

Studienbücherei



E. Schröder  
Darstellende Geometrie



---

# Mathematik für Lehrer

## Band 8

---

Herausgegeben von:

W. Engel, S. Brehmer, M. Schneider, H. Wussing

Unter Mitarbeit von:

G. Asser, J. Böhm, J. Flachsmeyer, G. Geise, T. Glocke,

K. Härtig, G. Kasdorf, O. Krötenheerdt, H. Lugowski,

P. H. Müller, G. Porath

---

Studienbücherei

---

**Darstellende  
Geometrie**

**E. Schröder**

Mit 157 Abbildungen

Dritte Auflage



**VEB Deutscher Verlag  
der Wissenschaften  
Berlin 1979**

**Verlagslektor: Dipl.-Math. E. Arndt**  
**Umschlaggestaltung: R. Wendt**  
**© VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1974**  
**Printed in the German Democratic Republic**  
**Lizenz-Nr. 206 · 435/89/79**  
**Satz: VEB Druckhaus „Maxim Gorki“, Altenburg**  
**Offsetnachdruck und buchbinderische Verarbeitung: Volksdruckerei Zwickau**  
**LSV 1044**  
**Bestellnummer 570179 1**  
**DDR 9,80 M**

## Vorwort

Dem allseitigen Bemühen um eine nach modernen Gesichtspunkten systematisierte Darstellung der mathematischen Teildisziplinen kann sich auch die darstellende Geometrie nicht verschließen. Bei diesen Modernisierungsbestrebungen sind allerdings im vorliegenden Fall wenigstens zwei Randbedingungen zu beachten.

Erstens hat sich die darstellende Geometrie vor allem bezüglich der Terminologie seit etwa 150 Jahren in ziemlich verhärtete Spuren eingefahren. Traditionsgebundene Wortprägungen und Bezeichnungsweisen sind nicht immer leicht mit modernen Begriffsbildungen und Vorstellungen in Einklang zu bringen.

Zweitens hat die darstellende Geometrie neben einer kleinen Zahl von Mathematikern vor allem Techniker und Naturwissenschaftler der verschiedensten Fachrichtungen als Anwender. Für diese kann die darstellende Geometrie nicht als eine zum Selbstzweck geschaffene Lehre geboten werden. Sie muß einem breiten Kreis von Praktikern leicht verständlich bleiben und in die verschiedensten Anwendungsbereiche ohne begriffliche Schwierigkeiten umsetzbar sein. So scheiden z. B. bei der Wahl des Abbildungsmittels die sonst in der Geometrie des  $R_3$  bevorzugten Geradenbündel aus, da in den Anwendungen unserer Disziplin Fragen der Sichtbarkeit eine grundlegende Bedeutung haben. Die verwendeten Abbildungen können nur von Strahlenbündeln geleistet werden, wobei die Strahlen im Sinne von orientierten Geraden zu verstehen sind.

Eine weitere Streitfrage besteht in der Festlegung der Reihenfolge der Stoffeinheiten „Zweitafelverfahren nach MONGE“ und „Eintafelverfahren“. Das primäre Anliegen der darstellenden Geometrie besteht darin, beim Lernenden das räumliche Vorstellungs- und Operationsvermögen durch die Arbeit mit zugeordneten Normalrissen zu entwickeln. Wenn erst eine gewisse Sicherheit im Umgang mit dem Zweitafelverfahren erreicht ist, bereitet die Einarbeitung in andere Teilgebiete dieser Disziplin kaum noch Schwierigkeiten. Auch das Eintafelverfahren fordert bei der Lösung von Aufgaben des Maßes die Fähigkeit der Kombination von zwei Bildern eines geometrischen Objektes. Stützdreieck und Umlegungen sind nur Umschreibungen für Hilfsbilder, die man zur Konstruktion heranzieht. Hingegen sind die Aufgaben der Lage (Schnitt von Gerade und Ebene oder Gerade und Drehkegel) echt im Eintafelverfahren konstruierbar. Die Begründung dieser Konstruktionen erfordert

jedoch Zusatzüberlegungen, für die der Anfänger noch nicht hinreichend geschult ist. Die differenzierte Behandlung von Aufgaben des Maßes und der Lage in der Eintafelprojektion sowie die Beschränktheit des Anwendungsbereiches auf Geländeaufgaben, Dachausmittlungen und kartenmäßige Flächenbeschreibungen lassen es wenig sinnvoll erscheinen, dieses spezielle Abbildungsverfahren vor dem Zweitafelverfahren abzuhandeln. Auf Grund vielseitiger Erwägungen erschien es mir als rationellster Weg, in diesem Lehrbuch nach einem kurzen Abriss über die Zentral- und Parallelprojektion sofort auf das Zweitafelverfahren zuzusteuern. Darin werden perspektive Affinität und perspektive Kollineation mit eingebaut. Die in den Anfang gelegte Einführung der Fernelemente erweist sich für einige Anwendungen als günstig und erlaubt eine geschlossener Darstellung vieler Fakten und Sätze. Von der Axonometrie wird das Schrägrißverfahren vorgezogen, da es elementar verständlich ist und im Lehrgang selbst von Anfang an als didaktisches Hilfsmittel Verwendung findet.

Die Ellipse erfährt wegen der Wichtigkeit für konstruktive Anwendungen aus verschiedensten Aspekten heraus eine ausführliche Behandlung. Anschließend werden die Kegelschnitte allgemein als Schlagschattengrenzen einer Kugel bei Zentralbeleuchtung eingeführt. Auf diesem Wege lassen sich die planimetrischen Eigenschaften der Kegelschnitte mittels der räumlichen Erzeugungsweise (Schnitt von Drehkegel und Ebene) besonders übersichtlich herausarbeiten. Der Beweis der Fokaleigenschaften von Ellipse und Parabel erfolgt auf indirektem Weg. Dabei werden algebraisch-geometrische Überlegungen angewandt und konstruktiv ausgewertet. Als Nebenergebnis erhält man die Tangentenkonstruktion. Dieser Zugang zur Tangente von Kegelschnitten ist eine wichtige Ergänzung zu der an anderer Stelle dieser Buchreihe mit den Mitteln der Analysis gebotenen allgemeinen Lösung des Berührungsproblems.

Anschließend werden die theoretischen und praktischen Grundlagen zum Entwerfen axonometrischer und zentralperspektiver Bilder vorgeführt. Im ersten Fall geschieht dies vor allem im Hinblick auf technische Anwendungen. Hingegen können die Ausführungen zur Zentralperspektive in Verbindung mit dem historisch-philosophischen Teil als Unterstützung für die ästhetische Bildung und Kunsterziehung herangezogen werden.

Für die Durchsicht des Manuskriptes und manche fachliche Empfehlung dankt der Verfasser an dieser Stelle den Herren Professoren JOHANNES BÖHM (Jena), GERHARD GEISE (Dresden) und HANS-LUDWIG WUSSING (Leipzig). Meinen ganz besonderen Dank möchte ich Herrn Professor WOLFGANG ENGEL (Rostock) aussprechen, der das Manuskript vor allem aus der Sicht der Koordinierung zu den übrigen Bänden der Reihe „Mathematik für Lehrer“ kritisch durcharbeitete und zur Glättung mancher Unebenheit vor der Drucklegung beitrug. Darüber hinaus schließt sich der Verfasser den Herausgebern dieser Reihe mit seinem Dank an den VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften für das verständnisvolle Eingehen auf Sonderwünsche und die sorgfältige Anfertigung der Zeichnungen an.

# Inhalt

<b>0.</b>	<b>Einleitung</b>	
0.1.	Allgemeines .....	9
0.2.	Historisches .....	10
0.3.	Bezeichnungen und grundlegende Konventionen .....	16
<b>1.</b>	<b>Abbildungsverfahren der darstellenden Geometrie</b>	
1.1.	Allgemeines über lineare Abbildungen. Erweiterung des euklidischen Raumes zum projektiven Raum .....	18
1.2.	Zentralprojektion .....	22
1.3.	Parallelprojektion .....	27
1.4.	Schrägrißverfahren .....	28
1.5.	Normalprojektion .....	30
<b>2.</b>	<b>Das Zweitafelverfahren</b>	
2.1.	Zuordnungsvorschrift von Normalrissen im Zweitafelverfahren .....	32
2.2.	Darstellung von Geraden im Zweitafelverfahren .....	35
2.3.	Darstellung von Ebenen .....	38
2.4.	Lagenaufgaben für Punkt, Gerade und Ebene. Perspektivische Affinität .....	46
2.5.	Aufgaben des Maßes .....	53
2.6.	Anwendung von Grundkonstruktionen auf ebenflächig begrenzte räumliche Gebilde. Perspektivische Kollineation. Satz von DESARGUES .....	60
2.7.	Seitenrisse und Drehungen .....	70
2.8.	Die sechs Hauptrisse .....	77
<b>3.</b>	<b>Kurven und Flächen zweiter Ordnung</b>	
3.1.	Allgemeines über Kurven und Flächen zweiter Ordnung .....	79
3.2.	Die Ellipse als Normalprojektion des Kreises. Zweikreis konstruktion .....	80
3.3.	Kinematische Erzeugungsweisen der Ellipse .....	86
3.4.	Die Ellipse als perspektiv-affines Bild des Kreises .....	89
3.5.	Konstruktion der Achsen einer Ellipse nach RYTZ .....	96
3.6.	Die Ellipse als schiefer Schnitt eines Drehzylinders .....	101
3.7.	Fokaleigenschaft der Ellipse .....	106
3.8.	Darstellung von Drehkörpern und konstruktive Auswertung .....	111
3.9.	Kegelschnitte als Schlagschatten einer Kugel bei Zentralbeleuchtung .....	119

<b>4.</b>	<b>Weitere Darstellungsverfahren</b>	
4.1.	Eintafelverfahren. Kotierte Projektion .....	132
4.2.	Allgemeine oder schiefe Axonometrie .....	139
4.3.	Normale Axonometrie .....	144
4.4.	Zentralperspektive .....	146
4.5.	Stereoskopische Bildpaare. Anaglyphen .....	152
<b>Literatur</b>	.....	<b>155</b>
<b>Namenverzeichnis</b>	.....	<b>156</b>
<b>Sachverzeichnis</b>	.....	<b>157</b>

## 0. Einleitung

### 0.1. Allgemeines

Die darstellende Geometrie lehrt die bei Abbildungen von Objekten des drei- und mehrdimensionalen Raumes auf eine zweidimensionale Ebene geltenden Gesetzmäßigkeiten. Sie bedient sich vorzugsweise konstruktiver Methoden und benutzt als technische Hilfsmittel Zirkel und Lineal. Eine zweidimensionale Bildebene dient als Träger von zeichnerischen Darstellungen dreidimensionaler Objekte und als Arbeitsfeld zur Lösung räumlicher Konstruktionsaufgaben. Einen Schwerpunkt der Lehre bildet die Rückführung räumlicher auf planimetrische Konstruktionsaufgaben und die vorstellungsmäßige Umsetzung planimetrischer Gebilde und Konstruktionsergebnisse in den dreidimensionalen Anschauungsraum.

Um die Konstruktionsmethoden und Sätze der Planimetrie übernehmen zu können, werden Abbildungsvorschriften bevorzugt, bei denen Geraden im Raum auch Geraden in der Zeichenebene entsprechen. Die Auswahl von Abbildungsvorschriften für Zwecke der Anwendung erfolgt im wesentlichen nach zwei Gesichtspunkten, die beide nicht gleichzeitig optimal erfüllbar sind, nämlich

1. Anschaulichkeit,
2. Maßgerechtheit.

Anschauliche Bilder vermittelt die dem Sehvorgang beim menschlichen Auge angepaßte *Zentralprojektion* eines räumlichen Objektes auf eine Bildebene. Dabei ist allerdings das Auge des Betrachters bezüglich der Bildebene in die gleiche Lage zu bringen, in der sich das *Projektionszentrum* bei Aufnahme des Bildes befand.

Maßgerechte Bilder räumlicher Objekte bezüglich ausgezeichneter Scharen untereinander paralleler Ebenen bieten *Parallelprojektionen*. Das Projektionszentrum stellt bei diesem Abbildungsvorgang einen nicht in der Bildebene liegenden uneigentlichen Punkt dar. Die bei Einfall von Sonnenstrahlen auf eine Ebene erzeugten Schattenbilder räumlicher Objekte vermitteln ungefähr eine Vorstellung dieses Abbildungsvorganges. Unter den Parallelprojektionen nimmt die *Normalprojektion* auf eine Ebene eine für konstruktive Belange bevorzugte Stellung ein.

*Axonometrische Abbildungsverfahren* bieten bei Anschaulichkeit des Bildes noch die Möglichkeit zur Abnahme von Maßen an dem dargestellten Objekt. Unter diesen

werden *Schrägbilder* wegen der konstruktiven Einfachheit in Fachbüchern aller Art als didaktisches Hilfsmittel bevorzugt herangezogen.

Die darstellende Geometrie liefert die Grundregeln für das technische Zeichnen im Bau- und Maschineningenieurwesen. Viele ihrer Konstruktionsmethoden sind diesen Bedürfnissen angepaßt, wobei sich jedoch der Lehrstoff nicht in technische Einzelheiten verliert und auf praxisgebundene Beispiele beschränkt. Die Universalität der Anwendungsmöglichkeit wird stets im Auge behalten. Während bei der künstlerischen Zeichnung eines räumlichen Objektes Farbeffekte, Stimmung, ästhetische Gesichtspunkte und subjektive Einstellung eine Rolle spielen, steht für das darstellend-geometrische Bild das konstruktiv-geometrische Anliegen unter Ausschaltung subjektiver Momente im Vordergrund.

Eine nach den Regeln der darstellenden Geometrie angefertigte Zeichnung stellt neben Sprache und Schrift ein wichtiges Verständigungsmittel im Arbeitsprozeß dar, auf das selbst im Zeitalter der elektronischen Rechentechnik und Datenverarbeitung nicht verzichtet werden kann. Wird die darstellende Geometrie als eigenständiges Lehrfach betrieben, so trägt sie zur Entwicklung des konstruktiv-synthetischen Denkens bei.

## 0.2. Historisches

Als geistiger Vater der darstellenden Geometrie im Sinne einer wissenschaftlichen Disziplin wird unbestritten der Franzose GASPARD MONGE (1746—1818) angesehen. Jedoch bediente man sich schon lange Zeit vor MONGE graphischer Methoden zur Lösung von Aufgaben aus den Gebieten des Bauwesens, der Architektur, des Befestigungswesens und beim Bau technischer Anlagen (Mühlen, Kanäle, Bergbau, u. a. m.). In der Malerei und Architektur war seit der Renaissance das Bemühen vorherrschend, Bilder streng nach den Gesetzen der Zentralperspektive herzustellen. Diese Zielsetzung führte vielfach zu Wechselbeziehungen zwischen Vertretern der bildenden Kunst und der Mathematik. Eine einheitliche Darstellung der über die verschiedensten Anwendungsgebiete verstreuten graphischen Methoden fehlte jedoch bis weit in das 18. Jahrhundert hinein, da diese zu eng auf das praktische Anliegen zugeschnitten waren und zum Teil als handwerkliche Geheimnisse von Zünften und Bauhütten gehütet wurden. Der junge MONGE gelangte als Lehrer an der Königlichen Offiziersschule zu Mézières in der Schlußphase des in Frankreich herrschenden feudalen Absolutismus über die Anliegen des Militärwesens zu seinen schöpferischen Leistungen auf dem Gebiet der darstellenden Geometrie. Da MONGE als gereifter Mann in einer politisch revolutionären Epoche höchste öffentliche Ämter bekleidete und darin viel zum Fortschritt seines Landes in Wissenschaft, Technik, Militärwesen und politischer Organisation beitrug, ist sein Lebenslauf auch von allgemeinem Interesse.

GASPARD MONGE wurde am 9. Mai 1746 in Beaune (Côte d'Or) in Frankreich als Sohn eines kleinen Handelsmannes geboren. Bis 1762 besuchte er die Oberschule seiner Vaterstadt, um dann seine Ausbildung an einer Ordensschule in Lyon fortzusetzen. Dort fiel er bereits durch seine außerordentlichen Fähigkeiten auf, und man bemühte sich, ihn für den Orden zu gewinnen. Dieser Druck war wohl mitbestimmend, daß der junge MONGE 1764 nach Beaune zurückkehrte. Den Auftrag, von seiner Vaterstadt einen genauen Plan aufzuzeichnen, erfüllte er mit großer Perfektion. Ein höherer Offizier der Militärschule von Mézières, dem der Plan zur Begutachtung gezeigt wurde, stellte MONGE als wissenschaftliche Hilfskraft an dieser Bildungsstätte ein. Sie war 1748 gegründet worden und hatte durch die hohe Qualität ihrer Absolventen bereits einen guten Ruf in Frankreich erlangt. MONGE sollte an dieser Schule innerhalb der nächsten 20 Jahre einen einzigartigen Aufstieg als Wissenschaftler und Organisator erleben. Nachdem er in Mézières zunächst wegen seiner sozialen Herkunft als Nichtadliger nur für recht untergeordnete Tätigkeiten eingesetzt war, erregte er durch die geniale konstruktive Behandlung eines Problems aus der Befestigungskunst die Bewunderung des Kommandanten der Schule. MONGE wurde daraufhin als Repetitor an die höhere Abteilung berufen, wo nur Zöglinge adliger Herkunft ihre Ausbildung zu Ingenieuroffizieren erhielten. Dank seiner außergewöhnlichen Tüchtigkeit, guter Lehrerfolge und günstiger äußerer Umstände rückte MONGE bis 1771 zum Professor für Mathematik und Physik an dieser Bildungsstätte auf.

Die gedanklichen Grundlagen für sein später so berühmt gewordenes Werk „*Géométrie descriptive*“ gehen wohl bis in das Jahr 1766 zurück. Den Anstoß zur Ausarbeitung dieser Theorie gaben vor allem Probleme des Befestigungswesens. Aus Gründen militärischer Geheimhaltung durfte MONGE zunächst nichts über seine konstruktiven Methoden mittels zweier Bildebenen veröffentlichen. In dieser Zeit seiner Lehrtätigkeit engagierte er sich noch vielseitig an wissenschaftlichen und praktischen Arbeiten. Seit 1770 reichte er seine Forschungsergebnisse zu verschiedenen Gegenständen der Mathematik bei der Akademie der Wissenschaften in Paris ein und wurde selbst ihr Mitglied. Erst seit 1794 durfte MONGE — inzwischen nach Paris berufen — öffentliche Vorlesungen zu dem von ihm systematisierten und wissenschaftlich aufbereiteten Lehrgegenstand halten.

Während und nach der französischen Revolution (1789—1794) übernahm MONGE als engagierter Republikaner verantwortungsvolle öffentliche Ämter, war zeitweise Marineminister, reorganisierte die Landesverteidigung und mobilisierte alle Reserven des Landes, um Frankreich gegen die Angriffe der Reaktion von innen und außen zu stärken. Besondere Verdienste erwarb er sich um die Gründung der *École polytechnique* 1794 in Paris. Sie wurde zum Vorbild aller später gegründeten technischen Hochschulen der Welt. Der darstellenden Geometrie wurde im Ausbildungsprogramm ein führender Platz zuerkannt. MONGES „*Leçons de la géométrie descriptive*“ wurden als Nachschriften 1795 in den „*Journals des écoles normales*“ veröffentlicht. Mit dieser ersten Popularisierung war der Weg gebahnt, die technische Zeichnung neben Sprache und Schrift zu einem allgemein brauchbaren Verständigungsmittel der im Ingenieurwesen tätigen Menschen untereinander zu entwickeln. Beispielsweise fanden die Regeln der darstellenden Geometrie mit JEAN NICOLAS PIERRE HACHETTE

(1769—1834), einem Lehrer an der *École polytechnique*, seit 1811 auch Anwendung auf das technische Zeichnen im Maschinenbau. Mit dem Fortschreiten der industriellen Revolution erfuhr die darstellende Geometrie als Lehrgegenstand an den technischen Bildungstätten der sich auf industrielle Massenproduktion umstellenden Länder eine intensive Pflege und Förderung.

MONGE gehörte bis 1813 zum Kreis der engsten Vertrauten und wissenschaftlichen Berater NAPOLEONS. Dabei blieb er jedoch seiner republikanischen Gesinnung und Haltung treu. Der Sturz NAPOLEONS brachte auch MONGE um alle seine Ehrenämter und brach seine Lebenskraft. Dank seiner wissenschaftlichen Leistungen und aufrechten republikanischen Haltung genoß er über seinen Tod hinaus Achtung und Anerkennung bei seinen ehemaligen Schülern.

Das von MONGE in Lehre und Anwendung besonders konsequent vertretene Zweitafelverfahren mit Grund- und Aufriß läßt sich bereits bei den alten Ägyptern nachweisen. In der Zeit der großen Pyramidenbauten (etwa seit 2900 v. u. Z.) wurde für den Entwurf solcher Werke zunächst ein quadratisches Liniennetz auf Papyrus aufgezeichnet. In dieses Liniennetz trug man einen Normalriß des geplanten Objektes ein. Diese Darstellungsweise erleichterte eine ähnliche Vergrößerung und maßstabgerechte Übertragung von Normalrissen auf das Werkstück. So ist z. B. aus dieser Zeit ein quaderförmiger Steinblock erhalten, an dessen Seitenflächen Grund-, Auf- und Kreuzriß einer Sphinx in richtiger Zuordnung eingemeißelt sind. Mit diesen drei Normalrissen hatte man den Steinblock für die Arbeit des Bildhauers aufbereitet.

Die Zentralperspektive war den alten Ägyptern unbekannt. Für sie ist das Flächenbild charakteristisch. Gelegentlich findet man bei der Wiedergabe räumlicher Objekte zur Unterstützung der Anschauung eine Vermischung von Grund- und Seitenriß oder Auf- und Seitenriß in einem Bild. Auch bei technischen Zeichnungen des Mittelalters lassen sich an Normalrissen eingeschobene Umlklappungen von Balkenquerschnitten oder Hebelmechanismen nachweisen.

Der römische Architekt und Kunsttheoretiker VITRUV (1. Jh. v. u. Z.) erwähnt in seinem berühmten Werk „*De architectura*“ (24 v. u. Z.) die Begriffe „*ichnographia*“<sup>1)</sup> und „*orthographia*“<sup>2)</sup>, womit eindeutig Grund- und Aufriß gemeint sind. Leider sind die zu diesem Werk gehörigen Zeichnungen nicht mit überliefert.

Nördlich der Alpen war ALBRECHT DÜRER (1471—1528) bahnbrechend im Gebrauch zugeordneter Normalrisse. Die Zeit der Renaissance mit dem wachsenden Selbstbewußtsein des fortgeschrittenen Bürgertums war erfüllt von dem Drang nach wissenschaftlicher Erkenntnis und kritischer Auseinandersetzung mit überlieferten Glaubenslehren. So suchte auch DÜRER als Kind seiner Zeit seinem künstlerischen Schaffen eine fest fundierte wissenschaftliche Basis zu geben und Wissensvermittler vor allem an künftige Künstlergenerationen zu sein. Aus dieser Einstellung heraus entstanden seine theoretischen Schriften:

1. „*Underweysung der messung/ mit dem zirckel und richtscheyt / in Linien ebenen und gantzen corporen ...*“ aus dem Jahre 1525,

<sup>1)</sup> ἰχνοῦς — Fußtapfe

<sup>2)</sup> ὀρθός — aufrecht

2. „Etlche underricht zu befestigung der Stett schloss und flecken“,
3. „Hierin sind begriffen vier Bücher von menschlicher Proportion ...“ aus dem Jahre 1528.

In seinem ersten Werk macht DÜRER konsequent Gebrauch von zugeordneten Normalrissen z. B. bei der Demonstration der Kegelschnitte Ellipse, Parabel und Hyperbel. Er stellt einen Drehkegel in Grund- und Aufriß dar, schneidet diesen mit zweitprojizierenden Ebenen von unterschiedlichen Neigungswinkeln und bestimmt die wahre Gestalt der entstandenen ebenen Schnittfiguren durch Umlegung parallel zur Bildebene. Auch die fünf regulären und einige halbreguläre Polyeder sowie Schraublinien und Schraubflächen werden durch Grund- und Aufriß wiedergegeben. Besonders originell sind die zu den Körpern gebotenen Netze. In der „Proportionslehre“ von 1528 wird bei Darstellung des menschlichen Körpers fast durchgehend mit Auf- und Seitenriß gearbeitet. Ferner werden ebene Schnitte gelegt, wie dies heute bei technischen Zeichnungen im Prinzip gleichfalls anzutreffen ist. Trotz vieler Auflagen und Übersetzungen von DÜRERS Werken gerieten seine gehaltvollen Ansätze zur darstellenden Geometrie auf seiten der Wissenschaft und technischen Praxis fast vollständig in Vergessenheit. Man sah in ihm zu einseitig eine der repräsentativsten Künstlerpersönlichkeiten der Renaissancezeit.

Einen wichtigen Beitrag zur geometrischen Begründung konstruktiver Methoden lieferte GIBARD DESARGUES (1593—1662) vor allem bezüglich der zentralperspektiven Abbildung. Sein Schüler ABRAHAM BOSSE (1602—1676) veröffentlichte ein praxisbezogenes Buch über den Steinschnitt. Später wandte sich der französische Ingenieur-offizier AMÉDÉE FRANÇOIS FRÉZIER (1682—1773) in seinem 1738 erschienen Werk wieder dem Grund- und Aufrißverfahren zu und betonte darin konsequent die Trennung von Theorie und Praxis. Erst MONGE ging mit seiner wissenschaftlich exakten Begriffsbildung und Herausstellung allgemeiner geometrischer Aspekte bezüglich der zugeordneten Normalrisse wesentlich über DÜRER hinaus.

Auch an die von DÜRER unter dem Eindruck der akuten Türkengefahr geschriebene Befestigungslehre knüpfte kein Nachfolger unmittelbar an. Vielmehr galt der Franzose SÉBASTIEN DE VAUBAN (1633—1707), Festungsbaumeister und Marschall von LUDWIG XIV., bis zu Beginn des 19. Jahrhunderts als Autorität auf diesem Gebiet. Axonometrische Darstellungsverfahren und Eintafelprojektion waren vielbenutzte Hilfsmittel für die Planung und den Bau militärischer Befestigungsanlagen. Die kotierte Projektion erfuhr durch JEAN FRANÇOIS GASPARD NOIZET (1749—1837) eine begrifflich exakte Durchbildung. Den Hauptsatz der Axonometrie fand KARL WILHELM POHLKE (1810—1876), Berlin 1853, und veröffentlichte ihn 1860 zunächst noch ohne Beweis.

Zur Zentralperspektive, einem weiteren Untersuchungsgegenstand der darstellenden Geometrie, läßt sich ebenfalls eine Entwicklungslinie über viele Jahrhunderte zurückverfolgen. Zum Beispiel schreibt VITRUV in seinem bereits oben zitierten Werk, daß die Griechen zur Zeit des ÄSCHYLUS (um 500 v. u. Z.) beim Bemalen der Bühnendekorationen gewisse Gesetzmäßigkeiten der Zentralperspektive beachtet hätten. Sie nannten diese Art der Bühnenausstattung „scenographia“<sup>1)</sup>, was sich in

<sup>1)</sup> σκηνή — Bühne

dem Wort „Szene“ von etwas verschwommenen Inhalt bis in den heutigen Sprachgebrauch erhalten hat. Auch DEMOKRIT und ANAXAGORAS sollen zu dieser Art der Abbildung räumlicher Objekte erste allgemeine Regeln aufgestellt haben. EUKLIDS Optik (300 v. u. Z.) enthält mehrere zur Zentralperspektive gehörige Lehrsätze. Unmittelbare Zeugnisse der Antike bieten die bis auf den heutigen Tag erhalten gebliebenen Wandmalereien der im Jahre 79 u. Z. im Ascheregen des Vesuvus versunkenen Stadt Pompeji. Die Künstler der damaligen Zeit nutzten einfachste Gesetzmäßigkeiten der Zentralperspektive, um durch die Wandbemalung einen raumvergrößernden optischen Effekt zu erzeugen. Nach der Völkerwanderung und dem Untergang des weströmischen Reiches trat ein Stillstand, teilweise sogar ein Rückschritt in Kultur und Wissenschaft ein. Die Zentralperspektive geriet in Vergessenheit und wurde durch die sogenannte byzantinische Manier, eine schiefe Parallelprojektion, ersetzt.

Erst die Zeit der Renaissance brachte eine Wiederbelebung des Interesses an der Herstellung zentralperspektiver Bilder. Florenz ist als erste Pflegestätte der Zentralperspektive am Ausgang des Mittelalters zu verzeichnen. Nach einem Bericht des Kunstschriftstellers GIORGIO VASARI (1511—1574) hat der florentinische Baumeister FILIPPO BRUNELLESCHI (1377—1446) eine Abbildungsmethode erfunden, die vom Grundriß und Profil ausgeht und (eine Bildebene) schneidende Linien benutzt. Gewiß hat BRUNELLESCHI richtig das zentralperspektive Bild eines Gegenstandes als ebenen Schnitt einer vom Auge an den scheinbaren Umriß des räumlichen Objektes gelegten Pyramide aufgefaßt und diesen mittels zugeordneter Normalrisse konstruiert. Der älteste schriftliche Beleg zur Theorie der Zentralperspektive stammt von dem Florentiner Architekten und Maler LEON BATTISTA ALBERTI (1404—1472). Er überwindet verschiedene irrige Meinungen in der Lehre der Malerei und zeichnet z. B. das Zentralbild eines quadratisch getäfelten Fußbodens in frontaler Lage fehlerfrei. Vor allem zeigt er dabei, wie die Breitenlinien in der Tiefe richtig zu staffeln sind. Der Hauptpunkt ist als Fluchtpunkt der Tiefenlinien eindeutig nachweisbar und wird als „punto del centro“ bezeichnet. Auch ein Distanzpunkt wird als „punto della veduta“ konstruktiv genutzt. Zur Übertragung eines Kreises in einen Zentralriß verwendet er ein quadratisches Netz von Hilfslinien, das in entsprechender Weise mit transformiert wird.

Das älteste Manuskript zu einem Lehrbuch in der Zentralperspektive stammt von dem umbrischen Maler PIERO DELLA FRANCESCO (gest. 1492). Dieser empfing seine künstlerische Ausbildung in Florenz und pflegte persönliche Kontakte zu Gelehrten und vor allem Mathematikern seiner Zeit. Nach seiner Erblindung diktierte er das Werk „De prospectiva pingendi“<sup>1)</sup> seinen Schülern in die Feder, um so eine Überlieferung seiner Kenntnisse an die Nachwelt zu sichern. Das Manuskript wurde allerdings erst Ende des vorigen Jahrhunderts wieder aufgefunden und 1899 erstmals in italienischer und deutscher Sprache veröffentlicht. Am bemerkenswertesten vom geometrischen Standpunkt ist die darin aufgezeichnete Erkenntnis, daß zwischen dem Zentralriß einer horizontal gelegenen ebenen Figur und der Umlegung dieser Figur in die senkrechte Bildtafel eine geometrische Verwandtschaft besteht, die man

<sup>1)</sup> Sinngemäß: „Über die malerische Perspektive“.

als perspektive Kollineation bezeichnet. PIERO beherrschte diese Verwandtschaft mit konstruktiv sehr einfachen Mitteln (Diagonalmethode) und wandte sie geschickt zur Lösung einiger Aufgaben an. Wahrscheinlich haben seine Schüler, die das Manuskript zu Papier brachten, diese Konstruktionsregel selbst genutzt und mündlich an andere Maler weitergegeben. Sie läßt sich z. B. bei LEONARDO DA VINCI (1452 bis 1519) und in etwas abgewandelter Form bei ALBRECHT DÜRER (1471—1528) nachweisen.<sup>1)</sup>

Nördlich der Alpen wirkte wiederum DÜRER sowohl durch sein künstlerisches Schaffen, als auch durch seine theoretischen Schriften als Schrittmacher für die Zentralperspektive. Seit 1496 ist in seinen Bildern, soweit es die dargestellten Objekte zulassen, der Hauptpunkt als Fluchtpunkt der Tiefenlinien exakt nachweisbar. Auch die Augdistanz ist in seinen Bildern vielfach rekonstruierbar, wodurch ein Zugang für eine geometrische Bildanalyse gesichert ist. Die Anregung zur konsequenten Anwendung der Zentralperspektive sowie einige Konstruktionsregeln hierzu empfing DÜRER zweifellos auf seinen beiden Italienreisen. Allerdings beschränkte er sich, wie noch fast alle Maler der Renaissance, auf eine frontale Anordnung von Gebäuden und quaderförmigen Gegenständen bezüglich der Bildebene. Die Strenge der Anordnung bei den dargestellten Objekten trägt nicht immer zur Auflockerung der Bildwirkung bei. Eine volle Ausschöpfung der von PIERO DELLA FRANCESCO aufgedeckten geometrischen Verwandtschaft für künstlerische Belange ist in der Zeit der Renaissance nicht zu verzeichnen. Dies liegt darin begründet, daß der Begriff des gemeinsamen Fluchtpunktes zueinander paralleler Geraden von den Malern damals noch nicht in seiner Allgemeinheit erfaßt wurde. Erst der italienische Mathematiker GUIDO UBALDUS bot in seinen sechs Büchern zur Zentralperspektive eine begrifflich klare Darstellung und Anwendung des Satzes vom Fluchtpunkt (Bologna 1600). Wegen des logischen Aufbaus und der Strenge der Beweisführung in seinem Werk gilt UBALDUS als Begründer der theoretischen Lehre von der Perspektive.

Einen weiteren Fortschritt brachte das Büchlein mit dem Titel „La perspective speculative et pratique“ von ÉSTIENNE MIGON aus dem Jahre 1643 durch Einführung und Anwendung des Meßpunktverfahrens. Damit lassen sich konstruktiv wenig aufwendig vorgegebene Strecken in ein zentralperspektives Bild überführen. Aus geometrischer Sicht ist noch das Buch mit dem Titel „Die freie Perspektive“ von JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728—1777) bemerkenswert. LAMBERT benutzte zur Konstruktion zentralperspektiver Bilder die Gesetzmäßigkeiten der projektiven Geometrie.

In der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts war die darstellende Geometrie als selbständiger Wissenszweig so weit gefestigt und allgemein anerkannt, daß im technischen Zeichnen der verschiedenartigsten Fachrichtungen gemeinsame Grundregeln und terminologische Konventionen von der darstellenden Geometrie akzeptiert wurden. Dadurch konnte eine Verständigung mittels technischer Zeichnungen selbst über sprachliche und fachliche Grenzen hinweg in der technischen Planung und Produktion für die Zukunft gesichert werden. Die vielfältige Pflege und Förderung

<sup>1)</sup> Diese Konstruktion ist in der zweiten Auflage der „Underweysung“ aus dem Jahre 1538 wiedergegeben. Das handschriftliche Original befindet sich im Britischen Museum in London.

des zu behandelnden Lehrfaches im 19. und laufenden 20. Jahrhundert soll hier nicht Gegenstand weiterer Betrachtungen sein. Es steht außer Zweifel, daß die darstellende Geometrie als wissenschaftliche Disziplin im Verlaufe der industriellen Revolution in hervorragender Weise zum Aufschwung der Produktivkräfte beigetragen hat. In jüngster Zeit eröffnen neue Kommunikationsmittel von Mensch zu Mensch und Mensch zu Maschine auch dieser Disziplin neuartige Einsatzmöglichkeiten zur Lösung der immer komplizierter werdenden konstruktiven Probleme.

### 0.3. Bezeichnungen und grundlegende Konventionen

Die im vorliegenden Band zu untersuchenden geometrischen Objekte und Konstruktionen werden sich auf den dreidimensionalen euklidischen Raum beschränken, der durch Einbeziehung der Fernelemente zum projektiven Raum erweitert wird. Grundlagen und Sätze der elementaren Planimetrie werden als bekannt vorausgesetzt. Alle Objekte der Untersuchung werden als reell existierend postuliert. Zwecks eindeutiger Verständigung und Vermeidung umständlicher Umschreibungen werden für die Bezeichnung geometrischer Gebilde folgende Konventionen getroffen, die denen der anderen Bände der Studienbücherei „Mathematik für Lehrer“ (MfL) entsprechen:

- a) Punkte durch lateinische Großbuchstaben  $A, B, C, \dots$  oder innerhalb aufwendiger Konstruktionen durch die Ziffern  $1, 2, 3, \dots$ ,
- b) Geraden und gekrümmte Linien durch lateinische Kleinbuchstaben  $a, b, c, d, \dots$ ,
- c) Ebenen durch griechische Kleinbuchstaben  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots$ ,
- d) gekrümmte Flächen durch griechische Großbuchstaben  $\Phi, \Psi, \dots$ ,
- e) Winkel durch griechische Kleinbuchstaben  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots$

Der Vorgang des „Schneidens“ zweier Geraden  $g$  und  $h$  in einem Punkt  $P$  wird beschrieben durch  $P = P(gh)$ . Die Erzeugung einer Geraden  $s$  als Schnitt der Ebenen  $\alpha$  und  $\beta$  wird symbolisch durch  $s = s(\alpha\beta)$  erfaßt. Entsprechend bedeutet  $g = g(AB)$  das „Verbinden“ der Punkte  $A, B$  durch die Gerade  $g$ . Mit  $\epsilon = \epsilon(ABC)$  wird das Verbinden von drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten durch eine Ebene  $\epsilon$  und mit  $S = S(\alpha\beta\gamma)$  das Schneiden von drei Ebenen allgemeiner Lage in einem Punkt  $S$  symbolisiert.

Werden zwischen die Symbole von zwei Elementen (Geraden oder Ebenen) die Zeichen  $\parallel$  oder  $\perp$  gesetzt, so bedeutet dies Parallelität bzw. Senkrechtstehen der betreffenden Elemente zueinander. Die durchgestrichenen Zeichen  $\nparallel$  und  $\nperp$  drücken die Negation hierzu aus. Mit  $\in$  wird die Zugehörigkeit eines Elementes zu einer Menge ausgewiesen;  $\notin$  bedeutet die Negation dazu.

Die Verbindungsstrecke der Punkte  $A, B$  wird mit  $AB$  und die Länge dieser Strecke mit  $|AB|$  bezeichnet. Es gilt  $|AB| = |BA| \geq 0$ . Die Bezeichnung  $m(AB)$ ,

symbolisiert, daß die Länge der Strecke  $AB$  als vorzeichenbehaftete Größe anzusehen ist. Es gilt also  $m(AB) = -m(BA)$ .

Der von den Strahlen  $AB^+$  und  $AC^+$  eingeschlossene (nicht überstumpfe) Winkel wird mit  $\sphericalangle BAC$  und die Größe dieses Winkels mit  $|\sphericalangle BAC|$  bezeichnet. Es gilt  $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CAB| \geq 0$ . Die Größe des von den Strahlen  $AB^+$  und  $AC^+$  eingeschlossenen orientierten Winkels wird mit  $m(\sphericalangle BAC)$  bezeichnet. Es gilt  $m(\sphericalangle BAC) = -m(\sphericalangle CAB)$ .

Die zur Anwendung kommenden Abbildungsarten sind Zentralprojektion und Parallelprojektion. Eine Verwendung von Geradenbündeln als Abbildungsmittel ist den Erfordernissen der darstellenden Geometrie nicht angepaßt, da Fragen der Sichtbarkeit bei dieser Interpretationsweise der eingesetzten Abbildungen nicht entscheidbar wären. Sichtbarkeitsentscheidungen sind jedoch für die darstellende Geometrie von grundlegender Bedeutung. Als Abbildungsmittel fungieren Strahlenbündel, wobei der Begriff „Strahl“ — abweichend von MfL, Band 6, Geometrie I — im Sinne einer orientierten Geraden zu verstehen ist. Dadurch ist bei der Zentralprojektion für jeden Punkt des projektiven Raumes (mit Ausnahme des Projektionszentrums) die Existenz seines Bildes in der Bildebene (als projektive Ebene aufgefaßt) gesichert.

Die an Objektbezeichnungen oben angefügten Akzente und Indizes kennzeichnen die Zugehörigkeit von Bildelementen zu bestimmten Rissen sowie die Entstehungsweise der Bilder. So ist beispielsweise  $P'$  der Grundriß und  $P''$  der Aufriß des Punktes  $P$ . Das schiefaxonometrische Bild (dazu gehören auch Schrägbilder) eines Punktes  $P$  wird mit  $P^s$  bezeichnet. Entsprechend ist mit  $g^s$  das Bild der Geraden  $g$  gemeint. Das normalaxonometrische Bild eines Punktes  $P$  wird mit  $P^n$  bezeichnet. Das zentralperspektive Bild eines Punktes  $P$  führt die Bezeichnung  $P^c$ . Unter  $P^0$  oder  $P_0$  ist die Umlegung des Punktes  $P$  in die Bildebene zu verstehen.

# 1. Abbildungsverfahren der darstellenden Geometrie

## 1.1. Allgemeines über lineare Abbildungen. Erweiterung des euklidischen Raumes zum projektiven Raum

In Anpassung an die Bedürfnisse der Praxis bevorzugt die darstellende Geometrie Abbildungen, bei denen Geraden des Raumes — bis auf unvermeidbare Ausnahmefälle — in der Bildebene wieder als Geraden erscheinen. Es läßt sich zeigen, daß derartige Abbildungen stets auf *Zentral-* oder *Parallelprojektion* zurückführbar sind. Abbildungen mit dieser Eigenschaft heißen linear.

Um gewisse Erhaltungssätze bei diesen Abbildungen geschlossen formulieren zu können, bedarf es ergänzender Überlegungen zur Vorstellung vom Raum. Als Projektionszentrum werde ein im Endlichen gelegener Punkt  $Z$  und als Bildebene eine nicht durch  $Z$  gehende Ebene  $\pi$  angenommen. Die Abbildung eines von  $Z$  verschiedenen Punktes  $P$  erfolgt, indem  $Z$  mit  $P$  durch eine Gerade  $s$  verbunden wird. Im Schnitt von  $s$  mit  $\pi$  liegt der Bildpunkt  $P^c$  von  $P$ . Dabei ist es gleichgültig, ob  $P$  und  $P^c$  von  $Z$  getrennt werden oder nicht. Da die Bilder sämtlicher auf  $s$  liegenden Punkte mit Ausnahme von  $Z$  in  $P^c$  liegen, ist gezeigt, daß die Abbildung der Punkte des Raumes eindeutig, jedoch nicht umkehrbar eindeutig auf  $\pi$  erfolgt (Abb. 1).

Liegt der abzubildende Punkt  $P$  in einer zu  $\pi$  parallelen Ebene  $\nu$  durch  $Z$ , so ist die Verbindungsgerade  $s = s(ZP)$  parallel zu  $\pi$ . Der Punkt  $P$  hätte nach dieser

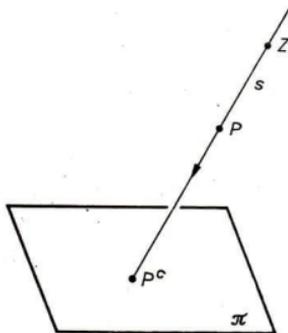


Abb. 1

Auffassung keinen Bildpunkt. Dies würde für sämtliche in der zu  $\pi$  parallelen Ebene  $\nu$  durch  $Z$  liegenden Punkte gelten. Man nennt diese Ebene *Verswindungsebene*. Die Existenz solcher Ausnahmepunkte, deren Besonderheit nur in der speziellen Lage bezüglich des Projektionszentrums und der Bildebene besteht, zerstört die einheitliche Sprechweise bei vielen geometrischen Aussagen. Die Einheitlichkeit der betreffenden Aussagen kann durch eine begriffliche Erweiterung des euklidischen Raumes bewahrt werden. Am Beispiel der Abbildung einer zu  $\pi$  nicht parallelen und nicht durch  $Z$  gehenden Geraden  $g$  soll verdeutlicht werden, wie hierbei vorzugehen ist (Abb. 2).

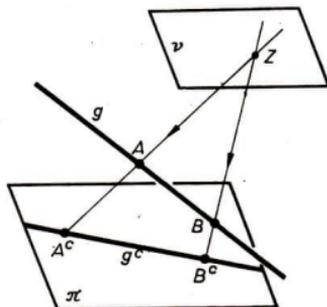


Abb. 2

Wegen der Linearität genügt es, die Bilder  $A^c, B^c$  zweier Punkte  $A$  und  $B$  von  $g$  aufzusuchen. Für die Bildgerade  $g^c$  gilt  $g^c = g^c(A^c B^c)$ . Ist  $A_v \in \nu$ , so versagt die Konstruktionsvorschrift, obwohl sich der Punkt  $A_v$  vor keinem anderen der Geraden  $g$  auszeichnet. Diese geometrisch nicht gerechtfertigte Ausnahmestellung des Punktes  $A_v$  ist dadurch zu beseitigen, daß die euklidische Ebene durch Hinzunahme der uneigentlichen Punkte erweitert wird. Es wird daher gesagt: Der Bildpunkt von  $A_v$  ist der *uneigentliche Punkt*  $A_v^c \in \pi$ . Wir bezeichnen die uneigentlichen Punkte als *Fernpunkte*.

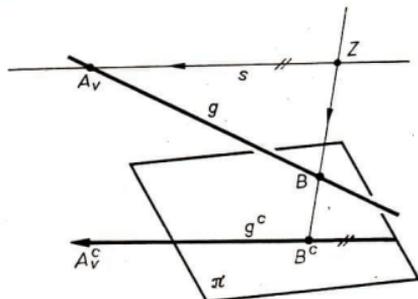


Abb. 3

Die Gesamtheit der *Fernpunkte* von  $\pi$  bildet die *Ferngerade* dieser Ebene. Aus der euklidischen Ebene  $\pi$  wird durch Hinzunahme der entsprechenden *Fernelemente* eine *projektive Ebene*. Das „Verbinden“ von  $B^c$  mit  $A_v^c$  zwecks Konstruktion von  $g^c$  besteht in diesem Fall darin, durch  $B^c$  die Parallele zum Projektionsstrahl  $s = s(A_v)$  zu ziehen (Abb. 3).

Die Notwendigkeit der Hinzunahme von Fernelementen wird weiter durch folgende Überlegungen verdeutlicht: Durchläuft ein Punkt  $P$  eine Gerade  $g$ , so durchläuft  $P^c$  eine in  $\pi$  liegende Gerade  $g^c$ . Mit Ausnahme eines Punktes  $G_u^c$  wird jeder Punkt von  $g^c$  bei dieser Bewegung von  $P$  genau einmal erfaßt.  $G_u^c$  ergibt sich, wenn man den zu  $g$  parallelen Projektionsstrahl durch  $Z$  mit der Bildebene  $\pi$  zum Schnitt bringt. Für praktische Bedürfnisse ist es jedoch wenig befriedigend, wenn bei der Zentralprojektion von Geraden allgemeiner Lage stets ein Bildpunkt auszuschließen ist, da sich für diesen kein Originalpunkt auf der Geraden im euklidischen Raum angeben

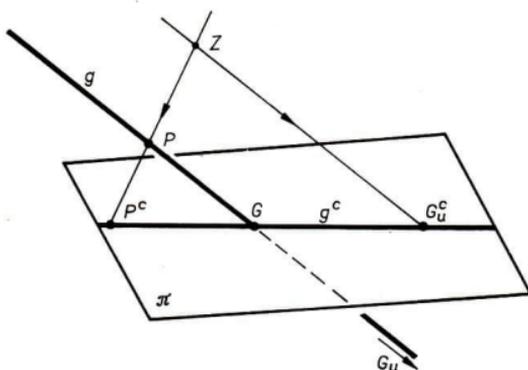


Abb. 4

läßt. Deshalb ist es zweckmäßig, die Gerade  $g$  durch genau einen Punkt, den uneigentlichen Punkt  $G_u$ , zu erweitern. Der zunächst ausgeschlossene Punkt  $G_u^c$  der Bildgeraden  $g^c$  wird *Fluchtpunkt* von  $g$  genannt. Bringt man auf der Geraden  $g$  eine Zahlenskala an, so ist dem Punkt  $G_u$  als Fernpunkt von  $g$  das Symbol „ $\infty$ “ zuzuordnen (Abb. 4).

Da nun den Geraden aller möglichen Lagen Fernpunkte und ihren zentralperspektiven Bildern Fluchtpunkte zuzuordnen sind, liegt es nahe, auch den euklidischen Raum durch Hinzunahme einer  $\infty^2$ -fachen Mannigfaltigkeit von Fernpunkten zu erweitern. Die Gesamtheit dieser Fernpunkte bildet die *Fernebene*. Der euklidische Raum bildet zusammen mit der Fernebene den *projektiven Raum*. Die sich aus der Hinzunahme der Fernelemente ergebenden Konsequenzen sollen an einigen Beispielen demonstriert werden:

1. Zwei zueinander parallele Geraden  $g$  und  $h$ , die nicht parallel zur Bildebene liegen, haben die Bilder  $g^c$  und  $h^c$ . Sie besitzen einen gemeinsamen Fluchtpunkt  $G_u^c = H_u^c$ , den Bildpunkt des beiden Geraden gemeinsamen Fernpunktes. Eine

Mannigfaltigkeit untereinander paralleler Geraden bildet sich auf ein *Geradenbüschel* ab, dessen Träger der Fluchtpunkt dieser Geraden ist. Die Geradenmannigfaltigkeit selbst bildet ein *Geradenbündel*, dessen Träger der den Geraden gemeinsame Fernpunkt ist (Abb. 5).

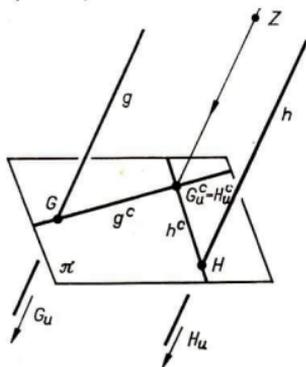


Abb. 5

2. Zwei nicht parallel zu  $\pi$  liegende Geraden  $g$  und  $h$  sollen sich in einem eigentlichen Punkt  $S_v$  schneiden, wobei  $S_v \in v$  gilt. Der Bildpunkt von  $S_v$  ist ein in  $\pi$  liegender Fernpunkt. Folglich sind die Bildgeraden  $g^c$  und  $h^c$  zueinander parallel. Damit kann generell gesagt werden: Zwei in einer Ebene liegende Geraden schneiden sich in einem Punkt (Abb. 6).

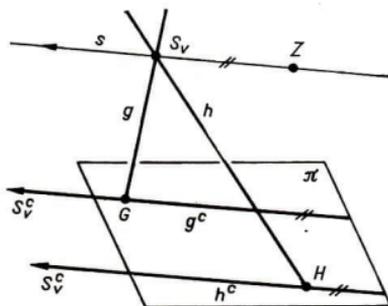


Abb. 6

3. Zwischen den Punkten einer nicht durch  $Z$  gehenden Ebene  $\varepsilon$  und deren Bildpunkten ist jetzt ausnahmslos eine eindeutige Zuordnung herstellbar. Die auf der Schnittgeraden  $v = v(\varepsilon)$  liegenden Punkte bilden sich auf die Ferngerade von  $\pi$  ab. Man nennt  $v$  *Verschwindungsgerade* von  $\varepsilon$ . Die Gesamtheit der Bilder der uneigentlichen Punkte von  $\varepsilon$  liegt auf der eigentlichen Geraden  $u^c$ . Sie entsteht als Schnitt

von  $\pi$  mit einer zu  $\varepsilon$  parallelen Ebene durch  $Z$ . Man bezeichnet  $u^c$  als *Fluchtspur* von  $\varepsilon$ . Zueinander parallele Ebenen besitzen eine gemeinsame Fluchtspur. Wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung von Fernelementen auf die Bildebene haben diese Ebenen auch eine gemeinsame Ferngerade. Somit kann man eine Schar zueinander paralleler Ebenen auch als *Ebenenbüschel* mit der zugehörigen Ferngeraden als Träger ansprechen (Abb. 7).

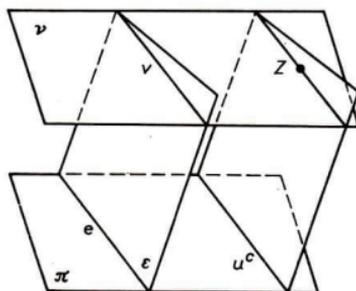


Abb. 7

Bei Bezugnahme von Abbildungen und Konstruktionen auf den projektiven Raum können alle Sätze über Schneiden und Verbinden ohne die im euklidischen Raum zu treffenden Fallunterscheidungen sprachlich gefaßt werden. Dies ist vor allem für Aufgaben der Lage von großem Vorteil. Ist das Projektionszentrum  $Z$  ein Fernpunkt, so werden die Fernpunkte des Raumes auf Fernpunkte der Bildebene abgebildet. Hieraus folgt z. B., daß die Parallelität von Geraden bei Parallelprojektion erhalten bleibt.

## 1.2. Zentralprojektion

Bei der Zentralprojektion wird ein eigentlicher Punkt  $Z$  als Projektionszentrum und eine nicht durch  $Z$  gehende Ebene  $\pi$  als Bildebene vorgelegt. Als *Abbildungsmittel* fungiert das Bündel von Geraden durch  $Z$ . Die Abbildung eines Punktes  $P$  auf die Bildebene wird durch die Gerade  $s = s(ZP)$  vermittelt. Im Schnitt von  $s$  mit  $\pi$  liegt der Bildpunkt  $P^c$  von  $P$ . Nach der in 1.1. getroffenen Vereinbarung über die Hinzunahme der Fernelemente ist diese Abbildung für alle von  $Z$  verschiedenen Punkte des projektiven Raumes eindeutig erklärt. Die Punkte der Bildebene gehen dabei in sich selbst über. Der Punkt  $P^c$  ist das zentralperspektive Bild von  $P$ . Für den Abbildungsvorgang ist es geometrisch belanglos, ob  $P$  mit  $\pi$  bezüglich der Verschwindungsebene  $\nu$  im gleichen Halbraum liegt oder nicht.

In Anlehnung an den Sehvorgang mit dem menschlichen Auge sowie an die Entstehung von Bildern beim Malen und Fotografieren wird die *Bildebene*  $\pi$  als im physikalischen Sinne senkrecht stehend angenommen. Ferner wird das *Projektionszentrum*  $Z$  vielfach mit dem *Auge*  $O$  identifiziert. Das Lot vom *Augpunkt*  $O$  auf die Bildebene ergibt den *Lotfußpunkt*  $H$ , der auch *Hauptpunkt* des Bildes genannt wird.  $H$  ist zugleich der *Fluchtpunkt* von allen auf  $\pi$  senkrecht stehenden Geraden. Ihre Bilder, die *Tiefengeraden*, sind besonders geeignet, dem Bild eine Tiefenwirkung zu geben. Die Entfernung vom Hauptpunkt  $H$  zum Augpunkt  $O$  nennt man *Augdistanz*  $d$ . Die Waagerechte  $h$  durch  $H$  in  $\pi$  ist eine wichtige Orientierungslinie beim Konstruieren zentralperspektiver Bilder. Auf ihr liegen die *Fluchtpunkte* aller horizontalen Geraden des Raumes. Man nennt deshalb  $h$  den *Horizont* des Bildes. Der Horizont ist auch die *Fluchtpur* von allen waagrecht liegenden Ebenen (Abb. 8).

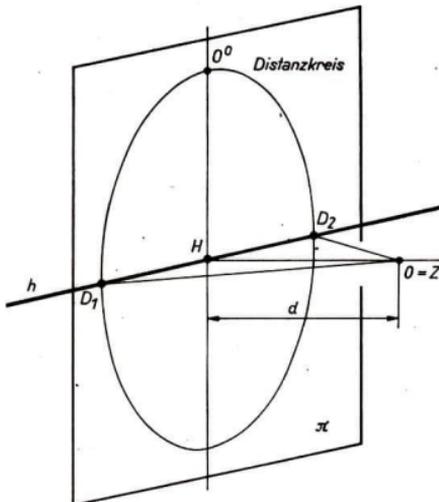


Abb. 8

Von konstruktivem Interesse ist weiterhin der geometrische Ort der Fluchtpunkte aller um  $45^\circ$  gegen die Bildebene geneigten Geraden. Dies ist ein Kreis um den Hauptpunkt  $H$  mit dem Radius  $r = d$  (Augdistanz). Der *Distanzkreis* schneidet den Horizont in den *Distanzpunkten*  $D_1$  und  $D_2$ . Mit diesen Mitteln kann z. B. das zentralperspektive Bild eines in horizontaler Ebene liegenden, frontal ausgerichteten Schachbretts konstruiert werden. Die eine Feldlinienschar bildet Tiefengeraden und besitzt  $H$  als Fluchtpunkt. Die andere Schar von Feldlinien liegt parallel zum Horizont. Die Diagonalen der Feldquadrate sind unter  $45^\circ$  gegen die Bildebene geneigt. Ihre Fluchtpunkte fallen daher in die Distanzpunkte  $D_1$  und  $D_2$ . Umgekehrt kann aus dem Bild des Schachbretts die Augdistanz rekonstruiert werden. Bei *Rekonstruktionsanalysen* kommt es darauf an, außer dem Horizont auch das zentralperspektive Bild eines Quadrates oder Kreises auszuwerten (Abb. 9).

Das Bild einer nicht durch  $Z$  gehenden Geraden  $g$  ist — wie bereits oben dargelegt — durch die Bilder zweier Punkte von  $g$  eindeutig bestimmt. Zwei ausgezeichnete Bildpunkte von  $g$  sind der Spurpunkt  $G = G(g\pi)$  und der Fluchtpunkt  $G_u^c$  (Bildpunkt des Fernpunktes  $G_u$ ). Damit läßt sich z. B. eine Abbildung des Geradenraumes auf geordnete Punktepaare der Bildebene erklären. Diese Möglichkeit soll hier nicht weiter verfolgt werden (Abb. 10).

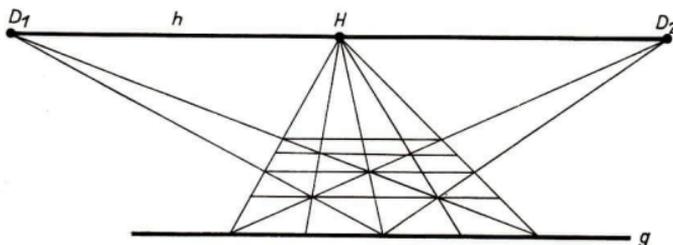


Abb. 9

Das zentralperspektive Bild  $g^c$  von  $g$  ist auch als Spur der von  $g$  und  $Z$  aufgespannten Ebene  $\varepsilon$  in der Bildebene interpretierbar. Hält man auf der Geraden  $g$  die vier Punkte  $A, B, U$  und  $V$  fest, so entsprechen diesen auf  $g^c$  die Bildpunkte  $A^c, B^c, U^c$  und  $V^c$ . Zu vier auf einer Geraden liegenden Punkten läßt sich bei Vorgabe einer

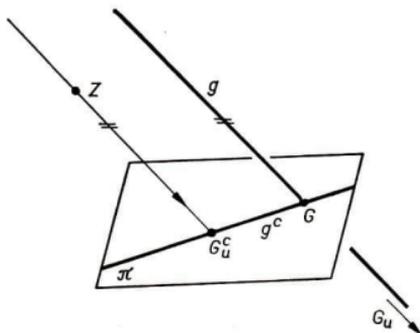


Abb. 10

bestimmten Reihenfolge eindeutig das *Doppelverhältnis* bilden. Eine Anwendung der Definition des Doppelverhältnisses für die auf  $g$  gegebene Folge von vier Punkten ergibt

$$\Delta := DV(A, B; U, V) = \frac{m(AU)}{m(AV)} : \frac{m(BU)}{m(BV)}$$

(Abb. 11). Es gilt der

Satz. Das Doppelverhältnis von vier auf einer Geraden liegenden Punkten ist invariant gegenüber der Zentralprojektion, d. h., es gilt

$$DV(A, B; U, V) = DV(A^c, B^c; U^c, V^c).$$

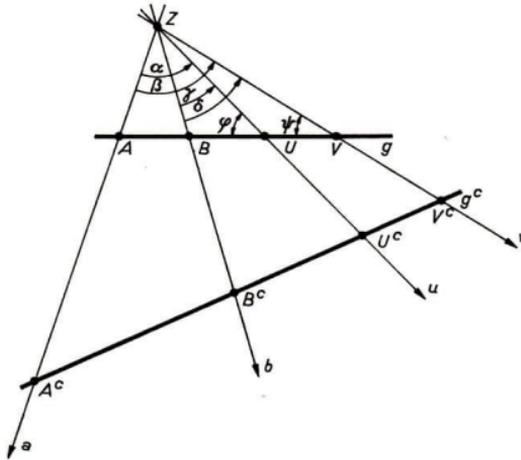


Abb. 11

Beweis. Zunächst werde die Ebene  $\varepsilon = \varepsilon(gZ)$  in die Zeichenebene gelegt, und die aus der Zeichnung ersichtlichen orientierten Strecken- und Winkelgrößen werden eingeführt. Unter Anwendung des Sinussatzes der ebenen Trigonometrie findet man

$$\frac{m(AU)}{m(AZ)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi}, \quad \frac{m(AV)}{m(AZ)} = \frac{\sin \beta}{\sin \psi}, \quad \frac{m(BU)}{m(BZ)} = \frac{\sin \gamma}{\sin \varphi}, \quad \frac{m(BV)}{m(BZ)} = \frac{\sin \delta}{\sin \psi}.$$

Durch Einsetzen in die Definitionsgleichung folgt hieraus

$$DV(A, B; U, V) = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} : \frac{\sin \gamma}{\sin \delta}.$$

Das Doppelverhältnis  $\Delta$  der vier auf  $g$  liegenden Punkte hängt somit lediglich von den Winkeln ab, die die von  $Z$  ausgehenden Projektionsstrahlen miteinander einschließen. Eine völlig analoge Rechnung für das auf  $g^c$  liegende Punktequadrupel  $A^c, B^c, U^c, V^c$  würde daher auf das gleiche Ergebnis führen. Folglich gilt die obige Behauptung. Es ist zu beachten, daß das Doppelverhältnis  $\Delta$  als reelle Zahl positiv, negativ oder 0 sein kann. Für den Fall, daß genau ein Punkt des ersten Punktepaars das zweite Punktepaar auf  $g$  trennt, gilt  $\Delta < 0$ . Liegen hingegen die Punktepaare getrennt auf  $g$  oder liegt ein Punktepaar zwischen den Punkten des anderen, so gilt  $\Delta > 0$ .

Bezeichnet man die von  $Z$  nach  $A, B, U, V$  führenden Strahlen mit  $a, b, u, v$  und versteht z. B. unter  $m(\sphericalangle(a, u))$  die Größe des von  $a$  und  $u$  eingeschlossenen orientierten Winkels, so gilt

$$DV(A, B; U, V) = \frac{\sin m(\sphericalangle(a, u))}{\sin m(\sphericalangle(a, v))} : \frac{\sin m(\sphericalangle(b, u))}{\sin m(\sphericalangle(b, v))}.$$

Dieses Ergebnis legt es nahe, entsprechend dem im projektiven Raum gültigen *Dualitätsprinzip* auch von dem Doppelverhältnis eines durch den Punkt  $Z$  gehenden und in einer Ebene liegenden *Strahlenquadrupels*  $a, b, u, v$  zu sprechen. Die dualisierte Form für das Doppelverhältnis lautet daher

$$DV(a, b; u, v) = \frac{\sin m(\sphericalangle(a, u))}{\sin m(\sphericalangle(a, v))} : \frac{\sin m(\sphericalangle(b, u))}{\sin m(\sphericalangle(b, v))}.$$

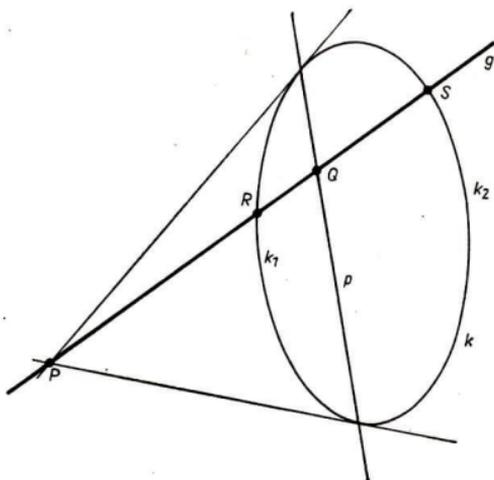


Abb. 12

Von besonderem Interesse sind jene Punkte- und Strahlenquadrupel, für die  $\Delta = -1$  gilt. Man spricht dann von einer *harmonischen Lage* der vier Elemente zueinander. Diese tritt z. B. bei der *Polarverwandtschaft* von Punkt und Gerade bezüglich eines Kegelschnittes  $k$  auf. Ist  $p$  eine Polare des Punktes  $P$  bezüglich  $k$ , so bilden auf jeder durch  $P$  gehenden Geraden  $g$  die Punkte  $P, Q = Q(gp), R = R(gk_1)$  und  $S = S(gk_2)$  ein *harmonisches Punktequadrupel* auf  $g$  (Abb. 12).

### 1.3. Parallelprojektion

Bei der Parallelprojektion ist das Projektionszentrum  $Z$  ein uneigentlicher, nicht auf der Ferngeraden der Bildebene  $\pi$  liegender Punkt. Das Abbildungsmittel ist also ein *Parallelstrahlbündel*. Der prinzipielle Unterschied dieser Abbildung zur Zentralprojektion besteht darin, daß sich die Fernelemente des Raumes genau auf die Ferngerade der Bildebene abbilden. Daraus resultieren die folgenden *Invarianzeigenschaften* der Parallelprojektion:

1. Parallele Geraden des Raumes, deren gemeinsamer Fernpunkt nicht in  $Z$  liegt, bilden sich als parallele Geraden ab.

2. Das von drei auf einer Geraden liegenden Punkten  $A, B, C$  bestimmte Teilverhältnis  $TV(A, B; C) = \frac{m(AC)}{m(BC)}$  bleibt bei der Abbildung erhalten.

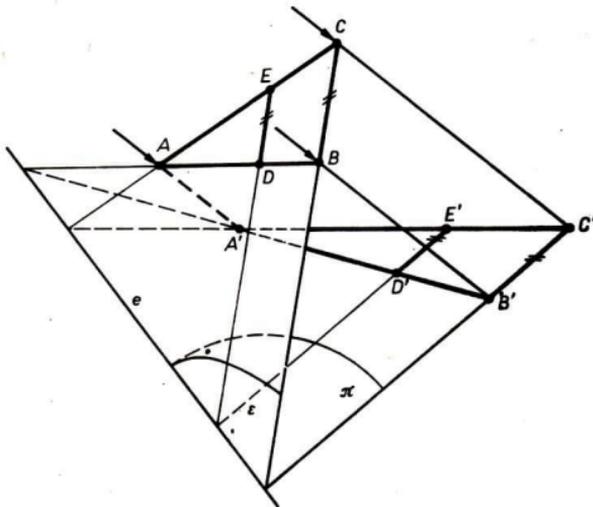


Abb. 13

3. Ebene Figuren, die parallel zur Bildebene liegen, bilden sich in wahrer Gestalt ab.

4. Zwischen Figuren in Ebenen allgemeiner Lage und deren Bildern besteht eine geometrische Verwandtschaft, die man *perspektive Affinität* nennt. Die Spur  $e$  der Trägerebene  $\epsilon$  in der Bildebene  $\pi$  ist die *Fixgerade* dieser Abbildung. Durch Vorgabe der Fixgeraden und eines Punktepaars ist die *affine Abbildung* eindeutig bestimmt (Abb. 13). Vgl. 2.4.

Die mittels Parallelprojektion erzeugten Bilder sind im allgemeinen weniger anschaulich. Sie lassen jedoch bei bestimmten Vereinbarungen die Abnahme körperlicher Maße zu.

#### 1.4. Schrägrißverfahren

Anschauliche Bilder räumlicher Objekte liefert bei geringem Konstruktionsaufwand das Schrägrißverfahren. Zur Herstellung solcher Bilder denkt man sich die Bildebene  $\pi$  im physikalischen Sinne senkrecht aufgestellt und den abzubildenden Gegenstand vor dieser Ebene angebracht. Dabei wird vorausgesetzt, daß sich in bezug auf den darzustellenden Körper zwanglos ein *orthogonales und normiertes Dreibein* als Hilfsmittel zur Maßübertragung einführen läßt. Der Körper wird bezüglich der Bildebene  $\pi$  so angeordnet, daß die  $x$ -Achse eines *Rechtsdreibeins* senkrecht zur Bildtafel steht, während die  $y$ -Achse horizontal und die  $z$ -Achse vertikal in der Bildebene liegen. Durch ein Parallelstrahlbündel, welches schräg von vorn auf die Bildtafel fällt, werden alle ebenen Begrenzungsflächen des räumlichen Objektes, die parallel zur  $y$ ,  $z$ -Ebene liegen, in wahrer Gestalt wiedergegeben. Dagegen bilden sich alle auf Parallelen zur  $x$ -Achse liegenden Strecken in einem bestimmten Verhältnis verkürzt oder gestreckt auf zueinander parallelen Geraden ab. Die Bilder von lotrechten Geraden bezüglich  $\pi$  schließen mit der  $z$ -Achse einen festen Winkel  $\varphi$  ein.

Offenbar ist zur Fixierung der Art eines Schrägbildes die Vorgabe von zwei Parametern notwendig. Dazu wird ein im Raum liegendes gleichschenkelig-rechtwinkliges

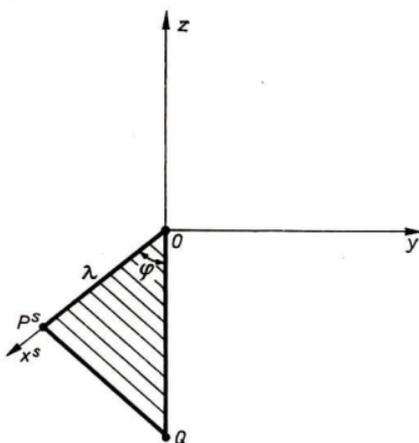


Abb. 14

Dreieck eingeführt. Seine Eckpunkte  $O$ ,  $P$ ,  $Q$  haben — auf das gewählte räumliche Koordinatensystem bezogen — folgende Koordinaten:  $(0, 0, 0)$ ;  $(1, 0, 0)$ ;  $(0, 0, -1)$ . Bei der hier getroffenen Annahme stimmen die Punkte  $O$  und  $Q$  mit ihren Schrägbildern überein, während der Schrägriß  $P^s$  von  $P$  verschieden ist. Das in  $\pi$  liegende Dreieck  $\triangle OP^sQ$  stellt das *Verzerrungsdreieck* dar. Aus diesem sind ablesbar:

1. das Verzerrungsverhältnis  $\lambda = \frac{|OP^s|}{|OQ|}$   
und

2. die Größe des Verzerrungswinkels  $\varphi = |\sphericalangle P^sOQ|$  des Schrägrisses (Abb. 14).

Beim Anlegen von Schrägbildern gibt man sich das *Verzerrungsverhältnis*  $\lambda$  und die Größe des *Verzerrungswinkels*  $\varphi$  willkürlich vor, ohne nach der Einfallsrichtung jenes Parallelstrahlbündels zu fragen, das ein solches Bild erzeugt. Es werden Winkelgrößen und Verhältniszahlen bevorzugt, die bei Einfachheit der Bereitstellung und Konstruktion die Forderung nach Anschaulichkeit möglichst gut erfüllen, z. B.

$$\lambda = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \quad \varphi = 45^\circ, 30^\circ, 60^\circ.$$

Die Existenz von Strahlenrichtungen, die solche Abbildungen liefern, ist nach dem Satz von POHLKE gesichert (vgl. 4.2.); Abb. 15.

Das Schrägrißverfahren stellt ein spezielles Teilgebiet der *Axonometrie* dar. Man nennt Schrägbilder wegen der darin getroffenen Anordnung des Objektes bezüglich der Bildebene auch *frontalaxonomische* Bilder. Wegen der Einfachheit der Kon-

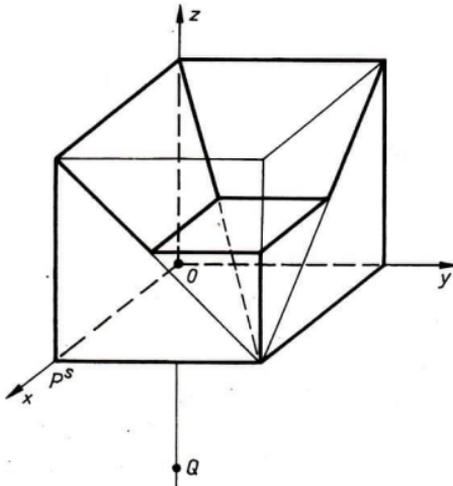


Abb. 15

struktion und der Vielfältigkeit der Anwendung in Lehrbüchern aller Art wird dieses Verfahren bereits hier in der Einleitung behandelt. Die oftmals unentbehrliche Darstellung von Kreis, Kugel, Drehkegel oder Drehzylinder im Schrägbild erfordert noch einige zusätzliche Kenntnisse über Ellipsenkonstruktionen. Die Schrägbilddarstellung solcher Körper muß daher für später aufgehoben werden (vgl. 3.8.).

### 1.5. Normalprojektion

Unter den Abbildungen durch Parallelprojektion nimmt die Normalprojektion vor allem für technische Anwendungen eine bevorzugte Stellung ein. Da die Projektionsstrahlen senkrecht auf die Bildebene treffen, hängt das Verkürzungsverhältnis bei Abbildung von Strecken lediglich von dem Neigungswinkel der Trägergeraden dieser

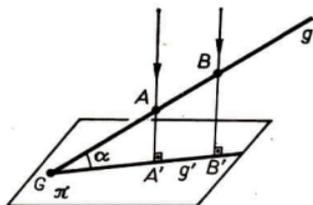


Abb. 16

Strecke gegen die Bildebene ab. Die Normalprojektion einer Strecke  $AB$  auf  $\pi$  werde mittels eines Schrägbildes verdeutlicht (Abb. 16). Offenbar gilt die Beziehung  $|A'B'| = |AB| \cos \alpha$ . Für  $g \perp \pi$  gilt  $A' = B'$ . Man sagt in diesem Fall, die Gerade  $g$  ist *projizierend*. Sämtliche Punkte von  $g$  bilden sich in einem Punkt  $G$ , dem *Spurpunkt* von  $g$  ab.

Die Größe des Schnittwinkels  $\gamma$  zweier sich schneidender Geraden  $g$  und  $h$  kann im Bild je nach der Lage im Raum größer, gleich oder kleiner als im Original sein. Um etwas über die Größe des Bildwinkels aussagen zu können, ist zu fordern, daß sich keiner der Schenkel des Winkels in *projizierender Lage* befindet. Hinreichend dafür, daß sich der Winkel in wahrer Größe abbildet, ist die Bedingung, daß die von  $g$  und  $h$  aufgespannte Ebene parallel zu  $\pi$  liegt. Schneiden sich  $g$  und  $h$  senkrecht, so genügt für die Erhaltung des rechten Winkels bei der Abbildung, daß wenigstens eine der Geraden  $g$  und  $h$  parallel zu  $\pi$  ist. Von diesem Sachverhalt wird bei der Lösung von Aufgaben des Maßes in späteren Abschnitten öfter Gebrauch gemacht (vgl. 2.5.).

Zwischen den Punkten einer Ebene  $\varepsilon$  allgemeiner Lage und deren Bildpunkten ist eine eindeutige Zuordnung herstellbar. Die Fernpunkte von  $\varepsilon$  bilden sich genau auf die Ferngerade von  $\pi$  ab. Die Schnittgerade  $e = e(\varepsilon\pi)$  ist Fixgerade der Abbildung.

Gilt  $\varepsilon \perp \pi$ , so fallen alle Bildpunkte von  $\varepsilon$  in die Spur dieser Ebene. Man sagt in diesem Fall, die Ebene  $\varepsilon$  ist in projizierender Lage bezüglich der Bildebene  $\pi$  (Abb. 17).

Durch das Auftreten von projizierenden Kanten und Flächen bei Normalprojektion eines räumlichen Objektes verliert das Bild an Anschaulichkeit. Da andererseits das Verkürzungsverhältnis von Strecken allein vom Neigungswinkel der zugehörigen Geraden gegen die Bildebene abhängt, ist die Abnahme von Maßen aus solchen Bildern wesentlich erleichtert. In technischen Anwendungen bedient man sich deshalb vorzugsweise der Normalprojektion.

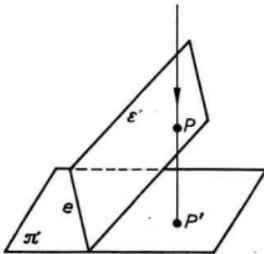


Abb. 17

Da durch ein zweidimensionales Bild eines dreidimensionalen Objektes noch nicht dessen Rekonstruierbarkeit gesichert ist, bedarf es zusätzlicher Hilfsmittel und Vereinbarungen, um ebene Bilder für räumliche Konstruktionen verwendbar zu machen. Zwei Wege sind für die Theorie und Praxis von fundamentaler Bedeutung:

1. Von dem räumlichen Objekt werden zwei Normalprojektionen bereitgestellt. Die Projektionsrichtungen zur Erzeugung der beiden Bilder sowie die *Projektionsebenen* stehen aufeinander senkrecht. Für weitere Konstruktionen werden die beiden Bilder in der Zeichenebene in bestimmter Weise einander zugeordnet. Man spricht in diesem Fall von dem *Verfahren in zugeordneten Normalrissen*.

2. Mit der Normalprojektion des räumlichen Objektes ist ein Maßstab (Längeneinheit) vorgegeben. Den Projektionen von charakteristischen Punkten oder Linien des räumlichen Gebildes werden die mit dem vorgegebenen Maßstab gemessenen Tafelabstände<sup>1)</sup> zahlenmäßig in Form von *Höhenkoten* beigelegt. Liegen die Punkte über der Bildebene  $\pi$ , so ist die zugehörige *Kote* größer als Null. Unter der Bildebene liegende Punkte haben eine negative Kote. Die Bezugsebene kann auch parallel zur Bildebene verschoben werden. Dieses Darstellungsverfahren heißt *kotierte Projektion* oder *Eintafelverfahren*.

Die Entscheidung über das anzuwendende Verfahren richtet sich nach dem sachlichen Inhalt der zu lösenden Aufgabe.

<sup>1)</sup> Das sind die Längen der von den Punkten auf die Bildebene gefällten Lote.

## 2. Das Zweitafelverfahren

### 2.1. Zuordnungsvorschrift von Normalrissen im Zweitafelverfahren

Der Einführung des Zweitafelverfahrens werde ein orthogonales und normiertes räumliches Rechtsdreiein zugrunde gelegt. Vom Betrachter aus gesehen zeige die von einem festen Punkt  $O$  ausgehende, horizontal liegende  $x$ -Achse nach vorn, die  $y$ -Achse nach rechts und die  $z$ -Achse nach oben. Für die weiteren Darlegungen wird die  $x, y$ -Ebene mit der ersten Bildebene oder dem Grundriß  $\pi_1$  und die  $y, z$ -Ebene mit der zweiten Bildebene oder dem Aufriß  $\pi_2$  identifiziert. Der abzubildende Punkt  $P$  liege über  $\pi_1$  und vor  $\pi_2$ . Durch Normalprojektion von  $P$  auf  $\pi_1$  erhält man den Grundriß  $P'$  von  $P$ . Die Distanz  $|PP'|$  nennt man den *ersten Tafelabstand* des Punktes  $P$ . Sie stimmt mit dem  $z$ -Wert von  $P$  — auf das Koordinatendreiein bezogen — überein. Den diese Abbildung von  $P$  vermittelnden Strahl nennt man einen *ersten Projektionsstrahl*  $s_1$ . Durch Normalprojektion von  $P$  auf  $\pi_2$  erhält man den Aufriß  $P''$  von  $P$ . Die Distanz  $|PP''|$  nennt man den *zweiten Tafelabstand* des Punktes  $P$ . Sie stimmt mit der Abszisse von  $P$  — auf das Koordinatendreiein bezogen — überein. Den diese Abbildung von  $P$  vermittelnden Strahl nennt man einen *zweiten Projek-*

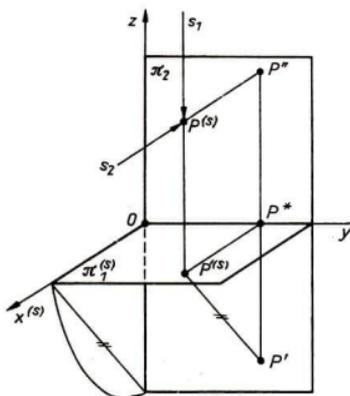


Abb. 18

tionsstrahl  $s_2$  (Abb. 18). Die von den Punkten  $P$ ,  $P'$  und  $P''$  aufgespannte Ebene durchsetzt die  $y$ -Achse senkrecht in einem Punkt  $P^*$ , dessen Ordinate mit der von  $P$  übereinstimmt.

Die Bildebenen  $\pi_1$  und  $\pi_2$  teilen den Raum in vier Quadranten, die — bezogen auf das eingangs eingeführte Koordinatendreiein — durch folgende Ungleichungen erfaßt werden:

	I. Quadrant	II. Quadrant	III. Quadrant	IV. Quadrant
$x$	$> 0$	$< 0$	$< 0$	$> 0$
$z$	$> 0$	$> 0$	$< 0$	$< 0$

(Abb. 19).

Bei Anwendung des Zweitafelverfahrens bringt man das darzustellende Objekt in der Regel in den ersten Quadranten. Im Verlaufe sich anschließender Konstruktionen ist es jedoch vielfach unvermeidbar, auch Punkte aus anderen Quadranten mit zu verwenden. Um aber mit Zirkel und Lineal konstruieren zu können, sind noch die beiden Bildtafeln in eine gemeinsame Zeichenebene überzuführen. Dazu hält man etwa die Aufrißebene fest und klappt die Grundrißebene um die  $y$ -Achse so weit nach unten, bis sie mit  $\pi_2$  in einer Ebene liegt. Dies ist dann die Zeichenebene, deren Lage praktischen Bedürfnissen angepaßt wird. Für die weiteren Konstruktionen ist die  $y$ -Achse als *Rißachse*  $x_{12}$  anzusehen. In der Zeichenebene überdecken sich zwei Bildebenen. Die Rißachse grenzt diese Bildebenen keineswegs gegeneinander ab. Sie dient vielmehr beim Zeichnen als wichtige Orientierungslinie, da sich in ihr die Bildebenen  $\pi_1$  und  $\pi_2$  in der Ausgangslage senkrecht durchsetzten (vgl. Abb. 18).

Nach der Vierteldrehung von  $\pi_1$  liegt der Grundriß  $P'$  von  $P$  unterhalb und der Aufriß  $P''$  von  $P$  oberhalb der Rißachse. Da beim Eindrehen von  $\pi_1$  in die Zeichenebene die Ordinaten von  $P'$  und  $P''$  erhalten bleiben, liegen der Grund- und Aufriß von  $P$  auf einer Lotrechten durch  $P^*$  bezüglich der Rißachse. Diese lotrechte Verbindungslinie von  $P'$  und  $P''$  nennt man *Ordnungslinie* oder kurz *Ordner* (Abb. 20).

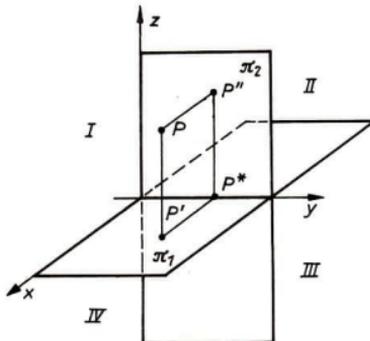


Abb. 19

Grundsätzlich ist festzuhalten: Grund- und Aufriß eines Punktes liegen auf einer Lotrechten zur Rißachse. Man sagt auch: Die beiden Bildpunkte befinden sich in *Mongescher Lage*.

Die bisherigen Darlegungen zeigen, daß sich beim Zweitafelverfahren jedem Punkt  $P$  des Raumes eindeutig ein in Mongescher Lage befindliches Bildpunktpaar  $P'$ ,  $P''$  zuordnen läßt und auch umgekehrt aus einem solchen Bildpunktpaar die Lage des

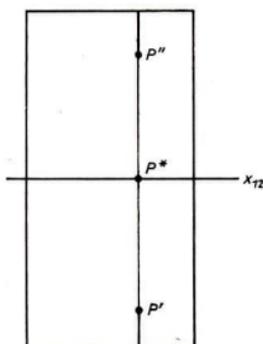
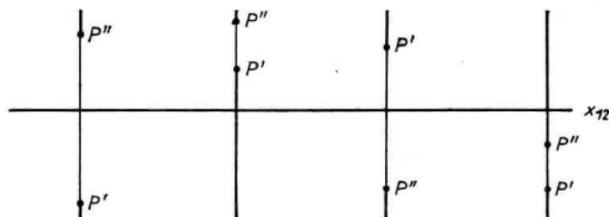


Abb. 20

Originalpunktes eindeutig rekonstruierbar ist. Es ist noch klarzustellen, wie man aus Grund- und Aufriß eines Punktes seine Zuordnung zu einem der vier Quadranten des Raumes ablesen kann. Entsprechend der Vierteldrehung von  $\pi_1$  in die mit  $\pi_2$  gemeinsame Zeichenebene ergibt sich eine der in Abb. 21 gezeigten Zuordnungen.



$P$  liegt im 1. Quadranten, 2. Quadranten, 3. Quadranten, 4. Quadranten

Abb. 21

Liegt ein Punkt  $P$  in  $\pi_1$ , so stimmt das Original mit dem Grundriß überein, während der Aufriß von  $P$  auf die Rißachse fällt. Liegt  $P$  in  $\pi_2$ , so stimmt das Original mit dem Aufriß überein, während der Grundriß von  $P$  auf die Rißachse fällt.

Neben Grund- und Aufriß — auch *erste* bzw. *zweite Bildebene* genannt — lassen sich zwei weitere Ebenen auszeichnen, die für konstruktive Belange gelegentlich mit herangezogen werden. Die Gesamtheit jener Punkte, deren Grund- und Aufrisse

spiegelbildlich zur Rißachse liegen, bildet die *Symmetrieebene*  $\sigma$ . Bezüglich des eingangs eingeführten Koordinatendreiecks wird  $\sigma$  durch die Gleichung  $z = x$  beschrieben. Die Symmetrieebene enthält die Rißachse und durchsetzt den ersten und dritten Raumquadranten. Die Gesamtheit jener Punkte, deren Grund- und Aufrisse sich in der Zeichenebene decken, bildet die *Koinzidenzebene*  $\kappa$ . Sie wird durch die Gleichung  $z = -x$  beschrieben, enthält ebenfalls die Rißachse und durchsetzt den zweiten und vierten Raumquadranten (Abb. 22).

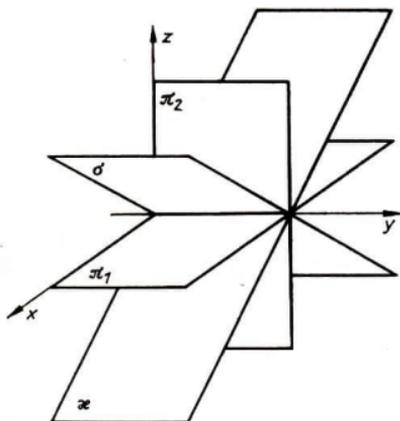


Abb. 22

## 2.2. Darstellung von Geraden im Zweitafelverfahren

Nach 2.1. ist die Lage eines Punktes  $P$  im Raum eindeutig durch die beiden Normalrisse  $P'$  und  $P''$  bestimmt, die sich in Mongescher Lage befinden. Für die Untersuchung der Normalrisse einer Geraden ist davon auszugehen, daß eine Gerade  $g$  durch zwei ihrer Punkte  $P$  und  $Q$  eindeutig bestimmt ist. Die Bilder  $g'$  und  $g''$  von  $g = g(PQ)$  sind daher gleich den Verbindungsgeraden von  $P'$  mit  $Q'$  bzw.  $P''$  mit  $Q''$ . Es gilt also  $g' = g'(P'Q')$  und  $g'' = g''(P''Q'')$ .

Nimmt man einen weiteren Punkt  $X$  auf  $g$  an, so gilt wegen der Invarianz von Teilverhältnissen bei Parallelprojektion

$$\frac{m(PX)}{m(QX)} = \frac{m(P'X')}{m(Q'X')} = \frac{m(P''X'')}{m(Q''X'')}.$$

Diese *Invarianzeigenschaft* findet beim *Vervollständigen* von Punktreihen in den Bildern von Geraden Verwendung (Abb. 23).

Auf einer Geraden  $g$  von allgemeiner Lage bezüglich der Projektionsebenen lassen sich zwei Punkte auszeichnen, nämlich der *erste Spurpunkt*  $G_1 = G_1(g\pi_1)$  und der

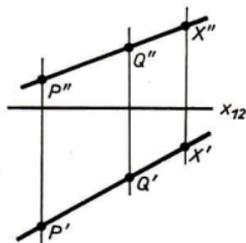


Abb. 23

*zweite Spurpunkt*  $G_2 = G_2(g\pi_2)$ . Die Lage einer Geraden läßt sich, soweit sie die Reißachse nicht schneidet, auch durch Vorgabe der Spurpunkte  $G_1$  und  $G_2$  beschreiben (Abb. 24). Da  $G_1$  in  $\pi_1$  und  $G_2$  in  $\pi_2$  liegt, fallen der Aufriß von  $G_1$  und der Grundriß von  $G_2$  in die Reißachse. Schneidet  $g$  die Reißachse, so fallen  $G_1$  und  $G_2$  mit dem be-

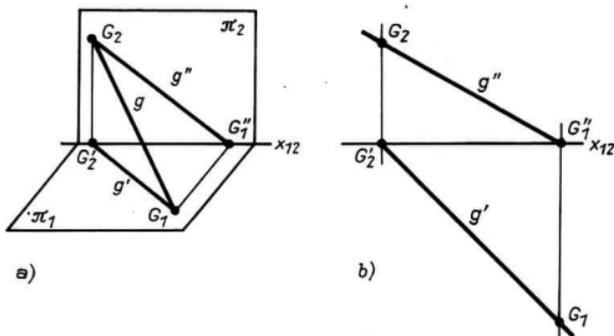


Abb. 24

treffenden Punkt der Reißachse zusammen. Außer den Spurpunkten  $G_1$  und  $G_2$  sind von einer Geraden  $g$  noch deren Schnittpunkte mit der Koinzidenzebene  $\kappa$  und der Symmetrieebene  $\sigma$  von Interesse. Die Bilder des Punktes  $K = K(\kappa g)$  (*Koinzidenzpunkt*) liegen im Schnittpunkt von  $g'$  mit  $g''$ , also  $K'(g'g'') = K''(g'g'')$  (Abb. 25). Zur Konstruktion der Bilder des Punktes  $S = S(\sigma g)$  spiegelt man z. B.  $g'$  an der Reißachse und erhält  $\bar{g}'$ . Der Schnittpunkt  $S'' = S''(g'\bar{g}')$  stellt den Aufriß des *Symmetriepunktes*  $S = S(\sigma g)$  dar. Den Ordner durch  $S''$  mit  $g'$  zum Schnitt gebracht ergibt den Grundriß  $S'$  von  $S$  (Abb. 26).

### Spezielle Lagen von $g$

Ist  $G_1$  ein Fernpunkt von  $\pi_1$ , so stellt  $g$  eine *Horizontale* dar. Ist  $G_2$  ein Fernpunkt von  $\pi_2$ , so stellt  $g$  eine *Frontale* dar. Liegen  $G_1$  und  $G_2$  auf einer Ordnungslinie, so ist  $g$  eine *Profilgerade*. Für Profilgeraden decken sich  $g'$  und  $g''$ . Aus den Bildern  $g'$  und

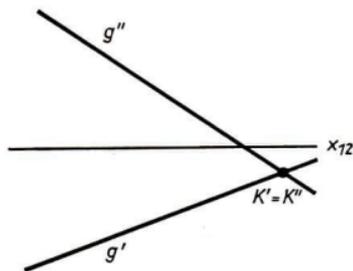


Abb. 25

$g''$  einer Geraden  $g$  läßt sich im allgemeinen die Lage von  $g$  im Raum ablesen. Lediglich für Profilgeraden ist eine Lagerekonstruktion aus  $g'$  und  $g''$  allein nicht möglich. Es sind dann noch die Bilder von zwei auf  $g$  liegenden Punkten anzugeben.

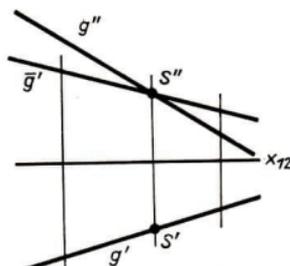


Abb. 26

Aus  $g \perp \pi_1$  folgt:  $G_1 = g'$ ,  $g'' \perp x_{12}$ ;  $g$  ist *erstprojizierend*.

Aus  $g \perp \pi_2$  folgt:  $G_2 = g''$ ,  $g' \perp x_{12}$ ;  $g$  ist *zweitprojizierend*.

Wegen der Linearität der Abbildung gilt ferner: Liegen die Grundrisse  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  und die Aufrisse  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  der drei Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  auf einer Geraden, so liegen auch die Originalpunkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  im Raum auf einer Geraden. Eine Ausnahme ist lediglich für Profilgeraden zu machen.

Für die Lagebeziehungen von zwei Geraden  $g$  und  $h$  im Raum sind drei wesentliche Fälle zu unterscheiden. Bezeichnet man den Schnittpunkt von  $g'$  und  $h'$  mit  $A$ , den Schnittpunkt von  $g''$  und  $h''$  mit  $B$ , so lassen sich die Lagekriterien wie folgt fassen:

1. Die Punkte  $A$  und  $B$  liegen auf einer Ordnungslinie. Hieraus folgt, daß sich  $g$  und  $h$  in einem Punkt  $S$  schneiden. Es gilt  $S' = A$  und  $S'' = B$  (Abb. 27).

2. Die Punkte  $A$  und  $B$  liegen nicht auf einer gemeinsamen Ordnungslinie. Hieraus folgt, daß  $g$  und  $h$  windschief sind. Einer der Punkte  $A$  oder  $B$  kann dabei auch ein Fernpunkt sein (Abb. 28).

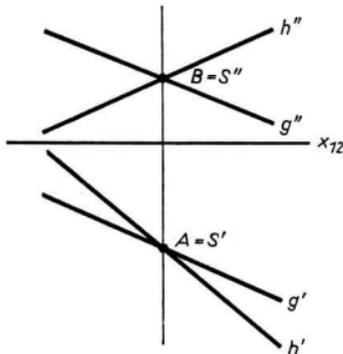


Abb. 27

3. Die Punkte  $A$  und  $B$  sind Fernpunkte, d. h.  $g' \parallel h'$  und  $g'' \parallel h''$ . Hieraus folgt, daß die Geraden  $g$  und  $h$  parallel sind.

Ist auch nur eine der beiden Geraden eine Profilgerade, dann sind gesonderte Überlegungen erforderlich, auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll.

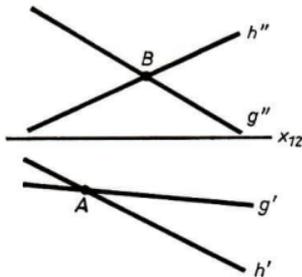


Abb. 28

### 2.3. Darstellung von Ebenen

Zur Darstellung von Ebenen ist davon auszugehen, daß eine Ebene durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte im Raum eindeutig bestimmt ist. Zur symbolischen Beschreibung einer durch die drei Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  aufgespannten Ebene  $\varepsilon$  setzt man

$\varepsilon = \varepsilon(ABC)$ . Im folgenden werden *Punkttripel* verschiedener Anordnung bezüglich der Bildtafeln durch ihre Normalrisse vorgelegt und daraus Folgerungen über die Lagen der von den Punkttripeln aufgespannten Ebenen gezogen.

1. Die in der Zeichenebene liegenden Dreiecke  $A'B'C'$  und  $A''B''C''$  werden im positiven Sinn durchlaufen. In beiden Bildern ist die gleiche Seite der Ebene dem Betrachter zugekehrt. Man spricht von einer *gleichwendigen* Ebene  $\varepsilon$ . Wesentlich ist das Kriterium, daß der Umlaufsinn von Grund- und Aufriß aller in  $\varepsilon$  liegenden Dreiecke gleichorientiert ist (Abb. 29).

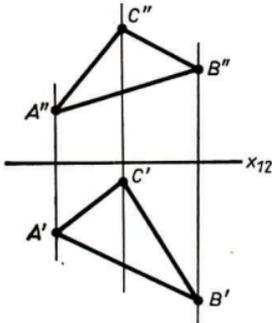


Abb. 29

2. Die in der Zeichenebene liegenden Bilder des Dreiecks  $\triangle ABC$  werden im entgegengesetzten Sinn durchlaufen. In jedem der beiden Bilder ist daher eine andere Seite der Ebene dem Betrachter zugekehrt. Man spricht von einer *wechselwendigen* Ebene  $\varepsilon$ . Der Umlaufsinn von Grund- und Aufriß aller in  $\varepsilon$  liegenden Dreiecke ist entgegengesetzt gerichtet (Abb. 30).

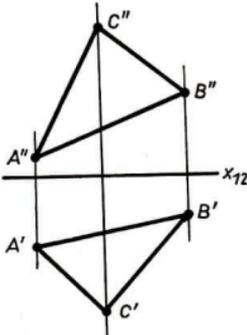


Abb. 30

3. Die Bildpunkte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  liegen in einer Geraden  $e_1$ , während  $A''$ ,  $B''$  und  $C''$  im Zeichenfeld ein Dreieck aufspannen. Damit spannen auch die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  im Raum ein Dreieck auf und legen eine Ebene  $\varepsilon$  fest. Diese Ebene steht senkrecht auf  $\pi_1$ . Man bezeichnet sie als *erstprojizierend*. Die Grundrisse aller Punkte von  $\varepsilon$

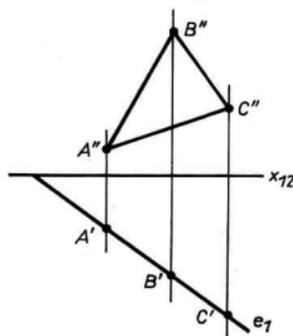


Abb. 31

liegen auf  $e_1$ , der Schnittgeraden von  $\varepsilon$  mit  $\pi_1$ . Die Abbildung der Punkte von  $\varepsilon$  auf  $\pi_1$  ist eindeutig, jedoch nicht umkehrbar eindeutig (Abb. 31).

4. Die Bildpunkte  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  liegen in einer Geraden  $e_2$ , während  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$  in der Zeichenebene ein Dreieck bilden. Auch hier ist gesichert, daß die Punkte  $A$ ,  $B$ ,

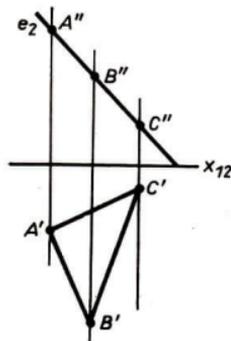


Abb. 32

$C$  im Raum ein Dreieck aufspannen und folglich eine Ebene festlegen. Diese Ebene steht senkrecht auf  $\pi_2$ . Man bezeichnet sie als *zweitprojizierend*. Die Aufrisse aller Punkte von  $\varepsilon$  liegen auf  $e_2$ . Somit besteht nur Eindeutigkeit bei der Abbildung von  $\varepsilon$  auf  $\pi_2$  (Abb. 32).

5. Die Bildtripel  $A'B'C'$  und  $A''B''C''$  der Punkte  $A, B, C$  liegen auf einer gemeinsamen Ordnungslinie. Ferner gelte

$$\frac{m(A'B')}{m(A'C')} \neq \frac{m(A''B'')}{m(A''C'')}.$$

Dann bilden die Punkte  $A, B, C$  ein in Profillage befindliches Dreieck. Die hierdurch festgelegte Ebene ist erst- und zweitprojizierend. Man bezeichnet sie auch als *doppeltprojizierend* (Abb. 33).

*Projizierende Ebenen* werden vielfach beim Einsatz von *Seitenrissen* und *Kreuzrissen* als Konstruktionsprinzip oder zum Anlegen anschaulicher Bilder herangezogen. Auf diese Anwendungen wird später eingegangen (vgl. 2.7. und 2.8.).

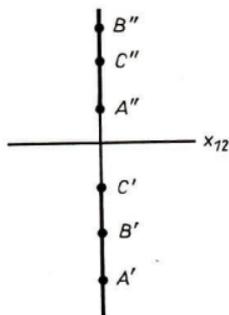


Abb. 33

Sind  $A', B', C'$  sowie  $A'', B'', C''$  kollineare Punkttripel, so liegen die Punkte  $A, B, C$  selbst auch auf einer Geraden. Damit läßt sich durch diese Punkte ein ganzes Büschel von Ebenen legen. Für *Profillagen* der Punkte  $A, B, C$  sind gesonderte Untersuchungen etwa durch Anlegen eines Kreuzrisses erforderlich.

Eine Grundaufgabe besteht im *Vervollständigen* des Punktfeldes einer Ebene  $\varepsilon$ . Es werde vorausgesetzt, daß Fall 1 oder 2 vorliegt. Außer  $\varepsilon = \varepsilon(ABC)$  ist noch der Grundriß  $D'$  eines in  $\varepsilon$  liegenden Punktes  $D$  gegeben. Der Aufriß von  $D$  läßt sich nach der Methode des „*Angiterns*“ finden. Man zeichnet die Verbindungsgerade  $A'D'$ . Diese schneidet  $B'C'$  in einem Punkt  $P'$ .  $P'$  selbst wird als ein Punkt der Seite  $BC$  aufgefaßt. Der Aufriß von  $P$  ergibt sich dann als Schnitt von  $B''C''$  mit der Ordnungslinie durch  $P'$ . Ferner liegt nach Konstruktion der Punkt  $D$  auf der Geraden  $AP$ . Man erhält also den Aufriß von  $D$ , indem die Verbindungsgerade  $A''P''$  mit der Ordnungslinie durch  $D'$  zum Schnitt gebracht wird. Die Gerade  $AP$  ist eine *Gitterlinie*, mit deren Hilfe der Aufriß von  $D$  bestimmt wird. Der Konstruktionsgedanke des Angiterns eines Punktes in einer Fläche läßt vielfältige Anwendungen zu (Abb. 34).

Um Konstruktionsergebnisse von hinreichender Zuverlässigkeit zu erhalten, sind als Ausgangselemente sogenannte „*schleifende Schnitte*“ von Geraden oder — dual

hierzu — dicht benachbart liegende Punkte zur Festlegung von Geraden zu vermeiden. Sie lassen sich bei Konstruktionen nicht ausschalten, wenn z. B. die Vorgabe der Punkte  $A, B, C$  zur Fixierung einer Ebene im Raum lagemäßig ungünstig ist. Falls sich nur ein Seitenpaar des Dreiecks  $\triangle ABC$  schneidend oder zwei Punkte des Dreiecks dicht benachbart liegen, stellt das Punktetripel  $ABC$  eine wenig zuverlässige Vorgabe für die Ebene  $\varepsilon$  dar. In praktischen Anwendungen, z. B. beim Aufstellen eines dreibeinigen Stativs, wird man die Anordnung so treffen, daß die Fußpunkte annähernd ein gleichseitiges Dreieck aufspannen. Dann ergibt sich für

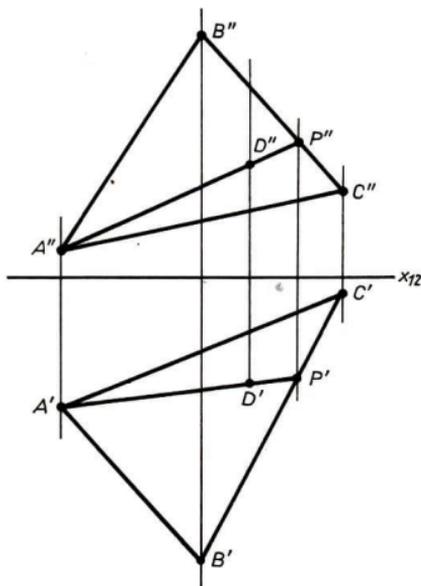


Abb. 34

das Gerät (Fotoapparat oder Meßinstrument) eine hinreichende Standfestigkeit. Hat man mehr als drei Punkte zur Auswahl, dann wird man jenes Punktetripel als Ausgangselement verwenden, das konstruktiv die größte Sicherheit bietet.

Einen anderen Zugang zur Darstellung von Ebenen bietet der

**Satz.** *Eine Ebene im Raum ist durch zwei sich schneidende Geraden oder zwei parallele Geraden eindeutig festgelegt.*

Eine Ebene  $\varepsilon$  allgemeiner Lage schneidet die Bildebenen  $\pi_1$  und  $\pi_2$  in je einer Geraden  $e_1$  bzw.  $e_2$ . Es werde vorausgesetzt, daß den drei Ebenen  $\pi_1, \pi_2$  und  $\varepsilon$  genau ein eigentlicher Punkt  $K$  gemeinsam ist. In  $K$  schneiden sich folglich die drei Geraden

$$x_{12} = x_{12}(\pi_1, \pi_2), \quad e_1 = e_1(\pi_1, \varepsilon), \quad e_2 = e_2(\pi_2, \varepsilon).$$

Man bezeichnet  $e_1$  als *Grundrißspur* oder *erste Spurgerade*,  $e_2$  als *Aufrißspur* oder *zweite Spurgerade* und  $K$  als den *Knotenpunkt* von  $\varepsilon$ . Der Grundriß von  $e_1$  stimmt mit dem Original überein, während sich der Aufriß von  $e_2$  mit der Rißachse deckt. Entsprechend stimmt der Aufriß von  $e_2$  mit dem Original überein, während der Grundriß von  $e_2$  in die Rißachse fällt. Nach dem oben angeführten Satz ist die Lage einer Ebene  $\varepsilon$  eindeutig durch Vorgabe der beiden Spuren  $e_1$  und  $e_2$  bestimmt (Abb. 35a, b).

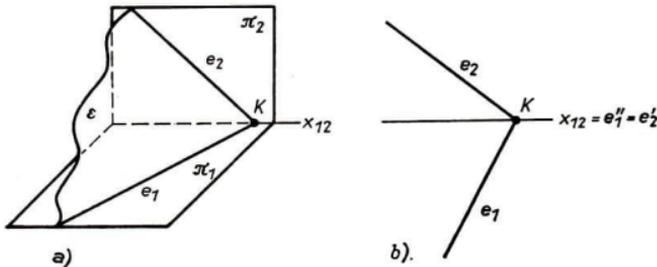


Abb. 35

Auch an den Spuren einer Ebene ist leicht zu erkennen, ob diese gleichwändig, wechselwändig oder projizierend ist. Für diese Betrachtung werde durch den Knotenpunkt  $K$  eine Ordnungslinie  $s$  gelegt. Dann lassen sich folgende leicht durchschaubaren Lagekriterien für  $\varepsilon$  geben.

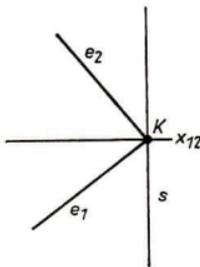


Abb. 36

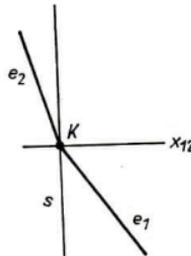


Abb. 37

1. Liegen die dem ersten Quadranten zugeordneten Abschnitte von  $e_1$  und  $e_2$  in einer der durch  $s$  bestimmten Halbebene, so ist  $\varepsilon$  gleichwändig (Abb. 36).
2. Liegen die dem ersten Quadranten zugeordneten Abschnitte von  $e_1$  und  $e_2$  in den entgegengesetzten Halbebenen bezüglich  $s$ , so ist  $\varepsilon$  wechselwändig (Abb. 37).
3. Deckt sich  $e_1$  mit  $s$ , so ist  $\varepsilon$  zweitprojizierend (Abb. 38).
4. Deckt sich  $e_2$  mit  $s$ , so ist  $\varepsilon$  erstprojizierend (Abb. 39).
5. Decken sich  $e_1$  und  $e_2$  mit  $s$ , so ist  $\varepsilon$  doppelprojizierend (Abb. 40).

Liegen die Spuren von  $\varepsilon$  parallel zur Rißachse, so ist der Knotenpunkt  $K$  ein Fernpunkt. Eine solche Ebene bezeichnet man in Anlehnung an die Vorstellung von der Arbeitsfläche eines Schreibpultes als *Pultebene*. Die Darstellung einer Ebene durch ihre Spuren versagt, wenn diese die Rißachse enthält.

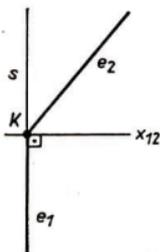


Abb. 38

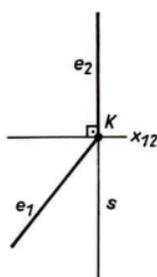


Abb. 39

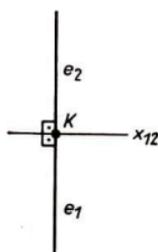


Abb. 40

Das Vervollständigen des Punktfeldes einer durch ihre Spuren bestimmten Ebene geschieht in analoger Weise zu der durch drei Punkte vorgelegten Ebene. Zum Beispiel sei von einem Punkt  $P \in \varepsilon$  ( $\varepsilon = \varepsilon(e_1, e_2)$ ) ist nicht projizierend) der Grundriß gegeben und der Aufriß gesucht. Eine in  $\varepsilon$  liegende Gerade  $p$  durch  $P$  hat die Spurpunkte  $G_1 \in e_1$  und  $G_2 \in e_2$ . Man zeichnet zunächst den Grundriß  $p'$  von  $p$  und findet die

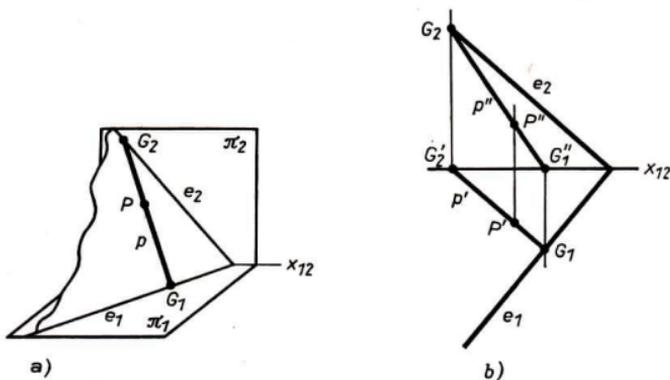


Abb. 41

Punkte  $G_1'$  mit  $G_1' = G_1 \in e_1$  und  $G_2' \in x_{12}$ . Mit den entsprechenden Ordnern erhält man die Aufrisse  $G_1'' \in x_{12}$  und  $G_2'' = G_2 \in e_2$ . Die Verbindungsgerade der Punkte  $G_1'', G_2''$  stellt den Aufriß  $p''$  des Gitterstabes  $p$  durch  $P$  dar. Eine Ordnungslinie durch  $P'$  schneidet  $p''$  in  $P''$  (Abb. 41 a, b).

Bei diesen Vorgaben pflegt man auch das Angittern eines Punktes mittels einer *ersten* oder *zweiten Spurparallelen* durchzuführen. Man bezeichnet jede Gerade  $h_1$

parallel zu  $e_1$  in  $\varepsilon$  als *erste Hauptlinie* oder erste Spurparallele von  $\varepsilon$ . Entsprechend heißt jede Gerade  $h_2$  parallel zu  $e_2$  in  $\varepsilon$  *zweite Hauptlinie* oder zweite Spurparallele von  $\varepsilon$ . Gemäß dieser Festlegung sind die ersten Hauptlinien einer Ebene — als Geraden im Raum aufgefaßt — *Horizontallinien* und die zweiten Hauptlinien *Frontallinien*. Die ersten Spurpunkte von ersten Hauptlinien sowie die zweiten Spurpunkte von zweiten Hauptlinien sind Fernpunkte der ersten bzw. zweiten Bildebene, soweit die Hauptlinien nicht selbst in einer der Bildebenen liegen.

Die ersten Hauptlinien bezeichnet man auch als *Höhenlinien* und die zweiten Hauptlinien als *Frontlinien* der betreffenden Ebene. Die Grundrisse von ersten Hauptlinien sind parallel zu  $e_1$  und ihre Aufrisse parallel zur Rißachse, da sich der Aufriß von  $e_1$  mit der Rißachse deckt. Entsprechend sind die Aufrisse der zweiten Hauptlinien parallel  $e_2$  und ihre Grundrisse parallel zur Rißachse.

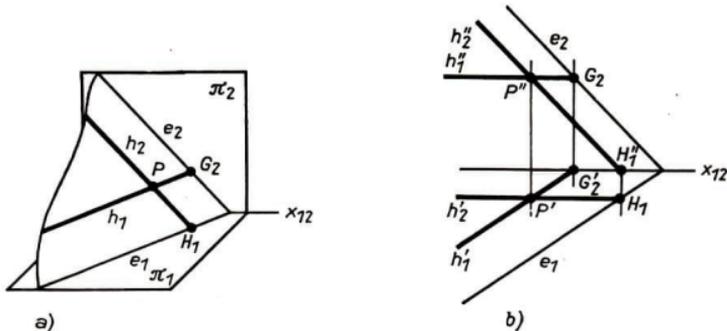


Abb. 42

Das Angittern eines Punktes  $P \in \varepsilon$ , dessen Grundriß  $P'$  gegeben ist, gestaltet sich mit Hilfe von Hauptlinien wie folgt:

Man legt durch  $P'$  den Grundriß  $h_1'$  einer ersten Hauptlinie  $h_1 \parallel e_1$ . Der Grundriß des zweiten Spurpunktes  $G_2$  von  $h_1$  liegt auf der Rißachse. Mittels Ordner führt man diesen in den Aufriß und erhält  $G_2 \in e_2$ . Die Parallele zur Rißachse durch  $G_2$  ist der Aufriß  $h_1''$  von  $h_1$ . Entsprechend kann man  $P$  mittels einer zweiten Hauptlinie vom Grundriß ausgehend angittern. Durch  $P'$  ist der Grundriß  $h_2' \parallel x_{12}$  von  $h_2$  zu legen. Der erste Spurpunkt  $H_1$  von  $h_2$  liegt auf  $e_1$ . Mit Hilfe einer Ordnungslinie findet man  $H_1'' \in x_{12}$ . Eine Parallele zu  $e_2$  durch  $H_1''$  liefert den Aufriß von  $h_2$ . Im Schnittpunkt von  $h_1''$  und  $h_2''$  liegt der Aufriß  $P''$  von  $P$ . Als Zeichenkontrolle kann überprüft werden, ob sich  $P'$  und  $P''$  in Mongescher Lage befinden. Bei erstprojizierenden Ebenen ist das Vervollständigen nur vom Aufriß nach dem Grundriß und bei zweitprojizierenden Ebenen in umgekehrter Richtung möglich (Abb. 42a, b).

## 2.4. Lagenaufgaben für Punkt, Gerade und Ebene. Perspektive Affinität

Lagenaufgaben für die geometrischen Grundgebilde Punkt, Gerade und Ebene lassen sich durch Schneiden und Verbinden mit Hilfe des Lineals unter Einbeziehung von Ordnungslinien in zugeordneten Normalrissen lösen. Winkel- und Streckenübertragungen finden hierbei nicht statt. In 2.3. wurde bereits durch Vervollständigen eines ebenen Punktfeldes ein Beispiel einer Lagenaufgabe behandelt. Die bei Lösung von Lagenaufgaben einzusetzenden Konstruktionsmethoden sollen an einer Reihe von Beispielen vorgeführt werden.

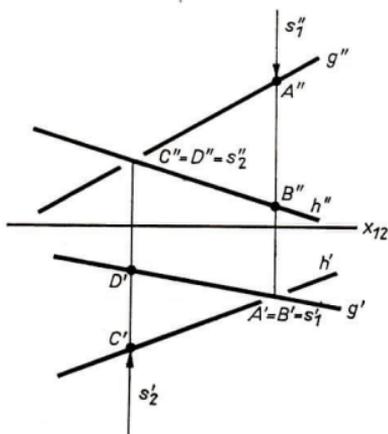


Abb. 43

1. An dem Grund- und Aufriß zweier windschiefer Geraden  $g$  und  $h$  ist in den Überdeckungsstellen die Sichtbarkeit zu verdeutlichen.

Lösung. Der erste Projektionsstrahl  $s_1$  trifft an der ersten Überdeckungsstelle zuerst den Punkt  $A$  auf  $g$  und dann den Punkt  $B$  auf  $h$ . Folglich ist an dem ersten Überschneidungspunkt  $g'$  durchzuzeichnen und  $h'$  zu unterbrechen. Aus analogen Überlegungen für den Aufriß mit einem zweiten Projektionsstrahl  $s_2$  folgt, daß  $g''$  an der zweiten Überschneidungsstelle zu unterbrechen und  $h''$  durchzuzeichnen ist (Abb. 43).

2. Gegeben sind eine Ebene  $\varepsilon = \varepsilon(e_1 e_2)$  und ein Punkt  $A \notin \varepsilon$ . Je für Grund- und Aufriß entscheide man, ob  $A$  von  $\varepsilon$  verdeckt oder sichtbar ist.

Lösung. Man legt durch  $A$  eine Hilfsebene  $\gamma \parallel \varepsilon$ . Die Lage der Spuren  $c_1$  und  $c_2$  von  $\gamma$  bezüglich der Spuren von  $\varepsilon$  zeigt an, in welchem Riß  $A$  sichtbar und in welchem  $A$  verdeckt ist. In dem vorliegenden Beispiel liegt  $A$  über und hinter  $\varepsilon$ .  $A$  ist also im Grundriß sichtbar und im Aufriß verdeckt (Abb. 44).

3. Eine Ebene  $\varepsilon$  ist mit einer Geraden  $g$  zu schneiden.

Lösung. Man legt durch  $g$  etwa die erstprojizierende Hilfsebene  $\gamma$ . Diese schneidet  $\varepsilon$  nach der Geraden  $d$ , deren Grundriß  $d'$  sich mit  $g'$  deckt. Man bezeichnet deshalb  $d$  als *Deckgerade*. Die Geraden  $g$  und  $d$  spannen die Hilfsebene  $\gamma$  auf. Für den Fall, daß

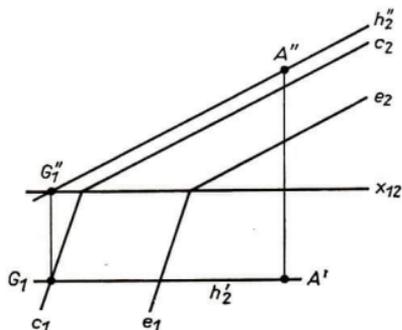


Abb. 44

$g$  nicht parallel zu  $\varepsilon$  liegt, schneiden sich die Aufrisse  $g''$  und  $d''$  in einem Punkt  $D''$ . Dies ist der Aufriß von  $D = D(eg)$ . Den Grundriß  $D'$  erhält man mittels einer Ordnungslinie durch  $D''$ . Völlig analog hätte man auch mit der zweitprojizierenden Hilfsebene durch  $g$  arbeiten können, um  $D$  zu erhalten (Abb. 45 a, b).

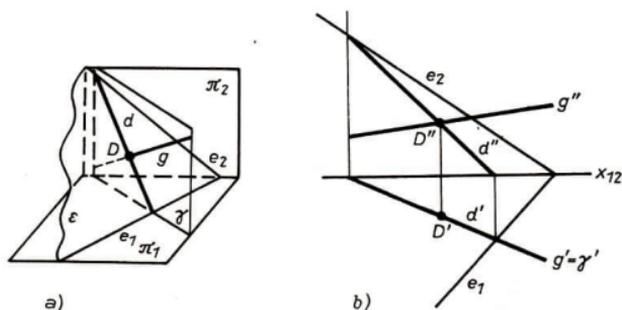


Abb. 45

4. Schnittgerade  $s$  der Ebenen  $\varepsilon = \varepsilon(e_1e_2)$  und  $\gamma = \gamma(c_1c_2)$ .

Lösung. Die Bestimmung der Schnittgeraden zweier Ebenen wird auf den Schnitt zweier geeigneter Paare von Geraden zurückgeführt. Man bevorzugt hierfür Hauptlinien und unter diesen besonders die Spurgeraden der Ebenen. Bezeichnet man mit  $S_1$  und  $S_2$  die beiden Spurpunkte der Schnittgeraden  $s = s(\gamma\varepsilon)$ , so gilt offensichtlich

$S_1 = S_1(c_1e_1)$  und  $S_2 = S_2(c_2e_2)$ . Mit Hilfe von Ordnungslinien durch  $S_1$  bzw.  $S_2$  findet man die auf der Rißachse  $x_{12}$  liegenden Punkte  $S_1''$  und  $S_2'$ . Weiterhin ist  $s' = s'(S_1S_2')$  der Grundriß und  $s'' = s''(S_1''S_2')$  der Aufriß von  $s$ . In analoger Weise hätte man mit beliebigen ersten und zweiten Hauptlinien von  $\gamma$  und  $\varepsilon$  arbeiten können (Abb. 46).

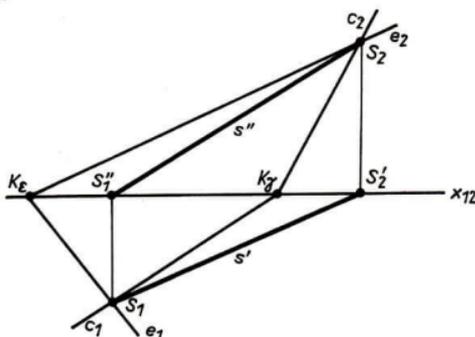


Abb. 46

5. Eine Ebene  $\varepsilon$  ist durch eine Gerade  $g$  und einen Punkt  $P \notin g$  gegeben. Gesucht sind die Spuren der Ebene  $\varepsilon$ .

Lösung. Die Gerade  $h_1'' \parallel x_{12}$  durch  $P''$  schneidet  $g''$  in einem Punkt  $I''$  mit  $I \in g$ . Mittels einer Ordnungslinie findet man  $I'$  auf  $g'$ . Mit der Verbindung  $(P'I') = h_1'$  hat man auch den Grundriß der ersten Hauptlinie von  $\varepsilon$  durch  $P$ . In entsprechender

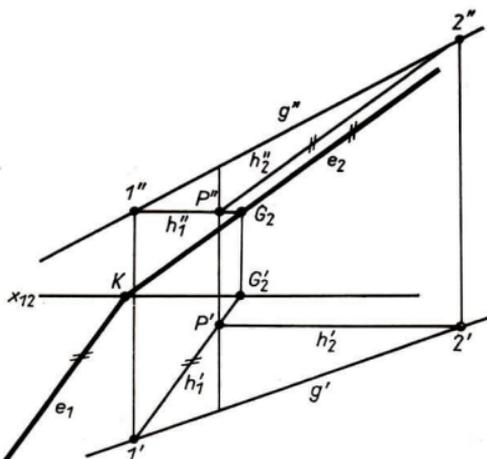


Abb. 47

Weise findet man die Normalrisse der zweiten Hauptlinie  $h_2$  in  $\varepsilon$  durch  $P$ . Dabei ist vom Grundriß auszugehen. Der zweite Spurpunkt  $G_2$  von  $h_1$  ist ein Punkt der zweiten Spur von  $\varepsilon$ . Die Parallele zu  $h_2''$  durch  $G_2$  ist die zweite Spur  $e_2$  von  $\varepsilon$ . Sie schneidet die Rißachse in  $K$ . Die Parallele zu  $h_1'$  durch  $K$  ist die erste Spur  $e_1$  von  $\varepsilon$  (Abb. 47).

6. Von einem Punkt  $P$  ist die *Treffgerade*  $t$  an zwei windschiefe Geraden  $g$  und  $h$  zu legen. Dabei gilt  $P \notin g, h$ .

**Lösung.** Diese Aufgabe kann mit den unter 3 und 5 bereitgestellten Grundkonstruktionen behandelt werden. Zunächst wird von  $P$  und  $g$  eine Ebene  $\gamma$  aufgespannt, die sich mittels ihrer ersten und zweiten Hauptlinie durch  $P$  darstellen läßt. Den Schnittpunkt von  $h$  mit  $\gamma$  ermittelt man nach der in Aufgabe 3 vorgeführten Methode. Man findet  $C = C(h\gamma)$  und damit die Treffgerade  $t = t(PC)$  (Abb. 48).

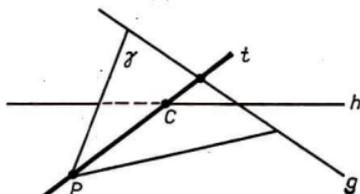


Abb. 48

7. Von einem ebenen Flächenstück (Dreieck) allgemeiner Lage im Raum ist der in  $\pi_1$  erzeugte Schlagschatten bei Parallelbeleuchtung zu konstruieren. Das Dreieck  $\triangle ABC$  sowie ein Strahl  $s$  des Parallelstrahlbündels sind durch Grund- und Aufriß vorgegeben.

**Lösung.** Zunächst sind durch  $A'', B''$  und  $C''$  Parallelen zu  $s''$  zu zeichnen. Diese schneiden die Rißachse in den Punkten  $A_1'', B_1''$  und  $C_1''$ . Ferner sind durch die Punkte  $A', B'$  und  $C'$  Parallelen zu  $s'$  zu legen. Ordner durch  $A_1'', B_1''$  und  $C_1''$  schneiden die Parallelen zu  $s'$  unter Einhaltung der Zuordnungsvorschrift in den Punkten  $A_1, B_1$  und  $C_1$ . Damit ist der erste *Schlagschatten* des Dreiecks  $\triangle ABC$  gefunden (Abb. 49).

An den Grundriß  $A'B'C'$  und den Schlagschatten  $A_1B_1C_1$  des Dreiecks  $\triangle ABC$  lassen sich planimetrische Betrachtungen anknüpfen, in die noch die erste Spur  $e_1$  von  $\varepsilon = \varepsilon(ABC)$  einzubeziehen ist. Verlängert man die Seiten der beiden Dreiecke und bringt die zugeordneten Geraden aus Grundriß und Schlagschatten miteinander zum Schnitt, so erhält man die drei Punkte  $P, Q, R$  mit  $P = P((A'B') (A_1B_1))$ ,  $Q = Q((B'C') (B_1C_1))$  und  $R = R((C'A') (C_1A_1))$ . Diese drei Punkte liegen nach räumlichen Überlegungen auf  $e_1$ , der ersten Spur von  $\varepsilon$ . Die mittels Normalprojektion und beliebiger Parallelprojektion erzeugten Bilder einer ebenen Figur verbindet eine geometrische Verwandtschaft, die man als *perspektive Affinität* bezeichnet. Die Spur  $e_1$  ist die *Affinitätsachse*, und  $s'$  gibt die *Affinitätsrichtung*. ( $s'$  ist der Grundriß des

Lichtstrahles  $s$  durch  $A$ .) Diese geometrische Verwandtschaft hat folgende Eigenschaften:

a) Jedem Punkt  $P$  der einen Punktmenge ist ein Punkt  $\bar{P}$  der anderen Punktmenge umkehrbar eindeutig zugeordnet. Die Punkte der Affinitätsachse  $a$  und nur diese sind sich selbst zugeordnet. Dies sind die Fixpunkte der Abbildung.

b) Sind  $P, \bar{P}$  einander zugeordnete Punkte, so sind die Verbindungsgeraden  $g(X, \bar{X})$  für beliebige Punktepaare  $X, \bar{X}$  zu  $g(P, \bar{P})$  parallel. Diese Geraden heißen *Affinitätsgeraden*. Durch eine Affinitätsgerade ist die Affinitätsrichtung festgelegt. (Anwendung des Richtungsbegriffs im Sinne von MfL, Band 6, Geometrie I, S. 32.)

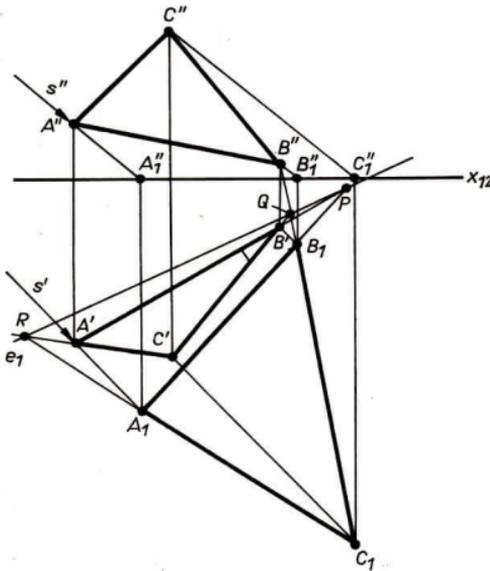


Abb. 49

c) Jeder Geraden  $g$  ist umkehrbar eindeutig eine Gerade  $\bar{g}$  zugeordnet. Einander zugeordnete Geraden  $g$  und  $\bar{g}$  schneiden sich auf der Affinitätsachse oder sind zur Achse parallel.

d) Einem Paar paralleler Geraden  $g$  und  $h$  ist ein paralleles Geradenpaar  $\bar{g}$  und  $\bar{h}$  zugeordnet.

e) Das Teilverhältnis dreier kollinear Punkte ist gleich dem Teilverhältnis der Bildpunkte (Abb. 50).

Sonderfall. Liegt die Affinitätsrichtung parallel zur Affinitätsachse, so bezeichnet man diese geometrische Verwandtschaft als *Scherung* (Abb. 51).

Für jede perspektive Affinität, die keine Scherung darstellt, schneidet die Verbindungsgerade eines Punktepaars  $(P, \bar{P})$  die Affinitätsachse  $a$  in einem eigentlichen Punkt  $A$ . Das Streckenverhältnis  $q = \frac{m(PA)}{m(\bar{P}A)}$  ist unabhängig von der Wahl des

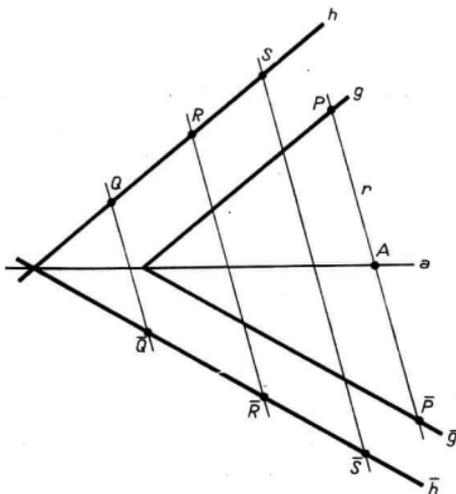


Abb. 50

Punktepaars aus dieser Abbildung. Man bezeichnet  $q$  als die *Charakteristik* dieser perspektiven Affinität. Die Bezeichnung einer solchen geometrischen Verwandtschaft als „perspektive Affinität“ geht auf EULER zurück.

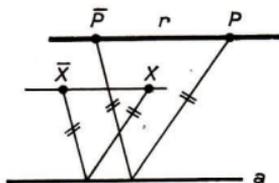


Abb. 51

8. Die Ebene  $\varepsilon = \varepsilon(ABC)$  ist mit der Koinzidenzebene  $\kappa$  zum Schnitt zu bringen.

**Lösung.** Die Dreiecksseite  $AB$  schneidet die Koinzidenzebene  $\kappa$  in einem Punkt  $P$ ; für dessen Normalrisse nach 2.1. gilt  $P' = P'' = ((A'B') (A''B''))$ .

Analog gilt für  $Q$  und  $R$

$$Q' = Q'' = ((B'C') (B''C'')), \quad R' = R'' = ((C'A') (C''A'')).$$

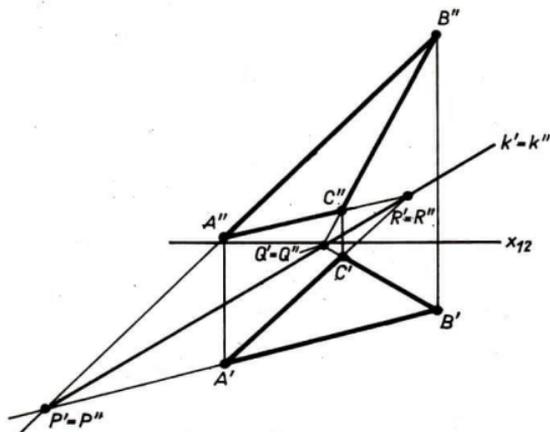


Abb. 52

Da  $P$ ,  $Q$  und  $R$  auf der Geraden  $k = k(e\kappa)$  liegen, sind die drei Punkte kollinear. Zwischen Grund- und Aufriß besteht offensichtlich die in Aufgabe 7 eingeführte geometrische Verwandtschaft, wobei den sich deckenden Normalrissen der Koinzi-

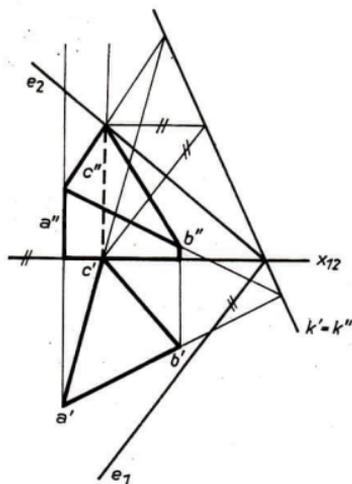


Abb. 53

denzgeraden die Rolle der Affinitätsachse und den Ordnungslinien die Rolle von Affinitätsstrahlen zufällt. Diese geometrische Verwandtschaft läßt sich z. B. auf das Vervollständigen eines ebenen Punktfeldes anwenden (Abb. 52).

Zur Konstruktion des Schnittes von Prisma und Ebene mittels der Koinzidenzgeraden siehe Abb. 53.

Die Konstruktion des Schnittes zweier Ebenenstücke mittels Deckgeraden (vgl. Aufgabe 3) zeigt Abb. 54.

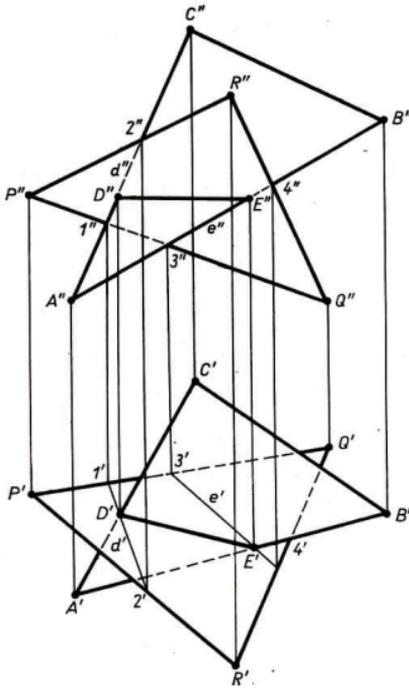


Abb. 54

## 2.5. Aufgaben des Maßes

Im Gegensatz zu Lagenaufgaben, die sich im Prinzip mit den *projektiven Grundoperationen des Schneidens und Verbindens* erledigen lassen, erfordern Maßaufgaben die Messung und Übertragung von Strecken und Winkeln, was neben dem Lineal auch den Einsatz des Zirkels verlangt. Die anfallenden *Maßaufgaben* lassen sich im wesentlichen auf drei Grundaufgaben und deren Umkehrungen zurückführen.

Dies sind:

- 1a. Bestimmung des Abstandes zweier Punkte im Raum,
- 1b. Abtragen einer Strecke auf einer Geraden von einem Punkt dieser Geraden,
- 2a. Bestimmung der wahren Gestalt einer ebenen Figur,
- 2b. Übertragen einer ebenen Figur in eine Ebene allgemeiner Lage,
- 3a. Errichten einer Senkrechten auf einer Ebene,
- 3b. Konstruktion einer Ebene senkrecht zu einer Geraden durch einen Punkt.

**Zu 1.** Es ist die Distanz zweier Punkte  $A, B$  zu bestimmen, die durch ihre Normalrisse gegeben sind.

**Trapezmethode.** Wie der räumlichen Anschauung zu entnehmen ist, bilden die vier Punkte  $A, B, B', A'$  ein Trapez mit rechten Winkeln bei  $A'$  und  $B'$ . Dieses Trapez

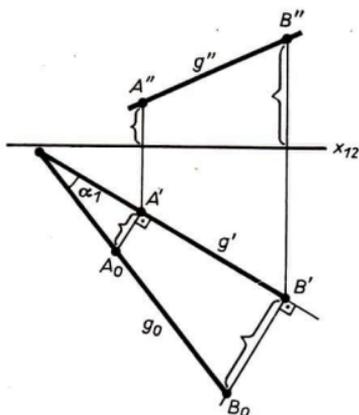


Abb. 55

wird um die Strecke  $A'B'$  als Drehachse in die Zeichenebene umgelegt. Die umgelegten Punkte  $A_0, B_0$  liegen auf Ordnern durch  $A'$  bzw.  $B'$  lotrecht bezüglich der Verbindungsgeraden  $A'B'$ . Die Längen  $|A'A_0|$  und  $|B'B_0|$  entsprechen den ersten Tafelabständen von  $A$  bzw.  $B$ . Folglich können sie für die Konstruktion der Umlegung dem Aufriß entnommen werden. Gemäß der räumlichen Anschauung bleibt bei der Umlegung die Distanz  $AB$  unverändert. Es gilt also  $|A_0B_0| = |AB|$ . Da hierbei mit einer Umlegung des Projektionstrapezes gearbeitet wird, spricht man von der *Trapezmethode* (Abb. 55).

Bringt man weiterhin die Geraden  $A'B'$  und  $A_0B_0$  miteinander zum Schnitt, so ergibt sich der *erste Neigungswinkel*  $\alpha_1$  der Verbindungsgeraden  $g = g(AB)$  gegen die erste Projektionsebene  $\pi_1$ .

In analoger Weise hätte man das zweitprojizierende Trapez in die Zeichenebene umlegen können. Als Nebenergebnis erhielte man den *zweiten Neigungswinkel*  $\alpha_2$  von  $g$ .



Zur Lösung dieser Aufgabe ist davon auszugehen, daß sich eine ebene Figur bei Normalprojektion genau dann in wahrer Gestalt abbildet, wenn die Trägerebene parallel zur Bildebene liegt. Als Lösungsprinzip wird daher das Dreieck  $\triangle ABC$  um eine erste Hauptlinie in horizontale oder um eine zweite Hauptlinie in frontale Lage zu drehen sein. Im ersten Fall gibt der Grundriß und im zweiten Fall der Aufriß die wahre Gestalt des Dreiecks wieder. Im vorgelegten Beispiel (Abb. 58) wird zweckmäßig durch den Eckpunkt  $A$  die erste Hauptlinie  $h_1$  der Dreiecksebene gelegt. Beim Drehen von  $\varepsilon = \varepsilon(ABC)$  mit  $h_1$  als Drehachse beschreiben die Punkte  $B$  und  $C$  Kreisbögen mit  $M_B$  bzw.  $M_C$  als zugehörige Mittelpunkte. Die zu den Kreisbögen

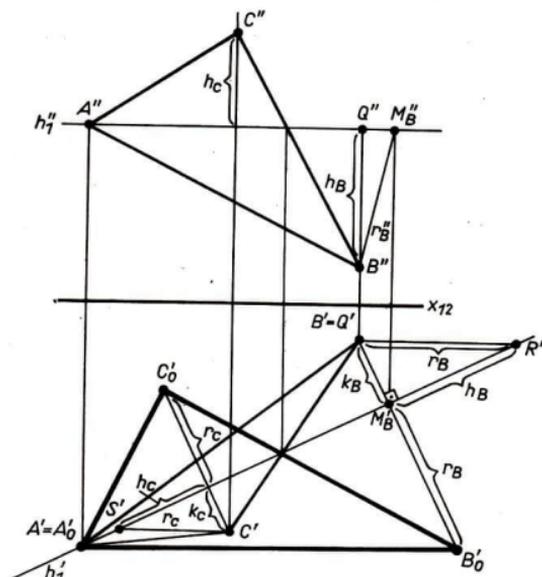


Abb. 58

gehörigen Ebenen sind erstprojizierend. Außerdem stehen sie senkrecht auf der Drehachse. Folglich verschieben sich die Bildpunkte  $B'$  und  $C'$  bei der Drehung des Dreiecks auf Ordnungslinien, die lotrecht zu  $h_1'$  liegen.  $A'$  bleibt bei der Drehung fest.

Damit wir  $B'_0$  und  $C'_0$  (Bildpunkte des horizontal gedrehten Dreiecks) einzeichnen können, brauchen wir noch die zu den Punkten  $B$  und  $C$  gehörigen Drehradien  $r_B$  und  $r_C$ . Zur Bestimmung von  $r_B$  werde das Stützdreieck  $\triangle BQM_B$  mit einem rechten Winkel bei  $Q$  eingeschaltet. Die Kathetenlängen  $|B'Q''| = h_B$  und  $|Q'M_B'| = k_B$  können dem Auf- bzw. Grundriß entnommen werden. Der Drehradius  $r_B = |BM_B|$  ist Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck  $\triangle BQM_B$ . Man könnte also  $r_B$  durch eine Nebenkonstruktion graphisch ermitteln. Da im Grundriß der Ordner durch  $B'$  senkrecht zu  $h_1'$  gezeichnet vorliegt, bietet sich folgende Konstruktion an:

Man entnimmt  $h_B = |Q''B''|$  mit Hilfe eines Zirkels dem Aufriß, trägt diese Zirkelweite im Grundriß von  $M_{B'}$  ausgehend auf  $h_1'$  ab und erhält den Punkt  $R'$ . Die Strecke  $B'R'$  ist nach den obigen Darlegungen gleich dem Drehradius  $r_B$ . Abschließend ist noch  $r_B$  von  $M_{B'}$  aus auf dem Ordner durch  $B' \perp h_1'$  abzutragen. Man erhält so  $B_0'$ .

Bei dieser Konstruktion kommt man also im Prinzip mit der Übertragung zweier Zirkelweiten, nämlich der Strecke  $B''Q''$  nach  $h_1'$  und der Strecke  $B'R'$  nach dem Ordner durch  $B' \perp h_1'$ , aus. Man spricht hierbei auch von dem *Verfahren mit dem doppelten Zirkelschlag*. Zur Ermittlung des Bildes der Umlegung  $C_0'$  von  $C$  ist in Abb. 58 nur das Wesentliche der Konstruktion mit dem doppelten Zirkelschlag ein-

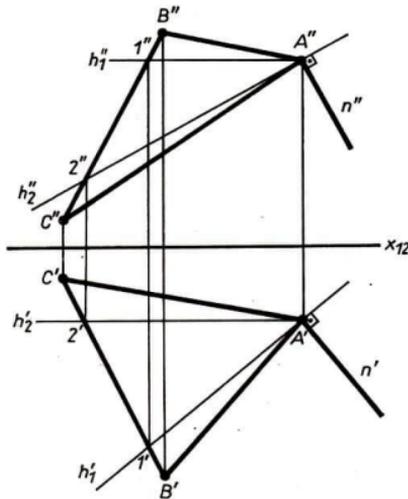


Abb. 59

getragen. Mit der Umlegung  $\Delta A_0'B_0'C_0'$  präsentiert sich das Dreieck  $\Delta ABC$  in seiner wahren Gestalt. Als Zeichenkontrolle ist zu beachten, daß sich die Verbindungslinien  $B'C'$  und  $B_0'C_0'$  in einem Punkt von  $h_1'$ , dem Grundriß der Drehachse, schneiden.

Zwischen dem Normalriß dieser ebenen Figur und dem Normalriß ihrer Umlegung besteht gleichfalls die *perspektive Affinität* als Zuordnungsvorschrift der beiden Bilder. Das Bild der Drehachse ist die Affinitätsachse, und senkrecht dazu liegt die Affinitätsrichtung. Beim Übertragen einer vorgelegten ebenen Figur in eine Ebene allgemeiner Lage sind in den hier dargelegten Konstruktionen gewisse Umkehrungen anzubringen.

**Zu 3.** Auf der von dem Dreieck  $\Delta ABC$  aufgespannten Ebene  $\varepsilon(ABC)$  ist in  $A$  die Normale zu errichten.

Zur konstruktiven Bestimmung der Normalen ist davon auszugehen, daß die Normalprojektion eines rechten Winkels wieder als rechter Winkel erscheint, wenn wenigstens einer der Schenkel des im Raum liegenden Winkels parallel zur Bildebene liegt. Dabei sind projizierende Lagen der Winkelebene auszuschließen (vgl. 1.5.).

Die Normale  $n \perp \varepsilon$  in  $A$  schließt mit jeder Geraden der Ebene  $\varepsilon$  durch  $A$  einen rechten Winkel ein. Unter diesen ist die Parallele zu  $\pi_1$ , also die erste Hauptlinie von  $\varepsilon$  durch  $A$ , von Interesse. Wegen  $n \perp h_1$  und  $h_1 \parallel \pi_1$  gilt auch  $n' \perp h_1'$ . In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß  $n'' \perp h_2''$  gilt, wobei  $h_2$  die zweite Hauptlinie von  $\varepsilon$  durch  $A$  ist. Die Ermittlung der Normalrisse des Lotes  $n \perp \varepsilon$  durch  $A$  läuft also

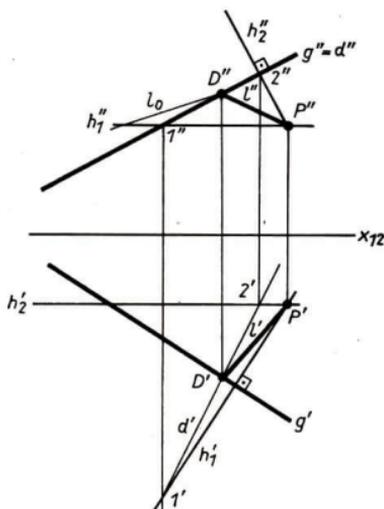


Abb. 60

darauf hinaus, zunächst die erste und zweite Hauptlinie von  $\varepsilon$  durch  $A$  zu konstruieren. Wegen  $n' \perp h_1'$  und  $n'' \perp h_2''$  können die Normalrisse von  $n$  durch  $A$  dann unmittelbar gezeichnet werden (Abb. 59).

Die Umkehrung dieser Aufgabe besteht darin, lotrecht zu einer Geraden  $g$  durch einen Punkt  $P \notin g$  eine Ebene zu legen. Die Lage dieser Ebene läßt sich am einfachsten mittels der ersten und zweiten Hauptlinie durch  $P$  beschreiben. Da  $g$  eine Normale dieser Ebene ist, gilt nun auch umgekehrt  $g' \perp h_1'$  und  $g'' \perp h_2''$ . Ferner liegen  $h_1''$  und  $h_2'$  parallel zur Reißachse. Diese Aufgabenstellung läßt sich in verschiedener Weise variieren. Zum Beispiel kann gefordert werden, von einem Punkt  $P$  auf eine Gerade  $g$  das Lot zu fällen und den Abstand des Punktes  $P$  von der Geraden  $g$  zu bestimmen. Hierzu legt man durch  $P$  die Hilfsebene  $\gamma$  mit  $\gamma \perp g$  und bestimmt den Durchstoßpunkt  $D$  von  $g$  mit  $\gamma$ . Dies geschieht durch Verwendung einer geeigneten

ten Deckgeraden  $d$ . Anschließend ist  $D$  mit  $P$  zu verbinden und der Abstand  $l = |DP|$  etwa mit der *Methode des Paralleldrehens* zu ermitteln (Abb. 60).

**Anwendung:** Bestimmung des Schnittwinkels zweier Ebenen als Maßaufgabe.

Der Schnittwinkel zweier Ebenen  $\gamma$  und  $\varepsilon$  wird in einer Normalebene  $\alpha$  bezüglich der Schnittgeraden  $s = s(\gamma\varepsilon)$  gemessen, d. h., es ist  $\alpha \perp s$  vorauszusetzen. Man gelangt zu drei nicht-kollinearen Punkten der Ebene  $\alpha$ , indem man in  $\varepsilon$  einen Punkt

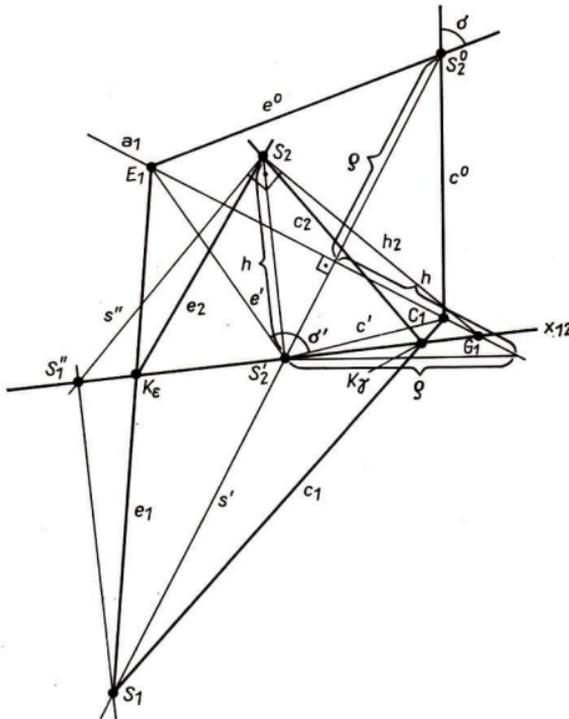


Abb. 61

$E \notin s$  sonst willkürlich vorgibt und von diesem die Lote auf  $\gamma$  und  $s$  fällt. Man erhält die Lotfußpunkte  $C$  und  $S$ . Dann gilt für den Schnittwinkel  $\sigma$  der Ebenen  $\gamma$  und  $\varepsilon$

$$\sigma = |\sphericalangle ESC|.$$

Die konstruktive Bestimmung des Winkels soll für den Fall vorgeführt werden, daß die Ebenen  $\gamma$  und  $\varepsilon$  durch ihre Spuren  $c_1$  und  $c_2$  bzw.  $e_1$  und  $e_2$  gegeben sind. Die Schnittgerade  $s$  hat die Spurpunkte  $S_1$  und  $S_2$ . Die Normalebene  $\alpha \perp s$  werde aus Gründen der besseren Übersichtlichkeit durch  $S_2$  gelegt. Der Aufriß ihrer zweiten Hauptlinie  $h_2$  durch  $S_2$  steht senkrecht auf  $s''$ , d. h., es gilt  $h_2 \perp s''$ . Der erste Spur-

punkt  $G_1$  von  $h_2$  liegt auf der Rißachse, da  $h_2$  eine Gerade von  $\pi_2$  ist. Die Lotrechte zu  $s'$  durch  $G_1$  ist somit die erste Spur  $a_1$  von  $\alpha \perp s$ . Mit  $C_1 = C_1(a_1c_1)$  und  $E_1 = E_1(a_1e_1)$  hat man je einen Punkt der Geraden  $c$  und  $e$ , den Schenkeln des Winkels  $\sigma$ . Die Punkte  $C_1$ ,  $E_1$  und  $S_2$  bilden ein nicht-kollineares Punktetripel von  $\alpha$ .  $S_2'$ , mit  $C_1$  und  $E_1$  verbunden, ergibt die Grundrisse der Schenkel des Winkels  $\sigma$ . Durch Anwendung der Methode mit dem doppelten Zirkelschlag unter Einsatz von  $C_1$  und  $E_1$  als Hilfspunkte findet man die Umlegung  $S_2^0$  von  $S_2$  auf  $s'$ . Die Strahlen  $S_2^0C_1+$  und  $S_2^0E_1+$  schließen in dem vorliegenden Beispiel (Abb. 61) den gesuchten (spitzen) Winkel  $\sigma$  ein. Führt diese Konstruktion zunächst auf einen stumpfen Winkel, so ist auf den Supplementwinkel überzugehen.

## 2.6. Anwendung von Grundkonstruktionen auf ebenflächig begrenzte räumliche Gebilde. Perspektive Kollineation.

### Satz von Desargues

An ebenflächig begrenzten räumlichen Gebilden lassen sich vielfältige Anwendungen von Grundkonstruktionen zu Aufgaben des Maßes und der Lage demonstrieren. Die Benutzung einfachster Konstruktionen sichert die Übersichtlichkeit der Zeichnung und hält den Einfluß von Zeichenungenauigkeiten in zulässigen Grenzen.

Anwendungen dieser Art sind z. B. Schattenkonstruktionen an Pyramiden, Durchdringung zweier Prismen, Abwicklung der Mantelfläche eines Polyeders, ebener Schnitt einer Pyramide, Übertragen einer ebenen Figur in eine Ebene allgemeiner Lage, Bestimmung des gemeinsamen Lotes zweier windschiefer Geraden.

#### 1. Eigenschatten und Schlagschatten einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide.

Gegeben sind eine auf  $\pi_1$  lotrecht stehende regelmäßige sechsseitige Pyramide und ein Strahl  $s$  des parallel einfallenden Lichtes durch Grund- und Aufriß.

Gesucht sind Eigen- und Schlagschatten dieser Pyramide.

Man konstruiere zunächst die von dem parallel einfallenden Licht erzeugte Projektion der Pyramidenspitze  $S$  in  $\pi_1$ . Hierzu wird der durch  $S$  gehende Projektionsstrahl in bekannter Weise mit  $\pi_1$  zum Schnitt gebracht. Man erhält den Punkt  $S_1$ . Dieser Punkt ist mit zwei Eckpunkten des Grundpolygons der Pyramide zu verbinden. Diese Punkte sind so auszuwählen, daß durch die einzuzeichnenden Verbindungsgeraden gemeinsam mit dem in  $\pi_1$  liegenden Sechseck ein konvexes Polygon als äußerer Linienzug entsteht. Unter den in Abb. 62 getroffenen Annahmen sind die Seitenflächen  $\triangle S12$ ,  $\triangle S23$ ,  $\triangle S34$  und  $\triangle S45$  beleuchtet, während die Seitenflächen  $\triangle S56$  und  $\triangle S61$  im *Eigenschatten* der Pyramide liegen. Der auf  $\pi_1$  geworfene Schatten heißt *Schlagschatten* der Pyramide. Schattenkonstruktionen dienen zur Steigerung der plastischen Wirkung ebener Bilder räumlicher Objekte. Besonders effektvolle Zeichentechniken berücksichtigen die unterschiedlichen Helligkeiten der Seitenflächen (Abb. 62).

## 2. Übertragung eines Quadrates in eine Ebene allgemeiner Lage.

Gegeben ist eine Ebene  $\varepsilon = \varepsilon(e_1, e_2)$  allgemeiner Lage sowie die Punkte  $A, B \in \varepsilon$ .

Gesucht sind Grund- und Aufriß jenes im ersten Quadranten auf  $\varepsilon$  gelegenen Quadrates, für das die Strecke  $AB$  eine Seite darstellt.

Zunächst ist  $\varepsilon$  durch eine Umklappung um  $e_1$  in die erste Bildtafel  $\pi_1$  zu legen. Die Punkte  $A$  und  $B$  sind bei der Klappung mitzuführen. Über  $A_0B_0$  ist das Quadrat  $\square A_0B_0C_0D_0$  entsprechend der geforderten Lage einzuzeichnen. Anschließend führt

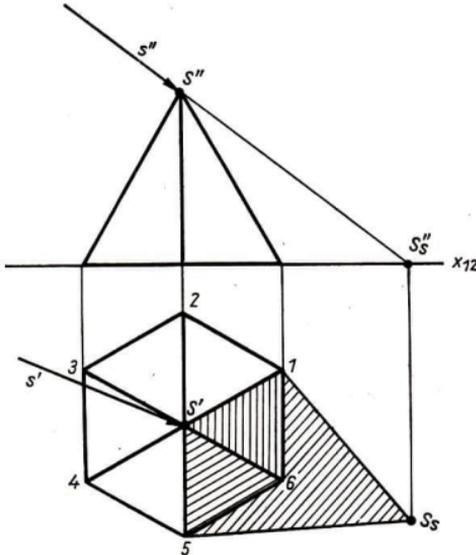


Abb. 62

man dieses Quadrat unter Ausnutzung der perspektiv-affinen Zuordnung in den Grundriß von  $\varepsilon$  über. Die Übertragung in den Aufriß erfolgt durch Angittern der vier Eckpunkte. Als Zeichenkontrolle kann ausgenutzt werden, daß die Parallelität der Gegenseiten bei dieser Transformation erhalten bleibt (Abb. 63).

## 3. Durchdringung zweier Prismen

Eine in der Praxis oft vorkommende Problemstellung besteht darin, zwei Bauelemente derart miteinander zu verkoppeln, daß sie ein festes Gefüge bilden, ohne dabei als Einzelteile wesentlich an Festigkeit zu verlieren (Holzverbindungen an Möbeln und bei Dachkonstruktionen, Rohrverbindungen bei Luftkanälen u. a. m.). Sind die an der Durchdringung beteiligten Bauelemente ebenflächig begrenzt, so bildet die Gesamtheit der den Oberflächen beider Teile gemeinsamen Punkte einen räumlichen Streckenzug. Liegt genau ein geschlossener Streckenzug an der Naht-



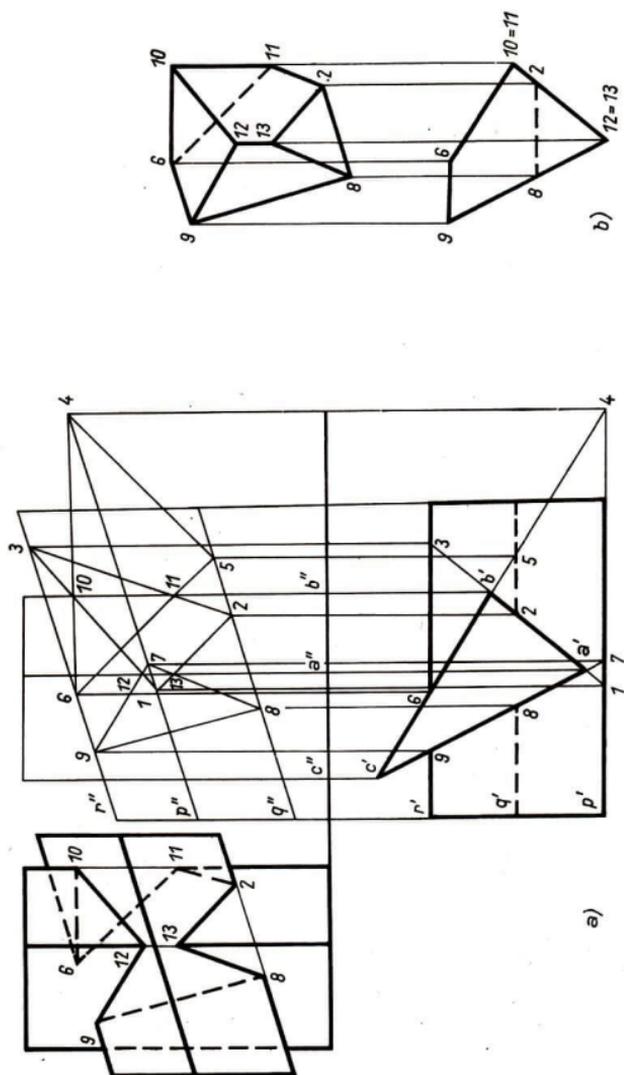


Abb. 64

Führt man diese neun Punkte mit Ordnern in den Aufriß, so erhält man die Dreiecke  $\triangle 1''2''3''$ ,  $\triangle 4''5''6''$ ,  $\triangle 7''8''9''$ .

Von den Seiten dieser Dreiecke kommen nur jene Abschnitte für den Aufbau des Durchdringungspolygons in Betracht, die innerhalb des Parallelogramms liegen, das von den Aufrissen der Prismen umschlossen wird. Über die Reihenfolge der Verbindung der Punkte und die Sichtbarkeit der Seiten des Durchdringungspolygons ist unter Zuhilfenahme des Grundrisses leicht zu entscheiden. Eine weitere Stütze zur Veranschaulichung der Durchdringung bildet die Darstellung des Kernkörpers in Grund- und Aufriß (Abb. 64b).

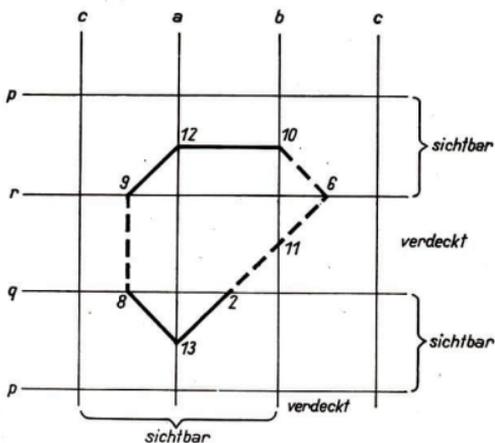


Abb. 65. Sichtbarkeitsdiagramm für Aufriß

Bei weniger übersichtlichen Durchdringungsaufgaben kann ein Diagramm nützliche Hilfe leisten. Es entsteht durch *Abwicklung* der Mantelflächen der an der Durchdringung beteiligten Körper auf das Zeichenfeld. Dabei kann auf Maßtreue verzichtet werden. Die Überlagerung beider Abwicklungen führt auf ein Liniennetz. In dieses Schema trägt man die gefundenen Punkte entsprechend ihrer Lage auf Kanten und Flächen ein. Die Punkte des Diagramms sind derart miteinander zu verbinden, daß nirgends eine Netzlinie von einer der Verbindungsgeraden geschnitten wird. Für doppelpunktfreie Polygone ist der in das Diagramm einzuziehende ebene Streckenzug eindeutig. Führt man das Diagramm getrennt für Grund- und Aufriß, so kann sogar entschieden werden, ob die entstehende Schnittkante in dem betreffenden Riß sichtbar oder verdeckt ist. Eine Schnittkante ist in einem Bild genau dann sichtbar, wenn die beiden am Schnitt beteiligten Seitenflächen in diesem Bild sichtbar sind (Abb. 65).

#### 4. Gemeinsames Lot zweier windschiefer Geraden

Unter dem *gemeinsamen Lot*  $l$  zweier windschiefer Geraden  $g$  und  $h$  versteht man jene Gerade, die  $g$  und  $h$  senkrecht trifft. Zu zwei windschiefer Geraden gibt es genau

ein gemeinsames Lot. Die Lotfußpunkte  $G \in g$  und  $H \in h$  bilden das Punktepaar von  $g$  und  $h$ , für welches der Abstand ein absolutes Minimum ist.

Konstruktiv läßt sich das gemeinsame Lot wie folgt ermitteln: Man verschiebt  $g$  in einer erstprojizierenden Ebene zu sich selbst parallel nach  $g^*$  derart, daß sich  $g^*$  und  $h$  im Raum schneiden. Die Punkte  $A' = A'(g^*h')$  und  $A'' = A''(g^{**}h'')$  befinden sich daher in Mongescher Lage. Zu der von  $g^*$  und  $h$  aufgespannten Ebene  $\alpha$

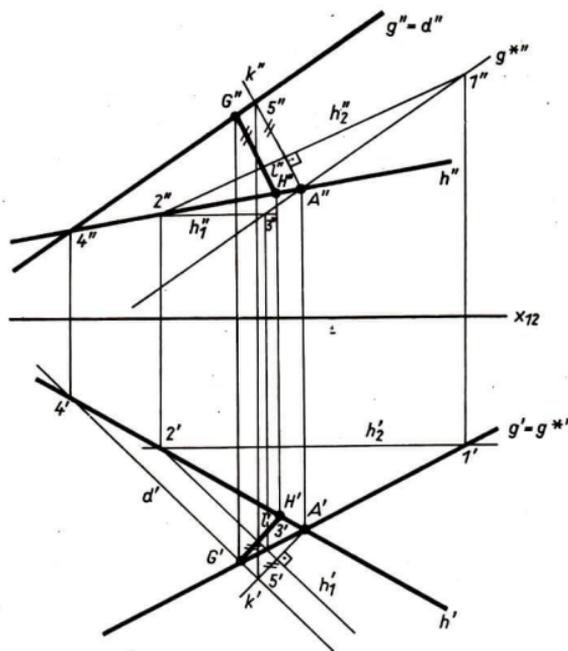


Abb. 66

wird das Lot  $k$  nach der unter 2.5. behandelten Maßaufgabe konstruiert. Damit hat man die Richtung des gemeinsamen Lotes gefunden, denn nach Konstruktion gilt  $k \perp h$  und  $k \perp g$  wegen  $g \parallel g^*$ . Das Lot  $k$  und die Gerade  $h$  spannen eine weitere Hilfsebene  $\beta$  auf, die  $g$  in einem Punkt  $G$  schneidet. Die Parallele  $l$  zu  $k$  durch  $G$  schneidet konstruktionsgemäß  $g$  und  $h$  senkrecht. Mit  $H = H(hl)$  ist auch der zweite Lotfußpunkt gefunden. Die wahre Länge des gemeinsamen Lotes  $|GH|$  läßt sich nach der Methode des Paralleldrehens ermitteln (Abb. 66).

##### 5. Ebener Schnitt einer Pyramide. Perspektivische Kollineation

Gegeben seien eine vierseitige Pyramide  $\Phi$ , deren Basis in  $\pi_1$  liegt, und eine Ebene  $\varepsilon = \varepsilon(e_1e_2)$  allgemeiner Lage. Gesucht ist das Schnittgebilde  $c = c(\varepsilon\Phi)$  (Abb. 67).

Da hier ein ebenflächig begrenzter Körper mit einer Ebene zum Schnitt gebracht wird, kann das Schnittgebilde  $c$  nur ein ebenes Polygon sein. Als Konstruktionshilfe werde durch die Pyramidenspitze  $S$  eine zu  $\pi_1$  parallele Ebene  $\pi_s$  gelegt. Die jeder Seitenfläche der Pyramide zugeordnete Ebene hat nun zwei Spuren, eine in  $\pi_1$  liegende Spur und eine in  $\pi_s$  liegende *Gegenspur*, die zueinander parallel sind. An der Seitenfläche  $\triangle SAB$  sei die Konstruktion der Schnittgeraden demonstriert.

Zunächst gilt  $e_1 = e_1(\varepsilon\pi_1)$  (erste Spur von  $\varepsilon$ ) und  $e_s = e_s(\varepsilon\pi_s)$  (*Gegenspur* von  $\varepsilon$  in Höhe der Pyramidenspitze). Die zur Pyramidenseite  $\triangle SAB$  gehörige Ebene  $\alpha$  hat

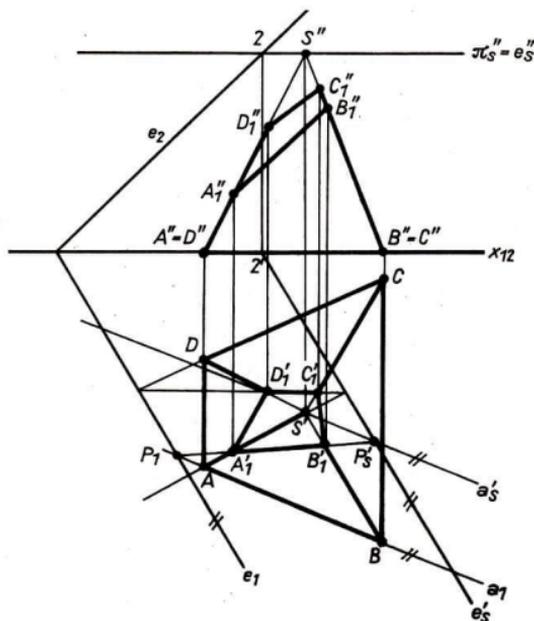


Abb. 67

die erste Spur  $a_1$  und die *Gegenspur*  $a_s \parallel a_1$  durch  $S$ . So ergeben sich die Schnittpunkte  $P_1 = P_1(e_1 a_1)$  und  $P_s = P_s(e_s a_s)$ . Folglich ist die Verbindungsgerade  $g(P_1 P_s)$  der Grundriß der Schnittgeraden  $g(\varepsilon\alpha)$ . Von dieser interessiert nur der in der Seitenfläche  $\triangle SAB$  liegende Streckenabschnitt  $A_1 B_1$ . In gleicher Weise kann bei den drei übrigen Pyramidenseiten verfahren werden. Man erhält so die Grundrisse  $A_1', B_1', C_1', D_1'$  der Durchstoßpunkte der vier Pyramidenkanten mit  $\varepsilon$ . Mit Hilfe von Ordnungslinien oder durch Angittern können diese Punkte in den Aufriß geführt werden.

An den Grundriß der Schnittkonstruktion lassen sich noch einige verallgemeinernde planimetrische Begriffsbildungen und Betrachtungen anknüpfen. Auch hier kann man sich die Zeichenebene von zwei Punktmengen überdeckt denken. Der einen

Menge gehören die Punkte  $A, B, C, D, \dots$ , der anderen die Punkte  $A_1', B_1', C_1', D_1', \dots$  an. Zunächst soll das Problem des Vervollständigens ohne räumliche Überlegungen gelöst werden. Zu einem beliebig vorgegebenen Punkt  $F$  ist der Punkt  $F_1'$  aufzusuchen. Offenbar liegt  $F_1'$  auf der Strecke  $S'F$ . Weiterhin sind z. B. die Verbindungsgerade  $f_1 = f_1(FA)$  und die Gerade  $f_s' \parallel f_1$  durch  $S'$  zu zeichnen. Man findet die Punkte  $T_1 = T_1(e_1 f_1)$  und  $T_s' = T_s'(e_s' f_s')$ . Die Verbindungsgerade  $g(T_1 T_s')$  schneidet  $FS'$  in dem gesuchten Punkt  $F_1'$ . Die hier zunächst empirisch untersuchte Punktverwandtschaft bezeichnet man als *perspektive Kollineation* (Abb. 68).

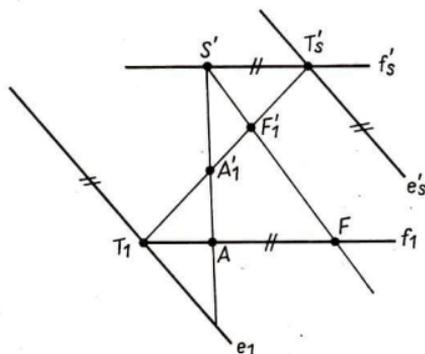


Abb. 68

Nach dieser Konstruktion gelten für die Zuordnung der beiden ebenen Punktmenge folgende Aussagen:

1. Einander entsprechende Punkte liegen auf einer Geraden (*Kollineationsstrahl*) durch das Bild  $S'$  der Pyramidenspitze (*Kollineationszentrum*).
2. Punkte der Spur  $e_1$  entsprechen sich selbst,  $e_1$  ist die *Kollineationsachse*.
3. Ein Fernpunkt  $U$  geht bei dieser Kollineation in einen Punkt  $U_1' \in e_s'$  über. Umgekehrt liegt die Menge jener Punkte, deren Urbilder Fernpunkte sind, auf der Geraden  $e_s'$ . Man bezeichnet diese Gerade als *Gegenachse* der Kollineation. Die *Gegenachse* ist parallel zur *Kollineationsachse*.
4. Einer Geraden entspricht wieder eine Gerade. Die Verwandtschaft ist linear.
5. Einander entsprechende Geraden schneiden sich auf der *Kollineationsachse*. Geraden parallel zur *Kollineationsachse* gehen in parallele Geraden über.
6. *Inzidenz* von Punkt und Gerade bleibt erhalten.

Durch Vorgabe der *Kollineationsachse*  $a$ , des *Kollineationszentrums*  $Z$  und eines Paares sich entsprechender Punkte  $A, \bar{A}$  ist eine ebene perspektive Kollineation eindeutig bestimmt, d. h., Aufgaben des Vervollständigens sind damit eindeutig lösbar (Abb. 69).

Ist die *Kollineationsachse* die Ferngerade, dann geht die Punktverwandtschaft in eine *zentrische Streckung* oder *Stauchung* mit  $S'$  als *Ähnlichkeitszentrum* über.

Die beiden ebenen Schnitte der Pyramide mit  $\pi_1$  und  $\varepsilon$ , die hier in Beziehung zueinander gesetzt wurden, lassen sich auch dem *monokularen Sehvorgang* angepaßt interpretieren. Dabei sind  $S$  als Auge und die Pyramidenkanten als Seh- oder Projektionsstrahlen aufzufassen.

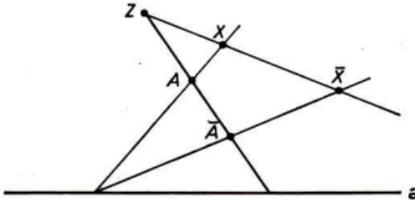


Abb. 69

Ferner ist das Polygon  $A_1B_1C_1D_1$  als Zentralriß des Basispolygons  $ABCD$  zu verstehen. Somit gilt der Satz:

Durch Zentralprojektion der Punktmenge einer Ebene auf eine andere wird zwischen den beiden Ebenen eine geometrische Verwandtschaft induziert, die man als *perspektive Kollineation* bezeichnet. Das Auge  $S$  (Projektionszentrum) ist das Kollineationszentrum, und die Schnittgerade der beiden Ebenen ist die Kollineationsachse.

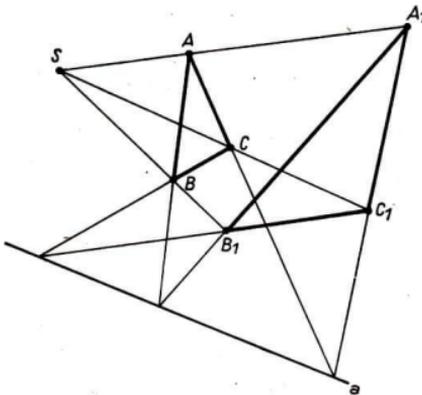


Abb. 70

Aus diesen räumlichen Überlegungen resultiert folgender Satz als Selbstverständlichkeit, der erstmals von DESARGUES (1636) aufgestellt wurde:

*Gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier Dreiecke durch einen Punkt, so liegen die eigentlichen oder uneigentlichen Schnittpunkte entsprechender Dreiecksseiten auf einer eigentlichen oder uneigentlichen Geraden (Abb. 70).*

Interpretiert man nämlich die *Desarguessche Konfiguration* als Schrägbild einer von zwei (durchsichtigen) Ebenen geschnittenen dreiseitigen Pyramide, so erscheint die Aussage trivial. Es sei noch vermerkt, daß sich die Desarguessche Konfiguration auf zehn verschiedene Arten als Paarung perspektiver Dreiecke auffassen läßt, weil jeder der zehn Punkte dieser Konfiguration die Rolle des Kollineationszentrums übernehmen kann.

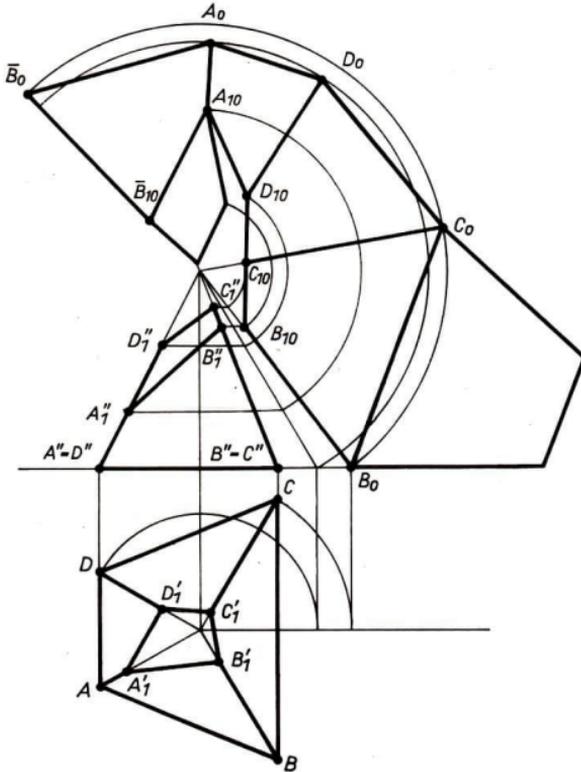


Abb. 71

Mit Hilfe der perspektiven Kollineation kann ein Kreis je nach Wahl der Bestimmungsstücke in eine *Ellipse*, *Parabel* oder *Hyperbel* transformiert werden. Umgekehrt lassen sich Aufgaben zu beliebigen Kegelschnitten in Aufgaben am Kreis transformieren (JAKOB STEINER, 1796—1863).

Die Netzkonstruktion des Mantels der angeschnittenen Pyramide erfolgt zweckmäßig durch Drehen der Kanten der Pyramide zu Frontallinien. Die Teilungspunkte sind bei der Drehung mitzuführen. Damit sind die Längen der zwischen  $\pi_1$  und  $\varepsilon$  liegenden Kantenabschnitte dem Aufriß entnehmbar. Es ist zu empfehlen, diese

Nebenkonstruktion zur Entlastung des Aufrisses mittels horizontaler Ordnungslinien etwas nach links oder rechts herauszuziehen. Dem Grundriß können die Längen der Seiten des Basispolygons unmittelbar entnommen werden. Mit diesen Bestimmungsstücken ist die Abwicklung der Mantelfläche des Pyramidenstumpfes eindeutig faßbar (Abb. 71).

Aufgabe. Gegeben seien das Zentrum  $Z$ , die Achse  $a$  und ein Punktepaar  $(A, \bar{A})$  einer perspektiven Kollineation. Gesucht ist die Gegenachse  $u$ , d. h. die Bildgerade der Ferngeraden auf konstruktivem Weg.

## 2.7. Seitenrisse und Drehungen

Zur Ausführung räumlicher Konstruktionen genügen im Prinzip ein Paar zugeordneter Normalrisse als Ausgangsbilder in der Zeichenebene. Trotzdem werden gelegentlich weitere Bildebenen eingeführt, um von dem dargestellten Objekt noch umfassen-

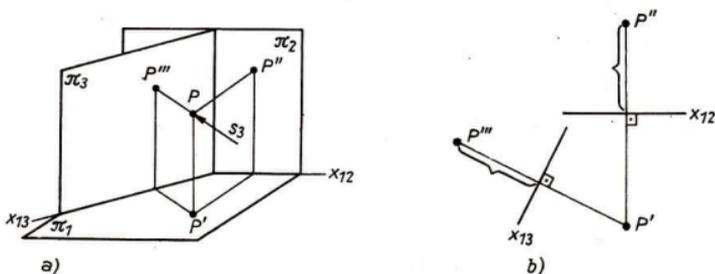


Abb. 72

deres Anschauungsmaterial zu erhalten oder besondere Konstruktionen durchzuführen. Von der zusätzlich angefügten Bildebene  $\pi_3$  wird gefordert, daß sie lotrecht bezüglich einer der beiden bereits vorliegenden Bildtafeln angebracht ist. Die Abbildung des räumlichen Objektes auf  $\pi_3$  erfolgt gleichfalls durch Normalprojektion. Anschließend wird  $\pi_3$  um die Schnittgerade mit jener Bildebene in das Zeichenfeld umgelegt, die mit  $\pi_3$  einen rechten Winkel einschließt. Diese Gerade entspricht der mit dem *Seitenriß* eingeführten Rißachse. Schließt sich  $\pi_3$  an den Grundriß an, so wird die neue Rißachse mit  $x_{13}$  bezeichnet, bei Anschluß an den Aufriß mit  $x_{23}$ .

Zunächst sollen die Lageverhältnisse der drei Bilder eines Punktes  $P$  in der Zeichenebene untersucht werden, der in den Aufriß, den Grundriß und eine auf  $\pi_1$  lotrecht stehende Bildebene  $\pi_3$  normal projiziert wird. Grund- und Aufriß von  $P$  befinden sich

nach wie vor in Mongescher Lage mit der Ordnerrichtung  $\perp x_{12}$ . Die gleichen Beziehungen gelten auch zwischen Grund- und Seitenriß, d. h., der die Bildpunkte  $P'P'''$  verbindende Ordner steht senkrecht auf der Rißachse  $x_{13}$  (Abb. 72 a, b). Wie ferner aus räumlichen Überlegungen folgt, ist der Abstand des Seitenrisses  $P'''$  von der Rißachse  $x_{13}$  gleich dem ersten Tafelabstand von  $P$ . Dieser kann dem Aufriß entnommen werden. Ganz entsprechend kann die Seitenrißebene  $\pi_3$  an den Aufriß angeschlossen werden. Dann befinden sich  $P''$  und  $P'''$  in Mongescher Lage bezüglich der neuen Rißachse  $x_{23}$ . Der Abstand des Bildpunktes  $P'''$  von der Rißachse  $x_{23}$  ist gleich dem zweiten Tafelabstand von  $P$ , den man dem Grundriß entnehmen kann (Abb. 73 a, b).

Bei Einführung eines Seitenrisses durch Vorgabe einer Rißachse beliebiger Lage gilt offenbar folgende einfache Merkregel für die Übertragung von Bildpunkten in den neuen Riß: „Ordnungslinie senkrecht zur neuen Rißachse durch den verbleibenden Bildpunkt. Abstand zwischen wegfallendem Riß und wegfallender Achse von neuer Achse auf zugehöriger Ordnungslinie in den neuen Riß übertragen.“

Das Anlegen von Seitenrissen kann im Prinzip beliebig oft fortgeführt werden. Die Invarianz von Parallelität und Streckenverhältnissen lassen sich bei diesen graphischen Transformationen als Zeichenkontrollen ausnutzen. Um z. B. eine Gerade allgemeiner Lage in ein Bild überzuführen, in dem sie projizierend erscheint,

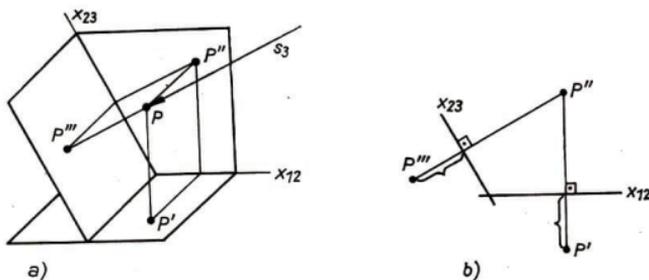


Abb. 73

ist die Anlage von zwei Seitenrissen erforderlich. Der erste Seitenriß führt  $g$  in eine frontale Lage bezüglich dieser Bildebene, der zweite in eine vertikale, d. h. projizierende Lage über.

Auch die Wiedergabe eines Quaders, der frontal bezüglich  $\pi_2$  und horizontal bezüglich  $\pi_1$  aufgestellt ist, kann durch die Anlage von wenigstens zwei Seitenrissen so erfolgen, daß dieses Bild frei von projizierenden Begrenzungsflächen des Körpers ist.

Der Einsatz von Seitenrissen soll an zwei Beispielen demonstriert werden, und zwar

- als Konstruktionsprinzip,
- als Hilfsmittel zur Unterstützung der räumlichen Anschauung.



tragungen mit Ordnungslinien in die Ausgangsbilder geführt werden (Abb. 74). Diese Konstruktion hat den Vorzug der Anschaulichkeit und Übersichtlichkeit. Der Nachteil liegt in dem höheren Aufwand an Platz.

Zu b). Gegeben sind Grund- und Aufriß eines ebenflächig begrenzten Werkstückes (Abb. 75). Die Seiten des Körpers sind erst-, zweit- oder doppelprojizierend. Dadurch sind die Bilder wenig anschaulich. Mit Hilfe von Seitenrissen sollen die zunächst projizierend erscheinenden Begrenzungsflächen des Körpers in nicht-projizierende Bilder übergeführt werden.

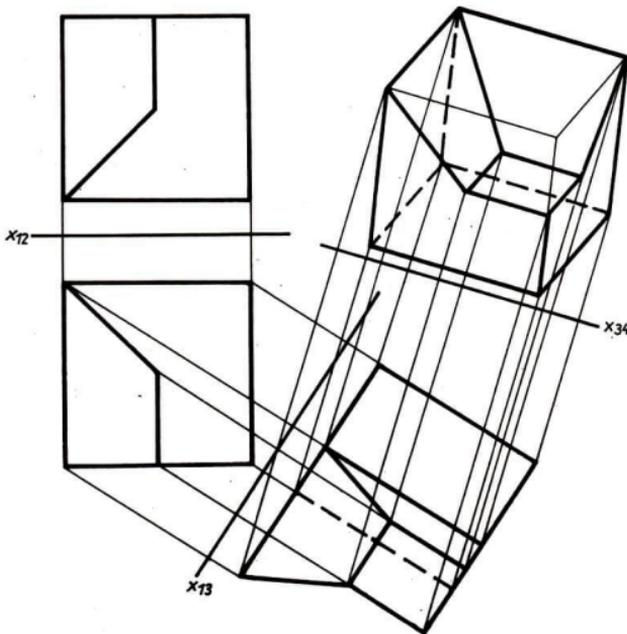


Abb. 75

Durch Anschließern eines Seitenrisses  $\pi_3$  an die Grundrißtafel gewinnt das Bild an Anschaulichkeit. Es ist jedoch noch nicht frei von Bildern projizierender Ebenen. In einem weiteren sich an  $\pi_3$  anschließenden Seitenriß  $\pi_4$  ist durch den völligen Wegfall projizierender Kanten und Seitenflächen der Forderung nach Anschaulichkeit besser entsprochen (Abb. 75).

Steht die neu eingeführte Bildtafel  $\pi_3$  lotrecht zur Rißachse  $x_{12}$ , also lotrecht zu  $\pi_1$  und  $\pi_2$ , so bezeichnet man das in  $\pi_3$  entstehende Bild als Kreuzriß. Auf diese Anordnung, daß je zwei Bildebenen orthogonal zur dritten sind, wird in 2.8. noch eingegangen.

Die mit Seitenrissen erzielbaren Effekte können auch durch Drehungen von Körpern um erst- oder zweitprojizierende Geraden als Drehachse bewirkt werden. Über die Drehwinkel kann nach Belieben verfügt werden. Die Motive für den Einsatz von Drehungen können wie oben sein:

- als Konstruktionsprinzip,
- als Hilfsmittel zur Unterstützung der räumlichen Anschauung.

Zu a). Gegeben seien eine Kugel  $\kappa$  und eine Gerade  $g$  durch Grund- und Aufriß. Gesucht sind die Durchstoßpunkte der Geraden durch die Kugel.

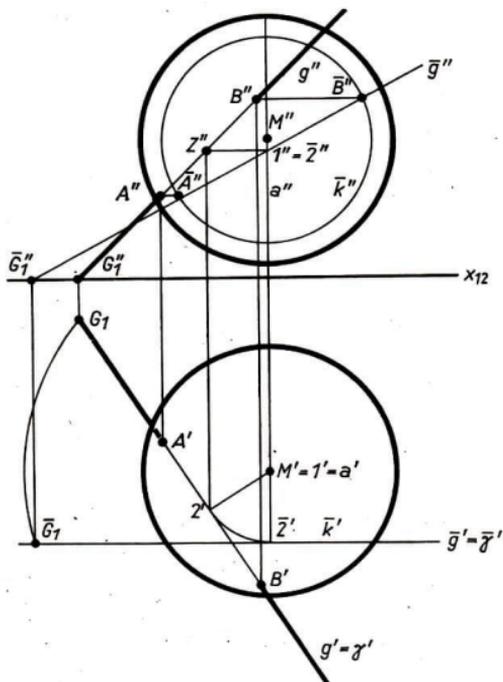


Abb. 76

Auf Grund allgemein bekannter Symmetrieeigenschaften der Kugel ist jede Normalprojektion dieser Fläche ein Kreis. Ferner stellt jeder ebene Schnitt einer Kugel einen Kreis dar, soweit die Kugel mit der Schnittebene mehr als einen Punkt gemeinsam hat. Dreht man außerdem die Kugel um einen ihrer Durchmesser als Achse, so geht sie stets in sich über. Die hier vorliegende Durchdringungsaufgabe ist wieder durch Einschaltung einer Hilfsebene lösbar. Wenn  $g$  mit  $\kappa$  zwei Punkte gemeinsam hat, so schneidet sicher die erstprojizierende Hilfsebene  $\gamma$  durch  $g$  die

Kugel  $\kappa$  nach einem Kreis  $k$ . Die Schnittpunkte von  $g$  mit  $k$  sind auch die Durchstoßpunkte von  $g$  durch  $\kappa$ . Der Grundriß  $k'$  des Schnittkreises  $k$  ist eine Strecke, während der Aufriß von  $k$  eine als Konstruktionselement unbequeme Ellipse darstellt. Daher liegt es nahe,  $g$  um eine erstprojizierende Achse  $a$  durch den Kugelmittelpunkt in eine frontale Lage  $\bar{g}$  zu drehen und die Kugel mit der erstprojizierenden Hilfsebene  $\bar{g}$  durch  $\bar{g}$  zu schneiden. Dies ergibt den frontal liegenden Kreis  $\bar{k}$ , dessen Aufriß  $\bar{k}''$  mit  $\bar{k}$  kongruent ist. Die Schnittpunkte  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  von  $\bar{k}$  mit  $\bar{g}$  liefert der Aufriß. Nun wird die Drehung wieder rückgängig gemacht. Die Kugel  $\kappa$  geht in sich über. Ferner führt man  $\bar{A}''$  und  $\bar{B}''$  auf Ordnungslinien parallel zur Rißachse nach dem Aufriß  $g''$  von  $g$ , da sich die ersten Tafelabstände dieser Punkte bei der Drehung um  $a$  nicht ändern (Abb. 76). Die so gefundenen Punkte  $A''$  und  $B''$  führt man anschlie-

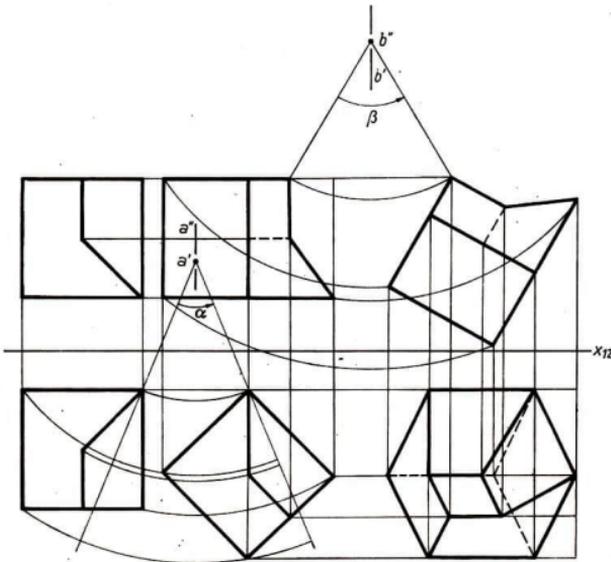


Abb. 77

Bend mittels Ordnungslinien  $\perp x_{12}$  auf den Grundriß von  $g$ . Um der Forderung nach Anschaulichkeit entgegenzukommen, wird die Sichtbarkeit der sich durchdringenden geometrischen Gebilde in Grund- und Aufriß darstellungsmäßig berücksichtigt.

Zu b). Es sei das Ziel, von einem durch zugeordnete Normalrisse gegebenen Werkstück mittels zweier nacheinander ausgeführter Drehungen mit gewissen Drehwinkeln um je eine erst- und zweitprojizierende Achse ein anschauliches Bild zu erhalten.

Konstruktiv besonders vorteilhaft sind Drehungen mit einem Winkel von  $60^\circ$ , da man hierbei für die Übertragung je eines Punktes nur eine Zirkelöffnung benötigt

und mit doppelten Zirkelschlägen arbeiten kann. Aber auch Drehungen um beliebige Winkel sind konstruktiv leicht zu beherrschen. Hierzu dreht man zunächst nur einen Strahl um die Drehachse mit dem vorgeschriebenen Winkel, greift aus dem Winkel die Längen der Drehsehnen für die interessierenden Punkte des betreffenden Risses ab und trägt diese Längen — in der Ausgangslage jedes Punktes ansetzend — auf den entsprechenden Kreisbögen in Drehrichtung an. Bei Wahl der Drehachsen ist zu beachten, daß die Übersichtlichkeit gewahrt bleibt und die Grenzen des Zeichenfeldes nicht überschritten werden.

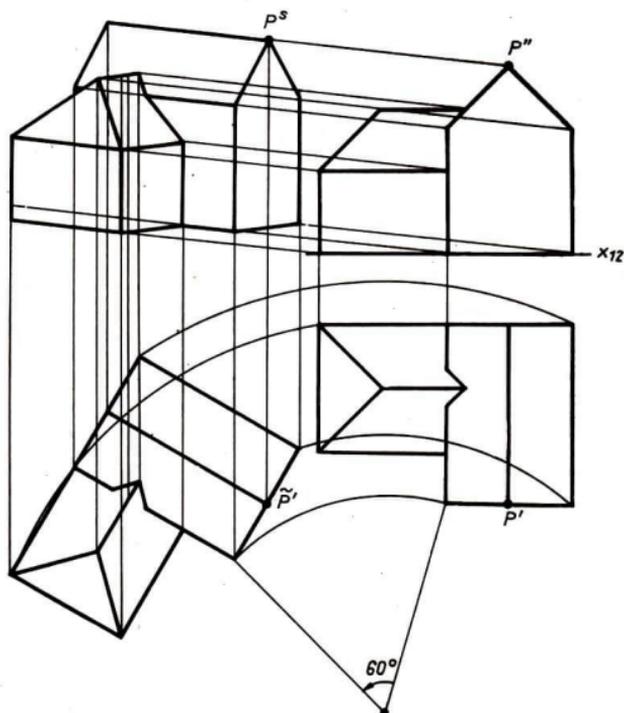


Abb. 78

In Abb. 77 wird das durch Grund- und Aufriß vorgelegte Werkstück zunächst um eine erstprojizierende Achse  $a$  mit einem Winkel von  $45^\circ$  gedreht. Die Grundrisse der Eckpunkte beschreiben Achtelbögen von Kreisen, während die Aufrisse sich auf Parallelen zur Rißachse um gewisse Strecken verschieben. Nach der Drehung entfallen im Aufriß einige projizierende Begrenzungsflächen. Eine weitere Drehung des Werkstückes um die zweitprojizierende Achse  $b$  mit einem Winkel von  $60^\circ$  liefert schließlich im Grundriß eine von projizierenden Kanten und Seiten freie Darstellung.

Der Nachteil dieser Konstruktion liegt auch hier in einem hohen Zeit- und Platzaufwand.

Zusatz. Abschließend wird in Abb. 78 am Bild eines Hausmodells gezeigt, wie sich aus wenig anschaulichen Normalrissen durch eine Drehung des Grundrisses um eine erstprojizierende Achse mit dem Winkel von  $60^\circ$  und eine geeignete Kombination von Ordnerrichtungen aus dem gedrehten Grundriß und dem ursprünglichen Aufriß sehr einfach ein anschauliches Bild gewinnen läßt. Die von dem gedrehten Grundriß ausgehende Ordnerrichtung wird lotrecht gelegt, während man die vom ursprünglichen Aufriß ausgehenden Ordnungslinien gegen die Rißachse leicht nach oben neigt. Das entstehende Bild stellt keine Normalprojektion, sondern eine Parallelprojektion des räumlichen Objektes auf die Bildebene dar. Da sich bei dieser Bildtransformation ein rechtwinkliges Achsendreibein leicht mitführen läßt, können in dem entstehenden Bild auch maßgerechte Eintragungen von weiteren Details des Objektes vorgenommen werden. Solche Aufgaben sind Gegenstand der *Axonometrie*, auf die erst in 4.2. und 4.3. näher eingegangen wird. Mittels der Drehung bietet sich der Übergang von zugeordneten Normalrissen in ein axonometrisches Bild konstruktiv sehr einfach an.

## 2.8. Die sechs Hauptrisse

Von gewissen kompliziert gebauten räumlichen Objekten kann man sich etwa zum Zweck der Projektierung oder Fertigung erst durch sechs Normalrisse eine klare Vorstellung über alle Einzelheiten verschaffen. Die Erzeugung dieser sechs Bilder hat man sich so zu denken, daß das darzustellende Objekt von sechs zu einem Quader zusammengefügt Bildebene umgeben wird. Anschließend wird der Gegenstand auf jede der sechs Bildebene aus dem Inneren des Quaders heraus normal projiziert. Darauf werden die sechs Quaderseiten nach Art eines Quadernetzes in die Zeichenebene ausgebreitet, wobei die Innenflächen des Quaders nun nach oben zeigen. Die Bilder sind in der Regel so verheftet, daß rechts vom Aufriß der Kreuzriß von links und links vom Aufriß der Kreuzriß von rechts liegt. Unterhalb des Aufrisses liegt der Grundriß. Daran schließen sich die von hinten und von unten aufgenommenen Normalrisse an (Abb. 79). Als Gegenrisse bezeichnet man zwei Ansichten eines Körpers, die von einem Paar sich gegenüberliegender Seiten des Bildquaders stammen. So bilden der Aufriß und der von hinten aufgenommene Normalriß ein Paar von *Gegenrissen*.

Die hier dargebotene Konvention, einen Körper durch sechs Normalrisse wiederzugeben, entspricht der *europäischen* Darstellungsart. Eine andere Konvention wird in der *anglo-amerikanischen* Literatur eingehalten. Während man sich hier die Projektionen im Inneren des Quaders erzeugt denkt und anschließend das Quadernetz in die Zeichenebene ausbreitet, werden nach der amerikanischen Art die Normalprojektionen des Körpers von außen auf den Bildquader gezeichnet. Dann wird das

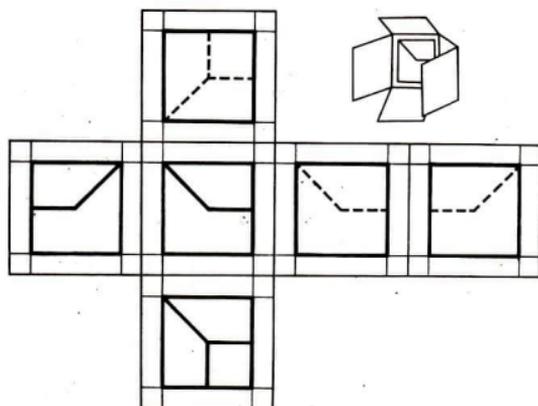


Abb. 79

Quadernetz so in das Zeichenfeld ausgebreitet, daß die Außenseite nach oben kommt. Die Unterscheidung dieser beiden Auffassungen ist beim Lesen von Zeichnungen wichtig, um Verwechslungen vorzubeugen (Abb. 80).

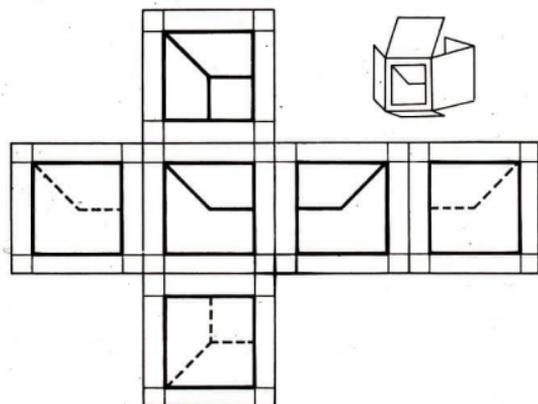


Abb. 80

### 3. Kurven und Flächen zweiter Ordnung

#### 3.1. Allgemeines über Kurven und Flächen zweiter Ordnung

Neben den linearen Grundgebilden Gerade und Ebene sind auch Kurven und Flächen zweiter Ordnung Untersuchungsgegenstand der darstellenden Geometrie. Eine Fläche zweiter Ordnung hat mit einer Geraden allgemeiner Lage im Raum zwei Punkte gemeinsam. Dabei erfolgt die Festlegung der Anzahl der gemeinsamen Punkte im Sinne der algebraischen Wurzelzählung. Die allgemeine Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung — bezogen auf ein kartesisches Koordinatensystem — lautet

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0 \quad (1)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Für die Elemente der Matrix  $\mathbf{A}$  gilt  $a_{ik} = a_{ki}$ . In  $\mathbf{x}$  ist  $x_0$  die *homogenisierende* Koordinate. Aus der großen Mannigfaltigkeit von Flächen zweiter Ordnung können hier nur die Kugel sowie die entarteten Flächen *Drehkegel* und *Drehzylinder* abgehandelt werden. Das einschalige Hyperboloid, das hyperbolische Paraboloid sowie das dreiachsige Ellipsoid sind gleichfalls für die darstellende Geometrie von Interesse. Diese Flächen müssen jedoch hier übergangen werden.

Schneidet man eine Fläche zweiter Ordnung mit einer Ebene, so entsteht als Schnittgebilde eine Kurve zweiter Ordnung. Zum Beispiel wird die von der  $x_1$ - und  $x_2$ -Achse aufgespannte Ebene nach einer Kurve geschnitten, welche die Gleichungen  $x_3 = 0$  und  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$  mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

beschreiben. In (3) gilt gleichfalls  $a_{ik} = a_{ki}$ , und  $x_0$  ist die homogenisierende Koordi-

nate. Die nicht ausgearteten reellen Kurven zweiter Ordnung lassen sich gemäß ihrem Verhalten gegenüber der Ferngeraden in drei Arten einteilen:

1. *Hyperbel* (Kurve zweiter Ordnung mit zwei getrennten, reellen Punkten auf der Ferngeraden);
2. *Parabel* (Kurve zweiter Ordnung, welche die Ferngerade berührt);
3. *Ellipse* (Kurve zweiter Ordnung, die mit der Ferngeraden keinen reellen Punkt gemeinsam hat).

Eine nichtausgeartete Kurve zweiter Ordnung hat mit einer in der Kurvenebene liegenden Geraden höchstens zwei Punkte gemeinsam. Die reellen Kurven zweiter Ordnung lassen sich sämtlich als ebene Schnitte von Drehkegeln erzeugen. Man bezeichnet diese Kurven deshalb auch als Kegelschnitte. Wie aus (1) und (3) zu entnehmen ist, enthält die allgemeine Gleichung für einen Kegelschnitt fünf wesentliche Konstanten. Zur Festlegung eines Kegelschnittes in einer Ebene bedarf es also fünf geeignet gewählter Bestimmungsstücke, etwa fünf Punkte oder fünf Tangenten der gesuchten Kurve. Die Lösungen solcher Aufgaben sind nicht immer eindeutig.

### 3.2. Die Ellipse als Normalprojektion des Kreises. Zweikreis konstruktion

Neben der Geraden ist der Kreis ein grundlegendes Konstruktionselement der darstellenden Geometrie. Räumliche Konstruktionen in Verbindung mit Drehzylinder, Drehkegel oder Kugel fordern die Vertrautheit mit den bei Normalprojektion eines Kreises auftretenden Bildern und geometrischen Gesetzmäßigkeiten. Grundsätzlich besteht in der darstellenden Geometrie das Bestreben, die Bildkonstruktionen exakt und rationell mit Zirkel und Lineal ausführbar zu machen. Bei dieser Zielsetzung muß man sich allerdings damit bescheiden, daß gewisse Problemstellungen, wie die Rektifikation einer Kreislinie, die Quadratur einer Kreisfläche oder die Dreiteilung eines Winkels mit Zirkel und Lineal, nicht exakt, sondern stets nur näherungsweise in endlich vielen Konstruktionsschritten lösbar sind. Hingegen können die Parallelprojektion eines Kreises auf die Ebene und Berührungsaufgaben an der Bildkurve mit den klassischen Hilfsmitteln Zirkel und Lineal exakt und rationell bewältigt werden.

Für die folgenden Betrachtungen werde davon ausgegangen, daß der abzubildende Kreis  $k$  in einer zweitprojizierenden Ebene  $\varepsilon$  liegt. Ist  $C$  der tiefste und  $D$  der höchste Punkt von  $k$  bezüglich  $\pi_1$ , so ist  $k''$  gleich der in  $e_2$  liegenden Strecke  $C''D''$ . Hingegen bildet sich der horizontal liegende Kreisdurchmesser  $AB$  im Aufriß auf das Bild  $M''$  des Kreismittelpunktes  $M$  ab. Die Tangenten an  $k$  in den Punkten  $A, B, C, D$  bilden ein Quadrat. Sein Grundriß ist ein Tangentenrechteck von  $k'$ . Ist  $r$  der Radius von  $k$  und  $\alpha$  der erste Neigungswinkel von  $\varepsilon$ , so haben die Seiten des Tangenten-

rechtecks an  $k'$  paarweise die Längen  $2r$  bzw.  $2r \cos \alpha$ . Nun soll noch von einem Punkt  $P \in k$  allgemeiner Lage der Grundriß aufgesucht werden. Hierzu geht man zweckmäßig von der Umlegung von  $k$  um den Durchmesser  $AB$  in eine zu  $\pi_1$  parallele Lage aus. Der Grundriß  $P_0'$  von  $P_0$  liegt auf  $k_0'$ , der Aufriß  $P_0''$  auf  $k_0''$ . Jetzt macht man die Drehung von  $k$  um den horizontalen Durchmesser rückgängig und erhält durch einen Zirkelschlag um  $M''$  den Aufriß  $P''$  von  $P$ . Der Grundriß  $P'$  von  $P$  liegt

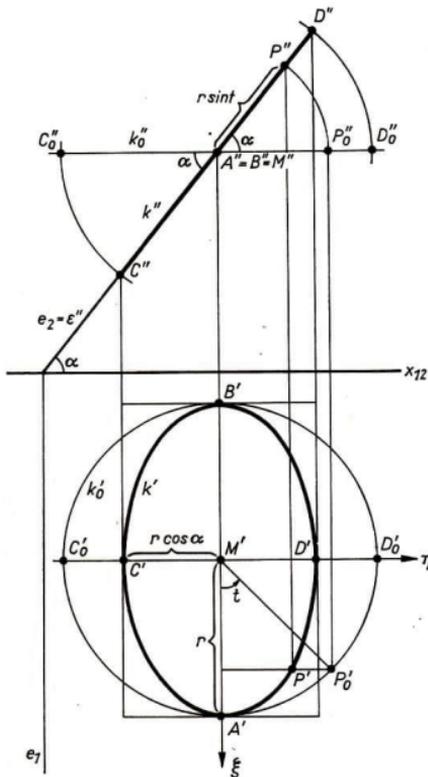


Abb. 81

einerseits auf dem Ordner durch  $P''$ , andererseits auf der Parallelen zur Reißachse durch  $P_0'$ . Die entsprechende Konstruktion liefert exakt den Punkt  $P'$  von  $k'$  (Abb. 81).

Für weitere Untersuchungen werde in die Grundrißtafel ein *kartesisches Achsenkreuz* mit  $M'$  als Ursprung gelegt. Die Vertikale zur Reißachse sei die  $\xi$ -Achse, die Parallele zur Reißachse die  $\eta$ -Achse. Ferner schließe der von  $M'$  nach  $P_0'$  gezogene

Strahl mit der positiven Richtung der  $\xi$ -Achse den Winkel der Größe  $t$  ein. Dann läßt sich die Lage von  $P'$  bezüglich des eingeführten Achsenkreuzes wie folgt beschreiben:

$$\xi = r \cos t, \quad \eta = r \cos \alpha \sin t. \quad (1)$$

Diese Darstellung gilt für jeden Punkt  $P' \in k'$ . Durchläuft  $t$  einmal das Intervall  $0 \dots 2\pi$ , so wird  $k'$  von  $P'$  vollständig beschrieben (Abb. 81). Durch eine elementare Zwischenrechnung läßt sich der Parameter  $t$  aus (1) eliminieren und folgende implizite Kurvendarstellung gewinnen:

$$\frac{\xi^2}{r^2} + \frac{\eta^2}{r^2 \cos^2 \alpha} = 1. \quad (2)$$

Wie in der analytischen Geometrie gezeigt wird, stellt diese Gleichung (2) eine Ellipse mit den Halbachsen  $a = r$  und  $b = r \cos \alpha$  dar.

In 2.4. wurde nachgewiesen, daß zwischen der Normalprojektion einer ebenen Figur und deren Umlegung parallel zur Bildebene eine als perspektive Affinität bezeichnete geometrische Verwandtschaft besteht. Damit gelten folgende Feststellungen zur Normalprojektion eines Kreises: Die Normalprojektion eines Kreises auf eine Ebene ergibt eine Ellipse. Die *Hauptachse* dieser Ellipse ist das Bild jenes Kreisdurchmessers, der parallel zur Bildebene liegt. Die *Nebenachse* ist das Bild des dazu senkrechten Kreisdurchmessers. Haupt- und Nebenachse der Ellipse stehen aufeinander normal. Die Hauptachse ist der größte, die Nebenachse der kleinste Ellipsendurchmesser. Eine Ellipse kann durch *affine Transformation* eines Kreises erzeugt werden. Mit den in 2.4., S. 50, aufgestellten Eigenschaften der affinen Abbildung kann speziell für das affine Bild des Kreises gefolgert werden: Jeder Ellipsendurchmesser wird vom Ellipsenmittelpunkt  $M'$  halbiert. Die Halbierungspunkte einer Schar paralleler Sehnen liegen auf einem Durchmesser der Ellipse. Die Tangenten in den Endpunkten dieses Durchmessers sind parallel zu diesen Sehnen. In dem hier vorliegenden Bild in der Grundrißtafel entspricht die  $\xi$ -Achse der Affinitätsachse. Die Affinitätsstrahlen liegen parallel zur  $\eta$ -Achse. Der Streckfaktor ist  $q = \cos \alpha$  (Charakteristik der Affinität).

Die am räumlichen Modell gewonnenen Beziehungen zwischen Kreis und Ellipse lassen sich in eine übersichtliche, rein planimetrische Ellipsenkonstruktion umsetzen. Ausgehend von einem kartesischen Achsenkreuz mit horizontaler  $x$ -Achse und vertikaler  $y$ -Achse werden um den Ursprung zwei Kreise  $k_0$  und  $k_1$  mit den Radien  $a = r$  und  $b = r \cos \alpha$  geschlagen. Auf  $k_0$  wird ein Punkt  $P_0$  beliebig angenommen und mit dem Mittelpunkt von  $k_0$  verbunden. Die Verbindungslinie schließt mit der  $x$ -Achse den Winkel  $t$  ein und schneidet  $k_1$  in  $P_1$ . Die Vertikale durch  $P_0$  schneidet die Horizontale durch  $P_1$  in einem Punkt  $P$ . Für diesen Punkt gilt, wie aus der Figur leicht abzulesen ist, die Darstellung  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ . Ein Vergleich mit (1) zeigt, daß  $P$  eine Ellipse beschreibt, wenn  $t$  das Intervall von 0 bis  $2\pi$  durchläuft. Ihre Hauptachse fällt mit dem horizontalen Durchmesser von  $k_0$  und ihre Nebenachse mit dem vertikalen Durchmesser von  $k_1$  zusammen. Mit Hilfe der Kreise  $k_0$  und  $k_1$  können die Ellipsenpunkte beliebig dicht gelegt werden. Das hierbei angewandte

Verfahren bezeichnet man als *Zweikreiskonstruktion*. Ihre Entdeckung schreibt man PH. DE LA HIRE (1685) zu (Abb. 82).

Den durch die *Hauptscheitel*  $A$  und  $B$  gehenden Kreis  $k_0$  nennt man *Hauptscheitelkreis*, und entsprechend ist  $k_1$  der *Nebenscheitelkreis*. Die Zweikreiskonstruktion bildet die Grundlage zur Ableitung weiterer Erzeugungsweisen und Konstruktionsvorschriften der Ellipse.

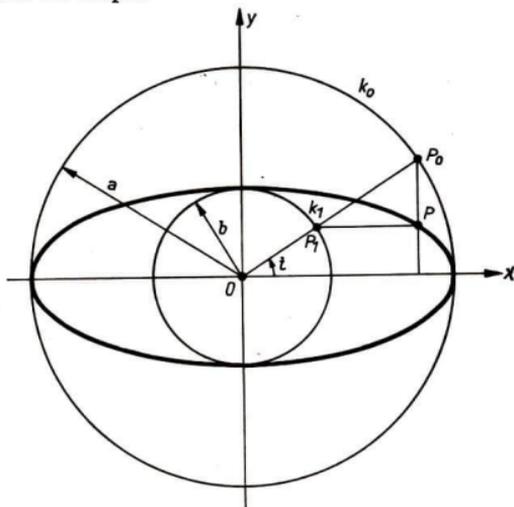


Abb. 82

Eine wesentliche Hilfe zum Zeichnen formgerechter Ellipsen bieten die *Scheitelkrümmungskreise*. Diese berühren die Kurve in den Scheitelpunkten von dritter Ordnung. Der Krümmungsradius  $\varrho(t)$  einer in der Parameterform  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  gegebenen Kurve errechnet sich nach der Formel (vgl. MfL, Band 5, Analysis II)

$$\varrho(t) = \frac{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}.$$

Aus der Ellipsendarstellung  $x = a \cos t$  und  $y = b \sin t$  ergibt sich für die Hauptscheitel ( $t = 0$ )

$$\varrho_A = \varrho_B = \frac{b^3}{a},$$

für die Nebenscheitel ( $t = \frac{\pi}{2}$ )

$$\varrho_C = \varrho_D = \frac{a^3}{b}.$$

Sind Haupt- und Nebenachse einer Ellipse vorgegeben, so findet man nach diesen Ergebnissen die Mittelpunkte der Scheitelkrümmungskreise durch folgende Konstruktion: Im rechten oberen Quadranten ergänzt man die Halbachsen  $a$  und  $b$  zu einem Rechteck. In dieses Rechteck ist jene Diagonale einzuzichnen, die Haupt- und Nebenseitel verbindet. Ferner ist von dem außerhalb der Ellipse liegenden Eckpunkt des Rechtecks das Lot auf die Diagonale zu fällen. Die Verlängerung des Lotes schneidet die Hauptachse in  $M_B$  und die Nebenachse in  $M_C$ . Dies sind die Mittelpunkte der zu den Scheiteln  $B$  und  $C$  gehörigen Krümmungskreise. Wegen der Symmetriebeziehungen an der Ellipse können die zu  $A$  und  $D$  gehörigen Krümmungsmittelpunkte durch Spiegelung von  $M_B$  und  $M_C$  an der Neben- bzw. Hauptachse gefunden werden (Abb. 83).

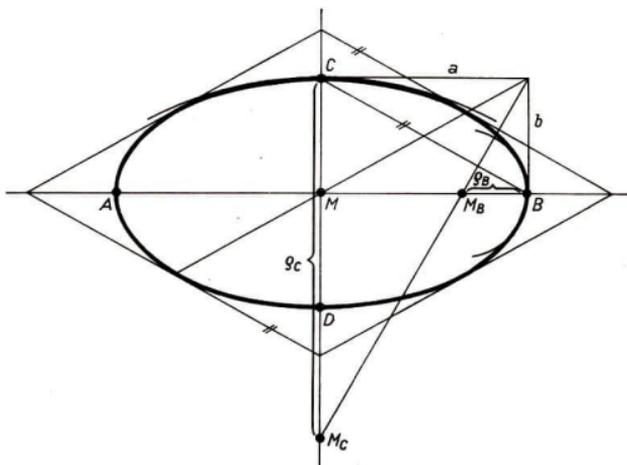


Abb. 83

Bei der Ausführung der Zeichnung ist zu beachten, daß die Ellipse durch die *Hauptscheitelkrümmungskreise* von innen und ihre *Nebenseitelkrümmungskreise* von außen von dritter Ordnung berührt wird. Zur weiteren Stützung des Kurvenbildes können noch jene Ellipsentangenten herangezogen werden, die parallel zu den Diagonalen des Achsenrechtecks liegen. Die Achsenabschnitte dieser Tangenten haben die Längen  $a\sqrt{2}$  und  $b\sqrt{2}$  und können mittels eines doppelten Zirkelschlages wenig aufwendig bereitgestellt werden. Die Halbierungspunkte der von den Achsen ausgeschnittenen Tangentenstrecken sind Berührungspunkte der Ellipse.

Als Anwendung soll der ebene Schnitt einer Kugel konstruiert werden. Grund- und Aufriß einer Kugel mit dem Mittelpunkt  $N$  und dem Radius  $r$  sind je ein Kreis um  $N'$  bzw.  $N''$  mit unverändertem Radius. Der Abstand der als zweitprojizierend vorausgesetzten Schnittebene  $\varepsilon$  von  $N$  soll kleiner als  $r$  sein. Damit ist die Existenz eines reellen Schnittkreises  $k$  gesichert. Der Äquatorkreis der Kugel ist der erste wahre

Umriss  $u_1$  und der frontal liegende Großkreis der Kugel der zweite wahre Umriss  $u_2$ . Im Schnitt von  $u_2$  mit  $\varepsilon$  liegen der höchste und tiefste Punkt  $D$  und  $C$  von  $k$ . Ihre Aufrisse liegen in den Schnittpunkten von  $e_2 = \varepsilon''$  mit  $u_2''$ . Die Verbindungsgerade  $g(CD)$  ist eine Fallinie von  $\varepsilon$ . Der Aufriss der Strecke  $CD$  ist wegen der besonderen Lage von  $\varepsilon$  auch der Aufriss von  $k$ . Dagegen ist als Grundriß von  $k$  eine Ellipse zu erwarten. Aus Gründen der Symmetrie muß der Grundriß von  $CD$  auf der Lotrechten

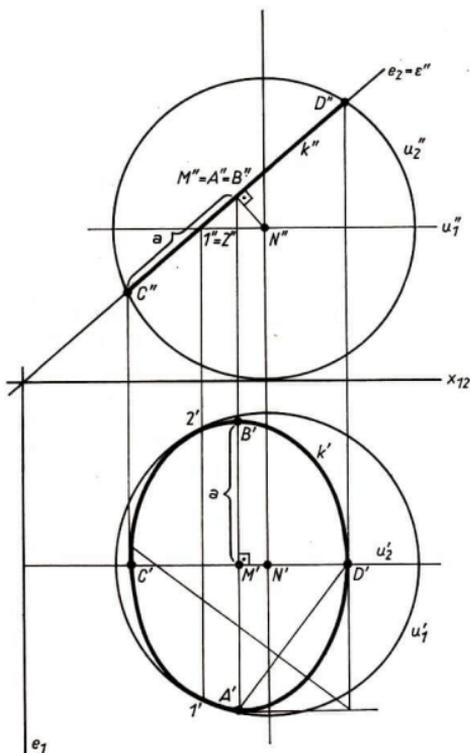


Abb. 84

zu  $e_1$  durch  $N'$  liegen. Mit Hilfe von Ordnungslinien durch  $C''$  und  $D''$  findet man den Grundriß des Durchmessers  $CD$ . Da dieser Durchmesser auf einer *Fallinie* liegt, erfährt er bei der Normalprojektion des Kreises die stärkste Verkürzung. Die Strecke  $C'D'$  ist also die Nebenachse von  $k'$ , und der Halbierungspunkt  $M'$  der Nebenachse ist der Mittelpunkt für  $k'$ . Zur Kontrolle kann  $M''$  auch als Fußpunkt des Lotes von  $N''$  auf  $C''D''$  konstruiert werden. Die Hauptachse der Bildellipse  $k'$  schneidet  $C'D'$  in  $M'$  senkrecht. Da sie das Bild des horizontal liegenden Kreisdurchmessers ist, der sich unverkürzt auf  $\pi_1$  abbildet, kann die Länge der Hauptachse dem Aufriss von  $k$

entnommen werden. Damit hat man Haupt- und Nebenachse der Bildellipse  $k'$ , die sich nun punktweise nach der Zweikreiskonstruktion vervollständigen läßt (Abb. 84).

Von Interesse sind noch jene Punkte  $I'$  und  $Z'$ , in denen sich  $k'$  und  $u_1'$  berühren. Hierzu entnimmt man dem Aufriß den Schnitt von  $u_1''$  mit  $e_2$  und führt ihn mittels eines Ordners in den Grundriß. Die Schnittpunkte  $I'$  und  $Z'$  der Ordnungslinie mit  $u_1'$  stellen die Berührungspunkte von  $u_1'$  mit  $k'$  dar. Als zusätzliche Aufgabe kann der unterhalb  $\varepsilon$  liegende Restkörper (Kugelsegment) in einer der Anschauung entsprechenden Weise herausgehoben werden.

### 3.3. Kinematische Erzeugungsweisen der Ellipse

An die Zweikreiskonstruktion der Ellipse lassen sich zwanglos kinematische Betrachtungen zur Ellipsenerzeugung anknüpfen. Die Parallele zur Verbindung  $OP_0$  durch  $P$  entsprechend Abb. 82 schneidet die  $x$ -Achse in  $Q$  und die  $y$ -Achse in  $R$ . Nach Konstruktion gilt  $|PQ| = b$ ,  $|PR| = a$  und  $|QR| = a - b$  für jeden Wert von  $t$ , d. h. für jeden Ellipsenpunkt  $P$ . Damit ist die folgende *kinematische Erzeugung* der Ellipse gesichert: Man verbindet zwei Gleithülsen, von denen die eine längs der  $x$ -Achse, die andere längs der  $y$ -Achse frei beweglich ist, durch einen Stab der Länge  $c = a - b$  gelenkig miteinander. So können die Hülsen auf den Achsen nicht unabhängig voneinander gleiten. Hierdurch ist also ein *ebener Zwanglauf* festgelegt.

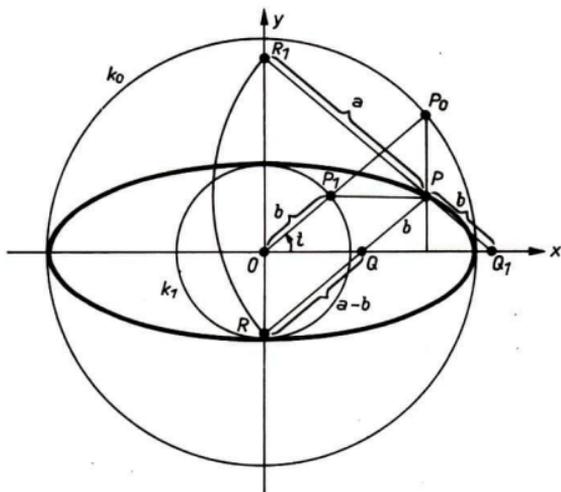


Abb. 85

Weiterhin werde auf der durch die Gelenkpunkte bestimmten Geraden ein Punkt  $P$  außerhalb der Gelenkhülsen ausgezeichnet und seine bei dem Zwangslauf beschriebene Bahn verfolgt. Wie sich aus den Zusätzen zur Zweikreis konstruktion in Abb. 85 ablesen läßt, durchläuft der Punkt  $P$  eine Ellipse, deren Achsen sich mit der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse decken.

Dieser Zusammenhang mit der ebenen Kinematik ermöglicht die punktweise Konstruktion einer Ellipse mittels eines Papierstreifens, wenn die Längen von Haupt- und Nebenachse vorliegen. Hierzu gibt man sich im Zeichenfeld ein kartesisches Achsenkreuz vor. Ferner markiert man auf dem Rand eines *Papierstreifens* drei Punkte  $P$ ,  $Q$  und  $R$  mit den Abständen  $|PQ| = b$  und  $|PR| = a$ . Legt man nun den Streifen derart, daß sich die Markierung von  $Q$  mit einem Punkt der  $x$ -Achse und die von  $R$  mit einem Punkt der  $y$ -Achse deckt, dann liefert die Markierung von  $P$  auf dem Zeichenblatt einen Punkt der Ellipse. Um die Zeichengenauigkeit zu erhöhen, kann, wie Abb. 86 zeigt, der Punkt  $P$  auch zwischen  $Q$  und  $R$  mit  $|PQ| = b$  und  $|PR| = a$  auf dem Papierstreifen angenommen werden. Dies erfordert allerdings die Bereitstellung eines größeren Zeichenblattes in bezug auf die darzustellende Ellipse. Auf dem hier abgeleiteten Konstruktionsprinzip beruht der vorwiegend als Lehrmittel benutzte Ellipsenzirkel.

Umgekehrt läßt sich auch bei Vorgabe der Hauptachse und eines Punktes  $P$  die Nebenachse der Ellipse konstruieren. Man schlägt um  $P$  mit dem Radius  $a$  einen Kreis, der das Mittellot der Hauptachse in  $R$  und  $\bar{R}$  schneidet. Die Verbindungsgerade  $PR$  schneidet die Hauptachse in  $Q$ . Die Länge  $|PQ| = b$  ist auf dem Mittellot

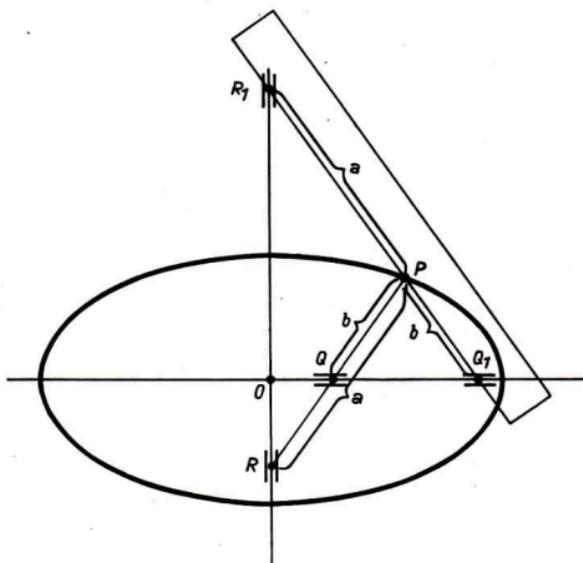


Abb. 86

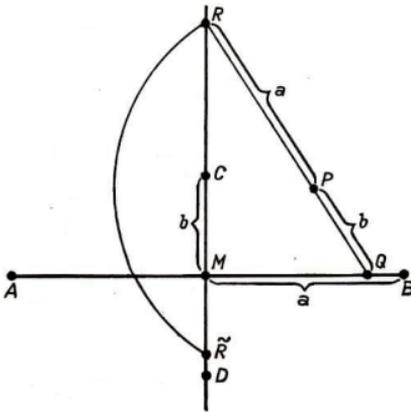


Abb. 87

vom Mittelpunkt der Hauptachse nach oben und unten abzutragen. Damit hat man auch die Nebenscheitel  $C$  und  $D$  der Ellipse gefunden (Abb. 87).

Der oben beschriebene Zwangslauf des durch zwei Gleithülsen eingefassten Stabes ist äquivalent mit der Bewegung des Abrollens von zwei Kreisen aufeinander. In einem Kreis  $k_0$  mit dem Radius  $2r$  (*Rastkreis*) rolle ein zweiter Kreis  $k_1$  mit dem Radius  $r$  (*Gangkreis*) ohne zu gleiten ab. In der Ausgangsstellung, bei welcher der Mittelpunkt  $M_1$  von  $k_1$  auf der  $x$ -Achse liegt, deckt sich der Berührungsradius von  $k_0$

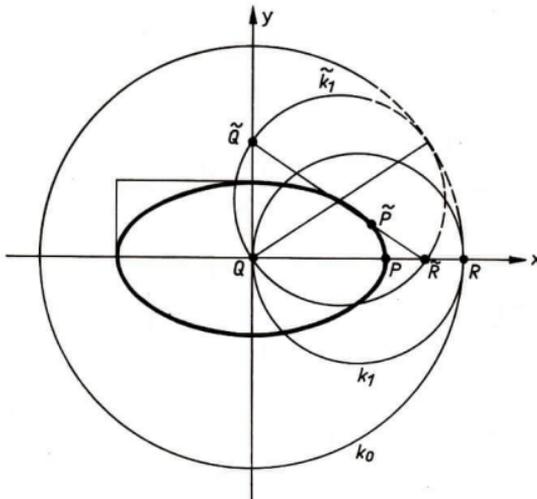


Abb. 88

mit dem horizontal liegenden Durchmesser  $QR$  von  $k_1$ . Auf diesem Durchmesser liege der Punkt  $P$ , dessen Bahn betrachtet werden soll. Bei Ablauf der *Rollbewegung* von  $k_1$  auf  $k_0$  liegt in jeder Bewegungsphase der Punkt  $Q$  auf der  $y$ -Achse und  $R$  auf der  $x$ -Achse. Entsprechend den oben durchgeführten Betrachtungen beschreibt  $P$  bei dieser Rollbewegung die Bahn einer Ellipse.

Da sich der Durchmesser  $QR$  vor anderen Durchmessern von  $k_1$  nicht auszeichnet, kann die Aussage über die Bahn des Punktes  $P$  verallgemeinert werden. Zu  $k_1$  kann man sich nämlich eine ganze Ebene, die *Gangebene*  $\Gamma$ , mitgeführt denken. Nach Einführung des Begriffes der Gangebene kann der vorliegende Sachverhalt wie folgt formuliert werden: Jeder Punkt  $P \in \Gamma$  und  $P \notin k_1$  beschreibt bei Ablauf der Rollbewegung eine Ellipse. Für die Punkte der Peripherie von  $k_1$  arten die Bahnkurven zu doppelt überdeckten Durchmessern von  $k_0$  aus. Man bezeichnet diesen ebenen Zwanglauf als *Ellipsenbewegung* (Abb. 88).

### 3.4. Die Ellipse als perspektiv-affines Bild des Kreises

In 2.4. führte die Konstruktion des Schlagschattens einer ebenen Figur bei Parallelbeleuchtung auf die geometrische Verwandtschaft der perspektiven Affinität. Weiter wurde in 2.5., (2) gezeigt, daß zwischen dem Normalriß einer ebenen Figur und dem Normalriß ihrer Umlegung in eine zur Bildebene parallele Ebene ebenfalls eine solche Verwandtschaft besteht. Ferner ist aus 3.2. bekannt, daß die Normalprojektion eines Kreises eine Ellipse darstellt und somit die Ellipse als perspektiv-affines Bild des Kreises aufgefaßt werden kann. Dies räumt die Möglichkeit ein, gewisse an der Ellipse geforderte Konstruktionen, wie z. B. den Schnitt mit einer Geraden oder das Legen von Tangenten aus einem Punkt an die Kurve, mittels einer affinen Transformation in ein Bild überzuführen, wo die Ellipse als Kreis erscheint. An den so transformierten Bestimmungsstücken löst man die gestellte Aufgabe mit Zirkel und Lineal. Anschließend werden die gefundenen Ergebnisse mit den gleichen Mitteln in das ursprüngliche Bild zurücktransformiert.

Für die folgenden Darlegungen werde eine Gerade  $a$  als Affinitätsachse und ein Punktepaar  $(P, \bar{P})$  zur Festlegung der Punktverwandtschaft vorgegeben ( $P, \bar{P} \notin a$ ). Nun wird um  $P$  ein Kreis  $k$  geschlagen und nach dem zugeordneten Bild  $\bar{k}$  gefragt. Für eine punktweise Konstruktion von  $\bar{k}$  finden die unter 2.4. zusammengestellten Eigenschaften der affinen Verwandtschaft Anwendung. Zunächst werde, wie Abb. 89 zeigt, eine Schar von Geraden parallel zur Affinitätsgeraden  $g(P\bar{P})$  gezogen. Aus zeichentechnischen Gründen werden diese Geraden symmetrisch zu  $g(P\bar{P})$  gelegt. Unter den Geraden der Parallelschar finden sich auch die Tangenten  $s$  und  $t$  an  $k$  mit den Berührungspunkten  $S$  und  $T$ . Eine zweite Schar von Geraden legt man nun zweckmäßig parallel zum Kreisdurchmesser  $ST$ , und zwar derart, daß man mit jeder Geraden zwei Schnittpunkte von  $k$  mit den Affinitätsstrahlen erfaßt. Diese Geraden

schneiden die Affinitätsachse in den Punkten  $1, 2, 3 \dots$ . Die Bildstrecke des Kreisdurchmessers  $ST$  kann zuerst gezeichnet werden, indem man  $\bar{P}$  mit dem entsprechenden Fixpunkt  $I$  auf  $a$  verbindet. Wegen der Erhaltung der Parallelität sind die anderen Geraden parallel zu  $\bar{ST}$  durch die entsprechenden Fixpunkte auf  $a$  zu legen. Bei Beachtung der Zuordnung von Bildgeraden zu ihren Originalgeraden sind die Bildpunkte von  $k$  unter den Schnittpunkten leicht auffindbar. Ist das Liniennetz hinreichend dicht, so kann  $k$  mit einiger Sicherheit gezeichnet werden (Abb. 89).

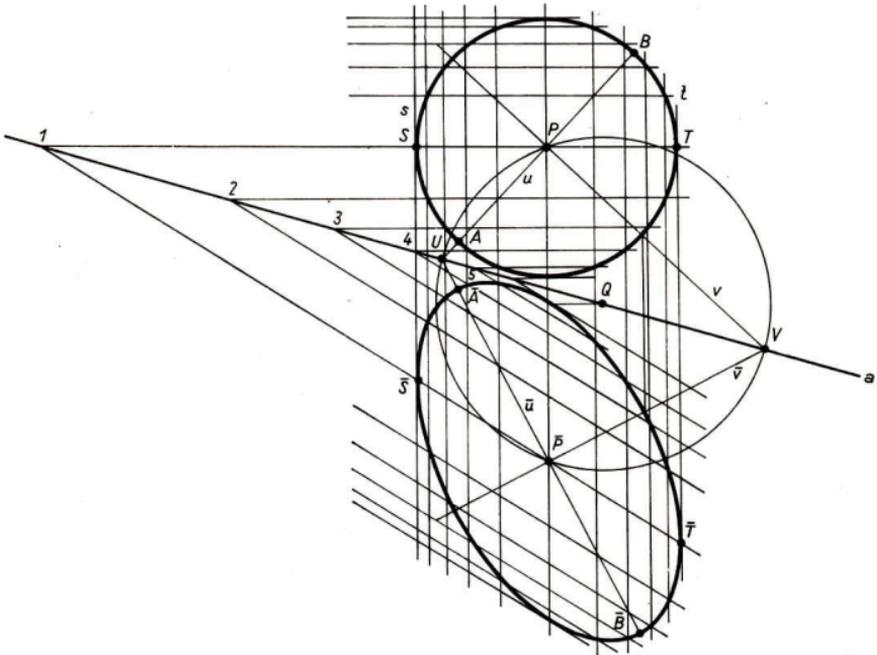


Abb. 89

Eine punktweise Konstruktion von  $\bar{k}$  ist jedoch nicht voll befriedigend. Man will die Lage von Haupt- und Nebenachse exakt angeben können. Dies ist bei der Konstruktion mit den bisherigen Hilfsmitteln nur schätzungsweise möglich. Der folgende Satz führt an die Lösung dieser Aufgabenstellung näher heran:

*Bei einer perspektiven Affinität, die nicht (orthogonale Geraden-)Spiegelung ist, läßt sich durch jeden Punkt  $P$  der einen Menge genau ein sich orthogonal schneidendes Geradenpaar  $u, v$  legen, dessen Bilder  $\bar{u}, \bar{v}$  sich in dem Bildpunkt  $\bar{P}$  gleichfalls orthogonal schneiden.*

Der Beweis des Satzes erfolgt durch Konstruktion. Man zieht zunächst die Affinitätsgerade  $P\bar{P}$ . Das Mittellot von  $|P\bar{P}|$  schneidet die Affinitätsachse  $a$  in  $Q$ . Ein Kreis

um  $Q$  mit dem Radius  $\varrho = |\overline{PQ}| = |PQ|$  schneidet die Affinitätsachse  $a$  in den Punkten  $U$  und  $V$ . Die Verbindungsgeraden  $u = u(PU)$  und  $v = v(PV)$  schneiden sich nach dem Satz des THALES senkrecht in  $P$ . Ihre Bilder  $\bar{u} = \bar{u}(\overline{P}U)$  und  $\bar{v} = \bar{v}(\overline{P}V)$  schneiden sich nach Konstruktion gleichfalls senkrecht in  $\overline{P}$ . Die Konstruktion ist eindeutig ausführbar, soweit das Mittellot von  $P\overline{P}$  nicht parallel zu  $a$  liegt. Deckt sich das Mittellot mit  $a$ , so handelt es sich um eine Spiegelung. Stehen die Affinitätsgeraden senkrecht auf der Affinitätsachse — unter Ausschluß der Spiegelung —, so

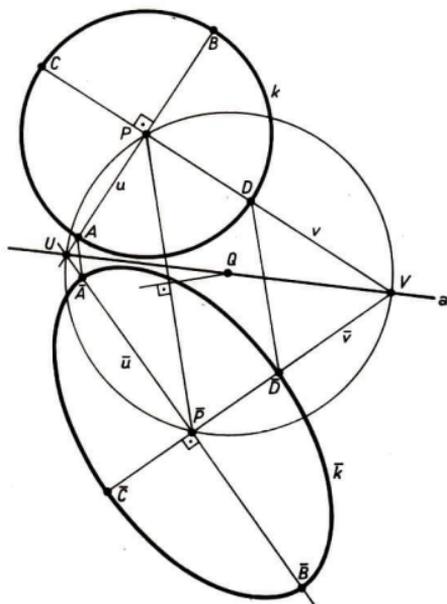


Abb. 90

liegen die Schenkel des Rechtwinkelpaares durch  $P$  und  $\overline{P}$  senkrecht bzw. parallel zur Affinitätsachse. Auf Grund der Eindeutigkeit der Konstruktion ist der obige Satz bewiesen (Abb. 90).

Um also an dem Bild von  $k$  Haupt- und Nebenachse zu finden, ist die oben beschriebene Konstruktion auszuführen. Zusätzlich sind die Endpunkte der beiden aufeinander normal stehenden Kreisdurchmesser mittels Affinitätsstrahlen in das Feld der Ellipse überzuführen. Wählt man in  $k$  ein beliebiges anderes orthogonales Durchmesserpaar, so geht dies in ein Paar *konjugierter Durchmesser* der Ellipse über. Paare von konjugierten Durchmessern besitzen nach den Abbildungseigenschaften der affinen Transformation folgende Merkmale:

1. Die Tangenten in den Endpunkten des einen Durchmessers sind parallel zu dessen konjugiertem Durchmesser.

2. Zieht man zu einem Durchmesser eine Schar paralleler Sehnen, so liegen deren Halbierungspunkte auf dem hierzu konjugierten Durchmesser.

3. Haupt- und Nebenachse einer Ellipse bilden das einzige sich lotrecht schneidende Paar von konjugierten Durchmessern.

Wie bei Ableitung der Zweikreis konstruktion in 3.2. gezeigt wurde, besteht zwischen einer Ellipse und ihrem Hauptscheitelkreis eine perspektive Affinität mit der Hauptachse als Affinitätsachse und dem Lot darauf als Affinitätsrichtung. Unter Ausnutzung dieser leicht überschaubaren Transformation sollen einige Grundaufgaben zur Ellipse konstruktiv mit Zirkel und Lineal gelöst werden.

### Aufgaben

1. Gegeben seien Haupt- und Nebenachse einer Ellipse  $k$  und eine Gerade  $g$ . Gesucht sind die Schnittpunkte von  $g$  und  $k$ .

2. Gegeben seien Haupt- und Nebenachse einer Ellipse  $k$  und eine Gerade  $g$ . Gesucht sind die zu  $g$  parallelen Tangenten  $s$  und  $t$  an  $k$ .

3. Gegeben seien Haupt- und Nebenachse einer Ellipse  $k$  und ein Punkt  $P$  außerhalb  $k$ . Gesucht sind die Tangenten von  $P$  an  $k$ .

4. Gegeben seien eine Achse und eine Tangente  $t$  der Ellipse  $k$ . Gesucht sind die andere Achse sowie der Berührungspunkt  $T$  von  $t$ .

5. Gegeben seien ein Ellipsendurchmesser  $QR$ , ein Punkt  $P \in k$  und die Richtung's des zu  $QR$  konjugierten Durchmessers. Gesucht ist der zu  $QR$  konjugierte Durchmesser  $ST$ .

6. Gegeben sei ein Paar konjugierter Durchmesser der Ellipse  $k$ . Gesucht sind Haupt- und Nebenachse von  $k$ .

Lösung zu 1. Zunächst wird zu  $k$  der Hauptscheitelkreis  $k_0$  gezeichnet. Dieser schneidet die verlängerte Nebenachse in dem Punkt  $D_0$ . Damit sind die Affinitätsachse  $a$ , die Affinitätsrichtung  $r$  und die Charakteristik  $q = \frac{m(MD_0)}{m(MD)}$  eindeutig festgelegt.

Jetzt kann die Gerade  $g$  aus dem Ellipsenfeld in das Kreisfeld transformiert werden. Hierzu zeichnet man die Gerade  $h \parallel g$  durch  $D$ . Man erhält den Schnittpunkt  $I = I(ah)$ . Nun verbindet man den Punkt  $I$  mit  $D_0$  und erhält die Gerade  $h_0$ . Die Parallele zu  $h_0$  durch den Punkt  $2 = 2(ag)$  liefert die ins Kreisfeld transformierte Gerade  $g_0$ . Die Schnittpunkte  $P_0$  und  $Q_0$  von  $g_0$  mit  $k_0$  sind in der Affinitätsrichtung  $r \perp a$  auf  $g$  zurückzuführen. Damit hat man die Schnittpunkte  $P$  und  $Q$  von  $k$  mit  $g$  exakt ermittelt (Abb. 91).

Lösung zu 2. Wie in Aufgabe 1 wird der Kreis  $k_0$  gezeichnet und  $g$  entsprechend in das Kreisfeld transformiert. Man zeichnet den zu  $g_0$  senkrechten Durchmesser von  $k_0$ . Dieser liefert die Schnittpunkte  $S_0$  und  $T_0$  auf  $k_0$ . Die entsprechenden Tangenten an  $k_0$  schneiden die Affinitätsachse  $a$  in den Punkten 1 und 2. Die Parallelen  $s$  und  $t$  zu  $g$  durch die Punkte  $1, 2 \in a$  stellen die gesuchten Tangenten dar. Die Rücktransformation von  $S_0$  und  $T_0$  auf  $s$  und  $t$  erfolgt in Affinitätsrichtung. Sie führt auf die Berührungspunkte  $S$  und  $T$  (Abb. 92).

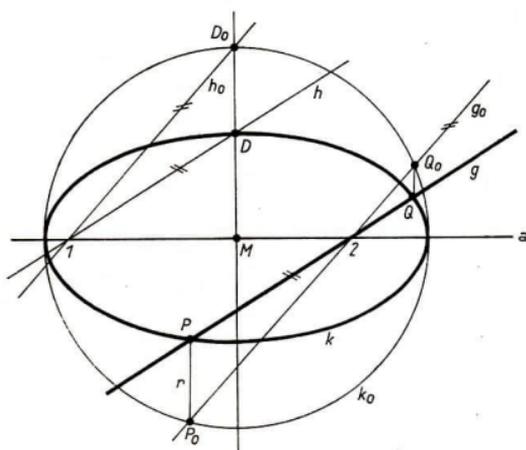


Abb. 91

Lösung zu 3. Wie oben wird  $k_0$  gezeichnet und  $P$  nach  $P_0$  in das Kreisfeld transformiert. Hierzu ist die Gerade  $PD$  zu zeichnen, welche die Achse  $a$  in  $1$  schneidet.  $P_0$  liegt dann im Schnitt der Verbindungsgeraden  $g(ID_0)$  mit dem Affinitätsstrahl durch  $P$ . Nun werden die Tangenten aus  $P_0$  an  $k_0$  mit den von der Planimetrie geläufigen

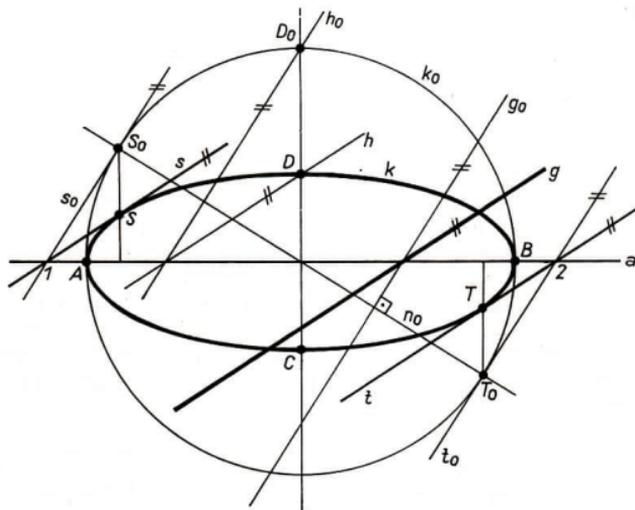


Abb. 92

Sätzen konstruiert. Man erhält die Tangenten  $s_0$  und  $t_0$  mit den entsprechenden Berührungspunkten. Diese lassen sich nach der bereits mehrfach angewandten Methode in das Ellipsenfeld führen (Abb. 93).

Lösung zu 4. Man zeichnet den Scheitelkreis  $k_0$ . Schneidet dieser die Gerade  $t$  reell, so ist  $k_0$  der Hauptscheitelkreis von  $k$ , anderenfalls ist  $k_0$  Nebenscheitelkreis von  $k$ . Aus dem Fixpunkt  $I = I(at)$  wird eine Tangente an  $k_0$  gelegt. Sie liefert den Berührungspunkt  $T_0$ . Dieser läßt sich mit einem Affinitätsstrahl senkrecht zu  $a$  nach  $t$  führen. Mit dem Punktepaar  $(T, T_0)$  hat man die Charakteristik der Affinität. Der Kreis  $k_0$  schneidet das Mittellot der gegebenen Achse in  $A_0$ . Den entsprechenden Punkt  $A$  findet man durch konstruktive Auswertung der Charakteristik. Mit dem Spiegelpunkt  $B$  von  $A$  an  $a$  sind dann alle vier Scheitel der Ellipse bekannt (Abb. 94 a, b).

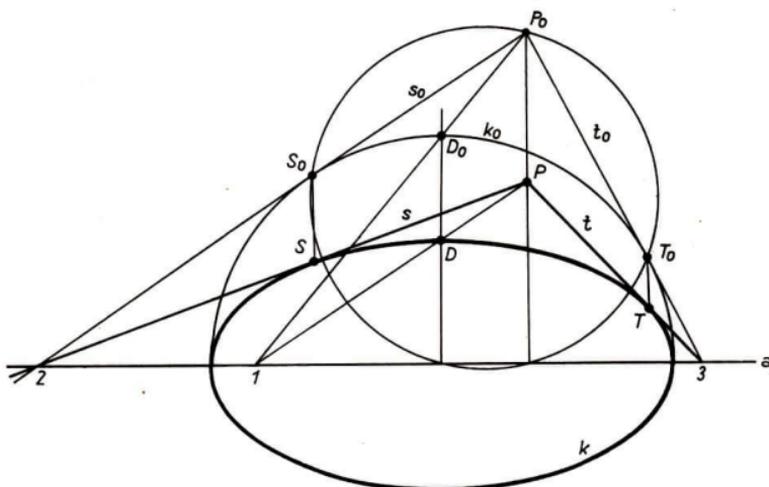


Abb. 93

Lösung zu 5. Die Affinitätsachse werde auf den Durchmesser  $QR$  gelegt. Das affine Bild von  $k$  sei der Kreis  $k_0$  mit der Strecke  $QR$  als Durchmesser. Im Kreisfeld stehen die Bilder konjugierter Durchmesser aufeinander normal. Daher steht  $s_0$  senkrecht auf  $a$  und schneidet  $k_0$  in  $S_0$  und  $T_0$ . Um  $S$  und  $T$  auf  $s$  zu finden, benötigt man noch die Affinitätsrichtung. Den Zugang hierzu liefert der Punkt  $P \in k$ . Man legt durch  $P$  die Parallele zu  $s$ , die  $a$  in  $I$  schneidet. Das Lot durch  $I$  auf  $a$  schneidet  $k_0$  in  $P_0$ , dem Bildpunkt von  $P$ . Die Verbindungsgerade  $g(PP_0)$  liefert die gesuchte Affinitätsrichtung  $r$ . Die Parallelen zu  $r$  durch  $S_0$  und  $T_0$  schneiden  $s$  in  $S$  und  $T$ , den gesuchten Endpunkten des zu  $QR$  konjugierten Durchmessers  $ST$  (Abb. 95).

Lösung zu 6. Man lege durch den einen Endpunkt  $Q$  des Durchmessers  $QR$  die Gerade  $a$  parallel zu dem konjugierten Durchmesser  $ST$ . Die Gerade  $a$  ist also Tangente von  $k$ . Ihr soll im folgenden die Rolle der Affinitätsachse zufallen. In  $Q$  ist



das Lot auf  $a$  als Bild des Durchmessers  $QR$  zu errichten. Darauf ist die Strecke  $SM$  von  $Q$  nach dem Kreisbild abzutragen. Man erhält den Mittelpunkt  $M_0$  von  $k_0$ . Die Verbindungsgerade  $g(MM_0)$  liefert die Affinitätsrichtung  $r$ . Der Kreis um  $M_0$  mit dem Radius  $\varrho = |SM| = |QM_0|$  ist das perspektiv-affine Bild von  $k$ . Nun ist daran zu erinnern, daß sich durch  $M_0$  genau ein sich senkrecht schneidendes Kreisdurchmesserpaar legen läßt, dem im Ellipsenfeld wieder ein orthogonales Durchmesserpaar entspricht (Abb. 96). Um diese Durchmesserpaare aufzufinden, ist auf  $MM_0$  das Mittellot  $l$  zu errichten und mit  $a$  zu schneiden. Um  $N = N(la)$  ist der Kreis mit dem Radius  $\varrho_1 = |NM| = |NM_0|$  zu zeichnen. Dieser schneidet  $a$  in den Punkten  $U$  und  $V$ . Die Verbindungslinien  $u_0 = u_0(UM_0)$  und  $v_0 = v_0(VM_0)$  schneiden

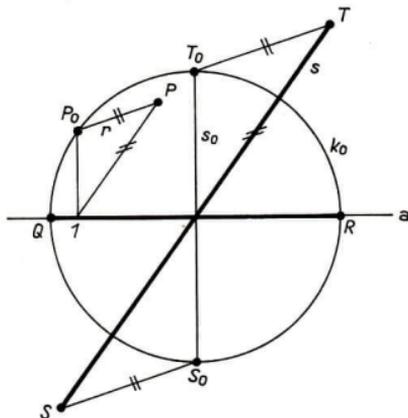


Abb. 95

$k_0$  in den Punkten  $A_0, B_0$  bzw.  $C_0, D_0$ . Ferner gilt  $u_0 \perp v_0$ . Nun sind noch die Geraden  $u = u(UM)$  und  $v = v(VM)$  zu zeichnen, die sich in  $M$  senkrecht schneiden. Mit Hilfe der Affinitätsstrahlen parallel zu  $r$  durch  $A_0, B_0, C_0, D_0$  findet man die Hauptscheitel  $A$  und  $B$  sowie die Nebenscheitel  $C$  und  $D$  von  $k$ .

### 3.5. Konstruktion der Achsen einer Ellipse nach Rytz

In Aufgabe 6 von 3.4. wurden Haupt- und Nebenachse einer Ellipse aus einem Paar konjugierter Durchmesser mit Hilfe der perspektiven Affinität konstruiert. Es gibt noch einen einfacheren Zugang zu den Ellipsenachsen, der sich aus der *Zweikreisconstruction* und zusätzlichen Überlegungen zur *Papierstreifenconstruction* herleiten läßt. Zur Begründung der Konstruktion werde von Haupt- und Neben-

achse der Ellipse ausgegangen. Ferner liegen der Hauptscheitelkreis  $k_1$  und der Nebenscheitelkreis  $k_2$  gezeichnet vor. Wie in 3.4. gezeigt wurde, kann die Ellipse  $k$  als perspektiv-affines Bild des Hauptscheitelkreises  $k_1$  angesehen werden, wobei die Hauptachse der Affinitätsachse entspricht. Nun werden zwei aufeinander senkrecht stehende, sonst beliebige Halbmesser  $OP_1$  und  $OQ_1$  in  $k_1$  eingezeichnet. Sie schneiden den Nebenscheitelkreis  $k_2$  in den Punkten  $P_2$  bzw.  $Q_2$ . Nach der Zweikreis konstruktion

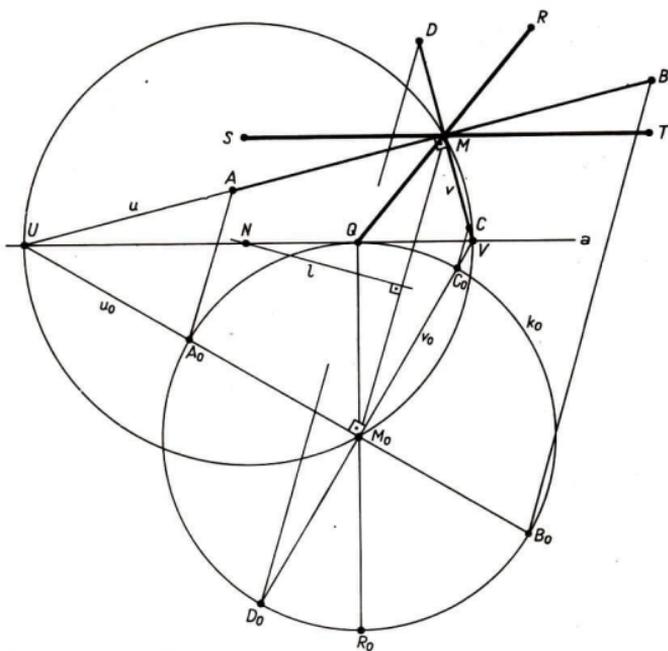


Abb. 96

können die entsprechenden Ellipsenpunkte  $P$  und  $Q$  exakt gefunden werden. Es ist festzuhalten, daß die Strecken  $OP$  und  $OQ$  nach Konstruktion ein konjugiertes Paar von Halbmessern der Ellipse darstellen. Dreht man nun den Radius  $OQ_1$  unter Mitführung des Dreiecks  $\triangle QQ_1Q_2$  mit  $O$  als Drehzentrum um den Winkel  $\varphi = 90^\circ$  bis zur Deckung mit  $OP_1$ , so bilden die beiden mit ihren Hypotenusen zusammengeführten Dreiecke  $\triangle PP_1P_2$  und  $\triangle QQ_1Q_2$  das Rechteck  $P_1PP_2Q^*$ . Die Diagonale  $PQ^*$  dieses Rechtecks schneidet Haupt- und Nebenachse der Ellipse in den Punkten  $U$  bzw.  $V$ . Nach der in 3.3. behandelten Papierstreifenkonstruktion gilt  $|UP| = b$  und  $|VP| = a$ , was den Längen der halben Neben- bzw. Hauptachse entspricht. Der um den Mittelpunkt  $S$  des Rechtecks  $P_1PP_2Q^*$  mit dem Radius  $\rho = \frac{a+b}{2}$

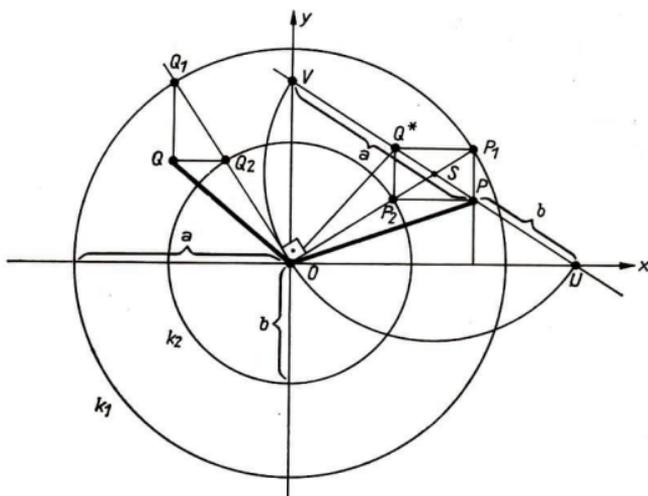


Abb. 97

gezeichnete Kreis geht nach Konstruktion durch die Endpunkte des Dreiecks  $\triangle OUV$ . Die Strecke  $UV$  ist Hypotenuse dieses rechtwinkligen Dreiecks (Abb. 97).

Jetzt werde das einen stumpfen Winkel einschließende Paar konjugierter Halbmesser  $OP$  und  $OQ$  von  $k$  als gegeben angenommen und dann die Konstruktion von Haupt- und Nebenachse rückwärts schließend aufgebaut. Zunächst dreht man  $OQ$  in dem Sinn durch einen Winkel  $\varphi = 90^\circ$ , daß die Radien  $OP$  und  $OQ^*$  einen spitzen

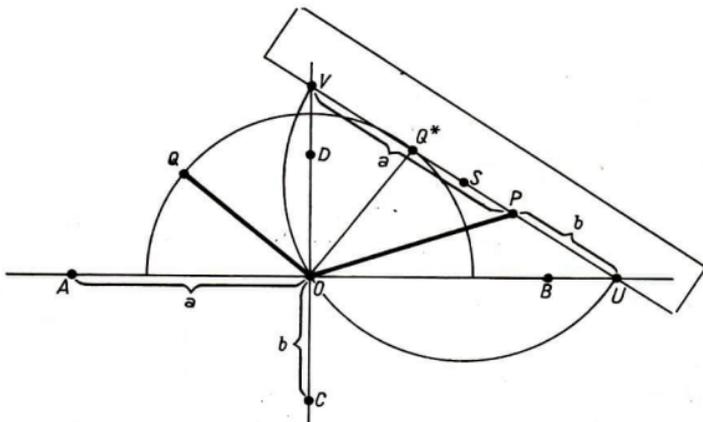


Abb. 98

Winkel miteinander einschließen. Dann ergibt die Verbindung  $PQ^*$  die Lage des Papierstreifens in der zu  $P$  gehörigen Stellung. Der Kreis um den Halbierungspunkt  $S$  der Strecke  $PQ^*$  mit dem Radius  $SO$  schneidet die Gerade  $PQ^*$  in den Punkten  $U$  und  $V$ . Durch Verbindung von  $O$  mit  $U$  und von  $O$  mit  $V$  findet man die Lage der Achsen. Mit  $|PU| = b$  und  $|PV| = a$  liefert diese Konstruktion auch die Längen der Halbachsen. In Zweifelsfällen bezüglich der Lage von Haupt- und Nebenachse vergegenwärtige man sich die bei kinematischer Ellipsenerzeugung auftretenden Grenzlagen des Papierstreifens. Dies sichert das richtige Abtragen der Längen  $a$  und  $b$  auf den Achsen. Die oben getroffene Annahme über den Schnittwinkel der konjugierten Halbmesser bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit (Abb. 98).

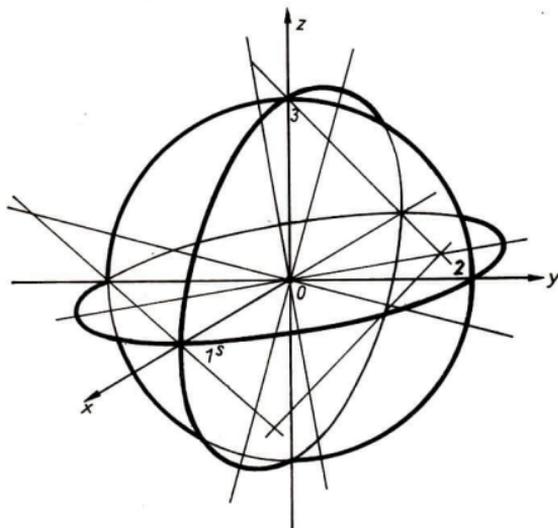


Abb. 99

Die praktische Bedeutung der hier abgeleiteten *Rytzschen Achsenkonstruktion* soll an der Lösung von zwei Aufgaben verdeutlicht werden.

**Aufgabe 1.** Gegeben sei das Schrägbild eines kartesischen Achsenkreuzes mit den auf diesen Achsen liegenden Einheitsstrecken  $e = |O1| = |O2| = |O3|$ . Gesucht sind die Schrägbilder der drei in den Koordinatenebenen liegenden Einheitskreise mit dem gemeinsamen Mittelpunkt im Ursprung  $O$ .

**Lösung.** Das Schrägbild des in der  $y, z$ -Ebene liegenden Einheitskreises ist wegen der frontalen Lage dieser Ebene der Kreis mit  $O$  als Mittelpunkt und der Streckeneinheit  $e$  als Radius. Dagegen sind die Bilder der in der  $x, y$ -Ebene und  $x, z$ -Ebene liegenden Einheitskreise Ellipsen. Zum Beispiel sind die Strecken  $O1^*$  und  $O2^*$  konjugierte Halbmesser der Bildellipse des horizontal liegenden Kreises. Die Rytzsche

Konstruktion führt also hier auf Haupt- und Nebenachse der Bildellipse. Entsprechend verhält es sich mit dem Bild des in der  $x, z$ -Ebene liegenden Einheitskreises (Abb. 99).

**Aufgabe 2.** Gegeben ist der Grundriß eines im ersten Raumquadranten liegenden Quadrates  $PQRS$ . Der Eckpunkt  $P$  liegt in der Grundrißtafel. Gesucht sind der Aufriß und die wahre Gestalt (Seitenlänge) des Quadrates.

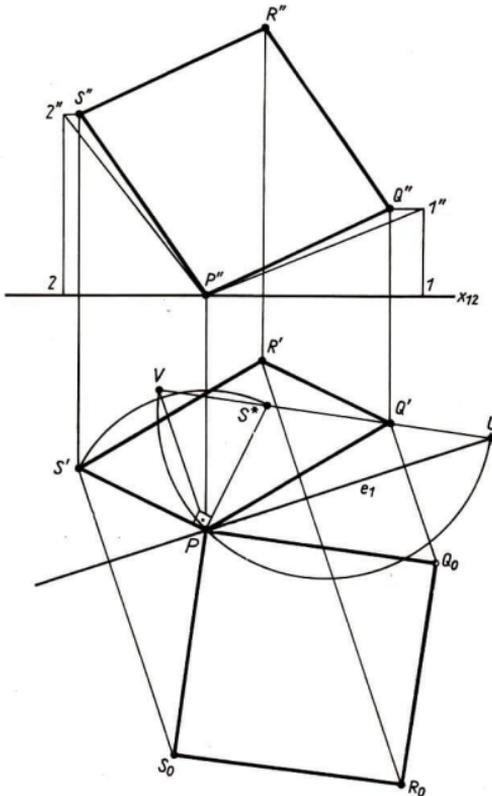


Abb. 100

**Lösung.**  $PS'$  und  $PQ'$  können nach der Aufgabenstellung als konjugierte Halbmesser einer Ellipse aufgefaßt werden. Hierbei hilft die Vorstellung, daß in die von dem Quadrat aufgespannte Ebene ein Kreis  $k$  mit  $P$  als Mittelpunkt und der Länge der Quadratseite als Radius eingezeichnet ist. Die Hauptachse liefert die Rytz'sche Konstruktion. Die erste Spur  $e_1$  der von dem Quadrat aufgespannten Ebene geht

durch  $P$  und fällt mit der Hauptachse von  $k'$  zusammen, da sich genau jener Durchmesser von  $k$  auf  $\pi_1$  in wahrer Länge abbildet, der parallel zu  $\pi_1$  liegt. Die Länge der halben Hauptachse von  $k'$  ist damit gleich der Länge der Quadratseiten. Um den Aufriß des Quadrates zu erhalten, wendet man nun die Methode des Paralleldrehens in etwas abgewandelter Form an. Man trägt die Strecken  $PQ'$  und  $PS'$  von  $P''$  aus auf der Rißachse nach rechts und links ab und erhält die Punkte 1 bzw. 2. Durch diese Punkte legt man Ordnungslinien lotrecht zur Rißachse. Sie schneiden den Kreis mit dem Radius  $a = |VQ'|$  um  $P''$  in den Punkten  $1''$  und  $2''$ . Die Parallelen zur Rißachse durch diese Punkte schneiden die Ordnungslinien durch  $Q'$  und  $S'$  in den Punkten  $Q''$  und  $S''$ . Die geeignete Ergänzung der Aufrisse von  $P$ ,  $Q$  und  $S$  zu einem Parallelogramm liefert auch den Aufriß von  $R$ . Da die wahre Länge der Quadratseiten bekannt ist, bietet die Umlegung des Quadrates in die Grundrißtafel keine weiteren Schwierigkeiten (Abb. 100).

### 3.6. Die Ellipse als schiefer Schnitt eines Drehzylinders

Für die folgenden Überlegungen werde von einer Kugel  $\kappa$  ausgegangen, die auf der Grundrißtafel  $\pi_1$  liegt. Grund- und Aufriß dieser Kugel stellen je einen Kreis dar. Der Aufriß von  $\kappa$  berührt die Rißachse im zweiten Bild des Berührungspunktes  $F$  von  $\kappa$  mit  $\pi_1$ . Ferner ist  $F$  der Mittelpunkt des Grundrisses von  $\kappa$ . Die Kugel werde von einem Bündel parallel einfallender Strahlen beleuchtet. Die Einfallsrichtung  $s$  dieses Strahlbündels liege parallel zur Aufrißtafel.

Es wird nach der Begrenzungslinie des in  $\pi_1$  erzeugten *Schlagschattens* der Kugel gefragt. Diese Begrenzungslinie ist sicher symmetrisch bezüglich der zu  $\pi_2$  parallelen Ebene  $\gamma$  durch den Punkt  $F$ . Ferner ist aus Gründen der Symmetrie die auf der Kugel liegende *Eigenschattengrenze* ein Großkreis  $k$  von  $\kappa$ , wobei die Ebene  $\varepsilon$  des Großkreises senkrecht auf den einfallenden Lichtstrahlen steht. Die Schlagschattengrenze von  $\kappa$  in  $\pi_1$  ist demnach gleich dem Schlagschatten des Kreises  $k$ . Damit ist die Schlagschattengrenze von  $\kappa$  das perspektiv-affine Bild von  $k$ , also eine Ellipse. Da ferner die Gesamtheit der  $\kappa$  berührenden Strahlen eine Drehzylinderfläche bildet, gilt der Satz:

Der schiefe Schnitt einer Drehzylinderfläche ergibt eine Ellipse. Die waagerechte Gerade  $\gamma'$  durch  $F$  ist wegen der bestehenden Symmetrie eine Achse der Ellipse. Die zugehörigen Scheitelpunkte sind die Schatten des höchsten und tiefsten Punktes von  $k$ . Der Abstand der Punkte  $A$ ,  $B$  ist größer als der Durchmesser von  $k$ . Folglich sind  $A$  und  $B$  die Hauptscheitel der Ellipse. Das Mittellot von  $AB$  bildet die Nebenachse. Auf dieser liegen die Schatten des vordersten und hinterster Punktes von  $k$ . Es sind die Nebenscheitel  $C$  und  $D$ . Die Länge der Nebenachse ist gleich dem Durchmesser der Kugel.

Mit diesen Angaben kann nun die Schlagschattengrenze punktweise exakt vervollständigt werden. Zur Abrundung des Bildes stehen weiterhin die Scheitelkrümmungskreise nach 3.2. zur Verfügung (Abb. 101).

Im folgenden sollen die geometrischen Besonderheiten der Lage des Punktes  $F$  bezüglich der gefundenen Ellipse untersucht werden. Die den Kreis  $k$  enthaltende Ebene  $\varepsilon$  hat die Spuren  $e_1 \perp x_{12}$  und  $e_2 = \varepsilon''$ . Jetzt werde auf  $k$  ein Punkt  $P_k$  allgemeiner Lage angenommen und dessen Schlagschatten  $P$  konstruiert. Der Aufriß  $P''$  von  $P$  ergibt sich als Schnitt des Strahles durch  $P_k''$  mit der Rißachse. Der Grundriß liegt in  $\pi_1$  auf einem Ordner durch  $P''$ . Der Abstand  $d$  des Punktes  $P_k$  von der

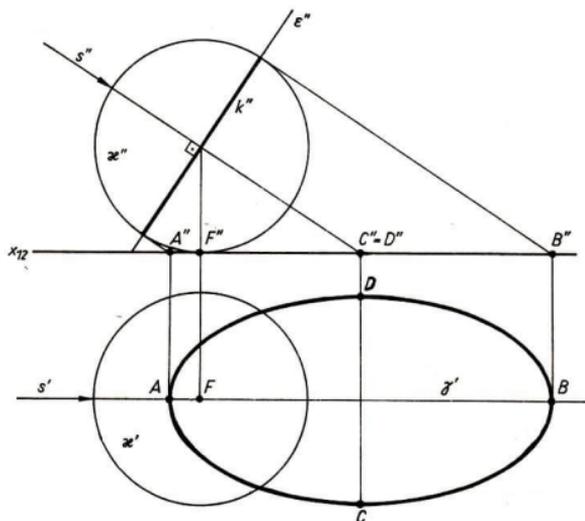


Abb. 101

Hilfsebene  $\gamma$  wird nach der in Abb. 102 angegebenen Weise unmittelbar dem Aufriß entnommen, da der Aufriß von  $\kappa$  auch als das Bild der Umlegung von  $k$  in die Hilfsebene  $\gamma$  angesehen werden kann. Trägt man diesen Abstand  $d$  auf der Ordnungslinie durch  $P''$  von ihrem Schnittpunkt mit der Symmetrielinie  $\gamma'$  nach oben und unten ab, so erhält man zwei Bildpunkte. Von diesen soll zunächst nur dem Punkt  $P$  das weitere Interesse gelten.

Das von  $P$  auf  $e_1$  gefällte Lot ergibt die Strecke  $PL$  der Länge  $l$ . Durch Verbinden von  $P$  mit  $F$  erhält man die Strecke  $PF$  der Länge  $r$ . Es gilt die Behauptung:

Es ist  $\frac{r}{l} = \sin \alpha$  für jeden auf  $k$  liegenden Punkt  $P_k$ . Dabei ist  $\alpha$  der erste Neigungswinkel von  $\varepsilon$  gegen  $\pi_1$ .



Mit diesen Begriffen läßt sich die Definition der Ellipse wie folgt fassen: Die *Ellipse* ist der geometrische Ort der Punkte  $P$ , für die das Abstandsverhältnis von einem festen Punkt  $F$ , dem *Brennpunkt*, und einer festen Geraden  $e$ , der *Leitlinie* (mit  $F \notin e$ ), gleich der konstanten Zahl  $\varepsilon$  mit  $0 < \varepsilon < 1$  ist.

Diese planimetrische Definition erlaubt in Verbindung mit den oben eingeführten Begriffen eine übersichtliche Ableitung der *Polarkoordinatendarstellung* der Ellipse (Abb. 103). Die Ellipse habe im Brennpunkt  $F$  die Ordinaten  $\pm p$ . Für den Abstand des Brennpunktes von der Leitgeraden werde  $|HF| = q$  gesetzt. Dann gilt nach Definition  $p = \varepsilon \cdot q$  und  $\varepsilon(r \cos \varphi + q) = r$  für einen beliebigen Ellipsenpunkt  $(r, \varphi)$ . Durch Auflösung nach  $r$  ergibt sich die Darstellung

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \quad \text{mit } 0 < \varepsilon < 1.$$

Es wird sich zeigen, daß durch eine solche Polarkoordinatendarstellung auch die Parabel und Hyperbel analytisch beschrieben werden können.

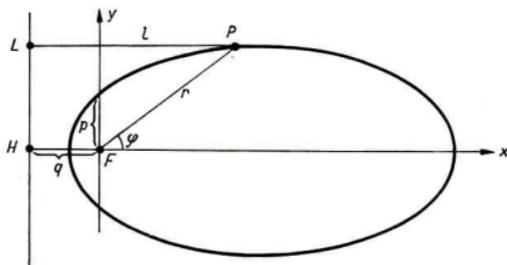


Abb. 103

Wegen der Symmetrie der Ellipse bezüglich der Nebenachse liegt es nahe, den ganzen Vorgang an dieser Symmetrielinie zu spiegeln. Dies führt zu einem zweiten auf der Hauptachse liegenden Brennpunkt und einer entsprechenden zweiten Leitgeraden. Um diese beiden Brennpunkte künftig auseinanderzuhalten, werden sie mit  $F_1$  und  $F_2$  bezeichnet. Für die weiteren Überlegungen werden die räumlichen Hilfsmittel in der Weise ergänzt, daß man eine zweite Kugel von gleichem Radius in den Berührungstrahlzylinder  $\Phi$  bringt, die  $\pi_1$  in  $F_2$  von unten berührt. Dann haben die Kugeln  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  mit dem Strahlzylinder  $\Phi$  die Berührungskreise  $k_1$  bzw.  $k_2$  gemeinsam. Jetzt werde ein beide Kugeln berührender sogenannter *streifender* Lichtstrahl  $s$  betrachtet. Dieser schneidet  $k_1$  in  $P_1$ ,  $k_2$  in  $P_2$  und die horizontale Bildebene  $\pi_1$  in dem Ellipsenpunkt  $P$ . Die Distanz  $|P_1P_2|$  ist unabhängig von der Wahl des streifenden Lichtstrahles  $s$ . Es werde  $|P_1P_2| = 2a$  gesetzt. Ferner gilt nach den bereits oben für Tangenten aus einem Punkt an eine Kugel angestellten Überlegungen

$$|PF_1| = |PP_1| \quad \text{und} \quad |PF_2| = |PP_2|.$$

Wegen  $|P_1P_2| = |P_1P| + |PP_2| = 2a$  gilt auch

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

(Abb. 104). Daraus resultiert eine planimetrische Definition der Ellipse, die vorzugsweise in Lehrbüchern der analytischen Geometrie als Ausgang zur Ableitung der Ellipsengleichung verwendet wird.

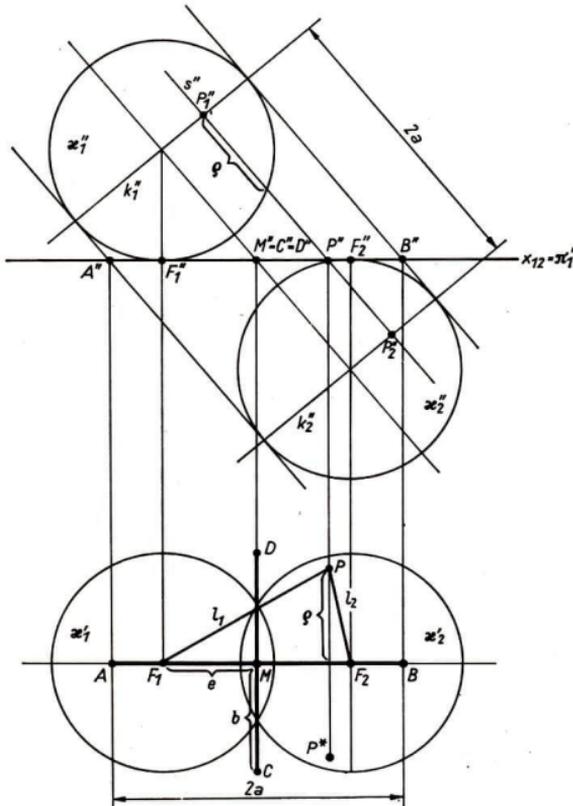


Abb. 104

**Definition.** Die *Ellipse* ist der geometrische Ort jener Punkte der Ebene  $\pi$ , die von zwei festen Punkten  $F_1$  und  $F_2 \in \pi$ , den *Brennpunkten*, eine konstante Abstandssumme haben. Diese Abstandssumme ist gleich der *Länge der Hauptachse* der Ellipse.

Aus dieser Definition läßt sich die *Gärtnerkonstruktion* der Ellipse leicht herleiten. In der Praxis werden zwei Pflöcke in die Erde geschlagen, um die eine geschlossene

Schnur lose gelegt wird. Führt man nun ein Pflanzholz derart mit der Spitze auf dem Boden entlang, daß die Schnur in jeder Stellung ein Dreieck aufspannt, dessen Eckpunkte in den festen Pflöcken und dem beweglichen Pflanzholz liegen, so beschreibt die Spitze des beweglichen Holzes auf dem Boden eine Ellipse von zweckentsprechender Genauigkeit. Aus dieser Konstruktion läßt sich eine für die Ellipse grundlegende Größenbeziehung ablesen. Zunächst bezeichnet man den Abstand eines Brennpunktes  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ) vom Mittelpunkt der Ellipse als *lineare Exzentrizität*  $e$ . Kommt bei Ausführung der Gärtnerkonstruktion der laufende Punkt  $P$  mit einem Hauptscheitel zur Deckung, so ist aus der Figur abzulesen, daß sich der Umfang  $u$  der geschlossenen Schnur durch  $u = 2a + 2e$  ausdrücken läßt. Kommt der laufende Punkt mit dem Nebenscheitel zur Deckung, so bildet die Schnur ein gleichschenkliges Dreieck mit der Strecke  $F_1F_2$  als Basis. Die Nebenachse teilt es in zwei rechtwinklige

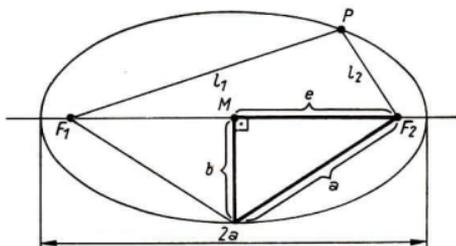


Abb. 105

Dreiecke. In einem solchen Dreieck sind  $b$  und  $e$  die Längen der Katheten, während  $a$  gleich der Länge der Hypotenuse ist. Folglich gilt bei der Ellipse die Gleichung

$$a^2 = b^2 + e^2.$$

Das Quadrat der linearen Exzentrizität  $e$  ist also gleich der Differenz der Quadrate von halber Haupt- und Nebenachse der Ellipse (Abb. 105).

### 3.7. Fokaleigenschaft der Ellipse

Die Bezeichnung der Punkte  $F_1$  und  $F_2$  als Brennpunkte der Ellipse ist auch physikalisch gerechtfertigt. Der Nachweis der Brennpunkteigenschaft von  $F_1$  und  $F_2$  soll in der folgenden Untersuchung geführt werden. Zunächst werde  $|PF_i| = l_i$  ( $i = 1, 2$ ) gesetzt. Weiterhin soll auf dem Strahl  $PF_1$  von  $P$  aus die Strecke  $l_2$  derart abgetragen werden, daß sich ein außerhalb der Ellipse liegender Punkt  $G$  ergibt. Durchläuft nun  $P$  die Ellipse, dann beschreibt  $G$  einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $F_1$  und dem Radius

$r = l_1 + l_2 = 2a$ . Dieser Kreis wird ein *Leitkreis* der Ellipse genannt. Aus Abb. 106 ist gemäß der in 3.6. gegebenen Ellipsendefinition folgender Satz abzulesen:

Die Mittelpunkte  $P$  aller Kreise  $k$ , die einen Kreis  $k_0$  berühren und durch einen innerhalb  $k_0$  liegenden Punkt  $F_2$  gehen, liegen auf einer Ellipse, von der  $k_0$  ein Leitkreis und  $F_2$  ein Brennpunkt ist. Der Mittelpunkt  $F_1$  von  $k_0$  ist der andere Brennpunkt der Ellipse.

Der Beweis der Fokaleigenschaft wird über die Tangentenkonstruktion geführt. Es gilt die Behauptung:

Das Lot  $t$  von  $P$  auf die Verbindungsgerade  $n = n(GF_2)$  ist die Tangente an die Ellipse durch  $P$  (Abb. 106).

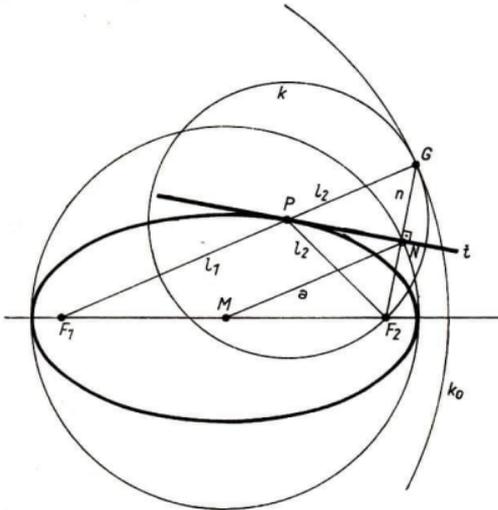


Abb. 106

Der Beweis wird *indirekt* geführt. Man geht von der Annahme aus, daß die durch  $P$  gelegte Gerade  $t$  *nicht* Tangente der Ellipse ist. Dann gibt es auf  $t$  einen von  $P$  verschiedenen Ellipsenpunkt  $Q$ . Für jeden solchen von  $P$  verschiedenen Punkt  $Q$  auf  $t$  müssen folgende Gleichungen bzw. Ungleichungen erfüllt sein:

1. Nach Definition der Ellipse gilt

$$|PF_1| + |PF_2| = |QF_1| + |QF_2| = 2a. \quad (1)$$

2. Nach Konstruktion gilt

$$|PF_2| = |PG|, \quad |QF_2| = |QG|, \quad |PF_1| + |PG| = |GF_1| = 2a.$$

3. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$|QF_1| + |QG| > |GF_1|, \text{ also } |QF_1| + |QF_2| > 2a \quad (2)$$

(Abb. 107).

Die aus der Ellipsendefinition gefolgte Gleichung (1) steht im Widerspruch zu der aus Konstruktion und Dreiecksungleichung gefolgerten Ungleichung (2). Die Annahme eines von  $P$  verschiedenen Ellipsenpunktes  $Q$  auf  $t$  führt zu einem Widerspruch. Somit ist die getroffene Annahme falsch und die Behauptung, daß  $t$  die Tangente der Ellipse in  $P$  ist, wahr.

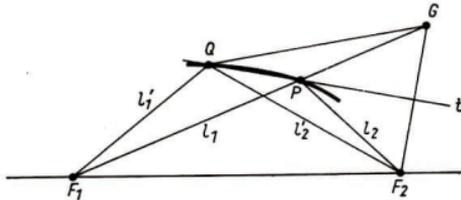


Abb. 107

Für den Beweis der Fokaleigenschaft ist festzuhalten, daß die Ellipsentangente  $t$  in  $P$  den Außenwinkel der zu  $P$  gehörigen Leitstrahlen halbiert. Damit ist gezeigt, daß ein von  $F_2$  ausgehendes Bündel von Strahlen nach Reflexion an der Kurve gemäß dem Spiegelungsgesetz in  $F_1$  wieder zusammentrifft und umgekehrt (Abb.108).

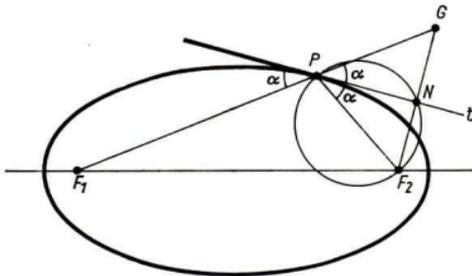


Abb. 108

Im folgenden sollen an Abb. 106 die zur Tangentenkonstruktion wesentlichen Elemente herausgestellt werden. Zunächst ist zu vermerken, daß der Halbierungspunkt  $N$  der Strecke  $GF_2$  zugleich Fußpunkt des Lotes von  $P$  auf  $n = n(GF_2)$  ist. Also gilt  $N \in t$ . Ferner ist der Halbierungspunkt  $M$  der Strecke  $F_1F_2$  Mittelpunkt der Ellipse. Nach dem Strahlensatz gilt  $MN \parallel F_1G$  und  $|MN| = a$ . Durchläuft  $P$  die Ellipse, so beschreibt  $N$  den zugehörigen *Hauptscheitelkreis*. Außerdem ist das Dreieck  $\triangle PNF_2$  rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei  $N$ . Sollen also von einem außerhalb der Ellipse liegenden Punkt  $Q$  die Tangenten gelegt werden, so verbindet man  $Q$  mit einem der Ellipsenbrennpunkte und schlägt über dieser Strecke als Durchmesser einen Kreis. Dieser schneidet den Hauptscheitelkreis in zwei Punkten  $N_1$  und  $N_2$ . Die Verbindungsgeraden  $t_1(QN_1)$  und  $t_2(QN_2)$  sind die gesuchten Tangenten

aus  $Q$  an die Ellipse. Im Prinzip ist es gleichgültig, welcher der beiden Brennpunkte zur Konstruktion herangezogen wird (vgl. Abb. 109).

**Aufgabe 1.** Gegeben seien eine Ellipse durch ihre Hauptachse mit den darauf liegenden Brennpunkten und ein außerhalb der Ellipse liegender Punkt  $T$ . Aus  $T$  sind die Tangenten an die Ellipse zu legen, ohne dabei von einer perspektiv-affinen Transformation Gebrauch zu machen. Auch die Berührungspunkte sind exakt zu konstruieren.

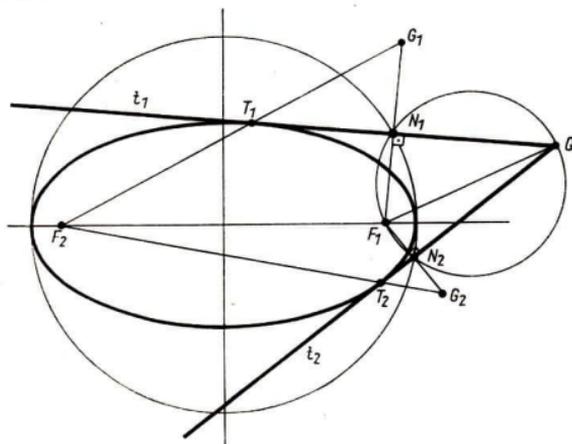


Abb. 109

**Lösung.** Man zeichne den Hauptscheitelkreis  $k_1$  und einen zweiten Kreis  $k_2$ , der die Strecke  $TF_2$  als Durchmesser besitzt. Die Schnittpunkte  $N_1$  und  $N_2$  der Kreise  $k_1$  und  $k_2$  sind nach obigen Überlegungen Punkte der gesuchten Tangenten. Also gilt  $t_1 = t_1(TN_1)$  und  $t_2 = t_2(TN_2)$ . Die Berührungspunkte  $T_1$  und  $T_2$  erhält man, indem zunächst  $F_1$  an  $t_1$ , dann  $F_2$  an  $t_2$  gespiegelt werden. So ergeben sich die Gegenpunkte  $G_1$  bzw.  $G_2$ . Die Verbindungsgerade  $F_2G_1$  schneidet  $t_1$  in  $T_1$ . Entsprechend findet man den Berührungspunkt  $T_2$  von  $t_2$  (Abb. 110).

**Aufgabe 2.** Gegeben seien Haupt- und Nebenachse einer Ellipse und eine Gerade  $g$ . Es sollen die zu  $g$  parallelen Tangenten an die Ellipse unter Ausschluß von affinen Hilfsmitteln konstruiert werden.

**Lösung.** Ein Kreis um einen Nebenscheitel mit der Länge der halben Hauptachse als Radius schneidet die Hauptachse in den Brennpunkten  $F_1$  und  $F_2$ . Ferner ist der Hauptscheitelkreis zu zeichnen. Dieser schneidet das Lot von  $F_1$  auf  $g$  in den Punkten  $L_1$  und  $N_1$  und das Lot von  $F_2$  auf  $g$  in den Punkten  $L_2$  und  $N_2$ . Dabei liegen die Punkte  $L_i$  oberhalb und die Punkte  $N_i$  unterhalb der Hauptachse. Die gesuchten Tangenten  $t$  und  $\bar{t}$  ergeben sich als Verbindungsgeraden entsprechender Punkte, also  $t = t(L_1L_2)$  und  $\bar{t} = \bar{t}(N_1N_2)$ . Auch die Berührungspunkte der Tangenten mit der

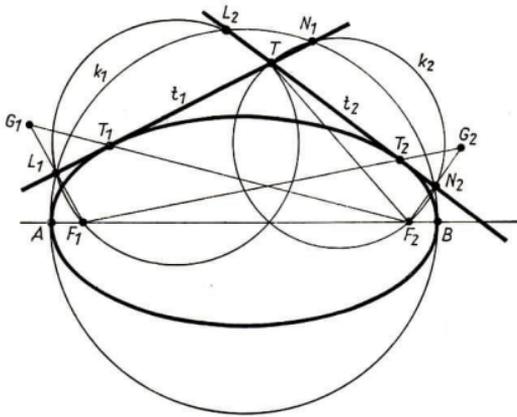


Abb. 110

Ellipse lassen sich exakt konstruieren. Hierzu sucht man die zu  $F_1$  bezüglich  $t$  und  $\bar{t}$  gehörigen Gegenpunkte  $G_1$  und  $\bar{G}_1$  auf und verbindet sie mit  $F_2$ . Im Schnittpunkt von  $t$  mit der Verbindungslinie  $F_2G_1$  liegt der Berührungspunkt  $T$  von  $t$ . Entsprechend findet man  $\bar{T}$  (Abb. 111).

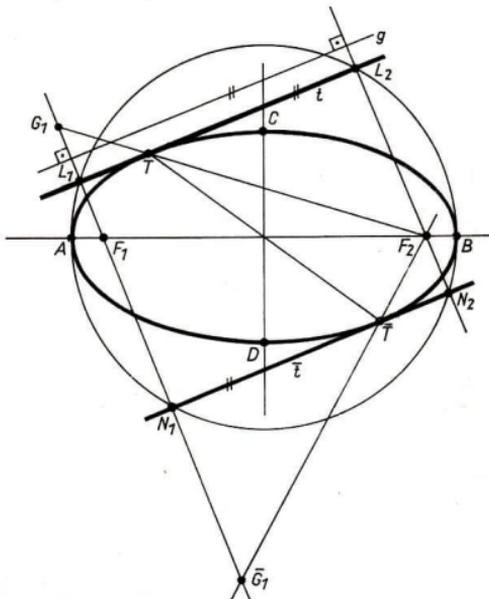


Abb. 111

### 3.8. Darstellung von Drehkörpern und konstruktive Auswertung

Zur Darstellung von Drehkörpern allgemeiner Lage ist die Vertrautheit mit den metrischen Besonderheiten der Ellipse eine wichtige Voraussetzung, denn Ellipsen treten als Normalprojektionen von Kreisen unter Vorgabe verschiedener Bestimmungstücke in Erscheinung. Die mit der bildlichen Wiedergabe von Drehkörpern verbundenen Probleme sollen an Beispielen demonstriert werden.

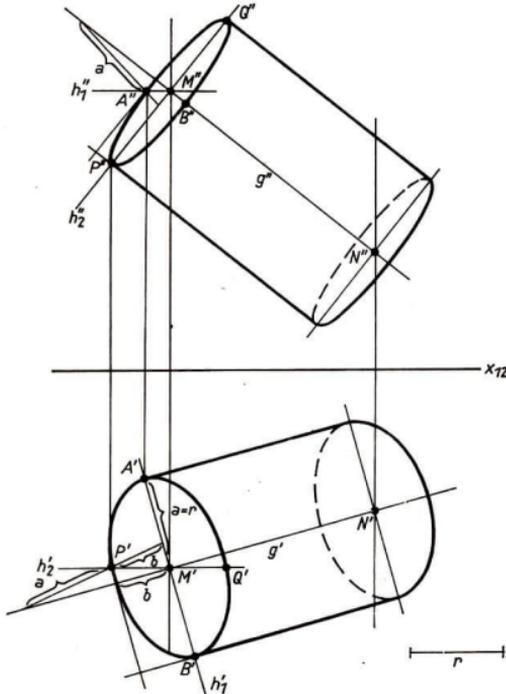


Abb. 112

**Aufgabe 1.** Gegeben seien Grund- und Aufriß der Achse  $g = g(MN)$  eines Drehzylinders  $\Phi$  von allgemeiner Lage sowie der Radius von Deck- und Basiskreis. Gesucht sind Grund- und Aufriß dieses Zylinders.

**Bemerkung.** Unter „allgemeiner Lage“ einer Geraden ist auch hier und in den folgenden Aufgaben zu verstehen, daß die Gerade weder zur Grund- noch zur Auf- noch zur Kreuzrißtafel parallel liegt (Abb. 112).

**Lösung.** Deck- und Basiskreis des Drehzylinders bilden sich unter den gegebenen Voraussetzungen als Ellipsen ab. Die von den Kreisen bestimmten Ebenen  $\mu$  und  $\nu$

stehen lotrecht auf der Achse  $g(MN)$ . Man erfaßt diese Ebenen zweckmäßig durch die sich in  $M$  und  $N$  schneidenden Hauptlinien, also  $\mu = \mu(h_1 h_2)$  bzw.  $\nu = \nu(k_1 k_2)$ . Es gilt  $h_1' \perp g'$  und  $h_2'' \perp g''$  sowie  $h_1'' \parallel h_2' \parallel x_{12}$ . Der auf  $h_1$  liegende Kreisdurchmesser bildet sich in  $\pi_1$  und der auf  $h_2$  liegende in  $\pi_2$  in wahrer Länge ab. Damit hat man die Hauptachsen  $A'B'$  bzw.  $P'Q'$  der Bildellipsen des Deckkreises in beiden Rissen. Wenn die Hauptachse einer Ellipse vorliegt, so verhilft ein weiterer Ellipsen-

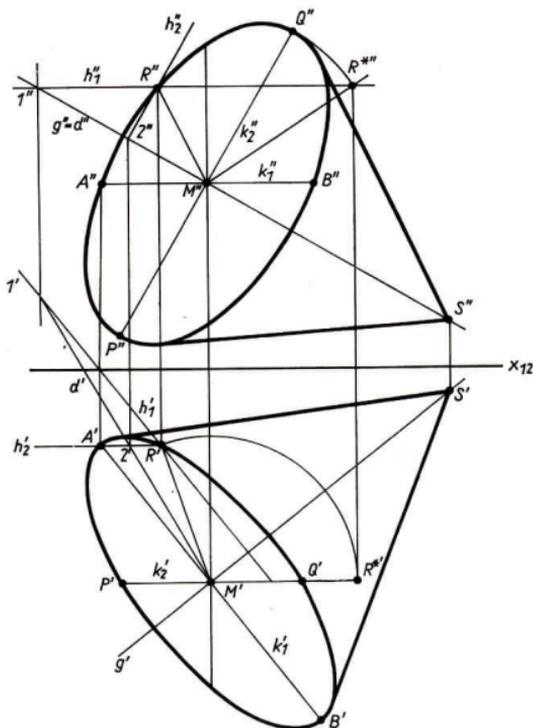


Abb. 113

punkt unter Einsatz der Papierstreifenkonstruktion zur Nebenachse. Für das erste Bild des Deckkreises erhält man zusätzliche Ellipsenpunkte, indem man  $P''$  und  $Q''$  in den Grundriß führt. Das ergibt  $P'$  und  $Q'$  auf  $h_2'$ . Nun ist die Papierstreifenkonstruktion im Grundriß anwendbar. Entsprechend gewinnt man die Aufrisse von  $A$  und  $B$ , wodurch auch in diesem Bild die Konstruktion der Nebenachse möglich wird. Die Nebenachsen der Ellipsen decken sich in jedem Normalriß mit dem Bild der Zylinderachse. Die Bilder von Deck- und Basiskreis ergeben in jedem Riß kongruente Ellipsen. Die zu den Bildern der Achse parallelen Tangentenpaare sind die Bilder der

äußeren Mantellinien in dem betreffenden Riß. Die äußeren Mantellinien berühren die Bilder von Deck- und Basiskreis in ihren Nebenscheiteln. Zur Hebung der Anschaulichkeit beider Bilder empfiehlt es sich, die verdeckten Anteile der Bildellipsen gestrichelt zu zeichnen.

**Aufgabe 2.** Gegeben seien Grund- und Aufriß der Achse  $g$  eines Drehkegels allgemeiner Lage, die Kegelspitze  $S \in g$  sowie ein Punkt  $R$  auf der Peripherie des Basiskreises. Gesucht sind Grund- und Aufriß dieses Drehkegels.

**Lösung.** Der Basiskreis des Drehkegels bildet sich in beiden Rissen als Ellipse ab. Um zunächst den Mittelpunkt des Basiskreises zu finden, ist durch  $R$  die Ebene  $\gamma \perp g$  zu legen. Sie werde durch die beiden sich in  $R$  schneidenden Hauptlinien  $h_1$  und  $h_2$  beschrieben. Dabei gilt  $h_1' \perp g'$ ,  $h_2'' \perp g''$  und  $h_1' \parallel h_2'' \parallel x_{12}$ . Durch Konstruktion mittels einer Deckgeraden findet man den Schnittpunkt  $M = M(g\gamma)$ . Ferner wird nach der Methode des Paralleldrehens die wahre Länge  $a$  von  $MR$  ermittelt. Damit hat man die Länge der halben Hauptachse für beide Bildellipsen gefunden. Nun legt man noch durch  $M'$  eine Hilfslinie  $k_1' \parallel h_1'$  und durch  $M''$  eine Hilfslinie  $k_2'' \parallel h_2''$ . Weiterhin ist die Strecke  $a$  von  $M'$  auf  $k_1'$  und von  $M''$  auf  $k_2''$  nach beiden Seiten abzutragen. Dadurch erhält man die Hauptscheitel  $A'$ ,  $B'$  bzw.  $P''$ ,  $Q''$  der beiden Bildellipsen. Da für Grund- und Aufriß außer den Hauptscheiteln noch je ein Ellipsenpunkt  $P'$  bzw.  $A''$  zur Verfügung steht, kann zu beiden Bildern durch Einsatz der Papierstreifenkonstruktion die Nebenachse gewonnen werden (Abb. 113).

Nach Vorliegen der beiden Risse des Basiskreises sind im Grundriß aus  $S'$  und im Aufriß aus  $S''$  die Tangenten an die entsprechenden Bildellipsen zu legen. Es ist zu beachten, daß die Verbindungsgeraden der Hauptscheitel mit dem zugehörigen Bild der Kegelspitze nicht zum scheinbaren Umriß des Kegels gehören, sondern in dessen Innerem liegen. Zur Tangentenkonstruktion stehen zwei Verfahren zur Verfügung. Mit Hilfe der perspektiven Affinität ist die Konstruktion auf ein Berührungsproblem am Kreis zurückführbar. Einfacher ist die in 3.7. abgeleitete Konstruktion mit Hilfe von Hauptscheitelkreis, Brennpunkt und Thales-Kreis. Zur Förderung der Anschaulichkeit ist der gegebenenfalls verdeckt liegende Teil des Basiskreises in dem betreffenden Bild als gestrichelte Linie auszuführen.

**Aufgabe 3.** Gegeben seien eine Kugel  $\kappa$  durch ihre Normalrisse sowie eine Ebene  $\varepsilon$  durch ihre Spuren  $e_1$  und  $e_2$ . Gesucht sind die Bilder der Schnittkurve  $k = k(\kappa\varepsilon)$  sowie die Spuren einer zu  $\varepsilon$  parallelen Tangentialebene  $\tau$  an  $\kappa$ .

**Lösung.** Die Aufgabe soll mittels eines Seitenrisses gelöst werden. Dieser Seitenriß wird an den Grundriß derart angeschlossen, daß die Ebene  $\varepsilon$  projizierend erscheint. Für die neu einzuführende Rißachse  $x_{13}$  gilt daher  $x_{13} \perp e_1$ . Beim Übertragen der Kugel in diesem Riß ist nach der in 2.7., S. 71, abgeleiteten Regel zu verfahren: „Tafelabstände des wegfallenden Risses (Aufriß) von der neuen Rißachse aus auf der zugehörigen Ordnungslinie nach dem neuen Riß abtragen“ (Abb. 114).

Entsprechend erhält man auch die dritte Spur  $e_3 = \varepsilon'''$  von  $\varepsilon$ . Dem Seitenriß kann man den Radius  $a$  des Schnittkreises  $k$  sowie die Lage seines Mittelpunktes  $M$  (ersten Tafelabstand) entnehmen. Man führt  $M$ , von  $M'''$  ausgehend, in den Grundriß

und anschließend in den Aufriß und legt weiter durch  $M'$  das Bild  $h_1'$  der ersten und durch  $M''$  das Bild  $h_2''$  der zweiten Spurparallelen. Weiterhin trägt man die Strecke der Länge  $a$  von  $M'$  auf  $h_1'$  und von  $M''$  auf  $h_2''$  nach beiden Seiten ab. Das ergibt die Hauptscheitel  $A'$  und  $B'$  von  $k'$  sowie  $P''$  und  $Q''$  von  $k''$ . Ferner kann dem Seitenriß die Lage des höchsten und des tiefsten Punktes  $C$  bzw.  $D$  von  $k$  entnommen werden.

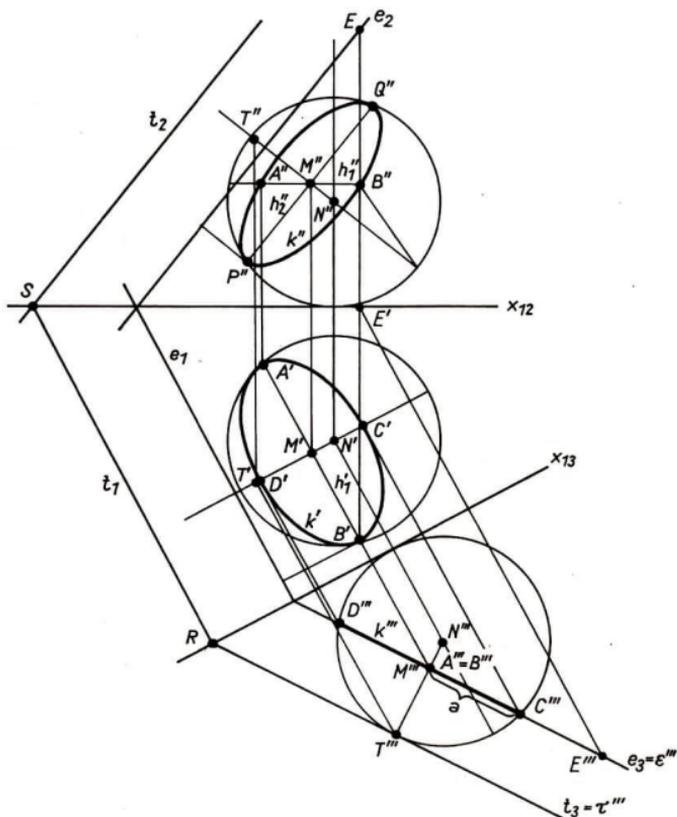


Abb. 114

Die Punkte liegen auf der Falllinie von  $\varepsilon$  durch  $M$ . Ihre Übertragung in den Grundriß liefert die Nebenscheitel  $C'$  und  $D'$  von  $k'$ . Damit stehen Haupt- und Nebenachse zur Konstruktion von  $k'$  zur Verfügung. Nun führt man die Hauptscheitel  $A'$  und  $B'$  von  $k'$  in den Aufriß. Von  $k''$  sind jetzt außer der Hauptachse noch ein zweiter Ellipsendurchmesser bekannt. Hier hilft die Papierstreifenkonstruktion weiter, um Nebenachse und Nebenscheitel zu gewinnen.

Zur Konstruktion der Tangentialebene  $\tau \parallel \varepsilon$  wird gleichfalls vom Seitenriß ausgegangen. Die Tangente  $t_3 \parallel e_3$  an den Seitenriß von  $\kappa$  ist identisch mit dem Seitenriß dieser projizierenden Tangentialebene  $\tau$ . Die Gerade  $t_1 \parallel e_1$  durch den Schnittpunkt  $R = R(t_3x_{13})$  ist gleich der ersten Spur von  $\tau$ . Entsprechend ist  $t_2 \parallel e_2$  durch  $S = S(t_1x_{12})$  die zweite Spur von  $\tau$ . Der Berührungspunkt  $T$  von  $\tau$  mit  $\kappa$  kann gleichfalls dem Seitenriß entnommen und mit Hilfe von Ordnungslinien in Grund- und Aufriß übertragen werden.

Gewisse planimetrische Aufgabenstellungen lassen sich räumlich interpretieren und dann mit Hilfe von zugeordneten Normalrissen lösen. Dieser Vorgang soll an einem Beispiel demonstriert werden.

**Aufgabe 4.** Gegeben seien ein Rechteck und ein im Inneren dieses Rechtecks liegender Punkt  $P$ . Gesucht ist eine Ellipse, die diese Rechteckseiten berührt und außerdem durch den Punkt  $P$  geht.

**Bemerkung.** In 3.1. wurde festgestellt, daß ein Kegelschnitt durch Vorgabe von fünf Bestimmungsstücken in der Ebene festgelegt ist. Dies kann z. B. durch fünf Punkte oder auch durch fünf Tangenten erfolgen. Eine Tangente samt Berührungspunkt ist zwei Bestimmungsstücken gleichzusetzen. Die Brennpunkte für einen Kegelschnitt sind äquivalent mit vier Bestimmungsstücken. Beispielsweise wird durch die Vorgabe eines Scheitelpunktes mit zugehörigem Krümmungsmittelpunkt ein Büschel oskulierender Kegelschnitte erfaßt. Gibt man einen weiteren Punkt in der Ebene vor, so wird aus dem Büschel genau ein Kegelschnitt als Lösung ausgesondert.

**Lösung.** Das Tangentenrechteck der Ellipse wird als Aufriß eines auf  $\pi_1$  lotrecht stehenden Drehzylinders interpretiert. Der Grundriß hierzu ist demnach ein Kreis, der für konstruktive Belange mitgezeichnet wird. Die gesuchte Ellipse wird jetzt als Aufriß  $k''$  eines geeignet gelegten ebenen Schnittes dieses Zylinders aufgefaßt. Folglich muß auch der Punkt  $P$  im Raum auf dem Zylindermantel liegend angenommen werden. Gemäß dieser räumlichen Interpretation ist jetzt  $P''$  statt  $P$  zu setzen. Nun geht es darum, eine Schnittebene  $\varepsilon$  derart durch  $P$  zu legen, daß der Aufriß der entstehenden Schnittkurve  $k$  die gestellten Forderungen erfüllt. Zunächst ist der Schnittpunkt  $M''$  der Diagonalen des Tangentenrechtecks aus Gründen der Symmetrie auch Mittelpunkt der gesuchten Ellipse. Wegen der zentrischen Symmetrie der Ellipse ist der Spiegelpunkt  $Q''$  von  $P''$  an  $M''$  ebenfalls ein Punkt von  $k''$ . Nach der räumlichen Auffassung liegt auch  $Q$  auf einer Erzeugenden des Zylinders, die der durch  $P$  gehenden gegenüberliegt. Damit hat man die in den Kreis der Betrachtung einzubeziehenden Schnittebenen auf ein Büschel von Ebenen mit der Geraden  $g = g(PQ)$  als Träger eingeschränkt (Abb. 115).

Nun ist noch die Forderung zu beachten, daß die obere und die untere Gerade des Rechtecks Tangenten von  $k''$  sein sollen. Daher ist die gesuchte Schnittebene so zu legen, daß ihre erste Spur den Basiskreis des Zylinders berührt. Wegen der symmetrischen Anordnung der Hilfsmittel berührt diese Ebene auch den Deckkreis. Konstruktiv ist dann im einzelnen wie folgt vorzugehen:

Man bestimmt in bekannter Weise den ersten Spurpunkt  $G_1$  der Geraden  $g = g(PQ)$ . Von  $G_1$  können zwei Tangenten an den Basiskreis gelegt werden. Hier werde nur die

eine Tangente  $e_1$  betrachtet. Die Geraden  $g$  und  $e_1$  spannen offenbar jene Ebene  $\varepsilon$  auf, die den Zylinder  $\Phi$  nach einer Ellipse  $k$  schneidet, deren Aufriß  $k''$  die Forderungen der Aufgabenstellung erfüllt. Die Hauptachse von  $k$  liegt auf der Fallinie  $f$  der Schnitt-ebene  $\varepsilon$ , welche durch  $M$  geht. Die Nebenachse von  $k$  liegt auf der ersten Spurparalle-

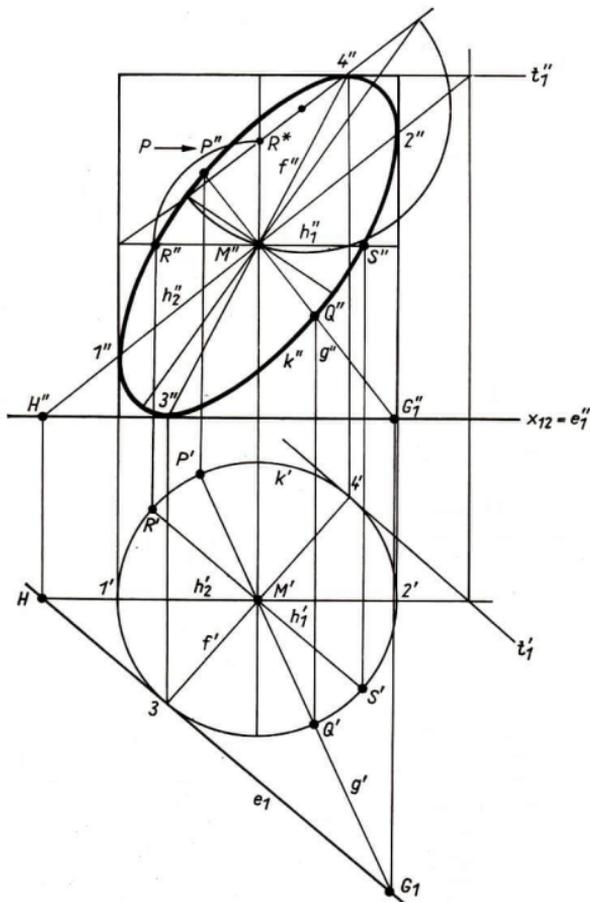


Abb. 115

len  $h_1$  durch  $M$ . Grund- und Aufriß von  $f$  und  $h_1$  sind leicht zu finden. Die Aufrisse von  $h_1$  und  $f$  bilden ein Paar konjugierter Durchmesser von  $k''$ . Durch Anwendung der Rytzschen Konstruktion auf dieses Durchmesserpaar gelangt man zu Haupt- und Nebenachse der gesuchten Ellipse  $k''$ .

Die räumliche Interpretation der Aufgabenstellung gestattet weiterhin, die Berührungspunkte der vier Tangenten exakt zu finden. Die zweite Spurparallele  $h_2$  von  $\varepsilon$  durch den Mittelpunkt  $M$  der Zylinderachse schneidet die beiden äußeren Mantellinien von  $\Phi$  in den Punkten 1 und 2, deren Aufrisse  $1''$  und  $2''$  die Berührungspunkte der lotrechten Tangenten von  $k''$  sind. Führt man weiter den Berührungspunkt 3 von  $e_1$  mit dem Basiskreis in den Aufriß, so ergibt sich der Punkt  $3''$ , in dem  $k''$  die untere Tangente berührt. Durch Spiegelung am Ellipsenmittelpunkt findet man den Berührungspunkt  $4''$  der oberen Rechteckseite mit  $k''$ .

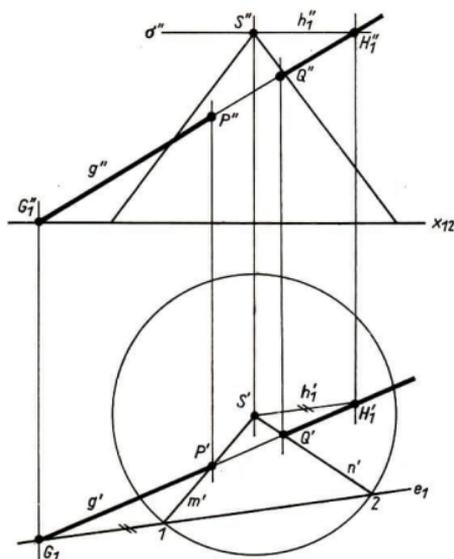


Abb. 116

Stellt man die Frage nach der Einzigkeit der Lösung, muß auf die Konstruktion der Tangenten von  $G_1$  an den Basiskreis zurückgegangen werden. Geht man mit der gleichen Konstruktion von der zweiten Kreistangente an den Basiskreis aus, so gelangt man auf ein von  $k''$  verschiedenes Ergebnis. Die gestellte Aufgabe führt daher auf zwei voneinander verschiedene Ellipsen als Lösung.

**Aufgabe 5.** Gegeben seien die Normalrisse eines auf  $\pi_1$  lotrecht stehenden Drehkegels  $\Phi$  und eine Gerade  $g$ . Gesucht ist der Schnitt von  $g$  mit  $\Phi$ .

**Lösung.** Die Schnittkonstruktion erfolgt mittels einer Hilfsebene  $\gamma$  von geeigneter Lage. Denkt man sich durch die Kegelspitze  $S$  ein Ebenenbündel gelegt, so finden sich darunter Ebenen, die mit  $\Phi$  außer  $S$  keinen reellen Punkt gemeinsam haben, Ebenen, die  $\Phi$  längs einer Mantellinie berühren, und solche, die  $\Phi$  in zwei Mantellinien schneiden. Zur Konstruktion der Durchstoßpunkte von  $g$  mit  $\Phi$  wird die von der

Geraden  $g$  und der Kegelspitze  $S$  bestimmte Ebene  $\gamma$  als Hilfsebene eingesetzt. Zunächst interessiert die erste Spur von  $\gamma$ . Der erste Spurpunkt  $G_1$  von  $g$  sowie die erste Hauptlinie  $h_1$  von  $\gamma$  durch  $S$  sind in bekannter Weise zu finden. Man denkt sich durch  $S$  eine Ebene  $\sigma \parallel \pi_1$ , die  $g$  in  $H_1$  schneidet. Dann ist  $h_1 = h_1(SH_1)$  die erste Hauptlinie von  $\gamma$  durch  $S$ . Die Parallele zu  $h_1$  durch  $G_1$  ist die erste Spur  $e_1$  von  $\gamma$ . Sie schnei-

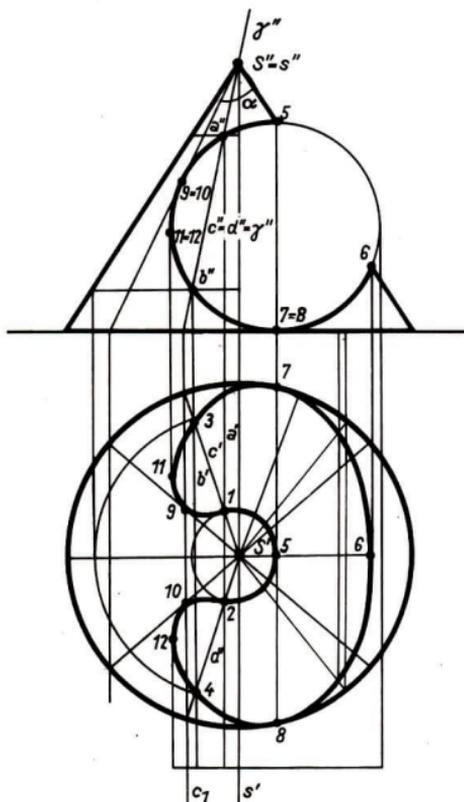


Abb. 117

det im vorliegenden Fall (Abb. 116) den Basiskreis des Kegels in den Punkten 1 und 2. Die Verbindungsgeraden  $m = m(S1)$  und  $n = n(S2)$  sind Erzeugende von  $\Phi$ . Da sie in  $\gamma$  liegen, sind die Schnittpunkte  $P$  und  $Q$  dieser Erzeugenden mit  $g$  auch die Durchstoßpunkte von  $g$  mit dem Drehkegel (Abb. 116). Hat die Spur  $e_1$  von  $\gamma$  mit dem Basiskreis von  $\Phi$  keinen reellen Punkt gemeinsam, so schneidet auch  $g$  den Kegel nicht.

Diese Aufgabe diene als Vorbereitung auf Durchdringungsprobleme etwas schwierigerer Art.

**Aufgabe 6.** Gegeben sei ein auf  $\pi_1$  lotrecht stehender Drehkegel, der von einem zweitprojizierenden Drehzylinder durchbohrt wird. Gesucht ist der Grundriß des nach dieser Ausreißung verbleibenden Restkörpers (vgl. Abb. 117).

**Lösung.** Die Schnittkonstruktion erfolgt mittels einer Schar von Ebenen. Diese ist derart auszuwählen, daß jede dieser Ebenen sowohl den Kegel als auch den Zylinder nach geradlinigen Erzeugenden schneidet. Offenbar ist von diesen Ebenen zu fordern, daß sie eine durch die Kegelspitze  $S$  gehende Gerade  $s$  parallel zur Zylinderachse enthalten. Bei den hier getroffenen Annahme sind die Trägergerade  $s$  und damit die Gesamtheit dieser Ebenen zweitprojizierend. Dadurch vereinfacht sich die Konstruktion wesentlich. Die in Abb. 117 als Beispiel herausgestellte Ebene  $\gamma$  schneidet den Zylinder nach den Erzeugenden  $a$  und  $b$ , den Kegel nach den Erzeugenden  $c$  und  $d$ . Damit liefert diese Hilfsebene die vier Punkte  $1 = 1(ac)$ ,  $2 = 2(ad)$ ,  $3 = 3(bc)$ ,  $4 = 4(bd)$  der durch die angegebene Ausbohrung erzeugten Randkurve. Für die Konstruktion sind die im Bereich des Winkels  $\alpha$  liegenden Hilfsebenen von Interesse (Abb. 117).

Das hier angewandte Konstruktionsprinzip wird als *Pendelebenenverfahren* bezeichnet. Es ist bei noch allgemeineren Aufgabenstellungen rationell einsetzbar. Werden z. B. zwei Kegel allgemeiner Art zur Durchdringung gebracht, so legt man die Pendelachse der Hilfsebenen in die Verbindungsgerade der Kegelspitzen. Für die Hilfsebenen ist dann jener Schwenkbereich von Interesse, in dem jeder der beiden Kegel nach wenigstens einer Geraden geschnitten wird. Bei der hier vorliegenden Durchdringung zweier Flächen zweiter Ordnung entsteht eine Raumkurve vierter Ordnung.

### 3.9. Kegelschnitte als Schlagschatten einer Kugel bei Zentralbeleuchtung

Wie in 3.6. gezeigt wurde, ergibt sich bei Parallelbeleuchtung einer Kugel als Schlagschatten auf eine Ebene eine Ellipse. Die Ellipse kann daher auch als ebener Schnitt eines Drehzylinders angesehen werden. Im folgenden soll der *Schlagschatten* einer Kugel bei *Zentralbeleuchtung* untersucht werden, wobei allgemein vorauszusetzen ist, daß die punktförmige Lichtquelle außerhalb der Kugel liegt (Abb. 118).

Die Kugel  $\kappa_1$  berühre die Bildebene  $\pi_1$  in einem Punkt  $F_1$ . Die Lichtquelle  $Z$  liege in der Frontalebene  $\gamma$  durch  $F_1$ . Die erste Spur  $c_1$  von  $\gamma$  ist auf Grund der getroffenen Anordnung von Lichtquelle und Kugel eine Symmetrielinie des in  $\pi_1$  liegenden Schlagschattens von  $\kappa_1$ .

Für die Art der bei Zentralbeleuchtung entstehenden Schlagschattengrenze sind — entsprechend dem Verhalten bezüglich der Ferngeraden — drei Fälle auseinanderzuhalten:

1. Die Schlagschattengrenze besitzt nur eigentliche Punkte.
2. Die Schlagschattengrenze besitzt genau einen uneigentlichen Punkt.
3. Die Schlagschattengrenze besitzt zwei uneigentliche Punkte.

Der erste Fall tritt ein, wenn der erste Tafelabstand von  $Z$  größer als der Durchmesser von  $\kappa_1$  ist. Im zweiten Fall ist der erste Tafelabstand von  $Z$  gleich dem Durchmesser von  $\kappa_1$ . Im dritten Fall ist der erste Tafelabstand von  $Z$  kleiner als der Kugeldurchmesser.

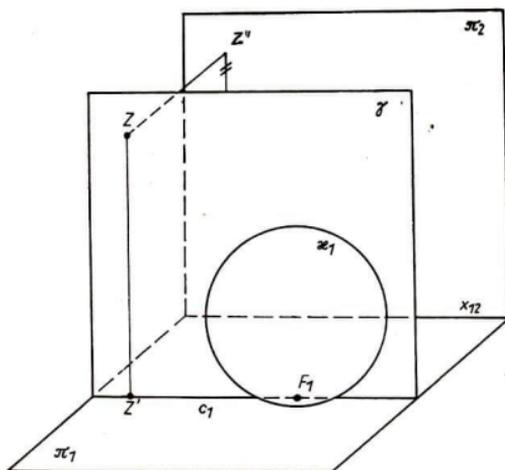


Abb. 118

**Zu 1. Behauptung:** Die Schlagschattengrenze stellt eine *Ellipse* dar.

**Beweis.** Die Gesamtheit der die Kugel  $\kappa_1$  streifenden Lichtstrahlen bilden einen Drehkegel  $\Phi$  mit der Geraden  $g = g(ZM_1)$  ( $M_1$  Mittelpunkt von  $\kappa_1$ ) als Drehachse. In diesem Strahlenkegel  $\Phi$  wird eine zweite Kugel  $\kappa_2$  derart eingeführt, daß diese die Bildebene  $\pi_1$  in einem Punkt  $F_2$  von unten und die Fläche  $\Phi$  in einem Kreis  $k_2$  von innen berührt. Die Berührungskreise  $k_1$  und  $k_2$  der beiden Kugeln haben die Kegelschneidachse  $g$  als gemeinsame Achse. Daher liegen die Berührungskreise in zweitprojizierenden Ebenen. Die beiden in  $\gamma$  liegenden Strahlen des *Streiflichtkegels* schneiden  $\pi_1$  in den Punkten  $A, B \in c_1$ . Die Strecke  $AB$  der Länge  $2a$  stellt den auf einer Symmetrielinie der Schlagschattengrenze liegenden Durchmesser, also eine Achse dieser Kurve dar (Abb. 119).

Ein beliebiger Strahl  $s$  des Streiflichtkegels  $\Phi$  trifft  $k_1$  in  $P_1$ ,  $k_2$  in  $P_2$  und durchstößt  $\pi_1$  in  $P$ , einem Punkt der Schlagschattengrenze. Offenbar ist die Distanz

$|P_1P_2|$  unabhängig von der Wahl des streifenden Strahles durch  $Z$ . Außerdem gilt, wie bereits in 3.6. dargelegt,  $|PP_1| = |PF_1|$ ,  $|PP_2| = |PF_2|$ . Wegen  $|P_1P_2| = |PP_1| + |PP_2|$  besteht auch die Gleichung  $|P_1P_2| = |PF_1| + |PF_2|$ .

Nun ist noch die wahre Distanz  $|P_1P_2|$  konstruktiv zu ermitteln. Man gewinnt sie leicht durch Drehen des Strahles  $s$  um die Achse  $g$ , in eine zu  $\pi_2$  parallele Lage. Wegen  $|P_1P_2| = |P''_{10}P''_{20}|$  ist die gesuchte Länge dem Aufriß zu entnehmen. Ferner

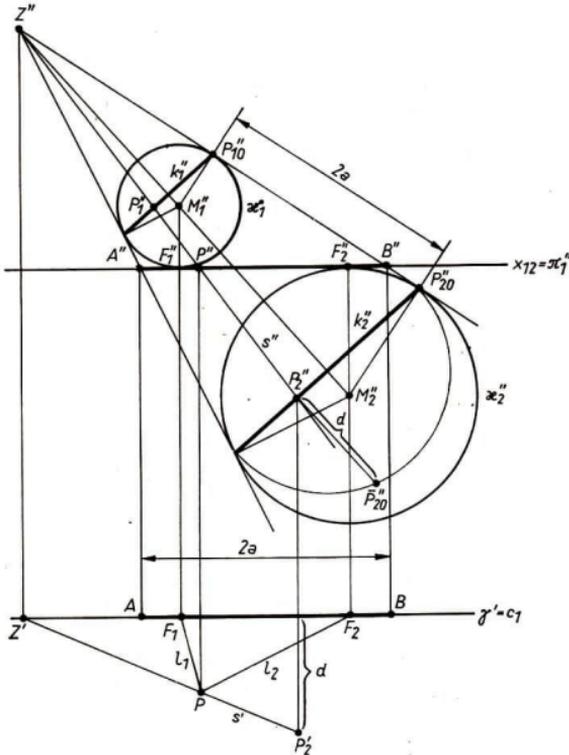


Abb. 119

gelangt man durch Auswertung elementarer Beziehungen der Dreiecksgeometrie an dem Dreieck  $\triangle A''B''Z''$  zu der Gleichung  $|A''B''| = |P''_{10}P''_{20}| = 2a$ . Daher gilt für einen Punkt  $P$  allgemeiner Lage der Schlagschattengrenze

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a.$$

Mit dieser Feststellung ist unter Bezugnahme auf das Ergebnis aus 3.6. die obige Behauptung bewiesen.



Vor Betrachtung des zweiten Falles wird die folgende Definition bereitgestellt: Die Gesamtheit aller Punkte der Ebene  $\pi$ , deren Abstände von einem festen Punkt  $F$ , dem Brennpunkt, und einer festen Geraden  $l$ , der Leitgeraden, gleich groß sind, ist eine *Parabel*. Bemerkung: Es gilt  $\pi = \pi(Fl)$ .

**Zu 2. Behauptung:** Die Schlagschattengrenze stellt eine *Parabel* dar.

**Beweis.** Die in diesem Fall zu betrachtende Kugel  $\kappa$  berühre die Bildtafel  $\pi_1$  in  $F$ . Der von  $Z$  an  $\kappa$  gelegte Streiflichtkegel  $\Phi$  berührt  $\kappa$  in einem Kreis  $k$ , dessen Ebene  $\lambda$  wieder zweitprojizierend ist. Daher gilt für die erste Spur  $l$  von  $\lambda$ :  $l \perp \pi_1$ . Der Knotenpunkt von  $\lambda$  sei  $L$  (Abb. 120).

Ein von  $Z$  ausgehender Lichtstrahl  $s$  trifft  $k$  in  $P_1$  und schneidet  $\pi_1$  in  $P$ . Zur Konstruktion von  $P$  ist vom Aufriß auszugehen. Man legt durch  $P$  eine zweitprojizierende Hilfsebene  $\delta \parallel \lambda$ . Sie schneidet den Berührungsstrahlkegel  $\Phi$  in einem Kreis  $w$ . Die Umlegung von  $\delta$  in die Frontalebene  $\gamma$  ergibt im Aufriß den Kreis  $w_0''$ , den Punkt  $\bar{P}_0''$  sowie die Distanz  $d = |P\gamma|$ . Diese trägt man auf einem Ordner durch  $P''$  von  $\gamma' = c_1$  nach unten (oder oben) ab und erhält damit den in  $\pi_1$  liegenden Punkt  $P$ . Die wahre Distanz  $|PP_1|$  bietet sich wieder im Aufriß durch Drehen der Mantellinie  $s$  von  $\Phi$  parallel zu  $\pi_2$ . Wegen  $|PP_1| = |P_0''P_{10}''|$  ist die gesuchte Länge dem Aufriß entnehmbar. Nach Konstruktion stellt das im Aufriß gelegene Viereck  $LP''P_0''P_{10}''$  ein Parallelogramm dar. Somit gilt  $|P_0''P_{10}''| = |LP''| = |Pl|$  und daher auch  $|PP_1| = |Pl|$ . Nach wiederholt angestellten Überlegungen besteht die Gleichung  $|PF| = |PP_1|$ . Für die Gesamtheit der in  $\pi_1$  liegenden Punkte  $P$  der Eigenschaftsgrenze von  $\kappa$  ist also die Beziehung  $|PF| = |Pl|$  erfüllt. Gemäß der oben gegebenen Definition ist dies eine Parabel. Der dem höchsten Punkt des Berührungskreises  $k$  zugeordnete Schlagschatten ist ein uneigentlicher Punkt von  $\pi_1$ , da der entsprechende Lichtstrahl parallel zur Bildebene liegt. Alle anderen Punkte von  $k$  liefern eigentliche Punkte als Schlagschatten. Die Normalprojektion des horizontalen Berührungsstrahles auf  $\pi_1$  ergibt die Achse der Parabel. Sie deckt sich mit der ersten Spur von  $\gamma$ .

Aus der Parabeldefinition folgt weiter, daß der Scheitelpunkt  $S$  den von Brennpunkt und Leitgeraden auf der Achse ausgeschnittenen Streckenabschnitt  $FR$  halbiert. Man bezeichnet die Länge  $p = |FR|$  dieser Strecke auch als den *Parameter* der Parabel. Legt man weiter entsprechend Abb. 121 in die Parabelachse die  $x$ -Achse und in die Scheiteltangente die  $y$ -Achse eines kartesischen Achsenkreuzes, dann lautet die analytische Gleichung für die Parabel wegen  $|PF| = |PG|$

$$y^2 = 2px$$

(Abb. 121).

Läßt man eine Parabel um ihre Achse rotieren, so erzeugt sie eine Fläche zweiten Grades, die man als *Drehparaboloid* bezeichnet. Der Punkt  $F$  hat für diese Fläche eine ausgezeichnete physikalische Bedeutung. Ist nämlich die Innenseite des Paraboloids als eine spiegelnde Fläche ausgebildet, so werden alle parallel zur Drehachse einfallenden Strahlen von der Fläche nach dem *Brennpunkt*  $F$  reflektiert. Bringt man umgekehrt in  $F$  eine punktförmige Lichtquelle an, so werden die von  $F$  ausgehenden Strahlen nach der Reflexion parallel zur Flächenachse verlaufen. Diese Besonderheit des Drehparaboloids — auch *Fokaleigenschaft* genannt — findet vielfältigste An-

wendungen z. B. in der Optik und Hochfrequenztechnik. Der Beweis dieser wichtigen Eigenschaft soll hier auf synthetischem Wege über die Tangentenkonstruktion geführt werden.

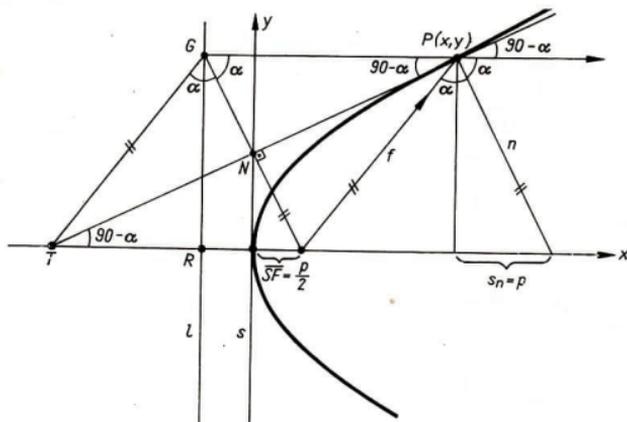


Abb. 121

#### Konstruktionsvorschrift für Parabeltangente

Voraussetzung. Eine Parabel liegt samt Achse und Brennpunkt gezeichnet vor. Auf der Parabel sei ein Punkt  $P$  beliebig gegeben.

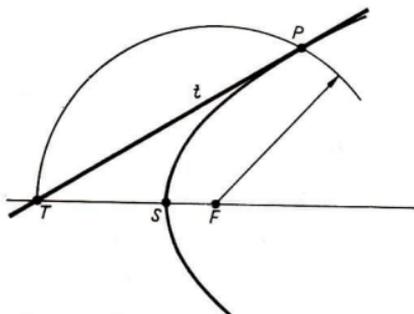


Abb. 122

Behauptung. Trägt man die Strecke  $PF$  von  $F$  aus auf der Achse über den Scheitel  $S$  hinaus ab, so erhält man einen Punkt  $T$ . Die Verbindungsgerade  $t = t(PT)$  ist die dem Punkt  $P$  zugeordnete Parabeltangente. Die Punkte  $P, F, T$  bilden ein gleichschenkeliges Dreieck mit der Strecke  $PT$  als Basis (Abb. 122).

Beweis. Die Beweisführung erfolgt *indirekt*. Man geht also von einer Annahme aus, die die Negation der Behauptung darstellt. Diese Annahme wird auf einen Widerspruch geführt. Wir nehmen also an, die Gerade  $t = t(PT)$  sei nicht Tangente der Parabel in  $P$ . Gemäß der getroffenen Annahme muß auf  $t$  ein weiterer von  $P$  verschiedener Parabelpunkt  $Q$  existieren. Die Figur soll in diesem Sinne vervollständigt werden. Durch  $P$  werde die Parallele zur Parabelachse und durch  $T$  die Parallele zur Geraden  $f = f(FP)$  gelegt. Beide Geraden schneiden sich gemäß der Parabeldefinition in einem Punkt  $G \in l$ . Nach Konstruktion stellt das so gezeichnete Viereck  $TFPG$  einen Rhombus dar, in dem sich die Diagonalen  $t = t(PT)$  und  $g = g(FG)$  senkrecht schneiden. Der Schnittpunkt  $N$  (Mittelpunkt des Rhombus) ist nach Konstruktion

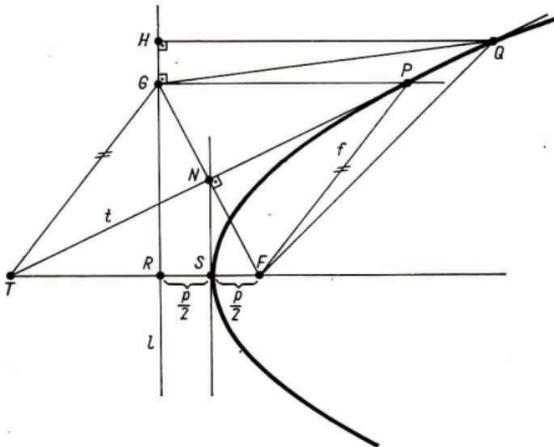


Abb. 123

ein Punkt der Scheiteltangente. Ferner ist der von  $P$  verschiedene Punkt  $Q \in t$  nach Annahme ein Parabelpunkt (Abb. 123). Daher gilt

$$|FQ| = |GQ| \text{ nach Konstruktion,} \tag{1}$$

$$|FQ| = |QH| \text{ nach Parabeldefinition} \tag{2}$$

( $H$  ist Lotfußpunkt von  $Q$  auf die Leitlinie).

Aus (1) und (2) folgt

$$|GQ| = |QH|. \tag{3}$$

Das durch Einzeichnen von Hilfslinien entstandene Dreieck  $\triangle GQH$  in Abb. 123 ist entsprechend der getroffenen Annahme rechtwinklig mit den Strecken  $GQ$  als Hypotenuse und  $QH$  als Kathete. Somit gilt

$$|GQ| > |QH|. \tag{4}$$

Wegen des Widerspruchs von (3) und (4) ist die obige Annahme falsch und die in Form einer Behauptung gegebene Konstruktionsvorschrift für die Parabeltangente wahr.

Mit der Parabeltangente  $t$  steht auch die Parabelnormale  $n$  durch  $P$  zur Verfügung. Sie liegt nach Konstruktion parallel zu  $g = g(FG)$ . Trägt man den Einfallswinkel  $\alpha = \sphericalangle(fn)$  des Strahles  $f = f(FP)$  von  $n$  aus nochmals ab, so ergibt sich als Schenkel ein zur Parabelachse paralleler Strahl. Damit ist auch die Fokaleigenschaft der Parabel in der Ebene und des Drehparaboloids im Raum bewiesen (vgl. Abb. 121).

Mit der Tangentenkonstruktion der Parabel läßt sich ferner die Erzeugung einer Parabel als Hüllgebilde einer einparametrischen Geradenschar leicht ablesen. Führt man

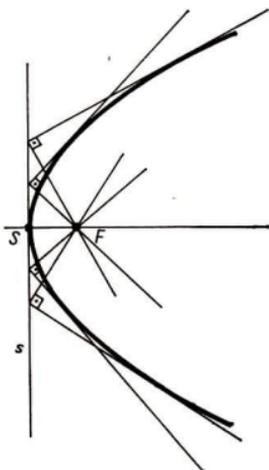


Abb. 124

ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Scheitel des rechten Winkels derart auf einer Geraden  $s$ , daß die eine Kathete längs eines festen Punktes  $F \notin s$  gleitet, so umhüllt die andere Kathete des Dreiecks eine Parabel, deren Brennpunkt mit  $F$  und deren Scheiteltangente mit  $s$  koinzidieren (Abb. 124).

### Aufgaben

1. Es ist zu zeigen: Zieht man von einem Punkt  $G$  der Leitgeraden  $l$  die Tangenten an die Parabel, so geht die Verbindungsgerade der Berührungspunkte dieser Tangenten durch den Brennpunkt  $F$  der Parabel.

2. Es ist zu zeigen: Die Gesamtheit der Mittelpunkte jener Kreise, welche durch einen Punkt  $F$  gehen und eine nicht durch  $F$  gehende Gerade  $g$  berühren, bildet eine Parabel.

3. An eine durch ihren Brennpunkt  $F$  und Scheitelpunkt  $S$  vorgegebene Parabel sind die Tangenten aus einem Punkt  $Q$  außerhalb der Parabel mit Zirkel und Lineal exakt zu konstruieren (Abb. 125).

Lösung. Man zeichne einen Kreis mit der Strecke  $FQ$  als Durchmesser. Dieser schneidet die Scheiteltangente in den Punkten  $N_1$  und  $N_2$ . Die Verbindungsgeraden  $t_1 = t_1(QN_1)$  und  $t_2 = t_2(QN_2)$  sind die gesuchten Tangenten. Sie schneiden die Parabelachse in den Punkten  $T_1$  bzw.  $T_2$ . Durch Spiegelung von  $T_i$  an  $N_i$  auf  $t_i$  ergeben sich die Berührungspunkte  $P_i$  ( $i = 1, 2$ ).

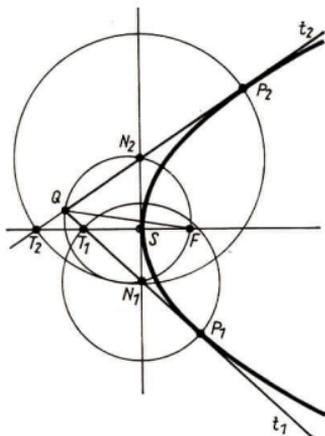


Abb. 125

Auch für die Behandlung des dritten Falles ist zunächst eine Definition bereitzustellen: Die Gesamtheit aller Punkte einer Ebene  $\pi$ , für die die Abstandsdifferenz von zwei festen Punkten  $F_1, F_2 \in \pi$  einen konstanten Betrag hat, ist eine *Hyperbel*.

**Zu 3. Behauptung.** Die Schlagschattengrenze stellt eine *Hyperbel* dar.

**Beweis.** Der Beweis soll hier nur für den metrisch leicht überschaubaren Fall geführt werden, daß der erste Tafelabstand von  $Z$  gleich dem Radius der Kugel  $\kappa_1$  ist. Die Achse  $g = g(ZM_1)$  des Streiflichtkegels liegt nach dieser Annahme parallel zur Rißachse  $x_{12}$ . Bevor die Hyperbel als ebener Schnitt eines Drehkegels erklärt werden soll, ist noch der Begriff der Kegelfläche vollständiger zu fassen.

Es seien eine ebene Kurve  $c$  und ein nicht in der Kurvenebene liegender Punkt  $Z$  gegeben. Dann bildet die Gesamtheit jener Geraden  $\{e\}$ , welche durch  $Z$  gehen und  $c$  schneiden, eine Kegelfläche. Die Ordnung der ebenen Kurve  $c$  überträgt sich auf die Ordnung der Kegelfläche. Ist  $c$  ein Kreis, spricht man von einem Kreiskegel. Liegt  $Z$  auf der Kreisachse senkrecht zur Kreisebene, ergibt sich ein Drehkegel. Für viele Fälle genügt es, nur den auf einer Seite von  $Z$  liegenden Teil der Kegelfläche

in die Betrachtungen einzubeziehen. Für die nun folgenden Überlegungen ist jedoch die gesamte zu beiden Seiten von  $Z$  liegende Kegelfläche von Interesse.

Um die Vollständigkeit der hier durchzuführenden Betrachtungen zu sichern, wird eine zweite Kugel  $\kappa_2$  spiegelbildlich zu  $\kappa_1$  bezüglich einer doppelprojizierenden Ebene  $\beta$  durch  $Z$  angebracht. Die Kugeln  $\kappa_i$  berühren die Bildtafel  $\pi_1$  in den Punkten

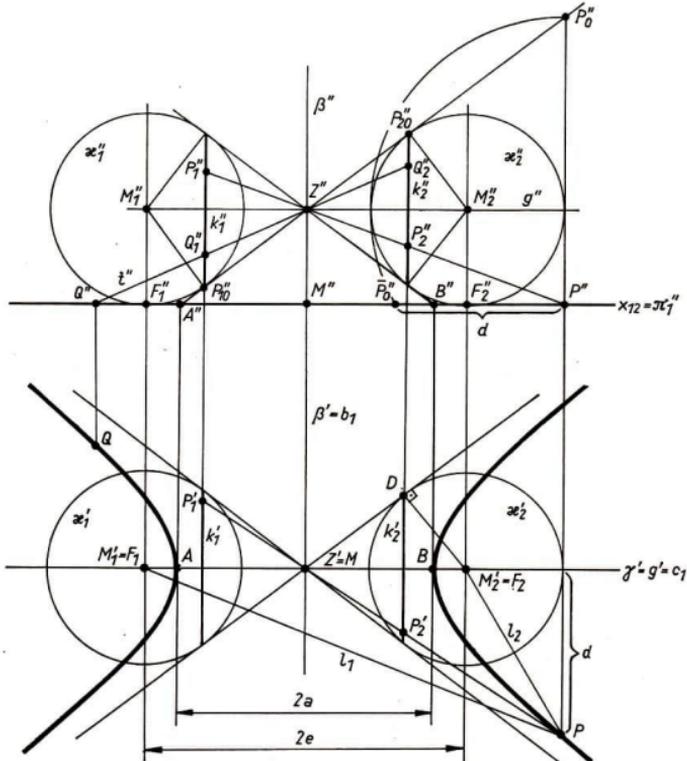


Abb. 126

$F_i$  und den Streiflichtkegel in den Berührungskreisen  $k_i$  ( $i = 1, 2$ ). Die Ebenen der Kreise  $k_i$  sind erst- und zweitprojizierend. Die Spur  $c_1$  der frontalen Ebene  $\gamma$  und die Spur  $b_1$  der Ebene  $\beta$  sind Symmetrieachsen der in diesem Fall entstehenden Schlag-schatten grenze (Abb. 126).

Die in  $\gamma$  liegenden des Streiflichtkegels schneiden  $\pi_1$  in  $A$  und  $B$ , den Scheitelpunkten der gesuchten Kurve. Der Halbierungspunkt  $M$  der Strecke  $AB$  ist Mittelpunkt dieser Kurve. Die beiden horizontalen Strahlen durch  $Z$  berühren die Kugeln  $\kappa_i$  in den Äquatorkreisen. Die Schatten dieser Berührungspunkte sind un-

eigentliche Punkte der Bildtafel  $\pi_1$ . Die Schlagschattengrenze hat somit genau zwei uneigentliche Punkte. Die Normalprojektionen der beiden horizontalen Berührungstrahlen auf  $\pi_1$  berühren die Schlagschattengrenze in ihren Fernpunkten. Man bezeichnet sie als *Asymptoten*. Sie stellen eine wichtige Zeichenhilfe bei Konstruktion der Schlagschattengrenze dar.

Eine beliebige Erzeugende  $s$  des Streiflichtkegels schneidet die Berührungskreise  $k_1$  in  $P_1$ ,  $k_2$  in  $P_2$  und die Bildebene  $\pi_1$  in  $P$ . Die wahre Länge der Strecke  $P_1P_2$ , die unabhängig von der Wahl des Berührungstrahles  $s$  ist, kann nach einer Drehung um  $g$  parallel zur Grundrißtafel dem zweiten Riß entnommen werden. Man erhält  $|P_1P_2| = |P''_{10}P''_{20}|$ . Aus planimetrischen Überlegungen zur Dreiecksgeometrie folgt weiter

$$|P''_{10}P''_{20}| = |AB| = 2a.$$

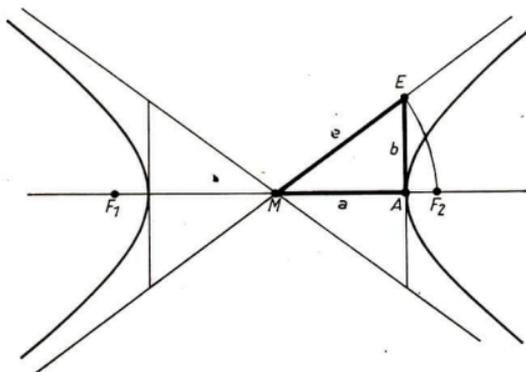


Abb. 127

Ferner gilt nach 3.6.

$$|PP_1| = |PF_1|, \quad (1)$$

$$|PP_2| = |PF_2| \quad (2)$$

und  $|PP_1| - |PP_2| = |P_1P_2|$ . Durch Anwendung von (1) und (2) ergibt sich

$$|PF_1| - |PF_2| = 2a.$$

In gleicher Weise kann ein Strahl  $t$  gelegt werden, der  $k_1$  in  $Q_1$ ,  $k_2$  in  $Q_2$  und  $\pi_1$  in  $Q$  schneidet. Wie oben läßt sich zeigen, daß  $|QF_2| - |QF_1| = 2a$  gilt.

Um nun beide Äste der Kurve durch eine Gleichung zu erfassen, setzt man

$$||PF_1| - |PF_2|| = 2a.$$

Damit ist gezeigt, daß die Schlagschattengrenze der Kugeln  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  mit einem gemeinsamen Streiflichtkegel eine Hyperbel bildet. Man nennt die Strecken  $AM$  und

$MB$  mit  $|AM| = |MB| = a$  halbe Hauptachsen und die Größe  $|MF_1| = |MF_2| = e$  lineare Exzentrizität. Die in einem Scheitel  $A$  auf der Hauptachse errichtete Senkrechte schneidet eine Asymptote in dem Punkt  $E$ . Die Länge  $b = |AE|$  entspricht der Länge der halben Nebenachse. Für die Hyperbel besteht zwischen den Längen der Halbachsen und der numerischen Exzentrizität die Beziehung

$$a^2 + b^2 = e^2$$

(vgl. Abb. 127).

### Zusammenfassung

Die Untersuchung der Schlagschattengrenze einer Kugel bei Zentralbeleuchtung führte auf die Kurven Ellipse, Parabel und Hyperbel. Da das Streiflicht an eine Kugel bei Zentralbeleuchtung einen Drehkegel darstellt, lassen sich die Schlagschatten-

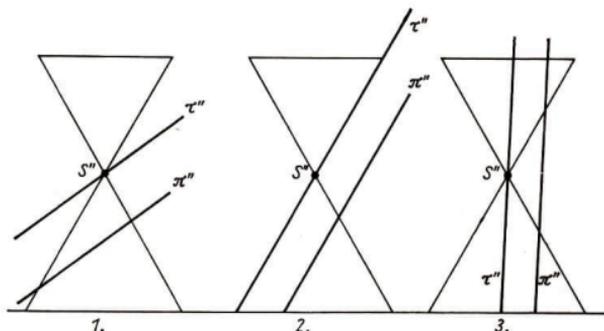


Abb. 128

grenzen auch als ebene Schnitte von Drehkegeln — also als Kegelschnitte — interpretieren. Entscheidend für die Art des entstehenden Kegelschnittes ist die Lage der schneidenden Ebene  $\pi$  bezüglich des Kegels  $\Phi$ . Für die zusammenfassenden Betrachtungen werde ein Drehkegel lotrecht auf  $\pi_1$  gestellt und mit einer zweitprojizierenden Ebene  $\tau$  (Testebene) durch die Kegelspitze  $S$  in verschiedener Weise geschnitten.

Im ersten Fall soll  $\tau$  mit  $\Phi$  außer  $S$  keinen reellen Punkt gemeinsam haben. Dann schneidet jede zu  $\tau$  parallele und von  $\tau$  verschiedene Ebene  $\pi$  die Kegelfläche  $\Phi$  in einer Ellipse.

Im zweiten Fall soll  $\tau$  die Kegelfläche  $\Phi$  in einer Erzeugenden berühren. Dann schneidet jede zu  $\tau$  parallele und von  $\tau$  verschiedene Ebene  $\pi$  die Kegelfläche  $\Phi$  nach einer Parabel.

Im dritten Fall soll  $\tau$  die Kegelfläche  $\Phi$  in zwei Erzeugenden schneiden. Dann schneidet jede zu  $\tau$  parallele und von  $\tau$  verschiedene Ebene  $\pi$  die Kegelfläche  $\Phi$  nach einer Hyperbel.

Im ersten und dritten Fall gilt der folgende Satz (Satz von DANDELIN): Führt man zu einem durch die Ebene  $\pi$  geschnittenen Drehkegel  $\Phi$  noch jene zwei Kugeln ein, die den Kegel in je einem Kreis und die Ebene  $\pi$  in je einem Punkt  $F_1$  und  $F_2$  berühren, so sind diese Berührungspunkte  $F_1$  und  $F_2 \in \pi$  die Brennpunkte des Kegelschnittes  $k = k(\pi\Phi)$ . Beim parabolischen Schnitt des Drehkegels läßt sich nur eine Kugel mit diesen Eigenschaften einführen und daher auch nur ein Brennpunkt  $F$  angeben (Abb. 128).

Abschließend sei vermerkt, daß sich der in 3.6., S. 103, für die Ellipse eingeführte Begriff der *numerischen Exzentrizität*  $\varepsilon$  auch auf die Parabel und Hyperbel sinngemäß übertragen läßt. Für die Parabel gilt  $\varepsilon = 1$ , für die Hyperbel  $\varepsilon > 1$ . In entsprechender Weise sind die auf S. 104 gegebene Definition und Polarkoordinatendarstellung für Parabel und Hyperbel mit  $\varepsilon = 1$  bzw.  $\varepsilon > 1$  anwendbar. Die zusammenfassende Kegelschnittdefinition mittels des Begriffs der numerischen Exzentrizität geht auf PAPPUS VON ALEXANDRIA (um 295) zurück.

## 4. Weitere Darstellungsverfahren

### 4.1. Eintafelverfahren. Kотиerte Projektion

Die *kотиerte Projektion* ist eine Normalprojektion auf eine im allgemeinen horizontal angenommene Bildebene. Diese Ebene teilt den Raum in einen über ihr liegenden „oberen“ und einen unter ihr liegenden „unteren“ Halbraum ein. Ferner ist die

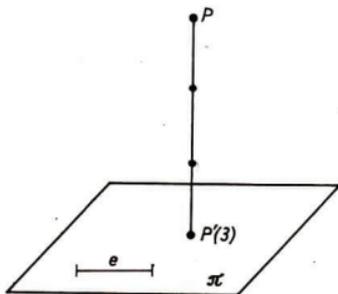


Abb. 129

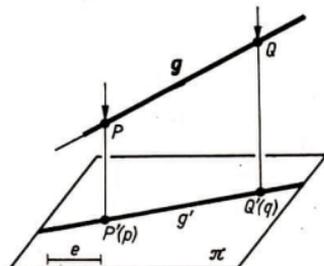


Abb. 130

Einheitsstrecke  $e$  oder der Maßstab bildlich vorgegeben. Die Abbildung eines Punktes  $P$  auf die Bildebene  $\pi$  ist in folgender Weise erklärt:

Der zu  $\pi$  normale Projektionsstrahl durch  $P$  schneidet die Bildebene  $\pi$  in  $P'$ . Der Betrag der dem Bildpunkt  $P'$  beigefügten reellen Zahl, die *Kote*, gibt den auf dem Projektionsstrahl in der vorgelegten Längeneinheit gemessenen Abstand des Punktes  $P$  von der Bild- und Bezugsebene an. Die Zahl ist positiv oder negativ, je nachdem, ob  $P$  dem oberen oder dem unteren Halbraum angehört (Abb. 129). Damit liefert die kотиerte Projektion eine umkehrbar eindeutige Zuordnungsvorschrift von Original und kотiertem Bild. Eine Gerade  $g$  ist durch zwei ihrer Punkte  $P$  und  $Q$  im Raum eindeutig festgelegt. Die kотиerte Projektion von  $g$  ergibt sich demnach als Verbindungsgerade  $g'$  der kотierten Bildpunkte  $P'(p)$  und  $Q'(q)$ . Die Bildpunkte einer Geraden  $g$  mit ganzzahligen Koten bezeichnet man als *Graduierungspunkte* und die so dargestellte Gerade als *graduierte Gerade* oder auch *Gefällemaßstab* (Abb. 130).

Unter dem *Intervall*  $i$  einer Geraden versteht man den Abstand der Bilder zweier Punkte, deren Koten sich um eine Einheit unterscheiden. Der Neigungswinkel  $\sigma$  einer Geraden  $g$  gegen die Ebene  $\pi$  wird in der Ebene  $\alpha \perp \pi$  durch  $g$  gemessen. Ist  $P'$  der Normalriß eines Punktes  $P \in g$  und  $G$  der Spurpunkt von  $g$ , so gilt für den Neigungswinkel von  $g$

$$\sigma = |\sphericalangle PGP'|.$$

Der Neigungswinkel  $\sigma$  und das Intervall  $i$  sind durch die Gleichung  $i = \cot \sigma$  miteinander verknüpft. Der Winkel  $\sigma$  läßt sich konstruktiv durch eine Umlegung von

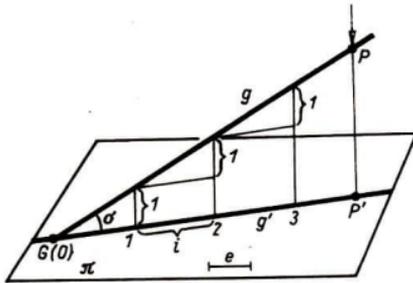


Abb. 131

$g$  um  $g'$  nach  $\pi$  gewinnen. Der Spurpunkt  $G$  einer Geraden  $g$  kann gleichfalls mit einer Umlegung von  $g$  ermittelt werden. Durch Anwendung des Strahlensatzes entsprechend der Ausführung in Abb. 133 gelangt man unter geringerem Konstruktionsaufwand zum gleichen Ziel (Abb. 131, 132, 133).

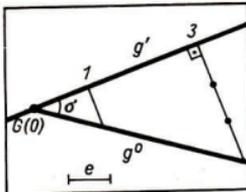


Abb. 132

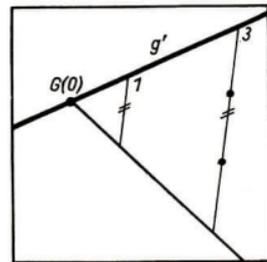
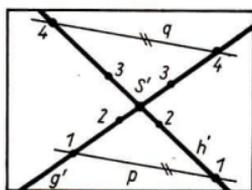


Abb. 133

An der kottierten Projektion zweier Geraden  $g$  und  $h$  läßt sich auch entscheiden, ob diese Geraden in einer Ebene liegen oder ob sie *windschief* sind. Verbindet man nämlich Punktepaare gleicher Koten von  $g'$  und  $h'$ , so können diese Verbindungsgeraden  $p, q$  sich in der Zeichenebene schneiden oder parallel sein. Im Fall der Parallelität der Verbindungsgeraden liegen  $g$  und  $h$  in einer Ebene. Daher schneiden sich

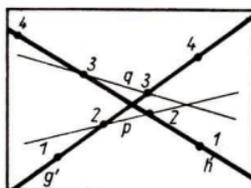
$g$  und  $h$ , oder sie sind selbst parallel. Schneiden sich hingegen die Verbindungsgeraden von Punktggleicher Kote in der Zeichenebene, so sind  $g$  und  $h$  windschief (Abb. 134 a, b).

Mit Hilfe der kotierten Projektion lassen sich die verschiedenartigsten Flächen im Raum anschaulich erfassen, unabhängig davon, ob für diese Flächen ein mathematisches Bildungsgesetz vorliegt oder nicht. Hierzu schneidet man diese Fläche mit einer Schar gleichabständiger Ebenen von vorzugsweise ganzzahligen Koten, den Schichtenebenen, die parallel zur Bezugsebene liegen. Die Normalrisse der hierbei entstehenden ebenen Schnittkurven, die *Schichtenlinien*, bilden in ihrer Gesamtheit den *Schichtenplan* oder die Karte der allgemeinen Fläche. Zur weiteren Unterstützung der Anschauung wird an jede Schichtenlinie die Kote der zugehörigen horizontalen Schichtenebene vermerkt. Die *Orthogonaltrajektorien* der Schichtenlinien bilden die *Falllinien* der Fläche. Sie geben zu jedem Flächenpunkt die Richtung des stärksten Gefälles.



a)

Abb. 134



b)

Für den Fall einer geneigten Ebene  $\varepsilon$  ist der Schichtenplan eine Schar zueinander paralleler, äquidistanter Geraden. Jene Schichtenlinie mit der Kote Null ist die *Spur* dieser Ebene. Ihre Richtung wird als *Streichrichtung* der Ebene bezeichnet. Senkrecht dazu liegen die Falllinien. Zur Beschreibung der Lage einer Ebene  $\varepsilon$  genügt daher die Vorgabe der Projektion einer graduierten Falllinie  $f$ , die auch als Gefällemaßstab der Ebene bezeichnet wird. Der Neigungswinkel  $\sigma$  einer Ebene  $\varepsilon$  gegen die Ebene  $\pi$  ist gleich dem Neigungswinkel der Falllinie  $f$  von  $\varepsilon$  gegen  $\pi$ . Der Neigungswinkel von  $\varepsilon$  ist also mittels Umlegung von  $f$  um  $f'$  nach  $\pi$  zu konstruieren (Abb. 135).

Zwei durch ihre Gefällemaßstäbe vorgelegte Ebenen  $\delta$  und  $\varepsilon$  werden miteinander zum Schnitt gebracht, indem man die zu den Ebenen gehörigen Schichtenlinien zeichnet und die Schnittpunkte von Schichtenlinien gleicher Kote miteinander verbindet. Sie liegen auf einer Geraden, der Normalprojektion von  $s = s(\delta\varepsilon)$ . Für Ebenen mit zueinander parallelen Streichrichtungen und unterschiedlichen Neigungswinkeln liegt die Schnittgerade parallel zur Streichrichtung. Diese Gerade kann durch Anwendung des Strahlensatzes im Eintafelverfahren gewonnen werden (Abb. 136).

Die hier angedeuteten Lösungsprinzipien finden bei der Planung von Erdarbeiten, z. B. beim Anlegen von Dämmen und Geländeeinschnitten Anwendung und werden als *Böschungsaufgaben* bezeichnet. Die bei Erdaufschüttungen und Einschnitten anzulegenden Ausgleichsebenen sind an erfahrungsmäßig festgelegte *Böschungswinkel*

gebunden. Weniger aktuell sind die nach dieser Methode lösaren *Dachausmittlungen*. Von dem Grundriß der *Trauflinie* und vorbestimmten Dachneigungen ausgehend werden die Schnittkanten (Firste, Kehlen, Verfallungen u. a. m.) im Eintafelverfahren konstruktiv ermittelt.

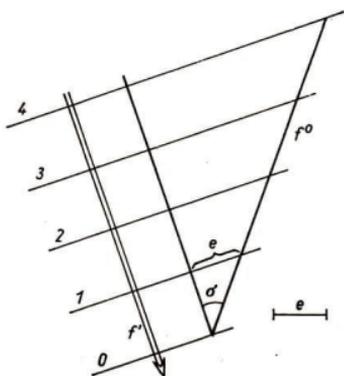


Abb. 135

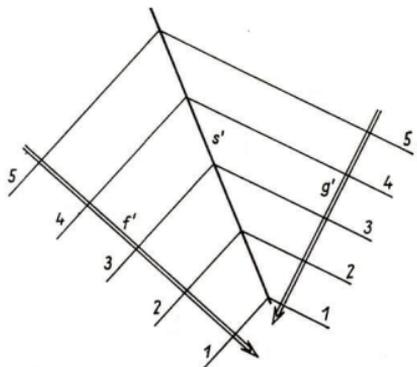


Abb. 136

Um den Schnitt einer Geraden  $g$  mit einer Ebene  $\varepsilon$  zu konstruieren, wird eine Hilfsebene  $\gamma$  durch  $g$  eingeführt. Ihre Beschreibung erfolgt mittels einer Schar paralleler Geraden beliebiger Richtung durch die Graduierungspunkte von  $g$ . Der Normalriß der Schnittgeraden  $s = s(\gamma\varepsilon)$  wird wie oben konstruiert. Man findet den Punkt  $D' = D'(s'g')$ , der nach elementaren Überlegungen der Grundriß des Durchstoßpunktes  $D$  der Geraden  $g$  durch  $\varepsilon$  ist (Abb. 137).

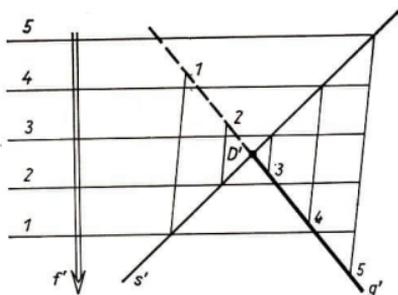


Abb. 137

Der Schichtenplan eines auf  $\pi$  normal stehenden Drehkegels stellt eine Schar konzentrischer Kreise dar. Einen Zugang hierfür liefert der Normalriß einer graduieren Erzeugenden der Kegelfläche. Die Erzeugenden sind Falllinien dieser Fläche. Die Gesamtheit ihrer Bilder ergibt ein Geradenbüschel mit dem Normalriß  $S'$  der

Kegelspitze als Träger. Die Orthogonaltrajektorien des Geradenbüschels durch die Gradierungspunkte einer Erzeugenden führen auf die Schar konzentrischer Kreise als Schichtenplan des Kegels (Abb. 138).

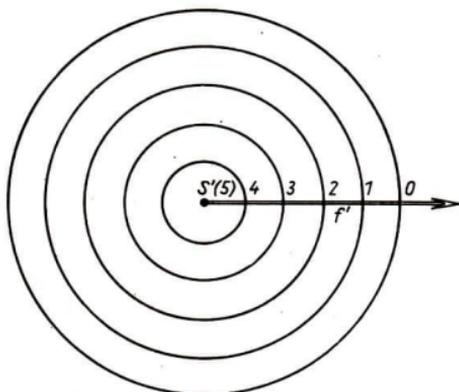


Abb. 138

Auch der Schnitt einer Geraden  $g$  mit einem Kegel ist in der kotierten Projektion leicht lösbar. Man legt hierzu eine Hilfsebene  $\gamma$  durch  $S$  und  $g$ . Die Richtung der Spur  $c$  von  $\gamma$  liefert die Verbindungsgerade von  $S$  mit dem Punkt  $P \in g$ , dessen Kote mit

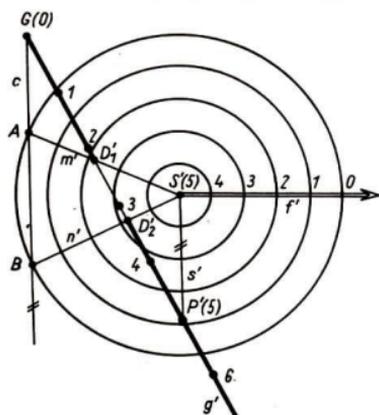


Abb. 139

der von  $S$  übereinstimmt. Die Parallele zu  $s' = s'(P'S')$  durch den Spurpunkt  $G$  von  $g$  führt auf die Spur  $c$  von  $\gamma$ . Schneidet  $c$  den Basiskreis des Kegels in den Punkten  $A$  und  $B$ , so sind die Schnittpunkte von  $g'$  mit  $m' = m'(S'A)$  und  $n' = n'(S'B)$  die Normalrisse der Durchstoßpunkte von  $g$  mit dem Kegel (Abb. 139).

Drehkegelflächen spielen als Konstruktionselement bei Böschungsproblemen eine grundlegende Rolle. Sie entstehen z. B. als Aufschüttungsgebilde bei Förderanlagen und sind auch an Abraumhalden als Teilflächen erkennbar. Eine *Böschungsfäche* ist dadurch ausgezeichnet, daß ihre Falllinien einen konstanten Neigungswinkel besitzen. Ebenen und Drehkegel sind spezielle Böschungsfächen. Die Böschungsfäche von vorgegebenem Neigungswinkel  $\sigma$  zu einer Raumkurve ist erzeugbar als Hüllgebilde von *Böschungskegeln* mit dem Neigungswinkel  $\sigma$  zu jedem Punkt der Raum-

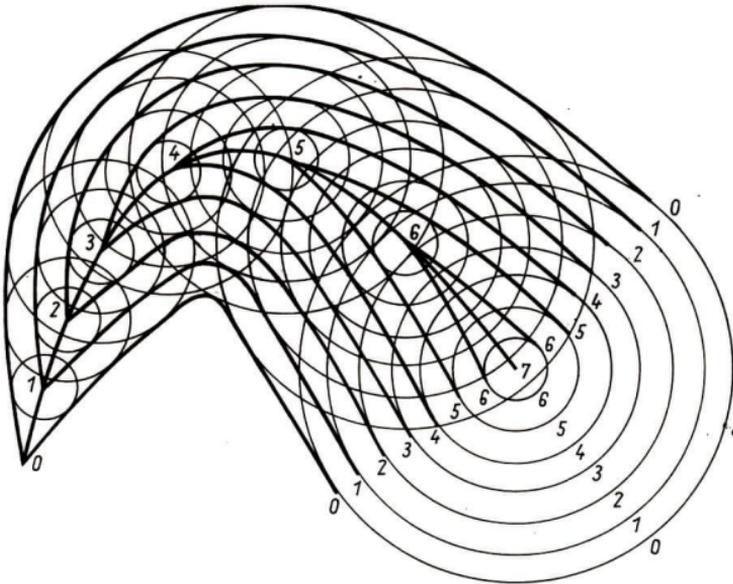


Abb. 140

kurve. Die Raumkurve selbst ist dann die *Gratlinie* dieser Böschungsfäche. Bei Dammbauten ist jede Seite des Damms in dieser Weise gegen das vorgelegte Gelände abzuböschern (Abb. 140).

Als weiteres Beispiel soll der Schichtenplan einer mit der Schnittfläche auf  $\pi$  liegenden Halbkugel gezeichnet werden. Da die Umlegung eines Meridians nach der Bildebene in den Basiskreis der Halbkugel fällt, kann man die Radien der Schichtenkreise gemäß Abb. 141 wenig aufwendig gewinnen. Die Dichte der Schichtenlinien (Größe des Intervalls  $i$ ) vermittelt in Verbindung mit dem angegebenen Maßstab eine anschauliche Vorstellung vom Anstieg der Fläche in jedem Flächenpunkt (Abb. 141).

Flächen, die sich nur durch Ausmessung diskreter Punkte erschließen lassen, werden als *topographische Flächen* bezeichnet. Zum Beispiel stellt die Karte eines Geländes der Erdoberfläche eine kотиerte Eintafelprojektion einer *topographischen*

Fläche dar. Auf solchen Flächen gibt es gewisse ausgezeichnete Punkte und Linien, die an einem Beispiel erläutert werden sollen.

Die bezüglich eines kartesischen Achsenkreuzes durch die Gleichung

$$z = 10[x(x - 1)^2 - y^2]$$

beschriebene Fläche hat für  $x = 1/3$  und  $y = 0$  ein relatives Maximum, das auch als *Gipfelpunkt* bezeichnet wird. Die Schichtenlinie der Fläche in Höhe dieses Maximums hat den Gipfelpunkt als *isolierten Punkt*. An der Stelle  $x = 1$ ,  $y = 0$  liegt ein *Sattelpunkt* der Fläche vor. Die Schichtenlinie mit der Kote  $z = 0$  (Kote des Sattelpunktes)

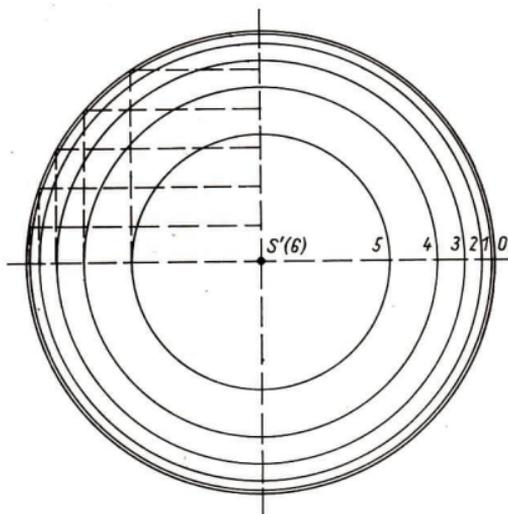


Abb. 141

hat den Sattelpunkt als *Knotenpunkt*. Die Ebene mit der Gleichung  $z = 0$  berührt die Fläche im Sattelpunkt. Es liegt eine durchsetzende Berührung von Fläche und Ebene in diesem Punkt vor. Flächenpunkte nach Art des Gipfelpunktes sind *elliptische Punkte*. Sattelpunkte gehören zu den *hyperbolischen Punkten* der Fläche. Die Ebene  $x = 2/3$  trennt die hyperbolischen von den elliptischen Flächenpunkten. Die in der Ebene  $y = 0$  liegende Flächenkurve verbindet den Gipfelpunkt mit dem Sattelpunkt. Sie ist die einzige Gratlinie der Fläche. Im Gelände stellt eine solche Linie eine *Wasserscheide* dar. Die Falllinien laufen mit abnehmender Kote von der Wasserscheide weg und konvergieren gegen *Talllinien*. Talllinien sind Falllinien, die einen Sattelpunkt mit einem *Muldenpunkt* (Gegenstück zum Gipfelpunkt) verbinden. In diesem Beispiel schneidet die Ebene  $x = 1$  aus der Fläche die Tallinie. In einem Gelände sind die Talllinien prädestiniert als Wegweiser von Flußläufen (Abb. 142).

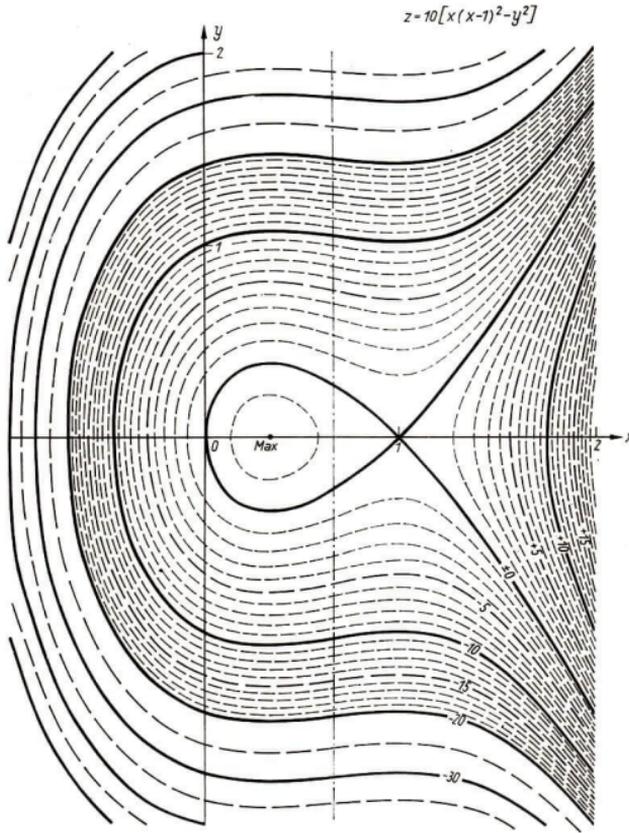


Abb. 142

## 4.2. Allgemeine oder schiefe Axonometrie

Unter dem axonometrischen Bild eines räumlichen Objektes versteht man eine Parallelprojektion desselben auf eine Bildebene  $\pi$ . Als Besonderheit hierbei wird das Objekt in Verbindung mit einem *orthonormierten räumlichen Dreibein* auf die Bildtafel projiziert. Bei sinnvoller Verknüpfung des Achsendreibeins mit dem darzustellenden Gegenstand können dem Bild – unter Einhaltung bestimmter Normierungsvor-

schriften — Maße des Gegenstandes mit graphischen oder rechnerischen Hilfsmitteln entnommen werden. Axonometrische Bilder tragen dem Verlangen nach Anschaulichkeit Rechnung und gewähren zugleich die Möglichkeit der Abnahme oder des Eintragens von Maßen in das Bild. Bei senkrechter Einfallstrichtung der Projektionsstrahlen auf die Bildebene spricht man von orthogonaler oder normaler Axonometrie. Fallen die Projektionsstrahlen weder senkrecht noch parallel zur Bildebene auf das Objekt, so spricht man von allgemeiner oder schiefer Axonometrie.

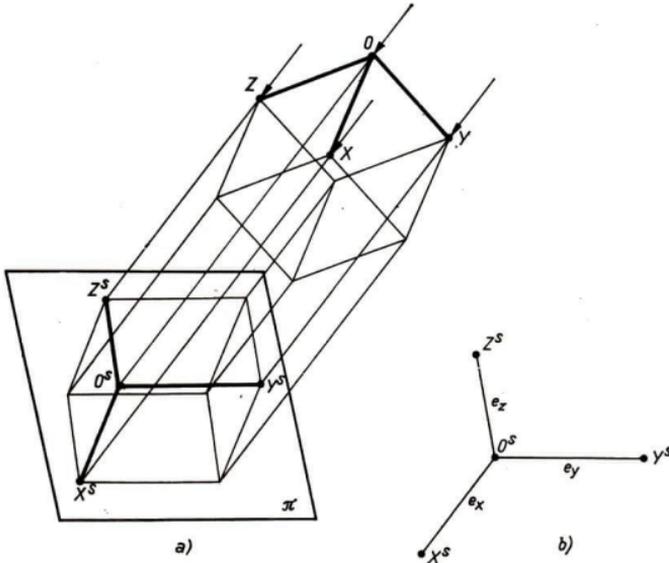


Abb. 143

Eine theoretische Grundlegung der Axonometrie liefert der Lehrsatz von POHLKE. Zur Formulierung des Satzes sind einige Verabredungen bezüglich der Bezeichnungen zu treffen. Stehen drei von einem Raumpunkt  $O$  nach den Punkten  $X, Y, Z$  gehende Verbindungsstrecken paarweise aufeinander senkrecht und sind sie außerdem gleich lang, so spricht man von einem orthonormierten Dreibein  $\{O, X, Y, Z\}$  oder kurz von einer Würfecke. Der Parallelriß einer Würfecke ist ein gewisses ebenes Dreibein  $\{O^s; X^s, Y^s, Z^s\}$ . Es besteht aus drei von dem Punkt  $O^s$  ausgehenden Strecken  $O^sX^s = e_x$ ,  $O^sY^s = e_y$  und  $O^sZ^s = e_z$ , die nicht sämtlich in einer Geraden liegen. Man nennt das durch Parallelprojektion einer Würfecke entstehende Dreibein ein *Pohlkesches Dreibein* (Abb. 143a, b).

Auf die Frage, ob im Zeichenfeld bei Vorgabe eines Pohlkeschen Dreibeins  $\{O^s; X^s, Y^s, Z^s\}$  gewisse Beschränkungen zu beachten sind, gibt der Satz von POHLKE die Antwort. Er lautet:

Jedes ebene Dreiein  $\{O^s; X^s, Y^s, Z^s\}$  kann, wenn die vier Punkte  $O^s, X^s, Y^s, Z^s$  nicht alle auf einer Geraden liegen, als Parallelriß eines orthonormierten räumlichen Dreieins  $\{O; X, Y, Z\}$  aufgefaßt werden.

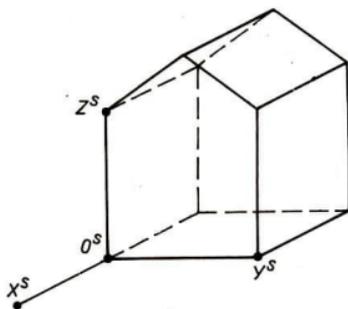


Abb. 144

Mit Kenntnis dieses Satzes lassen sich einige bereits in früheren Abschnitten verwendete Abbildungsverfahren systematisch erfassen. Beim *Schrägrißverfahren* gilt  $|e_x| = |e_z| = 1$  und  $y^s \perp z^s$ , während über den Maßstab  $e_x$  und die Richtung der

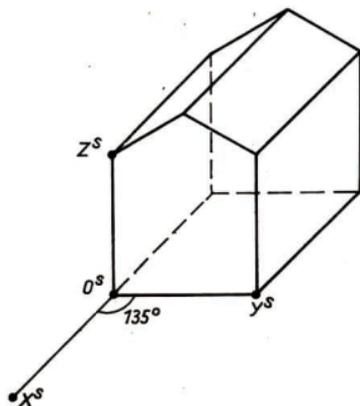


Abb. 145

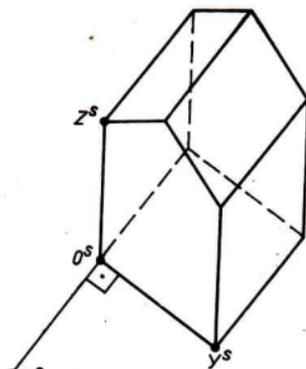


Abb. 146

$x^s$ -Achse beliebig verfügt werden kann. Es handelt sich hierbei um eine dimetrische schiefe Axonometrie, die auch unter der Bezeichnung *frontale Axonometrie* geführt wird (Abb. 144).

Die *Kavalierperspektive* ist ein Sonderfall des Schrägrißverfahrens. Für diese gilt

$$|e_x| = |e_y| = |e_z| = 1, y^s \perp z^s \text{ und } \sphericalangle |(x^s, y^s)| = 135^\circ$$

(Abb. 145).

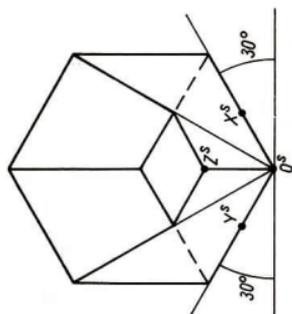
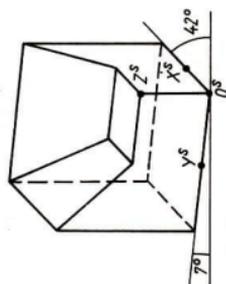
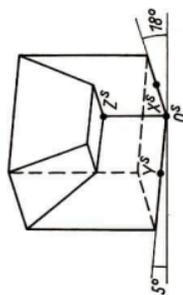
a) Isometrie  $e_x: e_y: e_z = 1:1:1$ 

Abb. 147

b) Dimetrie  $e_x: e_y: e_z = 0,5:1:1$ c) Trimetrie  $e_x: e_y: e_z = 0,5:0,5:1$

Nach den Vorschriften der *Militär-* oder *Vogelperspektive* angelegte Bilder sind durch  $|e_x| = |e_y| = |e_z| = 1$ ,  $x^s \perp y^s$  und  $z^s$  senkrecht (im physikalischen Sinne) gekennzeichnet. Diese Abbildungsart findet unter anderem zur anschaulichen Belebung kartenmäßig gegebener Gebäudegrundrisse Verwendung. Militär- und Kavalierverspektive fallen unter den gemeinsamen Oberbegriff „isometrische Axonometrie“. Die irreführende Bezeichnung der Abbildungen als Perspektive ist historisch zu verstehen und zu werten (Abb. 146).

In der Praxis bedient man sich vielfach der *isometrischen*, *dimetrischen* oder *trimetrischen* Darstellung unter Einhaltung der hier an einem Würfelausschnitt demonstrierten Normierungsvorschriften (vgl. Abb. 147a–c).

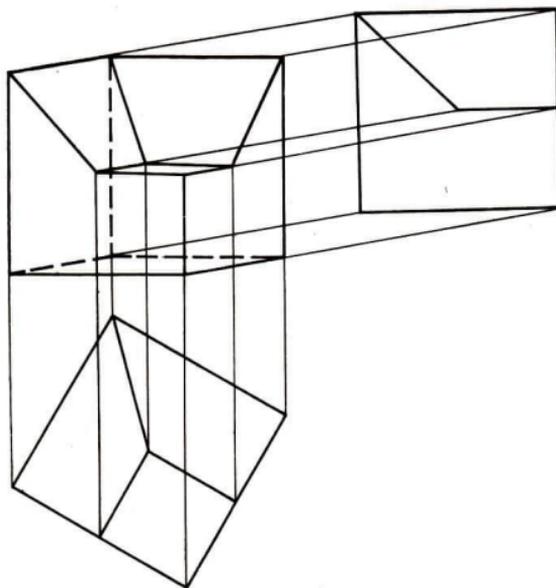


Abb. 148

Liegt von einem räumlichen Objekt eine Darstellung in zugeordneten Normalansichten vor, so kann ein axonometrisches Bild konstruktiv wenig aufwendig nach einem von L. ECKHART angegebenen *Einschneideverfahren* gewonnen werden. Man trennt die beiden Bilder und legt sie beliebig in die Zeichenebene. Zu jedem Riß gibt man eine Einschneiderichtung willkürlich vor. Die Bildpunkte des axonometrischen Bildes liegen in den Schnittpunkten zugeordneter Einschneidestrahlen (Abb. 148). Das Verfahren erfordert etwas Übung in der Anordnung der Risse und Auswahl der Einschneiderichtung, um ein nicht übermäßig verzerrtes, anschauliches axonometrisches Bild zu erhalten. Man vergleiche hierbei auch das am Ende von 2.7. beschriebene Verfahren zur Herstellung eines axonometrischen Bildes aus Grund- und Aufriß.

## 4.3. Normale Axonometrie

Normalaxonometrische Bilder entstehen, wie bereits in 4.2. gesagt, wenn die Projektionsstrahlen die Bildebene senkrecht treffen. Bei Herstellung solcher Bilder ist zu fordern, daß keine der drei Bezugsachsen parallel zur Bildebene liegt. Damit sind projizierende Lagen für die Koordinatenebenen und Achsen ausgeschlossen. Dies ist von Vorteil für die Anschaulichkeit der entstehenden Bilder. Unter dieser Voraussetzung treffen alle drei Achsen des rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystems  $\{O; x, y, z\}$  die Bildebene  $\pi$  in eigentlichen Punkten, den Spurpunkten  $A, B, C$ . Diese Spurpunkte bilden in der Bildebene das *Spurendreieck* mit den Seiten  $a, b, c$ . Wie sich aus räumlichen Überlegungen leicht folgern läßt, ist das Dreieck  $\triangle ABC$  stets

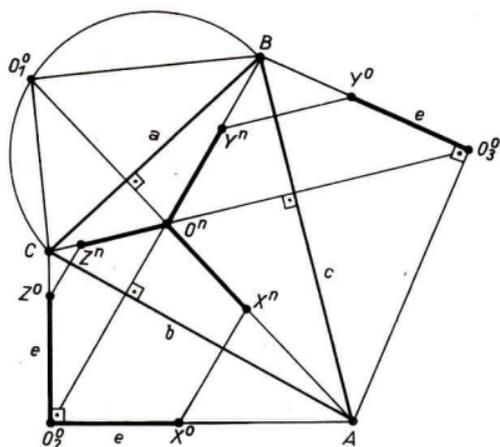


Abb. 149

spitzwinklig. Der Schnittpunkt  $H$  der drei Höhen  $h_a, h_b, h_c$  liegt daher im Inneren des Dreiecks. Er deckt sich mit dem Normalriß  $O^n$  des Koordinatenursprungs  $O$  (Abb. 149). Da nach Voraussetzung keine der drei Koordinatenachsen parallel zur Bildebene liegt, werden sämtliche auf den Achsen abgetragenen Strecken in dem normal-axonometrischen Bild verkürzt wiedergegeben. Die drei *Verkürzungsfaktoren*  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ergeben sich zu

$$\lambda_1 = \frac{|O^n A|}{|OA|}, \quad \lambda_2 = \frac{|O^n B|}{|OB|}, \quad \lambda_3 = \frac{|O^n C|}{|OC|}.$$

Konstruktiv sind die Verkürzungsfaktoren — vom Spurendreieck ausgehend — leicht zu ermitteln. Hierzu sind die drei aus je zwei Achsenabschnitten und einer Spur gebildeten rechtwinkligen Dreiecke um die entsprechende Spur in die Bildebene zu

klappen. Dabei ist zu beachten, daß sich der Höhenschnittpunkt mit dem Normalriß  $O^n$  von  $O$  deckt. In den Umlegungen trägt man, vom Scheitel des rechten Winkels ausgehend, auf den Katheten die Einheitsstrecken ab. Die so gefundenen Punkte  $X^0, Y^0, Z^0$  führt man in den Normalriß zurück und erhält die Bildpunkte  $X^n, Y^n, Z^n$ . Mit Hilfe der Bilder der auf den Achsen liegenden Einheitsstrecken läßt sich z. B. das normalaxonometrische Bild eines Einheitswürfels zeichnen, der mit einer Ecke in das Koordinatendreiein eingepaßt ist. Dabei ist auszunutzen, daß die Parallelität von Kanten bei dieser Abbildung erhalten bleibt (Abb. 150).

Eine analytische Betrachtung zeigt, daß die drei Verhältniszahlen nicht unabhängig sind. Es gilt die Beziehung

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 = 2. \quad (1)$$

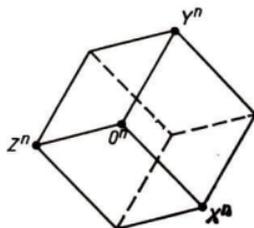


Abb. 150

Beweis. Sind  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die Größen der Richtungswinkel des Projektionsstrahles durch  $O$  gegen die Koordinatenachsen, so gilt bekanntlich

$$\sum_{i=1}^3 \cos^2 \alpha_i = 1. \quad (2)$$

Werden die Neigungswinkel der Achsen gegen die Bildebene mit  $\beta_i$  bezeichnet, dann besteht die Beziehung

$$\lambda_i = \cos \beta_i. \quad (3)$$

Wegen  $\alpha_i + \beta_i = \frac{\pi}{2}$  kann ferner

$$\cos^2 \alpha_i = 1 - \cos^2 \beta_i \quad (4)$$

gesetzt werden. Durch Einsetzen von (3) und (4) in (2) ergibt sich (1), was zu zeigen war.

Auch die Winkel, welche von den Bildern der Koordinatenachsen eingeschlossen werden, stehen in einer Beziehung zu den Verhältniszahlen  $\lambda_i$ . Dieser Zusammenhang drückt sich in einer von GAUSS aufgestellten Formel aus. Wird die Bildebene  $\pi$  mit einer komplexen Zahlenebene identifiziert, deren Ursprung in  $O^n$  liegt, und werden

den Punkten  $X^n$ ,  $Y^n$  und  $Z^n$  die komplexen Zahlen  $p$ ,  $q$  und  $r$  zugeordnet, so gilt die Gleichung

$$p^2 + q^2 + r^2 = 0$$

(Abb. 151). Die durchgeführten Betrachtungen zeigen in zweifacher Weise, daß die Verkürzungsverhältnisse auf den Achsen des Koordinatendreieins und damit das normalaxonometrische Bild eines auf das Dreiein orientierten Einheitswürfels bereits durch die Vorgabe des Spurendreiecks eindeutig bestimmt sind.

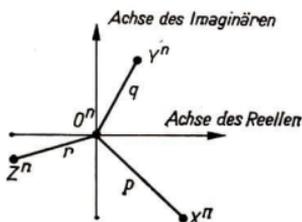


Abb. 151

#### 4.4. Zentralperspektive

Bei der Zentralperspektive stellt das Abbildungsmittel, wie bereits in 1.2. erläutert wurde, ein Strahlbündel mit dem Projektionszentrum  $Z$  als Träger des Bündels dar. Da durch die Zentralprojektion der menschliche Sehvorgang mit einem Auge, aber auch der Abbildungsvorgang einiger optischer Geräte imitiert wird, lassen sich zwei wesentliche Gründe für die Beschäftigung mit den Gesetzmäßigkeiten der Zentralperspektive anführen:

1. Das zentralperspektive Bild eines räumlichen Objektes vermittelt bei richtiger Zuordnung des Auges zum Bild eine anschauliche Vorstellung des dargestellten Gegenstandes. Daraus resultiert vielfach für die Praxis die Aufgabe, aus maßtreuen und wenig anschaulichen Bildern, z. B. zugeordneten Normalrissen eines Objektes, ein zentralperspektives Bild zu gewinnen.

2. Optische Geräte, wie beispielsweise der Fotoapparat, liefern zentralperspektive Bilder räumlicher Objekte. Hier besteht die Aufgabe, aus solchen Fotos unter Einarbeitung gewisser Vorgaben maßtreue Bilder herzustellen. Diese Aufgabe fällt unter den Begriff *Rekonstruktionsanalyse*.

Zur Lösung dieser Problemstellungen sind verschiedene konstruktive Methoden entwickelt worden, die sich der Beschaffenheit des darzustellenden Objektes und den vom Bild zu fordernden Eigenschaften anpassen.

### Durchschnittsmethode

Einen leicht überschaubaren Zugang zur Konstruktion zentralperspektiver Bilder bietet die *Durchschnittsmethode*. Bei diesem Verfahren geht man von dem in zugeordneten Normalrissen dargestellten Körper aus. Die Grundrißtafel wird als *Standebene*  $\Gamma$  interpretiert. Ferner ist die Lage des Auges  $O$  durch Grund- und Aufriß so festzulegen, daß das darzustellende räumliche Gebilde innerhalb eines Drehkegels mit angemessenem Öffnungswinkel (nicht über  $60^\circ$ ) und  $O$  als Kegelspitze liegt. Als Bildebene wird eine erstprojizierende Ebene  $\pi$  eingeschaltet, die den *Sehkegel* nach einem Kreis oder einer nur wenig gestreckten Ellipse schneidet. Der Lotfußpunkt von  $O$  auf die Bildebene  $\pi$  ist der *Hauptpunkt*  $H$ , die in  $\pi$  liegende Waagerechte durch  $H$  ist der *Bildhorizont*  $h$ , und die Länge  $|OH| = |O'H'|$  ist gleich der *Bilddistanz*  $d$ . Nach den in 1.2. gegebenen Darlegungen liegen die Fluchtpunkte aller zur Standebene parallelen Geraden auf dem Horizont. Die Schnittgerade von  $\pi$  mit der Standebene  $\Gamma$  bezeichnet man als *Standlinie*  $g$ . In ein zusätzliches Zeichenfeld wird die Bildebene  $\pi$  samt Horizont, Hauptpunkt und Standlinie maßgerecht eingetragen. Um mit horizontalen Ordnungslinien arbeiten zu können, legt man das zusätzliche Bild zweckmäßig neben den Aufriß. Nun sind von  $O$  an das im Zentralriß darzustellende Objekt gewisse ausgezeichnete Sehstrahlen zu ziehen und mit der Bildtafel  $\pi$  zu schneiden. Die mittels zugeordneter Normalrisse konstruierten Durchstoßpunkte werden in das dem Aufriß beigefügte Bild durch Ordnungslinien und Distanzübertragungen aus dem Grundriß eingezeichnet. Zur Darstellung eines ebenflächig begrenzten Körpers, dessen Basis — wie im angeführten Beispiel — in der Standebene  $\Gamma$  liegt, baut man den Zentralriß zweckmäßig von der Grundfläche her auf. Die Fluchtpunkte  $F_1$  und  $F_2$  der paarweise parallelen Gegenseiten der Basis liegen auf  $h$  im Schnitt mit den zugeordneten Fluchtstrahlen durch das Auge  $O$ . Ferner können die Schnittpunkte der Basiskanten mit der Standlinie als Konstruktionshilfen dienen. Durch Distanzübertragung sind die auf  $g$  und  $h$  ermittelten Punkte  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  bzw.  $F_1$  und  $F_2$  vom Hauptpunkt  $H$  ausgehend in das zusätzliche Bild zu bringen. Damit ist die Konstruktion des Zentralrisses der Basis auf Verbinden von Punkten und Schneiden von Geraden zurückgeführt. Nun sind noch die Höhen von First- und Trauflinien des Hausmodells dem Aufriß zu entnehmen und auf den Loten zu  $g$  durch die Punkte  $1, 2, 3, 4, 5, 6$  in  $\pi$  abzutragen. Unter Verwendung der Fluchtpunkte  $F_1$  und  $F_2$  läßt sich der Zentralriß des Hausmodells vervollständigen (Abb. 152).

Das Prinzip der reinen Durchschnittsmethode ist am Beispiel des Punktes  $P$  in Abb. 152 demonstriert. Ihre Erfindung wird dem Florentiner Architekten FILIPPO BRUNELLESCHI (1377—1446) zugeschrieben. Die hier gezeigte Mitverwendung von Fluchtpunkten als Konstruktionshilfe setzte sich im Verlauf der Renaissance bei den Malern nur langsam durch. Lediglich der Hauptpunkt findet bei ihnen als Fluchtpunkt von Tiefenlinien eine konsequente Anwendung.

Die Nachteile der hier vorgeführten Konstruktion liegen in der platzaufwendigen Anordnung und in der Notwendigkeit, Strecken in eine andere Zeichnung zu übertragen. Diese Mängel werden bei der *Architektenanordnung* behoben. Hierzu ist gemäß Abb. 153 von einer ungewöhnlichen Anordnung von Grund- und Aufriß



auszugehen. Im Zeichenfeld läßt sich dann der Zentralriß allein durch Einzeichnen von horizontalen Ordnungslinien und Bildern von Sehstrahlen unter Ausschaltung von Übertragungsfehlern bei geringem Platzaufwand konstruieren (Abb. 153).

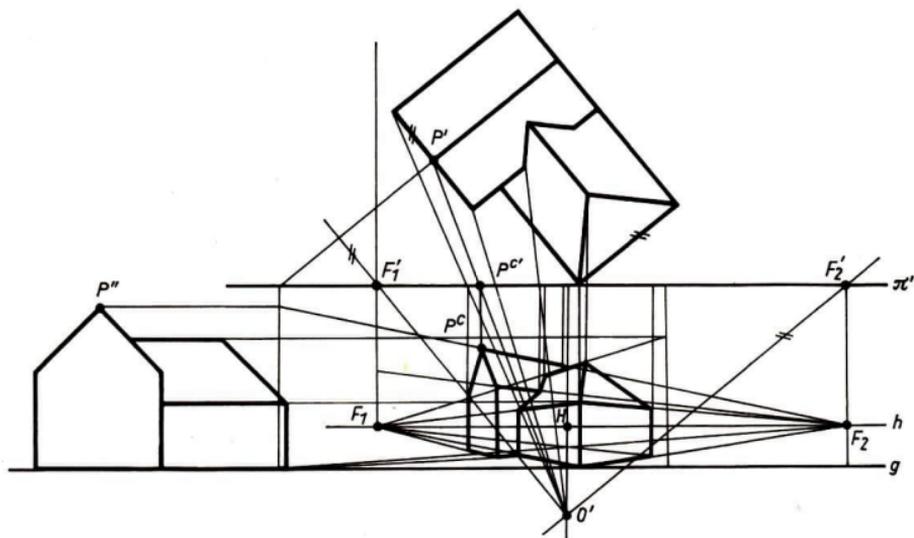


Abb. 153

### Rekonstruktion von Grundrissen

Ein fundamentales Anliegen von Rekonstruktionsaufgaben besteht darin, die wahre (oder ähnlich verkleinerte) Gestalt einer in der Basisebene  $\Gamma$  liegenden Figur aus dem Zentralriß zu gewinnen. Als Hilfsmittel dient hierbei der

*Satz. Das zentralperspektive Bild einer in der Standebene  $\Gamma$  liegenden Figur und die Umklappung dieser Figur um die Standlinie  $g$  in die Bildebene sind perspektivkollinear.*

Die Spurgerade  $g$  ist die *Kollinationsachse*, der um  $h$  nach  $\pi$  gleichsinnig mit  $\Gamma$  umgeklappte Augpunkt  $O^0$  ist das *Kollinationszentrum*, und der Horizont  $h$  ist die *Gegenachse*. Auf ihr liegen die Bilder der Fernpunkte von  $\Gamma$  (Abb. 154).

**Beweis.** Die nach obigen Satz bestehende Punktverwandtschaft zwischen den Punkten  $P^c$  (zentralperspektives Bild von  $P \in \Gamma$ ) und  $P^0$  ist aus Abb. 154 leicht ablesbar. Zunächst bleiben sämtliche Punkte von  $g$  bei der Umklappung von  $\Gamma$  nach  $\pi$  fest. Die Standlinie  $g$  ist also Fixgerade dieser Verwandtschaft. Ferner gilt nach Konstruktion  $p \parallel q$  mit  $p = p(OO^0)$  und  $q = q(PP^0)$ . Diese parallelen Geraden  $p$  und  $q$  spannen eine Hilfsebene  $\varepsilon$  auf, welche die Bildebene  $\pi$  nach einer Geraden



der Diagonalen auf. Sie liegen im Schnitt der Diagonalen mit dem Horizont. Diese Fluchtpunkte werden mit  $G_1$  und  $G_2$  bezeichnet. Aus den bereits oben angeführten Gründen ist der Thales-Kreis über der Strecke  $G_1G_2$  ein zweiter geometrischer Ort für das umgelegte Auge  $O^0$ . Im Schnittpunkt der beiden Thales-Kreise liegt daher das umgelegte Auge  $O^0$ , dem hier die Rolle des Kollineationszentrums zukommt (Abb. 155).

Von der Standlinie  $g$  (Kollineationsachse) ist lediglich zu fordern, daß sie zu  $h$  parallel liegt und sich nicht mit  $h$  deckt. Man legt sie zweckmäßig etwas unterhalb des Zentralrisses der Gebäudebasis. Nun kann unter Anwendung der Gesetzmäßigkeiten der perspektiven Kollineation die Umlegung der Gebäudebasis um  $g$  nach  $\pi$

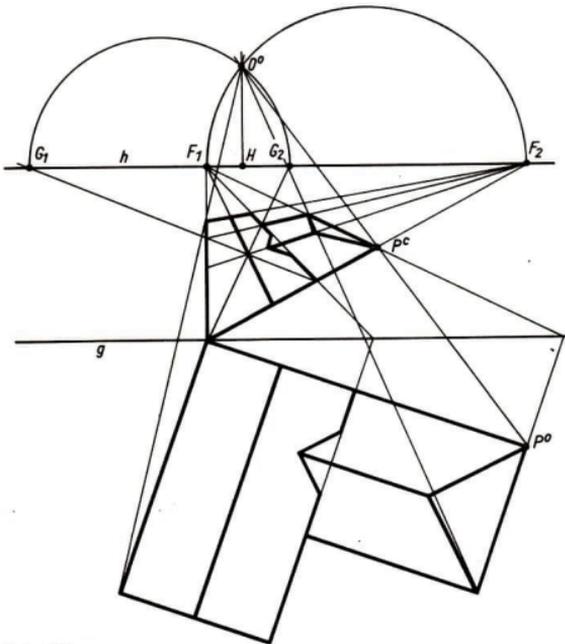


Abb. 155

erfolgen. Man erhält so eine zum Spiegelbild ähnliche Wiedergabe des Gebäudegrundrisses. Eine Parallelverschiebung von  $g$  bewirkt lediglich eine ähnliche Streckung oder Stauchung der erhaltenen Figur. Umgekehrt kann nun diese geometrische Verwandtschaft auch dazu benutzt werden, Einzelheiten aus dem Plan des Grundrisses in das zentralperspektive Bild überzuführen. Darüber hinaus kann diese Kollineation, von der Standebene ausgehend, zum Aufbau zentralperspektiver Bilder räumlicher Objekte eingesetzt werden.

#### 4.5. Stereoskopische Bildpaare. Anaglyphen

Das Konstruktionsprinzip zur Herstellung zentralperspektiver Bilder paßt sich dem einäugigen Sehvorgang an und ist für anschauliche Darstellungen geeignet. Die optische Erfassung eines räumlichen Objektes in seiner Tiefe ermöglicht jedoch erst das zweiäugige Sehen. Durch geeignete Kombination zweier ebener zentralperspektiver Bilder eines dreidimensionalen Gegenstandes läßt sich unter Einschaltung optischer Hilfsmittel (*Farbfilter* oder *Polarisationsfilter*) der subjektive Eindruck eines räumlichen Gebildes von hoher plastischer Wirkung erzielen. Bildpaare, die denselben Gegenstand von zwei benachbarten Standpunkten aus darstellen, bezeichnet man als *Stereobilder* oder *stereoskopische Bilder*. Sie können durch

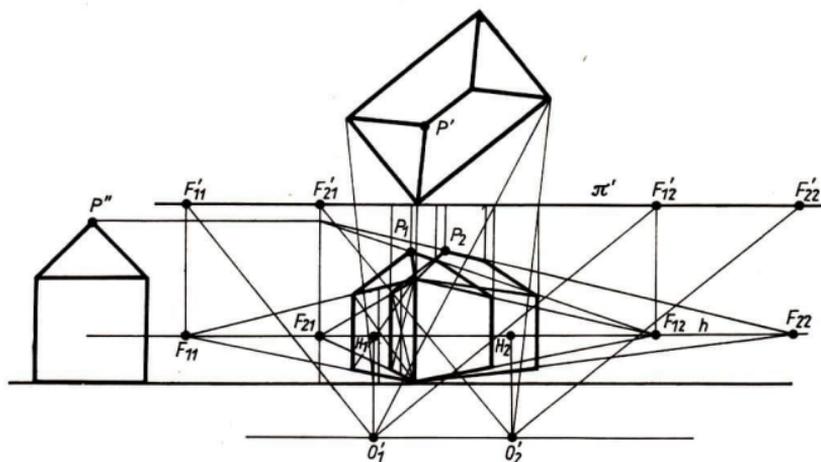


Abb. 156

Fotografie (Stereofotografie) oder durch Konstruktion (Anaglyphen) gewonnen werden. Bei der Stereofotografie bedient man sich zweier parallel gerichteter Kameras, deren Objektivabstand dem der Augen (65 mm oder etwas mehr) entspricht und deren Schärfen-, Blenden- und Verschlusseinstellungen miteinander gekoppelt sind. Die Betrachtung des Bildpaares erfolgt durch ein Stereoskop, wodurch jedem Auge nur das ihm zugeordnete Teilbild sichtbar wird. Die Trennung der Bilder bewirkt hierbei z. B. ein Polarisationsfilter. Umgekehrt ist auch die Rekonstruktion eines räumlichen Objektes aus dem vorliegenden Stereobildpaar möglich. Daraus resultiert eine vielfältige Anwendungsmöglichkeit der *Stereoskopie* im Vermessungswesen, in der Kriminalistik und bei Unfalluntersuchungen.

Auf konstruktivem Wege gewonnene Bildpaare finden in der darstellenden sowie analytischen Geometrie und in der Kristallographie Anwendung, wo räumliche Lagebeziehungen unter Verzicht auf dreidimensionale Modelle zu veranschaulichen



zentralperspektive Bilder des zu veranschaulichenden räumlichen Objektes nach der in Abb. 156 angegebenen Weise konstruiert und koloriert. Dagegen begnügt man sich bei *unechten Anaglyphen* mit der Verknüpfung zweier Parallelprojektionen, wobei die zu den beiden Bildern gehörigen Projektionsrichtungen einen kleinen Winkel miteinander einschließen. Bei geeigneter Betrachtung der Bildpaare durch eine Filterbrille ergibt sich ein mehr oder weniger plastischer Eindruck des räumlichen Objektes (Abb. 156).

In Illustrationen von Lehrbüchern finden Anaglyphen vorwiegend in der Weise Verwendung, daß die Bildebene als waagrecht liegend angenommen und mit der Grundebene identifiziert wird. Die Sehstrahlen treffen die Bildebene etwa unter dem Winkel von  $45^\circ$ . Die Augenbasis wird mit 65 mm und die Länge des Lotes von den Augen auf die Bildebene mit 200 mm angesetzt. Die Konstruktion der beiden Bilder erfolgt nach der Durchschnittsmethode. Sie läßt sich auch als eine Konstruktion zweier Schlagschatten des Körpers auf die horizontale Grundebene interpretieren. Die Augen  $O_1$  und  $O_2$  stellen die Projektionszentren dar. Für die Trennung der Bilder sorgt hier gleichfalls die komplementäre Farbgebung unter Einsatz des Filterprinzips auf die Augen des Betrachters. Um einen möglichst vollkommenen Stereoeffekt zu erzielen, ist vom Leser zu fordern, sein Augenpaar in eine durch die Konstruktion der Anaglyphenbilder bedingte Lage bezüglich der Grundebene zu bringen (Abb. 157).

In dem von IMRE PÁL verfaßten Lehrbuch „Darstellende Geometrie in Raumbildern“ finden Anaglyphen durchgängig als didaktisches Hilfsmittel Verwendung.

## Literatur

- BERETS, R.: Darstellende Geometrie, Band 1. Akademie-Verlag, Berlin 1964.
- FUCKE, R., K. KIRCH und H. NICKEL: Darstellende Geometrie. VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1962.
- HAACK, W.: Darstellende Geometrie, Band 1—3. 6. bzw. 7. Auflage, Walter de Gruyter und Co., Berlin 1971.
- HOHENBERG, F.: Konstruktive Geometrie in der Technik. 2. Auflage, Springer-Verlag, Wien 1961.
- KRAMER, W.: Darstellende Geometrie I. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959.
- MÜLLER, E., und E. KRUPPA: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 5. Auflage, Springer-Verlag, Wien 1948.
- PÁL, I.: Darstellende Geometrie in Raumbildern. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1961.
- REHBOCK, F.: Darstellende Geometrie. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1957.
- REUTER, F.: Darstellende Geometrie, Band 1—2. 2. bzw. 5. Auflage, Verlag G. Braun, Karlsruhe 1958.
- SALKOWSKI, E.: Darstellende Geometrie. 8. Auflage, Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig 1959.
- SANDEN, H. VON: Darstellende Geometrie. 6. Auflage, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1956.
- SCHEFFERS, G.: Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, Band 1—2. 2. Auflage, Verlag von Julius Springer, Berlin 1922—1927.
- SELENIN, J. W.: Vorlesungen der darstellenden Geometrie mit Aufgaben und Anwendungen. Moskau 1961 [russ.].
- STRUBECKER, K.: Vorlesungen über Darstellende Geometrie. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1958.
- WUNDERLICH, W.: Darstellende Geometrie, Band 1 und 2. Bibliographisches Institut, Mannheim 1966 bzw. 1967.

## Namenverzeichnis

- ALBERTI, LEON BATTISTA (1404—1472) 14  
ANAXAGORAS (um 500—428 v. u. Z.) 14  
ÄSCHYLUS (um 525—456 v. u. Z.) 13
- BOSSE, ABRAHAM (1602—1676) 13  
BRUNELLESCHI, FILIPPO (1377—1446) 14, 147
- DANDELIN, PIERRE (1794—1847) 122, 131  
DEMOKRIT (um 460—370 v. u. Z.) 14  
DESARGUES, GIRARD (1593—1662) 13, 68  
DÜRER, ALBRECHT (1471—1528) 12, 13, 15
- ECKHART, L. (1890—1938) 143  
EUKLID (um 300 v. u. Z.) 14  
EULER, LEONHARD (1707—1782) 51
- FRANCESCO, PIERO DELLA (um 1416—1492)  
14, 15  
FRÉZIER, AMÉDÉE FRANÇOIS (1682—1773) 13
- GAUSS, CARL FRIEDRICH (1777—1855) 145
- HACHETTE, JEAN NICOLAS PIERRE (1769—1834)  
11
- HIRE, PHILIPPE DE LA (1640—1718) 83
- LAMBEET, JOHANN HEINRICH (1728—1777) 15  
LEONARDO DA VINCI (1452—1519) 15
- MIGON, ÉTIENNE 15  
MONGE, GASPARD (1746—1818) 10—13
- NOIZET, JEAN FRANÇOIS GASPARD (1749—1837)  
13
- PAPPUS VON ALEXANDRIA (um 300 u. Z.) 131  
POHLKE, KARL WILHELM (1810—1876) 13
- RYTZ, DAVID (1801—1868) 96
- STEINER, JACOB (1796—1863) 69
- UBALDUS, GUIDO (um 1600) 15
- VASARI, GIORGIO (1511—1574) 14  
VAUBAN, SÉBASTIEN DE (1633—1707) 13  
VITRUV, POLLIO (1. Jh. v. u. Z.) 12, 13

# Sachverzeichnis

- Abbildung, affine 27
  - , axonometrische 9
  - , frontalaxonometrische 29
- Abbildungsmittel 22, 27
- Abwicklung 64
- affine Abbildung 27
  - Transformation 82
- Affinität, perspektive 27, 49, 57, 61, 82, 89
- Affinitätsachse 49, 57
- Affinitätsgerade 50
- Affinitätsrichtung 49, 57
- Affinitätsstrahl 50
- Ähnlichkeitszentrum 67
- Anaglyphe, echte 153
  - , unechte 154
- Angittern 41
- anglo-amerikanische Darstellungsart 77
- Architektenanordnung 147
- Asymptote 129
- Aufriß 12, 32
- Aufrißspur 43
- Augdistanz 15, 23
- Auge 23
- Augpunkt 23
- Ausreißung 62
- Axonometrie 29, 77
  - , isometrische 143
  - , normale 140, 144
  - , orthogonale 140
  - , schiefe 139
- axonometrische Abbildung 9
- Bilddistanz 147
- Bildebene 23, 34
- Bildhorizont 147
- Böschungsaufgabe 134
- Böschungsfäche 137
- Böschungskegel 137
- Böschungswinkel 134
- Brennpunkt der Ellipse 103
  - der Parabel 123
- Charakterisierung der perspektiven Affinität 51, 82, 92
- Dachausmittlung 135
- DANDELIN, Satz von 131
- Dandelinsche Kugeln 122
- Darstellungsart, anglo-amerikanische 77
  - , europäische 77
- Deckgerade 47, 59
- DESARGUES, Satz von 68
- Desarguessche Konfiguration 69
- Differenzendreieck 55
- Differenzenmethode 55
- Dimetrie 142, 143
- Distanz 54
- Distanzkreis 23
- Distanzpunkt 14, 23
- doppelter Zirkelschlag 57
- doppeltprojizierende Ebene 41
- Doppelverhältnis 24
- Drehkegel 79
- Drehparaboloid 123
- Drehzylinder 79
- Dreibein, orthonormiertes 28, 139
- Dualitätsprinzip 26
- Durchbohrung 62
- Durchdringung 62
- Durchschnittsmethode 147
- Ebenenbüschel 22
- ebener Zwanglauf 86
- Eckhartsches Einschnideverfahren 143
- Eigenschatten 60
- Eigenschaftengrenze 101

- Eindringung 62  
Eintafelprojektion 13  
Eintafelverfahren 31  
Ellipse 13, 69, 80, 120  
Ellipsenbewegung 89  
elliptischer Punkt 138  
erstprojizierende Ebene 37, 40  
Erzeugende 118  
europäische Darstellungsart 77
- Falllinie 85, 134  
Farbfilter 152  
Fernebene 20  
Fernelemente 20, 22  
Ferngerade 20, 80  
Fernpunkt 19  
Fixgerade 27  
Fluchtpunkt 14, 20, 23, 147  
Fluchtspur 22, 23  
Fluchtstrahl 150  
Fokaleigenschaft der Ellipse 107  
— der Parabel 123  
Frontalaxonomie 29, 141  
Frontale 37  
Frontallinie 45  
Frontlinie 45
- Gangebene 89  
Gangkreis 88  
Gärtnerkonstruktion 105  
Gaußsche Formel 146  
Gefällemaßstab 132  
Gegenriß 77  
Gegenspur 66  
Gemeinlot windschiefer Geraden 64  
Géométrie descriptive 11  
Geradenbündel 21  
Geradenbüschel 21  
Gipfelpunkt 138  
Gitterlinie 41  
gleichwendige Ebene 39  
graduierete Gerade 132  
Graduierungspunkt 132  
Gratlinie 137  
Grundriß 12, 32  
Grundrißspur 43
- Halbmesser 92  
harmonische Lage 26  
-s Punktequadrupel 26  
Hauptachse 82  
Hauptlinie (erste, zweite) 45  
Hauptpunkt 14, 23, 147  
Hauptsatz der Axonomie 13, 141  
Hauptscheitel 83
- Hauptscheitelkreis 83, 108  
Hauptscheitelkrümmungskreis 84  
Höhenkote 31  
Höhenlinie 45  
homogenisierende Koordinate 79  
Horizont 23, 147  
Horizontale 37  
Horizontallinie 45  
Hyperbel 13, 69, 80, 127  
hyperbolischer Punkt 138
- Implizite Kurvendarstellung 82  
Intervall einer Geraden 133  
Invarianz des Doppelverhältnisses 25  
Invarianzeigenschaft 27, 36  
Inzidenz 67  
Isometrie 142, 143
- Kartesisches Achsenkreuz 81  
Kavalierperspektive 141  
Kegelschnitt 13, 80  
Kernkörper 62  
kinematische Erzeugung 86  
Knotenpunkt 43, 138  
Koinzidenzebene 35  
Koinzidenzpunkt 36  
kollineares Punktetripel 41  
Kollineation, perspektive 15, 67  
Kollineationsachse 67, 68, 149  
Kollineationsstrahl 67, 68  
Kollineationszentrum 67, 68, 149  
Komplementärfarben 153  
konjugierte Durchmesser 91  
Kote 31, 132  
kotierte Projektion 13, 31, 132  
Kreuzriß 13, 41, 73, 77  
Krümmungsmittelpunkt 84  
Krümmungsradius 83  
Kugel 79
- Lagenaufgabe 46  
Leitgerade der Ellipse 103  
Leitkreis der Ellipse 107  
lineare Exzentrizität der Ellipse 106  
— — der Hyperbel 130  
Lotfußpunkt 23
- Maßaufgabe 53  
Meßpunktverfahren 15  
Methode des Paralleldrehens 55, 59  
Militärperspektive 143  
Mongesche Drehkonstruktion 55  
— Lage 34, 45  
monokulares Sehen 68  
Muldenpunkt 138

- Nebenachse 82  
 Nebenscheitel 83  
 Nebenscheitelkreis 83  
 Nebenscheitelkrümmungskreis 84  
 Neigungswinkel (erster, zweiter) 54  
 normale Axonometrie 140, 144  
 Normalprojektion 9, 30  
 Normalriß 49  
 numerische Exzentrizität der Ellipse 103  
 — — der Hyperbel 131  
 — — der Parabel 131
- Ordner 33**  
 Ordnungslinie 33  
 orthogonale Axonometrie 140  
 Orthogonaltrajektorie 134  
 orthonormiertes Dreibein 28, 139
- Papierstreifenkonstruktion 87, 96  
 Parabel 13, 69, 80, 123  
 — als Hüllgebilde 126  
 Parallelprojektion 9, 27  
 Parallelstrahlbündel 27  
 Parameter der Parabel 123  
 Pendelebenenverfahren 119  
 perspektive Affinität 27, 49, 57, 61, 82, 89  
 — Kollineation 15, 67  
 perspektiv-kollineares Bild 149  
 POHLKE, Satz von 141  
 Pohlkesches Dreibein 140  
 Polarisationsfilter 152  
 Polarkoordinatendarstellung der Ellipse 104  
 — der Hyperbel 131  
 — der Parabel 131
- Polarverwandtschaft 26  
 Profilgerade 37  
 Profillage 41  
 Projektionsebene 31  
 Projektionsstrahl (erster, zweiter) 32  
 Projektionszentrum 9, 23  
 projektive Ebene 20  
 -r Raum 20  
 projizierende Ebene 41  
 — Lage 30  
 Pultebene 44  
 Punktequadrupel 25  
 Punktetripel 39
- Rastkreis 88**  
 Rechtsdreibein 28  
 Rekonstruktionsanalyse 23, 146  
 Renaissance 10, 147  
 Restkörper 62, 86  
 Rißachse 33  
 Rollbewegung 89  
 Rytzsche Konstruktion 96
- Sattelpunkt 138  
 Satz von DANDELIN 131  
 — von DESARGUES 68  
 — von POHLKE 141  
 Scheitelkrümmungskreis 83  
 Scherung 50  
 Schichtenlinie 134  
 Schichtenplan 134  
 schiefe Axonometrie 139  
 Sehlagschatten 49, 60, 101, 119  
 schleifender Schnitt 41  
 Schrägbild 10  
 Schrägrißverfahren 10, 28, 141  
 Sehkegel 147  
 Seitenriß 41, 70  
 Spiegelung 91  
 Spur einer Ebene 31, 134  
 Spurendreieck 144  
 Spurgerade (erste, zweite) 43  
 Spurparallele (erste, zweite) 44  
 Spurpunkt (erster, zweiter) 36  
 Standebene 147  
 Standlinie 147  
 Stauchung 67  
 Stereoskopie 152  
 stereoskopisches Bildpaar 152  
 Stoß 62  
 Strahlenquadrupel 26  
 Streiflichtkegel 120  
 Streichrichtung 134  
 Symmetrieebene 35  
 Symmetriepunkt 36
- Tafelabstand (erster, zweiter) 32  
 Tallinie 138  
 Testebene 130  
 Tiefengeraden 23  
 Tiefenlinien 14  
 topographische Fläche 137  
 Transformation, affine 82  
 Trapezmethode 54  
 Trauflinie 135  
 Treffgerade 49  
 Trimetrie 142, 143
- Uneigentliche Gerade 20  
 -r Punkt 19, 120
- Verfahren mit doppeltem Zirkelschlag 57  
 Verkürzungsfaktoren 144  
 Verkürzungsverhältnis 146  
 Verschwindungsebene 19  
 Verschwindungsgerade 21  
 Vervollständigen 36, 41, 44

Verzerrungsdreieck 29

Verzerrungsverhältnis 29

Verzerrungswinkel 29

Vogelperspektive 143

Wasserscheide 138

wechselwendige Ebene 39

windschiefe Geraden 38, 46, 60, 72, 133

Zentralbeleuchtung 119

Zentralperspektive 10, 13

Zentralprojektion 9, 22

zentrische Streckung 67

zugeordnete Normalriss 12, 13, 31, 32

Zweikreis konstruktion 83, 86, 92, 96

Zweitafelverfahren 12, 35

zweitprojizierende Ebene 37, 40