Teil A: Im Schwimmbad

Was war das für ein heißer Juli in diesem Jahr! Familie Geometrie – das sind Frau Dreieck, Herr Raute und ihre Kinder Quadrato und Kreisa – verbrachten viel Zeit im Schwimmbad. Ein Wochenende am Samstag und Sonntag waren sie alle zusammen dort. Die darauffolgende Woche von Montag bis Freitag gingen nur Quadrato und Kreisa ins Schwimmbad.

Aufgabe 1) Als sie das erste Mal an der Kasse standen, lasen sie die Liste der Eintrittspreise. Nun überlegten sie, welche Karten sie kaufen sollten, um insgesamt möglichst wenig Geld bezahlen zu müssen.

Tageskarte Erwachsene	4 €
Tageskarte Kinder	2 €
Tageskarte Familie (2 Erw./2 Kinder)	11 €
3-Tages-Karte Kinder	5 €
7-Tages-Karte Kinder	12 €

Hilfst du ihnen? Welche Karten sollten sie kaufen? Begründe deine Antwort!

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 – Antwortsatz: Wenn Familie Geometrie eine Familienkarte, vier 3-Tages-Karten für Kinder und zwei Tageskarten für Erwachsene kaufen, ist der Gesamtpreis am kleinsten und beträgt insgesamt 39 €.

Hinweis: Um mögliche Kaufvarianten aufzuschreiben, verwenden wir Abkürzungen: Tageskarte Erwachsene TE, Tageskarte Kinder TK, Familienkarte TF, 3-Tages-Karte T3 und 7-Tages-Karte T7.

Begründung: Wir untersuchen Varianten, welche Karten Familie Geometrie kaufen könnten, so dass an zwei Tagen (Samstag und Sonntag) zwei Erwachsene und an 7 Tagen (von Samstag bis Freitag) zwei Kinder ins Schwimmbad gehen können. Wir tragen dazu die Kosten für den Eintritt übersichtlich in Tabellen ein und rechnen die Beträge zusammen.

Variante 1: Jeder könnte an jedem Tag eine Tageskarte kaufen.

	Sa.	So.	Mo.	Di.	Mi.	Do.	Fr.	Gesamt
Herr Raute	TE/4€	TE/4€						8€
Frau Dreieck	TE/4€	TE/4€						8€
Quadrato	TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	14€
Kreisa	TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	14€

Insgesamt kostet diese Variante (8 + 8 + 14 + 14 =) 44 €.

Variante 2: Herr Raute könnte um Kosten zu sparen, an den beiden Tagen des Wochenendes Familienkarten kaufen. An den fünf Tagen von Montag bis Freitag müssen Kreisa und Quadrato zusätzlich Eintritt bezahlen.

	Sa.	So.	Mo.	Di.	Mi.	Do.	Fr.	Gesamt
Herr Raute	TF/11€	TF11€						22€
Frau Dreieck								0€
Quadrato			TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	10€
Kreisa			TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	TK/2€	10€

Diese Variante kostet insgesamt (22 + 0 + 10 + 10 =) 42 €.

Variante 3: Es wird sicherlich günstiger, wenn zu den Familienkarten am Wochenende Quadrato und Kreisa 3-Tages-Karten kaufen.

	Sa.	So.	Mo.	Di.	Mi.	Do.	Fr.	Gesamt
Herr Raute	TF/11€	TF11€						22€
Frau Dreieck								0€
Quadrato			T3/5€			TK/2€	TK/2€	9€
Kreisa			T3/5€			TK/2€	TK/2€	9€

Diese Variante kostet insgesamt (22 + 0 + 9 + 9 =) 40 €.

Variante 4: Wir müssen prüfen, ob der Kauf von 7-Tages-Karten einen Vorteil bringt. Allerdings müssen Frau Dreieck und Herr Raute in diesem Fall am Wochenende Tageskarten für Erwachsene kaufen.

	Sa.	So.	Mo.	Di.	Mi.	Do.	Fr.	Gesamt
Herr Raute	TE/4€	TE/4€						8€
Frau Dreieck	TE/4€	TE/4€						8€
Quadrato	T7/12€							12€
Kreisa	T7/12€							12€

Diese Variante kostet insgesamt ebenfalls (8 + 8 + 12 + 12 =) 40 €.

Variante 5: Wir finden jedoch noch eine weitere Möglichkeit. Wenn Herr Raute am Samstag eine Familienkarte kauft, benötigen Quadrato und Kreisa für die 3 Tage von Sonntag bis Dienstag und für die 3 Tage von Mittwoch bis Freitag jeweils 3-Tages-Karten für Kinder. Allerdings müssen Frau Dreieck und Herr Raute am Sonntag Tageskarten kaufen.

	Sa.	So.	Mo.	Di.	Mi.	Do.	Fr.	Gesamt
Herr Raute	TE/11€	TE/4€						15€
Frau Dreieck		TE/4€						4€
Quadrato		T3/5€			T3/5€			10€
Kreisa		T3/5€			T3/5€			10€

Diese Variante kostet insgesamt nur (15 + 4 + 10 + 10 =) 39 €.

****

Aufgabe 2a) Im Schwimmbad gab es ein Sprungbecken mit einem 1-Meter-Brett, einem 3-Meter-Brett und einem 5-Meter-Sprungturm. Schon am ersten Tag sprang Quadrato vier Mal hintereinander. Dabei wagte er sich von jeder Höhe mindestens ein Mal.

Wie viele Möglichkeiten hatte Quadrato, die Reihenfolge der Sprunghöhen auszuwählen? Schreibe alle Möglichkeiten auf oder beschreibe, wie du die Anzahl ermittelt hast!

Aufgabe 2b) Bei wie vielen dieser möglichen Reihenfolgen waren Sprünge von gleicher Höhe nicht direkt hintereinander? Begründe deine Antwort!

Lösungshinweise zu Aufgabe 2a – Antwortsatz: Quadrato hatte 36 Möglichkeiten, die Reihenfolge der Sprunghöhen auszuwählen.
Begründung: Wenn Quadrato vier Sprunghöhen auswählen will, aber dabei jede der drei Sprunghöhen mindestens einmal vorkommt, tritt nur eine Sprunghöhe zweimal auf. Diese Sprunghöhe nennen wir X und finden heraus, an welchen Stellen in der Reihenfolge der vier Sprunghöhen X auftreten kann:

Variante	1. Stelle	2. Stelle	3. Stelle	4. Stelle
a	X	X	?	?
b	X	?	X	?
c	X	?	?	X
d	?	X	X	?
e	?	X	?	X
f	?	?	X	X

Die Fragezeichen müssen wir durch die beiden einzeln vorkommenden Sprunghöhen ersetzen. In jeder Variante gibt es dafür 2 Möglichkeiten: die kleinere vor der größeren oder die größere vor der kleineren.

Also gibt es in der Tabelle (6 · 2 =) 12 Möglichkeiten.

Nun können wir aber für X die Sprunghöhen 1 m, 3 m und 5 m einsetzen. Deshalb gibt es insgesamt (3 · 12 =) 36 Möglichkeiten.

Lösungsvariante: Wir schreiben alle möglichen Reihenfolgen auf und verwenden für die Sprunghöhen nur die Meterangaben 1, 3 und 5. Damit bilden wir alle vierstelligen Zahlen, in denen die Ziffern 1, 3 und 5 vorkommen.

1135 1153 1315 1335 1351 1353 1355 1513 1531 1533 1535 1553
3113 3115 3135 3151 3153 3155 3315 3351 3511 3515 3513 3551
5113 5131 5133 5135 5153 5311 5313 5315 5331 5351 5513 5531

Wir können aber auch die Tabelle von oben nutzen und für X jeweils 1, 3 oder 5 einsetzen.

	Zeile a	Zeile b	Zeile c	Zeile d	Zeile e	Zeile f
X = 1	1135 1153	1315 1513	1351 1531	3115 5113	3151 5131	3511 5311
X = 3	3315 3351	3135 3531	3153 3513	1335 5331	1353 5313	1533 5133
X = 5	5513 5531	5153 5351	5135 5315	1553 3551	1535 3515	1355 3155

Wir finden jeweils 36 Möglichkeiten, die Reihenfolgen der Sprunghöhen anzuordnen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2b – Antwortsatz: Bei 18 Reihenfolgen waren Sprünge von gleicher Höhe nicht direkt hintereinander.

Begründung: Wir streichen in der Liste aller Möglichkeiten diejenigen Varianten, in denen gleiche Sprunghöhen nebeneinander stehen.

~~1135~~ ~~1153~~ 1315 ~~1335~~ 1351 1353 ~~1355~~ 1513 1531 ~~1533~~ 1535 ~~1553~~
~~3113~~ ~~3115~~ 3135 3151 3153 ~~3155~~ ~~3315~~ ~~3351~~ ~~3511~~ 3515 3513 ~~3551~~
~~5113~~ 5131 ~~5133~~ 5135 5153 ~~5311~~ 5313 5315 ~~5331~~ 5351 5513 ~~5531~~

oder mit Hilfe der Tabelle

	Zeile a	Zeile b	Zeile c	Zeile d	Zeile e	Zeile f
X = 1	~~1135~~ ~~1153~~	1315 1513	1351 1531	~~3115~~ ~~5113~~	3151 5131	~~3511~~ ~~5311~~
X = 3	~~3315~~ ~~3351~~	3135 3531	3153 3513	~~1335~~ ~~5331~~	1353 5313	~~1533~~ ~~5133~~
X = 5	~~5513~~ ~~5531~~	5153 5351	5135 5315	~~1553~~ ~~3551~~	1535 3515	~~1355~~ ~~3155~~

Es bleiben jeweils 18 Möglichkeiten übrig.

****

Aufgabe 3) Am Sonntag fanden Schwimmwettkämpfe statt. Quadrato startete mit drei anderen Jungen seiner Altersklasse. Nach Zieleinlauf konnten die Platzierungen eindeutig ermittelt werden, jeder der vier Starter schlug mit einer anderen Zeit am Ziel an.

Frau Dreieck, Herr Raute und Kreisa beobachteten den Wettkampf vom Beckenrand aus. Sie konnten aber den Zieleinlauf nicht genau erkennen.

Frau Dreieck: „Ich denke, Quadrato hat leider nicht gewonnen."
Kreisa: „Ich glaube, Quadrato wurde Zweiter."
Herr Raute: „Ich vermute, Quadrato wurde Dritter."

Als Quadrato zu íhnen kam, stellte sich heraus, dass von diesen Aussagen nur eine richtig und zwei falsch waren. Weißt du nun, welchen Platz Quadrato erreicht hat? Gib seine Platzierung an und beschreibe, wie du es herausgefunden hast.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 – Antwortsatz: Quadrato erreichte den 4. Platz.

Begründung: Wir prüfen, bei welcher Platzierung von Quadrato nur eine der drei Aussagen wahr ist.

Platzierung von Quadrato	Aussage von Frau Dreieck	Aussage von Kreisa	Aussage von Herrn Raute
1.	falsch	falsch	falsch
2.	wahr	wahr	falsch
3.	wahr	falsch	wahr
4.	**wahr**	**falsch**	**falsch**

Nur wenn Quadrato den 4. Platz erreichte, sind die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Lösungsvariante: Wir untersuchen die anderen beiden Aussagen, wenn wir von einer Aussage annehmen, dass sie wahr sei.

Angenommen, die Aussage von Frau Dreieck ist wahr. Dann wurde Quadrato Zweiter, Dritter oder Vierter. Da aber die Aussage von Kreisa falsch sein muss, wurde Quadrato nicht Zweiter. Da aber auch die Aussage von Herrn Raute falsch sein muss, wurde Quadrato nicht Dritter. Also wurde Quadrato Vierter.

Angenommen, die Aussage von Kreisa ist wahr. Dann wurde Quadrato Zweiter – aber damit ist auch die Aussage von Frau Dreieck wahr.

Angenommen, die Aussage von Herrn Raute ist wahr. Dann wurde Quadrato Dritter – aber damit ist auch die Aussage von Frau Dreieck wahr.

Somit ist bei diesen Bedingungen nur die Variante möglich, dass die Aussage von Frau Dreieck wahr ist und Qu#adrato Vierter wurde.

****

Aufgabe 4) Kreisa und Quadrato spielten jeden Tag von Montag bis Freitag Federball. Sie zählten die Anzahl der Schläge, die sie hintereinander schafften, ohne dass der Ball auf den Boden fiel. Wenn beispielsweise Quadrato begann, Kreisa zurückschlug, Quadrato ebenfalls zurückschlug und Kreisa nun jedoch den Federball verpasste, so dass er auf den Boden fiel, waren es genau 3 Schläge, die sie hintereinander schafften.

Am Montag gelangen ihnen mehr Schläge als in diesem Beispiel. Am Dienstag waren es 7 Schläge mehr als am Montag. Am Mittwoch zählten sie 9 Schläge mehr als am Dienstag. Am Donnerstag war es so windig, dass ihnen nur 8 Schläge gelangen. Dafür erreichten sie am Freitag doppelt so viele Schläge wie am Dienstag.

Quadrato hatte die Tagesergebnisse aufgeschrieben und stellte fest, dass die Summe der Tagesergebnisse 80 ergab. Wie viele Schläge schafften Quadrato und Kreisa am Montag? Erkläre, wie du dein Ergebnis gefunden hast und prüfe es mit einer Probe!

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: Kreisa und Quadrato schafften am Montag 7 Schläge.

Begründung: So eine Aufgabenstellung können wir durch systematisches Probieren lösen. Wir schreiben in einer Tabelle auf, was wir über die Schläge jeden Tages und über die Gesamtzahl der Schläge einer Woche wissen, wenn wir für Montag eine Anzahl festlegen.

Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Summe	Vergleich
4	4 + 7 = 11	11 + 9 = 20	8	11 · 2 = 22	65	65 < 80
5	5 + 7 = 12	12 + 9 = 21	8	12 · 2 = 24	70	70 < 80
6	6 + 7 = 13	13 + 9 = 22	8	13 · 2 = 26	75	75 < 80
7	**7 + 7 = 14**	**14 + 9 = 23**	**8**	**14 · 2 = 28**	**80**	**80 = 80**
8	8 + 7 = 15	15 + 9 = 24	8	15 · 2 = 30	85	85 > 80

Nur wenn sie am Montag 7 Schläge schafften, beträgt die Gesamtzahl der Wochen 80 Schläge. In der Tabelle ist die Probe angegeben.

Lösungsvariante: Wir können die Aufgabe auch mit Hilfe einer Gleichung lösen. Wir nehmen an, die Anzahl der Schläge betrug am Montag S. Dann wissen wir über die Anzahl der anderen Tage

- am Montag Mo = S Schläge
- am Dienstag Di = (Mo + 7) Schläge,
- am Mittwoch Mi = (Di + 9) Schläge,
- am Donnerstag Do = 8 Schläge und
- am Freitag Fr = 2 · Di Schläge

waren. Insgesamt waren es in der Woche also

Mo + Di + Mi + Do + Fr =
$S + (S + 7) + ((S + 7) + 9) + 8 + 2 \cdot (S + 7) = 5 \cdot S + 45 = 80.$

Da die Gesamtzahl in der Woche 80 Schläge war, finden wir aus $5 \cdot S + 45 = 80$ wegen $5 \cdot S = 80 – 45 = 35$ die Lösung $S = 7$. Um zu prüfen, dass uns kein Rechenfehler unterlaufen ist, führen wir die Probe durch:

Anzahl Schläge am Dienstag	7 + 7 = 14,
Anzahl Schläge am Mittwoch	14 + 9 = 23,
Anzahl Schläge am Donnerstag	8,
Anzahl Schläge am Freitag	2 · 14 = 28,
Gesamtzahl	7 + 14 + 23 + 8 + 28 = 80.

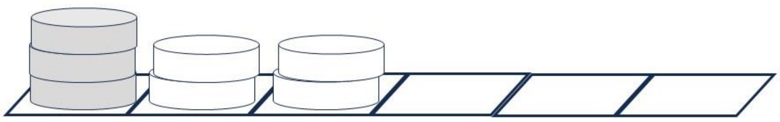
Die Angaben aus der Aufgabenstellung sind alle erfüllt.

****

Teil B: Türme-Wanderung

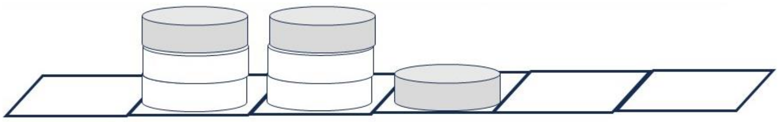
Herr Raute hat in einem alten Mathematik-Buch eine Anleitung für ein Spiel gefunden, das Quadrato spielt: Er nimmt einen langen Streifen mit gleichgroßen Feldern, auf denen stapelbare Spiel-Steine passen. Quadrato verwendet Steine aus einem Dame-Spiel. Aber er könnte auch Domino-Steine, Lego-Bausteine oder anderes verwenden. Von links beginnend darf er auf nebeneinander liegenden Feldern seine Steine zu Türmen stapeln. In der Abbildung sehen wir einen 3-er und zwei 2-er Türme (kurz 3-2-2). Das ist nur eine von vielen möglichen Startaufstellungen. Wichtig: In einer Startaufstellung sind benachbarte Felder besetzt, es gibt keine Lücken zwischen den Türmen.

Startaufstellung 3-2-2



Für seinen ersten Spiel-Zug nimmt Quadrato den linken Turm vollständig auf und verteilt dessen Spiel-Steine nach rechts, aber jeweils pro Feld nur einen Spiel-Stein, bis alle verteilt sind. Die Türme sind gewandert – wir sehen nun zwei 3-er Türme und einen 1-er Turm (3-3-1).

Nach 1. Zug: 3-3-1



Dies kann er nun immer weiter fortsetzen, indem er nach jedem Zug den am weitesten links stehenden Turm aufnimmt und dessen Spiel-Steine nach rechts aufteilt.

Um den Spielverlauf aufschreiben zu können, nimmt Quadrato kariertes Papier und markiert viele Streifen untereinander. Nun schreibt er für die Startaufstellung die Anzahl der Spiel-Steine seiner Türme in die linken Felder. In die nächste Zeile schreibt er die Türme nach seinem 1. Zug auf. Er kann nun den weiteren Spielverlauf Zug um Zug aufschreiben. In der Tabelle sind die ersten drei Züge angegeben:

Start	3	2	2										
1. Zug		3	3	1									
2. Zug			4	2	1								
3. Zug				3	2	1	1						

Aufgabe 1a) Quadrato beginnt ein Spiel mit der Startaufstellung 1-3-1-2. Nach dem 4. Zug sieht er die Verteilung 3-2-1-1. Schreibe den Spielverlauf vollständig auf und prüfe, ob Quadrato seine Spielzüge korrekt ausgeführt hat.
Aufgabe 1b) Quadrato beginnt nun mit der Startaufstellung 1-2-3-4. Schreibe den Spielverlauf bis zum 6. Zug auf.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1a: Wenn Du den Spielverlauf vollständig aufschreibst, erkennst du, dass Quadrato seine Spielzüge korrekt ausgeführt hat.

Start	1	3	1	2						
1. Zug		4	1	2						
2. Zug			2	3	1	1				
3. Zug				4	2	1				
4. Zug					3	2	1	1		

Lösungshinweise zu Aufgabe 1b. Quadrato beginnt mit der Startaufstellung 1-2-3-4 und erreicht nach dem 6. Zug 4-3-2-1.

Start	1	2	3	4								
1. Zug		3	3	4								
2. Zug			4	5	1							
3. Zug				6	2	1	1					
4. Zug					3	2	2	1	1	1		
5. Zug						3	3	2	1	1		
6. Zug							4	3	2	1		

****

Aufgabe 2) Bei einem neuen Spiel erhält er nach dem 3. Zug die Aufstellung 2-2-2. Wie könnte seine Startaufstellung ausgesehen haben? Begründe! Untersuche, ob die Aufgabe eindeutig lösbar ist. Wenn es mehrere Möglichkeiten geben kann, schreibe zwei verschiedene Startaufstellungen auf, die jeweils nach dem 3. Zug die Aufteilung 2-2-2 erzeugen.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2. Du musst versuchen, die Züge rückwärts zu erkennen. Eine Möglichkeit besteht darin, dass die oberen Steine aller Türme im vorangegangenen Zug aufgelegt wurden.

Weil nach Zug 3 drei Türme stehen, war im Zug davor der linke Turm 3 Steine hoch.
Weil nach Zug 2 vier Türme stehen, war im Zug davor der linke Turm 4 Steine hoch.
Weil nach Zug 1 zwei Türme stehen, war am Start der linke Turm 2 Steine hoch.

Zur Probe beginnen wir mit der Startaufstellung 2-3-1 und überzeugen uns, dass nach dem 3. Zug 2-2-2 stehen bleibt.

3. Zug					2	2	2					
2. Zug				3	1	1	1					
1. Zug			4	2								
Start		2	3	1								

Die Startaufstellung kann aber auch 1-3-2 gewesen sein. Also finden wir zwei verschiedene Startaufstellungen, die nach dem 3. Zug auf 2-2-2 führen.

3. Zug					2	2	2					
2. Zug				3	1	1	1					
1. Zug			4	2								
Start		1	3	2								

****

Aufgabe 3a) Quadrato behauptet, eine Startaufstellung mit 3 Spiel-Steinen gefunden zu haben, bei der nach dem 5. Zug nur ein einzelner Turm mit 3 Spiel-Steinen zu sehen ist. Kreisa widerspricht: „Das kann gar nicht sein!“. Hat Kreisa recht? Begründe deine Antwort.
Aufgabe 3b) Quadrato beginnt mit der Startaufstellung 3-1-3. Nach einigen Zügen sind die Spielsteine wie 2-1-2-1 verteilt. Wieder stellt Kreisa fest: „Da muss dir ein Fehler passiert sein!“. Was ist Kreisa aufgefallen? Wie konnte Kreisa feststellen, dass bei dieser Startaufstellung die Aufteilung 2-1-2-1 nicht möglich ist? Erkläre es.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3a – Antwortsatz: Eine solche Startaufstellung gibt es nicht. Kreisa hat also recht.

Begründung: Es gibt nur 4 Möglichkeiten, 3 Steine in der Startaufstellung zu setzen, ohne dass Lücken entstehen. Du kannst alle Möglichkeiten ausprobieren – immer steht nach dem 5. Zug 2-1.

	Möglichkeit 1							Möglichkeit 2							Möglichkeit 3							Möglichkeit 4						
Start	3							2	1						1	2						1	1	1				
1. Zug		1	1	1					2	1						3							2	1				
2. Zug			2	1						2	1						1	1	1					2	1			
3. Zug				2	1						2	1						2	1						2	1		
4. Zug					2	1						2	1						2	1						2	1	
5. Zug						2	1						2	1						2	1						2	1

Hinweis: Kreisa hat nur recht, wenn die Bedingung der Aufgabenstellung *„Wichtig: In einer Startaufstellung sind benachbarte Felder besetzt, es gibt keine Lücken zwischen den Türmen.“* Eingehalten wird. Lassen wir Lücken zu, ist ein einzelner Turm nach dem 5. Zug möglich.

Start	1			1		1			
1. Zug		1		1		1			
2. Zug			1	1		1			
3. Zug				2		1			
4. Zug					1	2			
5. Zug						3			

Lösungshinweise zu Aufgabe 3b – Antwortsatz: Kreisa probierte es aus und stellte fest, dass die Aufstellung 2-1-2-1 nicht auftritt.

Begründung: Beim Spiel stellt Kreisa fest, dass die Aufstellung nach dem 5. Zug sich nach dem 8. Zug wiederholt. Dann kennt sie auch die späteren Aufstellungen, weil diese sich auch wiederholen.

Start	3	1	3										
1. Zug		2	4	1									
2. Zug			5	2									
3. Zug				3	1	1	1	1					
4. Zug					2	2	2	1					
5. Zug						**3**	**3**	**1**					
6, Zug							4	2	1				
7. Zug								3	2	1	1		
8. Zug									3	2	2		
9. Zug										**3**	**3**	**1**	
10. Zug											4	2	1

Lösungsvariante: Kreisa zählt die Spielsteine. In der Startaufstellung sind es (3 + 1 + 3 =) 7 Spielsteine. Bei 2-1-2-1 sind es aber nur (2 + 1 + 2 + 1 =) 6 Steine. Da aber bei jedem Zug die Anzahl der Steine unverändert bleibt, kann die Aufstellung 2-1-2-1 nicht auftreten.

****

Aufgabe 4) Kann es Startaufstellungen mit einigen Türmen und insgesamt 10 Spiel-Steinen geben, die nach rechts wandern, dabei aber die Aufteilung der Spiel-Steine nicht verändern? Falls es solche Startaufstellungen gibt, schreibe eine auf und zeige den Spielverlauf für die ersten Züge.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 – Antwortsatz: In der Startaufstellung mit vier Türmen und insgesamt 10 Spiel-Steinen ändert sich die Aufteilung der Spiel-Steine nicht.

Begründung: Wir spielen das Spiel mit der Startaufstellung 4-3-2-1 und stellen im Spielverlauf als unsere Probe fest, dass tatsächlich nach jedem Zug wieder die Aufstellung 4-3-2-1 erscheint.

Start	4	3	2	1						
1. Zug		4	3	2	1					
2. Zug			4	3	2	1				

Für die Aufgabenstellung genügt es, eine Lösung ohne Begründung (aber mit aufgeschriebenen Spielverlauf) anzugeben. Wir finden diese Lösung durch geduldiges Probieren – es gibt schließlich sehr viele Möglichkeiten, 10 Spielsteine in einer Startaufstellung mit vier Türmen aufzuteilen. Allerdings fällt uns auf:

Da der Turm ganz links auf Platz (1) beim ersten Zug vollkommen aufgeteilt wird, muss ganz rechts auf Platz (5) ein neuer Turm entstehen, damit die Anzahl der Türme erhalten bleibt. Dieser neue Turm kann wegen der Spielregeln nur aus einem Spielstein bestehen.

Platz	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Start	?	?	?	?		
1. Zug		?	?	?	1	

Also muss in der Startaufstellung der ganz rechts auf Platz (4) stehende Turm auch nur aus einem Stein bestehen, damit sich die Aufstellung wiederholt

Platz	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Start	?	?	?	1		
1. Zug		?	?	?	1	

Da die Aufteilung des linken Turmes auf Platz (1) der Startaufteilung bis zum Platz (5) reicht, wird beim 1. Zug auch ein Stein auf Platz (4) abgelegt. Da sich in der Startaufstellung dort ein Stein befand, sind es nach dem 1. Zug 2 Steine.

Platz	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Start	?	?	?	1		
1. Zug		?	?	2	1	

Also muss in der Startaufstellung der auf Platz (3) stehende Turm auch nur aus zwei Spielsteinen bestehen, damit sich die Aufstellung wiederholt

Platz	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Start	?	?	2	1		
1. Zug		?	?	2	1	

Diese Überlegung können wir fortsetzen: Da die Aufteilung des linken Turmes auf Platz (1) der Startaufteilung bis zum Platz (5) reicht, wird beim 1. Zug auch ein Stein auf Platz (3) abgelegt. Da sich in dort zwei Spielsteine befanden, sind es nach dem 1. Zug 3 Steine.

Platz	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Start	?	?	2	1		
1. Zug		?	3	2	1	

Also muss in der Startaufstellung der auf Platz (2) stehende Turm auch nur aus drei Spielsteinen bestehen, damit sich die Aufstellung wiederholt

Platz	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Start	?	3	2	1		
1. Zug		?	3	2	1	

Da wir bereits (3 + 2 + 1 =) 6 Spielsteine in der Startaufstellung vergeben haben, müssen in der Startaufstellung auf Platz (1) (10 – 6 =) 4 Spielsteine liegen. Ein Spiel mit der Startaufstellung 4-3-2-1 bestätigt uns, dass sich die Aufteilung der Spielsteine bei der Türme-Wanderung erhalten bleibt.