

Studienbücherei



J. Böhm, W. Börner,
E. Hertel, O. Krötenheerdt,
W. Mögling, L. Stammler

Geometrie

I. Axiomatischer Aufbau
der euklidischen Geometrie



Mathematik für Lehrer

(im Rahmen der Studienbücherei)

Herausgegeben von W. Engel, S. Brehmer, M. Schneider, H. Wussing

Unter Mitarbeit von G. Asser, J. Böhm, J. Flachsmeyer, G. Geise, T. Glocke,

K. Härtig, G. Kasdorf, O. Krötenheerdt, H. Lugowski, P.-H. Müller, G. Porath

- 1 G. Asser, Grundbegriffe der Mathematik, I. Mengen. Abbildungen. Natürliche Zahlen
- 2 J. Wisliceny, Grundbegriffe der Mathematik, II. Rationale, reelle und komplexe Zahlen
- 3 J. Flachsmeyer / L. Prohaska, Algebra
- 4 S. Brehmer / H. Apelt, Analysis, I. Folgen, Reihen, Funktionen
- 5 S. Brehmer / H. Apelt, Analysis, II. Differential- und Integralrechnung
- 6 J. Böhm / W. Börner / E. Hertel / O. Krötenheerdt / W. Mögling / L. Stammeler, Geometrie, I. Axiomatischer Aufbau der euklidischen Geometrie
- 7 J. Böhm / W. Börner / E. Hertel / O. Krötenheerdt / W. Mögling / L. Stammeler, Geometrie, II. Analytische Darstellung der euklidischen Geometrie, Abbildungen als Ordnungsprinzip in der Geometrie, geometrische Konstruktionen
- 8 E. Schröder, Darstellende Geometrie
- 9 H. Kaiser, Numerische Mathematik und Rechentechnik I

Die Reihe wird fortgesetzt

Studienbücherei

Geometrie

I. Axiomatischer Aufbau
der euklidischen Geometrie

Mit 34 Abbildungen

Mit historischen Bemerkungen
von H. Wussing

J. Böhm, W. Börner,
E. Hertel, O. Krötenheerdt,
W. Mögling, L. Stammler



VEB Deutscher Verlag
der Wissenschaften
Berlin 1974

Mathematik für Lehrer

Band 6

Herausgegeben von:

W. Engel, S. Brehmer, M. Schneider, H. Wussing

Unter Mitarbeit von:

G. Asser, J. Böhm, J. Flachsmeyer, G. Geise, T. Glocke,
K. Härtig, G. Kasdorf, O. Krötenheerdt, H. Lugowski,
P.-H. Müller, G. Porath

Verlagslektor: Dipl.-Math. E. Arndt

Umschlaggestaltung: R. Wendt

© 1974 by VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

Printed in the German Democratic Republic

Lizenz-Nr. 206 · 435/118/74

Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“, 582 Bad Langensalza

LSV 1044

Inhalt

0.	Einleitung	9
0.1.	Verschiedene Aspekte der Geometrie	9
0.2.	Handhabung terminologischer Fragen	12
0.3.	Bemerkungen zur Geschichte der Geometrie	13
1.	Axiomatischer Aufbau der Geometrie	19
1.0.	Vorbemerkungen	19
1.1.	Geometrie der euklidischen Ebene	20
1.1.1.	Inzidenz, Parallelität, Verschiebungen	20
1.1.2.	Anordnung	27
1.1.2.1.	Grundlegende Axiome, Sätze und Begriffe zur Anordnungslehre	27
1.1.2.2.	Orientierung	38
1.1.3.	Bewegungen und Kongruenz	42
1.1.3.1.	Axiome und grundlegende Sätze über Bewegungen	42
1.1.3.2.	Klassen kongruenter Figuren	53
1.1.3.2.1.	Längen	54
1.1.3.2.2.	Größen orientierter Elementarwinkel	57
1.1.3.2.3.	Winkelgrößen	60
1.1.3.2.4.	Dreiecke	71
1.1.4.	Strecken- und Winkelmessung	77
1.1.5.	Elementarer Inhalt	91
1.2.	Geometrie des euklidischen Raumes	100
1.2.1.	Inzidenz, Parallelität, Verschiebungen	101
1.2.2.	Anordnung	102
1.2.3.	Bewegungen, Kongruenz, Senkrechtsein	103
1.2.4.	Stetigkeit und Vollständigkeit	105
1.2.5.	Elementarer Inhalt	106

1.3.	Allgemeiner Inhalt	110
1.3.1.	Quadrierbare Punktmengen	111
1.3.2.	Jordanscher Inhalt	114
1.3.3.	Berechnung des Inhalts spezieller Punktmengen	117
1.4.	Abschließende Bemerkungen	122
	 Tabelle zur Bezeichnung bei Größenangaben	 124
	 Namen- und Sachverzeichnis	 126

Vorwort

Die hiermit vorgelegten beiden Bände Geometrie I und Geometrie II der Studienbücherei „Mathematik für Lehrer“ sind aus Vorlesungen entstanden, die die Autoren in Erfurt, Halle und Jena vor Lehrerstudenten gehalten haben. Der Stoff ist eng an das von der Fachkommission Mathematik erarbeitete Programm für den Grundkurs in Mathematik der ersten beiden Studienjahre zur Ausbildung von Fachlehrern mit dem Haupt- oder Nebenfach Mathematik angelehnt.

Es war eine schöne, aber zugleich schwierige Aufgabe für unser Autorenkollektiv, dessen Mitglieder in den oben genannten Orten zu Hause sind, ein einheitliches Vorgehen in Inhalt und Form zu finden. Wir hoffen, daß uns dieses im großen und ganzen gelungen ist, wenn auch der individuelle Stil der einzelnen Autoren unverkennbar geblieben ist und auch bleiben sollte. Aber sämtliche Autoren haben alle Kapitel der beiden Geometrie-Bände gemeinsam beraten und immer gemeinsam nach jeweils besseren Wegen gesucht, so daß diese Bände in einer echten Gemeinschaftsarbeit entstanden sind.

Viel Kopfzerbrechen haben uns die Bezeichnungen und die Symbolik bereitet. Bereits vor dem Schreiben des Manuskripts mußten wir bei der Vorbereitung darauf immer wieder feststellen, wie vielfältig in verschiedenen Lehrbüchern Symbolik und Bezeichnungen für geometrische Objekte gehandhabt werden. Mit einer solchen Problematik wurden nun die Autoren während ihrer Arbeit immer von neuem konfrontiert. Es war darum vor allem unser Anliegen, präzise, einheitlich und hoffentlich auch vorbildlich für die zukünftigen und gegenwärtigen Lehrer die geometrischen Begriffe und ihre Bezeichnungen einzuführen. Gewisse dafür notwendige Festlegungen wurden in längeren Diskussionen mit den Herausgebern, anderen Autoren der Studienbücherei und Mitarbeitern der Akademie der Pädagogischen Wissenschaften zu Berlin erarbeitet. Allen Kollegen, die uns dabei behilflich waren, sagen wir unseren herzlichsten Dank.

Leider ließ sich aber infolge der eingeführten Bezeichnungen eine mehr oder weniger schwerfällige Darstellung und Sprechweise nicht ganz vermeiden, da es unser wesentlichstes Bestreben war, für den Anfänger alle geometrischen Begriffe mathematisch einwandfrei einzuführen, zu erklären und zu verwenden. Der Anfänger sollte nun tatsächlich auch versuchen, sich zunächst dieser hier eingeführten Redeweise zu bedienen, um mit den grundlegenden geometrischen Dingen völlig vertraut zu werden. Unser Ringen um diese Begriffe sollte nicht als ein Hang zu Spitzfindigkeiten, sondern als ein Versuch einer echten Hilfe für den Studenten und Fachlehrer für Mathematik aufgefaßt werden. Erst wenn der Leser alles bis ins letzte verstanden hat, sei es erlaubt, falls keine Mißverständnisse entstehen können, schließlich wieder zu einer etwas großzügigeren Sprechweise überzugehen, um eine gewisse Umständlichkeit des Ausdrucks zu beseitigen. Der Fachlehrer für Mathematik möge sich aber stets im klaren sein, daß es unabdingbar für seine Lehrtätigkeit in der Schule ist, die geometrischen Begriffe zunächst einmal selbst in allen Einzelheiten und bis in ihre Wurzeln verstanden zu haben. Erst dann ist er in der Lage, diese bei seinen Schülern der entsprechenden Altersklasse gemäß in exakter Weise einzuführen.

Die Praxis wird zeigen, wie sich unsere zum Teil neu durchdachten Wege bewähren werden. Für jede kritische Bemerkung ist das Autorenkollektiv jederzeit dankbar.

Herr Kollege H. WUSSING hat freundlicherweise als Fachmann einige historische Bemerkungen zur Entwicklung der Geometrie verfaßt, die im ersten Band aufgenommen wurden und für die wir unseren besten Dank sagen. Besonderer Dank gilt noch Herrn Kollegen W. ENGEL, der mit Ratschlägen und kritischen Hinweisen unsere Arbeit sehr unterstützt hat. Ich persönlich möchte mich bei allen übrigen Autoren dieser beiden Geometrie-Bände für das verständnisvolle Eingehen auf die diversen Wünsche und für die Geduld bei allen unseren unvermeidlichen Beratungen über dieses Vorhaben recht herzlich bedanken. Unser Dank gilt auch dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften und dem VEB Druckerei „Thomas Müntzer“, die in dieser ansprechenden Form diese beiden Bände für den studentischen Benutzer hergestellt und viele unserer Wünsche berücksichtigt haben. So hoffen wir, daß hiermit ein Lehrbuch vorgelegt wird, das der Geometrie-Grundausbildung der Mathematiklehrer eine echte Hilfestellung gibt.

Jena, Juli 1973

JOHANNES BÖHM

0. Einleitung

0.1. Verschiedene Aspekte der Geometrie

In der mehrtausendjährigen Geschichte der Geometrie ist nicht nur ein beträchtlicher Bestand an geometrischen Einzelkenntnissen entstanden, sondern es haben sich auch sehr verschiedenartige *Betrachtungs- und Aufbauweisen der Geometrie als Gesamtdisziplin* herausgebildet. Daher bietet die Geometrie heute eine besonders interessante Möglichkeit, zu beobachten, wie ein und derselbe Sachverhaltsbereich unter verschiedenen Aspekten betrachtet und strukturiert werden kann. In den folgenden zwei Bänden soll versucht werden, den Leser in einige wichtige Aspekte der Geometrie einzuführen.

Ein erster Aspekt besteht darin, daß man die Geometrie — wie grundsätzlich jede mathematische Disziplin — aufbauen kann aus Aussagen, die ohne Beweis an den Anfang gestellt werden, d. h. den *Axiomen* des betreffenden Aufbaues der Geometrie.

Eine zweite, anders ausgerichtete Betrachtungsweise stellt den Anschluß der Geometrie an das Rechnen mit Zahlen (Arithmetik, Algebra und Analysis) dadurch her, daß vermittels des *Koordinatenbegriffs* Punkte durch Zahlenpaare oder -tripel erfaßt werden.

Eine dritte Möglichkeit, geometrische Strukturzusammenhänge deutlich zu machen, ergibt sich, wenn man als Leitbegriff bei ihrer Formulierung den Begriff der *Abbildung* wählt: Geometrische Aussagen lassen sich als Eigenschaften von Abbildungen formulieren; diese Abbildungseigenschaften gestatten zuweilen neuartige Beweisführungen einzelner Aussagen, vor allem aber erfährt die Gesamtstruktur der Geometrie vermittels bestimmter *Gruppen von Abbildungen* eine besonders klare Beschreibung.

Eine vierte Betrachtungsweise geht davon aus, daß durch geometrische Aussagen zugleich Möglichkeiten des *Konstruierens* geometrischer Objekte vermittelt werden können und daß sich umgekehrt die Untersuchung von Konstruktionsmöglichkeiten, -abläufen und -ergebnissen wieder in geometrische Aussagen umsetzen läßt.

Mehrmals spielen dabei Querverbindungen zwischen Geometrie und Algebra, insbesondere dem algebraischen Begriff des Körpers, eine Rolle.

Um diese vier Aspekte im Beispiel zu verdeutlichen (wobei sich der Leser die geometrischen Aussagen an Hand von Schulkenntnissen ungefähr plausibel machen kann und auf genauere Begründungen verzichtet sei), betrachten wir den Begriff zweier *paralleler Geraden*.

Bei dem Bestreben, die Geometrie axiomatisch aufzubauen, nahm bereits EUKLID in das Axiomensystem seiner „Elemente“ ein besonderes Axiom auf (vgl. S. 15), aus dem er dann den Satz von der *Existenz genau einer parallelen Geraden h zu einer gegebenen Geraden g durch einen gegebenen Punkt P* herleitete. Erst nach jahrhundertelangen vergeblichen Versuchen, dieses Axiom als Lehrsatz aus den übrigen Axiomen zu beweisen, wurde die Unabhängigkeit dieses Axioms (oder einer mit ihm gleichwertigen Aussage) durch GAUSS, BOLYAI und LOBAČEVSKIJ erkannt. Man kann sich nun beim axiomatischen Aufbau der Geometrie für die Frage interessieren, welche Sätze ohne dieses Parallelenaxiom herleitbar sind. Dies sind dann Sätze, die sowohl in der sogenannten euklidischen Geometrie (Geometrie mit Annahme des Parallelenaxioms) als auch in den sogenannten nichteuklidischen Geometrien (Geometrien, in denen statt des Parallelenaxioms eine andere Aussage als Axiom zugrunde gelegt wird) gelten. Solche Sätze nennt man auch Sätze der „absoluten Geometrie“. Im folgenden Aufbau wird nur die euklidische Geometrie entwickelt, und die Frage, welche Sätze der „absoluten Geometrie“ angehören, wird nicht weiter verfolgt. Demgemäß tritt das Parallelenaxiom schon unter den ersten verwendeten Axiomen auf, um es möglichst vorteilhaft beim weiteren Aufbau nutzen zu können.

In der analytischen Geometrie können Geraden g, h als *Lösungsmengen linearer Gleichungen* $ax + by + c = 0$ bzw. $a'x + b'y + c' = 0$ für die Koordinaten x, y gekennzeichnet werden ($(a, b) \neq (0, 0)$, $(a', b') \neq (0, 0)$). Da die Forderung, beide Gleichungen *zusammen* zu erfüllen, genau dann *nicht* befriedigt werden kann, wenn *eine reelle Zahl $q \neq 0$ mit*

$$a' = qa, \quad b' = qb, \quad c' \neq qc$$

existiert, ist dies die analytisch-geometrische Charakterisierung des geometrischen Sachverhaltes

$$g \parallel h, \quad g \neq h.$$

Gehören etwa zwei Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ der Geraden g an, so bildet man in der analytischen Geometrie den vom ersten zum zweiten führenden Vektor $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$. Die Menge aller derart aus Punkten von g zu bildenden Vektoren erweist sich als eine aus der linearen Algebra bekannte algebraische Struktur, nämlich ein Vektorraum der Dimension 1. (Historisch gesehen entstand umgekehrt diese algebraische Struktur durch Abstraktion aus der geometrischen Vektormenge auf einer Geraden.) Man kann sich vorstellen, daß g entsteht, indem man diesen Vektorraum an einen Punkt von g „anhftet“. Hiernach ergibt sich *genau dann* $g \parallel h$, wenn g und h durch „Anheften“ *ein und desselben Vektorraumes* gebildet werden können.

Um die Bedeutung des Abbildungsbegriffes für die Untersuchung paralleler Geraden zu erkennen, kann man z. B. von der Beobachtung ausgehen, daß eine Gerade g in sich übergeht, wenn man sie an einer auf g senkrechten Geraden k spiegelt, und daß *bei dieser Spiegelung genau diejenigen Geraden h ebenfalls in sich übergehen, die zu g parallel sind*. Hat man die Eigenschaften von Spiegelungen (als speziellen Abbildungen) systematisch untersucht, so erhält man hiermit auch einen Zugang zu Untersuchungen paralleler Geraden. Haben z. B. g und h einen gemeinsamen Punkt P , so kann man $k (\perp g)$ mit $k \cap g \neq P$ wählen; dann wird der Spiegelpunkt P' von P ein zweiter ge-

meinsamer Punkt von g und h , und es folgt $g = h$. Noch wichtiger ist in der Abbildungsgeometrie aber folgende Verwendung der Parallelität: Man kann unter allen bijektiven Abbildungen einer Ebene auf sich alle diejenigen Abbildungen φ betrachten, für die die Bildmenge je eines Paares paralleler Geraden g, h wieder ein Paar paralleler Geraden $g' = \varphi(g), h' = \varphi(h)$ ist. Diese Abbildungen heißen *Affinitäten*. Die Menge der Affinitäten ist eine Gruppe (eine Untergruppe der Gruppe aller bijektiven Abbildungen der Ebene auf sich). Die Aussagen über geometrische Eigenschaften, die bei allen Affinitäten erhalten bleiben, faßt man zur „affinen Geometrie“ zusammen. Zu diesen Eigenschaften gehört z. B. das Teilverhältnis eines Punktes X auf einer Strecke PQ ; zur affinen Geometrie gehört beispielsweise der Satz, daß in jedem Dreieck die Seitenhalbierenden einen gemeinsamen Punkt haben, der jede von ihnen im Verhältnis 1:2 teilt.

Als Beispiel (einer Fragestellung im Zusammenhang mit parallelen Geraden) in der Theorie der Konstruktionen sei die Aufgabe erwähnt, die Parallele h durch einen gegebenen Punkt P zu einer gegebenen Geraden g zu konstruieren, wenn als Konstruktionsmittel nur das Lineal und der Zirkel (also kein Zeichendreieck oder anderes technisches Hilfsmittel zur Parallelverschiebung von Geraden) zugelassen sind. Ist diese Aufgabe gelöst, so kann man sie ihrerseits als Hilfsmittel bei weiteren Konstruktionsproblemen einsetzen, z. B. bei allen Aufgaben, bei denen ein Punkt auf Grund einer geforderten Eigenschaft auf einer bestimmten Parallelen liegen muß. Soll beispielsweise ein Punkt A Mittelpunkt eines Kreises sein, der zwei gegebene Parallelen $g \neq h$ berührt, so muß er auf der sogenannten Mittelparallelen von g und h liegen.

Es sei nun betont, daß derartige Aspekte geometrischen Vorgehens nicht zu einer Einteilung der Geometrie nach geometrischen Objektbereichen führen; grundsätzlich läßt sich vielmehr jedes inhaltliche Teilgebiet geometrischer Objekte unter jedem dieser Aspekte betrachten und nach dessen Prinzipien aufbauen. Auch bestehen Wechselbeziehungen, Übergangs- und Mischformen zwischen den Aspekten.

So kann man z. B. die affine Geometrie unmittelbar aus ihren Axiomen aufbauen; man hat dann ein Axiomensystem zugrunde zu legen, das gerade die affinen Eigenschaften herzuleiten gestattet. Man kann aber auch fragen, welche algebraischen Vektoreigenschaften in der analytischen Geometrie als Ausdruck dieser Eigenschaften auftreten, die bei Affinitäten erhalten bleiben. Man erhält alle diejenigen Eigenschaften, die durch Addition von Vektoren und Vervielfachung von Vektoren mit reellen Zahlen wiedergegeben werden können, also z. B. Fragen der linearen Abhängigkeit, des Ranges von Transformationsmatrizen (dagegen z. B. nicht Eigenschaften des skalaren oder vektoriiellen Produktes).

Den vier genannten Aspekten entsprechen die vier Kapitel dieser beiden Geometriebände. Sie knüpfen in der angegebenen Reihenfolge aneinander an, sind jedoch in ihrem jeweiligen Grundanliegen, der Ausführung des betreffenden Aspektes, relativ in sich geschlossen. Der Leser benötigt zu ihrem Verständnis einige wichtige algebraische Grundbegriffe (*Gruppe, Körper*) und einfachste Eigenschaften hiervon (etwa die mit den Stichworten *Einslement, Nullelement, inverses Element, Untergruppe, Unterkörper, Isomorphismus, Homomorphismus* zusammenhängenden). Es ist jedoch nicht notwendig, vor einem Studium dieser beiden Geometriebände ausführlichere Kenntnisse z. B. der Gruppentheorie (soweit sie insgesamt im Grundstudium vorgesehen ist) zu erwerben. Für die analytische Geometrie wird

der Abschnitt über *lineare Algebra* aus MfL, Bd. 3 vorausgesetzt; ferner werden stets die *mengen theoretisch-logischen Begriffe* sowie die *grundlegenden Eigenschaften der reellen Zahlen* aus MfL, Bd. 1 und Bd. 2 benötigt.

0.2. Handhabung terminologischer Fragen

Die *Bezeichnung geometrischer Objekte* ist in der gegenwärtigen Literatur durch große Unterschiede, ja Widersprüche belastet. Daher erscheint es erforderlich, das terminologische Vorgehen in den vorliegenden beiden Bänden kurz zu erläutern.

Es soll in möglichst einheitlicher Weise versucht werden, *begriffliche Verschiedenheiten* zwischen geometrischen Objekten *möglichst deutlich zu bezeichnen* und hierbei eingeführte Bezeichnungsweisen dann möglichst konsequent anzuwenden. Die Autoren hoffen, den Leser dadurch zu weitgehendem begrifflichen Unterscheiden anzuregen. Gewisse Weitläufigkeiten in der Symbolik und Terminologie, die dabei auftreten, wurden um dieses Zieles der logischen Klarheit willen in Kauf genommen.

So führen wir beispielsweise folgende — stets voneinander zu unterscheidende — Symbol- und Bezeichnungspaare ein: Sind A, B zwei verschiedene Punkte, so bezeichnet

$g(AB)$	die Gerade durch A und B ,
AB^+	den Strahl aus A durch B ,
AB	die Strecke mit den Endpunkten A, B ,
$ AB $	die Länge der Strecke AB ,
$m(AB)$	die (in der Geometrie einer Geraden erklärte) vorzeichenfähige Länge der gerichteten Strecke AB ,
$v(AB)$	den von A zu B führenden Vektor ($:=$ die A in B überführende Verschiebung).

Besonders schwierig ist oft in der Literatur ein klares Erfassen *verschiedener Winkelbegriffe*. Entsprechend dem eben genannten Prinzip des deutlichen bezeichnungstechnischen Unterscheidens soll in unserer Darstellung eine Bezeichnungsweise benutzt werden, die sonst in der Literatur nicht üblich ist (vgl. die Übersicht am Schluß von 1.1.3.2.3.). Der Leser kann dabei jeweils sofort ablesen, ob der betreffende Winkelbegriff mit oder ohne Beachtung der Reihenfolge der Schenkel gebildet wurde, ob ein Gebiet der Ebene als „Inneres“ des Winkels ausgezeichnet wurde oder nicht sowie ob der Winkelbegriff ein „mehrmaliges volles Umlaufen eines beweglich gedachten Schenkels“ wiedergibt oder nicht.

Schließlich sei als spezielle Frage der Terminologie und Symbolik die *Gestaltung von Größenangaben* erwähnt. Wie in 1.1.4. ausführlicher dargelegt wird, verstehen wir Größen geometrischer Objekte (z. B. Streckenlängen, Flächeninhalte, Volumina, verschiedene Arten der Winkelgrößen) zunächst „abstrakt“ als gewisse

Äquivalenzklassen, gelangen dann aber auch (mit Hilfe geeigneter Abbildungen in die Menge R) zu der in der Geometrie gewohnten¹⁾ „konkreten“ Größenangabe als „formales Produkt aus Maßzahl und Maßeinheit“.

Am Schluß dieses Bandes, nachdem durch den systematischen Aufbau ein genaueres Verständnis der Einzelheiten ermöglicht ist, sind die wichtigsten Bezeichnungsfestsetzungen für die beiden Geometriebände in einer Tabelle zusammengefaßt.

0.3. Bemerkungen zur Geschichte der Geometrie

(H. WUSSING)

Das Wort Geometrie wurde von den Philosophen und Mathematikern der Antike schon seit dem 6. Jahrhundert v. u. Z. als Bezeichnung eines Teilgebietes der Mathematik verwendet. Es bedeutet so viel wie Erdmessung und verweist damit auf die handgreiflichen praktischen Bedürfnisse, denen die Geometrie ihre Entstehung verdankt.

Neben der Orientierung in der Zeit gehört die Orientierung im Raum zu den Grundbedürfnissen der menschlichen Gesellschaft. Daher weisen die frühen Klansengesellschaften im alten Ägypten, in Mesopotamien, in den Flußtälern des alten Indien und China bereits im zweiten Jahrtausend vor unserer Zeitrechnung erstaunliche geometrische Kenntnisse auf. Bestimmungen von Entfernungen und von Flächen- und Rauminhalten gehörten zum gesicherten Bestand der Anfänge der Mathematik in dieser Zeit; freilich handelte es sich nur um geradlinig begrenzte Flächen und einfache Körper wie Würfel, Quader, Prisma und Zylinder. Das Glanzstück der altägyptischen Mathematik war eine Rechenanweisung, eine Art Formel, die die Inhaltsbestimmung des Pyramidenstumpfes ermöglichte. Die Vorstellung des Winkels war ebenso fest eingebürgert wie die Zerlegung von komplizierten geradlinig begrenzten Flächen in Dreiecke und Rechtecke. Die altbabylonische Mathematik kannte sogar den uns unter dem Namen von PYTHAGORAS bekannten Sachverhalt am rechtwinkligen Dreieck, und man verwendete dort, wo künstliche Bewässerung eine Voraussetzung der Existenz der Gesellschaft war, bei Kanalbauten, einen „Böschungswert“, der auf das trigonometrische Verhältnis des Kotangens hinausläuft. Auch war die Ausnutzung von Verhältnissen am Dreieck durchaus geläufig; man kann dies als eine Vorstufe der Ähnlichkeitslehre verstehen.

¹⁾ In der Physik setzt man nach TGL 0-1313, Schreibweise physikalischer Gleichungen,

$$\text{Größe} = \text{Zahlenwert} \text{ mal Einheit} .$$

Für Kreisberechnungen wurde mit Näherungen für π gerechnet, im allgemeinen mit $\pi \approx 3$, in Ägypten gelegentlich mit dem recht guten Wert

$$\frac{\pi}{4} \approx \left(\frac{8}{9}\right)^2.$$

Doch wurden diese geometrischen wie überhaupt alle mathematischen Kenntnisse aus der Frühzeit nur nach Art von Rezepten oder Anweisungen verwendet. Es handelte sich sozusagen um eine implizite Geometrie, die in den vielfältigen gesellschaftlich-praktischen Anwendungen der Mathematik „drinsteckte“.

Erst mit dem Übergang zur höherstehenden Gesellschaftsordnung der entwickelten Sklavenhaltergesellschaft erhielt auch die Mathematik eine andere, sozusagen explizite Form: Als die griechischen Völker auf der Grundlage der von ihnen ausgebildeten neuen Gesellschaftsformation, begünstigt durch klimatische und geographische Faktoren und bei spontaner materialistischer philosophischer Grundhaltung, im östlichen Mittelmeerraum politisch-ökonomisch bestimmend wurden, vollzog sich in den kleinasiatischen ionischen Städten in Berührung mit der babylonischen mathematischen Tradition ein Umschlag, der für die Mathematik zur Ausbildung eigener wissenschaftlicher Methoden und Zielstellungen und damit auch zur Herausbildung von innerwissenschaftlichen Triebkräften und Gesetzmäßigkeiten der Entwicklung führte. Aus einer empirisch entstandenen und nach Art von Rezepten betriebenen Mathematik entstand in mehreren Etappen eine systematische, logisch-deduktiv dargelegte, eigenständige Wissenschaft Mathematik.

Dies trifft auch für die Geometrie zu. Den Anfang machte THALES VON MILET (624?–548? v. u. Z.), der u. a. die längst bekannten Tatsachen *bewies*, daß im gleichschenkligen Dreieck die Basiswinkel gleich sind und daß der Durchmesser die Kreisfläche halbiert. Auf HIPPOKRATES VON CHIOS (um 440 v. u. Z.) geht die noch heute übliche Bezeichnung von Strecken durch deren beide Endpunkte zurück. Er fand fünf verschiedene Typen („Möndchen“) von krummlinig begrenzten Flächen, die sich quadrieren, d. h. durch ausschließliche Verwendung von Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Quadrat verwandeln lassen. Der Geheimbund der Pythagoreer (6./5. Jh. v. u. Z.) verfolgte zwar religiöse und politisch reaktionäre Ziele, doch spielte in dessen Ideologie die Mathematik als mystikbeladene Geheimwissenschaft eine bestimmende Rolle. Nebenbei sozusagen trugen die Pythagoreer Wesentliches zur Entwicklung der Geometrie bei, u. a. die Kreislehre und die Theorien der Flächenverwandlung und der um- und einbeschriebenen Vielecke.

Schon HIPPOKRATES hatte eine Zusammenfassung der damaligen Geometrie verfaßt, und zwar bereits nach dem klassischen strengen Darstellungsschema: Voraussetzung, Satz, Beweis. Doch gingen seine „Elemente“ verloren. Sie wurden durch die späteren, ausführlicheren und wohl auch pädagogisch besseren „Elemente“ des in Alexandria wirkenden Mathematikers EUKLEIDES (365?–300? v. u. Z.) verdrängt. In 13 Büchern faßte EUKLEIDES die Mathematik seiner Zeit

zusammen; allerdings ließ er als Anhänger der idealistischen Philosophie PLATOS (427—347? v. u. Z.) die Anwendungen der Mathematik völlig aus.

Die ebene und räumliche Geometrie ist in den Büchern I—VI (planimetrische Bücher) und XI—XIII (stereometrische Bücher) der „Elemente“ dargestellt. Das Buch X enthält die schwierige Klassifikation der quadratischen Irrationalitäten mittels der geometrischen Theorie der Flächenanlegungen.

Über das Inhaltliche hinaus stellen die „Elemente“ auch vom Methodischen her einen Höhepunkt der Entwicklung der Mathematik dar: EUKLEIDES gründete die „Elemente“ auf Definitionen der Grundbegriffe, auf fünf Postulate und auf neun Axiome.

Die Definitionen — z. B. von Punkt, Linie, Grenze, Figur — stellen den schwächsten Teil der „Elemente“ dar. Im Grunde handelt es sich nur um beschreibende Verbalerklärungen. Wer etwa noch nicht durch Abstraktion in den Besitz des Begriffes „Punkt“ gelangt ist, könnte ihn auch nicht gewinnen durch die Erklärung: „Ein Punkt ist das, was kleine Teile hat.“

Die drei ersten Postulate sichern, daß man jeden Punkt mit jedem durch eine Strecke verbinden, jede begrenzte Linie geradlinig zusammenhängend verlängern und Kreise von beliebigem Mittelpunkt und Radius schlagen darf. Dadurch wurden die Konstruktionshilfsmittel der antiken Geometrie auf Zirkel und Lineal eingeschränkt. Ferner wird postuliert, daß alle rechten Winkel gleich sind.

Das fünfte Postulat, das sogenannte Parallelenpostulat, lautet in originaler Formulierung: „Wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß die innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei rechte werden, dann treffen sich die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei rechte sind.“ Dieses Postulat war schon im Altertum insofern umstritten, als es nicht dasselbe Maß an Selbstverständlichkeit zu besitzen schien wie die anderen vier. Daher wurden Versuche unternommen, es mit Hilfe der vier anderen zu beweisen.

Die Geschichte der Mathematik kennt seit der Antike zahlreiche Scheinbeweise, d. h. „Beweise“ des Parallelenpostulates mit Hilfe der anderen vier, bei denen unzulässigerweise eine weitere geometrische, scheinbar selbstverständliche Annahme mitverwendet wurde.

Erst seit den Untersuchungen von J. WALLIS (1616—1703), A. M. LEGENDRE (1752—1833), G. SACCHERI (1667—1733), F. K. SCHWEIKART (1780—1857), F. A. TAURINUS (1794—1874) und C. F. GAUSS (1777—1855) weiß man, daß es vielerlei Postulate gibt, die dem Parallelenpostulat äquivalent sind. So fand z. B. WALLIS im Jahre 1663, daß mit den ersten vier Euklidischen Postulaten und dem „Ersatzpostulat“: „Zu jeder beliebigen Figur gibt es stets eine andere ihr ähnliche von beliebiger Größe“ ebenfalls die euklidische Geometrie aufgebaut werden kann. Aber erst GAUSS und nach und unabhängig von ihm J. BOLYAI (1802—1860) und N. I. LOBAČEVSKIJ (1793—1856) konnten beweisen, daß das fünfte Postulat unabhängig

von den ersten vier ist und daß daher nichteuklidische Geometrien möglich sind, die durch Einwechslung mit einem zum Parallelenpostulat nicht äquivalenten Postulat entstehen. LOBAČEVSKIJ kommt der Ruhm zu, als erster über nichteuklidische Geometrie publiziert zu haben. Auch BOLYAI schrieb mit voller Klarheit darüber, während sich GAUSS nicht zur Veröffentlichung entschließen konnte im Hinblick auf die damalige Vorherrschaft der Philosophie KANTS, in deren System die euklidische Geometrie als schlechterdings denknötig galt.

In den „Elementen“ des EUKLEIDES schließen sich neun Axiome an die Postulate an. Es handelt sich um Fixierungen, die zum Ziehen logischer Schlüsse berechtigen. So wird z. B. festgehalten: „Was demselben gleich ist, ist auch untereinander gleich“ oder „Das Ganze ist größer als der Teil“.

Die „Elemente“ des EUKLEIDES haben auf Grund ihrer inhaltlichen und methodologischen Meisterschaft die weitere Entwicklung der Mathematik wesentlich geformt, noch weit bis in die Neuzeit hinein. Noch im 20. Jahrhundert wurden sie als offizielles Lehrbuch verwendet; sie sind auch heute für den Mathematiker noch sehr lesenswert und übrigens auch in deutscher Sprache bequem zugänglich.

Die griechisch-hellenistische Mathematik hat über EUKLEIDES hinaus noch weitere hervorragende Leistungen vollbracht. Auf geometrischem Gebiet zeichneten sich insbesondere ARCHIMEDES (287?–212? v. u. Z.) aus, wohl überhaupt der bedeutendste Mathematiker der Antike, und APOLLONIOS VON PERGE (262?–190? v. u. Z.), der eine systematische Theorie der Kegelschnitte entwickelte.

Nach dem Zusammenbruch der antiken Sklavenhaltergesellschaft wurden hauptsächlich in den Ländern des Islam bedeutende Teile der antiken Mathematik bewahrt. In Bagdad übersetzte man seit dem 8. Jahrhundert systematisch griechische Schriften ins Arabische, darunter natürlich Werke von EUKLEIDES und ARCHIMEDES. Auf dieser Grundlage und unter Einbeziehung von Teilen der indischen Mathematik entwickelten die islamischen Mathematiker eine weitreichende Mathematik, die ihrer inneren Struktur nach allerdings eher algebraisch-rechnerisch als geometrisch-konstruktiv orientiert war.

Seit dem 11. Jahrhundert gelangten mit dem allgemeinen Kultur- und Wissenschaftsgefälle vom Osten nach dem Westen auch Teile der islamischen bzw. der durch die Araber geretteten antiken Geometrie in die europäischen Länder des Feudalismus. Doch blieben sie unter den ökonomischen und ideologischen Bedingungen des Mittelalters ohne durchgreifende Resonanz im wissenschaftlichen Gefüge des Lehrgebäudes der Scholastik.

Erst mit dem Heraufkommen des Frühkapitalismus, seit dem 15. Jahrhundert, trat ein grundlegender Wandel ein. Die sich formierende neue Klasse, die Bourgeoisie, erkannte in ihrem Kampf gegen die Feudalgesellschaft die Aneignung von Wissen als Mittel ihrer eigenen politischen und ökonomischen Emanzipation. Ging es im 15. und 16. Jahrhundert um die Wiedergeburt (Renaissance) der antiken Wissenschaft, so konnten im 17. und 18. Jahrhundert die Kenntnisse der Antike bei weitem übertroffen werden, auch in der Mathematik.

Die antiken mathematischen Schriften — soweit sie überliefert worden waren — wurden während der Renaissance in sorgfältigen textkritischen Ausgaben in der Originalsprache gedruckt; beispielsweise erschienen die „Elemente“ von EUKLEIDES 1533 in Basel.

Im Anschluß an die wiedererstandenen geometrischen Schriften der Antike lieferte J. KEPLER (1571—1630) bedeutende Beiträge zur Kegelschnittslehre. P. DE FERMAT (1601—1665) suchte das verlorengegangene Buch VIII der Kegelschnittslehre des APOLLONIOS zu rekonstruieren und begründete zusammen mit dem Philosophen und Mathematiker R. DESCARTES (1596—1650) in den dreißiger Jahren des 17. Jahrhunderts die analytische Geometrie. (Einige historische Bemerkungen zur Geschichte der analytischen Geometrie finden sich in MfL, Bd. 7.) Mit L. B. ALBERTI (1401—1472), LEONARDO DA VINCI (1452—1519) und A. DÜRER (1471—1528) begannen sich in den Kreisen der Handwerker, Künstler und Festungsbaumeister die Lehre von der Perspektive und die projektive Geometrie herauszubilden; diese Entwicklungslinie führte schließlich bei dem politisch progressiven französischen Politiker und Mathematiker G. MONGE (1746—1818) zur Begründung der darstellenden Geometrie als selbständige mathematische Disziplin. (Historische Bemerkungen zur Geschichte der darstellenden Geometrie finden sich in MfL, Bd. 8.)

Auf dem Untergrund des allgemein werdenden gesellschaftlichen Interesses an den Naturwissenschaften und der Mathematik während der Zeit der industriellen Revolution und der Entfaltung des Kapitalismus konnte auch die Geometrie im 19. Jahrhundert eine stürmische Entwicklung nehmen. Einige Haupttendenzen seien hier hervorgehoben.

Die kritische Besinnung auf die Grundlagen der Geometrie führte zu Anfang des 19. Jahrhunderts zur Ausarbeitung der nichteuklidischen Geometrie und später, 1854, bei B. RIEMANN (1826—1866) zur differentialgeometrischen Behandlung n -dimensionaler Mannigfaltigkeiten und der Klassifizierung aller drei Grundtypen der Geometrie, der elliptischen, der euklidischen (oder parabolischen) und der hyperbolischen Geometrie.

Im Streit zwischen den Anhängern der damaligen synthetischen Geometrie — hier ist besonders der Schweizer Mathematiker J. STEINER (1796—1863) zu nennen — und denen der mehr analytischen Richtung konnten sich schließlich durch das Wirken u. a. von A. F. MÖBIUS (1790—1868), J. PLÜCKER (1801—1868) und H. GRASSMANN (1809—1877) der durchgehende Gebrauch von Koordinaten und algebraische Hilfsmittel in der Geometrie durchsetzen. Und schließlich lieferten der norwegische Mathematiker S. LIE (1842—1899) und F. KLEIN (1849—1925) — das sog. Erlanger Programm KLEINS stammt aus dem Jahre 1872 — auf gruppentheoretischer Grundlage eine Klassifizierung aller (bis dahin bekannten) Geometrien: Geometrische Eigenschaften von räumlichen Gebilden sind solche, die sich gegenüber einer bestimmten Transformationsgruppe als invariant erweisen.

Doch waren die schwierigen Fragen der axiomatischen Grundlegung der Geometrie noch offen geblieben, ein Mangel, der mit dem Aufkommen der mathema-

tischen Logik gegen Ende des 19. Jahrhunderts besonders deutlich wurde. H. POINCARÉ (1854—1912) in Frankreich und M. PASCH (1843—1930) und D. HILBERT (1862—1943) in Deutschland und weitere Mathematiker widmeten sich diesem Problem. In seiner zuerst 1899 aus Anlaß der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmal in Göttingen veröffentlichten Festschrift „Über die Grundlagen der Geometrie“ begründete HILBERT die gesamte Geometrie axiomatisch. Dabei führte er die Widerspruchsfreiheit der Geometrie auf die der Arithmetik zurück und wies die Unabhängigkeit verschiedener von ihm aufgestellter Axiomgruppen (Verknüpfung, Anordnung, Kongruenz, Parallele, Stetigkeit) nach. HILBERT bezog von vornherein einen ganz abstrakten Standpunkt und warf dabei gänzlich neue Fragen der Axiomatik überhaupt auf: Die geometrischen Elementarbegriffe Punkt, Gerade, Ebene werden nicht explizit definiert. Vielmehr werden die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen durch die Axiome und die aus ihnen abgeleiteten Sätze festgelegt und daher die geometrischen Elemente und Relationen nur implizit definiert.

Mit der Problemstellung der axiomatischen Grundlegung von Teilgebieten der Mathematik waren zugleich schwierige erkenntnistheoretische Fragen aufgeworfen worden. Unter den Bedingungen der allgemeinen Krisis des Imperialismus wurden innermathematische Schwierigkeiten, auch im Zusammenhang mit solchen der sich entwickelnden Mengenlehre, von Seiten idealistischer Philosophen hochgespielt und überbetont. HILBERT selbst wandte sich mit voller Schärfe gegen Tendenzen des Agnostizismus und stellte seinerseits das „Axiom von der Lösbarkeit jeder mathematischen Aufgabe im weiten Sinne des Wortes“ auf. Heute ist die Geometrie eine sicher begründete mathematische Teildisziplin, die ihre feste erkenntnistheoretische Basis im dialektischen und historischen Materialismus besitzt; doch gibt es noch eine Vielzahl offener Fragen in der mathematischen Grundlagenforschung der Geometrie.

1. Axiomatischer Aufbau der Geometrie

1.0. Vorbemerkungen

Die elementare Geometrie ist ein Zweig der Mathematik, der in einem verhältnismäßig engen und unmittelbaren Zusammenhang mit der uns umgebenden physikalischen Welt steht. Das tägliche Leben bringt jeden Menschen auf Schritt und Tritt mit Objekten in Berührung, an denen geometrische Figuren zu erkennen sind: ebenflächig begrenzte Gegenstände, geradlinig begrenzte Flächen, Dreiecke, Vierecke, Kreise, parallele Strecken, kongruente Winkel usw. Das hat zur Folge, daß jeder Mensch von vielen geometrischen Begriffen schon eine gewisse Vorstellung hat, auch ohne daß er sich besonders intensiv oder bewußt mit Geometrie befaßt hat. Die Geometrie gilt daher als eine besonders anschauliche Disziplin der Mathematik. Aber es ergibt sich aus diesem Umstand auch die Möglichkeit, Geometrie in gewissermaßen experimenteller und phänomenologischer Art zu betreiben. Diese Möglichkeit wird besonders im Schulunterricht ausgenutzt. Die Schüler werden im Geometrieunterricht im Zusammenhang mit der Beschreibung anschaulicher geometrischer Sachverhalte erst langsam an mathematische Denkweisen herangeführt. Im Laufe des Geometrielehrganges der Schule werden von einer gewissen Stufe an deduktive Schlüsse durchgeführt und strenge Beweise gegeben; die Grundlagen der Geometrie bleiben jedoch für den Schüler — wie es nicht anders sein kann — eine größere Anzahl induktiv gewonnener Kenntnisse.

Jeder Mathematiklehrer sollte sich jedoch bewußt sein, daß die Geometrie andererseits auch von Anfang an als eine rein deduktive Theorie dargestellt und betrieben werden kann, und er sollte einen solchen Aufbau der Geometrie kennen, der natürlich — wie es heute in jeder mathematischen Disziplin der Fall ist — von einem Axiomensystem auszugehen hat. In dem folgenden „Axiomatischen Aufbau der Geometrie“ wird ein solcher rein deduktiver Weg zur Geometrie besprochen. Er lehnt sich an den klassischen um 1900 von DAVID HILBERT gegebenen Aufbau der Geometrie an, nimmt dabei aber auch auf den im modernen Unterricht stärker hervortretenden abbildungstheoretischen Aspekt Rücksicht.

Für das Verständnis des folgenden axiomatischen Aufbaus der Geometrie sind an sich nur einige Grundkenntnisse aus der Mengenlehre und der Algebra erforderlich (nämlich etwa folgende Begriffe: Enthaltensein von Mengen, Abbildungen, Hintereinanderausführung von Abbildungen, Relation, Äquivalenzrelation und Zerlegung, Halbgruppe, Gruppe, kommutative Gruppe, Homomorphie, Isomorphie), aber der Studierende wird gut daran tun, vor dem Durcharbeiten des vorliegenden Geometrielehrganges seine eigenen Kenntnisse der Elementargeometrie kritisch zu sichten und ein wenig in Frage zu stellen, indem er z. B. über Fragen folgender Art nachdenkt: Was ist eigentlich ein Winkel? Welche Begriffe braucht man zur Definition des Winkelbegriffes, und wie kann man wiederum diese Begriffe definieren? Was meint man eigentlich, wenn man sagt, daß eine Strecke größer als eine andere sei oder daß sie die Länge 3 cm habe? Was bedeutet es, wenn man sagt, ein Dreieck gehe aus einem anderen durch eine Verschiebung (Drehung, Spiegelung) hervor? Im Zusammenhang mit der Beantwortung solcher Fragen wird der mit einem axiomatischen Aufbau der Geometrie noch nicht vertraute Leser bei sich eine gewisse Unsicherheit feststellen, er wird aber auch immer wieder auf bestimmte grundlegende geometrische Aussagen und Begriffe kommen (beispielsweise: Durch zwei Punkte gibt es genau eine Gerade, oder: eine Gerade wird durch einen auf ihr liegenden Punkt in zwei Strahlen zerlegt, usw.), die Ausgangspunkt für viele andere Sätze sein können, und er wird dann bereit sein, derartige Aussagen als Axiome für einen systematischen Aufbau der Geometrie an den Anfang gestellt zu finden. Beim weiteren schrittweisen Studium des axiomatischen Aufbaus der Geometrie muß der Leser darauf achten, keine anderen Sachverhalte als gegeben und richtig anzunehmen, als in den bis zur jeweiligen Stelle aufgeführten Axiomen und daraus gefolgerten Sätzen niedergelegt sind. Das erfordert einige Mühe und etwas Abstraktionsvermögen, belohnt den Leser aber damit, daß er für grundlegende Fragen der Elementargeometrie sicheren Boden gewinnt und die erwähnte Unsicherheit verliert.

Es sei darauf hingewiesen, daß der hier dargestellte Weg nur einer unter vielen möglichen ist. Er beschränkt sich hauptsächlich auf die Geometrie der Ebene, weil hier das für einen axiomatischen Aufbau Charakteristische in genügendem Maße erkennbar wird. Für den Aufbau der Geometrie des dreidimensionalen Raumes werden nur ein Axiomensystem und einige grundlegende Definitionen und Sachverhalte angegeben werden.

1.1. Geometrie der euklidischen Ebene

1.1.1. Inzidenz, Parallelität, Verschiebungen

An den Beginn des Aufbaus der euklidischen Geometrie der Ebene werden folgende als richtig vorausgesetzte Aussagen gestellt: Unter dem Begriff Ebene versteht

man eine *Menge* mit bestimmten, im folgenden angegebenen Eigenschaften; ihre Elemente werden *Punkte* genannt. Es gibt ein nicht leeres System von Teilmengen der Ebene, dessen Elemente *Geraden* genannt werden; eine Gerade ist also eine spezielle Punktmenge.

Weitere Aussagen, die als grundsätzlich wahr vorausgesetzt werden — es sind Eigenschaften, denen Punkte und Geraden genügen —, werden in Form von Axiomen formuliert.

Axiom (1). *Sind A und B zwei beliebige voneinander verschiedene Punkte, so gibt es genau eine Gerade, die A und B enthält.*

Axiom (2). *Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte.*

Axiom (3). *Es gibt keine Gerade, die sämtliche Punkte der Ebene enthält.*

Eine Punktmenge, die in einer Geraden enthalten ist, soll *kollinear* genannt werden. Die nach Axiom (1) eindeutig bestimmte Gerade, die zwei gegebene Punkte A und B enthält, nennt man auch *Verbindungsgerade* der Punkte A und B , sie möge mit dem Symbol $g(AB)$ bezeichnet werden. Der Sachverhalt, daß ein Punkt P zu einer Geraden g gehört, soll auch mit den Worten „der Punkt P liegt auf der Geraden g “ oder „ g geht durch P “ beschrieben werden. Aus Axiom (1) folgt, daß zwei verschiedene Geraden höchstens einen gemeinsamen Punkt haben. Denn hätten die beiden voneinander verschiedenen Geraden g_1 und g_2 zwei Punkte A und B gemeinsam, so müßte sowohl g_1 als auch g_2 gleich der nach Axiom (1) eindeutig bestimmten Verbindungsgeraden von A und B sein, es wäre also $g_1 = g_2$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Mit einem besonderen Wort wird der Fall bezeichnet, daß zwei Geraden keine oder alle Punkte gemeinsam haben. Hierzu wird für Geraden g und h definiert:

Definition. $g \parallel h \Leftrightarrow g \cap h = \emptyset \vee g = h$.

Das Zeichen „ \parallel “ wird „parallel“ gelesen. Statt „ $g \parallel h$ “ sagt man auch „ g ist eine Parallele zu h “ oder „ g ist zu h parallel“. Für das Parallelsein wird folgendes gefordert:

Axiom (4) (Parallelenaxiom). *Ist g eine beliebige Gerade und P ein beliebiger Punkt, so gibt es genau eine Gerade, die P enthält und die zu g parallel ist (Abb. 1.1).*

Das Parallelsein ist offenbar eine Relation in der Menge der Geraden. Es soll nun gezeigt werden, daß es sich um eine Äquivalenzrelation handelt. Aus der Definition folgen unmittelbar Reflexivität und Symmetrie, d. h., für jede Gerade g gilt $g \parallel g$, und gilt für zwei Geraden g und h die Relation $g \parallel h$, so gilt auch $h \parallel g$. Zum Beweis der Transitivität sei für drei Geraden g, h, k vorausgesetzt, daß $g \parallel h$ und $h \parallel k$ gilt. Wenn $g = k$ ist, dann ist nach Definition $g \parallel k$, und die Transitivität ist bewiesen. Es sei nun $g \neq k$. Wäre $g \cap k \neq \emptyset$, so wäre, wie oben gezeigt wurde, dieser Durchschnitt ein Punkt S , und g und k wären zwei verschiedene, den Punkt S

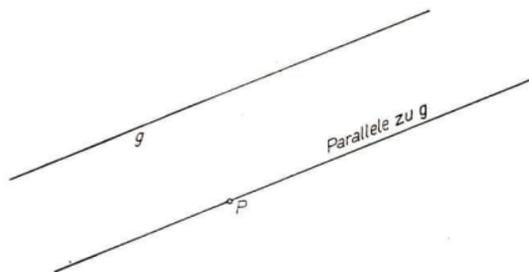


Abb. 1.1

enthaltende und zu h parallele Geraden. Das ist ein Widerspruch zum Parallelenaxiom. Es kann also nur $g \cap k = \emptyset$ und somit $g \parallel k$ sein. Damit ist die Relation „parallel“ als eine Äquivalenzrelation nachgewiesen. Die Menge aller Geraden zerfällt demnach in Klassen zueinander paralleler Geraden. Jede solche Klasse möge als *Parallelenklasse* bezeichnet werden. Es ist auch möglich, den Namen *Richtung* hierfür zu verwenden. Eine Parallelenklasse ist durch Angabe einer ihrer Geraden eindeutig festgelegt. Zwei Geraden, die zu verschiedenen Parallelenklassen gehören, haben genau einen gemeinsamen Punkt.

Unter den bijektiven Abbildungen der Ebene auf sich spielt ein spezieller Typ von Abbildungen eine besondere Rolle, der zunächst definiert werden soll.

Definition: τ ist eine *Verschiebung* genau dann, wenn τ eine bijektive Abbildung der Ebene auf sich mit folgenden Eigenschaften ist:

- (V1) Das Bild einer beliebigen Geraden g ist eine zu g parallele Gerade.
- (V2) Wenn die Abbildung nicht die identische Abbildung ist, so ist jeder Bildpunkt von seinem Original verschieden.

Die Eigenschaft (V1) müßte genau genommen wie folgt formuliert werden: Die Menge der Bilder aller Punkte einer beliebigen Geraden g ist eine zu g parallele Gerade. Da aber keine Mißverständnisse zu befürchten sind, wird — auch in den weiteren Ausführungen und in analogen Zusammenhängen — die obige kürzere Sprechweise verwendet. Weiterhin wird folgendes vereinbart: Ist \mathfrak{M} eine Punktmenge, φ eine Abbildung der Ebene auf sich, so soll unter $\varphi(\mathfrak{M})$ die Menge $\{X: X = \varphi(P), P \in \mathfrak{M}\}$ verstanden werden.

Die identische Abbildung, d. h. die Abbildung, die jeden Punkt auf sich selbst abbildet, hat offenbar die Eigenschaften (V1) und (V2), sie ist also eine spezielle Verschiebung. Zur Bezeichnung der identischen Abbildung wird im folgenden gelegentlich der Buchstabe ι verwendet werden.

Die folgenden Hilfssätze geben weitere Eigenschaften von Verschiebungen an.

Erster Hilfssatz über Verschiebungen. *Ist τ eine Verschiebung, $\tau \neq \iota$, P ein beliebiger Punkt und g die Verbindungsgerade von P und $\tau(P)$, so wird die Gerade g bei der Verschiebung τ auf sich selbst abgebildet.*

Beweis. Die Gerade g enthält den Punkt P , folglich enthält $\tau(g)$ den Punkt $\tau(P)$. Nach (V1) ist das Bild von g eine Parallele zu g . Die Parallele zu g durch $\tau(P)$ ist aber, da g den Punkt $\tau(P)$ enthält, die Gerade g selbst. Also ist das Bild von g wieder die Gerade g , und der Hilfssatz ist bewiesen.

Eine Gerade, die bei einer Abbildung auf sich selbst abgebildet wird, soll *Fixgerade* dieser Abbildung genannt werden. Desgleichen nennt man einen Punkt, der auf sich selbst abgebildet wird, einen *Fixpunkt* der betreffenden Abbildung. Ein gemeinsamer Punkt zweier verschiedener Fixgeraden ist ein Fixpunkt; denn das Bild dieses Punktes muß sowohl auf der einen Fixgeraden als auch auf der anderen liegen, kann also nur der gemeinsame Punkt selbst sein. Eine Fixgerade braucht keinen einzigen Fixpunkt zu enthalten. Besteht eine Gerade nur aus Fixpunkten, so soll sie *Fixpunktgerade* genannt werden.

Zweiter Hilfssatz über Verschiebungen. *Ist τ eine Verschiebung, $\tau \neq \iota$, und sind P und Q zwei Punkte, so ist die Verbindungsgerade von P und $\tau(P)$ parallel zur Verbindungsgeraden von Q und $\tau(Q)$.*

Beweis. Der Beweis wird indirekt geführt. Die Geraden $g(P\tau(P))$ und $g(Q\tau(Q))$ seien als nicht parallel angenommen. Sie haben dann genau einen gemeinsamen Punkt S . Da beide Geraden nach dem ersten Hilfssatz Fixgeraden sind, ist S ein Fixpunkt. Das ist aber ein Widerspruch zur Eigenschaft (V2); und somit ist der zweite Hilfssatz bewiesen.

Auf Grund des zweiten Hilfssatzes ist für eine feste Verschiebung τ ($\tau \neq \iota$) die Menge aller Verbindungsgeraden von Original- mit zugehörigen Bildpunkten eine Parallelenklasse, die man *Verschiebungsrichtung* nennt. Die Verschiebungsrichtung ist auf Grund des ersten Hilfssatzes zugleich die Menge aller Fixgeraden von τ , denn jede nicht zu der genannten Parallelenklasse gehörende Fixgerade würde mit den Fixgeraden der Verschiebungsrichtung gemeinsame Punkte haben, also Fixpunkte ergeben, was wegen (V2) nicht sein kann.

In einem späteren Abschnitt wird der Begriff Verschiebungsrichtung noch eine Verfeinerung erfahren.

Aus dem Bisherigen kann nicht gefolgert werden, daß es überhaupt — außer der identischen Abbildung — Verschiebungen gibt. Es wird daher folgendes Axiom aufgestellt:

Axiom (5) (Existenz von Verschiebungen). *Die Menge aller Verschiebungen hat folgende Eigenschaft: Sind A und B zwei beliebige Punkte, so gibt es genau eine Verschiebung, bei der A auf B abgebildet wird.*

Dieses Axiom besagt unter anderem, daß eine Verschiebung durch Vorgabe eines Original- und eines Bildpunktes eindeutig festgelegt ist. Sind also τ_1 und τ_2 zwei Verschiebungen und ist P ein Punkt mit $\tau_1(P) = \tau_2(P)$, so ist $\tau_1 = \tau_2$.

Es sei auf folgenden Sachverhalt hingewiesen: Unter Benutzung von (V1), (V2) und dem zweiten Hilfssatz über Verschiebungen kann bewiesen werden, daß es nicht mehr als eine Verschiebung geben kann, die A auf B abbildet. Das Wort „genau“ könnte also aus dem Axiom (5) gestrichen werden, dafür müßte der genannte Beweis ausgeführt werden.

Es kann jetzt nachgewiesen werden, daß die Menge aller Verschiebungen bezüglich der Operation der Hintereinanderausführung eine Gruppe bildet. Zunächst ist klar, daß für diese Operation das Assoziativgesetz gilt, wie es bekanntlich bei Produkten von Selbstabbildungen einer Menge immer der Fall ist. Als neutrales Element fungiert die identische Abbildung ι . Aus der Definition der Verschiebungen ergibt sich, daß die Umkehrabbildung einer Verschiebung ebenfalls die Eigenschaften (V1) und (V2) hat, also eine Verschiebung ist. Schließlich hat das Produkt $\tau_2 \circ \tau_1$ zweier Verschiebungen τ_1 und τ_2 wegen der Transitivität des Parallelseins die Eigenschaft (V1), und die Eigenschaft (V2) ergibt sich folgendermaßen: Gilt für einen Punkt F die Gleichung $\tau_2 \circ \tau_1(F) = F$, so ergibt die Anwendung von τ_2^{-1} die Gleichung $\tau_1(F) = \tau_2^{-1}(F)$, das bedeutet aber $\tau_1(X) = \tau_2^{-1}(X)$ für alle X , und hieraus folgt durch Anwendung von τ_2 : $\tau_2 \circ \tau_1(X) = X$ für alle X , d. h. $\tau_2 \circ \tau_1 = \iota$, und $\tau_2 \circ \tau_1$ hat somit die Eigenschaft (V2).

Die Verschiebungen bilden also eine Gruppe. Es wird nun gezeigt, daß diese Gruppe sogar kommutativ ist. Dazu wird angenommen, daß die Verschiebung τ_1 den Punkt A auf den Punkt B , die Verschiebung τ_2 den Punkt B auf den Punkt C abbildet, τ_1 und τ_2 seien beide von der identischen Abbildung verschieden.

Fall 1: A, B, C sind nicht kollinear (Abb. 1.2).

Es sei $D = \tau_2(A)$. Nach Eigenschaft (V1) liegt D auf der Parallelen zu $g(AB)$ durch C , die Geraden $g(AB)$ und $g(DC)$ sind also parallel. Nach dem zweiten Hilfssatz über Verschiebungen liegt D auf der Parallelen zu $g(BC)$ durch A , so daß die

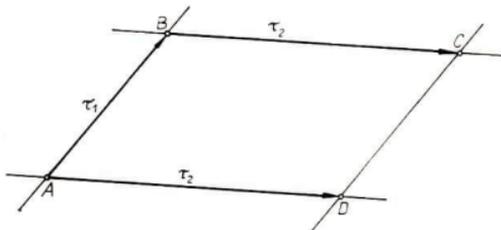


Abb. 1.2

Geraden $g(BC)$ und $g(AD)$ parallel sind. Es sei $E = \tau_1(D)$. Wegen (V1) ist E ein Punkt der Parallelen durch B zu $g(AD)$, also ein Punkt von $g(BC)$. Nach dem zweiten Hilfssatz über Verschiebungen ist E ein Punkt der Parallelen durch D zu $g(AB)$, also ein Punkt von $g(DC)$. Der einzige gemeinsame Punkt der Geraden $g(BC)$ und $g(DC)$ ist aber C . Folglich gilt

$$\tau_1 \circ \tau_2(A) = \tau_2 \circ \tau_1(A) = C,$$

d. h.

$$\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_2 \circ \tau_1.$$

Fall 2: A, B, C sind kollinear (Abb. 1.3).

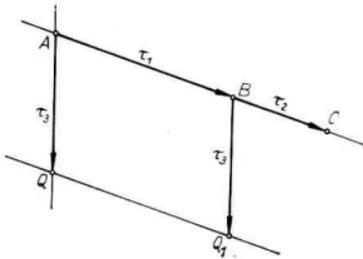


Abb. 1.3

Dieser Fall wird auf den ersten zurückgeführt. Es sei Q ein beliebiger, nicht auf $g(AB)$ liegender Punkt, der auf Grund von Axiom (3) sicher existiert, und es sei τ_3 die Verschiebung, die A auf Q abbildet. Ferner sei $\tau_3(B) = Q_1$. Für die Produkte $\tau_3 \circ \tau_2$ und $\tau_1 \circ \tau_3^{-1}$ liegt dann sicherlich der erste Fall vor, die Faktoren sind jeweils vertauschbar. Ferner ist $\tau_1 \circ \tau_3(A) = Q_1$, $\tau_2 \circ \tau_3^{-1}(Q_1) = C$, und da A, Q_1, C nicht kollinear sind, liegt auch für das Produkt $(\tau_1 \circ \tau_3) \circ (\tau_2 \circ \tau_3^{-1})$ der erste Fall vor. Daher ist die folgende Gleichungskette richtig, die sich auf Grund des jeweils vorliegenden ersten Falles durch Faktorenvertauschung ergibt:

$$\begin{aligned} \tau_2 \circ \tau_1 &= \tau_2 \circ \tau_1 \circ \iota = \tau_2 \circ (\tau_1 \circ \tau_3^{-1}) \circ \tau_3 \\ &= (\tau_2 \circ \tau_3^{-1}) \circ (\tau_1 \circ \tau_3) = \tau_1 \circ (\tau_3 \circ \tau_2) \circ \tau_3^{-1} \\ &= \tau_1 \circ \tau_2 \circ (\tau_3 \circ \tau_3^{-1}) = \tau_1 \circ \tau_2. \end{aligned}$$

Die letzten Ergebnisse lassen sich zusammenfassen zu dem

Satz über die Gruppe der Verschiebungen. *Die Verschiebungen bilden bezüglich der Hintereinanderausführung eine kommutative Gruppe.*

Ist eine feste Parallelenklasse gegeben, so bildet die Menge aller Verschiebungen, die diese Klasse als Verschiebungsrichtung haben, unter Hinzunahme der identi-

schen Abbildung eine Untergruppe der Gruppe der Verschiebungen. Dies folgt leicht aus der Definition des Begriffes Verschiebungsrichtung; der Beweis kann dem Leser überlassen werden.

Eine wichtige Anwendung ist der Begriff der Verschiebungsgleichheit. Für irgendwelche Punktmengen oder Systeme von Punktmengen \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 definiert man:

Definition. \mathfrak{M}_1 ist *verschiebungsgleich* zu \mathfrak{M}_2 genau dann, wenn es eine Verschiebung gibt, bei der \mathfrak{M}_1 auf \mathfrak{M}_2 abgebildet wird.

Die Relation „verschiebungsgleich“ ist reflexiv, weil die identische Abbildung eine Verschiebung ist, sie ist transitiv, weil mit zwei Verschiebungen auch deren Produkt eine Verschiebung ist, und sie ist symmetrisch, weil mit jeder Verschiebung auch deren Umkehrabbildung eine Verschiebung ist. Aus der Gruppeneigenschaft der Verschiebungen folgt also, daß die Verschiebungsgleichheit eine Äquivalenzrelation ist.

Als Beispiel mögen verschiebungsgleiche geordnete Paare von Punkten betrachtet werden. Es sei (A, B) ein beliebiges geordnetes Paar von Punkten, und \mathfrak{K} sei die Klasse aller dazu verschiebungsgleichen Paare, also

$$\mathfrak{K} := \{(X, Y) : X = \tau(A) \wedge Y = \tau(B) \wedge \tau \text{ ist Verschiebung}\}.$$

Diese Klasse hat eine bemerkenswerte Eigenschaft. Sie besteht genau aus denjenigen geordneten Punktepaaren „(Originalpunkt, Bildpunkt)“, die eine Verschiebung ausmachen, und zwar diejenige, die A auf B abbildet. Zum Beweis sei angenommen, daß (X, Y) ein beliebiges zu (A, B) verschiebungsgleiches Punktepaar sei, also $\tau(A) = X$, $\tau(B) = Y$, und daß τ_0 durch $\tau_0(A) = B$ festgelegt sei. Zu zeigen ist: $\tau_0(X) = Y$. Es ist aber $\tau_0(X) = \tau_0 \circ \tau(A)$. Wegen der Kommutativität ist dies gleich $\tau \circ \tau_0(A)$. Weiter gilt $\tau \circ \tau_0(A) = \tau(B) = Y$, also insgesamt $\tau_0(X) = Y$. Ist umgekehrt (X, Y) ein aus Original- und Bildpunkt bestehendes Punktepaar, also $Y = \tau_0(X)$, so folgt mit $\tau'(X) = A$ die Gleichungskette

$$\tau'(Y) = \tau' \circ \tau_0(X) = \tau_0 \circ \tau'(X) = \tau_0(A) = B,$$

d. h., (X, Y) ist vermöge der Verschiebung τ' verschiebungsgleich zu (A, B) , gehört also zu \mathfrak{K} .

Eine derartige Klasse verschiebungsgleicher geordneter Paare von Punkten nennt man einen *Vektor*. Da eine Verschiebung — wie jede Abbildung — eine Menge von geordneten Paaren ist, geht aus dem soeben Gezeigten hervor, daß ein Vektor nichts anderes als eine Verschiebung ist; der in dem eben durchgeführten Beweis genannte Vektor ist mit der Verschiebung τ_0 identisch.

Zur Bezeichnung von Vektoren wird folgendes vereinbart: Derjenige Vektor, der den Punkt A in den Punkt B überführt, werde mit $v(AB)$ bezeichnet. Sind $v(AB)$ und $v(CD)$ zwei Vektoren, so werde der aus diesen Vektoren durch Hintereinanderausführung entstehende Vektor mit $v(AB) + v(CD)$ bezeichnet und die *Summe*

dieser Vektoren genannt. Es gilt dann für beliebige Punkte X, Y, Z ausnahmslos die Gleichung

$$v(XY) + v(YZ) = v(XZ).$$

Diese Bezeichnungsweise wird allerdings in den folgenden Abschnitten des vorliegenden Bandes zunächst nicht verwendet werden, da die Verschiebungen bald in eine umfassendere Gruppe von Abbildungen eingegliedert werden, für die eine derartige Bezeichnung nicht zweckmäßig ist. Erst im Rahmen der analytischen Geometrie, wo den Vektoren wieder eine besondere Rolle zukommt, wird von der zuletzt eingeführten Schreibweise Gebrauch gemacht werden.

Gehören die Paare (A, B) und (C, D) zu ein und demselben Vektor, so ist entweder $A = B$ und $C = D$ (falls die betreffende Verschiebung die identische Abbildung ist), oder es ist $A \neq B$ und $C \neq D$. Im letzten Fall sind wegen des zweiten Hilfssatzes über Verschiebungen die Geraden $g(AB)$ und $g(CD)$ parallel, und wegen (V1) sind auch (falls $A \neq C$) die Geraden $g(AC)$ und $g(BD)$ parallel (Abb. 1.4). Man nennt deshalb Punktepaare (A, B) und (C, D) , die zum gleichen Vektor gehören, *parallelgleich*.

Man hätte die bisher dargestellte Theorie auch so aufbauen können, daß man vor der Einführung des Begriffes Verschiebung die Parallelgleichheit von geordneten Punktepaaren durch die in Abb. 1.4 angedeutete geometrische Eigenschaft definiert hätte. Anstelle von Axiom (5) hätte man die Transitivität der Relation „parallelgleich“ axiomatisch gefordert, und hierauf hätte man den Begriff Verschiebung definieren und Axiom (5) als Satz beweisen können. Dieser Weg wäre etwas mühsamer gewesen.

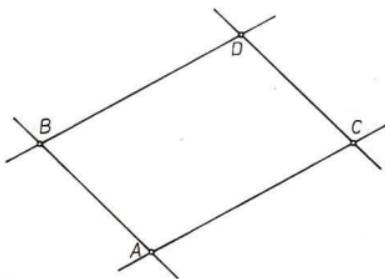


Abb. 1.4

1.1.2. Anordnung

1.1.2.1. Grundlegende Axiome, Sätze und Begriffe zur Anordnungslehre

In diesem Abschnitt wird der Begriff der Ordnungsrelation benutzt. Eine über einer beliebigen Menge \mathfrak{M} erklärte Relation „ $<$ “, die die Eigenschaften

- (T) $Aus\ x < y\ und\ y < z\ folgt\ x < z\ für\ alle\ x, y, z \in \mathfrak{M}.$
 (I) $Es\ gibt\ kein\ x\ in\ \mathfrak{M},\ für\ das\ x < x\ gilt.$
 (K) $Für\ beliebiges\ x\ und\ y\ aus\ \mathfrak{M}\ gilt\ x < y\ oder\ y < x\ oder\ x = y.$

hat, heißt *irreflexive Ordnung*; die Menge \mathfrak{M} zusammen mit dieser Relation heißt *geordnet*. Die Vereinigung einer irreflexiven Ordnung mit der Gleichheitsrelation heißt *reflexive Ordnung*, sie wird mit „ \leq “ bezeichnet. Sie hat die Eigenschaft, antisymmetrisch zu sein, d. h., aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$.

Die zu einer irreflexiven Ordnungsrelation „ $<$ “ inverse Relation „ $>$ “, die durch $x > y :\Leftrightarrow y < x$ definiert ist, ist ebenfalls eine irreflexive Ordnungsrelation, man nennt sie zur ursprünglichen Relation *entgegengesetzt*. Jede geordnete Menge kann daher sofort auf eine zweite Weise geordnet werden.

Die Grundlage der Anordnungslehre wird durch das folgende Axiom gegeben:

Axiom (6). *Einer jeden Geraden ist ein Paar einander entgegengesetzter irreflexiver Ordnungen auf der Menge der Punkte dieser Geraden zugeordnet.*

Von diesen beiden Ordnungen ist keine vor der anderen irgendwie ausgezeichnet. Manchmal ist es jedoch erforderlich, eine der beiden Relationen auszuzeichnen. Man benutzt dann den folgendermaßen definierten Begriff der orientierten Geraden.

Definition. o ist eine *orientierte Gerade* genau dann, wenn o ein Paar $(g, <)$ ist, das aus einer Geraden g und einer der beiden nach Axiom (6) zu g gehörenden Ordnungsrelationen besteht.

Jede Gerade kann also auf zweierlei Art orientiert werden.

Axiom (7). *Es sei $(g, <)$ eine orientierte Gerade. Ist P ein Punkt von g , so gibt es mindestens zwei Punkte X und Y auf g mit $X < P < Y$. Sind A und B Punkte von g mit $A < B$, so gibt es mindestens einen Punkt Z von g mit $A < Z < B$.*

Ist $(g, <)$ eine orientierte Gerade und A ein Punkt von g , so kann die Menge der von A verschiedenen Punkte von g folgendermaßen zerlegt werden: Die eine Menge ist

$$\{X: X \in g \wedge X < A\},$$

die andere ist

$$\{Y: Y \in g \wedge A < Y\}.$$

Wenn man g durch die zu „ $<$ “ entgegengesetzte Ordnungsrelation orientiert, erhält man die gleiche Zerlegung, sie ist also unabhängig von der Wahl der Orientierung. Auf Grund von Axiom (7) sind die beiden Mengen nicht leer. Man fügt beiden Mengen jeweils den Punkt A hinzu und nennt sie die beiden von A auf g erzeugten *Strahlen*. (Statt Strahl ist auch die Bezeichnung *Halbgerade* gebräuchlich.) A wird *Anfangspunkt* der beiden Strahlen genannt, die beiden Strahlen nennt man zueinander *entgegengesetzt*. Die Gerade g nennt man *Trägergerade* der beiden Strahlen. Ein Strahl ist offenbar durch Angabe seines Anfangspunktes und eines zu ihm gehö-

renden Punktes $P (\neq A)$ eindeutig bestimmt, man bezeichnet ihn dann mit AP^+ . Aus $X \in AP^+$ und $X \neq A$ folgt $AP^+ = AX^+$. Mit AP^- bezeichnet man den zu AP^+ entgegengesetzten Strahl. Es gilt also stets $AP^+ \cap AP^- = \{A\}$ und $AP^+ \cup AP^- = g(AP)$.

Eine wichtige Relation für die Punkte einer Geraden ist die folgendermaßen definierte dreistellige Zwischenrelation:

Definition. $Zw(ABC)$ ist mit folgender Aussage gleichbedeutend: A, B, C sind Punkte einer Geraden g , und bildet man mit g eine orientierte Gerade $(g, <)$, so gilt $A < B < C$ oder $C < B < A$.

Für „ $Zw(ABC)$ “ sagt man „ B liegt zwischen A und C “. Man sieht sofort, daß diese Relation in sich übergeht, wenn man $(g, <)$ durch $(g, >)$ ersetzt, die Zwischenrelation ist unabhängig von der Orientierung. Offenbar folgt aus $Zw(ABC)$ die Gültigkeit von $Zw(CBA)$. Sind X_1, X_2, X_3 drei verschiedene Punkte einer Geraden, so gilt genau eine der Relationen $Zw(X_1X_2X_3)$, $Zw(X_2X_3X_1)$, $Zw(X_3X_1X_2)$. Denn wegen der Eigenschaften von Ordnungsrelationen gibt es genau eine Permutation (i_1, i_2, i_3) der Zahlen 1, 2, 3, so daß $X_{i_1} < X_{i_2} < X_{i_3}$ gilt, und das hat eine und nur eine der drei angegebenen Relationen zur Folge.

Weiter folgt aus der Definition der Zwischenrelation und der des Begriffes Strahl, daß zwei Punkte X und Y einer Geraden g genau dann zu verschiedenen Strahlen mit dem Anfangspunkt A und der Trägergeraden g gehören, wenn $Zw(XAY)$ gilt.

Mit Hilfe der Zwischenrelation wird folgendermaßen der Begriff *Strecke* definiert: Sind A und B zwei Punkte, so wird die Menge

$$\{X : Zw(AXB) \vee X = A \vee X = B\}$$

die Strecke AB genannt; sie soll mit AB bezeichnet werden. Die Punkte A und B heißen *Endpunkte*, die übrigen *innere Punkte* der Strecke AB . Eine Strecke ist durch Angabe ihrer Endpunkte eindeutig bestimmt, und umgekehrt hat jede Strecke genau zwei Endpunkte. Aus $Zw(ABC)$ folgt $B \in AC$ (nicht aber umgekehrt; denn aus $X \in YZ$ kann auch $X = Y$ oder $X = Z$ folgen).

Betrafen die bisherigen Betrachtungen zur Anordnungslehre nur immer die Punkte jeweils einer Geraden, so wird im folgenden Axiom eine Beziehung zwischen Anordnungsseigenschaften verschiedener Geraden festgelegt.

Axiom (8). (Übertragung der Zwischenrelation): Sind g_1, g_2, g_3 paarweise parallele Geraden, die nicht alle gleich sind, A_1 und B_1 Punkte auf g_1 , A_2 und B_2 Punkte auf g_2 , A_3 und B_3 Punkte auf g_3 , so folgt aus $Zw(A_1A_2A_3)$ und der Kollinearität von B_1, B_2 und B_3 die Relation $Zw(B_1B_2B_3)$ (Abb. 1.5).

Es sei auf mögliche Spezialfälle hingewiesen, in denen z. B. $A_1 = B_1$ sein kann (Abb. 1.6).

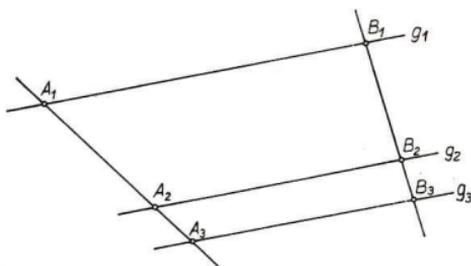


Abb. 1.5

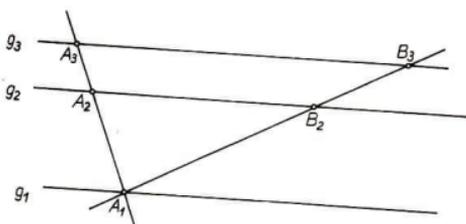


Abb. 1.6

Aus Axiom (8) folgt leicht der

Satz von der Invarianz der Zwischenrelation bei Verschiebungen.
Sind A_1, A_2, A_3 drei Punkte mit $Zw(A_1A_2A_3)$ und ist τ eine Verschiebung, so gilt auch $Zw(\tau(A_1)\tau(A_2)\tau(A_3))$.

Beweis. Gehört die Verbindungsgerade der Punkte A_1, A_2, A_3 nicht zur Verschiebungsrichtung von τ , so sind die Geraden $g(A_i\tau(A_i))$ ($i = 1, 2, 3$) nach dem zweiten Hilfssatz über Verschiebungen paarweise parallel, Axiom (8) ist anwendbar und liefert unmittelbar die Behauptung. Gehört aber die Verbindungsgerade der Punkte A_1, A_2, A_3 zur Verschiebungsrichtung von τ , so setze man τ aus zwei Verschiebungen τ_1 und τ_2 zusammen, deren Richtungen nicht mit der von τ übereinstimmen, indem man einen beliebigen Punkt Q außerhalb $g(A_1A_2)$ wählt und τ_1 durch $\tau_1(A_1) = Q$ sowie τ_2 durch $\tau_2(Q) = \tau(A_1)$ festlegt. Auf Grund des ersten Falles bleibt dann die Zwischenrelation der Punkte A_1, A_2, A_3 bei $\tau_2 \circ \tau_1$ ($= \tau$) ungeändert.

Aus der Definition des Begriffes Strecke und dem eben bewiesenen Satz folgt, daß das Bild einer Strecke bei einer Verschiebung wieder eine Strecke ist, wobei Endpunkte in Endpunkte übergehen.

Im Anschluß an die Definition der Zwischenrelation wurde bemerkt, daß sich die Einteilung einer Geraden in zwei Strahlen mit gegebenem Anfangspunkt unabhän-

gig von der Orientierung allein mittels der Zwischenrelation beschreiben läßt. Daraus folgt vermöge der Invarianz der Zwischenrelation, daß das Bild eines Strahls bei einer Verschiebung wieder ein Strahl ist, wobei Anfangspunkt in Anfangspunkt übergeht.

Für Fixgeraden von Verschiebungen läßt sich der Satz von der Invarianz der Zwischenrelation verschärfen zum

Satz über die Invarianz der Ordnungsrelation auf Fixgeraden von Verschiebungen. *Ist $(g, <)$ eine orientierte Gerade und τ eine Verschiebung, die g in sich selbst überführt, so folgt aus $A < B$ die Relation $\tau(A) < \tau(B)$ für alle A, B von g .*

Beweis (Abb. 1.7). Zunächst wird ein spezielles Punktepaar mit der im Satz behaupteten Eigenschaft konstruiert. Es sei X_0 ein beliebiger Punkt von g und Y_0 ein Punkt mit $Zw(X_0 Y_0 \tau(X_0))$. Ferner sei X_1 ein beliebiger nicht auf g liegender Punkt, und τ_1 sei die Verschiebung, die X_0 auf X_1 abbildet. Die Geraden $g(Y_0 \tau_1(Y_0))$ und $g(X_1 \tau(X_0))$ gehören zu unterschiedlichen Verschiebungsrichtungen, schneiden sich also in einem Punkte X . Nach dem zweiten Hilfssatz über Verschiebungen, angewendet auf τ_1 , gilt

$$g(X_0 X_1) || g(Y_0 \tau_1(Y_0)) .$$

Also folgt aus $Zw(X_0 Y_0 \tau(X_0))$ nach Axiom (8) (Spezialfall $Zw(X_1 X \tau(X_0))$). Weiter ist

$$g(X_0 Y_0) || g(X_1 \tau_1(Y_0))$$

wegen Eigenschaft (V1) von τ_1 , also folgt aus $Zw(X_1 X \tau(X_0))$ nach Axiom (8) $Zw(\tau_1(Y_0) X Y_0)$. Ferner ist nach dem zweiten Hilfssatz über Verschiebungen, angewendet auf $\tau \circ \tau_1^{-1}$,

$$g(X_1 \tau(X_0)) || g(\tau_1(Y_0) \tau(Y_0)) ,$$

nach Axiom (8) folgt aus $Zw(Y_0 X \tau_1(Y_0))$ die Relation $Zw(Y_0 \tau(X_0) \tau(Y_0))$. Aus $Zw(X_0 Y_0 \tau(X_0))$ und $Zw(Y_0 \tau(X_0) \tau(Y_0))$ folgt auf Grund der Definition der Zwischenrelation im Fall $X_0 < Y_0$ die Relation $\tau(X_0) < \tau(Y_0)$, im Fall $Y_0 < X_0$ die Relation

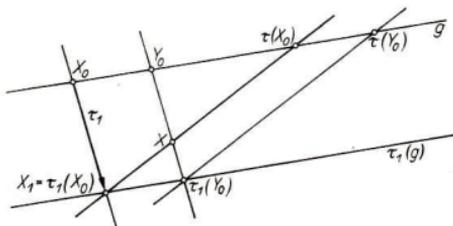


Abb. 1.7

$\tau(Y_0) < \tau(X_0)$, so daß entweder (X_0, Y_0) oder (Y_0, X_0) ein Paar (A_0, B_0) mit $A_0 < B_0$ und $\tau(A_0) < \tau(B_0)$ ist. Der Beweis des Satzes kann nun für beliebige A und B folgendermaßen beendet werden: Es sei zunächst $X (\neq A_0)$ beliebig auf g . Es gibt drei Fälle: $X < A_0 < B_0$, $A_0 < X < B_0$, $A_0 < B_0 \leq X$. Im ersten Fall folgt wegen der Invarianz der Zwischenrelation $Zw(\tau(X) \tau(A_0) \tau(B_0))$, wegen $\tau(A_0) < \tau(B_0)$ also $\tau(X) < \tau(A_0)$. Im zweiten und dritten Fall folgt analog $\tau(A_0) < \tau(X)$, so daß die zwischen beliebigem X und A_0 bestehende Ordnungsrelation bei τ erhalten bleibt. Sind schließlich A, B beliebige Punkte von g mit $A < B$, so gibt es wiederum drei Fälle: $A < B < A_0$, $A < A_0 \leq B$, $A_0 \leq A < B$. Im ersten Fall gilt $Zw(ABA_0)$, also auch $Zw(\tau(A) \tau(B) \tau(A_0))$; auf Grund des Vorhergegangenen (man identifiziere X mit A) gilt auch $\tau(A) < \tau(A_0)$; mit $Zw(\tau(A) \tau(B) \tau(A_0))$ ergibt dies $\tau(A) < \tau(B)$. Analog schließt man im zweiten und dritten Fall und erhält dort jedesmal $\tau(A) < \tau(B)$, womit der Satz bewiesen ist.

Es soll nun die in 1.1.1. angekündigte Verfeinerung des Begriffes Richtung eingeführt werden. Dazu werde die Menge aller Strahlen betrachtet und auf ihr die Relation „verschiebungsgleich“. Eine jede auf Grund dieser Äquivalenzrelation entstandene Klasse soll ein *Richtungssinn* genannt werden. Ein Richtungssinn wird also als eine Äquivalenzklasse verschiebungsgleicher Strahlen definiert. Es ist klar, daß Strahlen mit nicht parallelen Trägergeraden zu verschiedenen Richtungssinnen gehören (man sagt auch: verschiedenen Richtungssinn haben). Es sei nun \mathfrak{R} die Menge der Strahlen, deren Trägergeraden einer festen Richtung angehören. Zwei entgegengesetzte Strahlen AP^+ und AP^- sind sicher nicht verschiebungsgleich (denn andernfalls wäre A ein Fixpunkt der betreffenden Verschiebung), so daß es in \mathfrak{R} mindestens zwei Klassen gibt. Ist nun XY^+ ein beliebiger dritter Strahl aus \mathfrak{R} , so gibt es eine Verschiebung, die X auf A abbildet, dabei muß XY^+ entweder in AP^+ oder in AP^- übergehen, XY^+ ist also einem dieser beiden Strahlen verschiebungsgleich. Es gibt demnach in \mathfrak{R} genau zwei Klassen verschiebungsgleicher Strahlen. Man kann somit sagen: Zu einer Richtung gibt es genau zwei Richtungssinne; man nennt sie einander *entgegengesetzt*.

Manchmal ist es zweckmäßig, auch einem geordneten Paar von Punkten (A, B) einen Richtungssinn zuzusprechen. Man definiert ihn als den durch den Strahl AB^+ gegebenen Richtungssinn. Es zeigt sich nun: Ist τ eine Verschiebung ($\tau \neq \iota$), so haben alle geordneten Punktepaare $(X, \tau(X))$ denselben Richtungssinn. Denn sind X_1, X_2 beliebige Punkte, $X'_1 = \tau(X_1), X'_2 = \tau(X_2)$ ihre Bilder bei τ , so gibt es eine Verschiebung φ mit $\varphi(X_1) = X_2$, und es wird wegen $\varphi(X'_1) = \varphi \circ \tau(X_1) = \tau \circ \varphi(X_1) = \tau(X_2) = X'_2$ das Bild des Strahles $X_1X'_1^+$ bei φ der Strahl $X_2X'_2^+$, d. h., $X_1X'_1^+$ und $X_2X'_2^+$ gehören zum gleichen Richtungssinn und damit auch die Paare (X_1, X'_1) und (X_2, X'_2) . Es ist demnach natürlich, einer jeden Verschiebung τ einen Richtungssinn zuzusprechen. Man definiert ihn als den durch das Punktepaar $(X, \tau(X))$ gegebenen Richtungssinn; dabei ist X ein beliebiger Punkt.

Es sei τ eine Verschiebung ($\neq \iota$), A ein beliebiger Punkt. Die Gerade $g(A\tau(A))$ werde so orientiert, daß $A < \tau(A)$ gilt. Hieraus folgt durch Anwendung von τ^{-1}

wegen der Invarianz der Ordnungsrelation die Beziehung $\tau^{-1}(A) < A$. Die Strahlen $A\tau(A)^+$ und $A\tau^{-1}(A)^+$ sind also entgegengesetzt, und folglich ist der Richtungssinn einer Verschiebung zu dem ihrer Umkehrabbildung entgegengesetzt.

Ein wichtiger Sachverhalt der Anordnungslehre besteht darin, daß jede Gerade eine Zerlegung der Ebene — die Punkte der Geraden selbst ausgenommen — in zwei sogenannte Halbebenen bewirkt, wie jetzt gezeigt werden soll.

Es sei g eine feste Gerade. Sie gehört einer bestimmten Parallelenklasse an, und die Untergruppe derjenigen Verschiebungen, die diese Klasse als Verschiebungsrichtung haben, möge mit \mathfrak{G} bezeichnet werden. Die Gerade g ist Fixgerade bei allen Verschiebungen aus \mathfrak{G} . Ferner sei h eine Gerade, die g schneidet. Der Schnittpunkt erzeugt auf h zwei entgegengesetzte Strahlen; mit s_1 bzw. s_2 möge die Menge der vom Anfangspunkt verschiedenen Punkte eines jeden dieser Strahlen bezeichnet werden. Nun werden diejenigen Punktmenge betrachtet, die sich ergeben, wenn man auf die Punkte von s_1 bzw. von s_2 alle Verschiebungen aus \mathfrak{G} anwendet, also die Mengen

$$\mathfrak{H}_1 := \{X : X = \tau(Y) \wedge Y \in s_1 \wedge \tau \in \mathfrak{G}\}$$

und

$$\mathfrak{H}_2 := \{X : X = \tau(Y) \wedge Y \in s_2 \wedge \tau \in \mathfrak{G}\}.$$

Diese Mengen haben keine gemeinsamen Punkte; denn wäre $Z \in \mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2$, so gäbe es Punkte Y_1 aus s_1 und Y_2 aus s_2 sowie Verschiebungen τ_1, τ_2 aus \mathfrak{G} mit $Z = \tau_1(Y_1) = \tau_2(Y_2)$, also $\tau_2^{-1} \circ \tau_1(Y_1) = Y_2$; wegen $\tau_2^{-1} \circ \tau_1 \in \mathfrak{G}$ und dem zweiten Hilfssatz über Verschiebungen müßte die Verbindungsgerade von Y_1 und Y_2 , also h , parallel zu g sein, was der Voraussetzung widerspräche. Andererseits gehört jeder nicht auf g liegende Punkt P entweder zu \mathfrak{H}_1 oder zu \mathfrak{H}_2 ; denn die Parallele durch P zu g schneidet s_1 oder s_2 in einem Punkt S , und die Verschiebung τ , die S auf P abbildet, gehört zu \mathfrak{G} . Die Mengen \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 bilden also eine Zerlegung der Menge aller nicht zu g gehörenden Punkte. Dabei gilt $s_1 \subset \mathfrak{H}_1$, $s_2 \subset \mathfrak{H}_2$. Es zeigt sich nun, daß diese Zerlegung unabhängig von der Auswahl der zu ihrer Konstruktion benutzten Geraden h ist. Um dies nachzuweisen, werde eine andere, g schneidende Gerade l und die durch sie erzeugte Zerlegung betrachtet. Die Klassen seien \mathfrak{L}_1 und \mathfrak{L}_2 . Ferner sei $g \cap h = \{H\}$, $g \cap l = \{L\}$, und o. B. d. A. mögen \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{L}_1 einen gemeinsamen Punkt P_0 haben (Abb. 1.8). Die Parallele zu g durch P_0 möge l in P_l , h in P_h schneiden. Ist nun X beliebig aus \mathfrak{H}_1 , so ist X das Bild eines Punktes X_h bei einer Verschiebung aus \mathfrak{G} , X_h gehört zu HP_h^+ , es gilt also nicht $Zw(P_hHX_h)$. Die Gerade $g(XX_h)$, die parallel zu g und $g(P_hP_l)$ ist, schneidet l in einem Punkt X_l . Nach Axiom (8) gilt dann auch nicht $Zw(P_lLX_l)$, d. h., X_l gehört zu LP_l^+ , also gehört X selbst zu \mathfrak{L}_1 . Das bedeutet $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{L}_1$. Analog ergibt sich umgekehrt $\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{H}_1$, woraus insgesamt $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{L}_1$ folgt. Die Zerlegungen $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ und $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ stimmen also überein. Die für die Mengen s_1 und s_2 auf der Geraden h getroffene Feststellung ($s_1 \subset \mathfrak{H}_1, s_2 \subset \mathfrak{H}_2$) gilt nun für jede Gerade, die g schneidet: Die beiden vom Schnittpunkt erzeugten entgegengesetzten Strahlen dieser Geraden gehören — vom

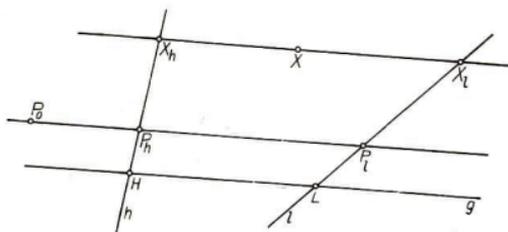


Abb. 1.8

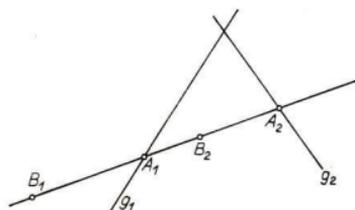


Abb. 1.9

Anfangspunkt abgesehen — je ganz zu einer der beiden Zerlegungsmengen \mathfrak{H}_1 bzw. \mathfrak{H}_2 . Das bedeutet: Zwei Punkte A und B liegen genau dann in verschiedenen Zerlegungsklassen bezüglich der Geraden g , wenn es einen Punkt G auf g gibt, der zwischen A und B liegt.

Die Zerlegungsklassen nennt man die beiden von g erzeugten *offenen Halbebenen*, g heißt *Randgerade* dieser Halbebene. Nimmt man zu einer offenen Halbebene die Randgerade g hinzu, so spricht man schlechthin von einer *Halbebene*. Die beiden zu einer Randgeraden gehörenden Halbebenen nennt man *entgegengesetzt*. Ist ein Paar entgegengesetzter offener Halbebenen gegeben, so gibt es nicht mehr als eine Randgerade dazu. Denn wären g_1 und g_2 zwei Randgeraden (Abb. 1.9) und A_1 bzw. $A_2 (\neq A_1)$ Punkte auf g_1 bzw. g_2 , so gäbe es nach Axiom (7) auf $g(A_1A_2)$ bei geeigneter Orientierung Punkte B_1 und B_2 mit $B_1 < A_1 < B_2 < A_2$, und das würde bedeuten, daß B_1 und B_2 wegen $Zw(B_1A_1B_2)$ in unterschiedlichen Halbebenen, gleichzeitig wegen $Zw(B_1B_2A_2)$ in derselben Halbebene liegen, was nicht sein kann. Zusammenfassend kann festgestellt werden:

Satz über die Zerlegung in Halbebenen. *Jede Gerade g bewirkt eine Zerlegung der Menge der nicht zu ihr gehörenden Punkte in zwei offene Halbebenen derart, daß zwei Punkte genau dann in derselben offenen Halbebene liegen, wenn zwischen ihnen kein Punkt von g existiert.*

Statt „ P und Q liegen in derselben von g erzeugten Halbebene“ sagt man auch „ P und Q liegen in derselben Halbebene bezüglich g “ oder „ P und Q liegen auf derselben Seite von g “. Eine Halbebene ist durch Angabe ihrer Randgeraden g und eines zur Halbebene, aber nicht zur Randgeraden gehörenden Punktes P bestimmt. Die Bezeichnung soll dann durch das Symbol gP^+ erfolgen, gP^- soll die zu gP^+ entgegengesetzte Halbebene bezeichnen. Wird die Randgerade g durch zwei Punkte, etwa durch A und B , bestimmt, dann soll statt gP^+ bzw. gP^- auch das Symbol ABP^+ bzw. ABP^- verwendet werden. Offenbar ist stets $ABP^+ = BAP^+$.

Im weiteren Aufbau der Geometrie wird ein spezieller Typ von Punktmenge eine wichtige Rolle spielen, der mit dem Namen *Fahne* bezeichnet werden soll. Unter einer Fahne versteht man eine Punktmenge, die aus einem Strahl und einer offenen Halbebene besteht, wobei die Randgerade der offenen Halbebene Trägergerade des Strahles ist. Den Strahl nennt man *Randstrahl* der Fahne, seinen Anfangspunkt auch *Anfangspunkt* der Fahne. Eine Fahne ist durch Angabe ihres Randstrahles s und eines zu ihrer offenen Halbebene gehörenden Punktes P bestimmt und soll dann mit sP^+ bezeichnet werden. Mit sP^- wird die Fahne mit dem Randstrahl s bezeichnet, deren offene Halbebene zu derjenigen von sP^+ entgegengesetzt ist. In den Symbolen sP^+ bzw. sP^- darf s durch die oben eingeführte Symbolik QR^+ oder QR^- ersetzt werden, so daß durch Symbole der Form QR^+P^+ , QR^+P^- , QR^-P^+ , QR^-P^- wohlbestimmte Fahnen bezeichnet werden. Die Fahnen QR^+P^+ und QR^-P^- nennt man *entgegengesetzt*; sowohl ihre Randstrahlen als auch ihre offenen Halbebenen sind entgegengesetzt.

Wendet man auf die Punkte einer offenen Halbebene

$$\mathfrak{H} = \{X: X = \tau(Y), Y \in s_1, \tau \in \mathfrak{G}\}$$

eine Verschiebung φ an, so ergibt sich die Bildmenge

$$\mathfrak{H}' = \{X': X' = \varphi(X), X \in \mathfrak{H}\};$$

\mathfrak{H}' erweist sich als Halbebene. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}' &= \{X': X' = \varphi(X), X \in \mathfrak{H}\} \\ &= \{X': X' = \varphi \circ \tau(Y), Y \in s_1, \tau \in \mathfrak{G}\} \\ &= \{X': X' = \tau \circ \varphi(Y), \varphi(Y) \in \varphi(s_1), \tau \in \mathfrak{G}\} \\ &= \{X': X' = \tau(Z), Z \in \varphi(s_1), \tau \in \mathfrak{G}\}. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, daß das Bild der Randgeraden von \mathfrak{H} eine zum Original parallele Gerade ist, daß also \mathfrak{G} auch die Gruppe der Verschiebungen in Richtung dieser Bildgeraden ist, so erkennt man \mathfrak{H}' als eine offene Halbebene, deren Randgerade das Bild der Randgeraden von \mathfrak{H} ist. Bei Verschiebungen gehen demnach Halbebenen in Halbebenen, Randgeraden in Randgeraden über. Analoges gilt für Fahnen: Das Bild einer Fahne bei einer beliebigen Verschiebung ist wieder eine Fahne, die das Bild des Randstrahls der Originalfahne als Randstrahl hat.

Um zu zeigen, wie mit den bisher eingeführten Begriffen gearbeitet werden kann und im Interesse späterer Anwendung werden jetzt zwei Sätze über Anordnungsbeziehungen bewiesen.

Ein Punktquadrupel (A, B, C, D) soll (hier kurz, später wird der Begriff noch etwas anders gefaßt werden) *Parallelogramm* genannt werden, wenn die Punkte nicht kollinear sind und das geordnete Paar (A, B) verschiebungsgleich zum Paar (C, D) ist. Die Strecken AB, BD, DC, CA heißen *Seiten*, die Strecken BC und AD *Diagonalen* des Parallelogramms (Abb. 1.10). Es gilt $g(AB) \parallel g(CD)$ und $g(AC) \parallel g(BD)$. Nun gilt folgender

Satz vom Diagonalenschnittpunkt. *Ist (A, B, C, D) ein Parallelogramm, so haben die Diagonalen AD und BC einen gemeinsamen Punkt.*

Beweis (Abb. 1.11). Es genügt zu zeigen, daß B und C auf verschiedenen Seiten der Geraden $g(AD)$ liegen. Denn dann gehört ein Punkt der Strecke BC zu $g(AD)$, und durch Analogie ergibt sich auch $g(BC) \cap AD \neq \emptyset$, woraus dann insgesamt die Behauptung des Satzes folgt.

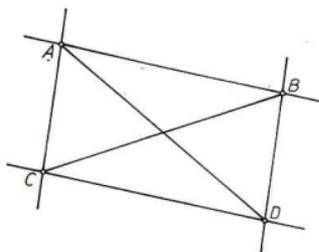


Abb. 1.10

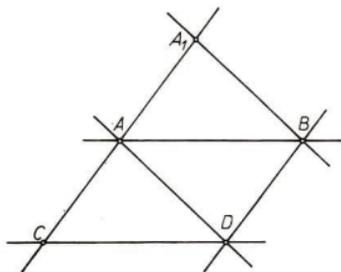


Abb. 1.11

Es sei τ die Verschiebung, die A auf C abbildet und σ die Verschiebung, die A auf B abbildet. Ist $A_1 = \tau^{-1}(A)$, so sind AC^+ und AA_1^+ entgegengesetzte Strahlen. Es gilt also $Zw(CAA_1)$, d. h., A_1 und C liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden $g(AD)$. Andererseits ist $\tau \circ \sigma(A) = \tau(B) = D$, $\tau \circ \sigma(A_1) = \sigma \circ \tau(A_1) = \sigma(A) = B$; hieraus folgt: Die Strahlen AA_1^+ und DB^+ sind verschiebungsgleich bezüglich der Verschiebung $\tau \circ \sigma$, die die Richtung der Geraden $g(AD)$ hat. Das bedeutet, daß A_1 und B in derselben Halbebene bezüglich $g(AD)$ liegen. Da A_1 und C auf verschiedenen Seiten von $g(AD)$ liegen, gehören auch B und C zu verschiedenen Halbebenen von $g(AD)$, was zu zeigen war.

Der nächste Satz betrifft eine Anordnungsbeziehung dreier Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt.

Satz über drei Strahlen. *Von drei gegebenen paarweise nicht kollinearen Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt hat entweder genau einer die Eigenschaft, daß bezüglich seiner Trägergeraden die beiden anderen Strahlen auf verschiedenen Seiten liegen, oder alle drei Strahlen haben diese Eigenschaft.*

Beweis. Es seien s_1, s_2, s_3 drei paarweise nicht kollineare Strahlen mit dem Anfangspunkt A , und g_1, g_2, g_3 seien ihre Trägergeraden ($s_i \subset g_i$). Es gibt folgende drei Fälle (und bei geeigneter Bezeichnung der Strahlen keine weiteren):

a) s_1 und s_2 liegen auf derselben Seite von g_3 , s_2 und s_3 liegen auf derselben Seite von g_1 (Abb. 1.12a),

b) s_1 und s_2 liegen auf derselben Seite von g_3 , s_2 und s_3 liegen auf verschiedenen Seiten von g_1 (Abb. 1.12b),

c) s_1 und s_3 liegen auf verschiedenen Seiten von g_3 , s_2 und s_3 liegen auf verschiedenen Seiten von g_1 (Abb. 1.12c).

Es sei $P_1 (\neq A)$ ein beliebiger Punkt von s_1 . Die Parallele g'_3 durch P_1 zu g_3 schneidet g_2 in einem Punkt P_2 , die Parallele g'_1 durch P_2 zu g_1 schneidet g_3 in einem Punkt P_3 . Das Quadrupel (P_1, P_2, A, P_3) ist ein Parallelogramm.

In den Fällen a) und b) ist $g_3 P_1^+ \cap g_2 = s_2$, und da andererseits g'_3 in $g_3 P_1^+$ enthalten ist, gehört in beiden Fällen P_2 zu s_2 . Im Fall a) sind g'_1 und s_3 bezüglich g_1 in derselben Halbebene enthalten (in $g_1 P_2^+$), folglich gehört P_3 zu s_3 . Nach dem Satz vom Diagonalschnittpunkt liegen also die Punkte P_1 und P_3 und demnach die Strahlen s_1 und s_3 auf verschiedenen Seiten von g_2 , so daß im Fall a) der Satz bewiesen ist. Im Fall b) sind g'_1 und s_3 bezüglich g_1 in verschiedenen Halbebenen enthalten, folglich liegt P_3 auf dem zu s_3 entgegengesetzten Strahl s'_3 . Aus dem Satz vom Diagonalschnittpunkt folgt dann, daß s_1 und s'_3 auf verschiedenen Seiten von g_2 liegen; s_1 und s_3 liegen somit auf derselben Seite von g_2 , so daß auch im Fall b) der Satz bewiesen ist. Im Fall c) schließlich ist $g_3 P_1^+ \cap g_2$ der zu s_2 entgegen-

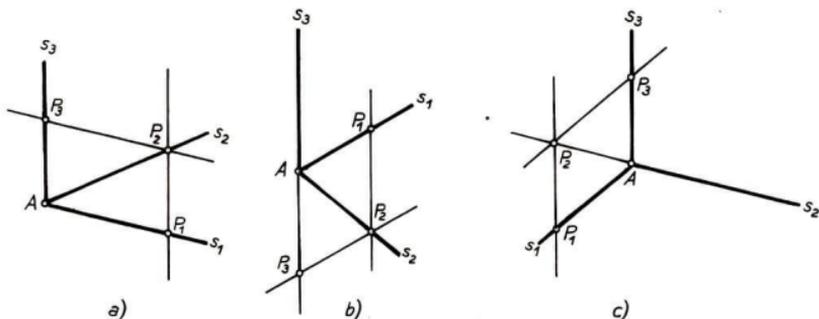


Abb. 1.12

gesetzte Strahl s'_2 , also $P_2 \in s'_2$; ferner sind bezüglich g_1 die Strahlen s'_2 und s_3 in derselben Halbebene enthalten, so daß P_3 zu s_3 gehört. Nach dem Satz vom Diagonalschnittpunkt liegen P_1 und P_3 und folglich die Strahlen s_1 und s_3 auf verschiedenen Seiten von g_2 . Damit ist der Satz bewiesen.

1.1.2.2. Orientierung

Von der durch die alltägliche Erfahrung gebildeten Anschauung her ist es offenbar sinnvoll zu sagen, daß bei einer gegebenen Fahne deren offene Halbebene — in Blickrichtung des Randstrahls gesehen — rechts bzw. links vom Randstrahl liegt. In diesem Sinne kann man daher anschaulich zwischen zwei Sorten von Fahnen unterscheiden. Dieser Sachverhalt soll nun auch im Rahmen des bisherigen Aufbaues — also von den Axiomen (1) bis (8) und deren Folgerungen her — erfaßt werden. Dabei ist es jedoch nicht möglich, die Begriffe „Rechts“ und „Links“ einzeln herzuleiten, sondern es kann nur die Existenz zweier Sorten von Fahnen nachgewiesen werden. Denn bei der Entscheidung über „Rechts“ und „Links“ im praktischen Leben wird ja immer — bewußt oder unbewußt — ein Vergleich mit einer speziellen real vorhandenen Punkt- oder Gegenstandskonfiguration vorgenommen (z. B. beim menschlichen Körper mit dem Richtungssinn „Kopf — Füße“ zusammen mit der Seite, auf der sich das Herz befindet).

Die genannte Einteilung der Fahnen geschieht über eine Äquivalenzrelation, die durch die Anschauung nahegelegt wird, und von der gezeigt wird, daß die Anzahl der zugehörigen Äquivalenzklassen gleich 2 ist.

Es sei A ein beliebiger, fest gewählter Punkt. \mathfrak{S}_A sei die Menge aller Strahlen, die den Anfangspunkt A haben, und \mathfrak{F}_A sei die Menge aller Fahnen, deren Randstrahlen zu \mathfrak{S}_A gehören. In der Menge \mathfrak{F}_A wird eine Relation definiert, die mit den Worten „gleichorientiert bezüglich A “ benannt und mit dem Symbol „ go_A “ bezeichnet werden soll.

Definition. Sind die Randstrahlen der Fahnen f_1 und f_2 nicht kollinear, so gelte $f_1 go_A f_2$ genau dann, wenn entweder der Randstrahl von f_1 in f_2 oder der Randstrahl von f_2 in f_1 enthalten ist, aber nicht beides gilt; haben f_1 und f_2 kollineare Randstrahlen so gelte $f_1 go_A f_2$ genau dann, wenn $f_1 = f_2$ oder f_1 zu f_2 entgegengesetzt ist.

Abb. 1.13 zeigt Paare von Fahnen, die man intuitiv als gleichorientiert (Abb. 1.13a) bzw. als nicht gleichorientiert (Abb. 1.13b) ansprechen würde. Man mache sich zum Zwecke der Motivierung der Definition von „ go_A “ anschaulich klar, daß die Aussage „ $f_1 go_A f_2$ “ für die Beispiele von Abb. 1.13a richtig, für diejenigen von Abb. 1.13b falsch ist.

Das Ziel der weiteren Überlegungen ist es, folgenden Satz zu beweisen:

Satz über die Relation „ go_A “: Die Relation „ go_A “ ist eine Äquivalenzrelation, und die Anzahl der zugehörigen Äquivalenzklassen ist gleich 2.

Um einige Beweisschritte leichter formulieren zu können, wird eine Definition eingeführt, die lediglich für diesen Abschnitt wichtig ist. Für Fahnen f_1, f_2 aus \mathfrak{F}_A

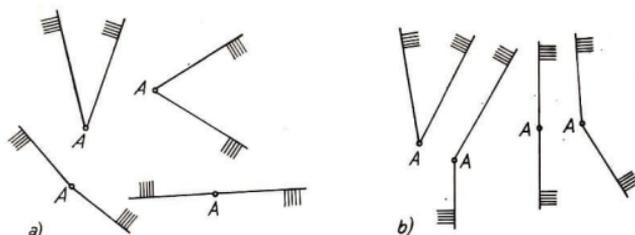


Abb. 1.13

mit nicht kollinearen Randstrahlen wird gesetzt: $f_1(f_2) = 1$ genau dann, wenn der Randstrahl von f_2 in f_1 enthalten ist; $f_1(f_2) = -1$ sonst. Für Fahnen aus \mathfrak{F}_A mit nicht kollinearen Randstrahlen gilt dann offenbar $f_1 go_A f_2$ genau dann, wenn $f_1(f_2) \cdot f_2(f_1) = -1$ ist. Ferner gilt: Sind f_1 und f_2 entgegengesetzte Fahnen aus \mathfrak{F}_A , so gilt für jede Fahne f aus \mathfrak{F}_A , deren Randstrahl nicht zu denen von f_1 und f_2 kollinear ist,

$$(1) \quad f_1(f) = -f_2(f) \quad \text{und} \quad f(f_1) = -f(f_2).$$

Im Beweis des Satzes wird folgender Hilfssatz benötigt:

Hilfssatz. Sind f_1, f_2, f_3 beliebige Fahnen aus \mathfrak{F}_A mit paarweise nicht kollinearen Randstrahlen, so gilt

$$f_1(f_2) \cdot f_1(f_3) \cdot f_2(f_3) \cdot f_2(f_1) \cdot f_3(f_1) \cdot f_3(f_2) = -1.$$

Beweis. Die linke Seite der Gleichung besteht aus drei Faktoren der Form $f_i(f_k) \cdot f_i(f_j)$. Ein solches zweigliedriges Produkt ist genau dann gleich -1 , wenn die Randstrahlen von f_k und f_j auf verschiedenen Seiten der Trägergeraden des Randstrahles von f_i liegen. Auf Grund des Satzes über drei Strahlen ist dies aber entweder für genau ein Produkt oder für alle drei der Fall, so daß das Produkt aller drei Produkte stets gleich -1 ist.

Nun wird der Satz bewiesen. Aus der Definition folgt unmittelbar, daß die Relation „ go_A “ reflexiv und symmetrisch ist. Für den Beweis der Transitivität sei angenommen, daß $f_1 go_A f_2$, $f_2 go_A f_3$ ist. Die Behauptung lautet $f_1 go_A f_3$. Sind irgend zwei dieser drei Fahnen gleich, so ist die Behauptung trivial. Ebenso leicht ergibt sich die Behauptung auf Grund der Gleichungen (1), falls f_1 zu f_2 oder f_2 zu f_3 entgegengesetzt ist, die betreffenden Rechnungen können dem Leser überlassen bleiben. Es seien also f_1, f_2, f_3 paarweise verschieden und f_1 zu f_2 sowie f_2 zu f_3 nicht entgegengesetzt. Dann gilt

$$(2) \quad f_1(f_2) \cdot f_2(f_1) = f_2(f_3) \cdot f_3(f_2) = -1.$$

Die Randstrahlen von f_1 und f_3 sind entweder nicht kollinear oder entgegengesetzt oder gleich. Haben f_1 und f_3 nicht kollineare Randstrahlen, so ergibt das Einsetzen

von (2) in die linke Seite der im Hilfssatz angegebenen Gleichung die Beziehung $f_1(f_3) \cdot f_3(f_1) = -1$, also $f_1 \text{ go}_A f_3$. Haben f_1 und f_3 entgegengesetzte Randstrahlen, so gilt $f_2(f_1) = -f_2(f_3)$. Einsetzen in (2) ergibt $f_1(f_2) = -f_3(f_2)$. Hieraus folgt, daß f_1 und f_3 entgegengesetzte offene Halbebenen haben, beide Fahnen sind demnach entgegengesetzt und stehen somit in der Relation „ go_A “. Haben schließlich f_1 und f_3 gleiche Randstrahlen, so gilt $f_2(f_1) = f_2(f_3)$. Einsetzen in (2) ergibt $f_1(f_2) = f_3(f_2)$. Hieraus folgt die Gleichheit der offenen Halbebenen von f_1 und f_3 , also die Gleichheit von f_1 und f_3 . Damit ist „ go_A “ als Äquivalenzrelation nachgewiesen. Es bleibt zu zeigen, daß die Anzahl der Äquivalenzklassen gleich 2 ist. Sie ist mindestens 2, denn zwei Fahnen f_1, f_2 aus \mathfrak{F}_A mit gleichen Randstrahlen und entgegengesetzten offenen Halbebenen sind sicher nicht gleichorientiert bezüglich A . Ist dann f_3 eine beliebige dritte Fahne ($\neq f_1, f_2$) aus \mathfrak{F}_A , so erweist sie sich als gleichorientiert entweder zu f_1 oder zu f_2 . Denn ist ihr Randstrahl mit dem von f_1 und f_2 kollinear, so ist sie notwendig zu f_1 oder f_2 entgegengesetzt, also gleichorientiert bezüglich A . Ist dagegen ihr Randstrahl nicht zu denen von f_1 und f_2 kollinear, so ist er aber in einer der beiden Fahnen, etwa in f_1 , enthalten, d. h., es gilt $f_1(f_3) = 1, f_2(f_3) = -1$. Wegen $f_3(f_1) = f_3(f_2)$ wird $f_1(f_3) \cdot f_3(f_1) \cdot f_2(f_3) \cdot f_3(f_2) = -1$. Hieraus folgt, daß eines von den Produkten $f_1(f_3) \cdot f_3(f_1)$ und $f_2(f_3) \cdot f_3(f_2)$ gleich -1 ist, d. h., f_3 ist zu f_1 oder zu f_2 gleichorientiert bezüglich A . Damit ist der Satz bewiesen.

Die Relation „gleichorientiert bezüglich A “ wird nun zu einer Äquivalenzrelation über der Menge aller Fahnen erweitert.

Diese Erweiterung wird durch die anschauliche Vorstellung begründet, nach der der Sachverhalt „Die offene Halbebene einer Fahne liegt rechts von ihrem Randstrahl“ ungeändert bleibt, wenn man die Fahne in der Ebene verschiebt. Verschiebungsgleiche Fahnen werden also als gleichorientiert zu definieren sein.

Zunächst wird der zu Beginn dieses Abschnittes fest gewählte Punkt A variabel gedacht, d. h., es wird zu jedem Punkt X die Menge \mathfrak{F}_X und in ihr die Relation „ go_X “ gebildet, und für beliebige Fahnen f_1, f_2 wird definiert: $f_1 \text{ go}_* f_2$ gilt genau dann, wenn f_1 und f_2 einen gemeinsamen Anfangspunkt P haben und $f_1 \text{ go}_P f_2$ in \mathfrak{F}_P gilt. Diese Relation ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Fahnen. Es gibt aber unendlich viele Äquivalenzklassen, da Fahnen mit unterschiedlichen Anfangspunkten nicht in dieser Relation stehen. Wichtig ist, daß diese Relation verschiebungsinvariant ist: Sind f_1, f_2 zwei Fahnen mit $f_1 \text{ go}_* f_2$ und ist τ eine Verschiebung, so gilt $\tau(f_1) \text{ go}_* \tau(f_2)$; denn die in der Definition von „ go_* “ bzw. „ go_A “ vorkommenden Eigenschaften sind Enthaltenseins- und Anordnungseigenschaften, die sich bei Verschiebung nicht ändern.

Die endgültige Definition der Gleichorientierung erfolgt nun durch Kombination der Relationen „verschiebungsgleich“ und „ go_* “. Für beliebige Fahnen f_1, f_2 wird die Relation „gleichorientiert“ — abgekürzt mit dem Symbol „ go “ — in der folgenden Weise definiert.

Definition. f_1 go f_2 gilt genau dann, wenn es eine Verschiebung τ gibt, so daß $\tau(f_1)$ go* f_2 gilt.

Da „go*“ die Gleichheitsrelation enthält, sind verschiebungsgleiche Fahnen stets gleichorientiert.

Es ist klar, daß die Relation „go“ reflexiv ist. Auf Grund der Verschiebungsinvarianz der Äquivalenzrelation „go*“ ist sie auch symmetrisch und transitiv; denn aus $\tau(f_1)$ go* f_2 folgt f_1 go* $\tau^{-1}(f_2)$, und aus $\tau_1(f_1)$ go* f_2 und $\tau_2(f_2)$ go* f_3 folgt $\tau_2 \circ \tau_1(f_1)$ go* f_3 . Also ist „go“ eine Äquivalenzrelation.

Da zwei Fahnen f_1, f_2 , die den gemeinsamen Anfangspunkt A haben und die nicht in der Relation „go_A“ stehen, nicht verschiebungsgleich sein können (die betreffende Verschiebung müßte ja A auf sich selbst abbilden, also die identische Abbildung sein), gibt es mindestens zwei Äquivalenzklassen. Ist f eine beliebige Fahne, so gibt es eine Verschiebung τ , die ihren Anfangspunkt auf A abbildet, $\tau(f)$ gehört dann zu \mathfrak{F}_A und steht entweder mit f_1 oder f_2 in der Relation „go*“, so daß f mit f_1 oder mit f_2 in der Relation „go“ steht. Es gibt also nicht mehr als zwei Klassen, man nennt sie die beiden *Orientierungsklassen*.

Insgesamt gilt der

Satz über die Gleichorientierung von Fahnen. *Die Relation „gleichorientiert“ ist eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Fahnen, die eine Zerlegung dieser Menge in zwei Klassen bewirkt.*

Fahnen, die nicht gleichorientiert sind, nennt man auch *entgegengesetzt orientiert*.

Manchmal ist es erforderlich, eine der beiden Orientierungsklassen auszuzeichnen. Ist eine solche Auszeichnung erfolgt, so sagt man, die Ebene sei *orientiert*.

Unter einem *orientierten Elementarwinkel* soll ein geordnetes Paar von Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt verstanden werden. Die Strahlen nennt man *Schenkel*, den gemeinsamen Anfangspunkt *Scheitel* des orientierten Elementarwinkels. Zur Bezeichnung des aus dem Strahlenpaar (h, k) bestehenden orientierten Elementarwinkels soll das Symbol $\sphericalangle(h, k)$ verwendet werden; ist $h = AB^+$, $k = AC^+$, so soll statt $\sphericalangle(AB^+, AC^+)$ kürzer $\sphericalangle BAC$ geschrieben werden. Einen orientierten Elementarwinkel, dessen Schenkel entgegengesetzte Strahlen sind, nennt man *gestreckt*; sind die beiden Schenkel gleich, so spricht man kurz von einem *Nullwinkel*.

Es ist nun sinnvoll, auch die orientierten Elementarwinkel — Nullwinkel und gestreckte ausgenommen — in zwei Orientierungsklassen einzuteilen. Es wird definiert: $\sphericalangle PAQ$ ist mit $\sphericalangle RBS$ genau dann gleichorientiert, wenn die Fahnen AP^+Q^+ und BR^+S^+ gleichorientiert sind. Die orientierten Elementarwinkel $\sphericalangle YXZ$ und $\sphericalangle ZXY$ sind — X, Y, Z nicht kollinear vorausgesetzt — entgegengesetzt orientiert, denn die Fahnen XY^+Z^+ und XZ^+Y^+ haben die Eigenschaft, daß jeweils der Randstrahl der einen in der anderen enthalten ist, d. h., sie stehen nicht in der Relation „go*“. Die Änderung der Reihenfolge der Schenkel eines

orientierten Elementarwinkels bewirkt also den Übergang in die entgegengesetzte Orientierungsklasse.

Es soll nun noch der Begriff des *Umlaufsinnes* eingeführt werden. Man definiert: Die geordneten Tripel von nicht kollinearen Punkten (A, B, C) und (P, Q, R) haben genau dann denselben Umlaufssinn, wenn die Fahnen AB^+C^+ und PQ^+R^+ gleichorientiert sind. Unter Umlaufssinn eines geordneten nicht kollinearen Punkte-tripels (A, B, C) kann man also die Orientierungsklasse der Fahne AB^+C^+ verstehen. Es läßt sich leicht zeigen, daß die Tripel (A, B, C) , (B, C, A) , (C, A, B) denselben Umlaufssinn haben, der zu demjenigen der Tripel (A, C, B) , (C, B, A) und (B, A, C) entgegengesetzt ist; der Beweis sei dem Leser als Aufgabe überlassen.

1.1.3. Bewegungen und Kongruenz

1.1.3.1. Axiome und grundlegende Sätze über Bewegungen

Die Grundlage für die Lehre von den Bewegungen und der Kongruenz ist das folgende Axiom:

Axiom (9) (Bewegungsaxiom). *Es gibt eine Menge \mathfrak{B} von bijektiven Abbildungen der Ebene auf sich, die Bewegungen genannt werden und die folgende Eigenschaften haben:*

- (B1) *Die Bildmenge einer (eines) beliebigen Geraden (Strahls, Strecke, Halbebene, Fahne) ist eine (ein) Gerade (Strahl, Strecke, Halbebene, Fahne); dabei werden Anfangspunkt, Endpunktepaar, Randgerade, Randstrahl der Originalmengen auf Anfangspunkt, Endpunktepaar, Randgerade, Randstrahl der betreffenden Bildmengen abgebildet. Sind X, Y, Z drei Punkte mit $Zw(XYZ)$, so gilt $Zw(\varphi(X) \varphi(Y) \varphi(Z))$ für jede Bewegung φ .*
- (B2) *Sind f_1 und f_2 zwei beliebige Fahnen, so gibt es genau eine Bewegung φ mit $\varphi(f_1) = f_2$.*
- (B3) *Sind A und B zwei beliebige Punkte, so gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(A) = B$ und $\varphi(B) = A$.*
- (B4) *Sind h und k zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt, so gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(h) = k$ und $\varphi(k) = h$.*
- (B5) *Die Menge \mathfrak{B} ist bezüglich der Hintereinanderausführung der Abbildungen eine Gruppe.*

Im folgenden werden die Begriffe Fixpunkt, Fixgerade und Fixpunktgerade eine Rolle spielen, der Leser sei an das in 1.1.1. über diese Begriffe Gesagte erinnert.

Ein weiterer wichtiger Begriff ist der der *Involution*. Unter einer Involution versteht man eine von der identischen Abbildung verschiedene bijektive Abbildung φ einer Menge auf sich selbst — in diesem Abschnitt wird es die Menge der

Punkte sein, und φ wird immer eine Bewegung sein — mit der Eigenschaft $\varphi \circ \varphi = \iota$, d. h., führt man φ zweimal hintereinander aus, so ergibt sich die identische Abbildung. Eine Abbildung, die Involution ist, nennt man auch *involutorisch*. Ist Y das Bild des Punktes X bei einer involutorischen Bewegung φ , so ist auch X das Bild von Y , denn es ist

$$\varphi(Y) = \varphi \circ \varphi(X) = \iota(X) = X.$$

Es gilt also $\varphi^{-1} = \varphi$. Man sagt, die involutorische Bewegung vertausche Original- und Bildpunkt. Hieraus folgt, daß die Verbindungsgerade von Original- und Bildpunkt einer involutorischen Bewegung stets Fixgerade dieser Bewegung ist, denn es ist

$$\varphi(g(XY)) = g(\varphi(X) \varphi(Y)) = g(YX).$$

Ebenso ist der Schnittpunkt (falls vorhanden) von Original- und Bildgerade einer involutorischen Bewegung Fixpunkt, denn es ist

$$\begin{aligned} \varphi(g(AB) \cap g(\varphi(A) \varphi(B))) &= \varphi(g(AB)) \cap \varphi(g(\varphi(A) \varphi(B))) \\ &= g(\varphi(A) \varphi(B)) \cap g(AB). \end{aligned}$$

Beispiele für involutorische Bewegungen werden weiter unten gegeben werden.

Aus dem Bewegungssaxiom sollen jetzt zwei wichtige Folgerungen gezogen werden.

Folgerung 1. *Ist f eine Fahne und φ eine Bewegung mit $\varphi(f) = f$, so ist φ die identische Abbildung.*

Beweis. Wegen (B5) ist die identische Abbildung ι als neutrales Element der Abbildungsgruppe \mathfrak{B} sicher eine Bewegung, und sie bildet f auf sich ab. Nach (B2) gibt es aber nicht mehr als eine Bewegung, die f auf sich abbildet, also ist $\varphi = \iota$.

Folgerung 2. *Ist s ein Strahl und φ eine Bewegung mit $\varphi(s) = s$, so ist die Trägergerade von s eine Fixpunktgerade von φ .*

Beweis. Es kann $\varphi \neq \iota$ vorausgesetzt werden, denn für $\varphi = \iota$ ist der Satz trivial. Zunächst wird durch einen indirekten Beweis gezeigt, daß die Punkte von s Fixpunkte von φ sind. s habe den Anfangspunkt A , es gilt $\varphi(A) = A$. Nach (B1) wird jede der beiden Fahnen, die den Randstrahl s haben, auf eine Fahne mit dem Randstrahl s abgebildet. Wegen Folgerung 1 kann keine von ihnen auf sich selbst abgebildet werden, sie werden also miteinander vertauscht. Bei der Bewegung $\varphi \circ \varphi$ wird dann jede dieser Fahnen wieder auf sich selbst abgebildet. Nach Folgerung 1 ist $\varphi \circ \varphi = \iota$, d. h., φ ist Involution. Es sei nun $P (\neq A)$ ein Punkt von s mit $\varphi(P) = Q$ und $P \neq Q$, Q ist wegen (B1) von A verschieden. Da A Anfangspunkt von s ist, gilt entweder $Zw(APQ)$ oder $Zw(AQP)$, aber nicht beides.

Gilt $Zw(APQ)$, so gilt nach (B1) für die Bildpunkte $Zw(\varphi(A) \varphi(P) \varphi(Q))$, also $Zw(AQP)$, im Widerspruch zu $Zw(APQ)$.

Gilt $Zw(AQP)$, so ergibt sich nach (B1) die Beziehung $Zw(\varphi(A) \varphi(Q) \varphi(P))$, also $Zw(APQ)$, was ebenfalls ein Widerspruch ist. Alle Punkte von s sind somit Fixpunkte. Auf den zu s entgegengesetzten Strahl können nun die analogen Überlegungen angewendet werden, er und damit die gesamte Trägergerade von s besteht aus lauter Fixpunkten.

Die Bewegungen sollen nun etwas genauer studiert werden. Dabei wird sich zeigen, daß es unterschiedliche Typen von Bewegungen gibt.

Zunächst wird der Begriff der Geradenspiegelung definiert. Es sei f_1 eine beliebige Fahne, und die Fahne f_2 habe denselben Randstrahl wie f_1 , aber ihre offene Halbebene sei zu der von f_1 entgegengesetzt. g sei die Trägergerade des Randstrahls von f_1 und f_2 . Die nach (B2) eindeutig bestimmte Bewegung φ , die f_1 auf f_2 abbildet, hat folgende Eigenschaften:

- (S1) *Jeder Punkt der Geraden g ist Fixpunkt.*
 (S2) *Die beiden offenen Halbebenen der Geraden g werden miteinander vertauscht.*

Die Eigenschaft (S1) folgt aus der Folgerung 2, weil der Randstrahl von f_1 und f_2 auf sich abgebildet wird. (S2) ergibt sich wie im Beweis von Folgerung 2 aus (B1) und Folgerung 1. Aus (S2) folgt überdies, daß φ eine Involution ist. Sind f'_1 und f'_2 zwei andere Fahnen, die einen gemeinsamen, auf g liegenden Randstrahl haben und deren offene Halbebenen entgegengesetzt sind, so gilt auch für diese Fahnen $\varphi(f'_1) = f'_2$. Zusammen mit (B2) ergibt das, daß es bei vorgegebener Geraden g nur eine einzige Bewegung mit den Eigenschaften (S1) und (S2) gibt. Man nennt eine Bewegung mit den Eigenschaften (S1) und (S2) eine *Geradenspiegelung* (oder auch nur kurz eine Spiegelung) *an der Geraden g* , und es gilt:

Erster Existenzsatz für Geradenspiegelungen. Zu jeder Geraden gibt es genau eine Geradenspiegelung an dieser Geraden.

Die Gerade g nennt man *Spiegelgerade*, sie besteht genau aus den Fixpunkten der betreffenden Geradenspiegelung. Zur Bezeichnung der Spiegelung an der Geraden g wird das Symbol σ_g verwendet werden. Es gilt ferner ein

Zweiter Existenzsatz für Geradenspiegelungen. Sind h und k zwei verschiedene Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt, so gibt es genau eine Geradenspiegelung, die h auf k und k auf h abbildet.

Beweis. Fall 1: Die beiden Strahlen sind nicht kollinear. Nach (B4) gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(h) = k$ und $\varphi(k) = h$. Da jede derartige Bewegung die k enthaltende Fahne mit dem Randstrahl h auf die h enthaltende Fahne mit dem Randstrahl k abbilden muß, gibt es nach (B2) genau eine derartige Bewegung. Überdies werden die beiden genannten Fahnen bei φ miteinander vertauscht, so daß φ eine Involution ist. Es wird nun gezeigt, daß φ Geradenspiegelung ist. Es

sei $h = AB^+$ (Abb. 1.14) und Z ein Punkt von h mit $Zw(AZB)$, ferner $\varphi(B) = B'$ und $\varphi(Z) = Z'$. Nach (B1) folgt $Zw(AZ'B')$. Aus beiden Zwischenrelationen ergibt sich, daß bezüglich der Geraden $g(BZ')$ die Punkte A und Z in ein und derselben Halbebene liegen, A und B' jedoch in verschiedenen. Also liegen Z und B' auf verschiedenen Seiten dieser Geraden, d. h., die Geraden $g(BZ')$ und $g(ZB')$, die überdies Original und Bild voneinander sind, schneiden sich in einem Punkt S , der Fixpunkt von φ ist, weil φ Involution ist. Aus Folgerung 2 ergibt sich — es ist ja $\varphi(AS^+) = AS^+$ —, daß $g(AS)$ Fixpunktgerade von φ ist. Dies zusammen mit dem involutorischen Charakter von φ ergibt die Eigenschaften (S1) und (S2).

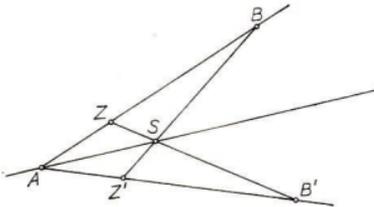


Abb. 1.14

Fall 2: h und k sind kollinear. Nach (B4) gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(h) = k$ und $\varphi(k) = h$. Es kann angenommen werden, daß bei φ jede der beiden Halbebenen der Trägergeraden von h und k auf sich selbst abgebildet wird; wenn es von vornherein nicht der Fall ist, kann es durch Zusammensetzung mit der Geraden Spiegelung an dieser Geraden erreicht werden. (Im anderen Fall ist, wie sich später zeigen wird, φ keine Geradenspiegelung, sondern eine sogenannte Punktspiegelung). φ ist durch diese Forderung eindeutig bestimmt und ist Involution, denn es ist $\varphi(hX^+) = kX^+$ und $\varphi(kX^+) = hX^+$. Es sei h_1 ein Strahl $\neq h$ und $\neq k$, der denselben Anfangspunkt wie h und k hat und der von seinem Bild h'_1 verschieden ist; ein solcher Strahl existiert, weil andernfalls φ die identische Abbildung wäre. h_1 ist zu h'_1 nicht entgegengesetzt, denn beide Strahlen liegen auf derselben Seite der Trägergeraden von h und k . Folglich sind h_1 und h'_1 nicht kollinear; ferner gilt, da φ Involution ist, $\varphi(h'_1) = h_1$, und es können nun auf h_1 und h'_1 die Überlegungen des ersten Falles angewendet werden. Damit ist der Satz bewiesen.

Für bestimmte Anwendungen ist folgender Hilfssatz nützlich:

Hilfssatz über die Spiegelung an dem Bild einer Geraden. *Ist φ eine beliebige Bewegung und σ_g die Geradenspiegelung an der Geraden g , so ist $\varphi \circ \sigma_g \circ \varphi^{-1}$ die Spiegelung an der Geraden $\varphi(g)$.*

Beweis. Es müssen für $\varphi \circ \sigma_g \circ \varphi^{-1}$ die Eigenschaften (S1) und (S2) nachgewiesen werden. Ist $X \in \varphi(g)$ und $Y = \varphi^{-1}(X)$, so ist $Y \in g$, es gilt also $\sigma_g(Y) = Y$. Hieraus folgt

$$\varphi \circ \sigma_g \circ \varphi^{-1}(X) = \varphi \circ \sigma_g(Y) = \varphi(Y) = X,$$

d. h., X ist Fixpunkt von $\varphi \circ \sigma_g \circ \varphi^{-1}$, $\varphi(g)$ ist Fixpunktgerade von $\varphi \circ \sigma_g \circ \varphi^{-1}$, (S1) ist nachgewiesen. Da aus $\varphi \circ \sigma_g \circ \varphi^{-1} = \iota$ die Gleichung $\sigma_g = \iota$ folgen würde, ist $\varphi \circ \sigma_g \circ \varphi^{-1}$ nicht die identische Abbildung. Die beiden offenen Halbebenen der Geraden $\varphi(g)$ können bei dieser Bewegung demnach nicht auf sich selbst abgebildet werden, sondern müssen vertauscht werden, womit auch (S2) nachgewiesen ist.

Mit Hilfe des Begriffes Geradenspiegelung läßt sich eine wichtige Relation in der Menge der Geraden definieren: das Senkrechtsein. Man nennt die Fixgeraden einer Geradenspiegelung, die von der Spiegelgeraden verschieden sind, zur Spiegelgeraden *senkrecht* (Zeichen: \perp), definiert also für Geraden g und h :

Definition. $g \perp h \Leftrightarrow \sigma_g(h) = h \wedge g \neq h$.

Man sagt auch: g ist ein Lot zu h . Diese Relation ist symmetrisch; denn wenn $\sigma_g(h) = h$ ist, ist auf Grund des ersten Existenzsatzes für Geradenspiegelungen und nach dem Hilfssatz über die Spiegelung an dem Bild einer Geraden

$$\sigma_h = \sigma_{\sigma_g(h)} = \sigma_g \circ \sigma_h \circ \sigma_g.$$

Hieraus folgt

$$\sigma_g = \sigma_h \circ \sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_{\sigma_h(g)},$$

also $g = \sigma_h(g)$, d. h., aus $g \perp h$ folgt $h \perp g$. Ferner bleibt die Relation bestehen, wenn man auf die Geraden eine Bewegung anwendet: Ist φ eine beliebige Bewegung und $g \perp h$, also $\sigma_g(h) = h$, so ist

$$\sigma_{\varphi(g)}(\varphi(h)) = \varphi \circ \sigma_g \circ \varphi^{-1} \circ \varphi(h) = \varphi(h),$$

d. h., $\varphi(g) \perp \varphi(h)$.

Für viele Anwendungen ist der folgende Satz bedeutsam.

Existenz- und Einzigkeitssatz für Lote. *Ist a eine Gerade und P ein beliebiger Punkt, so gibt es genau ein Lot zu a , das den Punkt P enthält.*

Beweis. Fall 1: P gehört nicht zu a . Es ist $\sigma_a(P) \neq P$, die Verbindungsgerade von P und $\sigma_a(P)$ ist von a verschieden, aber es ist

$$\sigma_a(s) = g(\sigma_a(P) P) = s,$$

d. h., s ist ein Lot zu a durch P . Da jedes Lot zu a durch P notwendig auch durch $\sigma_a(P)$ gehen muß, ist s das einzige derartige Lot. Da P und $\sigma_a(P)$ auf verschiedenen Seiten der Geraden a liegen, haben s und a einen gemeinsamen Punkt.

Fall 2: P gehört zu a . Es sei t das nach dem ersten Fall existierende Lot zu a durch einen nicht zu a gehörenden Punkt Q . Es sei $a \cap t = \{S\}$ und, falls $S \neq P$ ist, φ die Bewegung, die SP^+Q^+ auf PS^+Q^+ abbildet. $\varphi(t)$ ist dann ein Lot zu a durch P . Da a Fixpunktgerade bei σ_a ist, wird jede Halbebene bezüglich eines beliebigen Lotes zu a bei σ_a auf sich selbst abgebildet. Daher kann es keine zwei Lote zu a durch P geben; denn wären l_1 und l_2 zwei solche Lote und $A (\neq P)$ ein Punkt

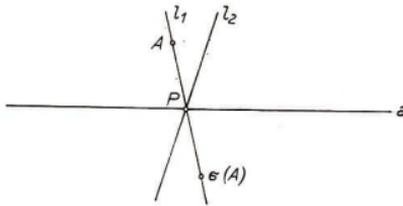


Abb. 1.15

von l_1 , so lägen wegen $\sigma_a(PA^+) = PA^-$ die Punkte A und $\sigma_a(A)$ auf verschiedenen Seiten von l_2 , was nicht sein kann (Abb. 1.15).

Aus dem letzten Beweis geht hervor, daß senkrechte Geraden stets einen Schnittpunkt haben. Ist l ein Lot zu a und S der Schnittpunkt von a und l , so nennt man S den *Lotfußpunkt* von l auf a .

Ein weiterer spezieller Typ von Bewegungen wird durch den Begriff der Punktspiegelung gegeben, der jetzt definiert werden soll. Es seien f_1 und f_2 zwei entgegengesetzte Fahnen, A sei ihr gemeinsamer Anfangspunkt. Die nach (B2) eindeutig bestimmte Bewegung φ , die f_1 auf f_2 abbildet, hat folgende Eigenschaften:

- (P1) *Jede Gerade durch A wird so auf sich selbst abgebildet, daß ihre beiden vom Punkt A erzeugten Strahlen miteinander vertauscht werden.*
- (P2) *Jede Gerade wird auf eine zu ihr parallele Gerade abgebildet.*

Beweis. Wegen $\varphi(f_1) = f_2$ kann $\varphi(f_2)$ nur f_1 sein. Daraus folgt, daß φ eine Involution ist. Es sei $f_1 = AB^+C^+$. Für die Gerade $g(AB)$ ist die Eigenschaft (P1) offensichtlich, sie ist Fixgerade von φ . Es sei a eine beliebige von $g(AB)$ verschiedene durch A gehende Gerade und X ($\neq A$) ein Punkt von a . Aus $X \in AB^+C^+$ folgt $\varphi(X) \in AB^-C^-$; aus $X \in AB^-C^-$ folgt $\varphi(X) \in AB^+C^+$, so daß X und $\varphi(X)$ jedenfalls auf verschiedenen Seiten der Geraden $g(AB)$ liegen. Folglich schneiden sich $g(AB)$ und $g(X\varphi(X))$ in einem Punkt S . Die Gerade $g(X\varphi(X))$ ist als Verbindungsgerade von Original- und Bildpunkt einer Involution Fixgerade, und S ist als Schnittpunkt zweier Fixgeraden ein Fixpunkt. Wegen $\varphi(AB^+) = AB^-$ ist aber der einzige Fixpunkt auf der Geraden $g(AB)$ der Punkt A , also ist $S = A$. Die Geraden a und $g(X\varphi(X))$ sind somit gleich, denn beide enthalten X und A . Da X und $\varphi(X)$ auf verschiedenen Seiten von $g(AB)$ liegen, folgt $Zw(XA\varphi(X))$, und hieraus folgt $\varphi(AX^+) = AX^-$, womit (P1) bewiesen ist. Die Eigenschaft (P2) ist für Geraden durch A offenbar erfüllt. Ist aber g eine beliebige Gerade, die A nicht enthält, g' die Parallele durch A zu g und ist X ein beliebiger Punkt von g , so folgt durch Anwendung von Eigenschaft (P1) auf die Gerade $g(AX)$, daß X und $\varphi(X)$ auf verschiedenen Seiten von g' liegen. Das gilt für alle Punkte von g , und hieraus folgt: Da g ganz in einer offenen Halbebene bezüglich g' liegt, liegt die Bildgerade ganz in der dazu entgegengesetzten offenen Halbebene, d. h., g und die Bildgerade

von g haben keine gemeinsamen Punkte, sind also parallel, womit (P2) nachgewiesen ist.

Ist f eine beliebige Fahne mit dem Anfangspunkt A , so ist wegen (P1) ihre Bildmenge die dazu entgegengesetzte Fahne. Das ergibt unter Berücksichtigung von (B2), daß es bei vorgegebenem Punkt A nur eine einzige Bewegung gibt, die die Eigenschaften (P1) und (P2) hat.

Eine Bewegung mit den Eigenschaften (P1) und (P2) nennt man *Punktspiegelung am Punkt A* ; sie wird mit σ_A bezeichnet. Auf Grund der letzten Überlegung gilt ein

Erster Existenzsatz für Punktspiegelungen. *Zu jedem Punkt gibt es genau eine Punktspiegelung an diesem Punkt.*

Es gilt darüber hinaus noch ein

Zweiter Existenzsatz für Punktspiegelungen. *Zu zwei beliebigen Punkten P und Q mit $P \neq Q$ gibt es genau eine Punktspiegelung, die P auf Q und gleichzeitig Q auf P abbildet.*

Beweis. Nach Axiom (B3) gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(P) = Q$ und $\varphi(Q) = P$. Es kann angenommen werden, daß bei φ auch die Halbebenen PQX^+ und PQX^- (X sei ein beliebiger nicht zu $g(PQ)$ gehörender Punkt) miteinander vertauscht werden; denn wenn es von vornherein nicht der Fall ist, kann es durch Zusammensetzung mit der Geradenspiegelung an $g(PQ)$ erreicht werden. Es gilt also $\varphi(PQ^+X^+) = QP^+X^-$ und $\varphi(QP^+X^-) = PQ^+X^+$; daraus folgt, daß φ eine Involution ist. Die Geraden $g(X\varphi(X))$ und $g(PQ)$ sind somit Fixgeraden. Wegen $\varphi(X) \in PQX^-$ gibt es auf $g(X\varphi(X))$ einen Punkt R , der zu $g(PQ)$ gehört; er ist als Schnittpunkt zweier Fixgeraden ein Fixpunkt. Das Bild des Strahls RP^+ , der Strahl RQ^+ , kann nicht wieder RP^+ sein, weil nach Folgerung 2 dann $P = Q$ sein müßte. Also ist RQ^+ zu RP^+ entgegengesetzt. Das Bild der Fahne RP^+X^+ ist daher die zu ihr entgegengesetzte Fahne RP^-X^- . Das bedeutet, daß φ eine Punktspiegelung an R ist. Daß es nicht mehr als eine Punktspiegelung der im Satz genannten Art gibt, folgt aus Axiom (B2) und daraus, daß jede derartige Punktspiegelung die Fahne PQ^+X^+ auf die Fahne QP^+X^- abbilden muß.

Von besonderer Wichtigkeit ist nun, daß sich die Verschiebungen als spezielle Bewegungen erweisen, wie jetzt gezeigt werden soll.

Es seien A, B zwei beliebige Punkte. Nach dem zweiten Existenzsatz für Punktspiegelungen gibt es eine Punktspiegelung σ_C mit $\sigma_C(A) = B$. Es sei $\varphi = \sigma_B \circ \sigma_C$. Die Behauptung lautet: φ ist die Verschiebung, die A auf B abbildet. Offensichtlich gilt $\varphi(A) = \sigma_B \circ \sigma_C(A) = \sigma_B(B) = B$, und um die Behauptung zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß φ die Eigenschaften (V1) und (V2) von Verschiebungen hat; denn auf Grund der in 1.1.1. an Axiom (5) angeschlossenen Bemerkung, wonach es nicht mehr als eine Abbildung mit den Eigenschaften (V1) und (V2) geben

kann, die A auf B abbildet, folgt hieraus schon die Behauptung. Außerdem kann als Folge jener Bemerkung leicht eingesehen werden, daß die in Axiom (5) stehende Einzigkeitsaussage auch innerhalb der Gruppe der Bewegungen ihre Gültigkeit beibehält, d. h., es gibt keine Bewegung mit den Eigenschaften (V1) und (V2), die nicht schon in der in 1.1.1. eingeführten Gruppe der Verschiebungen enthalten wäre.

Nun zum Beweis von (V1) und (V2) für φ . (V1) folgt unmittelbar aus (P2) und der Transitivität der Parallelität. Für den Beweis von (V2) sei zunächst festgestellt: Aus $\sigma_C(A) = B$ und (P1) folgt $Zw(ACB)$, also ist $AB^+ = AC^+$ und $BC^- = BA^-$. Ferner gilt $\varphi(C) = \sigma_B(C) \in BC^-$ wegen (P1). Aus allem folgt $\varphi(AB^+) = \varphi(AC^+) = BC^- = BA^-$. Nun wird der Beweis von (V2) indirekt geführt. Es sei F ein Fixpunkt von φ .

Fall 1: F gehört zu $g(AB)$. Dann gilt $\varphi(FA^+) = FB^+$. Wegen Folgerung 2 müssen FA^+ und FB^+ verschieden sein, also ist $FB^+ = FA^-$ und $FB^- = FA^+$. Ebenfalls wegen Folgerung 2 ist $\varphi(FB^+) = FB^-$, also $\varphi(FB^+) = FA^+$. Aus dem Bisherigen folgt $\varphi \circ \varphi(FA^+) = FA^+$, nach Folgerung 2 also insbesondere $\varphi \circ \varphi(A) = A$, d. h., $\varphi(B) = A$. Aus $\varphi(A) = B$ und $\varphi(B) = A$ folgt aber $\varphi(AB^+) = BA^+$ im Widerspruch zur obigen Feststellung $\varphi(AB^+) = BA^-$.

Fall 2: F gehört nicht zu $g(AB)$. Der Lotfußpunkt des Lotes l durch F zu $g(AB)$ sei S . Da $\varphi(l)$ durch F gehen und zu $g(AB)$ senkrecht sein muß, ist nach dem Einzigkeitssatz für Lote $\varphi(l) = l$ und folglich S als Schnittpunkt zweier Fixgeraden ein Fixpunkt. Er gehört zu $g(AB)$, und damit ist der zweite Fall auf den ersten zurückgeführt.

Die Verschiebungen sind also spezielle Bewegungen. Bei jeder Bewegung werden wegen deren Eineindeutigkeit parallele Geraden auf parallele Geraden abgebildet, denn ein gemeinsamer Punkt der Bilder zweier paralleler Geraden hätte zwei verschiedene Originalpunkte. Somit ist die Menge aller Bildgeraden einer Parallelenklasse wieder eine Parallelenklasse. Jede Bewegung induziert also eine Abbildung der Menge aller Parallelenklassen auf sich. Bei Verschiebungen ist dies die identische Abbildung. Hieraus ergibt sich ein für die folgenden Betrachtungen benötigter

Hilfssatz. Ist τ eine Verschiebung und α eine Bewegung, so ist $\alpha \circ \tau \circ \alpha^{-1}$ eine Verschiebung.

Beweis. Durch $\alpha \circ \tau \circ \alpha^{-1}$ wird dieselbe Abbildung der Parallelenklassen induziert wie durch $\alpha \circ \alpha^{-1}$, nämlich die identische Abbildung. Somit hat $\alpha \circ \tau \circ \alpha^{-1}$ die Eigenschaft (V1) von Verschiebungen. Auch die Eigenschaft (V2) ist erfüllt; denn gälte für einen Punkt F die Gleichung $\alpha \circ \tau \circ \alpha^{-1}(F) = F$, so gälte auch $\tau \circ \alpha^{-1}(F) = \alpha^{-1}(F)$, d. h., die Verschiebung τ hätte den Fixpunkt $\alpha^{-1}(F)$, was für $\tau \neq \text{id}$ nicht sein kann.

In 1.1.2.2. wurde gezeigt, daß die Menge aller Fahnen in zwei Orientierungsklassen zerlegt werden kann. Zwei Fahnen sind genau dann gleichorientiert, wenn sie durch Verschiebungen auf ein Paar von Fahnen mit gemeinsamem Anfangspunkt abgebildet werden können, das — bei kollinearen Randstrahlen — entweder aus zwei gleichen oder zwei entgegengesetzten Fahnen besteht oder das — bei nicht kollinearen Randstrahlen — die Eigenschaft hat, daß der Randstrahl genau einer der beiden Fahnen in der anderen enthalten ist. Bildet man ein Paar gleichorientierter Fahnen mit gemeinsamem Anfangspunkt durch eine Bewegung ab, so ergibt sich wieder ein Paar gleichorientierter Fahnen mit gemeinsamem Anfangspunkt; denn die genannten Eigenschaften, die die Gleichorientierung charakterisieren, sind Enthaltenseins- und Anordnungsseigenschaften, die wegen Axiom (B1) von den Original- auf die Bildmengen übergehen. Aber auch die Verschiebungsgleichheit zweier Fahnen geht nicht verloren, wenn man sie einer Bewegung unterwirft: Ist f_1 verschiebungsgleich zu f_2 , so existiert eine Verschiebung τ mit $\tau(f_1) = f_2$. Ist α eine beliebige Bewegung, so folgt $\alpha \circ \tau(f_1) = \alpha(f_2)$ bzw. $\alpha \circ \tau \circ \alpha^{-1} \circ \alpha(f_1) = \alpha(f_2)$. Nach dem oben bewiesenen Hilfssatz ist aber $\alpha \circ \tau \circ \alpha^{-1}$ eine Verschiebung τ_1 , d. h., $\alpha(f_1)$ und $\alpha(f_2)$ sind vermöge τ_1 verschiebungsgleich. Insgesamt folgt aus diesen Überlegungen der

Satz von der Invarianz der Gleichorientierung bei Bewegung. *Sind f_1 und f_2 zwei gleichorientierte Fahnen und ist φ eine Bewegung, so sind auch die Fahnen $\varphi(f_1)$ und $\varphi(f_2)$ gleichorientiert.*

Dieser Satz bedeutet, daß bei einer jeden Bewegung die Bildfahnen aller zu ein und derselben Orientierungsklasse gehörenden Fahnen ebenfalls zu ein und derselben Orientierungsklasse gehören und, da jede Fahne eine Originalfahne hat, eine Orientierungsklasse bilden. Da es nur zwei Orientierungsklassen gibt, hat man zwischen zwei Sorten von Bewegungen zu unterscheiden: solchen, bei denen jede Orientierungsklasse in sich selbst übergeht, und solchen, bei denen die beiden Klassen vertauscht werden. Man definiert entsprechend diesen beiden Fällen:

Definition. Die Bewegung φ ist *gleichsinnig* genau dann, wenn jede Fahne f mit $\varphi(f)$ gleichorientiert ist; die Bewegung φ ist *ungleichsinnig* genau dann, wenn jede Fahne f zu $\varphi(f)$ entgegengesetzt orientiert ist.

An Stelle des Wortpaares „gleichsinnig — ungleichsinnig“ sind auch die Ausdrücke „direkt — indirekt“, „gerade — ungerade“, „eigentlich — uneigentlich“ und „orientierungserhaltend — orientierungsändernd“ gebräuchlich. Es sei darauf hingewiesen, daß in der Literatur manchmal der Name Bewegung nur für die soeben definierten gleichsinnigen Bewegungen verwendet wird.

Die Verschiebungsgleichheit zweier Fahnen hat ihre Orientierungsgleichheit zur Folge; demnach sind die Verschiebungen gleichsinnige Bewegungen. Bei der Punktspiegelung am Punkt P wird eine Fahne mit dem Anfangspunkt P auf die zu ihr entgegengesetzte Fahne abgebildet, und da entgegengesetzte Fahnen gleich-

orientiert sind, erweisen sich die Punktspiegelungen ebenfalls als gleichsinnige Bewegungen. Bei jeder Geradenspiegelung wird eine Fahne, deren Randstrahl in der Spiegelgeraden enthalten ist, auf die Fahne mit demselben Randstrahl und der entgegengesetzten offenen Halbebene abgebildet; diese beiden Fahnen sind nicht gleichorientiert, also sind Geradenspiegelungen ungleichsinnige Bewegungen.

Eine Zusammensetzung zweier gleichsinniger Bewegungen ist offenbar ebenfalls gleichsinnig, ebenso ist die Umkehrabbildung einer gleichsinnigen Bewegung gleichsinnig. Infolgedessen bilden alle gleichsinnigen Bewegungen eine Untergruppe der Gruppe der Bewegungen. Da ein Produkt zweier ungleichsinniger Bewegungen eine gleichsinnige Bewegung ist, bilden die ungleichsinnigen Bewegungen keine Untergruppe.

Sind s_1 und s_2 zwei beliebige Strahlen und sind f_1, f'_1 die Fahnen mit dem Randstrahl s_1 , f_2 und f'_2 diejenigen mit dem Randstrahl s_2 , so gibt es nach Axiom (B2) genau zwei Bewegungen, die s_1 auf s_2 abbilden: Das geordnete Paar (f_1, f'_1) wird bei der einen auf das geordnete Paar (f_2, f'_2) , bei der anderen auf (f'_2, f_2) abgebildet. Da f_2 und f'_2 entgegengesetzt orientiert sind, ist genau eine von diesen Bewegungen gleichsinnig. Es gilt also der

Existenzsatz für gleich- und ungleichsinnige Bewegungen. Zu zwei beliebigen Strahlen s_1 und s_2 gibt es genau eine gleichsinnige und genau eine ungleichsinnige Bewegung, die s_1 auf s_2 abbildet.

Folgerung. Haben die beiden im Satz genannten Strahlen s_1 und s_2 den Anfangspunkt gemeinsam, so ist die betreffende ungleichsinnige Bewegung stets eine Geradenspiegelung. Denn nach dem zweiten Existenzsatz für Geradenspiegelungen gibt es eine Geradenspiegelung, die s_1 auf s_2 abbildet, und nach dem eben bewiesenen Satz kann es keine weitere ungleichsinnige Bewegung geben, bei der s_1 auf s_2 abgebildet wird.

Nun soll ein weiterer Typ von Bewegungen betrachtet werden. Es sei A ein Punkt. Man definiert:

Definition. δ heißt *Drehung mit dem Zentrum A* genau dann, wenn δ eine gleichsinnige Bewegung ist, die A als Fixpunkt hat.

Für jede von der identischen Abbildung verschiedene Drehung mit dem Zentrum A ist A der einzige Fixpunkt. Denn wäre B ein weiterer Fixpunkt, so würde der Strahl AB^+ auf sich selbst und wegen der Gleichsinnigkeit jede der Fahnen mit dem Randstrahl AB^+ auf sich selbst abgebildet werden, was nach Folgerung 1 einen Widerspruch ergäbe.

Offenbar sind die Umkehrabbildung einer Drehung mit dem Zentrum A und die Zusammensetzung zweier solcher Drehungen wieder Drehungen mit dem Zentrum A . (Statt „Drehung mit dem Zentrum A “ sagt man auch kurz „Drehung um A “.) Für festes A ist also die Menge aller Drehungen um A eine Gruppe, eine Unter-

gruppe der Gruppe der gleichsinnigen Bewegungen. Diese Gruppe erweist sich sogar als kommutativ. Es gilt der folgende

Satz über die Gruppe der Drehungen um einen Punkt. *Für jeden Punkt A ist die Menge aller Drehungen mit dem Zentrum A eine kommutative Gruppe.*

Es braucht nur noch die Kommutativität bewiesen zu werden. Zum Beweis wird folgender Hilfssatz benutzt:

Hilfssatz. *Ist δ eine Drehung mit dem Zentrum A , σ eine Spiegelung an einer beliebigen Geraden durch A , so ist $\sigma \circ \delta \circ \sigma = \delta^{-1}$.*

Beweis. Die Bewegung $\sigma \circ \delta$ ist eine ungleichsinnige Bewegung mit dem Fixpunkt A , sie bildet einen beliebigen Strahl mit dem Anfangspunkt A auf einen Strahl mit dem Anfangspunkt A ab. Nach der Folgerung aus dem Existenzsatz über gleich- und ungleichsinnige Bewegungen ist $\sigma \circ \delta$ eine Geradenspiegelung σ_0 . Es gilt $\sigma_0 = \sigma_0^{-1}$, also $\sigma \circ \delta = (\sigma \circ \delta)^{-1} = \delta^{-1} \circ \sigma$, und hieraus folgt $\sigma \circ \delta \circ \sigma^{-1} = \delta^{-1}$ bzw. $\sigma \circ \delta \circ \sigma = \delta^{-1}$.

Beweis des Satzes. Es seien δ_1 und δ_2 zwei Drehungen um A und a ein beliebiger Strahl mit dem Anfangspunkt A , ferner sei $\delta_1(a) = a'$ und $\delta_2(a') = a''$. Durch die Forderungen $\sigma_1(a) = a'$, $\sigma_2(a') = a''$, $\sigma_3(a'') = a'$ werden nach dem zweiten Existenzsatz für Geradenspiegelungen drei Geradenspiegelungen σ_1 , σ_2 , σ_3 festgelegt, ihre Spiegelgeraden enthalten den Punkt A . Die Bewegung $\sigma_3 \circ \sigma_1$ ist eine gleichsinnige Bewegung, die a auf a' abbildet, es ist also $\sigma_3 \circ \sigma_1 = \delta_1$. Ebenso ist $\sigma_2 \circ \sigma_3$ gleichsinnig und bildet a' auf a'' ab, das bedeutet $\sigma_2 \circ \sigma_3 = \delta_2$. Nun ist $\delta_1 \circ \delta_2 = \sigma_3 \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$. Es ist $\sigma_1 \circ \sigma_2$ eine gleichsinnige Bewegung mit dem Fixpunkt A , also eine Drehung δ um A . Aus $\delta_1 \circ \delta_2 = \sigma_3 \circ \delta \circ \sigma_3$ folgt nach dem oben bewiesenen Hilfssatz

$$\begin{aligned} \delta_1 \circ \delta_2 &= \delta^{-1} = (\sigma_1 \circ \sigma_2)^{-1} = \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1^{-1} = \sigma_2 \circ \sigma_1 \\ &= \sigma_2 \circ \sigma_1 \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \sigma_3 \circ \sigma_1 = \delta_2 \circ \delta_1, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Die Struktur der Gruppe der Drehungen um den Punkt A hängt nun nicht von der Wahl des Punktes A ab, wie die folgenden Überlegungen zeigen. Ist B ($\neq A$) ein anderer Punkt, τ die Verschiebung, die A auf B abbildet und δ eine beliebige Drehung um A , so ist $\tau \circ \delta \circ \tau^{-1}$ eine gleichsinnige Bewegung, die B als Fixpunkt hat, also eine Drehung um B . Die Abbildung $\Phi: \delta \mapsto \tau \circ \delta \circ \tau^{-1}$ ordnet somit jeder Drehung um A eine Drehung um B zu. Diese Abbildung ist eindeutig umkehrbar: Aus $\Phi(\delta) = \tau \circ \delta \circ \tau^{-1}$ folgt $\delta = \tau^{-1} \circ \Phi(\delta) \circ \tau$, und das Bild eines Produktes ist gleich dem Produkt der Bilder:

$$\Phi(\delta_1) \circ \Phi(\delta_2) = \tau \circ \delta_1 \circ \tau^{-1} \circ \tau \circ \delta_2 \circ \tau^{-1} = \tau \circ \delta_1 \circ \delta_2 \circ \tau^{-1} = \Phi(\delta_1 \circ \delta_2).$$

Φ ist demnach ein Isomorphismus zwischen der Gruppe der Drehungen um A und der Gruppe der Drehungen um B . Beide Gruppen haben also gleiche Struktur.

Die Struktur dieser kommutativen Gruppen ist von derjenigen der ebenfalls kommutativen Gruppe der Verschiebungen verschieden. Das erkennt man z. B. daraus, daß die Verschiebungsgruppe keine Involutionen enthält, wohl aber die Drehungsgruppen. Denn aus dem Beweis des zweiten Existenzsatzes für Punktspiegelungen folgt, daß eine gleichsinnige involutorische Bewegung notwendig eine Punktspiegelung, also keine Verschiebung ist, und Punktspiegelungen sind spezielle Drehungen. In einem späteren Abschnitt wird über den Begriff des orientierten Elementarwinkels ein enger Zusammenhang zwischen der Drehungsgruppe und einer gewissen aus Restklassen reeller Zahlen gebildeten Gruppe aufgezeigt werden können.

1.1.3.2. Klassen kongruenter Figuren

So wie in 1.1.1. auf der Grundlage der Existenz der Gruppe der Verschiebungen die Verschiebungsgleichheit von Punktmenge eingeführt wurde, wird jetzt unter Zugrundelegung der Gruppe der Bewegungen der für die Elementargeometrie sehr wichtige Begriff der Kongruenz definiert. Er bezieht sich auf Punktmenge oder Systeme von Punktmenge, für beides möge die Bezeichnung „geometrische Figur“ verwendet werden.

Es seien \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 geometrische Figuren.

Definition. $\mathfrak{M}_1 \cong \mathfrak{M}_2$ bedeutet: Es gibt eine Bewegung φ mit $\varphi(\mathfrak{M}_1) = \mathfrak{M}_2$. („ $\mathfrak{M}_1 \cong \mathfrak{M}_2$ “ wird gelesen: „ \mathfrak{M}_1 kongruent (zu) \mathfrak{M}_2 “.)

Genau wie bei der Verschiebungsgleichheit folgt aus der Gruppeneigenschaft der Bewegungen der

Satz. Die Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiele für Paare kongruenter Figuren sind: zwei beliebige Geraden, Strahlen, Halbebenen, Fahnen. Zwei Strecken sind im allgemeinen nicht kongruent. Zwei zueinander verschiebungsgleiche Figuren sind auch zueinander kongruent.

Wird ein Paar $(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$ kongruenter Figuren durch eine Bewegung α abgebildet, so sind die Bildfiguren ebenfalls kongruent; denn aus $\varphi(\mathfrak{M}_1) = \mathfrak{M}_2$ folgt für jede Bewegung α :

$$\alpha \circ \varphi(\mathfrak{M}_1) = \alpha(\mathfrak{M}_2)$$

bzw.

$$\alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1} \circ \alpha(\mathfrak{M}_1) = \alpha(\mathfrak{M}_2),$$

und das bedeutet: $\alpha(\mathfrak{M}_2)$ ist Bild von $\alpha(\mathfrak{M}_1)$ bei der Bewegung $\alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$.

In manchen Zusammenhängen ist es zweckmäßig, einen enger gefaßten Kongruenzbegriff zu verwenden und dabei nicht die volle Bewegungsgruppe zugrunde zu legen, sondern nur die Untergruppe der gleichsinnigen Bewegungen. Man definiert:

Definition. $\mathfrak{M}_1 \cong^+ \mathfrak{M}_2$ gilt genau dann, wenn es eine gleichsinnige Bewegung φ mit $\varphi(\mathfrak{M}_1) = \mathfrak{M}_2$ gibt. („ \cong^+ “ wird gelesen: „gleichsinnig kongruent“.)

Auch die gleichsinnige Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation. Zwei Geraden, Strahlen, Halbebenen oder zwei verschiebungsgleiche Figuren sind stets gleichsinnig kongruent. Zwei beliebige Fahnen sind genau dann gleichsinnig kongruent, wenn sie gleichorientiert sind.

Auf einen Spezialfall der Kongruenz sei besonders hingewiesen. Man sagt, zwei Figuren \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 liegen *spiegelsymmetrisch* oder einfach *symmetrisch zur Geraden* g , wenn $\sigma_g(\mathfrak{M}_1) = \mathfrak{M}_2$ gilt. Oft faßt man in diesem Fall \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 zu einer Menge zusammen (es kann auch von vornherein $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$ sein) und nennt $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ eine *symmetrische Figur*, g heißt dann *Symmetrieachse* von $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$.

Im folgenden Abschnitt werden Klassen kongruenter einfacher Figuren betrachtet und Relationen und Operationen für diese Klassen definiert und untersucht.

1.1.3.2.1. Längen

Die Menge \mathfrak{S} aller Strecken zerfällt bezüglich der Äquivalenzrelation Kongruenz in Klassen. Die Elemente dieses Systems \mathfrak{S}/\cong mögen *Längen* genannt werden. Die Länge, der die Strecke AB angehört, soll mit $|AB|$ bezeichnet werden:

$$|AB| = \{s : s = XY \wedge XY \cong AB\}.$$

Über die Existenz von Repräsentanten von Längen auf gegebenen Strahlen gibt der folgende Satz Auskunft, der zum Ausdruck bringt, daß man auf jedem Strahl genau einen Punkt finden kann, der mit dem Anfangspunkt des Strahls eine Strecke gegebener Länge bildet.

Streckenabtragungssatz. *Ist $|PQ|$ eine Länge und AS^+ ein Strahl, so gibt es genau einen Punkt B mit $B \in AS^+$ und $AB \in |PQ|$.*

Beweis. Die Existenz von B folgt aus dem Existenzsatz für Bewegungen aus 1.1.3.1., wonach es mindestens eine Bewegung φ mit $\varphi(PQ^+) = AS^+$ gibt; setzt man $B = \varphi(Q)$, so ist $AB \cong PQ$. Hätte man noch einen weiteren Punkt B' aus AS^+ mit $AB' \cong PQ$, so wäre $AB' \cong AB$, es gäbe eine Bewegung ψ mit $\psi(A) = A$, $\psi(B) = B'$, also $\psi(AB^+) = AB'^+ = AB^+$. Nach Folgerung 2 in 1.1.3.1. gilt dann $\psi(B) = B$, also $B' = B$.

In diesem Beweis wurde schon von einer Tatsache Gebrauch gemacht, die auch in den kommenden Betrachtungen öfters verwendet werden wird: Aus der Kongruenz zweier Strecken A_1B_1 und A_2B_2 folgt nach Definition die Existenz einer Bewegung φ , bei der A_1B_1 auf A_2B_2 abgebildet wird, und dabei kann nach Belieben $\varphi(A_1) = A_2$ und $\varphi(B_1) = B_2$ oder aber $\varphi(A_1) = B_2$ und $\varphi(B_1) = A_2$ angenommen werden, denn jede der beiden Möglichkeiten kann erforderlichenfalls auf Grund

von Bewegungsaxiom (B3) erreicht werden. Analoges gilt für Paare von Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt.

Im System \mathfrak{S}/\cong wird jetzt eine Operation erklärt, die dem anschaulichen „geradlinigen Aneinanderlegen“ von Strecken entspricht.

Es seien s_1 und s_2 beliebige Längen. AB sei eine beliebige Strecke aus s_1 , BC die nach dem Streckenabtragungssatz eindeutig bestimmte Strecke aus s_2 , die auf BA^- liegt. Durch AC ist eine weitere Länge s_3 bestimmt. Sie scheint zunächst außer von s_1 und s_2 auch von der Auswahl der Strecke AB aus s_1 sowie der Festlegung von B als Anfangspunkt des Strahles abhängig zu sein. Auf Grund des folgenden Hilfssatzes besteht diese Abhängigkeit jedoch nicht.

Hilfssatz. Aus $A_1B_1 \cong A_2B_2$, $B_1C_1 \cong B_2C_2$, $Zw(A_1B_1C_1)$ und $Zw(A_2B_2C_2)$ folgt $A_1C_1 \cong A_2C_2$.

Beweis. Es existiert eine Bewegung φ mit $\varphi(A_1B_1^+) = A_2B_2^+$. Wegen $A_1B_1 \cong A_2B_2$ ist auf Grund des Streckenabtragungssatzes $\varphi(B_1) = B_2$, und da $\varphi(B_1A_1^-) = B_2A_2^-$ ist, ergibt sich aus demselben Grunde $\varphi(C_1) = C_2$.

Ersetzt man in der oben beschriebenen Konstruktion von s_3 die Strecke AB durch eine beliebige andere Strecke PQ aus s_1 , so ergibt sich nach dem Hilfssatz (man setze $A_1B_1 = AB$, $A_2B_2 = PQ$) wiederum die Länge s_3 . Man bezeichnet s_3 als die *Summe* der Längen s_1 und s_2 und schreibt $s_1 + s_2 = s_3$. Damit ist eine *Addition der Längen* erklärt, das System \mathfrak{S}/\cong ist zu einer Struktur $(\mathfrak{S}/\cong, +)$ gemacht worden.

Die Längen und deren Addition können in einfacher Weise mit gewissen Verschiebungen in Zusammenhang gebracht werden, woraus sich Rechengesetze für die Addition ergeben. Es sei \mathfrak{R}_0 ein beliebiger, fest gewählter Richtungssinn (vgl. 1.1.2.1.) und \mathfrak{V}_0 die Menge aller Verschiebungen, die den Richtungssinn \mathfrak{R}_0 haben. Diese Menge ist bezüglich der Hintereinanderausführung der Verschiebungen abgeschlossen. Die Umkehrabbildungen der in \mathfrak{V}_0 enthaltenen Verschiebungen haben den zu \mathfrak{R}_0 entgegengesetzten Richtungssinn, gehören also nicht zu \mathfrak{V}_0 . Demnach ist \mathfrak{V}_0 nur eine Halbgruppe. Ist $\tau \in \mathfrak{V}_0$, so gehören alle Strecken $X\tau(X)$ zur gleichen Länge, die der Verschiebung τ zugeordnet und mit s_τ bezeichnet werden möge. Ist umgekehrt t eine Länge, so gibt es auf Grund des Streckenabtragungssatzes genau eine Verschiebung φ , die zu \mathfrak{V}_0 gehört und für die die Strecken $X\varphi(X)$ zu t gehören. Durch die Zuordnung $\tau \mapsto s_\tau$ ist also eine bijektive Abbildung der Menge \mathfrak{V}_0 auf die Menge aller Längen gegeben. Aus der Definition der Zusammensetzung von Verschiebungen und der Addition von Längen folgt unmittelbar, daß dem Produkt zweier Verschiebungen aus \mathfrak{V}_0 die Summe der zugeordneten Längen zugeordnet wird, $\varphi \circ \tau \mapsto s_\tau + s_\varphi$, die genannte Zuordnung ist also ein Isomorphismus. Daraus ergibt sich, daß die Addition der Längen assoziativ und kommutativ ist, d. h., es gilt der

Satz über die Halbgruppe der Längen. Die Längen bilden bezüglich der Addition eine kommutative Halbgruppe.

Diese Halbgruppe $(\cong/\cong, +)$ wird in einem späteren Abschnitt in einen engen Zusammenhang mit der additiven Halbgruppe der positiven reellen Zahlen gebracht werden können.

Von der Anschauung her hat man die Vorstellung, daß die Längen geordnet werden können und daß insbesondere die Summe zweier Längen größer als jeder der Summanden ist. Es liegt also nahe, für Längen s_1 und s_2 zu definieren:

Definition. $s_1 < s_2$ bedeutet: Es gibt eine Länge x , so daß $s_1 + x = s_2$ ist.

Es wird nun gezeigt, daß hierdurch in der Menge der Längen eine irreflexive Ordnungsrelation gegeben ist. Dazu sind die in 1.1.2.1. genannten Eigenschaften (T), (I) und (K) nachzuweisen. Gilt $s_1 < s_2$ und $s_2 < s_3$, so gibt es Längen x und y mit $s_1 + x = s_2$ und $s_2 + y = s_3$. Hieraus folgt $s_1 + x + y = s_3$, d. h., es gibt ein $z (= x + y)$ mit $s_1 + z = s_3$, und das bedeutet $s_1 < s_3$, womit (T) nachgewiesen ist. Aus der Definition der Addition von Längen folgt, daß die Gleichung $s + x = s$ für kein s eine Lösung x hat, womit (I) bewiesen ist. Zum Beweis von (K) sei angenommen, daß für die Längen s_1 und s_2 weder $s_1 < s_2$ noch $s_1 = s_2$ gilt. Die Gleichung $s_1 + x = s_2$ hat also keine Lösung, und es kann demnach, falls $s_1 = |AB|$, $s_2 = |AC|$ mit $C \in AB^+$ gilt, der Punkt C nicht auf BA^- liegen. Es muß $Zw(ACB)$ gelten, und das bedeutet $|AC| + |CB| = |AB|$, d. h., die Gleichung $s_2 + x = s_1$ hat eine Lösung $x (= |CB|)$, es gilt $s_2 < s_1$, womit auch (K) bewiesen ist.

Die hier erklärte Ordnungsrelation für Längen kann auch auf die Strecken übertragen werden. Man definiert: $AB < CD \Leftrightarrow |AB| < |CD|$. Hierdurch ist für die Menge der Strecken allerdings nur eine teilweise Ordnung erklärt, denn die Eigenschaft (K) ist nicht erfüllt, wie man am Beispiel eines Paares verschiedener, aber kongruenter Strecken sieht.

Die Addition und die Ordnung der Längen hängen über folgendes Monotoniegesetz zusammen:

Monotoniesatz für Längen. Sind s_1, s_2, s Längen mit $s_1 < s_2$, so gilt auch $s_1 + s < s_2 + s$.

Beweis. $s_1 < s_2$ gilt genau dann, wenn es ein x mit $s_1 + x = s_2$ gibt. Hieraus folgt aber $s_1 + s + x = s_2 + s$, also $s_1 + s < s_2 + s$.

Für die Geometrie der Strecken ist der Begriff des Mittelpunktes wichtig. Man definiert:

Definition. M ist genau dann *Mittelpunkt* der Strecke AB , wenn M ein Punkt von $g(AB)$ mit $MA \cong MB$ ist.

Es gilt der

Satz vom Mittelpunkt. Jede Strecke AB hat genau einen Mittelpunkt M , und es gilt $Zw(AMB)$.

Beweis. Es sei AB eine beliebige Strecke. Nach dem zweiten Existenzsatz für Punktspiegelungen gibt es einen Punkt M , so daß die Spiegelung an M den Punkt A auf B abbildet, d. h., es gilt $MA \cong MB$ und $Zw(AMB)$. Ist M' ein weiterer Mittelpunkt von AB , so kann wegen des Streckenabtragungssatzes (Einzigkeit bezüglich des Strahles $M'A^+$) nicht $Zw(M'AB)$ oder $Zw(M'BA)$ gelten. Aus $Zw(AM'B)$ folgt aber, falls o. B. d. A. $Zw(AM'M)$ gilt, $|AM'| < |AM| = |BM| < |BM'| = |AM'|$, was nicht sein kann.

1.1.3.2.2. Größen orientierter Elementarwinkel

Würde man die Menge \mathfrak{W}_0 der orientierten Elementarwinkel (vgl. 1.1.2.2.) bezüglich der Kongruenz in Klassen einteilen, so würden auf Grund des Bewegungssaxioms (B4) die orientierten Elementarwinkel $\sphericalangle(h, k)$ und $\sphericalangle(k, h)$ in derselben Klasse liegen, was sich für die Anwendungen — insbesondere für die Beschreibung von Drehungen — als unzweckmäßig erweisen würde. Da $\sphericalangle(h, k)$ (Nullwinkel und gestreckte orientierte Elementarwinkel ausgenommen) nur durch eine ungleichsinnige Bewegung auf $\sphericalangle(k, h)$ abgebildet werden kann, liegen diese beiden orientierten Elementarwinkel in verschiedenen Klassen, wenn man die Einteilung hinsichtlich der gleichsinnigen Kongruenz vornimmt. Es wird deshalb jetzt das System (\mathfrak{W}_0/\cong^+) der Klassen gleichsinnig kongruenter orientierter Elementarwinkel betrachtet, seine Elemente mögen *Größen orientierter Elementarwinkel* (solange keine Mißverständnisse zu befürchten sind, kurz: Größen) genannt werden. Die $\sphericalangle(h, k)$ enthaltende Größe werde mit $m(\sphericalangle(h, k))$ bezeichnet:

$$m(\sphericalangle(h, k)) := \{ \sphericalangle(x, y) : \sphericalangle(x, y) \cong^+ \sphericalangle(h, k) \}.$$

Alle Nullwinkel $\sphericalangle(h, h)$ bilden eine Klasse, die *Nullwinkelgröße*; ebenso bilden alle gestreckten orientierten Elementarwinkel $\sphericalangle(XY^+, XY^-)$ eine Klasse.

Über die Existenz von Repräsentanten einer gegebenen Größe gibt folgender Satz Auskunft:

Abtragungssatz für orientierte Elementarwinkel. *Ist w eine Größe orientierter Elementarwinkel und s ein Strahl, so gibt es genau einen Strahl t , so daß $\sphericalangle(s, t)$ ein orientierter Elementarwinkel aus w ist.*

Beweis. Es sei $w = m(\sphericalangle(h, k))$. Nach dem Existenzsatz für gleichsinnige Bewegungen aus 1.1.3.1. gibt es eine gleichsinnige Bewegung φ , die h auf s abbildet. Man setze $t = \varphi(k)$ und hat damit die Existenz bewiesen. Die Einzigkeit folgt daraus, daß jeder orientierte Elementarwinkel $\sphericalangle(s, t)$ aus w Bild von $\sphericalangle(h, k)$ bei einer gleichsinnigen Bewegung ist und es nach dem eben genannten Satz nicht mehr als eine solche Bewegung gibt.

Der Abtragungssatz erlaubt es, für Größen orientierter Elementarwinkel eine Operation zu erklären, die dem anschaulichen „Aneinanderlegen“ entspricht. Es

seien w_1 und w_2 beliebige solche Größen, $\sphericalangle(h, k)$ beliebig aus w_1 und $\sphericalangle(k, l)$ der nach dem Abtragungssatz eindeutig bestimmte orientierte Elementarwinkel aus w_2 , der k als ersten Schenkel hat. Durch $\sphericalangle(h, l)$ ist eine Größe orientierter Elementarwinkel gegeben; sie werde mit w_3 bezeichnet. Sie ist auf Grund des folgenden Hilfssatzes unabhängig von der Auswahl von $\sphericalangle(h, k)$ aus w_1 .

Hilfssatz. Aus $\sphericalangle(h, k) \cong^+ \sphericalangle(h', k')$ und $\sphericalangle(k, l) \cong^+ \sphericalangle(k', l')$ folgt

$$\sphericalangle(h, l) \cong^+ \sphericalangle(h', l').$$

Beweis. Aus der ersten Kongruenz folgt die Existenz einer gleichsinnigen Bewegung φ_1 mit $\varphi_1(h) = h'$ und $\varphi_1(k) = k'$. Aus der zweiten Kongruenz folgt die Existenz einer gleichsinnigen Bewegung φ_2 mit $\varphi_2(k) = k'$ und $\varphi_2(l) = l'$. Auf Grund des Existenzsatzes für gleichsinnige Bewegungen sind wegen $\varphi_1(k) = \varphi_2(k)$ beide Bewegungen gleich. Also ist $\varphi_1(l) = \varphi_2(l) = l'$, d. h. $\varphi_1(\sphericalangle(h, l)) = \sphericalangle(h', l')$.

Die oben beschriebene Konstruktion von w_3 führt also bei jeder Wahl von $\sphericalangle(h, k)$ aus w_1 auf dieselbe Klasse w_3 . Man nennt w_3 *Summe* der Größen w_1 und w_2 und schreibt $w_1 + w_2 = w_3$. Damit ist eine *Addition der Größen orientierter Elementarwinkel* erklärt und \mathfrak{B}_0/\cong^+ zu einer algebraischen Struktur $(\mathfrak{B}_0/\cong^+, +)$ gemacht worden. Für beliebige Strahlen h, k, l mit gemeinsamem Anfangspunkt gilt ausnahmslos

$$m(\sphericalangle(h, k)) + m(\sphericalangle(k, l)) = m(\sphericalangle(h, l)).$$

Zwischen der Struktur $(\mathfrak{B}_0/\cong^+, +)$ und der Gruppe der Drehungen um einen festen Punkt besteht ein enger Zusammenhang, wie jetzt gezeigt werden soll. Es sei A ein fester Punkt und δ eine Drehung mit dem Zentrum A ; h und k seien zwei beliebige Strahlen mit dem Anfangspunkt A und $h' = \delta(h)$ sowie $k' = \delta(k)$. Nach dem Existenzsatz aus 1.1.3.1. gibt es eine gleichsinnige Bewegung φ mit $\varphi(h) = k$. φ ist Drehung um A , so daß $\varphi \circ \delta = \delta \circ \varphi$ ist. Es gilt

$$\varphi(h') = \varphi \circ \delta(h) = \delta \circ \varphi(h) = \delta(k) = k'.$$

Die orientierten Elementarwinkel $\sphericalangle(h, h')$ und $\sphericalangle(k, k')$ sind also vermöge der Drehung φ gleichsinnig kongruent. Es gilt somit der

Satz. Bei jeder Drehung um A sind die orientierten Elementarwinkel mit dem Scheitel A , deren zweite Schenkel jeweils Bild des ersten sind, alle zueinander gleichsinnig kongruent.

Die genannten orientierten Elementarwinkel gehören also zu ein und derselben Größe, die der betreffenden Drehung δ zugeordnet und mit w_δ bezeichnet werden möge. Ist umgekehrt w eine Größe orientierter Elementarwinkel, so gibt es auf Grund des Abtragungssatzes genau eine Drehung um A , für die die zugeordnete Größe gerade w ist. Durch die Zuordnung $\delta \mapsto w_\delta$ ist also eine bijektive Abbildung der Menge aller Drehungen um A auf die Menge \mathfrak{B}_0/\cong^+ gegeben. Offenbar wird dem Produkt zweier solcher Drehungen die Summe der zugeordneten Größen zuge-

ordnet: $\delta_2 \circ \delta_1 \mapsto w_{\delta_1} + w_{\delta_2}$, die genannte Zuordnung ist demnach ein Isomorphismus. Unter Berücksichtigung des Satzes über die Gruppe der Drehungen um einen Punkt ergibt sich, daß $(\mathfrak{B}_0/\cong^+, +)$ eine kommutative Gruppe ist, es gilt der

Satz über die Gruppe der Größen orientierter Elementarwinkel. Die Größen orientierter Elementarwinkel bilden bezüglich der Addition eine kommutative Gruppe, die zur Gruppe der Drehungen um einen Punkt isomorph ist.

Wie üblich soll mit $-x$ die zur Größe x inverse bezeichnet werden. Offenbar ist

$$-m(\sphericalangle(h, k)) = m(\sphericalangle(k, h)).$$

Die Repräsentanten von x und $-x$ liegen — von der Nullwinkelgröße und der Größe der gestreckten orientierten Elementarwinkel abgesehen — in verschiedenen Orientierungsklassen. Statt $y + (-x)$ soll einfach $y - x$ und statt $x + x$ soll $2x$ geschrieben werden.

Die Größe der gestreckten orientierten Elementarwinkel entspricht bei dem oben genannten Isomorphismus der Punktspiegelung σ_A . Da σ_A Involution ist, ergibt jene Größe zu sich selbst addiert die Nullwinkelgröße. Die Größe der gestreckten orientierten Elementarwinkel ist demnach Lösung der Gleichung $2x = m(\sphericalangle(h, h))$ und ist außer der Nullwinkelgröße selbst die einzige Lösung dieser Gleichung.

In Verallgemeinerung dieses Sachverhaltes gilt der

Satz über die Halbierung von Größen orientierter Elementarwinkel. Ist w eine gegebene Größe orientierter Elementarwinkel, so hat die Gleichung $2x = w$ genau zwei Lösungen x_1 und x_2 , und es ist $x_1 - x_2$ die Größe der gestreckten orientierten Elementarwinkel.

Beweis. Ist w die Nullwinkelgröße, so ist der Beweis bereits erbracht. Nun werde w durch $\sphericalangle(h, k)$ mit $h \neq k$ repräsentiert. Nach dem zweiten Existenzsatz für Geradenspiegelungen gibt es genau eine Gerade g , so daß $\sigma_g(h) = k$ ist. g wird durch den Scheitel von $\sphericalangle(h, k)$ in zwei entgegengesetzte Strahlen s_1 und s_2 zerlegt. Für $i = 1, 2$ gilt

$$m(\sphericalangle(h, k)) = m(\sphericalangle(h, s_i)) + m(\sphericalangle(s_i, k)).$$

Es ist aber

$$\sigma_g(\sphericalangle(h, s_i)) = \sphericalangle(k, s_i),$$

also

$$\sphericalangle(h, s_i) \cong^+ \sphericalangle(s_i, k)$$

bzw.

$$m(\sphericalangle(h, s_i)) = m(\sphericalangle(s_i, k)),$$

d. h., $x_i = m(\sphericalangle(h, s_i))$ sind Lösungen der Gleichung. Andererseits ist leicht einzusehen, daß jeder Strahl s mit der Eigenschaft $\sphericalangle(h, s) \cong^+ \sphericalangle(s, k)$ in der Geraden g

enthalten sein muß, so daß die genannten Lösungen der Gleichung die einzigen sind. Es gilt

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &= m(\sphericalangle(h, s_1)) - m(\sphericalangle(h, s_2)) \\ &= m(\sphericalangle(h, s_1)) + m(\sphericalangle(s_2, h)) \\ &= m(\sphericalangle(s_2, s_1)),\end{aligned}$$

und dies ist die Größe der gestreckten orientierten Elementarwinkel, womit der Satz bewiesen ist.

Besondere Beachtung verdient der Fall, daß w die Größe der gestreckten orientierten Elementarwinkel ist, sie sei mit w_g bezeichnet. Für die beiden Lösungen x_1 und x_2 der Gleichung $2x = w_g$ gilt $x_1 - x_2 = w_g = x_1 + x_2$, also $x_1 = -x_2$. Die diesen beiden Größen angehörenden orientierten Elementarwinkel bekommen den gemeinsamen Namen *rechte orientierte Elementarwinkel*; es gibt demnach zwei Sorten rechter orientierter Elementarwinkel, zwei Vertreter verschiedener Sorten sind ungleichsinnig kongruent. Rechte orientierte Elementarwinkel haben die Eigenschaft, daß die Trägergeraden ihrer Schenkel senkrechte Geraden sind; das ergibt sich aus dem Beweis des letzten Satzes, wenn man dort h und k als entgegengesetzte Strahlen voraussetzt. Ist umgekehrt $\sphericalangle PAQ$ ein orientierter Elementarwinkel, dessen Schenkel senkrechte Trägergeraden haben, und s ein Strahl mit

$$\sphericalangle(AQ^+, s) \cong^+ \sphericalangle PAQ,$$

so muß s wegen der Einzigkeit des Lotes zu $g(QA)$ durch A und wegen der Invarianz des Senkrechtseins zur Geraden $g(AP)$ gehören. $s = AP^+$ ist unmöglich, weil $\sphericalangle QAP$ und $\sphericalangle PAQ$ ungleichsinnig kongruent sind, also ist $s = AP^-$, und es gilt

$$2m(\sphericalangle(AP^+, AQ^+)) = w_g,$$

d. h., $\sphericalangle PAQ$ ist ein rechter orientierter Elementarwinkel. Somit ist $\sphericalangle(h, k)$ genau dann rechter orientierter Elementarwinkel, wenn die Trägergeraden von h und k senkrecht sind.

1.1.3.2.3. Winkelgrößen

Unter einem *Elementarwinkel* soll ein ungeordnetes Paar (also eine Zweiermenge) von Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt verstanden werden; die Strahlen, die hier (im Gegensatz zum Begriff des orientierten Elementarwinkels) stets voneinander verschieden sind, nennt man *Schenkel*, den gemeinsamen Anfangspunkt *Scheitel* des Elementarwinkels. Der aus den Strahlen h und k bestehende Elementarwinkel soll mit $\sphericalangle(h, k)$ bezeichnet werden. Statt $\sphericalangle(AP^+, AQ^+)$ kann auch kurz $\sphericalangle PAQ$ geschrieben werden. Ein aus zwei entgegengesetzten Strahlen bestehender Elementarwinkel heißt *gestreckt*, ein Elementarwinkel, dessen Schenkel senkrechte Trägergeraden haben, heißt *rechter Elementarwinkel*. Die Menge der Elementar-

winkel kann bezüglich der Kongruenz in Klassen eingeteilt werden; eine genauere Untersuchung und Strukturierung dieser Klassen soll hier jedoch nicht erfolgen. Dafür wird der Begriff des Winkels eingeführt.

So wie jede Gerade eine Zerlegung der nicht zu ihr gehörenden Punkte in zwei Halbebenen bewirkt, erzeugt auf folgendem Wege jeder Elementarwinkel eine Zerlegung der nicht zu seinen Schenkeln gehörenden Punkte in zwei Klassen: Ist $\sphericalangle(h, k)$ gestreckt, so seien die beiden durch die Trägergerade von h und k erzeugten offenen Halbebenen die Klassen. Ist $\sphericalangle(AP_1^+, AP_2^+)$ nicht gestreckt, so betrachte man die Mengen $\mathfrak{M}_1 = AP_1P_2^+ \cap AP_2P_1^+$ und $\mathfrak{M}_2 = AP_1P_2^- \cup AP_2P_1^-$ (alle genannten Halbebenen sind offen zu denken). Es ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 &= (AP_1P_2^+ \cap AP_2P_1^+) \cap (AP_1P_2^- \cup AP_2P_1^-) \\ &= (AP_1P_2^+ \cap AP_2P_1^+ \cap AP_1P_2^-) \cup (AP_1P_2^+ \cap AP_2P_1^+ \cap AP_2P_1^-) \\ &= \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.\end{aligned}$$

Ist X ein Punkt, der weder zu AP_1^+ noch zu AP_2^+ gehört, so gehört er entweder zu $AP_1P_2^+$ oder zu $AP_1P_2^-$ oder zu AP_1^- , und er gehört entweder zu $AP_2P_1^+$ oder zu $AP_2P_1^-$ oder zu AP_2^- . Hieraus folgt unter Berücksichtigung von $AP_1^- \setminus \{A\} \subset AP_2P_1^-$ und $AP_2^- \setminus \{A\} \subset AP_1P_2^-$, daß X zu \mathfrak{M}_1 oder zu \mathfrak{M}_2 gehört. Also ist durch die Mengen \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 eine Zerlegung der nicht zu AP_1^+ oder AP_2^+ gehörenden Punkte in zwei Klassen gegeben. Während bei der Halbebenenzerlegung keine der beiden von einer Geraden erzeugten Halbebenen vor der anderen ausgezeichnet ist (sie sind zueinander kongruent), zeigt sich hier eine Asymmetrie: \mathfrak{M}_1 ist Durchschnitt, \mathfrak{M}_2 Vereinigung zweier Halbebenen, beide Mengen sind nicht kongruent. Ein *Winkel* wird nun definiert als ein Paar $(\sphericalangle(h, k), \mathfrak{M}_i)$, bestehend aus einem Elementarwinkel und einer der beiden von ihm erzeugten Zerlegungsmengen \mathfrak{M}_1 oder \mathfrak{M}_2 . Die Menge \mathfrak{M}_i heißt dann *Inneres* des betreffenden Winkels, Schenkel und Scheitel von $\sphericalangle(h, k)$ heißen *Schenkel* und *Scheitel* des Winkels, die zu ihnen gehörenden Punkte nennt man auch *Randpunkte* des Winkels. Ein Winkel ist durch Angabe seines Elementarwinkels $\sphericalangle(h, k)$ und eines zu seinem Inneren gehörenden Punktes P festgelegt und möge dann mit $\sphericalangle(h, k; P^+)$ bezeichnet werden; unter $\sphericalangle(h, k; P^-)$ ($P \in h, P \in k$) soll der Winkel mit den Schenkeln h und k verstanden werden, in dessen Innerem P nicht enthalten ist. Ein Winkel mit gestrecktem Elementarwinkel möge *gestreckter Winkel* heißen. Je nachdem, ob das Innere eines nicht gestreckten Winkels als Durchschnitt oder als Vereinigung von offenen Halbebenen entstanden ist, möge der betreffende Winkel *Winkel erster Art* oder *Winkel zweiter Art* genannt werden (Abb. 1.16). Gestreckte Winkel sind weder von der ersten noch von der zweiten Art. Ein Winkel erster Art, dessen Schenkel senkrechte Trägergeraden haben, heißt *rechter Winkel*. Jeder Elementarwinkel kann auf genau zwei Weisen zu einem Winkel erweitert werden, im Fall eines nicht gestreckten Elementarwinkels ist einer dieser beiden Winkel von der ersten, der andere von der zweiten Art.

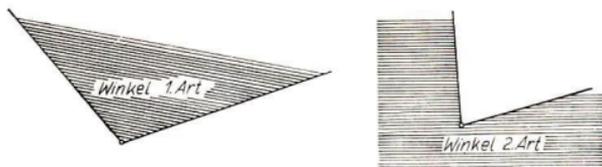


Abb. 1.16

Unter dem Bild eines Winkels $\sphericalangle(h, k; P^+)$ bei einer Bewegung φ hat man den Winkel $\sphericalangle(\varphi(h), \varphi(k); \varphi(P)^+)$ zu verstehen. Es folgt ohne weiteres aus der Definition von Winkeln erster und zweiter Art, daß sich die Eigenschaft eines Winkels, von der ersten oder der zweiten Art zu sein, bei Bewegung nicht ändert. Für die Kongruenz zweier nicht gestreckter Winkel ist es also notwendig und hinreichend, daß ihre Elementarwinkel kongruent und daß beide Winkel von derselben Art sind.

Die Menge \mathfrak{W} aller Winkel zerfällt bezüglich der Kongruenz in Äquivalenzklassen. Es ergibt sich ein Restsystem \mathfrak{W}/\cong , dessen Elemente *Winkelgrößen* genannt werden sollen und die wie folgt (analog zur Bezeichnung der Längen) bezeichnet werden sollen:

$$|\sphericalangle(h, k; P^+)| := \{w : w = \sphericalangle(x, y; Z^+) \wedge w \cong \sphericalangle(h, k; P^+)\}.$$

Da alle zu einem Winkel z. B. erster Art kongruenten Winkel ebenfalls von der ersten Art sind, können die Winkelgrößen, deren Vertreter keine gestreckten Winkel sind, wie die Winkel selbst in zwei Sorten eingeteilt werden: Winkelgrößen erster und zweiter Art. Die gestreckten Winkel bilden eine Klasse für sich, die *gestreckte Winkelgröße* genannt werden soll.

Für die Winkelgrößen soll nun eine Addition eingeführt werden, die der anschaulichen Vorstellung des Aneinanderlegens von Winkeln entspricht.

Es ist möglich, der Anschauung gemäß den Begriff der Vereinigung von Punktmen- gen zur Einführung der Addition von Winkelgrößen heranzuziehen. Die dazu notwendigen Überlegungen sind jedoch etwas mühsam. Einfacher, aber abstrakter ist der im folgenden beschrittene Weg, bei dem von Größen orientierter Elementarwinkel und von Orientierungsklassen Gebrauch gemacht wird.

In 1.1.2.2. wurde die Gleichorientierung von orientierten Elementarwinkeln definiert. Die orientierten Elementarwinkel, die nicht Nullwinkel oder gestreckte orientierte Elementarwinkel sind, können in zwei Orientierungsklassen eingeteilt werden. Es sei daran erinnert, daß die Vertauschung der Schenkel eines orientierten Elementarwinkels den Übergang in die entgegengesetzte Orientierungsklasse bewirkt; dasselbe bewirkt auch die Ersetzung eines Schenkels durch den zu ihm entgegengesetzten Strahl; das letzte kann für die Größe des betreffenden orientierten Elementarwinkels als Addition der Größe der gestreckten orientierten Elementarwinkel gedeutet werden.

Von den beiden Orientierungsklassen möge eine ausgezeichnet und mit O_1 bezeichnet werden, die andere Klasse werde mit O_2 bezeichnet. Die folgenden Betrachtungen spielen sich also in einer orientierten Ebene ab.

Da jeder Elementarwinkel auf zwei Weisen zu einem orientierten Elementarwinkel gemacht werden und ebenso auf zwei Weisen zu einem Winkel erweitert werden kann, bietet es sich an, folgende Abbildung ω zu betrachten, die jedem Winkel einen orientierten Elementarwinkel zuordnet:

Ist $\sphericalangle(h, k; P^+)$ ein Winkel erster (bzw. zweiter) Art, so sei $\omega(\sphericalangle(h, k; P^+))$ derjenige von den orientierten Elementarwinkeln $\sphericalangle(h, k)$ und $\sphericalangle(k, h)$, der zur Orientierungsklasse O_1 (bzw. O_2) gehört. Ist $\sphericalangle(h, k; P^+)$ ein gestreckter Winkel, so sei $\omega(\sphericalangle(h, k; P^+))$ derjenige von den orientierten Elementarwinkeln $\sphericalangle(h, k)$ und $\sphericalangle(k, h)$, für den die Fahne mit dem ersten Schenkel als Randstrahl, die P enthält, zur Orientierungsklasse O_1 gehört.

Diese Abbildungsvorschrift kann folgendermaßen anschaulich gedeutet werden: Denkt man O_1 als die Klasse derjenigen orientierten Elementarwinkel, deren zweite Schenkel rechts vom ersten liegen, so wird einem jeden Winkel derjenige orientierte Elementarwinkel zugeordnet, der dieselben Schenkel hat und für den das Innere des Winkels rechts vom ersten Schenkel liegt.

Offenbar ist diese Abbildungsvorschrift umkehrbar: Jedem orientierten Elementarwinkel, der nicht Nullwinkel ist, entspricht genau ein Winkel, dem dieser orientierte Elementarwinkel bei ω zugeordnet ist. Durch ω ist also eine bijektive Abbildung der Menge aller Winkel auf die Menge der orientierten Elementarwinkel gegeben, die nicht Nullwinkel sind. Aus der Zuordnungsvorschrift folgt ferner, daß kongruenten Winkeln gleichsinnig kongruente orientierte Elementarwinkel zugeordnet werden und daß die Urbilder gleichsinnig kongruenter orientierter Elementarwinkel kongruente Winkel sind. Das bedeutet, daß durch ω eine bijektive Abbildung Ω der Menge aller Winkelgrößen auf die Menge der von der Nullwinkelgröße verschiedenen Größen orientierter Elementarwinkel gegeben ist.

Die Einteilung der Menge \mathfrak{W}_0 der orientierten Elementarwinkel in zwei Orientierungsklassen überträgt sich auf das System \mathfrak{W}_0/\cong^+ der Größen orientierter Elementarwinkel; die beiden Klassen mögen ebenfalls mit O_1 und O_2 bezeichnet werden. Die Nullwinkelgröße und die Größe der gestreckten orientierten Elementarwinkel gehören keiner dieser beiden Klassen an.

Nun wird in der Menge der Winkelgrößen eine partielle Operation erklärt, die *Addition* genannt und mit dem Zeichen $+$ geschrieben wird. w_1 und w_2 seien Winkelgrößen. In den drei Fällen

- a) $\Omega(w_1)$ und $\Omega(w_2)$ gehören beide zu O_1 ,
- b) $\Omega(w_1)$ und $\Omega(w_2)$ gehören zu verschiedenen Orientierungsklassen, und $\Omega(w_1) + \Omega(w_2)$ gehört zu O_2 ,
- c) von den Größen $\Omega(w_1)$ und $\Omega(w_2)$ ist eine die Größe der gestreckten orientierten Elementarwinkel, die andere gehört zu O_1 ,

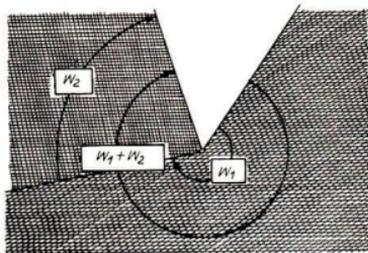


Abb. 1.17

definiert man

$$w_1 + w_2 := \Omega^{-1}(\Omega(w_1) + \Omega(w_2));$$

in allen anderen Fällen ist eine Summe nicht erklärt (Abb. 1.17).

Der Leser möge sich an Hand konkreter Beispiele davon überzeugen, daß diese Definition der Vorstellung des Aneinanderlegens von Winkeln entspricht. Nur um für die anschließend zu definierende Ordnungsrelation für Winkelgrößen die Monotonie bezüglich der Addition zu sichern, wurde nicht für beliebige Winkelgrößen eine Summe erklärt (obwohl der rechts vom Definitionszeichen stehende Ausdruck für beliebige Winkelgrößen einen Sinn hat).

Man überlege sich, daß man dieselbe Winkelgröße als Summe bekommt, wenn man statt O_1 die Klasse O_2 auszeichnet, die Addition ist also unabhängig von der Orientierung der Ebene. Somit ist eine algebraische Struktur $(\mathfrak{B}/\cong, +)$ mit partieller Operation $+$ entstanden.

Aus der Definition folgt sofort: Wenn $w_1 + w_2$ existiert, dann existiert auch $w_2 + w_1$, und es ist $w_1 + w_2 = w_2 + w_1$. Ferner kann gezeigt werden — der Beweis soll hier unterbleiben —, daß die Summe $(w_1 + w_2) + w_3$ genau dann existiert, wenn $w_1 + (w_2 + w_3)$ existiert; im Falle der Existenz sind beide Summen gleich, denn es ist dann

$$\begin{aligned} (w_1 + w_2) + w_3 &= \Omega^{-1}(\Omega(w_1 + w_2) + \Omega(w_3)) \\ &= \Omega^{-1}[\Omega(\Omega^{-1}(\Omega(w_1) + \Omega(w_2))) + \Omega(w_3)] \\ &= \Omega^{-1}(\Omega(w_1) + \Omega(w_2) + \Omega(w_3)) \\ &= \Omega^{-1}[\Omega(w_1) + \Omega(\Omega^{-1}(\Omega(w_2) + \Omega(w_3)))] \\ &= \Omega^{-1}(\Omega(w_1) + \Omega(w_2 + w_3)) = w_1 + (w_2 + w_3). \end{aligned}$$

Es gilt also der

Satz über die Addition von Winkelgrößen. *Die Addition von Winkelgrößen ist eine teilweise ausführbare assoziative kommutative Operation.*

Ein neutrales Element existiert für diese Operation nicht; denn wäre $w + v = w$, so gälte $\Omega(w) = \Omega(w) + \Omega(v)$, d. h., $\Omega(v)$ wäre die Nullwinkelgröße, ein solches v

existiert aber nicht. Es gilt jedoch eine Kürzungsregel: Aus $a + b = a + c$ folgt $b = c$. Der Beweis sei als Aufgabe gestellt.

Für Winkelgrößen w_1, w_2 kann jetzt folgendermaßen eine Ordnungsrelation erklärt werden:

Definition. $w_1 < w_2$ bedeutet: Es gibt eine Winkelgröße x , so daß $w_1 + x = w_2$ ist.

Für diese Relation sind die Eigenschaften (T), (I), (K) von Ordnungsrelationen (vgl. 1.1.2.1.) nachzuweisen. Gilt $w_1 < w_2$ und $w_2 < w_3$, so gibt es Winkelgrößen x und y mit $w_1 + x = w_2$ und $w_2 + y = w_3$. Hieraus folgt $w_1 + (x + y) = w_3$, d. h., es ist $w_1 < w_3$; die Eigenschaft (T) ist also erfüllt. Da es für die Addition der Winkelgrößen kein neutrales Element gibt, ist die Gleichung $w + x = w$ nicht auflösbar, d. h., es gilt nicht $w < w$, und das bedeutet Erfülltsein der Eigenschaft (I). Für den Nachweis von (K) sind mehrere Fälle zu betrachten. Zunächst sei bemerkt: Ist $\Omega(w_1) \in O_1$ und $\Omega(w_2) \in O_2$, so ist $w_1 < w_2$. Denn es existiert eine Winkelgröße x , so daß in der Gruppe der Größen orientierter Elementarwinkel

$$\Omega(w_1) + \Omega(x) = \Omega(w_2)$$

ist, also gilt

$$w_2 = \Omega^{-1}(\Omega(w_1) + \Omega(x)),$$

und unabhängig davon, ob $\Omega(x)$ zu O_1 oder zu O_2 gehört oder die Größe der gestreckten orientierten Elementarwinkel ist, kann dies auf Grund der geltenden Voraussetzungen nach der Definition der Addition als gleichbedeutend mit $w_1 + x = w_2$ angesehen werden. Ferner gilt: Ist g_0 die gestreckte Winkelgröße, so besteht für jedes w mit $\Omega(w) \in O_1$ die Relation $w < g_0$, und für jedes v mit $\Omega(v) \in O_2$ gilt $g_0 < v$. Ist nämlich $\Omega(w) \in O_1$, so ist $-\Omega(w) \in O_2$, $-\Omega(w) + \Omega(g_0)$ ($= \Omega(w')$ mit einem passenden w') gehört zu O_1 , $w + w'$ existiert also und ist gleich

$$\Omega^{-1}(\Omega(w) + \Omega(w')) = \Omega^{-1}(\Omega(w) - \Omega(w) + \Omega(g_0)) = g_0,$$

d. h., die Gleichung $w + x = g_0$ hat die Lösung w' , woraus $w < g_0$ folgt. Analoge Schlüsse führen zur zweiten Behauptung. Sind schließlich w_1 und w_2 Winkelgrößen, für die $\Omega(w_i)$ ($i = 1, 2$) in ein und derselben Orientierungsklasse liegen, und existiert kein x mit $w_1 + x = w_2$, so gibt es doch ein x mit $\Omega(w_1) + \Omega(x) = \Omega(w_2)$, und wegen der Unlösbarkeit von $w_1 + x = w_2$ muß $\Omega(x)$ zu O_2 gehören. Es gehört dann $-\Omega(x)$ ($= \Omega(y)$ mit einer passenden Winkelgröße y) zu O_1 , folglich existiert $w_2 + y$ und ist gleich

$$\Omega^{-1}(\Omega(w_2) + \Omega(y)) = \Omega^{-1}(\Omega(w_2) - \Omega(w_2) + \Omega(w_1)) = w_1,$$

also ist $w_2 < w_1$. Insgesamt ist damit gezeigt worden, daß die Relation „ $<$ “ eine irreflexive Ordnungsrelation in der Menge der Winkelgrößen ist.

Die Ordnungsrelation der Winkelgrößen kann auf die Winkel selbst übertragen werden. Man definiert:

$$\sphericalangle(h, k; X^+) < \sphericalangle(l, m; Y^+) \Leftrightarrow |\sphericalangle(h, k; X^+)| < |\sphericalangle(l, m; Y^+)|.$$

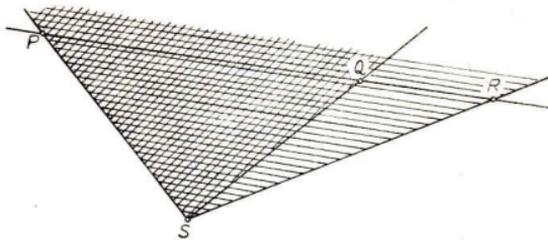


Abb. 1.18

Allerdings ist hierdurch nur eine teilweise Ordnung in der Menge der Winkel gegeben; denn die Eigenschaft (K) ist nicht erfüllt, wie man am Beispiel eines Paares verschiedener, aber kongruenter Winkel sieht.

Für manche Anwendungen ist folgender Satz nützlich (Abb. 1.18):

Satz. Aus $Zw(PQR)$ folgt für jeden nicht auf $g(PQ)$ liegenden Punkt S

$$\sphericalangle (SP^+, SQ^+; X^+) < \sphericalangle (SP^+, SR^+; Y^+),$$

falls diese beiden Winkel von der ersten Art sind.

Beweis. Aus $Zw(PQR)$ folgt, daß die Fahnen SP^+Q^+ ($= SP^+R^+$) und SQ^+R^+ , also auch die orientierten Elementarwinkel $\sphericalangle (SP^+, SQ^+)$ und $\sphericalangle (SQ^+, SR^+)$ gleichorientiert sind, o. B. d. A. mögen sie zu O_1 gehören (andernfalls ändere man die Reihenfolge der Schenkel). Folglich ist

$$\begin{aligned} & |\sphericalangle (SP^+, SQ^+; X^+)| + |\sphericalangle (SQ^+, SR^+; Z^+)| \\ &= \Omega^{-1}(m(\sphericalangle (SP^+, SQ^+)) + m(\sphericalangle (SQ^+, SR^+))) \\ &= \Omega^{-1}(m(\sphericalangle (SP^+, SR^+))) \\ &= |\sphericalangle (SP^+, SR^+; Y^+)| \end{aligned}$$

(Z ist so zu wählen, daß der betreffende Winkel von der ersten Art ist), und hieraus ergibt sich auf Grund der Definition der Relation „ $<$ “ für Winkel die Behauptung des Satzes.

Dem soeben geführten Beweis entnimmt man noch folgenden Satz, durch den die Addition von Winkelgrößen erster Art durch Lagebeziehungen von Repräsentanten verdeutlicht wird.

Satz. Sind $\sphericalangle (PSQ; X^+)$, $\sphericalangle (QSR; Y^+)$, $\sphericalangle (PSR; Z^+)$ Winkel erster Art und gilt $Zw(PQR)$, so ist

$$|\sphericalangle (PSQ; X^+)| + |\sphericalangle (QSR; Y^+)| = |\sphericalangle (PSR; Z^+)|.$$

Winkel, die kleiner als ein rechter Winkel sind, nennt man *spitz*; Winkel, die nicht kleiner als ein rechter, aber kleiner als ein gestreckter sind, nennt man —

rechte Winkel ausgenommen — *stumpf*; Winkel, die nicht gestreckt und nicht kleiner als ein gestreckter sind, heißen *überstumpf*. Wie aus dem Beweis der Eigenschaft (K) hervorgeht, sind die überstumpfen Winkel genau die Winkel zweiter Art. Die Menge der Winkel erster Art zerfällt in spitze, rechte und stumpfe Winkel. Die Bezeichnungen spitz, stumpf, überstumpf können in gleicher Weise für die Winkelgrößen verwendet werden.

Es gilt folgender

Monotoniesatz für Winkelgrößen. *Sind w_1, w_2, w Winkelgrößen mit $w_1 < w_2$ und existiert $w_2 + w$, so gilt $w_1 + w < w_2 + w$.*

Beweis. Aus $w_1 < w_2$ folgt die Existenz einer Winkelgröße x , für die $w_1 + x$ existiert und gleich w_2 ist. Da $w_2 + w$ existiert, gilt $w_1 + x + w = w_2 + w$, das bedeutet $w_1 + w < w_2 + w$.

Die Frage nach der „Halbierung“ einer Winkelgröße bedeutet die Frage nach Lösungen x der Gleichung $x + x = w$, wobei w eine gegebene Winkelgröße ist. Jede Lösung dieser Gleichung genügt der Gleichung $\Omega(w) = 2\Omega(x)$. Nach dem Satz über die Halbierung von Größen orientierter Elementarwinkel hat aber die Gleichung $2y = \Omega(w)$ genau zwei Lösungen y_1 und y_2 , und y_1 gehört genau dann zu O_1 , wenn y_2 zu O_2 gehört. Daraus folgt, daß nur für eine von diesen Lösungen $\Omega^{-1}(y_i) + \Omega^{-1}(y_i)$ existiert. Es gilt also der

Satz über die Halbierung von Winkelgrößen. *Ist w eine gegebene Winkelgröße, so hat die Gleichung $x + x = w$ genau eine Lösung, und diese Lösung ist keine überstumpfe Winkelgröße.*

Hieraus folgt unter Berücksichtigung der Feststellungen im Beweis des Halbierungssatzes für Größen orientierter Elementarwinkel: Ist $\sphericalangle(h, k; P^+)$ ein gegebener Winkel, so gibt es genau einen Strahl l , der den Winkelscheitel als Anfangspunkt hat, so daß $\sphericalangle(h, l; Q^+)$ und $\sphericalangle(k, l; R^+)$ zur gleichen Winkelgröße gehören und die Addition dieser Winkelgröße zu sich selbst $|\sphericalangle(h, k; P^+)|$ ergibt. Der Strahl l liegt auf der Symmetrieachse von $h \cup k$, und man kann überlegen, daß er bis auf seinen Anfangspunkt im Inneren von $\sphericalangle(h, k; P^+)$ enthalten ist. Man nennt die Trägergerade von l (manchmal auch l selbst) die *Winkelhalbierende* von $\sphericalangle(h, k; P^+)$ und hat den

Satz von der Winkelhalbierenden. *Zu jedem Winkel gibt es genau eine Winkelhalbierende.*

Es sei $\sphericalangle(AP^+, AQ^+; R^+)$ ein nicht überstumpfer Winkel. Sein Bild bei der Punktspiegelung an A ist $\sphericalangle(AP^-, AQ^-; R^-)$ (Abb. 1.19a); diesen Winkel nennt man den *Scheitelwinkel* von $\sphericalangle(AP^+, AQ^+; R^+)$. Es gilt offenbar: Ist W_1 Scheitelwinkel zu W_2 , so ist W_2 Scheitelwinkel zu W_1 , und es ist $W_1 \cong W_2$.

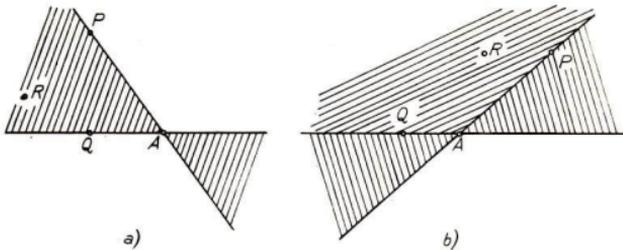


Abb. 1.19

Es sei $\sphericalangle (AP^+, AQ^+; R^+)$ ein nicht überstumpfer und nicht gestreckter Winkel. Die beiden nicht überstumpfen Winkel mit den Schenkeln AP^+ , AQ^- bzw. AP^- , AQ^+ nennt man die *Nebenwinkel* von $\sphericalangle (AP^+, AQ^+; R^+)$ (Abb. 1.19b). Sie sind zueinander Scheitelwinkel, also untereinander kongruent. Ist W_1 Nebenwinkel zu W_2 , so ist W_2 Nebenwinkel zu W_1 . Sind W_1 und W_1' kongruente Winkel, ist W_2 Nebenwinkel zu W_1 und W_2' ein Nebenwinkel zu W_1' , so ist auch W_2 zu W_2' kongruent; denn wird ein Winkel durch eine Bewegung abgebildet, so werden die zu seinen Schenkeln entgegengesetzten Strahlen auf die entgegengesetzten Strahlen der Schenkel des Bildwinkels abgebildet, und nicht überstumpfe Winkel gehen bei Bewegung wieder in ebensolche über, so daß die Bildmenge eines Nebenwinkels wieder Nebenwinkel des Bildwinkels wird.

Addiert man die Winkelgröße eines nicht überstumpfen und nicht gestreckten Winkels zu derjenigen seiner Nebenwinkel, so erhält man die gestreckte Winkelgröße. Denn ist $w = |\sphericalangle (AP^+, AQ^+; R^+)|$, w' die Winkelgröße der zugehörigen Nebenwinkel und o. B. d. A. $\Omega(w) = m(\sphericalangle (AP^+, AQ^+))$, so ist $\Omega(w')$ durch denjenigen orientierten Elementarwinkel gegeben, dessen Schenkel die Strahlen AP^+ und AQ^- sind und der mit $\sphericalangle PAQ$ gleichorientiert ist; das ist aber $\sphericalangle (AQ^-, AP^+)$. Dann gilt

$$\Omega(w) + \Omega(w') = m(\sphericalangle (AQ^-, AP^+)),$$

also ist $w + w'$ die gestreckte Winkelgröße. Umgekehrt ist leicht nachzuweisen, daß man zu Winkelgrößen w und w' , deren Summe die gestreckte Winkelgröße ist, ein in der Relation Winkel-Nebenwinkel stehendes repräsentierendes Paar von Winkeln findet.

Ist w die Winkelgröße eines spitzen Winkels, w' die Größe der Nebenwinkel zu den Winkeln aus w , r die Winkelgröße der rechten Winkel, g die gestreckte Winkelgröße, so gibt es eine Winkelgröße x mit $w + x = r$. Hieraus folgt $g = r + r = w + x + r$. Das bedeutet $x + r = w'$, und dies besagt, daß w' eine stumpfe Winkelgröße ist. Also gilt: Nebenwinkel von spitzen Winkeln sind stumpf.

Ein Nebenwinkel eines beliebigen rechten Winkels kann demnach weder spitz noch stumpf sein, muß also ebenfalls rechter Winkel sein. Ein rechter Winkel ist

somit zu seinen Nebenwinkeln kongruent. Umgekehrt kann ein nicht überstumpfer und nicht gestreckter Winkel, der zu seinen Nebenwinkeln kongruent ist, nicht spitz oder stumpf sein, und so gilt der

Satz über rechte Winkel. *Ein nicht überstumpfer und nicht gestreckter Winkel ist genau dann rechter Winkel, wenn er zu seinen Nebenwinkeln kongruent ist.*

Der folgende Satz spielt in vielen Anwendungen eine Rolle.

Satz über Elementarwinkel an geschnittenen Parallelen (Abb. 1.20). *Sind $g(P_1Q_1)$ und $g(P_2Q_2)$ zwei parallele Geraden und liegen Q_1 und Q_2 in derselben Halbebene bezüglich $g(P_1P_2)$, so gelten die Kongruenzen*

$$\sphericalangle (P_1Q_1^+, P_1P_2^+) \cong \sphericalangle (P_2Q_2^+, P_2P_1^-) \cong \sphericalangle (P_2Q_2^-, P_2P_1^+).$$

Den zweiten in dieser Kongruenzkette vorkommenden Elementarwinkel nennt man einen *Stufenwinkel* zum ersten, den dritten einen *Wechselwinkel* zum ersten.

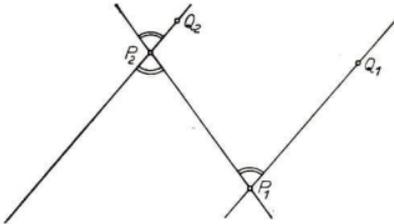


Abb. 1.20

Beweis. Die erste Kongruenz ergibt sich durch Anwendung der Verschiebung, die P_1 auf P_2 abbildet; sie bildet auf Grund der Invarianz der Ordnungsrelation auf Fixgeraden von Verschiebungen den Strahl $P_1P_2^+$ auf $P_2P_1^-$ ab und nach Eigenschaft (V1) und der Voraussetzung $P_1P_2Q_1^+ = P_1P_2Q_2^+$ den Strahl $P_1Q_1^+$ auf $P_2Q_2^+$. Die zweite Kongruenz ergibt sich durch Anwendung der Punktspiegelung an P_2 .

In Abb. 1.20 sind P_1 und P_2 Anfangspunkte von acht auf drei Geraden liegenden Strahlen; erweitert man die von diesen Strahlen gebildeten nicht gestreckten Elementarwinkel zu nicht überstumpfen Winkeln, so erhält man acht Winkel, die sich auf zwei Winkelgrößen verteilen; deren Summe ist die gestreckte Winkelgröße. Im Fall $g(P_1P_2) \perp g(P_1Q_1)$ sind alle acht Winkel rechte Winkel.

Es gilt auch eine Umkehrung des eben bewiesenen Satzes: Liegen die Punkte Q_1 und Q_2 auf derselben Seite der Geraden $g(P_1P_2)$ und gilt die Kongruenz

$$\sphericalangle (P_1Q_1^+, P_1P_2^+) \cong \sphericalangle (P_2Q_2^+, P_2P_1^-),$$

so sind die Geraden $g(P_1Q_1)$ und $g(P_2Q_2)$ parallel. Der Beweis kann ebenfalls mit der Verschiebung $v(P_1P_2)$ geführt werden; er sei dem Leser als Aufgabe überlassen.

Es soll nun noch eine zusammenfassende Übersicht über verschiedene Winkelbegriffe gegeben werden. Es sind folgende vier Winkelbegriffe zu unterscheiden, von denen im Vorangegangenen drei mehr oder weniger ausführlich behandelt wurden. Der einfachste ist der Begriff des Elementarwinkels; ein Elementarwinkel ist eine Zweiermenge von Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt. Geht man von der Zweiermenge zum geordneten Paar über, legt also eine Reihenfolge der Schenkel fest, so entsteht der Begriff des orientierten Elementarwinkels. Zum Begriff des Winkels schlechthin gelangt man, wenn man ausgehend von einem Elementarwinkel die vorn beschriebene Zerlegung der Ebene in die Mengen \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 vornimmt und eine dieser Mengen als Inneres auszeichnet; ein Winkel ist dann das System aus einem Elementarwinkel und Innerem. Schließlich kann man noch für die Schenkel eines so definierten Winkels eine Reihenfolge festlegen und kommt so zum Begriff des orientierten Winkels. Die folgende Tabelle faßt diese Begriffsbildungen noch einmal zusammen:

	Reihenfolge der Schenkel	
	nicht festgelegt	festgelegt
kein Inneres ausgezeichnet	Elementarwinkel $\sphericalangle ABC$	orientierter Elementarwinkel $\sphericalangle^+ ABC$
Inneres ausgezeichnet	Winkel $\sphericalangle (ABC; P^+)$	orientierter Winkel $\sphericalangle^+ (ABC; P^+)$

In der Analysis sowie in physikalischen und technischen Anwendungen wird außer diesen noch ein anderer Winkelbegriff gebraucht. Da er zur Beschreibung von Drehungsvorgängen dienen kann, könnte man ihn „Drehwinkel“ nennen; jedoch sei darauf hingewiesen, daß diese Bezeichnung oft in anderem Sinne verwendet wird. Daher sei hier die Bezeichnung (*abstrakter*) *Drehprozeß* gewählt. Dieser Begriff wird dadurch festgelegt, daß außer einem orientierten Elementarwinkel noch angegeben wird, durch welchen möglicherweise auch mehrere volle Umdrehungen einschließenden — der Einfachheit halber zunächst als gleichförmig vorzustellenden — Drehungsvorgang der erste Schenkel des orientierten Elementarwinkels in den zweiten übergeführt werden soll. Der physikalisch-konkrete Begriff „Vorgang“ kann nach entsprechender Vorbereitung mathematisch gefaßt werden, indem man definiert, ein Drehungsvorgang sei eine stetige Abbildung, die jeder Zahl eines („Zeit“-)Intervalles einen vom Scheitel ausgehenden Strahl zuordnet. Mit Hilfe einer geeigneten Definition „genügend wenig voneinander abweichender Drehungsvorgänge“ kann man sich auch von der Einschränkung auf gleichförmige Drehungsvorgänge befreien: Man betrachtet Drehungsvorgänge als abstrakt nicht verschieden, wenn sie durch schrittweises Vergleichen mit (beim Vergleich dazwischengeschalteten) wenig voneinander abweichenden Drehungsvorgängen ineinander überführbar sind. (Diese zum Vergleich neu eingeführten Drehungsvorgänge müssen dabei alle dieselben Anfangs- und Endschenkel besitzen.) Wegen dieses Abstrahierens wurde der damit gewonnene fünfte Winkelbegriff als abstrakter Drehprozeß bezeichnet. Mathematisch vorteilhafte Methoden zu seiner Beschreibung

liefert die sogenannte mengentheoretische Topologie: Mit ihren Begriffen kann der hier umschriebene (abstrakte) Drehprozeß kurz als eine Homotopieklasse von Drehvorgängen definiert werden.

1.1.3.2.4. Dreiecke

Vorbemerkung. In diesem Abschnitt kommen keine Elementarwinkel vor. Dagegen sind alle vorkommenden Winkel nicht überstumpf. Zur Vereinfachung der Bezeichnung wird daher vereinbart, daß in diesem Abschnitt $\sphericalangle(h, k)$ den nicht überstumpfen Winkel mit den Schenkeln h und k bezeichnen soll.

Es sei $d = \{A, B, C\}$ eine beliebige nicht kollineare Dreiermenge von Punkten. Sie bestimmt eine Dreiermenge s von Strecken, $s = \{AB, AC, BC\}$, und drei Winkel $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$, $\sphericalangle CAB$. Der Durchschnitt des Inneren dieser drei Winkel ist eine wohlbestimmte Punktmenge \mathfrak{I} . Das System (d, s, \mathfrak{I}) heißt *Dreieck*. d wird Menge der *Ecken*, s Menge der *Seiten* und \mathfrak{I} das *Innere* des Dreiecks genannt. Die Vereinigungsmenge der Seiten heißt *Rand*, die Vereinigungsmenge des Inneren mit dem Rand heißt *abgeschlossene Dreiecksfläche*. Die Seite AB nennt man dem Eckpunkt C bzw. dem Winkel $\sphericalangle ACB$ *gegenüberliegend*, der Winkel $\sphericalangle ACB$ heißt den Seiten AC und BC *anliegend* (analog für die anderen Seiten und Winkel). Die drei genannten Winkel heißen *Innenwinkel* des Dreiecks, die Nebenwinkel der Innenwinkel heißen *Außenwinkel* des Dreiecks. Ein Dreieck ist durch seine Ecken A, B, C eindeutig festgelegt, es möge einfach mit ABC bezeichnet werden. Es ist auch gebräuchlich, unter einem Dreieck nur die Menge d oder auch nur den Rand oder nur die abgeschlossene Dreiecksfläche zu verstehen.

Es sei ABC ein beliebiges Dreieck. Es soll die Summe der Winkelgrößen der Innenwinkel bestimmt werden. Dazu wird zunächst die Summe der Größen der betreffenden orientierten Elementarwinkel berechnet, indem für sie geeignete Repräsentanten mit dem gemeinsamen Scheitel C bestimmt werden (Abb. 1.21). Die Verschiebung τ_1 bilde A auf C , die Verschiebung τ_2 bilde B auf C ab, und es sei $\tau_1(B) = B'$, $\tau_2(A) = A'$. Das Bild von $g(AB)$ ist sowohl bei τ_1 als auch bei τ_2 die

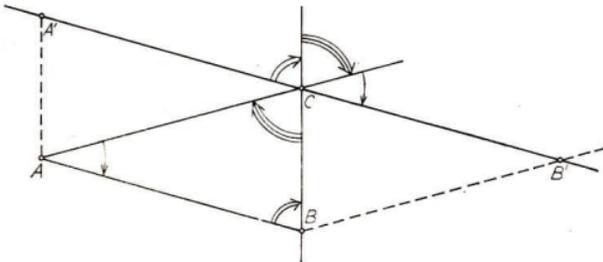


Abb. 1.21

Parallele zu $g(AB)$ durch C ; sie enthält die Punkte B' und A' . Es ist (A, B, C, B') ein Parallelogramm. Nach dem Satz vom Diagonalschnittpunkt aus 1.1.2.1. liegen A und B' auf verschiedenen Seiten von $g(BC)$, also ist $B' \in BCA^-$. Aus der Festlegung von τ_2 folgt andererseits $A' \in BCA^+$, also gilt $Zw(A'CB')$. Nun ist in folge τ_1

$$\sphericalangle (AC^+, AB^+) \cong^+ \sphericalangle (CA^-, CB'^+),$$

infolge τ_2 ist

$$\sphericalangle (BA^+, BC^+) \cong^+ \sphericalangle (CA'^+, CB^-),$$

ferner ist vermöge der Punktspiegelung σ_c

$$\sphericalangle (CB^+, CA^+) \cong^+ \sphericalangle (CB^-, CA^-).$$

Hieraus erhält man

$$\begin{aligned} & m(\sphericalangle CAB) + m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle BCA) \\ &= m(\sphericalangle (CA^-, CB'^+)) + m(\sphericalangle (CA'^+, CB^-)) + m(\sphericalangle (CB^-, CA^-)) \\ &= m(\sphericalangle (CA'^+, CB'^+)). \end{aligned}$$

Wegen $Zw(A'CB')$ ist dies die Größe der gestreckten orientierten Elementarwinkel. Die orientierten Elementarwinkel wurden so gewählt, daß sie zur gleichen Orientierungsklasse — o. B. d. A. zur Klasse O_1 — gehören (vgl. die Aufgabe am Schluß von 1.1.2.2.). In derselben Orientierungsklasse liegt auch $\sphericalangle (CA'^+, CA^-)$, der ja zur Größe

$$m(\sphericalangle (BA^+, BC^+)) + m(\sphericalangle (CB^+, CA^+))$$

gehört, so daß

$$|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle ACB|$$

existiert und gleich

$$\Omega^{-1}(m(\sphericalangle (AC^+, AB^+)) + m(\sphericalangle (BA^+, BC^+)) + m(\sphericalangle (CB^+, CA^+))),$$

also gleich der gestreckten Winkelgröße ist. Somit gilt der

Satz über die Innenwinkelsumme für Dreiecke. *Die Summe der Innenwinkelgrößen eines beliebigen Dreiecks ist die gestreckte Winkelgröße.*

Hieraus ergibt sich eine Folgerung für die Außenwinkel eines Dreiecks. Da die Summe der Winkelgrößen eines Innenwinkels und der des zugehörigen Außenwinkels per definitionem die gestreckte Winkelgröße ergibt, gilt wegen der Kürzungsregel für Winkelgrößen der

Satz über Außenwinkel. *Die Winkelgröße eines Außenwinkels ist gleich der Summe der Winkelgrößen der beiden ihm nicht zugehörigen Innenwinkel.*

Folgerung. Insbesondere ist jeder Innenwinkel kleiner als jeder ihm nicht zugehörige Außenwinkel.

Aus dem Satz über die Innenwinkelsumme folgt ferner, daß ein Dreieck höchstens einen stumpfen oder rechten Winkel haben kann, dieser ist dann immer der größte der drei Innenwinkel. Dreiecke mit einem stumpfen bzw. einem rechten Winkel nennt man *stumpf-* bzw. *rechtwinklig*.

Ein Dreieck ABC , das zwei kongruente Seiten hat, wird *gleichschenkelig* genannt. Sind AB und AC die kongruenten Seiten, so nennt man BC die *Basis* und die Winkel $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle BCA$ die *Basiswinkel*. Die Spiegelung an der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle BAC$ führt die kongruenten Seiten AB und AC ineinander über. Daraus folgt, daß die Basiswinkel kongruent sind und daß die genannte Winkelhalbierende Lot zur Trägergeraden der Basis ist. Der Schnittpunkt von Winkelhalbierender und Basis ist außerdem Mittelpunkt der Basis. (Das Lot im Mittelpunkt einer Strecke heißt *Mittelsenkrechte* dieser Strecke.) Ist von einem Dreieck bekannt, daß es zwei kongruente Innenwinkel hat, so kann man schließen, daß es gleichschenkelig ist. Denn eine bestimmte Seite ist in je einem Schenkel der beiden kongruenten Winkel enthalten, und die Spiegelung an der Mittelsenkrechten dieser Seite führt, wie man leicht einsehen kann, die beiden übrigen Seiten ineinander über. Somit gilt der

Satz über gleichschenkelige Dreiecke. *Ein Dreieck ist genau dann gleichschenkelig, wenn es zwei kongruente Winkel hat.*

Eine Folgerung ist, daß die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks stets spitz sein müssen.

Eine Beziehung zwischen den Größenrelationen der Seiten und Winkel eines Dreiecks wird im folgenden Satz angegeben.

Satz über gegenüberliegende Winkel und Seiten. *In einem beliebigen Dreieck ABC gilt $AB < BC$ genau dann, wenn $\sphericalangle ACB < \sphericalangle BAC$ gilt, d. h., der kleineren Seite liegt der kleinere Winkel gegenüber und umgekehrt.*

Beweis (Abb. 1.22a): Im Dreieck ABC gelte $AB < BC$. Es sei A_1 der nach dem Streckenabtragungssatz eindeutig bestimmte Punkt auf BC^+ mit $BA_1 \cong AB$. Wegen $AB < AC$ muß $Zw(BA_1C)$ gelten. Daraus folgt nach einem Satz aus 1.1.3.2.3. $\sphericalangle BAA_1 < \sphericalangle BAC$. Andererseits ist nach dem Satz über gleichschenkelige Dreiecke $\sphericalangle BAA_1 \cong \sphericalangle BA_1A$ und nach dem Satz über Außenwinkel $\sphericalangle ACB < \sphericalangle BA_1A$, so daß insgesamt die behauptete Relation

$$\sphericalangle ACB < \sphericalangle BAC$$

gilt. Gilt umgekehrt im Dreieck ABC die Relation $\sphericalangle ACB < \sphericalangle BAC$ und wäre $BC < AB$ oder $BC \cong AB$, so hätte man sofort einen Widerspruch zum bisher Bewiesenen bzw. zum Satz über gleichschenkelige Dreiecke.

Eine Beziehung zwischen den Längen der Seiten eines Dreiecks gibt der folgende Satz an.

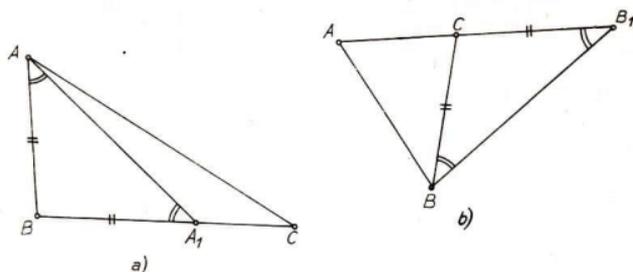


Abb. 1.22

Satz von der Dreiecksungleichung. In jedem Dreieck ABC gilt

$$|AB| < |BC| + |CA|,$$

d. h., die Summe der Längen zweier Seiten ist größer als die Länge der dritten Seite.

Beweis (Abb. 1.22b). Es sei B_1 der Punkt auf CA^- , für den $CB_1 \cong CB$ ist. Dann ist nach dem Satz über gleichschenklige Dreiecke $\sphericalangle CB_1B \cong \sphericalangle CBB_1$, und nach einem Satz aus 1.1.3.2.3. ist $\sphericalangle CBB_1 < \sphericalangle ABB_1$. Aus beidem folgt nach dem Satz über gegenüberliegende Winkel und Seiten für das Dreieck ABB_1 dann $AB < AB_1$; es ist aber $|AB_1| = |AC| + |CB_1|$, und hieraus folgt die Behauptung.

Aus der Kongruenz zweier Dreiecke folgen drei Kongruenzen für ihre einander zugeordneten Seiten sowie drei Kongruenzen für ihre einander zugeordneten Winkel. Umgekehrt genügt — von gewissen Einschränkungen abgesehen — schon die Kenntnis von drei dieser sechs Kongruenzen, um auf die Kongruenz der Dreiecke schließen zu können. Genaue Aussagen hierzu liefern die Kongruenzsätze für Dreiecke, die jetzt bewiesen werden sollen.

Kongruenzsatz „Seite — Seite — Seite“. Gelten für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen

$$(1) \quad AB \cong A'B',$$

$$(2) \quad BC \cong B'C',$$

$$(3) \quad CA \cong C'A',$$

so sind diese Dreiecke kongruent. (Aus der Kongruenz in drei Seiten folgt die Kongruenz schlechthin.)

Beweis. Es sei φ die Bewegung, die AB^+C^+ auf $A'B'+C'^+$ abbildet. Dann ist wegen (1) $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\varphi(C) = C_1$ ($\in A'B'C'^+$). Ist $C_1 = C'$, so ist der Beweis geführt. Es sei $C_1 \neq C'$ (Abb. 1.23), σ_1 die Geradenspiegelung, die $A'C_1^+$ auf

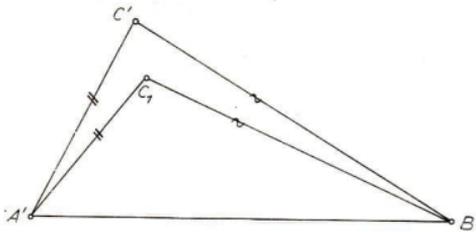


Abb. 1.23

$A'C'^+$ abbildet, σ_2 die Geradenspiegelung, die $B'C_1^+$ auf $B'C'^+$ abbildet. Es ist wegen (3) $\sigma_1(C_1) = C'$, wegen (2) ist $\sigma_2(C_1) = C'$. Folglich ist

$$\sigma_1(C'C_1^+A'^+) = C_1C'^+A'^+$$

und

$$\sigma_2(C'C_1^+A'^+) = \sigma_2(C'C_1^+B'^\pm) = C_1C'^+B'^\pm = C_1C'^+A'^+,$$

wobei bei B' gleichzeitig das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem, ob A' und B' auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von $g(C'C_1)$ liegen ($A' \in g(C'C_1)$ oder $B' \in g(C'C_1)$ ist unmöglich). Die Fahne $C'C_1^+A'^+$ hat also bei σ_1 und σ_2 dasselbe Bild; deshalb ist $\sigma_1 = \sigma_2$, und die Verbindungsgerade $g(A'B')$ der Fixpunkte A' und B' ist die gemeinsame Spiegelgerade. Dann muß aber C_1 als Bild von C' bei σ_1 in $A'B'C'$ liegen, was ein Widerspruch ist. Der Fall $\varphi(C) \neq C'$ ist also unmöglich, womit der Beweis beendet ist.

Kongruenzsatz „Seite – Seite – Winkel“. *Gelten für zwei Dreiecke ABC und A'B'C' die Kongruenzen*

- (1) $AB \cong A'B'$,
- (2) $BC \cong B'C'$,
- (3) $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$

und ist

- (4) $AB < BC$,

so sind diese Dreiecke kongruent. (Aus der Kongruenz in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel folgt die Kongruenz schlechthin.)

Beweis. Wegen (3) gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(AC^+) = A'C'^+$, $\varphi(AB^+) = A'B'^+$; wegen (1) ist $\varphi(B) = B'$. Es sei $\varphi(C) = C_1$, es ist $C_1 \in A'C'^+$. Ist $C_1 = C'$, so ist der Beweis geführt. Ist $C_1 \neq C'$, so ist wegen (2) das Dreieck $B'C'C_1$ gleichschenkelig. Es gilt $Zw(A'C_1C')$ oder $Zw(A'C'C_1)$. Im ersten Fall (Abb. 1.24a) ist $\sphericalangle B'C_1A'$ als Nebenwinkel eines Basiswinkels des genannten gleichschenkligen Dreiecks stumpf, infolgedessen ist der Innenwinkel $\sphericalangle B'A'C_1$ des stumpfwinkligen Dreiecks $A'B'C_1$ spitz. Daraus folgt nach dem Satz über gegen-

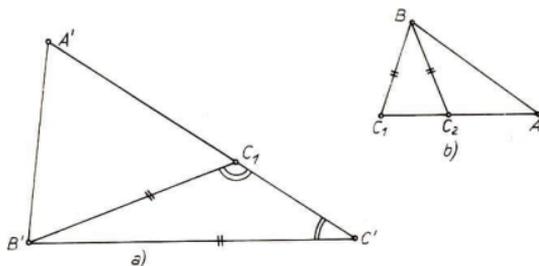


Abb. 1.24

überliegende Winkel und Seiten die Beziehung $B'C_1 < A'B'$ im Widerspruch zur Voraussetzung (4). Analog schließt man im Fall $Zw(AC'C_1)$. Der Fall $C_1 \neq C'$ ist also unmöglich, womit der Beweis beendet ist.

Daß die Voraussetzung (4) tatsächlich erforderlich ist, zeigt das Beispiel der Abb. 1.24b: Das Dreieck BC_1C_2 sei gleichschenkelig mit der Basis C_1C_2 , auf $C_2C_1^-$ wird A beliebig angenommen. Dann treffen für die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 die Voraussetzungen (1) bis (3) zu, aber die Dreiecke sind nicht kongruent.

Kongruenzsatz „Seite – Winkel – Seite“. *Gelten für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen*

- (1) $AB \cong A'B'$,
- (2) $BC \cong B'C'$,
- (3) $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$,

so sind diese Dreiecke kongruent. (Aus der Kongruenz in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel folgt die Kongruenz schlechthin.)

Beweis. Wegen (3) gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(BA^+) = B'A'^+$ und $\varphi(BC^+) = B'C'^+$. Wegen (1), (2) und des Streckenabtragungssatzes ist $\varphi(A) = A'$ und $\varphi(C) = C'$, womit der Beweis geführt ist.

Kongruenzsatz „Winkel – Seite – Winkel“. *Gelten für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen*

- (1) $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$,
- (2) $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$,
- (3) $AB \cong A'B'$,

so sind diese Dreiecke kongruent. (Aus der Kongruenz in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln folgt die Kongruenz schlechthin.)

Beweis. Es gibt eine Bewegung φ mit $\varphi(AB^+C^+) = A'B'^+C'^+$. Es gilt $\varphi(A) = A'$, und wegen (3) ist $\varphi(B) = B'$. Aus (1) folgt $\varphi(AC^+) = A'C'^+$, aus (2) folgt $\varphi(BC^+) = B'C'^+$. Somit ist

$$\begin{aligned}\varphi(C) &= \varphi(AC^+ \cap BC^+) = \varphi(AC^+) \cap \varphi(BC^+) \\ &= A'C'^+ \cap B'C'^+ = \{C'\},\end{aligned}$$

und dies ergibt zusammen mit $\varphi(A) = A'$ und $\varphi(B) = B'$ die Behauptung.

Kongruenzsatz „Winkel – Winkel – Seite“. *Gelten für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen*

$$(1) \quad \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C',$$

$$(2) \quad \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C',$$

$$(3) \quad AC \cong A'C',$$

so sind diese Dreiecke kongruent. (Aus der Kongruenz in zwei Winkeln und einer nicht von ihnen eingeschlossenen Seite folgt die Kongruenz schlechthin.)

Beweis. Aus dem Satz über die Innenwinkelsumme folgt mit Hilfe der Kürzungsregel für Winkelgrößen aus (1) und (2) auch die Kongruenz $\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle B'C'A'$, so daß über den Kongruenzsatz „Winkel – Seite – Winkel“ die Behauptung bewiesen werden kann.

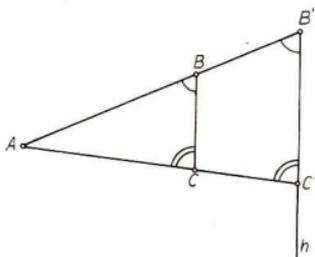


Abb. 1.25

Ist ABC ein beliebiges Dreieck (Abb. 1.25), B' ($\neq A, B$) ein beliebiger Punkt auf AB^+ und h die Parallele durch B' zu $g(BC)$, so schneidet h die Gerade $g(AC)$ in einem Punkt C' . Für die Dreiecke ABC und $AB'C'$ gelten auf Grund des Satzes über Elementarwinkel an geschnittenen Parallelen die Kongruenzen $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle AB'C'$ und $\sphericalangle ACB \cong \sphericalangle AC'B'$, außerdem ist $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$, beide Dreiecke sind aber nicht kongruent. Aus der Kongruenz zweier Dreiecke in den drei Winkeln folgt also nicht die Kongruenz der Dreiecke schlechthin.

1.1.4. Strecken- und Winkelmessung

Das Messen geometrischer Objekte läßt sich, bei aller Verschiedenheit im einzelnen, allgemein durch folgende gemeinsame Beschreibung des Verfahrens erklären:

In einem ersten, „abstrakten“ Vorgehen (vgl. etwa 1.1.3.2.) werden für die betreffenden Objekte geeignete Äquivalenzrelationen eingeführt, und dann wird je eine *Äquivalenzklasse* als „Größe“ der darin enthaltenen Objekte bezeichnet und mit besonderem Namen versehen, z. B. „Länge“ einer Strecke, „Volumen“ eines Polyeders, „Winkelgröße“ usw. Man folgt damit dem Vorbild, die „Anzahl“ oder „Mächtigkeit“ einer Menge als Klasse äquivalenter Mengen zu definieren.

Ein zweiter, „konkret“-rechnerischer Schritt schließt sich an: Man gewinnt eine *Abbildung* der geometrischen Objekte in die Menge der reellen Zahlen. Diese Abbildung erfüllt die Forderung, daß sie Objekten, die in der zuvor genannten Äquivalenzrelation zueinander stehen, *dieselbe* Zahl zuordnet. Sie induziert daher eine Abbildung der „Größen“ (Äquivalenzklassen) in die Menge der reellen Zahlen. Weiterhin wird gefordert, daß diese letztgenannte Abbildung injektiv ist, so daß jede „Größe“ auch wiederum durch ihre zugeordnete Zahl, die *Maßzahl*, eindeutig bestimmt ist. Außerdem wird in den konkreten Einzelfällen noch mehr verlangt: Die im einzelnen betrachteten geometrischen Objekte gestatten nämlich, jeweils eine Operation des „Anfügens“ oder „Antragens“ zu definieren; und es wird verlangt, daß *dabei die Maßzahlen sich addieren*. Allgemeiner ist dann ein Verdoppeln, Verdreifachen usw. möglich, ferner ein Halbieren, Dritteln usw., kurz ein Vervielfachen mit positiven rationalen Zahlen sowie (nach entsprechenden Grenzwertbetrachtungen) auch mit beliebigen positiven reellen Zahlen.

Diejenige „Größe“, die die Maßzahl 1 hat, wird *Maßeinheit* genannt. Sie spielt eine besondere Rolle, da man aus ihr alle anderen „Größen“ durch Vervielfachen mit ihrer Maßzahl gewinnen kann. Somit stellt sich schließlich *jede „Größe“* als Vervielfachungsergebnis, als „*formales Produkt*“ aus Maßzahl und Maßeinheit dar.

Wichtig ist noch folgende Unterscheidung: Manche „Größen“, z. B. die Streckenlängen in der ebenen oder räumlichen Geometrie, besitzen stets positive Maßzahlen (höchstens die sogenannten Entartungsfälle mit der Maßzahl 0 pflegt man bei diesen „Größen“ zuzulassen). Andere „Größen“ aber können Maßzahlen beliebigen Vorzeichens haben, z. B. die Längen gerichteter Strecken in der Geometrie einer orientierten Geraden.

Die Bezeichnungweise beim Messen geometrischer Objekte ist in der Literatur sehr uneinheitlich. Es kommen Querstriche, Betragsstriche, „doppelte Betragsstriche“ (Norm-Symbole), spezielle Buchstaben wie m , μ („Maß“), l („Länge“), A („area“), arc („Bogenmaß“) und andere spezielle Symbole vor, teils zur Bezeichnung der Größe, teils zur Bezeichnung ihrer Maßzahl, teils für beides. Man findet auch das Weglassen jeder Bezeichnung, d. h. die Verwendung ein und desselben Symbols etwa für eine Strecke wie für ihre Länge. Häufig wird sogar nicht einmal im Wortlaut zwischen einer Strecke und ihrer Länge unterschieden (der Leser betrachte als Beispiel einmal einige weitverbreitete Formulierungen des Satzes von PYTHAGORAS). *In diesen Bänden sollen die grundsätzlich positiven „Größen“ durch Betragsstriche und die grundsätzlich beliebiger Vorzeichen fähigen „Größen“ durch den Buchstaben m ausgedrückt werden, wie das auch schon in 1.1.3.2. geschehen ist.* Eine Tabelle der wichtigsten Bezeichnungsfestlegungen befindet sich am Schluß dieses Bandes.

Bereits in 1.1.3. wurde von Streckenlängen und Winkelgrößen gesprochen. Die Streckenlänge $|AB|$ war dort als Klasse aller zu AB kongruenter Strecken eingeführt worden. Für die Praxis ist dieser Begriff der Länge jedoch zu abstrakt. Man ist es vielmehr gewöhnt, Strecken (Entfernungen) zu *messen* und als Ergebnis dieser Messung die Länge durch eine *Zahl*, die Maßzahl, anzugeben. Der Vorgang des Messens besteht dabei in dem Vergleich der zu messenden Strecke mit einem „Maßstab“ — die Maßzahl gibt dann an, wie oft der Maßstab oder irgendein Teil

desselben in der zu messenden Strecke „enthalten“ ist. Für eine mathematisch exakte Einführung der Theorie des Messens von Strecken, Winkeln, Flächen- und Rauminhalten ist das folgende Axiom erforderlich:

Axiom (10) (Archimedisches Axiom). *Zu zwei beliebigen Strecken AB und C_0D_0 gibt es stets eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und Punkte C_1, C_2, \dots, C_n mit folgenden Eigenschaften:*

1. Die Punkte C_1, \dots, C_n liegen auf dem Strahl $C_0D_0^+$.
2. $C_iC_{i+1} \cong AB$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$).
3. C_i liegt zwischen C_{i-1} und C_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, n-1$).
4. D_0 liegt zwischen C_0 und C_n , aber nicht zwischen C_0 und C_{n-1} .

Anschaulich bedeutet die Aussage dieses Axioms gerade, daß man jede (noch so große) Strecke C_0D_0 durch eine endliche Anzahl von Abtragungen einer (noch so kleinen) Strecke AB „ausmessen“ kann (Abb. 1.26).



Abb. 1.26

Es soll nun zunächst die Theorie der Streckenmessung entwickelt werden. Nach den obigen Bemerkungen bedeutet das Messen von Strecken — vom mathematischen Standpunkt aus — die Angabe einer Abbildung l der Menge aller Strecken in die Menge der reellen Zahlen. Dabei sind an die Abbildung l gewisse „natürliche“ Forderungen zu stellen. Zunächst soll die Maßzahl einer Strecke nicht negativ sein — vorzeichenbehaftete Längen sind für gerichtete Strecken vorbehalten. Außerdem soll die Streckenmessung unabhängig von dem Ort sein, an welchem sie erfolgt, d. h. Strecken, die durch eine Bewegung ineinander übergeführt werden können, sollen dieselbe Maßzahl haben. Ferner soll die Maßzahl einer in Teilstrecken zerlegten Strecke gleich der Summe der Maßzahlen dieser Teilstrecken sein, und schließlich soll ein „Maßstab“ existieren, d. h. eine Strecke PQ , deren Maßzahl $l(PQ)$ gleich 1 ist.

Definition. Unter *Streckenmessung* wird die Angabe einer Abbildung l der Menge \mathfrak{S} aller Strecken in die Menge \mathbb{R}_+ der nicht negativen reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften verstanden:

- (1) Aus $AB \cong CD$ folgt $l(AB) = l(CD)$ (Bewegungsinvarianz).
- (2) Liegt B zwischen A und C , so gilt $l(AC) = l(AB) + l(BC)$ (Additivität).
- (3) Es gibt eine Strecke PQ ($P \neq Q$) mit $l(PQ) = 1$ (Normiertheit).

Das Bild $l(AB)$ einer Strecke AB heißt *Maßzahl* von AB , die Abbildung l *Längen-funktional*.

Geht man von dem in 1.1.3.2. erklärten System $(\mathfrak{S}/\cong, +)$ der Streckenlängen aus, wobei \mathfrak{S}/\cong die Menge der Äquivalenzklassen untereinander kongruenter Strecken und $+$ die Addition dieser Klassen bedeutet, so kann l als Isomorphismus der kommutativen Halbgruppe $(\mathfrak{S}/\cong, +)$ in die kommutative Halbgruppe $(\mathbb{R}_+, +)$ der nicht negativen reellen Zahlen interpretiert werden. Bei diesem Isomorphismus wird im übrigen auch die Anordnung der Streckenlängen isomorph auf die übliche Ordnung der reellen Zahlen übertragen.

Bezüglich des mit obiger Definition präzisierten Begriffs der Streckenmessung müssen nun folgende Fragen untersucht werden: Gibt es überhaupt eine Abbildung l mit den Eigenschaften (1), (2), (3) und wie viele gegebenenfalls?

Zunächst wird die erste Frage beantwortet durch den

Satz von der Existenz eines Längenfunctionals. *Es gibt wenigstens eine Abbildung l der Menge \mathfrak{S} aller Strecken in die Menge \mathbb{R}_+ der nicht negativen reellen Zahlen mit den Eigenschaften (1), (2) und (3).*

Beweis. Es seien P und Q zwei beliebige verschiedene Punkte. Dann werde die Konstruktion der gesuchten Abbildung l begonnen mit der Festsetzung $l(PQ) := 1$. Ist M_1 der Mittelpunkt der Strecke PQ , so ist gemäß (2)

$$l(PM_1) + l(M_1Q) = l(PQ) = 1$$

und gemäß (1) $l(PM_1) = l(M_1Q)$, also $l(PM_1) := 2^{-1}$ zu setzen. Ist M_2 Mittelpunkt der Strecke PM_1 , so folgt analog, daß $l(PM_2) := 2^{-2}$ zu setzen ist usw. Damit ergeben sich Strecken PM_n beliebig kleiner Maßzahl: $l(PM_n) = 2^{-n}$. Es sei nun C_0D_0 eine beliebige Strecke. Die zum Beweis des Existenzsatzes anzugebende Konstruktion des Bildes dieser Strecke, d. h. die Maßzahl $l(C_0D_0)$, erfolgt nun in mehreren (eventuell „unendlich vielen“) Schritten durch Messen der Strecke C_0D_0 mit dem Maßstab PQ bzw. geeigneten Teilen PM_n von PQ . Für $C_0 = D_0$ wird $l(C_0D_0) := 0$ gesetzt.¹⁾ Im allgemeinen Fall ($C_0 \neq D_0$) gibt es zunächst nach dem Archimedischen Axiom auf dem Strahl $C_0D_0^+$ Punkte C_1, C_2, \dots, C_n mit $C_iC_{i+1} \cong PQ$ und $Zw(C_0D_0C_n)$ und nicht $Zw(C_0D_0C_{n-1})$. Dann wird gemäß (1), (2) und (3) $l(C_0D_0) = l(C_0C_{n-1}) + l(C_{n-1}D_0)$ bzw.

$$l(C_0D_0) = n - 1 + l(C_{n-1}D_0)$$

gesetzt. Im Fall $C_{n-1} = D_0$ ist $l(C_{n-1}D_0) = 0$, und man ist fertig — es ist $l(C_0D_0) := n - 1$ zu setzen. Im anderen Fall ($C_{n-1} \neq D_0$) wird auf $C_{n-1}D_0^+$ von C_{n-1} aus die Strecke PM_1 abgetragen, was zu einem Punkt D'_1 führen möge ($PM_1 \cong C_{n-1}D'_1$). Dann ergibt sich

$$l(C_{n-1}D_0) = \varepsilon_1 l(C_{n-1}D'_1) + l(D_1D_0) = \varepsilon_1 \cdot 2^{-1} + l(D_1D_0)$$

mit

$$\varepsilon_1 := \begin{cases} 0 & \text{für } Zw(C_{n-1}D_0D'_1), \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases} \quad D_1 := \begin{cases} C_{n-1} & \text{für } \varepsilon_1 = 0, \\ D'_1 & \text{für } \varepsilon_1 = 1 \end{cases}$$

¹⁾ Dieser Entartungsfall sei jetzt stets zugelassen.

und $D_0D_1 < PM_1$. Ist $D_0 = D'_1$, also $\varepsilon_1 = 1$ und $l(D_1D_0) = 0$, so ist man wieder fertig, d. h., es ist $l(C_0D_0) := n - 1 + 2^{-1}$ zu setzen. Anderenfalls wird das Verfahren fortgesetzt: Auf $D_1C_n^+$ wird von D_1 aus die Strecke PM_2 abgetragen ($PM_2 \cong D_1D'_2$), so daß

$$l(D_1D_0) = \varepsilon_2 l(D_1D'_2) + l(D_2D_0)$$

wird mit

$$\varepsilon_2 := \begin{cases} 0 & \text{für } Zw(D_1D_0D'_2), \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$D_2 := \begin{cases} D_1 & \text{für } \varepsilon_2 = 0, \\ D'_2 & \text{für } \varepsilon_2 = 1 \end{cases}$$

und $D_0D_2 < PM_2$. Insgesamt ergibt sich

$$l(C_0D_0) := n - 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_v}{2^v} \quad (n \geq 1).$$

Wegen $\varepsilon_v \in \{0, 1\}$ gilt

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_v}{2^v} \leq \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v} = 1,$$

d. h., die in der Definition von $l(C_0D_0)$ auftretende unendliche Reihe ist konvergent, $l(C_0D_0)$ also eine wohlbestimmte nicht negative reelle Zahl. l ist damit als Abbildung der Menge aller Strecken in \mathbb{R}_+ nachgewiesen, und l besitzt nach Definition die Eigenschaft (3). Daß die so erklärte Abbildung l auch die Eigenschaft (1) der Bewegungsinvarianz besitzt, folgt leicht aus der Invarianz der Zwischenrelation bei Bewegungen: Ist $\varphi(CD) = AB$, also $CD \cong AB$, so können nämlich die „Meßpunkte“ D_i , die bei der Ausmessung der Strecke CD auftreten, durch die Bewegung φ unter Erhaltung ihrer Anordnung auf AB übertragen werden. Somit entsteht bei der Messung der Strecke AB dieselbe Summe der obigen Gestalt wie bei der Messung von CD . Schließlich muß noch die Additivität (2) der Abbildung l nachgewiesen werden. Dazu wird zunächst die Bemerkung auf S. 80 über die Konstruktion beliebig kleiner Strecken erweitert:

a) Ist RS eine beliebige Strecke ($R \neq S$), so gibt es eine natürliche Zahl n und einen Punkt T mit $Zw(RTS)$ und $RT \cong PM_n$, also $l(RT) = 2^{-n}$. Anderenfalls könnte nämlich die Strecke RS auf der Einheitsstrecke PQ beliebig oft „hintereinander abgetragen“ werden im Widerspruch zum Archimedischen Axiom. Aus a) schließt man weiter auf folgende Hilfsaussage:

b) Aus $Zw(QRS)$ folgt $l(QR) < l(QS)$. Der Leser beweise dies.

Wird nun für drei Punkte A, B, C mit $Zw(ABC)$ von B aus auf BA^+ und BC^+ die Strecke PM_n ($n \geq 1$) abgetragen, so daß Punkte A_v bzw. C_v entstehen mit $PM_n \cong BA_1 \cong A_1A_2 \cong \dots$ bzw. $PM_n \cong BC_1 \cong C_1C_2 \cong \dots$, so gibt es nach dem

Archimedischen Axiom natürliche Zahlen k und m mit

$$\text{Zw}(A_{k+1}AB) \text{ und entweder } A_k = A \text{ oder } \text{Zw}(AA_kB)$$

bzw.

$$\text{Zw}(BCC_{m+1}) \text{ und entweder } C_m = C \text{ oder } \text{Zw}(BC_mC).$$

Daraus folgt mit $l(PM_n) = 2^{-n}$ unter Berücksichtigung von b)

$$\frac{k}{2^n} \leq l(AB) < \frac{k+1}{2^n},$$

$$\frac{m}{2^n} \leq l(BC) < \frac{m+1}{2^n}$$

und

$$\frac{k+m}{2^n} \leq l(AC) < \frac{k+m+2}{2^n}.$$

Die ersten beiden Ungleichungen liefern

$$\frac{k+m}{2^n} \leq l(AB) + l(BC) < \frac{k+m+2}{2^n},$$

woraus sich mit der dritten Ungleichung

$$-\frac{1}{2^{n-1}} < l(AB) + l(BC) - l(AC) < \frac{1}{2^{n-1}}$$

bzw.

$$|l(AB) + l(BC) - l(AC)| < \frac{1}{2^{n-1}}$$

ergibt. Da n beliebig wählbar ist, muß $l(AC) = l(AB) + l(BC)$ gelten, womit der Beweis des Existenzsatzes endgültig abgeschlossen ist.

Bezüglich der Anzahl möglicher Abbildungen l gilt folgender

Satz von der Einzigkeit des Längenfunctionals. *Zu jeder Strecke PQ mit $P \neq Q$ gibt es höchstens eine Abbildung l der Menge aller Strecken in \mathbb{R}_+ mit den Eigenschaften (1), (2) und (3).*

Beweis. Hat man zwei Abbildungen l_1 und l_2 mit $l_1(PQ) = l_2(PQ) = 1$ und den Eigenschaften (1) und (2), so kann die Messung einer beliebigen Strecke C_0D_0 nach dem beim Beweis des Existenzsatzes angegebenen Verfahren erfolgen. Weil dabei lediglich die sowohl für l_1 als auch für l_2 zutreffenden Eigenschaften (1), (2) und (3) benutzt werden, muß $l_1(C_0D_0) = l_2(C_0D_0)$ sein. Folglich gilt $l_1 = l_2$.

Dieser Satz von der Einzigkeit des Längenfunctionals besagt, daß die Maßzahl $l(AB)$ einer Strecke AB von der speziellen Wahl der Einheitsstrecke PQ , dem Maßstab, abhängt. Da außerdem kongruenten Strecken, also Strecken derselben Länge, dieselbe Maßzahl zugeordnet wird, ist es schließlich sinnvoll, nach fester Wahl von PQ die Länge $|AB|$ als formales Produkt aus Maßzahl und Maßeinheit

anzugeben: $|AB| = a \cdot |PQ|$. Dabei heißt nun die reelle Zahl $a = l(AB)$ *Maßzahl* der Länge von AB und $|PQ|$ *Maßeinheit*. Die Maßeinheit ist also die Länge mit der Maßzahl 1 ($l(PQ) = 1$). Die in der Praxis gebräuchlichste Maßeinheit der Streckenmessung ist das Meter (symbolisch: m) — auf der Generalkonferenz der Meterkonvention im Jahre 1960 als das 1650 763,73fache der Wellenlänge der Orangelinie vom Kryptonisotop 86 (im Vakuum) festgelegt.

Als weitere Anwendung des Archimedischen Axioms sollen die für die Elementargeometrie wichtigen Strahlensätze hergeleitet werden. Zunächst gilt folgender

Hilfssatz. Sind AD_2^+ und AE_2^+ nicht auf derselben Geraden liegende Strahlen mit dem gemeinsamen Anfangspunkt A , ist D_1 Mittelpunkt der Strecke AD_2 und E_1 ein Punkt auf $g(AE_2)$ mit $g(D_2E_2) \parallel g(D_1E_1)$, so ist E_1 Mittelpunkt von AE_2 (Abb. 1.27a).

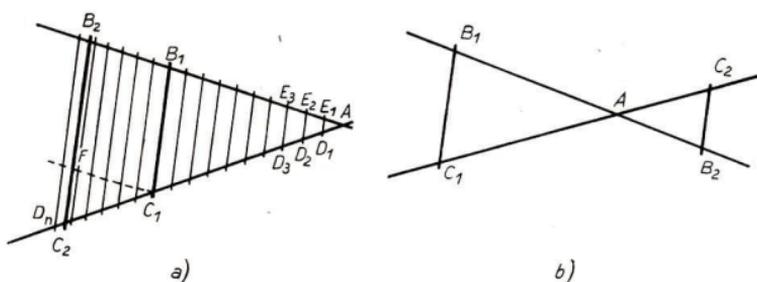


Abb. 1.27

Beweis. Die Punktspiegelung an D_1 vertauscht die Punkte A und D_2 und überführe E_1 in $E'_1 \in g(E_1D_1)$ — es entsteht das Parallelogramm (E_1, E_2, E'_1, D_2) . Demnach ist $D_2E'_1 \cong E_2E_1$; bei der Spiegelung an D_1 wird AE_1 in $D_2E'_1$ übergeführt, also ist insgesamt $AE_1 \cong E_2E_1$ und demnach E_1 Mittelpunkt der Strecke AE_2 .

Aus diesem Hilfssatz ergibt sich leicht folgende Verallgemeinerung: Sind AC_1^+ und AB_1^+ nichtkollineare Strahlen mit dem gemeinsamen Anfangspunkt A , ist die Strecke AC_1 in m kongruente Teilstrecken „zerlegt“:

$$AD_1 \cong D_1D_2 \cong \dots \cong D_{m-1}C_1,$$

und sind E_i Punkte des Strahls AB_1^+ mit $g(D_iE_i) \parallel g(C_1B_1)$ für $i = 1, \dots, m-1$, so ist auch

$$AE_1 \cong E_1E_2 \cong \dots \cong E_{m-1}B_1$$

(Abb. 1.27a).

Demnach kann zu einer beliebigen natürlichen Zahl $m > 0$ jede Strecke AB_1 in genau m untereinander kongruente Teilstrecken „zerlegt“ werden, indem man

eine beliebige Strecke AD_1 von A aus auf AD_1^+ m -mal hintereinander abträgt, wobei $D_1 \notin g(AB_1)$ ist. Der letzte Teilpunkt D_m wird mit B_1 verbunden; die Parallelen zu $g(D_m B_1)$ durch die Teilpunkte D_i schneiden dann die Strecke AB_1 in den gesuchten Punkten E_i .

Nun kann eine erste Form des Strahlensatzes bewiesen werden. Dazu wird bemerkt, daß die hier auftretenden Quotienten von Längen als Verhältniszahlen aufzufassen sind, was am einfachsten möglich ist durch Benutzung der „Maßeinheit 1“, so daß Länge und Maßzahl identifiziert werden können: $|AB| = l(AB) \cdot 1 = l(AB)$.

Strahlensatz (erster Teil). *Schneiden sich zwei Geraden $g(B_1 B_2)$ und $g(C_1 C_2)$ im Punkt A und gilt $g(B_1 C_1) \parallel g(B_2 C_2)$, so ist*

$$\frac{|AC_1|}{|AC_2|} = \frac{|AB_1|}{|AB_2|}.$$

Beweis. Von den beiden in Abb. 1.27 charakterisierten Fällen, die durch Punktspiegelung an A leicht ineinander übergeführt werden können, soll nur der Fall behandelt werden, in welchem $Zw(A B_1 B_2)$ und $Zw(A C_1 C_2)$ gilt (Abb. 1.27a). Eine übliche Sprechweise für diesen Fall ist:

Werden zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen von (zwei) parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die entstehenden Abschnitte auf dem einen Strahl wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.

Zum Beweis sei AC_1 in m kongruente Teilstrecken zerlegt mit den Teilpunkten $D_1, D_2, \dots, D_m = C_1$. Dann wird die Strecke AD_1 von C_1 aus auf $C_1 C_2^+$ weiter abgetragen, so daß die Punkte $D_{m+1}, D_{m+2}, \dots, D_n$ entstehen. Alle Teilpunkte D_i werden durch zu $g(B_1 C_1)$ parallele Geraden auf AB_2^+ „übertragen“, so daß die Punkte $E_1, E_2, \dots, E_m = B_1, E_{m+1}, \dots, E_n$ entstehen.

Fall 1: Es gibt ein m und ein n , so daß $D_n = C_2$ und somit $E_n = B_2$ ist (die Strecken AC_1 und AC_2 sind *kommensurabel*). Dann folgt aus $|AC_1| = m \cdot |AD_1|$, $|AC_2| = n \cdot |AD_1|$ und $|AB_1| = m \cdot |AE_1|$, $|AB_2| = n \cdot |AE_1|$ sofort die Behauptung

$$\frac{|AC_1|}{|AC_2|} = \frac{|AB_1|}{|AB_2|}.$$

Fall 2: Für kein m gibt es ein n mit $D_n = C_2$ (AC_1 und AC_2 sind *inkommensurabel*). Nach dem Archimedischen Axiom gibt es in diesem Fall aber zu jeder natürlichen Zahl m ein n mit $Zw(D_{n-1} C_2 D_n)$, so daß

$$\begin{aligned} (n-1)|AD_1| < |AC_2| < n|AD_1| & \quad \text{und} \quad |AC_1| = m|AD_1|, \\ (n-1)|AE_1| < |AB_2| < n|AE_1| & \quad \text{und} \quad |AB_1| = m|AE_1| \end{aligned}$$

gilt. Daraus folgt

$$\frac{n-1}{m} < \frac{|AC_2|}{|AC_1|} < \frac{n}{m}$$

und

$$\frac{n-1}{m} < \frac{|AB_2|}{|AB_1|} < \frac{n}{m}$$

bzw.

$$\left| \frac{|AC_2|}{|AC_1|} - \frac{|AB_2|}{|AB_1|} \right| < \frac{1}{m}.$$

Da diese letzte Ungleichung für alle natürlichen Zahlen $m > 0$ richtig ist, muß schließlich

$$\frac{|AC_2|}{|AC_1|} = \frac{|AB_2|}{|AB_1|} \quad \text{bzw.} \quad \frac{|AC_1|}{|AC_2|} = \frac{|AB_1|}{|AB_2|}$$

gelten. Durch einfache Umformungen dieser Gleichungen findet man noch

$$\frac{|AC_2| - |AC_1|}{|AC_1|} = \frac{|AB_2| - |AB_1|}{|AB_1|}, \quad \frac{|AC_1|}{|AB_1|} = \frac{|AC_2|}{|AB_2|},$$

$$\frac{|AC_2| - |AC_1|}{|AB_2| - |AB_1|} = \frac{|AC_1|}{|AB_1|} \quad \text{usw.}$$

Werden schließlich noch die Längen $|B_1C_1|$ und $|B_2C_2|$ in Betracht gezogen, so gilt folgende zweite Aussage:

Strahlensatz (zweiter Teil). *Schneiden sich zwei Geraden $g(B_1B_2)$ und $g(C_1C_2)$ im Punkt A und gilt $g(B_1C_1) \parallel g(B_2C_2)$, so ist*

$$\frac{|B_1C_1|}{|B_2C_2|} = \frac{|AC_1|}{|AC_2|}.$$

Beweis. Es genügt wieder, den in Abb. 1.27a dargestellten Fall zu behandeln:

Werden zwei von einem Punkt A ausgehende Strahlen von (zwei) parallelen Geraden geschnitten, so verhalten sich die entstehenden Abschnitte auf den Parallelen wie die zugehörigen von A ausgehenden Abschnitte ein und desselben Strahls.

Zum Beweis lege man durch C_1 eine zu $g(AB_2)$ parallele Gerade, die mit B_2C_2 den Punkt F gemeinsam habe. Nach dem ersten Teil des Strahlensatzes (bzw. geeigneter Umformung) gilt bezüglich der Strahlen C_2A^+ , $C_2B_2^+$ und der Parallelen $g(C_1F)$, $g(AB_2)$ die Beziehung

$$\frac{|C_2A|}{|C_1A|} = \frac{|C_2B_2|}{|FB_2|},$$

und mit $FB_2 \cong C_1B_1$ folgt

$$\frac{|B_1C_1|}{|B_2C_2|} = \frac{|AC_1|}{|AC_2|}.$$

Einfache Umformungen liefern ferner

$$\frac{|AC_1|}{|B_1C_1|} = \frac{|AC_2|}{|B_2C_2|}, \quad \frac{|AB_1|}{|B_1C_1|} = \frac{|AB_2|}{|B_2C_2|}, \quad \frac{|B_2C_2|}{|B_1C_1|} = \frac{|B_2A|}{|B_1A|} \quad \text{usw.}$$

Die gewonnenen Aussagen lassen sich durch Betrachtung von mehr als zwei von A ausgehenden Strahlen weiter verallgemeinern. Außerdem gelten folgende Umkehrungen des Strahlensatzes, deren Beweise vom Leser geführt werden können:

Schneiden sich $g(B_1B_2)$ und $g(C_1C_2)$ in A und gilt entweder $Zw(B_1AB_2)$ und zugleich $Zw(C_1AC_2)$ oder keine dieser beiden Relationen, so gilt:

1. Aus

$$\frac{|AC_1|}{|AC_2|} = \frac{|AB_1|}{|AB_2|}$$

folgt

$$g(B_1C_1) \parallel g(B_2C_2).$$

2. Aus

$$\frac{|C_1B_1|}{|C_2B_2|} = \frac{|AC_1|}{|AC_2|} \quad \text{und} \quad |C_1B_1| > |AC_1|$$

folgt

$$g(B_1C_1) \parallel g(B_2C_2).$$

In weitgehender Analogie zur Messung der (nicht orientierten) Strecken wird nun zunächst die Messung von Winkeln eingeführt.

Definition. Unter *Winkelmessung* wird die Angabe einer (eindeutigen) Abbildung w der Menge \mathfrak{W} aller Winkel in die Menge \mathbb{R}_+ der nicht negativen reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften verstanden:

- (1) Aus $\sphericalangle(h_1, h_2; P^+) \cong \sphericalangle(k_1, k_2; Q^+)$ folgt
 $w(\sphericalangle(h_1, h_2; P^+)) = w(\sphericalangle(k_1, k_2; Q^+))$ (Bewegungsinvarianz).
- (2) Sind $a = OA^+$, $b = OB^+$, $c = OC^+$ Strahlen mit dem gemeinsamen Anfangspunkt O und ist das Innere der Winkel $\sphericalangle(a, b; D^+)$ und $\sphericalangle(b, c; E^+)$ jeweils Teilmenge vom Inneren des Winkels $\sphericalangle(a, c; B^+)$, so gilt
 $w(\sphericalangle(a, c; B^+)) = w(\sphericalangle(a, b; D^+)) + w(\sphericalangle(b, c; E^+))$ (Additivität).
- (3) Es gibt einen Winkel $\sphericalangle(h, k; P^+)$ mit $h \neq k$ und
 $w(\sphericalangle(h, k; P^+)) = 1$ (Normiertheit).

Wie bei der Streckenmessung läßt sich nun Existenz und Einzigkeit eines solchen Winkelfunktional w nachweisen. Es gilt folgender

Satz von der Winkelmessung. *Zu jedem Winkel $\sphericalangle (h, k; P^+)$ gibt es genau ein Winkelfunktional w mit den Eigenschaften (1) bis (3).*

Der Beweis kann analog zum Beweis der Sätze über Existenz und Einzigkeit des Längenfunktional geführt werden und soll deshalb übergangen werden. Es sei lediglich bemerkt, daß eine dem Archimedischen Axiom entsprechende Aussage für die Winkelmessung nicht als Axiom gefordert werden muß, sondern aus dem Archimedischen Axiom hergeleitet werden kann. \updownarrow

Alle angeführten Analogien zwischen Strecken- und Winkelmessung dürfen nicht darüber hinwegtäuschen, daß zwischen der Streckenmessung und der Winkelmessung wesentliche theoretische und praktische Unterschiede bestehen. Ein wichtiger Unterschied ist der folgende: Während die Strecken hinsichtlich der Auswahl der Einheitsstrecke alle gleichberechtigt sind, gibt es unter den Winkeln sehr wohl besonders ausgezeichnete, die sich rein geometrisch — unabhängig von der Theorie der Winkelmessung — erklären lassen, nämlich die rechten Winkel und die gestreckten Winkel. Es ist demnach sinnvoll, solche Winkel zur Festlegung der Maßeinheit heranzuziehen. In der Praxis ist die wichtigste Maßeinheit der Winkelmessung das *Grad*, auch *Altgrad* genannt (symbolisch: $^\circ$). In diesem Fall wird durch w einem rechten Winkel $\sphericalangle (s, t; R^+)$ die reelle Zahl 90 zugeordnet: $w(\sphericalangle (s, t; R^+)) = 90$. Wegen der Bewegungsinvarianz des Winkelfunktional w wird kongruenten Winkeln dieselbe reelle Zahl zugeordnet, so daß man eine Klasse $|\sphericalangle (l_1, l_2; Q^+)|$ untereinander kongruenter Winkel, also die Winkelgröße, durch diese Zahl charakterisieren kann. Man schreibt $|\sphericalangle (l_1, l_2; Q^+)| = \alpha^\circ$, wobei die reelle Zahl $\alpha = w(\sphericalangle (l_1, l_2; Q^+))$ *Gradzahl* der Winkelgröße $|\sphericalangle (l_1, l_2; Q^+)|$ heißt.

Ist dagegen der „Einheitswinkel“ so gewählt, daß einem rechten Winkel $\sphericalangle (s, t; R^+)$ die Zahl 100 zugeordnet wird, so ist die Maßeinheit das *Neugrad* (symbolisch: $^\text{N}$), und es gilt

$$|\sphericalangle (s, t; R^+)| = 100^\text{N}.$$

Schlägt man um den Scheitel eines Winkels einen Kreis vom Radius r , so sei der Durchschnitt vom Inneren des Winkels mit der Kreislinie ein Kreisbogenstück b . Werden r und b in derselben Maßeinheit gemessen, so kann man schließlich als Maßeinheit für die Winkelmessung einen Winkel (bzw. dessen Größe) wählen, für welchen das Verhältnis von b zu r gleich 1 ist, nachdem man die Existenz eines solchen Winkels nachgewiesen hat. In diesem Fall spricht man davon, daß die Winkelmessung im *Bogenmaß* bzw. in *Radian* erfolgt. Für den rechten Winkel $\sphericalangle (s, t; R^+)$ gilt dann

$|\sphericalangle (s, t; R^+)| = \frac{\pi}{2}$, wobei die reelle Zahl π das für alle Kreise feste Verhältnis vom

Umfang zum Durchmesser bedeutet und die Maßeinheit „Radian“ weggelassen wird — man drückt die Größe $|\sphericalangle (l_1, l_2; Q^+)|$ eines Winkels gewissermaßen durch die „unbenannte“ Verhältniszahl $b:r$ aus und identifiziert die Größe eines gestreckten Winkels

mit der Zahl π , d. h., man setzt $1^\circ = \frac{\pi}{180}$.

Schließlich sei noch folgender wesentlicher Unterschied zwischen der Strecken- und Winkelmessung erwähnt: Während man durch Vervielfachung, d. h. wiederholtes Abtragen, jeder Strecke PQ mit $P \neq Q$ Strecken beliebig großer Länge bzw. Maßzahl erzeugen kann, ist die Menge der Werte $w(\alpha)$ für Winkel α beschränkt: $0 < w(\alpha) < 360$. Der algebraische Hintergrund für diesen Unterschied besteht offenbar darin, daß die „Vervielfachung“ eines Winkels nicht in gleicher Weise unbeschränkt ausführbar ist wie bei den Strecken, d. h., die Addition $+$ ist nur eine partielle Operation über der Menge $\mathfrak{W} \cong$ aller Winkelgrößen. Trotzdem kann das Winkelfunktional in Analogie zur Streckenmessung als Isomorphismus der Struktur $(\mathfrak{W} \cong, +)$ in die Teilstruktur $(\mathbb{J}0, 360 \llbracket, +)$ der additiven Gruppe der reellen Zahlen aufgefaßt werden, denn die Zuordnung

$$\sphericalangle (a, b; P^+) \mapsto w(\sphericalangle (a, b; P^+))$$

induziert wegen der Bewegungsinvarianz des Winkelfunctionals w eine Zuordnung

$$|\sphericalangle (a, b; P^+)| \mapsto w(\sphericalangle (a, b; P^+)).$$

Bei diesem Isomorphismus überträgt sich auch die Anordnung der Winkelgrößen auf die Ordnung der reellen Zahlen. Man beachte aber, daß die Addition in der Menge $\mathbb{J}0, 360 \llbracket$ ebenfalls nur partiell definiert ist!

Zur Messung orientierter Elementarwinkel sei daran erinnert, daß jeder vom Nullwinkel verschiedene orientierte Elementarwinkel $\sphericalangle ABC$ als Bild $\omega(\sphericalangle ABC; P^+)$ eines Winkels $\sphericalangle (ABC; P^+)$ aufgefaßt werden kann. Durch den Ansatz

$$\tilde{w}(\sphericalangle ABC) := \begin{cases} w(\omega^{-1}(\sphericalangle ABC)) \pmod{360}, \\ 0 \pmod{360}, \text{ falls } \sphericalangle ABC \text{ Nullwinkel,} \end{cases}$$

wird ein Funktional \tilde{w} definiert, das jedem orientierten Elementarwinkel $\sphericalangle ABC$ eindeutig eine reelle Zahl modulo 360 zuordnet. \tilde{w} ist außerdem invariant gegenüber gleichsinnigen Bewegungen, so daß \tilde{w} eine Zuordnung $m(\sphericalangle ABC) \mapsto \tilde{w}(\sphericalangle ABC)$ induziert, d. h., jeder Größe orientierter Elementarwinkel $m(\sphericalangle ABC)$ läßt sich schließlich eindeutig ihre *Gradzahlrestklasse* zuordnen. Man schreibt $m(\sphericalangle ABC) = \alpha^\circ \pmod{360}$ mit

$$\tilde{w}(\sphericalangle ABC) = \alpha \pmod{360}.$$

Der Leser überlege sich, daß \tilde{w} als Isomorphismus der kommutativen Gruppe $(\mathfrak{W}_0 \cong^+, +)$ in die Gruppe $(\mathbb{R}/360, +)$ interpretiert werden kann, wenn $\mathfrak{W}_0 \cong^+$ die Menge der Größen orientierter Elementarwinkel und $\mathbb{R}/360$ die Menge der Restklassen reeller Zahlen modulo 360 ist.

Zwischen den verschiedenen Arten von Winkelgrößen bestehen z. T. sehr einfache Beziehungen, die zur Folge haben, daß die hier zur genaueren begrifflichen Klärung ausgeführten Unterschiede sonst in der Literatur kaum so auftreten. Von diesen Beziehungen seien abschließend noch einige erwähnt, deren Begründung für den Leser eine nützliche Übung ist.

(I) Die Messung eines Elementarwinkels $\sphericalangle ABC$ läßt sich auf die Messung eines Winkels $\sphericalangle (ABC; P^+)$ zurückführen durch

$$|\sphericalangle ABC| := \begin{cases} |\sphericalangle (ABC; P^+)| & \text{für } |\sphericalangle (ABC; P^+)| \leq 180^\circ, \\ 360^\circ - |\sphericalangle (ABC; P^+)| & \text{für } |\sphericalangle (ABC; P^+)| \geq 180^\circ, \\ 0^\circ & \text{für } BA^+ = BC^+. \end{cases}$$

Für Elementarwinkelgrößen gilt demnach $0^\circ \leq |\sphericalangle ABC| \leq 180^\circ$.

(II) Für jeden Winkel $\sphericalangle (ABC; P^+)$ gilt je nach der Festlegung der Reihenfolge der Schenkel beim Übergang vom Elementarwinkel $\sphericalangle ABC$ zum orientierten Elementarwinkel $\sphericalangle ABC$ die Beziehung

$$m(\sphericalangle ABC) = |\sphericalangle (ABC; P^+)| \bmod 360^\circ$$

oder die Beziehung

$$m(\sphericalangle ABC) = -|\sphericalangle (ABC; P^+)| \bmod 360^\circ.$$

(III) Für jeden Elementarwinkel $\sphericalangle ABC$ gilt je nach Festlegung der Reihenfolge der Schenkel beim Übergang zum orientierten Elementarwinkel $\sphericalangle ABC$ die Beziehung

$$m(\sphericalangle ABC) = |\sphericalangle ABC| \bmod 360^\circ$$

oder die Beziehung

$$m(\sphericalangle ABC) = -|\sphericalangle ABC| \bmod 360^\circ.$$

(IV) Schreibt man schließlich die Größe eines Drehprozesses Δ in der Form $m(\Delta) = e \cdot (\alpha + n \cdot 360^\circ)$ mit $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$, $e = \pm 1$ und $n \in \mathbf{N}$, so haben e , n und α die folgenden anschaulichen Bedeutungen: e ist der *Drehsinn*, n ist die *Anzahl der vollen Umdrehungen* und α ist die *Winkelgröße*, die die *verbleibende Restdrehung* mißt.

Das letzte zum Aufbau der ebenen euklidischen Geometrie erforderliche Axiom läßt sich nun — nach Einführung der Streckenmessung — leicht formulieren als

Axiom (11) (Vollständigkeitsaxiom). *Zu jeder nicht negativen reellen Zahl λ gibt es eine Strecke AB , deren Maßzahl gleich dieser Zahl ist: $l(AB) = \lambda$.*

Archimedisches und Vollständigkeitsaxiom werden oft auch als *Stetigkeitsaxiome* bezeichnet, weil aus ihnen gefolgert werden kann, daß die Geraden stetige Punktmannigfaltigkeiten sind im Sinne der Gültigkeit von folgendem

Stetigkeitssatz. *Sind die Punkte einer beliebigen Geraden g so in zwei nicht leere Klassen \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 eingeteilt, daß zwischen keinem Punktepaar ein und derselben Klasse ein Punkt der anderen Klasse liegt, so gibt es genau einen Punkt Z auf g mit $Zw(A_1ZA_2)$ für alle $A_1 (\neq Z)$ aus \mathfrak{K}_1 und alle $A_2 (\neq Z)$ aus \mathfrak{K}_2 .*

Die Bezeichnung „Vollständigkeitsaxiom“ für Axiom (11) ist dadurch gerechtfertigt, daß auf Grund dieses Axioms die euklidische Geometrie als vollständig nachgewiesen werden kann in folgendem Sinne: Das System der Punkte und Ge-

raden, welches die durch die Axiome (1) bis (10) charakterisierten Eigenschaften besitzt, ist unter Beibehaltung aller dieser Eigenschaften keiner Erweiterung fähig durch Hinzunahme weiterer Punkte oder Geraden. Eine andere (schärfere) Fassung des Begriffs der Vollständigkeit ist die folgende: Alle Modelle (vgl. 1.4.) des hier angegebenen Axiomensystems sind untereinander isomorph.

Aus der Theorie der Streckenmessung und dem Axiom (11) läßt sich eine für die analytische Geometrie wichtige Folgerung ziehen. Es sei g eine Gerade, O und E seien zwei Punkte von g mit $O \neq E$. g werde so orientiert, daß $O < E$ ist. Schließlich sei die Ebene mit demjenigen Längenfunktional versehen, für das $l(OE) = 1$ ist. Dann läßt sich folgende Abbildung \varkappa von OE^+ in \mathbb{R} definieren:

$$\varkappa(X) := \begin{cases} 0 & \text{für } X = O, \\ l(OX) & \text{für } X \in OE^+ \text{ und } X \neq O. \end{cases}$$

Auf Grund der Sätze über Existenz und Einzigkeit des Längenfunktionalen, des Vollständigkeitsaxioms und des Streckenabtragungssatzes ist dies eine bijektive Abbildung von OE^+ auf die Menge der nicht negativen reellen Zahlen. Sind X und Y zwei Punkte von OE^+ , so folgt aus $X < Y$ die Beziehung $\varkappa(X) < \varkappa(Y)$, d. h., \varkappa ist ordnungstreu. Denn $X < Y$ hat für $X \neq O$ (für $X = O$ ist die Behauptung klar) $Zw(OXY)$ zur Folge; wegen der Additivität des Längenfunktionalen gilt demnach $l(OY) = l(OX) + l(XY)$, also $l(XY) = \varkappa(Y) - \varkappa(X)$; mit $l(XY) > 0$ ergibt sich daraus $\varkappa(X) < \varkappa(Y)$. Für beliebige Punkte A, B von OE^+ gilt $l(AB) = |\varkappa(B) - \varkappa(A)|$, wie aus der Gleichung für $l(XY)$ hervorgeht. Nun liegt es nahe, die Abbildung \varkappa auf ganz g fortzusetzen, indem man definiert

$$\varkappa(X) := \begin{cases} l(OX) & \text{für } X \in OE^+ \text{ und } X \neq O, \\ 0 & \text{für } X = O, \\ -l(OX) & \text{für } X \in OE^- \text{ und } X \neq O. \end{cases}$$

Damit ist eine bijektive Abbildung von g auf \mathbb{R} gewonnen. Für Punkte X, Y von OE^- rechnet man analog zu oben leicht nach, daß aus $X < Y$ die Gleichung $l(XY) = \varkappa(Y) - \varkappa(X)$ und die Beziehung $\varkappa(X) < \varkappa(Y)$ folgen; beides gilt auch, falls X zu OE^- und Y zu OE^+ gehört. Insgesamt gilt also folgender

Satz von der Zahlengeraden. *Ist $(g, <)$ eine orientierte Gerade, so gibt es eine bijektive ordnungstreu Abbildung \varkappa von g auf die Menge der reellen Zahlen, so daß für beliebige Punkte X, Y von g die Maßzahl der Länge von XY gleich $|\varkappa(Y) - \varkappa(X)|$ ist.*

Der Leser überlege sich, daß es zu vorgegebenen Punkten O und E mit $O < E$ genau eine Abbildung \varkappa der im Satz genannten Art gibt, wenn man $\varkappa(O) = 0$ und $\varkappa(E) = 1$ fordert. Unter Verwendung der Abbildung \varkappa kann ferner gezeigt werden, daß die früher betrachtete Halbgruppe $(\mathbb{S}/\cong, +)$ der Streckengrößen isomorph und ordnungstreu auf die additive Halbgruppe der nicht negativen reellen Zahlen abgebildet werden kann. Die im Zusammenhang mit der Addition von Strecken-

größen betrachtete Beziehung zwischen Streckengrößen und Verschiebungen eines festen Richtungssinnes erlaubt es schließlich zu beweisen, daß die Gruppe aller Verschiebungen einer festen Verschiebungsrichtung isomorph zur additiven Gruppe der reellen Zahlen ist.

Im Satz von der Zahlengeraden wurde die Strecke XY mit der Zahl $|\kappa(Y) - \kappa(X)|$ in Beziehung gesetzt. In vielen Zusammenhängen — insbesondere in der analytischen Geometrie — ist es nützlich, die Betragsbildung wegzulassen und die Zahl $\kappa(Y) - \kappa(X)$ mit dem geordneten Punktepaar (X, Y) in Beziehung zu setzen. Man definiert $m(XY) := \kappa(Y) - \kappa(X)$ und nennt $m(XY)$ die *Länge* des geordneten Punktepaars bzw. der *gerichteten Strecke* XY . Die geordneten Punktepaare (P, Q) und (R, S) ($P, Q, R, S \in g$) haben genau dann gleichen Richtungssinn, wenn $m(PQ)$ und $m(RS)$ gleiches Vorzeichen haben.

Abschließend sollen noch zwei andere Folgerungen aus dem Vollständigkeitsaxiom angegeben werden, deren Beweise bei Kenntnis der entsprechenden Begriffe dem Leser nicht schwer fallen werden. Zunächst eine „analytische Konsequenz“ des Axioms (11):

Definiert man als „Abstand“ $\varrho(A, B)$ zweier Punkte A und B der Ebene die Längenzahl $l(AB)$ der Strecke AB , so wird die Ebene bezüglich dieser Abstandsdefinition ein metrischer Raum. Axiom (11) hat zur Folge, daß dieser metrische Raum vollständig ist, d. h., in ihm konvergiert jede Cauchyfolge von Punkten. Schließlich ergibt sich als „algebraische Konsequenz“ aus Axiom (11), daß die im Zusammenhang mit der Strecken- und Winkelmessung als Isomorphismen interpretierten Abbildungen l und w sogar surjektiv sind, also als Isomorphismen auf $(\mathbb{R}, +)$ bzw. $(]0, 360[, +)$ auffaßbar sind.

1.1.5. Elementarer Inhalt

Wie bei der Streckenmessung handelt es sich auch bei der Inhaltsmessung um die Angabe von Maßzahlen für bestimmte Punktmengen. Aus diesem Grunde werden sich einige wichtige Analogien zwischen der Theorie der Streckenmessung und der im folgenden entwickelten Inhaltslehre ergeben. Der in diesem Kapitel eingeführte Begriff des *elementaren Inhalts* bezieht sich auf eine besonders einfache Klasse ebener Punktmengen, nämlich die der Polygone.

Es sei \mathfrak{M} eine endliche Punktmenge; der Durchschnitt A aller Halbebenen ξ , welche die Punktmenge \mathfrak{M} enthalten, heißt *konvexes Polygon* oder *konvexes Vieleck*: $A = \bigcap_{\mathfrak{M} \subseteq \xi} \xi$. Eine andere Sprechweise dafür ist: A ist die konvexe Hülle der Punktmenge \mathfrak{M} . Ist A die konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge \mathfrak{M} , aber nicht einer echten Teilmenge von \mathfrak{M} , so heißen die Punkte aus \mathfrak{M} *Eckpunkte* des konvexen Polygons A . Jedes konvexe Polygon A besitzt umgekehrt eine eindeutig bestimmte Menge von Eckpunkten; sind das z. B. die n Punkte P_1, P_2, \dots, P_n , so werde A im Fall $n > 2$ auch *eigentliches* konvexes Polygon und insbesondere *konvexes n -Eck* genannt und mit $A = P_1P_2 \dots P_n$ bezeichnet. Im Fall $n = 2$ ist A offenbar eine Strecke, für $n = 1$ ist A ein Punkt, und für $n = 0$ ($\mathfrak{M} = \emptyset$) ist A das „leere Polygon“ \emptyset . Strecken, Punkte und die leere Menge heißen *uneigentliche* konvexe Polygone.

Die hier gegebene Definition des konvexen n -Ecks entspricht nicht dem früher schon benutzten Begriff etwa des Dreiecks. Da es aber in diesem ganzen Kapitel um einen Begriff geht, der im früheren Sinne besser als n -Ecksfläche bzw. (konvexe) *Polygonfläche* bezeichnet werden müßte, soll der Zusatz „-fläche“ weggelassen werden. Der in der obigen Definition eingenommene *punktmengengeometrische* Standpunkt ist im übrigen durch das hier zu behandelnde Problem des elementaren Inhalts mit seinen späteren Verallgemeinerungen gerechtfertigt.

Die Strecken $P_i P_j$ eines konvexen Polygons $A = P_1 P_2 \dots P_n$ gehören wie alle Verbindungsstrecken zweier Punkte von A ganz zu A : $P_i P_j \subseteq A$. Gibt es im Fall $n > 2$ einen Punkt P mit $Zw(P_i P P_j)$, der auch noch auf wenigstens einer anderen Eckenverbindungsstrecke $P_r P_s$ ($\neq P_i P_j$) liegt, so heißt $P_i P_j$ *Diagonale* des konvexen Polygons A , anderenfalls *Polygonseite*. Jeder Eckpunkt ist gemeinsamer Randpunkt von genau zwei Polygonseiten, folglich besitzt ein konvexes n -Eck ($n > 2$) genau n Seiten. Die Menge der Punkte aller n Seiten des konvexen n -Ecks A heißt *Rand* von A bzw. n -Ecks*linie*. Nennt man die Punkte von A , die nicht zum Rand gehören, *innere Punkte* des konvexen Polygons A , so erweisen sich die eigentlichen konvexen Polygone als beschränkte und abgeschlossene Punktfolgen mit inneren Punkten, während die uneigentlichen konvexen Polygone keine inneren Punkte besitzen.

Für die Elementargeometrie besonders wichtige Polygone sind die Dreiecke und Vierecke. Von den Vierecken wurde früher schon das *Parallelogramm* benutzt, welches jetzt als konvexes Viereck mit zwei Paaren paralleler Seiten erscheint. Sind diese Seitenpaare zueinander senkrecht, so heißt das Parallelogramm auch *Rechteck*. Ein Rechteck, dessen Seiten alle dieselbe Länge haben, heißt *Quadrat*.

Nun soll der Begriff des konvexen Polygons verallgemeinert werden: Eine Punktmenge Q heißt (allgemeines) *Polygon*, wenn sie sich als Vereinigung endlich vieler konvexer Polygone darstellen läßt:

$$(1) \quad Q = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n, \quad A_i \text{ konvexes Polygon} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Ein Polygon Q heiße *eigentlich* (*uneigentlich*), wenn es eine Darstellung (1) für Q gibt, in welcher die A_i sämtlich eigentliche (uneigentliche) konvexe Polygone sind. Die Menge der eigentlichen Polygone vereinigt mit $\{\emptyset\}$ sei \mathfrak{P}_2 , die Menge der uneigentlichen Polygone sei \mathfrak{P}'_2 ($\mathfrak{P}_2 \cap \mathfrak{P}'_2 = \{\emptyset\}$). Das leere Polygon \emptyset soll sowohl zu den eigentlichen als auch zu den uneigentlichen Polygonen gezählt werden.

Als nächstes wird die Menge \mathfrak{P}_2 strukturiert. Zunächst soll eine Operation in \mathfrak{P}_2 erklärt werden, nämlich die *elementargeometrische Addition* $P + Q$ zweier Polygone P und Q , die höchstens Randpunkte gemeinsam haben — in diesem Fall ist die Summe einfach die Vereinigung der Punktfolgen P und Q :

$$R = P + Q \Leftrightarrow R = P \cup Q \wedge P \cap Q \in \mathfrak{P}'_2.$$

Die Schreibweise $R = P + Q$ bedeute auch, daß das Polygon R in die Teilpolygone P und Q *zerlegt* ist. Dieser Begriff der elementargeometrischen Zerlegung darf nicht verwechselt werden mit dem algebraischen Begriff der Zerlegung einer

Menge in disjunkte Klassen. Ferner sei ausdrücklich vermerkt, daß die Operation $+$ in \mathfrak{P}_2 nicht unbeschränkt ausführbar ist; $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ ist nicht erklärt, wenn \mathbf{P} und \mathbf{Q} innere Punkte gemeinsam haben. Im Fall der Ausführbarkeit der auftretenden Additionen gilt jedenfalls für beliebige $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ aus \mathfrak{P}_2

$$\mathbf{R} + (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) = (\mathbf{R} + \mathbf{P}) + \mathbf{Q}$$

und

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P}.$$

Deshalb ist es gerechtfertigt, als Abkürzung für eine (ausführbare) elementargeometrische Addition endlich vieler Polygone das übliche Summenzeichen zu benutzen:

$$\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \dots + \mathbf{Q}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{Q}_i.$$

Der Leser überlege sich ferner, daß sämtliche Geraden, die eine Seite der konvexen Polygone \mathbf{A}_i in der Darstellung (1) ganz enthalten, das Polygon \mathbf{Q} in endlich viele eigentliche konvexe Polygone „zerlegen“, die paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben, so daß statt (1) für jedes eigentliche Polygon \mathbf{Q} sogar eine Darstellung

$$(2) \quad \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i \quad (\mathbf{B}_i \text{ eigentlich konvex, } i = 1, 2, \dots, m)$$

existiert.

Soll unter der Inhaltsmessung von Polygonen in Analogie zur Streckenmessung die eindeutige Zuordnung positiver reeller Zahlen zu allen eigentlichen Polygonen verstanden werden, so erhebt sich die Frage, welche Polygone als „gleich“ (inhaltsgleich) anzusehen sind in dem Sinne, daß ihnen dieselbe reelle Zahl als Inhalt zuzuordnen ist. In Anlehnung an die Strecken- und Winkelmessung denkt man dabei zunächst an kongruente Polygone, um die „Ortsunabhängigkeit“ der Inhaltsmessung zu sichern. Als Spezialfall des Satzes von der Kongruenz als Äquivalenzrelation gilt der

Satz von der Kongruenz der Polygone. *Die Kongruenz \cong ist eine Äquivalenzrelation in der Menge \mathfrak{P}_2 der eigentlichen Polygone.*

Allen Polygonen ein und derselben vermöge der Relation \cong entstehenden Äquivalenzklassen müßte jeweils dieselbe reelle Zahl als Inhalt zugeordnet werden. Würde man sich aber darauf beschränken, so könnte z. B. ein Quadrat \mathbf{Q} niemals mit einem Dreieck \mathbf{D} inhaltsgleich sein, da \mathbf{Q} und \mathbf{D} nicht in ein und derselben Äquivalenzklasse liegen können. Das bedeutet, daß der Inhalt eines Polygons von dessen Form abhängig wäre entgegen den Erfordernissen der Praxis.

Andererseits liegt auch vom mathematischen Standpunkt aus der Sachverhalt bei dem System \mathfrak{P}_2/\cong der Klassen kongruenter Polygone anders als z. B. beim System \mathcal{C}/\cong der Klassen kongruenter Strecken: Im Gegensatz zum letzten kann in dem System \mathfrak{P}_2/\cong keine Addition durch Rückgang auf Repräsentanten eingeführt werden, so daß $(\mathfrak{P}_2/\cong, +)$ eine Halbgruppe würde.

Die Relation der Kongruenz muß also abgeschwächt werden, so daß etwa erreicht wird, daß zwei Polygone denselben Inhalt haben, wenn sie sich in zueinander kongruente Teilpolygone zerlegen lassen. Es wird deshalb eine neue Relation erklärt durch folgende

Definition. Zwei Polygone P und Q heißen *zerlegungsgleich* ($P \stackrel{z}{=} Q$), wenn sie sich in eine endliche Anzahl paarweise kongruenter Teilpolygone zerlegen lassen:

$$P \stackrel{z}{=} Q \Leftrightarrow P = \sum_{i=1}^n P_i \wedge Q = \sum_{i=1}^n Q_i \wedge P_i \cong Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Dann gilt der

Satz von der Zerlegungsgleichheit von Polygonen. Die Zerlegungsgleichheit $\stackrel{z}{=}$ ist eine Äquivalenzrelation in der Menge \mathfrak{P}_2 der eigentlichen Polygone.

Beweis. Reflexivität und Symmetrie der Relation $\stackrel{z}{=}$ ergeben sich sofort aus dem vorigen Satz von der Kongruenz; $\stackrel{z}{=}$ ist Abschwächung der Relation \cong , d. h. aus $P \cong Q$ folgt auch $P \stackrel{z}{=} Q$. Zum Beweis der Transitivität sei $P \stackrel{z}{=} Q$ und $Q \stackrel{z}{=} R$ mit den folgenden Realisierungen:

$$P \stackrel{z}{=} Q: \quad P = \sum_{i=1}^n P_i, \quad Q = \sum_{i=1}^n Q_i, \quad P_i \cong Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$Q \stackrel{z}{=} R: \quad Q = \sum_{j=1}^m Q'_j, \quad R = \sum_{j=1}^m R_j, \quad Q'_j \cong R_j \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Mit $Q_{ij} := Q_i \cap Q'_j$ gilt $Q_i = \sum_{j=1}^m Q_{ij}$. Der Durchschnitt $Q_i \cap Q'_j$ beliebiger Polygone Q_i und Q'_j ist nämlich stets entweder ein eigentliches oder uneigentliches Polygon — im letzten Fall kann Q_{ij} ohne Beeinträchtigung des weiteren Beweises weggelassen werden. Wegen $P_i \cong Q_i$ gibt es sicher Polygone P_{ij} mit $P_{ij} \cong Q_{ij}$ und $P_i = \sum_{j=1}^m P_{ij}$, so daß schließlich

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ij} \quad \text{und} \quad Q = \sum_{i=1}^n Q_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Q_{ij}$$

mit $P_{ij} \cong Q_{ij}$ gilt. Analog folgt

$$R = \sum_{j=1}^m R_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n R_{ij}$$

mit $Q_{ij} \cong R_{ij}$. Unter Berücksichtigung der Transitivität von \cong ist also insgesamt

$$P = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{ij} \quad \text{und} \quad R = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n R_{ij}$$

mit $P_{ij} \cong R_{ij}$ und mithin $P \stackrel{z}{=} R$.

Auf der Basis der hier entwickelten Zerlegungstheorie der Polygone könnte nun leicht eine Addition über der Menge \mathfrak{P}_2/\cong aller Äquivalenzklassen untereinander zerlegungsgleicher Polygone eingeführt werden durch Rückgang auf die elementargeometrische Addition von Repräsentanten. Man würde eine dem Größensystem $(\mathcal{E}/\cong, +)$ der Strecken entsprechende kommutative Halbgruppe $(\mathfrak{P}_2/\cong, +)$ mit Nullelement erhalten. In Fortführung dieser Analogie könnte dann der Flächeninhalt eines Polygons \mathbf{P} als Klasse aller zu \mathbf{P} zerlegungsgleichen Polygone eingeführt werden. Wie bei den Strecken kann aber auch für Polygone ein solcher Größenbegriff für praktische Zwecke nicht befriedigen. Deshalb wird nun die Inhaltsmessung von Polygonen entwickelt, ausgehend von der folgenden

Definition. Unter *Inhaltsmessung* von Polygonen wird die Angabe einer Abbildung F der Menge \mathfrak{P}_2 aller eigentlichen Polygone in die Menge \mathbb{R}_+ der nicht negativen reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften verstanden:

- (1) Aus $A \cong B$ folgt $F(A) = F(B)$ (Bewegungsinvarianz).
- (2) Aus $C = A + B$ folgt $F(C) = F(A) + F(B)$ (Additivität).
- (3) Es gibt ein eigentliches Polygon Q mit $F(Q) = 1$ (Normiertheit).

Das Bild $F(\mathbf{P})$ eines Polygons \mathbf{P} heißt *Maßzahl* des *elementaren Inhalts* von \mathbf{P} , die Abbildung F werde *elementares Inhaltsfunktional* genannt. Bei erforderlicher Unterscheidung zwischen Polygonfläche und Rand des Polygons sollte man $F(\mathbf{P})$ auch *Inhaltsmaßzahl* der Polygonfläche nennen. Damit wird der Unterschied deutlicher zu einer anderen „Maßzahl“, die jedem Polygon \mathbf{P} eindeutig zugeordnet werden kann, nämlich der *Umfangmaßzahl* $u(\mathbf{P})$, die als Summe der Längenmaßzahlen aller Seiten von \mathbf{P} definiert ist.

Bei der Bestimmung des elementaren Inhalts eines Polygons \mathbf{P} , dem „Ausmessen“ von \mathbf{P} , handelt es sich wieder um die Feststellung, wie oft das Einheitspolygon Q bzw. geeignete Teile von Q in \mathbf{P} enthalten sind. Man schreibt deshalb den elementaren Inhalt (Flächeninhalt) $|\mathbf{P}|$ wieder als formales Produkt $|\mathbf{P}| = a \cdot |Q|$, wobei die reelle Zahl $a = F(\mathbf{P})$ die Maßzahl und $|Q|$ die *Maßeinheit* bezeichnet. Ist die Maßeinheit der Streckenmessung gegeben (z. B. das Meter), so kann man eine einfache Beziehung zur Maßeinheit der Inhaltsmessung herstellen, indem man für Q ein Einheitsquadrat Q_1 wählt, dessen Seitenlänge die Maßzahl 1 hat — die Maßeinheit der Inhaltsmessung wäre dann z. B. Quadratmeter (m^2). Wird nämlich die unten hergeleitete Formel $F(\mathbf{R}) = a \cdot b$ für die Berechnung der Inhaltsmaßzahl eines Rechtecks aus den Seitenlängenmaßzahlen a und b übertragen auf die Berechnung des Flächeninhaltes $|\mathbf{R}|$ aus den Längen $a \cdot |PQ|$ und $b \cdot |PQ|$ der Seiten, wobei $|PQ|$ die Maßeinheit der Streckenmessung ist, dann gilt für das Einheitsquadrat ($a = b = 1$)

$$|Q_1| = 1 \cdot |PQ| \cdot 1 \cdot |PQ| = 1 \cdot |PQ|^2.$$

Das Produkt zweier Längen wird also als Flächeninhalt aufgefaßt. Die Forderung (3) soll deshalb im folgenden ersetzt werden durch

- (3') Ist Q_1 ein Quadrat der Seitenlängenmaßzahl 1, so ist $F(Q_1) = 1$.

Selbstverständlich muß nun wieder die Frage der Existenz und Einzigkeit des Inhaltsfunktionals F beantwortet werden. Zunächst gilt folgender

Satz von der Existenz des Inhaltsfunktionals. *Es gibt wenigstens eine Abbildung F von \mathfrak{F}_2 in \mathbb{R}_+ mit den Eigenschaften (1), (2) und (3').*

Zum Beweis dieses Satzes wird eine Abbildung F zunächst für Dreiecke definiert: Ist $\mathbf{D} = ABC$ ein beliebiges Dreieck, die Längenmaßzahl der Seite AB gleich g und die Längenmaßzahl der zur Seite AB gehörenden Höhe gleich h , so werde $F(\mathbf{D}) := \frac{1}{2}g \cdot h$ gesetzt. (Dabei ist die zu AB gehörende Höhe die Strecke CH bzw. deren Länge, wenn H der Schnittpunkt des Lotes durch C zu $g(AB)$ mit der Geraden $g(AB)$ ist.) Nun werden einige Hilfssätze formuliert und bewiesen.

1. Hilfssatz. *Sind g_1, g_2 Längenmaßzahlen zweier beliebiger Seiten eines Dreiecks und h_1, h_2 die Längenmaßzahlen der zugehörigen Höhen, so gilt $g_1 h_1 = g_2 h_2$.*

Beweis. Es sei $\mathbf{D} = ABC$ ein beliebiges Dreieck mit $l(AB) = g_1$ und $l(BC) = g_2$. Die zu AB bzw. BC gehörenden Höhen seien CH_1 bzw. AH_2 mit den Längenmaßzahlen $l(CH_1) = h_1$ und $l(AH_2) = h_2$. Nun wird AB von B aus auf BC^+ abgetragen, so daß sich A' ergibt, und BH_2 von B aus auf BA^+ , so daß sich H_2' ergibt (Abb. 1.28). Ist das Dreieck \mathbf{D} bei B rechtwinklig, so ist die Behauptung trivial; ist das Dreieck \mathbf{D} bei B stumpfwinklig, so werde BH_2 auf BA^- abgetragen. Damit ist nach dem Kongruenzsatz „Seite–Winkel–Seite“ das Dreieck ABH_2 kongruent zum Dreieck $A'BH_2'$. Dann gilt $l(A'B) = g_1$, $l(A'H_2') = h_2$ und $g(A'H_2') \parallel g(CH_1)$, nach dem Strahlensatz (zweiter Teil) also $\frac{g_2}{g_1} = \frac{h_1}{h_2}$ bzw. $g_1 h_1 = g_2 h_2$.

Aus diesen Überlegungen kann noch eine wichtige Folgerung gezogen werden. Ist im Falle eines spitzen Winkels bei B $l(AH_1) = q$ und $l(H_1B) = p$, also $q + p = g_1$, so gilt nach dem Strahlensatz (erster Teil) noch

$$\frac{g_2}{p} = \frac{l(BA')}{l(BH_2')} = \frac{l(AB)}{l(BH_2')}.$$

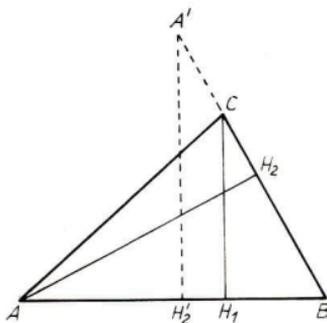


Abb. 1.28

Diese Beziehungen bleiben richtig, wenn die Geraden $g(AC)$ und $g(BC)$ zueinander senkrecht sind, \mathbf{D} also ein *rechtwinkliges Dreieck* mit den *Katheten* AC und BC und der *Hypotenuse* AB ist. In diesem Fall ist $H_2 = C$, und die letzte Gleichung vereinfacht sich zu

$$\frac{g_2}{p} = \frac{l(AB)}{l(BC)} = \frac{g_1}{g_2} \quad \text{bzw.} \quad g_2^2 = g_1 p.$$

Wird zur Vereinfachung $a := l(BC) = g_2$, $b := l(AC)$ und $c := l(AB) = g_1$ gesetzt, so gilt demnach folgender

Kathetensatz. *Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathetenlänge gleich dem Produkt der Hypotenusenlänge und der Länge des zur Kathete gehörenden Hypotenusenabschnitts:*

$$a^2 = p \cdot c \quad \text{bzw.} \quad b^2 = q \cdot c.$$

Daraus folgt sofort $a^2 + b^2 = pc + qc = (p + q)c = c^2$. Das ist der

Satz des Pythagoras. *Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenusenlänge gleich der Summe der Quadrate der Kathetenlängen: $c^2 = a^2 + b^2$.*

Nun wird das Verhalten des Funktionals F bei Zerlegungen des Dreiecks \mathbf{D} untersucht.

2. Hilfssatz. *Ist ein Dreieck $\mathbf{D} = ABC$ in zwei Dreiecke $\mathbf{D}_1 = ADC$ und $\mathbf{D}_2 = DBC$ zerlegt mit $Zw(ADB)$, so gilt $F(\mathbf{D}) = F(\mathbf{D}_1) + F(\mathbf{D}_2)$.*

Beweis. Es sei $l(AB) = g$ und die Längenmaßzahl der zu AB gehörenden Höhe des Dreiecks \mathbf{D} gleich h . Mit $l(AD) = g_1$ und $l(DB) = g_2$ ist $g = g_1 + g_2$, $F(\mathbf{D}_1) = \frac{1}{2} g_1 h$, $F(\mathbf{D}_2) = \frac{1}{2} g_2 h$ und somit

$$F(\mathbf{D}_1) + F(\mathbf{D}_2) = \frac{1}{2} (g_1 + g_2) h = \frac{1}{2} gh = F(\mathbf{D}).$$

Durch vollständige Induktion läßt sich dieses Ergebnis leicht verallgemeinern:

3. Hilfssatz. *Ist eine Zerlegung $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \dots + \mathbf{D}_n$ eines Dreiecks \mathbf{D} in Teildreiecke \mathbf{D}_i gegeben, deren Ecken alle auf zwei festen Seiten von \mathbf{D} liegen, so gilt*

$$F(\mathbf{D}) = \sum_{i=1}^n F(\mathbf{D}_i)$$

(Abb. 1.29).

Schließlich werden beliebige Zerlegungen eines Dreiecks in Teildreiecke betrachtet:

4. Hilfssatz. *Ist eine beliebige Zerlegung $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 + \dots + \mathbf{D}_n$ eines Dreiecks $\mathbf{D} = ABC$ in endlich viele Teildreiecke \mathbf{D}_i gegeben, so gilt*

$$F(\mathbf{D}) = \sum_{i=1}^n F(\mathbf{D}_i).$$

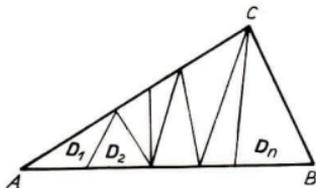


Abb. 1.29

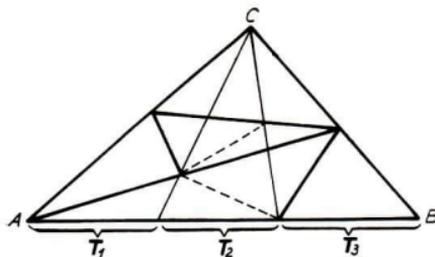


Abb. 1.30

Beweis. Es sei $D = D_1 + D_2 + \dots + D_n$ eine beliebige Zerlegung des Dreiecks $D = ABC$ in Teildreiecke. Werden etwa von C aus Strahlen durch die Ecken sämtlicher Dreiecke D_i gelegt, so zerfällt D in Dreiecke T_j (Abb. 1.30): $D = T_1 + T_2 + \dots + T_m$. Das ist eine Zerlegung von D im Sinne des dritten Hilfssatzes, so daß

$$F(D) = \sum_{j=1}^m F(T_j)$$

gilt. Die Durchschnitte $T_j \cap D_i$ liefern Zerlegungen der Dreiecke T_j in Dreiecke und eventuell Vierecke, deren Eckpunkte jeweils nur auf den beiden durch C gehenden Seiten von T_j liegen. Werden die Vierecke durch eine Diagonale in jeweils zwei Dreiecke zerlegt, so liegt schließlich eine Zerlegung $T_j = D_1^j + D_2^j + \dots + D_{s_j}^j$ im Sinne des dritten Hilfssatzes vor mit

$$F(T_j) = \sum_{\nu=1}^{s_j} F(D_\nu^j) \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Andererseits bedeutet diese „verfeinerte Zerlegung“ für die ursprünglichen Teildreiecke D_i eine Zerlegung in Teildreiecke D_ν^j , auf die der zweite und dritte Hilfssatz angewendet werden kann, so daß sich aus

$$F(D) = \sum_{j=1}^m F(T_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{\nu=1}^{s_j} F(D_\nu^j)$$

durch geeignetes Zusammenfassen schließlich $F(D) = \sum_{i=1}^n F(D_i)$ ergibt.

Berücksichtigt man, daß jedes Polygon in konvexe Polygone zerlegt werden kann und jedes konvexe Polygon durch sämtliche von einem festen Eckpunkt ausgehende Diagonalen in lauter Dreiecke zerlegt wird, so sieht man, daß jedes Polygon in Dreiecke zerlegt werden kann. Damit kann das Inhaltsfunktional F auf die Menge \mathfrak{P}_2 aller (eigentlichen) Polygone fortgesetzt werden durch den Ansatz

$$F(P) := \sum_{i=1}^n F(D_i),$$

wobei $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_i$ eine beliebige Dreieckszerlegung von $\mathbf{P} \in \mathfrak{P}_2$ ist. Die Maßzahl des „Flächeninhalts“ eines uneigentlichen Polygons $\mathbf{P}' \in \mathfrak{P}'_2$ kann durch $F(\mathbf{P}') := 0$ erklärt werden, insbesondere gilt $F(\emptyset) = 0$. Es ist lediglich noch zu zeigen, daß der Wert $F(\mathbf{P})$ unabhängig von der Art der Dreieckszerlegung ist. Sind etwa $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_i$ und $\mathbf{P} = \sum_{j=1}^m \mathbf{D}'_j$ zwei verschiedene Zerlegungen von \mathbf{P} in Dreiecke \mathbf{D}_i bzw. \mathbf{D}'_j , so läßt sich wie beim Beweis der Transitivität von $\stackrel{=}{\sim}$ durch

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mathbf{D}_i \cap \mathbf{D}'_j$$

eine „verfeinerte Zerlegung“ von \mathbf{P} in konvexe Polygone gewinnen, die sich ihrerseits in Dreiecke \mathbf{T}_l zerlegen lassen, so daß insgesamt Darstellungen

$$\mathbf{D}_i = \sum_{\nu} \mathbf{T}_{i\nu} \quad \text{und} \quad \mathbf{D}'_j = \sum_{\mu} \mathbf{T}_{j\mu}$$

existieren, und nach dem vierten Hilfssatz gilt

$$F(\mathbf{D}_i) = \sum F(\mathbf{T}_{i\nu}) \quad \text{und} \quad F(\mathbf{D}'_j) = \sum F(\mathbf{T}_{j\mu}).$$

Folglich ist

$$F(\mathbf{P}) = \sum_l F(\mathbf{T}_l) = \sum_{i=1}^n F(\mathbf{D}_i) = \sum_{j=1}^m F(\mathbf{D}'_j).$$

Damit ist F als (eindeutige) Abbildung von \mathfrak{P}_2 in \mathbb{R}_+ nachgewiesen, denn $F(\mathbf{P}) \geq 0$ liegt nach Definition von F auf der Hand.

Zum vollständigen Beweis des Satzes von der Existenz des Inhaltsfunktionals muß noch gezeigt werden, daß die so definierte Abbildung F die Eigenschaften (1), (2) und (3') hat. Der Nachweis der Bewegungsinvarianz braucht wegen der Definition von F nur für Dreiecke geführt zu werden. Sind $\mathbf{D} = ABC$ und $\mathbf{D}' = A'B'C'$ zwei kongruente Dreiecke, so muß insbesondere $AB \cong A'B'$, also $l(AB) = l(A'B')$, und eine entsprechende Gleichung für die Maßzahlen der zu AB bzw. $A'B'$ gehörenden Höhen gelten. Demnach ist $F(\mathbf{D}) = F(\mathbf{D}')$. Zum Nachweis der Additivität sei $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ mit den Dreieckszerlegungen $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_i$ und $\mathbf{B} = \sum_{j=1}^m \mathbf{T}_j$ von \mathbf{A} bzw. \mathbf{B} . Dann ist

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}_i + \sum_{j=1}^m \mathbf{T}_j$$

eine Dreieckszerlegung von \mathbf{C} und deshalb $F(\mathbf{C}) = F(\mathbf{A}) + F(\mathbf{B})$. Zum Nachweis der Normiertheit schließlich berücksichtige man, daß die Inhaltsmaßzahl eines rechtwinkligen Dreiecks \mathbf{D} , dessen Kathetenlängen die Maßzahlen a und b haben, durch $F(\mathbf{D}) = \frac{1}{2} ab$ dargestellt werden kann und ein Einheitsquadrat \mathbf{Q}_1 durch eine Diagonale in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird, so daß

wegen $a = b = 1$ und der eben bewiesenen Additivität $F(\mathbf{Q}_1) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 1$ wird. Damit ist der Satz von der Existenz des Inhaltsfunktionals endgültig bewiesen.

Eine einfache Verallgemeinerung der Überlegung beim Beweis der Normiertheit (3') liefert sofort den

Satz vom Inhalt des Rechtecks. *Ist \mathbf{R} ein Rechteck mit den Seitenlängenmaßzahlen a und b , so gilt $F(\mathbf{R}) = ab$.*

Zur vollständigen Entwicklung der elementaren Inhaltslehre gehört schließlich noch folgender

Satz von der Einzigkeit des Inhaltsfunktionals. *Es gibt höchstens eine Abbildung F von \mathfrak{P}_2 in \mathbf{R}_+ mit den Eigenschaften (1), (2) und (3').*

Der Beweis dieses Satzes, der hier nicht ausgeführt werden soll, kann z. B. so geführt werden, daß man durch „Ausmessung“ eines beliebigen Rechtecks mit den Seitenlängenmaßzahlen a und b durch das Einheitsquadrat \mathbf{Q}_1 bzw. geeignete Teile desselben die Gültigkeit der Formel $F(\mathbf{R}) = ab$ allein aus den Eigenschaften (1), (2) und (3') herleitet — analog zur Ausmessung einer beliebigen Strecke durch die Einheitsstrecke (vgl. 1.1.4.). Damit ergibt sich auch für jedes Inhaltsfunktional F die Formel $F(\mathbf{D}) = \frac{1}{2}gh$ für zunächst rechtwinklige Dreiecke; wegen der Zerlegbarkeit eines beliebigen Dreiecks in zwei rechtwinklige Dreiecke muß diese Formel für alle Dreiecke gelten, und daraus kann man mit den obigen Überlegungen auf die Einzigkeit von F schließen.

In Analogie zur Streckenmessung kann jetzt das Inhaltsfunktional F als Homomorphismus der kommutativen Halbgruppe $(\mathfrak{P}_2/\cong, +)$ der Äquivalenzklassen von untereinander zerlegungsgleichen Polygonen in die kommutative Halbgruppe $(\mathbf{R}_+, +)$ der nicht negativen reellen Zahlen aufgefaßt werden. Bei dieser Interpretation ist F sogar surjektiv. Ist λ nämlich eine beliebige positive reelle Zahl, so gibt es eine Strecke der Längenmaßzahl λ und mithin ein Rechteck \mathbf{R} mit den Seitenlängenmaßzahlen 1 und λ , also der Inhaltsmaßzahl $F(\mathbf{R}) = \lambda$. Als Urbild von λ bei dem durch F induzierten Homomorphismus kann folglich die Klasse aller zu \mathbf{R} zerlegungsgleichen Polygone erklärt werden. F ist ferner injektiv und kann demnach sogar als Isomorphismus von $(\mathfrak{P}_2/\cong, +)$ auf $(\mathbf{R}_+, +)$ aufgefaßt werden. Diese Tatsache bedeutet, daß notwendig und hinreichend für die Zerlegungsgleichheit $\mathbf{P} \cong \mathbf{Q}$ zweier Polygone \mathbf{P} und \mathbf{Q} ihre Inhaltsgleichheit ($F(\mathbf{P}) = F(\mathbf{Q})$) ist — die über \mathfrak{P}_2 erklärten Relationen „zerlegungsgleich“ und „inhaltsgleich“ sind äquivalent.

1.2. Geometrie des euklidischen Raumes

Der Aufbau der euklidischen Geometrie des dreidimensionalen Raumes kann analog zu dem in 1.1. durchgeführten Aufbau der Geometrie der Ebene erfolgen. Dieser Aufbau soll jetzt kurz geschildert werden. Es werden ein Axiomensystem sowie

einige Definitionen, Sätze und Sachverhalte — weitgehend ohne Beweise — angegeben werden.

1.2.1. Inzidenz, Parallelität, Verschiebungen

Als grundlegende Aussage wird festgelegt und als wahr vorausgesetzt, daß der Raum eine *Menge* ist, deren Elemente *Punkte* genannt werden, daß ferner zwei Systeme von Teilmengen des Raumes besonders ausgezeichnet sind; die Elemente des einen werden *Geraden*, die des anderen werden *Ebenen* genannt. Jede Teilmenge einer Geraden soll *kollinear*, jede Teilmenge einer Ebene *komplanar* genannt werden. Punkte, Geraden und Ebenen sollen folgenden Axiomen genügen:

Axiom (R1). *Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte, und jede Ebene enthält mindestens drei nicht kollineare Punkte.*

Axiom (R2). *Sind A und B zwei beliebige voneinander verschiedene Punkte, so gibt es genau eine Gerade, die A und B enthält. (Sie werde mit $g(AB)$ bezeichnet.)*

Axiom (R3). *Sind A, B, C drei nicht kollineare Punkte, so gibt es genau eine Ebene, die A, B und C enthält. (Sie werde mit $\varepsilon(ABC)$ bezeichnet.)*

Axiom (R4). *Der Durchschnitt einer Geraden mit einer Ebene ist entweder leer oder genau ein Punkt oder die betreffende Gerade insgesamt.*

Axiom (R5). *Der Durchschnitt zweier voneinander verschiedener Ebenen ist entweder leer oder eine Gerade.*

Axiom (R6). *Es gibt keine Ebene, die sämtliche Punkte des Raumes enthält.*

Die *Parallelität von Geraden* wird folgendermaßen definiert:

Definition. $g \parallel h$ ist gleichbedeutend damit, daß $g \cup h$ komplanar ist und daß $g \cap h = \emptyset$ oder $g = h$ gilt.

Axiom (R7). *Ist g eine beliebige Gerade und P ein beliebiger Punkt, so gibt es genau eine Gerade, die P enthält und die zu g parallel ist.*

Die Parallelität von Geraden erweist sich auf Grund von Axiom (R7) auch im Raum als Äquivalenzrelation. Ferner folgt aus Axiom (R3): Zu zwei verschiedenen parallelen Geraden gibt es genau eine Ebene, die beide Geraden enthält.

Auch für Ebenen läßt sich ein Parallelitätsbegriff einführen. Sind ε_1 und ε_2 zwei Ebenen, so definiert man:

Definition. $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 :\Leftrightarrow \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \emptyset \vee \varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Schließlich definiert man auch eine Parallelität zwischen Geraden und Ebenen. Es sei g eine Gerade und ε eine Ebene. Man setzt:

$$g \parallel \varepsilon : \Leftrightarrow g \cap \varepsilon = \emptyset \vee g \subset \varepsilon.$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß $g \parallel \varepsilon$ genau dann gilt, wenn es eine Gerade g' mit $g' \subset \varepsilon$ und $g' \parallel g$ gibt; ebenso gilt $g \parallel \varepsilon$ genau dann, wenn es eine Ebene ε' mit $g \subset \varepsilon'$ und $\varepsilon' \parallel \varepsilon$ gibt.

Die Parallelität von Ebenen ist eine Äquivalenzrelation, und es gilt ein zum Axiom (R7) analoger beweisbarer Satz: Ist ε eine Ebene, P ein Punkt, so gibt es genau eine Ebene ε' mit $P \in \varepsilon'$ und $\varepsilon' \parallel \varepsilon$. Etwas Entsprechendes gilt für die Parallelität zwischen Geraden und Ebenen nicht.

Aus den Axiomen (R1) bis (R4) folgt, daß es zu zwei Geraden, die genau einen gemeinsamen Punkt haben, genau eine Ebene gibt, die beide Geraden enthält.

Sind g_1 und g_2 zwei verschiedene nicht parallele Geraden ohne gemeinsame Punkte, so gibt es genau eine Ebene ε_1 , die g_1 enthält und zu der g_2 parallel ist; ebenso gibt es genau eine Ebene ε_2 , die g_2 enthält und zu der g_1 parallel ist. Es gilt dann $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. Zwei nicht parallele Geraden ohne gemeinsame Punkte nennt man zueinander *windschief*, und es gibt also zu jedem Paar windschiefer Geraden genau ein Paar paralleler Ebenen, so daß jede Ebene dieses Paares je eine der windschiefen Geraden enthält. Windschiefe Geraden sind nicht komplanar.

Räumliche Verschiebungen werden genauso wie in der Geometrie der Ebene als bijektive Abbildungen des Raumes auf sich mit den Eigenschaften (V1) und (V2) (vgl. 1.1.1.) definiert. Es folgt dann, daß die Bildmenge einer jeden Ebene ε eine zu ε parallele Ebene ist. Die in 1.1.1. bewiesenen Hilfssätze über Verschiebungen gelten auch im Raum. Fordert man schließlich als

Axiom (R8). Zu zwei beliebigen Punkten A, B gibt es genau eine Verschiebung, die A auf B abbildet,

so kann man nachweisen, daß die Menge aller Verschiebungen bezüglich der Hintereinanderausführung eine kommutative Gruppe ist. Für jede Ebene ε ist die Menge aller Verschiebungen, die ε auf sich selbst abbilden, eine Untergruppe.

1.2.2. Anordnung

Die Axiome (6), (7), (8) aus 1.1.2.1. können als Axiome (R9), (R10), (R11) für den Raum genommen werden, ebenso können die im Zusammenhang mit diesen Axiomen gegebenen Definitionen der Begriffe orientierte Gerade, Strahl, Zwischenrelation, Strecke, Richtungssinn, Halbebene und Fahne für den Raum unverändert übernommen werden. (Gegebenenfalls ist von den jeweils betrachteten Punkt-mengen deren Komplanarität zu fordern.) Auch die mit der Anordnungslehre zusammenhängenden Eigenschaften der Verschiebungen gelten in der Geometrie des Raumes.

Ein neuer Begriff ist der des Halbraumes, der analog zur Definition von Halbebenen folgendermaßen eingeführt werden kann:

Es sei ε eine Ebene, g eine ε in genau einem Punkte A schneidende Gerade, s_1 und s_2 seien die Mengen der Punkte ($\neq A$) der beiden auf g von A erzeugten Strahlen. Auf g werden alle Verschiebungen angewendet, die ε auf sich abbilden, die Menge aller Bilder der Punkte von s_i sei \mathfrak{H}_i ($i = 1, 2$). Es zeigt sich, daß \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 eine Zerlegung der Menge der nicht zu ε gehörenden Punkte des Raumes ist, sie erweist sich als unabhängig von der Wahl der Geraden g . Man nennt \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 die beiden von ε erzeugten *offenen Halbräume* oder Seiten, die Mengen $\mathfrak{H}_1 \cup \varepsilon$ und $\mathfrak{H}_2 \cup \varepsilon$ nennt man Halbräume schlechthin, ε heißt *Randebene*, \mathfrak{H}_1 und \mathfrak{H}_2 nennt man zueinander *entgegengesetzt*. Zwei Punkte P, Q ($\notin \varepsilon$) liegen genau dann auf verschiedenen Seiten von ε , wenn es einen Punkt Z mit $Zw(PZQ)$ gibt, der zu ε gehört.

Auch für den Begriff Fahne wird ein räumliches Analogon definiert, es möge *Orientierungsfigur* heißen. Unter einer Orientierungsfigur versteht man die Vereinigungsmenge einer Fahne mit einem der beiden offenen Halbräume, in deren Randebene die Fahne enthalten ist; die Fahne, ihr Randstrahl und Anfangspunkt heißen *Randfahne*, *Randstrahl* und *Anfangspunkt* der betreffenden Orientierungsfigur. Der Durchschnitt einer Orientierungsfigur mit einer Ebene, die den Randstrahl in genau einem Punkt schneidet, ist eine Fahne.

Wie in der Geometrie der Ebene für Fahnen kann in der Geometrie des Raumes für Orientierungsfiguren die Äquivalenzrelation „gleichorientiert“ eingeführt werden, und es zeigt sich, daß es bezüglich dieser Äquivalenzrelation genau zwei Klassen gibt.

Die Definition kann folgendermaßen gegeben werden: Man definiert zunächst für Orientierungsfiguren drei Relationen ϱ_1 , ϱ_2 und ϱ_3 . Es seien F_1 und F_2 Orientierungsfiguren.

Definition. $F_1 \varrho_1 F_2$ bedeutet: F_1 und F_2 haben gleiche Randstrahlen, und ist ε eine Ebene, die mit diesem Randstrahl genau einen Punkt gemeinsam hat, so sind die Schnittfahnen $F_1 \cap \varepsilon$ und $F_2 \cap \varepsilon$ in ε gleichorientiert im Sinne von 1.1.2.2.

Man weist nach, daß das Bestehen von ϱ_1 unabhängig von der Wahl von ε ist.

Definition. $F_1 \varrho_2 F_2$ bedeutet: F_1 und F_2 haben denselben Anfangspunkt und komplanare Randfahnen (Ebene ε), und entweder sind die offenen Halbräume von F_1 und F_2 gleich und die Randfahnen in ε gleichorientiert, oder es sind die offenen Halbräume von F_1 und F_2 entgegengesetzt und die Randfahnen in ε nicht gleichorientiert.

Sind F_1 und F_2 beliebige Orientierungsfiguren mit gemeinsamem Anfangspunkt, so gibt es eine Ebene ε , die beide Randstrahlen enthält, und man definiert:

Definition. $F_1 \varrho_3 F_2$ bedeutet: Es gibt eine Orientierungsfigur F'_1 bzw. F'_2 , die mit F_1 bzw. F_2 den Randstrahl gemeinsam hat und deren Randfahne in ε liegt und für die $F'_1 \varrho_1 F_1$ bzw. $F'_2 \varrho_1 F_2$ gilt, und es ist $F'_1 \varrho_2 F'_2$.

Für ganz beliebige Orientierungsfiguren wird schließlich definiert:

Definition. F_1 ist genau dann mit F_2 gleichorientiert, wenn es eine Verschiebung τ gibt, so daß $\tau(F_1) \varrho_3 F_2$ ist.

1.2.3. Bewegungen, Kongruenz, Senkrechtsein

Die Grundlage für die Lehre von den Bewegungen ist folgendes Axiom:

Axiom (R12). *Es gibt eine Gruppe von bijektiven Abbildungen des Raumes auf sich — Bewegungen genannt — mit folgenden Eigenschaften:*

(B_R1) *Aus $Zw(XYZ)$ folgt $Zw(\varphi(X)\varphi(Y)\varphi(Z))$ für jede Bewegung φ .*

(B_R2) *Sind F_1 und F_2 beliebige Orientierungsfiguren, so gibt es genau eine Bewegung φ mit $\varphi(F_1) = F_2$.*

(B_R3) *Sind h und k zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt, so gibt es eine Bewegung φ mit $\varphi(h) = k$ und $\varphi(k) = h$.*

Die Verschiebungen erweisen sich als spezielle Bewegungen. Bewegungen, für die es eine aus lauter Fixpunkten bestehende Ebene ε gibt und bei der die beiden Halbräume von ε miteinander vertauscht werden, heißen *Ebenenspiegelungen* (Bezeichnung: σ_ε); zu jeder Ebene gibt es genau eine Ebenenspiegelung. Die Gleichorientierung von Orientierungsfiguren ist eine Relation, die sich bei Bewegung nicht ändert. Folglich gibt es zwei Sorten von Bewegungen, gleichsinnige und ungleichsinnige. Die gleichsinnigen Bewegungen bilden eine Untergruppe, die ungleichsinnigen nicht. Verschiebungen sind Beispiele für gleichsinnige, Ebenenspiegelungen für ungleichsinnige Bewegungen.

Die Kongruenz von Figuren wird genau wie in der Geometrie der Ebene definiert:

Definition. $\mathfrak{M}_1 \cong \mathfrak{M}_2$ bedeutet: Es gibt eine Bewegung φ mit $\varphi(\mathfrak{M}_1) = \mathfrak{M}_2$, und auch für den Raum ist die Kongruenz eine Äquivalenzrelation. Entsprechend wie in der Ebene wird gleichsinnige Kongruenz definiert.

Da man jede Fahne auf genau zwei Weisen durch Hinzunahme eines offenen Halbraumes zu einer Orientierungsfigur erweitern kann und diese beiden Orientierungsfiguren dann entgegengesetzt orientiert sind, gibt es zu zwei beliebigen Fahnen f_1 und f_2 nach Axiom (B_R2) genau eine gleichsinnige und genau eine ungleichsinnige Bewegung, die f_1 auf f_2 abbilden. (Man beachte im Unterschied hierzu das Bewegungsaxiom (B2) für die Geometrie der Ebene!) Das bedeutet insbesondere, daß man zwei komplanare, nicht gleichorientierte Fahnen durch eine gleichsinnige Bewegung aufeinander abbilden kann. Es ist deshalb im Raum nicht sinnvoll, für beliebige Fahnen eine Gleichorientierung zu erklären. Desgleichen kann im Raum ein orientierter Elementarwinkel $\sphericalangle(h, k)$ bereits durch eine gleichsinnige Bewegung auf $\sphericalangle(k, h)$ abgebildet werden, so daß es sich nicht lohnt, Klassen orientierter Elementarwinkel bezüglich gleichsinniger Kongruenz zu bilden.

Mit Hilfe des Begriffes Ebenenspiegelung kann das *Senkrechtsein* von Ebenen definiert werden. Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ Ebenen, so setzt man:

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \sigma_{\varepsilon_1}(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2.$$

Diese Relation ist symmetrisch und bewegungsinvariant, und der Durchschnitt senkrechter Ebenen ist stets eine Gerade.

Analog läßt sich für Geraden und Ebenen das Senkrechtsein definieren. Für Geraden g und Ebenen ε setzt man:

$$g \perp \varepsilon \Leftrightarrow \sigma_\varepsilon(g) = g \wedge g \cap \varepsilon \neq g.$$

Man nennt dann g ein Lot zu ε . Der Durchschnitt $g \cap \varepsilon$ ist stets ein Punkt (Lotfußpunkt). Es gilt $g \perp \varepsilon$ genau dann, wenn alle Ebenen ε' mit $g \subset \varepsilon'$ zu ε senkrecht sind. Ferner hat das gleichzeitige Bestehen von $g \perp \varepsilon_1$ und $g \perp \varepsilon_2$ die Parallelität von ε_1 und ε_2 zur Folge, und umgekehrt folgt aus $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ und $g \perp \varepsilon_1$ auch $g \perp \varepsilon_2$. Aus $\varepsilon_1 \perp \varepsilon$ und $\varepsilon_2 \perp \varepsilon$ folgt, falls $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$ eine Gerade g ist, $g \perp \varepsilon$.

Es gibt eine Reihe von Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen über senkrechte Ebenen und Geraden, die auf Grund der Definitionen und angeführten Eigenschaften bewiesen werden können: Zu einem beliebigen Punkt P und einer beliebigen Ebene ε gibt es genau eine Gerade durch P , die zu ε senkrecht ist. Zu einem beliebigen Punkt P und einer beliebigen Geraden g gibt es genau eine Ebene ε durch P , so daß $g \perp \varepsilon$ ist. Zu einer beliebigen Ebene ε und einer beliebigen zu ε nicht senkrechten Geraden g gibt es genau eine Ebene ε' mit $\varepsilon' \perp \varepsilon$ und $g \subset \varepsilon'$. Schließlich definiert man auch für Geraden g_1, g_2 das Senkrechtsein bzw. den Begriff Lot:

Definition. $g_1 \perp g_2$ bedeutet: Es ist $g_1 \cap g_2 \neq \emptyset$, und es gibt eine Ebene ε , die g_1 enthält, so daß $g_2 \perp \varepsilon$ ist. (Die Bedingung $g_1 \cap g_2 \neq \emptyset$ wird auch gelegentlich weggelassen, so daß es auch windschiefe senkrechte Geraden geben kann.)

Aus $g_1 \perp g_2$ folgt $g_2 \perp g_1$. Zu einer beliebigen Geraden g und einem beliebigen nicht zu g gehörenden Punkt P gibt es genau eine Gerade g' , die P enthält und zu g senkrecht ist.

Sind g und h zwei windschiefe Geraden, ε_g und ε_h die parallelen Ebenen, die g bzw. h enthalten, ε_1 die zu ε_h senkrechte Ebene, die g enthält, ε_2 die zu ε_g senkrechte Ebene, die h enthält, so ist $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$ eine sowohl zu g als auch zu h senkrechte Gerade, und zwar die einzige dieser Art. Zwei windschiefe Geraden haben also stets genau ein gemeinsames Lot.

1.2.4. Stetigkeit und Vollständigkeit

Das Archimedische Axiom (10) kann wörtlich als Axiom (R13) für den Raum übernommen werden, und auf Grund dessen kann wie in der Geometrie der Ebene eine Streckenmessung eingeführt werden.

Die Länge $|AB|$ wird auch als *Abstand* der Punkte A und B bezeichnet. Ein Abstands begriff wird auch für Punkte und Geraden sowie für Punkte und Ebenen definiert. Ist P ein Punkt, g eine Gerade und Q der Schnittpunkt des eindeutig bestimmten Lotes durch P zu g mit g , so heißt die Länge $|PQ|$ Abstand des Punktes P von

der Geraden g . Ist P ein Punkt, ε eine Ebene und Q der Schnittpunkt des Lotes durch P zu ε mit ε , so heißt die Länge $|PQ|$ Abstand des Punktes P von der Ebene ε .

Unter dem Abstand zweier paralleler Ebenen ε_1 und ε_2 versteht man die Länge $|P_1P_2|$, falls $P_i \in \varepsilon_i$ und $g(P_1P_2) \perp \varepsilon_i$ ($i = 1, 2$) gilt; alle diese Strecken P_1P_2 sind verschiebungsgleich. Analog wird der Abstand zweier paralleler Geraden definiert. Auch für windschiefe Geraden g_1, g_2 definiert man einen Abstand, nämlich den Abstand der beiden parallelen Ebenen, die g_1 und g_2 enthalten.

Als letztes Axiom für den Aufbau der Geometrie des Raumes ist das Vollständigkeitsaxiom (11) als Axiom (R14) aufzuführen. Die im Zusammenhang mit diesem Axiom in 1.1.4. genannten Folgerungen gelten auch für den Raum.

Für den durch die Axiome (R1) bis (R14) gekennzeichneten euklidischen dreidimensionalen Raum ist die Bezeichnung R^3 gebräuchlich, für die euklidische Ebene die Bezeichnung R^2 .

Es sei noch darauf hingewiesen, daß jede Ebene ε des R^3 eine Ebene im Sinne von 1.1., also ein R^2 ist; die Bewegungsgruppe von ε ergibt sich dabei aus der Untergruppe der gleichsinnigen die Ebene ε auf sich abbildenden Bewegungen des Raumes durch Einschränkung des Definitionsbereiches dieser Abbildungen auf ε .

1.2.5. Elementarer Inhalt

Der Begriff des elementaren Inhalts im Raum kann zunächst in völliger Analogie zum elementaren Inhaltsbegriff in der Ebene entwickelt werden (vgl. 1.1.5.). In der folgenden Darstellung werden deshalb nur die wesentlichsten Begriffe eingeführt und die grundlegenden Sätze angegeben.

Ein *konvexes Polyeder* (konvexes Vielflach) ist der Durchschnitt A aller Halbräume \mathfrak{H} , welche eine endliche Punktmenge \mathfrak{M} enthalten:

$$A := \bigcap_{\mathfrak{H} \in \mathfrak{S}} \mathfrak{H}.$$

Ist P ein Punkt von \mathfrak{M} , der bei der Erzeugung der konvexen Hülle A von \mathfrak{M} nicht weggelassen werden kann, so heißt P *Eckpunkt* von A . Liegt A ganz in einer Ebene α , so heißt A *uneigentlich* — A besitzt keine inneren Punkte und ist entweder ein in α liegendes eigentliches konvexes Polygon, eine Strecke, ein Punkt oder das „leere Polyeder“ \emptyset . Anderenfalls heißt A *eigentlich*. Das einfachste eigentliche konvexe Polyeder besitzt also mindestens vier Eckpunkte, es ist nämlich die konvexe Hülle von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten und heißt *Simplex* (Tetraeder oder dreiseitige Pyramide). Liegt ein eigentliches konvexes Polyeder A ganz in einem der beiden durch eine Ebene α bestimmten (abgeschlossenen) Halbräume und ist der Durchschnitt $A \cap \alpha$ ein in α eigentliches (konvexes) Polygon, so heißt dieses *Seitenfläche* von A und die Seiten dieses Polygons *Kanten* von A . Die Vereinigung aller Seitenflächen von A heißt *Rand* von A bzw. *Polyederfläche*. Jedem eigentlichen (konvexen) Polyeder A läßt sich dann eindeutig eine nicht negative reelle Zahl $O(A)$

zuordnen, die Maßzahl des *Oberflächeninhalts* bzw. des Inhalts der Polyederfläche, als Summe der Maßzahlen des elementaren Inhalts seiner Seitenflächen.

Es seien noch einige spezielle eigentliche (konvexe) Polyeder angeführt. Wird ein in einer Ebene α gelegenes konvexes Polygon $P_1P_2 \dots P_n$ durch eine Verschiebung auf das nicht in α liegende Polygon $P'_1P'_2 \dots P'_n$ abgebildet, so heißt die konvexe Hülle der Punkte $P_1, \dots, P_n, P'_1, \dots, P'_n$ n -seitiges konvexes *Prisma* mit der Grundfläche $P_1P_2 \dots P_n$ und der Deckfläche $P'_1P'_2 \dots P'_n$. Ist der Verschiebungsvektor senkrecht zur Ebene α , so heißt das Prisma *gerade*, im anderen Fall *schief*. Ist die Grundfläche ein Parallelogramm, so heißt das Prisma auch *Parallelepiped* oder *Spat*. Ein gerades Prisma mit rechteckiger Grundfläche heißt *Quader*. Ein Quader, dessen Kanten alle dieselbe Länge haben, heißt *Würfel*. Wird neben dem in einer Ebene α liegenden konvexen Polygon $P_1P_2 \dots P_n$ ein Punkt $Q \notin \alpha$ betrachtet, so heißt die konvexe Hülle der Punkte P_1, \dots, P_n, Q n -seitige konvexe *Pyramide* mit der Grundfläche $P_1P_2 \dots P_n$ und der Spitze Q .

Die Vereinigungsmenge $\mathbf{P} = \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \dots \cup \mathbf{A}_n$ endlich vieler konvexer Polyeder \mathbf{A}_i heißt (allgemeines) *Polyeder*. Sind alle \mathbf{A}_i eigentlich oder gleich \emptyset , so heiße auch \mathbf{P} eigentliches Polyeder, sind alle \mathbf{A}_i uneigentlich, so heiße auch \mathbf{P} uneigentlich. Es sei \mathfrak{P}_3 die Menge aller eigentlichen Polyeder. Dann heißt $\mathbf{R} \in \mathfrak{P}_3$ *elementargeometrische Summe* der Polyeder $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathfrak{P}_3$ oder \mathbf{R} in \mathbf{P} und \mathbf{Q} *zerlegt* ($\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$), wenn $\mathbf{R} = \mathbf{P} \cup \mathbf{Q}$ gilt und der Durchschnitt $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}$ ein uneigentliches Polyeder ist. Diese Operation ist im Fall ihrer Ausführbarkeit wieder assoziativ und kommutativ. Schließlich heißen die Polyeder \mathbf{P} und \mathbf{Q} *zerlegungsgleich* ($\mathbf{P} \stackrel{\cong}{=} \mathbf{Q}$), wenn sie in paarweise kongruente Teilpolyeder zerlegbar sind. Die Zerlegungsgleichheit ist eine Äquivalenzrelation über \mathfrak{P}_3 .

In der Menge $\mathfrak{P}_3/\stackrel{\cong}{=}$ der vermöge der Relation $\stackrel{\cong}{=}$ über \mathfrak{P}_3 entstehenden Äquivalenzklassen kann eine Addition erklärt werden durch elementargeometrische Addition geeigneter Repräsentanten, so daß $(\mathfrak{P}_3/\stackrel{\cong}{=}, +)$ eine kommutative Halbgruppe wird.

Nun wird der elementare Inhalt im Raum eingeführt durch folgende

Definition. Unter *Inhalts-* bzw. *Volumenmessung* von Polyedern wird die Angabe einer Abbildung V der Menge \mathfrak{P}_3 aller eigentlichen Polyeder in die Menge \mathbb{R}_+ der nicht negativen reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften verstanden:

- (1) Aus $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ folgt $V(\mathbf{A}) = V(\mathbf{B})$ (Bewegungsinvarianz).
- (2) Aus $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ folgt $V(\mathbf{C}) = V(\mathbf{A}) + V(\mathbf{B})$ (Additivität).
- (3) Ist \mathbf{W}_1 ein Würfel der Kantenlängenmaßzahl 1, so gilt $V(\mathbf{W}_1) = 1$ (Normiertheit).

Das Bild $V(\mathbf{P})$ eines Polyeders \mathbf{P} heißt *Maßzahl des elementaren Inhalts* oder *Volumens* von \mathbf{P} , die Abbildung V elementares *Volumenfunktional*. Ist die Längeneinheit das Meter, so wird das Volumen in Kubikmeter (m^3) gemessen, d. h., das Volumen wird wieder als formales Produkt aus Maßzahl und Maßeinheit (m^3) angegeben. Hauptsatz der Theorie des elementaren Inhalts im Raum ist folgender

Satz von der Existenz und Einzigkeit des Volumenfunctionals. *Es gibt genau eine Abbildung V von \mathfrak{F}_3 in \mathbb{R}_+ mit den Eigenschaften (1), (2) und (3).*

Die Idee des Existenzbeweises ist dieselbe wie beim Existenznachweis für das ebene Inhaltsfunctional. Ist $S = P_1P_2P_3P_4$ ein Simplex mit der Inhaltsmaßzahl $F(P_1P_2P_3)$ der Grundfläche $P_1P_2P_3$ und der Maßzahl h der zugehörigen Höhe (d. h. des Abstandes der Spitze P_4 von der durch P_1, P_2, P_3 bestimmten Ebene), so wird

$$V(S) := \frac{1}{3} F(P_1P_2P_3) \cdot h$$

gesetzt. Der Nachweis, daß der Wert $V(S)$ unabhängig von der Auswahl der Grundfläche von S ist und daß für eine beliebige Zerlegung $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ eines Simplexes S in Teilsimplexe S_i die Beziehung

$$(*) \quad V(S) = \sum_{i=1}^n V(S_i)$$

gilt, soll hier übergangen werden. Jedes Polyeder läßt sich als elementargeometrische Summe konvexer Polyeder darstellen — vgl. die Darstellung von Polygonen als Summe konvexer Polygone in 1.1.5. Zerlegt man die Seitenflächenpolygone eines konvexen Polyeders A in Dreiecke und bildet die konvexen Hüllen eines festen inneren Punktes von A und jeweils der drei Eckpunkte dieser Dreiecke, so entsteht eine Zerlegung von A in lauter Simplexe. Insgesamt kann also jedes Polyeder in Simplexe zerlegt werden. Damit ist der Ansatz

$$V(P) := \sum_{i=1}^m V(S_i)$$

für die Volumenmaßzahl eines allgemeinen Polyeders P gerechtfertigt, wobei $P = \sum_{i=1}^m S_i$ eine beliebige Simplicialzerlegung von P ist. Daß der Wert $V(P)$ von der speziellen Wahl dieser Zerlegung unabhängig ist, kann mit Hilfe von (*) leicht nachgewiesen werden. V ist also Abbildung von \mathfrak{F}_3 in \mathbb{R}_+ . Die Definition werde wieder durch $V(P') := 0$ ergänzt für uneigentliche Polyeder P' . Die einfachen Eigenschaf-

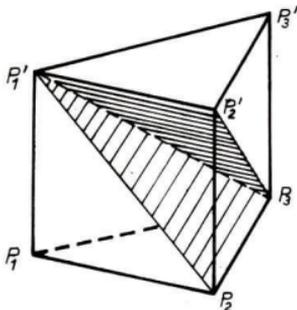


Abb. 1.31

ten (1) und (2) von V kann der Leser selbst nachweisen. Zum Beweis der Normiertheit (3) werden zunächst einige Folgerungen aus der Definition von V gezogen. Zur Volumenbestimmung eines beliebigen Prismas \mathbf{P} genügt die Kenntnis einer Formel zur Berechnung des Volumens der dreiseitigen Prismen, da das Grundflächenpolygon von \mathbf{P} stets in Dreiecke und damit \mathbf{P} selbst in dreiseitige Prismen zerlegt werden kann. Ein gerades dreiseitiges Prisma $P_1P_2P_3P'_1P'_2P'_3$ wird aber von den beiden durch die Punkte P_2, P_3, P'_1 bzw. P'_2, P_3, P'_1 bestimmten Ebenen in drei volumengleiche Simplexe $P_1P_2P_3P'_1$, $P_2P_3P'_2P'_1$ und $P'_1P'_2P'_3P_3$ zerlegt (Abb. 1.31). Es gilt nämlich, wenn $h = l(P_1P'_1)$ und h' die Maßzahl des Abstandes des Punktes P'_1 von der Ebene durch P_2, P_3, P'_2 ist, nach Definition von $V(\mathbf{S})$ für Simplexe \mathbf{S}

$$\begin{aligned} V(P_1P_2P_3P'_1) &= \frac{1}{3} F(P_1P_2P_3) \cdot h, \\ V(P'_1P'_2P'_3P_3) &= \frac{1}{3} F(P'_1P'_2P'_3) \cdot h = \frac{1}{3} F(P_1P_2P_3) \cdot h = V(P_1P_2P_3P'_1), \\ V(P_2P_3P'_2P'_1) &= \frac{1}{3} F(P_2P_3P'_2) \cdot h' = \frac{1}{3} F(P'_2P'_3P_3) \cdot h' = V(P'_1P'_2P'_3P_3). \end{aligned}$$

Mithin gilt für das Volumen des dreiseitigen geraden Prismas

$$V(P_1P_2P_3P'_1P'_2P'_3) = 3 \cdot V(P_1P_2P_3P'_1) = F(P_1P_2P_3) \cdot h.$$

Nach der obigen Bemerkung gilt also allgemein der

Satz vom Volumen des Prismas. *Das Volumen eines Prismas \mathbf{P} ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der Grundfläche von \mathbf{P} und der Höhe von \mathbf{P} .*

Diese Aussage gilt übrigens auch für schiefe Prismen, wenn man unter der *Höhe* den Abstand von Grund- und Deckflächenebene versteht.

Da die Inhaltsmaßzahl eines Rechtecks mit den Seitenlängenmaßzahlen a und b gleich ab ist, gilt für die Volumenmaßzahl eines Quaders mit den Kantenlängenmaßzahlen a, b, c die Formel $V(\mathbf{Q}) = a \cdot b \cdot c$, da ein Quader \mathbf{Q} als Prisma mit rechteckiger Grundfläche aufgefaßt werden kann. Für einen Würfel \mathbf{W} der Kantenlängenmaßzahl a folgt daraus $V(\mathbf{W}) = a^3$, für einen Einheitswürfel \mathbf{W}_1 also $V(\mathbf{W}_1) = 1$, womit die Normiertheit des Volumenfunctionals nachgewiesen ist.

Auf den Beweis der Tatsache, daß es nur eine Abbildung V von \mathfrak{P}_3 in \mathbb{R}_+ mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) gibt, soll hier verzichtet werden. Man kann sich ohnehin auf den „konstruktiven“ Standpunkt stellen, daß die Volumenmaßzahl eines Polyeders \mathbf{P} die oben definierte Zahl $V(\mathbf{P})$ ist.

Abschließend soll noch eine einfache Formel zur Berechnung der Volumenmaßzahl einer Pyramide hergeleitet werden. Ist $\mathbf{P} = P_1 \dots P_nQ$ eine Pyramide mit der Grundfläche $P_1P_2 \dots P_n$, der Spitze Q und der Höhenmaßzahl h (Maßzahl des Abstandes des Punktes Q von der Grundflächenebene), so kann das Grundflächenpolygon in endlich viele Dreiecke $A_iB_iC_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) zerlegt werden. Die Simplexe $\mathbf{S}_i = A_iB_iC_iQ$ haben dann alle dieselbe Höhe bezüglich der Grundflächen

$A_i B_i C_i$ und liefern eine Zerlegung $P = \sum_{i=1}^m S_i$ der Pyramide P . Dann gilt

$$\begin{aligned} V(P) &= \sum_{i=1}^m V(S_i) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{3} F(A_i B_i C_i) \cdot h \\ &= \frac{1}{3} h \sum_{i=1}^m F(A_i B_i C_i) = \frac{1}{3} F(P_1 P_2 \dots P_n) \cdot h; \end{aligned}$$

es gilt also folgender

Satz vom Volumen der Pyramide. *Das Volumen einer Pyramide ist gleich dem dritten Teil vom Produkt aus dem Grundflächeninhalt und der Höhe.*

Selbstverständlich kann das hier definierte Volumenfunktional V in Analogie zur Streckenmessung und zur elementaren Inhaltsmessung in der Ebene als Homomorphismus der kommutativen Halbgruppe $(\mathfrak{P}_3/\cong, +)$ der Klassen zerlegungsgleicher Polyeder in die kommutative Halbgruppe $(\mathbb{R}_+, +)$ der nicht negativen reellen Zahlen aufgefaßt werden. Bemerkenswert ist aber, daß diese Analogie nicht weiter reicht: Die so interpretierte Abbildung V ist nämlich nicht injektiv, d. h. auch kein Isomorphismus. Das bedeutet, daß es volumengleiche Polyeder P und Q gibt ($V(P) = V(Q)$), die nicht zerlegungsgleich sind. Die über \mathfrak{P}_3 erklärten Relationen „volumengleich“ und „zerlegungsgleich“ sind also im Gegensatz zum ebenen Fall nicht äquivalent — oder anders ausgedrückt: Die Volumengleichheit zweier Polyeder ist notwendig, aber nicht hinreichend für ihre Zerlegungsgleichheit. So ist beispielsweise ein reguläres Tetraeder (Simplex, dessen Kanten alle die gleiche Länge haben) nicht mit einem volumengleichen Würfel zerlegungsgleich.

1.3. Allgemeiner Inhalt

In 1.1.5. und 1.2.5. wurde die Inhaltsmessung von Polygonen bzw. Polyedern eingeführt. Dieser Inhaltsbegriff hieß elementar, weil er sich auf eine besonders einfache Klasse ebener bzw. räumlicher Punktmenge bezog, nämlich die „geradlinig“ bzw. „ebenflächlich begrenzten“ Punktmenge. Nun gibt es sowohl in der Ebene als auch im Raum wesentlich allgemeinere Punktmenge, die für die Geometrie und ihre Anwendung in der Praxis von großer Bedeutung sind und für die eine Inhaltsmessung erforderlich ist. Ziel dieses Kapitels ist es, für bestimmte Klassen ebener bzw. räumlicher nicht elementarer Punktmenge einen Inhaltsbegriff einzuführen, den *allgemeinen Inhalt*, der im hier behandelten Fall auch *Jordanscher* oder *Riemannscher Inhalt* heißt. Dabei wird man fordern, daß der neue Inhaltsbegriff eine Verallgemeinerung des elementaren Inhalts ist, d. h., der allgemeine Inhalt soll auch von Polygonen bzw. Polyedern gebildet werden können und in diesem Fall mit dem elementaren Inhalt übereinstimmen. Da der ebene und der räumliche Fall völlig analog zu behandeln sind, werde in diesem Kapitel $I_2 := F$ und $I_3 := V$ gesetzt, so daß die zu lösende Aufgabe wie folgt formuliert werden kann: Es ist eine *Fort-*

setzung J_k des elementaren Inhaltsfunktional I_k von \mathfrak{P}_k auf eine Klasse \mathfrak{Q}_k von Punktmenge des R^k gesucht ($k = 2, 3$); dabei stehe R^k für die euklidische Ebene ($k = 2$) bzw. den euklidischen Raum ($k = 3$).

1.3.1. Quadrierbare Punktmenge

Zunächst muß die Klasse \mathfrak{Q}_k der Punktmenge charakterisiert werden, auf welche sich der allgemeine Inhaltsbegriff beziehen soll. Das geschieht in folgender

Definition. Eine Punktmenge \mathbf{P} des R^k heißt *quadrierbar*, wenn es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ Elemente \mathbf{A} und \mathbf{B} aus \mathfrak{P}_k gibt mit

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{P} \subseteq \mathbf{B} \quad \text{und} \quad I_k(\mathbf{B}) - I_k(\mathbf{A}) < \varepsilon.$$

Die Menge aller in diesem Sinne quadrierbaren Punktmenge des R^k sei \mathfrak{Q}_k . Als unmittelbare Folgerung aus der Definition ergibt sich, daß die quadrierbaren Punktmenge beschränkt, d. h. stets in einem genügend großen Würfel bzw. Quadrat enthalten sind. Außerdem ergibt sich, daß Polygone und Polyeder quadrierbar sind: $\mathfrak{P}_k \subseteq \mathfrak{Q}_k$.

Als besondere Klasse quadrierbarer Punktmenge sei ferner die der *Nullmenge* erwähnt: Eine Punktmenge \mathbf{N} heißt *Nullmenge*, wenn es zu jeder positiven reellen Zahl ε ein Element \mathbf{B} aus \mathfrak{P}_k gibt mit $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{B}$ und $I_k(\mathbf{B}) < \varepsilon$. Daß eine Nullmenge \mathbf{N} tatsächlich quadrierbar ist, ergibt sich aus $\emptyset \subseteq \mathbf{N} \subseteq \mathbf{B}$ und $\emptyset \in \mathfrak{P}_k$ mit $I_k(\emptyset) = 0$, also $I_k(\mathbf{B}) - I_k(\emptyset) = I_k(\mathbf{B}) < \varepsilon$. Einfache Beispiele für Nullmenge sind die uneigentlichen Polygone im Fall $k = 2$ und die uneigentlichen Polyeder im Fall $k = 3$.

Bevor nun die allgemeine Inhaltslehre für \mathfrak{Q}_k entwickelt werden kann, benötigt man noch eine früher nicht erwähnte Eigenschaft des elementaren Inhaltsfunktional. Es gilt folgender

Satz von der Monotonie des elementaren Inhalts. Aus $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{P}_k$ und $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ folgt $I_k(\mathbf{A}) \leq I_k(\mathbf{B})$.

Beweis. Aus $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{P}_k$ und $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ kann man auf die Existenz eines $\mathbf{C} \in \mathfrak{P}_k$ schließen (eventuell $\mathbf{C} = \emptyset$), so daß \mathbf{B} die elementargeometrische Summe von \mathbf{A} und \mathbf{C} wird: $\mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{B}$. Daraus folgt mit der Additivität von I_k die Beziehung $I_k(\mathbf{A}) + I_k(\mathbf{C}) = I_k(\mathbf{B})$ und mit $I_k(\mathbf{C}) \geq 0$ schließlich $I_k(\mathbf{A}) \leq I_k(\mathbf{B})$.

Im folgenden soll für $\mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{B}$ mit $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathfrak{P}_k$ auch die *elementargeometrische Differenz* $\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{C}$ geschrieben werden, die für $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{B}$ „ausführbar“ ist und für welche dann

$$(1) \quad I_k(\mathbf{A}) = I_k(\mathbf{B}) - I_k(\mathbf{C})$$

ist.

Ferner gilt der

Satz von der erweiterten Additivität des elementaren Inhalts. Für alle A, B aus \mathfrak{F}_k ist

$$(2) \quad I_k(A \cup B) = I_k(A) + I_k(B) - I_k(A \cap B).$$

Beweis. Ist $A \cap B$ uneigentlich, so ist $I_k(A \cap B) = 0$ und $A \cup B = A + B$, dann fällt aber (2) mit der früheren einfachen Additivität zusammen. Ist $A \cap B \in \mathfrak{F}_k$, so gilt

$$I_k(A \cup B) = I_k(A + (B - (A \cap B))) = I_k(A) + I_k(B - A \cap B)$$

und wegen $A \cap B \subseteq B$ nach (1)

$$I_k(A \cup B) = I_k(A) + I_k(B) - I_k(A \cap B).$$

Wie bei der Einführung der Polygone und Polyeder können nun auch Operationen über \mathfrak{L}_k erklärt werden. Es gilt der

Satz von den Operationen über \mathfrak{L}_k . Für beliebige quadrierbare Punktmengen P und Q sind auch die Mengen $P \cup Q$, $P \cap Q$ und $P \setminus Q$ quadrierbar.

Beweis. Es seien P und Q aus \mathfrak{L}_k und ε eine beliebige positive reelle Zahl. Dann gibt es Elemente A_i und B_i aus \mathfrak{F}_k ($i = 1, 2$) mit

$$(3) \quad A_1 \subseteq P \subseteq B_1, \quad I_k(B_1) - I_k(A_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$(4) \quad A_2 \subseteq Q \subseteq B_2, \quad I_k(B_2) - I_k(A_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aus (3) und (4) folgt

$$(5) \quad A_1 \cup A_2 \subseteq P \cup Q \subseteq B_1 \cup B_2$$

und mit (2)

$$(6) \quad I_k(B_1 \cup B_2) - I_k(A_1 \cup A_2) = I_k(B_1) + I_k(B_2) - I_k(B_1 \cap B_2) \\ - I_k(A_1) - I_k(A_2) + I_k(A_1 \cap A_2).$$

Wegen $A_1 \cap A_2 \subseteq B_1 \cap B_2$ und der Monotonie von I_k ist

$$I_k(A_1 \cap A_2) \leq I_k(B_1 \cap B_2),$$

und die linke Seite der Gleichung (6) kann abgeschätzt werden durch

$$I_k(B_1 \cup B_2) - I_k(A_1 \cup A_2) \leq I_k(B_1) - I_k(A_1) + I_k(B_2) - I_k(A_2),$$

mit (3) und (4) gilt dann

$$I_k(B_1 \cup B_2) - I_k(A_1 \cup A_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

was mit (5) zusammen $P \cup Q \in \mathfrak{L}_k$ bedeutet.

Andererseits folgt aus (3) und (4)

$$(7) \quad \mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \subseteq \mathbf{P} \cap \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2.$$

Nach dem Satz über die erweiterte Additivität von I_k folgt

$$I_k(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2) = I_k(\mathbf{A}_1) + I_k(\mathbf{A}_2) - I_k(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2)$$

und

$$I_k(\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2) = I_k(\mathbf{B}_1) + I_k(\mathbf{B}_2) - I_k(\mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} I_k(\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2) - I_k(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2) &= I_k(\mathbf{B}_1) - I_k(\mathbf{A}_1) + I_k(\mathbf{B}_2) \\ &\quad - I_k(\mathbf{A}_2) + I_k(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2) - I_k(\mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2). \end{aligned}$$

Wegen (5) und der Monotonie von I_k ist $I_k(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2) \leq I_k(\mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2)$, so daß unter Beachtung von (3) und (4)

$$\begin{aligned} I_k(\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2) - I_k(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2) &\leq I_k(\mathbf{B}_1) - I_k(\mathbf{A}_1) \\ &\quad + I_k(\mathbf{B}_2) - I_k(\mathbf{A}_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

wird, was mit (7) zusammen $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q} \in \mathfrak{D}_k$ bedeutet.

Zum Beweis von $\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q} \in \mathfrak{D}_k$ schließlich werde beachtet, daß $\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q} = \mathbf{P} \setminus (\mathbf{P} \cap \mathbf{Q})$ gilt, so daß o. B. d. A. $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$ angenommen werden kann. Dann folgt aus (3) und (4) zunächst

$$(8) \quad \mathbf{A}_1 - (\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{B}_2) \subseteq \mathbf{P} \setminus \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_2,$$

und die Differenz $I_k(\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_2) - I_k(\mathbf{A}_1 - (\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{B}_2)) = a$ kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} a &= I_k(\mathbf{B}_1) - I_k(\mathbf{A}_2) - I_k(\mathbf{A}_1) + I_k(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{B}_2), \\ a &= I_k(\mathbf{B}_1) - I_k(\mathbf{A}_1) - I_k(\mathbf{A}_2) + I_k(\mathbf{A}_1) + I_k(\mathbf{B}_2) - I_k(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{B}_2). \end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{A}_1 \subseteq \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{B}_2$, also $I_k(\mathbf{A}_1) \leq I_k(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{B}_2)$, ist weiter

$$a \leq I_k(\mathbf{B}_1) - I_k(\mathbf{A}_1) + I_k(\mathbf{B}_2) - I_k(\mathbf{A}_2),$$

nach (3) und (4) also $a < \varepsilon$, was zusammen mit (8) schließlich $\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q} \in \mathfrak{D}_k$ bedeutet, womit der Satz vollständig bewiesen ist.

Abschließend sei noch folgendes bemerkt:

1. Die scheinbar willkürliche Forderung der Quadrierbarkeit an die zu messenden Punktmenge erlaubt einmal die unmittelbare Folgerung $\mathfrak{P}_k \subseteq \mathfrak{D}_k$, zum anderen läßt sich zeigen, daß bei Zulassung aller beschränkten Punktmenge zumindest im Fall $k > 2$ kein Inhaltsfunktional im Sinne von 1.3.2. gefunden werden kann.

2. Führt man den Begriff des Randes einer Punktmenge ein, so ergibt sich folgendes Quadrierbarkeitskriterium: Eine beschränkte Menge \mathbf{P} ist genau dann quadrierbar ($\mathbf{P} \in \mathfrak{D}_k$), wenn ihr Rand eine Nullmenge ist.

3. Durch die Ansätze

$$J_k^i(\mathbf{P}) := \sup \{ I_k(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \in \mathfrak{P}_k \wedge \mathbf{A} \subseteq \mathbf{P} \}$$

und

$$J_k^a(\mathbf{P}) := \inf \{ I_k(\mathbf{B}) : \mathbf{B} \in \mathfrak{P}_k \wedge \mathbf{P} \subseteq \mathbf{B} \}$$

lassen sich die für alle beschränkten Punktmenge \mathbf{P} erklärten Funktionale des inneren bzw. äußeren (Jordanschen) Inhaltes erklären. Damit gilt:

$$\mathbf{P} \in \mathfrak{D}_k \Leftrightarrow J_k^i(\mathbf{P}) = J_k^a(\mathbf{P}).$$

1.3.2. Jordanscher Inhalt

Nun kann in Analogie zum elementaren Inhalt der allgemeine Inhaltsbegriff für \mathfrak{D}_k eingeführt werden durch folgende

Definition. Unter *Inhaltsmessung quadrierbarer Punktmenge* wird die Angabe einer Abbildung J_k von \mathfrak{D}_k in die Menge \mathbb{R}_+ der nicht negativen reellen Zahlen mit folgenden Eigenschaften verstanden:

- (1) Aus $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathfrak{D}_k$ und $\mathbf{P} \cong \mathbf{Q}$ folgt $J_k(\mathbf{P}) = J_k(\mathbf{Q})$ (Bewegungsinvarianz).
- (2) Aus $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathfrak{D}_k$ und $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q} = \emptyset$ folgt $J_k(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) = J_k(\mathbf{P}) + J_k(\mathbf{Q})$ (Additivität).
- (3) Ist \mathbf{W}_k ein Quadrat der Seitenlängenmaßzahl 1 ($k=2$) bzw. ein Würfel der Kantenlängenmaßzahl 1 ($k=3$), so gilt $J_k(\mathbf{W}_k) = 1$ (Normiertheit).

Das Bild $J_k(\mathbf{P})$ einer quadrierbaren Punktmenge \mathbf{P} heißt *Maßzahl* des allgemeinen oder *Jordanschen Inhalts* von \mathbf{P} , die Abbildung J_k allgemeines oder *Jordansches Inhaltsfunktional*. Die Forderung (3) legt es wieder nahe, den Jordanschen Inhalt einer Punktmenge \mathbf{P} als Klasse aller Punktmenge \mathbf{Q} mit $J_k(\mathbf{Q}) = J_k(\mathbf{P})$ aufzufassen und durch das formale Produkt aus Maßzahl und Maßeinheit anzugeben: $|\mathbf{P}| = J_k(\mathbf{P}) |\mathbf{W}_k|$.

Bei dieser (axiomatischen) Einführung des allgemeinen Inhalts erhebt sich sofort wieder die Frage nach der Existenz und Einzigkeit des Funktionals J_k . Zunächst gilt der

Satz von der Existenz des Jordanschen Inhaltsfunktionals. *Es gibt wenigstens eine Abbildung J_k von \mathfrak{D}_k in \mathbb{R}_+ mit den Eigenschaften (1), (2) und (3).*

Beweis. Durch den Ansatz

$$J_k(\mathbf{P}) := \sup \{ I_k(\mathbf{A}) : \mathbf{A} \in \mathfrak{P}_k \wedge \mathbf{A} \subseteq \mathbf{P} \}$$

ist wegen der Beschränktheit der quadrierbaren Punktmenge eine (eindeutige) Abbildung von \mathfrak{D}_k in \mathbb{R} gegeben. Wegen $I_k(\mathbf{A}) \geq 0$ für alle \mathbf{A} aus \mathfrak{P}_k ist auch stets

$J_k(\mathbf{P}) \geq 0$, also J_k sogar eine Abbildung in \mathbf{R}_+ . Bewegungsinvarianz (1) und Normiertheit (3) ergeben sich ebenfalls sofort aus der Definition von J_k und \mathfrak{D}_k . Zum Nachweis der Additivität (2) von J_k seien \mathbf{P} und \mathbf{Q} quadrierbare Mengen mit $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q} = \emptyset$. Dann gibt es für jede reelle Zahl $\varepsilon > 0$ Elemente $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \mathfrak{P}_k$ mit

$$(9) \quad \mathbf{A}_1 \subseteq \mathbf{P} \subseteq \mathbf{B}_1, \quad I_k(\mathbf{B}_1) - I_k(\mathbf{A}_1) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$(10) \quad \mathbf{A}_2 \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{B}_2, \quad I_k(\mathbf{B}_2) - I_k(\mathbf{A}_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

bzw.

$$(11) \quad I_k(\mathbf{B}_1) + I_k(\mathbf{B}_2) - (I_k(\mathbf{A}_1) + I_k(\mathbf{A}_2)) < \varepsilon.$$

Außerdem ergibt sich aus der Definition von J_k und der Monotonie von I_k noch

$$I_k(\mathbf{A}_1) \leq J_k(\mathbf{P}) \leq I_k(\mathbf{B}_1)$$

und

$$I_k(\mathbf{A}_2) \leq J_k(\mathbf{Q}) \leq I_k(\mathbf{B}_2)$$

bzw.

$$(12) \quad I_k(\mathbf{A}_1) + I_k(\mathbf{A}_2) \leq J_k(\mathbf{P}) + J_k(\mathbf{Q}) \leq I_k(\mathbf{B}_1) + I_k(\mathbf{B}_2).$$

Andererseits folgt aus (9) und (10)

$$\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \subseteq \mathbf{P} \cup \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2$$

und, da mit $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q} = \emptyset$ auch $\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 = \emptyset$ gelten muß,

$$\begin{aligned} I_k(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2) &= I_k(\mathbf{A}_1) + I_k(\mathbf{A}_2) \leq J_k(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \\ &\leq I_k(\mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2) \leq I_k(\mathbf{B}_1) + I_k(\mathbf{B}_2) \end{aligned}$$

bzw.

$$(13) \quad I_k(\mathbf{A}_1) + I_k(\mathbf{A}_2) \leq J_k(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) \leq I_k(\mathbf{B}_1) + I_k(\mathbf{B}_2).$$

Da ε beliebig wählbar ist mit $\varepsilon > 0$, besagen (11), (12) und (13) zusammen gerade $J_k(\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}) = J_k(\mathbf{P}) + J_k(\mathbf{Q})$, womit der Existenzsatz endgültig bewiesen ist.

Bevor die Frage der Einzigkeit des Funktionals J_k untersucht wird, sollen aus den Eigenschaften (1), (2) und (3) noch einige Folgerungen gezogen werden. Zunächst gilt der

Satz von der Fortsetzung des Funktionals I_k . *Jede Abbildung J_k von \mathfrak{D}_k in \mathbf{R}_+ mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) ist eine Fortsetzung von I_k .*

Beweis. Da I_k die einzige Abbildung von \mathfrak{P}_k in \mathbf{R}_+ mit (1), (2) und (3) ist, muß für alle $\mathbf{C} \in \mathfrak{P}_k$ zwangsläufig $I_k(\mathbf{C}) = J_k(\mathbf{C})$ gelten.

Ferner gilt der

Satz von der Monotonie des allgemeinen Inhalts. *Jede Abbildung J_k von \mathfrak{D}_k in \mathbf{R}_+ mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) ist monoton, d. h., aus $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathfrak{D}_k$ und $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q}$ folgt $J_k(\mathbf{P}) \leq J_k(\mathbf{Q})$.*

Beweis. Es seien $P, Q \in \mathfrak{D}_k$ mit $P \subseteq Q$. Dann ist nach dem Satz von den Operationen über \mathfrak{D}_k auch $R := Q \setminus P$ eine quadrierbare Punktmenge. Außerdem ist $R \cap P = \emptyset$, so daß aus der Additivität von J_k die Beziehung $J_k(R \cup P) = J_k(R) + J_k(P)$ folgt. Also ist $J_k(Q) = J_k(R \cup P) = J_k(R) + J_k(P)$ und mit $J_k(R) \geq 0$ auch $J_k(P) \leq J_k(Q)$.

Schließlich gilt folgender

Satz vom allgemeinen Inhalt als obere Grenze. *Für jede Abbildung J_k von \mathfrak{D}_k in \mathbb{R}_+ mit (1), (2) und (3) gilt*

$$J_k(P) = \sup \{ I_k(C) : C \in \mathfrak{F}_k \wedge C \subseteq P \} \quad \text{für } P \in \mathfrak{D}_k.$$

Beweis. Nach dem Satz von der Monotonie des allgemeinen Inhalts folgt für beliebiges $A, P \in \mathfrak{D}_k$ aus $A \subseteq P$ zunächst

$$J_k(A) \leq \sup \{ J_k(C) : C \in \mathfrak{D}_k \wedge C \subseteq P \} \leq J_k(P).$$

Andererseits gibt es zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ Elemente A und B aus \mathfrak{F}_k mit $A \subseteq P \subseteq B$ und $I_k(B) - I_k(A) < \varepsilon$. Unter Berücksichtigung des Satzes von der Fortsetzung des Funktionals I_k gilt also

$$I_k(A) \leq \sup \{ I_k(C) : C \in \mathfrak{F}_k \wedge C \subseteq P \} \leq J_k(P) \leq I_k(B)$$

bzw.

$$0 \leq J_k(P) - \sup \{ I_k(C) : C \subseteq P \} \leq I_k(B) - I_k(A) < \varepsilon,$$

also

$$J_k(P) = \sup \{ I_k(C) : C \in \mathfrak{F}_k \wedge C \subseteq P \}.$$

Der beim Beweis des Existenzsatzes gegebene Ansatz ist demnach „zwangsläufig“; unter Berücksichtigung der Einzigkeit von I_k gilt also auch der

Satz von der Einzigkeit des Jordanschen Inhaltsfunktionals. *Es gibt höchstens eine Abbildung von \mathfrak{D}_k in \mathbb{R}_+ mit den Eigenschaften (1) bis (3).*

Damit ist das eingangs gestellte Ziel erreicht: Das Jordansche Inhaltsfunktional J_k ist die einzige Fortsetzung des elementaren Inhaltsfunktionals I_k von \mathfrak{F}_k auf die Menge \mathfrak{D}_k der quadrierbaren Punktfolgen des \mathbb{R}^k .

Ergänzend sei noch folgendes erwähnt:

1. Man hätte statt mit der oberen Grenze der elementaren Inhalte „einschriebener“ Polygone bzw. Polyeder auch mit der unteren Grenze der Inhalte „umschriebener“ arbeiten können — für quadrierbare Punktfolgen P stimmen nämlich nach einer früheren Bemerkung innerer und äußerer Jordanscher Inhalt überein, so daß

$$J_k(P) = \sup \{ I_k(A) : A \in \mathfrak{F}_k \wedge A \subseteq P \} = \inf \{ I_k(B) : B \in \mathfrak{F}_k \wedge P \subseteq B \}$$

gilt.

2. Statt der vollen Klasse \mathfrak{P}_k hätte zu den „Über-“ bzw. „Unterdeckungen“ der Punktmenge P auch eine Teilklasse von \mathfrak{P}_k ausgereicht, etwa die Menge aller Quadrate bzw. Würfel oder auch die Menge aller „achsenparallelen“ Rechtecke bzw. Quader (vgl. MfL, Bd. 5).

3. Das hier angegebene Verfahren des Übergangs vom elementaren zum Jordanschen Inhalt bewirkt, falls es auf \mathfrak{D}_k angewendet wird, keine Erweiterung von \mathfrak{D}_k , d. h., wenn X eine beliebige Punktmenge des R^k ist, so daß sich zu jedem $\varepsilon > 0$ quadrierbare Punktmenge P und Q finden lassen mit $P \subseteq X \subseteq Q$ und $J_k(Q) - J_k(P) < \varepsilon$, so ist auch X quadrierbar. In diesem Sinne ist die Menge \mathfrak{D}_k bzw. das Jordansche Inhaltssystem *vollständig*.

1.3.3. Berechnung des Inhalts spezieller Punktmenge

Die im vorigen Abschnitt entwickelte Inhaltstheorie wird nun auf wichtige spezielle Punktmenge angewandt, deren (Jordanscher) Inhalt berechnet werden soll. Die dabei benötigten geometrischen Konstruktionen werden z. T. erst im zweiten Geometrieband gerechtfertigt.

Zunächst wird eine ganz in einer Ebene α enthaltene Punktmenge betrachtet, nämlich der Kreis: Eine ebene Punktmenge

$$K := \{P : |PM| \leq |AB| \wedge P \in \alpha\}$$

heißt *Kreisfläche* mit dem *Mittelpunkt* M und dem *Radius* $|AB|$; die Menge $\{P : |PM| = |AB| \wedge P \in \alpha\}$ heißt *Rand* von K oder *Kreislinie*. Der Radius $|AB|$ ist also die Länge der Verbindungsstrecken PM von Randpunkten P des Kreises mit dem Mittelpunkt; jede solche Strecke soll selbst Radius genannt werden. So wie in vielen Fällen die Kreislinie auch kurz „Kreis“ genannt wird, soll im folgenden der Zusatz „-fläche“ weggelassen werden und kurz vom „Kreis“ gesprochen werden im Sinne der Kreisfläche, von der nun untersucht werden soll, ob sie eine quadrierbare Menge ist ($K \in \mathfrak{D}_2$). Wenn das der Fall ist, soll die Inhaltsmaßzahl $J_2(K)$ berechnet werden. Dazu werden zwei sich in M schneidende und zueinander senkrechte Geraden mit der Kreislinie zum Schnitt gebracht, was die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 liefere. Das Polygon $P_1 = P_1P_2P_3P_4$ ist dann ein Quadrat, dessen Diagonalen (wie alle durch M gehenden Verbindungsstrecken zweier Punkte der Kreislinie) *Durchmesser* des Kreises heißen. Für P_1 gilt $P_1 \in K$. Von M aus wird das Lot l auf die Quadratseite P_1P_2 gefällt; die Gerade l schneide die Kreislinie in den Punkten T_1, T_2 , durch welche die Parallelen t_i zu $g(P_1P_2)$ gelegt werden — t_i hat mit der Kreislinie keinen weiteren Punkt gemeinsam und ist deshalb *Tangente* in T_i . Werden auch bezüglich P_2P_3 solche Geraden konstruiert, so entsteht schließlich ein neues Quadrat $Q_1 = Q_1Q_2Q_3Q_4$, welches wie P_1 das Symmetriezentrum M hat und für welches $K \subseteq Q_1$ gilt (Abb. 1.32). Insgesamt ist $P_1 \in K \subseteq Q_1$ mit $F(Q_1) - F(P_1) = 4r^2 - 2r^2 = 2r^2$, wenn $r = l(AB)$ die Radiusmaßzahl des Kreises K

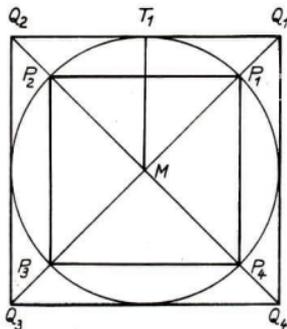


Abb. 1.32

ist. Die beiden Parallelen durch M zu den Quadratseiten schneiden die Kreislinie in Punkten P_5, P_6 und P_7, P_8 – es entsteht ein Achteck $P_2 \subseteq K$, zu dem wie beim Übergang von P_1 zu Q_1 ein Achteck Q_2 gefunden wird ($K \subseteq Q_2$), dessen Seiten die Kreislinie berühren und parallel zu denen von P_2 sind. Es gilt

$$P_1 \subseteq P_2 \subseteq K \subseteq Q_2 \subseteq Q_1.$$

Dieses Verfahren wird fortgesetzt. Es ist dann zu zeigen, daß $F(Q_i) - F(P_i)$ beliebig klein wird. Dazu wird die Seite $P_r P_s$ des nach dem n -ten Schritt entstandenen Polygons P_n betrachtet (Abb. 1.33a). Dabei sei h_n die Höhenmaßzahl im Dreieck $P_s M P_r$ und $a_n = \frac{1}{2} l(P_r P_s)$. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung $0 < r - h_n < a_n$. Da a_n beliebig klein wird für wachsendes n , konvergiert die Folge der h_n gegen r :

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = r.$$

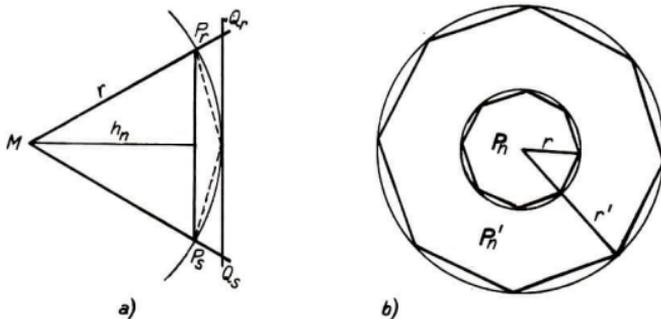


Abb. 1.33

Ferner gilt nach dem Strahlensatz (zweiter Teil)

$$(15) \quad \frac{\frac{1}{2} l(P_r P_s)}{\frac{1}{2} l(Q_r Q_s)} = \frac{h_n}{r}.$$

Schließlich ergibt sich für die Inhaltsmaßzahlen der Dreiecke $P_s P_r M$ und $Q_s Q_r M$:

$$(16) \quad F(P_s P_r M) = \frac{1}{2} l(P_r P_s) \cdot h_n, \quad F(Q_s Q_r M) = \frac{1}{2} l(Q_r Q_s) \cdot r.$$

Wegen $F(P_n) = 2^{n+1} F(P_s P_r M)$ und $F(Q_n) = 2^{n+1} F(Q_s Q_r M)$ folgt also unter Berücksichtigung von (15) und (16)

$$\frac{F(P_n)}{F(Q_n)} = \left(\frac{h_n}{r}\right)^2.$$

Wegen (14) gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$ bei geeignetem n also $F(Q_n) - F(P_n) = F(Q_n) \left(1 - \left(\frac{h_n}{r}\right)^2\right) < \varepsilon$. Der Kreis \mathbf{K} ist also quadrierbar mit der Inhaltsmaßzahl

$$(17) \quad J_2(\mathbf{K}) = \sup \{F(P_n)\}.$$

Werden zwei Kreise \mathbf{K} und \mathbf{K}' mit den Radiusmaßzahlen r und r' und demselben Mittelpunkt M betrachtet, \mathbf{K} und \mathbf{K}' sind *konzentrisch* (Abb. 1.33 b), so ergibt sich für die „einschriebenen“ Polygone P_n bzw. P'_n mit denselben Überlegungen

$$\frac{F(P_n)}{F(P'_n)} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2$$

und somit

$$(18) \quad J_2(\mathbf{K}) \cdot r'^2 = J_2(\mathbf{K}') \cdot r^2.$$

Setzt man für die Inhaltsmaßzahl eines Kreises \mathbf{K}' der Radiusmaßzahl $r' = 1$ kurz $J_2(\mathbf{K}') = \pi$, so gilt nach (18) folgender

Satz vom Flächeninhalt des Kreises. Die Inhaltsmaßzahl eines Kreises \mathbf{K} mit der Radiusmaßzahl r ist $J_2(\mathbf{K}) = \pi \cdot r^2$.

Dabei ist π eine transzendente Zahl, die etwa nach (17) mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden kann; ihr Wert ist näherungsweise 3,14159.

Wird die in einer Ebene α gelegene beliebige Punktmenge \mathbf{A} durch eine Verschiebung v auf die nicht in α liegende Punktmenge \mathbf{A}' abgebildet, so heißt die Punktmenge

$$\mathbf{Z} := \{P: P \in AA' \wedge A \in \mathbf{A} \wedge A' = v(A)\}$$

in Verallgemeinerung des Begriffs „Prisma“ *Zylinder* mit der Grundfläche \mathbf{A} , der Deckfläche \mathbf{A}' und der Höhenmaßzahl h , wenn h die Maßzahl des Abstandes der Ebenen α und $v(\alpha)$ ist. Es gilt folgender

Satz vom Zylindervolumen. Ist die Grundfläche \mathbf{A} eines Zylinders \mathbf{Z} mit der Höhenmaßzahl h eine quadrierbare Punktmenge mit der Inhaltsmaßzahl $J_2(\mathbf{A})$, so ist auch \mathbf{Z} eine quadrierbare Punktmenge, und es gilt $J_3(\mathbf{Z}) = J_2(\mathbf{A}) \cdot h$.

Beweis. Es sei \mathbf{Z} ein Zylinder mit der Grundfläche \mathbf{A} , der Deckfläche $v(\mathbf{A}) = \mathbf{A}'$ und der Höhenmaßzahl h . Aus der Quadrierbarkeit von \mathbf{A} folgt für jedes $\varepsilon > 0$ die Existenz von Polygonen \mathbf{B} und \mathbf{C} mit $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} \subseteq \mathbf{C}$ und $F(\mathbf{C}) - F(\mathbf{B}) < \frac{\varepsilon}{h}$.

Ist \mathbf{X} das Prisma mit der Grundfläche \mathbf{B} und der Deckfläche $v(\mathbf{B})$ und \mathbf{Y} das Prisma mit der Grundfläche \mathbf{C} und der Deckfläche $v(\mathbf{C})$, so gilt $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Y}$ und $V(\mathbf{Y}) - V(\mathbf{X}) = h(F(\mathbf{C}) - F(\mathbf{B})) < \varepsilon$. Folglich ist \mathbf{Z} quadrierbar mit

$$J_3(\mathbf{Z}) = \sup \{V(\mathbf{X}) : \mathbf{X} \subseteq \mathbf{Z}\} = h \cdot \sup \{F(\mathbf{B}) : \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}\},$$

woraus $J_3(\mathbf{Z}) = h \cdot J_2(\mathbf{A})$ folgt.

Für einen Kreiszyylinder \mathbf{Z}^0 , dessen Grundfläche ein Kreis mit der Radiusmaßzahl r ist, gilt also insbesondere $J_3(\mathbf{Z}^0) = \pi r^2 h$.

Wird außer der in einer Ebene α liegenden Punktmenge \mathbf{A} ein Punkt $S \in \alpha$ betrachtet, so heißt die Punktmenge

$$\mathbf{M} := \{P : P \in AS \wedge A \in \mathbf{A}\}$$

Kegel mit der Grundfläche \mathbf{A} , der Spitze S und der Höhenmaßzahl h , wenn die Höhe der Abstand des Punktes S von der Ebene α ist. Dann gilt folgender

Satz vom Kegelvolumen. *Ist die Grundfläche \mathbf{A} eines Kegels \mathbf{M} mit der Höhenmaßzahl h eine quadrierbare Punktmenge mit der Inhaltsmaßzahl $J_2(\mathbf{A})$, so ist auch \mathbf{M} eine quadrierbare Punktmenge mit der Inhaltsmaßzahl*

$$J_3(\mathbf{M}) = \frac{1}{3} J_2(\mathbf{A}) \cdot h.$$

Der Beweis ist völlig analog zum vorigen und kann dem Leser als Übung überlassen werden.

Für einen Kreiskegel \mathbf{M}^0 , dessen Grundfläche ein Kreis mit der Radiusmaßzahl r ist, gilt insbesondere $J_3(\mathbf{M}^0) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

Eine Punktmenge \mathbf{K} des Raumes heißt *Kugel* mit dem Mittelpunkt M und der Radiusmaßzahl r ($r \in \mathbb{R}$, $r > 0$), wenn $\mathbf{K} := \{P : l(PM) \leq r\}$ ist. Es gilt folgender

Satz vom Kugelvolumen. *Jede Kugel \mathbf{K} ist eine quadrierbare Punktmenge mit der Inhaltsmaßzahl $J_3(\mathbf{K}) = \frac{4}{3} \pi r^3$, wenn r die Maßzahl des Kugelradius ist.*

Beweis. Es sei \mathbf{K} eine Kugel mit der Radiusmaßzahl $r = r_0$ und dem Mittelpunkt M_0 . Eine Ebene α_0 durch M_0 zerlegt \mathbf{K} in zwei zu α_0 symmetrische — also kongruente — Halbkugeln. Es genügt, eine dieser Halbkugeln (\mathbf{H}) zu betrachten. Der zu α_0 senkrechte Halbkugelradius wird in n kongruente Teilstrecken zerlegt, und durch jeden der entstehenden Teilpunkte P_1, P_2, \dots, P_{n-1} wird eine zu α_0 parallele Ebene α_i gelegt. Der Durchschnitt $\alpha_i \cap \mathbf{H}$ ist ein Kreis \mathbf{K}_i mit der Radiusmaßzahl r_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$). Auf diesen Kreisen \mathbf{K}_i werden gerade Kreiszyylinder $\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}'_i$ mit der Höhenmaßzahl $\frac{r_0}{n}$ „nach beiden Seiten errichtet“, so daß \mathbf{K}_i

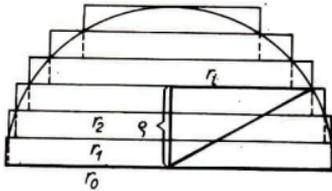


Abb. 1.34

jeweils Grundfläche von Z'_i und Deckfläche von Z_i ist (Abb. 1.34 stellt das Verfahren im Querschnitt dar). Mit

$S_n := Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_{n-1}$ und $S'_n := Z'_0 \cup Z'_1 \cup \dots \cup Z'_{n-1}$
gilt

$$(19) \quad S_n \subseteq H \subseteq S'_n.$$

Aus Abb. 1.34 liest man ferner nach dem Satz des PYTHAGORAS ab, daß

$$q^2 + r_i^2 = \left(i \cdot \frac{r_0}{n}\right)^2 + r_i^2 = r_0^2$$

ist. Damit wird

$$(20) \quad J_3(S_n) = \sum_{i=1}^{n-1} J_3(Z_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \pi r_i^2 \frac{r_0}{n} = \frac{\pi r_0^3}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right)$$

und

$$(21) \quad J_3(S'_n) = \sum_{i=0}^{n-1} J_3(Z'_i) = \frac{\pi r_0^3}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right),$$

so daß

$$(22) \quad J_3(S'_n) - J_3(S_n) = \frac{\pi r_0^3}{n} < \varepsilon$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$ bei genügend großem n gilt. Wegen der Vollständigkeit des Jordanschen Inhaltssystems (vgl. Bemerkung 3 in 1.3.2.) bedeutet (22) zusammen mit (19), daß die Punktmenge H quadrierbar ist, und mit (19) gilt

$$(23) \quad J_3(S_n) \leq J_3(H) \leq J_3(S'_n).$$

Zur Berechnung der Inhaltsmaßzahl $J_3(H)$ werden die Beziehungen (20) und (21) weiter ausgewertet. Es gilt

$$(20') \quad J_3(S_n) = \pi r_0^3 \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{i^2}{n^3}\right) = \pi r_0^3 \left(1 - \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^n i^2\right)$$

und

$$(21') \quad J_3(S'_n) = \pi r_0^3 \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{i^2}{n^3}\right) = \pi r_0^3 \left(1 - \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2\right).$$

Mit der durch vollständige Induktion leicht zu bestätigenden Ungleichung

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 < \frac{n^3}{3} < \sum_{i=0}^n i^2$$

folgt aus (20') und (21') insgesamt

$$J_3(S_n) < \pi r_0^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) < J_3(S'_n)$$

bzw.

$$(24) \quad J_3(S_n) < \frac{2}{3} \pi r_0^3 < J_3(S'_n).$$

Nach (22), (23) und (24) ist $|J_3(\mathbf{H}) - \frac{2}{3} \pi r_0^3| < \varepsilon$ für jede beliebige reelle Zahl $\varepsilon > 0$, also $J_3(\mathbf{H}) = \frac{2}{3} \pi r_0^3$. Für die Maßzahl des Volumens der ganzen Kugel \mathbf{K} mit $r = r_0$ gilt demnach

$$J_3(\mathbf{K}) = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

1.4. Abschließende Bemerkungen

Wird eine mathematische Theorie axiomatisch aufgebaut, so wird an das zugrunde gelegte Axiomensystem die natürliche Forderung gestellt, daß es in sich widerspruchsfrei sei, d. h., daß es nicht möglich sei, aus den Axiomen eine Aussage und zugleich deren Negation herzuleiten. Die Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems weist man gewöhnlich durch Angabe eines Modells nach. Bei dem im vorliegenden Aufbau benutzten Axiomensystem kann das so geschehen, daß für die Grundbegriffe wie Punkt, Gerade usw. Realisierungen innerhalb der Theorie der reellen Zahlen angegeben werden, so daß die Axiome — die dann als Aussagen über diese Realisierungen aufgefaßt werden — bewiesen werden können. So realisiert man für die Geometrie der Ebene die Menge der Punkte als die Menge aller geordneten Paare (x, y) reeller Zahlen, die Geraden als Lösungsmengen linearer Gleichungen der Form $ax + by + c = 0$ mit $a^2 + b^2 \neq 0$, und es ist leicht, für die so erklärten „Punkte“ und „Geraden“ die Axiome (1) bis (4) aus 1.1.1. nachzuweisen. Die Ordnungsrelationen auf den kollinearen Punktmengen werden durch Ordnungsbeziehungen zwischen den die Punkte realisierenden Zahlenpaaren realisiert, die Bewegungen durch gewisse lineare Abbildungsgleichungen für die Zahlenpaare, und die betreffenden Axiome können dann bewiesen werden; die Einzelheiten können der analytischen Geometrie (vgl. MfL, Bd. 7) entnommen werden. Das vorliegende Axiomensystem wird auf diese Weise als widerspruchsfrei relativ zur Theorie der reellen Zahlen nachgewiesen.

Eine weitere wünschenswerte Eigenschaft von Axiomensystemen ist die der Unabhängigkeit. Sie bedeutet, daß keines der Axiome aus den übrigen Axiomen hergeleitet werden kann, oder, noch schärfer — da viele Axiome schon aus mehreren Teilaussagen bestehen —, daß keine der im Axiomensystem angegebenen Aussagen aus den anderen Aussagen des Axiomensystems herleitbar ist, kurz, daß das Axiomensystem keine überflüssigen Aussagen enthält. Diese Eigenschaft hat das vorliegende Axiomensystem nicht; man vergleiche hierzu z. B. die Bemerkungen im Anschluß an Axiom (5) in 1.1.1., auch im Bewegungsaxiom (9) in 1.1.3.1. könnte eine Reihe von Aussagen aus den übrigen hergeleitet werden (so genügt in (B1) der letzte Satz, (B3) kann hergeleitet

werden). Strebt man nämlich nach Unabhängigkeit aller Aussagen des Axiomensystems bzw. nach Einschränkung der in den Axiomen gestellten Forderungen, so verlieren die Axiome an Übersichtlichkeit, und es machen sich Beweise vieler „einfacher“, im Aufbau am Anfang stehender Aussagen erforderlich, aber gerade solche Beweise bereiten oft ziemlich Mühe. Es ist also auch eine psychologisch-methodische Frage bzw. eine Frage der Bequemlichkeit, ob man ein Axiomensystem umfangreicher als unbedingt nötig wählt oder nicht. Die im vorliegenden Axiomensystem herrschenden Abhängigkeiten beziehen sich jedoch hauptsächlich auf Teilaussagen von Axiomen, die einzelnen Axiome als Ganzes genommen sind weitgehend voneinander unabhängig. Ein markantes und historisch interessantes Beispiel ist das Parallelenaxiom (4). Wird es durch seine Negation ersetzt und werden alle anderen Axiome (außer (5), das ja wesentlich auf (4) aufbaut) beibehalten, so erhält man ein widerspruchsfreies Axiomensystem, das zur Begründung der sogenannten hyperbolischen nichteuklidischen Geometrie dienen kann.

Die Ausführungen des vorliegenden Bandes geben für einen Aufbau der Geometrie nur eine Grundlage. Daher ist eine Vielzahl von Sätzen und Begriffen, die üblicherweise zur elementaren Geometrie gerechnet werden und deren hauptsächlichlichen Inhalt ausmachen, nicht ausgesprochen bzw. angegeben worden. So fehlen z. B. viele Sätze über Dreiecke und andere Vielecke, es fehlen Sätze über Kreise (wie Peripheriewinkel- und Sekantensatz), es fehlen die Trigonometrie und die Ähnlichkeitslehre. Zu all solchen Begriffen und Sätzen sei gesagt, daß sie sich auf Grund der in diesem Band eingeführten Axiome, Begriffe und Sätze formulieren und beweisen lassen. Der Leser wird das bestätigt finden, wenn er irgendeinen dieser Sätze mit einem zugehörigen Beweis etwa in einem Schullehrbuch nachliest. Im zweiten Geometrieband (MfL, Bd. 7) wird der eine oder andere derartige Begriff oder Satz noch angegeben bzw. bewiesen, aber eine Reihe dieser Sätze wird auch als bekannt vorausgesetzt.

Tabelle zur Bezeichnung bei Größenangaben

Geometrisches Objekt	Name und abstrakte Definition der „Größe“ des Objektes	Zahlenbereich für die Maßzahlen (Entartungsfälle zugelassen)	Symbol und Name der Maßeinheit
Strecke AB	Länge $ AB $ = Klasse kongruenter Strecken	reelle Zahl x mit $x \geq 0$	m Meter
Polygon(fläche) $A_1 \dots A_n$	Flächeninhalt $ A_1 \dots A_n $ = Klasse flächengleicher (= zerlegungsgleicher) Polygonflächen	reelle Zahl x mit $x \geq 0$	m ² Quadratmeter
Polyeder(körper) $A_1 \dots A_n$	Volumen $ A_1 \dots A_n $ = Klasse volumengleicher Polyederkörper	reelle Zahl x mit $x \geq 0$	m ³ Kubikmeter
gerichtete Strecke AB in der orientierten Geraden	Länge $m(AB)$ = Klasse gleichgerichteter kongruenter Strecken	beliebige reelle Zahl x	m Meter
orientierte Polygonfläche $A_1 \dots A_n$ in der orientierten Ebene	Flächeninhalt $m(A_1 \dots A_n)$ = Klasse gleichorientierter flächengleicher Polygonflächen	beliebige reelle Zahl x	m ² Quadratmeter

Geometrisches Objekt	Name und abstrakte Definition der „Größe“ des Objektes	Zahlenbereich für die Maßzahlen (Entartungsfälle zugelassen)	Symbol und Name der Maßeinheit
orientierter Polyederkörper $A_1 \dots A_n$	Volumen $m(A_1 \dots A_n)$ = Klasse gleichorientierter volumengleicher Polyederkörper	beliebige reelle Zahl x	m^3 Kubikmeter
Elementarwinkel $\sphericalangle ABC$	Elementarwinkelgröße $ \sphericalangle ABC $ = Klasse kongruenter Elementarwinkel	reelle Zahl x mit $0 \leq x \leq 180$	$^\circ$ Grad
Winkel $\sphericalangle (ABC; P^+)$	Winkelgröße $ \sphericalangle (ABC; P^+) $ = Klasse kongruenter Winkel	reelle Zahl x mit $0 \leq x \leq 360$	$^\circ$ Grad
orientierter Elementarwinkel $\sphericalangle ABC$ in der orientierten Ebene	Größe des orientierten Elementarwinkels $m(\sphericalangle ABC)$ = Klasse gleichsinnig kongruenter orientierter Elementarwinkel	additive Restklasse $x \bmod 360$ (mit beliebigem reellen x)	$^\circ$ Grad
orientierter Winkel $\sphericalangle (ABC; P^+)$ in der orientierten Ebene	Größe des orientierten Winkels $m(\sphericalangle (ABC; P^+))$ = Klasse gleichsinnig kongruenter orientierter Winkel	reelle Zahl x mit $-360 < x \leq 360$	$^\circ$ Grad
Drehprozeß Δ in der orientierten Ebene	Größe $m(\Delta)$ des Drehprozesses = Klasse gleichsinnig kongruenter Drehprozesse	beliebige reelle Zahl x	$^\circ$ Grad

Namen- und Sachverzeichnis

- Abstand 105
Addition, elementargeometrische 92, 107
ALBERTI, L. B. 17
Altgrad 87
Anfangspunkt einer Fahne 35
– eines Strahls 28
anliegend 71
APOLLONIUS von Perge 16, 17
ARCHIMEDES 16
Archimedisches Axiom 79
Außenwinkel 71, 72
- Basis eines Dreiecks 73**
Basiswinkel 73
Bewegung 42ff., 104
–, gleichsinnige 50, 104
–, involutorische 43
–, ungleichsinnige 104
Bewegungsgruppe 42
Bogenmaß 87
BOLYAI, J. 15, 16
- DESCARTES, R. 17**
Diagonale 92
– eines Parallelogramms 36
Differenz, elementargeometrische 111
Drehprozeß 70, 89
Drehung 51
Drehungsvorgang 70
Dreieck 71, 92
–, Ecken 71
–, gleichschenkliges 73
–, Innenwinkel 71
–, Inneres 71
- Dreieck, Rand 71
–, rechtwinkliges 97
–, Seiten 71
Dreiecksfläche 71
Dreiecksungleichung 74
DÜRER, A. 17
- Ebene 20, 101**
–, orientierte 41
eigentliches Polyeder 106
– konvexes Polygon 91
Elementarwinkel 60
–, gestreckter 60
–, orientierter 41
–, rechter 60
Endpunkte 29
entgegengesetzte Fahnen 35
– Halbebenen 34
– Strahlen 28
EUKLEIDES (EUKLID) 14, 15, 16
- Fahne 35**
–n, entgegengesetzte 35
FERMAT, P. de 17
Figur, geometrische 53
Fixgerade 23
Fixpunkt 23
Fixpunktgerade 23
Flächeninhalt 95
- GAUSS, C. F. 15, 16**
gegenüberliegende Winkel 73
Geometrie, nichteuklidische 123
geometrische Figur 53

- Gerade 21, 101
 —, orientierte 28
 Geradenspiegelung 44
 gleichorientiert 38, 41, 103
 gleichsinnige Bewegung 50
 Grad 87
 Gradzahl 87
 Gradzahlrestklasse 88
 GRASSMANN, H. 17
 Größen, Addition von 58
 — orientierter Elementarwinkel 57
 Gruppe der Bewegungen 42
 — der gleichsinnigen Bewegungen 51
 — der Drehungen um einen Punkt 51
 — der Größen orientierter Elementarwinkel 59
 — der Verschiebungen 24
- Halbebene 34
 —, offene 34
 Halbgerade 28
 —n, entgegengesetzte 34
 Halbraum 103
 HILBERT, D. 18
 HIPPOKRATES von Chios 14
 Hülle, konvexe 91
 Hypotenuse 97
- Inhalt, allgemeiner 110ff.
 —, äußerer 114
 —, elementarer 91, 106ff.
 —, innerer 114
 —, Jordanscher 110, 114
 —, Riemannscher 110
 Inhaltsfunktional, elementares 95
 —, Jordansches 114
 Inhaltsmessung von Polyedern 107
 — von Polygonen 95
 inkommensurabel 84
 Innenwinkelsumme 72
 Inneres eines Winkels 61
 Involution 42
 involutorische Bewegung 43
- KANT, I. 16
 Kathete 97
 Kathetensatz 97, 115
 Kegel 120
 KEPLER, J. 17
 KLEIN, F. 17
 kollinear 21, 101
 kommensurabel 84
- komplanar 101
 kongruent 53, 104
 —, gleichsinnig 54
 Kongruenzsätze 74ff.
 konvexe Hülle 91
 —s Polyeder 106
 Kreis 117
 Kugel 120
- Länge 54
 —n, Addition von 55ff.
 —n, Ordnungsrelation für 6
 Längenfunktional 79
 LEGENDRE, A. M. 15
 LEONARDO DA VINCI 17
 LIE, S. 17
 links 38
 LOBAČEVSKIJ, N. I. 15, 16
 Lot 46, 105
 Lotfußpunkt 47
- Maßeinheit 78
 — der Flächenmessung 95
 — der Streckenmessung 83
 — des Volumens 107
 — der Winkelmessung 87
 Maßstab 79, 82
 Maßzahl 78
 — des Flächeninhalts 95
 — des allgemeinen Inhalts 114
 — der Länge 83
 — des Volumens 107
- Messung 78ff.
 — von Elementarwinkeln 89
 — von orientierten Elementarwinkeln 88
 — von Strecken 79ff.
 — von gerichteten Strecken 91
 — von Winkeln 86ff.
- Meter 83
 metrischer Raum 91
 Mittelpunkt 56
 Mittelsenkrechte einer Strecke 73
 Modell 122
 MÖBIUS, A. F. 17
 MONGE, G. 17
- Nebenwinkel 68
 n-Eck, konvexes 91
 n-Ecksfläche 92
 n-Eckslinie 92
 Neugrad 87
 nichteuklidische Geometrie 123

- Nullmenge 111
 Nullwinkel 41
 Nullwinkelgröße 57

Oberflächeninhalt 106
 offene Halbebene 34
 Ordnungsrelation 28
 orientierte Ebene 41
 — Gerade 28
 —r Elementarwinkel 41
 —r —, gestreckter 41
 —r —, rechter 60
 —r Winkel 70
 Orientierung 38ff.
 Orientierungsfigur 103
 Orientierungsklasse von orientierten
 Elementarwinkeln 41, 62
 von Fahnen 41, 50

Parallel 21, 101
 Parallelenaxiom 21
 Parallelenklasse 22, 49
 Parallelepiped 107
 Parallelogramm 36, 92
PASCH, M. 18
POINCARÉ, H. 18
PLATO 15
PLÜCKER, J. 17
 Polyeder 106
 —, allgemeines 107
 —, eigentliches 106, 107
 —, konvexes 106
 —, uneigentliches 106, 107
 Polyederfläche 106
 Polygon 91ff.
 —, allgemeines 92
 —, eigentliches 92
 —, — konvexes 91
 —, konvexes 91
 —, uneigentliches 92
 —, — konvexes 91
 Polygonfläche 92
 Polygonseite 92
 Prisma 107
 Punkt 21, 101
 Punktspiegelung 47
 Pyramide 107
PYTHAGORAS, Satz des 97

Quader 107
 Quadrat 92
 quadrierbar 111

Radiant 87
 Rand eines Polygons 92
 Randebene 103
 Randgerade 34
 Randstrahl 35
 Raum, dreidimensionaler 101
 —, metrischer 91
 Rechteck 92
 rechts 38
 Richtung 22
 Richtungssinn 32
 — einer Verschiebung 32
RIEMANN, B. 17

SACCHERI, G. 15
 Scheitel 41, 60, 61
 Scheitelwinkel 67
 Schenkel 41, 60, 61
SCHWEIKART, F. K. 15
 Seite einer Geraden 35
 senkrecht 46, 105
 Simplex 106
 Spat 107
STEINER, J. 17
 Stetigkeit 89
 Stetigkeitsaxiome 89
 Strahl 28
 —, Anfangspunkt 28
 —en, entgegengesetzte 28
 Strahlensätze 84ff.
 Strecke 29
 Streckenabtragung 54
 Stufenwinkel 69
 Symmetrieachse 54
 symmetrisch 54

TAURINUS, F. A. 15
THALES von Milet 14
 Trägergerade 28

 Umfangsmaßzahl 95
 Umlaufsinn 42
 Unabhängigkeit 122
 uneigentliches Polyeder 91, 107

 Vektor 26
 Verbindungsgerade 21
 Verschiebung 22ff., 102
 verschiebungsgleich 26
 Verschiebungsrichtung 23
 Vollständigkeit der euklidischen Geo-
 metrie 89, 106
 — des Jordanschen Inhaltssystems 117

Vollständigkeitsaxiom 89

Volumenfunktional 108

WALLIS, J. 15

Wechselwinkel 69

Widerspruchsfreiheit 122

Winkel 61

— erster Art 61

— zweiter Art 61

— gegenüberliegende 71, 73

—, gestreckter 61

—, Inneres 61

—, rechter 61

—, spitzer 66

—, stumpfer 67

—, überstumpfer 67

Winkelfunktional 87

Winkelgröße 61

—n, Addition von 62ff.

—n, Ordnungsrelation 64

Winkelhalbierende 67

Würfel 107

Zahlengerade 90

Zerlegung, elementargeometrische 92,
107

Zerlegungsgleichheit von Polyedern 107

— von Polygonen 94

Zwischenrelation 29

Zylinder 119

Studienbücherei

(Auswahl aus dem Fachgebiet Mathematik)

L. Berg, Operatorenrechnung, I. Algebraische Methoden

L. Berg, Operatorenrechnung, II. Funktionentheoretische Methoden

H. Boseck, Tensorräume

H. Boseck, Grundlagen der Darstellungstheorie

N. W. Efimow, Über die Grundlagen der Geometrie

N. W. Efimow, Grundzüge der projektiven Geometrie

A. V. Gladkij / I. A. Mel'čuk, Elemente der mathematischen Linguistik

H. Kieseewetter, Vorlesungen über lineare Approximation

B. Klotzek, Geometrie

P. Schreiber, Theorie der geometrischen Konstruktionen

D. J. Struik, Abriß der Geschichte der Mathematik

W. Tutschke, Grundlagen der reellen Analysis, I. Differentialrechnung

W. Tutschke, Grundlagen der reellen Analysis, II. Integralrechnung

H. Vieregge, Einführung in die klassische Algebra

Weitere Bände in Vorbereitung!



Die Reihen „Mathematik für Lehrer“ (MfL), „Physik für Lehrer“ (PfL) und „Chemie für Lehrer“ (CfL) sind Bestandteil der Studienbücherei und durch ein **L** besonders gekennzeichnet.

MfL, PfL, CfL werden von Wissenschaftlern erarbeitet, die neben hohem Fachwissen über langjährige Erfahrung in der Ausbildung von Fachlehrern verfügen.

MfL, PfL, CfL entsprechen methodisch und didaktisch den neuesten Anforderungen der Aus- und Weiterbildung. Übungen und Anwendungen ergänzen den Text.

MfL, PfL, CfL helfen dem Studenten bei der Wiederholung des Vorlesungsstoffes und bei der Vorbereitung auf Prüfungen.

Dem bereits Ausgebildeten geben sie die Möglichkeit, seine Kenntnisse zu vertiefen.

MfL, PfL, CfL sind darüber hinaus auch für Studenten mit dem Nebenfach Mathematik, Physik oder Chemie geeignet.