Die Lösung dieser Aufgabe führt auf den Beweis des folgenden Satzes aus der Geometrie:

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse nie kleiner als das $\frac{1}{\sqrt{2}}$ fache der Kathetensumme!

Beweis:

Im rechtwinkligen Dreieck ABC in Abbildung 48 gelten:

$$(1) \quad \overline{AC} = \overline{AB} \cos \alpha$$

und

$$(2) \quad \overline{BC} = \overline{AB} \cos \beta.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \overline{AC} + \overline{BC} &= \overline{AB} (\cos \alpha + \cos \beta) \\ &= \overline{AB} \cdot 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\ &= \overline{AB} \cdot 2 \cdot \cos 45^\circ \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

$$\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

also

$$(3) \quad \overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AB} \sqrt{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

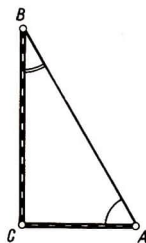


Abb. 48

Man erhält dann:

$$(4) \quad \overline{AB} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} (\overline{AC} + \overline{BC}).$$

Da aber $0 < \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 1$ ist, folgt aus der Formel (4)

$$(5) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (\overline{AC} + \overline{BC}) \leq \overline{AB}.$$

Die Ungleichung (5) geht dann und nur dann in die Gleichung über, wenn $A = B$ gilt, das heißt, nur wenn es sich um ein rechtwinkliges gleichschenkeliges Dreieck handelt.

Aus der Ungleichung (5) ergibt sich unter Berücksichtigung der Relation $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC}$ schließlich:

$$0 < (\overline{AC} + \overline{BC}) - \overline{AB} \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) (\overline{AC} + \overline{BC})$$

oder

$$0 < (\overline{AC} + \overline{BC}) - \overline{AB} \leq \frac{2 - \sqrt{2}}{2} (\overline{AC} + \overline{BC}).$$

56. Diese Aufgabe führt auf den Beweis folgenden geometrischen Satzes:

In jedem beliebigen rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe durch den Scheitelpunkt des rechten Winkels auf die Hypotenuse nicht größer als das $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ fache der Kathetensumme.

Beweis:

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC . Es ist also $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ (Abb. 49).

Es ist zu beweisen, daß $\overline{CD} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} (\overline{AC} + \overline{BC})$.

Wendet man auf die beiden rechtwinkligen Dreiecke ACD und BCD den in der vorhergehenden Aufgabe bewiesenen Satz an, so ergeben sich:

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (\overline{CD} + \overline{AD}) \leq \overline{AC}$$

und

$$(2) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (\overline{CD} + \overline{DB}) \leq \overline{BC}.$$

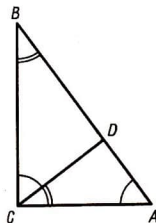


Abb. 49

Durch Addition dieser beiden Ungleichungen erhält man:

$$(3) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (2 \overline{CD} + \overline{AB}) \leq \overline{AC} + \overline{BC}.$$

Wird in der Ungleichung (3) $\overline{AB}$ durch $\frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{\sqrt{2}}$ ersetzt¹, dann ergibt sich

$$(4) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2 \overline{CD} + \frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{\sqrt{2}} \right) \leq \overline{AC} + \overline{BC}.$$

Wird die Ungleichung (4) aufgelöst, so folgt:

$$(5) \quad \overline{CD} < \frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{2\sqrt{2}},$$

wobei im Falle $\overline{AC} = \overline{BC}$ diese Ungleichung in eine Gleichung übergeht.

57. Der gesuchte Winkel zwischen der Segelstellung $\overline{CD}$ und der Kielachse $\overline{AB}$ werde mit α bezeichnet (Abb. 50).

Die Windkraft $\vec{MW}$ werde in eine Komponente $\vec{MQ}$ zerlegt, die parallel zur Segelstellung verläuft, und in eine Komponente $\vec{MN}$, die rechtwinklig zur Segelstellung verläuft. Offensichtlich erhält das Boot nur von der Komponente einen Vortrieb, die durch $\vec{MN}$ dargestellt ist.

Die Kraftkomponente $\vec{MN}$ ihrerseits wird wiederum in zwei Komponenten zerlegt. Die eine Komponente $\vec{MS}$ verläuft senkrecht zur Kielachse und die andere $\vec{MR}$ parallel dazu in Fortbewegungsrichtung.

Die Kraft $\vec{MS}$ bewirkt lediglich eine gewisse „Seitenneigung“ des Bootes, während lediglich der Anteil $\vec{MR}$ die Vorwärtsbewegung verursacht.

Offensichtlich erreicht das Boot für den Winkel α die größte Geschwindigkeit, bei dem die Kraftkomponente $\vec{MR}$ den größten Wert annimmt. Es werde die Abhängigkeit der Größe von $\vec{MR}$ vom Winkel α bestimmt.

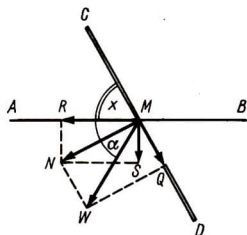


Abb. 50

¹ Das Ungleichheitszeichen ändert sich dadurch nicht, denn es gilt $\frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{\sqrt{2}} \leq \overline{AB}$, was in Aufgabe 55 bewiesen wurde.

Wie aus Abbildung 50 ersichtlich ist, gilt

$$\overline{MN} = \overline{MW} \cos \angle WMN = \overline{MW} \cos (\alpha - \angle NMR)$$

und

$$\angle NMR = \angle SMR - \angle SMN = 90^\circ - \angle AMC = 90^\circ - x.$$

Folglich ist

$$\text{d. h. } \overline{MN} = \overline{MW} \cos [\alpha - (90^\circ - x)] = \overline{MW} \cos [90^\circ - (\alpha + x)],$$

$$(1) \quad \overline{MN} = \overline{MW} \sin (\alpha + x).$$

Ähnlich ergibt sich, daß $\overline{MR} = \overline{MN} \sin \angle MNR = \overline{MN} \sin \angle SMN$ ist, d. h.

$$(2) \quad \overline{MR} = \overline{MN} \sin x.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt:

$$(3) \quad \overline{MR} = \overline{MW} \sin (\alpha + x) \sin x.$$

Darin sind $\overline{MW}$ und α bekannte vorgegebene Größen. Damit drückt die Gleichung (3) den funktionalen Zusammenhang zwischen $\overline{MR}$ und x aus. Es ist jetzt derjenige Wert für x zu suchen, der dem größten Wert von $\overline{MR}$ entspricht.

Aus der trigonometrischen Formel

$$\sin \beta \sin \gamma = \frac{\cos (\beta - \gamma) - \cos (\beta + \gamma)}{2}$$

folgt

$$\sin (\alpha + x) \sin x = \frac{\cos \alpha - \cos (\alpha + 2x)}{2}.$$

Damit ergibt sich:

$$(4) \quad \overline{MR} = \frac{\overline{MW}}{2} (\cos \alpha - \cos (\alpha + 2x)).$$

Aus der Gleichung (4) ist ersichtlich, daß $\overline{MR}$ bei vorgegebenem $\overline{MW}$ und α dann den größten Wert erreicht, wenn

$$\cos (\alpha + 2x) = -1$$

ist, d. h., wenn $x = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ ist.

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß in diesem Fall der Winkel AMC gleich dem Winkel AMW ist, d. h., die Segelfläche ist so zu stellen, daß sie den Nebenwinkel des Winkels α , der die Richtungsdivergenz zwischen der Kiellinie und der Windrichtung angibt, halbiert.

Daher muß die Segelstellung immer so gewählt werden, daß das Segel in der Winkelhalbierenden des Nebenwinkels zu dem Winkel liegt, der von der Kiellinie und der Windrichtung gebildet wird, wenn eine maximale Geschwindigkeit erreicht werden soll.

58. Offensichtlich läßt sich das Verhältnis aus der Masse des Abfalls zur Masse des Gegenstandes dadurch ausdrücken, daß man den Flächeninhalt des Querschnitts der Bohrung zum Flächeninhalt des Querschnitts des Gegenstandes ins Verhältnis setzt. Aus den Bedingungen der Aufgabe ist ersichtlich, daß es sich in beiden Fällen um Zylinder mit unterschiedlichen Radien handelt. Daher wird das Verhältnis der Zylinderquerschnitte auch durch das Quadrat der Radien angegeben.

Folglich führt die Aufgabe auf die Untersuchung der Frage, in welchem Verhältnis der Radius r eines einem Dreieck einbeschriebenen Kreises zum Radius R des demselben Dreieck umbeschriebenen Kreises steht.

Wir zeigen, daß

$$(1) \quad \frac{r}{R} \leq \frac{1}{2} \text{ gilt.}$$

Zur Durchführung des Beweises werden mit der Ungleichung (1) eine Reihe von Veränderungen ausgeführt.

Da $R = \frac{abc}{4A}$ und $r = \frac{A}{p}$ ist, kann die Ungleichung wie folgt verändert werden:

$$(2) \quad \frac{2A}{p} \leq \frac{abc}{4A}.$$

Da $0 < p$ und $0 < A$ ist, folgt:

$$(3) \quad 8A^2 \leq pabc$$

$$(4) \quad 8p(p-a)(p-b)(p-c) \leq pabc$$

$$(5) \quad 8(p-a)(p-b)(p-c) \leq abc$$

$$(6) \quad (2p-2a)(2p-2b)(2p-2c) \leq abc$$

$$(7) \quad (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \leq abc.$$

Die Ungleichung (7) wird quadriert. Dies ist ohne Änderung des Ungleichheitszeichens möglich, denn es gilt

$$0 < (b+c-a), 0 < (a+c-b) \text{ und } 0 < (a+b-c).$$

$$(8) \quad (b+c-a)^2 (a+c-b)^2 (a+b-c)^2 \leq a^2 b^2 c^2$$

$$(9) \quad b + (c-a)b - (c-a)c + (a-b)c - (a-b)a + (b-c)a - \\ - (b-c) \leq a^2 b^2 c^2$$

$$(10) \quad [b^2 - (c-a)^2] [a^2 - (b-c)^2] [c^2 - (a-b)^2] \leq a^2 b^2 c^2.$$

Die Ungleichung (10) gilt sicher, denn für jedes beliebige Dreieck gilt unmittelbar:

$$a^2 - (b-c)^2 \leq a^2; b^2 - (c-a)^2 \leq b^2; c^2 - (a-b)^2 \leq c^2.$$

Aus der Tatsache, daß die Ungleichung (10) richtig ist, kann man leicht schließen, daß dann auch die Ungleichung (1) gelten muß.

$$\text{Somit gilt } \frac{r}{R} \leq \frac{1}{2} \text{ und } \frac{r^2}{R^2} \leq \frac{1}{4} \hat{=} 25\%.^1$$

59. Der gesuchte Widerstand für die Parallelschaltung der n Leiter werde mit $x \Omega$ bezeichnet.

Nach der KIRCHHOFFSchen Regel gilt:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n},$$

woraus folgt

$$(1) \quad x = \frac{1}{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}}.$$

Ist n eine beliebige natürliche Zahl, die nicht kleiner als 2 ist, so gilt

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}.$$

Ersetzt man nämlich die angeführte Summe durch n gleiche Summanden

$\frac{1}{2n}$, dann wird die Summe nur verkleinert, denn es gilt ja

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{2n-2} < \dots < \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}.$$

Hieraus läßt sich wegen $\underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ Summanden}} = \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}$

schließen, daß gilt

$$(2) \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}.$$

Aus den Formeln (1) und (2) folgt dann

$$x < 2.$$

¹ Die Ungleichung $\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}$ erreicht ihren größten Wert, wenn das Dreieck ein gleichseitiges Dreieck ist.

60. Nach den Bedingungen der Aufgabe liegen die Punkte D , C und E in einer vertikalen Ebene, und die beiden Winkel DCQ und ECL sind gleich. Auch soll das Volumen des Quecksilbers in der Röhre gleich bleiben. Hieraus läßt sich folgern, daß im Falle gleichen Druckes in beiden Ballonen (Abb. 17) auch die Quecksilbersäulen $\overline{CA}$ und $\overline{CB}$ gleiche Länge habe, und daß das Dreieck ACB dann gleichschenkelig ist. Die gegebene Aufgabe führt somit auf den Beweis des folgenden geometrischen Satzes:

Von allen Dreiecken, die in einem Winkel und auch in der Summe aus den Seiten, die diesen Winkel bilden, übereinstimmen, hat das gleichschenklige Dreieck die kürzeste dritte Seite.

Gegeben sei also ein gleichschenkliges Dreieck AOB und ein ungleichseitiges Dreieck DOC , in denen gelten soll:

$\overline{AO} = \overline{OB} = \frac{S}{2}$ und $\overline{OD} + \overline{OC} = \overline{AO} + \overline{OB} = S$ (Abb. 51). Dabei bedeutet S die Summe aus den Dreiecksseiten, die den gemeinsamen Winkel einschließen. Es ist zu zeigen, daß gilt:

$$\overline{AB} < \overline{CD}.$$

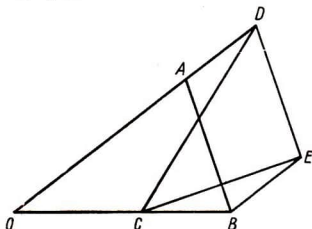


Abb. 51

Geometrischer Beweis:

Parallel zu $\overline{AD}$ wird an B der Abschnitt $\overline{BE} = \overline{AD}$ konstruiert, wie es in Abbildung 51 dargestellt ist. Der Punkt E wird mit den Punkten C und D verbunden.

Die Punkte A , B , E und D bilden ein Parallelogramm $ABED$, aus dem ersichtlich ist, daß gilt:

- (1) $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$
und
- (2) $\overline{DE} = \overline{AB}.$

Da $\overline{BE} = \overline{AD}$ und $\overline{AD} = \overline{BC}$,

(letzteres geht aus

$$\overline{AO} + \overline{BO} = \overline{OA} + \overline{OC} + \overline{CB} = \overline{AD} + \overline{AO} + \overline{OC} = \overline{DO} + \overline{OC}$$

hervor), folgt:

$$(3) \quad \overline{BE} = \overline{BC}.$$

Ferner ergibt sich, da $\sphericalangle ABE = \sphericalangle OAB$ und $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA$ ist, die Relation

$$(4) \quad \sphericalangle ABE = \sphericalangle OBA.$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) läßt sich schließen, daß $\overline{AB} \perp \overline{CE}$ und folglich auch $\overline{DE} \perp \overline{CE}$ ist. Dann gilt:

$$(5) \quad \overline{DE} < \overline{CD}.$$

Aus den Formeln (2) und (5) folgt dann schließlich

$$\overline{AB} < \overline{CD},$$

was zu beweisen war.

Erster trigonometrischer Beweis:

Aus dem Dreieck DOC (Abb. 51) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{CD}}{\overline{OC} + \overline{OD}} &= \frac{2R \sin DOC}{2R \sin ODC + 2R \sin OCD} \\ &= \frac{\sin \frac{DOC}{2} \cos \frac{DOC}{2}}{\sin \frac{ODC + OCD}{2} - \cos \frac{ODC - OCD}{2}} \\ \frac{\overline{CD}}{\overline{OC} + \overline{OD}} &= \frac{\sin \frac{DOC}{2}}{\cos \frac{ODC - OCD}{2}}. \end{aligned}$$

Wird berücksichtigt, daß $\overline{OC} + \overline{OD} = S$ ist, so ergibt sich

$$(1) \quad \overline{CD} = \frac{S \sin \frac{DOC}{2}}{\cos \frac{ODC - OCD}{2}}.$$

$$\text{Da } \frac{\sphericalangle DOC}{2} + \frac{\sphericalangle ODC + \sphericalangle OCD}{2} = 90^\circ, \text{ folgt } \cos \frac{DOC}{2} = \sin \frac{ODC + OCD}{2}.$$

Nach den Bedingungen der Aufgabe bleiben die Werte $\angle DOC$ und S unverändert. Daher läßt sich aus der Gleichung (1) schließen, daß $\overline{CD}$ seinen kleinsten Wert dann und nur dann annimmt, wenn gilt

$$\angle ODC = \angle OCD, \text{ das heißt, wenn}$$

$$(2) \quad \overline{OC} = \overline{OD} = \frac{S}{2}$$

ist.

Zweiter trigonometrischer Beweis:¹

Unter Verwendung des Kosinussatzes ergibt sich aus dem Dreieck DOC (Abb. 51):

$$(1) \quad \overline{CD}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OC}^2 - 2\overline{OD} \cdot \overline{OC} \cos DOC.$$

Da $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = \frac{S}{2} + x$ und $\overline{OC} = \overline{OB} - \overline{BC} = \frac{S}{2} - x$ ist, kann die Relation (1) wie folgt umgeformt werden:

$$(2) \quad \overline{CD}^2 = \left(\frac{S}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{S}{2} - x\right)^2 - 2\left(\frac{S^2}{4} - x^2\right) \cos DOC.$$

Hieraus erhält man nach Vereinfachung:

$$(3) \quad \overline{CD} = \sqrt{2(1 - \cos DOC)x^2 + \frac{S^2}{2}(1 + \cos DOC)}.$$

Da nach den Bedingungen der Aufgabe der Winkel DOC und die Streckensumme S unverändert bleiben, folgt aus der Gleichung (3), daß $\overline{CD}$ seinen kleinsten Wert dann und nur dann annimmt, wenn $x = 0$ ist, d. h., wenn

$$\overline{OD} = \overline{OC} = \frac{S}{2}$$

ist.

61. Der Widerstand des äußeren Kreises soll gleich x (in Ω) sein. Unter Anwendung des OHMSchen Gesetzes $I = \frac{U}{R_{\text{au\ss er}} + R_{\text{innen}}}$ und der Formel $N = I^2 R$ ergibt sich für die Leistung N des Stromes im äußeren Kreis:

$$(1) \quad N = \frac{U^2 x}{(x + R)^2}.$$

Damit ergibt sich N als eine Funktion des Argumentes x . Es gilt, den Wert für die Relation $\frac{x}{R}$ zu finden, für die N sein Maximum annimmt.

¹ Dieser Beweis wird von M. A. CHUTORJAN (Odessa) angegeben.

Aus der Formel (1) ergibt sich durch arithmetische Umformungen eine quadratische Gleichung für $\frac{x}{R}$:

$$(2) \quad RN \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^2 - (U^2 - 2RN) \cdot \frac{x}{R} + RN = 0$$

und hieraus

$$(3) \quad \frac{x}{R} = \frac{2RN \pm U\sqrt{U^2 - 4RN}}{2RN}.$$

Aus (3) wird ersichtlich, daß nur diejenigen Werte für N zulässig sind, für die die Diskriminante größer als Null ist. Die Werte müssen also der Ungleichung

$$(4) \quad 0 \leq U^2 - 4RN$$

genügen. Wird diese Ungleichung nach N aufgelöst, ergibt sich:

$$(5) \quad N \leq \frac{U^2}{4R}.$$

Nach den Bedingungen der Aufgabe sind U und R vorgegebene bekannte Größen, daher folgt aus der Ungleichung (5), daß

$$(6) \quad N_{\max} = \frac{U^2}{4R}.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (3) für N ein, so erhält man für den gesuchten Wert $\frac{x}{R}$

$$\frac{x}{R} = \frac{2R \cdot \frac{U^2}{4R} \pm U\sqrt{U^2 - 4R \cdot \frac{U^2}{4R}}}{2R \cdot \frac{U^2}{4R}} = \frac{\frac{U^2}{2} \pm U \cdot 0}{\frac{U^2}{2}} = 1.$$

Folglich erreicht die Leistung im äußeren Kreis den größten Wert, wenn der Widerstand des äußeren Kreises gleich dem inneren Widerstand des Generators ist.

62. Die Entfernung $\overline{DC}$ sei x (in km) (Abb. 18). Dann ist $\overline{BD} = d - x$ und $\overline{DA} = \sqrt{x^2 + h^2}$. Damit läßt sich die Fahrtdauer y (in h) für den Gesamtweg $\overline{BD} + \overline{DA}$ durch folgende Gleichung darstellen:

$$(1) \quad y = \frac{d-x}{v} + \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{v_1}.$$

y ist also eine Funktion des Argumentes x . Es ist jetzt der Wert für x zu finden, der bei vorgegebenem v und v_1 den kleinsten Wert für y ergibt.

Wird die Formel (1) nach x aufgelöst, so ergibt sich

$$(2) \quad x = \frac{v_1^2 (vy - d) \pm v \sqrt{v_1^2 (vy - d)^2 - h^2 (v^2 - v_1^2)}}{v^2 - v_1^2}.$$

Da entsprechend der Aufgabe für x nur reelle Werte sinnvoll sind, kann aus der Formel (2) geschlossen werden, daß y nur solche Werte annehmen darf, die der Ungleichung

$$(3) \quad 0 \leq v_1^2 (vy - d)^2 - h^2 (v^2 - v_1^2)$$

genügen.

Als Lösung dieser Ungleichung ergibt sich:

$$(4) \quad \frac{h \sqrt{v^2 - v_1^2} + d v_1}{v v_1} \leq y.$$

Hierbei ist $0 < \sqrt{v^2 - v_1^2}$, da ja nach der Aufgabe gilt: $v_1 < v$. Dann ist aber auch y eine reelle Zahl.

Wird berücksichtigt, daß h , v , v_1 und d vorgegebene Größen sind, läßt sich aus der Ungleichung (4) schließen, daß der kleinste Wert von y durch folgende Gleichung ausgedrückt wird:

$$(5) \quad y_{\min} = \frac{h \sqrt{v^2 - v_1^2} + d v_1}{v v_1}.$$

Wird diese Größe in die Gleichung (2) eingesetzt, so zeigt sich, daß y sein Minimum für

$$(6) \quad x = \frac{v_1 h}{v^2 - v_1^2}$$

annimmt.

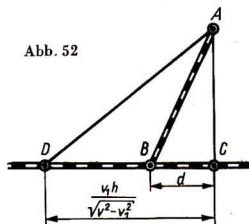
Damit also die Durchfahrt durch die Trasse $\overline{BD} + \overline{DA}$ (oder $\overline{AD} + \overline{DB}$) mit minimalem Zeitaufwand unter Vorgabe der Werte für d , h , v und v_1 möglich ist, muß der Punkt D auf der Strecke $\overline{BC}$ in einer Entfernung

$\overline{DC} = \frac{v_1 h}{\sqrt{v^2 - v_1^2}}$ vom Punkt C gewählt werden.

Erläuterung: Wenn gilt

$$d \leq \frac{v_1 h}{\sqrt{v^2 - v_1^2}},$$

und wenn folglich die Station B zwischen D und C liegt (Abb. 52), muß die Zweigbahn vom Punkt B aus verlegt werden.



Wenn $\overline{BC} < \overline{DC}$ ist, so gilt auch $\overline{AB} < \overline{AD}$, und dann ist

$$\frac{\overline{AB}}{v_1} < \frac{\overline{AD}}{v_1} < \frac{\overline{BD}}{v} + \frac{\overline{AD}}{v_1}.$$

Zahlenbeispiel:

Gegeben sei: $d = 100 \text{ km}$; $h = 40 \text{ km}$; $v = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ und $v_1 = 30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.
Aus der Ungleichung (3) ergibt sich, daß

$$x = \overline{DC} = \frac{30 \cdot 40}{\sqrt{50^2 - 30^2}} \text{ km} = 30 \text{ km}$$

sein muß. Da in diesem Fall $x < d$ ist (es gilt nämlich $30 \text{ km} < 100 \text{ km}$), muß die Zweigbahn vom Punkt D aus errichtet werden.

63. Aus den Abbildungen 53 und 54 ist ersichtlich, daß der Abstand des Gelenkes A von dem durch das Gelenk B erzeugten Kreisbogen den kleinsten Wert annimmt, wenn der Winkel $\overline{AM_1M_2}$ zwischen den Schenkeln $\overline{M_1A}$ und $\overline{M_1M_2}$ gleich 0° (oder 360°) ist. Der Abstand nimmt seinen größten Wert für die Winkelstellung 180° an (Abb. 54).

Wenn daher die Relationen zwischen den Werten $\overline{M_1A}$, $\overline{AB}$, $\overline{M_2B}$ und $\overline{M_1M_2}$ so gewählt werden, daß der Winkel $\overline{AM_1M_2}$ die Werte 0° und 180° annimmt, dann genügen die entsprechenden Werte auch allen dazwischenliegenden Winkelstellungen von 0° bis 360° .

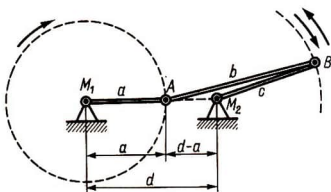


Abb. 53

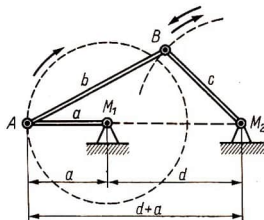


Abb. 54

Folglich reichen als Bedingungen zur Bestimmung der Werte für das Glied $\overline{M_1A}$ in bezug auf die Strecke $\overline{M_1M_2}$ diejenigen aus, die eine freie Drehung des Gliedes $\overline{M_1A}$ um das Gelenk M_1 herum zulassen, wobei das Glied $\overline{M_1A}$ zur Kurbel wird. Es sei $\overline{M_1A} = a$, $\overline{AB} = b$, $\overline{M_2B} = c$ und $\overline{M_1M_2} = d$.

Aus den Abbildungen 53 und 55 ist ersichtlich, daß der Winkel $\angle AM_1M_2 = 0^\circ$ (oder gleich 360°) ist, wenn

$$(1) \quad |b - c| \leq d - a,$$

und aus den Abbildungen 54 und 56, daß der Winkel $\angle AM_1M_2 = 180^\circ$ ist,

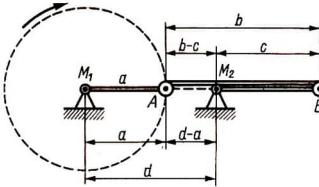


Abb. 55

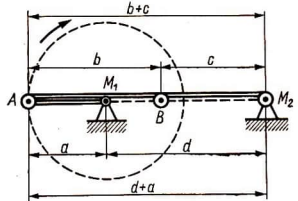


Abb. 56

wenn

$$(2) \quad d + a \leq b + c$$

ist. Folglich kann $\overline{M_1A}$ dann zur Kurbel werden, wenn folgendes Ungleichungssystem erfüllt wird:

$$(3) \quad \begin{aligned} d - a &\geq |b - c| \\ d + a &\leq b + c, \end{aligned}$$

wobei die Werte a, b, c und d aus physikalischen Erwägungen offensichtlich positiv sein müssen.

Zahlenbeispiel:

Gegeben sei: $\overline{AB} = b = 6 \text{ cm}$, $\overline{M_2B} = c = 4 \text{ cm}$ und $\overline{M_1M_2} = d = 5 \text{ cm}$.

Es ist der zulässige Bereich für das Glied $\overline{M_1A}$ so zu bestimmen, daß $\overline{M_1A}$ sich frei um den Punkt M_1 drehen kann, daß also $\overline{M_1A}$ zur Kurbel wird. Aus dem System (3) ergibt sich:

$$5 \text{ cm} - a \geq 6 \text{ cm} - 4 \text{ cm}$$

$$5 \text{ cm} + a \leq 6 \text{ cm} + 4 \text{ cm},$$

woraus folgt:

$$0 \text{ cm} < a \leq 3 \text{ cm}.$$

Vorbemerkungen zu den Aufgaben 64 bis 67

Zur Lösung der Aufgaben 64 bis 67 wird der Satz über die Bestimmung von Extremwerten quadratischer Funktionen benötigt.

Die allgemeine quadratische Funktion $y = ax^2 + bx + c$ besitzt für $x = \frac{b}{2a}$ ein Maximum, wenn $a < 0$ und ein Minimum, wenn $0 < a$ ist.

Da dieser Satz in vielen Lehrbüchern nicht behandelt wird, soll einer seiner möglichen Beweise angeführt werden.

Die quadratische Funktion $y = ax^2 + bx + c$ wird wie folgt umgeformt:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \\ ax^2 + bx + c &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \end{aligned}$$

Da $0 \leq \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ gilt und da $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ eine gegebene Konstante ist, wird das Minimum dann und nur dann angenommen, wenn $x + \frac{b}{2a} = 0$, d.h., wenn $x = -\frac{b}{2a}$.

Hieraus läßt sich schließen, daß auch $y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ für $x = -\frac{b}{2a}$ seinen Extremwert annimmt, und zwar ein Maximum für $a < 0$ und ein Minimum für $0 < a$.

64. Es soll $\overline{AB}$ ein evertikal aufgestellte Filmleinwand, D der Standpunkt für das Auge des Zuschauers, $\overline{DM}$ die Entfernung vom Auge des Zuschauers zur Leinwand, $\overline{AM}$ die Entfernung vom unteren Rand der Filmleinwand zum Auge sein (Abb. 57).

Nach den Bedingungen der Aufgabe sind $\overline{AB} = l$ und $\overline{DM} = a$ vorgegebene Strecken. Die Strecke $\overline{AM}$ und der Gesichtswinkel ADB sind unbekannt. Unbekannt ist auch der Winkel ADM . Der Gesichtswinkel ADB werde mit x bezeichnet, der Winkel ADM mit y und die Entfernung $\overline{AM}$ mit z . Dann ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck BMD :

$$z + l = a \tan(x + y)$$

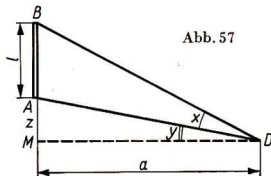


Abb. 57

$$(1) \quad z + l = a \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y},$$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck ADM ergibt sich:

$$(2) \quad \tan y = \frac{z}{a}.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt:

$$z + l = \frac{a^2 \tan x + a z}{a - z \tan x}$$

und hieraus

$$(3) \quad \tan x = \frac{a l}{z^2 + l z + a^2}.$$

Da a und l gegebene Strecken sind, folgt aus der Gleichung (3), daß $\tan x$ und $\tan y$ ihren größten Wert annehmen, wenn z in der quadratischen Gleichung $z^2 + l z + a^2$ ein Minimum wird.

Nach dem Satz über die Extremwerte quadratischer Funktionen (siehe Vorbemerkungen zu den Aufgaben 64 bis 67) hat der quadratische Term $z^2 + l z + a^2$ mit vorgegebenen Werten für l und a sein Minimum, wenn $z = -\frac{l}{2}$ ist.

Folglich muß sich der untere Rand der Leinwand um $\frac{l}{2}$ niedriger als der Standpunkt des Auges befinden, wobei l die Entfernung zwischen dem unteren und dem oberen Rand der Filmleinwand darstellt (Abb. 58).

In diesem Fall wird das Dreieck ADB gleichschenkelig, und $\overline{DM}$ ist die Höhe zur Basis und auch die Winkelhalbierende des Winkels an der Spitze (Abb. 58).

Da $\overline{DM} = a$ und $\overline{AM} = \frac{l}{2}$ ist, folgt

$$(4) \quad \tan \left(\frac{x}{2} \right)_{\max} = \frac{l}{2} : a = \frac{l}{2a}$$

und

$$x_{\max} = 2 \arctan \frac{l}{2a}.$$

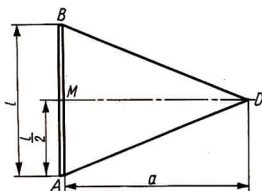


Abb. 58

Zahlenbeispiel:

Gegeben sei: $l = 3$ m und $a = 10$ m. Dann ergibt sich aus der Gleichung (4):

$$x_{\max} = 2 \arctan \frac{3}{20} = 2 \arctan 0,15 \approx 2 \cdot 8^\circ 30' = 17^\circ.$$

In Übereinstimmung mit der bereits vorstehend bewiesenen Aussage wird dieser Gesichtswinkel nur dann erreicht, wenn sich der untere Rand der Filmleinwand unter dem Niveau des Auges des Zuschauers befindet, und zwar um $\frac{3}{2} \text{ m} = 1,5 \text{ m}$.

65. Die gesuchte Brennweite der Linse werde mit f bezeichnet und die entsprechende Entfernung der Linse von der Lichtquelle mit d (Abb. 59).

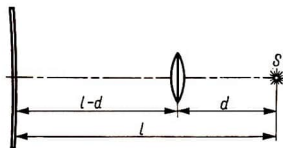


Abb. 59

Dann ist die Entfernung von der Linse bis zur Leinwand, auf der das Bild entsteht, $l - d$. Damit ergibt sich durch Einsetzen in die Linsenformel

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{l-d} = \frac{1}{f}, \text{ woraus sich}$$

$$(1) \quad f = -\frac{1}{l} d^2 + d$$

ergibt. Aus dieser Formel ist ersichtlich, daß f eine quadratische Funktion des Arguments d ist (allerdings unvollständig, da das absolute Glied fehlt).

Dabei ist der Koeffizient von d^2 negativ, da $\frac{1}{l} < 0$ ist.

Unter Verwendung des bereits bewiesenen Satzes über Extremwerte quadratischer Funktionen ergibt sich, daß f sein Maximum für

$$d = -\frac{1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{l}\right)} = \frac{l}{2}$$

hat. Setzt man in der Gleichung (1) d gleich $\frac{l}{2}$, so ergibt sich:

$$f_{\max} = \frac{l}{4}.$$

66. Der Strom mit der Stärke I (in A) wird über zwei parallel geschaltete Leiter, deren Widerstände R_1 (in Ω) bzw. R_2 (in Ω) sind, verzweigt. Bezeichnet man die Stromstärke im ersten Leiter mit I_1 , dann gilt für die Stromstärke im zweiten Leiter $I - I_1$. Mit Hilfe des JOULEschen Gesetzes

$W = 0,24 \cdot U \cdot I \cdot t$ läßt sich die Wärmemenge in der Zeiteinheit $Q = \frac{W}{t}$ ermitteln, die beim Stromdurchfluß in den beiden Leitern umgesetzt wird. Man erhält:

$Q = 0,24 R_1 I_1^2 + 0,24 R_2 (I - I_1)^2$. Durch Vereinfachung erhält man hieraus:

$$(1) \quad Q = 0,24 (R_1 + R_2) I_1^2 - 0,48 R_2 \cdot I \cdot I_1 + 0,24 R_2 I^2.$$

Aus der Gleichung (1) ist ersichtlich, daß Q eine quadratische Funktion des Argumentes I_1 darstellt, wobei in dieser quadratischen Funktion der Koeffizient des quadratischen Gliedes positiv ist. Nach dem bereits bewiesenen Satz über die Ermittlung von Extremwerten quadratischer Funktionen ergibt sich, daß Q sein Minimum dann und nur dann annimmt, wenn gilt:

$$I_1 = - \frac{-0,48 R_2 I}{2 \cdot 0,24 (R_1 + R_2)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I.$$

Die Stromstärke im zweiten Leiter ist dann

$$I_2 = I - I_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I,$$

und somit ist

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

67. Die Beleuchtungsstärke ist der Lichtstärke einer Lichtquelle direkt und dem Quadrat der Entfernung der Lichtquelle von der zu beleuchtenden Fläche indirekt proportional.

Demnach ist die Beleuchtungsstärke eines beliebigen Punktes M , der auf der Verbindungsgeraden zwischen zwei Lichtquellen mit der Lichtstärke I (in Candela) und mit dem Abstand l (in m) liegt, wenn man ferner noch festlegt, daß der Punkt von einer der Lichtquellen den Abstand x (in m) habe, durch folgende Formel gegeben:

$$(1) \quad E = \left(\frac{I}{x^2} + \frac{I}{(l-x)^2} \right).$$

Dabei erhält man die Beleuchtungsstärke E in Lux.

Es folgt nun aus (1):

$$(2) \quad E = I \frac{2x^2 - 2lx + l^2}{(-x^2 + lx)^2}.$$

Aus der Gleichung (2) ist unmittelbar ersichtlich, daß die Beleuchtungsstärke E eine Funktion des Argumentes x ist. Es ist der Wert für x zu bestimmen, für den E ein Minimum annimmt.

Wird die bekannte Formel zur Ermittlung von Extremwerten quadratischer Funktionen auf $2x^2 - 2lx + l^2$ und $(-x^2 + lx)^2$, die im Zähler und Nenner der Funktion E auftreten, gebracht, so zeigt sich, daß die erste Funktion ein Minimum für $x = \frac{l}{2}$ annimmt, während die zweite dort ein Maximum erhält.

Daher entspricht dem Wert $x = \frac{l}{2}$ einem Minimum der Funktion E .

Einleitende Bemerkungen zu den Aufgaben 68 und 69

Die Aufgaben 68 und 69 werden mit Hilfe einer Ungleichung gelöst, die in der Literatur allgemein als BUNJAKOWSKISCHE Ungleichung angegeben wird.¹ Die BUNJAKOWSKISCHE Ungleichung besagt folgendes:

Seien $a_1, a_2, \dots, a_n$ und $b_1, b_2, \dots, b_n$ beliebige reelle Zahlen, so gilt stets folgende Ungleichung

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2,$$

die dann und nur dann zur Gleichung wird, wenn gilt

$$a_1 = k b_1; a_2 = k b_2; \dots; a_n = k b_n,$$

wobei k ein gegebener Proportionalitätsfaktor sein soll.

Der Beweis für die BUNJAKOWSKISCHE Ungleichung ist sehr umfangreich, aber völlig elementar und in allen Teilen für die Schüler verständlich.

68. Wenn in der BUNJAKOWSKISCHEN Ungleichung

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

gesetzt wird $b_1 = b_2 = \dots = b_n$, so nimmt sie die Form an:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) n \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$$

oder

$$(1) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) n}.$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ sollen die Seitenlängen quadratischer Fensterrahmen in Metern sein, dann ist $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = A$ die gesamte Fensterfläche in Quadratmetern. Entsprechend der Aufgabe soll die Gesamtfläche aller n Fenster A sein.

¹ W. J. BUNJAKOWSKI (1804—1889), hervorragender russischer Mathematiker des 19. Jahrhunderts.

Dann ergibt sich nach der Ungleichung (1):

$$(2) \quad 4(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \leq 4\sqrt{An},$$

wobei $4(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ die Gesamtlänge der Fensterrahmen aller n Fenster in Metern sein soll.

Hieraus folgt, daß der gesuchte Wert in MDN durch die Ungleichung

$$(3) \quad 4(a_1 + a_2 + \dots + a_n)d \leq 4\sqrt{A}nd$$

ausgedrückt werden kann.

Da für A , n und d Werte vorgegeben sind, folgt aus der Ungleichung (3) unmittelbar, daß die Gesamtkosten für die Rahmen aller n Fenster $4\sqrt{A}nd$ MDN betragen:

$$(4) \quad [4(a_1 + a_2 + \dots + a_n)d]_{\max} = 4\sqrt{A}nd.$$

Nach den angeführten Aussagen über den Übergang einer BUNJAKOWSKI-schen Ungleichung in eine Gleichung (siehe die einleitenden Bemerkungen zu den Aufgaben 68 und 69) folgt für die Relation (4), daß sie dann und nur dann gültig ist, wenn

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{\sqrt{An}}{n} = \sqrt{\frac{A}{n}},$$

das heißt, wenn alle n quadratischen Fenster untereinander gleich sind.

69. Werden die n Widerstände der gegebenen Leiter mit $R_1, R_2, \dots, R_n$ und der Gesamtwiderstand für Reihenschaltung mit R_R und der für Parallelschaltung mit R_p bezeichnet, so kann man in der BUNJAKOWSKISCHE Ungleichung

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

die Größen $a_1, a_2, \dots, a_n$ durch $\frac{1}{\sqrt{R_1}}, \frac{1}{\sqrt{R_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{R_n}}$ und die Größen $b_1, b_2, \dots, b_n$ durch $\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2}, \dots, \sqrt{R_n}$ ersetzen. Damit ergibt sich:

$$(1) \quad \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}\right)(R_1 + R_2 + \dots + R_n) \geq n^2.$$

In dieser Ungleichung ist n eine bekannte vorgegebene Zahl. Daraus kann man schließen, daß

$$(2) \quad \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}\right)(R_1 + R_2 + \dots + R_n)\right]_{\max} = n^2$$

ist, wobei nach der hinreichenden und notwendigen Bedingung für den Übergang einer BUNJAKOWSKISCHEN Ungleichung in eine Gleichung (siehe einleitende Bemerkungen zu den Aufgaben 68 und 69) folgt, daß diese Relation nur eintritt, wenn gilt:

$$R_1 = R_2 = \dots = R_n,$$

d.h., wenn alle n Widerstände untereinander gleich sind.

Nach bekannten physikalischen Gesetzen über den Widerstand parallelgeschalteter und in Reihe geschalteter Leiter gilt:

$$R_r = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

bzw.

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

Damit läßt sich für die gegebene Aufgabe die Gleichung (2) in folgender Weise vereinfachen:

$$(3) \quad \frac{R_R}{R_p} \geq n^2.$$

wobei $\frac{R_R}{R_p} = n^2$ dann und nur dann eintritt, wenn alle Widerstände gleich sind, also $R_1 = R_2 = \dots = R_n$.

1. Zahlenbeispiel:

Gegeben sei $n = 3$, $R_1 = 2 \Omega$, $R_2 = 3 \Omega$ und $R_3 = 4 \Omega$. Dann ist

$$R_R = (2 + 3 + 4) \Omega = 9 \Omega, \quad R_p = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} \Omega = \frac{12}{13} \Omega$$

$$\frac{R_R}{R_p} = 9 : \frac{12}{13} = 9 \frac{3}{4} > 3^2 = 9.$$

2. Zahlenbeispiel:

Gegeben sei: $n = 3$, $R_1 = R_2 = R_3 = 2 \Omega$. Dann ist

$$R_R = 6 \Omega, \quad R_p = \frac{2}{3} \Omega, \quad \frac{R_R}{R_p} = 6 : \frac{2}{3} = 9 = 3^2.$$

Einleitende Bemerkungen zu den Aufgaben 70 bis 73

Die Aufgaben 70 bis 73 können mit Hilfe des folgenden Satzes gelöst werden:

Die Summe von n positiven Summanden, deren Produkt gegeben ist, nimmt dann und nur dann den kleinstmöglichen Wert an, wenn alle Summanden untereinander gleich sind.

In den nachfolgenden Aufgaben findet dieser Satz nur Anwendung, um das Minimum von Summen aus zwei oder drei Summanden zu bestimmen. Daher soll der Beweis dieses Satzes auch nur für $n = 2$ und $n = 3$ ausgeführt werden. Aus den bekannten Sätzen über das arithmetische und geometrische Mittel n nichtnegativer Zahlen¹ ergibt sich unmittelbar für $n = 2$ und $n = 3$:

$$(1) \quad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$(2) \quad \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

oder

$$(3) \quad 2\sqrt{ab} \leq a+b$$

$$(4) \quad 3\sqrt[3]{abc} \leq a+b+c.$$

Das Gleichheitszeichen gilt bekanntlich bei diesen Ungleichungen dann und nur dann, wenn alle betrachteten Größen gleich sind, also wenn gilt $a = b$ und $a = b = c$.

Aus den Ungleichungen (3) und (4) kann man schließen, daß, wenn $ab = Q$ und $acb = F$ ist, gelten muß:

$$(5) \quad (a+b)_{\min} = 2\sqrt{Q}$$

$$(6) \quad (a+b+c)_{\min} = 3\sqrt[3]{F}.$$

Dabei sind Q und F gewisse bekannte vorgegebene Zahlen. Dabei nehmen die angeführten Summen (5) und (6) dann ihren kleinsten Wert an, wenn gilt $a = b = \sqrt{Q}$ bzw. $a = b = c = \sqrt[3]{F}$.

70. Es sei die Länge des Hebels gleich x (in cm). Dann beträgt das Eigengewicht des Hebels kx (in kp), und es greift in der Entfernung $\frac{x}{2}$ vom Drehpunkt an (Abb. 60).

Nach dem Hebelgesetz ergibt sich dann:

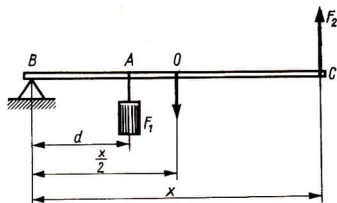


Abb. 60

¹ Den Beweis dieser Behauptungen für $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ und $n = 2k$, wobei k eine beliebige natürliche Zahl sein kann, wird in dem Buch von I. W. BARANOW und S. F. LJAPIN *Aufgaben aus der Algebra mit Beweisen* angegeben. Diese Beweise findet man auch in jedem einschlägigen Buch über die höhere Analysis (v. MANGOLDT-KNOPF, W. I. SMIRNOW u.a.).

$$F_1 d + kx \cdot \frac{x}{2} = F_2 x,$$

woraus folgt:

$$(1) \quad F_2 = \frac{F_1 d}{x} + \frac{kx}{2}.$$

Werden in der Gleichung (1) die Größen $F_1 d$ und k als bekannt und vorgegeben betrachtet, und die Größe x als Variable, so stellt F_2 eine Funktion des einen Argumentes x dar, wobei x (in cm) die veränderliche Länge des Hebels sein soll. Aus der Formel (1) ist weiterhin ersichtlich, daß sich F_2 aus den beiden Summanden $\frac{F_1 d}{x}$ und $\frac{kx}{2}$ darstellen läßt. Das Produkt dieser beiden Summanden ist eine bekannte Konstante, denn es ist ja:

$$\frac{F_1 d}{x} \cdot \frac{kx}{2} = \frac{F_1 d k}{2}.$$

Hieraus läßt sich unter Anwendung der in den einleitenden Bemerkungen festgestellten Fakten schließen, daß man für F_2 den kleinsten Wert erhält, wenn x der Relation

$$(2) \quad \frac{F_1 d}{x} = \frac{kx}{2}$$

genügt.

Die Lösung dieser Gleichung ergibt, daß F_2 ein Minimum dann und nur dann annimmt, wenn gilt:

$$(3) \quad x = \sqrt{\frac{2 F_1 d}{k}}.$$

Aus den Gleichungen (1) und (3) folgt:

$$(4) \quad F_{2\min} = \sqrt{F_1 d k}.$$

71. Die gesuchte Länge und Breite werde mit x bzw. y (in m) bezeichnet. Die Länge der ganzen Umzäunung der Anlage erhalte die Bezeichnung z (Abb. 20).

Dann ist:

$$(1) \quad 2xy + \frac{\pi y^2}{4} = A$$

und

$$(2) \quad 4x + 2y + \pi y = z.$$

Gesucht werden die Werte für x und y , die bei vorgegebenem konstantem A (in m²) dem kürzesten Wert von z entsprechen.

Aus den Gleichungen (1) und (2) wird x als Funktion von y ausgedrückt:

$$(3) \quad x = \frac{A}{2y} - \frac{\pi y}{8}.$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt dann

$$(4) \quad z = \frac{2A}{y} + \frac{\pi + 4}{2} y.$$

Die Gleichung (4) schließlich bringt zum Ausdruck, daß sich z als Summe zweier positiver Summanden darstellen läßt, deren Produkt eine Konstante ist, denn es gilt ja:

$$\frac{2A}{y} \cdot \frac{\pi + 4}{2} y = (\pi + 4) A,$$

und A ist entsprechend den Bedingungen der Aufgabe eine vorgegebene Größe. Damit sind die Voraussetzungen für die Anwendung der in den einleitenden Bemerkungen angeführten Relationen gegeben. Es erreicht demnach z dann und nur dann sein Minimum, wenn y der Relation

$$\frac{2A}{y} = \frac{\pi + 4}{2} y$$

genügt.

Durch Lösen dieser Gleichung ergibt sich:

$$(5) \quad y = 2 \sqrt{\frac{A}{\pi + 4}}.$$

Aus den Gleichungen (3) und (5) ergibt sich dann der entsprechende Wert für x zu:

$$(6) \quad x = \sqrt{\frac{A}{\pi + 4}}.$$

Aus den Gleichungen (4) und (5) folgt dann schließlich:

$$(7) \quad z_{\min} = 2 \sqrt{(\pi + 4) A}.$$

Zahlenbeispiel:

Gegeben sei: $A = 10\,000 \text{ m}^2$. Dann folgt auf Grund der Gleichungen (5), (6) und (7):

$$y = 2 \sqrt{\frac{100000}{\pi + 4}} \text{ m} \approx 113 \text{ m},$$

$$x = \sqrt{\frac{100000}{\pi + 4}} \text{ m} \approx 56,5 \text{ m},$$

$$z_{\min} = 2 \sqrt{(\pi + 4) 100000} \text{ m} \approx 535 \text{ m}.$$

Es ist leicht zu zeigen, daß sich bei gleichem vorgegebenem A und anderen Werten für x und y ein größerer Wert für die Gesamtlänge der Umzäunung z ergibt.

Es sei beispielsweise $y = 40$ m. Dann ergibt sich aus der Gleichung (3) der Wert für x zu

$$x = \left(\frac{100000}{40} + \frac{\pi \cdot 40}{8} \right) \text{ m} = 265,7 \text{ m},$$

und aus der Gleichung (4) findet sich der entsprechende Wert für z zu

$$z = \left(\frac{2 \cdot 100000}{40} + \frac{\pi + 4}{2} 40 \right) \text{ m} = 642,8 \text{ m} > 535 \text{ m}.$$

72. Wie aus der Physik allgemein bekannt ist, ist die elektromotorische Kraft und der innere Widerstand einer Batterie aus n gleichen Akkumulatoren, die in Reihe geschaltet sind, nE und nR_i , wenn E die elektromotorische Kraft und R_i der innere Widerstand des einzelnen Akkumulators ist. Werden m solcher Batterien parallel geschaltet, so ergeben sich die elektromotorische Kraft und der innere Widerstand der Gesamtbatterie zu nE bzw. $\frac{nR_i}{m}$.

Wird diese Batterie an einen äußeren Kreis geschlossen, der den Widerstand R_a hat, so ergibt sich nach dem OHMSchen Gesetz für die Stromstärke I :

$$(1) \quad I = \frac{nE}{\frac{nR_i}{m} + R_a}.$$

Verändert man in der Gleichung (1) den Bruch durch Erweitern mit $\frac{N}{n}$ und berücksichtigt man, daß nach den Bedingungen der Aufgabe $mn = N$ gilt, wobei N die Gesamtzahl aller Akkumulatoren der Batterie darstellt, dann ergibt sich:

$$(2) \quad I = \frac{NE}{nR_i + \frac{N}{n}R_a}.$$

Bei gegebenem E , R_a , R_i , N und veränderlichem n zeigt sich in der Gleichung (2), daß I eine Funktion des Argumentes n ist. Es ist derjenige Wert von n zu bestimmen, für den unter Vorgabe konstanter N , E , R_a und R_i , I einen maximalen Wert annimmt.

Im Bruch $\frac{NE}{nR_i + \frac{N}{n}R_a}$ ist der Zähler eine Konstante.

Der Nenner ergibt sich als Summe zweier Summanden, deren Produkt $n R_i \cdot \frac{N}{n} R_a = N R_a R_i$ wiederum eine Konstante ist, da ja N , R_a und R_i vorgegebene konstante Größen sind.

Die Summe $n R_i + \frac{N}{n} R_a$ erreicht also dann und nur dann den kleinsten Wert (siehe einleitende Bemerkungen zu den Aufgaben 70 bis 73) und folglich der gesamte Bruch $\frac{N E}{n R_i + \frac{N}{n} R_a}$ seinen größten Wert, wenn gilt

$$n R_i = \frac{N}{n} R_a.$$

Hieraus erhält man

$$(3) \quad n = \sqrt{\frac{N R_a}{R_i}}.$$

Aus den Gleichungen (3) und (2) folgt dann:

$$(4) \quad I_{\max} = \frac{N E}{2 \sqrt{N R_a R_i}}.$$

Anmerkung: Die Gleichung $n R_i = \frac{N}{n} R_a$, die als hinreichende und notwendige Bedingung dafür gilt, daß bei vorgegebenem E , R_a , R_i und N der Strom dieser Kette seine maximale Stärke erreicht, kann wie folgt umgeformt werden:

$$n R_i = m R_a,$$

denn es ist ja $\frac{N}{n} = m$. Hieraus folgt $\frac{n \cdot R_i}{m} = R_a$.

Der Bruch $\frac{n R_i}{m}$ entspricht aber dem inneren Widerstand der Batterie und R_a drückt den äußeren Widerstand aus. Hieraus folgt, daß eine Batterie dann und nur dann einen maximalen Strom abgibt, wenn ihr innerer Widerstand gleich dem äußeren Widerstand ist.

Zahlenbeispiel:

Gegeben sei: $E = 1,4 \text{ V}$, $R_i = 0,5 \Omega$, $N = 50$ und $R_a = 6,25 \Omega$.

Dann ergibt sich aus den Gleichungen (3) und (4) für $n = \sqrt{\frac{50 \cdot 6,25}{0,5}} = 25$

und somit $m = \frac{50}{25} = 2$ eine maximale Stromstärke zu:

$$I_{\max} = \frac{50 \cdot 1,4}{2 \sqrt{50 \cdot 6,25 \cdot 0,5}} \text{ A} \approx 1,25 \text{ A}.$$

73. Die Aufgabe erfordert, daß Relationen zwischen dem Radius r der Grundfläche und der Höhe h des Zylinders ermittelt werden, so daß bei fest vorgegebenem Volumen V die Oberfläche A_0 als Minimum bestimmt werden kann.

Es ist

$$(1) \quad A_0 = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$(2) \quad h = \frac{V}{\pi r^2},$$

und hieraus erhält man

$$(3) \quad A_0 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 = \frac{V}{r} + \frac{V}{r} + 2\pi r^2.$$

Somit soll derjenige Wert von r gefunden werden, für den die Summe $\frac{V}{r} + \frac{V}{r} + 2\pi r^2$ zum Minimum wird.

Der Ausdruck $\frac{V}{r} + \frac{V}{r} + 2\pi r^2$ bildet jedoch eine Summe dreier positiver Summanden, deren Produkt $\frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r} \cdot 2\pi r^2 = 2\pi V^2$ bei fest vorgegebenem V eine Konstante ist.

Damit sind aber die Voraussetzungen gegeben, die für die Anwendung der in den einleitenden Bemerkungen angeführten Sätze erforderlich sind. Das besagt aber, daß bei vorgegebenem Volumen V der Oberflächeninhalt A_0 dann und nur dann den kleinsten Wert annimmt, wenn gilt:

$$\frac{V}{r} = 2\pi r^2,$$

d. h., wenn

$$(4) \quad V = 2\pi r^3$$

ist. Aus den Gleichungen (2) und (4) folgt dann schließlich

$$(5) \quad h = 2r.$$

Einleitende Bemerkungen zu den Aufgaben 74 bis 81

Für die Lösung der Aufgaben 74 bis 81 wird folgender Satz herangezogen:

Das Produkt von n positiven Zahlen, deren Summe eine Konstante ist, nimmt dann und nur dann sein Maximum an, wenn alle Zahlen untereinander gleich sind.

In den folgenden Aufgaben wird dieser Satz lediglich für solche Produkte benötigt, die nicht mehr als vier Faktoren haben.

Darum wird der Beweis dieses Satzes auch auf die Werte $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$ eingeschränkt.

Aus den Sätzen über das arithmetische und das geometrische Mittel von zwei, drei oder vier nichtnegativen Zahlen folgt:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4}$$

und so $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$

$$abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27}$$

$$abcd \leq \frac{(a+b+c+d)^4}{256}$$

Ferner gilt, daß diese Ungleichungen dann und nur dann in Gleichungen übergehen, wenn $a = b$ bzw. $a = b = c$ oder aber $a = b = c = d$ gilt.

Aus diesen Gleichungen folgt beispielsweise, wenn gesetzt wird

$a + b = M$, $a + b + c = N$ oder $a + b + c + d = Q$

mit fest vorgegebenen konstanten Werten für M , N und Q , daß dann

$$ab_{\max} = \frac{M^2}{4},$$

$$abc_{\max} = \frac{N^3}{27}$$

und $abcd_{\max} = \frac{Q^4}{256}$

ist. Dabei nehmen diese Produkte dann und nur dann ihr Maximum an, wenn gilt:

$$a = b = \frac{M}{2}$$

bzw. $a = b = c = \frac{N}{3}$

bzw. $a = b = c = d = \frac{Q}{4}$.

74. Entsprechend der Aufgabe sollen solche Verbindungen zwischen den Seiten eines Rechtecks gefunden werden, daß der Flächeninhalt bei vorgegebenem Umfang von $2p$ ein Maximum wird.

Lösung 1: Die eine Seite des Rechtecks werde mit x bezeichnet. Dann ist die zweite, nicht parallele Seite gleich $p - x$.

Die Fläche des Rechtecks wird dann durch die Formel ausgedrückt:

$$(1) \quad A = x(p - x).$$

Aus (1) zeigt sich, daß der Wert A als Produkt zweier positiver Faktoren dargestellt wird, deren Summe $x + (p - x) = p$ eine Konstante ist.

Dann kann nach den in den einleitenden Bemerkungen zu den Aufgaben 74 bis 81 angeführten Sätzen geschlossen werden, daß dieses Produkt dann und nur dann sein Maximum annimmt, wenn beide Faktoren gleich sind, als wenn gilt:

$$(2) \quad x = p - x.$$

Aus (2) folgt unmittelbar, daß von allen Rechtecken mit dem vorgegebenen Umfang $2p$ das Quadrat die größte Fläche hat.

Folglich muß das rechteckige Fenster, das den Umfang von $2p$ hat, ein Quadrat sein, damit es die größtmögliche Menge Licht durchläßt.

Lösung 2: Die Gleichung $A = x(p - x)$ wird in $A = -x^2 + px$ umgeformt. In dieser Gleichung zeigt sich, daß A eine quadratische Funktion (unvollständig, da das absolute Glied fehlt) des Argumentes x ist. Darum kann hier der Satz über die Ermittlung von Extremwerten quadratischer Funktionen (siehe einleitende Bemerkungen zu den Aufgaben 64 bis 67) angewendet werden. Danach nimmt A seinen größten Wert dann und nur dann an, wenn $x = -\frac{p}{2 \cdot (-1)} = \frac{p}{2}$ ist, d.h., wenn das Rechteck mit dem vorgegebenen Umfang $2p$ zum Quadrat wird.

75. Es sei $ABCD$ ein Rechteck, das einem Kreis mit dem vorgegebenen Durchmesser d einbeschrieben ist. Der Flächeninhalt $ABCD$ wird durch die Gleichung $A = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$ ausgedrückt. Die Aufgabe führt somit auf das Problem, für $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ solche Werte zu bestimmen, daß deren Produkt bei vorgegebener Diagonale $\overline{AC} = d$ ein Maximum wird.

Da gilt $0 < A$, entsprechen diejenigen Werte von $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$, die dem Maximum von A entsprechen, auch dem Maximum von A^2 . Man kann daher die Untersuchungen an der Funktion $A = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$ auch durch eine Untersuchung an der Funktion $A^2 = \overline{AB}^2 \cdot \overline{BC}^2$ ersetzen.

Nach dem Satz des PYTHAGORAS gilt $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 = d^2$. Daraus folgt, daß $A^2 = \overline{AB}^2 \cdot \overline{BC}^2$ das Produkt zweier positiver Faktoren bildet, deren Summe einen konstanten Wert besitzt. Nun kann der in den

einleitenden Bemerkungen angeführte Satz angewendet werden. Es nimmt A^2 und damit auch A sein Maximum dann und nur dann an, wenn $\overline{AB^2} = \overline{BC^2}$ ist und wenn also $\overline{AB} = \overline{BC}$ ist.

Für $\overline{AB} = \overline{BC}$ wird das gesuchte Rechteck aber zum Quadrat. Folglich hat das Quadrat von allen Rechtecken, die einem Kreis mit vorgegebenem Durchmesser einbeschrieben sind, den größten Flächeninhalt.

Wenn also aus einem Rundholz ein rechteckiger Balken mit geringstem Abfall ausgeschnitten werden soll, so muß der Balken einen quadratischen Querschnitt haben.

76. Die Laubhütte wird in der Form einer dreiseitigen Pyramide aufgebaut, deren Kanten an der Spitze rechtwinklig aufeinander stehen. Diese Kantenlängen werden mit x , y und z bezeichnet. Dann ergibt sich das Volumen der Laubhütte zu

$$(1) \quad V = \frac{1}{6} x y z.$$

Die Größen x , y und z können als veränderliche Größen angenommen werden. Ihre Summe $x + y + z = l$ ist aber eine Konstante. Dann kann der in den einleitenden Bemerkungen angeführte Satz angewandt werden, da ein Produkt aus positiven Faktoren ein Maximum werden soll, bei dem die Summe der Faktoren eine Konstante bildet. Nach dem erwähnten Satz nimmt V dann und nur dann sein Maximum an, wenn gilt:

$$x = y = z = \frac{l}{3}.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (1) ein, so ergibt sich

$$(2) \quad V_{\max} = \frac{l^3}{162}.$$

77. Das Volumen des kegelförmigen Filters kann nach der Formel

$$(1) \quad V = \frac{1}{3} \pi x^2 \sqrt{r^2 - x^2}$$

ermittelt werden.

Dabei ist x der Radius der Grundfläche. Seine Länge ist gleich der Länge des Kreisbogens b_1 (Abb. 21).

Aus der Formel (1) ist ersichtlich, daß die positive Funktion $x^2 \sqrt{r^2 - x^2}$ gleichzeitig mit der Funktion $x^2(r^2 - x^2)$ das Maximum annimmt, da letztere lediglich das Quadrat der zuerst angeführten Funktion ist. Das Produkt $x^4(r^2 - x^2)$ kann durch eine identische Umformung auf die Form $\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot (2r^2 - 2x^2)$ gebracht werden.

Die Summe $x^2 + x^2 + (2r^2 - 2x^2) = 2r^2$ ist aber eine Konstante, da r eine vorgegebene feste Größe ist. Damit kann der in den einleitenden Bemerkungen angeführte Satz angewandt werden. Das Volumen V erreicht damit dann und nur dann sein Maximum, wenn gilt $x^2 = 2r^2 - 2x^2$ oder wenn

$$(2) \quad x = \frac{r\sqrt[3]{6}}{3}$$

ist. Da aber

$$(3) \quad 2\pi x = b_1 = \frac{\pi r(360^\circ - \sphericalangle AMB)}{180^\circ}$$

ist, folgt aus den Formeln (2) und (3) schließlich, daß das Volumen V seinen maximalen Wert erreicht, wenn gilt:

$$\sphericalangle AMB \approx 66^\circ.$$

78. Es sei M das Zentrum des Quadrates $ABCD$, $\overline{MF}$ die Senkrechte, die in diesem Punkt auf der Quadratfläche errichtet wird, und der Punkt K die Mitte der Seite $\overline{BC}$. Wird F mit K verbunden und der Winkel FKM mit dem Buchstaben x bezeichnet, so soll die Strecke $\overline{MF}$ die Bezeichnung erhalten (Abb. 61).

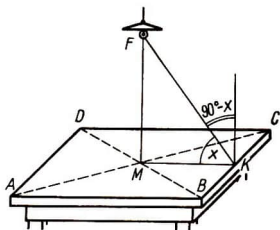
Nach den bereits angeführten Gesetzen aus der Optik ergibt sich die Beleuchtungsstärke in Lux im Punkt K für eine Lichtquelle von I Candela, die sich im Punkt F befinden soll, nach der Formel:

$$E = \frac{I}{FK^2} \cos(90^\circ - x)$$

$$= \frac{I}{\left(\frac{a}{2 \cos x}\right)^2} \sin x$$

$$E = \frac{4I}{a^2} \sin x \cos^2 x$$

$$(1) \quad E = \frac{4I}{a^2} \sin x (1 - \sin^2 x).$$



Die Funktion $\sin x (1 - \sin^2 x)$ ist positiv, da nach der Aufgabe nur Werte im Intervall $0^\circ < x < 90^\circ$ zulässig sind. Dann nimmt die Funktion ihr Maximum für dieselben Werte an, wie auch die Funktion $\sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2$, die man auf folgende Form bringen kann:

$$\frac{1}{2} [2 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) (1 - \sin^2 x)].$$

Da aber

$$2 \sin^2 x + (1 - \sin^2 x) + (1 - \sin^2 x) = 2$$

eine Konstante ist, sind für die zuletzt angeführte Funktion die Voraussetzungen gegeben, den in den einleitenden Bemerkungen angeführten Satz anzuwenden. Das Produkt $2 \cdot \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot (1 - \sin^2 x)$ nimmt also seinen größten Wert dann und nur dann an, wenn

$$2 \sin^2 x = 1 - \sin^2 x \text{ gilt,}$$

woraus

$$\sin x = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ folgt.}$$

Die Beleuchtungsstärke E erreicht im Punkt K also den größten Wert, wenn $x = \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}}$ ist. Das ist aber gleichbedeutend mit

$$x = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck MFK (Abb. 61) ergibt sich, daß dieser Winkelgröße eine Kathetenlänge $\overline{MF}$ entspricht, die gleich $\overline{MK} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ ist.

Hieraus folgt, daß eine Lampe, die eine quadratische Fläche mit der Seitenlänge a (in m) maximal ausleuchten soll, über dem Zentrum des Quadrates in einer Höhe von $\frac{a}{2\sqrt{2}} \approx 0,36 a$ angebracht werden muß.

79. Aus der Abbildung 62 ist ersichtlich, daß gilt:

$$(1) \quad a^2 + h^2 = d^2.$$

Der Balken wird dann die größte Tragkraft haben, wenn zwischen a und h die Relation ah^2 gilt, wobei $0 < a$ und $0 < h$ sein soll.

Es ist

$$(2) \quad ah^2 = 2 \sqrt{a^2 \frac{h^2}{2} \frac{h^2}{2}}.$$

Es ist aber auch

$$a^2 + \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{2} = a^2 + h^2 = d^2$$

eine vorgegebene konstante Größe, womit wiederum die Voraussetzungen für die Anwendung des in den einleitenden Bemerkungen

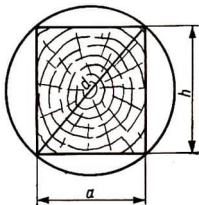


Abb. 62

angeführten Satzes gegeben sind. Das Produkt ah^2 nimmt also dann und nur dann sein Maximum an, wenn gilt:

$$(3) \quad a^2 = \frac{h^2}{2}.$$

Aus den Gleichungen

$$a^2 + h^2 = d^2$$

$$\text{und} \quad a^2 = \frac{h^2}{2}$$

ergeben sich

$$a = d \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ und } h = d \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Hieraus folgt, daß aus einem kreisförmigen Baumstamm mit dem Durchmesser d ein Balken rechtwinkligen Querschnitts mit der Breite a und der Höhe h und maximaler Tragkraft geschnitten werden kann, wenn Breite und Höhe die Werte $\frac{1}{3} d \sqrt{3}$ bzw. $\frac{1}{3} d \sqrt{6}$ annehmen.

80. Es ist $V = \pi r^2 h = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \sqrt{2\pi r^2 \cdot \pi r h \cdot \pi r h}$, wobei gilt $0 < 2\pi r^2$ und $0 < \pi r h$.

Dabei ist $2\pi r^2 + \pi r h + \pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r h = A$. Nach den Bedingungen der Aufgabe kann A als gegebene Konstante angenommen werden. Da die Bedingungen erfüllt sind, nach denen der in den einleitenden Bemerkungen angeführte Satz angewandt werden darf, ergibt sich, daß V sein Maximum annimmt, wenn $2\pi r^2 = \pi r h$ ist. Das bedeutet, daß $2r = h$ ist, daß also der Zylinder eine Höhe hat, die genauso lang ist wie der Durchmesser.

Aus dem Gleichungssystem

$$2r = h$$

$$2\pi r^2 + 2\pi r h = A$$

ergibt sich, daß $r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ und $h = 2\sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ sind.

Das Volumen der Zisterne erhält also sein Maximum, wenn

$$V_{\max} = \pi \left(\sqrt{\frac{A}{6\pi}} \right)^2 \cdot 2 \sqrt{\frac{A}{6\pi}} = \frac{A}{3} \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$$

ist.

81. In dem Trapez $ABCD$ wird die Höhe $\overline{BE}$ eingesetzt und der gesuchte Winkel BAD mit dem Buchstaben x bezeichnet (Abb. 63).

Es ist $\overline{AD} = 2a \cos x + a$ und $\overline{BE} = a \sin x$.

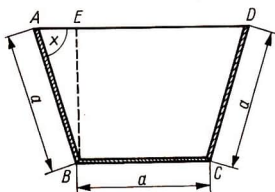


Abb. 63

Damit ist die Fläche des Trapezes gegeben durch

$$(1) \quad A = a^2 (1 + \cos x) \sin x.$$

Durch Anwendung trigonometrischer Formeln ergibt sich:

$$(2) \quad A = 4a^2 \cos^3 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2},$$

wobei a die Breite des Brettes ist. Die Fläche A nimmt ihren größten Inhalt

dann und nur dann an, wenn $\cos^3 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$ ein Maximum annimmt.

Dieses Produkt ist positiv, da nach den Bedingungen der Aufgabe gilt $0^\circ < x < 90^\circ$.

Es folgt

$$\begin{aligned} \cos^3 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} &= \sqrt{\cos^6 \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \sqrt{\cos^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \sin^2 \frac{x}{2}} \\ \cos^3 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} &= \sqrt{27} \cdot \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} \sin^2 \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Da aber

$$\frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} + \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} + \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} + \sin^2 \frac{x}{2} = 1$$

ist, läßt sich auf der Grundlage des Satzes, der in den einleitenden Bemerkungen erwähnt wurde, schließen, daß $\cos^3 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$ und damit auch $\cos^3 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$ das Maximum dann und nur dann annimmt, wenn gilt:

$$\frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{3} = \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Als Lösung dieser trigonometrischen Gleichung erhält man:

$$x = 2 \operatorname{arccot} \frac{1}{\sqrt{3}} = 60^\circ.$$